Содержание

7 Лекция 7

7.1 Граф

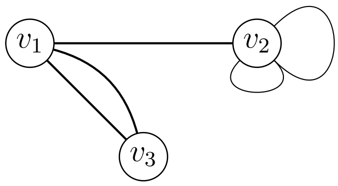
Графом $G = (V, E)$ называется пара конечных множеств V и E, где:

$$V = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \text{ — множество вершин, } |V| = n,$$
$$E = \{e_1, e_2, ..., e_m\} \text{ — множество рёбер, } |E| = m.$$

Если $e \in E \Rightarrow e = \{v_i, v_j\}$ - неупорядоченная пара.

7.1.1 Пример задания графа диаграмой

$$G = (V, E), \text{ где } V = \{v_1, v_2, v_3\};\ E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_2\}, \{v_1, v_3\}\big\}.$$



7.2 Инцидентность

Инцидентность — понятие, используемое только в отношении ребра и вершины: если v_1, v_2 — вершины, а $e = \{v_1,v_2\}$ — соединяющее их ребро, тогда вершина v_1 и ребро e инцидентны, вершина v_2 и ребро e тоже инцидентны. Две вершины (или два ребра) инцидентными быть не могут.

7.3 Петля

Петля в графе — ребро, инцидентное одной и той же вершине (ребро, у которого вершины одинаковые).

7.4 Кратные рёбра

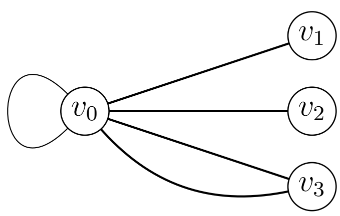
Кратные рёбра — несколько рёбер, инцидентных одной и той же паре вершин, т.е. если $e = \{v_i, v_j\}$ — встречается несколько раз (если один раз, то ребро называется простым).

7.5 Простой граф

Граф, в котором нет петель и кратных рёбер называется простым.

7.6 Степень вершины

Дан граф $G = (V, E)$, $v \in V$. Степень вершины ($\deg(v)$) - количество рёбер, выходящих из вершины.



$\deg(v_0) = 6$ (петля учитывается дважды)

7.7 Изолированная вершина

Вершина, степень которой равна 0 ($\deg(v) = 0$) называется изолированной.

7.8 Висячая вершина

Вершина, степень которой равна 1 ($\deg(v) = 1$) называется висячей.

7.9 Лемма о рукопожатиях

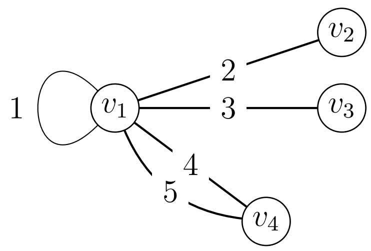
Рассмотрим граф $G = (V, E)$; $|V| = n$, $|E| = m$.

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m = 2|E|$$

то есть сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному числу его рёбер. Данное утверждение (и сама формула) известны как лемма о рукопожатиях. Название происходит от известной математической задачи: необходимо доказать, что в любой группе число людей, пожавших руку нечётному числу других чётно.

7.9.1 Пример

$\deg(v_1) = 6$, $\deg(v_2) = 1$, $\deg(v_3) = 1$, $\deg(v_4) = 2$;
$\sum_{i=1}^{4} \deg(v_i) = 6 + 1 + 1 + 2 = 10 = 2 * 5 = 2 \cdot |E|$.



7.10 Следствие из леммы о рукопожатиях

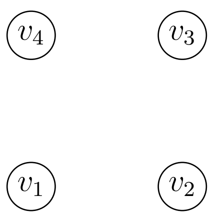
В любом графе количество нечётных вершин (вершин нечётной степени) всегда чётно.

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \sum_{\deg(V_j)\text{ - четн.}} \deg(v_j) + \sum_{\deg(V_k)\text{ - нечетн.}} \deg(v_k) = 2m.$$

7.11 Примеры графов

7.11.1 Вполне несвязный граф

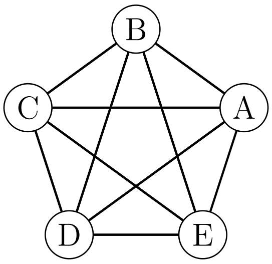
Вполне несвязный граф (пустой граф, нуль-граф) $G = (V, E)$, где $|V| = n$, $|E| = 0$ — регулярный граф (опред. 8.7) степени 0, то есть граф без рёбер.



7.11.2 Полный граф

Граф $K_n = (V, E)$ с $|V| = n$ называется полным, если для каждой пары вершин v_1, v_2, существует ребро, инцидентное v_1 и инцидентное v_2 (каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной).

$$|E(K_n)| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ по лемме 7.9}$$

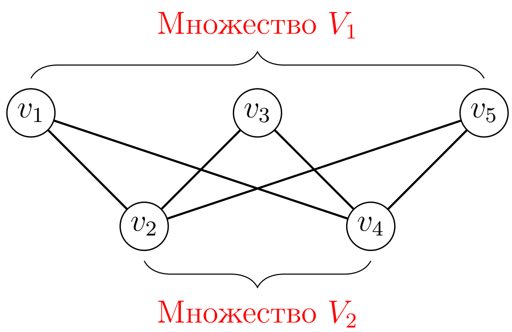


K_5

7.11.3 Двудольный граф и полный двудольный граф

Двудольный граф (или биграф, или чётный граф) — это граф $G(V,E)$, такой, что множество вершин V разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, причём всякое ребро E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются «долями» двудольного графа.

Полный двудольный граф — специальный вид двудольного графа, у которого любая вершина первой доли соединена со всеми вершинами второй доли вершин.



Полный двудольный граф $K_{3,2}$

8 Лекция 8

8.1 Маршрут

Маршрут длинны k:

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

Замечания:

1. Если граф простой, то из маршрута можно отбросить рёбера e.
2. Маршрут длинны 0 — вершина.

8.2 Замкнутый маршрут

Маршрут называется замкнутым, если начальная и конечная вершины совпадают.

8.3 Цепь

Незамкнутый маршрут называется цепью, если рёбра попарно различны.

8.4 Простая цепь

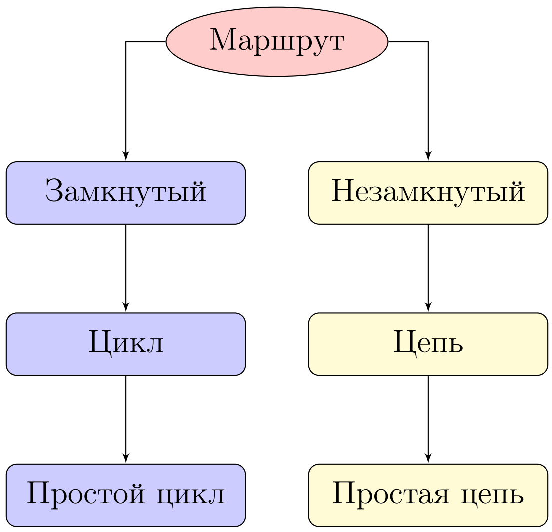
Цепь, где вершины не повторяются называется простой.

8.5 Цикл

Замкнутый маршрут называется циклом, если нет повторяющихся рёбер.

8.6 Простой цикл

Цикл называется простым, если нет повторяющихся вершин.



8.7 Регулярный граф

Граф $G = (V,E)$ – регулярный, если степени вершин равны

$$\forall v \in V : \deg v = e$$

8.8 Расстояние

Расстояние $d(u,v)$ — кратчайший маршрут от u до v.

8.9 Диаметр

Диаметр графа — расстояние между самыми удалёнными вершинами.

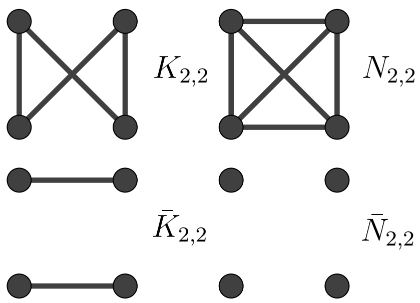
8.10 Подграф

Подграф $G' = (V',E')$ состоит из части вершин $(V' \subset V)$ и рёбер $(E' \subset E)$ графа $G = (V,E)$

8.11 Дополнительный граф

$G = G(V,E)$ — простой граф, граф $\bar{G} = (V,\bar{E})$ — дополнительный, если

$$\{u,v\} \in E \Leftrightarrow \{u,v\} \notin \bar{E}$$



8.12 Связный граф

Граф $G = (V,E)$ называется связным, если любые две вершины соединеный маршрутом.

8.13 Компонент связности

$G = (V,E)$ – компонент связности, если он является макимальным по включению связным подграфом.

8.14 Мост

$e \in E$ – мост (перешеек), если после его удаления количество компонентов связности в исходном графе увеличивается.

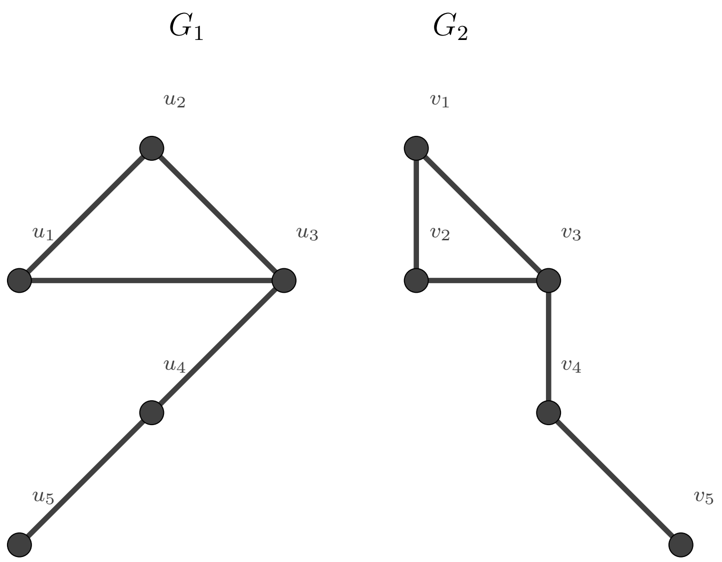
8.15 Разделяющая точка

$v \in V$ – разделяющая точка, если удаление этой точки приводит к увеличению компонентов связности в исходном графе.

8.16 Изоморфизм графа

$G_1 = (V_1,E_1)$, $G_2 = (V_2,E_2)$ – простые.
$G_1 \cong G_2$ – изоморфны, если существует взаимосвязь: $\exists \varphi : V_1 \to V_2$, такая что:

$$\{u,v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u),\varphi(v)\} \in E_2$$



8.17 Необходимые признаки изоморфности:

$G_1 \cong G_2$:

1. $|V_1| = |V_2|$
2. $|E_1| = |E_2|$
3. Набор степеней вершин одинаков.