HM-2 Blatt 9

Luca Krüger
Arne Martin

Afg. 36

$f(x,y)=\sin(x^2)+2xy+\cos(y^2)+x-4y-1=0$

Als Komposition stetig diff'barer Funktionen ist auch $f(x,y)$ stetig-diff'bar.

Mit Satz 2.3.21 folgt:

Es existiert eine Umkehrabbildung von $f(x,y)$ wenn $\nabla f(x,y) \neq 0$.

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\cos(x^2)\cdot 2x+2y+1\\ 2x-\sin(y^2)\cdot 2y-4\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Es existiert eine lokale Auflösung $x=g(y)$

$$g'(y)=\frac{dx}{dy}=\cos(x^2)2x\cdot dx+2y\,dx+2x\,dy-\sin(y^2)2y\,dy+dx-4dy=0$$

$$\Leftrightarrow\quad dx\left(\cos(x^2)2x+2y+1\right)+dy\left(2x-\sin(y^2)2y-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{dy}=\frac{-(2x-\sin(y^2)2y-4)}{(\cos(x^2)2x+2y+1)}=$$

$\boxed{\text{Achtung! } x=x(y)}$

$$\Rightarrow g'\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=-\left(\frac{-4}{1}\right)=4$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\Big[2\big[2y^2\cos(y^2)+\sin(y^2)-2x'(y)-\cos(x(y)^2)x'(y)\big)^2+2\sin(x(y)^2)\cdot x(y)^2x'(y)^2\big]\Big]\cdot\frac{1}{(1+2y+2\cos(x(y)^2)x(y))}$$

$$=-48$$

Aufgabe 36

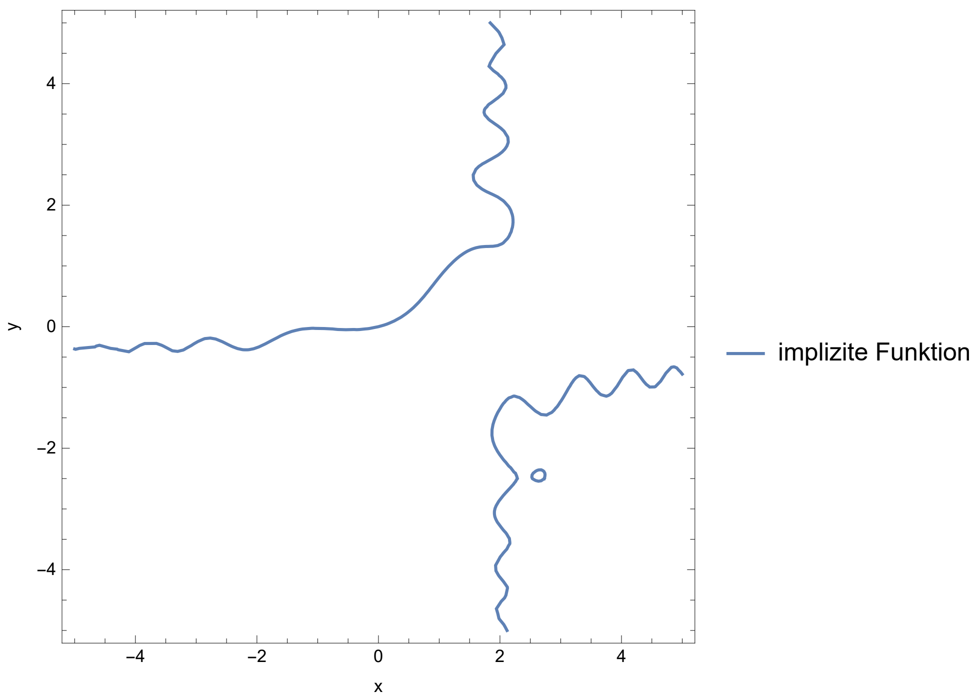
Martin und Krüger

Aufgabe 36 b)

Plot des Graphen der impliziten Funktion:

```
In[22]:= Show[ContourPlot[Sin[x^2] + 2 x * y + Cos[y^2] + x - 4 y == 1, {x, -5, 5},
         zeig·· Konturgraphik  Sinus                 Kosinus
           {y, -5, 5}, FrameLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → {"implizite Funktion"}]]
                       Rahmenbeschriftung       Legenden der Graphik
```

Out[22]=



Aufgabe 36 c)

Berechnung einer beliebigen Ableitung der impliziten Funktion nach y:

In[7]:=
```
derivativesx[depth0_] := Module[{depth = depth0},
                         Modul
  g[c_] := Solve[
           löse
    D[Sin[x[y] * x[y]] + 2 x[y] * y + Cos[y^2] + x[y] - 4 y, {y, c}] == 0, D[x[y], {y, c}]];
    ·· Sinus                 Kosinus                                   leite ab
  deriv = List[];
          Liste

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
For-Schleife
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
   hänge an bei
  ];
deriv = deriv /. {y → 0, x[y] → 0}
 ]
```

Teste die oben definierte Funktion:

In[8]:=
```
derivativesx[10]
```

Out[8]=
```
{x′[0] → 4, x″[0] → -48, x^(3)[0] → 1440, x^(4)[0] → -71412, x^(5)[0] → 4953000,
 x^(6)[0] → -440993760, x^(7)[0] → 47929277760, x^(8)[0] → -6150757843440,
 x^(9)[0] → 910179034783200, x^(10)[0] → -152574372146125440}
```

Taylorentwicklung nach x[y]:

In[9]:=
```
taylorx[grade_] := Module[{depth = grade},
                   Modul
  g[c_] := Solve[D[Sin[x[y] * x[y]] + 2 x[y] * y + Cos[y^2] + x[y] - 4 y - 1, {y, c}] == 0,
           löse  ·· Sinus                  Kosinus
    D[x[y], {y, c}]];
    leite ab
  deriv = List[];
          Liste

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
For-Schleife
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
   hänge an bei
  ];
deriv = Values[deriv /. {y → 0, x[y] → 0}];
        Werte
Sum[((Extract[deriv, n]) / (n!)) * y^n, {n, 1, depth}]
summ·· extrahiere
 ]
```

Teste Taylorentwicklung vom Grad 10:

In[10]:=
```
taylorx[10]
```

Out[10]=
$$4\,y-24\,y^2+240\,y^3-\frac{5951\,y^4}{2}+41\,275\,y^5-\frac{1\,837\,474\,y^6}{3}+\frac{28\,529\,332\,y^7}{3}-\frac{1\,220\,388\,461\,y^8}{8}+\frac{10\,032\,837\,685\,y^9}{4}-\frac{420\,454\,067\,863\,y^{10}}{10}$$

Wie man sieht, ist die Taylorentwicklung eine alternierende Reihe. Nach dem Leibniz-Kriterium müssten die Partialsummen notwendigerweise eine Nullfolge bilden. Da y beliebige Werte annehmen kann und die Vorfaktoren jeweils wesentlich größer werden, ist keine Nullfolge vorhanden. Damit konvergiert die Taylorentwicklung nach dem Leibniz-Kriterium nicht. D.h. die Taylorentwicklung divergiert.

Aufgabe 36 d)

Berechnung einer beliebigen Ableitung der impliziten Funktion nach x:

In[11]:=
```
derivativesy[depth0_] := Module[{depth = depth0},
                         Modul
  g[c_] := Solve[
           löse
    D[Sin[x * x] + 2 x * y[x] + Cos[y[x] * y[x]] + x - 4 y[x], {x, c}] == 0, D[y[x], {x, c}]];
    ·· Sinus                Kosinus                                       leite ab
  deriv = List[];
          Liste

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
For-Schleife
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
   hänge an bei
  ];
deriv = deriv /. {x → 0, y[x] → 0}
 ]
```

Teste die oben definierte Funktion:

In[12]:=
```
derivativesy[10]
```

Out[12]=
$$\left\{y'[0]\to\frac{1}{4},\ y''[0]\to\frac{3}{4},\ y^{(3)}[0]\to\frac{9}{8},\ y^{(4)}[0]\to\frac{573}{256},\ y^{(5)}[0]\to\frac{2685}{512},\ y^{(6)}[0]\to-\frac{10\,275}{512},\ y^{(7)}[0]\to-\frac{2\,299\,605}{16\,384},\ y^{(8)}[0]\to-\frac{20\,843\,235}{16\,384},\ y^{(9)}[0]\to-\frac{398\,792\,835}{32\,768},\ y^{(10)}[0]\to-\frac{109\,839\,426\,165}{1\,048\,576}\right\}$$

Taylorentwicklung nach x[y]:

In[13]:=
```
taylory[grade_] := Module[{depth = grade},
  g[c_] := Solve[
    D[Sin[x * x] + 2 x * y[x] + Cos[y[x] * y[x]] + x - 4 y[x], {x, c}] == 0, D[y[x], {x, c}]];
  deriv = List[];

For[l = 1, l ≤ depth, l++,
   AppendTo[deriv, g[l][[1, 1]] /. deriv]
  ];
deriv = Values[deriv /. {x → 0, y[x] → 0}];
Sum[((Extract[deriv, n]) / (n!)) * x^n, {n, 1, depth}]
 ]
```

Teste Taylorentwicklung vom Grad 10:

In[14]:=
```
taylory[10]
```

Out[14]= $\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{8}+\frac{3x^3}{16}+\frac{191x^4}{2048}+\frac{179x^5}{4096}-\frac{685x^6}{24576}-\frac{21901x^7}{786432}-\frac{66169x^8}{2097152}-\frac{422003x^9}{12582912}-\frac{116232197x^{10}}{4026531840}$

Aufgabe 36 e)

Plot der Funktion und der beiden Taylorentwicklungen, jeweils bis zum Grad 5:

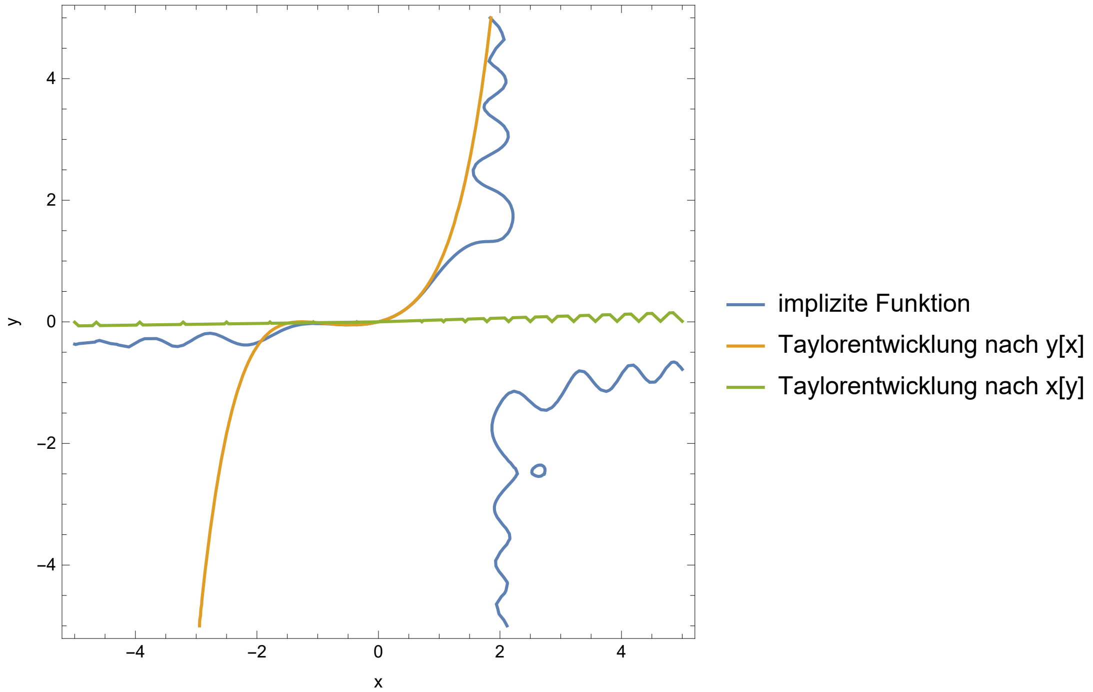
In[15]:=
```
taylorx5 = taylorx[5]
taylory5 = taylory[5]
```

Out[15]= $4y-24y^2+240y^3-\frac{5951y^4}{2}+41275y^5$

Out[16]= $\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{8}+\frac{3x^3}{16}+\frac{191x^4}{2048}+\frac{179x^5}{4096}$

In[18]:=
```
Show[ContourPlot[{Sin[x^2] + 2 x * y + Cos[y^2] + x - 4 y == 1, taylory5 == y, x == taylorx5},
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, FrameLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → {"implizite Funktion",
    "Taylorentwicklung nach y[x]", "Taylorentwicklung nach x[y]"}]]
```
zeig·· Konturgraphik Sinus Kosinus Rahmenbeschriftung Legenden der Graphik

Out[18]=



Wobei der Plot der Taylorentwicklungen bis zum Grad 10 wesentlich besser aussieht:

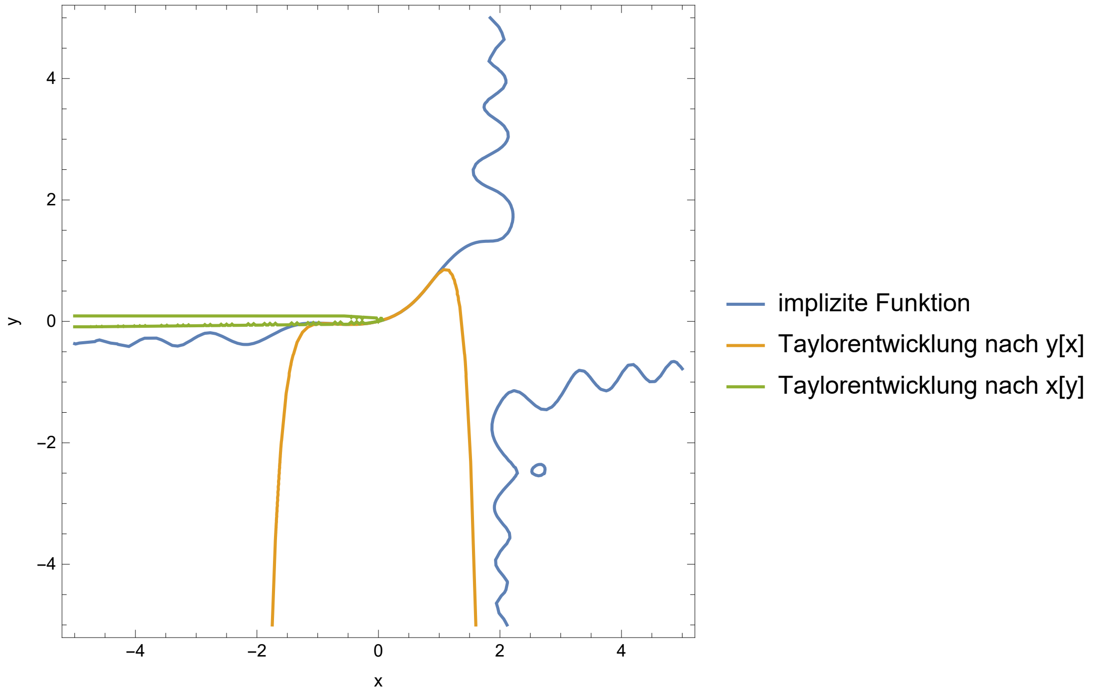
In[19]:=
```
taylorx10 = taylorx[10]
taylory10 = taylory[10]
```

Out[19]=
$$4 y - 24 y^2 + 240 y^3 - \frac{5951 y^4}{2} + 41\,275 y^5 - \frac{1\,837\,474 y^6}{3} + \frac{28\,529\,332 y^7}{3} - \frac{1\,220\,388\,461 y^8}{8} + \frac{10\,032\,837\,685 y^9}{4} - \frac{420\,454\,067\,863 y^{10}}{10}$$

Out[20]=
$$\frac{x}{4} + \frac{3 x^2}{8} + \frac{3 x^3}{16} + \frac{191 x^4}{2048} + \frac{179 x^5}{4096} - \frac{685 x^6}{24\,576} - \frac{21\,901 x^7}{786\,432} - \frac{66\,169 x^8}{2\,097\,152} - \frac{422\,003 x^9}{12\,582\,912} - \frac{116\,232\,197 x^{10}}{4\,026\,531\,840}$$

In[21]:=
```
Show[ContourPlot[{Sin[x^2] + 2 x * y + Cos[y^2] + x - 4 y == 1, taylory10 == y, x == taylorx10},
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, FrameLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → {"implizite Funktion",
   "Taylorentwicklung nach y[x]", "Taylorentwicklung nach x[y]"}]]
```
zeig·· Konturgraphik Sinus Kosinus Rahmenbeschriftung Legenden der Graphik

Out[21]=



Anne Martha
Lucie Kruse

Afg. 37

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \binom{x}{y} : x = 0 \vee y = 0 \right\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \to f(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 y^4 \\ e^{x^2 y^2} \end{pmatrix}$

z.z.: f ist lokal umkehrbar.

Ist die Jacobi-Matrix invertierbar handelt es sich um eine bijektive Abbildung. Was bedeutet f ist umkehrbar.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^4 & 4x^3 y^3 \\ e^{x^2y^2} 2xy^2 & e^{x^2y^2} 2yx^2 \end{pmatrix}$$

$\det(J_f) = 3x^2y^4 \cdot e^{x^2y^2} 2yx^2 - 4x^3y^3 e^{x^2y^2} 2xy^2 = -2x^4y^5 \neq 0 \ \forall x,y \in D$

$\Rightarrow$ f ist umkehrbar (lokal)

f ist nicht global umkehrbar, denn wäre dies der Fall wäre f injektiv. Was sich aber durch folgendes Beispiel widerlegen lässt.

Sei $x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3 x^4 \\ e^{x^2 x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^7 \\ e^{2x^2} \end{pmatrix}$

Sei $-x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3 (-x)^4 \\ e^{x^2 (-x)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^7 \\ e^{2x^2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y = -y$ ↯

Da man für verschiedene x und y-Werte die selben Funktionswerte erhält kann f nicht injektiv sein $\Rightarrow$ f ist nicht global umkehrbar.

Afg. 38

Anne Martin
Luca Krüger

$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

mit $a_k \equiv a_k(\lambda)$

$P(x)$ hat eine Nullstelle X_0 zu der ein konkretes $\lambda = \lambda_0$ gehört.

Es gilt

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda) x^k$, mit $a_k(\lambda)$ ist stetig-diff'bar.

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen existiert eine Auflösung nach x falls $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ ist. Und falls die Auflösung existiert so ist sie stetig.

Betrachtet man nun das Polynom in der Darstellung als Linearfaktoren so wird deutlich, dass bei einer Nullstelle der Vielfachheit > 0 keine Aussage darüber zu treffen ist was passiert, wenn λ_0 stetig verändert wird (die Nullstelle kann verschwinden, springen, etc).

Bei einer Vielfachheit der Nullstelle von 1 bewirkt hingegen eine stetige Änderung von λ_0 auch eine stetige Änderung der Nullstelle.

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda) x^K = (x-\Omega_0)^{VF1} (x-\Omega_1)^{VF2} \dots$

mit Ω = Nullstelle und VF = die Vielfachheit der Nullstelle.

Es gelte $\frac{\partial f}{\partial X} \neq 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left((x-\Omega_0)^{VF1} (x-\Omega_1)^{VF2} \dots\right) = \cancel{VF1(}$

$VF1 \cdot (x-\Omega_0)^{VF1-1} (x-\Omega_1)^{VF2} + \dots$ (Ableiten nach Produktregel)

Bei Vielfachheit $=1$ wird die Nullstelle durchs Ableiten zur Konstanten

$\Rightarrow$ der entsprechende Term **ist ungleich** Null $\Rightarrow$ Auflösung nach x ist stetig.

Ist der Term dagegen $=$ Null (also die Vielfachheit $\neq 1$) so ist die Stetigkeit nach dem Satz der impliziten Funktionen nicht gegeben.

Afg. 39

a)

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$$

Mit $f_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig diff'bar

Durch X_0 ist eine Lösung gegeben, so dass

$f_\mu(X_0) = 0_k$

Frage: Sind bei einer stetigen Veränderung des Parameters μ
auch die Gleichgewichtslösungen stetige Funktionen von μ?
Unter welchen hinreichenden Bedingung ist dies der Fall?

→ Die hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Vielfachheit der durch X_0 gegebenen Nullstelle $= 1$ ist.
Aus 38) folgt dann, dass durch eine stetige Veränderung von μ auch eine stetige Veränderung der Nullstelle gegeben ist.

Afg. 39

Arne Martin
Luca Krüger

c) $f_\mu(x) = \mu^2 \alpha x + 2\mu x^3 - x^5$

Es muss gelten $f_\mu(x) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \mu^2 \alpha x + 2\mu x^3 - x^5 = 0 \Leftrightarrow x(\mu^2\alpha + 2\mu x^2 - x^4) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}}$

Weitere Punkte:

$\mu^2\alpha + 2\mu x^2 - x^4 = 0$ Subst.: $x^2 = z$

$\Rightarrow z^2 - 2\mu z - \mu^2\alpha = 0$

PQ-Formel:

$\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha} \Rightarrow z_1 = \sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha} + \mu; z_2 = -\sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha} + \mu$

Re-Subst.

$\Rightarrow x^2 = \mu + \sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha} \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha}}}}$

$x^2 = \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha} \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4} = \pm\sqrt{\mu - \sqrt{\mu^2 + \mu^2\alpha}}}}$

$\Rightarrow$ Null ist der einzige Bifurkationspunkt $\binom{x}{\mu} = \binom{0}{0}$, als Schnittpunkt der Lösungen

b) $f_\mu(x) = \mu x - x^3$ $(m = n = 1)$

$f_\mu(x) \overset{!}{=} 0 = \mu x - x^3$

$\Leftrightarrow x(\mu - x^2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}}$

$\Rightarrow \mu - x^2 = 0$

$\mu = x^2 \Rightarrow \underline{\underline{\pm\sqrt{\mu} = x_{1/2}}}$

$\Rightarrow$ Null ist der einzige Bifurkationspunkt $\binom{x}{\mu} = \binom{0}{0}$, als Schnittpunkt der Lösungen