Hausaufgabenserie 1

Stefan Wasmer

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,5)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -7 \end{matrix} \quad \downarrow 1 \quad \downarrow -1$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 11 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \end{matrix} \quad | : 2$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 11 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{matrix} \quad \downarrow -5 \quad \downarrow 1$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \underline{rg(A) = 3}$

<u>Basis für Zeilenraum:</u> $\begin{pmatrix} \underline{s}_1 \\ \underline{s}_2 \\ \underline{s}_3 \end{pmatrix}$

mit $\underline{s}_1 = (1, 3, 4, 7, 1)$

$\underline{s}_2 = (0, 1, 2, 3, 4)$

$\underline{s}_3 = (0, 0, -3, -4, -14)$

<u>Basis für Spaltenraum:</u> $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$

mit $\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.1

2

$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$, $\Gamma_2 = \{\vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{b}\}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{R}^3$

a)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \downarrow 1$$

$$\begin{matrix} x & y & z & \\ 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{matrix}$$

$\rightarrow y = 13 - 4z \quad \rightarrow \underline{z = s} \quad$ mit $s \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{y = 13 - 4s}$

$\Rightarrow \underline{x = 10 - 3s}$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A, \vec{b}) = 2$

$\Rightarrow \Gamma_2 \neq \emptyset$, da $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

b) $\dim(\Gamma_2) = 1$

c) $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ gilt, somit nur noch Punktüberprüfung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Zeile 3: $3 = s \Rightarrow s = 3$ einsetzen in Zeile 1, Zeile 2

$\Rightarrow$ Zeile 1: $1 = 10 + 3 \cdot (-3)$ w.A.

Zeile 2: $1 = 13 + 3 \cdot (-4)$ w.A.

$\Rightarrow$ somit gilt: $\underline{\underline{\Gamma_1 = \Gamma_2}}$

③ ges: zwei windschiefe Ebenen im $\mathbb{R}^4$ + Nachweis

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\\5\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}7\\8\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix}8\\11\\7\\12\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\7\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}0\\5\\3\\0\end{pmatrix}\right]$$

<u>Nachweis, dass Γ_1 nicht parallel zu Γ_2:</u>

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\8\\0\\0\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}8\\11\\7\\12\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\0\\7\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\5\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 0 & 7 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -7 & 0 & 8 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Da alle Stützvektoren lin. unabhängig voneinander sind, gilt:

Γ_1 nicht parallel zu Γ_2

<u>Nachweis, dass sich Γ_1 und Γ_2 nicht schneiden:</u>

$\rightarrow$ Punktprobe

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}8\\11\\7\\12\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\0\\7\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\5\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-7\\-9\\-4\\-6\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} u\begin{pmatrix}1\\0\\0\\7\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\5\\3\\0\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow u = -7 \\ \rightarrow v = -\frac{9}{5} \end{array}\right\}$ einsetzen/überprüfen:

$\rightarrow -4 \stackrel{?}{=} -\frac{9}{5} \cdot 3 = -\frac{27}{5}$ ↯ f.A.

$\rightarrow -6 \stackrel{?}{=} -7 \cdot 7 = -49$ ↯ f.A.

$\Rightarrow$ Γ_1 und Γ_2 schneiden sich nicht

Index der Kommentare

Hausaufgabenserie 2

(1) $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ges: $d(\vec{r}_1, \Gamma)$

Lösung:

Basis von $U^\perp = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$

$$\langle \vec{b}_1, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{b}_2, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{b}_2, \vec{a}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 + s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2 = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$$

$$\begin{array}{cccc|c|l} s & t & u & v & \vec{r}_0 - \vec{r}_1 & \\ -2 & -3 & -1 & 0 & -1 & \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & \mid \cdot 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & \mid \cdot 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 1$$

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 1$$

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}$$

$\Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow v = 1$

$\Rightarrow -2s + 6 - 1 = -1 \Rightarrow s = 3$

$\Rightarrow -t - 3 - 2 = -3 \Rightarrow -t = 2 \Rightarrow t = -2$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_0 + 1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{r}_F$$

$$d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_F\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6}$$

②

$C^\circ([0,2\pi],\mathbb{R})$ mit $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$

(S1) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)f(x)\,dx$$ trivial, da Multiplikation kommutativ

(S2) $\langle f, g_1+g_2\rangle = \langle f,g_1\rangle + \langle f,g_2\rangle$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot(g_1(x)+g_2(x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g_1(x) + f(x)g_2(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g_1(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g_2(x)\,dx$$

(S3) $\langle f, t\cdot g\rangle = t\cdot\langle f,g\rangle$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot t\cdot g(x)\,dx = \frac{t}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Konstanten können herausgezogen werden

(S4) $\langle f,f\rangle \geq 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)f(x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{>0}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx \geq 0$$

durch $(\,)^2$ ebenfalls ≥ 0

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 0 \iff f(x) = 0$$

③

$M = \{0,1,2\}^n$ $\quad d: M^2 \to \mathbb{R}$

$d(\underline{a},\underline{b})$ = Anzahl der Stellen, an denen sich $\underline{a}$ und $\underline{b}$ unterscheiden

zz.: d ist Metrik

(D1) $d(\underline{a},\underline{b}) \geq 0$ $\quad$ $\}$ trivial, Worte können sich nicht

$d(\underline{a},\underline{b}) = 0 \iff \underline{a} = \underline{b}$ $\quad$ in -1 (oder weniger) Stellen unterscheiden

(D2) $d(\underline{a},\underline{b}) = d(\underline{b},\underline{a})$ $\quad$ trivial, folgt aus Definition

(D3) $d(\underline{a},\underline{b}) \leq d(\underline{a},\underline{c}) + d(\underline{c},\underline{b})$

Fall 1: $\underline{a}=\underline{c}$ bzw $\underline{b}=\underline{c} \Rightarrow d(\underline{a},\underline{c})=0$ bzw. $d(\underline{c},\underline{b})=0$

und somit nur noch der andere Term $\Rightarrow$ vgl. (D1)

2.1

Fall 2: $\underline{a}\neq\underline{c}\neq\underline{b}$ $\Rightarrow$???

Index der Kommentare

2.1 Will man es ganz genau machen, betrachtet man erst Wörter mit Wortlänge 1 und macht ein induktives Argument

Hausaufgabenserie 3

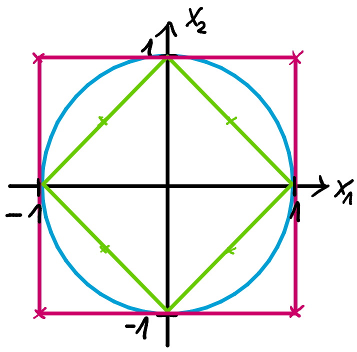
Stefan Wasmer

Aufgabe 1:

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_1 = |x_1| + |x_2| \qquad \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

euklidische Metrik
Manhattanmetrik
Maximummetrik



Aufgabe 2:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 10 & 0 & 8 \\ 10 & 0 & 34 & 40 \end{array} \quad \downarrow -2$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow x^0 = \frac{13-10}{5} = 0{,}6 \\ \Rightarrow x^1 = 0{,}8 \\ \Rightarrow x^2 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = 0{,}6 + 0{,}8x + x^2$$

Aufgabe 3:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D^T$$

zu zeigen: $<\vec{x},\vec{y}> := \vec{x}^T D \vec{y}$ ist Skalarprodukt

(S1) $<\vec{x},\vec{y}> = <\vec{y},\vec{x}>$

$\vec{x}^T D \vec{y} = \vec{y}^T D \vec{x}$ $\quad ( )^T$

(S2) $<\vec{x},\vec{y}_1+\vec{y}_2> = <\vec{x},\vec{y}_1> + <\vec{x},\vec{y}_2>$

$\vec{x}^T D (\vec{y}_1+\vec{y}_2) = \vec{x}^T D \vec{y}_1 + \vec{x}^T D \vec{y}_2$ $\quad$ Ausmultiplizieren

(S3) $<\vec{x}, t\cdot\vec{y}> = t\cdot <\vec{x},\vec{y}>$

$\vec{x}^T D\, t\cdot\vec{y} = t\cdot \vec{x}^T D \vec{y}$ $\quad$ Multiplikation ist kommutativ

(S4) $<\vec{x},\vec{x}> \geq 0$

$\vec{x}^T D \vec{x} = (2x_1 \quad 4x_2 \quad 3x_3)\vec{x} = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$

Koeffizienten positiv
durch $()^2$ auch x_i positiv

$<\vec{x},\vec{x}> = 0 \iff \vec{x} = 0$

$\vec{0} D \vec{0} = 0 \quad \checkmark$

Mathe Hausaufgabenserie 4 Stefan Wagner

1

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -1 - i^2 = -1+1 = \underline{\underline{0}}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 4 - 40 + 3 = \underline{\underline{-33}}$

$\begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix}$

$VZ: (-1)^{i+j}$

c) $A = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}$

$= 1(1-4-4) - 2(2-8) = -7+12 = \underline{\underline{5}}$

nicht invertierbar: a) (da $rg(A) = 1 \neq 2$)

invertierbar: b), c)

schiefe Dreieckspyramide:

A(1|1|1) B(1|2|3) C(4|-2|1) D(5|5|5)

ges: Volumen

Lsg: $V_{DP} = \frac{1}{6} \cdot \langle \vec{AB} \times \vec{AC}, \vec{AD} \rangle$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 3 \\ -3 \end{array} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 24 + 24 - 12 = 36$$

$$\Rightarrow V_{DP} = \frac{1}{6} \cdot 36 = \underline{\underline{6}}$$

$$\det \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2(12+12)$$

$$= 36$$

$$\Rightarrow V_{DP} = \frac{1}{6} \cdot 36 = \underline{\underline{6}}$$

②

$$tx + y + z = \sqrt{t}$$
$$\sqrt{t}x + ty - z = -t^3$$
$$x - \sqrt{t}y - t^2 z = t$$

a) $$\overbrace{\begin{pmatrix} t & 1 & t \\ \sqrt{t} & t & -t \\ 1 & -\sqrt{t} & -t^2 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{\vec{x}} = \overbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ -t^3 \\ t \end{pmatrix}}^{\vec{b}}$$

$$\begin{matrix} t & 1 & t \\ \sqrt{t} & t & -t \end{matrix}$$

$$\det(A) = -t^4 - t - t - t - t^2\sqrt{t} + t^2\sqrt{t} = -t^4 - 3t$$

b) LGS eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\rightsquigarrow -t^4 - 3t = 0$$
$$t_1 = 0$$
$$-t^3 - 3 = 0$$
$$t^3 = -3$$
$$t_2 = -\sqrt[3]{3}$$

eindeutig lösbar für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\sqrt[3]{3}\}$

c) Lösung $\vec{x} = \vec{x}(t)$ per Cramerschen Regel

$(t > 0)$

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\begin{vmatrix} \sqrt{t} & 1 & 1 \\ -t^3 & t & -t \\ t & -\sqrt{t} & -t^2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{matrix} \sqrt{t} & 1 & 1 \\ -t^3 & t & -t \end{matrix}$$

$$x = \frac{-t^5 - 3t^2}{-t^4 - 3t} = \frac{-t^4 - 3t}{-t^3 - 3}$$

4.1

$$y = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\begin{vmatrix} t & \sqrt{t} & 1 \\ \sqrt{t} & -t^3 & -t \\ 1 & t & -t^2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{matrix} t & \sqrt{t} & 1 \\ \sqrt{t} & -t^3 & -t \end{matrix}$$

$$y = \frac{t^6 + 3t^3}{-t^4 - 3t} = \frac{t^5 + 3t^2}{-t^3 - 3}$$

$$z = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\begin{vmatrix} t & 1 & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & t & -t^3 \\ 1 & -\sqrt{t} & t \end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{matrix} t & 1 & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & 1 & -t^3 \end{matrix}$$

$$z = \frac{-t^4\sqrt{t} - 3t\sqrt{t}}{-t^4 - 3t} = \frac{\sqrt{t}\,(-t^4 - 3t)}{-t^4 - 3t} = \sqrt{t}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

③

V, W, X drei K-Vektorräume

$L_1 : V \to W$ $\quad L_2 : W \to X$ $\quad$ Lin. Abbildungen
$\quad *_1 \qquad\qquad *_2$

a) zz.: Komposition $L = L_2 \circ L_1 : V \to X$
lineare Abbildung

$\to$ zz:

(LA1) $\forall x, y \in V : L(x+y) = L(x) + L(y)$

(LA2) $\forall \alpha \in K, x \in V : \quad L(\alpha x) = \alpha \cdot L(x)$

(LA1)

$$
\begin{aligned}
L(x+y) = L_2(L_1(x+y)) &\overset{*_1}{=} L_2(L_1(x) + L_1(y)) \\
&\overset{*_2}{=} L_2(L_1(x)) + L_2(L_1(y)) \\
&= L(x) + L(y)
\end{aligned}
$$

(LA2)

$$
\begin{aligned}
L(\alpha x) = L_2(L_1(\alpha x)) &\overset{*_1}{=} L_2(\alpha \cdot L_1(x)) \\
&\overset{*_2}{=} \alpha \cdot L_2(L_1(x)) \\
&= \alpha \cdot L(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

b)

geg: $L: C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$L(f) = f'' - 3f' + f$$

ges: Begründung L linear

Lsg: L linear $\Leftrightarrow$ (LA1) ✓, (LA2) ✓

(LA1)

$$\begin{aligned} L(x+y) &= (x+y)'' - 3\cdot(x+y)' + x+y \\ &= x'' + y'' - 3x' - 3y' + x + y \\ &= L(x) + L(y) \quad ✓ \end{aligned}$$

(LA2)

$$\begin{aligned} L(\alpha x) &= (\alpha x)'' - 3(\alpha x)' + \alpha x \\ &\overset{*_1}{=} \alpha x'' - 3\alpha x' + \alpha x \\ &= \alpha(x'' - 3x' + x) \\ &= \alpha \cdot L(x) \quad ✓ \quad \square \end{aligned}$$

$*_1$ $(\alpha x)' = \alpha' x + \alpha x'$ (Produktregel)

$= 0 + \alpha x'$

α konstant $\to \alpha' = 0$

Index der Kommentare

4.1 kann man auch kürzen

Mathe Hausaufgabenserie 5

20.05.2023

Stefan Wasmer

①

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x - 2y \\ 2x \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 3x \end{pmatrix}$

keine lineare Abbildung → Beweis durch Bsp:

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \neq f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$\neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ y + x \end{pmatrix}$

keine lineare Abbildung → Beweis durch Bsp

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \neq f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$\neq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

②

$V = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad L : V \to V$

$L(f) = g$ mit $(L(f))(x) = g(x) = f(x-2)$

(1) $L(a+b) = (a+b)(x-2) = a(x-2) + b(x-2)$
$= L(a) + L(b)$

(2) $L(\alpha \cdot a) = (\alpha \cdot a)(x-2) = \alpha \cdot a(x-2)$
$= \alpha \cdot L(a)$

$\square$ trivial

③

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \Gamma = [\vec{a}, \vec{b}]$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

a) $L(\vec{0}) = \vec{0} \qquad L(\vec{b}) = \vec{b}$

$L(\vec{a}) = \vec{a} \qquad L(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

b) $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \left(L(\vec{a}), L(\vec{b}), L(\vec{a} \times \vec{b})\right) \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mathe für Informatiker Ha 6

Stefan Wasmer

① ges: Eigenwerte und Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((-5-\lambda)(6-\lambda) + 4\cdot 7\right)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 \overset{!}{=} 0$$

durch scharfes Draufschauen gilt:

$\lambda_1 = -1 \qquad av(A, \lambda = -1) = 1$

$\lambda_2 = 2 \qquad av(A, \lambda = 2) = 2$

Berechnung des EV zu $\lambda_1 = -1$

$\Rightarrow (A+E)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = s \rightarrow x_1 = \frac{7s}{4}$$

$\rightarrow \frac{6\cdot 7}{4}s + 3x_2 - 6s = 0$

$$3x_2 = 6s - \frac{42}{4}s$$

$$x_2 = 2s - \frac{42}{12}s$$

$$E(A, \lambda=-1) = \left[\begin{pmatrix} 7/4 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad gr(A, \lambda=-1) = 2$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(A, \lambda=2) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \qquad gr(A, \lambda=2) = 1$$

(2)

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Drehachse $T = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$

ges: M für $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T' = [\vec{b}_2, \vec{b}_3] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$M = B \cdot D \cdot B^{-1} = B \cdot D \cdot B^T$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}+4}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -1 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

③

a) $O^+(n) = \{A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \mid A \text{ ist Drehmatrix}\}$

$\Downarrow$

$\det(A) = 1 \wedge$ orthogonal

<u>Gruppe:</u>

a) Verknüpfung ist assoziativ

b)

b1) $\exists$ neutrales Element

b2) $\exists$ inverses Element

c) abgeschlossen

$\Rightarrow O^+(n)$ bzgl. Matrizenmult. ist Gruppe

Beweis:

a) trivial, Matrizenmultiplikation im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ ist assoziativ

b)

b1) trivial, da Matrix $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt neutrales Element ist: $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$ mit $E \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

(in $O^+(n)$ mit $\varphi = 0$ vorhanden)

b2) trivial, alle quadratischen Matrizen ($\mathbb{R}^{(n,n)}$) sind invertierbar

4.1

c) Seien $A, B \in O^+(n)$

Es gilt $\det(A) = \det(B) = 1$.

Nach Vorlesung gilt:

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$

Nach Vorlesung gilt:

Die Mult. zweier orthogonaler Matrizen erzeugt wieder eine orthogonale Matrix *

$\Rightarrow$ Gruppe $\square$

b) Spiegelungen $\left.\begin{array}{l} L_1(\vec{x}) = M_1 \vec{x} \\ L_2(\vec{x}) = M_2 \vec{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_i \text{ orthogonal} \\ \text{und} \\ M_i^T = M_i \end{array}$

$L = L_2(L_1(\vec{x}))$

$\Rightarrow L = L_2(M_1 \vec{x}) = M_2 \cdot M_1 \cdot \vec{x}$ da assoziativ

(1) $M_2 \cdot M_1$ ist orthogonal *

(2) $\det(M_2 \cdot M_1) = \det(M_2) \cdot \det(M_1)$

$= -1 \cdot (-1)$

$= 1$

da nicht gleichzeitig Drehung

Nach (1), (2) gilt: L ist Drehung

Index der Kommentare

Mathe Hausaufgabenserie 7

Aufgabe 1

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{matrix}$$

$$\det(M) = \frac{1}{3} \cdot (-4-4-4-8-8+1) = -9$$

$$M^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = M$$

$$\begin{array}{c|c}
M \cdot M^T & \left|\begin{matrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{matrix}\right| \cdot \frac{1}{3} \\
\hline
\cdot \frac{1}{3} \left|\begin{matrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{matrix} \;\Big|\; \cdot \frac{1}{9}
\end{array}$$

$\Rightarrow M \cdot M^T = E \quad \Rightarrow M$ orthogonal

$\Rightarrow$ da M orthogonal und $M = M^T$

$\Rightarrow$ Abbildung $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ ist Spiegelung

Spiegelebene:

$$M\vec{a} = \vec{a} \iff M\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$\iff (M - E)\vec{a} = \vec{0}$$

$$M - E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \quad x = -y - 2z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

✓

Aufgabe 2

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 = 10$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 5$$

EV für $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV für $\lambda_2 = 5$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

transformierte Gleichung:

$$(u,v)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 10$$

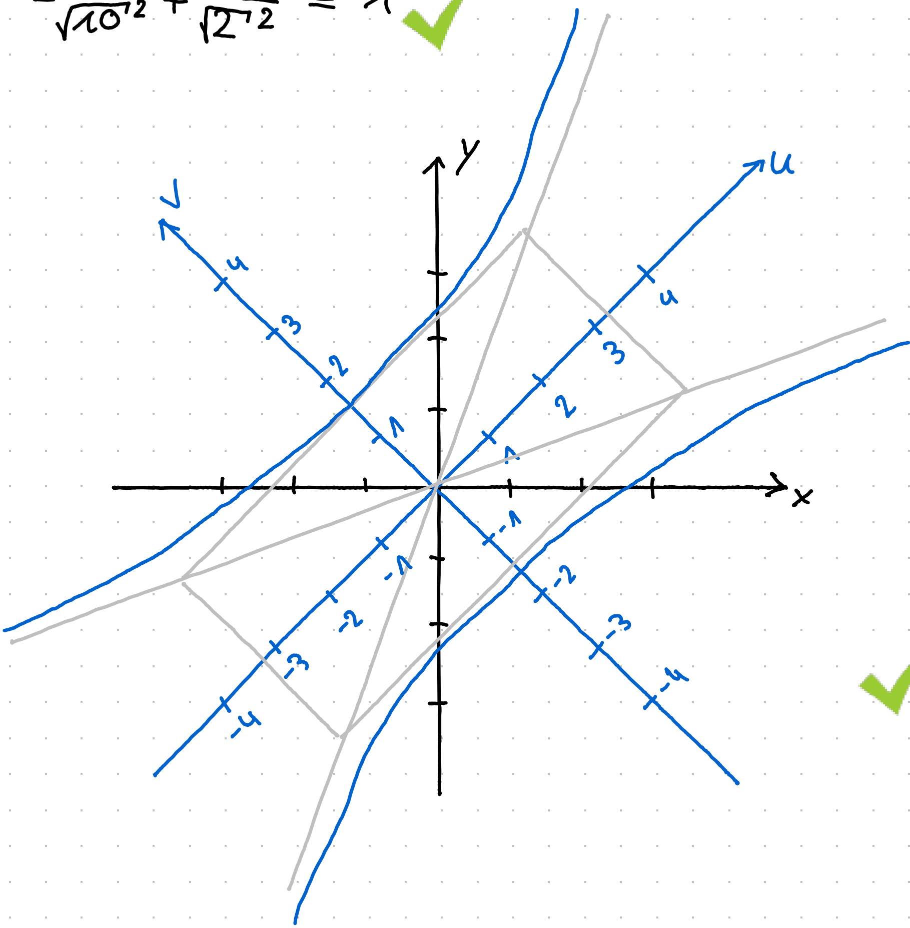
$$\Rightarrow -u^2 + 5v^2 = 10$$

$$-u^2 + 5v^2 = 10$$

$$-\frac{u^2}{10} + \frac{v^2}{2} = 1$$

$$-\frac{u^2}{\sqrt{10}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

$\sqrt{10} \approx 3{,}16$



Aufgabe 3

$$97x^2 + 192xy + 153y^2 = 225$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} 97 & 96 \\ 96 & 153 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 225$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 97-\lambda & 96 \\ 96 & 153-\lambda \end{vmatrix} = (97-\lambda)(153-\lambda) - 96^2$$
$$= \lambda^2 - 250\lambda + 5625$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 25$$
$$\lambda_2 = 225$$

EV für λ_1

$$\begin{pmatrix} 97-25 & 96 \\ 96 & 153-25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

EV für λ_2

$$\begin{pmatrix} 97-225 & 96 \\ 96 & 153-225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

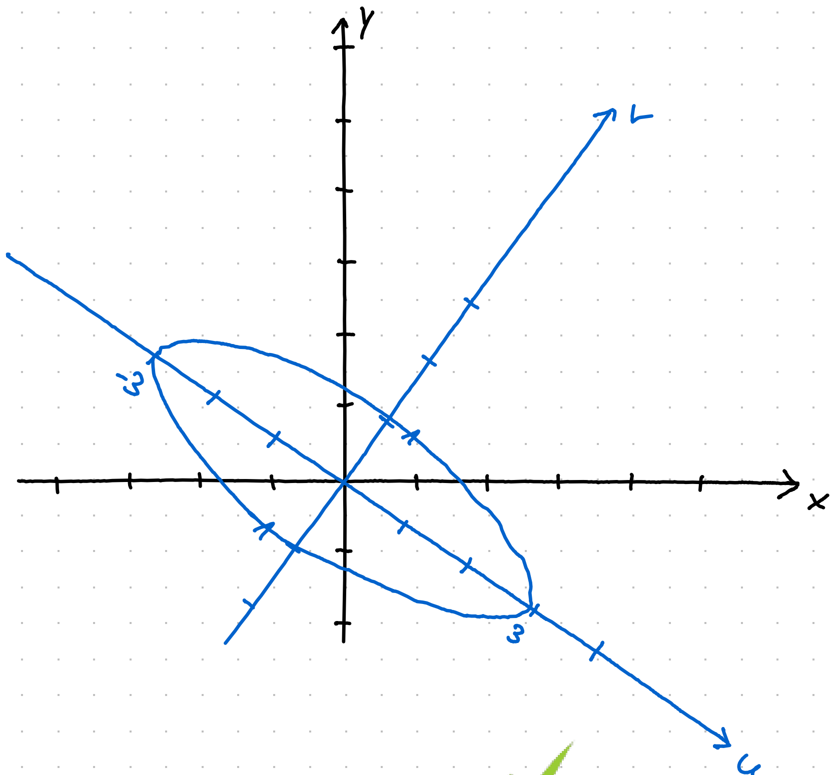
$$\Rightarrow T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix}$$

transformierte Gleichung:

$$(u,v)\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 225$$

$$25u^2 + 225v^2 = 225$$

$$\frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{1^2} = 1$$



Index der Kommentare

1.1 Vorfaktoren werden nicht linear rausgezogen, so das Det M=-1

Mathe Hausaufgabenserie 8

Aufgabe 1

$f(x,y) = x^2 e^{1-y^2}$

a) $f_x(x,y) = 2xe^{1-y^2}$

$f_y(x,y) = -2yx^2e^{1-y^2}$

$\operatorname{grad} f = (2xe^{1-y^2}, -2yx^2e^{1-y^2})$

b) Gleichung der Tangentialebene durch $(1,1,f(1,1))$

$x_{n+1} = f(\underline{a}) + f_x(\underline{a})(x-a_1) + f_y(\underline{a})(y-a_2)$

mit $\underline{a} = (1,1)$

$\rightarrow f(\underline{a}) = 1 \quad f_x(\underline{a}) = 2 \quad f_y(\underline{a}) = -2$

$\Rightarrow x_{n+1} = 1 + 2(x-1) - 2(y-1)$

$= 2x - 2y + 1$

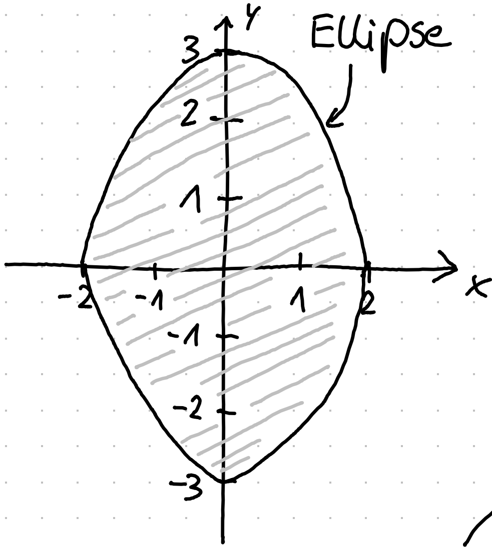
c) Richtungsableitung durch $\underline{a} = (1,1)$ in $\underline{v} = (3,4)$

$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|v\|} \cdot \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle$

$= \frac{1}{5} \cdot \langle (2,-2), (3,4) \rangle = -\frac{2}{5}$

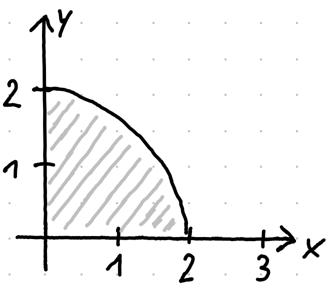
Aufgabe 2

a) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \}$



D abgeschlossen

nicht offen

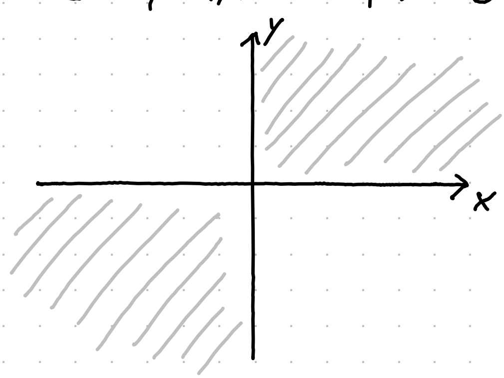


b) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 \,,\, x \geq 0 \,,\, y \geq 0$

D weder offen noch abgeschlossen

c) D maximale Definitionsbereich von $f(x,y) = \ln(xy)$

$\Rightarrow D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \;\vee\; x < 0, y < 0 \}$



D offen

nicht abgeschlossen

Aufgabe 3

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x e^y$

$g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $x = g_1(u,v,w) = u^2 - w$

$y = g_2(u,v,w) = u+v+w$

$H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $H(u,v,w) = f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w))$

$\rightsquigarrow$

direkt:

$$H(u,v,w) = f(u^2 - w, u+v+w)$$

$$= (u^2-w)\, e^{u+v+w}$$

$$H_u = 2u e^{u+v+w} + (u^2-w) e^{u+v+w}$$ ✓

$$H_v = (u^2-w)\, e^{u+v+w}$$ ✓

$$H_w = e^{u+v+w}(-1 + u^2 - w)$$ ✓

unter Verwendung der Kettenregel:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \Bigg|_{\substack{x=u^2-w \\ y=u+v+w}}$$

$$= e^y \cdot 2u + xe^y \cdot 1 \Bigg|_{\substack{x=u^2-w \\ y=u+v+w}}$$

$$= \underline{e^{u+v+w}(2u+u^2-w)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \Bigg|_{\substack{x=u^2-w \\ y=u+v+w}}$$

$$= e^y \cdot 0 + xe^y \cdot 1 \Bigg|_{\substack{x=u^2-w \\ y=u+v+w}}$$

$$= \underline{(u^2-w)e^{u+v+w}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} \Bigg|_{\substack{x=u^2-w \\ y=u+v+w}}$$

$$= e^y \cdot (-1) + xe^y \cdot 1 \Bigg|_{\substack{x=u^2-w \\ y=u+v+w}}$$

$$= \underline{e^{u+v+w}(-1+u^2-w)}$$

Index der Kommentare

Hausaufgabenserie 9

① $f(x,y) = e^{4x^2+y^2}$

a) $N_c(f)$ für $c=1,\ c=e,\ c=e^4,\ c=e^{16},\ c=e^{36}$

$N_c(f) := \{\ \underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c\ \}$

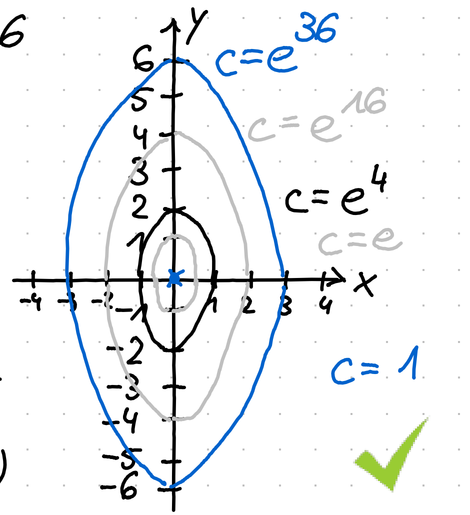
$f(x,y) = 1 \iff 4x^2+y^2 = 0 \Rightarrow \{(0,0)\}$

$f(x,y) = e \iff 4x^2+y^2 = 1$

$f(x,y) = e^4 \iff 4x^2+y^2 = 4 \iff x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$f(x,y) = e^{16} \iff 4x^2+y^2 = 16 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$f(x,y) = e^{36} \iff 4x^2+y^2 = 36$



b) $N_{e^5}(f) \Rightarrow 4x^2+y^2 = 5$

Tangente in $\underline{a} = (1,1)$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 8x\, e^{4x^2+y^2} \\ f_y &= 2y\, e^{4x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \operatorname{grad} f(x,y) = (f_x, f_y)$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(1,1) = (8e^5, 2e^5)$

$\Rightarrow$ Tangente: $T = (1,1) + r(-2e^5, 8e^5)\ ,\ r \in \mathbb{R}$

② $f(x,y) = (1-x)e^{xy}$

$$f_x = -e^{xy} + (1-x)ye^{xy} = (y-xy-1)e^{xy}$$
$$f_y = (1-x)xe^{xy} = (x-x^2)e^{xy}$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f((y-xy-1)e^{xy}, (x-x^2)e^{xy})$

$$f_{xx} = -ye^{xy} + (y^2-xy^2-y)e^{xy}$$
$$f_{xy} = (1-x)e^{xy} + (xy-x^2y-x)e^{xy}$$

$$f_{yx} = (1-2x)e^{xy} + (yx-x^2y)e^{xy}$$
$$f_{yy} = (x^2-x^3)e^{xy}$$

$\Rightarrow$ Hessematrix: $\quad H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

zweites Taylorpolynom an $\underline{a} = (0,1)$:

$$T_{f,2,\underline{a}} = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a})(\underline{x}-\underline{a})^T + \frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{a}) \cdot H_f(\underline{a}) \cdot (\underline{x}-\underline{a})^T$$

$$= 1 + (1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-0, y-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + x + y - 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2xy)$$

$$= x + y + \frac{x^2}{2} - x + y = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + 2y}}$$

③

$F: d \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x,y) = x \ln y + y \cos(x) + x$

$N_1(F) \Rightarrow F(x,y) = x \ln y + y\cos(x) + x = 1$

$\Rightarrow$ $\underline{a} = (0,1)$ scheint Punkt von $N_1(F)$ zu sein

$F_x = \ln y - y \sin(x) + 1$

$F_y = \frac{x}{y} + \cos(x)$

a) zz.: durch die Gleichung $F(x,y) = 1$ in einer Umgebung $(0,1)$ wird implizit eine Funktion g definiert mit $F(x,y) = 1 \Leftrightarrow y = g(x)$

$\Rightarrow$

F ist in $(0,1)$ stetig differenzierbar:

$\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} F_x(\underline{x}) = 0 - 1 \cdot 0 + 1 = 1 = F_x(\underline{a})$

$\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} F_y(\underline{x}) = \frac{0}{1} + 1 = 1 = F_y(\underline{a})$

bzw.: stetig diff'bar, da aus stetig. diff'baren Fkt zusammengesetzt ✓

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow g(x) = y$ implizit definiert in $(0,1)$
mit $F(x,y) = 1$

b) Gleichung der Tangenten t an $N_1(F)$
in $(0,1)$

$$\Rightarrow t = g(0) + g'(0)\cdot(x-0)$$
$$= 1 + x\cdot\left(-\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)}\right) = -x + 1$$

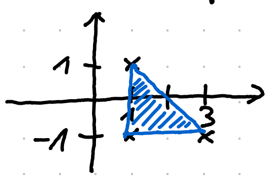
Mathe Hausaufgabenserie 10 — 25.06.

1. $f(x,y) = 2x+3y$

$D = \{(x,y) \mid x \geq 1, y \geq -1, x+y \leq 2\}$

$\left.\begin{array}{l} f_x = 2 \\ f_y = 3 \end{array}\right\} f_x \neq 0,\ f_y \neq 0 \Rightarrow$ keine Lokalen Extremwerte

$\Rightarrow$ Überprüfen der Ränder:



$\rightarrow D_1 = \{(x,y) \in \partial D \mid x = 1 \vee y = -1\}$

$\rightarrow D_2 = \{(x,y) \in \partial D \mid y = -x+2 \wedge 1 < x < 3\}$

$\boxed{D_2} \rightarrow \tilde{f}(x) = f(x, 2-x) = 2x + 6 - 3x$

$= 6 - x$

$\tilde{f}'(x) = -1 \Rightarrow D_2$ hat keine lokalen EW

$\boxed{D_1} \rightarrow$ Überprüfen der "Eckpunkte"

$P_1 = (1,1) \quad P_2 = (1,-1) \quad P_3 = (3,-1)$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$f(P_1) = 5 \quad f(P_2) = -1 \quad f(P_3) = 3$

$\Rightarrow \max\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\} = 5 \quad \Rightarrow P_1$

$\min\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\} = -1 \quad \Rightarrow P_2$

✓

② $f(x,y) = xy(2x+y-6)$

$= 2x^2y + xy^2 - 6xy$

$f_x = 4xy + y^2 - 6y$

$f_{xx} = 4y$

$f_{xy} = 4x + 2y - 6$

$f_y = 2x^2 + 2xy - 6x$

$f_{yx} = 4x + 2y - 6 = f_{xy}$

$f_{yy} = 2x$

2.1

<u>Hinreichende Bedingung:</u>

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \Leftrightarrow 4xy + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 6 - 4x \\ f_y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy - 6x = 0 \end{array}\right\} \text{einsetzen}$$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x(6-4x) - 6x = 0$

$2x^2 + 12x - 8x^2 - 6x = 0$

$-6x^2 + 6x = 0$

$-x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow y_1 = 6 - 4 \cdot 0 = 6$

$x_2 = 1 \quad \Rightarrow y_2 = 6 - 4 = 2$

$$H_f(0,6) = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

da $\det(H_f(0,6)) = 24-36 = -12 < 0$

$\rightarrow$ Sattelpunkt, also kein lok. EW

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da $\det(H_f(1,2)) = 16-4 = 12 > 0$ und

$f_{xx}(1,2) = 8 > 0$

$\rightarrow$ lokale Minimalstelle bei $(1,2)$ mit

$f(1,2) = -4$ ✓

(3)

$f(x,y) = x+y$ mit $g(\underline{x}) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 5 = 0$

$L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(2x^2 - 2xy + y^2 - 5)$

$L_x = 1 + 4x\lambda - 2y\lambda \overset{!}{=} 0$ I

$L_y = 1 - 2x\lambda + 2y\lambda \overset{!}{=} 0$ II

$L_\lambda = 2x^2 - 2xy + y^2 - 5 \overset{!}{=} 0$ III

II $\Rightarrow 2x = 2y + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow x = y + \frac{1}{2\lambda}$ 4.1

I $\Rightarrow 2y = 4x + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow y = 2x + \frac{1}{2\lambda}$

I - II $x - y = y - 2x$

$\Rightarrow 3x = 2y$

$x = \frac{2}{3}y \quad \wedge \quad \underbrace{y = \frac{3}{2}x}$ in III

$2x^2 - 3x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 5$

$\frac{5}{4}x^2 = 5$

$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \qquad y_1 = 3$

$x_2 = -2 \qquad y_2 = -3$

$P_1(2,3) \rightarrow f(P_1) = 5 \rightarrow$ Maximum

$P_2(-2,-3) \rightarrow f(P_2) = -5 \rightarrow$ Minimum

Index der Kommentare

2.1 Was ist mit y=0?

4.1 Was passiert bri lambda=0?

Mathematik für Informatiker 2 – Ha 11

Stefan Wasmer
12.07.23

①

$$y' = \cos(t) \cdot (y-1)^2 \qquad , y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t) \cdot (y-1)^2 \qquad \mid : (y-1)^2 \qquad , y \neq 1 \ (*)$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = \cos(t)\ dt$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int \cos(t)\ dt$$

$$\frac{1}{1-y} = \sin(t) + c_1$$

$$1 = (1-y)(\sin(t) + c_1)$$

$$1 = \sin(t) - y\sin(t) + c_1 - yc_1$$

$$1 = -y(\sin(t) + c_1) + \sin(t) + c_1$$

$$y = 1 - \frac{1}{\sin(t) + c_1}$$

AWP: $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1 = 2$

(*)

$y = 1 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 0 = \cos(t) \cdot 0$ w.A.

$y \equiv 1$ ist konstante Sonderlösung

② $y' + t^2 y = 2t^2 e^{t^3}$ $\qquad y(1) = \cosh(1)$

LDGL 1. Ordnung

1. allgemeine Lösung der homogen LDGL

$y' + t^2 y = 0$ $\qquad$ (*) $0 + 0 = 0$ ✓

$$y' = -t^2 y$$

$$\frac{dy}{dt} = -t^2 y$$

$y \neq 0$ (*)

$$\frac{dy}{y} = -t^2\, dt$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}t^3 + c_1$$

$$y = c_2 e^{-\frac{1}{3}t^3} \qquad c_2 = \pm e^{c_1}$$

✓

mit Sonderlösung $y \equiv 0 \Rightarrow y_h = c \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$

2. spezielle Lösung der inhomogen LDGL

Ansatz: $y_s = c \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$, wobei $c = c(t)$

Ableitung: $y_s' = c' \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + c \cdot \left(-t^2 e^{-\frac{1}{3}t^3}\right)$

einsetzen:

$$c' \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + c\left(-t^2 e^{-\frac{1}{3}t^3}\right) + t^2 \cdot c \cdot e^{-\frac{1}{3}t^2} = 2t^2 e^{t^3}$$

$$c' \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} = 2t^2 e^{t^3}$$

$$\Rightarrow c' = 2t^2 e^{t^3} e^{\frac{1}{3}t^3} = 2t^2 e^{\frac{4}{3}t^3}$$

$$\Rightarrow c(t) = \int c'\, dt = \frac{1}{2} e^{\frac{4}{3}t^3}$$

3. allgemeine Lösung:

$$y_{in} = y_h + y_s$$
$$= c \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + \frac{1}{2} e^{\frac{4}{3}t^3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$
$$= c \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + \frac{1}{2} e^{t^3}$$

AWP: $y(1) = \cosh(1)$

$$\cosh(1) = c \cdot e^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} e$$
$$\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} = c \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e}} + \frac{e}{2}$$
$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt[3]{e}}{2e} = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + \frac{1}{2} e^{t^3}$$

③ a) $y'' - 6y' + 5y = 4e^{-t}$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$

einsetzen in $y'' - 6y' + 5y = 0$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 1$$

$\Rightarrow y_1 = e^{5t} \qquad y_2 = e^{t}$

$\Rightarrow y_h = c_1 \cdot e^{5t} + c_2 e^{t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Ansatz für y_s:

$y_s = Ae^{-t} \qquad y_s' = -Ae^{-t} \qquad y_s'' = Ae^{-t}$

einsetzen: $Ae^{-t} + 6e^{-t} + 5Ae^{-t} = 12Ae^{-t} = 4e^{-t}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow y_s = \frac{1}{3}e^{-t}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}e^{-t} + c_1 \cdot e^{5t} + c_2 e^{t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

b) $y'' + 4y = \cos(2t)$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$

einsetzen in $y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$\Rightarrow y_1 = e^{2it}$ $\qquad y_2 = e^{-2it}$

$\Rightarrow y_1 = \cos(2t)$ $\qquad y_2 = \sin(2t)$

$\Rightarrow y_h = c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Ansatz für y_s:

$$y_s = t \cdot (A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t))$$

$$y_s' = (A + 2Bt)\cos(2t) + (B - 2At)\sin(2t)$$

$$y_s'' = 4(B - At)\cos(2t) - 4(A + Bt)\sin(2t)$$

einsetzen:

$$4(B - At)\cos(2t) - 4(A + Bt)\sin(2t)$$
$$+ 4(At\cos(2t) + Bt\sin(2t)) = \cos(2t)$$

$$(4B - 4At + 4At)\cos(2t) + (-4A - 4Bt + 4Bt)\sin(2t) = \cos(2t)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4}, \quad A = 0$$

$$\Rightarrow y_{in} = c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t) + \frac{1}{4} t \sin(2t)$$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$