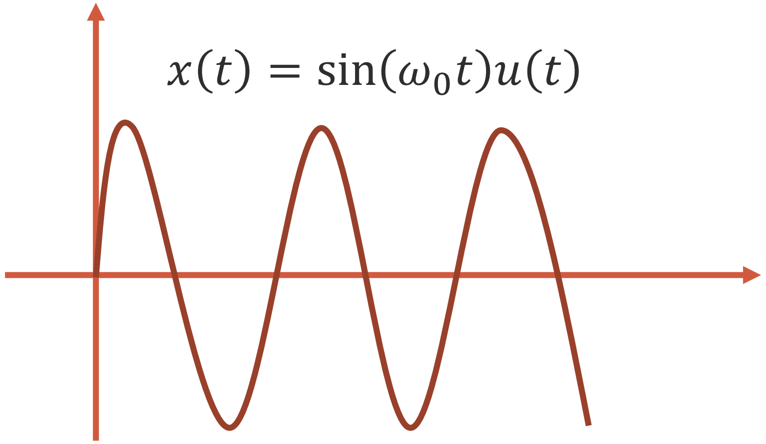
南京大学 人工智能学院
SCHOOL OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE, NANJING UNIVERSITY

09 拉普拉斯变换及其应用

连续信号的复频域分析

傅里叶变换的计算

计算单边信号$x(t)=\sin(\omega_0 t)\,u(t)$的傅里叶变换



- 已知

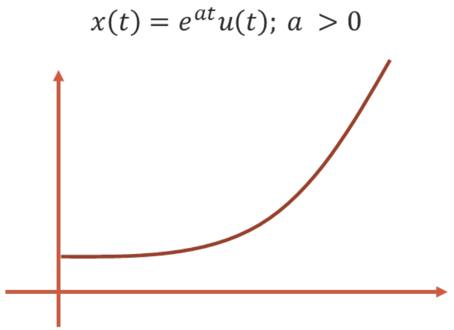
$$u(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}-\mathrm{j}\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

- 利用频域卷积特性，

$$\mathcal{F}[x(t)]=\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\mathrm{j}\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

傅里叶变换的缺陷



- 傅里叶变换的缺陷

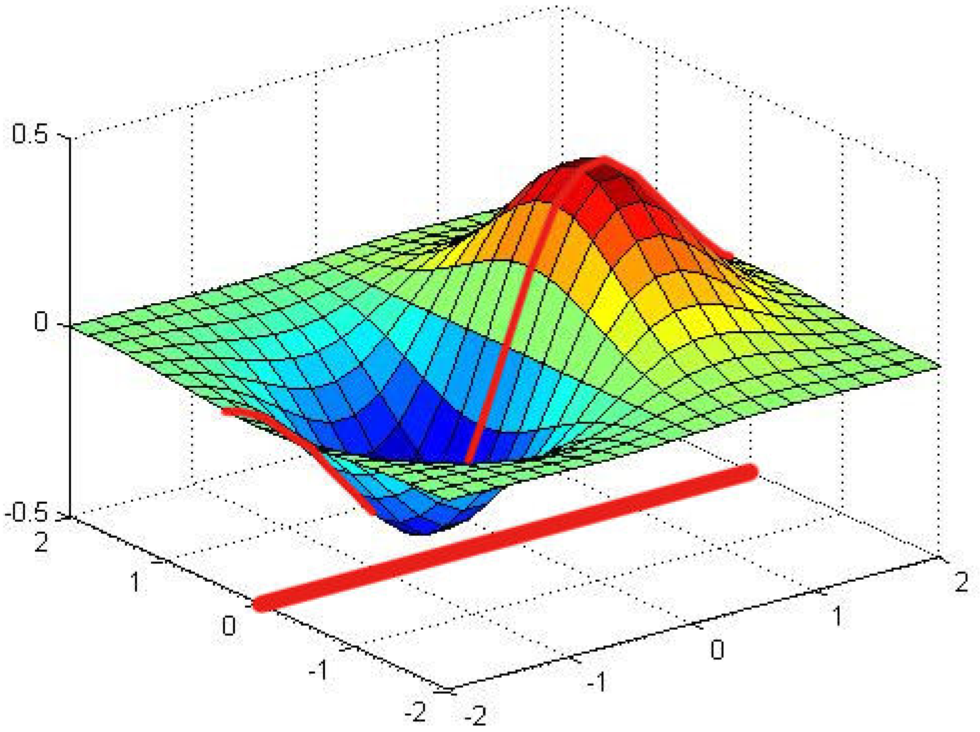
表达信号受限制 $x(t) = e^{at}u(t);\ a\ > 0,$ $X(j\omega)$不存在	**变换形式相对复杂** $x(t) = u(t),$ $x(t) = \sin(\omega_0 t)\,u(t)$	**求解微分方程过程复杂**	**分析系统有限制**

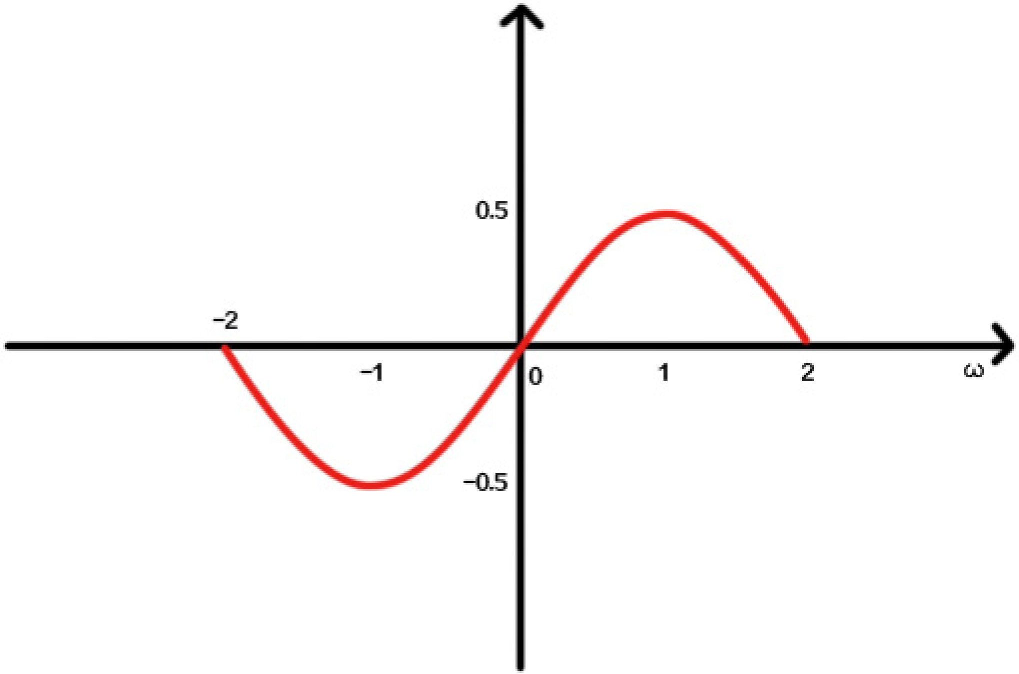
- 拉普拉斯变换的优势

求解微分方程步骤简化 将微分方程 转换为代数方程	指数函数等有**不连续点**的函数可转换为简单的初等函数	时域中的卷积变换为复频域中的乘积，建立**系统函数**的概念	利用系统函数**零极点分布**可直观表达系统很多特性

拉普拉斯变换和傅里叶变换

- 拉普拉斯变换是傅里叶变换的一种扩展





概要

1. 拉普拉斯变换：
对“频率ω” 含义的扩充

2. （单边）
拉普拉斯变换的计算：
复频域的优势

3. （单边）
拉普拉斯变换的性质：
信号的复频域特性

4.拉普拉斯反变换：
部分分式展开

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 针对指数信号 $x(t) = e^{at}u(t);\ a\ > 0$；不存在傅里叶变换
  - 将$x(t)$乘以**衰减因子**$e^{-\sigma t}$，满足绝对可积条件

令$s = \sigma + j\omega$

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}$$

若$\sigma > a$

- 针对一般信号

令$s = \sigma + j\omega$

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t = X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

- 由$x(t)e^{-\sigma t}$的傅里叶反变换可推出

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

拉普拉斯变换

- 拉普拉斯变换（LT）

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

- 拉普拉斯反变换（逆变换）

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

$$x(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X(s)$$

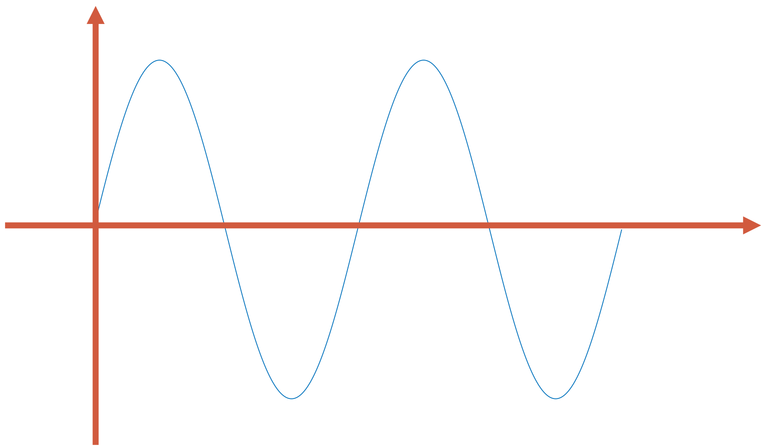
- 信号$x(t)$可分解成复指数e^{st}的线性组合，不同信号只是复指数e^{st}前的系数$X(s)$不同。 $X(s)$是复频率s的函数，称**复频谱。**

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

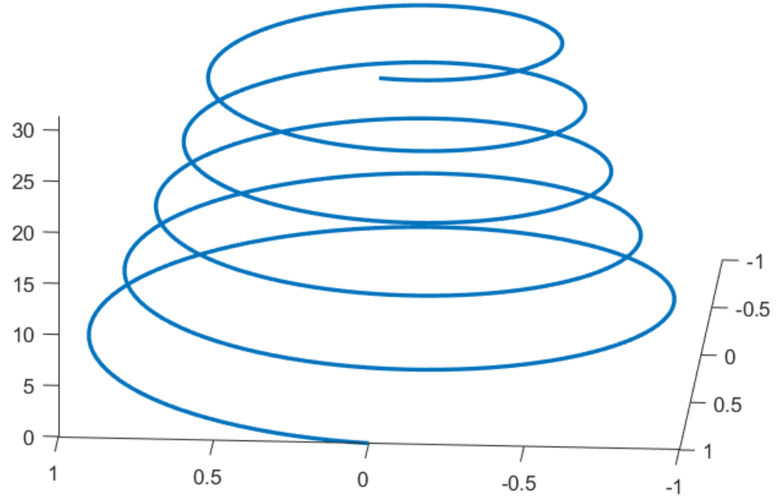
- FT为**实频域**，将信号分解为等幅振荡的频率分量
- LT将信号分解成幅度可变的复指数分量，针对**复频域**，物理含义不如FT，对信号的频谱分析还是要通过FT

实频域

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



复频域



单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯正变换

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

- 单边拉普拉斯反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

- 积分下限定义为零的左极限$\mathbf{0}_-$，目的在于s域分析时能够有效地处理**出现在0时刻的冲激信号。**

单边拉普拉斯变换存在的条件

- 充分条件为:
  - 绝对可积

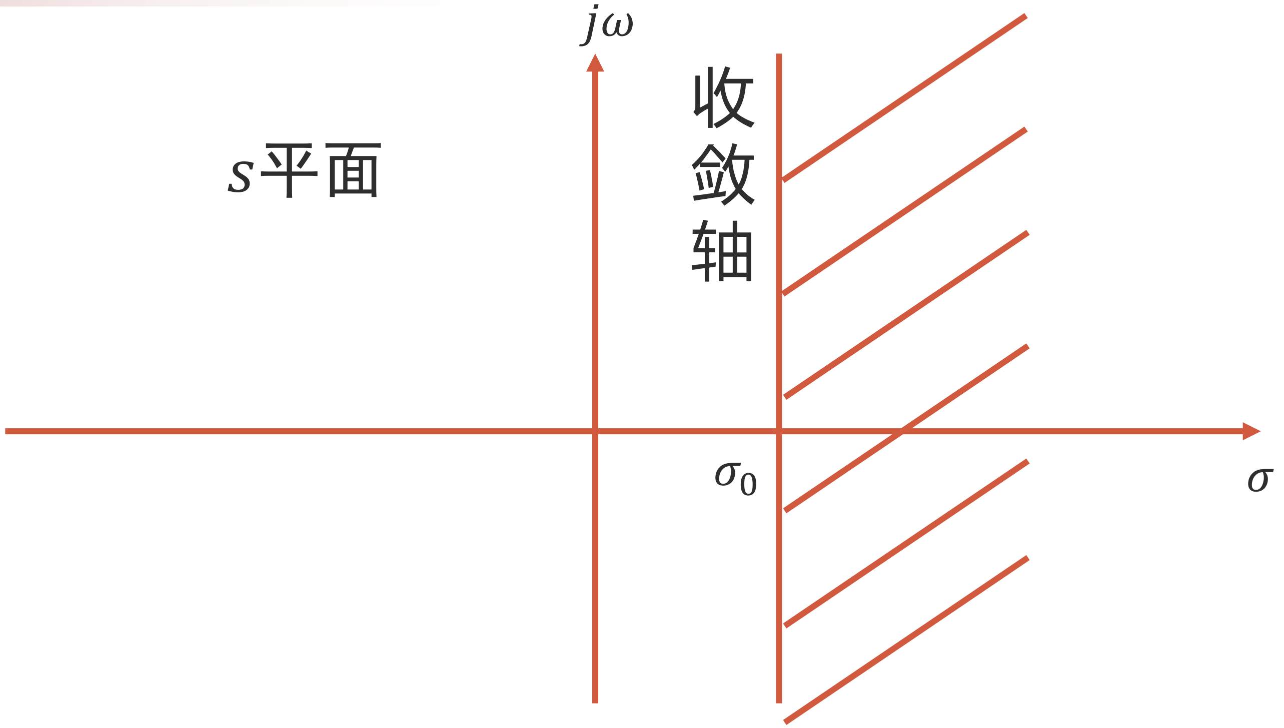
$$X(s)=\int_{0_-}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}\mathrm{d}t=C<\infty$$

  - 对任意信号$x(t)$，若满足上式，则 $x(t)$应满足

$$\lim_{t\to\infty}x(t)e^{-\sigma t}=0;\quad(\sigma>\sigma_0)$$

单边拉普拉斯变换及其存在的条件

- $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > \sigma_0)$
  - $\sigma > \sigma_0$称收敛条件
  - σ_0称绝对收敛坐标



- 有始有终、能量有限的信号（如冲激信号），收敛区为整个s平面。**有界非周期**信号LT一定存在

单边拉普拉斯变换及其存在的条件

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > 0)$$

- 随时间的幂成正比增长的信号，收敛坐标落于原点

$$\lim_{t\to\infty} e^{at} e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > a)$$

- 指数增长的信号，收敛坐标与a有关

- 比指数增长的更快的函数，无法进行LT，如e^{t^2}或te^{t^2}，仅在**有限时间**为范围内LT存在。

拉普拉斯变换收敛域

计算下列信号拉普拉斯变换的收敛域

(1) $u(t)-u(t-\tau)$	收敛域为全s平面
(2) $u(t)$	$\sigma>0$
(3) $e^{3t}u(t)$	$\sigma>3$
(4) $t^{n}u(t)$	$\sigma>0$
(5) $t^{t},\mathrm{e}^{t^{2}}$	不存在

拉普拉斯变换与傅里叶变换的发展

1822 年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的 固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响 。

Joseph Fourier

Gaspard Monge

Pierre-Simon Laplace

Joseph-Louis Lagrange

Sylvestre François Lacroix

拉普拉斯，1749 – 1827，法国数学家、天文学家

法国数学家、物理学家

1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。

拉普拉斯变换的发展历程

Leonhard Euler

瑞士数学家欧拉，1744 年研究 $\int X(x)e^{ax}\mathrm{d}x$形式的积分，用于求解微分方程

Joseph-Louis Lagrange

拉格朗日1773年对PDF做积分时研究 $\int X(x)e^{-ax}a^{x}\mathrm{d}x$ 形式的积分

Pierre-Simon Laplace

拉普拉斯1785年使用形如

$$\int x^{s}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的变换对整个微分方程进行转换和求解，并研究其性质。1809年使用该变换求解空间任意形式的热扩散求解问题。

Oliver Heaviside

1850-1925，英国数学家。19世纪末，发明“运算法（算子法）”解决电工程计算的基本问题。方法被广泛采用，但缺乏数学依据。

Gustav Doetsch

1892-1977，德国数学家，强调拉普拉斯变换的优势。

概要

1. 拉普拉斯变换：
对“频率ω” 含义的扩充

2. （单边）
拉普拉斯变换的计算：
复频域的优势

3. （单边）
拉普拉斯变换的性质：
信号的复频域特性

4.拉普拉斯反变换：
部分分式展开

常用信号的拉普拉斯变换

- 指数型函数$e^{\lambda t}u(t)$

$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda t}u(t)\right] = \int_{0_-}^{\infty} e^{\lambda t}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-\lambda}, \qquad \sigma > \lambda$$

- 同理：

$$e^{-\lambda t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\lambda}, \qquad \sigma > -\lambda$$

$$e^{-j\omega_0 t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-j\omega_0}, \qquad \sigma > 0$$

$$e^{(\sigma_0+j\omega_0)t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-(\sigma_0+j\omega_0)}, \qquad \sigma > \sigma_0$$

常用信号的拉普拉斯变换

- 冲激信号

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t = 1, \quad \sigma > -\infty$$

- 冲激信号出现在$t = t_0\ (t_0 > 0)$处

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st}\,\mathrm{d}t = e^{-st_0}, \quad \sigma > -\infty$$

常用信号的拉普拉斯变换

- 阶跃函数$u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \lim_{\lambda \to 0} \mathcal{L}\left[e^{\lambda t} u(t)\right] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{s - \lambda} = \frac{1}{s}, \qquad \sigma > 0$$

或

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}, \qquad \sigma > 0$$

单边拉普拉斯变换的计算

已知$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$，计算其LT

- 利用定义

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} e^{-a}e^{-t(s+a)}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-a}}{s+a}, \qquad \sigma > -a$$

概要

1. 拉普拉斯变换：

对“频率ω” 含义的扩充

2. （单边）

拉普拉斯变换的计算：

信号的时域、频域抽样，

抽样定理

3. （单边）

拉普拉斯变换的性质

4. 拉普拉斯反变换：

部分分式展开

单边拉普拉斯变换的性质

- 线性特性：若$x_1(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X_1(s),\sigma>\sigma_1;x_2(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X_2(s),\sigma>\sigma_2$，则

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$$

$$\sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$$

- 单边拉普拉斯变换性质中收敛域的变化仅反映一般情况，信号变换后，对应的收敛域可能会变大

单边拉普拉斯变换的性质

已知$x(t)=\delta(t)+e^{t}u(t)$，计算其LT

- 注意单边LT积分区域

$$X(s)=1+\frac{1}{s-1}=\frac{s}{s-1},\qquad \sigma>1$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 正弦信号

$$\cos\omega_0 t\, u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} u(t)$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \qquad \sigma > 0$$

$$\sin\omega_0 t\, u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} u(t)$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \qquad \sigma > 0$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 展缩特性（尺度变换）：若$x(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X(s),\sigma>\sigma_0$，则

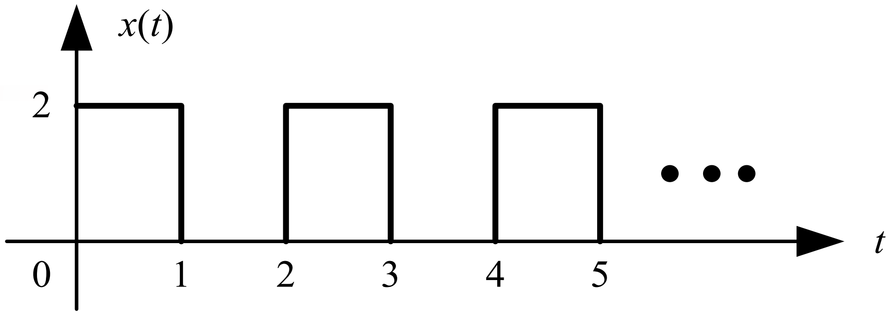
$$x(at)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right),\qquad \sigma>a\sigma_0,\qquad a>0$$

- 时移特性：若$x(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X(s),\sigma>\sigma_0$，则

$$x(t-t_0)u(t-t_0)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}e^{-st_0}X(s),\qquad \sigma>\sigma_0,\qquad t_0>0$$

拉普拉斯变换计算

求如图所示周期信号的单边LT



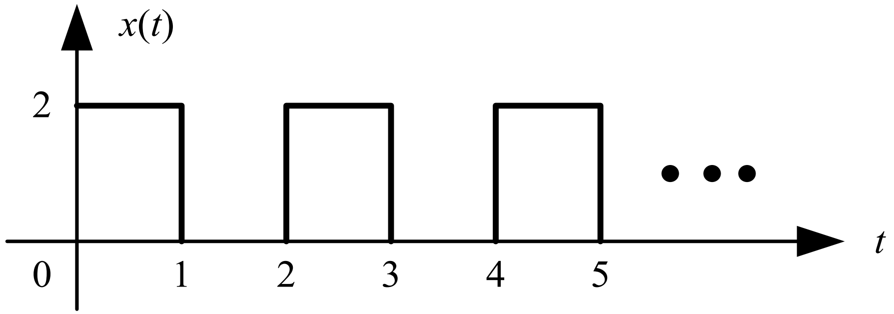
- 周期为T的单边周期信号$x(t)$可以表示为第一个周期信号$x_1(t)$及其时移$x_1(t-kT)$的线性组合，即

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x_1(t-kT)$$

- 若计算出$x_1(t)$的拉普拉斯变换$X_1(s)$，利用LT的**时移**特性和**线性**特性，即可求得单边周期信号的LT为

$$L[x(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-skT}X_1(s)=\frac{X_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}},\sigma>0$$

拉普拉斯变换计算



求如图所示周期信号的单边LT

$$x_1(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$$

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t-2) + x_1(t-4) + \cdots$$

- 所以$T = 2$, 且

$$X_1(s) = L\{x_1(t)\} = \frac{2}{s}(1 - \mathrm{e}^{-s}), \sigma > -\infty$$

- 代入

$$X(s) = X_1(s)\left(1 + \mathrm{e}^{-2s} + \mathrm{e}^{-4s} + \cdots\right) = \frac{X_1(s)}{1 - \mathrm{e}^{-2s}}, \sigma > 0$$

单边拉普拉斯变换的性质

已知$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，若$a > 0, b > 0$，求$\mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)]$

- **先进行时移**

$$\mathcal{L}[x(t-b)u(t-b)] = X(s)e^{-bs}$$

后进行尺度变换

$$\mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)] = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{bs}{a}}$$

单边拉普拉斯变换的性质

已知$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，若$a > 0, b > 0$，求$\mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)]$

- **先尺度变换**

$$\mathcal{L}[x(at)u(at)] = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

再时移

$$\mathcal{L}[x(at-b)u(at-b)] = \mathcal{L}\left[x\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)u\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)\right] = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{bs}{a}}$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 卷积特性：若$x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s), \sigma > \sigma_1; x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_2(s), \sigma > \sigma_2$，则

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s)X_2(s)$$

$$\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

- 乘积特性：若$x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s), \sigma > \sigma_1; x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_2(s), \sigma > \sigma_2$，则

$$x_1(t)x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi j}[X_1(s) * X_2(s)]$$

$$\sigma > \sigma_1 + \sigma_2$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 乘积特性的特殊形式:
- 指数加权（s域平移）：若$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), \sigma > \sigma_0$，则

$$e^{-\lambda t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s+\lambda), \sigma > \sigma_0 - \lambda, \qquad \lambda > 0$$

- 线性加权（s域微分）：若$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), \sigma > \sigma_0$，则

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}, \sigma > \sigma_0$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 微分特性：若$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), \sigma > \sigma_0$，则

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s) - x(0\_), \sigma > \sigma_0$$

若$x(0_) = 0$，则$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s)$

- 高阶扩展

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}^n t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^n X(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} x^{(r)}(0\_), \sigma > \sigma_0$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 积分特性：若$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), \sigma > \sigma_0$，则

$$x^{-1}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

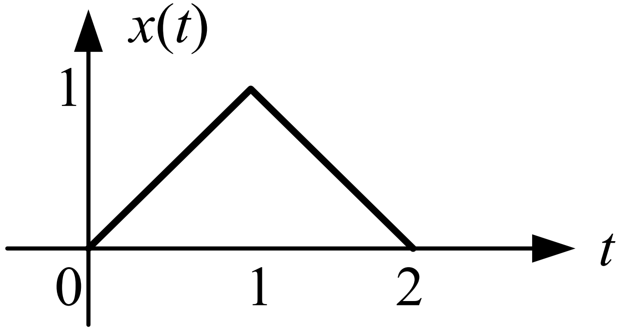
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0\_)}{s}, \sigma > \max(\sigma_0, 0)$$

若$x^{-1}(0_) = 0$，则

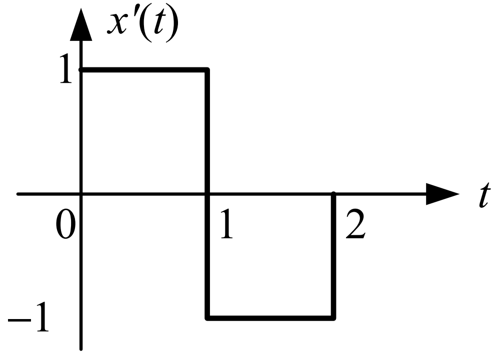
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{X(s)}{s}$$

拉普拉斯变换计算

求如图所示信号的单边拉普拉斯变换



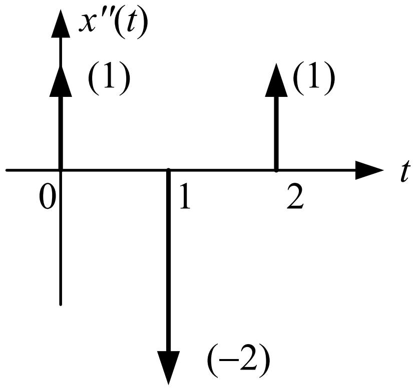
- 对$x(t)$求导，利用LT的微分特性, 可得



$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \xleftrightarrow{L} s^2 X(s) - s x(0_-) - x'(0_-)$$

因此

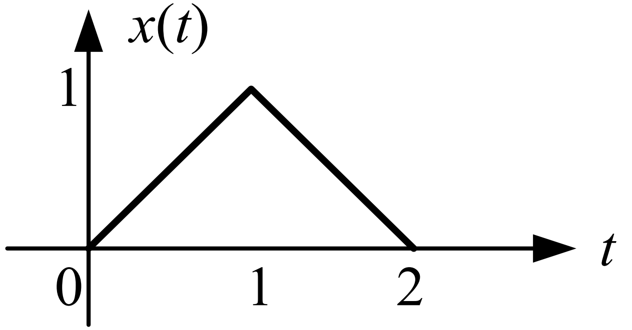
$$s^2 X(s) = 1 - 2\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s}$$



$$X(s) = \frac{1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}, \sigma > -\infty$$

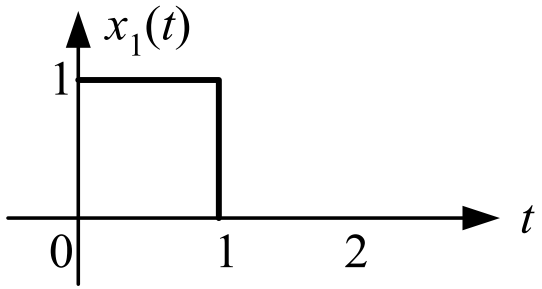
拉普拉斯变换计算

求如图所示信号的单边拉普拉斯变换



- 对$x(t)$表达为$x(t) = x_1(t) * x_1(t)$

$$x_1(t) = u(t) - u(t-1)$$



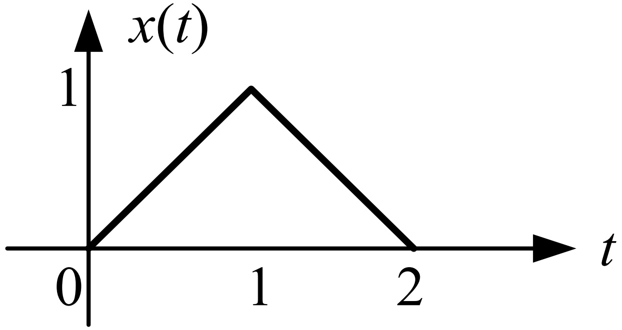
- 已知$\mathcal{L}[u(t)] = 1/s$
- LT位移特性

$$X_1(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}, \quad \sigma > -\infty$$

- 利用LT的卷积特性, 可得

$$X(s) = X_1(s) \cdot X_1(s) = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2, \sigma > -\infty$$

拉普拉斯变换计算



求如图所示信号的单边拉普拉斯变换

- 将$x(t)$用基本信号表达为

$$x(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$$

$$r(t) = tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$$

- 利用拉氏变换的位移特性和线性特性,可得

$$X(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}, \sigma > -\infty$$

单边拉普拉斯变换的性质

- 初值定理和终值定理：对**因果序列**，若$x(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X(s),\sigma>\sigma_0$，且其导数可进行LT；
- 若$x(t)$在$t=0$不包含冲激及其各阶导数，则

$$\lim_{t\to 0}x(t)=x(0_+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$$

初值定理只适用于有理真分式的情况；

- 若$sX(s)$的收敛域包含$j\omega$轴

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)$$

拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

- 当收敛域包含$j\omega$轴时，拉普拉斯变换和傅里叶变换均存在

$$X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega}$$

- 当收敛域不包含$j\omega$轴时，拉普拉斯变换存在而傅里叶变换均不存在

- 当收敛域的收敛边界位于$j\omega$轴时，拉普拉斯变换和傅里叶变换均存在（K_n为系数）

$$X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega} + \pi\sum_{n} K_n\delta(\omega - \omega_n)$$

拉普拉斯变换的计算

计算拉普拉斯变换和傅里叶变换

时域信号	傅里叶变换	拉普拉斯变换
$\mathrm{e}^{-3t}u(t)$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$	$\frac{1}{s+3} \quad \sigma>-3$
$\mathrm{e}^{3t}u(t)$	不存在	$\frac{1}{s-3} \quad \sigma>3$
$\cos 2tu(t)$	$\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+4}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-2)+\delta(\omega-2)]$	$\frac{s}{s^2+4} \quad \sigma>0$