

GRUNDLAGEN DER PHYSIK

Erster Teil

Die Mechanik Newtonscher
und relativistischer Bewegung



GRUNDLAGEN DER PHYSIK

Erster Teil

Die Mechanik Newtonscher
und relativistischer Bewegung

Stefan Wurm

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

Copyright © 2024 ATICE LLC. Alle Rechte vorbehalten.

Veröffentlicht in den Vereinigten Staaten von Amerika.

Erste deutschsprachige ATICE E-Book Ausgabe | ISBN 978-1-951894-20-7.

Für Informationen über die Genehmigung zur Vervielfältigung von Auszügen aus diesem Buch wenden Sie sich bitte an ATICE LLC, www.atice-llc.com

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Die Natur der Dinge	1
1.1 Kräfte und Energie	1
1.2 Die Konzepte von Raum und Zeit	8
1.3 Die Struktur der Materie	18
2 Die Grundlagen der Bewegung	23
2.1 Das Konzept des Massenpunkts	24
2.2 Kinematik	26
2.2.1 Die Kinematik der Planetenbewegung	32
2.3 Einfache Bewegung	36
2.3.1 Beschleunigte lineare Bewegung	36
2.3.2 Schiefe Ebene und Bewegung im freien Fall	37
2.3.3 Ballistische Bewegung	39
2.3.4 Gleichförmige Kreisbewegung	41
3 Newtons Bewegungsgesetze	45
3.1 Kraft, Impuls und Masse	46
3.1.1 Überlagerung von Kräften	52
3.1.2 Newtons Gravitationsgesetz	54
3.1.3 Träge Masse und schwere Masse	56
3.2 Systeme von Massenpunkten	59
3.2.1 Die Erhaltung des Impulses	61
3.2.2 Stoßprozesse	63
4 Energie, Potenziale und Felder	81
4.1 Energie, Arbeit und Leistung	81

4.1.1	Potenzielle Energie	82
4.1.2	Arbeit und Leistung	84
4.1.3	Kinetische Energie	88
4.2	Potenziale und Felder	90
4.3	Beispiele für Felder	97
5	Rotierende Bewegung	109
5.1	Der Drehimpuls	110
5.2	Keplerbewegung	114
5.2.1	Gebundene und ungebundene Bewegung	118
5.3	Streuung an Zentralpotenzialen	123
5.3.1	Der Wirkungsquerschnitt	130
5.4	Drehimpuls vieler Massenpunkte	132
6	Rotation starrer Körper	137
6.1	Der Trägheitstensor	137
6.2	Euler-Gleichungen	142
6.2.1	Eulersche Winkel	146
6.3	Kreisel, Nutation, Präzession	150
6.4	Bewegte Bezugssysteme	161
7	Abgeleitete Kräfte	167
7.1	Reibungskräfte	167
7.1.1	Haftreibung und Gleitreibung	168
7.1.2	Seilreibung	170
7.1.3	Fluidreibung	172
7.2	Kräfte in der Elastostatik	174
7.2.1	Der Spannungstensor	175
7.2.2	Dehnungen	177
7.3	Das Hookesche Gesetz	181
7.4	Kräfte in der Elastodynamik	186
8	Die Bewegung von Fluiden	189
8.1	Die hydrostatische Druckgleichung	190
8.2	Die Kontinuitätsgleichung	192
8.3	Stromlinien und Stromfunktion	194
8.4	Die Bernoulli-Gleichung	197

8.5	Impulsgleichgewicht	201
8.5.1	Mikroskopische Untersuchung des Fluiddrucks	203
8.5.2	Kraftwirkung auf Rohre	204
8.5.3	Die Euler-Gleichung der Hydrodynamik	205
8.6	Viskose Flüssigkeiten	205
9	Thermische Bewegung	209
9.1	Mikroskopische Untersuchung des Gasdrucks	210
9.2	Gastemperatur und Wärme	214
9.2.1	Atomare und molekulare Freiheitsgrade	215
9.2.2	Wärmekapazität eines Gases	217
9.3	Adiabatische und isotherme Prozesse	220
9.3.1	Gaskompressibilität	224
9.3.2	Die barometrische Höhenformel	226
9.4	Thermische Verteilungen	228
9.4.1	Die Boltzmann-Verteilung	228
9.4.2	Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung	233
9.5	Die mittlere freie Weglänge	237
9.6	Brownsche Bewegung	240
10	Schwingungsbewegung	245
10.1	Harmonische Schwingung	245
10.1.1	Einfache harmonische Schwingung	246
10.1.2	Gedämpfte harmonische Schwingung	248
10.1.3	Erzwungene harmonische Schwingung	251
10.1.4	Gedämpfte erzwungene harmonische Schwingung	254
10.2	Gekoppelte Schwingungen	262
10.2.1	Zwei federgekoppelte Pendel	263
10.2.2	Streckschwingung eines Moleküls	269
11	Wellenbewegung	277
11.1	Einfache mechanische Wellen	278
11.2	Elastische Wellen	285
11.2.1	Schallwellen	288
11.2.2	Der Doppler-Effekt	291
11.2.3	Gedämpfte Schallwellen	293
11.3	Komplexe Wellen und Wellenpakete	295

11.3.1 Fourier-Reihen	295
11.3.2 Wellenenergie	297
11.3.3 Wellenpakete	301
11.3.4 Wellen in drei Dimensionen	305
11.4 Das Huygens-Prinzip	306
11.4.1 Reflexion und Brechung	307
11.4.2 Beugung und Interferenz	311
12 Die spezielle Relativitätstheorie	317
12.1 Das Relativitätsprinzip	317
12.2 Relativistische Kinematik	328
12.2.1 Die Lorentz-Transformation	328
12.2.2 Herleitung der Lorentz-Transformation	330
12.2.3 Die Definition der Gleichzeitigkeit	333
12.2.4 Das Konzept der Raumzeit	337
12.2.5 Der relativistische Doppler-Effekt	341
12.3 Relativistische Dynamik	347
12.3.1 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten	351
12.3.2 Relativistischer Impuls	355
12.3.3 Relativistische Energie	361
Anhang	369

Vorwort

Die meisten Hochschulen und Universitäten auf der ganzen Welt bieten Studierenden einen viersemestrigen Kurs in grundlegender Physik an. Diese Kurse sind in der Regel verpflichtend für Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften sowie für angehende Physiker und in vielen Ländern auch für Lehramtstudierende an Gymnasien. Für all diese Studierenden bilden solche zweijährigen Kurse über vier Semester die Grundlage ihrer Physikausbildung, nach welcher ihre Wege unterschiedliche Richtungen einschlagen. Die angehenden Physiker unter ihnen belegen anschließend zusätzliche Kurse in verschiedenen Teilgebieten der theoretischen Physik, Experimentalphysik oder technischen Bereichen der Physik und vertiefen dabei ihre in den ersten beiden Jahren erworbenen Kenntnisse in der experimentellen und angewandten Physik. Für alle anderen bleiben solche zweijährigen Einführungskurse in die Grundlagen der Physik ein Fundament ihres jeweiligen Fachgebiets, sei es in den Naturwissenschaften außerhalb der Physik, im Ingenieurwesen oder im Lehramt. Man kann solche zweijährigen College- oder Universitätskurse in die Grundlagen der Physik mit unterschiedlichen Titeln finden, aber wie immer sie auch heißen mögen, ihre Ziele sind in der Regel recht ähnlich. Die Physik ist eine Grundlagenwissenschaft und liegt als solche vielen anderen Wissenschaften zugrunde. Daher ist es für viele Studierende unerlässlich, die Grundlagen der Physik über ein breites Spektrum zu verstehen. Typischerweise führt der erste dieser vier Semester dauernden Physikkurse die Studierenden in die Grundlagen der Bewegungsphysik, Kräfte und Energie ein, im Wesentlichen in die Breite der Newtonschen und relativistischen Mechanik, teilweise auch in Kapitel über die Physik von Gasen, Flüssigkeiten, Schwingungen und Wellen. Im zweiten Semester folgt dann oft die Physik elektrischer Phänomene, die Grundlagen der Elektrostatik und Elektrodynamik. Die Lehrveranstaltungen des dritten und vierten Semesters konzentrieren sich in der Regel entweder auf die Physik der Wärme, also die Thermodynamik und Aspekte der statistischen Mechanik, und eine Einführung in die Atomphysik oder auf die Physik der Optik und optischer Phänomene. Für die meisten Dozenten ist im dritten Semester die Optik eine natürliche Fortsetzung der Elektrodynamik des zweiten Semesters, der dann im vierten Semester Thermodynamik, Atom- und Molekularphysik folgt. Der vorliegende viersemestrige Physikkurs, von dem dieser Band das erste Semester umfasst, folgt im Großen und Ganzen diesem Schema. Es gibt natürlich viele ausgezeichnete Physiklehrbücher, die Studenten leicht zugänglich

sind. Der vorliegende viersemestrige Physikkurs möchte mit keinem dieser Lehrbücher konkurrieren, auch wenn sich das wohl nicht vermeiden lässt. Ziel ist es vielmehr, eine zusätzliche Lernkomponente bereitzustellen, die Studenten in einer hoffentlich gut lesbaren und unterhaltsamen Form leicht zugänglich ist. Nur wenige Studenten werden Spaß daran haben, sich mit umfangreichen Lehrbüchern herumzuschlagen oder elektronische Physik-Kompendien durchzuarbeiten, die im Wesentlichen immer das gleiche Lehrbuch-Erlebnis vermitteln. Eine E-Book Physikkurs wie der Vorliegende kann aber durchaus etwas sein, was Studierenden gerne überallhin mitnehmen, wohin immer ihre Aktivitäten sie auch führen mögen, während sie sich auf ihre Prüfungen vorbereiten müssen.

Stefan Wurm

Albany, New York

April 2024

1. Die Natur der Dinge

Was ist Physik, worum geht es in ihr? Wie viele andere Begriffe unserer modernen Wissenschaften, hat das Wort Physik seinen Ursprung bei den alten Griechen. Es leitet sich von den altgriechischen Worten *physis* (φύσις) und *physike* (φυσική) ab, welche die Natur und das «Wesen natürlicher Dinge» bezeichnen. Die Physik ist somit die Wissenschaft der natürlichen Dinge, oder präziser, der unbelebten natürlichen Dinge. Die meisten Definitionen der Physik betonen drei Hauptaspekte dieser Wissenschaft:

- das Verständnis der grundlegenden Größen, die das Verhalten von Materie bestimmen, wie z. B. Kraft, Impuls oder Energie;
- das Studium der Materie und wie sich Materie durch Raum und Zeit bewegt;
- und natürlich das Verständnis der Struktur der Materie selbst.

Für das Verständnis der natürlichen Dinge benötigt die Physik ein präzises Vokabular, um experimentelle Beobachtungen zu beschreiben und Theorien über die Naturgesetze zu formulieren. Dieses Vokabular stammt natürlich aus unserer Alltagssprache, aber wenn Physiker von Dingen wie den gerade genannten sprechen, wie etwa Masse, Impuls, Kraft, Energie, Raum und Zeit, dann haben sie eine genaue Definition der Bedeutung dieser Wörter. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden einige dieser physikalische Schlüsselkonzepte eingeführt ohne jedoch zu sehr ins Detail zu gehen. Ziel ist es, einen Eindruck vom Gesamtbild der Physik und einigen ihrer grundlegenden Konzepte zu bekommen.

1.1 Kräfte und Energie

Viele mag überraschen, dass Physiker erst seit wenigen hundert Jahren die Natur der Kraft besser verstehen. Aus praktischer Sicht gab es nie Zweifel darüber, was eine Kraft ausmacht und welche möglichen Auswirkungen sie haben kann. Ingenieure nutzten dieses Wissen jahrtausendelang, um verschiedenste Maschinen zu konstruieren, zum Heben von

Gewichten, aber auch zum Krieg führen. Erst mit Isaac Newton (1643 – 1727) erhielt die Physik ein klareres Verständnis des Kraftkonzepts und der tatsächlichen Wirkung von Kräften auf Materie. Das Konzept des Impulses existierte in der Antike nicht, und wie es mit dem Konzept der Kraft zusammenhängt, wurde erst mit den Entdeckungen Newtons klar. Ebenso ist ein Verständnis des Energiekonzepts und seiner Rolle in der Physik jüngeren Datums. Was Energie eigentlich ist, in welchen Formen sie auftreten kann und wie sich die Energie eines Objekts oder die Energie eines Systems von Objekten verändern kann, ist von zentraler Bedeutung für unser Verständnis der Natur und unsere Fähigkeit die Welt zu gestalten. Die Alltagserfahrung kann uns glauben machen, wir wüssten, was die Masse eines Körpers ist; aber da liegen wir falsch. Was wir als Masse eines Körpers interpretieren, ist oft tatsächlich das Gewicht eines Körpers oder besser gesagt die Gewichtskraft, die auf die Masse des Körpers wirkt. Physiker lernten auch, dass nicht alles, was in der Natur existiert, eine Masse hat und dass mit Albert Einsteins (1879 - 1955) berühmter Gleichung $E = mc^2$, wo c die Lichtgeschwindigkeit und m die Masse ist, die Masse eines Körpers ein Ausdruck für seinen Energieinhalt E ist.

Mit den Begriffen Kraft, Impuls, Masse und Energie können Physiker die Bewegung von Materie beschreiben. Ohne etwas über Kräfte, Impuls oder Energie zu wissen, können sie herausfinden, wie sich ein materielles Objekt durch den Raum bewegt, indem sie einfach die Position eines Objekts verfolgen, während es den Raum durchquert. Wenn sie Letzteres tun, sprechen Physiker von Kinematik, der Untersuchung der Bewegung von Objekten, ohne die auf das Objekt wirkenden Kräfte kennen zu müssen. Wenn Physiker von Dynamik sprechen, meinen sie das Studium der Bewegung von Objekten, wenn man die wirkenden Kräfte kennen muss, um zu berechnen, wie sich ein Objekt durch den Raum bewegt, damit man seine Bewegungen vorhersagen kann; und was sonst mit einem Objekt geschieht auf das eine Kraft wirkt. Die Physik kennt heute vier sogenannte Grundkräfte und eine Reihe weiterer daraus abgeleiteter Kräfte. Diese Grundkräfte sind

- die Gravitationskraft
- die elektromagnetische Kraft
- die starke Wechselwirkung oder starke Kernkraft
- die schwache Wechselwirkung oder schwache Kernkraft

Die Gravitationskraft ist die schwächste der vier Grundkräfte. Wenn jedoch die Massen, die sie erzeugen, sehr groß werden, wie es beispielsweise beim Gravitationskollaps massereicher Sterne der Fall ist, überwindet sie letztendlich alle anderen Kräfte. Die Existenz von Neutronensternen und Schwarzen Löchern ist ein beredter Beweis dafür.

Tab. 1.1: Klassifikation von Kräften.

Kraft	Typ	Angriffs- punkt	Quelle	Reichweite
Gravitationskraft	eingeprägte Kraft	schwere Masse	schwere Masse	$F \propto \frac{1}{r^2}$
Trägheitskraft		träghe Masse	beschleunigte Bewegung relativ zu Inertialsystem	∞
Elektromagnetische Kraft		Ladungen Ströme	Ladungen Ströme	$F \propto \left(\frac{q}{r^2}, -\frac{q'}{r^2} \right)$
Elastische, hydrostatische und hydrodynamische, plastische, und viskose Kraft			Materie, makroskopische Körper	$10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ Å}$
Gleitreibung, Haftreibung	Reaktions- kraft			1 Å
Kräfte zwischen starren Körpern				1 Å
Starke Kernkraft	eingeprägte Kraft	Elementar- teilchen	Farbladung	10^{-15} m
Schwache Kernkraft			Schwache Ladung	10^{-17} m

Die zweitstärkste Kraft, die elektromagnetischen Wechselwirkung, skaliert ebenso wie die der Gravitationskraft mit r^{-2} . Sie wirkt jedoch nur auf Massen, die eine elektrische Ladung tragen. Es ist unmöglich, Gravitationskräfte abzuschirmen; bestenfalls kann man sie in manchen Fällen durch Beschleunigung neutralisieren (z.B. im freien Fall). Bei elektrischen Ladungen und Feldern ist das anders, da diese abgeschirmt werden können. Man bedenke nur, dass es auf der Erde sicherlich unzählige elektrische Ladungen gibt und die Erde als Ganzes dennoch elektrisch neutral ist. Auf der kosmischen Längenskala dominiert also letztendlich nur eine einzige Kraft, und zwar die Gravitationskraft. Aber es gibt durchaus elektrische kosmische Phänomene. Ein bekanntes Beispiel ist das Erdmagnetfeld, ohne das es wahrscheinlich kein Leben auf der Erde gäbe. Ein viel wirkungsvolleres Beispiel sind Pulsare, hochmagnetische rotierende Neutronensterne, die entlang ihrer Polarachsen elektromagnetische Strahlung hoher Energie und Intensität aussenden.

Wir alle kennen die Auswirkungen der Gravitations- und elektromagnetischen Kräfte, da wir beide täglich erleben. Dies ist bei den sehr kurzreichweitigen Kernkräften, al-

so der starken und der schwachen Wechselwirkung, nicht der Fall, da diese nur auf der subatomaren Längenskala wirken. Die starke Kernkraft wirkt zwischen den sogenannten Quarks, den Bestandteilen der Nukleonen - Protonen und Neutronen - sowie zwischen den Nukleonen im Atomkern selbst. Sie ist bei Entfernungen von etwa dem 0.5-fachen Durchmesser des Wasserstoffkerns stark anziehend, nimmt jedoch bei Entfernungen von etwa dem 1.5-fachen Durchmesser eines Wasserstoffkerns schnell ab und wird vernachlässigbar. Bei Abständen etwas kleiner als das 0.5-fache des Durchmessers des Wasserstoffkerns wird die starke Kraft abstoßend und bestimmt dadurch die Größe eines Nukleons, also eines Protons oder eines Neutrons. Der Durchmesser eines Wasserstoffkerns, eines einzelnen Protons, beträgt etwa 1.7 Femtometer oder $1.7 \cdot 10^{-15}$ Meter. Die schwache Kernkraft ist wichtig für Kernreaktionen wie z.B. in Sternen, und sie ist die Kraft hinter der Radioaktivität. Die schwache Kernkraft hat eine noch geringere Reichweite als die starke Kernkraft und wirkt ebenso wie diese auf die Quarks der Protonen und Neutronen. Die schwache Kernkraft ist verantwortlich für den sogenannten β^- -Zerfall, die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton, und den β^+ -Zerfall, die Umwandlung eines Protons in ein Neutron.

Die vier Grundkräfte heißen eingeprägte Kräfte, weil sie von außen auf einen Körper einwirken, abgeleitete Kräfte werden dagegen so bezeichnet, weil man bei näherer Betrachtung feststellt, dass diese Kräfte makroskopische Folgen der mikroskopischen Wirkungen der Grundkräfte sind. Allerdings werden, wie die Zusammenfassung in Tab. 1.1 zeigt, auch einige abgeleitete Kräfte zu den eingeprägten Kräften gezählt. Dazu gehören Pseudokräfte wie die Trägheitskraft oder elastische, hydrostatische, plastische und viskose Kräfte. Der Grund dafür, dass diese Kräfte zu den eingeprägten Kräften gezählt werden, obwohl es abgeleitete Kräfte sind, liegt einfach darin, dass sie von außen auf den Körper einwirken, genau wie die Gravitationskraft, die elektromagnetische Kraft und die starke und schwache Kernkraft. Manchmal findet man unter den eingeprägten Kräften auch Reibungskräfte aufgeführt. Reibungskräfte sind jedoch Reaktionskräfte, das heißt, sie sind eine Reaktion auf die Wirkung, die beim Kontakt zweier Körper auftritt.

Wie werden Kräfte eigentlich übertragen? Bei Kontaktkräften liegt die Antwort natürlich auf der Hand, die Kräfte werden durch einen physischen Kontakt übertragen. Bei aus der Ferne wirkenden Kräften ist jedoch alles andere als klar, wie ein Körper die Bewegung eines anderen Körpers beeinflussen kann. Nach dem Newtonschen Schwerkraftgesetz üben zwei massive Körper aufeinander eine Kraft aus, die proportional zu jeder der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Abstand zwischen ihnen ist, d.h.

$$F \propto \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Dieses Kraftgesetz ermöglichte es, Phänomene zu verstehen, die seit Beginn der aufgezeichneten Geschichte sorgfältig beobachtet und beschrieben wurden, für die es jedoch keine physikalischen Erklärungen gab. Warum sich z.B. Himmelskörper so bewegen wie sie es tun, oder dass die Schwerkraft der Grund dafür ist, dass der Mond in seiner Umlaufbahn um die Erde verbleibt während er sich in einer kontinuierlichen Fallbewegung befindet. Trotzdem war schon Newton und seinen Zeitgenossen klar, dass dieses Kraftgesetz ein Problem hat, nämlich das der instantanen Fernwirkung. Wie kann z.B. die Sonne die Bewegung eines Planeten beeinflussen der sie in einer Entfernung von vielen Millionen Kilometern umkreist? Da es scheinbar kein Medium gab, das die Schwerkraft zwischen Sonne und Planeten überträgt, musste die Wechselwirkung augenblicklich erfolgen, unabhängig davon, wie groß der Abstand Sonne-Planet tatsächlich war. Die Wechselwirkung zwischen der Sonne und Merkur, dem sonnennächsten Planeten, musste genauso augenblicklich erfolgen wie jene zwischen der Sonne und Saturn, dem äußersten Planeten, der zu Newtons Zeiten bekannt war. Somit musste die Wechselwirkung mit unendlicher Geschwindigkeit erfolgen, oder durch direkte oder indirekte göttliche Vermittlung, wie Newton vermutlich annahm. Nicht nur das Newtonsche Gravitationsgesetz hat dieses Problem. Wie Tab. 1.1 zeigt, hat das elektromagnetische Kraftgesetz die gleiche Struktur und steht daher hinsichtlich der instantanen Fernwirkung vor denselben Herausforderungen.

Die Lösung des Problems kam von sogenannten Feldtheorien, den Raum durchdringenden Kraftfeldern wo jedem Punkt im Raum eine bestimmte Kraft zugeordnet ist. Die ersten Feldtheorien entwickelten sich mit dem Elektromagnetismus. Physiker glaubten, sie hätten da ein Medium, den sogenannten Äther, den sie für ein Kraftfeld benötigten; sie hielten es ja für unmöglich, dass Kraftfelder im leeren Raum existieren könnten. Als jedoch zu Beginn des 20. Jahrhunderts klar wurde, dass sich elektromagnetische Wellen im Vakuum ausbreiten können und die Existenz eines Äthers nicht postuliert werden muss, wurde auch klar, dass Kraftfelder im leeren Raum existieren können. Folglich waren Gravitationsfelder genauso real wie elektromagnetische Felder, und 1917 veröffentlichte Einstein eine solche Feldtheorie der Schwerkraft, seine Allgemeine Relativitätstheorie. Gesetze mit der Struktur des Newtonschen Gravitationsgesetzes haben ein weiteres Problem. Wenn man Punktmassen betrachtet, ausdehnungslose Objekte die eine endliche Masse tragen, tritt es auf sobald diese sich sehr nahe kommen, d.h. sobald $r \rightarrow 0$. Dies ist jedoch eher ein theoretisches Problem, da bei Körpern mit Ausdehnung, und damit beschäftigt sich die Newtonsche Mechanik normalerweise, dieses Problem nie auftaucht. Wie wir heute wissen, hat die Newtonsche Mechanik ihre Grenzen und die Physik des Kleinsten unterliegt ohnehin den Gesetzen der Quantenmechanik.

Im Altgriechischen bezeichnete Energie (*ἐνέργεια*) eine Aktivität, etwas, das am Werk ist. Die moderne Physik definiert Energie als die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. Wenn man vergleicht, was Energie für die alten Griechen war und was sie in der modernen Physik ist, könnte man annehmen, dass es einen Zusammenhang gibt. Aber das ist in Wirklichkeit nicht der Fall. Das moderne Verständnis von Energie geht auf Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Newtons Zeitgenossen und Rivalen, zurück. Er schlug eine lebendige Kraft vor (*vis viva* in Latein), die proportional ist zum Produkt der Masse m eines Objekts und seiner Geschwindigkeit v zum Quadrat, also $E \propto m \cdot v^2$. Bis auf einen Faktor 2 entspricht diese *vis viva* der kinetischen Energie.

Energie kann in vielen Formen vorliegen, als thermische, elektrische, chemische oder Kernenergie, um nur einige zu nennen. Bereits Leibniz wusste, thermische Energie, also Wärme, ist mit der Bewegung der jeweiligen Bestandteile der Materie verbunden, wie etwa der Atome oder Moleküle in einem Gas. Wärmeenergie kann somit auf kinetische Energie zurückgeführt werden, eine Erkenntnis, die eine Generation nach Leibniz zur Entwicklung der kinetischen Gastheorie führen sollte. Andere Energieformen sind nicht mit der Bewegung von Objekten verbunden, sondern mit der Möglichkeit, diese zu bewirken. Nehmen wir z.B. chemische oder nukleare Energie, Energie in Form von chemischen Bindungen und im Fall der Kernenergie in Form von Masse durch Einsteins $E = mc^2$. Wird diese potenzielle Energie in einer chemischen oder nuklearen Reaktion als Wärme freigesetzt so erzeugt man damit kinetische Energie. Kinetische Energie kann wiederum zu potenzieller Energie werden, u.a. wenn sich ein massives Objekt in einem Gravitationsfeld oder ein geladenes Objekt in einem elektromagnetischen Feld bewegt.

Zur Veranschaulichung kann man die Kurve betrachten, die ein Ball beschreibt, wenn er hoch in die Luft und so weit wie möglich geworfen wird. Dabei wird potenzielle Energie, durch Nahrungsaufnahme in unserem Körper gespeichert, in Muskelenergie umgewandelt, die wiederum zur kinetischen Energie des Balls wird, wenn er unsere Hand verlässt. Wenn der Ball aufsteigt, wird er langsamer, er verliert kinetische Energie, aber gleichzeitig nimmt seine potenzielle Energie im Schwerkraftfeld der Erde zu. Sobald die vertikale Komponente der kinetischen Energie Null ist, da sie vollständig in potenzielle Energie umgewandelt wurde, hört der Ball auf zu steigen und beginnt zu fallen, wodurch seine potenzielle Energie wieder in kinetische Energie umgewandelt wird. Dieser Vorgang endet, sobald der Ball den Boden berührt und seine verbleibende kinetische Energie wieder in etwas anderes umgewandelt wird, den Abdruck, den der Ball im Boden hinterlässt. Um diesen Abdruck zu erzeugen, ist Arbeit erforderlich, da die Erde an dieser Stelle vertikal verdichtet und etwas Material seitlich verschoben wird. Der Abdruck, den der Ball im

Boden hinterlässt, ist somit ein Beweis für die Fähigkeit der kinetischen Energie, Arbeit zu verrichten, die Arbeit Bodenteile zu bewegen.

Energie besitzt offensichtlich die latente Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, und tritt nur in zwei Grundformen auf: kinetischer und potenzieller Energie. Kinetische Energie ist immer mit der Bewegung einer Masse verbunden, d.h., es gibt nur eine Form kinetischer Energie, nämlich $E = m \cdot v^2 / 2$. Es gibt aber viele verschiedene Formen potenzieller Energie. Kinetische Energie ist die zusätzliche Energie, die ein Objekt aufgrund seiner Bewegung besitzt. Es war Gaspard-Gustave de Coriolis (1792 – 1843), der 1829 die korrekte Form der kinetischen Energie Gleichung aufstellte, auch wenn sie damals noch als *vis viva* bezeichnet wurde. Der Begriff kinetische Energie entstand erst Mitte des 19. Jahrhunderts, als William Thomson (1824 – 1907), der spätere Lord Kelvin, ihn zu verwenden begann. Kurz darauf führte William John Macquorn Rankine (1820 – 1872), ein weiterer Pionier der Thermodynamik, den Begriff potenzielle Energie ein.

In Systemen mehrerer Massen m_i mit Geschwindigkeiten v_i ist die Summe aller kinetischen Energien der einzelnen Massen eine Erhaltungsgröße. Leibniz und Christiaan Huygens (1629 – 1695) bemerkten dies etwa zur gleichen Zeit. Was beide beobachteten war, dass in einem geschlossenen System in dem Massen nur elastische Stöße erfahren, die gesamte kinetische Energie des Systems erhalten bleibt. Energieerhaltung ist von zentraler Bedeutung, nicht nur in der Physik, aber erst Mitte des 19. Jahrhunderts etablierte sich die moderne Form des Energieerhaltungssatzes als einer der Grundpfeiler der Physik: Energie kann weder erzeugt noch zerstört, sondern nur von einer Form in eine andere Form umgewandelt werden. Dass von den Beobachtungen von Leibniz und Huygens bis zur Entstehung des modernen Energieerhaltungssatzes fast hundert Jahre vergingen, liegt daran, dass Wärme und mechanische Arbeit als unterschiedliche Dinge betrachtet wurden. Erst als die Äquivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit nachgewiesen wurde, wie beispielsweise 1843 durch James Prescott Joule (1818 – 1889) mit seinem berühmten Experiment, wurde klar, dass es sich bei beiden um unterschiedliche Energieformen handelte, die ineinander umgewandelt werden können.

Welches geschlossene System man auch betrachtet, einen Versuchsaufbau, unser Sonnensystem oder das gesamte Universum, seine Energie ändert sich nie. Die gesamte Energie, die ein geschlossenes System jemals haben wird, ist die Energie, mit der es zu Beginn ausgestattet ist. Was danach in einem geschlossenen System passiert, ist nur noch eine Frage der Energieumwandlung und Verteilung. Aus Erfahrung wissen wir, dass Wärme nur von heißen zu kalten Körpern fließt, niemals umgekehrt. Mit der unausweichlichen Folge, dass irgendwann in der Zukunft alles die gleiche Temperatur haben wird.

1.2 Die Konzepte von Raum und Zeit

Mit gutem Grund kann man Mathematik und Physik als unsere beiden wichtigsten Wissenschaften bezeichnen. Es waren Fortschritte beim Verständnis des Verhaltens natürlicher Dinge, d.h. der Physik, ausgedrückt in der Sprache der Mathematik, die unsere menschliche Welt grundlegend verändert haben. Was das «Verständnis, wie natürliche Dinge funktionieren» betrifft, darf man wichtige Faktoren nicht vergessen. Das erleichtert die Würdigung der historischen Entwicklung und der heutigen Architektur der Physik-Wissenschaft, und wie moderne Universitäten Studierende heute in diese einführen. Die Physik war und ist zuallererst eine experimentelle Wissenschaft. Wie Menschen natürliche Dinge um sich herum erleben und andere weiter entfernt von sich beobachten können, hat viele Jahrhunderte bestimmt was menschlichen Fragen und Erkundungen zugänglich war. Unsere Welt, von der wir ein Teil sind, ist dreidimensional. Dies war auch bei unseren frühen Vorfahren nicht anders, als sie begannen, die physische Welt um sich herum zu erforschen. Um zu beschreiben, wie schnell oder wie langsam Dinge sich bewegen oder welche Wirkung Kräfte auf sie haben, ist ein Konzept von Raum und Zeit erforderlich. Ohne die Möglichkeit, die Längen- und Zeitdimension zu messen, ist es unmöglich zu sagen, wo sich ein Körper im Raum befindet oder wie schnell er sich durch den Raum bewegt. Längemessung setzt die Existenz von Maßstäben und Zeitmessung die Existenz von Uhren voraus. Natürlich orientierten sich die erste Maßstäbe unserer Vorfahren an Maßen des menschlichen Körpers, d.h., sie verglichen die Größe von Gegenständen mit Teilen des menschlichen Körpers wie dem menschlichen Fuß, der schließlich die Länge eines standardisierten Fußes erhielt. Um den Lauf der Zeit zu messen, verwendeten unsere Vorfahren zuerst natürliche Uhren. Die Länge eines Tages, auch wenn sie im Laufe des Jahres variiert, ist eine solche Uhr. Die Zeit, die zwischen der Winter- und der Sommerwende vergeht, kann, wie jede andere saisonale Uhr der Natur auch, ein Maß für die Zeit liefern. Dann gibt es natürlich noch den menschlichen Herzschlag, der uns ein ganz persönliches Zeitempfinden vermittelt. Erste einfache Uhren waren Sonnenuhren, Sanduhren, Wasseruhren oder auf den menschlichen Puls synchronisierte Pendel, wie Galileo Galilei (1564 – 1642) sie noch in seinen Experimenten verwendete.

Ganz offensichtlich sind unsere Konzepte von Raum und Zeit von grundlegender Bedeutung für unser Verständnis davon wie sich Objekte durch Raum und Zeit bewegen. Lange Zeit spielte das für jene, die verstehen wollten, wie sich Materie durch Raum und Zeit bewegt, aber keine Rolle. Das änderte sich erst, als die Forschungsmöglichkeiten der Physiker deutlich über das hinausgingen was Menschen mit ihrem angeborenen Raum-Zeit-Fenster, also nur mit den natürlichen Sinnen, beobachten können.

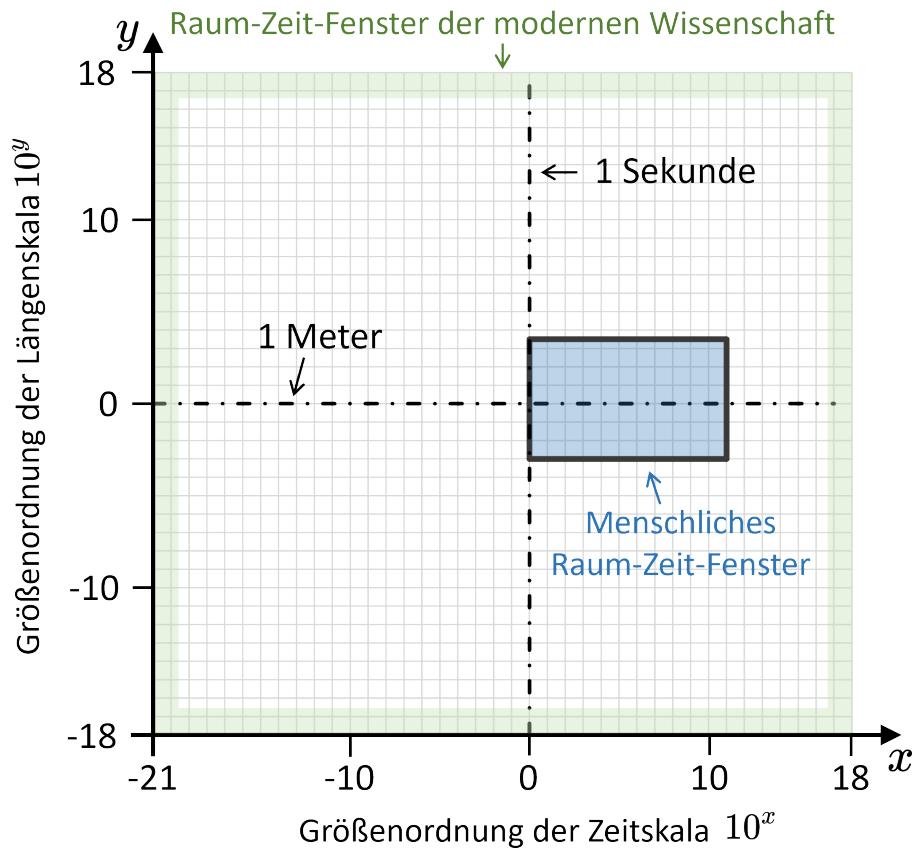


Abb. 1.1: Der Raum-Zeit-Horizont der modernen Wissenschaft und der menschlichen Wahrnehmung im Vergleich. In der logarithmischen Darstellung von Längen- und Zeitskalen sind benachbarte Längen- und Zeitskaleneinheiten um den Faktor 10 getrennt.

Zweifellos leben moderne Menschen in einem ganz anderen Universum als ihre Vorfahren noch vor wenigen Generationen. Aber nicht weil das Universum ein anderes ist, sondern weil sich unsere Wahrnehmung geändert hat. Was wir heute über die Natur von Raum und Zeit und die großräumige Struktur des Universums wissen, unterscheidet sich völlig von dem, was Wissenschaftler Ende des 19. Jahrhunderts noch als die wahre Natur des Universums sowie von Raum und Zeit betrachteten. Um es klarzustellen: Das bedeutet nur, dass unser Wissen über das Universum heute viel umfangreicher ist, als sich das Wissenschaftler am Ende des 19. Jahrhunderts jemals vorstellen konnten. Dies bedeutet jedoch keineswegs, dass wir die natürlichen Dinge in unserem Universum vollständig kennen. Im Gegenteil, von einem großen Teil dessen, was scheinbar unser Universum ausmacht, wissen wir noch nicht einmal, was es wirklich ist, wir haben nur Etiketten dafür. So wie einige der alten Griechen über Atome sprachen, ohne zu wissen, was sie waren, sprechen wir heute über Dinge wie dunkle Materie und dunkle Energie, ohne zu wissen, was sie wirklich sind. Aber genau wie im Fall der Atome ist dies nur ein vorübergehender Zustand.

Konzepte von Raum und Zeit sind für uns zuallererst eine Erfahrung. Physiker verwenden das Internationale Einheitensystem (SI) (siehe [Anhang](#)), auch bekannt als metrisches System, das die Länge in Metern [m] und die Zeit in Sekunden [s] misst. Mit unseren eigenen Sinnen können wir Entfernungen von etwa einem Millimeter oder einem Tausendstel Meter bis zu ca. mehreren tausend Metern abschätzen, was etwa sechs Größenordnungen abdeckt. Die menschliche Zeitwahrnehmung reicht von etwa einer Sekunde bis zu dem was wir historische Zeiten nennen. Bemisst man letztere großzügig mit ein paar tausend Jahren, dann umfasst die menschliche Zeitwahrnehmung elf bis zwölf Größenordnungen. Mit diesem Raum-Zeit-Fenster begann die menschliche Erforschung der physischen Welt (siehe Abb. 1.1). Allerdings wurde die Mathematik, die Geometrie der alten Griechen, von Anfang an genutzt, um viel größere Entfernungen zu messen, nicht direkt, sondern indirekt durch mathematische Deduktion. Das beste Beispiel hierfür dürfte die Art und Weise sein, wie Eratosthenes von Kyrene (ca. 276 – 195/194 v. Chr.) erstmals den Erdumfang bestimmte. Eratosthenes erkannte, dass die Krümmung der Erde zu unterschiedlich langen Mittagsschatten an nördlichen und südlichen Orten führt, die er in den ägyptischen Städten Assuan und Alexandria maß. Er verwendete also ein der menschlichen Wahrnehmung zugängliches Längenmaß, die Länge eines Schattens zur Mittagszeit, um den Umfang der Erde zu bestimmen. Letzterer ist für die menschliche Wahrnehmung ansonsten nicht zugänglich, es sei denn, man betrachtet die Erde aus dem Weltraum. Mittels der Mathematik vom Bekannten auf das Unbekannte zu schließen, erweiterte den Raum-Zeit-Horizont des Menschen, aber über viele Jahrhunderte hinweg nur sehr langsam und oft über längere Zeiträume überhaupt nicht. All das begann sich zu ändern, als die wachsenden technischen Fähigkeiten des Menschen der Wissenschaft immer bessere Instrumente zur Messung von Raum und Zeit zur Verfügung stellten.

Teleskope, die Strukturen der Mondoberfläche auflösten, Mikroskope, welche die Existenz von Bakterien aufdeckten, oder zunehmend verbesserte Chronometer zur Zeitmessung, die es Seefahrern erlaubte Längengrade zu bestimmen, diese und andere Instrumente ermöglichten die wissenschaftliche Revolution des 16. und 17. Jahrhunderts. Letztere wurde zur Grundlage einer industriellen Revolution, die wiederum stetig verbesserte Instrumente und Methoden zur Messung von Zeit und Raum lieferte. Dieser Ratschen-Effekt wirkt bis heute weiter. Immer neue wissenschaftliche Entdeckungen ermöglichen es Ingenieuren immer genauere Instrumente und Methoden zu entwickeln, die wiederum neue wissenschaftliche Entdeckungen ermöglichen, usw. Im Laufe der letzten drei Jahrhunderte hat dies den der menschlichen Erforschung zugänglich Raum-Zeit-Horizont enorm erweitert, im sehr großen und im sehr kleinen Maßstab, von unvorstellbar kurzen Zeitintervallen zu ebenso unvorstellbar langen Zeitabschnitten.

Heute können wir die räumlichen Dimensionen unendlich kleiner Dinge auf der Skala von Elementarteilchen wie Quarks sowie unendlich großer Dinge auf der Skala des Universums messen. Dies deckt ungefähr den Bereich von 10^{-18} Metern bis fast 100 Milliarden Lichtjahre bzw. 10^{18} Meter ab, der Größe des beobachtbaren Universums. In der zeitlichen Dimension messen wir heute Zeitintervalle so kurz wie die Zeit, die ein Photon braucht, um ein Wasserstoffatom zu durchqueren, ca. 10^{-21} Sekunden, und Zeitspannen so lang wie das Alter des Universums, ca. 13.8 Milliarden Jahre, d.h. etwa 10^{18} Sekunden.

Raum und Zeit galten lange als unveränderlich. Erst als es gelang, Wissenschaft von Religion zu trennen, wurde immer offensichtlicher, dass das Universum und damit Raum und Zeit schon viel länger existierten, als Religionsgelehrte dies behaupteten. Mit der Trennung von Religion, begannen Wissenschaft und Philosophie neue Fragen zu stellen. Existieren Raum und Zeit getrennt von den Objekten, die sich durch Raum und Zeit bewegen? Gäbe es keine Objekte, gäbe es dann noch einen Raum? Was würde mit der Zeit geschehen, wenn es nichts gäbe, was würde ihren Lauf markieren? Solche philosophischen Fragen scheinen sich nicht sehr von den Fragen zu unterscheiden, die Theologen zuvor gestellt hatten. Wie zum Beispiel: Welche Bedeutung hätte die Existenz eines göttlichen Wesens, sei es der christliche Gott oder eine andere Gottheit, wenn es keine Schöpfung gäbe? Wie immer heute jemand solche Fragen beantwortet, im Gegensatz zu früher hat dies keinen Einfluss mehr auf die Wissenschaft der Physik. Anders als vor ein paar hundert Jahren, als die Theologie noch diktieren konnte, was die Naturwissenschaften erforschen durften, und die Inquisition der katholischen Kirche noch Wissenschaftler zensierte, folterte und sogar tötete, wenn sie ihrem Dogma widersprachen.

Warum nehmen wir die Welt so wahr, wie wir es tun? Eine anregende Lektüre hierzu und viel unerthaltsamer als in trockenen philosophischen Schriften zu stöbern, ist «Flächenland: Ein mehrdimensionaler Roman», eine 1884 vom englischen Autor Edwin A. Abbott (1838–1926) veröffentlichte Satire. Als Teil des Lebens auf diesem Planeten entwickelte sich die menschliche Spezies in einer dreidimensionalen Welt. Da mag es verwundern, warum wir uns überhaupt die Frage stellen, ob die menschlichen Wahrnehmung von Raum und Zeit angeboren ist oder nicht. Aber Vorsicht, in jüngerer Zeit haben wir ein viel tieferes Verständnis von Raum und Zeit entwickelt. Während die Welt unserer alltäglichen Erfahrungen ein dreidimensionaler Raum und ein gleichmäßiger Zeitablauf bleibt, gibt es viele Aspekte der Physik, bei denen dies nicht mehr der Fall ist. Als die Menschen ihr Verständnis der physischen Welt über das in Abb. 1.1 skizzierte Fenster des angeborenen menschlichen Raum-Zeit-Horizonts hinaus erweiterten, wurde klar, dass es Dinge gibt, die ein ganz anderes Konzept von Raum und Zeit erfordern.

Aus gutem Grund betrachten viele Issac Newtons Beitrag zu unserem Verständnis der physischen Welt als den Höhepunkt der wissenschaftlichen Revolution des 16. und 17. Jahrhunderts, die den Grundstein für die folgende industrielle Revolution des 18. Jahrhunderts legte. Die Newtonsche Physik lieferte nicht nur Erklärungen für viele Dinge, die Menschen mit ihrer angeborenen Raum-Zeit-Wahrnehmung beobachten konnten, sondern auch für eine Reihe von Dingen, die Menschen außerhalb ihres angeborenen Raum-Zeit-Fensters zu erforschen begannen. Fast dreihundert Jahre lang dominierte die Newtonsche Mechanik die Physik und liefert bis heute das Werkzeug, um vieles von dem zu erklären, was in der physischen Welt geschieht. Es war jedoch von Anfang an klar, dass es einige Herausforderungen gab, derer sich Newton bereits bewusst war.

Die Newtonsche Mechanik liefert nicht nur die Grundlage für die Weiterentwicklung der Physik und anderer Wissenschaften, sondern vor allem auch des Ingenieurwesens. Das Ergebnis war, dass die wissenschaftliche Revolution des 16. und 17. Jahrhunderts den Weg für die industrielle Revolution des 18. Jahrhunderts ebnete. Bis weit ins 19. Jahrhundert hinein war die Wissenschaft der Physik in jeder Hinsicht identisch mit dem Verständnis der Mechanik, sei es die Mechanik der Funktionsweise der Dinge auf unserem Planeten, sei es die Himmelsmechanik der Planetenbewegungen oder sei es die Mechanik der Ingenieurskunst. Im späten 18. Jahrhundert und dann im Laufe des 19. Jahrhunderts änderte sich das grundlegend, als sich die Physik geladener Teilchen sowie die Physik der Wärme als eigenständige physikalische Disziplinen etablierten. Dies gipfelte in der Theorie der Elektrodynamik, die von James Clark Maxwell (1831 – 1879) entwickelt wurde, und der Theorie der statistischen Mechanik, zu deren Pionieren Ludwig Boltzmann (1844 – 1906), Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903) und Maxwell zählten.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts schienen die Newtonsche Mechanik, die Elektrodynamik und die statistische Mechanik zunehmend ausgereifte Theorien zu sein. Angesichts dieser enormen Fortschritte, meinten viele die Wissenschaft sollte im Prinzip in der Lage sein, so ziemlich alles zu erklären, was menschlicher Erforschung zugänglich war. Das ging so weit, dass einige namhafte Physiker zu glauben begannen, alles, was es in der Physik zu entdecken gab, sei entdeckt. Da zur Erklärung der Dinge keine neue Theorie erforderlich war sowie bestehende Theorien als weitgehend vollständig galten, sollten kluge junge Köpfe daher besser etwas anderes als Physik studieren. Das war tatsächlich der Ratschlag, den der junge Max Planck (1858 - 1947) erhielt, aber glücklicherweise ignorierte er ihn. Dass die Physik noch lange kein fertiges Gebäude war, verdeutlichte im ersten Viertel des 20. Jahrhunderts die Entwicklung eines völlig neuen Verständnisses der Natur von Raum, Zeit und Schwerkraft sowie der Struktur der Materie.

Beginnen wir mit Raum, Zeit und Schwerkraft. Eine grundlegende Prämisse der Elektrodynamik ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Ein weiteres Grundprinzip der Physik ist das sogenannte Relativitätsprinzip. In seiner einfachen Form besagt es, dass die Naturgesetze in zwei Bezugssystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, dieselbe Form haben. Solche Bezugssysteme, die keine Beschleunigung erfahren, weder in linear Form noch durch Rotation, werden Inertialsysteme genannt. Nach dem Relativitätsprinzip müssen die Naturgesetze unabhängig davon, wo im Universum sie untersucht werden, zu denselben Ergebnissen, d.h. Gleichungen, führen, so lange die jeweiligen Messungen in Inertialsystemen durchgeführt werden. Albert Einstein betrachtete beide Prinzipien als gleichermassen unverzichtbar. Das aber ist unvereinbar mit dem Konzept eines absoluten Raums und einer absoluten Zeit, woraus unmittelbar die Relativität von Raum und Zeit folgt.

Einstiens spezielle Relativitätstheorie von 1905 zeigte, dass Zeit und Raum relativ und nicht unabhängig voneinander sind, sondern die vier Koordinaten des sogenannten Raum-Zeit-Kontinuums bilden. Eine Vorhersage der Theorie ist die Zeidilatation, die Tatsache, dass bewegte Uhren langsamer gehen. Mit ihr ist das sogenannte Zwillingsparadoxon verbunden. Anstatt Menschen zu verwirren und abgelehnt zu werden, wurde diese Konsequenz der Einstienschen Theorie damals von der Populärkultur aber mit Interesse aufgenommen. Hier sind die Grundzüge. Von zwei eineiigen Zwillingen bleibt einer auf der Erde, und einer verlässt sie mit einer Rakete und reist jahrelang mit gleichmäßig hoher Geschwindigkeit durch den interstellaren Raum, nur um dann zur Erde zurückzukehren und seinen Zwillling viel älter oder sogar verstorben vorzufinden. Die spezielle Relativitätstheorie liefert die Erklärung für dieses scheinbare Paradoxon. Einstiens spätere Allgemeine Relativitätstheorie hilft dem Zwillling auf der Erde zwar etwas langsamer zu altern als ohne Schwerkraft, kann aber nicht das noch viel langsamere Altern seines Weltraum-Zwilling kompensieren. Die damalige Populärkultur faszinierten scheinbare Science-Fiction-Aspekte des Zwillingsparadoxon. Aber die gibt es nicht, denn viele Messungen haben bestätigt, dass bewegte Uhren tatsächlich langsamer gehen.

Eine weitere Vorhersage der speziellen Relativitätstheorie ist die Längenkontraktion. Diese hatten bereits Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) und George Francis FitzGerald (1851 – 1901) zuvor in einem anderen Kontext postuliert. In diesem Zusammenhang formulierte Lorentz auch die sogenannten Lorentz-Transformationen. Einstein stieß ebenfalls auf diese Transformationen. Aber in seinem Fall waren sie die logische Konsequenz seines Ansatzes, der verlangte, dass sowohl das Relativitätsprinzip und als auch die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gelten mussten. Die Lorentz-Transformationen sagen uns, wie

sich bei hohen Geschwindigkeiten die Raum- und Zeitkoordinaten eines Inertialsystems korrekt in die Raum- und Zeitkoordinaten eines anderen Inertialsystems umwandeln, das sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum ersten bewegt. Bei Geschwindigkeiten, die viel langsamer als die Lichtgeschwindigkeit sind, reduziert sich diese Lorentz-Transformation auf die klassische Transformation zwischen solchen Inertialsystemen, die allgemein als Galilei-Transformation bezeichnet wird. Als Einstein seine spezielle Relativitätstheorie formulierte gab es keine Beispiele wo die Galilei-Transformation der klassischen Mechanik nicht zum korrekten Ergebnis geführt hätte. Das hat sich definitiv geändert, da einige der wichtigen Technologien, auf die wir uns alle verlassen, ohne Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie nicht funktionieren würden.

Zeitdilatation und Längenkontraktion haben messbare Konsequenzen, abhängig vom Inertialsystem, in dem man eine Situation betrachtet. Ein Beispiel ist das Myon, eines der beiden schwereren Geschwister des Elektrons. Myonen sind nicht stabil und ihre Halbwertszeit, die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Myonen in einer Probe in andere Teilchen zerfällt, beträgt 2.2 Mikrosekunden bzw. 2.2 Millionstel einer Sekunde. Wichtig ist, dass diese Halbwertszeit für das ruhende Myon gemessen wird, oder anders gesagt, im Inertialsystem des Myons. In der oberen Atmosphäre entstehen in Höhen von etwa fünfzehn Kilometern ständig Myonen. Myonen haben eine Masse und können sich somit nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Hätten sie keine Masse, dann könnten sie sich zwar mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, aber selbst dann nur eine Strecke von etwa 2.2 Mikrosekunden mal 300 000 Kilometer pro Sekunde zurücklegen, was 660 Metern entspricht. Wie können sie also die Erdoberfläche erreichen, wo viel mehr Myonen Detektoren erreichen, die ihre Ankunft registrieren, als aufgrund ihrer kurzen Halbwertszeit zu erwarten wäre? Die Antwort ist entweder Zeitdilatation oder Längenkontraktion, je nachdem, in welchen Bezugsrahmen wir uns versetzen.

Zunächst zur Zeitdilatation. Myonen bewegen sich mit ca. 99% der Lichtgeschwindigkeit. Das bedeutet, im Ruhesystem des Myons vergeht die Zeit um einen Faktor 50 langsamer. Damit ist die tatsächliche Lebensdauer von Myonen, gemessen von einem ruhenden Beobachter auf der Erde, 50-mal so lang wie die Halbwertszeit des Myons in seinem Ruhesystem. Myonen legen also fast das 50-fache der 660-Meter-Distanz zurück, bevor die Hälfte von ihnen zerfallen ist. Myonen, die in etwa fünfzehn Kilometern Höhe erzeugt werden, können also aus der Perspektive eines auf der Erde ruhenden Beobachters etwa dreiunddreißig Kilometer zurücklegen und problemlos die Erdoberfläche erreichen.

Jetzt zur Längenkontraktion, bei der wir uns in das Ruhesystem des Myons versetzen, während es sich mit 99% der Lichtgeschwindigkeit auf die Erde zubewegt. Für das Myon,

welches sich mit 99% der Lichtgeschwindigkeit auf die Erde zubewegt, verkürzt sich der Abstand zwischen dem in fünfzehn Kilometern Höhe erzeugten Myon und der Erdoberfläche. Aber um wie viel? Nun, diese Entfernung schrumpft aus der Sicht des Myons um eben denselben Faktor 50. Fünfzehn Kilometer geteilt durch 50 ergibt 300 Meter, was eine viel kürzere Distanz ist als die ungefähr 660 Meter, die das Myon in seinem Ruhesystem zurücklegen kann, wo seine Halbwertszeit nur 2.2 Millionstel einer Sekunde beträgt. Daher haben Myonen, in ihrem Inertialsystem betrachtet, auch kein Problem damit, die Erdoberfläche zu erreichen. Das Myon ist zu einer Art Lehrbuchbeispiel geworden, das die praktischen Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie veranschaulicht. Aber es gibt viele weitere und oft sehr praktische Beispiele, welche die Realität von Zeitdilatation und Längenkontraktion seit Einsteins 1905 Publikation bestätigt haben.

Eine weitere Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie war schwieriger zu demonstrieren, spielt aber heute eine große Rolle bei der Erforschung der Stuktur der Materie mit Hilfe von Teilchenbeschleunigern, die Bedingungen erzeugen, wie sie vermutlich sehr kurz vor nach der Entstehung unseres Universums existierten. Einsteins spezielle Relativitätstheorie besagt, dass sich kein massives Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Die Ruhemasse ist die Masse eines Objekts wie des Myons in seinem eigenen Bezugssystem, in dem es ruht. Wenn ein Objekt auf immer höhere Geschwindigkeiten beschleunigt wird, kommt eine andere Art von Masse ins Spiel, die sogenannte dynamische Masse. Diese ist die Masse des sich bewegenden Objekts, wie sie von einem anderen Inertialsystem aus beobachtet wird. Je höher die Geschwindigkeit des Objekts, desto weniger fließt der zusätzliche Anstieg der kinetischen Energie in die Erhöhung seiner Geschwindigkeit und umso mehr in die Vergrößerung seiner dynamischen Masse. Bis letztlich die gesamte zugeführte Energie fast nur noch die dynamischen Masse des Objekts erhöht. Die Folge ist, dass sich kein Objekt schneller als Licht bewegen kann und nur masselose Objekte wie Photonen, die Lichtquanten, sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können. Um massive Objekte mit Ruhemassen größer als Null auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, wären unendliche Energiemengen erforderlich.

Inertialsysteme sind eine Idealisierung da praktisch alles im Universum Kräften und damit Beschleunigungen ausgesetzt ist. Einstein wusste, dass er eine allgemeinere Theorie brauchte, die Transformationen nicht nur zwischen Inertialsystemen, sondern auch zwischen Systemen ermöglichte, die sich willkürlich zueinander bewegen, einschließlich jeder Art von Beschleunigung. Das Ergebnis war Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie von 1917. Einstein war davon überzeugt, dass jede allgemeine Theorie für beschleunigte Bezugssysteme, eine Theorie der Schwerkraft sein musste.

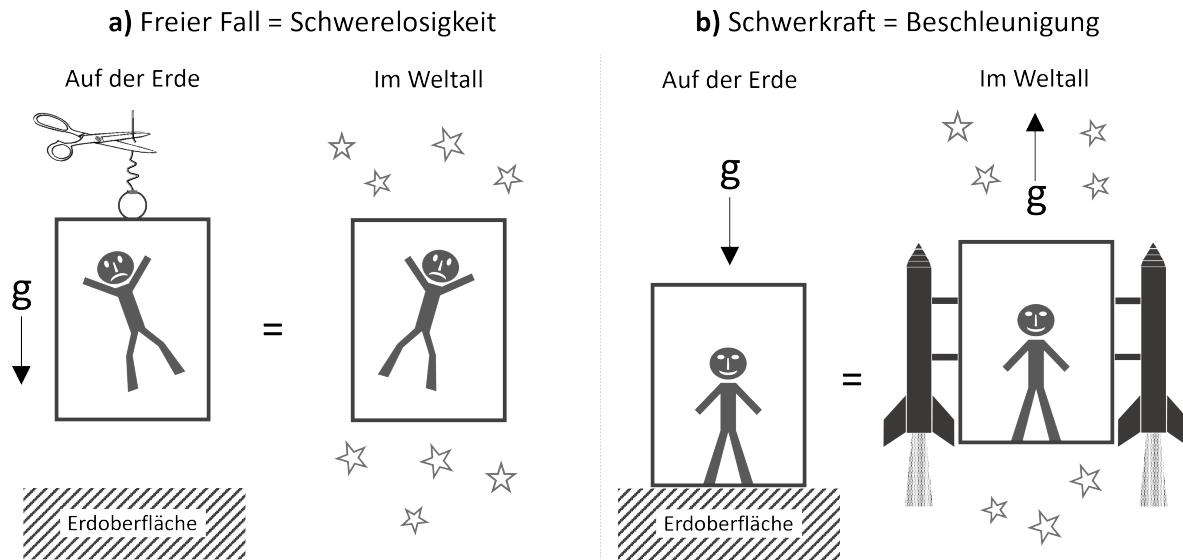


Abb. 1.2: (a) Eine schwerelos in einem Aufzug schwebende Person kann nicht wissen, ob sie Schwerelosigkeit empfindet, weil der Aufzug im Schwerkraftfeld der Erde fällt oder weil sich der Aufzug im Weltraum ohne Schwerkraft befindet. (b) Eine im Schwerefeld der Erde im ruhenden Aufzug stehende Person kann ihre Situation nicht von derjenigen einer Person unterscheiden, welche die gleiche Kraft in einem Aufzug im Weltraum erfährt, wenn dieser mit einem g beschleunigt wird.

Zu dieser Schlussfolgerung brachte ihn ein Gedankenexperiment, bei dem er sich vorstellte, dass jemand, der das Pech hat, sich in einem frei fallenden Aufzug zu befinden, eine Situation erleben würde, die der Schwerelosigkeit gleichkäme (Abb. 1.2a). Wenn diese Person nicht wusste, dass sie sich in einem frei fallenden Aufzug befand, konnte sie auf keinen Fall sagen, ob sie quasi Schwerelosigkeit wie im Weltraum erlebte oder sich unglücklicherweise in einem im Schwerefeld der Erde frei fallenden Aufzug befand. Als nächstes betrachtete Einstein den Fall, dass sich der Aufzug nicht bewegt (Abb. 1.2b). In diesem Fall werden die Füße der Person durch die Schwerkraft der Erde gegen den Aufzugboden gepresst. Diese Situation ist aber nicht zu unterscheiden von einem Aufzug im Weltraum, der so beschleunigt wird, dass die Füße der Person in gleicher Weise gegen den Aufzugboden gepresst werden. Dies überzeugte Einstein davon, dass Schwerkraft und Beschleunigung nicht zu unterscheiden sind. Diese Einsicht, dass man die Auswirkungen eines Gravitationsfelds experimentell nicht von denen unterscheiden kann, die in einem beschleunigten Bezugssystem auftreten, ist Einsteins berühmtes Äquivalenzprinzip. In einer Abwandlung seines Gedankenexperiments überlegte Einstein, was passieren würde, wenn man in die Seite des Aufzugs ein kleines Loch bohren würde, um einen Lichtstrahl hindurchzulassen. Der Aufzug wird dabei in der Schwerelosigkeit des Weltraums nach oben beschleunigt, wohl wissend, dass es im Weltraum kein Oben oder Unten gibt.

Bevor ein durch das Loch eindringender Lichtstrahl die andere Seite des Aufzugs erreichen kann legt dieser eine bestimmte Strecke nach oben zurück. Aus diesem Grund trifft ein Lichtstrahl dort an einem tieferen Punkt auf als das in die gegenüberliegende Wand gebohrte Loch durch das der Lichtstrahl einfiel. Zeichnet man nun eine imaginäre Linie welche der Bahn des Lichtstrahls vom Loch zur gegenüberliegenden Wand folgt, dann ergibt sich keine gerade sondern eine nach unten gekrümmte Linie. Das Ergebnis des Gedankenexperiments ist also, dass die Beschleunigung das Licht nach unten zu krümmen scheint. Und weil der erste Teil des Gedankenexperiments zeigte, dass Beschleunigung und Schwerkraft nicht zu unterscheiden waren, wurde Einstein klar, dass die Schwerkraft ebenfalls das Licht krümmen musste.

Wie lässt sich ein Lichtstrahl krümmen? Die Antwort ist, die Raumzeit selbst muss gekrümmmt sein. Zwischen zwei beliebigen Punkten im Raum bewegt sich Licht immer auf dem kürzesten Weg, oder anders ausgedrückt: In jeder Geometrie bewegt sich Licht immer entlang einer geraden Linie. Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie ist eine geometrische Beschreibung dessen, wie sich die Raumzeit in Gegenwart von Materie krümmt und wie sich Materie in einer gekrümmten Raumzeit bewegt. In der euklidischen Geometrie ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer ebenen Fläche eine Linie und die Innenwinkel eines Dreiecks summieren sich zu 180 Grad. In der nichteuklidischen Geometrie, beispielsweise auf der Oberfläche von Kugeln wie der Erde, ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ebenfalls eine Linie, jedoch eine gekrümmte; und die Winkel eines auf einer Kugel gezeichneten Dreiecks summieren sich zu mehr als 180 Grad. Licht bewegt sich in jeder Geometrie immer auf einer geraden Linie. In der Nähe schwerer Massen ist die Raum-Zeit Geometrie jedoch nicht flach, sondern gekrümmmt.

Zwei Jahre nachdem Einstein die Vorhersage gemacht hatte, dass große Massen Licht krümmen müssen, konnte ein Team um den Astronomen und Physiker Arthur Eddington (1882 – 1944) die Lichtkrümmung messen. Seitdem wurden auch eine Reihe weiterer Vorhersagen von Einsteins Theorie bestätigt, zuletzt die Existenz von Gravitationswellen. Gravitationswellen können von extrem massereichen Objekten erzeugt werden, wenn sie einander zu nahe kommen. Wenn das passiert, breitet sich die resultierende Gravitationsstörung als Gravitationswelle durch die Raumzeit aus, nicht unähnlich den kreisförmigen Wellen, die ein in die ruhige Oberfläche eines Teichs geworfener Kieselstein erzeugt. Sich ausbreitende Gravitationswellen bewirken eine Modulation der Raumzeit und diese können wir auf der Erde beim ihrem Durchgang messen. Wie 2015 bzw. 2017 bestätigt, können Gravitationswellen bei der Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher oder zweier Neutronensterne zu einem Schwarzen Loch entstehen.

1.3 Die Struktur der Materie

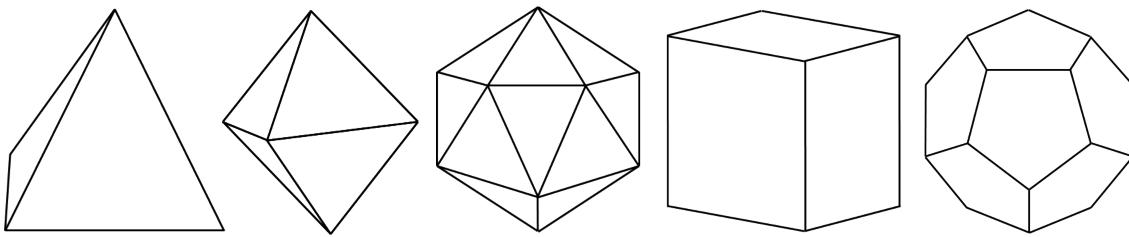


Abb. 1.3: Die fünf als platonischen Körper bezeichneten regelmäßigen Polyeder. Platon glaubte, dass die ersten vier die Grundbausteine der Materie seien und der letzte von den Göttern für die Gestirne verwendet wurde. Später ordnete Aristoteles den Äther dem fünften Körper zu. Von links nach rechts: das Tetraeder (Feuer), das Oktaeder (Luft), das Ikosaeder (Wasser), der Würfel (Erde) und das Dodekaeder (Universum / Äther).

So wie sich unser Verständnis von natürlichen Dingen im Großen zu Beginn des 20. Jahrhunderts dramatisch wandelte, so änderte es sich auch im ganz Kleinen, bezüglich der Struktur der Materie selbst. Der Mensch hat schon immer verstanden, dass es zwischen den natürlichen Dingen Unterschiede gibt. Metalle unterscheiden sich von Nichtmetallen, und auch zwischen den Metallen gibt es Unterschiede. Als Menschen mit Metallen experimentierten, um daraus Werkzeuge und Waffen zu schmieden, entdeckten sie die Bronze, was um 3000 v.u.Z. die Bronzezeit auslöste, auf die später die Eisenzeit folgte, deren Anfänge im Mittelmeerraum bis 1200 v.u.Z. reichen.

Das Konzept, dass Elemente die unteilbaren Bestandteile der Materie sind, geht auf die alten Griechen zurück, welche diese als Elemente oder Atome bezeichneten. Einige Elemente, wie die in reinem metallischem Zustand vorkommenden Metalle Silber, Zinn, Gold, Kupfer oder Blei, aber auch Nichtmetalle wie Schwefel oder Kohlenstoff, waren schon lange bekannt, aber wurden nicht als Elemente erkannt. Etwas mehr als eine Generation vor Aristoteles (384 – 322 v.u.Z.) hatte der Philosoph Demokrit (ca. 460 – ca. 370 v.u.Z.) seine Atomtheorie des Universums formuliert. Wie möglicherweise bereits der Philosoph Leukipp im 5. Jahrhundert v.u.Z. vor ihm, ging Demokrit davon aus, dass diese Atome in unterschiedlichen Formen und Größen vorkamen und dadurch die verschiedenen Eigenschaften der Materie bestimmten, deren Bestandteil sie waren. Wir wissen nicht genau, wer zuerst die sogenannten platonischen Körper (Abb. 1.3) als elementare Teile der Materie vorgeschlagen hat. Einige gehen davon aus, dass es Pythagoras (ca. 570 – ca. 495 v.u.Z.) gewesen sein könnte, andere glauben, dass nur drei der fünf Körper auf ihn zurückgehen und die anderen beiden zu Platons Zeiten (ca. 428 – 348 v.u.Z.) hinzugefügt wurden.

Die Faszination, welche die platonischen Körper auf die alten Griechen ausübten, war kein Zufall. Einer der berühmtesten Sätze der Mathematik der von den alten Griechen kommt, betrifft reguläre Polyeder und besagt, dass es genau fünf reguläre Polyeder gibt, mehr nicht. Diese fünf in Abb. 1.3 gezeigten regulären Polyeder sind natürlich nichts anderes als die platonischen Körper. Drei davon bestehen aus gleichseitigen dreieckigen Flächen: das Tetraeder mit vier Flächen, das Oktaeder mit acht Flächen und das Ikosaeder mit zwanzig Flächen. Das Dodekaeder hat zwölf Seiten, die aus regelmäßigen Fünfecken bestehen, und der Würfel hat natürlich sechs quadratische Flächen. Platon glaubte, dass alle Materie aus ihnen bestehe, und deshalb bezeichnen wir sie als die platonischen Körper. Vier der fünf Körper assoziierte er mit den vier Elementen der Antike: Feuer, Luft, Wasser und Erde. Platon vermutete, dass die Götter den fünften Körper zur Anordnung der Gestirne, also des Universums selbst, nutzten. Aristoteles schlug vor dem fünften Körper ein weiteres Element zuzuordnen, nämlich den Äther, von dem er glaubte, dass er das Universum durchdringe. Dieser Äther wurde zum hypothetischen Medium, in dem Physiker glaubten, dass sich elektromagnetische Wellen, also Lichtwellen, ausbreiten können, so wie sich beispielsweise Schallwellen in Luft ausbreiten. Im Jahr 1887 zeigte das Michelson-Morley-Experiment, dass es keine Beweise dafür gab, dass sich die Erde durch so etwas wie einen Äther bewegt, der das Universum durchdringt. Als nicht lange danach Einsteins spezielle Relativitätstheorie zeigte, dass es überhaupt keines Äthers bedurfte, gab die Physik die Ätherhypothese endgültig auf.

Die Erforschung der Struktur der Materie beschränkte sich lange Zeit auf das, was man Alchemie nannte. Das allgemeine Ziel der Alchemie war die Reinigung von Substanzen, insbesondere von Metallen, und ihr heiliger Gral war die Umwandlung von Substanzen, beispielsweise unedle Metalle in Gold zu verwandeln. Zu den Praktikern der Alchemie, die oft mit Magie gleichgesetzt wurde, gehörten namhafte Wissenschaftler, darunter beispielsweise Isaac Newton selbst. Oft wird die Alchemie lächerlich gemacht, aber damals war sie der Stand der Technik, das Wissen über Substanzen zu erweitern. Nicht umsonst leitet die Chemie ihren Namen von der Alchemie ab. Was die Umwandlung unedler Metalle in Gold angeht, konnten die Alchemisten nicht wissen, dass die Chemie einfach nicht über die Werkzeuge verfügt, um dies zu erreichen. Wie die moderne Physik gezeigt hat, war ihre allgemeine Behauptung in Bezug auf die Transmutation jedoch richtig. Es erfordert lediglich eine Technologie, von der Alchemisten damals nicht einmal träumen konnten, und es ist sehr teuer, Gold aus anderen Metallen herzustellen.

Das erste chemische Element (Phosphor) wurde 1669 entdeckt und die Liste der 33 Chemikalien, die Antoine-Laurent de Lavoisier (1743 - 1794), der Entdecker des Sauerstoffs,

1789 veröffentlichte, umfasste 23 Elemente im modernen Sinn. Heute kennen wir 118 chemische Elemente, Physiker bezeichnen Elemente üblicherweise als Atome, und wir wissen auch, dass sie nicht elementar sind, da sie aus Protonen, Neutronen und Elektronen bestehen. Protonen und Neutronen wiederum bestehen aus noch kleineren Teilchen. Physiker wurden zu Wärtern eines regelrechten Elementarteilchen-Zoos und um deren Verhalten zu beschreiben, entwickelten sie einen völlig neuen Zweig der Physik: die Quantenmechanik. Einsteins allgemeine Theorie beschreibt die Physik im sehr großen Maßstab, die Newtonsche Mechanik beschreibt sie im Maßstab unserer menschlichen Sinneserfahrungen und die Quantenmechanik beschreibt die Physik im sehr kleinen Maßstab. Die Newtonsche Physik ist zu einem Grenzfall von Einsteins allgemeiner Theorie geworden, die Quantenmechanik unterscheidet sich jedoch völlig von beiden.

Als die Theorie der statistischen Mechanik im 19. Jahrhundert konzipiert wurde, war die Existenz von Atomen und Molekülen noch eine Hypothese. Das begann sich zu ändern, als Albert Einstein 1905 in einer weiteren Veröffentlichung die sogenannte Brownsche Bewegung, benannt nach ihrem Entdecker Robert Brown (1773 – 1858), als schlüssigen Beweis für die Existenz von Atomen interpretierte. Nur wenige Jahre später war die Existenz von Atomen unwiderlegbar bewiesen. Heute kennen wir 118 chemischen Elemente, d.h. verschiedene Atomarten, und sie bilden das, was Schüler als Periodensystem der Elemente kennenlernen. Tab. A.1 im Anhang zeigt eine Version dieses Periodensystems mit seinen derzeit 118 Elementen, von denen etliche nicht stabil sind, da sie radioaktiv in andere Elemente zerfallen. Letzteres zeigt, dass Transmutation, d.h. die Umwandlung eines chemischen Elements in ein anderes, nichts Außergewöhnliches ist, sondern Teil der Funktionsweise natürlicher Dinge, d.h. der Physik. Wie die moderne Physik vor etwas mehr als hundert Jahren herausgefunden hat, bestehen chemischen Elementen selbst aus anderen, elementareren Bausteinen, nämlich aus positiv geladenen Protonen, Neutronen, die keine elektrische Ladung tragen, und negativ geladenen Elektronen.

Protonen und Neutronen bilden den Kern eines Atoms und bestimmen dessen Eigenschaften, während die an den Kern gebundenen Elektronen seine chemischen Eigenschaften bestimmen. Protonen und Neutronen bestehen aus noch kleineren Teilchen, während das Elektron ein Elementarteilchen ist. Der Bereich der Physik, der sich dem Verständnis der grundlegenden Struktur der Materie widmet ist die Teilchenphysik. Diese benötigt dazu sehr große Instrumente, die größten wissenschaftlichen «Instrumente», die jemals gebaut wurden. Um die Bausteine der Materie zu untersuchen, muss man sie zunächst erschaffen. Das ist nur möglich, indem man subatomare Teilchen mit enormen Energien aufeinander schießt. Um diese subatomaren Teilchen auf solch hohe Energien zu beschleunigen, sind

riesige Maschinen erforderlich, Physiker nennen sie Teilchenbeschleuniger. Diese können heute Energiedichten erzeugen, die immer näher an die Bedingungen herankommen, wie sie wohl bei der Entstehung des Universums vor etwa 13.8 Milliarden Jahren herrschten. Die Anfänge der Teilchenphysik kann man mit der Entdeckung des Protons im Jahr 1917 durch Ernest Rutherford (1871 – 1937) oder mit der Entdeckung des Neutrons durch James Chadwick (1891 – 1974) im Jahr 1932 datieren; in den 1930er Jahren war sie sicherlich auf dem Weg, eine eigenständige Physikdisziplin zu werden. Sagt eine Theorie die Existenz eines bestimmten Elementarteilchens mit einer endlichen Ruhemasse voraus, wie zum Beispiel eines Quarks, so wissen Physiker mit Einsteins $E = mc^2$, wie hoch die Energieschwelle ist, um es zu erzeugen. Will man dessen Existenz nachweisen, muss die Energiedichte, die ein Teilchenbeschleuniger bei einer Teilchenkollision erreichen kann, so hoch sein, dass diese Schwelle für die Teilchenbildung überwunden werden kann. Ist dies nicht der Fall, muss ein größerer Beschleuniger gebaut werden. Auf diese Weise haben Theorie und Experiment die Existenz einer Reihe von Elementarteilchen vorhergesagt und bestätigt was in den 1970er Jahren zum Standardmodell der Teilchenphysik führte. Diese Theorie konnte drei der vier Grundkräfte erklären: die elektromagnetische Kraft, die schwache Kernkraft und die starke Kernkraft. Lediglich die Schwerkraft lässt sich mit dem Standardmodell nicht ausreichend erklären. Das Standardmodell kennt siebzehn Elementarteilchen (Tab. 1.2), von denen zwölf sogenannte Materienteilchen (Fermionen) sind und von den restlichen fünf (Bosonen) sind vier für die Vermittlung der elektromagnetischen, schwachen und starken Kernkräfte verantwortlich. Das kürzlich entdeckte fünfte Teilchen dieser Gruppe, das sogenannte Higgs-Boson, verleiht allen anderen Elementarteilchen Masse.

Tab. 1.2: Die 17 Teilchen des Standardmodells

Fermionen				Bosonen	
Quarks	Up	Charm	Top	Gluon	Higgs-Boson
	Down	Strange	Bottom	Photon	Z-Boson
Leptonen	Elektron	Muon	Tau		
	Elektron-Neutrino	Muon-Neutrino	Tau-Neutrino		W-Boson

Der Aufstieg der Teilchenphysik im 20. Jahrhundert spiegelt jenen der Quantenphysik. Das ist kein Zufall, denn ohne die Werkzeuge der Quantenmechanik, ist die Erforschung des Kleinsten, und das ist die Teilchenphysik, unmöglich. Die Gesetze der Physik, die das Kleinste regeln, unterscheiden sich nicht nur erheblich von der Newtonschen Physik, es

gibt auch Dinge in der Quantenwelt, die in der makroskopischen Welt nicht existieren. Aus gutem Grund können wir die Anfänge der Quantenmechanik auf den Beginn des letzten Jahrhunderts datieren, als 1900 Max Planck erstmals seine Strahlungsquanten vorstellte, um die Schwarzkörperstrahlung zu erklären, und dann 1905 Albert Einstein eine Erklärung für den photoelektrischen Effekt durch die Einführung von Lichtquanten lieferte. Das macht Einstein, der die Quantentheorie als vorläufige Antwort, aber nicht als letztes Wort in Bezug auf die Natur der Dinge im sehr kleinen Maßstab betrachtete, zu einem der Pioniere der frühen Quantenmechanik. Trotz Einsteins Skepsis hat sich die Quantenmechanik zu einer äußerst erfolgreichen Theorie entwickelt, die unsere moderne Welt genauso verändert hat, wie die Newtonsche Mechanik die Welt des 18. und 19. Jahrhunderts veränderte. Doch so wie die Newtonsche Mechanik trotz all ihres Erfolge nicht das letzte Wort in der Physik war, könnte dies vielleicht, so wie Einstein vermutete, auch bei der Quantenmechanik der Fall sein.

Die Theorien der Schwerkraft, des Elektromagnetismus, der schwachen und der starken Kernkraft, sind alles Theorien über bestimmten Kräfte. Nicht so die Quantenmechanik, welche all diese Kraft-Theorien betrifft. Die Theorien der schwachen und starken Kernkraft sind Quantentheorien, da sie ohne die Quantenmechanik nicht hätten entwickelt werden können. Die Einbeziehung des Quantenasppekts in die Elektrodynamik hat uns die Quantenelektrodynamik beschert. Damit ist die Quantenmechanik mit drei der vier Grundkräfte im Einklang bzw. sie ist ihnen inhärent. Nur die Theorie der Schwerkraft, so wie im Standard Modell, fällt wieder heraus. Wie die Physik des ganz Großen, also der Schwerkraft, und die Physik des ganz Kleinen, also die Quantenmechanik, zusammenhängen, ist noch offen. Es gibt einige Verbindungen aber es gibt keine Theorie die Einsteins Allgemeine Theorie und die Quantenmechanik vereint. Solange Physiker nicht verstehen, wie eine Theorie der Schwerkraft mit der Quantenmechanik zusammengebracht werden kann, ist es unwahrscheinlich, dass der Traum einer großen einheitlichen Theorie wahr werden kann, die im Gegensatz zum Standardmodell dann auch die Schwerkraft einbezieht.

2. Die Grundlagen der Bewegung

Selbst um die grundlegendsten Bewegungskonzepte diskutieren zu können, muss man zunächst überlegen, wovon man die Bewegung beschreiben möchte. In unserem Alltag nehmen wir ständig verschiedene Arten von Bewegung wahr, von Lebewesen und unbelebten Dingen. Auch wenn sich die Physik nur mit der unbelebten Materie beschäftigt, bleiben dennoch viele verschiedene Bewegungsarten zu berücksichtigen und unzählige verschiedene Objekte, die wir um uns herum als in Bewegung wahrnehmen können. Das können zum Beispiel Objekte in der Nähe sein, etwa die Bewegung eines Kieselsteins, der durch unseren Schritt beim Wandern in den Bergen gelöst wird und den wir dann bergab rollen sehen; oder die Bewegung des Mondes, wenn wir in den Nachthimmel schauen; oder sogar der Planeten des Sonnensystems, wenn wir sie mit einem ausreichend leistungsstarken Teleskop beobachten. In beiden Fällen, ob Kieselstein oder Himmelsobjekt, erfolgt diese Bewegung aufgrund der Schwerkraft. Wenn wir einen Gegenstand mit unserer Muskelkraft werfen, wissen wir intuitiv, dass sobald wir den Gegenstand loslassen, seine Bewegung von der ihm verliehenen Energie, dem Luftwiderstand, auf den er trifft, und der Schwerkraft, der er ausgesetzt ist, bestimmt wird. Es gibt andere uns bekannte Kräfte, die ebenfalls dazu führen können, dass sich Objekte bewegen. Ein einfaches Beispiel sind Magnete, mit denen metallische Objekte gehoben werden können. Im letzteren Fall ist es natürlich die elektromagnetische Kraft, die gegen die Schwerkraft arbeitet und einen Gegenstand anhebt. In all diesen Fällen, in denen wir die Bewegung von Objekten beobachten, wissen wir auch intuitiv, dass die Masse eines Objekts bestimmt, in welchem Ausmaß eine Kraft seine Bewegung beeinflussen kann. Mit nur unserer Muskelkraft werden wir wahrscheinlich überhaupt nicht in der Lage sein, einen großen Felsbrocken zu bewegen, während wir kein Problem damit haben, einen kleinen Kieselstein über einen Bach zu werfen. Die meisten würden ohne zu zögern behaupten, dass es nicht die unterschiedliche Größe dieser Objekte ist, die es uns unmöglich macht, große Felsbrocken so zu werfen, wie wir Kieselsteine werfen können, sondern dass es das viel größere Gewicht der Felsbrocken ist, welches unserer Muskelkraft übersteigt.

2.1 Das Konzept des Massenpunkts

Bewegte Gegenstände können sich in Form, Größe oder Gewicht stark unterscheiden. Ziel der Physik ist es, eine Beschreibung der Bewegung zu geben, die allgemein auf verschiedenste Körper angewendet werden kann. Hierzu werden zuerst Gemeinsamkeiten identifiziert, die man aus der Beobachtung von Körperbewegungen abstrahieren kann. Diese sind dann Gegenstand eingehenderer Untersuchungen der Bewegung anhand eines idealisierten Objekts, das Physiker als Massenpunkt bezeichnen. Das Verständnis dieser idealisierten Massenpunktbewegung wenden Physiker dann auf die Untersuchung der Bewegung komplexerer Objekte an, die aus einer größeren Anzahl von Massenpunkten bestehen, oder auf die Untersuchung vieler Körper, die sie als Systeme von Massenpunkten betrachten. Die Mathematik nutzt das Konzept des idealen Raumpunkts als grundlegendes Objekt der Geometrie, aus dem dann andere Objekte wie Kreise oder Kugeln oder komplexe Flächen konstruiert werden, die aus solchen erweiterungslosen Punkten bestehen. Im Wesentlichen verwenden Physiker das gleiche abstrakte Konzept eines erweiterungslosen Punktes, den sie jedoch mit einer Masse verbinden, um das zu erzeugen, was sie einen Massenpunkt nennen. Für Mathematiker müssen Raumpunkte in einem viel strengerem Sinne erweiterungslos sein als für Physiker. Für Physiker ist ein Massenpunkt ausdehnungslos, wenn seine tatsächliche Ausdehnung so gering ist, dass sie keinen Einfluss auf die Physik hat, die sein Verhalten bestimmt, d.h., wenn sich der Massenpunkt frei oder unter dem Einfluss verschiedener Kräfte durch den Raum bewegt.

Ein Elementarteilchen wie das Elektron ist in vielerlei Hinsicht ein gutes Beispiel für einen solchen Massenpunkt. Es gilt allerdings Einschränkungen zu beachten. So zum Beispiel, dass ein wirklich ausdehnungsloser Massenpunkt eine unendliche Energiedichte besitzen würde. Im Rahmen der klassischen Mechanik, die sich mit makroskopischen Körpern beschäftigt, spielt dies glücklicherweise keine Rolle. Aber in der Quantenwelt spielt dies sehr wohl eine Rolle. Teilchen wie das Elektron besitzen eine endliche Masse und müssen daher eine endliche Ausdehnung haben. Allerdings haben wir in diesem kleinen Maßstab bereits die Welt der klassischen Mechanik verlassen und um zu erforschen, wie die endliche Ausdehnung eines Elektrons möglicherweise aussehen könnte, muss man in die Welt der Quantenmechanik eintauchen.

Das Konzept eines Massenpunkts ist eine nützliche Idealisierung, da die Mechanik von Massenpunkten nicht die Ausdehnung eines physischen Objekts berücksichtigen muss. Dies vereinfacht die Dinge erheblich und bietet auch die Grundlage für die Entwicklung der Mechanik komplexerer Körper, da diese aus unzähligen Massenpunkten bestehen. Auf

diese Weise ergibt sich die Mechanik starrer Körper sowie die Mechanik von Körpern, die unter Einwirkung einer äußeren Kraft ihre Form und / oder ihr Volumen ändern können (sogenannte deformierbare Körper), aus der Mechanik punktförmiger Massen.

Ein Massenpunkt wird durch fünf Eigenschaften charakterisiert: Drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate sowie seine Masse. Die Koordinatenposition eines Massenpunkts wird relativ zum Ursprung eines Bezugssystems gemessen, beispielsweise eines kartesischen, Polar- oder Zylinder-Koordinatensystems. Abb. 2.1 zeigt ein solches starres kartesisches Koordinatensystem, in dem die Position eines Punktes durch seinen Ortsvektor \mathbf{r} beschrieben wird:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i x_i$$

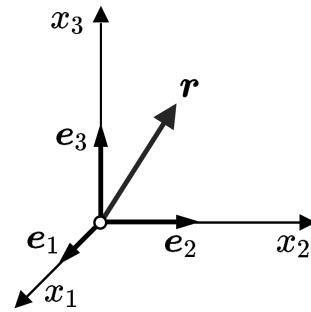


Abb. 2.1

Die erste Grundgröße der Mechanik ist die räumliche Dimension der Massenpunktbewegung, die durch den Ortsvektor \mathbf{r} verfolgt wird. Das setzt die Existenz von «Längenmaßstäben» voraus. Die Dimension einer Koordinate x_i ist ihre Länge, d.h. $x_i = [x_i]$, und diese Länge wird in der Einheit Meter gemessen (ein Meter = 1 m). Im Allgemeinen sind die Koordinaten eines Massenpunkts eine Funktion der Zeit. Somit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{beziehungsweise} \quad x_i = x_i(t)$$

Die zweite Grundgröße der Mechanik ist die zeitliche Dimension. Die Messung der Zeit erfordert die Existenz von «Uhren». Die Dimension der Zeit ist ihre Dauer, d.h. $t = [t]$, und diese wird in Sekunden gemessen (eine Sekunde = 1 s). Die unausgesprochene Annahme in Bezug auf die gerade eingeführten Maßstäbe und Uhren zur Längen- und Zeitmessung ist die Existenz kontinuierlicher und linearer Längen- und Zeitmetriken. Wir wissen heute, dass Letzteres nicht immer selbstverständlich ist, wenn man Dinge außerhalb der klassischen Mechanik untersucht. Das ist beispielsweise bei Schwarzen Löchern der Fall, bei denen das Konzept der Zeit selbst zusammenbricht, wenn man sich der Raumsingularität im Zentrum eines Schwarzen Lochs nähert. Die Grundannahme der Newtonschen Mechanik ist also die Existenz kontinuierlicher und linearer Längen- und Zeitmetriken. In der klassischen Mechanik ist der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eines Massenpunkts eine kontinuierliche Funktion der Zeit, genau wie die Bahnkurve, welche seine Bewegung im Raum beschreibt, kontinuierlich ist, d.h., der Massenpunkt verschwindet nicht einfach an einem Punkt und taucht an einem anderen Punkt wieder auf, ohne den Raum zwischen diesen beiden Punkten auf irgendeine Weise zu durchqueren.

2.2 Kinematik

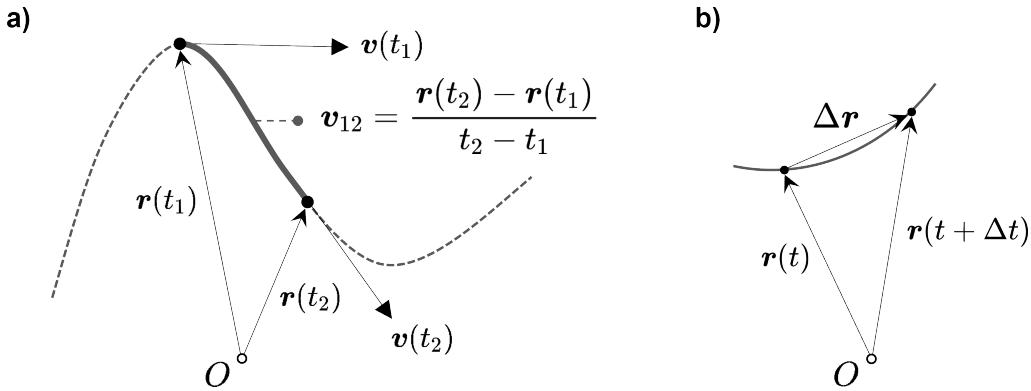


Abb. 2.2: a) Durchschnittliche Geschwindigkeit eines Massenpunkts zwischen zwei Positionen seiner Bahnkurve. b) Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit wenn $\Delta t = t_2 - t_1$ gegen Null geht.

Ziel der Kinematik ist es, die Bewegung eines Massenpunkts durch Raum und Zeit mit einfachen geometrischen Begriffen zu beschreiben. Kennt man die Position des Massenpunkts zu jedem Zeitpunkt, so kann man daraus seine Geschwindigkeit bestimmen. Befindet er sich beispielsweise zum Zeitpunkt t_1 bei \mathbf{r}_1 und zum Zeitpunkt t_2 bei \mathbf{r}_2 , dann hat er sich von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2(t_2) - \mathbf{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

bewegt. Ist der Abstand zwischen den Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 des Massenpunkts groß, so könnte er sich entlang der Bahnkurve zwischen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 mit viel größeren und viel kleineren Geschwindigkeiten bewegt haben und immer noch mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit \mathbf{v}_{12} . Um die Bewegung des Massenpunkts zu einem bestimmten Zeitpunkt zu beschreiben, interessiert uns nicht die Durchschnittsgeschwindigkeit des Massenpunkts zwischen zwei beliebigen Ortsvektoren, sondern seine jeweilige Momentangeschwindigkeit an einem beliebigen Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$. Diese Momentangeschwindigkeit erhalten wir, indem wir die verstrichene Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ zur Messung der Durchschnittsgeschwindigkeit \mathbf{v}_{12} gegen Null gehen lassen. Die Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ eines Massenpunkts ist die Durchschnittsgeschwindigkeit \mathbf{v}_{12} für Δt gegen Null:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

Die Änderungsrate des Ortsvektors eines Massenpunkts, d.h. die Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ eines Massenpunkts, mit einem Punkt über dem Ortsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ zu bezeichnen,

geht auf Isaac Newton zurück. Genau wie die gebräuchlichere Notation für solche Differeniale, d.h. $d\mathbf{r}/dt$, von Gottfried Wilhelm Leibniz stammt. In der Physik wurde Newtons Notation für die Zeitableitung einer Variablen weitgehend übernommen und analog zur ersten Ableitung wird die zweite Ableitung nach der Zeit durch zwei Punkte über der zu differenzierenden Variablen angezeigt.

Die Geschwindigkeit ist eine Vektorgröße. Ihre Richtung ist die der Tangente an die Massenpunkt-Bahnkurve an jenem Punkt, für den die Geschwindigkeit berechnet wird. Die Länge des Vektors ist der Absolutwert der Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeitsvektor kann in seine Komponenten entlang der Koordinatenachsen zerlegt werden; oder er kann auf eine beliebig ausgerichtete Gerade projiziert werden, um seine Komponente entlang dieser Geraden zu bestimmen. Da es sich bei Geschwindigkeiten um Vektoren handelt, gelten für die Addition von Geschwindigkeiten natürlich Vektorregeln.

In kartesischen Koordinaten, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, hat der Geschwindigkeitsvektor die drei Komponenten

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

und sein Betrag ist gegeben durch

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} = \frac{ds}{dt}$$

wobei ds das differentielle Bogenelement der Bahnkurve ist. Anstatt die Geschwindigkeit in Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem zu messen, misst $v(t) = ds/dt$ diese in Bezug auf die Bahnkurve selbst, als differentielles Bogenelement ds , das im Zeitintervall dt durchlaufen wird. Oft verwenden Physiker auch den Richtungskosinus, damit kann der Geschwindigkeitsvektor geschrieben werden als

$$\mathbf{v} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\cos \alpha_1 = \frac{v_x}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{v_y}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{v_z}{|\mathbf{v}|}$$

und

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

Die einfachste Bewegungsform ist die gleichförmig lineare Bewegung. Sie beschreibt eine Bewegung in der in gleichen Zeitintervallen gleiche Strecken zurückgelegt werden. Für

einen Massenpunkt in gleichmäßiger linearer Bewegung sind die Richtung des Geschwindigkeitsvektors und sein Betrag konstant. Betrachtet man den Fall einer gleichmäßigen linearen Bewegung entlang einer der Koordinatenachsen, beispielsweise entlang der x -Achse, so hat der Geschwindigkeitsvektor nur eine Komponente, nämlich

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \text{const} \quad \text{mit} \quad v_y = v_z = 0$$

In diesem Fall können wir die Position des Massenpunkts auf der x -Achse als Funktion der Zeit leicht durch Integration bestimmen

$$x(t) = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_x dt = v_x \cdot t$$

wobei t_0 so gewählt wurde, dass $x(t_0 = 0) = x_0 = 0$ mit dem Ursprung unseres Bezugssystems S identisch ist. Dieses sogenannte Laborsystem S ruht sowohl in Bezug auf den bewegten Massenpunkt als auch in Bezug auf uns als Beobachter. Gleichmäßige lineare Bewegung eines Massenpunkts bedeutet, dass sich seine Position linear mit der Zeit entlang einer geraden Linie ändert, so wie es $x(t) = v_x \cdot t$ im obigen Beispiel zeigt.

Bewegt sich ein Beobachter in einem Bezugssystem S' mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}' relativ zu unserem Bezugssystem S , so misst er eine andere Geschwindigkeit als wir. Bezugssysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit (also ohne Beschleunigung) relativ zueinander bewegen, werden als Inertialsysteme bezeichnet. Die Koordinaten zweier Inertialsysteme sind durch eine sogenannte Galilei-Transformation verknüpft. Galileo Galilei bemerkte als Erster, dass Messungen von räumlichen Entfernungen, Zeitunterschieden, oder

Winkelmessungen, die eine Person in einem sich in gleichmäßiger linearer Bewegung befindlichen Bezugssystem durchführt, die gleichen Ergebnisse liefern müssen wie ebensolche Messungen, die von einer Person in einem stationären Labor durchgeführt werden. Abb. 2.3 veranschaulicht, wie die Ortskoordinaten \mathbf{r} und \mathbf{r}' eines Punktes P in zwei Inertialreferenzsysteme S und S' , die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegen, verbunden sind. Für die Koordinaten- und Geschwindigkeitstransformationen zwischen den Inertialbezugssystemen S und S' können wir aus dem Graphen in Abb. 2.3 ablesen

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \end{aligned} \right\} \quad \text{Galilei-Transformation} \quad (2.2)$$

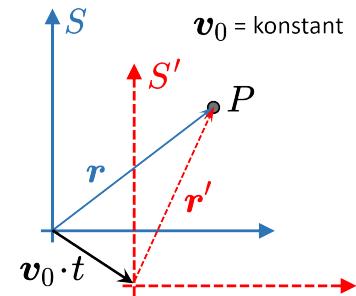


Abb. 2.3

Die zweite Gleichung ergibt sich durch Bildung der zeitlichen Ableitung der ersten Gleichung. Beide Gleichungen in Gl. (2.2) werden zusammen als Galilei-Transformation bezeichnet. Galileis Erkenntnis, dass die Gesetze der Mechanik in Bezug auf gleichförmige lineare Bewegungen unveränderlich sind, wird manchmal als Galileisches Relativitätsprinzip bezeichnet. Seine Beobachtung, dass in einem sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem ruhigen Ozean segelnden Schiff, Passagiere denen nicht bewusst ist sich an Bord eines Schiffes zu befinden, keine Möglichkeit hätten, herauszufinden ob sie sich an Land befänden oder auf dem Ozean segelten, ist mittlerweile alltägliche Erfahrung. Flugreisen mit mehreren hundert Kilometer pro Stunde sind heute selbstverständlich. Dabei gehen wir im Flugzeug nicht anders wie auf der Erde, und wenn wir etwas fallen lassen, fällt es genauso zu Boden wie alles, was wir auf der Erde fallen lassen. Ein extremeres Beispiel ist die Erde selbst, welche die Sonne mit einer Geschwindigkeit von mehr als $100\,000 \text{ km h}^{-1}$ umkreist, ohne beispielsweise die Art und Weise zu beeinflussen wie ein Apfel vom Baum fällt. Das Galileische Relativitätsprinzip besagt, dass es keine physikalische Möglichkeit gibt, zwischen einem Körper, der sich in gleichmäßiger linearer Bewegung befindet, und einem ruhenden Körper zu unterscheiden. Man kann feststellen, dass sich zwei Körper relativ zueinander bewegen, aber nicht, welcher sich bewegt und welcher ruht.

Galilei erkannte auch, dass eine gleichmäßige lineare Bewegung keiner Ursache bedarf. Ein Körper in gleichmäßiger linearer Bewegung wird sich ohne Krafteinwirkung genauso weiterbewegen. Kräfte wirken fast überall und daher sind gleichmäßige lineare Bewegungen selten. Sie treten nur weit entfernt von Kraftquellen auf die einen Körper dazu zwingen können, seinen Bewegungszustand zu ändern. Zu den wenigen Beispielen gehören masselose Teilchen wie Photonen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, oder nahezu masselose Teilchen wie Neutrinos, die sich mit Geschwindigkeiten sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Weit entfernt von Sternen und Planeten, wo deren Schwerkraftwirkung auf Photonen und Neutrinos vernachlässigbar ist, bewegen sich diese tatsächlich in gleichmäßiger linearer Bewegung. Doch gerade für solche Teilchen, die sich mit sehr hohen Geschwindigkeiten bewegen, versagt die Galilei-Transformation. Das liegt daran, dass Messungen von räumlichen Distanzen, Zeitunterschieden oder Winkelmessungen von der Geschwindigkeit des Bezugssystems abhängen in dem sie gemacht werden. Bei Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit sind diese Unterschiede so gering, dass sie einfach keine Rolle spielen, und daher hat die Galilei-Transformation den Physikern lange Zeit sehr gute Dienste geleistet. Erst als sie Objekte berücksichtigen mussten, die sich mit viel höheren Geschwindigkeiten bewegen, wurde klar, dass für die Koordinatentransformation und die Geschwindigkeitsaddition dann ganz andere Regeln gelten (siehe Abschnitt 12.3.1).

Bei gleichmäßiger linearer Bewegung sind sowohl die Richtung des Geschwindigkeitsvektors als auch sein Betrag konstant, sie ist die einfachste Form der Bewegung. Zwei weitere einfache Formen entstehen wenn sich entweder die Richtung ändert, in die der Geschwindigkeitsvektor eines bewegten Körpers zeigt, oder aber sein Betrag, jedoch nicht beides gleichzeitig. Bleibt die Richtung des Geschwindigkeitsvektors konstant aber es ändert sich sein Betrag, dann bewegt sich der entsprechende Körper auf einer geradlinigen Bahn, jedoch in ungleichmäßiger Weise. Entweder wird er langsamer oder er beschleunigt entlang einer geraden Linie, abhängig davon, ob die Geschwindigkeit des Körpers abnimmt oder zunimmt. Wenn umgekehrt der Betrag des Geschwindigkeitsvektors eines Körpers konstant bleibt, sich aber seine Richtung ändert, dann bewegt sich der Körper gleichmäßig, das heißt mit konstanter Geschwindigkeit, auf einer willkürlich gekrümmten Bahnkurve, deren Form durch die Richtungsänderungen des Geschwindigkeitsvektors bestimmt wird. In beiden Fällen unterliegt der Massenpunkt einer Beschleunigung.

Wie Abb. 2.4 zeigt, werden Durchschnitts- und Momentanbeschleunigung aus Änderungen des Geschwindigkeitsvektors abgeleitet, ähnlich wie Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit aus Änderungen des Ortsvektors abgeleitet wurden. So wie \mathbf{v} für Geschwindigkeit steht, wird normalerweise \mathbf{a} für Beschleunigung verwendet. Die durchschnittliche Beschleunigung eines Massenpunkts ist

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{v}_2(t_2) - \mathbf{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

und seine Momentanbeschleunigung ist

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.3)$$

In kartesischen Koordinaten, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, sind die drei Komponenten des Beschleunigungsvektors

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Ändert der Geschwindigkeitsvektor nur seinen Betrag, nicht aber seine Richtung, dann zeigt der Beschleunigungsvektor in die gleiche Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor. Im Allgemeinen stimmt die Richtung des Beschleunigungsvektors jedoch nicht mit dem Tangentialvektor der Bahnkurve am Ort des Massenpunkts überein. Es seien $\hat{\mathbf{T}}$ und $\hat{\mathbf{N}}$ (siehe Abb. 2.5) die Einheitsvektoren am Ort des Massenpunkts entlang der Tangente der Bahnkurve und senkrecht dazu. Dann können wir den Geschwindigkeitsvektor als

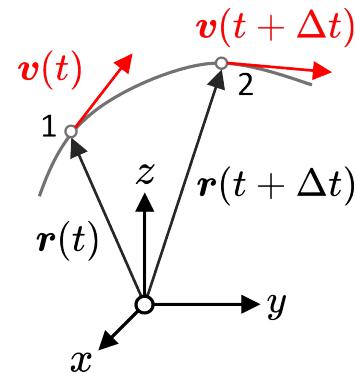


Abb. 2.4

$v \cdot \hat{\mathbf{T}}$ schreiben, wobei v der Betrag von \mathbf{v} ist, und den Beschleunigungsvektor zerlegen in eine Tangential- und eine Normalkomponente bezüglich der Bahnkurve:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{\mathbf{T}})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\mathbf{T}} + v \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}$$

Da $\hat{\mathbf{T}}$ der Tangentialvektor ist, zeigt die erste Komponente offensichtlich in Richtung des Tangentialvektors. Bei der zweiten Komponente müssen wir verstehen, in welche Richtung die zeitliche Ableitung des tangentialen Einheitsvektors zeigt. Hierzu ist es hilfreich, sich daran zu erinnern, dass $\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} = 1$ eine Konstante ist und daher

$$\frac{d(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})}{dt} = 0 = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = 2 \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann nur dann Null sein, wenn die zeitliche Ableitung des Tangentialvektors senkrecht zum Tangentialvektor selbst verläuft. Also zeigt die Richtung der zeitlichen Ableitung des Tangentialvektors in die Richtung des Normalenvektors. Daher können wir den Einheitsnormalenvektor $\hat{\mathbf{N}}$ als die zeitliche Ableitung des Tangentenvektors dividiert durch seinen Absolutwert definieren:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} / \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right\| \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right\| \cdot \hat{\mathbf{N}}$$

Damit können wir nun den Beschleunigungsvektor als Summe seiner Tangential- und Normalkomponenten schreiben

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{T}}} + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{N}}} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\mathbf{T}} + v \cdot \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right\| \cdot \hat{\mathbf{N}}$$

Wie aus der Integralrechnung bekannt, misst die Bogenlänge $s(\tau)$ einer Kurve, die zwischen zwei Punkten a und b (Abb. 2.5) definiert ist, die Kurvenlänge zwischen a und einem Punkt τ auf der Kurve für den $a \leq \tau \leq b$ gilt. Sie ist gegeben durch

$$s(\tau) = \int_a^\tau \| \dot{\mathbf{r}}(t) \| dt$$

Mit $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ ergibt sich dann die Differentialform dieser Gleichung

$$ds(t) = v(t) dt$$

Schreibt man diese Gleichung um, erhält man

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

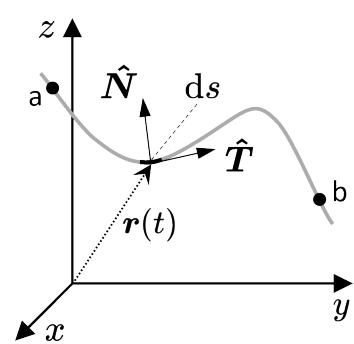


Abb. 2.5

Anstatt die Geschwindigkeit in Bezug auf einen festen Koordinatensystem zu messen, misst $v(t) = ds(t)/dt$, das im Zeitintervall dt durchquerte infinitesimale Bogensegment ds , den Betrag der Geschwindigkeit bezogen auf die Bahnkurve selbst. Die Multiplikation dieses absoluten Geschwindigkeitswerts mit dem tangentialen Einheitsvektor $\hat{\mathbf{T}}$ ergibt dann den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} . Damit lässt sich die Norm der Zeitableitung des tangentialen Einheitsvektors schreiben als

$$\left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\| \cdot v$$

Die Norm der Ableitung des Tangenten-Einheitsvektors nach der Bogenlänge ist der Betrag der Krümmung $\kappa(s)$ der Bahnkurve an der Position wo sich der Massenpunkt befindet. Der Kehrwert davon ist der Krümmungsradius $R(s)$:

$$|\kappa(s)| = \frac{1}{R(s)} = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\|$$

Damit erhält man für die Zerlegung des Beschleunigungsvektors in eine Tangential- und Normalkomponente

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{T}}} + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{N}}} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\mathbf{T}} + \frac{v^2}{R(s)} \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (2.4)$$

Der zweite Ausdruck, die Normalkomponente der Beschleunigung des Massenpunkts, ist an jeder Position auf der Bahnkurve immer auf den Krümmungsmittelpunkt der Kurve an dieser Position gerichtet. Seine Größe ist für eine gegebene Geschwindigkeit umgekehrt proportional zum Krümmungsradius an jedem gegebenen Punkt der Bahnkurve.

2.2.1 Die Kinematik der Planetenbewegung

Mit Hilfe der Kinematik kann man die Bahnkurve eines Massenpunkts beschreiben indem man seinen Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, seine Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und seine Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ verfolgt. Aber sie liefert keine Erklärung dafür, was einen Massenpunkt überhaupt bewegt. Nehmen wir zum Beispiel die Bewegung der Planeten. Soweit wir in die Geschichte zurückblicken können, haben Menschen versucht zu verstehen, wie sich Planeten bewegen und warum sie sich so bewegen, wie sie es tun.

Zu Galileis Zeiten war noch völlig unbekannt, welche Kraft die Planeten auf ihren Umlaufbahnen hält. Mehr und genauere Daten zu den Planetenbewegungen, vor allem jene von Tycho Brahe (1546 – 1601), ermöglichen es Johannes Kepler (1571 – 1630), zu erkennen, dass Planeten die Sonne auf elliptischen Bahnen umkreisen. Bis heute lernen Schüler die drei Keplerschen Gesetze, aber diese sagen nichts über die Kraft, die dazu führt, dass sich Planeten so bewegen, dass sie den Gesetzen von Kepler gehorchen. Die drei Keplerschen

Gesetze sind wahrscheinlich das beste Beispiel dafür, was die Kinematik erreichen kann, nämlich nichts weniger als ein korrektes Verständnis der Bewegung von Planeten. Kepler versuchte zu verstehen, wie die Kraft aussehen könnte, die die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne bewegt. Da er jedoch annahm, dass ihre Stärke umgekehrt proportional zur Entfernung eines Planeten von der Sonne sei, gelang ihm das nicht. Erst eine Generation später könnte Isaac Newtons Gravitationsgesetz endlich erklären, was Planeten dazu bringt, sich gemäß den Keplerschen Gesetzen zu bewegen.

Für viele Zeitgenossen Galileis und Kepplers war in Bezug auf die Planeten weniger relevant was diese auf ihren Umlaufbahnen hielten, sondern vielmehr, wer sie bewegte. Für (die meisten) modernen Ohren mag das lächerlich klingen, dabei war es nur ein Eingeständnis, dass es keine physikalische Erklärung gab, warum sich Planeten so bewegen, wie sie es tun. Engel, die angeblich die Planeten bewegen, im Westeuropa des 16. Jahrhunderts wohl die beliebteste Hypothese, waren für viele möglicherweise eine ebenso gute Erklärung wie der «unbewegte Bewege» den Aristoteles etwa zweitausend Jahre zuvor postuliert hatte. Durch die Übersetzung der Arbeiten des großen Mathematikers und Astronomen Claudius Ptolemäus (ca. 100 – ca. 170) der Aristoteles Sichtweise folgte, dominierte diese die westeuropäische Vorstellung vom Universum. Aristoteles «unbewegter Bewege» verwandelte sich im Wesentlichen in eine göttliche christliche Kraft, und Engel, die Planeten anschieben, waren nicht weniger göttliche Agenten als die Götter der Antike, die vor ihnen diese Arbeit verrichteten. Damit blieben göttliche Kräfte wie Engel noch viele Jahrhunderte lang eine gängige Erklärung dafür, was die Planeten in Bewegung hält. Abb. 2.6 zeigt eine einfache Skizze von Aristoteles Universum. Die Erde saß im Zentrum einer Reihe sogenannter Himmelssphären, an denen die jeweiligen Planeten befestigt waren. Der Mond war kein Erdtrabant, sondern ein eigenständiger Planet, der die Erde auf der innersten Himmelssphäre umkreiste. Dann folgten die Sphären der bekannten Planeten, von denen es fünf in der Reihenfolge Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn gab, die auf den Sphären zwei bis sieben saßen. Dann kamen die Fixsterne, die mit der achten Sphäre verbunden waren, gefolgt von der neunten

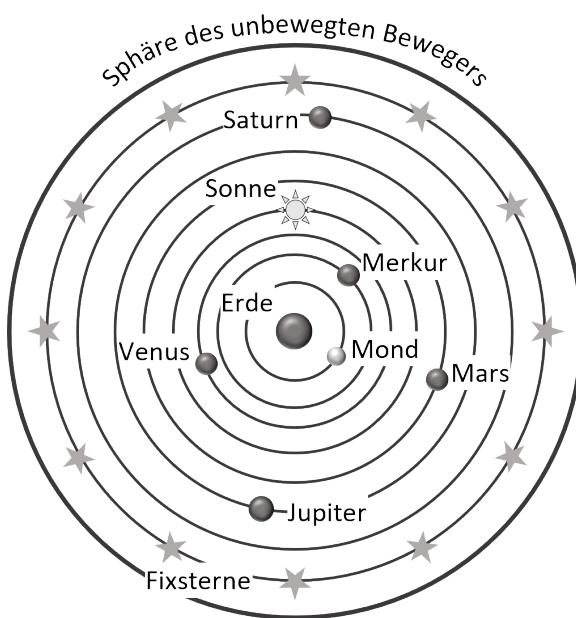


Abb. 2.6

Sphäre, die Aristoteles dem «unbewegten Bewege» zuschrieb. Ptolemäus astronomische Weltanschauung, die Aristoteles folgte, behielt die Erde im Zentrum des Universums und diese Weltanschauung, verstärkt durch christliche Dogmen, herrschte etwa fünfzehnhundert Jahre lang. Ptolemäus und andere nach ihm glaubten übrigens, dass Planeten eine eigene Seele hätten, die sie in Bewegung hielt. Die aristotelisch-ptolemäische Weltanschauung wurde erst im fünfzehnten Jahrhundert ernsthaft in Frage gestellt, als Nikolaus Kopernikus (1473–1543) 1543 auf seinem Sterbebett sein Werk *De revolutionibus orbium coelestium (Über die Umläufe der Himmelskreise)* veröffentlichte.

Kepler wurde im Jahr 1600 Tycho Brahes Assistent in Prag, wo dieser der kaiserliche Hofastronom von Rudolf II. war. Es fiel Kepler zu, der 1601 Tycho Brahes Nachfolger wurde, die astronomischen Tabellen zu vervollständigen, die der Kaiser bei Tycho Brahe in Auftrag gegeben hatte. Er brauchte fast dreißig Jahre, um dieses Werk fertigzustellen, das schließlich 1627 veröffentlicht wurde und heute als *Rudolphinische Tabellen* bekannt ist, der Sternenkatalog, der die damals genauesten Positionsmessungen von Sternen und Planeten enthielt. Es war die Arbeit an diesen Tabellen, die, aufbauend auf Tycho Brahes Daten, die Grundlage für Keplers bahnbrechende Entdeckungen bildete. Nachdem er ein Jahrzehnt lang die Planetenbewegung des Mars untersucht hatte, veröffentlichte er 1609 *Astronomia Nova (Neue Astronomie)*. Dieses Werk war geradezu revolutionär, da es die Himmelssphären, an welche Planetenbewegungen bis dahin gebunden waren, abschaffte und durch das Konzept sich frei durch den Weltraum bewegender Planeten ersetzte. *Astronomia Nova* enthielt die ersten beiden Keplerschen Gesetze. Nach einem weiteren Jahrzehnt Beobachtungen, veröffentlichte Kepler 1619 in seiner Abhandlung *Harmonices Mundi (Harmonien der Welt)* sein drittes Gesetz.

Galilei war ein beschreibender Astronom und Kepler ein eher mathematischer Astronom. Die Schlüsse, die Galilei aus seinen Beobachtungen zog waren mehr qualitativer Natur, während Keplers Folgerungen quantitativer waren. Südlich der Alpen veröffentlichte Galilei seine Verteidigung der heliozentrischen Weltanschauung in der kurzen Abhandlung *Sidereus Nuncius (Der Sternenbote)*, nur ein Jahr nachdem Kepler seine *Astronomia Nova* fertiggestellt hatte. Die beiden führten auch einen begrenzten Briefwechsel, in dem sie einige ihrer Ansichten austauschten, die damals für viele ihrer akademischen Kollegen noch inakzeptabel waren. Im Jahr 1610, vollendete Galilei die Arbeit an seinem berühmten *Dialogo*, der die Inquisition auf den Plan rief. Die katholische Kirche mag Galileis Werk als die größere Bedrohung für ihre geozentrische Weltanschauung angesehen haben, aber Keplers Werk war weitaus gefährlicher. Keplers Gesetze lieferten quantitative Beschreibungen der Planetenbewegungen, gestützt durch die damals genauesten astronomischen Daten. Hier ist, was die drei Gesetze von Kepler besagen:

Die drei Keplerschen Gesetze

1. Die Planetenbahnen sind elliptisch mit der Sonne in einem Brennpunkt.
2. Die Geschwindigkeit der Planeten variiert so, dass der Fahrstrahl Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleich große Flächen überstreckt.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Abb. 2.7 zeigt die elliptische Umlaufbahn eines fiktiven Planeten mit der Sonne in einem Brennpunkt. Die meisten Planetenbahnen sind viel weniger elliptisch als hier gezeigt. Die Umlaufbahn der Erde um die Sonne ähnelt viel eher einem Kreis als einer Ellipse. Bei genauer Zeichnung im größtmöglichen Maßstab den ein Buch zulässt, wäre die Erdumlaufbahn von einem Kreis nicht zu unterscheiden. Fast alle Lehrbücher zeigen diese daher viel elliptischer, als sie tatsächlich ist, da sonst der Eindruck entstehen würde, dass die Erde die Sonne auf einer kreisförmigen statt auf einer elliptischen Umlaufbahn umkreist. Der Parameter Exzentrizität misst, wie elliptisch eine Ellipse tatsächlich ist. Er ist definiert als das Verhältnis zwischen der Längendifferenz von Haupt- und Nebenachse und der Längensumme dieser beiden Achsen. Wenn sie gleich lang sind, ist die Exzentrizität Null und wir haben einen Kreis. Je größer der Längenunterschied zwischen diesen beiden Achsen ist, desto näher liegt der Wert der Exzentrizität bei Eins, wird diesen selbst aber nie erreichen, da ein Kegelschnitt mit einer Exzentrizität von Eins keine Ellipse mehr beschreibt, sondern eine Parabel. Die Exzentrizität der Erdumlaufbahn beträgt derzeit 0.017, sie kommt also einem Kreis sehr nahe. Die Hauptachse der elliptischen Erdumlaufbahn ist weniger als 0.015% länger als ihre Nebenachse. Unter den Planeten unseres Sonnensystems weist die Umlaufbahn von Merkur, dem sonnennächsten Planeten, mit einem aktuellen Wert von 0.206 die größte Exzentrizität auf, was bedeutet, dass die Nebenachse etwa 2.19% kürzer ist als die Hauptachse. Ausreichend genaue Beobachtungsdaten für Merkur wurden jedoch erst mit den verbesserten Instrumenten des 18. Jahrhunderts verfügbar. Unter den zu Keplers Zeiten bekannten Planeten weist Mars mit einem aktuellen Wert von 0.093 die zweitgrößte Exzentrizität auf, was bedeutet, dass

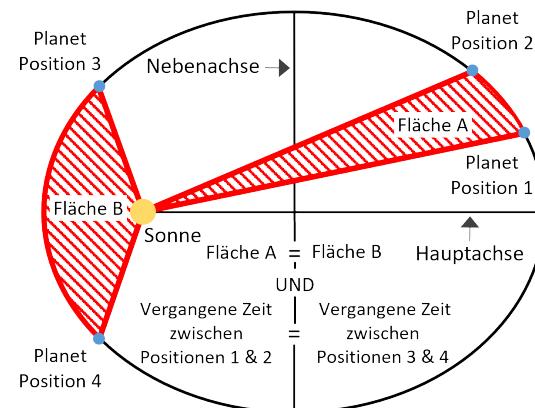


Abb. 2.7

die Nebenachse etwa 0.44% kürzer ist als die Hauptachse.¹ Kepler hat also eine gute Wahl getroffen und seine jahrzehntelange Vermessung der Marsumlaufbahn wurde mit Erkenntnissen belohnt, die die Art und Weise, wie Menschen den Kosmos wahrnehmen, veränderten.

2.3 Einfache Bewegung

Die Größe der Normalkomponente der Beschleunigung in Gl. (2.4) hängt von der Form der Bahnkurve des Massenpunkts ab. Sie ist umgekehrt proportional zur Krümmung $R(s)$ der Bahnkurve, d.h. je größer die Krümmung $R(s)$, desto kleiner wird die Normalkomponente der Beschleunigung in Gl. (2.4) und umgekehrt. Unter dem Dach der einfachen Bewegung werden wir einige Grenzfälle von Gl. (2.4) betrachten.

Die interessanten Grenzfälle treten auf, wenn entweder die tangentiale oder die normale Beschleunigungskomponente in Gl. (2.4) verschwindet. Das ist zum Beispiel bei $R(s) \rightarrow \infty$ der Fall, weil dann die Normalkomponente des Beschleunigungsvektors verschwindet und die Kurvenform zu einer Geraden wird. Wenn jedoch die Krümmung $R(s)$ eine Konstante ist, das heißt, jeder Teil der Bahnkurve hat die gleiche Krümmung, dann haben wir einen weiteren einfachen Grenzfall, bei dem die tangentiale Komponente der Beschleunigung verschwindet und die Bahnkurve kreisförmig wird.

2.3.1 Beschleunigte lineare Bewegung

Bewegt sich ein Massenpunkt geradlinig, also $R(s) \rightarrow \infty$, so spricht man von beschleunigter linearer Bewegung. Dann sind Geschwindigkeit- und Beschleunigungsvektor entweder parallel oder antiparallel, d.h., sie müssen nicht in die gleiche Richtung zeigen. Zeigen sie in die gleiche Richtung, sind also parallel, dann liegt eine beschleunigte lineare Bewegung vor; wenn sie in entgegengesetzte Richtung zeigen, also antiparallel sind, dann liegt eine gebremste lineare Bewegung vor. Hier betrachten wir den Fall, dass Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in die gleiche Richtung zeigen, in Richtung Massenpunkt-Bewegung. Der Einfachheit halber richten wir eine der Koordinatenachsen an der Bewegungsrichtung aus, zum Beispiel entlang der z -Achse, also $a_x = a_y = 0$ und $\hat{\mathbf{T}} = (0, 0, 1)$. Die einzige verbleibende Beschleunigungskomponente ist a_z mit

$$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

¹Von den später entdeckten Planeten hat nur Pluto eine größere Exzentrizität als Mars, aber da Pluto 2006 seinen Planetenstatus verlor, ist Mars in Bezug auf die höchste Exzentrizität wieder Planet Nummer zwei in unserem Sonnensystem.

Im Fall von

$$\frac{dv_z}{dt} = a_0 = \text{const} \quad \text{also} \quad dv_z = a_0 dt$$

haben wir es mit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu tun. Für die Geschwindigkeit $v_z(t)$ erhalten wir durch einfache Integration

$$v_z(t) = a_0 t + v_0 \quad \Rightarrow \quad dz = (a_0 t + v_0) dt$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit des Massenpunkts zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Durch nochmalige Integration erhalten wir die Bahnkurve

$$z(t) = \frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t + z_0 \quad (2.5)$$

wobei z_0 der Ort des Massenpunkt bei $t = 0$ ist. Die erste Komponente in Gl. (2.5) beschreibt die beschleunigte Bewegung des Massenpunkts, während die zweite Komponente seine gleichförmige Bewegung beschreibt.

2.3.2 Schiefe Ebene und Bewegung im freien Fall

Galilei war der erste Physiker, der Bewegung experimentell und systematisch untersuchte. Mit einem Lineal zur Messung der auf einer schiefen Ebene zurückgelegten Strecke D und dem Pulsenschlag zur Markierung äquidistanter Zeitintervalle, entdeckte er den grundlegenden Zusammenhang zwischen D und der verstrichenen Zeit t : $D \propto t^2$. Das ist genau die Beziehung, die wir gerade für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gefunden haben.

Galileis Interesse galt der Untersuchung der Bewegung des freien Falls, aber zu seiner Zeit war das sehr schwierig. Es gab einfach keine Instrumente, um die relativ kurze Zeit zu messen, die Objekte brauchen, um den Boden zu erreichen, selbst wenn sie von den höchsten Türmen fallen gelassen wurden, die es damals gab. Die schiefe Ebene (Abb. 2.8) ermöglichte es Galilei, den freien Fall in Zeitlupe zu untersuchen, da er ihre Neigung so einstellen konnte, dass genaue Zeitmessungen möglich wurden. Die Kraft, die die Kugel

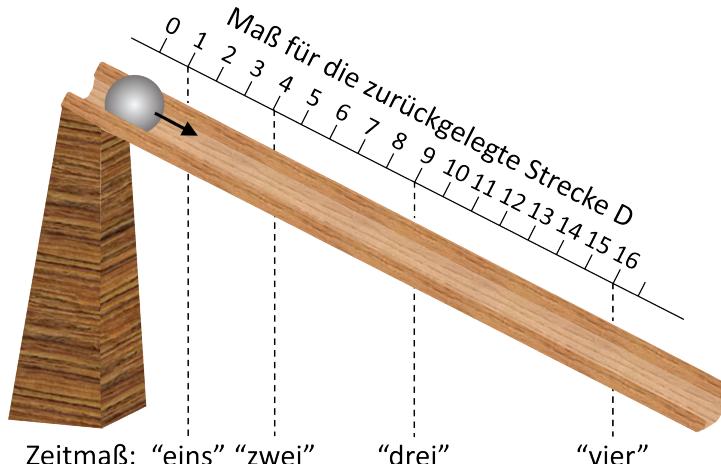


Abb. 2.8

in Abb. 2.8 beschleunigt, ist nur die zur schießen Ebene parallele Komponente der Gewichtskraft (Schwerkraft), gebremst durch die Reibungskraft. Ohne Reibung würde die Kugel nicht rollen, sondern gleiten. Durch die Verringerung des Neigungswinkels α kann die parallele Komponente der Gewichtskraft verringert werden bis die Kugel nicht mehr rollt. Wegen der Reibungskraft geschieht dies bereits bevor der Neigungswinkel α Null ist. In seinen Beschleunigungsstudien stellte Galilei fest, dass die Erdbeschleunigung unabhängig von der Größe der Kugel (groß vs. klein) oder dem Kugelmaterial (schwer vs. leicht) konstant blieb. Er kam zu dem Schluss, dass die Schwerkraft alle Objekte auf der Erde unabhängig von ihrer Größe, Form oder Masse gleich beschleunigt.

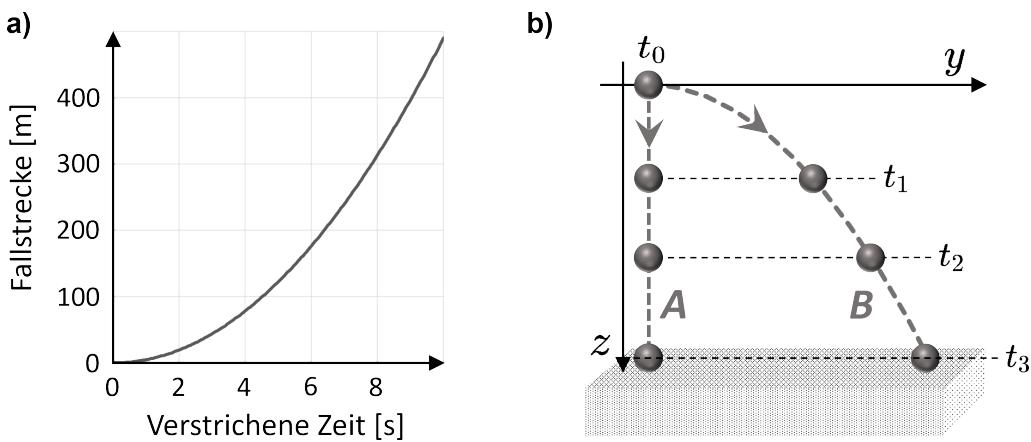


Abb. 2.9: (a) Fallstrecke vs. verstrichene Zeit für frei fallenden Massenpunkt. (b) Freier Fall ohne (**A**) und mit (**B**) horizontaler Geschwindigkeitskomponente.

Aufgrund der Erdatmosphäre ist dies normalerweise nicht das, was wir erleben, wenn wir beispielsweise eine Feder und eine Murmel aus derselben Höhe fallen lassen. Aber genau das passiert, wenn dies im Vakuum geschieht. Für die Erdbeschleunigung kam Galileis Wert von $g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$ dem heutigen Wert sehr nahe. Der Durchschnittswert von g auf der Erdoberfläche ist $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Die Erde ist keine perfekte Kugel, daher ist g etwas größer an den Polen und etwas kleiner am Äquator; auch die lokale Geologie bewirkt Abweichungen. Abb. 2.9a zeigt die Fallstrecke aufgetragen gegen die verstrichene Zeit für einen frei fallenden Körper und den durchschnittlichen Wert von g .

Wie Gl. (2.5) zeigt, addieren sich beschleunigte und gleichförmige Bewegung. Ein ausreichend schwerer Ball, der aus einer bestimmten Höhe vertikal fallen gelassen wird, und ein identischer Ball, der gleichzeitig aus derselben Höhe, aber mit einer zusätzlichen horizontalen Geschwindigkeitskomponente gestartet wird, erreichen gleichzeitig den Boden. Im Vakuum wird dies immer der Fall sein, unabhängig vom jeweiligen Gewicht oder der Größe der beiden Objekte. Beide Objekte treffen immer gleichzeitig am Boden auf, wobei das Objekt mit der zusätzlichen horizontalen Bewegungskomponente nur weiter entfernt

landet. Zur Bahnkurve desselben betrachten wir den in Abb. 2.9b gezeigten Fall, in dem der Ball B eine horizontale Geschwindigkeitskomponente v_y hat die ihn gleichmäßig in Richtung der positiven y -Achse bewegt. Seine y -Position ist:

$$y(t) = v_y t$$

Die beschleunigte Bewegungskomponente des Balls auf der Bahnkurve B ist dieselbe wie die des Balls auf der Flugbahn A . Der Tangentenvektor für diese Beschleunigungskomponente in der negativen z -Achsenrichtung ist daher $\hat{\mathbf{T}} = (0, 0, -1)$ und somit

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2$$

Mit Hilfe der beiden obigen Gleichungen eliminiert man die Zeitvariable t und erhält für die Form der Bahnkurve B

$$z(y) = -\frac{g}{2v_y^2}y^2$$

Die Bahnkurve B des Balls mit der zusätzlichen horizontalen Bewegungskomponente ist also eine Parabel. Ohne Luftwiderstand, ist die Bahnkurve eines in einem homogenen Schwerkraftfeld geworfenen, frei fallenden Körpers immer eine Parabel.

2.3.3 Ballistische Bewegung

Ballistische Bewegung liegt vor wenn ein im Schwerkraftfeld der Erde frei fallender Körper horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponenten hat. Eine solche Bewegung beschreibt z.B. die Bahnkurve eines Fußballs, eines Steins oder eines aus einer Kanone abgefeuerten Projektils. Hier soll der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v} in einem konstanten Schwerkraftfeld geworfen werden und der Luftwiderstand wird ignoriert. Zur Beschreibung der Bewegung in zwei Richtungen, x und z , verwendet man praktischerweise die Vektornotation. Wählen wir die Anfangsbedingungen so, dass der Körper bei $t = 0$ aus der Höhe z_0 mit einer Neigung α geworfen wird (siehe Abb. 2.10), so folgt

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Da \mathbf{a} konstant ist, ergibt eine Integration von $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$ mit der Anfangsbedingung $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$

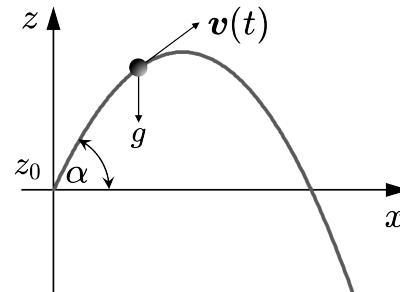


Abb. 2.10

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix}$$

Integrieren von $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ mit der Anfangsbedingung für $\mathbf{r}(t = 0)$, also $x(0) = 0$ und $z(0) = z_0$, ergibt

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha \\ z_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Die Zeitvariable kann aus $z(t)$ eliminiert werden, indem $x(t) = v_0 t \cos \alpha$ verwendet wird. Damit erhält man die in Abb. 2.10 gezeigte Bahnkurve der ballistischen Bewegung:

$$z = z_0 + \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 \quad (2.6)$$

Die maximale Höhe z_{max} , die der Körper erreichen wird, ergibt sich aus der Lösung von $dz/dx = 0$ zur Bestimmung von $x_{z_{max}}$ und Einfügen in Gl. (2.6):

$$x_{z_{max}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \quad \Rightarrow \quad z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

Der Körper wird bei $z(t_{tot}) = 0$ aufschlagen nach einer Gesamtflugzeit von

$$t_{tot} = \frac{1}{g} \left[v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gz_0} \right]$$

Um die Wurfdistanz zu bestimmen, setzen wir t_{tot} in $x(t)$ ein und erhalten

$$x(t_{tot}) = \frac{v_0}{g} \left[v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gz_0} \right] \cos \alpha$$

Wird der Körper mit einer höheren Anfangsgeschwindigkeit v_0 oder aus größerer Höhe geworfen dann landet er natürlich weiter entfernt. Aber in welchem Winkel müssen wir das Objekt werfen, um die größtmögliche Distanz zu erreichen? Dazu müssen wir den Extremwert von $x(t_{tot})$ als Funktion von α bestimmen, d.h., wir müssen $\partial x(t_{tot}) / \partial \alpha = 0$ für α lösen. Diese Rechnung lassen wir als Übung und sehen uns einfach das Ergebnis an. Die Wurfweite wird maximal wenn

$$\sin \alpha_{x_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gz_0}{v_0^2}}}$$

Wenn wir der Einfachheit halber $z_0 = 0$ wählen, d.h., der Körper wird auf einer Ebene geworfen, Start- und Landeposition befinden sich auf gleicher Höhe, so wird die Wurfdistanz maximal bei einem 45° Winkel. Sind zwei der drei Variablen $x(t_{tot})$, v_0 und α bekannt, kann man den Wert der dritten bestimmen. Kennt man beispielsweise α für eine Kanone und misst, wie weit die Kanonenkugel geflogen ist, kann die Mündungsgeschwindigkeit aus der Gleichung für $x(t_{tot})$ berechnet werden. Allerdings nur, wenn die Kanone auf

einem Planeten ohne Atmosphäre abgefeuert wird. In der realen Welt müssen Faktoren wie der Luftwiderstand berücksichtigt werden, die $x(t_{tot})$ verringern und die Bahnkurve in Abb. 2.10 verändern.

2.3.4 Gleichförmige Kreisbewegung

Verschwindet nicht die Normalkomponente sondern die Tangentialkomponente des Beschleunigungsvektors in Gl. (2.4), liegt eine weitere einfache Bewegung vor, die sogenannte gleichförmige Kreisbewegung. Dabei ist der Krümmungsradius in der Normalkomponente konstant, d.h., $R(s)$ ist der Radius R des Kreises, auf dem sich der Massenpunkt bewegt. Der Betrag seiner Geschwindigkeit ist konstant (Tangentialbeschleunigung ist Null), aber die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert sich ständig.

Zur Beschreibung kreisförmiger Bewegungen wählt man günstigerweise Polarkoordinaten:

$$x = |\mathbf{R}| \cos \varphi \quad , \quad y = |\mathbf{R}| \sin \varphi$$

Bei gleichförmiger Kreisbewegung ist die Winkelgeschwindigkeit, definiert als die Änderung des Winkels φ mit der Zeit, konstant:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const}$$

daher

$$\varphi(t) = \omega t$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω mit der Dimension s^{-1} wird oft als Kreisfrequenz bezeichnet. Bei einer Drehung, hier gegen den Uhrzeigersinn, ändert sich die Richtung des Radiusvektors $\mathbf{R}(t)$, während sein Betrag R konstant bleibt. Die Koordinaten des Massenpunkts und sein Ortsvektor als Funktion der Zeit sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos \omega t \\ y(t) &= R \sin \omega t \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{R}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Die Zeitspanne für eine volle Umdrehung des Radiusvektor $\mathbf{R}(t)$, d.h., bis er nach dem Überstreichen des Winkels 2π wieder in die gleiche Richtung zeigt, beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

T heißt die Periode der gleichförmigen Kreisbewegung. Die Rotationsfrequenz, d.h. die Anzahl der 2π -Durchläufe pro Sekunde, ergibt sich aus dem Kehrwert der Periode T

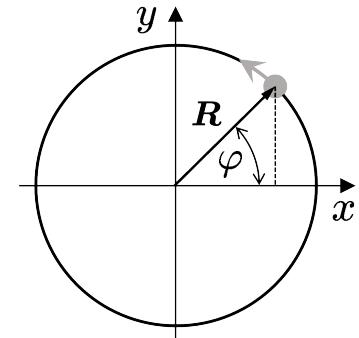


Abb. 2.11

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Die Richtung und der Betrag von \mathbf{v} sind gegeben durch

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = R \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \omega \quad \text{und} \quad v = \omega R$$

Setzt man den Betrag $v = \omega R$ in Gl. (2.4) ein, so erhält man für die Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung ($dv/dt = 0$)

$$\mathbf{a}(t) = \frac{v^2}{R} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \omega^2 R \cdot \hat{\mathbf{N}} = \omega^2 R \cdot \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}$$

Hier bezeichnet

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}$$

den Normalen-Einheitsvektor der Beschleunigung. $\hat{\mathbf{N}}$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung von \mathbf{R} , also zum Mittelpunkt des Kreises. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft durch das Produkt seiner Masse m und seiner Beschleunigung a gegeben. Die mit einer gleichmäßigen Kreisbewegung verbundene Kraft, die sogenannte Zentripetalkraft, zeigt immer auf den Mittelpunkt der Kreisbewegung und ihre Größe ist damit gegeben durch

$$F = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$$

Trägt man so wie in Abb. 2.12 die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ der gleichförmigen Kreisbewegung gegen ωt auf, dann zeigt sich, die gleichförmige Kreisbewegung ist eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen. Die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten sind

$$\dot{x} = -\omega R \sin \omega t \quad \text{und} \quad \dot{y} = \omega R \cos \omega t$$

und die entsprechenden Beschleunigungskomponenten

$$\ddot{x} = -\omega^2 R \cos \omega t = -\omega^2 x \quad \text{und} \quad \ddot{y} = -\omega^2 R \sin \omega t = -\omega^2 y \quad (2.7)$$

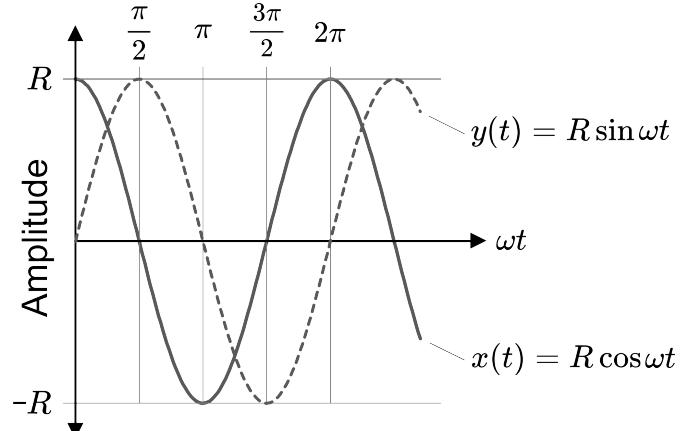


Abb. 2.12

sind proportional zu und entgegengesetzt zur jeweiligen Schwingungsamplitude. Die Identität von gleichförmiger Kreisbewegung und harmonischer Bewegung lässt sich experimentell leicht nachweisen. Das Auf und Ab der Pedalreflektoren eines Fahrrades, nachts von hinten betrachtet, beschreibt z.B. eine harmonische Bewegung. Durch einfache Projektion kann man so zeigen, dass eine gleichförmige Kreisbewegung eine harmonische Bewegung ist. Anstatt die gleichförmige Kreisbewegung eines Objekts auf eine Leinwand zu projizieren, können wir aber auch, so wie in Abb. 2.13a dargestellt, durch Anbringen eines kleinen Lasers an dem Objekt in gleichförmiger Kreisbewegung, dieses sich selbst auf einen hochauflösenden Lichtsensor projizieren lassen. Während sich der Laserpunkt auf dem Detektor vertikal auf und ab bewegt, lesen wir die entsprechenden Bildpixel entlang dieser Vertikalen mit einer Frequenz aus, die viel größer ist als die Winkelgeschwindigkeit ω der gleichförmigen Kreisbewegung. Die ausgelesenen Pixelwerte entlang dieser Vertikalen zeigen wir dann in Echtzeit auf einem Computerbildschirm als Funktion der Zeit an, genauso wie das in Abb. 2.13b skizziert ist.

Die Gleichungen in Gl. (2.7) sind Bewegungsgleichungen für harmonische Oszillatoren. Harmonische Schwingungen sind in vielen Bereichen der Physik von großer Bedeutung und deshalb werden wir sie in Abschnitt 10.1 genauer betrachten. Aber hier müssen wir nun von der kinematischen Untersuchung der Bewegung zur dynamischen Untersuchung der Bewegung übergehen.

Von der Kinematik zur Dynamik

Die Kinematik gibt eine rein geometrische Beschreibung der Massenpunkt-Bewegung, anhand seines Ortsvektors, seiner Geschwindigkeit und seiner Beschleunigung. Dabei braucht man die Kräfte nicht zu kennen, welche diese Bewegung bewirken. Dynamik, ein aus dem altgriechischen Wort für Kraft abgeleiteter Begriff, bezeichnet die Lehre von der Bewegung unter dem Einfluss von Kräften. Die Kinematik zeigt uns wie sich Objekte bewegen, mit der Dynamik versuchen wir zu verstehen, warum sie sich bewegen.

Welche Arten von Bewegungen tatsächlich einer Ursache bedürfen ist dabei nicht unmittelbar klar. Dies war bereits Galilei bewusst. Er erkannte, dass eine gleichförmige

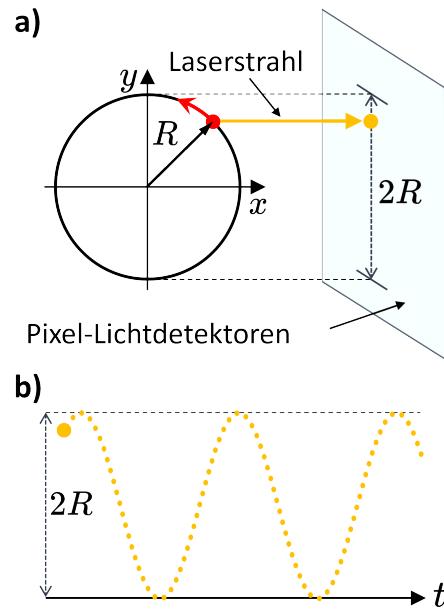


Abb. 2.13

lineare Bewegung, also eine Bewegung, bei der sich sowohl die Geschwindigkeitsrichtung v als auch ihr Betrag v nicht ändern, keiner Ursache bedarf. Dies veranlasste ihn, sein Trägheitsgesetz zu formulieren, das besagt, dass ein sich selbst überlassener Körper sich gleichförmig und geradlinig bewegt. Ein ruhender Körper, also $v = 0$, ist dabei nur ein Sonderfall dieses Galileischen Trägheitsgesetzes. Vor Galilei war die allgemeine Annahme, dass jede horizontale Bewegung eine direkte Ursache erfordert. Seine Experimente überzeugten Galilei, dass ein gleichförmig bewegter Körper seinen Bewegungszustand nicht ändert, es sei denn, es wirkt eine Kraft (z.B. Reibung) auf ihn ein.

Heutzutage kennen die meisten das Galileische Trägheitsgesetz als Newtons erstes Bewegungsgesetz. Aber in diesem Fall war Galilei der Erste. Diese Erkenntnis schmälert in keiner Weise den Beitrag Newton's zu unserem Verständnis wie sich Objekte unter dem Einfluss von Kräften bewegen; zu den entsprechenden Bewegungsgesetzen Newtons kommen wir gleich im folgenden Kapitel. Newton stritt sich oft mit Zeitgenossen über die Priorität von Entdeckungen, so beispielsweise mit Leibniz in Bezug auf die Differentialrechnung. Das war in diesem Fall aber nicht so. Im Gegenteil, Newton würdigte Galileis Entdeckungen voll und ganz.

3. Newtons Bewegungsgesetze

Newton wurde in dem Jahr geboren, in dem Galilei starb. Es war Galilei, der als erster die Bedeutung der Trägheit erkannte, und es war Newton, der Galileis experimentelle Arbeit studierte und als erster erkannte, dass das Konzept der Trägheit das Grundprinzip war, auf dem man ein Verständnis der Dynamik sich bewegender Körper aufbauen konnte. Das Trägheitsprinzip ist das erste der drei Newtonschen Bewegungsgesetze:

Newton's three Laws of Motion

1. **Trägheitsprinzip:** „*Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward except insofar as it is compelled to change its state by forces impressed*“.
Moderne Übersetzung: Jeder Körper bleibt in seinem Ruhezustand oder in einem Zustand linearer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, sofern nicht eine Kraft auf ihn einwirkt.
2. **Aktionsprinzip:** „*The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed*“.
Moderne Übersetzung: Die Änderung des Bewegungszustands eines Körpers ist immer proportional zur Größe der einwirkenden Kraft und erfolgt in der Richtung, in welche diese Kraft zeigt.
3. **Reaktionsprinzip:** „*To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts*“.
Moderne Übersetzung: Übt ein Körper **A** eine Kraft \mathbf{F} auf einen Körper **B** aus, so übt **B** eine gleich große aber entgegengesetzte Kraft $-\mathbf{F}$ auf **A** aus (Aktion = Reaktion).

Newton's second Law, the Law of Action and Reaction, states that the force exerted by one object on another is equal in magnitude and opposite in direction to the force exerted by the second object on the first. This law is often summarized as "action and reaction are equal and opposite".

$$\mathbf{F} = m_t \cdot \mathbf{a} \quad (3.1)$$

Die Kraft wirkt auf die sogenannte träge Masse, welche sich der Beschleunigung oder Verzögerung durch die Kraft widersetzt, daher der Index t . Newtons drittes Gesetz besagt, dass für zwei beliebige Körper, der Einfachheit halber als Körper 1 und Körper 2 bezeichnet, die Kraft \mathbf{F}_{12} , die Körper 1 auf Körper 2 ausübt gleich und entgegengesetzt der Kraft \mathbf{F}_{21} ist, welche Körper 2 auf Körper 1 ausübt (actio = reactio):

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (3.2)$$

3.1 Kraft, Impuls und Masse

Vor Newton hatte die Physik kein wirklich solides Kraftkonzept. Physiker kannten nur Ursachen, die sie mit Kräften identifizierten, aber kein einheitliches Kraftkonzept. Ähnlich verhält es sich mit dem Konzept des Impulses. All das änderte sich mit den drei Newtonschen Gesetzen, die der Physik die Konzepte von Impuls und Kraft gaben, und die Beschreibung der Bewegung von Körpern, die bekannten Kräften unterliegen, ermöglichen. Darüber hinaus gaben sie der Physik auch den ersten Erhaltungssatz, die Impulserhaltung. Aber wie können wir Kräfte praktisch verstehen, was meinen wir, wenn wir von einer Kraft sprechen, was ist ihre Definition? Wir können zum Beispiel einen Gegenstand aufheben und ein Gefühl dafür bekommen, wie schwer dieser Gegenstand ist. Indem wir dies mit mehreren Objekten tun, können wir verstehen, wie sich deren relative Massen vergleichen. Wir können verschiedene Personen bitten, denselben Körper zu werfen und dann prüfen, wie weit er jeweils fliegt, bevor er auf dem Boden aufschlägt. Auf diese Weise bekommen wir ein Gefühl dafür, wer der stärkere und wer der schwächere Werfer ist. Sie sehen, wohin das führt. Wir lernen durch den Vergleich etwas über Gewicht und Muskelkraft. Aber nicht alle Kräfte lassen sich einfach vergleichen.

Wir alle erleben täglich verschiedene Kräfte, die in zwei allgemeine Kategorien eingeteilt werden können: statische Kräfte und dynamische Kräfte. Unsere Vorfahren waren mit diesen beiden Arten von Kräften nicht weniger vertraut als wir heute. Die erste Art erlebten sie zum Beispiel, wenn sie das Gewicht eines schweren Steins trugen, und die

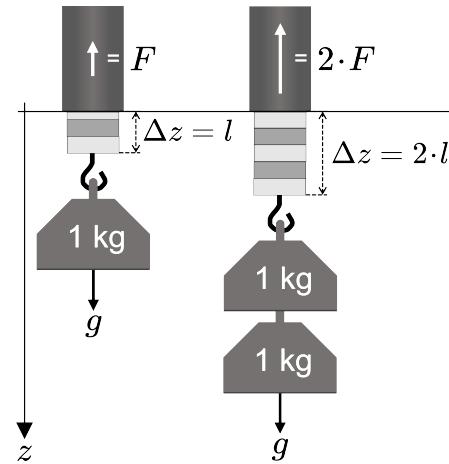


Abb. 3.1

zweite Art, wenn sie einen Gegenstand, etwa einen Speer, warfen. Ohne das Verständnis statischer Kräfte hätte die Menschheit niemals die Ingenieursleistungen der Antike vollbringen oder die Kathedralen des Mittelalters bauen können. Statische Kräfte sind Gewichtskräfte. Ihr Verständnis ermöglichte es, mithilfe von Hebeln enorme Gewichte zu heben und Gebäude zu errichten, die ihr eigenes enormes Gewicht tragen konnten. Ein an einer Federwaage hängendes Gewicht (auch Newtonmeter genannt) ist ein einfaches Beispiel für eine statische Kraft, mit der viele wahrscheinlich vertraut sein werden.

Eine Masse von 2 kg an einer solchen Federwaage aufgehängt (Abb. 3.1), übt die doppelte Kraft einer Masse von 1 kg aus, die Feder dehnt sich also um das Doppelte. Diese lineare Abhängigkeit zwischen Federkraft und Federkraftausdehnung ist als Hookesches Gesetz bekannt, benannt nach Robert Hooke (1635–1703), Newtons Zeitgenossen und zeitweiligen Rivalen. Die Proportionalitätskonstante k hängt vom Federmaterial ab und da die Federkraft der Ausdehnung der Feder entgegenwirkt, steht vor k ein Minuszeichen in Gl. (3.3). Die Ausdehnung der Federwaage erfolgt durch die Anziehungskraft der Schwerkraft auf die jeweils an der Federwaage hängende Masse, d.h. $F_{Schwerkraft} = m_s \cdot g$, wobei m_s im Beispiel von Abb. 3.1 1 kg bzw. 2 kg entspricht. Die Masse des Gegenstandes, auf den die Schwerkraft einwirkt, wird hier mit einem Index s gekennzeichnet, was darauf hinweist, dass es sich hier um die sogenannte schwere Masse handelt. Die Schwerkraft ist die Gewichtskraft, die wir messen, wenn wir wiegen wie schwer oder wie leicht ein Körper ist. Die Federkraft ist der Schwerkraft entgegengesetzt:

$$F_{Feder} = -k\Delta z = -F_{Schwerkraft} = -m_s \cdot g \quad (3.3)$$

Anstatt Gewichte an die Federwaage zu hängen, kann man die Federwaage auch horizontal ausrichten und manuell mit der Hand die gleiche Ausdehnung der Feder bewirken. In diesem Fall gleicht dann nicht die Schwerkraft sondern die Muskelkraft eines Arms die Federkraft aus. Das implizite Verständnis statischer Kräfte, d.h. von Kräften, die aufgrund ihrer Massen auf ruhende Körper wirken, ermöglichte unseren Vorfahren mittels effizienter Hebel und Flaschenzüge das Heben und Bewegen von Gewichten jenseits dessen was mit reiner menschlicher oder tierische Muskelkraft möglich war.

Das Verständnis dynamischer Kräfte, also von Kräften die mit der Bewegung eines Körpers verbunden sind, erwies sich als weitaus schwieriger. Aristoteles Kraftkonzept, im Europa des 12. Jahrhunderts wiederentdeckt, beeinflusste das naturwissenschaftliche Denken maßgeblich. Nach Aristoteles erfordert die Bewegung eines Körpers die ständige Anwendung einer Kraft. Wenn beispielsweise jemand einen Ball wirft, ist mit Aristoteles an jedem Punkt seiner Bahnkurve eine gewisse Kraft erforderlich, um ihn in Bewegung zu

halten. Aristoteles argumentierte, der geworfene Gegenstand werde durch die umgebende Luft weiterbewegt, nachdem er die Hand des Werfenden verlassen hatte. Dies galt sowohl für einen sich ohne Krafteinwirkung mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Körper, als auch für eine beschleunigte Bewegung. Ersteres entspricht einem ruhenden Körper und daher wirken nur statische Kräfte, während Letzteres natürlich auf dynamische Kräfte zurückzuführen ist. Aus praktischer Sicht unterschied die Antike zwar zwischen dem was wir heute statische und dynamische Kräfte nennen würden; es wurde aber nicht erkannt, dass sich die Bewegung eines Körper ohne Krafteinwirkung grundlegend von einer beschleunigten Bewegung unterscheidet.

Achthundert Jahre nach Aristoteles kam erstmals das Konzept einer übertragenen Kraft auf und zwar mit Aristoteles-Gelehrte wie Johannes Philoponus (490–570) oder beispielsweise Simplicius (490–560), einem der drei Protagonisten in Galileis *Dialogo*, wo er für das geozentrische aristotelische Universum plädierte und gegen Galileis heliozentrische Weltanschauung. Männer wie Philoponus war anderer Meinung wie Aristoteles in Bezug auf die Frage, was ein Projektil in der Luft hält, nachdem es die Hand des Werfers verlassen hat. Sie glaubten es sei unmöglich, eine Kraft auf ein Objekt auszuüben, das sich durch die Luft bewegt. Vielmehr wurde die Kraft, die das Projektil in Bewegung hielt, in Moment in dem es geworfen wurde auf das Objekt übertragen und war von da an eine Eigenschaft des Projektils. Im 11. Jahrhundert vertrat Ibn Sina (980–1037), im Westen besser bekannt als Avicenna, diese Ansicht und glaubte, ein Objekt bewege sich solange bis diese eingeprägte Kraft, er bezeichnete sie als Neigung, verbraucht war. Er vertrat auch die Meinung, dass ein sich im Vakuum bewegendes Projektil nicht aufhören würde, sich zu bewegen, es sei denn durch äußeren Einfluss – genau die Entdeckung, die Galilei etwa sechshundert Jahre später machen würde.

Im 14. Jahrhundert, gegen Ende der Scholastik, entwickelte der Philosoph Jean Buridan (ca. 1301 - 1359/62) eine Theorie der treibenden, d.h. der eingeprägten Kraft. Er nannte sie Impetus und argumentierte, dass *Impetus = Gewicht des Projektils × Geschwindigkeit*. Diese Definition von Impetus klingt für viele ähnlich wie das moderne Impulskonzept und ist es in gewisser Weise auch. Buridan meinte, sich bewegende Objekte werden nur durch den Widerstand der Luft und das Gewicht des Körpers gestoppt, beide wirkten dem Impetus entgegen. Wie das funktionieren sollte wenn der Impetus proportional zum Gewicht des Projektils war, ist eine andere Geschichte. Für scholastischen Gelehrte wie Buridan wurde der Impetus vom sogenannten ersten Beweger auf das Projektil übertragen, also von der Person, die das Projektil abfeuerte. Neben der mathematischen Impetus-Theorie von Buridan machte das 14. Jahrhundert einen weiteren Schritt in Richtung Moderne:

die Verwendung von Graphen zur Beschreibung der Bewegungsgesetze, eine Entwicklung, die wesentlich der Philosoph Nicole Oresme (ca. 1320/25 – 1382) vorantrieb.

Im Wesentlichen ist dies das Kraftkonzept das Galilei vordran und das er mit seinem Verständnis der gleichförmigen linearen Bewegung zu ändern begann. Galileis Entdeckung führte nicht so sehr zu einem besseren Verständnis des Kraftkonzepts, sondern vielmehr zu einem besseren Verständnis was Trägheit ist. Die gleichmäßige lineare Bewegung oder Trägheitsbewegung eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit v (einschließlich $v = 0$) setzt sich ohne Krafteinwirkung ungehindert fort. Darauf aufbauend entwickelte Newton das moderne Verständnis des Kraftkonzepts.

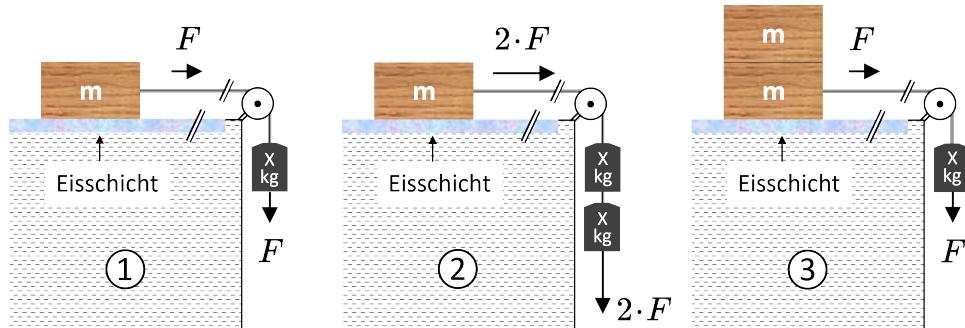


Abb. 3.2: Eine Rolle wandelt eine vertikale Gewichtskraft in eine horizontale Kraft um, die Holzblöcke auf einer Eisschicht ohne Reibungskräfte zum Gleiten bringt ($m \gg 2X \text{ kg}$).

Abb. 3.2 zeigt eine Möglichkeit mit bekannten statischen Gewichtskräften und horizontaler Beschleunigung, die Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung zu untersuchen. Die horizontale Strecke muss natürlich viel länger sein als hier gezeigt, damit man die Geschwindigkeit der Holzblöcke als Funktion der Zeit genau messen kann. Bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung nimmt die Geschwindigkeit in jedem Zeitintervall um den gleichen Betrag zu. Für die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit erhält man somit eine Gerade, deren Steigung jeweils der Betrag der Beschleunigung ist. Für die drei Fälle in Abb. 3.2 zeigt Abb. 3.3 das Ergebnis. Die Skalierung ist so gewählt, dass die Steigung im Fall ① von Abb. 3.3 den Wert 1 hat. Im Fall ② hat die Steigung dann den Wert 2 und im Fall ③ den Wert 0.5. Vergleicht man die Steigungen von Fall ① und Fall ② in Abb. 3.3 dann sieht man, dass die Anwendung der doppelten Kraft die Beschleunigung verdoppelt. Ein Vergleich der

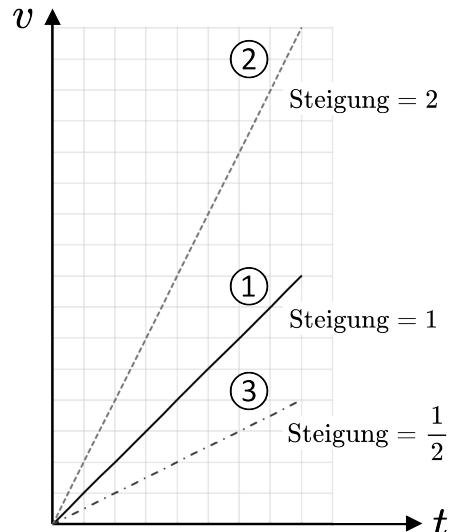


Abb. 3.3

Fälle ① und ③ zeigt, wird die gleiche Kraft verwendet um $2m$ statt m zu ziehen, so halbiert sich die Beschleunigung. Die Schlussfolgerung der ersten Beobachtung zeigt uns, dass die Beschleunigung proportional zur ausgeübten Kraft ist, während die zweite Beobachtung uns sagt, dass die Beschleunigung umgekehrt proportional zur beschleunigten Masse ist:

$$\mathbf{a} \propto \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} \propto \frac{1}{m_t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_t}$$

Hier ist die träge Masse m_t zu verwenden, denn je größer die Masse m_t , desto größer ist aufgrund von $\mathbf{a} \propto m_t^{-1}$ der träge Widerstand gegen eine Beschleunigung. Diese Gleichung ist natürlich nichts anderes als Newtons berühmtes zweites Bewegungsgesetz

$$\mathbf{F} = m_t \cdot \mathbf{a}$$

Nirgendwo hat Newton diese Gleichung so aufgeschrieben, er drückte sich anders aus wie wir das heute tun. Aber in der Bedeutung ist Newtons Version identisch mit der modernen Schreibweise, die bereits zu Newtons Zeiten von anderen verwendet wurde. Isaac Newtons 1687 veröffentlichte *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie)* legte den Grundstein für die klassische Mechanik und für die moderne Wissenschaft. Newtons Kraftkonzept betrachtete als Kraft jeden Stoß, der zu einer Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers führte. Wie oben angedeutet, war dies weitgehend die Ansicht, die Galilei vertrat. Für Newton war Kraft nicht die Eigenschaft eines Körpers wie der Impetus scholastischer Gelehrter, sondern ein Maß für die Stärke und Richtung der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern. Wie Newton es ausdrückte, war die Änderung des Bewegungszustands eines Körpers mit der tragen Masse m_t durch die Änderung seines Impulses

$$\mathbf{p} = m_t \mathbf{v}$$

gekennzeichnet, die proportional zur Wirkung der Kraft \mathbf{F} ist, oder kurz $\Delta\mathbf{p} \propto \mathbf{F}\Delta t$, wobei Δt das Zeitintervall ist, in dem die Kraft wirkt. In moderner Notation

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m_t \mathbf{v})}{dt} = m_t \mathbf{a} \tag{3.4}$$

Hier wurde die Masse des Körpers als konstant vorausgesetzt wie es in der klassischen (aber nicht in der relativistischen) Mechanik der Fall ist. Ein weiterer Aspekt, den Newton zum Verständnis von Kräften brachte, ist die Beziehung Aktion = Reaktion. Die Kraft welche die Erde auf den fallenden Apfel ausübt, der Newton der Legende nach dazu inspirierte, anders über die Schwerkraft zu denken, ist von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung wie die Kraft, die der Apfel auf die Erde ausübt.

Für das, was wir als nächstes besprechen werden, verzichten wir auf den Index zur Angabe der trägen Masse. Gemäß Gl. (3.4) ist die Änderung des Impulses eines Massenpunkts m im Zeitintervall dt durch eine Kraft \mathbf{F} und die entsprechende Änderung des Ortsvektors während dieses Zeitintervalls gegeben durch

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} \cdot dt \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot dt$$

Eliminiert man dt aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{1}{m} \cdot \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$dp^2 = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = dp \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot dp = 2\mathbf{p} \cdot dp$$

kann man diese Gleichung umschreiben zu

$$d\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{oder} \quad dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.5)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht das Produkt aus konstanter auf den Massenpunkt ausgeübter Kraft \mathbf{F} und der Distanz $d\mathbf{r}$ um die er sich bewegt. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist dieses Produkt aus Kraft mal Entfernung gerade gleich der Arbeit dW , die erforderlich ist, um die Masse über diese Entfernung $d\mathbf{r}$ zu bewegen. Dieser aufgewendeten Arbeit entspricht auf der linken Seite der Gleichung eine Vergrößerung des Ausdrucks in Klammern. Dieser Ausdruck, wir bezeichnen ihn mit dem Buchstaben T , der proportional zur Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit des Massenpunkts ist, wird als seine kinetische Energie bezeichnet:

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \quad (3.6)$$

Gemäß Gl. (3.6) besitzt jeder mit einer Geschwindigkeit v bewegte Massenpunkt m eine kinetische Energie T . Wirkt auf ihn eine Kraft \mathbf{F} , dann ändert sich diese Größe T nach Gl. (3.5) um den Betrag dT , wirkt keine Kraft, dann ist T konstant. Letzteres ist natürlich auf Newtons erstes Gesetz zurückzuführen, das besagt, ein Körper in Ruhe oder in gleichmäßiger, konstanter Bewegung verharrt in seinem Bewegungszustand, sofern er nicht einer Kraft ausgesetzt ist. Ohne einwirkende Kraft, bleibt seine Geschwindigkeit konstant und damit auch seine kinetische Energie T . Das gilt auch für Systeme mit vielen Massenpunkten, wie zum Beispiel die Atome in einem idealen Gas, wo Stöße zwischen Gasatomen als elastisch behandelt werden, was bedeutet, dass bei Stößen keine kinetische Energie verloren geht. Für ein ideales Gas bleibt, solange keine äußeren Kräfte wirken, die gesamte kinetische Energie also konstant.

3.1.1 Überlagerung von Kräften

Kräfte sind Vektorgrößen, was wir alle intuitiv annehmen und verstehen, da eine Kraft \mathbf{F} eindeutig durch ihre Stärke gekennzeichnet ist, d.h. durch ihren Betrag $|\mathbf{F}|$ und durch die Richtung der Kraft. Diese Richtung, in die eine Kraft zeigt, wird ihre Wirkungslinie genannt:

Wirkungslinie

Die Wirkungslinie einer Kraft ist die Gerade, die die Position der Kraft im Raum angibt. Sie verläuft durch den Punkt, an dem die Kraft angreift und entlang der Richtung, in die der Kraftvektor zeigt.

Zwei Kräfte \mathbf{F} und \mathbf{F}' heißen äquivalent dann und nur dann wenn

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}'| \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}'$$

wobei \mathbf{M} und \mathbf{M}' die von \mathbf{F} bzw. \mathbf{F}' bewirkten Drehmomente bezüglich eines beliebigen Punktes O im Raum sind. Das Drehmoment ist das Vektor- oder Kreuzprodukt einer auf einen Punkt P wirkenden Kraft \mathbf{F} und dem Abstandsvektor \mathbf{r}_{OP} , d.h.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{M}\| = \|\mathbf{r}_{OP}\| \cdot \|\mathbf{F}\| \cdot \sin \theta$$

wobei $\sin \theta$ der von \mathbf{r}_{OP} und \mathbf{F} eingeschlossene Winkel ist. Die Richtung des Drehmomentvektors \mathbf{M} ist normal zu der Ebene, die durch \mathbf{r}_{OP} und \mathbf{F} aufgespannt wird, und er liegt in einer Rotationsachse, die durch den Bezugspunkt O verläuft.

Drehmoment für eine Wirkungslinie

Was es bedeutet, dass zwei Kräfte identisch sind, veranschaulicht Abb. 3.4, das eine Kraft entlang einer Wirkungslinie an zwei verschiedenen Punkten mit der Bezeichnung \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}'_1 zeigt. Die Kraftvektoren an diesen Punkten sind \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}'_1 wobei $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}'_1|$. Für das Drehmoment \mathbf{M}'_1 gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_1 &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}'_1 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_1 \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \underbrace{(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_1}_{= 0} = \mathbf{M}_1 \end{aligned}$$

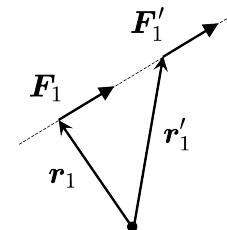


Abb. 3.4

\mathbf{F}_1 und \mathbf{F}'_1 müssen somit auf derselben Wirkungslinie liegen und wegen $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}'_1|$ folgt daraus $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}'_1$. Wirken auf einen Körper zwei Kräfte, die in die gleiche Richtung zeigen, deren Wirkungslinien aber nicht identisch sind, sie sind also parallel, folgt mit

$\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}'_1$, dass auf den Körper ein Nettodrehmoment wirkt. Nur Kraftkomponenten entlang derselben Wirkungslinie können addiert oder subtrahiert werden, je nachdem, ob sie in die gleiche Richtung zeigen oder nicht. Allerdings kann man Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien zu einem gemeinsamen Schnittpunkt verschieben, dahin wo sich ihre Wirkungslinien kreuzen. Dort kann man die jeweiligen Kraftkomponenten entlang einer gewählten Koordinatenachse zur resultierende Kraft in diese Richtung addieren. Diesen als Kraftreduzierung bezeichneten Prozess veranschaulicht Abb. 3.5.

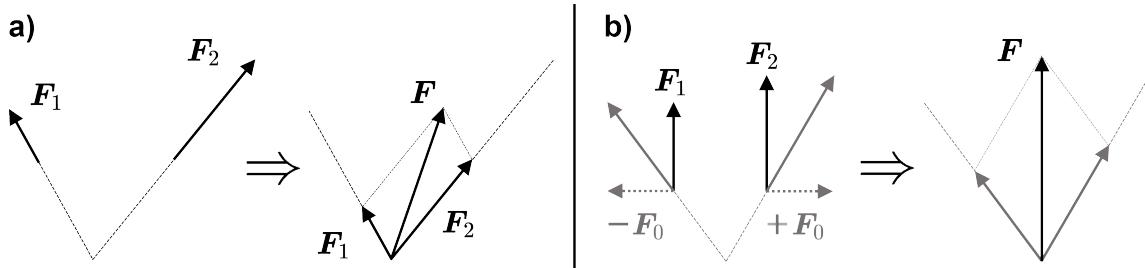


Abb. 3.5: Reduktion zweier koplanarer Kraftvektoren: (a) die Vektoren sind nicht parallel; (b) die Vektoren sind parallel.

Abb. 3.5a zeigt die Reduktion zweier koplanarer, nicht paralleler Kraftvektoren \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 durch Verschiebung der Vektoren bis zu ihrem Schnittpunkt und anschließender Addition zum Summenvektor \mathbf{F} . Wenn \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 zufällig parallele Vektoren sind, wie in Abb. 3.5b gezeigt, kann man ein Paar nichtparalleler Vektoren aus diesen parallelen Vektoren durch Addition des Nullvektors mit Nullmoment $-\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$ erzeugen, der dann auf die gleiche Weise wie in Abb. 3.5a auf den Summenvektor \mathbf{F} reduziert werden kann. Wenn \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 jedoch antiparallel sind, also einen sogenannten Kraftdipol bilden, funktioniert der Trick mit der Nullvektoraddition nicht und man muss das Problem mit anderen Methoden lösen, die aber hier nicht von Interesse sind.¹

Dass man Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien bewegen und sie zu resultierenden Kräften addieren kann, ohne ihre Wirkung zu verändern, ergibt sich aus einem Grundprinzip der Physik, dem sogenannten Superpositionsprinzip der Kräfte. Wie in Abb. 3.6 am Beispiel von zwei Kräften gezeigt, können Kräfte zu einer resultierenden Gesamtkraft überlagert (addiert) werden

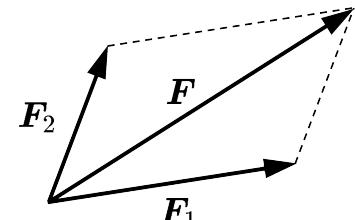


Abb. 3.6

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (\text{linear})$$

¹Diese Methoden sind Teil der technischen Mechanik und können in Standardlehrbüchern gefunden werden, die sich mit der Statik starrer Körper befassen.

Ein Kräfteparallelogramm wie in Abb. 3.6 verwendete bereits Newton. Wichtig ist, dass der Ausgangspunkt der Kraftvektoren \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 irgendwo auf ihren jeweiligen Wirkungslinien liegen könnte. Nichtparallele Vektoren können also immer an den Punkt verschoben werden, wo sich ihre Wirkungslinien kreuzen, um ein Kräfteparallelogramm wie Abb. 3.6 zu erzeugen. Das Superpositionsprinzip für Kräfte gilt für lineare Kraftsysteme und ermöglicht die Berechnung eines resultierenden Gesamtkraftvektors durch Vektoraddition aller auf einen Körper wirkenden Kräfte. Wenn N Kräfte \mathbf{F}_i auf einen Körper wirken, dann ergibt ihre Vektoraddition die auf den Körper wirkende Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (3.7)$$

Gl. (3.7) ist das allgemeine Superpositionsprinzip für Kräfte. Wegen seiner großen Bedeutung wird dieses Superpositionsprinzip oft als Newtons viertes Gesetz bezeichnet.

3.1.2 Newtons Gravitationsgesetz

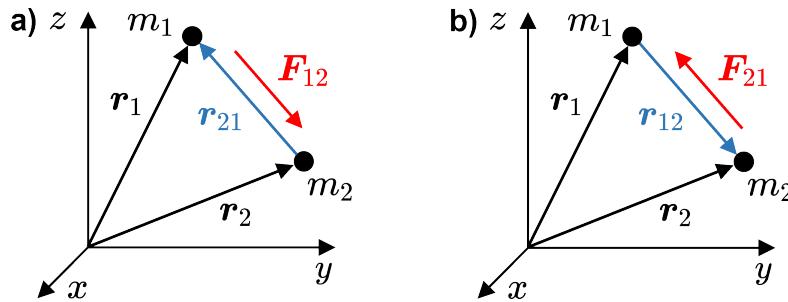


Abb. 3.7: Orientierungen von Abstands- und Kraftvektoren im Newtonschen Gravitationsgesetz in Vektorform (siehe Gl. (3.8) und Gl. (3.9)): (a) für die Kraft F_{12} , die auf m_1 von m_2 wirkt; (b) für die Kraft F_{21} , die auf m_2 von m_1 wirkt.

Isaac Newtons Entdeckung der Anziehungskraft, die zwischen zwei beliebigen massiven Körpern wirkt, sei es zwischen Mond und Erde oder zwischen Apfel und Erde, ist eine der bedeutensten Erkenntnisse der Wissenschaft. Die Gravitationskraft \mathbf{F}_{12} die auf den Massenpunkt m_1 vom Massenpunkt m_2 wirkt (Abb. 3.7a), der sich, gemessen von m_2 , in einer Entfernung $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$ von m_1 befindet, ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad (3.8)$$

Die Gravitationskraft \mathbf{F}_{21} die auf den Massenpunkt m_2 vom Massenpunkt m_1 wirkt (Abb. 3.7b), der sich, gemessen von m_1 , in einer Entfernung $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ von m_2 befindet, ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} \quad (3.9)$$

In Gl. (3.8) und Gl. (3.9) ist G eine grundlegende Naturkonstante, die die Stärke der Schwerkraft bestimmt. Mit $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ ist offensichtlich, dass

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

gilt. Die Vektorformen des Newtonschen Gravitationsgesetzes in Gl. (3.8) und Gl. (3.9) kann man auch ohne das Minuszeichen davor schreiben. Dazu verwendet man \mathbf{r}_{12} anstelle von \mathbf{r}_{21} in Gl. (3.8) und \mathbf{r}_{21} anstelle von \mathbf{r}_{12} in Gl. (3.9). Konvention ist jedoch, diese Gleichungen mit einem Minuszeichen zu schreiben, um anzudeuten, dass der jeweilige Kraftvektor in die entgegengesetzte Richtung des Abstandsvektors zeigt. Newtons Schwerkraft ist anziehend, wird der Abstand kleiner so wird die Kraft größer. Newton formulierte sein Gravitationsgesetz 1687. Er wusste nicht, welchen Wert die Proportionalitätskonstante hatte, die Physiker im späten 19. Jahrhundert als G zu bezeichnen begannen. Ohne G oder die Massen der Planeten oder der Erde zu kennen, konnte Newton nur mit Verhältnissen arbeiten. Mehr als 100 Jahre nach Newtons *Principia* gelang es Henry Cavendish (1731 - 1810) schließlich 1798, G experimentell zu bestimmen.

Mit [Johannes Keplers drittem Gesetz](#) ist das Verhältnis der dritten Potenz der großen Halbachse a einer Planetenbahn zum Quadrat seiner Umlaufperiode T konstant:

$$\frac{a^3}{T^2} = c$$

Vereinfachende Annahme: Planetenbahnen sollen kreisförmig sein mit dem Radius a (Abb. 3.8). Damit erhält man für die Beschleunigung (aufgrund der [Zentripetalkraft](#))

$$b = -\omega^2 a = -\frac{4\pi^2}{T^2} a = -4\pi^2 \frac{a}{T^2} = -\frac{c}{a^2} \quad (3.10)$$

Das Minuszeichen entsteht, weil die Beschleunigung entgegengesetzt zu der Richtung erfolgt in die der Radiusvektor zeigt. Nimmt man nun an die gesamte Masse der Erde sei in ihrem Mittelpunkt konzentriert, dann gilt für einen Körper, der den Erdmittelpunkt im Abstand des Erdradius R_E umkreist:

$$b_E = -\frac{c}{R_E^2} = -g$$

Den Wert, den diese Gleichung für c liefert, setzt man in die entsprechenden Gleichung für den Mond (Radius R_M) ein.

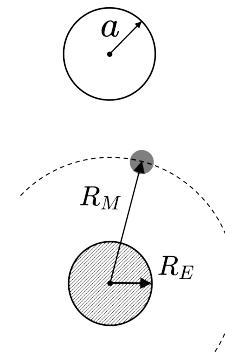


Abb. 3.8

$$b_M = -\frac{c}{R_M^2} = -g \left(\frac{R_E}{R_M} \right)^2$$

Mit Gl. (3.10) und der Umlaufperiode des Mondes T_M gilt zudem

$$b_M = -\frac{R_M}{T_M^2} 4\pi^2$$

Da mit den linken Seiten der letzten beiden Gleichungen auch ihre rechten Seiten identisch sein müssen, ist es möglich, g aus messbaren Größen zu bestimmen:

$$g = \frac{4\pi^2 R_M^3}{R_E^2 T_M^2} \quad (3.11)$$

Wenn man in diese Gleichung für R_M den mittleren Erde-Mond-Abstand von 38 400 km einsetzt, für die Umlaufzeit des Mondes T_M die Dauer zwischen zwei Perigäum durchgänge (27.56 Tage) und für R_E den mittleren Erdradius von 6 371 km, so erhält man für g den Wert 9.71 m s^{-2} . Dieser liegt nur etwas mehr als 1% unter dem modernen Mittelwert von $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Die obige Betrachtung zeigt auch, dass der Wert von g davon abhängt, wie weit man vom Erdmittelpunkt entfernt ist, denn $g \propto R_E^{-2}$. Die Bestimmung von G ist etwas schwieriger, da man die Masse der Erde m_E kennen muss. Auf der Erdoberfläche gilt

$$F = mg = G \frac{m_E m}{R_E^2}$$

Die Testmasse m fällt heraus und das Ergebnis für G ist:

$$G = g \frac{R_E^2}{m_E} \quad (3.12)$$

Verwendet man $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, $R_E = 6371 \text{ km}$ und $m_E = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, dann erhält man $G = 6.6675 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. Das ist jedoch genau das Gegenteil von dem, was Henry Cavendish getan hat. Zu seiner Zeit war der Radius der Erde schon lange bekannt, nicht jedoch die Masse der Erde. Mit seiner Drehwaage konnte Cavendish 1798 erstmals den Wert von G bestimmen und das mit großer Genauigkeit; sein Wert für G unterscheidet sich nur um 1.2% vom modernen Wert der Gravitationskonstante $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. Mit der Kenntnis von G und mit Gl. (3.12) konnte Cavendish damit erstmals die Masse der Erde bestimmen.

3.1.3 Träge Masse und schwere Masse

Nach Raum und Zeit, den ersten und zweiten Grundgrößen der Mechanik, ist die träge Masse die dritte Grundgröße. Physiker messen die Masse in der Einheit Kilogramm (ein

Kilogramm = 1 kg). Die Masse eines Körpers wird indirekt bestimmt, indem man die Wirkung einer Kraft \mathbf{F} auf den Körper misst. Kraft hat die Dimension Masse \times Länge \times Zeit $^{-2}$ und wird in der Einheit Newton (N) gemessen, wobei $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. In Worten ausgedrückt: 1 N ist die Kraft, welche die Beschleunigung einer Masse von 1 kg um 1 m s^{-2} erhöht. Eine einfache Möglichkeit, Massen zu vergleichen ist, sie der genau gleichen Kraft auszusetzen. In diesem Fall kann man mit Gl. (3.4) dann schreiben:

$$\mathbf{F} = m_1 \mathbf{a}_1 = m_2 \mathbf{a}_2 = m_3 \mathbf{a}_3 = \dots$$

Die Beziehungen zwischen den jeweiligen Gliedern kann man umschreiben zu

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2} \quad \text{und} \quad \frac{m_3}{m_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_3}$$

Misst man also die Beschleunigung die verschiedene Massen aufgrund derselben Kraft erfahren, reicht es eine bestimmte Masse m_1 als Standard zu wählen, um m_2 und m_3 oder jede andere Masse durch m_1 auszudrücken. Der Massenvergleich erfolgt durch Messung der Gewichtskraft der jeweiligen Massen mit einem Standardgewicht. Seit 1889 war der moderne Gewichtsstandard das Gewicht eines Kilogramms einer Palladium-Iridium-Legierung in Zylinderform, die im Internationalen Büro für Maße und Gewichte in Sèvres bei Paris, Frankreich, aufbewahrt wurde. Exakte Kopien dieses Standards wurden auf der ganzen Welt verteilt, sodass ein Kilogramm in jedem Teil der Welt die gleiche Bedeutung, d.h. das gleiche Gewicht, haben würde. Erst kürzlich, im Jahr 2019, wurde der Kilogrammstandard auf eine grundlegende physikalische Konstante, die sogenannte Planck-Konstante $h = 6.6262 \cdot 10^{-34}\text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ zurückgeführt.

Was gerade beschrieben wurde ist ein Vergleich der trügen Massen von Körpern. Mit dem Standard-Kilogramm vergleicht man diese trügen Massen allerdings mit der schweren Masse des Standard-Kilogramms, definiert durch sein Gewicht, also durch die Gewichtskraft. Wenn wir im Alltag die Größe von Massen ermitteln, tun wir dies zumeist tatsächlich durch den Vergleich der jeweiligen Gewichtskräfte, beispielsweise mit einer Balkenwaage. Allerdings ist die Gewichtskraft nicht die Masse eines Körpers, diese ist eine Eigenschaft der Materie, also der trügen Masse selbst, sondern sie wird durch die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern bestimmt. Mit Hilfe einer Balkenwaage vergleicht man beispielsweise die Wechselwirkung einer Masse mit der Erdmasse mit der Wechselwirkung einer anderen Masse mit der Erdmasse. Die Gewichtskraft ist ortsabhängig:

$$\mathbf{F} = m_s \cdot g \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist und der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}$ die Richtung der Kraft angibt. Bei einem Körper im Schwerkraftfeld der Erde zeigt dieser Vektor in Richtung des

Erdmittelpunkts, also des Massenschwerpunkts der Erde. Die Gewichtskraft misst, wie «schwer» oder «leicht» ein Körper ist, sie misst jedoch nicht die Masse eines Körpers selbst. Aufgrund der geringeren Masse des Mondes ist die Schwerebeschleunigung auf seiner Oberfläche etwa sechsmal geringer als auf der Erde. Daher ist alles auf dem Mond etwa sechsmal «leichter» als auf der Erde. Allerdings ist die Masse eines Körpers auf dem Mond identisch mit der Masse desselben Körpers auf der Erde. Galileis Entdeckung, dass alle frei fallenden Objekte im Schwerefeld der Erde die gleiche Beschleunigung $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ erfahren, definiert die schwere Masse m_s von Körpern auf der Erde:

$$m_s = \frac{F_G}{g}$$

Dabei ist F_G die Gewichtskraft, also die Schwerkraft. Gleichzeitig muss nach dem zweiten Newtonschen Gesetz für die Beschleunigung, die ein Körper erfährt, gelten

$$g = \frac{F_G}{m_t}$$

Zusammen folgt aus diesen beiden Gleichungen, dass für g gelten muss:

$$g = \frac{F_G}{m_t} = \frac{g \cdot m_s}{m_t} \quad \Rightarrow \quad m_s = m_t$$

Unabhängig vom lokalen Wert von g , muss $m_s = m_t$ überall gelten, für Körper die z.B. der Schwerkraft des Mondes ausgesetzt sind oder sich in irgendeinem anderen Schwerkraftfeld befinden. Die Forderung, dass m_s gleich m_t ist, bezeichnen Physiker als Äquivalenzprinzip. Newton war sich der Bedeutung dieses Prinzips bewusst und führte zu dessen Prüfung Messungen mit einem Fadenpendel durch. Viel später überzeugte genau dieses Prinzip Einstein davon, dass Gravitation und Beschleunigung nicht zu unterscheiden sind (siehe Abb. 1.2), was ihn veranlasste, seine Allgemeine Relativitätstheorie zu formulieren. Newtons Fadenpendelexperimente ermöglichten es ihm, mit größerer Genauigkeit als mit Freifallexperimenten zu zeigen, dass die träge und die schwere Masse eines Körpers identisch sind. Viele, mit immer höherer Genauigkeit durchgeführte Experimente, haben seither keinen Hinweis erbracht, dass träge und schwere Masse eines Körpers nicht identisch sind. Unter diesen Experimenten zeichnet sich die vom ungarischen Physiker Baron Eötvös (1848 - 1919) verwendete Methode durch ihre Einfachheit und hohe Genauigkeit aus. Sie zeigte, dass das Verhältnis m_s bis m_t sich um weniger als 10^{-8} von 1 unterschied. Heute können wir den freien Fall von Körpern viel genauer testen als es Galilei möglich war, indem wir frei fallende Körper in Satelliten beobachten, die die Erde umkreisen. Solche Daten zeigen uns, dass das Verhältnis von m_s zu m_t um weniger als 10^{-15} von 1 abweicht. Von hier an werden wir daher nicht mehr zwischen träger Masse und schwerer Masse unterscheiden sondern sie als identisch betrachten.

3.2 Systeme von Massenpunkten

Bisher hatten wir es entweder nur mit der Bewegung eines einzelnen Massenpunkts, etwa mit dem zweiten Newtonschen Gesetz, oder aber mit der Bewegung zweier Massen relativ zueinander zu tun. Um uns herum finden sich viele Beispiele für solche Situationen von Zwei-Körper-Wechselwirkungen, bzw., wir können von dem, was wir beobachten, auf etwas Einfacheres abstrahieren, das wir dann als Zweikörper-Problem oder sogar als Einkörper-Problem behandeln können. Oft ist das aber nicht möglich und wir haben es mit viel mehr Massen als nur zwei zu tun. Betrachten wir zum Beispiel ein System von N Massenpunkten m_i , deren Orte und Geschwindigkeiten durch ihre Koordinaten- und Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{r}_i und \mathbf{v}_i gegeben sind. Die Gesamtmasse M eines solchen Systems ist dann natürlich die Summe aller seiner Einzelmassen m_i , also

$$M = \sum_i^N m_i$$

Der Massenschwerpunkt \mathbf{r}_{SP} dieses Systems von Massenpunkten ist dann gegeben durch

$$\mathbf{r}_{SP} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i \quad (3.13)$$

und die Schwerpunktgeschwindigkeit \mathbf{v}_{SP} ist

$$\mathbf{v}_{SP} = \frac{d\mathbf{r}_{SP}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \quad (3.14)$$

Damit erhalten wir für den Gesamtmoment \mathbf{p}_{SP} des Systems von N Massenpunkten

$$\mathbf{p}_{SP} = M \mathbf{v}_{SP} = \sum_i^N p_i \quad (3.15)$$

Gl. (3.15) ist der Schwerpunktsatz. Er besagt, dass der Gesamtmoment eines Systems von Massenpunkten m_i derselbe ist wie der eines Körpers mit der Masse M der sich mit der Geschwindigkeit des Massenschwerpunkts \mathbf{v}_{SP} bewegt. Zur Veranschaulichung betrachten wir noch einmal das Zweikörpersystem Erde und Mond. Für dieses Zweikörpersystem reduziert sich Gl. (3.13) nach Umordnung auf ($E = \text{Erde}$, $M = \text{Mond}$)

$$m_E(\mathbf{r}_{SP} - \mathbf{r}_E) = m_M(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_{SP})$$

Diese Gleichung sagt uns, dass die Vektoren $\mathbf{r}_{SP} - \mathbf{r}_E$ und $\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_{SP}$ parallel sind. Damit muss aber der Schwerpunkt auf der Geraden liegen, die Erde und Mond verbindet. Wenn wir diese Gleichung noch einmal umschreiben zu

$$\frac{\mathbf{r}_{SP} - \mathbf{r}_E}{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_{SP}} = \frac{m_M}{m_E}$$

sehen wir, dass der Schwerpunkt die Verbindungsgeraden Erde-Mond im umgekehrten Verhältnis ihrer Massen teilt. Setzt man Zahlen ein und nimmt an, dass Erde und Mond punktförmige Körper sind, so zeigt sich, dass der Massenschwerpunkt innerhalb der Erde liegt, etwa 73% auf dem Weg vom Erdmittelpunkt zur Erdoberfläche. Das liegt natürlich daran, dass die Masse der Erde so viel größer ist als die des Mondes. Genauso wie für eine einzelne Masse, können wir gemäß dem Schwerpunktsatz von Gl. (3.15) das zweite Newtonsche Gesetz auf die Bewegung des Massenschwerpunkts anwenden:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_{SP}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{p}_{SP}}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \quad (3.16)$$

wobei die auf den Massenschwerpunkt \mathbf{r}_{SP} wirkende äußere Kraft

$$\mathbf{F}^{ext} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_i^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

die Summe der Kräfte \mathbf{F}_i^{ext} ist, die auf die Massen m_i wirken. Ohne einwirkende äußere Kraft auf \mathbf{r}_{SP} , also $\mathbf{F}^{ext} = 0$, bleibt die Geschwindigkeit des Massenschwerpunkts konstant, so wie Newtons erstes Gesetz das erfordert.

Das Schwerpunktsystem

Das Schwerpunktsystem (SPS) ist definiert als das Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten liegt. Hier bezeichnen wir das Schwerpunktsystem mit S' und Koordinaten und Geschwindigkeiten bzw. Impulse in S' mit \mathbf{r}' , \mathbf{v}' und \mathbf{p}' . Die Verlegung des Koordinatenursprungs in den Massenschwerpunkt bedeutet natürlich, dass im Schwerpunktsystem $\mathbf{r}_{SP} = 0$ in Gl. (3.13) gilt, d.h.

$$\sum_i^N m_i \mathbf{r}'_i = 0 \quad (3.17)$$

und damit

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}'_i = \sum_i^N \mathbf{p}'_i = 0 \quad (3.18)$$

Machen wir Beobachtungen oder messen etwas, so tun wir das im sogenannten Laborsystem (LS), dem Koordinatensystem, in dem wir als Beobachter ruhen. Das Laborsystem bezeichnen wir mit S und Koordinaten und Geschwindigkeiten bzw. Impulse in S mit \mathbf{r} , \mathbf{v} und \mathbf{p} . Nach dem Galileischen Relativitätsprinzip gilt: Solange sich die Koordinatensysteme S' und S relativ zueinander in einer gleichmäßigen linearen Bewegung befinden, können Beobachter in S und S' gleichermaßen behaupten, in Ruhe oder in Bewegung zu sein, das macht keinen Unterschied. Damit das der Fall ist, muss die äußere Kraft

\mathbf{F}^{ext} in Gl. (3.16) verschwinden, denn nur dann wird \mathbf{r}_{SP} konstant sein und das Schwerpunktsystem sich in einer gleichmäßigen linearen Bewegung relativ zum Laborsystem befinden. Koordinaten und Geschwindigkeiten (und damit Impulse) im Laborsystem S und im Schwerpunktsystem S' sind dann durch die Galilei-Transformation von Gl. (2.2) verknüpft, wobei die Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 in Gl. (2.2) gleich \mathbf{v}_{SP} ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{v}_{SP} \cdot t + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{SP} + \mathbf{v}'\end{aligned}\tag{3.19}$$

3.2.1 Die Erhaltung des Impulses

Was wir heute den Impuls \mathbf{p} eines Körpers nennen, definierte Newton als eine Bewegungsgröße («quantitas motus» in seiner Principia), die sich aus Geschwindigkeit und Menge der Materie ergibt. Man kann den Impuls, das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$$

als Maß dafür betrachten, wie schwierig es ist, einen Körper aufzuhalten. Newton gab drei Formulierungen seines dritten Gesetzes. Das Reaktionsprinzip kennen wir bereits. Eine zweite Variante war das was wir heute als Prinzip der Erhaltung des linearen Impulses bezeichnen. Dazu betrachtet man zwei wechselwirkenden Massenpunkte. Wirkt auf Massenpunkt 1 von Massenpunkt 2 eine Kraft \mathbf{F}_1 , dann wirkt eine gleich große, diametral entgegengesetzte Kraft \mathbf{F}_2 von Massenpunkt 1 auf Massenpunkt 2:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad \text{daher} \quad \dot{\mathbf{p}}_1 = -\dot{\mathbf{p}}_2$$

und deshalb

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = const\tag{3.20}$$

Newtons dritte Formulierung des dritten Gesetzes besagt, dass der Bewegungszustand des Massenschwerpunkt mehrerer Körper sich aufgrund der Wechselwirkung zwischen diesen, den sogenannten inneren Kräften des Systems, nicht ändert. Er ändert mit Newtons erstem Gesetz seinen Bewegungszustand nur durch Einwirkung einer äußeren Kraft. Jeder Massenpunkt m_i in einem System von Massenpunkten unterliegt dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$$

wobei \mathbf{p}_i der Impuls des Massenpunkts m_i und \mathbf{F}_i die auf ihn wirkende Kraft ist. Innere Kräfte in einem geschlossenen System beruhen auf der Wechselwirkung zwischen je zwei

Massenpunkten, umfassen also ausschließlich Zweikörperwechselwirkungen:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

Im Gegensatz dazu hängen äußere Kräfte nur von den Koordinaten eines Massenpunkts oder seiner Geschwindigkeit ab oder sind eine Funktion der Zeit; aber sie hängen nicht von anderen Massenpunkten ab. Daher gilt für äußere Kräfte \mathbf{F}_i .

$$\mathbf{F}_i \neq \sum \mathbf{F}_{ij}$$

Beispiele für äußere Kräfte sind die Bewegung eines Massenpunkts im elektromagnetischen Feld oder im Gravitationsfeld. Ohne den Einfluss äußerer Kräfte ist der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten konstant. Aus der Verallgemeinerung von Gl. (3.20) von zwei Massenpunkten auf viele Massenpunkte m_i folgt

$$\sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i}_{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = -\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \equiv 0 \quad (3.21)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Gesamtimpuls \mathbf{P} eines geschlossenen Systems von Massenpunkten nicht durch innere Kräfte verändert werden kann. Dieses Ergebnis bezeichnen Physiker als Impulssatz.

Impulssatz

Die Änderungsrate des Gesamtimpulses eines Systems von Massenpunkten wird nur durch äußere Kräfte bestimmt. Der Gesamtimpuls eines solchen Systems kann nicht durch innere Kräfte verändert werden.

Ist $\mathbf{F}^{ext} = 0$, so zeigt ein Vergleich von Gl. (3.21) mit Gl. (3.16), dass aus der Bewegungsgleichung für den Massenschwerpunkt Gl. (3.21) wird. Gl. (3.21) wurde im Laborsystem S abgeleitet. Befindet sich das Schwerpunktsystem S' in gleichmäßiger linearer Bewegung relativ zu S , dann ist Gl. (3.18) in S' das Äquivalent zu Gl. (3.20) in S . Es gibt noch eine weitere Beobachtung, die wir bezüglich Gl. (3.21) oder Gl. (3.16) für den Fall machen können, dass \mathbf{F}^{ext} verschwindet. Für $\mathbf{F}^{ext} = 0$ ist der Gesamtimpuls konstant und mit Gl. (3.5) bedeutet dies auch, dass die gesamte kinetische Energie T oder T_{SP} konstant bleiben muss, d.h.

$$T = \frac{P^2}{2M} = const \quad \text{beziehungsweise} \quad T = \frac{p_{SP}^2}{2M} = const$$

Da die gesamte kinetische Energie eines Systems aus N Massenpunkten die Summe der kinetischen Energien aller seiner Massenpunkte ist, folgt daraus

$$T = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m_i} = \sum_i^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \text{const} \quad (3.22)$$

Natürlich kommt es in einem System mit vielen Massenpunkten auch zu Stößen zwischen Massenpunkten, und diese Stöße können unterschiedliche Formen annehmen, weshalb die kinetische Energie bei Stoßprozessen nicht immer erhalten bleibt.

3.2.2 Stoßprozesse

Unter Stoßprozessen verstehen wir hier die Kollision zwischen nur zwei Stoßpartnern, nicht mehr. Für makroskopische Stöße, z.B. zwei Billardkugeln, scheint das ein guter Ansatz zu sein. Aber was geschieht in Systemen mit vielen Massenpunkten? Wie sich herausstellt, muss man, um die physikalischen Eigenschaften von Systemen mit vielen Massenpunkten zu verstehen, zunächst die Wechselwirkungen zwischen zwei beliebigen Massenpunkten verstehen. Ein Paradebeispiel hierfür ist die kinetische Gastheorie, die makroskopische Gaseigenschaften wie Gasdruck oder Temperatur aus dem Verhalten großer Ensembles von Atomen oder Molekülen auf mikroskopischer Ebene ableitet (siehe Kapitel 9). Zu den Grundannahmen gehört dabei, dass die Größe von Gasteilchen vernachlässigbar ist, d.h., sie sind Massenpunkte, unterliegen keinen äußeren Kräften und Stöße sind immer Stöße von Gasteilchen und diese sind elastisch.

Bei der Analyse von Stoßprozessen beschränken wir uns geschickterweise auf geschlossene Systeme. Wie in den vorangehenden Abschnitten besprochen, kann sich in geschlossenen Systemen, also Systemen, die keinen äußeren Kräften ausgesetzt sind, der Gesamtimpuls nicht ändern und auch die im System enthaltene Energie kann sich nicht ändern. Um Geschwindigkeiten und Impulse von Massenpunkten nach einem Stoß zu kennzeichnen, setzen wir über das entsprechende Symbol eine Tilde. Mit \mathbf{v} und \mathbf{p} vor dem Stoß und $\tilde{\mathbf{v}}$ und $\tilde{\mathbf{p}}$ nach dem Stoß können wir Impulserhaltung und Energieerhaltung im Stoßprozess eines Massenpunkts m_1 mit einem Massenpunkt m_2 schreiben als

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \quad (3.23)$$

und

$$\frac{1}{2}m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2^2 + Q \quad (3.24)$$

Die Größe Q in Gl. (3.24) zeigt an, dass beim Stoßprozess ein Teil der kinetischen Energie in andere Energiearten umgewandelt werden kann. Je nachdem, ob $Q = 0$, $Q > 0$ oder $Q < 0$ ist, können wir unterscheiden zwischen:

- Elastischer Stoß: Die kinetische Energie der Stoßpartner vor und nach dem Stoß ist die Gleiche, also $Q = 0$.
- Inelastischer Stoß: Die kinetische Energie der Stoßpartner ist nach dem Stoß um einen Betrag $Q > 0$ geringer als vor dem Stoß, da ein Teil der kinetischen Energie in innere Energie umgewandelt wurde. Beispiele sind Verluste aufgrund elektronischer Anregung wie beim Stoß von Atomen oder Molekülen. Bei Letzteren sind auch Verluste durch Schwingungs- oder Rotationsenergie möglich. Kinetische Energieverluste bei Stößen makroskopischer Objekte treten z.B. auf wenn Stoßpartner beim Stoß deformiert werden, Q ist dann die Verformungsenergie.
- Superelastischer Stoß: Die kinetische Energie der Stoßpartner ist nach dem Stoß um den Betrag $Q < 0$ höher als vor dem Stoß, da innere Energie in kinetische Energie umgewandelt wird. Bei Molekülen kann es sich dabei um elektronische Energie, Schwingungs- oder Rotationsenergie handeln, die in kinetische Energie umgewandelt wird. Bei makroskopischen Körpern kann z.B. die in einem Stoßpartner gespeicherte chemische Energie beim Aufprall freigesetzt werden.

Zusätzlich zur Kategorisierung von Stößen hinsichtlich des Wertes von Q unterscheiden wir außerdem zwischen zentralen Stößen und exzentrischen Stößen. Wie die Bezeichnung andeutet, handelt es sich bei zentralen Stößen um Frontalkollisionen, bei der sich zwei Massenpunkte vor und nach dem Stoß entlang derselben Linie im Raum bewegen. Diese Linie im Raum wird als Stoßlinie bezeichnet. Bei einem exzentrischen Stoß bewegen sich die beiden Stoßpartner vor und nach dem Zusammenstoß schräg zur Stoßlinie. Abb. 3.9 skizziert die Situation für zwei Massen auf ihrem Weg zu einem zentralen Stoß und die gleichen zwei Massen auf ihrem Weg zu einem exzentrischen Stoß. Bei einem Zentralstoß können wir die Stoßpartner als dimensionslose Massenpunkte behandeln. Bei exzentrischen Stößen ist dies nicht möglich, da es diese per Definition zwischen ausdehnungslosen Massenpunkten nicht geben kann; sie müssen also als Stöße zwischen ausgedehnten Objekten behandelt werden.

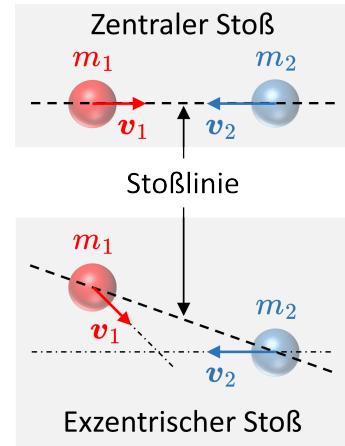


Abb. 3.9

Im Folgenden betrachten wir einige einfache Beispiele für Stoßprozesse. Zuerst für zentrale elastische und inelastische Stöße. Danach werden wir uns Beispielen für exzentrische Stoßprozesse zuwenden.

Inelastische Stöße

Zunächst zum Sonderfall des völlig inelastischen zentralen Stoßes. Ein solcher «klebt» die beiden Massen aneinander und diese bewegen sich von da an zusammen als eine kombinierte Masse. In dem in Abb. 3.10 gezeigten Fall trifft eine Masse m in einem zentralen Stoß auf eine ruhende Masse m_0 . Da es sich um ein eindimensionales Problem handelt, lautet Gl. (3.23), die Gleichung für die Erhaltung des Gesamtimpulses

$$m \cdot v = (m + m_0) \tilde{v}_{inel}$$

daher

$$\tilde{v}_{inel} = \frac{m}{m + m_0} \cdot v \quad (*)$$

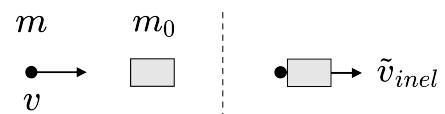


Abb. 3.10

Die Gleichung für die Energieerhaltung, Gl. (3.24), vereinfacht sich zu

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{(m + m_0) \cdot \tilde{v}_{inel}^2}{2} + Q$$

Einsetzen von \tilde{v}_{inel} aus (*) in diese Gleichung und auflösen nach Q ergibt

$$Q = \frac{m_0}{m + m_0} \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m_0}{m + m_0} \cdot T \quad (**)$$

Ist $m_0 = m$, dann folgt mit (*) $v_{inel} = v/2$. Allgemeiner: Ist $m_0 = n \cdot m$, dann ist $v_{inel} = v/(1+n)$. Aus (**) berechnet sich die kinetische Energie, die bei $m_0 = m$ in eine andere Energieform umgewandelt wird zu $Q = T/2$. Für $m_0 = n \cdot m$ ist leicht zu erkennen, dass die Menge an kinetischer Energie, die in eine andere Energieform umgewandelt wird, $Q = (n/n+1) \cdot T$ ist. Wenn n sehr groß wird, d.h. $n \rightarrow \infty$, wird die gesamte kinetische Energie in verschiedene Arten von Energie umgewandelt und v_{inel} wird Null, wie z.B. wenn ein Fahrzeug mit menschlichen Pseudoinsassen gezielt gegen eine Wand gefahren wird, um zu testen, wie gut ein Auto menschliche Passagiere bei echten Unfällen schützt.

Als Nächstes betrachten wir was bei einem inelastischen zentralen Stoß passiert, wenn sich beide Stoßpartner vor dem Stoß bewegen, beim Aufprall aber immer noch «verkleben» und sich dann gemeinsam als eine kombinierte Masse weiterbewegen. Haben die Stoßpartner die Massen m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 vor dem Stoß, dann wird aus der Impuls Erhaltung in Gl. (3.23)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \tilde{v}_{inel}$$

Jetzt nutzen wir das **Galileische Relativitätsprinzip**. Dieses besagt, dass sich beim Übergang von der Beobachtung des Stoßprozesses in einem ruhenden Referenzsystem zur Beobachtung in einem mit konstanter Geschwindigkeit bewegtem Referenzsystem, außer

der Koordinatentransformation nichts ändert. Solange die Geschwindigkeit des bewegten Referenzsystems deutlich unter der Lichtgeschwindigkeit c liegt, können wir die Galilei-Transformation von Gl. (2.2) verwenden. Bezeichnet man das ruhenden Koordinatensystem mit S und das mit einer Geschwindigkeit v_0 relativ zu S bewegte System mit S' , so sind die Geschwindigkeiten in beiden Koordinatensystemen verknüpft durch

$$v' = v - v_0$$

Um \tilde{v}_{inel} zu berechnen, verwenden wir den Trick, in ein Bezugssystem zu wechseln in dem einer der Stoßpartner vor dem Stoß in Ruhe ist. Wenn wir zum Beispiel $v_0 = v_2$ wählen, dann ist $v'_2 = 0$, d.h., die Masse m_2 ruht in Bezug auf das bewegte System und die Masse m_1 bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v'_1 = v_1 - v_2$ in Bezug auf das bewegte System. Damit kann man nun in Bezug auf das bewegte Referenzsystem einfach das Ergebnis aus Abb. 3.10 übertragen und erhält

$$\tilde{v}'_{inel} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)$$

Jetzt muss man dieses Ergebnis nur noch zurücktransformieren

$$\tilde{v}'_{inel} = \tilde{v}_{inel} - v_2$$

um \tilde{v}_{inel} im ruhenden Referenzsystem zu erhalten:

$$\tilde{v}_{inel} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) + v_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Ist $m_1 = m_2$, dann ist $v_{inel} = (v_1 + v_2)/2$. Allgemeiner: Ist m_2 ein ganzzahliges Vielfaches von m_1 , d.h. $m_2 = n \cdot m_1$, dann ist $v_{inel} = (v_1 + nv_2)/(n+1)$. Berechnet man das Äquivalent von (**) im Falle eines zentralen, inelastischen Stoßes zweier bewegter Körper, erhält man für die Menge der in andere Energieformen umgewandelten kinetischen Energie

$$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

Ist $m_2 = n \cdot m_1$, so folgt daraus $Q = m_1(v_1 - v_2)^2/4$ für $n = 1$ und $Q = m_1(v_1 - v_2)^2 \cdot n/2(n+1)$ für $n > 1$. Für $v_2 = 0$ sind die Ergebnisse für v_{inel} und Q natürlich identisch mit dem oben diskutierten Fall, der in Abb. 3.10 skizziert ist. Wie man aus dem Ausdruck für Q ablesen kann, handelt es sich, solange $v_1 \neq v_2$, um einen inelastischen Stoß. Aber was bedeutet es, wenn $v_1 = v_2$, Q also Null wird? Um diese Frage zu beantworten, kann man eine von zwei Perspektiven einnehmen: eine welche die Situation vor und eine welche die Situation nach dem Stoß betrachtet. Wählt man die Perspektive nach dem Stoß, muss die logische Schlussfolgerung sein, dass die beiden Massen die ganze Zeit «zusammengeklebt» waren, es also nie zu einem Stoß kam. Nimmt man die Perspektive vor dem Stoß, so sind vor dem Stoß beide Massen getrennt und werden wegen $v_1 = v_2$

auch weiterhin getrennt bleiben und es kommt daher nie zu einem Stoßprozess. Anders ausgedrückt: Stöße, bei denen die Stoßpartner vor dem Stoß getrennt sind und nach der Kollision zusammenkleben, können niemals elastische Stöße sein. Daraus folgt, dass $Q \neq 0$ gelten muss.

Es gibt natürlich inelastische Stöße, wo ein Teil der kinetischen Energie in andere Energieformen umgewandelt wird, die Stoßpartner jedoch nicht zusammenkleben. Dies kann bei Stößen von Atomen oder Molekülen der Fall sein, wenn kinetische Energie in elektro-nische Anregungsenergie bzw. Vibrations- oder Rotationsenergie umgewandelt wird. Bei Stößen makroskopischer Objekte kann dies durch eine bleibende Verformung eines der Stoßpartner geschehen. In vielen Fällen ist das Verständnis solcher Stöße und der damit verbundenen kinetischen Energieübertragung in atomare oder molekulare Anregung oder der Verformung eines oder beider Stoßpartner von großem Interesse. Letzteres ist beispielsweise in der technischen Mechanik wichtig, in der Grundlagenphysik jedoch weniger. Für diese sind vor allem inelastische Stöße $Q \neq 0$ als auch elastische Stöße $Q = 0$ von Interesse. Für makroskopische Objekte bedeuten Stöße mit $Q = 0$ nicht, dass keine Verformung auftritt, sondern nur, dass eine Verformung vollständig reversibel ist.

Elastische Stöße

Stöße mit $Q = 0$ sind selten, da fast immer Energie verloren geht, beispielsweise durch Wärme. Aber wir können uns vorstellen, dass es diese gibt. So wie es Physiker in der kinetischen Gastheorie tun, wo sie Stöße von Atomen untereinander oder mit einer Gefäßwand als elastisch betrachten. Abb. 3.11 veranschaulicht einen solchen frontalen elastischen Stoßprozess, bei dem wir zusätzlich angenommen haben, dass die beiden Stoßpartner die gleiche Masse haben, d.h. $m_1 = m_2 = m$.

Wie im oberen Teil von Abb. 3.11 gezeigt, kommt einer von ihnen, Kugel ①, von links mit der Geschwindigkeit $v_1 = v$ und der andere, Kugel ②, kommt von rechts mit der Geschwindigkeit $v_2 = -v$. Diese beiden Kugeln sollen zudem die besondere elastische Eigenschaft haben, dass jede Verformung, die sie erfahren, zu 100% reversibel ist. Der Schwerpunkt dieses Zwei-Kugel-Systems liegt in der Mitte zwischen den sich einander nähernenden Kugeln und bewegt sich nicht. Die Schwerpunktgeschwindigkeit des Systems ist vor und nach dem Stoß Null. Daher analysieren wir standardmäßig diese Stoßsituation im Schwerpunktsystem. Im Moment des Aufpralls ist die Geschwindigkeit beider Kugeln

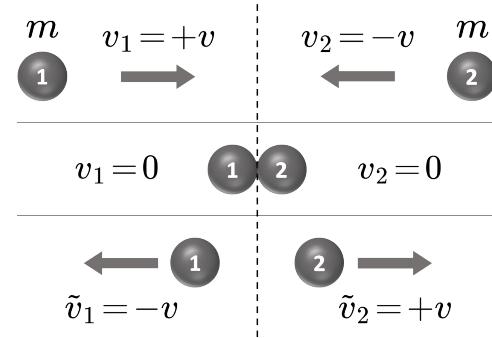


Abb. 3.11

exakt Null, wie im mittleren Teil von Abb. 3.11 gezeigt, d.h. $\mathbf{v}_1 = 0$ und $\mathbf{v}_2 = 0$. Daher ist die kinetische Energie des Systems in diesem Moment exakt Null. Aber nicht für lange, wie der unteren Teil von Abb. 3.11 zeigt, prallen die Kugeln beim Stoß unmittelbar zurück und laufen in die entgegengesetzte Richtung, aus der sie gekommen sind. Die Erhaltung des Impulses und der Energie (mit $Q = 0$) erfordert, dass die Geschwindigkeiten nach dem Stoß betragsmäßig gleich groß sind wie vor dem Stoß, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Deshalb haben wir nach dem Stoß

$$\tilde{v}_1 = -v \quad \text{und} \quad \tilde{v}_2 = +v$$

Wie passiert das? Nun, beim Aufprall wird die kinetische Energie der beiden Kugeln für kurze Zeit in elastische Verformungsenergie und bei der Rückverformung sofort wieder in kinetische Energie umgewandelt. Das geschieht so schnell, dass wir diesen Prozess nicht in Echtzeit beobachten könnten. Aber in Zeitlupe lässt sich Umwandlung von kinetischer Energie in elastische Energie und die Rückumwandlung von elastischer Energie in kinetische Energie durchaus beobachten. Aber ohne die Hilfe der Technologie können wir nur aus dem beobachteten Ergebnis ableiten, was passiert ist.

Ein weiterer einfacher inelastischer Stoßprozess ist der Frontalzusammenstoß zweier Kugeln gleicher Masse m , von denen eine vor dem Stoß in Ruhe war. Diesen Stoßprozess diskutieren wir mit Hilfe von Abb. 3.12, das ihn im Laborsystem in Abb. 3.12a und im Schwerpunktsystem in Abb. 3.12b zeigt. Die beiden Massen, die wir als Kugel ① und Kugel ② bezeichnen, sollen wie in Abb. 3.12a skizziert kollidieren, wo vor dem Stoß eine von beiden ruht, während die andere sich auf diese mit der Geschwindigkeit v zubewegt.

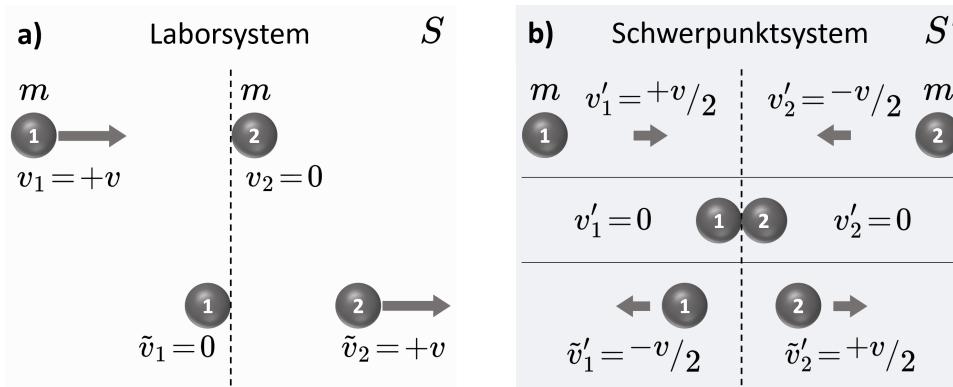


Abb. 3.12: Ein Stoßprozess im Laborsystem (a) und im Schwerpunktsystem (b) betrachtet.

Viele werden intuitiv richtig verstehen, was passiert, wenn Kugel ①, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, auf Kugel ② trifft, die in Ruhe ist. Billardspieler wissen, dass nach einem solchen Stoß die Geschwindigkeit von ① Null sein wird, d.h. $\tilde{v}_1 = 0$, und die

Geschwindigkeit von Kugel ② nach dem Stoß $\tilde{v}_2 = v$ beträgt. Die beiden Kugeln tauschen einfach ihre Geschwindigkeiten aus. Um zu verstehen, warum das so ist, müssen wir uns ansehen, wie dieser Stoß für jemanden aussieht, der ihn im Schwerpunktsystem betrachtet. Da die Kugeln die gleiche Masse haben, erhalten wir für die Schwerpunktgeschwindigkeit $v_{SP} = v/2$ und für die Geschwindigkeiten der Kugeln im Schwerpunktsystem vor dem Stoß

$$v'_1 = \frac{v}{2} \quad \text{und} \quad v'_2 = -\frac{v}{2}$$

Im Schwerpunktsystem S' entspricht der Stoßprozess in Abb. 3.12b also jenem in Abb. 3.11, den wir bereits im Laborsystem diskutiert haben. Der einzige Unterschied ist, dass sich die Kugeln nicht mit den Geschwindigkeiten v und $-v$ bewegen, sondern jetzt die Geschwindigkeiten $v/2$ und $-v/2$ haben. Im Schwerpunktsystem haben daher die beiden Kugeln nach dem Stoß die Geschwindigkeiten

$$\tilde{v}'_1 = -\frac{v}{2} \quad \text{und} \quad \tilde{v}'_2 = \frac{v}{2}$$

Zur Übertragung ins Laborsystem S , müssen wir nur $v/2$ zu diesen Geschwindigkeiten addieren. Das Ergebnis ist, dass Kugel ① die sich vor dem Stoß mit der Geschwindigkeit v bewegte, nun ruht, und Kugel ②, die vor dem Stoß in Ruhe war, sich nun mit der Geschwindigkeit $\tilde{v}_2 = v$ bewegt. Das ist natürlich, wie die meisten wohl intuitiv vermuteten, genau das, was bei einem solchen Stoß im Laborsystem S passieren muss. Was passiert, wenn m_2 nicht ruht, sondern sich ebenfalls bewegt, jedoch mit einer anderen Geschwindigkeit als m_1 ? Dazu betrachten wir den Fall, wo Kugel ① sich vor dem Stoß mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2v$ bewegt und Kugel ② das mit der Geschwindigkeit $v_2 = -v$ tut. Die Schwerpunktgeschwindigkeit beträgt damit $v_{SP} = v/2$ und die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln im Schwerpunktsystem sind vor dem Stoß

$$v'_1 = 2v - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v \quad \text{und} \quad v'_2 = -v - \frac{1}{2}v = -\frac{3}{2}v$$

Wieder sehen wir, im Schwerpunktsystem haben beiden Massen die gleiche absolute Geschwindigkeit. Genau wie im letzten Fall, wo eine Kugel ruhte, tauschen die beiden Massen im Schwerpunktsystem beim Stoß ihre Geschwindigkeiten aus. Haben die Stoßpartner die gleiche Masse, lässt sich leicht zeigen, dass es bei Zentralstößen immer zum Geschwindigkeitsaustausch kommt. Dazu betrachtet man die Bewegung des Massenschwerpunkts eines Zweikörpersystems. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich beide Massen entlang der x -Achse bewegen, und ihre jeweiligen Koordinaten x_1 und x_2 sind. Damit ist die Schwerpunktkoordinate X gegeben durch

$$X = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

und die Schwerpunktgeschwindigkeit ist

$$\dot{X} = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}$$

Die Impulserhaltung erfordert, dass sich der Schwerpunkt vor und nach dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit und in die gleiche Richtung weiterbewegt. Das funktioniert nur, wenn die Massen beim Stoß ihre Geschwindigkeiten austauschen. Dies gilt für beliebige Geschwindigkeiten der beiden Massen vor dem Stoß.

Exzentrische Stöße

Bei Zentralstößen ist die Gerade in Richtung der Relativbewegung der Stoßpartner identisch mit der Stoßlinie. Daher können Zentralstöße als eindimensionale Stoßprobleme zwischen ausdehnungslosen Massenpunkten behandelt werden. Das ändert sich aber bei exzentrischen Stößen, da wird das Problem zumindest zweidimensional. Wir beginnen mit der Betrachtung des in Abb. 3.13 dargestellten Falls, dem einfachsten Szenario für einen exzentrischen Stoß. Die beiden Stoßpartner in Abb. 3.13, Kugel

① und Kugel ②, sollen gleiche Masse m haben und eine von ihnen, Kugel ②, soll vor dem Stoß in Ruhe sein. Kugel ① bewegt sich parallel zur x -Richtung von links in Richtung Kugel ② mit einem Stoßparameter b . Darüber hinaus machen wir zur Behandlung dieses Stoßszenarios zwei weitere Annahmen. Erstens sollen beide Kugeln in Abb. 3.13 perfekte Kugeln und vollkommen glatt sein. Zweitens soll beim Stoß nichts von der gesamten kinetischen Energie, welche die Kugeln vor dem Zusammenstoß besaßen, in Rotationsenergie umgewandelt werden. Der Impuls von Kugel ① beträgt vor dem Stoß $\mathbf{p}_1 = (p_{1x}, 0)$ und nach dem Stoß $\tilde{\mathbf{p}}_1 = (\tilde{p}_{1x}, \tilde{p}_{1y})$. Der Impuls von Kugel ② vor dem Stoß ist $\mathbf{p}_2 = (0, 0)$ und nach dem Stoß ist er $\tilde{\mathbf{p}}_2 = (\tilde{p}_{2x}, \tilde{p}_{2y})$. Mit Gl. (3.23) können wir die Gleichung für die Impulserhaltung schreiben als

$$\mathbf{p}_1 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \quad (3.25)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die drei Impulsvektoren \mathbf{p}_1 , $\tilde{\mathbf{p}}_1$ und $\tilde{\mathbf{p}}_2$ in einer Ebene liegen. Daher können wir den Stoßprozess Abb. 3.13 als zweidimensionales Problem behandeln. Wenn Kugel ① vor dem Stoß nicht in Ruhe wäre, könnten wir das nicht tun. Mit Gl. (3.23) lautet die Gleichung für die Erhaltung der kinetischen Energie

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}_1^2}{2m} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_1^2}{2m} + \frac{\tilde{\mathbf{p}}_2^2}{2m} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}_1^2 = \tilde{\mathbf{p}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2 \quad (3.26)$$

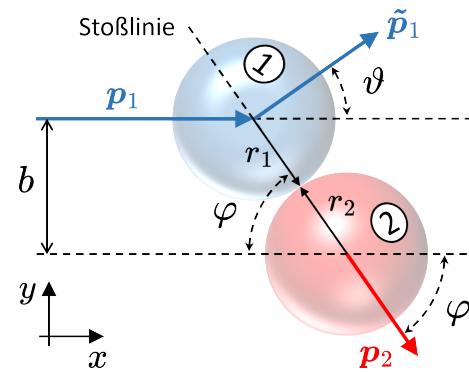


Abb. 3.13

Haben die Kugeln die gleiche Masse, so reduziert sich mit Gl. (3.26) die Gleichung für die Erhaltung der kinetischen Energie auf den Satz des Pythagoras für die Impulsvektoren. Damit sind, wie in Abb. 3.14 gezeigt, $\tilde{\mathbf{p}}_1$ und $\tilde{\mathbf{p}}_2$ orthogonal. Jedes Dreieck, das wie in Abb. 3.14 skizziert, für einen Stoßprozess wie in Abb. 3.13 in einen Kreis eingeschrieben wird, ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\vartheta + \varphi = 90^\circ$. Der Winkel φ zwischen der Richtung der einfallenden Kugel ① und der Stoßlinie ist gegeben durch

$$\sin \varphi = \frac{b}{r_1 + r_2} \quad (3.27)$$

Die beiden Kugelradien müssen nicht unbedingt gleich sein. Wenn jedoch $r_1 \neq r_2$ ist, muss man fordern, dass die Stoßlinie in der Stoßebene liegt, d.h., in der durch Gl. (3.25) definierten Ebene. Dadurch wird sichergestellt, dass das Problem zweidimensional bleibt und die obige Analyse weiterhin anwendbar ist. Stöße, bei denen einer der Stoßpartner vor dem Stoß ruht, sind in der Physik wichtig und deshalb analysieren wir dieses Stoßszenario jetzt aus der Perspektive einer Person im Schwerpunktsystem. Dabei werden wir zulassen, dass die Stoßpartner unterschiedliche Massen haben, was bedeutet, dass sich die Energieerhaltungsgleichung nicht mehr auf den Satz des Pythagoras reduziert, wie das bei gleichen Massen mit Gl. (3.26) der Fall ist. Im Laborsystem konnten wir diesen Stoßprozess zweidimensional behandeln, und das bleibt auch so wenn wir das Stoßszenario vom Laborsystem auf das Schwerpunktsystem übertragen, in dem der Gesamtimpuls der Stoßpartner Null ist.

Exzentrischer Stoß im Schwerpunktsystem

Bevor wir uns der Analyse eines solchen Stoßes zuwenden können, bei dem im Laborsystem eine Kugel sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt und die andere ruht, sind ein paar Worte zur hier verwendeten Notation angebracht. Wir bleiben bei der Notation, die bereits weiter oben in diesem Kapitel zur Diskussion des **Schwerpunktsystems** verwendet wurde. S bezeichnet wiederum das Laborsystem (LS) und S' das Schwerpunktsystem (SPS), das sich relativ zu LS mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_{SP} bewegt. Für die uns hier interessierenden Stoßvorgänge müssen wir lediglich zwei Massen m_1 und m_2 berücksichtigen. Zur Unterscheidung von Geschwindigkeiten und Impulsen vor und nach dem Stoß bleiben wir ebenfalls bei der bereits eingeführten Notation und bezeichnen die jeweiligen Größen für die beiden Massen m_1 und m_2 im Laborsystem S und im Schwerpunktsystem S' wie folgt:

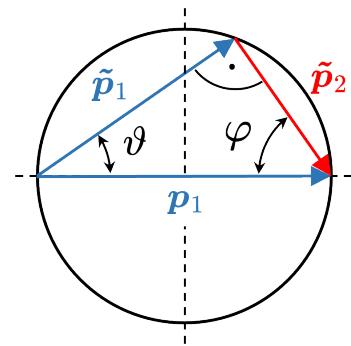


Abb. 3.14

$$\begin{aligned} \text{vorher: } & \left\{ \begin{array}{l} \text{in } S : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \text{in } S' : \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \end{array} \right. \\ \text{nachher: } & \left\{ \begin{array}{l} \text{in } S : \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2 \\ \text{in } S' : \tilde{\mathbf{v}}'_1, \tilde{\mathbf{v}}'_2, \tilde{\mathbf{p}}'_1, \tilde{\mathbf{p}}'_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Diese Geschwindigkeiten und Impulse «vor» und «nach» dem Stoß im Laborsystem S und im Schwerpunktsystem S' sind durch die Galilei-Transformation von Gl. (3.19) verknüpft. Mit der obigen Notation können wir im Laborsystem S für die Impulserhaltungsgleichung schreiben

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \quad (3.28)$$

und die Gleichung für die Erhaltung der kinetischen Energie in S ist

$$\frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2^2}{2} \quad (3.29)$$

Im Schwerpunktsystem S' ist der Gesamtimpuls Null und daher lautet die Gleichung für die Impulserhaltung

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}'_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}'_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 \quad (3.30)$$

und für die Erhaltung der kinetischen Energie in S' gilt die Gleichung

$$\frac{m_1 \mathbf{v}'_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}'_2^2}{2} = \frac{m_1 \tilde{\mathbf{v}}'_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{\mathbf{v}}'_2^2}{2} \quad (3.31)$$

Aus der Gleichung für die Impulserhaltung Gl. (3.30) folgt

$$\mathbf{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}'_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{v}}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \tilde{\mathbf{v}}'_2 \quad (3.32)$$

Setzt man dies in Gl. (3.31) ein, um zuerst \mathbf{v}'_2 durch \mathbf{v}'_1 und $\tilde{\mathbf{v}}'_2$ mit $\tilde{\mathbf{v}}'_1$ und dann \mathbf{v}'_1 durch \mathbf{v}'_2 und $\tilde{\mathbf{v}}'_1$ mit $\tilde{\mathbf{v}}'_2$ zu ersetzen, so zeigt sich, dass im Schwerpunktsystem gilt

$$|\mathbf{v}'_1| = |\tilde{\mathbf{v}}'_1| \quad \text{und} \quad |\mathbf{v}'_2| = |\tilde{\mathbf{v}}'_2| \quad (3.33)$$

Offensichtlich ist für jeden Stoßpartner der Betrag der Geschwindigkeit nach dem Stoß derselbe wie vor dem Stoß. Im Schwerpunktsystem müssen die Impulsvektoren der beiden Massen sowohl vor als auch nach dem Stoß mit Gl. (3.30) in genau entgegengesetzte Richtungen zeigen. Deshalb können wir schreiben

$$\tilde{\mathbf{v}}'_1 = |\mathbf{v}'_1| \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{v}}'_2 = -|\mathbf{v}'_2| \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (3.34)$$

wobei $\hat{\mathbf{u}}$ ein Einheitsvektor ist, der in eine der entgegengesetzten Richtungen zeigt. Mit Gl. (3.14) zur Definition der Schwerpunktgeschwindigkeit \mathbf{v}_{SP} und der Galilei-Transformation Gl. (3.19) können wir die Geschwindigkeiten der beiden Massen im Schwerpunktsystem vor dem Stoß als Funktion der Geschwindigkeiten vor dem Stoß im Laborsystem ausdrücken:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{SP} = \frac{m_2}{M} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{SP} = -\frac{m_1}{M} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

Mit diesen beiden Gleichungen und mit Hilfe der Beziehungen aus Gl. (3.34) erhalten wir dann für die Geschwindigkeiten nach der Kollision im Laborsystem:

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \tilde{\mathbf{v}}'_1 + \mathbf{v}_{SP} = |\mathbf{v}'_1| \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_{SP} = \frac{m_2}{M} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{M} \quad (3.35a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \tilde{\mathbf{v}}'_2 + \mathbf{v}_{SP} = -|\mathbf{v}'_2| \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_{SP} = -\frac{m_1}{M} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{M} \quad (3.35b)$$

Damit sind wir bereit, das zuvor besprochene Stoßszenario von Abb. 3.13 erneut zu betrachten. Dieses Mal werden wir jedoch den Stoß im Schwerpunktsystem analysieren. Unabhängig vom Impuls der einfallenden Kugel ① im Laborsystem in Bezug auf die ruhende Kugel ②, ist im Schwerpunktsystem der Impuls beider Kugeln immer von gleichem Betrag und diametral entgegengesetzt, wie in Abb. 3.15 skizziert. Es gelten die gleichen Annahmen die bereits im Fall von Abb. 3.13 gemacht wurden. Die Kugeln sind perfekt und vollkommen glatt und es gilt $Q = 0$ in Gl. (3.24), d.h., es wird keine kinetische Energie in Rotationsenergie umgewandelt. Was im Schwerpunktsystem beim Stoß passiert, ist, dass für jede Kugel die Komponente des Impulses, die senkrecht zur Stoßlinie verläuft, unverändert bleibt und die Komponente, die parallel zur Stoßlinie verläuft, invertiert wird. Mit $\tilde{\mathbf{p}}'_{1\parallel} = -\mathbf{p}'_{1\parallel}$ und $\tilde{\mathbf{p}}'_{2\parallel} = -\mathbf{p}'_{2\parallel}$ können wir aus Abb. 3.15 für Kugel ① und Kugel ② die folgende Beziehung zwischen ihren jeweiligen Impulsen vor und nach dem Stoß ablesen

$$\tilde{\mathbf{p}}'_1 = \mathbf{p}'_1 + 2 \cdot \tilde{\mathbf{p}}'_{1\parallel} = \mathbf{p}'_1 - 2 \cdot \mathbf{p}'_{1\parallel} \quad (3.36a)$$

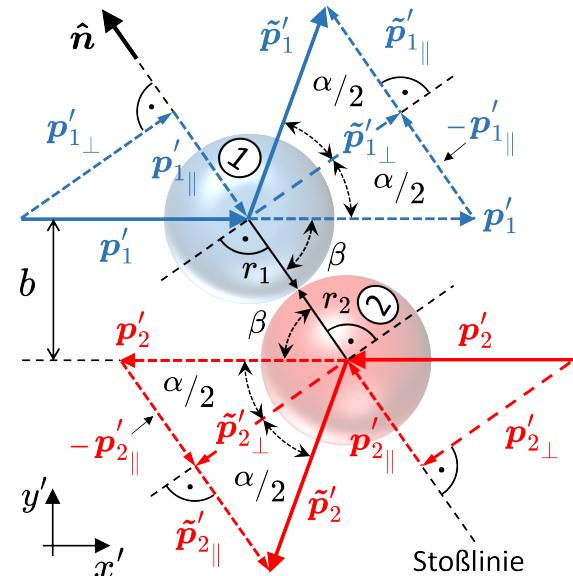


Abb. 3.15

und

$$\tilde{\mathbf{p}}'_2 = \mathbf{p}'_2 + 2 \cdot \tilde{\mathbf{p}}'_{2\parallel} = \mathbf{p}'_2 - 2 \cdot \mathbf{p}'_{2\parallel} \quad (3.36b)$$

Wenn wir mit $\hat{\mathbf{n}}$ den Einheitsvektor in Richtung der Stoßlinie bezeichnen, der vom Mittelpunkt der Kugel ① zum Mittelpunkt der Kugel ② zeigt, so können wir die Impulskomponenten parallel zur Stoßlinie vor dem Stoß durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ ausdrücken. Die Beträge der parallelen Impulskomponenten von Kugel ① und Kugel ② im Schwerpunktsystem sind gegeben durch

$$|\mathbf{p}'_{1\parallel}| = |\mathbf{p}'_1| \cos \beta \quad \text{und} \quad |\mathbf{p}'_{2\parallel}| = |\mathbf{p}'_2| \cos \beta$$

Da $\mathbf{p}'_{1\parallel}$ antiparallel zu $\hat{\mathbf{n}}$ und $\mathbf{p}'_{2\parallel}$ parallel zu $\hat{\mathbf{n}}$ ist, können wir Gl. (3.36a) und Gl. (3.36b) umschreiben zu

$$\tilde{\mathbf{p}}'_1 = \mathbf{p}'_1 + 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{p}'_1| \cos \beta \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_2 = \mathbf{p}'_2 - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{p}'_2| \cos \beta$$

Jetzt ordnen wir die rechten Seiten dieser Gleichungen so um, dass sie wie Gl. (3.34) aussehen. Das machen wir, indem wir auf den rechten Seiten die jeweilige Masse multipliziert mit dem Betrag der jeweiligen Geschwindigkeit als Faktor herausziehen und dann beide Seiten durch die jeweilige Masse dividieren. Das ergibt

$$\tilde{\mathbf{v}}'_1 = |\mathbf{v}'_1| \left[2\hat{\mathbf{n}} \cos \beta + \frac{\mathbf{v}'_1}{|\mathbf{v}'_1|} \right] \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{v}}'_2 = -|\mathbf{v}'_2| \left[2\hat{\mathbf{n}} \cos \beta - \frac{\mathbf{v}'_2}{|\mathbf{v}'_2|} \right]$$

Offensichtlich ist in diesen beiden Gleichungen der in eckigen Klammern eingeschlossene Ausdruck identisch. Das zweite Glied in diesem Ausdruck ist der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{v}}'_1$ bzw. $\hat{\mathbf{v}}'_2$ in Richtung von \mathbf{v}'_1 bzw. \mathbf{v}'_2 . Aber wir wissen bereits, dass $\hat{\mathbf{v}}'_1 = -\hat{\mathbf{v}}'_2$ gelten muss. Vor diesem Hintergrund stellen wir beim Vergleich dieser beiden Gleichungen mit den Gleichungen in Gl. (3.34) fest, dass der identische Ausdruck in den eckigen Klammern lediglich der in Gl. (3.34) eingeführte Einheitsvektor ist:

$$\hat{\mathbf{u}} = 2\hat{\mathbf{n}} \cos \beta + \frac{\mathbf{v}'_1}{|\mathbf{v}'_1|} = 2\hat{\mathbf{n}} \cos \beta - \frac{\mathbf{v}'_2}{|\mathbf{v}'_2|}$$

Um $\hat{\mathbf{u}}$ zu berechnen, können wir einen dieser beiden Ausdrücke auswerten. Hier verwenden wir den ersten. Für die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{n}}$ und $\hat{\mathbf{v}}'_1$ lesen wir aus Abb. 3.15

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{v}}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cos^2 \beta \\ 2 \sin \beta \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Im Beispiel von Abb. 3.13 haben wir gesehen, dass die Streuwinkel ϑ und φ im Laborsystem durch $\vartheta + \varphi = 90^\circ$ verbunden sind. Für die Streuwinkel α und β im Schwerpunktsystem können wir aus Abb. 3.15 bestimmen, dass sie durch die Beziehung $\alpha/2 + \beta = 90^\circ$ verbunden sind. Mit $2\beta = \pi - \alpha$ ist der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{u}}$ in Abb. 3.15 als Funktion des Streuwinkels α gegeben durch:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Die Winkel α und β werden durch die Stoßgeometrie in Abb. 3.15 bestimmt, also durch den Stoßparameter b und die Radien r_1 und r_2 der Kugeln durch

$$\sin \beta = \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{r_1 + r_2} \quad (3.38)$$

Diese Beziehung im Schwerpunktsystem zwischen dem Streuwinkel β und Stoßparameter b sowie den Kugelradien ist identisch mit Gl. (3.27), die wir im Laborsystem zwischen dem Streuwinkel φ und diesen Parametern abgeleitet haben. Die rechten Seiten von Gl. (3.27) und Gl. (3.38) drücken eine geometrische Beziehung aus, die nur positiv definit sein kann und daher sagen uns Gl. (3.27) und Gl. (3.38) nur etwas über die Absolutwerte $|\varphi|$ und $|\beta|$, nämlich dass sie identisch sein müssen. Mit Gl. (3.38) können wir den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$, der in Richtung der Stoßlinie zeigt, umschreiben zu

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + d^2} \\ d \end{pmatrix}$$

Nachdem wir nun alle relevanten Größen des Stoßprozesses im Schwerpunktsystem kennen, können wir diese zurück in das Laborsystem übertragen. Im Laborsystem betragen die Geschwindigkeiten der Kugeln ① und ②

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen dieser Geschwindigkeiten und von $\hat{\mathbf{u}}$ aus Gl. (3.37) in Gl. (3.35a) und Gl. (3.35b) ergibt für die Geschwindigkeiten der Kugeln im Laborsystem nach dem Stoß

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{v}{M} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 \cos 2\beta \\ m_2 \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{2m_1 v \cos \beta}{M} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$$

Wie in den Impulsdiagrammen in Abb. 3.16 dargestellt, bezeichnen ϑ und φ die Streuwinkel im Laborsystem, wobei ϑ die Ablenkung der Kugel ① bezüglich ihrer Einlaufrichtung ist und φ die Ablenkung von Kugel ②, ebenfalls in Bezug auf die Einlaufrichtung von Kugel ①. Mit den bekannten Geschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{v}}_1$ und $\tilde{\mathbf{v}}_2$ nach dem Stoß lassen sich die Winkel ϑ und φ bestimmen aus

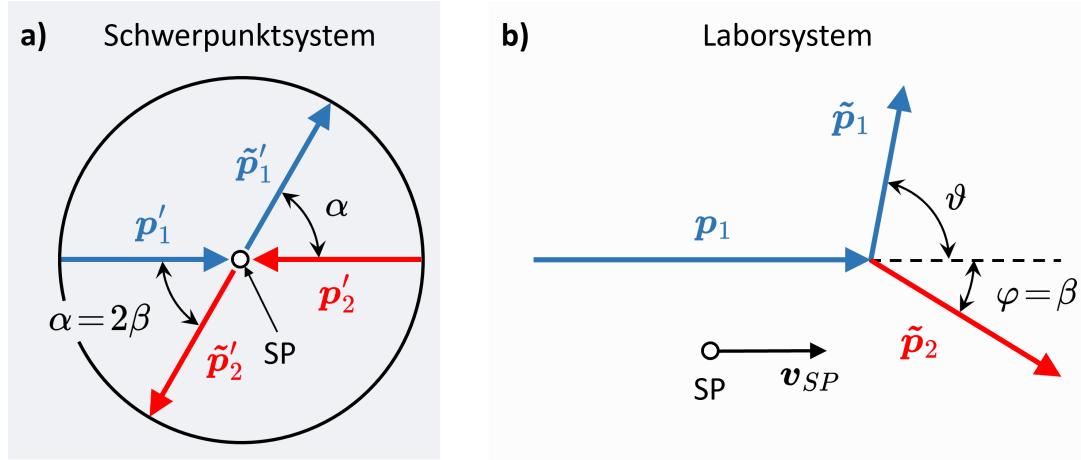


Abb. 3.16: Impulsdiagramme des exzentrischen Stoßes von Abb. 3.15 im Schwerpunktsystem (a) und im Laborsystem (b). In diesem Beispiel ist $r_1 = r_2$, der gewählte Stoßparameter $b = r_1 = r_2$ und $m_2 = 1.5 \cdot m_1$.

$$\tan \varphi = \frac{\tilde{v}_{2y}}{\tilde{v}_{2x}} \quad \text{und} \quad \tan \vartheta = \frac{\tilde{v}_{1y}}{\tilde{v}_{1x}}$$

Durch Einsetzen der jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten wird daraus

$$\tan \varphi = -\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\tan \beta \quad \text{und} \quad \tan \vartheta = \frac{m_2 \sin 2\beta}{m_1 - m_2 \cos 2\beta} \quad (3.39)$$

Da der Tangens eine ungerade Funktion ist, ergibt sich $\varphi = -\beta$, was bedeutet, dass die Streurichtung der Kugel ② nach rechts unten verläuft. Tatsächlich wird die Kugel ② immer nach rechts unten abgelenkt, da φ nur eine Funktion des Stoßparameters und nicht der Massen der Stoßpartner ist. Da Stöße nur für Stoßparameter $b < r_1 + r_2$ auftreten, ist der Bereich von $\sin \beta$ auf $0 \leq \sin \beta \leq 1$ begrenzt und damit kann β nur die Werte $0 \leq \beta \leq \pi/2$ annehmen. Somit kann φ nur zwischen $0 \leq \varphi \leq -\pi/2$ liegen.

Anders als φ hängt ϑ vom Massenverhältnis der Stoßpartner ab. ϑ nimmt seine Maximal- und Minimalwerte in den Extremfällen $m_1 \gg m_2$ und $m_2 \gg m_1$ an

$$m_1 \gg m_2 \implies \tilde{v}_1 \rightarrow v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vartheta \rightarrow 0$$

$$m_2 \gg m_1 \implies \tilde{v}_1 \rightarrow v \cdot \begin{pmatrix} -\cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad \beta = 0 \implies \vartheta \rightarrow \pi$$

Der erste Fall, $m_1 \gg m_2$, beschreibt eine Vorwärtsstreuung, bei der die Bewegung einer massiven Kugel ① nur minimal durch die viel leichtere Kugel ② beeinflusst wird. Im zweiten Fall, $m_2 \gg m_1$, ist Kugel ② so viel massereicher als Kugel ①, dass Letztere im Falle eines zentralen Stoßes in die Richtung zurückgestreut wird, aus der sie kam.

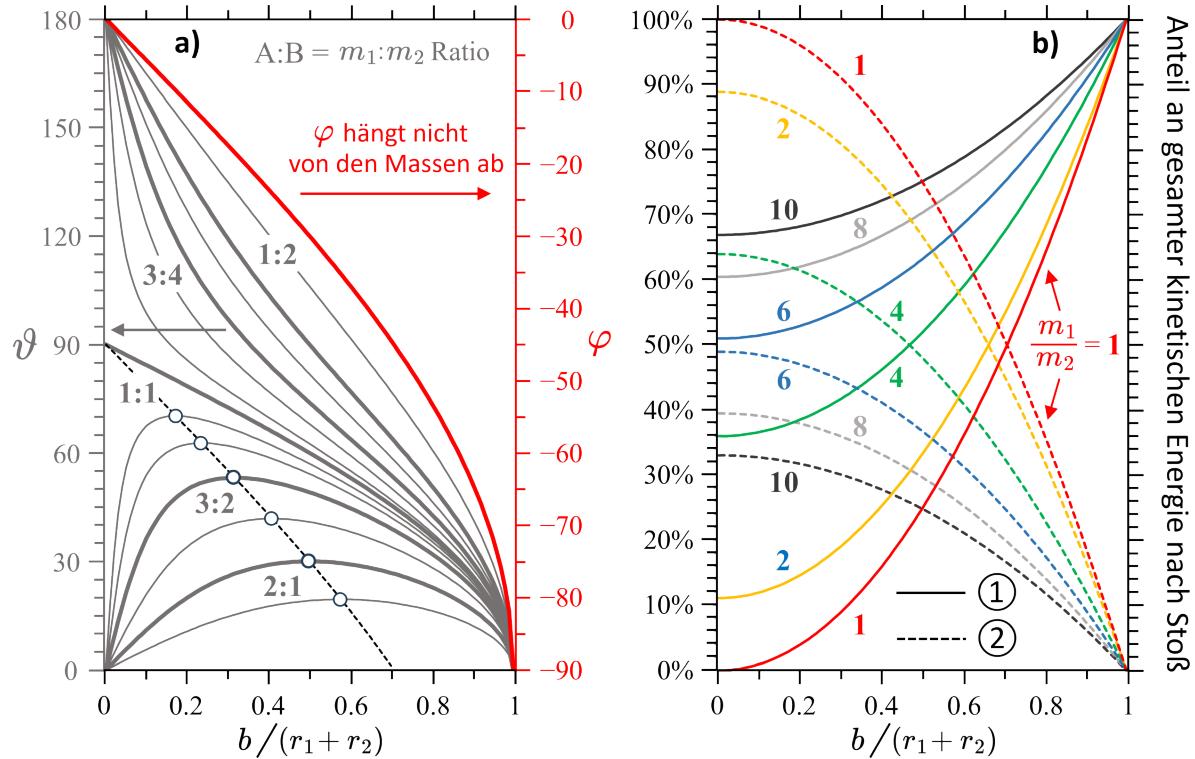


Abb. 3.17: (a) Streuwinkel ϑ und φ als Funktion von $\sin \beta = b/(r_1 + r_2)$ für verschiedene Massenverhältnisse m_1/m_2 . (b) Aufteilung der gesamten kinetischen Energie zwischen Kugeln ① (durchgezogene Linien) und ② (gestrichelte Linien) nach dem Stoß, als Funktion des Streugeometrieparameters $\sin \beta$ für ausgewählte Massenverhältnisse m_1/m_2 .

Im Fall von $m_1 = m_2$ lautet die Gleichung für ϑ

$$\tan \vartheta = \frac{\sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

Daher sind \tilde{v}_1 und \tilde{v}_2 , die Einheitsvektoren in die Richtungen von \tilde{v}_1 und \tilde{v}_2 , im Fall von $m_1 = m_2$

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$$

und damit

$$\tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}_1 \perp \tilde{v}_2$$

und daher folgt für $m_1 = m_2$, dass

$$\vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Dieses Ergebnis kennen wir natürlich bereits aus der Diskussion des exzentrischen Stoßes gleicher Massen (siehe Abb. 3.14). Abb. 3.17a zeigt die Abhängigkeit von ϑ und φ vom

Streugeometrieparameter $\sin \beta$ aus Gl. (3.37) für verschiedene Massenverhältnisse $m_1: m_2$. Wie wir bereits aus Gl. (3.39) wissen, hängt φ nicht von den Massen der beiden Stoßpartner ab und daher gibt es in Abb. 3.17a nur eine Kurve für φ als Funktion von $b/(r_1 + r_2)$. φ kann zwischen $0 \leq \varphi \leq -90^\circ$ liegen. Beim zentralen Aufprall, also $\varphi = 0$ und $\vartheta = 90^\circ$, fallen die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Kugeln vor und nach dem Stoß mit der Stoßlinie zusammen und ihre relativen Richtungen und Größen hängen vom Massenverhältnis $m_1: m_2$ ab. Die Bedeutung des Streuwinkels $\vartheta = 90^\circ$, lässt sich aus Abb. 3.17b ablesen, welche die Verteilung der gesamten kinetischen Energie zwischen den Kugeln nach dem Stoß zeigt und wie diese vom Massenverhältnis $m_1: m_2$ abhängt. Im Fall von $m_1 = m_2$ wissen wir bereits, dass die Kugeln bei einem zentralen Stoß ihre Geschwindigkeiten austauschen, d.h., nach dem Stoß ist die kinetische Energie von Kugel ① Null und die von Kugel ② ist gleich der kinetischen Energie die Kugel ① vor dem Stoß hatte. Genau das zeigt Abb. 3.17b im Fall von $b/(r_1 + r_2) = 0$ und $m_1 = m_2$. Für $m_1 > m_2$ behält Kugel ① zunehmend ihre kinetischen Energie und weniger wird auf Kugel ② übertragen, da beide Kugeln sich nun in die Richtung bewegen, aus der Kugel ① kam. Im Fall $m_1 < m_2$ passiert natürlich das Umgekehrte. Abb. 3.17b zeigt keine Kurven für die $m_1 < m_2$ gilt, aber offensichtlich ist die Energieaufteilung symmetrisch bzgl. Vertauschung von Kugel ① und Kugel ②. Abb. 3.17a sagt uns jedoch, dass Kugel ① für $m_1 < m_2$ sich nun in entgegengesetzte Richtung bewegt aus der sie kam, während Kugel ② sich in die Richtung bewegt, aus der Kugel ① kam. Wie Abb. 3.17a zeigt, liegt für $m_1 > m_2$ eine Vorwärtsstreuung von m_1 vor ($0^\circ \leq \vartheta < 90^\circ$), während wir es bei $m_1 < m_2$ mit einer Rückstreuung von m_1 von m_2 zu tun haben ($90^\circ < \vartheta \leq 180^\circ$).

Für $m_1 > m_2$ durchlaufen die Streuwinkelkurven für ϑ in Abb. 3.17a ein Maximum, das sich zu niedrigeren Werten von $b/(r_1 + r_2)$ verschiebt wenn sich das Massenverhältnis $m_1: m_2$ dem Wert 1 nähert. Um diese Extremwerte zu finden, leiten wir $\arctan [\vartheta(\beta)]$ im Intervall $0^\circ < \vartheta \leq 90^\circ$ nach β ab und bestimmen die Nullstellen. Das führt uns auf

$$\frac{d}{d\beta} \arctan [\vartheta(\beta)] = \frac{1}{1 + \vartheta^2(\beta)} \cdot \frac{d}{d\beta} \vartheta^2(\beta) = 0$$

Eine kurze Rechnung zeigt, der Ausdruck auf der linken Seite wird nur für $\cos 2\beta = m_2/m_1$ Null. Daher erreichen im Bereich $0^\circ < \vartheta \leq 90^\circ$ die ϑ -Kurven in Abb. 3.17a ihre Maxima für

$$\sin \beta = \frac{b}{r_1 + r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}}$$

Die gestrichelte Kurve in Abb. 3.17a zeigt, wo die jeweiligen Maximalwerte der ϑ -Kurven liegen. Sie schneidet die ϑ -Achse bei $\vartheta = 90^\circ$ und die $\sin \beta$ -Achse bei $\sin \beta = 1/\sqrt{2}$.

Bevor wir diesen Abschnitt und damit dieses Kapitel schließen, müssen wir kurz auf inelastische Stöße zurückkommen. Bei der obigen Diskussion über elastische exzentrische Stöße, die für den Stoßparameter $b = 0$ zu zentralen Stößen werden, haben wir gesehen, dass im Schwerpunktsystem die Impulsvektoren vor und nach dem Stoß diametral entgegengesetzt sind. Das muss natürlich auch bei einem inelastischen Stoß der Fall sein, da im Schwerpunktsystem der Gesamtimpuls sowohl vor als auch nach dem Stoß Null sein muss. Während also der Streuwinkel von der spezifischen Streusituation in jedem gegebenen inelastischen Stoßszenario abhängt, werden die Impulsvektoren nach einer inelastischen Kollision im Schwerpunktsystem immer gleich groß sein und in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Wie jedoch in Abb. 3.18 skizziert, werden die Impulsvektoren nach dem Stoß aufgrund von $Q > 0$ in Gl. (3.24) kürzer sein als vor dem Stoß. Da der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem gleich Null ist, gilt Gl. (3.32) für $Q \neq 0$ genauso wie für $Q = 1$. Was sich ändert ist allein Gl. (3.32), diese wird mit $Q > 0$ zu

$$\mathbf{v}_1'^2 = \tilde{\mathbf{v}}_1'^2 + \frac{m_2}{m_1 m_1 + m_2} \frac{2Q}{m_1 m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2'^2 = \tilde{\mathbf{v}}_2'^2 + \frac{m_1}{m_2 m_1 + m_2} \frac{2Q}{m_1 m_1 + m_2}$$

Daher wird Gl. (3.34) ersetzt durch

$$\tilde{\mathbf{v}}_1' = \mathbf{u} \sqrt{\mathbf{v}_1'^2 - \frac{m_2}{m_1 m_1 + m_2} \frac{2Q}{m_1 m_1 + m_2}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{v}}_2' = -\mathbf{u} \sqrt{\mathbf{v}_2'^2 - \frac{m_1}{m_2 m_1 + m_2} \frac{2Q}{m_1 m_1 + m_2}}$$

Wenn der beim Stoß auftretende Energieverlust keinen Einfluss auf die Stoßgeometrie oder das Streuverhalten von m_1 und m_2 hat, bleibt die Richtung des Einheitsvektors \mathbf{u} ; genauso als hätte überhaupt kein Energieverlust stattgefunden. In diesem Fall können wir die Ergebnisse bezüglich der Streuwinkel φ und ϑ einfach aus dem Fall $Q = 0$ übertragen, den wir gerade ausführlich besprochen haben. Natürlich sind die gesamte kinetische Energie, die m_1 und m_2 vor dem Stoß besaßen, und die kinetischen Energien, die m_1 und m_2 nach dem Stoß haben werden, verschieden von dem was Abb. 3.17b für den Fall $Q = 0$ zeigt, da wir ja den Energieverlust Q berücksichtigen müssen.

Superelastische Stöße, also Stöße mit $Q < 0$, haben wir hier nicht besprochen. Offensichtlich müssen bei solchen Stößen die Impulsvektoren im Schwerpunktsystem nach dem Stoß länger sein als vor dem Stoß. Allerdings bleiben sie dabei im Schwerpunktsystem sowohl vor als auch nach dem Stoß immer diametral entgegengesetzt, genau wie wir dies

Schwerpunktsystem

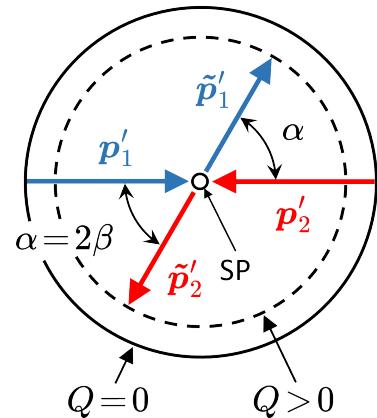


Abb. 3.18

oben für inelastische Stöße mit $Q > 0$ besprochen haben. Alles, was wir bezüglich Stößen mit $Q > 0$ herausgefunden haben, gilt auch für Stöße mit $Q < 0$, wir müssen nur Q durch $-Q$ ersetzen.

4. Energie, Potenziale und Felder

4.1 Energie, Arbeit und Leistung

Bei den Begriffen Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Masse, haben wir normalerweise kein Problem, zu erklären, was diese Dinge sind. Bei Energie ist das anders. Wir kennen verschiedene Energieformen, haben aber keine Erklärung dafür, was Energie wirklich ist. Wir können auf Energiequellen hinweisen und Energiemengen messen, aber es gibt keine bestimmte Körpereigenschaft von der wir sagen können, dass es sich um Energie handelt. Vor mehr als einem Jahrhundert entdeckte Albert Einstein, dass Masse multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit im Quadrat eine Energieform ist, das berühmte $E = mc^2$. Wir haben gelernt diese Energie durch Kernspaltung, deren Prozesswärme elektrische Energie erzeugt, zu nutzen. Wir haben diese Energiequelle auch genutzt, um Waffen herzustellen, die weitaus zerstörerischer sind als das, was die Menschheit je zuvor kannte: Atombomben. Bisher konnten wir die Beziehung zwischen Energie und Masse nicht nutzen, um durch Kernfusion Energie zu erzeugen, so wie es Sterne tun. Wir haben jedoch gelernt damit noch verheerendere Waffen als Atombomben zu bauen, thermonukleare Waffen. Kernenergie ist eine von sechs Energieformen, die wir kennen, die anderen sind chemische, elektrische, mechanische, und thermische Energie sowie Strahlungsenergie.

Wir wissen, dass sich die Energiemenge in einem geschlossenen System nie ändert. Eine Energieform kann sich in eine andere Energieform umwandeln, aber die Energiemenge in einem geschlossenen System bleibt konstant. Energieumwandlung ist eine alltägliche Erfahrung: Wenn wir Lebensmittel kochen, wandeln wir elektrische oder chemische Energie in Wärmeenergie um, die natürlich auch die umgebende Luft erwärmt. Unsere Autos wandeln chemische oder elektrische Energie in mechanische Energie um, und wenn wir auf die Bremse treten, wird diese mechanische Energie in Wärmeenergie oder, wie bei manch modernem Auto, teilweise wieder in elektrische Energie umgewandelt. Die Energiequelle der Sonne ist die Kernenergie, wovon ein Teil in Strahlungsenergie umgewandelt

wird, welche Organismen wie Pflanzen in chemische Energie und wir seit kurzem in elektrische Energie umwandeln. Energieerhaltung ist eine Grundprinzip der Physik und mit ihr werden wir uns im Folgenden befassen.

Energieerhaltungssatz

In einem isolierten System bleibt die Gesamtenergie konstant. Energie kann weder erzeugt noch zerstört werden, sie kann nur von einer Energieform in eine andere umgewandelt werden.

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt unmittelbar, dass es unmöglich ist, sogenannte Perpetuum Mobile-Maschinen zu konstruieren, also Maschinen, die ohne externe Energiequelle unbegrenzt weiterlaufen können. Physiker und Tüftler dachten lange Zeit, dass dies möglich wäre. Ähnlich wie Alchemisten an den Stein der Weisen glaubten, der es ihnen ermöglichen würde, gewöhnliche Metalle in Gold zu verwandeln. Die moderne Physik hat in der Tat gezeigt, dass es möglich ist, ein chemisches Element in ein anderes umzuwandeln. Sie hat aber eben auch bewiesen, ein Perpetuum Mobile kann es nicht geben. Daher werden Patentämter Anträge, die vorgeben eine Art Perpetuum Mobile erfunden zu haben, rundweg ablehnen, da die Prüfung derselben reine Zeitverschwendungen wäre.

4.1.1 Potenzielle Energie

Heben wir einen Gegenstand, so nutzen wir unsere Muskelkraft, um der Gewichtskraft $F = mg$ entgegenzuwirken. Aus Erfahrung wissen wir, dieses Heben kostet Energie und je schwerer der Gegenstand, desto mehr Energie wird dazu benötigt. Die Energieänderung eines Körpers, der seinen Ort in einem Schwerkraftfeld ändert, muss also proportional zu seiner Masse sein. Zudem wissen wir, es wäre einfacher, den gleichen Gegenstand auf dem Mond vom Boden zu heben, da die Schwerkraft des Mondes geringer ist. Kombiniert man diese Beobachtungen, so ist klar, dass die Energieänderung jedes in einem Schwerkraftfeld bewegten Körpers, so wie beispielsweise beim Aufheben eines Körpers vom Boden, proportional zur wirkenden Gewichtskraft $F = mg$ sein muss.

Aber was ist mit der Höhe, auf die wir einen Körper heben? Welchen Einfluss hat sie auf seine Energie? Lagern wir zum Beispiel etwas Schweres in einem Regal, das ein unteres Brett einen Meter und ein oberes Brett zwei Meter über dem Boden hat, so verstehen wir intuitiv, dass unsere Hebearbeit bei zwei ansonsten exakt gleichen Körpern unterschiedliche Energieänderungen bewirkt, wenn wir einen davon auf das untere und den anderen auf das obere Brett heben.

Die ortsabhängige Energie eines Körpers in einem Kraftfeld relativ zu einem Bezugspunkt, hier im Beispiel die Erdoberfläche, wird als potenzielle Energie bezeichnet und üblicherweise mit dem Buchstaben U abgekürzt. Um zu verstehen, wie sich diese potenzielle Energie U von Körpern ändert, wenn sie auf ein Regal gehoben werden, lassen wir den Vorgang von der anderen Seite des Regals aus filmen, damit wir nicht im Weg sind, und untersuchen dann anhand der vier in Abb. 4.1 gezeigten Bilder was passiert.

In Bild ① dieses in Abb. 4.1 gezeigten Prozesses, befinden sich zwei schwere Kugeln **A** und **B** mit gleichem Gewicht auf dem Boden vor dem Regal, das ein Brett auf der Höhe $h = 1 \text{ m}$ und ein anderes auf der Höhe $h = 2 \text{ m}$ hat, beide noch leer. Die Situation für beide Kugeln ist in Bild ① identisch, daher sollte auch ihre potenzielle Energie identisch sein. In Bild ② sehen wir, dass die Kugel **A** auf das erste Regalbrett bei $h = 1 \text{ m}$ gehoben wurde. Beide Kugeln haben weiterhin das gleiche Gewicht und die Schwerkraft in einem Meter Höhe und am Boden können wir als identisch betrachten. Der einzige Unterschied ist, dass die Kugeln sich jetzt auf unterschiedlichen Höhen befinden. Die potenzielle Energie, die wir Kugel **A** durch das Heben verleihen, muss proportional zu der Höhe sein, auf die wir sie gehoben haben. Bild ③ zeigt den Prozess des Hebens von Kugel **B** auf das zweite Regalbrett auf halbem Weg. In diesem Moment ist die Situation für beide Kugeln wieder identisch und daher sollten ihre jeweiligen potenziellen Energien identisch sein. Schließlich zeigt Bild ④ das abgeschlossene Heben von Kugel **B** auf das zweite Regalbrett. Was können wir über die potenzielle Energie der in Bild ④ gezeigten Kugeln sagen? Für Kugel **A** hat sich seit Bild ② nichts geändert und ihre potenzielle Energie muss, verglichen zu Bild ①, immer noch proportional zu $h = 1 \text{ m}$ sein. Was Kugel **B** betrifft, so sehen wir in Bild ④ den Schritt von Bild ③ wiederholt, mit dem Unterschied, dass der Hebeschritt in Bild ③ für Kugel **B** bei $h = 0 \text{ m}$ und in Bild ④ bei $h = 1 \text{ m}$ begann. Daher muss Kugel **B** in Bild ④ die doppelte potenzielle Energie haben wie Kugel **B** in Bild ③. Die Folgerung ist, die potenzielle Energie U eines Körpers, den wir im Schwerefeld der Erde auf die Höhe h heben, muss gegeben sein durch

$$U = mgh$$

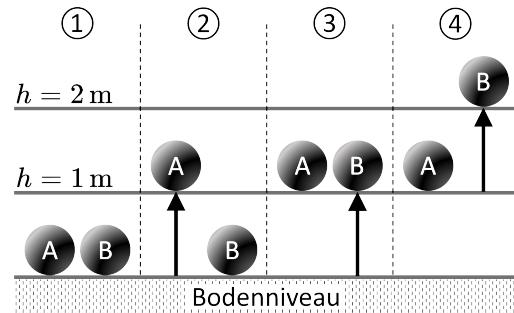


Abb. 4.1

Die Bezeichnung potenzielle Energie sagt uns, es handelt sich um gespeicherte Energie, die freigesetzt werden kann. Heben wir einen Körper, so erhöhen wir seine potenzielle Energie, lassen wir ihn los, wandelt sich diese potenzielle Energie in kinetische Energie

um, schlägt der Körper auf dem Boden auf, wird diese in andere Energieformen umgewandelt. Ist der Körper ein Ei, wissen wir was passiert, das Ei zerbricht. Ist der Körper ein Gummiball, wird seine kinetische Energie in elastische Energie und dann wieder in kinetische Energie umgewandelt, die wiederum zu potenzieller Energie wird, um dann wieder zu kinetischer Energie zu werden usw. Dabei gibt es aber Energieverluste und irgendwann bleibt der Gummiball auf dem Boden liegen. Die potenzielle Energie, die ein Körper aufgrund seiner Position im Gravitationsfeld der Erde besitzt, ist nur eine Art potenzieller Energie. Eine andere ist die elektrostatische potenzielle Energie eines geladenen Körpers, der sich an verschiedenen Orten im elektrischen Feld eines anderen geladenen Körpers befindet. Gravitations- und elektromagnetische Felder werden von massiven oder elektrisch geladenen Körpern erzeugt und die potenzielle Energie eines Körpers in diesen ist eine Funktion seiner relativen Position zu anderen Körpern. Es gibt aber Formen potenzieller Energie, bei denen dies anders ist, z.B. bei der mechanischen potenziellen Energie einer gedehnten oder zusammengedrückten Feder oder der potenziellen Energie, die in einem Körper in Form von chemischer Energie gespeichert ist.

4.1.2 Arbeit und Leistung

Das Heben von Gewichten, wie im obigen Kugelbeispiel, nennen wir Arbeit. Dabei nutzen wir die in unserem Körper gespeicherte Energiemenge zur Erhöhung der potenziellen Energie der Kugeln. Leisten wir Arbeit, dann transferieren wir also einen Teil unserer Energie auf andere Körper. Um diesen Energieverlust auszugleichen, nehmen Organismen wie wir Nahrung auf. Die Menge an Arbeit, die wir leisten, ist bestimmt durch die Kraft, die wir überwinden müssen, im obigen Beispiel die Gewichtskraft, und durch die Distanz, über die wir dies tun müssen. Kräfte haben eine Richtung und wenn wir einen Körper in eine Richtung bewegen, die orthogonal zu dieser Kraft ist, leisten wir keine Arbeit. Wenn wir im obigen Beispiel also eine der Kugeln seitlich auf dem Boden oder auf dem unteren oder oberen Regalbrett bewegen, verrichten wir keine Arbeit, da die seitliche Komponente der Gewichtskraft Null ist. Dazu müssen wir annehmen, dass es keine Reibung gibt, und wir müssen auch vernachlässigen, dass die Änderung des Bewegungszustands einer Kugel vom Ruhe- in den Rollzustand

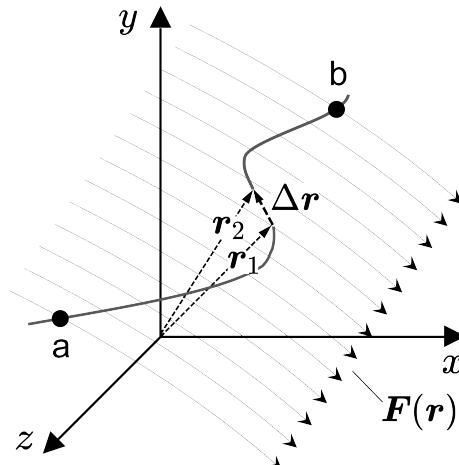


Abb. 4.2

Energie erfordert. Letzteres ist jedoch nicht potenzielle sondern kinetische Energie, die wir übertragen, indem wir eine seitliche Bewegung unserer Hand in eine seitliche Bewegung der Kugel umwandeln. Abb. 4.2 zeigt einen Massenpunkt in einem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ der sich von Punkt **a** zu Punkt **b** bewegt. Für die inkrementelle Arbeit ΔW , seine schrittweise Verschiebung von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 über die Strecke $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ im Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, können wir schreiben

$$\Delta W = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \Delta\mathbf{r}$$

wobei $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ den Kraftvektor am Ort \mathbf{r} in der Mitte zwischen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 bezeichnet. Teilen wir die Strecke zwischen den Punkten **a** und **b** in viele kleine Weginkremente auf und summieren alle Beiträge, so können wir für die gesamte geleistete Arbeit, um den Massenpunkt von **a** nach **b** zu bewegen, schreiben

$$W = \sum_{i=1}^N \Delta W_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \Delta\mathbf{r}_i$$

wobei $\Delta\mathbf{r}_1$ das erste Weginkrement nach dem Punkt **a** und $\Delta\mathbf{r}_N$ das letzte Weginkrement vor Punkt **b** ist. Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ wird die Summe in der obigen Gleichung zum sogenannten Arbeitsintegral

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{4.1}$$

Damit kann man die Arbeit berechnen, die beim Bewegen einer Masse in einem Schwerkraftfeld geleistet wird. Ebenso die Arbeit, die nötig ist um ein elektrisch geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld zu bewegen. Bei Änderungen der potenziellen Energie im Schwerefeld spricht man von einer Änderung der potenziellen Gravitationsenergie, wogegen man bei der Bewegung einer Ladung im elektrostatischen Kraftfeld einer anderen Ladung von Änderungen der elektrostatischen potenziellen Energie spricht. Als Beispiel zur Veranschaulichung mechanischer Arbeit müssen wir uns nur die mechanische Feder und ihre Rückstellkraft betrachten, die wir bereits zuvor besprochen haben. Da die Federkraft $F = -kz$ ist, beträgt die Arbeit, welche die Feder verrichtet, um die Gewichtskraft einer Masse durch eine Federdehnung z zu kompensieren

$$W = \int_0^z F dz' = -k \int_0^z z' dz' = -\frac{kz^2}{2}$$

Die geleistete Arbeit ist mit einem Minuszeichen versehen, da sie einen Energiegewinn der Feder bewirkt. Die gespeicherte potenzielle Energie, die auf die Feder übertragen wird, ist natürlich positiv und daher gilt für die potenzielle Energie der Feder

$$U_{Feder} = -W = \frac{kz^2}{2} \quad (4.2)$$

Das funktioniert auch umgekehrt, d.h., anstatt die Feder auszudehnen, können wir sie zusammendrücken. In diesem Fall ist die Federdehnung negativ, aber da wir jetzt von $-z$ nach 0 integrieren müssen, ist die resultierende Arbeit wieder negativ. Dem muss so sein, denn unabhängig davon, ob wir sie strecken oder komprimieren, die in der Feder gespeicherte Energie wird größer. Damit beschreibt die potenzielle Energie einer Feder als Funktion der Dehnung eine Parabel.

Der Integrand in Gl. (4.1) ist das Vektorprodukt der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft \mathbf{F} und der inkrementellen Wegstrecke $d\mathbf{r}$ um welche dieser im Kraftfeld bewegt wird. Offensichtlich trägt nur die Bewegung des Massenpunkts in Richtung der Kraft zur geleisteten Arbeit bei, nicht aber die Bewegung senkrecht zur wirkenden Kraft \mathbf{F} . Nehmen wir als Beispiel wieder die Schwerkraft, die in unserem gewählten Koordinatensystem die Komponenten $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$ hat. Nur eine Bewegung entlang der z -Achse trägt zum Arbeitsintegral in Gl. (4.1) bei. Damit erfordert die Bewegung eines Massenpunkts im Schwerefeld der Erde von einer Höhe z_1 auf eine Höhe z_2 über dem Boden die Arbeit

$$W = \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{z_1}^{z_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

woraus folgt

$$W = -mg(z_2 - z_1) = -mgh$$

wobei $h = z_2 - z_1$ der Höhenunterschied ist, um den der Massenpunkt entgegen der Schwerkraft angehoben wurde. Diese zum Heben des Massenpunkts aufgewendete Energie hat seine potenzielle Energie um $U_{Schwerkraft}$ erhöht. Da die Gesamtenergie des geschlossenen Systems gleich bleiben muss, d.h. $W + \Delta U_{Schwerkraft} = 0$, folgt daraus

$$\Delta U_{Schwerkraft} = mgh = -W$$

Für die potenzielle Energie einer Masse im Gravitationsfeld der Erde zählt nur die vertikale Distanz, um die wir sie anheben oder absenken, denn nur dadurch ändert sich ihre potenzielle Energie und nicht durch seitliche Bewegungen. Wenn wir einen Körper zuerst anheben / absenken und ihn dann wieder auf seine ursprüngliche Position im Schwerefeld absenken / anheben, muss seine potenzielle Energie mit der potenziellen Energie identisch sein, die der Körper hatte, bevor wir begannen, ihn zu bewegen. Kräfte, die wie die Schwerkraft diese Eigenschaft haben, heißen konservative Kräfte.

Konservative Kraft

Die von einer konservativen Kraft verrichtete Arbeit, um einen Massenpunkt zwischen zwei Orten zu bewegen, ist unabhängig vom Weg. Für einen geschlossenen Weg ist die verrichtete Arbeit daher genau Null, d.h., die Energie ist konserviert und geht nicht verloren, daher die Bezeichnung «konservative Kraft».

In Bezug auf einen Referenzort \mathbf{r}_0 , an dem die potenzielle Energie eines Massenpunkts per Definition Null sein soll, ist seine potenzielle Energie als Funktion seines Ortsvektors \mathbf{r} gegeben durch

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\xi) d\xi \quad (4.3)$$

Die im Gravitationsfeld gewonnene potenzielle Energie $U(\mathbf{r})$ ist das Negative der Arbeit $W(\mathbf{r})$, die ein Maß für die Energie ist, die aufgewendet werden musste um den Massenpunkt von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} im Schwerkraftfeld zu bewegen. Mit

$$W(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = 0$$

ändert sich die Gesamtenergie nicht. $U(\mathbf{r}) = -W(\mathbf{r})$ ist nichts anderes als die Energieerhaltung und gilt für alle konservativen Kräfte. Das macht offensichtlich auch die oben diskutierte Federkraft zu einer konservativen Kraft, obwohl die mechanische potenzielle Energie der Feder nicht mit irgendeinem Kraftfeld wie der Gravitation oder den elektromagnetischen Kräften zusammenhängt.

In Gl. (4.3) ist $U(\mathbf{r})$ eine Funktion der oberen Integrationsgrenze \mathbf{r} . Dadurch sind die jeweiligen Kraftkomponenten $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ gegeben durch

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$$

beziehungsweise in Vektorform

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(\mathbf{r}) \quad (4.4)$$

Die Änderungsrate der potenziellen Energie $U(r(t))$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt} &= \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \text{grad } U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla U \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{F} = -\text{grad } U(r)$ wird daraus

$$\frac{dU}{dt} = \nabla U \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4.5)$$

Wie schnell Arbeit verrichtet wird oder wie schnell verschiedene Energieformen in einer bestimmten Zeitspanne erzeugt oder verbraucht werden, bemisst die Leistung, üblicherweise mit dem Buchstaben P bezeichnet. Am Beispiel der Arbeit stellen wir fest, dass (mit \mathbf{F} unabhängig von der Zeit) Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit ist:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4.6)$$

Damit gilt

$$\frac{dU}{dt} = -P = -\frac{dW}{dt}$$

4.1.3 Kinetische Energie

Betrachten wir nun, wie in Abb. 4.3 skizziert, eine Masse m , die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 bewegen soll und auf die, beginnend zum Zeitpunkt $t = 0$, eine konstante Beschleunigung a wirken soll:

$$\ddot{x} = a \quad \text{und} \quad \dot{x} = v(t) = a \cdot t + v_0$$

Nochmalige Integration über die Zeit liefert das Ergebnis, das wir bereits aus Gl. (2.5) kennen, nämlich, die Masse m befindet zum Zeitpunkt t am Ort

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Dabei ist x_0 der Ort, an dem sich die Masse m zum Zeitpunkt $t = 0$ befand. Ohne Einschränkung kann man $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ wählen. Im Zeitintervall t hat die Masse m dann die Strecke

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

zurückgelegt und bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v(t)}{a}$$

Setzt man diesen Ausdruck für t in die Gleichung für die zurückgelegte Strecke ein, erhält man

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}$$

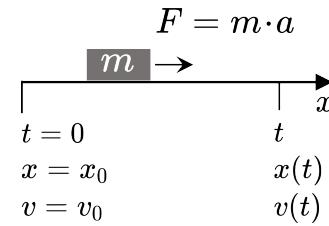


Abb. 4.3

Die Energie E_{kin} , die die Masse m zum Zeitpunkt t besitzt, entspricht der Arbeit, die nötig ist, um sie von x_0 nach $x(t)$ zu bewegen (keine Reibungsverluste). Diese Arbeit ist das Produkt aus der Kraft, die aufgewendet werden musste, mal der Länge der Strecke, über die dies nötig war, also

$$E_{kin} = F \cdot x(t) = ma \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{1}{2} mv^2 = T \quad (4.7)$$

E_{kin} , oft auch mit T bezeichnet, ist die kinetische Energie, die die Masse m zum Zeitpunkt t besitzt, in diesem Fall seine Translationsenergie. Wie wir später sehen werden, ist kinetische Energie auch mit der Rotation eines Körpers verbunden. Die hier gegebene Ableitung der Translationsenergie eines Massenpunkts, zeigt, dass die geleistete Arbeit vollständig in kinetische Energie umgewandelt wurde. Dies ist eine Variante des Energieerhaltungssatzes, der besagt, dass die Gesamtenergie in einem geschlossenen System konstant ist. In einem geschlossenen System geht Energie weder verloren noch kann Energie gewonnen werden, sie kann lediglich von einer Energieform in eine andere Energieform umgewandelt werden. Unter der Annahme, dass die Masse m des Massenpunkts eine Konstante ist, ist die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie T

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \right) = m \cdot \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = P(t) \quad (4.8)$$

wobei $P(t)$ mit Gl. (4.6) die Leistung ist. Nach Gl. (4.8) ist die Änderungsrate der kinetischen Energie eines Massenpunkts gleich der Leistung, die von der auf ihn wirkenden Kraft erbracht wird. Ein Vergleich von Gl. (4.8) und Gl. (4.5) zeigt, dass

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(T+U)}{dt} = 0$$

Offensichtlich ist die Änderungsrate der Summe aus kinetischer und potenzieller Energie eines Massenpunkts Null. Daher ist die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie eines Massenpunkts eine Konstante, was wiederum eine Variante des Energieerhaltungssatzes darstellt. Mit anderen Worten: E_0 , die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie des Massenpunkts am Ort \mathbf{r}_0 zum Zeitpunkt t_0 , ist gleich E_1 , der Gesamtenergie des Massenpunkts am Ort \mathbf{r}_1 zum Zeitpunkt t_1

$$T + U = E \quad ; \quad E = E_0 = E_1 = const \quad (4.9)$$

So wie die potenzielle Energie eines Massenpunkts, der in einem Gravitationsfeld von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} bewegt wird, durch Gl. (4.3) gegeben ist, erhält man die mit dieser Bewegung verbundene Änderung der kinetischen Energie durch Integration von Gl. (4.8):

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt \quad (4.10)$$

Hier ist t_0 der Zeitpunkt, zu dem sich der Massenpunkt bei \mathbf{r}_0 befand, und t_1 der Zeitpunkt, zu dem er bei \mathbf{r} ankam. Wie lange es dauert, bis er von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} gelangt, können wir mit Gl. (4.9) berechnen. Betrachten wir der Einfachheit halber einen Massenpunkt, die sich parallel zur x -Achse bewegt. Dann folgt aus Gl. (4.9), dass

$$\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) = E = \text{const}$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und Trennung der Variablen ergibt

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x(t))]} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt$$

Durch einfache Integration folgt daraus

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(\xi)]}} \quad \rightarrow \quad t = t(x) \Rightarrow x = x(t)$$

Dies zeigt, wie man im Prinzip die Bahnkurve eines Massenpunkts, der sich in einem Gravitationsfeld bewegt, aus Gl. (4.9) erhalten kann. Dazu muss man allerdings $U(\mathbf{r})$ kennen. Dies gilt natürlich auch für Bewegungen in anderen Kraftfeldern, die durch konservative Kräfte erzeugt werden, wie beispielsweise für die Bewegungen geladener Teilchen in einem elektromagnetischen Feld.

4.2 Potenziale und Felder

Newton's Gravitationsgesetz (siehe Abschnitt 3.1.2) weist eine Besonderheit auf, die bereits Newton und seine Zeitgenossen beunruhigte: Fernwirkung. Ohne Medium, das die Schwerkraft überträgt, muss die gegenseitige Wechselwirkung der beiden Massen augenblicklich sein, egal wie weit sie voneinander entfernt sind. Jede geringfügige Änderung der Position eines Planeten müsste sich beispielsweise sofort auf alle anderen Planeten auswirken, was später als Fernwirkung bezeichnet wurde. In Newtons eigenen Worten:¹

„...tis conceivable, that inanimate brute matter should (without a divine impression) operate upon & affect other matter without mutual contact: as it must, if gravitation be essential and inherent in it.“

¹Zitiert aus Newton's Brief (1692/93) an den Klassikgelehrten Richard Bentley (1662 - 1742).

Heute wissen wir, Newton und seine Zeitgenossen hatten Recht mit ihren Bedenken. Allerdings funktionierte Newtons Gleichung außerordentlich gut und bis heute ist sie immer noch eine ausreichend gute Näherung, um die meisten Probleme damit zu lösen. Das 1785 von Charles Augustine de Coulomb (1736 - 1806) entdeckte und nach ihm benannte Coulombsche Kraftgesetz zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen zwei Punktladungen hat dieselbe Struktur wie das Newtonsche Gravitationsgesetz:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = q_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist das von einer stationären Ladung q_2 im Koordinatenursprung erzeugte elektrische Feld, welches auf die Ladung q_1 am Ort \mathbf{r} wirkt. Streng genommen gibt es in der Elektrostatik keine beweglichen Ladungen. Das Coulombsche Gesetz lässt sich so verstehen, dass eine der Ladungen, nennen wir sie q , nur eine winzige Testladung ist, welche die Stärke des von Q erzeugten elektrischen Feldes an verschiedenen Orten vermisst. Wenn q eine so kleine Ladung ist, dass sie das von Q erzeugte elektrische Feld nicht verändert, können wir q auch als eine sich bewegende Testladung betrachten. Das ist streng genommen nicht Elektrostatik, aber elektrodynamische Effekte aufgrund der winzigen bewegten Ladung q können als vernachlässigbar angesehen werden. Daher ist die Lösung der Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass das Coulombsche Gesetz gilt, eine gute Näherung. In Bezug auf das Newtonsche Gesetz gibt es keine solchen Einschränkungen für die Massen m_1 und m_2 (siehe Gl. (3.7) und Gl. (3.8)). Sie können beliebig groß sein und sich relativ zueinander bewegen, ohne die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes zu beeinträchtigen. Obwohl Coulombs Gesetz und Newtons Gesetz strukturell ähnlich sind, unterscheiden sie sich in dieser Hinsicht. Ein weiterer Unterschied besteht natürlich darin, dass im Gegensatz zur Gravitationskraft, die nur eine Ladung (nämlich die Masse) kennt, die elektromagnetische Wechselwirkung positive und negative Ladungen kennt. Die Gravitationskraft hat immer eine anziehende Wirkung, die Coulomb-Kraft kann sowohl eine anziehende als auch eine abstoßende Wirkung haben und auf ungeladene Körper hat sie überhaupt keine Wirkung.

Um die Parallelen zum Newtonschen Gesetz hervorzuheben, können wir das Coulombsche Gesetze so schreiben, wie wir das in Abschnitt 3.1.2 für das Newtonsche Gesetz getan haben. Gemäß der gleichen Konvention wie in Abschnitt 3.1.2 soll \mathbf{F}_{12} die Kraft sein, die eine Ladung q_2 auf eine Ladung q_1 ausübt, die sich gemessen von q_2 am Ort \mathbf{r}_{21} befindet. Da die Kraft abstoßend ist, wenn beide Ladungen positiv oder beide Ladungen negativ sind, wie in Abb. 4.4a gezeigt, dürfen wir der Kraftgleichung kein Minuszeichen voranstellen, d.h.

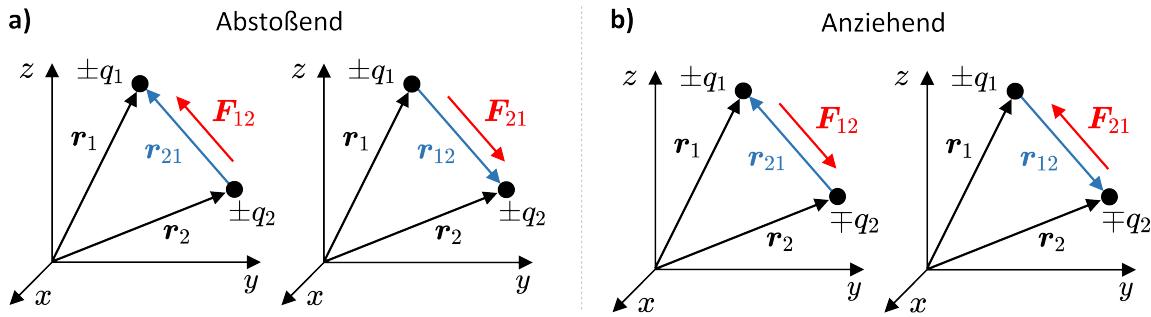


Abb. 4.4: Orientierungen der Abstands- und Kraftvektoren im Coulombschen Gesetz: (a) für Ladungen gleicher Polarität; (b) für Ladungen entgegengesetzter Polarität. (Vergleiche die entsprechenden Diagramme für Newtons Gesetz in Abb. 3.7.)

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} \quad (4.13)$$

Für ungleiche Ladungspolarität, wie in Abb. 4.4a gezeigt, wird die Kraft anziehend und die Gleichungen für \mathbf{F}_{12} und \mathbf{F}_{21} sind

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} \quad (4.15)$$

Daraus folgt in jedem Fall, egal ob abstoßende oder anziehende Wechselwirkung, dass

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Solange wir die Einschränkungen in Bezug auf die Testladung im Auge behalten, gibt es keinen Unterschied zwischen dem Newtonschen- und dem Coulombschen Gesetz, außer dass Newtons Schwerkraft immer anziehend ist, während Coulombs Kraft anziehend oder abstoßend sein kann. Eine weitere Gemeinsamkeit ist, dass beide Gesetze scheinbar eine Fernwirkung erfordern. Mit der Entwicklung der Theorie des Elektromagnetismus wurde jedoch klar, dass sich nichts schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Da es sich bei der Fernwirkung in Bezug auf die Gesetze von Newton und Coulomb um eine instantane Wechselwirkung zwischen Massen oder Ladungen handelt, wie weit diese auch immer voneinander entfernt sind, musste die Geschwindigkeit der Wechselwirkung unendlich sein. Das Problem wurde durch die Einführung raumdurchdringender Gravitations- und elektromagnetischer Felder gelöst die dem Gravitationspotenzial oder dem elektrischen Potenzial an jedem Raumpunkt einen Wert zuordnen den eine Testmasse oder eine

Testladung registrieren würde. Anstatt Wechselwirkung mit unendlicher Geschwindigkeit wie es die Fernwirkung verlangt, wird die Wechselwirkung zwischen zwei Massen oder Ladungen von raumdurchdringenden Feldern vermittelt.

Diese Felder können Skalar-, Vektor- oder Tensorfelder sein, d.h., sie sind an jedem Punkt im Raum entweder durch einen Skalar-, eine Vektor- oder eine Tensorgröße gekennzeichnet. Das Gravitationspotential ist ein Beispiel für ein Skalarfeld, da sein Wert an jedem Punkt im Raum ein Skalarwert ist. An der Erdoberfläche hat das Schwerefeld die Stärke g . Wenn man sich von der Erde entfernt, nimmt der Wert von g ab (siehe Gl. (3.7)). So wie die potenzielle Energie im Gravitationsfeld durch die Arbeit definiert ist, die erforderlich ist, eine Testmasse von Punkt A nach Punkt B zu bewegen (siehe Gl. (4.1)), so ist die elektrostatische potenzielle Energie bestimmt durch die Arbeit die erforderlich ist, eine Testladung im elektrostatischen Feld von Punkt A nach Punkt B zu bewegen. Das elektrostatisch Potenzial ist wie das Gravitationspotenzial mit einem Skalarfeld verbunden. Im Gegensatz dazu ist das elektromagnetische Feld ein Beispiel für ein Vektorfeld, da jedem Punkt im Raum zwei Vektorgrößen zugeordnet sind, die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und die magnetischen Feldstärke $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, genauer gesagt, der Betrag $|\mathbf{E}|$ und die Richtung von \mathbf{E} sowie der Betrag $|\mathbf{B}|$ und die Richtung von \mathbf{B} . Beispiele für Tensorfelder sind starre Körper unter Spannung und / oder Dehnung, die an jedem Punkt im Körper durch einen Spannungs- und / oder Dehnungstensor quantifiziert werden.

Die Diskussion in diesem Kapitel beschränkt sich auf ein grundlegendes Verständnis des Feldkonzepts im Kontext der skalaren Potenzialfelder, die mit der Gravitation und der elektrostatischen Wechselwirkung verbunden sind. Nebenbei werden wir aber auch etwas über die jeweiligen Vektorfelder der Schwerkraft und der elektrostatischen Kraft lernen.

Wir beginnen mit der Schwerkraft. Der Einfachheit halber betrachten wir eine kleine Masse m im Gravitationsfeld einer sehr viel größeren Masse M die sich im Koordinatenursprung befinden soll. Mit Gl. (4.3) und der Schwerkraft \mathbf{F}_G , ist die potenzielle Energie U_G der Masse m im Schwerefeld von M gegeben durch:

$$U_G(\mathbf{r}) = - \int_0^r \mathbf{F}_G(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = m \int_0^r G \frac{M}{|\boldsymbol{\xi}|^3} \cdot \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\xi} = m\Psi(\mathbf{r}) \quad (4.16)$$

Genauso erhalten wir unter Verwendung von Gl. (4.11) für die Coulomb-Kraft \mathbf{F}_C für die potenzielle Energie U_E einer Testladung q im elektrostatischen Feld einer im Koordinatenursprung sitzenden viel größeren Ladung Q

$$U_E(\mathbf{r}) = - \int_0^r \mathbf{F}_C(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = -q \int_{r_0}^r \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = q\Phi(\mathbf{r}) \quad (4.17)$$

wobei $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ das von der stationären Punktladung Q erzeugte elektrische Feld ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{r} \quad (4.18)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist ein Vektorfeld, während $\Phi(\mathbf{r})$ in Gl. (4.17) ein Skalarfeld ist, welches das elektrostatische Potenzial beschreibt das eine Ladung q an jedem gegebenen Punkt des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ registriert. Können wir der Schwerkraft ebenfalls ein Vektorfeld zuordnen? Ja, das können wir in der Tat. Genauso wie wir die auf eine elektrische Ladung q in einem elektrostatischen Feld wirkende Kraft schreiben können als

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

so können wir die auf eine Masse m wirkende Gravitationskraft schreiben als

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$$

Normalerweise schreiben wir die Gleichung für die Schwerkraft auf der Erdoberfläche als $\mathbf{F}_G = m \cdot g \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$, wobei wir die Richtung der Schwerkraft mit einem Einheitsvektor angeben, der zum Erdmittelpunkt zeigt. Wir wissen aber mit Gl. (3.11), dass g keine Konstante ist, sondern mit r^{-2} skaliert, wobei r der Abstand von der Erdoberfläche ist. Betrachtet man ein einfaches System wie z.B. die Masse eines Apfels m und die Masse der Erde M , so können wir das Gravitationsvektorfeld der Erde schreiben als

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{r} \quad (4.19)$$

Behandelt man die Erde als Massenpunkt, d.h., die gesamte Masse befindet sich im Erdmittelpunkt, und setzt man für die Erdmasse $M = M_E = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg ein, so erhält man für $|\mathbf{g}(\mathbf{r})|$ am Ort der Erdoberfläche, also $r = R_E = 6371$ km den korrekten Wert $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Wie wir zuvor gesehen haben, impliziert Gl. (4.3), wovon Gl. (4.16) eine Neuformulierung ist, dass $\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = -\nabla U_G(\mathbf{r})$. Wenn wir uns auf die Erde und Massen im Schwerefeld der Erde beschränken, können wir dies mit Gl. (4.19) umschreiben als

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U_G(\mathbf{r}) = -m\nabla\Psi(\mathbf{r}) \quad (4.20)$$

Ebenso folgt aus Gl. (4.17), dass

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U_E(\mathbf{r}) = -q\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

Für die Beziehungen zwischen den jeweiligen Skalar- und Vektorfeldern folgt daraus

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\Psi(\mathbf{r}) \quad (4.22)$$

und

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (4.23)$$

Das Schwerkraftpotenzial und das Coulomb-Potenzial sind Beispiele für Skalarfelder, während die Schwerkraft und die Coulomb-Kraft Beispiele für Vektorfelder sind. Vektorfelder, die als Gradient eines Skalarfeldes geschrieben werden können, wie $\mathbf{F}_G(\mathbf{r})$ und $\mathbf{F}_C(\mathbf{r})$ in Gl. (4.20) und Gl. (4.21), werden auch als Gradientenfelder bezeichnet. Ist eine Kraft der Gradient eines Skalarfeldes dann ist sie, weil das Linienintegral über einen geschlossenen Weg in einem Gradientenfeld immer verschwindet, automatisch eine konservative Kraft. Die Vektorfelder $\mathbf{F}_G(\mathbf{r})$ und $\mathbf{F}_C(\mathbf{r})$ haben beide die Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\alpha \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4.24)$$

wobei α für die Schwerkraft immer positiv ist und für die Coulomb-Kraft positiv oder negativ sein kann. An jedem Punkt (x, y, z) im Raum ist dem Kraftfeld ein Kraftvektor $\mathbf{F}(x, y, z)$ zugeordnet, der eine Richtung und eine Größe hat

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{\alpha}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z)$$

und

$$|\mathbf{F}(x, y, z)| = \frac{|\alpha|}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Abb. 4.5 veranschaulicht das Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, z)$ im Fall der Schwerkraft oder einer anziehenden Coulomb-Kraft. Die Pfeile in Abb. 4.5 markieren die Richtung der Kraft an einem bestimmten Punkt (x, y, z) im Raum und ihre Länge und Größe gibt die Stärke der Kraft im jeweiligen Raumpunkt an. Der Körper im Zentrum von Abb. 4.5, die Quelle des Kraftfeldes, kann eine Masse m , eine Ladung q oder möglicherweise beides besitzen. Offensichtlich muss das Potenzial $V(r)$, welches das Kraftfeld in Gl. (4.24) über $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r)$ erzeugt, eine sphärische Symmetrie besitzen, d.h., sein Wert an einer beliebigen Position (x, y, z) hängt nicht von der Richtung von \mathbf{r} ab, sondern nur vom Betrag $r = |\mathbf{r}|$:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (4.25)$$

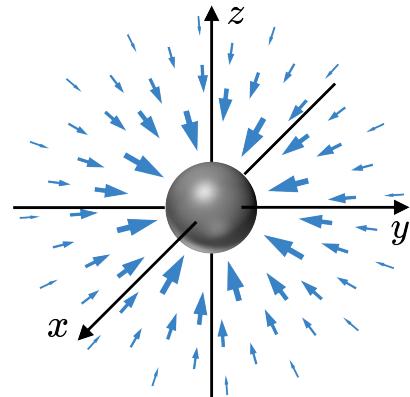


Abb. 4.5

Abhängig davon, ob $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$, ist das Potenzial $V(r)$ entweder anziehend oder abstoßend, wie für die potenzielle Energie $V(r)$ als Funktion von r in Abb. 4.6 skizziert. $V(r)$ ist ein Zentralpotenzial, was besagt, dass die potenzielle Energie eines Körpers im jeweiligen Kraftfeld, wie in Abb. 4.6 dargestellt, nur von der Entfernung vom Ursprung des Zentralpotenzials abhängt. Sind Kraftfelder Gradienten solcher Zentralpotenziale dann hat man es mit Zentralkräften zu tun, deren Wirkungslinien, wie in Abb. 4.5 skizziert, immer auf ein Kraftzentrum gerichtet sind.

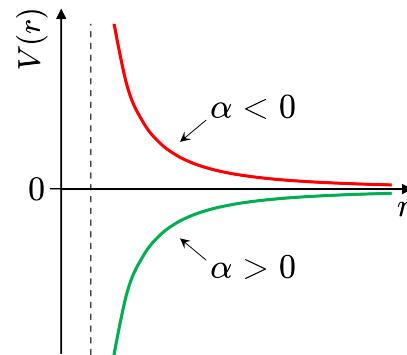


Abb. 4.6

Konservative Zentralkraft

Eine Zentralkraft ist konservativ, wenn ihre Stärke nur von der Größe des Abstands $|\mathbf{r}|$ vom Zentrum der Kraft abhängt.

Daher gilt für Potenziale, die Ursache konservativer Zentralkräfte sind

$$U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|) = V(r)$$

und für die konservativen Kräfte selbst gilt

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \text{grad } r$$

In kartesischen Koordinaten mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

erhält man z.B. für die Ableitung nach der x -Koordinate

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

und analog für die Ableitungen nach y und z . Damit folgt

$$\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \text{grad } r = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

was für ein Potenzial $V(r)$ in der Form von Gl. (4.25) die Kraftgleichung von Gl. (4.24) ergibt, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

4.3 Beispiele für Felder

Bei der obigen Einführung in das Feldkonzept gingen wir davon aus, dass die Quelle, die Gravitations- oder elektrostatische Felder erzeugt, jeweils ein Massenpunkt oder eine Punktladung ist. Zudem wurde nur die Anziehungs- oder Abstoßungskraft zwischen jeweils zwei solchen Körper betrachtet. Bei Elementarteilchen wie Elektronen oder Protonen ist die Annahme punktförmiger Ladungen gerechtfertigt. Aus Erfahrung wissen wir jedoch, dass größere Objekte elektrisch neutral sein oder eine negative bzw. positive Nettoladung tragen können. In den beiden letztgenannten Fällen sind diese Nettoladungen darauf zurückzuführen, dass ein Körper ungleiche Mengen der winzigen negativen oder positiven Ladungsträger besitzt. Das Ergebnis dieses Ungleichgewichts ist eine makroskopische Ladungsverteilung, die mit einem viel größeren Objekt als einer Punktladung verbunden ist. Was Massen betrifft, so wird unsere tägliche Erfahrung von großen Massen dominiert, insbesondere von der großen Masse der Erde. Aber im Universum gibt es noch viel größere Massen, angefangen bei der Sonne, die das 333 060-fache der Masse der Erde besitzt. Dichte und Masse der Sonne unterscheiden sich erheblich von denen der Erde, da die Erde ein Gesteinsplanet ist und die Sonne immer noch zu etwa 91% aus Wasserstoff, etwas weniger als 8,9% aus Helium, und zum Rest aus verschiedenen Fusionsprodukten besteht. Es gibt im Universum viel massereichere Sterne als die Sonne, deren Masse etwa 99,8% der Masse unseres Sonnensystems ausmacht. Aber Sterne sind nicht die massereichsten Objekte im Universum. Dieser Titel gebührt den sogenannten Schwarzen Löchern, die übrig bleiben, wenn sehr massereiche Sterne unter ihrer eigenen Schwerkraft kollabieren. In gewisser Weise schließt sich damit der Kreis, da Schwarze Löcher Singularitäten im Raum sind, d.h. punktförmige Objekte mit einer enormen Masse, die den Raum um sich herum so stark krümmen, dass nicht einmal Licht entweichen kann; deshalb nennen wir sie Schwarze Löcher.

Abb. 4.5 zeigt das von einem Massenpunkt bzw. einer negativen Punktladung erzeugte sphärisch symmetrische Kraftfeld (die Konvention besagt, der Kraftpfeil zeigt in Richtung einer negativen und weg von einer positiven Ladung). Was lässt sich aus dem bekannten Kraftfeld eines Massenpunkts bzw. einer Punktladung über das von zwei Massenpunkten oder zwei Punktladungen erzeugte Kraftfeld sagen? Hierzu betrachten wir die in Abb. 4.7 skizzierte Situation mit zwei Massen M_1 und M_2 an den Positionen $z = d/2$ und $z = -d/2$ und

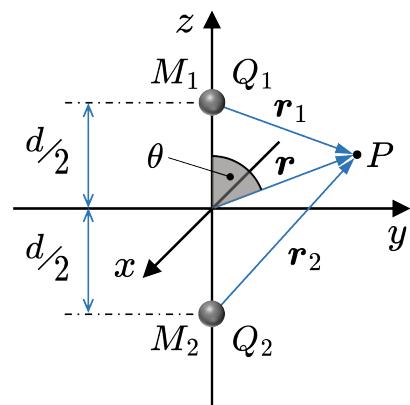


Abb. 4.7

bestimmen die Stärke des Skalarfeldes $\Psi(\mathbf{r})$ im Raumpunkt P . Für konservative Zentralkräfte ist das Schwerkraftpotenzial $U_G(\mathbf{r})$ in Gl. (4.20) durch $V(r)$ aus Gl. (4.25) gegeben. Das Skalarpotenzial $\Psi = \Psi(r)$ in Gl. (4.20) und Gl. (4.22) kann daher nur eine Funktion des Abstands r von der Quelle und nicht von der Richtung \mathbf{r} sein. Das von M_1 und M_2 am Ort von P erzeugte Skalarfeld können wir somit schreiben als

$$\Psi_P(r) = \Psi_1(r) + \Psi_2(r) = -\frac{GM_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}}$$

$\Psi_P(r)$ ist die Überlagerung von $\Psi_1(r)$, erzeugt durch M_1 und $\Psi_2(r)$, erzeugt durch M_2 . Das liegt daran, dass die resultierende Kraft, die eine Testmasse bei P erfahren würde, die Überlagerung der Kräfte ist, die von jeder der beiden Massen auf diese Testmasse wirken. Reduzieren wir den Abstand d der beiden Massen auf Null, vereint das beide Massen im Koordinatenursprung und das resultierende Skalarfeld ist genau das eines einzelnen Körpers mit der vereinten Masse $M_1 + M_2$. Für Abstände $r \gg d$ können wir erwarten, dass das von M_1 und M_2 erzeugt Skalarfeld $\Psi_P(r)$ zunehmend wie das Skalarfeld aussieht, das eine einzelne Masse der Größe $M_1 + M_2$ erzeugen würde. Bei Abständen $r \gg d$, dem sogenannten Fernfeld, können wir in den Quadratwurzeln

$$\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z \mp \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \mp zd + \frac{d^2}{4}} = r \cdot \sqrt{1 \mp \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}$$

den Term $\frac{d^2}{4r^2}$ vernachlässigen und für $x \ll 1$ die Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1 \mp x}} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$$

verwenden. Das Ergebnis ist die sogenannte Fernfeldnäherung für die Potenziale $\Psi_{1/2}$

$$\Psi_{1/2} = -\frac{GM_{1/2}}{r \cdot \sqrt{1 \mp \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \approx -\frac{GM_{1/2}}{r} \cdot \left(1 \pm \frac{zd}{2r^2}\right)$$

Damit und für $M_1 = M_2 = M$ wird aus $\Psi_P(r)$

$$\begin{aligned} \Psi_P(r) &= \Psi_1(r) + \Psi_2(r) \\ &= -\frac{GM}{r} \cdot \left(1 + \frac{zd}{2r^2}\right) - \frac{GM}{r} \cdot \left(1 - \frac{zd}{2r^2}\right) = -\frac{2GM}{r} \end{aligned}$$

Wie erwartet ist weit entfernt von M_1 und M_2 , also für $r \gg d$, das Skalarfeld $\Psi_P(r)$ bei P das der vereinten Masse. Für $M_1 = M_2 = M$ ist das Zentrum dieses Skalarfelds an dem sich diese vereinte Masse «befindet» der Ursprung aber für $M_1 \neq M_2$ muss das natürlich der Massenschwerpunkt von M_1 und M_2 sein.

Damit wissen wir, wie das Schwerkraftpotenzial $\Psi_P(r)$ weit entfernt von M_1 und M_2 , d.h. für Entferungen $r \gg d$ in Abb. 4.7, aussieht. Wie aber sieht das Nahfeld aus, wo $r \approx d$? Wir können davon ausgehen, dass in unmittelbarer Nähe einer dieser Massen das von der jeweiligen Masse erzeugte kugelsymmetrische Schwerkraftfeld dominiert. Angesichts der Symmetrie des Problems muss das Schwerefeld, das durch die Überlagerung der von M_1 und M_2 erzeugten Schwerefelder entsteht, rotationssymmetrisch bezüglich jeder der Koordinatenachsen sein. Um eine bessere Vorstellung von dieser Rotationssymmetrie zu bekommen, können wir eine der Koordinatenachsen auswählen, sagen wir die z -Achse, und dann skizzieren, wie das zweidimensionale Konturdiagramm des Schwerkraftfelds beispielsweise in der yz -Ebene aussieht. Letzteres tun wir, indem wir Kurven zeichnen, bei denen $\Psi(x = 0, y, z) = \text{const}$. Als Beispiel wählen wir für M_1 und M_2 die Massen der Erde und des Mondes und weil die Erde so viel größer als der Mond ist, verschieben wir den Koordinatenursprung in den Erdmittelpunkt. Damit ergibt sich für $\Psi(x = 0, y, z)$ der Ausdruck

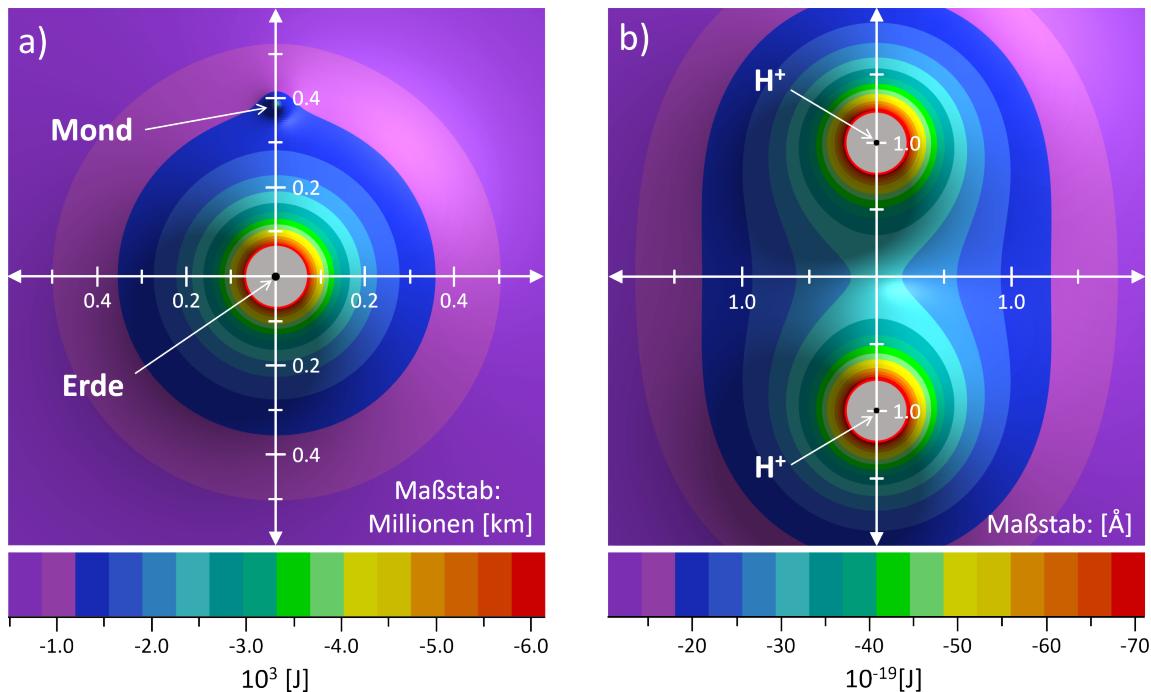


Abb. 4.8: Konturkarten der potenziellen Gravitationsenergie $U_G(r)$ einer 1 kg Testmasse, die sich im Erde-Mond-System bewegt (a) und die elektrostatische potenzielle Energie $U_E(r)$ des Elektrons im Potenzialfeld, das von den zwei Protonen des Wasserstoffatoms erzeugt wird (b). Die Größe der Erde ist maßstabsgerecht, aber die Protonen sind um Größenordnungen kleiner als die Punkte, die sie hier symbolisieren.

$$\Psi(0, x, z) = -\frac{GM_E}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{GM_M}{\sqrt{y^2 + (z - r_{EM})^2}}$$

wobei M_E und M_M die Massen von Erde und Mond sind und r_{EM} der durchschnittliche Erde-Mond-Abstand von 384 400 km. Abb. 4.8a ist nicht die Konturkarte des Gravitationspotenzials sondern der potenziellen Gravitationsenergie $U_G(0, y, z)$ einer $m = 1 \text{ kg}$ Testmasse die sich im Schwerkraftpotenzial des Erde-Mond-Systems bewegt, d.h.

$$U_G(0, y, z) = m \cdot \Psi_P(0, x, z) = \text{const}$$

Innerhalb der grauen Scheibe um die Erde liegen die Äquipotenziallinien so nah beieinander, dass sie im Maßstab des hier gezeigten Diagramms nicht aufgelöst werden können. Das ist eine Konsequenz der r^{-1} -Abhängigkeit des Schwerkraftpotenzials und damit der potenzielle Energie der Testmasse. Wie Abb. 4.7 zeigt, können wir unsere Betrachtungen zu den Feldern die von zwei Massen M_1 und M_2 erzeugt werden, auf Felder übertragen, die durch zwei Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugt werden. Für das elektrostatische Potenzial, das durch zwei Ladungen Q_1 und Q_2 in Abb. 4.7 erzeugt wird, können wir schreiben

$$\Phi(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{\sqrt{y^2 + (z - d/2)^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{y^2 + (z + d/2)^2}} \right)$$

Den Koordinatenursprung belassen wir hier in der Mitte zwischen den beiden Ladungen. Das Wasserstoff-Molekülion H_2^+ ist das einfachste Molekülion. Es besteht aus zwei Protonen, die jeweils die Ladung $+e$ tragen, und einem Elektron mit der Ladung $-e$. Der Gleichgewichtsabstand zwischen den Protonen (H^+) beträgt im Grundzustand des Moleküls etwa 2 Å. Abb. 4.8b zeigt das Konturdiagramm der elektrostatischen potenziellen Energie $U_E(0, y, z)$ des Elektrons, das sich in dem von den beiden Protonen erzeugten Potenzialfeld bewegt, das gegeben ist durch

$$U_E(0, y, z) = -q \cdot \Phi_P(0, x, z) = \text{const}$$

So wie in Abb. 4.8a, zeigen die grauen Scheiben um die Protonen in Abb. 4.8b Bereiche an, in denen die Äquipotenziallinien zu nahe beieinander liegen, als dass sie hier aufgelöst werden könnten. Wegen der Symmetrie des Wasserstoff-Molekülions erhält man den Potenzialverlauf außerhalb der yz -Ebene durch einfache Rotation der in Abb. 4.8b gezeigten Konturkarte um die vertikale Symmetriechse. Auf ähnliche Weise kann man eine dreidimensionale Version der Konturkarte in Abb. 4.8a erzeugen, indem man die für die yz -Ebene berechnete Karte um die vertikale Symmetriechse dreht.

Die Potenziale in Abb. 4.8 sind anziehend. Daher zeigen die auf die 1 kg Testmasse in Abb. 4.8a und das Elektron in Abb. 4.8b wirkenden Kräfte auf die Massen und Ladungen hin, welche diese Potenziale erzeugen. Weil die Masse der Erde viel größer ist als die des Mondes, zeigen die Kraftvektoren nur in der Nähe des Mondes direkt auf ihn.

Das Kraftfeld in Abb. 4.8a wird in Bezug auf die beiden Massen, die das Schwerkraftpotenzial erzeugen, sehr asymmetrisch sein. Näher am Mond oder hinter dem Mond wird die Schwerkraft des Mondes dominieren, aber je näher die Testmasse der Erde ist, desto mehr dominiert das Schwerkraftpotenzial der viel größeren Erdmasse. Anders ist das beim Elektron in Abb. 4.8b, da das von den beiden Protonen erzeugte elektrostatische Potenzial spiegelsymmetrisch ist. Mit Gl. (4.3) wissen wir, dass die schrittweise Bewegung der Testmasse oder des Elektrons entlang eines Weges $d\mathbf{s}$ verbunden ist mit einer inkrementellen Änderung ihrer potenziellen Energie von

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Wählen wir einen Weg $d\mathbf{s}$ entlang einer Äquipotenziallinien, muss dU natürlich Null sein, da die Definition der Äquipotenziallinie eben $dU = 0$ ist. Das bedeutet jedoch, dass, wenn wir die Testmasse in Abb. 4.8a oder das Elektron in Abb. 4.8b entlang einer Äquipotenziallinie bewegen, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ Null sein muss. Ein Vektorprodukt ist nur dann Null, wenn eine der Komponenten Null ist oder wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen. Da weder \mathbf{F} noch $d\mathbf{s}$ Null sind, bedeutet das, dass die Kraftkomponente parallel zu $d\mathbf{s}$, also die Kraftkomponente tangential zur Äquipotenziallinie, verschwinden muss. Bewegt man also die Testmasse oder das Elektron entlang einer Äquipotenziallinie, ist die wirkende Kraft \mathbf{F} an jedem Punkt immer senkrecht zur Tangente an diese Äquipotenziallinie. Damit kann man sich leicht vorstellen, wie die Kraftfelder in Abb. 4.8a und Abb. 4.8b aussehen müssen, da die Kräfte, die auf die beiden Massen bzw. die beiden Protonen zeigen, immer senkrecht zu den Äquipotenziallinien sind.

Was wir über das Fernfeld des von zwei Massen erzeugten Skalarfelds gelernt haben, lässt sich leicht auf ähnlich symmetrische Massenanordnungen erweitern. Ein Beispiel ist die Massenschale konstanter Dichte. Abb. 4.9 zeigt einen Schnitt durch eine solche Massenschale mit Masse M und Volumen V entlang der yz -Ebene. Wie skizziert, stellen wir uns vor, dass die Schale in viele kleine identische Massenelemente m unterteilt ist denen jeweils eine Masse m^* auf der anderen Seite der Schale gegenübersteht. Für jedes dieser Paare m_i und m_i^* liegt die gleiche Situation vor die Abb. 4.7 für ein Paar zeigt. Daher muss das Fernfeld der Massenschale gleich dem einer einzelnen Masse M sein, die sich im Koordinatenursprung, dem Massenschwerpunkt der Massenschale, befindet. Doch wie sieht das Skalarfeld innerhalb der Massenschale aus?

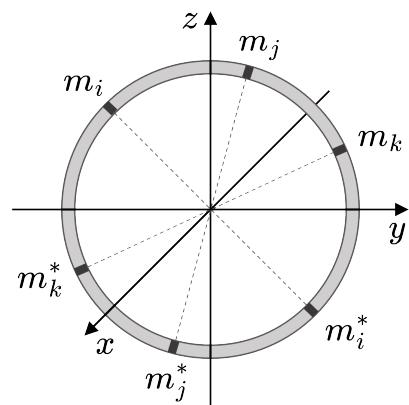


Abb. 4.9

Dazu betrachten wir eine unendlich dünne Schale, wie die in Abb. 4.10 skizzierte graue Massenschale. Zur Veranschaulichung mussten wir der Schale eine gewisse Dicke geben, aber für unsere Berechnungen soll sie verschwindend dünn sein. Die Zeichnung macht sich die Tatsache zunutze, dass dieses Problem symmetrisch ist, da es unabhängig von der Lage der Schnittebene immer gleich aussieht, solange die gewählte Schnittebene die Mitte der Schale enthält. Wir wählen als Schnittebene die yz -Ebene, wobei die y -Achse so ausgerichtet ist, dass sie durch den Punkt P geht, für den wir das von der Massenschale erzeugte Skalarpotenzial berechnen werden. Dazu bestimmen wir den Beitrag der Massen zum Skalarpotenzial in einem bestimmten Abstand s von P . Wie man aus Abb. 4.10 sehen kann, ist die Schalenfläche dA , die diese Massen enthält eine Ringschale, deren Radius $R\sin\theta$ ist und deren Breite durch das Bogenelement $R\cdot d\theta$ gegeben ist. Mit der Gesamtmasse der Schale M und der Oberfläche der infinitesimalen Schale $A = 4\pi R^2$ ist die Masse dm eines infinitesimalen Ringelements

$$dm = \frac{dA}{A}M = \frac{2\pi \cdot R \cdot \sin\theta \cdot R \cdot d\theta}{4\pi R^2}M = \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{2}M$$

Das von einer solchen Ringschale der Masse dm am Ort P erzeugte Skalarpotenzial beträgt dann

$$\Psi_P(r, s, \theta) = -GM \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{2s}$$

Um $\Psi_P(r)$ außerhalb der Massenschale zu bestimmen, müssen wir jetzt nur noch alle Ringschalen mit Abständen $r - R \leq s \leq r + R$ von P addieren. Dazu eliminieren wir $\sin\theta \cdot d\theta$, was wir tun können, indem wir aus Abb. 4.10 die Beziehung ablesen

$$\begin{aligned}s^2 &= (r - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta \\ &= r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta\end{aligned}$$

Differenzieren dieses Ausdrucks nach θ und Umordnen zeigt, dass

$$\frac{\sin\theta d\theta}{s} = \frac{ds}{Rr}$$

Damit können wir nun den Beitrag einer Ringschale im Abstand s von P zu $\Psi_P(r, s)$ schreiben als

$$\Psi_P(r, s) = -\frac{GM}{2Rr}ds$$

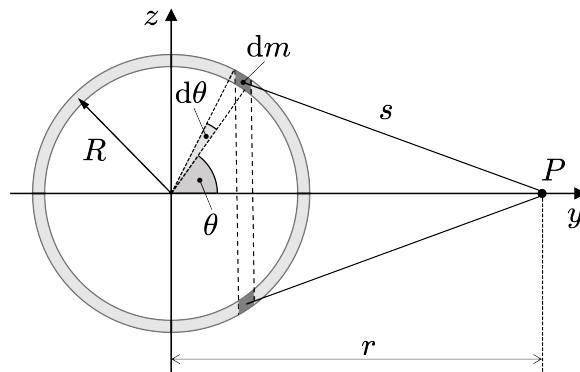


Abb. 4.10

Zuerst berechnen wir $\Psi_P(r)$ außerhalb der Massenschale, also für $r > R$. Dazu summieren wir alle Beiträge von $s = r - R$ bis $s = r + R$

$$\Psi_P(r > R) = -\frac{GM}{2Rr} \int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GM}{2Rr} [(r+R) - (r-R)] = -\frac{GM}{r}$$

Dies ist natürlich das Ergebnis, das wir bereits mithilfe des in Abb. 4.9 skizzierten einfachen Arguments abgeleitet haben, nur folgt es hier aus einer Berechnung. Das hat den Vorteil, dass wir nun auch $\Psi_P(r < R)$, also das Skalarfeld für eine Position P innerhalb der Massenschale, bestimmen können, was wir nicht aus Abb. 4.9 in ähnlicher Weise ableiten können, wie für $\Psi_P(r > R)$. Für ein P auf der y -Achse innerhalb der Massenschale verläuft s von $R - r$ nach $R + r$ und damit

$$\Psi_P(r < R) = -\frac{GM}{2Rr} \int_{R-r}^{R+r} ds = -\frac{GM}{2Rr} [(R+r) - (R-r)] = -\frac{GM}{R}$$

Offensichtlich ist das Schwerkraftpotenzial $\Psi_P(r < R)$ innerhalb der Massenschale konstant. Anstatt der Skalar- und Vektorfelder, die innerhalb und außerhalb einer Massenschale mit dem Radius R erzeugt werden, hätten wir genauso gut eine ladungstragende Schale betrachten können und hätten ein analoges Ergebnis erhalten, d.h.

$$\Phi_P(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{und} \quad \Phi_P(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Die ladungstragende Schale kann entweder ein Nichtleiter sein, der eine gleichmäßige Oberflächenladung trägt, oder sie kann ein Leiter aus Metall sein, aber in beiden Fällen ist die Kugelschale elektrisch isoliert. Aus Gl. (4.22) und Gl. (4.23) folgt für das Kraftfeld einer Massenschale und das elektrische Feld einer Ladungsschale, dass

$$\mathbf{g}(\mathbf{r} > \mathbf{R}) = -\frac{GM}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{r} < \mathbf{R}) = 0$$

sowie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} > \mathbf{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r} < \mathbf{R}) = 0$$

Abb. 4.11a zeigt $\Psi(r)$ für Orte außerhalb und innerhalb der Schale. $\Psi(r)$ beschreibt das Schwerepotenzial als Funktion des Abstands r vom Mittelpunkt einer Massenschale mit dem Radius R . Eine Testmasse m_0 an einem Ort $P(r)$ besitzt daher die potenzielle Energie $U_G(r) = m_0\Psi(r)$ im Schwerkraftpotenzial, das von der Massenschale erzeugt wird. Der Gradient des Skalarfeldes $\Psi(r)$, das Schwerefeld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, ist innerhalb der Schale Null und außerhalb ist dieses Vektorfeld kugelsymmetrisch. Dabei zeigen die Kraftvektoren, die mit dem von der Massenschale erzeugten Schwerkraftfeld verbunden sind, alle zum

Mittelpunkt der Schale, aber enden an derselben, d.h. bei $|r| = R$. Abb. 4.11b zeigt die entsprechende Situation für $\Phi(r)$, das elektrostatische Potenzial, das von einer Hohlkugel erzeugt wird, die eine positive Ladung Q trägt. Eine Testladung q_0 an einem Ort $P(r)$ besitzt die potentielle Energie $U_E(r) = q_0\Phi(r)$ im elektrostatischen Potenzial, das von der geladenen Hohlkugel erzeugt wird. Der Gradient von $\Phi(r)$, das elektrische Feld $\mathbf{E}(r)$, verschwindet innerhalb der Schale und da die Ladung Q positiv ist, zeigen die elektrischen Feldvektoren von der geladenen Hohlkugel weg. Wenn wir Q negativ gewählt hätten, würde das Potenzial ein negatives Vorzeichen tragen und seine Form würde dann dem in Abb. 4.11a gezeigten Schwerkraftpotenzial entsprechen; in diesem Fall würden die elektrischen Feldvektoren ebenfalls in Richtung der Schale zeigen und auf deren Oberfläche enden, genau wie die Kraftvektoren des Schwerefelds in Abb. 4.11a.

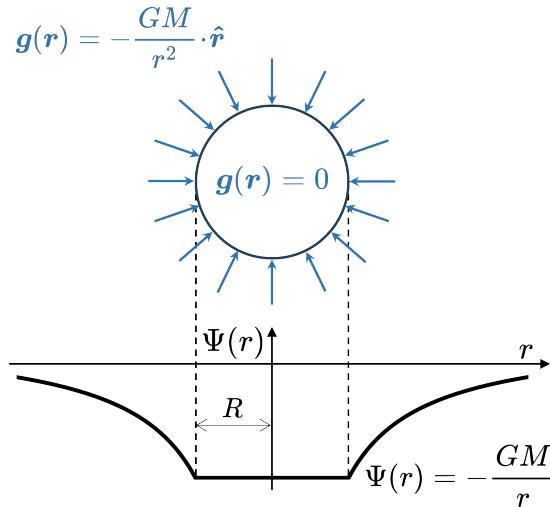
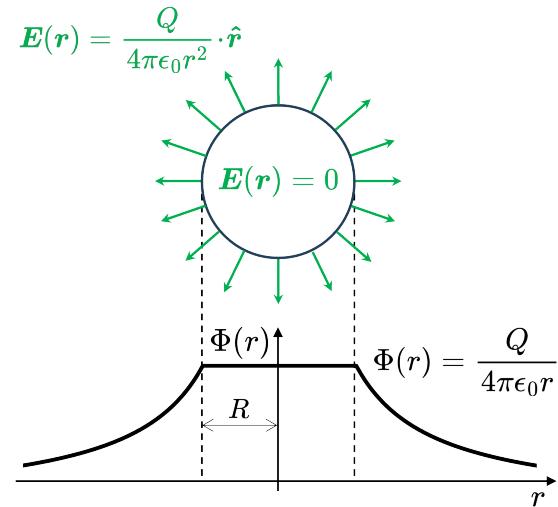
a) „Schwerkraftschale“ der Masse M b) Hohlkugel mit Ladung $+Q$ 

Abb. 4.11: Skalarfeld und Kraftfeld inner- und außerhalb einer «Schwerkraftschale» (a) und Skalarfeld und elektrisches Feld, einer positiv geladenen Hohlkugel, die eine Ladung Q trägt (b). Bei einer negativ geladenen Hohlkugel würde natürlich auch das elektrische Feld im Inneren verschwinden, aber die Pfeile des elektrischen Feldes würden auf die Hohlkugel zeigen da $\Phi(r) \rightarrow -\Phi(r)$.

Die spezielle Situation der in Abb. 4.11a skizzierten «Schwerkraftschale» verdeutlicht den sogenannten Schalensatz, den bereits Newton kannte und bewies. Seine beiden Folgerungen sind

1. Das Gravitationsfeld eines kugelsymmetrischen Körpers wirkt auf andere Körper so als wäre seine gesamte Masse an einem Punkt in seinem Zentrum konzentriert.
2. In einer Hohlkugel wirkt auf einen Körper im Inneren keine Nettogravitationskraft, unabhängig von der Position des Körpers in der Hohlkugel.

Die Beispiele der Massenschale und der geladenen Hohlkugel verdeutlichen die Analogien zwischen skalarem Gravitationspotenzialfeld und Gravitationsfeld auf der einen Seite und skalarem elektrostatischen Potenzial und elektrostatischen Vektorfeld auf der anderen Seite. Aber es gibt grundlegende Unterschiede. Die Schwerkraft ist immer anziehend, während die elektrostatische Kraft anziehend oder abstoßend sein kann. Und obwohl das Gravitationsfeld innerhalb einer Schwerkraftschale zwar genauso verschwindet wie das elektrische Feld innerhalb einer geladenen Hohlkugel, so ist die Situation doch eine ganz andere. Eine leitende Hohlkugel wird z.B. ihr Inneres immer vor elektromagnetischen Feldern abschirmen. Wir alle kennen das, wenn z.B. der Empfang unseres Mobiltelefons beim Betreten eines Aufzugs verschwindet. Dieser ist ein mehr oder weniger perfekter Metallkäfig, der wie eine leitende Hohlkugel wirkt und elektromagnetische Wellen abschirmt. Anders verhält es sich mit der Schwerkraft, wo die von verschiedenen Massen erzeugten Schwerkraftpotenziale nicht abgeschirmt werden können und sich immer summieren. In Abb. 4.11a verschwindet das Feld innerhalb der Massenschale, weil sich die jeweiligen Kräfte, die auf einen Massenpunkt innerhalb der Schale wirken, gegenseitig aufheben. Solange wir die Massenschale isoliert betrachten, verschwindet das Schwerkraftfeld im Innern. Befindet sich jedoch eine andere Masse in ihrer Nähe, so addiert sich deren Schwerkraftpotenzial zu dem der Massenschale. Ist nun der Gradient dieses zusätzlichen Schwerkraftpotenzials im Innern der Massenschale nicht konstant, dann wirkt auf eine Testmasse innerhalb der Massenschale eine Nettokraft.

Mithilfe des Schalensatzes können wir die in Abb. 4.12 dargestellte Situation betrachten, in der wir eine Kugel in ein Loch fallen lassen, das wir irgendwie durch unseren Planeten gebohrt haben. Das Bohren eines Lochs durch den Mittelpunkt der Erde auf die andere Seite unseres Planeten ist natürlich nicht so einfach wie Science-Fiction-Filme das manchmal zeigen. In der Tat ist es wohl unmöglich, da sich das Innere der Erde nicht in einem festen, sondern in einem geschmolzenen Zustand befindet. Hier nehmen wir jedoch an es gäbe so ein Loch und wir lassen in dieses einen Ball in Richtung der anderen Erdseite fallen. Was passiert, wenn der Ball in Richtung Erdmittelpunkt fällt? Nun, weil wir das Loch mit einem sehr kleinen Durchmesser gebohrt haben, können wir die durchbohrte Schale mit dem Erdradius immer noch als eine vollständige Massenschale betrachten und damit den Schalensatz anwenden. Lassen wir den

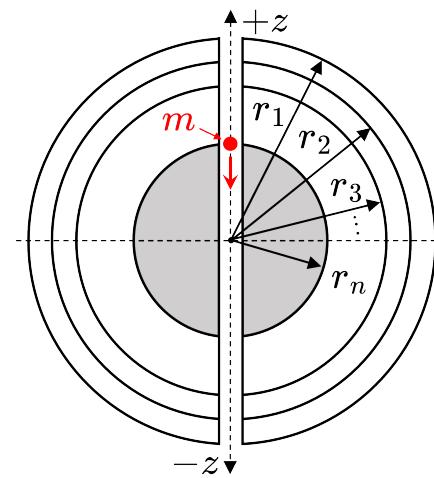


Abb. 4.12

Ball fallen, passiert er eine Schale nach der anderen. Jede Schale, die er zurücklässt, hat keinen Einfluss mehr auf seinen Fall, da das von ihr erzeugte Schwerkraftfeld Null ist. Und das gilt nicht nur für die erste Schale, die in Abb. 4.12 mit r_1 bezeichnet wird, sondern für alle folgenden Schalen, also r_2 und r_3 und so weiter. Für unseren Ball ist nur die Schwerkraft des Erdvolumens innerhalb des Radius r_n , an dem sie sich gerade befindet, relevant. Sobald der Ball im Mittelpunkt der Erde ankommt, wird er seinen Weg fortsetzen, aber jetzt wird er durch die Schwerkraft der Kugelmasse abgebremst die er hinter sich lässt, während die jeweiligen Schalen darüber keine Rolle spielen, bis der Ball bei ihnen ankommt. Der Einfachheit halber gehen wir von einer konstanten Erddichte $\bar{\rho}_E = M_E/V_E = 5.51 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} = 5.51 \text{ g cm}^{-3}$ aus. Das Koordinatensystem wählen wir so, dass die Erdoberfläche bei $z = R_E$ und der Mittelpunkt der Erde bei $z = 0$ liegt. Dann ist das auf den Ball wirkende Schwerkraftpotenzial

$$\Psi(r) = \Psi(z) = -\frac{GM(z)}{z} = -\frac{G}{z} \cdot \bar{\rho}_E \cdot \frac{4\pi z^3}{3} = -\frac{4\pi G \bar{\rho}_E}{3} \cdot z^2$$

Damit wird das Schwerefeld

$$\mathbf{g}(r) = \nabla \Psi(r) = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{8\pi G \bar{\rho}_E}{3} \cdot \mathbf{z}$$

und daher lautet die Bewegungsgleichung für die Bewegung des Balls in z -Richtung

$$F = m\ddot{z} = -m \cdot \frac{8\pi G \bar{\rho}_E}{3} \cdot z = -k \cdot z$$

Dies ist jedoch Gl. (2.7), die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillatoren. Solche Bewegungsgleichungen, die wir in Abschnitt 10.1 eingehender studieren werden, haben die Lösung

$$z_0 = z_1 \cos \omega_0 t \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hier ist offensichtlich $z_1 = R_E$ und damit sind ω_0 und die zugehörige Periode T einer vollständigen Schwingung gegeben durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8\pi G \bar{\rho}_E}{3}} = 1.76 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

und

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3570 \text{ s} \approx 60 \text{ min}$$

Es dauert etwa eine Stunde, bis der Ball auf der anderen Seite des Planeten ankommt, wo er anhält und zurück in die Erde fällt. Wie der Ausdruck für ω_0 zeigt, sind die Frequenz und damit die Periode T unabhängig von der Masse des Balls. Im Wesentlichen ist dieses hypothetische Beispiel eines Körpers, der durch den Mittelpunkt der Erde zur

anderen Seite des Planeten durchfällt, eine extreme Version von Galileis Experimenten zur Fallzeit. Diese hatten ja das Ziel zu beweisen, dass unabhängig von ihrer Masse alle Körper im Schwerefeld der Erde gleich schnell fallen; vorausgesetzt natürlich, dass die Unterschiede im Luftwiderstand für die jeweiligen Körper vernachlässigbar sind.

In den obigen Beispielen haben wir Schwerefelder großer ausgedehnter Objekte wie das der Erde betrachtet. Dabei stellten wir fest, dass wir Objekte mit Kugelsymmetrie, und das trifft auf viele Körper im Universum zu, hinsichtlich ihrer Gravitationswirkung auf andere Körper so behandeln können, als ob ihre gesamte Masse im Massenschwerpunkt konzentriert wäre. Bei einer Kugel gleichmäßiger Dichte oder Kugeln unterschiedlicher Dichte mit schalenartiger Struktur wie der Erde, ist dies natürlich der Mittelpunkt der Kugel. Die Erde ist allerdings keine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid und auch das ist nicht ganz richtig, da ihre Masse nicht gleichmäßig im Erdkörper verteilt ist, was zu Gravitationsanomalien führt. Aber für das, was uns hier interessiert, spielt das keine Rolle, da eine kugelförmigen Erde für große Entfernung eine gute Näherung ist.

Untersuchen wir wie sehr weit entfernte Objekte die Bewegung unseres Sonnensystems innerhalb unserer Galaxie, der Milchstraße, beeinflussen, berücksichtigen wir nicht den Einfluss einzelner Himmelskörper, es sei denn, sie sind extrem massiv, wie z.B. schwarze Löcher. Stattdessen versuchen wir zu verstehen, wie sich unser Sonnensystem in Bezug auf den Schwerpunkt weit entfernter Sternensysteme bewegt, deren innere relative Abstände sehr viel kleiner sind als der Abstand ihres Schwerpunkts zu unserem Sonnensystem. So wie das von zwei Massen erzeugte Schwerkraftpotenzial (vergleiche Abb. 4.12) an einem Punkt $P(r)$ die Summe der individuellen Schwerkraftpotenziale ist, so ist das von N Massen bei $P(r)$ erzeugte Schwerkraftpotenzial die Summe von N individuellen Schwerkraftpotenzialen:

$$\Psi_P(r) = \sum_{j=1}^N \Psi_j(r) = -G \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

Ist $r \gg r_j$, so kann man das bei $P(r)$ erzeugte Schwerkraftpotenzial näheren mit

$$\Psi_P(r) \approx -\frac{G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{SP}|} \sum_{j=1}^N m_j \quad \text{wobei} \quad \mathbf{r}_{SP} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j \Bigg/ \sum_{j=1}^N m_j$$

die Schwerpunktkoordinate der N Massen ist. Auf diese Weise behandelt man viele weit entfernte Massen als eine einzige kombinierte Masse, die sich an der Schwerpunktkoordinate \mathbf{r}_{SP} befindet. Das unterscheidet sich nicht allzu sehr von den in diesem Kapitel diskutierten hochsymmetrischen Massenverteilungen in homogenen Schwerefeldern, wo Massenschwerpunkt und Gravitationszentrum identisch sind. Anspruchsvoller sind

aber Zwischensituationen, wenn keine hochsymmetrische Massenverteilung innerhalb eines einzelnen Körpers vorliegt oder wo mehrere separate Massen vorhanden sind, die einfach nicht weit genug von der Stelle entfernt sind, an der man das von ihnen erzeugte Schwerkraftpotenzial berechnen möchte. Infolgedessen hat man es mit Schwerkraftfeldern zu tun, die über eine interessierende Massenverteilung hinweg nicht mehr homogen sind, und daher fallen Massenschwerpunkt und Gravitationszentrum bei solchen Massenverteilungen nicht mehr zusammen. In diesen Fällen muss man entweder über eine nicht konstante Dichteverteilung innerhalb eines Objekts integrieren oder für jede Masse m_j einzelne diskrete $\Psi_j(r)$ hinzufügen, um $\Psi_P(r)$ zu berechnen. Hat man es mit inhomogenen Schwerkraftfeldern zu tun, dann werden die Dinge komplizierter, aber das liegt ohnehin außerhalb des Rahmens dessen, was wir hier betrachten können.

5. Rotierende Bewegung

Die Untersuchung rotierender Bewegungen hat eine ebenso lange Geschichte wie die linearer Bewegungen. Newton zum Beispiel dachte in seinen «Principia» nicht anders über die Erhaltung der rotierenden Bewegung als über die Erhaltung der linearen Bewegung. Seine Auffassung war, dass ein Kreisel

„...whose parts, by their cohesion, are perpetually drawn aside from rectilinear motions, does not cease its rotation otherwise than it is retarded by the air.“

Eine Zustandsänderung der linearen Bewegung eines Körper der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, erfordert eine Kraft, ebenso eine Zustandsänderung der Rotationsbewegung eines Körpers. Bei der Rotationsbewegung wird unterschieden zwischen der Rotationsbewegung eines Massenpunkts um einen festen Bezugspunkt und der Eigenrotation eines Körpers. Mit dem Aufkommen der Quantenmechanik wurde eine zusätzliche Rotationsbewegung wichtig, der Spin, den viele Elementarteilchen besitzen. Während man diesen als Eigenrotation betrachten könnte, ist er etwas völlig anderes. Hier konzentrieren wir uns auf die Rotationsbewegung von Massenpunkten um einen festen Bezugspunkt im Raum und betrachten dann die Eigenrotation ausgedehnter Körper; der Spin von Elementarteilchen wird im vierten Band dieses Physikkurses behandelt.

Abgesehen vom Spin, ist eine Rotationsbewegung immer die Rotationsbewegung um eine Achse. Wir beschreiben z.B. die Rotationsbewegung eines Planeten um einen Stern als Bewegung eines Massenpunkts. Eines Massenpunkts mit der Masse des Planeten am Ort seines Massenschwerpunkts, der um eine Achse kreist, die durch den Massenschwerpunkt des Sterns verläuft und senkrecht zur Umlaufebene des Planeten steht. Im Gegensatz dazu ist die Rotation eines Planeten wie der Erde um die eigene Achse ein klares Beispiel für Eigenrotation. Aber diese Eigenrotation der Erde können wir uns tatsächlich als gleichzeitige Rotation der vielen einzelnen Massenpunkte vorstellen, aus denen unser Planet besteht. In beiden Fällen ist der Drehimpuls das grundlegende Konzept zur Analyse dieser Rotationsbewegungen, und diesem wenden wir uns nun zu.

5.1 Der Drehimpuls

Die Bezeichnung Drehimpuls verweist auf die Analogie zwischen Rotations- und Linearbewegung. Der lineare Impuls \mathbf{p} ist das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit \mathbf{v} . Der Drehimpuls \mathbf{L} ist mit der Winkelgeschwindigkeit eines Körpers verknüpft, wenn sich z.B. eine Masse um einen festen Punkt außerhalb ihrer selbst dreht, oder ein massiver Körper, sich um eine durch ihn verlaufende Achse dreht. Eine Änderung des linearen Impulses $\dot{\mathbf{p}} \neq 0$ bewirkt eine Kraft \mathbf{F} (Newtons zweites Gesetz). Entsprechend bewirkt eine Änderung des Drehimpulses $\dot{\mathbf{L}} \neq 0$ ein Kraftmoment, d.h. ein Drehmoment \mathbf{M} :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}$$

und

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = m \left[\underbrace{(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})}_{=0} + (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \right] = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5.1)$$

Es ist ein weit verbreitetes Missverständnis, dass die Linearbewegung eines Körpers nicht mit einem Drehimpuls verbunden ist. Um den mit der Linearbewegung eines Körpers verknüpften Drehimpuls zu verstehen, betrachten wir wie sich in Abb. 5.1 die Masse m mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} parallel zur x -Achse im Abstand $y = h$ bewegt. Da sich m mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, müssen wir nur drei gleiche Zeitintervalle auswählen, in denen die Masse m per Definition genau die gleiche Distanz zurücklegen wird, nämlich die hervorgehobenen Strecken $a = b = c$ in Abb. 5.1. Die Fläche jedes Dreiecks ergibt sich aus seiner jeweiligen Basis mal der Höhe des Dreiecks. Da die Basis der Dreiecke gleich lang und sie auch gleich hoch sind, müssen die Dreiecksflächen identisch sein:

$$\frac{ah}{2} = \frac{ah}{2} = \frac{ch}{2} \quad \text{beziehungsweise} \quad A = B = C$$

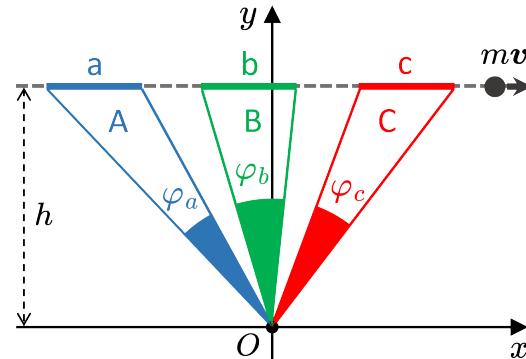


Abb. 5.1

Der Ortsvektor vom Ursprung zur bewegten Masse m überstreicht gleiche Flächen in gleichen Zeitintervallen. Aber die in diesen Zeitintervallen durchlaufenen Winkel unterscheiden sich. Mit $\varphi_a < \varphi_b$ und $\varphi_b > \varphi_c$ ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} \neq 0$. Wenn sich die Masse m von $x \approx -\infty$ nähert, wird $\dot{\varphi}$ zunächst sehr klein sein, aber kontinuierlich zunehmen während m sich dem Ursprung O nähert. Sobald sie jedoch die y -Achse in

einem Abstand h vom Ursprung O kreuzt, nimmt $\dot{\varphi}$ kontinuierlich ab während sich m vom Ursprung O in Richtung $x \approx +\infty$ entfernt. Welcher Drehimpuls entspricht dieser Änderung der Winkelgeschwindigkeit? Dazu sehen wir uns Gl. (5.1) an. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} der Masse ist konstant und somit $\dot{\mathbf{p}} = 0$. Gl. (5.1) sagt uns in diesem Fall, dass $\dot{\mathbf{L}} = 0$ Null sein muss, also $\mathbf{L} = const$. Um diesen konstanten Wert von \mathbf{L} zu bestimmen, berechnen wir ihn in Abb. 5.1 für $x = 0$, d.h. wo $|\mathbf{r}| = h$. Mit $v = |\mathbf{v}|$ konstant, ist der Betrag des Drehimpulses $|\mathbf{L}| = h \cdot m \cdot v$. Aber was ist mit der Richtung von \mathbf{L} ? Dazu setzen wir die entsprechenden Vektoren ein und erhalten:

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m h v_x \end{pmatrix}$$

Der Drehimpulsvektor zeigt also in die negative z -Richtung und hat die Länge $m h v$. Dieses einfache Beispiel zeigte nicht nur, dass mit einer Linearbewegung ein Drehimpuls verknüpft ist, sondern auch, dass der Drehimpuls eines Massenpunkts bei Linearbewegung eine Erhaltungsgröße, d.h., eine Bewegungskonstante ist. Natürlich hängt der Drehimpuls vom Bezugspunkt ab, von dem aus wir die Bewegung beobachten, da der Wert von h von der Wahl unseres Ursprungs abhängt. Nach der Bewegung einer Masse, die sich ohne Krafteinwirkung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, betrachten wir nun die Bewegung eines Massenpunkts in einem zentralen Kraftfeld.

Zentralkraft

Eine Kraft, deren Wirkungslinie immer auf ein Kraftzentrum gerichtet ist.

Daher gilt für Zentralkräfte

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Daraus folgt mit Gl. (5.1)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{F(r)}{r} \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{r})}_{= 0} = 0$$

Das bedeutet, dass für Zentralkräfte \mathbf{L} eine Erhaltungsgröße, also eine Bewegungskonstante ist

$$\mathbf{L} = m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{L}_0 = const \quad (5.2)$$

Die Flächengeschwindigkeit, also die Fläche A , die der Ortsvektor \mathbf{r} eines Massenpunkts pro Zeiteinheit überstreicht, ist gegeben durch

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

Für Zentralkräfte gilt daher

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = const \quad (5.3)$$

Zu Beginn dieses Abschnitts wurde die Linearbewegung eines Massenpunkts betrachtet, der keiner Kraft ausgesetzt, sich mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} parallel zur x -Achse bewegt. Dabei fanden wir, dass der Ortsvektor vom Koordinatenursprung zum Massenpunkt gleiche Flächen in gleichen Zeitintervallen überstreicht. Hier finden wir nun mit Gl. (5.3), dass für einen Massenpunkt, der sich in einem zentralen Kraftfeld bewegt, der Radiusvektor vom Kraftzentrum zum Massenpunkt ebenfalls gleiche Flächen in gleichen Zeitintervallen überstreicht. Das ist natürlich nichts anderes als das zweite Gesetz von Johannes Kepler: Der Radiusvektor zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeitabständen gleich große Flächen.

Als nächstes betrachten wir Bewegung eines Massenpunkts in konservativen zentralen Kraftfeldern. Mit dem, was wir im vorherigen Kapitel am Ende von Abschnitt 4.2 gelernt haben, können wir für die Gesamtenergie eines Massenpunkts, der sich in einem konservativen zentralen Kraftfeld bewegt, schreiben

$$E = T + V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) \quad (5.4)$$

Anstatt die Geschwindigkeit eines Massenpunkts in Bezug auf ein festes Koordinatensystem zu messen, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, sie in Bezug auf die Bahnkurve selbst zu messen. So hat man

$$E = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + V(r)$$

wobei ds das infinitesimale Bogensegment der in Abb. 5.2 skizzierten Bahnkurve ist, durch die der Massenpunkt in der Zeit dt läuft. Aus Abb. 5.2 ersieht man, dass

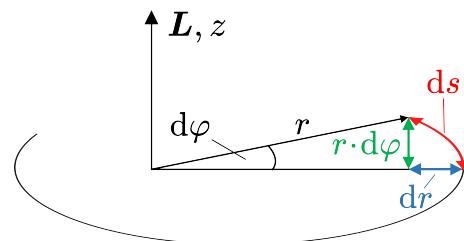


Abb. 5.2

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r d\varphi)^2} \quad (5.5)$$

und daher

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{\sqrt{dr^2 + (r d\varphi)^2}}{dt} \right)^2 + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V \quad (5.6)$$

Es muss gelten (Erhaltung des Drehimpulses)

$$|\mathbf{L}| = l = mr(r\dot{\varphi}) = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

Daher ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (5.7)$$

Damit wird aus Gl. (5.6)

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{Zf}(r) + V(r) \quad (5.8)$$

wobei

$$V_{Zf} = \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{m}{2}(\dot{\varphi} \times \mathbf{r})^2 \quad (5.9)$$

das sogenannte Zentrifugalpotenzial ist. Die zugehörige Kraft in Radialrichtung, die Zentralkraft F_Z , ist gegeben durch

$$F_Z = -\frac{\partial V_{Zf}}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} = m\dot{\varphi}^2 r \quad (5.10)$$

Mit $U(r) = V_{Zf}(r) + V(r)$ kann man Gl. (5.8) umschreiben zu

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r)$$

und daher

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]} \quad (5.11)$$

Mit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

und

$$r(t) = r(\varphi(t))$$

folgt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = r' \cdot \frac{l}{mr^2} \quad (5.12)$$

und daher

$$\frac{dr}{d\varphi} = r' = \pm \frac{mr^2}{l} \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]} \quad (5.13)$$

5.2 Keplerbewegung

Der Begriff Keplerbewegung bezeichnet die Bewegung eines Massenpunkts unter dem Einfluss der Gravitationskraft. Das bedeutet, dass für die Kraft, die zwischen einem Massenpunkt m und einer Masse M wirkt, das Newtonsche Gravitationsgesetz gilt

$$\mathbf{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^3} \mathbf{r}$$

Mit $\mathbf{F} = -\text{grad } V(r)$ ist das Gravitationspotenzial der Keplerbewegung

$$V(r) = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Somit wird aus dem Potenzial $U(r) = V_{Zf}(r) + V(r)$ in Gl. (5.8)

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - G \frac{M \cdot m}{r}$$

und durch Verwendung von dr/dt aus Gl. (5.12) wird aus Gl. (5.8) daher

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{l}{mr^2} r' \right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G \frac{M \cdot m}{r}$$

Um diese Gleichung zu lösen, verwenden wir die Substitution

$$\xi = \frac{1}{r} \quad ; \quad \xi' = \frac{d\xi}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \cdot r'$$

Mit dieser Substitution wird die obige Gleichung

$$E = \frac{l^2}{2m} \cdot \xi'^2 + \frac{l^2}{2m} \cdot \xi^2 - GM \cdot m \cdot \xi$$

Mittels quadratischer Ergänzung und Umordnen der Glieder erhält man

$$\xi'^2 + \left(\xi - G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \right)^2 = \frac{2mE}{l^2} + \left(G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \right)^2 \quad (5.14)$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{p} = G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} \cdot \epsilon = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{\frac{2mE}{l^2} p^2 + 1} \quad (5.15)$$

deren Bedeutung im Folgenden deutlich wird, lautet Gl. (5.14)

$$\xi'^2 + \underbrace{\left(\xi - \frac{1}{p} \right)^2}_{\eta} = \frac{\epsilon^2}{p^2}$$

Diese Differentialgleichung hat die Form

$$\eta'^2 + \eta^2 = \lambda^2 \quad \text{und die Lösung} \quad \eta = \eta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

wobei $\eta_0 = \pm(\epsilon/p)$ und bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen $\varphi_0 = 0$. Damit erhält man als Lösung von Gl. (5.14)

$$\xi = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 \pm \epsilon \cos \varphi)$$

beziehungsweise die Bahnkurve

$$r = \frac{p}{1 \pm \epsilon \cos \varphi} \quad (5.16)$$

Diese Gleichung beschreibt die Bahnkurve eines Kegelschnitts und insbesondere für $\epsilon < 1$ ist sie die Bahnkurve einer Ellipse in Polarkoordinatendarstellung. Daher besagt diese Gleichung nichts anderes als das erste Keplersche Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt sitzt. Das Minuszeichen bedeutet, dass der Koordinatenursprung im linken Brennpunkt liegt (wie in Abb. 5.3b gezeigt) und das Pluszeichen, dass er im rechten Brennpunkt liegt.

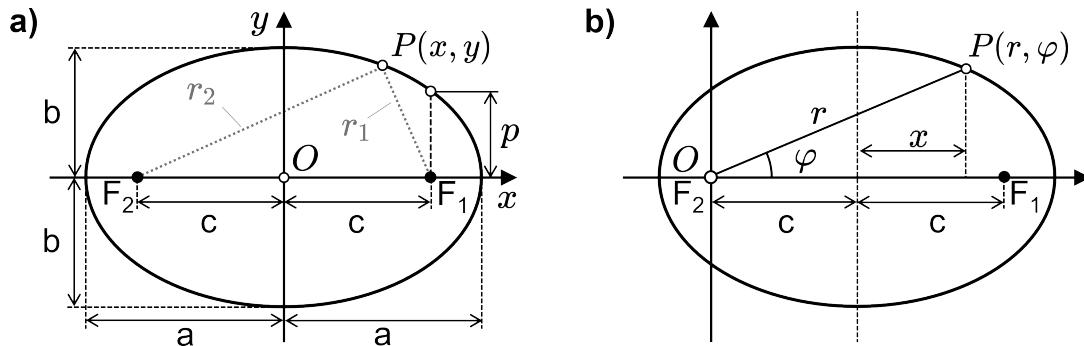


Abb. 5.3: Ellipse in kartesischen (a) und Polarkoordinaten (b). In Polarkoordinaten hat man die Wahl, den Ursprung wie hier in den linken Brennpunkt zu legen – Minuszeichen in Gl. (5.16) – oder in den rechten Brennpunkt – Pluszeichen in Gl. (5.16).

Bahnkurve der Ellipse

Eine Ellipse ist definiert als die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, den durch den Abstand $2c$ getrennten Brennpunkten F₁ und F₂ in Abb. 5.3, konstant ist:

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (5.17)$$

wobei a die große Halbachse der Ellipse ist. Für die Beziehung zwischen der großen Halbachse und der kleinen Halbachse kann man aus Abb. 5.3 ablesen:

$$a^2 = c^2 + b^2$$

Für r_1 und r_2 kann man aus Abb. 5.3a in kartesischen Koordinaten auch ablesen

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad (5.18)$$

Setzt man dies in Gl. (5.17) ein, erhält man nach einiger Rechnung die Gleichung, die eine Ellipse in kartesischen Koordinaten beschreibt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.19)$$

Mit Gl. (5.17) gilt zudem

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2a(r_2 - r_1)$$

Aber aus Gl. (5.18) folgt auch

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx = 2a \frac{2cx}{a}$$

Ein Vergleich der rechten Seiten der beiden Gleichungen ergibt

$$r_2 - r_1 = \frac{2cx}{a}$$

und mit Gl. (5.17) gilt daher

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} \quad \text{und} \quad r_2 = a + \frac{cx}{a}$$

Durch die Wahl $r = r_2$ für die Polarkoordinatendarstellung, überführt man den Koordinatenursprung in den linken Brennpunkt der Ellipse (Abb. 5.3b). Mit der von Abb. 5.3a nach Abb. 5.3b übertragenen x -Koordinate $x = r \cos \varphi - c$ eines Ellipsenpunkts, erhält man mittels

$$r = a + \frac{cx}{a} = a + \frac{c}{a}(r \cos \varphi - c) = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi = \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi$$

die Polarkoordinatengleichung der Ellipse mit dem Ursprung im linken Brennpunkt

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (5.20)$$

mit den Ellipsenparametern

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{a} \quad (\text{Exzentrizität}) \quad (5.21)$$

Die großen und kleinen Halbachsen der Ellipse, a und b , sowie der Abstand c der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse können ausgedrückt werden durch p und ϵ :

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad ; \quad c = \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2} \quad ; \quad b = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2}$$

Durch Einsetzen von p und ϵ aus Gl. (5.15) folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{1}{a - c} = \frac{1 + \epsilon}{p} = G \frac{M \cdot m^2}{l^2} + \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \left(G \frac{M \cdot m^2}{l^2}\right)^2} \quad (5.22a)$$

und

$$\frac{1}{a+c} = \frac{1-\epsilon}{p} = G \frac{M \cdot m^2}{l^2} - \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \left(G \frac{M \cdot m^2}{l^2}\right)^2} \quad (5.22b)$$

Die Multiplikation von Gl. (5.22a) mit Gl. (5.22b) ergibt

$$\frac{1}{a^2 - c^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{\epsilon^2}{p^2} = \frac{2mE}{l^2} \quad (5.23)$$

und die Addition von Gl. (5.22a) und Gl. (5.22b) ergibt

$$\frac{2a}{a^2 - c^2} = \frac{2a}{b^2} = \frac{2}{p} = 2G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \quad (5.24)$$

Die Division von Gl. (5.23) durch Gl. (5.24) zeigt, dass

$$E = G \frac{M \cdot m}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{p} = G \frac{M \cdot m}{2a} \quad (5.25)$$

Mit Gl. (5.5) und der Fläche der Ellipse, also mit

$$l = \frac{2mA}{\tau} \quad \text{und} \quad A = \pi \cdot a \cdot b$$

sowie mit Gl. (5.24) folgt daraus

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \quad (5.26)$$

Dabei ist τ die Zeit, die der Massenpunkt für einen vollständigen Umlauf auf der elliptischen Bahnkurve benötigt. Gl. (5.26) besagt, dass das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit zur dritten Potenz der großen Halbachse nur von der Masse M abhängt und nicht von der Masse m des Massenpunkts. Dieses Verhältnis ist also für alle Massenpunkte m auf beliebigen elliptischen Bahnkurven um eine im Brennpunkt befindliche Masse M identisch. Offensichtlich ist das nichts anderes als das dritte Keplersche Gesetz: Das Quadrat der Umlaufzeit dividiert durch die dritte Potenz der großen Halbachse ist eine Konstante für alle Planeten, die die Sonne umkreisen. Dieser Zusammenhang zwischen Umlaufzeit und Bahnradius gilt nicht nur in unserem Sonnensystem, sondern für alle Planeten, die sich auf elliptischen Bahnen um ihren Stern bewegen.

Wie Gl. (5.25) zeigt, hat die Bahnkurve der Ellipse die Eigenschaft, dass die Gesamtenergie durch die große Halbachse a der Ellipse ausgedrückt werden kann. Gl. (5.25) kann allgemeiner formuliert werden als

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (5.27)$$

Gl. (5.27) besagt, dass für eine elliptische Bahnkurve die Energie nur von der großen Halbachse abhängt. Jede Bewegung, die eine elliptische Bahnkurve mit demselben a beschreibt, entspricht derselben Gesamtenergie, unabhängig von der Exzentrizität ϵ der jeweiligen elliptischen Bahnkurve. Hier wurde speziell der Fall des Gravitationspotenzials betrachtet für das

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

gilt, mit $\alpha = G \cdot M \cdot m$. Aber Gl. (5.27) gilt ebenso für das Coulomb-Potenzial zwischen zwei elektrischen Ladungen q_1 und q_2

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$$

Für das Coulomb-Potenzial kann α positiv oder negativ sein. Wenn beispielsweise die Ladungen q_1 und q_2 beide positiv oder beide negativ sind, dann ist $\alpha < 0$. Wenn aber q_1 positiv und q_2 negativ ist oder umgekehrt, dann ist $\alpha > 0$.

In beiden Fällen, dem Gravitationspotenzial und dem Coulomb-Potenzial, kann die Gesamtenergie mit der einfachen Formel in Gl. (5.27) bestimmt werden. Ist $\alpha > 0$, dann liegt eine anziehende Kraft vor und $E < 0$. Damit ist $\epsilon < 1$ und die Bahnkurve ist eine Ellipse. Die Bahnkurve bleibt eine Ellipse, solange $0 < \epsilon < 1$ und bei $\epsilon = 0$ wird die Ellipse zu einem Kreis. Ist $\alpha = 0$, dann ist $E = 0$ und somit $\epsilon = 1$ und die Bahnkurve ist daher eine Parabel. Ist hingegen $\alpha < 0$, dann liegt eine abstoßende Kraft vor und wegen $E > 0$ folgt $\epsilon > 1$ und die Bahnkurve ist daher eine Hyperbel.

5.2.1 Gebundene und ungebundene Bewegung

Bei gebundener Bewegung ist die Gesamtenergie der Relativbewegung $E < 0$ und die Bahnkurve ist eine Ellipse oder ein Kreis. Bei ungebundener Bewegung ist $E \geq 0$ und die Bahnkurve ist eine Parabel oder eine Hyperbel. Betrachtet wird zuerst die gebundene Bewegung auf einer elliptischen Bahnkurve, wie in Abb. 5.3b, wobei sich aber nun die Erde im Ursprung des Koordinatensystems, hier der linke Brennpunkt der Ellipse, befindet und ein Satellit sie auf der Bahnkurve umlaufen soll. Die Bahnkurve ist also

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}$$

und die Gesamtenergie ist

$$E = \frac{m_S}{2} \dot{r}^2 + U(r) = \frac{m_S}{2} \dot{r}^2 + V_{Zf}(r) + V(r)$$

mit

$$V_{Zf}(r) = \frac{l^2}{2m_S r^2} \quad \text{und} \quad V(r) = -G \frac{M_E \cdot m_S}{r}$$

wobei M_E und m_S die Massen von Erde und Satellit sind. Abb. 5.4 zeigt die Form der Potenzialkurve $U(r)$, die Summe aus anziehendem Potenzial $V(r)$ und abstoßendem Potenzial $V_{Zf}(r)$. Ist der Drehimpuls $l = |L|$ zu klein, dann ist die dadurch verursachte Abstoßungskraft zu gering, als dass sich ein Körper in einer Erdumlaufbahn bewegen könnte. Der Minimalabstand r_{min} für einen Körper auf einer elliptischen Erdumlaufbahn lässt sich aus Abb. 5.3b mit Gl. (5.15) ablesen

$$r_{min} = r(\pi) = \frac{p}{1 + \epsilon} = \frac{l^2}{GM_E m_S (1 + \epsilon)}$$

Damit ein Körper nicht auf die Erde zurückstürzt, muss $r_{min} > R_E$ gelten. Daher ist der erforderliche Mindestdrehimpuls

$$l > \sqrt{GM_E m_S (1 + \epsilon) R_E} \quad (5.28)$$

Der kleinstmögliche Wert von l ergibt sich für $\epsilon = 0$, also für eine Kreisbahn. Für die Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius r gilt für den Drehimpuls $l = |L|$ und die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des umlaufenden Körpers v_φ

$$l = mr^2\dot{\varphi} \quad \text{and} \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \quad (5.29)$$

Einsetzen dieser Beziehungen für den Grenzfall $r = R_E$ und $m = m_S$ in Gl. (5.28) ergibt für v_φ

$$v_\varphi > \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} = 7.9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} = v^{(1)} \quad (5.30)$$

$v_\varphi = 7.9 \text{ km s}^{-1}$ ist die sogenannte erste kosmische Geschwindigkeit $v^{(1)}$. Hätte die Erde keine Atmosphäre und wäre sie eine perfekte Kugel, so könnte man einen Kieselstein derart entlang der Erdoberfläche werfen, dass er nur eine tangentiale Geschwindigkeitskomponente $v^{(1)}$ hat und sich auf einer stabilen Umlaufbahn knapp über der Erdoberfläche bewegt. Satelliten müssen aber wegen der Erdatmosphäre unseren Planeten in viel größerem Abstand von der Erdoberfläche umkreisen. Analog zu Gl. (5.28) erhält man den Drehimpuls für die jeweils gewünschte Kreisbahn mit Radius R und entsprechend die

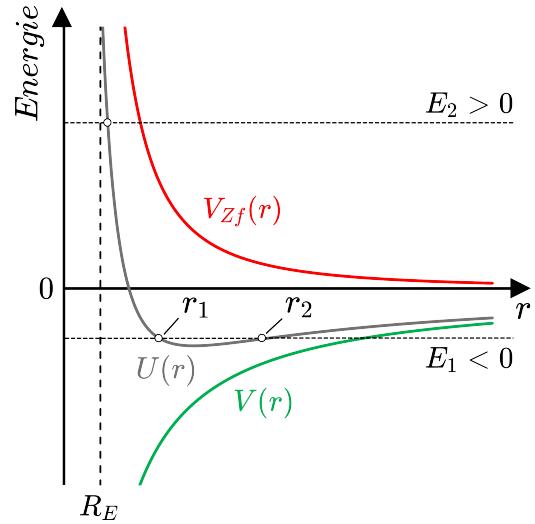


Abb. 5.4

notwendige Tangentialgeschwindigkeit. Für eine Kreisbahn fallen die Abstände r_1 und r_2 zusammen und es liegt die in Abb. 5.5 skizzierte Situation vor.

Von besonderem Interesse ist die sogenannte geostationäre Umlaufbahn, also eine Umlaufbahn, bei der ein Satellit immer über dem gleichen Punkt der Erdoberfläche bleibt. Aus Gl. (5.28) mit R_{geo} statt R_E und Gl. (5.30) mit $\dot{\varphi} = 2\pi/1$ Tag berechnet man für die geostationäre Umlaufbahn

$$R_{geo} = \frac{G \cdot M_E \cdot 1 \text{ Tag}}{2\pi} = 42.2 \text{ km}$$

Die geostationäre Bahn befindet sich also in einer Höhe von ca. 35.9 km über der Erdoberfläche. Die Energie die man benötigt, um einen Satelliten in eine solche gebundene Umlaufbahn zu bringen ist beträchtlich da mit dem Satelliten ja die wesentlich schwerere Trägerrakete, das meiste davon Treibstoff, auf entsprechend hohe Geschwindigkeit gebracht werden muss. Um das Schwerfeld der Erde gänzlich zu verlassen, betrachtet man die Energie die benötigt wird, um einen Körper von der Erdoberfläche in eine bestimmte Umlaufbahn mit Radius R zu bringen. Diese ist gegeben durch

$$\Delta E = G \cdot M_E \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R} \right)$$

Um dem Gravitationsfeld der Erde vollständig zu entkommen, also $R \rightarrow \infty$, ist mindestens die kinetische Energie

$$\Delta E = \frac{m}{2} \cdot v_{2E}^2 = G \cdot M_E \cdot m \cdot \frac{1}{R_E} \quad (5.31)$$

erforderlich. Daher ist die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Gravitationsfeld der Erde, auch als zweite kosmische Geschwindigkeit $v^{(2)}$ bekannt, gegeben durch

$$v_{2E} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = 11.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = v^{(2)} \quad (5.32)$$

Bezogen auf die elliptische Bahnkurve in Abb. 5.3b bedeutet $R \rightarrow \infty$ in Gl. (5.31), dass sich der Punkt auf der Bahnkurve mit dem größten Abstand vom Brennpunkt immer weiter weg bewegt und schließlich im Unendlichen entschwindet. Für Gl. (5.20) muss also gelten

$$r(0) = \frac{p}{1 - \epsilon} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \epsilon \rightarrow 1$$

Aus der elliptischen Umlaufbahn wird also eine Parabel. Genauso wie es eine Fluchtgeschwindigkeit gibt um der Gravitation der Erde zu entkommen, gibt es eine entsprechende

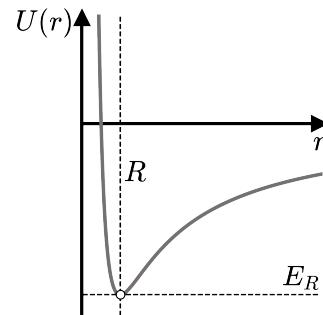


Abb. 5.5

Fluchtgeschwindigkeit für das Verlassen unseres Sonnensystems. Um die Fluchtgeschwindigkeit von der Sonne am Ort der Erde zu berechnen, ersetzt man in Gl. (5.32) Erdmasse M_E und Erdradius R_E durch Sonnenmasse M_S und den mittleren Abstand zwischen Sonne und Erde R_{SE} . Damit berechnet sich die Fluchtgeschwindigkeit von der Sonne in der Erdumlaufbahn zu $v_{2S} = 42.1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Die Erde bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_E \approx 29.8 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ um die Sonne. Diese Eigengeschwindigkeit verringert die Fluchtgeschwindigkeit zum Verlassen des Sonnensystems und ist von v_{2S} abzuziehen. Letztlich muss man noch die Gravitation der Erde, also v_{2E} , berücksichtigen. Für die dritte kosmische Geschwindigkeit $v^{(3)}$, die Geschwindigkeit die man erreichen muss um von der Erde aus das Sonnensystem zu verlassen ergibt sich damit

$$v^{(3)} = \sqrt{(v_{2S} - v_E)^2 + v_{2E}^2} \approx 16.6 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \quad (5.33)$$

Bahnkurve der Hyperbel

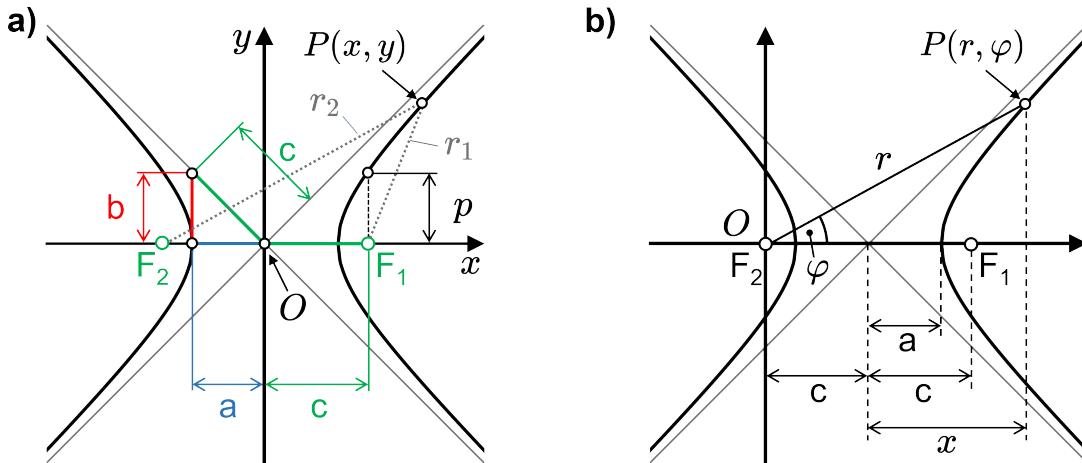


Abb. 5.6: Hyperbel in kartesischen (a) und Polarkoordinaten (b). In Polarkoordinaten hat man die Wahl, den Ursprung wie hier in den linken Brennpunkt zu legen – Minuszeichen in Gl. (5.16) – oder in den rechten Brennpunkt – Pluszeichen in Gl. (5.16).

Wie bei der Ellipse hat man auch bei der Hyperbel die Wahl, den Ursprung des Koordinatensystems entweder in den linken oder rechten Brennpunkt zu legen. Hier wird, wie in Abb. 5.6 skizziert, erneut der linke Brennpunkt gewählt, um den rechten Ast der Hyperbel zu beschreiben. Für jeden Punkt auf dem rechten Ast der Hyperbel gilt $r_2 - r_1 = 2a$ und für den linken Ast der Hyperbel gilt $r_2 - r_1 = -2a$. Für alle Punkte auf der Hyperbel gilt in kartesischen Koordinaten (Abb. 5.6a)

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (5.34)$$

Damit und mit $c^2 = a^2 + b^2$ lässt sich die Gleichung der Hyperbel in kartesischen Koordinaten ableiten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.35)$$

Analog zum Vorgehen bei der Ellipsengleichung, zeigt ein Vergleich der rechten Seiten von

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = \pm 2a(r_2 + r_1)$$

und

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx = 2a \frac{2cx}{a}$$

dass gelten muss

$$r_2 + r_1 = \mp \frac{2cx}{a}$$

Dies ergibt mit Gl. (5.34) für den rechten Hyperbelast

$$r_1 = -a + \frac{cx}{a} \quad \text{und} \quad r_2 = a + \frac{cx}{a} \quad \text{mit} \quad x \geq a$$

und für den linken Hyperbelast

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} \quad \text{und} \quad r_2 = -a - \frac{cx}{a} \quad \text{mit} \quad x \leq -a$$

Für die in Abb. 5.6b skizzierte Darstellung in Polarkoordinaten mit dem Ursprung im linken Brennpunkt wird wieder $r = r_2$ gewählt und man erhält mit der übertragenen x -Koordinate $x = r \cos \varphi - c$ des rechten Astes

$$r = a + \frac{cx}{a} = a + \frac{c}{a}(r \cos \varphi - c) = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi = -\frac{b^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi$$

die Gleichung für den rechten Ast der Hyperbel in Polarkoordinaten mit dem Ursprung im linken Brennpunkt

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (5.36)$$

mit den Hyperbelparametern

$$p = -\frac{b^2}{a} = -(\epsilon^2 - 1)a \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{a} > 1 \quad (5.37)$$

Für den linken Ast der Hyperbel gilt ebenfalls Gl. (5.36), allerdings mit den Hyperbelparametern

$$p = \frac{b^2}{a} = (\epsilon^2 - 1)a \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{a} > 1 \quad (5.38)$$

5.3 Streuung an Zentralpotenzialen

Die Streuung an Zentralpotenzialen hängt eng mit der Keplerbewegung zusammen. Im einfachsten Fall beschreibt der Streuprozess die Relativebewegung zweier nicht gebundener Teilchen (d.h. $E > 0$), die aus unterschiedlichen Richtungen kommend aufeinander zulaufen, dann bei geringem Abstand durch Potenzialstreuung ihre Bahnkurven ändern, um sich dann in verschiedene Richtungen voneinander zu entfernen. Die Bahnkurve dieses Streuprozesses entspricht dabei der Hyperbel der Keplerbewegung.

Im Folgenden wird ein Teilchenstrahl betrachtet, bei dem alle Teilchen (Massenpunkte) den gleichen Impuls \mathbf{p} haben. Dieser soll an einem Zentralpotenzial gestreut werden das sein Zentrum im Koordinatenursprung hat (Abb. 5.7). Ein im Abstand b von der z -Achse mit dem Impuls \mathbf{p} einfallendes Teilchen wird dabei um den Winkel θ gestreut und hat nach der Streuung den Impuls \mathbf{p}' . Das Koordinatensystem in Abb. 5.7 ist so um die z -Achse gedreht, dass die von den Impulsvektoren \mathbf{p} und \mathbf{p}' aufgespannte Ebene mit der yz -Ebene zusammenfällt. Die Anzahl der Teilchen, die durch eine Querschnittsfläche senkrecht zur xy -Ebene fliegen, also die Intensität I des Teilchenflusses, sei räumlich konstant. Wie aus Abb. 5.7 ersichtlich ist, ist die Streuung am Zentralpotenzial rotationssymmetrisch. Die Anzahl der Teilchen dN , die in das Raumwinkelement $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ (Detektor) um den Streuwinkel θ gestreut werden hängt nicht von φ ab; Streuung erfolgt jeweils in einer Ebene für die $\varphi = const$. Es reicht daher aus, das Problem in der Streuebene, in Abb. 5.7 der yz -Ebene, zu betrachten. Die Bahnkurve eines Teilchens in dieser Ebene ist nur eine Funktion des Stoßparameters b und der Größe des Ausgangsimpulses $p = |\mathbf{p}|$, also $\theta = \theta(b, p)$.

Mit Überlegungen wie denen in Abb. 5.2 und der Impuls- und Energieerhaltung kann man die Gleichungen für $\dot{\mathbf{r}}$ und $\dot{\vartheta}$ ableiten; mit dem Unterschied, dass der entsprechende Winkel hier ϑ und nicht φ ist. Da der Winkel ϑ für das einfallende Teilchen größer ist als für das gestreute Teilchen, gilt außerdem $\dot{\vartheta} < 0$ mit

$$\dot{\vartheta} = -\frac{l}{mr^2} \quad (5.39)$$

und

$$\dot{r}^2 = \pm \frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right) \quad (5.40)$$

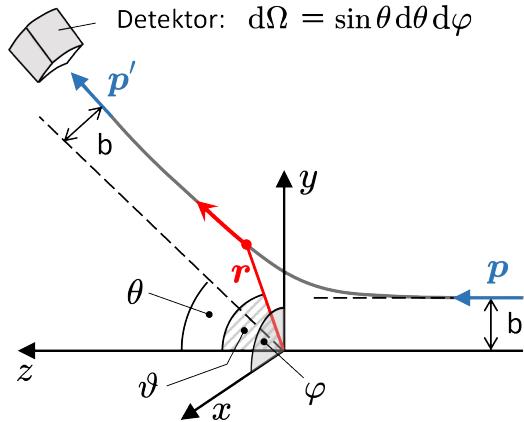


Abb. 5.7

Aufgrund von $\dot{\vartheta} < 0$ wird das Vorzeichen in der zu Gl. (5.13) äquivalenten Gleichung umgekehrt (d.h. von \pm nach \mp)

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \mp \frac{\sqrt{2m} \cdot r^2}{l} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right)^{-1/2} \quad (5.41)$$

Daraus folgt die Gleichung für den Streuwinkel

$$d\vartheta = \mp \frac{l}{\sqrt{2m}} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right)^{-1/2} \cdot r^{-2} \cdot dr \quad (5.42)$$

Die Integration von ϑ_0 nach ϑ und r_0 nach r ergibt

$$\vartheta - \vartheta_0 = \mp \frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^r \left(E - \frac{l^2}{2m\xi^2} - V(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (5.43)$$

Bei der Wahl von ϑ_0 und r_0 nutzt man die Tatsache aus, dass die Bewegungsgleichung bezüglich der Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ invariant ist und theoretisch der Streuvorgang daher «rückwärts» ablaufen kann, das heißt, das gestreute Teilchen wird zum einfallenden Teilchen und umgekehrt. Das zeigt sich in der Spiegelsymmetrie der Bahnkurve (Abb. 5.8) bezüglich der Geraden durch das Streuzentrum und den kürzesten Abstand r_0 des gestreuten Teilchens vom Streuzentrum, dem Perihel. Abb. 5.8

zeigt, dass $\alpha = \vartheta_0 - \theta$ und $\theta + 2\alpha = \pi$. Für den Winkel ϑ_0 , unter dem sich das Teilchen am Ort des Perihels befindet, gilt also:

$$\vartheta_0 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Jetzt betrachtet man den einfallenden und den gestreuten Ast getrennt. In Gl. (5.40) ist \dot{r} negativ für den einfallenden Ast und positiv für den gestreuten Ast. Für die Werte von ϑ und r gilt:

$$\left. \begin{array}{ll} r_0 \leq r \leq \infty \\ \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \text{einfallender Ast} \\ (\dot{r} < 0) \end{array} \quad \left. \begin{array}{ll} r_0 \leq r \leq \infty \\ \theta \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \text{gestreuter Ast} \\ (\dot{r} > 0) \end{array}$$

Für den einfallenden Ast in Gl. (5.43) gilt

$$\pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^{\infty} \left(E - \frac{l^2}{2m\xi^2} - V(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (5.44)$$

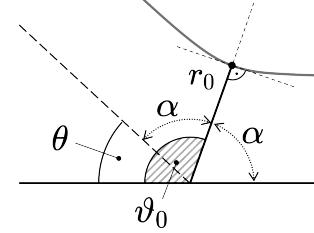


Abb. 5.8

$$\theta - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^{\infty} \left(E - \frac{l^2}{2m\xi^2} - V(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (5.45)$$

Mit dem Betrag des Drehimpulses

$$l = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = b \cdot p = const$$

und der Energie

$$E = \frac{p^2}{2m} = const$$

lautet die Gleichung für den gestreuten Ast

$$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} = -b \cdot p \cdot \int_{r_0}^{\infty} \left(p^2 \left(1 - \frac{b^2}{\xi^2} \right) - 2mV(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (5.46)$$

Mit der Substitution

$$u = \frac{b}{\xi}, \quad du = -\frac{b}{\xi^2} d\xi$$

erhält man nach Umformung ($p^2 = 2mE$)

$$\theta = \pi - 2 \cdot \int_0^{b/r_0} \left(1 - u^2 - \frac{V(b/u)}{E} \right)^{-1/2} \cdot du \quad (5.47)$$

Um bei bekanntem Stoßparameter und bekannter Energie den Streuwinkel aus Gl. (5.47) berechnen zu können, muss nun r_0 bestimmt werden. Am Perihel muss in Gl. (5.40) $\dot{r} = 0$ gelten, also (mit $l^2 = b^2 p^2 = b^2 2mE$)

$$E - \frac{l^2}{2mr_0^2} - V(r_0) = E \left(1 - \frac{b^2}{r_0^2} \right) - V(r_0) = 0 \quad (5.48)$$

Mit Hilfe von Gl. (5.47) und Gl. (5.48) kann man für gegebenes Zentralpotenzial $V(r)$ und Energie E den Wert von r_0 und damit den Streuwinkel θ als Funktion des Stoßparameters und der Energie E des einfallenden Teilchens berechnen.

Rutherford-Streuung

Die Rutherford-Streuung, benannt nach Ernest Rutherford, ist die Streuung geladener Teilchen an einem geladenen Streuzentrum. Das auf eine Testladung wirkende elektrische Potenzial (Coulomb-Potenzial) hat die allgemeine Form

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r} = -\frac{\alpha}{r} \quad (5.49)$$

wobei der konstante Vorfaktor die Coulomb-Konstante und Q die elektrische Ladung im Streuzentrum ist. Bei der Rutherford-Streuung haben die elektrischen Ladungen das

gleiche Vorzeichen, d.h., $V(r)$ ist positiv und $\alpha < 0$ (abstoßende Kraft). Wenn wir dies in Gl. (5.48) einfügen, um r_0 zu bestimmen, erhalten wir

$$E \left(1 - \frac{b^2}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha}{r_0} = 0$$

Multiplikation mit $\frac{r_0^2}{Eb^2}$ ergibt

$$\frac{r_0^2}{b^2} - 1 + \frac{r_0}{b} \frac{\alpha}{Eb} = 0$$

Mit den dimensionslosen Größen

$$\rho = \frac{r_0}{b} \quad \text{und} \quad \Lambda = \frac{\alpha}{2Eb}$$

kann man diese Gleichung mittels quadratischer Ergänzung umschreiben zu

$$\rho^2 + 2\rho\Lambda + \Lambda^2 = 1 + \Lambda^2$$

und damit folgt

$$\rho = -\Lambda \pm \sqrt{1 + \Lambda^2}$$

Da r_0 positiv sein muss, ist die Lösung mit dem positiven Vorzeichen zu wählen, also

$$\rho = -\Lambda + \sqrt{1 + \Lambda^2} \tag{5.50}$$

Damit wird aus Gl. (5.47) für die Berechnung des Streuwinkels θ

$$\theta = \pi - 2 \cdot \int_0^{1/\rho} (1 - u^2 + 2u\Lambda)^{-1/2} du \tag{5.51}$$

Der Ausdruck in Klammern unter dem Integral kann umgewandelt werden in

$$1 - u^2 - 2u\Lambda = (1 + \Lambda^2) \left[1 - \left(\frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \right)^2 \right]$$

Mit der Substitution

$$x = \frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \quad , \quad dx = \frac{du}{\sqrt{1 + \Lambda^2}}$$

wird aus dem Integral in Gl. (5.51)

$$\int (1 - u^2 + 2u\Lambda)^{-1/2} du = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x = \arcsin \frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}}$$

Man erhält also für den Streuwinkel θ in Gl. (5.51)

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \Big|_0^{1/\rho} = \pi - 2 \left(\arcsin \frac{1/\rho - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} - \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \right)$$

Einsetzen von ρ aus Gl. (5.50) in diesen Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned}\theta &= \pi - 2 \left(\underbrace{\arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \left(\frac{1+\Lambda^2 - \Lambda\sqrt{1+\Lambda^2}}{\sqrt{1+\Lambda^2} - \Lambda} \right) \right]}_{=1} - \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \right) \\ &= \pi - 2 \left(\underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} - \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \right) = 2 \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}}\end{aligned}$$

Damit und unter Verwendung von $\Lambda = \alpha/2Eb$ erhält man für den Rutherford-Streuwinkel θ ($\alpha < 0$, $E > 0$ und somit $-\Lambda > 0$)

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 b^2}{\alpha^2}}} \quad (5.52)$$

Abb. 5.9 zeigt die Abhängigkeit des Streuwinkels θ in Gl. (5.52) vom Stoßparameter b in grafischer Form. Im Falle eines Zentralstoßes ($b = 0$) liegt direkte Rückstreuung vor ($\theta = \pi$) und der gestreute Ast ist deckungsgleich mit dem einfallenden Ast. Gl. (5.52) zeigt, dass das Argument der Funktion \arcsin wie b^{-1} skaliert. Da $\arcsin(x) \approx x$ für kleine x gilt, skaliert $\theta(b)$ auch für große Stoßparameter b wie b^{-1} . Der Grund dafür ist die Langreichweiteigkeit von Potenzialen der Art $V(r) = \alpha/r$. Da der Streuwinkel θ in Gl. (5.52) in gleicher Weise vom Stoßparameter b und der Energie E abhängt, erhält man den gleichen Kurvenverlauf wie für $\theta(b)$ in Abb. 5.9, wenn man θ als Funktion von E darstellt.

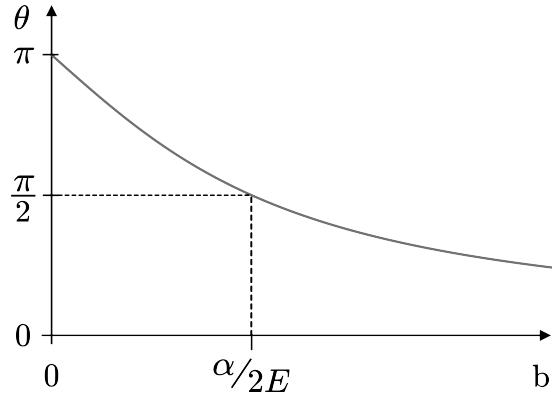


Abb. 5.9

Um den Zusammenhang zwischen Keplerbewegung und Bahnkurve der Rutherford-Streuung besser zu veranschaulichen, kann man letztere direkt aus der Keplerbewegung herleiten. Dazu betrachtet man die ebene Bahnkurve eines einlaufenden Teilchens in Polarkoordinaten. Das Teilchen komme aus «unendlich» großer Entfernung und werde an einem im Ursprung des Koordinatensystems befindlichen Zentralpotenzial gestreut. Der Radiusvektor vom Ursprung des Zentralpotenzials (Ursprung des Koordinatensystems) zum einfallenden Teilchen sei

$$\mathbf{r} = r \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (5.53)$$

wobei $\hat{\mathbf{u}}$ der in Richtung des Teilchens zeigende Einheitsvektor ist. Für $\hat{\mathbf{u}}$ gilt

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1 \quad \text{und damit} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^2}{\partial t} = 2\hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}} = 0 \quad (5.54)$$

Für die Geschwindigkeit des einaufenden Teilchens folgt aus Gl. (5.53)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \cdot \hat{\mathbf{u}} + r \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}}$$

und sein Drehimpuls ist somit

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(r\hat{\mathbf{u}} \times (\dot{r} \cdot \hat{\mathbf{u}} + r \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}})) = mr^2(\hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}})$$

Beim Zentralpotenzial wirkt die Kraft immer entlang des Radiusvektors, also

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) = -\nabla\left(-\frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\mathbf{u}} \quad (\alpha < 0)$$

Daraus folgt auch unmittelbar die Konstanz des Drehimpulses im Zentralpotenzial da

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = m\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\left(\underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}\right) = -\frac{m\alpha}{r}\underbrace{(\hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}})}_{=0} = 0$$

Nun verwendet man das Kreuzprodukt aus Beschleunigung und Drehimpuls

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = -\frac{\alpha}{mr^2}\hat{\mathbf{u}} \times mr^2(\hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}}) = -\alpha(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}})$$

das man mit Hilfe der Graßmann-Identität und Gl. (5.54) umschreiben kann zu

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = -\alpha\left(\hat{\mathbf{u}}\underbrace{(\hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}})}_{=0} - \dot{\hat{\mathbf{u}}}\underbrace{(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}})}_{=1}\right) = \alpha\dot{\hat{\mathbf{u}}} \quad (5.55)$$

Gl. (5.55) kann direkt integriert werden, da $\mathbf{L} = \text{const}$ und man erhält

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \alpha\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \quad (5.56)$$

wobei der Vektor \mathbf{c} eine Integrationskonstante ist. Die Vektorgleichung Gl. (5.56) kann durch Multiplikation von links mit $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}$ in eine Skalargleichung umgewandelt werden. Da das Spatprodukt kommutativ ist, erhält man:

$$\mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\mathbf{L} = \frac{1}{m}\mathbf{L}\mathbf{L} = \alpha r\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} + r\mathbf{c}$$

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{c} und $l = |\mathbf{L}|$, dann lautet die Gleichung aufgelöst nach r (mit $\alpha < 0$ ersetzt durch $-|\alpha|$)

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (5.57)$$

mit den Parametern

$$p = -\frac{l^2}{m|\alpha|} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{|\alpha|} \quad (5.58)$$

Gl. (5.57) ist die Bahnkurve eines Kegelschnitts. Dass der Kegelschnittparameter p in Gl. (5.58) negativ ist, legt bereits nahe, dass es sich um eine Hyperbel handelt. Um zu verifizieren, dass $\epsilon > 1$ gilt, muss man c bestimmen. Den Wert von c erhält man über die Anfangsbedingungen. Setzt man diese so wie in Abb. 5.7 skizziert, dann kommt das einlaufende Teilchen aus der $+z$ -Richtung mit der Geschwindigkeit v_∞ auf einer Geraden, die im Abstand b parallel zur z -Achse verläuft; die Bahnkurve liegt in der yz -Ebene. Bei sehr großen Entfernungen, also wenn das einfallende Teilchen noch «unendlich» weit vom Streuzentrum entfernt ist, gilt für die Gesamtenergie der Relativbewegung:

$$E = \frac{m}{2} \cdot v_\infty^2 \quad (5.59)$$

Ohne den Einfluss des Streuzentrums würde das einlaufende Teilchen mit Impuls mv_∞ auf gerader Bahn die y -Achse bei b schneiden. Mit den Einheitsvektoren des Koordinatensystems $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ besitzt es somit den Drehimpuls (siehe auch die Diskussion über den Drehimpuls bei linearer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit zu Beginn von Abschnitt 5.1)

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = b \cdot \mathbf{e}_y \times mv_\infty \cdot \mathbf{e}_z = mbv_\infty \cdot \mathbf{e}_x \quad (5.60)$$

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße. Daher gilt Gl. (5.60) auch für das einlaufende Teilchen, das noch «unendlich» weit vom Streuzentrum entfernt ist. Für diesen Fall wertet man nun Gl. (5.56) mit Gl. (5.60) aus und erhält so die Anfangsbedingung

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_z \times mbv_\infty \cdot \mathbf{e}_x = mbv_\infty^2 \cdot \mathbf{e}_y = \alpha \cdot \mathbf{e}_z + \mathbf{c}$$

Die Einheitsvektoren \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z stehen senkrecht zueinander und daher ist der Absolutwert von \mathbf{c}

$$c = \sqrt{\alpha^2 + (mbv_\infty^2)^2}$$

Für ϵ in Gl. (5.58) ergibt sich daraus

$$\epsilon = \frac{c}{|\alpha|} = \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_\infty^2}{\alpha}\right)^2} > 1$$

Daher ist die Bahnkurve der Rutherford-Streuung (Gl. (5.57)) tatsächlich eine Hyperbel. Wenn das einlaufende Teilchen weit vom Streuzentrum entfernt ist, ist die Gesamtenergie durch Gl. (5.59) gegeben und somit wird ϵ

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E^2b^2}{\alpha^2}} \quad (5.61)$$

Ein Vergleich mit Gl. (5.52) zeigt, dass für den Streuwinkel θ gilt

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\epsilon} \quad (5.62)$$

Aus Gl. (5.61) kann man nun den Zusammenhang zwischen Stoßparameter b und den Hyperbelparametern ableiten. Das Auflösen von Gl. (5.61) nach b^2 ergibt

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2}(\epsilon^2 - 1) \quad (5.63)$$

und aus Gl. (5.58) folgt mit Hilfe von Gl. (5.59) und Gl. (5.60), dass

$$p = -\frac{l^2}{m|\alpha|} = -\frac{mv_\infty^2 b^2}{|\alpha|} = -\frac{2Eb^2}{|\alpha|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2}{4E^2} = \frac{b^4}{p^2}$$

Letzteres eingesetzt in Gl. (5.63) für b^2 ergibt den Zusammenhang zwischen Stoßparameter b und den hyperbolischen Parametern p und ϵ

$$b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \quad (5.64)$$

5.3.1 Der Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt σ ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen. Im einfachsten Fall, ist σ der geometrische Wirkungsquerschnitt. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Regenschirm. Hält man diesen bei senkrecht fallendem Regen gerade überkopf dann treffen in einem kleinen Kreis um einen herum keine Regentropfen auf den Boden. Die Fläche dieses Kreises um die Füße herum ist der geometrische Wirkungsquerschnitt des Regenschirms. Hat der Schirm aber Löcher, dann wechselwirkt er nicht mehr mit allen auf ihn ziellenden Regentropfen, sondern lässt einige ungehindert durch - der Wirkungsquerschnitt des Regenschirms ist also kleiner geworden.

Um den Wirkungsquerschnitt für die Rutherford-Streuung zu bestimmen, wird wieder ein Teilchenstrom betrachtet der parallel zur z -Achse auf ein Streuzentrum zuläuft (Abb. 5.10). Teilchen deren Stoßparameter zwischen b und $b + db$ beträgt, werden durch die Wechselwirkung mit dem Streuzentrum in ein Winkelement zwischen θ und $\theta + d\theta$ gestreut. Weil das Streupotenzial (beispielsweise das Coulomb-Potenzial) nicht vom Winkel ϕ abhängt werden alle Teilchen deren Stoßparameter in den Kreisring mit Radius b und Dicke db fällt in das über ϕ integrierte Raumwinkelement $d\Omega$ gestreut.

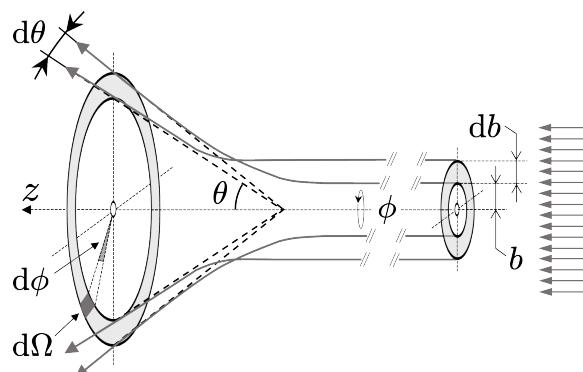


Abb. 5.10

Der Kreisring mit Radius b und Dicke db hat die Fläche

$$d\sigma = 2\pi b db$$

und der Raumwinkel integriert über ϕ ist

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Damit erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (5.65)$$

Da der Wirkungsquerschnitt immer positiv sein muss (er hat das Maß einer Fläche) und $db/d\theta$ auch negative Werte annehmen kann, wurden in Gl. (5.65) die Betragstriche hinzugefügt (b ist immer positiv und mit $0 \leq \theta \leq \pi$ gilt immer $\sin \theta \geq 0$). Aus Gl. (5.52) erhält man für b

$$b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (5.66)$$

und damit wird

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\alpha}{4E} \frac{1}{\sin^2 \theta / 2} \quad (5.67)$$

Einsetzen von Gl. (5.66) und Gl. (5.67) in Gl. (5.65) liefert den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta / 2} \quad (5.68)$$

Bemerkenswert an Gl. (5.68) ist, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt von α^2 abhängt und nicht von α . Damit ist zum Beispiel bei Coulomb-Streuung Gl. (5.68) unabhängig vom Vorzeichen der Ladungen. Den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} erhält man durch Integration über den Raumwinkel $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, also

$$\sigma_{tot} = 2\pi \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sin^4 \theta / 2} d\theta \quad (5.69)$$

Der Integrand in Gl. (5.69) divergiert für $\theta \rightarrow 0$. Für kleine θ gilt $\sin \theta \approx \theta$ und $\sin \theta / 2 \approx \theta / 2$, das heißt der Integrand divergiert für $\theta \rightarrow 0$ wie θ^{-3} und die Stammfunktion $\sigma_{tot}(\theta)$ divergiert daher wie θ^{-2} . Diese Divergenz bei kleinen Streuwinkeln beziehungsweise großen Stoßparametern hat ihre Ursache in der langen Reichweite von Zentralpotenzialen der Art $V(r) = -\alpha/r$.

5.4 Drehimpuls vieler Massenpunkte

In diesem Kapitel haben wir zuerst den Drehimpuls eines Massenpunkts in Linearbewegung mit konstanter Geschwindigkeit betrachtet. Dann sahen wir, wie wichtig der Drehimpuls ist zum Verständnis der Bewegung eines Massenpunkts im konservativen zentralen Kraftfeld eines anderen Massenpunkts, d.h. der Bewegung von Planeten um die Sonne, Satelliten um die Erde, oder von Raketen, die die Erde oder das Sonnensystem verlassen. Zuletzt untersuchten wir die Rolle des Drehimpulses beim Streuprozess eines Massenpunkts am abstoßenden Zentralpotenzial eines anderen Massenpunkts. Mit so einem Streuexperiment bewiesen Rutherford und sein Team 1911 die Existenz von Atomen, indem sie eine Goldfolie mit He^{+2} -Atomen, sogenannten α -Teilchen, bombardierten die von den Goldatomen gestreut wurden. In allen Fällen stellten wir fest, der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße, eine Konstante der Bewegung. Wie ist das mit dem Drehimpuls von Systemen vieler Massenpunkte?

Um diese Frage zu beantworten, kehren wir zur Erhaltung des linearen Impulses und zum Impulssatz zurück, der in Abschnitt 3.2.1 eingeführt wurde. Da stellten wir fest (Gl. (3.21)), dass ohne den Einfluss äußerer Kräfte der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten konstant ist. Im weiteren markieren wir äußere Kräfte mit einem hochgestellten «*ext*» und innere Kräfte mit einem hochgestellten «*int*». Die Erhaltung des Gesamtimpulses für ein System von Massenpunkten auf das keine äußere Kraft wirkt, ist mit Gl. (3.21)

$$\sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \mathbf{p}_i}_{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}^{int} \equiv 0 \quad (5.70)$$

wobei \mathbf{p}_i der Impuls eines Massenpunkts und \mathbf{F}_{ij}^{int} die Zweikörperwechselwirkungen zwischen zwei beliebigen Massenpunkten ist. Bezeichnet \mathbf{r}_{SP} die Schwerpunktkoordinate des Massenpunktsystems

$$\mathbf{r}_{SP} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{r}_{SP}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{M}$$

so ist die Änderungsrate des gesamten linearen Impulses $\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{r}}_{SP}$, wobei M die Gesamtmasse des Systems von Massenpunkten ist. Damit wird aus Gl. (5.70)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_{SP}}{dt^2} = 0 \quad (5.71)$$

Gl. (5.71) ist Newtons erstes Gesetzes: Ohne äußere Kraft verharrt ein Körper in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichmäßigen linearen Bewegung. Hier geht es aber nicht um einen Körper, sondern den Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten. Diese können sich aufgrund innerer Kräfte beliebig bewegen, aber der Schwerpunkt ändert seinen Bewegungszustand nicht. Der Schwerpunkt bleibt von jeglicher Rotationsbewegung der Massenpunkte unbeeinflusst. Daher kann es für ein System von Massenpunkten nur eine Rotationsachse geben kann, auf die keine äußeren Kräfte wirken, und zwar eine Achse durch den Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten.

Um den Bewegungszustand des Massenschwerpunkts eines Systems von Massenpunkten zu ändern, ist eine äußere Kraft erforderlich. Damit unterliegt die Schwerpunktbewegung dem zweiten Newtonschen Gesetz, d.h.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_{SP}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext}$$

wobei \mathbf{F}_i^{ext} die auf den Massenpunkt m_i wirkende äußere Kraft ist. Als nächstes betrachten wir die Kraftgleichungen für Massenpunkte in einem System von Massenpunkten, das äußeren und inneren Kräften ausgesetzt ist. Abb. 5.11 zeigt ein Beispiel für ein System aus drei Massenpunkten m_1 , m_2 und m_3 mit denen auf sie wirkenden inneren und äußeren Kräften. Die Wahl des Koordinatenursprungs in Abb. 5.11 zur Ortsbestimmung der Massenpunkte ist willkürlich; wir könnten genauso den Massenschwerpunkt oder jeden anderen beliebigen Bezugspunkt wählen. Wenn wir aus Abb. 5.11 die jeweiligen Kräfte und Abstände ablesen, erhalten wir das Kraftmoment bezüglich des Koordinatenursprungs, also das Drehmoment, das auf jeden der drei Massenpunkte ausgeübt wird

$$\mathbf{M}_1 = \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_1^{ext})$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_2^{ext})$$

$$\mathbf{M}_3 = \frac{d\mathbf{L}_3}{dt} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_3^{ext})$$

Mit etwas umordnen, ausnutzen der Tatsache, dass für die internen Kräfte gilt $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}$ und $\mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}$, sowie Verwendung der Vektoridentitäten (siehe Insert in Abb. 5.11) $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ und $\mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$, erhalten wir für das

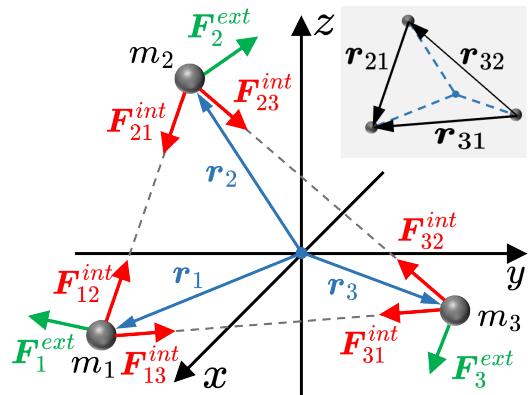


Abb. 5.11

Gesamtdrehmoment, das auf das System der drei Massenpunkte wirkt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3) \\ &= [\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_{32} \times \mathbf{F}_{23}] + [\mathbf{r}_{31} \times \mathbf{F}_{13}] + \sum_{i=1}^3 [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}] \end{aligned}$$

Der Vektor \mathbf{r}_{21} ist antiparallel zu \mathbf{F}_{12} , ebenso wie \mathbf{r}_{32} zu \mathbf{F}_{23} und \mathbf{r}_{31} zu \mathbf{F}_{13} . Daher verschwinden alle Vektorprodukte mit inneren Kräften, und was übrig bleibt, ist

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}]$$

wobei

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]$$

Offensichtlich hätten wir viel mehr Massenpunkte als die drei von Abb. 5.11 einbeziehen können. Für ein System von n Massenpunkten erhält man dann die Gleichungen

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}] \quad (5.72)$$

und

$$\mathbf{L} = \sum_i^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i] \quad (5.73)$$

Mit Gl. (5.72) folgt, dass der Drehimpuls eine Konstante ist, falls keine äußere Kräfte auf das System einwirken. Genau das haben wir festgestellt, als wir die Bewegung von Planeten um die Sonne betrachteten, denn die einzigen Kräfte, die bei der Keplerbewegung am Werk sind, sind die wechselseitigen Anziehungskräfte zwischen der Sonne und den jeweiligen Planeten sowie zwischen den Planeten untereinander. Das Sonnensystem selbst ist im Wesentlichen ein System von Massenpunkten, in dem nur die inneren Kräfte der gegenseitigen Gravitationsanziehung wirken und daher ist der Drehimpuls unseres Sonnensystems, d.h. seine Richtung und sein Betrag, eine Erhaltungsgröße. Obwohl mehr als 99% der Masse unseres Sonnensystems in der Masse der Sonne enthalten sind, sind es die Planeten, die etwa 98% des Drehimpulses des Sonnensystems tragen. Das liegt natürlich einfach daran, dass der Drehimpuls linear mit der Entfernung skaliert. Daher trägt selbst die Masse eines kleinen Planeten, der viele Millionen Kilometer von der Sonne entfernt ist, viel mehr zum Drehimpuls des Sonnensystems bei als eine ähnliche Masse am Rand der Sonne, etwa 696 000 Kilometer vom Zentrum der Sonne entfernt.

Das Erde-Mond System ist ein gutes Beispiel für die Erhaltung des Drehimpulses. Der Mond entstand vor ca. 4 500 Millionen Jahren bei einer Kollision zwischen einem Planeten von etwa der Größe des Mars, Wissenschaftler nennen ihn Theia, und der Erde, die damals etwa 90% ihrer heutigen Masse hatte. Wir wissen nicht, wie schnell sich die Erde drehte, als sie mit Theia kollidierte, und wir wissen auch nicht, wie stark diese Kollision die Rotationsgeschwindigkeit der Erde verändert haben könnte. Aber wir wissen, dass als Folge der Kollision der Mond einige 24 000 km vom Erdmittelpunkt entfernt entstand und heute die Erde in einer durchschnittlichen Entfernung von 384 400 km umkreist. Weiters wissen wir, dass aufgrund des Fehlens äußerer Kräfte, der Drehimpuls des Erde-Mond Systems seitdem praktisch unverändert ist.¹ Bisher haben wir nur den Drehimpuls betrachtet, der mit der Rotation eines Massenpunkts um einen externen Bezugspunkt verbunden ist. Aber wie in Abb. 5.12 angedeutet, gibt es beim Erde-Mond System auch Beiträge zum Gesamtdrehimpuls aus der Eigenrotation der Erde und des Mondes. Daher ist der Gesamtdrehimpuls des Erde-Mond Systems der Drehimpuls, der auf den Mond zurückzuführen ist, der die Erde umkreist, zuzüglich der Drehimpulskomponenten, die mit den Eigenrotationen der Erde und des Mondes verbunden sind, d.h.

$$\mathbf{L}_{\text{Total}}^{\text{Erde-Mond}} = \mathbf{L}_{\text{Mond}}^{\text{Orbit}} + \mathbf{L}_{\text{Erde}}^{\text{Eigen}} + \mathbf{L}_{\text{Mond}}^{\text{Eigen}}$$

Der Mond ist heute 16 Mal weiter vom Erdmittelpunkt entfernt als bei seiner Entstehung vor etwa 4 500 Millionen Jahren. $\mathbf{L}_{\text{Mond}}^{\text{Orbit}}$, der Beitrag des umlaufenden Mondes zum Gesamtdrehimpuls des Erde-Mond Systems hat also zugenommen, was bedeutet, dass die Beiträge der Eigenrotationen der Erde und des Mondes abgenommen haben. Da die Erde so viel massiver ist als der Mond, ist der größte Teil dieser Abnahme auf eine langsamere rotierende Erde zurückzuführen. Es gibt noch viele Unsicherheiten was die Einzelheiten der Mondentstehung betrifft und die genaue Abnahme von $\mathbf{L}_{\text{Erde}}^{\text{Eigen}}$ kennen wir nicht, aber wir können sie abschätzen. So wie es aussieht, war ein Tag auf der Erde kurz nach der Entstehung des Mondes möglicherweise nicht mehr als 3–5 Stunden lang. Fossilienfunde geben uns eine zusätzliche Bestätigung dafür, dass sich die Erdrotation verlangsamt.

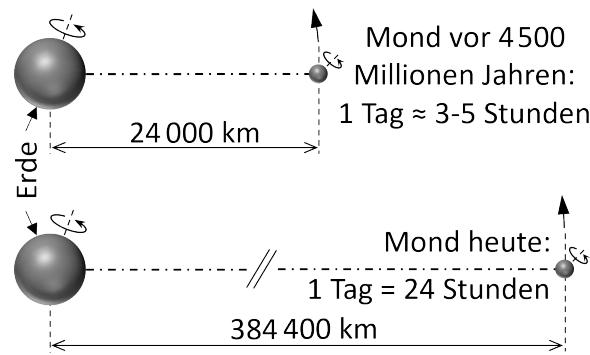


Abb. 5.12

¹Asteroideneinschläge sind natürlich äußere Kräfte, aber angesichts der Masse der Erde ist ihr Einfluss auf den Drehimpuls des Erde-Mond Systems vernachlässigbar.

Vergleiche der Wachstumslinien fossiler Korallen, die vor 350 Millionen Jahren wuchsen, mit modernen Korallen, zeigen, dass ein Erdenjahr damals etwa 385 Tage hatte. Daher dauerte ein Erdentag damals etwa dreiundzwanzig Stunden. Und Gezeitenzyklen, die in Sedimentgesteinen an Orten wie Südaustralien vor 620 Millionen Jahren und in Utah vor 900 Millionen Jahren aufgezeichnet wurden, zeigen, dass die Länge eines Tages damals 21.9 bzw. 18.9 Stunden betrug. Der Trend ist also klar: Je weiter wir zurückblicken, desto kürzer waren die Tage auf der Erde, desto schneller rotierte die Erde, und desto näher war der Mond der Erde. Heute können wir tatsächlich messen, wie schnell sich der Mond von der Erde entfernt. In den 1970er Jahren stellten Apollo-Astronauten Spiegel auf der Mondoberfläche auf, mit deren Hilfe wir Laserlicht von einer Quelle auf der Erde von der Mondoberfläche reflektieren können. Indem wir die Zeit messen, die das Laserlicht benötigt, um zum Mond und zurück zur Erde zu gelangen, können wir die Entfernung des Mondes von der Erde genau bestimmen. Seit den ersten Messungen Anfang der 1970er Jahre hat sich dieser Abstand jedes Jahr um durchschnittlich 3.82 Zentimeter vergrößert. Die Erdrotation um ihre Achse ist ein Beispiel, wenn auch kein perfektes, für die Rotation eines starren Körpers, auf die wir als nächstes unsere Aufmerksamkeit richten werden.

6. Rotation starrer Körper

6.1 Der Trägheitstensor

Sei, wie in Abb. 6.1 skizziert, \mathbf{r}_P der Vektor zum Ursprung des körperfesten Bezugssystems in P und \mathbf{r}_K die Koordinate eines Massenpunkts K des starren Körpers, jeweils bezogen auf den Ursprung O des Koordinatensystems. Dann gilt:

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{PK} \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PK} \quad (6.1b)$$

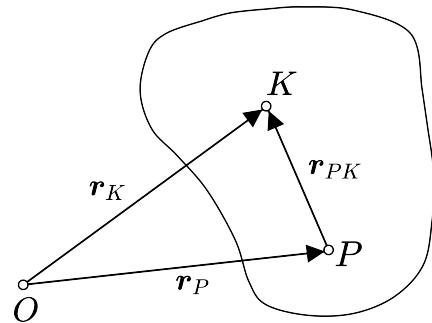


Abb. 6.1

Die Abstände im starren Körper selbst ändern sich nicht (das ist ja die Definition eines starren Körpers) und somit

$$(\mathbf{r}_{PK})^2 = \mathbf{r}_{PK} \cdot \mathbf{r}_{PK} = const$$

Nach der Zeit differenziert folgt daraus

$$0 = 2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_{PK}}{dt} \cdot \mathbf{r}_{PK} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{PK} \perp \mathbf{r}_{PK}$$

Damit lässt sich Gl. (6.1b) umschreiben zu

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_P + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PK}}_{\mathbf{v}_{PK}} \quad (6.2)$$

Der Gesamtdrehimpuls des starren Körpers ergibt sich aus der Summe der Drehimpulse aller Massenpunkte des Körpers

$$\mathbf{L} = \sum_m m_K (\mathbf{r}_K \times \mathbf{v}_K) \rightarrow \int (\mathbf{r}_K \times \mathbf{v}_K) \underbrace{dm}_{\rho \cdot dV}$$

Ist speziell der Ursprung des körperfesten Bezugssystems der Vektor zum Körperschwerpunkt, also

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_S \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_{PK} = \mathbf{r}_{SK}$$

dann ist der Gesamtdrehimpuls des starren Körpers

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}_{SK}) \times (\mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm$$

wobei

$$dm = \rho \cdot dx_{SK} \cdot dy_{SK} \cdot dz_{SK}$$

Mit der Masse $M = \int dm$ des starren Körpers wird daraus

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r}_S \times \mathbf{v}_S) \cdot M + \int (\mathbf{r}_S \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm + \int \mathbf{r}_{SK} \times (\mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm$$

Da als Ursprung des körperfesten Bezugssystems der Schwerpunkt gewählt wurde gilt

$$\int \mathbf{r}_{SK} dm \equiv 0$$

und somit verschwinden Integrale mit Integrand linear in \mathbf{r}_{SK} und man erhält

$$\mathbf{L} = \underbrace{(\mathbf{r}_S \times \mathbf{v}_S) \cdot M}_{\mathbf{L}_S} + \underbrace{\int \mathbf{r}_{SK} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm}_{\mathbf{L}_{rot}} \quad (6.3)$$

Hier ist \mathbf{L}_S der Drehimpuls aufgrund der Bewegung des Körperschwerpunkts um den Koordinatenurprung und \mathbf{L}_{rot} ist der Drehimpuls aufgrund der Eigenrotation des Körpers. Diese Eigenrotation starrer Körper wird als Drall oder manchmal auch als Spin bezeichnet (nicht zu verwechseln mit dem Spin von Elementarteilchen). Mit Hilfe der Identität $a \times (b \times c) = (ac)b - (ab)c$ können wir für \mathbf{L}_{rot} in Gl. (6.3) den Ausdruck unter dem Integral umschreiben zu

$$\mathbf{r}_{SK} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) = \mathbf{r}_{SK}^2 \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_{SK} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}_{SK}$$

und erhalten damit für die Komponenten von \mathbf{L}_{rot}

$$L_{j_{rot}} = \sum_{l=1}^3 \int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right) dm \cdot \omega_l = \sum_{l=1}^3 J_{jl} \cdot \omega_l$$

wobei

$$J_{jl} = \int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right) dm$$

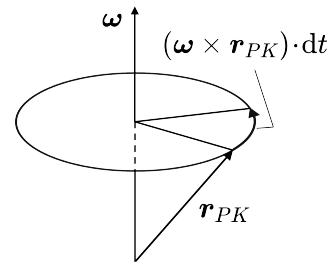


Abb. 6.2

nur von der Massenverteilung des Körpers und der Wahl des Bezugssystems, d.h., der Wahl von \mathbf{r}_{SK} abhängt. Die J_{jl} sind die Komponenten des symmetrischen Trägheitstensors $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

und mit ihm gilt für \mathbf{L}_{rot}

$$\mathbf{L}_{rot} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{L}_{rot} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{(d)} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.5)$$

wobei der Index d anzeigt dass es sich bei der Notation $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{(d)}$ um den Trägheitstensor der Eigenrotation, d.h., des Dralls handelt. Aus Gl. (6.3) wird somit

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_S + \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{(d)} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.6)$$

Die Diagonalkomponenten von $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$, also die J_{jj} , werden als Massenträgheitsmomente bezeichnet und die J_{jl} mit $j \neq l$ heißen Massendeviationsmomente. Sind alle J_{jl} mit $j \neq l$ gleich Null, dann zeigt \mathbf{L}_{rot} in dieselbe Richtung wie $\boldsymbol{\omega}$, andernfalls, was der allgemeinere Fall ist, zeigen \mathbf{L}_{rot} und $\boldsymbol{\omega}$ in unterschiedliche Richtungen.

Zur Berechnung der J_{jl} :

$$J_{11} = \int (\mathbf{r}_{SK}^2 - x_{1_{SK}}^2) dm = \int (y_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm$$

J_{22} und J_{33} erhält man durch zyklische Vertauschung.

$$J_{12} = - \int x_{1_{SK}} x_{2_{SK}} dm = - \int x_{SK} y_{SK} dm = J_{21}$$

Den Rest der J_{jl} mit $j \neq l$ erhält man wiederum durch zyklische Vertauschung.

Zusammengefasst erhält man:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int (y_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm & J_{12} = J_{21} &= - \int x_{SK} y_{SK} dm \\ J_{22} &= \int (x_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm & J_{13} = J_{31} &= - \int x_{SK} z_{SK} dm \\ J_{33} &= \int (x_{SK}^2 + y_{SK}^2) dm & J_{23} = J_{32} &= - \int y_{SK} z_{SK} dm \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die Addition der Massenträgheitsmomente in Gl. (6.7) ergibt

$$J_{11} + J_{22} + J_{33} = 2 \cdot \int (x_{SK}^2 + y_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm = 2 \cdot \int \mathbf{r}_{SK}^2 dm \quad (6.8)$$

Das Integral hängt nur vom Bezugspunkt ab und nicht von der Wahl des Bezugssystems, das heißt des Koordinatenursprungs. Somit bleibt das Integral bei Verdrehungen des Koordinatensystems unverändert.

Erhaltung des Massenträgheitsmoments

Die Summe der drei Massenträgheitsmomente eines starren Körpers ist unter Verdrehungen des Koordinatensystems eine Erhaltungsgröße.

Aus Gl. (6.7) kann man zudem die folgenden Dreiecksungleichungen ablesen:

$$J_{11} + J_{22} \geq J_{33}, \quad J_{22} + J_{33} \geq J_{11}, \quad J_{33} + J_{11} \geq J_{22} \quad (6.9)$$

Dreiecks-Ungleichung der Massenträgheitsmomente

Die Summe zweier Massenträgheitsmomente eines starren Körpers ist immer größer oder mindestens gleich dem dritten Massenträgheitsmoment.

Satz von Huygens-Steiner

Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ eines Körpers hängt von der Wahl des Bezugspunkts relativ zum Massenschwerpunkt des Körpers ab. Es sei, wie in Abb. 6.3 skizziert, der Bezugspunkt P im starren Körper bezüglich seines Massenschwerpunkts S verschoben aber das Bezugssystem, das heißt das Koordinatensystem, sei unverändert:

$$\mathbf{r}_{PK} = \mathbf{r}_{PS} + \mathbf{r}_{SK} \quad (*)$$

Verschiebt man nun eine durch den Schwerpunkt verlaufende Drehachse parallel in den neuen Bezugspunkt P , so gilt für die Komponenten von $\underline{\underline{J}}$ bezüglich dieser durch den neuen Bezugspunkt verlaufenden Drehachse:

$$J_{P_{jl}} = \underbrace{\int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{PK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PK}} x_{l_{PK}} \right) dm}_{Int} \quad (6.10)$$

Im Integranden « Int » ersetzen wir \mathbf{r}_{PK} durch die Beziehung (*) und erhalten

$$Int = \sum_{i=1}^3 (x_{i_{PS}} + x_{i_{SK}})^2 \delta_{jl} - (x_{j_{PK}} + x_{j_{SK}})(x_{l_{PK}} + x_{l_{SK}})$$

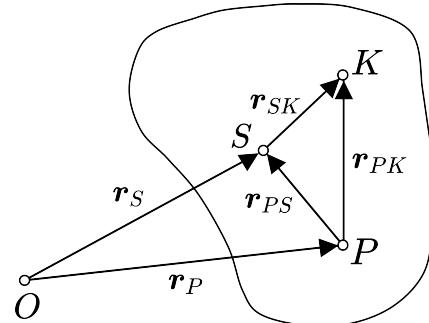


Abb. 6.3

Nach Ausmultiplizieren und Umordnen wird daraus

$$\begin{aligned} Int &= \sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PS}} x_{l_{PS}} + \sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}} x_{i_{SK}} \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{PS}} - x_{j_{PS}} x_{l_{SK}} \end{aligned}$$

Mit diesem umgeformten Integranden wird aus Gl. (6.10)

$$\begin{aligned} J_{P_{jl}} &= \underbrace{\int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PS}} x_{l_{PS}} \right) dm}_{J_{PS}} + \underbrace{\int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right) dm}_{J_{S_{jl}}} \\ &\quad + 2\delta_{jl} \sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}} \underbrace{\int x_{i_{SK}} dm}_{=0} - x_{l_{PS}} \underbrace{\int x_{j_{SK}} dm}_{=0} - x_{j_{PS}} \underbrace{\int x_{l_{SK}} dm}_{=0} \end{aligned}$$

Die letzten drei Integrale auf der linken Seite der Gleichung verschwinden weil für Integration im Schwerpunktsystem, d.h., der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Körperschwerpunkt, natürlich wieder gilt

$$\int \mathbf{r}_{SK} dm \equiv 0$$

Somit sind die Trägheitsmomente für eine Drehachse durch einen Punkt P , die parallel zur Drehachse durch den Schwerpunkt S mit dem Abstand \mathbf{r}_{PS} zum Schwerpunkt verläuft, gegeben durch

$$J_{P_{jl}} = J_{PS} + J_{S_{jl}} \quad (\text{Satz von Steiner}) \quad (6.11)$$

In dieser Gleichung sind

$$J_{S_{jl}} = M \cdot \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right)$$

die Komponenten des Trägheitstensors bezogen auf die parallele Drehachse durch den Schwerpunkt und

$$J_{PS} = M \cdot \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PS}} x_{l_{PS}} \right)$$

gibt an um wieviel größer die Komponenten $J_{P_{jl}}$ des Trägheitstensors für die durch den Punkt P verlaufende Drehachse sind im Vergleich zur parallelen Drehachse durch den Schwerpunkt.

Zusammengefasst erhält man für die Komponenten von $\underline{\underline{J}}$ bezüglich der neuen Drehachse die unter dem Namen Huygens-Steiner Satz bekannten Beziehungen, benannt nach Christiaan Huygens und Jakob Steiner (1796 - 1863):

$$\begin{aligned} J_{P_{11}} &= M(y_{PS}^2 + z_{PS}^2) + J_{11} \quad , \quad J_{P_{12}/P_{21}} = M \cdot x_{PS} y_{PS} + J_{12/21} \\ J_{P_{22}} &= M(x_{PS}^2 + z_{PS}^2) + J_{22} \quad , \quad J_{P_{13}/P_{31}} = M \cdot x_{PS} z_{PS} + J_{13/31} \\ J_{P_{33}} &= M(x_{PS}^2 + y_{PS}^2) + J_{22} \quad , \quad J_{P_{23}/P_{32}} = M \cdot y_{PS} z_{PS} + J_{23/32} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Insbesonders gilt, dass der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ für eine nicht durch den Massenschwerpunkt verlaufende Drehachse immer größer ist als für eine parallel dazu durch den Massenschwerpunkt verlaufende Drehachse. Das ist eine direkte Folgerung aus Gl. (6.11) da $J_{S_{ij}}$ immer positiv ist.

Satz von Huygens-Steiner

Die Massenträgheitsmomente eines starren Körpers für Achsen durch seinen Massenschwerpunkt sind stets kleiner als die für parallele, nicht durch den Massenschwerpunkt verlaufende Achsen.

Der Huygens-Steiner Satz besagt, dass sich der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ eines starren Körpers bei Verschiebung des Körper-Bezugs punkts vom Massenschwerpunkt des Körpers ändert. Dabei bleibt die Winkelgeschwindigkeit aber unverändert da sie die Rotation des starren Körpers bezüglich des Koordinatensystems beschreibt und diese unabhängig von der Wahl des Körper-Bezugs punkts ist.

6.2 Euler-Gleichungen

Mit Gl. (6.2) ist die kinetische Energie eines starren Körpers

$$T = \frac{1}{2} \int [\mathbf{v}_P + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PK})]^2 dm \quad \text{mit} \quad dm = \rho \cdot dx_{SK} dy_{SK} dz_{SK}$$

Rechnet man vom Massenschwerpunkt aus, das heißtt $P = S$, dann wird

$$\mathbf{r}_{PK} \rightarrow \mathbf{r}_{SK} \quad \text{und mit} \quad \int \mathbf{r}_{SK} dm = 0$$

erhält man für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \left[M \cdot \mathbf{v}_S^2 + 2 \cdot \underbrace{\int \mathbf{v}_S \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm}_{= 0} + \int (\underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}}_{\mathbf{a}}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm \right]$$

Das Spatprodukt $\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK})$ unter dem Integral im letzten Glied lässt sich umschreiben zu

$$\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) = \mathbf{r}_{SK} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_{SK} \times \mathbf{a})$$

Damit und mit Hilfe von Gl. (6.3) sowie Gl. (6.5) ergibt sich für die kinetische Energie eines starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \mathbf{L}_{rot} = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega} \quad (6.13)$$

Die kinetische Energie eines starren Körpers setzt sich aus einem Translationsterm T_T und einem Rotationsterm T_R zusammen. Rotiert ein starrer Körper um eine Achse D deren Richtung durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}_D$ gegeben ist, dann ist $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{n}}_D$ und somit ergibt sich für den Rotationsterm T_R in Gl. (6.13)

$$T_R = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_D \underline{\underline{\mathbf{J}}} \hat{\mathbf{n}}_D \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}J_D \cdot \omega^2$$

wobei J_D das Trägheitsmoment für Rotation um die Drehachse D ist. Ein Vergleich mit T_T zeigt, dass der Trägheitstensor für T_R die gleiche Rolle spielt wie die träge Masse M für T_T .

Ein symmetrischer Tensor ($A_{ij} = A_{ji}$) wie der Trägheitstensor $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ besitzt drei reelle Eigenwerte, die sogenannten Hauptträgheitsmomente eines Körpers, mit zueinander senkrechten Eigenvektoren, den sogenannten Hauptträgheitsachsen des Körpers.

Rotierender Quader

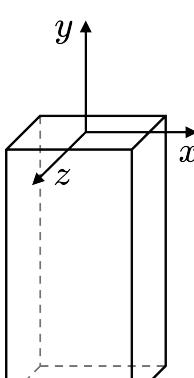


Abb. 6.4

Bezogen auf ein körperfestes Hauptachsensystem, wie zum Beispiel für den Quader in Abb. 5.4, verschwinden die Nebendiagonalelemente von $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$. Die Diagonalelemente, das heißt die Massenträgheitsmomente des Quaders, entsprechen dann seinen Hauptträgheitsmomenten. Mit

$$J_{xx} = A \quad , \quad J_{yy} = B \quad , \quad J_{zz} = C$$

wird aus $\boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega}$ in Gl. (6.13)

$$\boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = A(\omega_x^2 + \omega_z^2) + B\omega_y^2$$

Im Fall $\mathbf{v}_S = 0$ ist die gesamte kinetische Energie des Quaders Rotationsenergie, also

$$T = T_R = \frac{1}{2}A[(\omega_x^2 + \omega_z^2) + B\omega_y^2]$$

Im Folgenden wird ein raumfestes Bezugssystem x, y, z mit Ursprung O und ein relativ dazu bewegtes Bezugssystem x', y', z' mit Ursprung O' betrachtet. Die Ortsvektoren eines beliebigen Punktes im jeweiligen Koordinatensystem sind verknüpft durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$$

Die Bewegung des O' -Systems relativ zum O -System kann eine Translation oder eine Rotation sein, oder auch beides zusammen.

Sei nun \mathbf{A} eine Vektorgröße im raumfesten Koordinatensystem mit Ursprung O

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

Die zeitliche Ableitung von \mathbf{A} ist

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^3 A_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} \quad (6.14)$$

Mit $\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_i$ wird daraus

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot{A}_i \hat{\mathbf{e}}_i}_{\frac{d'\mathbf{A}}{dt}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (6.15)$$

Hierbei ist $d'\mathbf{A}/dt$ die vom bewegten Bezugssystem beobachtete Änderung von \mathbf{A} , das heißt,

$$\frac{d'\mathbf{A}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{A}_{x'} \\ \dot{A}_{y'} \\ \dot{A}_{z'} \end{pmatrix}$$

Dass dies tatsächlich der Fall ist, wird verständlich wenn, wie in Abb. 6.5 gezeigt, die Bewegung des O' -Systems relativ zum O -System auf eine Rotation beschränkt und zu gleich $O' = O$ ist. Ist dann nämlich \mathbf{A} konstant, das heißt $d'\mathbf{A}/dt = 0$, dann bewegt sich \mathbf{A} im O -System auf einem Kreis dessen Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, dem Vektor der Rotationsgeschwindigkeit des O' -Systems steht. \mathbf{A} bewegt sich dabei im O -System mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$.

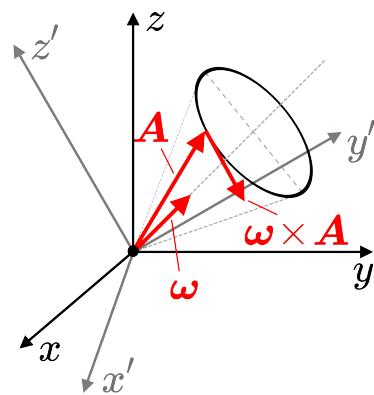


Abb. 6.5

Überträgt man diese Betrachtung nun auf den Drehimpulsvektor \mathbf{L} mit Schwerpunktgeschwindigkeit $\mathbf{v}_S = 0$ dann liegt die gleiche Situation vor wie in Abb. 6.5, das heißt,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (6.16)$$

Mit Gl. (6.5) erhält man dadurch die Vektorform der sogenannten Euler-Gleichungen für das Drehmoment $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$, benannt nach Leonhard Euler (1707 - 1783), manchmal auch als Eulersche Kreiselgleichungen bezeichnet:

$$\mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega}) \quad (6.17)$$

In Koordinatenform lauten beispielsweise die Euler-Gleichungen im Fall des Quaders aus Abb. 6.4

$$\begin{aligned} M_x &= A\dot{\omega}_x - (B - A)\omega_y\omega_z \\ M_y &= B\dot{\omega}_y \\ M_z &= A\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y \end{aligned} \quad (6.18)$$

Tab. 6.1: Wichtige Beziehungen in der Dynamik starrer Körper (S = Schwerpunkt).

Drehimpuls:	$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \mathbf{L}_{rot} = m \cdot \mathbf{r}_S \times \mathbf{v}_S + \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}$
Trägheitstensor:	$J_{ij} = \int (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm$
Huygens-Steiner Satz:	$J_{P_{ij}} = m(\mathbf{r}_{PS}^2 \delta_{ij} - x_{PSi} x_{PSj}) + J_{S_{ij}}$
Kinetische Energie:	$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}$
Zeitliche Änderung von Vektoren:	$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}$
Rotierender Anteil von \mathbf{L} :	$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d'L}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{d\underline{\underline{\mathbf{J}}}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \end{aligned}$

6.2.1 Eulersche Winkel

Leonhard Euler führte auch die drei nach ihm benannten Winkel ein, welche die Ausrichtung eines starren Körpers in Bezug auf ein festes Koordinatensystem beschreiben. Abb. 6.6 zeigt die Rotation eines körperfesten Koordinatensystems O' mit den Achsen x'_1 , x'_2 und x'_3 bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems O mit den Achsen x_1 , x_2 und x_3 . Die Schnittlinie der x_1x_2 -Ebene mit der $x'_1x'_2$ -Ebene ist die sogenannte Knotenlinie, in Abb. 6.6 die Gerade K . Die Euler-Winkel α , β und γ in Abb. 6.6 sind wie folgt definiert:

α : Der Winkel zwischen der x_1 -Achse und der Knotenlinie K .

β : Der Winkel zwischen der x_3 - und der x'_3 -Achse.

γ : Der Winkel zwischen der Knotenlinie K und der x'_1 -Achse.

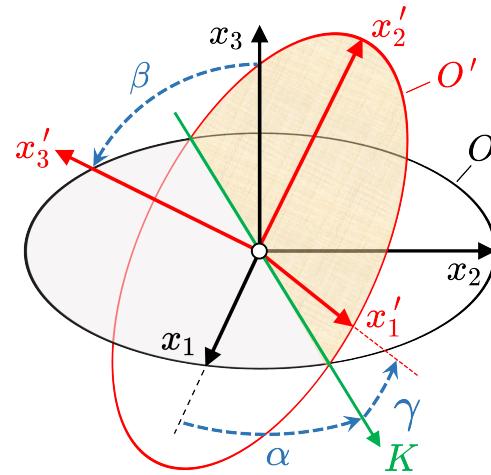


Abb. 6.6

Die Bedeutung der Eulerschen Winkel liegt darin, dass mit ihrer Hilfe ein raumfestes Koordinatensystem O durch drei in nicht-vertauschbarer Reihenfolge ausgeführte Einzeldrehungen R^α , R^β und R^γ in ein körperfestes Koordinatensystem O' überführt werden kann.

- Im ersten Schritt dreht man das System O um den Winkel α um die x_3 -Achse und bringt damit die x_1 -Achse mit der Knotenlinie K zur Deckung. Die Drehmatrix für diese Operation ist

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Im zweiten Schritt dreht man dann dieses rotierte O um den Winkel β um die Knotenlinie K und bringt damit die x_3 -Achse mit der x'_3 -Achse zur Deckung. Die Drehmatrix für diese Operation ist

$$R^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

- Im dritten Schritt dreht man das so erhaltene O um den Winkel γ um die x'_3 -Achse und bringt damit die bereits nach dem ersten Schritt in der Knotenlinie liegende x_1 -Achse mit der x'_1 -Achse zur Deckung. Die Drehmatrix für diese Operation ist

$$\mathbf{R}^\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Ausführung des dritten Schrittes, d.h. nach der Operation

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise mit den Abkürzungen $C_\alpha = \cos \alpha$, $S_\alpha = \sin \alpha$, $C_\beta = \cos \beta$, $S_\beta = \sin \beta$, $C_\gamma = \cos \gamma$ und $S_\gamma = \sin \gamma$

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\gamma - S_\alpha C_\beta S_\gamma & -C_\alpha S_\gamma - S_\alpha C_\beta C_\gamma & S_\alpha S_\beta \\ S_\alpha C_\gamma + C_\alpha C_\beta S_\gamma & -S_\alpha S_\gamma + C_\alpha C_\beta C_\gamma & -C_\alpha S_\beta \\ S_\beta S_\gamma & S_\beta C_\gamma & C_\beta \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

ist O mit O' deckungsgleich. Die Operation (Notation im Weiteren: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\alpha\beta\gamma}$)

$$\hat{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{R}\hat{\mathbf{e}}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.20)$$

führt die Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$ des raumfesten Koordinatensystems O über in die Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}'_i$ des körperfesten Koordinatensystems O' . Für die Komponenten R_{ij} der Rotationsmatrix \mathbf{R} gilt

$$R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{e}}_j \quad (6.21)$$

was sich mit Gl. (6.20) umschreiben lässt zu

$$R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{e}}'_j \quad (6.22)$$

Die Komponenten R_{ij} sind also gerade jeweils der Kosinus des Winkels zwischen der x_i -Achse im raumfesten Koordinatensystem O und der x'_j -Achse im körperfesten Koordinatensystem O' . Für die Komponentendarstellung eines Vektors \mathbf{b} in den Koordinatenräumen O und O' gilt

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = b'_1 \hat{\mathbf{e}}'_1 + b'_2 \hat{\mathbf{e}}'_2 + b'_3 \hat{\mathbf{e}}'_3$$

Für die Komponenten b'_j im körperfesten Koordinatensystem O' gilt also mit Gl. (6.22)

$$b'_j = \sum_{i=1}^3 b_i \hat{e}_i \hat{e}'_j = \sum_{i=1}^3 b_i R_{ij}$$

In Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{das heißt} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{R}^T \mathbf{b} \quad (6.23)$$

wobei \mathbf{R}^T die transponierte Matrix von \mathbf{R} ist. Gl. (6.20) zeigt, dass \mathbf{R} die Drehmatrix der Einheitsvektoren von O nach O' ist und Gl. (6.23) zeigt, dass \mathbf{R}^T die Drehmatrix der Vektorkomponenten von O nach O' ist.

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\gamma - S_\alpha C_\beta S_\gamma & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha C_\beta S_\gamma & S_\beta S_\gamma \\ -C_\alpha S_\gamma - S_\alpha C_\beta C_\gamma & -S_\alpha S_\gamma + C_\alpha C_\beta C_\gamma & S_\beta C_\gamma \\ S_\alpha S_\beta & -C_\alpha S_\beta & C_\beta \end{pmatrix}$$

Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist $\det \mathbf{R} \neq 0$ und es existiert somit eine inverse Matrix \mathbf{R}^{-1} . Da die Spaltenvektoren von \mathbf{R} paarweise orthogonal sind gilt $\mathbf{R}^{-1} \equiv \mathbf{R}^T$. Damit folgt durch Multiplikation von Gl. (6.23) mit \mathbf{R}

$$\mathbf{R} \mathbf{b}' = \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{b} = \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{b} = \mathbf{R} \mathbf{b}'$$

Um aus der Drehgeschwindigkeit eines Körpers seine Lage berechnen zu können, benötigt man einen Zusammenhang zwischen den Drehgeschwindigkeiten ω' im körperfesten Koordinatensystem O' und den Änderungsgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden erstellt indem im Koordinatensystem O' die Drehachsen der drei Einzeldrehungen bestimmt werden: um die Achse x_3 , die Knotenlinie K , und die Achse x'_3 . Durch Multiplikation der entsprechenden Einheitsvektoren \hat{e}_3 , \hat{e}_K und \hat{e}'_3 mit den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$ erhält man dann die Drehvektorkomponenten für ω' .

Mit den Einheitsvektoren \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 und \hat{e}'_3 in O' , \hat{e}_1 , \hat{e}_2 und \hat{e}_3 in O , sowie dem Einheitsvektor \hat{e}_K in Richtung der Knotenlinie gilt für die Eulerschen Winkel (Richtungskosinus)

$$\cos \alpha = \hat{e}_1 \hat{e}_K \quad ; \quad \cos \beta = \hat{e}_3 \hat{e}'_3 \quad ; \quad \cos \gamma = \hat{e}'_1 \hat{e}_K \quad (6.24)$$

Für Drehungen um die x_3 -Achse (erster Schritt) im Koordinatensystem O' muss \hat{e}_3 als Funktion von \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 und \hat{e}'_3 ausgedrückt werden. Aus Abb. 6.6 ist unmittelbar ersichtlich,

dass die Projektion von \hat{e}_3 auf die x'_3 -Achse, also die \hat{e}'_3 -Komponente von \hat{e}_3 , gleich $\cos \beta$ ist. Man kann dieses Ergebnis aber auch einfach aus Gl. (6.24) erhalten indem man den Ausdruck für $\cos \beta$ mit \hat{e}'_3 multipliziert. Die \hat{e}'_1 - und \hat{e}'_2 -Komponenten von \hat{e}_3 ergeben sich aus der Projektion von \hat{e}_3 in die $x'_1x'_2$ -Ebene. Der Betrag dieser Projektion ist $\cos(90^\circ - \beta)$, also $\sin \beta$. Rotiert man in Gedanken die x_1 -Achse um die x_3 -Achse, bis die x_1 -Achse in der Knotenlinie K zu liegen kommt, dann sieht man dass der in die $x'_1x'_2$ -Ebene projezierte Einheitsvektor \hat{e}_3 in der x_2x_3 -Ebene liegt, das heißt, er schließt mit x'_2 den Winkel γ ein. Damit hat man für die Komponenten von \hat{e}_3 in O'

$$\hat{e}_3 = \sin \beta \sin \gamma \cdot \hat{e}'_1 + \sin \beta \cos \gamma \cdot \hat{e}'_2 + \cos \beta \cdot \hat{e}'_3 \quad (6.25)$$

Für Drehungen um die Knotenlinie K (zweiter Schritt) im Koordinatensystem O' muss \hat{e}_K als Funktion von \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 und \hat{e}'_3 ausgedrückt werden. Der Einheitsvektor \hat{e}_K in Richtung der Knotenlinie kann sowohl in den Koordinaten von O als auch den Koordinaten von O' ausgedrückt werden. Wie sich leicht aus Abb. 6.6 ablesen lässt, gilt

$$\hat{e}_K = \cos \alpha \cdot \hat{e}_1 - \sin \alpha \cdot \hat{e}_2 = \cos \gamma \cdot \hat{e}'_1 - \sin \gamma \cdot \hat{e}'_2 \quad (6.26)$$

Die für die Drehung um \hat{e}'_3 in O' (dritter Schritt) relevante Achse ist natürlich \hat{e}'_3 selbst. Zusammen mit den in O' bestimmten Drehachsen \hat{e}_3 und \hat{e}_K aus Gl. (6.25) und Gl. (6.26) erhält man für den Zusammenhang zwischen den Drehgeschwindigkeiten ω' im körperfesten Koordinatensystem O' und den Änderungsgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$

$$\begin{aligned} \omega' &= \dot{\alpha} \cdot \hat{e}_3 + \dot{\beta} \cdot \hat{e}_K + \dot{\gamma} \cdot \hat{e}'_3 \\ &= \dot{\alpha} [\sin \beta \sin \gamma \cdot \hat{e}'_1 + \sin \beta \cos \gamma \cdot \hat{e}'_2 + \cos \beta \cdot \hat{e}'_3] + \dot{\beta} [\cos \gamma \cdot \hat{e}'_1 - \sin \gamma \cdot \hat{e}'_2] + \dot{\gamma} \cdot \hat{e}'_3 \\ &= [\dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma] \cdot \hat{e}'_1 + [\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma] \cdot \hat{e}'_2 + [\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}] \cdot \hat{e}'_3 \end{aligned}$$

beziehungsweise in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Diese Gleichungen werden als kinematische Euler-Gleichungen bezeichnet. Durch die Integration von Gl. (6.27) kann man die Lage eines Körpers aus bekannten Winkelgeschwindigkeiten berechnen.

6.3 Kreisel, Nutation, Präzession

Nicht ausgewichtetes Rad

Wie in Abb. 6.7 skizziert, sei aufgrund der Unwucht des Rades die Radachse (Achse 3) nicht mehr parallel zur Rotationsachse ω sondern um den Winkel α verkippt. Die Achse der Laufrichtung des Rades (Achse 2) zeigt somit nicht mehr geradeaus sondern seitwärts. Die dritte Koordinatenachse (Achse 1) zeigt aus der Bildebene heraus. Die Massenträgheitsmomente des Rades in Richtung der Achse 1 und 2 sind identisch und hier mit A bezeichnet; das Massenträgheitsmoment in Richtung der Radachse, Achse 3, sei C . Somit ist der Trägheitstensor im Hauptachsensystem:

$$\underline{\underline{J}}^{(d)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Damit erhält man für die Komponenten des Drehmoments nach Gl. (6.17)

$$M_1 = A \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (C - A)$$

$$M_2 = A \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 \omega_3 (A - C)$$

$$M_3 = A \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (A - A)$$

Aus Abb. 6.7 liest man ab:

$$\omega_1 = 0 \quad ; \quad \omega_2 = \omega \sin \alpha \quad ; \quad \omega_3 = \omega \cos \alpha$$

Eingesetzt in die Komponenten des Drehmoments erhält man:

$$M_1 = (C - A)\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(C - A)}{2} \sin 2\alpha$$

$$M_2 = A\dot{\omega} \sin \alpha$$

$$M_3 = A\dot{\omega} \cos \alpha$$

Bei gleichförmiger Rotation ist $\dot{\omega} = 0$ und es verbleibt nur die M_1 -Komponente des Drehmoments. Das vom rotierenden Rad über die Radachse auf das Radlager augeübte Drehmoment, das sogenannte Kreiselmoment \mathbf{M}^K , ist dem Drehmoment M_1 entgegengesetzt, also

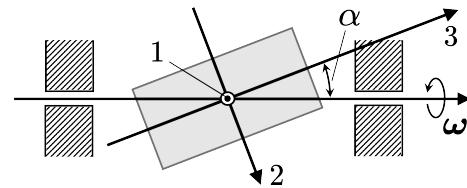


Abb. 6.7

$$M_1^K = -M_1 = \frac{(A - C)}{2} \sin 2\alpha$$

Ist $A > C$ dann bewirkt M_1^K eine Vergrößerung der Unwucht, d.h., der Winkel α wird größer. Umgekehrt wirkt im Fall $A < C$, wie das bei Reifen der Fall sein sollte, M_1^K der Unwucht entgegen, versucht also den Winkel α zu verkleinern.

Momentefreie Bewegung

Von einer momentefreien Bewegung spricht man, wenn das resultierende Moment aller auf einen starren Körper einwirkenden äußeren Kräfte verschwindet. Betrachtet wird hier der Trägheitsellipsoid (Abb. 6.8) im Hauptachsensystem. Von der kinetischen Energie eines starren Körpers (Gl. (6.13)) bleibt bei momentefreier Bewegung nur die kinetische Energie aufgrund der Eigenrotation übrig und ohne Verluste (wie z.B. durch Reibung) bleibt diese konstant. Also:

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 \omega_i J_{ij} \omega_j = C \quad (6.28)$$

Für die Trägheitsmomente des Ellipsoids in Abb. 6.8 gilt

$$J_1 > J_2 > J_3$$

Einsetzen ergibt für die kinetische Energie durch Eigenrotation

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + \omega_3^2 J_3) \quad (6.29)$$

Mit $L_i = J_i \omega_i$, $i = 1, 2, 3$ folgt somit

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{J_1} + \frac{L_2^2}{J_2} + \frac{L_3^2}{J_3} \right) = \text{const} \quad (6.30)$$

das heißt, für die momentefreie Bewegung gilt

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \text{const} \quad (6.31)$$

Mit $|\boldsymbol{L}^2| = \text{const}$ folgt

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (6.32)$$

Das Quadrat des Drehimpulses, also sein Betrag, ist im körperfesten System eine Erhaltungsgröße.

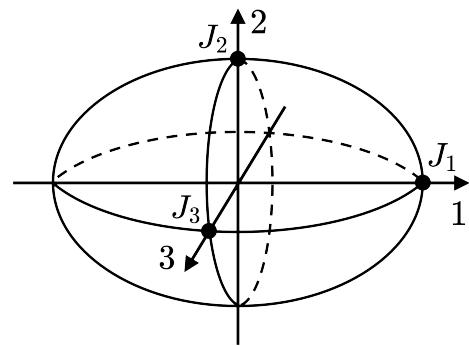


Abb. 6.8

Im Folgenden soll der Fall der zweiachsigen Symmetrie betrachtet werden. Für die Hauptträgheitsmomente gilt in diesem Fall mit $A = J_{11}$ entlang der ξ_1 -Achse, $B = J_{22}$ entlang der ξ_2 -Achse und $C = J_{33}$ entlang der ξ_3 -Achse:

$$A = B \neq C$$

Wie in Abb. 6.9 skizziert ist die Figurennachse hier die Koordinatenachse ξ_3 . ω_F bezeichnet die Rotation um die Figurennachsen und ω_N die Rotation um die Nutationsachse. Zwischen den Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten ω , ω_F und ω_N sowie den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit entlang der Koordinatenachsen ξ_1 und ξ_3 gilt die Beziehung

$$\omega = \omega_N + \omega_F = \omega_1 \hat{\xi}_1 + \omega_3 \hat{\xi}_3$$

Wie Abb. 6.9 zeigt, gilt für den Winkel Θ

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = \omega \sin \Theta \\ \omega_3 = \omega \cos \Theta \end{array} \right\} \quad \tan \Theta = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (6.33)$$

Aus Abb. 6.9 lassen sich die folgenden Beziehungen für den Winkel Ψ ablesen

$$\tan \Psi = \frac{L_1}{L_3} = \frac{A\omega_1}{C\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3 - \omega_F} \quad (6.34)$$

und somit

$$\omega_F = \frac{A - C}{A} \cdot \omega_3 \quad (6.35)$$

Für die Erde gilt beispielsweise: $\frac{A - C}{A} \approx \frac{1}{305}$

Aus den Euler-Gleichungen Gl. (6.18) für momentefreie Bewegung folgt:

$$A\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(C - A) = M_1 = 0$$

$$A\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(A - C) = M_2 = 0$$

$$C\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(A - A) = M_3 = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt unmittelbar

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const} \quad (6.36)$$

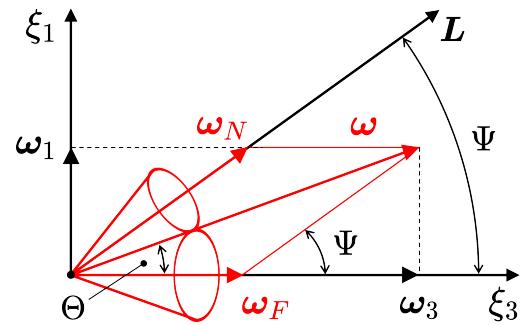


Abb. 6.9

Das heißt, die Projektion von $\boldsymbol{\omega}$ auf die Figurenachse ist eine zeitliche Konstante. Nutzt man jetzt in den ersten beiden der Eulerschen Gleichungen die Beziehung aus Gl. (6.35) dann erhält man

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_F \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_1 \omega_F \quad (6.37)$$

Gl. (6.37) einmal nach der Zeit differenzieren und einsetzen der ursprünglichen Gleichungen ergibt je eine Differentialgleichung für ω_1 und ω_2

$$\ddot{\omega}_1 + \omega_F^2 \omega_1 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\omega}_2 + \omega_F^2 \omega_2 = 0 \quad (6.38)$$

Diese Differentialgleichungen sind Bewegungsgleichungen für harmonische Oszillatoren (siehe Abschnitt 10.1). Die allgemeinen Lösungen von Gl. (6.37) lauten

$$\omega_1(t) = \alpha \sin(\omega_F t + \beta) \quad \text{und} \quad \omega_2(t) = \alpha \cos(\omega_F t + \beta) \quad (6.39)$$

Aus Gl. (6.36) folgt bereits, dass der Betrag von $\boldsymbol{\omega}$ konstant sein muss. Das heißt, es muss gelten (siehe Abb. 6.10)

$$|\boldsymbol{\omega}| = \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\alpha^2 + \omega_3^{02}} = \text{const} \quad (6.40)$$

Die Projektion von $\boldsymbol{\omega}(t)$ auf die $\xi_1 \xi_2$ -Ebene, die Ebene senkrecht zur Figurenachse ξ_3 , beschreibt also einen Kreis in der $\xi_1 \xi_2$ -Ebene mit Radius α . Der Kreiskegel den $\boldsymbol{\omega}$ dabei beschreibt ist der sogenannte Polkegel (Abb. 6.10). Der Öffnungswinkel des Polkegels ist durch Gl. (6.33) gegeben und die Winkelgeschwindigkeit mit der diese Rotation von $\boldsymbol{\omega}$ erfolgt, ist ω_F aus Gl. (6.35) mit $\omega_3 = \omega_3^0$. Für die Periode dieser kreisförmigen Bewegung der Drehachse eines rotierenden, starren Körpers um seine Figurenachse, die Nutation, die im Fall der Erde nach seinem Entdecker Chandlersche Periode genannt wird, erhält man

$$T_F = \frac{2\pi}{\omega_F} = \frac{A}{A - C} \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_3^0}}_{1 \text{ Tag}} \approx 305 \text{ Tage}$$

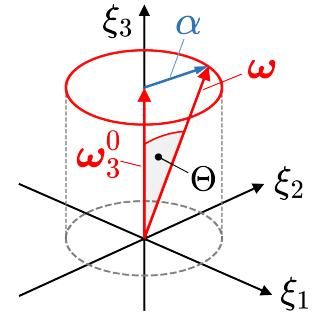


Abb. 6.10

In Realität ist T_F allerdings nicht ≈ 305 Tage, sondern $T_F \approx 433$ Tage. Der Grund für diese Abweichung liegt in der oben gemachten Annahme die Erde sei ein starrer Körper. Das ist sie aber nicht, sondern sie ist elastisch und in Teilen flüssig.

Das Koordinatensystem (ξ_1, ξ_2, ξ_3) in Abb. 6.9 ist das körpereigene Hauptachsensystem der Erde. Mit Hilfe von Gl. (6.27) kann man die Eulerwinkel, hier mit ϕ , ϑ und ψ bezeichnet, zum raumfesten Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) bestimmen:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\omega_F t + \beta) \\ \alpha \cos(\omega_F t + \beta) \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \vartheta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \vartheta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Günstigerweise wählt man das raumfeste Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) so, dass $\hat{\mathbf{x}}_3$ mit der Richtung des Drehimpulvektors \mathbf{L} zusammenfällt, also $\hat{\mathbf{x}}_3 \parallel \mathbf{L}$. Mit Gl. (6.25) gilt für die Darstellung von \hat{x}_3 im körpereigenen Koordinatensystem

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = \sin \vartheta \sin \psi \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \sin \vartheta \cos \psi \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_2 + \cos \vartheta \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_3 \quad (6.42)$$

Bei momentefreier Bewegung ist der Betrag des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung (Gl. (6.32)). Für die Komponenten von \mathbf{L} im Hauptachsensystem gilt somit:

$$\mathbf{L} = L \cdot (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta) \quad (6.43)$$

Mit Gl. (6.41) und Gl. (6.43) erhält man damit im Hauptachsensystem für $\mathbf{L} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L \sin \vartheta \sin \psi &= A \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + A \dot{\vartheta} \cos \psi \\ L \sin \vartheta \cos \psi &= A \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi - A \dot{\vartheta} \sin \psi \\ L \cos \vartheta &= C \dot{\phi} \cos \vartheta + C \dot{\psi} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Indem man die erste dieser drei Gleichungen mit $\cos \psi$ multipliziert und davon die zweite Gleichung multipliziert mit $\sin \psi$ subtrahiert, lassen sich $\dot{\phi}$ und der Winkel ψ eliminieren und man erhält die Beziehung

$$0 = A \dot{\vartheta} (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = A \dot{\vartheta}$$

Daraus folgt

$$\vartheta = \text{const} = \vartheta_0 \quad (6.45)$$

und für die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ aus Gl. (6.41) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \sin(\omega_F t + \beta) = \dot{\phi} \sin \vartheta_0 \sin \psi \\ \omega_2 &= \alpha \cos(\omega_F t + \beta) = \dot{\phi} \sin \vartheta_0 \cos \psi \\ \omega_3 &= \omega_3^0 = \dot{\phi} \cos \vartheta_0 + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Eine Möglichkeit zur Bestimmung von $\phi(t)$ und $\psi(t)$ folgt aus der Betrachtung von

$$\omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi = 0$$

Damit muss nach Gl. (6.46) auch gelten

$$\alpha \sin(\omega_F t + \beta) \cos \psi - \alpha \cos(\omega_F t + \beta) \sin \psi = \alpha \sin(\omega_F t + \beta - \psi) = 0$$

Diese Bedingung ist erfüllt für zwei Werte von $\psi(t)$

$$\psi(t) = \begin{cases} \omega_F t + \beta \\ \omega_F t + \beta + \pi \end{cases} \quad (6.47)$$

Einsetzen von Gl. (6.47) in die dritte Gleichung von Gl. (6.46) ergibt

$$\omega_3^0 = \dot{\phi} \cos \vartheta_0 + \dot{\psi} = \dot{\phi} \cos \vartheta_0 + \omega_F$$

Mit Gl. (6.35) folgt daraus für $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_3^0 - \omega_F}{\cos \vartheta_0} = \frac{C}{A} \frac{\omega_3^0}{\cos \vartheta_0} = const$$

und somit

$$\phi(t) = \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \cdot t + \phi_0 \quad (6.48)$$

Damit kann nun der Wert von α bestimmt werden indem man für ω_2 in Gl. (6.46) $\omega_F t + \beta = 0$ setzt. Nach Gl. (6.47) ist dann $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$ also $\cos \psi = \pm 1$ und man erhält für α die zwei Lösungen

$$\alpha = \pm \dot{\phi} \sin \vartheta_0 = \pm \frac{C}{A} \omega_3^0 \tan \vartheta_0 \quad (6.49)$$

Mit der geometrischen Interpretation von α (siehe Gl. (6.40)) macht nur das positive Vorzeichen Sinn. Eine weitere Möglichkeit, $\phi(t)$ und $\psi(t)$ zu bestimmen, besteht darin die erste Gleichung aus Gl. (6.44) mit $\sin \psi$ zu multiplizieren und dazu die zweite Gleichung aus Gl. (6.44), multipliziert mit $\cos \psi$, zu addieren. Damit eliminiert man $\dot{\psi}$ und die Winkel ϑ und ψ und erhält

$$A \dot{\phi} = L$$

Daraus folgt

$$\phi(t) = \frac{L}{A} \cdot t + \phi_0 \quad (6.50)$$

$\dot{\psi}$ erhält man zum Beispiel mit Hilfe von Gl. (6.35) und Gl. (6.45) durch Einsetzen von Gl. (6.50) in die dritte Gleichung von Gl. (6.44):

$$\dot{\psi} = \left(\frac{L}{C} - \frac{L}{A} \right) \cos \vartheta_0 = \frac{L}{C} \frac{A - C}{A} \cos \vartheta_0 = \frac{L}{C} \frac{\omega_F}{\omega_3^0} \cos \vartheta_0 \quad (6.51)$$

$\dot{\psi}$ erhält man aber auch aus der Gleichung für ω_3 in Gl. (6.46)

$$\dot{\psi} = \omega_3^0 - \dot{\phi} \cos \vartheta_0 = \omega_3^0 - \frac{L}{A} \cos \vartheta_0 \quad (6.52)$$

Ein Vergleich von Gl. (6.52) mit Gl. (6.51) zeigt, dass gelten muss

$$\omega_3^0 = \frac{L}{C} \cos \vartheta_0 \quad (6.53)$$

Das eingesetzt in Gl. (6.51) liefert $\dot{\psi} = \omega_F$ und somit

$$\psi(t) = \omega_F t + \psi_0 \quad (6.54)$$

Jetzt kann man noch die Konstanten ϑ_0 und ψ_0 bestimmen. Einsetzen von Gl. (6.50) in die ersten beiden Gleichungen von Gl. (6.46) ergibt

$$\begin{aligned} \alpha \sin(\omega_F t + \beta) &= \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \sin \psi \\ \alpha \cos(\omega_F t + \beta) &= \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \cos \psi \end{aligned}$$

Die Division dieser beiden Gleichungen und ein Vergleich mit Gl. (6.54) liefert

$$\tan \psi = \tan(\omega_F t + \beta) \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \beta \quad (6.55)$$

Wie zu erwarten war, entspricht $\psi_0 = \beta$ dem Ergebnis von Gl. (6.47). Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung von Gl. (6.46) ein so sieht man, dass

$$\alpha \sin(\omega_F t + \beta) = \alpha \sin \psi = \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \sin \psi$$

Damit gilt

$$\sin \vartheta_0 = \frac{A}{L} \alpha$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gl. (6.53) so ergibt sich schließlich

$$\tan \vartheta_0 = \frac{A}{C} \frac{\alpha}{\omega_3^0} \quad (6.56)$$

Das entspricht dem Ergebnis von Gl. (6.49) für α . Zusammengefasst hat man also für die Eulerschen Winkel und die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \cdot t + \phi_0 & ; & \dot{\phi} = \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \\
 \vartheta(t) &= \vartheta_0 = \arctan\left(\frac{A}{C} \frac{\alpha}{\omega_3^0}\right) & ; & \dot{\vartheta} = 0 \\
 \psi(t) &= \frac{A - C}{A} \cdot \omega_3^0 t + \beta & ; & \dot{\psi} = \frac{A - C}{A} \cdot \omega_3^0
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

In diesen Beziehungen finden sich zwar noch fünf der ursprünglich sechs Variablen ϕ_0 , ϑ_0 , ψ_0 , α , β und ω_3^0 , aber diese sind nicht mehr alle unabhängig frei wählbar. In Gl. (6.49) bzw. in Gl. (6.56) sind die Parameter α , ϑ_0 und ω_3^0 verknüpft. Wegen Gl. (6.40) können aber α und ω_3^0 nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Durch die hier vorgenommene Wahl von $\hat{x}_3 \parallel \mathbf{L}$ wurde ϑ_0 festgelegt und daher sind α und ω_3^0 nicht mehr frei wählbar. Nach Gl. (6.56) gilt $\psi_0 = \beta$ und somit kann nur eine dieser beiden Variablen frei gewählt werden; in Gl. (6.57) ist das β . Von den ursprünglich sechs Variablen ϕ_0 , ϑ_0 , ψ_0 , α , β und ω_3^0 verbleiben also nur ϕ_0 und β als freie Variablen.

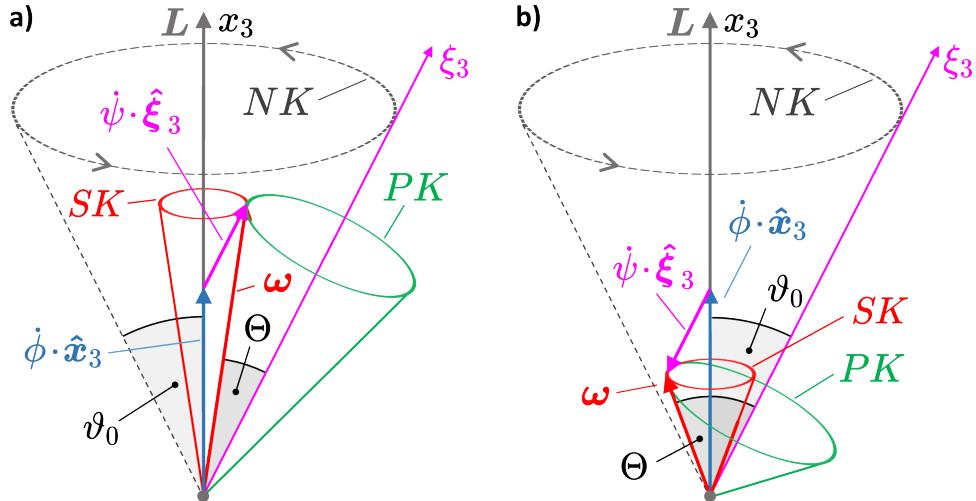


Abb. 6.11: Lage der Winkel, Drehvektoren, Nutationskegel (NK), Spurkegel (SK) und Polkegel (PK) für den Fall $A > C$ (a) und den Fall $A < C$ (b).

In Abb. 6.11 ist die Lage der Winkel, der Drehvektoren, des Nutationskegels, des Spurkegels und des Polkegels für zwei Fälle skizziert: In Abb. 6.11a für $A > C$, so wie das bei der Erde der Fall ist; und in Abb. 6.11b für den Fall $A < C$. Mit $\hat{x}_3 \parallel \mathbf{L}$ ist ϑ_0 der Winkel zwischen der Figurennachse ξ_3 und \mathbf{L} bzw. ξ_3 und x_3 (der Winkel Ψ in Abb. 6.9). Die Figurennachse dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ um die x_3 -Achse und beschreibt dabei den Nutationskegel der freien Nutation. Der zugehörige Drehvektor $\dot{\phi} \cdot \hat{x}_3$ ist identisch mit ω_N in Abb. 6.9. $\dot{\psi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit mit der sich der betrachtete starre Körper (in Abb. 6.11a

die Erde) um die Figurennachse dreht. Der entsprechende Drehvektor $\dot{\psi} \cdot \hat{\xi}_3$ ist entweder parallel oder antiparallel zur ξ_3 -Achse, je nachdem ob $A > C$ wie in Abb. 6.11a oder $A < C$ wie in Abb. 6.11b. Der Drehvektor $\dot{\psi} \cdot \hat{\xi}_3$ ist identisch mit ω_F in Abb. 6.9. Der gesamte Drehvektor ω in Abb. 6.11 ist somit

$$\omega = \dot{\phi} \cdot \hat{x}_3 + \dot{\psi} \cdot \hat{\xi}_3 = \omega_N + \omega_F$$

Der Drehvektor ω liegt immer in der $x_3 \xi_3$ -Ebene und rotiert mit der Figurennachse um die Richtung des Drehimpulses \mathbf{L} bzw. um die x_3 -Achse. Dabei beschreibt ω um \mathbf{L} bzw. um die x_3 -Achse den sogenannten Spurkegel. Der feste Winkel zwischen ω und der Figurennachse ξ_3 ist der Winkel Θ aus Abb. 6.9. Θ ist der Öffnungswinkel des sogenannten Polkegels. Während die Figurennachse ihre Nutationsbewegung mit ω_N um \mathbf{L} bzw. die x_3 -Achse ausführt, rollt dieser Polkegel auf dem Spurkegel mit ω_N ab. Im Fall $A > C$ (Abb. 6.11a) rollt der Polkegel mit seiner Außenfläche an der Außenfläche des Spurkegels ab. Im Fall $A < C$ (Abb. 6.11b) rollt der Polkegel hingegen mit seiner Innenfläche an der Außenfläche des Spurkegels ab.

Bewegung mit nicht verschwindendem Drehmoment

Ein einfaches Beispiel für das Verhalten eines rotierenden Körpers wenn ein nicht verschwindendes Drehmoment vorliegt ist in Abb. 6.12 skizziert. Die Abbildung zeigt ein einseitig an einem Seil aufgehängtes rotierendes Rad. Der Drehimpulsvektor \mathbf{L} des rotierenden Rades liegt in der Radachse deren Länge l_A ist. An einem Ende wird die Radachse durch die Seilkraft gehalten, am anderen Ende wirkt auf den Schwerpunkt des

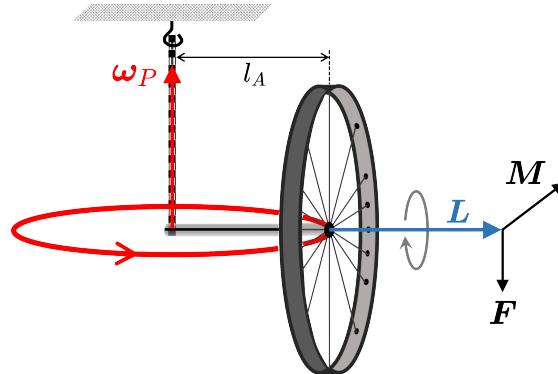


Abb. 6.12

Rades eine gleich große aber entgegengesetzte Gewichtskraft. Das resultierende Drehmoment \mathbf{M} steht senkrecht auf der durch die Radachse und die Gewichtskraft aufgespannten Ebene. Rotiert das Rad nicht, dann kippt es natürlich nach unten. Rotiert das Rad aber, dann bewirkt das zu \mathbf{L} senkrechte Drehmoment \mathbf{M} eine Richtungsänderung der Radachse die Prädession genannt wird. Ist nun die Winkelgeschwindigkeit ω mit der das Rad rotiert groß genug, dann rotiert bzw. präzessiert das Rad mit horizontaler Achse um die Seilaufhängung. Mit den Eulergleichungen aus Gl. (6.17) gilt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \omega) = \mathbf{M}$$

Bei der Richtungsänderung der Rotationsachse des Rades steht die zeitliche Änderung des Drehimpulses $d\mathbf{L}/dt$ immer senkrecht zum Drehimpulsvektor \mathbf{L} und senkrecht zum Drehvektor $\boldsymbol{\omega}_P$ der Präzession. Es gilt somit:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

Ohne Reibungsverluste ist der Betrag von \mathbf{L} konstant. Mit $|\mathbf{L}|$ und $|\mathbf{M}|$ jeweils konstant ist auch der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Präzession

$$|\boldsymbol{\omega}_P| = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{L}|}$$

konstant. In diesem Fall spricht man von regulärer Präzession. Wie sich aus Abb. 6.13 leicht ersehen lässt, bleibt die Winkelgeschwindigkeit der Präzession auch konstant wenn die Radachse sich aus der horizontalen Lage herausbewegt.

Für das Drehmoment gilt

$$|\mathbf{M}| = l_A \cdot \cos \alpha \cdot |\mathbf{F}|$$

und für die zeitliche Änderung des Drehimpulses gilt

$$\left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = |\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L}| = |\boldsymbol{\omega}_P| |\mathbf{L}| \sin \beta = |\boldsymbol{\omega}_P| |\mathbf{L}| \cos \alpha$$

Die linken Seiten der beiden Gleichungen sind identisch da $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ und somit sind auch die entsprechenden rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich:

$$|\boldsymbol{\omega}_P| |\mathbf{L}| \cos \alpha = l_A \cdot \cos \alpha \cdot |\mathbf{F}|$$

Der $\cos \alpha$ -Term fällt heraus und mit $\mathbf{L} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ und $|\mathbf{F}| = m \cdot g$ erhält man

$$\omega_P = \frac{l_A \cdot m \cdot g}{I_A \cdot \omega}$$

wobei m die Masse des Rades ist und I_A ist das Trägheitsmoment für die Rotation um die Radachse. Dieser Ausdruck ist unabhängig von α und bei gegebener Länge der Radachse (l_A), Masse des Rades (m) und Masseverteilung bezüglich der Radachse (I_A) hängt die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_P nur von der Rotationsgeschwindigkeit des Rads ω ab. Der hier abgeleitete Ausdruck für ω_P gilt allerdings nur für $\omega \gg \omega_P$.

Im Allgemeinen hängen für einen Körper auf den ein Drehmoment wirkt die Komponenten des Drehmoments im körperfesten Koordinatensystem von der Orientierung des Körpers im raumfesten Koordinatensystem ab. Damit lassen sich die Euler-Gleichungen nicht mehr unabhängig von den Gleichungen für die Eulerwinkel ϕ , ϑ und ψ lösen. Die Lösung dieses Problems erfordert einen anderen Ansatz, wie z.B. den sogenannten Lagrange-

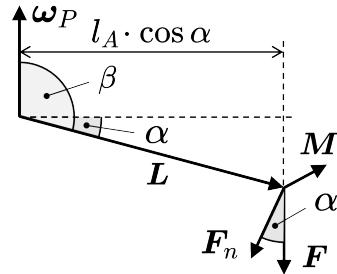


Abb. 6.13

Formalismus. Dies geht jedoch über den Rahmen einer Einführung in die Mechanik wie in diesem Band hinaus.¹

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Kreiselbewegung aus der Überlagerung von drei verschiedenen Bewegungen besteht (vergleiche Abb. 6.11):

$\psi(t)$: Rotation des Kreisels um die körperfeste Figurennachse mit Drehvektor $\dot{\psi}(t) \cdot \hat{\xi}_3$.

$\phi(t)$: Rotation der Figurennachse um die raumfeste Koordinate x_3 mit Drehvektor $\dot{\phi}(t) \cdot \hat{x}_3$. Diese Bewegung heißt Präzession.

$\vartheta(t)$: Periodische Änderung des Winkels $\vartheta(t)$ zwischen Figurennachse ξ_3 und raumfester Koordinate x_3 wenn ein nichtverschwindendes Drehmoment vorliegt. Diese Bewegung heißt dann Nutation. Im Fall von momentefreier Bewegung variiert $\vartheta(t)$ nicht sondern ist konstant, also $\vartheta(t) = \vartheta_0$; in diesem Fall spricht man dann von freier Nutation.

Abb. 6.14 illustriert die Präzessions- und die Nutationsbewegung am Beispiel der Erde. In Kugelkoordinaten ist die Richtung der Figurennachse im raumfesten Koordinatensystem

$$\hat{\xi}_3 = \sin \phi \sin \vartheta \hat{x}_1 - \cos \phi \sin \vartheta \hat{x}_2 + \cos \vartheta \hat{x}_3$$

Verfolgt man nun die Bewegung der Figurennachse auf einer Kugeloberfläche als Funktion der Zeit, also $\xi_3(t)$, dann kann man Nutation und Präzession wie in Abb. 6.14 darstellen. In Abb. 6.14 ist N_W der Bereich in dem $\vartheta(t)$ oszilliert. Für die Erde dauert es etwa 26 000 Jahre, exakt 25 772 Jahre, bis ein vollständiger Präzessionzyklus abgeschlossen ist. Diese Präzession der Erdachse wird größtenteils durch die kombinierte Anziehungskraft von Sonne und Mond auf die äquatoriale Ausbuchtung der Erde bewirkt. Gravitationswechselwirkungen mit anderen Planeten spielen eine viel geringere Rolle. Ein Nutationszyklus der Erde dauert etwa 41 000 Jahre. In einem solchen Zyklus ändert sich die Neigung $\vartheta(t)$ der Erdachse vom Maximalwert zum Minimalwert und wieder zurück zum Maximalwert. In der Vergangenheit schwankte $\vartheta(t)$ über einen solchen 41 000-Jahreszyklus zwischen einem Minimalwert von $\vartheta = 22.1^\circ$ und einem Maximalwert $\vartheta = 24.5^\circ$.

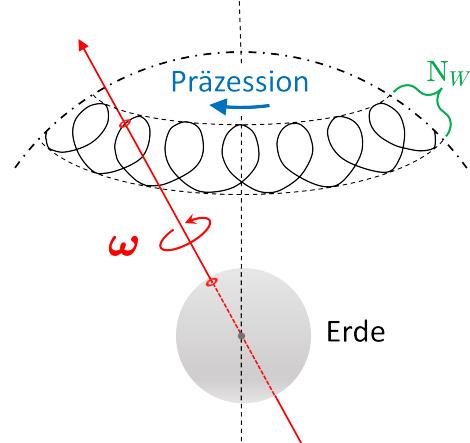


Abb. 6.14

¹Es gibt viele gute Lehrbücher, die den Lagrange-Formalismus im Detail diskutieren, darunter «TECHNISCHE MECHANIK – Eine Einführung», ISBN 978-1-951894-18-4, vom Autor dieses Buches.

6.4 Bewegte Bezugssysteme

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{\mathbf{e}}'_i \quad \text{alles zeitabhängig}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) + \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \hat{\mathbf{e}}'_i(t) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{R}}(t) + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i(t) \hat{\mathbf{e}}'_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_i + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]$$

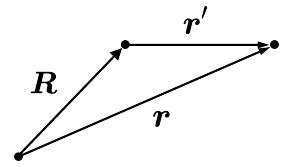


Abb. 6.15

Sind \mathbf{a} , \mathbf{A} , und \mathbf{a}' die Beschleunigungsvektoren in die entsprechenden Koordinatenrichtungen, dann ist

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a} = \mathbf{A} + \underbrace{2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}')}_{\begin{array}{c} \text{Coriolis-} \\ \text{beschleunigung} \end{array}} + \underbrace{[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]}_{\begin{array}{c} \text{Zentrifugal-} \\ \text{beschleunigung} \end{array}} \quad (6.58)$$

Ist $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ die Kraft, die auf eine Masse m in einem ruhenden Bezugssystem wirkt, dann ist $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ die Kraft, die jemand im bewegten System beobachten wird

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \underbrace{m\{ \mathbf{A} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \}}_{\text{Trägheitskräfte}} \quad (6.59)$$

Da die Gravitationskraft eine andere \mathbf{r} -Abhängigkeit hat, können die Trägheitskräfte in Gl. (6.59) nur punktweise zum Verschwinden gebracht werden. Coriolis- und Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte. Die Corioliskraft wirkt nur auf bewegte Körper in rotierenden Systemen, auf Körper in Ruhe in bewegten Systemen, also $\mathbf{v} = 0$, wirkt sie nicht. Die Zentrifugalkraft existiert für jeden Körper in einem rotierenden System und verschwindet, wenn die Rotation stoppt, also $\boldsymbol{\omega} = 0$. Coriolis- und Zentrifugalkraft erfahren also nur Körper in rotierenden Systemen. In dieser Hinsicht ähneln sie der Trägheitskraft, die nur Körper in einem beschleunigten System erfahren. Scheinbare Kräfte wie die Coriolis-, die Zentrifugal- oder die Trägheitskraft hängen vom Bezugssystem ab. Für einen Beobachter außerhalb des Bezugssystems, also für jemand, der nicht Teil des rotierenden oder linear beschleunigten Systems ist, existieren sie nicht. Betrachten wir einen stehenden Fahrgäst in einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Bus, der sich nicht festhält. Solange der Bus nicht beschleunigt oder bremst, passiert nichts Ungewöhnliches, da sich

Bus und Fahrgäste mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit bewegen und daher keine Kräfte wirken. Das ändert sich, wenn der Bus plötzlich beschleunigt oder abbremsst und der Fahrgäste dabei vielleicht entweder durch die Heck- oder die Frontscheibe des Busses fliegen. Aus der Perspektive des Fahrgäste ändert sich in diesem Fall nichts, er bewegt sich immer noch mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit. Aber aus der Sicht mitfahrender Passagiere wird der Fahrgäste durch eine unsichtbare Kraft aus dem hinteren oder vorderen Fenster geschleudert. Etwas Ähnliches passiert, wenn der Bus zwar nicht seine Geschwindigkeit ändert, aber scharf nach links oder rechts abbiegt; In diesem Fall fliegt der Passagier einfach durch ein Fenster auf der linken oder rechten Seite des Busses heraus, je nachdem, in welche Richtung der Bus abbiegt. Hier sieht ein Beobachter auf dem Bürgersteig, wie der Fahrgäste seine lineare Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit fortsetzt, als ob keine Kräfte auf ihn einwirken würden.

Betrachten wir die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft, die mit der Rotation eines Systems O' in Bezug auf ein ruhendes System O verbunden sind. Wir wählen ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierendes System, d.h., wir betrachten eine gleichförmigen Kreisbewegung von O' (siehe Abschnitt 2.3.4). Für einen ruhenden Massenpunkt im rotierenden System ist $\mathbf{v}' = 0$ und daher verschwindet die Corioliskraft, aber die Zentrifugalkraft wirkt weiterhin. Die Gesamtkraft \mathbf{F}' auf einen Massenpunkt, der im rotierenden System O' ruht, muss Null sein, daher wird aus Gl. (6.59) für $\mathbf{v}' = 0$

$$0 = \mathbf{F}' = \mathbf{F} - m \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] = \mathbf{F} - mr'_\perp \omega^2 \hat{\mathbf{r}}'_\perp$$

Hier nutzten wir die Tatsache, dass $\boldsymbol{\omega}$ in Richtung der durch O' verlaufenden Rotationsachse zeigt und daher nur \mathbf{r}_{perp} , die Komponente von \mathbf{r} senkrecht zur Rotationsachse, beiträgt. Gl. (6.59) reduziert sich damit auf

$$\mathbf{F} = mr'_\perp \omega^2 \hat{\mathbf{r}}'_\perp$$

Jemand in O , dem ruhenden System, sieht also eine Kraft der Größe $mr'_\perp \omega^2$ am Werk, die genau der **Zentripetalkraft** entspricht, auf die wir bereits bei der Diskussion der gleichförmigen Kreisbewegung gestoßen sind. Aus der Sicht eines Beobachters in O bewirkt diese Kraft, dass der Massenpunkt im rotierenden System O' in Ruhe bleibt.

Betrachten wir nun ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierendes System O' , in dem sich ein Massenpunkt in radialer Richtung von O' nach außen bewegen soll, d.h., seine Geschwindigkeit \mathbf{v}' ist parallel zu seinem Ortsvektor \mathbf{r}' . Die Corioliskraft \mathbf{F}_C in \mathbf{F}' , die auf diesen bewegten Massenpunkt wirkt, ist senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{v}' , also senkrecht zu \mathbf{r}' . Für einen außenstehenden Beobachter sieht es so aus, als ob auf den Massenpunkt ein Drehmoment wirkt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_C = 2m\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \\ &= 2m(\underbrace{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}')}_{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}'} - \underbrace{\mathbf{v}'(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})}_0) = 2mr'v'\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Ein Drehmoment, ist immer das Ergebnis einer Drehimpulsänderung \mathbf{L} . Der Drehimpuls, der mit der Rotation des sich radial nach außen bewegenden Massepunkts verbunden ist, wie sie von O aus beobachtet wird, ist daher gegeben durch

$$\mathbf{L} = mr'^2\boldsymbol{\omega}$$

und seine Änderungsrate ist somit

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 2mr'v'\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}$$

Die Wetterkarte

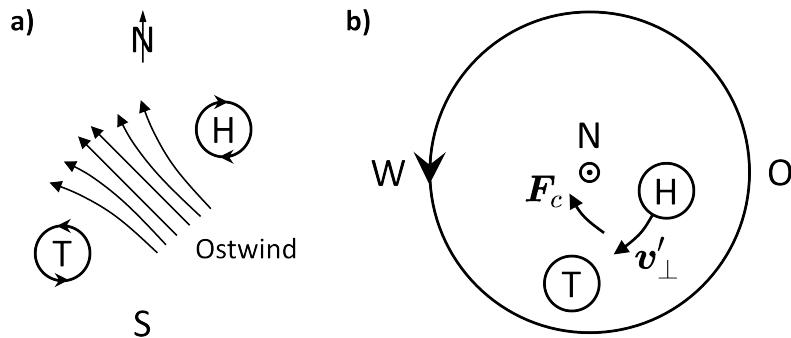


Abb. 6.16: (a) Entstehung des Ostwinds auf der Nordhalbkugel. (b) Corioliskraft auf der Nordhalbkugel. Die Relativbewegung mit \mathbf{v}'_\perp erfolgt senkrecht zur Corioliskraft \mathbf{F}_c .

Ein Hochdruckgebiet zeichnet sich dadurch aus, dass Luftmassen von höheren Luftsichten in Richtung Erdoberfläche strömen und dort zu einer Druckerhöhung führen. Die aus diesem Hochdruckgebiet über der Erdoberfläche entweichenden Luftmassen werden durch die Corioliskraft auf der Nordhalbkugel nach rechts und auf der Südhalbkugel nach links abgelenkt. Somit sind Hochdruckgebiete auf der Nordhalbkugel von Rechtswirbeln umgeben und auf der Südhalbkugel von Linkswirbeln.

Bei Tiefdruckgebieten ist das gerade umgekehrt. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass oberflächennahe Luftmassen in ein Gebiet mit niedrigerem Luftdruck einströmen und dort dann emporsteigen. Der Geschwindigkeitsvektor dieser Luftmassen zeigt also nach oben während er bei Hochdruckgebieten nach unten zeigt. Deshalb sind Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel von Linkswirbeln umgeben und auf der Südhalbkugel von Rechtswirbeln. Abb. 6.16a veranschaulicht, wie so durch benachbarte Hoch- und Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel ein Ostwind entstehen kann.

Ostabweichung beim freien Fall

Bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten ω können in Gl. (6.59) Glieder proportional zu ω^2 , d.h. die Zentrifugalkraft, vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung (erste Näherung) lautet die Bewegungsgleichung für den freien Fall:

$$\ddot{r}' = -g\hat{e}_{z'} - 2(\omega \times v')$$

Abb. 6.17 zeigt die Situation für den freien Fall auf der nördlichen Halbkugel am Breitengrad φ . Die y' -Koordinate zeigt in Abb. 6.17 aus der Bildebene heraus.

Für den Rotationsvektor ω lässt sich ablesen, dass:

$$\omega = |\omega| \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

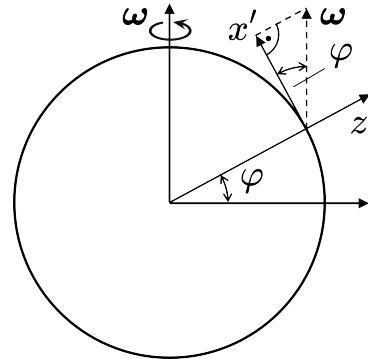


Abb. 6.17

Damit lauten die Bewegungsgleichungen in erster Näherung (ω klein):

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \omega \cos \varphi \\ 0 \\ \omega \sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}' = 2\omega \sin \varphi \cdot \dot{y}' \\ \ddot{y}' = -2\omega \sin \varphi \cdot \dot{x}' + 2\omega \cos \varphi \cdot \dot{z}' \\ \ddot{z}' = -g + 2\omega \cos \varphi \cdot \dot{y}' \end{array} \right\} \quad (6.60)$$

In nullter Näherung ist $\omega \approx 0$, d.h., die Corioliskraft fällt weg und man hat somit

$$\dot{z}'_0 = -g \cdot t \quad ; \quad z'_0 = h - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad ; \quad \dot{x}'_0 = \dot{y}'_0 = 0$$

Setzt man das Ergebnis aus nullter Näherung in Gl. (6.60) - die erste Näherung - ein, dann bleibt nur mehr eine Gleichung für die y' -Koordinate übrig.

$$\ddot{y}' = -2\omega \cos \varphi \cdot g \cdot t$$

Die y' -Koordinate in Abb. 6.17 verläuft von West nach Ost entlang des konstanten Breitengrades φ und ein Wert für $y' \neq 0$ heißt, dass es aufgrund der Corioliskraft eine Abweichung entlang des Breitengrades beim freien Fall gibt. Einmal integrieren liefert

$$\dot{y}' = -\omega \cos \varphi \cdot g \cdot t^2$$

und nochmals integrieren ergibt für die y' -Koordinate

$$y' = -\omega \cos \varphi \cdot g \cdot \frac{t^3}{3}$$

Aus der nullten Näherung kann man die Fallzeit von der Anfangshöhe h bis zur Erdoberfläche aus $z'_0 = 0$ bestimmen. Das eingesetzt ergibt beim freien Fall auf der Nordhalbkugel für die Abweichung in y' -Richtung

$$y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot h \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \omega \cos \varphi$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Abweichung in die Bildebene von Abb. 6.17 hindeutet, also in Richtung der negativen y' -Achse weist. Es liegt also beim freien Fall auf der Nordhalbkugel eine Ostabweichung vor. Zur Illustration: Bei einer Fallhöhe von 500 m auf dem Breitengrad $\varphi = 45^\circ$ macht diese Ostabweichung beispielsweise ≈ -0.17 m aus.

7. Abgeleitete Kräfte

Gemäß der Definition dieses Begriffs im Einleitungskapitel, sind abgeleitete Kräfte solche, die wir als mechanische Kräfte betrachten, weil wir sie so erleben. Die meisten von ihnen werden zu den in Tab. 1.1 aufgeführten eingeprägten Kräften gezählt, während andere wie die Reibungskraft zu den Reaktionskräften zählen. Im Folgenden werden wir zuerst Reibungskräfte betrachten, uns dann mit der Rolle von Kräften in der Elastostatik befassen und die Hookeschen Gleichungen ableiten, die dem Hookeschen Gesetz zugrunde liegen, bevor wir uns schließlich den Kräften in der Elastodynamik zuwenden.

7.1 Reibungskräfte

In Alltag begegnen uns Reibungskräften überall. Vieles in unserer Welt, das wir für selbstverständlich halten, würde ohne sie nicht funktionieren. Das beste Beispiel ist wohl das Gehen. Wir alle wissen, wie schwierig es sein kann, ohne oder mit geringer Reibungskraft zu gehen, wenn wir z.B. eine Eisfläche betreten. Ohne Reibung könnten wir unsere Autos auch nicht um eine Kurve fahren. Es ist die Reibungskraft zwischen den Oberflächen von Reifen und Fahrbahn, die es uns ermöglicht, unsere Autos häufig mit hoher Geschwindigkeit durch Kurven zu steuern. Wie wir wissen, hat auch das seine Grenzen. Wenn ein Auto mit zu hoher Geschwindigkeit in eine Kurve einfährt und die Zentrifugalkraft größer wird als die maximale Reibungskraft, die das Auto auf der Straße hält, kommt das Auto schnell vollständig von der Fahrbahn ab. Reibungskräfte sind Kontaktkräfte, sie entstehen dort, wo sich zwei Körper berühren. Dabei können die Körper ruhen, dann spricht man von Haftreibung, oder sie können sich relativ zueinander bewegen, dann spricht man von Gleitreibung. Haft- und Gleitreibung, nach Charles Augustin de Coulomb auch Coulombsche Reibung genannt, sind Beispiele von äußerer Reibung, also der Reibung zwischen starren Körpern. Im Gegensatz dazu steht die innere Reibung, die der Viskosität und Zähigkeit eines Körpers zugrunde liegt. Hier betrachten wir zuerst Beispiele äußerer Reibung und kommen dann zur inneren Reibung in Fluiden.

7.1.1 Haftreibung und Gleitreibung

Zunächst wird die Haftreibung betrachtet. Abb. 7.1 zeigt einen Block der Masse m auf einer schießen Ebene. Der Neigungswinkel α der Ebene muss so eingestellt werden, dass der Block gerade noch haften bleibt, also gerade nicht rutscht. Die Gewichtskraft \mathbf{F}_G wirkt im Schwerpunkt S des Blocks und ihre Komponente normal zur Kontaktfläche \mathbf{F}_G^n wird durch eine gleich große Gegenkraft \mathbf{F}_N kompensiert, die Kraft, mit der die schieße Ebene dem Block entgegenwirkt. Wegen Letzterem wird \mathbf{F}_N auch Zwangskraft der schießen Ebene genannt. Der durch diese Zwangskraft ausgeübte Druck \mathbf{F}_N verursacht eine Reibungskraft \mathbf{F}_R in der Kontaktfläche, welche der Tangentialkomponente der Gewichtskraft \mathbf{F}_G^t entgegenwirkt. Solange \mathbf{F}_G^t kleiner ist als der maximale Wert, den die Reibungskraft für das System aus Blockmaterial und Material der schießen Ebene annehmen kann, wird sich \mathbf{F}_R genau so anpassen, dass $\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_G^t = 0$. Wenn jedoch \mathbf{F}_G^t den maximalen Wert überschreitet, den \mathbf{F}_R annehmen kann, dann beginnt der Block zu rutschen. Die Gleichgewichtsbedingung für den Maximalwert von $F_R = |\mathbf{F}_R|$ ist

$$F_R - m \cdot g \cdot \sin \alpha_{max} = 0 \quad (7.1)$$

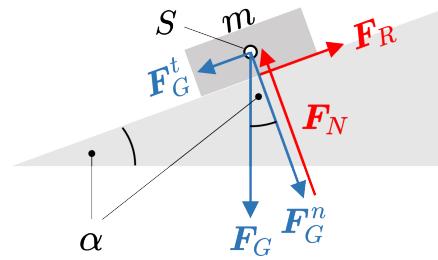


Abb. 7.1

Dabei ist α_{max} der Winkel, bei dem der Block gerade nicht anfängt zu gleiten. Haftreibung ist eine Reaktionskraft, als Reaktion auf den von F_N ausgeübten Druck. Der maximale Wert, den F_R annehmen kann, hängt daher von F_N ab:

$$F_R = \mu_0 \cdot F_N \quad (7.2)$$

wobei μ_0 der sogenannte Haftreibungskoeffizient ist. Der maximale Wert der Haftreibung auf der schießen Ebene ist daher gegeben durch

$$F_R = \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha_{max} \quad (7.3)$$

Aus Gl. (7.1) und Gl. (7.3) folgt für μ_0

$$\mu_0 = \tan \alpha_{max} \quad (7.4)$$

Interessanterweise bietet die schieße Ebene somit eine sehr einfache Möglichkeit, μ_0 durch Messung von α_{max} für jede beliebige Kombination aus Blockmaterial und Material der schießen Ebene zu bestimmen.

Der Winkel $\rho_0 = \alpha_{max}$ ist der Öffnungswinkel des sogenannten Reibungskegels (Abb. 7.2). Dieser wird unterhalb der Kontaktalebene durch die Vektoren der Normalkraft \mathbf{F}_N und der maximalen Reibungskraft \mathbf{F}_R^{max} gebildet, deren Vektoraddition eine im Kegelmantel liegende virtuelle Ersatzkraft ergibt. Solange die Resultierende aller äußeren Kräfte oberhalb der Berührungsfläche und innerhalb des Reibungskegels bzw. im Kegelmantel liegt, bleibt der betrachtete Körper in Ruhe. Bei der schiefen Ebene addieren sich \mathbf{F}_G^t und \mathbf{F}_G^n zur resultierenden äußeren Kraft, der Gewichtskraft \mathbf{F}_G .

Das gleiche Argument gilt auch, wenn etwa $\alpha = 0$ ist, mit dem Unterschied, dass dann $\mathbf{F}_G^n = \mathbf{F}_G$ und \mathbf{F}_G^t wird zur Verschiebungskraft, mit der man versucht den Körper aus seiner Ruheposition zu bewegen. So wie die maximale Haftreibungskraft proportional zur Normalkraft F_N ist, ist auch die Gleitreibungskraft proportional zu F_N . Der Proportionalitätsfaktor für die Gleitreibung ist der Gleitreibungskoeffizient μ

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (7.5)$$

Zumeist ist der dynamische Reibungskoeffizient (Gleitreibungswert) μ kleiner als der Haftreibungskoeffizient μ_0 . Das heißt, sobald die Haftreibung zwischen zwei Körpern überwunden ist, ist weniger Kraft erforderlich, um die Relativbewegung aufrechtzuerhalten, als für deren Beginn erforderlich war. Tab. 7.1 listet μ_0 - und μ -Werte für einige Materialpaare von praktischer Bedeutung. Die für diese gemessenen Werte hängen von den spezifischen Oberflächeneigenschaften der sich berührenden Körper ab. Daher findet man in der Literatur häufig keine Einzelwerte für μ_0 und μ , sondern Wertebereiche.

Tab. 7.1: Haftreibungs- und Gleitreibungskoeffizienten μ_0 und μ für einige ausgewählte Materialpaarungen.

Materialpaarung	μ_0 - Haftreibung		μ_0 - Gleitreibung	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Stahl auf Stahl	0.15 - 0.30	0.10 - 0.12	0.10 - 0.12	0.01 - 0.07
Stahl auf Eis	0.03	–	0.01	–
Holz auf Holz	0.40 - 0.60	0.16	0.20 - 0.40	0.05 - 0.10
Leder auf Metall	0.30 - 0.50	0.16	0.30	0.15
Gummi auf Asphalt	0.70 - 0.90	0.10 ¹⁾	0.50 - 0.60	0.05 ¹⁾

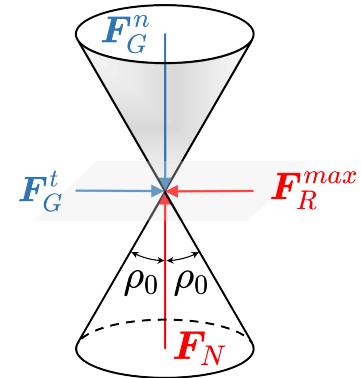


Abb. 7.2

¹⁾ Werte auf Eis, nicht geschmiert.

7.1.2 Seilreibung

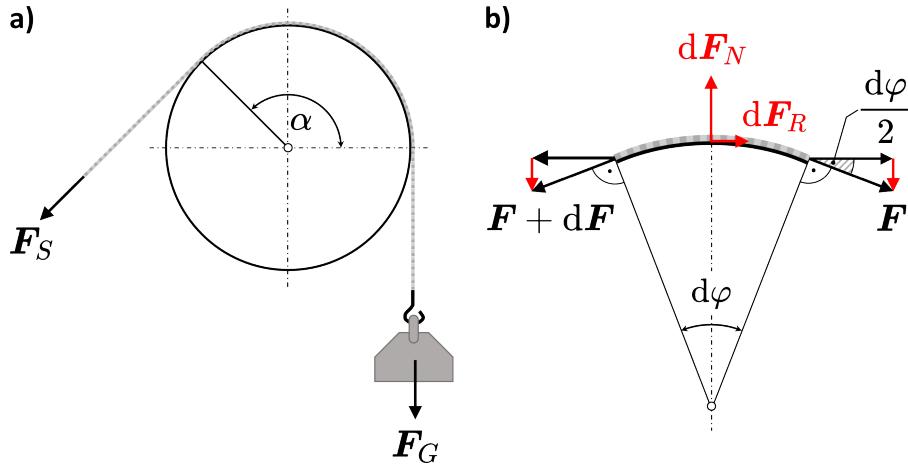


Abb. 7.3: Über einen Zylindermantel laufendes Seil: Kräfte am Seil (a) und am Seilelement mit Winkel $d\varphi$ angreifende Kräfte (b).

Betrachtet wird ein über eine feststehende, nichtdrehbar verankerte Zylinderscheibe laufendes Seil (Abb. 7.3a). An einem Seilende befindet sich ein Gewicht mit der Gewichtskraft \mathbf{F}_G das am anderen Seilende durch die Kraft \mathbf{F}_S im Gleichgewicht gehalten wird. Die dazu notwendige Kraft \mathbf{F}_S hängt vom Umschlingungswinkel α ab. Die Kräfte \mathbf{F}_G und $\mathbf{F}_S(\alpha)$ sind Tangentialkräfte an die Zylinderscheibe. Zur Herleitung der Gleichung für die Seilreibung betrachtet man ein infinitesimales Winkelement $d\varphi$ von Seil und Zylinderscheibe (Abb. 7.3b). Durch die links und rechts auf das jeweilige Seilstück wirkenden Kräfte spannt sich dieses über die Zylinderscheibe und wird an deren Oberfläche gedrückt. Nun geht man davon aus, dass die resultierende Druckverteilung über dem Winkelsegment $d\varphi$ gleichmäßig ist. Dabei betrachtet man diese Druckverteilung als durch eine Einzelkraft $d\mathbf{F}_N$ verursacht, die auf den Mittelpunkt der Kontaktfläche bei $d\varphi/2$ wirkt. Wie aus Abb. 7.3b hervorgeht, gilt in erster Näherung ($\sin \varphi \approx \varphi$)

$$dF_N = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = F \cdot d\varphi \quad (7.6)$$

Wenn, wie in Abb. 7.3b skizziert, die Seilkraft an einem Ende etwas größer ist (um $d\mathbf{F}$) als am anderen Ende, dann rutscht das Seil in Richtung der etwas größeren Kraft. Da der Haftreibungskoeffizient μ_0 für das Materialpaar Seil und Zylinderoberfläche ungleich Null ist, verursacht $d\mathbf{F}_N$ bei $d\varphi/2$ eine Reibungskraft $d\mathbf{F}_R$ in der Kontaktfläche zwischen Seil und Zylinderoberfläche. Die Kraftdifferenz $d\mathbf{F}$ zwischen den beiden Seilenden in Abb. 7.3b sei nun gerade so groß, dass $dF = dF_R$. Dann ist die Gleichgewichtsbedingung für maximale Haftreibung erfüllt und es gilt

$$dF = dF_R = \mu_0 \cdot dF_N = \mu_0 \cdot F \cdot d\varphi \quad (7.7)$$

Damit hat man eine Differentialgleichung für die Tangentialkraft F und den Winkel φ . Diese ist durch Trennung der Variablen F und φ und einfache Integration zu lösen. Der Winkel φ läuft dabei von 0 bis zum jeweiligen Umschlingungswinkel α und F von F_0 bis F_α , also

$$\int_{F_0}^{F_\alpha} \frac{dF}{F} = \ln F_\alpha - \ln F_0 = \mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\varphi = \mu_0 \cdot \alpha$$

Daraus folgt die Grundgleichung für die Seilreibung

$$F_\alpha = F_0 \cdot e^{\mu_0 \alpha} \quad (\text{Euler-Eytelwein Gleichung}) \quad (7.8)$$

Diese Gleichung besagt, die kleinere Kraft F_0 (\mathbf{F}_G in Abb. 7.3a) reicht aus, die größere Kraft F_α (\mathbf{F}_S in Abb. 7.3a) zu kompensieren. Gl. (7.8) formuliert eine Gleichgewichtsbedingung: Erst wenn F_α den Wert in Gl. (7.8) erreicht, kann die Gewichtskraft die Kraft F_α nicht mehr kompensieren und das Seil gleitet nach links, wodurch das Gewicht gehoben wird. Gl. (7.8) wurde für den Fall abgeleitet, dass in Abb. 7.3 $\mathbf{F}_S(\alpha) > \mathbf{F}_G$ (um $d\mathbf{F}$). Tritt jedoch der umgekehrte Fall ein, also $\mathbf{F}_S(\alpha) < \mathbf{F}_G$ (wiederum um $d\mathbf{F}$), dann zeigt der Pfeil von $d\mathbf{F}_R$ in Abb. 7.3b in die entgegengesetzte Richtung und es gilt:

$$F_\alpha = F_0 \cdot e^{-\mu_0 \alpha} \quad (7.9)$$

Daher beschreibt Gl. (7.8) das Heben einer Last und Gl. (7.9) das Senken einer Last. Bei der Konstruktion in Abb. 7.3 ist natürlich der praktische Aspekt von Interesse, d.h., wieviel Kraft man sich erspart wenn man ein Gewicht mittels einer Winde wie in Abb. 7.3a hebt, anstatt es direkt zu heben. Der maximale Winkel α in Abb. 7.3a beträgt π . Bei einem Haftreibungskoeffizienten von $\mu_0 = 0.35$ ergibt sich z.B. eine Kraftreduzierung um ca. den Faktor 3.0. Somit ist es möglich, eine 3.0-mal so große Kraft zu kompensieren. Aber es geht noch viel mehr. Wird das Seil mehrmals um die Zylinderscheibe geschlungen, erhöht sich mit jeder Wicklung der Umschlingungswinkel α um den Faktor 2π und damit die Kraftreduzierung um einen weiteren Faktor 9.0. Mit einem Seil, das mehrfach um einen Poller gewickelt wird, können sehr große Kräfte kompensiert werden.

Mit Gl. (7.7) handelt es sich bei der Seilreibung um Haftreibung, so wie bei einer Masse auf der schiefen Ebene wo je nach Bewegungszustand entweder Haftreibung oder Gleitreibung vorliegt. Neben Haft- und Gleitreibung gibt es eine dritte Art mechanischer Reibung, die Rollreibung, der Widerstand auf den ein rollendes Rad trifft, wobei mit dem Rollreibungskoeffizienten μ_R die Reibungskraft durch $F_R = \mu_R F_N$ gegeben ist.

7.1.3 Fluidreibung

Fluidreibung tritt auf, wenn sich Fluidschichten relativ zueinander bewegen. Sie ist das Ergebnis molekularer Wechselwirkungen zwischen den Molekülen des Fluidkörpers. Ein Sonderfall sind die Grenzschichten, über die ein Fluid mit einem Festkörper wechselwirkt, z.B. mit Rohrwänden. Die Wechselwirkung von Fluidgrenzschichten mit begrenzenden Oberflächen ist normalerweise stärker als die jene zwischen benachbarten Schichten innerhalb des Fluidkörpers selbst. Das Maß für die Stärke der Wechselwirkung zwischen Fluidschichten ist die Viskosität eines Fluids (siehe auch Abschnitt 8.6).

Die dynamische oder Scherviskosität η eines Fluids ist ein Maß für den Bewegungswiderstand zwischen benachbarten Fluidschichten. Ein weiteres Maß ist seine kinematische oder Volumenviskosität λ , die das Verhältnis von η zur Dichte ρ eines Fluids ist. Die dynamische Viskosität ist ein Maß für den Widerstand, den ein Fluid dem Fließen unter Einwirkung einer äußeren Kraft entgegengesetzt. Die kinematische Viskosität ist hingegen ein Maß für den Strömungswiderstand eines Fluids, wenn die einzige wirkende Kraft die Schwerkraft ist. Wechselwirkungen mit begrenzenden Flächen, wie z.B. mit Rohrwänden, verlangsamen den Durchfluss. Ebenso verlangsamen Wechselwirkungen zwischen der Oberfläche eines Körpers im Fluid und der ihn umgebenden Fluidschichten dessen Bewegung im Fluid. Die Ursache dafür ist eine Reibungskraft, die das Absinken des Körpers im Fluid verlangsamt. Ist die Sinkgeschwindigkeit v eines kugelförmigen Körpers gering, dann ist die auf die Kugel mit Radius r_0 wirkende Reibungskraft gegeben durch

$$F_R^\eta = 6\pi\eta \cdot r_0 \cdot v \quad (7.10)$$

Gl. (7.10) ist das Gesetz von Stokes, benannt nach George G. Stokes (1819 – 1903). Bei Stokes-Reibung sind Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit des Körpers. Die Fluidreibungskraft F_R^η wird als viskoser Widerstand des Fluids bezeichnet, daher der hochgestellte Index η . Bewegen sich Körper mit höherer Geschwindigkeiten, beginnen Kräfte proportional zu v^2 zu wirken. Ein Hinweis darauf, dass solche Kräfte eine Rolle spielen, ist die sichtbare Wirbelspur, die ein mit hoher Geschwindigkeit durch ein Fluid bewegter Körper hinter sich lässt. Die Erzeugung dieser zirkulierenden Wirbel kostet Energie und diese Energie wird erzeugt, wenn das Fluidvolumen vor dem sich durch das Fluid bewegenden Körper von diesem zur Seite geschoben wird.

Um zu verstehen, wie die v^2 -Abhängigkeit dieser Reibungskraft zustande kommt, betrachten wir die Impulsänderung des Fluidvolumens vor dem sich bewegenden Körper. Sei dm die Fluidmasse vor dem bewegten Körper, die pro Zeiteinheit aus dem Weg geräumt werden muss. Diese Masse aus dem Weg zu räumen bedeutet, sie auf die gleiche

Geschwindigkeit wie den sich bewegenden Körper zu bringen. Daher können wir für die Impulsänderung, die das aus dem Weg geschobene Volumen erfährt, schreiben

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v \quad (v = const)$$

Ist die Dichte des Fluids konstant, dann ist die Größe dm/dt gegeben durch $\rho dV/dt$, wobei die Volumenänderung pro Zeiteinheit das Produkt des Körperquerschnitts A senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung, z.B. der z -Achse, mal der Geschwindigkeit $v = dz/dt$ ist, mit der sich der Körper in diese Richtung bewegt. Daher ist die Kraft, welche den sich durch das Fluid bewegenden Körper verlangsamt

$$\frac{dp}{dt} \approx \rho \cdot \frac{dV}{dt} \cdot v = \rho \cdot A \cdot \frac{dz}{dt} \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2$$

Diese Kraft, welche einen solchen durch ein Fluid bewegten Körper verlangsamt, muss die Fluidreibungskraft F_R^{in} sein die im v^2 -Regime wirkt. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass bei Geschwindigkeiten oberhalb des Stokes-Reibungsregimes gilt

$$F_R^{in} = \frac{1}{2} c \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \quad (7.11)$$

wobei die dimensionslose Konstante c von der Form des Körpers abhängt. Interessanterweise hängt diese Reibungskraft nicht mehr von der Viskosität des Fluids ab. F_R^{in} wird als Trägheitswiderstand des Fluids bezeichnet, da es sich um die Trägheit des Fluidvolumens vor dem Körper handelt, das die Bewegung desselben verlangsamt. Woher wissen wir, wann F_R^{in} beginnt, F_R^n zu übersteigen? Mit $c = 0.5$ für einen kugelförmigen Körper mit dem Querschnitt $A = r_0^2 \pi$ geschieht dies, wenn

$$\frac{F_R^{in}}{F_R^n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot r_0^2 \pi}{\frac{6\pi\eta \cdot r_0 \cdot v}{24}} = \frac{1}{24} \frac{r_0 \rho v}{\eta} = \frac{1}{24} \text{Re} > 1$$

Die dimensionslose Zahl $\text{Re} = \rho_0 \rho v / \eta$, die sogenannte Reynolds-Zahl, ist ein Maß für die relativen Stärken von viskosem Widerstand und Trägheitswiderstand, die in einem gegebenen Fluid die Bewegung eines Körpers verlangsamen. Ist $\text{Re} < 1$, dann dominiert der viskose Widerstand die Bewegung des Körpers. Wird die Fluidreibung durch den viskosen Widerstand dominiert, spricht man von laminarer Strömung, da man in diesem Bereich die Fluidströmung als die Strömung paralleler Fluidschichten modellieren kann, die ungestört aneinander vorbeigleiten. Wenn Re in der obigen Gleichung mit dem Vorfaktor vergleichbar wird, gewinnt der Trägheitswiderstand die Oberhand. Wann dies geschieht, hängt für ein gegebenes Fluid von der Geometrie des Körpers ab. Ist $\text{Re} \gg 1$, dann spricht man von turbulenter Strömung, in der Fluidschichten gestört werden und miteinander wechselwirkende Wirbel unterschiedlicher Größe entstehen.

7.2 Kräfte in der Elastostatik

Kräfte können sowohl im Inneren eines Kontinuumskörpers als auch auf dessen Oberflächen wirken. Auf ein Volumenelement im Inneren eines Kontinuumskörpers wirkende Kräfte werden von den jeweils benachbarten Volumenelementen ausgeübt. Jedes Volumenelement dV (Abb. 7.4) innerhalb eines Kontinuumskörpers überträgt Kräfte, die mit der entsprechenden Kraftdichte verbunden sind, die dieses Volumenelement besitzt. Würde man ein solches Volumenelement dV von seinen benachbarten Volumenelementen freischneiden, müssten diese Kräfte weiterhin auf die Schnittflächen von dV wirken, damit der Spannungszustand des herausgeschnittenen Volumenelements mit dem des nicht freigeschnittenen Volumenelements identisch bleibt (Schnittprinzip).

Für einen Kontinuumskörper gilt:

- Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$: Ist assoziiert mit Volumenelement dV .
- Spannung: Ist assoziiert mit Schnittflächen dA .

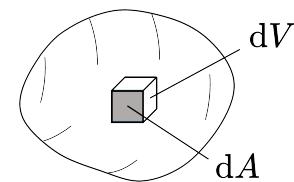


Abb. 7.4

Aus der Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ folgt die differentielle Kraft $d\mathbf{F}$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{r})dV \quad (7.12)$$

Zusätzlich zu inneren Kräften gibt es äußere Kräfte die auf jedes Volumenelement des Kontinuumskörpers wirken. Ein Beispiel hierfür ist die Schwerkraft:

$$\mathbf{f}_{Schwerkraft} = -\varrho \cdot g \cdot \mathbf{e}_z \quad (\varrho = \text{Massendichte})$$

Für die Spannung an einem Schnittflächenelement dA eines freigeschnittenen Volumenelements dV muss gelten:

$$\mathbf{P} dA = d\mathbf{F}$$

Hierbei ist \mathbf{P} der sogenannte Spannungsvektor mit der Dimension Kraft / Fläche. Die Gesamtspannung an einem Schnittflächenelement dA wird zerlegt in eine Spannungskomponente senkrecht zur Schnittfläche, die sogenannte Normalspannung, und eine Spannungskomponente parallel zur Schnittfläche, die sogenannte Schubspannung.

Für diese Spannungskomponenten gilt

- Schubspannung: $|d\mathbf{F}_t| = \tau dA$
- Normalspannung: $|d\mathbf{F}_n| = \sigma dA$

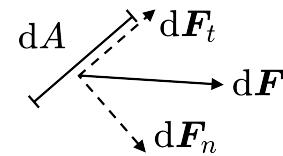


Abb. 7.5

Die Konvention ist, dass zur Bezeichnung von Normalspannungen der griechische Buchstabe σ und für Schubspannungen der griechische Buchstabe τ verwendet wird. Positive Normalspannungen werden als Zugspannungen und negative Normalspannungen als Druckspannungen bezeichnet. Zugspannungen zeigen also immer in Richtung des Flächennormalenvektors, das heißt von der Schnittfläche weg, und umgekehrt für Druckspannungen. Schubspannungen können ebenfalls positiv oder negativ sein. Erzeugt eine Schubkraft ein positives Moment um den Flächenschwerpunkt, das heißt eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn, dann ist die Schubspannung positiv; erzeugt sie ein negatives Moment, dann ist die Schubspannung negativ.

Schubspannungen werden zudem noch in die jeweiligen Komponenten der in der Schnittfläche liegenden Koordinatenachsen zerlegt. Dabei steht der erste Index von τ für die Lage der Schnittebene und der zweite Index für die Richtung der Schubspannungskomponente in der Schnittebene. So bezeichnet beispielsweise τ_{xy} eine Schubspannung in einer Fläche deren Normalenvektor parallel zur x -Koordinate ist und welche selbst in dieser Fläche in Richtung der y -Koordinate zeigt.

7.2.1 Der Spannungstensor

Sei dA das Flächenelement mit Normalenvektor \mathbf{n} welches die Volumelemente dV_1 und dV_2 in Abb. 7.6 voneinander trennt. Mit \mathbf{P}_n als dem zugehörigen Spannungsvektor übt dann dV_1 auf dV_2 eine Kraft proportional zu dA aus:

$$d\mathbf{F}_{12} = \mathbf{P}_n dA$$

Umgekehrt übt dV_2 die entgegengesetzt gleiche Kraft auf dV_1 aus:

$$d\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{P}_n dA$$

Ein quaderförmiges Volumenelement dV wie in Abb. 7.7 gezeigt hat sechs Nachbar-Volumenelemente. An jeder der sechs Grenzflächen von dV gilt ein entsprechendes Kräftegleichgewicht mit dem jeweiligen Nachbar-Volumenelement. Zur Berechnung der Gesamtkraft auf ein solches Volumenelement $dV = dx dy dz$ werden die an den jeweiligen Grenzflächen übertragenen Kräfte vorzeichenrichtig addiert. Für

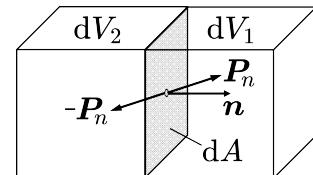


Abb. 7.6

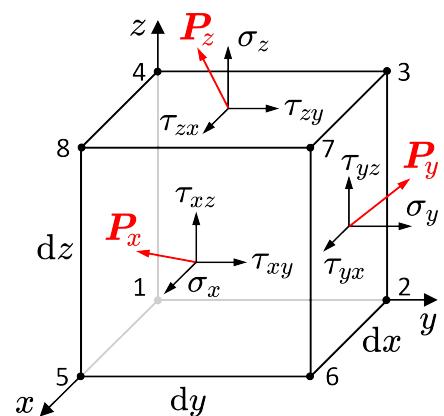


Abb. 7.7

Kräfte in x -Richtung sind das die in Abb. 7.7 zur x -Achse normalen Grenzflächen mit den Eckpunkten 1-2-3-4 und 5-6-7-8. Zuerst betrachtet man nur die Fläche 1-2-3-4 für sich alleine. Auf beiden Seiten der Fläche wirkt die gleiche Kraft, aber in entgegengesetzter Richtung: nämlich $-\mathbf{P}_x dy dz$ an der Außenseite (negative x -Richtung) und $\mathbf{P}_x dy dz$ an der Innenseite (positive x -Richtung). Verschiebt man nun eine Kopie dieser Fläche entlang der x -Achse in Richtung der Fläche 5-6-7-8 so ändert sich die wirkende Kraft auf beiden Seiten um einen Betrag proportional zur Verschiebung mal der Veränderung von \mathbf{P}_x über die Strecke dieser Verschiebung. An der Position der Fläche 5-6-7-8 ist damit die von dV in x -Richtung übertragene Kraft:

$$d\mathbf{F}_{5678} = \left(\mathbf{P}_x + \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

Die von dV an der Position der Fläche 1-2-3-4 übertragene Kraft ist unverändert:

$$d\mathbf{F}_{1234} = -\mathbf{P}_x dy dz$$

Damit erhält man für die gesamte von dV in x -Richtung übertragene Kraft:

$$d\mathbf{F}_{5678} + d\mathbf{F}_{1234} = \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} dx dy dz$$

Mit entsprechenden Betrachtungen für die Gesamtkraft auf die Flächen normal zur y - bzw. z -Achse folgt für die durch das Volumenelement dV in Abb. 7.7 übertragene Gesamtkraft

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (7.13)$$

Mit den Achsen-Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ und $\hat{\mathbf{k}}$ lassen sich die Spannungsvektoren \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y und \mathbf{P}_z in ihre Richtungskomponenten zerlegen.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x &= \hat{\mathbf{i}} \sigma_x + \hat{\mathbf{j}} \tau_{xy} + \hat{\mathbf{k}} \tau_{xz} \\ \mathbf{P}_y &= \hat{\mathbf{i}} \tau_{yx} + \hat{\mathbf{j}} \sigma_y + \hat{\mathbf{k}} \tau_{yz} \\ \mathbf{P}_z &= \hat{\mathbf{i}} \tau_{zx} + \hat{\mathbf{j}} \tau_{zy} + \hat{\mathbf{k}} \sigma_z \end{aligned} \quad (7.14)$$

Damit folgt aus Gl. (7.13) für die Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{F}}{dx dy dz} &= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \\ &\quad \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \\ &\quad \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{wobei} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

der Spannungstensor ist. Der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Für eine beliebige Schnittfläche dA mit Normalenvektor \mathbf{n} erhält man den jeweiligen Spannungsvektor \mathbf{P}_n durch Multiplikation von $\underline{\underline{\sigma}}$ mit \mathbf{n}

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{n} \underline{\underline{\sigma}} \quad (7.17)$$

Da der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ symmetrisch ist, macht es für die Bestimmung von \mathbf{P}_n keinen Unterschied ob man ihn von links oder von rechts mit dem Normalenvektor \mathbf{n} multipliziert.

7.2.2 Dehnungen

Dehnungen sind Verformungen eines Kontinuumskörpers durch Längen- und / oder Winkeländerungen welche bewirken, dass der Ortsvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ eines Körerpunktes um einen Vektor $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ verschoben wird. Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\rho}$ einer Verformung kann zwar konstant sein, zumeist hängen seine Verschiebungskoordinaten ξ , η und ζ aber vom Ort ab, also $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ und $\zeta = \zeta(x, y, z)$. Naturgemäß sind Dehnungen immer das Ergebnis von Krafteinwirkungen. Normalspannungen verursachen Streckungen oder Stauchungen, das heißt Längenänderungen, während Schubspannungen sogenannte Gleitungen, d.h. Winkeländerungen, verursachen. Ein wichtiger Bestandteil der Charakterisierung von Werkstoffen ist die Bestimmung von Dehnungen als Funktion einwirkender Spannungen. Das Ergebnis entsprechender Messungen sind Spannungs-Dehnungs-Diagramme die das Dehnungsverhalten eines Körpers unter den einwirkenden Spannungen beschreiben. Dabei werden drei verschiedene Bereiche unterschieden:

- Linear elastisch: Die Dehnung ist proportional zur Spannung und sie ist reversibel.
- Nichtlinear elastisch: Die Dehnung ist nicht mehr proportional zur Spannung aber weiterhin reversibel.
- Plastisch: Die Dehnung ist nicht mehr reversible und die Verformung bleibt ohne einwirkende Spannung bestehen.

In technischen Anwendungen ist der linear elastischen Bereich von großer praktischer Bedeutung. In diesem Bereich sind die Längen- und Winkeländerungen relativ zu Ausgangslängen und Ausgangswinkeln so klein, dass zur Berechnung der Verformung eine lineare Näherung gerechtfertigt ist. Im linear elastischen Bereich sind Spannungen (σ, τ) und Dehnungen, das heißt Streckung oder Stauchung (ϵ) bzw. Gleitung (γ), durch die Hookeschen Gesetze verknüpft:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{Normalspannungen} \\ \tau = G \cdot \gamma \quad \text{Schubspannungen} \end{array} \right\} \quad (7.18)$$

Hierbei sind das Elastizitätsmodul E , auch als Youngsches Modul bezeichnet, und das Schubmodul G werkstoffspezifische Materialgrößen. Das Dehnungsverhalten von Kontinuumskörpern kann sehr komplex sein, da sich unterschiedliche Dehnungen zumeist überlagern. Im Allgemeinen ist es aber oft möglich den Dehnungszustand eines Körpers auf eine Überlagerung von einfacheren Dehnungssituationen zu reduzieren. Zu letzteren gehören einfache Zug- oder Drucksituationen, Verbiegungen und Verzerrungen.

Einfache Zugdehnung

Bei dem in Abb. 7.8 skizzierten einfachen Zugversuch bewirkt das an einem hängenden Draht angebrachte Gewicht einen einachsigen Spannungszustand ($F = \sigma_z A$) der sowohl zu einer Änderung der Drahlänge l als auch zu einer Änderung des Drahtdurchmessers d führt. Die Dehnung des Drahtes ϵ_{zz} in z -Richtung ist gegeben durch

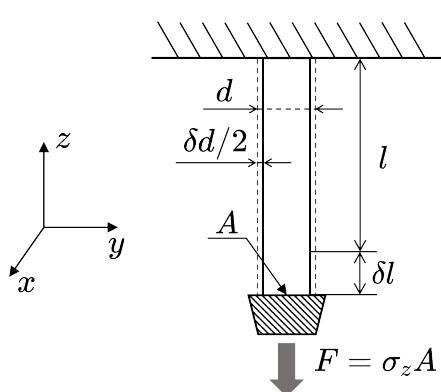


Abb. 7.8

$$\epsilon_{zz} = \frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma_z}{E} \quad (7.19)$$

Die Abnahme des Drahtdurchmessers wird durch die Dehnungskomponenten ϵ_{xx} und ϵ_{yy} in der xy -Ebene beschrieben.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\delta d}{d} = -\mu \epsilon_{zz} \quad (7.20)$$

wobei die sogenannte Querkontraktionszahl μ , auch oft als Poissonsche Zahl bezeichnet, eine werkstoffspezifische Materialgröße ist. Genau wie bei den Komponenten des Spannungstensors, beschreiben die Indizes der Komponenten ϵ_{ik} des Dehnungstensors die Richtung der Normalen zur Schnittfläche (erster Index) und eine Richtungscoordinate in der Schnittfläche (zweiter Index).

Balkenbiegung

Seien ρ_1 und ρ_2 die Krümmungsradien welche die Dehnung bzw. Stauchung des in Abb. 7.9 skizzierten infinitesimalen Volumenelements in dx - bzw. dy -Richtung beschreiben. Aus der Skizze lassen sich die durch die Balkenbiegung verursachten Streckungen und Stauchungen ablesen. ϵ_{xx} und ϵ_{yy} sind jeweils die Dehnungskomponenten in x - und in y -Richtung. Für diese gilt:

$$\epsilon_{xx} = \frac{(\rho_1 + z)d\varphi - \rho_1 d\varphi}{dx} = z \frac{d\varphi}{dx} = \frac{z}{\rho_1}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{(\rho_2 - z)d\chi - \rho_2 d\chi}{dy} = -z \frac{d\chi}{dy} = \frac{z}{\rho_2}$$

$$\mu = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

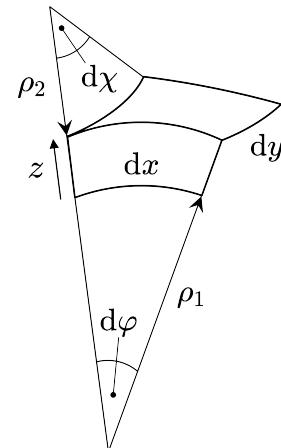


Abb. 7.9

Diese vereinfachte Betrachtung der Balkenbiegung ignoriert, dass es zu Streckungen und Stauchungen in x - und y -Richtung kommt und nicht zu Streckung nur in x -Richtung und Stauchung nur in y -Richtung. Das Linienelement dx , das näher am Winkel $d\varphi$ liegt, erfährt im Vergleich zum «ungebogenen» Zustand eine Stauchung, während das von $d\varphi$ ferner liegende Linienelement dx eine Streckung erfährt. Irgendwo dazwischen liegt ein Linienelement, das weder gebogen noch gedehnt wird, die sogenannte neutrale Faser. Gleichermaßen gilt für das Linienelement dy in Bezug auf den Winkel $d\chi$.

Verzerrungen

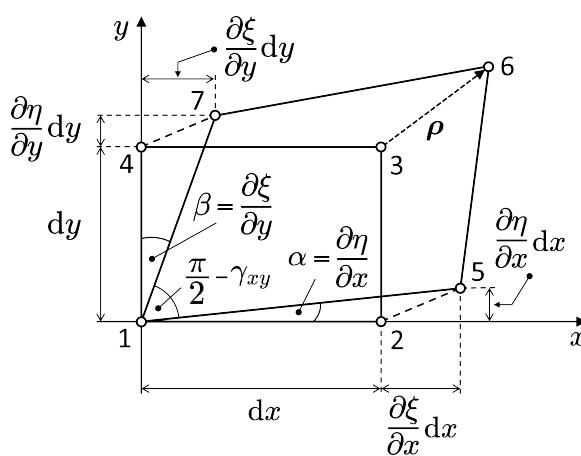


Abb. 7.10

Zuerst wird die ebene Verzerrung in Abb. 7.10 betrachtet. Diese verformt das Rechteck 1-2-3-4 in das Viereck 1-5-6-7. Der rechte Winkel zwischen den Strecken $\overline{12}$ und $\overline{14}$ des ursprünglichen Rechtecks wird dabei zum Winkel

$$\square_{412} \mapsto \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

wobei $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ der Gleitwinkel ist. Für die hier betrachteten geringen Verformungen sind die Winkel α und β sehr klein und es gilt somit in linearer Näherung

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \dots\right) \approx \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{1}$$

und

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots\right) \approx \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{1}$$

Damit erhält man für den Gleitwinkel γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

Für die relative Dehnung, das Verhältnis von verzerrter zu ursprünglicher Länge, kann man aus Abb. 7.9 für x - und y -Richtung ablesen:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\left(dy + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy\right) - dy}{dy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Mit $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ bzw. $\gamma_{yx} = 2\epsilon_{yx}$ ergibt sich für den Verzerrungstensor in der Ebene

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \xi / \partial x & \gamma_{xy} / 2 \\ \gamma_{yx} / 2 & \partial \eta / \partial y \end{bmatrix}$$

Zur Beschreibung des räumlichen Verzerrungszustands kann das Ergebnis für die ebene Verzerrung einfach erweitert werden und mit den generalisierten Koordinaten

$$\boldsymbol{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

erhält man für den räumlichen Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ; \quad \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (7.21)$$

Der Verzerrungszustand den $\underline{\underline{\epsilon}}$ beschreibt besteht aus Dehnungen (Streckungen und Stauchungen) und Scherungen (Winkeländerungen). Dehnungen sind mit den Diagonalkomponenten von $\underline{\underline{\epsilon}}$ und Scherungen mit den gemischten Komponenten verknüpft. Mit $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ ist der Verzerrungstensor symmetrisch. Die mit Dehnungen und Scherungen eines Kontinuumskörpers verknüpfte Volumenänderung lässt sich in linearer Näherung (d.h. sehr geringe Verformung) einfach bestimmen:

$$\delta V = \prod_{i=1}^3 dx_i \left(1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right) - dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\delta V = dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \text{nichtlineare Glieder}$$

Somit ist die relative Volumenänderung

$$\frac{\delta V}{V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii} = \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (7.22)$$

wobei $\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})$ die Spur des Verzerrungstensors ist.

7.3 Das Hookesche Gesetz

Mit dem gewonnenen Verständnis von Stress und Verzerrung, können wir nun untersuchen, wie die Beziehung zwischen Stress und Verzerrung zustande kommt, die wir als Hookesches Gesetz kennen. Dieses gilt bei kleinen Verzerrungen in isotropen und homogenen elastischen Kontinuumskörpern. Hierbei bedeutet homogen, dass die elastischen Eigenschaften des betrachteten Körpers in all seinen Punkten die gleichen sind, und isotrop heißt er, weil keine Richtung in ihm ausgezeichnet ist. In einem solchen Körper ist die Spannung in jedem seiner Punkte völlig von der jeweils vorliegenden Verzerrung bestimmt und die Hauptachsen der Spannung und der Verzerrung fallen zusammen.

Bei der Verzerrung elastischer Körper wird die zur Verformung aufgewandte Arbeit als potenzielle Energie in diesen gespeichert. Entsprechend wird bei der Entzerrung die gegengleiche Arbeit geleistet und die gespeicherte potenzielle Energie wieder abgegeben. Ist U die pro Volumeneinheit dV gespeicherte potenzielle Energie, d.h. die potenzielle Energiedichte, dann besitzt ein Volumenelement des verformten Körpers die potenzielle Energie $U \cdot dV$. Die potenzielle Energiedichte U eines verzerrten elastischen Körpers ist stets positiv und im unverzerrten Fall gleich Null. In der dV -Umgebung jedes Punktes eines verzerrten elastischen Körpers ist U proportional zur jeweiligen lokalen Verzerrung und kann durch die Komponenten des Verzerrungstensors ausgedrückt werden.

Bei kleinen Verzerrungen ist die Rückstellkraft proportional zu den Dehnungs bzw. Stauchungskomponenten des Verzerrungstensors. Die zur Verformung geleistete Arbeit und damit die in der Verformung gespeicherte potenzielle Energiedichte ist hingegen in niedrigster Näherung proportional zur wirkenden Kraft, multipliziert mit den entsprechenden Dehnungs bzw. Stauchungskomponenten. Eine erste Bedingung für die Entwicklung von U nach den Komponenten des Verzerrungstensors $\underline{\underline{\epsilon}}$ ist deshalb, dass U in erster Näherung

proportional zu quadratischen Produkten aus Dehnungs bzw. Stauchungskomponenten ist. Günstigerweise wählt man als Bezugssystem für diese Entwicklung den Verzerrungstensor im Hauptachsensystem, d.h. $\underline{\underline{\epsilon}} \mapsto \underline{\underline{\epsilon}}^D$.

$$\underline{\underline{\epsilon}}^D = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}^D) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

In isotropen Körpern darf sich U bei Vertauschung der Hauptachsen (z.B. von ϵ_1 und ϵ_3) nicht ändern. U muss also eine symmetrische Funktion von ϵ_1 , ϵ_2 , und ϵ_3 sein. Eine Wahl ist die Quadratsumme der Streckungs- bzw. Stauchungskomponenten denn

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 \quad \text{ist symmetrisch bei Vertauschung der } \epsilon_i$$

Das Quadrat der Spur von $\underline{\underline{\epsilon}}^D$, selbst eine invariante Tensorgroße, ist ebenfalls eine solche symmetrische Funktion der ϵ_i und enthält auch gemischte Glieder.

$$[\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}^D)]^2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3) \quad (7.23)$$

Mit $\epsilon_i\epsilon_k = \epsilon_k\epsilon_i$ stehen in Gl. (7.23) alle möglichen quadratischen Glieder die sich aus ϵ_1 , ϵ_2 , und ϵ_3 bilden lassen. Somit sollten sich alle möglichen U welche den zwei genannten Bedingungen genügen, als Linearkombination der Quadratsumme der ϵ_i und dem Quadrat von $\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}^D)$ bilden lassen. Damit hat man für U :

$$U = G \left[\alpha(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 \right] \quad (7.24)$$

α und β sind dimensionslose Konstanten und G ist eine dimensionsbehaftete Materialkonstante. Damit immer $U \geq 0$, muss gelten $G \geq 0$ und α und β sind so zu wählen, dass

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq -\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2}$$

Ohne Einschränkung kann $\alpha = 1$ gesetzt werden. Betrachten wir die Dehnung $d\epsilon_1$ des Quaders in Abb. 7.11 mit den Seitenlängen ds_1 , ds_2 und ds_3 . Der Quader sitzt mit seinem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und mit seinen Seitenflächen senkrecht zu den Koordinatenachsen e_1 , e_2 , und e_3 welche mit den Hauptachsenrichtungen von $\underline{\underline{\epsilon}}^D$ zusammenfallen. Außer der Dehnung $d\epsilon_1$ in Richtung der e_1 -Achse erfährt der Quader keine weitere Verzerrung. Durch die Dehnung verlängert sich die Strecke ds_1 um den Betrag $ds_1 d\epsilon_1$ (erinnere: ϵ ist immer eine relative Dehnung $\Delta l/l$). Da

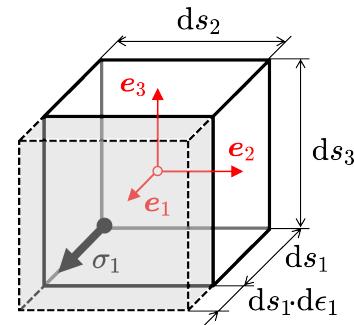


Abb. 7.11

ds_2 und ds_3 unverändert bleiben und die Hauptspannungsrichtungen mit den Hauptdehnungsrichtungen zusammenfallen ist die zur Dehnung geleistete Arbeit

$$dA = \text{Kraft} \times \text{Weg} = \sigma_1 ds_2 ds_3 \times ds_1 d\epsilon_1$$

Durch die geleistete Arbeit erhöht sich die potenzielle Energie $U \cdot dV = U \cdot ds_1 ds_2 ds_3$ des Quaders um den äquivalenten Betrag $dU \cdot ds_1 ds_2 ds_3$. Ein einfacher Vergleich liefert

$$dU = \sigma_1 \cdot d\epsilon_1 \equiv \frac{\partial U}{\partial \epsilon_1} \cdot d\epsilon_1$$

Mit der parametrisierten Form der potenziellen Energiedichte von U aus Gl. (7.24) mit $\alpha = 1$ ergibt sich somit für σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_1} = 2G[\epsilon_1 + \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)]$$

Da die Spur eines Tensors eine invariante Größe ist, d.h. $\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}^D)$, lässt sich diese Gleichung auch schreiben als

$$\sigma_1 = 2G[\epsilon_1 + \beta \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})] = 2G\epsilon_1 + \underbrace{2G\beta \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})}_{\text{konstant}}$$

Das heißt, egal welche Koordinatentransformation man vornimmt, das zweite Glied in dieser Gleichung bleibt unverändert. Analog zu σ_1 , können σ_2 und σ_3 in gleicher Weise als Funktionen der Verzerrungskomponenten ϵ_1 , ϵ_2 , und ϵ_3 geschrieben werden. Zusammengekommen lauten die Beziehungen zwischen den Hauptspannungen σ_i und den Hauptverzerrungen ϵ_i in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1 + \beta & \beta & \beta \\ \beta & 1 + \beta & \beta \\ \beta & \beta & 1 + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

beziehungsweise $\sigma = 2G \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \epsilon$. Mit Hilfe der inversen Matrix

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \cdot \text{Adj}(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{1+3\beta} \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ -\beta & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix}$$

erhält man die Hauptverzerrungen ϵ_i als Funktion der Hauptspannungen σ_i aus $\epsilon = (2G)^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \sigma$. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2G(1+3\beta)} \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ -\beta & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Wie aus Gl. (7.24) abzulesen ist, bewirkt die Spannung σ_1 im Beispiel von Abb. 7.11 eine Streckung ϵ_1 von

$$\epsilon_1 = \frac{1+2\beta}{2G(1+3\beta)} \cdot \sigma_1 \quad (7.27)$$

Zugleich, und das obwohl σ_2 und σ_3 Null sind, bewirkt die Spannung σ_1 aber auch eine Querkontraktion in der Größe von

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\beta}{2G(1+3\beta)} \cdot \sigma_1 \quad (7.28)$$

Die Konstante G , das Schubmodul, ist uns bereits in Gl. (7.18) begegnet. Diese werkstoffspezifische Größe, fallweise auch als Gleitmodul, Schermodul oder Torsionsmodul bezeichnet, hat die Dimension eines Drucks. Ein Vergleich von Gl. (7.18) und Gl. (7.27) zeigt, dass für das Elastizitätsmodul E , fallweise auch als Youngsches Modul, Spannungsmodul, oder Zugmodul bezeichnet, gilt:

$$E = 2G \frac{1+3\beta}{1+2\beta} \quad (7.29)$$

Aus Gl. (7.27) und Gl. (7.28) folgt für die Querkontraktionszahl $\mu = \epsilon_2/\epsilon_1 = \epsilon_3/\epsilon_1$

$$\mu = \frac{\beta}{1+2\beta} \quad (7.30)$$

Damit ergibt sich für die Beziehungen zwischen G , E und μ

$$E = 2G \cdot (\mu + 1) \quad , \quad G = \frac{1}{2} \frac{E}{\mu + 1} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (7.31)$$

Ersetzt man nun β in Gl. (7.27) und Gl. (7.26) durch μ bzw. E , so erhält man die bekannten Hookeschen Gleichungen im Hauptachsensystem, d.h., in einem System in dem die nicht-diagonalen Elemente von $\underline{\underline{\sigma}}$ bzw. $\underline{\underline{\epsilon}}$ verschwinden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{\mu+1} \left[\epsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = 2G \left[\epsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \right] \\ \sigma_2 &= \frac{E}{\mu+1} \left[\epsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = 2G \left[\epsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \right] \\ \sigma_3 &= \frac{E}{\mu+1} \left[\epsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = 2G \left[\epsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

beziehungsweise

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\mu+1}{E} \left[\sigma_1 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma_1 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \\ \epsilon_2 &= \frac{\mu+1}{E} \left[\sigma_2 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma_2 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \\ \epsilon_3 &= \frac{\mu+1}{E} \left[\sigma_3 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma_3 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Verlässt man das Hauptachsensystem so gilt für die Komponenten des Spannungs- und des Verzerrungstensors

$$\sigma_{ik} = 2G \left[\epsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\sum_{l=1}^3 \epsilon_{ll} \right) \delta_{ik} \right] \quad (7.34)$$

beziehungsweise

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ik} - \frac{\mu}{\mu+1} \left(\sum_{l=1}^3 \sigma_{ll} \right) \delta_{ik} \right] \quad (7.35)$$

Für die nicht-diagonalen Elemente ($i \neq k$) der Tensorkomponenten in Gl. (7.34) und Gl. (7.35) gelten die Konventionen:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \gamma_{ik} = \frac{\mu+1}{E} \sigma_{ik} = \frac{\mu+1}{E} \tau_{ik} \quad ; \quad \gamma_{ik} = 2 \frac{\mu+1}{E} \tau_{ik} = \frac{1}{G} \tau_{ik}$$

Systeme in welchen die nicht-diagonalen Elemente von $\underline{\underline{\sigma}}$ bzw. $\underline{\underline{\epsilon}}$ verschwinden sind solche bei denen beispielsweise nur Druckkräfte vorliegen, so wie das beim hydrostatischen Druck P der Fall ist. Hier gilt

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P \quad \text{und} \quad \sigma_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

Für die Volumenänderung aufgrund des hydrostatischen Drucks P ergibt sich somit

$$\frac{\delta V}{V} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = -3 \cdot \frac{1-2\mu}{E} P = -\kappa P = -\frac{P}{K}$$

wobei K das Kompressibilitätsmodul und κ die Kompressibilität ist. Gl. (7.34) verknüpft die Diagonalelemente ϵ_{ii} des Verzerrungstensors (Dehnung und Kompression) und seine außerdiagonalen Elemente, d.h. die ϵ_{ik} mit $i \neq k$ (Gleitungen). Diese Beziehung und die Tatsache, dass die Summe aus Dehnung und Stauchung ($\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})$) proportional zur Summe der Hauptspannungen ($\text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}})$) ist, d.h.

$$\sum_K \epsilon_{KK} = \frac{\mu+1}{E} \sum_K \sigma_{KK} - \frac{3\mu}{E} \sum_K \sigma_{KK} = \frac{1-2\mu}{E} \sum_K \sigma_{KK} \quad (7.36)$$

sind beide sehr hilfreich, wenn man Spannungen aus Dehnungen berechnen muss.

7.4 Kräfte in der Elastodynamik

Abschnitt 7.2 behandelte Kräfte in elastostatischen Situationen, also wenn sich elastische Körper per Definition im Kräftegleichgewicht befinden. Dabei heben sich die jeweils auf einen elastischen Körper wirkenden Kräfte gegenseitig auf, was zur Folge hat, dass der Körper sich nicht bewegt. Daher der Begriff Elastostatik. Im Gegensatz dazu betrachtet die Elastodynamik Situationen, wo dieses Kräftegleichgewicht gestört ist und der elastische Körper daher einer Beschleunigung durch eine resultierende Kraft unterliegt. Um solche Situationen beschreiben zu können, müssen wir verstehen, was mit den Elementen des Spannungstensors aus Gl. (7.16) passiert, wenn die auf einen elastischen Körper wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewicht sind. Wie wir in Abschnitt 7.2 gesehen haben, hat der Spannungstensor die Komponenten

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

Mit der Krafteinwirkung verbundene Verschiebungen bzw. Verzerrungen in Richtung der raumfesten Koordinatenachsen (x, y, z) werden durch die Massenpunkt-Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) beschrieben. An jedem Punkt im elastischen Körper

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t)$$

beschreibt $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ die lokale Verzerrung um \mathbf{x}_0 , wobei \mathbf{x}_0 sich auf die jeweilige Koordinate im elastischen Körper bezieht, wenn keine Kräfte vorhanden sind. Um die resultierende Kraft in einer Situation zu bestimmen, in der die auf einen elastischen Körper wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, betrachtet man, was mit dem Quader in Abb. 7.12 passiert (vergleiche auch mit Abb. 7.7). Dabei sollen die auf den Quader einwirkenden Kräfte lediglich zu einem Ungleichgewicht der Spannungs- und Schubkomponenten in x -Richtung führen, während die Spannungs- und Schubkomponenten in y - und z -Richtungen davon unberührt bleiben und weiterhin im Gleichgewicht sind. Für die resultierende Kraft F_x in der x -Richtung liest man aus Abb. 7.12

$$F_x = d\sigma_x dy dz + d\tau_{yx} dx dz + d\tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz \quad (7.38)$$

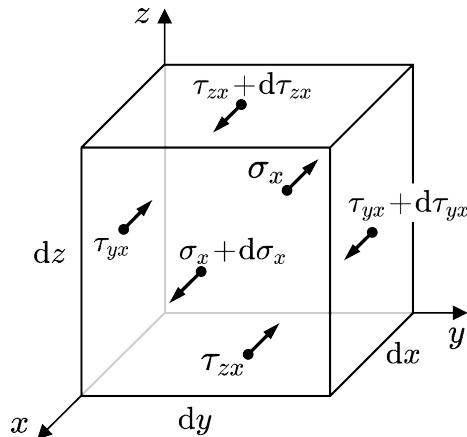


Abb. 7.12

Neben den Komponenten des Spannungstensors die an den Quaderflächen wirken, muss auch die bereits aus Gl. (7.15) bekannte Volumenkraft berücksichtigt werden. Das geschieht in Gl. (7.38) durch den Faktor $f_x dx dy dz$, wobei f_x die Kraftdichte des elastischen Körpers in x -Richtung ist. Zuerst soll nochmals der Fall des Kräftegleichgewichts betrachtet werden.

Der Gleichgewichtsfall

Im Gleichgewichtsfall verschwindet die nach Gl. (7.38) durch das Volumenelement $dV = dx dy dz$ in x -Richtung übertragene Kraft, also $F_x = 0$. Mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ folgt damit aus Gl. (7.38)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (7.39)$$

Mit x, y, z raumfest und den Massenpunkt-Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) kann man dies verallgemeinert schreiben als

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_k} + f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.40)$$

Für die Koordinaten gilt hier $\xi_i = \xi_i(x, y, z, t)$ und für die Volumenkräfte $f_i = f_i(x, y, z, t)$. Mit der Diskussion des Hookeschen Gesetzes in Abschnitt 7.3 sind mit Gl. (7.34) die Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors verknüpft über die Beziehung

$$\sigma_{ik} = 2G \left[\epsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ll} \right] \quad (7.41)$$

wobei für den Verzerrungstensor mit Gl. (7.21) gilt

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \quad (7.42)$$

Die Ableitungen der Komponenten des Spannungstensors in Gl. (7.40) bestimmt man mittels Gl. (7.41) und Gl. (7.42) sowie den folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ll} &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi_l}{\partial x_l} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} = \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \\ \sum_k \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \right) = \frac{1}{2} \left(\Delta \xi_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \right) \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \delta_{ik} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl. (7.40) erhält man damit

$$G \left[\Delta \xi_i + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \right] + f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.43)$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = \epsilon_V$$

die (negative oder positive) Volumendehnung des elastischen Körpers beschreibt. Eingesetzt in Gl. (7.43) lauten die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

$$\Delta \xi_i + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \epsilon_V}{\partial x_i} + \frac{1}{G} f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.44)$$

Wie schon der Name besagt, sind diese drei Gleichungen linear in den Verschiebungskoordinaten der Massenpunkte, sie sind aber auch linear in den Volumenkräften f_i . Folglich greift das Superpositonsprinzip sowohl für die Verschiebungen als auch für die Volumenkräfte. Das ist natürlich von großem Vorteil bei komplizierten Problemen wenn es gelingt, diese als lineare Überlagerungen einfacher zu lösender Probleme darzustellen. Im nächsten Schritt soll jetzt der Fall betrachtet werden in dem kein Gleichgewicht vorliegt.

Der Nicht-Gleichgewichtsfall

Im obigen Beispiel (Abb. 7.12) heißt das $F_x \neq 0$ in Gl. (7.38). Es gibt aber nicht nur eine Einzelkraft in einer Koordinatenrichtung, sondern Kräfte wirken in verschiedenen Koordinatenrichtungen. Sind die F_i mit $i = 1, 2, 3$ die Kräfte in die orthogonalen Koordinatenrichtungen, dann muss für jede dieser $F_i \neq 0$ das Newtonsche Gesetz gelten. Das bedeutet, die beschleunigte Masse multipliziert mit dem Beschleunigungsvektor der jeweiligen Dehnungs- oder Kompressionskomponente in einer Koordinatenrichtung, muss gleich der Kraft in dieser Koordinatenrichtung sein. Es muss also gelten

$$F_i = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} \quad (7.45)$$

Damit ergeben sich analog zum Gleichgewichtsfall $F_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) in Gl. (7.40) die Gleichungen:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = f_i + \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.46)$$

Anstatt der Gleichung Gl. (7.43) erhält man somit

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = f_i + G \left[\Delta \xi_i + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \right] \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.47)$$

Gl. (7.47) ist die Bewegungsgleichung für ein differentielles Volumenelement in einem elastischen Körper, auf das die Volumenkräfte f_i wirken. Für einen Fluidkörper vereinfacht sich diese Gleichung da die außerdiagonalen Elemente von $\underline{\underline{\sigma}}$ verschwinden.

8. Die Bewegung von Fluiden

Fluide sind inkompressible Flüssigkeiten oder kompressible Gase, deren Strömungsverhalten man mit der Methode von Lagrange oder der Methode von Euler beschreiben kann. Die Lagrange-Methode, benannt nach Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), beschreibt die Bahnkurven von Massenpunkten durch ihre Ortsvektoren, d.h. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, wobei \mathbf{r}_0 der bekannte Ortsvektor eines Massenpunkts zum Zeitpunkt t_0 ist. In der Lagrange-Beschreibung trägt jeder Massenpunkt des Fluids seine Eigenschaften mit sich, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden wie üblich durch ein- bzw. zweifache Zeitableitung ermittelt. Bei Strömungsprozessen ist es jedoch oft nicht so sehr von Interesse, wo sich ein Massenpunkt befindet, sondern wie das Geschwindigkeitsfeld aussieht, in dem er sich bewegt. Dies liefert die Methode von Euler mittels

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t)$$

wobei \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld, ρ die lokale Dichte und \mathbf{x} eine raumfeste Koordinate ist. In der Euler-Beschreibung werden physikalische Größen $a(\mathbf{x}, t)$, wie z.B. $\rho(\mathbf{x}, t)$, jeweils an einem festen Punkt im Raum betrachtet. Der jeweilige Punkt im Raum ist:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t)$$

wobei \mathbf{x}_0 Lagrange-Koordinaten sind (wie in den elastischen Gleichungen). Ein sich entlang einer Bahnkurve \mathbf{x} bewegender Massenpunkt steht an jedem Punkt im Raum unter dem Einfluss der physikalischen Größe $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ an diesem Ort, d.h., er registriert die lokale Stärke oder Schwäche von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$, erfährt aber auch die Änderungsrate von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ am jeweiligen Ort. Diese Änderungsrate von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ ist durch die totale bzw. substantielle Ableitung nach der Zeit gegeben. Der Begriff «substantielle Ableitung» hat eine rein physikalische Bedeutung. Es drückt die Tatsache aus, dass sie die Änderung einer physikalischen Größe entlang der Bewegung der Substanz selbst, d.h., der sich bewegenden Flüssigkeit oder des sich bewegenden Gases, beschreibt. Die substantielle Ableitung einer physikalischen Größe $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ ist

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}}_{\substack{\text{lokaler} \\ \text{Anteil}}} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}}_{\substack{\text{Konvektivanteil} \\ (\text{bei festem } \mathbf{x}_0)}}$$

Das bedeutet, dass für jedes $a(\mathbf{x}, t)$ gilt

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } a \quad (8.1)$$

Die substantielle Ableitung einer physikalischen Größe $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ besteht aus zwei Teilen, der lokalen Änderung dieser Größe an einem gegebenen Punkt im Raum und dem sogenannten konvektiven Anteil von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$. Den konvektiven Anteil kann man sich als ortsfesten Satz von Markierungen vorstellen, die über den gesamten Fluidkörper verteilt an jedem Punkt \mathbf{x}_0 im Raum die Größe von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ angeben. Manchmal ist eine andere Schreibweise der substantiellen Ableitung sinnvoll, die sich die Beziehung

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a}^2 - [\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})]$$

zunutze macht. Damit wird die substantielle Ableitung

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a}^2 - [\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \quad (8.2)$$

8.1 Die hydrostatische Druckgleichung

Einige Probleme der Fluidbewegung können im Rahmen der Hydrostatik gelöst werden. Von Interesse sind dabei die Druckkräfte, die Flüssigkeiten auf Gefäßwände verschiedener Behälter ausüben. Um den hydrostatischen Druck zu verstehen, betrachtet man ein kleines verformbares Volumen eines flüssigen Körpers (Abb. 8.1). In diesem Fall sind nur relevant:

- Normalspannungen, keine Schubspannungen; Druck variiert nur in z -Richtung.
- Die Gewichtskraft.

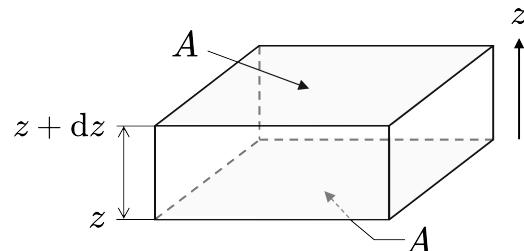


Abb. 8.1

Damit Kräftegleichgewicht herrscht, müssen die Druckkräfte mit der Höhe variieren. Masse und Kraft sind gegeben durch

$$dm = \rho \cdot A \cdot dz \quad (\text{Masse}) \quad \text{und} \quad dF = dm \cdot g \quad (\text{Kraft})$$

wobei ρ die Dichte des Körpers ist. Die Kraft entsteht durch den Gewichtsdruck und im Gleichgewicht gilt

$$P(z + dz) \cdot A - P(z) \cdot A = -g \cdot \rho \cdot A \cdot dz$$

Da dz sehr klein ist, genügt es bei der Taylorentwicklung von $P(z + dz)$ nur die erste Ableitung zu berücksichtigen, also $P(z + dz) \approx P(z) + P'(z) \cdot dz$. Damit gilt

$$\left(P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \cdot A - P(z) \cdot A = -g \cdot \rho \cdot A \cdot dz$$

was bedeutet dass

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -g \cdot \rho$$

Allgemein ausgedrückt mit der Kraftdichte $f(z)$ gilt

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -g \cdot \rho = f(z) \tag{8.3}$$

beziehungsweise dreidimensional

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \tag{8.4}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten ist $\rho = \rho_0$ konstant und somit gilt:

$$P = P_0 - \rho \cdot g \cdot z \tag{8.5}$$

Gl. (8.4) ist die Grundgleichung der Hydrostatik und Gl. (8.5) ist die sogenannte hydrostatische Druckgleichung. Neben der gerade gegebenen anschaulichen Ableitung folgt Gl. (8.4) ganz einfach auch aus Gl. (7.40) weil für einen Fluidkörper im Gleichgewicht die Schubspannungen verschwinden und nur Druckspannungen existieren. Also gilt für den Spannungstensor in Gl. (7.40) $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ und somit wird aus Gl. (7.40)

$$\mathbf{f} = - \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial P}{\partial x_k} \delta_{ik} = \nabla P(\mathbf{r}) \tag{8.6}$$

Für konservative Kräfte wie die Schwerkraft ist die Kraft der negative Gradient des Potenzials. Mit dem Schwerkraftpotenzial $U(z) = gz$ gilt also (konstante Dichte ρ)

$$\mathbf{f} = -\rho \nabla U = -\rho \nabla(gz) \tag{8.7}$$

Aus Gl. (8.6) und Gl. (8.7) folgt dann unmittelbar die hydrostatische Druckgleichung Gl. (8.5). Damit lassen sich in manchen Fällen auch Lösungen für nicht-statische Situationen finden. Ein solcher Fall ist beispielsweise der eines Fluids in einer Zentrifuge.

Fluida in einer Zentrifuge

Eine inkompressible Flüssigkeit rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einer Zentrifuge (Abb. 8.2). Auf ein Volumenelement im Abstand r von der Rotationsachse wirkt die Zentrifugalkraft $r\omega^2$ was zum bekannten Verlauf der Fluidoberfläche in einem rotierenden Behälter führt. In einem mit der Zentrifuge mitrotierendem Koordinatensystem kann das Problem wie das einer statischen Flüssigkeit behandelt werden auf die das Potenzial $U(r, z)$ wirkt:

$$U(r, z) = \rho g z - \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 = \rho g \left(z - \frac{\rho r^2 \omega^2}{2g} \right)$$

Damit lautet die modifizierte hydrostatische Druckgleichung

$$P + \rho g \left(z - \frac{\rho r^2 \omega^2}{2g} \right) = \text{const}$$

Die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit hat damit die Form einer Parabel

$$z = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2g} + \text{const}$$

wobei die Konstante durch den Umgebungsdruck $P = P_0$ bestimmt ist.

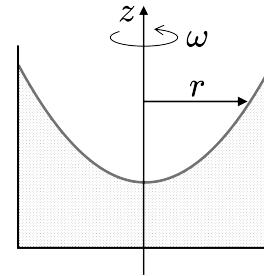


Abb. 8.2

8.2 Die Kontinuitätsgleichung

Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung der Fluidbewegung betrachten wir zwei Ansätze. Zuerst den der Lagrange-Beschreibung. Aus der Erhaltung der Masse folgt

$$\frac{d\Delta m}{dt} = 0 = \frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d\Delta V}{dt} \quad (8.8)$$

Durch Ersetzen von V in Gl. (7.22) durch das Volumenelement ΔV und ξ_i durch $d\xi_i$ kann man das Differential des Volumenelements ΔV als Bruchteil von ΔV ausdrücken:

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = \text{div}(d\xi)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ersetzt man $d\Delta V$ in Gl. (8.8) und erhält

$$\frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \Delta V \text{div} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = 0$$

und mit $d\xi/dt = \mathbf{v}$ folgt

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Ersetzt man die substantielle Ableitung $d\rho/dt$ mit Hilfe von Gl. (8.1), wird daraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \mathbf{v}) = 0$$

woraus die Kontinuitätsgleichung folgt, welche die Änderungsrate der Dichte ρ eines Volumenelements mit dem Netto-Fluiddurchfluss in / aus dem Volumenelement verknüpft.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (8.9)$$

Der zweite Ansatz zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung nutzt den Satz von Gauß, um die Masseänderung eines Volumenelements mit dem Massenfluss in / aus diesem Volumenelement zu verknüpfen. Mit Abb. 8.3 ist die Fluidmasse

$$m = \int_V \rho dV$$

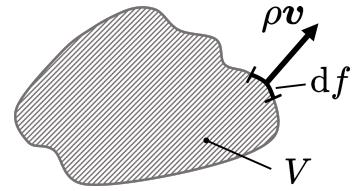


Abb. 8.3

Für den Massenverlust bzw. Massengewinn dieses Volumens V muss dann gelten

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (8.10)$$

Um den Massenverlust bzw. Massengewinn pro Zeiteinheit durch die das Volumen V umschließende Fläche A_V zu berechnen, benötigt man nur die Normalkomponente der Strömung $\rho \mathbf{v}$, also $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_n$:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \iint_{A_V} \rho \cdot v_n \cdot df = 0 \quad (8.11)$$

Nach dem Satz von Gauß gilt für das Flächenintegral in Gl. (8.11)

$$\iint_{A_V} \rho \cdot v_n \cdot df = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

und damit gilt auch

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (8.12)$$

Ein Vergleich von Gl. (8.10) und Gl. (8.12) zeigt, dass gelten muss

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Dies kann nur sein, wenn der Integrand verschwindet, was nichts anderes bedeutet, als dass die Kontinuitätsgleichung Gl. (8.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

gelten muss. In beiden Herleitungen, mit dem Lagrange-Ansatz oder dem Satz von Gauß, ist die Koninuitätsgleichung eine einfache Folge der Massenerhaltung. Die Masse, die im Fluidstrom in ein Volumenelement fließt, muss dieses Volumenelement verlassen, da sich ansonsten die Dichte dieses Volumenelements ändert.

8.3 Stromlinien und Stromfunktion

Zur Beschreibung von Strömungsvorgängen wird in der Hydrodynamik zwischen Stromlinien, Bahnlinien (bzw. Bahnkurven), Streichlinien und Zeitlinien unterschieden.

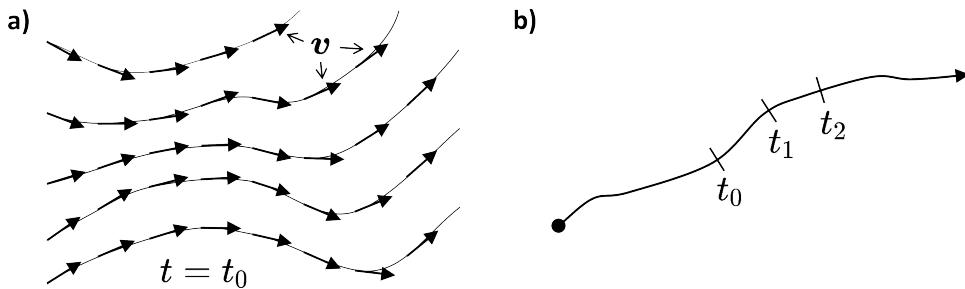


Abb. 8.4: (a) Stromlinien sind eine Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes. Die Länge der \mathbf{v} -Vektoren an jedem Tangentenpunkt (hier gleich lang gezeichnet) hängt von der lokalen Strömung ab. (b) Eine Bahnlinie beschreibt den Pfad eines einzelnen Teilchens als Funktion der Zeit.

Bahnlinien (Bahnkurven): Diese beschreiben die Bahn eines Massenpunkts bzw. Flüssigkeitsteilchens in einer Strömung. Bahnlinien kann man einfach sichtbar machen indem man der strömenden Flüssigkeit z.B. Korkteilchen hinzufügt.

Stromlinien: Bezeichnen Kurven deren Tangenten an jedem Kurvenpunkt mit den jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v} identisch sind. Macht man also eine Momentaufnahme zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ dann geben die Stromlinien ein Abbild des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung.

Streichlinien: Bezeichnen Kurven von Massenpunkten bzw. Flüssigkeitsteilchen die alle durch einen gemeinsamen Raumpunkt laufen. Ein einfaches Beispiel für Streichlinien ist das Absetzen von Bojen an einem festen Ort in einer Strömung. Verbindet man die Positionen der nacheinander abgesetzten Bojen so erhält man die Streichlinie.

Zeitlinien: Bezeichnen die Verbindungslinie zwischen den momentanen Orten von Teilchen deren Orte bereits zu jeweils früheren Zeitpunkten bekannt waren. Zur besseren

Veranschaulichung von Zeitlinien werden im einfachsten Fall zum gleichen Zeitpunkt t_0 an verschiedenen Positionen leichte Probeteilchen in die Strömung gesetzt. An jedem späteren Zeitpunkt t ist dann die Verbindungsline zwischen den momentanen Positionen dieser Probeteilchen die Zeitline zum Zeitpunkt t .

Im vorliegenden Zusammenhang interessieren insbesondere die Stromlinien. Bahnlinien geben die Lagrange-Beschreibung einer Strömung wieder (Abb. 8.4b) während Stromlinien der Euler-Beschreibung entsprechen (Abb. 8.4a). Im Fall einer stationären Strömung, d.h. $\dot{\mathbf{v}} = 0$, ist die Strömungsgeschwindigkeit an jedem Ort zeitlich konstant und somit sind Stromlinie und Bahnlinie identisch.

Anders ausgedrückt ist eine Strömung immer dann stationär, wenn ein Probeteilchen das zu unterschiedlichen Zeiten, aber immer an derselben Position, in die Strömung gesetzt wird, sich jedesmal auf derselben Bahnlinie bewegt. Ist dies nicht der Fall, dann spricht man von einer instationären Strömung. Bei einer instationären Strömung ist es nicht mehr möglich, aus einer Bahnkurve die zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegende Strömungsgeschwindigkeit zu bestimmen. Das bedeutet aber nicht anders, als dass bei instationären Strömungen Stromlinie und Bahnlinie nicht mehr identisch sind.

Mathematisch ausgedrückt bedeutet die oben gegebene Definition der Stromlinie, dass die Änderung des Ortsvektors der Stromlinienkurve in jedem Punkt der Kurve immer parallel zum Geschwindigkeitsvektor der Strömung in diesem Punkt ist. In jedem Punkt der Stromlinie muss also das Vektorprodukt aus Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} und infinitesimaler Änderung $d\mathbf{r}$ des Ortsvektors \mathbf{r} der Stromlinienkurve verschwinden:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 \quad (8.13)$$

Um zu verstehen, was für inkompressible Flüssigkeiten und ebene stationäre Strömungen zwei benachbarte Stromlinien voneinander unterscheidet, betrachtet man die sogenannte Stromfunktion Ψ , auch als Stokes'sche Stromfunktion bezeichnet. Legt man beispielsweise das Koordinatensystem so, dass der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_z$ in z -Richtung gleichzeitig der Normalenvektor der durchströmten Ebene ist (Strömung also in der xy -Ebene), dann ist Ψ definiert durch die Bedingung

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi \hat{\mathbf{e}}_z = \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z \quad (8.14)$$

$$= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, 0 \right) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Stromfunktion Ψ lässt sich also das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} berechnen. Unmittelbar aus der Definition von Ψ folgt

$$\nabla\Psi \cdot \mathbf{v} = \nabla\Psi \cdot (\nabla\Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (8.15)$$

Anders ausgedrückt: Entlang von Linien deren Tangentialvektoren in jedem Punkt parallel zu den jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren des Geschwindigkeitsfeldes sind, ist die Stromfunktion jeweils konstant. Dies folgt auch direkt durch Einsetzen von Gl. (8.14) in die Definition der Stromlinie aus Gl. (8.13). Für eine Strömung in der xy -Ebene mit $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0)$ ergibt das (Graßmann Identität)

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 = (\nabla\Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z) \times d\mathbf{r} = (\nabla\Psi \cdot d\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - (\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_z \cdot d\mathbf{r}}_{=0}) \cdot \nabla\Psi$$

Also muss für Stromlinien gelten

$$\nabla\Psi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0$$

Die Stromfunktion ist entlang einer Stromlinie konstant und Stromlinien sind somit die Höhenlinien (Äquipotenziallinien) der Stromfunktion und jede Stromlinie entspricht einem bestimmten Wert der Stromfunktion Ψ . Zum besseren Verständnis von Ψ soll der sogenannte spezifische Durchfluss q im zweidimensionalen Fall (ebene Strömung) betrachtet werden.

Der spezifische Durchfluss q ist definiert als das Flüssigkeitsvolumen das pro Zeiteinheit durch die Normalfläche in Abb. 8.5 zwischen den zwei Stromlinien $\Psi = \Psi_A$ und $\Psi = \Psi_B$ durchfließt. Also

$$q = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

wobei ds das infinitesimale Linienelement entlang der Verbindungsstrecke von A nach B und $\hat{\mathbf{n}}$ der Normaleinheitsvektor auf das Linienelement ist. In Abb. 8.5 ist diese Verbindungsstrecke der Einfachheit halber als Gerade gewählt, sie kann aber eine beliebige Form haben. Aus Abb. 8.5 kann man ablesen, dass

$$\hat{\mathbf{n}} ds = (dy, -dx)$$

Damit erhält man für q mittels Gl. (8.14)

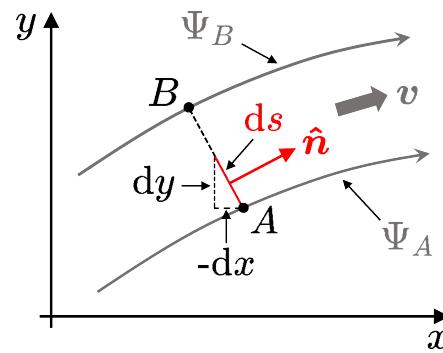


Abb. 8.5

$$q = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A \quad (8.16)$$

Mit $\Psi_B = const$ und $\Psi_A = const$ ist auch die Differenz q konstant. Der spezifische Durchfluss ist also für inkompressible Flüssigkeiten bei stationärer Strömung eine Konstante. Daraus folgt: Verkleinert / vergrößert sich der Abstand zwischen den Stromlinien $\Psi = \Psi_A$ und $\Psi = \Psi_B$ dann erhöht / verringert sich die Strömungsgeschwindigkeit zwischen den beiden Stromlinien. Aus Gl. (8.14) folgt zudem

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \Psi \hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (8.17)$$

Die Strömung enthält also weder Quellen noch Senken. Damit können Stromlinien weder im Inneren der betrachteten Flüssigkeit beginnen noch dort enden, sondern müssen geschlossen sein oder auf dem Rand verlaufen. Weiters lässt sich aus Gl. (8.16) ablesen, dass der spezifische Durchfluss durch ein Gebiet verschwindet dessen Begrenzung aus einer Stromlinie und einer Verbindungsleitung besteht die auf der Stromlinie beginnt und endet ($\Psi_B = \Psi_A$). Das gilt insbesonders für eine «Verbindungsleitung» die entlang der Stromlinie selbst verläuft, das heißt, der spezifische Durchfluss durch eine Stromlinie ist gleich Null. Stromlinien wirken wie undruckdurchlässige Wände was wiederum besagt, dass sich die Durchflussgeschwindigkeit zwischen zwei Stromlinien mit deren Abstand ändern muss, da es einen Durchfluss durch eine Stromlinie selbst nicht gibt.

8.4 Die Bernoulli-Gleichung

Betrachten wir, wie in Abb. 8.6 gezeigt, den stationären Fluss eines Fluids durch ein Rohr. Der Fluid-Massenstrom ist an jeder Position des Rohrs gegeben durch

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt} = \rho \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot A \cdot v$$

wobei ρ die Dichte, dV ein Volumenelement, A der Rohrquerschnitt und ds das differentielle Linienelement durch die Mitte jedes Querschnitts entlang der x -Achse ist. Ein konstanter Massenfluss durch das Rohr in Abb. 8.6 bedeutet, dass

$$\rho_0 v_0 A_0 = \rho_1 v_1 A_1 \quad (8.18)$$

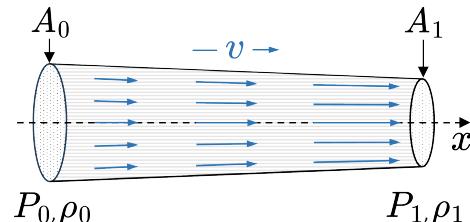


Abb. 8.6

Gl. (8.18) ist nur eine andere Form der in Abschnitt 8.2 diskutierten Kontinuitätsgleichung. Für inkompressible Fluide mit $\rho = \text{const}$ reduziert sich Gl. (8.18) auf $v_0 A_0 = v_1 A_1$ und die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids erhöht / verringert sich, wenn der Querschnitt des Rohres schmäler / weiter wird. Gl. (8.18) gilt auch für Gasströmungen, aber da Gase komprimierbar sind, ist ρ nicht konstant und eine Änderung des Rohrdurchmessers kann nicht nur zu einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit, sondern auch zu einer Dichteänderung führen. Da der Massenstrom zunimmt wenn sich das Rohr in Abb. 8.6 verengt, steigt auch der Druck. Das bedeutet, dass der Druck auf die Seiten eines Fluidvolumenelements im Rohr in Richtung des engeren bzw. des breiteren Rohrquerschnitts höher bzw. niedriger ist. Die Kraft auf jeder Seite eines solchen Volumenelements ergibt sich aus dem jeweiligen Druck mal der Oberfläche, also $F(x) = P(x) \cdot A$. Damit wird die Nettokraft über ein Volumenelement (vergleiche Gl. (7.13))

$$F_x = F(x + dx) - F(x) = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot A = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dV \quad (8.19)$$

Das Minuszeichen zeigt, dass die Kraft in die Richtung wirkt wo der Druck abnimmt, also dorthin wo $\partial P / \partial x < 0$. Nachdem wir die Kraft kennen, die auf ein Volumenelement des Fluidkörpers wirkt, ist mit $dm = \rho dV$ seine Bewegungsgleichung

$$\rho dV \frac{dv}{dx} = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dV$$

was wir umschreiben können zu

$$\rho \frac{dv}{dx} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (8.20)$$

Gl. (8.20) sagt uns, dass jede Druckänderung in einem Fluid sofort überall durch das Fluid übertragen wird, eine Tatsache, die als Pascalsches Gesetz bekannt ist, benannt nach Blaise Pascal (1623 – 1662). Die Kraft in Gl. (8.19) bewegt das Fluidvolumen durch das Rohr und wir wissen, dass dies Energie kostet. Mit Gl. (4.1) ist die nötige Arbeit, um das Fluidelement von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 entlang der positiven x -Achse durch das in Abb. 8.6 gezeigte Rohr zu bewegen

$$W = \int_1^2 F_x dx = -dV \int_1^2 \frac{\partial P}{\partial x} dx = (P_1 - P_2)dV$$

Diese Arbeit muss der Zunahme der kinetischen Energie des Fluidvolumenelements entsprechen, d.h.

$$\rho dV \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = (P_1 - P_2)dV$$

woraus folgt

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 \quad (8.21)$$

Das Rohr in Abb. 8.6 ist horizontal. Damit bleibt für ein von links nach rechts fließenden Fluidvolumen die Höhe über dem Boden gleich und seine potenzielle Energie ändert sich nicht. Rohre verlaufen aber zumeist nicht nur horizontal und daher müssen wir die entsprechende Änderung der potenziellen Energie in Gl. (8.21) einbeziehen, was uns dann die übliche Form der Bernoulli-Gleichung liefert:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (8.22)$$

oder allgemeiner

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{const} \quad (8.23)$$

Nach der Bernoulli-Gleichung bedingt in einer stationären Fluidströmung eine Druckänderung immer eine Änderung der Strömungsgeschwindigkeit und umgekehrt. Sinkt bzw. steigt der Druck so steigt bzw. sinkt die Strömungsgeschwindigkeit.

Das Bernoulli-Paradoxon

Das sogenannten Bernoulli-Paradoxon ist in Abb. 8.7

skizziert. Am Ende eines Rohrs, durch das ein Gas- oder Flüssigkeitsstrom geleitet wird, sitzt eine Scheibe, unter der eine zweite Scheibe aufgehängt ist, die sich in der z -Richtung frei nach oben oder unten bewegen kann. Allerdings hat die untere Scheibe im Gegensatz zur oberen Scheibe keinen mittleren Auslass für den aus dem Rohr kommenden Gas- oder Flüssigkeitsstrom. Daher wird dieser seitlich umgelenkt und entweicht durch die Schlitzöffnung zwischen den Scheiben. Nun würden die meisten vermuten, dass der Gas- oder Flüssigkeitsstrom die untere Scheibe

von der oberen wegdrückt, aber genau das Gegenteil passiert (und deshalb wird dieses Experiment Bernoulli-Paradoxon genannt). Wenn ein Gas- oder Flüssigkeitsstrom von oben in das Rohr eingeleitet wird, entweicht natürlich die Luft oder Flüssigkeit zwischen den beiden Scheiben. Da jedoch P_0 der Umgebungsdruck ist, sagt uns die Bernoulli-Gleichung, dass der Druck zwischen den beiden Scheiben gegeben ist durch

$$P_s = P_0 - \frac{\rho}{2}v^2$$

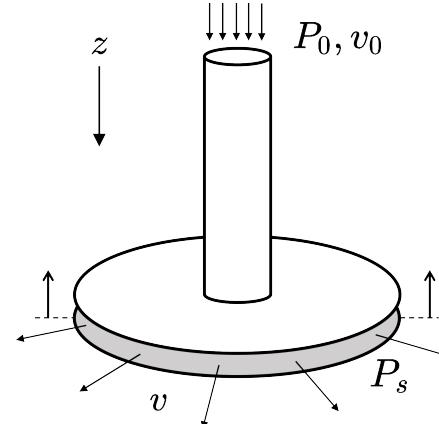


Abb. 8.7

wobei P_S der Druck zwischen den Scheiben und v die Geschwindigkeit ist, mit der die Luft oder Flüssigkeit zwischen ihnen entweicht. P_0 ist konstant, d.h., der Druck zwischen den beiden Scheiben nimmt ab und der entstehende Unterdruck zieht die untere Scheibe nach oben. Wenn A die Fläche der unteren Scheibe ist, dann schwebt sie, wenn

$$P_S \cdot A > m \cdot g$$

Das Bernoulli-Paradoxon funktioniert mit einem Gasstrahl und mit einem Flüssigkeitstrom, wobei dann der Apparat vollständig in die Flüssigkeit eingetaucht ist. Bernoullis Gleichung hat viele praktische Anwendungen, eine davon im Bereich der Luftfahrt.

Die Kutta-Joukowsky-Gleichung

Abb. 8.8 zeigt die Profilskizze eines Flugzeugflügels und die ihn umgebende Luftströmung. Weit vor dem Flügel ist (relativ zum fliegenden Flugzeug) die Luftgeschwindigkeit in x -Richtung gleichmäßig, und das Gleiche gilt für die Luft weit hinter dem Flugzeugflügel. Der Luftstrom um den Flügel ist jedoch ganz anders, da dieser die Luft in die positive z -Richtung und etwas weniger in die negative z -Richtung ablenkt. Dadurch entsteht eine Luftzirkulation um das Flügelprofil herum, die sich an der hinteren Flügelspitze von ihm löst. Normalerweise ist diese Flügelspitze speziell geformt, um die Wirbelbildung durch die abbreißende Luftzirkulation am Ende des Flügelprofils zu minimieren. Das Endergebnis ist, dass die Luft über dem Flügel schneller strömt als unter dem Flügel. Da die Luftdichte über und unter dem Flügel gleich ist, führt dies zu einer Nettoauftriebskraft. Die Bernoulli-Gleichung auf den Luftstrom über und unter dem Flügel angewendet ergibt eine Druckdifferenz von:

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Ist die Fläche unter dem Flügelprofil A , dann beträgt die durch diese Druckdifferenz erzeugte Nettoauftriebskraft

$$F_z = A \cdot (P_2 - P_1) = A \cdot \rho \cdot u \cdot (v_1 - v_2) \quad \text{mit} \quad u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

wobei u die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Flugzeug bewegt. Ist die Länge des Flügels L und seine Profilbreite B , dann ist $A = LB$ und die Auftriebskraft beträgt

$$F_z = \rho \cdot u \cdot L \cdot B (v_1 - v_2) \approx \rho \cdot u \cdot L \cdot \Gamma \quad (8.24)$$

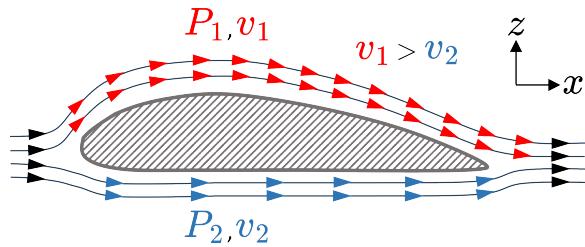


Abb. 8.8

wobei $\Gamma \approx B(v_1 - v_2)$ die Luftzirkulation ist, die dem Flügel Auftrieb gibt. Gl. (8.24) ist die sogenannte Kutta-Joukowski-Beziehung, die grundlegende Gleichung der Aerodynamik, welche die Kraft beschreibt, die Flugzeuge zum Fliegen bringt. Als letztes Beispiel zur Bernoulli-Gleichung betrachten wir das sogenannte Venturi-Rohr.

Das Venturi-Rohr

Das Venturi-Rohr von dem Abb. 8.9 ein Beispiel zeigt, ist nach seinem Entdecker Giovanni Battista Venturi (1746 – 1822) benannt. An der engsten Stelle des Venturi-Rohrs ist der dynamische Druck P_0 maximal und der hydrostatische Druck minimal. Dies führt zu einem Unterdruck im engeren Rohr, wobei $P < P_0$ und $v > v_0$; dort strömt die Luft mit höherer Geschwindigkeit. Der jeweilige Druckunterschied wird durch die unterschiedlichen Flüssigkeitsstände in den beiden Armen des U-Rohrs angezeigt. Damit lassen sich beispielsweise Strömungsgeschwindigkeiten von Gasen oder Flüssigkeiten messen.

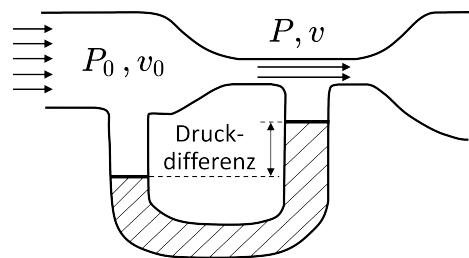


Abb. 8.9

8.5 Impulsgleichgewicht

Ein wichtiges Konzept der Hydrodynamik ist die Stromröhre, auch als Stromlinienbündel bezeichnet (Abb. 8.10). Dabei betrachtet man zuerst eine sogenannte Stromlinienfläche, das ist die Fläche die von der Summe aller Stromlinien die durch eine ortsfeste Linie gehen aufgespannt wird. Handelt es sich bei der ortsfesten Linie um eine geschlossene Kurve, dann bildet diese Stromlinienfläche den Mantel einer Röhre, der Stromröhre. Der Flächennormalenvektor der Eintritts bzw. Austrittsfläche der Stromröhre ist

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

In einer stationären Strömung ändern sich Lage und Form einer Stromröhre nicht mit der Zeit. Es gilt die folgende Kontinuitätsbedingung aus Gl. (8.18):

$$\rho_0 \cdot v_0 \cdot A_0 = \rho \cdot v \cdot A$$

Pro Zeiteinheit muss also durch jede Querschnittsfläche einer solchen Stromröhre die gleiche Masse fließen. Parametrisiert man jetzt den Verlauf der Stromröhre so, dass das

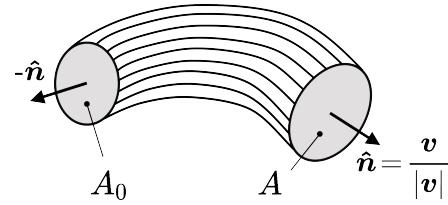


Abb. 8.10

Linienelement ds durch den Schwerpunkt jeder Querschnittsfläche der Stromröhre verläuft, so wird aus der Kontinuitätsbedingung

$$\rho_0 \cdot v \cdot A = \rho \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt} = const$$

Um die Kontinuitätsbedingung bei instationärer Strömung herzuleiten, verwendet man die Massenerhaltung und das zweite Newtonsche Gesetz für inkrementelle Änderungen Δm und Δp von Masse und Impuls. Es muss gelten:

$$\frac{d(\Delta m)}{dt} = 0 \quad (\text{Masse})$$

$$\frac{d(\Delta p)}{dt} = \Delta \mathbf{F} \quad (\text{Impuls})$$

Daher gilt mit Gl. (7.45) und Gl. (7.46) komponentenweise

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta p_i)}{dt} &= \Delta F_i = f_i \Delta V + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) \Delta V \\ &= \frac{d(\Delta m)}{dt} v_i + \Delta m \frac{dv_i}{dt} \end{aligned}$$

Es folgt mit $d(\Delta m)/dt = 0$ und $\rho = \Delta m / \Delta V$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (8.25)$$

Aber mit Gl. (8.1) muss auch gelten

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) \quad (8.26)$$

Da die linken Seiten von Gl. (8.25) und Gl. (8.26) identisch sind, müssen auch die rechten Seiten identisch sein, d.h.

$$f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \quad (8.27)$$

Nun schreibt man die Kontinuitätsgleichung, also Gl. (8.9), um zu

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Wenn man diese Gleichung mit v_i multipliziert und dann die rechte Seite davon als Null zur rechten Seite von Gl. (8.27) hinzufügt, erhält man

$$f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}$$

bzw. umgeschrieben

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\left(\rho v_i v_k - \sigma_{ik} \right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{Impulsdichte} \\ \text{Impulsstromdichte}}} \\
 &\quad = \Pi_{ik}
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

8.5.1 Mikroskopische Untersuchung des Fluiddrucks

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} \quad ; \quad \sigma_{ik} = -\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Behauptung: Für die Impulsstromdichte gilt

$$\Pi_{ik} = \rho \langle (v_i + u_i)(v_k + u_k) \rangle$$

$\langle a \rangle$ ist hier der Mittelwert der physikalischen Größe a , gemittelt über die thermische Bewegung eines Ensembles (wie der Atome oder Moleküle eines Gases), von dem a ein physikalisches Maß ist. Diese thermische Bewegung u_i ist eine zusätzliche thermische Geschwindigkeit, für die gilt $\langle u_i \rangle = 0$. Falls $i \neq k$, gilt zudem

$$\langle u_i u_k \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_k \rangle \quad \text{und somit} \quad \langle u_i u_k \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq k$$

Darüber hinaus gilt der Gleichverteilungssatz (siehe Abschnitt 9.1)

$$\frac{m}{2} \langle u_i^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Damit folgt für Π_{ik}

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho \langle u_i u_k \rangle = \rho v_i v_k + \rho \frac{k_B T}{m} \delta_{ik}$$

Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases (siehe Gl. (9.1)) erhält man

$$P \cdot V = R \cdot T \quad ; \quad k_B = \frac{R}{N_A} \quad \rightarrow \quad P = \frac{N_A m}{V m} k_B T = \frac{\rho}{m} k_B T$$

und daher

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik} \tag{8.29}$$

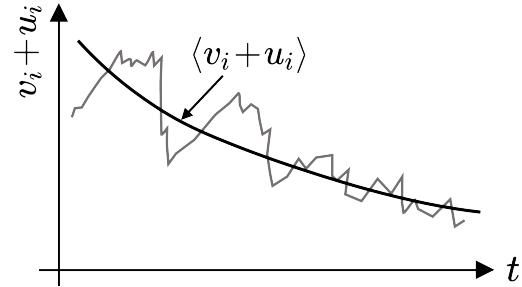


Abb. 8.11

8.5.2 Kraftwirkung auf Rohre

Betrachtet wird der stationäre Fall, d.h. in Gl. (8.26)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

und $f_i = 0$. Damit muss gelten

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (*)$$

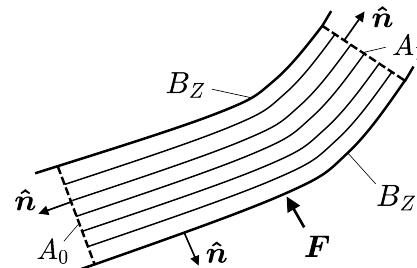


Abb. 8.12

Die Kraft auf die zylindrische Rohrwand B_Z ist

$$\mathbf{F} = \iint_{B_Z} \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{n}} dA$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Normaleneinheitsvektor der Rohrwand ist und dA das entsprechende differentielle Flächenelement. Zur indirekten Berechnung von \mathbf{F} betrachtet man die Impulssstromdichte für das Rohrvolumen. Mit dem Satz von Gauß gilt generell

$$\iiint \operatorname{div}_k \Pi_{i(k)} dV = \oint \sum_{k=1}^3 \Pi_{i(k)} n_k dA$$

Mit (*) ist aber nach Voraussetzung

$$\iiint \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = 0 = \iiint \operatorname{div}_k \Pi_{i(k)} dV$$

und somit gilt

$$\oint \sum_{k=1}^3 \Pi_{i(k)} n_k dA = 0$$

Für die Gesamtkraft auf die Wände des betrachteten Volumens, das heißt, einschließlich der Kräfte auf die zwei Querschnittsflächen die das Volumen im Rohr begrenzen hat man damit

$$\iint_{B_Z} + \iint_{B_{A_0}} + \iint_{B_{A_1}} = \mathbf{F} + \iint_{B_{A_0}} + \iint_{B_{A_1}} = \oint \sum_{k=1}^3 \Pi_{i(k)} n_k dA = 0$$

Daraus folgt für die Kraftwirkung auf das Rohr in Abb. 8.12

$$\mathbf{F}_i = (\rho v_i v + P)_1 \cdot A_1 - (\rho v_i v + P)_0 \cdot A_0 \quad (8.30)$$

8.5.3 Die Euler-Gleichung der Hydrodynamik

Aus den Beziehungen

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} \quad \text{und} \quad \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} = -(\text{grad } P)_i$$

folgt mit Gl. (8.26) die Euler-Gleichung der Hydrodynamik in der Form

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \text{grad } P = \mathbf{f} - \nabla P \quad (8.31)$$

beziehungsweise umgeschrieben auch in den Formen

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla P \quad (8.32)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \mathbf{f} - \nabla P \quad (8.33)$$

Wie aus der Ableitung der Euler-Gleichung zu ersehen ist, werden Reibungskräfte die in praktischen Fällen oft eine signifikante Rolle spielen nicht berücksichtigt. Die Euler-Gleichung betrachtet also ausschließlich die Strömung idealer inkompressibler Flüssigkeiten. Ohne Viskosität und ohne Wärmeleitfähigkeit gibt es bei idealen Flüssigkeiten keine Energieverluste. Die Bewegung einer idealen Flüssigkeit erfolgt somit überall adiabatisch, das heißt Zustandsänderungen erfolgen ohne Wärmetransfer.

8.6 Viskose Flüssigkeiten

Wie bereits in Abschnitt 7.1.3 diskutiert, setzt eine zähe Flüssigkeit, ungleich einer idealen Flüssigkeit, jeder Formänderung einen Reibungswiderstand entgegen dessen Stärke die Viskosität der Flüssigkeit angibt. Mit Gl. (7.46) gilt

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} ; \quad \sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$$

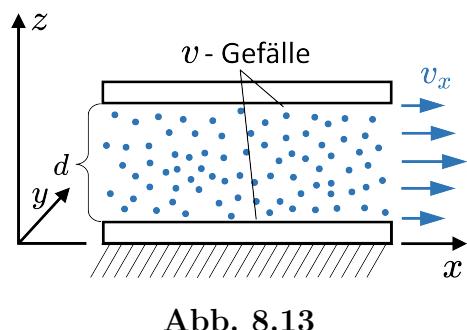


Abb. 8.13

Aufgrund des Reibungswiderstands existiert in einem Rohr (Abb. 8.13) ein Geschwindigkeitsgradient normal zur Fließrichtung. Die Fließgeschwindigkeit v_x ist an der Rohrwand geringer als in der Mitte. Für gegebenes v_x ist der Geschwindigkeitsgradient umso größer je kleiner der Durchmesser d des Rohres ist.

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{v_x}{d}$$

Mit der transversalen Viskosität (Zähigkeit) η , auch als Scherviskosität, erste Viskosität oder dynamische Viskosität bezeichnetet (siehe Abschnitt 7.1.3), gilt

$$\sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

Die dynamische Viskosität η ist das Verhältnis von Schubspannung σ_{xz} zum räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\nabla \mathbf{v}$, ihr Kehrwert ist die Fluidität. Der räumliche Geschwindigkeitsgradient beschreibt die räumliche Änderungsrate der Geschwindigkeit und ist ein Tensor zweiter Stufe, machmal wird er auch als Strömungstensor bezeichnet. In drei Dimensionen lautet er

$$\underline{\underline{\mathbf{l}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

Mit seiner Hilfe lässt sich beispielsweise die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit \mathbf{v} schreiben als

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\mathbf{l}}} \mathbf{v} \quad (8.35)$$

Mit Gl. (8.2) gilt für $\underline{\underline{\mathbf{l}}} \mathbf{v}$ auch die Beziehung

$$\underline{\underline{\mathbf{l}}} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \quad (8.36)$$

Unter Einschluss der Volumenviskosität λ , auch als kinematische Viskosität bezeichnetet (siehe Abschnitt 7.1.3), welche die Viskosität von Fluiden bei Volumenänderungen berücksichtigt, gilt ganz allgemein für den Spannungs- bzw. Verzerrungstensor

$$\sigma_{ik} = -P \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (8.37)$$

und somit

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \Delta v_i + (\eta + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (8.38)$$

bzw. in Vektorform

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (8.39)$$

Der Übergang zur Euler-Beschreibung für eine physikalische Vektorgröße \mathbf{a} nach Gl. (8.1) und Einsetzen in Gl. (8.39) liefern schlussendlich die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} - \nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (8.40)$$

Zum besseren Verständnis des Geschwindigkeitsgradienten in einem Rohr, betrachtet man am besten eine bestimmte Konfiguration, wie die in Abb. 8.14 skizzierte stationäre Strömung durch ein Rohr. Stationäre Strömung bedeutet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (Gl. (8.9)) ist dann auch $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, die betrachtete Flüssigkeit ist also inkompressibel. Damit folgt aus Gl. (8.39) mit $\mathbf{f} = 0$ und $\lambda = 0$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

Für die in Abb. 8.14 skizzierte Situation wird nur die x -Komponente der Gleichung benötigt:

$$\eta \Delta v_x(r) = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_l - P_0}{l} \quad (8.41)$$

Der Druckgradient in x -Richtung ist gegeben durch die Differenz zwischen dem Druck $P_l = P(x = l)$ am Ende eines Rohrstücks der Länge l und dem Druck $P_0 = P(x = 0)$ am Beginn dieses Rohrstücks, geteilt durch die Länge l des Rohrstücks. Das Problem der Rohrströmung behandelt man am besten in Polarkoordinaten. Kartesische Koordinaten (x, y) in Polarkoordinaten (r, φ) transformieren bedeutet für den Laplace Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Gl. (8.41) hängt nur von r ab und somit wird Gl. (8.41) in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{P_l - P_0}{l}$$

Einmal integrieren liefert

$$r \frac{\partial v_x(r)}{\partial r} = \frac{r^2}{2\eta} \frac{P_l - P_0}{l} + C_1$$

Für $r = 0$ verschwindet die linke Seite. Also muss auch die rechte Seite verschwinden und damit folgt $C_1 = 0$. Ein weiteres mal integrieren liefert

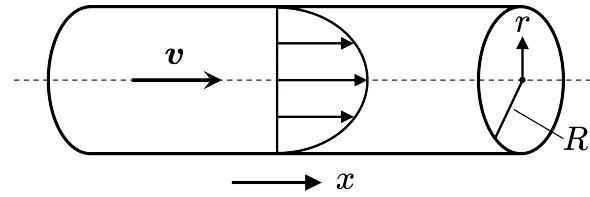


Abb. 8.14

$$v_x(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{P_l - P_0}{l} + C_2$$

Am Rand des Rohrs $r = R$ muss gelten

$$v_x(R) = 0 = \frac{R^2}{4\eta} \frac{P_l - P_0}{l} + C_2$$

und somit bestimmt sich der Wert von C_2 zu

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{P_l - P_0}{l}$$

Damit erhält man als Ergebnis für die radiale Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit im Rohr von Abb. 8.14 ($\Delta P = P_l - P_0$)

$$v_x(r) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \quad (8.42)$$

Mit Hilfe von Gl. (8.42) kann man nun den Durchfluss $dV/dt = \dot{V}$, das heißt, das pro Zeiteinheit durch das Rohr mit Radius R und Länge L fließende Flüssigkeitsvolumen, also den Volumenstrom, durch einfache Integration berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^R 2\pi r v_x(r) dr = \int_0^R 2\pi r \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta P}{l} \left[\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \cdot R^4 \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \cdot R^4 \quad (\text{Hagen-Poiseuille Gesetz}) \quad (8.43)$$

benannt nach Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797 - 1884) und Jean Léonard Marie Poiseuille (1797 - 1869), zeigt, dass der Volumenstrom in einem Rohr mit Radius R linear mit der Druckdifferenz über die Rohrlänge und mit der vierten Potenz des Radius R variiert. Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Hagen-Poiseuille Gesetzes ist das Vorliegen einer stationären Strömung. Weitere Randbedingungen sind, dass die Grenzschichten an der Rohrwand vernachlässigbar sind, d.h., der Radius R muss dafür groß genug sein, und zudem muss für eine stabile Druckdifferenz das Rohr lang genug sein. Das Hagen-Poiseuille Gesetz ist nicht nur zur Betrachtung von Rohrströmungen im Fall von Flüssigkeiten nützlich sondern auch bei Gasströmungen in Rohren solange die Dichte des Gases hoch genug ist. Letzteres ist der Fall wenn die mittlere freie Weglänge der Gasteilchen sehr viel geringer ist wie der Radius des Rohres.

9. Thermische Bewegung

Gase sind ebenso wie Flüssigkeiten Fluida, jedoch komprimierbare Fluida. Zwischen Flüssigkeiten und Gasen gibt es andere Aggregatzustände, die wir als Dämpfe bezeichnen. Auch das sind Gase, aber eben nicht das, was Physiker ideale Gase nennen. In Dämpfen wechselwirken die Moleküle und Gase auf andere Weise als nur durch elastische Stöße. In Dämpfen kondensieren beziehungsweise verdampfen Atome und Moleküle, was bedeutet, dass sie dabei sind, sich miteinander zu verbinden oder solche Bindungen, die sie gebildet haben, aufzubrechen. Anders verhält es sich bei idealen Gasen, bei denen solche Dinge nicht passieren, weil die Gastemperatur so hoch ist, dass die thermische Energie der Gasbestandteile viel höher ist als die jeweilige Bindungsenergie zwischen zwei Gasatomen oder Gasmolekülen; daher können sich solche Verbindungen nicht bilden. Bei ausreichend hoher Temperatur und ausreichend geringer Dichte verhält sich jedes Gas wie ein ideales Gas. Das gilt sicherlich für die Stoffe, die wir üblicherweise als gasförmige Stoffe betrachten. Oft ist es auch möglich und sinnvoll, Ensembles anderer Körper als Gase zu beschreiben, wie zum Beispiel das Elektronengas, aber da gelten dann auch andere Regeln, nämlich die Regeln der Quantenmechanik. Solche Quantengase können sich ganz anders verhalten als normale Gase, obwohl auch die Bestandteile von Gasen wie Atome und Moleküle den Regeln der Quantenmechanik unterliegen. Warum können wir dann das Verhalten von Gasen überhaupt aus klassischer Sicht beschreiben?

Die Antwort ist, dass sich aus den gemittelten Eigenschaften einer sehr großen Anzahl quantenmechanischer Atome und Moleküle die Gasgrößen Temperatur, Druck oder Volumen bestimmen, die wir mit klassischen Mitteln messen können. Die Newtonsche Mechanik lieferte das Verständnis dafür, wie Kräfte wirken und wurde so zur Grundlage der technischen Mechanik. Von Ingenieuren konstruierte Maschinen können ihre Aufgaben aber zumeist nur erfüllen wenn ihnen ausreichend Energie zur Verfügung steht. Mit mechanischen Mitteln lässt sich diese nur schwer erzeugen aber eine einfache Dampfmaschine liefert reichlich Energie. Die Umwandlung thermischer Gasenergie in die mechanische Energie eines sich bewegenden Kolbens war die technische Innovation, welche die erste

industrielle Revolution ermöglichte. Dampf ist kein ideales Gas, aber die Entdeckung des idealen Gasgesetzes im Jahr 1834 markiert den Beginn dessen, was später zur kinetischen Gastheorie, zur Thermodynamik und schließlich zur statistischen Mechanik werden sollte. Deren Aufstieg spiegelte und ermöglichte das Werden der modernen gasbetriebenen Welt des 19. und frühen 20. Jahrhunderts. Das ideale Gasgesetz wurde nicht aus theoretischen Überlegungen abgeleitet, sondern war ein empirisch entdeckter Zusammenhang zwischen Gasdruck P , Gasvolumen V und Gastemperatur T :

$$PV = nRT = nk_B N_A T = Nk_B T \quad (9.1)$$

Die Proportionalitätskonstante im idealen Gasgesetz ergibt sich entweder aus dem Produkt der Molzahl n einer Substanz und der Gaskonstante R oder aus der Molzahl n mal der Boltzmann-Konstante k_B mal der Avogadro-Zahl N_A , benannt nach Amedeo Avogadro (1776 - 1856), oder durch die Anzahl der Teilchen N mal der Boltzmann-Konstante k_B . Dieses Kapitel trägt den Titel «Thermische Bewegung» und nicht «Kinetische Gastheorie», «Thermodynamik» oder «Statistische Mechanik», weil es sich darauf beschränkt zu verstehen, wie makroskopische Gaseigenschaften entstehen. Das bedeutet, die spezifischen atomaren oder molekularen Eigenschaften der Gasbestandteile weitgehend außer Acht zu lassen und sich auf Aspekte zu konzentrieren, bei denen die Newtonsche Mechanik ausreicht, um zu zeigen, wie mikroskopische Verhaltensweisen von Atomen oder Molekülen die makroskopischen Gaseigenschaften bewirken, die wir beobachten können. Die Diskussion der zugrunde liegenden statistischen und quantenmechanischen Prozesse muss warten, bis wir ein besseres Verständnis der Atom- und Molekularphysik haben, das Gegenstand von Band vier dieses Physikkurses sein wird.

9.1 Mikroskopische Untersuchung des Gasdrucks

In Abschnitt 8.5.1 untersuchten wir kurz die mikroskopischen Ursachen des Fließdrucks unter Verwendung von Gleichverteilungssatz und idealem Gasgesetz, die wir dort beide ohne weitere Erklärungen einführten. In diesem Abschnitt werden wir diese Erklärungen nachliefern und sehen uns dazu die in Abb. 9.1 skizzierte Situation an, die ein kleines Gasvolumen zeigt, das durch Bewegen eines Kolbens vergrößert oder verkleinert werden kann. Nehmen wir an, dass der Kolben frei, also ohne Reibung, gleiten kann. In diesem Fall stellt sich seine Position auf eine Gleichgewichtsposition ein, bei welcher der Gasdruck des Gasvolumens V auf den Kolben gleich dem

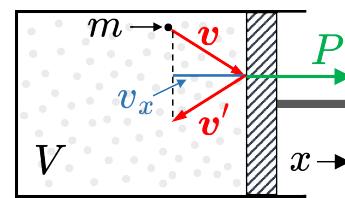


Abb. 9.1

Gasdruck ist, der vom Gas außerhalb des geschlossenen Gasvolumens V auf ihn ausgeübt wird. Wir verstehen intuitiv, dass dies so sein muss, da die Gasteilchen, die im Inneren des Gasvolumens V gegen den Kolben prallen, im Durchschnitt den gleichen Impuls auf den Kolben übertragen wie die Gasteilchen, die von diesem an seiner Außenfläche abprallen. Was würde passieren, wenn außerhalb des eingeschlossenen Gasvolumens nichts, also nur leerer Raum wäre? In diesem Fall würde nichts dem Impuls entgegenwirken, der von den Gasteilchen im Gasvolumen ausgeübt wird. Das Ergebnis wäre, dass sich der Kolben in Abb. 9.1 unter der Kraft, welche die Gaspartikel im Volumen auf den Kolben ausüben, unaufhaltsam nach rechts bewegen würde. Ein Beobachter dieser Situation würde diese Bewegung des Kolbens also auf den Gasdruck zurückführen, der gegeben ist durch

$$P = \frac{F}{A} \quad \text{or} \quad F = P \cdot A$$

wobei A die Fläche der Kolbenwand ist. Wenn der Gasdruck P dazu führt, dass sich der Kolben um die Strecke dx bewegt, ist die andere offensichtliche Schlussfolgerung, dass Gasteilchen Arbeit leisten, um den Kolben zu bewegen. Mit Gl. (4.1) ist diese Arbeit

$$dW = -Fdx = -PdV \tag{9.2}$$

Das Minuszeichen entsteht, weil bei $dV < 0$ Arbeit zur Komprimierung des Gases verrichtet wird, die z.B. das Gas erwärmen kann und seine Energie erhöht. Wenn andererseits $dV > 0$ ist, verrichtet das Gas Arbeit, was bedeutet, dass dem Gas Energie entzogen wird. Was können wir noch über die Kraft F sagen? Prallt ein Gasteilchen von der Kolbenwand innerhalb des Gasvolumens ab, wie in Abb. 9.1 gezeigt, dann ändert sich bei einem elastischen Stoß mit der Kolbenwand sein Impuls parallel zu dieser nicht. Aber sein Impuls normal zur Kolbenwand kehrt sich um und das Gasteilchen erfährt somit eine Impulsänderung von $\Delta p_i = 2m_i v_x$. Um herauszufinden, wie viele Gasteilchen auf diese Weise von der Kolbenwand abprallen, müssen wir wissen, wie viele Gasteilchen in V sich tatsächlich in der positiven x -Richtung bewegen und wie viele von diesen sich so nahe am Kolben befinden, dass sie innerhalb einer Sekunde auf die Kolbenwand treffen können. Sei N die Gesamtzahl der Gasteilchen in V und $dN(v_x)$ die Verteilung der Teilchen in N , die eine Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung haben. Im Durchschnitt bewegt sich nur die Hälfte von $dN(v_x)$ in die positive x -Richtung, während sich die andere Hälfte in die negative x -Richtung bewegt. Die Anzahl solcher sich in positiver x -Richtung bewegender Gasteilchen, die sich nahe genug an der Kolbenwand, also innerhalb des Volumens $v_x \cdot \Delta t$ vor ihr befinden, als Bruchteil aller Gasteilchen in V ist dann

$$\frac{1}{2} \frac{dN(v_x)}{V} A \cdot v_x \cdot \Delta t$$

Haben alle Gasteilchen die gleiche Masse, dann erhält man für den Gesamtimpuls, der von Gasteilchen mit der Geschwindigkeit v_x auf die Kolbenwand übertragen wird

$$\Delta p = \frac{1}{2} \frac{dN(v_x)}{V} A \cdot v_x \cdot 2mv_x \Delta t$$

und damit ist der Druck $dP(v_x)$ aufgrund von Gasteilchen mit der Geschwindigkeit v_x gegeben durch

$$dP(v_x) = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = mv_x^2 \frac{dN(v_x)}{V} \quad (9.3)$$

Um den Gesamtdruck zu erhalten, müssen wir die rechte Seite dieser Gleichung über alle v_x integrieren. Ist $dN(v_x)$ die Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen v_x und $v_x + dv_x$, dann sind die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere quadratische Geschwindigkeit gegeben durch

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{N} \int_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} v_x dN(v_x) = 0 \quad \text{und} \quad \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} v_x^2 dN(v_x)$$

$\langle v_x \rangle$ verschwindet, weil sich gleich viele Gasteilchen in positive und negative x -Richtungen mit der gleichen absoluten Geschwindigkeit v_x bewegen. Da $\langle v_x^2 \rangle$ nicht verschwindet, liefert die Integration von $dP(v_x)$ in Gl. (9.3) über alle v_x

$$P = \int dP(v_x) = \frac{m}{V} \int_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} v_x^2 dN(v_x) = \frac{m}{V} N \cdot \langle v_x^2 \rangle \quad (9.4)$$

In Abb. 9.1 gibt es für das im Volumen V eingeschlossene Gasmedium keine Vorzugsrichtung. Daher ist offensichtlich $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ und mit

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad \text{und} \quad \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

folgt daher

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

Damit kann man Gl. (9.4) umschreiben zu

$$P = \frac{2}{3} \frac{N m \langle v^2 \rangle}{V} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{kin} \rangle \quad (9.5)$$

wobei $\langle E_{kin} \rangle$ die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens ist. Es ist es wichtig, sich die Einschränkungen vor Augen zu halten, die bei der Ableitung dieses Ergebnisses gemacht wurden. Alle Stöße zwischen Gasteilchen und dem Kolben bzw. allen das Volumen V umschließenden Wänden werden als voll elastisch angenommen. Das gilt aber genauso

für Stöße zwischen Gasteilchen was bei Molekülgasen von Bedeutung ist, da Moleküle im Gegensatz zu Atomen über zusätzliche innere Freiheitsgrade wie Vibration und Rotation verfügen. Gl. (9.5) sieht dem idealen Gasgesetz aus Gl. (9.1) ähnlich, aber es gibt Unterschiede. In der obigen Ableitung ist das Volumen V beliebig, sodass wir Gl. (9.5) irgendwie kalibrieren müssen. Zudem kommt in Gl. (9.5) die Gastemperatur nicht vor, dafür aber die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens. Temperatur und kinetische Energie müssen natürlich miteinander zusammenhängen, aber wie, das müssen wir noch herausfinden. Kalibrieren wir zunächst das Volumen in Gl. (9.5). Zu Beginn des 19. Jahrhunderts entdeckte Avogadro, dass gleiche Volumina idealer Gase bei gleicher Temperatur und gleichem Druck die gleiche Anzahl an Atomen oder Molekülen enthalten. Mehr als fünfzig Jahre vergingen nach Avogadros Entdeckung, bevor der Physiker Josef Loschmidt (1821 - 1895) in der Lage war, eine ungefähre Schätzung dieser Zahl anzugeben (und deshalb wird Avogadros Zahl N_A manchmal auch Loschmidts Zahl genannt). Ein Mol einer Substanz enthält $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ Einheiten dieser Substanz. Daher enthält ein Mol Sauerstoffgas unter Standardbedingungen N_A Sauerstoffatome, ebenso wie ein Mol Argongas oder ein Mol jedes anderen Gases. Mit V_m als dem Molvolumen eines Gases wird dann aus Gl. (9.5)

$$PV_m = \frac{2}{3}N_A\langle E_{kin} \rangle \quad (9.6)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit dem empirischen idealen Gasgesetz aus Gl. (9.1) (und verwendet $V_m = V/n$ sowie $k_B = R/N_A$), so findet man dass

$$\frac{2}{3}N_A\langle E_{kin} \rangle = RT \quad \text{bzw.} \quad \langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}k_B T \quad (9.7)$$

Mit $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ gilt auch $\langle E_x^{kin} \rangle = \langle E_y^{kin} \rangle = \langle E_z^{kin} \rangle$, was bedeutet, dass jeder Koordinatenrichtung bzw. jedem Freiheitsgrad eine kinetische Energie von $\langle E_{kin} \rangle / 3$ zugeordnet ist. Gemäß Gl. (9.7) kommt damit jedem Freiheitsgrad ein Energieäquivalent von $k_B T / 2$ zu. Dies ist natürlich nichts anderes als ein Beispiel für den Gleichverteilungssatz, der bereits in Abschnitt 8.5.1 verwendet wurde. Wie Gl. (9.1) und Gl. (9.7) veranschaulichen, verknüpfen Avogadro-Zahl N_A , Gaskonstante R oder Boltzmann-Konstante k_B jeweils die Energieskala mit der Temperaturskala. Historisch gesehen kam zuerst die Avogadro-Zahl N_A , dann die Gaskonstante R und nicht lange danach die Boltzmann-Konstante k_B . Obwohl eng miteinander verwandt, dienen sie etwas unterschiedlichen Zwecken. Chemiker verwenden wahrscheinlich R mit der Dimension $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ oder N_A mit der Dimension mol^{-1} , da sie sich auf molare Eigenschaften beziehen, während die meisten Physiker wahrscheinlich k_B verwenden werden mit der Dimension $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

9.2 Gastemperatur und Wärme

Gl. (9.7) definiert die Temperatur eines Gases, indem sie diese mit der mittleren kinetischen Energie eines Gasteilchens verknüpft. Zwei Gase haben die gleiche Temperatur, wenn die mittlere kinetische Energie ihrer jeweiligen Gasteilchen gleich ist. Bei gegebener Temperatur bewegen sich Gasteilchen in einem Gas, das aus schwereren Atomen oder Molekülen besteht also langsamer. Es bedeutet auch, dass in einem Gas, das zwei verschiedene Arten von Atomen m_1 und m_2 enthält, wobei z.B. $m_2 = 2m_1$, im Wesentlichen zwei verschiedene Ensembles von Gasteilchen vorliegen, die sich mit mittleren Geschwindigkeitsquadraten $\langle v_1^2 \rangle$ und $\langle v_2^2 \rangle = 0.5 \cdot \langle v_1^2 \rangle$ bewegen. Es mag zwar auf den ersten Blick verwundern, dass man nebeneinander zwei so unterschiedliche Ensembles von Gasteilchen vorliegen hat. Aber nachdem was wir über elastische Stoßprozesse in Abschnitt 3.2.2 gelernt haben, ist dies genau das zu erwartende Ergebnis.

Mit Gl. (9.7) ist die Temperatur eine lineare Funktion der mittleren kinetischen Energie eines Gasteilchens. Bei $T = 0$ ist die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens Null und umgekehrt. Da die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens nicht kleiner als Null sein kann, markiert $T = 0$ das untere Ende der Temperaturskala. Allerdings hat dieses $T = 0$ nichts mit $T = 0^\circ\text{C}$ oder $T = 0^\circ\text{F}$ zu tun. Die Celsius-Skala ist durch den Gefrierpunkt von Wasser bei $T = 0^\circ\text{C}$ und seinen Siedepunkt bei $T = 100^\circ\text{C}$ bei Atmosphärendruck auf Meereshöhe ($1\text{ atm} = 100\,325\text{ Pa}$) definiert. Die moderne Definition der Fahrenheit-Skala basiert auf der $T = 180^\circ\text{F}$ -Trennung des Gefrierpunkts von Wasser bei $T = 32^\circ\text{F}$ von seinem Siedepunkt bei $T = 212^\circ\text{F}$, beide wiederum gemessen bei Atmosphärendruck auf Meereshöhe. In unserem täglichen Leben bleiben die Celsius- und die Fahrenheit-Skala wichtig, aber die Physik verwendet die absolute Kelvin-Skala, wobei $T = 0$ in Gl. (9.7) $T = 0\text{ K} = -273.15^\circ\text{C} = -459.67^\circ\text{F}$ entspricht. Gl. (9.7) sagt uns auch, dass es keine obere Temperaturgrenze gibt, weil die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens keine obere Grenze hat.

In unserem Alltag sind Temperatur und Wärme oft synonym. In der Physik bezieht sich Temperatur jedoch auf die mittlere kinetische Energie eines Atoms oder Moleküls in einem bestimmten Gasvolumen, während sich Wärme auf die gesamte in diesem Gasvolumen enthaltene Energie bezieht. Bei zwei Gasvolumina, für die Temperatur, Druck und Volumen identisch sind, besitzen die Gasteilchen die gleiche mittlere kinetische Energie und beide enthalten gleiche Wärmemengen. Ist jedoch bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ein Volumen doppelt so groß wie das andere, so ist die mittlere kinetische Energie der Moleküle in diesen Volumina immer noch gleich, aber ein Volumen enthält

jetzt die doppelte Wärmemenge wie das andere. Wärme fließt immer von Körpern mit hoher Temperatur zu Körpern mit niedrigerer Temperatur. Prozesse, bei denen keine Wärme ausgetauscht wird, bezeichnet man als adiabatische Prozesse, wenn sich die Temperatur nicht ändert, spricht man von isothermen Prozessen.

9.2.1 Atomare und molekulare Freiheitsgrade

Für einfache atomare Gase existieren nur die drei Translationsfreiheitsgrade. Wie Abb. 9.2a zeigt, können sich Atome entlang der drei orthogonalen Koordinatenrichtungen bewegen, aber das ist alles. Im Gegensatz zu Molekülen die auch rotieren und vibrieren können, besitzen Atome keine inneren Freiheitsgrade der Bewegung. Wie Abb. 9.2b für das CO-Molekül zeigt, kann ein zweiatomiges Molekül seine Molekülachse um jede der drei orthogonalen Achsen drehen, die durch den Schwerpunkt des Moleküls verlaufen. Allerdings sind nur zwei dieser Rotationsfreiheitsgrade mit Energieäquivalenten von $k_B T/2$ verbunden. Die in der Molekülachse liegende Rotationsachse trägt nichts bei. Da die Masse eines Atoms in seinem Kern konzentriert ist und Atomkerne sehr klein sind, hat die Rotation um die Achse parallel zur Molekülachse des zweiatomigen Moleküls ein verschwindendes Trägheitsmoment. Das ist wie bei dem rotierenden Quader in Abschnitt 6.2. Dort verschwindet das Trägheitsmoment A wenn man den Quader zu einem extrem dünnen Stab entlang der y -Achse schrumpft und damit natürlich auch die zugehörige Rotationsenergie. Aus dem gleichen Grund tragen nur Drehungen um die beiden Rotationsachsen senkrecht zur Molekülachse zur Rotationsenergie bei. Allerdings kann ein zweiatomiges Molekül auch in Richtung seiner Molekülachse schwingen, wie in Abb. 9.2b illustriert, was einen weiteren Freiheitsgrad und einen weiteren Faktor $k_B T/2$ hinzufügt. Zusammenfassend besitzt ein zweiatomiges Molekül drei translatorische, zwei rotatorische und einen Schwingungsfreiheitsgrad, also insgesamt sechs Freiheitsgrade, und daher wird ein Temperaturanstieg in einem zweiatomigen molekularen Gas in sechs Freiheitsgrade kanalisiert.

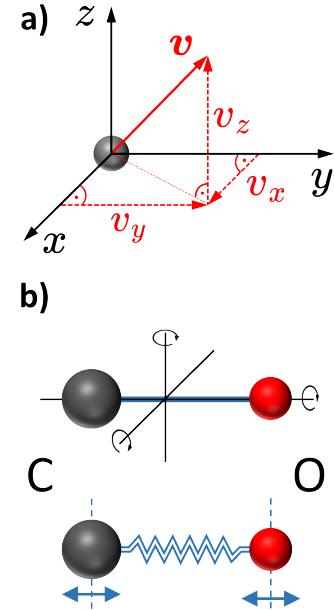


Abb. 9.2

Wenn wir ein nichtlineares dreiatomiges Molekül betrachten, tragen seine drei Rotationsfreiheitsgrade je einen Faktor von $k_B T/2$ bei, ebenso wie seine drei Schwingungsmoden. Ein Molekül wie Wasser verfügt daher über neun Freiheitsgrade, in die bzw. aus denen bei einer Erhöhung oder Senkung der Temperatur Energie fließen oder kommen

kann. Moleküle mit mehr als drei Atomen besitzen drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade sowie eine zunehmende Anzahl an Schwingungsfreiheitsgraden, je mehr Molekülbindungen es gibt und je komplexer ein Molekül ist. Im Allgemeinen besitzen lineare Moleküle mit N Atomen $3N - 5$ Schwingungsfreiheitsgrade, während nichtlineare Moleküle mit N Atomen $3N - 6$ Schwingungsfreiheitsgrade haben. Daher hat Wasser mit seinen drei Atomen als nichtlineares Molekül drei Schwingungsfreiheitsgrade, während ein lineares dreiatomiges Molekül wie CO_2 vier Schwingungsfreiheitsgrade hat (von denen wir zwei in Abschnitt 10.2.2 diskutieren werden). Für all diese Moleküle gilt der Gleichverteilungssatz. Wenn ein Molekül f Freiheitsgrade hat, leitet ein Temperaturanstieg Energie in alle diese Freiheitsgrade, genau wie ein Temperaturabfall allen diesen Freiheitsgraden Energie entzieht. Diese Freiheitsgrade sind alle mit demselben inneren Energieäquivalent $U = k_B T/2$ verbunden. Diese innere Energie liegt in Form einer mittleren kinetischen Energie vor, wie oben für einatomige Gase erläutert, und auch in Form einer mittleren Rotations- und Schwingungsenergie für molekulare Gase. Daher besitzt ein Molekül mit f Freiheitsgraden im Gleichgewicht eine mittlere Energie von

$$U = \frac{f}{2} k_B T \quad (9.8)$$

Gleichgewicht meint hier, dass es eine Zeit dauert bis ein Gas nach Wärme- oder Kältezufuhr wieder überall die gleiche Temperatur hat, also im Gleichgewicht ist. Ebenso wie Gasatome oder Gasmoleküle unterliegen auch Atome in einem Festkörper einer thermischen Bewegung, allerdings mit Einschränkungen. Atome haben in der Gasphase keine Rotationsfreiheitsgrade und das ändert sich auch in einem Festkörper nicht. Im Gegensatz zu Gasatomen besitzen Festkörperatome aber Schwingungsfreiheitsgrade, da sie Bindungen mit ihren Nachbarn eingegangen sind. Diese Schwingungsfreiheitsgrade werden jedoch üblicherweise als Freiheitsgrade bezeichnet, die mit Änderungen der kinetischen und potenziellen Energie eines Atoms in einem Festkörper verbunden sind. Man kann sich Atome im Festkörper als dreidimensionale Oszillatoren vorstellen. Mit der Bewegung federgekoppelter linearer Oszillatoren (siehe Abschnitt 10.2.2) ist je ein Freiheitsgrad der kinetischen Energie und der potenziellen Energie verbunden. Entsprechend besitzen Atome in Festkörpern je zwei Freiheitsgrade pro Koordinatenrichtung, die verknüpft sind mit Änderungen ihrer kinetischen Energie, d.h., wie schnell ein Atom schwingt, und ihrer potenziellen Energie, d.h., wie groß die Auslenkung der Schwingung ist. Daher hat ein Atom in einem Festkörper insgesamt sechs Freiheitsgrade gegenüber drei in der Gasphase. Im Gegensatz zu Atomen erhalten in Festkörpern gebundene Moleküle keine zusätzlichen Freiheitsgrade, sondern verlieren in der Regel alle Rotationsfreiheitsgrade, da ihre Positionen im Raum nun fixiert sind. Atome in einem Festkörper werden quasi Teil eines sehr

großen Moleküls und gewinnen dadurch drei Freiheitsgrade. In Festkörpern gebundene Moleküle werden dagegen in Festkörpern gebundenen Atome ähnlich, verlieren alle ihre Rotationsfreiheitsgrade und behalten nur die drei Freiheitsgrade verbunden mit kinetischen Energieänderungen sowie drei Schwingungsfreiheitsgrade, die nun mit potenziellen Energieänderungen in jede der drei orthogonalen Raumrichtungen verbunden sind. Der Gleichverteilungssatz gilt für Atome und Moleküle in Festkörpern genauso wie in der Gasphase. Daher wird beim Erhitzen oder Abkühlen eines Festkörpers Energie gleichermaßen in oder aus den sechs Freiheitsgraden geleitet, die ein Atom oder Molekül als Teil eines Festkörpers besitzt. Wird ausreichend Energie in die thermische Bewegung von Atomen oder Molekülen geleitet, sodass $k_B T/2$ die Bindungsenergie eines Atoms oder Moleküls in einem Festkörper übersteigt, beginnt der Festkörper zu schmelzen.

Was sind die Freiheitsgrade von Atomen und Molekülen in der flüssigen Phase? Hierzu machen wir uns noch einmal klar wofür diese Freiheitsgrade eigentlich stehen. Das gerade diskutierte Gasmodell bzw. Festkörpermodell ist rein mechanistisch. Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Atoms oder Moleküls in der Gasphase oder im Festkörper entspricht der Anzahl der unabhängigen Variablen, die erforderlich sind, um die Position eines Atoms oder Moleküls mit seinen Bestandteilen im dreidimensionalen Raum zu definieren. Dies ist bei Atomen oder Molekülen in einer Flüssigkeit nicht anders. Da Bindungen in Flüssigkeiten normalerweise zu schwach sind, um die Bewegung ihrer Bestandteile einzuschränken, ist die Anzahl der Freiheitsgrade für eine bestimmte Atom- oder Molekülart, aus der eine Flüssigkeit besteht, normalerweise dieselbe wie in der Gasphase.

9.2.2 Wärmekapazität eines Gases

Jetzt, da wir besser verstehen, wohin die Energie in einem Gas geht oder woher sie kommt, wenn wir es erhitzen oder abkühlen, können wir die Energiemenge bestimmen, die erforderlich ist, um die Temperatur T eines Gases zu erhöhen, von sagen wir T_1 zu einer Temperatur T_2 . Hierzu muss sich die Energie in jedem Freiheitsgrad von $k_B T_1/2$ auf $k_B T_2/2$ ändern. Daher ist mit $\Delta T = T_2 - T_1$ und Gl. (9.8) die erforderliche Gesamtenergie, um die Temperatur eines Gases um ΔT zu erhöhen

$$\Delta U = \frac{M}{m} \frac{f}{2} k_B \Delta T \quad (9.9)$$

M ist die Masse des Gaskörpers und m die Masse eines Gasatoms bzw. Gasmoleküls. Gl. (9.9) gilt für Gase, Flüssigkeiten und feste Körper gleichermaßen. Die Größe

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{M}{m} \frac{f}{2} k_B \quad (9.10)$$

ist die Wärmekapazität des Körpers. C ist die Energie, die pro Kelvin nötigt ist, um die Temperatur des Gases zu erhöhen. Häufig findet man $C = \Delta Q / \Delta T$, da der Buchstabe Q oft verwendet wird, um anzugeben, dass es sich bei der Energiequelle um Wärme handelt. Dividiert man die Wärmekapazität C durch die Gesamtmasse M des Körpers, so erhält man die mit einem kleinen c bezeichnete spezifische Wärmekapazität:

$$c = \frac{C}{M} = \frac{fk_B}{2m} \quad (9.11)$$

Wärmekapazität C und spezifische Wärmekapazität c sind Materialparameter. Bei der Messung der Wärmekapazität eines Gases muss man unterscheiden zwischen Messungen bei konstantem Druck, also C_P oder c_P und konstantem Volumen, also C_V oder c_V . Flüssigkeiten und Feststoffe ändern ihr Volumen beim Erhitzen oder Abkühlen nur geringfügig und daher ist diese Unterscheidung nur für Gase von Bedeutung. Wenn man die Wärmekapazität eines Gases bei konstantem Druck misst, dann umfasst diese Messung die Arbeit, die das Gas bei seiner Expansion verrichtet, also $C_P > C_V$ bzw. $c_P > c_V$. Das einfachste Beispiel ist ein einatomiges Gas. Jedes Atom im Gas hat drei Freiheitsgrade und daher hat ein Gas aus N Atomen bei der Temperatur T den Energieinhalt

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T \quad (9.12)$$

Mit Gl. (9.10) ist die Wärmekapazität eines solchen einatomigen Gases gegeben durch

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{3}{2}Nk_B \quad (9.13)$$

oder in differentieller Form

$$dU = C_V \cdot dT \quad (9.14)$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass das Gasvolumen gleich bleibt und die gesamte in das monoatomare Gas eingebrachte Energie in eine Energieerhöhung der drei Freiheitsgrade seiner Gasatome fließt. Wenn jedoch ein Gasvolumen wie in Abb. 9.1 erhitzt wird, drückt das Gas gegen den Kolben. Das bedeutet, dass nicht die gesamte zugeführte Energie in die inneren Freiheitsgrade des monoatomaren Gases fließt, sondern dass ein Teil davon in die Arbeit des Gases fließt, um den Kolben anzutreiben. Verschiebt das Gas den Kolben, der eine Oberfläche A haben soll, um die Distanz dx so leistet es die Arbeit

$$dW = F dx = P A dx = P dV$$

Diese vom Gas geleistete Arbeit muss in die Energiebilanz von Gl. (9.13) einbezogen werden, die sich dann ändert zu

$$dU = C_V dT + P dV \quad (9.15)$$

Unter Verwendung des idealen Gasgesetzes von Gl. (9.1) bei konstantem Druck P können wir $P dV$ in Gl. (9.15) ersetzen mit

$$P dV = N k_B dT$$

Mit diesem Ausdruck können wir Gl. (9.15) umschreiben als

$$dU = C_V dT + N k_B dT \quad (9.16)$$

woraus folgt, dass die Wärmekapazität eines einatomigen Gases, gemessen bei konstantem Druck C_P , gegeben ist durch

$$C_P = \left(\frac{dU}{dT} \right)_P = C_V + N k_B \quad (9.17)$$

Aus Gl. (9.13) und Gl. (9.17) folgt dann für ein einatomiges Gas

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$$

Dieser Parameter γ ist als Wärmekapazitätsverhältnis, Verhältnis spezifischer Wärmen oder auch als adiabatischer Index bekannt. Verwendet man die allgemeine Form von Gl. (9.10) oder Gl. (9.11), dann wird aus Gl. (9.13) und Gl. (9.17)

$$C_V = \frac{f}{2} N k_B \quad \text{und} \quad C_P = C_V + N k_B$$

Damit wird das Wärmekapazitätsverhältnis γ

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V} = \frac{f+2}{f} \quad (9.18)$$

Wärmekapazitäten kann man messen, und so wurde schnell klar, dass die Vorhersagen des hier mithilfe von Gleichverteilungssatz und idealem Gasgesetz abgeleiteten einfachen Modells, erheblich von den Messungen abweichen. Für einige Moleküle stimmten experimentelle und abgeleitete Werte von γ überein, aber für andere nicht. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme war eine weitere große Herausforderung. Solange in einem Körper kein Phasenübergang stattfindet, ist die Wärmekapazität eine gleichmäßige und kontinuierliche Funktion, die bei niedrigen Temperaturen schnell abnimmt. Bei ausreichend niedrigen Temperaturen wird jede Substanz zu einem Festkörper und je leichter seine atomaren oder molekularen Bestandteile sind, desto schneller sinkt seine Wärmekapazität und geht bei $T = 0$ Kelvin auf Null. Wie sich herausstellte, sind nicht alle Freiheitsgrade gleich und Rotations- und Vibrationsfreiheitsgrade frieren mit sinkender Temperatur aus, bei leichten Elementen schneller als bei schwereren.

9.3 Adiabatische und isotherme Prozesse

Mit dem Parameter γ ist die allgemeinere Form von Gl. (9.12)

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} N k_B T \quad (9.19)$$

Diese gilt nicht nur für einatomige Gase, sondern auch für molekulare Gase. Für einatomige Gase haben wir eben $\gamma = 5/3$ abgeleitet und setzen wir das ein, erhalten wir gerade Gl. (9.12). Von großer praktischer Bedeutung sind Zustandsänderungen eines Gases durch adiabatische oder isotherme Prozesse. Bei isothermen Prozessen wird die Temperatur des Gases konstant gehalten, während bei adiabatischen Prozessen keine Wärmeübertragung stattfindet. Bei adiabatischen Prozessen fließt also die gesamte dem Gas zugeführte Energie in seine jeweiligen Freiheitsgrade und nirgendwo anders hin und umgekehrt. Wenn ein Gas adiabatisch komprimiert wird, fließt die gesamte Energie in die Erhöhung der inneren Energie des Gases, und wenn ein Gas adiabatisch expandiert wird, kommt die gesamte Energie dafür aus der inneren Energie des Gases. Nutzen wir die ideale Gasgleichung Gl. (9.1), um $N k_B T$ durch PV zu ersetzen, dann wird aus Gl. (9.19) die Gleichung für die Energieänderung eines Gases aufgrund von Kompression oder Expansion:

$$PV = (\gamma - 1)U \quad (9.20)$$

Wie oben erwähnt, ist γ eine Funktion der Temperatur. Obwohl wir im Einzelfall immer prüfen sollten, ob man die Temperaturabhängigkeit von γ vernachlässigen kann, ist dies in den engen Temperaturbereichen, die normalerweise bei adiabatischen Prozessen von Interesse sind, häufig der Fall. Unter der Annahme $\gamma = \text{const}$ ist daher eine differenzielle Änderung dU der inneren Energie des Gases gegeben durch

$$dU = \frac{d(PV)}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} (PdV + VdP) \quad (9.21)$$

Mit Gl. (9.2) kennen wir die beim Bewegen des Kolbens in Abb. 9.1 vom Gas bzw. Experimentator geleistete Arbeit, wenn das Gas sich ausdehnt oder wenn es komprimiert wird. Diese Arbeit verringert bzw. erhöht die innere Energie U des Gases und somit

$$dU = dW = -PdV \quad (9.22)$$

Aus diesen beiden Ausdrücken für dU folgt, dass

$$-PdV = \frac{1}{\gamma - 1} (PdV + VdP)$$

Wir können diese Gleichung in eine aussagekräftigere Form umschreiben und erhalten so

die Differentialgleichung

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (9.23)$$

Diese Differentialgleichung hat die einfache Lösung

$$\ln P + \gamma \ln V = \ln (PV^\gamma) = \ln C_1$$

wobei wir der Integrationskonstante die praktische Form $\ln C_1$ gegeben haben, sodass wir einfach die Exponentialfunktion beider Seiten nehmen können, und somit

$$PV^\gamma = C_1 \quad (9.24)$$

Gl. (9.24) sagt uns, dass bei einer adiabatischen Kompression oder Expansion, bei der die gesamte Energie in die innere Energie des Gases fließt oder aus dieser kommt, der Gasdruck P eines idealen Gases mit $V^{-\gamma}$ skaliert. Anstatt T konstant zu halten, können wir auch P oder V konstant zu halten. Ebenso wie für das Paar P, V kann man dann analoge Ausdrücke für die Paare T, V oder P, T ableiten, um einen adiabatischen Prozess zu beschreiben. Nimmt man das Differential von Gl. (9.19) und eliminiert den Druck P in Gl. (9.22) unter Verwendung des idealen Gasgesetzes, so erhält man

$$dU = \frac{1}{\gamma - 1} Nk_B dT = -P dV = \frac{Nk_B}{V} T dV$$

woraus wiederum eine Differentialgleichung folgt

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (9.25)$$

Eine einfache Integration liefert uns die Lösung

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln (TV^{\gamma-1}) = \ln C_2$$

und daher

$$TV^{\gamma-1} = C_2 \quad (9.26)$$

Zur Beschreibung eines adiabatischen Prozesses als Funktion des Variablenpaars P, T verwenden wir Gl. (9.23), um dV/V in Gl. (9.25) mit dP/P zu ersetzen, und erhalten

$$\frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{P} = 0 \quad (9.27)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$\ln T - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln P = \ln \left(TP^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = \ln C_3$$

und damit folgt

$$TP^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = C_3 \quad (9.28)$$

Zusammenfassend haben wir drei Zustandsgleichungen gefunden, die adiabatische Prozesse beschreiben, bei denen eine der Variablen P , V und T konstant gehalten wird:

$$PV^\gamma = C_1 \quad \text{mit } T = \text{konstant}$$

$$TV^{\gamma-1} = C_2 \quad \text{mit } P = \text{konstant}$$

$$TP^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = C_3 \quad \text{mit } V = \text{konstant}$$

Für ein ideales einatomiges Gas mit $\gamma = 5/3$ lauten diese Gleichungen

$$PV^{\frac{5}{3}} = C_1 , \quad TV^{\frac{2}{3}} = C_2 , \quad TP^{-\frac{2}{5}} = C_3$$

Adiabatische Prozesse sind eine Idealisierung. Es gibt nur wenige Prozesse in der Natur, bei denen keine Wärme ausgetauscht wird und Energie ausschließlich in die innere Energie eines Gases umgewandelt wird; indem an ihm Arbeit geleistet wird, wenn man es z.B. komprimiert; oder indem seine innere Energie ausschließlich in vom Gas verrichtete Arbeit umgewandelt wird, z.B. wenn es sich ausdehnt. Ein nahezu adiabatischer Prozess wäre die Kompression eines idealen Gases, die so schnell abläuft, dass auf der Zeitskala, in der diese stattfindet, einfach keine Zeit für eine nennenswerte Wärmeübertragung bleibt. Die Bedeutung adiabatischer Prozesse liegt darin, dass sie einen Grenzfall des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik darstellen, der besagt, dass die Gesamtenergie U eines Systems, wie z.B. eines idealen Gases, die Summe seiner Wärmeenergie Q und der an ihm geleisteten Arbeit W ist. Hier haben wir im Kontext des idealen Gases diese Gesamtenergie als seine innere Energie U bezeichnet, für die gelten muss

$$U = Q + W$$

Bei einem adiabatischen Prozess findet kein Wärmeaustausch statt, d.h. $\Delta Q = 0$, und daher $\Delta U = \Delta W$. Das bedeutet, dass die Änderung der inneren Energie ΔU nur vom Zustand des Systems vor und nach der Arbeitsverrichtung abhängen kann, nicht aber davon, wie diese verrichtet wurde, d.h., welcher Weg zur Erledigung der Arbeit eingeschlagen wurde. Aus diesem Grund sind adiabatische Prozesse wichtig, da sie den Wert der Zustandsvariablen P_0 , V_0 und T_0 vor dem Prozess direkt mit ihren Werten P_1 , V_1 und T_1 nach dem Prozess in Beziehung setzen. Wird beispielsweise in einem adiabatischen Prozess die Temperatur konstant gehalten, also $T_1 = T_2$, dann wissen wir dass

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma$$

Kommen wir nun von adiabatischen Prozessen zur Betrachtung isothermer Prozesse. Bei isothermen Prozessen findet zwar Wärmeaustausch statt, also $\Delta Q \neq 0$, aber er findet so statt, dass die Temperatur T des Systems konstant bleibt, also es gilt immer $T = T_0$. Damit wird aus dem idealen Gasgesetz

$$PV = Nk_B T_0 = \text{const} \quad (9.29)$$

woraus $\Delta(PV) = 0$ folgt. Mit Gl. (9.12) wissen wir, dass der Energieinhalt eines idealen Gases durch $U = fNk_B T$ gegeben ist. Da die Temperatur in isothermen Prozessen konstant ist, folgt mit $\Delta(PV) = 0$ das $\Delta U = 0$, d.h., solange die Anzahl der Freiheitsgrade f konstant bleibt. Sofern das ideale Gas also keinen Phasenübergang erfährt, bei dem sich f ändern könnte, ist ein isothermer Prozess dadurch gekennzeichnet, dass sich die Gesamtenergie des Systems nicht ändert. Dies bedeutet, dass jede vom System geleistete Arbeit die Wärmeenergie des Systems verringern und jede am System geleistete Arbeit W sie erhöhen muss. Daher gilt für isotherme Prozesse

$$\Delta U = 0 = \Delta Q + \Delta W \quad \Rightarrow \quad \Delta W = -\Delta Q$$

Mit Gl. (9.2) ist die am System oder von ihm geleistete Arbeit $dW = -PdV$. Kombinieren wir dies mit Gl. (9.29), so erhalten wir für einen isothermen Prozess

$$dW = -\frac{Nk_B T_0}{V} dV$$

Bezeichnet, wie in Abb. 9.3 gezeigt, V_i das Volumen vor der Kompression und V_f das Volumen nach Abschluss der isothermen Kompression, dann gilt für die geleistete Gesamtarbeit W_{if} und die damit verbundene Änderung der Systemwärme Q_{if}

$$W_{if} = -Nk_B T_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -Nk_B T_0 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Wenn das Gas komprimiert wird dann ist $V_f/V_i < 1$ und $Q_{if} = -W_{if}$ ist positiv, d.h., die zur Komprimierung des Gases geleistete Arbeit erhöht die Wärmeenergie des Gases. Das Gegenteil ist der Fall, wenn sich das Gas ausdehnt. In diesem Fall ist $V_f/V_i > 1$ und daher $Q_{if} = -W_{if}$ negativ, d.h., die für die Expansionsarbeit erforderliche Energie verringert die Wärmeenergie des Gases.

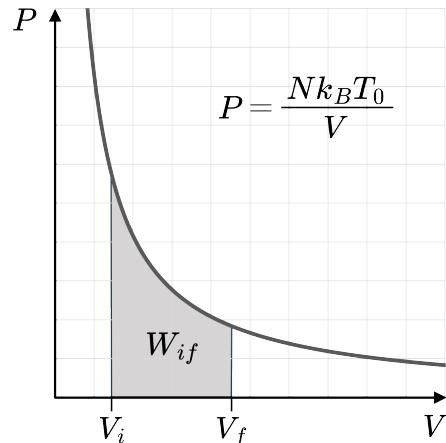


Abb. 9.3

9.3.1 Gaskompressibilität

Ändert sich die Dichte ρ eines Gases, so ändert sich im Allgemeinen auch der Gasdruck P und die Gastemperatur T . Da die Anzahl der Gasteilchen im sich ändernden Volumen konstant ist, können wir das Differential $dV(P, T)$ schreiben als

$$dV(P, T) = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT \quad (9.30)$$

wobei die Indizes P und T angeben, dass diese Variablen konstant gehalten werden. Das erste Glied in Gl. (9.30) ist proportional zur Größe

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (9.31)$$

der isothermen Kompressibilität, einem Maß für die Gaskompressibilität bei konstanter Temperatur. Die isotherme Kompressibilität ist positiv für einen Druckanstieg, der normalerweise mit einem schrumpfenden Volumen einhergeht, d.h., $\Delta V/V$ ist negativ. Das zweite Glied in Gl. (9.30) ist proportional zum Wärmeausdehnungskoeffizienten

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (9.32)$$

Bei konstantem Druck ist dieser positiv, wenn sich das Gasvolumen mit steigender Temperatur ausdehnt, und negativ, wenn es mit sinkender Temperatur schrumpft. Die Anzahl der Gasteilchen N konstant zu halten heißt, $\rho V = N$ konstant zu halten und damit

$$d(\rho V) = \rho dV + V d\rho = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

Mit dieser Beziehung sowie Gl. (9.31) und Gl. (9.32) kann Gl. (9.30) so umgeschrieben werden, dass man die relative Dichteänderung eines Gases als Funktion seiner isothermen Kompressibilität κ_T und seines thermischen Ausdehnungskoeffizienten β erhält:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa_T \cdot dP - \beta \cdot dT \quad (9.33)$$

Mit Gl. (9.1) folgt daraus für ein ideales Gas

$$\kappa_T = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (9.34)$$

und daher ist die relative Dichteänderung eines idealen Gases gegeben durch

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \quad (9.35)$$

Betrachten wir nun den isothermen und den adiabatischen Fall eines Prozesses, der zur Dichteänderung eines Gases führt. Im isothermen Fall erfolgt eine Dichteänderung so langsam, dass die Wärmeleitung zwischen dem Gasvolumen und der Umgebung die Gastemperatur T konstant hält. In diesem Fall wird aus Gl. (9.33)

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa_T \cdot dP \quad (9.36)$$

Im adiabatischen Fall erfolgt die Dichteänderung so schnell, dass kein Wärmefluss stattfinden kann und die Dichteänderung gegeben ist durch

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa_S \cdot dP \quad (9.37)$$

wobei

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (9.38)$$

die sogenannte adiabatische Kompressibilität ist. Der Index S bezieht sich auf die Entropie S des Systems. Wir werden das Konzept der Entropie im vierten Band dieses Physikkurses ausführlich besprechen. Hier genügt es zu wissen, dass $S = \text{const}$ bedeutet $\Delta Q = 0$ und die Konvention ist, mit dem Index S anzugeben, dass keine Wärme ausgetauscht wird. In einem adiabatischen Prozess fließt die gesamte Energie, wie in Gl. (9.14) und Gl. (9.22) ausgedrückt, in die Erhöhung oder Verringerung der inneren Energie des Gases und nirgendwo anders. Kombinieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$C_V dT = dU = -P dV \quad \Rightarrow \quad dT = -\frac{1}{C_V} P dV \quad (9.39)$$

Aus dem idealen Gasgesetz Gl. (9.1) folgt

$$d(PV) = P dV + V dP = N k_B dT$$

Verwendet man Gl. (9.39), um dT auf der rechten Seite dieser Gleichung zu ersetzen, erhält man nach umordnen

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_V}{C_V + N k_B} \frac{dP}{P}$$

Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit der Definition von κ_S aus Gl. (9.38)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = \kappa_S \cdot dP$$

zeigt, dass

$$\kappa_S = \frac{1}{P} \frac{C_V}{C_V + N k_B} \quad (9.40)$$

Mit Gl. (9.17) und Gl. (9.34) folgt dann, dass

$$\frac{\kappa_S}{\kappa_T} = \frac{C_V}{C_P} = \frac{1}{\gamma} \quad (9.41)$$

9.3.2 Die barometrische Höhenformel

Die barometrische Höhenformel beschreibt die Änderung des Luftdrucks mit dem Abstand z von der Erdoberfläche. Mit Gl. (8.3) erhält man dafür:

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\rho \cdot g = -m \cdot n \cdot g$$

Hier steht m für die Teilchenmasse und $n = N/V$ ist die Teilchendichte wobei n eine Funktion von z ist. Gl. (9.1), die ideale Gasgleichung liefert den Zusammenhang zwischen Teilchendichte n und Druck P

$$P \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$$

und somit

$$P = n \cdot k_B \cdot T \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{V}$$

Jetzt macht man die Annahme, dass $T = \text{konstant}$ bzw. eine Temperaturänderung um wenige Grade nicht viel ausmachen soll. Damit hat man

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\frac{m \cdot g}{k_B T} \cdot P(z)$$

und erhält nach Separation der Variablen

$$\frac{\partial P(z)}{P(z)} = -\frac{m \cdot g}{k_B T} \cdot \partial z$$

Eine einfache Integration dieser Gleichung von P_0 bei $z = 0$ nach $P(z)$ bei der Höhe z ergibt dann die barometrische Höhenformel

$$P(z) = P_0 \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g \cdot z}{k_B T}\right) \tag{9.42}$$

Die Annahme, dass die Temperatur in der Atmosphäre konstant ist, ist natürlich nur eine Näherung und schränkt die Gültigkeit der soeben abgeleiteten barometrischen Höhenformel ein. Für einen breiteren Ansatz verwendet man eine modifizierte Version von Gl. (9.24), die das Volumen V durch $V = \rho \cdot N$ ersetzt und N konstant hält. Dehnt sich also ein gegebenes Luftpolumen beim Aufsteigen in der Atmosphäre aus, so nimmt die Dichte ρ der Luft in diesem aufsteigenden Volumen ab. Mit Gl. (9.24) ist

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma$$

woraus mit $V_0 = \rho_0 N$ und $V = \rho N$ die sogenannte Adiabatengleichung für die Ausdehnung eines Luftpolumens in der Atmosphäre folgt

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (9.43)$$

Jetzt wendet man einen kleinen Trick an, indem man das Parameter Integral

$$\mathcal{P}(P(\mathbf{r})) = \int_{P_0}^{P(\mathbf{r})} \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (9.44)$$

einführt, wovon man dann die räumliche Ableitung mit Hilfe von

$$\frac{\partial \mathcal{P}(P(\mathbf{r}))}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial P(\mathbf{r})} \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial x_i} \quad (9.45)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial P} \int_{P_0}^P \frac{dP'}{\rho(P')} = \frac{1}{\rho} \quad (9.46)$$

berechnet, mit dem Ergebnis

$$\nabla \mathcal{P}(P(\mathbf{r})) = \frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}) \quad (9.47)$$

Der Grund für die Einführung des Parameterintegrals in Gl. (9.44) liegt darin, dass nun aus Gl. (9.47) mit Hilfe von Gl. (8.6) und Gl. (8.7) folgt

$$\nabla \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} = -\nabla(U) \quad (9.48)$$

Das Ergebnis ist also, dass die Summe des Parameterintegrals \mathcal{P} und der potenziellen Energie U eine Konstante ist

$$\mathcal{P} + U = const \quad (9.49)$$

Der Nutzen dieser Beziehung zeigt sich nach dem Einsetzen von Gl. (9.43) in Gl. (9.44) und anschließender Integration, woraus mit $U = gz$ folgt

$$\mathcal{P}(P(\mathbf{r})) = \frac{1}{\rho_0} \int_{P_0}^{P(\mathbf{r})} \left(\frac{P'}{P_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} dP' = \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = const - gz \quad (9.50)$$

Mit Hilfe des Parameterintegrals \mathcal{P} erhält man also eine modifizierte Version der hydrostatischen Druckgleichung Gl. (8.5). Zur Bestimmung der Konstanten nutzt man, dass für den Druck auf der Erdoberfläche, d.h. für $z = 0$, $P = P_0$ gilt und somit

$$const = \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} = u$$

Für den Luftdruck als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche erhält man damit

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{gz}{u} \quad (9.51)$$

Der Druck in Gl. (9.51) wird bei der kritischen Höhe $z = u/g = h_c$ Null. Für Luft bei Raumtemperatur ist $\gamma \approx 1.2$. Mit diesem Wert für γ ergibt Gl. (9.51) eine kritische Höhe h_c von etwa 48 km. Nach Gl. (9.51) und Gl. (9.43) gilt für Druck und Dichte als Funktion der Höhe z über der Erdoberfläche

$$\frac{P(z)}{P_0} = \left(1 - \frac{z}{h_c}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\rho(z)}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{h_c}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (9.52)$$

Mit diesen beiden Gleichungen und der idealen Gasgleichung erhält man für die Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe über der Erdoberfläche:

$$\frac{T(z)}{T_0} = 1 - \frac{z}{h_c} \quad \text{mit} \quad T_0 = \frac{m \cdot P_0}{k_B \cdot \rho_0} \quad (9.53)$$

9.4 Thermische Verteilungen

Die bisherige Diskussion der thermischen Bewegung könnte zum Schluss verleiten, die Atome oder Moleküle eines Gases hätten bei gegebener Temperatur alle die gleiche kinetische oder potenzielle Energie. Das stimmt aber nicht. Die mikroskopische Betrachtung des Gasdrucks verknüpft die Gastemperatur mit der mittleren kinetischen Energie der Atome bzw. Moleküle. Es wird Atome oder Molekülen geben, die höhere oder niedrigere kinetische Energien als die mittlere kinetische Energie besitzen. Die Frage ist nur, wie diese Verteilung der Gaspartikel als Funktion der kinetischen Energie aussieht, aus welcher die der Gastemperatur entsprechende mittlere kinetische Energie der Gaspartikel folgt. Bei der Diskussion der barometrischen Höhenformel haben wir festgestellt, dass die Temperatur der Atmosphäre mit der Höhe über der Erdoberfläche variiert. Dies liegt daran, dass die Dichte der Atmosphäre mit der Höhe abnimmt, was wiederum eine Funktion der mit der Höhe variierenden potenziellen Energie eines Atoms oder Moleküls ist.

9.4.1 Die Boltzmann-Verteilung

Sehen wir uns noch einmal die barometrische Höhenformel Gl. (9.42) an. Wenn wir bei konstanter Gastemperatur T , die Gasdichte $n = N/V$ anstelle des Gasdrucks P als Variable verwenden, können wir mit $P(z) = n(z)k_B T$ und $P(z=0) = P_0 = n_0 k_B T$ Gl. (9.42) umschreiben zu

$$n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g \cdot z}{k_B T}\right) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{U(z)}{k_B T}\right) \quad (9.54)$$

Die potenzielle Energie einer Masse m in einer Höhe z über der Erdoberfläche ist $U(z) = mgz$. Gl. (9.54) sagt uns, wie sich die Dichte der Atmosphäre für Gasteilchen der Masse m als Funktion der lokalen Stärke des Schwerefelds ändert. Das Verhältnis der Gasteilchendichten $n(z_1)$ und $n(z_2)$ in zwei Höhen z_1 und z_2 ist gegeben durch

$$\frac{n(z_1)}{n(z_2)} = \exp\left(-\frac{U(z_1) - U(z_2)}{k_B T}\right) \quad (9.55)$$

wobei $U(z_1)$ und $U(z_2)$ die jeweiligen potenziellen Energien von Gasteilchen mit der Masse m in den Höhen z_1 und z_2 sind. Bei konstanter Temperatur T ist Gl. (9.55) nur eine Funktion der potenziellen Energiedifferenz. Weiter oben in der Atmosphäre besitzen Atome und Moleküle eine höhere potenzielle Energie als Atome und Moleküle weiter unten, was bedeutet, dass es weniger davon gibt. Gl. (9.55) gilt nicht nur für die potenzielle Energie, sondern ganz allgemein für alle Energieformen. Wenn wir die Rotation oder Schwingung von Molekülen betrachten, werden wir weniger Moleküle in Rotations- oder Schwingungszuständen mit höherer Energie finden als in solchen mit niedrigerer Energie. Für ein Gas im thermischen Gleichgewicht, das eine Gesamtzahl von N Molekülen enthält, ist die Anzahl solcher Moleküle in einem Schwingungszustand N_{vib} mit der Energie E_{vib} oder einem Rotationszustand N_{rot} mit der Energie E_{rot}

$$N_{vib} = N \cdot \exp\left(-\frac{E_{vib}}{k_B T}\right) \quad \text{and} \quad N_{rot} = N \cdot \exp\left(-\frac{E_{rot}}{k_B T}\right) \quad (9.56)$$

Bei zweiatomigen Molekülen wie O_2 oder N_2 liegen die ersten angeregten Schwingungsniveaus ca. 200 bis 300 meV über dem Grundzustand. Bei Raumtemperatur ist $k_B T \approx 26$ meV und daher befindet sich die überwiegende Mehrheit der Moleküle ($> 99,99\%$) im Schwingungsgrundzustand. Da die Rotationsenergien zweiatomiger Moleküle nur wenige meV betragen, befindet sich eine viel größere Anzahl von Molekülen in angeregten Rotationsniveaus. Wir könnten auch Atome oder Moleküle in angeregten elektronischen Zuständen betrachten. Da aber die Abstände atomarer und molekularer Energieniveaus im eV-Bereich liegen, gibt es bei Raumtemperatur in Gasen im thermischen Gleichgewicht praktisch keine elektronisch angeregten Atome oder Moleküle.

Der Faktor $\exp(-E/k_B T)$ in Gl. (9.56) gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer gegebenen Temperatur ein Molekül in einem bestimmten Schwingungs- oder Rotationsenergieniveau zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül auf einem Energieniveau E_1 bzw. E_2 zu finden, hängt nur von der Energiedifferenz $E_1 - E_2$ ab. Ebenso können wir Gl. (9.55) als Wahrscheinlichkeit interpretieren, eine bestimmte Anzahl Atome oder Moleküle in der

Höhe z_1 bzw. in der Höhe z_2 zu finden, die nur von der Differenz der potenziellen Energie $U(z_1) - U(z_2)$ abhängt. Um zu zeigen, dass dies alles kein Zufall ist, halten wir fest, dass die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$, ein Teilchen auf einem Energieniveau E_1 zu finden, verglichen mit der Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$ es auf einem Energieniveau $E_2 > E_1$ zu finden, nur von der Energiedifferenz dieser Zustände abhängt. Mathematisch ausgedrückt heißt dies, dass

$$\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = f(E_2 - E_1)$$

Wenn wir nun ein Energieniveau E_i zwischen den Energieniveaus E_1 und E_2 einfügen, können wir diese Gleichung schreiben als

$$\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = \frac{P(E_2)}{P(E_i)} \cdot \frac{P(E_i)}{P(E_1)}$$

Daher muss die Funktion $f(E_2 - E_1)$ die folgende Funktionsgleichung erfüllen

$$f(E_2 - E_1) = f(E_2 - E_i)f(E_i - E_1)$$

die wir mit $A = E_2 - E_i$ und $B = E_i - E_1$ umschreiben können zu

$$f(A + B) = f(A)f(B)$$

Dies ist jedoch exakt die Funktionsgleichung, welche die Exponentialfunktion definiert. Und da die Exponentialfunktion die einzige Funktion ist, die diese Gleichung erfüllt, muss $f = \exp$ gelten. Weil das Argument der Exponentialfunktion dimensionslos sein muss, müssen wir die Energieniveaus mit einem Faktor β multiplizieren, wobei βE dann dimensionslos wird. Damit haben wir

$$\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = f(\beta E_2 - \beta E_1) = \frac{e^{\beta E_2}}{e^{\beta E_1}} \quad (9.57)$$

Um β zu bestimmen, muss man nur Gl. (9.57) mit Gl. (9.54), Gl. (9.55) oder Gl. (9.56) vergleichen, um herauszufinden, dass $\beta = -1/k_B T$. Ist N die Gesamtzahl der Teilchen in einem Gas, dann nimmt die Wahrscheinlichkeit, einen Bruchteil $N(E)/N$ dieser Teilchen mit einer Energie E zu finden, exponentiell ab, d.h.

$$N(E) = N e^{-E/k_B T} \quad (9.58)$$

Verteilungen dieser Art heißen Boltzmann-Verteilungen. Sie ergeben sich, wie gerade oben dargestellt, aus rein statistischen Wahrscheinlichkeitsüberlegungen. Die thermische Bewegung und damit die Physik der Wärme ist rein statistischer Natur und daher ist die Physik der Wärme statistische Physik, ein Gebiet der Physik, das besser unter der Bezeichnung statistische Thermodynamik oder statistische Mechanik bekannt ist. In diese

Teilgebiete der theoretischen Physik können wir hier nicht weiter vordringen, aber wir müssen uns noch zwei Fragen stellen. Erstens muss es immer eine physikalische Beschreibung solcher Phänomene geben, die sich aus statistischen Überlegungen ergeben. Wie sieht diese also hier aus? Zweitens: Welche Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich aus solchen statistischen Überlegungen?

Um etwas mehr über die Physik zu erfahren, die der Boltzmann-Verteilung zugrunde liegt, betrachten wir noch einmal die barometrische Höhenformel. Die Dichteverteilung als Funktion der Höhe in Gl. (9.54) bei einer gegebenen Temperatur T ist das Ergebnis eines Kräftegleichgewichts. Da ist zum einen die Schwerkraft, die dazu führt, dass Gaspartikel auf die Erdoberfläche fallen. Andererseits gibt es ein Ungleichgewicht in der Partikeldichte und damit Partikeldiffusion, um dieses Dichteungleichgewicht zu korrigieren. Betrachten wir zwei durch eine Membran getrennte Volumen, wo auf einer Seite die Gasdichte höher ist als auf der anderen. Wir alle wissen, wird die Membran entfernt und die Gaspartikel können sich frei zwischen den Volumen bewegen, dann ist die Teilchendichte in beiden Volumen schnell gleich. Das Gleiche geschieht in einer Luftsäule, mit dem Unterschied, dass dem Diffusionsprozess, der die Partikeldichte in der Luftsäule ausgleicht, die Schwerkraft entgegenwirkt, welche die Partikel dazu zwingt, zur Erdoberfläche zu sinken. In Abschnitt 7.1.3 haben wir gesehen, dass für niedrige Sinkgeschwindigkeiten eines Teilchens in einem viskosen Fluid das Stokes-Gesetz Gl. (7.10) gilt:

$$F_R^\eta = 6\pi\eta \cdot r_0 \cdot v$$

Hier ist F_R^η die Reibungskraft, η die Viskosität des Fluids und v die Geschwindigkeit, mit der ein Teilchen mit Radius r_0 sich im viskosen Fluid bewegt. Allgemeiner kann man die Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, das sich in einem viskosen Fluid wie der Atmosphäre bewegt mit seiner Geschwindigkeit verknüpfen durch

$$F_R^\eta = \frac{1}{\mu} \cdot v \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{1}{6\pi\eta \cdot r_0} \tag{9.59}$$

die sogenannte Beweglichkeit eines Gasteilchens ist. Wenn wir v mit der Sinkgeschwindigkeit v_z eines Luftmoleküls in der Atmosphäre gleichsetzen auf das die Schwerkraft F_G wirkt, dann ist diese Geschwindigkeit gegeben durch $F_G + F_R^\eta = 0$, also

$$m \cdot g = -\mu^{-1} \cdot v_z \cdot \hat{z} \quad \text{bzw.} \quad v_z = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \hat{z}$$

Ist $n(z)$ die Teilchendichte, dann erzeugt die Schwerkraft einen Strom sinkender Gasteilchen der gegeben ist durch

$$J_S = n(z) \cdot v_z = -n(z) \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \hat{z} \tag{9.60}$$

Diesem sinkenden Teilchenstrom steht ein Diffusionsstrom von Teilchen J_D gegenüber, der durch den Gradienten der Teilchendichte in z -Richtung angetrieben wird

$$J_D = -D \nabla n(z) \cdot \hat{z} = -D \frac{dn(z)}{dz} \quad (9.61)$$

wobei D der sogenannte Diffusionskoeffizient ist. Das Minuszeichen in Gl. (9.61) stellt sicher, dass die Diffusion in Richtung geringerer Dichte erfolgt, d.h., J_D ist positiv, wenn $dn(z)/dz$ negativ ist. Im thermischen Gleichgewicht müssen sich der sinkende Teilchenstrom J_S und der Diffusionsstrom der Teilchen J_D aufheben, also

$$J_S + J_D = 0$$

Setzt man nun die Ausdrücke für J_S und J_D aus Gl. (9.60) und Gl. (9.61) ein, dann wird aus dieser Bedingung

$$-n(z) \cdot \mu \cdot m \cdot g - D \frac{dn(z)}{dz} = 0$$

und man erhält nach Separation der Variablen

$$\frac{dn(z)}{n(z)} = -\frac{\mu \cdot m \cdot g}{D} dz$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot z}{D}\right) \quad (9.62)$$

Ein Vergleich mit Gl. (9.54) zeigt, dass Gl. (9.62) genau die gleiche Form hat wie die barometrische Höhenformel und vorausgesetzt, dass

$$D = \mu k_B T = \frac{k_B T}{6\pi\eta \cdot r_0} \quad (9.63)$$

dann ist das auch die barometrische Höhenformel. Gl. (9.63), die sogenannte Stokes-Einstein-Beziehung, zeigt, wie der Diffusionskoeffizient eines Teilchens mit Radius r_0 , das sich in einem Fluid mit der Viskosität η bewegt, von der Fluidtemperatur abhängt.

In diesem Abschnitt haben wir die statistische Natur der Boltzmann-Verteilung untersucht und gesehen, wie aus rein physikalischer Sicht die Boltzmann-Verteilung im Fall der barometrischen Höhenformel entsteht. Dabei haben wir in Gl. (9.59) die Beweglichkeit μ eines Teilchens und dann den Diffusionskoeffizienten D als Proportionalitätsfaktor in der Diffusionsgleichung Gl. (9.61) eingeführt und schließlich die Stokes-Einstein-Beziehung Gl. (9.63) abgeleitet.

9.4.2 Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Zum mikroskopischen Verständnis des Gasdruck eines idealen Gases mussten wir das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle$ bestimmen. Mit dieser Größe konnten wir dann mit Gl. (9.6) eine Beziehung zwischen dem Druck eines idealen Gases und der mittleren kinetischen Energie eines Gasteilchens ableiten. Die Frage ist nun: Welche Geschwindigkeitsverteilung bewirkt, dass Gasteilchen eines idealen Gases im Gleichgewicht eine solche mittlere quadratische Geschwindigkeit besitzen? Während sich Gasteilchen im Durchschnitt mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ bewegen, haben viele eine höhere und viele eine niedrigere Geschwindigkeit. Zudem wissen wir, dass $\langle v_i \rangle = 0$ mit $i = 1, 2, 3$, was bedeutet, dass die Geschwindigkeitsverteilung isotrop ist. Wählen wir, wie in Abb. 9.4 skizziert, einen absoluten Geschwindigkeitswert v aus dieser Verteilung aus, so bilden alle Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v} mit gleichem Betrag eine Kugel von Radius $|\mathbf{v}|$, wobei die Dichte der Geschwindigkeitsvektoren, die diese Kugel durchdringen, in allen Richtungen gleich ist. Daher muss die Gesamtzahl der Gasteilchen mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ proportional zum Volumen der Kugelschale zwischen v und $v + dv$ sein, also zu $4\pi v^2 dv$. Im idealen Gas haben Gasteilchen nur kinetische aber keine potenzielle Energie. Daher ist die Energie E in der Boltzmann-Verteilung Gl. (9.58) nur die kinetische Energie eines Gasteilchens. Damit können wir für die Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ schreiben

$$dN(v) = N \cdot C \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = N \cdot f_{MB}(v) dv \quad (9.64)$$

wobei die Proportionalitätskonstante C aus der Bedingung folgt, dass die Summe über alle Geschwindigkeiten gleich der Anzahl der Teilchen N im Gas sein muss, also

$$\int_{v=0}^{v=\infty} f_{MB}(v) dv = 4\pi C \int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = 1 \quad (9.65)$$

Dieses bestimmte Integral ist ein Standardintegral, das man in Integraltabellen nachschlagen kann, wo man für $a > 0$ und $n > -1$ findet

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot \sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{k+0.5}} & \text{für } n = 2k \\ \frac{k!}{a^{k+1}} & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (*)$$

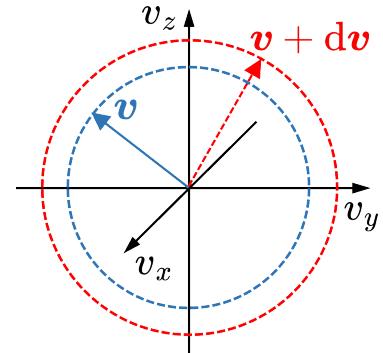


Abb. 9.4

Durch Einsetzen für $n = 2$ und $a = m/2k_B T$ kann man dann den Wert der Konstante C bestimmen zu

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$$

Setzt man dies in Gl. (9.64) ein, so erhält man die Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion $f_{MB}(v)$ für die Geschwindigkeiten von Gasteilchen in einem idealen Gas:

$$f_{MB}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (9.66)$$

Abb. 9.5 zeigt die Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion $f_{MB}(v)$ für ein Gas aus Stickstoffmolekülen (die Atmosphäre besteht zu 70% aus Stickstoff) für drei Temperaturen: 100 K, 300 K (Raumtemperatur) und 1000 K. Wie man durch die Lösung des Optimierungsproblems $df(v)/dv = 0$ leicht prüfen kann, haben diese Kurven ihre Maximalwerte, d.h., den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitswert bei einer gegebenen Temperatur, bei

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

Bei Raumtemperatur ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit für ein Stickstoffmolekül 422 m s^{-1} , was einer kinetischen Energie von 26 meV entspricht. $f_{MB}(v)$ ist nicht symmetrisch in Bezug auf die wahrscheinlichste Geschwindigkeit, es gibt mehr Moleküle mit höherer und weniger mit niedrigerer Geschwindigkeit als v_{max} . Mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ und mittleres Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle$ der Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgen aus der Auswertung der Integrale

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv \quad \text{und} \quad \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

Mithilfe von (*) berechnet man für diese

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad \text{und} \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$$

Die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ist immer um einen Faktor $2/\sqrt{\pi}$ größer als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_{max} . Mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle$ erhält man für die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens

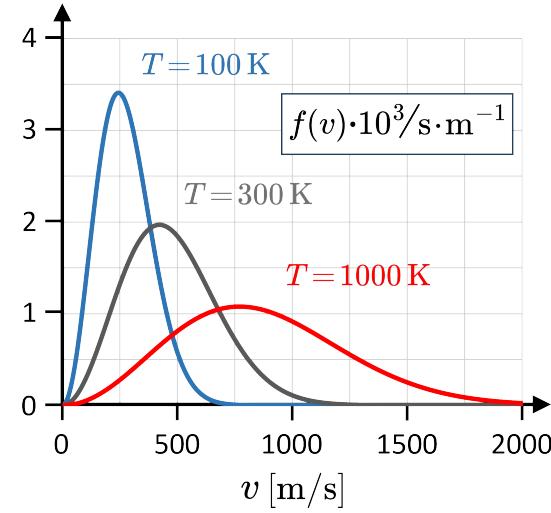


Abb. 9.5

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}k_B T$$

was genau das bereits in Gl. (9.7) abgeleitet Ergebnis ist. Die Asymmetrie von $f_{MB}(v)$ nimmt mit steigender Temperatur zu, was zu einem immer längeren Schwanz hochenergetischer Moleküle führt. Die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Stickstoffmoleküls beträgt bei Raumtemperatur etwa 476 m s^{-1} oder ca. 1714 km h^{-1} und etliche Stickstoffmoleküle rasen mit Geschwindigkeiten von über 1000 m s^{-1} oder ca. 3600 km h^{-1} herum. Aber selbst die Energie solch schneller Gasteilchen reicht nicht aus, Moleküle elektronisch anzuregen oder sie beim Aufprall gar zu ionisieren. Die kinetische Energie eines 1000 m s^{-1} schnellen Stickstoffmoleküls ist 145 meV . Das ist weniger als zur Schwingungsanregung der meisten zweiatomigen Moleküle erforderlich ist. Elektronische Anregungsenergien von Molekülen liegen im Bereich mehrerer eV, was Geschwindigkeiten von mehreren tausend Metern pro Sekunde entspricht. Wie viele Stickstoffmoleküle haben bei Raumtemperatur solche Geschwindigkeiten? Um diese Frage zu beantworten, schreiben wir zunächst $f_{MB}(v)dv$ mit $dE = mv dv$ als Funktion der kinetischen Energie um. Aus

$$f_{MB}(v)dv \rightarrow f_{MB}(E) \frac{dE}{\sqrt{2mE}} \quad \text{mit} \quad dv = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$$

folgt

$$f_{MB}(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (k_B T)^{-3/2} \cdot E^{1/2} \cdot e^{-E/k_B T}$$

Abb. 9.6 zeigt $f_{MB}(E)$ für die gleichen drei Temperaturen wie Abb. 9.5 für $f_{MB}(v)$. Offensichtlich ist $f_{MB}(E)$ eine schärfere Verteilung als $f_{MB}(v)$ und $f_{MB}(E)$ hat die gleiche Asymmetrie wie $f_{MB}(v)$, die bei höheren Temperaturen stärker ausgeprägt ist. Wegen

$$\int_0^\infty f_{MB}(v)dv = 1$$

folgt

$$\int_0^\infty f_{MB}(E)dE = 1$$

und deshalb wissen wir sofort, dass

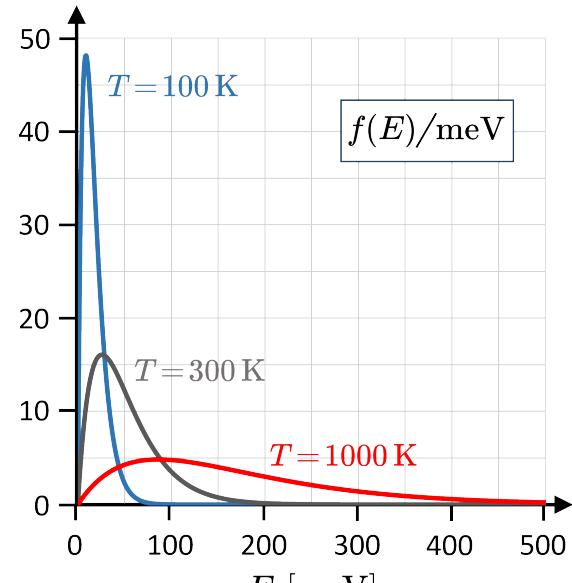


Abb. 9.6

$$\int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/k_B T} dE = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (k_B T)^{3/2}$$

Um jedoch die Anzahl aller Moleküle mit Energien größer als einer bestimmten Mindestenergie E_0 zu erhalten, müssen wir das Integral

$$\int_{E_0}^{\infty} f_{MB}(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (k_B T)^{-3/2} \int_{E_0}^{\infty} E^{1/2} \cdot e^{-E/k_B T} dE \quad (9.67)$$

auswerten. Das erfordert etwas mehr Rechnen, aber man kann durch wiederholte partielle Integration zeigen dass

$$\int E^{1/2} \cdot e^{-E/k_B T} dE = - \left[\sqrt{E} + \frac{k_B T}{2\sqrt{E}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \left(\frac{k_B T}{E} \right)^n \right] k_B T e^{-E/k_B T}$$

Daher wird das bestimmte Integral in Gl. (9.67) zu

$$\int_{E_0}^{\infty} f_{MB}(E) dE = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_0}{k_B T}} + \frac{1}{\pi} \frac{k_B T}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \left(\frac{k_B T}{E_0} \right)^n \right] e^{-E_0/k_B T}$$

Uns interessiert nur der hochenergetische Schwanz von $f_{MB}(E)$ und für $E_0 \gg k_B T$ geht der zweite Term in diesem Ausdruck schnell gegen Null. Bei Raumtemperatur ist $k_B T = 26 \text{ meV}$, also $1 \text{ eV}/40$. Da wir an $E_0 > 1 \text{ eV}$ interessiert sind, ist die Bedingung $E_0 \gg k_B T$ sicher erfüllt und die Fläche unter der Kurve $f_{MB}(E)$ im hochenergetischen Schwanz ist in guter Näherung gegeben durch

$$\int_{E_0}^{\infty} f_{MB}(E) dE \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_0}{k_B T}} e^{-E_0/k_B T}$$

Setzt man $E_0 = 1 \text{ eV}$ für $f_{MB}(E)$ bei 300 K ein, so findet man, dass nur der Bruchteil

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{40} e^{-40} = 3 \cdot 10^{-17}$$

von Gasteilchen eine Energie von $E_0 \geq 1 \text{ eV}$ hat. Nehmen wir einen Kubikmeter Gasteilchen bei Umgebungsdruck, also $P = 1 \text{ atm}$, dann enthält dieses Volumen etwa $2.7 \cdot 10^{25}$ Moleküle. Davon besitzen nur $9 \cdot 10^7$ eine kinetische Energie $E_{kin} \geq 1 \text{ eV}$. Oder anders ausgedrückt: Im Durchschnitt enthält jeder Kubikmillimeter in diesem Volumen in etwa 11 solch schneller Gasteilchen.

9.5 Die mittlere freie Weglänge

Dass sich doch so viele Gasteilchen mit offensichtlich hohen Geschwindigkeiten bewegen, wirft eine offensichtliche Frage auf: Warum dauert es so lange, bis der Geruch beispielsweise von gutem Essen von einem Raum in einen anderen gelangt? Wenn sich Gasteilchen so schnell bewegen, müssten wir dann nicht überall im Haus sofort riechen, wenn etwas auf dem Herd anbrennt? Ja, das sollten wir, aber nur dann, wenn Gasteilchen weite Strecken zurückzulegen können ohne auf anderen Gasteilchen zu stoßen. Stöße zwischen Gasteilchen sind aber häufig und anstatt dass Gasteilchen auf einer direkter Luftlinie von der Geruchsquelle zu unserer Nase gelangen, erreichen sie unsere Geruchsorgane eher so wie angeheiterte Seeleute stolpernd ihren Weg finden. Kollidierten Gasteilchen nicht so häufig miteinander, würde es sehr lange dauern bis nach einer Änderung des Gasdruck oder Gasvolumen bzw. einer Erhitzung des Gases sich im Gaskörper wieder ein thermisches Gleichgewicht einstellt. Erhöhen wir die Wärmeenergie eines Gases, indem wir es komprimieren, oder verringern sie, indem wir es ausdehnen, hängt die Geschwindigkeit, mit der sich ein neues thermisches Gleichgewicht einstellt, davon ab, wie häufig die Atome oder Moleküle eines Gases kollidieren. Die entsprechende Stoßfrequenz kann man entweder über die mittlere Zeitspanne oder über die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Atom-Atom- oder Molekül-Molekül Stößen definieren. Diese Stoßfrequenz hängt natürlich von der Dichte des Gases ab. Bevor wir uns der mittleren freien Weglänge zuwenden, ist es gut, sich ein Bild von der Größenordnung des tatsächlichen mittleren Abstands \bar{d} zwischen Atomen und Molekülen zu machen. Natürlich sind Gasteilchen immer in Bewegung, aber um eine mittlere Entfernung zu bestimmen, können wir sie uns für einen Augenblick eingefroren vorstellen. Gl. (9.1) sagt uns, dass bei gleicher Temperatur und gleichem Druck 1 mol eines beliebigen gegebenen Gases das gleiche Volumen einnimmt, d.h. sein Molvolumen V_m , und das enthält genau N_A Atome oder Moleküle:

$$V_m = N_A \frac{k_B T}{P}$$

Unter Standardbedingungen, also bei 0 °C und auf Meereshöhe, wo der Druck eine Atmosphäre oder 1 atm beträgt (in SI-Einheiten: 273.15 K und $1.01325 \cdot 10^5$ Pa). Unter diesen Bedingungen ist das Molvolumen V_m jedes Gases 22.4 Liter. Daraus folgt für die Dichte n des Gases

$$n = N_A / 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Betrachten wir nun ein Volumen von 1 m³, so enthält dieses $2.69 \cdot 10^{25}$ Atome oder Moleküle. Stellen wir uns vor, dass jedes dieser Atome oder Moleküle in der Mitte eines

kleinen Würfels sitzt, dann ist das Volumen V_a jedes dieser Atom- oder Molekülwürfel gerade $1 \text{ m}^3 / 2.69 \cdot 10^{25}$ oder $3.72 \cdot 10^4 \text{ Å}^3$. Daher ist der mittlere Abstand \bar{d} zwischen benachbarten Atomen oder Molekülen in einem Gas bei Standardbedingungen

$$\bar{d} = V_a^{1/3} = n^{-1/3} = 33 \text{ Å} \quad (9.68)$$

Zum Vergleich: Die Bindungslänge zwischen zwei Wasserstoffatomen ist 0.74 Å und beim Sauerstoffmolekül ist sie 1.21 Å . Der mittlere Abstand zweier Atome oder Moleküle in einem Gas gibt uns eine Untergrenze für die mittlere freie Weglänge. Warum? Nun, ist der nächste Atom- oder Molekünachbar im Mittel eine Strecke \bar{d} entfernt, so ist es für ein Atom oder Molekül im Mittel nicht möglich, mit einem anderen Atom oder Molekül zusammenzustoßen, bevor es die Entfernung \bar{d} zurückgelegt hat. Das heißt aber nicht, dass gleich nach der Strecke \bar{d} unbedingt eine Kollision stattfinden muss; die mittlere freie Weglänge kann deutlich länger sein als \bar{d} . Wie lang die mittlere freie Weglänge sein wird, ist eine Frage der Wahrscheinlichkeit. In Abschnitt 5.3.1 haben wir den Wirkungsquerschnitt σ als Maß für die Wahrscheinlichkeit eingeführt, dass zwei Teilchen wechselwirken. Im einfachsten Fall ist das der geometrische Wirkungsquerschnitt, also z.B. die Größe eines Atoms, in der Regel ist es jedoch komplizierter. Das beginnt z.B. mit der Frage, wie groß ein Atom oder Molekül wirklich ist.

Das kann man auch alles berechnen, aber eben nur mit Quantenmechanik. Da jedoch, wie in Abschnitt 5.3.1 besprochen, Wirkungsquerschnitte gemessen werden können, verwenden wir einfach diese gemessenen Werte zur Berechnung innerhalb der Newtonschen Mechanik. Dazu betrachten wir einen Strom $N(x)$ von Gasteilchen, der nur eine Geschwindigkeitskomponente in der x -Richtung haben soll und den wir, wie in Abb. 9.7 skizziert, durch ein Volumen gefüllt mit gleichen Gasteilchen schicken. Nach dem Zurücklegen einer Strecke dx wird eine bestimmte Anzahl der einfallenden Gasteilchen Stöße mit Gasteilchen im Volumen $dV = Adx$ erlitten haben. Dabei ist A der Querschnitt des Gasstroms in der Ebene senkrecht zur x -Richtung. Projizieren wir alle Gasteilchen in diesem Volumen auf die Eintrittsfläche desselben, dann wird die Summe ihrer jeweiligen geometrischen Wirkungsquerschnitte einen bestimmten Bereich der Fläche A bedecken. Wenn sich der Streuquerschnitt für solche Kollisionen vom geometrischen Wirkungsquerschnitt unterscheiden sollte, verwenden wir dann eben diesen Wert für σ . Ist n die Dichte der Gasteilchen im Volumen dV , dann enthält dieses Volumen $n \cdot Adx$ Gasteilchen, die alle den

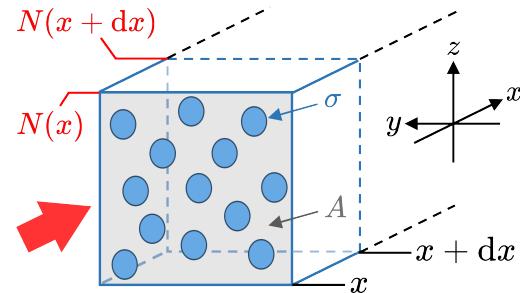


Abb. 9.7

Wirkungsquerschnitt σ haben. Die Summe all dieser projezierten Wirkungsquerschnitte deckt also eine Fläche $n \cdot A \sigma dx$ ab. Das Verhältnis dieser Fläche zur Fläche A , d.h.

$$\frac{n \cdot A \sigma dx}{A} = n \cdot \sigma dx$$

ist dann ein Maß für den Anteil der Gasteilchen im Teilchenstrom $N(x)$, die im Volumen dV einen Stoß erleiden und nach dem Durchqueren der Strecke dx im Teilchenstrom fehlen. Deshalb können wir schreiben

$$N(x + dx) - N(x) = dN = -N(x)n \cdot \sigma dx$$

und nach Trennung der Variablen

$$\frac{dN}{N} = -n \cdot \sigma dx$$

Diese Differentialgleichung löst man durch einfache Integration mit dem Ergebnis

$$N(x) = N(0)e^{-n\sigma x} \quad (9.69)$$

Mit Gl. (9.69) definiert man nun als mittlere freie Weglänge die Strecke, nach der die Anzahl der Gasteilchen um den Faktor $1/e$ abgenommen hat, was bedeutet, dass die mittlere freie Weglänge l die Gleichung $n \cdot \sigma \cdot l = 1$ erfüllt und damit

$$l = \frac{1}{n \cdot \sigma} \quad (9.70)$$

Mit Gl. (9.68) und Gl. (9.70) erhalten wir für das Verhältnis des durchschnittlichen Abstands \bar{d} zwischen zwei Gasteilchen zur mittleren freien Weglänge l von Gasteilchen

$$\frac{\bar{d}}{l} = n^{-1/3} \cdot n \cdot \sigma = n^{2/3} \cdot \sigma$$

Da l größer oder gleich \bar{d} sein muss, gilt für σ

$$\sigma \leq n^{-2/3}$$

Für unser Beispiel aus Abb. 9.7 heißt das, σ kann nicht größer sein als die Fläche $n^{-2/3}$. Betrachten wir wieder ein Gas unter Standardbedingungen, für das wir \bar{d} in Gl. (9.68) berechnet haben. Für ein solches Gas können wir jetzt sagen, dass

$$\sigma \leq 1.11 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2 = 1.11 \cdot 10^3 \text{ Å}^2$$

gelten muss. Diese Obergrenze für σ ist viel größer als jeder geometrische Wirkungsquerschnitt von Atomen oder Molekülen. Benutzen wir als Modell harte Kugeln, so ist der geometrische Wirkungsquerschnitt eines Atoms oder Moleküls πd^2 , wobei d der äquivalente Kugeldurchmesser ist, der zum gemessenen Streuquerschnitt führt. Für Sauerstoff oder Stickstoff liegen solche Durchmesser bei etwa 3 Å, was einem Wirkungsquerschnitt von

$\sigma \approx 28 \text{ \AA}^2$ entspricht. Mit dem idealen Gasgesetzes Gl. (9.1) wissen wir, dass bei Raumtemperatur und Umgebungsdruck ($P = 1 \text{ atm}$) die Dichte der Luft $n = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ beträgt. Daher ist die mittlere freie Weglänge eines Sauerstoff- oder Stickstoffmoleküls in Luft bei Standardbedingungen

$$l = \frac{1}{2.69 \cdot 10^{25} \cdot 28 \cdot 10^{-20}} \text{ m} = 1.32 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 132 \text{ nm}$$

Anstatt zu fragen, welche Strecke ein Gasteilchen im Mittel zurücklegt, bevor es mit einem anderen kollidiert, kann man auch fragen wie lange es im Mittel dauert, bis ein Gasteilchen mit einem anderen kollidiert. Offensichtlich wird das Ergebnis aussehen wie

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau} \quad (9.71)$$

wobei $N(0)$ jetzt die Anzahl der Gasteilchen im Teilchenstrom bei $t = 0$ ist, und τ die Zeit ist, nach der die Anzahl der Teilchen ohne Kollision auf $N(\tau) = N(0)/e$ gesunken ist. Die mittlere Zeit zwischen Stößen τ und die mittlere freie Weglänge l sind durch $l = v \cdot \tau$ verknüpft, wobei v die Geschwindigkeit eines Gasteilchens ist. Zur Abschätzung kann man für v die mittlere Geschwindigkeit oder die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Maxwell-Boltzmann-Verteilung Gl. (9.66) einsetzen. Hier verwenden wir die mittlere Geschwindigkeit und erhalten damit für die mittlere Zeit τ zwischen Stößen

$$\tau \approx l \cdot \sqrt{\frac{\pi m}{8k_B T}}$$

Für das Beispiel von Luft bei Standardbedingungen, wo wir gerade berechnet haben, dass $l = 132 \text{ nm}$, ergibt sich für τ bei Stickstoffmolekülen mit der Masse $m = 28 \text{ amu}$

$$\tau \approx 132 \cdot 10^{-9} \text{ m} \sqrt{\frac{\pi \cdot 28 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}} = 2.8 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 0.3 \text{ ns}$$

Die Größenordnung für die mittlere Zeit zwischen Stößen τ liegt also bei einem Bruchteil einer Nanosekunde. Nach nur einem Bruchteil einer Nanosekunde hat sich die Anzahl aller Moleküle ohne Stoßprozess auf $1/e$ reduziert.

9.6 Brownsche Bewegung

Die Atomtheorie ist alt und geht auf den griechischen Philosophen Demokrit zurück. Der erste Beweis, dass Atome existieren, auch wenn dies damals nicht erkannt wurde, kam vom Botaniker Robert Brown, der 1827 unter dem Mikroskop beobachtete, wie im Wasser schwebende Pollen von einer unsichtbaren Kraft scheinbar zufällig bewegt wurden. Erst mit der Entwicklung der kinetischen Gastheorie, deren Grundlagen in diesem Kapitel vorgestellt wurden, begannen Wissenschaftler, die Brownsche Bewegung auf Stöße mit

Atomen und Molekülen zurückzuführen, die solche mikroskopischen Teilchen umgeben. Eine quantitative Theorie der Brownschen Bewegung wurde aber erst 1905 von Einstein und unabhängig davon 1906 von Marian Smoluchowski (1872 – 1917) vorgeschlagen. Die beobachtete Zufallsbewegung eines in einem Gas oder einer Flüssigkeit schwebenden mikroskopischen Teilchens ist natürlich nicht auf einen einzelnen Stoß zurückzuführen. Jede Einzelbewegung ist das Ergebnis der Mittelung über sehr viele Stöße zwischen dem mikroskopischen Teilchen und Fluidteilchen. Diese Stoß sind völlig zufällig und daher sind die Bewegungen des mikroskopischen Teilchens in den drei Koordinatenrichtungen unkorreliert und können separat behandelt werden. Um diese Zufallsbewegung, sagen wir in der x -Richtung, mit der Temperatur des jeweiligen Fluids, sei es Flüssigkeit oder Gas, in Beziehung zu setzen, gehen wir davon aus, dass wie für Gasteilchen in Abschnitt 9.1 diskutiert, der Gleichverteilungssatz gilt. Das bedeutet, dass für das mikroskopische Teilchen der Masse m

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (9.72a)$$

beziehungsweise

$$m\overline{\dot{x}^2} = k_B T \quad \text{oder} \quad m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = k_B T \quad (9.72b)$$

gelten soll. In dieser Gleichung ist der Mittelwert in Gl. (9.72b) anders geschrieben als in Gl. (9.72a) weil es sich in Gl. (9.72b) um einen anderen Mittelwert handelt als den in Gl. (9.72a), welchen wir bereits in Abschnitt 9.1 verwendeten. In Abschnitt 9.1 haben wir den Mittelwert über viele Gasteilchen verwendet, das sogenannte Scharmittel. Der Mittelwert in Gl. (9.72b) ist jedoch ein Zeitmittel, was hier der Balken über den Variablen anzeigt. Macht man eine Momentaufnahme eines Gases und bestimmt die mittlere Geschwindigkeit, indem man alle Geschwindigkeiten der N Gasteilchen zu diesem Zeitpunkt addiert und diese Summe dann durch N dividiert, so ist das Ergebnis dasselbe, als würde man für ein einzelnes Gasteilchen die Geschwindigkeit über einen sehr langen Zeitraum hinweg periodisch messen, alle diese Werte addieren und die Summe dann durch die Anzahl der durchgeführten Messungen dividieren. Anders ausgedrückt: Beobachten wir ein Gasteilchen nur lange genug, so wird es alle Geschwindigkeitswerte annehmen, die sehr viele Gasteilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem Gas besitzen. Diese Äquivalenz von Scharmittel und Zeitmittel ist eine Konsequenz der sogenannten Ergodenhypothese, deren Diskussion und Beweis den Rahmen dieses Physikkurses sprengen würde. Hier stellen wir nur fest, dass sie uns erlaubt, den Zeitmittelwert einer Geschwindigkeitskomponente des mikroskopischen Teilchens mit einer Temperatur gleichzusetzen. Zusätzlich zur Annahme, dass die Brownsche Bewegung ein ergodischer Prozess ist, gehen wir davon

aus, dass das mikroskopische Teilchen mit der Masse m und dem Radius r_0 nicht nur dem Reibungswiderstand unterliegt der es nach dem Stokes-Gesetz verlangsamt, sondern auch eine völlig zufällige Kraft F_{rdm} auf dieses einwirken soll. Diese Zufallskraft F_{rdm} soll das Nettoergebnis der zufälligen Kollisionen mit Gaspartikeln sein, denen das mikroskopische Teilchen ausgesetzt ist. Mit Newton können wir dann die Bewegungsgleichung des Teilchens schreiben als

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta \cdot r_0 \cdot \frac{dx}{dt} + F_{rdm} \quad (9.73)$$

wobei das erste Glied der rechten Seite von Gl. (7.10) stammt, also dem Stokes-Gesetz, und das zweite Glied die zufällige Kraft ist, die aus den Stößen mit Gaspartikeln resultiert. Um Gl. (9.73) zu lösen, verwenden wir den Trick, diese mit x zu multiplizieren

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta \cdot r_0 \cdot x \frac{dx}{dt} + xF_{rdm}$$

was uns dann mit

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{und} \quad x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2$$

erlaubt, Gl. (9.73) umzuschreiben als

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} x^2 \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\eta \cdot r_0 \cdot \left(\frac{d}{dt} x^2 \right) + xF_{rdm}$$

Für Gl. (9.72b) benötigen wir den Zeitmittelwert der Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung. Wir müssen somit in der Gleichung Zeitmittelwerte betrachten, also

$$\frac{m}{2} \cdot \overline{\left(\frac{d^2}{dt^2} x^2 \right)} - m \cdot \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = -3\pi\eta \cdot r_0 \cdot \overline{\left(\frac{d}{dt} x^2 \right)} + \overline{x F_{rdm}} \quad (9.74)$$

F_{rdm} ist eine Zufallskraft, also ist der Zeitmittelwert von $x F_{rdm}$ Null und gemäß Gl. (9.72b) ist die zweite Komponente auf der linken Seite von Gl. (9.74) gleich $k_B T$. In Fällen wie diesem hier kann man Differenzierung und Mittelung vertauschen, d.h.

$$\overline{\left(\frac{d^2}{dt^2} x^2 \right)} = \frac{d^2}{dt^2} \overline{x^2} \quad \text{und} \quad \overline{\left(\frac{d}{dt} x^2 \right)} = \frac{d}{dt} \overline{x^2}$$

Damit wird aus Gl. (9.74)

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \overline{x^2} + 3\pi\eta \cdot r_0 \cdot \frac{d}{dt} \overline{x^2} = k_B T \quad (9.75)$$

Aus dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung für die mittlere quadratische Verschiebung $\overline{x^2}$ wird durch die Substitution $\xi = (d/dt)\overline{x^2}$ eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \xi(t) + \frac{2k_B T}{m} \quad (9.76)$$

Die homogene Version dieser Differentialgleichung, also ohne den zweiten Term auf der rechten Seite, hat die offensichtliche Lösung

$$\xi_h(t) = C \exp\left(-\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \cdot t\right)$$

Um eine spezielle Lösung für die inhomogene Differentialgleichung zu finden, variiert man die Konstante, d.h. $C \rightarrow C(t)$. Einsetzen in Gl. (9.76) ergibt

$$\dot{C}(t) = \frac{2k_B T}{m} \exp\left(\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \cdot t\right)$$

woraus folgt

$$C(t) = \frac{2k_B T}{m} \int_0^t \exp\left(\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \cdot t'\right) dt' = \frac{k_B T}{3\pi\eta \cdot r_0} \exp\left(\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \cdot t\right)$$

Daher ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung Gl. (9.76)

$$\xi_s = C(t) \exp\left(-\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \cdot t\right) = \frac{k_B T}{3\pi\eta \cdot r_0}$$

Damit erhält man dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung Gl. (9.76) als Summe dieser speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und aller möglichen Lösungen der homogenen Differentialgleichung, also $\xi(t) = \xi_s + \xi_h$, und somit

$$\xi(t) = \frac{k_B T}{3\pi\eta \cdot r_0} + C \exp\left(-\frac{6\pi\eta \cdot r_0}{m} \cdot t\right) \quad (9.77)$$

Zunächst zur Bedeutung des Exponentialterms, der mit der Zeit abnimmt. Wir gehen von einem typischen mikroskopischen Partikel aus mit einem Durchmesser von einem Mikrometer und einer Flüssigkeitsdichte von 1 g cm^{-3} für Luft oder Wasser mit dynamischen Viskositäten bei Raumtemperatur von $1.83 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ und $0.01 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Es ist leicht zu erkennen, dass damit die Exponentialfunktion sehr schnell sehr klein wird, d.h. in der Größenordnung von Mikrosekunden. Deshalb können wir den Exponentialterm vernachlässigen und durch Rücksubstitution von $\xi = (d/dt)\bar{x}^2$ wird dann aus Gl. (9.77)

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^2 = \frac{k_B T}{3\pi\eta \cdot r_0}$$

Einfache Integration liefert für ein mikroskopisches Teilchen, das in einem Fluid, gasförmig oder flüssig, suspendiert ist, eine mittlere quadratische Verschiebung \bar{x}^2 nach einer Zeitspanne t von

$$\bar{x}^2(t) = \frac{k_B T}{3\pi\eta \cdot r_0} \cdot t \quad (9.78)$$

Mit Hilfe der Stokes-Einstein-Beziehung aus Gl. (9.63), die den Diffusionskoeffizienten D mit der Mobilität μ und der Temperatur T verknüpft, wird daraus

$$\overline{x^2(t)} = 2D \cdot t = 2\mu k_B T \cdot t \quad (9.79)$$

Da die mittleren quadratischen Verschiebungen in den drei Koordinatenrichtungen völlig unabhängig voneinander sind, können wir vom eindimensionalen Fall in Gl. (9.78) zum zweidimensionalen und dreidimensionalen Fall übergehen, indem wir einfach beachten, dass $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$. Um das Ergebnis für den zwei- oder dreidimensionalen Fall zu erhalten, muss man daher lediglich Gl. (9.77) mit einem Faktor 2 bzw. 3 multiplizieren. Gl. (9.78) und Gl. (9.79) werden daher für die Bewegung in zwei Dimensionen zu

$$\overline{r^2(t)} = \frac{2k_B T}{3\pi\eta \cdot r_0} \cdot t = 4D \cdot t = 4\mu k_B T \cdot t \quad (\text{2-dimensionaler Fall})$$

und für Bewegung in drei Dimensionen gelten die Beziehungen

$$\overline{r^2(t)} = \frac{k_B T}{\pi\eta \cdot r_0} \cdot t = 6D \cdot t = 6\mu k_B T \cdot t \quad (\text{3-dimensionaler Fall})$$

Die mittlere Verschiebung eines mikroskopischen Teilchens als Funktion der Zeit ist eine messbare Größe. Wenn man die Beweglichkeit μ , also die dynamische Viskosität η des Fluids und den äquivalenten Radius r_0 des Mikropartikels kennt, dann kann man den Wert der Boltzmann-Konstante k_B und damit die Avogadro-Zahl N_A bestimmen. Das mikroskopische Verständnis der Brownschen Bewegung zu Beginn des 19. Jahrhunderts ermöglichte somit erstmals eine direkte experimentelle Bestimmung von k_B und N_A .

10. Schwingungsbewegung

Am Ende von Abschnitt 2.3.4 stellten wir fest, dass gleichmäßige Kreisbewegung und harmonische Bewegung identisch sind. Beispiele für harmonische Bewegungen, häufiger als harmonische Schwingungen bezeichnet, sind in der Natur allgegenwärtig. Der Grund dafür ist einfach. Bringt eine Kraftwirkung ein System geringfügig aus seinem stabilen Gleichgewicht, so werden systemeigene Rückstellkräfte wirksam, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Fast alles in der Natur befindet sich in einem statischen oder dynamischen Gleichgewichtszustand. Viele Systeme reagieren daher auf eine äußere Kraft, die eine geringfügige Abweichung vom Gleichgewichtszustand bewirkt, mit kleinen harmonischen Schwingungen um den Gleichgewichtszustand.

10.1 Harmonische Schwingung

Gl. (3.3), der mathematische Ausdruck des zweiten Newtonschen Gesetzes, erlaubt drei Interpretationen. Als Definition der Körpermasse m und wie man sie bestimmt; als Ausdruck der bestimmenden Kraft \mathbf{F} einer Bewegung; und als Mittel zur Bestimmung der Beschleunigung \mathbf{a} . Die erste Interpretation liefert die Definition der trügen Masse: Die trüge Masse ist die Proportionalitätskonstante, die eine bestimmte Kraft \mathbf{F} mit einer bestimmten Beschleunigung \mathbf{a} eines Körpers verknüpft. Die zweite Interpretation liegt der kinematischen Analyse zugrunde wo die Frage lautet: Wenn ein Körper mit der Masse m seinen Bewegungszustand aufgrund einer Kraft \mathbf{F} mit der Beschleunigung \mathbf{a} ändert, wie sieht seine Bahnkurve aus? Die dritte Interpretation führt zur Integration der Bewegungsgleichung, indem sie die Frage stellt: Wie kann man die Bewegung eines Körpers mit der Masse m verstehen auf den eine Kraft \mathbf{F} einwirkt? Im Rest dieses Abschnitts werden wir uns mit dieser letzten Frage befassen, um ein besseres Verständnis harmonischer Schwingungen zu gewinnen. Harmonische Schwingungen sind in der Physik von grundlegender Bedeutung weil sie das Verhalten vieler physikalischer Systeme beschreiben, die unter Krafteinwirkung um ein stabiles Gleichgewicht schwingen. Dazu gehören

beispielsweise die Bewegungen von Pendeln bei kleinen Auslenkungen, von mit Federn verbundene Massen und viele andere Fälle mechanischer Schwingungen. Bei harmonischen Schwingungen muss es sich, wie der elektronische Schwingkreis verdeutlicht, nicht um die Bewegungen von Körpern handeln. Hier werden wir den Fall der einfachen harmonischen Schwingung, der gedämpften harmonischen Schwingung und der erzwungenen harmonischen Schwingung betrachten.

10.1.1 Einfache harmonische Schwingung

Newton's zweites Gesetz besagt, dass die Kraft, welche die harmonische Schwingung eines Massenpunkts m antreibt, proportional zur negativen Amplitude der Schwingung ist, wobei letztere der Verschiebung des Massenpunkts aus seiner Ruhelage entspricht. Wählt man z.B. die z -Richtung als Koordinate der harmonischen Schwingung und eine allgemeine Proportionalitätskonstante k , so ist diese Kraft gegeben durch

$$F = m \frac{d^2z}{dt^2} = -kz \quad (10.1)$$

Wirkt auf einen Massenpunkt eine solche Kraft F , so ist das Ergebnis immer eine harmonischen Schwingung. Eines der einfachsten Beispiele dafür ist ein Gewicht, das an einer Feder hängt. Im Ruhezustand dehnt sich die Feder so weit aus, dass sie die Schwerkraft ausgleicht, wie auf der linken Seite von Abb. 10.1 gezeigt. Die z -Achse des Koordinatensystems verläuft parallel zur Achse der Feder und die Ruhelage des Massenpunkts liegt bei $z = 0$. Als nächstes wird, wie die rechte Seite von Abb. 10.1 zeigt, durch vertikales Herunterziehen des Massenpunkts, z.B. von Hand, die Feder so weit gedehnt, dass die Position des Massenpunkts $z = z_1$ ist. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird er dann losgelassen und in diesem Moment beginnt die Rückstellkraft der Feder, die Bewegung des Massenpunkts anzutreiben. Vorausgesetzt, wir haben die Feder nicht zu sehr gedehnt, gilt das Hookesche Gesetz und bei t_0 beträgt die Rückstellkraft der Feder $F = -kz$ mit $z(t_0) = z_1$. Es war Robert Hooke, der entdeckte, dass die Kraft, die zum Ausdehnen oder Zusammendrücken einer Feder erforderlich ist, linear mit Ausdehnung oder Kompression der Feder wächst, solange diese im Vergleich zur gesamt möglichen Kompression oder Ausdehnung der Feder klein bleiben. Mit anderen Worten: Solange die Federverformung elastisch ist, kehrt die Feder in ihren ursprünglichen Zustand zurück. Kräfte der Form $F = \pm k\Delta z$ werden als elastische

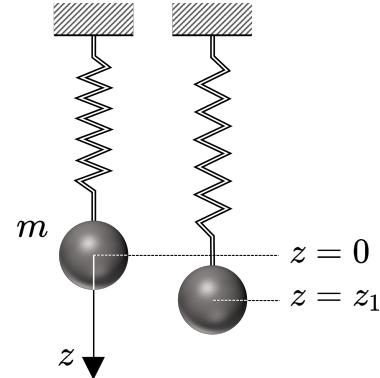


Abb. 10.1

Kräfte bezeichnet, da sich nach ihrer Entfernung die vorübergehende Verformung, hier der Feder, umkehrt. Die Proportionalitätskonstante k , hier die Federkonstante, ist eine Materialeigenschaft. Das Hookesche Gesetz gilt natürlich auch für den Massenpunkt in seiner Ruhelage in Abb. 10.1. In diesem Fall gleicht die Rückstellkraft der Feder die Schwerkraft, das Gewicht des Massenpunkts, aus und somit:

$$mg - k\Delta z = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta z = \frac{mg}{k}$$

Nimmt man den Massenpunkt von der Feder, so zieht diese sich um Δz zusammen. Die beiden Kräfte, die Rückstellkraft, welche die Schwerkraft ausgleicht, und die zusätzliche Rückstellkraft, die die Zugkraft unserer Hand ausgleicht, addieren sich. Da jedoch bei t_0 nur die Zugkraft unserer Hand wegfällt, treibt nur diese die harmonische Schwingung der Massenpunkts an. Aus der Diskussion der gleichmäßigen harmonischen Bewegung in Abschnitt 2.3.4 folgt für die Form der allgemeinen Lösung von Gl. (10.1)

$$z = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (10.2)$$

und die Geschwindigkeit des Massenpunkts ist gegeben durch

$$\dot{z} = v_z = A\omega_0 \sin \omega_0 t - B\omega_0 \cos \omega_0 t$$

Die Anfangsbedingung bei $t_0 = 0$ ist $z(t_0) = z_1$ für den Ort des Massenpunkts und $v_z(t_0) = 0$ für seine Geschwindigkeit. Daher muss B gleich 0 und A gleich z_1 sein. Die Bewegung des harmonischen Oszillators wird also beschrieben durch

$$z(t) = z_1 \cos \omega_0 t$$

Setzt man dies in Gl. (10.1) ein, so erhält man für die Frequenz ω_0 der harmonischen Schwingung des Systems in Abb. 10.1 mit Federkonstante k

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die Frequenz der harmonischen Schwingung ω_0 hängt nur von der Federkonstante k und der Oszillatormasse m ab und nicht von der Amplitude der Schwingung. Wie in Abb. 10.2 dargestellt, führt eine Erhöhung der Oszillatormasse um den Faktor 2 zu einer Verringerung der Schwingungsfrequenz um den Faktor $\sqrt{2}$. Die Verdoppelung der Federkonstante, durch Verwendung einer Feder mit der zweifachen Federkonstanten oder die Verwendung von zwei identischen Federn, führt zu einer Multiplikation der Schwingungsfrequenz mit dem Faktor $\sqrt{2}$.

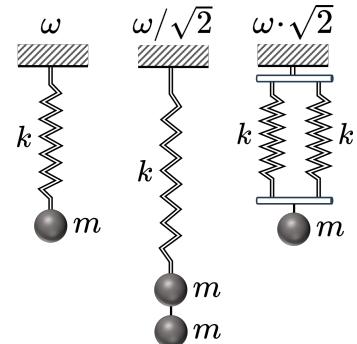


Abb. 10.2

Energie der einfachen harmonischen Schwingung

Bei der einfachen harmonischen Schwingung ist die kinetische Energie die des Massenpunkts und die potenzielle Energie die der Feder, die wir bereits aus Gl. (4.2) kennen. Daher ist die Gesamtenergie $E = T + U$ der einfachen harmonischen Schwingung

$$E = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{kz^2}{2} = \frac{kz_1^2}{2}$$

Die Gesamtenergie der einfachen harmonischen Schwingung wird zum Zeitpunkt t_0 durch die Verschiebung $z_1 = z(t_0)$ festgelegt, von der aus der Massenpunkt nach Loslassen frei um seine Ruhelage bei $z_0 = 0$ schwingt (vergleiche Gl. (4.2)). Da der Massenpunkt zwischen $\pm z_1$ um seine Ruhelage bei $z = 0$ oszilliert, ändert sich die Gesamtenergie nicht. An den Wendepunkten $z = \pm z_1$ erreicht die potenzielle Energie der Feder ihre Maximalwerte ($U_{max} = E$), während bei $v(x = \pm z_1) = 0$ die kinetische Energie an diesen Punkten Null wird ($T_{min} = 0$). Beim Ruhelage-Durchgang $z = z_0$ wird die potenzielle Energie der Feder Null ($U_{min} = 0$), während die kinetische Energie ihr Maximum erreicht ($T_{max} = E$). Wie in Abb. 10.3 gezeigt, ist die Form der potenziellen Energiekurve der Feder eine Parabel und daher muss die Form der kinetischen Energiekurve der Feder eine umgekehrte Parabel sein, um sicherzustellen, dass $E = T + U = const.$

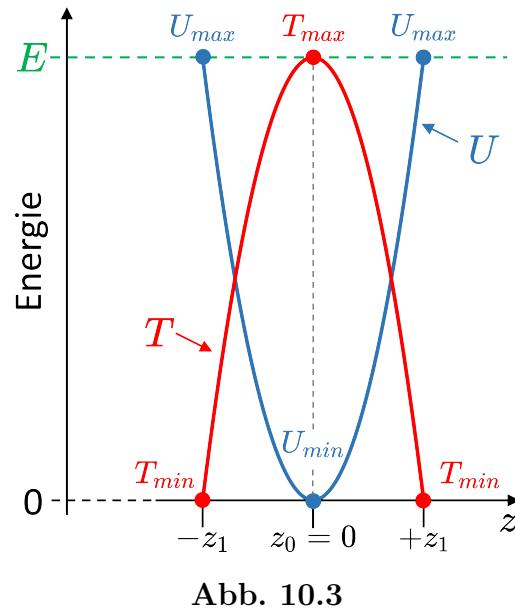


Abb. 10.3

10.1.2 Gedämpfte harmonische Schwingung

Der gerade besprochene ideale harmonische Oszillator wird für immer weiter schwingen. Aber die praktische Erfahrung sagt uns, das dies nicht so ist. Mit der Zeit werden wir beobachten, dass die Amplitude der Schwingung abnimmt und die Schwingung schließlich ganz aufhört, sobald die Amplitude auf Null gesunken ist. Die Bewegung einer solchen gedämpften Schwingung kann oft durch die Einführung einer exponentiell abnehmenden Amplitude in die Oszillatorgleichung beschrieben werden

$$z(t) = z_1 e^{-\beta t} \cos \omega t$$

Die Geschwindigkeit dieser gedämpften Schwingungsbewegung ist gegeben durch

$$\dot{z} = -z_1 e^{-\beta t} [\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t]$$

Die zweites Ableitung nach der Zeit ergibt dann die Beschleunigung

$$\ddot{z} = z_1 e^{-\beta t} [\beta^2 \cos \omega t + 2\beta \omega \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t]$$

Durch Addition einer Null in der Klammer auf der linken Seite mittels Einfügen von $0 = 2\beta^2 \cos \omega t - 2\beta^2 \cos \omega t$ kann man die Bewegungsgleichung umschreiben zu

$$\ddot{z} = -\omega^2 \left[1 + \frac{\beta^2}{\omega^2} \right] z - 2\beta \dot{z}$$

Für $\beta = 0$ reduziert sich dies auf die Gleichung für die ungedämpfte Schwingung und ω entspricht dem ω_0 des ungedämpften harmonischen Oszillators. Ist $\beta > 0$, dann gibt es einen zur Geschwindigkeit der Massenpunkts proportionalen Dämpfungsterm. Schreibt man die mit der gedämpften Schwingung verbundene Kraft als

$$m\ddot{z} = -kz + \text{Dämpfungsterm} = -m(\omega^2 + \beta^2)z - 2m\beta \dot{z} \quad (10.3)$$

zeigt das, dass nicht nur die Amplitude des gedämpften Oszillators abnimmt, sondern auch seine Frequenz ω kleiner ist als die des ungedämpften Oszillators ω_0 :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Ist die Zerfallskonstante β viel kleiner als ω_0 , also $\beta \ll \omega_0$, dann gilt

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \quad (10.4)$$

und die Gleichung der gedämpften Schwingung führt zur Kraftgleichung

$$F = -m\omega_0^2 z - 2m\beta v_z$$

Das erste Glied der rechten Seite ist die Rückstellkraft, wie wir sie vom ungedämpften harmonischen Oszillator mit $k = m\omega_0^2$ kennen. Das zweite Glied, der Dämpfungsterm, stellt eine Reibungskraft dar, wie in Abschnitt 7.1 diskutiert. Ihr Betrag ist proportional zur Geschwindigkeit des bewegten Massenpunkts und ihre Richtung ist dem Geschwindigkeitsvektor entgegengesetzt. Der Proportionalitätsfaktor $2m\beta$ ist der Reibungskoeffizient γ und allgemein gilt für solche Reibungskräfte

$$\mathbf{F}_{\text{Reibung}} = -\gamma \mathbf{v} \quad (10.5)$$

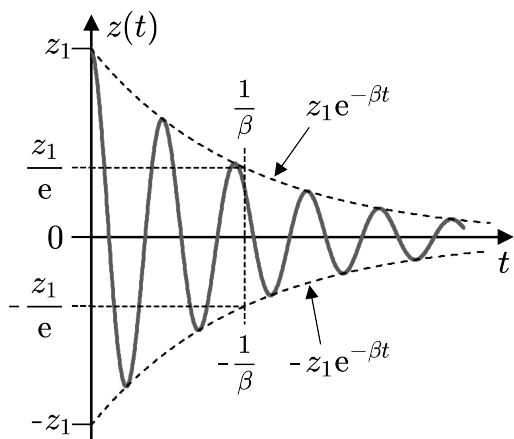


Abb. 10.4

wobei γ experimentell bestimmt werden muss. Für die gedämpfte harmonische Schwingung kann sie z.B. aus der Amplitudenabnahme ermittelt werden (siehe Abb. 10.4). Eine Verringerung der Amplitude durch Reibungsverluste bedeutet natürlich, dass die Gesamtenergie des gedämpften harmonischen Oszillators nicht erhalten bleibt.

Energie der gedämpften harmonischen Schwingung

Genau wie bei der einfachen harmonischen Schwingung wird die Gesamtenergie des gedämpften harmonischen Oszillators durch seine Anfangsamplitude bestimmt, d.h. durch die Auslenkung z_1 aus seiner Ruheposition bei $z = 0$. Anders als beim einfachen harmonischen Oszillator ist die Schwingungsamplitude aber nicht konstant sondern nimmt ab und daher ist auch die Gesamtenergie des gedämpften harmonischen Oszillators nicht konstant. Mit $z_1 \rightarrow z_1 e^{-\beta t}$ nimmt auch die Gesamtenergie des gedämpften harmonischen Oszillators exponentiell ab.

$$E = \frac{1}{2} k z_1^2 e^{-2\beta t} = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

Abb. 10.5 zeigt den exponentiellen Abfall der Gesamtenergie E . Zu jedem Zeitpunkt auf dieser Kurve wird Energie von potenzieller Energie in kinetische Energie und zurück umgewandelt, solange $E(t) > 0$. Ein Maß für die exponentielle Energieabnahme ist die Zeit τ nach der E_0 um den Faktor e^{-1} geringer ist. Je kürzer / länger τ , desto schneller / langsamer verliert der gedämpfte harmonische Oszillator seine Energie. Durch β ist τ umgekehrt proportional zum Reibungskoeffizienten:

$$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} \frac{2m}{\gamma} = \frac{m}{\gamma} \quad (10.6)$$

Indem wir also τ messen, können wir bei bekanntem m den Reibungskoeffizienten γ bestimmen. Mit γ und τ können wir Gl. (10.3), die Bewegungsgleichung des gedämpften Oszillators, in den üblichen Formen schreiben als

$$m\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (10.7)$$

Diese Gleichung wird uns bei der Diskussion der gedämpften erzwungenen Schwingung wieder begegnen. Bei vielen Anwendungen ist von Interesse, wie schnell ein Oszillator Energie verliert. Dazu müssen wir die Geschwindigkeit bestimmen, mit der die Energie eines Oszillators im Vergleich zur noch im Oszillator gespeicherten Energie abnimmt. Eine schnelle Rechnung zeigt, dass diese Größe proportional zu $-\tau^{-1}$ ist, d.h.

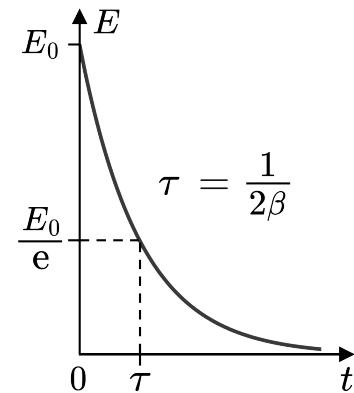


Abb. 10.5

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -2\beta = -\frac{1}{\tau}$$

Der inverse Betrag dieser Größe, multipliziert mit der Frequenz, d.h., die Menge der gespeicherten Gesamtenergie im Verhältnis zur Energiemenge, die ein Oszillatator über die Zeit ω^{-1} verliert, ist ein Maß für die Qualität eines Oszillators. Dieser dimensionslose Parameter, der mit dem Buchstaben Q bezeichnet wird, ist gegeben durch

$$Q = \omega \cdot E \cdot \left| \frac{dE}{dt} \right|^{-1} = \omega \tau \quad (10.8)$$

Q ist im Wesentlichen ein einfaches Maß für die Oszillatordämpfung. Wenn Q sehr groß ist, verliert der Oszillatator aufgrund von Dämpfungseffekten wenig Energie, ist Q klein, verliert er seine Energie aufgrund von Dämpfungseffekten schnell. Entnehmen wir die Frequenz der gedämpften harmonischen Schwingung aus Gl. (10.4) dann wird Q

$$Q = \omega_0 \tau \sqrt{1 - \frac{1}{(2\omega_0 \tau)^2}} \quad \underset{\omega_0 \tau \gg 1}{\implies} \quad Q = \omega_0 \tau \quad (10.9)$$

10.1.3 Erzwungene harmonische Schwingung

Natürlich ist es möglich, der Schwingungsdämpfung durch einer äußeren Kraft entgegenzuwirken und die Schwingung trotz der sie dämpfenden Reibungskraft am Laufen zu halten. Man spricht in diesem Fall von einer erzwungenen harmonischen Schwingung. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir hier die Dämpfung und betrachten vorerst nur die Wirkung einer zusätzlichen externen Kraft. Damit lautet die Kraftgleichung

$$m\ddot{z} = -kz + F(t) = -m\omega_0^2 z + F(t) \quad (10.10)$$

wobei $F(t)$ die äußere Kraft ist, die periodisch mit der Frequenz ω einwirkt.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Die Frequenz ω der Kraft kann sich von ω_0 , der Frequenz des idealen harmonischen Oszillators, unterscheiden. Gl. (10.10) ist eine inhomogene Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung (also dem idealen harmonischen Oszillatator) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung für die homogene Differentialgleichung haben wir bereits mit Gl. (10.2). Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, nutzen wir die Beobachtung, dass die Auslenkung $z(t)$ der Oszillation der externen Kraft $F(t)$ folgt. Genauere Beobachtungen zeigen zudem, dass $z(t)$ nicht

unmittelbar $F(t)$ folgt, sondern mit einer Zeitverzögerung. In diesem Modell des erzwungenen Oszillators ist das nicht so weil wir keine Reibungskräfte berücksichtigt haben. Wir werden dies später korrigieren, wenn wir uns diese durch Reibungskräfte verursachte Phasenverschiebung zwischen $z(t)$ und $F(t)$ im Detail ansehen, aber vorerst ignorieren wir sie. Damit ergibt sich der allgemeine Lösungsansatz für $z(t)$

$$z(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (10.10) ergibt

$$-m\omega^2 z = -m\omega_0^2 z + F_0 \cos \omega t$$

Daher ist eine spezielle Lösung von Gl. (10.10)

$$z = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

und wir erhalten als allgemeine Lösung für die erzwungene Schwingung

$$z = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

und für ihre Geschwindigkeit

$$\dot{z} = \omega A \sin \omega_0 t - \omega B \cos \omega_0 t + \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

Der Einfachheit halber wählen wir hier für $t_0 = 0$ als Anfangsbedingung, dass sich der Massenpunkt in seiner Ruhelage befindet, also $z(t_0) = 0$ und $\dot{z}(t_0) = 0$. Einsetzen in die obigen Gleichungen für $z(t)$ und $\dot{z}(t)$ ergibt für die Konstanten A und B

$$A = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{und} \quad B = 0$$

Damit ergibt sich als Lösung für die erzwungenen harmonische Schwingung

$$z = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t]$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Identität

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

und Vertauschung der Reihenfolge der Sinus-Glieder können wir die Lösung für die Bewegung der erzwungenen harmonischen Schwingung schreiben als

$$z = \frac{-2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \tag{10.11}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Bewegung der erzwungenen harmonischen Schwingung drei Komponenten hat: eine frequenzabhängige Amplitude, sowie einen langsameren und

einen schnelleren Schwingungsterm. Um diese Bewegung besser zu verstehen, hilft es, drei Fälle zu betrachten: $\omega < \omega_0$, $\omega \approx \omega_0$ und $\omega > \omega_0$. Für $\omega > \omega_0$ ist die Amplitude negativ, während sie für $\omega < \omega_0$ positiv ist. Dies bedeutet, dass im ersten Fall die Kraft entgegengesetzt wirkt zur Richtung der Auslenkung des Massenpunktes aus seiner Ruhelage, während im zweiten Fall beide in die gleiche Richtung zeigen.

$$\omega = 1.25 \cdot \omega_0$$



$$\omega = 1.15 \cdot \omega_0$$



$$\omega = 1.05 \cdot \omega_0$$

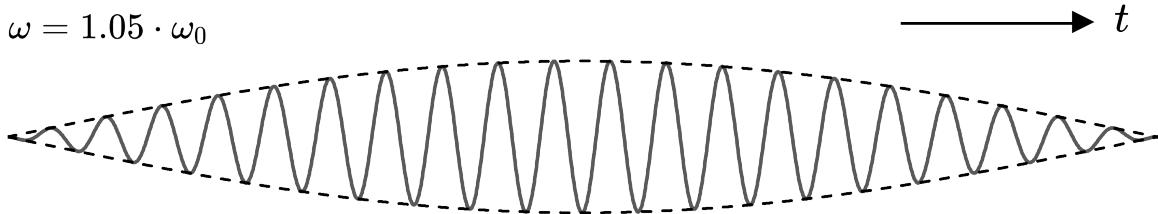


Abb. 10.6: Erzwungene harmonische Schwingung für drei Frequenzverhältnisse. Gestrichelte Linien skizzieren die jeweilige Amplitudenmodulation.

Abb. 10.6 zeigt die Amplitude bei erzwungener harmonischer Schwingung für drei Beispiele, bei denen ω 125% von ω_0 , 115% von ω_0 und 105% von ω_0 ist. Die gestrichelten Linien in Abb. 10.6 skizzieren die Amplitudenmodulation durch den ersten Sinusterm in Gl. (10.11). Je kleiner die Differenz zwischen ω und ω_0 , desto langsamer ist diese Amplitudenmodulation. Aufgrund der Symmetrie des Sinus würde diese Einhüllende gleich aussehen, wenn ω jeweils 75% von ω_0 , 85% von ω_0 , und 95% von ω_0 wäre anstatt $\omega = 1.25\omega_0$, $\omega = 1.15\omega_0$ und $\omega = 1.05\omega_0$, wie in Abb. 10.6 gezeigt. Allerdings würde die Anzahl der Schwingungen innerhalb der Einhüllenden etwas geringer sein. Wenn ω sich ω_0 nähert, nimmt die Amplitude in Gl. (10.11) zu und sie würde gegen Unendlich gehen, wenn $\omega = \omega_0$, was bei realen erzwungenen Oszillatoren natürlich nicht passiert. Gl. (10.11) gilt nicht für den Resonanzfall von $\omega = \omega_0$ und wie wir bald sehen werden, nimmt in diesem Fall die Amplitude eher linear mit t zu als unendlich zu werden. Natürlich haben lineare Zunahmen in der Praxis auch ihre Grenzen und irgendwann, wenn die Amplitude zu groß wird, bricht die Feder einfach. Für $\omega \ll \omega_0$ gleicht die Bewegung des erzwungenen Oszillators immer mehr jener des idealen Oszillators, während für $\omega \gg \omega_0$ die Amplitude immer kleiner wird, solange bis es überhaupt keine Bewegung mehr gibt.

10.1.4 Gedämpfte erzwungene harmonische Schwingung

Die gerade für die erzwungene Schwingung abgeleitete Lösung ist nicht anwendbar, wenn $\omega = \omega_0$. Dies liegt daran, dass die Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung, die wir in Gl. (10.10) verwendet haben, keinen Reibungsterm enthielt. Aus Gl. (10.7) wissen wir bereits, wie die Gleichung für eine Schwingung mit Reibungskräften aussieht – es ist die Bewegungsgleichung der gedämpften harmonischen Schwingung. Jetzt führen wir eine äußere Kraft in unser Modell der gedämpften Schwingung ein und untersuchen, wie die Lösungen der Bewegungsgleichung für die gedämpften erzwungene Schwingung aussehen. Wir beginnen mit Gl. (10.7), in die wir eine äußere Kraft auf die gleiche Weise hinzufügen, wie wir es gerade im vorherigen Abschnitt für den einfachen harmonischen Oszillator getan haben (siehe Gl. (10.10)):

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F(t)}{m} \quad (10.12)$$

Dabei erinnern wir uns, dass in dieser Gleichung

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$$

wobei γ der Reibungskoeffizient ist, den wir bereits aus Gl. (10.6) kennen. Zur Lösung von Gl. (10.12) verwenden wir eine andere Methode als zur Lösung von Gl. (10.10). Dazu wechseln wir zur Darstellung in komplexen Zahlen, d.h., für die Auslenkung $z(t)$ und die äußere Kraft $F(t)$ machen wir den Ansatz

$$F(t) = \hat{F} e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad z = \hat{z} e^{i\omega t}$$

wobei \hat{F} und \hat{z} komplexe Amplituden sind, die nicht von der Zeit abhängen. Wenn wir dies in Gl. (10.12) einsetzen, erhalten wir die komplexe Gleichung

$$-\omega^2 \hat{z} e^{i\omega t} + i \frac{\omega}{\tau} \hat{z} e^{i\omega t} + \omega_0^2 \hat{z} e^{i\omega t} = \frac{\hat{F}}{m} e^{i\omega t} \quad (10.13)$$

Da alle Exponentialfunktionen herausfallen, reicht einfache Algebra zur Auflösung nach \hat{z} mit dem Ergebnis

$$\hat{z} = \frac{\hat{F}}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega/\tau)]} = \hat{F} \cdot R \quad (10.14)$$

wobei

$$R = \frac{1}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega/\tau)]} = \rho e^{i\varphi} \quad (10.15)$$

eine komplexe Zahl mit Amplitude ρ und Phase φ ist. Mit der komplexen Amplitude $\hat{F} = F_0 e^{i\theta}$ können wir daher Gl. (10.14) schreiben als

$$\hat{z} = F_0 e^{i\theta} \rho e^{i\varphi} = \rho F_0 e^{i(\theta+\varphi)}$$

und erhalten somit als Lösung der komplexen Gleichung Gl. (10.13):

$$\hat{z} e^{i\omega t} = \rho F_0 e^{i(\theta+\varphi)} e^{i\omega t} = \rho F_0 [\cos(\omega t + \theta + \varphi) + i \sin(\omega t + \theta + \varphi)]$$

Was uns interessiert, ist der Realteil dieses Ausdrucks, der die Lösung $z(t)$ der erzwungenen Schwingung in Gl. (10.12) ist. Gl. (10.16) zeigt diesen Realteil, die Auslenkung $z(t)$, zusammen mit der externen Kraft $F(t)$, die diese antreibt.

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= \rho F_0 \cos(\omega t + \theta + \varphi) \\ F(t) &= F_0 \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Bevor wir diese Lösung diskutieren, ein paar Worte zur Eleganz des Lösungsansatzes mit komplexen Zahlen. Es bestand keine Notwendigkeit, knifflige Differentialgleichungen zu lösen. Alles, was wir brauchten, war etwas komplexe Zahlenalgebra und Trigonometrie und nach ein paar Zeilen hatten wir die Lösung vor uns. Dies zeigt, wie mächtig dieser Ansatz zur Lösung solcher Probleme ist. Am Ende müssen wir nur noch die physikalische Lösung extrahieren, die der Realteil der komplexen Lösung darstellt.

Gl. (10.16) zeigt, dass das Zeitverhalten der Auslenkung $z(t)$ gegenüber der treibenden Kraft $F(t)$ um φ phasenverschoben ist. Dies ist die Zeitverzögerung, welche wir bereits bei der erzwungenen Schwingung ohne die Reibungskraft in Abschnitt 10.1.3 erwähnten. Um den Wert von φ zu bestimmen, müssen wir den Real- und Imaginärteil von R in Gl. (10.15) trennen. Dazu bestimmen wir zunächst den Wert von ρ , indem wir das Quadrat des Betrags von R in Gl. (10.15) berechnen. Mit $|R|^2 = R\bar{R}$, wobei \bar{R} das komplexe Konjugierte von R ist, erhalten wir mit Gl. (10.15) die beiden Ausdrücke

$$R\bar{R} = \frac{1}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega/\tau)]} \frac{1}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - i(\omega/\tau)]}$$

und

$$R\bar{R} = \rho e^{i\varphi} \rho e^{-i\varphi} = \rho^2$$

woraus folgt, dass

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]} \quad (10.17)$$

Um den Wert von φ zu erhalten, müssen wir die beiden Ausdrücke für R in Gl. (10.15) vergleichen. Wir können R schreiben als

$$R = \frac{1}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega/\tau)]} \cdot \frac{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - i(\omega/\tau)]}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega/\tau)]}$$

$$= \rho^2 m (\omega_0^2 - \omega^2) - i \rho^2 m (\omega / \tau)$$

aber wir können R auch schreiben als

$$R = \rho e^{i\varphi} = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi$$

Wenn wir den Real- und Imaginärteil dieser beiden Ausdrücke für R vergleichen, sehen wir, dass

$$\cos \varphi = \rho m (\omega_0^2 - \omega^2) \quad \text{und} \quad \sin \varphi = -\rho m (\omega / \tau) \quad (10.18)$$

Daher erhalten wir für $\tan \varphi$ die Gleichung

$$\tan \varphi = \frac{-(\omega / \tau)}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{-\gamma \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (10.19)$$

Aus Gl. (10.19) folgt sofort, dass $\varphi = 0$ für $\gamma = 0$. Ohne Reibungskräfte verschwindet die Phasenverschiebung zwischen $z(t)$ und $F(t)$ in Gl. (10.16) und es gibt keine Zeitverzögerung mehr zwischen $z(t)$ und $F(t)$. Gl. (10.19) sagt uns auch, dass die Phasenverschiebung φ immer negativ sein wird, weil $-\tan \varphi = \tan(-\varphi)$. Ohne Einschränkung können wir die Phase θ auf Null setzen, was wir in Abb. 10.7a getan haben. Mit $\theta = 0$ hat $F(t)$ seine Maximalwerte bei $t = n\pi/\omega$, wobei n ein ganzzahliger Wert ist. Allerdings erreicht $z(t)$ seine Maximalwerte bei

$$t = \frac{1}{\omega} (n\pi + |\varphi|)$$

und hinkt daher $F(t)$ um $\Delta t = |\varphi|/\omega$ hinterher.

Wegen der Reibungskraft reagiert die Auslenkung $z(t)$ nicht sofort auf die äußere Kraft $F(t)$, sondern erst mit einer Zeitverzögerung Δt . Abb. 10.7b zeigt $\varphi(\omega)$ für drei verschiedene Werte des dimensionslosen Parameters $\omega_0\tau$. Ziehen wir diesen dimensionslosen Parameter aus Gl. (10.19) heraus und schreiben die Gleichung um zu

$$\tan \varphi = -\frac{1}{\omega_0\tau} \frac{\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

dann können wir sehen, dass für $\omega_0\tau \rightarrow \infty$, $\tan \varphi \rightarrow 0$, während für $\omega_0\tau \rightarrow 0$, $\tan \varphi \rightarrow \pm\infty$ je nachdem, ob $\omega < \omega_0$ oder $\omega > \omega_0$. Für $\omega_0\tau \rightarrow \infty$ wird $\varphi(\omega)$ zu einer Stufenfunktion mit $\varphi = 0$ für $\omega < \omega_0$ und $\varphi = -\pi/2$ für $\omega > \omega_0$.

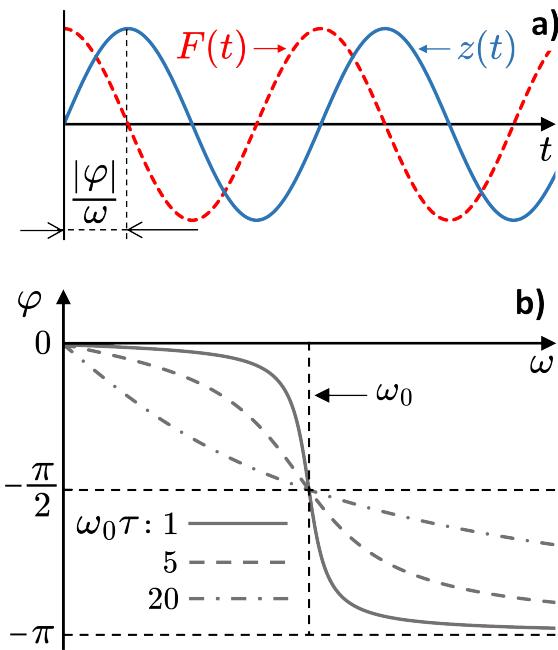


Abb. 10.7

Sehen wir uns jetzt die Amplitude z_1 von $z(t)$ in Gl. (10.16) an. Mit Gl. (10.16) und Gl. (10.17) können wir diese Amplitude schreiben als

$$z_1 = \frac{F_0}{m\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]}} \quad (10.20)$$

Abb. 10.8 zeigt z_1 als Funktion von ω für $\omega_0\tau = 20$, einen der Fälle, für die Abb. 10.7b die Abhängigkeit der Phasenverschiebung φ von ω zeigt. Für $\omega \ll \omega_0$ ist z_1 praktisch unabhängig von ω und für $\omega = 0$, reduziert sich z_1 auf

$$z_1(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \text{bzw.} \quad F_0 = k \cdot z_1$$

Mit Ausnahme des Vorzeichens ist dies das Hookesche Gesetz. Beim Lösen der Gleichung $dz_1/d\omega = 0$ zeigt eine schnelle Berechnung, dass $z_1(\omega)$ sein Maximum hat bei

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}} \quad \xrightarrow{\omega_0\tau \gg 1} \quad \omega_R = \omega_0$$

Der Index R gibt an, dass ω_R die Resonanzfrequenz ist. Setzen wir den Ausdruck für ω_R in Gl. (10.20) ein, erhalten wir für den maximalen Amplitudenwert bei $\omega = \omega_R$

$$z_1(\omega_R) = \frac{F_0\tau}{m\omega_0}$$

Ein Vergleich der Amplituden bei Resonanz und bei $\omega = 0$ zeigt, dass

$$\begin{aligned} \frac{z_1(\omega_R)}{z_1(0)} &= \omega_0\tau \underset{\omega_0\tau \gg 1}{=} Q \\ & \end{aligned}$$

Daher sagt uns der Q -Wert eines Oszillators, wie er in Gl. (10.8) und Gl. (10.9) definiert ist, eine um wieviel größere Amplitude wir bei Resonanz erwarten können im Vergleich zur Amplitude bei $\omega = 0$. Für $\omega > \omega_0$ fällt die Oszillatoramplitude in Abb. 10.8 schnell wieder dorthin zurück, wo sie war, bevor sie sich ω_R von $\omega < \omega_R$ näherte und sinkt dann langsam weiter auf Null für $\omega \rightarrow \infty$. Für die Frequenzbreite $\Delta\omega$ der Resonanz auf halber

Höhe des Maximalwert finden wir die sogenannte volle Halbwertsbreite (FWHM = Full Width at Half Maximum) der Kurve in Abb. 10.8

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}\right) \mp \frac{\omega_0}{\tau} \sqrt{3 + \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2}}$$

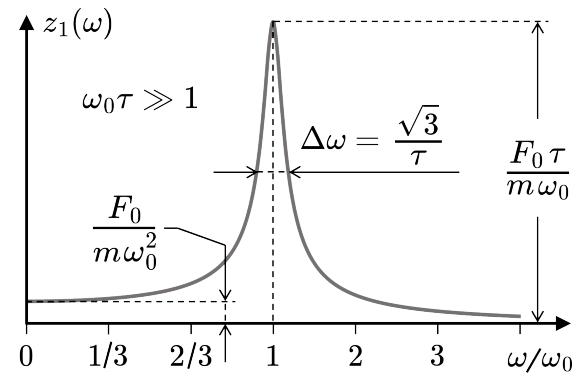


Abb. 10.8

Für $\omega_0\tau \gg 1$ vernachlässigen wir alle Terme $(\omega_0\tau)^{-n}$ mit $n > 1$ und erhalten

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 \mp \frac{\sqrt{3}}{\omega_0\tau}} \stackrel{\omega_0\tau \gg 1}{\downarrow} \omega_0 \left(1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2\omega_0\tau} \right) \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{\tau}$$

Energie der erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingung

Eine äußere Kraft bringt den harmonischen Oszillatator dazu bei Frequenzen ω zu schwingen, die sich deutlich von seiner Eigenfrequenz ω_0 unterscheiden. Bei erzwungener harmonischer Schwingung muss wegen Reibungsverlusten, unabhängig von der Schwingungsfrequenz, kontinuierlich Energie ersetzt werden. Wenn wir also über die Energie dieses Oszillators sprechen, müssen wir zuerst die Leistung betrachten, die erforderlich ist, ihn am Laufen zu halten. Diese Leistung, die wir dem harmonischen Oszillatator durch eine externe Kraft zuführen, ist mit Gl. (4.6) gegeben durch

$$P = \mathbf{F}\mathbf{v}$$

Bei erzwungener Schwingung fallen die Richtungen der einwirkenden äußeren Kraft und die der Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt, auf eine Gerade. Mit $F(t)$ aus Gl. (10.16), \dot{z} berechnet aus $z(t)$ in Gl. (10.16), und mit der Wahl $\theta = 0$ erhalten wir für die vom Oszillatator verbrauchte Leistung

$$\begin{aligned} P(\omega, t) &= F(t) \cdot \dot{z} = -F_0 \cos(\omega t) \cdot \rho F_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) \\ &= -\rho F_0^2 \omega \cos(\omega t) (\sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi) \end{aligned}$$

Mit

$$\sin(2\omega t) = 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$$

können wir $P(\omega, t)$ schreiben als

$$P(\omega, t) = -\rho F_0^2 \omega \left(\frac{\cos \varphi}{2} \sin(2\omega t) + \frac{\sin \varphi}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\sin \varphi}{2} \right) \quad (10.21)$$

Uns interessiert nicht der momentane Wert von $P(\omega, t)$, sondern der über viele Schwingungszyklen zeitlich gemittelte Wert $\overline{P(\omega)}$. Diesen erhalten wir, indem wir über einen Zeitraum Δt integrieren und das Ergebnis durch dieses Zeitintervall Δt dividieren und dann den Grenzwert für $\Delta t \rightarrow \infty$ nehmen, d.h.

$$\overline{P(\omega)} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} P(\omega, t) dt \quad (10.22)$$

Setzt man Gl. (10.21) in Gl. (10.22) ein, verschwinden die Zeitmittelwerte der Glieder mit $\sin(2\omega t)$ und $\cos(2\omega t)$ und nur das letzte Glied in Gl. (10.21) trägt einen Wert ungleich Null zu $\overline{P(\omega)}$ bei, also

$$\overline{P(\omega)} = -\frac{1}{2}\rho F_0^2 \omega \sin \varphi = -\frac{1}{2}\rho F_0^2 \omega \cdot [-\rho m(\omega/\tau)] = \frac{m\rho^2 F_0^2 \omega^2}{2\tau} \quad (10.23)$$

wobei wir $\sin \varphi$ aus Gl. (10.18) verwendet haben. Wenn wir nun ρ^2 aus Gl. (10.17) einsetzen, wird aus $\overline{P(\omega)}$

$$\overline{P(\omega)} = \frac{F_0^2 \tau}{2m} \frac{\omega^2 / \tau^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (10.24)$$

Abb. 10.9 zeigt $\overline{P(\omega)}$ für einen schmalen Bereich um das Maximum, das bei $\omega = \omega_0$ liegt, unabhängig vom Wert von $\omega_0 \tau$. Dies unterscheidet sich von dem, was wir für die Amplitude $z_1(\omega)$ gefunden haben, wo das Maximum nur bei $\omega = \omega_0$ liegt wenn $\omega_0 \tau \gg 1$. Der in Abb. 10.9 gewählte Wert von $\omega_0 \tau$ ist derselbe wie der in Abb. 10.8, d.h. $\omega_0 \tau = 20$, aber der gezeigte Frequenzbereich ist viel enger (um den Faktor 8). Abb. 10.9 sagt uns, dass wir die Frequenz der externen Kraft an die Resonanzfrequenz des Oszillators anpassen müssen, da die Leistungsaufnahme des Oszillators in Resonanz sehr viel größer ist als für $\omega \neq \omega_0$. Die mittlere Leistung im Maximum von $\overline{P(\omega)}$ ist

$$\overline{P(\omega)} = \frac{F_0^2 \tau}{2m}$$

Bei der Berechnung der vollen Halbwertsbreite (FWHM) $\Delta\omega$ der $\overline{P(\omega)}$ -Kurve erhalten wir eine ähnliche Gleichung für ω^2 wie bei der Amplitudenkurve, d.h.

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega_0^2 \tau^2} \right) \mp \frac{\omega_0}{\tau} \sqrt{1 + \frac{1}{4\omega_0^2 \tau^2}}$$

Wieder vernachlässigen wir für $\omega_0 \tau \gg 1$ alle Glieder $(\omega_0 \tau)^{-n}$ mit $n > 1$ und erhalten

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 \mp \frac{1}{\omega_0 \tau}} \underset{\omega_0 \tau \gg 1}{=} \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2\omega_0 \tau} \right) \Rightarrow \Delta\omega = \frac{1}{\tau}$$

$\overline{P(\omega)}$ FWHM ist daher um den Faktor $\sqrt{3}$ schmäler als $z_1(\omega)$ FWHM. $\overline{P(\omega)}$ und $z_1(\omega)$ sind beide nicht symmetrisch bezüglich ω_0 , aber $\overline{P(\omega)}$ ist symmetrischer als $z_1(\omega)$. Mit zunehmendem $\omega_0 \tau$ werden beide Kurven immer symmetrischer.

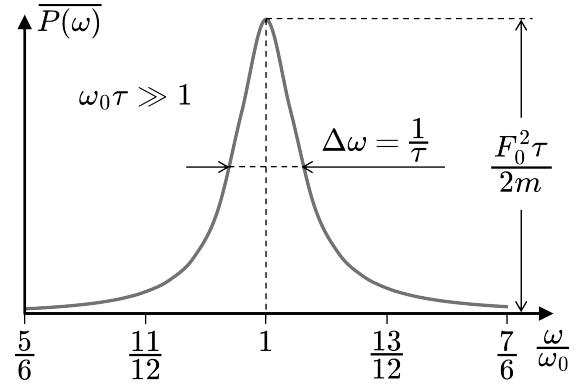


Abb. 10.9

Jetzt kennen wir den Mittelwert der Leistungsaufnahme des Oszillators, wissen aber noch nichts über die im Oszillator selbst gespeicherte Energie. Wir vermuten natürlich, dass die im Oszillator gespeicherte Energie genauso aussehen wird, wie für den einfachen harmonischen Oszillator. Um dies zu bestätigen, bestimmen wir $P(\omega, t)$ auf andere Weise. Anstatt \dot{z} aus Gl. (10.16) zu berechnen und mit $F(t)$ aus Gl. (10.16) zu multiplizieren, können wir den Leistungsverbrauch des Oszillators auch berechnen indem wir $F(t)$ direkt verwenden, wie in Gl. (10.12) ausgedrückt, und es mit \dot{z} multiplizieren. Auf diesem Weg erhalten wir für $P(\omega, t)$ die Gleichung

$$P(\omega, t) = F(t)\dot{z} = m\dot{z}\ddot{z} + m\omega_0^2 z\dot{z} + \frac{m}{\tau}\dot{z}\ddot{z} \quad (10.25)$$

Dabei haben wir die Glieder auf der rechten Seite der Gleichung für unseren Zweck etwas umgeordnet. Mit den Beziehungen

$$\dot{z}\ddot{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{z}^2 \quad \text{und} \quad z\dot{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2$$

können wir diese Gleichung umschreiben zu

$$P(\omega, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 z^2}{2} \right) + \frac{m}{\tau} \dot{z}^2 = \frac{d}{dt} (T + U) + \frac{m}{\tau} \dot{z}^2 \quad (10.26)$$

wobei T und U die kinetische Energie des Massenpunkts und die potenzielle Energie der Feder sind, und $E = T + U$ die Gesamtenergie des Oszillators. Um etwas über \dot{E} zu erfahren, berechnen wir seinen zeitlich gemittelten Wert. Dazu ordnen wir diese Gleichung zunächst so um, dass sie lautet

$$\dot{E} = P(\omega, t) - \frac{m}{\tau} \dot{z}^2 \quad (10.27)$$

und dann berechnen wir den zeitlich gemittelten Wert der rechten Seite dieser Gleichung. Aus Gl. (10.23) und Gl. (10.27) kennen wir bereits den zeitgemittelten Wert von $P(\omega, t)$, sodass wir nur den Zeitmittelwert des zweiten Gliedes der rechten Seite bestimmen müssen. Wie müssen also berechnen

$$\frac{m}{\tau} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \dot{z}^2 dt = \frac{m\rho^2 F_0^2 \omega^2}{\tau} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \sin^2(\omega t + \varphi) dt$$

Indem wir dieselben trigonometrischen Identitäten wie bei der Herleitung von Gl. (10.21) nutzen, können wir $\sin^2(\omega t + \varphi)$ schreiben als

$$\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\omega t) \sin(2\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \cos(2\varphi)$$

Da die Zeitmittelwerte von $\sin(2\omega t)$ und $\cos(2\omega t)$ Null sind, beträgt der Zeitmittelwert des zweiten Gliedes der rechten Seite von Gl. (10.27)

$$\frac{m}{\tau} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \dot{z}^2 dt = \frac{m\rho^2 F_0^2 \omega^2}{2\tau} \quad (10.28)$$

Das ist jedoch gerade der Wert von $\overline{P(\omega)}$ und daher ist der Zeitmittelwert der rechten Seite von Gl. (10.27) Null. Damit wissen wir, dass der zeitlich gemittelte Wert von \dot{E} Null sein muss, d.h. $E = const.$ Natürlich muss der Oszillatator zuerst eingeschaltet werden und es gibt einen kurzen Anlauf wo E nicht konstant ist, währenddessen die Energie im Oszillatator gespeichert wird, die er als einfacher harmonischer Oszillatator hätte. Danach bleibt die gespeicherte Energie des Oszillators konstant und der weitere Leistungsverbrauch dient zur Kompensation von Reibungsverlusten, d.h. der Kompensation des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von Gl. (10.27). Die vom Oszillatator verbrauchte Energie wird kontinuierlich ersetzt und damit bleibt die im Oszillatator gespeicherte Energie $T + U$ konstant, während ihre Form zwischen kinetischer Energie des sich bewegenden Massenpunkts und potenzieller Energie der Feder oszilliert. Der Zeitmittelwert von \dot{E} ist Null, aber nicht der Zeitmittelwert von E . Die Energie des Oszillators beträgt

$$E(\omega, t) = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 z^2}{2}$$

Aus Gl. (10.28) kennen wir bereits den Zeitmittelwert von \dot{z}^2 , dem ersten Glied auf der rechten Seite. Auf die gleiche Weise wie für \dot{z}^2 , kann man schnell feststellen, dass der Zeitmittelwert von z^2 gegeben ist durch

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} z^2 dt = \frac{m\rho^2 F_0^2 \omega_0^2}{4} \quad (10.29)$$

Damit wird der Zeitmittelwert von E

$$\overline{E(\omega)} = \frac{m\rho^2 F_0^2}{4} (\omega^2 + \omega_0^2) \quad (10.30)$$

In Gl. (10.8) haben wir mit Q ein Maß für die Oszillatoreffizienz eingeführt. Dort haben wir gesagt, dass Q ein Maß für die in einem Oszillatator gespeicherte Energie im Verhältnis zu der Energiemenge ist, die er über die Zeit ω^{-1} verliert. Wir kennen jetzt den Zeitmittelwert $\overline{E(\omega)}$ der gespeicherten Oszillatorenergie und wir wissen, dass Energieverluste wegen Reibung durch $\overline{P(\omega)}$ kompensiert werden. Daher können wir Q aus Gl. (10.8) mit Gl. (10.23) und Gl. (10.30) schreiben als

$$Q = \omega \frac{\overline{E(\omega)}}{\overline{P(\omega)}} = \omega \cdot \frac{\frac{m\rho^2 F_0^2}{4} (\omega^2 + \omega_0^2)}{\frac{m\rho^2 F_0^2 \omega^2}{2\tau}} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\omega/\tau} \stackrel{\downarrow}{=} \omega_0 \tau \quad \omega \rightarrow \omega_0 \quad (10.31)$$

Manchmal wird Q als Kehrwert des Verhältnisses von $\Delta\omega$, der vollen Halbwertsbreite von $\overline{P(\omega)}$ und der Resonanzfrequenz ω_0 definiert, was das gleiche Ergebnis liefert, d.h.

$$Q^{-1} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0\tau}$$

Während diese Definition eine schnelle Bestimmung von Q ermöglicht, indem die Größen $\Delta\omega$ und ω_0 einer Messkurve entnommen werden, sagt sie uns nichts über das Verhalten von $Q(\omega)$ in Nähe der Resonanz.

10.2 Gekoppelte Schwingungen

Mit den diskutierten Modellen harmonischer Schwingungsprozesse lassen sich viele Phänomene in der Natur erklären. Besonders wichtig sind Resonanzprozesse, bei denen einem System Energie mit einer Frequenz zugeführt wird, die seiner Eigenfrequenz entspricht. In diesem Fall wird die Energieübertragung in das System hocheffizient. Wir finden ein solches Resonanzverhalten auf allen Skalen, von Quantenoszillatoren im ganz Kleinen bis hin zu Orbitalresonanzen von Planeten. Oft können wir die Physik makroskopischer Systeme beschreiben, indem wir die Wechselwirkungen zwischen vielen kleinen Objekten wie Atomen in Festkörpern mithilfe gekoppelter Oszillatoren beschreiben. Ein einfaches makroskopisches gekoppeltes Oszillatorsystem besteht aus zwei federgekoppelten Pendel. Dazu werfen wir zuerst einen Blick auf das einfache Pendel.

Wie Abb. 10.10 zeigt, besteht ein einfaches Pendel aus einer Masse m , die über eine Schnur der Länge l an einem Punkt P aufgehängt ist. Bei einer kleinen Änderung des Auslenkwinkels $d\varphi$ bewegt sich die Pendelmasse m um die Strecke $l \cdot d\varphi$, angetrieben durch die Rückstellkraft der Schwerkraftkomponente mg senkrecht zu l . Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz lautet die Bewegungsgleichung somit

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

Für kleine Auslenkungen können wir $\sin \varphi$ durch φ ersetzen und damit wird die Bewegungsgleichung des einfachen Pendels

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Ein Blick auf Gl. (10.1) zeigt, das ist die Bewegungsgleichung eines einfachen harmonischen Oszillators mit der «Federkonstante» $k = mg/l$. Die Lösung lautet somit

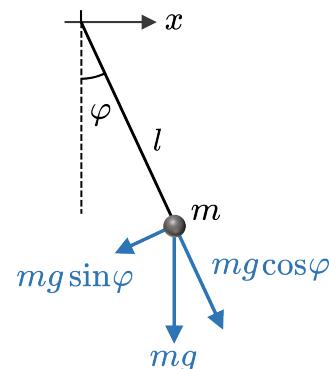


Abb. 10.10

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t \quad \text{wobei} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (10.32)$$

Damit ist die kinetische Energie des einfachen Pendels gegeben durch

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{m\omega_0^2}{2} l^2 \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

wobei wir die Beziehung $x = l\varphi$ verwendet haben, die für kleine Schwingungen gilt. Für die potenzielle Energie U lesen wir aus Abb. 10.10 ab:

$$U = mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{mgl}{2} \varphi^2 = \frac{m\omega_0^2}{2} l^2 \varphi_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

wobei wir $2\cos^2\varphi = 1 - \varphi^2$ verwendet haben, was für kleine Schwingungen gilt. Für die Gesamtenergie $E = T + U$ des einfachen Pendels erhalten wir also

$$E = \frac{m\omega_0^2}{2} l^2 \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{m\omega_0^2}{2} l^2 \varphi_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{m\omega_0^2}{2} l^2 \varphi_0^2 \quad (10.33)$$

Die Gesamtenergie des einfachen Pendels ist konstant und wird durch die anfängliche Auslenkung φ_0 , die wir ihm geben, durch die Pendelmasse und durch die Länge der Pendelschnur bestimmt. Das alles kann natürlich nur so sein, weil wir davon ausgegangen sind, dass es keine Reibungsverluste gibt.

10.2.1 Zwei federgekoppelte Pendel

Der obige kurze Blick auf das einfache Pendel hat uns gezeigt, dass die Bewegung des einfachen Pendels bei kleinen Auslenkungen harmonisch ist. Nun nehmen wir zwei identische einfache Pendel und koppeln sie mit einer Feder, wie in Abb. 10.11 gezeigt. Solange wir die Auslenkung jedes Pendels klein halten, haben wir somit ein Modell für zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren. Die durch die Schwerkraft verursachte Rückstellkraft wirkt für jedes Pendel in Abb. 10.11 auf die gleiche Weise wie für das Pendel in Abb. 10.10. Allerdings bringt die Federkopplung eine zusätzliche Rückstellkraft mit sich, die Rückstellkraft der Feder. Anstelle der Ablenkinkel φ_1 und φ_2 verwenden wir als unabhängige Koordinaten die Verschiebungen x_1 und x_2 . Zunächst schreiben wir mit Newton, genau wie für das einfache Pendel, die Bewegungsgleichungen für jedes der entkoppelten Pendel hin:

$$ml\ddot{\varphi}_{1,2} = -mg \sin \varphi_{1,2}$$

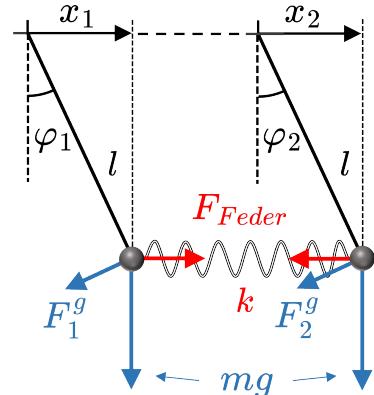


Abb. 10.11

Mit $x_{1,2} = l \sin \varphi_{1,2}$ und $\ddot{\varphi}_{1,2} = \ddot{x}_{1,2}/l$ wird mit $\sin \varphi_{1,2} \approx \varphi_{1,2}$ daraus

$$m\ddot{x}_{1,2} = -\frac{mg}{l}x_{1,2}$$

Um die beiden Pendel zu koppeln, fügen wir die Rückstellkraft der Feder hinzu

$$F_{Feder} = k\Delta x = k(x_2 - x_1)$$

Wie in Abb. 10.11 skizziert, zeigt diese Kraft für das linke Pendel in die Richtung von x_1 und für das rechte Pendel in die entgegengesetzte Richtung von x_2 . Damit sind die Bewegungsgleichungen für die beiden Pendel

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 + k(x_2 - x_1) \quad (10.34a)$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 - k(x_2 - x_1) \quad (10.34b)$$

Nach umschreiben von Gl. (10.34a) und Gl. (10.34b) wird daraus

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right)x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0 \quad (10.35a)$$

$$\ddot{x}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right)x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0 \quad (10.35b)$$

Diese beiden Differentialgleichungen haben die bekannten Lösungen:

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} \quad ; \quad x_2 = A_2 e^{i\omega_1 t} \quad \text{und} \quad x_1 = A_1 e^{i\omega_2 t} \quad ; \quad x_2 = A_2 e^{i\omega_2 t}$$

Das Einsetzen des Lösungsansatzes $\omega = \omega_{1,2}$ in die Bewegungsgleichung für x_1 (Gl. (10.35a)) ergibt

$$-\omega^2 A_1 e^{i\omega t} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) A_1 e^{i\omega t} - \frac{k}{m} A_2 e^{i\omega t} = 0$$

woraus folgt

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l} - \frac{k}{m} \frac{A_2}{A_1} \quad (10.36)$$

Wie man leicht prüfen kann, erhält man das gleiche Ergebnis, wenn man den obigen Lösungsansatz für x_1 und x_2 in die Bewegungsgleichung für x_2 , also Gl. (10.35b) einsetzt. Gl. (10.36) wird hilfreich, wenn wir einen anderen Weg finden, $\omega_{1,2}$ zu bestimmen, da wir dann etwas über das Amplitudenverhältnis $A_1 : A_2$ sagen können. Hierzu überführt man die Differentialgleichungen für x_1 und x_2 in Differentialgleichungen für die Normalkoordinaten des Zweipendelsystems. Dazu subtrahieren wir zunächst Gl. (10.34b) von Gl. (10.34a) und addieren dann Gl. (10.34a) und Gl. (10.34b) und erhalten die Gleichungen:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -m\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)(x_1 - x_2) \quad (10.37a)$$

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -m\frac{g}{l}(x_1 + x_2) \quad (10.37b)$$

Nun führen wir die Normalkoordinaten λ_a und λ_b ein mit

$$\lambda_a = x_1 - x_2 \quad \text{und} \quad \lambda_b = x_1 + x_2$$

Die in Normalkoordinaten ausgedrückten Koordinaten x_1 und x_2 sind dann

$$x_1 = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\lambda_b - \lambda_a}{2}$$

In Normalkoordinaten wird aus Gl. (10.37a) und aus Gl. (10.37b)

$$\ddot{\lambda}_a + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\lambda_a = 0 \quad (10.38a)$$

$$\ddot{\lambda}_b + \frac{g}{l}\lambda_b = 0 \quad (10.38b)$$

Offensichtlich beschreiben Gl. (10.38a) und Gl. (10.38b) harmonische Schwingungen in den Normalkoordinaten λ_a und λ_b mit Schwingungsfrequenzen

$$\omega_s = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Die Indizes s und p zeigen an, dass sich ω_s wie in Abb. 10.12 skizziert auf den symmetrischen oder gegenphasigen Schwingungsmodus mit $A_1 = -A_2$ bezieht und ω_p bezieht sich auf den parallelen oder gleichphasigen Schwingungsmodus mit $A_1 = A_2$. Das wissen wir, weil ω_p und ω_s die Lösungen von Gl. (10.36) sein müssen. Damit wird aus Gl. (10.36)

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_p^2 = \frac{g}{l} & \Rightarrow A_1 = A_2 \\ \omega_2^2 = \omega_s^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} & \Rightarrow A_1 = -A_2 \end{cases}$$

Um Gl. (10.38a) und Gl. (10.38b) zu lösen, wenden wir den Lösungsansatz an, den wir in den vorherigen Abschnitten erfolgreich für solche Gleichungen verwendet haben:

$$\lambda_a = A_a e^{i\omega_s t} \quad \text{und} \quad \lambda_b = A_b e^{i\omega_p t}$$

Das gibt uns für x_1 und x_2

$$x_1 = \frac{1}{2}A_a e^{i\omega_s t} + \frac{1}{2}A_b e^{i\omega_p t} \quad (10.39a)$$

und

$$x_2 = \frac{1}{2}A_b e^{i\omega_p t} - \frac{1}{2}A_a e^{i\omega_s t} \quad (10.39b)$$

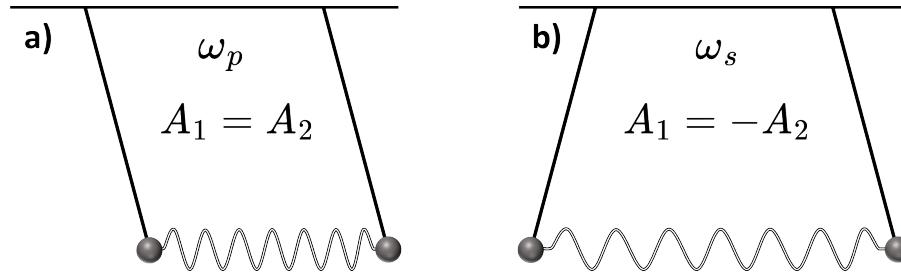


Abb. 10.12: Parallele oder gleichphasige (a) und symmetrische oder gegenphasige (b) Lösung der Bewegungsgleichung von zwei durch eine Feder gekoppelte identische Pendel.

Vergleicht man diese Lösung mit der Anfangslösung der Differentialgleichungen Gl. (10.35a) und Gl. (10.35b) mit $\omega_1 = \omega_p$ und $\omega_2 = \omega_s$, d.h.

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_p t} \quad ; \quad x_2 = A_2 e^{i\omega_p t} \quad \text{und} \quad x_1 = A_1 e^{i\omega_s t} \quad ; \quad x_2 = A_2 e^{i\omega_s t}$$

dann sieht man, dass für $t = 0$ gelten muss

$$A_a = A_1 - A_2 \quad \text{und} \quad A_b = A_1 + A_2$$

Einsetzen in Gl. (10.39a) und Gl. (10.39b) ergibt

$$x_1 = \frac{1}{2} [A_1 e^{i\omega_s t} - A_2 e^{i\omega_s t} + A_1 e^{i\omega_p t} + A_2 e^{i\omega_p t}]$$

und

$$x_2 = \frac{1}{2} [A_1 e^{i\omega_p t} + A_2 e^{i\omega_p t} - A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{i\omega_s t}]$$

Diese Gleichungen können umgeschrieben werden zu

$$x_1 = \frac{e^{i(\frac{\omega_p+\omega_s}{2})t}}{2} \left[A_1 \left(e^{i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} + e^{-i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} \right) - A_2 \left(e^{i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} - e^{-i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} \right) \right]$$

und

$$x_2 = \frac{e^{i(\frac{\omega_p+\omega_s}{2})t}}{2} \left[A_1 \left(e^{-i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} - e^{i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} \right) - A_2 \left(e^{i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} + e^{-i(\frac{\omega_s-\omega_p}{2})t} \right) \right]$$

Definieren wir jetzt

$$\frac{\omega_p + \omega_s}{2} = \bar{\omega} \quad \text{und} \quad \omega_s - \omega_p = \Delta\omega$$

dann wird aus den Gleichungen für x_1 und x_2

$$x_1 = A_1 e^{i\bar{\omega}t} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - iA_2 e^{i\bar{\omega}t} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

und

$$x_2 = A_2 e^{i\bar{\omega}t} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - iA_1 e^{i\bar{\omega}t} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Die Amplituden A_1 und A_2 folgen aus der Wahl der Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad x_2(0) = l\alpha$$

(wir erinnern uns: Der Winkel α muss klein sein). Das heißt, Pendel Nummer 1 wird festgehalten, Pendel Nummer 2 wird um den Winkel α ausgelenkt und dann werden bei $t = 0$ beide Pendel losgelassen. Aus diesen Anfangsbedingungen folgt $A_1 = 0$ und $A_2 = \alpha$. Damit lauten die Gleichungen für x_1 und x_2

$$x_1 = -il\alpha \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) [\cos(\bar{\omega}t) + i \sin(\bar{\omega}t)]$$

und

$$x_2 = l\alpha \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) [\cos(\bar{\omega}t) + i \sin(\bar{\omega}t)]$$

Für den Realteil der allgemeinen Lösung erhält man somit

$$x_1 = \left[l\alpha \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \sin(\bar{\omega}t) \tag{10.40a}$$

und

$$x_2 = \left[l\alpha \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \cos(\bar{\omega}t) \tag{10.40b}$$

mit

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

und

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}} + \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

Die Amplitude der durch Gl. (10.40a) und Gl. (10.40b) beschriebenen Schwingungen ist zeitabhängig mit der Frequenz $\Delta\omega/2$ und beide Pendel schwingen mit der Frequenz $\bar{\omega}$, jedoch um 90° phasenverschoben. Da eine Amplitude mit dem Sinus schwingt (x_1), während die andere mit dem Kosinus schwingt (x_2), ist eine Amplitude Null, wenn die andere ihren Maximalwert erreicht und umgekehrt. Durch die Kopplung überträgt das zum Zeitpunkt $t = 0$ um α ausgelenkte Pendel (x_2) seine Energie auf das andere Pendel (x_1) und kommt zur Ruhe, wenn dieses seine maximale Amplitude erreicht hat; dann wiederholt sich der Vorgang in umgekehrter Richtung.

Energie der Schwingung zweier federgekoppelter Pendel

Die kinetische Energie ist die Summe der kinetischen Energien der beiden Pendel

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2}$$

Die potenzielle Energie des Systems ist die Summe der potenziellen Energien der beiden Pendelmassen und der potenziellen Energie der Feder. Für die potenziellen Energien der Pendelmassen liest man aus Abb. 10.11

$$U = mg(l - l \cos \varphi_1) + mg(l - l \cos \varphi_2) = 2mgl - mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$$

Die potenzielle Energie der Feder beträgt

$$U_{Feder} = \frac{k}{2}l^2(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2$$

Somit beträgt die Gesamtenergie des federgekoppelten Pendelsystems

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}l^2(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2 + 2mgl - mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$$

Jetzt nutzt man die Näherung für kleine Auslenkungen (d.h. kleine Schwingungen)

$$\sin \varphi_{1,2} \approx \varphi_{1,2} \quad \text{und} \quad \cos \varphi_{1,2} \approx 1 - \frac{\varphi_{1,2}^2}{2}$$

Damit wird die Gesamtenergie E

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}l^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + mgl\left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2}\right)$$

Mit $l\varphi_{1,2} = x_{1,2}$ ersetzt man nun $\varphi_{1,2}$ durch $x_{1,2}/l$ und erhält

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{mg}{2l}(x_1^2 + x_2^2) \quad (10.41)$$

Um diese Gleichung auszuwerten, müssen wir die jeweiligen Werte für $x_{1,2}$ und $\dot{x}_{1,2}$ einsetzen. Eine kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 &= \frac{l^2\alpha^2}{2}(\omega_s^2 \sin^2(\omega_s t) + \omega_p^2 \sin^2(\omega_p t)) \\ (x_1 - x_2)^2 &= l^2\alpha^2 \cos^2(\omega_s t) \\ x_1^2 + x_2^2 &= \frac{l^2\alpha^2}{2}(1 + \cos^2(\omega_s t) \cos^2(\omega_p t) - \sin^2(\omega_s t) \sin^2(\omega_p t)) \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in Gl. (10.41) ergibt dann

$$E = \frac{ml^2\alpha^2}{4} \cdot (\omega_s^2 + \omega_p^2) = \frac{ml^2\alpha^2}{2} \cdot \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \quad (10.42)$$

Da wir Reibungsverluste nicht berücksichtigt haben, überrascht es nicht, dass die Energie des Systems aus zwei federgekoppelten Pendeln konstant ist. Ein Vergleich mit der Energie des einfachen Pendels aus Gl. (10.33) zeigt, dass bei gleicher Erstauslenkung die Gesamtenergie des einfachen Pendels und der beiden federgekoppelten Pendel identisch wäre, wenn $\omega_s^2 + \omega_p^2$ gleich $2\omega_0^2$ wäre. Beim federgekoppelten Pendelsystem verteilt sich die Gesamtenergie auf die beiden Schwingungsbewegungen ω_s und ω_p .

10.2.2 Stretschwiegung eines Moleküls

Zur Stretschwiegung eines linearen dreiatomigen Moleküls betrachten wir das Modell des CO₂-Moleküls in Abb. 10.13. Obwohl das O-Atom etwa 30% schwerer ist als das C-Atom, ist der Radius des C-Atoms fast 40% größer als der des O-Atoms, da der Sauerstoffkern mit seinen acht Protonen seine Elektronen stärker anzieht

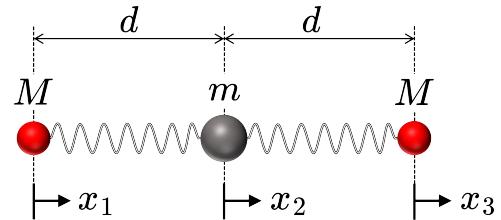


Abb. 10.13

als der Kohlenstoffkern mit seinen sechs Protonen. In unserem CO₂-Modell sind die äußeren O-Atome der Masse M mit dem mittleren C-Atom der Masse m durch zwei identische Federn verbunden, die jeweils die Federkonstante k haben. Der Gleichgewichtsabstand für identische Federn, d.h. der jeweilige Molekülabstand bei entspannter Feder, soll d sein. Die natürliche Wahl der Koordinaten für dieses Problem sind die linearen Verschiebungen (Kompression oder Dehnung der Federn) x_1 , x_2 und x_3 . Die Rückstellkräfte der beiden Federn sind proportional zu $x_2 - x_1$ und $x_2 - x_3$. Falls $x_2 - x_1 > 0$, ist die linke Feder gedehnt und zieht das linke O-Atom nach rechts in Richtung von x_1 und das mittlere C-Atom nach links in die negative x_2 -Richtung. Falls $x_3 - x_2 > 0$, ist die rechte Feder gedehnt und zieht das rechte O-Atom in die negative x_3 -Richtung und das C-Atom in die positive x_2 Richtung. Rückstellkräfte, die in eine positive Koordinatenrichtung zeigen, werden als positiv gewertet, solche, die in eine negative Koordinatenrichtung zeigen, als negativ. Somit sind die Bewegungsgleichungen für die drei Massen gegeben durch

$$M\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$$

$$M\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$$

Wie zuvor verwenden wir den Lösungsansatz $x_i = A_i e^{i\omega t}$. Setzen wir dies in die obigen Gleichungen ein, erhalten wir ein System aus drei linearen Gleichungen in den Koordinatenverschiebungen x_i , die wir in Matrixform schreiben als

$$\begin{bmatrix} k - M\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.43)$$

Ein Matrixgleichungssystem der Form $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \mathbf{0}$ hat nur dann eine Lösung, wenn die Determinante der Matrix verschwindet, also $\det|\underline{\underline{A}}| = 0$. Damit Gl. (10.43) eine Lösung hat, muss also gelten

$$\begin{aligned} 0 &= (k - M\omega^2)(2k - m\omega^2)(k - M\omega^2) - k^2(k - M\omega^2) - (k - M\omega^2)k^2 \\ &= (k - \omega^2 M)\omega^2 [\omega^2 m M - k(2M + m)] \end{aligned}$$

Damit sind die Lösungen (nur positive Wurzeln)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad ; \quad \omega_2 = 0 \quad ; \quad \omega_3 = \sqrt{k\left(\frac{2}{m} + \frac{1}{M}\right)} = \sqrt{\frac{k}{M}\left(1 + \frac{2}{\mu}\right)}$$

wobei $\mu = m/M$. Zur Bestimmung der Eigenvektoren und Schwingungsmodi setzt man diese Eigenwerte in Gl. (10.43) ein und wendet den Gauß-Algorithmus an. Mit diesem kann man die Matrix in Gl. (10.43) in eine obere Dreiecksmatrix umwandeln, wo in der letzten Zeile die Koeffizienten für alle Koordinaten außer für x_3 verschwinden, was dann die Lösung für x_3 liefert. Falls alle Koeffizienten in der letzten Zeile verschwinden, können wir für x_3 einen beliebigen Parameter wählen. Zulässige Matrixoperationen, also solche Operationen, die die Lösungen für x_1 , x_2 und x_3 unbeeinflusst lassen, sind:

1. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$.
2. Vertauschung von zwei Zeilen.
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Damit können wir beginnen, das Gleichungssystem Gl. (10.43) für ω_1 zu lösen:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & -k & 0 & 0 \\ -k & k(2 - \mu) & -k & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{ccc|c} & & & \\ k & k(\mu - 2) & k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} -1 \times 2. \text{ Zeile} \\ -1 \times 1. \text{ Zeile} \\ 1. \text{ Zeile} - 3. \text{ Zeile} \end{array}$$

Durch Rückwärtssubstitution erhält man für den Eigenwert

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{den Eigenvektor} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

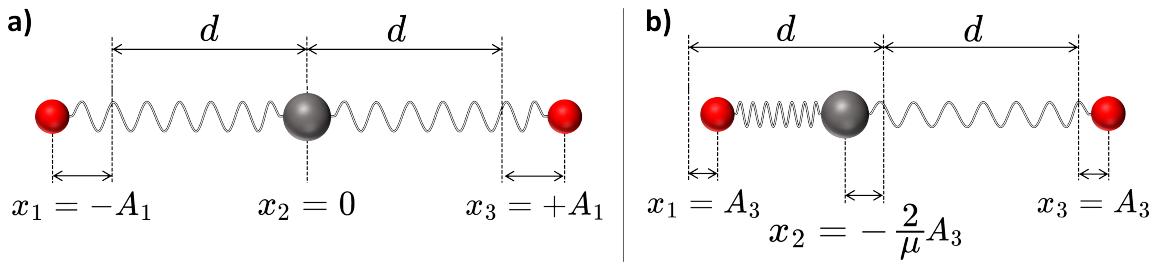


Abb. 10.14: Schwingungsmodi eines linearen dreiatomigen Moleküls: (a) äußere Atome schwingen gegenphasig, während das Zentralatom in seiner Ruhelage bleibt; (b) Die äußeren Atome schwingen gleichphasig zueinander und gegenphasig zum mittleren Atom.

Wie in Abb. 10.14a skizziert, schwingen die äußeren Atome gegenphasig, während das Zentralatom in seiner Ruhelage bleibt. Da die Masse des Zentralatoms in ihrer Ruhelage bleibt, ist die Bewegung der äußeren Atome unabhängig vom Massenverhältnis μ .

Nun setzt man den Eigenwert ω_2 in Gl. (10.43) ein und löst das Gleichungssystem erneut mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k & -2k & k & 0 \\ 0 & k & -k & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \end{array}; \begin{array}{l} -1 \times 2. \text{ Zeile} \\ 2. \text{ Zeile} + 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k & -2k & k & 0 \\ 0 & k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; \begin{array}{l} 2. \text{ Zeile} + 3. \text{ Zeile} \end{array}$$

Durch Rückwärtssubstitution erhält man für den Eigenwert $\omega_2 = 0$ den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Tatsache, dass alle drei Massen die gleiche Auslenkung A_2 erfahren, legt nahe, dass sich das Molekül als Ganzes bewegt, ohne dass es zu Schwingungen kommt, und zwar unabhängig vom Massenverhältnis μ . Natürlich kann t in diesem Fall auch einfach Null sein, d.h., es bewegt sich überhaupt nichts. Zuletzt setzt man den dritten Eigenwert ω_3 in Gl. (10.43) ein und löst das Gleichungssystem erneut mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -\frac{2k}{\mu} & -k & 0 & 0 \\ -k & -k\mu & -k & 0 \\ 0 & -k & -\frac{2k}{\mu} & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k & k\mu & k & 0 \\ 0 & k & \frac{2k}{\mu} & 0 \\ 0 & -k & -\frac{2k}{\mu} & 0 \end{array}$$

; $-1 \times 2.$ Zeile
 $; 1.$ Zeile $- \frac{2}{\mu} \times 2.$ Zeile

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k & k\mu & k & 0 \\ 0 & k & \frac{2k}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

; $2.$ Zeile + $3.$ Zeile

Durch Rückwärtssubstitution erhält man für den Eigenwert

$$\omega_3 = \sqrt{k \left(\frac{2}{m} + \frac{1}{M} \right)} \quad \text{den Eigenvektor} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2/\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall schwingen, wie in Abb. 10.14b skizziert, die beiden äußeren Atome gleichphasig zueinander und gegenphasig (um 180° phasenverschoben) zum mittleren Atom. Dabei hängt die Amplitude der Auslenkung des Zentralatoms vom Massenverhältnis μ ab. Ist beispielsweise $\mu = 1$, dann schwingt das mittlere Atom mit der doppelten Amplitude der äußeren Atome. Ist $\mu = 2$, das mittlere Atom hat also die doppelte Masse eines äußeren Atoms, schwingen alle drei Atome mit der gleichen Amplitude, das mittlere Atom schwingt jedoch gegenphasig zu den äußeren Atomen.

Energie der Streckschwingung

Die in Abb. 10.14a abgebildete Schwingung wird als symmetrischer Streckmodus des Moleküls bezeichnet und die in Abb. 10.14b gezeigte Schwingung wird als antisymmetrischer Streckmodus des Moleküls bezeichnet. Um die mit diesen Streckmodi verbundenen Energien zu berechnen, schreiben wir zunächst die Lösungen für $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ hin, also die Realteile von $x_i = A_i e^{i\omega t}$ für die jeweiligen Frequenzen. Für den symmetrischen Streckmodus in Abb. 10.14a lautet die Lösung

$$x_1(t) = -A_1 \cos(\omega_1 t) \quad ; \quad x_2(t) = 0 \quad ; \quad x_3(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$$

und für den antisymmetrischen Streckmodus in Abb. 10.14b lautet die Lösung

$$x_{1,2}(t) = A_3 \cos(\omega_3 t) \quad ; \quad x_2(t) = -\frac{2A_3}{\mu} \cos(\omega_3 t)$$

Zunächst zum symmetrischen Streckmodus. Die kinetische Energie ist in diesem Fall gegeben durch

$$T_s = \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{M}{2} \dot{x}_3^2 = MA_1^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t) = kA_1^2 \sin^2(\omega_1 t)$$

Die potenzielle Energie ist die Summe der potenziellen Energien der Federn

$$U_s = \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{k(x_3 - x_2)^2}{2} = \frac{k}{2}(x_1^2 + x_3^2) = kA_1^2 \cos^2(\omega_1 t)$$

Daher beträgt die Gesamtenergie E_s der symmetrischen Streckschwingung

$$E_s = T + U = kA_1^2 \sin^2(\omega_1 t) + kA_1^2 \cos^2(\omega_1 t) = kA_1^2$$

Nun zum antisymmetrischen Streckmodus. In diesem Fall ist die kinetische Energie gegeben durch

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{M}{2} \dot{x}_3^2 = \left(M + \frac{2m}{\mu^2} \right) A_3^2 \omega_3^2 \sin^2(\omega_3 t) \\ &= M \left(1 + \frac{2}{\mu} \right) A_3^2 \frac{k}{M} \left(1 + \frac{2}{\mu} \right) \sin^2(\omega_3 t) = kA_3^2 \left(1 + \frac{2}{\mu} \right)^2 \sin^2(\omega_3 t) \end{aligned}$$

Um die potenzielle Energie des antisymmetrischen Streckmodus zu erhalten, addieren wir erneut die in den beiden Federn gespeicherten potenziellen Energien, d.h.

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{k(x_3 - x_2)^2}{2} \\ &= \frac{k}{2} \left(-\frac{2}{\mu} - 1 \right)^2 A_3^2 \cos^2(\omega_3 t) + \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{\mu} \right)^2 A_3^2 \cos^2(\omega_3 t) \\ &= kA_3^2 \left(1 + \frac{2}{\mu} \right)^2 \cos^2(\omega_3 t) \end{aligned}$$

Damit ist die Gesamtenergie E_a der antisymmetrischen Streckschwingung gegeben durch

$$E_a = T_a + U_a = kA_3^2 \left(1 + \frac{2}{\mu} \right)^2 (\sin^2(\omega_3 t) + \cos^2(\omega_3 t))$$

was sich vereinfacht zu

$$E_a = kA_3^2 \left(1 + \frac{2}{\mu} \right)^2$$

Das Modell vernachlässigt Reibungsverluste und daher sind E_s und E_a konstant. Da nichts für ewig schwingt kann unser Molekülmodell nicht richtig sein, auch wenn es uns ein gutes Grundverständnis molekularer Schwingungen vermittelt. Wir können also nicht erwarten, dass es die korrekten Energieniveaus für die Schwingungsmodi liefert. Das ist

mit klassischer Mechanik gar nicht möglich, da die Welt des Kleinsten, zu der Moleküle gehören, die Werkzeuge der Quantenmechanik erfordert. Aber wir können unsere Ergebnisse mit Messungen vergleichen, um zu sehen, wie nahe der klassische Ansatz der Wirklichkeit kommt. Die Anregungsfrequenzen der Schwingungen liegen im Infraroten. Mit Infrarotlicht kann aber nur der antisymmetrische Modus angeregt werden. Mit dem symmetrischen Modus ist keine Änderung des Dipolmoments verbunden, und daher kann Licht nicht mit diesem koppeln. Er kann aber auf andere Weise angeregt werden, z.B. durch Streuung von Elektronen oder Photonen. Für CO₂ ist die Anregungsenergie des symmetrischen Modus $E_s^m = 172 \text{ meV}$ und des antisymmetrischen Modus $E_a^m = 291 \text{ meV}$. Ein meV steht für ein Millielektronenvolt, einem Tausendstel eines Elektronenvolts ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Es handelt sich also um winzige Energiemengen.

Die Quantenmechanik sagt uns, dass die Energiedifferenz zweier benachbarten Schwingungsniveaus eines Moleküls $E_{vib} = \hbar\omega$ ist, wobei \hbar die Plancksche Konstante $h = 6.6262 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ dividiert durch 2π ist. Bei der maximalen Verschiebung der Sauerstoffatome im symmetrischen Schwingungsmodus ist die kinetische Energie Null und die potenzielle Energie gleich kA_1^2 . Daher können wir postulieren, dass

$$E_s^{vib} = \hbar\omega_1 = kA_1^2 = M\omega_1^2 A_1^2$$

woraus folgt

$$A_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_1}}$$

Den Wert von ω_1 können wir aus dem Messwert E_s^m berechnen zu

$$\omega_1 = \frac{E_s^m}{\hbar} = \frac{172 \cdot 10^{-3} \times 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 2.61 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Damit erhalten wir für die Amplitude der symmetrischen Schwingung

$$A_1 = \sqrt{\frac{1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \times 2.61 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}}} = 0.0039 \text{ nm}$$

Da die C-O-Bindungslänge 0.113 nm beträgt, bedeutet dies, dass die Amplitude der symmetrischen Schwingung etwa 3.5% der C-O-Bindungslänge beträgt. Aus $k = M\omega_1^2$ können wir die Federkonstante bestimmen zu

$$k = 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \times 6.81 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-2} = 1.83 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$$

Jetzt wiederholen wir diese Rechnung für den antisymmetrischen Schwingungsmodus. In diesem Fall haben wir

$$E_a^{vib} = \hbar\omega_3 = kA_3^2 \left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^2 = M\omega_3^2 A_3^2 \left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^1$$

woraus folgt

$$A_3 = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_3}} \frac{\mu}{\mu + 2}$$

Den Wert von ω_3 können wir aus dem Messwert E_a^m berechnen zu

$$\omega_3 = \frac{E_a^m}{\hbar} = \frac{291 \cdot 10^{-3} \times 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 4.42 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Mit $\mu/(\mu + 2) = 3/11$ ist dann die Amplitude der antisymmetrischen Schwingung

$$A_3 = \sqrt{\frac{1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \times 4.42 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}}} \frac{3}{11} = 0.0016 \text{ nm}$$

und für die Federkonstante k erhalten wir bei antisymmetrischer Schwingung

$$k = \frac{M\mu}{\mu + 2} \omega_3^2 = \frac{3}{11} \cdot 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \times 1.96 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-2} = 1.42 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$$

Die hier berechnete Federkonstante für den antisymmetrischen Schwingungsmodus fällt um etwa 22% niedriger aus als die für den symmetrischen Schwingungsmodus. Unsere Annahme war, dass die Federkonstanten aller Schwingungsmodi gleich sind, aber die Auswertung experimenteller Daten zeigt uns, dass dies nicht der Fall ist. Unser klassisches harmonisches Oszillatormodell ist in dieser Hinsicht eindeutig unzureichend. Es gibt uns aber immer noch ein grundlegendes Verständnis dieser linearen Schwingungsmodi des CO₂-Moleküls. Es gibt einen weiteren einfachen Schwingungsmodus dieses dreiatomigen Moleküls, nämlich eine Biegeschwingung. Man kann diese Biegeschwingung auf ähnliche Weise modellieren, wie wir es gerade für die lineare Schwingung des CO₂-Moleküls getan haben. Die Berechnungen sind etwas umständlicher, aber eine gute Übung.

11. Wellenbewegung

Nicht weniger grundlegend wie die gerade diskutierten harmonischen Oszillatorgleichungen und eng mit ihnen verwandt sind Wellengleichungen. Die Natur kennt viele Arten von Wellen wie z.B. akustische Wellen, Flüssigkeitswellen, Plasmawellen, Lichtwellen, Gravitationswellen und viele mehr. Jedes Kind kennt die kreisförmigen Wellen, die ein in einen ruhigen Teich geworfener Stein auf dessen Oberfläche erzeugt, von der Stelle ausgehend, wo der Stein die Wasseroberfläche durchbricht. Akustischen Wellen sind eine andere Art von Wellen, die wir z.B. beim Sprechen erzeugen. Diese Schallwellen breiten sich durch das Medium Luft aus, werden von verschiedenen Objekten reflektiert oder absorbiert und erreichen schließlich die Ohren einer anderen Person. Dort wandelt das Trommelfell sie in Schwingungen um, die an die Knochen des Innenohrs weitergeleitet, dort verstärkt werden, bevor sie die Flüssigkeit in der spiralförmigen Hörschnecke erreichen. Die in dieser Flüssigkeit erzeugten Wellen werden dann von feinen Flimmerhärtchen registriert, deren Bewegung Chemikalien freisetzt, die zur Erzeugung elektrischer Signale führen. Letztere werden an unser Gehirn weitergeleitet, das sie als die Geräusche entschlüsselt, die wir hören. Um kommunizieren zu können, sind also mehrere Arten von Wellen erforderlich: akustische Wellen, Flüssigkeitswellen, mechanische Wellen (in den Innenohrknochen) und elektrische Wellen (elektrische Signale, die von Nervenzellen übertragen werden). Darüber hinaus gibt es noch andere Arten von Wellen wie etwa elektromagnetische Wellen, mit denen sich Licht ausbreitet, Plasmawellen – Wellen im vierten Aggregatzustand der Materie – oder Gravitationswellen. Seit Beginn des 20. Jahrhunderts, mit den Entdeckungen der Quantenmechanik, wissen wir, dass jedes massive Teilchen auch mit einer Materiewelle verbunden ist. Der Teilchen- und Welle-Dualismus ist grundlegend für unser Verständnis der Natur im kleinsten Maßstab, d.h. der Physik von Molekülen und Atomen. Bei makroskopischen Körpern ist die Wellenlänge im Vergleich zu ihrer Größe so klein ist, dass ihre Wellennatur völlig vernachlässigbar ist.

11.1 Einfache mechanische Wellen

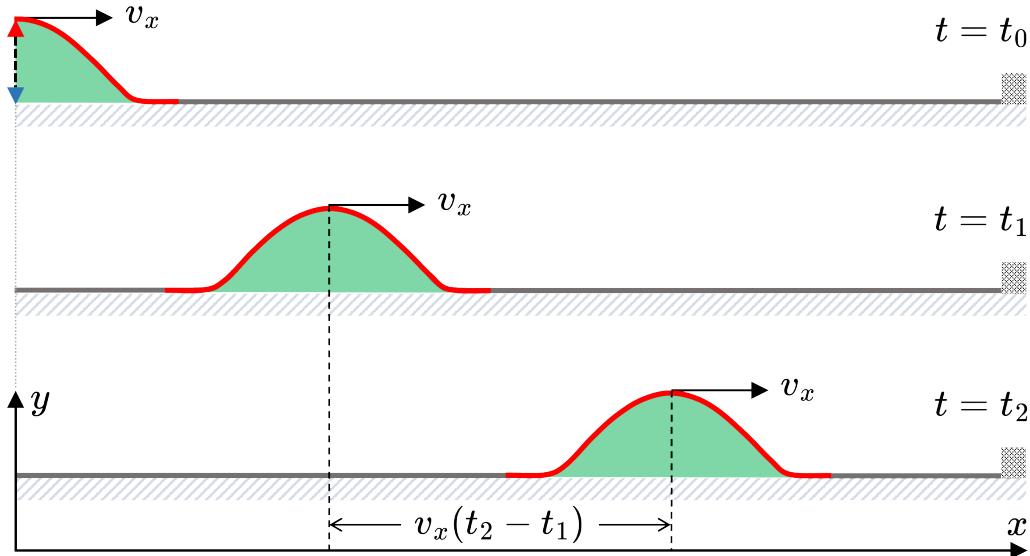


Abb. 11.1: An einem Ende am Boden befestigt, erzeugt ein gespanntes Seil, das am anderen Ende schnell auf und ab bewegt wird, einen sich im Seil fortbewegenden Puls.

Wellen, die sich entlang eines leicht gespannten Seils bewegen, sind wahrscheinlich vielen aus Kindheitstagen von Seilspielen vertraut. Bindet man ein Seilende fest, zieht das Seil gerade, sodass es unter leichter Spannung steht, und bewegt dann das freie Seilende rasch auf und ab, so entsteht ein Puls der die gesamte Länge des Seils in Richtung des festen Endes läuft und von dort zurückreflektiert wird. Wenn man das Seil periodisch auf und ab bewegt, kann man damit eine sogenannte stehende Welle erzeugen. Abb. 11.1 zeigt die noch einfacheren Situation, in der ein Seil auf dem Boden gespannt ist, ein Seilende festgebunden ist und am anderen Ende ein Puls erzeugt wird, der sich dann über die gesamte Länge des Seils ausbreitet. Wenn wir von der Seitenlinie aus genau beobachten, was passiert, während ein Freund das Seil auf und ab bewegt, finden wir die in Abb. 11.1 skizzierte Situation vor:

1. Die Geschwindigkeit v_x des Pulses ist über die Länge des Seils konstant.
2. Innerhalb der Länge des Pulses schwingt jeder Punkt im Seil vertikal in y -Richtung, d.h. senkrecht zur x -Richtung, in der sich der Puls mit der Geschwindigkeit v_x bewegt.
3. Nur Seipunkte innerhalb des Pulses werden vertikal verschoben.
4. Bevor der Puls eine Seilstelle erreicht, ist diese in Ruhe und sobald er durchgelaufen ist, befindet sich diese Seilstelle wieder in Ruhe.

Offensichtlich bewegt sich kein Teil des Seils selbst lateral, wenn sich der in Abb. 11.1 gezeigte Puls im Seil nach rechts bewegt. Was sich im Seil fortbewegt, ist die am linken Ende erzeugte vertikale Auslenkung. Sobald sich diese Auslenkung nach rechts bewegt hat, ist die Seilstelle, die der wandernde Puls gerade passiert hat, wie zuvor im Ruhezustand. Was sich in Abb. 11.1 von links nach rechts bewegt, ist Energie und keine Masse. Wenn sich der Puls entlang des Seils bewegt, gibt ein Seilstück die Energie auf irgendeine Weise an das nächste Seilstück davor weiter. Das ist nicht so viel anders wie beim in Abschnitt 10.2.1 diskutierten, durch eine Feder gekoppelten Pendelsystem. Wie wir dort sahen, überträgt in einem solchen gekoppelten Pendelsystem ein Pendel seine Energie auf das andere, bis eines in voller Schwingung ist, während das andere aufgehört hat zu schwingen, woraufhin sich der Prozess umkehrt. In ähnlicher Weise kann man sich vorstellen, dass Energie zwischen benachbarten Seilstücken weitergegeben wird, mit dem Unterschied, dass die Energieübertragung nur in eine Richtung erfolgt, nämlich in die Bewegungsrichtung des Pulses. Wenn wir von benachbarten Teilen des Seils sprechen, meinen wir natürlich Nachbarschaft auf atomarer Ebene. Mit einem gekoppelten Oszillatoren Modell kann man einige Wechselwirkungen in Festkörpern verstehen, so unter anderem wie sich Energie durch einen Festkörper bewegen kann, ohne dass Masse (außer durch Oszillation) bewegt wird. Sind an so einem Energietransport eine große Anzahl von gekoppelten Atomen beteiligt, die Energie von einem Punkt zum anderen transportieren, ohne dabei Masse zu transportieren, spricht man von einer Welle.

Im Beispiel von Abb. 11.1 ist es die Verformungsenergie des Seils die sich mit dem Puls von links nach rechts bewegt. Diese ändert sich nicht, wenn sich der Puls über die Länge des Seils bewegt. Wir können den wandernden Puls von einem Bezugssystem S beobachten, in dem wir und unser Freund, der am Seil zieht, ruhen. Wir können aber auch die Position eines Beobachters einnehmen, der sich mit dem Puls bewegt, also ein Bezugssystem S' wählen, das sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v_x bewegt. Koordinaten und Geschwindigkeiten in S und S' sind durch eine Galilei-Transformation verknüpft

$$x' = x - v_x t \quad \text{und} \quad t' = t$$

Für einen Beobachter in S ist der in Abb. 11.1 bei $t = t_0$ erzeugte Puls eine Seilverzerrung, die sich nach rechts ausbreitet. Ein Beobachter in S' wird den Puls jedoch als stationäre Seilverzerrung $f(x')$ beschreiben. Wie Abb. 11.2 zeigt, wird für einen Beobachter in S diese stationäre Seilverzerrung dann zur Funktion

$$y(x, t) = f(x - v_x t)$$

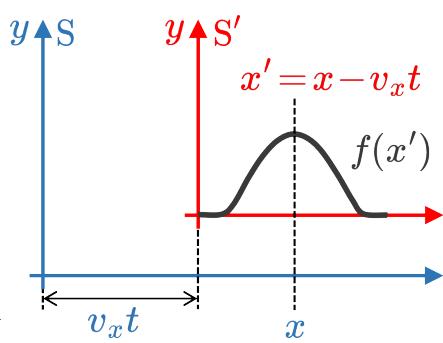


Abb. 11.2

welche die sich nach rechts bewegende stationäre Seilverzerrung beschreibt. Dass dies tatsächlich der Fall ist, zeigen die Funktionen

$$y(x, t = 0) = f(x) \quad \text{und} \quad y(x, t_1) = f(x - v_x t_1)$$

Bei $t = 0$ sollen S und S' deckungsgleich sein. Damit hat jeder Punkt der Seilauslenkung dann die gleichen Koordinaten in S und in S' , also $y(x, t = 0) = f(x) = f(x') = y(x', t = 0)$. Nach einer Zeit $t = t_1$ wird die Verzerrung in S' immer noch $y(x', t_1) = f(x')$ sein. Für den Beobachter in S ist aber diese Koordinate x' , die auf den Ursprung von S' verweist, nun die Koordinate $x = x' + v_x t_1$, d.h., die Verzerrung hat sich nach rechts bewegt, ohne ihre Form zu ändern. So wie $y(x, t) = f(x - v_x t)$ eine Verzerrung beschreibt, die sich nach rechts ausbreitet, ohne ihre Form zu ändern, beschreibt die Funktion $y(x, t) = f(x + v_x t)$ die gleiche stationäre Verzerrung, die sich nach links ausbreitet.

Als nächstes fragen wir uns wie die Bewegung von $y(x, t)$ zustande kommt. Während der Puls durch die Länge des Seils läuft, bewegt sich kein Seipunkt in x -Richtung, Auslenkungen gibt es nur in y -Richtung. Welche Kräfte bewirken das? Um das zu verstehen, nehmen wir an, das Seil habe einen konstanten Durchmesser d und damit einen konstanten Querschnitt $A = d^2\pi/4$ und analysieren die Situation mit Hilfe von Abb. 11.3, die ein winziges Seilstück der Masse dm im wandernden Puls zeigt. Wir stellen uns vor, dass dieses Seilstück freigeschnitten ist, aber seinen Platz im Seil behält, weil wir die Verbindungen zu den Seilteilen links und rechts von dm durch die Kräfte ersetzen, die erforderlich sind,

um dm an Ort und Stelle zu halten, als ob der Schnitt nie stattgefunden hätte. Diese Kräfte entstehen durch die axiale Spannung des Seils und sind auf der linken und rechten Seite gleich groß. Die Richtungen der axialen Spannungsvektoren σ sind parallel zu den Normalenvektoren der Schnittflächen von dm und zeigen von diesen weg. Diese axialen Spannungsvektoren zeigen in entgegengesetzte Richtungen, aber da die Endflächen von dm nicht genau parallel sind, können sie nicht antiparallel sein. Der Betrag der Kraft auf der linken und rechten Seite ist gleich, also $F = \sigma \cdot A$. Uns interessiert nur die Nettovertikalkraft, die auf das Seilstück dm wirkt. Was wir also suchen, ist

$$dF_y = F_y(x + dx) - F_y(x) = \frac{\partial F_y(x)}{\partial x} dx \quad (11.1)$$

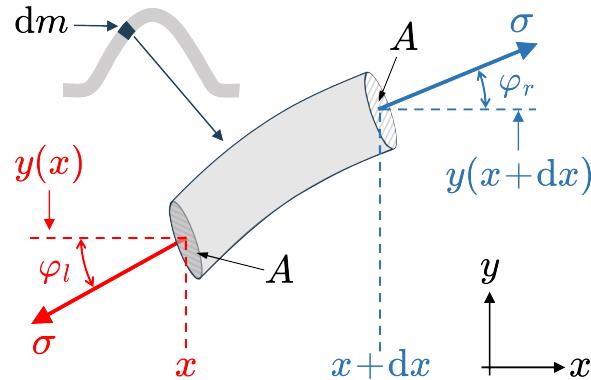


Abb. 11.3

Für die Kraft $F_y(x)$ können wir aus Abb. 11.3 ablesen

$$F_y(x) = \sigma A \sin \varphi_l$$

Für kleine Auslenkungen, also kleine Winkel, verwenden wir die Näherung

$$\sin \varphi_l \approx \tan \varphi_l = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

Damit können wir die Nettokraft dF_y in Gl. (11.1) schreiben als

$$dF_y = \frac{\partial F_y(x)}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma A \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) dx = \sigma A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (11.2)$$

Mit der Seildichte ρ gilt $dm = \rho \cdot A \cdot dx$. Das zweite Newtonsche Gesetz sagt uns, dass die Bewegungsgleichung in der y -Richtung für das Seilstück dm gegeben ist durch

$$dF_y = dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \rho A dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (11.3)$$

Da die linken Seiten von Gl. (11.2) und Gl. (11.3) identisch sind, müssen auch ihre rechten Seiten identisch sein

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (11.4)$$

Diese Differentialgleichung sagt uns, dass die zweite zeitliche Ableitung von $y(x, t)$ proportional zur zweiten räumlichen Ableitung von $y(x, t)$ in Bezug auf die x -Koordinate ist. Differentialgleichungen dieser Art heißen Wellengleichungen, weil sie die Bewegung einer Welle $y(x, t) = f(x \mp v_x t)$ beschreiben, die sich in positive (Minuszeichen) oder negative (Pluszeichen) x -Richtung ausbreiten. Mit $y(x, t) = f(\xi)$ und $\xi = x \mp v_x t$ erhält man für die Ableitungen in der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} v_x^2$$

und

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

Einsetzen dieser Ableitungen in Gl. (11.4) liefert die Beziehung

$$v_x^2 = \frac{\sigma}{\rho} \quad (11.5)$$

welche die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_x der Welle mit Seilspannung σ und Seildichte ρ verknüpft. Bisher haben wir noch nichts über die Wellenformen gesagt, wir haben die Seilverzerrung lediglich als einen Puls beschrieben, der sich über die gesamte Länge des

Seils bewegt. Jetzt betrachten wir eine spezifischere Situation, in der wir das freie Seilende nicht nur ein einziges Mal auf und ab bewegen. Dazu binden wir das freie Seilende an einen Wellenformgenerator, der die Amplitude dieses Seilendes modulieren kann, um beliebige Pulsformen zu erzeugen. Gleichzeitig sei das Seil nun über dem Boden gespannt damit es frei schwingen kann, ohne durch den Boden eingeschränkt zu werden. Welche Pulsmodulation sollten wir also jetzt wählen? Nun, so wie die meisten Schwingungen, denen man in der Natur begegnet, harmonische Formen haben, sind auch die meisten Wellenformen in der Natur harmonisch. Daher wählen wir für die Amplitudenmodulation eine Sinuswelle. Damit wird aus der Wellenform $f(x \pm v_x t)$

$$y(x, t) = f(x \pm v_x t) = y_0 \sin[k(x \pm v_x t)] \quad (11.6)$$

wobei y_0 die vom Wellenformgenerator erzeugte Amplitude und k die sogenannte Wellenzahl ist. Das Argument der Sinusfunktion muss dimensionslos sein und daher muss k die Dimension 1/Länge haben. Der Abstand zwischen zwei Wellenbergen der Sinusfunktion ist die Wellenlänge λ . Wenn wir eine Momentaufnahme der Sinuswelle bei $t = 0$ (Abb. 11.4) machen, stellen wir fest, dass λ bestimmt ist durch

$$k(x + \lambda) = kx + 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

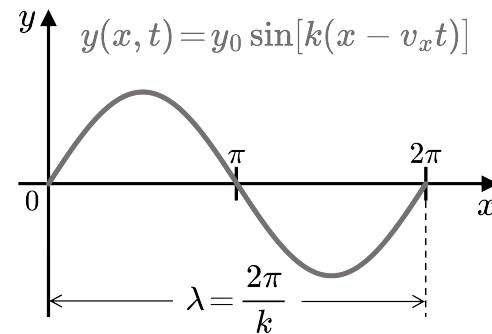


Abb. 11.4

Die Wellenzahl ist also ein Maß dafür, wie viele Wellenkämme in 2π passen. Je kürzer die Wellenlänge, desto mehr Wellenkämme passen in 2π und umgekehrt. Die Zeitabhängigkeit einer harmonischen Schwingung ist natürlich durch ihre Kreisfrequenz ω gegeben und mit Gl. (11.6) ergibt sich somit die Beziehung $\omega t = kv_x t$, was bedeutet, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle gegeben ist durch

$$v_x = \frac{\omega}{k} \quad \text{und mit} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{folgt} \quad v_x = \lambda f$$

v_x ist die Phasengeschwindigkeit der Welle. Jeder Teil der Welle bewegt sich mit v_x , d.h., jeder Teil der Welle legt in einer Sekunde eine Strecke von v_x Metern zurück. ω ist die Kreisfrequenz der Welle und f ist die Wellenfrequenz. Ein stationärer Beobachter irgendwo auf der x -Achse zählt $f = v_x/\lambda$ Wellenberge pro Sekunde, die sich an seiner Position vorbeibewegen. Die Phasenänderung pro Sekunde, die mit den vorbeiziehenden f Wellenkämmen verbunden ist, beträgt $\omega = 2\pi f$, da 2π die Winkelverschiebung zwischen zwei Wellenkämmen ist. Die verstrichene Zeit zwischen zwei Wellenbergen, also einer Sinusperiode, die am Beobachter vorbeilaufen, beträgt dann $T = f^{-1} = 2\pi/\omega$.

Ebenso wie bei der harmonischen Schwingungsbewegung ist der Wechsel zu komplexen Zahlen auch von Vorteil, wenn es um die Lösung von Problemen bei der Wellenausbreitung geht. Anstelle der Sinus- oder Kosinusfunktionen verwendet man daher zur Beschreibung von Wellenbewegung die komplexe Exponentialfunktion, d.h.

$$y(x, t) = y_0 e^{i(kx \pm \omega t)} \quad (11.7)$$

und sobald das komplexe Ergebnis gefunden wurde, identifiziert man seinen Realteil als die Lösung des vorliegenden Problems. Mit Gl. (11.4) haben wir die Bewegungsgleichung für eine Wellenform wie die in Abb. 11.1 skizzierte gefunden, die sich entlang der Länge des Seils bewegt. Aber was passiert, wenn die Wellenform das feste Seilende in Abb. 11.1 erreicht? Sicherlich muss die Wellenamplitude am festen Seilende verschwinden. Hier soll dieses feste Seilende bei $x = 0$ liegen. Dann muss zu jeder Zeit gelten

$$y(x = 0, t) = 0$$

Ein Weg diese Bedingung immer zu erfüllen, besteht darin, das Seil am festen Ende zu lösen, es virtuell zu verlängern, den Puls $f(x - v_x t)$ in Abb. 11.5 an $x = 0$ zu spiegeln, zu invertieren, und ihn dann in die andere Richtung als $g(x + v_x t)$ laufen zu lassen. $f(x - v_x t)$, das sich entlang der Länge des Seils nach rechts bewegt, und sein umgekehrtes Spiegelbild $g(x + v_x t)$, das sich nach links bewegt, heben sich bei $x = 0$ auf weil die Funktion

$$y(x, t) = f(x - v_x t) + g(x + v_x t) \quad (11.8)$$

bei $x = 0$ immer Null ist. Bei $x = 0$ wandelt sich $g(x + v_x t)$ in $f(x + v_x t)$, die Wellenform, die wir am festen Seilende reflektiert sehen und $f(x - v_x t)$ wird zu seinem virtuellen gespiegelten und invertierten $g(x - v_x t)$, das wir in der Realität nicht beobachten können. Daher wird am festen Seilende, also bei $x = 0$, die Wellenform so reflektiert, dass der Puls invertiert wird und die Welle als $f(x + v_x t)$ in die negative x -Richtung zurückläuft. Die einfache Art und Weise der Wellenaddition in Gl. (11.8), drückt ein wichtiges Prinzip der Wellenphysik aus, das Prinzip der Superposition. Wenn sich Wellen an einem bestimmten Punkt kreuzen, ist nach diesem Prinzip die Amplitude an diesem Punkt die Summe der Amplituden der einzelnen Wellen an dieser Position. Da in Abb. 11.5 die Amplitude der nach links wandernden Welle bei $x = 0$ genau das Negative der Amplitude der nach

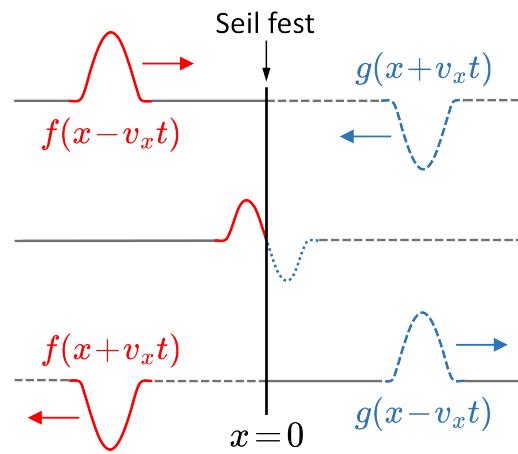


Abb. 11.5

rechts wandernden Welle ist, heben sich die beiden Wellen bei $x = 0$ auf. Damit können wir also einfach die von unserem kontinuierlich laufenden Wellenformgenerator erzeugte Sinuswelle und die reflektierte Welle addieren, die bei der Reflexion am festen Seilende entsteht. Da die Welle bei der Reflexion invertiert wird, müssen wir die reflektierte Welle von der eintreffenden Welle subtrahieren und erhalten damit die Wellenform

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) - y_0 \sin(kx + \omega t) = -2y_0 \cos(\omega t) \sin(kx)$$

Das ist nicht die Gleichung einer fortlaufenden Welle, sondern, wie in Abb. 11.6 gezeigt, die einer stehenden oder stationären Welle, deren Amplitude mit $\cos(\omega t)$ zwischen den stationären Nullstellen dieser Wellenform oszilliert. Abb. 11.6 zeigt die Wellenform $y_0 \sin(kx - \omega t)$, die nach rechts läuft (durchgezogen rot) und die reflektierte Wellenform $y_0 \sin(kx + \omega t)$ die nach links läuft (gestrichelt blau) zu vier Zeitpunkten. Die Nullstellen der stehenden Welle (durchgezogen schwarz) liegen dort wo $\sin(kx) = 0$, d.h. wo $kx = n\pi$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$. Die schwingende Saite eines Instruments ist wohl das bekannteste Beispiel einer stehenden Welle. Die Saiten eines Instruments werden an beiden Enden festgebunden. Daher sind nur stehende Wellen möglich, bei denen ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ in die Länge L einer Saite passt, also

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mit $v_x = \lambda f$ und Gl. (11.5) heißt das, eine Saite der Länge L kann nur schwingen mit Frequenzen

$$f = n \cdot \frac{v_x}{2L} = n \cdot \frac{\sqrt{\sigma/\rho}}{2L}$$

Wir alle haben wohl schon beobachtet, wie jemand ein Saiteninstrument stimmt, oder haben das vielleicht schon oft selbst getan. Beim Stimmen einer Saite, ändern wir ihre Spannung, und wie diese Gleichung zeigt, ändert das die Frequenz der Saite mit der Quadratwurzel der Saitenspannung. Indem wir unsere Finger auf verschiedene Positionen des Griffbretts drücken, ändern wir die Frequenz, mit der die Saite schwingt, zu einer höheren / niedrigeren Frequenz, weil wir ihre effektive Länge L verkürzen / verlängern.

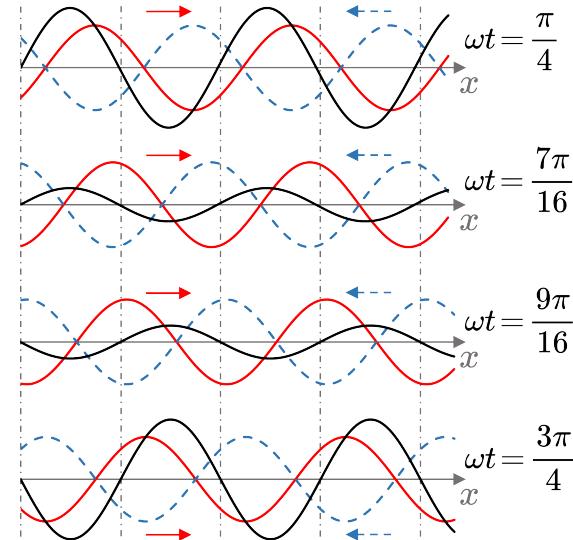


Abb. 11.6

11.2 Elastische Wellen

In Abschnitt 7.4 haben wir das Nichtgleichgewicht von Kräften in elastischen Körpern diskutiert und dabei die Bewegungsgleichung Gl. (7.47) für ein differentielles Volumenelement eines solchen Körpers abgeleitet. Um Wellen in elastischen Körpern zu beschreiben, verwenden wir die komplexe Exponentialfunktion und betrachten elastische ebene Wellen. Mit der Amplitude $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ ist die allgemeine Form einer ebenen Welle

$$\xi(x, y, z, t) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{Re} [\xi^0 \cdot e^{i(\mathbf{k}r - \omega t)}] \quad (11.9)$$

Für die hier betrachtete Wellenausbreitung in die positive x -Richtung, also $\mathbf{k}r \rightarrow kx$, bestimmt man die Phasengeschwindigkeit mit der sich die Welle ausbreitet, indem man den Ausdruck in der Exponentialfunktion konstant setzt. Aus

$$kx - \omega t = \varphi_0 = \text{const}$$

folgt, dass

$$x = \frac{\varphi_0 + \omega t}{k} = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{\omega t}{k} = \frac{\varphi_0}{k} + c_p t$$

wobei c_p die Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Für c_p , Wellenlänge λ und Periode T der ebenen Welle gelten folgende Beziehungen:

$$\omega = c_p k \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Betrachten wir anstelle der komplexen exponentiellen Wellenfunktion eine einfache Sinuswelle

$$\sin(kx - \omega t) = \sin \varphi$$

mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$, dann finden wir entsprechend

$$x = \frac{\omega}{k} t \quad ; \quad \varphi = \text{const} \quad ; \quad \omega = c_p k$$

Der letzte Abschnitt gab anhand des Beispiels einer Seilwelle eine Einführung in einfache mechanische Wellen. Seilwellen gehören zu den sogenannten Transversalwellen, bei denen die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle erfolgt. Es gibt jedoch noch eine andere Art von Wellen, sogenannte Longitudinalwellen, bei denen die Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle erfolgt. Abb. 11.7 zeigt die

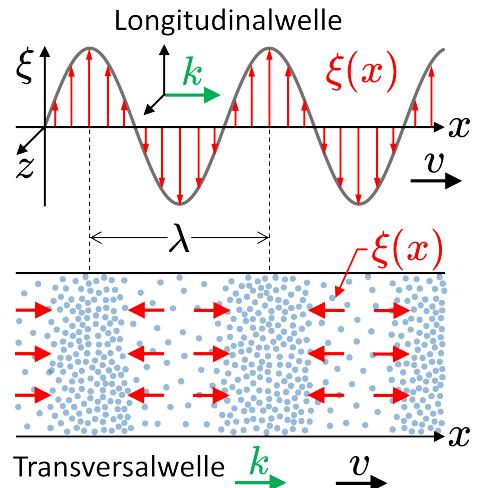


Abb. 11.7

grundlegenden Eigenschaften für Longitudinal- und Transversalwellen. Das bekannteste Beispiel für Longitudinalwellen, das wir alle kennen, sind natürlich Schallwellen, die, wie in Abb. 11.7 skizziert, Dichtewellen sind.

Zuerst betrachten wir transversale elastische Wellen. Transversalwellen, die sich in elastischen Medien ausbreiten, werden auch Scherwellen genannt, da mit ihnen keine Volumenänderung im elastischen Körper einhergeht, wie dies auch bei einer Scherbewegung der Fall ist. Für eine solche Welle, wie in Abb. 11.7 gezeigt, muss die Auslenkung ξ in Gl. (11.9) orthogonal zur Ausbreitungsrichtung sein. In Abb. 11.7 haben wir eine Transversalwelle gewählt, die sich in die positive x -Richtung ausbreitet und deren Auslenkung parallel zur y -Richtung erfolgt, d.h. $\xi^0 = (0, \xi_2^0, 0)$. Bei dieser Transversalwelle sieht man sofort, dass

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\xi_2^0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}) = 0$$

Für Transversalwellen verschwindet $\operatorname{div} \xi$, da für sie immer $\mathbf{k} \perp \xi$ gilt. Für eine Transversalwelle, die sich in x -Richtung ausbreitet, wird aus Gl. (7.47) die Wellengleichung

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = f_i + G \Delta \xi_i$$

Einsetzen von Gl. (11.9) mit $\xi^0 = (0, \xi_2^0, 0)$ in diese Gleichung ergibt

$$-\rho \omega^2 \xi_2 = f_i - G k^2 \xi_2$$

Ohne äußere Volumenkräfte, also im Fall von $f_i = 0$, folgt daraus

$$\omega^2 = \frac{G}{\rho} \cdot k^2 = c_t^2 \cdot k^2$$

wobei

$$c_t = \sqrt{c_{p,t}^2} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(\mu+1)}} \quad (11.10)$$

die Phasengeschwindigkeit der Transversalwelle ist und die Umformung im letzten Schritt Gl. (7.31) nutzte.

Betrachten wir nun longitudinale elastische Wellen. Für solche Wellen, die sich in x -Richtung ausbreiten, ist offensichtlich $\mathbf{k} \parallel \xi$ und, wie in Abb. 11.7 skizziert, muss für die Wellenamplitude in Gl. (11.9) gelten $\xi^0 = (\xi_1^0, 0, 0)$. Daher folgt

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = -ik\xi_1 \quad \text{und} \quad \Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = -k^2 \xi_1$$

Damit wird für eine Longitudinalwelle aus Gl. (7.47)

$$-\rho\omega^2\xi_1 = f_i + G \left[-k^2\xi_1 - \frac{ik}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \xi_1 \right] = f_i - 2G \frac{1-\mu}{1-2\mu} k^2 \xi_1$$

Betrachtet man wiederum den Fall ohne Volumenkräfte, d.h. $f_i = 0$, folgt daraus

$$\omega^2 = \frac{2G}{\rho} \frac{1-\mu}{1-2\mu} k^2 = c_l^2 \cdot k^2$$

wobei

$$c_l = \sqrt{c_{p,l}^2} = \sqrt{\frac{2G}{\rho} \frac{1-\mu}{1-2\mu}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad (11.11)$$

die Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwelle ist. Der letzte Schritt in Gl. (11.11) nutzte erneut Gl. (7.31). Die bisherige Diskussion zur Ausbreitung von Transversal- und Longitudinalwellen in elastischen Körpern ging davon aus, dass die Wellenausbreitung in einem unendlichen Medium stattfindet. In der Praxis ist dies jedoch nicht der Fall. Wenn die Wellenlänge einer Longitudinalwelle vergleichbar oder größer als die Querabmessung des Mediums, z.B. eines dünnen Stabes, ist, dann passiert etwas am Rand des Stabes, in dem sich die Longitudinalwelle ausbreitet. Die seitliche Begrenzung des Stabes bewirkt eine Querkontraktion, die nicht durch umgebende Materie verhindert wird, wie es bei einem unendlichen Medium der Fall ist. Die durch eine Longitudinalwelle verursachte Dichtemodulation korreliert mit der Streckung / Stauchung in x -Richtung:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$$

Daraus folgt, analog zur vorherigen Behandlung für ein unendlich ausgedehntes Medium, die Bewegungsgleichung direkt aus Gl. (7.46) ($f_x = 0$)

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}$$

Einsetzen einer Longitudinalwelle

$$\xi_x = \xi_x^0 e^{i(kx - \omega t)}$$

in diese Bewegungsgleichung ergibt für die Phasengeschwindigkeit c_l^{Stab} im Stab:

$$c_l^{Stab} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Aus der Herleitung der Poissonzahl μ (siehe Gl. (7.30)) erkennt man, dass μ Werte zwischen 0 und 0.5 annehmen kann. Das bedeutet, dass die Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwelle in einem dünnen Stab kleiner ist als die entsprechende Phasengeschwindigkeit im unendlichen Medium aus Gl. (11.11).

11.2.1 Schallwellen

Schallwellen sind Dichteschwankungen, die sich in elastischen Körpern wie Gasen, Flüssigkeiten oder Festkörpern ausbreiten. Daher kann man mit den Bewegungsgleichungen von Fluiden (siehe Abschnitt 8.5.3) die Wellengleichung für Schallwellen ableiten. Für die Ausbreitung einer Druckschwankung, wie in Abb. 11.8 skizziert, gilt die Euler-Gleichung ohne innere Kräfte, d.h. $\mathbf{f} = 0$ in Gl. (8.31), und es muss die Kontinuitätsgleichung Gl. (8.9) gelten. Somit:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Mit Gl. (8.1) ist die totale Ableitung der Geschwindigkeit einer Schallwelle, die sich in einem elastischen Medium in x -Richtung (Abb. 11.8) ausbreitet, gegeben durch

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v_x$$

Im Vergleich zur Dichte elastischer Körper ist die Dichteänderung in einer Schallwelle gering ($\delta\rho \ll \rho_0$). Zudem sind Änderungsrate und räumlichen Änderungen der Geschwindigkeit, $\partial\mathbf{v}/\partial t$ bzw. $\nabla \cdot \mathbf{v}$, klein im Vergleich zu \mathbf{v} . Das ermöglicht die Linearisierung der Euler-Gleichung und der Kontinuitätsgleichung in $\delta\rho$ und \mathbf{v} . Weiters gilt:

$$P = P(\rho, T) = P(\rho, T(\rho)) = P(\rho) \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{adiabatisch} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{adiabatisch} \end{matrix}$$

Da κ_S die adiabatische Kompressibilität aus Gl. (9.38) ist, kann der Gradient von P umgeschrieben werden als

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{ad. } \rho=\rho_0} \cdot \nabla(\delta\rho) = \frac{1}{\kappa_S \rho_0} \nabla(\delta\rho) \quad (11.12)$$

Damit wird aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11.13)$$

und die Euler-Gleichung wird zu

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa_S \rho_0} \nabla(\delta\rho) \quad (11.14)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt mit $\nabla(\nabla(\delta\rho)) = \Delta(\delta\rho)$:

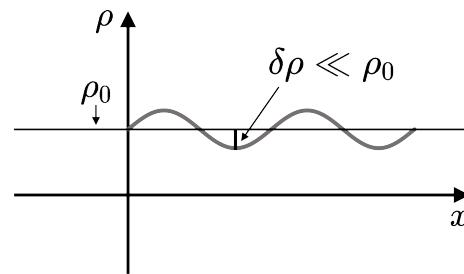


Abb. 11.8

$$\frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\kappa_S \rho_0} \Delta(\delta\rho) = c_s^2 \Delta(\delta\rho) \quad (11.15)$$

wobei c_s^2 die Schallgeschwindigkeit ist. Diese Gleichung ist die Wellengleichung in drei Dimensionen mit der allgemeinen Form

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho \quad (11.16)$$

Gl. (11.16) ist die Wellengleichung für eine Dichtewelle. Der geeignete Lösungsansatz ist

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho = \rho_0 + (\delta\rho)_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$$

Berechnung der jeweiligen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} &= (\delta\rho)_0 (-i\omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} = -i\omega \delta\rho \quad ; \quad \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x} = i k_x \delta\rho \\ \frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} &= (i\omega)^2 \delta\rho \quad ; \quad \frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial x^2} = -k_x^2 \delta\rho \end{aligned}$$

und Einsetzen in Gl. (11.16) ergibt

$$\omega^2 = c_s^2 \mathbf{k}^2$$

Nach wie vor sind Wellenlänge λ und Schallgeschwindigkeit c_s über die Beziehung $\lambda f = c_s$ verknüpft. Daher gilt für die Kreisfrequenz ω und den Wellenvektor \mathbf{k}

$$\omega = 2\pi f \quad \text{und} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Der Wellenvektor steht immer senkrecht zur Wellenfront, also zur Linie oder Fläche konstanter Phase. In isotropen Medien ist die Richtung von \mathbf{k} immer parallel zur Richtung der Wellenausbreitung \mathbf{v} , also $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$. Aus der obigen Herleitung der Wellengleichung für eine Schallwelle in einem isotropen Medium (Gl. (11.13) und Gl. (11.14) sowie dem Lösungsansatz) wissen wir das mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0\perp} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{v}$$

und somit

$$\nabla(\delta\rho) = i\mathbf{k}\delta\rho = -\kappa_S \rho_0^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \kappa_S \rho_0^2 \cdot i\omega \mathbf{v}$$

was bedeutet, dass $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$ gelten muss. Oben haben wir herausgefunden, dass für Transversalwellen immer $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\xi}$ gilt, wobei $\boldsymbol{\xi}$ die Verschiebung ist, die die Wellenamplitude misst. Bei Schallwellen zeigt die Verschiebung $\boldsymbol{\xi}$ jedoch in Richtung der Dichteänderung,

also der Richtung der Schallausbreitung \mathbf{v} und damit gilt für Schallwellen $\mathbf{k} \parallel \xi$, wie es für Longitudinalwellen sein muss. Nun wollen wir sehen was passiert wenn wir unsere Beobachtungen von einem «fahrenden Zug» aus machen, d.h., wir bewegen uns relativ zur Schallquelle, oder, genauso richtig, diese bewegt sich relativ zu uns. In diesem Fall

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t$$

und

$$e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \rightarrow e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega' t)}$$

mit

$$\omega' = \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}_0$$

Diese Transformationen beschreiben eine Schallquelle, die sich mit einer Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 gegenüber dem System des ruhenden Beobachters bewegt. Abb. 11.9 veranschaulicht, was in dieser Situation passiert. Wenn sich die Schallquelle bewegt, gehen die Wellenfronten des Schalls von verschiedenen Punkten aus, die immer weiter vom Ursprung auf der geraden Linie $x = v_0 t$ entfernt sind. Aus Abb. 11.9 kann man ablesen:

$$v_0 = \frac{\Delta x}{\tau} \quad \text{und} \quad c_s = \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{v_0}{c_s}$$

Mit

$$\tau' = \tau \pm \Delta \tau = \tau \left(1 \pm \frac{v_0}{c_s} \right)$$

folgt entsprechend

$$\omega' = \frac{\omega}{1 \pm v_0/c_s} \approx \omega \left(1 \mp \frac{v_0}{c_s} \right)$$

wobei die Näherung im letzten Schritt für $v_0 \ll c_s$ gilt. Wie in Abb. 11.10 skizziert, ist $v_0 > c_s$, wie z.B. bei Flugzeugen, die schneller als der Schall fliegen, bildet sich ein sogenannter Machscher Kegel, benannt nach Ernst Mach (1838 - 1916).

Der Kegelwinkel ist

$$\sin \alpha = \frac{c_s}{v_0} = \frac{1}{M}$$

wobei M die Machzahl ist. Je schneller ein Flugzeug fliegt, desto schmäler ist der Kegel, da sich die Strecke, die das Flugzeug zwischen je zwei Schallwellen (Wellenfronten in Abb. 11.10 durch Kreise gekennzeichnet) zurücklegt, entsprechend vergrößert.

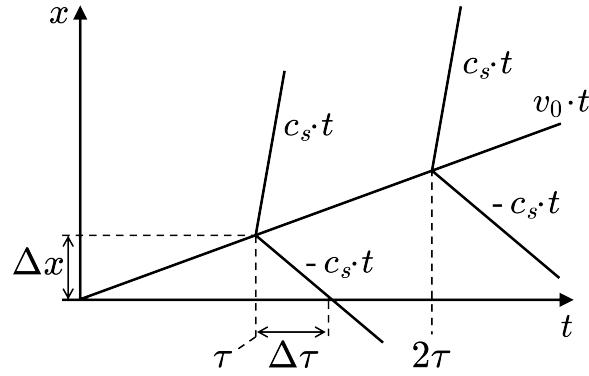


Abb. 11.9

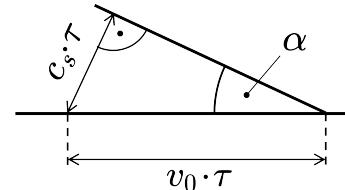
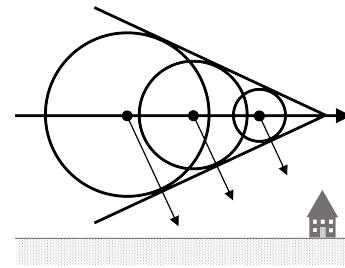


Abb. 11.10

11.2.2 Der Doppler-Effekt

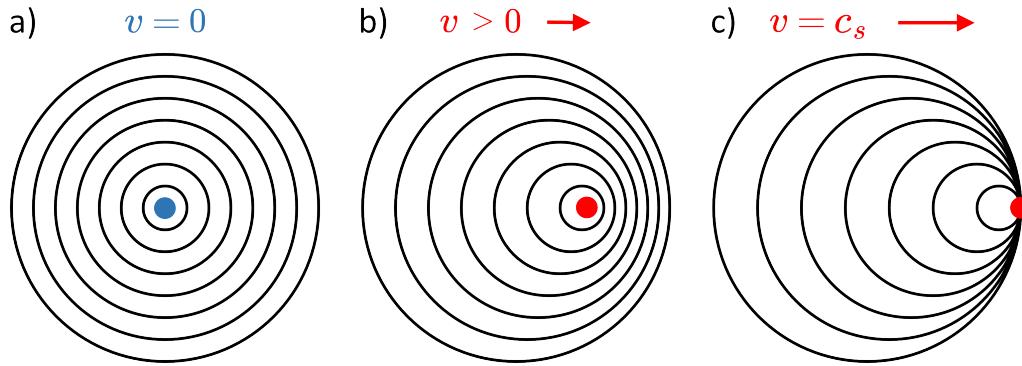


Abb. 11.11: Schallwellen einer ruhenden Schallquelle (a), einer Schallquelle, die sich mit einer Geschwindigkeit größer Null, aber langsamer als die Schallgeschwindigkeit bewegt (b) und von einer Schallquelle die sich mit der Schallgeschwindigkeit c_s bewegt (c).

Bewegt sich eine Schallquelle relativ zu einem ruhenden Beobachter so registriert sie oder er eine Frequenzverschiebung die als Doppler-Effekt bekannt ist, benannt nach Christian Doppler (1803 – 1853), der ihn erstmals in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts vorhersagte, allerdings für Lichtwellen. Er ist uns allen vertraut, z.B. von der zunehmenden bzw. abnehmenden Tonhöhe der Sirene eines Einsatzfahrzeugs das sich uns nähert bzw. sich von uns entfernt. Abb. 11.11 veranschaulicht die Situation für die Wellenfronten einer kugelförmiger Schallwelle (in zwei Dimensionen skizziert), die von einer ruhenden Schallquelle ausgehen (Abb. 11.11a), von einer Schallquelle die sich mit einer Geschwindigkeit größer als Null, aber kleiner als die Schallgeschwindigkeit bewegt (Abb. 11.11b) und einer Schallquelle, die sich mit Schallgeschwindigkeit bewegt (Abb. 11.11c). Im ersten Fall spielt es keine Rolle, ob sich ein Beobachter links oder rechts von der Schallquelle befindet, der registrierte Abstand zwischen den Wellenfronten ist gleich. Das ist anders in Abb. 11.11b, wo der Abstand zwischen benachbarten Wellenfronten für einen Beobachter in Bewegungsrichtung der Schallquelle geringer ist als für einen Beobachter der sich hinter der bewegten Schallquelle befindet. In Abb. 11.11c, wo sich die Schallquelle mit Schallgeschwindigkeit bewegt, befinden wir uns in der Situation, die uns bereits in Abb. 11.10 begegnet ist.

Eine Schallwelle legt die Strecke zwischen zwei Wellenbergen in der Zeit $T = \lambda_0/c_s$ zurück, wobei λ_0 die Wellenlänge im Fall Abb. 11.11a ist, wo die Schallquelle ruht. Im Fall von Abb. 11.11b ist die Wellenlänge die zwei Wellenberge trennt für einen Beobachter rechts von der Schallquelle verkürzt, weil nach einem Wellenberg, der nächste Wellenberg den Beobachter früher erreicht als in Abb. 11.11a, da die Schallquelle sich in der Zeit T um die Strecke $v \cdot T = v/f_0$ auf den Beobachter zubewegt hat. Für einen Beobachter

hinter der sich bewegenden Quelle hat sich dementsprechend der Abstand zwischen zwei Wellenbergen um den gleichen Betrag vergrößert. Daher registriert ein Beobachter vor oder hinter der sich bewegenden Quelle eine Wellenlänge von

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{v}{f_0} \quad \text{beziehungsweise} \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{v}{f_0}$$

Die von solchen Beobachtern registrierte effektive Frequenz ist dann gegeben durch

$$f = \frac{1}{1 \mp v/c_s} f_0 \tag{11.17}$$

wobei das Minuszeichen für eine sich auf den Beobachter zubewegende und das Pluszeichen für eine sich von ihm wegbewegende Schallquelle gilt. Gl. (11.17) kennen wir bereits aus dem vorherigen Abschnitt, nur dass hier f anstelle von $\omega = 2\pi f$ steht. Diese Gleichung beschreibt die Frequenzverschiebung im Fall einer bewegten Schallquelle und eines stationären Beobachters. Interessanterweise erhält man ein anderes Ergebnis, wenn die Schallquelle stationär ist und sich der Beobachter bewegt. Bewegt sich ein Beobachter auf eine stationäre Schallquelle zu, registriert sie oder er eine höheren Ton als dem Schall entspricht, den die Quelle aussendet. Bewegt sie oder er sich mit der Geschwindigkeit v auf eine stationäre Schallquelle zu oder von dieser weg, misst er oder sie eine höhere oder niedriger Schallgeschwindigkeit als c_s . Die registrierte Frequenz beträgt $f = (c_s \pm v)/\lambda_0$, wobei das Pluszeichen für einen Beobachter steht, der sich in Richtung der Quelle bewegt, und das Minuszeichen für einen Beobachter, der sich von ihr entfernt. Ausgedrückt als Bruchteil von f_0 , misst ein sich bewegender Beobachter die Frequenz

$$f = \left(1 \pm \frac{v}{c_s}\right) f_0 \tag{11.18}$$

Gl. (11.17) beschreibt den Doppler-Effekt für eine sich bewegende Schallquelle und einen stationären Beobachter und Gl. (11.18) den Doppler-Effekt für eine stationäre Schallquelle und einen sich bewegenden Beobachter. Weil für $v \ll c_s$ gilt

$$\frac{1}{1 \mp v/c_s} \approx 1 \pm \frac{v}{c_s}$$

sind Gl. (11.17) und Gl. (11.18) für Geschwindigkeiten $v \ll c_s$ identisch. Bei höheren Geschwindigkeiten wird der Unterschied jedoch deutlich, da z.B. bei $v = 0.5 c_s$ Gl. (11.17) $f = 2 f_0$ und Gl. (11.18) $f = 1.5 f_0$ ergibt. Warum ist es nicht möglich, das Bezugssystem zwischen ruhender Schallquelle und ruhendem Beobachter zu wechseln und zum gleichen Ergebnis zu kommen? Nun, das Medium des Schalls, in welchem sich dieser ausbreiten muss, definiert ein ausgezeichnetes Bezugssystem. Weil damit die beiden Bezugssysteme nicht vertauschbar sind, ist die Galilei-Transformation also nicht anwendbar.

11.2.3 Gedämpfte Schallwellen

Vernachlässigt man die Schwerkraft, also $\mathbf{f} = 0$, benutzt Gl. (11.12) um ∇P durch $\nabla \rho$ zu ersetzen, und behält nur Glieder linear in \mathbf{v} , dann wird aus Gl. (8.35)

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa_S \rho_0} \nabla \rho + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (11.19)$$

Durch Multiplikation von links mit ∇ nimmt man davon die Divergenz

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\kappa_S \rho_0} \nabla \cdot (\nabla \rho) + \eta \cdot \underbrace{\nabla \cdot (\Delta \mathbf{v})}_{\parallel} + (\eta + \lambda) \nabla \cdot (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})) \quad (11.20)$$

Jetzt nutzt man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

um die $\nabla \cdot \mathbf{v}$ -Glieder in Gl. (11.20) durch die partielle Zeitableitung von ρ zu ersetzen. Damit erhält man das Ergebnis

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{\kappa_S \rho_0} \Delta \rho - \frac{\eta}{\rho_0} \cdot \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \frac{\eta + \lambda}{\rho_0} \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (11.21)$$

Durch Umordnen und Einsetzen der Schallgeschwindigkeit $c_s = 1/\sqrt{\kappa_S \rho_0}$ wird Gl. (11.21) zur Wellengleichung für gedämpfte Schallwellen

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho + \frac{2\eta + \lambda}{\rho_0} \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (11.22)$$

Der Standardlösungsansatz für diese Art von Gleichung ist eine ebene Welle:

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho = \rho_0 + (\delta \rho)_0 \cdot \exp[i(kx - \omega t)]$$

Nach Berechnung der Ableitungen und Einsetzen in Gl. (11.22) folgt damit

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - i \frac{2\eta + \lambda}{\rho_0} k^2 \omega \quad (11.23)$$

Man löst zunächst Gl. (11.23) für ω . Durch quadratische Ergänzung erhält man (nur das positive Vorzeichen der Quadratwurzel ist physikalisch relevant)

$$\omega + i \frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} k^2 = c_s k \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} \cdot \frac{k}{c_s} \right)^2} \quad (11.24)$$

Für kleine x bedient man sich der Näherungen

$$(1 \pm x)^{1/2} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad (1 \pm x)^{-1/2} \approx 1 \mp \frac{1}{2}x$$

Mit der ersten dieser Näherungen für den Fall eines kleinen k wird aus Gl. (11.24)

$$\omega = c_s k - i \frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} k^2 \quad (11.25)$$

Eingesetzt in Gl. (11.23) ergibt sich für die Zeitabhängigkeit der ebenen Welle

$$\exp(-i\omega t) = \exp(-ic_s kt) \cdot \exp\left(-\frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} k^2 t\right) \quad (11.26)$$

Nun löst man Gl. (11.23) für k

$$k = \frac{\omega}{c_s} \left(1 - i \frac{2\eta + \lambda}{\rho_0 c_s} \cdot \frac{\omega}{c_s}\right)^{-1/2} \quad (11.27)$$

Mit der zweiten Näherung von oben für kleine ω wird aus Gl. (11.27)

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i \frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0 c_s} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 \quad (11.28)$$

Eingesetzt in Gl. (11.23) ergibt sich für die Ortsabhängigkeit der ebenen Welle

$$\begin{aligned} \exp(-ikx) &= \exp\left(-i\frac{\omega}{c_s} \cdot x\right) \cdot \exp\left[\underbrace{-\frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0 c_s} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 x}_{=\alpha/2}\right] \\ &\quad (11.29) \end{aligned}$$

Gl. (11.26) und Gl. (11.29) zeigen, dass Schallwellen, die sich in einem Körper mit der Viskosität η und der Volumenviskosität λ ausbreiten, einer zeitlichen und einer räumlichen Dämpfung unterliegen (dargestellt in Abb. 11.12). Die erste Viskosität bzw. dynamische Viskosität η eines Materials ist mit seiner kinematischen Viskosität λ durch die Beziehung $\eta = \lambda \cdot \rho$ verknüpft. Tab. 11.1 gibt Werte für drei bekannte Substanzen.

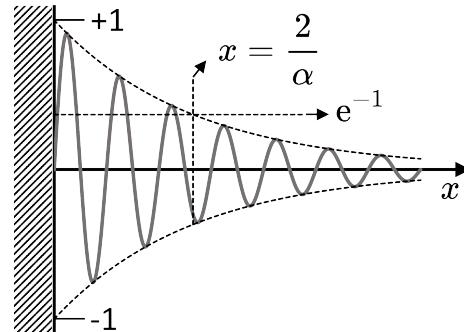


Abb. 11.12

Tab. 11.1: Dichte, dynamische und kinematische Viskosität von Luft, Wasser und Glycerin bei 20 °C.

Körper	ρ [g·cm ⁻³]	η [g·cm ⁻¹ ·s ⁻¹]	λ [cm ² ·s ⁻¹]
Luft	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$1.83 \cdot 10^{-4}$	0.15
H ₂ O	1.00	0.01	0.01
Glycerin	1.26	14.12	11.2

11.3 Komplexe Wellen und Wellenpakete

11.3.1 Fourier-Reihen

In Abschnitt 11.1 haben wir gesehen, wie eine stehende Welle durch Addition zweier periodischer Wellenformen entsteht. Man kann aber nicht nur zwei sondern beliebig viele periodische Wellenformen addieren, die sich in Frequenz und Amplitude voneinander unterscheiden. Das Ergebnis dieser Superposition wird wahrscheinlich komplizierter aussehen als die stehende Welle, die wir gerade besprochen haben, aber das Resultat der Überlagerung wird dennoch eine andere periodische Wellenform sein. Dies funktioniert auch umgekehrt. Jede periodische Funktion, so kompliziert sie auch sein mag, kann als Überlagerung harmonischer Wellen beschrieben werden. Dies funktioniert für Funktionen $F(x) = F(x + n \cdot \Delta x)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$, die im Raum periodisch sind, Funktionen $F(t) = F(t + n \cdot \Delta t)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$, die zeitlich periodisch sind, oder Funktionen, die periodisch bezüglich einer anderen Variablen sind. All diese Funktionen lassen sich als Überlagerungen harmonischer Wellen darstellen, die nach Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) Fourier-Reihen genannt werden:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)] \quad (11.30a)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (11.30b)$$

Bei der Darstellung einer beliebig periodischen Funktion $f(t)$ durch ihre Fourier-Reihe, liegt die Herausforderung in der Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n . Nur wenn wir diese Koeffizienten kennen, d.h. alle korrekten Gewichtungen für jeden Sinus oder Kosinus in der Fourier-Reihe, ergibt die Überlagerung aller Sinus- und Kosinuswerte die Funktion, die wir durch eine Fourier-Reihe beschreiben möchten. Diese Aufgabe ist einfacher, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Wir müssen nur erkennen, dass der Mittelwert von $f(t)$ über einen Zeitraum $T = 2\pi/\omega$ exakt a_0 ist, weil über ein Periode der Mittelwert jedes Sinus oder Kosinus in der Reihe genau Null ist:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (11.31)$$

Zur Bestimmung der anderen Koeffizienten verwenden wir die folgenden bestimmten Integrale, deren Werte man durch einfache partielle Integration oder durch Nachschlagen in Integraltabellen ermitteln kann (n und m ganzzahlig)

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0 \quad \text{für alle } n, m \quad (11.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \\ \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{falls } n = m \end{cases} \quad (11.33)$$

Um alle a_n und b_n mit $n \geq 0$ für $f(t)$ in Gl. (11.30b) zu bestimmen, berechnen wir den Wert der Integrale von $f(t) \cos(n\omega t)$ und $f(t) \sin(n\omega t)$ über eine Periode T und erhalten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (11.34)$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (11.35)$$

Nachdem wir nun wissen, wie man die Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion $f(t)$ bestimmt, betrachten wir das einfache Beispiel einer symmetrischen Rechteckwelle. Abb. 11.13 zeigt eine solche Rechteckwelle sowie drei weitere Kurven, die diese unterschiedlich stark annähern. Zu diesen anderen Kurven kommen wir, sobald wir die Fourier-Reihe der Rechteckwelle bestimmt haben. Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten mit Gl. (11.31), Gl. (11.34) und Gl. (11.35) integrieren wir über die Periode T in zwei Schritten: Zuerst über $0 \leq t \leq T/2$ wo $f(t) = h$ und dann über $t/2 \leq t \leq T$ wo $f(t) = -h$. Durch Auswertung der jeweiligen Integrale erhält man dann die Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} h dt - \frac{1}{T} \int_{T/2}^T h dt = \frac{h}{T} \left[\left(\frac{T}{2} - 0 \right) - \left(T - \frac{T}{2} \right) \right] = 0$$

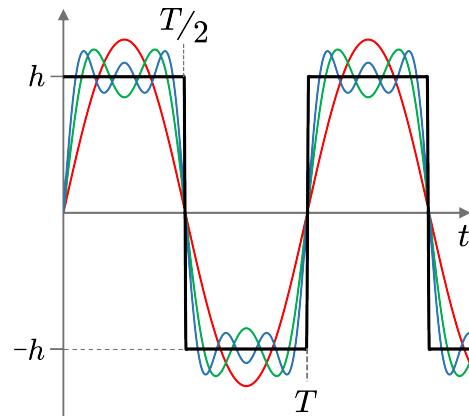


Abb. 11.13

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} h \cos(n\omega t) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T h \cos(n\omega t) dt \\
&= \frac{2}{T} \frac{h}{n\omega} \sin(n\omega t) \Big|_0^{T/2} - \frac{2}{T} \frac{h}{n\omega} \sin(n\omega t) \Big|_{T/2}^T \quad \left/ T = \frac{2\pi}{\omega} \right. \\
&= \frac{h}{n\pi} [(\sin(n\pi) - \sin(0)) - (\sin(2n\pi) - \sin(n\pi))] = 0 \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} h \sin(n\omega t) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T h \sin(n\omega t) dt \\
&= -\frac{2}{T} \frac{h}{n\omega} \cos(n\omega t) \Big|_0^{T/2} + \frac{2}{T} \frac{h}{n\omega} \cos(n\omega t) \Big|_{T/2}^T \quad \left/ T = \frac{2\pi}{\omega} \right. \\
&= -\frac{h}{n\pi} [(\cos(n\pi) - \cos(0)) - (\cos(2n\pi) - \cos(n\pi))] \\
&= -\frac{h}{n\pi} [2\cos(n\pi) - 2] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4h}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe der Rechteckfunktion in Abb. 11.13 besteht nur aus Sinuswerten und zwar nur aus Sinuswerten, deren Koeffizient ungerade ist, also $n = 2k - 1$

$$f(t) = \frac{4h}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right] = \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\omega t]}{2k-1}$$

Die drei Kurven in Abb. 11.13, die verschiedene Näherungen zeigen, stellen die ersten Glieder dieser Fourier-Reihe dar. Die rote Kurve ist nur das erste Glied der Fourier-Reihe, die grüne Kurve ist die Summe der ersten zwei Glieder und die blaue Kurve ist die Summe der ersten drei Glieder dieser Fourier-Reihe. Je mehr Glieder der Fourier-Reihe wir einbeziehen, desto besser wird unsere Näherung die Rechteckwelle reproduzieren.

11.3.2 Wellenenergie

Genau wie beim harmonischen Oszillator oder einer anderen bewegten Masse ist die Energie einer Welle die Summe ihrer kinetischen und ihrer potenziellen Energie. Nehmen wir das Beispiel der Seilwelle aus Abschnitt 11.1. Für ein perfektes Seil können wir eine lineare Massendichte $\mu = \Delta m / \Delta x$ definieren, wobei Δm und Δx die infinitesimalen Massen- und Längenelemente eines infinitesimalen Seilstücks sind. Für die mit der y -Auslenkung dieses infinitesimalen Seilstücks verbundene Änderung der kinetische Energie muss gelten

$$\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_y^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \cdot v_y^2$$

was im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ übergeht in

$$dT = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \mu \cdot v_y^2 \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \mu \cdot v_y^2 \cdot dx$$

Für eine in die positive x -Richtung laufende Welle $y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ ist die Geschwindigkeit v_y eines in y -Richtung schwingenden Massenelements im Seil

$$v_y = \frac{d}{dt} y(x, t) = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$$

Damit wird die kinetische Energie dT zu

$$dT = \frac{1}{2} \mu \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 \cdot \cos^2(kx - \omega t) \cdot dx \quad (11.36)$$

Um die potenzielle Energie dieses schwingenden Seilelements zu bestimmen, betrachten wir es als einen einfachen harmonischen Oszillatator mit der Masse Δm , der mit einer Kreisfrequenz ω schwingt. Wenn wir diesem Oszillatator die «Federkonstante» $k_{Seil} = \Delta m \cdot \omega^2$ zuordnen, erhalten wir mit Gl. (4.2) für seine potenzielle Energie

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 \cdot y^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \cdot \omega^2 \cdot y^2$$

was im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ übergeht in

$$dU = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \mu \cdot \omega^2 \cdot y^2 \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \mu \cdot \omega^2 \cdot y^2 \cdot dx$$

Ist $y(x, t)$ eine sich in positiver x -Richtung ausbreitende Welle so wird daraus

$$dU = \frac{1}{2} \mu \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 \cdot \sin^2(kx - \omega t) \cdot dx \quad (11.37)$$

Damit ist die gesamte Energieänderung dE , die mit der Bewegung eines Massenelements Δm während der Wellenausbreitung im Seil verbunden ist, gegeben durch

$$dE = dT + dU = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 dx \quad (11.38)$$

Mit dE/dx haben wir die Energie der Welle pro Längeneinheit. Da Wellen eine beliebige Länge haben, nimmt man als Referenzgröße die Energie die in einer Wellenlänge enthalten ist. Integriert man Gl. (11.38) von 0 nach λ , erhält man für diesen standardisierten Energieinhalt einer Welle

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \lambda \quad (11.39)$$

wobei der Index λ uns sagt, dass es sich um die Energie handelt, die in einer Wellenlänge der Welle enthalten ist. Diese Wellenenergie ist eine Funktion des Materialparameters

μ und sie ist proportional zum Quadrat der Wellenfrequenz ω und dem Quadrat der Wellenamplitude y_0 . Mit der Schwingungsperiode der Welle T , ist die Geschwindigkeit mit der diese Wellenenergie transportiert wird E_λ/T und daher ist die mittlere Leistung der Welle an jedem Punkt gegeben durch

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 v \quad (11.40)$$

wobei v die Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Mit Gl. (11.39) und Gl. (11.40) kennen wir die Energie und die mittlere Leistung, die mit Transversalwellen wie einer Seilwelle oder einer schwingenden Saite verbunden sind. Aber was ist mit Longitudinalwellen, wie z.B. Schallwellen. Dort benötigen wir ein anderes Maß als die lineare Dichte μ , mit der wir die Energie einer Seilwelle berechnet haben. Bei einer Schallwelle ist die maßgebende Größe die Dichte, d.h. $\rho = \Delta m / \Delta V$. Für eine Schallwelle, die sich in x -Richtung ausbreitet, also $\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$, ist die Änderung der kinetischen Energie aufgrund einer infinitesimalen Volumenänderung

$$\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2$$

und wiederum mit Gl. (4.2) ist die entsprechende Änderung der potenziellen Energie

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 \cdot \xi^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot \omega^2 \cdot \xi^2$$

Im Grenzfall $\Delta V \rightarrow 0$ wird aus diesen Änderungen der kinetischen und der potenziellen Energie

$$dT = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 dV$$

und

$$dU = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot \xi^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot \xi^2 dV$$

Durch Einsetzen von $\xi(x, t)$ und seiner zeitlichen Ableitung wird aus dT und dU

$$dT = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dV \quad (11.41)$$

und

$$dU = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \sin^2(kx - \omega t) dV \quad (11.42)$$

und wir erhalten damit für die gesamte Energieänderung, die mit der Verschiebung eines Volumenelements einhergeht

$$dE = dT + dU = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 dV \quad (11.43)$$

Betrachten wir die Energie, die die Welle durch einen Querschnitt A senkrecht zur ihrer Ausbreitungsrichtung transportiert, so können wir mit $dV = Adx$ schreiben

$$dE = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2Adx$$

Betrachten wir wieder den Energieinhalt einer einzelnen Wellenlänge, dann erhalten wir als Ergebnis für die Schallwelle

$$E_\lambda = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2A\lambda \quad (11.44)$$

Genau wie bei der Seilwelle ist die mittlere von der Schallwelle übertragene Leistung dann gegeben durch E_λ dividiert durch die Periode T der Welle, d.h.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2c_s \quad (11.45)$$

wobei c_s die Geschwindigkeit der Schallwelle ist. Jetzt wissen wir, wie man die in monochromatischen Longitudinal- und Transversalwellen enthaltene Energie berechnet. Die nächste Frage ist, wie man die Energie einer Welle bestimmen kann, die mehr als eine Frequenz enthält, so wie z.B. die symmetrische Rechteckwelle in Abb. 11.13. Sowohl bei longitudinalen als auch transversalen monochromatischen Wellen ist die Wellenenergie proportional zum Quadrat der Wellenamplitude. In Abschnitt 11.3.1 haben wir gelernt, dass jede Welle, egal wie seltsam sie geformt ist und wie viele Frequenzen sie auch enthalten mag, durch eine Fourier-Reihe beschrieben werden kann. Monochromatische Wellen sind nur Fourier-Reihen, bei denen alle Koeffizienten bis auf einen Null sind. Daher muss die Energie einer Welle über eine Periode proportional zum Quadrat der Fourier-Reihe sein. Mit Gl. (11.31), Gl. (11.34) und Gl. (11.35) ist das Quadrat der Fourier-Reihe in Gl. (11.30b) über eine Periode (wir messen die Wellenenergie einer Wellenlänge)

$$\int_0^T [f(t)]^2 dt = Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (11.46)$$

Gl. (11.46) hat diese einfache Form, weil mit Gl. (11.32) und Gl. (11.33) die Integrale für alle Kreuzterme $f(t) \cdot f(t)$ über eine Periode verschwinden und nur die quadratischen Terme übrig bleiben. Zum Beispiel im Fall der in Abb. 11.13 skizzierten symmetrischen Rechteckwelle, für die $[f(t)]^2 = h^2$, wird Gl. (11.46) zu

$$h^2T = \frac{T}{2} \left(\frac{4h}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$

Dieses Ergebnis sagt uns übrigens auch, dass die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung gerade $\pi^2/8$ ist.

11.3.3 Wellenpakete

Eine Fourier-Reihe besteht aus einer unendlichen Anzahl von Sinus- und Kosinuswellen diskreter Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ω sind. Damit kann man jede periodische Wellenfunktion beschreiben. Aber was ist mit nichtperiodischen Funktionen wie einem kurzen Puls von Wellenformen, einem Wellenpaket? Um ein Wellenpaket beschreiben zu können, wechseln wir zur komplexen Form der Fourier-Reihe von Gl. (11.30b), also zu

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n [\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)] \quad (11.47)$$

wobei der Index T die Periodenlänge dieser periodischen Funktion angibt. Ein einfacher Vergleich von Gl. (11.30b) und Gl. (11.47) zeigt, dass

$$f_0 = a_0 \quad ; \quad f_n = \frac{1}{2}(b_n - ia_n) \quad ; \quad f_{-n} = \frac{1}{2}(b_n + ia_n)$$

Wie man leicht sieht, erhält man die komplexen Fourier-Koeffizienten auch durch

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_T(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau$$

Mit diesem Ausdruck für die Fourier-Koeffizienten und mit dem äquidistanten Frequenzintervall der Fourier-Reihe

$$\Delta\omega = (n+1)\omega - n\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

können wir Gl. (11.47) umschreiben zu ($n\omega = \omega_n$)

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} f_T(\tau) e^{i\omega_n(t-\tau)} d\tau \cdot \Delta\omega \quad (11.48)$$

Soweit betrachten wir immer noch unendlich periodische Funktionen. Aber was uns interessiert, ist zu verstehen, was im Limes von $T \rightarrow \infty$ passiert, also im Grenzübergang

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \quad (11.49)$$

von periodischen zu nichtperiodischen Funktionen. Mit der Definition

$$g_T(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} f_T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (11.50)$$

können wir Gl. (11.48) schreiben als ($\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$)

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} g_T(\omega_n) e^{i\omega_n t} (\omega_{n+1} - \omega_n) \quad (11.51)$$

Mathematiker nennen Gl. (11.51) eine Riemann-Summe für die Partition $\{\omega_n\}$. Für sehr große Perioden, also im Fall von Gl. (11.49), wird diese Summe zum Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (11.52)$$

wobei $g(\omega)$ hier $g_T(\omega)$ aus Gl. (11.50) im Limes $T \rightarrow \infty$ ist. Wenn das entsprechende Integral für $T \rightarrow \infty$ für alle reellen ω existiert, dann ist

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11.53)$$

die Fourier-Transformierte von $f(t)$ und mit Gl. (11.52) hat man auch die umgekehrte Fourier-Transformation. Ähnlich dem Übergang von der Fourier-Reihe Gl. (11.30b) zur Fourier-Transformation von Gl. (11.53) und Umkehrtransformation von Gl. (11.52) für Funktionen der Variablen t und ω , können wir auch Fourier-Reihen wie Gl. (11.30a) umwandeln, die Funktionen der Variablen x und k sind. Wir machen das auf die gleiche Weise, indem wir von diskreten Werten für k in Gl. (11.30a) zu einer kontinuierlichen k -Variablen übergehen, um die entsprechende Fourier-Transformation zu erhalten

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (11.54)$$

und die Umkehrtransformation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad (11.55)$$

Sehen wir uns nun jeweils ein Beispiel an für das Variablenpaar $t-\omega$ und das Variablenpaar $x-k$. Wir beginnen mit dem Variablenpaar $t-\omega$. Sei $f(t)$, wie in Abb. 11.14 skizziert, ein einzelner Rechteckpuls mit $f(t) = h$ für $-\tau \geq t \leq \tau$ und Null für alle anderen Zeiten. Die Fourier-Transformation Gl. (11.53) dieses Rechteckpulses reduziert sich auf

$$g(\omega) = h \cdot \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\omega t} dt = -\frac{h}{i\omega} (e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}) = \frac{2h}{\omega} \sin(\omega\tau) \quad (11.56)$$

Für $\omega = 0$ müssen wir den Grenzwert mithilfe der L'Hôpitalschen Regel berechnen

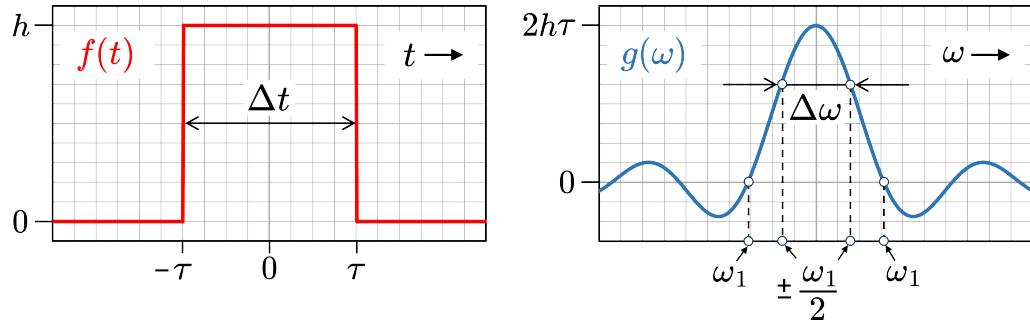


Abb. 11.14: Rechteckpuls in der Zeit-Domäne (links) und in der Frequenz-Domäne (rechts).

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\tau \cos(\omega\tau)}{1} = \tau$$

Mit der Definition der sinc-Funktion

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{falls } z \neq 0 \\ 1 & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

ist die Fourier-Transformierte eines Rechteckpulses der Höhe h und der Dauer 2τ

$$g(\omega) = 2h\tau \text{sinc}(\omega\tau)$$

Die Bestimmung der vollen Halbwertsbreite von $g(\omega)$, also $\Delta\omega$, ist analytisch nicht möglich, da $\text{sinc } z = 1/2$ keine analytische Lösung hat. Wir können aber, wie in Abb. 11.14 gezeigt, eine andere Näherung als Maß für $\Delta\omega$ verwenden. $g(\omega)$ hat seine ersten Nullstellen bei $\omega_1 = \pm\pi/\tau$. Der Wert von $g(\omega)$ bei $\omega_1/2$ ist mit

$$g\left(\pm\frac{\pi}{2\tau}\right) = \frac{4h\tau}{\pi} \approx 0.64 \cdot g(\omega = 0)$$

nur wenig höher als die Hälfte des Maximums $g(\omega = 0) = 2h\tau$. Daher können wir ω_1 als Näherung für $\Delta\omega$ nehmen und die Bedingung für die ersten Nullstellen von $g(\omega)$ als Maß für $\Delta\omega$ verwenden:

$$\Delta\omega \approx \omega_1 = \pm\pi/\tau$$

Mit τ als der halben Breite des Rechteckpulses $f(t)$, also $\tau = \Delta t/2$, lautet diese Gleichung

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi \tag{11.57}$$

Gl. (11.57) sagt uns, dass je kürzer die Dauer Δt des Rechteckpulses ist, desto breiter wird das Frequenzspektrum $\Delta\omega$ der Schwingung sein das die Fourier-Transformation von $f(t)$

liefert. Als nächstes betrachten wir ein Beispiel in der Raum- / Wellenvektor-Domäne, wie in Gl. (11.54) und Gl. (11.55) beschrieben. Dazu wählen wir den in Abb. 11.15 gezeigten kurzen Kosinus-Wellenzug mit Wellenvektor k_0 , wo $f(x) = h \cdot \cos(k_0 x)$ für $-a \leq x \leq a$ und Null überall sonst. Um die Fourier-Transformation von $f(x)$ zu berechnen, verwenden wir die komplexe Wellenform $\bar{f}(x) = \cos(k_0 x) + i \sin(k_0 x)$ anstelle von $f(x)$ und nehmen am Ende einfach den Realteil als Lösung. Damit

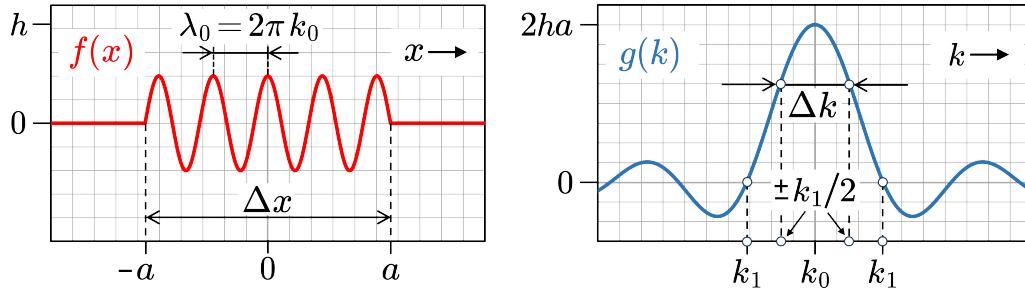


Abb. 11.15: Kosinus-Wellenzug in der Raum-Domäne (links) und in der Wellenvektor-Domäne (rechts).

$$g(k) = \operatorname{Re} \left\{ h \cdot \int_{-a}^{+a} e^{-i(k-k_0)x} dx \right\}$$

Mit Gl. (11.56) kennen wir bereits die Lösung dieses Integrals, wir müssen nur ω durch $k - k_0$ und τ mit a ersetzen. Wie beim Rechteckimpuls ist auch die Fourier-Transformation von $f(x)$ in Abb. 11.15 eine sinc-Funktion:

$$g(k) = \begin{cases} 2h \frac{\sin[(k - k_0)a]}{k - k_0} & \text{falls } k \neq k_0 \\ 2ha & \text{falls } k = k_0 \end{cases}$$

Berechnen wir die Breite von $g(k)$ in Abb. 11.15 ebenso wie oben die Breite von $g(\omega)$ in Abb. 11.14, so erhalten wir das Analogon von Gl. (11.57) in der Raum / Wellenvektor-Domäne, d.h.

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi \tag{11.58}$$

Je kürzer die Länge der Kosinus-Pulsfolge, desto breiter das Wellenvektorspektrum und umgekehrt. Die Beziehungen in Gl. (11.57) und Gl. (11.58) drücken eine grundlegende Eigenschaft der Fourier-Transformation endlicher Wellenzüge aus. Frequenz ω und Zeit t sind ebenso wie Raum x und Wellenvektor k sogenannte konjugierte Variablen und Gl. (11.57) und Gl. (11.58) sind Beispiele für eine fundamentale Unschärferelation, die für alle derartigen konjugierten Variablenpaare existiert. Je genauer wir eine der konjugierten

Variablen kennen, d.h., je kleiner ihr Δ wird, desto ungenauer kennen wir die andere konjugierte Variable, da ihr Δ entsprechend größer wird.

11.3.4 Wellen in drei Dimensionen

Abgesehen von Abschnitten bei der Diskussion von Schallwellen, wurden Wellenphänomene in diesem Kapitel nur im Hinblick auf Wellen betrachtet, die sich in einer bestimmten Koordinatenrichtung ausbreiten, wie die einfache Sinuswelle in Gl. (11.6)

$$y(x, t) = y_0 \sin[k(x \pm v_x t)]$$

oder Wellen in komplexer Notation wie in Gl. (11.7)

$$y(x, t) = y_0 e^{i(kx \pm \omega t)}$$

Bei solchen Wellen, unabhängig davon, ob es sich um Transversal- oder Longitudinalwellen handelt, liegen alle Punkte, die die gleiche Phase oder die gleiche Auslenkung haben, auf einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Anders ausgedrückt: In einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung haben alle Punkte einer solchen Welle die gleiche Amplitude und die gleiche Phase. Aus diesem Grund werden solche Wellen ebene Wellen genannt. Um ebene Wellen zu beschreiben, die sich im dreidimensionalen Raum in beliebiger Richtung ausbreiten, wechselt man von der Wellenzahl k zum Wellenvektor \mathbf{k} , wie wir es in diesem Kapitel mehrfach getan haben.

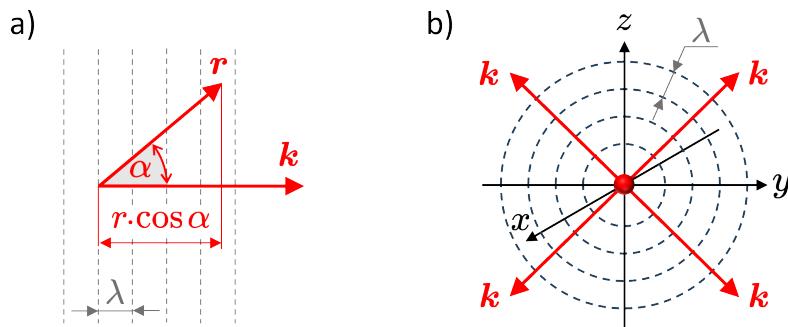


Abb. 11.16: Orientierung des Wellenvektors im Fall einer ebenen Welle (a) und bei kreisförmigen bzw. sphärischen Wellen (b).

Wie in Abb. 11.16a dargestellt, zeigt der Wellenvektor einer ebenen Welle in ihre Ausbreitungsrichtung. Um die Phase der Welle an einem beliebigen Ort \mathbf{r} zu bestimmen, muss man, wie skizziert, lediglich die Projektion von \mathbf{r} auf die Ausbreitungsrichtung, also auf die Richtung des Wellenvektors berechnen. D.h., man muss berechnen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k \cdot r \cdot \cos \alpha$$

Alle Punkte, für die $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = const$ liegen in einer Ebene und daher beschreiben

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$$

und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

ebene harmonische Wellen, die sich im dreidimensionalen Raum ausbreiten. Häufig hat man es nicht mit einer ebenen Welle, sondern mit sphärischen Wellen zu tun. Wenn eine Welle von einer Punktquelle erzeugt wird, beispielsweise wenn wir einen Kieselstein in einen ruhigen Teich werfen oder wenn morgens der Wecker schrillt, sind die erzeugten Wellenfronten keine ebenen Wellen, sondern kreisförmige oder sphärische Wellen, wie in Abb. 11.16b skizziert. Ist das Medium, in dem sich eine solche Welle ausbreitet, isotrop, dann ist der Wellenvektor in alle Richtungen gleich und wie bei einer ebenen Welle immer orthogonal zur Ausbreitungsrichtung. Breitet sich die Welle aus, so verteilt sich die Energie in der Welle auf eine immer ausgedehntere Wellenfront, d.h., die Amplitude nimmt mit der Entfernung von Ursprung der Welle, hier der Koordinatenursprung, ab. Eine einfache harmonische Kugelwelle wird daher beschrieben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{A}_0}{r} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

Mit Abschnitt 11.3.1 wissen wir, die Energie einer Welle ist proportional zum Quadrat der Wellenamplitude. Bei einer Kugelwelle ist die Energie also proportional zu r^{-2} oder anders ausgedrückt, sie ist umgekehrt proportional zur sich ausdehnenden Oberfläche der Kugelwellenfront. In großer Entfernung vom Ursprung einer Kugelwelle erscheint ihre Wellenfront für einen Beobachter flach, so wie bei einer ebenen Welle. Daher können wir bei großen Entfernungen von der Quelle einer Kugelwelle, diese genauso behandeln wie eine ebene Wellen. So wie ebene Wellen sich hin und her bewegen können, können sich auch sphärische Wellen hin und her bewegen. Während wir häufig sphärische Wellen erleben, die von einer Wellenquelle ausgehen, ist auch das Gegenteil möglich. Anstatt von einem Zentrum nach außen zu laufen, können Kugelwellen auch von außen auf ein Zentrum laufen, wie das z.B. Schockwellen bei einer Implosion tun.

11.4 Das Huygens-Prinzip

Im Streit über die Natur des Lichts setzte sich im 17. Jahrhundert Newtons Korpuskulartheorie nicht durch, weil sie im Gegensatz zur Wellentheorie des Lichts, die sein älterer Rivale und Zeitgenosse Huygens vertrat, die Beugung von Licht nicht erklären

konnte. Lichtbeugung ist ein reines Wellenphänomen, das auftritt, wenn sich Wellen um eine Kante beugen. Die Wellentheorie von Huygens konnte diese Beugung erklären, die Korpuskulartheorie von Newton hingegen nicht. Erst mit der Arbeit von Max Planck und Albert Einstein setzte sich der Korpuskelaspekt des Lichts in der Physik wieder durch und mit der Entwicklung der Quantenmechanik im frühen 20. Jahrhundert wurde klar, dass Licht sowohl eine Teilchen als auch eine Wellennatur besitzt.

Das Huygens-Prinzip, in Anerkennung der Arbeiten von Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827), auch Huygens-Fresnel-Prinzip genannt, besagt, dass jeder Punkt auf einer sich ausbreitenden Wellenfront der Ursprung einer so genannten Elementarwelle ist. In zwei Dimensionen ist das eine kreisförmige Welle, wie die Welle, die sich durch die Oberfläche eines ansonsten ruhigen Teichs ausbreitet, von dem

Punkt ausgehend, an dem ein Kieselstein die Wasseroberfläche durchbrach. In drei Dimensionen sind Elementarwellen natürlich Kugelwellen, die ihren Ursprung in einem Raumpunkt haben und deren Wellenfront sich von diesem Punkt gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet. Elementarwellenkonstruktionen zur Erklärung der Wellenausbreitung verwenden oft nur die Halbkugel der Welle, die in die Ausbreitungsrichtung zeigt. Abb. 11.17a veranschaulicht dies für eine ebene Welle, die sich von links nach rechts ausbreitet, während Abb. 11.17b für eine kreisförmige Welle vollständige Elementarwellen zeigt, die von allen Punkten der aktuellen Wellenfront ausgehen und eine neue Wellenfront erzeugen. Bei ebenen Welle ist diese neue Wellenfront die Tangente an alle Elementarwellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung; bei einer kreisförmigen Welle ist es die Tangentialkurve, die alle Elementarwellen umhüllt, die zu jedem Zeitpunkt von der äußersten Wellenfront ausgehen; und in drei Dimensionen ist die neue Wellenfront die tangentiale Oberfläche zu allen sphärischen Elementarwellen, die von der vorhergehenden sphärischen Wellenfront ausgingen, d.h., es handelt sich um eine Kugelsphäre.

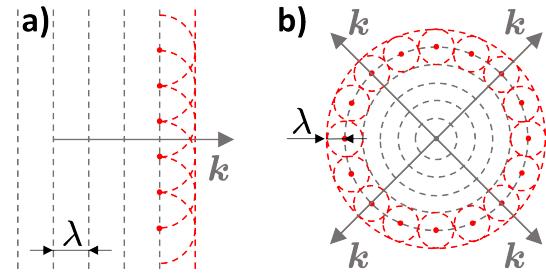


Abb. 11.17

11.4.1 Reflexion und Brechung

Wir betrachten die in Abb. 11.18 dargestellte Reflexion einer Lichtwelle an einem perfekten Spiegel. Eine ebene Lichtwelle der Wellenlänge λ soll sich unter einem Winkel θ_1 zur Oberflächennormalen des Spiegels auf diesen zubewegen.

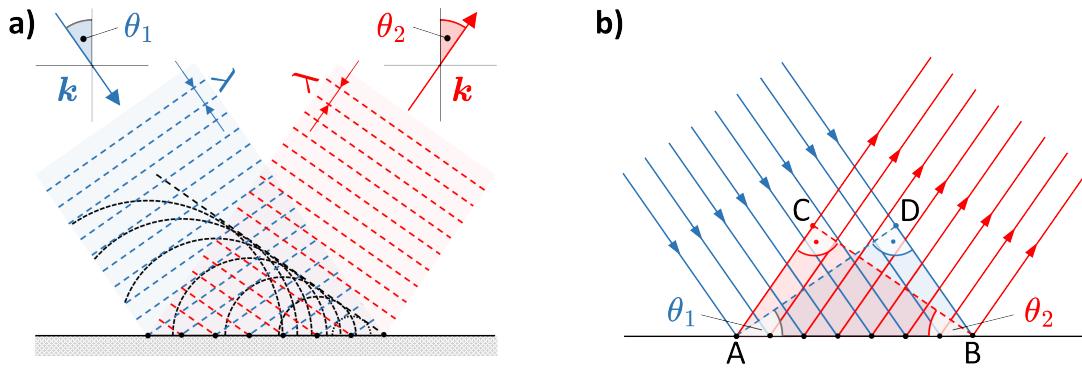


Abb. 11.18: Elementarwellenkonstruktionen nach Huygens (a) und Lichtstrahlskizze (b) bei Wellenreflektion.

Wie in Abb. 11.18a gezeigt, ist der Punkt, an dem eine Wellenfront (gestrichelte blaue Linien) zuerst auf die Spiegeloberfläche trifft, der Ort, von dem von seiner Oberfläche ausgehend, die erste Elementarwelle sich auszubreiten beginnt. Die Punkte auf der Spiegeloberfläche zeigen die Orte an, nach denen diese Wellenfront eine weitere Strecke λ zurückgelegt hat und wo eine weitere Elementarwelle ihren Ursprung haben wird. Natürlich liegen die Orte, an denen eine einfallende Wellenfront auf die Spiegeloberfläche trifft unendlich dicht. Hier haben wir nur einige Elementarwellen ausgewählt, d.h. Orte auf der Spiegeloberfläche, die so weit voneinander entfernt sind, dass die Wellenfront zwischen ihnen eine weitere Strecke λ zurückgelegt hat. Wenn sich die letzte Elementarwelle gerade auszubreiten beginnt, hat die von der einlaufenden Wellenfront zuerst erzeugte Elementarwelle bereits eine ganze Strecke zurückgelegt. Diese Strecke ist natürlich die gleiche, die eine bestimmte Wellenfront zwischen den Zeitpunkten zurücklegt, an denen ihr erster Teil und ihr letzter Teil auf den Spiegel treffen. Die tangentiale Einhüllende der Elementarwellen, die zwischen den entsprechenden Orten auf dem Spiegel erzeugt werden, beschreibt dann die reflektierte Wellenfront, die sich vom Spiegel weg bewegt. Für den Einfallswinkel der Welle θ_1 und den Reflexionswinkel θ_2 muss $\theta_2 = \theta_1$ gelten.

Um zu verstehen, warum das so ist, wechseln wir von der Wellenfrontskizze in Abb. 11.18a zur Lichtstrahlskizze in Abb. 11.18b. Die Lichtstrahlrichtung ist natürlich orthogonal zur Wellenfront und Abb. 11.18b zeigt die einfallenden und reflektierten Lichtstrahlen für die Orte, die wir als Ursprung der Elementarwellen für die Konstruktion in Abb. 11.18a verwendet haben. Wie leicht zu prüfen ist, sind die Winkel zwischen der Spiegeloberfläche und den einfallenden und reflektierten Wellenfronten gerade θ_1 und θ_2 . Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABD in Abb. 11.18b ist die Strecke \overline{AB} auf welche die Lichtwelle trifft. Seine Seiten sind der Abstand \overline{AD} entlang der Wellenfront zwischen dem ersten und dem letzten Lichtstrahl, der auf die Spiegeloberfläche trifft, und der

Abstand \overline{DB} , den der letzte Strahl noch zurücklegen muss wenn der erste Lichtstrahl gerade auf den Spiegel trifft. Für das reflektierte Licht hat das rechtwinklige Dreieck ABC die gleiche Hypotenuse \overline{AB} . Seine beiden Seiten sind die Strecke \overline{AC} , die das reflektierte Licht des ersten Lichtstrahls zurückgelegt hat, bis der einfallende letzte Lichtstrahl auf die Spiegeloberfläche trifft, und die Strecke \overline{BC} entlang der jeweiligen Wellenfront zwischen diesem ersten reflektierten Lichtstrahl und dem Ort auf dem Spiegel, an dem der letzte einfallende Lichtstrahl gerade auf die reflektierende Oberfläche trifft. Weil diese beiden rechtwinkligen Dreiecke die gleiche Hypotenuse haben und Licht von D nach B die gleiche Strecke zurücklegt wie Licht von A nach C ist offensichtlich $\overline{AC} = \overline{DB}$. Das heißt aber, die beiden rechtwinkligen Dreiecke sind kongruent und somit gilt $\theta_2 = \theta_1$.

Bei der obigen Ableitung des Reflexionsgesetzes, d.h., Reflexionswinkel ist gleich Einfallswinkel, haben wir eine ebene Lichtwelle verwendet, die von einem flachen Spiegel reflektiert wird. Das Reflexionsgesetz gilt jedoch nicht nur für elektromagnetische Wellen wie Licht sondern auch für mechanische Wellen wie Schallwellen oder Wasserwellen. Die Wellenlänge des Lichts und die Geschwindigkeit, mit der sich Licht ausbreitet, unterscheiden sich um Größenordnungen von denen von Schall- und Wasserwellen. Natürlich ist Licht nur die Bezeichnung für ein sehr schmales Spektrum elektromagnetischer Wellen, welche das sichtbare Spektrum umfasst, das wir mit unseren Augen wahrnehmen können. Das Wellenlängenspektrum elektromagnetischer Strahlung erstreckt sich über viele Größenordnungen und für alle gelten grundsätzlich die Gesetze der Reflexion. Übersteigt die Energie der Strahlung aber einen gewissen Wert, so wird sie zunehmend absorbiert und nicht reflektiert, weil Photonen dann über genügend Energie verfügen, um die Atome aus denen ein Spiegel besteht, elektronisch anzuregen. Neben elektromagnetischen Wellen, Schallwellen oder Wasserwellen gibt es noch viele andere Arten von Wellen. Was für diese als Spiegel dienen kann, der solche Wellen reflektiert, hängt von der Natur der betrachteten Wellen ab.

Zur Wellenbrechung im Huygens-Modell betrachten wir eine ebenen Lichtwelle, die an der Grenze zweier Medien gebrochen wird (Abb. 11.19a). Die beiden Medien, zum Beispiel Luft und Glas, sollen die Brechungsindizes n_1 und n_2 haben und es soll $n_2 > n_1$ gelten. Ein höherer Brechungsindex bedeutet, dass sich Licht langsamer ausbreitet, was wiederum heißt, dass Elementarwellen, die an der Grenze der beiden Medien erzeugt werden, sich im Medium n_2 mit einer geringeren Geschwindigkeit ausbreiten werden als im Medium n_1 . Daher ist die Strecke, die eine an der Grenzfläche erzeugte Elementarwelle im n_2 -Medium zurücklegt, kürzer als die Strecke λ , die das einfallende Licht im Medium n_1 zwischen der Entstehung zweier der in Abb. 11.19a skizzierten Elementarwellen zurücklegt.

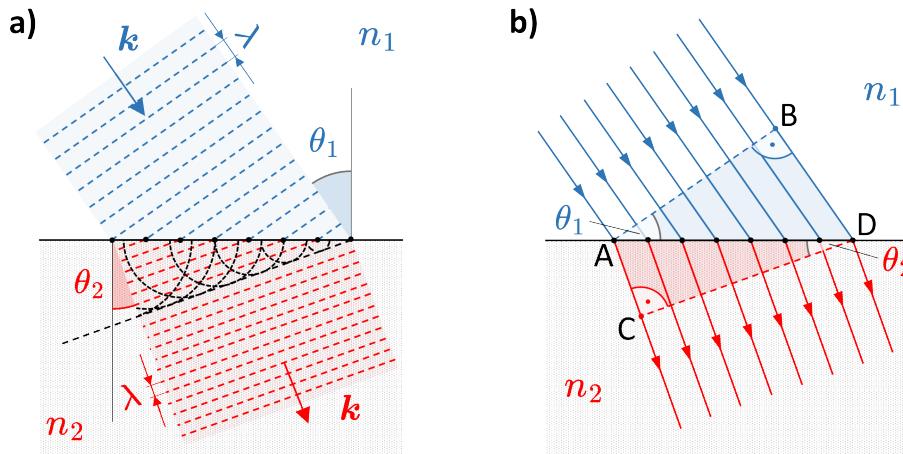


Abb. 11.19: Elementarwellenkonstruktionen nach Huygens (a) und Lichtstrahlskizze (b) bei Wellenbrechung.

Mit anderen Worten: Der Brechungswinkel θ_2 ist kleiner als der Einfallswinkel und die Lichtwelle wird zur Grenzflächennormalen hin gebrochen. Hätten wir $n_1 > n_2$ gewählt, dann wäre die Situation umgekehrt, die Lichtgeschwindigkeit wäre im n_2 -Medium höher, was heißt, dass $\theta_2 > \theta_1$ und die einfallende Welle würde von der Oberflächennormalen weg gebrochen. Um das Brechungsgesetz abzuleiten, betrachten wir die Lichtstrahlkonstruktion in Abb. 11.19b mit den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC , die den Einfallswinkel θ_1 im n_1 -Medium und den Brechungswinkel θ_2 im n_2 -Medium einschließen. In der Zeit, in welcher der letzte Strahl in n_1 die Strecke \overline{BD} zurücklegt, legt der erste Lichtstrahl in n_2 die Strecke \overline{AC} zurück. Mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 (mit $v_1 > v_2$) im n_1 - und n_2 -Medium, gilt dann $\overline{BD} = v_1 t$ und $\overline{AC} = v_2 t$. Die Dreiecke ADB und ADC haben die gleiche Hypotenuse \overline{AD} und daraus folgt

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\overline{BD}/\overline{AD}}{\overline{AC}/\overline{AD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{v_1}{v_2} \quad (11.59)$$

Die Lichtgeschwindigkeit in einem beliebigen Medium ist $c_m = c_0/n_m$, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n_m der Brechungsindex des Materials ist, in dem sich Licht ausbreitet. Der Brechungsindex von Luft ist unter Normalbedingungen (1 atm und 300 K) mit $n_{Luft} = 1.003$ praktisch gleich wie im Vakuum. Damit ist $v_1 = c/n_1$ und $v_2 = c/n_2$ und daher wird Gl. (11.59) zum Snelliusschen Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (11.60)$$

Empirisch war dieses Gesetz schon lange bekannt, doch erst im 17. Jahrhundert wurden hinreichende Beweise erbracht. Einer davon war die Anwendung des Fermat-Prinzips nach Pierre de Fermat (1607–1665), das besagt, dass Licht immer den Weg zurücklegt, der am

wenigsten Zeit in Anspruch nimmt, und die andere entstand durch Huygens Wellentheorie des Lichts. Aus $n_m = c_0/c_m$ folgt mit $c = \lambda \cdot f$ auch $n_m = \lambda_0/\lambda_m$, was bedeutet, dass sich die Wellenlänge mit dem Brechungsindex n_m ändert und wie in Abb. 11.19a zu sehen ist, in einem Medium mit höherem Brechungsindex kürzer ist.

11.4.2 Beugung und Interferenz

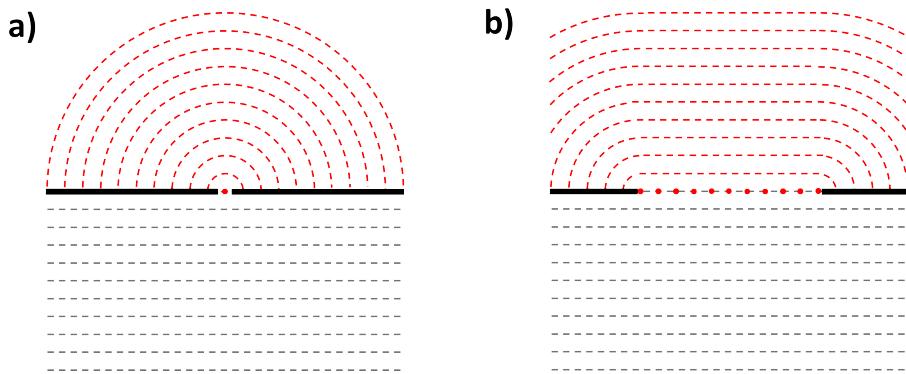


Abb. 11.20: (a) Beugung einer ebenen Welle an einem Spalt, der so klein ist, dass er eine einzelne Elementarwelle «isoliert». (b) Bei einem breiten Spalt wird die ebenen Welle nur an den Öffnungsrändern um das Hindernis gebeugt.

Von Wellenbeugung spricht man, wenn eine Welle beim Auftreffen auf ein Objekt ihre Ausbreitungsrichtung durch Beugung um das Objekt ändert. Wir alle kennen das von Wasserwellen, die sich seitlich hinter einem Objekt ausbreiten. Aber wenige stellen sich wohl die Frage, wie es sein kann, dass eine Welle sich im Objektschatten ausbreiten kann. Anstatt zu beobachten, wie sich eine Welle um die Kante eines Objekts biegt, ist es einfacher, wie in Abb. 11.20a gezeigt, die Kanten zweier Objekte so nah aneinander zu rücken, dass nur noch eine einzelne Elementarwelle passieren kann. Wegen ihrer langen Wellenlänge ist dies ein leicht durchzuführendes Experiment mit ebenen Wasserwellen, die in einer flachen Wanne gegen ein Hindernis mit einem kleinen Spalt laufen. Die Erklärung für das kreisförmige Wellenmuster, das sich hinter dem Spalt ausbreitet, ist, dass diese Öffnung im Hindernis so klein ist, dass nur eine einzelne Elementarwelle entsteht, die sich dann hinter dem Schlitz als kreisförmige Welle ausbreitet.

Öffnet man den Spalt, so können immer mehr Elementarwellen hindurchtreten. Ist die Öffnung um ein Vielfaches größer als die Wellenlänge der Wasserwelle, breitet sie sich die ebene Welle ungestört hinter dem Hindernis aus und erfährt nur an den Rändern eine Beugung. In der Skizze in Abb. 11.20b kann man sehen, dass es nur etwa die Hälfte einer einzelnen Elementarwelle ist, die dazu führt, dass die Welle um die Ecke biegt. Wie eine eingehendere Untersuchung von Beugung und Interferenz im Rahmen der

Elektrodynamik und Optik im zweiten und dritten des Kursband zeigen wird, ist es sogar weniger als die Hälfte einer einzelnen Elementarwelle, die um die Ecken gebeugt wird. Bei Beugung führt das Huygens-Prinzip zu einer korrekten Beschreibung der Wellenfront im Fernfeld, also weit entfernt vom Objekt, um das sich eine Welle beugt, im Nahfeld, also an den Ecken, ist es jedoch falsch. Dennoch ermöglicht uns das Huygens-Beugungsmodell, einige alltägliche Beobachtungen zu verstehen, wie zum Beispiel, dass wir um Ecken herum hören, aber nicht um Ecken herum sehen können.

Stellen wir uns vor, die Öffnung in Abb. 11.20b ist eine Tür und die eintreffende ebene Welle eine Schallwelle, von jemandem erzeugt, der in Richtung der Tür spricht. Aufgrund der Beugung kann jemand hinter der Türöffnung, den Sprecher auch dann hören, wenn er keine Sichtlinie zum Sprecher hat. Dass dies bei Schallwellen aber nicht bei Lichtwellen funktioniert, liegt an der im Vergleich zu Licht viel größere Wellenlänge des Schalls. Menschen mit perfektem Gehör können Schallfrequenzen zwischen ca. 20 Hz und $20 \cdot 10^3$ Hz hören, also einen Wellenlängenbereich von 1,7 cm bis 17 m. Elementarwellen solcher Wellenlänge können problemlos um die Ecken der Tür herum den Raum mit Klang erfüllen. Sichtbares Licht deckt ungefähr den Wellenlängenbereich von 400 bis 700 nm ab, was einige 4 bis 7 Größenordnungen kürzer ist als der Wellenlängenbereich, den Schall abdeckt. Daher wird sich Licht nur um wenige Nanometer um eine Ecke biegen und nicht um Meter, wie es bei Schallwellen der Fall ist. Eine ebene Lichtwelle dringt praktisch ungestört und mit sehr geringer Beugung durch eine Tür, was zur Folge hat, dass wir nur Menschen sehen können, die in direkter Sichtlinie hinter einer Türöffnung stehen, aber keine Menschen links und rechts davon, wo es keine direkte Sichtverbindung gibt.

Das Huygens-Modell der Wellenausbreitung ist ein Amplitudenmodell. Die gestrichelten Linien der Wellenfronten in den vorherigen Abbildungen geben die Positionen der Wellenberge an, d.h. der maximalen Amplitude. Das Huygens-Modell sagt nichts über die Phase einer Welle. Aber auch ohne die Phasen zweier ineinanderlaufender Wellen zu kennen, kann man qualitativ verstehen, was passiert, und einige quantitative Aussagen treffen. Dazu betrachtet man die in Abb. 11.21 skizzierte Situation, wo eine ebene Welle gegen ein zur Wellenfront paralleles flaches Hindernis läuft das zwei kleine Öffnungen hat. Diese Öffnungen, wir nennen sie Spalte, da sie so klein sind, dass nur eine einzige Elementarwelle in jedem Spalt entstehen kann, sind durch einen Abstand d voneinander getrennt, der viel größer ist als die Spalte. Da die beiden Elementarwellen in Abb. 11.21, die hinter den Spalten zu kreisförmigen Wellen werden, von derselben einfallenden ebenen Welle erzeugt werden und die Spalte vollkommen identisch sind, haben wir zwei identische kreisförmige Wellen, die sich hinter den Spalten ausbreiten.

Damit können wir nun einfach Wellenamplituden addieren, um zu verstehen, was passiert. An jedem Schnittpunkt einer gestrichelten roten mit einer gestrichelten blauen Wellenfront addieren sich die Amplituden der jeweiligen Wellenberge zu einer größeren Amplitude. Diese Positionen sind in Abb. 11.21 mit Kreisringen markiert. Verbindet man aufeinanderfolgende Kreisringe mit einer geraden Linie, die gegen einen Wand verläuft, die sich in einem Abstand L hinter und parallel zu dem Hindernis befindet, markiert jeder Schnittpunkt der Wand mit einer solchen Linie einen Ort erhöhter Amplitude oder Lichtintensität, wenn wir das Experiment mit Licht machen. Jetzt markieren wir die Punkte auf den blau gestrichelten Wellenfronten, die genau in der Mitte zwischen zwei gestrichelten roten Wellenfronten liegen. Da sich Wellentäler genau in der Mitte zwischen Wellenbergen befinden trifft an diesen Punkten ein Wellenberg der gestrichelten blauen Welle auf ein Wellental der gestrichelten roten Welle. An solche Punkte, in Abb. 11.21 mit grauen Kreisscheiben markiert, ist die resultierende Wellenamplitude Null. Verbinden wir aufeinanderfolgende Kreisscheiben und bestimmen die Schnittpunkte dieser Linien mit der Wand, so markieren diese die Positionen auf der Wand wo sich die beiden Wellen gegenseitig aufheben; bzw. Dunkelstellen falls wir das Experiment mit Licht machen. Wir hätten natürlich die gleiche Analyse machen können, indem wir nach Punkten auf roten gestrichelten Wellenfronten gesucht hätten, die genau in der Mitte zwischen zwei gestrichelten blauen Wellenfronten liegen. Das Ergebnis wäre jedoch dasselbe und um die Skizze in Abb. 11.21 nicht mit zu vielen markierten Stellen zu überladen, haben wir nur einen solchen Satz verwendet, um zu identifizieren, wo sich die Amplitudenminima auf dem Bildschirm befinden.

Oberhalb der Wand in Abb. 11.21 gibt eine Reihe von Zahlen die Interferenzordnung n an, mit der die jeweiligen Positionen der maximalen und minimalen Amplitude / Intensität auf der Wand identifiziert werden. Diese Zahlen gibt es in zwei Reihen:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k \quad \text{und} \quad n = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2k+1}{2}$$

wobei k alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Der Wert von n gibt den Wegunterschied zwischen gestrichelten blauen und gestrichelten roten Wellen an der jeweiligen Position

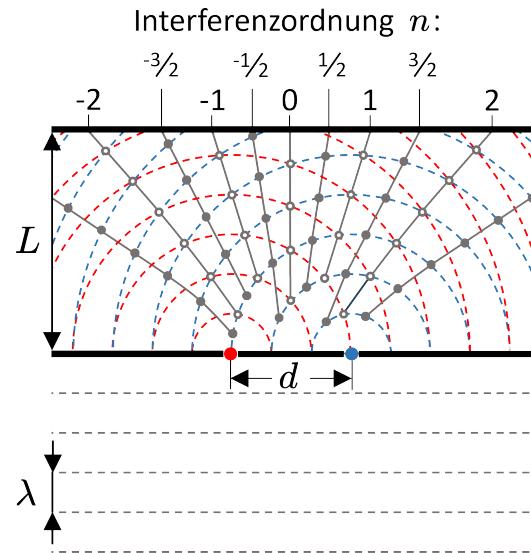


Abb. 11.21

in Abb. 11.21 an. Für den zentralen hellen Fleck bei $n = 0$ ist der Wegunterschied zwischen blauen und roten Kreiswellen genau Null. An der mit $n = 1$ bezeichneten Position beträgt dieser Wegunterschied zwischen blauen und roten Kreiswellen λ , für $n = 2$ ist er 2λ ; und für $n = -1$ oder $n = -2$ ist dieser Abstand dann genau $-\lambda$ oder -2λ . Für die halbzahligen Werte von n sind die Wegunterschiede zwischen gestrichelten roten und blauen Wellen natürlich gerade die halbzahligen Werte von λ . Wenn der Wegunterschied eine ganze Zahl von λ ist, dann befinden sich die Wellenberge und -täler beider Wellen an genau derselben Position. Wenn dieser Wegunterschied jedoch ein halbzahliges Wert von λ ist, dann fallen die Wellenberge der einen Welle genau auf die Wellentälern der anderen Welle. Ist die Wegstrecke ein ganzzahliges Vielfaches von λ , spricht man von konstruktiver Interferenz da eine maximale Amplitude oder Lichtintensität auf der Wand erzeugt wird. Ist die Wegstrecke ein halbzahliges Vielfaches von λ , spricht man von destruktiver Interferenz, da eine Nullamplitude oder eine Dunkelstelle auf der Wand erzeugt wird.

Um zu bestimmen, wo auf der Wand sich die Maxima und Minima von Amplitude bzw. Intensität befinden, misst man, wie in Abb. 11.22 gezeigt, deren Abstand von der Position $n = 0$ als Funktion des Winkels θ . Dieser Winkel θ wird durch die orthogonale Linie definiert, die den Mittelpunkt zwischen den beiden Quellpunkten in der Ebene des Hindernisses mit der Position von $n = 0$ auf der Wand verbindet, und der Linie, die von diesem Mittelpunkt zur jeweils interessierenden Position auf der Wand verläuft. Die Skizze in Abb. 11.22 zeigt, wie man das für den Punkt $n = 1$ macht. Zunächst zeichnet man eine rechte Linie vom blauen Quellpunkt auf die Verbindungsgeraden zwischen rotem Quellpunkt und dem $n = 1$ -Punkt. Die Strecke von der roten Quelle bis zu diesem Schnittpunkt ist genau λ , da der Wegunterschied für $n = 1$ für rote und blaue Wellenfronten gleich λ sein muss. Der Winkel gegenüber der roten Linie der Länge λ in diesem rechtwinkligen Dreieck ist θ . Anstatt $n = 1$ als Beispiel in Abb. 11.22 zu verwenden, hätten wir jeden anderen ganzen oder halbzahligen Wert n von λ wählen können, und das Ergebnis wäre immer eine ähnliche Konstruktion, mit dem Unterschied, dass wir dann rechtwinklige Dreiecke mit Wegunterschieden von $n\lambda$ als Gegenseiten zum Winkel θ betrachten würden und nicht λ wie in Abb. 11.22. Mit dem rechtwinkligen Dreieck, das den Wegunterschied mit dem Winkel θ verbindet, können wir nun den Winkel für jede gegebene Interferenzordnung n mit einer einfachen Formel ermitteln

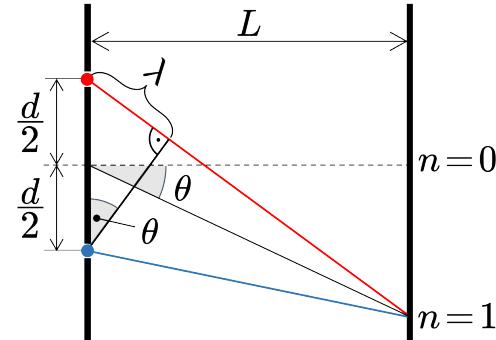


Abb. 11.22

$$d \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda \quad (11.61)$$

Der tatsächliche Abstand einer bestimmten Ordnung auf dem Bildschirm von $n = 0$ ist $z = L \tan \theta$. Wenn wir $\sin \theta$ kennen, können wir diese Beziehung nutzen, um z zu berechnen, indem wir Gl. (11.61) verwenden, um $\tan \theta$ umzuschreiben als

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{n\lambda}{\sqrt{d^2 - n^2\lambda^2}} = \frac{z}{L}$$

woraus dann folgt

$$z = \frac{Ln\lambda}{\sqrt{d^2 - n^2\lambda^2}}$$

Mit der Diskussion dieser gemeinhin als Doppelspalt-Experiment bezeichneten Interferenzerscheinung, beenden wir unseren kurzen Ausflug in die Reflexion, Brechung, Beugung und Interferenz von Wellen. Für eine detailliertere Analyse dieser Phänomene benötigen wir ein besseres Verständnis der Elektrodynamik und Optik, über das wir noch nicht verfügen, aber auf das sich der zweite und dritte Band dieses Kurses konzentrieren werden.

Bevor wir dieses Kapitel beenden, müssen wir noch etwas über materielle (mechanische) und nichtmaterielle (nichtmechanische) Transversalwellen sagen. In diesem Kapitel wurden Wasserwellen als Transversalwellen bezeichnet, dies gilt jedoch nur für Oberflächenwellen, wie sie z.B. als stehende Wellen in der Oberflächenschicht eines geschlossenen Gewässers existieren können. Allerdings sind Oberflächenwellen im Allgemeinen eine Mischung aus Longitudinal- und Transversalwellen und in der Tiefe eines Gewässers können sich nur Longitudinalwellen ausbreiten. Der Grund dafür ist natürlich, dass die Ausbreitung von Transversalwellen das Vorhandensein von Scherkräften erfordert, um eine Bewegung senkrecht zur Ausbreitung der Welle anzutreiben, und dass solche Kräfte in flüssigen oder gasförmigen Körpern nicht existieren. Daher kann die Ausbreitung transversaler Materiewellen nur durch feste Körper erfolgen. Im Gegensatz dazu benötigen immaterielle Transversalwellen wie elektromagnetische Strahlung jedoch nicht die Anwesenheit eines Mediums, um sich auszubreiten. Dass Letzteres der Fall ist, wurde Physikern erst klar, als sie vor der Herausforderung standen, das Relativitätsprinzip mit der Forderung einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in Einklang zu bringen, unabhängig davon, ob man diese in einem ruhenden Inertialsystem misst oder in einem Inertialsystem, das sich mit konstanter, gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegt. Dieser Herausforderung und der Art und Weise, wie sie gelöst wurde, widmen wir uns als Nächstes.

12. Die spezielle Relativitätstheorie

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir uns mehrmals mit bewegten Bezugssystemen befasst, ohne viel über diese relative Bewegung zu sagen. Aber eine offensichtliche Frage lautet: Woher wissen wir, dass zwei Beobachter in ihren relativ zueinander bewegten Bezugssystemen, wenn sie ein und dasselbe Ereignis beobachten, genau die gleichen Naturgesetze am Werk sehen, d.h. die Newtonschen Gesetze? Welche Einschränkungen erlegen die Newtonschen Gesetze solchen Bezugssystemen auf?

12.1 Das Relativitätsprinzip

Newton's erstes Gesetz, das Trägheitsprinzip, besagt, dass ein ruhender Körper in Ruhe bleibt und ein Körper in gleichmäßiger geradliniger Bewegung diese fortsetzt, sofern keine äußere Kraft auf ihn einwirkt. Aufgrund dieses Prinzips müssen die Bezugssysteme in denen zwei relativ zueinander bewegte Beobachter ihre jeweiligen Beobachtungen machen sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen. Aus der Perspektive eines Beobachters in einem beschleunigten Bezugssystem ändert ein Körper, den ein Beobachter in einem nicht bewegten Bezugssystem als ruhend oder in gleichförmiger Bewegung beobachtet, scheinbar seinen Bewegungszustand, obwohl keine äußere Kraft auf ihn einwirkt. Ein offensichtlicher Verstoß gegen das Trägheitsprinzip. Bezugssysteme, in denen das Trägheitsprinzip gilt, Physiker nennen sie Inertialsysteme, können sich daher nur mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen und in keiner Weise relativ zueinander eine Beschleunigung erfahren. Damit sind alle rotierenden Bezugssysteme, wie z.B. die in Kapitel 6 diskutierten, natürlich keine Inertialsysteme.

Ein Beobachter in einem Inertialsystem untersucht Naturgesetze, indem er Dinge wie die Position eines Massenpunkts, seine Geschwindigkeit oder seine Beschleunigung misst. Diese Messungen ermöglichen es, die Bewegung des Massenpunkts zu beschreiben und daraus abzuleiten, wie die Naturgesetze aussehen müssen, die zu dieser Bewegung führen.

Beobachter in zwei verschiedenen Inertialsystemen müssen daher die Koordinatenpositionen und -zeiten, die Messgrundlagen für die Bestimmung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in ihren Inertialsystemen, so ineinander überführen, dass sie zu den gleichen Schlussfolgerungen hinsichtlich der geltenden Naturgesetze kommen.

Das Relativitätsprinzip ist die Antwort auf eine Herausforderung vor der Physiker im Hinblick auf die Natur von Raum und Zeit standen: ob diese absolut oder relativ seien und ob Dinge wie absolute Bewegung existierten oder ob es nur relative Bewegung gäbe. Das Relativitätsprinzip beginnt mit Galilei, der behauptete, an Bord eines mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fahrenden Schiffs, könne ein Passagier in einer geschlossenen Kabine nicht wissen, ob es sich bewegt. Es gäbe keine Möglichkeit, empirisch festzustellen, ob sie oder er sich auf einem Schiff befände, das mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf ruhigem Meer segelte, oder ob das Schiff still im Hafen lag. Huygens, Newtons älterer Zeitgenosse, schlug ein Relativitätsprinzip vor, von dem er glaubte es erfordere nicht die Annahme eines absoluten Raums und einer absoluten Zeit, und er nutzte seine Interpretation des Relativitätsprinzips, um die Impulserhaltung bei Kollisionen harter Körper zu verstehen. Im Gegensatz dazu betrachtete Newton Raum und Zeit als absolut. Um sein Relativitätsprinzip der Mechanik zu veranschaulichen, wählte Newton eine etwas andere Metapher als Galilei, aber sie drückt den gleichen Gedanken aus:

„The motions of bodies included in a given space are the same among themselves whether that space is at rest or moves uniformly in a straight line without circular motion.“

Dieses Zitat zeigt, dass Newton in Inertialsystemen dachte, obwohl er seinen «gegebenen Raum» nicht so nannte; Er schloss rotierende Räume ausdrücklich aus, da rotierende Systeme immer beschleunigte Systeme sind und daher eben keine Inertialsysteme sein können.

Um zu verstehen, wie Messungen von Ort und Zeit zwischen Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegen, tatsächlich zusammenhängen, betrachten wir die beiden Inertialsysteme S und S' in Abb. 12.1. S und S' bewegen sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_0/t$. Damit sind die Orte \mathbf{r} und \mathbf{r}' und die Zeiten t und t' , die Beobachter in den jeweiligen Inertialsystemen S und S' für einen Massenpunkt an einem Ort P messen veknüpft durch

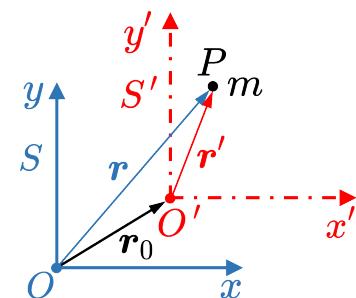


Abb. 12.1

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t \\ t' = t \end{array} \right\} \quad (12.1)$$

Diese Gleichungen, drei für die Messung der Raumkoordinaten und eine für die Zeitmessung in jedem Inertialsystem, sind die Galilei-Transformationen, denen wir bereits mehrfach begegnet sind. Die Tatsache, dass bei diesen Transformationen zwischen zwei Systemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, t' gleich t ist, drückt die Absolutheit der Zeit in der Newtonschen Mechanik aus. Alle Uhren in allen Inertialsystemen messen die gleiche absolute Zeit t . Bei der Berechnung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines bewegten Massenpunkts auf Basis dieser Gleichungen gehen wir davon aus, dass beide Inertialsysteme die gleichen Metriken besitzen, das heißt konkret, dass die räumlichen Differentiale identisch sind, d.h. $dx_i = dx'_i$ für $i = 1, 2, 3$; und natürlich, weil die Zeit in der Newtonschen Mechanik absolut ist, muss $dt = dt'$ gelten. Damit folgt aus Gl. (12.1) für die Geschwindigkeiten

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \quad (12.2)$$

Für jemanden im ruhenden System S addiert sich die konstante Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 des bewegten Systems S' zur willkürlichen Geschwindigkeit des Massenpunkts. Das Gegenteil ist der Fall für einen Beobachter in S' , der eine Massenpunktgeschwindigkeit misst, die um die konstante Geschwindigkeit reduziert ist, mit der sich S' selbst bewegt. Natürlich kann ein Beobachter in S' behaupten sein System ruhe und das Inertialsystem S bewege sich in Bezug auf sein eigenes Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}_0 = -\mathbf{r}_0/t$. Es gibt kein bevorzugtes Inertialsystem und beide Beobachter können behaupten ihr System ruhe. Es geht um relative Bewegung und nicht darum, wer sich bewegt und wer ruht. Für die in beiden Systemen beobachtete Beschleunigungen folgt aus Gl. (12.2)

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (12.3)$$

Dass die im Inertialsystem S' beobachtete Beschleunigung eines Massenpunkts \mathbf{a}' gleich der in S gemessenen Beschleunigung \mathbf{a} dieses Massenpunkts ist, stellt sicher, dass in beiden Inertialsystemen das Newtonsche Gesetz dasselbe ist. Mit

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (12.4)$$

ist die Kraft \mathbf{F}' , die für jemanden in S' dazu führt, dass der Massenpunkt seinen Bewegungszustand ändert, dieselbe Kraft wie \mathbf{F} , die das für einen Beobachter in S bewirkt. Dies gilt aber nur, wenn die Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 von S und S' konstant ist, erst

dann folgt Gl. (12.3) und damit die dynamische Äquivalenz der Inertialsysteme S und S' . Zu sagen, Inertialsysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen sind dynamisch äquivalent, ist eine andere Art zu sagen, dass die Newtonschen Gesetze und damit die gesamte Newtonsche Mechanik in allen Inertialsystemen, deren Koordinaten durch eine Galilei-Transformationen verknüpft sind, gleich aussehen. Physiker sprechen in diesem Fall von der Galilei-Kovarianz der Newtonschen Mechanik bzw. von der Kovarianz der Newtonschen Mechanik unter Galilei-Transformationen. Man kann diese Definition umkehren und Bezugssysteme in denen die Gesetze der Newtonschen Mechanik gelten als Galilei-Bezugssysteme definieren. Daraus folgt, Galilei-Bezugssysteme sind all jene, die sich mit konstanter, gleichmäßiger Geschwindigkeit in Bezug auf ein Referenzsystem bewegen, in dem die Gesetze der Newtonschen Mechanik gelten.

In Form der Galilei-Transformation wurde das Relativitätsprinzip zu einem Grundpfeiler der klassischen Mechanik. Lange nach Newton blieb die Mechanik die einzige physikalische Theorie, die ein Verständnis der Naturgesetze ermöglichte. Physik war Mechanik und damit wurde das Relativitätsprinzip der Mechanik zum Relativitätsprinzip der Physik. Das Relativitätsprinzip wurde nie in Frage gestellt. Das sollte sich jedoch mit den großen Entdeckungen des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus, die in Maxwells Theorie des Elektromagnetismus gipfelten, grundlegend ändern. Hier entstand eine vollständige und elegante neue physikalische Theorie, nicht weniger beeindruckend als die klassische Mechanik, mit ihren eigenen Gesetzen, den Maxwell-Gleichungen.

Angesichts der grundlegenden Natur des Relativitätsprinzips war die Erwartung, dass die Maxwell-Gleichungen unter Galilei-Transformation genauso kovariant sein würden wie die Gleichungen der klassischen Mechanik. Im Gegensatz zur Newtons Gleichung in Gl. (12.4) waren die Maxwell-Gleichungen aber unter Galilei-Transformation nicht kovariant, sie änderten ihre Form. Setzte man voraus, dass die Galilei-Transformation die korrekte Methode für die Koordinatentransformation zwischen zwei Inertialsystemen S und S' war, die sich mit konstanter gleichmäßiger Geschwindigkeit relativ zueinander bewegten, dann stand die elektromagnetische Theorie offenbar im Widerspruch zum Relativitätsprinzip, weil ihre Form vom gewählten Inertialsystem abhing. Für viele Physiker deutete dies darauf hin, dass mit den Maxwell-Gleichungen etwas nicht stimmte.

Eine Konsequenz der elektromagnetischen Theorie ist, dass elektromagnetische Wellen sich unabhängig von ihrer Wellenlänge und Richtung in jedem Medium immer mit der entsprechenden Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Im Vakuum beträgt diese Lichtgeschwindigkeit $c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Die Unvereinbarkeit von Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

und Relativitätsprinzip war nicht nur ein Problem für die elektromagnetische Theorie. Betrachten wir hierzu folgende Situation. Zwei Raumschiffe S und S' sollen auf parallelen Routen reisen, beide in der positiven x -Richtung. Das Raumschiff S' soll seine Reise etwas später als S beginnen. Leider stellt der Kapitän des Raumschiffs S auf halbem Weg fest, dass er ein Antriebsproblem hat, und stoppt, um Reparaturen durchzuführen. Als der Kapitän von S das Raumschiff S' hinter sich entdeckt, beschließt er, durch sein Heckfenster ein Notlichtsignal in die negative x -Richtung, d.h., in Richtung von S' zu senden, das sich mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit v_x seiner Position nähert. Aus der Sicht des Kapitäns des Raumschiffs S sendete er eindeutig ein Lichtsignal mit der Geschwindigkeit c . Da c und v_x in die entgegengesetzte Richtung zeigen ist für den Kapitän auf dem Raumschiff S' die Lichtgeschwindigkeit jedoch gemäß Gl. (12.2):

$$c' = c - (-v_x) = c + v_x$$

Ist die Galilei-Transformation der korrekte Weg, die Zeit- und Raumkoordinaten eines Inertialsystems in die eines anderen zu transformieren, dann muss die im Inertialsystem S' beobachtete Lichtgeschwindigkeit c' größer sein als c . Anders ausgedrückt: Offenbar müssen sich die Maxwell-Gleichungen in S' von denen in S unterscheiden, was heißt, die «Maxwell-Gleichungen sind unter Galilei-Transformation nicht kovariant». Es schien einen bevorzugten Bezugsrahmen zu geben, in dem Maxwells Gleichungen ihre einfachste Form annahmen, und dieser musste ein ruhendes System sein. Im 19. Jahrhundert fußte das Verständnis der elektromagnetischer Wellenausbreitung auf dem was man über die Ausbreitung von Wasserwellen oder akustischen Wellen wusste, die beide ein Medium zur Ausbreitung benötigen. Das Medium für Wasserwellen ist natürlich Wasser und die akustischen Wellen, die wir erzeugen, wenn wir miteinander sprechen, können wir nur hören, weil sie vom Medium Luft um den Sprecher herum in die Richtung getragen werden, in die sie oder er spricht. Anscheinend benötigen Wellen ein Medium, das den Bezugsrahmen für ihre Ausbreitung bietet, und Physiker gingen davon aus, dass dies auch für elektromagnetische Wellen wie Licht gilt. Das Medium, das sie im Sinn hatten, war der sogenannte «lichttragende» Äther. Das bevorzugte in absoluter Ruhe befindliche Inertialsystem war dadurch ausgezeichnet, dass es mit Äther gefüllt war und in ihm Maxwells Gleichungen ihre einfachste Form annahmen. Ein solches bevorzugtes unbewegliches Inertialsystem brachte aber eine weitere Implikation mit sich, nämlich dass es so etwas wie eine absolute Geschwindigkeitsmessung gab.

Das Konzept eines Äthers geht auf die griechischen Philosophen der Antike zurück und erlangte seine Bedeutung durch Aristoteles. Nach Wasser, Feuer, Luft und Erde war er das sogenannte fünfte Element und man glaubte, er sei die himmlische Substanz. Dieser

Äther war gewissermaßen das vollkommenste der fünf Elemente, und mit der Rezeption von Aristoteles in Westeuropa nach dem Mittelalter wurde dieses fünfte Element auch als fünfte Essenz oder auf Lateinisch als *quinta essentia* bezeichnet, unsere Quintessenz. Der lichttragende Äther, in dem sich elektromagnetische Strahlung ausbreiten sollte, musste ganz besondere Eigenschaften haben. Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen, d.h., die Auslenkung erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle und nicht parallel wie es bei Longitudinalwellen der Fall ist, wie z.B. bei den Dichteschwankungen entlang der Richtung, in der sich Schall durch Luft ausbreitet. Physiker des 19. Jahrhunderts wussten, dass sich Transversalwellen durch flüssige oder gasförmige Körper nicht ausbreiten konnten, daher blieb nur die Option, dass der Äther ein Feststoff sein musste. Und es musste ein sehr eigenartiger Feststoff sein, der scheinbar mit nichts anderem wechselwirkte. Es wurde angenommen, dass dieser vakuumdurchdringende Äther den gesamten interstellaren Raum ausfüllt, und scheinbar musste sich die Erde auf ihrem Weg um die Sonne durch diesen Äther bewegen. Viele Experimente wurden konzipiert, um diese Bewegung der Erde durch den Äther nachzuweisen, aber alle lieferten keinen Beweis für seine Existenz. Das überzeugendste derartige Scheitern beim Nachweis des Äthers war das bahnbrechende Experiment von Albert A. Michelson (1852 – 1931) und Edward W. Morley (1838 – 1923), das sie 1887 durchführten.

Das Michelson-Morley-Experiment

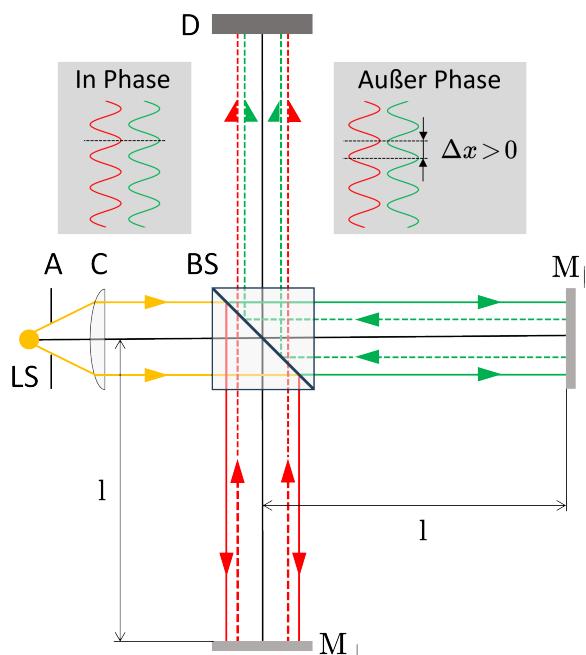


Abb. 12.2

Das Experiment von Michelson und Morley verwendete ein Interferometer so wie in Abb. 12.2 skizziert, das Michelson selbst entwickelt hatte. Ein solches Michelson-Interferometer, wie es heute genannt wird, besteht aus einer kollimierten Lichtquelle (LS = Lichtquelle; A = Apertur; C = Kondensor), deren Licht über einen Strahlteiler (BS) in zwei gleich lange orthogonale Interferometerarme der Länge l geschickt wird, an deren Ende identische Spiegel sitzen, die wir aus Gründen, die weiter unten klar werden, mit M_{\perp} und M_{\parallel} bezeichnet haben. Die Spiegel M_{\perp} und M_{\parallel} reflektieren die einfallenden Lichtwellen zurück zum Strahlteiler, der diese von den Spiegeln kommenden Lichtwellen aufspaltet in

einen Strahl der zurückläuft zur Quelle (in Abb. 12.2 nicht gezeigt) und einen Strahl, der zum Detektor D läuft, wo die von M_{\perp} und M_{\parallel} reflektierten Teilwellen ein Interferenzmuster erzeugen, das von der auf den jeweiligen Strecken akkumulierten Phasendifferenz abhängt. Zur besseren Unterscheidung der Lichtwege in Abb. 12.2 ist das Licht, das von der Quelle kommt und auf den Strahlteiler trifft, orange gefärbt; das Licht, das vom Strahlteiler in Richtung M_{\perp} läuft, wird durch durchgezogene rote Linien angezeigt; das Licht, das von M_{\perp} über den Strahlteiler zum Detektor zurückläuft, wird durch eine gestrichelte rote Linie angezeigt; das vom Strahlteiler zu M_{\parallel} laufende Licht wird durch eine durchgezogene grüne Linie angezeigt; und das von M_{\parallel} über den Strahlteiler in den Detektor reflektierte Licht durch eine gestrichelte grüne Linie angezeigt. Die Inserts in Abb. 12.2 zeigen den Fall, in dem die von beiden Interferometerarmen kommenden Lichtwellen in Phase sind, d.h., Wellenberge und -täler fallen zusammen, und den Fall, in dem eine Phasendifferenz akkumuliert wurde und Maxima und Minima der von M_{\perp} kommenden Lichtwelle bzgl. der Maxima und Minima der von M_{\parallel} kommenden Lichtwelle verschoben sind. Eine solche Phasendifferenz kann nur dann entstehen, wenn die Lichtwelle für den Weg vom Strahlteiler zum Spiegel M_{\perp} und zurück mehr bzw. weniger Zeit benötigt als die Lichtwelle, die vom Strahlteiler zum Spiegel M_{\parallel} und zurück läuft.

Eine unterschiedliche Laufzeit für die beiden Interferometerarme kann zwei Gründe haben. Die Strecken sind irgendwie nicht exakt gleich oder es gibt einen Unterschied in der Art und Weise, wie sich das Licht entlang der orthogonalen Richtungen der Interferometerarme ausbreitet. Daher muss sichergestellt sein, dass das Interferometer perfekt kalibriert ist, die Weglängen der Interferometerarme also genau gleich sind. Das erreicht man durch minimale Anpassung der Abstände mittels Beobachtung der Lichtintensität im Detektor bis die Lichtwellen, die von M_{\perp} und M_{\parallel} kommen, in der Detektorebene in Phase sind.

Das ist jedoch leichter gesagt als getan. Wegen der geringen Kohärenz einer weißen Lichtquelle reagiert das Interferenzmuster selbst auf kleinste Längenänderungen sehr empfindlich. Wie empfindlich ein solches Instrument auf Längenänderungen der Interferometerarme reagiert, entdeckte Michelson mit seinem ersten Instrument 1881. Mechanische Vibrationen waren ein großes Problem, ebenso wie die Aufrechterhaltung einer gleichmäßigen Instrumententemperatur. Die 1.2 m langen Interferometerarme dieses Instruments, an deren Ende die Spiegel saßen, bestanden aus Messing. Temperaturunterschiede von nur einem Hundertstel Grad zwischen den beiden Interferometerarmen reichten aus das Interferenzmuster im Detektor zu zerstören. Aus dieser Erfahrung lernend, wurde das Instrument, das 1887 im Michelson-Morley-Experiment zur Verwendung kam, auf einer Steinplatte montiert, die in einem mit Quecksilber gefüllten Trog schwamm.

Abb. 12.3 veranschaulicht, was wir erwarten können, wenn sich das Interferometer zusammen mit der gesamten Erde mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} durch den hypothetischen Äther bewegt, der selbst in Ruhe ist. Diese Abbildung zeigt warum wir die Spiegel mit M_{\perp} und M_{\parallel} bezeichnet haben. Das von M_{\parallel} reflektierte Licht läuft parallel zur Richtung von \mathbf{v} , während das von M_{\perp} reflektierte Licht normal zur Richtung von \mathbf{v} läuft. Abb. 12.3 zeigt zwei Bezugssysteme, S und S' . In S ruht der Äther und in S' , das sich mit der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} bezüglich S bewegt, ruht das Interferometer. Wenn also die Lichtgeschwindigkeit in S gleich c ist, dann ist mit Gl. (12.1) die Geschwindigkeit c' des Lichts in S' , das die Strecke l in Richtung \mathbf{v} zurücklegt

$$c' = c - v \quad \text{für die Lichtwelle von } P \rightarrow M_{\parallel}$$

und die Geschwindigkeit des Lichts, das die Strecke l in der entgegengesetzten Richtung von \mathbf{v} zurücklegt, ist

$$c' = c + v \quad \text{für die Lichtwelle von } M_{\parallel} \rightarrow P'$$

Daher ist die Zeit, die die Lichtwelle für die Strecke $2l$ vom Strahlteiler bei P zum Spiegel M_{\parallel} und zurück zu P' benötigt gegeben durch

$$t_{\parallel} = \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad (12.5)$$

In einem System S' , das sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zum System S bewegt, in dem der Äther ruht und die Lichtgeschwindigkeit c ist, braucht das Licht offensichtlich länger, um die Strecke $P-M_{\parallel}-P'$ zurückzulegen, als wenn das Interferometer bezüglich S in Ruhe wäre, d.h. wenn $\mathbf{v} = 0$. Der entsprechende Faktor ist

$$\left(t_{\parallel} \right)_{v \neq 0} / \left(t_{\parallel} \right)_{v=0} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Was ist mit dem Licht, das im anderen Interferometerarm von P nach M_{\perp} und zurück nach P' läuft? Dazu betrachten wir die Strecke, die S' während der Zeit t_{\perp} zurücklegt, die das Licht benötigt, um die Strecke von P nach M_{\perp} und zurück nach P' zu laufen.

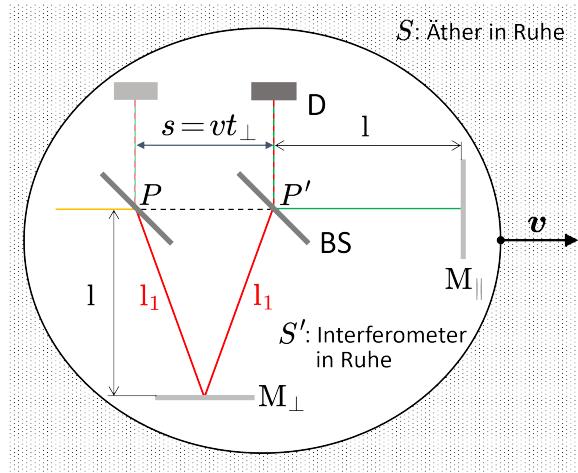


Abb. 12.3

Offensichtlich hat das Licht, wenn es wieder am Strahlteiler ankommt, die Strecke von P nach P' , also $s = v \cdot t_{\perp}$, zurückgelegt. Folglich hat das Licht, das vom Strahlteiler zu M_{\perp} und zurück läuft, nicht die Strecke $2l$ sondern $2l_1$ zurückgelegt. Aus Abb. 12.3 können wir ablesen

$$t_{\perp} = 2 \frac{l_1}{c} \quad \text{und} \quad l_1^2 = l^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{v \cdot t_{\perp}}{2}\right)^2$$

Elimination von l_1 aus diesen Gleichungen liefert für t_{\perp} den Ausdruck

$$t_{\perp} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.6)$$

Verglichen mit $\mathbf{v} = 0$, verlängert sich im Fall von $\mathbf{v} \neq 0$ die Laufzeit für Licht um die Strecke $P-M_{\perp}-P'$ zurückzulegen, um den Bruchteil

$$\frac{(t_{\perp})_{v \neq 0}}{(t_{\perp})_{v=0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aus Gl. (12.5) und Gl. (12.6) sehen wir, dass für $\mathbf{v} \neq 0$ das Licht mehr Zeit für die Strecke $P-M_{\parallel}-P'$ als die Strecke $P-M_{\perp}-P'$ braucht. Der entsprechende Faktor ist

$$\frac{t_{\parallel}}{t_{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

was für $\mathbf{v} \neq 0$ größer als 1 ist. Mit Gl. (12.5) und Gl. (12.6) können wir nun auch den Laufzeitunterschied Δt für Lichtwellen berechnen, die die Strecke $P-M_{\parallel}-P'$ bzw. die Strecke $P-M_{\perp}-P'$ zurücklegen:

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = \frac{2l}{c} \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

Die Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} von S' und S ist die Geschwindigkeit, mit der die Erde durch den angeblichen Äther pflügt, während sie die Sonne umkreist. Mit $v \approx 30 \text{ km s}^{-1}$ ist diese Geschwindigkeit viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1}$. Der Laufzeitunterschied Δt in den Interferometerarmen, der sich aus der Bewegung des Systems S' relativ zu S ergibt, ist also sehr gering. Vergleichbare Zeitunterschiede könnten leicht darauf zurückzuführen sein, dass z.B. die Interferometerarme nicht exakt gleich lang sind, sondern sich in der Länge um wenige zehn Nanometer unterscheiden. Daher misst man die relative Verschiebung im Interferenzmuster für zwei Konfigurationen des Interferometers, eine wie in Abb. 12.3 skizziert und eine zweite, bei der die Interferometerarme um 90° gedreht sind. Im gedrehten Interferometer sind die Rollen der beiden

Interferometerarme vertauscht, der Arm, der parallel zu \mathbf{v} war, wird zum senkrechten Arm und der Arm, der senkrecht zu \mathbf{v} war, wird zum Parallelarm. Mit diesem Trick spielen kleine Längenunterschiede keine Rolle mehr. Darüber hinaus beträgt der Unterschied in der Laufzeit in der gedrehten Konfiguration nun $-\Delta t$. Damit ergibt sich die Änderung des Interferenzmusters zwischen diesen beiden um 90° gedrehten Konfigurationen aus einem Gesamtaufzeitunterschied zwischen den Lichtwellen in den Interferometerarmen von $2\Delta t$.

Berechnet man diese Laufzeitänderung von $2\Delta t$ für die beiden um 90° gedrehten Konfigurationen des Michelson-Morley-Experiment mit einer Interferometerarmlänge von $l = 11 \text{ m}$, so erhält man

$$2\Delta t \approx 7 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

Für die eigentlichen Messungen verwendeten Michelson und Morley eine weiße Lichtquelle, zur Kalibrierung des Interferometers jedoch das gelbe Licht einer Natriumflamme, die Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 589 \text{ nm}$ emittiert. Die Periode T einer einzelnen Lichtschwingung dieser Wellenlänge beträgt

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = 1.96 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

Das heißt, der Zeitunterschied, den Michelson und Morley messen wollten, entsprach einem Wegunterschied der beiden Lichtwellen von ≈ 0.4 einer vollen Schwingungsperiode dieses Lichts. Der Übergang von gleich- zu gegenphasiger Interferenz (siehe Abb. 12.3), erfordert aber lediglich ein Wegunterschied der nur der Hälfte einer vollständigen Schwingungsperiode entspricht. Daher war die Messgenauigkeit des Michelson-Morley-Experiments mehr als ausreichend, um die erwartete Änderungen im Interferenzmuster zu beobachten, wenn das Instrument zwischen zwei Positionen um einen 90° -Winkel gedreht wurde. Das überraschende Ergebnis war jedoch, dass keine Zeitverzögerung $2\Delta t$ festgestellt werden konnte. Die einzige Schlussfolgerung, die Physiker daraus ziehen konnten, war, dass entweder kein Äther existierte oder etwas anderes komensierte die erwartete Zeitverzögerung für Lichtwellen in den Armen des relativ zum ruhenden Äther in S bewegten Interferometers in S' . Ein Vorschlag wie eine solche Kompensation aussehen könnte kam von George Fitzgerald und Hendrik A. Lorentz.

Längenkontraktion und Zeitdilatation

In den Gleichungen Gl. (12.5) und Gl. (12.6), aus denen die Zeitverzögerung zwischen den sich ausbreitenden Lichtwellen berechnet wurde, gibt es nur eine andere Variable, die möglicherweise die erwartete Zeitverzögerung auf irgendeine Weise kompensieren könnte.

Diese Variable ist die Länge der Interferometerarme parallel und senkrecht zur Richtung von \mathbf{v} . Vor diesem Hintergrund schreiben wir die Gleichungen Gl. (12.5) und Gl. (12.6) um als

$$t_{\parallel} = \frac{2l_{\parallel}}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad \text{und} \quad t_{\perp} = \frac{2l_{\perp}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Mithilfe dieser Gleichungen berechnen wir die erwartete Zeitverzögerung nun zu

$$\Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{l_{\parallel}}{1 - v^2/c^2} - \frac{l_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

Offensichtlich wird die Zeitverzögerung Δt zu Null, wenn der Ausdruck in den Klammern verschwindet, d.h. wenn

$$l_{\parallel} = l_{\perp} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Um das negative Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments zu erklären und die Hypothese des stationären Äthers zu retten, wurde genau diese Art der Längenkontraktion 1889 von FitzGerald und 1892 von Lorentz, der die Idee weiterentwickelte, separat vorgeschlagen. Damit bliebe die Länge bewegter Objekte in der Richtung normal zur Bewegungsrichtung unbeeinflusst, verkürzte sich jedoch in der Richtung parallel zur Bewegungsrichtung, d.h.

$$l_{\perp} = l \quad \text{und} \quad l_{\parallel} = l \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{12.7}$$

Setzen wir nun diese Werte für l_{\parallel} und l_{\perp} in die modifizierte Version von Gl. (12.5) und Gl. (12.6) von oben ein, so erhalten wir

$$t_{\parallel} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t_{\perp} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Mit der Einführung der Längenkontraktion in Bewegungsrichtung sind die Verhältnisse von t_{\parallel} und t_{\perp} bei $v \neq 0$ zu ihren jeweiligen Werten bei $v = 0$ symmetrisch geworden:

$$\frac{(t_{\parallel})_{v \neq 0}}{(t_{\parallel})_{v=0}} = \frac{(t_{\perp})_{v \neq 0}}{(t_{\perp})_{v=0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Die Laufzeit, die ein Lichtstrahl benötigt, um sich parallel oder normal zur Bewegungsrichtung von S' auszubreiten, erhöht sich im Vergleich zum ruhendem S' um den gleichen Faktor. Das ermöglicht eine ganz andere Interpretation des Michelson-Morley-Experiments: Nicht nur verringert sich die Länge eines Objekts in der Bewegungsrichtung von S' , sondern irgendwie tickt auch die Uhr in einem bewegten S' langsamer.

12.2 Relativistische Kinematik

Einstein's spezielle Relativitätstheorie aus dem Jahr 1905, proklamierte die Relativität von Raum und Zeit im Hinblick auf die Elektrodynamik bewegter Körper. Die Herausforderung, vor der die Physik damals stand, war, dass die Maxwell-Gleichungen unter Galilei-Transformation nicht, aber unter Lorentz-Transformation sehr wohl kovariant waren. Einstein entdeckte zwar die Lorentz-Transformationen nicht und die Effekte der Längenkontraktion und Zeitdilatation waren eingeführt worden, um mit dem erfolgreichen «Misserfolg» des Michelson-Morley-Experiments umzugehen. Es war jedoch Einstein, der eine umfassende Interpretation dieser verschiedenen Aspekte der neuen elektromagnetischen Theorie im Kontext eines von der Newtonschen Mechanik grundlegend verschiedenen Zeit- und Raumkonzepts lieferte. Indem er das Relativitätsprinzip ernst nahm und es mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verband, verschaffte Einstein der Physik ein neues Verständnis des Relativitätsprinzips und bekräftigte seine Gültigkeit als grundlegendes Konzept der Physik. Erst nach Veröffentlichung seiner Allgemeine Theorie in 1917, wurde seine Theorie von 1905 als spezielle Relativitätstheorie bezeichnet, besonders in dem Sinne, dass sie eine flache Raumzeit annimmt, während seine allgemeine Theorie eigentlich eine Theorie der Schwerkraft ist, bei der Massen den Raum krümmen und der gekrümmte Raum dann Massen sagt wie sie sich bewegen sollen. In diesem Abschnitt zur relativistischen Kinematik liegt der Schwerpunkt auf der Einführung in die Konzepte der relativen Raum-Zeit und der Gleichzeitigkeit.

12.2.1 Die Lorentz-Transformation

Lorentz stieß auf die Längenkontraktion in bewegten Bezugssystemen bei seinen Bemühungen, eine kovariante Transformation der Maxwell-Gleichungen zu finden. Da die neue Theorie des Elektromagnetismus weithin erfolgreich war, nicht nur bei der Erklärung bekannter Phänomene, sondern auch mit Vorhersagen, die durch Experimente überprüft werden konnten, hielten es Physiker für immer unwahrscheinlicher, dass die Maxwell-Gleichungen irgendwie fehlerhaft sein könnten, weil sie unter Galilei-Transformation nicht kovariant waren. Vielmehr schien die Allgemeingültigkeit der Galilei-Transformation zweifelhaft. Lorentz entdeckte tatsächlich eine neue Koordinatentransformation zwischen Inertialsystemen, unter der Maxwells Gleichungen kovariant blieben. Für ein Inertialsystem $S'(x', y', z', t')$, das sich mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bezüglich eines Inertialsystems $S(x, y, z, t)$ bewegt, ist diese Lorentz-Transformation für die drei Raumkoordinaten und die Zeitkoordinate gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & , \quad y' = y & , \quad z' = z \\ t' &= \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Im Grenzfall $v \ll c$, also $v/c \rightarrow 0$, geht die Lorentz-Transformation in eine Galilei-Transformation über. In die Lorentz-Transformation eingebaut sind die Konzepte der Längenkontraktion in bewegten Systemen und der lokalen Zeit, d.h., dass bewegte Uhren langsamer gehen. Schauen wir uns zunächst die Längenkontraktion an ($\beta = v/c$). Wie messen wir Längen? Natürlich mit Linealen. Wir bestimmen die Koordinatenposition eines Körpers, indem wir seinen Abstand vom Ursprung des verwendeten Bezugssystems messen. Eine Person in S' misst die x' -Koordinate eines Körpers, der sich auf der x' -Achse in ihrem Bezugssystem befindet, indem sie eine Art Lineal nimmt und herausfindet, wie oft dieses zwischen den Ursprung von S' und der Position des Körpers auf der x' -Achse passt. Das Ergebnis der Messung nennt sie die x' -Koordinate des Körpers. Aus der Sicht von jemandem in S verwendet die Person in S' jedoch ein Lineal, das der Längenkontraktion in Gl. (12.7) unterliegt und daher nicht die Strecke zwischen Ursprung und x' misst, sondern eine um den Faktor $x' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$ verkürzte Strecke. Wenn sich das System S' mit der Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse von S bewegt, ist die Position des Koordinatenursprungs von S' bei $x = v \cdot t$ und die Koordinatenposition x' , die eine Person in S' misst hat in S die x -Koordinate

$$x = v \cdot t + x' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{und daher} \quad x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Die obige Begründung für die Längenkontraktion folgt direkt aus der Lorentz-Transformation. Dazu betrachten wir ein Lineal in S' , dessen linkes und rechtes Ende bei x'_{links} bzw. x'_{rechts} auf der x' -Achse liegen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind dann in S die jeweiligen Positionen des linken und rechten Linealendes gegeben durch

$$x_{links} = x'_{links} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{und} \quad x_{rechts} = x'_{rechts} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

Damit können wir die Länge des Lineals in S' berechnen, die jemand in S misst:

$$\underbrace{(x_{rechts} - x_{links})}_{\text{Lineal in } S} = \underbrace{(x'_{rechts} - x'_{links})}_{\text{Lineal in } S'} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

Aus der Sicht eines Beobachters in S verwendet die Person in S' ein verkürztes Lineal. Aus der Perspektive eines Beobachters in S' , der behauptet sein System ruhe, gilt natürlich dasselbe für ein Lineal, das eine Person in S verwendet. Entscheidend ist lediglich der

Betrag der Relativgeschwindigkeit von S zu S' , der natürlich derselbe ist wie für S' zu S . Die Längenkontraktion ist in die Lorentz-Transformation Gl. (12.8) eingebaut, egal aus welcher Perspektive wir sie betrachten. Das Gleiche gilt für die Zeitdilatation. Stellen wir uns eine Uhr vor, die im Ursprung von S' sitzt, also bei $x' = 0$. Aus Gl. (12.8) folgt, für einen Beobachter in S befindet sich diese Uhr bei $x = v \cdot t$ zum Zeitpunkt

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (12.9)$$

Nehmen wir an, eine Person in S' misst das Zeitintervall von $t' = 0$ bis $t' = 1$ und nennt es «1 Sekunde». Dann kommt mit Gl. (12.9) ein Beobachter in S zum Schluss, dass dieses Zeitintervall, das die Personen in S' «1 Sekunde» nennt, mit $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ Sekunden aber von etwas längerer Dauer ist. Der Lorentz-Transformation inhärent ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter, gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegen. Legt Licht in S eine Strecke $x = ct$ zurück, dann läuft dieses Licht für einen Beobachter in S' gemäß Gl. (12.8) die Strecke

$$x' = \frac{(c - v)t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{in der Zeit} \quad t' = \frac{(1 - v/c)t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

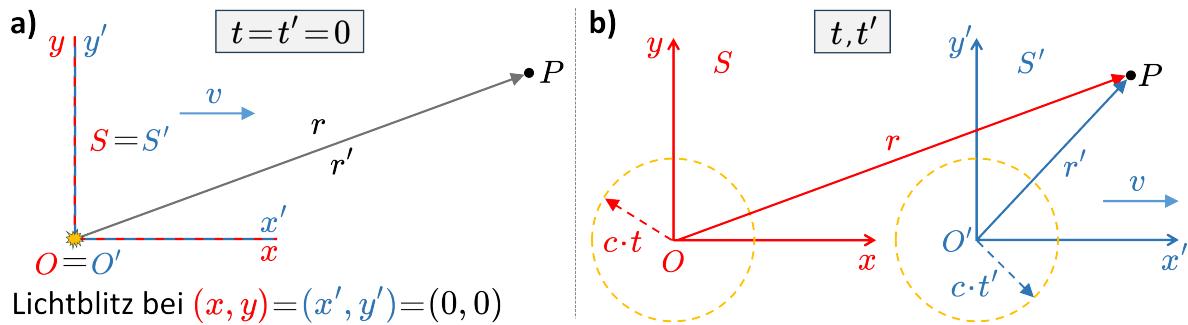
Ein Beobachter in S' stellt also fest $x' = c \cdot t'$ und Beobachter in S und S' stellen jeweils fest, dass sich Licht in ihren Bezugssystemen auf genau die gleiche Weise ausbreitet.

12.2.2 Herleitung der Lorentz-Transformation

Mit Hilfe der Lorentz-Transformation behalten die Maxwell-Gleichungen in allen relativ zueinander mit konstanter gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegten Koordinatensystemen die gleiche Form. Es war Lorentz, der entdeckte, dass die Maxwell-Gleichungen unter den nach ihm benannten Transformationen kovariant sind. Die Lorentz-Transformation ist aber nicht spezifisch für die elektromagnetische Theorie sondern folgt aus sehr allgemeinen Betrachtungen zu Raum und Zeit. Dass die Maxwell-Gleichungen unter Lorentz-Transformation kovariant sind, ist ein guter Hinweis, dass sie die Naturgesetze korrekt beschreiben, weil sie somit der Relativität von Zeit und Raum genügen von denen wir heute wissen, dass diese grundlegende Aspekte der Naturgesetze unseres Universums sind. Dies ist anders mit Newtons Gesetzen, die einen absoluten Raum und eine absolute Zeit voraussetzen und daher nur unter Galilei-Transformation, jedoch nicht unter Lorentz-Transformation kovariant sind. Die Newtonsche Physik bleibt in den meisten Situationen eine ausgezeichnete Näherung, ist aber bei sehr hohen Geschwindigkeiten oder bei extremer Gravitation nicht anwendbar.

Die nach Lorentz benannte Koordinatentransformationen wird heute mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie in Verbindung gebracht und kaum mehr mit der Äther-Theorie von Lorentz. Diese Theorie, zu der auch Henri Poincaré (1854 - 1912) maßgeblich beitrug, kam in Bezug auf die Relativität der Bewegung und das Konzept von lokaler Zeit vs absoluter Zeit zum gleichen Ergebnis. Sie gab das Konzept eines materiellen Äthers auf, von dem sie sagte, dass es ohnehin nicht verifiziert werden könne, behielt aber das Konzept eines bevorzugten Ruhesystems bei, das Newtons Raumkonzept ähnelte. Damit konnte die Lorentz-Äthertheorie Dinge wie Längenkontraktion und Zeitdilatation erklären und gleichzeitig an der Existenz eines bevorzugten Ruhesystems festhalten, das mit einem rätselhaften «Lorentz-Äther» gefüllt war, der aber keine Rolle mehr spielte.

Lorentz, Poincaré und Einstein sowie einigen anderen war bewusst, dass die existierenden Konzepte von Dingen wie Raum, Zeit und Gleichzeitigkeit nur unzureichend verstanden waren. Dies wollten sie ändern und wählten dazu unterschiedliche Wege. Physiker wie Lorentz und Poincaré näherten sich dem Problem vor allem aus der Perspektive der momentanen Herausforderungen in der Theorie der Elektrodynamik. Einstein betrachtete Raum und Zeit bzw. Gleichzeitigkeit jedoch aus einer viel allgemeineren Perspektive. Er glaubte, dass das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gleichermaßen grundlegend seien. Die Äthertheorie von Lorentz sagte das Gleiche über Letzteres, hatte jedoch mit ihrem bevorzugten ruhenden Bezugssystem das Relativitätsprinzip etwas aufgegeben.



Zur Herleitung der Lorentz-Transformation betrachten wir die in Abb. 12.4 skizzierten Situationen. Ohne Einschränkung können wir die dritte Dimension weglassen und ein Inertialsystem S' betrachten, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v in die positive x -Richtung eines Inertialsystems S bewegt, das selbst in Ruhe ist. Es soll zudem

die x' -Achse von S' die y -Achse von S bei $y = 0$ schneiden. Abb. 12.4a zeigt den Moment $t = t' = 0$, in dem der Ursprung des von links kommenden Inertialsystems S' mit dem Ursprung des ruhenden Inertialsystems S zusammenfällt. In genau diesem Moment, wenn die beiden Inertialsysteme identisch sind, also $S(t) = S'(t')$ bei $t = t' = 0$ entsteht ein Lichtblitz im geteilten Ursprung. Die sphärische Wellenfront dieser punktförmigen Lichtquelle breitet sich vom Ursprung beider Inertialsysteme auf die gleiche Weise aus, wobei der Radius der Wellenfront in S gleich $c \cdot t$ ist und in S' gleich $c \cdot t'$, mit c als konstanter Lichtgeschwindigkeit. Wie in Abb. 12.4b dargestellt, ist die Frage nun, wann das Licht in beiden Systemen den Punkt P erreichen wird, der sich bei $t = t' = 0$ an der gleichen Position in Bezug auf den in diesem Moment geteilten Ursprung befand. Da sich S' in die Richtung von P bewegt, scheint es, dass Licht in S' den Punkt P erreichen wird, bevor Licht in S ihn erreichen kann. Wie kann das sein, da sich doch Licht in beiden Systemen mit der Geschwindigkeit c ausbreitet? Die einzige Möglichkeit, wie Licht in beiden Systemen P zum gleichen Zeitpunkt erreichen kann, besteht darin, dass Uhren in S' irgendwie langsamer ticken als Uhren in S . Offensichtlich sind die Strecken $r = c \cdot t$ und $r' = c \cdot t'$, über die das Licht vom Ursprung von S und S' nach P gelangt unterschiedlich, daher muss t' von t verschieden sein. Die Betragsquadrate dieser Strecken sind

$$x^2 + y^2 = c^2 t^2 \quad (12.10a)$$

und

$$x'^2 + y'^2 = c^2 t'^2 \quad (12.10b)$$

Mithilfe dieser beiden Gleichungen können wir herausfinden, wie sich Koordinaten zwischen S und S' transformieren. Hierzu nutzen wir den folgenden parametrisierten Ansatz:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad t' = a(t - bx) \quad (*)$$

wobei γ , a und b bestimmbare Parameter sind. Ein kurzer Vergleich mit der Galilei-Transformation in Gl. (12.1) zeigt, dass die Transformation x nach x' , bis auf den Skalierungsfaktor γ , nur die entsprechende Galilei-Transformation ist. Da sich S' bezüglich S nur in x -Richtung bewegt, muss y' offensichtlich gleich y sein. Auch wenn der für t nach t' verwendete Transformationsansatz willkürlich erscheinen mag, ist er nur der einfachste lineare Ansatz, der eine Änderung von t' aufgrund der sich ändernden x -Koordinate des Ursprungs von S' mit einem Skalierungsfaktor kombiniert. Wenn wir den parametrisierten Ansatz in Gl. (12.10b) einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 = c^2 a^2(t - bx)^2$$

Mit ein wenig Algebra können wir diese Gleichung umschreiben als

$$x^2(\gamma^2 - c^2a^2b^2) - 2xt(\gamma^2v - bc^2a^2) + y^2 = c^2t^2\left(a^2 - \frac{\gamma^2v^2}{c^2}\right)$$

Damit diese Gleichung zu Gl. (12.10a) wird, muss für die Koeffizienten gelten:

$$\gamma^2 - c^2a^2b^2 = 1 \quad \text{und} \quad \gamma^2v - bc^2a^2 = 0 \quad \text{und} \quad a^2 - \frac{\gamma^2v^2}{c^2} = 1$$

Lösen der Gleichungen mit den drei unbekannten Parametern γ , a und b ergibt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad a = \gamma \quad ; \quad b = \frac{v}{c^2}$$

Wenn wir dies in den parametrisierten Ansatz (*) von oben einfügen, erhalten wir

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad t' = \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ein Vergleich mit Gl. (12.8) zeigt, das sind die Gleichungen für die Lorentz-Transformation zwischen zwei Referenzsystemen S und S' , die sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit in x -Richtung bewegen. Die Lorentz-Transformation drückt eine zeitabhängige Änderung der Raumkoordinaten sowie eine ortsabhängige Änderung der Zeitkoordinate aus. Nachdem ohne absolute Zeit jedes Inertialsystem seine eigene lokale Zeit hat, stellt sich die Frage der Zeitsynchronisation. Wie kann man Uhren in verschiedenen Inertialsystemen so synchronisieren, dass Beobachter in den jeweiligen Systemen sich einigen können, wann ein gemeinsam beobachtetes Ereignis stattgefunden hat?

12.2.3 Die Definition der Gleichzeitigkeit

Wir alle haben ein intuitives Verständnis der Gleichzeitigkeit von Ereignissen, aber dieses Allgemeinverständnis ist zu ungenau, als dass Physiker damit arbeiten könnten. Wie kann ein Beobachter in einem Inertialsystem beurteilen, ob zwei Ereignisse an den Orten A und B zum gleichen Zeitpunkt, also gleichzeitig stattfanden? Eine Möglichkeit ist, zwei identische Uhren perfekt zu synchronisieren, und dann eine davon am Ort A und die andere Uhr am Ort B zu platzieren. Nehmen wir an unser Beobachter weiß zudem, welche Art von Ereignissen bei A und B passieren werden, und sie oder er konstruiert die beiden Uhren so, dass sie genau in den Momenten stoppen wenn die entsprechende Ereignisse stattfinden. Stellen wir uns vor das A - und B -Ereignis sind jeweils Lichtblitze, bei denen das A -Ereignis eine Fotozelle in der Uhr bei A und das B -Ereignis eine Fotozelle in der Uhr bei B aktiviert wodurch die jeweilige Uhr stoppt. Auf diese Weise zeichnet die Uhr bei A den Zeitpunkt auf, zu dem das A -Ereignis stattfand, und die Uhr bei B

zeichnet den Zeitpunkt auf, zu dem das B -Ereignis stattfand. Nachdem die Ereignisse eingetreten sind, kann der Beobachter zum Ort A gehen und herausfinden, wann die Uhr bei A stehen geblieben ist, und dann zu B gehen und herausfinden, wann die Uhr dort stehen geblieben ist. Ein Vergleich dieser Messwerte zeigt dann ob die Uhren zum selben Zeitpunkt stehen geblieben sind. Ist das der Fall, dann kann sie oder er sagen, dass das A -Ereignis und das B -Ereignis gleichzeitig stattgefunden haben. Obwohl diese Methode im Prinzip funktioniert, ist sie nicht sehr praktisch und schwer auf weitere Uhren an unterschiedlichen Orten zu erweitern.

Um Ereignisse in einem Inertialsystem S auf Gleichzeitigkeit zu testen, muss sich an jedem Ort eine synchronisierte Uhr befinden. Einstein hat so eine Synchronisationsmethode vorgeschlagen, der wir hier folgen werden. In der oben beschriebenen Methode haben wir das, was Einstein eine A -Ortszeit nannte, mit einer B -Ortszeit verglichen, jedoch nicht mit einer gemeinsamen Zeit. Zur Festlegung einer gemeinsamen Zeit, müssen wir die notwendige Bedingung definieren, damit die Uhren in A

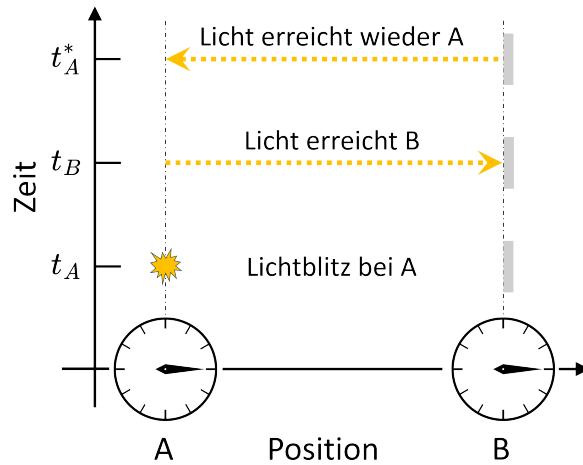


Abb. 12.5

und B synchronisiert sind. Einstein folgend, ist diese Bedingung, dass die Zeit, die das Licht benötigt, um vom Ort der Uhr A zum Ort der Uhr B zu gelangen, gleich der Zeit sein muss, die das Licht benötigt, um vom Ort der Uhr B zum Ort der Uhr A zu gelangen. Die Situation und der Ablauf der Ereignisse sind in Abb. 12.5 skizziert. Zum Zeitpunkt t_A wird ein Lichtimpuls vom Ort der Uhr A zum Ort der Uhr B gesendet, wo er zum Zeitpunkt t_B ankommt. Dort wird das Licht von einem Spiegel am Ort B zum Ort A zurückreflektiert, wo es zum Zeitpunkt t_A^* ankommt. Damit wird aus der Definition für die Synchronisation der beiden Uhren bei A und B die Forderung, dass

$$t_B - t_A = t_A^* - t_B \quad (12.11)$$

Diese Definition der Synchronizität lässt sich leicht auf weitere Uhren erweitern. Nehmen wir zum Beispiel eine andere Uhr am Ort C . Wenn die Uhr C die Zeit synchron zur Uhr B misst, tut sie dies automatisch auch in Bezug auf die Uhr A . Das Gleiche gilt, wenn die Uhr C synchron zu A ist, da sie dann automatisch auch synchron zu B ist. Dieser Vorgang kann für beliebig viele Uhren wiederholt werden, wobei jede neu hinzugefügte Uhr, sobald sie synchron mit einer der bereits vorhandenen Uhren ist, automatisch mit

allen anderen vorhandenen synchronen Uhren synchron ist. Mittels einer Referenzuhr am Ursprung des Inertialsystems S , können wir alle Uhren in S synchronisieren. Das geht natürlich nur, weil die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen konstant ist.

Jedes Inertialsystem hat seine eigene lokale Zeit. Daher sind die in der gerade besprochenen Weise synchronisierten Uhren eines Beobachter in einem Inertialsystem S aus der Sicht eines Beobachters in S' , das sich relativ zu S mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit v bewegt, keineswegs synchronen Uhren. Betrachten wir die in Abb. 12.6 skizzierte Situation, mit zwei synchronen Uhren A und B im ruhenden Inertialsystem S und zwei synchronen Uhren C und D im Inertialsystem S' , das sich mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt. Die synchronen Uhren C und D sind an den Enden eines Lineals befestigt, dessen Länge mit dem Abstand der synchronen Uhren A und B in S identisch sein soll. Weiters verlangen wir, dass im Moment, wo die Enden des Lineals in S' mit den Abstandsmarken der Orte A und B in S übereinstimmen, d.h., Anfang und Ende des Lineals fallen räumlich mit den Orten A und B in S zusammenfallen, alle vier Uhren die gleiche Zeit anzeigen sollen. Die Frage ist: Können die Uhren C und D in S' auf die gleiche Weise synchron sein wie die Uhren A und B in S ? Die Definition von Synchronizität im ruhenden System S besteht darin, dass die Lichtlaufzeit von A nach B und von B nach A gleich ist. Da sich S' in Abb. 12.6 mit der konstanten Geschwindigkeit v nach rechts bewegt, braucht Licht von C nach D länger als von D nach C . Genauso wie wir es in Abb. 12.5 für die Orte A und B in S getan haben, bezeichnen wir in S' den Zeitpunkt, zu dem ein Lichtimpuls beginnt, sich von C nach D zu bewegen, mit t_C , den Zeitpunkt, zu dem der Lichtimpuls bei D ankommt und nach C zurückreflektiert wird mit t_D , und den Zeitpunkt, an dem das Licht wieder bei C ankommt, mit t_C^* . Damit sind die Zeitintervalle, die der Lichtimpuls für den Abschnitt von C nach D und dann für den Abschnitt zurück nach C benötigt, gegeben durch

$$t_D - t_C = \frac{r_{CD}}{c - v} \quad \text{und} \quad t_C^* - t_D = \frac{r_{CD}}{c + v}$$

wobei r_{CD} den Abstand \overline{CD} bezeichnet. Offensichtlich, im Gegensatz zu den Uhren an den Orten A und B in S , gilt Gl. (12.11) nicht für die Orte C und D in S' , weil

$$\Delta t_{S'} = (t_D - t_C) - (t_C^* - t_D) = \frac{2vr_{CD}}{c^2 - v^2} > 0$$

Dieses Ergebnis können wir auch anders betrachten, wenn wir uns erinnern, dass mit

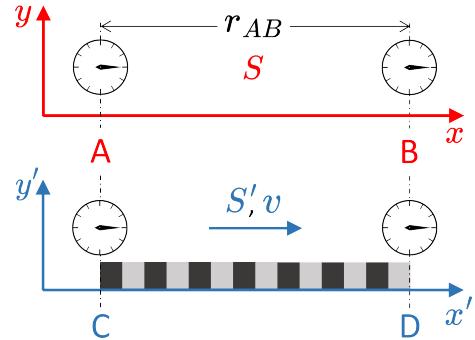


Abb. 12.6

Gl. (12.7) die Länge des Lineals r_{CD} , das der Beobachter in S' misst, nicht r_{AB} , sondern um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ kürzer ist. Daher können wir $\Delta t_{S'}$ umschreiben als

$$\Delta t_{S'} = \frac{2v}{c^2 - v^2} \cdot r_{AB} \sqrt{1 - v^2/c^2} = 2 \cdot \frac{v \cdot r_{AB}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.12)$$

Gl. (12.12) sagt uns, dass Uhr C und Uhr D in S' gemäß der Definition von Gl. (12.11) nicht synchron sind. Um die Uhren zu synchronisieren, kann der Beobachter in S' die Uhr C um $\Delta t/2$ nach vorne stellen, d.h., t_C und t_C^* mit $t_C \rightarrow t_C + \Delta t/2$ und $t_C^* \rightarrow t_C^* + \Delta t/2$ ersetzen; oder sie oder er kann die Uhr D um $\Delta t/2$ zurückstellen, also t_D durch $t_D \rightarrow t_D - \Delta t/2$ ersetzen. Wie können wir das Ergebnis von Gl. (12.12) verstehen?

Bei genauer Betrachtung der Gleichung für die Transformation der Zeitkoordinate in Gl. (12.8), stellen wir fest, dass sie aus zwei Teilen besteht. Der erste Teil entspricht der Zeitdilatation von Gl. (12.8) und der zweite Teil sieht bis auf den Faktor 2 der rechten Seite von Gl. (12.12) sehr ähnlich. Aber dieser Faktor 2 entsteht einfach, weil das Licht in S' die Länge von r_{AB} zweimal zurücklegt, und statt $2 \cdot r_{AB}$ hätten wir diese Länge einfach als r_{ABA} schreiben können. Daher ist die rechte Seite von Gl. (12.12) genau der zweite Term der Zeitkoordinatentransformation in der Lorentz-Transformation Gl. (12.8). Dies ist natürlich kein Zufall, wie man schnell prüfen kann, indem man ein gleichzeitiges Ereignis in S vom bewegten Inertialsystem S' aus betrachtet. Nehmen wir an, das gleichzeitige Ereignis findet in S bei t_0 an den Koordinaten x_1 und x_2 statt. Ein Beobachter in S' wird sagen, dass diese Ereignisse überhaupt nicht gleichzeitig stattfanden, da eines von ihnen zum Zeitpunkt t'_1 und das andere zum Zeitpunkt t'_2 stattfand mit

$$t'_1 = \frac{t_0 - v \cdot x_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t'_2 = \frac{t_0 - v \cdot x_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aus Sicht des Beobachters in S' sind die beiden Ereignisse zeitlich getrennt durch

$$\Delta t_{S'} = t'_2 - t'_1 = \frac{v \cdot (x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Mit $x_1 - x_2 = 2 \cdot r_{AB}$ wird dies natürlich zu Gl. (12.12). Der zweite Term der Zeitkoordinatentransformation in Gl. (12.8) stellt sicher, dass gleichzeitige Ereignisse in einem Inertialsystem nur dann gleichzeitige Ereignisse in einem anderen System sein können, wenn $x_1 - x_2 = 0$. Aus diesem Grund war es möglich in Abb. 12.4a die beiden Inertialsysteme, oder die Uhren A und C in Abb. 12.6, im Moment räumlicher Koinzidenz zu synchronisieren. Gleichzeitigkeit mit Abstand ($x_1 \neq x_2$), die in einem Inertialsystem S beobachtet wird, kann jedoch niemals Gleichzeitigkeit mit Abstand in einem anderen Inertialsystem S' sein, das sich relativ zu S mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

12.2.4 Das Konzept der Raumzeit

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystem stellt sicher, dass unabhängig von der Relativgeschwindigkeit, mit der sich ein Inertialsystem S' in gleichförmiger Bewegung in Bezug auf ein anderes Inertialsystem S befindet, immer gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Eine andere Art, dies auszudrücken, ist, dass die Erhaltungsgröße

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \text{const}$$

die invariante Metrik der vom Mathematiker Hermann Minkowski (1864 – 1909) eingeführten vierdimensionalen Raumzeit, des Minkowski-Raums, ist. Die Koordinaten dieser vierdimensionalen euklidischen Raumzeit sind eine Zeitkoordinate multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit, damit alle Vektorkomponenten die gleiche Dimension haben, plus die drei Raumkoordinaten des dreidimensionalen euklidischen Raums. Die Koordinaten eines solchen vierdimensionalen Vektors in der Raumzeit, üblicherweise mit $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet und oft nur Vierervektor genannt, sind

$$x_0 = ct \quad , \quad x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z$$

Die Länge dieses Vierervektors \mathbf{X} ist eine Erhaltungsgröße unter Lorentz-Transformationen LT, d.h. $\mathbf{X}' = \text{LT}\{\mathbf{X}\}$, oder in Komponenten

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x'_0^2 - x'_1^2 - x'_2^2 - x'_3^2 \quad (12.13)$$

Vier Dimensionen zu zeichnen, ist nicht möglich.

Die Skizze in Abb. 12.7 zeigt daher wie dieser Minkowski-Raum aussieht, wenn wir uns auf Bewegungen in zwei Raumdimensionen beschränken. Im «normalen» Raum entspricht ein Punkt einem Ort, aber nicht einer bestimmten Zeit. Das ändert sich, wenn wir z.B. einen Massenpunkt an einem bestimmten Ort P_1 mit einer bestimmten Zeit t_1 verknüpfen und so ein Ereignis definieren. Bewegt sich der Massenpunkt, können wir ihm an einem anderen Ort P_2 eine andere Zeit t_2 zuweisen und so ein weiteres Ereignis definieren: Der Massenpunkt befindet sich an P_2 zum Zeitpunkt t_2 . Offensichtlich liegen zwischen den Ereignissen Massenpunkt bei t_1/P_1 und Massenpunkt bei t_2/P_2 andere Ereignisse die wir dann ebenso

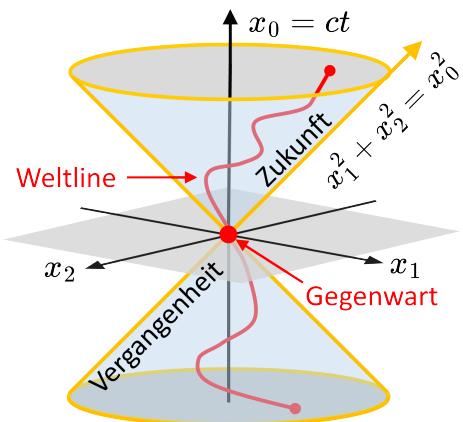


Abb. 12.7

markieren können. Das ist in der Raumzeit ganz anders. Dort müssen wir kein Ereignis definieren, da jeder einzelne Punkt ein Ereignis ist. Wenn wir einen Massenpunkt in der Raumzeit verfolgen, wobei wir uns mit ihm bewegen, stellt jeder Punkt auf der Bahnkurve ein Ereignis dar, das an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit stattfindet, und die Abfolge dieser Ereignisse wird als Weltlinie bezeichnet, die Weltlinie des Massenpunkts und des mitbewegten Beobachters.

Da sich nichts schneller als Licht bewegen kann, hat die Raumzeit in zwei Raumdimensionen eine kegelförmige Struktur. Die Spitze des Zukunftskegels liegt im Koordinatenursprung, bei dem Ereignis, das wir «Gegenwart» nennen, und öffnet sich in Richtung Zukunft. Ereigniskurven für Dinge, die sich langsamer als Licht fortbewegen, müssen innerhalb des Zukunftskegels liegen. Nur Dinge, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c fortbewegen, haben eine Mantellinienbahn, die im Beispiel von Abb. 12.7 durch $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$ definiert ist. Ereigniskurven innerhalb des Kegelmantels bezeichnet man als zeitähnliche Weltlinien, und solche, die der Kegelmantellinie folgen, als lichtähnliche Kurven, da dort jedes Ereignis mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt. Der Zukunftskegel schränkt den Ereignisraum möglicher künftiger Ereignisse ein und der Vergangenheitskegel begrenzt den Ereignisraum vergangener Ereignisse, die zur Gegenwart führen können. Weltlinien können nur eine Richtung haben und das ist Vorwärts in Bezug auf die Zeitachse oder anders ausgedrückt, zwei aufeinanderfolgende Punkte (Ereignisse) auf der Weltlinie müssen durch ein $\Delta t > 0$ getrennt sein.

Die Skizze in Abb. 12.7 zeigt die Raumzeit zu einem Zeitpunkt, der gegenwärtigen Zeit. Jedes Ereignis an einem Punkt dieser Raumzeit besitzt aber seine eigene Gegenwart, mit der neue Zukunfts- und Vergangenheitskegel verbunden sind. Wie in Abb. 12.8 illustriert, besteht die Raumzeit aus unendlich vielen Lichtkegelstrukturen. An jedem neuen gegenwärtigen Zeitpunkt schränken diese den Ereignisraum möglicher zukünftiger Ereignisse ein und begrenzen den Ereignisraum möglicher vergangener Ereignisse, die zur Gegenwart hätten führen können. Diese unendlich vielen Lichtkegel bestimmen, welche Ereignisse in der Zukunft kausal verbunden sein können oder in der Vergangenheit möglicherweise kausal verbunden waren. Das ist die kausale Struktur der Raumzeit: Ein gegenwärtiges Ereignis kann nicht durch ein Ereignis verursacht wer-

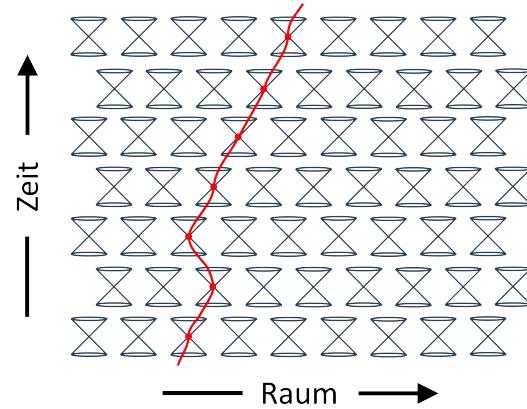


Abb. 12.8

den, das nicht in seinem Vergangenheitskegel liegt, und ein gegenwärtiges Ereignis kann kein Ereignis verursachen, das nicht in seinem Zukunftskegel liegt.

Bisher haben wir die Raumzeit nur aus der Perspektive eines Inertialsystems betrachtet. Was passiert mit der Raumzeit bei einer Lorentz-Transformation? Der Einfachheit halber betrachten wir nur Bewegung in einer Raumdimension. Die Koordinaten im Inertialsystem $S(x, ct)$ sind mit den Koordinaten im Inertialsystem $S'(x', ct')$, das sich bezüglich S mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt, durch die Lorentz-Transformation Gl. (12.8) verknüpft. Allerdings werden wir hier die beiden entsprechenden Gleichungen aus Gl. (12.8) umschreiben und dabei die bereits eingeführten Abkürzungen $\beta = v/c$ und $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}$ verwenden. Zur besseren Lesbarkeit ordnen wir diese beiden Gleichungen etwas um zu

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

mit der Umkehrtransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

Die Art der Umordnung der Lorentz-Transformation, legt nahe, dass es sich um eine Art Drehung der Ausrichtung des Lichtkegels in S' in Bezug auf S handelt. Betrachten wir wieder den Moment, in dem S und S' räumlich zusammenfallen. Die Orientierung der x' -Achse erhalten wir, indem wir für zwei Punkte auf ihr die Koordinaten in Bezug auf S bestimmen. Entlang der x' -Achse gilt $ct' = 0$. Für die beiden Punkte auf der x' -Achse zur Bestimmung ihrer Orientierung wählen wir $x = x' = 0$ und einen beliebigen Punkt wie z.B. $x' = 1$. Einsetzen von $(x' = 0, ct' = 0)$ in die Umkehrtransformation Gl. (12.15) ergibt trivialerweise die Koordinaten $(x = 0, ct = 0)$ und Einsetzen von $(x' = 1, ct' = 0)$ ergibt die Koordinaten $(x = \gamma, ct = \gamma\beta)$. Dasselbe Verfahren zur Bestimmung der Orientierung der ct' -Achse mit den Punkten $(x' = 0, ct' = 0)$ und $(x' = 0, ct' = 1)$ sagt uns, dass die ct' -Achse durch $(x = 0, ct = 0)$ und $(x = \gamma\beta, ct = \gamma)$ verläuft. Daher verläuft die x' -Achse durch den Ursprung mit der positiven Steigung β und die ct' -Achse verläuft durch den Ursprung mit der positiven Steigung β^{-1} . Die jeweiligen Winkel

$$\varphi_1 = \arctan \beta = \arctan(v/c) \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \arctan \beta^{-1} = \arctan(c/v)$$

zeigt das Beispiel in Abb. 12.9. Sofern die Relativgeschwindigkeit v nicht einen wesentlichen Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit c ausmacht, sind diese Winkel sehr klein. Daher ist das in Abb. 12.9 verwendete Beispiel für $v = 0.3 \cdot c$ skizziert.

Die x' -Achse und die ct' -Achse in Abb. 12.9 sind nicht mehr orthogonal. Der Winkel zwischen der x' -Achse und der ct' -Achse, der für $v = 0$ ein rechter Winkel ist, schließt sich wie eine Schere wenn v zunimmt. Wenn v sich c nähert, fallen schließlich die Raumachse und die Zeitachse in S' zusammen, da für $\beta \rightarrow 1$ offensichtlich $\varphi_{1,2} \rightarrow \pi/4$. Die Gerade, die im Winkel $\pi/4$ zur x -Achse durch den Ursprung von S verläuft ist aber genau die lichtähnliche Kurve des Zukunftskegels in S . Das macht Sinn, da alles was sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt seine Bahnkurve im Mantel des Zukunftskegels von S haben muss. Aber was ist mit dem Zukunftskegel von S' selbst? Wie transformiert er sich? Die kurze Antwort ist: Er ändert sich überhaupt nicht weil er von jedem Gegenwarts-Punkt eines Beobachters in der Raumzeit überall gleich aussieht. Gl. (12.13) sagt uns, dass die Metrik $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ eine Invariante ist. Im 3-dimensionalen euklidischen Raum ist die invariante Metrik der räumliche Abstand, d.h. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = const$. Das ist natürlich die Gleichung für eine Kugel mit dem Radius R mit Mittelpunkt im Ursprung. In der 4-dimensionalen Raumzeit definiert $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = const$ eine hyperbolische Fläche. Die Lorentz-Invarianz von $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ sagt uns, dass diese Fläche erhalten bleibt unter Lorentz-Transformation und daher ändert sich der Lichtkegel überhaupt nicht, er ist in S und in S' gleich. Was sich ändert, ist, dass Zeitachse und Raumachse zueinander gedreht werden. Das Quadrat eines Raum-Zeit-Intervalls $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ misst eine Strecke. Für $t = 0$ wird das Quadrat dieses Intervalls negativ und die entsprechende Länge, die Quadratwurzel einer negativen Zahl, wird imaginär. Bei Ereignissen, die durch ein imaginäres Intervall getrennt sind, spricht man von räumlicher Trennung. Haben umgekehrt zwei Ereignisse dieselben Raumkoordinaten, spricht man von einer zeitlichen Trennung.

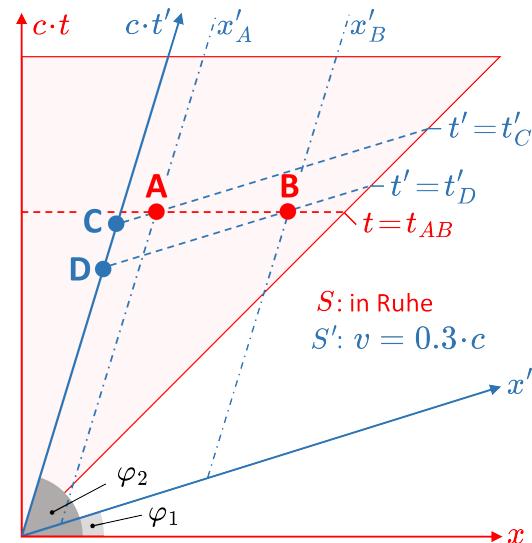


Abb. 12.9

Betrachtet man mehr Raumdimensionen als im Beispiel von Abb. 12.9, stellt man fest, dass die zweidimensionale Raumfläche (in Abb. 12.7 skizziert) im Inertialsystem S' , das sich relativ zum ruhenden Inertialsystem S (Abb. 12.7) bewegt, gekippt ist. Dasselbe wäre der Fall, berücksichtigte man alle drei Raumdimensionen. Die 2-dimensionale Raumfläche in der x_1x_2 -Ebene in Abb. 12.7 wird Hyperfläche der Gleichzeitigkeit genannt. Die Neigung dieser Hyperfläche ermöglicht es, zu verstehen, ob zwei Ereignisse, die für einen Beobachter in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, es auch für einen Beobachter in

einem anderen Inertialsystem sein können. Zur Veranschaulichung sind dem Beispiel in Abb. 12.9 zwei Ereignisse A und B in S hinzugefügt. Jedes dieser Ereignisse muss innerhalb des Zukunftskegels von S liegen. Zwei Ereignisse in der 4-dimensionalen Raumzeit sind gleichzeitig, wenn sie die gleiche Zeitkoordinate haben, also auf einer Geraden parallel zur Raumkoordinate liegen. In Abb. 12.9 haben wir für die Zeitkoordinate in S auf der die Ereignisse A und B liegen, $t = t_{AB}$ gewählt. Die jeweiligen Raum- und Zeitkoordinaten der Ereignisse A und B in S' finden wir, indem wir Geraden parallel zur x' -Achse und parallel zur ct' -Achse durch die Punkte A und B legen was uns die Raumkoordinaten x'_A und x'_B sowie die Zeitkoordinaten $t' = t'_C$ und $t' = t'_D$ für die Ereignisse C und D in S' liefert, welche den Ereignissen A und B in S entsprechen. Da $t'_C \neq t'_D$, können die Ereignisse C und D in S' nicht gleichzeitig sein.

12.2.5 Der relativistische Doppler-Effekt

In Abschnitt 11.2.2 betrachteten wir den Doppler-Effekt für akustische Wellen. Jetzt wenden wir uns dem relativistischen Doppler-Effekt zu der zwar für die langsamten akustischen Wellen irrelevant, aber für Lichtwellen von Bedeutung ist. Hierzu müssen wir eigentlich nichts über Lichtwellen wissen, außer, dass sie eine Art Informationsübertragung darstellen, die mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt. Die Situation in Abb. 12.10 ist ähnlich zu Abb. 12.9, aber hier geht es nicht um die Gleichzeitigkeit sondern um die periodischen Abfolge von Ereignissen, hier Lichtblitzen, wie sie ein Beobachter der relativ zur Lichtquelle in Ruhe ist registriert, und ein Beobachter, der sich relativ zur ihr mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Weltlinie bewegt, die die x -Achse bei x_0 schneidet. Das Intervall zwischen Lichtblitzen soll τ sein. Der bei $t = t_0$ gesendete Lichtblitz bewegt sich auf der Weltlinie $x = ct$ und schneidet die Weltlinie des bewegten Beobachters bei (x_1, t_1) ; der bei $t = \tau$ gesendete zweite Lichtblitz bewegt sich auf der Weltlinie $x = c(t - \tau)$ und schneidet die Weltlinie des bewegten Beobachters bei (x_2, t_2) ; der dritte bei $t = 2\tau$ gesendete Lichtblitz läuft auf der Weltlinie $x = c(t - 2\tau)$ und schneidet die Weltlinie des bewegten Beobachters bei (x_3, t_3) , usw.

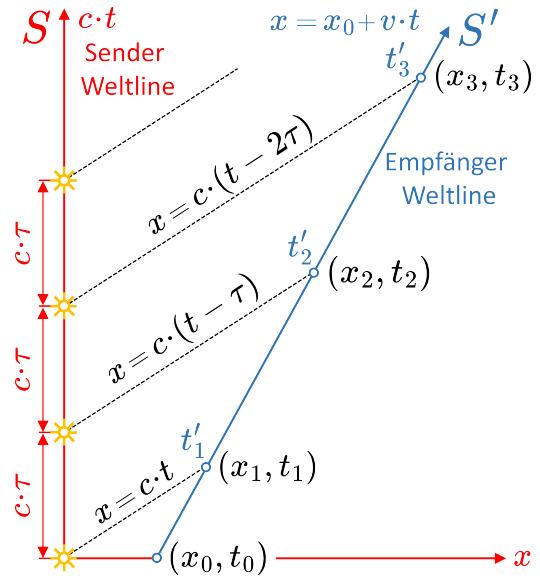


Abb. 12.10

Die Periodizität, die der relativ zur Lichtquelle in Ruhe befindliche Beobachter misst, ist natürlich τ . Die Periodizität, die der bewegte Beobachter misst, ist gegeben durch die Zeitdifferenzen $t_1 - t_0, t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_n - t_{n-1}$ usw., die durch die Schnittpunkte der Weltlinien $x = c(t_n - (n-1)\tau)$ mit der Weltlinie des bewegten Beobachters definiert werden. Diese Schnittpunkte sind

$$\begin{aligned}x_1 &= ct_1 = x_0 + vt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{x_0}{c-v} \\x_2 &= c(t_2 - \tau) = x_0 + vt_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{x_0 + c\tau}{c-v} \\x_{n-1} &= c(t_{n-1} - (n-2)\tau) = x_0 + vt_{n-1} \quad \Rightarrow \quad t_{n-1} = \frac{x_0 + c(n-2)\tau}{c-v} \\x_n &= c(t_n - (n-1)\tau) = x_0 + vt_n \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{x_0 + c(n-1)\tau}{c-v}\end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt für die Zeitdifferenz $t_n - t_{n-1}$ und die Ortsdifferenz $x_n - x_{n-1}$

$$t_n - t_{n-1} = \tau \frac{c}{c-v} \quad \text{und} \quad x_n - x_{n-1} = c\tau \frac{v}{c-v}$$

Damit haben wir die Zeitdifferenzen $t_n - t_{n-1}$ bestimmt, die der ruhende Beobachter in S messen wird. Diese rechnen wir nun mithilfe der Lorentz-Transformation Gl. (12.8) in die Zeitdifferenzen um, die der bewegte Beobachter in S' messen wird:

$$\begin{aligned}t'_n - t'_{n-1} &= \frac{t_n - v \cdot x_n/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_{n-1} - v \cdot x_{n-1}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\&= \frac{\tau c}{c-v} \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \tau \cdot \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \tau \cdot \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}}\end{aligned}$$

Während also ein Beobachter im Bezugssystem S , in dem die Lichtquelle ruht, ein mit der Frequenz $f = 1/\tau$ blinkendes Lichtsignal sieht, beobachtet jemand im mit der Geschwindigkeit v relativ zu S bewegten Bezugssystem S' ein Signal mit der Periodizität

$$f' = \frac{1}{t'_n - t'_{n-1}} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} = f \cdot \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \quad (12.16)$$

Das Verhältnis $f':f$ hängt nur von der Relativgeschwindigkeit v von Lichtquelle und Beobachter ab. Das ist anders als beim akustischen Doppler-Effekt in Abschnitt 11.2.2, wo das Ergebnis davon abhängt, ob die Quelle ruht und sich der Beobachter bewegt oder umgekehrt. Der Grund ist, dass akustische Wellen zur Ausbreitung ein Medium benötigen und es daher immer ein bevorzugtes Bezugssystem gibt. Im Gegensatz dazu

benötigen Lichtwellen kein Medium und daher hängt der Dopplereffekt für Lichtwellen nur von der Relativgeschwindigkeit der jeweiligen Bezugssysteme ab. Vergleicht man das relativistische Ergebnis für Lichtwellen mit den klassischen Ergebnissen bei akustischen Wellen für den Fall, dass sich die Quelle von einem ruhenden Beobachter entfernt (das Pluszeichen in Gl. (11.17)) und im Fall eines Beobachter, der sich von einer ruhenden Lichtquelle entfernt (das Minuszeichen in Gl. (11.18)), d.h.

$$f_A = \frac{1}{1 + v/c} f \quad \text{und} \quad f_B = (1 - v/c) f$$

so sieht man, f' in Gl. (12.16) ist das geometrische Mittel der klassischen Ergebnisse:

$$f' = \sqrt{f_A f_B} = f \cdot \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}}$$

Die obige Herleitung des relativistischen Doppler-Effekts machte keinen Gebrauch davon, dass wir eigentlich daran interessiert sind, wie Beobachter in S und in S' jeweils die Wellenausbreitung registrieren. Wir haben nur untersucht, wie sich die Periode eines periodischen Ereignisses beim Übergang von S nach S' ändert. Jetzt betrachten wir aber eine bestimmte Welle, die, wie in Abb. 12.11 dargestellt, im Ursprung des Bezugssystems S' entstehen soll. Während sich S' mit Relativgeschwindigkeit v in Bezug auf S bewegt, soll die Lichtquelle im Ursprung von S' periodisch ein Signal in einem Winkel θ relativ zur x' -Koordinate aussenden, d.h., der Winkel zwischen dem Wellenvektor \mathbf{k}' und der x' -Richtung ist θ . Die Periode mit der die Lichtquelle in S' blinkt ist τ' , aber aufgrund der Zeittilatation wird für den Beobachter in S diese Periode zu

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

In dieser Zeitspanne bewegt sich das Bezugssystem S' um die Strecke $v\tau$ relativ zu S . Zur Bestimmung der Wellenlänge λ misst man den Abstand zwischen der Emission zweier Lichtpulse in Ausbreitungsrichtung. Wie in Abb. 12.11 skizziert, ist dieser Abstand

$$\lambda = c\tau - v\tau \cos \theta = \frac{c\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

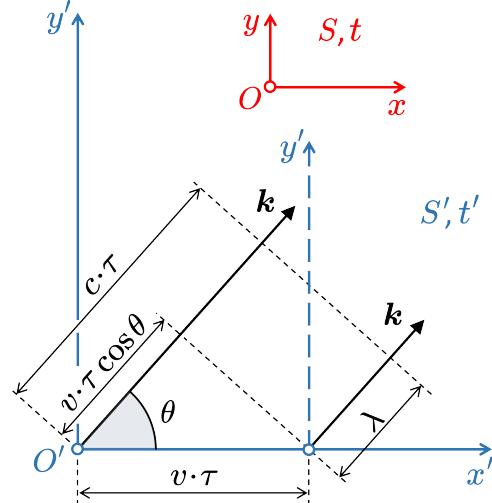


Abb. 12.11

Da $\lambda' = c \cdot \tau'$ die Wellenlänge in S' ist, können wir dies schreiben als

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \quad (12.17)$$

und mit $c = \lambda f = \lambda' f'$ beträgt die winkelabhängige Frequenzverschiebung

$$f = f' \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^{-1} \quad (12.18)$$

Offensichtlich erhalten wir für $\theta = 0$, d.h. bei Vorwärtsemission, nur das Ergebnis von Gl. (12.16). In diesem Fall erfolgt die Emission parallel zur x' -Achse (und damit auch zur x -Achse), während sich die Quelle in S auf den Beobachter zubewegt, der daher eine Blauverschiebung der Wellenlänge registrieren wird:

$$\lambda = \lambda' \cdot \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \text{und} \quad f = f' \cdot \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Umgekehrt gilt bei $\theta = \pi$, also bei Rückwärtsemission, dass Emissionsrichtung und Bewegungsrichtung von S' entgegengesetzt sind und daher wird ein Beobachter in S eine Rotverschiebung der Wellenlänge registrieren

$$\lambda = \lambda' \cdot \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad \text{und} \quad f = f' \cdot \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

wobei die Frequenzverschiebung jener von Gl. (12.16) entspricht, mit v durch $-v$ ersetzt. Wenn $\theta = \pi/2$, d.h., die Strahlung breitet sich senkrecht zur Richtung der Relativbewegung von S und S' aus, reduziert sich Gl. (12.18) auf

$$f = f' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (12.19)$$

und mit

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.20)$$

misst ein Beobachter in S eine Rotverschiebung. Die Frequenzverschiebung in Gl. (12.19) ist als transversaler Doppler-Effekt bekannt. Sie ist ein rein relativistischer, durch die Zeitdilatation bedingter Effekt, der immer auftritt, wenn sich zwei Bezugssysteme relativ zueinander bewegen. Gl. (12.19) und Gl. (12.20) gehen davon aus, dass der ruhende Beobachter Frequenz / Wellenlängenverschiebungen in dem Moment misst, wenn $\theta = \pi/2$ bezüglich der x' -Achse. Man kann aber eine andere Definition des transversalen Doppler-Effekts wählen, die zu einer Blau- und nicht zu einer Rotverschiebung führt.

Um das zu verstehen, betrachten wir die Situation in Abb. 12.12. Wenn das Signal zum Zeitpunkt τ den Beobachter am Ursprung von S erreicht, hat die Signalquelle sich um $v\tau$ auf der x' -Achse zu einer Position bewegt, an der die Sichtlinie von der Quelle zum Beobachter einen Winkel θ_1 mit der x' -Achse bildet. Für die Höhe h , den Normalabstand des Beobachters von der x' -Achse, kann man die Zusammenhänge ablesen

$$c\tau \sin \theta = h = d \sin \theta_1$$

und daher gilt für den Winkel θ_1

$$\sin \theta_1 = \frac{c\tau}{d} \sin \theta$$

Der Abstand d folgt auch aus dem Kosinussatz, der uns sagt, dass

$$d^2 = (c\tau)^2 + (v\tau)^2 - 2vc\tau^2 \cos \theta$$

Setzt man dies ein, so erhält man für θ_1 die Gleichung

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{c\tau \sin \theta}{\sqrt{(c\tau)^2 + (v\tau)^2 - 2vc\tau^2 \cos \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + (v/c)^2 - 2(v/c) \cos \theta}} \end{aligned}$$

Per Definition verlangt man nun, dass in dem Moment, in dem das Licht den ruhenden Beobachter erreicht, der Winkel θ_1 gleich $\pi/2$ sein soll. Mit dieser Definition folgt

$$\sin^2 \theta = 1 + \frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v}{c} \cos \theta$$

und man erhält die Gleichung

$$\cos^2 \theta + 2\frac{v}{c} \cos \theta + \frac{v^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{v}{c}$$

Setzt man $\cos \theta = v/c$ in Gl. (12.17) ein, so erhält man für die Wellenlängenverschiebung aufgrund des transversalen Doppler-Effekts

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (1 - v^2/c^2) = \lambda' \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (12.21)$$

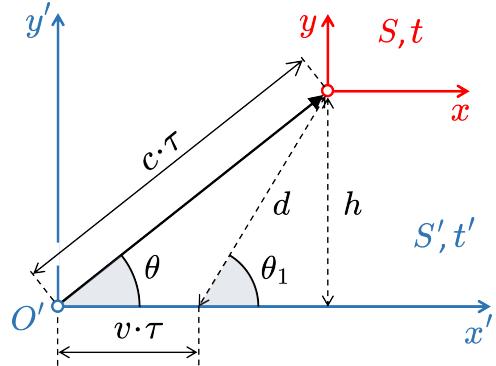


Abb. 12.12

Mit dieser Definition des transversalen Doppler-Effekts ist die vom ruhenden Beobachter gemessene Wellenlänge λ kürzer als die Wellenlänge λ' , mit der die Quelle in S' Licht emittiert. Wie lässt es sich vereinbaren, dass in einer Definition des transversalen Doppler-Effekts der ruhende Beobachter gemäß Gl. (12.20) eine Rotverschiebung misst, während der Beobachter bei einer anderen Definition gemäß Gl. (12.21) eine Blauverschiebung misst? Die Lösung besteht darin, wie in Abb. 12.13 skizziert, eine symmetrische Definition des transversalen Doppler-Effekts zu verwenden. Verlangt man, dass $\theta + \theta_1 = \pi$, d.h., der Winkel zwischen Beobachter und Quelle soll zum Zeitpunkt an dem das Licht den Beobachter erreicht $\theta_1 = \pi - \theta$ sein, dann ist $\sin \theta_1 = \sin \theta$. In diesem Fall ergibt sich die obige Gleichung für $\sin \theta_1$.

$$\sin \theta_1 = \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + (v/c)^2 - 2(v/c) \cos \theta}}$$

Dies ist nur möglich, wenn

$$1 + \frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v}{c} \cos \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{v}{c}$$

Setzt man $\cos \theta = v/c$ in Gl. (12.17) ein, so erhält man für die Wellenlängenverschiebung aufgrund des transversalen Doppler-Effekts

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

was man umschreiben kann zu

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \lambda' \sqrt{1 - v^2/c^2} \right) \quad (12.22)$$

Ein Vergleich mit Gl. (12.20) und Gl. (12.21) zeigt, dass dieses Ergebnis das arithmetische Mittel der Rotverschiebung von Gl. (12.20) und der Blauverschiebung von Gl. (12.21) ist. Für niedrige Geschwindigkeiten, also $v \ll c$, wird Gl. (12.22) zu $\lambda = \lambda'$ und der transversale Dopplereffekt verschwindet im klassischen Limes, wie es sein muss. Die Existenz eines rein relativistischen Doppler-Effekts aufgrund der Zeidilatation war eine der Vorhersagen der speziellen Relativitätstheorie. Die erste experimentelle Bestätigung kam 1938 und damit auch der Beweis, dass die Zeidilatation existiert.

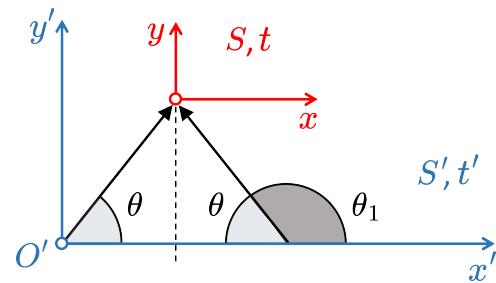


Abb. 12.13

12.3 Relativistische Dynamik

Der erste Teil dieses Kapitels führte das relative Raum-Zeit Konzept der speziellen Relativitätstheorie ein welches das absolute Raum-Zeit Konzept der Newtonschen Mechanik ersetzt. Damit untersuchten wir dann die Bewegung von Körpern aus der Perspektive zweier Beobachter in Inertialsystemen die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Jetzt ist es Zeit, über die kinematische Beschreibung hinauszugehen und die Kräfte zu betrachten, die dafür sorgen, dass sich Körper so bewegen, wie sie es tun. Wie müssen sich Newtons Gesetze ändern, damit sie eine korrekte Beschreibung der relativistischen Dynamik liefern? Um das herauszufinden, beginnen wir mit dem zweiten Newtonschen Gesetz und führen die erforderliche Änderung formal ein. Sobald wir verstanden haben, wie die Addition von Geschwindigkeiten und die Impulserhaltung im relativistischen Fall funktionieren, liefern wir die Begründung nach.

Unter Verwendung von Gl. (12.9), welche die Dauer «einer Sekunde» in einem Inertialsystem S mit der Dauer «einer Sekunde» in einem Inertialsystem S' in Beziehung setzt, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt, können wir das Zeitdifferential dt in S als Funktion des Zeitdifferentials dt' in S' ausdrücken und umgekehrt:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.23)$$

Relativistische und klassische Geschwindigkeitsaddition unterscheiden sich und \mathbf{v}_{rel} ist damit ungleich der klassischen Geschwindigkeit \mathbf{v} . Wir werden später sehen, dass für die Beziehung zwischen relativistischer Geschwindigkeit \mathbf{v}_{rel} und \mathbf{v} gilt

$$\mathbf{v}_{rel} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt'}$$

Um \mathbf{v}_{rel} zu erhalten, müssen wir also die Zeitableitung in dem Inertialsystem nehmen, in dem der bewegte Massenpunkt ruht, d.h., Gl. (12.23) kommt ins Spiel. Für $v \ll c$ gilt offensichtlich $dt' \rightarrow dt$ und $\mathbf{v}_{rel} \rightarrow \mathbf{v}$. Mit \mathbf{v}_{rel} und m_0 als der Masse des ruhenden Massenpunkts lautet das zweite Newtonsche Gesetz

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (12.24)$$

wobei

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.25)$$

der relativistische Impuls ist. Wir können weiterhin die klassische Geschwindigkeit und den klassischen Impuls in Newtons Bewegungsgleichung verwenden, indem wir

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.26)$$

als dynamische Masse der bewegten Punktmasse definieren. Die obigen Gleichungen sind die korrekten relativistischen Ergebnisse. Die Herleitung lieferte allerdings keine Begründung dafür, warum relativistische Geschwindigkeiten anders berechnet werden müssen. Das werden wir in Abschnitt 12.3.3 nachholen, wenn wir Geschwindigkeitsaddition und Impulserhaltung im relativistischen Fall verstanden haben. Mit der Definition des relativistischen Impulses in Gl. (12.25) und der relativistischen Bewegungsgleichung Gl. (12.24) haben wir alles Notwendige, um die relativistische Dynamik zu erforschen.

Abb. 12.14 zeigt wie das Verhältnis von dynamischer Masse zu Ruhemasse $m:m_0$ vom Parameter v/c abhängt. Bei $v = 0$ ist die dynamische Masse m gleich der Ruhemasse m_0 . In diesem Fall wird aus Gl. (12.24) wieder $\mathbf{F} = m_0 \cdot \dot{\mathbf{v}}$. Allerdings nimmt die dynamische Masse umso mehr zu, je größer v wird, und für v gleich c wäre die dynamische Masse unendlich. Das darf aber nicht passieren. Aber wie?

Werfen wir einen Blick zurück auf Ab-

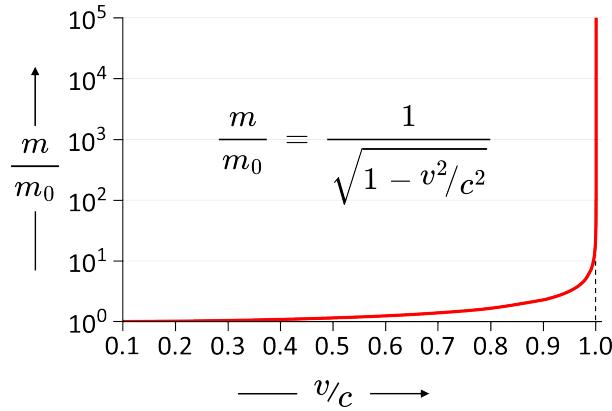


Abb. 12.14

schnitt 4.1.3, wo wir festgestellt haben, dass eine kontinuierlich auf einen Massenpunkt einwirkende Kraft, zu einer kontinuierlich zunehmenden kinetischen Energie des Massenpunkts führt (siehe Gl. (4.8)). In der Newtonschen Mechanik führt eine kontinuierlich zunehmende kinetische Energie eines Massenpunkts zu einer kontinuierlich zunehmenden Geschwindigkeit desselben. Anders als in der relativistischen Mechanik gibt es in der Newtonschen Mechanik nichts, was verhindern würde, dass sich ein Massenpunkt schneller als Licht bewegen kann, wenn eine Kraft nur lange genug auf ihn einwirkt.

In der Newtonschen Mechanik kann die Arbeit, die eine Kraft an einem Massenpunkt verrichtet, nur zu einer Erhöhung seiner kinetischen Energie, also seiner Geschwindigkeit, führen. Anders verhält es sich mit der relativistischen Version des Newtonschen Gesetzes in Gl. (12.24). Dort kann diese Arbeit nicht nur eine Zunahme der Geschwindigkeit, sondern auch der Masse des Massenpunkts bewirken. Wie Abb. 12.14 zeigt, ist für massive Objekte die Lichtgeschwindigkeit eine Barriere. Wir wissen, dass sich nichts schneller als

die Lichtgeschwindigkeit c bewegen kann. Dass der Ausdruck für die dynamische Masse in Gl. (12.26), wie Abb. 12.14 andeutet, für $v = c$ unendlich wird, sagt uns, dass wir diese Aussage verfeinern müssen: Kein massives Objekt kann sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, nur masselose Objekte mit $m_0 = 0$, können das. Wenn immer wir versuchen, ein Objekt zu beschleunigen, wird ein Teil der Energie, die wir dafür aufwenden, nicht seine Geschwindigkeit erhöhen, sondern seine Masse. Für jeden inkrementellen Anstieg der Geschwindigkeit eines Objekts müssen wir etwas mehr Energie aufwenden als für den vorhergehenden, weil das Objekt mit jedem solchen inkrementellen Anstieg massiver wird. Wenn sich v an c nähert, wird das Objekt so massiv, dass praktisch die gesamte Erhöhung der kinetischen Energie des Objekts, einer Erhöhung seiner dynamischen Masse gleichkommt. Die dynamische Masse des Objekts wird immer mehr zunehmen, ohne jemals unendlich zu werden, während die Geschwindigkeit des Objekts um immer kleinere Beträge zunimmt, ohne jemals die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen. Zu solchen Objekten gehören z.B. Elementarteilchen wie Elektronen oder Protonen, die Forscher auf Geschwindigkeiten v beschleunigen wo $(c - v)/c$ kleiner als 10^{-8} ist. Bei dieser Geschwindigkeit ist die dynamische Masse des Elementarteilchens ca. um den Faktor 7500 größer wie seine Ruhemasse. Um Elementarteilchen auf so enrome Geschwindigkeiten zu beschleunigen, braucht es riesige Anlagen, und jede Menge Energie.

Wie unterscheidet sich der Ausdruck für die kinetische Energie eines Elementarteilchens mit so enormer Geschwindigkeit von dem für ein nichtrelativistisches Teilchen? Die kinetische Energie des Teilchens ist gleich der Arbeit die nötig war, es zu bewegen, und mit Gl. (4.1) und Gl. (12.24) ist diese kinetische Energie daher

$$T = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) d\mathbf{r}$$

Mit $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ kann diese Gleichung geschrieben werden als

$$T = \int d \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \mathbf{v} = m_0 \int \mathbf{v} \cdot d \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

Mit partieller Integration erhalten wir daraus

$$T = m_0 \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \int \frac{\mathbf{v} d\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Um das zweite Integral in dieser Gleichung auszuwerten, verwenden wir

$$dv^2 = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = 2 \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

Damit lautet die Gleichung für T

$$\begin{aligned} T &= m_0 \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{m_0 c^2}{2} \int \frac{d(v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= m_0 \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + E_0 \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + E_0 \end{aligned}$$

Da ein unbestimmten Integral vorliegt, haben wir die Integrationskonstante E_0 hinzugefügt. Für $v = 0$ muss die kinetische Energie T Null sein, woraus folgt, dass $E_0 = -m_0 c^2$. Damit wird der Ausdruck für die relativistische kinetische Energie

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad (12.27)$$

oder mit dem Ausdruck für die dynamische Masse m aus Gl. (12.26)

$$T = mc^2 - m_0 c^2 \quad (12.28)$$

Um zu prüfen, wie sich Gl. (12.27) zur kinetischen Energie der Newtonschen Mechanik verhält, verwenden wir die ersten beiden Terme der Taylor-Entwicklung der inversen Quadratwurzel in Gl. (12.27) für $v/c \ll 1$ mit dem Ergebnis

$$T_{v \ll c} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Wie erwartet erhalten wir das Ergebnis der Newtonschen Mechanik für die kinetische Energie. Gl. (12.28) sagt uns, Masse ist eine Form von Energie, Energie und Materie sind äquivalent, wobei die Lichtgeschwindigkeit c die Proportionalitätskonstante ist. Das ist Einsteins berühmtes $E = mc^2$. Eine Massenänderung entspricht einer Energieänderung und eine Energieänderung entspricht einer Massenänderung. Diese Äquivalenz von Masse und Energie bedeutet auch, dass die kinetische Energie als Funktion von v/c genauso skaliert wie die dynamische Masse. Die Skalierungskurve für die kinetische Energie ist identisch mit jener der dynamischen Masse in Abb. 12.14. Es ist diese Äquivalenz von Masse und Energie, die Sterne wie unsere Sonne strahlen lässt, indem der bei Kernreaktionen auftretenden Massenverlust in Energie umgewandelt wird. Manchmal geht nicht nur ein wenig Masse, sondern die gesamte Teilchenmasse verloren wenn z.B. das Elektron auf sein Antiteilchen, das Positron, trifft und in einer Elektron-Positron-Vernichtung sämtliche Materie in Strahlungsenergie umgewandelt wird.

Über den relativistischen Impuls haben wir bisher nicht viel gesagt, und das aus gutem Grund. Bevor wir das tun können, müssen wir besser verstehen, wie die Addition von Geschwindigkeiten im relativistischen Fall funktioniert. Erst dann werden wir in der Lage sein, darüber nachzudenken, wie die Impulserhaltung im relativistischen Fall funktioniert, und das wird uns wiederum eine bessere Erklärung für die Form der relativistische Bewegungsgleichung in Gl. (12.24) liefern. Nichtsdestotrotz hat die qualitative Art und Weise der obigen Herleitung von Gl. (12.24) uns aber geholfen ein erstes Verständnis ihrer Auswirkungen zu gewinnen.

12.3.1 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

Die Addition von Geschwindigkeiten in der Newtonschen Mechanik ist einfach. Sei S wieder das ruhende Inertialsystem und S' das Inertialsystem, das sich relativ zu S mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt. Ein Objekt, das sich in S' mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}' bewegt, hat dann aus Sicht von S die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad (12.29)$$

Wie wir mit Gl. (12.2) wissen, ist dieses Ergebnis eine direkte Folge der Galilei-Transformation. Wie verändert sich diese einfache Addition der Geschwindigkeiten, wenn wir die Lorentz-Transformation auf die jeweiligen Raum- und Zeitkoordinaten anwenden? Die Geschwindigkeitskomponenten eines Objekts erhält man mittels Division der jeweiligen Raumdifferentialen (dx , dy oder dz) durch das Zeitdifferential dt . Wir müssen also wissen, wie die Raumdifferentialen dx , dy , dz und das Zeitdifferential dt transformieren. Hierzu nutzen wir die inverse Lorentz-Transformation, wie wir sie bereits in der Diskussion des Konzepts der Raumzeit verwendet haben (siehe Gl. (12.15)), allerdings nicht für die Koordinaten selbst, sondern für die Koordinatendifferentiale. Wir beschränken uns wieder darauf, Bewegungen nur in einer Richtung zu betrachten, also entlang der x -Achse bzw. x' -Achse. Dadurch werden die Berechnungen erheblich einfacher, ohne dass die Allgemeingültigkeit verloren geht. Wir können direkt von Gl. (12.14) und Gl. (12.15) kopieren, um die Lorentz-Transformation zu schreiben als ($\beta = v_0/c$)

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \beta x/c) \end{aligned} \quad (12.30)$$

und die inverse Lorentz-Transformation als

$$\begin{aligned}
x &= \gamma(x' + \beta ct') \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \gamma(t' + \beta x'/c)
\end{aligned} \tag{12.31}$$

Die Rücktransformation ist nichts anderes, als dass der Beobachter in S' darauf besteht, dass er oder sie ruht und S sich relativ zu S' mit der Geschwindigkeit $-v_0$ bewegt. Letzteres ist natürlich der Grund, warum die Minuszeichen in den Klammern der ersten und letzten Gleichung von Gl. (12.30) zu Pluszeichen geworden sind. Mit der Rücktransformation Gl. (12.31) können wir die Raum- und Zeitdifferentiale in S schreiben als

$$\begin{aligned}
dx &= \gamma \cdot dx' + \gamma \beta c \cdot dt' \\
dy &= dy' \\
dz &= dz' \\
dt &= \gamma \cdot dt' + (\gamma \beta / c) \cdot dx'
\end{aligned}$$

Mithilfe dieser Differentiale können wir nun die Geschwindigkeitskomponenten von \mathbf{v} in S als Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten von \mathbf{v}' in S' berechnen

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma \cdot dx' + \gamma \beta c \cdot dt'}{\gamma \cdot dt' + (\gamma \beta / c) \cdot dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \cdot dt' + (\gamma \beta / c) \cdot dx'} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{v'_y \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \\
v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma \cdot dt' + (\gamma \beta / c) \cdot dx'} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{v'_z \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst: Bewegt sich ein Inertialsystem S' relativ zu einem Inertialsystem S mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ und ein Objekt aus der Sicht eines Beobachters in S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}' = (v'_x, 0, 0)$, dann stellt ein Beobachter in S fest, dass sich dieses Objekt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ bewegt, wobei

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \tag{12.32}$$

Vergleichen wir diese Addition von Geschwindigkeiten mit Gl. (12.29), der Addition von Geschwindigkeiten, die sich aus der Galilei-Transformation ergibt, so stellen wir fest, dass wir in der Richtung von \mathbf{v}_0 das Ergebnis der Galilei-Transformation erhalten, dividiert durch einen relativistischen Korrekturfaktor. Dieser hängt ab von der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 und der Komponente von \mathbf{v}' parallel zu \mathbf{v}_0 . Für die Komponenten von \mathbf{v}' orthogonal zu \mathbf{v}_0 haben wir denselben Korrekturfaktor plus einen zusätzlichen Korrekturfaktor, nämlich $\sqrt{1 - \beta^2}$. Offensichtlich wird ein Beobachter in S feststellen, dass die Geschwindigkeit eines Objekts, das in S' nur eine Komponente orthogonal zur Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 hat, Komponenten orthogonal und parallel zu \mathbf{v}_0 besitzt.

Um zu verstehen, warum das so ist, müssen wir untersuchen, was passiert, wenn sich ein Objekt mit Lichtgeschwindigkeit in S' bewegt. Bereits Newton glaubte, dass Licht korpuskularer Natur sei, aber aufgrund der Erfolge von Huygens Wellentheorie und später von Maxwells elektromagnetischer Theorie, kam die duale Natur des Lichts erst mit der Quantenmechanik wieder zum Vorschein. Newtons Lichtkorpuskel wurden zu den masselosen Lichtteilchen, die wir heute Photonen nennen. Nehmen wir an, ein solches Photon in S' bewege sich in x' -Richtung, also $\mathbf{v}' = (c, 0, 0)$. In diesem Fall sagt uns Gl. (12.32), dass $v_y = v_z = 0$ und für einen Beobachter in S bewegt sich daher das Photon in x -Richtung mit der Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{c + v_0}{1 + v_0/c} = c \cdot \frac{c + v}{c + v} = c$$

Unabhängig von der Geschwindigkeit v_0 bewegt sich für einen Beobachter in S das Photon immer mit Lichtgeschwindigkeit c , genauso wie für einen Beobachter in S' . Das muss so sein, da die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Wert c in allen Inertialsystemen Teil der Lorentz-Transformation ist. Nehmen wir an ein Photon in S' bewege sich orthogonal zu \mathbf{v}_0 , z.B. in der y' -Richtung, also $\mathbf{v}' = (0, c, 0)$. Gemäß Gl. (12.32), bewegt sich das Photon für einen Beobachter in S mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ c\sqrt{1 - \beta^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \sqrt{c^2 - v_0^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie die Skizze in Abb. 12.15 zeigt, bewegt sich das Photon in S immer noch mit der Lichtgeschwindigkeit c . Allerdings bewegt es sich nicht mehr orthogonal zu \mathbf{v}_0 wie in S' , sondern hat jetzt eine v_x -Komponente zusätzlich zur v_y -Komponente. Die Richtung des

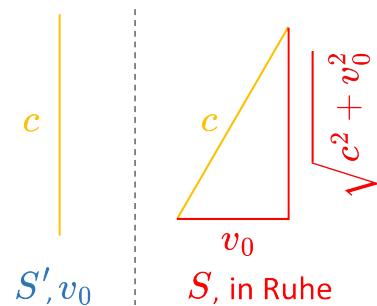


Abb. 12.15

Geschwindigkeitsvektors ändert sich in S , nicht jedoch sein Betrag da

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_0^2 + (c^2 - v_0^2)} = c$$

unabhängig von v_0 ist. Aus der Sicht eines Beobachters in S ändert sich nur die Richtung des Photons, nicht jedoch seine Geschwindigkeit. Im Extremfall $v_0 = c$ verschwindet die v_y -Komponente in S vollständig und ein Photon, das sich orthogonal zu \mathbf{v}_0 bewegte wird von einem Beobachter in S als Photon wahrgenommen, das sich parallel zu \mathbf{v}_0 bewegt. Was bedeutet das? Der Beobachter in S' befindet sich irgendwo auf der positiven x' -Achse und blicke zurück zum Ursprung von S' , wo das Photon, das sich in positiver y' -Richtung bewegt, im Moment der räumlichen Koinzidenz von S' und S entsteht. Offensichtlich wird dieses Photon in S' niemals das Auge des Beobachters erreichen. Aber nicht so für einen Beobachter in S , der ebenfalls irgendwo auf seiner positiven x -Achse sitzt und auf den Ursprung von S zurückblickt. Wenn $v_0 = c$ ist, bewegt sich das Photon entlang der x -Achse und erreicht den Beobachter. Dies sagt uns, dass der Beobachter in S aufgrund der Mischung normaler und paralleler Geschwindigkeitskomponenten Dinge sehen kann, die der Beobachter in S' nicht sehen kann. Scheinbar beugt sich mit steigender Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 der y' -Horizont zunehmend zum Beobachter in S .

Eine Besonderheit der relativistischen Addition von Geschwindigkeiten in Gl. (12.32) ist, dass sie ungleich der Galilei-Geschwindigkeitsaddition in Gl. (12.29), nicht linear ist. Abb. 12.16 zeigt dies für den speziellen Fall wo $v'_x = v_0$. Die horizontale Achse im Diagramm von Abb. 12.16 zeigt die Geschwindigkeiten $v'_x = v_0$ als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit c und die vertikale Achse zeigt die resultierende Geschwindigkeit v_x im Fall der Galileischen und der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. Solange $v'_x = v_0 \ll c$ ist, sind die Ergebnisse praktisch identisch. Bis zu Geschwindigkeiten $v'_x = v_0$ von weniger als 10% der Lichtgeschwindigkeit, also $v'_x = v_0 \leq 0.1 \cdot c$, weicht der Galilei-Wert um weniger als 1% vom relativistischen Ergebnis ab. Ist $v'_x = v_0 = 0.2 \cdot c$, dann beträgt diese Abweichung bereits 4%. Bei $v'_x = v_0 = 0.5 \cdot c$ ist die Abweichung dann genau 25% und von da an liefert die Galilei-Geschwindigkeitsaddition Ergebnisse, die über der Lichtgeschwindigkeit liegen.

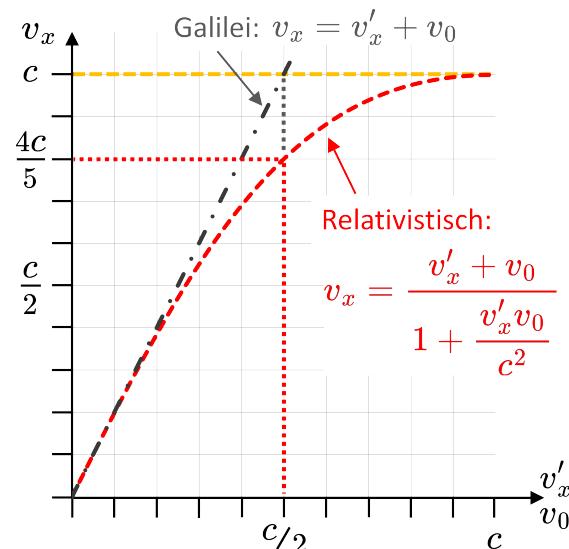


Abb. 12.16

Die Kurve zeigt, dass die Galilei-Geschwindigkeitsaddition bei hohen Geschwindigkeiten abweichen kann. Bei $v'_x = v_0 = 0.5 \cdot c$ liegt der Galilei-Wert bei $v_x = 1.5 \cdot c$, während der relativistische Wert bei $v_x = 0.75 \cdot c$ liegt. Bei $v'_x = v_0 = 0.9 \cdot c$ liegt der Galilei-Wert bei $v_x = 1.8 \cdot c$, während der relativistische Wert bei $v_x = 0.99 \cdot c$ liegt.

Die v_x -Komponente in Gl. (12.32) ist symmetrisch bzgl. v'_x und v_0 . Das ist zu erwarten, da es keinen Unterschied machen sollte, ob z.B. $v'_x = 0.2 \cdot c$ und $v_0 = 0.8 \cdot c$ oder $v'_x = 0.8 \cdot c$ und $v_0 = 0.2 \cdot c$. Diese Symmetrie spiegelt sich in Abb. 12.17 wieder, das ein Konturdiagramm von v_x als Funktion von v'_x und v_0 im Bereich 0 bis c zeigt. Die Konturkarte ist symmetrisch bzgl. der Diagonalen $v'_x = v_0$. Abb. 12.16 veranschaulicht die Nichtlinearität der relativistischen Geschwindigkeitsaddition für den speziellen Fall, in dem $v'_x = v_0$. Die Kurve Abb. 12.16 entspricht also der Diagonale $v'_x = v_0$ in Abb. 12.17. Die Konturkarte zeigt auch, wie die Nichtlinearität der relativistischen Geschwindigkeitsaddition aussieht, wenn $v'_x \neq v_0$. Für $v'_x \ll c$ und $v_0 \ll c$ verlaufen die Konturlinien diagonal von oben links nach unten rechts, was zeigt, dass die relativistische Geschwindigkeitsaddition ein nicht viel anders Resultat liefert als das Galilei-Ergebnis. Bei größeren Geschwindigkeiten entwickeln die Konturlinien aber aufgrund der stärkeren Abweichung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition vom Galilei-Ergebnis eine zunehmende Krümmung.

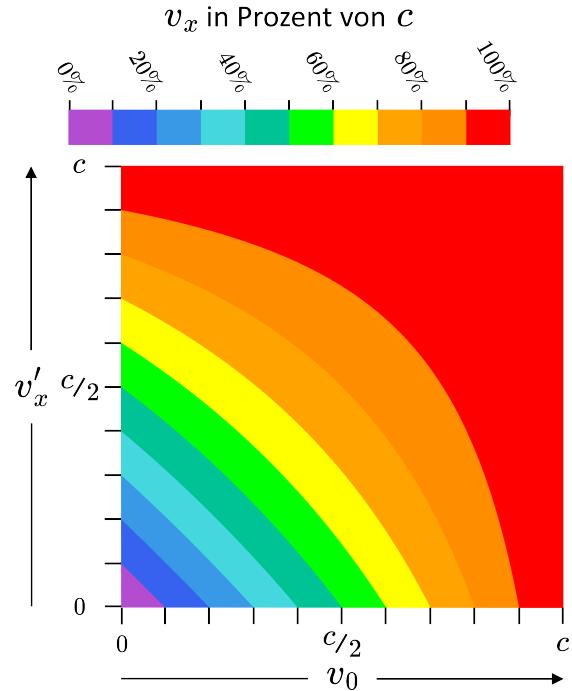


Abb. 12.17

12.3.2 Relativistischer Impuls

Jetzt, da wir die relativistische Addition von Geschwindigkeiten kennen, können wir uns der Frage zuwenden wie sich der relativistische Impuls vom Impuls der Newtonschen Mechanik unterscheidet. Wir beginnen mit einer erneuten Betrachtung der in Abschnitt 3.2.1 diskutierten Impulserhaltung. Dort sahen wir, dass der Gesamtimpuls \mathbf{P} eines geschlossenen Systems von Massenpunkten nicht durch innere Kräfte verändert werden kann, sondern nur äußere Kräfte, die auf ein solches geschlossenes System einwirken, dessen Gesamtimpuls ändern können. Ohne äußere Kräfte ist der Gesamtimpuls \mathbf{P} in einem geschlossenen System von Massenpunkten konstant, d.h., die Änderungsrate des Gesamtimpulses \mathbf{P} verschwindet:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \equiv 0 \quad (12.33)$$

Wechseln wir vom ruhenden Inertialsystem S ins Inertialsystem S' , das sich relativ zu S mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt, dann ist gemäß der Galilei-Geschwindigkeitsaddition der Gesamtimpuls in Gl. (12.33)

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_0) = \mathbf{P} + \mathbf{v}_0 \sum_i m_i$$

Da das zweite Glied mit \mathbf{v}_0 konstant ist, ist der Gesamtimpuls in S' ebenfalls konstant und die Änderungsrate des Gesamtimpulses ist in S' Null, genau wie in S , also $\dot{\mathbf{P}}' = \dot{\mathbf{P}} = 0$. Wir wissen, dass die Galilei-Geschwindigkeitsaddition nicht korrekt ist. Daher kann die Impulserhaltung in der in Abschnitt 3.2.1 diskutierten Form nicht korrekt sein, sondern ist nur eine Näherung für die korrekte relativistische Form bei Geschwindigkeiten $v_0 \ll c$. Aber was passiert mit der Impulserhaltung, wenn wir die relativistische Geschwindigkeitsaddition von Gl. (12.32) verwenden, um den Gesamtimpuls in zwei Inertialsystemen zu bestimmen, die sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegen?

Hierzu betrachten wir einen Stoßprozess im Schwerpunktssystem S' und übertragen ihn dann mittels relativistischer Geschwindigkeitsaddition zurück in ein Laborsystem unserer Wahl. Von den in Abschnitt 3.2.2 diskutierten Stoßprozessen betrachten wir den Sonderfall, wo beide Stoßpartner die gleiche Masse haben, also $m_1 = m_2 = m_0$, und beide vor dem Stoß von Null verschiedene Geschwindigkeiten haben. Wegen $m_1 = m_2$ können wir, wie in Abb. 12.18a für einen Streuwinkel α gezeigt, die Impulsvektoren von Abb. 3.16 durch die Geschwindigkeitsvektoren ersetzen. Im Schwerpunktssystem S' sieht ein elastischer Stoßprozess mit $m_1 = m_2$ immer so aus wie in Abb. 12.18a, mit $\mathbf{v}'_1 = -\mathbf{v}'_2$, $\tilde{\mathbf{v}}'_1 = -\tilde{\mathbf{v}}'_2$, $|\mathbf{v}'_1| = |\mathbf{v}'_2|$, $|\tilde{\mathbf{v}}'_1| = |\tilde{\mathbf{v}}'_2|$ und dem durch die Streugeometrie bestimmten Streuwinkel α . Abb. 12.18a ist eine Version von Abb. 3.16a wo m_1 gleich m_2 ist; das gilt auch für Abb. 12.18b mit dem Unterschied, dass die Perspektive bzgl. der S' -Koordinatenachsen des Schwerpunktssystems gedreht ist. Das ist immer möglich, ohne die Physik des Geschehens zu beeinflussen. Hier haben wir uns entschieden, den Stoßprozess aus einer Perspektive zu betrachten, in der er in S' vollständig symmetrisch bzgl. der S' -Koordinatenachsen ist. Aus dieser in Abb. 12.18b skizzierten Perspektive sind die Geschwindigkeitskomponenten beider Massen in x' -Richtung vor und nach dem Stoß gleich und ihre jeweiligen y' -Komponenten

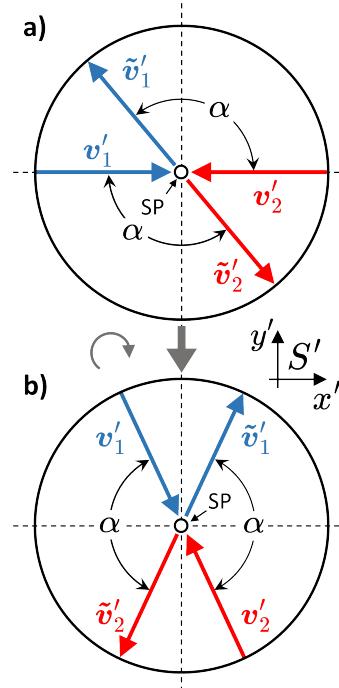


Abb. 12.18

werden durch den Stoß invertiert. Daher gilt in Abb. 12.18b für die Geschwindigkeitskomponenten in x' -Richtung

$$\tilde{v}'_{1x} = v'_{1x} \quad , \quad \tilde{v}'_{2x} = v'_{2x} \quad , \quad v'_{1x} = -v'_{2x} \quad , \quad \tilde{v}'_{1x} = -\tilde{v}'_{2x}$$

und für die Geschwindigkeitskomponenten in y' -Richtung gilt

$$\tilde{v}'_{1y} = -v'_{1y} \quad , \quad \tilde{v}'_{2y} = -v'_{2y} \quad , \quad v'_{1y} = -v'_{2y} \quad , \quad \tilde{v}'_{1y} = -\tilde{v}'_{2y}$$

Mithilfe dieser Beziehungen können wir nun den Gesamtimpuls im Laborsystem in x - und y -Richtung aus den jeweiligen Komponenten im Schwerpunktssystem unter Verwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition aus Gl. (12.32) berechnen. Wir beginnen mit der x -Richtung, wo wir für P_x und \tilde{P}_x , den Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß, erhalten:

$$P_x = m_0(v_{1x} + v_{2x}) = m_0 \left[\frac{v'_{1x} + v_0}{1 + \frac{v'_{1x}v_0}{c^2}} + \frac{v'_{2x} + v_0}{1 + \frac{v'_{2x}v_0}{c^2}} \right]$$

Jetzt nutzt man $v'_{1x} = \tilde{v}'_{1x}$ und $v'_{2x} = \tilde{v}'_{2x}$ und erhält damit für P_x

$$P_x = m_0 \left[\frac{\tilde{v}'_{1x} + v_0}{1 + \frac{\tilde{v}'_{1x}v_0}{c^2}} + \frac{\tilde{v}'_{2x} + v_0}{1 + \frac{\tilde{v}'_{2x}v_0}{c^2}} \right] = m_0(\tilde{v}_{1x} + \tilde{v}_{2x}) = \tilde{P}_x$$

Mit $\tilde{P}_x = P_x$ gilt auch im Laborsystem die Impulserhaltung in der x -Richtung. Bezuglich der Impulserhaltung in y -Richtung erhalten wir mit Gl. (12.32) im Laborsystem für den Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß, P_y und \tilde{P}_y :

$$P_y = m_0(v_{1y} + v_{2y}) = m_0 \left[\frac{v'_{1y}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_{1y}v_0}{c^2}} + \frac{v'_{2y}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_{2y}v_0}{c^2}} \right]$$

Nun nutzen wir $v'_{1y} = -\tilde{v}'_{1y}$, $v'_{1x} = \tilde{v}'_{1x}$, $v'_{2y} = -\tilde{v}'_{2y}$ und $v'_{2x} = \tilde{v}'_{2x}$. Damit wird aus P_y

$$P_y = m_0 \left[\frac{-\tilde{v}'_{1y}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{\tilde{v}'_{1y}v_0}{c^2}} - \frac{\tilde{v}'_{2y}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{\tilde{v}'_{2y}v_0}{c^2}} \right] = -m_0(\tilde{v}_{1y} + \tilde{v}_{2y}) = -\tilde{P}_y$$

Mit $\tilde{P}_y = -P_y$ gilt im Laborsystem die Impulserhaltung in der y -Richtung nicht. Offensichtlich gilt bei der Übertragung vom Schwerpunktssystem auf ein Laborsystem, das sich relativ zum Schwerpunktssystem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt, dass der Gesamtimpuls in Richtung \mathbf{v}_0 eine Invariante unter Lorentz-Transformation ist, aber nicht die gesamte Impulskomponente senkrecht zu \mathbf{v}_0 . Folglich ist der Newtonsche Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

keine Invariante unter Lorentz-Transformationen, die Definition des relativistischen Impulses muss sich vom Newtonschen Impuls unterscheiden so dass die Impulserhaltung in jedem Inertialsystem und nicht nur in einem System gilt. Mit Gl. (12.24) haben wir diesen relativistischen Impuls bereits eingeführt, wenn auch nicht stringent. Jetzt müssen wir prüfen, ob der Ausdruck des relativistischen Impulses in Gl. (12.24) tatsächlich unter Lorentz-Transformation invariant ist. Mit Gl. (12.32) sind die relativistischen Impulse der beiden Massen

$$\begin{aligned} p_{1y} &= \frac{m_0 v_{1y}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{m_0 v_{1y}}{\sqrt{1 - (v_{1x}^2 + v_{1y}^2)/c^2}} \\ &= \frac{m_0 v'_{1y} \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + \frac{v'_{1x} v_0}{c^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{v'_{1x} + v_0}{1 + \frac{v'_{1x} v_0}{c^2}} \right)^2 + \frac{v'^2_{1y} (1 - v_0^2/c^2)}{\left(1 + \frac{v'_{1x} v_0}{c^2} \right)^2} \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned}$$

Den Ausdruck zwischen den geschweiften Klammern können wir vereinfachen zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2 \left(1 + \frac{v'_{1x} v_0}{c^2} \right)^2} \left[\left(c + \frac{v'_{1x} v_0}{c} \right)^2 - (v'_{1x} + v_0)^2 - v'^2_{1y} (1 - v_0^2/c^2) \right] \\ &= \frac{(1 - v_0^2/c^2)}{c^2 \left(1 + \frac{v'_{1x} v_0}{c^2} \right)^2} (c^2 - v'^2_{1x} - v'^2_{1y}) = \frac{(1 - v_0^2/c^2)}{\left(1 + \frac{v'_{1x} v_0}{c^2} \right)^2} (1 - v'^2_1/c^2) \end{aligned}$$

Damit wird p_{1y}

$$p_{1y} = \frac{m_0 v_{1y}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{m_0 v'_{1y}}{\sqrt{1 - v'^2_1/c^2}} = p'_{1y}$$

Offensichtlich ist der relativistische Impuls eine Invariante unter Lorentz-Transformationen. Der relativistische Impuls ist im Laborsystem S derselbe wie im Schwerpunktsystem S' , das sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt. Tatsächlich ist der relativistische Impuls unabhängig davon in welchem Inertialsystem wir ihn betrachten und mit welcher Geschwindigkeit sich dieses relativ zu anderen Systemen bewegt. Wenn wir die obige Berechnung für p_{2y} wiederholen, erhalten wir

$$p_{2y} = \frac{m_0 v_{2y}}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{m_0 v'_{2y}}{\sqrt{1 - v'^2_2/c^2}} = p'_{2y}$$

Wegen $\tilde{v}'_{2y} = -\tilde{v}'_{1y}$ und $\tilde{v}'_{2x} = -\tilde{v}'_{1x}$ ist offensichtlich v'^2_1 gleich v'^2_2 und folglich gilt $p'_{2y} = -p'_{1y}$ sowie $p_{2y} = -p_{1y}$, was bedeutet, dass die Gesamtimpuls vor dem Stoß im Schwerpunktsystem

$$P'_y = p'_{1y} + p'_{2y} = 0$$

und der Gesamtimpuls vor dem Stoß im Laborsystem

$$P_y = p_{1y} + p_{2y} = 0$$

beide Null sind. Da der relativistische Impuls unter Lorentz-Transformationen invariant ist, ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß in jedem Inertialsystem Null. Wie sieht es mit der Dynamik nach dem Stoß aus? Weil das einzige was sich bei dem in Abb. 12.18b skizzierten Stoßprozess ändert nur die Umkehrung der Geschwindigkeitskomponenten in der y -Richtung ist, wird der Gesamtimpuls nach dem Stoß im Schwerpunktsystem ebenso wie im Laborsystem Null sein, d.h.

$$\tilde{P}'_y = \tilde{p}'_{1y} + \tilde{p}'_{2y} = 0$$

und

$$\tilde{P}_y = \tilde{p}_{1y} + \tilde{p}_{2y} = 0$$

Da der relativistische Impuls unter Lorentz-Transformationen invariant ist, wird der Gesamtimpuls nach dem Stoß in jedem Inertialsystem Null sein, und daher wird in jedem Bezugssystem immer

$$P_y = \tilde{P}_y$$

gelten und damit natürlich auch die Impulserhaltung in der Richtung senkrecht zu \mathbf{v}_0 . Wie ändert sich die Impulserhaltung in der Richtung parallel zu \mathbf{v}_0 mit der Einführung des relativistischen Impulses? Wir berechnen die Impulse p_{1x} und p_{2x} vor dem Stoß, wie wir das oben für p_{1y} und p_{2y} gemacht haben und finden

$$p_{1x} = \frac{m_0 v_{1x}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{m_0 v_{1x}}{\sqrt{1 - (v_{1x}^2 + v_{1y}^2)/c^2}} = \frac{m_0 (v'_{1x} + v_0)}{\sqrt{1 - v_1'^2/c^2} \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$p_{2x} = \frac{m_0 v_{2x}}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{m_0 v_{2x}}{\sqrt{1 - (v_{2x}^2 + v_{2y}^2)/c^2}} = \frac{m_0 (v'_{2x} + v_0)}{\sqrt{1 - v_2'^2/c^2} \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

und daher gilt mit $v'_{2x} = -v'_{1x}$ und $v_1'^2 = v_2'^2$ dass $p'_{2x} = -p'_{1x}$ sowie $p_{2x} = -p_{1x}$, was bedeutet, der Gesamtimpuls in x -Richtung vor dem Stoß im Schwerpunktsystem und im Laborsystem ist

$$P'_x = p'_{1x} + p'_{2x} = 0 \quad \text{und} \quad P_x = p_{1x} + p_{2x} = 0$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir den Gesamtimpuls nach dem Stoß im Schwerpunktsystem und im Laborsystem

$$\tilde{P}'_x = \tilde{p}'_{1x} + \tilde{p}'_{2x} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{P}_x = \tilde{p}_{1x} + \tilde{p}_{2x} = 0$$

Wie für den Gesamtimpuls in y -Richtung gilt auch für den Gesamtimpuls in x -Richtung, dass in jedem Bezugssystem $P_x = \tilde{P}_x$. Zusammengenommen ergibt dies mit $\mathbf{P} = P_x \cdot \hat{\mathbf{x}} + P_y \cdot \hat{\mathbf{y}}$, dass in allen Bezugssystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, die Gesamtimpulserhaltung gilt, d.h., $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$ gilt immer.

Der relativistische Impuls stellt sicher, dass Impulserhaltung in jedem Inertialsystem gilt, und wie man schnell prüfen kann, wird aus dem relativistischen Impuls für $v \ll c$ der Newtonsche Impuls. Doch wie entsteht überhaupt diese Gleichung für den relativistischen Impuls? Hierzu betrachten wir die in Abb. 12.19 skizzierte Situation. Ein Inertialsystem S' soll sich relativ zu unserem Inertialsystem S bewegen, das unser Bezugssystem sein wird. Stellen wir uns ein Raumschiff vor, das an unserer Position vorbeifliegt, einer Raumstation, wo wir uns gerade mit Proviant versorgen. Hinter einem Fenster im Raumschiff S' bewegt sich ein Ball mit der Geschwindigkeit $-v'_y$ gerade nach unten, trifft auf eine Fläche und springt dann mit invertierter Geschwindigkeit v'_y gerade nach oben zurück. Wie sieht dieser Prozess für uns in der Raumstation aus, wo das Raumschiff mit der Geschwindigkeit u an uns vorbeifliegt, genau in dem Moment, in dem dies in seinem Inneren geschieht? Für uns bewegt sich der Ball nicht gerade nach unten, da er in unserem Bezugssystem eine von Null verschiedene Geschwindigkeitskomponente in der x -Richtung hat. Was wir sehen, ist, dass der Ball in einem Winkel α auf die Fläche trifft und dann in einem Winkel α von der Fläche zurückprallt. Wir wissen, dass in S' die Größe der Impulsänderung, die der Ball erfährt, gegeben ist durch

$$\Delta p'_y = 2 \cdot m_0 v'_y$$

Wir bezeichnen die Masse des Balls in S' mit m_0 , um anzugeben, dass er bezüglich der Bewegung in Richtung von u ruht. Was ist die entsprechende Impulsänderung des Balls für uns als Beobachter in S ? Aus Gl. (12.32) wissen wir, dass die Geschwindigkeit v_y in S gegeben ist durch ($v_0 = u$)

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} \stackrel{v'_x = 0}{=} v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

und daher ist die Impulsänderung des Balls, die von einem Beobachter wie uns in S gemessen wird

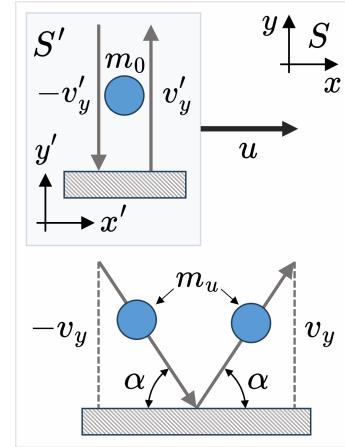


Abb. 12.19

$$\Delta p_y = 2 \cdot m_u v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Da der Ball in S eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Relativbewegung u hat, haben wir die Masse, die der Beobachter in S in Bewegung sieht mit m_u bezeichnet, um sie von der Masse m_0 in S' zu unterscheiden, die sich nur vertikal bewegt. Verlangen wir nun, dass Beobachter in S' und in S die gleiche Impulsänderung messen müssen, d.h., Δp_y muss gleich $\Delta p'_y$ sein, folgt daraus

$$m_u v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2} = m_0 v'_y \quad \Rightarrow \quad m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Dass m_u sich von m_0 unterscheidet, folgt direkt aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. Nicht nur die Geschwindigkeit in der Newtonschen Impulsgleichung $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ unterliegt den Regeln der speziellen Relativitätstheorie, sondern auch die Masse. Unter Verwendung der dynamischen Masse m_u , auch relativistische Masse genannt, können wir den relativistischen Impuls formal wie den Newtonschen Impuls schreiben, also $\mathbf{p} = m_u \mathbf{v}$. Mit $u \rightarrow 0$ wird aus dem relativistischen Impuls $\mathbf{p} = m_u \mathbf{v}$ der Newtonsche Impuls $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$.

12.3.3 Relativistische Energie

Bei der Diskussion des Konzepts der Raumzeit in Abschnitt 12.2.4 wurde die Vierervektorgröße

$$\mathbf{X}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}(ct, x, y, z) = \mathbf{X}(ct, \mathbf{r}) \tag{12.34}$$

eingeführt, deren Länge unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Das bedeutet, dass für zwei beliebige Inertialsysteme S und S' gilt

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Mithilfe dieses Vierervektors, der die Metrik der Raumzeit misst, können wir auch einen entsprechenden Geschwindigkeits- und Impulsvektor definieren. Den Vierervektor der Geschwindigkeit erhalten wir aus der zeitlichen Ableitung des Raum-Zeit-Vierervektors. Aber in Bezug auf welche Zeit? Jedes Inertialsystem hat ja seine eigene lokale Zeit. Was wir jedoch benötigen, ist ein Maß für die Eigenzeit, die zwischen dem Auftreten zweier Ereignisse vergeht. Diese Eigenzeit können wir mit einer Uhr messen, die sich entlang der Weltlinie bewegt, welche die beiden Ereignisse verbindet. Machen wir also genau das, aber in zwei Dimensionen, da dies einfacher zu veranschaulichen ist.

Zuerst benötigen wir eine Uhr, die in ihrem Ruhe-system die Zeit so misst, dass die Messung nicht von der Bewegung des Bezugssystems selbst abhängt. Abb. 12.20 zeigt eine solche Uhr im Ruhezustand im Inertialsystem S' . Die Uhr besteht aus einer horizontalen Bodenplatte, in der ein Ereignis E_A einen Lichtimpuls erzeugt, der dann eine Strecke d gerade nach oben zurücklegt, bis er auf einen an einer Deckplatte befestigten Spiegel trifft. Dort wird der Lichtpuls senkrecht zur Bodenplatte zurückreflektiert wobei er erneut die Strecke d zurücklegt bevor er in der Bodenplatte ein Ereignis E_B auslöst. Die Zeit $\Delta t'$, die zwischen den beiden Ereignissen E_A und E_B vergeht, ist die Zeit, die das Licht in S' für die Strecke von der Bodenplatte zum Spiegel und zurück zur Bodenplatte braucht:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c} \quad \text{oder} \quad c\Delta t' = 2d = \Delta s \quad (*)$$

Das Inertialsystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit u nach rechts. Aus der Sicht eines Beobachters in S läuft das Licht nicht nur gerade nach oben und dann gerade nach unten, sondern auch in Richtung u . Die Situation ist ähnlich wie in Abb. 12.19. Allerdings haben wir es hier nicht wie in Abb. 12.19 mit einem massiven Objekt zu tun, sondern mit Licht und für Photonen gilt $m_0 = 0$. Für einen Beobachter in S beträgt die zwischen den Ereignissen E_A und E_B verstrichene Zeit Δt und mit einer Skizze wie in Abb. 12.20 wird sie oder er mithilfe des Satzes von Pythagoras ableiten, dass

$$\left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad (u\Delta t)^2 + (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 \quad (**)$$

Abb. 12.21 zeigt die geometrische Interpretation dieser Gleichungen in S und S' . Mit (*) und (**) ist

$$(c\Delta t')^2 = (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (u\Delta t)^2$$

das invariante Raum-Zeit-Intervall Δs und mit $u\Delta t = \Delta x$ können wir die Gleichung, die dieses invariante Raum-Zeit-Intervall definiert, schreiben als

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

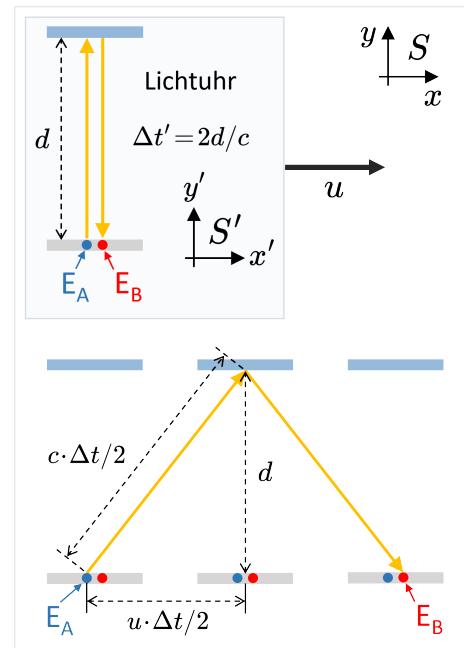


Abb. 12.20

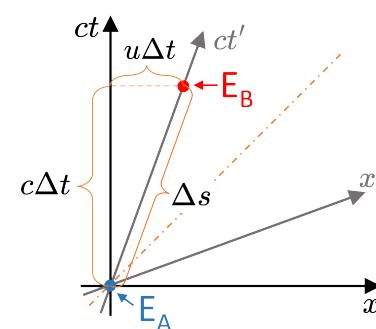


Abb. 12.21

In der vierdimensionalen Raumzeit wird diese Gleichung offensichtlich

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

beziehungsweise in Differentialform

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Die im Inertialsystem S' gemessene Zeit, in der die Uhr ruht, ist immer die kürzeste Zeit, die zwischen zwei Ereignissen verstreicht. In jedem Inertialsystem, das sich relativ zu S' bewegt, wie in S , überschreitet die gemessene Zeit jene in S' , weil aus

$$(c\Delta t')^2 = (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

folgt

$$(c\Delta t)^2 = (c\Delta t')^2 + (\Delta x)^2$$

Die im Inertialsystem der ruhenden Uhr gemessene Zeit wird «Eigenzeit» genannt und mit dem Buchstaben τ bezeichnet, um sie von den Symbolen zu unterscheiden, die zur Identifizierung von Zeitkoordinaten in Inertialsystemen verwendet werden. Aus Gl. (12.9) wissen wir, dass Eigenzeit und Koordinatenzeit miteinander verbunden sind durch

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(u)d\tau \quad (12.35)$$

Dabei ist u die Geschwindigkeit, mit der sich das Inertialsystem mit der Koordinatenzeit t in Bezug auf das System bewegt, in dem unsere Lichtuhr aus Abb. 12.20 ruht. Damit können wir nun den Geschwindigkeits-Vierervektor \mathbf{U} als «Eigenzeit»-Ableitung des Raum-Zeit-Vierervektors \mathbf{X} berechnen

$$\mathbf{U} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{X}(ct, \mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

Die Zeitableitungen der Komponenten von \mathbf{U} sind

$$\frac{d(ct)}{d\tau} = c\gamma \quad , \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \mathbf{u}\gamma \quad \text{nit} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

und damit wird der Geschwindigkeits-Vierervektor

$$\mathbf{U} = \gamma(c, \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}(c, \mathbf{u}) \quad (12.36)$$

Mit dem Geschwindigkeits-Vierervektor ist es einfach, den Impuls-Vierervektor zu bestimmen. Der Impuls ist immer das Produkt aus Geschwindigkeit mal Masse. Aber mit welcher Masse müssen wir den Geschwindigkeits-Vierervektor multiplizieren, mit

der Ruhemasse m_0 oder der dynamischen Masse $m = \gamma(u) \cdot m_0$? So wie wir die Geschwindigkeit mithilfe der «Eigenzeit»-Ableitung des Raum-Zeit-Vierervektors bestimmt haben, müssen wir den Impuls-Vierervektor auch im Ruhesystem unserer Lichtuhr berechnen. Das heißt, wir müssen \mathbf{U} mit m_0 multiplizieren. Damit erhalten wir den Impuls-Vierervektor

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{U} = m_0 \gamma(c, \mathbf{u}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}(c, \mathbf{u}) \quad (12.37)$$

Die Raumkomponente \mathbf{p} dieses Impuls-Vierervektors ist

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (12.38)$$

Ohne darüber nachzudenken, wie der relativistische Impuls \mathbf{p} aussehen muss, erhalten wir den richtigen Ausdruck. Dies geschah einfach dadurch, dass wir zunächst die «Eigenzeit»-Ableitung des Raum-Zeit-Vierevektors \mathbf{X} im Bezugssystem der ruhenden Uhr berechneten und dadurch den Geschwindigkeits-Vierervektor \mathbf{U} erhielten. Aus diesem folgte dann durch Multiplikation mit m_0 , der Masse im Bezugssystem der ruhenden Uhr, der Impuls-Vierervektor \mathbf{P} . Bevor wir die Zeitkomponente des Impuls-Vierervektors diskutieren, berechnen wir zunächst den Kraft-Vierervektor \mathbf{F} , indem wir die «Eigenzeit»-Ableitung von \mathbf{P} berechnen

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c, m_0 \gamma \mathbf{u})$$

Die Raumkomponente dieses Kraft-Vierervektors ist $\gamma \cdot \mathbf{F}$ und die Kraft \mathbf{F} ist

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (12.39)$$

Die Zeitkomponente des Kraft-Vierervektors berechnen wir explizit, damit wir sie so umschreiben können, dass wir ein besseres physikalisches Verständnis dieser Komponente erhalten. Dazu müssen wir zunächst die Zeitableitung von γ berechnen:

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{u/c^2}{\left(1 - u^2/c^2\right)^{3/2}} \dot{u} = \frac{u/c^2}{\left(1 - u^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{u} = \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2}$$

Als nächstes betrachten wir die zeitliche Ableitung der Raumkomponente \mathbf{p} des Impuls-Vierervektors

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0(\dot{\gamma}\mathbf{u} + \gamma\dot{\mathbf{u}}) = m_0\left(\gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma\dot{\mathbf{u}}\right) = m_0\gamma\dot{\mathbf{u}}\left(\underbrace{\gamma^2 \frac{u^2}{c^2} + 1}_{\gamma^2}\right) = m_0\gamma^3\dot{\mathbf{u}}$$

Jetzt können wir $\dot{\mathbf{u}}$ durch die Raumkomponente des Kraft-Vierervektors $\gamma \mathbf{F}$ aus Gl. (12.39) ausdrücken

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m_0 \gamma^3} = \frac{\mathbf{F}}{m_0 \gamma^3}$$

Damit können wir nun die Zeitkomponente des Kraft-Vierervektors schreiben als

$$m_0 \dot{\gamma} c = m_0 c \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} = m_0 \gamma^3 \frac{\mathbf{u}}{c} \frac{\mathbf{F}}{m_0 \gamma^3} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c} \quad (12.40)$$

Setzen wir dies in den Kraft-Vierervektor ein, so erhalten wir schließlich für \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \gamma \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c}, \mathbf{F} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c}, \mathbf{F} \right) \quad (12.41)$$

Dem Ausdruck $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ in der Zeitkomponente des Kraft-Vierervektors sind wir bereits in Abschnitt 4.1.2 bei der Diskussion von Arbeit und Leistung begegnet. Dort sahen wir, dass $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ der Änderungsrate der Arbeit entspricht, die erforderlich ist, um ein massives Objekt von einem Ort an einen anderen zu bewegen. Die dafür aufgewendete Arbeit W spiegelt sich in kinetischen und potenziellen Energieänderungen des Objekts:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d(T + U)}{dt}$$

Damit können wir Gl. (12.40) umschreiben, um diese Zeitableitung der Zeitkomponente des Impuls-Vierervektors auszudrücken als

$$\frac{dm_0 \gamma c}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \quad \Rightarrow \quad m_0 \gamma c = \frac{E}{c}$$

Dies zeigt uns nicht nur, dass die Zeitkomponente des Impuls-Vierervektors als Gesamtenergie E geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit c ausgedrückt werden kann. Es zeigt uns auch, dass die Gesamtenergie eines Massenpunkts gegeben ist durch

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = mc^2 \quad (12.42)$$

Da die Gesamtenergie E die Summe aus kinetischer Energie T und potenzieller Energie U ist, folgt aus Gl. (12.42) mit Gl. (12.28), dass

$$E = mc^2 = T + U = mc^2 - m_0 c^2 + U$$

und potenzielle Energie und Ruhemasse eines Massenpunkts sind daher verknüpft durch

$$U = m_0 c^2$$

Damit führt eine Änderung der potenziellen Energie zu einer Änderung der Ruhemasse. Das ist für ein geschlossenes System zu erwarten. Wir wissen, dass die Gesamtenergie

eines geschlossenen Systems, also eines Systems, auf das keine äußeren Kräften wirken, konstant ist, d.h. $E = T + U = \text{const}$. Das muss auch im relativistischen Fall gelten, wo es zu $E = mc^2 = \text{const}$ wird, d.h., die gesamte relativistische Masse muss konstant bleiben. Weil mit Gl. (12.28) eine Änderung der kinetischen Energie einer Massenänderung entspricht, muss sich auch die Ruhemasse ändern. Da wir nun wissen, dass die gesamte relativistische Energie durch $E = mc^2$ gegeben ist, sehen wir, dass Gl. (12.28) tatsächlich $T = E - m_0c^2$ lautet, was bedeutet, die potenzielle Energie muss $U = m_0c^2$ sein und wenn sich die potenzielle Energie ändert, muss sich auch die Ruhemasse m_0 ändern.

Nachdem wir jetzt den relativistischen Impuls und die relativistische Gesamtenergie kennen, können wir fragen, wie sie zusammenhängen. In der Newtonschen Mechanik wissen wir, dass für den Massenpunkt m_0 , der sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, gilt:

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v} \quad \text{und} \quad T = \frac{m_0\mathbf{v}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0}$$

Um die entsprechende Beziehung zwischen relativistischem Impuls und relativistischer kinetischer Energie zu finden, beachten wir zunächst, dass aus Gl. (12.42) $m = E/c^2$ folgt. Daher können wir den relativistischen Impuls einfach schreiben als

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v}$$

Wir wissen bereits, dass die Zeitkomponente des Impuls-Vierervektors als $m_0\gamma c = E/c$ ausgedrückt werden kann. Deshalb können wir den Impuls-Vierervektor aus Gl. (12.37) umschreiben:

$$\mathbf{P} = m_0\gamma(c, \mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c^2}\mathbf{v}\right) \quad (12.43)$$

Vierervektoren sind unter Lorentz-Transformationen invariant, d.h., ihre Länge ändert sich beim Wechsel zwischen Inertialsystemen nicht. Daher muss die Größe

$$\mathbf{P}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$$

konstant sein. Um diese Konstante zu bestimmen, müssen wir nur $c^2\mathbf{p}^2$ von E^2 subtrahieren, und erhalten mit Gl. (12.38) und Gl. (12.42)

$$E^2 - c^2\mathbf{p}^2 = \frac{m_0^2c^4}{1 - v^2/c^2} - c^2 \frac{m_0^2\mathbf{v}^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2c^4}{1 - v^2/c^2} \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) = (m_0c^2)^2$$

Dieses Ergebnis zeigt uns, dass die relativistische Gesamtenergie und der relativistische Impuls verknüpft sind durch die Gleichung

$$E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + (m_0c^2)^2 \quad (12.44)$$

Jetzt ersetzen wir E durch $E = T + U = T + m_0 c^2$, und erhalten

$$(T + m_0 c^2)^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

woraus die Gleichung folgt, welche relativistische kinetische Energie und Impuls verbindet (weil immer $T \geq 0$, müssen wir die positive Wurzel wählen)

$$T = -m_0 c^2 + \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} \quad (12.45)$$

Bisher haben wir die Diskussion auf Massenpunkte beschränkt, also Objekte, die eine Ruhemasse m_0 besitzen. Offensichtlich können die Gleichungen Gl. (12.38) für den relativistischen Impuls \mathbf{p} und Gl. (12.42) für die Gesamtenergie E nicht für masselose Teilchen wie Photonen gelten für die nicht nur der Zähler wegen $m_0 = 0$ Null ist, sondern, da sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, auch der Nenner. Was jedoch auch für masselose Teilchen gilt, ist die relativistische Beziehung zwischen Impuls und Energie, die wir gerade besprochen haben. Für ein Teilchen mit der Masse $m_0 = 0$ reduziert sich Gl. (12.44) auf $E = p \cdot c$. Deshalb können wir masselosen Teilchen den Impuls

$$p = \frac{E}{c}$$

zuschreiben. Wegen der relativistischen Energie-Massen-Beziehung $E = mc^2$ in Gl. (12.42) können wir einem Teilchen mit $m_0 = 0$ auch formal eine Masse zuschreiben, mit der wir seinen Impuls umschreiben können als

$$p = mc$$

Für den Impuls-Vierervektor eines masselosen Teilchens können wir somit den in Gl. (12.43) abgeleiteten Ausdruck mit einer zusätzlichen Einschränkung für \mathbf{v} verwenden

$$\mathbf{P} = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \right) \quad \text{wobei} \quad v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$$

Anhang

Internationales Einheitensystem (SI)¹

Basiseinheiten

Basisgröße	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur (thermodynamisch)	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Abgeleitete Einheiten (Auswahl)

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Dimension
Frequenz	Hertz	Hz	s^{-1}
Kraft	Newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Druck	Pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	$N \cdot m$
Leistung	Watt	W	$J \cdot s^{-1}$
Elektrische Ladung	Coulomb	C	$A \cdot s$
Elektrische Spannung	Volt	V	$W \cdot A^{-1}$
Elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$
Elektrische Kapazität	Farad	F	$C \cdot V^{-1}$
Elektrischer Leitwert	Siemens	S	$A \cdot V^{-1}$
Magnetischer Fluss	Weber	Wb	$J \cdot A^{-1}$
Magnetische Flussdichte	Tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$
Induktivität	Henry	H	$V \cdot s \cdot A^{-1}$
Winkel	Radian	rad	—
Raumwinkel	Steradian	sr	—
Temperatur relativ zu 273.15 K	Celsius	$^{\circ}C$	K
Lichtstrom	Lumen	lm	$cd \cdot sr$
Beleuchtungsstärke	Lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$
Radioaktivität	Becquerel	Bq	s^{-1}

¹SI ist die Abkürzung für Système international d'unités

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Dimension
Energiedosis	Gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$
Äquivalentdosis	Sievert	Sv	$A \cdot kg^{-1}$
Katalytische Aktivität	Katal	kat	$mol \cdot s^{-1}$

SI Präfixe für Zehnerpotenzen

Potenz	Präfix	Symbol	Potenz	Präfix	Symbol
10^{12}	Tera	T	10^{-2}	Zenti	c
10^9	Giga	G	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^3	Kilo	k	10^{-9}	Nano	n
10^2	Hekto	h	10^{-12}	Piko	p
10^1	Deka	da	10^{-15}	Femto	f
10^{-1}	Dezi	d	10^{-18}	Atto	a

Einheitenumrechnungen

Längen- und Flächenumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Parallaxensekunde (Parsec)	pc	$1 pc = 3.084 \cdot 10^{16} m$
Lichtjahr	ly	$1 ly = 9.46 \cdot 10^{15} m$
Astronomische Einheit	AE	$1 AE = 1.496 \cdot 10^{11} m$
Englische oder US Meile	mi	$1 mi = 1.6093 km$
Yard	yd	$1 yd = 0.9144 m$
Inch	in	$1 in = 2.540 cm$
Ångström	Å	$1 \text{ \AA} = 10^{-10} m$
Fermi	F	$1 F = 10^{-15} m$
Barn	b	$1 b = 10^{-28} m^2$

Winkelumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Radian	rad	$1 rad = 360^\circ / 2\pi = 57.2958^\circ$
Winkelminute	1'	$1' = 1^\circ / 60 = 2.91 \cdot 10^{-4} rad$
Winkelsekunde	1''	$1'' = 1^\circ / 3600 = 4.85 \cdot 10^{-6} rad$

Zeitumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Minute	min	1 min = 60 s
Stunde	h	1 h = 3 600 s
Tag	d	1 d = 86 400 s
Jahr	a	1 a = 365.26 d = $3.156 \cdot 10^7$ s

Massenumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Englisches oder US Pfund	lb	1 lb = 0.4536 kg
Atomare Masseneinheit	amu	1 amu = $1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg

Kraftumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Dyne	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
Kilopond	kp	1 kp = 1 kg · g = 9.81 N

Energieumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Kalorie	cal	1 cal = 4.187 J
Ergon	erg	1 erg = 10^{-7} J
Elektronenvolt	eV	1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J

Masse-Energie Äquivalente:

Bezugsgröße	Beziehung	Äquivalenz
Electronenmasse	$E = mc^2$	$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$
Protonenmasse	$E = mc^2$	$m_p c^2 = 1.6726 \text{ MeV}$
Neutronenmasse	$E = mc^2$	$m_n c^2 = 1.6749 \text{ MeV}$
Atomare Masseneinheit	$E = mc^2$	1 amu $\cong 931.5 \text{ MeV}$
Temperatur	$E = k_B T$	1 K $\cong 0.8618 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$
Frequenz	$E = hf$	1 Hz $\cong 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV}$

Leistungsumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Pferdestärke	PS	1 PS = 735.5 W

Temperaturumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Celsius	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273.15$
Fahrenheit	$^{\circ}\text{F}$	$^{\circ}\text{F} = 32 + (\text{K} - 273.15) \cdot 9/5$

Druckumrechnungen:

Maßeinheit	Symbol	Umrechnung
Bar	bar	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
Atmosphäre (Standard)	atm	$1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Atmosphäre (technische)	at	$1 \text{ at} = 0.981 \text{ bar} = 9.81 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
Torr	Torr	$1 \text{ Torr} = 1.333 \text{ mbar} = 1.333 \text{ hPa}$
Millimeter Quecksilber	mm Hg	$1 \text{ mm Hg} \equiv 1 \text{ Torr}$

Fundamentale Konstanten

Konstante	Symbol	Wert	Dimension
Elementarladung	e	$1.6022 \cdot 10^{-19}$	C
Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	c	$2.9979 \cdot 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	$6.6262 \cdot 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$1.0546 \cdot 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1.2566 \cdot 10^{-6}$	$\text{N} \cdot \text{A}^{-2}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.8542 \cdot 10^{-12}$	$\text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{N}^{-1}$
Coulomb-Konstante	$k_e = 1/4\pi\epsilon_0$	$8.9876 \cdot 10^9$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$
Elektronenruhemasse	m_e	$9.1094 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenruhemasse	m_p	$1.6726 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenruhemasse	m_n	$1.6749 \cdot 10^{-27}$	kg
Bohr-Radius	a_0	$5.2918 \cdot 10^{-11}$	m
Klassischer Elektronenradius	r_e	$2.8179 \cdot 10^{-15}$	m
Avogadro-Konstante	N_A	$6.0221 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.3806 \cdot 10^{-23}$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
Gaskonstante	$R = N_A k_B$	8.3145	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Gravitationskonstante	G	$6.6743 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Erdbeschleunigung (Standard)	g_0	9.80665	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Erdbeschleunigung (50°)	g	9.810	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Erdbeschleunigung (Pole)	g	9.832	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Erdbeschleunigung (Äquator)	g	9.780	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Tab. A.1: Das Periodensystem der Elemente. Das Atomgewicht ist in Atommasseneinheiten angegeben. Wird anstelle des Atomgewichts eine Zahl in eckigen Klammern angegeben, bezieht sich diese Zahl auf das stabilste Isotop eines Elements.

Das Periodensystem der Elemente ist in einer Tabelle dargestellt. Die Spalten sind nach Gruppenzahlen (1 bis 18) und Periodennummern (1 bis 7) geordnet. Die Elemente sind in einem farblichen Schema angeordnet, das die chemischen Gruppen unterscheidet:

- Metalle:** Blau (Gruppe 1), Grau (Gruppe 2), Gelb (Übergangsmetalle), Lila (Lanthanoide), Hellblau (Actinoide).
- Halbmetalle:** Hellgrau (Gruppe 13 bis 16).
- Nichtmetalle:** Gelb (Gruppe 17), Orange (Gruppe 18), Hellgrün (Transactinoide).
- Halogene:** Orange (Gruppe 17), Hellgrün (Gruppe 18).
- Edelgase:** Hellblau (Gruppe 18).
- Transactinoide:** Hellgrün (Gruppe 18).

Die Tabelle enthält folgende Spalten:

- Symbol:** Elementsymbol.
- Name:** Elementname.
- Atomgewicht:** Atomgewicht in g/mol.
- Ordnungszahl:** Elektronenkonfiguration (Ar) 4f².
- Elektronenkonfiguration:** Elektronenkonfiguration (Ar) 4f⁷.

Die Spalten sind von links nach rechts folgendermaßen beschriftet:

- Gruppenzahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.
- Periodennummern: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Ein vertikaler Pfeil am unteren Rand markiert die **Periodennummer**, ein horizontaler Pfeil die **Gruppenzahl**.

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

ISBN 978-1-951894-20-7