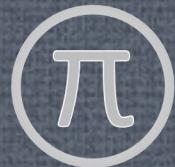


HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Dritter Teil



HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Dritter Teil

Stefan Wurm

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

Copyright © 2022 ATICE-LLC. Alle Rechte vorbehalten. Veröffentlicht in den Vereinigten Staaten von Amerika.

Erste deutschsprachige ATICE E-Book Ausgabe | ISBN 978-1-951894-07-8

Für Informationen über die Genehmigung zur Vervielfältigung von Auszügen aus diesem Buch wenden Sie sich bitte an ATICE LLC, www.atice-llc.com.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Integrale mit Parametern	1
1.1 Differentiation unter dem Integral	2
1.2 Vertauschung der Reihenfolge der Integration in Doppelintegralen	3
1.3 Integrale mit variablen Grenzen	4
1.4 Uneigentliche Integrale mit Paramter	5
1.5 Die Laplace Transformation	7
1.5.1 Die Laplace-Transformation der Ableitung	9
2 Mehrfachintegrale	11
2.1 Integral für eingeschränkte Funktionenklasse	11
2.1.1 Eine Charakterisierung des Integrals	14
2.1.2 Transformationsformel des Mehrfachintegrals unter linearen Abbil-dungen	15
2.2 Erweiterung der Klasse der integrierbaren Funktionen	17
2.2.1 Vertauschung der Integrationsreihenfolge	19
2.2.2 Anwendung: Das Cavalierische Prinzip	20
2.3 Formulierung der allgemeinen Transformationsformel für Gebietsintegrale	21
3 Integralsätze in der Ebene	25
3.1 Integrabilitätskriterium	26
3.2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und der Cauchy Inte-gralsatz	29
3.2.1 Der Integralsatz von Cauchy	31
4 Flächen im Raum und Oberflächenintegrale	35
4.1 Darstellungarten für Flächen	35

4.1.1	Regularitätsbedingung	37
4.1.2	Geometrische Bedeutung	37
4.2	Die Größenmessung von krummen Flächen	39
4.2.1	Invarianz des Flächeninhalts gegenüber orthogonalen Transformationen A des \mathbb{R}^3	41
4.2.2	Invarianz des Flächenmaßes gegenüber Parameter Transformationen	41
4.3	Der Gaußsche Satz	42
4.4	Differentialgeometrische Interpretation des Gaußschen Satzes	45
4.5	Der Stokes'sche Integralsatz	47
5	Quadratische Matrizen und Determinanten	49
5.1	Charakteristische Eigenschaften der Determinante	51
5.1.1	Rechenregeln	53
5.2	Produktsatz für Determinanten	54
5.2.1	Verhalten der Determinante unter elementaren Zeilenumformungen	55
5.2.2	Regeln für Zeilenumformungen	56
5.2.3	Die Adjunkte einer Matrix $A \in M_n(K)$	56
5.2.4	Die inverse Matrix	57
6	Vektorräume, lineare Selbstabbildungen, Eigenwerte	61
6.1	Vektorraum Axiome	61
6.1.1	Linearkombinationen	62
6.1.2	Austauschsatz von Steinitz	63
6.2	Unterräume und Dimensionsformel	64
6.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	66
6.4	Euklidische und unitäre Skalarprodukte	70
6.4.1	Orthonomierungssatz	71
6.4.2	Die Hauptachsentransformation	73
7	Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	79
7.1	Differentialgleichung des Wachstums und Zerfalls	79
7.1.1	Die zugehörige inhomogene Differentialgleichung	80
7.2	Differentialgleichung der gedämpften Schwingung	80
7.2.1	Die zugehörige inhomogene lineare Differentialgleichung	84
7.2.2	Umschreibung der Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung	85

7.3	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	87
7.3.1	Ansatz der Picard-Iteration	87
7.4	Matrixnormen	88
7.4.1	Exponentialfunktion auf $M_n(\mathbb{K})$	90
7.5	Die allgemeine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in \mathbb{K}^n	92
7.6	Die Jordansche Normalform für Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$	94
7.7	Skalarwertige lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	96
7.8	Stabilitätsfragen	98
7.8.1	Stabilitätskriterium für reelle Polynome	100
7.9	Anwendungen der LaplaceTransformation	101
8	Existenz- und Eindeutigkeitssatz für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen	107
8.1	Die Lipschitzbedingung	108
8.1.1	Definition der Lipschitzbedingung	109
8.1.2	Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten	110
8.2	Existenzsatz von Picard und Lindelöf	111
8.2.1	Das Runge-Kutta Verfahren	114
8.2.2	Simpsonsche Regel	114
8.2.3	Der Potenzreihenansatz	115
8.3	Gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung	116
8.3.1	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten	117
8.3.2	Der Fall minimaler Dimension $n = 1$	119

Vorwort

An deutschsprachigen Hochschulen gehören Vorlesungen zu Höherer Mathematik zum festen Bestandteil der Ausbildung in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Diese Vorlesungen zielen darauf ab den Studierenden die mathematischen Grundlagen für ihre jeweiligen Fachgebiete zu vermitteln, typischerweise in den ersten vier Semestern eines Studiengangs. So war es auch bei mir als ich zu Beginn meines Physikstudiums vor gut vierzig Jahren zum ersten Mal den Hörsaal betrat in welchem Prof. Dr. Armin Leutbecher die Vorlesung Höhere Mathematik I hielt. Es ist mir klar, dass sich nicht alle gleichermaßen für Mathematik begeistern können oder wollen. Aber ich vertraue darauf, dass jene die diese Zeilen jetzt lesen es schon richtig verstehen werden, wenn ich hier bekenne, dass diese Vorlesungen mich beglückt haben. Beglückt in dem Sinne, dass ich mich damals auf jede einzelne dieser Vorlesungen im Voraus freute. Das hatte sicher nicht ausschließlich mit dem Inhalt der Vorlesungen zu tun, sondern mindestens ebenso mit der Art und Weise wie dieser von Prof. Leutbecher vermittelt wurde. Natürlich erwartet man von einem Mathematiker Klarheit. Aber jene Klarheit, mit der professionelle Mathematiker in aller Regel ihre Diskussionen führen, überträgt sich nicht notwendigerweise darauf, wie ein Mathematiker dann eventuell sein Wissen Studierenden vermittelt. Prof. Leutbecher's Klarheit und Stil des Vortrags machten seine Höhere Mathematik Vorlesungen zu einem intellektuellen Vergnügen. Zudem hatte ich das Glück, dass die Übungen zu Prof. Leutbecher's Vorlesungen von Dr. Peter Vachenauer betreut wurden. Anfang der 1990er erschien die erste Ausgabe eines zweibändigen Lehrbuchs zu Höherer Mathematik dessen Koautor Dr. Vachenauer ist. Die exemplarische Methodik und Sorgfalt, mit welcher der Stoff mit den Lernenden in Dr. Vachnauers Übungen zu meiner Zeit an der TUM vertieft wurde, findet sich in diesem Lehrbuch wieder.

Vor etwas mehr wie einem Jahr stolperte ich beim Aufräumen über meine Mitschrift der Höhere Mathematik Vorlesungen aus den Jahren 1981-1983 und die entsprechenden Übungen. Zuerst war ich verwundert, dass diese gut vierzig Jahre alten Unterlagen bei diversen Umzügen, auch zwischen Kontinenten, nicht verloren gingen. Neugierig begann ich in meinen Vorlesungsaufzeichnungen zu blättern und unvermittelt beschlich mich dabei wieder die gleiche Freude wie ich sie verspürte als ich damals im Hörsaal saß und gebannt dem Vortrag von Prof. Leutbecher zuhörte. Wiewohl diese Notizen, meine Mitschrift von Prof. Leutbecher's Vorlesungen, kein Lehrbuch ersetzen können, vermitteln

sie wesentliche Inhalte Höherer Mathematik mit einer Lebendigkeit, die sie nach meinem Dafürhalten zu einem Lesevergnügen für Studierende oder andere ernstlich an Mathematik Interessierte machen sollten. Allzu oft sind solche Notizen mit Fehlern behaftet und das war auch hier nicht anders. Nach mehrmaliger Durchsicht und Korrektur meiner Aufzeichnungen ist hoffentlich die große Mehrzahl davon bereinigt. Klarheit und Stil von Prof. Leutbecher's Vortrag zu bewahren, so wie ich diese in meiner Mitschrift vor mehr als vierzig Jahren einfing, darauf legte ich bei der Überarbeitung meiner Notizen größten Wert. Inwieweit dies gelungen ist mag der Leser beurteilen. Der vorliegende Band, **HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Dritter Teil**, beinhaltet den Stoff der Vorlesung Höhere Mathematik III wie sie im Wintersemester 1982/83 an der TUM von Prof. Leutbecher gehalten wurde.

Stefan Wurm

Albany, New York

Mai 2022

1. Integrale mit Parametern¹

Satz: Integrale mit Parametern über stetige Integranden sind stetig.

Gegeben: $I = [a, b]$, $J = [c, d]$

$$f : I \times J \mapsto \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Dann ist die durch

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

erklärte Funktion als Funktion von y stetig auf J .

Bemerkung:

Statt J kann auch ein Kompaktum in einem höherdimensionalen Raum genommen werden.

Weitere grundlegende Eigenschaften der Kompakta:

Jede reelle stetig Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall x, \quad \text{falls } |y - y_0| < \delta \end{aligned}$$

¹Vergleiche mit Kapitel 1 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil.

1.1 Differentiation unter dem Integral

Unter den Voraussetzungen von oben sei zusätzlich

$$y \longmapsto f(x, y)$$

differenzierbar für alle $x \in I = [a, b]$ deren Ableitung $D_2 f(x, y)$ als Funktion von x, y auf $I \times J$ stetig. Dann ist

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

auf J differenzierbar (stetig) mit Ableitung

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y) dx$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} & \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b D_2 f(x, y) dx \\ &= \int_a^b \underbrace{\left[\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} - D_2 f(x, y) \right]}_{\text{Mittelwertsatz:}} dx \end{aligned}$$

$$D_2 f(x, y + \delta_x h), \quad 0 \leq \delta_x \leq 1$$

Diese Formel ergibt die Behauptung über $F'(y)$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $D_2 f(x, y)$ auf $I \times J$. Die Stetigkeit von F' folgt aus dem ersten Satz angewandt auf $D_2 f(x, y)$ statt $f(x, y)$.

Beispiel:

$$F(y) = \int_0^\pi \cos(xy) dx = \frac{\sin(\pi y)}{y}$$

ist stetig differenzierbar nach dem letzten Satz. Die Ableitung lässt sich hier leicht direkt berechnen

$$F'(y) = \frac{\pi y \cos(xy) - \sin(\pi y)}{y^2}$$

1.2 Vertauschung der Reihefolge der Integration in Doppelintegralen

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt die Formel

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Beweis durch Rückführung auf den letzten Satz:

Hilfsfunktion:

$$F(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(x, t) dt \right) dx$$

Sie hat den Integranden

$$\int_c^y f(x, t) dt$$

Er ist nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung

$$D_2 \left(\int_c^y f(x, t) dt \right) = f(x, y)$$

Nach Voraussetzung stetig auf $I \times J$. Daher kann der letzte Satz auf F angewandt werden mit dem Resultat

$$F'(y) = \int_a^b D_2 \left(\int_c^y f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b f(x, y) dx$$

Zur Behandlung beachte $F(c) = 0$. Daher

$$F(d) = \text{rechte Seite der Behauptung}$$

$$= F(d) - F(c) = \int_c^d F'(y) dy$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \text{linke Seite der Behauptung}$$

□

1.3 Integrale mit variablen Grenzen

$$G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} g(x, y) dx$$

lassen sich zurückführen auf die eingangs behandelten Integraltypen mit Hilfe einer Substitution!

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y) + (\psi(y) - \varphi(y)) t \\ &= \varphi(y)(1-t) + \psi(y)t ; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ dx &= (\psi(y) - \varphi(y)) dt \end{aligned}$$

Damit

$$G(y) = (\psi(y) - \varphi(y)) \int_0^1 g(\varphi(y)(1-t) + \psi(y)t, y) dt$$

Ist etwa g stetig partiell differenzierbar nach beiden Variablen und sind φ und ψ stetig differenzierbar, dann wird $G(y)$ stetig differenzierbar nach dem Satz über Differentiation unter dem Integral. Wieder einfacher, die Ableitung direkt zu berechnen

$$\begin{aligned} \frac{G(y+h) - G(y)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_{\varphi(y+h)}^{\psi(y+h)} g(x, y+h) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} g(x, y) dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} g(x, y) dx - \frac{1}{h} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} g(x, y) dx \\ &\quad + \int_{\varphi(y+h)}^{\psi(y+h)} \frac{g(x, y+h) - g(x, y)}{h} dx \end{aligned}$$

Grenzbetrachtung $h \rightarrow 0$ liefert

$$G'(y) = \psi'(y)g(\psi(y), y) - \varphi'(y)g(\varphi(y), y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} D_2 g(x, y) dx$$

1.4 Uneigentliche Integrale mit Parametern

Ein uneigentliches Integral wird definiert für stetige Integranden $g(x)$ auf halboffenen Intervallen $[a, b[$ beziehungsweise $]a, b]$ oder auf offenen Intervallen $]a, b[$ (mit dem Sonderfall $b = +\infty, a = -\infty$) als Limes. So etwa für $[a, b[$

$$\int_a^b g(x) dx : \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta g(x) dx \quad (\text{man vergleiche mit HM2})^2$$

Wie bei Reihen und Funktionen wird für uneigentliche Integrale mit Parameter der Begriff „gleichmäßige Konvergenz“ benötigt:

Definition:

Seien $I = [a, b[$, $J = [c, d]$ Intervalle und $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

heißt gleichmäßig konvergent, wenn erstens $F(y)$ konvergiert für jedes $y \in J$ und wenn zweitens für jedes $\epsilon > 0$ ein $\beta_\epsilon \in]a, b[$ existiert mit

$$\left| F(y) - \int_a^\beta f(x, y) dx \right| < \epsilon \quad \text{für alle } y \in J$$

falls $\beta \geq \beta_\epsilon$ ($\beta < b$) ist.

Bemerkung:

- (1) Falls $I =]a, b[$ offen ist, dann ist die Definition sinngemäß zu erweitern auf a . Es kann auch das Integrationsintervall durch einen Zwischenpunkt zerlegt werden.

Beispiel: Das Gamma-Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

ist lokal gleichmäßig konvergent, das heißt für alle $\delta > 0$, $c > \delta$ ist auf $J = [\delta, c]$ das Integral gleichmäßig konvergent.

²Siehe Kapitel 1, *Grundzüge der Integralrechnung*, in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil.

Bemerkung:

- (2) Die gleichmäßige Konvergenz ergibt sich aus dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale.³

Auf dem Intervall $]0, 1[$ beachte

$$0 < e^{-t} t^{x-1} \leq t^{\delta-1}, \quad (0 < t \leq 1)$$

und auf $[1, \infty[$

$$0 < e^{-t} t^{x-1} \leq N! t^{-N+c-1}$$

Limesvertausch für uneigentliche Integrale mit Parameter:

Es sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- (1) Wenn

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

auf $J = [c, d]$ gleichmäßig konvergiert, dann ist $F(y)$ eine stetige Funktion auf J .

- (2) Wenn über dies hinaus $y \mapsto f(x, y)$ nach y differenzierbar ist und $D_2 f(x, y)$, die Ableitung, als Funktion von x, y stetig ist und

$$\int_a^b D_2 f(x, y) dx \quad \text{für jedes } J \text{ konvergiert,}$$

dann ist $F(y)$ stetig differenzierbar auf J mit Ableitung

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y) dx$$

Beweis:

- 1) Der Beweis wird geführt über eine Zerlegung

$$I = [a, b] = [a, \beta] \cup [\beta, b]$$

mit der Abschätzung aus der gleichmäßigen Konvergenz für $[\beta, b]$ und dem (bereits bewiesenen) Satz über die Stetigkeit eigentlicher Integrale mit Parameter.

³Siehe Kapitel 1, Abschnitt *Uneigentliches Integral*, Beispiele (1), (2) und (3), in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil.

$$\begin{aligned}
2) \quad & \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b D_2 f(x, y) dx \\
&= \int_a^\beta \left(\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} D_2 f(x, y) \right) dx + \int_\beta^b (\dots) dx
\end{aligned}$$

Wie zuvor Zusammenfassung des Satzes über eigentliche Integrale mit der Abschätzung der gleichmäßigen Konvergenz.

□

Der Integrand der Γ -Funktion, $e^{-t} t^{x-1}$, ist differenzierbar nach x mit der Ableitung $e^{-t} \ln(t) \cdot t^{x-1}$. Abschätzung wie beim Γ -Integral ergibt gleichmäßige Konvergenz auf den Intervallen $[\delta, c]$, $0 < \delta < c$. Daher ist $\Gamma(x)$ differenzierbar auf $]0, \infty[$ mit der Ableitung

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} \ln t t^{x-1} dt$$

Bemerkung:

Durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt sich: $\ln \Gamma(x)$ ist auf $]0, \infty[$ konvex. Mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ hat man sogar eine Charakterisierung der Gamma-Funktion.

1.5 Die Laplace Transformation

wird erklärt für reelle (oder komplexe) Funktionen f auf $]0, \infty[$ durch

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Zum Beispiel die Konstante $f = 1$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Für einige Funktionen ist die Laplace-Transformierte beständig divergent, etwa $f(t) = e^{t^2}$, denn $e^{-st} e^{t^2} = e^{t(t-s)} \geq e^t$ falls $t \geq s+1$

Dagegen $f(t) := e^{at}$ liefert

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt \\
 &= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad a < s
 \end{aligned}$$

Die Treppenfunktion

$$R_a(t) := \begin{cases} 1 & \text{in } 0 < t < a \\ 0 & \text{in } t > a \end{cases}$$

hat für alle s konvergente Laplace-Transformierte

$$\int_0^\infty e^{-st} R_a(t) dt = \int_0^a e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^a = \frac{1 - e^{-sa}}{s}$$

Die Ausgangsfunktionen f sind sämtliche auf $]0, \infty[$ erklärt, dagegen ist der Konvergenzbereich von $(\mathcal{L}f)(s)$ in s abhängig von f .

Wichtige Eigenschaft der Laplace-Transformierten: Die Linearität, das heißt

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}(f+g))(s) &= (\mathcal{L}f)(s) + (\mathcal{L}g)(s) \\
 (\mathcal{L}\lambda f)(s) &= \lambda(\mathcal{L}f)(s), \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen für die absolute Konvergenz von $(\mathcal{L}f)(s)$:

- a) f ist auf $]0, \infty[$ stetig mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Sprungstellen.
- b) Für $t \searrow 0$ wächst $|f|$ nicht stärker als eine Potenz von t mit Exponenten > -1 , das heißt es gibt M_0, t_0, δ mit

$$|f(t)| \leq M_0 t^{\delta-1} \quad \text{für } t \leq t_0$$

- c) f ist von exponentiellem Wachstum σ , das heißt es gibt positive Zahlen t_1, M_1 mit

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\sigma t} \quad \text{für } t \geq t_1$$

Unter diesen Voraussetzungen ergibt das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale die absolute Konvergenz der Laplace-Transformation falls $\sigma < s$. Die Abschätzung entspricht dem Vorgehen beim Gamma-Integral!

1.5.1 Die Laplace-Transformation der Ableitung

Die Funktion f erfülle samt f' die Eigenschaften a), b) und c). Dann gilt für die Laplace-Transformierte von f'

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)$$

Beweis mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt &= \underbrace{e^{-st} f(t)}_{\downarrow} \Big|_0^T + s \underbrace{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}_{\downarrow} \\ &= -f(0) + s(\mathcal{L}f)(s) \end{aligned} \quad \square$$

Beispiele:

1) $f(t) = \sin \omega t, s > 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t dt \\ &= \frac{\omega}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos \omega t \Big|_0^\infty \right] - \int_0^\infty \frac{\omega^2}{s^2} \sin \omega t e^{-st} dt \\ &= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} (\mathcal{L}f)(s) \\ \Rightarrow (\mathcal{L}f)(s) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

2) $f(t) = \cos \omega t, s > 0$

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t, \text{ daher nach dem letzten Satz}$$

$$(\mathcal{L} \cos \omega t)(s) = \frac{s}{\omega} (\mathcal{L} \sin \omega t)(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

3) $f(t) = t^\alpha, s > 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt \quad \text{mit Substitution: } u = st, du = sdt \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{u/s} u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1 \end{aligned}$$

2. Mehrfachintegrale

Eine Einführung in die Integrationstheorie in zwei Schritten

- I. Erklärung eines Integrals im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n für eine eingeschränkte Funktionenklasse $C_0(\mathbb{R}^n)$ unter Verwendung des gewöhnlichen Integrals. Studium charakteristischer Eigenschaften.
- II. Erweiterung der Funktionenklasse durch Approximation neuer Funktionen mit Funktionen im $C_0(\mathbb{R}^n)$ und Übertragung der charakteristischen Eigenschaften.

2.1 Integral für eingeschränkte Funktionenklasse

Die Klasse $C_0(\mathbb{R}^n)$ besteht aus den stetigen reellen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ die außerhalb einer (für f) hinreichend großen beschränkten Menge nur den Wert 0 annehmen (kurz: stetige Funktionen, welche außerhalb eines Kompaktums verschwinden).

Im Falle $n = 1$ gibt es also zu $f \in C_0(\mathbb{R})$ Zahlen $a < b$ mit

$$f(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t \in [a, b]$$

Integral: (formal über den ganzen \mathbb{R}^1)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Es ist unabhängig von der Wahl der Hilfszahlen a, b .

Wichtige Eigenschaften:

Linearität:

$$\int (f + g) = \int f + \int g ; \quad \forall f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

$$\int(\lambda f) = \lambda \int f ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Monotonie:

$$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g ; \quad \forall f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

Translationsinvarianz:

$$f \in C_0(\mathbb{R}^n), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

$$\tau_c(f)(x) = f(x - c)$$

$$\Downarrow$$

$$\int f = \int \tau_c f ; \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n), \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Sei jetzt $n > 1$ und $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, dann gibt es ein $b > 0$ mit

$$f(\vec{x}) = 0 \quad \text{falls} \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \geq b$$

Für beliebiges $(x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist

$$g(x_2, \dots, x_n) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

erklärt und g wird nach dem [Satz in Kapitel 1](#) über Integrale mit Parametern mit stetigen Integranden stetig. Ist aber

$$\max_{2 \leq i \leq n} |x_i| \geq b , \quad \text{dann ist}$$

$$f(t, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Daher ist dann $g(x_2, \dots, x_n) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Präzise: $g \in C_0(\mathbb{R}^{n-1})$

Durch mehrfache Anwendung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$

wird zugleich ein lineares, monotones und translationsinvariantes Funktional auf $C_0(\mathbb{R}^n)$ erklärt.

Beispiele:

(1) Volumen einer Halbkugel $n = 2, R > 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 > R^2 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x_2^2}}^{\sqrt{R^2 - x_2^2}} \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} dx_1 \right) dx_2 = \frac{2\pi}{3} R^3$$

(2) Seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$

Dazu wird

$$f(\vec{x}) := \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(x_n)$$

eine Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n &= \left(\int \varphi_1(x_1) dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int \varphi_n(x_n) dx_n \right) \\ &= \prod_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}} \varphi_m(t) dt \end{aligned}$$

Bemerkung:

(1) Zur Translationsinvarianz:

Ist $f \in C_0(\mathbb{R})$ außerhalb $[a, b]$, dann wird die (durch $\tau_c(f)(x) := f(x - c)$ erklärte) verschobene Funktion $\tau_c f$ außerhalb $[a + c, b + c]$ verschwinden. Das Integral wird

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\tau_c f)(x) dx &= \int_{a+c}^{b+c} f(x - c) dx, \quad \text{mit } x - c = t \\ &= \int_a^b f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt \end{aligned}$$

2.1.1 Eine Charakterisierung des Integrals

Satz: Ist $I : C_0(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$ irgendein monotones und translationsinvariantes Funktional, dann existiert genau ein $c \geq 0$ mit

$$I(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad \text{für alle } f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

Bemerkung:

- (2) Zur Berechnung der Konstanten c genügt die Kenntnis von $I(f_0)$ für eine einzige Funktion $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \neq 0$$

Denn dann $c = \frac{I(f_0)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n}$

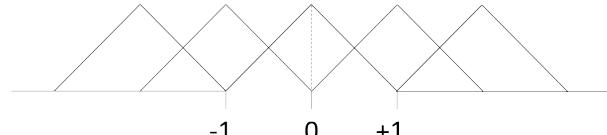
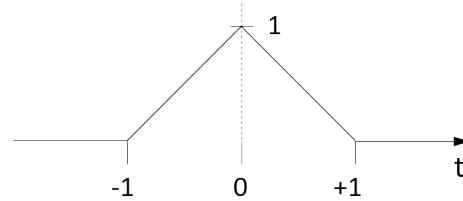
Beweisskizze:

- 1) Die Zackenfunktion

$$\lambda_0(t) = \max(0, 1 - |t|) \quad \text{gelöst in } C_0(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda_0(t) dt = 1 \quad ; \quad \lambda_1(t) = \lambda_0(2t)$$

$$\begin{aligned} \sum_{g \in \mathbb{Z}} (\tau_g \lambda_0)(t) &= 1 \\ \lambda_0 &= \frac{1}{2} \tau_{-\frac{1}{2}} \lambda_1 + \lambda_1 + \frac{1}{2} \tau_{+\frac{1}{2}} \lambda_1 \end{aligned}$$



- 2) Im n -dimensionalen wird mit $\lambda_{k+1}(t) = \lambda_k(2t)$

$$\Lambda_k(\vec{x}) = \lambda_k(x_1) \cdot \lambda_k(x_2) \cdot \dots \cdot \lambda_k(x_n)$$

Daraus ergibt sich eine „Partition der Eins“

$$\sum_{g \in 2^{-k} \mathbb{Z}^n} \tau_g \Lambda(\vec{x}) = 1 \quad \forall x$$

3) Zu $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ bilde man die Folgen

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{g \in 2^{-k}\mathbb{Z}^n} f(g)(\tau_g \Lambda_k)(\vec{x})$$

Resultat: f_k konvergiert gleichmäßig gegen f .

Hilfssatz: Monotone lineare Funktionale sind vertauschbar mit gleichmäßigen Limiten.

□

2.1.2 Transformationsformel des Mehrfachintegrals unter linearen Abbildungen

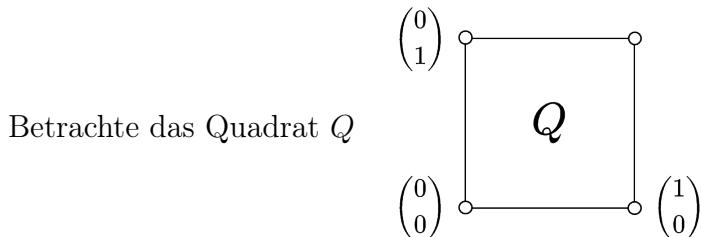
Lineare Selbstabbildungen A des \mathbb{R}^n haben die charakteristischen Eigenschaften

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= A(\vec{x}) + A(\vec{y}) \\ A(\lambda \vec{x}) &= \lambda(A(\vec{x})) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Umkehrbar ist A genau dann, wenn $\det A = 0$.

Beispiel:

(3) Für $n = 2$ (Beschreibung von A durch Matrizen)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \\ & \nearrow A(Q) & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \square & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \det A = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \\ & \nearrow A(Q) & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \square & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \det A = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \\ \text{mit} \\ c^2 + s^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagramm eines Parallelogramms mit Diagonale } A(Q) \text{ und einem Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{det } A = 1 \end{array}$$

Für jede invertierbare lineare Abbildung A des \mathbb{R}^n gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n := \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A(\vec{x}) |\det A| dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$

Bemerkung:

(3) $|\det A|$ ist Flächen- beziehungsweise Volumen-Verzerrungsfaktor.

Beweisidee:

Rückführung auf den Charakterisierungssatz

$$I_A(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad \text{für alle } f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

Das ist ein lineares, monotones und translationsinvariantes Funktional auf $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Linearität:

$$(f + g)(A\vec{x}) = f(A\vec{x}) + g(A\vec{x}) \Rightarrow$$

$$I_A(f + g) = I_A(f) + I_A(g)$$

$$I_A(\lambda f) = \lambda I_A(f)$$

Monotonie:

$$f \leq g \Rightarrow f(A\vec{x}) \leq g(A\vec{x}) \quad \forall \vec{x}$$

$$f \circ A \leq g \circ A \Rightarrow I_A(f) \leq I_A(g)$$

Translationsinvarianz: $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$$(\tau_{\vec{c}}(f \circ A))(\vec{x}) = f \circ A(\vec{x} - \vec{c})$$

$$\begin{aligned}
 &= f(A(\vec{x} - \vec{c})) \quad (A \text{ ist linear}) \\
 &= f(A\vec{x} - A\vec{c}) = (\tau_{A\vec{c}})(A\vec{x})
 \end{aligned}$$

daher $\tau_{\vec{c}}(f \circ A) = (\tau_{A\vec{c}}f) \circ A$

Resultat aus dem Charakterisierungssatz

$$I_A(f) = c_A I(f) \text{ mit einem } c_A \geq 0$$

Weil Matrizenmultiplikation die Abbildungskomposition bedeutet, folgt $c_{AB} = c_A c_B$. Konsequenz aus der Methode der elementaren Umformungen: Die Konstante c_A ist der Betrag $|\det A|$.

□

2.2 Erweiterung der Klasse der integrierbaren Funktionen

Gegeben sei eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Frage: Gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ approximierende Funktionen $\varphi, \psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi - \varphi)(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n < \epsilon?$$

Ist das der Fall, dann ist f integrierbar und das Integral ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = \sup_{\varphi} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = \inf_{\psi} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Insbesondere wird für Teilungen B des \mathbb{R}^n ein n -dimensionales Volumen erklärt über die sogenannte charakteristische Funktion

$$\chi_B(\vec{x}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \vec{x} \in B \\ 0, & \text{falls } \vec{x} \notin B \end{cases}$$

Definition:

$B \subset \mathbb{R}^n$ heißt „messbar“, falls χ_B im obigen Sinne integrierbar ist und dann

$$\text{vol}_n(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Beispiel:

(4) Zur Kontrolle des abstrakten Volumenbegriffs: $n = 3$

$$B = \{x_1, x_2, x_3 \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, a_3 \leq x_3 \leq b_3\}$$

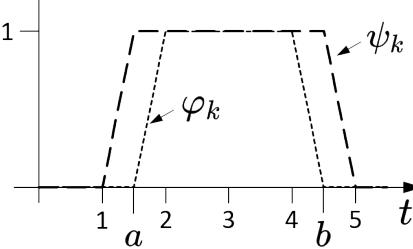
χ_B ist nicht stetig, auf dem Rande des Quaders sind Unstetigkeitsstellen.

Hilfsfunktionen:

$$\varphi_k(t, a, b), \psi_k(t, a, b)$$

rechts skizziert für:

$$k = 1, a = 1.5, b = 4.5$$



$$\varphi_k(t, a, b) = \begin{cases} \min(1, 2^{k-1}(b-a) - |2^k t - 2^{k-1}(a+b)|), & \text{falls } t \in [a, b] \\ 0, & \text{falls } t \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\psi_k(t, a, b) = \begin{cases} \max(0, 1 + 2^{k-1}(b-a) - |2^k t - 2^{k-1}(a+b)|), & \text{falls } t \in [a, b] \\ 1, & \text{falls } t \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\Phi_k(\vec{x}) := \prod_{m=1}^3 \varphi_k(x_m, a_m, b_m)$$

$$\Psi_k(\vec{x}) := \prod_{m=1}^3 \psi_k(x_m, a_m, b_m)$$

Mit [Beispiel \(2\)](#)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi_k(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \prod_{m=1}^3 (b_m - a_m - 2^{-k})$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_k(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \prod_{m=1}^3 (b_m - a_m + 2^{-k})$$

Daher ($k \rightarrow \infty$)

$$\text{vol}_3(B) := \int_{\mathbb{R}^3} \chi_B(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

Bemerkung:

(4) Zur charakteristischen Funktion χ_B

Sie gestattet Erklärung von Bereichsintegralen durch ($B \subset \mathbb{R}^n$)

$$\int_B f(\vec{x}) \, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\vec{x}) f(\vec{x}) \, dx_1 \dots dx_n$$

Formaler Vorteil: Die geometrischen Komplikationen von B treten erst später auf.

(5) Zum Quadervolumen

Statt über χ_B zu integrieren hätte man über jede Funktion f integrieren können, welche nur im Inneren und im Äußeren des Quaders B mit χ_B übereinstimmt, aber auf dem Rand beliebig mit $f(\vec{x}) \in [0, 1]$.

Das Resultat mit denselben Hilfsfunktionen Φ_k, Ψ_k

$$\text{vol}_3(B) = \int \chi_B = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}) \, dx_1 dx_2 dx_3$$

2.2.1 Vertauschung der Integrationsreihenfolge

Ist $f(x_1, \dots, x_n)$ integrierbar über \mathbb{R}^n , und ist $t = x_k$ eine der Variablen, sowie

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

sei für jedes $t \in \mathbb{R}$ integrierbar über \mathbb{R}^{n-1} . Dann ist

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \quad (\text{d}x_k \text{ fehlt!})$$

integrierbar über \mathbb{R} und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} F(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n$$

Beweis:

Bezeichnungsvereinfachung: $k = 1$

Zu $\epsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung über $f : \varphi, \psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\psi - \varphi)(\vec{x}) \, dx_1 \dots dx_n < \epsilon$$

$$\Phi(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \dots dx_n$$

$$\Psi(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \dots dx_n$$

Nach dem letzten Kapitel gilt für $\Phi, \Psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$: $\Phi(x_1) \leq F(x_1) \leq \Psi(x_1)$ und

$$\int_{\mathbb{R}} (\Psi - \Phi)(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi - \varphi)(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n < \epsilon$$

Daher ist F integrierbar.

□

2.2.2 Anwendung: Das Cavalierische Prinzip

Sei B eine im \mathbb{R}^3 messbare Menge und für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei der Schnitt

$$B_t := \{(x, y); (x, y, t) \in B\}$$

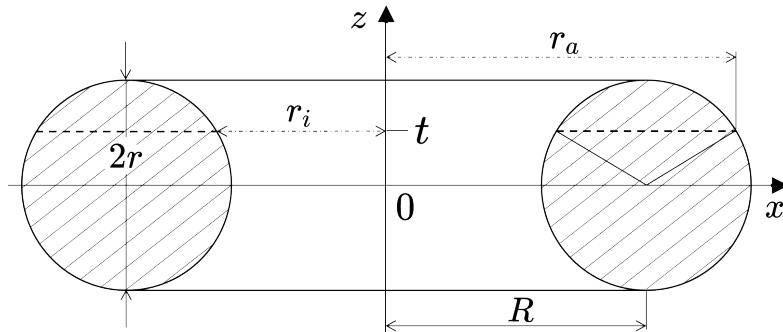
messbar in der Ebene. Damit ist

$$\text{vol}_3(B) = \int_{\mathbb{R}} \text{vol}_2(B_t) dt$$

Beispiel:

(5) Das Torusvolumen

$r \in]0, R[$, Kreis mit Mittelpunkt $(R, 0, 0)$ in der x, z -Ebene rotiere um die z -Achse.



Der Schnitt B_t wird leer, falls $|t| > r$ und ein Kreisring sonst.

Innerer Radius r_i : $R - \sqrt{r^2 - t^2}$; Äußerer Radius r_a : $R + \sqrt{r^2 - t^2}$

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(B_t) &= \pi \left[(R + \sqrt{r^2 - t^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - t^2})^2 \right] \\ &= 4\pi R \sqrt{r^2 - t^2} \end{aligned}$$

$$\text{vol}_3(B) = \int_{-r}^r 4\pi R \sqrt{r^2 - t^2} dt$$

$$= 4\pi R \left[\frac{t}{2} \sqrt{r^2 - t^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{t}{r} \right]_{t=-r}^{t=+r}$$

Daher: $\text{vol}_3(B) = 2\pi^2 R r^2$

Beispiel:

(6) Das Volumen eines allgemeinen Kegels

Gegeben sei eine messbare Menge B_0 in der x, y -Ebene, $h > 0$

$$B = \{(x(1-t), y(1-t), th); (x, y) \in B_0, 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\text{vol}_3(B) = \frac{1}{3} h \text{vol}_2(B_0)$$

$$B_{th} = \{(x, y)(1-t); (x, y) \in B_0\}$$

Transformationsformel im \mathbb{R}^2

$$\text{vol}_2(B_{th}) = \text{vol}(B_0) (1-t)^2$$

$$\text{vol}_3(B) = \int_{\mathbb{R}} \text{vol}_2(B_s) ds$$

$$= \text{vol}(B_0) h \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{1}{3} h \text{vol}(B_0)$$

Zur Transformationsformel im \mathbb{R}^n :

Gestützt auf die Substitutionsregel im \mathbb{R}^1

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f \circ \varphi(\xi) \varphi'(\xi) d\xi$$

wobei die Parametertransformation φ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar ist.

2.3 Formulierung der allgemeinen Transformationsformel für Gebietsintegrale

Es sei ϕ eine umkehrbare und samt Umkehrabbildung differenzierbare Abbildung einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für integrierbare Funktionen f

$$\int_{\phi(U)} f(\vec{x}) \, dx_1 \dots dx_n = \int_U f \circ \phi(\vec{\xi}) \left| \det \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i} \right| d\xi_1 \dots d\xi_n$$

Anmerkung zum **Beweis** der Gültigkeit:

Erster Grund für die Gültigkeit: Die Transformationsformel (TF) gilt für lineare Abbildungen A des \mathbb{R}^n .

Zweiter Grund: Differenzierbarkeit heißt lineare Approximierbarkeit. Der Gültigkeitsbereich kann erweitert werden durch Limesprozesse.

Beispiele:

(0) Der Fall $\phi(\vec{x}) = A\vec{x}$ linear invertierbarer Abbildungen des \mathbb{R}^n : Wegen

$$A(\vec{x} + \vec{h}) - A(\vec{x}) = A(\vec{h})$$

ist die Jacobimatrix der Abbildungen $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ gleich der konstanten Matrix A .

(1) Ebene Polarkoordinaten

$$\phi(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad 0 < r, 0 < \varphi < 2\pi$$

Die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \phi}{\partial(r, \varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

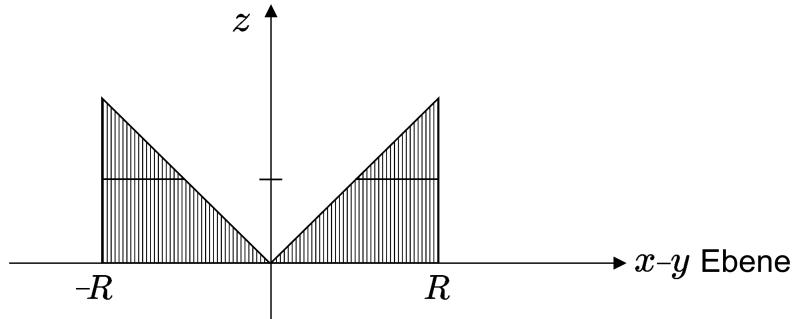
$$\det \frac{\partial \phi}{\partial(r, \varphi)} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

Die Formel ist günstig, falls der Integrand $f(x, y)$ konstant ist auf den Kreisen $x^2 + y^2 = r^2$.

Etwa

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \stackrel{\text{TF}}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r \, d\varphi dr$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r r \, d\varphi dr = 2\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi}{3} R^3$$



Geometrische Bedeutung:

Das Volumen des Restkörpers entstanden aus einem geraden Kreiszylinder der Grundfläche $R^2\pi$ und der Höhe R , aus dem ein Kreiskegel gleicher Grundfläche und Höhe mit Spitze im Nullpunkt entfernt ist.

Die Fläche des Schnittes B_t einer Halbkugel des Radius R ist

$$\text{vol}_2(B_t) = (\sqrt{R^2 - t^2})^2 \pi = (R^2 - t^2)\pi$$

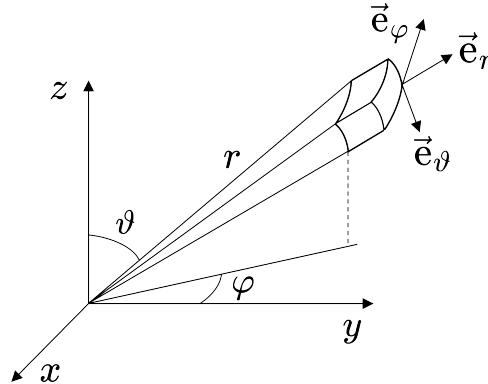
Die rechte Seite zeigt, dass der Schnitt des Restkörpers oben in Höhe t je denselben Flächeninhalt wie der Schnitt B_t einer Halbkugel des Radius R hat.

(2) Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$



Die Flächen $r = \text{const}$ sind Kugelflächen um den Nullpunkt.

Die Flächen $\vartheta = \text{const}$ sind Kegelflächen mit Spitze im Nullpunkt.

Die Flächen $\varphi = \text{const}$ sind Halbebenen durch die z -Achse.

Die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = r^2 \sin \vartheta$$

3. Integralsätze in der Ebene

Zusammenstellung bisheriger Begriffe und Sätze über Kurven.

Kurve: $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stückweise differenzierbar.

Kurvenlänge: $l(\vec{\gamma}) := \int_a^b \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| dt$ invariant bei Parametertransformation.

Kurvenintegral über ein Vektorfeld \vec{v} (genauer: über die Tangentialkomponente von \vec{v} , mit \vec{v} längs $\vec{\gamma}$ stetig)

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} := \int_a^b (\vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \dot{\vec{\gamma}}(t)) dt$$

invariant gegen Parametertransformation.

Die zu $\vec{\gamma}$ entgegengesetzte Kurve $\vec{\gamma}^*$

$$\vec{\gamma}^* := \vec{\gamma}(a + b - t) ; \quad t \in [a, b]$$

Substitutionsregel ergibt

$$\int_{\vec{\gamma}^*} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\vec{\gamma}} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x}$$

In der Ebene: Vektorielle Flächenstücke

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{x}(\varphi) \times \vec{x}'(\varphi) d\varphi$$

wo $\vec{x}(\varphi)$ eine stetig differenzierbare Funktion des Winkels φ ist. Für die dritte Koordinate

$$\vec{F}_3 = F = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Der Gradient einer Funktion $f : U \mapsto \mathbb{R}$, U Gebiet im \mathbb{R}^n

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial t}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Das Kurvenintegral längs $\vec{\gamma}$ über das Gradientenfeld $\vec{v} = \text{grad } f$ ist die Differenz der Werte von f in den Endpunkten der Kurve!

3.1 Integrabilitätskriterium

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{v} in einem sternförmigen (allgemein einfach zusammenhängenden) Gebiet des \mathbb{R}^n ist genau dann Gradientenfeld eines Potentials, wenn gilt

$$D_i v_k = D_k v_i \quad 1 \leq i, k \leq n$$

wobei D_i partielle Ableitung nach x_i bedeutet.

Im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 bedeutet das geschrieben mit $\nabla \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v}$ die Gleichung

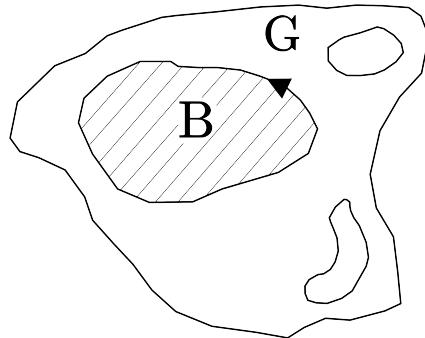
$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

Als Erweiterung des Satzes für Kurvenintegrale über Gradientenfelder eine

Riemannsche Formel (auch Greensche Formel):

Der Fall $n = 2$:

Es sei $\vec{v} = (u, v)$ eine stetig differenzierbare Vektorfeld auf dem Gebiet G der Ebene. Ferner sei B ein Kompaktum in G , welches durch eine einfach geschlossene Kurve $\vec{\gamma}$ berandet wird. Dann gilt



$$\int_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\vec{\gamma}} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x}$$

wobei die Randkurve $\vec{\gamma}$ so orientiert ist, dass B „zur Linken“ liegt.

Bemerkung:

(1) Für die rechte Seite suggestive Schreibweise

$$\int_{\partial B} \vec{v} d\vec{x} = \oint_{\partial B} \vec{v} d\vec{x}$$

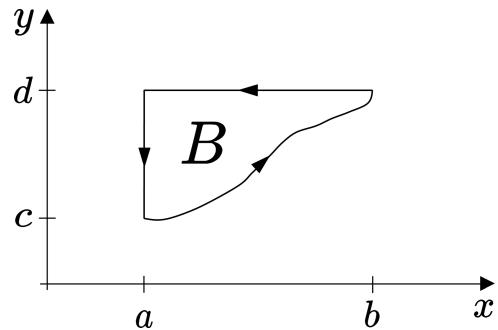
Beweis für dreieckartige Gebiete

Mit einer stetig differenzierbaren streng monotonen Funktion

$$\delta : [a, b] \mapsto \mathbb{R},$$

für die δ' nullstellenfrei ist sei

$$B = \{(x, y); a \leq x \leq b, \delta(x) \leq y \leq d\}$$



Es bezeichne $\varphi : [c, d] \mapsto [a, b]$ die Umkehrfunktion von δ

$$\begin{aligned} \int_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy &= \int_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - \int_B \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^{\varphi(y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_{\delta(x)}^d \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_c^d (v(\varphi(y), y) - v(a, y)) dy - \int_a^b (u(x, d) - u(x, \delta(x))) dx \end{aligned}$$

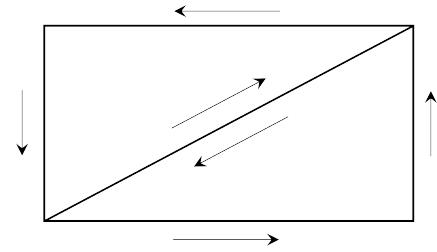
Substitution $y = \delta(t)$

$$= - \int_c^d v(a, y) dy + \int_a^b (u(t, \delta(t)) + v(t, \delta(t)) \delta'(t)) dt - \int_a^b u(x, d) dx$$

Das ist unter Berücksichtigung der speziellen Parameterisierung der Randkurve des Dreiecks die Behauptung.

□

Die Behandlung allgemeiner Bereiche kann durch Zerlegung in Dreiecksbereiche durch innere Hilfsgeradenstücke auf unseren Fall zurückgeführt werden. Man beachte: Integrale über Hilfsgeradenstücke werden in beiden möglichen Richtungen durchgeführt. Die zugehörigen Integrale heben sich auf.



Denkt man $\vec{v} = (u, v)$ durch eine Koordinate O ins dreidimensionale fortgesetzt, so stellt der Integrand im Bereichsintegral die dritte Koordinate der Rotation dar, die Riemannsche Formel ist daher eine (ebene) Version des Stoke'schen Integralsatzes

$$\int_B \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{F} = \int_{\partial B} \vec{v}(\vec{x}) \, dx$$

Spezialfall: $u = -y, v = x$. Der Integrand links wird konstant 2.

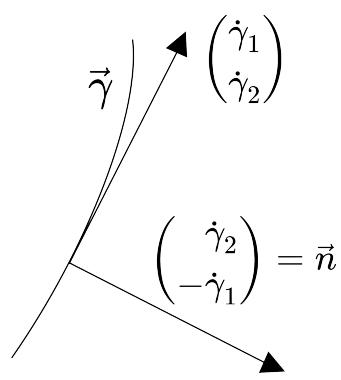
$$\operatorname{vol}_2 B = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (-y \, dx + x \, dy)$$

Ersetze in der Riemannschen Formel u durch $-v$, v durch u . Dann links in der Formel

$$\int_B \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x})} \right) dx dy$$

Das Integral rechts in der Formel umgeschrieben

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \, d\vec{x} &= \int_a^b \begin{pmatrix} -v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \, d\vec{n} \end{aligned}$$



Die ebene Version des Gaußschen Satzes

$$\boxed{\int\limits_B \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) dx dy = \int\limits_{\partial B} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{n}}$$

Für den Fall $B = B_r$ = Kreisscheibe von kleinem Radius $r > 0$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_2(B_r)} \int\limits_{\partial B_r} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{n}$$

3.2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und der Cauchy Integralsatz

Gegeben sei in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ eine Funktion mit komplexen Werten $f : D \mapsto \mathbb{C}$ zerlegt in Real und Imaginärteil

$$z \in D = x + jy ; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad \text{mit reellen Funktionen } u, v$$

f heißt „komplex differenzierbar“ in D , falls

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \quad \text{existiert für alle } z \in D$$

Bezeichnung der Ableitung: $f'(z)$ in Anlehnung ans Reelle!

Ist f' überdies stetig in D , so holomorph in D . Beispiele holomorpher Funktionen liefert jede Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

im Innern ihres Konvergenzbereichs. Zerlegung von f in Real und Imaginärteil

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

$$z = x + jy ; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

dann gelten für u und v die Formeln

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Beweis:

Aus der Voraussetzung

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y)}{h_1 + j h_2} + j \frac{v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)}{h_1 + j h_2} \right]$$

Spezielle Annäherung $h \rightarrow 0$

$$h_2 = 0, \quad h_1 \rightarrow 0 \quad ; \quad h_1 = 0, \quad h_2 \rightarrow 0$$

$$\operatorname{Re} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dv}{dy}$$

$$\operatorname{Im} f'(z) = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{du}{dy}$$

□

Erklärung eines Kurvenintegrals längs $\vec{\gamma} : [a, b] \mapsto D$ mit stetigem komplexwertigen Integranden $f : D \mapsto \mathbb{C}$

$$\int_{\vec{\gamma}} f(z) dz := \int_a^b [u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + j v(\gamma_1(t), \gamma_2(t))] [\dot{\gamma}_1(t) + j \dot{\gamma}_2(t)] dt$$

Ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f(z) dz &= \int_a^b [u(\vec{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_1(t) - v(\vec{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_2(t)] dt \\ &\quad + j \int_a^b [v(\vec{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u(\vec{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_2(t)] dt \\ &= \int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\vec{x} + j \int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\vec{x} \end{aligned}$$

Abschätzung des Integranden mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|u \dot{\gamma}_1 - v \dot{\gamma}_2| \leq \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}$$

beziehungsweise

$$|v \dot{\gamma}_1 + u \dot{\gamma}_2| \leq \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}$$

Daher

$$\left| \int_{\vec{\gamma}} f(z) dz \right| \leq 2 \cdot \max_{z \text{ längs } \vec{\gamma}} |f(z)| \cdot \int_a^b \|\dot{\vec{\gamma}}\| dt \leq 2 \cdot \max_{z \text{ längs } \vec{\gamma}} |f(z)| \cdot l(\vec{\gamma})$$

Bemerkung:

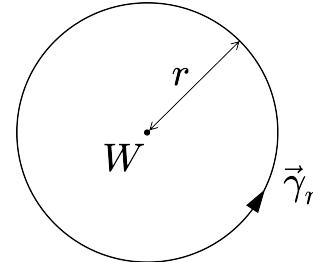
- (2) Durch Verwendung von Riemann-Summen erhält man die Abschätzung ohne den Faktor 2 auf der rechten Seite.

Beispiel:

- (1) Ein Kurvenintegral in \mathbb{C}

$$w \in \mathbb{C}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_r(t) &= w + r e^{jt} \\ &= w + r(\cos t + j \sin t) \end{aligned}$$



$$\int_{\vec{\gamma}_r} \frac{dz}{z-w} ; \quad \dot{\vec{\gamma}}_r(t) = r(-\sin t + j \cos t) = rje^{jt}$$

$$\int_{\vec{\gamma}_r} \frac{dz}{z-w} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\vec{\gamma}_r(t) - w} \dot{\vec{\gamma}}_r dt = j \int_0^{2\pi} \frac{r e^{jt}}{r e^{jt}} dt = 2\pi j$$

$$\int_{\vec{\gamma}_r} \frac{dz}{z-w} = 2\pi j \quad \text{Spezialfall für Berechnung einer Umlaufzahl der Kurve } \vec{\gamma}_r \text{ um } w.$$

Sind u und v stetig partiell differenzierbar dann

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \right)_3 &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \left(\operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_3 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Beide Ausdrücke verschwinden, wenn $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ für eine holomorphe Funktion f sind.

3.2.1 Der Integralsatz von Cauchy

Ist $f = u + jv$ holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und ist $\vec{\gamma} : [a, b] \mapsto D$ eine ein Kompaktum $B \subset D$ berandende („geschlossene“) Kurve, dann

$$\int_{\vec{\gamma}} f(z) dz = 0$$

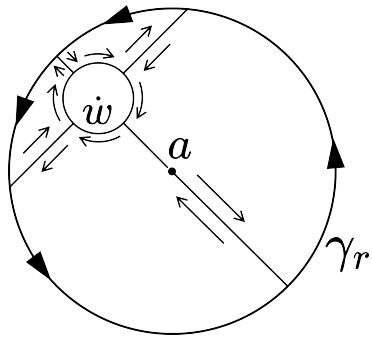
Hauptanwendung: Die Integralformel von Cauchy

f sei holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. $B_r(a)$ sei eine samt Rand in D enthaltene Kreisscheibe um a mit Radius $r > 0$. Dann

$$f(w) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz ; \quad \text{falls } |w-a| < r$$

Beweis durch Anwendung des Integralsatzes von Cauchy auf die Hilfsfunktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} & \text{falls } w \neq z \\ f'(w) & \text{falls } z = w \end{cases}$$



Weil f holomorph in D , wird so g eine stetige Funktion in D , welche in $D \setminus \{w\}$ sogar holomorph ist.

Entsprechend der Skizze mit dem Hilfskreis $B_\epsilon(w)$, $0 < \epsilon < (-|w-a| + r)$, wird integriert über vier geschlossene Hilfskurven, deren jede ein Kompaktum im Holomorphiegebiet von g berandet.

Nach dem Cauchy-Integralsatz (unter Berücksichtigung des Wegfalls der Integrale über die geraden Striche)

$$\int_{\partial B_r(a)} g(z) dz = \int_{\partial B_\epsilon(w)} g(z) dz \quad (*)$$

Zweiter Schritt: Zeige dass $\int_{\partial B_r(a)} g(z) dz = 0$

Dazu betrachte auf der rechten Seite von $(*)$ den Grenzübergang $z \searrow 0$.

$|g(z)|$ ist auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_\epsilon(w)}$ beschränkt durch $|f'(w)| + 1$.

Anwendung der Integralabschätzung auf die rechte Seite (RS) von (*)

$$\text{RS} = 2 \cdot \underbrace{l(\gamma_\epsilon(w))}_{2\pi\epsilon} \cdot (|f'(w)| + 1); \quad \text{das geht gegen } 0 \text{ mit } \epsilon \searrow 0$$

Angewandt auf die linke Seite (LS) von (*) folgt

$$\left| \int_{\partial B_r(a)} g(z) dz \right| = 0 \quad \text{also} \quad \int_{\partial B_r(a)} g(z) dz = 0$$

Dritter Schritt: Auswertung der LS in (*) auf andere Weise

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \int_{\vec{\gamma}_r(a)} \left(\frac{f(z)}{z-w} - \frac{f(w)}{z-w} \right) dz \\ &= \int_{\vec{\gamma}_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{\vec{\gamma}_r(a)} \frac{1}{z-w} dz \end{aligned}$$

Mit dem Integralbeispiel zu Anfang

$$\text{LS} = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \underbrace{\int_{\vec{\gamma}_\epsilon(*)} \frac{1}{z-w} dz}_{2\pi j}$$

Mit Schritt Zwei

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi j f(w)$$

□

Eine simple Konsequenz der Cauchy-Integralformel:

Eine holomorphe Funktion lässt sich um jeden Punkt a ihres Holomorphiegebietes in eine konvergente Potenzreihe entwickeln. Insbesondere sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ mindestens zweimal stetig differenzierbar. Daher aus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

u (und ebenso v) ist eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

das heißt u (und ebenso v) ist eine harmonische Funktion.

4. Flächen im Raum und Oberflächenintegral

4.1 Darstellungarten für Flächen

1. Im Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ sei f reellwertig und stetig differenzierbar

$$s = \Gamma_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)); (x_1, x_2) \in U\}$$

2. Sei G ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und $F : G \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.
Niveaumengen:

$$S_c = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in G; F(\vec{x}) - c = 0\}$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen:¹

Ist (wenigstens) eine der partiellen Ableitungen $\partial F / \partial x_k(x_1, x_2, x_3)$ in einem Punkt $\vec{x} \in S_c \neq 0$, dann kann die Koordinate x_k dort als Funktion der beiden übrigen Koordinaten geschrieben werden. Zum Beispiel $k = 3$:

Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ gelte

$$F(a_1, a_2, a_3) - c = 0; D_3 F(\vec{a}) \neq 0$$

dann existiert eine Umgebung U von $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \mapsto \mathbb{R}^3$ mit $f(a_1, a_2) = a_3$ und für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) - c = 0$$

Implizite Differentiation

¹Siehe Kapitel 9 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}{\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}$$

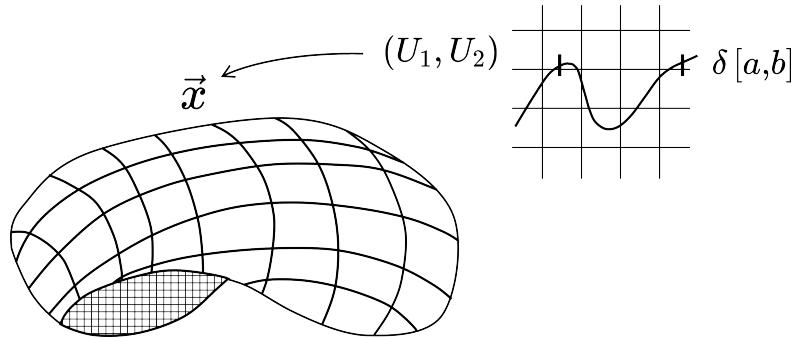
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}{\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}$$

Damit ist wenigstens lokal die Fläche S_c dargestellt als Graph gemäß 1.

3. Parameterdarstellung oder Darstellung über Karten

Betrachtet werden stetig differenzierbare Abbildungen von ebenen Gebieten U in \mathbb{R}^3 (sogenannte Kartenabbildungen)

$$\vec{x} : U \mapsto \mathbb{R}^3 ; S = \vec{x}(u)$$



Bemerkung:

- (1) Die Darstellung als Graph unter 1. ist Spezialfall. Durch die Parameterlinien $u_1 = \text{konstant}$, beziehungsweise $u_2 = \text{konstant}$ entstehen zwei Kurvenscharen durch Lifting auf die Fläche.

$$t \mapsto \vec{x}(t, u_2) \quad \text{bzw.} \quad t \mapsto \vec{x}(u_1, t)$$

Jede dieser Kurven ist stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}$$

Kurzform

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} = \vec{x}_{u_1} ; \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} = \vec{x}_{u_2}$$

4.1.1 Regularitätsbedingung

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \neq 0$$

Punkte, in denen die Regularitätsbedingung gilt heißen „regulär“ die übrigen „singulär“.

Geometrische Bedeutung: Die Tangentialvektoren \vec{x}_{u_1} und \vec{x}_{u_2} sind nicht parallel.

Hauptfall: \vec{x} ist injektiv, das heißt verschiedenen Punkten in U entsprechen stets verschiedene Punkte auf S .

Dann lassen sich die (stetig differenzierbaren) Kurven auf S gewinnen durch Liftung von Kurven $\delta : [a, b] \mapsto U$

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{x}(\delta(t)) = \vec{x}(\delta_1(t), \delta_2(t))$$

Kettenregel

$$\dot{\gamma}_k(t) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1}(\delta(t)) \dot{\delta}_1(t) + \frac{\partial x_k}{\partial u_2}(\delta(t)) \dot{\delta}_2(t) \quad k = 1, 2, 3$$

Vektoriell

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}(\delta(t)) \dot{\delta}_1(t) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}(\delta(t)) \dot{\delta}_2(t)$$

Kurzform

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{x}_{u_1} \dot{\delta}_1(t) + \vec{x}_{u_2} \dot{\delta}_2(t)$$

4.1.2 Geometrische Bedeutung

Jeder Tangentialvektor an den Flächenpunkt $\vec{x}(u_1, u_2)$ (das heißt jeder Tangentialvektor einer Kurve auf der Fläche durch diesen Punkt) ist eine Linearkombination der speziellen Tangentialvektoren \vec{x}_{u_1} und \vec{x}_{u_2} . In den regulären Flächenpunkten bilden die Tangentialvektoren eine Ebene, die Tangentialebene.

Beispiele:

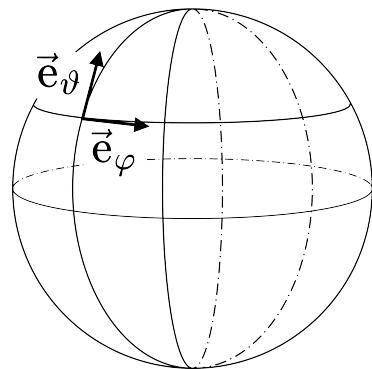
- (1) Die Kugeloberfläche (Sphäre S^2) in geographischen Koordinaten

$$\vec{x}(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\varphi = \frac{d\vec{x}}{d\varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\vartheta = \frac{d\vec{x}}{d\vartheta} = R \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta = R^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \vartheta \\ \sin \varphi \cos^2 \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}$$



Singuläre Flächenpunkte für $\cos \vartheta = 0$. Normierte Tangentenvektoren:

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{x}_\varphi}{\|\vec{x}_\varphi\|} \quad ; \quad \vec{e}_\vartheta = \frac{\vec{x}_\vartheta}{\|\vec{x}_\vartheta\|}$$

(2) Einschaliges Rotationsparaboloid

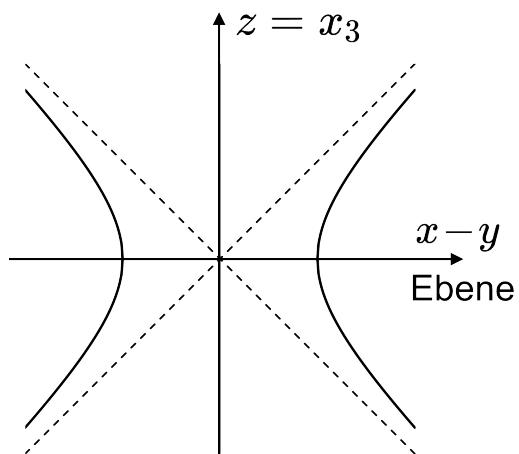
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a^2 \quad \text{Parametrisierung } \vec{x}(\varphi, z) = ?$$

Zylinderkoordinaten

$$\vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2 + a^2} \cos \varphi \\ \sqrt{z^2 + a^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sqrt{z^2 + a^2} \sin \varphi \\ \sqrt{z^2 + a^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_z = \begin{pmatrix} \frac{z \cos \varphi}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\ \frac{z \sin \varphi}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2 + a^2} \cos \varphi \\ \sqrt{z^2 + a^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix}$$



Keine singulären Punkte im Hauptfall $a > 0$. Der Sonderfall $a = 0$ stellt eine Kreiskegelfläche mit Spitze im Ursprung dar, $z = 0$ ist jetzt ein singulärer Punkt.

4.2 Die Größenmessung von krummen Flächen

wird mit einer Integralformel vorgenommen, gebildet in Analogie zur Integralformel für die Kurvenlänge:

$$l(\vec{\gamma}) = \int_a^b \|\dot{\vec{\gamma}}\| dt$$

bestimmt die Länge der Kurven $\vec{\gamma}(t) = \vec{x}(\delta(t))$ auf der Fläche $\vec{x}(u, v)$, welche durch Liftung aus Kurven δ im Parameterbild entstehen. Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\gamma}}(t) &= \vec{x}_u(\delta(t)) \dot{\delta}_1(t) + \vec{x}_v(\delta(t)) \dot{\delta}_2(t) \\ \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|^2 &= (\vec{x}_u \dot{\delta}_1 + \vec{x}_v \dot{\delta}_2)(\vec{x}_u \dot{\delta}_1 + \vec{x}_v \dot{\delta}_2) \\ &= \|\vec{x}_u\|^2 \dot{\delta}_1^2 + 2\vec{x}_u \vec{x}_v \dot{\delta}_1 \dot{\delta}_2 + \|\vec{x}_v\|^2 \dot{\delta}_2^2\end{aligned}$$

Hier treten die metrischen „Fundamentalgrößen“ der Fläche auf

$$g_{11} = \vec{x}_u \vec{x}_u, \quad g_{12} = g_{21} = \vec{x}_u \vec{x}_v, \quad g_{22} = \vec{x}_v \vec{x}_v$$

$$l(\vec{\gamma}) = \int_a^b \sqrt{g_{11} \dot{\delta}_1^2 + 2g_{12} \dot{\delta}_1 \dot{\delta}_2 + g_{22} \dot{\delta}_2^2} dt$$

Die Formel für den Flächeninhalt der Fläche S , gegeben durch die Karte $\vec{x} : U \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\text{vol}_2(S) = A(S) = \int_U \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv$$

Interpretation der Determinante unter dem Wurzelzeichen im Integral

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \|\vec{x}_u\|^2 \|\vec{x}_v\|^2 - (\vec{x}_u \vec{x}_v)^2 = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|^2$$

Die Bedeutung des Integranden ist der Flächeninhalt des Parallelogramms aus den beiden Tangentialvektoren \vec{x}_u, \vec{x}_v .

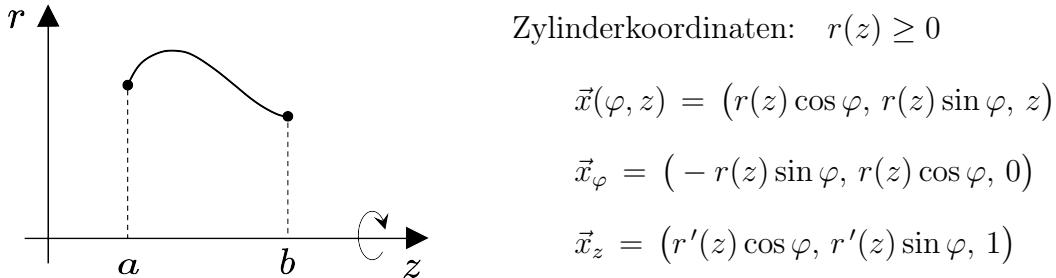
Beispiele:

(1) Die Kugelfläche

$$\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta\|^2 = R^4 (\cos^2 \vartheta (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)) = R^4 \cos^2 \vartheta$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \vartheta \, d\vartheta d\varphi = 4\pi R^2$$

(2) Oberflächeninhalt einer Rotationsfläche



$$\|\vec{x}_\varphi\|^2 = g_{11} = r^2(z), \quad g_{12} = 0$$

$$\|\vec{x}_z\|^2 = g_{22} = r'(z)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} r(z) \sqrt{r'(z)^2 + 1} \, d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_a^b r(z) \sqrt{r'(z)^2 + 1} \, dz \end{aligned}$$

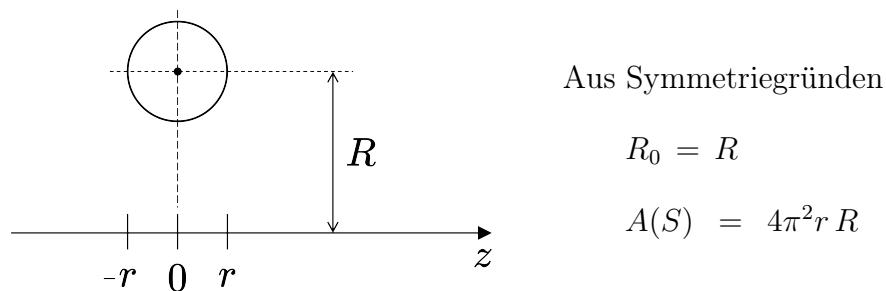
Deutung:

$$l(r) = \int_a^b r(z) \sqrt{r'(z)^2 + 1} \, dz \quad \text{bedeutet die Länge der rotierenden Kurve;}$$

$$R_0 = \frac{A(S)}{2\pi l(r)} \quad \text{ist die Ordinate des geometrischen Schwerpunktes.}$$

$A(S) = 2\pi R_0 \cdot l(r)$	1. Guldinsche Regel
------------------------------	---------------------

Anwendung: Die Oberfläche des Torus



4.2.1 Invarianz des Flächeninhalts gegenüber orthogonalen Transformationen A des \mathbb{R}^3

Sei A eine orthogonale 3×3 Matrix, das heißt $A^T A = 1_3$.

$S : \vec{x} : U \mapsto \mathbb{R}^3$ sei eine Fläche im Raum.

$\tilde{S} : \vec{y} = A\vec{x}$; Metrische Fundamentalgrößen von \vec{y} :

$$\vec{y}_u = \frac{\partial}{\partial u} A\vec{x}(u, v) = A\vec{x}_u ; \quad \vec{y}_v = \frac{\partial}{\partial v} A\vec{x}(u, v) = A\vec{x}_v$$

$$\|\vec{y}_u \times \vec{y}_v\|^2 = (\vec{y}_u \times \vec{y}_v)(\vec{y}_u \times \vec{y}_v) = \|\vec{y}_u\|^2 \|\vec{y}_v\|^2 - (\vec{y}_u \cdot \vec{y}_v)^2$$

Weil das Skalarprodukt invariant unter orthogonalen Transformationen A ist, folgt

$$\begin{aligned} \|\vec{y}_u \times \vec{y}_v\|^2 &= \|\vec{x}_u\|^2 \|\vec{x}_v\|^2 - (\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)^2 = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|^2 \\ \Rightarrow A(\tilde{S}) &= A(S) \end{aligned}$$

4.2.2 Invarianz des Flächenmaßes gegenüber Parameter Transformationen

$\vec{x} : U \mapsto \mathbb{R}^3$ sei eine Karte der Fläche S , ferner sei $\phi = \phi(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ eine samt Umkehrabbildung stetig differenzierbare Abbildung $\phi : V \mapsto U$ (mit $\phi(V) = U$).

$$\vec{y}(\xi, \eta) = \vec{x} \circ \phi(\xi, \eta) = \vec{x}(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$$

ist eine Umparametrisierung der Fläche S .

$$\begin{aligned} \vec{y}_\xi &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) u_\xi + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(\dots) v_\xi \\ &= \vec{x}_u u_\xi + \vec{x}_v v_\xi \quad (\text{Kettenregel}) \end{aligned}$$

Analog

$$\vec{y}_\eta = \vec{x}_u u_\eta + \vec{x}_v v_\eta$$

$$\vec{y}_\xi \times \vec{y}_\eta = (\vec{x}_u u_\xi + \vec{x}_v v_\xi) \times (\vec{x}_u u_\eta + \vec{x}_v v_\eta)$$

(Eigenschaften des Vektorproduktes ausgenutzt)

$$= (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) u_\xi v_\eta + (\vec{x}_v \times \vec{x}_u) v_\xi u_\eta$$

$$= (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)(u_\xi v_\eta - v_\xi u_\eta) = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}$$

$$\int_V \|\vec{y}_\xi \times \vec{y}_\eta\| d\xi d\eta = \int_V \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| (\phi(\xi, \eta)) \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta$$

(mit Transformationsformel)

$$\int_V \|\vec{y}_\xi \times \vec{y}_\eta\| d\xi d\eta = \int_{U=\phi(V)} \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| du dv$$

$$dS = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| du dv$$

heißt „Flächenelement“ von S bezüglich der Koordinaten (u, v) . Gezeigt wurde: Das Integral über das Flächenelement liefert eine Zahl, die unabhängig ist von der Wahl der Koordinaten!

Mit dem Flächenelement $dS = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| du dv$ lässt sich auf glatten Flächen S ein Integral für stetige Funktionen f auf S erklären durch

$$\int f ds := \int_U f(\vec{x}(u, v)) \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| du dv$$

Dieses Integral ist unabhängig von der Parametrisierung der Fläche (Beweis analog des Flächeninhalts, $f = 1$ konstant).

Ziel: Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Differential und Integralrechnung.

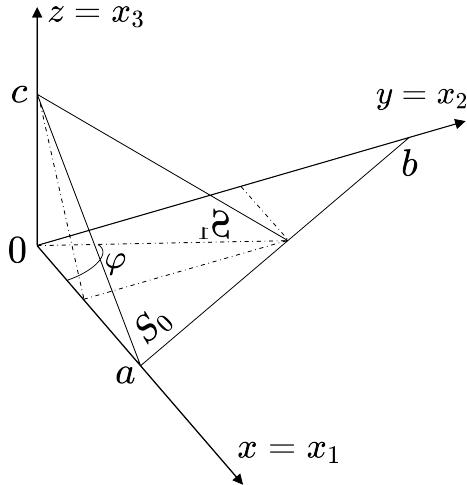
4.3 Der Gaußsche Satz

Sei $\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^3$ im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. B sei ein stückweise glatt berandetes Kompaktum in G . Dann

$$\int_B \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) dx dy dz = \int_{\partial B = S} (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n}) ds$$

Hier bedeutet $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ in jedem Punkt der Fläche $S = \partial B$ die nach außen weisende Normale der Länge 1 (Normalenfeld \vec{n}).

Beweis für Polyeder:



Ergibt sich durch Zerlegung in Simplizes
(= Tetraeder) T .

$$(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$$

$$r = \frac{ab}{a \sin \varphi + b \cos \varphi}$$

- 1) Beschreibung von S_0 , der Tetraederseite in der Ebene durch $(a, 0, 0); (0, b, 0); (0, 0, c)$

$$\text{Gleichung der Ebene: } \vec{x} \cdot \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right) = 1$$

S_0 wird durch drei Karten dargestellt

$$\vec{x}_k^k : U_k \mapsto T$$

welche durch Umkehrung der Projektion von S_0 auf die Koordinatenebenen $x_k = 0$ entstehen.

Nachrechnen:

$$\|\vec{x}_u^k \times \vec{x}_v^k\| = a_k \sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}} \quad \text{mit} \quad a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$$

- 2) Beschreibung von S_1 durch die Umkehrung $\vec{x}(y, z)$ der Projektion von S_1 auf die $y-z$ Ebene und durch die Umkehrung $\vec{y}(x, z)$ der Projektion von S_1 auf die $x-z$ Ebene

$$\vec{x}(y, z) = (y \cot \varphi, y, z) ; \quad \vec{y}(x, z) = (x, x \tan \varphi, z)$$

$$\vec{x}_y = (\cot \varphi, 1, 0) ; \quad \vec{x}_z = (0, 0, 1)$$

$$\vec{y}_x = (1, \tan \varphi, 0) ; \quad \vec{y}_z = (0, 0, 1)$$

$$\vec{x}_y \times \vec{x}_z = (1, -\cot \varphi, 0)$$

$$\vec{y}_x \times \vec{y}_z = (\tan \varphi, -1, 0)$$

$$\|\vec{x}_y \times \vec{x}_z\| = \sqrt{1 + \cot^2 \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$\|\vec{y}_x \times \vec{y}_z\| = \sqrt{\tan^2 \varphi + 1} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

- 3)** Beschreibung der Grenzen von x_k auf U_k ($k = 1, 2, 3$) und der von $x_2 = y$ für den Definitionsbereich V_2 der Kartenabbildung \vec{y}

$$U_3: 0 \leq y \leq x \tan \varphi ; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$$

$$\text{Dort: } 0 \leq z \leq (1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})c$$

$$U_1: 0 \leq y, z ; \quad \frac{y}{r \sin \varphi} + \frac{z}{c} \leq 1$$

$$\text{Dort: } \frac{y}{\tan \varphi} \leq x \leq (1 - \frac{y}{b} - \frac{z}{c})a$$

$$V_2: 0 \leq x, z ; \quad \frac{x}{r \cos \varphi} + \frac{z}{c} \leq 1$$

$$U_2: 0 \leq x, z ; \quad 1 - \frac{x}{r \cos \varphi} \leq \frac{z}{c} \leq 1 - \frac{x}{a}$$

$$\text{Dort: } 0 \leq y \leq (1 - \frac{x}{a} - \frac{z}{c})b$$

- 4)** Umwandlung des Raumintegrals in ein Flächenintegral

Abkürzungen: $\vec{v} = (u, v, w) ; \quad \text{div } \vec{v} = u_x + v_y + w_z$

$$\begin{aligned} & \int_T (u_x + v_y + w_z) \, dx dy dz = \\ & \int_{U_1} \left[u \left(a \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right), y, z \right) - u \left(y \cot \varphi, y, z \right) \right] dy dz \\ & + \int_{U_2} \left[v \left(x, b \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right), z \right) - v \left(x, 0, z \right) \right] dx dz \\ & + \int_{V_2} \left[v \left(x, x \tan \varphi, z \right) - v \left(x, 0, z \right) \right] dx dz \\ & + \int_{U_3} \left[w \left(x, y, c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \right) - w \left(x, y, 0 \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

5) Abschluss des Beweises

Die nach außen weisenden Normaleneinheitsvektoren

- für die Fläche S_3 in der $x-y$ Ebene: $\vec{n}_3 = (0, 0, -1)$,
- für die Fläche S_2 in der $x-z$ Ebene: $\vec{n}_2 = (0, -1, 0)$,
- für S_1 : $\vec{n}_1 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$,
- für S_0 : $\vec{n}_0 = (\sqrt{w_0})^{-1} \cdot \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$ mit $w_0 = a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}$

Erinnerung an die Flächenelemente. Für $U'_k \vec{x}^k$

$$\|\vec{x}_u^k \times \vec{x}_v^k\| = a_k \sqrt{w_0} \quad ; \quad k = 1, 2, 3$$

und für \vec{x}, \vec{y} zur Parametrisierung von S_1

$$\|\vec{x}_y \times \vec{x}_z\| = \frac{1}{\sin \varphi} \quad ; \quad \|\vec{y}_x \times \vec{y}_z\| = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Zusammenfassend

$$\begin{aligned} \int_T (u_x + v_y + w_z) \, dx dy dz &= \\ &= \int_{S_0} (\vec{v} \cdot \vec{n}_0) \, ds + \int_{S_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}_1) \, ds + \int_{S_2} (\vec{v} \cdot \vec{n}_2) \, ds + \int_{S_3} (\vec{v} \cdot \vec{n}_3) \, ds \end{aligned}$$

□

4.4 Differentialgeometrische Interpretation des Gaußschen Satzes

Das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{n}$ stellt dar die Projektion des Vektorfeldes auf die (äußere) Normale der berandeten Fläche. Die rechte Seite des Gaußschen Satzes stellt also den Gesamtfluss des Vektorfeldes \vec{v} durch die (eventuell aus mehreren Stücken bestehende) Oberfläche ∂B des Raumteiles B dar. Mit der Divergenz als Quellendichte ist die linke Seite das Integral über die Quelldichte des Vektorfeldes \vec{v} .

Beispiel: Der Auftrieb (Archimedisches Prinzip)

In einer Flüssigkeit der Dichte ρ sei ein massiver Körper B eingetaucht. Auf die Oberfläche wirkt an jeder Stelle der Druck $\rho \cdot z \cdot \vec{n}$ (z ist negativ \Rightarrow Druck also nach innen gerichtet).

Die Gesamtkraft die auf B wirkt, ist

$$K = \int_{\partial B} \varrho \cdot z \cdot \vec{n} \, ds ; \quad K = (K_1, K_2, K_3) \text{ vektoriell}$$

Zerlegung des Integranden in seine Koordinaten

$$\vec{n} = \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i ; \quad K_i = \int_{\partial B} \varrho \cdot z \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{n}) \, ds$$

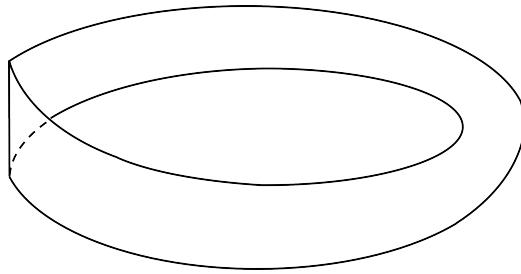
Drei Vektorfelder $\vec{v}_i = \varrho \cdot x_3 \cdot \vec{e}_i$ ($z = x_3$)

Für $i = 1, 2$ ist offenbar $\operatorname{div} \vec{v}_i = 0$, woraus folgt $K_1 = K_2 = 0$. Dagegen ist $\operatorname{div} \vec{v}_3 = \varrho$.

$$K_3 = \int_B \varrho \, dx \, dy \, dz = \varrho \cdot \operatorname{vol}_3(B)$$

Orientierung:

Auf den Randflächen $S = \partial B$ glatt berandeter Kompakta $B \subset \mathbb{R}^3$ existiert ein stetiges Normaleneinheitsfeld $\vec{n}(\vec{x})$, $\vec{x} \in S$. Sie sind „orientierbar“. Die Existenz nicht orientierbarer Flächen zeigt das „Möbiusband“.



- Auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten (= Kurven) bedeutet Orientierung den Richtungssinn.
- Auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten S (= Flächen) bedeutet Orientierung Drehsinn.
- Auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten bedeutet Orientierung Windungssinn.

Gemeinsam:

Auf jeder orientierbaren Mannigfaltigkeit gibt es stets ein Paar von gleichberechtigten Orientierungen. Der Wechsel in der Orientierung bedeutet für Integrale über orientierbare Mannigfaltigkeiten stets Vorzeichenwechsel.

Im euklidischen Raum \mathbb{R}^n haben die invertierbaren linearen Selbstabbildungen

$$A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

die Eigenschaft $\det A \neq 0$. Orientierungswechsel bedeutet $\det A < 0$; Orientierungstreue: $\det A > 0$. (Die Orientierung ist eine globale Eigenschaft des Bündels aller Tangentialebenen der Mannigfaltigkeiten.)

4.5 Der Stokes'sche Integralsatz

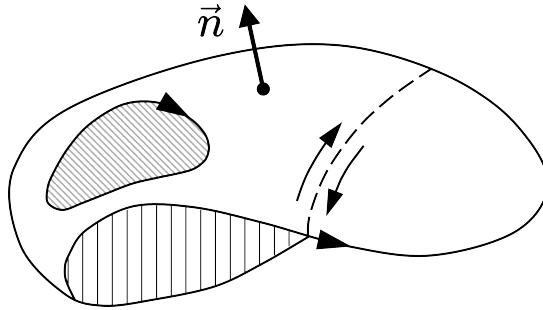
Es sei \vec{v} eine stetig differenzierbares Vektorfeld im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$. In G sei S eine glatt berandete orientierbare Fläche mit dem stetigen Einheitsnormalenfeld

$$\vec{n} : S \mapsto \mathbb{R}^3$$

Dann gilt

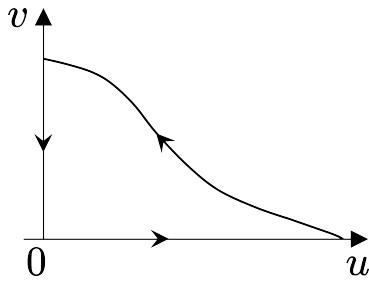
$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{v} \vec{n}) \, ds = \int_{\partial S} \vec{v} \, d\vec{x}$$

wobei ∂S die von \vec{n} induzierte Orientierung trägt.



Zur Organisation des **Beweises**

1. Die Formel ist invariant gegenüber Umparametrisierung.
2. Die Formel ist additiv bezüglich \vec{v} . Es darf angenommen werden, dass \vec{v} nur eine Koordinate $\neq 0$ hat.
3. Die Formel ist additiv bezüglich Zerlegungen der Fläche S durch Hilfskurven, welche von Rand zu Rand laufen.
4. Es genügt schließlich, dreieckartige Flächen zu diskutieren.



$$S : \vec{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$\text{Zum Beispiel: } \vec{v} = (0, 0, w(x, y, z))$$

$B = U$ Parameterbereich

$$\vec{x}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right) ; \quad \vec{x}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x}, 0 \right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} = ? ; \quad \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right)$$

$$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \cdot \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Damit wird die linke Seite (LS) des Stokes'schen Integralsatzes zu

$$LS = \int_B \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} \right) du dv$$

Riemannsche Formel für ebenes Vektorfeld!

$$p(u, v) = w(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$q(u, v) = w(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} + w \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + w \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

$$LS = \int_B \left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} \right) \partial u \partial v = \int_{\partial B} (p \partial u + q \partial v) = \int_{\partial S} \vec{v} d\vec{x}$$

□

5. Quadratische Matrizen und Determinanten

Zugrundeliegend: Körper K , etwa $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Betrachtet werden „Matrizen“-Systeme $(a_{ik})_{1 \leq i, k \leq n}$ mit Elementen $a_{ik} \in K$. Zusammengefasst in $M_n(K)$

Matrizensumme: $A + B$; Skalare Vielfache: λA

Definition je Komponentenweise. Darunter wird $M_n(K)$ zu einem Vektorraum (über K). Durch jede Matrix $A \in M_n(K)$ wird der Raum K^n der „Spalten“

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{in sich abgebildet} \quad A\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Rechenregeln

$$\left. \begin{array}{l} A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} \\ A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) \end{array} \right\} \text{Linearität}$$

Jedes $A \in M_n(K)$ liefert eine lineare Selbstabbildung von K^n .

$$AB = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{1 \leq i, k \leq n} \quad \text{Matrizen-Multiplikation}$$

Sind $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ die Spalten von B , dann

$$AB = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n)$$

Warnung:¹ $AB = BA$ falsch!

¹Vergleiche die entsprechende Warnung in Kapitel 9 von HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Erster Teil.

Gültig dagegen Assoziativgesetz

$$(AB)C = A(BC) \quad \forall A, B, C \in M_n(K)$$

Beweis:

Betrachte das Element mit Index i, m auf der linken Seite der Gleichung

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{km} = \sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_{ij} b_{jk}) c_{km}$$

und das Element mit Index i, m auf der rechten Seite

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_{jk} c_{km} \right) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{ij} (b_{jk} c_{km})$$

Resultat:

Das Assoziativgesetz der Multiplikation in $M_n(K)$ folgt aus dem Gesetz in K .

□

Analog gelten die Distributivgesetze

$$\left. \begin{array}{l} A(B+C) = AB + AC \\ (A+B)C = AC + BC \end{array} \right\} \quad \forall A, B, C \in M_n(K)$$

Einselement der Multiplikation

$$1_n = (\delta_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Rekursive Definition der Determinanten

$$n=1: A = (a_{11}) \quad \det_1 A = a_{11}$$

$$n=2: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det_2 A = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$$

$$n=3: (a_{ik}) = A \in M_3(K) \quad \text{mit der Regel von Sarrus}^2$$

Rekursive Definition der Determinante für $n \times m$ Matrizen

$$n=1: A = a_{11} ; \quad \det A = a_{11}$$

$$n>1: A \in M_n(K); \quad \text{Für jedes } k \ (1 \leq k \leq n) \text{ sei } A^{(n,k)} \in M_{n-1}(K) \text{ entstanden aus } A \text{ durch Streichen der } n\text{-ten Zeile und der } k\text{-ten Spalte}$$

²Siehe Kapitel 3 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil.

$$\det_n A = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} a_{nk} \det_{n-1} A^{(n,k)}$$

Beispiel: Für jede obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Beweis durch Induktion nach n

$n = 1$: Klar.

$n - 1 \mapsto n$: A ist eine Dreiecksmatrix $\Rightarrow a_{nk} = 0$, falls $k < n$. Daher

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} a_{nk} \det_{n-1} A^{(n,k)} = a_{nn} \det_{n-1} A^{(n,n)}$$

Da $A^{(n,n)}$ wieder eine obere Dreiecksmatrix $\in M_{n-1}(K)$, folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\det A = a_{nn} \prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}$$

□

5.1 Charakteristische Eigenschaften der Determinante

- (1) $\det : M_n(K) \mapsto K$ ist eine alternierende Multilinearform in den Spalten der eingesetzten Matrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ mit Normierung $\det_n(1_n) = 1$. Diese Eigenschaften, alternierend (ALT) und multilinear (ML), sind ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} \det(\dots \vec{a} \dots \vec{a} \dots) &= 0 \quad (\text{ALT}) \\ \det(\dots \vec{a} + \vec{b} \dots) &= \det(\dots \vec{a} \dots) + \det(\dots \vec{b} \dots) \\ \det(\dots \lambda \vec{a} \dots) &= \lambda \det(\dots \vec{a} \dots) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (\text{ML})$$

- (2) Wenn $D : M_n(K) \mapsto K$ die Eigenschaften (ALT) und (ML) hat, dann

$$D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = D \underbrace{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}_{1_n} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

Beweis:**1) Durch Induktion nach n**

Im Fall $n = 1$ ist (ML) trivial, und (ALT) richtig, weil nichtssagend.

$n - 1 \rightarrow n$:

$$L_k(A) = (-1)^{n+k} a_{nk} \det_{n-1} A^{(n,k)}$$

ist eine lineare Funktion jeder Spalte von A , wegen Induktionsvoraussetzung. Daher ist auch die Summe dieser Funktion, also $\det_n A$, linear in jeder Spalte von A . Offenbar $\det 1_n = 1$.

$$D(\dots \vec{a} \dots \vec{b} \dots) = -D(\dots \vec{b} \dots \vec{a} \dots) \quad (*)$$

Begründung: $D(\dots \vec{a} + \vec{b} \dots \vec{a} + \vec{b} \dots) = 0$ wegen (ALT)

$$\begin{aligned} 0 &= D(\dots \vec{a} + \vec{b} \dots \vec{a} + \vec{b} \dots) \\ &= D(\dots \vec{a} \dots \vec{a} + \vec{b} \dots) + D(\dots \vec{b} \dots \vec{a} + \vec{b} \dots) \\ &= \underbrace{D(\dots \vec{a} \dots \vec{a} \dots)}_0 + D(\dots \vec{a} \dots \vec{b} \dots) \\ &\quad + D(\dots \vec{b} \dots \vec{a} \dots) + \underbrace{D(\dots \vec{b} \dots \vec{b} \dots)}_0 \Rightarrow (*) \end{aligned}$$

2) Annahme: $\vec{a}_s = \vec{a}_t$ für $s < t$.

Jede Hilfsmatrix $A^{(n,k)}$ mit $k \neq s, t$ hat auch zwei gleiche Spalten, daher (nach Induktionsvoraussetzung) $\det_{n-1} A^{(n,k)} = 0$.

Bleibt

$$\det A = (-1)^{n+s} a_{ns} \det_{n-1} A^{(n,s)} + (-1)^{n+t} a_{nt} \det_{n-1} A^{(n,t)}$$

wegen $\vec{a}_s = \vec{a}_t$ ist $a_{ns} = a_{nt}$.

Die Matrix $A^{(n,s)}$ hat die (bis auf die Reihenfolge) selben Spalten wie $A^{(n,t)}$ daher und wegen (*)

$$\det A = 0 \quad (\text{falls } \vec{a}_s = \vec{a}_t)$$

□

$\det 1_n = 1$, \det ist alternierende Multilinearform der Spalten.

5.1.1 Rechenregeln

1. Addiert man zu einer Spalte von A ein Vielfaches einer anderen Spalte so ändert sich die Determinante nicht.
2. Multiplikation einer Spalte mit λ bedeutet Multiplikation der Determinante mit λ .
3. Vertauschung zweier Spalten bedeutet Übergang zum Negativen der Determinante.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det A =$ (Addition der drei ersten Spalten zur 4-ten Spalte.)

$$\stackrel{1.}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{Letzte Spalte durch 10 dividieren und Determinante mit 10 multiplizieren.})$$

$$\stackrel{2.}{=} 10 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Addition eines Vielfachen der letzten Spalte zu den anderen Spalten.})$$

$$= 10 \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10 \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{1.}{=} 10 \det \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -10 \det \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{2.}{=} -10 \cdot 4^2 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{1.}{=} -160 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{3.}{=} 160 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 160$$

Charakterisierung des letzten Satzes (2)

Ist $D : M_n(K) \mapsto K$ alternierende Multilinearform dann gilt

$$D(A) = D(1_n) \det A$$

Beweisskizze:

Abkürzung: $\delta := D(1_n)$; Betrachte: $\tilde{D}(A) = D(A) - \delta \det A$

\tilde{D} ist mit D und \det selbst wieder alternierend und multilinear, ferner $\tilde{D}(1_n) = 0$.

Sind nun i_1, i_2, \dots, i_n Indizes mit $1 \leq i_k \leq n$ dann $\tilde{D}(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = 0$ weil entweder zwei Spalten gleich sind oder die Folge i_1, i_2, \dots, i_n entsteht durch Vertauschung aus der Folge $1, 2, \dots, n$, dann

$$\tilde{D}(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = \pm \underbrace{\tilde{D}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)}_{1_n} = 0$$

$A \in M_n(K)$, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = A$, dann

$$\vec{a}_k = \sum_{i_k=1}^n a_{i_k} k \vec{e}_k$$

mit (ML): $\tilde{D}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ wird eine Linearform von $\tilde{D}(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = 0$, explizit

$$\tilde{D}(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \tilde{D}(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = 0$$

□

5.2 Produktsatz für Determinanten

$$\det AB = \det A \cdot \det B \quad A, B \in M_n(K)$$

Beweisgedanke:

Betrachte $\det AB$ als Funktion der Spalten von B

$$\begin{aligned} D(B) &= D(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) := \det AB \\ &= \det(A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n) \end{aligned}$$

$D(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ ist dann eine alternierende Multilinearform der \vec{b}_k . Daher

$$D(B) = D(1_n \det B)$$

das heißt

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

5.2.1 Verhalten der Determinante unter elementaren Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformung = Multiplikation mit Elementarmatrix E von links!

Typ I: $p \neq q$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & q \\ & 1 & \dots & \lambda & \downarrow \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow p \quad E = (\delta_{ik} + \lambda \delta_{ip} \delta_{qk})_{1 \leq k,i} \quad \det E = 1$$

EA entsteht aus A durch Addition des λ -fachen der q -ten Spalte zur p -ten Zeile.

Produktsatz $\Rightarrow \det EA = \det E \cdot \det A$

$$\det E \stackrel{(ML)}{\doteq} \det 1_n = 1$$

Typ II: $p = q$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & q \\ & \ddots & & & \downarrow \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow p \quad E = (\delta_{ik}(1 + (\lambda - 1)\delta_{ip}))_{1 \leq k,i \leq n} \quad \det E = \lambda$$

Typ III: $p \neq q$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & & \\ & \ddots & & & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & 1 & & & \\ & & & 1 & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \leftarrow p = (\delta i, \tau_{p,q}(k))_{1 \leq i,k \leq n} \quad \leftarrow q$$

EA entsteht aus A durch Vertauschung der p -ten und q -ten Zeile in A .

$\tau_{p,q}$ heißt „Transposition“ von p und q

$$\tau_{p,q}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k \neq p, q \\ q, & \text{falls } k = p \\ p, & \text{falls } k = q \end{cases} \quad \det E = -1$$

5.2.2 Regeln für Zeilenumformungen

Sei $A \in M_n(K)$. Addition eines Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile ändert die Determinante nicht. Multiplikation einer Zeile mit λ bedeutet Multiplikation der Determinante mit λ . Vertauschung zweier Zeilen von A bedeutet Multiplikation der Determinante mit -1 .

Bemerkungen:

- (1) Die Determinante $\det A$ ist zugleich eine alternierende Multilinearform der Zeilen von A . Die Matrix A^T (transponierte) hat als Zeilen die Spalten von A . Die Funktion $\det A^T$ ist eine alternierende Multilinearform der Spalten von A mit $\det(1^T) = \det 1_n = 1$.

Charakterisierung von $\det \Rightarrow$

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

- (2) Jede Matrix $A \in M_n(K)$ lässt sich schreiben als Produkt $A = E_1 E_2 \dots E_n$ von Elementarmatrizen.
- (3) Sei $A \in M_n(K)$ mit einer „Rechtsinversen“ $A' \in M_n(K)$ mit $AA' = 1_n$.
Produktsatz

$$\boxed{\det A \cdot \det A' = 1}$$

Insbesondere ist $\det A \neq 0$. Nächstes Ziel: Ist $\det A \neq 0$ dann existiert ein Rechtsinverses A' .

5.2.3 Die Adjunkte einer Matrix $A \in M_n(K)$

$A^{(i,k)} \in M_{n-1}(K)$ sei die durch Streichung der i -ten Zeile und k -ten Spalte von A entstehende Matrix. Mit

$$a_{jk}^* = (-1)^{j+k} \det A^{(k,j)}, \quad A = (a_{ik})_{1 \leq i, k \leq n}$$

gilt

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}^* = \delta_{ij} \det A$$

Bemerkung:

- (4) Im Falle $i = k = n$ ist die letzte Formel nichts anderes als die rekursive Definition von $\det A$. Für den Fall $i = k$ nennt man die Formel „Entwicklung von $\det A$ nach der i -ten Zeile“.

Beweis:

- 1) Im Fall $i = k < n$

Die Zeilen von A seien z_1, z_2, \dots, z_n . Durch Zeilenumtauschung

$$z'_j = z_j \quad 1 \leq j < i$$

$$z'_j = z_{j+1} \quad 1 \leq j < n$$

$$z'_n = z_i$$

Die neue Matrix hat die Determinante $(-1)^{n-i} \det A$. Setzt man die neue Matrix ein in die Rekursionsformel so folgt die Behauptung.

- 2) Im Fall $i \neq k$

Man ersetzt in A die k -te Zeile z_k durch z_i . Dann entsteht eine Matrix A_0 mit zwei gleichen Zeilen. Daher ist $\det A_0 = 0 = \delta_{ik} \det A$. Die linke Seite ist die bewiesene Formel für $i = k$ angewendet auf A_0 statt A .

□

5.2.4 Die inverse Matrix

Ist $\det A \neq 0$, dann hat die Matrix

$$A' = \left(\frac{a_{jk}^*}{\det A} \right)_{1 \leq j, k \leq n} = \left(\frac{(-1)^{j+k}}{\det A} \det A^{(k,j)} \right)_{1 \leq j, k \leq n}$$

die Eigenschaft $AA' = 1_n$.

Insbesondere $\det A' \neq 0$; Daher existiert $A'' \in M_n(K)$ mit $A'A'' = 1_n$.

Multiplikation von links mit A

$$\underbrace{(AA')}_{1_n} A'' = A(A'A'') = A = A''$$

deshalb

$$\det A'A = 1_n$$

Bemerkung:

(5) Zur Berechnung der inversen Matrix A^{-1} im Falle $\det A \neq 0$ ist die Formel für die Adjunkte im allgemeinen zu aufwendig. Es bewährt sich elementare Umformung. Wenn die Elementarmatrizen E_1, E_2, \dots, E_N nacheinander als Zeilenumformungen die Matrix A zur Einheitsmatrix machen, das heißt $E_N \dots E_2 E_1 A = 1_n$, dann

$$E_N \dots E_2 E_1 = A^{-1}$$

In Worten:

Führt man die elementaren Zeilenumformungen welche A in die Einheitsmatrix überführen in derselben Reihenfolge an der Einheitsmatrix aus, so erhält man A^{-1} .

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & 1_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 && \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & z_2 \mapsto z_2 - 2z_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 && \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} & z_3 \mapsto z_3 - 3z_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 && \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} & z_2 \mapsto -z_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 && 18 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & z_3 \mapsto 5z_2 + z_3 & \frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \\
 && & z_3 \mapsto \frac{1}{18} z_3 & \\
 && 18 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{Rechts: Aus } z_2 \text{ und } z_3 & \frac{1}{18^3} \cdot \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 36 & -18 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \\
 && & \text{Faktor } \frac{1}{18} \text{ vorziehen} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 18 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z_2 \mapsto z_2 - 5z_3 \quad \frac{1}{18^3} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow A^{-1} = & \frac{1}{18^3} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det A^{-1} = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

Damit $AA^{-1} = 1_n$ und $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei $A \in M_n(K)$, $\vec{b} \in K^n$

$$(L) \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

ist dann und nur dann für jedes \vec{b} lösbar, wenn A invertierbar ist, das heißt wenn $\det A \neq 0$ ist. Ist dies der Fall, so ist (L) eindeutig lösbar, nämlich

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Beweis:

- 1) Ist $\det A \neq 0$ so ist $A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$ eine Lösung von (L). Ist andererseits \vec{x} irgendeine Lösung von (L) dann ergibt Multiplikation mit A^{-1} von links

$$A^{-1}\vec{b} = A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = \vec{x}$$

- 2) Hat (L) für jedes \vec{b} eine Lösung, so wähle $\vec{b} = \vec{e}_k$ und nenne \vec{c}_k die Lösung $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n)$.

Zusammenfassung aller Gleichungssysteme

$$A(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

$$\text{kurz } A \cdot C = 1_n$$

$$\text{Also } \det A \cdot \det C = 1, \det A \neq 0$$

□

Bemerkung:

- (6) Es lässt sich zeigen (vergleiche nächstes Kapitel), dass das „homogene System“

$$(H) \quad A\vec{x} = \vec{0}$$

im Falle $\det A = 0$ wenigstens eine nichttriviale Lösung $\vec{x} > \vec{0}$ hat.

6. Vektorräume, lineare Selbstabbildungen, Eigenwerte

6.1 Vektorraum Axiome

Hat die Menge V eine Addition

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \vec{x} + \vec{y} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \quad (\text{assoziativ}) \\ \vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x} \quad (\text{kommutativ}) \end{aligned}$$

und existiert ein „Nullelement“ $\vec{0} \in V$ mit

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

und es gibt es zu jedem $\vec{x} \in V$ ein negatives $-\vec{x}$ mit

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

dann kann V ein Vektorraum werden über einem Körper K als Skalarbereich, falls eine Skalarmultiplikation existiert

$$\begin{aligned} \circ: K \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, \vec{x}) &\mapsto \lambda \vec{x} \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y} ; \quad 1_K \vec{x} = \vec{x} \\ \lambda(\mu \vec{x}) &= (\lambda \mu) \vec{x} \end{aligned}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$.

Beispiele:

- (1) $K^n, K^{\mathbb{N}} =$ Menge aller Folgen mit Elementen in K
- (2) $M_n(K), C_{\mathbb{R}}([0, 1])$: Die stetigen reellen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit $K = \mathbb{R}$

Einfache Folgerung aus den Vektorraum-Axiomen

$$\lambda\vec{x} = \vec{0}_V \iff \lambda = 0_K \text{ oder } \vec{x} = \vec{0}$$

6.1.1 Linearkombinationen

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r \in V$$

Linearkombinationen sind

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^r \xi_i \vec{a}_i$$

Die Gesamtheit dieser Linearkombinationen bildet einen „Unterraum“ $U = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r \rangle$ von V , die lineare Hülle der a_i . Ist $U = V$, wenn also jedes $\vec{x} \in V$ Linearkombination der \vec{a}_i ($1 \leq i \leq r$) ist, dann heißt $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ Erzeugersystem von V . Hat jedes $\vec{x} \in U$ nur eine Darstellung als Linearkombination der \vec{a}_i , so heißt das System $(\vec{a}_i)_{1 \leq i \leq r}$ linear unabhängig! Ist das nicht der Fall, dann hat der Nullvektor eine Darstellung

$$\vec{0}_V = \sum_{i=1}^r \xi_i \vec{a}_i \quad \text{mit } \xi_i = 0_K \text{ nicht für alle } i$$

und dann heißen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ linear abhängig.

Beispiel:

$$(3) \ K = \mathbb{R}, \ V = \mathbb{R}^3, \ r = 3$$

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$$

weil $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in U$. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ist ein Erzeugendensystem des \mathbb{R}^3 und $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind linear unabhängig; Annahme:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat nur die Lösung: $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$.

Hat das System $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ von Vektoren in V die Eigenschaft:

Erzeugersystem & lineare Unabhängigkeit

dann heißt $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ Basis von V .

6.1.2 Austauschsatz von Steinitz

Im Vektorraum V sei gegeben ein lineares unabhängiges System $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ und ein Erzeugendensystem $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s$. Dann gilt $r \leq s$ und $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ lässt sich ergänzen durch $s-r$ Vektoren \vec{a}_j ($r+1 \leq j \leq s$) aus den $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s$ zu einem weiteren Erzeugendensystem von V . (Beweis mit Induktion über $r \geq 0$.)

Folgerung:

Je zwei Basen eines Vektorraumes V haben dieselbe Elementanzahl. Diese Zahl heißt „Dimension“ von V .

K^n hat Dimension = n

$M_n(K)$ hat (als K -Vektorraum) Dimension n^2

Der K -Vektorraum aller Folgen hat keine endliche Dimension, ebenso ist $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ unendlich-dimensional.

Weitere Konsequenz des Austauschsatzes:

Jedes System $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ von n linear unabhängigen Vektoren in K^n ist eine Basis von K^n . Dagegen sind je $n+1$ Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n+1}$ in K^n stets linear abhängig.

Anwendung auf Matrizen $A \in M_n(K)$

$\det A \neq 0$ genau dann, wenn die n Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ von A linear unabhängig sind.

Beweis:

1) Wenn $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind, dann bilden sie eine Basis von K^n .

$$(L) \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

ist dann immer lösbar, weil jedes $\vec{b} \in K^n$ eine Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ist.
Daher ist $\det A \neq 0$.

2) Ist dagegen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig, dann

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \xi_i \quad \text{mit nicht lauter } \xi_i = 0$$

Etwa $\xi_k \neq 0$

$$\vec{a}_k = \sum_{i \neq k} \vec{a}_i (-\xi_i / \xi_k)$$

Dann nach (ML) und (ALT)

$$\begin{aligned} \det A &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\dots, \vec{0}, \dots) = 0 \end{aligned}$$

□

6.2 Unterräume und Dimensionsformel

Ein allgemeines Beispiel zum Begriff „Unterraum“

V, W seien K -Vektorräume. $f : V \mapsto W$ heißt „lineare Abbildung“, falls stets

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

Als „Kern“ von f wird bezeichnet

$$U := \{\vec{x} \in V; f(\vec{x}) = \vec{0}_W\}$$

(Kürzel $U = \text{Ker } f$); U ist ein Unterraum.

1. $\vec{0}_V \in U$ denn

$$f(\vec{0}_V) = f(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = f(\vec{0}_V) + f(\vec{0}_V)$$

$$\vec{0}_W = f(\vec{0}_V)$$

2. $\vec{x}, \vec{y} \in U \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in U$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \vec{0}_W$$

3. denn $\lambda \in K$; $\vec{x} \in U \Rightarrow \lambda \vec{x} \in U$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \vec{0}_W$$

Als Bild von f wird $f(V)$ bezeichnet. $W' = f(V)$ ist ein Unterraum von W .

1. $\vec{0}_W = f(\vec{0}_V) \in W'$

2. $\vec{v}, \vec{w} \in W'$, dann existiert $\vec{x}, \vec{y} \in V$ mit $\vec{v} = f(\vec{x})$, $\vec{w} = f(\vec{y})$

$$\vec{v} + \vec{w} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$$

3. $\lambda \in K$, $\vec{v} = f(\vec{x}) \in W'$ dann

$$\lambda \vec{v} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda \vec{x})$$

Definition:

Die Dimension des Bildes $f(V)$ heißt „Rang“ der linearen Abbildung f , kurz $\text{rg } f$.

Dimensionsformel

$$\dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = \dim V \quad \text{falls } \dim V = n < \infty$$



Beweis:

1) $r := \text{rg } f = \dim V$

Dann existiert eine Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ von $f(V) = W'$. Wähle $\vec{a}_i \in V$ mit $f(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$ ($1 \leq i \leq r$)

2) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ sind in V linear unabhängig, denn

$$\vec{0}_V = \sum_{i=1}^r \xi_i f(\vec{a}_i)$$

ist eine Linearkombination von $\vec{0}_V$.

Anwendung von f

$$\vec{0}_W = f\left(\sum_{i=1}^r \xi_i f(\vec{a}_i)\right) = \sum_{i=1}^r \xi_i \underbrace{f(\vec{a}_i)}_{\vec{b}_i}$$

Weil die $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ linear unabhängig

$$\Rightarrow \xi_i = 0 \quad (1 \leq i \leq r)$$

3) Ergänze die \vec{a}_i ($1 \leq i \leq r$) durch \vec{a}'_j ($r < j \leq n$) zu einer Basis von V . Dann

$$f(\vec{a}'_j) \in W', \quad \text{also} \quad f(\vec{a}'_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_{ij} \vec{b}_i$$

Ersetze \vec{a}'_j durch $\vec{a}'_j - \sum_{i=1}^r \lambda_{ij} \vec{a}_i = \vec{a}_j \quad (r < j \leq n)$

4) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_n$ sind wieder eine Basis von V und $f(\vec{a}_j) = \vec{0}_W$

Damit ist $\text{Ker } f = U = \langle \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_n \rangle$

□

Anwendungen auf Matrizen und lineare Gleichungen

Sei B eine $m \times n$ -Matrix mit Koeffizienten in K .

$$(L) \quad B\vec{x} = \vec{y}, \quad \vec{x} \in K^n, \quad \vec{y} \in K^m$$

bedeutet die Frage nach der Existenz eines \vec{x} , das bei gegebenem \vec{y} die Gleichung (L) erfüllt.

Links steht eine Linearkombination der Spalten $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ von B

$$\text{Beachte: } B\vec{e}_i = \vec{b}_i$$

Lösbar ist (L) genau dann, wenn \vec{y} eine Linearkombination der $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ ist. Mit anderen Worten, $\vec{y} \in B(K^n)$.

$$\vec{y} \in B(K^n) = W' \subset K^m \quad \text{wenn} \quad \text{rg } B = \text{rg}(B, \vec{y})$$

Das homogene Gleichungssystem

$$(H) \quad B\vec{x} = \vec{0}_W$$

ist die Frage nach dem Kern der zu B gehörigen linearen Abbildungen. Beim Gauß-Algorithmus (elementare Zeilenumformungen) ändert sich nicht die lineare Hülle der Zeilen von B . Ebenfalls ungeändert bleibt die Menge U der Lösungsvektoren.

$$\text{Zeilensumme}(B) + \dim U = n$$

$$\text{Zeilensumme } B = \text{Spaltensumme } B$$

6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in M_n(K)$. $\lambda \in K$ heißt „Eigenwert“ von A , falls

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (*)$$

eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ besitzt. Ist das der Fall, so heißt \vec{x} „Eigenvektor“ zum Eigenwert λ von A .

Bemerkungen:

(1) (*) ist äquivalent zu

$$(A - \lambda 1_n) \vec{x} = \vec{0}$$

λ ist also genau dann Eigenwert wenn gilt $\det(A - \lambda 1_n) = 0$.

(2) Durch Entwicklung der Determinante

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1_n)$$

ist ein Polynom vom Grad n in λ mit Leitkoeffizienten $(-1)^n$ und dem konstanten Term $\det A$ definiert

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots + \det A$$

$P_A(\lambda)$ ist das sogenannte charakteristisches Polynom von A . Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $P_A(\lambda)$.

(3) $\lambda = 0$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $\det A = 0$ ist.

Beispiele:

(1) $K = \mathbb{R}$, n ungerade. Nach dem Zwischenwertsatz hat $P_A(\lambda)$ für jedes $A \in M_n(\mathbb{R})$ mindestens eine reelle Nullstelle, also hat A mindestens einen Eigenvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$.

(2) $n = 2$, $K = \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad c^2 + s^2 = 1$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} c-\lambda & -s \\ s & c-\lambda \end{bmatrix} = (c-\lambda)(c-\lambda) + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + 1$$

Nullstellen

$$\lambda_{\pm} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}$$

$$\lambda_{\pm} = c \pm js \quad (= e^{\pm j\varphi}) ; \quad \lambda_{\pm} \text{ sind im allgemeinen nicht reell.}$$

(3) Im Falle $K = \mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in ein Produkt von Linearfaktoren, daher für jedes $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

mit den Nullstellen λ_i von $P_A(\lambda)$. Wegen

$$(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + \dots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

ist $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ das Produkt der Eigenwerte.

Warnung: $P_A(\lambda)$ kann durchaus mehrfache Nullstellen haben etwa A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \searrow 0 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = (-\lambda)^n$, es hat $\lambda = 0$ zur n -fachen Nullstelle.

Diagonalisierbarkeit von $A \in M_n(K)$ bei n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Bildet man aus den Eigenvektoren \vec{b}_k mit $\vec{b}_k \neq \vec{0}$ und $A\vec{b}_k = \lambda_k \vec{b}_k$ ($1 \leq k \leq n$) die Matrix $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$, dann ergibt sich die Matrixgleichung

$$AB = B \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Überdies ist B invertierbar, daher ist $B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A in der Hauptdiagonalen.

Bemerkung:

(4) Hat $P_A(\lambda)$ eine Faktorisierung

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$$

mit lauter verschiedenen λ_k , dann kann A (muss aber nicht) diagonalisierbar sein!

Ist $P_A(\lambda)$ nicht Produkt von Linearfaktoren dann ist A nicht diagonalisierbar.

Beweis:

Problem: B ist invertierbar, das heißt $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig.

Beweisschritt: Eigenvektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

$r = 1$: $\vec{b}_1 = \vec{0}$ nach Voraussetzung, daher \vec{b}_1 linear unabhängig.

$r \mapsto r+1$: ($r < n$) ; Annahme:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \vec{b}_i \quad (*)$$

Anwende A

$$\vec{0} = A(\vec{0}) = \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \underbrace{A\vec{b}_i}_{\lambda_i \vec{b}_i} = \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \lambda_i \vec{b}_i$$

Multiplikation von $(*)$ mit λ_{r+1}

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \lambda_{r+1} \vec{b}_i$$

Differenz der zwei obigen Gleichungen

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^r \xi_i (\lambda_i - \lambda_{r+1}) \vec{b}_i$$

Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow \xi_i = 0 \quad (1 \leq i \leq r)$. Von $(*)$ bleibt

$$\vec{0} = \xi_{r+1} \vec{b}_{r+1} \Rightarrow \xi_{r+1} = 0$$

□

Beispiel:

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda+1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\text{Nullstellen } \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda^2 = \lambda + 1 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda+1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{bmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = B \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} B^{-1}$$

6.4 Euklidische und unitäre Skalarprodukte

Das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n lässt sich erweitern zu einem „unitären“ Skalarprodukt des \mathbb{C}^n durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$$

Eigenschaften des unitären Skalarprodukts (U)

$$\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{y}' \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}' \rangle$$

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \quad ,= \text{“ nur dann wenn } \vec{x} = \vec{0}$$

Betrachte \mathbb{C} -Vektorräume V mit einem „Skalarprodukt“ $\langle -, - \rangle$ mit den Eigenschaften (U), unitäre Vektorräume. (Untergeordnet wird der Fall „euklidischer“ Vektorräume, das heißt \mathbb{R} -Vektorräume mit einem (U)-erfüllenden Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ reellwertig, deshalb $\overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$)

Gemeinsame Bezeichnung unitärer \mathbb{K} -Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Konsequenzen aus (U)

$$\langle \vec{x} + \vec{x}', \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}', \vec{y} \rangle$$

$$\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung, kurz C-S-U})$$

Norm auf V

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

Eigenschaften

$$\|\vec{x}\| \geq 0, \quad ,= \text{“ nur für } \vec{x} = \vec{0}$$

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (\text{Dreiecks-Ungleichung; folgt auch aus C-S-U})$$

$\vec{x}, \vec{y} \in V$ heißen „orthogonal“, falls $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

Beachte: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0$

Hilfsatz 1

Sind $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ von $\vec{0}$ verschieden, paarweise orthogonal dann sind sie linear unabhängig ($\langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = 0$ falls $i \neq k$)

Beweis:

$$\text{Annahme } \sum_{k=1}^r \xi_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

Bilde Skalarprodukt mit \vec{a}_i

$$0 = \langle \vec{a}_i, \vec{0} \rangle = \left\langle \vec{a}_i, \sum_{k=1}^r \xi_k \vec{a}_k \right\rangle$$

Linearität

$$0 = \sum_{k=1}^r \xi_k \underbrace{\langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle}_{=0} = \xi_i \underbrace{\langle \vec{a}_i, \vec{a}_i \rangle}_{>0}$$

für $i \neq k$

Daher $\xi_i = 0$ ($1 \leq i \leq r$)

□

Ein System $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ von Vektoren im unitären \mathbb{K} -Vektorraum V heißt Orthonormalsystem, wenn stets $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = \delta_{ik}$ ($1 \leq i, k \leq r$).

6.4.1 Orthonomierungssatz

Sei V ein n -dimensionaler unitärer \mathbb{K} -Vektorraum. Jedes Orthonormalsystem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ in V kann ergänzt werden zu einer Orthonormalbasis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Beweis durch schrittweise Vergrößerung von r .

Ist $r < n$, dann existiert ein $\vec{b} \notin \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r \rangle = U$ mit $\vec{b} \in V$. Konstruktion der „orthogonalen Projektion“ von \vec{b} auf U

$$\vec{b}_0 = \sum_{k=1}^r \langle \vec{a}_k, \vec{b} \rangle \vec{a}_k \quad \vec{b}_0 \in U;$$

$$\langle \vec{a}_i, \vec{b}_0 \rangle = \left\langle \vec{a}_i, \sum_{k=1}^r \langle \vec{a}_k, \vec{b} \rangle \vec{a}_k \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^r \langle \vec{a}_i \cdot \vec{b} \rangle \underbrace{\langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle}_{\delta_{ik}} = \langle \vec{a}_i, \vec{b} \rangle$$

daher $\langle \vec{x}, \vec{b}_0 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle$

also $\vec{0} \neq \vec{b} - \vec{b}_0$ ist orthogonal zu jedem $\vec{x} \in U$

$$\vec{a}_{r+1} := (\vec{b} - \vec{b}_0) \|\vec{b} - \vec{b}_0\|^{-1}$$

□

Definition:

V sei unitärer \mathbb{K} -Vektorraum, $A : V \mapsto V$ eine lineare Selbstabbildung von V (Endomorphismus von V).

A heißt „selbstadjungiert“ falls für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ $\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle$.

||

Bemerkung:

(1) Ist $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ mit $n = \dim V$ eine Orthonormalbasis und

$$A\vec{a}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \vec{a}_k$$

mit passenden $\alpha_{ik} \in \mathbb{K}$, dann ist A selbstadjungiert genau dann, wenn $\bar{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}$ ($1 \leq i, k \leq n$).

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet das die Matrix zu A ist symmetrisch.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt die Matrix dann hermetisch.

Hilfssatz 2

Eine hermetische Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$, das heißt $A = A^T$, hat lauter reelle Eigenwerte.

Beweis über $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (über \mathbb{C}) hat A mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei \vec{b} ein Eigenvektor zu λ von A

$$\begin{aligned} \langle \vec{b}, A\vec{b} \rangle &= \sum_{i=1}^n \bar{b}_i (A\vec{b})_i = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \sum_{k=1}^n a_{ik} b_k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \bar{b}_i a_{ik} b_k \underset{\bar{a}_{ki}}{\downarrow} = \sum_{i,k=1}^n \overline{a_{ki} b_i} \cdot b_k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n (\overline{A\vec{b}})_k b_k = \langle A\vec{b}, \vec{b} \rangle$$

Vergleich der linken Seite (LS) und der rechten Seite (RS) der Gleichung ergibt

$$\left. \begin{array}{l} \text{LS : } \langle \vec{b}, A\vec{b} \rangle = \lambda \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{\neq 0} \\ \text{RS : } \langle A\vec{b}, \vec{b} \rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \text{ das heißt } \lambda \text{ muss reell sein}$$

□

Hauptsatz über selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei A ein selbstadjungierter Endomorphismus des unitären \mathbb{K} -Vektorraumes V . Dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A .

Beweis schrittweise:

Nach Hilfsatz 2 existiert auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ein Eigenvektor zu A , etwa \vec{a}_1 , ohne Einschränkung mit Norm 1.

Betrachte $U = \langle \vec{a}_1 \rangle^\perp = \{ \vec{x} \in V ; \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = 0 \}$

Hauptschritt: A bildet U in sich ab.

Sei $\vec{x} \in U$, das heißt $\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}_1, A\vec{x} \rangle &= \langle A\vec{a}_1, \vec{x} \rangle \quad \text{weil } A \text{ selbstadjungiert} \\ &= \bar{\lambda}_1 \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Weil U erstens eine kleinere Dimension hat als V ($\dim(n-1)$), und weil A auf U selbstadjungiert wirkt, hat U nach Induktionsvoraussetzung eine Orthonormalbasis $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ aus Eigenvektoren von A . Sie wird mit \vec{a}_1 ergänzt zu einer Orthonormalbasis von V .

□

Anwendung auf \mathbb{R} : Die Hauptachsentransformation.

6.4.2 Die Hauptachsentransformation

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ besitzt \mathbb{R}^n eine Orthonormalbasis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ bestehend aus den Eigenvektoren von A . Ausgedrückt mit der orthogonalen Matrix $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$

$$B^T B = 1_n \quad \text{und} \quad B^T A B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit den (reellen) Eigenwerten von A in der Diagonale.

Beispiel:

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda 1_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^2(\lambda + 1) + \lambda + 1 + \lambda = -(\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1) \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat als charakteristisches Polynom einer symmetrischen 3×3 -Matrix 3 reelle Nullstellen. Keine ist rational.

Nullstellen sind:

$$\lambda' = 2 \cos \frac{2\pi}{7} \quad \lambda'' = 2 \cos \frac{4\pi}{7} \quad \lambda''' = 2 \cos \frac{6\pi}{7}$$

Begründung über die siebten (primitiven) Einheitswurzeln $e^{2\pi im/7}$, $m \neq 7$. Diese sind die Nullstellen von

$$\begin{aligned} \frac{x^7 - 1}{x - 1} &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 &= 0 \quad / \cdot \zeta^{-3} \\ \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-3} &= 0 \\ (\zeta^3 + \zeta^{-3}) + (\zeta^2 + \zeta^{-2}) + (\zeta^1 + \zeta^{-1}) + 1 &= 0 \\ (\zeta + \zeta^{-1})^3 + (\zeta + \zeta^{-1})^2 + 2(\zeta^1 + \zeta^{-1}) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$A - \lambda 1_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -\lambda^2+1 \end{bmatrix}$$

Aus $P_A(\lambda) = 0$ folgt

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) - \lambda = 0$$

also

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) = \lambda$$

Das jetzt nutzen für eine weitere elementare Umformung: λ mal 2-te Zeile minus $(\lambda+1)$ mal 3-te Zeile ergibt neue dritte Zeile (EV = Einheitsvektor)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{EV: } \vec{b}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda - 1 \\ 1 \\ \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{b}_1 = \vec{b}(\lambda') \|\vec{b}(\lambda')\|^{-1} \\ \vec{b}_2 = \vec{b}(\lambda'') \|\vec{b}(\lambda'')\|^{-1} \\ \vec{b}_3 = \vec{b}(\lambda''') \|\vec{b}(\lambda''')\|^{-1} \end{array} \right\} B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

$$B^T B = 1_3, \quad B^T A B = \text{diag}(\lambda', \lambda'', \lambda''')$$

Quadratische Form

(in n Variablen x_1, \dots, x_n über \mathbb{R}) nennt man jedes homogene Polynom vom Grad 2 (jeder Term $\neq 0$ hat Gesamtgrad 2).

$$n=2: \quad ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

$$n=3: \quad ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2$$

Allgemeiner Fall

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

zum Paar $i \neq k$ zwei Terme $a_{ik}x_i x_k, a_{ki}x_k x_i$

Daher, ohne Einschränkung, kann die Koeffizientenmatrix A (= Form-Matrix) symmetrisch geschrieben werden

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k = \vec{x} \cdot A \vec{x} \quad (\text{Matrixschreibweise})$$

Anwendung der Hauptachsentransformation

Mit orthogonaler Matrix B , ($B^T = B^{-1}$) gilt $B^T A B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Koordinatentransformation

$$\vec{x} = B\vec{x}$$

dann $\vec{x}^T = \vec{\xi}^T B^T$

$$Q(\vec{x}) = \tilde{Q}(\vec{\xi}) = Q(B\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T (B^T A B) \vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) A$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}(\vec{\xi}) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2$$

Beispiel:

(2) $n = 4$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Weil die Zeilensummen konstant ($= 6$) sind, wird

$$\frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4) = \vec{b}_1$$

Eigenvektor zum Eigenwert 6.

$$\vec{b}_1^\perp = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Orthonormalbasis für U geraten

$$\vec{b}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \vec{b}_2 ; \quad A\vec{b}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{b}_3$$

$$A\vec{b}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{b}_4$$

Mit $B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ gilt

$$B = B^T = B^{-1} \quad (B^2 = 1_4)$$

$$B^T A B = \text{diag}(6, -4, -2, 0)$$

$$\tilde{Q}(\vec{\xi}) = 6\xi_1^2 - 4\xi_2^2 - 2\xi_3^2$$

7. Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

7.1 Differentialgleichung des Wachstums und Zerfalls

$$\boxed{\dot{x} = \alpha \cdot x \quad (*)} \quad \alpha \in \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$

Annahme: $f(t)$ sei eine Lösung von $(*)$ auf dem Intervall I .

Hilfsfunktion: $g(t) = f(t)e^{-\alpha t}$, mit f ist g differenzierbar

$$\begin{aligned}\dot{g}(t) &= \dot{f}(t)e^{-\alpha t} - \alpha f(t)e^{-\alpha t} \\ &= \underbrace{(\dot{f}(t) - \alpha f(t))}_{\equiv 0 \forall t} e^{-\alpha t} \\ \Rightarrow \quad \dot{g}(t) &= 0 \quad ; \quad g(t) = \text{const} = g(0) \\ f(t) &= c \cdot e^{\alpha t}\end{aligned}$$

Resultate:

Für jeden Anfangswert c hat $(*)$ genau eine Lösung f mit $f(0) = c$ (nämlich $f(t) = c \cdot e^{\alpha t}$).

Mit je zwei Lösungen f_1, f_2 sind auch die Linearkombinationen

$$\varphi = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$$

Lösungen von $(*)$. Jede Lösung ist auf ganz \mathbb{R} definiert. Jede von der Nullfunktion verschiedene Lösung ist sogar Nullstellen frei.

7.1.1 Die zugehörige inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x} = \alpha \cdot x + g \quad (**)$$

mit einer \mathbb{K} -wertigen Funktion $g(t)$, definiert und stetig auf I .

Lösungsansatz durch Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= c(t)e^{\alpha t} \\ \dot{\varphi}(t) &= \dot{c}(t)e^{\alpha t} + \alpha c(t)e^{\alpha t} \quad \text{und da } \varphi \text{ Lösung ist gilt} \\ &= \alpha\varphi(t) + g(t)\end{aligned}$$

Daher $\dot{c}(t) = e^{-\alpha t}g(t)$

Diese Differentialgleichung für c kann gelöst werden durch „Quadratur“

$$c(t) = \int_0^t e^{\alpha s}g(s) ds$$

Einsetzen in $\varphi(t) = c(t)e^{\alpha t}$

$$\varphi(t) = e^{\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}g(s) ds$$

Resultate:

Durch Variation der Konstanten in der allgemeinen Lösung von (*) ergibt sich eine partikuläre Lösung φ von (**).

Die Geamtheit aller Lösungen von (**) ergibt sich in der Form

$$\varphi + \psi$$

wobei ψ alle Lösungen von (*) durchläuft.

7.2 Differenzialgleichung der gedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (*)$$

$2\mu \geq 0$: Dämpfungskonstante

$\omega_0 > 0$: Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

Exponentialansatz für eine Lösungsfunktion φ

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} ; \quad \dot{\varphi}(t) = \lambda e^{\lambda t} ; \quad \ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

Es muss gelten

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$\text{Nullstellen: } \lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

$$\underline{\text{Normalfall: }} \mu^2 \neq \omega_0^2$$

Zwei verschiedene Lösungsfunktionen $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$; $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ aus dem Ansatz.

Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \dot{\varphi}_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \varphi_2(0) \\ \dot{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

bilden eine System von zwei linear unabhängigen Vektoren

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \dot{\varphi}_1(0) & \dot{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

Daher ist das Anfangswertproblem stets lösbar: Zu gegebenen Anfangswerten $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ gibt es eine Funktion φ auf \mathbb{R} welche (*) erfüllt und die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = c_1, \dot{\varphi}(0) = c_2$.

Die Lösungsmenge von (*) enthält die Nullfunktion und mit je zwei Funktionen φ, ψ auch jede Linearkombination von φ und ψ .

Daher ist für beliebige $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ auch

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)$$

eine Lösung von (*) \Rightarrow

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha_1 \lambda_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \lambda_2 \varphi_2(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \dot{\varphi}(0) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \end{array} \right\} \text{Lineares Gleichungssystem in } \alpha_1, \alpha_2$$

mit Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \det \neq 0 \quad \text{also eindeutig lösbar}$$

Der Lösungsraum von (*) ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Es genügt eine Lösung φ mit den Anfangswerten $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$. Dazu allgemein für zwei Lösungen φ, ψ von (*)

$$W(\varphi, \psi) := \varphi \ddot{\psi} - \dot{\varphi} \psi \quad (\text{Wronksi-Determinante})$$

W ist als Funktion von t differenzierbar:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \varphi(t) \ddot{\psi}(t) - \ddot{\varphi}(t) \psi(t) \\ &= \varphi(t)(-2\mu\dot{\psi}(t) - \omega_0^2\psi(t)) - (-2\mu\dot{\varphi}(t) - \omega_0^2\varphi(t))\psi(t) \\ &= -2\mu(\varphi(t)\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t)\psi(t)) = -2\mu W \end{aligned}$$

W ist Lösung der Differentialgleichung des Wachstums und Zerfalls!

Daher ist W entweder nullstellenfrei oder die Nullfunktion speziell im Fall $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$. Für jede Lösung ψ von (*) gilt jetzt $W(\varphi, \psi) = 0$ ($\forall t$), $\psi = \varphi_1$ und $\psi = \varphi_2$

$$\varphi(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \dot{\varphi}(t)e^{\lambda_1 t} = 0$$

$$\varphi(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \dot{\varphi}(t)e^{\lambda_2 t} = 0$$

Daher

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \varphi = \dot{\varphi} \\ \lambda_2 \varphi = \dot{\varphi} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \varphi(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = 0 \quad \forall t$$

Der Grenzfall: $\mu^2 = \omega_0^2$

Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2 = 0$ hat $\lambda = -\mu$ zur Doppelwurzel.

Eine Lösung $\varphi_1(t) = e^{-\mu t}$; weitere Lösung $\varphi_2(t) = te^{-\mu t}$

Begründung:

$$\dot{\varphi}_2(t) = -\mu t e^{-\mu t} + e^{-\mu t}$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) = \mu^2 t e^{-\mu t} - 2\mu t e^{-\mu t}$$

Einsetzen in (*) mit $\omega_0^2 = \mu^2$ ergibt

$$\ddot{\varphi}_2(t) + 2\mu\dot{\varphi}_2 + \mu^2\varphi_2 = e^{-\mu t} \left[\underbrace{(\mu^2 - 2\mu + \mu^2)}_{=0} + \underbrace{(-2\mu + 2\mu)}_{=0} \right] = 0$$

Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \dot{\varphi}_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \varphi_2(0) \\ \dot{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Anfangswertproblem ist (auch im Grenzfall) lösbar: $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$

Auch hier wird zur Bestimmung der Dimension des Lösungspaars $W(\varphi, \psi)$ gebildet. Wieder $\dot{W} = -2\mu W$. Angewandt auf eine Lösung φ mit $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$

$$W(\varphi, \psi)(t) = 0 \quad \text{für alle Lösungen } \psi \text{ von (*)}$$

Eintrage $\psi = \varphi_1$ und $\psi = \varphi_2$

$$\begin{aligned} 0 &= W(\varphi, \varphi_1)(t) = \varphi(t)\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}(t)\varphi_1(t) = (-\mu\varphi(t) - \dot{\varphi}(t))e^{-\mu t} \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) = -\mu\varphi(t) \\ 0 &= W(\varphi, \varphi_2)(t) = \varphi(t)\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}(t)\varphi_2(t) \\ &= \varphi(t)(-\mu te^{-\mu t} + e^{-\mu t}) - \dot{\varphi}(t)te^{-\mu t} \\ &= \varphi(t)(-\mu te^{-\mu t} + e^{-\mu t}) - (-\mu\varphi(t))te^{-\mu t} = \varphi(t)e^{-\mu t} \\ &\Rightarrow \varphi(t) = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Bemerkung zum Fall geringer Dämpfung: $\mu^2 < \omega_0^2$

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{Wurzeln} \quad -\mu \pm \sqrt{\underbrace{\mu^2 - \omega_0^2}_{-\omega^2 < 0}} = -\mu \pm j\omega \quad \text{nicht reell}$$

Lösungen

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\mu t}e^{+j\omega t} = e^{-\mu t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\mu t}e^{-j\omega t} = e^{-\mu t}(\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

Durch Linearkombinationen ergeben sich reelle Lösungen

$$\frac{1}{2}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = e^{-\mu t} \cos \omega t$$

$$\frac{1}{2j}(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = e^{-\mu t} \sin \omega t$$

7.2.1 Die zugehörige inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = g \quad (**)$$

ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung.

Weil die linke Seite ein „linearer Differentialoperator“ für die gesuchte Funktion $x(t)$ ist, ist die Differenz je zweier Lösungen von $(**)$ eine Lösung von $(*)$, mit anderen Worten: Aus einer einzigen Lösung φ von $(**)$ erhält man alle Lösungen in der Form $\varphi + \psi$, wo ψ die Lösungen von $(*)$ durchläuft.

Der Lösungsraum von $(*)$ ($g \equiv 0$) ist ein 2-dimensionaler Vektorraum. Jede Basis ψ_1, ψ_2 des Lösungsraums heißt ein „Fundamentalsystem“ von $(*)$.

Superpositionsprinzip

Ist φ Lösung von $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = g$ und ist ψ Lösung von $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = h$ (wobei g, h auf dem selben Intervall erklärt sind) dann ist $\alpha\varphi + \beta\psi$ Lösung von

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha g + \beta h$$

(Denn die linke Seite der Differentialgleichung ist ein linearer Operator für die Lösungsfunktion.)

Spezialfall: $g(t) = ae^{\lambda t}$

1) λ nicht Nullstelle der charakteristischen Gleichung

$$x^2 + 2\mu x + \omega_0^2 = 0$$

Ansatz $\varphi(t) = ce^{\lambda t}$ mit $c = c(\lambda)$

$$\dot{\varphi} = c\lambda e^{\lambda t}; \quad \ddot{\varphi} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$[\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - g] = e^{\lambda t}[c\lambda^2 + 2\mu c\lambda + \omega_0^2 c - a] = 0$$

$$\text{falls } c = \frac{a}{\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2}$$

2) λ ist Nullstelle der charakteristischen Gleichung

A) $x^2 + 2\mu x + \omega_0^2 = 0$ hat zwei verschiedene Wurzeln: λ_1, λ_2 ($\mu^2 \neq \omega_0^2$)

$\lambda = \lambda_i$: Ansatz $\varphi(t) = cte^{\lambda_i t}$

$$\dot{\varphi}(t) = ct\lambda_i e^{\lambda_i t} + ce^{\lambda_i t}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}(t) &= ct\lambda_i^2 e^{\lambda_i t} + 2c\lambda_i e^{\lambda_i t} \\
\ddot{\varphi}(t) + 2\mu\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) - g &= \\
&= e^{\lambda_i t} \left[ct(\underbrace{\lambda_i^2 + 2\mu\lambda_i + \omega_0^2}_{=0}) + (2c\lambda_i + 2\mu c - a) \right] = 0 \\
\text{falls } c &= \frac{a}{2(\lambda_i + \mu)}
\end{aligned}$$

B) $\omega_0^2 = \mu^2$; $\lambda = -\mu$ ist die Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz: } \varphi(t) &= ct^2 e^{-\mu t} \\
\dot{\varphi}(t) &= -c\mu t^2 e^{-\mu t} + 2ct e^{-\mu t} \\
\ddot{\varphi}(t) &= c\mu^2 t^2 e^{-\mu t} - 4c\mu t e^{-\mu t} + 2c e^{-\mu t} \\
\ddot{\varphi}(t) + 2\mu\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) - g &= \\
&= e^{-\mu t} \left[ct^2(\underbrace{\mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2}_{=0}) + ct(\underbrace{-4c\mu + 4c\mu}_{=0}) + (2c - a) \right] = 0 \\
\text{falls } c &= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

7.2.2 Umschreibung der Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Mit $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{im homogenen Fall}$$

kurz $\vec{\dot{y}} = A\vec{y}$

Nach dem Bewiesenen existiert ein Fundamentalsystem ψ_1, ψ_2 mit den Anfangsbedingungen

$$\psi_1(0) = 1 ; \psi_2(0) = 0$$

$$\dot{\psi}_1(0) = 0 ; \dot{\psi}_2(0) = 1$$

Matrixform

$$U(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \dot{\psi}_2(t) \end{pmatrix}$$

In Matrixform: U erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{U}(t) = AU(t)$$

mit Anfangsbedingung $U(0) = 1_2$

Umschreibung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} c_2 = U(t)\vec{c} ; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Inhomogene lineare Differentialgleichung (***) in Matrixform

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{b}$$

mit einer vektorwertigen Funktion welche stetig auf einem Intervall ist.

Lösungsansatz durch Variation der Konstanten

$$\vec{\varphi}(t) := U(t)\vec{c}(t)$$

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = \dot{U}(t)\vec{c}(t) + U(t)\dot{\vec{c}}(t)$$

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = \underbrace{AU(t)\vec{c}(t)}_{\vec{\varphi}(t)} + U(t)\dot{\vec{c}}(t)$$

$$= A\vec{\varphi}(t) + \vec{b}(t)$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \dot{\psi}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{hat Determinante} \quad \psi_1\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1\psi_2 = W(\psi_1, \psi_2)$$

Diese ist nullstellenfrei, $U(t)$ ist invertierbar

$$\dot{\vec{c}}(t) = U^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

Durch Quadratur lösbar

$$\vec{c}(t) = \int_{t_0}^t U^{-1}(s)\vec{b}(s) ds$$

$$\vec{\varphi}(t) = U(t) \int_{t_0}^t U^{-1}(s)\vec{b}(s) ds$$

7.3 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\dot{\vec{y}} = A\vec{y} \quad (\text{H})}, \quad A \in M_n(\mathbb{K})$$

Gesucht: $\vec{y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}^n$

Definition:

Explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

wo etwa f simultan stetig in $x, y, x \in I$, Interval in \mathbb{R} ; Anfangsbedingung $y(x_0) = b$



Zweiter Blick auf die Differentialgleichung mit Erinnerung an den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Die Lösungsfunktion $y(x)$ erfüllt

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

mit anderen Worten, Lösungsfunktion $y(x)$ ist Fixpunkt des Integraloperators T_φ

$$(T_\varphi)(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

7.3.1 Ansatz der Picard-Iteration

$y_0(x)$ beliebig (geeignet) mit $y_0(x_0) = b$

$$\boxed{y_{N+1}(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y_N(t)) dt}$$

Iteration sowohl für skalarwertige y, f, b wie für vektorwertige $\vec{y}, \vec{f}, \vec{b}$.

$$\boxed{\dot{Y} = AY \quad (\text{HM})}, \quad A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ mit}$$

Anfangsbedingung: $Y(0) = 1_n$ mit einer Lösungskurve $Y : \mathbb{R} \mapsto M_n(\mathbb{K})$.

Aus einer Lösung $U(t)$ von (HM) ergibt sich die allgemeine Lösung von (H).

Ansatz: Picard-Iteration

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1_n \\ Y_1(t) &= 1_n + \int_0^t A \, ds = 1_n + At \\ Y_2(t) &= 1_n + \int_0^t AY_1(s) \, ds = 1_n + \int_0^t A(1_n + As) \, ds \\ &= 1_n + \int_0^t (A + A^2 s) \, ds = 1_n + At + \frac{A^2}{2} t^2 \\ Y_N(t) &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k t^k \end{aligned}$$

Induktion nach N : $N \rightarrow N + 1$

$$\begin{aligned} Y_{N+1} &= 1_n + \int_0^t AY_N(s) \, ds \\ &= 1_n + \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^{k+1} \int_0^t s^k \, ds \\ &= 1_n + \sum_{k=0}^N \frac{1}{(k+1)!} A^{k+1} t^{k+1} \end{aligned}$$

Konvergenzfrage für die Matrizenfolge $(Y_N(t))_{N \geq 0}$

7.4 Matrixnormen

Normen in \mathbb{K} -Vektorräumen V sind Funktionen $N : V \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$\text{N1)} \quad N(\vec{x}) \geq 0, \quad \text{„=}“ \text{ nur für } \vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{N2)} \quad N(\lambda \vec{x}) = |\lambda| N(\vec{x}) \quad \text{Homogen}$$

$$\text{N3)} \quad N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$$

Beispiele:

(1) in \mathbb{K}^n , die euklidische Norm

$$N(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \|\vec{x}\|_e$$

(2) in \mathbb{K}^n , die Maximum-Norm

$$N(\vec{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|\vec{x}\|_{\max}$$

Satz von der Äquivalenz der Normen

In einem endlich dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum haben je zwei Normen dieselbe Cauchy-Folge und V ist vollständig, das heißt jede Cauchy-Folge konvergiert (Beweis elementar).

Insbesondere ist $M_n(\mathbb{K})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum. Für Matrixnormen wird neben N1), N2), N3) gefordert:

$$\text{N4)} \quad N(AB) \leq N(A)N(B) \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) \quad (\text{submultiplikativ})$$

Beispiele:

(3) Euklidische Norm (Frobenius, Schur)

$$A = (a_{ik}) \quad , \quad \|A\|_e = \left(\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \right)^{1/2}$$

(4) Matrixnorm für Matrizen

$$\|A\|_{\max} = n \cdot \max_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}|$$

Beweis der Submultiplikavität von $\|A\|_e$

$$\begin{aligned} \|AB\|_e &= \left(\sum_{i,k} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^n |a_{il}|^2 \right)}_{s_i} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^n |b_{mk}|^2 \right)}_{t_k} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i,k=1}^n s_i t_k \right)^{1/2} = \left(\sum s_i \right)^{1/2} \left(\sum t_k \right)^{1/2} \\ &= \|A\|_e \|B\|_e \end{aligned}$$

□

Ziel: Zeige $(Y_N(t))_{N \geq 0}$ ist Cauchy-Folge in $M_n(\mathbb{K})$ mit Limes $\exp(At)$.

7.4.1 Exponentialfunktion auf $M_n(\mathbb{K})$

Für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ konvergiert die Reihe

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Ferner gilt für vertauschbare Matrizen A, B (das heißt $AB = BA$) die Funktionalgleichung

$$\boxed{\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)}$$

Beweis:

1) Die Partialsummen

$$s_N(A) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \quad \text{bilden eine Cauchy-Folge.}$$

Der Witz: Die Abschätzung wird zurückgeführt auf die Taylor-Reihe der gewöhnlichen Exponentialfunktion.

$$\|s_N(A) - s_{N+p}(A)\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k!} A^k \right\|$$

wegen N2) und N3):

$$\leq \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k!} \|A^k\|$$

wegen N4):

$$\leq \sum_{N+1}^{N+p} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{(N+1)!} e^{\|A\|}$$

wegen des Lagrange-Restes für die gewöhnliche Exponentialreihe!

2) Hauptgedanke zur Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} s_N(A)s_N(B) - s_N(A+B) &= \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{r=1}^N \frac{1}{r!} B^r \right) \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} (A+B)^m \end{aligned}$$

Binomische Formel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(m-k)!} B^{m-k} &= \frac{1}{m!} (A+B)^m \\ &= \sum_{\substack{k,r \leq N \\ N \leq k+r}} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{r!} B^r \rightarrow 0 \quad \text{falls } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Spezielle Werte der Exponentialfunktion für Matrizen

$$\exp(0_n) = 1_n = \exp(A - A) = \exp(A) \exp(-A)$$

Insbesondere ist $\exp(A)$ invertierbar für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$$A = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) \quad \forall k$$

$$\exp(D) = \exp(\text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$$

Ist $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisierbar, das heißt

$$S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$(S^{-1}AS)^2 = D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2)$$

$$A = SDS^{-1}; \quad A^2 = SD^2S^{-1}; \quad A^k = SD^kS^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp(A) = S \exp(D) S^{-1} = S \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}) S^{-1}$$

Die Picard-Iteration von (HM) mit Startfunktion

$$Y_0(t) = 1_n \quad \text{wenn} \quad Y_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k t^k$$

hat einen Limes für $N \rightarrow \infty$, nämlich

$$U(t) = \exp(At)$$

$U(t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (HM). Bilde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (U(t+h) - U(t)) &= \frac{1}{h} (\exp(At + Ah) - \exp(At)) \quad \text{Funktionalgleichung} \\ &= \frac{1}{h} (\exp(Ah) \exp(At) - \exp(At)) \\ &= \frac{1}{h} (\exp(Ah) - 1_n) \exp(At) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} (\exp(Ah) - \exp(Ah) \exp(-Ah)) \exp(At) \\
&= \frac{1}{h} \exp(Ah) \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\exp(Ah)}\right)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{für } h \rightarrow 0}} \exp(At)
\end{aligned}$$

Reihenentwicklung für den ersten Faktor

$$\frac{1}{h} \exp(Ah) = A + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{h!} A^k h^{k-1}}_{\text{Rest}}$$

Abschätzung des Restes

$$\left\| \frac{1}{h!} A^k h^{k-1} \right\| \leq \frac{\|A\|^2 |h|}{2} \exp(\|A\| \cdot |h|) \quad (\text{Lagrange})$$

Der Rest geht gegen 0 für $h \rightarrow 0$ daher ist $U(t)$ für alle reellen t differenzierbar mit Ableitung

$$\dot{U}(t) = AU(t)$$

7.5 Die allgemeine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in \mathbb{K}^n

Satz 1:

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} \quad (\text{H})$$

hat für jeden Anfangswert $\vec{y}(0) = \vec{c}$ genau eine Lösung, nämlich

$$\vec{y}(t) = \exp(At)\vec{c}$$

Beweis:

$$1) \quad \vec{\varphi}(t) = \exp(At)\vec{c}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} (\vec{\varphi}(t+h) - \vec{\varphi}(t)) &= \frac{1}{h} (\exp(At+Ah) - \exp(At)) \vec{c} \\
&= \underbrace{\frac{1}{h} (\exp(Ah) - 1_n)}_{\substack{\rightarrow A \text{ falls } h \rightarrow 0}} \underbrace{\exp(At)\vec{c}}_{\vec{\varphi}(t)}
\end{aligned}$$

das heißt: $\vec{\varphi}$ löst (H) mit Anfangswert $\vec{\varphi}(0) = 1_n \cdot \vec{c} = \vec{c}$

2) Annahme: $\vec{\psi}(t)$ löse (H)

Hilfsfunktion: $\vec{f}(t) = \exp(-At)\vec{\psi}(t)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\dot{\vec{f}}(t) = \left(\frac{d}{dt} \exp(-At) \right) \vec{\psi}(t) + \exp(-At) \dot{\vec{\psi}}(t)$$

da $\vec{\psi}(t)$ Lösung von (H)

$$\dot{\vec{f}}(t) = \underbrace{\left(-A \exp(-At) + \exp(-At)A \right)}_{0_n} \vec{\psi}(t) = \vec{0}$$

denn $\exp(-At)A = A \exp(-At)$ wie man an den Partialsummen $s_N(-At)$ erkennt.

Wegen $\dot{\vec{f}}(t) = \vec{0}$ ist $\vec{f}(t)$ konstant gleich \vec{c}_0

$$\vec{\psi}(t) = \exp(At)\vec{f}(t) = \exp(At)\vec{c}_0$$

□

Bemerkungen:

Die Lösungen $\exp(At)\vec{c}_0$ von (H) bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum (mit Funktionen auf \mathbb{R} als Elementen). Seine Dimension ist die von \mathbb{K}^n , also $n!$ Jede Basis des Lösungsraumes wird als Fundamentalsystem von Lösungen bezeichnet. Beispielsweise bilden die Spalten von $\exp(At)$ ein Fundamentalsystem.

Satz 2:

Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung. Sei $\vec{b} : I \mapsto \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion auf dem Intervall I . Dann hat

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{b} \quad (\text{L})$$

die partikuläre Lösung

$$\vec{\psi}(t) = \exp(at) \int_{t_0}^t \exp(-As) \vec{b}(s) ds$$

mit Anfangswert

$$\vec{\psi}(t_0) = \vec{0}$$

Alle übrigen Lösungen sind von der Form $\vec{\psi} + \vec{\varphi}$, wobei $\vec{\varphi}$ die Lösungen von (H) durchläuft!

Beweisschritt:

Die Tatsache, dass $\vec{\psi}$ Lösung ist (von (L)) folgt direkt aus der Produktregel. Gefunden wird $\vec{\psi}(t)$ durch Variation der Konstanten in der allgemeinen Lösung von (H).

Ansatz: $\vec{\psi}(t) = \exp(At)\vec{c}(t)$, dann

$$\dot{\vec{\psi}}(t) = A\vec{\psi}(t) + \exp(At)\dot{\vec{c}}(t) = A\vec{\psi}(t) + \vec{b}(t)$$

Daraus entsteht $\dot{\vec{c}}(t) = \exp(-At)\vec{b}(t)$, Integration über t_0, t

$$\vec{c}(t) = \int_{t_0}^t \exp(-As)\vec{b}(s) ds$$

7.6 Die Jordansche Normalform für Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit Eigenwert λ_k und Eigenvektor \vec{a}_k . Dann ist $\vec{\psi}(t) = e^{\lambda_k t}\vec{a}_k$ eine Lösung von (H). Denn

$$\dot{\vec{\psi}}_k(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} \vec{a}_k = e^{\lambda_k t} \lambda_k \vec{a}_k = e^{\lambda_k t} A \vec{a}_k = A \vec{\psi}_k(t)$$

Ist A diagonalisierbar, das heißt besitzt A n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann

$$AS = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n); \quad A = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1}$$

Also

$$\exp(At) = S \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) S^{-1}$$

insbesondere ist das System der Spalten von $\exp(At)S$ ein Fundamentalsystem von (H).

Das Verfahren im nicht-diagonalisierbaren Fall für A

verwendet den Fundamentalsatz der Algebra in \mathbb{C} . Es ergibt sich eine Transformationsmatrix S (regulär, also invertierbar) mit

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} C_1 & & & & 0 \\ & C_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & C_r \end{bmatrix}$$

wobei längs der Hauptdiagonalen quadratische Jordanblöcke C_q stehen der Bauart

$$C = C_q = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ p(q_n) \\ \downarrow \end{matrix}$$

Dasselbe λ kann in verschiedenen Blöcken auftreten, insgesamt treten sämtliche Eigenwerte von A auf.

$$C = \lambda 1_p + N_p \quad \text{mit} \quad N_p = (\delta_{i+1,k})_{1 \leq i,k \leq p}$$

wobei $\lambda 1_p$ und N_p vertauschbar sind. N_p ist nilpotent.

$$\underline{\text{Behauptung:}} \quad N_p^m = (\delta_{i+m,k})_{1 \leq i,k \leq p}$$

Beweis mit Induktion

$$m \mapsto m + 1$$

$$N_p^{m+1} = N_p^m N_p = \left(\sum_{j=1}^p \delta_{i+m,j} \delta_{j+1,k} \right) = 0 , \quad \text{falls } j \neq i + m$$

$$N_p^{m+1} = (\delta_{i+m+1,k})_{1 \leq i,k \leq p}$$

□

Insbesondere $N_p^m = 0$ falls $m \geq p$. Funktionalgleichung kann angewandt werden weil $\lambda 1_p$ mit jeder Matrix vertauschbar ist.

$$\exp(\lambda t 1_p) = e^{\lambda t} 1_p$$

$$\exp(N_p t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N_p^k t^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N_p^k t^k$$

$$\exp(N_p t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^k}{k!} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \frac{t^k}{k!} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(\lambda t 1_p + N_p t) = \exp(\lambda t 1_p) + \exp(N_p t) = \underbrace{e^{\lambda t} \exp(N_p t)}_{\exp(Ct)}$$

$$\exp[(S^{-1}AS)] = \exp(Jt) = \begin{bmatrix} \exp(C_1 t) & & & & 0 \\ & \exp(C_2 t) & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \exp(C_r t) \end{bmatrix}$$

7.7 Skalarwertige lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (*)$$

mit konstantem $a \in \mathbb{K}$.

$$y_{k+1} = x^{(k)} \quad 0 \leq k < n$$

Daraus entsteht das System

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \searrow & \\ & & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Kurz

$$\vec{\dot{y}} = A\vec{y}$$

mit der Frobenius-Matrix A (auch Begleitmatrix) der Differentialgleichung $(*)$.

Das charakteristische Polynom von A

$$\det(X\mathbf{1}_n - A) = \begin{bmatrix} X & -1 & & & 0 \\ & & -1 & & \\ 0 & & & X & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & \ddots & X+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Spalte

$$= X \det \begin{bmatrix} X & -1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & X & -1 & \vdots \\ \vdots & \cdots & a_{n-2} & X+a_{n-1} & \\ a_0 & & & & \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ * & -1 \end{bmatrix}^{n-1}$$

mit Induktion

$$\det(X\mathbf{1}_n - A) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \quad \text{wenn } A \text{ Begleitmatrix von } (*).$$

Besonderheit der Begleitmatrix A

Für jeden Eigenwert λ von A ist $\operatorname{rg}(\lambda\mathbf{1}_n - A) = n-1$. Daher ist in der Jordan-Normalform zu λ nur ein Jordanblock vorhanden. Begründung:

$$\lambda_n \mathbf{1}_n - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & \lambda & -1 \\ & & & & \\ a_0 & a_1 & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} & \end{bmatrix}$$

Addition des λ -fachen der $(n-k+1)$ -ten Spalte zur $(n-k)$ -ten Spalte ($k = 1, 2, \dots$) ändert den Rang nicht.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\lambda\mathbf{1}_n - A) &= \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccccc} & & 0 & 0 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & 0 & -1 & \\ & \textcircled{1} & & & \lambda+a_{n-1} \\ & & & \downarrow & \\ & & \overbrace{\lambda^2 + \lambda a_{n-1} + a_{n-2}} & & \end{array} \right) \\ &= \dots = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ | & & & | \\ 0 & & & -1 \\ P_A(\lambda) & * & * & * \end{bmatrix} = n-1 \end{aligned}$$

Konsequenz für die Lösungen der Differentialgleichung (*) aus der Faktorisierung (EW = Eigenwerte)

$$P_A(\lambda) = \prod_{\lambda \in EW} (X - \lambda)^{e(\lambda)}$$

Lösungen von (*) sind die Funktionen

$$t^k e^{\lambda t} \quad 0 \leq t \leq e(\lambda) - \lambda ; \quad \lambda \in EW$$

wenn also $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte sind dann bilden die Funktionen

$$t^k e^{\lambda_m t} \quad 0 \leq k \leq e(\lambda_m) - 1 , \quad 1 \leq m \leq r$$

eine Basis des Lösungsraumes von (*).

7.8 Stabilitätsfragen

Wie verhalten sich Lösungen von

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} , \quad A \in M_n(\mathbb{K}) \quad (\text{H})$$

für $t \rightarrow \infty$?

Fall 1:

A besitzt (in \mathbb{C}) einen Eigenwert mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Dann hat (H) eine Lösung

$$\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t} \vec{a} \quad (A\vec{a} = \lambda \vec{a}) \quad ; \quad \|e^{\lambda t} \vec{a}\|_e = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|\vec{a}\|_e$$

Dafür wird

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{\varphi}(t)\|_e = \infty$$

Für den allgemeinen Fall wird eine Abschätzung der Lösungen gewonnen aus

$$\|\exp(At)\|_e$$

Grundlage:

$$\|A\vec{x}\|_e \leq \|A\|_e \|\vec{x}\|_e$$

Beweis mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung (C-S-U):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right|^2 \right)^{1/2} &= \|A\vec{x}\|_e \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{m=1}^n |x_m|^2 \right) \right)^{1/2} \quad (\text{C-S-U}) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n |x_m|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|A\|_e \|\vec{x}\|_e$$

□

Verwendung der Jordan-Normalform – Problem: $\|\exp(N_p t)\|$ abschätzen für $t \rightarrow \infty$.

$\|\exp(N_p t)\|^2$ ist Polynom vom Grad $2p - 2$. Es wächst stärker als $e^{\gamma t}$ für jedes positive γ .

Resultat: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \operatorname{Re} \lambda$ für jeden Eigenwert λ von A , dann gilt mit einer Schranke $C > 0$ die Abschätzung:

$$\|\exp(At)\|_e \leq C e^{\alpha t}$$

Fall 2:

Ist $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A , so kann $\alpha < 0$ gewählt werden, und es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\exp(At)\| = 0$$

und dann gilt für jede Lösung $\vec{\varphi}$ von (H)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{\varphi}(t)\|_e = 0 \quad (*)$$

Fall 3:

Ist stets $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ und existiert ein $\lambda = \lambda_0$ mit $\operatorname{Re} \lambda_0 = 0$, also $\lambda_0 = j\omega_0$, dann existiert eine Lösung $\vec{\varphi}(t) = e^{j\omega_0 t} \vec{c}$, welche nicht (*) genügt. Ob alle Lösungen beschränkt sind, muss im Einzelnen untersucht werden.

Definition:

Ein Polynom P mit reellen oder komplexen Koeffizienten heißt „stabil“, wenn alle Nullstellen in \mathbb{C} negativen Realteil besitzen.

Methode der Polynom-Division $P_0 \div P_1$: Euklidischer Algorithmus

$$P_{k-1} = P_k Q_k + P_{k+1} \quad \text{falls der Grad } P_k \text{ existiert}$$

$$\deg P_k < \deg P_{k-1} \quad 1 \leq k \leq N \quad \text{mit} \quad P_{N+1} = 0$$

7.8.1 Stabilitätskriterium für reelle Polynome

$$P = a_k X^n + a_{k-1} X^{n-1} + \dots + a_0 ; \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

$$P_0 = a_n X^n + a_{n-2} X^{n-2} + \dots ; \quad \deg 0 = -\infty$$

$$P_1 = a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-3} X^{n-3} ; \quad P \text{ reell: } \Rightarrow$$

P ist dann und nur dann stabil, wenn erstens in der Divisionskette für $P_0 \div P_1$ die Anzahl der Schritte $N = n$ ist und zweitens je $Q_k = b_k X$ mit $b_k > 0$.

Bemerkung:

Sind $-\alpha_i$ die negativen Nullstellen von P , wobei $-\mu_k \pm j\nu_k$ die Paare konjugierter komplexer Nullstellen von P sind, dann

$$P(x) = a_n \prod (x + \alpha_i) \prod_k \underbrace{(X + \mu_k + j\nu_k)(X + \mu_k - j\nu_k)}_{X^2 + 2\mu_k X + \mu_k^2 + \nu_k^2}$$

Insbesondere hat ein stabiles reelles Polynom lauter Koeffizienten gleicher Vorzeichen.
Das reicht nicht:

$$(X+1)(X^2+1) = X^3 + X^2 + X + 1$$

Beispiele:

$$(1) \quad P = X^3 + X^2 + X + 1$$

$$P_0 = X^3 + X ; \quad P_1 = X^2 + 1$$

$$P_0 = \underbrace{(X+1)}_{Q_1} \underbrace{(X^2+1)}_{P_1} + 0 \quad \text{nicht stabil}$$

weil Q_1 die falsche Form hat, ebenso N zu klein.

$$(2) \quad P = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 10X + C$$

$$P_0 = X^4 + 10X^2 + C ; \quad P_1 = 5X^3 + 10X$$

$$P_0 = \underbrace{\frac{X}{5}}_{Q_1} \underbrace{(5X^3 + 10X)}_{P_1} + \underbrace{8X^2 + C}_{P_2}$$

$$P_1 = \underbrace{\frac{5X}{8}}_{Q_2} \underbrace{(8X^2 + C)}_{P_2} + \underbrace{\left(10 - \frac{5C}{8}\right)X}_{a} ; \quad P_3 = aX$$

$$P_2 = 8X^2 + C = \underbrace{\frac{8X}{a}}_{Q_3} (\underbrace{aX}_{P_3}) + \underbrace{C}_{P_4} ; \quad \underline{a > 0}$$

$$P_3 = aX = \underbrace{\frac{a}{C} X}_{Q_4} \underbrace{C}_{P_4} + \underbrace{0}_{P_5} ; \quad \underline{C > 0}$$

$$a = 10 - \frac{5C}{8} = \frac{5(16 - C)}{8}$$

P ist also genau dann stabil, wenn $0 < C < 16$.

7.9 Anwendungen der Laplacetransformation

$$(\mathcal{L}\varphi)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt$$

Doetsch-Symbol

$$\varphi(t) \circ \bullet \phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt \quad (\text{Realteil von } s \text{ hinreichend groß})$$

Geeignete Konvergenzbedingungen vorausgesetzt:¹

$$(\mathcal{L}\varphi^{(m+1)})(s) = -\varphi^{(m)}(0) + s(\mathcal{L}\varphi^m)(s)$$

$$\varphi^{(m+1)}(t) \circ \bullet -\varphi^{(m)}(0) + s(\mathcal{L}\varphi^m)(s)$$

Beweis durch partielle Integration

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_u \underbrace{\varphi^{(m+1)}(t)}_{v'} dt = e^{-st} \varphi^{(m)} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \varphi^{(m)}(t) dt$$

Elementar durch vollständige Induktion nach m

$$(\mathcal{L}\varphi^{(m)})(s) = -\sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{(m-k-1)}(0)s^k + s^m(\mathcal{L}\varphi)(s)$$

□

Ist etwa gegeben die inhomogene skalare Differentialgleichung

¹Siehe Kapitel 1

$$\sum_{m=0}^n a_m x^{(m)}(t) = g(t) \quad (\text{L})$$

Unter geeigneten Konvergenzvoraussetzungen hat g eine \mathcal{L} -Transformierte $(\mathcal{L}g)(s)$.

Ist φ eine Lösung von (L), dann ergibt die Linearität der \mathcal{L} -Transformation

$$\sum_{m=0}^n a_m (\mathcal{L}\varphi^{(m)})(s) = (\mathcal{L}g)(s)$$

Sei nun $a_n = 1$. Dann ist das charakteristische Polynom der zugehörigen Frobenius-Matrix

$$\begin{aligned} P(X) &= X^n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m X^m \\ \left(S^n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m S^m \right) (\mathcal{L}\varphi)(s) - \sum_{m=1}^n a_m \sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{(m-1-k)}(0) s^k &= (\mathcal{L}g)(s) \\ (\mathcal{L}\varphi)(s) &= \frac{1}{P(S)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{m=k+1}^n a_m \varphi^{(m-1-k)}(0) \right) s^k + (\mathcal{L}g)(s) \right) \end{aligned}$$

Die Auflösung nach dem Urbild φ unter der Laplace-Transformation wird einfach, wenn die \mathcal{L} -Transformierte von g eine rationale Funktion in s ist. Dann steht rechts eine rationale Funktion von $s \rightarrow$ Partialbruchzerlegung.

Beispiele:

$$(1) \quad \ddot{y} + 2\dot{y} = \cos t$$

$\varphi(t)$ sei Lösung der Gleichung mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \dot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(0) = 0 \\ \cos t &= \frac{1}{2} e^{jt} + \frac{1}{2} e^{-jt} \quad \circ \bullet \quad \frac{s}{s^2 + 1} = (\mathcal{L}g)(s) \\ \sin t &= \frac{1}{2j} e^{jt} - \frac{1}{2j} e^{-jt} \quad \circ \bullet \quad \frac{j/2}{s-j} - \frac{j/2}{s+j} = \frac{1}{s^2 + 1} \\ e^{\lambda t} &\quad \circ \bullet \quad \int_0^\infty e^{-(s-\lambda)t} dt = \frac{1}{s-\lambda} \end{aligned}$$

Charakteristisches Polynom der Differentialgleichung: $P(X) = X^3 + 2X$

$$\varphi(t) \quad \circ \bullet \quad \phi(s) = (\mathcal{L}\varphi)(s)$$

Mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(0) = 0$ folgt

$$P(s) \cdot (\mathcal{L}\varphi)(s) = (\mathcal{L}g)(s)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 (s^3 + 2s) \cdot \phi(s) &= \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \phi(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)} = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 2} \\
 &= \frac{j/2}{s-j} - \frac{j/2}{s+j} - \frac{j/2\sqrt{2}}{s-\sqrt{2}j} + \frac{j/2\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}j} \\
 \Rightarrow \varphi(t) &= \sin t - \frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Noch offen: Die Umkehrung der Laplace-Transformation im Allgemeinen.

$$(2) \quad \dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{b} \quad (\text{L})$$

wobei die Inhomogenität $\vec{b}(t)$ die Laplace-Transformierte $\vec{B}(s)$ besitzt.

Anfangsbedingung: $\vec{\varphi}(0) = \vec{c}$

Nach der Theorie ist die Lösung

$$\vec{\varphi}(t) = \exp(At)\vec{c} + \int_0^t \exp(A(t-s))\vec{b}(s) ds$$

\mathcal{L} -Transformierte auf (L) angewandt

$$\begin{aligned}
 s\vec{\phi}(s) - \vec{c} &= A\vec{\phi}(s) + \vec{B}(s) \quad \text{wo} \quad \vec{\varphi}(t) \circlearrowleft \vec{\phi}(s) \\
 (s1_n - A)\vec{\phi}(s) &= \vec{c} + \vec{B}(s) \\
 \vec{\phi}(s) &= (s1_n - A)^{-1}(\vec{c} + \vec{B}(s))
 \end{aligned}$$

Statt der Integration in der ersten expliziten Lösung für $\vec{\varphi}(t)$ tritt hier eine dreistufige Aufgabe.

- 1) $\vec{b}(t) \circlearrowleft \vec{B}(s)$
 - 2) Invertierung von $(s1_n - A)$
 - 3) Rücktransformation von $\vec{\phi}(s)$
- (3) Die skalarwertige homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)} = 0 \quad (\text{H})$$

Charakteristisches Polynom der Begleitmatrix (Frobenius)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

Sei

$$P_A(X) = \prod_{q=1}^r (X - \lambda_q)^{e_q}$$

die Zerlegung von P_A in Linearfaktoren (über \mathbb{C}).

Dann sind die Lösungen von (H):

$$t^k e^{\lambda_q t} = \varphi_{k,q}(t) \quad (0 \leq k \leq e_{q-1}, \quad 1 \leq q \leq r)$$

Beweis der linearen Unabhängigkeit mit Laplace-Transformation:

$$1) \quad t^k e^{\lambda t} \circ \bullet \frac{k!}{(s - \lambda)^{k+1}}$$

Beweis durch Induktion nach k

$k = 0$: (siehe früher)

$k \rightarrow k + 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} e^{\lambda t} dt &= \int_0^\infty \underbrace{t^{k+1}}_u \underbrace{e^{-(s-\lambda)t}}_{v'} dt \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= \left. \frac{-t^{k+1} e^{-(s-\lambda)t}}{s - \lambda} \right|_0^\infty + \frac{k+1}{s - \lambda} \underbrace{\int_0^\infty t^k e^{-(s-\lambda)t} dt}_{\mathcal{L}(t \rightarrow t^k e^{\lambda t})} \end{aligned}$$

(Konvergenzbedingung fürs Integral: $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \lambda$)

$$= \frac{k+1}{s - \lambda} \frac{k!}{(s - \lambda)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(s - \lambda)^{k+2}}$$

$$2) \quad \text{Sei} \quad \sum_{q=1}^r \sum_{k=0}^{e_q-1} \alpha_{k,q} \varphi_{k,q}(t) = 0$$

\mathcal{L} -Transformation

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(0) = \sum_{q,k} \alpha_{k,q} (\mathcal{L}\varphi_{k,q})(s) \\ &= \sum_{q,k} \frac{\alpha_{k,q} k!}{(s - \lambda_q)^{k+1}} , \quad \text{falls } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \lambda \quad \forall q \end{aligned}$$

Daher ist sogar für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\sum_{q,k} \frac{\alpha_{k,q} k!}{(s - \lambda_q)^{k+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{k,q} = 0, \forall k \wedge \forall q$$

□

8. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen

Sei D ein Gebiet im \mathbb{R}^2 und $f : D \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig.

Explizite Differentialgleichung 1-ter Ordnung:

$$y' = f(x, y)$$

Hauptziel: Kurven $\varphi(x)$ gesucht, differenzierbar mit

$$\dot{\varphi}(x) = f(x, \varphi(x))$$

Direkte Deutung: Feld von Linienelementen auf D = Richtungsfeld.

Beispiele:

$$(1) \quad y' = f(x, y) = \frac{y}{x} \quad ; \quad D =]0, \infty[\times \mathbb{R}$$

Niveaulinien von f heißen Isoklinen, hier sind es Strahlen durch den Ursprung.

$$(2) \quad y' = f(x, y) = -\frac{x}{y} \quad ; \quad D = \mathbb{R} \times]0, \infty[$$

Die Isoklinen sind wiederum Strahlen durch den Ursprung.

$$(3) \quad y' = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Die Isoklinen sind hier Kreise um den Nullpunkt.

Betrachtung des Richtungsfeldes gibt (oft) eine ungefähre Lösung (Vorstellung vom Verlauf der Lösungskurven). Ausbau zur Konstruktion approximativer Lösungen (ungefähre Lösungen).

Tangentenverfahren (Euler)

Start $(x_0, u_0) \in D$, Schrittweite $h \neq 0$,

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i)$$

Beispiel:

$$(4) \quad y' = y, \quad x_0 = 0, \quad u_0 = 1$$

$$\text{Schrittweite: } h = \frac{x}{n}, \quad (n = \text{Schrittzahl})$$

$$u_1 = 1 + \frac{x}{n} \cdot 1 = 1 + \frac{x}{n}$$

$$u_2 = 1 + \frac{x}{n} + \frac{x}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2$$

$$u_k = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k$$

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k + \frac{x}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{k+1}$$

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

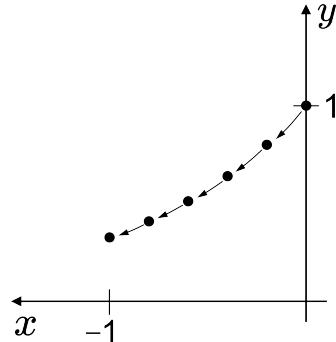
Bemerkung:

(1) Ursprüngliche Definition der Lösung von $\exp(x)$:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Rechts skizziert: Die Schritte für

$$n = 5; \quad x = -1$$



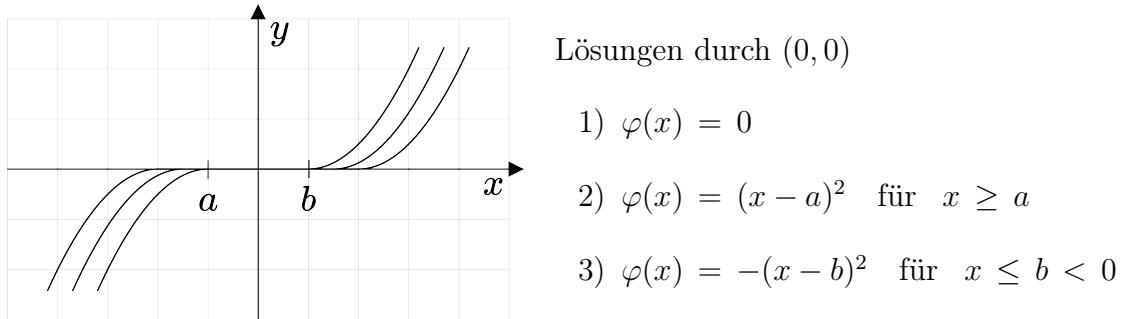
8.1 Die Lipschitzbedingung

Auch wenn f stetig ist, kann unter Umständen die Anfangswertaufgabe, das sogenannte Anfangswertproblem (AWP) mehrere Lösungen haben.

Beispiel:

$$(5) \quad y' = 2|y|^{1/2}$$

Niveaulinien sind Parallelen zur x -Achse.



Grund für das Auftreten mehrerer Lösungen! Bei $y = 0$ ändert sich das Richtungsfeld zu stark.

8.1.1 Definition der Lipschitzbedingung

Sei f auf dem Gebiet D reell und stetig. K sei eine Teilmenge von D . f genügt auf K einer Lipschitzbedingung mit L -Konstante $L > 0$, falls für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in K$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Bemerkung:

- (2) Ist f zum Beispiel stetig und partiell differenzierbar nach y , dann besitzt jeder Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung K , auf der mit passendem $L > 0$ die Lipschitzbedingung gilt.

Hilfssatz (Gronwallsches Lemma)

Es seien auf $[0, a]$ nicht negative stetige Funktionen φ, ψ gegeben und eine Schranke $b \geq 0$ derart, dass

$$\varphi(t) \leq b + \int_0^t \varphi(s)\psi(s) \, ds , \quad t \in [0, a] \quad (*)$$

Dann gilt dort

$$\varphi(t) \leq b \cdot \exp \left(\int_0^t \psi(s) \, ds \right)$$

Beweis:

- 1) Ist $b = 0$, dann gilt die Abschätzung für $b > 0$ erst recht. Dann liefert die Aussage für $b > 0$ durch den Übergang $b \searrow 0$ auch hier die Behauptung.
- 2) $b > 0$: Die Voraussetzung besagt

$$\frac{\varphi(t)\psi(t)}{b + \int_0^t \varphi(s)\psi(s) ds} \leq \psi(t)$$

(Im Zähler steht die Ableitung der Nennerfunktion)

Integration von 0 bis t

$$\begin{aligned} \ln \left(b + \int_0^t \varphi(s)\psi(s) ds \right) - \ln b &\leq \int_0^t \psi(s) ds \\ \Rightarrow b + \int_0^t \varphi(s)\psi(s) ds &\leq b \cdot \exp \left(\int_0^t \psi(s) ds \right) \end{aligned}$$

mit der Voraussetzung (*)

$$\varphi(t) \leq b \cdot \exp \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)$$

□

8.1.2 Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten

Sei $f : D \mapsto \mathbb{R}$ stetig, ferner gelte auf dem Teil $K \subset D$ eine Lipschitzbedingung mit L -Konstante $L > 0$. Sind nun u, v zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ definiert auf dem Intervall $J \ni x_0$ und gilt stets $(x, u(x)) \in K$, $(x, v(x)) \in K$ dann

$$|u(x) - v(x)| = |u(x_0) - v(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

Beweis mit dem Hilfssatz:

$$\begin{aligned} |u(x) - v(x)| &= \left| u(x_0) - v(x_0) + \int_{x_0}^x (f(t, u(t)) - f(t, v(t))) dt \right| \\ &\text{falls } x \geq x_0 \end{aligned}$$

$$\leq \underbrace{|u(x_0) - v(x_0)|}_b + \int_{x_0}^x \underbrace{|f(t, u(t)) - f(t, v(t))|}_{\begin{array}{c} \leq L|u(t) - v(t)| \\ \downarrow \\ \psi \end{array}} dt$$

Hilfssatz mit $t = x - x_0 \Rightarrow$

$$|u(x) - v(x)| = |u(x_0) - v(x_0)|e^{L|x-x_0|}$$

für $x < x_0$ setze man $t = x_0 - x$.

□

Eindeutigkeitssatz

f sei stetig auf D , ferner erfülle f lokal auf D die Lipschitzbedingung. Sind $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$, $\psi : J \mapsto \mathbb{R}$ zwei auf Intervallen definierte Lösungen von $y' = f(x, y)$ und $x_0 \in I \cap J$ dann sind φ und ψ gleich auf $I \cap J$ falls $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$.

8.2 Existenzsatz von Picard und Lindelöf

Es sei f eine auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ stetige Funktion, welche überdies lokal die Lipschitzbedingung erfüllt. Dann existiert zu jedem Anfangswert $(x_0, y_0) \in D$ ein $a > 0$ und auf $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ eine Lösung φ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

Bemerkung:

- (1) Wenn überdies f stetig partiell nach y differenzierbar ist, dann gelten lokale Lipschitzbedingungen. Die Lösung φ mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist nach dem Eindeutigkeitssatz vollständig.

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es eine Quadrat

$$Q = \{(x, y); |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\}$$

in D , auf welchem f eine Lipschitzkonstante L hat. Weil f stetig ist, existiert eine Schranke $M \geq 0$ mit

$$|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in Q$$

$$a := \min(r, r/M)$$

Picard-Iteration

$$\varphi_0(x) = 0$$

$$\varphi_{N+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_N(t)) dt$$

Beweis-Programm: Zeige, die Funktionenfolge $\varphi_N(x)$ ist auf $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ gleichmäßig konvergent.

- 1) Für alle N und alle $x \in I$ ist $(x, \varphi_N(x)) \in Q$ das heißt $|\varphi_N(x) - y_0| \leq r$.

Induktion nach N . $N = 0$ ist trivial. $N \rightarrow N + 1$:

$$|\varphi_{N+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_N(t)) dt \right|$$

Standard-Integralabschätzung: $\leq |x - x_0|M$

Nach Wahl von a : $\leq r$

$$2) |\varphi_{N+1}(x) - \varphi_N(x)| \leq \frac{ML^N|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Induktion nach N .

$N = 0$:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right|$$

$N - 1 \rightarrow N$:

$$\begin{aligned} |\varphi_{N+1}(x) - \varphi_N(x)| &= \left| \int_x^{x_0} \left[f(t, \varphi_N(t)) - f(t, \varphi_{N-1}(t)) \right] dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \left| f(t, \varphi_N(t)) - f(t, \varphi_{N-1}(t)) \right| dt \right| \end{aligned}$$

Lipschitzbedingung

$$\leq \left| \int_{x_0}^x L |\varphi_N(t) - \varphi_{N-1}(t)| dt \right|$$

Induktionsvoraussetzung für $N - 1$ statt N

$$\leq \left| \int_{x_0}^x L^N M \frac{|t-x_0|^N}{N!} dt \right| \leq \frac{ML^N|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)!}$$

3) Gleichmäßige Konvergenz

$$\begin{aligned} |\varphi_{N+p}(x) - \varphi_N(x)| &= \left| \sum_{n=N}^{N+p-1} (\varphi_{N+1}(x) - \varphi_N(x)) \right| \\ &\leq \sum_{n=N}^{N+p-1} |\varphi_{N+1}(x) - \varphi_N(x)| \stackrel{2)}{\leq} \sum_{n=N}^{N+p-1} \frac{ML^n|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{ML^n a^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Abschätzung dieses Abschnitts einer e^x Reihe mit Lagrange

$$\leq \frac{ML^N a^{N+1}}{(N+1)!} e^{aL} \rightarrow 0$$

für $N \rightarrow \infty$ unabhängig von x

4) Wegen gleichmäßiger Konvergenz ist die Grenzfunktion

$$\varphi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(x)$$

stetig auf I .

Überdies konvergiert $f(t, \varphi_N(t))$ gegen $f(t, \varphi(t))$ gleichmäßig auf I . Daher ergibt die Rekursionsformel

$$\varphi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

$\varphi(x)$ ist also eine differenzierbare Funktion der oberen Integrationsgrenze x mit Ableitung $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Schließlich $\varphi(x_0) = y_0$.

□

Bemerkung:

- (2) Wenn f zwar stetig ist, nicht aber lokale Lipschitzbedingungen erfüllt, so müssen Lösungen des Anfangswertproblems nicht eindeutig sein. Immerhin existiert nach Peano mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems.

8.2.1 Das Runge-Kutta Verfahren

liefert approximative Lösungen $u(x)$ des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ in der Form der Eckpunkte (x_i, u_i) eines Polygonzuges. Die Schrittweite $h \neq 0$, konstant, $x_{i+1} = x_i + h$. Die Steigung des Polygonzuges nach vorwärts (nach rechts für $h > 0$, nach links für $h < 0$) wird gewählt als gewichtetes Mittel von vier Funktionswerten von f in der Nähe des Aufpunktes (x_i, u_i)

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, u_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, u_i + k_3)$$

Bemerkung:

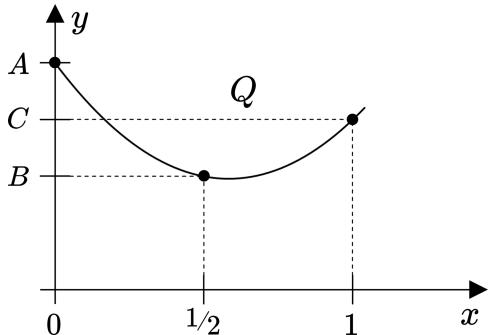
- (3) Für den Spezialfall, dass die rechte Seite der Differentialgleichung nur von x abhängt, also $y' = f(x)$ bedeutet approximative Lösung zugleich approximative Quadratur von $f(x)$. Die entstehende Formel wird

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{x - x_0}{6n} \left(f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_{i+1}) \right) - f(x_n) \right)$$

8.2.2 Simpsonsche Regel

Der Einzelschritt ist bekannt als Keplersche Fassregel

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$



Geometrische Interpretation: Suche ein Polynom $Q(x)$ mit $\deg Q \leq 2$.

$$Q(0) = A$$

$$Q(1/2) = B$$

$$Q(1) = C$$

(In der Skizze links gezeichnet für $A = 0.8$, $B = 0.4$, $C = 0.4$ mit der untenstehenden Formel für $Q(x)$.)

$$Q(x) = A + 2x(B - A) + x(2x - 1)(C + A - 2B)$$

Dafür

$$\int_0^1 Q(x) dx = B + (C + A - 2B) \int_0^1 (2x^2 - x) dx$$

das heißt:

$$\int_0^1 Q(x) dx = \frac{1}{6}(A + 4B + C)$$

Das Polynom $P(t)$ vom Grad ≤ 2 mit

$$P(a) = A ; P\left(\frac{a+b}{2}\right) = B ; P(b) = C$$

ist

$$P(t) = Q\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

$$\int_a^b P(t) dt = (b-a) \int_0^1 Q(x) dx = \frac{b-a}{6}(A + 4B + C)$$

Spezialisiert mit Hilfe der zu integrierenden Funktion f

$$A = f(a) ; B = f\left(\frac{a+b}{2}\right) ; C = f(b)$$

8.2.3 Der Potenzreihenansatz

zur Bestimmung einer Lösung des Anfangswertproblems der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ; a_0 = \varphi(x_0) = y_0$$

kann auch verwendet werden bei Differentialgleichungen 2-ter (n -ter) Ordnung.

Beispiel: $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ (Besselsche Differentialgleichung)

$$x_0 = 0 , y_0 = 1$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x\varphi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} , x\varphi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}$$

Damit

$$0 = x\varphi'' + \varphi' + x\varphi = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^{n-1}$$

$$a_1 = 0 \quad , \quad n^2 a_n + a_{n-2} = 0$$

Koeffizientenvergleich

$$a_{2k-1} = 0 \quad , \quad a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{(2k)^2} \quad , \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k}} \quad (\text{vollständige Induktion})$$

$$\varphi(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

8.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

zurückgeführt auf ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung.

$$y_k := y^{(k-1)} \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Kurzform: $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$

Gegeben sei im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet D und eine stetige Funktion $\vec{f}: D \mapsto \mathbb{R}^n$ zur Behandlung von $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$.

Lipschitzbedingung für \vec{f} erfüllt auf der Teilmenge $K \subset D$ mit L -Konstanter $L > 0$, falls

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)\| \leq L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

für alle $(x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in K$. Dabei hängt L von der zuvor gewählten Norm im \mathbb{R}^n ab.

Bemerkenswert: Bei Gültigkeit lokaler Lipschitzbedingungen für \vec{f} lassen sich aus dem eindimensionalen übertragen:

- 1) Der Satz über die Abhängigkeit von Anfangsbedingungen
- 2) Der Eindeutigkeitssatz
- 3) Der Existenzsatz

Der Existenzsatz

Auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sei $\vec{f}: D \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle lokale Lipschitzbedingungen! Dann gibt es zu jedem Anfangspunkt $(x_0, \vec{y}_0) \in D$ ein $a > 0$ und eine Lösung $\vec{\varphi}: [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ mit $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{y}_0$.

8.3.1 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten

Gegeben auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion $A: I \mapsto M_n(\mathbb{R})$, $\vec{b}: I \mapsto \mathbb{R}^n$

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \quad (\text{L})$$

In der vorigen Notation ist $\vec{f}(x, \vec{y}) = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$.

f erfüllt lokale Lipschitzbedingungen. Weil $A(x)$ stetige Koeffizienten auf I hat, gilt für jedes kompakte Teilintervall $J \subset I$

$$\|A(x)\|_{\text{e}} \leq L \quad \forall x \in J$$

daher

$$\begin{aligned} \left\| \vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2) \right\|_{\text{e}} &= \|A(x)\vec{y}_1 - A(x)\vec{y}_2\|_{\text{e}} \\ &= \|A(x)(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\|_{\text{e}} \leq \|A(x)\|_{\text{e}} \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|_{\text{e}} \\ &\leq L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|_{\text{e}} \quad \forall x \in J \end{aligned}$$

Günstig: Zunächst die Matrixdifferentialgleichung

$$Y' = A(x)Y \quad (\text{HM}); \quad Y : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$$

Resultat aus Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Zu jedem $x_0 \in I$ gibt es eine (durch die Anfangsbedingungen $U(x_0, x_0) = 1_n$) eindeutig bestimmte und auf ganz I erklärte Matrixfunktion $U(x, x_0)$ welche (HM) löst, also $U'(x) = A(x)U(x)$.

Bemerkung:

(1) $U(x, x_0)$ entspricht bei konstanten Koeffizienten von A die Funktion $\exp(A(x - x_0))$.

Überdies: $V(x) = U(x, x_0)U(x_0, x_1)$ erfüllt

$$V'(x) = U'(x, x_0)U(x_0, x_1) = A(x)V(x)$$

Daher ist V nach dem Eindeutigkeitssatz jene Lösung von (HM) mit Anfangsbedingung

$$V(x_0) = U(x_0, x_1)$$

Diese Eigenschaft hat auch $U(x, x_1)$

$$U(x, x_0)U(x_0, x_1) = U(x, x_1)$$

Insbesondere ($x = x_1$ gesetzt)

$$U(x_1, x_0)U(x_0, x_1) = 1_n$$

daher ist $U(x, x_0)$ an jeder Stelle x_1 invertierbar.

Damit betrachte nun zuerst die homogene Differentialgleichung:

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} \quad (\text{H})$$

Für die Gesamtheit der Lösungen erhält man:

$$\vec{\varphi}(x) = U(x, x_0)\vec{c}, \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n; \quad \vec{c} = \vec{\varphi}(x_0)$$

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (L): Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} \vec{\psi}(x) &= U(x, x_0)\vec{c}(x) \\ \vec{\psi}'(x) &= U'(x, x_0)\vec{c}(x) + U(x, x_0)\vec{c}'(x) \\ &\stackrel{(\text{HM})}{=} A(x)U(x, x_0)\vec{c}(x) + U(x, x_0)\vec{c}'(x) \end{aligned}$$

da $\vec{\psi}$ Lösung von (L)

$$\vec{\psi} = A(x)\vec{\psi}(x) + \vec{b}(x) \Rightarrow$$

$$U(x, x_0)\vec{c}'(x) = \vec{b}(x)$$

$$\vec{c}'(x) = U^{-1}(x, x_0) \vec{b}(x)$$

Differentialgleichung kann (für \vec{c}) durch Integration gelöst werden.

$$\vec{c}(x) = \int_{x_0}^x U^{-1}(t, x_0) \vec{b}(t) dt$$

Damit wird

$$\vec{\psi}(x) = U(x, x_0) \int_{x_0}^x U^{-1}(t, x_0) \vec{b}(t) dt$$

eine partikuläre Lösung von (L).

Die Gesamtheit aller Lösungen von (L) ist von der Form

$$\vec{\psi}(x) + \vec{\varphi}(x)$$

wobei $\vec{\varphi}(x)$ die Gesamtheit der Lösungen von (HM) durchläuft.

Bemerkung:

- (2) Die für die Theorie ideale Funktion $U(x, x_0)$ wird in konkreten Aufgaben erst am Schluss gefunden.

8.3.2 Der Fall minimaler Dimension $n = 1$

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (\text{L}) \quad ; \quad y' = a(x)y \quad (\text{H}) = (\text{HM})$$

wobei a, b auf dem Intervall I stetig sind.

$$U(x, x_0) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right)$$

$$\psi(x) = c(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right)$$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= c'(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right) + a(x)\psi(x) \\ &= a(x)\psi(x) + b(x) \end{aligned}$$

$$c'(x) = \exp \left(- \int_{x_0}^x a(t) dt \right) b(x)$$

Beispiel: $y' = 2xy + x^3 \quad (\text{L})$; $y' = 2xy \quad (\text{H})$

Lösungen (geraten): $\varphi(x) = ce^{x^2}$

Variation der Konstanten

$$\psi(x) = c(x)e^{x^2}$$

$$\psi'(x) = c'(x)e^{x^2} + 2x\psi(x) = x^3 + 2x\psi(x)$$

$$c'(x) = e^{-x^2}x^3 ; \quad x_0 = 0$$

$$c(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2} dt \quad (\text{Substitution: } s = t^2; ds = 2t dt)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} s e^{-s} ds = -\frac{s}{2} e^{-s} \Big|_0^{x^2} + \frac{1}{2} \int_0^{x^2} e^{-s} ds \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

Allgemeine Lösung:

$$\psi(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1), \quad c \in \mathbb{R}$$

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

ISBN 978-1-951894-07-8