Aufgabe 36

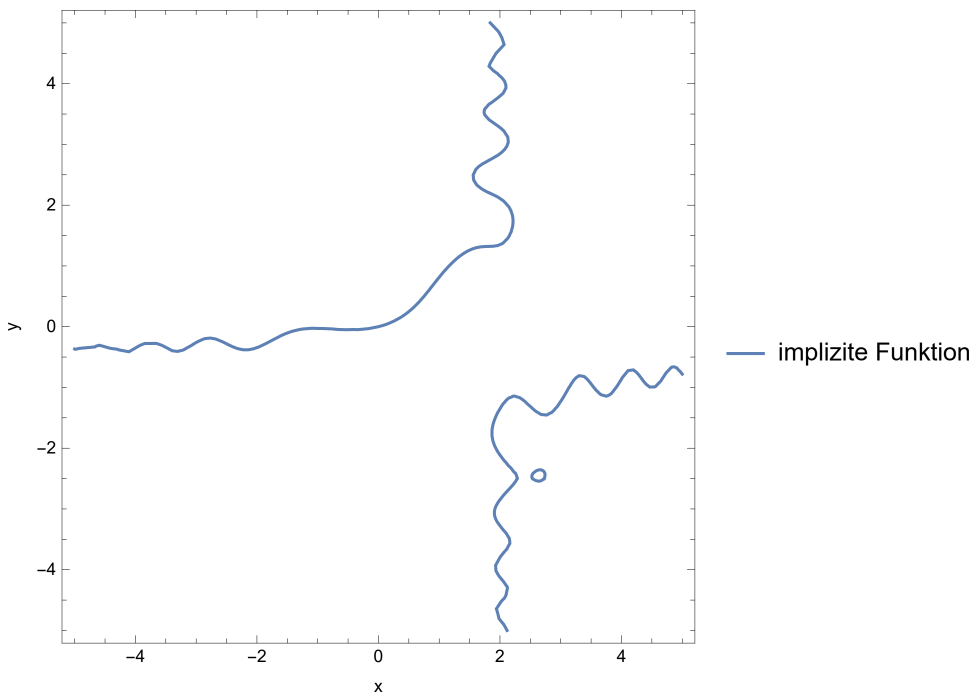
Martin und Krüger

Aufgabe 36 b)

Plot des Graphen der impliziten Funktion:

In[22]:=
```
Show[ContourPlot[Sin[x^2] + 2 x * y + Cos[y^2] + x - 4 y == 1, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, FrameLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → {"implizite Funktion"}]]
```
zeig·· Konturgraphik Sinus Kosinus Rahmenbeschriftung Legenden der Graphik

Out[22]=



Aufgabe 36 c)

Berechnung einer beliebigen Ableitung der impliziten Funktion nach y:

In[7]:=
```
derivativesx[depth0_] := Module[{depth = depth0},
                         Modul
  g[c_] := Solve[
           löse
    D[Sin[x[y] * x[y]] + 2 x[y] * y + Cos[y^2] + x[y] - 4 y, {y, c}] == 0, D[x[y], {y, c}]];
    ··Sinus                               Kosinus                             leite ab
  deriv = List[];
          Liste

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
For-Schleife
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
   hänge an bei
  ];
deriv = deriv /. {y → 0, x[y] → 0}
 ]
```

Teste die oben definierte Funktion:

In[8]:= `derivativesx[10]`

Out[8]= $\{x'[0] \to 4,\ x''[0] \to -48,\ x^{(3)}[0] \to 1440,\ x^{(4)}[0] \to -71412,\ x^{(5)}[0] \to 4953000,\ x^{(6)}[0] \to -440993760,\ x^{(7)}[0] \to 47929277760,\ x^{(8)}[0] \to -6150757843440,\ x^{(9)}[0] \to 910179034783200,\ x^{(10)}[0] \to -152574372146125440\}$

Taylorentwicklung nach x[y]:

In[9]:=
```
taylorx[grade_] := Module[{depth = grade},
                   Modul
  g[c_] := Solve[D[Sin[x[y] * x[y]] + 2 x[y] * y + Cos[y^2] + x[y] - 4 y - 1, {y, c}] == 0,
           löse  ·· Sinus                         Kosinus
    D[x[y], {y, c}]];
    leite ab
  deriv = List[];
          Liste

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
For-Schleife
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
   hänge an bei
  ];
deriv = Values[deriv /. {y → 0, x[y] → 0}];
        Werte
Sum[((Extract[deriv, n]) / (n!)) * y^n, {n, 1, depth}]
summ·· extrahiere
 ]
```

Teste Taylorentwicklung vom Grad 10:

In[10]:=
```
taylorx[10]
```

Out[10]=
$$4\,y-24\,y^2+240\,y^3-\frac{5951\,y^4}{2}+41\,275\,y^5-\frac{1\,837\,474\,y^6}{3}+\frac{28\,529\,332\,y^7}{3}-\frac{1\,220\,388\,461\,y^8}{8}+\frac{10\,032\,837\,685\,y^9}{4}-\frac{420\,454\,067\,863\,y^{10}}{10}$$

Wie man sieht, ist die Taylorentwicklung eine alternierende Reihe. Nach dem Leibniz-Kriterium müssten die Partialsummen notwendigerweise eine Nullfolge bilden. Da y beliebige Werte annehmen kann und die Vorfaktoren jeweils wesentlich größer werden, ist keine Nullfolge vorhanden. Damit konvergiert die Taylorentwicklung nach dem Leibniz-Kriterium nicht. D.h. die Taylorentwicklung divergiert.

Aufgabe 36 d)

Berechnung einer beliebigen Ableitung der impliziten Funktion nach x:

In[11]:=
```
derivativesy[depth0_] := Module[{depth = depth0},
  g[c_] := Solve[
    D[Sin[x * x] + 2 x * y[x] + Cos[y[x] * y[x]] + x - 4 y[x], {x, c}] == 0, D[y[x], {x, c}]];
  deriv = List[];

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
  ];
deriv = deriv /. {x → 0, y[x] → 0}
 ]
```

Teste die oben definierte Funktion:

In[12]:=
```
derivativesy[10]
```

Out[12]=
$$\left\{y'[0]\to\frac{1}{4},\ y''[0]\to\frac{3}{4},\ y^{(3)}[0]\to\frac{9}{8},\ y^{(4)}[0]\to\frac{573}{256},\ y^{(5)}[0]\to\frac{2685}{512},\ y^{(6)}[0]\to-\frac{10\,275}{512},\ y^{(7)}[0]\to-\frac{2\,299\,605}{16\,384},\ y^{(8)}[0]\to-\frac{20\,843\,235}{16\,384},\ y^{(9)}[0]\to-\frac{398\,792\,835}{32\,768},\ y^{(10)}[0]\to-\frac{109\,839\,426\,165}{1\,048\,576}\right\}$$

Taylorentwicklung nach x[y]:

In[13]:=
```
taylory[grade_] := Module[{depth = grade},
                   Modul
  g[c_] := Solve[
           löse
    D[Sin[x * x] + 2 x * y[x] + Cos[y[x] * y[x]] + x - 4 y[x], {x, c}] == 0, D[y[x], {x, c}]];
    ·· Sinus                         Kosinus                                   leite ab
  deriv = List[];
          Liste

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
For-Schleife
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
   hänge an bei
  ];
deriv = Values[deriv /. {x → 0, y[x] → 0}];
        Werte
Sum[((Extract[deriv, n]) / (n!)) * x^n, {n, 1, depth}]
summ·· extrahiere
 ]
```

Teste Taylorentwicklung vom Grad 10:

In[14]:= `taylory[10]`

Out[14]= $\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{8}+\frac{3x^3}{16}+\frac{191x^4}{2048}+\frac{179x^5}{4096}-\frac{685x^6}{24576}-\frac{21901x^7}{786432}-\frac{66169x^8}{2097152}-\frac{422003x^9}{12582912}-\frac{116232197x^{10}}{4026531840}$

Aufgabe 36 e)

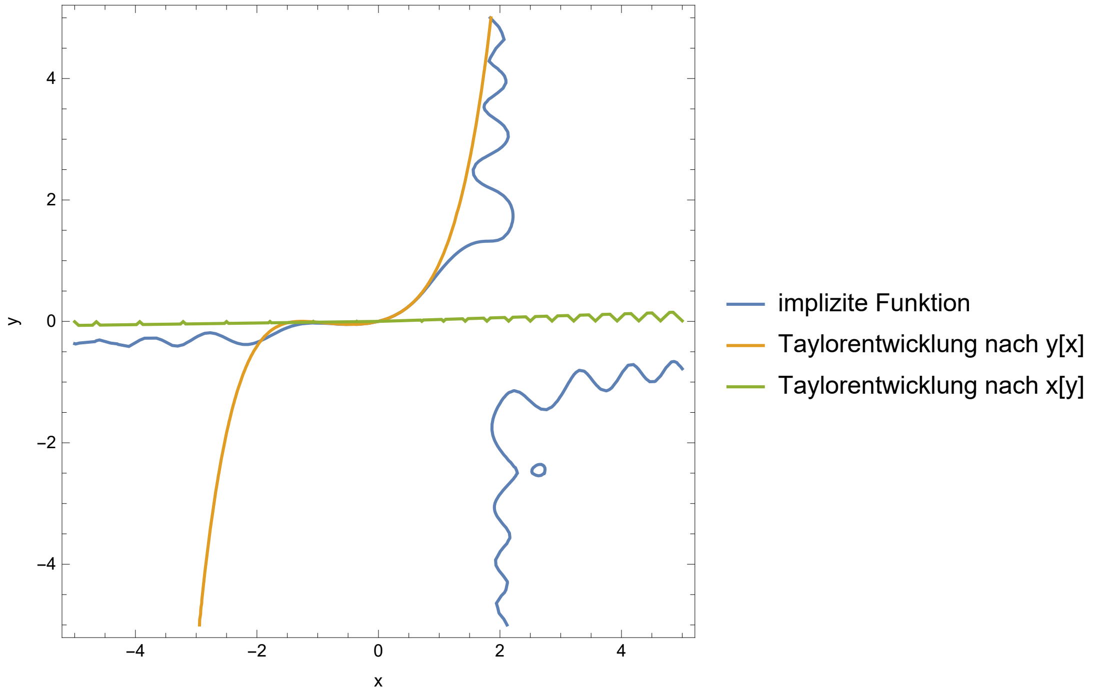
Plot der Funktion und der beiden Taylorentwicklungen, jeweils bis zum Grad 5:

In[15]:=
```
taylorx5 = taylorx[5]
taylory5 = taylory[5]
```

Out[15]= $4y-24y^2+240y^3-\frac{5951y^4}{2}+41275y^5$

Out[16]= $\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{8}+\frac{3x^3}{16}+\frac{191x^4}{2048}+\frac{179x^5}{4096}$

In[18]:=
```
Show[ContourPlot[{Sin[x^2] + 2 x * y + Cos[y^2] + x - 4 y == 1, taylory5 == y, x == taylorx5},
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, FrameLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → {"implizite Funktion",
   "Taylorentwicklung nach y[x]", "Taylorentwicklung nach x[y]"}]]
```
zeig·· Konturgraphik Sinus Kosinus Rahmenbeschriftung Legenden der Graphik

Out[18]=


Wobei der Plot der Taylorentwicklungen bis zum Grad 10 wesentlich besser aussieht:

In[19]:=
```
taylorx10 = taylorx[10]
taylory10 = taylory[10]
```

Out[19]= $4\,y - 24\,y^2 + 240\,y^3 - \frac{5951\,y^4}{2} + 41\,275\,y^5 - \frac{1\,837\,474\,y^6}{3} + \frac{28\,529\,332\,y^7}{3} - \frac{1\,220\,388\,461\,y^8}{8} + \frac{10\,032\,837\,685\,y^9}{4} - \frac{420\,454\,067\,863\,y^{10}}{10}$

Out[20]= $\frac{x}{4} + \frac{3\,x^2}{8} + \frac{3\,x^3}{16} + \frac{191\,x^4}{2048} + \frac{179\,x^5}{4096} - \frac{685\,x^6}{24\,576} - \frac{21\,901\,x^7}{786\,432} - \frac{66\,169\,x^8}{2\,097\,152} - \frac{422\,003\,x^9}{12\,582\,912} - \frac{116\,232\,197\,x^{10}}{4\,026\,531\,840}$

In[21]:=
```
Show[ContourPlot[{Sin[x^2] + 2 x * y + Cos[y^2] + x - 4 y == 1, taylory10 == y, x == taylorx10},
zeig⋯ Konturgraphik  Sinus  Kosinus
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, FrameLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → {"implizite Funktion",
  Rahmenbeschriftung  Legenden der Graphik
   "Taylorentwicklung nach y[x]", "Taylorentwicklung nach x[y]"}]]
```

Out[21]=