Содержание

1 Лекция 1

1.1 Примеры рядов

Числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n, \text{ где } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Ряд Тейлора:

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ при } x_0 \in \mathbb{R} \text{ и } f \in c^{\infty}(O_h(x_0)). \tag{2}$$

1.2 Ряды Фурье

Другое представление сложных функций через простые - ряды Фурье.

Если f(x) - 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$, тогда $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$, где a_0, a_n, b_n - коэффициенты Фурье, зависящие от функции $f(x)$.

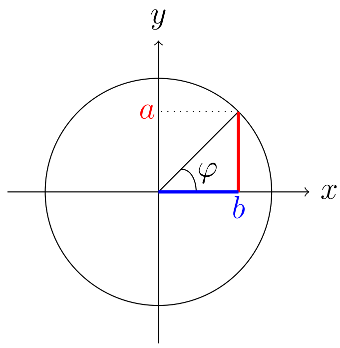
Этот ряд применяется к изучению периодических (колебательных) повторяющихся процессов в природе. Например, сигналы (звуковые, радио, теле), переменный электроток, а также в теории дифференциальных уравнений.

1.3 Гармонические колебания

Уравнение гармонических колебаний:

$$f(t) = Asin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

где t - время, $A > 0$ - амплитуда колебаний, ω - круговая частота, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период, φ - начальная фаза.



Так-как $sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тогда уравнение (3) можно переписать так:

$$f(t) = Asin(\omega t + \varphi) = Asin(\varphi)cos(\omega t) + Acos(\varphi)sin(\omega t) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sin(\omega t)\right), a \neq 0, b \neq 0.$$

1.4 Что можно делать с рядами Фурье?

1. Выделить из исходного сигнала его составляющую заданной частоте.
2. Выделение сигнала соответствующего диапазона частот.

Замечено, что конечные суммы $\sum_{n=1}^{N} a_n cos(n\omega x) + b_n sin(n\omega x)$ с частотами кратными ω, обладают разнообразными свойствами. Вопрос: можно ли произвольные колебания, с основной частотой ω, представить суммой гармонических колебаний с тем же периодом (не минимальным)? - Можно, если сумма бесконечна и добавлена постоянная составляющая.

1.5 Абстрактный аппарат для обоснования ряда Фурье

1.5.1 Линейное векторное пространство

Линейным векторным пространством X называется множество элементов x, на котором определены операции $+$ и $\times$ на числах: $\forall x,y \in X \Rightarrow \alpha x + \beta y : a, b \in \mathbb{R}$.

1.5.2 Аксиомы векторного пространства

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
2. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x x$
4. $\exists\ 0 \in X : 0 + x = x$

1.5.3 Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть $X \in \mathbb{R} : X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$. Тогда $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ линейно независимы, если:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Если существует такая линейная комбинация с минимум одним $a_i \neq 0$, тогда $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ линейно зависимы.

1.5.4 Евклидово векторное пространство

Линейное векторное пространство называется Евклидовым, если в нём задана операция скалярного произведения: $x, y \to (x, y)$ и удовлетворяет аксиомам:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
3. $(x, x) \geqslant 0,$ причем, если $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. Если $x, y \in \mathbb{R}^n : (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

1.5.5 Норма вектора

$$\|X\| = \sqrt{(x, x)} \Rightarrow \|X\| \geqslant 0.$$

Свойства нормы в X:

1. $\|X\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
   Доказательство:
   Так-как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, то неравенство следует из скалярного произведения.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|X\|$
   Доказательство:
   $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \cdot \|x\|.$
3. $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ (неравенство Коши-Буняковского)
   Доказательство:
   Возьмем $t \in \mathbb{R}$ и рассмотрим уравнение:

$$(x - ty, x - ty) = (x, x) - t(x, y) - t(y, x) + t^2 (y, y) =$$
$$= (x, x) - 2t(x, y) + t^2 (y, y) = 0,$$

если $y \neq 0$, то $(y,y) > 0$, тогда $\frac{D}{4} \leqslant 0$:

$$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leqslant 0;$$
$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y);$$
$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

4. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).
   Доказательство:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Смысл нормы $\|x\|$ - длина вектора, $\|x-y\|$ - расстояние.

Последовательность $X_n \in X$ (в евклидовом пространстве) называется сходящейся $\lim_{x\to\infty} X_n = x$, где $x \in X$, в том смысле, что $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

1.5.6 Плотное множество

Множество $E \subset X$ (в евклидовом пространстве) плотно, если $\forall x \in X \; \exists \; x_1, x_2, ..., x_n \in E : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

1.5.7 Ортогональная система векторов

Система векторов $x_1, x_2 ..., x_n$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной, если $(x_i, x_j) = 0$, при $i \neq j$.

1.5.8 Ортонормированная система векторов

Система векторов $x_1, x_2 ..., x_n$ (конечная или бесконечная) называется ортонормированной, если она ортогональна и $\|x_j\| = 1$.

Обозначим $C_2[-\pi;\pi]$ множество функций, определенных на отрезке $[-\pi;\pi]$, таких что функция f непрерывна на этом отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек (разрыв типа «скачок»). Значения в точках разрыва и в точках $-\pi$, π на функцию не влияют, т.е. функция и $C_2[-\pi;\pi]$ различны в конечном числе точек - отождествляются.