

TECHNISCHE MECHANIK

Eine Einführung



TECHNISCHE MECHANIK

Eine Einführung

Stefan Wurm

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

Copyright © 2023 ATICE LLC.

Alle Rechte vorbehalten.

Veröffentlicht in den Vereinigten Staaten von Amerika.

Erste deutschsprachige ATICE E-Book Ausgabe | ISBN 978-1-951894-18-4.

Für Informationen über die Genehmigung zur Vervielfältigung von Auszügen aus diesem Buch wenden Sie sich bitte an ATICE LLC, www.atice-llc.com.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
I Statik	1
1 Kräfte am Massenpunkt	3
1.1 Kinematik	4
1.2 Dynamik	6
1.2.1 Beispiele von Kräften	10
1.2.2 Superposition von Kräften	16
2 Stereostatik	17
2.1 Kinematik	17
2.1.1 Geometrie starrer Körper	17
2.2 Kräfte und Momente	19
2.2.1 Äquivalenzprinzip	22
2.2.2 Reduktion von Kraftsystemen	25
2.3 Lager und Fachwerke	28
2.3.1 Lager	28
2.3.2 Fachwerke	30
2.4 Reibungskräfte	34
3 Elastostatik	39
3.1 Spannungen	39
3.1.1 Zur Herleitung des Spannungstensors	41
3.1.2 Spannungen in der Ebene	43
3.1.3 Der Spannungsellipsoid	45
3.1.4 Kräfte und Momente im 3-dimensionalen Fall	47

3.2 Dehnungen	48
3.3 Zum Hookeschen Gesetz	52
3.3.1 Torsion zylindrischer Stäbe	57
3.3.2 Biegung von Balken	58
3.4 Hydrostatik	65
3.5 Aerostatik	68
II Dynamik	71
4 Kinetik des Massenpunkts	73
4.1 Energiesatz der Punktmechanik	73
4.2 Drehimpuls	75
4.3 Keplerbewegung	78
4.3.1 Gebundene und ungebundene Bewegungen	83
4.4 Streuung an Zentralpotenzialen	87
4.4.1 Der Wirkungsquerschnitt	95
5 Dynamik starrer Körper	97
5.1 Trägheitstensor	97
5.2 Euler-Gleichungen	102
5.2.1 Eulersche Winkel	106
5.3 Kreisel, Nutation, Präzession	110
5.3.1 Bewegte Bezugssysteme	121
6 Systeme von Massenpunkten	127
6.1 Impulssatz	127
6.2 Nebenbedingungen und Zwangskräfte	129
6.2.1 D'Alembert-Prinzip - virtuelle Arbeit	130
6.3 Lagrange Gleichungen	132
6.3.1 Lagrange Gleichungen erster Art	132
6.3.2 Lagrange Gleichungen zweiter Art	137
6.3.3 Nicht-holome Systeme	152
6.4 Kleine Schwingungen	158
7 Kontinuumsmechanik	173
7.1 Elastodynamik	173
7.1.1 Elastische Wellen	176

7.2	Hydrodynamik	178
7.2.1	Kontinuitätsgleichung	179
7.2.2	Stromlinien und Stromfunktion	181
7.2.3	Impulsbilanz	185
7.2.4	Bernoulli-Gleichung	188
7.2.5	Energiebilanz	191
7.2.6	Zirkulation	198
7.2.7	Helmholtzsche Wirbelsätze	202
7.2.8	Schallwellen	211
7.2.9	Viskose Flüssigkeiten	214
7.2.10	Potenzialströmung	220

Anhang	237
---------------	------------

Vorwort

Die Mechanik ist das älteste Teilgebiet der Physik und mit gutem Grund kann man auf den Teil der Mechanik der heute mit Technischer Mechanik bezeichnet wird als den ältesten Teil der Mechanik verweisen. Die Problemstellungen mit welchen sich die Technische Mechanik befasst, waren immer praktischer Natur wie beispielsweise die Stabilität von Gebäuden, das Bewegen von tonnenschweren Lasten oder die Nutzung der Wasserkraft. Was sich im Laufe der Zeit geändert hat, ist das Handwerkszeug das heutigen Baumeistern und Ingenieuren zur Verfügung steht. Da ist zum einen das Gebäude der klassischen Mechanik welches die theoretischen Grundlagen zur Behandlung von Problemen in der Technischen Mechanik liefert. Der Ursprung der klassischen Mechanik liegt in der Wissenschaftsrevolution des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts und das Gebäude dieses Zweiges der theoretischen Physik schien gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts so komplett, dass manch ein Physiker damals meinte, es gäbe nichts Neues mehr zu entdecken. Das war nicht lange bevor Albert Einstein 1905 seine Gedanken zur relativistischen Mechanik veröffentlichte und nur wenige Jahre vor der Entwicklung der Quantenmechanik in den 1920-igern. Unsere moderne Welt gäbe es ohne die Erkenntnisse der relativistischen Mechanik und der Quantenmechanik so nicht, aber für die Fragestellungen der Technischen Mechanik spielen diese Teilgebiete der Physik keine Rolle.

Die Technische Mechanik kann man unterschiedlich einteilen. Zum Beispiel nach der Art der Körper die behandelt werden und ihren entsprechenden Eigenschaften. Körper können in drei Aggregatzuständen vorliegen: fest, flüssig oder gasförmig. In der Technischen Mechanik unterscheidet man die Behandlung von Festkörpern und von Fluida, zu welchen flüssige und gasförmige Körper gehören. Festkörper können wiederum starr, elastisch oder plastisch sein und man spricht dann von Stereostatik und Elastostatik. Letztere wird auch als Festigkeitslehre bezeichnet und umfasst dann meist auch plastische Verformungen. Bei den Fluida sind Flüssigkeiten inkompressibel und gasförmige Körper sind kompressibel. Flüssige Körper können zudem reibungsfrei fließen oder Zähigkeit besitzen. Gasförmige Körper können beispielsweise als ideale oder reale Gase vorliegen. Flüssige Fluida werden im Rahmen der Hydromechanik in den Teilgebieten Hydrostatik und Hydrodynamik behandelt. Gleiches gilt für gasförmige Fluida welche im Rahmen der Aeromechanik entsprechend in der Aerostatik und der Aerodynamik behandelt werden.

Eine andere Sichtweise auf die Technische Mechanik ergibt die Differenzierung nach der Bewegung. Dabei unterscheidet man grundlegend zwischen der Kinematik, welche die Bewegung ohne die Berücksichtigung der Kräfte beschreibt, und der Dynamik, welche die Bewegung eines Körpers unter der Einwirkung von Kräften beschreibt. In der Kinematik braucht man also die Kräfte nicht zu kennen, es reicht völlig die Bahnkurve der Bewegung eines Körpers korrekt beschreiben zu können. In der Dynamik muss man die Kräfte kennen. Handelt es sich dabei um Kräfte bei einer Bewegung so spricht man von Kinetik, werden Kräfte in einem ruhenden oder gleichförmig bewegten System beschrieben, dann spricht man von Statik.

Zumeist findet man in der Literatur zur Technischen Mechanik eine Mischung aus diesen beiden Einteilungen nach Aggregatzustand und Bewegung. Das ist auch hier nicht anders. Es ist nicht möglich die Gesamtheit der Technischen Mechanik in einer Einführung zu behandeln die in etwa das Material für eine einsemestrig Vorlesung enthält. Es muss also eine Auswahl getroffen werden. Diese richtet sich natürlich nach den Studierenden für welche diese Einführung gedacht ist. Im weitesten Sinn sind es aber Ingenieure des Bau- oder Maschinenwesens, oder Physikingenieure. Das Material in diesem Band richtet sich vor allem an letztere kann aber mit leichten Abstrichen und Ergänzungen auch als Grundlage für Studierende des Bau- oder Maschinenwesens dienen. Die sieben Kapitel dieses Bandes behandeln im ersten Teil im Rahmen der Statik die Kräfte am Massenpunkt, die Stereostatik und die Elastostatik. Im zweiten Teil werden im Rahmen der Dynamik die Kinetik des Massenpunkts, die Dynamik starrer Körper, Systeme von Massenpunkten und die Kontinuumsmechanik behandelt. Im Anhang sind zum schnellen Nachschlagen einige grundlegende mathematische Aspekte erläutert, von denen im vorliegenden Band an verschiedenen Stellen Gebrauch gemacht wurde.

Stefan Wurm

Albany, New York

September 2023

Teil I

Statik

1. Kräfte am Massenpunkt

Die Technische Mechanik bedient sich zweier grundlegender Modelle, um die physikalischen Eigenschaften von realen Körpern zu beschreiben. Das eine Modell ist das des Massenpunkts und das andere das des starren Körpers. Im Modell des Massenpunkts, auch als Massepunkt oder Punktmasse bezeichnet, denkt man sich die gesamte Masse eines Körpers in einem Punkt vereinigt. Im allgemeinen ist dieser Punkt der Massenschwerpunkt des Körpers.

Betrachtet man beispielsweise ein Auto, dann spielen für viele physikalische Fragestellungen das Volumen oder die Abmessungen desselben keine Rolle, sehr wohl aber seine Masse. Die maßgeblichen Größen bei der Berechnung des Bremswegs, also der Länge der Strecke nach der ein Auto bei Vollbremsung zu stehen kommt, sind die Masse des Autos und natürlich die Geschwindigkeit mit der sich dieses bei Beginn des Bremsvorgangs bewegte; die Abmessungen des Autos spielen dabei keine Rolle. Kann aber die Vollbremsung eine Kollision nicht mehr stoppen, dann spielen beim Aufprall die Abmessungen des Automobils sehr wohl eine Rolle, vor allem für die Sicherheit der Insassen. Ein weniger dramatisches und vertrautes Beispiel in welchem die Abmessungen eines Körpers wesentlich sind, ist das Einparken eines Autos.

Definition

Massenpunkt: Für die Beschreibung der Bewegung eines Massenpunkts kann seine Ausdehnung vernachlässigt werden. Seine Bewegung wird allein durch seinen Ort als Funktion der Zeit beschrieben.

Vorteilhaft ist das Modell des Massenpunkts immer dann, wenn zum Verständnis der Bewegung eines Körpers die Abmessungen des Körpers, das heißt seine Form und sein Volumen, keine Rolle spielen. Ein Beispiel dafür sind die Bahnkurven von Planeten. Ein für viele naheliegenderes Beispiel ist die Bahnkurve die ein bei Spiel oder Sport geworfener Ball verfolgt. Die Krafteinwirkung auf einen Körper wird dabei durch die Krafteinwirkung auf den ihm entsprechenden Massenpunkt beschrieben.

1.1 Kinematik

Aufgabe der Kinematik ist es, ausschließlich den Bewegungsvorgang eines Massenpunkts zu beschreiben, nach den Ursachen der Bewegung wird nicht gefragt. Das Koordinatensystem in welchem die Bewegung eines Massenpunkts beschrieben wird, ist dabei ein starrer Körper.

Abb. 1.1 zeigt solch ein starres Koordinatensystem, ein sogenanntes Kartesisches Koordinatensystem, in dem der Ort eines Punktes durch den Ortsvektor \mathbf{r} beschrieben wird:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 e_i x_i$$

Die räumliche Dimension die das starre Koordinatensystem vermisst und in welchem die Bahnkurve eines Massenpunkts durch den Ortsvektor \mathbf{r} beschrieben wird, ist die erste Grundgröße der Mechanik. Sie setzt die Existenz von „Maßstäben“ voraus. Die Dimension einer Koordinate x_i ist ihre Länge, also $x_i = [x_i]$, und diese Länge wird in Einheiten von Meter (ein Meter = 1 m) gemessen. Im allgemeinen sind die Koordinaten eines Massenpunkts eine Funktion der Zeit, also

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{beziehungsweise} \quad x_i = x_i(t)$$

Die zweite Grundgröße der Mechanik ist somit die zeitliche Dimension. Sie zu vermessen setzt die Existenz von „Uhren“ voraus. Die Dimension der Zeit ist ihre Dauer, also $t = [t]$, und diese Dauer wird in Einheiten von Sekunden (eine Sekunde = 1 s) gemessen.

Mit Maßstäben zur Vermessung der räumlichen Dimension und Uhren zur Vermessung der zeitlichen Dimension kann man die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Massenpunkts relativ zum Bezugssystem e_i aus Abb. 1.1 bestimmen. Vorausgesetzt wird dabei, dass der Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ in Abb. 1.2 eine stetige Funktion der Zeit ist.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

und

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum e_i \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum e_i \dot{x}_i$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist die Länge des Vektors \mathbf{v} , also

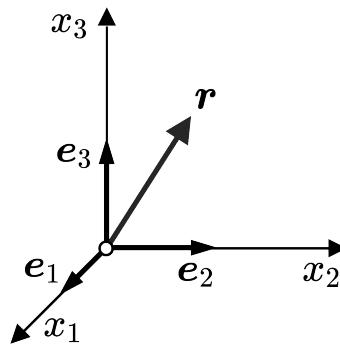


Abb. 1.1

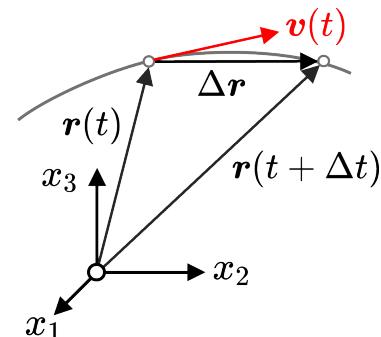


Abb. 1.2

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} = \frac{ds}{dt}$$

wobei ds das differenzielle Bogenelement der Bahnkurve ist. Anstatt die Geschwindigkeit in Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem zu messen, misst $v(t) = ds/dt$ den Betrag der Geschwindigkeit in Bezug auf die Bahnkurve selbst, als das differentielle Bogenelement ds welches im Zeitintervall dt durchlaufen wird.

Abb. 1.3 betrachtet den Fall, dass das Bezugssystem O , in welchem die Bewegung eines Massenpunkts betrachtet wird, sich relativ zu einem anderen Bezugssystem O' mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Hat der Ursprung O des bewegten Bezugssystems, vermessem vom ruhenden Bezugssystem, den Ortsvektor \mathbf{r}_0 dann ergibt sich der Ortsvektor \mathbf{r}_m des Massenpunkts im ruhenden Bezugssystem O' aus dem Ortsvektor \mathbf{r} im bewegten Bezugssystem durch

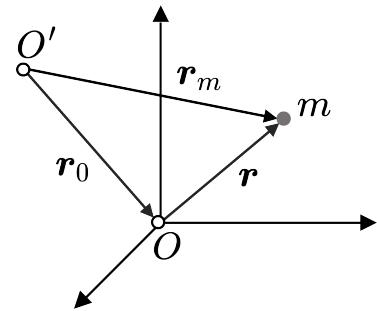


Abb. 1.3

$$\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\mathbf{e}}_i x_i + \mathbf{e}_i \dot{x}_i)$$

Für \mathbf{r}_0 gilt

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 \cdot t$$

wobei \mathbf{v}_0 die konstante Geschwindigkeit ist mit der sich das Bezugssystem O relativ zum Bezugssystem O' bewegt.

Die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ eines Massenpunkts (Abb. 1.4) ist die Änderung seiner Geschwindigkeit in einem Zeitintervall Δt von $\mathbf{v}(t)$ zu $\mathbf{v}(t + \Delta t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

und

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t)$$

In Bezugssystemen die sich, wie in Abb. 1.3 illustriert, relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegen, ist wegen $\dot{\mathbf{v}}_0 = 0$ die Beschleunigung identisch.

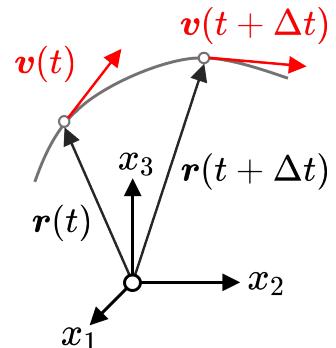


Abb. 1.4

1.2 Dynamik

Die dritte Grundgröße der Technischen Mechanik ist die (träge) Masse welche in Einheiten von Kilogramm (ein Kilogramm = 1 kg) gemessen wird. Im Gegensatz zu den Dimensionen Raum und Zeit setzt die Bestimmung von Masse nicht die Existenz eines Masse-Maßstabes oder einer Masse-Uhr voraus. Die Masse eines Körpers wird jeweils indirekt über eine auf den Körper wirkende Kraft \mathbf{F} bestimmt. Die Größe Kraft selbst hat die Dimension von Masse \times Länge \times Zeit $^{-2}$ und wird in Einheiten von Newton (N) gemessen wobei $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. In Worten: 1 N ist die Kraft die einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ gibt.

Wenn wir im Alltag die Größe von Massen bestimmen, tun wir das in den meisten Fällen über den Vergleich der jeweiligen Gewichtskraft, wie zum Beispiel bei einer Balkenwaage. Die Gewichtskraft ist aber nicht die Masse eines Körpers, diese ist ja eine Eigenschaft der Materie selbst die als träge Masse bezeichnet wird, sondern sie ist von der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern bestimmt. Mit Hilfe einer Balkenwaage vergleicht man jeweils die Wechselwirkung zwischen einer Masse und der Erdmasse mit der Wechselwirkung einer anderen Masse mit der Erdmasse. Die Gewichtskraft ist ortsabhängig:

$$\mathbf{F} = m_s \cdot g \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist und der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}$ die Richtung der Kraft angibt. Letztere zeigt für einen Körper im Gravitationsfeld der Erde in Richtung Erdmittelpunkt, den Massenschwerpunkt der Erde. Die Gewichtskraft misst wie „schwer“ oder „leicht“ ein Körper ist, aber sie misst nicht die Masse eines Körpers selbst. Die Mondbeschleunigung ist rund sechs mal geringer wie die Erdbeschleunigung und daher ist alles auf dem Mond rund sechs mal „leichter“ wie auf der Erde. Die Masse eines Körpers auf dem Mond ist aber die gleiche wie die Masse desselben Körpers auf der Erde.

Die träge Masse ist eine Eigenschaft der Materie selbst und sie ist ein Maßstab dafür wieviel Widerstand ein Massenpunkt einer Beschleunigung entgegensetzt. Um eine ruhende Masse in Bewegung zu versetzen, oder den Bewegungszustand einer bewegten Masse zu verändern, muss Kraft aufgewendet werden (gegen die Trägheit der Masse, daher der Name). Das ist die Aussage des ersten Newtonschen Gesetzes:

1. Ein ruhender Körper bleibt in Ruhe, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.
2. Ein in gleichförmiger Bewegung befindlicher Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.

Benötigt man für einen Körper die zweifache Kraft um ihm die gleiche Beschleunigung zu geben die bei einem anderen Körper schon mit einfacher Kraft erreicht wird, dann besitzt er die zweifache träge Masse. Die träge Masse ist die Proportionalitätskonstante in Newton's zweitem Gesetz, also

$$\mathbf{F} = m_t \cdot \mathbf{a}$$

Auf den ersten Blick könnte man vermuten dass der Trägheit (träge Masse) und der Gewichtskraft (schwere Masse) unterschiedliche physikalische Eigenschaften zugrunde liegen, aber das stimmt nicht. In Einstein's allgemeiner Relativitätstheorie schreibt das Äquivalenzprinzip, die Ununterscheidbarkeit von Beschleunigung und Gravitation, die Gleichheit von schwerer und träger Masse fest und bisher hat kein einziges Experiment zeigen können, das dem nicht so ist.

Die Kollision zweier Massen ist uns allen aus dem täglichen Leben in verschiedenster Form vertraut. In der Physik spricht man dabei nicht von Kollision sondern von Stoß und es wird dabei prinzipiell zwischen zwei Arten von Stoßproblemen unterschieden, nämlich dem elastischen Stoß und dem inelastischen Stoß.

In Abb. 1.5 ist ein vollkommen inelastischer zentraler Stoß illustriert. Dabei bewegen sich die beiden Stoßpartner nach dem Stoß zusammen als eine Masse weiter, sie „kleben“ also nach dem Stoß aneinander. Im einfachsten Fall trifft, wie in Abb. 1.5 gezeigt, eine Masse m in einem zentralen Stoß auf eine ruhende Masse m_0 . Für den Gesamtimpuls vor dem Stoß und den Gesamtimpuls nach dem Stoß gilt

$$m \cdot v = (m + m_0)v_{inel}$$

also

$$v_{inel} = \frac{m}{m + m_0} \cdot v \quad (\text{Skalar})$$

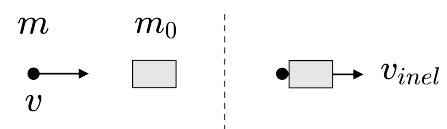


Abb. 1.5

Die Größe

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \tag{1.1}$$

ist der Impuls eines Massenpunkts der Masse m der sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz, dem Grundgesetz der Bewegung, gilt nach Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \tag{1.2}$$

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der an ihm angreifenden Kraft \mathbf{F} und diese kann eine Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit sein.

Für den Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems gilt der Impulserhaltungssatz. Dieser folgt direkt aus dem zweiten Newtonschen Gesetz, also Gl. (1.2), und dem dritten Newtonschen Gesetz. Letzteres besagt, dass es in einem System auf das keine äußeren Kräfte wirken, ein sogenanntes abgeschlossenes System, für jede Kraft \mathbf{F}_i eine gleich große aber entgegengesetzte Kraft $-\mathbf{F}_i$ gibt. Damit gilt für ein abgeschlossenes System mit N Massenpunkten, dass die Gesamtkraft Null sein muss, also

$$\mathbf{F} = \sum_i^N \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.3)$$

Mit Gl. (1.2) bedeutet das aber zugleich

$$\mathbf{p} = \sum_i^N \mathbf{p}_i = 0 \quad \text{Impulserhaltungssatz} \quad (1.4)$$

Ganz allgemein gilt für zwei Massen m_1 und m_2 die vor einem zentralen inelastischen Stoß die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 hatten und sich nach dem inelastischen Stoß mit der Geschwindigkeit v_{inel} zusammen weiterbewegen der Impulserhaltungssatz in der Form

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{inel} \quad \text{inelastischer Stoß}$$

Für den vollkommen zentralen elastischen Stoß lautet der Impulserhaltungssatz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \text{elastischer Stoß}$$

wobei v_1 und v_2 sowie v'_1 und v'_2 die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 vor und nach dem elastischen Stoß sind.

Betrachtet wird nun eine Masse m die sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt und auf welche ab dem Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante Beschleunigung a wirken soll (Abb. 1.6). Es gilt also

$$\ddot{x} = a \cdot t$$

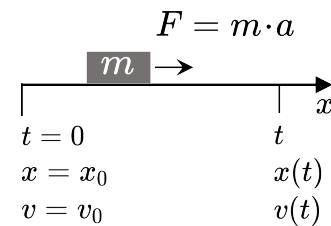


Abb. 1.6

Zweimaligens integrieren nach der Zeit liefert das Ergebnis, dass sich die Masse nach der Zeit t am Ort

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

befindet. x_0 ist dabei der Ort an welchem sich die Masse m zum Zeitpunkt $t = 0$ befand. Ohne Einschränkung kann man $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ wählen. In der Zeitspanne t hat die Masse m dann die Strecke

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

zurückgelegt und bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = a \cdot t \quad \text{das heißt es gilt} \quad t = \frac{v(t)}{a}$$

Setzt man diesen Ausdruck für t in die Gleichung für die zurückgelegte Wegstrecke ein so erhält man

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}$$

Die Energie E_{kin} welche die Masse m zum Zeitpunkt t besitzt, entspricht der geleisteten Arbeit um sie von x_0 nach $x(t)$ zu bewegen (keine Reibungsverluste). Diese Arbeit ist das Produkt aus der Kraft die hierzu aufgewendet werden musste mal der Länge der Strecke über die das notwendig war, also

$$E_{kin} = F \cdot x(t) = ma \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{1}{2} mv^2$$

Die Größe E_{kin} , oft auch mit T bezeichnet, ist die kinetische Energie welche die Masse m zum Zeitpunkt t besitzt. Diese Herleitung der kinetischen Energie zeigt, dass die geleistete Arbeit zur Gänze in kinetische Energie des Massenpunkts umgewandelt wurde. Das ist eine Variante des Energieerhaltungssatzes welcher besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Gesamtenergie konstant ist. In einem abgeschlossenen System geht also weder Energie verloren noch kann Energie hinzugewonnen werden, sie kann lediglich von einer Form in eine andere Form umgewandelt werden. Beim zentralen inelastischen Stoß gilt für die kinetische Energie vor und nach dem Stoß

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_{inel}^2 + \Delta E \quad \text{inelastischer Stoß}$$

wobei $\Delta E > 0$ die innere Energie der beiden Stoßpartner ist. Die kinetische Energie bleibt beim inelastischen Stoß also nicht erhalten, ein Teil von ihr wird in innere Energie umgewandelt (z.B. durch elastische oder plastische Verformung der Stoßpartner). Im Gegensatz dazu bleibt die kinetische Energie beim vollkommen elastischen Stoß erhalten

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v'_2^2 \quad \text{elastischer Stoß}$$

1.2.1 Beispiele von Kräften

Die Physik kennt heute vier fundamentale Kräfte und eine Reihe davon abgeleiteter Kräfte. Die vier fundamentalen Kräfte sind

- die Gravitationskraft
- die elektromagnetische Kraft
- die starke Wechselwirkung oder starke Kernkraft
- die schwache Wechselwirkung oder schwache Kernkraft

Die Gravitationskraft ist zwar die schwächste der vier fundamentalen Kräfte, überkommt aber im Fall von sehr großen Massen, wie beispielsweise beim Gravitationskollaps von massiven Sternen, letztlich alle anderen Kräfte. Die Existenz von Neutronensternen und schwarzen Löchern gibt davon ein beredtes Zeugnis.

Die Reichweite der zweitstärksten Kraft, der elektromagnetischen Wechselwirkung, skaliert ebenso wie die der Gravitationskraft mit r^{-2} , sie wirkt aber nicht auf alle Massen sondern nur auf solche die eine elektrische Ladung tragen. Gravitationskräfte kann man nicht abschirmen, man kann sie höchstens durch entsprechende Beschleunigung neutralisieren (wie beispielsweise im freien Fall). Elektrische Ladungen und Felder kann man aber abschirmen. Auf der Erde gibt es beispielsweise unzählige elektrische Ladungen und dennoch ist die Erde als Ganzes elektrisch neutral. Auf der kosmischen Längenskala dominiert daher nur eine einzige Kraft und das ist die Gravitationskraft. Es gibt aber durchaus elektrische kosmische Phänomene, ein vielen bekanntes Beispiel ist das Erdmagnetfeld, ohne das es auf der Erde wohl kein Leben geben würde. Ein sehr viel mächtigeres Beispiel sind Pulsare, hochmagnetische rotierende Neutronensterne die elektromagnetische Strahlung großer Energie und enormer Intensität entlang ihrer Polachsen emittieren.

Mit den Wirkungen der Gravitationskraft und elektromagnetischen Kraft auf unserem Planeten sind wir alle vertraut, wir erleben beide täglich. Bei den sehr kurzreichweitigen Kernkräften, der starken und der schwachen Wechselwirkung, ist das nicht der Fall da diese nur auf der subatomaren Längenskala wirken. Die vier fundamentalen Kräfte bezeichnet man auch als eingeprägte Kräfte weil sie von außen auf einen Körper einwirken. Wie die Zusammenstellung in Tab. 1.1 zeigt, werden zu diesen eingeprägten Kräften aber auch eine Reihe abgeleiteter Kräfte als eingeprägte Kräfte hinzugezählt.

Während die vier fundamentalen Kräfte als eingeprägte Kräfte bezeichnet werden weil sie von außen auf einen Körper einwirken, werden abgeleitete Kräfte als solche bezeichnet weil man bei genaueren Untersuchungen findet, dass diese Kräfte makroskopische Folgen der mikroskopischen Wirkungen der fundamentalen Kräfte sind.

Tab. 1.1: Klassifikation von Kräften.

Kraft	Typ	Angriffs- punkt	Quelle	Reichweite
Gravitationskraft	eingeprägte Kraft	schwere Masse	schwere Masse	$F \propto \frac{1}{r^2}$
Trägheitskraft		träg Masse	beschleunigte Bewegung relativ zu Inertialsystem	∞
Elektromagnetische Kraft		Ladungen Ströme	Ladungen Ströme	$F \propto \left(\frac{q}{r^2}, -\frac{q'}{r^2} \right)$
Elastische, hydrostatische und hydrodynamische, plastische, und viskose Kraft			Materie, makroskopische Körper	$10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ Å}$
Gleitreibung, Haftreibung	Reaktions- kraft			1 Å
Kräfte zwischen starren Körpern				1 Å
Starke Kernkraft	eingeprägte Kraft	Elementar- teilchen	Farbladung	10^{-15} m
Schwache Kernkraft			Schwache Ladung	10^{-17} m

Zu diesen abgeleiteten Kräften gehören beispielsweise Scheinkräfte wie die Trägheitskraft oder elastische, hydrostatische, plastische, und viskose Kräfte. Da diese aber wie die Gravitationskraft, die elektromagnetische Kraft sowie die schwache und starke Kernkraft von außen auf Körper einwirken, zählt man sie ebenfalls zu den sogenannten eingeprägten Kräften. Manchmal findet man Reibungskräfte ebenfalls unter den eingeprägten Kräften. Reibungskräfte sind aber Reaktionskräfte, das heißt sie sind eine Reaktion auf die Einwirkung eines Körpers auf einen anderen Körper. Ein für sich isolierter Körper, beispielsweise im interstellarem Raum, erfährt keine Reibungskräfte, stürzt er aber als Meteorit auf die Erde, dann ändert sich das sobald der Körper beginnt in die Erdatmosphäre einzutauchen. Herabstürzende Meteoriten aber auch wieder auf die Erde zurückkehrende Raumkapseln treffen mit sehr hoher Geschwindigkeit auf die Erdatmosphäre und ohne Hitzeschilde würden Raumkapseln genauso verglühen wie Sternschnuppen.

In der Technischen Mechanik spielen die Gravitationskraft, die elektromagnetische Kraft und vor allem die von diesen beiden abgeleiteten makroskopischen und mikroskopischen Kräfte eine große Rolle. Nuklearkräfte spielen hingegen keine Rolle.

Die Gravitationskraft

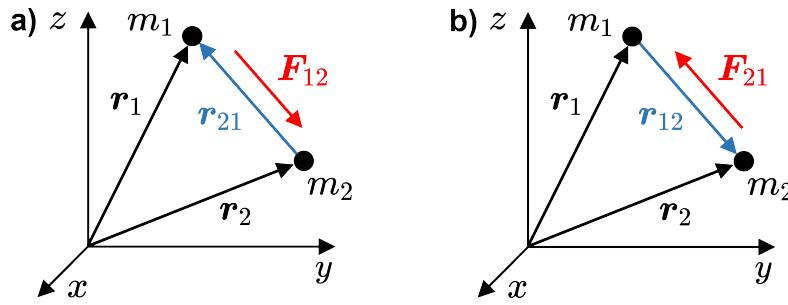


Abb. 1.7: Orientierungen von Abstands- und Kraftvektoren im Newtonschen Gravitationsgesetz in Vektorform (siehe Gl. (1.5a) und Gl. (1.5b)): (a) für die Kraft F_{12} , die auf m_1 von m_2 wirkt; (b) für die Kraft F_{21} , die auf m_2 von m_1 wirkt.

Betrachtet man zwei Massen m_1 und m_2 mit Abstandsvektor $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$ (Abb. 1.7a), dann ist die Gravitationskraft \mathbf{F}_{12} die m_2 auf m_1 ausübt gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad (1.5a)$$

Umgekehrt ist die Gravitationskraft \mathbf{F}_{21} die auf m_2 von m_1 wirkt (Abb. 1.7b), der sich, gemessen von m_1 , in einer Entfernung $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ von m_2 befindet, gegeben durch

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{21} \quad (1.5b)$$

In Gl. (1.5a) und Gl. (1.5b) ist G eine grundlegende Naturkonstante, welche die Stärke der Schwerkraft bestimmt. Mit $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ gilt offensichtlich $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Die Vektorformen des Newtonschen Gravitationsgesetzes in Gl. (1.5a) und Gl. (1.5b) kann man auch ohne das Minuszeichen davor schreiben. Dazu verwendet man \mathbf{r}_{12} anstelle von \mathbf{r}_{21} in Gl. (1.5a) und \mathbf{r}_{21} anstelle von \mathbf{r}_{12} in Gl. (1.5b). Konvention ist jedoch, diese Gleichungen mit einem Minuszeichen zu schreiben, um anzudeuten, dass der jeweilige Kraftvektor in die entgegengesetzte Richtung des Abstandsvektors zeigt. Newtons Schwerkraft ist anziehend, wird der Abstand kleiner so wird die Kraft größer.

Beispiel 1.1 Eine historische Perspektive

Als Newton 1687 das Gravitationsgesetz formulierte war G unbekannt und es dauerte dann noch über 100 Jahre bevor es Henry Cavendish in 1798 gelang, G experimentell zu bestimmen. Nach dem dritten Gesetz von Johannes Kepler ist das Verhältnis zwischen dritter Potenz der großen Halbachse a der elliptischen Planetenbahn und dem Quadrat seiner Umlaufzeit T konstant:

$$\frac{a^3}{T^2} = c$$

Vereinfachende Annahme: Die Umlaufbahn der Planeten sei kreisförmig mit Radius a (Abb. 1.8). Damit erhält man für die Beschleunigung (aufgrund der Zentripetalkraft)

$$b = -\omega^2 a = -\frac{4\pi^2}{T^2} a = -4\pi^2 \frac{a}{T^2} = -\frac{c}{a^2} \quad (1.6)$$

Das Minuszeichen röhrt daher, dass die Beschleunigung dem Radiusvektor entgegengerichtet ist. Denkt man sich nun die gesamte Masse der Erde in ihrem Mittelpunkt konzentriert, dann gilt für ein Objekt welches den Erdmittelpunkt im Abstand des Erdradius R_E umkreist:

$$b_E = -\frac{c}{R_E^2} = -g$$

Den Wert c aus dieser Gleichung setzt man nun in die entsprechende Gleichung für den Mond (Radius R_M) ein

$$b_M = -\frac{c}{R_M^2} = -g \left(\frac{R_E}{R_M} \right)^2$$

Mit Gl. (1.6) und der Umlaufperiode des Mondes T_M gilt aber auch

$$b_M = -\frac{R_M}{T_M^2} 4\pi^2$$

Mit den linken Seiten sind auch die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen identisch und es ist somit möglich, g aus messbaren Größen zu bestimmen:

$$g = \frac{4\pi^2 R_M^3}{R_E^2 T_M^2} \quad (1.7)$$

Setzt man in dieser Gleichung für R_M den mittleren Erde-Mond Abstand von 38 400 km, für die Umlaufzeit des Mondes T_M die Dauer zwischen zwei Perigäum durchgängen (27.56 Tage), und für R_E den mittleren Erdradius von 6 371 km, dann ergibt sich für g der Wert $9.71 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Das liegt nur ein wenig mehr wie 1% unter dem modernen Mittelwert von $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$. Mit Gl. (1.7) hängt g davon ab wie weit man vom Erdmittelpunkt entfernt ist, da $g \propto R_E^{-2}$. Die Bestimmung von G ist etwas schwieriger weil man hierzu die Masse der Erde m_E kennen muß. Auf der Erdoberfläche gilt

$$F = mg = G \frac{m_E m}{R_E^2}$$

Die Probemasse m kürzt sich heraus und es ergibt sich für G :

$$G = g \frac{R_E^2}{m_E} \quad (1.8)$$

Setzt man hier $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $R_E = 6 371 \text{ km}$, und $m_E = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ein, dann erhält man $G = 6.6675 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Das ist aber gerade das Umgekehrte von dem

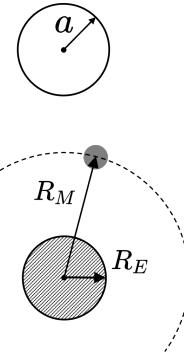


Abb. 1.8

was Henry Cavendish tat. Zu seiner Zeit war zwar der Erdradius seit langem bekannt, nicht so aber die Masse der Erde. Mit seiner Torsionswaage gelang es Cavendish 1798 erstmals den Wert von G zu bestimmen und zwar mit hoher Genauigkeit; sein Wert für G unterschied sich nur um 1.2% vom modernen Wert der Gravitationskonstanten $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. Mittels Gl. (1.8) konnte Cavendish dann bei bekanntem G erstmals die Masse der Erde bestimmen.

Die elektromagnetische Kraft

Analog in seiner Gestalt zum Newtonschen Gravitationsgesetz, beschreibt das von Charles Augustin de Coulomb in 1785 entdeckte und nach ihm benannte Coulombsche Gesetz die Kraftwirkung zwischen zwei elektrischen Punktladungen.

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad (1.9)$$

Im Unterschied zur Gravitationskraft die nur eine Ladung kennt (nämlich die Masse), kennt die elektromagnetische Wechselwirkung positive und negative Ladungen. Die Gravitationskraft wirkt immer nur anziehend, die Coulombkraft kann sowohl anziehend wie auch abstoßend wirken und auf ungeladene Körper wirkt sie überhaupt nicht.

Das Coulombsche Gesetz ist die Grundlage der Elektrostatik. In der Elektrodynamik betrachtet man eine Punktladung die sich im elektromagnetischen Feld bewegt. Die Kraft auf eine solche Punktladung q die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} im einem elektromagnetischen Feld mit der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} und der magnetischen Feldstärke \mathbf{B} bewegt ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.10)$$

Diese Kraftgleichung für die sogenannte Lorentzkraft, benannt nach Hendrik Antoon Lorentz, wird häufig benutzt um die Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu definieren. Realiter ist das aber nur im Prinzip möglich da jede bewegte Testladung q in Gl. (1.10) ihr eigenes \mathbf{E} und \mathbf{B} Feld erzeugt. Falls sich die Testladung auf einer gekrümmten Bahn bewegt, also eine Beschleunigung erfährt, verliert sie zudem Energie durch Abgabe von Strahlung.

Reibungskräfte

Die Gravitationskraft und die elektromagnetische Kraft sind beides Feldkräfte die über weite Entfernung wirken. Die Kraftwirkung wird dabei jeweils durch das Gravitationsfeld beziehungsweise durch das elektromagnetische Feld vermittelt und elektromagnetische Wellen beziehungsweise Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Das ist bei Reibungskräften völlig anders, diese sind Berührungs Kräfte und eine

Fernwirkung wie bei Gravitationskraft oder elektromagnetischer Kraft gibt es bei Reibungskräften nicht. Mit Reibungskraft bezeichnet man verschiedene Kräfte durch welche zwei sich berührende Körper sich gegenseitig abbremsen. Reibungskräfte wirken immer entgegen der Bewegungsrichtung oder verhindern die Bewegung gänzlich. Letzteres ist der Fall, wenn die an einem ruhenden Körper angreifende Kraft nicht ausreicht, um die Haftreibung zu überwinden. Reibung ist der Grund warum wir uns überhaupt durch Gehen fortbewegen können. Wie schwierig es ist, sich ohne Reibung fortzubewegen, kann man leicht feststellen indem man sich auf eine Eisfläche begibt.

Aus eigener Erfahrung wissen wir alle, dass Reibungskräfte beispielsweise bei Bewegung durch Luft oder Wasser mit wachsender Geschwindigkeit zunehmen. Bei kleinen Geschwindigkeiten ist die Reibungskraft proportional zu v , man spricht dann von Reibung nach Stokes, benannt nach George Gabriel Stokes. Bei großen Geschwindigkeiten ist die Reibung abhängig von v^2 , man spricht dann von Reibung nach Newton. Im eindimensionalen Fall ist die geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft in der Entwicklung nach Lord Rayleigh (bürgerlich John William Strutt) gegeben durch

$$F = F(v) = \underbrace{F_0 \frac{v}{|v|}}_{\text{Rayleigh}} - F_1 v - F_2 v |v| - \dots$$

Gleitreibung Strömungsreibung

Elastische Kräfte

Bei nicht zu großer Dehnung oder Stauchung verhalten sich viele Körper elastisch. Ein Beispiel dafür ist natürlich die mechanische Feder. Entwickelt nach der entsprechenden Dehnung bzw. Stauchung x der Feder kann man die wirkende Kraft beschreiben als

$$F(x) = \underbrace{F_0}_{\text{harmonisch}} - \underbrace{F_1 x}_{\substack{\uparrow \\ \text{kann beide Vorzeichen haben}}} - \underbrace{F_2 x^2}_{\text{anharmonisch}} - \dots$$

Der lineare Term für welchen die Kraft proportional zur Dehnung bzw. Stauchung ist, entspricht dabei dem bekannten Hookeschen Gesetz, benannt nach Robert Hooke. Nach dem Hookeschen Gesetz ist

$$F = m\ddot{x} = -k \cdot x \tag{1.11}$$

Die Beschleunigung eines Körpers der einer Federkraft unterliegt ist also direkt proportional und entgegengesetzt zur Auslenkung der Feder aus ihrer Ruhelage. Die Beziehung

in Gl. (1.11) unterliegt harmonischen Schwingungen die in der Physik und vielen praktischen Anwendungen eine große Rolle spielen.

Plastische Kräfte

Abweichungen vom Hookeschen Gesetz treten bei zu großen Dehnungen oder Stauchungen auf. In diesem Fall geht die elastische Dehnung beziehungsweise Stauchung in eine plastische Verformung über.

Hydrostatische und hydrodynamische Kraft

Als hydrostatische Kraft bezeichnet man eine von einer ruhenden Flüssigkeit ausgeübte Kraft. Ein bekanntes Beispiel ist die Kraft welche die Flüssigkeitssäule über einem getauchten Unterseeboot auf dessen äußere Hülle, das heißt auf den Druckbehälter des Unterseebootes, ausübt. Im Gegensatz dazu wird eine hydrodynamische Kraft von einer bewegten Flüssigkeit verursacht. Die Sogwirkung von abfliessendem Wasser ist genauso ein Beispiel dafür wie die Kraft einer Flussströmung.

1.2.2 Superposition von Kräften

Ein wichtiges Werkzeug in der Physik ist das sogenannte Superpositionsprinzip. Dieses gilt für eine Reihe von physikalischen Größen und so auch für Kräfte. Wie in Abb. 1.9 am Beispiel von zwei Kräften gezeigt, können diese überlagert (addiert) werden zu einer Gesamtkraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (\text{linear})$$

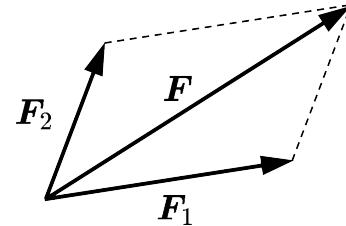


Abb. 1.9

Ein Kräfteparallelogramm zur Addition zweier Kräfte wie in

Abb. 1.9 skizziert, hat bereits Newton benutzt. Ganz generell gilt für lineare Systeme, dass alle an einem Körper angreifenden Kräfte vektoriell addiert werden können. Liegen also N Kräfte \mathbf{F}_i vor die an einem Körper angreifen, dann gilt für die auf den Körper wirkende Gesamtkraft \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (1.12)$$

Gl. (1.12) ist das allgemeine Superpositionsprinzip für Kräfte. Wegen seiner großen Bedeutung wird das Superpositionsprinzip auch häufig als viertes Newtonsches Gesetz bezeichnet.

2. Stereostatik

Stereostatik, die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte an starren Körpern, befasst sich mit nicht verformbaren starren Körpern im Kräfte- und Momentengleichgewicht. Das trifft auf Körper in der Ruhelage zu, aber auch auf Körpern die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und im entsprechenden bewegten Bezugssystem betrachtet werden.

2.1 Kinematik

2.1.1 Geometrie starrer Körper

Naturgemäß sind in der Geometrie starrer Körper alle Abstände und Winkel fest. Die Bewegungsmöglichkeiten eines starrer Körpers sind durch die ihm zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade der Bewegung bestimmt.

Definition

Freiheitsgrade: Anzahl der Bestimmungsstücke die man zur Fixierung der Lage des Körpers angeben muss.

Freiheitsgrade im zweidimensionalen Fall (Ebene):

Für den starren Körper in (Abb. 2.1) dessen Bewegung auf die Ebene beschränkt ist, hat der Ortsvektor zwei Freiheitsgrade entlang der zwei orthogonalen Koordinatenachsen e_1 und e_2 (Translation), und er kann in der Ebene um einen Winkel α gedreht werden (Rotation).

Größe	Freiheitsgrade
r	2
α	1
Zusammen	3

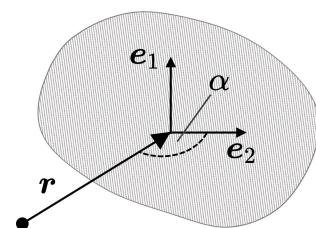


Abb. 2.1

Freiheitsgrade im dreidimensionalen Raum:

Für die Bewegung im Raum stehen einem starren Körper drei orthogonale Translationsrichtungen zur Verfügung und er kann um jede seiner drei Körperachsen rotiert werden (Eulersche Winkel α , β und γ).

Größe	Freiheitsgrade
r	3
α, β, γ	3
Zusammen	6

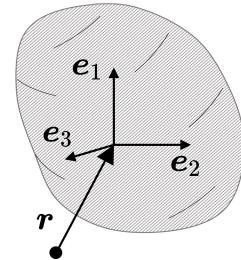


Abb. 2.2

In der Ebene benötigt man somit drei Gleichungen und im dreidimensionalen Raum braucht es sechs Gleichungen, um die Lage eines starren Körpers zu bestimmen. Der Bewegungszustand eines starren Körpers ist vollständig durch seinen Gesamtimpuls und seinen Gesamtdrehimpuls beschrieben. Damit müssen sich die erforderlichen Gleichungen aus der Betrachtung der Gesamtimpulsänderung und der Gesamtdrehimpulsänderung des starren Körpers ergeben.

1) Gesamtimpulsänderung:

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.1)$$

Aus Gl. (2.1) erhält man zwei Gleichungen in der Ebene und drei im Raum.

2) Gesamtdrehimpulsänderung: Der Gesamtdrehimpuls ist gegeben durch

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (2.2)$$

Damit ist die Gesamtdrehimpulsänderung

$$\sum_i \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i}_{= 0} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M} \quad (2.3)$$

wobei \mathbf{M} das mit der Drehimpulsänderung verbundene Drehmoment ist. Aus Gl. (2.3) erhält man eine Gleichung für die Ebene und drei für den Raum. Die Gesamtimpulsänderung und die Gesamtdrehimpulsänderung liefern somit die erforderliche Anzahl an Gleichungen, drei in der Ebene und sechs im dreidimensionalen Raum.

2.2 Kräfte und Momente

Definition

Die Wirkungslinie einer Kraft ist die Gerade, welche die Lage der Kraft im Raum angibt. Zwei Kräfte \mathbf{F} und \mathbf{F}' mit assoziierten Drehmomenten \mathbf{M} und \mathbf{M}' heißen äquivalent dann und nur dann wenn gilt:

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}'| \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}'$$

\mathbf{F} und \mathbf{F}' sind dann von gleichem Betrag und liegen auf derselben Wirkungslinie.

Beispiel 2.1 Drehmoment für eine Wirkungslinie

Betrachtet wird, wie in Abb. 2.3 skizziert, die Kraft entlang einer Wirkungslinie an zwei unterschiedlichen Stellen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}'_1 . Die Kraftvektoren an den jeweiligen Positionen auf der Wirkungslinie sind mit \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}'_1 bezeichnet wobei gilt $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}'_1|$. Für das Drehmoment \mathbf{M}'_1 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_1 &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}'_1 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_1 \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \underbrace{(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_1}_{= 0} = \mathbf{M}_1 \end{aligned}$$

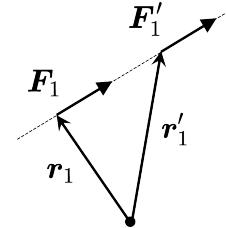


Abb. 2.3

Somit müssen \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}'_1 auf derselben Wirkungslinie liegen und wegen $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}'_1|$ gilt damit $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}'_1$. Für zwei an einem Körper angreifende Kräfte die zwar in dieselbe Richtung zeigen aber auf verschiedenen Wirkungslinien liegen, das heißt die Kräfte sind parallel, ist $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}'_1$ und es gibt ein resultierendes Drehmoment. Nur Kraftkomponenten die auf derselben Wirkungslinie liegen, können addiert oder voneinander subtrahiert werden, je nachdem ob sie in die gleiche Richtung zeigen oder nicht.

Beispiel 2.2 Reduktion komplanarer Vektoren

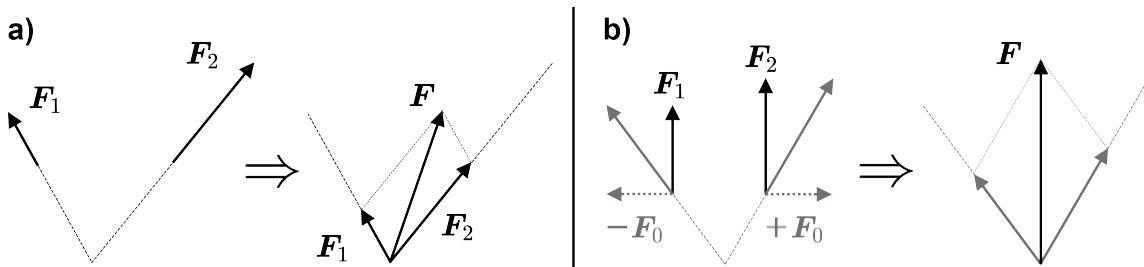


Abb. 2.4: Reduktion zweier komplanarer Vektoren: (a) die Vektoren sind nicht parallel; (b) die Vektoren sind parallel.

Die Konstruktion in Abb. 2.4a zeigt die Reduktion zweier komplanarer, nicht paralleler Vektoren \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 durch Rückführung der Vektoren entlang ihrer Wirkungslinien zum gemeinsamen Schnittpunkt mit anschließender Addition der Vektoren zu \mathbf{F} . Sind \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 parallel wie in Abb. 2.4b so kann durch Addition des Nullvektors mit Nullmoment $-\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$ ein Paar nicht paralleler Vektoren erzeugt werden welche dann genau wie in Abb. 2.4a gezeigt auf den Summenvektor \mathbf{F} reduziert werden können.

Eine Ausnahme davon bildet das Kräftepaar, auch Kraftdipol genannt. Sind \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 nämlich wie beim Kraftdipol anti-parallel, so funktioniert der Trick mit der Nullvektoraddition nicht da dieser dann nur ein neues anti-paralleles Vektorpaar erzeugt.

Zur Bestimmung der „Wirkungslinie“ falls mehrere Kräfte an einem Körper angreifen (Abb. 2.5)

berechnet man:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

(S = Schwerpunkt des starren Körpers)

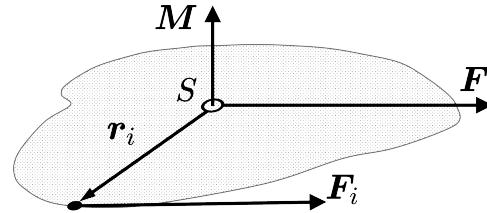


Abb. 2.5

Bewegungsgleichungen für starre Körper:

1) Gesamtmoment:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \quad (2.4)$$

2) Gesamtdrehimpuls:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M} \quad (2.5)$$

Wesentlich für Berechnungen in der Stereostatik ist das Konzept gebundener Vektoren. Gebundene Vektoren bezeichnen Vektoren deren Anfangspunkt einem bestimmten Raumpunkt zugeordnet ist. Zu den physikalischen Größen denen gebundene Vektoren zugeordnet sind gehören Kräfte und Momente. Der Anfangspunkt eines gebundenen Kraftvektors kann so verschoben werden, dass das durch die Verschiebung entstandene neue Kräfte- und Momentensystem dem ursprünglichen Kräfte- und Momentensystem äquivalent ist. Das zeigt Bsp. 2.1 für die Verschiebung eines gebundenen Kraftvektors auf seiner Wirkungslinie und Bsp. 2.2 für die Reduktion komplanarer Vektoren. Das Gesamtdrehmoment ändert sich in diesen Fällen nicht. Kraftvektoren sind in der Stereostatik faktisch immer gebunden. Für Drehmomente ist das zumeist auch der Fall, allerdings nicht immer.

Beispiel 2.3 Drehmoment des Kraftdipols

Ein Kraftdipol besteht aus zwei dem Betrag nach gleich großen entgegengesetzten Kräften die auf parallelen Wirkungslinien liegen, das heißt, die resultierende Kraft des Kraftdipols verschwindet:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

Das durch \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 bewirkte Drehmoment bezüglich eines frei gewählten Punktes O ist für den in Abb. 2.6 skizzierten Kraftdipol

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_1 \\ &= (-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_2 \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{21\perp} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_{12\perp} \times \mathbf{F}_2$$

Für den Betrag des Drehmoments ergibt sich somit

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}_{21\perp}| \cdot |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{r}_{12\perp}| \cdot |\mathbf{F}_2| \quad (2.6)$$

Das Drehmoment des Kraftdipols hängt also nur vom senkrechten Relativabstand der Kraftvektoren ab und nicht vom Abstand ihrer Anfangspunkte. Das Drehmoment \mathbf{M} ist damit unabhängig vom Ort der Drehachse O überall gleich. Das gilt auch für Drehachsen die nicht zwischen den zwei Wirkungslinien der Kräfte sondern außerhalb dieses Bereichs liegen. In anderen Worten, der Anfangspunkt des Drehmomentvektors ist innerhalb des starren Körpers völlig frei verschiebbar und damit ist das Drehmoment eines Kraftdipols kein gebundener, sondern ein freier Vektor.

Weil das Drehmoment eines Kraftdipols unabhängig vom Bezugspunkt ist, kann ein Kraftdipol an jeden beliebigen Ort in seiner Wirkungsebene verschoben werden, ohne dass sich seine Wirkung, das heißt sein Drehmoment verändert. Ein Kraftdipol kann immer durch sein zugehöriges Drehmoment ersetzt werden, ohne dass sich seine Wirkung auf einen Körper verändert. Im Gegensatz dazu kann eine Einzelkraft nicht durch ihr Drehmoment ersetzt werden und sie kann nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass sich mit ihr assoziierte Drehmomente verändern.

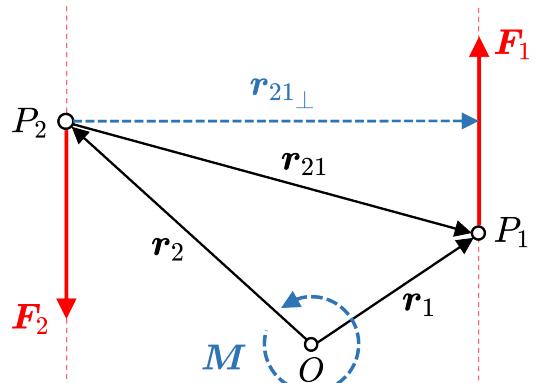


Abb. 2.6

2.2.1 Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip besagt, dass zwei Systeme gebundener Kraftvektoren identisch sind, wenn die resultierende Gesamtkraft \mathbf{F} für jeden beliebigen Bezugspunkt P das gleiche resultierende Drehmoment \mathbf{M} ergibt. Unter dem Äquivalenzprinzip sind somit Operationen erlaubt die das Gesamtdrehmoment eines Systems nicht verändern. Hierzu gehören:

- Die Verschiebung der \mathbf{F}_i längs ihrer jeweiligen Wirkungslinie (Bsp. 2.1).
- Die Addition von \mathbf{F}_i mit gleichem Angriffspunkt (Bsp. 2.2).
- Die Zerlegung von \mathbf{F} in Komponenten \mathbf{F}_i

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$$

- Die Addition von Nullvektoren \mathbf{F}_0 und \mathbf{M}_0

$$\mathbf{F}_0 = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_0 = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

Zur Reduktion von Kraftsystemen wurden bereits die Verschiebung von Kräften entlang ihrer Wirkungslinien, Addition von Kräften oder ihre Zerlegung, sowie die Addition von Kraft-Nullvektoren diskutiert. Eine weiteres wichtiges Werkzeug ist die Parallelverschiebung von Kräften.

Parallelverschiebung einer Kraft in der Ebene

Um dem Äquivalenzprinzip zu genügen, muss bei Parallelverschiebung eines Kraftvektors immer ein Drehmoment hinzugefügt werden. Dass dies so ist, ergibt sich aus der Betrachtung der einzelnen äquivalenz-bewahrenden Schritte der Parallelverschiebung in Abb. 2.7.

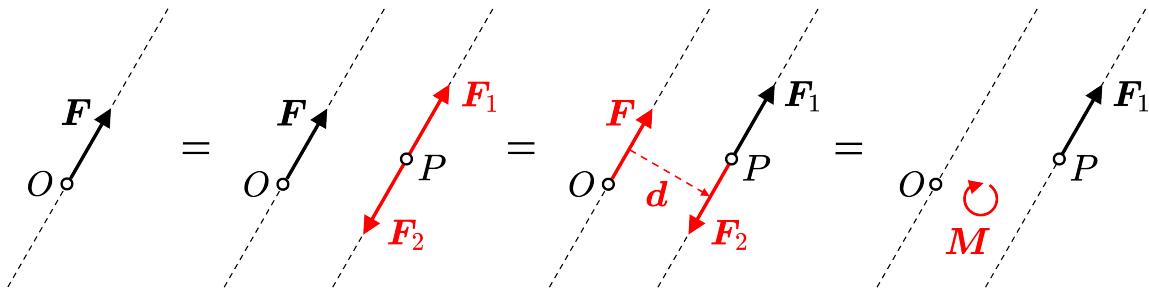


Abb. 2.7: Parallelverschiebung eines Kraftvektors nach dem Äquivalenzprinzip.

Zuerst fügt man dem zu verschiebendem Kraftvektor \mathbf{F} auf einer parallelen Wirkungslinie in gewünschtem Abstand d den Nullvektor hinzu. Der Nullvektor besteht dabei aus entgegengesetzten gerichteten Vektoren \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 deren Betrag identisch zu dem von \mathbf{F} ist.

Im folgenden Schritt identifiziert man \mathbf{F} und den parallelversetzt und entgegengesetzt gerichteten \mathbf{F}_2 als die zwei Kraftvektoren eines Kraftdipols. Im letzten Schritt ersetzt man den Kraftdipol (siehe Abb. 2.6) durch sein zugehöriges freies Drehmoment \mathbf{M} dessen Drehachse beliebig positioniert werden kann. Die Einzelkraft \mathbf{F} ist also äquivalent zur parallelversetzten Kraft \mathbf{F} und einem Drehmoment mit Betrag $|\mathbf{M}| = d \cdot |\mathbf{F}|$.

Definition

Für ein Kraftsystem $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ heißen die Vektoren

$$\mathbf{F}_R = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{RP} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_k$$

resultierende Kraft und resultierendes Drehmoment bezüglich des Punktes P . Die Bestimmung von \mathbf{F}_R und \mathbf{M}_{RP} nennt man Reduktion.

Definition

Zwei Kraftsysteme

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad (\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n)$$

heißen äquivalent dann und nur dann falls gilt

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}'_R \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{RP} = \mathbf{M}'_{RP}$$

Der Bezugspunkt P für das resultierende Drehmoment kann dabei frei gewählt werden, muss aber bei äquivalenten Kraftsystemen identisch sein. Das resultierende Drehmoment \mathbf{M}_{RP} hängt vom gewählten Bezugspunkt P ab. Betrachtet man beispielsweise zwei verschiedene Bezugspunkte P_1 und P_2 dann sind die resultierenden Drehmomente

$$\mathbf{M}_{RP_1} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{P_1}) \times \mathbf{F}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{RP_2} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{P_2}) \times \mathbf{F}_k$$

Fügt man nun den Nullvektor $\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_1} = \mathbf{0}$ in den Ausdruck für \mathbf{M}_{RP_2} ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{RP_2} &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}) \times \mathbf{F}_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{P_1}) \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}) \times \mathbf{F}_k \\ &= \mathbf{M}_{RP_1} + (\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}) \times \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \end{aligned}$$

Das bedeutet, das resultierende Drehmoment \mathbf{M}_{RP} ist also nur dann unabhängig vom Bezugspunkt P wenn $\sum \mathbf{F}_k = 0$ gilt, also wenn, wie in Bsp. 2.3 gezeigt, ein Kraftdipol vorliegt.

Gilt für die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment eines an einem Körper angreifenden Kraftsystems

$$\mathbf{F}_R = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{RP} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_k = \mathbf{0}$$

dann befindet sich das Kraftsystem und damit der Körper im Gleichgewicht. Der Körper bewegt sich dann entweder mit konstanter Geschwindigkeit oder befindet sich in Ruhe. Das ist natürlich nichts anderes als eine Formulierung des ersten Newtonschen Gesetzes (siehe Abschnitt 1.2).

Ein alternativer Zugang zum Verständnis der Parallelverschiebung einer Kraft in der Ebene ist in Abb. 2.8 skizziert. Hier greift die Kraft \mathbf{F} im Schwerpunkt der Fläche an, \mathbf{M}_O bezeichnet das Nullmoment. In der ebenen Statik sind alle Drehmomente senkrecht zur Ebene. Die Parallelverschiebung der Kraft \mathbf{F} in einen Punkt P im Abstand \mathbf{d} vom Schwerpunkt erzeugt kein Drehmoment in P da dieser Punkt in der Angriffsstrecke der verschobenen Kraft liegt. Also muss mit Addition der Momente gelten

$$\mathbf{M}_\bullet = \mathbf{M}_O + \mathbf{d} \times \mathbf{F} \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Gleichung hat wegen

$$(\mathbf{d} + \lambda \cdot \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$$

viele Lösungen. Es wird daher verlangt, dass $\mathbf{d} \perp \mathbf{F}$ gelten soll. Aus

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{M}_O + \mathbf{d} \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{F}) = -\mathbf{F} \times \mathbf{M}_O$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{d} - \underbrace{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{F}}_{=0} = -\mathbf{F} \times \mathbf{M}_O$$

folgt somit für \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = -\frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}_O}{|\mathbf{F}|^2} \tag{2.7}$$

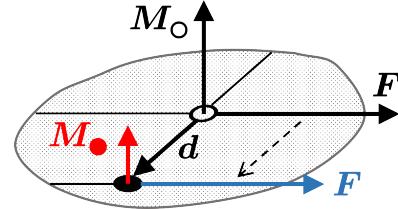


Abb. 2.8

Da in der ebenen Statik \mathbf{F} und \mathbf{M}_O aufeinander senkrecht stehen, bedeutet das aber nicht anderes als dass gelten muss

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{F}|$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit Gl. (2.6), der Gleichung für den Betrag des Drehmoments eines Kraftdipols; er wurde hier aber auf eine andere Weise gewonnen.

Der obige Ansatz zur Bestimmung der Wirkung einer Kraftverschiebung parallel zur Wirkungslinie, lässt sich einfach von der Ebene auf den räumlichen Fall übertragen. Im Raum zerlegt man dabei, wie in Abb. 2.9 skizziert, das Nullmoment \mathbf{M}_O in seine Komponenten normal (\mathbf{M}_\perp) und parallel (\mathbf{M}_\parallel) zu der Ebene in der \mathbf{F} liegt. Damit erhält man dann analog zur Ableitung in der Ebene

$$\mathbf{d} = -\frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}_\perp}{|\mathbf{F}|^2} \quad (2.8)$$

und somit

$$|\mathbf{M}_\perp| = |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{F}|$$

Bei Parallelverschiebung eines Kraftvektors im Raum entsteht also nur ein Drehmoment \mathbf{M}_\perp normal zur Ebene in der \mathbf{F} liegt. In dieser Ebene liegt auch der zu \mathbf{M}_\perp gehörige Kraftdipol \mathbf{M}_\parallel , die Komponente des Drehmoments parallel zur Ebene in der die verschobene Kraft liegt, bleibt bei der Parallelverschiebung der Kraft erhalten.

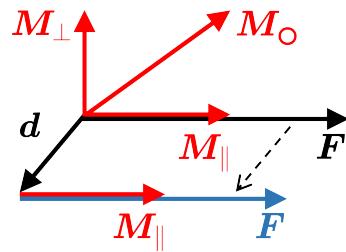


Abb. 2.9

2.2.2 Reduktion von Kraftsystemen

Das Krafteck-Seileck-Verfahren

Ein mächtigeres Werkzeug zur Reduktion von Kräften wie die in Abb. 2.4 gezeigten einfachen Methoden ist das sogenannte Krafteck-Seileck-Verfahren. Dieses Verfahren ermöglicht es für eine Gruppe von Kräften die in einer Ebene liegen aber nicht an einem gemeinsamen Punkt angreifen, die resultierende Gesamtkraft auf einfache Weise grafisch zu bestimmen. Abb. 2.10 illustriert dieses Verfahren am Beispiel der Reduktion von drei Kräften \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , und \mathbf{F}_3 zur resultierenden Gesamtkraft \mathbf{F} . Die Ausgangssituation für die Konstruktion ist das Vorliegen der drei Kraftvektoren \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , und \mathbf{F}_3 . Im ersten Schritt des Verfahrens, wird aus diesen das Krafteck rechts in Abb. 2.10 in konstruiert.

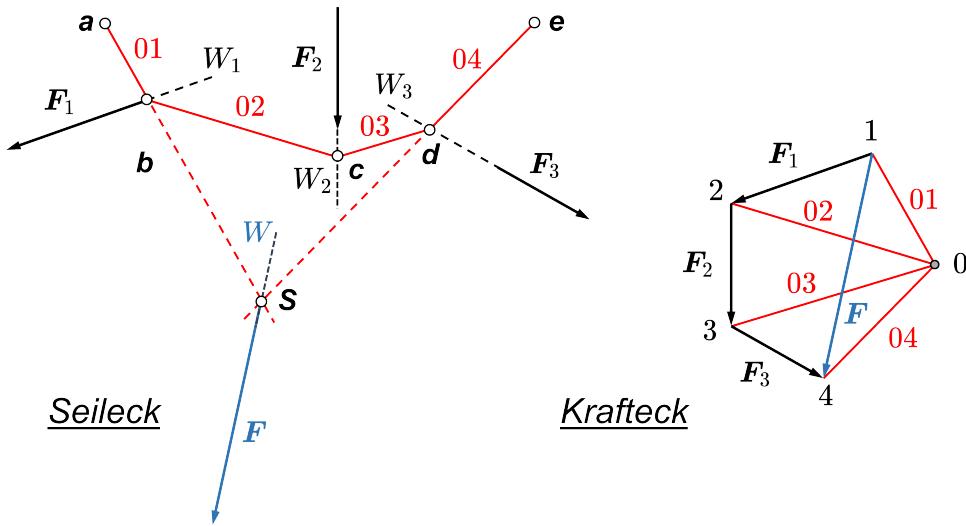


Abb. 2.10: Das Krafteck-Seileck-Verfahren zur Bestimmung der resultierenden Kraft einer Gruppe von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten in der Ebene.

Dabei werden Duplikate der drei Kraftvektoren durch Verschiebung kettenartig graphisch addiert und zwar so, dass der Vektor zwischen Anfang und Ende dieser Vektorkette der resultierenden Gesamtkraft entspricht. Dann wird ein Punkt rechts dieses Kraftvektors gewählt, die Ecke des Kraftecks bzw. ihr Pol, hier mit 0 bezeichnet, von dem aus Linien zu den jeweiligen Anfangs- und Endpunkten der drei Kraftvektoren gezogen werden.

Im zweiten Schritt werden die Wirkungslinien W_1 , W_2 , und W_3 der drei Kräfte eingezeichnet. Welcher Abschnitt einer Wirkungslinie - vor oder nach dem jeweiligen Kraftpfeil liegend - für die weitere Konstruktion des Seilecks benötigt wird, hängt von der relativen Lage der Kraftvektoren ab. Im dritten Schritt werden dann die Verbindungslien 01, 02, 03, und 04 aus dem Krafteck ins Seileck übertragen.

Dabei wird zuerst eine Linie parallel zu 01 von einem Punkt a gezogen, der links der Wirkungslinie W_1 der Kraft \mathbf{F}_1 liegt, bis diese W_1 schneidet. Von diesem Schnittpunkt b wird nun eine Linie parallel zu 02 gezogen bis diese die Wirkungslinie W_2 der Kraft \mathbf{F}_2 schneidet; das definiert den Punkt c . In gleicher Weise wird dann parallel zu 03 eine Linie beginnend im Punkt c gezogen bis diese W_3 schneidet. Zuletzt wird dann noch von diesem Schnittpunkt d eine Parallele zu 04 bis zum Punkt e gezogen.

Die derart entstandenen Geradenstücke $a-b$, $b-c$, $c-d$, und $d-e$, bilden die einzelnen Abschnitte des Seilecks. Der Schnittpunkt S der Verlängerungen der äußeren beiden Seileckabschnitte $a-b$ und $d-e$ liegt auf der Wirkungslinie der aus \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , und \mathbf{F}_3 resultierenden Kraft \mathbf{F} . Letztere kann nun ebenfalls aus dem Krafteck in das Seileck, so wie in Abb. 2.10 gezeigt, übertragen werden.

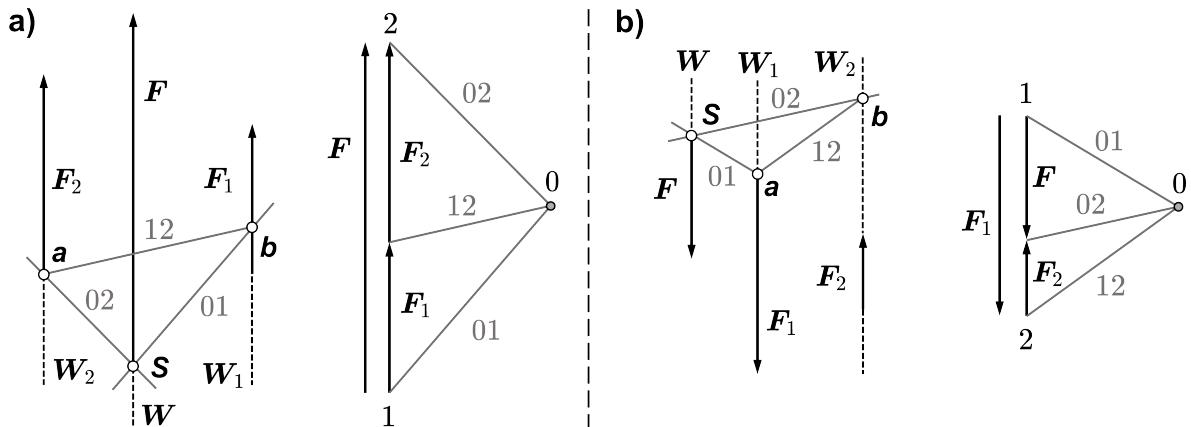


Abb. 2.11: Reduktion von Kräftepaaren mit dem Krafteck-Seileck-Verfahren: (a) im Fall paralleler und (b) im Fall anti-paralleler Kraftvektoren.

Mit Hilfe des Krafteck-Seileck-Verfahrens lassen sich auch anti-parallele Kraftvektoren reduzieren was mit der bereits diskutierten Methode der Nullvektoraddition nicht möglich ist. Abb. 2.11 zeigt Krafteck-Seileck Konstruktionen im Fall paralleler (Abb. 2.11a) und anti-paralleler Kräfte (Abb. 2.11b).

Beispiel 2.4 Reduktion von Kraftsystemen im Gravitationsfeld

Die Gesamtkraft \mathbf{F} die an einem starren Körper bestehend aus Einzelmassen m_i im Gravitationsfeld angreift ist

$$\mathbf{F} = - \sum_i m_i g \mathbf{e}_z = -M g \mathbf{e}_z$$

mit

$$|\mathbf{e}_z| = 1 \quad \text{und} \quad \sum_i m_i = M$$

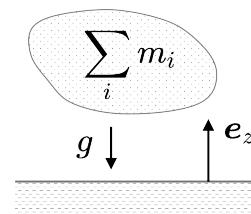


Abb. 2.12

Mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i der Einzelmassen m_i erhält man für das Drehmoment \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = - \sum_i \mathbf{r}_i \times (\underbrace{m_i g \mathbf{e}_z}_{\mathbf{F}_i}) = \mathbf{R} \times (\underbrace{M g \mathbf{e}_z}_{\mathbf{F}})$$

wobei

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

der Ortsvektor des Schwerpunkts (SP) des starren Körpers ist. SP ist der Punkt in dem \mathbf{F} angreift, im Sinne eines äquivalenten Kraftsystems. Da der Schwerpunkt eines Körpers SP jener Punkt ist, bezüglich dessen das Drehmoment im (konstanten) Gravitationsfeld verschwindet, wurden somit \mathbf{M} und \mathbf{F} durch eine Kraft ersetzt!

2.3 Lager und Fachwerke

2.3.1 Lager

Mechanische Lager ermöglichen oder verhindern Bewegungen in ausgesuchten Freiheitsgraden zwischen Konstruktionsteilen und übertragen Kräfte zwischen ihnen.

Definitionen

Lager: Verbindungselemente zwischen verschiedenen starren Konstruktionsteilen welche Lage und Orientierung einer Konstruktion gewährleisten.

Wertigkeit eines Lagers: Die Wertigkeit eines Lagers entspricht der Anzahl der an ihm angreifenden Kraft- und Momentekomponenten.

Kinematische Bestimmtheit: Eine Lagerung heißt kinematisch bestimmt wenn sie die Lage des Körpers eindeutig festlegt (nicht wackelnd). Wenn der Körper wackeln kann, dann heißt die Lagerung kinematisch unbestimmt.

Statische Bestimmtheit: Die Lagerung eines Körpers heißt statisch bestimmt wenn die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen der Wertigkeit der Lager entspricht. Wenn die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen geringer als die Wertigkeit der Lager ist, dann heißt die Lagerung des Körpers statisch unbestimmt.

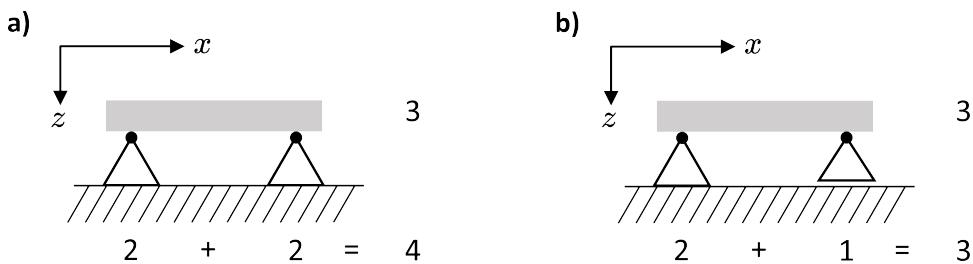


Abb. 2.13: Beispiele für statisch unbestimmte (a) und statisch bestimmte (b) Lagerung.

Die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen des Körpers in Abb. 2.13a ist 3. Auf jedes der beiden festen Gelenklager können Kräfte in x - und in z -Richtung wirken. Die Wertigkeit der Lagerung ist daher 4 und somit größer wie die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen. Daher ist die Lagerung in Abb. 2.13a statisch unbestimmt. In Abb. 2.13b wurde eines der festen Gelenklager durch ein verschiebbbares Gelenklager ersetzt auf das in x -Richtung keine Kräfte mehr wirken können. Damit reduziert sich die Wertigkeit der Lagerung auf 3 und entspricht damit der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen. Die Lagerung in Abb. 2.13b ist also statisch bestimmt.

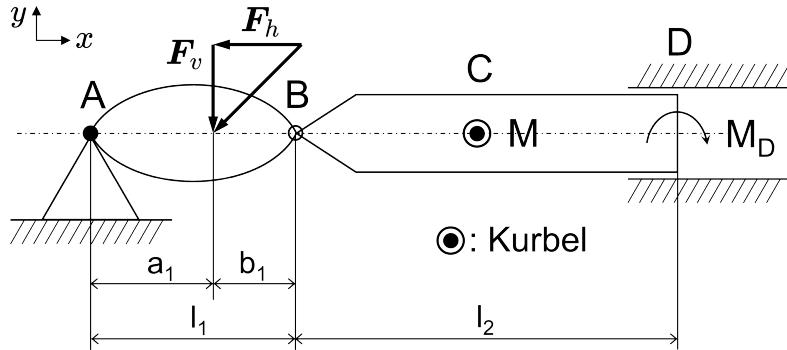
Beispiel 2.5 Lagerreaktionskräfte


Abb. 2.14: Berechnung von Lagerreaktionskräften am Beispiel.

Eine erste Rechnung wird ohne das Lager B durchgeführt, also B starr wie in Abb. 2.15. Die Gleichungen für Kräfte und Momente lassen sich direkt aus Abb. 2.15 ablesen. Für die Kräfte gilt

$$F_x : \quad A_H - F_h = 0$$

$$F_y : \quad A_V - F_v - D_V = 0$$

und für die Momente gilt

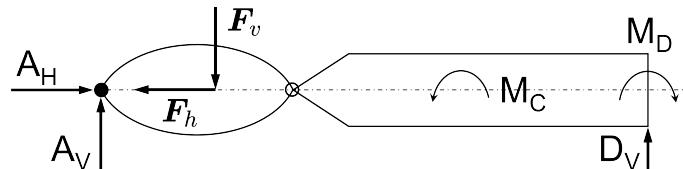


Abb. 2.15

$$M_{zA} : \quad a_1 F_v - M_c - (l_1 + l_2) D_V + M_D = 0$$

$$M_{zB} : \quad -M_c - l_2 D_V + M_D = 0 \quad (\text{da um B frei beweglich})$$

Aus den zwei Gleichungen für die Momente gewinnt man durch Subtraktion:

$$a_1 F_v - l_1 D_V = 0$$

Aus den Gleichungen für die Kräfte folgt:

$$A_H = F_h \quad ; \quad A_V = \frac{b_1}{l_1} F_v \quad ; \quad D_V = \frac{a_1}{l_1} F_v$$

Die letzte Gleichung eingesetzt in die Bedingung für \$M_{zB}\$ ergibt für das Moment \$M_D\$

$$M_D = M_c + l_2 \frac{a_1}{l_1} F_v$$

Schnitt in B:

$$A_H - F_h + B_H = 0 \quad \Rightarrow \quad B_H = 0$$

$$A_V - F_v + B_V = 0 \quad \Rightarrow \quad B_V = D_V$$

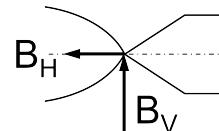


Abb. 2.16

2.3.2 Fachwerke

In Mitteleuropa geht die Fachwerkbauweise bis ins zwölfte Jahrhundert zurück hat aber wohl eine viele längere Geschichte. Unter einer Fachwerkkonstruktion versteht man gemeinhin ein Holzstabwerk in welchem schräg eingebaute Streben die auf die Konstruktion einwirkenden Kräfte auf Normalkräfte reduzieren. Fachwerke sind aber nicht nur im Holzbau wichtig sondern ebenso für Konstruktionen aus Stahl und Beton.

Definition

Fachwerke sind eine Konstruktion aus „Stäben“, „Knoten“, und „Lagern“.

- a) Stäbe sind gerade und starr.
- b) Stäbe sind in Knoten zentrisch und gelenkig verbunden.
- c) Kräfte greifen nur in Knoten an.

Wegen b) gibt es keine Momente in den Knoten. Eine wichtige Annahme ist, dass den Stäben selbst kein Eigengewicht zukommt sondern dieses als auf die Knoten verteilt gedacht wird. Damit erfahren die Stäbe eines Fachwerks keine Biegebeanspruchung und die Kräfte wirken stets nur in Richtung der Stabachsen.

Definition

- a) Ein Fachwerk ist kinematisch bestimmt wenn die Knoten fixiert sind.
- b) Ein Fachwerk ist statisch bestimmt, wenn die Gleichgewichtsbedingungen ausreichend sind für Lager- und „Stab“-Kräfte.

Bezeichnet s die Anzahl der Stäbe und k die Anzahl der Knoten eines Fachwerks und $\sum w_i$ die Summe der angreifenden Kräfte und Momente dann gilt:

$$s + \sum w_i = 2k \quad \text{in der Ebene}$$

und

$$s + \sum w_i = 3k \quad \text{im Raum}$$

Ein Fachwerk kann nur dann kinematisch und statisch bestimmt sein wenn die jeweilige Bedingung in der Ebene bzw. im Raum erfüllt ist. Zur Berechnung der Stabkräfte gibt es graphische und rechnerische Verfahren, das sogenannte Knotenverfahren ist eines davon.

Knotenverfahren

Damit das in Abb. 2.17 skizzierte Fachwerk kinematisch und statisch bestimmt ist, muss gelten:

$$s + 3 = 2k$$

Abzählen der Stäbe und Knoten ergibt:

$$9 + 3 = 12$$

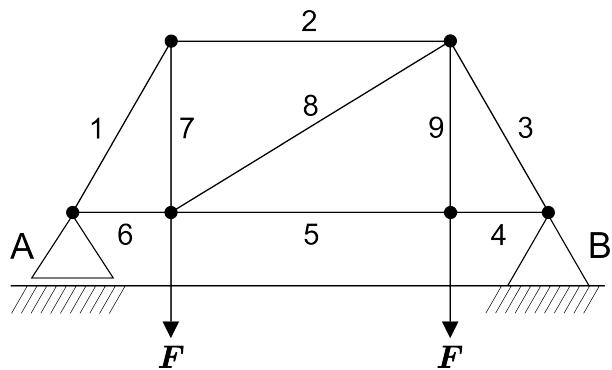


Abb. 2.17: Knotenverfahren Fachwerkbeispiel.

Die Bedingung ist also erfüllt. Beim Knotenverfahren werden die einzelnen Knoten herausgeschnitten betrachtet. Für jeden dieser Knoten muss dann gelten, dass alle an ihm angreifenden Kräfte sich gegenseitig aufheben, das heißt $\sum \mathbf{F} = 0$. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nach dem Freischneiden der Knoten die Stabkräfte jeweils von den Knoten wegzeigen (wäre dies nicht der Fall, dann würde das Freischneiden der Knoten die Konstruktion zu Fall bringen). Für das betrachtete ebene Fachwerk ist die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen $2k$ da für

jeden Knoten die angreifenden Kräfte in x - und in y -Richtung im Gleichgewicht sein müssen. Aus Abb. 2.18, einer Skizze der freigeschnittenen Knoten I bis VI mit den zugehörigen Kraftpfeilen und Winkeln, können die Bestimmungsgleichungen für jeden der sechs Knoten abgelesen werden.

$$\text{I } F_x : s_1 \cos \alpha_{16} + s_6 = 0$$

$$F_y : s_1 \sin \alpha_{16} + A = 0$$

$$\text{III } F_x : s_5 - s_6 + s_8 \cos \alpha_{85} = 0$$

$$F_y : -s_7 - s_8 \sin \alpha_{85} + F = 0$$

$$\text{V } F_x : s_4 - s_5 = 0$$

$$F_y : s_9 - F = 0$$

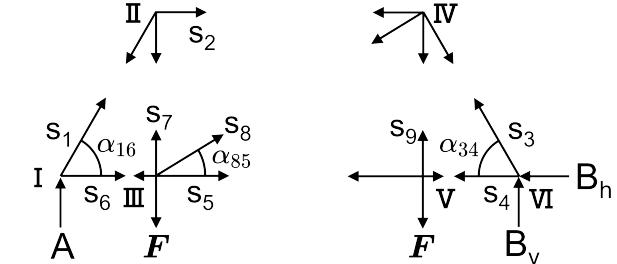


Abb. 2.18: Freigeschnitte Knoten des Fachwerks in Abb. 2.17 (s_i = Stabkräfte).

$$\text{II } F_x : -s_1 \cos \alpha_{16} + s_2 = 0$$

$$F_y : -s_1 \sin \alpha_{16} + s_7 = 0$$

$$\text{IV } F_x : -s_2 - s_3 \cos \alpha_{34} - s_8 \cos \alpha_{85} = 0$$

$$F_y : s_9 + s_3 \sin \alpha_{34} + s_8 \sin \alpha_{85} = 0$$

$$\text{VI } F_x : -s_3 \cos \alpha_{34} - s_4 - B_h = 0$$

$$F_y : -s_3 \sin \alpha_{34} - B_v = 0$$

Aus den Gleichungen folgt unmittelbar

$$s_1 = -\frac{A}{\sin \alpha_{16}} \quad ; \quad s_6 = A \cot \alpha_{16} \quad ; \quad s_2 = -A \cot \alpha_{16} \quad ; \quad s_7 = A$$

$$s_8 = \frac{1}{\sin \alpha_{85}}(F - A) \quad ; \quad s_5 = A \cot \alpha_{16} - (F - A) \cot \alpha_{85} = s_4 \quad ; \quad s_9 = F$$

$$s_3 = \frac{1}{\sin \alpha_{34}}(A - 2F) \quad ; \quad B_v = 2F - A$$

Verlangt man nun, dass auf das feste Gelenklager keine horizontalen Kräfte wirken sollen, das heißt $B_h = 0$, dann folgt

$$A(\cot \alpha_{16} + \cot \alpha_{34} + \cot \alpha_{85}) = F(2 \cot \alpha_{34} + \cot \alpha_{85})$$

mit $\cot \alpha_{16} = \cot \alpha_{34}$ folgt daraus: $A = F = B_v$

Schnittverfahren

Ein weiteres Verfahren zur Berechnung der Stabkräfte in einem Fachwerk ist das Schnittverfahren. Dabei wird die Stabkraftberechnung teilweise zurückgeführt auf die Lösung eines Lagerproblems. Hierzu wird für einen abgeschnittenen Teil des Fachwerks in einem geeigneten Knoten das erforderliche Momentengleichgewicht bestimmt damit das Teilstück nach dem Schnitt freistehend stabil bleibt. Abb. 2.19 illustriert dieses Verfahren für das eben mit dem Knotenverfahren behandelte Fachwerk.

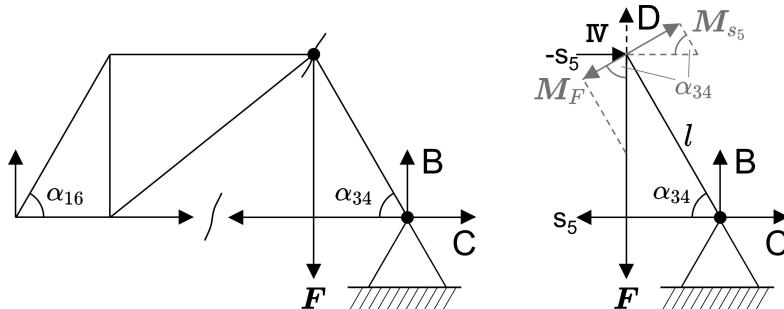


Abb. 2.19: Schnittverfahren: (a) Schnitte zum Herauslösen des Teilstückes aus dem in Abb. 2.17 gezeigten Fachwerk; (b) freistehendes Teilstück im Momentengleichgewicht.

Die Stabkräfte der zwei geschnittenen Stäbe heben sich gegenseitig auf. Forderung: horizontale Lagerkräfte sollen verschwinden, d.h. $C = 0$. Mit $B = F$ folgt $D = 0$. Damit das Teilstück in Abb. 2.19b freistehend stabil bleibt, muss das über den Hebel l vom Knoten IV auf das Gelenklager ausgeübte Moment verschwinden. Also muss gelten:

$$M_{IV} = l(F \cos \alpha_{34} - s_5 \sin \alpha_{34}) = 0$$

und damit

$$s_5 = F \cot \alpha_{34}$$

Da $\alpha_{16} = \alpha_{34}$ entspricht das dem Ergebnis aus dem Knotenverfahren.

Beispiel 2.6 Fachwerk mit Belastung

Betrachtet wird das Fachwerk in Abb. 2.20 aus 6 gleichlangen, masselosen Stäben das in den Punkten A und D fest verankert ist. Das Fachwerk wird im Knoten C mit der Kraft P belastet und gesucht werden die Zug- und Druckkräfte in den Stäben.

In einem ersten Schritt wird das Fachwerk in den Punkten A und D freigeschnitten und die feste Verankerung dieser Knoten durch horizontal und vertikal in diesen Knoten angreifende Kräfte F_{A_H} und F_{A_V} beziehungsweise F_{D_H} und F_{D_V} ersetzt.

Im einem zweiten Schritt werden die Gleichungen für das Kräftegleichgewicht in den fünf Knoten A, B, C, D und E aufgestellt.

$$A : F_x : s_1 + F_{A_H} = 0$$

$$B : F_x : s_2 - s_1 + s_4 \cos 60^\circ - s_3 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_y : F_{A_V} = 0$$

$$F_y : s_3 \sin 60^\circ + s_4 \sin 60^\circ = 0$$

$$C : F_x : -s_2 + s_5 \cos 60^\circ = 0$$

$$E : F_x : -s_6 - s_4 \cos 60^\circ + s_5 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_y : -P + s_5 \sin 60^\circ = 0$$

$$F_y : -s_4 \sin 60^\circ - s_5 \sin 60^\circ = 0$$

$$D : F_x : F_{D_H} + s_6 + s_3 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_y : F_{D_V} - s_3 \sin 60^\circ = 0$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen kann man die Zug- und Druckkräfte bestimmen welche auf die sechs Stäbe einwirken ($\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ und $\cos 60^\circ = 1/2$).

Druckkräfte:

$$s_1 = -\sqrt{3} \cdot P ; \quad s_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot P ; \quad s_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot P$$

Zugkräfte:

$$s_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot P ; \quad s_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot P ; \quad s_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot P$$

Zudem erhält man für die Kräfte in den Knoten A und D

$$F_{A_H} = \sqrt{3} \cdot P ; \quad F_{A_V} = 0 ; \quad F_{D_H} = -\sqrt{3} \cdot P ; \quad D_{A_V} = P$$

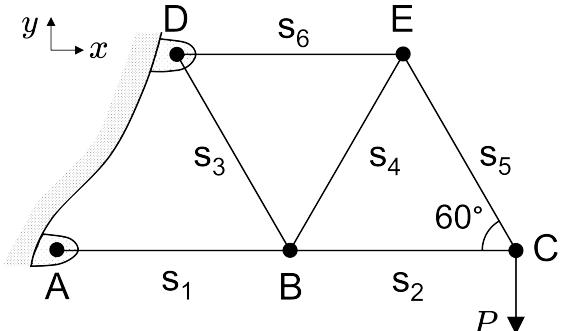


Abb. 2.20

2.4 Reibungskräfte

In unserem täglichen Leben begegnen wir Reibungskräften überall. Ohne sie würde vieles in unserer Welt nicht funktionieren. Das allgemeinste Beispiel ist wohl das Gehen. Wie schwierig das Gehen ohne bzw. mit sehr verminderter Reibungskraft sein kann, das erfahren wir wenn wir uns auf eine Eisfläche begeben. Ohne Reibung würden wir auch unsere Autos nicht um die Kurve kriegen. Es ist die Reibungskraft zwischen den Radflächen und der Fahrbahn die es ermöglicht, dass wir mit Autos Kurven fahren können. Wie wir wissen, hat aber auch das Grenzen. Fährt man zu schnell in eine Kurve und die Zentrifugalkraft wird größer wie die maximale Reibungskraft, dann verlässt das Auto ganz schnell die Fahrbahn. Reibungskräfte sind Berührungs Kräfte, sie entstehen da, wo sich zwei Körper berühren. Körper können bei Berührung in Ruhe sein, dann spricht man von Haftreibung, oder sie können sich relativ zueinander bewegen, dann spricht man von Gleitreibung. Die hier kurz behandelte Haft- und Gleitreibung, nach Charles Augustin de Coulomb auch als Coulombsche Reibung bezeichnet, sind Beispiele für äußere Reibung, das heißt der Reibung zwischen starren Körpern. Auf die innere Reibung welche der Viskosität und Zähigkeit von Körpern zugrunde liegt, wird in einem späteren Abschnitt eingegangen.

Zuerst soll die Haftreibung betrachtet werden. Abb. 2.21 zeigt einen Klotz der Masse m auf einer schiefen Ebene. Der Neigungswinkel α sei so eingestellt, dass der Klotz noch nicht rutscht sondern haften bleibt. Die Gewichtskraft \mathbf{F}_G greift im Schwerpunkt S des Klotzes an und ihre Komponente normal zur Berührungsfläche \mathbf{F}_G^n wird kompensiert durch eine entgegengesetzt gleich große Kraft \mathbf{F}_N , die Kraft welche die schiefe Ebene dem Klotz entgegensetzt (in einem späteren Abschnitt wird diese Kraft uns wieder als Zwangskraft der schiefen Ebene begegnen). Der durch die Normalkraft \mathbf{F}_N ausgeübte Druck bewirkt eine Reibungskraft \mathbf{F}_R in der Berührungsfläche welche der Tangentialkomponente der Gewichtskraft \mathbf{F}_G^t entgegenwirkt. Solange \mathbf{F}_G^t kleiner ist wie der Maximalwert den die Reibungskraft für das System aus Klotzmaterial und Material der schiefen Ebene annehmen kann, stellt sich \mathbf{F}_R gerade so ein dass gilt $\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_G^t = 0$. Übersteigt aber \mathbf{F}_G^t den Maximalwert den \mathbf{F}_R annehmen kann, dann beginnt der Klotz zu rutschen. Für den Maximalwert von $F_R = |\mathbf{F}_R|$ ist die Gleichgewichtsbedingung

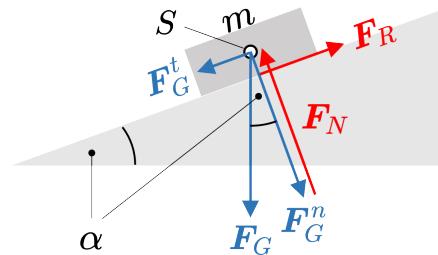


Abb. 2.21

$$F_R - m \cdot g \cdot \sin \alpha_{max} = 0 \quad (2.9)$$

wobei α_{max} der Winkel ist bei dem der Klotz gerade noch haften bleibt. Die Haftreibung ist eine Reaktionskraft auf den durch F_N ausgeübten Druck. Der maximale Wert den F_R annehmen kann hängt somit von F_N ab:

$$F_R = \mu_0 \cdot F_N \quad (2.10)$$

wobei μ_0 der sogenannte Haftreibungskoeffizient bzw. Haftreibungsbeiwert ist. Für den Maximalwert der Haftreibung auf der schieben Ebene hat man also

$$F_R = \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha_{max} \quad (2.11)$$

Aus Gl. (2.9) und Gl. (2.11) folgt für μ_0

$$\mu_0 = \tan \alpha_{max} \quad (2.12)$$

Die schiefen Ebene bietet somit eine einfache Möglichkeit, μ_0 durch die Messung von α_{max} für eine beliebige Kombination von Klotzmaterial und Material der schiefen Ebene zu bestimmen.

Der Winkel $\rho_0 = \alpha_{max}$ ist der Öffnungswinkel des sogenannten Reibungskegels (Abb. 2.22). Dieser Öffnungswinkel wird unterhalb der Berührungsfläche aus der Normalkraft \mathbf{F}_N und der maximalen Reibungskraft \mathbf{F}_R^{max} gebildet, die sich zu einer virtuellen Ersatzkraft addieren welche im Kegelmantel verläuft. Solange die resultierende aller äußeren Kräfte oberhalb der Berührungsfläche innerhalb dieses Kegels bzw. in diesem Kegelmantel liegt, bleibt der betrachtete Körper in Ruhe. Im Fall der schiefen Ebene addieren sich \mathbf{F}_G^t und \mathbf{F}_G^n zur resultierenden äußeren Kraft, der Gewichtskraft \mathbf{F}_G . Das gleiche Argument gilt aber auch falls beispielsweise $\alpha = 0$, mit dem Unterschied, dass dann $\mathbf{F}_G^n = \mathbf{F}_G$ und \mathbf{F}_G^t beispielsweise durch die Verschiebekraft ersetzt wird, mit der man versucht den Körper aus seiner Ruhelage zu bewegen.

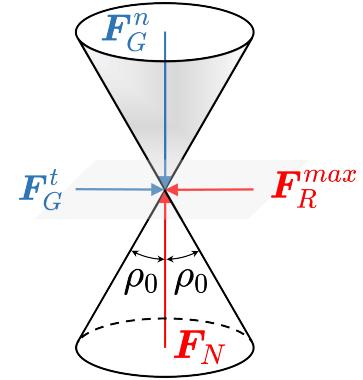


Abb. 2.22

Genauso wie die maximale Haftreibungskraft proportional zur Normalkraft F_N ist, so ist auch die Gleitreibungskraft proportional zu F_N . Der Proportionalitätsfaktor bei Gleitreibung ist der Gleitreibungskoeffizient bzw. Gleitreibungsbeiwert μ

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (2.13)$$

In den allermeisten Fällen ist der Gleitreibungskoeffizient μ kleiner wie der Haftreibungskoeffizient μ_0 . Das heißt, wenn die Haftreibung zwischen zwei Körpern erst einmal überwunden ist, wird weniger Kraft benötigt die Relativbewegung aufrecht zu erhalten, wie nötig war sie zu beginnen. Tab. 2.1 listet μ_0 - und μ -Werte für einige Materialkompositionen von praktischer Bedeutung. Die für solche Materialpaarungen gemessenen Werte hängen von der spezifischen Oberflächenbeschaffenheit der berührenden Körper ab. Daher findet man in der Literatur häufig nicht Einzelwerte für μ_0 und μ sondern Wertebereiche.

Tab. 2.1: Haftreibungs- und Gleitreibungskoeffizienten μ_0 und μ für einige ausgewählte Materialpaarungen.

Materialpaarung	μ_0 - Haftreibung		μ_0 - Gleitreibung	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Stahl auf Stahl	0.15 - 0.30	0.10 - 0.12	0.10 - 0.12	0.01 - 0.07
Stahl auf Eis	0.03	–	0.01	–
Holz auf Holz	0.40 - 0.60	0.16	0.20 - 0.40	0.05 - 0.10
Leder auf Metall	0.30 - 0.50	0.16	0.30	0.15
Gummi auf Asphalt	0.70 - 0.90	0.10 ¹⁾	0.50 - 0.60	0.05 ¹⁾

¹⁾ Werte auf Eis, nicht geschmiert.

Beispiel 2.7 Die Seilreibung

Betrachtet wird ein Seil, das über eine feststehende Zylinderscheibe läuft die nichtdrehbar verankert ist (Abb. 2.23a). An einem Ende des Seils befindet sich ein Gewicht mit der Gewichtskraft \mathbf{F}_G , am anderen Ende wird mit der Seilkraft \mathbf{F}_S gezogen, um gerade das Gleichgewicht zu halten. Die dazu notwendige Kraft \mathbf{F}_S hängt vom Umschlingungswinkel α ab. Die Kräfte \mathbf{F}_G und $\mathbf{F}_S(\alpha)$ sind Tangentialkräfte an die Zylinderscheibe.

Zur Herleitung der Gleichung für die Seilreibung betrachtet man ein infinitesimales Winkelement $d\varphi$ der Zylinderscheibe über welche das Seil läuft (Abb. 2.23b). Infolge der links und rechts an dem Seilstück angreifenden Kräfte spannt es sich über die Zylinderscheibe und wird an seine Oberfläche gepresst. Jetzt setzt man voraus, dass die daraus folgende Druckverteilung über das Winkelsegment $d\varphi$ gleichmäßig ist. Damit betrachtet man diese Druckverteilung als durch eine in der Mitte des Berührungsreiches (bei $d\varphi/2$) ansetzende Einzelkraft $d\mathbf{F}_N$ bewirkt. Wie sich aus Abb. 2.23b ablesen lässt, gilt in erster Näherung ($\sin \varphi \approx \varphi$)

$$d\mathbf{F}_N = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = F \cdot d\varphi \quad (2.14)$$

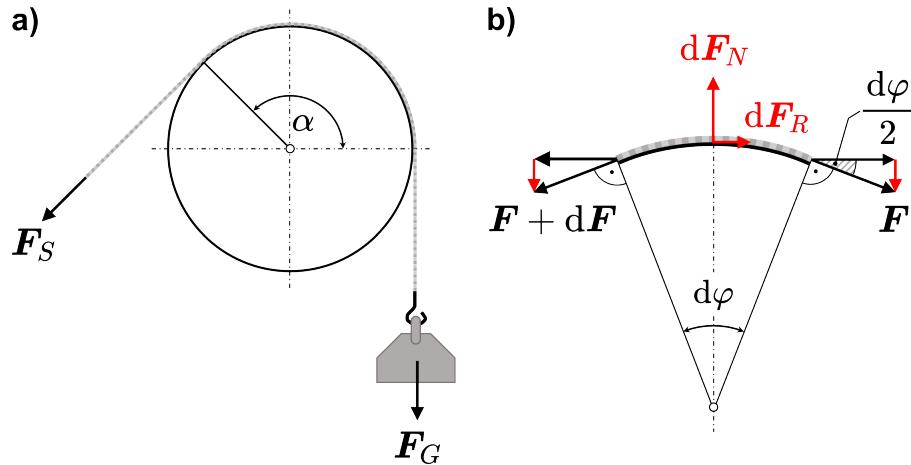


Abb. 2.23: Über einen Zylindermantel laufendes Seil: Kräfte am Seil (a) und am Seilelement mit Winkel $d\varphi$ angreifende Kräfte (b).

Ist nun wie in Abb. 2.23b skizziert die Seilkraft an einem Ende etwas größer (um dF) wie am anderen Ende, dann gleitet das Seil in die Richtung der etwas größeren Kraft. Da der Haftreibungskoeffizient μ_0 für das Materialpaar aus Seil und Zylinderoberfläche ungleich Null ist, bewirkt dF_N bei $d\varphi/2$ eine Reibungskraft dF_R in der Berührungs ebene zwischen Seil und Oberfläche der Zylinderscheibe. Es sei nun die Kraftdifferenz dF zwischen beiden Seilenden Abb. 2.23b gerade so groß, dass $dF = dF_R$. Dann ist die Gleichgewichtsbedingung für die maximale Haftreibung erfüllt und es gilt

$$dF = dF_R = \mu_0 \cdot dF_N = \mu_0 \cdot F \cdot d\varphi \quad (2.15)$$

Damit hat man eine Differentialgleichung für die Tangentialkraft F und den Winkel φ . Diese ist durch Trennung der Variablen F und φ und einfache Integration zu lösen. Der Winkel φ läuft dabei von 0 bis zum jeweils vorliegenden Umschlingungswinkel α und F von F_0 bis F_α , also

$$\int_{F_0}^{F_\alpha} \frac{dF}{F} = \ln F_\alpha - \ln F_0 = \mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\varphi = \mu_0 \cdot \alpha$$

Damit erhält man die Grundgleichung der Seilreibung

$$F_\alpha = F_0 \cdot e^{\mu_0 \alpha} \quad (\text{Euler-Eytelwein Formel}) \quad (2.16)$$

Diese Gleichung besagt, dass eine kleinere Kraft F_0 (F_G in Abb. 2.23a) ausreicht, um eine größere Kraft F_α (F_S in Abb. 2.23a) zu kompensieren. Gl. (2.16) formuliert eine Gleich gewichtsbedingung: Erst wenn F_α den Wert in Gl. (2.16) erreicht, kann die Gewichtskraft

die Kraft F_α nicht mehr kompensieren, das Seil läuft dann nach links und das Gewicht wird gehoben. Gl. (2.16) wurde abgeleitet für den Fall dass in der Skizze von Abb. 2.23 $\mathbf{F}_S(\alpha) > \mathbf{F}_G$ (um $d\mathbf{F}$). Liegt aber der umgekehrte Fall vor, das heißt $\mathbf{F}_S(\alpha) < \mathbf{F}_G$ (wieder um $d\mathbf{F}$), dann zeigt der Pfeil von $d\mathbf{F}_R$ in Abb. 2.23b in die entgegengesetzte Richtung und man findet dann dass gilt:

$$F_\alpha = F_0 \cdot e^{-\mu_0 \alpha} \quad (2.17)$$

Gl. (2.16) ist also die Gleichung für das Heben einer Last und Gl. (2.17) für das Absenken einer Last. Bei der Konstruktion in Abb. 2.23 interessiert natürlich der praktische Aspekt, das heißt wieviel Kraft man sich erspart wenn man eine Gewichtskraft über eine Seilwinde wie in Abb. 2.23a kompensiert. Der maximale Winkel α in Abb. 2.23a ist π . Damit ergibt sich bei einem Haftkoeffizienten von zum Beispiel $\mu_0 = 0.35$ eine Reduktion um eine Faktor von ca. 3.0. Es ist damit also möglich, eine 3.0-mal so große Kraft zu kompensieren. Es geht aber noch sehr viel mehr. Schlingt man das Seil mehrmals um die Zylinderscheibe dann erhöht jede Umschlingung den Umlaufwinkel um einen Faktor 2π und vergrößert die Kraftreduktion damit um einen weiteren Faktor 9.0. Mit einem mehrmals um einen Poller gewickelten Seil können damit sehr große Kräfte kompensiert werden, wie beispielsweise beim Vertauen von Schiffen im Hafen.

3. Elastostatik

Das Gebiet der Elastostatik befasst sich mit der Mechanik reversibel deformierbarer Körper unter äußerer Belastung. Letztere kann verschiedenen Ursachen haben, ist aber immer klein genug, dass die Deformation eines Körpers linear mit der Belastung skaliert und reversibel bleibt. Körper werden dabei als Kontinua betrachtet deren diskrete innere Struktur für das Verhalten eines Körpers selbst keine Rolle spielt. Die Elastostatik, im deutschen Sprachraum auch als Festigkeitslehre bezeichnet, ist damit ein Teilgebiet der Kontinuumsmechanik. Die makroskopischen Größen welche das Verhalten eines Körpers unter Belastung beschreiben sind beispielsweise Spannung, Dehnung, Torsion, oder Verbiegung eines Festkörpers, oder der Gleichgewichtsdruck bei Flüssigkeiten.

3.1 Spannungen

Kräfte können sowohl im Inneren eines Kontinuumskörper als auch an seiner Oberfläche angreifen. Die auf ein Volumenelement im Inneren eines Kontinuumskörper wirkenden Kräfte werden dabei von seinen jeweiligen Nachbar-Volumenelementen ausübt. Jedes Volumenelement dV (Abb. 3.1) in einem Kontinuumskörper überträgt Kräfte die mit einer entsprechenden Kraftdichte in diesem Volumenelement assoziiert sind. Wird so ein Volumenelement freigeschnitten, so müssen diese Kräfte an den Schnittflächen von dV weiterwirken damit der Spannungszustand des freigeschnittenen Volumenelements mit dem des nicht freigeschnittenen Volumenelements identisch bleibt (Schnittprinzip).

Für einen Kontinuumskörper gilt:

- Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$: Ist assoziiert mit Volumenelement dV .
- Spannung: Ist assoziiert mit Schnittflächen dA .

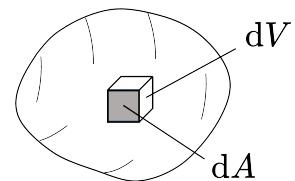


Abb. 3.1

Aus der Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ folgt die differentielle Kraft $d\mathbf{F}$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{r})dV \quad (3.1)$$

Zusätzlich zu inneren Kräften gibt es äußere Kräfte die auf jedes Volumenelement des Kontinuumskörpern wirken. Ein Beispiel hierfür ist die Schwerkraft:

$$\mathbf{f}_{Schwerkraft} = -\varrho \cdot g \cdot \mathbf{e}_z \quad (\varrho = \text{Massendichte})$$

Für die Spannung an einem Schnittflächenelement dA eines freigeschnittenen Volumenelements dV muss gelten:

$$\mathbf{P} dA = d\mathbf{F}$$

Hierbei ist \mathbf{P} der sogenannte Spannungsvektor mit der Dimension Kraft / Fläche. Die Gesamtspannung an einem Schnittflächenelement dA wird zerlegt in eine Spannungskomponente senkrecht zur Schnittfläche, die sogenannte Normalspannung, und eine Spannungskomponente parallel zur Schnittfläche, die sogenannte Schubspannung.

Für diese Spannungskomponenten gilt

— Schubspannung: $|d\mathbf{F}_t| = \tau dA$

— Normalspannung: $|d\mathbf{F}_n| = \sigma dA$

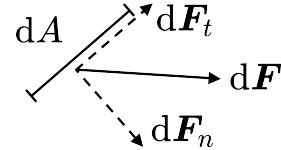


Abb. 3.2

Die Konvention ist, dass zur Bezeichnung von Normalspannungen der griechische Buchstabe σ und für Schubspannungen der griechische Buchstabe τ verwendet wird. Positive Normalspannungen werden als Zugspannungen und negative Normalspannungen als Druckspannungen bezeichnet. Zugspannungen zeigen also immer in Richtung des Flächennormalenvektors, das heißt von der Schnittfläche weg, und umgekehrt für Druckspannungen. Schubspannungen können ebenfalls positiv oder negativ sein. Erzeugt eine Schubkraft ein positives Moment um den Flächenschwerpunkt, das heißt eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn, dann ist die Schubspannung positiv; erzeugt sie ein negatives Moment, dann ist die Schubspannung negativ.

Schubspannungen werden zudem noch in die jeweiligen Komponenten der in der Schnittfläche liegenden Koordinatenachsen zerlegt. Dabei steht der erste Index von τ für die Lage der Schnittebene und der zweite Index für die Richtung der Schubspannungskomponente in der Schnittebene. So bezeichnet beispielsweise τ_{xy} eine Schubspannung in einer Fläche deren Normalenvektor parallel zur x -Koordinate ist und welche selbst in dieser Fläche in Richtung der y -Koordinate zeigt.

3.1.1 Zur Herleitung des Spannungstensors

Sei dA das Flächenelement mit Normalenvektor \mathbf{n} welches die Volumelemente dV_1 und dV_2 in Abb. 3.3 voneinander trennt. Mit \mathbf{P}_n als dem zugehörigen Spannungsvektor übt dann dV_1 auf dV_2 eine Kraft proportional zu dA aus:

$$d\mathbf{F}_{12} = \mathbf{P}_n dA$$

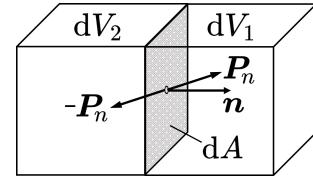


Abb. 3.3

Umgekehrt übt dV_2 die entgegengesetzte gleiche Kraft auf dV_1 aus:

$$d\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{P}_n dA$$

Ein quaderförmiges Volumenelement dV wie in Abb. 3.4 gezeigt hat sechs Nachbar-Volumenelemente. An jeder der sechs Grenzflächen von dV gilt ein entsprechendes Kräftegleichgewicht mit dem jeweiligen Nachbar-Volumenelement. Zur Berechnung der Gesamtkraft auf ein solches Volumenelement $dV = dx dy dz$ werden die an den jeweiligen Grenzflächen übertragenen Kräfte vorzeichenrichtig addiert. Für Kräfte in x -Richtung sind das die in Abb. 3.4 zur x -Achse normalen Grenzflächen mit den Eckpunkten 1-2-3-4 und 5-6-7-8. Zuerst betrachtet man nur die Fläche 1-2-3-4 für sich alleine. Auf beiden Seiten der Fläche wirkt die gleiche Kraft, aber in entgegengesetzter Richtung: nämlich $-\mathbf{P}_x dy dz$ an der Außenseite (negative x -Richtung) und $\mathbf{P}_x dy dz$ an der Innenseite (positive x -Richtung). Verschiebt man nun eine Kopie dieser Fläche entlang der x -Achse in Richtung der Fläche 5-6-7-8 so ändert sich die wirkende Kraft auf beiden Seiten um einen Betrag proportional zur Verschiebung mal der Veränderung von \mathbf{P}_x über die Strecke dieser Verschiebung. An der Position der Fläche 5-6-7-8 ist damit die von dV in x -Richtung übertragene Kraft:

$$d\mathbf{F}_{5678} = \left(\mathbf{P}_x + \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

Die von dV an der Position der Fläche 1-2-3-4 übertragene Kraft ist unverändert:

$$d\mathbf{F}_{1234} = -\mathbf{P}_x dy dz$$

Damit erhält man für die gesamte von dV in x -Richtung übertragene Kraft:

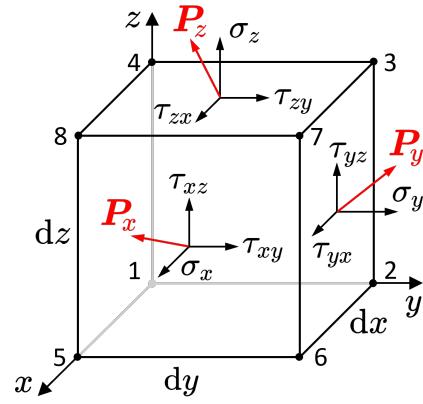


Abb. 3.4

$$d\mathbf{F}_{5678} + d\mathbf{F}_{1234} = \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} dx dy dz$$

Mit entsprechenden Betrachtungen für die Gesamtkraft auf die Flächen normal zur y - bzw. z -Achse folgt für die durch das Volumenelement dV in Abb. 3.4 übertragene Gesamtkraft

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.2)$$

Mit den Achsen-Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ und $\hat{\mathbf{k}}$ lassen sich die Spannungsvektoren \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y und \mathbf{P}_z in ihre Richtungskomponenten zerlegen.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x &= \hat{\mathbf{i}}\sigma_x + \hat{\mathbf{j}}\tau_{xy} + \hat{\mathbf{k}}\tau_{xz} \\ \mathbf{P}_y &= \hat{\mathbf{i}}\tau_{yx} + \hat{\mathbf{j}}\sigma_y + \hat{\mathbf{k}}\tau_{yz} \\ \mathbf{P}_z &= \hat{\mathbf{i}}\tau_{zx} + \hat{\mathbf{j}}\tau_{zy} + \hat{\mathbf{k}}\sigma_z \end{aligned} \quad (3.3)$$

Damit folgt aus Gl. (3.2) für die Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{F}}{dx dy dz} &= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \\ &\quad \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \\ &\quad \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{wobei} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

der Spannungstensor ist. Der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Für eine beliebige Schnittfläche dA mit Normalenvektor \mathbf{n} erhält man den jeweiligen Spannungsvektor \mathbf{P}_n durch Multiplikation von $\underline{\underline{\sigma}}$ mit \mathbf{n}

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{n} \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.6)$$

Da der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ symmetrisch ist, macht es für die Bestimmung von \mathbf{P}_n keinen Unterschied ob man ihn von links oder von rechts mit dem Normalenvektor \mathbf{n} multipliziert.

3.1.2 Spannungen in der Ebene

Zur Berechnung des ebenen Spannungszustands in einem bestimmten Punkt P eines Körpers nutzt man das Momentengleichgewicht in diesem Punkt P sowie das Kräftegleichgewicht in der entsprechenden Schnittfläche in welcher P liegt. Die Situation ist in Abb. 3.5 illustriert, welche den Schnitt durch einen Körper mit einem beliebigen Schnittwinkel φ zeigt. Gesucht ist nun der Spannungszustand im Punkt $P = (dx/2, dy/2)$ dieser Schnittfläche.

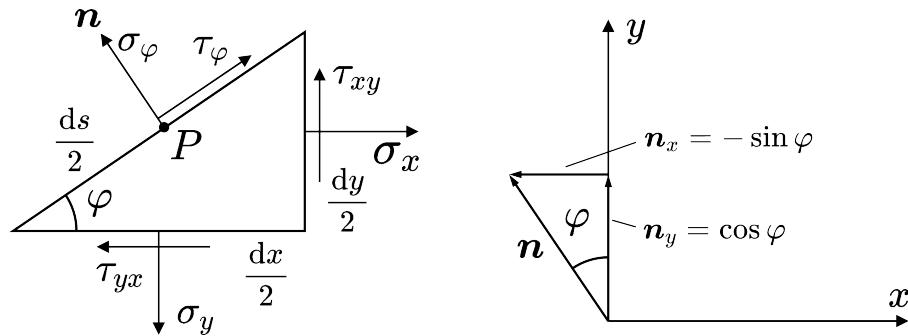


Abb. 3.5: Berechnung der Spannung in einem Punkt P einer beliebigen Schnittfläche.

Erster Schritt: Bestimzung des Momentengleichgewichts um P .

$$(dz) \left(\tau_{xy} dy \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx \frac{dy}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.7)$$

↑
3-dim. Fall

Verallgemeinert für den dreidimensionalen Fall gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

Zweiter Schritt: Aufstellen des Kräftegleichgewichts in der xy -Ebene. Kräftegleichgewicht in der xy -Ebene bedeutet dass in Abb. 3.5 die Summe aller Kräfte F_x in x -Richtung Null sein muss und ebenso muss die Summe aller Kräfte F_y in y -Richtung Null sein. Also

$$F_x : (-\sigma_\varphi \sin \varphi + \tau_\varphi \cos \varphi) ds dz + \sigma_x dy dz - \tau_{yx} dx dz = 0$$

$$F_y : (\sigma_\varphi \cos \varphi + \tau_\varphi \sin \varphi) ds dz + \tau_{xy} dy dz - \sigma_y dx dz = 0$$

Damit ist folgendes Gleichungssystem zu lösen

$$\left. \begin{aligned} (-\sigma_\varphi \sin \varphi + \tau_\varphi \cos \varphi) ds dz &= -\sigma_x dy dz + \tau_{yx} dx dz \\ (\sigma_\varphi \cos \varphi + \tau_\varphi \sin \varphi) ds dz &= -\tau_{xy} dy dz + \sigma_y dx dz \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Aus Abb. 3.5 kann man ablesen, dass

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = ds \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = ds \cdot \begin{pmatrix} n_y \\ -n_x \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Mit $\mathbf{F} = \mathbf{P}_n ds dz$ in P , $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ aus Gl. (3.7) und mit Gl. (3.10), folgt aus den rechten Seiten von Gl. (3.9) dass

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \mathbf{n} \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.11)$$

wobei $\underline{\underline{\sigma}}$ hier der symmetrische Spannungstensor in der Ebene ist.

Multipliziert man in Gl. (3.9) F_x mit $\sin \varphi$ und F_y mit $\cos \varphi$ und subtrahiert die Resultate voneinander so erhält man eine Gleichung für σ_φ . Umgekehrt, multipliziert man F_x mit $\cos \varphi$ und F_y mit $\sin \varphi$ und addiert die Resultate, dann bekommt man eine Gleichung für τ_φ . Nutzt man nun noch die aus dem Momentengleichgewicht gewonnenen Identität $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (Gl. (3.7)) sowie Gl. (3.10) dann lauten die Gleichungen für σ_φ und τ_φ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_\varphi &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Der Winkel 2φ in Gl. (3.12) lässt sich durch Quadrierung der Gleichungen und anschließende Addition eliminieren und man erhält

$$\left(\sigma_\varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\varphi^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}_{r^2} \quad (3.13)$$

Die rechte Seite ist eine von φ unabhängige Konstante, hier mit r^2 bezeichnet da es sich bei Gl. (3.13) ersichtlich um die Gleichung eines Kreises mit den Variablen σ_φ und τ_φ handelt dessen Mittelpunkt auf der σ_φ -Achse um den Betrag $(\sigma_y + \sigma_x)/2$ verschoben ist. Abb. 3.6 zeigt diesen sogenannten Mohrschen Spannungskreis. Dieser Kreis beschreibt

die Wertepaare σ_φ und τ_φ welche als Funktion des Schnittwinkels φ in der $\sigma_\varphi\tau_\varphi$ -Ebene durchlaufen werden. Die Werte für σ_φ und τ_φ für $\varphi = 0^\circ$ sind Gl. (3.12) zu entnehmen. Wie bereits aus Abb. 3.5 ersichtlich, bedeutet $\varphi = 0^\circ$ einen Schnitt senkrecht zur y -Achse und folgerichtig ist daher $\tau_{\varphi=0} = \tau_{xy}$ und $\sigma_{\varphi=0} = \sigma_y$. Für positive bzw. negative Winkel φ läuft 2φ in Gl. (3.12) von diesem Radiusvektor weg und zwar gegen bzw. im Uhrzeigersinn. An den Punkten σ_1 und σ_2 , das heißt bei den Winkeln $2\varphi_1$ und $2\varphi_2$, verschwindet jeweils die Schubspannung τ_φ . σ_1 und σ_2 sind die sogenannten Hauptspannungen und φ_1 und φ_2 definieren die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen. Für diese Winkel kann man aus Abb. 3.6 ablesen (φ_1 ist negativ):

$$2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 180^\circ = \pi \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

Die exakten Werte beider Winkel erhält man aus Gl. (3.12) durch Lösung der Optimierungsaufgabe $d\sigma_\varphi/d\varphi = 0$. Die maximalen Werte der Schubspannung erhält man analog aus $d\tau_\varphi/d\varphi = 0$. Der 2φ -Winkel zwischen den Extremwerten der Normalspannung σ_1 und σ_2 und den Extremwerten der Schubspannung τ_φ^{\min} und τ_φ^{\max} ist natürlich 90° . Das heißt, die Schnittwinkel der maximalen / minimalen Schubspannung ist um 45° ($\pi/4$) gegenüber dem Schnittwinkel der maximalen / minimalen Normalspannung rotiert. Zusammengefasst gilt für einen ebenen Spannungszustand:

- Es gibt stets zwei zueinander orthogonale Hauptspannungsrichtungen. Für diese nehmen die Normalspannungen Extremwerte an und die Schubspannungen verschwinden.
- Die zwei Richtungen in welche die Schubspannung jeweils ihren Minimal- bzw. Maximalwert annimmt sind um $\frac{\pi}{4}$ gegenüber den Haupstspannungsrichtungen verdreht.

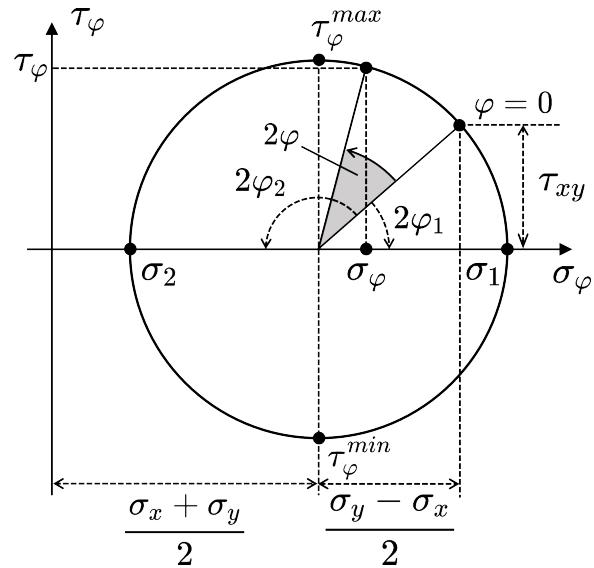


Abb. 3.6: Mohrscher Spannungskreis.

3.1.3 Der Spannungsellipsoid

Eine alternative Methode zum Mohrschen Spannungskreis zur graphischen Darstellung des Spannungszustand in einem Körperpunkt ist der sogenannte Spannungsellipsoid im räumlichen Spannungsfall bzw. die Spannungsellipse im ebenen Spannungsfall. Die Spannungsellipse in Abb. 3.7 wird beschrieben durch

$$\sum_{i,k} \sigma_{ik} x_i x_k = 1$$

In der Hauptachsendarstellung:

$$\underbrace{\frac{\sigma_1}{a^2}}_{\underline{x}'} x_1'^2 + \underbrace{\frac{1}{b^2}}_{\underline{x}'} x_2'^2 = 1$$

Die Hauptachsen und Hauptspannungen liefert dabei die Eigenwertgleichung

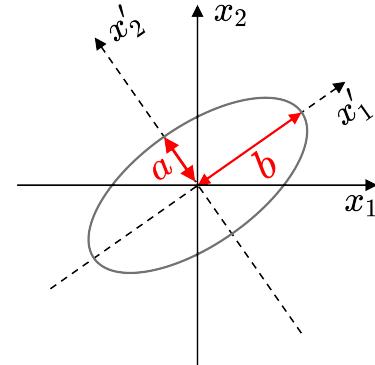


Abb. 3.7

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{x}^{(i)} = \sigma_i \underline{x}^{(i)} \quad \text{bzw. ausgeschrieben} \quad \sum_i \sigma_{kl} x_l^{(i)} = \sigma_i x_k^{(i)} \quad (3.14)$$

wobei $\underline{x}^{(i)}$ die Eigenvektoren und σ_i die entsprechenden Eigenwerte sind. Die σ_{kl} sind symmetrisch und die Eigenvektoren \underline{x}^i sind daher alle reell und können paarweise zueinander orthogonal gewählt werden.

$$\sum_k x_k^{(i)} x_k^{(j)} = \delta_{ij}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{x}}^T} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Matrizen $\underline{\underline{x}}'$ bzw. $\underline{\underline{x}}^T$ sind zu $\underline{\underline{x}}$ orthogonal. Oder anders ausgedrückt:

$$\underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{x}}^T = \underline{\underline{x}}^{-1}$$

Die Eigenwertgleichungen gemäß Gl. (3.14) können zusammenfasst werden zu

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}} \underline{\underline{\sigma}}^D \quad (3.15)$$

wobei

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

der diagonalisiert Spannungstensor ist bei dem alle gemischten Tensorelemente (die Schubspannungen) verschwinden und in der Diagonalen als Eigenwerte die Hauptspannungen stehen. Durch Multiplikation von links mit $\underline{\underline{x}}'$ folgt aus Gl. (3.15) unmittelbar

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{x}}' \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{x}}$$

3.1.4 Kräfte und Momente im 3-dimensionalen Fall

Die Gleichungen für das Kräfte- und Momentengleichgewicht eines Volumenelements $dV = dx dy dz$ bestimmt man in analoger Weise zum 2-dimensionalen Fall (Abschnitt 3.1.2). Bezeichnen f_x , f_y und f_z wieder Volumenkräfte in die entsprechenden Achsenrichtungen dann muss für ein Kräftegleichgewicht des Quaders in Abb. 3.4 gelten dass die Gesamtkraft $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ in jede Koordinatenrichtung verschwindet, also

$$F_x = 0 = d\sigma_x dy dz + d\tau_{yx} dx dz + d\tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz$$

$$F_y = 0 = d\tau_{xy} dy dz + d\sigma_y dx dz + d\tau_{zy} dx dy + f_y dx dx dy$$

$$F_z = 0 = d\tau_{xz} dy dz + d\tau_{yx} dx dz + d\sigma_z dx dy + f_z dx dy dz$$

Damit erhält man die Gleichungen

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + f_x = 0$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + f_y = 0$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + f_z = 0$$

Zusammengefasst und verallgemeinert muss also im Kräftegleichgewicht gelten

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \tag{3.16}$$

Für das Momentengleichgewicht bezüglich der Drehachsen entlang σ_x , σ_y und σ_z durch die Mitte der jeweiligen Seitenflächen des Quaders in Abb. 3.4 lässt sich für $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ ablesen:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{e}}_y dy \times \hat{\mathbf{e}}_z \tau_{yz} dx dz) - (\hat{\mathbf{e}}_z dz \times \hat{\mathbf{e}}_y \tau_{zy} dx dy)] = \frac{1}{2} (\tau_{yz} - \tau_{zy}) dx dy dz = 0 \\ M_y &= \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{e}}_z dz \times \hat{\mathbf{e}}_x \tau_{zx} dx dy) - (\hat{\mathbf{e}}_x dx \times \hat{\mathbf{e}}_z \tau_{xz} dy dz)] = \frac{1}{2} (\tau_{zx} - \tau_{xz}) dx dy dz = 0 \\ M_z &= \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{e}}_x dx \times \hat{\mathbf{e}}_y \tau_{xy} dy dz) - (\hat{\mathbf{e}}_y dy \times \hat{\mathbf{e}}_x \tau_{yx} dx dz)] = \frac{1}{2} (\tau_{xy} - \tau_{yx}) dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

Nicht unerwartet erhält man das gleiche Ergebnis wie in Gl. (3.8), nämlich dass $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ gelten muss damit alle drei Komponenten von \mathbf{M} verschwinden. Anders ausgedrückt, der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ muss symmetrisch sein, also $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

3.2 Dehnungen

Dehnungen sind Verformungen eines Kontinuumskörper durch Längen- und / oder Winkeländerungen welche bewirken, dass der Ortsvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ eines Körperpunktes um einen Vektor $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ verschoben wird. Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\rho}$ einer Verformung kann zwar konstant sein, zumeist hängen seine Verschiebungskoordinaten ξ , η und ζ aber vom Ort ab, also $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ und $\zeta = \zeta(x, y, z)$. Naturgemäß sind Dehnungen immer das Ergebnis von Krafteinwirkungen. Normalspannungen verursachen Streckungen oder Stauchungen, das heißt Längenänderungen, während Schubspannungen sogenannte Gleitungen, d.h. Winkeländerungen, verursachen. Ein wichtiger Bestandteil der Charakterisierung von Werkstoffen ist die Bestimmung von Dehnungen als Funktion einwirkender Spannungen. Das Ergebnis entsprechender Messungen sind Spannungs-Dehnungs Diagramme die das Dehnungsverhalten eines Körpers unter den einwirkenden Spannungen beschreiben. Dabei werden drei verschiedene Bereiche unterschieden:

- Linear elastisch: Die Dehnung ist proportional zur Spannung und sie ist reversibel.
- Nichtlinear elastisch: Die Dehnung ist nicht mehr proportional zur Spannung aber weiterhin reversibel.
- Plastisch: Die Dehnung ist nicht mehr reversible und die Verformung bleibt ohne einwirkende Spannung bestehen.

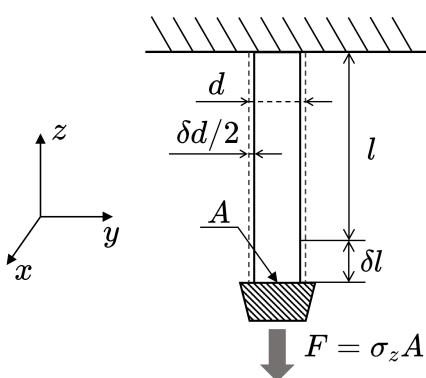
In technischen Anwendungen ist der linear elastischen Bereich von großer praktischer Bedeutung. In diesem Bereich sind die Längen- und Winkeländerungen relativ zu Ausgangslängen und Ausgangswinkeln so klein, dass zur Berechnung der Verformung eine lineare Näherung gerechtfertigt ist. Im linear elastischen Bereich sind Spannungen (σ, τ) und Dehnungen, das heißt Streckung oder Stauchung (ϵ) bzw. Gleitung (γ), durch die Hookeschen Gesetze verknüpft:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{Normalspannungen} \\ \tau = G \cdot \gamma \quad \text{Schubspannungen} \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Hierbei sind das Elastizitätsmodul E , auch als Youngsches Modul bezeichnet, und das Schubmodul G werkstoffspezifische Materialgrößen. Das Dehnungsverhalten von Kontinuumskörpern kann sehr komplex sein, da sich unterschiedliche Dehnungen zumeist überlagern. Im Allgemeinen ist es aber oft möglich den Dehnungszustand eines Körpers auf eine Überlagerung von einfacheren Dehnungssituationen zu reduzieren. Zu letzteren gehören einfache Zug- oder Druck-Situationen, Verbiegungen und Verzerrungen.

A) Einfacher Zugversuch

Bei dem in Abb. 3.8 skizzierten einfachen Zugversuch bewirkt das an einem hängenden Draht angebrachte Gewicht einen einachsigen Spannungszustand ($F = \sigma_z A$) der sowohl zu einer Änderung der Drahlänge l als auch zu einer Änderung des Drahtdurchmessers d führt. Die Dehnung des Drahtes ϵ_{zz} in z -Richtung ist gegeben durch



$$\epsilon_{zz} = \frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma_z}{E} \quad (3.18)$$

Die Abnahme des Drahtdurchmessers wird durch die Dehnungskomponenten ϵ_{xx} und ϵ_{yy} in der xy -Ebene beschrieben.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\delta d}{d} = -\mu \epsilon_{zz} \quad (3.19)$$

Abb. 3.8: Einfacher Zugversuch.

wobei die sogenannte Querkontraktionszahl μ , auch oft als Poissonsche Zahl bezeichnet, eine werkstoffspezifische Materialgröße ist. Genau wie bei den Komponenten des Spannungstensors, beschreiben die Indizes der Komponenten ϵ_{ik} des Dehnungstensors die Richtung der Normalen zur Schnittfläche (erster Index) und eine Richtungscoordinate in der Schnittfläche (zweiter Index).

B) Balkenbiegung

Seien ρ_1 und ρ_2 die Krümmungsradien welche die Dehnung bzw. Stauchung des in Abb. 3.9 skizzierten infinitesimalen Volumenelements in dx - bzw. dy -Richtung beschreiben. Aus der Skizze lassen sich die durch die Balkenbiegung verursachten Streckungen und Stauchungen ablesen. ϵ_{xx} und ϵ_{yy} sind jeweils die Dehnungskomponenten in x - und in y -Richtung. Für diese gilt:

$$\epsilon_{xx} = \frac{(\rho_1 + z)d\varphi - \rho_1 d\varphi}{dx} = z \frac{d\varphi}{dx} = \frac{z}{\rho_1}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{(\rho_2 - z)d\chi - \rho_2 d\chi}{dy} = -z \frac{d\chi}{dy} = \frac{z}{\rho_2}$$

$$\mu = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Diese vereinfachte Betrachtung der Balkenbiegung ignoriert, dass es in x - und in y -Richtung jeweils eine Streckung und Stauchung gibt und nicht nur eine Streckung in

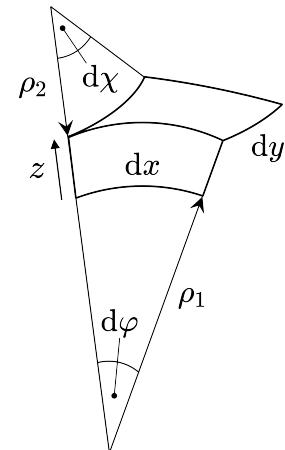


Abb. 3.9: Balkenbiegung.

x -Richtung und nur eine Stauchung in y -Richtung. Das Linienelement dx welches dem Winkel $d\varphi$ näherliegt erfährt verglichen mit dem „ungebogenen“ Zustand eine Stauchung während das von $d\varphi$ ferner liegende Linienelement dx eine Streckung erfährt. Gleiches gilt für das Linienelement dy bezogen auf den Winkel $d\chi$. Generell beziehen sich Streckungen und Stauchungen bei Biegungen auf die sogenannte neutrale Faser, das heißt auf das Linienelement im belasteten Kontinuumskörper dessen Länge dem Linienelement im entlasteten Zustand, also im „ungebogenen“ Zustand, entspricht. Läge diese neutrale Faser in x - und in y -Richtung in der Mitte, also bei $z/2$, dann ergäbe sich für die Streckungen und Stauchungen der entsprechenden Linienelemente in beiden Richtungen der halbe Betrag der oben angeführten Werte. Die Dehnungsdifferenzen zwischen gestreckten und gestauchten Linienelementen in x - und in y -Richtung bleiben gleich.

C) Verzerrungen

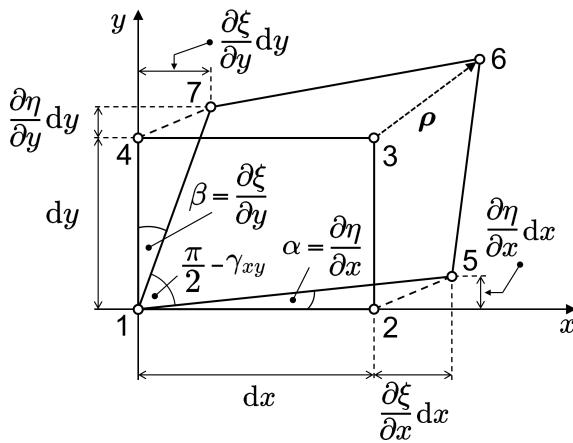


Abb. 3.10: Ebene Verzerrung.

Zuerst wird die ebene Verzerrung in Abb. 3.10 betrachtet. Diese verformt das Rechteck 1-2-3-4 in das Viereck 1-5-6-7. Der rechte Winkel zwischen den Strecken $\overline{12}$ und $\overline{14}$ des ursprünglichen Rechtecks wird dabei zum Winkel

$$\angle_{412} \mapsto \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

wobei $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ der Gleitwinkel ist. Für die hier betrachteten geringen Verformungen sind die Winkel α und β sehr klein und es gilt somit in linearer Näherung

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \dots \right) \approx \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} dx}{dy + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots \right) \approx \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

With that, one obtains for the gliding angle γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

Für die relative Dehnung, das Verhältnis von verzerrter zu ursprünglicher Länge, kann

man aus Abb. 3.9 für x - und y -Richtung ablesen:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\left(dy + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \right) - dy}{dy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Mit $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ bzw. $\gamma_{yx} = 2\epsilon_{yx}$ ergibt sich für den Verzerrungstensor in der Ebene

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \xi / \partial x & \gamma_{xy} / 2 \\ \gamma_{yx} / 2 & \partial \eta / \partial y \end{bmatrix}$$

Zur Beschreibung des räumlichen Verzerrungszustands kann das Ergebnis für die ebene Verzerrung einfach erweitert werden und mit den generalisierten Koordinaten

$$\boldsymbol{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

erhält man für den räumlichen Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ; \quad \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

Der Verzerrungszustand den $\underline{\underline{\epsilon}}$ beschreibt besteht aus Dehnungen (Streckungen und Stauchungen) und Scherungen (Winkeländerungen). Dehnungen sind mit den Diagonalkomponenten von $\underline{\underline{\epsilon}}$ und Scherungen mit den gemischten Komponenten verknüpft. Mit $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ ist der Verzerrungstensor symmetrisch. Die mit Dehnungen und Scherungen eines Kontinuumskörper verknüpfte Volumenänderung lässt sich in linearer Näherung (d.h. sehr geringe Verformung) einfach bestimmen:

$$\delta V = \prod_{i=1}^3 dx_i \left(1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right) - dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\delta V = dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \text{nichtlineare Glieder}$$

Somit ist die relative Volumenänderung

$$\frac{\delta V}{V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii} = \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (3.21)$$

wobei $\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})$ die Spur des Verzerrungstensors ist.

3.3 Zum Hookeschen Gesetz

Der vorangegangenen Abschnitt hat bereits vom Hookeschen Gesetz Gebrauch gemacht. Dieses Gesetz beschreibt die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung in einem isotropen und homogenen elastischen Körper für kleine Verzerrungen. Hierbei bedeutet homogen, dass die elastische Eigenschaften des betrachteten Körpers in all seinen Punkten die gleichen sind, und isotrop heißt er, weil keine Richtung in ihm ausgezeichnet ist. In einem solchen Körper ist die Spannung in jedem seiner Punkte völlig von der jeweils vorliegenden Verzerrung bestimmt und die Hauptachsen der Spannung und der Verzerrung fallen zusammen.

Bei der Verzerrung eines elastischen Körpers wird die zur Verformung aufgewandte Arbeit als potenzielle Energie im elastischen Körper gespeichert. Entsprechend wird bei der Entzerrung die gegengleiche Arbeit geleistet und damit die gespeicherte potenzielle Energie wieder abgegeben. Bezeichnet U die pro Volumeneinheit dV gespeicherte potenzielle Energie, das heißt die potenzielle Energiedichte, dann besitzt ein Volumenelement des verformten Körpers die potenzielle Energie $U \cdot dV$. Diese potenzielle Energiedichte U eines verzerrten elastischen Körpers ist stets positiv und im unverzerrten Fall gleich Null. In der dV -Umgebung jedes Punktes eines verzerrten elastischen Körpers ist U proportional zur jeweiligen lokalen Verzerrung und kann durch die Komponenten des Verzerrungstensors ausgedrückt werden.

Bei kleinen Verzerrungen ist die Rückstellkraft in erster Näherung proportional zu den Dehnungs bzw. Stauchungskomponenten des Verzerrungstensors. Die zur Verformung geleistete Arbeit und damit die in der Verformung gespeicherte potenzielle Energiedichte ist hingegen in niedrigster Näherung proportional zur wirkenden Kraft, wieder multipliziert mit den entsprechenden Dehnungs bzw. Stauchungskomponenten. Eine erste Bedingung für die Entwicklung von U nach den Komponenten des Verzerrungstensors $\underline{\underline{\epsilon}}$ ist deshalb, dass U in erster Näherung proportional zu quadratischen Produkten aus Dehnungs bzw. Stauchungskomponenten ist. Günstigerweise wählt man als Bezugssystem für diese Entwicklung den Verzerrungstensor im Hauptachsensystem, d.h. $\underline{\underline{\epsilon}} \mapsto \underline{\underline{\epsilon}}^D$.

$$\underline{\underline{\epsilon}}^D = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}^D) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

In einem isotropen Körper darf sich die Energiedichte nicht ändern. Eine zweite Bedingung für U ist somit dass sich U bei einer Vertauschung der Hauptachsen (z.B. von ϵ_1

und ϵ_3) nicht ändern darf. Daraus folgt, dass U eine symmetrische Funktion von ϵ_1 , ϵ_2 , und ϵ_3 sein muss. Eine naheliegende Wahl ist hier die Quadratsumme der Streckungs- bzw. Stauchungskomponenten denn

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 \quad \text{ist symmetrisch bei Vertauschung der } \epsilon_i$$

Das Quadrat der Spur von $\underline{\epsilon}^D$, selbst eine invariante Tensorgröße, ist ebenfalls eine solche symmetrische Funktion der ϵ_i und enthält auch gemischte Glieder.

$$[\text{Sp}(\underline{\epsilon}^D)]^2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3) \quad (3.22)$$

Mit $\epsilon_i\epsilon_k = \epsilon_k\epsilon_i$ stehen in Gl. (3.22) alle möglichen quadratischen Glieder die sich aus ϵ_1 , ϵ_2 , und ϵ_3 bilden lassen. Somit sollten sich alle möglichen U welche den zwei genannten Bedingungen genügen, als Linearkombination der Quadratsumme der ϵ_i und dem Quadrat von $\text{Sp}(\underline{\epsilon}^D)$ bilden lassen. Damit hat man für U :

$$U = G \left[\alpha(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 \right] \quad (3.23)$$

wobei α und β dimensionslose Konstanten sind und G eine dimensionsbehaftete Materialkonstante ist. Damit immer $U \geq 0$ ist müssen $G \geq 0$ und α und β so zu wählen, dass

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq -\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2}$$

Im Weiteren kann ohne Einschränkung $\alpha = 1$ gesetzt werden. Betrachtet wird nun die Dehnung $d\epsilon_1$ des in Abb. 3.11 abgebildeten Quaders mit den Seitenlängen ds_1 , ds_2 und ds_3 . Der gezeigte Quader sitzt mit seinem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, mit seinen Seitenflächen senkrecht zu den Koordinatenachsen e_1 , e_2 , und e_3 welche mit den Hauptachsenrichtungen von $\underline{\epsilon}^D$ zusammenfallen. Außer der Dehnung $d\epsilon_1$ in Richtung der e_1 -Achse erfährt der Quader keine weitere Verzerrung. Durch die Dehnung verlängert sich die Strecke ds_1 um den Betrag $ds_1 d\epsilon_1$ (erinnere: ϵ ist immer eine relative Dehnung $\Delta l/l$). Da ds_2 und ds_3 unverändert bleiben und die Hauptspannungsrichtungen mit den Hauptdehnungsrichtungen zusammenfallen ist die zur Dehnung geleistete Arbeit

$$dA = \text{Kraft} \times \text{Weg} = \sigma_1 ds_2 ds_3 \times ds_1 d\epsilon_1$$

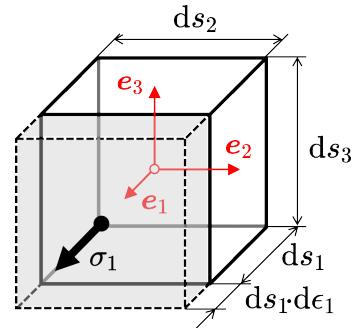


Abb. 3.11

Durch die geleistete Arbeit erhöht sich die potenzielle Energie $U \cdot dV = U \cdot ds_1 ds_2 ds_3$ des

Quaders um den äquivalenten Betrag $dU \cdot ds_1 ds_2 ds_3$. Ein einfacher Vergleich liefert

$$dU = \sigma_1 \cdot d\epsilon_1 \equiv \frac{\partial U}{\partial \epsilon_1} \cdot d\epsilon_1$$

Mit der parametrisierten Form der potenziellen Energiedichte von U aus Gl. (3.23) mit $\alpha = 1$ ergibt sich somit für σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_1} = 2G[\epsilon_1 + \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)]$$

Da die Spur eines Tensors eine invariante Größe ist, d.h. $\text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}^D)$, lässt sich diese Gleichung auch schreiben als

$$\sigma_1 = 2G[\epsilon_1 + \beta \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})] = 2G\epsilon_1 + \underbrace{2G\beta \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}})}_{\text{konstant}}$$

Das heißt, egal welche Koordinatentransformation man vornimmt, das zweite Glied in dieser Gleichung bleibt unverändert. Analog zu σ_1 , können σ_2 und σ_3 in gleicher Weise als Funktionen der Verzerrungskomponenten ϵ_1 , ϵ_2 , und ϵ_3 geschrieben werden. Zusammengenommen lauten die Beziehungen zwischen den Hauptspannungen σ_i und den Hauptverzerrungen ϵ_i in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1 + \beta & \beta & \beta \\ \beta & 1 + \beta & \beta \\ \beta & \beta & 1 + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

beziehungsweise $\sigma = 2G \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \epsilon$. Mit Hilfe der inversen Matrix

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \cdot \text{Adj}(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{1+3\beta} \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ -\beta & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix}$$

erhält man die Hauptverzerrungen ϵ_i als Funktion der Hauptspannungen σ_i aus $\epsilon = (2G)^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \sigma$. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2G(1+3\beta)} \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ -\beta & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Wie aus Gl. (3.25) abzulesen ist, bewirkt die Spannung σ_1 im Beispiel von Abb. 3.11 eine Streckung ϵ_1 von

$$\epsilon_1 = \frac{1+2\beta}{2G(1+3\beta)} \cdot \sigma_1 \quad (3.26)$$

Zugleich, und das obwohl σ_2 und σ_3 Null sind, bewirkt die Spannung σ_1 aber auch eine Querkontraktion in der Größe von

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\beta}{2G(1+3\beta)} \cdot \sigma_1 \quad (3.27)$$

Die Konstante G, das Schubmodul, ist uns bereits in Gl. (3.17) begegnet. Diese werkstoffspezifische Größe, fallweise auch als Gleitmodul, Schermodul oder Torsionsmodul bezeichnet, hat die Dimension eines Drucks. Ein Vergleich von Gl. (3.17) und Gl. (3.26) zeigt, dass für das Elastizitätsmodul E, fallweise auch als Youngsches Modul, Spannungsmodul, oder Zugmodul bezeichnet, gilt:

$$E = 2G \frac{1+3\beta}{1+2\beta} \quad (3.28)$$

Aus Gl. (3.26) und Gl. (3.27) ergibt sich für die Querkontraktionszahl $\mu = \epsilon_2/\epsilon_1 = \epsilon_3/\epsilon_1$

$$\mu = \frac{\beta}{1+2\beta} \quad (3.29)$$

Damit ergibt sich für die Beziehungen zwischen G, E und μ

$$E = 2G \cdot (\mu + 1) \quad , \quad G = \frac{1}{2} \frac{E}{\mu + 1} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3.30)$$

Ersetzt man nun β in Gl. (3.24) und Gl. (3.25) durch μ bzw. E, so erhält man die bekannten Hookeschen Gleichungen im Hauptachsensystem, d.h., in einem System in dem die nicht-diagonalen Elemente von $\underline{\underline{\sigma}}$ bzw. $\underline{\underline{\epsilon}}$ verschwinden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{\mu+1} \left[\epsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = 2G \left[\epsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \right] \\ \sigma_2 &= \frac{E}{\mu+1} \left[\epsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = 2G \left[\epsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \right] \\ \sigma_3 &= \frac{E}{\mu+1} \left[\epsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = 2G \left[\epsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

beziehungsweise

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\mu+1}{E} \left[\sigma_1 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma_1 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \\ \epsilon_2 &= \frac{\mu+1}{E} \left[\sigma_2 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma_2 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \\ \epsilon_3 &= \frac{\mu+1}{E} \left[\sigma_3 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma_3 - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Verlässt man das Hauptachsensystem so gilt für die Komponenten des Spannungs- und des Verzerrungstensors

$$\sigma_{ik} = 2G \left[\epsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\sum_{l=1}^3 \epsilon_{ll} \right) \delta_{ik} \right] \quad (3.33)$$

beziehungsweise

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ik} - \frac{\mu}{\mu+1} \left(\sum_{l=1}^3 \sigma_{ll} \right) \delta_{ik} \right] \quad (3.34)$$

Für die nicht-diagonalen Elemente ($i \neq k$) der Tensorkomponenten in Gl. (3.33) und Gl. (3.34) gelten die Konventionen

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \gamma_{ik} = \frac{\mu+1}{E} \sigma_{ik} = \frac{\mu+1}{E} \tau_{ik} \quad ; \quad \gamma_{ik} = 2 \frac{\mu+1}{E} \tau_{ik} = \frac{1}{G} \tau_{ik}$$

Systeme in welchen die nicht-diagonalen Elemente von $\underline{\sigma}$ bzw. $\underline{\epsilon}$ verschwinden sind solche bei denen beispielsweise nur Druckkräfte vorliegen, so wie das beim hydrostatischen Druck P der Fall ist. Hier gilt

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P \quad \text{und} \quad \sigma_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

Für die Volumenänderung aufgrund des hydrostatischen Drucks P ergibt sich somit

$$\frac{\delta V}{V} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = -3 \cdot \frac{1-2\mu}{E} P = -\kappa P = -\frac{P}{K}$$

wobei K das Kompressibilitätsmodul und κ die Kompressibilität ist.

Zum allgemeinen Fall der Berechnung von Spannungen aus Dehnungen.

Die Dehnungskomponenten im Verzerrungstensor sind die Diagonalelemente ϵ_{ii} und die Tensorkomponenten ober- und unterhalb der Diagonalen, das heißt die ϵ_{ik} mit $i \neq k$, entsprechen Gleitungen. Zur Berechnung der Spannungen aus den Dehnungen sind zwei Beziehungen hilfreich.

Erstens ist die Summe der Dehnungen ($\text{Sp}(\underline{\epsilon})$) proportional zur Summe der Hauptspannungen ($\text{Sp}(\underline{\sigma})$), das heißt

$$\sum_K \epsilon_{KK} = \frac{\mu+1}{E} \sum_K \sigma_{KK} - \frac{3\mu}{E} \sum_K \sigma_{KK} = \frac{1-2\mu}{E} \sum_K \sigma_{KK} \quad (3.35)$$

Zweitens gilt für die Abhängigkeit der Spannungskomponenten von den Dehnungen natürlich weiterhin Gl. (3.33).

3.3.1 Torsion zylindrischer Stäbe

Der Behandlung der in Abb. 3.12 skizzierten Torsion zylindrischer Stäbe im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes liegen folgende Annahmen zugrunde:

- Die Stäbe sind gerade und von einem durch die Torsion unverändert bleibendem kreisförmigen Querschnitt dessen Radius R über die Länge L eines zylindrischen Stabes konstant ist.
- Die Torsion wird alleine durch ein Drehmoment bewirkt dessen Vektor in der Stabachse liegt und führt an jeder Stelle des Querschnitts zu einer Gleitung (Schubspannung) $\tau = G\gamma$.

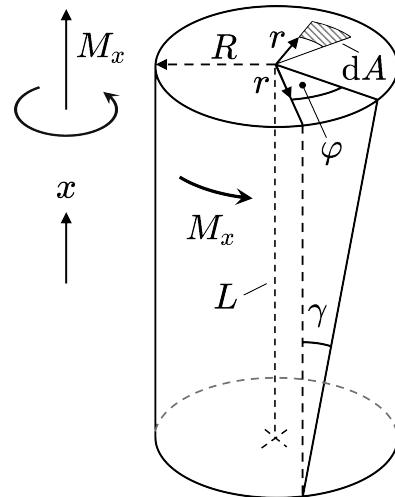


Abb. 3.12: Einfache Torsion.

Diese Randbedingungen beschreiben eine einfache Torsion, das heißt die Zylinderquerschnitte in Abb. 3.12 werden bei der Torsion nur in der yz -Ebene gedreht aber nicht in x -Richtung gewölbt. In der in Abb. 3.12 gezeigten Torsion mit der Zylinderachse parallel zur x -Achse zeigt das in der Stabachse liegende Drehmoment M_x in x -Richtung. Das Drehmoment M_x bewirkt eine Torsion des zylindrischen Stabes um den Winkel φ welche proportional zum Produkt aus Länge des zylindrischen Stabes L und Drehmoment M_x ist:

$$\varphi = c \cdot L \cdot M_x$$

Für kleine Gleitwinkel, das heißt $\gamma \ll 1$, gilt an jeder Stelle $0 \leq r \leq R$ entlang des Zylindrerradius R die Beziehung $L\gamma = r\varphi$ woraus mit $\tau = G\gamma$ folgt:

$$\tau(r) = \frac{\varphi \cdot r}{L} \cdot G \quad (3.36)$$

In jedem Flächenelement dA in der Querschnittsfläche mit Abstand r von der Stabachse greift somit die Schubspannung $\tau(r)$ an. Die resultierende Kraft, die im Abstand r angreifende Schubkraft $dF = \tau(r)dA$, wirkt parallel zur Tangente am Kreisring mit Radius r . Daraus ergibt sich für das Drehmoment M_x

$$M_x = \int r\tau(r)dA = \frac{\varphi \cdot G}{L} \int r^2 dA = \frac{\varphi \cdot G}{L} I_p \quad (3.37)$$

wobei I_p das polare Flächenträgheitsmoment ist. Das Produkt aus Schubmodul G und I_p ist die sogenannte Torsionssteifigkeit. Je größer GI_p ist, desto kleiner ist bei vorgegebenem

Drehmoment an einem zylinderischen Stab der Länge L der resultierende Torsionswinkel φ . Mit φ als Auslenkung, ist GI_p/L die Federkonstante im Hookeschen Gesetz. Für den zylindrischen Stab ergibt sich für I_p mittels der Parametrisierung $dA = 2\pi r dr$

$$I_p = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4$$

Wie man sieht, bewirkt bei einem zylindrischen Stab die Verdopplung des Radius eine Erhöhung der Torsionssteifigkeit um den Faktor 16. Die obige Betrachtung gilt nicht nur für zylindrische Stäbe sondern auch für zylindrische Rohre mit Innenradius R_i und Außenradius R_a . Es ändert sich einzig der Wert von I_p zu

$$I_p = 2\pi \int_{R_i}^{R_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)$$

Aus Gl. (3.36) ist ersichtlich, dass die Schubspannung linear mit dem Abstand von der Zylinderachse zunimmt. Ein Vergleich von Gl. (3.36) und Gl. (3.37) zeigt, dass für die Abhängigkeit der Schubspannung τ vom Drehmoment M_x gilt:

$$\tau = \frac{r \cdot M_x}{I_p} \quad \text{mit} \quad \tau_{max} = \frac{R \cdot M_x}{I_p} = \frac{M_x}{W_p}$$

wobei W_p das sogenannte polare Widerstandsmoment des zylindrischen Stabes ist. W_p ist ein Maß dafür wieviel Widerstand ein zyndrischer Stab der Entstehung innerer Spannungen entgegenseetzt. Je größer W_p ist, desto geringer ist die maximale Schubspannung die auftreten kann. Für das Beispiel des Vollzyinders ist $W_p = \pi R^3 / 2$, das heißt bei Verdoppelung des Zylinderradius erhöht sich das polare Widerstandsmoment um den Faktor 8. W_p ebenso wie I_p sind rein geometrisch bestimmte Größen, das heißt sie hängen nicht von der Materialbeschaffenheit des Zylinders ab.

3.3.2 Biegung von Balken

Eine einfache Frage: Wie groß ist die Spannung in einem horizontal eingespannten Balken? Auf diese Frage gab es in der Geschichte der Mechanik verschiedene Antworten. Soweit wir wissen hat sich Galileo Galilei als einer der ersten Naturwissenschaftler systematisch mit der Biegung von Balken beschäftigt. In 1638 bestimmte er die Spannung für den horizontal eingespannten Balken in Abb. 3.13 zu

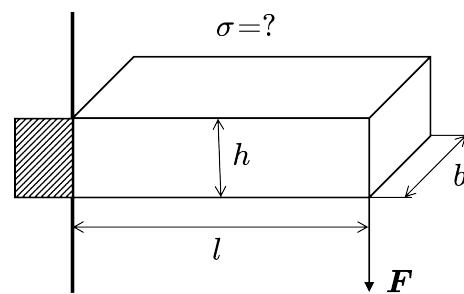


Abb. 3.13

$$\sigma = \frac{2Fl}{h^2 b} \quad (\text{Galilei 1638})$$

In 1684 berechnete dann Jakob Bernoulli die Spannung zu

$$\sigma = \frac{3Fl}{h^2 b} \quad (\text{Bernoulli 1694})$$

Und in 1744 kam Leohnard Euler zu dem Ergebnis, dass

$$\sigma = \frac{6Fl}{h^2 b} \quad (\text{Euler 1744})$$

Für die folgende Betrachtung wird vorausgesetzt, dass erstens der betrachtete Balken gerade und schlank ist, seine Querschnittsabmessungen also klein sind verglichen mit seiner Länge l . Zweitens sollen die durch die Biegung verursachten Verformungen sämtlich klein genug sein, dass überall das Hookesche Gesetz gilt. Ein horizontal eingespannter Balken (Abb. 3.14a) verbiegt sich unter der Last seiner Gewichtskraft. Dabei erfährt der Teil des Balkens oberhalb der neutralen Faser eine Streckung während der Teil unterhalb der neutralen Faser eine Stauchung erfährt. Die neutrale Faser selbst erfährt keine Streckung oder Stauchung, deswegen ihr Name, und ihre Länge ist die gleiche wie sie im unbelasteten Balken wäre auf den keinerlei Kräfte einwirken. Die Frage ist: Wo innerhalb des Balkens verläuft diese neutrale Faser?

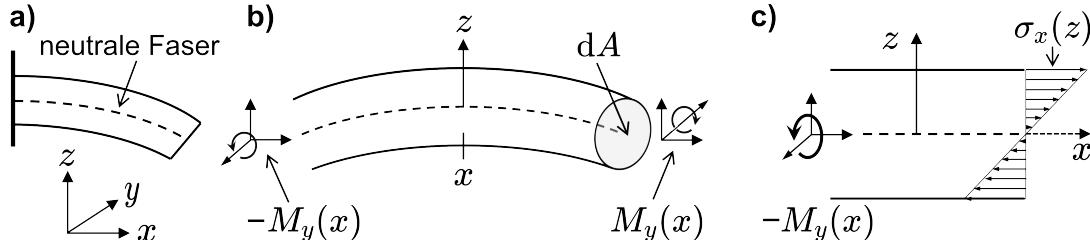


Abb. 3.14: (a) Neutrale Faser. (b) Einachsige Biegung, dA = Normalenfläche. (c) Kräfte- und Momentegleichgewicht.

Die in Abb. 3.14a gezeigte Situation kann man sich durch die in Abb. 3.14b skizzierte gerade bzw. einachsige Biegung ersetzt denken. Dabei stellt man sich den Balken an der Wand gespiegelt in negative x -Richtung fortgesetzt vor und entfernt dann gedanklich die Wand. In Abb. 3.14 liegt das Querschnittsprofil des Balkens in der yz -Ebene und es ist doppelt symmetrisch bezüglich der y - und z -Achse. Damit sind diese Achsen zugleich die Hauptachsen. Die in z -Richtung wirkende Schwerkraft bewirkt somit eine Moment um die y -Achse. In Abb. 3.14b weist das Biegemoment M_y in Richtung der $+y$ -Achse bzw. in Richtung der $-y$ -Achse im gespiegelten Teil des Balkens. Weil das Biegemoment M_y an jedem Profilquerschnitt des Balkens übertragen werden muss (Schnittpunktprinzip), ist an jeder Stelle x des Balkens die Verformung durch das Moment $M_y(x)$ gleich. Das ist nur möglich

wenn die Achse des Balkens die Form eines Kreisbogens annimmt. Das bedeutet, oberhalb der Balkenachse liegende Fasern werden gedehnt ($\epsilon > 0$, größerer Kreisbogenradius) und unterhalb liegende Fasern werden gestaucht ($\epsilon < 0$, kleinerer Kreisbogenradius). Für die Balkenachse selbst ist $\epsilon = 0$. Das aber ist genau die Definition der neutralen Faser, was nichts anders heißt als dass die Balkenachse die neutral Faser ist. Daraus folgt

$$\epsilon_x(z) = c^{(1)} \cdot z \quad \text{bzw.} \quad \sigma_x(z) = c^{(2)} \cdot z \quad (\text{Geradliniengesetz})$$

wobei $c^{(1)}$ und $c^{(2)} = Ec^{(1)}$ Proportionalitätskonstanten sind und $c^{(1)}$ so gesetzt wird, dass $\epsilon_x(z)$ und $\sigma_x(z)$ bzgl. der untersten oder der obersten Faser des Balkens normiert wird, also $c^{(1)} = \epsilon_u/z_u$ oder $c^{(1)} = \epsilon_o/z_o$. Um herauszufinden wo die neutral Faser verläuft, betrachtet man das Kräftegleichgewicht für ein freigeschnittenes Stück des Balkens, in Abb. 3.14c das rechte Ende. Hier muss bei einer reinen Biegung gelten, dass die Normalkraft verschwindet. Das heißt, es muss gelten:

$$\mathbf{F}_x = \int_A \sigma_x(z) dA = c^{(2)} \cdot \int_A z dA \equiv 0$$

Mit Hilfe der Definition des Flächenschwerpunkts von A

$$z_S = \frac{1}{A} \int_A z dA$$

lässt sich diese Bedingung ausdrücken als

$$\mathbf{F}_x = c^{(2)} \cdot \int_A z dA = c^{(2)} \cdot A \cdot z_S \equiv 0$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt falls $z_S = 0$. Das heißt, bei der reinen einachsigen Biegung verläuft die Position der neutralen Faser durch den Flächenmittelpunkt des doppelt symmetrischen (z.B. kreisförmigen oder rechteckigen) Balkenquerschnitts.

Damit das freigeschnittene Balkenstück in Abb. 3.14c im Gleichgewicht ist, muss nicht nur die Normalkraft Null sein sondern es muss auch die Summe der Momente Null sein. Somit muss gelten:

$$\mathbf{M}_y(x) + \int_A z \sigma_x(z) dA = c^{(2)} \cdot \int_A z^2 dA = c^{(2)} \cdot I_y$$

I_y , ein sogenanntes axiales Flächenträgheitsmoment, ist eine rein geometrische Größe die bei der Biegung von Balken die Querschnittsabhängigkeit beschreibt:

$$\frac{\mathbf{M}_y(x)}{I_y} \cdot z = \sigma_x(z) = c^{(2)} \cdot z \quad (3.38)$$

Für die in diesem Abschnitt Eingangs gestellte Frage nach der Spannung eines eingespannten rechteckigen Balkens der Höhe h und der Breite b (siehe Abb. 3.13) ergibt sich

für I_y ($dA = dydz$)

$$I_y = b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Die maximale Biegespannung liegt an den äußersten Fasern des Balken an, da für diese Fasern der Abstand zur neutralen Faser mit $z = \pm h/2$ am größten ist. Mit der angreifenden Kraft \mathbf{F}_z und $\mathbf{M}_y(l) = \mathbf{F}_z \cdot l$ ist die maximale Zug- bzw. Druckspannung für den eingespannten Balken in Abb. 3.13

$$\sigma_{max} = \pm \frac{\mathbf{F}_z \cdot l}{b \cdot h^3} \cdot 12 \cdot \frac{h}{2} = \frac{6\mathbf{F}_z \cdot l}{h^2 b} \quad (3.39)$$

Dies entspricht Euler's Ergebnis von 1744 und damit ist die Eingangsfrage nach der Spannung des eingespannten Balkens beantwortet. Als nächstes stellt sich die Frage nach der Biegelinie: Wie sieht die Kurve aus welche die Verformung eines Balkens unter Belastung beschreibt?

Die Biegelinie

Die Biegelinie beschreibt die Verschiebung der neutralen Faser unter Belastung. Um die Form dieser Kurve zu bestimmen, betrachte man wieder die relative Längenänderung in x -Richtung. Aus der Skizze in Abb. 3.15 kann man ablesen dass für die oberste Faser des Balkens gilt (Streckung in x -Richtung):

$$\epsilon_x(z) = \frac{(R + z)d\varphi - R d\varphi}{R d\varphi} = \frac{z}{R} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot z$$

Sei $w(x)$ der Graph der Biegelinie dann gilt für die Krümmung κ von $w(x)$ an der Stelle x die allgemeine explizite Darstellung:

$$\kappa = \frac{w''(x)}{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}}$$

Für die hier betrachtete negativ gekrümmte Biegelinie liest man aus Abb. 3.15 ab

$$\kappa = -\frac{1}{R} = \frac{w''(x)}{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}}$$

Damit und mit Gl. (3.38) wird $\epsilon_x(z)$ für kleine Verformungen ($w'(x) \ll 1$)

$$\epsilon_x(z) = -w''(x) \cdot z = \frac{\sigma_x(z)}{E} = \frac{\mathbf{M}_y(x)}{E \cdot I_y} \cdot z$$

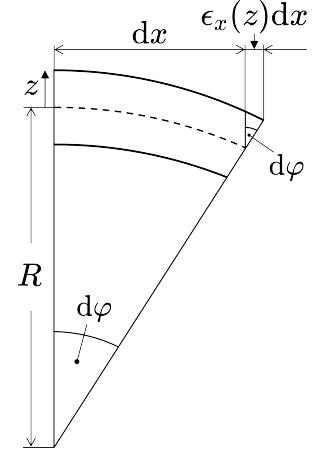


Abb. 3.15

Die Gleichung für die Biegelinie lautet somit (Euler 1744)

$$w''(x) = -\frac{\mathbf{M}_y(x)}{E \cdot I_y} \quad (3.40)$$

Beispiel 3.1 Biegelinie des Balkens in Abb. 3.13

$$w''(x) = -\frac{\mathbf{F}_x(l-x)}{E \cdot I_y}$$

Integration liefert

$$w'(x) = -\frac{\mathbf{F}_x}{E \cdot I_y} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + c_1$$

Der Balken ist links fest horizontal eingespannt. Mit dieser Randbedingung ist

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Eine weitere Integration ergibt

$$w(x) = -\frac{\mathbf{F}_x}{E \cdot I_y} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_2$$

Mit $w(0) = 0$ ist auch $c_2 = 0$ und man erhält die Gleichung für die Biegelinie:

$$w(x) = -\frac{\mathbf{F}_x \cdot l}{E \cdot I_y} \cdot \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x}{3l} \right) \quad (3.41)$$

Liegt anstatt einer konstanten Kraft eine beliebige Kraftverteilung mit Kraftdichte $f(x)$ vor, dann benutzt man in Gl. (3.40) für das Moment $\mathbf{M}_y(x)$

$$\mathbf{M}_y(x) = \int_x^l f(\xi)(\xi - x) d\xi$$

Beispiel 3.2 Eingespannter Stab unter Belastung

Betrachtet wird ein eingespannter Stab (Abb. 3.16) der Länge l mit einem kontantem Stabgewicht q pro Länge an dessen Ende sich eine Masse m befindet. Zuerst wird das gesamte Biegemoment berechnet. Mit dem Biegemoment M_m aufgrund der Masse m hat man für das Biegemoment $M(x)$ an der Stelle x des Stabes

$$M(x) = \int_x^l q(\xi - x) d\xi + M_m$$

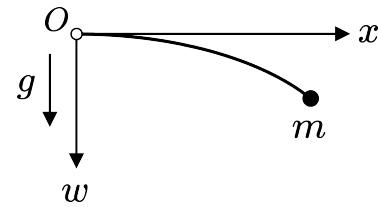


Abb. 3.16

Mit $M_m(x) = m \cdot g \cdot (l - x)$ und Integration erhält man

$$M(x) = \frac{q}{2} \cdot x^2 - (q \cdot l + m \cdot g) \cdot x + l \left(\frac{q \cdot l}{2} + m \cdot g \right)$$

Damit lautet die Gleichung der Biegelinie (positive Krümmung)

$$w''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \left[\frac{q}{2} \cdot x^2 - (q \cdot l + m \cdot g) \cdot x + l \left(\frac{q \cdot l}{2} + m \cdot g \right) \right]$$

Mit den Randbedingungen $w'(0) = 0$ und $w(0) = 0$ und zweimaliger Integration erhält man

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \left[\frac{q}{24} \cdot x^4 - (q \cdot l + m \cdot g) \cdot \frac{x^3}{6} + l \left(\frac{q \cdot l}{2} + m \cdot g \right) \cdot \frac{x^2}{2} \right]$$

Vernachlässigt man die Masse des Stabes, das heißt $q = 0$, dann ergibt sich für die Auslenkung $w(l)$

$$w(l) = \frac{m \cdot g \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Die Schwingungsfrequenz des eingespannten Stabes findet man mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes und der Definition der Kraftkonstanten $k = m\omega^2$

$$F = m \cdot g = k \cdot w(l) \quad \text{und} \quad m\omega^2 = \frac{m \cdot g}{w(l)}$$

Für die Schwingungsfrequenz $f = \omega / 2\pi$ und Schwingungsperiode $T = 1/f$ des eingespannten Stabes folgt damit

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}} \quad ; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}}$$

Die Knickformel (Euler)

Bei der in Abb. 3.17 skizzierten Verbiegung hat die Kraft den Hebelarm $w(x)$ um die y -Achse

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} w(x)$$

Anstatt eines Drehmoments mit Arm x wirkt jetzt also in Gl. (3.40) ein Drehmoment mit Arm w :

$$w''(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w(x) = -q^2 w(x)$$

Ansatz: Allgemeine Lösung von Differentialgleichungen dieses Typs durch Linearkombination von $\sin qx$ und $\cos qx$, also

$$w(x) = \alpha \sin qx + \beta \cos qx$$

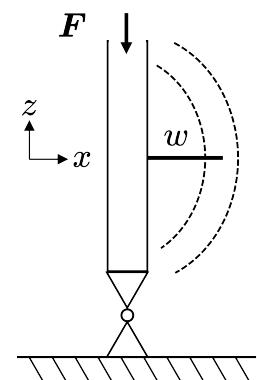


Abb. 3.17

Davon die Ableitungen bilden:

$$w'(x) = \alpha q \cos qx - \beta q \sin qx$$

$$w''(x) = -\alpha q^2 \sin qx - \beta q^2 \cos qx$$

Nun α und β mit Hilfe der Nebenbedingungen bestimmen:

$$\text{I: } w(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\text{II: } w(l) = 0 \Rightarrow \alpha \sin ql = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & (\text{keine Knickung}) \quad w(x) = 0 \\ & \text{oder} \\ q \cdot l = n \cdot \pi & n \text{ ganz} \end{cases}$$

Das heißt bei Knickung gilt

$$q^2 l^2 = \frac{\mathbf{F}_{\text{Knick}} \cdot l^2}{E \cdot I} = \pi^2 \quad \text{also} \quad \mathbf{F}_{\text{Knick}} = \frac{E \cdot I}{l^2} \pi^2$$

$\mathbf{F}_{\text{Knick}}$ ist die sogenannte Knicklast; ab dieser Kraft ist eine Lösung der Differentialgleichung möglich die eine Verbiegung ergibt.

Betrachtet man nun eine nicht zentral angreifende Kraft wie in Abb. 3.18 skizziert, dann gilt für das Drehmoment beim Verbiegen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}(w(x) + a)$$

und damit wird die zu lösende Differentialgleichung

$$w''(x) = -\frac{F}{E \cdot I}(w(x) + a)$$

Diese lässt sich umschreiben in

$$(w(x) + a)'' = -\frac{F}{E \cdot I}(w(x) + a)$$

Lösungsansatz wie bei der gerade behandelten Knickung:

$$w(x) + a = \alpha \sin qx + \beta \cos qx$$

Die Nebenbedingungen lauten nun

$$\text{I: } w(0) + a = 0 \Rightarrow \beta = a$$

$$\text{II: } w(l) + a = 0 \Rightarrow \alpha \sin ql + \beta \cos ql = a \Rightarrow \alpha = a \cdot \frac{1 - \beta \cos q}{\sin ql}$$

Damit erhält man für die Verbiegung bei nicht zentral angreifender Kraft

$$w(x) = a \left(-1 + \frac{1 - \beta \cos q}{\sin ql} \sin qx + \cos ql \right)$$

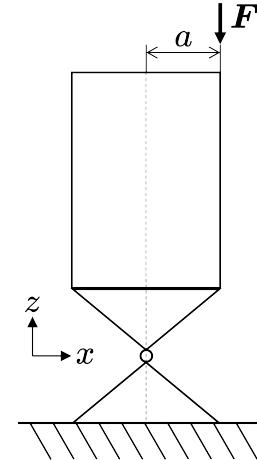


Abb. 3.18

3.4 Hydrostatik

Die Hydrostatik befasst sich mit Flüssigkeiten in Ruhe. Besonders interessieren dabei die von Flüssigkeiten in verschiedensten Behältern auf die Gefäßwände ausgeübten Druckkräfte. Zum Verständnis des hydrostatischen Drucks betrachtet man ein kleines deformierbares Volumen eines flüssigen Körpers (Abb. 3.19). Dabei hat man nur zu berücksichtigen:

- Normalspannungen, keine Schubspannungen; Druck variiert nur in z -Richtung.
- Die Gewichtskraft.

Damit Kräftegleichgewicht herrscht, müssen die Druckkräfte mit der Höhe variieren. Masse und Kraft sind gegeben durch

$$dm = \rho \cdot A \cdot dz \quad (\text{Masse}) \quad \text{und} \quad dF = dm \cdot g \quad (\text{Kraft})$$

wobei ρ die Dichte des Körpers ist. Die Kraft entsteht durch den Gewichtsdruck und im Gleichgewicht gilt

$$P(z + dz) \cdot A - P(z) \cdot A = -g \cdot \rho \cdot A \cdot dz$$

Da dz sehr klein ist, genügt es bei der Taylorentwicklung von $P(z + dz)$ nur die erste Ableitung zu berücksichtigen, also $P(z + dz) \approx P(z) + P'(z) \cdot dz$. Damit gilt

$$\left(P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \cdot A - P(z) \cdot A = -g \cdot \rho \cdot A \cdot dz$$

was bedeutet dass

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -g \cdot \rho$$

Allgemein ausgedrückt mit der Kraftdichte $f(z)$ gilt

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -g \cdot \rho = f(z) \tag{3.42}$$

beziehungsweise dreidimensional

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \tag{3.43}$$

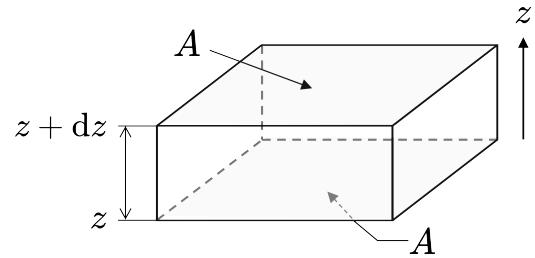


Abb. 3.19

Für inkompressible Flüssigkeiten ist $\rho = \rho_0$ konstant und somit gilt:

$$P = P_0 - \rho \cdot g \cdot z \quad (3.44)$$

Gl. (3.43) ist die Grundgleichung der Hydrostatik und Gl. (3.44) ist die sogenannte hydrostatische Druckgleichung. Neben der gerade gegebenen anschaulichen Ableitung folgt Gl. (3.43) ganz einfach auch aus Gl. (3.16) weil für einen Fluidkörper im Gleichgewicht die Schubspannungen verschwinden und nur Druckspannungen existieren. Also gilt für den Spannungstensor in Gl. (3.16) $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ und somit wird aus Gl. (3.16)

$$\mathbf{f} = - \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial P}{\partial x_k} \delta_{ik} = \nabla P(\mathbf{r}) \quad (3.45)$$

Für konservative Kräfte wie die Schwerkraft ist die Kraft der negative Gradient des Potenzials. Mit dem Schwerkraftpotenzial $U(z) = gz$ gilt also (konstante Dichte ρ)

$$\mathbf{f} = -\rho \nabla U = -\rho \nabla(gz) \quad (3.46)$$

Aus Gl. (3.45) und Gl. (3.46) folgt dann unmittelbar die hydrostatische Druckgleichung Gl. (3.44). Damit lassen sich in manchen Fällen auch Lösungen für nicht-statische Situationen finden. Ein solcher Fall ist beispielsweise der eines Fluids in einer Zentrifuge.

Beispiel 3.3 Fluida in einer Zentrifuge

Betrachtet wird die Oberfläche einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer Zentrifuge die mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (Abb. 3.20). Auf ein Volumenelement der Flüssigkeit im Abstand r von der Rotationsachse wirkt die Zentrifugalkraft $r\omega^2$ was zu dem bekannten Verlauf der Flüssigkeitsoberfläche in einem rotierenden Behälter führt. Wählt man das Koordinatensystem so, dass es mit der Zentrifuge mitrotiert, so kann das Problem wie das einer statischen Flüssigkeit behandelt werden auf welche das Potenzial $U(r, z)$ wirkt:

$$U(r, z) = \rho g z - \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 = \rho g \left(z - \frac{\rho r^2 \omega^2}{2g} \right)$$

Damit lautet die modifizierte hydrostatische Druckgleichung

$$P + \rho g \left(z - \frac{\rho r^2 \omega^2}{2g} \right) = const$$

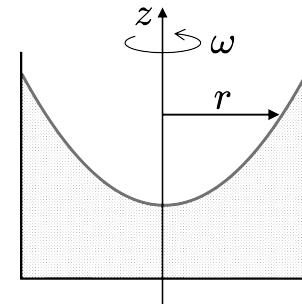


Abb. 3.20

Die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit hat damit die Form einer Parabel

$$z = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2g} + const$$

wobei die Konstante durch den Umgebungsdruck $P = P_0$ bestimmt ist.

Auftrieb nach Archimedes

Die Auftriebskraft F_A für einen Körper in einer Flüssigkeit ergibt sich durch Aufsummation der Druckkräfte über seine Oberfläche. Die Auftriebskraft ist ebenso groß wie die Gewichtskraft F_G der verdrängten Flüssigkeit. Für die Angriffspunkte der Kräfte gilt

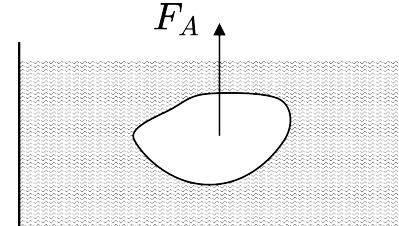


Abb. 3.21

- Die Auftriebskraft F_A greift am Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge an (mit SpA bezeichnet).
- Die Gewichtskraft F_G greift am Schwerpunkt des Körpers an (mit SpG bezeichnet).

Damit ein Schiff schwimmt, muss es so gebaut sein, dass gilt $F_G < F_A$. Ein schwimmender Körper wie ein Schiff taucht gerade soweit ins Wasser ein bis die Auftriebskraft der verdrängten Flüssigkeit die Gewichtskraft des Schiffskörpers kompensiert. Damit in der „Ruhelage“, dass heißt bei stiller See ohne jeden Wellengang, kein Drehmoment auftritt, müssen SpA und SpG auf der vertikalen Mittelachse des Schiffs zu liegen kommen. Zudem muss für ein stabiles Gleichgewicht in dieser Ruhelage SpG tiefer wie SpA liegen. Das alleine reicht aber nicht damit ein Schiff stabil schwimmt. Ein Schiff muss so konstruiert sein, dass bei Schräglagen im Wasser, was ja der Normalfall ist, das durch die relative horizontale Verschiebung von SpA und SpG auftretende Moment das Schiff wieder aufrichtet.

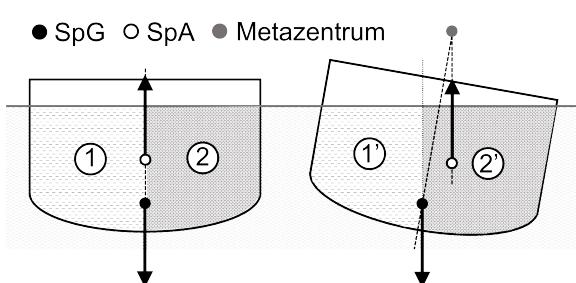


Abb. 3.22

Abb. 3.22 illustriert diese Situation. In der Ruhelage fallen SpA und SpG auf die vertikale Mittelachse und links wie rechts der Senkrechten durch die Wasserlinie auf welcher der Schwerpunkt liegt ist die verdrängte Wassermenge identisch, die Flächen 1 und 2 sind gleich groß. Bei einer Schräglage ändert sich das und die Fläche 1' ist kleiner wie die Fläche 2'. Das heißt aber nichts anderes als dass SpA nach rechts verschoben wird. Das dadurch entstehende Drehmoment wirkt der Schräglage des Schiffs

1' ist kleiner wie die Fläche 2'. Das heißt aber nichts anderes als dass SpA nach rechts verschoben wird. Das dadurch entstehende Drehmoment wirkt der Schräglage des Schiffs

entgegen. Der Schnittpunkt zwischen der Verlängerung der Kraftlinie durch SpA und der Schwerpunktachse des Schiffes ist das sogenannte Metazentrum. Kommt dieses wie in Abb. 3.22 oberhalb von SpG zu liegen, dann wird das bei Schräglagen erzeugte Drehmoment das Schiff stabilisieren. Falls aber das Schiff so konstruiert ist, dass bei gleicher Schräglage wie in Abb. 3.22 SpA relativ zu SpG nicht nach rechts sondern nach links verschoben wird und das Metazentrum daher unterhalb von SpG zu liegen kommt, dann entsteht ein Drehmoment das der Schräglage nicht entgegenwirkt sondern sie verstärkt. Die Schwimmlage eines Schiffs ist also immer dann stabil, wenn das Metazentrum oberhalb von SpG zu liegen kommt.

3.5 Aerostatik

Gasförmige und flüssige Körper werden zusammengenommen als fluide Körper, oder Fluida, bezeichnet. So wie sich die Hydrostatik mit inkompressiblen Fluida befasst, behandelt die Aerostatik gasförmige Körper, also kompressible Fluida. Vieles aus der Hydrostatik lässt sich in die Aerostatik übertragen. Da für kompressible Fluida die Dichte nicht konstant ist benötigt man aber zusätzlich eine Zustandsgleichung, beispielsweise die des idealen Gases.

Barometrische Höhenformel

Die barometrische Höhenformel beschreibt die Änderung des Luftdrucks mit dem Abstand z von der Erdoberfläche. Mit Gl. (3.42) erhält man dafür:

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\underbrace{m \cdot n}_{\rho} g$$

Hier steht m für die Teilchenmasse und n ist die Teilchendichte wobei n eine Funktion von z ist. Die allgemeine Gasgleichung liefert den Zusammenhang zwischen Teilchendichte n und Druck P

$$P \cdot V = N \cdot k_B \cdot T \quad (3.47)$$

und somit

$$P = n \cdot k_B \cdot T \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{V} \quad (3.48)$$

Jetzt macht man die Annahme, dass $T = \text{konstant}$ bzw. eine Temperaturänderung um wenige Grade nicht viel ausmachen soll. Damit hat man

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\frac{m \cdot g}{k_B T} \cdot P$$

Daraus folgt für die barometrische Höhenformel

$$P = P_0 \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g \cdot z}{k_B T}\right) \quad (3.49)$$

Die Annahme, dass die Temperatur in der Atmosphäre konstant sei, hat natürlich nur eingeschränkt Gültigkeit. Für einen breiteren Ansatz nutzt man die sogenannte Adiabatengleichung:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (3.50)$$

der Adiabatenexponent mit den molaren Wärmekapazitäten c_P und c_V bei konstantem Druck P und konstantem Volumen V ist. Definiert man nun das Parameterintegral

$$\mathcal{P}(P(\mathbf{r})) = \int_{P_0}^{P(\mathbf{r})} \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (3.51)$$

und bildet davon die räumliche Ableitung mit Hilfe von

$$\frac{\partial \mathcal{P}(P(\mathbf{r}))}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial P(\mathbf{r})} \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial x_i} \quad (3.52)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial P} \int_{P_0}^P \frac{dP'}{\rho(P')} = \frac{1}{\rho} \quad (3.53)$$

dann erhält man das Ergebnis

$$\nabla \mathcal{P}(P(\mathbf{r})) = \frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}) \quad (3.54)$$

Der Grund für die Einführung des Parameterintegrals in Gl. (3.51) ist, dass nun aus Gl. (3.54) mit Hilfe von Gl. (3.45) und Gl. (3.46) folgt

$$\nabla \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} = -\nabla(U) \quad (3.55)$$

Das Ergebnis ist also, dass die Summe aus dem Parameterintegral \mathcal{P} und der potentiellen Energie U eine Konstante ist

$$\mathcal{P} + U = \text{const} \quad (3.56)$$

Den Nutzen dieser Beziehung sieht man nach dem Einsetzen von Gl. (3.50) in Gl. (3.51) und anschließender Integration ($U = gz$):

$$\mathcal{P}(P(\mathbf{r})) = \frac{1}{\rho_0} \int_{P_0}^{P(\mathbf{r})} \left(\frac{P'}{P_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} dP' = \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = const - gz \quad (3.57)$$

Mit Hilfe des Parameterintegrals \mathcal{P} erhält man also eine modifizierte Version der hydrostatischen Druckgleichung. Zur Bestimmung der Konstanten nutzt man aus, dass an der Erdoberfläche ($z = 0$) für den Druck gilt $P = P_0$, also

$$const = \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} = u$$

Für die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe über der Erdoberfläche gilt somit

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{gz}{u} \quad (3.58)$$

Der Druck in Gl. (3.58) wird Null bei der kritischen Höhe $z = u/g = h_c$. Bei Raumtemperatur ist für Luft $\gamma = 1.2$. Mit diesem Wert für γ liefert Gl. (3.58) eine kritische Höhe h_c von ca. 48 km. Für Druck und Dichte als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche gilt nach Gl. (3.58) und Gl. (3.50)

$$\frac{P(z)}{P_0} = \left(1 - \frac{z}{h_c} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\rho(z)}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{h_c} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.59)$$

Mit diesen beiden Gleichungen und der idealen Gasgleichung erhält man für die Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe über der Erdoberfläche:

$$\frac{T(z)}{T_0} = 1 - \frac{z}{h_c} \quad \text{mit} \quad T_0 = \frac{m \cdot P_0}{k_B \cdot \rho_0} \quad (3.60)$$

Teil II

Dynamik

4. Kinetik des Massenpunkts

Newton's zweites Gesetz, der Impulssatz der Technischen Mechanik, lautet:

$$\frac{dp}{dt} = \mathbf{F}(r, v, t) = \frac{dmv}{dt} = m \frac{dv}{dt}; \quad m \text{ ist meist konstant}$$

Vorerst: Keine Abhängigkeit für \mathbf{F} von v und t . Damit

$$\mathbf{F}(r) = m \frac{d^2r}{dt^2}$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ist nur ausrechenbar bei konservativen Kräften, das heißt nur in solchen Fällen wo die Kraft der Gradient eines Potenzials ist.

4.1 Energiesatz der Punktmechanik

Bezeichne T die kinetische Energie eines Massenpunkts:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Bei konstanter Masse m ist die zeitliche Ableitung von T

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = L \quad (4.1)$$

Durch Integration erhält man

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\mathbf{F}(r, \dots) \cdot \mathbf{v}(t)}_{L(t)} dt$$

Definition

Konservative Kraft: Eine Kraft die längs eines beliebigen geschlossenen Weges keine Arbeit verrichtet. Anders ausgedrückt, bei Einwirkung einer konservativen Kraft auf einen Massenpunkt geht auf einem geschlossenen Weg keine Energie verloren, d.h., die Energie wird konserviert, daher der Name.

Ist \mathbf{F} konservativ, dann ist der Wert des Integrals

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

gemeinhin auch als Arbeitsintegral bezeichnet, unabhängig vom Weg. Daraus folgt, dass das Potenzial $U(\mathbf{r})$

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\xi) \cdot d\xi$$

eine Funktion der oberen Integralgrenze ist! Damit gilt für jede Koordinate beziehungsweise den Koordinatenvektor

$$F_x = - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$$

Für das Potenzial U als Funktion der Zeit t und seine Änderung als Funktion von t ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt} &= \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \operatorname{grad} U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla U \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{dU}{dt} = \nabla U \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{4.2}$$

Ein Vergleich von Gl. (4.1) und Gl. (4.2) zeigt, dass

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(T+U)}{dt} = 0$$

Das heißt, die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie eines Massenpunkts ist konstant. Mit anderen Worten: E_0 , die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie eines Massenpunkts am Ort \mathbf{r}_0 zur Zeit t_0 ist gleich E_1 , der Gesamtenergie des Massenpunkts am Ort \mathbf{r}_1 zur Zeit t_1

$$T + U = E \quad ; \quad E = E_0 = E_1 = \text{const} \tag{4.3}$$

Bewegt sich ein Massenpunkt zum Beispiel parallel zur x -Achse, dann gilt mit Gl. (4.3)

$$\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) = E = \text{const}$$

Also

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x(t))]} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt$$

Integration ergibt

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(\xi)]}} \quad \rightarrow \quad t = t(x) \Rightarrow x = x(t)$$

Beispiel 4.1 Der harmonische Oszillator

$$U = c \cdot x^2 \quad \text{dann ist} \quad F_x = -2 \cdot c \cdot x = -k \cdot x$$

wobei

$$U = \frac{k}{2} \cdot x^2 = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -k \cdot x(t)$$

Mit dem Ansatz $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ folgt

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_P}\right)^2$$

und man erhält die allgemeine Lösung in der Form

$$x(t) = A \cos [\omega(t - t_0)] \quad \rightarrow \quad t - t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{x(t)}{A}$$

4.2 Drehimpuls

Für das Drehmoment eines Massenpunkts mit Abstand \mathbf{r} vom Koordinatenursprung auf welchen die Kraft \mathbf{F} einwirkt gilt

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = m \left[\underbrace{(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})}_0 + (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \right] = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (4.4)$$

Das Drehmoment \mathbf{M} ist die zeitliche Ableitung des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (4.5)$$

Definition

Zentralkraft: Eine Kraft deren Wirkungslinie immer auf ein Kraftzentrum bezogen ist.



Für Zentralkräfte gilt also $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$. Daraus folgt mit Gl. (4.4)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{F(r)}{r} \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{r})}_{=0} = 0$$

Das heißt, für Zentralkräfte ist \mathbf{L} eine Erhaltungsgröße

$$\mathbf{L} = m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{L}_0 = \text{const}$$

Die Flächengeschwindigkeit, also die Fläche A welche der Ortsvektor \mathbf{r} eines Massenpunkts pro Zeiteinheit überstreicht, ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

Für Zentralkräfte gilt somit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = \text{const} \quad (4.6)$$

Das ist Johannes Kepler's zweites Gesetz: Der Radiusvektor zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

Definition

Konservative Zentralkraft: Eine Zentralkraft ist konservativ wenn sie nur vom Betrag des Abstands $|\mathbf{r}|$ vom Kraftzentrum abhängt.

Für das Potenzial von konservativen Zentralkräften gilt dann

$$U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|) = V(r) \quad (4.7)$$

und für konservative Zentralkräfte selbst

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \text{grad } r \quad (4.8)$$

In kartesischen Koordinaten mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

erhält man z.B. für die Ableitung nach x

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

und analog für die Ableitung nach y und z . Damit wird

$$-\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \text{grad } r = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Für einen Massenpunkt im Potenzial $V(r)$ gilt mit Gl. (4.3)

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} + V(r) = E \quad (4.9)$$

Anstatt die Geschwindigkeit einer Punktmasse in Bezug auf ein fixiertes Koordinatensystem zu messen, ist es häufig vorteilhaft sie in Bezug auf die Bahnkurve selbst anzugeben. Also

$$\frac{m}{2} \dot{s}^2 + V(r) = E$$

wobei ds das infinitesimale Bogensegment der in Abb. 4.1 skizzierten Bahnkurve ist welches die Punktmasse im Zeitraum dt durchläuft. Aus Abb. 4.1 ist abzulesen, dass

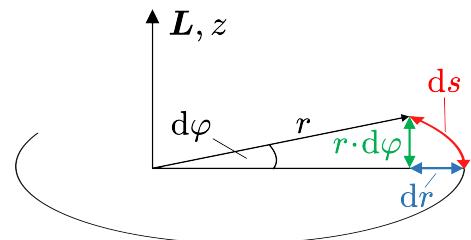


Abb. 4.1

$$ds = \sqrt{dr^2 + (rd\varphi)^2} \quad (4.10)$$

und somit

$$\frac{m}{2} \left(\frac{\sqrt{dr^2 + (rd\varphi)^2}}{dt} \right)^2 + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V = E \quad (4.11)$$

Es gilt (Drehimpulerhaltung)

$$|\mathbf{L}| = l = mr(r\dot{\varphi}) = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

also ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (4.12)$$

Damit wird aus Gl. (4.11)

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{U(r) = V_{Zf}(r) + V(r)} + V(r) = E \quad (4.13)$$

wobei

$$V_{Zf} = \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{m}{2} (\dot{\varphi} \times \mathbf{r})^2 \quad (4.14)$$

das sogenannte Zentrifugalpotenzial ist. Die daraus resultierende Kraft in Radialrichtung, die Zentralkraft F_Z , ist gegeben durch

$$F_Z = -\frac{\partial V_{Zf}}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} = m\dot{\varphi}^2 r \quad (4.15)$$

Mit $U(r) = V_{Zf}(r) + V(r)$ lässt sich Gl. (4.13) umschreiben zu

$$\frac{mr^2}{2} = E - U(r)$$

und somit

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]} \quad (4.16)$$

Mit $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$ und $r(t) = r(\varphi(t))$ folgt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = r' \cdot \frac{l}{mr^2} \quad (4.17)$$

und damit

$$\frac{dr}{d\varphi} = r' = \pm \frac{mr^2}{l} \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]} \quad (4.18)$$

4.3 Keplerbewegung

Die Keplerbewegung ist die Bewegung eines Massenpunkts unter dem Einfluß der Gravitationskraft. Für die zwischen einem Massenpunkt m und einer Masse M wirkende Kraft gilt dabei mit Newton's Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^3} \mathbf{r}$$

Das zugehörige Gravitationspotenzial der Keplerbewegung ist

$$V(r) = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Damit wird das Potenzial $U(r) = V_{Zf}(r) + V(r)$ in Gl. (4.13)

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - G \frac{M \cdot m}{r}$$

und damit wird aus Gl. (4.13) unter Verwendung von dr/dt aus Gl. (4.17)

$$\frac{m}{2} \left(\frac{l}{mr^2} r' \right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G \frac{M \cdot m}{r} = E$$

Lösungsansatz mit Substitution:

$$\xi = \frac{1}{r} \quad ; \quad \xi' = \frac{d\xi}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \cdot r'$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{l^2}{2m} \cdot \xi'^2 + \frac{l^2}{2m} \cdot \xi^2 - GM \cdot m \cdot \xi = E$$

Jetzt quadratische Ergänzung

$$\xi'^2 + \left(\xi - G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \right)^2 = \frac{2mE}{l^2} + \left(G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \right)^2 \quad (4.19)$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{p} = G \frac{M \cdot m^2}{l^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} \cdot \epsilon = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{\frac{2mE}{l^2} p^2 + 1} \quad (4.20)$$

deren Bedeutung im Weiteren ersichtlich wird, lautet Gl. (4.19)

$$\xi'^2 + \underbrace{\left(\xi - \frac{1}{p} \right)^2}_{\eta} = \frac{\epsilon^2}{p^2}$$

Diese Differentialgleichung hat die Form

$$\eta'^2 + \eta^2 = \lambda^2 \quad \text{und die Lösung} \quad \eta = \eta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

wobei $\eta_0 = \pm(\epsilon/p)$ und mit geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen $\varphi_0 = 0$. Damit erhält man als Lösung von Gl. (4.19)

$$\xi = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 \pm \epsilon \cos \varphi)$$

beziehungsweise die Bahnkurve

$$r = \frac{p}{1 \pm \epsilon \cos \varphi} \quad (4.21)$$

Das ist die Bahnkurve eines Kegelschnitts und speziell für $\epsilon < 1$ ist es die Bahnkurve einer Ellipse in Polarkoordinaten-Darstellung und somit nichts anderes wie Kepler's erstes Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen mit der Sonne in einem Fokuspunkt. Das Minuszeichen bedeutet, dass der Koordinatenursprung dabei im linken Fokuspunkt liegt (wie in Abb. 4.2b gezeigt) und das Pluszeichen, dass er im rechten Fokuspunkt liegt.

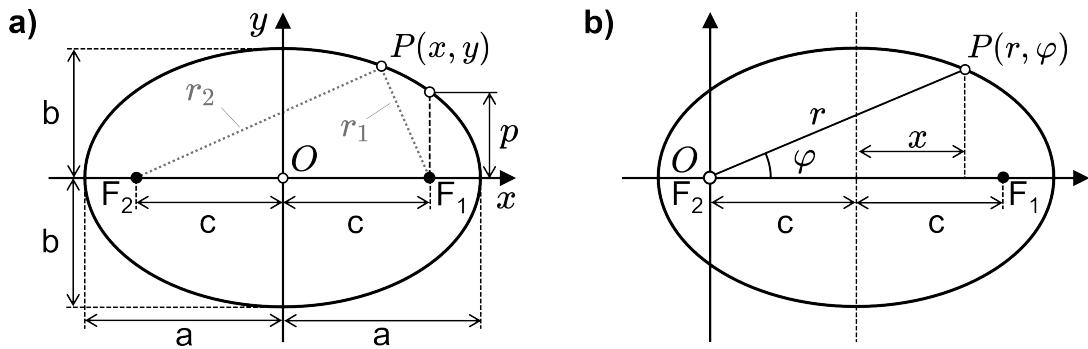


Abb. 4.2: Ellipse in kartesischen (a) und Polarkoordinaten (b). In Polarkoordinaten hat man die Wahl, den Ursprung wie hier in den linken Brennpunkt - Minuszeichen in Gl. (4.21) - oder in den rechten Brennpunkt - Pluszeichen in Gl. (4.21) - zu legen.

Bahnkurve der Ellipse

Eine Ellipse ist definiert als die Menge aller Punkte für welche die Abstandssumme zu zwei gegebenen Punkten, den Brennpunkten \$F_1\$ und \$F_2\$ mit Abstand \$2c\$ in Abb. 4.2, konstant ist:

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (4.22)$$

wobei \$a\$ die große Halbachse der Ellipse ist. Für die Beziehung zwischen großer und kleiner Halbachse liest man aus Abb. 4.2 ab

$$a^2 = c^2 + b^2$$

In kartesischen Koordinaten liest man aus Abb. 4.2a für \$r_1\$ und \$r_2\$ ab

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad (4.23)$$

Setzt man dies in Gl. (4.22) ein, so erhält man nach etwas Rechnung die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.24)$$

Mit Gl. (4.22) gilt zudem

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2a(r_2 - r_1)$$

Aus Gl. (4.23) folgt aber auch

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx = 2a \frac{2cx}{a}$$

Ein Vergleich der rechten Seiten dieser Gleichungen liefert

$$r_2 - r_1 = \frac{2cx}{a}$$

und mit Gl. (4.22) gilt daher

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} \quad \text{und} \quad r_2 = a + \frac{cx}{a}$$

Setzt man für die Polarkoordinaten-Darstellung $r = r_2$ dann transferiert man den Ursprung in den linken Fokuspunkt der Ellipse (Abb. 4.2b) und man erhält mit der von Abb. 4.2a in Abb. 4.2b transferierten x -Koordinate $x = r \cos \varphi - c$ eines Ellipsenpunkts

$$r = a + \frac{cx}{a} = a + \frac{c}{a}(r \cos \varphi - c) = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi = \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi$$

die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten mit dem Ursprung im linken Fokuspunkt

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (4.25)$$

mit den Ellipsenparametern

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{a} \quad (\text{Exzentrizität}) \quad (4.26)$$

Die große und die kleine Halbachse der Ellipse, a bzw. b , sowie der Abstand c der Fokuspunkte von der Mitte der Ellipse lassen sich ausdrücken durch p und ϵ :

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad ; \quad c = \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2} \quad ; \quad b = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2}$$

Mit diesen Gleichungen erhält durch Einsetzen von p und ϵ aus Gl. (4.20)

$$\frac{1}{a - c} = \frac{1 + \epsilon}{p} = G \frac{M \cdot m^2}{l^2} + \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \left(G \frac{M \cdot m^2}{l^2}\right)^2} \quad (4.27a)$$

und

$$\frac{1}{a + c} = \frac{1 - \epsilon}{p} = G \frac{M \cdot m^2}{l^2} - \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \left(G \frac{M \cdot m^2}{l^2}\right)^2} \quad (4.27b)$$

Multiplikation von Gl. (4.27a) mit Gl. (4.27b) liefert

$$\frac{1}{a^2 - c^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1 - \epsilon^2}{p^2} = \frac{2mE}{l^2} \quad (4.28)$$

und Addition von Gl. (4.27a) und Gl. (4.27b) liefert

$$\frac{2a}{a^2 - c^2} = \frac{2a}{b^2} = \frac{2}{p} = 2\gamma \frac{M \cdot m^2}{l^2} \quad (4.29)$$

Division von Gl. (4.28) durch Gl. (4.29) zeigt dass

$$E = G \frac{M \cdot m}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{p} = G \frac{M \cdot m}{2a} \quad (4.30)$$

Mit Gl. (4.6) und der Ellipsenfläche, das heißt mit

$$l = \frac{2mA}{\tau} \quad \text{und} \quad A = \pi \cdot a \cdot b$$

sowie Gl. (4.29) folgt

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \quad (4.31)$$

τ ist hier die Zeit für einen kompletten Umlauf des Massenpunkts auf der elliptischen Bahnkurve. Gl. (4.31) besagt, dass das Verhältnis aus Quadrat der Umlaufzeit zur dritten Potenz der großen Halbachse nur von der Masse M und nicht von der Masse m des Massenpunkts abhängt. Dieses Verhältnis ist somit identisch für alle Massenpunkte m auf beliebigen elliptischen Bahnkurven mit M in einem der Fokuspunkte. Das ist aber nicht anderes als Keplers drittes Gesetz: Das Quadrat der Umlaufzeit geteilt durch die dritte Potenz der großen Halbachse ist für alle Planeten eine Konstante. Diese Beziehung zwischen Umlaufzeit und Bahnradius gilt nicht nur in unserem Sonnensystem sondern sie gilt jeweils für alle Planeten die sich auf elliptischen Bahnkurven um ihren Stern bewegen.

Wie Gl. (4.30) zeigt, hat die Bahnkurve der Ellipse die Eigenschaft, dass die Gesamtenergie durch die große Halbachse a der Ellipse ausgedrückt werden kann. Gl. (4.30) kann man allgemeiner formulieren als

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (4.32)$$

Gl. (4.32) besagt, dass bei einer elliptischen Bahnkurve die Energie nur von der großen Halbachse abhängt. Jeder Bewegung auf elliptischen Bahnkurven mit gleichem a entspricht also dieselbe Gesamtenergie, unabhängig von der Exzentrizität ϵ der jeweiligen elliptischen Bahn. Hier wurde der spezielle Fall des Gravitationspotenzials behandelt für das gilt

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

mit $\alpha = G \cdot M \cdot m$. Gl. (4.32) gilt aber zum Beispiel genauso für das Coulombpotenzial zwischen zwei elektrischen Ladungen q_1 und q_2

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$$

Für das Coulombpotenzial kann α positiv oder negativ sein. Sind beispielsweise die Ladungen q_1 und q_2 beide positiv bzw. beide negativ, dann ist $\alpha < 0$. Ist aber q_1 positiv und q_2 negativ oder umgekehrt, dann ist $\alpha > 0$.

In beiden Fällen, dem Gravitationspotenzial und dem Coulombpotenzial, lässt sich die Gesamtenergie durch die einfache Formel in Gl. (4.32) bestimmen. Ist $\alpha > 0$, dann liegt eine anziehende Kraft vor und $E < 0$. Damit ist $\epsilon < 1$ und die Bahnkurve ist eine Ellipse. Die Bahnkurve bleibt eine Ellipse solange $0 < \epsilon < 1$ und bei $\epsilon = 0$ wird aus der Ellipse ein Kreis. Ist $\alpha = 0$ dann ist $E = 0$ und somit $\epsilon = 1$ und die Bahnkurve ist damit eine Parabel. Ist hingegen $\alpha < 0$, so hat man es mit einer abstoßenden Kraft zu tun und wegen $E > 0$ ist dann $\epsilon > 1$ und die Bahnkurve ist damit eine Hyperbel.

4.3.1 Gebundene und ungebundene Bewegungen

Bei gebundenen Bewegungen ist die Gesamtenergie der Relativbewegung $E < 0$ und die Bahnkurve ist eine Ellipse oder ein Kreis. Bei ungebundenen Bewegungen ist $E \geq 0$ und die Bahnkurve ist eine Parabel oder eine Hyperbel. Betrachtet wird zuerst die gebundene Bewegung auf einer elliptischen Bahnkurve wie in Abb. 4.2b, wobei sich aber nun die Erde im Ursprung des Koordinatensystems, das heißt dem linken Fokuspunkt befindet und ein Satellit sie auf der Bahnkurve umlaufen soll. Es gilt also für die Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}$$

und die Gesamtenergie

$$E = \frac{m_S}{2} \dot{r}^2 + U(r) = \frac{m_S}{2} \dot{r}^2 + V_{Zf}(r) + V(r)$$

mit

$$V_{Zf}(r) = \frac{l^2}{2m_S r^2} \quad \text{und} \quad V(r) = -G \frac{M_E \cdot m_S}{r}$$

wobei M_E die Masse der Erde und m_S die Masse des Satelliten ist. Abb. 4.3 zeigt den Verlauf des Potenzials $U(r)$, die Summe aus anziehendem Potenzial $V(r)$ und abstoßendem Potenzial $V_{Zf}(r)$. Bei zu geringem Drehimpuls $l = |L|$ ist die durch ihn bewirkte abstoßende Kraft zu gering als dass sich ein Körper in einer Umlaufbahn um die Erde bewegen könnte. Für den Minimalabstand r_{min} den ein Körper auf einer elliptischen Bahn um die Erde hat, liest man mit Gl. (4.20) aus Abb. 4.2b ab

$$r_{min} = r(\pi) = \frac{p}{1 + \epsilon} = \frac{l^2}{GM_E m_S (1 + \epsilon)}$$

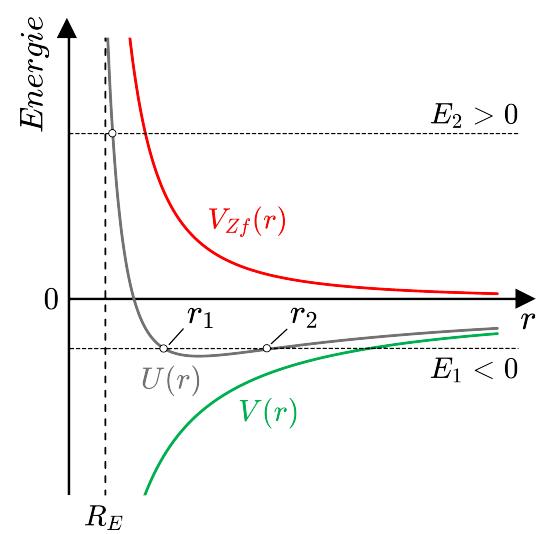


Abb. 4.3

Damit ein Körper nicht auf die Erde stürzt muss gelten $r_{min} > R_E$ und man erhält für den minimalen Drehimpuls

$$l > \sqrt{GM_E m_S (1 + \epsilon) R_E} \quad (4.33)$$

Der kleinstmögliche Wert von l ergibt sich für $\epsilon = 0$, also für eine Kreisbahn. Für die Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius r gilt für den Drehimpuls $l = |L|$ und die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des umlaufenden Körpers v_φ

$$l = mr^2\dot{\varphi} \quad \text{und} \quad v_\varphi = r\cdot\dot{\varphi} \quad (4.34)$$

Einsetzen dieser Beziehungen für den Grenzfall $r = R_E$ und $m = m_S$ in Gl. (4.33) liefert für v_φ

$$v_\varphi > \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} = 7.9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} = v^{(1)} \quad (4.35)$$

$v_\varphi = 7.9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ist die sogenannte erste kosmische Geschwindigkeit $v^{(1)}$. Hätte die Erde keine Atmosphäre und wäre ihre Kugeloberfläche perfekt flach, dann würde ein knapp über der Erdoberfläche tangential mit $v^{(1)}$ geworfener Stein die Erde auf einer stabilen gebundenen Umlaufbahn knapp über der Oberfläche umrunden. Satelliten müssen wegen der Erdatmosphäre natürlich eine Kreisbahn mit einem viel größeren Abstand von der Erdoberfläche haben. Den Drehimpuls für den gewünschten kreisförmigen Orbit mit Radius R erhält man analog zu Gl. (4.33) und entsprechend erhält man auch die notwendige Tangentialgeschwindigkeit. Bei einem kreisförmigen Orbit fallen die Abstände r_1 und r_2 in Abb. 4.3 zusammen und es liegt die in Abb. 4.4 skizzierte Situation vor.

Von besonderem Interesse ist die geostationäre Bahn, das heißt eine Umlaufbahn bei welcher ein Satellit immer über dem gleichen Punkt der Erdoberfläche steht. Aus Gl. (4.33) mit R_{geo} anstatt R_E und Gl. (4.35) mit $\dot{\varphi} = 2\pi/1$ Tag berechnet sich die geostationäre Bahn zu

$$R_{geo} = \frac{G \cdot M_E \cdot 1 \text{ Tag}}{2\pi} = 42.2 \text{ km}$$

Die geostationäre Bahn befindet sich also in einer Höhe von ca. 35.9 km über der Erdoberfläche. Die Energie die man benötigt, um einen Satelliten in eine solche gebundene Umlaufbahn zu bringen ist beträchtlich da mit dem Satelliten ja die wesentlich schwerere Trägerrakete, das meiste davon Treibstoff,

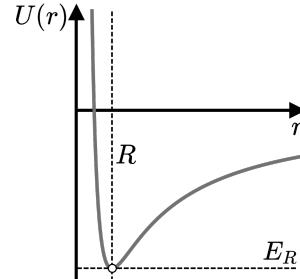


Abb. 4.4

auf entsprechende hohe Geschwindigkeit gebracht werden muss. Um das Schwerefeld der Erde gänzlich zu verlassen betrachtet man die Energie die benötigt wird, um einen Körper von der Erdoberfläche in eine bestimmte Umlaufbahn mit Radius R zu bringen. Diese ist gegeben durch

$$\Delta E = G \cdot M_E \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R} \right)$$

Um das Schwerefeld der Erde gänzlich zu verlassen, also $R \rightarrow \infty$, wird mindestens die kinetische Energie

$$\Delta E = \frac{m}{2} \cdot v_{2E}^2 = G \cdot M_E \cdot m \cdot \frac{1}{R_E} \quad (4.36)$$

benötigt. Damit ist die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Schwerefeld der Erde, auch als zweite kosmische Geschwindigkeit $v^{(2)}$ bezeichnet, gegeben durch

$$v_{2E} = \sqrt{\frac{2\gamma M_E}{R_E}} = 11.2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} = v^{(2)} \quad (4.37)$$

Bezogen auf die elliptische Bahnkurve in Abb. 4.2b bedeutet $R \rightarrow \infty$ in Gl. (4.36), dass der Punkt auf der Bahnkurve mit dem größten Abstand vom Fokuspunkt sich immer weiter entfernt und schließlich gegen Unendlich geht. Für Gl. (4.25) muss daher gelten

$$r(0) = \frac{p}{1-\epsilon} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \epsilon \rightarrow 1$$

Die elliptische Bahn bricht also auf und wird zu einer Parabel. Genauso wie es eine Fluchtgeschwindigkeit gibt um der Gravitation der Erde zu entkommen, gibt es eine entsprechende Fluchtgeschwindigkeit für das Verlassen unseres Sonnensystems. Um die Fluchtgeschwindigkeit von der Sonne am Ort der Erde zu berechnen, ersetzt man in Gl. (4.37) Erdmasse M_E und Erdradius R_E durch Sonnenmasse M_S und den mittleren Abstand zwischen Sonne und Erde R_{SE} . Damit berechnet sich die Fluchtgeschwindigkeit von der Sonne in der Erdumlaufbahn zu $v_{2S} = 42.1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Die Erde bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_E \approx 29.8 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ um die Sonne. Diese Eigengeschwindigkeit verringert die Fluchtgeschwindigkeit zum Verlassen des Sonnensystems und ist von v_{2S} abzuziehen. Letztlich muss man noch die Gravitation der Erde, also v_{2E} , berücksichtigen. Für die dritte kosmische Geschwindigkeit $v^{(3)}$, die Geschwindigkeit die man erreichen muss um von der Erde aus das Sonnensystem zu verlassen ergibt sich damit

$$v^{(3)} = \sqrt{(v_{2S} - v_E)^2 + v_{2E}^2} \approx 16.6 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \quad (4.38)$$

Bahnkurve der Hyperbel

Wie bei der Ellipse, hat man auch bei der Hyperbel die Wahl den Ursprung des Koordinatensystems entweder in den linken oder den rechten Brennpunkt zu legen. Hier wird, wie in Abb. 4.5 skizziert, wieder der linke Brennpunkt gewählt, um den rechten Ast der Hyperbel zu beschreiben. Für jeden Punkt auf dem rechten Hyperbelast gilt $r_2 - r_1 = 2a$ und für jeden Punkt auf dem linken Hyperbelast gilt $r_2 - r_1 = -2a$, bzw. für alle Punkte auf der Hyperbel gilt in kartesischen Koordinaten (Abb. 4.5a)

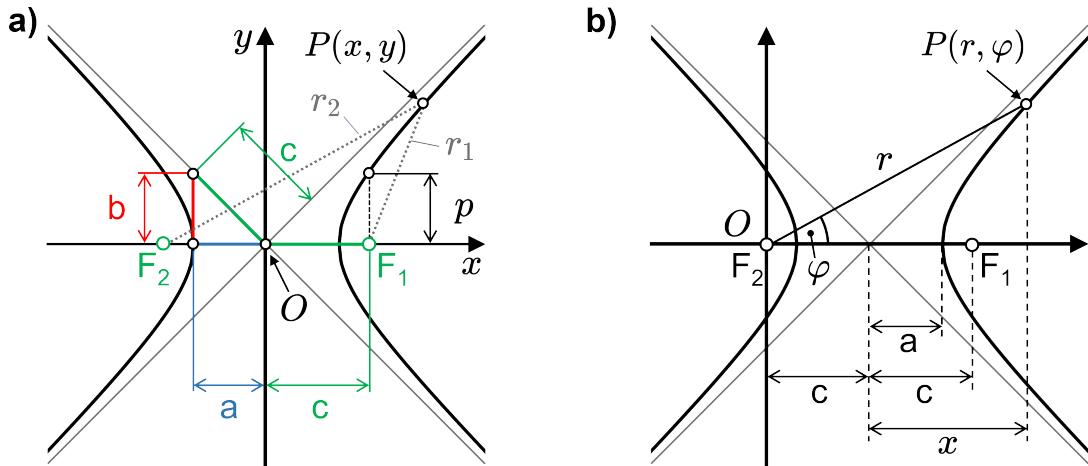


Abb. 4.5: Hyperbel in kartesischen (a) und Polarkoordinaten (b). In Polarkoordinaten hat man die Wahl, den Ursprung wie hier in den linken Fokuspunkt - Minuszeichen in Gl. (4.21) - oder in den rechten Fokuspunkt - Pluszeichen in Gl. (4.21) - zu legen.

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (4.39)$$

Mit Hilfe von $c^2 = a^2 + b^2$ lässt sich daraus die Hyperbelgleichung in kartesischen Koordinaten ableiten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.40)$$

Analog zur Vorgehensweise bei der Ellipsengleichung zeigt eine Vergleich der rechten Seiten von

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = \pm 2a(r_2 + r_1)$$

und

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx = 2a \frac{2cx}{a}$$

dass gelten muss

$$r_2 + r_1 = \mp \frac{2cx}{a}$$

Damit erhält man mit Gl. (4.39) für den rechten Hyperbelast

$$r_1 = -a + \frac{cx}{a} \quad \text{und} \quad r_2 = a + \frac{cx}{a} \quad \text{mit} \quad x \geq a$$

und für den linken Hyperbelast

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} \quad \text{und} \quad r_2 = -a - \frac{cx}{a} \quad \text{mit} \quad x \leq -a$$

Für die Darstellung in Polarkoordinaten mit dem Ursprung im linken Fokus wie in Abb. 4.5b skizziert, wird wieder $r = r_2$ gesetzt und man erhält mit der transferierten x -Koordinate des rechten Astes $x = r \cos \varphi - c$

$$r = a + \frac{cx}{a} = a + \frac{c}{a}(r \cos \varphi - c) = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi = -\frac{b^2}{a} + \frac{c}{a}r \cos \varphi$$

die Hyperbelgleichung des rechten Astes in Polarkoordinaten mit dem Ursprung im linken Fokuspunkt

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \tag{4.41}$$

mit den Hyperbelparametern

$$p = -\frac{b^2}{a} = -(\epsilon^2 - 1)a \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{a} > 1 \tag{4.42}$$

Für den linken Hyperbelast gilt ebenfalls Gl. (4.41) aber mit den Hyperbelparametern

$$p = \frac{b^2}{a} = (\epsilon^2 - 1)a \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{a} > 1 \tag{4.43}$$

4.4 Streuung an Zentralpotenzialen

Die Streuung an einem Zentralpotenzial ist eng verwandt mit der Keplerbewegung. Im einfachsten Fall beschreibt der Streuprozess die Relativbewegung zweier nicht gebundener Teilchen (also $E > 0$) die aus unterschiedlichen Richtungen kommend aufeinander zulaufen, dann bei geringem Abstand durch Potenzialstreuung ihre Bahnkurven ändern, um sich anschließend in unterschiedlichen Richtungen voneinander zu entfernen. Die Bahnkurve des Streuprozesses entspricht dabei der Hyperbel der Keplerbewegung.

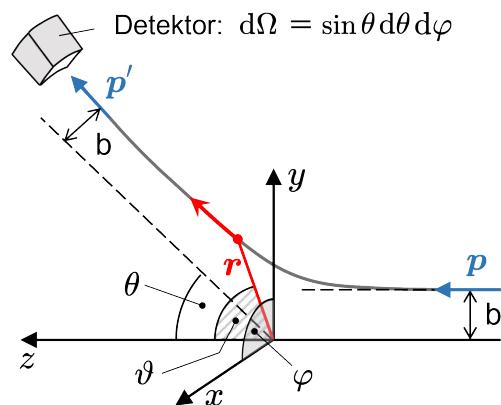


Abb. 4.6

Im Folgenden wird ein Teilchenstrahl betrachtet in welchem alle Teilchen (Massenpunkte) den gleichen Impuls \mathbf{p} haben. Dieser soll an einem Zentralpotenzial gestreut werden das sein Zentrum im Koordinatenurprung hat (Abb. 4.6). Ein im Abstand b von der z -Achse mit dem Impuls \mathbf{p} einfallendes Teilchen wird dabei um den Winkel θ gestreut und hat nach der Streung den Impuls \mathbf{p}' . Das Koordinatensystem in Abb. 4.6 ist dabei so um die z -Achse rotiert, dass die von den Impulsvektoren \mathbf{p} und \mathbf{p}' aufgespannte Ebene mit der yz -Ebene zusammenfällt. Die Anzahl der Teilchen die eine Querschnittsfläche senkrecht zur xy -Ebene durchfliegen, das heißt die Intensität I des Teilchenflusses, sei räumlich konstant. Wie aus Abb. 4.6 ersichtlich, ist die Streuung am Zentralpotenzial rotationssymmetrisch. Die Anzahl der Teilchen dN die in das Raumwinkelement $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ (Detektor) um den Streuwinkel θ gestreut werden hängt nicht von φ ab, die Streuung erfolgt jeweils in einer Ebene für die $\varphi = const$ gilt. Es genügt daher das Problem in der Streuebene, in Abb. 4.6 die yz -Ebene, zu betrachten. Der Verlauf der Bahnkurve eines Teilchens in dieser Ebene ist damit nur eine Funktion von Stoßparameter b und dem Betrag des Ausgangsimpulses $p = |\mathbf{p}|$, also $\theta = \theta(b, p)$. Aus Abb. 4.6 lassen sich mit analogen Betrachtungen wie für Abb. 4.1 mittels Drehimpuls- und Energieerhaltung die Gleichungen für $\dot{\mathbf{r}}$ und $\dot{\vartheta}$ herleiten, mit dem Unterschied, dass der entsprechende Winkel hier ϑ und nicht φ ist. Da der Winkel ϑ für das einfallende Teilchen größer ist als für das gestreute Teilchen gilt hier zudem $\dot{\vartheta} < 0$ mit

$$\dot{\vartheta} = -\frac{l}{mr^2} \quad (4.44)$$

und

$$\dot{r}^2 = \pm \frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right) \quad (4.45)$$

Wegen $\dot{\vartheta} < 0$ ist das Vorzeichen in der zu Gl. (4.18) äquivalenten Gleichung vertauscht (von \pm zu \mp)

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \mp \frac{\sqrt{2m} \cdot r^2}{l} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right)^{-1/2} \quad (4.46)$$

Daraus folgt die Gleichung für den Streuwinkel

$$d\vartheta = \mp \frac{l}{\sqrt{2m}} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right)^{-1/2} \cdot r^{-2} \cdot dr \quad (4.47)$$

Integration von ϑ_0 bis ϑ und r_0 bis r ergibt

$$\vartheta - \vartheta_0 = \mp \frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^r \left(E - \frac{l^2}{2m\xi^2} - V(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (4.48)$$

Bei der Wahl von ϑ_0 und r_0 benutzt man die Tatsache, dass die Bewegungsgleichung bezüglich Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ invariant ist und der Streuvorgang damit theoretisch „rückwärts“ laufen kann, das heißt das gestreute Teilchen wird zum einfallenden Teilchen und umgekehrt. Das zeigt sich in der Spiegelsymmetrie der Bahnkurve (Abb. 4.7) bezüglich der Geraden durch das Streuzentrum und den kürzesten Abstand r_0 des gestreuten Teilchens vom Streuzentrum, dem Perihel. Aus Abb. 4.7 lässt sich ablesen, dass $\alpha = \vartheta_0 - \theta$ und $\theta + 2\alpha = \pi$. Somit gilt für den Winkel ϑ_0 bei dem das Teilchen sich im Perihel befindet:

$$\vartheta_0 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Jetzt betrachtet man den einfallenden und den gestreuten Ast getrennt. In Gl. (4.45) ist \dot{r} für den einfallenden Ast negativ und für den gestreuten Ast positiv. Für die Werte von ϑ und r gilt:

$$\left. \begin{array}{l} r_0 \leq r \leq \infty \\ \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \end{array} \right\} \quad \text{einfallender Ast} \quad \left. \begin{array}{l} r_0 \leq r \leq \infty \\ \theta \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \end{array} \right\} \quad \text{gestreuter Ast}$$

$$\quad (\dot{r} < 0) \quad \quad \quad (\dot{r} > 0)$$

Für den einfallenden Ast in Gl. (4.48) gilt

$$\pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^{\infty} \left(E - \frac{l^2}{2m\xi^2} - V(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (4.49)$$

und entsprechend gilt für den gestreuten Ast in Gl. (4.48)

$$\theta - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^{\infty} \left(E - \frac{l^2}{2m\xi^2} - V(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (4.50)$$

Mit dem Betrag des Drehimpulses

$$l = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = b \cdot p = const$$

und der Energie

$$E = \frac{p^2}{2m} = const$$

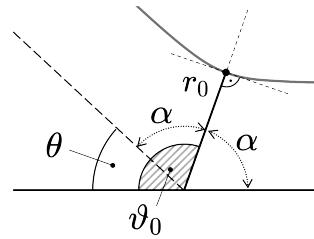


Abb. 4.7

wird aus der Gleichung für den gestreuten Ast

$$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} = -b \cdot p \cdot \int_{r_0}^{\infty} \left(p^2 \left(1 - \frac{b^2}{\xi^2} \right) - 2mV(\xi) \right)^{-1/2} \cdot \xi^{-2} \cdot d\xi \quad (4.51)$$

Mit Substitution

$$u = \frac{b}{\xi} \quad , \quad du = -\frac{b}{\xi^2} d\xi$$

erhält man nach Umformung ($p^2 = 2mE$)

$$\theta = \pi - 2 \cdot \int_0^{b/r_0} \left(1 - u^2 - \frac{V(b/u)}{E} \right)^{-1/2} \cdot du \quad (4.52)$$

Um bei bekanntem Stoßparameter und bekannter Energie den Streuwinkel aus Gl. (4.52) berechnen zu können, muss nun noch r_0 bestimmt werden. Im Perihel muss in Gl. (4.45) $\dot{r} = 0$ gelten, also (mit $l^2 = b^2 p^2 = b^2 2mE$)

$$E - \frac{l^2}{2mr_0^2} - V(r_0) = E \left(1 - \frac{b^2}{r_0^2} \right) - V(r_0) = 0 \quad (4.53)$$

Mit Hilfe von Gl. (4.52) und Gl. (4.53) kann der Streuwinkel θ als Funktion des Stoßparameters und der Energie E der einfallenden Teilchen für eine gegebenes Zentralpotenzial berechnet werden.

Beispiel 4.2 Rutherford Streuung

Unter Rutherford Streuung versteht man die Streuung von geladenen Partikeln an einem geladenen Streuzentrum. Das elektrische Potenzial (Coulombpotenzial) das auf eine Probeladung q wirkt hat die allgemeine Form

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r} = -\frac{\alpha}{r} \quad (4.54)$$

wobei der konstante Vorfaktor die Coulomb-Konstante ist und Q ist die Ladung des Streuzentrums. Die Ladungen haben bei Rutherford Streuung gleiches Vorzeichen, das heißt $V(r)$ ist positiv und $\alpha < 0$ (abstoßende Kraft). Einsetzen in Gl. (4.53) zur Bestimmung von r_0 liefert

$$E \left(1 - \frac{b^2}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha}{r_0} = 0$$

Multiplikation mit $\frac{r_0^2}{Eb^2}$ ergibt

$$\frac{r_0^2}{b^2} - 1 + \frac{r_0}{b} \frac{\alpha}{Eb} = 0$$

Mit den dimensionslosen Größen

$$\rho = \frac{r_0}{b} \quad \text{und} \quad \Lambda = \frac{\alpha}{2Eb}$$

kann man diese Gleichung mittels quadratischer Ergänzung umschreiben zu

$$\rho^2 + 2\rho\Lambda + \Lambda^2 = 1 + \Lambda^2$$

also

$$\rho = -\Lambda \pm \sqrt{1 + \Lambda^2}$$

Da r_0 positiv sein muss, ist die Lösung mit positiven Vorzeichen zu wählen also

$$\rho = -\Lambda + \sqrt{1 + \Lambda^2} \tag{4.55}$$

Damit wird aus Gl. (4.52) für die Berechnung des Streuwinkel θ

$$\theta = \pi - 2 \cdot \int_0^{1/\rho} (1 - u^2 + 2u\Lambda)^{-1/2} du \tag{4.56}$$

Der Ausdruck in der Klammer unter dem Integral lässt sich umformen zu

$$1 - u^2 - 2u\Lambda = (1 + \Lambda^2) \left[1 - \left(\frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \right)^2 \right]$$

Mit Substitution

$$x = \frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}}, \quad dx = \frac{du}{\sqrt{1 + \Lambda^2}}$$

wird aus dem Integral in Gl. (4.56)

$$\int (1 - u^2 + 2u\Lambda)^{-1/2} du = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x = \arcsin \frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}}$$

Somit ergibt sich für den Streuwinkel θ in Gl. (4.56)

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \frac{u - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \Big|_0^{1/\rho} = \pi - 2 \left(\arcsin \frac{1/\rho - \Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} - \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \right)$$

Einsetzen von ρ aus Gl. (4.55) liefert schließlich

$$\begin{aligned}\theta &= \pi - 2 \left(\underbrace{\arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \left(\frac{1+\Lambda^2 - \Lambda\sqrt{1+\Lambda^2}}{\sqrt{1+\Lambda^2} - \Lambda} \right) \right]}_{=1} - \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \right) \\ &= \pi - 2 \left(\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} - \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}} \right) = 2 \arcsin \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\Lambda^2}}\end{aligned}$$

Damit erhält man mit $\Lambda = \alpha/2Eb$ für den Streuwinkel θ bei Rutherford Streuung ($\alpha < 0$, $E > 0$ und somit $-\Lambda > 0$)

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 b^2}{\alpha^2}}} \quad (4.57)$$

Abb. 4.8 zeigt die Abhängigkeit des Streuwinkels θ in Gl. (4.57) vom Stoßparameter b in graphischer Form. Beim frontalen Stoß ($b = 0$) hat man also direkte Rückstreuung ($\theta = \pi$) und der gestreute Ast ist deckungsgleich mit dem einfallenden Ast. Aus Gl. (4.57) lässt sich ablesen, dass das Argument der arcsin-Funktion wie b^{-1} skaliert. Weil für kleine x gilt $\arcsin(x) \approx x$, skaliert auch $\theta(b)$ für große Stoßparameter b wie b^{-1} . Der Grund dafür ist die Langreichweiteitigkeit von Potenzialen der Art $V(r) = \alpha/r$. Nachdem der Streuwinkel θ in Gl. (4.57) in gleicher Weise von Stoßparameter b und Energie E abhängig ist, erhält man den gleichen Kurvenverlauf wie für $\theta(b)$ in Abb. 4.8 wenn man θ als Funktion von E aufträgt.

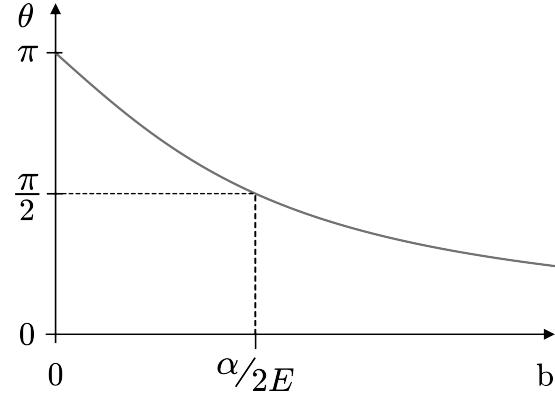


Abb. 4.8: Rutherford Streuung: Streuwinkel θ als Funktion des Stoßparameters b .

Um den Zusammenhang zwischen der Keplerbewegung und der Bahnkurve der Rutherford Streuung zu verdeutlichen kann man letztere direkt aus der Keplerbewegung herleiten. Betrachtet wird dabei die ebene Bahnkurve eines einlaufenden Teilchens in Polarkoordinaten. Das Teilchen komme aus „unendlich“ großer Entfernung und werde an einem im Zentrum des Koordinatensystems befindlichen Zentralpotenzial gestreut. Der Radiusvektor vom Ursprung des Zentralpotenzials (Ursprung des Koordinatensystems) zum einfallenden Teilchen sei

$$\mathbf{r} = r \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (4.58)$$

wobei $\hat{\mathbf{u}}$ der in Richtung des Teilchens zeigende Einheitsvektor ist. Für diesen gilt

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1 \quad \text{und damit} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^2}{\partial t} = 2\hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}} = 0 \quad (4.59)$$

Für die Geschwindigkeit des einlaufenden Teilchens folgt aus Gl. (4.58)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}}$$

und sein Drehimpuls ist somit

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(r\hat{\mathbf{u}} \times (\dot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}})) = mr^2(\hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}})$$

Für das Zentralpotenzial wirkt die Kraft immer entlang des Radiusvektors, also

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) = -\nabla\left(-\frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\mathbf{u}} \quad (\alpha < 0)$$

Daraus folgt auch unmittelbar die Konstanz des Drehimpulses im Zentralpotenzial da

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = m\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\left(\underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}\right) = -\frac{m\alpha}{r}\underbrace{(\hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}})}_{=0} = 0$$

Jetzt nutzt man das Kreuzprodukt aus Beschleunigung und Drehimpuls

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = -\frac{\alpha}{mr^2}\hat{\mathbf{u}} \times mr^2(\hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}}) = -\alpha(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}} \times \dot{\hat{\mathbf{u}}})$$

das man mit Hilfe der [Graßmann Identität](#) und Gl. (4.59) umschreiben kann zu

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = -\alpha\left(\hat{\mathbf{u}}\underbrace{(\hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}})}_{=0} - \dot{\hat{\mathbf{u}}}\underbrace{(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}})}_{=1}\right) = \alpha\dot{\hat{\mathbf{u}}} \quad (4.60)$$

Gl. (4.60) kann direkt integriert werden, da $\mathbf{L} = \text{const}$ und man erhält

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \alpha\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \quad (4.61)$$

wobei der Vektor \mathbf{c} eine Integrationskonstante ist. Die Vektorgleichung Gl. (4.61) wandelt man durch Multiplikation von links mit $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}$ in eine Skalarengleichung um. Weil das Spatprodukt kommutativ ist erhält man damit

$$\mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\mathbf{L} = \frac{1}{m}\mathbf{L}\mathbf{L} = \alpha r\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{rc}$$

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{c} sowie $l = |\mathbf{L}|$ dann lautet die Gleichung aufgelöst nach r (mit $\alpha < 0$ ersetzt durch $-|\alpha|$)

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (4.62)$$

mit den Parametern

$$p = -\frac{l^2}{m|\alpha|} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{c}{|\alpha|} \quad (4.63)$$

Gl. (4.62) ist die Bahnkurve eines Kegelschnitts. Dass der Kegelschnittparameter p in Gl. (4.63) negativ ist, legt bereits nahe, dass es sich um eine Hyperbel handelt. Um zu verifizieren, dass $\epsilon > 1$ gilt, muss man c bestimmen. Den Wert von c erhält man über die Anfangsbedingungen. Setzt man diese so wie in Abb. 4.6 skizziert, dann kommt das einlaufende Teilchen aus der $+z$ -Richtung mit der Geschwindigkeit v_∞ auf einer Geraden die im Abstand b parallel zur z -Achse verläuft; die Bahnkurve liegt in der yz -Ebene. Bei sehr großen Abständen, das heißt wenn das einfallende Teilchen quasi noch „unendlich“ weit vom Streuzentrum entfernt ist, gilt für die Gesamtenergie der Relativbewegung:

$$E = \frac{m}{2} \cdot v_\infty^2 \quad (4.64)$$

Ohne den Einfluss des Streuzentrums würde das einlaufenden Teilchen mit dem Impuls mv_∞ auf gerader Bahn die y -Achse im Abstand b schneiden. Mit den Einheitsvektoren des Koordinatensystems e_x, e_y, e_z besitzt es somit den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = b \cdot e_y \times mv_\infty \cdot e_z = mbv_\infty \cdot e_x \quad (4.65)$$

Der Drehimpuls des Systems ist eine Erhaltungsgröße und somit gilt Gl. (4.65) auch wenn das Teilchen noch „unendlich“ weit vom Streuzentrum entfernte ist. Für diesen Fall wertet man nun Gl. (4.61) mit Gl. (4.65) aus und erhält damit die für Anfangsbedingung

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \dot{r} \cdot e_z \times mbv_\infty \cdot e_x = mbv_\infty^2 \cdot e_y = \alpha \cdot e_z + \mathbf{c}$$

Die Einheitsvektoren e_y und e_z stehen senkrecht aufeinander und damit ist der Betrag von \mathbf{c}

$$c = \sqrt{\alpha^2 + (mbv_\infty^2)^2}$$

Daraus folgt für ϵ in Gl. (4.63)

$$\epsilon = \frac{c}{|\alpha|} = \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_\infty^2}{\alpha}\right)^2} > 1$$

Es handelt sich bei der Bahnkurve der Rutherford-Streuung (Gl. (4.62)) also tatsächlich um eine Hyperbel. Mit dem einfallenden Teilchen in großer Entfernung vom Streuzentrum ist die Gesamtenergie durch Gl. (4.64) gegeben und damit wird ϵ

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E^2b^2}{\alpha^2}} \quad (4.66)$$

Ein Vergleich mit Gl. (4.57) zeigt, dass somit für den Streuwinkel θ gilt

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\epsilon} \quad (4.67)$$

Aus Gl. (4.66) kann man nun den Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und den Hyperbelparametern ableiten. Gl. (4.66) nach b^2 auflösen ergibt

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2}(\epsilon^2 - 1) \quad (4.68)$$

und aus Gl. (4.63) folgt mit Hilfe von Gl. (4.64) und Gl. (4.65)

$$p = -\frac{l^2}{m|\alpha|} = -\frac{mv_\infty^2 b^2}{|\alpha|} = -\frac{2Eb^2}{|\alpha|} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4E^2} = \frac{b^4}{p^2}$$

Letzteres in Gl. (4.68) für b^2 eingesetzt liefert für den Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und den Hyperbelparametern p und ϵ

$$b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \quad (4.69)$$

4.4.1 Der Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt σ ist ganz allgemein ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen. Im einfachsten Fall ist σ der geometrische Wirkungsquerschnitt. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Regenschirm. Hält man diesen bei senkrecht fallendem Regen gerade überkopf dann treffen in einem kleinen Kreis um einen herum keine Regentropfen auf den Boden. Die Fläche dieses Kreises um die Füße herum ist der geometrische Wirkungsquerschnitt des Regenschirms. Hat der Schirm allerdings Löcher, dann wechselwirkt er nicht mehr mit allen auf ihn zielenden Regentropfen sondern lässt einige ungehindert durch - der Wirkungsquerschnitt des Regenschirms ist also kleiner geworden.

Um den Wirkungsquerschnitt für die Rutherford-Streuung zu bestimmen, wird wieder ein Teilchenstrom betrachtet der parallel zur z -Achse auf ein Streuzentrum zuläuft (Abb. 4.9). Teilchen deren Stoßparameter zwischen b und $b + db$ beträgt, werden durch die Wechselwirkung mit dem Streuzentrum in ein Winkelement zwischen θ und $\theta + d\theta$ gestreut. Weil das Streupotenzial (beispielsweise das Coulombpotenzial) nicht vom Winkel ϕ abhängt werden alle Teilchen deren Stoßparameter in den Kreisring mit Radius b und Dicke db fällt in das über ϕ integrierte Raumwinkelement $d\Omega$ gestreut.

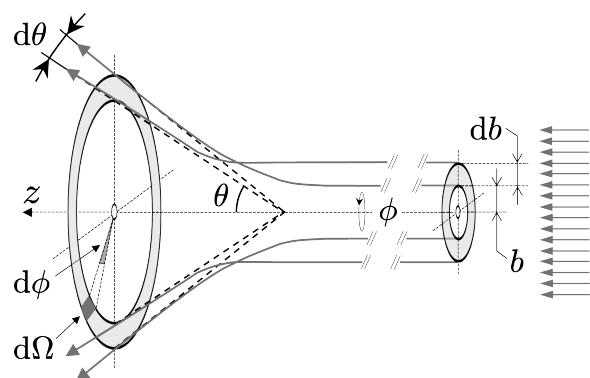


Abb. 4.9

Der Kreisring mit Radius b und Dicke db hat die Fläche

$$d\sigma = 2\pi b db$$

und der Raumwinkel integriert über ϕ ist

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Damit erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (4.70)$$

Da der Wirkungsquerschnitt immer positiv sein muss (er hat das Maß einer Fläche) und $db/d\theta$ auch negative Werte annehmen kann, wurden in Gl. (4.70) die Betragsstriche hinzugefügt (b ist immer positiv und mit $0 \leq \theta \leq \pi$ gilt immer $\sin \theta \geq 0$). Aus Gl. (4.57) erhält man für b

$$b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (4.71)$$

und damit wird

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\alpha}{4E} \frac{1}{\sin^2 \theta / 2} \quad (4.72)$$

Einsetzen von Gl. (4.71) und Gl. (4.72) in Gl. (4.70) liefert den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta / 2} \quad (4.73)$$

Bemerkenswert an Gl. (4.73) ist, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt von α^2 abhängt und nicht von α . Damit ist zum Beispiel bei Coulombstreuung Gl. (4.73) unabhängig vom Vorzeichen der Ladungen. Den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} erhält man durch Integration über den Raumwinkel $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, also

$$\sigma_{tot} = 2\pi \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sin^4 \theta / 2} d\theta \quad (4.74)$$

Der Integrand in Gl. (4.74) divergiert für $\theta \rightarrow 0$. Für kleine θ gilt $\sin \theta \approx \theta$ und $\sin \theta / 2 \approx \theta / 2$, das heißt der Integrand divergiert für $\theta \rightarrow 0$ wie θ^{-3} und die Stammfunktion $\sigma_{tot}(\theta)$ divergiert daher wie θ^{-2} . Diese Divergenz bei kleinen Streuwinkeln beziehungsweise großen Stoßparametern hat ihre Ursache in der langen Reichweite von Zentralpotenzialen der Art $V(r) = -\alpha/r$.

5. Dynamik starrer Körper

5.1 Trägheitstensor

Sei, wie in Abb. 5.1 skizziert, \mathbf{r}_P der Vektor zum Ursprung des körperfesten Bezugssystems in P und \mathbf{r}_K die Koordinate eines Massenpunkts K des starren Körpers bezogen auf den Koordinatenursprung O . Dann gilt:

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{PK} \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PK} \quad (5.1b)$$

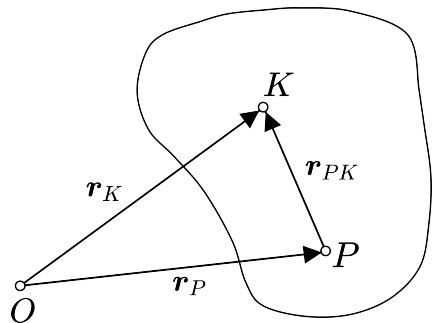


Abb. 5.1

Die Abstände im starren Körper selbst ändern sich nicht (das ist ja die Definition eines starren Körpers) und somit

$$(\mathbf{r}_{PK})^2 = \mathbf{r}_{PK} \cdot \mathbf{r}_{PK} = const$$

Nach der Zeit differenziert folgt daraus

$$0 = 2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_{PK}}{dt} \cdot \mathbf{r}_{PK} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{PK} \perp \mathbf{r}_{PK}$$

Damit lässt sich Gl. (5.1b) umschreiben zu

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_P + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PK}}_{\mathbf{v}_{PK}} \quad (5.2)$$

Der Gesamtdrehimpuls des starren Körpers ergibt sich aus der Summe der Drehimpulse aller Massenpunkte des Körpers

$$\mathbf{L} = \sum_m m_K (\mathbf{r}_K \times \mathbf{v}_K) \rightarrow \int (\mathbf{r}_K \times \mathbf{v}_K) \underbrace{dm}_{\rho \cdot dV}$$

Ist speziell der Ursprung des körperfesten Bezugssystems der Vektor zum Schwerpunkt, also

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_S \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_{PK} = \mathbf{r}_{SK}$$

dann ist der Gesamtdrehimpuls des starren Körpers

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}_{SK}) \times (\mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm$$

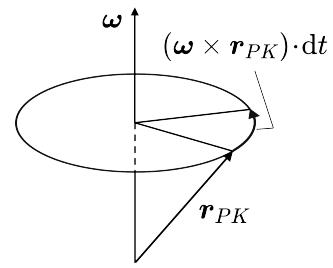


Abb. 5.2

wobei

$$dm = \rho \cdot dx_{SK} \cdot dy_{SK} \cdot dz_{SK}$$

Mit der Masse $M = \int dm$ des starren Körpers wird daraus

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r}_S \times \mathbf{v}_S) \cdot M + \int (\mathbf{r}_S \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm + \int \mathbf{r}_{SK} \times (\mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm$$

Da als Ursprung des körperfesten Bezugssystems der Schwerpunkt gewählt wurde gilt

$$\int \mathbf{r}_{SK} dm = M \mathbf{R}_{SK} \equiv 0$$

und somit verschwinden Integrale mit Integrand linear in \mathbf{r}_{SK} und man erhält

$$\mathbf{L} = \underbrace{(\mathbf{r}_S \times \mathbf{v}_S) \cdot M}_{\mathbf{L}_S} + \underbrace{\int \mathbf{r}_{SK} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm}_{\mathbf{L}_{rot}} \quad (5.3)$$

Hier ist \mathbf{L}_S der Drehimpuls aufgrund der Bewegung des Körperschwerpunkts um den Koordinatenurprung und \mathbf{L}_{rot} ist der Drehimpuls aufgrund der Eigenrotation des Körpers. Diese Eigenrotation starrer Körper wird auch als Drall bezeichnet.

Mit Hilfe von ([Graßmann Identität](#))

$$\mathbf{r}_{SK} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) = \mathbf{r}_{SK}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_{SK} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_{SK}$$

erhält man für die Komponenten von \mathbf{L}_{rot}

$$L_{j_{rot}} = \sum_{l=1}^3 \int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right) dm \cdot \omega_l = \sum_{l=1}^3 J_{jl} \cdot \omega_l$$

wobei

$$J_{jl} = \int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right) dm$$

nur von der Massenverteilung des Körpers und der Wahl des Bezugssystems, d.h., der Wahl von \mathbf{r}_{SK} abhängt. Die J_{jl} sind die Komponenten des symmetrischen Trägheitstensors $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

und mit ihm gilt für \mathbf{L}_{rot}

$$\mathbf{L}_{rot} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{L}_{rot} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{(d)} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.5)$$

wobei der Index d anzeigt dass es sich bei der Notation $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{(d)}$ um den Trägheitstensor der Eigenrotation, d.h., des Dralls handelt. Aus Gl. (5.3) wird somit

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_S + \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{(d)} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.6)$$

Die Diagonalkomponenten von $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$, also die J_{jj} , werden als Massenträgheitsmomente bezeichnet und die J_{jl} mit $j \neq l$ heißen Massendeviationsmomente. Sind alle J_{jl} mit $j \neq l$ gleich Null, dann zeigt \mathbf{L}_{rot} in dieselbe Richtung wie $\boldsymbol{\omega}$, andernfalls, was der allgemeinere Fall ist, zeigen \mathbf{L}_{rot} und $\boldsymbol{\omega}$ in unterschiedliche Richtungen.

Zur Berechnung der J_{jl} :

$$J_{11} = \int (\mathbf{r}_{SK}^2 - x_{1_{SK}}^2) dm = \int (y_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm$$

J_{22} und J_{33} erhält man durch zyklische Vertauschung.

$$J_{12} = - \int x_{1_{SK}} x_{2_{SK}} dm = - \int x_{SK} y_{SK} dm = J_{21}$$

Den Rest der J_{jl} mit $j \neq l$ erhält man wiederum durch zyklische Vertauschung.

Zusammengefasst erhält man:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int (y_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm & J_{12} = J_{21} &= - \int x_{SK} y_{SK} dm \\ J_{22} &= \int (x_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm & J_{13} = J_{31} &= - \int x_{SK} z_{SK} dm \\ J_{33} &= \int (x_{SK}^2 + y_{SK}^2) dm & J_{23} = J_{32} &= - \int y_{SK} z_{SK} dm \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Addition der Massenträgheitsmomente in Gl. (5.7) ergibt

$$J_{11} + J_{22} + J_{33} = 2 \cdot \int (x_{SK}^2 + y_{SK}^2 + z_{SK}^2) dm = 2 \cdot \int \mathbf{r}_{SK}^2 dm \quad (5.8)$$

Das Integral hängt nur vom Bezugspunkt ab und nicht von der Wahl des Bezugssystems, das heißt des Koordinatenursprungs. Somit bleibt das Integral bei Verdrehungen des Koordinatensystems unverändert.

Erhaltung des Massenträgheitsmoments

Die Summe der drei Massenträgheitsmomente eines starren Körpers ist unter Verdrehungen des Koordinatensystems eine Erhaltungsgröße.

Aus Gl. (5.7) kann man zudem die folgenden Dreiecksungleichungen ablesen:

$$J_{11} + J_{22} \geq J_{33}, \quad J_{22} + J_{33} \geq J_{11}, \quad J_{33} + J_{11} \geq J_{22} \quad (5.9)$$

Dreiecks-Ungleichung der Massenträgheitsmomente

Die Summe zweier Massenträgheitsmomente eines starren Körpers ist immer größer oder mindestens gleich dem dritten Massenträgheitsmoment.

Satz von Huygens-Steiner

Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ eines Körpers hängt von der Wahl des Bezugspunkts relativ zum Massenschwerpunkt des Körpers ab. Es sei, wie in Abb. 5.3 skizziert, der Bezugspunkt P im starren Körper bezüglich seines Massenschwerpunkts S verschoben aber das Bezugssystem, das heißt das Koordinatensystem, sei unverändert:

$$\mathbf{r}_{PK} = \mathbf{r}_{PS} + \mathbf{r}_{SK} \quad (*)$$

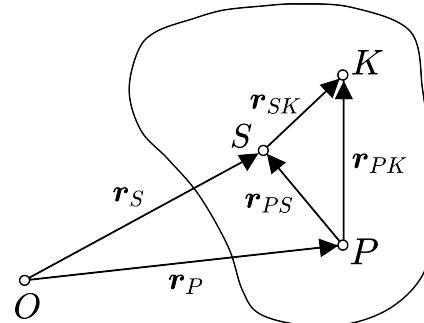


Abb. 5.3

Verschiebt man nun eine durch den Schwerpunkt verlaufende Drehachse parallel in den neuen Bezugspunkt P , so gilt für die Komponenten von $\underline{\underline{J}}$ bezüglich dieser durch den neuen Bezugspunkt verlaufenden Drehachse:

$$J_{P_{jl}} = \underbrace{\int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{PK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PK}} x_{l_{PK}} \right) dm}_{Int} \quad (5.10)$$

Im Integranden „ Int “ ersetzen wir \mathbf{r}_{PK} durch die Beziehung (*) und erhalten

$$Int = \sum_{i=1}^3 (x_{i_{PS}} + x_{i_{SK}})^2 \delta_{jl} - (x_{j_{PK}} + x_{j_{SK}})(x_{l_{PK}} + x_{l_{SK}})$$

Nach Ausmultiplizieren und Umordnen wird daraus

$$\begin{aligned} Int &= \sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PS}} x_{l_{PS}} + \sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}} x_{i_{SK}} \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{PS}} - x_{j_{PS}} x_{l_{SK}} \end{aligned}$$

Mit diesem umgeformten Integranden wird aus Gl. (5.10)

$$\begin{aligned} J_{P_{jl}} &= \underbrace{\int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PS}} x_{l_{PS}} \right) dm}_{J_{PS}} + \underbrace{\int \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right) dm}_{J_{S_{jl}}} \\ &\quad + 2\delta_{jl} \sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}} \underbrace{\int x_{i_{SK}} dm}_{=0} - x_{l_{PS}} \underbrace{\int x_{j_{SK}} dm}_{=0} - x_{j_{PS}} \underbrace{\int x_{l_{SK}} dm}_{=0} \end{aligned}$$

Die letzten drei Integrale auf der linken Seite der Gleichung verschwinden weil für Integration im Schwerpunktsystem, d.h., der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Körperschwerpunkt, natürlich wieder gilt

$$\int \mathbf{r}_{SK} dm \equiv 0$$

Somit sind die Trägheitsmomente für eine Drehachse durch einen Punkt P , die parallel zur Drehachse durch den Schwerpunkt S mit dem Abstand \mathbf{r}_{PS} zum Schwerpunkt verläuft, gegeben durch

$$J_{P_{jl}} = J_{PS} + J_{S_{jl}} \quad (\text{Satz von Steiner}) \quad (5.11)$$

In dieser Gleichung sind

$$J_{S_{jl}} = M \cdot \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{SK}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{SK}} x_{l_{SK}} \right)$$

die Komponenten des Trägheitstensors bezogen auf die parallele Drehachse durch den Schwerpunkt und

$$J_{PS} = M \cdot \left(\sum_{i=1}^3 x_{i_{PS}}^2 \delta_{jl} - x_{j_{PS}} x_{l_{PS}} \right)$$

gibt an um wieviel größer die Komponenten $J_{P_{jl}}$ des Trägheitstensors für die durch den Punkt P verlaufende Drehachse sind im Vergleich zur parallelen Drehachse durch den Schwerpunkt.

Zusammengefasst erhält man für die Komponenten von $\underline{\underline{J}}$ durch die neue Drehachse die unter dem Namen Huygens-Steiner Satz bekannten Beziehungen, benannt nach Christiaan Huygens und Jakob Steiner:

$$\begin{aligned} J_{P_{11}} &= M(y_{PS}^2 + z_{PS}^2) + J_{11} \quad , \quad J_{P_{12}/P_{21}} = M \cdot x_{PS} y_{PS} + J_{12/21} \\ J_{P_{22}} &= M(x_{PS}^2 + z_{PS}^2) + J_{22} \quad , \quad J_{P_{13}/P_{31}} = M \cdot x_{PS} z_{PS} + J_{13/31} \\ J_{P_{33}} &= M(x_{PS}^2 + y_{PS}^2) + J_{22} \quad , \quad J_{P_{23}/P_{32}} = M \cdot y_{PS} z_{PS} + J_{23/32} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Insbesonders gilt, dass der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ für eine nicht durch den Massenschwerpunkt verlaufende Drehachse immer größer ist als für eine parallel dazu durch den Massenschwerpunkt verlaufende Drehachse. Das ist eine direkte Folgerung aus Gl. (5.11) da $J_{S_{ij}}$ immer positiv ist.

Satz von Huygens-Steiner

Die Massenträgheitsmomente eines starren Körpers für Achsen durch seinen Massenschwerpunkt sind stets kleiner als die für parallele, nicht durch den Massenschwerpunkt verlaufende Achsen.

Der Huygens-Steiner Satz besagt, dass sich der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ eines starren Körpers bei Verschiebung des Körper-Bezugspunkts vom Massenschwerpunkt des Körpers ändert. Dabei bleibt die Winkelgeschwindigkeit aber unverändert da sie die Rotation des starren Körpers bezüglich des Koordinatensystems beschreibt und diese unabhängig von der Wahl des Körper-Bezugspunkts ist.

5.2 Euler-Gleichungen

Mit Gl. (5.2) ist die kinetische Energie eines starren Körpers

$$T = \frac{1}{2} \int \left[\mathbf{v}_P + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PK}) \right]^2 dm \quad \text{mit} \quad dm = \rho \cdot dx_{SK} dy_{SK} dz_{SK}$$

Rechnet man vom Massenschwerpunkt aus, das heißtt $P = S$, dann wird

$$\mathbf{r}_{PK} \rightarrow \mathbf{r}_{SK} \quad \text{und mit} \quad \int \mathbf{r}_{SK} dm = 0$$

erhält man für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \left[M \cdot \mathbf{v}_S^2 + 2 \cdot \underbrace{\int \mathbf{v}_S \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm}_{= 0} + \int (\underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}}_{\mathbf{a}}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) dm \right]$$

Das Spatprodukt $\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK})$ unter dem Integral im letzten Glied lässt sich umschreiben zu

$$\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}) = \mathbf{r}_{SK} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_{SK} \times \mathbf{a})$$

Damit und mit Hilfe von Gl. (5.3) sowie Gl. (5.5) ergibt sich für die kinetische Energie eines starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \mathbf{L}_{rot} = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega} \quad (5.13)$$

Die kinetische Energie eines starren Körpers setzt sich aus einem Translationsterm T_T und einem Rotationsterm T_R zusammen. Rotiert ein starrer Körper um eine Achse D deren Richtung durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}_D$ gegeben ist, dann ist $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{n}}_D$ und somit ergibt sich für den Rotationsterm T_R in Gl. (5.13)

$$T_R = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_D \underline{\underline{\mathbf{J}}} \hat{\mathbf{n}}_D \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}J_D \cdot \omega^2$$

wobei J_D das Trägheitsmoment für Rotation um die Drehachse D ist. Ein Vergleich mit T_T zeigt, dass der Trägheitstensor für T_R die gleiche Rolle spielt wie die träge Masse M für T_T .

Ein symmetrischer Tensor ($A_{ij} = A_{ji}$) wie der Trägheitstensor $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ besitzt drei reelle Eigenwerte, die sogenannten Hauptträgheitsmomente eines Körpers, mit zueinander senkrechten Eigenvektoren, den sogenannten Hauptträgheitsachsen des Körpers.

Beispiel 5.1 Rotierender Quader

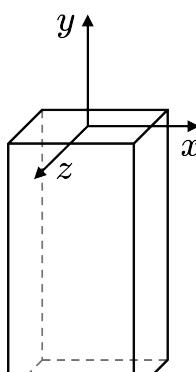


Abb. 5.4

Bezogen auf ein körperfestes Hauptachsensystem, wie zum Beispiel für den Quader in Abb. 5.4, verschwinden die Nebendiagonalelemente von $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$. Die Diagonalelemente, das heißt die Massenträgheitsmomente des Quaders, entsprechen dann seinen Hauptträgheitsmomenten. Mit

$$J_{xx} = A \quad , \quad J_{yy} = B \quad , \quad J_{zz} = C$$

wird aus $\boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega}$ in Gl. (5.13)

$$\boldsymbol{\omega} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = A(\omega_x^2 + \omega_z^2) + B\omega_y^2$$

Im Fall $\mathbf{v}_S = 0$ ist die gesamte kinetische Energie des Quaders Rotationsenergie, also

$$T = T_R = \frac{1}{2}A[(\omega_x^2 + \omega_z^2) + B\omega_y^2]$$

Im Folgenden wird ein raumfestes Bezugssystem x, y, z mit Ursprung O und ein relativ dazu bewegtes Bezugssystem x', y', z' mit Ursprung O' betrachtet. Die Ortsvektoren eines beliebigen Punktes im jeweiligen Koordinatensystem sind verknüpft durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$$

Die Bewegung des O' -Systems relative zum O -System kann eine Translation oder eine Rotation sein, oder auch beides zusammen.

Sei nun \mathbf{A} eine Vektorgröße im raumfesten Koordinatensystem mit Ursprung O

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

Die zeitliche Ableitung von \mathbf{A} ist

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^3 A_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} \quad (5.14)$$

Mit $\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_i$ wird daraus

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot{A}_i \hat{\mathbf{e}}_i}_{\frac{d'\mathbf{A}}{dt}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (5.15)$$

Hierbei ist $d'\mathbf{A}/dt$ die vom bewegten Bezugssystem beobachtete Änderung von \mathbf{A} , das heißt

$$\frac{d'\mathbf{A}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{A}_{x'} \\ \dot{A}_{y'} \\ \dot{A}_{z'} \end{pmatrix}$$

Das dies tatsächlich der Fall ist, wird verständlich wenn, wie in Abb. 5.5 gezeigt, die Bewegung des O' -Systems relative zum O -System auf eine Rotation beschränkt und zugleich $O' = O$ ist. Ist dann nämlich \mathbf{A} konstant, das heißt $d'\mathbf{A}/dt = 0$, dann bewegt sich \mathbf{A} im O -System auf einem Kreis dessen Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, dem Vektor der Rotationsgeschwindigkeit des O' -Systems steht. \mathbf{A} bewegt sich dabei im O -System mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$.

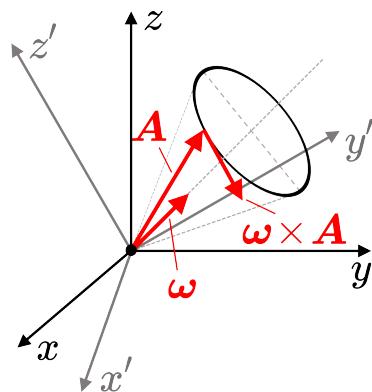


Abb. 5.5

Überträgt man diese Betrachtung nun auf den Drehimpulsvektor \mathbf{L} mit Schwerpunktgeschwindigkeit $\mathbf{v}_S = 0$ dann liegt die gleiche Situation vor wie in Abb. 5.5, das heißt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (5.16)$$

Mit Gl. (5.5) erhält man somit für das Drehmoment $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ die Euler-Gleichungen in Vektorform (manchmal auch als Eulersche Kreiselgleichungen bezeichnet):

$$\mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \boldsymbol{\omega}) \quad (5.17)$$

In Koordinatenform lauten beispielsweise die Euler-Gleichungen im Fall des Quaders aus Abb. 5.4

$$\begin{aligned} M_x &= A\dot{\omega}_x - (B - A)\omega_y\omega_z \\ M_y &= B\dot{\omega}_y \\ M_z &= A\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y \end{aligned} \quad (5.18)$$

Tab. 5.1: Wichtige Beziehungen in der Dynamik starrer Körper (S = Schwerpunkt).

Drehimpuls:	$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \mathbf{L}_{rot} = m \cdot \mathbf{r}_S \times \mathbf{v}_S + \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}$
Trägheitstensor:	$J_{ij} = \int (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm$
Huygens-Steiner Satz:	$J_{P_{ij}} = m(\mathbf{r}_{PS}^2 \delta_{ij} - x_{PSi} x_{PSj}) + J_{S_{ij}}$
Kinetische Energie:	$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}$
Zeitliche Änderung von Vektoren:	$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}$
Rotierender Anteil von \mathbf{L} :	$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d'L}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{d\underline{\underline{\mathbf{J}}}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \end{aligned}$

5.2.1 Eulersche Winkel

Die Eulerschen Winkel wurden bereits kurz in Kapitel 2 bei der Diskussion der Freiheitsgrade eines starren Körpers erwähnt. Hier sollen sie nun eingehender betrachtet werden. Abb. 5.6 zeigt die Rotation eines körperfesten Koordinatensystems O' mit den Achsen x'_1 , x'_2 und x'_3 bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems O mit den Achsen x_1 , x_2 und x_3 . Die Schnittgerade der x_1x_2 -Ebene mit der $x'_1x'_2$ -Ebene ist die sogenannte Knotenlinie, in Abb. 5.6 die Gerade K . Die Eulerschen Winkel α , β und γ in Abb. 5.6 sind wie folgt definiert:

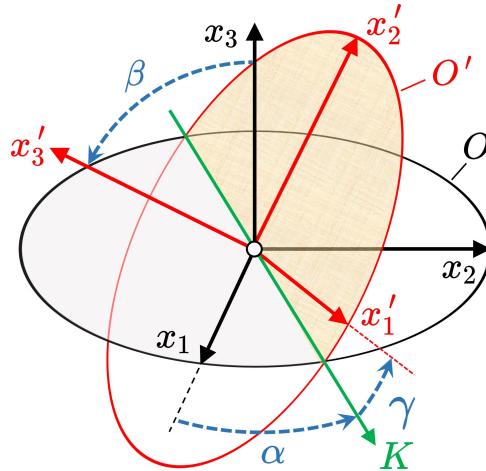


Abb. 5.6: Eulersche Winkel

α : Der Winkel zwischen der x_1 -Achse und der Knotenlinie K .

β : Der Winkel zwischen der x_3 - und der x'_3 -Achse.

γ : Der Winkel zwischen der Knotenlinie K und der x'_1 -Achse.

Die Bedeutung der Eulerschen Winkel liegt darin, dass mit ihrer Hilfe ein raumfestes Koordinatensystem O durch drei in nicht-vertauschbarer Reihenfolge ausgeführte Einzeldrehungen R^α , R^β und R^γ in ein körperfestes Koordinatensystem O' überführt werden kann.

- Im ersten Schritt dreht man das System O um den Winkel α um die x_3 -Achse und bringt damit die x_1 -Achse mit der Knotenlinie K zur Deckung. Die Drehmatrix für diese Operation ist

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Im zweiten Schritt dreht man dann dieses rotierte O um den Winkel β um die Knotenlinie K und bringt damit die x_3 -Achse mit der x'_3 -Achse zur Deckung. Die Drehmatrix für diese Operation ist

$$R^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

- Im dritten Schritt dreht man das so erhaltene O um den Winkel γ um die x'_3 -Achse und bringt damit die bereits nach dem ersten Schritt in der Knotenlinie liegende x_1 -Achse mit der x'_1 -Achse zur Deckung. Die Drehmatrix für diese Operation ist

$$\mathbf{R}^\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Ausführung des dritten Schrittes, d.h. nach der Operation

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise mit den Abkürzungen $C_\alpha = \cos \alpha$, $S_\alpha = \sin \alpha$, $C_\beta = \cos \beta$, $S_\beta = \sin \beta$, $C_\gamma = \cos \gamma$ und $S_\gamma = \sin \gamma$

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\gamma - S_\alpha C_\beta S_\gamma & -C_\alpha S_\gamma - S_\alpha C_\beta C_\gamma & S_\alpha S_\beta \\ S_\alpha C_\gamma + C_\alpha C_\beta S_\gamma & -S_\alpha S_\gamma + C_\alpha C_\beta C_\gamma & -C_\alpha S_\beta \\ S_\beta S_\gamma & S_\beta C_\gamma & C_\beta \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

ist O mit O' deckungsgleich. Die Operation (Notation im Weiteren: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\alpha\beta\gamma}$)

$$\hat{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{R}\hat{\mathbf{e}}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.20)$$

führt die Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$ des raumfesten Koordinatensystems O über in die Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}'_i$ des körperfesten Kordinatensystems O' . Für die Komponenten R_{ij} der Rotationsmatrix \mathbf{R} gilt

$$R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{e}}_j \quad (5.21)$$

was sich mit Gl. (5.20) umschreiben lässt zu

$$R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{e}}'_j \quad (5.22)$$

Die Komponenten R_{ij} sind also gerade jeweils der Kosinus des Winkels zwischen der x_i -Achse im raumfesten Koordinatensystem O und der x'_j -Achse im körperfesten Koordinatensystem O' . Für die Komponentendarstellung eines Vektors \mathbf{b} in den Koordinatensystemen O und O' gilt

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = b'_1 \hat{\mathbf{e}}'_1 + b'_2 \hat{\mathbf{e}}'_2 + b'_3 \hat{\mathbf{e}}'_3$$

Für die Komponenten b'_j im körperfesten Koordinatensystem O' gilt also mit Gl. (5.22)

$$b'_j = \sum_{i=1}^3 b_i \hat{e}_i \hat{e}'_j = \sum_{i=1}^3 b_i R_{ij}$$

In Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{das heißt} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{R}^T \mathbf{b} \quad (5.23)$$

wobei \mathbf{R}^T die transponierte Matrix von \mathbf{R} ist. Gl. (5.20) zeigt, dass \mathbf{R} die Drehmatrix der Einheitsvektoren von O nach O' ist und Gl. (5.23) zeigt, dass \mathbf{R}^T die Drehmatrix der Vektorkomponenten von O nach O' ist.

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\gamma - S_\alpha C_\beta S_\gamma & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha C_\beta S_\gamma & S_\beta S_\gamma \\ -C_\alpha S_\gamma - S_\alpha C_\beta C_\gamma & -S_\alpha S_\gamma + C_\alpha C_\beta C_\gamma & S_\beta C_\gamma \\ S_\alpha S_\beta & -C_\alpha S_\beta & C_\beta \end{pmatrix}$$

Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist $\det \mathbf{R} = 0$ und es existiert somit eine inverse Matrix \mathbf{R}^{-1} . Da die Spaltenvektoren von \mathbf{R} paarweise orthogonal sind gilt $\mathbf{R}^{-1} \equiv \mathbf{R}^T$. Damit folgt durch Multiplikation von Gl. (5.23) mit \mathbf{R}

$$\mathbf{R} \mathbf{b}' = \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{b} = \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{b} = \mathbf{R} \mathbf{b}'$$

Um aus der Drehgeschwindigkeit eines Körpers seine Lage berechnen zu können, benötigt man einen Zusammenhang zwischen den Drehgeschwindigkeiten ω' im körperfesten Koordinatensystem O' und den Änderungsgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden erstellt indem im Koordinatensystem O' die Drehachsen der drei Einzeldrehungen bestimmt werden: um die Achse x_3 , die Knotenlinie K , und die Achse x'_3 . Durch Multiplikation der entsprechende Einheitsvektoren \hat{e}_3 , \hat{e}_K und \hat{e}'_3 mit den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$ erhält man dann die Drehvektorkomponenten für ω' .

Mit den Einheitsvektoren \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 und \hat{e}'_3 in O' , \hat{e}_1 , \hat{e}_2 und \hat{e}_3 in O , sowie dem Einheitsvektor \hat{e}_K in Richtung der Knotenlinie gilt für die Eulerschen Winkel (Richtungskosinus)

$$\cos \alpha = \hat{e}_1 \hat{e}_K \quad ; \quad \cos \beta = \hat{e}_3 \hat{e}'_3 \quad ; \quad \cos \gamma = \hat{e}'_1 \hat{e}_K \quad (5.24)$$

Für Drehungen um die x_3 -Achse (erster Schritt) im Koordinatensystem O' muss \hat{e}_3 als Funktion von \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 und \hat{e}'_3 ausgedrückt werden. Aus Abb. 5.6 ist umittelbar ersichtlich,

dass die Projektion von \hat{e}_3 auf die x'_3 -Achse, also die \hat{e}'_3 -Komponente von \hat{e}_3 , gleich $\cos \beta$ ist. Man kann dieses Ergebnis aber auch einfach aus Gl. (5.24) erhalten indem man den Ausdruck für $\cos \beta$ mit \hat{e}'_3 multipliziert. Die \hat{e}'_1 - und \hat{e}'_2 -Komponenten von \hat{e}_3 ergeben sich aus der Projektion von \hat{e}_3 in die $x'_1x'_2$ -Ebene. Der Betrag dieser Projektion ist $\cos(90^\circ - \beta)$, also $\sin \beta$. Rotiert man in Gedanken die x_1 -Achse um die x_3 -Achse, bis die x_1 -Achse in der Knotenlinie K zu liegen kommt, dann sieht man dass der in die $x'_1x'_2$ -Ebene projezierte Einheitsvektor \hat{e}_3 in der x_2x_3 -Ebene liegt, das heißt, er schließt mit x'_2 den Winkel γ ein. Damit hat man für die Komponenten von \hat{e}_3 in O'

$$\hat{e}_3 = \sin \beta \sin \gamma \cdot \hat{e}'_1 + \sin \beta \cos \gamma \cdot \hat{e}'_2 + \cos \beta \cdot \hat{e}'_3 \quad (5.25)$$

Für Drehungen um die Knotenlinie K (zweiter Schritt) im Koordinatensystem O' muss \hat{e}_K als Funktion von \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 und \hat{e}'_3 ausgedrückt werden. Der Einheitsvektor \hat{e}_K in Richtung der Knotenlinie kann sowohl in den Koordinaten von O als auch den Koordinaten von O' ausgedrückt werden. Wie sich leicht aus Abb. 5.6 ablesen lässt, gilt

$$\hat{e}_K = \cos \alpha \cdot \hat{e}_1 - \sin \alpha \cdot \hat{e}_2 = \cos \gamma \cdot \hat{e}'_1 - \sin \gamma \cdot \hat{e}'_2 \quad (5.26)$$

Die für die Drehung um \hat{e}'_3 in O' (dritter Schritt) relevante Achse ist natürlich \hat{e}'_3 selbst. Zusammen mit den in O' bestimmten Drehachsen \hat{e}_3 und \hat{e}_K aus Gl. (5.25) und Gl. (5.26) erhält man für den Zusammenhang zwischen den Drehgeschwindigkeiten ω' im körperfesten Koordinatensystem O' und den Änderungsgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$

$$\begin{aligned} \omega' &= \dot{\alpha} \cdot \hat{e}_3 + \dot{\beta} \cdot \hat{e}_K + \dot{\gamma} \cdot \hat{e}'_3 \\ &= \dot{\alpha} [\sin \beta \sin \gamma \cdot \hat{e}'_1 + \sin \beta \cos \gamma \cdot \hat{e}'_2 + \cos \beta \cdot \hat{e}'_3] + \dot{\beta} [\cos \gamma \cdot \hat{e}'_1 - \sin \gamma \cdot \hat{e}'_2] + \dot{\gamma} \cdot \hat{e}'_3 \\ &= [\dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma] \cdot \hat{e}'_1 + [\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma] \cdot \hat{e}'_2 + [\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}] \cdot \hat{e}'_3 \end{aligned}$$

beziehungsweise in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Diese Gleichungen werden als kinematische Euler-Gleichungen bezeichnet. Durch die Integration von Gl. (5.27) kann man die Lage eines Körpers aus bekannten Winkelgeschwindigkeiten berechnen.

5.3 Kreisel, Nutation, Präzession

Beispiel 5.2 Nicht ausgewuchtetes Rad

Wie in Abb. 5.7 skizziert, sei aufgrund der Unwucht des Rades die Radachse (Achse 3) nicht mehr parallel zur Rotationsachse ω sondern um den Winkel α verkippt. Die Achse der Laufrichtung des Rades (Achse 2) zeigt somit nicht mehr geradeaus sondern seitwärts. Die dritte Koordinatenachse (Achse 1) zeigt aus der Bildebene heraus. Die Massenträgheitsmomente des Rades in Richtung der Achse 1 und 2 sind identisch und hier mit A bezeichnet; das Massenträgheitsmoment in Richtung der Radachse, Achse 3, sei C . Somit ist der Trägheitstensor im Hauptachsensystem:

$$\underline{\underline{J}}^{(d)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Damit erhält man für die Komponenten des Drehmoments nach Gl. (5.17)

$$M_1 = A \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (C - A)$$

$$M_2 = A \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 \omega_3 (A - C)$$

$$M_3 = A \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (A - A)$$

Aus Abb. 5.7 liest man ab:

$$\omega_1 = 0 \quad ; \quad \omega_2 = \omega \sin \alpha \quad ; \quad \omega_3 = \omega \cos \alpha$$

Eingesetzt in die Komponenten des Drehmoments erhält man:

$$M_1 = (C - A)\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(C - A)}{2} \sin 2\alpha$$

$$M_2 = A\dot{\omega} \sin \alpha$$

$$M_3 = A\dot{\omega} \cos \alpha$$

Bei gleichförmiger Rotation ist $\dot{\omega} = 0$ und es verbleibt nur die M_1 -Komponente des Drehmoments. Das vom rotierenden Rad über die Radachse auf das Radlager augeübte Drehmoment, das sogenannte Kreiselmoment \mathbf{M}^K , ist dem Drehmoment M_1 entgegengesetzt, also

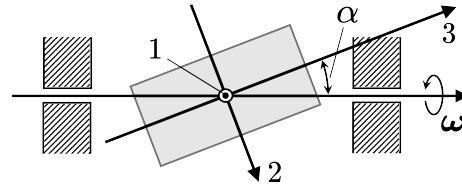


Abb. 5.7

$$M_1^K = -M_1 = \frac{(A - C)}{2} \sin 2\alpha$$

Ist $A > C$ dann bewirkt M_1^K eine Vergrößerung der Unwucht, d.h., der Winkel α wird größer. Umgekehrt wirkt im Fall $A < C$, wie das bei Reifen der Fall sein sollte, M_1^K der Unwucht entgegen, versucht also den Winkel α zu verkleinern.

Beispiel 5.3 Momentefreie Bewegung

Von einer momentefreien Bewegung spricht man, wenn das resultierende Moment aller auf einen starren Körper einwirkenden äußeren Kräfte verschwindet. Betrachtet wird hier der Trägheitsellipsoid (Abb. 5.8) im Hauptachsensystem. Von der kinetischen Energie des starren Körpers (Gl. (5.13)) bleibt bei momentefreier Bewegung nur die kinetische Energie aufgrund der Eigenrotation übrig und ohne Verluste (wie z.B. durch Reibung) bleibt diese konstant. Also:

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 \omega_i J_{ij} \omega_j = C \quad (5.28)$$

Für die Trägheitsmomente des Ellipsoids in Abb. 5.8 gilt

$$J_1 > J_2 > J_3$$

Einsetzen ergibt für die kinetische Energie durch Eigenrotation

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + \omega_3^2 J_3) \quad (5.29)$$

Mit $L_i = J_i \omega_i$, $i = 1, 2, 3$ folgt somit

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{J_1} + \frac{L_2^2}{J_2} + \frac{L_3^2}{J_3} \right) = \text{const} \quad (5.30)$$

das heißt für die momentefreie Bewegung gilt

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \text{const} \quad (5.31)$$

Mit $|\boldsymbol{L}^2| = \text{const}$ folgt

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (5.32)$$

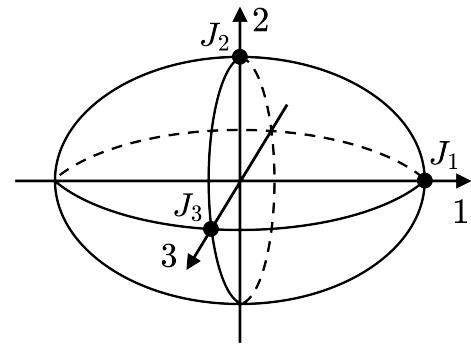


Abb. 5.8

Das Quadrat des Drehimpulses, also sein Betrag, ist im körperfesten System eine Erhaltungsgröße.

Im Folgenden soll der Fall der zweiachsigen Symmetrie betrachtet werden. In diesem Fall gilt für die Hauptträgheitsmomente $A = J_{11}$ entlang der ξ_1 -Achse, $B = J_{22}$ entlang der ξ_2 -Achse und $C = J_{33}$ entlang der ξ_3 -Achse:

$$A = B \neq C$$

Wie in Abb. 5.9 skizziert ist die Figurennachse hier die Koordinatenachse ξ_3 . ω_F bezeichnet die Rotation um die Figurennachsen und ω_N die Rotation um die Nutationsachse. Zwischen den Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten ω , ω_F und ω_N sowie den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit entlang der Koordinatenachsen ξ_1 und ξ_3 gilt die Beziehung

$$\omega = \omega_N + \omega_F = \omega_1 \hat{\xi}_1 + \omega_3 \hat{\xi}_3$$

Wie Abb. 5.9 zeigt, gilt für den Winkel Θ

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = \omega \sin \Theta \\ \omega_3 = \omega \cos \Theta \end{array} \right\} \quad \tan \Theta = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (5.33)$$

Aus Abb. 5.9 lassen sich die folgenden Beziehungen für den Winkel Ψ ablesen

$$\tan \Psi = \frac{L_1}{L_3} = \frac{A\omega_1}{C\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3 - \omega_F} \quad (5.34)$$

und somit

$$\omega_F = \frac{A - C}{A} \cdot \omega_3 \quad (5.35)$$

Für die Erde gilt beispielsweise: $\frac{A - C}{A} \approx \frac{1}{305}$

Aus den Euler-Gleichungen Gl. (5.18) für momentefreie Bewegung folgt:

$$A\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(C - A) = M_1 = 0$$

$$A\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(A - C) = M_2 = 0$$

$$C\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(A - A) = M_3 = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt unmittelbar

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const} \quad (5.36)$$

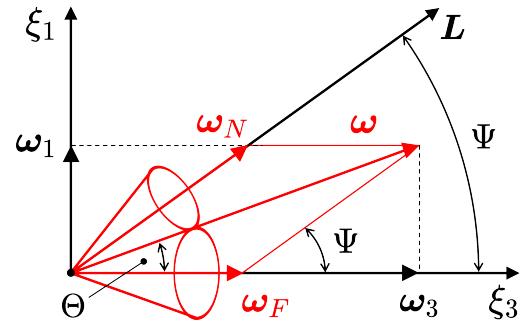


Abb. 5.9

Das heißt, die Projektion von ω auf die Figurenachse ist eine zeitliche Konstante. Nutzt man jetzt in den ersten beiden der Eulerschen Gleichungen die Beziehung aus Gl. (5.35) dann erhält man

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_F \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_1 \omega_F \quad (5.37)$$

Gl. (5.37) einmal nach der Zeit differenzieren und einsetzen der ursprünglichen Gleichungen ergibt je eine Differentialgleichung für ω_1 und ω_2

$$\ddot{\omega}_1 + \omega_F^2 \omega_1 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\omega}_2 + \omega_F^2 \omega_2 = 0 \quad (5.38)$$

Diese Differentialgleichungen sind Bewegungsgleichungen für harmonische Oszillatoren. Die allgemeinen Lösungen von Gl. (5.37) lauten somit

$$\omega_1(t) = \alpha \sin(\omega_F t + \beta) \quad \text{und} \quad \omega_2(t) = \alpha \cos(\omega_F t + \beta) \quad (5.39)$$

Aus Gl. (5.36) folgt bereits, dass der Betrag von ω konstant sein muss. Das heißt es muss gelten (siehe Abb. 5.10)

$$|\omega| = \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\alpha^2 + \omega_3^{02}} = \text{const} \quad (5.40)$$

Die Projektion von $\omega(t)$ auf die $\xi_1 \xi_2$ -Ebene, die Ebene senkrecht zur Figurenachse ξ_3 , beschreibt also einen Kreis in der $\xi_1 \xi_2$ -Ebene mit Radius α . Der Kreiskegel den ω dabei beschreibt ist der sogenannte Polkegel (Abb. 5.10). Der Öffnungswinkel dieses Polkegels ist durch Gl. (5.33) gegeben und die Winkelgeschwindigkeit mit der diese Rotation von ω erfolgt, ist ω_F aus Gl. (5.35) mit $\omega_3 = \omega_3^0$. Für die Periode dieser kreisförmigen Bewegung der Drehachse eines rotierenden, starrer Körpers um seine Figurenachse, die Nutation, die im Fall der Erde nach seinem Entdecker Chandlersche Periode genannt wird, erhält man

$$T_F = \frac{2\pi}{\omega_F} = \frac{A}{A - C} \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_3^0}}_{1 \text{ Tag}} \approx 305 \text{ Tage}$$

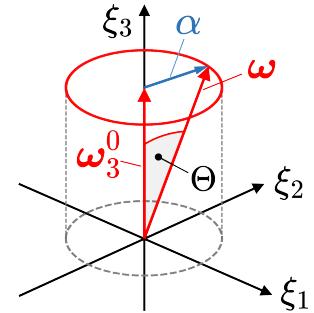


Abb. 5.10

In Realität ist T_F allerdings nicht ≈ 305 Tage, sondern $T_F \approx 433$ Tage. Der Grund für diese Abweichung liegt in der oben gemachten Annahme die Erde sei ein starrer Körper. Das ist sie aber nicht, sondern sie ist elastisch und in Teilen flüssig.

Das Koordinatensystem (ξ_1, ξ_2, ξ_3) in Abb. 5.9 ist das körpereigene Hauptachsensystem der Erde. Mit Hilfe von Gl. (5.27) kann man die Eulerwinkel, hier mit ϕ , ϑ und ψ bezeichnet, zum raumfesten Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) bestimmen:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\omega_F t + \beta) \\ \alpha \cos(\omega_F t + \beta) \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \vartheta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \vartheta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Günstigerweise wählt man das raumfeste Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) so, dass $\hat{\mathbf{x}}_3$ mit der Richtung des Drehimpulvektors \mathbf{L} zusammenfällt, also $\hat{\mathbf{x}}_3 \parallel \mathbf{L}$. Mit Gl. (5.25) gilt für die Darstellung von \hat{x}_3 im körpereigenen Koordinatensystem

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = \sin \vartheta \sin \psi \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \sin \vartheta \cos \psi \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_2 + \cos \vartheta \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_3 \quad (5.42)$$

Bei momentefreier Bewegung ist der Betrag des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung (Gl. (5.32)). Für die Komponenten von \mathbf{L} im Hauptachsensystem gilt somit:

$$\mathbf{L} = L \cdot (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta) \quad (5.43)$$

Mit Gl. (5.41) und Gl. (5.43) erhält man damit im Hauptachsensystem für $\mathbf{L} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L \sin \vartheta \sin \psi &= A \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + A \dot{\vartheta} \cos \psi \\ L \sin \vartheta \cos \psi &= A \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi - A \dot{\vartheta} \sin \psi \\ L \cos \vartheta &= C \dot{\phi} \cos \vartheta + C \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Indem man die erste dieser drei Gleichungen mit $\cos \psi$ multipliziert und davon die zweite Gleichung multipliziert mit $\sin \psi$ subtrahiert, lassen sich $\dot{\phi}$ und der Winkel ψ eliminieren und man erhält die Beziehung

$$0 = A \dot{\vartheta} (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = A \dot{\vartheta}$$

Daraus folgt

$$\vartheta = \text{const} = \vartheta_0 \quad (5.45)$$

und für die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ aus Gl. (5.41) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \sin(\omega_F t + \beta) = \dot{\phi} \sin \vartheta_0 \sin \psi \\ \omega_2 &= \alpha \cos(\omega_F t + \beta) = \dot{\phi} \sin \vartheta_0 \cos \psi \\ \omega_3 &= \omega_3^0 = \dot{\phi} \cos \vartheta_0 + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Eine Möglichkeit zur Bestimmung von $\phi(t)$ und $\psi(t)$ folgt aus der Betrachtung von

$$\omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi = 0$$

Damit muss nach Gl. (5.46) auch gelten

$$\alpha \sin(\omega_F t + \beta) \cos \psi - \alpha \cos(\omega_F t + \beta) \sin \psi = \alpha \sin(\omega_F t + \beta - \psi) = 0$$

Diese Bedingung ist erfüllt für zwei Werte von $\psi(t)$

$$\psi(t) = \begin{cases} \omega_F t + \beta \\ \omega_F t + \beta + \pi \end{cases} \quad (5.47)$$

Einsetzen von Gl. (5.47) in die dritte Gleichung von Gl. (5.46) ergibt

$$\omega_3^0 = \dot{\phi} \cos \vartheta_0 + \dot{\psi} = \dot{\phi} \cos \vartheta_0 + \omega_F$$

Mit Gl. (5.35) folgt daraus für $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_3^0 - \omega_F}{\cos \vartheta_0} = \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \frac{\omega_3^0}{\cos \vartheta_0} = const$$

und somit

$$\phi(t) = \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \cdot t + \phi_0 \quad (5.48)$$

Damit kann nun der Wert von α bestimmt werden indem man für ω_2 in Gl. (5.46) $\omega_F t + \beta = 0$ setzt. Nach Gl. (5.47) ist dann $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$ also $\cos \psi = \pm 1$ und man erhält für α die zwei Lösungen

$$\alpha = \pm \dot{\phi} \sin \vartheta_0 = \pm \frac{C}{A} \omega_3^0 \tan \vartheta_0 \quad (5.49)$$

Mit der geometrischen Interpretation von α (siehe Gl. (5.40)) macht nur das positive Vorzeichen Sinn. Eine weitere Möglichkeit, $\phi(t)$ und $\psi(t)$ zu bestimmen, besteht darin die erste Gleichung aus Gl. (5.44) mit $\sin \psi$ zu multiplizieren und dazu die zweite Gleichung aus Gl. (5.44), multipliziert mit $\cos \psi$, zu addieren. Damit eliminiert man $\dot{\vartheta}$ und die Winkel ϑ und ψ und erhält

$$A \dot{\phi} = L$$

Daraus folgt

$$\phi(t) = \frac{L}{A} \cdot t + \phi_0 \quad (5.50)$$

$\dot{\psi}$ erhält man zum Beispiel mit Hilfe von Gl. (5.35) und Gl. (5.45) durch Einsetzen von Gl. (5.50) in die dritte Gleichung von Gl. (5.44):

$$\dot{\psi} = \left(\frac{L}{C} - \frac{L}{A} \right) \cos \vartheta_0 = \frac{L}{C} \frac{A - C}{A} \cos \vartheta_0 = \frac{L}{C} \frac{\omega_F}{\omega_3^0} \cos \vartheta_0 \quad (5.51)$$

$\dot{\psi}$ erhält man aber auch aus der Gleichung für ω_3 in Gl. (5.46)

$$\dot{\psi} = \omega_3^0 - \dot{\phi} \cos \vartheta_0 = \omega_3^0 - \frac{L}{A} \cos \vartheta_0 \quad (5.52)$$

Ein Vergleich von Gl. (5.52) mit Gl. (5.51) zeigt, dass gelten muss

$$\omega_3^0 = \frac{L}{C} \cos \vartheta_0 \quad (5.53)$$

Das eingesetzt in Gl. (5.51) liefert $\dot{\psi} = \omega_F$ und somit

$$\psi(t) = \omega_F t + \psi_0 \quad (5.54)$$

Jetzt kann man noch die Konstanten ϑ_0 und ψ_0 bestimmen. Einsetzen von Gl. (5.50) in die ersten beiden Gleichungen von Gl. (5.46) ergibt

$$\begin{aligned} \alpha \sin(\omega_F t + \beta) &= \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \sin \psi \\ \alpha \cos(\omega_F t + \beta) &= \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \cos \psi \end{aligned}$$

Die Division dieser beiden Gleichungen und ein Vergleich mit Gl. (5.54) liefert

$$\tan \psi = \tan(\omega_F t + \beta) \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \beta \quad (5.55)$$

Wie zu erwarten war, entspricht $\psi_0 = \beta$ dem Ergebnis von Gl. (5.47). Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung von Gl. (5.46) ein so sieht man, dass

$$\alpha \sin(\omega_F t + \beta) = \alpha \sin \psi = \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \sin \psi$$

Damit gilt

$$\sin \vartheta_0 = \frac{A}{L} \alpha$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gl. (5.53) so ergibt sich schließlich

$$\tan \vartheta_0 = \frac{A}{C} \frac{\alpha}{\omega_3^0} \quad (5.56)$$

Das entspricht dem Ergebnis von Gl. (5.49) für α . Zusammengefasst hat man also für die Eulerschen Winkel und die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \cdot t + \phi_0 & ; & \dot{\phi} = \frac{C}{A \cos \vartheta_0} \\
 \vartheta(t) &= \vartheta_0 = \arctan\left(\frac{A}{C} \frac{\alpha}{\omega_3^0}\right) & ; & \dot{\vartheta} = 0 \\
 \psi(t) &= \frac{A - C}{A} \cdot \omega_3^0 t + \beta & ; & \dot{\psi} = \frac{A - C}{A} \cdot \omega_3^0
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

In diesen Beziehungen finden sich zwar noch fünf der ursprünglich sechs Variablen ϕ_0 , ϑ_0 , ψ_0 , α , β und ω_3^0 , aber diese sind nicht mehr alle unabhängig frei wählbar. In Gl. (5.49) bzw. in Gl. (5.56) sind die Parameter α , ϑ_0 und ω_3^0 verknüpft. Wegen Gl. (5.40) können aber α und ω_3^0 nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Durch die hier vorgenommene Wahl von $\hat{x}_3 \parallel \mathbf{L}$ wurde ϑ_0 festgelegt und daher sind α und ω_3^0 nicht mehr frei wählbar. Nach Gl. (5.56) gilt $\psi_0 = \beta$ und somit kann nur eine dieser beiden Variablen frei gewählt werden; in Gl. (5.57) ist das β . Von den ursprünglich sechs Variablen ϕ_0 , ϑ_0 , ψ_0 , α , β und ω_3^0 verbleiben also nur ϕ_0 und β als freie Variablen.

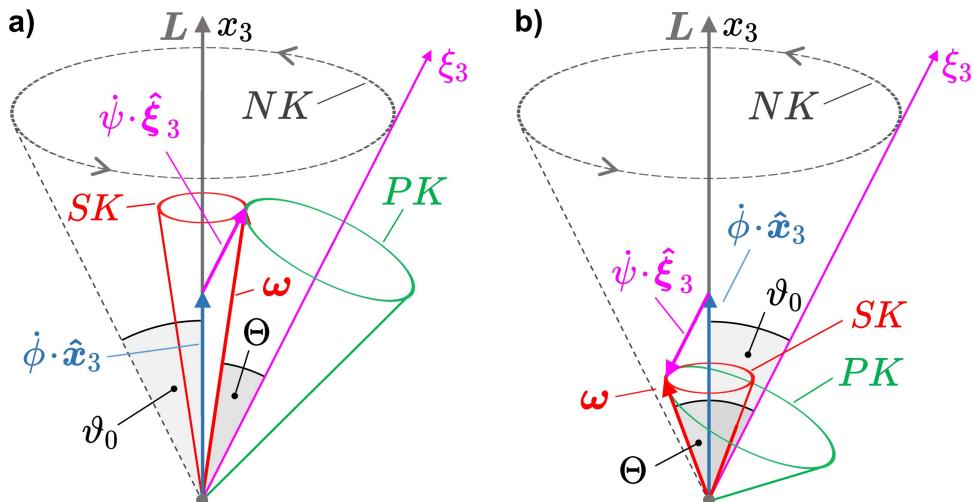


Abb. 5.11: Lage der Winkel, Drehvektoren, Nutationskegel (NK), Spurkegel (SK) und Polkegel (PK) für den Fall $A > C$ (a) und den Fall $A < C$ (b).

In Abb. 5.11 ist die Lage der Winkel, der Drehvektoren, des Nutationskegels, des Spurkegels und des Polkegels für zwei Fälle skizziert: In Abb. 5.11a für $A > C$, so wie das bei der Erde der Fall ist; und in Abb. 5.11b für den Fall $A < C$. Mit $\hat{x}_3 \parallel \mathbf{L}$ ist ϑ_0 der Winkel zwischen der Figurennachse ξ_3 und \mathbf{L} bzw. ξ_3 und x_3 (der Winkel Ψ in Abb. 5.9). Die Figurennachse dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ um die x_3 -Achse und beschreibt dabei den Nutationskegel der freien Nutation. Der zugehörige Drehvektor $\dot{\phi} \cdot \hat{x}_3$ ist identisch mit ω_N in Abb. 5.9. $\dot{\psi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit mit der sich der betrachtete starre Körper (in Abb. 5.11a

die Erde) um die Figurennachse dreht. Der entsprechende Drehvektor $\dot{\psi} \cdot \hat{\xi}_3$ ist entweder parallel oder antiparallel zur ξ_3 -Achse, je nachdem ob $A > C$ wie in Abb. 5.11a oder $A < C$ wie in Abb. 5.11b. Der Drehvektor $\dot{\psi} \cdot \hat{\xi}_3$ ist identisch mit ω_F in Abb. 5.9. Der gesamte Drehvektor ω in Abb. 5.11 ist somit

$$\omega = \dot{\phi} \cdot \hat{x}_3 + \dot{\psi} \cdot \hat{\xi}_3 = \omega_N + \omega_F$$

Der Drehvektor ω liegt immer in der $x_3 \xi_3$ -Ebene und rotiert mit der Figurennachse um die Richtung des Drehimpulses \mathbf{L} bzw. um die x_3 -Achse. Dabei beschreibt ω um \mathbf{L} bzw. um die x_3 -Achse den sogenannten Spurkegel. Der feste Winkel zwischen ω und der Figurennachse ξ_3 ist der Winkel Θ aus Abb. 5.9. Θ ist der Öffnungswinkel des sogenannten Polkegels. Während die Figurennachse ihre Nutationsbewegung mit ω_N um \mathbf{L} bzw. die x_3 -Achse ausführt, rollt dieser Polkegel auf dem Spurkegel mit ω_N ab. Im Fall $A > C$ (Abb. 5.11a) rollt der Polkegel mit seiner Außenfläche an der Außenfläche des Spurkegels ab. Im Fall $A < C$ (Abb. 5.11b) rollt der Polkegel hingegen mit seiner Innenfläche an der Außenfläche des Spurkegels ab.

Beispiel 5.4 Bewegung mit nicht verschwindendem Drehmoment

Ein einfaches Beispiel für das Verhalten eines rotierenden Körpers wenn ein nicht verschwindendes Drehmoment vorliegt ist in Abb. 5.12 skizziert. Die Abbildung zeigt ein einseitig an einem Seil aufgehängtes rotierendes Rad. Der Drehimpulsvektor \mathbf{L} des rotierenden Rades liegt in der Radachse deren Länge l_A ist. An einem Ende wird die Radachse durch die Seilkraft gehalten, am anderen Ende wirkt auf den Schwerpunkt des

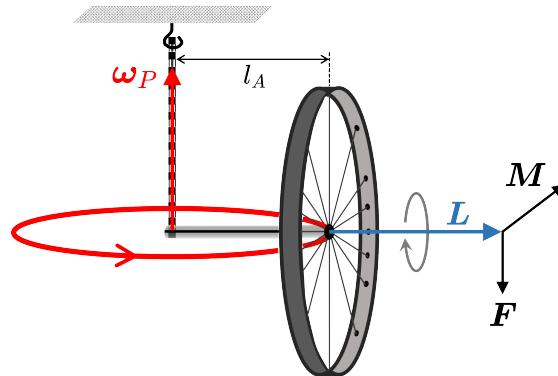


Abb. 5.12

Rades eine gleich große aber entgegengesetzte Gewichtskraft. Das resultierende Drehmoment \mathbf{M} steht senkrecht auf der durch die Radachse und die Gewichtskraft aufgespannten Ebene. Rotiert das Rad nicht, dann kippt es natürlich nach unten. Rotiert das Rad aber, dann bewirkt das zu \mathbf{L} senkrechte Drehmoment \mathbf{M} eine Richtungsänderung der Radachse die Präzession genannt wird. Ist nun die Winkelgeschwindigkeit ω mit der das Rad rotiert groß genug, dann rotiert bzw. präzessiert das Rad mit horizontaler Achse um die Seilaufhängung. Mit den Eulergleichungen in Gl. (5.17) gilt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underline{\underline{J}} \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (\underline{\underline{J}} \cdot \omega) = \mathbf{M}$$

Bei der Richtungsänderung der Rotationsachse des Rades steht die zeitliche Änderung des Drehimpulses $d\mathbf{L}/dt$ immer senkrecht zum Drehimpulsvektor \mathbf{L} und senkrecht zum Drehvektor $\boldsymbol{\omega}_P$ der Präzession. Es gilt somit:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

Ohne Reibungsverluste ist der Betrag von \mathbf{L} konstant. Mit $|\mathbf{L}|$ und $|\mathbf{M}|$ jeweils konstant ist auch der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Präzession

$$|\boldsymbol{\omega}_P| = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{L}|}$$

konstant. In diesem Fall spricht man von regulärer Präzession. Wie sich aus Abb. 5.13 leicht ersehen lässt, bleibt die Winkelgeschwindigkeit der Präzession auch konstant wenn die Radachse sich aus der horizontalen Lage herausbewegt. Für das Drehmoment gilt

$$|\mathbf{M}| = l_A \cdot \cos \alpha \cdot |\mathbf{F}|$$

und für die zeitliche Änderung des Drehimpulses gilt

$$\left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = |\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L}| = |\boldsymbol{\omega}_P| |\mathbf{L}| \sin \beta = |\boldsymbol{\omega}_P| |\mathbf{L}| \cos \alpha$$

Die linken Seiten der beiden Gleichungen sind identisch da $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ und somit sind auch die entsprechenden rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich:

$$|\boldsymbol{\omega}_P| |\mathbf{L}| \cos \alpha = l_A \cdot \cos \alpha \cdot |\mathbf{F}|$$

Der $\cos \alpha$ -Term fällt heraus und mit $\mathbf{L} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ und $|\mathbf{F}| = m \cdot g$ erhält man

$$\omega_P = \frac{l_A \cdot m \cdot g}{I_A \cdot \omega}$$

wobei m die Masse des Rades ist und I_A ist das Trägheitsmoment für die Rotation um die Radachse. Dieser Ausdruck ist unabhängig von α und bei gegebener Länge der Radachse (l_A), Masse des Rades (m) und Masseverteilung bezüglich der Radachse (I_A) hängt die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_P nur von der Rotationsgeschwindigkeit des Rads ω ab. Der hier abgeleitete Ausdruck für ω_P gilt allerdings nur für $\omega \gg \omega_P$.

Im Allgemeinen hängen für einen Körper auf den ein Drehmoment wirkt die Komponenten des Drehmoments im körperfesten Koordinatensystem von der Orientierung des Körpers im raumfesten Koordinatensystem ab. Damit lassen sich die Euler-Gleichungen nicht mehr unabhängig von den Gleichungen für die Eulerwinkel ϕ , ϑ und ψ lösen. Die Behandlung dieses Problems erfordert einen anderen Ansatz wie beispielsweise den Lagrange-

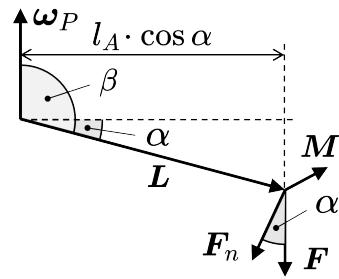


Abb. 5.13

Formalismus welchen wir im nächsten Kapitel diskutieren werden. Dort werden wir dann dieses Problem ausgestattet mit den richtigen Werkzeugen noch einmal betrachten (siehe Bsp. 6.10 in Abschnitt 6.3.2).

Als Zusammenfassung der obigen Diskussion halten wir fest, dass die Kreiselbewegung eine Überlagerung von drei verschiedenen Bewegungen ist (vergleiche Abb. 5.11):

$\psi(t)$: Rotation des Kreisels um die körperfeste Figurenachse mit Drehvektor $\dot{\psi}(t) \cdot \hat{\xi}_3$.

$\phi(t)$: Rotation der Figurenachse um die raumfeste Koordinate x_3 mit Drehvektor $\dot{\phi}(t) \cdot \hat{x}_3$.

Diese Bewegung heißt Präzession.

$\vartheta(t)$: Periodische Änderung des Winkels $\vartheta(t)$ zwischen Figurenachse ξ_3 und raumfester Koordinate x_3 wenn ein nichtverschwindendes Drehmoment vorliegt. Diese Bewegung heißt dann Nutation. Im Fall von momentefreier Bewegung variiert $\vartheta(t)$ nicht sondern ist konstant, also $\vartheta(t) = \vartheta_0$; in diesem Fall spricht man dann von freier Nutation.

Abb. 5.14 illustriert die Präzessions- und die Nutationsbewegung am Beispiel der Erde. In Kugelkoordinaten ist die Richtung der Figurenachse im raumfesten Koordinatensystem

$$\hat{\xi}_3 = \sin \phi \sin \vartheta \hat{x}_1 - \cos \phi \sin \vartheta \hat{x}_2 + \cos \vartheta \hat{x}_3$$

Verfolgt man nun die Bewegung der Figurenachse auf einer Kugeloberfläche als Funktion der Zeit, also $\xi_3(t)$, dann kann man Nutation und Präzession wie in Abb. 5.14 darstellen. In Abb. 5.14 ist N_W der Bereich in dem $\vartheta(t)$ oszilliert. Für die Erde

dauert es etwa 26 000 Jahre, exakt 25 772 Jahre, bis ein vollständiger Präzessionszyklus abgeschlossen ist. Diese Präzession der Erdachse wird größtenteils durch die kombinierte Anziehungskraft von Sonne und Mond auf die äquatoriale Ausbuchtung der Erde bewirkt. Gravitationswechselwirkungen mit anderen Planeten spielen eine viel geringere Rolle. Ein Nutationszyklus der Erde dauert etwa 41 000 Jahre. In einem solchen Zyklus ändert sich die Neigung $\vartheta(t)$ der Erdachse vom Maximalwert zum Minimalwert und wieder zurück zum Maximalwert. In der Vergangenheit schwankte $\vartheta(t)$ über einen solchen 41 000-Jahreszyklus zwischen einem Minimalwert von $\vartheta = 22.1^\circ$ und einem Maximalwert $\vartheta = 24.5^\circ$.

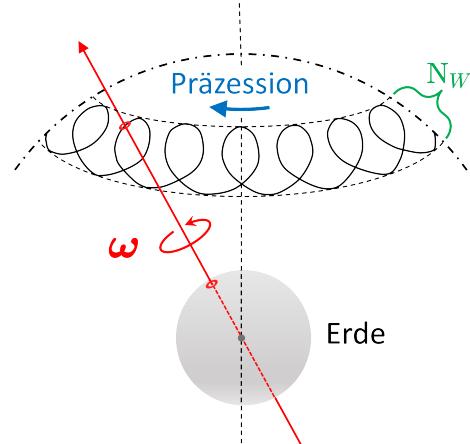


Abb. 5.14

5.3.1 Bewegte Bezugssysteme

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{\mathbf{e}}'_i \quad \text{alles zeitabhängig}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) + \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \hat{\mathbf{e}}'_i(t) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{R}}(t) + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i(t) \hat{\mathbf{e}}'_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_i + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]$$

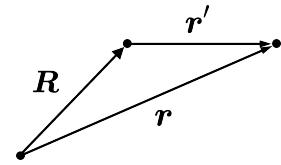


Abb. 5.15

Sind \mathbf{a} , \mathbf{A} , und \mathbf{a}' die Beschleunigungsvektoren in die entsprechenden Koordinatenrichtungen, dann ist

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a} = \mathbf{A} + \underbrace{2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}')}_{\begin{array}{c} \text{Coriolis-} \\ \text{beschleunigung} \end{array}} + \underbrace{[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]}_{\begin{array}{c} \text{Zentrifugal-} \\ \text{beschleunigung} \end{array}} \quad (5.58)$$

Ist $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ die Kraft, die auf eine Masse m in einem ruhenden Bezugssystem wirkt, dann ist $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ die Kraft, die jemand im bewegten System beobachten wird

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \underbrace{m\{ \mathbf{A} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \}}_{\text{Trägheitskräfte}} \quad (5.59)$$

Da die Gravitationskraft eine andere \mathbf{r} -Abhängigkeit hat, können die Trägheitskräfte in Gl. (5.59) nur punktweise zum Verschwinden gebracht werden. Coriolis- und Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte. Die Corioliskraft wirkt nur auf bewegte Körper in rotierenden Systemen, auf Körper in Ruhe in bewegten Systemen, also $\mathbf{v} = 0$, wirkt sie nicht. Die Zentrifugalkraft existiert für jeden Körper in einem rotierenden System und verschwindet, wenn die Rotation stoppt, also $\boldsymbol{\omega} = 0$. Coriolis- und Zentrifugalkraft erfahren also nur Körper in rotierenden Systemen. In dieser Hinsicht ähneln sie der Trägheitskraft, die nur Körper in einem beschleunigten System erfahren. Scheinbare Kräfte wie die Coriolis-, die Zentrifugal- oder die Trägheitskraft hängen vom Bezugssystem ab. Für einen Beobachter außerhalb des Bezugssystems, also für jemand, der nicht Teil des rotierenden oder linear beschleunigten Systems ist, existieren sie nicht. Betrachten wir einen stehenden Fahrgäst in einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Bus, der sich nicht festhält. Solange der Bus nicht beschleunigt oder bremst, passiert nichts Ungewöhnliches, da sich

Bus und Fahrgast mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit bewegen und daher keine Kräfte wirken. Das ändert sich, wenn der Bus plötzlich beschleunigt oder abbremst und der Fahrgast dabei vielleicht entweder durch die Heck- oder die Frontscheibe des Busses fliegt. Aus der Perspektive des Fahrgasts ändert sich in diesem Fall nichts, er bewegt sich immer noch mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit. Aber aus der Sicht mitfahrender Passagiere wird der Fahrgast durch eine unsichtbare Kraft aus dem hinteren oder vorderen Fenster geschleudert. Etwas Ähnliches passiert, wenn der Bus zwar nicht seine Geschwindigkeit ändert, aber scharf nach links oder rechts abbiegt; In diesem Fall fliegt der Passagier einfach durch ein Fenster auf der linken oder rechten Seite des Busses heraus, je nachdem, in welche Richtung der Bus abbiegt. Hier sieht ein Beobachter auf dem Bürgersteig, wie der Fahrgast seine lineare Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit fortsetzt, als ob keine Kräfte auf ihn einwirken würden.

Betrachten wir die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft, die mit der Rotation eines Systems O' in Bezug auf ein ruhendes System O verbunden sind. Wir wählen ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierndes System, d.h., wir betrachten eine gleichförmigen Kreisbewegung von O' . Für einen ruhenden Massenpunkt im rotierenden System ist $\mathbf{v}' = 0$ und daher verschwindet die Corioliskraft, aber die Zentrifugalkraft wirkt weiterhin. Die Gesamtkraft \mathbf{F}' auf einen Massenpunkt, der im rotierenden System O' ruht, muss Null sein, daher wird aus Gl. (5.59) für $\mathbf{v}' = 0$

$$0 = \mathbf{F}' = \mathbf{F} - m \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] = \mathbf{F} - mr'_\perp \omega^2 \hat{\mathbf{r}}'_\perp$$

Hier nutzten wir die Tatsache, dass $\boldsymbol{\omega}$ in Richtung der durch O' verlaufenden Rotationsachse zeigt und daher nur \mathbf{r}_{perp} , die Komponente von \mathbf{r} senkrecht zur Rotationsachse, beiträgt. Gl. (5.59) reduziert sich damit auf

$$\mathbf{F} = mr'_\perp \omega^2 \hat{\mathbf{r}}'_\perp$$

Jemand in O , dem ruhenden System, sieht also eine Kraft der Größe $mr'_\perp \omega^2$ am Werk, die genau der mit einer gleichförmigen Kreisbewegung assoziierten Zentripetalkraft entspricht. Aus der Sicht eines Beobachters in O bewirkt diese Kraft, dass der Massenpunkt im rotierenden System O' in Ruhe bleibt.

Betrachten wir nun ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierendes System O' , in dem sich ein Massenpunkt in radialer Richtung von O' nach außen bewegen soll, d.h., seine Geschwindigkeit \mathbf{v}' ist parallel zu seinem Ortsvektor \mathbf{r}' . Die Corioliskraft \mathbf{F}_C in \mathbf{F}' , die auf diesen bewegten Massenpunkt wirkt, ist senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{v}' , also senkrecht zu \mathbf{r}' . Für einen außenstehenden Beobachter sieht es so aus, als ob auf den Massenpunkt ein Drehmoment wirkt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_C = 2m\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \\ &= 2m(\underbrace{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}') - \mathbf{v}'(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})}_{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}' \quad 0}) = 2mr'v'\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Ein Drehmoment, ist immer das Ergebnis einer Drehimpulsänderung \mathbf{L} . Der Drehimpuls, der mit der Rotation des sich radial nach außen bewegenden Massepunkts verbunden ist, wie sie von O aus beobachtet wird, ist daher gegeben durch

$$\mathbf{L} = mr'^2\boldsymbol{\omega}$$

und seine Änderungsrate ist somit

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 2mr'v'\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}$$

Beispiel 5.5 Die Wetterkarte

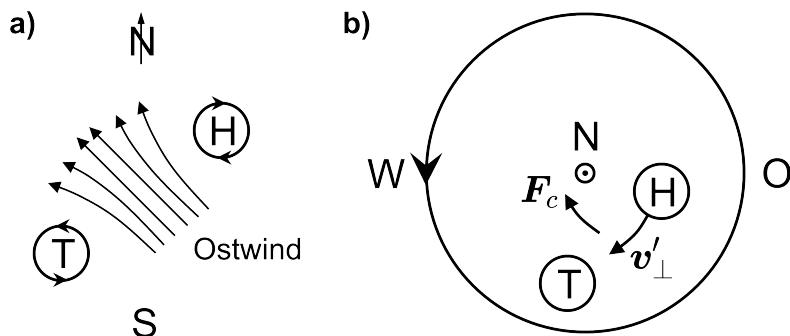


Abb. 5.16: (a) Entstehung des Ostwinds auf der Nordhalbkugel. (b) Corioliskraft auf der Nordhalbkugel. Die Relativbewegung v'_\perp erfolgt senkrecht zur Corioliskraft \mathbf{F}_C .

Ein Hochdruckgebiet zeichnet sich dadurch aus, dass Luftmassen von höheren Luftsichten in Richtung Erdoberfläche strömen und dort zu einer Druckerhöhung führen. Die aus diesem Hochdruckgebiet über der Erdoberfläche entweichenden Luftmassen werden durch die Corioliskraft auf der Nordhalbkugel nach rechts und auf der Südhalbkugel nach links abgelenkt. Somit sind Hochdruckgebiete auf der Nordhalbkugel von Rechtswirbeln umgeben und auf der Südhalbkugel von Linkswirbeln.

Bei Tiefdruckgebieten ist das gerade umgekehrt. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass oberflächennahe Luftmassen in ein Gebiet mit niedrigerem Luftdruck einströmen und dort dann emporsteigen. Der Geschwindigkeitsvektor dieser Luftmassen zeigt also nach oben während er bei Hochdruckgebieten nach unten zeigt. Deshalb sind Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel von Linkswirbeln umgeben und auf der Südhalbkugel von Rechtswirbeln. Abb. 5.16a illustriert wie so durch benachbarte Hoch- und Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel ein Ostwind entstehen kann.

Beispiel 5.6 Ostabweichung beim freien Fall

Bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten ω können in Gl. (5.59) Glieder proportional zu ω^2 , d.h. die Zentrifugalkraft, vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung (erste Näherung) lautet die Bewegungsgleichung für den freien Fall:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -g\hat{\mathbf{e}}_{z'} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$

Abb. 5.17 zeigt die Situation für den freien Fall auf der nördlichen Halbkugel am Breitengrad φ . Die y' -Koordinate zeigt in Abb. 5.17 aus der Bildebene heraus.

Für den Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ lässt sich ablesen, dass:

$$\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

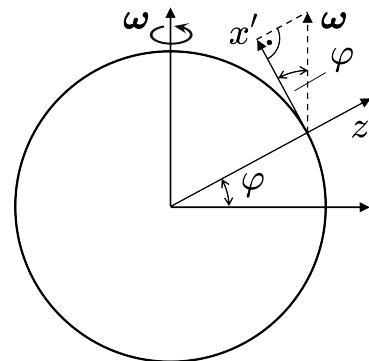


Abb. 5.17

Damit lauten die Bewegungsgleichungen in erster Näherung ($\boldsymbol{\omega}$ klein):

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \omega \cos \varphi \\ 0 \\ \omega \sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}' = 2\omega \sin \varphi \cdot \dot{y}' \\ \ddot{y}' = -2\omega \sin \varphi \cdot \dot{x}' + 2\omega \cos \varphi \cdot \dot{z}' \\ \ddot{z}' = -g + 2\omega \cos \varphi \cdot \dot{y}' \end{array} \right\} \quad (5.60)$$

In nullter Näherung ist $\omega \approx 0$, das heißt die Corioliskraft fällt weg und man hat somit

$$\dot{z}'_0 = -g \cdot t \quad ; \quad z'_0 = h - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad ; \quad \dot{x}'_0 = \dot{y}'_0 = 0$$

Setzt man das Ergebnis aus nullter Näherung in Gl. (5.60) - die erste Näherung - ein, dann bleibt nur mehr eine Gleichung für die y' -Koordinate übrig.

$$\ddot{y}' = -2\omega \cos \varphi \cdot g \cdot t$$

Die y' -Koordinate in Abb. 5.17 verläuft von West nach Ost entlang des konstanten Breitengrades φ und ein Wert für $y' \neq 0$ heißt, dass es aufgrund der Corioliskraft eine Abweichung entlang des Breitengrades beim freien Fall gibt. Einmal integrieren liefert

$$\dot{y}' = -\omega \cos \varphi \cdot g \cdot t^2$$

und nochmals integrieren ergibt für die y' -Koordinate

$$y' = -\omega \cos \varphi \cdot g \cdot \frac{t^3}{3}$$

Aus der nullten Näherung kann man die Fallzeit von der Anfangshöhe h bis zur Erdoberfläche aus $z'_0 = 0$ bestimmen. Das eingesetzt ergibt beim freien Fall auf der Nordhalbkugel für die Abweichung in y' -Richtung

$$y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot h \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \omega \cos \varphi$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Abweichung in die Bildebene von Abb. 5.17 hineinzeigt, also in Richtung der negativen y' -Achse weist. Es liegt also beim freien Fall auf der Nordhalbkugel eine Ostabweichung vor. Zur Illustration: Bei einer Fallhöhe von 500 m auf dem Breitengrad $\varphi = 45^\circ$ macht diese Ostabweichung beispielsweise ≈ -0.17 m aus.

6. Systeme von Massenpunkten

6.1 Impulssatz

Für jeden Massenpunkt eines Systems von Massenpunkten gilt das zweite Newtonsche Gesetz:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i \quad (6.1)$$

Dabei sind \mathbf{p}_i der Impuls des Massenpunkts m_i und \mathbf{F}_i die auf ihn einwirkende Kraft. Bei diesen auf einen Massenpunkt einwirkenden Kräften wird zwischen inneren und äußeren Kräften unterschieden.

Definition

Innere Kräfte: Diese entstehen durch die Wechselwirkung von Massenpunkten untereinander. Dabei werden jeweils nur Zweikörperkräfte in Betracht gezogen.

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

Für die Wechselwirkung zwischen jeweils zwei Massenpunkten gilt Newton's drittes Gesetz (actio = reactio):

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (6.2)$$

Definition

Äußere Kräfte: Diese hängen nur von den Koordinaten eines Massenpunkts oder auch von seiner Geschwindigkeit und von der Zeit ab, nicht aber von anderen Massenpunkten. Beispiele dafür sind die Bewegung eines Massenpunkts in elektromagnetischen Feldern oder im Gravitationsfeld.

$$\mathbf{F}_i \neq \sum \mathbf{F}_{ij}$$

Ohne Einwirkung äußerer Kräfte ist der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten konstant, das heißt:

$$\sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \mathbf{p}_i}_{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = - \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \equiv 0 \quad (6.3)$$

Satz

Eine zeitliche Änderung des Gesamtimpulses eines Systems von Massenpunkten wird nur von äußeren Kräften bewirkt. Alleine durch innere Kräfte kann der Gesamtimpuls eines solchen Systems nicht geändert werden.

Zentraler Stoß:

Sind v_0 und V_0 bzw. v und V die Geschwindigkeiten der Massen m und M vor bzw. nach dem zentralen Stoß (Abb. 6.1) dann gilt der Impulssatz

$$mv_0 + MV_0 = mv + MV$$

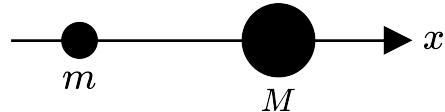


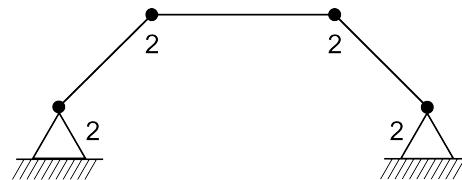
Abb. 6.1

Systeme starrer Körper: (analytische Mechanik)

f sei die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems. Zwei Beispiele:

Beispiel 6.1 Ein drehbar gelagertes System

Das System in Abb. 6.2 besteht aus drei Stäben mit jeweils 3 Freiheitsgraden die durch 4 zweiwertige Lager verbunden sind. Die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade des Systems ist somit

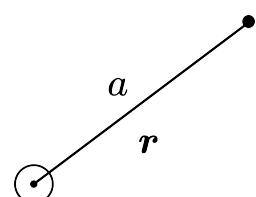


$$f = 9 - 8 = 1$$

Abb. 6.2

Beispiel 6.2 Räumliches Fadenpendel

Die Bewegung der Pendelmasse in Abb. 6.3 für sich selbst, d.h. ohne Aufhängung, hätte 3 Freiheitsgrade. Der Pendelfaden der Länge a beschränkt die Bewegung der Pendelmasse für das räumliche Fadenpendel aber auf eine Kugeloberfläche und es gilt



$$f = 3 - 1 = 2$$

Abb. 6.3

6.2 Nebenbedingungen und Zwangskräfte

Generell haben alle System starrer Körper Einschränkungen in ihrer Bewegung wie in Bsp. 6.1 und Bsp. 6.2 illustriert, weil sich die Teilmassen des Systems nicht unabhängig voneinander bewegen können. Für die Anzahl dieser Einschränkungen, die sogenannten Nebenbedingungen für die Koordinaten eines Systems aus n Massenpunkten gilt

$$\varphi_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, 3n - f \quad (6.4)$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems ist. Nebenbedingungen φ_μ , die nur eine Funktion der Koordinaten sind heißen holonom. Hängen die φ_μ auch von zeitlichen Änderungen der Koordinaten, also Geschwindigkeiten, ab, so nennt man sie nicht-holonom.

Für Bsp. 6.2 mit $n = 1$ und $f = 2$ gibt es beispielsweise nur eine Nebenbedingung, nämlich dass sich die Pendelmasse auf einer Kugeloberfläche mit Radius a bewegen muss, also muss gelten

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 = 0 \quad (6.5)$$

Nebenbedingungen werden auch als Zwangsbedingungen bezeichnet und die entsprechenden Kräfte als Zwangskräfte um sie von den sogenannten eingeprägten Kräften zu unterscheiden. Für die Bewegungsgleichung heißt das für eine gegebene Koordinate

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + Z_i \quad (6.6)$$

wobei die F_i die eingeprägten Kräfte und die Z_i die Zwangskräfte sind. Ein Potenzial wie in Abb. 6.4 skizziert hat eine Zwangskraft zur Folge. Hat beispielsweise das Potenzial die allgemeine Form

$$V = V_0 \varphi^2$$

dann gilt

$$Z_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\underbrace{2V_0 \varphi}_{\lambda} \cdot \frac{\partial \varphi(x_1 \dots x_{3n})}{\partial x_i}$$

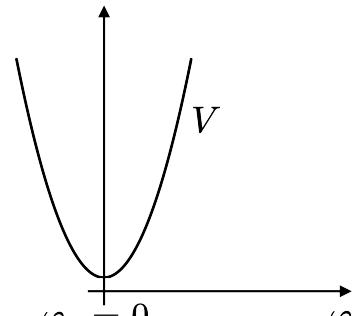


Abb. 6.4

λ ist hier ein Multiplikator auf den im Folgenden noch eingegangen wird. Für Bsp. 6.2 mit der Nebenbedingung aus Gl. (6.5) ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2x_i \quad \text{und die Zwangskraft ist} \quad Z_i = 2\lambda x_i$$

Dieser Ansatz mit Zwangskräften führt auf die sogenannten Lagrange Gleichungen erster Art. Bevor diese im Folgenden behandelt werden, muss zuerst aber noch kurz auf das sogenannte D'Alembert-Prinzip der virtuellen Arbeit eingegangen werden.

6.2.1 D'Alembert-Prinzip - virtuelle Arbeit

Das D'Alembert-Prinzip der virtuellen Verschiebungen, benannt nach Jean-Baptiste le Rond D'Alembert, leitet sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ab. Letzteres besagt, dass im Gleichgewicht die bei virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$ der Massenpunkte m_i von den am System angreifenden Kräften \mathbf{F}_i verrichtete virtuelle Arbeit verschwindet:

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(i)} + \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (6.7)$$

wobei $\mathbf{F}_i^{(i)}$ die inneren Kräfte und $\mathbf{F}_i^{(e)}$ die eingeprägten bzw. äußeren Kräfte sind. Die inneren Kräfte können keine Arbeit am System verrichten da sonst ein Perpetuum Mobile erster Art möglich wäre und somit gilt

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.8)$$

D'Alembert hat das Prinzip der virtuellen Arbeit auf die Zwangskräfte erweitert. Entgegen dem heutigen Sprachgebrauch hat das Wort „virtuell“ hier die Bedeutung von „möglich“ im Sinne von allen möglichen Verschiebungen die mit den Nebenbedingungen des Systems verträglich sind. Was dies genau bedeutet, soll ein einfaches Beispiel zeigen.

Beispiel 6.3 Die schiefe Ebene

Es gibt nur zwei mögliche, d.h. virtuelle, Bewegungsrichtungen für den Ball in Abb. 6.5 unter der Zwangsbedingung der schießen Ebene und zwar entlang den Richtungen von $\delta \mathbf{x}$. Der Nebenbedingung der schießen Ebene entspricht die Zwangskraft \mathbf{Z}_{SE} . Die eingeprägte Kraft ist $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}_G$. Die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Ball der Masse M auf der schießen Ebene lautet somit

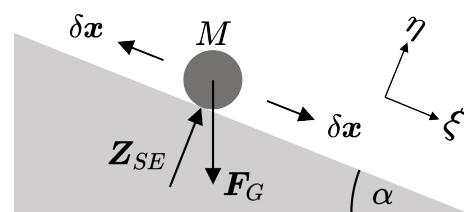


Abb. 6.5

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{Z}_{SE} \quad (6.9)$$

Nach D'Alembert leisten die Zwangskräfte unter virtuellen Verschiebungen keine Arbeit, also $\mathbf{Z}_{SE} \cdot \delta\mathbf{x} = 0$. Multipliziert man Gl. (6.9) mit $\delta\mathbf{x}$ dann erhält man somit

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{F}^{(e)} \right) \cdot \delta\mathbf{x} = 0 \quad (6.10)$$

Das heißt aber, dass man zur Lösung der Bewegungsgleichung für den Ball auf der schiefen Ebene die Zwangskraft \mathbf{Z}_{SE} gar nicht kennen muss. Wählt man nun das Koordinatensystem wie in Abb. 6.5 skizziert mit den Koordinatenachsen ξ und η dann hat man

$$\delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^{(e)} = \begin{pmatrix} Mg \sin \alpha \\ -Mg \cos \alpha \end{pmatrix}$$

und somit für die Bewegungsgleichung

$$\left[M \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Mg \sin \alpha \\ -Mg \cos \alpha \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.11)$$

Daraus folgt die bekannte Gleichung für die schiefe Ebene

$$\frac{dv_\xi}{dt} = g \sin \alpha \quad (6.12)$$

Im allgemeinen Fall mit

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} = \varphi_{\mu i}$$

besagt das Äquivalenzprinzip bzw. das D'Alembert-Prinzip, dass für alle Verrückungen δx_i gilt

$$\sum_i \varphi_{\mu i} \delta x_i = 0$$

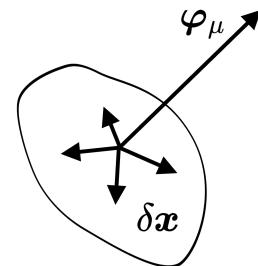


Abb. 6.6

Die Verrückungen δx_i sind also, wie in Abb. 6.6 skizziert, je orthogonal zu $\varphi_{\mu i}$. Daraus folgt für die Bewegungsgleichung

$$\sum_i (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 \quad (6.13)$$

Man braucht also für die Lösung der Bewegungsgleichung die Zwangskräfte nicht zu kennen. Manchmal ist man aber gerade daran interessiert diese zu bestimmen. Das ist mit Hilfe der Lagrange Gleichungen erster Art möglich.

6.3 Lagrange Gleichungen

6.3.1 Lagrange Gleichungen erster Art

Für die Nebenbedingungen gilt mit Gl. (6.4):

$$\sum_i \varphi_{\mu_i} \dot{x}_i + \varphi_t = 0 \quad (6.14)$$

Falls diese Nebenbedingungen φ_μ nur von den Koordinaten x_i und entweder explizit oder nicht explizit von der Zeit t abhängen dann nennt man sie holonome Nebenbedingungen. Ausgeschrieben heißt das, dass

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{\mu_i} = \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_i} \quad \text{und} \\ \varphi_t = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \varphi_t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{mit } \mu = 1, \dots, 3n - f \quad (\text{holonom})$$

Falls die Nebenbedingungen nicht nur eine Funktion der Koordinaten x_i sondern auch der Geschwindigkeiten \dot{x}_i sind, dann nennt man sie nicht-holonom, egal ob sie explizit oder nicht explizit von der Zeit t abhängen

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{\mu_i} \neq \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_i} \quad \text{und} \\ \varphi_t = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \varphi_t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{mit } \mu = 1, \dots, 3n - f \quad (\text{nicht holonom})$$

Zusätzlich zur Unterscheidung zwischen holonomen und nicht holonomen Nebenbedingungen gibt es auch eine Differenzierung bzgl. der expliziten Zeitabhängigkeit. Nebenbedingungen die nicht explizit von der Zeit abhängen ($\varphi_t = 0$) werden skleronome Nebenbedingungen genannt und solche die eine explizite Funktion der Zeit sind ($\varphi_t \neq 0$) heißen rheonome Nebenbedingungen.

Die allgemeine Formulierung der Bewegungsgleichungen unter Einschluss von Zwangskräften lautet mit holonomen und skleronomen Nebenbedingungen ($\varphi_t = 0$)

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu \varphi_{\mu_i} \quad \varphi_\mu(x_i \dots x_{3n}) = 0 \quad \text{Lagrange I} \quad (6.15)$$

Bewegungsgleichungen des Typs Gl. (6.15) heißen Lagrange Gleichungen erster Art, benannt nach Joseph-Louis Lagrange. Lagrange Gleichungen erster Art sind Gleichungen in

$3n+r$ Unbekannten, den $3n$ Freiheitsgraden des Systems und den r Lagrangemultiplikatoren der Zwangsbedingungen. Dem stehen $3n$ Koordinatengleichungen und r Gleichungen für die Nebenbedingungen gegenüber.

Bewegungsgleichungen des Typs Gl. (6.15) mit nicht-holonomen Nebenbedingungen sind nicht integrierbar aber es lassen sich auch in solchen Fällen zumeist analytische Lösungen finden und falls nicht können Lösungen numerisch gefunden werden. Ein Beispiel ist das Auto, wo mit dem Steuer eine Richtung und nicht eine Fläche vorgegeben wird und diese Richtung durch Lenkung wieder geändert werden kann. Das führt unter anderem dazu, dass selbst wenn eine Parklücke ausreichend Platz bietet, es unmöglich sein kann, das Fahrzeug in die Lücke einzuparken. Moderne Autos müssen dies beim automatischen Einparken berücksichtigen und entscheiden ob sich das Problem in vertretbarer Zeit lösen lässt oder nicht.

Lagrange Gleichungen erster Art sind hilfreich bei der Bestimmung der Zwangskräfte. Anhand eines einfachen Beispiels (Bsp. 6.2), des räumlichen Fadenpendels in Abb. 6.7, lässt sich dies leicht veranschaulichen. Mit der Nebenbedingung aus Gl. (6.5), der Pendlemasse m und der resultierenden eingeprägten Kraft $F = (0, 0, -mg)$ lauten die Bewegungsgleichungen nach Gl. (6.15) für Bsp. 6.2

$$m\ddot{x}_i = F_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Die Nebenbedingung ist

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 = 0$$

Damit wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2x_i \quad \text{und somit} \quad m\ddot{x}_i = F_i + 2\lambda x_i \quad (*)$$

Keine explizite Zeitabhängigkeit der Nebenbedingung, daher

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \sum_i x_i \dot{x}_i = 0$$

und mit

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \sum_i [\dot{x}_i^2 + x_i \ddot{x}_i] = 0 \quad \rightarrow \quad v^2 = - \sum_i x_i \ddot{x}_i \quad (**)$$

Multiplikation von (*) mit $\sum_i x_i$ ergibt

$$\sum_i mx_i \ddot{x}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} + 2\lambda \cdot \mathbf{r}^2$$

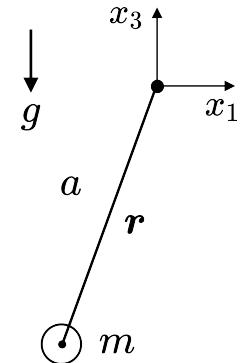


Abb. 6.7

Ausnutzen von $(**)$ liefert

$$-mv^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} + 2\lambda \cdot a^2$$

Damit erhält man für λ

$$\lambda = \frac{-\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} - mv^2}{2a^2}$$

Setzt man für \mathbf{F} die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = (0, 0, -mg)$ ein, dann folgt für λ

$$\lambda = m \cdot \frac{gx_3 - v^2}{2a^2}$$

Damit erhält man für die Zwangskraft \mathbf{F}_Z welche die Bewegung des Pendels einschränkt, also die vom Faden auf die Pendelmasse m ausgeübte Kraft

$$\mathbf{F}_Z = 2\lambda \mathbf{x} = m \cdot \frac{gx_3 - v^2}{a^2} \cdot \mathbf{x} \quad (6.16)$$

Schreibt man dies mit Hilfe des Einheitsvektors in Richtung des Pendelfadens $\mathbf{e}_a = \mathbf{x}/a$ um zu

$$\mathbf{F}_Z = m \cdot \left(\frac{gx_3}{a} - \frac{v^2}{a} \right) \cdot \mathbf{e}_a \quad (6.17)$$

dann sieht man, dass die erste Komponente von \mathbf{F}_Z der Gewichtskraft in Richtung des Fadens entspricht und die zweite Komponente die in Fadenrichtung wirkende Zentrifugalkraft ist.

An den Umkehrpunkten des Pendels ist jeweils $v = 0$ und für kleine Auslenkungen des Pendels ist $x_3 \approx -a$. Damit erhält man für λ

$$\lambda = \frac{mgx_3}{a^2} = -\frac{mg}{a}$$

Die Bewegungsgleichung für x_1 lautet somit

$$m\ddot{x}_1 = 2\lambda x_1 = -\frac{mg}{a}x_1 \quad (6.18)$$

beziehungsweise

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

mit der Lösung

$$x_1(t) = x_0 \sin \omega(t - t_0)$$

Beispiel 6.4 Das Spielzeug Jo-Jo

Das Jo-Jo (Abb. 6.8) besteht aus zwei durch einen Mittelsteg mit Radius r verbundenen Scheiben mit Radius R . Die Rotationsachse des Jo-Jo verläuft senkrecht durch die Mitte der Scheiben und des Mittelstegs. Ein am Mittelsteg befestigter Faden ist um diesen herum aufgewickelt. Bei festgehaltenem oberen Fadenende wird das Jo-Jo bei gespanntem Faden losgelassen und sinkt während sich der Faden abwickelt. Wenn der Faden abgelaufen ist, wickelt er sich dann im umgekehrten Sinn wieder auf und das Jo-Jo steigt. Die Länge des abgelaufenen bzw. des wieder aufgewickelten Fadens $r \cdot \Theta$ ist dabei immer gleich der Änderung der Position des Jo-Jo auf der z -Achse. Mit den zwei Freiheitsgraden z und Θ hat man damit zwei Nebenbedingungen, eine für das Sinken und eine für das Steigen des Jo-Jo:

$$\varphi_1 = r \cdot \Theta - z = 0 \quad (\text{Sinken}) \quad ; \quad \varphi_2 = r \cdot \Theta + z = 0 \quad (\text{Steigen})$$

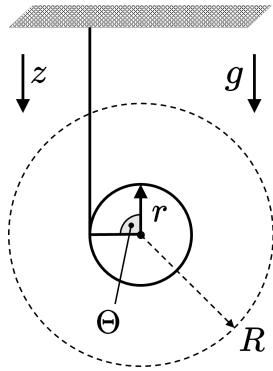


Abb. 6.8

Das Sinken soll zuerst betrachtet werden. Die zwei Bewegungsgleichungen erhält man aus Gl. (6.15) wobei I das Trägheitsmoment des Jo-Jo um seine Rotationsachse ist. Die Bewegungsgleichungen entsprechend multipliziert und voneinander abgezogen liefern dann eine Gleichung für den Multiplikator λ_1 .

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{z} = mg - \lambda_1 \quad / \cdot (1/m) \\ I\ddot{\Theta} = \lambda_1 r \quad / \cdot (r/I) \end{array} \right\} \Rightarrow r\ddot{\Theta} - \ddot{z} = 0 = \frac{\lambda_1 r^2}{I} - g + \frac{\lambda_1}{m}$$

Damit erhält man für λ_1 und die Zwangskraft F_{Z_1} beim Sinken

$$\lambda_1 = g \frac{Im}{mr^2 + I} \quad \text{und} \quad F_{Z_1} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -g \frac{Im}{mr^2 + I}$$

Analog jetzt für die Bewegungsgleichungen beim Steigen. Hier werden die zwei Gleichungen nach Multiplikation addiert um eine Gleichung für λ_2 zu erhalten

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{z} = mg + \lambda_2 \quad / \cdot (1/m) \\ I\ddot{\Theta} = \lambda_2 r \quad / \cdot (r/I) \end{array} \right\} \Rightarrow r\ddot{\Theta} + \ddot{z} = 0 = \frac{\lambda_2 r^2}{I} + g + \frac{\lambda_2}{m}$$

Damit erhält man für λ_2 und die Zwangskraft F_{Z_2} beim Steigen

$$\lambda_2 = -g \frac{Im}{mr^2 + I} \quad \text{und} \quad F_{Z_2} = \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -g \frac{Im}{mr^2 + I} = F_{Z_1}$$

Die auf den Faden ausgeübten Zwangskräfte sind also beim Sinken und beim Steigen identisch.

Beispiel 6.5 Die Atwoodsche Fallmaschine

Ein Seil läuft über eine reibungsfrei drehbare Rolle und an seinen Enden sind zunächst jeweils zwei gleich schwere Gewichte der Masse M befestigt (siehe Abb. 6.9). Fügt man zu einem dieser beiden Gewichte ein kleineres Zusatzgewicht der Masse m hinzu, so bewegt sich dieses Gewicht gleichförmig beschleunigt nach unten. Dabei wirkt als beschleunigende Kraft aber nur das Gewicht mg der Masse m , während die Gesamtmasse $2M + m$ beschleunigt werden muss. Die auftretende Beschleunigung beträgt also (bei vernachlässigbarem Trägheitsmoment der Rolle) nur einen Bruchteil der Erdbeschleunigung g . Intuitiv ist klar, dass für die Zwangskräfte die auf das Seil wirken gelten muss $F_{Z_1} = F_{Z_2} = F_Z$ da ansonsten das Seil reißen würde. Die Bewegungsgleichungen lassen sich einfach bestimmen zu ($m_1 = M$, $m_2 = M + m$)

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1g - F_Z \quad \text{und} \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2g - F_Z$$

Durch Subtraktion und Addition dieser Gleichungen erhält man

$$m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 = (m_1 - m_2)g \quad \text{und} \quad m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)g - 2F_Z$$

Die Länge des Seils ist fest und somit gilt mit $x_1 = q$ dass $x_2 = l - q$ sein muss, wobei l die Länge der frei hängenden Teile des Seils ist. Einsetzen ergibt

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad \text{und} \quad \ddot{q} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}g - \frac{2F_Z}{m_1 - m_2} \quad (6.19)$$

Mit den linken Seiten der Gleichungen sind auch ihre rechten Seiten identisch, also folgt

$$F_Z = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 2g \frac{M(M+m)}{2M+m}$$

Für $m = 0$ ist $F_Z = Mg$. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen zeigt, dass damit die Atwoodsche Fallmaschine im Gleichgewicht ist. Ist $m > 0$, dann folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$M\ddot{x}_1 = -M \frac{m}{2M+m}g \quad \text{und} \quad (M+m)\ddot{x}_2 = (M+m) \frac{m}{2M+m}g$$

Die wirkende Beschleunigung ist also um den Faktor $\frac{m}{2M+m}$ gegenüber der Erdbeschleunigung g reduziert.

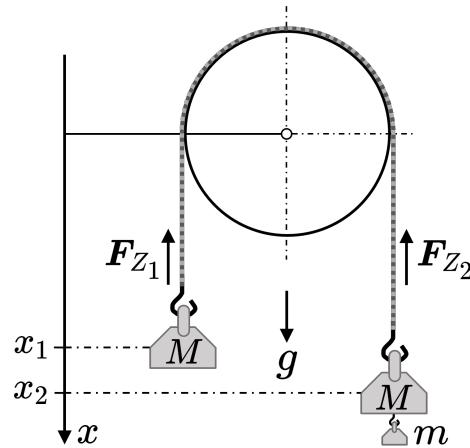


Abb. 6.9

6.3.2 Lagrange Gleichungen zweiter Art

Nach dem d'Alembert-Prinzip gilt für alle virtuellen Verrückungen δx_i eines Systems mit Zwangskräften proportional zu φ_{μ_i}

$$\sum_i \varphi_{\mu_i} \delta x_i = 0$$

Daraus folgt mit Gl. (6.15)

$$\sum_i (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$$

In Gl. (6.15) sind

$$\sum_{\mu} \lambda_{\mu} \varphi_{\mu_i} = Z_i \quad \text{die Zwangskräfte und somit gilt} \quad \sum_i Z_i \delta x_i = 0$$

Die Bewegung des Pendelmasse des räumlichen Fadenpendel ist, wie bereits diskutiert (Abb. 6.3), auf eine Kugeloberfläche mit Radius a um die Pendlaufhängung beschränkt. Diese Bewegung hat zwei Freiheitsgrade, man benötigt also zwei Koordinaten, um sie zu beschreiben. Eine gute Wahl für Bewegungen auf einer Kugeloberfläche sind Winkelkoordinaten, also Azimut φ und Elevation ϑ . Dafür müssen x_1 , x_2 und x_3 als Funktionen von φ und ϑ ausgedrückt werden, also $x_1 = x_1(\varphi, \vartheta)$, $x_2 = x_2(\varphi, \vartheta)$ und $x_3 = x_3(\varphi, \vartheta)$. Im allgemeinen Fall, für die Beschreibung der Bewegung auf beliebigen Flächen, bedeutet dies, dass die x_i durch entsprechenden Koordinaten der Fläche ausgedrückt werden müssen. Das gilt nicht nur für die Bewegung auf zwei-dimensionalen Flächen sondern auch generell für die Bewegung auf höher-dimensionalen Flächen.

Die für die Bewegung nach Gl. (6.15) zu betrachtende Fläche hat die Dimension f der verbleibenden Freiheitsgrade f des Systems. Ist $f = 2$, wie in Bsp. 6.2, werden also zwei sogenannte generalisierte Koordinaten, beispielsweise q_1 und q_2 wie in Abb. 6.10 skizziert, zur Beschreibung der Bewegung benötigt. Im allgemeinen Fall von f verbleibenden Freiheitsgraden ist eine f -dimensionale Fläche zu betrachten mit den verallgemeinerten Koordinaten q_1, \dots, q_f und der Parametrisierung

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_f) = x_i(q_K) \quad i = 1, \dots, 3n \quad (6.20)$$

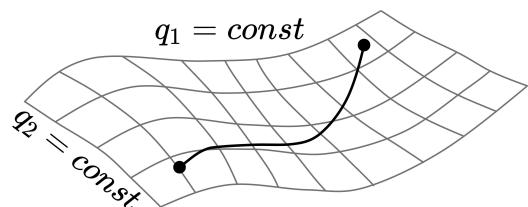


Abb. 6.10

Für die Nebenbedingungen gilt dann

$$0 \equiv \varphi_\mu(x_1(q_K), x_2(q_K), \dots, x_{3n}(q_K)) \quad (6.21)$$

und

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_K} \equiv 0 \equiv \sum_i \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_K} \quad (6.22)$$

Für die Bewegung eines Körpers auf der f -dimensionalen Fläche muss man die q_r ($r = 1, \dots, f$) als Funktion der Zeit t berechnen

$$\sum_i \left(m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \quad (\text{holonome Nebenbedingungen}) \quad (6.23)$$

Nach d'Alembert ist

$$\sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = 0$$

und somit

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \underbrace{\sum_i F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r}}_{F_r} \quad \text{mit} \quad r = 1, \dots, f \quad (6.24)$$

Die F_r mit $r = 1, \dots, f$ bezeichnen die sogenannten verallgemeinerten bzw. generalisierten Kräfte. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich umschreiben zu

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \sum_i \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right) - m_i \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right] \quad (6.25)$$

Mit den folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} &= m_i \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r} = \frac{m_i}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_r} \\ \frac{dx_i}{dt} &= \dot{x}_i = \sum_{r=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r = \frac{\partial x_i}{\partial q_K} \cdot \dot{q}_K \quad (\Delta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_K} = \frac{\partial x_i}{\partial q_K} \end{aligned}$$

kann man die linke Seite von Gl. (6.24) weiter umschreiben zu

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \sum_i \left[\frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_r} - \frac{m_i}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_r} \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} \quad (6.26)$$

wobei

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2$$

Aus (Δ) folgt

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \frac{\partial x_i}{\partial q_K} \frac{\partial x_i}{\partial q_K} \cdot \dot{q}_K \cdot \dot{q}_K = \frac{1}{2} M_K(q_1 \dots q_f) \cdot \dot{q}_K^2 \quad (6.27)$$

Setzt man nun die rechte Seite von Gl. (6.26), das heißt die umgeformte linke Seite von Gl. (6.24), wieder in Gl. (6.24) ein, dann erhält man die sogenannten Lagrange Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_r \quad r = 1, \dots, f \quad \text{Lagrange II} \quad (6.28)$$

Für konservative Kräfte gilt

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

und somit

$$F_r = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \quad (6.29)$$

Definition

Lagrange-Funktion: Die Lagrange-Funktion L , auch als kinetisches Potenzial bezeichnet, ist die Differenz zwischen kinetischer Energie T und potenzieller Energie V :

$$L = T - V$$

V hängt nicht von der Geschwindigkeit ab. Die allgemeine Bewegungsgleichung für L folgt mit Gl. (6.28) und Gl. (6.29) aus den Lagrange Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (6.30)$$

Der Vorteil der Lagrange Gleichungen zweiter Art besteht vor allem in ihrer großen Allgemeinheit und der Tatsache, dass man die Bewegungsgleichungen aufstellen kann, ohne wie bei den Lagrange Gleichungen erster Art die Kräfte bzw. Zwangskräfte explizit formulieren zu müssen. Ein weiterer Vorteil ist, dass man die verallgemeinerten Koordinaten frei wählen kann, was die Lösung von Problemen oft vereinfacht. Da die Anzahl dieser verallgemeinerten Koordinaten stets gleich der Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems ist, sind die verallgemeinerten Koordinaten immer unabhängig voneinander.

Ein nicht zu unterschätzender Vorteil des Lagrange Mechanismus ist zudem, dass es meistens viel einfacher ist die kinetische und potenzielle Energie, d.h., T und V für die Lagrange-Funktion zu bestimmen als die Newtonschen Bewegungsgleichungen oder die Eulergleichungen für ein gegebenes Problem aufzustellen. Ein Nachteil ist allerdings, dass mit dem Lagrange Mechanismus physikalische Anschaulichkeit verloren geht und die physikalische Bedeutung der mit dem Lagrangeschen Mechanismus gewonnenen Lösungen oft nachgeliefert werden muss.

Beispiel 6.6 Zurück zum räumliches Fadenpendel

Zur praktischen Veranschaulichung der Bewegungsgleichung Gl. (6.30) wenden wir uns wieder Bsp. 6.2, dem räumlichen Fadenpendel zu. In Abschnitt 6.3.1 wurde bereits die Zwangskraft für dieses Problem mit Hilfe der Lagrange Gleichungen erster Art bestimmt und die Lösung identifiziert. Hier wird nun das Problem des ebenen Pendels mit Hilfe der Lagrangeschen Bewegungsgleichung und den generalisierten Koordinaten

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = a \sin \vartheta \\ x_3 = -a \cos \vartheta \end{array} \right\} \quad x_i = x_i(q_K)$$

angegangen. Nebenbedingung

$$\varphi = x_1^2 + x_3^2 - a^2 \equiv a(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta - 1) = 0$$

Für die kinetische und die potenzielle Energie ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a \cos \vartheta \dot{\vartheta} \\ \dot{x}_3 = a \sin \vartheta \dot{\vartheta} \end{array} \right\} \quad \frac{m}{2} v^2 = \frac{a^2 m}{2} \dot{\vartheta}^2 = T$$

beziehungsweise

$$V = mgx_3 = -mga \cos \vartheta$$

Somit hat man für die Lagrange Funktion

$$L = T - V = \frac{a^2 m}{2} \dot{\vartheta}^2 + m g a \cos \vartheta \quad (6.31)$$

Die Ableitungen der Lagrange-Funktion berechnen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m a^2 \dot{\vartheta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -m g a \sin \vartheta$$

und einsetzen in Gl. (6.30) ergibt

$$\frac{d}{dt}(m a^2 \dot{\vartheta}) + m g a \sin \vartheta = 0 \quad (6.32)$$

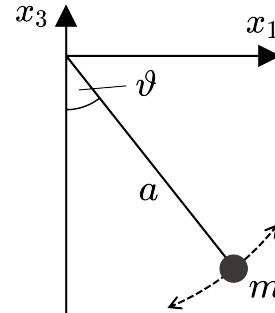


Abb. 6.11

Daraus folgt die Bewegungsgleichung für die ϑ -Koordinate

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{a} \sin \vartheta \quad (6.33)$$

Für kleine Auslenkungen $\vartheta \ll 1$ gilt $\sin \vartheta \approx \vartheta$ und man erhält die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{a}\vartheta = \omega^2\vartheta \quad (6.34)$$

Erwartungsgemäß entspricht das dem Ergebnis aus der Behandlung des Problems mit den Lagrange Gleichungen erster Art (siehe Abschnitt 6.3.1). Nach Gl. (6.24) lässt sich die verallgemeinerte Kraft F_ϑ aus $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$ bestimmen

$$F_\vartheta = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} + F_3 \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} = -mga \sin \vartheta \quad (6.35)$$

Beispiel 6.7 Noch einmal die Atwoodsche Fallmaschine

In Bsp. 6.5 wurde die Atwoodsche Fallmaschine (Abb. 6.9) bereits mit den Lagrange-Gleichungen erster Art behandelt, um die auf das Seil wirkenden Zwangskräfte zu bestimmen. Die Zwangsbedingung für die Lagrange Gleichungen zweiter Art ergibt sich aus der Konstanz der Seillänge und der Tatsache, dass das über die Rolle verlaufende Stück des Seils immer die gleiche Länge hat. Bezeichnet l die Seilstrecke die nicht über die Rolle läuft, dann lautet die Zwangsbedingung

$$x_1 + x_2 = l$$

Das System hat also nur einen Freiheitsgrad für den wie in Bsp. 6.5 $x_1 = q$ gewählt wird. Mit der generalisierten Koordinate q folgt dann $x_2 = l - q$. Mit $\dot{x}_1 = \dot{q}$ und $\dot{x}_2 = -\dot{q}$ erhält man damit für die kinetische Energie (bei Vernachlässigung des Trägheitsmoments der Rolle)

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2$$

wobei für m_1 und m_2 mit Abb. 6.9 wieder gilt $m_1 = M$ und $m_2 = M + m$. Für die potenzielle Energie der Atwoodschen Fallmaschine erhält man

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 = -g[m_1q - m_2(l - q)] = -g(m_1 - m_2)q - gm_2l$$

Somit erhält man für die Lagrange Funktion $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + g(m_1 - m_2)q + gm_2l$$

Aufstellen der Lagrange Gleichung für die generalisierte Koordinate q

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 + m_2)\ddot{q} - g(m_1 - m_2) = 0$$

ergibt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{m}{2M + m}g \quad (6.36)$$

Das entspricht dem Ergebnis aus Gl. (6.19) welches auf der intuitiven Annahme beruhte, dass die auf das Seil in Abb. 6.9 wirkenden Zwangskräfte identisch sein müssen. Gl. (6.36) bestätigt die Korrektheit dieser Annahme. Wie schon in Bsp. 6.5 festgestellt, entspricht Gl. (6.36), die Bewegungsgleichung der Atwoodschen Fallmaschine, derjenigen eines freien Falls mit verringrigerter Beschleunigung.

Beispiel 6.8 Der rollende Zylinder

Die zwei Koordinaten x und ϑ beschreiben die Bewegung des rollenden Zylinders in Abb. 6.12. x und ϑ sind allerdings nicht unabhängig voneinander und das System besitzt somit nur einen Freiheitsgrad. Die Rollgeschwindigkeit des Zylinders mit Radius a ist

$$v_a = a \cdot \omega = a \cdot \dot{\vartheta}$$

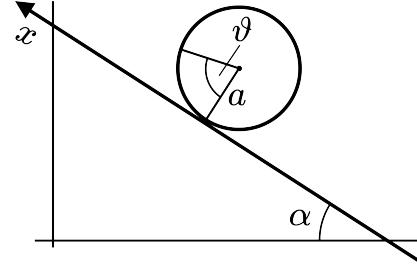


Abb. 6.12

Diese Geschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit mit der sich der Mittelpunkt des Zylinders entlang der x -Koordinate bewegt, also

$$a\dot{\vartheta} - \dot{x} = 0 \quad (*)$$

Die Nebenbedingung ist hier, dass die durch das Rollen zurückgelegte Strecke entlang der x -Koordinate gleich dem dabei abgerollten Teil des Zylinderumfangs sein muss. Das heißt der Zylinder bewegt sich auf der schiefen Ebene nur durch Rollen und nicht durch Gleiten fort

$$\varphi_\mu(\vartheta, x) = a\vartheta - x = 0$$

Diese Nebenbedingung hängt nicht explizit von der Zeit ab. Mit Gl. (6.14) ist daher

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x} \dot{x} = a\dot{\vartheta} - \dot{x} = 0$$

Das ist aber gerade die Aussage von (*) und somit ist hier Gl. (6.14) erfüllt. Für die kinetische Energie des rollenden Zylinders gilt

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{I}{2} \dot{\vartheta}^2 \quad (6.37)$$

wobei I das Trägheitsmoment des Zylinders ist. Definiert man mit $m^* = I/a^2$ eine effektive Trägheitsmomentmasse m^* so kann man T umschreiben zu

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{I}{2}\dot{\vartheta}^2 = \frac{m+m^*}{2}\dot{x}^2 \quad (6.38)$$

Mit der potenziellen Energie des Zylinders $V = m \cdot g \cdot x \cdot \sin \alpha$ erhält man so für die Lagrange-Funktion L

$$L = T - V = \frac{m+m^*}{2}\dot{x}^2 - m \cdot g \cdot x \cdot \sin \alpha \quad (6.39)$$

Die Ableitungen der Lagrange-Funktion berechnen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+m^*)\dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

und einsetzen in Gl. (6.30) ergibt die Bewegungsgleichung

$$(m+m^*)\ddot{x} + m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (6.40)$$

Nach zweimaliger Integration erhält man für die Bewegung des rollenden Zylinders entlang der x -Koordinate in Abb. 6.12

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{mg}{m+m^*} \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} \quad (6.41)$$

Behandelt man das Problem des rollenden Zylinders mit Hilfe der Lagrange Gleichungen erster Art, so wird $\dot{\vartheta}$ nicht eliminiert, dafür erhält man aber die Zwangskräfte. Aus der Nebenbedingung $\varphi_\mu = a\dot{\vartheta} - x$ folgen die Zwangskräfte Z_x und Z_ϑ

$$(Z_x, Z_\vartheta) = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = \lambda(-1, a) \quad (6.42)$$

und die Lagrange Gleichungen erster Art lauten für die Kraft in Richtung der x -Koordinate $F = m\ddot{x}$ und das Drehmoment des Zylinders aufgrund der Winkelbeschleunigung $M = I\ddot{\vartheta}$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \sin \alpha - \lambda \\ m^*a^2\ddot{\vartheta} &= \lambda \cdot a \quad \rightarrow \quad \lambda = m^*a\ddot{\vartheta} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Zweimaliges differenzieren der Zwangsbedingung liefert $a\ddot{\vartheta} = \ddot{x}$. Das in die zweite Gleichung eingesetzt und für \ddot{x} die erste Gleichung verwendet gibt

$$\lambda = m^*a\ddot{\vartheta} = m^*\ddot{x} = -m^*g \sin \alpha - \frac{m^*}{m}\lambda \quad (6.44)$$

Gleichsetzung des ersten und des letzten Ausdrucks dieser Gleichung ergibt für λ

$$\lambda = -\frac{m \cdot m^*}{m+m^*}g \sin \alpha \quad (6.45)$$

Beispiel 6.9 Aufeinander abrollende Zylinder

Betrachtet wird eine Zylinder mit Radius R_2 und Masse m der wie in Abb. 6.13 skizziert auf einem zweiten Zylinder mit Radius R_1 und Masse M abrollt. Die Rotationsachse des großen Zylinders sei fest verankert. Zur Zeit $t = 0$ wird der kleinere Zylinder (R_2) auf den größeren Zylinder (R_1) unter dem Winkel Θ_{10} gegen die Vertikale aufgesetzt und losgelassen. Es wird vorausgesetzt, dass die beiden Zylinder dann aufeinander abrollen ohne zu gleiten und der untere größere Zylinder soll sich reibungsfrei drehen können. Die Fragestellung ist hier bei welchem Winkel Θ_1 der kleine Zylinder vom unteren größeren Zylinder abspringt. Die Absprungbedingung ist einfach zu finden: Der obere Zylinder springt ab wenn die Zentrifugalkraft des sich auf der Kreisbahn mit Radius r bewegenden kleineren Zylinders gleich der entlang r wirkenden Schwerkraftkomponente wird die den kleinen Zylinder auf den großen Zylinder drückt. Die Absprungbedingung lautet daher

$$mg \cos \Theta_1 + mr\dot{\Theta}_1^2 = 0 \quad (6.46)$$

Es genügt also $\dot{\Theta}_1$ zu kennen, um den Absprungwinkel Θ_1 zu bestimmen. Für die entsprechenden Zwangsbedingungen gilt es zwei Fälle zu unterscheiden:

- A** Der untere größere Zylinder ist reibungsfrei drehbar. In diesem Fall rotiert der untere größere Zylinder um den Winkel Θ_3 nach links während der kleine Zylinder auf ihm abrollt, der Punkt P_1 bewegt sich also nach P'_1 . Damit lauten die zwei Zwangsbedingungen

$$r = R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad R_1\Theta_3 + R_1\Theta_1 = R_2(\Theta_2 - \Theta_1)$$

- B** Der untere größere Zylinder ist festgehalten. In diesem Fall bewegt sich der Punkt P_1 nicht und Θ_3 ist immer Null. Damit lauten die zwei Zwangsbedingungen

$$r = R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad R_1\Theta_1 = R_2(\Theta_2 - \Theta_1)$$

Fall A: Der untere größere Zylinder ist reibungsfrei drehbar

Die kinetische Energie des kleinen Zylinders ergibt sich aus der Summe von kinetischer Energie der Schwerpunktsbewegung des Zylinders und der kinetischen Energie der Eigenrotation. Für den großen Zylinder hat man nur die kinetische Energie der Eigenrotation.

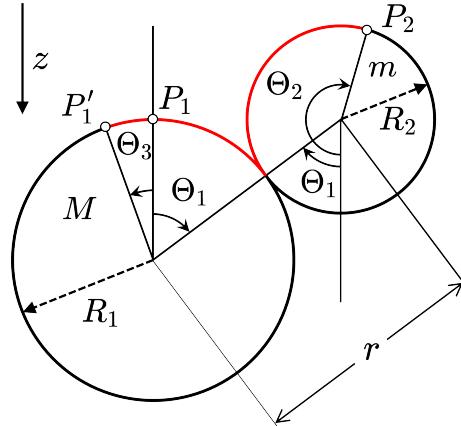


Abb. 6.13

Die gesamte kinetische Energie ist somit

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}_1^2) + \frac{I_m}{2}\dot{\Theta}_2^2 + \frac{I_M}{2}\dot{\Theta}_3^2$$

Da sich die vertikale Position des unteren Zylinders nicht ändert ist seine potenzielle Energie konstant und kann Null gesetzt werden, der Punkt $z = 0$ liegt damit im Mittelpunkt des großen Zylinders. Mit dieser Koordinatenwahl ist die gesamte potenzielle Energie des Systems die des kleineren Zylinders, also $V = -mgr \cos \Theta_1$. Damit erhält man für die Lagrange Funktion $L = T - V$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}_1^2) + \frac{I_m}{2}\dot{\Theta}_2^2 + \frac{I_M}{2}\dot{\Theta}_3^2 + mgr \cos \Theta_1$$

Aus den Zwangsbedingungen für den Fall **A** folgt mit $r = R_1 + R_2 = const$

$$\dot{r} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\Theta}_3 = \frac{R_2\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1}{R_1} - \dot{\Theta}_1$$

Damit kann man L umschreiben als Funktion der generalisierten Koordinaten Θ_1, Θ_2

$$L = \frac{m}{2}r^2\dot{\Theta}_1^2 + \frac{I_m}{2}\dot{\Theta}_2^2 + \frac{I_M}{2}\left(\frac{R_2\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1}{R_1} - \dot{\Theta}_1\right)^2 + mgr \cos \Theta_1$$

Für die Lagrange-Gleichungen zweiter Art erhält man dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} + \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = \frac{d}{dt} \left[mr^2\dot{\Theta}_1 - I_M \left(\frac{R_2\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1}{R_1} - \dot{\Theta}_1 \right) \frac{r}{R_1} \right] + mgr \sin \Theta_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} + \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = \frac{d}{dt} \left[I_m\dot{\Theta}_2 + I_M \left(\frac{R_2(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1)}{R_1} - \dot{\Theta}_1 \right) \frac{R_2}{R_1} \right] = 0$$

Aus diesen Lagrange-Gleichungen folgen die zwei Bewegungsgleichungen

$$\left(m + \frac{I_m}{R_1^2} \right) r^2 \ddot{\Theta}_1 - I_M \frac{R_2 r}{R_1^2} \ddot{\Theta}_2 + mgr \sin \Theta_1 = 0 \quad (6.47)$$

$$\left(I_m + I_M \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \ddot{\Theta}_2 - I_M \frac{R_2^2 + R_2 R_1}{R_1^2} \ddot{\Theta}_1 = 0 \quad (6.48)$$

Jetzt den Ausdruck für $\ddot{\Theta}_2$ aus Gl. (6.48) in Gl. (6.47) einsetzen und nach $\ddot{\Theta}_1$ auslösen. Nach ein wenig Rechnung erhält man für $\ddot{\Theta}_1$ die Differentialgleichung

$$\left(mr^2 + \frac{I_m I_M r^2}{I_m R_1^2 + I_M R_2^2} \right) \ddot{\Theta}_1 + mgr \sin \Theta_1 = 0 \quad (6.49)$$

Bei den beiden Zylindern soll es sich um Vollzylinder handeln. Damit gilt

$$I_m = \frac{m}{2} R_2^2 \quad \text{und} \quad I_M = \frac{M}{2} R_1^2$$

Einsetzen in Gl. (6.49) liefert nach Umformung

$$\ddot{\Theta}_1 = -\frac{g}{r} \frac{2(m+M)}{2m+3M} \sin \Theta_1 = -c \cdot \sin \Theta_1$$

Eine Differentialgleichung der Form $\ddot{\Theta}_1 = -c \cdot \sin \Theta_1$ kann man lösen indem man sie mit $2\dot{\Theta}_1$ multipliziert, also

$$2\dot{\Theta}_1 \ddot{\Theta}_1 = -2c \cdot \sin \Theta_1 \dot{\Theta}_1$$

und anschließend integriert, also

$$\dot{\Theta}_1^2 = 2c \cos \Theta_1 + d$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $\dot{\Theta}_1 = 0$ und $\Theta_1 = \Theta_{10}$. Damit folgt für die Integrationskonstante $d = -2c \cos \Theta_{10}$ und man erhält

$$\dot{\Theta}_1^2 = 2 \frac{g}{r} \frac{2(m+M)}{2m+3M} (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_{10}) \quad (6.50)$$

Damit kann nun der Absprungwinkel im Fall **A** bestimmt werden. Einsetzen von Gl. (6.50) in Gl. (6.46) liefert die Gleichung für den Absprungwinkel Θ_1

$$mg \cos \Theta_1 + mr \cdot 2 \frac{g}{r} \frac{2(m+M)}{2m+3M} (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_{10}) = 0$$

Auflösen nach Θ_1 ergibt für den Absprungwinkel im Fall **A**

$$\Theta_1^A = \arccos \left[\frac{4(m+M)}{6m+7M} \cos \Theta_{10} \right]$$

Fall **B**: Der untere größere Zylinder ist festgehalten

Um die Lagrange-Funktion für diesen Fall zu erhalten braucht man nur $\Theta_3 = 0$ in der Lagrange-Funktion für den Fall **A** setzen, also

$$L = \frac{m}{2} (r^2 + r^2 \dot{\Theta}_1^2) + \frac{I_m}{2} \dot{\Theta}_2^2 + mgr \cos \Theta_1$$

Aus den Zwangsbedingung folgt in diesem Fall

$$\dot{r} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\Theta}_2 = \frac{r}{R_2} \dot{\Theta}_1$$

Einsetzen in die Lagrange-Funktion liefert

$$L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{I_m}{2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \dot{\Theta}_1^2 + mgr \cos \Theta_1$$

Daraus folgt die Lagrange-Gleichung zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} + \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = \frac{d}{dt} \left[mr^2 \dot{\Theta}_1 + I_m \frac{r^2}{R_2^2} \dot{\Theta}_1 \right] + mgr \sin \Theta_1 = 0$$

und die Bewegungsgleichung

$$\left(mr^2 + I_m \frac{r^2}{R_2^2} \right) \ddot{\Theta}_1 + mgr \sin \Theta_1 = 0$$

Jetzt wieder Vollzylinder voraussetzen und nach $\ddot{\Theta}_1$ auflösen liefert

$$\ddot{\Theta}_1 = -\frac{2g}{3r} \sin \Theta_1 = -c \sin \Theta_1$$

Diese Differentialgleichung behandelt man wieder wie im Fall **A** und erhält damit

$$\dot{\Theta}_1^2 = \frac{4g}{3r} (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_{10}) \quad (6.51)$$

Einsetzen in Gl. (6.46) liefert für den Absprungwinkel Θ_1 im Fall **B**

$$\Theta_1^B = \arccos \left[\frac{4}{7} \cos \Theta_{10} \right]$$

Wenig überraschend findet man, dass der Absprungwinkel des kleinen Zylinders bei feststehendem großen Zylinder also unabhängig von den Massen der Zylinder ist.

Beispiel 6.10 Die Nutationsbewegung des Kreisels

In Abschnitt 5.3 wurde bereits kurz auf die Nutationsbewegung des Kreisels eingegangen mit dem Verweis, dass sich die Euler-Gleichungen nicht mehr unabhängig von den Gleichungen für die Eulerwinkel ϕ , ϑ und ψ lösen lassen wenn ein Drehmoment auf den Kreisel einwirkt. Hier hilft der Ansatz des Lagrange-Formalismus mit ϕ , ϑ und ψ als den generalisierten Koordinaten. Für die kinetische Energie des hier betrachteten symmetrischen Kreisels, wie zum Beispiel des skizzierten Tischkreisels in Abb. 6.14, gilt mit Gl. (5.26) und den Komponenten des Trägheitstensors im Hauptachsensystem $J_{11} = J_{22} = A$ und $J_{33} = C$:

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 \omega_i J_{ij} \omega_j = \frac{1}{2} (\omega_1^2 A + \omega_2^2 A + \omega_3^2 C)$$

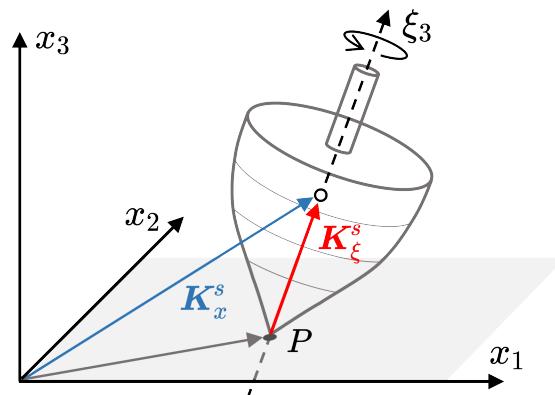


Abb. 6.14

Mit den Komponenten ω_1 , ω_2 und ω_3 aus Gl. (5.36) und Gl. (5.39) ergibt sich damit für T der Ausdruck

$$T = \frac{A}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2$$

Sind x_1^s, x_2^s, x_3^s die Koordinaten des Kreiselschwerpunkts \mathbf{K}_x^s im raumfesten Koordinatensystem dann ist die potenzielle Energie des Kreisels der Masse m gegeben durch

$$V(\phi, \vartheta, \psi) = m \cdot g \cdot x_3^s$$

Transformation des raumfesten Schwerpunktvektors \mathbf{K}_x^s in den körperfesten Schwerpunktvektor \mathbf{K}_ξ^s mittels der Drehmatrix $\mathbf{R}^{\phi\vartheta\psi}$ (siehe Abschnitt 5.2.1)

$$\mathbf{K}_x^s = \mathbf{R}^{\phi\vartheta\psi} \mathbf{K}_\xi^s$$

liefert für x_3^s im körperfesten Koordinatensystem

$$x_3^s = \sin \vartheta \sin \psi \cdot \xi_1^s + \sin \vartheta \cos \psi \cdot \xi_2^s + \cos \vartheta \cdot \xi_3^s$$

Für den symmetrischen Kreisel liegt der Schwerpunkt auf der Drehachse welche in der ξ_3 -Achse liegt und damit ist $\xi_1^s = \xi_2^s = 0$. Befindet sich nun der Kreiselschwerpunkt \mathbf{K}_ξ^s auf der x_3 -Achse im Abstand d vom Aufpunkt P , also $\xi_3^s = d$, dann erhält man für die potenzielle Energie im körperfesten Koordinatensystem

$$V(\phi, \vartheta, \psi) = m \cdot g \cdot d \cdot \cos \vartheta$$

Damit ergibt sich für die Gesamtenergie $E = T + V$ des Kreisels

$$E = \frac{A}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + m \cdot g \cdot d \cdot \cos \vartheta \quad (6.52)$$

und für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ des Kreisels erhält man

$$L = \frac{A}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - m \cdot g \cdot d \cdot \cos \vartheta \quad (6.53)$$

L hängt von $\dot{\phi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, und ϑ ab, nicht aber von ϕ und ψ . Verallgemeinerte Koordinaten q für die $\partial L / \partial q = 0$ gilt, bezeichnet man als zyklische Koordinaten. Zyklische Koordinaten haben die Eigenschaft, dass man sie aus den Lagrange Gleichungen eliminieren kann. ϕ und ψ sind solche zyklischen Koordinaten und für sie lauten die Lagrange Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} [A \dot{\phi} \sin^2 \vartheta + C (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta] = 0 \quad (6.54)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} [C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})] = 0 \quad (6.55)$$

Aus Gl. (6.54) und Gl. (6.55) erhält man die Gleichungen

$$A\dot{\phi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta = c_1$$

$$C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = c_2$$

mit den Konstanten c_1 und c_2 . Aufgelöst nach $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ erhält man

$$\dot{\phi} = \frac{c_1 - c_2 \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta} \quad (6.56)$$

und

$$\dot{\psi} = \frac{c_2}{C} - \frac{c_1 - c_2 \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \quad (6.57)$$

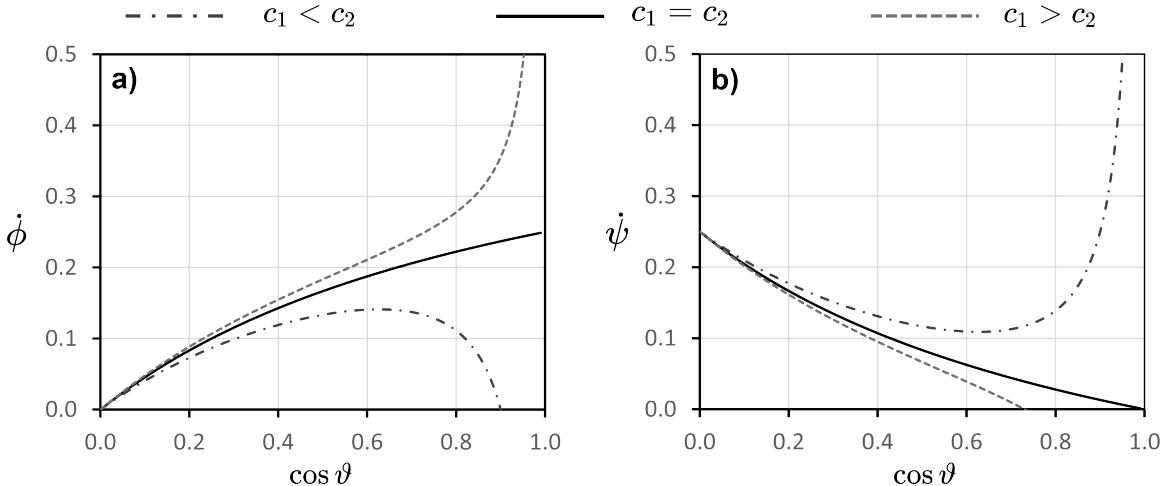


Abb. 6.15: Die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}$ (a) und $\dot{\psi}$ (b) aus Gl. (6.56) und Gl. (6.57) als Funktion von $\cos \vartheta$ für $c_1 = 0.9 \cdot c_2$, $c_1 = c_2$ und $c_1 = 1.1 \cdot c_2$ ($A = 1$ und $C = 2A$).

Abb. 6.15 illustriert die Abhängigkeit von $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ von $\cos \vartheta$ für drei ausgewählte Relativwerte von c_1 und c_2 in normierter Form für $A = 1$ und ein $C:A$ Verhältnis von 2:1. Für $c_1 < c_2$ steigt $\dot{\phi}$ zuerst bis zu einem Maximum an, nimmt dann wieder ab und wird schließlich bei $\cos \vartheta = c_1/c_2$ Null. Für $c_1 = c_2$ steigt $\dot{\phi}$ kontinuierlich an, ebenso für $c_1 > c_2$, hat aber in diesem Fall einen Wendepunkt, nach welchem $\dot{\phi}$ deutlich stärker ansteigt. Für $c_1 < c_2$ fällt $\dot{\psi}$ bis zu einem Minimum und steigt danach steil an. Für $c_1 = c_2$ fällt $\dot{\psi}$ stetig bis es bei $\cos \vartheta = 1$ verschwindet. Ähnlich ist das Verhalten von $\dot{\psi}$ für $c_1 > c_2$ mit dem Unterschied, dass der Abfall etwas schneller erfolgt und $\dot{\psi}$ schon bei einem Wert von $\cos \vartheta < 1$ verschwindet.

Durch Einsetzen der Formeln für $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ aus Gl. (6.56) und Gl. (6.57) in Gl. (6.52) erhält man für die Gesamtenergie E

$$E = \frac{c_2}{2C} + A \left[\dot{\vartheta}^2 + \frac{(c_1 - c_2 \cos \vartheta)^2}{A^2 \sin^2 \vartheta} \right] + m \cdot g \cdot d \cdot \cos \vartheta$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\dot{\vartheta}$ und Trennung der Variablen liefert

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{A} \left(E - \frac{c_2^2}{2C} - mgd \cos \vartheta \right) - \frac{(c_1 - c_2 \cos \vartheta)^2}{A^2 \sin^2 \vartheta}} \quad (6.58)$$

und

$$dt = \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{A} \left(E - \frac{c_2^2}{2C} - mgd \cos \vartheta \right) - \frac{(c_1 - c_2 \cos \vartheta)^2}{A^2 \sin^2 \vartheta}}}$$

Mit Integration und Substitution $u = \cos \vartheta$ erhält man

$$t - t_0 = -A \int_{\cos \vartheta_0}^{\cos \vartheta} \left(2A(1-u^2) \left(E - \frac{c_2^2}{2C} - mgdu \right) - (c_1 - c_2 u)^2 \right)^{-1/2} du \quad (6.59)$$

Dieses elliptische Integral hat keine einfache analytische Lösung und muss entweder durch Näherungen oder numerisch ausgewertet werden. In beiden Fällen erhält man die Zeitabhängigkeit der Koordinate ϑ . Setzt man das so erhaltene $\vartheta(t)$ in Gl. (6.56) und Gl. (6.57) ein dann erhält man durch einen weiteren Integrationsschritt $\phi(t)$ und $\psi(t)$ und damit ist die Bewegung des Kreisels als Funktion von $\phi(t)$, $\vartheta(t)$ und $\psi(t)$ vollkommen bestimmt.

Der Lösungsweg ist somit klar aber ein besseres physikalisches Verständnis der Kreiselbewegung liefert bereits eine eingehendere Betrachtung des Ausdrucks R unter der Wurzel in Gl. (6.59):

$$R = 2A(1-u^2) \left(E - \frac{c_2^2}{2C} - mgdu \right) - (c_1 - c_2 u)^2$$

Als Polynom dritten Grades in u hat R höchstens drei Nullstellen. Man kann ablesen, dass R für $u = 1$ ($\vartheta = 0$) und für $u = -1$ ($\vartheta = \pi$) negativ ist und das Integral in Gl. (6.59) damit keine reelle Lösung hat. Irgendwo zwischen $0 < \vartheta < \pi$ muss es aber eine reelle Lösung für $\dot{\vartheta}$ in Gl. (6.58) geben. Das heißt zwischen $-1 < u < 1$ muss R einmal positiv und dann wieder negativ werden: Anders ausgedrückt, R muss im Bereich $-1 < u < 1$ zwei Nullstellen u_1 und u_2 haben und es muss damit zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 geben für die $\dot{\vartheta}$ in Gl. (6.58) verschwindet. Wie sich leicht nachprüfen lässt, gilt $R \rightarrow +\infty$

für $u \rightarrow +\infty$, dass heißt u_3 , die dritte Nullstelle von R , muss größer als 1 sein und liegt damit außerhalb des Definitionsbereichs von \arccos , der entsprechende Winkel ϑ_3 existiert somit nicht.

In den zwei Grenzfällen $c_1 = c_2$ und $c_1 = -c_2$ kann von R der Faktor $(1-u)$ beziehungsweise $(1+u)$ abgespalten werden:

- Im Fall $c_1 = c_2$ ist also $u = 1$ eine Nullstelle von R und der zugehörige Winkel ist $\vartheta_1 = 0$. Das bedeutet, dass die Nutationsbewegung $\vartheta(t)$ für $c_1 = c_2$ die Figurennachse des Kreisels vertikal aufrichtet, sie liegt dann parallel zur Koordinate x_3 .
- Im Fall $c_1 = -c_2$ ist $u = -1$ eine Nullstelle von R und der zugehörige Winkel ist $\vartheta_2 = \pi$. Das bedeutet, dass die Nutationsbewegung $\vartheta(t)$ für $c_1 = -c_2$ die Figurennachse des Kreisels vertikal invertiert. Das funktioniert allerdings nur für entsprechend gelagerte Kreisel (beispielsweise bei magnetisch frei gelagerten Kreiseln) da bei einem normalen Tischkreisel der Boden verhindert, dass die Figurennachse antiparallel zur Koordinate x_3 werden kann.

Mit den zwei Nullstellen ϑ_1 und ϑ_2 von R sind nach Gl. (6.56) zwei Präzessionsgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$ verknüpft zwischen denen $\dot{\phi}$ variiert

$$\dot{\phi}_1 = \frac{c_1 - c_2 \cos \vartheta_1}{A \sin^2 \vartheta_1} \quad (6.60)$$

und

$$\dot{\phi}_2 = \frac{c_1 - c_2 \cos \vartheta_2}{A \sin^2 \vartheta_2} \quad (6.61)$$

Bezeichnet ϑ_1 den kleineren der beiden Nutations-Grenzwinkel dann kann man drei Fälle unterscheiden:

1) $c_1 > c_2 \cos \vartheta_1$:

Die Präzession ist eine monotone Bewegung mit periodisch variierender Geschwindigkeit (Abb. 6.16a).

2) $c_1 = c_2 \cos \vartheta_1$:

Die Präzession setzt periodisch aus wenn der Nutationswinkel ϑ_1 erreicht wird da $\dot{\phi}_1 = 0$ (Abb. 6.16b).

3) $c_1 < c_2 \cos \vartheta_1$:

Die Präzession wird rückläufig, das heißt $\dot{\phi}_1 < 0$ für einen bestimmten Nutationsbereich $\vartheta_1 \leq \vartheta < \vartheta_2$ (Abb. 6.16c).

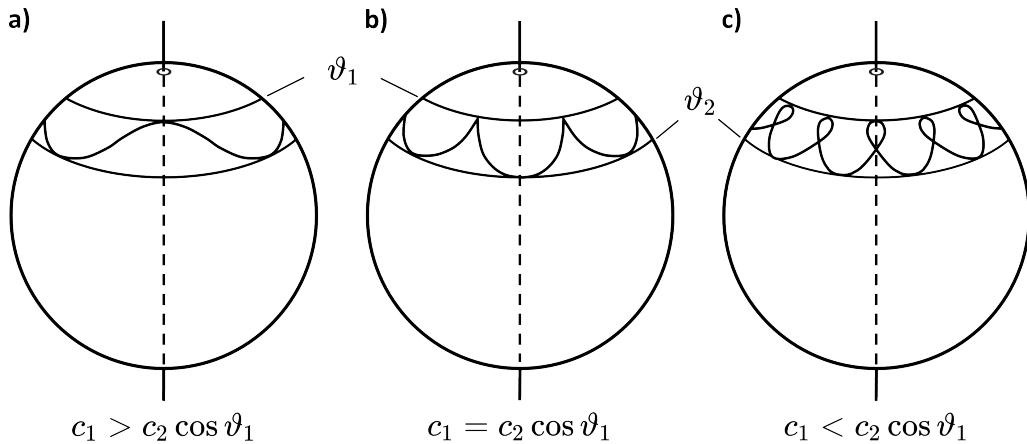


Abb. 6.16: Bahnkurve der Kreiselspitze auf einer Kugeloberfläche: (a) $\dot{\phi}$ variiert monoton zwischen $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$; (b) $\dot{\phi}$ wird periodisch Null da $\dot{\phi}_1 = 0$; und (c) $\dot{\phi}$ wird periodisch rücklaufig wenn $\dot{\phi}_1 < 0$.

Abb. 6.16 zeigt in jedem der drei Fälle die Bahnkurve die ein Punkt auf der Figurenachse oberhalb der Kreiselspitze auf einer Kugeloberfläche zwischen den durch die Nutationsgrenzwinkel ϑ_1 und ϑ_2 definierten „Breitengraden“ zeichnet. Die mit ϑ_1 und ϑ_2 verknüpften Extremwerte $\dot{\psi}_1$ und $\dot{\psi}_2$ der Rotation um die Figurenachse sind mit Gl. (6.57)

$$\dot{\psi}_1 = \frac{c_2}{C} - \frac{c_1 - c_2 \cos \vartheta_1}{A \sin^2 \vartheta_1} \cos \vartheta_1 \quad (6.62)$$

und

$$\dot{\psi}_2 = \frac{c_2}{C} - \frac{c_1 - c_2 \cos \vartheta_2}{A \sin^2 \vartheta_2} \cos \vartheta_2 \quad (6.63)$$

Ebenso wie für $\dot{\phi}$ schwankt die Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse $\dot{\psi}$ periodisch zwischen diesen Extremwerten. Im Grenzfall $\vartheta_1 = \vartheta_2$ fallen die beiden „Breitengrade“ in Abb. 6.16 zusammen, dass heißt ϑ wird konstant und es gibt keine Nutationsbewegung mehr. Die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ sind dann konstant und es liegt somit eine reguläre Präzessionsbewegung wie beim bereits diskutierten kräefefreien Kreisel vor (siehe Abschnitt 5.3).

6.3.3 Nicht-holonom Systeme

In einem nicht-holonomen System ist mindestens eine der Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen) nicht nur eine Funktion der generalisierten Koordinaten q_i sondern hängt auch von den Geschwindigkeiten \dot{q}_i ab. Die Zwangsbedingungen haben also die Form

$$\varphi_\mu(q_i, \dot{q}_k, t) = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, 3n - f \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (6.64)$$

Damit sind die generalisierten Koordinaten q_i der Zwangsbedingungen im allgemeinen nicht mehr unabhängig voneinander variierbar und die Zwangsbedingungen nicht mehr integrierbar. Zusätzlich zu den Zwangsbedingungen für ein nicht-holonomes System mit beispielsweise S Freiheitsgraden q_j werden weitere Randbedingungen benötigt in der Form

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} dq_j + b_i dt = 0 \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq p \quad (6.65)$$

Für die p zusätzlichen Zwangsbedingungen gilt jeweils (mit $\delta t = 0$)

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} \delta q_j = 0$$

Im Lagrange Formalismus werden die zusätzlichen Zwangsbedingungen berücksichtigt indem sie je mit einem Lagrange-Parameter multipliziert als Zwangskräfte zur Lagrange-Funktion Gl. (6.30) addiert werden

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \right\} \delta q_j = 0 \quad (6.66)$$

Die generalisierten Koorindaten wählt man dann so, dass für die q_j gilt:

$$q_j = \begin{cases} \text{unabhängig falls} & 1 \leq j \leq S - p \\ \text{abhängig falls} & S - p + 1 \leq j \leq S \end{cases}$$

Jetzt werden die p Lagrange-Parameter in Gl. (6.66) so gewählt, dass für die abhängigen Variablen der Ausdruck zwischen den geschweiften Klammern gleich Null wird. Damit können nun die unabhängigen Variablen für sich getrennt variiert werden. Man hat es dann nur noch mit den unabhängigen Variablen zu tun und damit fällt die äußere Summe in Gl. (6.66) weg und es bleibt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} = Q_j \quad (6.67)$$

wobei Q_j die aus den zusätzlichen Zwangsbedingungen resultierenden Zwangskräfte sind. Ein Vergleich mit Gl. (6.15) zeigt dass Gl. (6.67) einer Lagrange-Gleichung erster Art entspricht. Mit Gl. (6.67) hat man S Gleichungen (es gibt S unabhängige Variablen) in $S + p$ Unbekannten. Die Fehlenden p Gleichungen um Gl. (6.67) lösen zu können, werden durch die p Zwangsbedingungen aus Gl. (6.65) geliefert.

Beispiel 6.11 Der Fall der nicht-holonomen Rollbedingung (Auto)

Das Rad in Abb. 6.17 rollt mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in der xy -Ebene wobei α der von der Radachse und der x -Koordinate eingeschlossene Winkel ist. Für $\alpha = 0$ ist die Radachse parallel zur x -Achse und das Rad rollt in die negative y -Richtung, d.h. aus der Bildebene heraus. $\alpha = 90^\circ$ bedeutet die Radachse steht senkrecht auf der x -Achse und das Rad rollt parallel zur positiven x -Richtung. Die Bewegung des in der xy -Ebene rollenden Rades wird durch die vier Koordinaten x, y, ϑ und α vollständig beschrieben. Aus Abb. 6.17 lassen sich die folgenden Beziehungen ablesen

$$v = a\dot{\vartheta} \quad ; \quad \dot{x} = v \sin \alpha \quad ; \quad \dot{y} = -v \cos \alpha$$

Sowohl die x - wie die y -Koordinate hängen von der Geschwindigkeit ab, es handelt sich hier also um ein nicht-holonomes System. Aus den Gleichungen für \dot{x} und \dot{y} folgt

$$\dot{x} \cos \alpha + \dot{y} \sin \alpha = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = 0 \quad (6.68)$$

Diese nicht-holome Nebenbedingung besagt, dass der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} stets senkrecht zur Radachse steht. Obwohl das Rad jede beliebige Orientierung x, y, ϑ und α in der Ebene annehmen kann, gibt es aufgrund dieser nicht-holonomen Nebenbedingung von Moment zu Moment nur zwei Freiheitsgrade, die Bewegung in die momentante Vorwärtsrichtung $\delta\hat{\mathbf{v}}$ und die Winkeländerung $\delta\vartheta$. Aus den obigen Gleichungen folgen zwei differentielle Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} - a \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin \alpha = 0 \\ \dot{y} + a \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos \alpha = 0 \end{array} \right\} \quad (*) \quad (6.69)$$

Für diese Differentiale lässt sich keine Integrationslösung finden, diese zwei differentiellen Randbedingungen sind also tatsächlich nicht-holonom. Das dem wirklich so ist kann man auch ohne Integrationsversuche zeigen indem man annimmt es gäbe eine holonome Nebenbedingung $\varphi_\mu(x, y, \alpha, \vartheta) = 0$ aus der sich beispielsweise die erste dieser zwei differentiellen Randbedingungen ableiten ließe. Dann müsste gelten

$$\varphi_{\mu_x} \dot{x} + \varphi_{\mu_y} \dot{y} + \varphi_{\mu_\alpha} \dot{\alpha} + \varphi_{\mu_\vartheta} \dot{\vartheta} = 0 \quad (**)$$

Da (*) nur Glieder mit \dot{x} und $\dot{\vartheta}$ hat müssen in (**) die beiden Glieder in der Mitte

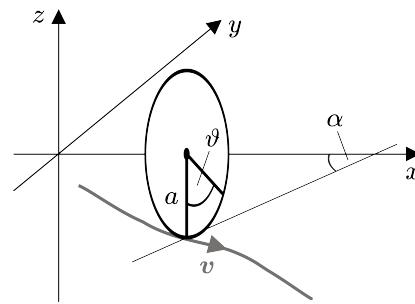


Abb. 6.17

verschwinden, das heißt es muss gelten $\varphi_{\mu y} = 0$ und $\varphi_{\mu \alpha} = 0$ und damit gilt auch $\varphi_{\mu \alpha \vartheta} = \varphi_{\mu \alpha x} = 0$. Damit wird die Randbedingung (**) zu

$$\varphi_{\mu x} \dot{x} + \varphi_{\mu \vartheta} \dot{\vartheta} = 0$$

Mit (*) gilt

$$\frac{\varphi_{\mu \vartheta}}{\varphi_{\mu x}} = -a \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{\mu \vartheta} = -a \sin \alpha \cdot \varphi_{\mu x}$$

Damit und wegen $\varphi_{\mu \alpha \vartheta} = \varphi_{\mu \vartheta \alpha} = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_{\mu \vartheta \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi_{\mu \vartheta} = -a \cos \alpha \cdot \varphi_{\mu x} - a \sin \alpha \cdot \underbrace{\varphi_{\mu x \alpha}}_{= \varphi_{\mu \alpha x}} \\ &= \varphi_{\mu \alpha x} = 0 \end{aligned}$$

Somit muss gelten $\varphi_{\mu x} = 0$ und damit wegen (*) auch $\varphi_{\mu \vartheta} = 0$. Das bedeutet aber, dass φ_{μ} konstant sein muss! Es gilt also entgegen der Annahme, dass $\varphi_{\mu} \neq 0$ und somit können die Nebenbedingungen nicht holonom sein. Zur Lösung des Problems kehrt man zuerst zu den Lagrange Gleichungen erster Art zurück um die Zwangskräfte zu bestimmen (rechte Seite von Gl. (6.67)) und stellt damit anschließend die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange Funktion (linke Seite von Gl. (6.67)) auf.

Die vier generalisierten Koordinaten des Problems sind die Koordinaten des Auflagepunktes des Rades, also x und y , sowie die zwei Winkel ϑ und α :

$$q_1 = x \quad ; \quad q_2 = y \quad ; \quad q_3 = \vartheta \quad ; \quad q_4 = \alpha$$

Nach Multiplikation mit dt lauten die differentiellen Randbedingungen aus Gl. (6.69) damit

$$dq_1 - a \sin q_4 \cdot dq_3 = 0$$

$$dq_2 + a \cos q_4 \cdot dq_3 = 0$$

Mit Gl. (6.65) muss für diese beiden differentiellen Randbedingungen aber auch gelten:

$$a_{11} dq_1 + a_{12} dq_2 + a_{13} dq_3 + a_{14} dq_4 + b_1 dt = 0$$

$$a_{21} dq_1 + a_{22} dq_2 + a_{23} dq_3 + a_{24} dq_4 + b_2 dt = 0$$

Daraus folgt dass gelten muss:

$$a_{11} = 1 \quad ; \quad a_{12} = 0 \quad ; \quad a_{13} = -a \sin q_4 \quad ; \quad a_{14} = 0 \quad ; \quad b_1 = 0$$

$$a_{21} = 0 \quad ; \quad a_{22} = 1 \quad ; \quad a_{23} = a \cos q_4 \quad ; \quad a_{24} = 0 \quad ; \quad b_2 = 0$$

Mit diesen Koeffizienten kann man nun entsprechend Gl. (6.67) die Zwangskräfte bestimmen. Für die zwei Zwangsbedingungen aus Gl. (6.69) werden zwei Lagrange Multiplikatoren λ_1 und λ_2 benötigt mit deren Hilfe die vier Zwangskräfte aus Gl. (6.67) folgen:

$$Q_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} = \lambda_1$$

$$Q_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = \lambda_2$$

$$Q_3 = \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} = -\lambda_1 a \sin q_4 + \lambda_2 a \cos q_4$$

$$Q_4 = \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} = 0$$

Jetzt bestimmt man die potenzielle und die kinetische Energie des rollenden Rades. Da das Rad in der Ebene rollt, ist seine potenzielle Energie konstant und man kann daher $V = 0$ setzen. Die kinetische Energie des Rades ist die Summe aus seiner Translationsenergie T_T und seiner Rotationsenergie T_R . Die Rotationsenergie des Rades stammt zum einen aus seiner Eigenrotation ($T_R^{(1)}$) und zum anderen aus der Lenkung ($T_R^{(2)}$). Die Eigenrotation ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, günstigerweise nutzt man aber das Hauptachsensystem mit dem Haupträgheitsmoment $J_{11} = m^* a^2$ in Richtung der Radachse, wobei m^* wieder die effektive Trägheitsmomentmasse ist. Damit erhält man für $T_R^{(1)}$:

$$T_R^{(1)} = \frac{1}{2} m^* a^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} m^* a^2 \dot{q}_3^2$$

Die beiden Trägheitsmomente normal zur Radachse sind identisch, also $J_{22} = J_{33} = I$. Die Lenkung erfolgt durch eine Rotation um die Achse die durch den Radauflagepunkt und die Radnabe geht mit der Drehgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$. Ihr Beitrag zur Rotationsenergie ist damit

$$T_R^{(2)} = \frac{I}{2} \dot{\alpha}^2 = \frac{I}{2} \dot{q}_4^2$$

Damit erhält man für die Lagrange Funktion $L = T - V$

$$L = T_T + T_R^{(1)} + T_R^{(2)} - V = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m^* a^2 \dot{q}_3^2 + \frac{I}{2} \dot{q}_4^2$$

beziehungsweise

$$L = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m^* a^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{I}{2} \dot{\alpha}^2$$

wobei M die Masse des Rades ist. Mit Hilfe von Gl. (6.67) und den bereits bestimmten Zwangskräften kann man nun die Lagrange Gleichungen erster Art hinschreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= M\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= M\ddot{y} = F_y + \lambda_2 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= m^* a^2 \ddot{\vartheta} = M_\vartheta - \lambda_1 a \sin \alpha + \lambda_2 a \cos \alpha \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= I\ddot{\alpha} = M_\alpha + 0
\end{aligned} \tag{6.70}$$

wobei die hier hinzugefügten externen Kräfte F_x und F_y für die Schwerkraft, Reibungskräfte oder auch den Luftwiderstand stehen und M_ϑ für Motor- und Bremsmomente sowie M_α für Steuerungsmomente. Die letzte der Gleichungen gründet in der Steuerung des Rades, das heißt der Lenkkraft.

Mit den zwei Randbedingungen aus Gl. (6.69) und den vier Lagrange-Gleichungen erster Art aus Gl. (6.70) hat man nun sechs Gleichungen für sechs Unbekannte: λ_1 , λ_2 , x , y , ϑ und α . Der Einfachheit halber soll hier Gl. (6.70) ohne äußere Kräfte betrachtet werden, das heißt $F_x = 0$, $F_y = 0$, $M_\vartheta = 0$ und $M_\alpha = 0$. Direkte Integration der vierten Gleichung in Gl. (6.70) mit $M_\alpha = 0$ liefert dann

$$\dot{\alpha} = \text{const} = \omega_\alpha \quad \text{und} \quad \alpha = \omega_\alpha t + \alpha_0$$

Für $\omega_\alpha = 0$ rollt das Rad geradeaus und für $\omega_\alpha > 0$ durchfährt es eine Kurve mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Im nächsten Schritt setzt man $\alpha = \omega_\alpha t + \alpha_0$ in die Zwangsbedingungen in Gl. (6.69) ein und nimmt die zeitliche Ableitung der so erhaltenen Gleichungen. Die Ergebnisse für \ddot{x} und \ddot{y} setzt man dann in die ersten beiden Gleichungen von Gl. (6.70) ein (mit $F_x = 0$ und $F_y = 0$). Das liefert für λ_1 und λ_2

$$\lambda_1 = Ma\ddot{\vartheta} \sin(\omega_\alpha t + \alpha_0) + Ma\dot{\vartheta}\omega_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_0)$$

$$\lambda_2 = -Ma\ddot{\vartheta} \cos(\omega_\alpha t + \alpha_0) + Ma\dot{\vartheta}\omega_\alpha \sin(\omega_\alpha t + \alpha_0)$$

Nun λ_1 und λ_2 in Gleichung drei von Gl. (6.70) (mit $M_\vartheta = 0$) einsetzen. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
m^* a^2 \ddot{\vartheta} &= -a \sin(\omega_\alpha t + \alpha_0) (Ma\ddot{\vartheta} \sin(\omega_\alpha t + \alpha_0) + Ma\dot{\vartheta}\omega_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_0)) \\
&\quad + a \cos(\omega_\alpha t + \alpha_0) (-Ma\ddot{\vartheta} \cos(\omega_\alpha t + \alpha_0) + Ma\dot{\vartheta}\omega_\alpha \sin(\omega_\alpha t + \alpha_0))
\end{aligned}$$

Das vereinfacht sich zu

$$\underbrace{m^* a^2 \ddot{\vartheta}}_{> 0} = \underbrace{-Ma^2 \ddot{\vartheta}}_{< 0} \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0$$

Also muss gelten

$$\dot{\vartheta} = \text{const} = \Omega \quad \text{und somit} \quad \vartheta = \Omega t + \vartheta_0$$

Für die verallgemeinerten Zwangskräfte nach Gl. (6.67) ergibt sich somit

$$Q_1 = Ma\omega_\alpha \Omega \cos(\omega_\alpha t + \alpha_0)$$

$$Q_2 = Ma\omega_\alpha \Omega \sin(\omega_\alpha t + \alpha_0)$$

$$Q_3 = Q_4 = 0$$

Die Zwangskräfte Q_1 und Q_2 existieren nur dann wenn das Rad nicht geradeaus rollt, d.h., sie existieren also nur wenn $\omega_\alpha \neq 0$. Q_1 und Q_2 stellen sicher, dass die Rollbedingung in Gl. (6.68) immer erfüllt ist.

6.4 Kleine Schwingungen

Schwingungen geringer Amplitude für welche die Rückstellkraft als proportional zur Auslenkung angenommen werden kann und für welche das betrachtete System lineare Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführt, werden als kleine Schwingungen bezeichnet. Kleine Schwingungen sind eine wichtiges Anwendungsgebiet für den Lagrange-Ansatz, insbesonders wenn die Anzahl der Freiheitsgrade f des betrachteten Systems groß ist. Die kinetische Energie T für ein System aus N Massen m_i ($i = 1 \dots N$) mit f Freiheitsgraden ist nach Gl. (6.27) gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^f M_{rs}(q_1 \dots q_f) \dot{q}_r \dot{q}_s \quad \text{mit} \quad M_{rs} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}$$

und die potenzielle Energie des Systems ist

$$V = V(q_1 \dots q_f)$$

Es sei $\mathbf{q}^0 = (q_1^0 \dots q_f^0)$ die Ruhelage des Systems in der dessen potenzielle Energie $V(\mathbf{q}^0)$ minimal ist. Für kleine Abweichungen $\hat{\mathbf{q}}$ von dieser Gleichgewichtslage

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^0$$

ist die Bewegung des Systems dann eine Schwingung. Die ersten Glieder der Taylor-Entwicklung des Potenzials V um die Ruhelage \mathbf{q}^0 sind

$$V(\hat{q}_1 \dots \hat{q}_f) = V(q_1^0 \dots q_f^0) + \sum_{r=1}^f \left(\frac{\partial V}{\partial q_r} \right)_0 \cdot \hat{q}_r + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^f \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \right)_0 \cdot \hat{q}_r \hat{q}_s + \dots$$

Der zweite Term dieser Entwicklung entspricht der von den einwirkenden Kräften $F_r = \partial V / \partial q_r$ am System verrichteten virtuellen Arbeit und ist somit gleich Null (siehe Abschnitt 6.2.1). Mit der Wahl $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$ gilt für den quadratischen Term

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \right)_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} = V_{rs} \quad (6.71)$$

und für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ erhält man somit

$$L = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^f M_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s - V_0 - \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^f V_{rs} q_r q_s \quad (6.72)$$

Aus der allgemeinen Bewegungsgleichung nach Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

folgt damit die Matrizen-Gleichung

$$\sum_s M_{rs} \ddot{q}_s + \sum_s V_{rs} q_s = 0 \quad (6.73)$$

Für die Matrizen M_{rs} und V_{rs} gilt:

$$M_{rs} = M_{sr} \quad \text{und} \quad V_{rs} = V_{sr}$$

Ein Gewaltansatz zur Lösung von Gl. (6.73) ist

$$q_r(t) = a_r e^{i\omega t}, \quad a_r \cos \omega t, \quad a_r \sin \omega t$$

$$\dot{q}_r(t) = i\omega a_r e^{i\omega t}$$

$$\ddot{q}_r(t) = -\omega^2 a_r e^{i\omega t} = -\omega^2 q_r$$

Damit wird aus Gl. (6.73)

$$\sum_s^f (-M_{rs}\omega^2 + V_{rs}) q_s = 0 \quad (6.74)$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung falls die entsprechende Determinante Null ist, das heißt es muss gelten

$$\det |V_{rs} - M_{rs}\omega^2| = 0 \quad (6.75)$$

Dies führt auf eine Gleichung f -ten Grades für ω^2 und f Lösungen $\pm\omega_\lambda$ mit $\lambda = 1 \dots f$.

Entsprechend gibt es f Vektoren $Q_{l\lambda}$ mit $l, \lambda = 1 \dots f$ so dass

$$\sum_{l=1}^f (V_{kl} - \omega_\lambda^2 M_{kl}) Q_{l\lambda} = 0 \quad (6.76)$$

Gl. (6.76) hat die allgemeine Lösung

$$q_k(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{\lambda=1}^f Q_{k\lambda} \eta_\lambda e^{i\omega_\lambda t} \right) \quad (6.77)$$

Kleine Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden sind zumeist gekoppelte Schwingungen. Im Folgenden sollen hierzu drei Beispiele von gekoppelten Schwingungen im Detail betrachtet werden: Das Doppelpendel, zwei mit einer Feder gekoppelte Pendel und das Modell eines linearen zweiatomigen Moleküls.

Beispiel 6.12 Das Doppelpendel

Für die Koordinaten des Doppelpendels in Abb. 6.18 liest man ab

$$y_1 = -a_1 \cos \varphi_1$$

$$x_1 = a_1 \sin \varphi_1$$

$$y_2 = -a_1 \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2$$

$$x_2 = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeiten

$$\dot{y}_1 = a_1 \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{x}_1 = a_1 \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + a_2 \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2$$

Die kinetische Energie des Doppelpendels ist die Summe der kinetischen Energien der zwei Massen m_1 und m_2

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Nach Einsetzen der Geschwindigkeiten erhält man somit für die kinetische Energie des Doppelpendels

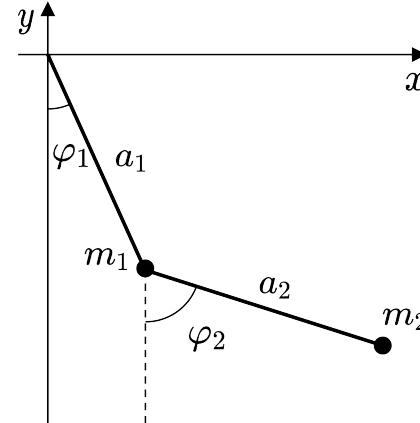


Abb. 6.18

$$T = \frac{m_1+m_2}{2}a_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}a_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2a_1a_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Die potenzielle Energie des Doppelpendels ist die Summe der potenziellen Energien der Massen m_1 und m_2

$$V = V_1 + V_2 = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -(m_1+m_2)ga_1 \cos \varphi_1 - m_2ga_2 \cos \varphi_2$$

Die Nährung für kleine Auslenkungen ist hier die Taylor-Entwicklung des Kosinus

$$\cos \varphi_{1,2} = 1 - \frac{\varphi_{1,2}^2}{2}$$

Setzt man dies in die Gleichungen für T und V ein und behält nur Glieder die höchstens quadratisch in $\varphi_{1,2}$ und ihren Ableitungen sind, dann bekommt man für die kinetische Energie T

$$T = \frac{m_1+m_2}{2}a_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}a_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2a_1a_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

und für die potenzielle Energie V

$$V = V_0 + \frac{m_1+m_2}{2}ga_1\varphi_1^2 + \frac{m_2ga_2}{2}\varphi_2^2$$

wobei

$$V_0 = -(m_1+m_2)ga_1 - m_2ga_2$$

Damit wird die Lagrange-Funktion $L = T - V$

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}a_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}a_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2a_1a_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - V_0 - \frac{m_1+m_2}{2}ga_1\varphi_1^2 - \frac{m_2ga_2}{2}\varphi_2^2$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit Gl. (6.72) zeigt, dass man hier die Matrizen M_{rs} und V_{rs} direkt ablesen kann

$$M_{rs} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)a_1^2 & m_2a_1a_2 \\ m_2a_1a_2 & m_2a_2^2 \end{bmatrix}$$

und

$$V_{rs} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)ga_1 & 0 \\ 0 & m_2ga_2 \end{bmatrix}$$

Aus der Lösungsbedingung $\det |V_{rs} - \omega^2 M_{rs}| = 0$ folgt damit

$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)ga_1 - \omega^2(m_1+m_2)a_1^2 & -m_2a_1a_2\omega^2 \\ -m_2a_1a_2\omega^2 & m_2ga_2 - m_2a_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

Also

$$(m_1 + m_2)a_1(g - a_1\omega^2) \cdot m_2a_2(g - a_2\omega^2) - m_2a_1a_2\omega^2 \cdot m_2a_1a_2\omega^2 = 0$$

beziehungsweise vereinfacht

$$(m_1 + m_2)(g - a_1\omega^2)(g - a_2\omega^2) - m_2a_1a_2\omega^4 = 0 \quad (*)$$

Zur Lösung von (*) soll hier ein Doppelpendel mit $a_1 = a_2$ betrachtet werden. Mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{g}{a_1} = \frac{g}{a_2} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{m_1}{m_2}$$

wird aus (*)

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega^4 = 0$$

woraus für ω^2 folgt

$$\omega^2 = \left(1 + \mu \pm \mu \sqrt{1 + \frac{1}{\mu}}\right)\omega_0^2 \quad (6.78)$$

Für große μ geht der Pluszweig dieser Lösung offensichtlich über in $\omega^2 = (1 + 2\mu)\omega_0^2$. Den asymptotischen Wert $\omega_0^2/2$ für große μ im Minuszweig findet man indem die Wurzel in Gl. (6.78) durch die ersten zwei Glieder ihrer Taylor-Entwicklung ersetzt wird. Abb. 6.19 zeigt die graphische Darstellung der zwei Zweige von Gl. (6.78). Der untere Zweig, die Lösung mit dem Minuszeichen in Gl. (6.78) entspricht dabei einer gleichphasigen ($\omega^2 < \omega_0^2$) und der obere Zweig, die Lösung mit dem Pluszeichen in Gl. (6.78), einer gegenphasigen ($\omega^2 > \omega_0^2$) Bewegung des Doppelpendels. Für $\omega^2 = \omega_0^2$ ist die Lösung nicht definiert.

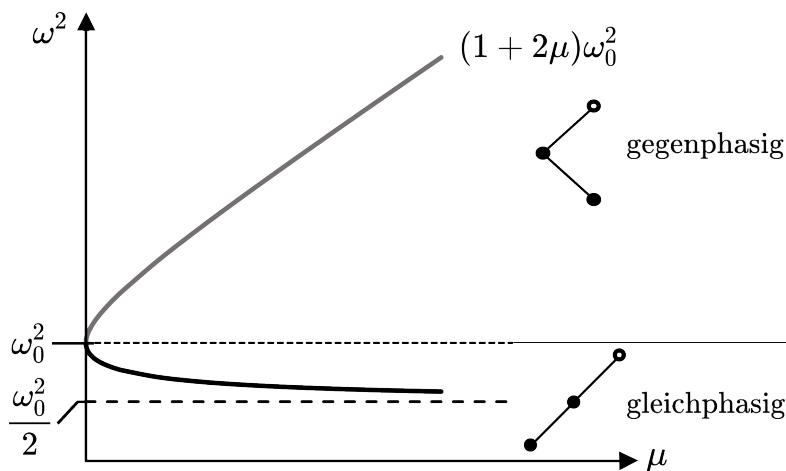


Abb. 6.19: Graphische Darstellung der Lösung für die Bewegung des Doppelpendels. Der untere Zweig, die gleichphasige Bewegung, entspricht dem Minuszeichen und der obere Zweig, die gegenphasige Bewegung, entspricht dem Pluszeichen in Gl. (6.78).

Die Lösung aus Gl. (6.78) für die Bewegungsgleichung des Doppelpendels ist nur für kleine Auslenkungen gültig. Ohne die aus dieser Annahme folgenden Vereinfachungen von T und V ist die Bewegungsgleichung für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ nicht analytisch lösbar. Nicht umsonst ist die Bewegung des Doppelpendels (bei nicht kleinen Auslenkungen) ein Paradebeispiel für eine chaotische Bewegung.

Beispiel 6.13 Zwei federgekoppelte Pendel

Zwei identische Pendel mit Pendelarm l und Pendelmasse m seien wie in Abb. 6.20 skizziert mit einer Feder der Federkonstante k gekoppelt. Bei identischer Auslenkung, also $\varphi_1 = \varphi_2$, sei die Feder entspannt. Die kinetische Energie des Systems ist die Summe der kinetischen Energien der beiden Pendel

$$T = \frac{m}{2} \dot{\varphi}_1^2 l^2 + \frac{m}{2} \dot{\varphi}_2^2 l^2 = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

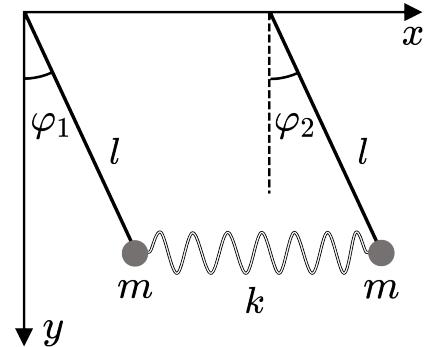


Abb. 6.20

Die potenzielle Energie des Systems ist die Summe aus den potenziellen Energien der zwei Pendelmassen und der potenziellen Energie der Feder. Für die potenziellen Energien der Pendelmassen liest man aus Abb. 6.20 ab

$$V_{m+m} = mg(l - l \cos \varphi_1) + mg(l - l \cos \varphi_2) = 2mgl - mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$$

Die potenzielle Energie der Feder ist

$$V_{Feder} = \frac{k}{2} l^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2$$

Damit hat man für die Lagrange-Funktion $L = T - V$

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{k}{2} l^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2 - 2mgl + mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$$

Jetzt Näherung für kleine Auslenkungen (d.h. kleine Schwingungen) verwenden

$$\sin \varphi_{1,2} \approx \varphi_{1,2} \quad \text{und} \quad \cos \varphi_{1,2} \approx 1 - \frac{\varphi_{1,2}^2}{2}$$

Damit vereinfacht sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{k}{2} l^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 - mgl \left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2} \right)$$

Ausmultiplizieren der quadratischen Terme und umschreiben ergibt

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2} \left([kl^2 + mgl] \varphi_1^2 - 2kl^2 \varphi_1 \varphi_2 + [kl^2 + mgl] \varphi_2^2 \right)$$

Ein Vergleich mit der Lagrange-Funktion in der Form von Gl. (6.72)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^f M_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s - V_0 - \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^f V_{rs} q_r q_s$$

ergibt damit für M_{rs} und V_{rs}

$$M_{rs} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} ; \quad V_{rs} = \begin{bmatrix} kl^2 + mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 + mgl \end{bmatrix}$$

Aus der Lösungsbedingung $\det |V_{rs} - \omega^2 M_{rs}|$ folgt damit

$$\begin{bmatrix} (kl^2 + mgl) - ml^2\omega^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & (kl^2 + mgl) - ml^2\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Also muss gelten

$$[(kl^2 + mgl) - ml^2\omega^2]^2 - k^2l^4 = 0$$

Nach ω auflösen

$$(kl^2 + mgl) - ml^2\omega^2 = \pm kl^2$$

$$\omega^2 = \mp \frac{k}{m} + \frac{k}{m} - \frac{g}{l}$$

Die zwei Lösungen sind also

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{und} \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m} + \frac{g}{l}$$

beziehungsweise

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}} \quad (6.79)$$

Aus den Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{1,2}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,2}} = 0$$

erhält man die Bewegungsgleichungen für φ_1 und φ_2 :

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{g}{l}\varphi_1 = 0$$

und

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{k}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{g}{l}\varphi_2 = 0$$

beziehungsweise umgeordnet

$$\ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \varphi_1 - \frac{k}{m} \varphi_2 = 0 \quad (6.80)$$

und

$$\ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \varphi_2 - \frac{k}{m} \varphi_1 = 0 \quad (6.81)$$

Es gibt also zwei Lösungen, eine mit $\omega = \omega_1$ und eine mit $\omega = \omega_2$:

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} \quad ; \quad \varphi_2 = A_2 e^{i\omega_2 t}$$

und

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega_2 t} \quad ; \quad \varphi_2 = A_2 e^{i\omega_1 t}$$

Einsetzen des Lösungsansatzes $\omega = \omega_{1,2}$ in die Bewegungsgleichung für φ_1 (Gl. (6.80)) ergibt

$$-\omega^2 A_1 e^{i\omega t} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) A_1 e^{i\omega t} - \frac{k}{m} A_2 e^{i\omega t} = 0$$

Damit muss also gelten

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) A_1 = \frac{k}{m} A_2$$

Mit den zwei Lösungen $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$ (Gl. (6.79)) folgt daraus für A_1 und A_2

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l} & \Rightarrow A_1 = A_2 \\ \omega_2^2 = \frac{2k}{m} + \frac{g}{l} & \Rightarrow A_1 = -A_2 \end{cases}$$

Wie sich leicht überprüfen lässt, erhält man dasselbe Resultat wenn man den Lösungsansatz in die Bewegungsgleichung für φ_2 (Gl. (6.81)) einsetzt. Als Ergebnis hat man somit zwei Lösungen, eine gleichphasige (Abb. 6.21a) und eine gegenphasige Lösung (Abb. 6.21b).

$$\varphi_1 = A e^{i\omega_1 t} \quad ; \quad \varphi_2 = A e^{i\omega_1 t} \quad \text{gleichphasige Lösung}$$

$$\varphi_1 = A e^{i\omega_2 t} \quad ; \quad \varphi_2 = -A e^{i\omega_2 t} \quad \text{gegenphasige Lösung}$$

Zur weiteren Behandlung des Problem führt man die Normalkoordinaten λ_a und λ_b ein

$$\lambda_a = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{und} \quad \lambda_b = \varphi_1 + \varphi_2$$

Für φ_1 und φ_2 ausgedrückt in diesen Normalkoordinaten hat man also

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{\lambda_b - \lambda_a}{2}$$

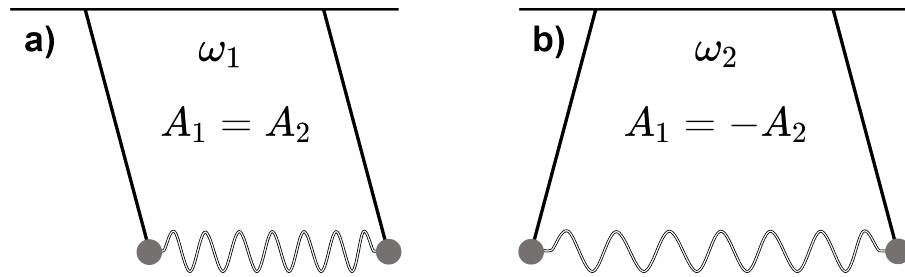


Abb. 6.21: Gleichphasige (a) und gegenphasige (b) Lösung der Bewegungsgleichung von zwei durch eine Feder gekoppelten identischen Pendel.

Das in die Bewegungsleichtungen für φ_1 (Gl. (6.80)) und φ_2 (Gl. (6.81)) eingesetzt ergibt

$$\frac{1}{2}\ddot{\lambda}_a + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_b + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\left(\frac{\lambda_a + \lambda_b}{2}\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{\lambda_b - \lambda_a}{2}\right) = 0 \quad (6.82)$$

und

$$\frac{1}{2}\ddot{\lambda}_b - \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_a + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\left(\frac{\lambda_b - \lambda_a}{2}\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{\lambda_a + \lambda_b}{2}\right) = 0 \quad (6.83)$$

Subtrahiert man Gl. (6.83) von Gl. (6.82) so erhält man

$$\ddot{\lambda}_a + \frac{k}{m}(\lambda_a + \lambda_b) - \frac{k}{m}(\lambda_b - \lambda_a) + \frac{g}{l}\left(\frac{\lambda_a + \lambda_b}{2} - \frac{\lambda_b - \lambda_a}{2}\right) = 0$$

Die Glieder mit λ_b fallen heraus und es bleibt

$$\ddot{\lambda}_a + \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)\lambda_a = 0 \quad (6.84)$$

Addiert man Gl. (6.82) und Gl. (6.83) so erhält man

$$\ddot{\lambda}_b + \frac{g}{l}\left(\frac{\lambda_a + \lambda_b}{2} + \frac{\lambda_b - \lambda_a}{2}\right) = 0$$

Hier fallen die Glieder mit λ_a heraus und es bleibt

$$\ddot{\lambda}_b + \frac{g}{l}\lambda_b = 0 \quad (6.85)$$

Gl. (6.84) und Gl. (6.85) sind Gleichungen für harmonische Schwingungen in den Normalkoordinaten λ_a und λ_b mit den Schwingungsfrequenzen $\omega = \omega_1$ beziehungsweise $\omega = \omega_2$. Lösungsansatz:

$$\lambda_b = A_b e^{i\omega_1 t} \quad \text{und} \quad \lambda_a = A_a e^{i\omega_2 t}$$

also

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}A_a e^{i\omega_2 t} + \frac{1}{2}A_b e^{i\omega_1 t} \quad (6.86)$$

und

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}A_b e^{i\omega_1 t} - \frac{1}{2}A_a e^{i\omega_2 t} \quad (6.87)$$

Diese Gleichungen nun vergleichen mit den bereits identifizierten Lösungen

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} ; \quad \varphi_2 = A_2 e^{i\omega_2 t}$$

und

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega_2 t} ; \quad \varphi_2 = A_2 e^{i\omega_1 t}$$

Für $t = 0$ muss gelten

$$A_a = A_1 - A_2 \quad \text{und} \quad A_b = A_1 + A_2$$

Einsetzen in Gl. (6.86) und Gl. (6.87) ergibt

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left[A_1 e^{i\omega_2 t} - A_2 e^{i\omega_2 t} + A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_1 t} \right]$$

und

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left[A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_1 t} - A_1 e^{i\omega_2 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} \right]$$

Diese Gleichungen lassen sich umformen zu

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} A_1 e^{i(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t} \left[e^{i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} + e^{-i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} A_2 e^{i(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t} \left[e^{i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} - e^{-i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{2} A_1 e^{i(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t} \left[e^{-i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} - e^{i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} A_2 e^{i(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t} \left[e^{i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} + e^{-i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t} \right] \end{aligned}$$

Definiert man jetzt

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \bar{\omega} \quad \text{und} \quad \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$$

dann lauten die Gleichungen für φ_1 und φ_2

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\bar{\omega}t} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - iA_2 e^{i\bar{\omega}t} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

und

$$\varphi_2 = A_2 e^{i\bar{\omega}t} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - iA_1 e^{i\bar{\omega}t} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Die Amplituden A_1 und A_2 folgen aus der Wahl der Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_2(0) = \alpha$$

Das heißt, Pendel Nummer 1 wird festgehalten, Pendel Nummer 2 wird um den Winkel α ausgelenkt und dann werden bei $t = 0$ beide Pendel losgelassen. Aus diesen Anfangsbedingungen folgt $A_1 = 0$ und $A_2 = \alpha$. Damit lauten die Gleichungen für φ_1 und φ_2

$$\varphi_1 = -i\alpha \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) [\cos(\bar{\omega}t) + i \sin(\bar{\omega}t)]$$

und

$$\varphi_2 = \alpha \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) [\cos(\bar{\omega}t) + i \sin(\bar{\omega}t)]$$

Für den Realteil der allgemeinen Lösung erhält man somit

$$\varphi_1 = \left[\alpha \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \sin(\bar{\omega}t) \tag{6.88}$$

und

$$\varphi_2 = \left[\alpha \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \cos(\bar{\omega}t) \tag{6.89}$$

mit

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

und

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}} + \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

Die Amplitude der durch Gl. (6.88) und Gl. (6.89) beschriebenen Schwingungen ist zeitabhängig mit der Frequenz $\Delta\omega/2$ und beide Pendel schwingen mit der Frequenz $\bar{\omega}$, phasenverschoben um 90° . Weil die eine Amplitude mit dem Sinus oszilliert (φ_1) während die andere mit dem Kosinus oszilliert (φ_2), ist die eine Null wenn die andere maximal ist und umgekehrt. Das zum Zeitpunkt $t = 0$ um α ausgelenkte Pendel (φ_2) überträgt seine Energie infolge der Kopplung auf das andere Pendel (φ_1) und kommt zur Ruhe wenn

letzteres die maximale Amplitude erreicht hat; anschließend wiederholt sich der Vorgang in umgekehrter Richtung.

Beispiel 6.14 Streckschwingung eines Moleküls

Betrachtet wird das in Abb. 6.22 skizzierte Modell der Streckschwingung eines linearen dreiatomigen Moleküls XY_2 . Die drei Massenpunkte mit den Atommassen M für das mittlere Atom X und jeweils m für die beiden äußeren Atome Y in Abb. 6.22 sind durch zwei identische Federn mit Federkonstanten f miteinander verbunden.

Der Gleichgewichtsabstand der identischen Federn, das heißt der Molekülabstand wenn die Federn entspannt sind, betrage d . Die verallgemeinerten Koordinaten für dieses Problem sind die linearen Verschiebungen (Stauchungen bzw. Streckungen der Federn) x_1 , x_2 und x_3 .

Mit diesen verallgemeinerten Koordinaten ist die kinetische Energie T der drei Atome gegen durch

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_3^2$$

und für die potenzielle Energie der Federn erhält man

$$V = f\frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + f\frac{(x_3 - x_2)^2}{2}$$

Damit ergibt sich für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ des Molekülmödells in Abb. 6.22

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{f}{2}[(x_3 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2]$$

Aus dieser Lagrange Funktion erhält man durch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} - \frac{\partial L}{\partial x_r} = 0 \quad r = 1, 2, 3$$

die drei Gleichungen

$$m\ddot{x}_1 - f(x_2 - x_1) = 0$$

$$M\ddot{x}_2 - f(x_1 - 2x_2 + x_3) = 0$$

$$m\ddot{x}_3 + f(x_2 - x_3) = 0$$

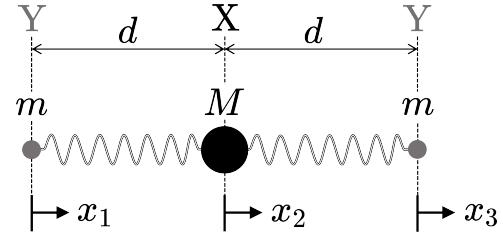


Abb. 6.22

beziehungsweise in Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}}_{M_{rs}} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} f & -f & 0 \\ -f & 2f & -f \\ 0 & -f & f \end{bmatrix}}_{V_{rs}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz für dieses Gleichungssystem: $x_i = A_i e^{i\omega t}$

Damit erhält man die Matrixgleichung

$$\sum_s (-M_{rs}\omega^2 + V_{rs})x_s = 0 \quad (6.90)$$

Aus der Lösungsbedingung $\det |V_{rs} - \omega^2 M_{rs}| = 0$ folgt damit

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \omega^2 m)(2f - \omega^2 M)(f - \omega^2 m) - (f - \omega^2 m)f^2 - (f - \omega^2 m)f^2 \\ &= (f - \omega^2 m)\omega^2 [\omega^2 m M - f(2m + M)] \end{aligned}$$

und man erhält die Lösungen (nur positive Wurzeln)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{f}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = 0 \quad ; \quad \omega_3 = \sqrt{f \left(\frac{2}{M} + \frac{1}{m} \right)}$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren und Schwingungsmoden setzt man nun diese Eigenwerte in Gl. (6.90) ein und wendet den Gauß-Algorithmus an. Mit $\mu = M/m$ ergibt sich für ω_1

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & -f & 0 & 0 \\ -f & f(2-\mu) & -f & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline f & f(\mu-2) & f & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} -1 \times 2. \text{ Zeile} \\ -1 \times 1. \text{ Zeile} \\ 1. \text{ Zeile} - 3. \text{ Zeile} \end{array}$$

Mit Rückwärtssubstitution erhält man zum Eigenwert

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

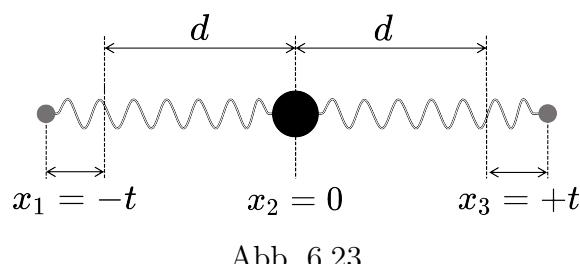


Abb. 6.23

Wie in Abb. 6.23 skizziert, schwingen die beiden äußeren Y-Atome also gegenphasig, während das mittlere X-Atom in seiner Ruhelage verbleibt. Da die Masse des mittleren Atoms in seiner Ruhelage verbleibt, ist die Bewegung der äußeren Atome unabhängig vom Massenverhältnis μ .

Jetzt den Eigenwert ω_2 in Gl. (6.90) einsetzen und wieder durch Anwendung des Gauß-Algorithmus lösen:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline f & -f & 0 & 0 \\ -f & 2f & -f & 0 \\ 0 & -f & f & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline f & -2f & f & 0 \\ 0 & f & -f & 0 \\ 0 & -f & f & 0 \end{array} ; \begin{array}{l} -1 \times 2. \text{ Zeile} \\ 2. \text{ Zeile} + 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline f & -2f & f & 0 \\ 0 & f & -f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} ; \begin{array}{l} 2. \text{ Zeile} + 3. \text{ Zeile} \end{array}$$

Mit Rückwärtssubstitution erhält man zum Eigenwert $\omega_2 = 0$ den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dass alle drei Massen die gleiche Auslenkung t erfahren legt nahe, dass sich das Molekül als Ganzes bewegt ohne dass es zu einer Schwingung kommt, und das unabhängig vom Massenverhältnis μ . t kann in diesem Fall aber auch ganz einfach Null sein, das heißt es bewegt sich gar nichts.

Zuletzt nun den Eigenwert ω_3 in Gl. (6.90) einsetzen und wieder durch Anwendung des Gauß-Algorithmus lösen:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -\frac{2f}{\mu} & -f & 0 & 0 \\ -f & -f\mu & -f & 0 \\ 0 & -f & -\frac{2f}{\mu} & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline f & f\mu & f & 0 \\ 0 & f & \frac{2f}{\mu} & 0 \\ 0 & -f & -\frac{2f}{\mu} & 0 \end{array} ; \begin{array}{l} -1 \times 2. \text{ Zeile} \\ 1. \text{ Zeile} - \frac{2}{\mu} \times 2. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline f & f\mu & f & 0 \\ 0 & f & \frac{2f}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; \text{ 2. Zeile} + \text{3. Zeile}$$

Mit Rückwärtssubstitution erhält man zum Eigenwert

$$\omega_3 = \sqrt{f \left(\frac{2}{M} + \frac{1}{m} \right)}$$

den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2/\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

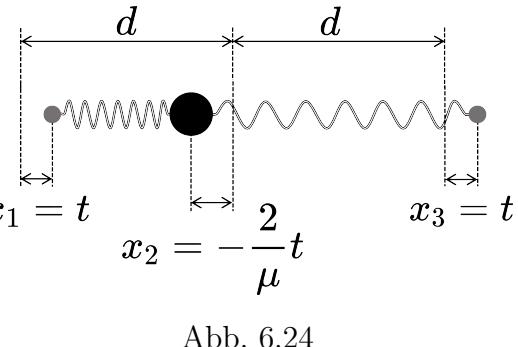


Abb. 6.24

In diesem Fall, wie in Abb. 6.24 skizziert, schwingen die beiden äußeren Y-Atome gleichphasig miteinander und gegenphasig zum mittleren X-Atom. Die Amplitude der Auslenkung des mittleren Atoms hängt dabei vom Massenverhältnis μ ab. Ist beispielsweise $\mu = 1$ so schwingt das mittlere Atom mit der doppelten Amplitude der äußeren Atome. Ist $\mu = 2$, das X-Atom hat also die doppelte Masse eines Y-Atoms, dann schwingen alle drei Atome mit der gleichen Amplitude aber das mittlere Atom eben gegenphasig zu den äußeren Atomen.

7. Kontinuumsmechanik

7.1 Elastodynamik

In der Elastostatik (siehe Kapitel 3) werden elastische Körper im Kräftegleichgewicht betrachtet. Im Kräftegleichgewicht heben sich die auf einen solchen Körper einwirkenden Kräfte gegenseitig auf, dass heißt der Körper bewegt sich nicht. Die Elastodynamik betrachtet Situationen in denen dieses Gleichgewicht gestört ist und der elastische Körper daher durch die resultierende Kraft eine Beschleunigung erfährt. Der bereits aus der Elastostatik bekannte Spannungstensor (Gl. (3.5)) ist

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Mit der Krafteinwirkung verbundene Verschiebungen bzw. Verzerrungen in Richtung der raumfesten Koordinatenachsen (x, y, z) werden durch die Massenpunkt-Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) beschrieben. Um die resultierende Kraft zu bestimmen wenn die an einem elastischen Körper angreifenden Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, wird der Quader in Abb. 7.1 betrachtet (vgl. auch Abb. 3.4). Die angreifenden Kräfte sollen hier nur zu einem Nichtgleichgewicht der Spannungs- und Schubkomponenten in x -Richtung führen, während die Spannungs- und Schubkomponenten in y - und in z -Richtung weiter im Gleichgewicht sein sollen. Für die resultierende Kraft F_x in x -Richtung liest man aus Abb. 7.1 ab

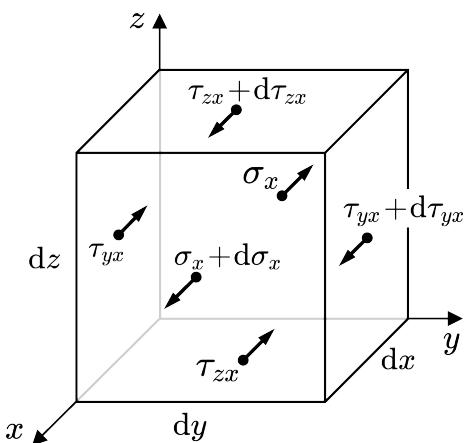


Abb. 7.1

$$F_x = d\sigma_x dy dz + d\tau_{yx} dx dz + d\tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz \quad (7.2)$$

Neben den Komponenten des Spannungstensors die an den Quaderflächen wirken, muss auch die bereits aus Gl. (3.4) bekannte Volumenkraft berücksichtigt werden. Das geschieht in Gl. (7.2) durch den Faktor $f_x dx dy dz$, wobei f_x die Kraftdichte des elastischen Körpers in x -Richtung ist. Zuerst soll nochmals der Fall des Kräftegleichgewichts betrachtet werden.

Der Gleichgewichtsfall

Im Gleichgewichtsfall verschwindet die nach Gl. (7.2) durch das Volumenelement $dV = dx dy dz$ in x -Richtung übertragene Kraft, also $F_x = 0$. Mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ folgt damit aus Gl. (7.2)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (7.3)$$

Mit x, y, z raumfest und den Massenpunkt-Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) kann man dies verallgemeinert schreiben als

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_k} + f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.4)$$

Für die Koordinaten gilt hier $\xi_i = \xi_i(x, y, z, t)$ und für die Volumenkräfte $f_i = f_i(x, y, z, t)$. Mit der Diskussion des Hookeschen Gesetzes in Abschnitt 3.3 sind mit Gl. (3.32) die Komponenten des Spannungstensors und des Verzerrungstensors verknüpft über die Beziehung

$$\sigma_{ik} = 2G \left[\epsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ll} \right] \quad (7.5)$$

wobei für den Verzerrungstensor mit Gl. (3.20) gilt

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \quad (7.6)$$

Die Ableitungen der Komponenten des Spannungstensors in Gl. (7.4) bestimmt man mittels Gl. (7.5) und Gl. (7.6) sowie den folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ll} &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi_l}{\partial x_l} = \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \\ \sum_k \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \right) = \frac{1}{2} \left(\Delta \xi_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \delta_{ik} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})$$

Eingesetzt in Gl. (7.4) erhält man damit

$$G \left[\Delta \xi_i + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \right] + f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.7)$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = \epsilon_V$$

die (negative oder positive) Volumendehnung des elastischen Körpers beschreibt. Eingesetzt in Gl. (7.7) lauten damit die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

$$\Delta \xi_i + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial \epsilon_V}{\partial x_i} + \frac{1}{G} f_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.8)$$

Wie schon der Name besagt sind diese drei Gleichungen linear in den Verschiebungskoordinaten der Massenpunkte, sie sind aber auch linear in den Volumenkräften f_i . Folglich greift das Superpositonsprinzip sowohl für die Verschiebungen als auch für die Volumenkräfte. Das ist natürlich von großem Vorteil bei komplizierten Problemen wenn es gelingt, diese als lineare Überlagerungen einfacher zu lösender Probleme darzustellen. Im nächsten Schritt soll jetzt der Fall betrachtet werden in dem kein Gleichgewicht vorliegt.

Der Nicht-Gleichgewichtsfall

Im obigen Beispiel (Abb. 7.1) heißt das $F_x \neq 0$ in Gl. (7.2). Allgemeiner, für $F_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$) gilt nach Newton, dass F_i gleich der beschleunigten Masse mal der Beschleunigungskomponente der Dehnung bzw. Kompression in die entsprechende Koordinatenrichtung sein muss. Das heißt es muss gelten

$$F_i = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} \quad (7.9)$$

Damit ergeben sich analog zum Gleichgewichtsfall $F_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) in Gl. (7.4) die Gleichungen:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = f_i + \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.10)$$

Anstatt der Gleichung Gl. (7.7) erhält man somit

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = f_i + G \left[\Delta \xi_i + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \right] \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (7.11)$$

7.1.1 Elastische Wellen

Es sollen speziell ebene elastische Wellen betrachtet werden, beispielsweise eine ebene Welle in x -Richtung mit der Amplitude $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$

$$\xi(x, y, z, t) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{Re} [\xi^0 \cdot e^{i(kr - \omega t)}] \quad (7.12)$$

Der Term in der Exponentialfunktion ist konstant falls

$$kx - \omega t = \varphi_0 = \text{const}$$

das heißt

$$x = \frac{\varphi_0 + \omega t}{k} = \frac{\varphi_0}{k} + \underbrace{\frac{\omega t}{k}}_{c_p}$$

Für die Phasengeschwindigkeit c_p , Wellenlänge λ und zeitliche Periode T der ebenen Welle gelten die Beziehungen:

$$\omega = c_p k \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{f}$$

Für eine Sinuswelle

$$\underbrace{\sin(kx - \omega t)}_{\varphi}$$

der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ (Abb. 7.2) gilt entsprechend

$$x = \frac{\omega}{k} t \quad ; \quad \varphi = \text{const} \quad ; \quad \omega = c_p k$$

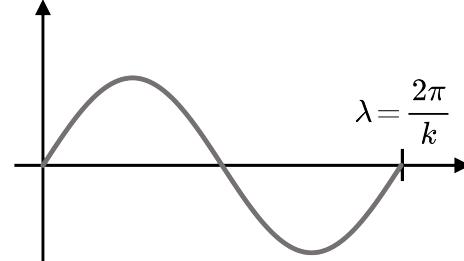


Abb. 7.2

Bei Transversalwellen ist die Auslenkung ξ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, also $\mathbf{k} \perp \xi$. Breitet sich so eine Welle in x -Richtung aus und schwingt dabei in z -Richtung, d.h. $\xi^0 = (0, 0, \xi_3^0)$, so folgt daraus

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\partial \xi_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (\xi_3^0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}) = 0$$

Gl. (7.12) mit diesen Parametern in Gl. (7.11) eingesetzt liefert

$$-\rho \omega^2 \xi_3^0 = f_i - G k^2 \xi_3^0$$

Im Fall von $f_i = 0$ folgt damit

$$\omega^2 = \frac{G}{\rho} \cdot k^2 = c_t^2 \cdot k^2$$

wobei

$$c_t = \sqrt{c_{p,t}^2} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(\mu+1)}} \quad (7.13)$$

die Phasengeschwindigkeit der transversalen Welle ist und für den letzten Schritt die Beziehungen aus Gl. (3.29) genutzt wurden. Bei Longitudinalwellen ist die Auslenkung ξ parallel zur Ausbreitungsrichtung, d.h. $\mathbf{k} \parallel \xi$. Für so eine in x -Richtung laufende Welle ist $\xi^0 = (\xi_1^0, 0, 0)$ und Gl. (7.12) mit diesem Parameter in Gl. (7.11) eingesetzt liefert

$$-\rho\omega^2\xi_1^0 = f_i - 2G\frac{1-\mu}{1-2\mu}k^2\xi_1^0$$

Im Fall von $f_i = 0$ folgt damit

$$\omega^2 = \frac{2G}{\rho}\frac{1-\mu}{1-2\mu}k^2 = c_l^2 \cdot k^2$$

wobei

$$c_l = \sqrt{c_{p,l}^2} = \sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{1-\mu}{1-2\mu}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad (7.14)$$

die Phasengeschwindigkeit der longitudinalen Welle ist. Für den letzten Schritt wurden wieder die Beziehungen aus Gl. (3.29) genutzt.

Die hier gemachte Betrachtung zur Ausbreitung von transversalen und longitudinalen Wellen in elastischen Körpern unterstellt, dass die Ausbreitung der Wellen in einem unendlichen Medium erfolgt. In der Praxis ist das nicht der Fall. Ist die Wellenlänge einer Longitudinalwelle vergleichbar oder größer wie die Querabmessung des Mediums, beispielsweise eines dünnen Stabes, so passiert etwas am Rand des Stabes in dem sich die Longitudinalwelle ausbreitet. Die seitliche Begrenzung des Stabes bewirkt eine Querkontraktion die nicht wie beim unendlichen Medium durch umgebende Materie verhindert wird. Die durch eine Longitudinalwelle verursachte Dichtemodulation korreliert mit der Dehnung / Stauchung in x -Richtung.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$$

Analog zur vorherigen Behandlung für ein unendlich ausgedehntes Medium folgt daraus die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}$$

Einsetzen einer longitudinalen Welle

$$\xi_x = \xi_x^0 e^{i(kx - \omega t)}$$

in die Bewegungsgleichung liefert für die Phasengeschwindigkeit c_l^{stab} im Stab:

$$c_l^{stab} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Aus der Herleitung der Poissonschen Zahl μ (siehe Gl. (3.28)) ist ersichtlich, dass μ Werte zwischen 0 und 0.5 annehmen kann. Das bedeutet, dass die Phasengeschwindigkeit der longitudinalen Welle in einem dünnen Stab somit geringer ist wie die entsprechende Phasengeschwindigkeit im unendlichen Medium aus Gl. (7.14).

7.2 Hydrodynamik

In der Hydrodynamik sind zwei Ansätze zur Beschreibung von Strömungsvorgängen möglich: Die Methode von Lagrange oder die Euler-Methode. Mit der Lagrange-Methode werden die Bahnen von Massenpunkten durch deren Ortsvektor beschrieben, d.h., $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ wobei \mathbf{r}_0 der bekannte Ortsvektor eines Massenpunkts zum Zeitpunkt t_0 ist. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Massenpunkten werden dann wie gewohnt durch einmaliges bzw. zweimaliges Ableiten nach der Zeit gewonnen. Häufig interessiert bei Strömungsvorgängen aber nicht so sehr wo sich ein Massenpunkt gerade befindet, sondern wie das Geschwindigkeitsfeld aussieht in dem er sich bewegt.

Euler-Beschreibung

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t)$$

Hier ist \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld, ρ die lokale Dichte und \mathbf{x} eine raumfeste Koordinate. In der Euler-Beschreibung werden physikalische Größen $a(\mathbf{x}, t)$, wie beispielsweise $\rho(\mathbf{x}, t)$, jeweils an einem festen Raumpunkt betrachtet: Der jeweilige Raumpunkt ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t)$$

wobei die \mathbf{x}_0 Lagrange-Koordinaten sind (wie in den elastischen Gleichungen). Ein Massenpunkt der sich entlang einer Bahnkurve \mathbf{x} bewegt, befindet sich an jedem Raumpunkt sowohl unter der Einwirkung der physikalischen Größe $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ am jeweiligen Raum-punkt, d.h., er registriert die lokale Stärke oder Schwäche von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$, erfährt aber auch die zeitliche Änderung von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ am jeweiligen Ort. Die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ ist daher gegeben durch die totale Ableitung

nach der Zeit, auch substantielle Ableitung¹ genannt:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}}_{\substack{\text{lokaler} \\ \downarrow \\ \text{Anteil}}} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}}_{\substack{\text{Konvektivanteil} \\ (\text{bei festem } \mathbf{x}_0)}}$$

Das heißt für jedes $a(\mathbf{x}, t)$ gilt die Beziehung

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } a \quad (7.15)$$

Die substantielle Ableitung von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ besteht aus der lokalen Änderung dieser physikalischen Größe an einem gegebenen Raumpunkt sowie einem konvektiven Anteil von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$. Den Konvektivanteil kann man sich als über den elastischen Körper verteilte Marker vorstellen, die an jedem Raumpunkt \mathbf{x}_0 die Größe von $a(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$ anzeigen.

Manchmal ist eine andere Notation der substantiellen Ableitung nützlich, welche die Beziehung

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a}^2 - [\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})]$$

ausnutzt (zum Beweis dieser sogenannten [Weber-Transformation](#) siehe Anhang). Damit lautet dann die substantielle Ableitung

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a}^2 - [\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \quad (7.16)$$

7.2.1 Kontinuitätsgleichung

I) Herleitung nach Lagrange:

Die Masse eines Fluidelements sei $\Delta m = \rho \Delta V$. Aus der Erhaltung der Masse folgt

$$\frac{d\Delta m}{dt} = 0 = \frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d\Delta V}{dt} \quad (7.17)$$

Ersetzt man in Gl. (3.21) V mit ΔV und ξ_i mit $d\xi_i$, so zeigt dies das gilt

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = \text{div}(d\xi)$$

¹Der Begriff substantielle Ableitung hat eine rein physikalische Bedeutung. Er drückt die Tatsache aus, dass die substantielle Ableitung die Änderung einer physikalischen Größe entlang der Bewegung der Substanz selbst, das heißt des bewegten Fluids oder Gases, beschreibt.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man nun Gl. (7.17) umformen zu

$$\frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho\Delta V \operatorname{div} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = 0$$

Daraus folgt dann mit $d\xi/dt = \mathbf{v}$:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Nutzt man die Beziehung aus Gl. (7.15) so kann man dies umschreiben zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \mathbf{v}) = 0$$

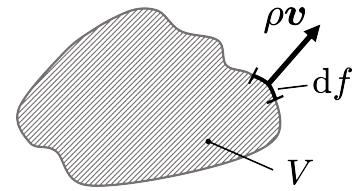
und erhält damit die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (7.18)$$

II) Herleitung ohne Lagrange Methode mit dem Satz von Gauß:

Wie in Abb. 7.3 skizziert sei die betrachtete Fluidmasse gegeben durch

$$m = \int_V \rho dV$$



Für den Masseverlust beziehungsweise den Massegewinn im Volumen \$V\$ gilt dann

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (7.19)$$

Um den Masseverlust bzw. Massegewinn pro Zeiteinheit durch die das Volumen \$V\$ umschliessende Fläche \$A_V\$ zu berechnen wird nur die Normalkomponente von \$\rho v\$, das heißt \$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_n\$, benötigt:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \iint_{A_V} \rho \cdot v_n \cdot df = 0 \quad (7.20)$$

Nach dem Satz von Gauß gilt für das Oberflächenintegral in Gl. (7.20)

$$\iint_{A_V} \rho \cdot v_n \cdot df = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

also gilt auch

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (7.21)$$

Ein Vergleich von Gl. (7.19) und Gl. (7.21) zeigt, dass gelten muss

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Das ist nur erfüllt falls der Integrand verschwindet, was nichts anderes bedeutet als dass die Kontinuitätsgleichung Gl. (7.17)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

gelten muss.

7.2.2 Stromlinien und Stromfunktion

Zur Beschreibung von Strömungsvorgängen wird in der Hydrodynamik zwischen Stromlinien, Bahnlinien (bzw. Bahnkurven), Streichlinien und Zeitlinien unterschieden.

Definition

Bahnlinien (Bahnkurven): Diese beschreiben die Bahn eines Massenpunkts bzw. Flüssigkeitsteilchens in einer Strömung.

Bahnlinien kann man einfach sichtbar machen indem man der strömenden Flüssigkeit beispielsweise Korkteilchen hinzufügt.

Definition

Stromlinien: Bezeichnen Kurven deren Tangenten an jedem Kurvenpunkt mit den jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v} identisch sind.

Macht man also eine Momentaufnahme zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ dann geben die Stromlinien ein Abbild des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung.

Definition

Streichlinien: Bezeichnen Kurven von Massenpunkten bzw. Flüssigkeitsteilchen die alle durch einen gemeinsamen Raumpunkt laufen.

Ein einfaches Beispiel für Streichlinien ist das Absetzen von Bojen an einem festen Ort in einer Strömung. Verbindet man die Positionen der nacheinander abgesetzten Bojen so erhält man die Streichlinie.

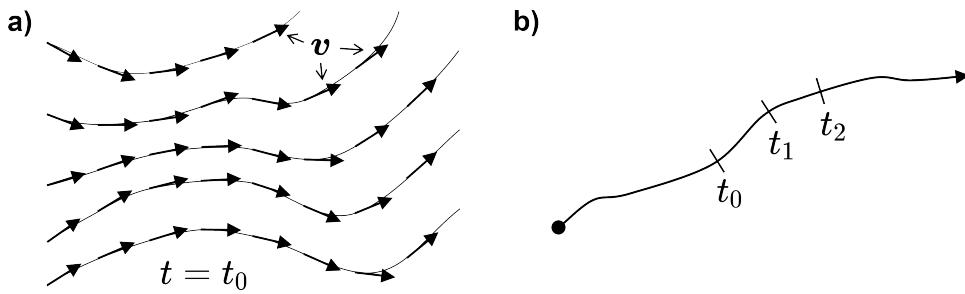


Abb. 7.4: (a) Stromlinien sind eine Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes. Die Länge der v -Vektoren an jedem Tangentenpunkt (hier gleich lang gezeichnet) hängt von der lokalen Strömung ab. (b) Eine Bahnlinie beschreibt den Pfad eines einzelnen Teilchens als Funktion der Zeit.

Definition

Zeitlinien: Bezeichnen die Verbindungsline zwischen den momentanen Orten von Teilchen deren Orte bereits zu jeweils früheren Zeitpunkten bekannt waren.

Zur Veranschaulichung von Zeitlinien werden im einfachsten Fall beispielsweise zum gleichen Zeitpunkt t_0 an verschiedenen Positionen leichte Probeteilchen in die Strömung gesetzt. An jedem späteren Zeitpunkt t ist dann die Verbindungsline zwischen den momentanen Positionen dieser Probeteilchen die Zeitline zum Zeitpunkt t .

Im vorliegenden Zusammenhang interessieren insbesonders die Stromlinien. Bahnlinien geben die Lagrange-Beschreibung einer Strömung wieder (Abb. 7.4a) während Stromlinien der Euler-Beschreibung entsprechen (Abb. 7.4b). Im Fall einer stationären Strömung, das heißt $\dot{v} = 0$, ist die Strömungsgeschwindigkeit an jedem Ort zeitlich konstant und somit sind Stromlinie und Bahnlinie identisch.

Anders ausgedrückt ist eine Strömung immer dann stationär, wenn ein Probeteilchen das zu unterschiedlichen Zeiten, aber immer an derselben Position, in die Strömung gesetzt wird, sich jedesmal auf derselben Bahnlinie bewegt. Ist dies nicht der Fall, dann spricht man von einer instationären Strömung. Bei einer instationären Strömung ist es nicht mehr möglich, aus einer Bahnkurve die zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegende Strömungsgeschwindigkeit zu bestimmen. Das bedeutet aber nicht anders, als dass bei instationären Strömungen Stromlinie und Bahnlinie nicht mehr identisch sind.

Mathematisch ausgedrückt bedeutet die oben gegebene Definition der Stromlinie, dass die Änderung des Ortsvektors der Stromliniengleichung in jedem Punkt der Kurve immer parallel zum Geschwindigkeitsvektor der Strömung in diesem Punkt ist. In jedem Punkt der Stromlinie muss also das Vektorprodukt aus Geschwindigkeitsfeld v und infinitesimaler

Änderung $d\mathbf{r}$ des Ortsvektors \mathbf{r} der Stromlinienkurve verschwinden:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 \quad (7.22)$$

Um zu verstehen, was für inkompressible Flüssigkeiten und ebene stationäre Strömungen zwei benachbarte Stromlinien voneinander unterscheidet, betrachtet man die sogenannte Stromfunktion Ψ , auch als Stokes'sche Stromfunktion bezeichnet. Legt man beispielsweise das Koordinatensystem so, dass der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_z$ in z -Richtung gleichzeitig der Normalenvektor der durchströmten Ebene ist (Strömung also in der xy -Ebene), dann ist Ψ definiert durch die Bedingung

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi \hat{\mathbf{e}}_z = \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z \quad (7.23)$$

$$= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, 0 \right) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Stromfunktion Ψ lässt sich also das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} berechnen. Unmittelbar aus der Definition von Ψ folgt

$$\nabla \Psi \cdot \mathbf{v} = \nabla \Psi \cdot (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (7.24)$$

Anders ausgedrückt: Entlang von Linien deren Tangentialvektoren in jedem Punkt parallel zu den jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren des Geschwindigkeitsfeldes sind, ist die Stromfunktion jeweils konstant. Dies folgt auch direkt durch Einsetzen von Gl. (7.23) in die Definition der Stromlinie aus Gl. (7.22). Für eine Strömung in der xy -Ebene mit $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0)$ ergibt das ([Graßmann Identität](#))

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 = (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z) \times d\mathbf{r} = (\nabla \Psi \cdot d\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - (\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_z \cdot d\mathbf{r}}_{=0}) \cdot \nabla \Psi$$

Also muss für Stromlinien gelten

$$\nabla \Psi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0$$

Die Stromfunktion ist entlang einer Stromlinie konstant und Stromlinien sind somit die Höhenlinien (Äquipotenziallinien) der Stromfunktion und jede Stromlinie entspricht einem bestimmten Wert der Stromfunktion Ψ . Zum besseren Verständnis von Ψ soll der sogenannte spezifische Druckfluss q im zweidimensionalen Fall (ebene Strömung) betrachtet werden.

Der spezifische Durchfluss q ist definiert als die „Flüssigkeitsfläche“ die pro Zeiteinheit durch die Normalfläche in Abb. 7.5 zwischen den zwei Stromlinien $\Psi = \Psi_A$ und $\Psi = \Psi_B$ durchfließt. Also

$$q = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

wobei ds das infinitesimale Linienelement entlang der Verbindungsstrecke von A nach B und $\hat{\mathbf{n}}$ der Normaleinheitsvektor auf das Linienelement ist. In Abb. 7.5 ist diese Verbindungsline der Einfachheit halber als Gerade gewählt, sie kann aber eine beliebige Form haben. Aus Abb. 7.5 kann man ablesen, dass

$$\hat{\mathbf{n}} \, ds = (dy, -dx)$$

Damit erhält man für q mittels Gl. (7.23)

$$q = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A \quad (7.25)$$

Mit $\Psi_B = const$ und $\Psi_A = const$ ist auch die Differenz q konstant. Der spezifische Durchfluss ist also für inkompressible Flüssigkeiten bei stationärer Strömung eine Konstante. Daraus folgt: Verkleinert / vergrößert sich der Abstand zwischen den Stromlinien $\Psi = \Psi_A$ und $\Psi = \Psi_B$ dann erhöht / verringert sich die Strömungsgeschwindigkeit zwischen den beiden Stromlinien. Aus Gl. (7.23) folgt zudem

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \Psi \hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (7.26)$$

Die Strömung enthält also weder Quellen noch Senken. Damit können Stromlinien weder im Inneren der betrachteten Flüssigkeit beginnen noch dort enden, sondern müssen geschlossen sein oder auf dem Rand verlaufen. Weiters lässt sich aus Gl. (7.25) ablesen, dass der spezifische Durchfluss durch ein Gebiet verschwindet dessen Berandung aus einer Stromlinie und einer Verbindungsline besteht die auf der Stromlinie beginnt und endet ($\Psi_B = \Psi_A$). Das gilt insbesonders für eine „Verbindungsline“ die entlang der Stromlinie selbst verläuft, das heißt, der spezifische Durchfluss durch eine Stromlinie ist gleich Null. Stromlinien wirken wie undurchdringliche Wände was wiederum besagt, dass sich die Durchflussgeschwindigkeit zwischen zwei Stromlinien mit deren Abstand ändern muss, da es einen Durchfluss durch eine Stromlinie selbst nicht gibt.

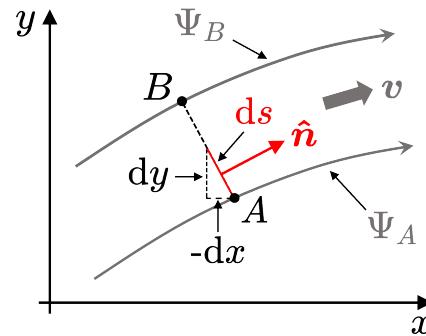


Abb. 7.5

7.2.3 Impulsbilanz

Ein wichtiges Konzept der Hydrodynamik ist die Stromröhre, auch als Stromlinienbündel bezeichnet (Abb. 7.6). Dabei betrachtet man zuerst eine sogenannte Stromlinienfläche, das ist die Fläche die von der Summe aller Stromlinien die durch eine ortsfeste Linie gehen aufgespannt wird. Handelt es sich bei der ortsfesten Linie um eine geschlossene Kurve, dann bildet diese Stromlinienfläche den Mantel einer Röhre, der Stromröhre. Der Flächennormalenvektor der Eintritts bzw. Austrittsfläche der Stromröhre ist

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

In einer stationären Strömung ändern sich Lage und Form einer Stromröhre nicht mit der Zeit. Es gilt die folgende Kontinuitätsbedingung

$$\rho_0 \cdot v_0 \cdot A_0 = \rho \cdot v \cdot A \quad (7.27)$$

Pro Zeiteinheit muss also durch jede Querschnittsfläche einer solchen Stromröhre die gleiche Masse fließen. Parameterisiert man den Verlauf der Stromröhre so, dass das Linienelement ds jeweils durch den Flächenschwerpunkt einer jeden Querschnittsfläche der Stromröhre läuft, dann wird aus Gl. (7.27)

$$\rho_0 \cdot v \cdot A = \rho \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt} = const$$

Zur Herleitung der Kontinuitätsbedingung im instationären Fall nutzt man die Erhaltung der Masse und das zweite Newtonsche Gesetz für inkrementelle Veränderungen Δm und $\Delta \mathbf{p}$ von Masse und Impuls. Es muss gelten:

$$\frac{d(\Delta m)}{dt} = 0 \quad (\text{Masse})$$

$$\frac{d(\Delta \mathbf{p})}{dt} = \Delta \mathbf{F} \quad (\text{Impuls})$$

Komponentenweise gilt also mit Gl. (7.9) und Gl. (7.10)

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta p_i)}{dt} &= \Delta F_i = f_i \Delta V + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) \Delta V \\ &= \frac{d(\Delta m)}{dt} v_i + \Delta m \frac{dv_i}{dt} \end{aligned}$$

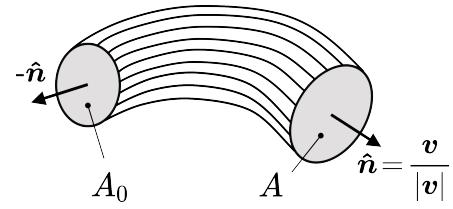


Abb. 7.6

Damit folgt mit $\rho = \Delta m / \Delta V$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (7.28)$$

Mit Gl. (7.15) muss aber auch gelten

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) \quad (7.29)$$

Da die linken Seiten von Gl. (7.28) und Gl. (7.29) identisch sind, müssen auch die rechten Seiten identisch sein, also

$$f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \quad (7.30)$$

Jetzt schreibt man die Kontinuitätsgleichung, d.h. Gl. (7.18), folgend um:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit v_i und addiert die rechte Seite davon dann als eine Null zur rechten Seite von Gl. (7.30), dann erhält man

$$f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}$$

beziehungsweise umgeschrieben

$$f_i = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \underbrace{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik})}_{\begin{array}{l} \text{Impulsdichte} \\ \downarrow \\ \text{Impulsstromdichte} = \Pi_{ik} \end{array}} \quad (7.31)$$

A) Mikroskopische Betrachtung zum Druck

$$\sigma_{ik} = -P \delta_{ik} \quad ; \quad \sigma_{ik} = - \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Behauptung: Für die Impulsstromdichte gilt

$$\Pi_{ik} = \rho \langle (v_i + u_i)(v_k + u_k) \rangle$$

$\langle a \rangle$ ist der Mittelwert einer Größe a über die thermische Bewegung von Atomen oder Molekülen und $\langle u_i \rangle$ ist die damit assoziierte thermische Zusatzgeschwindigkeit für die gilt $\langle u_i \rangle = 0$. Falls $i \neq k$ gilt zudem

$$\langle u_i u_k \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_k \rangle$$

und somit gilt $\langle u_i u_k \rangle = 0$ falls $i \neq k$. Darüber hinaus gilt der sogenannte Gleichverteilungssatz

$$\frac{m}{2} \langle u_i^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}$$

Damit folgt für Π_{ik}

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho \langle u_i u_k \rangle = \rho v_i v_k + \rho \frac{k_B T}{m} \delta_{ik}$$

Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases erhält man

$$P \cdot V = R \cdot T ; \quad k_B = \frac{R}{N_A} \quad \rightarrow \quad P = \frac{N_A m}{V m} k_B T = \frac{\rho}{m} k_B T$$

und somit

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik} \quad (7.32)$$

B) Kraftwirkung auf Rohre

Betrachtet wird der stationäre Fall, d.h. in Gl. (7.31)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

sowie $f_i = 0$. Damit muss gelten

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (*)$$

Die Kraft auf die zylindrische Rohrwand B_Z ist

$$\mathbf{F} = \iint_{B_Z} \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{n}} dA$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Normaleneinheitsvektor der Rohrwand ist und dA das entsprechende differentielle Flächenelement. Zur indirekten Berechnung von \mathbf{F} betrachtet man die Impulssstromdichte für das Rohrvolumen. Mit dem Satz von Gauß gilt generell

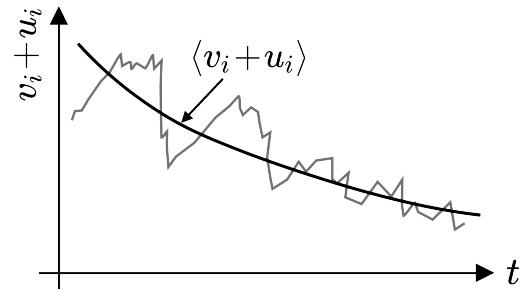


Abb. 7.7

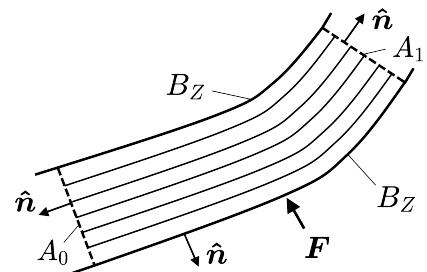


Abb. 7.8

$$\iiint \operatorname{div}_k \Pi_{i(k)} dV = \oint \sum_{k=1}^3 \Pi_{i(k)} n_k dA$$

Mit (*) ist aber nach Voraussetzung

$$\iiint \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = 0 = \iiint \operatorname{div}_k \Pi_{i(k)} dV$$

und somit gilt

$$\oint \sum_{k=1}^3 \Pi_{i(k)} n_k dA = 0$$

Für die Gesamtkraft auf die Wände des betrachteten Volumens, das heißt einschließlich der Kräfte auf die zwei Querschnittsflächen die das Volumen im Rohr begrenzen hat man damit

$$\iint_{B_Z} + \iint_{B_{A_0}} + \iint_{B_{A_1}} = \mathbf{F} + \iint_{B_{A_0}} + \iint_{B_{A_1}} = \oint \sum_{k=1}^3 \Pi_{i(k)} n_k dA = 0$$

Daraus folgt für die Kraftwirkung auf das Rohr in Abb. 7.8

$$\mathbf{F}_i = (\rho v_i v + P)_1 \cdot A_1 - (\rho v_i v + P)_0 \cdot A_0 \quad (7.33)$$

7.2.4 Bernoulli-Gleichung

Aus den Beziehungen

$$\sigma_{ik} = -P \delta_{ik} \quad \text{und} \quad \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} = -(\operatorname{grad} P)_i$$

folgt mit Gl. (7.31) die Euler-Gleichung der Hydrodynamik in der Form

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} P = \mathbf{f} - \nabla P \quad (7.34)$$

beziehungsweise umgeschrieben auch in den Formen

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla P \quad (7.35)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \mathbf{f} - \nabla P \quad (7.36)$$

Wie aus der Ableitung der Euler-Gleichung zu ersehen ist, werden Reibungskräfte die in praktischen Fällen oft eine signifikante Rolle spielen nicht berücksichtigt. Die Euler-Gleichung betrachtet also ausschließlich die Strömung idealer inkompressibler Flüssigkeiten. Ohne Viskosität und ohne Wärmeleitfähigkeit gibt es bei idealen Flüssigkeiten keine Energieverluste. Die Bewegung einer idealen Flüssigkeit erfolgt somit überall adiabatisch, das heißt Zustandsänderungen erfolgen ohne Wärmetransfer. Das wiederum bedeutet nichts anders als dass die Entropie S jedes Flüssigkeitselemente eine Bewegungskonstante ist. Mit s als der Entropie pro Masseneinheit gilt dann

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{wobei} \quad s = \frac{S}{M}$$

Daraus folgt mit Gl. (7.15) die Adiabatengleichung, die Entropieänderung von Volumenelementen sich bewegender idealer Flüssigkeiten bzw. idealer Gase

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (7.37)$$

Mit Gl. (7.18) folgt aus Gl. (7.37) die Kontinuitätsgleichung für die Entropie

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (7.38)$$

Gl. (7.37) bezieht sich auf sich bewegende Volumenelemente einer Flüssigkeit oder eines Gases, das heißt die Entropie in unterschiedlichen Volumenelementen kann durchaus verschieden sein. Ist dies aber nicht der Fall und hat die Entropie S in allen Volumenelementen der betrachteten Flüssigkeit bzw. des betrachteten Gases zu einem Zeitpunkt t_0 den gleichen Wert, so ändert sich die Entropie S der Flüssigkeit oder des Gases auch für Zeiten $t > t_0$ nicht. Also gilt, falls

$$S(\mathbf{r}, t_0) = \text{const} \Rightarrow S(\mathbf{r}, t > t_0) = \text{const} \quad \forall t > t_0$$

In Fall $S(\mathbf{r}, t_0) = \text{const}$, man spricht dann von einer isentropen Bewegung, lassen sich mit Hilfe der Enthalpie H die Euler-Gleichungen (Gl. (7.34) bzw. Gl. (7.35) oder Gl. (7.36)) vereinfachen. Dabei benutzt man die Differentialform der Enthalpiegleichung in den natürlichen Variablen Entropie S und Druck P

$$dH(S, P) = T \cdot dS + V \cdot dP$$

Massennormiert, das heißt mit $h = H/M$ und $s = S/M$, lautet diese Gleichung

$$dh = T \cdot ds + \frac{V}{M} \cdot dP = T \cdot ds + \frac{1}{\rho} \cdot dP$$

Im isentropen Fall ist $ds = 0$ und die Gleichung vereinfacht sich zu der Beziehung

$$dh = \frac{1}{\rho} \cdot dP$$

und somit

$$\nabla h = \frac{1}{\rho} \cdot \nabla P \quad (7.39)$$

Das in die Euler-Gleichung Gl. (7.34) eingesetzt ergibt die folgende neue Form der Euler Gleichung

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \rho \nabla h \quad (7.40)$$

Entsprechendes gilt auch für die Form der Euler-Gleichung aus Gl. (7.35) bzw. Gl. (7.36). Nimmt man die Rotation von Gl. (7.36), dann erhält man die sogenannte Eulersche Gleichung für isentrope Bewegung. Die vereinfachte Form von Gl. (7.36) lautet

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \mathbf{f} - \rho \nabla \left(h - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \quad (7.41)$$

Gl. (7.41) von links mit $\nabla \times$ multiplizieren ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} - \nabla \times \nabla \left(h - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)$$

Für den Fall dass \mathbf{f} entweder der Gradient eines Potenzials ist, z.B. wie bei der Schwerkraft und dem Schwerkraftpotenzial, beziehungsweise falls überhaupt keine äußeren Kräfte vorliegen ($\mathbf{f} = 0$) folgt wegen $\nabla \times \nabla = 0$, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \quad (7.42)$$

Das ist die Eulersche Gleichung für isentrope Bewegung in welcher das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} die einzige verbleibende Größe ist. Betrachtet man nun eine stationäre Strömung, das heißt $\dot{\mathbf{v}} = 0$, dann gilt mit Gl. (7.36) und Gl. (7.39)

$$\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} - \nabla h \quad (7.43)$$

Setzt man für die äußere Kraft \mathbf{F} die Schwerkraft so ist mit ihr das Schwerkraftpotenzial $U = gz$ verbunden und es gilt

$$\mathbf{F} = -m \cdot \nabla U = -m \cdot \nabla(gz)$$

beziehungsweise für die Kraftdichte des elastischen Körpers, also des betrachteten Flüssigkeitsvolumens \tilde{V} folgt

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\tilde{V}} = -\frac{m}{\tilde{V}} \cdot \nabla U = -\rho \nabla U$$

Damit wird aus Gl. (7.43)

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + U \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (7.44)$$

Betrachtet man nun eine ausgesuchte Stromlinie dann gilt für diese $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ und somit muss gelten

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + U = \text{const} \quad (\text{Bernoulli-Gleichung}) \quad (7.45)$$

Festzuhalten ist hier, dass der Wert der Konstanten für verschiedene Stromlinien unterschiedlich ist. Die Bernoulli-Gleichung gilt somit immer nur für jeweils eine Stromlinie. Mit Gl. (7.39) und $U = g \cdot z$ erhält man die Bernoulli-Gleichung in der bekannteren Form

$$\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + P + \rho g z = \text{const} \quad (7.46)$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied der sogenannte Staudruck und P ist der statische Druck.

7.2.5 Energiebilanz

Mit dem Schwerkraftpotenzial $U = gz$ verbunden ist die Kraft

$$\mathbf{F} = -m \cdot \nabla U = -m \cdot \nabla(gz)$$

Daraus folgt für die Kraftdichte des elastischen Körpers, d.h. des betrachteten Flüssigkeitsvolumens \tilde{V}

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\tilde{V}} = -\frac{m}{\tilde{V}} \cdot \nabla U$$

Durch Einsetzen in Gl. (7.34), die Euler-Gleichung der Hydrodynamik, erhält man

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho \cdot \nabla U - \nabla P \quad (7.47)$$

und durch Multiplikation dieser Gleichung von links mit \mathbf{v} und Ausnutzen von

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = 2\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

wird aus Gl. (7.47)

$$\frac{\rho}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = -(\rho\mathbf{v}) \nabla U - \mathbf{v} \cdot \nabla P \quad (7.48)$$

Jetzt werden die linke Seite (LS) und die rechte Seite (RS) von Gl. (7.48) zuerst einmal getrennt betrachtet. Die linke Seite von Gl. (7.48) kann mit Gl. (7.15) umgeschrieben werden zu

$$LS = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v}^2 \right) \quad (7.49)$$

Jetzt nutzt man die Beziehung

$$\nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}^2) = \nabla \cdot (\rho\mathbf{v})\mathbf{v}^2 + \rho\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}^2$$

die sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung umschreiben lässt zu

$$\nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}^2) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v}^2 + \rho\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}^2$$

Somit ist

$$\rho\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}^2 = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v}^2 + \nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}^2)$$

Setzt man das in Gl. (7.48) ein so erhält man für die linke Seite von Gl. (7.48)

$$LS = \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}^2)$$

womit sich letztlich für die linke Seite von Gl. (7.48) ergibt

$$LS = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \nabla \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v} \mathbf{v}^2 \right)$$

Jetzt wird die rechte Seite (RS) von Gl. (7.48) betrachtet. Mit den Beziehungen

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}U) = (\rho\mathbf{v}) \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = (\rho\mathbf{v}) \cdot \nabla U - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot U$$

$$\nabla \cdot (P\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla P + P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}$$

lässt sich die rechte Seite von Gl. (7.48) umformen zu

$$RS = - \left(\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}U) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot U \right) - (\nabla \cdot (P\mathbf{v}) - P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v})$$

Einsetzen der umgeformten rechten und linken Seiten von Gl. (7.48) in die Ausgangsgleichung Gl. (7.48) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v} \mathbf{v}^2 \right) + \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot U \right) + (\nabla \cdot (P \mathbf{v}) - P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Jetzt zusammenfassen der zeitlichen und örtlichen Ableitungen (U keine Funktion der Zeit)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho U \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho U + P \right) \mathbf{v} \right] - P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.50)$$

Das letzte Glied in Gl. (7.50), $P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}$, lässt sich umformen zu

$$P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{P}{\rho} (\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \rho) = \frac{P}{\rho} \left[-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right]$$

Also

$$P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \cdot P \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (7.51)$$

Zum Verständnis des letzten Ausdrucks betrachtet man eine adiabatische Zustandsänderung eines Systems wie in Abb. 7.9, das heißt die Zustandsänderung erfolgt so, dass bei Kompression bzw. Expansion des Volumens \tilde{V} keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird. Mit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\tilde{V}}{M}$$

ist

$$P \cdot d \left(\frac{1}{\rho} \right) = P \cdot \frac{d\tilde{V}}{M}$$

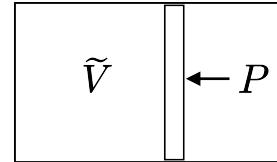


Abb. 7.9

Pro Masseeinheit gilt für die bei Volumenänderung geleistete adiabatische Arbeit

$$\frac{dA}{M} = -\frac{P \cdot d\tilde{V}}{M} = -\frac{dE}{M} - \underset{\downarrow 0}{dQ} \quad (\text{Adiabasie})$$

und somit

$$-P \cdot \frac{d(1/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{d(E/M)}{dt}$$

Setzt man das in Gl. (7.51) ein so erhält man für den Ausdruck $P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}$

$$P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \cdot P \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\rho \cdot \frac{de}{dt}$$

Anwendung von Gl. (7.51) und der Kontinuitätsgleichung liefert

$$\rho \cdot \frac{de}{dt} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla e \right) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) - e \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$= \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) + e \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v})$$

Und damit ist

$$P \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v})$$

Das eingesetzt in Gl. (7.50) liefert die sogenannte Energiestrom-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho U + \rho e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho U + \rho e + P \right) \cdot \mathbf{v} \right] = 0 \quad (7.52)$$

Wichtige Beziehungen für ideale Flüssigkeit bzw. ideales Gas

$$\Delta(\rho v A) = \rho v A - \rho_0 v_0 A_0 = 0 \quad \text{Längsstromröhre}$$

$$\Delta \left[(\rho \mathbf{v}^2 + P) \frac{\mathbf{v}}{v} A \right] = \mathbf{F} \quad \text{Kraft auf Rohr}$$

$$\Delta \left[\left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho U + \rho e + P \right) v A \right] = 0 \quad \text{Energiestrom}$$

$$\Delta \left[\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho U + \rho e + P \right] = 0 \quad \text{Bernoulli Gleichung}$$

Beispiel 7.1 Gedrosselte Entspannung

Bei der gedrosselten Entspannung wird ein Flüssigkeit aus einem Volumen unter hohem Druck \tilde{V} durch eine poröse Wand (oder auch ein Drosselventil) in ein Volumen von niedrigerem Druck gepresst. Dabei wird der jeweilige Druck links bzw. rechts ($P_0 > P$) in Abb. 7.10 konstant gehalten. Abhängig vom Joule-Thomson Koeffizienten der Flüssigkeit, kühlt diese sich dabei ab oder wird erhitzt.

Es gilt also

$$(E + P \tilde{V})_0 = (E + PV)$$

mit der Energiestromdichte

$$\frac{E}{\tilde{V}} = e \cdot \rho = \frac{I}{\tilde{V}}(P, T)$$

wobei I die Stromstärke bzw. Entalpie ist.

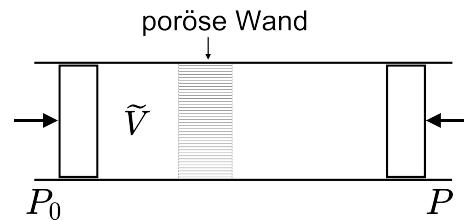


Abb. 7.10

Ausfluss aus Druckgefäß

Für Druck P , Fließgeschwindigkeit v und Füllstandshöhe h auf Niveau **a** und Niveau **b** in Abb. 7.11 gilt

	Niveau a	Niveau b
$P :$	$P_0 + \Delta P$	P_0
$v :$	≈ 0	v_0
$h :$	h	0

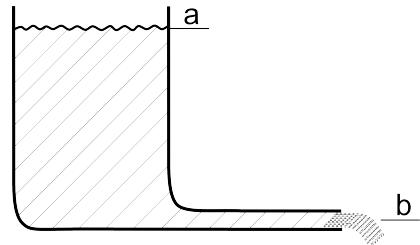


Abb. 7.11

Inkompressible Flüssigkeit im Schwerefeld

Mit der Bernoulli-Gleichung (Gl. (7.46)) gilt

$$g \cdot h + \frac{P_0 + \Delta P}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho}$$

Der Luftdruckunterschied ΔP ist in den meisten Fällen vernachlässigbar und damit

$$\rho \cdot g \cdot h + \underbrace{\Delta P}_{\approx 0} = \rho \cdot \frac{v_0^2}{2}$$

Gasstrom ins Vakuum

Für die Änderung der Energiestromdichte e kann man ansetzen $\Delta e \approx 0$ (schwache Abkühlung). Außerdem ist in guter Näherung $\rho \cdot g \cdot h \approx 0$ und somit erhält man

$$v_0^2 = \frac{2\Delta P}{\rho} = 2 \frac{P}{\rho}$$

wobei P der Druck im Innern des Gefäßes ist für den gilt (ideales Gas!)

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{m} \quad \text{und} \quad P = \frac{R \cdot T}{V}$$

Beispiel 7.2 Ausfluss aus einem Druckgefäß

Betrachtet wird eine geschlossener zylindrischer Druckbehälter mit Querschnitt A der teilweise mit Wasser gefüllt ist. Unterhalb des Wasserspiegels hat der Druckbehälter eine kleine Öffnung mit Querschnitt a und es soll gelten $a \ll A$. Der Außendruck an der kleinen Öffnung sei P_0 und der Luftdruck P oberhalb des Wasserspiegels soll im Druckbehälter konstant gehalten werden. Gesucht wird die Geschwindigkeit v_2 mit der das Wasser aus dem Druckbehälter auströmt, der Rückstoß den der Behälter dabei erfährt, sowie die Änderung des Flüssigkeitsspiegels im Behälter als Funktion der Zeit für $P = P_0$.

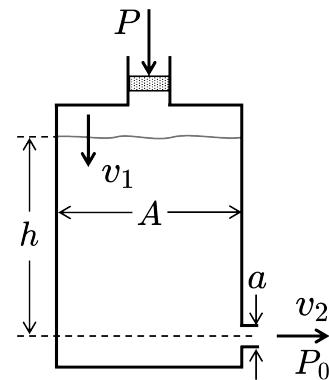


Abb. 7.12

Mit Bernoulli gilt

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh + P = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_0$$

Daraus ergibt sich für die Ausflussgeschwindigkeit v_2

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh + \frac{2}{\rho}(P - P_0)}$$

Für $P = P_0$ und $v_1 \approx 0$ ist also

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Für die Rückstoßkraft setzt man an

$$F_R = \frac{dp}{dt} = \frac{dmv_2}{dt} = \frac{dm}{dt}v_2 + m\frac{dv_2}{dt}$$

Die pro Zeiteinheit durch die Öffnung a strömende Masse ist gleich ρav_2 . Mit $v_2 = const$ ergibt sich damit für die Rückstoßkraft

$$F_R = \frac{dm}{dt}v_2 = \rho av_2^2$$

Mit der Kontinuitätsbedingung (siehe Gl. (7.27)) gilt

$$\rho \cdot a \cdot v_2 = \rho \cdot A \cdot v_1$$

Für $p = p_0$ ergibt das die Gleichung

$$a\sqrt{v_1^2 + 2gh} = Av_1$$

Nach v_1 auflösen liefert

$$\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)v_1^2 = 2g\frac{a^2}{A^2}h$$

Wegen $v_1 = \frac{dh}{dt}$ folgt daraus

$$\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2g\frac{a^2}{A^2}h$$

Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \pm \frac{a}{A} \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}} dt \approx \pm \frac{a}{A} \sqrt{2g} dt$$

wobei im zweiten Schritt $a \ll A$ ausgenutzt wurde. Die Integration

$$\int_{h_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \pm \frac{a}{A} \sqrt{2g} \int_0^t dt$$

ergibt

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = \pm \frac{a}{A} \sqrt{2g}$$

Da $h_0 \geq h$, ist auf der rechten Seiten das Minus Zeichen zu wählen und somit erhält man

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2A} \cdot t \right)^2$$

Zum Zeitpunkt $t = t_A$ sei der Ausdruck in der Klammer Null und damit $h(t_A) = 0$. Das ist der Fall für

$$t_A = \frac{2A}{a} \sqrt{\frac{h_0}{2g}}$$

Abb. 7.13 zeigt die bzgl. h_0 normierte Füllstandshöhe des Behälters als Funktion der Zeit in Einheiten von t_A . Für das Verhältnis $A:a$ wurde hier 1000:1 gewählt. Bis zu einem Füllstand von ca. $0.5 \cdot h_0$ sinkt der Wasserspiegel im Behälter fast linear ab, sinkt dann aber zunehmend langsamer. Nach nur etwas mehr wie der Hälfte von t_A beträgt der Füllstand nur noch $\approx 20\%$ von h_0 . Bei genauerem Hinsehen findet man, dass das Auslaufen der letzten $\approx 25\%$ ebenso lange dauert wie das Auslaufen der ersten $\approx 75\%$.

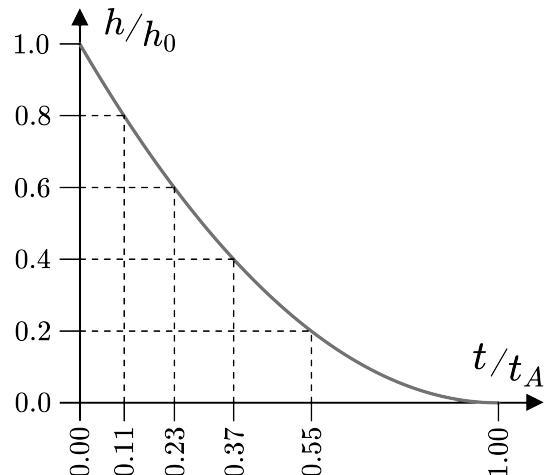


Abb. 7.13

Beispiel 7.3 Bernoulli „Paradoxon“

Der Effekt entsteht aufgrund eines Unterdrucks der durch eine Stromlinienkrümmung erzeugt wird. In Abb. 7.14 ist die untere Scheibe in z -Richtung beweglich an der oberen Scheiben aufgehängt. Wird von oben ein Luftstrom eingeblasen entweicht die Luft zwischen den beiden Scheiben. Ist P_0 der Umgebungsdruck dann gilt mit Bernoulli für den Druck zwischen den beiden Scheiben

$$P_s = P_0 - \frac{\rho v^2}{2}$$

wobei v die Geschwindigkeit ist mit der die Luft zwischen den Scheiben austritt. Da P_0 konstant ist, bedeutet dies dass der Druck zwischen den Scheiben kleiner wird. Der entstehende Unterdruck zieht die untere Scheibe nach oben. Ist A die Fläche der unteren Scheibe dann schwiegt diese wenn

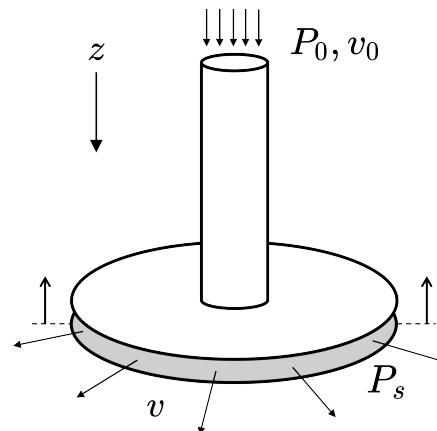


Abb. 7.14

$$P_s \cdot A > m \cdot g$$

Taucht man den Apparat aus Abb. 7.14 zur Gänze in eine Flüssigkeit ein und verwendet nun einen Flüssigkeitsstrahl anstatt eines Luftstrahls um ihn zu betreiben, dann lässt sich eben derselbe Effekt beobachten.

Erhaltungssätze Zusammenfassung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \rightarrow \Delta(\rho v A) = 0 \quad \text{Masse}$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} = f_i \rightarrow \Delta \left[(\rho v^2 + P) \frac{\mathbf{v}}{v} A \right] = 0 \quad \text{Impuls}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho e + \rho U \right) + \operatorname{div} \left[\left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho e + \rho U + P \right) \cdot \mathbf{v} \right] = 0 \quad \text{Energie}$$

$$\Delta \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + e + \frac{P}{\rho} \right) = 0 \quad \text{Bernoulli}$$

Venturi-Rohr

Bei einem Venturi-Rohr (Abb. 7.15), benannt nach Giovanni Battista Venturi, ist an der engsten Stelle des Rohres der Staudruck P_0 maximal und der hydrostatische Druck minimal. Dies führt zu einem Unterdruck im engeren Rohr wo $P < P_0$ und $v > v_0$, die Luft strömt dort mit höherer Geschwindigkeit. Die Druckdifferenz wird durch den unterschiedlich hohen Flüssigkeitsstand in den beiden Armen des U-Rohrs angezeigt. Damit lassen sich zum Beispiel Strömungsgeschwindigkeiten von Gasen oder Flüssigkeiten messen.

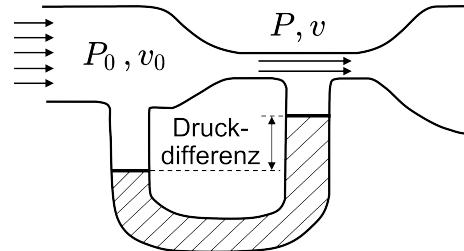


Abb. 7.15

7.2.6 Zirkulation

Das Linienintegral über das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} zwischen zwei Punkten A und B

$$\int_A^B \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int_A^B (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \quad (7.53)$$

entlang einer in der betrachteten Flüssigkeit verlaufenden Kurve C mit dem Linienelement $d\mathbf{s}$ bezeichnet man als Strömung. Betrachtet man die Strömung entlang einer geschlossenen Kurve so spricht man von einer Zirkulation:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} \quad (7.54)$$

Γ ist ein Maß für die im Geschwindigkeitsfeld vorhandenen Wirbel. Falls $\Gamma = 0$, so ist das Geschwindigkeitsfeld innerhalb der betrachteten geschlossenen Kurve wirbelfrei, anderfalls gibt es dort Wirbel.

Generell ist die Strömung zwischen zwei Punkten A und B (Gl. (7.53)) vom Weg abhängig. Gilt aber $\Gamma = 0$ für alle Gebiete zwischen A und B dann hängt die Strömung nur von den Orten der Punkte A und B ab. Ist $A = A(s)$ die vom Weg eingeschlossene Fläche so ergibt die Anwendung des Stokeschen Satzes und des Mittelwertsatzes dass in A ein Punkt P existiert wo gilt

$$\oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{v}) dA = A \hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (7.55)$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Normalenvektor der Fläche A in P ist. Zieht man nun die Kurve C auf den Punkt P zusammen so folgt mit

$$\hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{v}) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0 \quad (7.56)$$

dass eine Strömung ohne Zirkulation immer wirbelfrei ist, das heißt $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Wie in Abschnitt 7.2.10 gezeigt wird, liegt dann immer eine Potenzialströmung vor. Der umgekehrte Schluss, dass eine Potenzialströmung immer wirbelfrei ist, gilt allerdings nur für einfach zusammenhängende Gebiete.

Definition

Eine Kurve heißt doppelpunktfrei wenn sie jeden in ihr enthaltenen Punkt nur einmal durchläuft.

Ein Gebiet heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in dem Gebiet stetig ist und auf einen Punkt P des Gebietes zusammengezogen werden kann.

Mit $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ verschwindet nach dem Stokeschen Satz für ein einfach zusammenhängendes Gebiet die Zirkulation

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{v}) dA = 0$$

Für Gebiete die nicht zur Flüssigkeit gehörende Bereiche einschließen, also nicht einfach zusammenhängende Gebiete sind, muss für die Anwendung des Stokeschen Satzes der Integrationsweg passend gewählt werden. Das geschieht durch Aufschneiden des nicht zusammenhängenden Gebiets.

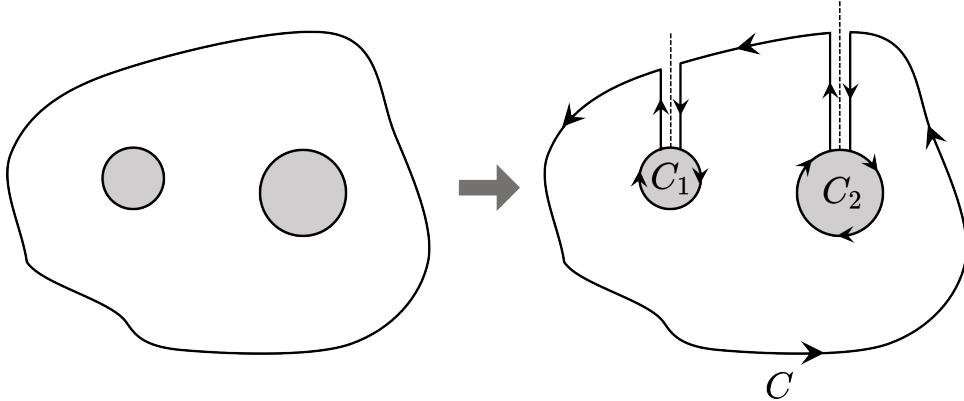


Abb. 7.16: Links: 3-fach zusammenhängendes Gebiet. Rechts: Aufschneiden transformiert das 3-fach zusammenhängende Gebiet in ein einfach zusammenhängendes Gebiet für das der Stokeschen Satz entlang des skizzierten Integrationsweges angewandt werden kann.

Die linke Seite von Abb. 7.16 zeigt ein Gebiet mit zwei Inseln die nicht zu dem Gebiet gehören, also ein 3-fach zusammenhängendes Gebiet. In der rechten Seite von Abb. 7.16 ist der Integrationsweg skizziert den man durch Aufschneiden des Gebiets erhält. Die Schnitte sind infinitesimal dünn gedacht und die Integrationswege entlang der Schnitte selbst heben sich jeweils gegenseitig auf. Für $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ liefert der Stokesche Satz für das 3-fach zusammenhängende Gebiet in Abb. 7.16 mit dem skizzierten Integrationsweg

$$\oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} + \oint_{C_1} \mathbf{v} d\mathbf{s} + \oint_{C_2} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{v}) dA = 0$$

also gilt für die Zirkulation entlang des Weges \$C\$ der das 3-fach zusammenhängende Gebiet berandet

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = - \oint_{C_1} \mathbf{v} d\mathbf{s} - \oint_{C_2} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \Gamma_{C_1} + \Gamma_{C_2} \quad (7.57)$$

Für ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet ist somit die Zirkulation gleich der Summe aus den Zirkulationen um die nicht zur Flüssigkeit gehörenden Bereiche des Gebiets. Als nächstes soll die Zeitabhängigkeit der Zirkulation betrachtet werden. Die Änderung von \$\Gamma\$ längs einer sich mit den Flüssigkeitsteilchen der Kurve fortbewegenden Kurve ist gegeben durch die substantielle Ableitung

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s} \quad (7.58)$$

Mit Gl. (7.46) lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left(U - \frac{P}{\rho} \right)$$

und somit verschwindet (wegen $\nabla \times \nabla \Omega = 0$) der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (7.58)

$$\oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C \nabla \left(U - \frac{P}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \left[\nabla \times \nabla \left(U - \frac{P}{\rho} \right) \right] dA = 0$$

Für das Linienelement zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten X und X' mit Geschwindigkeiten \mathbf{v} und \mathbf{v}' gilt

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Nach Ablauf der Zeit dt wird somit aus dem Linienelement $d\mathbf{s}$ das Linienelement

$$d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) dt = d\mathbf{s} + (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt$$

und damit erhält man für die zeitliche Änderung des Linienelements $d\mathbf{s}$

$$\frac{d\mathbf{s}' - d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d}{dt} d\mathbf{s} = (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Dies eingesetzt in den zweiten Term auf der rechten Seite von Gl. (7.58)

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \oint_C d\mathbf{s} \cdot \nabla \frac{v^2}{2} = \iint_A \left[\nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} \right] dA = 0$$

zeigt dass auch dieser Term (wieder wegen $\nabla \times \nabla \Omega = 0$) verschwindet. Damit gilt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (7.59)$$

Das ist der Erhaltungssatz für die Zirkulation, auch bekannt als der Satz von Thomson, benannt nach William Thomson, dem späteren Lord Kelvin. Er besagt, dass bei isentroper Strömung und konservativen Kräften (in der oben benutzten Gl. (7.46) vorausgesetzt) die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve konstant ist. Betrachtet man eine infinitesimale, die Fläche δA einschließende Kurve δC dann gilt

$$\oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s} = \iint_{\delta A} (\nabla \times \mathbf{v}) dA \approx (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \delta A = const$$

In diesem Zusammenhang wird $\nabla \times \mathbf{v}$ als Wirbelung der Strömung bezeichnet und $(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \delta A = \text{const}$ wird dahingegehend interpretiert, dass sich die Wirbelung mit der Flüssigkeit fortbewegt.

7.2.7 Helmholtzsche Wirbelsätze

Im Folgenden wird das Wirbelfeld einer inkompressiblen ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) idealen Flüssigkeit betrachtet welches durch den Wirbelvektor \mathbf{w} beschrieben wird:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v}) \quad (7.60)$$

Analog zu den Stromlinien die ein Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} veranschaulichen, erfüllen Wirbellinien denselben Zweck für das Wirbelfeld. So wie eine Stromlinie in jedem Punkt den jeweiligen lokalen Geschwindigkeitsvektor zur Tangente hat, so zeigen Wirbellinien an jedem Punkt in die Richtung des lokalen Wirbelvektors. Zur weiteren Veranschaulichung eines Wirbelfeldes dient die Dichte der Wirbellinien die proportional zum Betrag der Drehgeschwindigkeit $|\mathbf{w}|$ ist. Je größer die Dichte der Wirbellinien durch ein Flächen normal zu \mathbf{w} ist, desto größer ist $|\mathbf{w}|$. Weil für das Wirbelfeld gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

können Wirbellinien, genau wie Stromlinien (vgl. Gl. (7.26)), weder im Inneren einer Flüssigkeit anfangen noch enden, sondern müssen entweder geschlossen sein oder auf dem Rand verlaufen. Abb. 7.17 zeigt den Abschnitt einer sogenannten Wirbelröhre, den Schlauch der von allen Wirbellinien gebildet wird die durch die Fläche A_1 eintreten und durch die Fläche A_2 wieder austreten. Bezeichnet O die Oberfläche des Wirbelröhrenabschnitts (Mantel und Seitenflächen A_1 und A_2) und V das von diesem eingeschlossene Volumen dann gilt mit dem Satz von Gauß und $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$

$$\int_O \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{w}) dV = 0 \quad (7.61)$$

Der Normaleneinheitsvektor der Mantelfläche steht überall senkrecht auf \mathbf{w} und somit tragen nur die beiden Schnittflächen A_1 und A_2 zum Oberflächenintegral bei. Das heißt es muss gelten

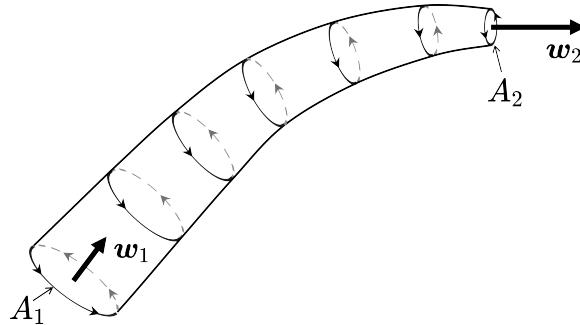


Abb. 7.17

$$\int_{A_1} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (7.62)$$

Die Normaleneinheitsvektoren der Schnittflächen A_1 und A_2 zeigen jeweils nach außen, das heißt für A_1 ist der Normaleneinheitsvektor antiparallel zu \mathbf{w}_1 und für A_2 ist er parallel zu \mathbf{w}_2 . Das bedeutet, der Wirbelfluss ist in allen Querschnittsflächen einer Wirbelröhre gleich, also

$$\int_A \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} = const \quad (7.63)$$

Wenn der Querschnitt einer Wirbelröhre so klein ist, dass \mathbf{w} auf dem Querschnitt konstant ist, man spricht dann von einem Wirbelfaden, dann gilt

$$|\mathbf{w}_1| \cdot A_1 = |\mathbf{w}_2| \cdot A_2 = |\mathbf{w}| \cdot A = const \quad (7.64)$$

Die Rotationsgeschwindigkeit eines Wirbelfades ist also an jeder Stelle umgekehrt proportional zum jeweiligen Querschnitt. Die sogenannte Wirbelstärke, definiert als

$$2 \cdot |\mathbf{w}| \cdot A = A \cdot |\nabla \times \mathbf{v}| \quad (7.65)$$

ist längs eines Wirbelfadens ebenfalls konstant. Eine weitere Konstante ist die Zirkulation um eine Wirbelröhre oder einen Wirbelfaden da mit der Definition von \mathbf{v} aus dem Stokeschen Satz folgt

$$\int_A \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\Gamma}{2} \quad (7.66)$$

wobei ∂A die Berandung (Randkurve) der Querschnittsfläche A auf dem Mantel der Wirbelröhre oder des Wirbelfadens ist. Nach Gl. (7.66) ist die Zirkulation um eine Wirbelröhre oder einen Wirbelfaden an allen Stellen gleich groß, sie ist also räumlich konstant.

Die in Gl. (7.66) ausgedrückte Beziehung zwischen Wirbelvektor \mathbf{w} und Γ lässt sich auch mittels einer einfachen Betrachtung ableiten. Abb. 7.18 zeigt eine infinitesimale quadratische Fläche in der xz -Ebene mit der linken unteren Ecke im Ursprung $(0, 0)$, der oberen rechten Ecke bei (dx, dz) und der Fläche $dA = dx \cdot dz$. Das Geschwindigkeitsfeld habe im Ursprung den Wert v_x in x -Richtung und v_z in z -Richtung. Nun betrachtet man die infinitesimale Änderung der Geschwindigkeiten v_x und v_z entlang der Quadratseiten s_1 und s_3 in v_x -Richtung sowie der Quadratseiten s_2 und s_4 in v_z -Richtung.

In v_x -Richtung gilt für s_1 :

$$v_1 = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$$

und für s_3 :

$$v_3 = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

In v_z -Richtung gilt für s_2 bzw. s_4

$$v_2 = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \quad \text{bzw.}$$

$$v_4 = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx$$

Für $d\Gamma$ in Abb. 7.18 gilt dann

$$d\Gamma = \sum_{i=1}^4 v_i ds_i$$

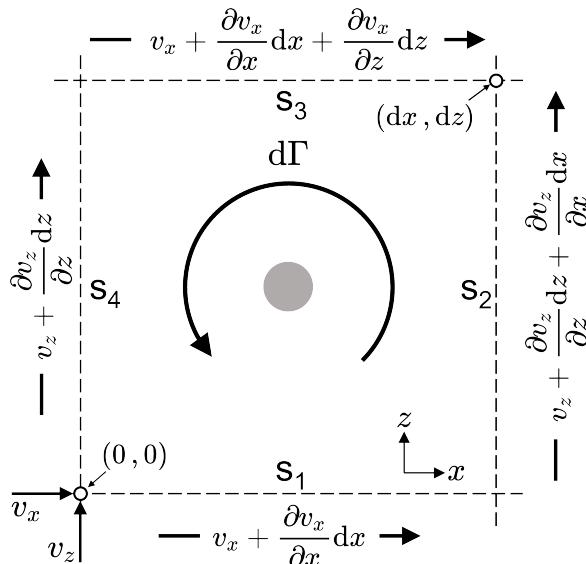


Abb. 7.18

Diese Beiträge entsprechend dem Umlaufsinn von $d\Gamma$ vorzeichenrichtig addieren ergibt

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dx - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right) dx \\ &\quad - \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dz - \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx \right) dz \end{aligned}$$

also

$$d\Gamma = \frac{\partial v_x}{\partial z} dz dx - \frac{\partial v_z}{\partial x} dx dz = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dA = 2 \cdot w_y \cdot dA$$

beziehungsweise mit dem Einheitsvektor \hat{n}_y in y -Richtung

$$\Gamma = 2 \cdot \int_A w_y \cdot dA = 2 \cdot \int_A \mathbf{w} \cdot \hat{n}_y \cdot dA = 2 \cdot \int_A \mathbf{w} \cdot dA$$

Das aber ist genau die Aussage von Gl. (7.66). Als nächstes soll nun die zeitliche Änderung von Wirbeln betrachtet werden. Der Ausgangspunkt ist Gl. (7.41), die Euler-Gleichung für isentrope Bewegung mit konservativen Kräften ($\mathbf{f} = -\rho \nabla U$):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = -\nabla(\rho \cdot U + P) \quad (7.67)$$

Gl. (7.67) von links mit $\nabla \times$ multiplizieren ergibt mit Gl. (7.60) und $\nabla \times \nabla = 0$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \quad (7.68)$$

Der zweite Term lässt sich umformen (siehe Gl. (A.1)) und mit $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ als auch $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (inkompressible Flüssigkeit) wird aus Gl. (7.68)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (7.69)$$

Auf der linken Seite von Gl. (7.69) steht die substantielle Ableitung von \mathbf{w}

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (7.70)$$

Aus Gl. (7.70) folgt, dass eine wirbelfreie Flüssigkeit, das heißt $\mathbf{w} = 0$ auf der rechten Seite von Gl. (7.70), wirbelfrei bleibt weil damit die substantielle Ableitung von \mathbf{w} gleich Null ist. In einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit können also Wirbel weder entstehen noch verschwinden.

Als nächstes sollen zwei Flüssigkeitsteilchen betrachtet werden die zum Zeitpunkt t in infinitesimaler Nachbarschaft auf den Punkten P_1 und P_2 einer Wirbellinie liegen sollen. Weil das entsprechende Linienelement $d\mathbf{s}$ zwischen den Punkten P_1 und P_2 auf der Wirbellinie per Definition in Richtung des Wirbelvektors \mathbf{w} zeigt, gilt mit einem skalaren Parameter $d\xi$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{w} \cdot d\xi$$

Sind \mathbf{r} der Ortsvektor von P_1 und \mathbf{v} die Geschwindigkeit mit der sich P_1 in der Flüssigkeit bewegt dann ist der Ortsvektor von P_2

$$\mathbf{r} + d\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathbf{w} \cdot d\xi$$

und P_2 bewegt sich in erster Näherung mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} + (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{v} + d\xi (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Zum Zeitpunkt $t + dt$ haben sich P_1 und P_2 nach P'_1 und P'_2 bewegt und aus $d\mathbf{s}$ ist

$$d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt = d\xi [\mathbf{w} + dt (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}]$$

geworden. Nun gilt aber mit Gl. (7.70)

$$\mathbf{w} + dt (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{w} + \frac{d\mathbf{w}}{dt} dt = \mathbf{w}'$$

wobei \mathbf{w}' der Wirbelvektor zum Zeitpunkt $t + dt$ ist. Das bedeutet aber, zum Zeitpunkt $t + dt$ gilt wieder

$$d\mathbf{s}' = \mathbf{w}' \cdot d\xi$$

Das heißt aber nichts anderes als dass sich eine Wirbellinie mit den sie bildenden Flüssigkeitsteilchen fortbewegt. Flüssigkeitsteilchen, die auf einer Wirbellinie liegen, verbleiben somit auf dieser Wirbellinie und Wirbellinien sind damit materielle Linien (aus Teilchen gebildet). Eine Wirbelröhre beziehungsweise ein Wirbelfaden werden somit immer aus den gleichen Flüssigkeitsteilchen gebildet. Aus

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right| = \left| \frac{\mathbf{w}'}{\mathbf{w}} \right|$$

folgt zudem, dass das Volumen einer Wirbelröhre konstant ist.

Zusammenfassung der Wirbelsätze

Erster Helmholtzscher Wirbelsatz:

Wirbelfreie Strömungsgebiete bleiben (in Abwesenheit von wirbelanfachenden äußeren Kräften) wirbelfrei.

Zweiter Helmholtzscher Wirbelsatz:

Fluidelemente, die auf einer Wirbellinie liegen, verbleiben auf dieser Wirbellinie. Wirbellinien sind daher materielle Linien.

Dritter Helmholtz'scher Wirbelsatz:

Die Zirkulation entlang einer Wirbelröhre ist konstant. Eine Wirbellinie kann daher in der Flüssigkeit weder entstehen noch enden. Wirbellinien müssen, genau wie Stromlinien, also geschlossen sein oder auf dem Rand verlaufen.

Da wirbelfreie Strömungen wirbelfrei bleiben stellt sich die Frage wie Wirbel überhaupt entstehen. Eine Voraussetzung der Ableitung von Gl. (7.70) war die Annahme konсерватiver Kräfte in Gl. (7.67), das heißt von Kräften der Form $\mathbf{F} = -k\nabla\phi(\mathbf{r})$ für welche die Rotation verschwindet. Die Gravitationskraft ist eine solche Kraft, nicht aber zum Beispiel die Corioliskraft \mathbf{F}_C für die $\nabla \times \mathbf{F}_C \neq 0$ gilt. Berücksichtigt man also die Corioliskraft in Gl. (7.67) dann wird aus Gl. (7.70)

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\nabla \times f_c) \quad (7.71)$$

Diese neue Gleichung bedeutet, dass selbst wenn zum Zeitpunkt t keine Wirbel existieren, also $\mathbf{w} = 0$ dann verschwindet die rechte Seite der Gleichung nicht und die substantielle Ableitung von \mathbf{w} ist nicht mehr Null und damit ist $\mathbf{w} \neq 0$ zu einem späteren Zeitpunkt $t + dt$, es bilden sich also Wirbel.

Die Corioliskraft kann für die meisten Betrachtungen von Strömungsvorgängen allerdings vernachlässigt werden da sie sich nur bei sehr ausgedehnten Systemen bemerkbar macht. Ein Beispiel für letzteres sind atmosphärische Wirbel für deren Entstehung in höheren Breitengraden die Corioliskraft maßgeblich ist. Für viel kleinere Systeme, wie zum Beispiel die Strömung von Flüssigkeiten, entstehen die Wirbel an den Berandungsflächen. Ist das Wirbelfeld einer Flüssigkeit bekannt, so lässt sich daraus das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} bestimmen. Für eine inkompressible Flüssigkeit gilt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ und wegen $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ lässt sich das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} aus einem Vektorpotenzial \mathbf{A} ableiten. Das heißt es muss gelten $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$. Aus Gl. (7.60) folgt damit

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = 2\mathbf{w} \quad (7.72)$$

Da es möglich ist $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ zu wählen (siehe die Diskussion im [Anhang](#)) reduziert sich dieser Ausdruck auf die bekannte Form der Laplace-Gleichung

$$\Delta \mathbf{A} = -2\mathbf{w} \quad (7.73)$$

Diese Gleichung hat die zum Beispiel aus der Elektrodynamik bekannte Lösung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathbf{w}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (7.74)$$

und damit ergibt sich für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathbf{w}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \quad (7.75)$$

Die Entsprechung von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ in der Elektrodynamik sind das Vektorfeld und die magnetische Feldstärke eines stromführenden Drahtes. Diese Analogie mit einem stromführenden Draht geht noch weiter und es lassen sich für einen Wirbelfaden dem Bio-Savart Gesetz der Elektrodynamik analoge Beziehungen ableiten:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{ds}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.76)$$

und

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times ds}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.77)$$

wobei Γ die Zirkulation und ds das Linienelement des Wirbelfadens ist, entlang dessen die Integration erfolgt.

Beispiel 7.4 Auftrieb (Kutta-Joukowski Gleichung)

Es wird die Luftzirkulation Γ um den Tragflügel eines Flugzeugs (Abb. 7.19) in Querrichtung betrachtet. Gilt $\Gamma \neq 0$, so sind Wirbel vorhanden. Zur Berechnung des Auftriebs werden nur Geschwindigkeitskomponenten parallel zum Querprofil des Tragflügels betrachtet, Geschwindigkeitskomponenten in Längsrichtung des Tragflügels werden nicht berücksichtigt. Der Tragflügel befindet sich wie in Abb. 7.20 skizziert in einem Luftstrom \mathbf{u} der nur eine Komponente in x Richtung besitzen soll. Weit vor und weit hinter dem Tragflügel hat der Luftstrom die Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} . Um den Tragflügel herum hat der Luftstrom aber zusätzliche Komponenten w_x und w_z . Für die Geschwindigkeit des Luftstroms um den Tragflügel gilt damit

$$v_x = u + w_x \quad ; \quad v_z = w_z$$

Aus Gl. (7.32) erhält man für die Impulsstromdichte in x - bzw. in z -Richtung

$$\Pi_{xx} + \Pi_{xy} + \Pi_{xz} = \rho v_x^2 + P + \rho v_x v_z$$

$$\Pi_{zx} + \Pi_{zy} + \Pi_{zz} = \rho v_z v_x + P + \rho v_z^2$$

Für ein gegebenes Volumen V das von der Oberfläche A umschlossen ist erhält man die Kraftkomponenten durch Integration über die Impulsdichte (siehe Gl. (7.31)), das heißt

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_A \Pi_{ik} dA_i + \int_V \mathbf{f}_i dV \quad (7.78)$$

Ohne äußere Kräfte erhält man somit für die Kraft in x -Richtung

$$-F_x = \int_1 \Pi_{xk} dA_k + \int_2 \Pi_{xk} dA_k + \int_3 \Pi_{xk} dA_k + \int_4 \Pi_{xk} dA_k \quad (7.79)$$

und für die Kraft in z -Richtung, also den Auftrieb

$$-F_z = \int_1 \Pi_{zk} dA_k + \int_2 \Pi_{zk} dA_k + \int_3 \Pi_{zk} dA_k + \int_4 \Pi_{zk} dA_k \quad (7.80)$$

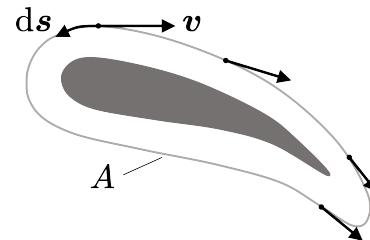


Abb. 7.19

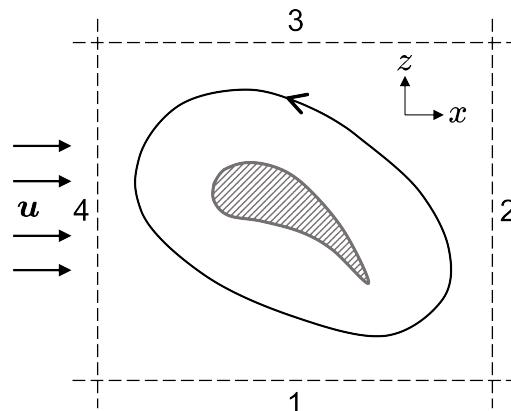


Abb. 7.20

Die Orientierung des Flächenelements dA_k ist durch den Normalenvektor in Richtung der Koordinate mit dem Index k bestimmt. Zuerst soll F_z^{24} , der Beitrag der Flächen 2 und 4 betrachtet werden. Mit konstantem Druck P fallen die entsprechenden Glieder heraus und einsetzen der Π_{zk} ergibt unter Berücksichtigung, dass die Normalenvektoren der Flächen in entgegengesetzte Richtungen zeigen

$$F_z^{24} = \int_2 [\rho \cdot v_z \cdot v_x + \rho \cdot v_z^2] dy dz - \int_4 [\rho \cdot v_z \cdot v_x + \rho \cdot v_z^2] dy dz$$

Einsetzen von $v_x = u + w_x$, $v_z = w_z$ und Vernachlässigung nichtlinearer Glieder in w_x und w_z ergibt

$$F_z^{24} = \int_2 \rho \cdot w_z \cdot (u + w_x) dy dz - \int_4 \rho \cdot w_z \cdot (u + w_x) dy dz$$

Verschiebt man die Flächen 2 und 4 gegen ∞ dann verschwindet w_x und F_z^{24} wird zu

$$F_z^{24} = \rho \cdot u \cdot \int_2 w_z dy dz - \rho \cdot u \cdot \int_4 w_z dy dz$$

Für den Beitrag der Flächen 1 und 3 erhält man

$$F_z^{13} = \int_1 [\rho \cdot v_z \cdot v_x - \rho \cdot v_z^2] dx dy - \int_3 [\rho \cdot v_z \cdot v_x + \rho \cdot v_z^2] dx dy$$

Einsetzen von $v_x = u + w_x$, $v_z = w_z$ und Vernachlässigung nichtlinearer Glieder in w_x und w_z ergibt

$$F_z^{13} = \int_1 \rho \cdot w_z \cdot (u + w_x) dx dy - \int_3 \rho \cdot w_z \cdot (u + w_x) dx dy$$

Schiebt man die Flächen 1 und 3 aufeinander zu dann wird letztlich $w_z = u$ und F_z^{13} wird zu

$$F_z^{13} = \rho \cdot u \cdot \int_1 w_x dx dy - \rho \cdot u \cdot \int_3 w_x dx dy$$

Damit erhält man für $-F_z = F_z^{24} + F_z^{13}$ nach umordnen entlang des Integrationswegs 1-2-3-4

$$-F_z = \rho \cdot u \cdot \left\{ \int_1 w_x dx + \int_2 w_z dz - \int_3 w_x dx - \int_4 w_z dz \right\} \cdot \int dy$$

also

$$-F_z = \rho \cdot u \cdot \underbrace{\oint_{\Gamma} \mathbf{w} d\mathbf{s}}_{= \Gamma} \cdot \int dy \quad (\text{Kutta-Joukowski Gleichung}) \quad (7.81)$$

Sind v_u und v_o die mittleren Geschwindigkeiten in x -Richtung an der unteren (1) bzw. oberen (3) horizontalen Begrenzung in Abb. 7.20, dann kann man ein mittlers u bestimmen und die Zirkulation Γ abschätzen mit

$$u = \frac{v_o + v_u}{2} \quad \text{und} \quad \Gamma \approx B(v_o - v_u)$$

Ist L die Länge des Tragflügels und B seine Breite so erhält man dann als Näherung für die Kutta-Joukowski Formel Gl. (7.81):

$$-F_z \approx \rho \cdot u \cdot \Gamma \cdot L \approx \frac{\rho}{2} \cdot B \cdot (v_o^2 - v_u^2) \cdot L \quad (7.82)$$

Mit der Bernoulli-Gleichung (Gl. (7.46)) gilt

$$\Delta P = P_o - P_u = \frac{\rho}{2} (v_u^2 - v_o^2)$$

und damit lautet die Näherung für die Kutta-Joukowski Formel zum Auftrieb eines Tragflügels

$$F_z \approx B \cdot \Delta P \cdot L \quad (7.83)$$

Konvektionsterme die für die Berechnung der Kraft in z -Richtung (Gl. (7.80)), also den Auftrieb, wichtig sind, können bei der Berechnung der Kraft in x -Richtung vernachlässigt werden. Damit vereinfacht sich Gl. (7.79) zu

$$-F_x = \int_2 [P + \rho v_x^2] dy dz - \int_4 [P + \rho v_x^2] dy dz$$

Ersetzt man P mittels der Bernoulli-Gleichung Gl. (7.47) ohne die Gravitationskraft dann (Integrationen über Konstante heben sich gegenseitig auf)

$$-F_x = \frac{1}{2} \int_2 \rho v_x^2 dy dz - \frac{1}{2} \int_4 \rho v_x^2 dy dz$$

Jetzt behält man von

$$v_x^2 = (u + w_x)^2 = u^2 + 2uw_x + w_x^2$$

nur Terme linear in w_x . Damit und weil $u = const$ ergibt sich für F_x

$$-F_x = \rho \cdot u \cdot \int_2 w_x dy dz - \rho \cdot u \cdot \int_4 w_x dy dz$$

Ist L wieder die Länge des Flügels in x -Richtung dann ist

$$-F_x = \rho \cdot u \cdot \left\{ \underbrace{\int_2 w_x dz - \int_4 w_x dz}_{=0} \right\} \cdot L = 0 \quad (7.84)$$

Der Ausdruck zwischen den Klammern ist ersichtlich Null und das besagt nichts anderes wie dass die Kontinuitätsgleichung in x -Richtung erfüllt ist.

Wie in Abb. 7.21 illustriert, sind Wirbelstrassen nicht vermeidbar. Die Wirbelenergie E_W ist proportional zur kinetischen Energie aufgrund von $\Delta v = v_o - v_u$. Damit kann man abschätzen

$$\frac{E_W}{l} \approx \frac{\rho}{2} (v_o - v_u)^2 \cdot B = F_x^{\text{ind}}$$

F_x^{ind} ist eine durch die Wirbelenergie induzierte Kraft in x -Richtung. In Differentialform

$$dE_W = F_x^{\text{ind}} \cdot dl$$

wobei für F_x^{ind} mit Gl. (7.82) gilt

$$F_x^{\text{ind}} \approx \frac{F_z^2}{2 \cdot \rho \cdot u^2 \cdot B \cdot L^2}$$

Reibungskräfte (Zähigkeit) an den Oberflächen erzeugen zudem weitere Wirbel.

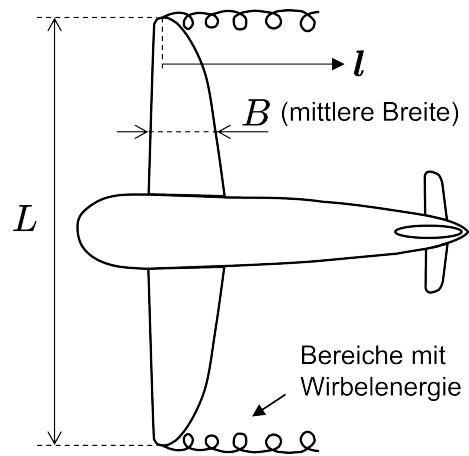


Abb. 7.21

7.2.8 Schallwellen

Mechanische Wellen die sich wie in Abb. 7.22 skizziert als Druck bzw. Dichteschwankungen in einem elastischen Körper wie einem Gas, einer Flüssigkeit oder einem Festkörper ausbreiten, bezeichnet man als Schallwellen. Es gilt die Euler-Gleichung ohne innere Kräfte, d.h. $\mathbf{f} = 0$ in Gl. (7.34), also

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P$$

sowie die Kontinuitätsgleichung Gl. (7.18):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit für eine sich im elastischen Medium in x -Richtung (Abb. 7.22) ausbreitende Schallwelle lautet

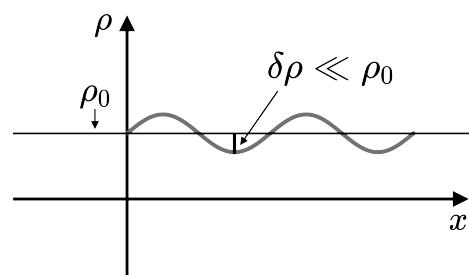


Abb. 7.22

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_x$$

Für die Schallwelle gilt, dass die Dichteänderung klein ist verglichen mit der Dichte des elastischen Körpers ($\delta\rho \ll \rho_0$). Außerdem sind zeitliche und räumliche Änderung der Geschwindigkeit, also $\partial\mathbf{v}/\partial t$ und $\nabla \cdot \mathbf{v}$, klein im Vergleich zu \mathbf{v} . Das ermöglicht die Linearisierung der Euler- und der Kontinuitätsgleichung in $\delta\rho$ und \mathbf{v} . Weiters gilt:

$$P = P(\rho, T) = P(\rho, T(\rho)) = P(\rho)$$

↓
adiabatisch ↓
adiabatisch

Der Gradient von P lässt sich so umschreiben (κ = adiabatische Kompressibilität)

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{ad. } \rho=\rho_0} \cdot \nabla(\delta\rho) = \frac{1}{\kappa\rho_0} \nabla(\delta\rho) \quad (7.85)$$

Damit wird aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.86)$$

und aus der Euler-Gleichung wird

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa\rho_0} \nabla(\delta\rho) \quad (7.87)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt mit $\nabla(\nabla(\delta\rho)) = \Delta(\delta\rho)$:

$$\frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\kappa\rho_0} \Delta(\delta\rho) = c_s^2 \Delta(\delta\rho) \quad (7.88)$$

wobei c_s^2 die Schallgeschwindigkeit ist. Das ist eine Wellengleichung mit der allgemeinen Form

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho$$

Wellengleichung

(7.89)

Lösungsansatz: $\rho = \rho_0 + \delta\rho = \rho_0 + (\delta\rho)_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$

Davon die Ableitungen berechnen

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} = (\delta\rho)_0 (-i\omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = -i\omega \delta\rho \quad ; \quad \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x} = i k_x \delta\rho$$

$$\frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \delta\rho \quad ; \quad \frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial x^2} = -k_x^2 \delta\rho$$

Einsetzen in Gl. (7.89) ergibt

$$\omega^2 = c_s^2 \mathbf{k}^2$$

Wellenzahl ν , Wellenlänge λ und Schallgeschwindigkeit c_s sind verknüpft über die Beziehung $\nu\lambda = c_s$ und für die Kreisfrequenz ω und den Wellenvektor \mathbf{k} gilt somit

$$\omega = 2\pi\nu \quad \text{und} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Angenommen die Ausbreitungsrichtung \mathbf{v} der Schallwellen sei senkrecht zum Wellenvektor \mathbf{k} , also $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ dann folgt aus

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0\perp} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \quad \text{dass} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Da aber nach der Ableitung der obigen Wellengleichung (Gl. (7.86) und Gl. (7.87) sowie Lösungsansatz) gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} = i\omega\delta\rho \neq 0$$

und

$$\nabla(\delta\rho) = i\mathbf{k}\delta\rho = i\kappa\omega\rho_0^2 \mathbf{v}$$

kann $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ nicht richtig sein sondern es muss $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$ gelten. Schallwellen sind also longitudinale Wellen. Beobachtung vom „fahrenden Zug“ aus:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t \quad \text{und} \quad e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \rightarrow e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega' t)} \quad \text{mit} \quad \omega' = \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}_0$$

Es liegt also eine mit der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegte Schallquelle vor. Aus Abb. 7.23 lässt sich ablesen

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{\Delta x}{\tau} \quad \text{und} \quad c_s = \frac{\Delta x}{\Delta\tau} \\ \Rightarrow \quad \frac{\Delta\tau}{\tau} &= \frac{v_0}{c_s} \end{aligned}$$

Mit

$$\tau' = \tau \pm \Delta\tau = \tau \left(1 \pm \frac{v_0}{c_s} \right)$$

folgt entsprechend

$$\omega' = \frac{\omega}{1 \pm v_0/c_s} \approx \omega \left(1 \mp \frac{v_0}{c_s} \right)$$

wobei die Näherung im letzten Schritt für $v_0 \ll c_s$ gilt.

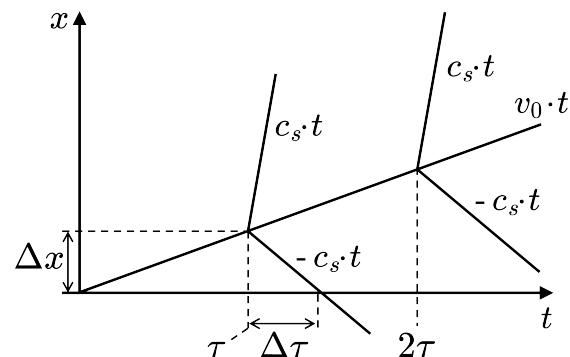


Abb. 7.23

Ist $v_0 > c_s$, wie beispielsweise bei Flugzeugen die schneller wie der Schall fliegen, dann bildet sich wie in Abb. 7.24 skizziert, der nach Ernst Mach benannte Machsche Kegel aus. Der Kegelwinkel ist

$$\sin \alpha = \frac{c_s}{v_0}$$

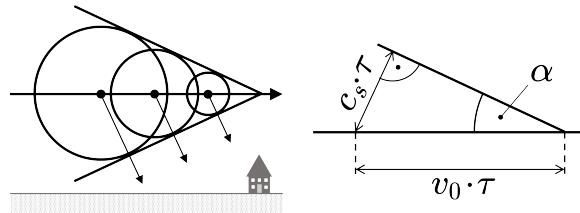


Abb. 7.24

7.2.9 Viskose Flüssigkeiten

Eine viskose Flüssigkeit ist eine zähe Flüssigkeit, die ungleich einer idealen Flüssigkeit, jeder Formänderung einen Reibungswiderstand entgegengesetzt. Es gilt wie vorher

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} ; \quad \sigma_{ik} = -P \delta_{ik}$$

Aufgrund des Reibungswiderstands existiert in einem Rohr (Abb. 7.25) ein Geschwindigkeitsgradient normal zur Fließrichtung. Die Fließgeschwindigkeit v_x ist an der Rohrwand geringer als in der Mitte. Für gegebenes v_x ist der Geschwindigkeitsgradient umso größer je kleiner der Durchmesser d des Rohres ist.

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{v_x}{d}$$

Mit der transversalen Viskosität (Zähigkeit) η , auch als Scherviskosität, erste Viskosität oder dynamische Viskosität bezeichnet, gilt

$$\sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

Die dynamische Viskosität η ist das Verhältnis von Schubspannung σ_{xz} zum räumlichen Geschwindigkeitsgradienten ∇v , ihr Kehrwert ist die Fluidität. Der räumliche Geschwindigkeitsgradient beschreibt die räumliche Änderungsrate der Geschwindigkeit und ist ein Tensor zweiter Stufe, manchmal wird er auch als Strömungstensor bezeichnet. In drei Dimensionen lautet er

$$\underline{\underline{\mathbf{1}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.90)$$

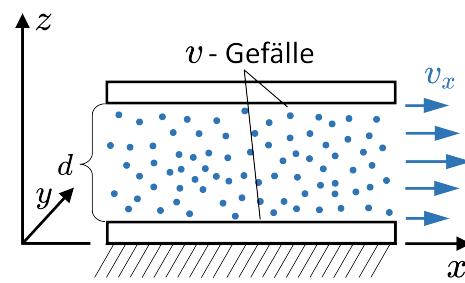


Abb. 7.25

Mit seiner Hilfe lässt sich beispielsweise die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit \mathbf{v} schreiben als

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \mathbf{v} \quad (7.91)$$

Mit Gl. (7.16) gilt für $\underline{\underline{\mathbf{I}}} \mathbf{v}$ auch die Beziehung

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \quad (7.92)$$

Unter Einschluss der Volumenviskosität λ , welche die Viskosität von Fluiden bei Volumenänderungen berücksichtigt und auch als zweite Viskosität bezeichnet wird, gilt ganz allgemein für den Spannungs- bzw. Verzerrungstensor

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (7.93)$$

und somit

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \Delta v_i + (\eta + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (7.94)$$

bzw. in Vektorform

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (7.95)$$

Der Übergang zur Euler-Beschreibung für eine physikalische Vektorgröße \mathbf{a} nach Gl. (7.15) und Einsetzen in Gl. (7.95) liefern schlussendlich die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} - \nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (7.96)$$

Beispiel 7.5 Schalldämpfung

Vernachlässigt man die Schwerkraft, das heißt $\mathbf{f} = 0$, benutzt Gl. (7.85) um ∇P durch $\nabla \rho$ zu ersetzen, und behält nur Glieder linear in \mathbf{v} , dann wird aus Gl. (7.96)

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa \rho_0} \nabla \rho + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (7.97)$$

Von dieser Gleichung wird die Divergenz genommen, also Multiplikation der Gleichung von links mit ∇

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\kappa \rho_0} \nabla \cdot (\nabla \rho) + \eta \cdot \underbrace{\nabla \cdot (\Delta \mathbf{v})}_{\Delta(\nabla \cdot \mathbf{v})} + (\eta + \lambda) \nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})) \quad (7.98)$$

Nun wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

benutzt, um in Gl. (7.98) die $\nabla \cdot \mathbf{v}$ -Glieder mit der partiellen Zeitableitung von ρ zu ersetzen. Als Ergebnis erhält man

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{\kappa \rho_0} \Delta \rho - \frac{\eta}{\rho_0} \cdot \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \frac{\eta + \lambda}{\rho_0} \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (7.99)$$

Durch umordnen und einsetzen der Schallgeschwindigkeit c_s

$$c_s^2 = \frac{1}{\kappa \rho_0}$$

erhält man damit die Wellengleichung für gedämpfte Schallwellen

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho + \frac{2\eta + \lambda}{\rho_0} \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (7.100)$$

Lösungsansatz: Ebene Welle in x -Richtung

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho = \rho_0 + (\delta \rho)_0 \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (7.101)$$

Ableitungen berechnen und in Gl. (7.100) einsetzen. Daraus folgt

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - i \frac{2\eta + \lambda}{\rho_0} k^2 \omega \quad (7.102)$$

Zuerst Gl. (7.102) nach ω auflösen. Mittels quadratische Ergänzung erhält man (nur das positive Vorzeichen der Wurzel ist physikalisch relevant)

$$\omega + i \frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} k^2 = c_s k \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} \cdot \frac{k}{c_s} \right)^2} \quad (7.103)$$

Die Wurzel lässt sich durch eine Näherung für kleine k ersetzen (siehe Gl. (A.10)). Damit erhält man für ω

$$\omega = c_s k - i \frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} k^2 \quad (7.104)$$

Eingesetzt in Gl. (7.101) ergibt das für die Zeitabhängigkeit der ebenen Welle

$$\exp(-i\omega t) = \exp(-ic_s kt) \cdot \exp\left(-\frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0} k^2 t\right) \quad (7.105)$$

Jetzt Gl. (7.102) nach k auflösen

$$k = \frac{\omega}{c_s} \frac{1}{\sqrt{1 - i \frac{2\eta + \lambda}{\rho_0 c_s} \frac{\omega}{c_s}}} \quad (7.106)$$

Mit Näherung für kleine ω (siehe Gl. (A.11)) erhält man für k

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i \frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0 c_s} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 \quad (7.107)$$

Eingesetzt in Gl. (7.101) ergibt das für die Ortsabhängigkeit der ebenen Welle

$$\begin{aligned} \exp(-ikx) &= \exp\left(-i\frac{\omega}{c_s} \cdot x\right) \cdot \exp\left[-\underbrace{\frac{2\eta + \lambda}{2\rho_0 c_s} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 x}_{=\alpha/2}\right] \\ &\quad (7.108) \end{aligned}$$

Gl. (7.105) und Gl. (7.108) zeigen, dass Schallwellen die sich in einem Körper mit Zähigkeit η und Volumenviskosität λ ausbreiten sowohl eine zeitliche als auch eine räumliche Dämpfung (illustriert in Abb. 7.26) erfahren. Die Zähigkeit bzw. dynamische Viskosität η eines Materials ist mit seiner kinematischen Viskosität ν verknüpft durch $\eta = \nu \cdot \rho$. Tab. 7.1 gibt die entsprechenden Wert für drei gut bekannte Substanzen.

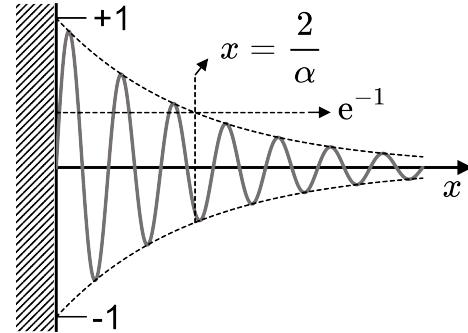


Abb. 7.26

Tab. 7.1: Dichte, dynamische und kinematische Viskosität von Luft, Wasser und Glycerin bei 20 °C.

Körper	ρ [g·cm ⁻³]	η [g·cm ⁻¹ ·s ⁻¹]	ν [cm ² ·s ⁻¹]
Luft	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$1.83 \cdot 10^{-4}$	0.15
H ₂ O	1.00	0.01	0.01
Glycerin	1.26	14.12	11.2

Im abschließenden Beispiel zu viskosen Fluida soll noch einmal die Strömung einer Flüssigkeit mit dynamischer Viskosität η in einem zylindrischen Rohr im stationären Fall betrachtet werden.

Beispiel 7.6 Hagen-Poiseuille Strömung (stationär)

Stationäre Strömung bedeutet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

Nach der Kontinuitätsgleichung (Gl. (7.18)) ist damit auch $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ und somit ist die betrachtete Flüssigkeit inkompressibel.

Damit folgt aus Gl. (7.95) mit $\mathbf{f} = 0$ und $\lambda = 0$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

Für die in Abb. 7.27 skizzierte Situation wird nur die x -Komponente der Gleichung benötigt:

$$\eta \Delta v_x(r) = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_l - P_0}{l} \quad (7.109)$$

Der Druckgradient in x -Richtung ist hier gegeben durch den Druckunterschied zwischen Druck $P_l = P(x = l)$ am Ende eines Rohrstücks der Länge l und dem Druck $P_0 = P(x = 0)$ am Beginn dieses Rohrstücks, geteilt durch die Länge l des Rohrstücks. Das Problem der Rohrströmung behandelt man am besten in Polarkoordinaten. Kartesische Koordinaten (x, y) in Polarkoordinaten (r, φ) transformieren bedeutet für den Laplace Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Gl. (7.109) hängt nur von r ab und somit wird Gl. (7.109) in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{P_l - P_0}{l}$$

Einmal integrieren liefert

$$r \frac{\partial v_x(r)}{\partial r} = \frac{r^2}{2\eta} \frac{P_l - P_0}{l} + C_1$$

Für $r = 0$ verschwindet die linke Seite. Also muss auch die rechte Seite verschwinden und damit folgt $C_1 = 0$. Ein weiteres mal integrieren liefert

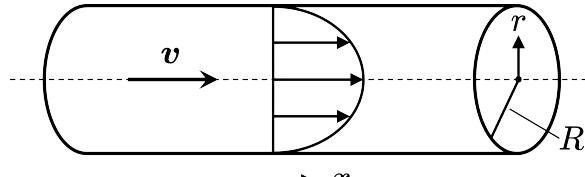


Abb. 7.27

$$v_x(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{P_l - P_0}{l} + C_2$$

Am Rand des Rohrs $r = R$ muss gelten

$$v_x(R) = 0 = \frac{R^2}{4\eta} \frac{P_l - P_0}{l} + C_2$$

und somit bestimmt sich der Wert von C_2 zu

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{P_l - P_0}{l}$$

Damit erhält man als Ergebnis für die radiale Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit im Rohr von Abb. 7.27 ($\Delta P = P_l - P_0$)

$$v_x(r) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \quad (7.110)$$

Mit Hilfe von Gl. (7.110) kann man nun den Durchfluss $dV/dt = \dot{V}$, das heißt das pro Zeiteinheit durch das Rohr mit Radius R und Länge L fließende Flüssigkeitsvolumen, also den Volumenstrom, durch einfache Integration berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^R 2\pi r v_x(r) dr = \int_0^R 2\pi r \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta P}{l} \left[\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \cdot R^4 \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \cdot R^4 \quad (\text{Hagen-Poiseuille Gesetz}) \quad (7.111)$$

benannt nach Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen und Jean Léonard Marie Poiseuille, zeigt, dass der Volumenstrom in einem Rohr mit Radius R linear mit der Druckdifferenz über die Rohrlänge und mit der vierten Potenz des Radius R variiert. Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Hagen-Poiseuille Gesetzes ist das Vorliegen einer stationären Strömung. Weitere Randbedingungen sind, dass die Grenzschichten an der Rohrwand vernachlässigbar sind, d.h., der Radius R muss dafür groß genug sein, und zudem muss für eine stabile Druckdifferenz das Rohr lang genug sein. Das Hagen-Poiseuille Gesetz ist nicht nur zur Betrachtung von Rohrströmungen im Fall von Flüssigkeiten nützlich sondern auch bei Gasströmungen in Rohren solange die Dichte des Gases hoch genug ist. Letzteres ist der Fall wenn die mittlere freie Weglänge der Gasteilchen sehr viel geringer ist wie der Radius des Rohres.

7.2.10 Potenzialströmung

Betrachtet man die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes im Fall der ebenen stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, so gilt nach dem Abschnitt über Stromlinien und Stromfunktion mit Gl. (7.23)

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \underbrace{\nabla \Psi (\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)}_{=0} - \hat{\mathbf{e}}_z (\nabla \cdot (\nabla \Psi)) + \underbrace{(\hat{\mathbf{e}}_z \nabla) \nabla \Psi}_{=0} - \underbrace{(\nabla \Psi \nabla) \hat{\mathbf{e}}_z}_{=0} \\ &= [-\nabla \cdot (\nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = -\Delta \Psi \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \right\} \quad (7.112)$$

Die Rotation von \mathbf{v} hat also nur eine Komponente senkrecht zur Strömungsebene, hier die xy -Ebene. In diesem Fall lautet die obige Gleichung ausgeschrieben für $(\nabla \times \mathbf{v})_z$

$$(\nabla \times \mathbf{v})_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = -\Delta \Psi \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \quad (7.113)$$

Für wirbelfrei Strömungen, das heißt $(\nabla \times \mathbf{v})_z = 0$, genügt die Stromfunktion somit einer Laplace-Gleichung

$$\Delta \Psi \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = 0 \quad (7.114)$$

Wenn für das Vektorfeld \mathbf{v} der Geschwindigkeiten einer Strömung zusätzlich gilt

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (7.115)$$

dann spricht man von einer Potenzialströmung wobei Φ das sogenannte Geschwindigkeitspotenzial ist. Da die Rotations eines Gradientenfeldes verschwindet, das heißt $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, gilt für eine Potenzialströmung $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ automatisch, eine Potenzialströmung ist also immer wirbelfrei. Verlangt man weiters, dass die Potenzialströmung inkompressibel sein soll, so ist zudem $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, das heißt es gilt die Kontinuitätsgleichung. Zusammengfasst gilt für eine inkompressible Potenzialströmung:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Daraus folgt unmittelbar, dass das Geschwindigkeitspotenzial Φ ebenfalls eine Laplace-Gleichung erfüllt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi \quad (7.116)$$

Die Stromfunktion erfüllt automatisch die Kontinuitätsgleichung aber nicht die Wirbelfreiheit, letzteres muss explizit verlangt werden. Das Geschwindigkeitspotenzial ist per Definition wirbelfrei und für inkompressible Flüssigkeiten erfüllt es auch automatisch die Kontinuitätsgleichung. Zwischen dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} und der Stromfunktion Ψ bzw. dem Geschwindigkeitspotenzial Φ gelten die folgenden Beziehungen

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (7.117)$$

Also gilt für Ψ und Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7.118)$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar dass gilt

$$(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (7.119)$$

Das bedeutet, die Äquipotenziallinien des Geschwindigkeitspotenzials $\Phi(x, y) = const$ sind orthogonal zu den Äquipotenziallinien der Stromfunktion $\Psi(x, y) = const$, also orthogonal zu den Stromlinien. Die Differentialgleichungen für die Variablen Ψ und Φ in Gl. (7.118) entsprechen den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen welche aus der **komplexen Differenzierbarkeit** der holomorphen Funktion

$$w(z) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + i \cdot y \quad (7.120)$$

folgen bzw. sie garantieren. $w(z)$ ist das sogenannte komplexe Geschwindigkeitspotenzial. Da Ψ und Φ jeweils für sich einer Laplace-Gleichung genügen, erfüllt auch $w(z)$ eine Laplace-Gleichung.

$$\Delta w(z) = \Delta \Phi(x, y) + i \cdot \Delta \Psi(x, y) \quad (7.121)$$

Die komplexe Ableitung von $w(z)$ ist die komplexe Geschwindigkeit für die mit Gl. (7.117) gilt

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_x - i \cdot v_y = v e^{i\theta} \quad (7.122)$$

wobei θ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und der x -Achse ist. An der Oberfläche eines umströmten Körpers verschwindet die Normalkomponente von Φ , die Geschwindigkeit ist also jeweils tangential zur Oberfläche des umströmten Körpers

und damit ist die Oberfläche automatisch eine Stromlinie. Damit gilt an der Oberfläche eines umströmten Körpers die Randbedingung $\Psi = \text{const}$. Für die Konstante kann dabei ohne Einschränkung Null gewählt werden, woraus folgt dass $w(z)$ an der Oberfläche des umströmten Körpers nur reelle Werte annehmen kann. Aus Gl. (7.119) folgt zudem, dass die Äquipotenziallinien des Geschwindigkeitspotenzials Φ senkrecht auf der umflossenen Oberfläche stehen müssen da diese ja eine Äquipotenziallinie der Stromfunktion ist. Die Randbedingung dass die Normalkomponente des Geschwindigkeitsfeldes an der Oberfläche eines umflossenen Körpers verschwindet ist

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (7.123)$$

(Vergleiche mit der Elektrostatik wo $\Phi = \Phi_0 = \text{const}$ auf der Berandung gilt.)

Ebene Potenzialströmung um ein Hindernis

Betrachtet wird das komplexe Geschwindigkeitspotenzial im Fall einer ebenen Strömung um ein Hindernis das sich im Koordinatenursprung befinden soll. In großen Entfernung vom Hindernis soll die Strömung konstant sein. Damit ist auch die komplexe Geschwindigkeit nach Gl. (7.122) in großen Entfernung vom Hindernis, sprich im Unendlichen, konstant, also

$$w'(z \rightarrow \infty) = \left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} = \text{const}$$

Man kann daher die komplexe Geschwindigkeit nach Potenzen von $1/z$ entwickeln

$$w'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (7.124)$$

Für $z \rightarrow \infty$ konvergiert diese Reihe mit Gl. (7.122) gegen den konstanten Wert

$$w'(z \rightarrow \infty) = a_0 = v_x^\infty - iv_y^\infty = u$$

Also ist a_0 die asymptotische Geschwindigkeit v_∞ der Potenzialströmung. Um die Bedeutung von a_1 zu verstehen, betrachtet man das Kurvenintegral der komplexen Geschwindigkeit entlang eines geschlossenen Weges in der komplexen Ebene. Der Weg wird dabei so gelegt, dass er an der Oberfläche des im Koordinatenursprung befindlichen Hindernisses verläuft weil da die Stromfunktion Ψ konstant ist.

$$\oint_C w'(z) dz = \oint_C (v_x - iv_y)(dx + idy)$$

Trennung von Real- und Imaginärteil liefert

$$\oint_C w'(z) dz = \oint_C (v_x dx + v_y dy) + i \oint_C (v_x dy - v_y dx)$$

Ein Vergleich mit Gl. (7.53) und Gl. (7.54) zeigt, dass der Realteil gerade die Zirkulation ist:

$$\oint_C (v_x dx + v_y dy) = \oint_C (\mathbf{v} d\mathbf{s}) = \Gamma$$

und wegen der Wahl des Integrationswegs auf dem $\Psi = const$, verschwindet der Imaginärteil

$$\oint_C (v_x dy - v_y dx) = \oint_C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) = \oint_C d\Psi = 0$$

Somit erhält man also für das Integral

$$\oint_C w'(z) dz = \Gamma \quad (7.125)$$

Ein andere Möglichkeit dieses Integral auszuwerten bietet der [Residuensatz](#) der Funktionentheorie. Damit erhält man

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C w'(z) dz = a_1 \quad (7.126)$$

Ein Vergleich von Gl. (7.125) und Gl. (7.126) zeigt, dass $\Gamma = 2\pi i a_1$ und damit ist a_1 ein Maß für die Zirkulation. Diesen Wert für a_1 und $a_0 = v_\infty$ in Gl. (7.124) einsetzen liefert für die komplexe Geschwindigkeit $w'(z)$

$$w'(z) = v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (7.127)$$

Für das komplexe Geschwindigkeitspotenzial $w(z)$ erhält man damit durch Integration von Gl. (7.127)

$$w(z) = v_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}} \quad (7.128)$$

Gl. (7.128) in Realteil und Imaginärteil aufgespalten mit $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ergibt für das Geschwindigkeitspotenzial $\Phi = \operatorname{Re}(w(z))$ und die Stromfunktion $\Psi = \operatorname{Im}(w(z))$ in Polarkoordinaten (r, φ)

$$\Phi(r, \varphi) = v_\infty r \cos \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n \cos[(n-1)\varphi]}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{\beta_n \sin[(n-1)\varphi]}{(n-1)r^{n-1}} \right) \quad (7.129)$$

$$\Psi(r, \varphi) = v_\infty r \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n \sin[(n-1)\varphi]}{(n-1)r^{n-1}} - \frac{\beta_n \cos[(n-1)\varphi]}{(n-1)r^{n-1}} \right) \quad (7.130)$$

Um die Koeffizienten a_n mit $n > 1$ in Gl. (7.127) zu bestimmen, muss man nun Annahmen über das Hindernis selbst machen. Hier soll ein umströmter Zylinder betrachtet werden.

Beispiel 7.7 Potenzial bei Strömung um einen Zylinder

Betrachtet wird der in Abb. 7.28 skizzierte Zylinder mit Radius R dessen Achse senkrecht zur xz -Ebene steht. Auf die Kreisscheibe des Zylinders in Abb. 7.28 strömt von links, parallel zur x -Achse, das konstante Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} , also $v_\infty = \mathbf{u}_x = u$. Weit weg von der Zylinderscheibe bleibt das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} ungestört, nicht so aber um den Zylinder herum. Dort ist nicht nur das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} gestört, sondern es gibt auch eine Zirkulation. Bezeichnen v_φ und v_r die tangentiale und die senkrechte Geschwindigkeitskomponente an der Zylinderoberfläche dann ist die Zirkulation gegeben durch

$$\Gamma = \oint v_\alpha ds = r \int_0^{2\pi} v_\varphi d\varphi$$

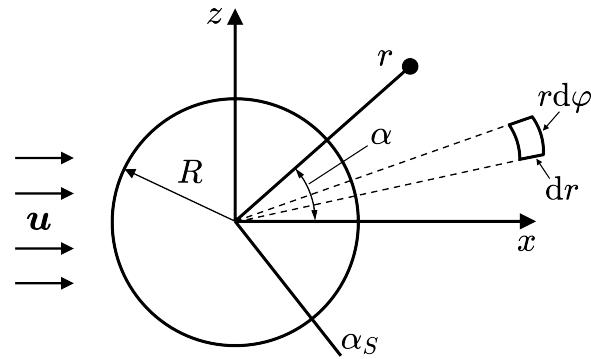


Abb. 7.28

wobei ds das Linienelement entlang des Kreises mit Radius R ist. Um die Koeffizienten mit $n > 1$ in Gl. (7.129) und Gl. (7.130) zu bestimmen nutzt man aus, dass die Stromfunktion Ψ auf der Zylinderoberfläche konstant ist. Damit gilt

$$d\Psi|_{r=R} = 0$$

und somit muss $\Psi|_{r=R}$ unabhängig von φ sein. Aus Gl. (7.130) erhält man ($v_\infty = u$)

$$\begin{aligned} \Psi|_{r=R} = & uR \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R + \frac{\alpha_2 \sin \varphi}{R} \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin[(n-1)\varphi]}{(n-1)R^{n-1}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n \cos[(n-1)\varphi]}{(n-1)R^{n-1}} \end{aligned} \quad (7.131)$$

In Gl. (7.131) wurde das Glied mit $n = 2$ aus der Summe über die α_n herausgezogen, weil man so sofort erkennt welche Koeffizienten α_n und β_n verschwinden müssen, damit $\Psi|_{r=R}$ nicht mehr von φ abhängt. Aus Gl. (7.131) kann man ablesen, dass gelten muss

$$\alpha_2 = -uR^2 \quad ; \quad \alpha_n = 0 \quad \text{für } n \geq 3 \quad ; \quad \beta_n = 0 \quad \text{für } n \geq 2$$

Das Geschwindigkeitspotenzial Φ und die Stromfunktion Ψ für die Strömung \mathbf{u} um den Zylinder in Abb. 7.28 erhält man durch Einsetzen dieser Koeffizienten in Gl. (7.129) und Gl. (7.130) mit dem Ergebnis

$$\Phi(r, \varphi) = ur \cos \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \quad (7.132)$$

$$\Psi(r, \varphi) = ur \sin \varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (7.133)$$

Für das komplexe Geschwindigkeitspotenzial $w(z)$ und die komplexe Geschwindigkeit $w'(z)$ des umströmten Zylinders erhält man damit

$$w(z) = uz \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (7.134)$$

$$w'(z) = u \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \quad (7.135)$$

Jetzt kann man $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ bestimmen. In Zylinderkoordinaten erhält man

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u \cos \varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (7.136)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -u \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (7.137)$$

Die Randbedingung für die Normalkomponente v_n ist erfüllt, da

$$v_n = v_r|_{r=R} = u \cos \varphi \left(1 - \frac{R^2}{R^2} \right) = 0$$

Der sogenannte Stauwinkel $\varphi = \alpha_S$ in Abb. 7.28 ist bestimmt durch

$$v_\varphi(\alpha_S)|_{r=R} = -2u \sin \alpha_S + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0$$

Für geringe Zirkulation Γ und kleine α_S , das heißt $\sin \alpha_S \approx \alpha_S$, kann man damit den Stauwinkel abschätzen:

$$\alpha_S \approx \frac{\Gamma}{4\pi R u}$$

Exakt bestimmen kann man den Stauwinkel aus den Nullstellen des komplexen Geschwindigkeitspotenzials, den sogenannten Staupunkten. Die Nullstellen von Gl. (7.135) sind

$$z_{1,2} = i \frac{\Gamma}{4\pi u} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi u} \right)^2} \quad (7.138)$$

Die Bedeutung der Staupunkte liegt darin, dass in ihnen die Geschwindigkeit verschwindet. In Gl. (7.138) sind zwei Fälle zu unterscheiden, $|\Gamma| \leq 4\pi u$ und $|\Gamma| > 4\pi u$.

Fall I: $|\Gamma| \leq 4\pi u$

In diesem Fall ist die Wurzel reell und $|z_1| = |z_2| = R$. Die Staupunkte befinden sich also an der Zylinderoberfläche bei $z_{1,2} = Re^{i\varphi_{1,2}}$. Mit $\sin \varphi = \text{Im}(z)/|z|$ und $\cos \varphi = \text{Re}(z)/|z|$ erhält man für die Winkel $\varphi_{1,2}$:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_1 &= \sin \varphi_2 = \frac{\Gamma}{4\pi u R} \\ \cos \varphi_1 &= -\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi u R}\right)^2}\end{aligned}$$

$\Gamma = 0$: Ohne Zirkulation liegen die beiden Staupunkte auf der x -Achse bei $x = \pm R$ und die Strömung um den Zylinder ist symmetrisch (Abb. 7.29a). Die Strömungsgeschwindigkeiten oberhalb und unterhalb des Zylinders sind gleich.

$\Gamma < 0$: Mit wachsendem $|\Gamma|$ wandert der Staupunkt der bei $-R$ lag gegen den Uhrzeigersinn und der Staupunkt der bei R lag wandert im Uhrzeigersinn bis beide schließlich für $|\Gamma| = 4\pi u R$ bei $(x = 0, y = -R)$ zusammenfallen (Abb. 7.29b und Abb. 7.29c). Die Strömungsgeschwindigkeit oberhalb des Zylinders ist größer als unterhalb.

$\Gamma > 0$: Mit wachsendem $|\Gamma|$ wandert der Staupunkt der bei $-R$ lag im Uhrzeigersinn und der Staupunkt der bei R lag wandert gegen den Uhrzeigersinn bis beide schließlich für $|\Gamma| = 4\pi u R$ bei $(x = 0, y = R)$ zusammenfallen (entspricht einer Spiegelung von Abb. 7.29b und Abb. 7.29c an der x -Achse). Die Strömungsgeschwindigkeit unterhalb des Zylinders ist größer als oberhalb.

Fall II: $|\Gamma| > 4\pi u$

In diesem Fall wird aus Gl. (7.138)

$$z_{1,2} = i \left(\frac{\Gamma}{4\pi u} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi u}\right)^2 - R^2} \right)$$

und die Staupunkte liegen nicht mehr auf dem Zylinder. Setzt man $\Gamma = -4\pi u R(1 + \Delta)$ mit $\Delta > 1$ dann ist der Betrag von $z_{1,2}$,

$$|z_{1,2}| = R \cdot \left| 1 + \Delta \pm \Delta \sqrt{1 + \frac{2}{\Delta}} \right|$$

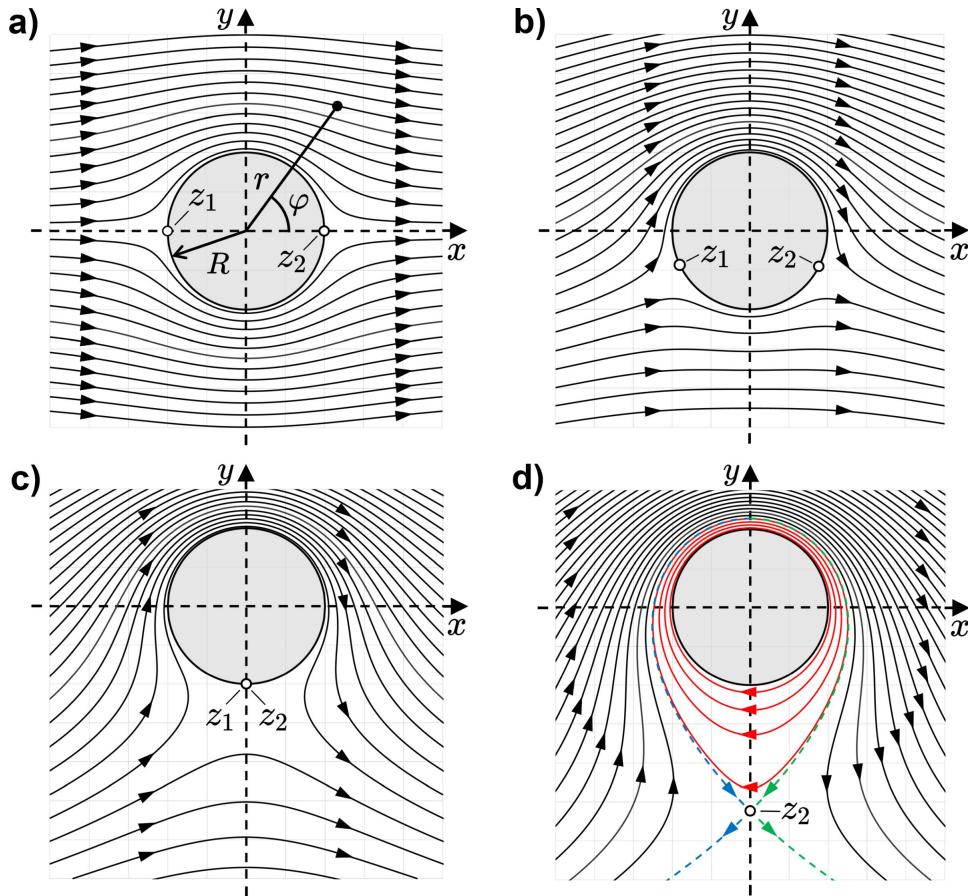


Abb. 7.29: Niveauliniendarstellung der Stromfunktion $\Psi(r, \varphi)$ für den umströmten Zylinder aus Abb. 7.28. (a) keine Zirkulation, $\Gamma = 0$; (b) etwas Zirkulation, $\Gamma = -2\pi uR$; (c) $\Gamma = -4\pi uR$, die Staupunkte fallen zusammen; und (d) starke Zirkulation, $\Gamma = -6\pi uR$, und es gibt nur noch einen Staupunkt im Strömungsfeld. Die Differenz zwischen je zwei benachbarten Äquipotenziallinien der Stromfunktion ist in allen vier Abbildungen gleich.

Der Ausdruck unter der Wurzel ist immer > 1 und somit ist entweder $|z_1| < R$ und $|z_2| > R$ oder es ist $|z_1| > R$ und $|z_2| < R$. Ein Staupunkt liegt also immer im Innern des Zylinders und es gibt somit nur einen echten Staupunkt der auf der negativen imaginären Achse liegt (Abb. 7.29d) was bedeutet, dass er nicht auf dem Zylinder sondern im Strömungsfeld unterhalb des Zylinders liegt. Die strichlierte Stromlinie in Abb. 7.29d, welche durch diesen Staupunkt geht, teilt das Strömungsfeld um den Zylinder in drei Gebiete. Über dem Staupunkt und innerhalb der durch ihn laufenden Stromlinie zirkuliert die Strömung um den Zylinder. Rechts und links der durch den Staupunkt verlaufenden Stromlinie verlaufen die Stromlinien oberhalb des Zylinders. Unter dem Staupunkt und zwischen der durch den Staupunkt verlaufenden Stromlinie, verlaufen alle Stromlinien unterhalb des Zylinders. Die Strömungsgeschwindigkeit oberhalb des Zylinders ist auch hier größer als unterhalb.

Druckfeld des umströmten Zylinders

Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung erhält man das den umströmten Zylinder umgebende Druckfeld direkt aus dem Geschwindigkeitsfeld. Mit Gl. (7.46) und dem Potenzial $U = 0$ gilt nach Bernoulli

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = \text{const} = \frac{\rho u^2}{2} + P_\infty \quad (7.139)$$

wobei v^2 am Ort \mathbf{r} gegeben ist durch

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_φ in Zylinderkoordinaten aus Gl. (7.136) und Gl. (7.137). Die Konstante u ist wieder das Geschwindigkeitsfeld weit weg vom Zylinder wo für die Geschwindigkeit $v = u$ und für den Druck $P = P_\infty$ gilt. Einsetzen von v_r und v_φ in Gl. (7.139) ergibt für den Druck P

$$P = \frac{\rho u^2}{2} + P_\infty - \frac{\rho}{2} \left\{ u^2 \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)^2 + \left[-u \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right]^2 \right\} \quad (7.140)$$

Ausmultiplizieren und umformen ergibt

$$2 \frac{P - P_\infty}{\rho u^2} = -\frac{R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \cos 2\varphi + 2 \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \frac{\Gamma}{2\pi ur} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi ur} \right)^2 \quad (7.141)$$

An der Zylinderoberfläche vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$2 \frac{P - P_\infty}{\rho u^2} = -1 + 2 \cos 2\varphi + 4 \sin \varphi \frac{\Gamma}{2\pi u R} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi u R} \right)^2 \quad (7.142)$$

Falls es keine Zirkulation gibt, also $\Gamma = 0$ wie in Abb. 7.29a, wird aus Gl. (7.141)

$$2 \frac{P - P_\infty}{\rho u^2} = -1 + 2 \cos 2\varphi$$

Durch Ableiten nach φ findet man, dass dieser Ausdruck seine Extremwerte dort annimmt wo $\sin 2\varphi = 0$ gilt, also bei $2\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ bzw. bei $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Auswerten der zweiten Ableitung an diesen Stellen zeigt, wie das Druckfeld in Abb. 7.30a veranschaulicht, dass der Druck P seine Maximalwerte bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ annimmt und seine Minimalwerte bei $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$. Der Druck wird also gerade in den Staupunkten maximal (darum heißen diese auch so). Bei etwas Zirkulation, $\Gamma = -2\pi u R$ in Abb. 7.29b, wird aus Gl. (7.141)

$$2 \frac{P - P_\infty}{\rho u^2} = -2 + 2 \cos 2\varphi - 4 \sin \varphi$$

und man findet die Extremwerte des Drucks bei $\varphi = -\pi/6$ und $\varphi = -7\pi/6$. Beide Stellen sind Druckmaxima des entsprechenden Druckfelds in Abb. 7.30b und fallen wiederum mit

den Staupunkten in Abb. 7.29b zusammen. Für eine Zirkulation von $\Gamma = -4\pi uR$ wie in Abb. 7.29c erhält man aus Gl. (7.141)

$$2 \frac{P - P_\infty}{\rho u^2} = -5 + 2 \cos 2\varphi - 8 \sin \varphi$$

Da in diesem Fall die Staupunkte zusammenfallen findet man wie zu erwarten im zugehörigen Druckfeld in Abb. 7.30c nur noch einen Extremwert für den Druck P und zwar bei $\varphi = 3\pi/2$ wo der Druck in Gl. (7.142) seinen Maximalwert annimmt.

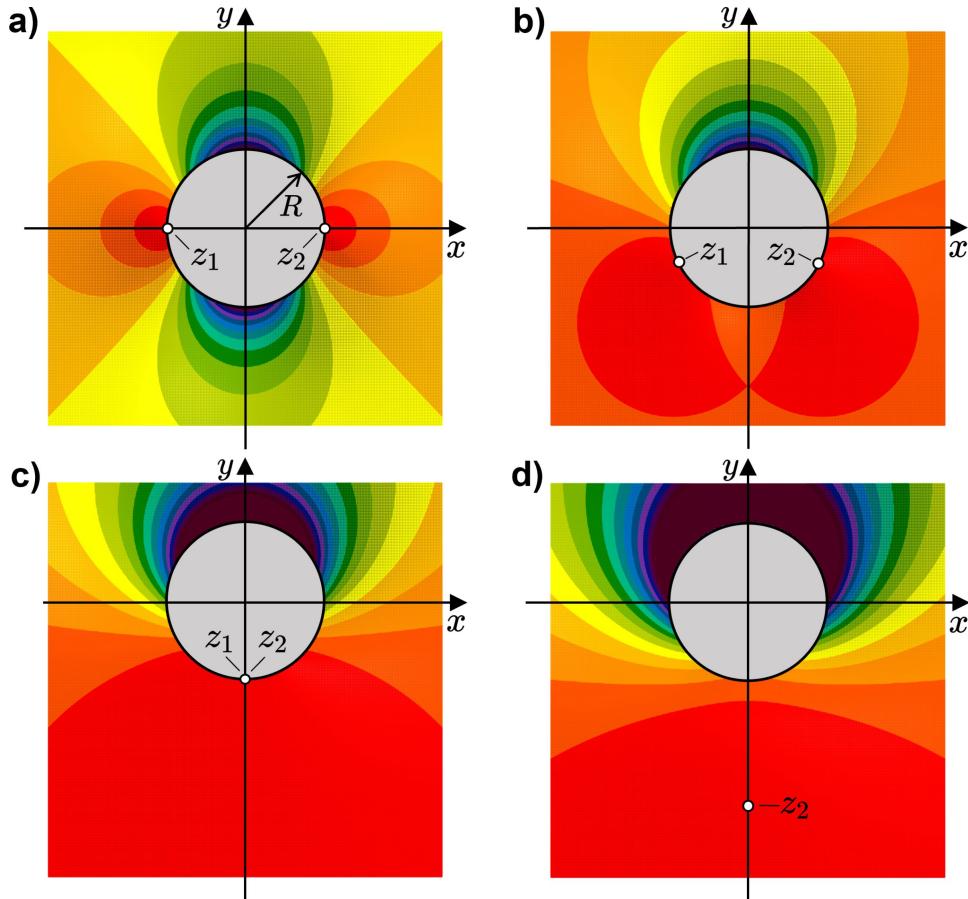


Abb. 7.30: Druckfeld des umströmten Zylinders für die vier Fälle aus Abb. 7.29 gemäß der normierten Druckdifferenz aus Gl. (7.141). (a) keine Zirkulation, $\Gamma = 0$; (b) etwas Zirkulation, $\Gamma = -2\pi uR$; (c) $\Gamma = -4\pi uR$; und (d) starke Zirkulation mit $\Gamma = -6\pi uR$. Das Druckfeld ist jeweils in sechszehn Druckstufen (Farben) unterteilt, von hohem Druck in rot zu niedrigem Druck in lila. Der absolute Druckunterschied ist in den vier Fällen aber nicht identisch sondern in (b) 2.25-mal, in (c) 3.98-mal und in (d) 6.23-mal so groß wie in (a).

Für den Fall starker Zirkulation, das heißt $\Gamma = -6\pi uR$ wie in Abb. 7.29d, ist die naheliegende Vermutung, dass der Ort maximalen Drucks wieder mit dem Staupunkt zusammenfällt. Dieser liegt nun nicht mehr auf der Zylinderoberfläche sondern auf der

negativen y -Achse im Strömungsfeld. Um den genauen Ort auf der y -Achse zu bestimmen an dem der Druck einen Extremwert annimmt setzt man in Gl. (7.141) den Winkel zu $\varphi = 3\pi/2$ sowie $\Gamma = -6\pi u R$ und r in Einheiten von R (d.h. $R = 1$) und bestimmt dann die Extremwerte als Funktion von r

$$2 \frac{P - P_\infty}{\rho u^2} = -\frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} - 6 \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) - \left(\frac{6}{r}\right)^2$$

Ableiten nach r und das Resultat gleich Null setzen und führt auf die kubische Gleichung

$$r^3 - \frac{11}{3}r^3 + 3r - \frac{2}{3} = 0$$

welche mit der Methode von Cardano gelöst werden kann. Nach etwas Rechnung erhält man für den Betrag von r

$$r = \frac{2}{9} \sqrt[3]{5 \cdot 16\sqrt{10}} \cdot \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{5 \cdot 9}{32\sqrt{10}} \right) \right] + \frac{11}{3} = 2.618$$

Das heißt $r = 2.618 \cdot R$. Der Ort des maximalen Drucks des in Abb. 7.30d dargestellten Druckfelds ist somit deckungsgleich mit dem Staupunkt des Strömungsfelds in Abb. 7.29d welcher sich bei ($x = 0, y = -2.618 \cdot R$) befindet.

Kraft auf einen umströmten Körper

Wie aus Abb. 7.30 ersichtlich, ist die Druckdifferenz zwischen der Unterseite ($\varphi = 3\pi/2$) und der Oberseite ($\varphi = \pi/2$) des Zylinders ohne Zirkulation gleich Null und nimmt mit wachsender Zirkulation zu. Die durch diese Druckdifferenz auf den Zylinder wirkende Kraft pro Längeneinheit \mathbf{f} ist gegeben durch

$$\mathbf{f} = - \oint_C P \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (7.143)$$

wobei \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor auf das Linienelement ds entlang der Zylinderberandung C ist. Gl. (7.143) gilt für beliebige umströmte Körper wie in Abb. 7.31 skizziert. Nach Bernoulli ist mit Gl. (7.139) der Druck gegeben durch

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = \text{const} = P_0$$

Einsetzen in Gl. (7.143) liefert (P_0 ist eine Konstante)

$$\mathbf{f} = - \oint_C \left(P_0 - \frac{\rho v^2}{2} \right) \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C \frac{\rho v^2}{2} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

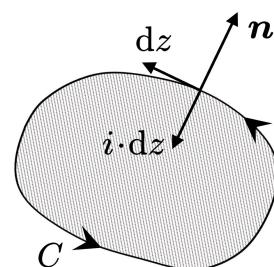


Abb. 7.31

In komplexer Darstellung geht $\mathbf{n} \, ds$ über in $-idz$ mit

$$-idz = -i(dx + idy) = dy - idx$$

und mit $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ sowie $f = f_x + if_y$ erhält man für die Kraft

$$f = -i\frac{\rho}{2} \oint_C v^2 \cdot dz \quad (7.144)$$

Auf der Berandung C gilt wieder die Randbedingung, dass die Normalkomponente der Geschwindigkeit \mathbf{v} verschwinden muss. Mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ und dem Linienelement $d\mathbf{s} = (dx, dy)$ gilt also

$$\mathbf{v}_\perp \cdot d\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = v_x dy - v_y dx = 0 \quad (7.145)$$

Mit der komplexen Geschwindigkeit $w'(z) = v_x - iv_y$ betrachtet man nun die Größen $w'(z)dz$ sowie $w'(z)^2 dz$. Für $w'(z)dz$ erhält man

$$\begin{aligned} w'(z)dz &= (v_x - iv_y)(dx + idy) \\ &= (v_x dx + v_y dy) + i(v_x dy - v_y dx) \\ &= \mathbf{v} d\mathbf{s} + i \underbrace{\mathbf{v}_\perp d\mathbf{s}}_{=0} \end{aligned}$$

wobei der letzte Term wegen Gl. (7.145) verschwindet. Damit findet man für $w'(z)^2 dz$ wieder unter Benutzung von $v_x dy = v_y dx$ aus Gl. (7.145)

$$\begin{aligned} w'(z)^2 dz &= w'(z)(w'(z)dz) = (v_x - iv_y)(v_x dx + v_y dy) \\ &= (v_x^2 dx + v_y^2 dy) - i(v_x^2 dy + v_y^2 dx) = v^2 \overline{dz} \end{aligned}$$

Somit gilt $v^2 dz = \overline{w'(z)^2 dz}$ und Gl. (7.144) lässt sich umschreiben zu

$$f = -i\frac{\rho}{2} \oint_C \overline{w'(z)^2 dz} \quad (7.146)$$

Aus Gl. (7.127) erhält man für $w'(z)^2$

$$w'(z)^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \mathcal{O}(z^{-2})$$

Mit $v_\infty = v_{x_\infty} - iv_{y_\infty}$ und dem **Residuensatz** erhält man dann für die komplexe konjugierte von f in Gl. (7.146)

$$\bar{f} = i\frac{\rho}{2} \oint_C w'(z)^2 dz = i\frac{\rho}{2} \cdot \frac{2\Gamma}{2\pi i} (v_{x_\infty} - iv_{y_\infty}) \cdot 2\pi i = \rho \Gamma (v_{y_\infty} + iv_{x_\infty})$$

und entsprechend für f

$$f = \rho\Gamma(v_{y_\infty} - iv_{x_\infty}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f} = \rho\Gamma \begin{pmatrix} v_{y_\infty} \\ -v_{x_\infty} \end{pmatrix} = -\rho\Gamma \mathbf{v}_{\perp_\infty} \quad (7.147)$$

Gl. (7.147) ist der Satz von Kutta-Joukowski. Er besagt dass f , die pro Längeneinheit auf den Körper wirkende Kraft, proportional zu Γ ist und da Γ reell ist, steht diese Kraft senkrecht zur komplexen Geschwindigkeit im Unendlichen, also zu $v_\infty = v_{x_\infty} - iv_{y_\infty}$. Nach Gleichung Gl. (7.147) wirkt nur eine Kraft auf den Körper falls $|\Gamma| > 0$.

Für die Kraft auf den umströmten Zylinder in Abb. 7.28 ergibt sich mit $\mathbf{v}_{\perp_\infty} = (0, -u)$ aus Gl. (7.147) unmittelbar

$$\mathbf{f} = (0, -\rho\Gamma u) \quad (7.148)$$

Das gleiche Ergebnis erhält man durch direkte Integration von Gl. (7.143). Mit Gl. (7.140) ist der Druck an der Zylinderoberfläche gegen durch

$$P = P_\infty + \frac{\rho}{2} \left\{ u^2 - \left(2u \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right\} \quad (7.149)$$

Mit dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ und der Parametrisierung des Linienelements der Zylinderberandung $ds = Rd\varphi$ erhält man für die Kraft pro Längeneinheit auf den Zylinder nach Gl. (7.143)

$$\mathbf{f} = - \oint_C P \mathbf{n} ds = - \int_0^{2\pi} P \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} R d\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\Gamma u \end{pmatrix} \quad (7.150)$$

Dieses Ergebnis entspricht erwartungsgemäß dem von Gl. (7.148) das direkt aus dem Satz von Satz von Kutta-Joukowski in Gl. (7.147) bestimmt wurde. Multipliziert man die auf den Kreiszylinder einwirkende Kraft \mathbf{f} pro Längeneinheit in Gl. (7.148) mit der Länge des Zylinders, dann erhält man die bereits in Gl. (7.81) gefundene Lösung für die durch Zirkulation verursachte Auftriebskraft welche ein umströmter Körper erfährt.

Übertragung der Ergebnisse für den Zylinder auf beliebige Profile

Von großer praktischer Bedeutung in der Bestimmung des Strömungsverhaltens von Objekten beliebigen Profils ist die konforme Abbildung. Zum einen ist die Zirkulation unter konformen Abbildungen invariant und zum anderen stellt die Winkeltreue der konformen Abbildung sicher, dass die Randbedingungen auf der Oberfläche eines umströmten Körpers korrekt mittransformiert werden. Beides zusammen ermöglicht es mit Hilfe einer bekannten Potenzialströmung, beispielsweise um einen Kreiszylinder, eine unbekannte Potenzialströmung um eine Objekt mit unterschiedlicher Geometrie zu bestimmen.

Beispiel 7.8 Potenzialströmung um eine Platte

Es soll die Potenzialströmung um eine Platte bestimmt werden. Hierzu wird zuerst die bekannte Potenzialströmung um einen Kreiszylinder in die Potenzialströmung um eine Ellipse überführt. Die entsprechende konforme Abbildung ist

$$z \mapsto \tilde{z} = f(z) = z + \frac{\Delta^2}{z} \quad (7.151)$$

wobei Δ ein skalierbarer Parameter ist. Mit $\Delta = 1$ und $f(z)$ mit einem Vorfaktor $1/2$ versehen ist Gl. (7.151) die sogenannte Joukowski-Funktion die bei vielen Problemen in der Strömungsmechanik hilfreich ist. Einsetzen von $z = re^{i\varphi}$ in $f(z)$ und Trennung in Real und Imaginärteil ergibt für $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$

$$\tilde{x} = \left(r + \frac{\Delta^2}{r} \right) \cos \varphi = \left(1 + \frac{\Delta^2}{r^2} \right) \cdot x$$

und

$$\tilde{y} = \left(r - \frac{\Delta^2}{r} \right) \sin \varphi = \left(1 - \frac{\Delta^2}{r^2} \right) \cdot y$$

Einsetzen in die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ergibt

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(1 + \frac{\Delta^2}{r^2} \right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(1 - \frac{\Delta^2}{r^2} \right)^2} = r^2$$

beziehungsweise umgeschrieben

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(r + \frac{\Delta^2}{r} \right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(r - \frac{\Delta^2}{r} \right)^2} = \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1 \quad (7.152)$$

Gl. (7.152) ist also die Gleichung für eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = r + \frac{\Delta^2}{r} \quad \text{und} \quad b = r - \frac{\Delta^2}{r} \quad (7.153)$$

Sei nun $r = R$ der Radius des betrachteten Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Für $\Delta \rightarrow R$ geht die große Halbachse der Ellipse in Gl. (7.153) gegen $a = R$ und die kleine Halbachse geht gegen $b = 0$, die Ellipse geht also in eine Platte über. Die in Abb. 7.32 skizzierte Transformation mit zwei Singularitäten bei $\pm R$ bildet die Kreislinie eindeutig in die Umrandung der Platte ab und die entsprechende Vorschrift für die Umkehrabbildung lautet

$$z = \frac{1}{2} \left(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 4R^2} \right) \quad (7.154)$$

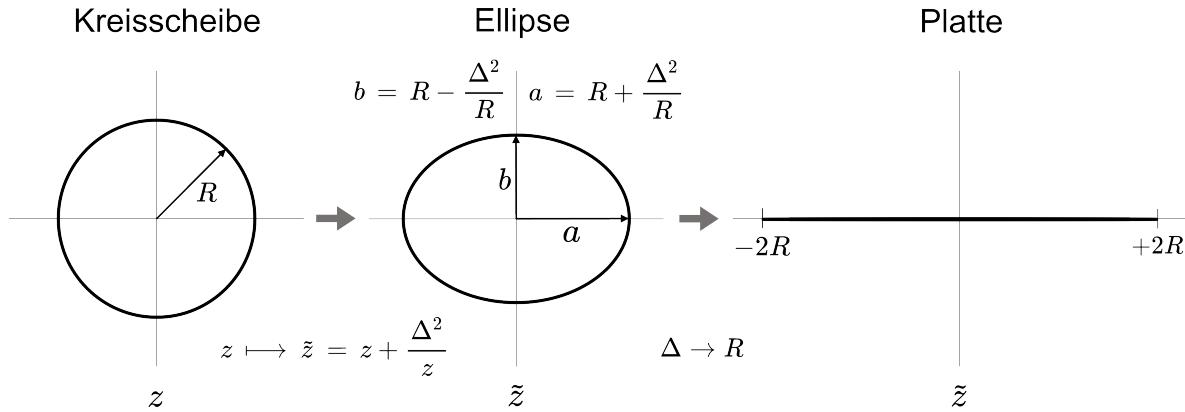


Abb. 7.32: Konforme Abbildung einer Kreisscheibe in ein Platte.

Das komplexe Geschwindigkeitspotenzial $w(z)$ wird nach der gleichen Vorschrift wie die Kreislinie transformiert

$$w(z) \mapsto \tilde{w}(\tilde{z}) \quad \text{mit} \quad \tilde{z} = z + \frac{R^2}{z}$$

Betrachtet man das komplexe Geschwindigkeitspotenzial für den umströmten Kreiszylinder aus Gl. (7.134) so ist ersichtlich, dass im Unendlichen die Strömungen für Kreiszylinder und Platte identisch sind. Es gilt also

$$w(z \rightarrow \infty) = u \cdot z \quad \text{und} \quad \tilde{w}(\tilde{z} \rightarrow \infty) = u \cdot \tilde{z}$$

Zudem ist unmittelbar klar, dass die Transformation von Kreiszylinder zu Platte die Zirkulation unverändert lässt. Mit Gl. (7.150) folgt damit auch direkt, dass die Kraft auf die Platte und die Kraft auf den Kreiszylinder identisch sind. Mit der Transformation der Strömungslinien werden auch die Staupunkte des umströmten Kreiszylinders bei $x = \pm R$ in Abb. 7.29a in die entsprechenden Punkte der Platte bei $x = \pm 2R$ überführt. Betrachtet man nun nur den Zirkulationsterm in Gl. (7.134), das heißt $u = 0$ in Gl. (7.134) dann erhält man

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad \text{und} \quad \tilde{w}(\tilde{z}) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \tilde{z}$$

für die Wirbelströmung um die Kreiszylinderscheibe bzw. für die Wirbelströmung um die Platte. Für die entsprechenden Stromfunktionen gilt somit nach Gl. (7.133) für die Kreiszylinderscheibe

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \tag{7.155}$$

und für die Platte gilt entsprechend

$$\tilde{\Psi}(r, \varphi) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| z + \frac{R^2}{z} \right| \tag{7.156}$$

Die Stromfunktion für die Kreischeibe für $u = 0$ in Gl. (7.155) hängt also nicht von φ ab und variiert nur mit dem Logarithmus des Abstands vom Koordinatenursprung. Die Stromfunktion des umströmten Kreiszylinders besteht also für $u = 0$ aus konzentrischen Kreisen. Zur entsprechenden Stromfunktion für die Platte in Gl. (7.156) betrachtet man zuerst das Argument des Logarithmus

$$\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = r e^{i\varphi} + \frac{R^2}{r} e^{-i\varphi} = \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{R^2}{r}\right) \sin \varphi$$

Es gilt also (wie bereits aus der Herleitung von Gl. (7.152) für $\Delta = R$ ersichtlich)

$$\tilde{x} = \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos \varphi \quad \text{und} \quad \tilde{y} = \left(r - \frac{R^2}{r}\right) \sin \varphi$$

Der Winkel φ lässt sich eliminieren und man erhält mit

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 = \frac{\tilde{x}^2}{\left(r + \frac{R^2}{r}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(r - \frac{R^2}{r}\right)^2}$$

die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = r + \frac{R^2}{r} \quad \text{und} \quad b = r - \frac{R^2}{r}$$

Die Fokuspunkte der Ellipse auf der reellen Achse liegen bei

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \pm 2R$$

und sind unabhängig von r . Das heißt, die konzentrischen Kreise auf denen die Stromfunktion des umströmten Kreiszylinders konstant ist, werden in konfokale Ellipsen transformiert auf denen die Stromfunktion für die umströmte Platte jeweils konstant ist.

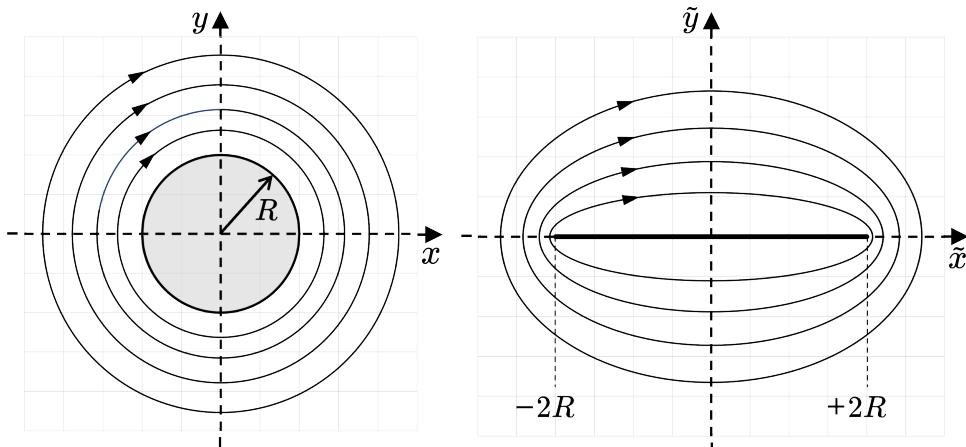


Abb. 7.33: Überführung der zirkulären Strömung um einen Kreiszylinder (links) mittels konformer Abbildung in die entsprechende Strömung um den in eine Platte transformierten Kreiszylinder (rechts). Der für Γ gewählte Wert entspricht dem aus Abb. 7.29b.

Abb. 7.33 zeigt die Stromfunktion für Zirkulation um den Kreiszylinder und die transformierte Stromfunktion für die entsprechende Zirkulation um die Platte. Der in Abb. 7.33 gewählte Wert für Γ ist identisch mit dem Wert aus Abb. 7.29b. Im Unterschied zu Abb. 7.29b ist in Abb. 7.33 aber $u = 0$; die Äquipotenziallinien der Stromfunktion in Abb. 7.33 entsprechen den Äquipotenziallinien 2, 3, 4 und 5 in Abb. 7.29b (vom Zylinderrand aus gezählt).

Das hier gezeigte Beispiel illustriert wie sich mittels konformer Abbildung aus dem bekannten Strömungsverhalten eines Objekts das unbekannte Strömungsverhalten eines anderen Objekts bestimmen lässt. Das geht aber nur mit bestimmten Einschränkungen wie beispielsweise den oben erwähnten Singularitäten bei $\tilde{x} = \pm 2R$, welche in diesem Fall zu unphysikalischen Lösungen für die Strömung an diesen Punkten führen. Das Verständnis des Strömungsverhaltens direkt an der Oberfläche der Platte erfordert also an den Plattenenden eine gesonderte Betrachtung, beispielsweise indem das Strömungsverhalten des Objekts in einer gedrehten Strömung analysiert wird.

Anhang

I) Aus der Vektor Analysis

Summary of important equations

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \nabla \Lambda = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla(\Lambda_1 \Lambda_2) = (\nabla \Lambda_1) \Lambda_2 + \Lambda_1 (\nabla \Lambda_2) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla(\Lambda \mathbf{A}) = (\nabla \Lambda) \mathbf{A} + \Lambda (\nabla \mathbf{A}) \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{A}) = \Lambda (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times \nabla \Lambda \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{A.8})$$

Wann kann $\nabla \cdot \mathbf{A}$ frei gewählt werden?

Behauptung:

Für das Vektorpotenzial \mathbf{A} eines Vektorfeldes $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ kann $\nabla \cdot \mathbf{A}$ geeignet gewählt werden, insbesondere kann $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ gewählt werden.

Beweis:

Angenommen es gebe zwei Vektorpotenziale \mathbf{A} und \mathbf{A}' für die gilt

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}'$$

Dann muss für die Größe

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}' \quad \text{gelten} \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

Das bedeutet aber, dass \mathbf{B} der Gradient eines Skalarfeldes Λ sein muss da nach Gl. (A.2) die Rotation eines Gradienten verschwindet. Es muss also gelten

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \Lambda$$

Bis auf den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes Λ ist das Vektorpotenzial \mathbf{A} eindeutig bestimmt. Wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \Lambda$$

kann $\nabla^2 \Lambda$ passend gewählt werden, um $\nabla \cdot \mathbf{A}$ einen gewünschten Wert zu geben, wie beispielsweise $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Die Weber Transformation

Die Weber-Transformation lautet

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{F}^2 - [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{F})] \quad (\text{A.9})$$

Für den Beweis von Gl. (A.9) schreibt man die rechte Seite explizit aus. Dabei schreibt man zuerst $\text{rot } \mathbf{F}$ als

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{rot } \mathbf{F})_x \\ (\text{rot } \mathbf{F})_y \\ (\text{rot } \mathbf{F})_z \end{pmatrix}$$

Damit kann man den zweiten Term auf der rechten Seite von Gl. (A.9) ausschreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\text{rot } \mathbf{F})_x \\ (\text{rot } \mathbf{F})_y \\ (\text{rot } \mathbf{F})_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_y (\text{rot } \mathbf{F})_z - F_z (\text{rot } \mathbf{F})_y \\ F_z (\text{rot } \mathbf{F})_x - F_x (\text{rot } \mathbf{F})_z \\ F_x (\text{rot } \mathbf{F})_y - F_y (\text{rot } \mathbf{F})_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_y \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - F_z \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \\ F_z \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - F_x \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ F_x \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - F_y \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt den ersten Term auf der rechten Seite von Gl. (A.9) betrachten

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{F}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2) = \begin{pmatrix} F_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + F_y \frac{\partial F_y}{\partial x} + F_z \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ F_x \frac{\partial F_x}{\partial y} + F_y \frac{\partial F_y}{\partial y} + F_z \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ F_x \frac{\partial F_x}{\partial z} + F_y \frac{\partial F_y}{\partial z} + F_z \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mit diesen beiden ausgeschriebenen Termen der rechten Seite von Gl. (A.9) erhält man nach Einsetzen und einer wenig Rechnung für die rechte Seite von Gl. (A.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{F}^2 - [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{F})] &= \begin{pmatrix} F_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + F_y \frac{\partial F_x}{\partial y} + F_z \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ F_x \frac{\partial F_y}{\partial x} + F_y \frac{\partial F_y}{\partial y} + F_z \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ F_x \frac{\partial F_z}{\partial x} + F_y \frac{\partial F_z}{\partial y} + F_z \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \left(F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} + F_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{F} \nabla) \mathbf{F} \end{aligned}$$

Das aber ist genau die linke Seite von Gl. (A.9).

Graßmann Identität

Für das Vektorprodukt aus drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} gilt die Graßmann Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

beziehungsweise

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

II) Aus der Funktionentheorie

Komplexe Differenzierbarkeit

In der Funktionentheorie heißt eine komplexwertige Funktion holomorph falls sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches D komplex differenzierbar ist. Sei

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

auf D holomorph. Durch spezielle Wahl von $h = t$ oder $h = it$ ($t \in \mathbb{R}$) wird die Ableitung

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = u_x + iv_x$$

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \frac{u_y}{i} + v_y = v_y - iu_y$$

Daher gelten für den Real- beziehungsweise Imaginärteil von $f'(z)$ die folgenden Differentialgleichungen:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

Diese sogenannten Cauchy-Riemann Differentialgleichungen folgen unmittelbar aus der Differenzierbarkeit von $f(z)$. Sind umgekehrt u, v stetig differenzierbare Lösungen der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf D , dann ist $f(z)$ eine auf D holomorphe Funktion.

Zur Ableitung von $f(z)$:

$$f(z+h) - f(z) = \text{grad } u \cdot (\text{Re } h, \text{Im } h) + i \cdot \text{grad } v \cdot (\text{Re } h, \text{Im } h) + \text{Rest}(h)$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Rest}(h)}{|h|} = 0$; Damit:

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= (u_x, u_y) \cdot (\text{Re } h, \text{Im } h) + i \cdot (-u_y, u_x) \cdot (\text{Re } h, \text{Im } h) + \text{Rest}(h) \\ &= u_x \cdot \underbrace{(\text{Re } h + i \cdot \text{Im } h)}_h - iu_y \cdot \underbrace{(\text{Re } h + i \cdot \text{Im } h)}_h + \text{Rest}(h) \\ &= u_x h - iu_y h + \text{Rest}(h) \end{aligned}$$

Daraus folgt: f ist in z komplex differenzierbar mit Ableitung

$$f'(z) = u_x - iu_y$$

Die Integralformel von Cauchy

f sei holomorph auf D . Für jedes $z_0 \in D$ und jedes $r > 0$ derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ in D enthalten ist, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Dabei ist $|z - z_0| < r$ und $\gamma_r = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Allgemeine Version der Cauchy Integralformel

f sei holomorph im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma : I \mapsto D$ eine geschlossene Kurve derart, dass für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ die Umlaufzahl $n_\gamma(z_0) = 0$ (eventuell vorhandene Löcher in D sollen von γ nicht umschlossen werden). Dann gilt

$$n_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad z \in D \setminus \gamma(I)$$

Ein **Beweis** aus dem Liouvillschen Satz nach Dixon (1971):

$$E := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I); n_\gamma(z) = 0\}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C} = D \cup E$

1) Hilfsfunktion für $(z, w) \in D \times D$

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(w) & \text{falls } w = z \end{cases}$$

g ist in $D \times D$ stetig und für jedes w holomorph in z .

2) Durch Integration erhält man eine zweite Hilfsfunktion

$$G(z) = \begin{cases} \int_{\gamma} g(z, w) dw & \text{falls } z \in D \\ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{falls } z \in E \end{cases}$$

Auf $z \in D \cap E$ gilt, dass beide Ausdrücke für $G(z)$ identisch sind weil die Umlaufzahl n_γ dort 0 ist:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i n_{\gamma}(z) f(z) \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} g(w, z) dw\end{aligned}$$

Daher ist $G(z)$ eine ganze Funktion. Im Fall $z \in E$ gilt für $G(z)$ dass $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = 0$. $G(z)$ ist also eine beschränkte ganze Funktion und somit nach dem Satz von Liouville konstant mit $G(z) = 0$ für alle z .

3) Für die $z \in D \setminus \gamma(I)$ ist die erste Formel zuständig. Resultat:

$$0 = G(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw$$

das heißt

$$n_{\gamma}(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

□

Allgemeine Version des Integralsatzes von Cauchy

f sei holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma : I \mapsto D$ sei eine geschlossene Kurve mit Umlaufzahl $n_{\gamma}(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Dann ist

$$\oint_{\gamma} f(w) dw = 0$$

Beweis:

Durch Einsetzen der beiden Funktionen $f(z), zf(z)$ in die Integralformel.

Für $z \in D$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{wf(w)}{w-z} dw}_{n_{\gamma}(z)(zf(z))}$$

$$-\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf(w)}{w-z} dw}_{z \cdot n_{\gamma}(z)f(z)} = 0$$

□

Definition des einfachen Zusammenhangs:

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt „einfach zusammenhängend“, wenn für jede geschlossene Kurve $\gamma : I \mapsto D$ und alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ die Umlaufzahl $n_{\gamma}(z_0) = 0$.

|||

Bemerkung:

- (1) Für auf einfach zusammenhängenden Gebieten D holomorphe Funktionen f gilt für jede geschlossene Kurve $\gamma : I \mapsto D$

$$\oint_{\gamma} f(w) dw = 0$$

Der Residuensatz

Im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ sei gegeben eine analytische Funktion $f(z)$. Ferner sei $\gamma : I \mapsto D$ eine geschlossene Kurve, deren Umlaufzahl $n_{\gamma}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ abgesehen von endlich vielen Ausnahmen z_1, z_2, \dots, z_N . Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w) dw = \sum_{k=1}^N n_{\gamma}(z_k) \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Beweis:

z_1, z_2, \dots, z_N sind isolierte Singularitäten in einer punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_k| < \varrho$ in welcher $f(z)$ als Laurent-Reihe dargestellt werden kann

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)} (z - z_k)^n$$

Sei

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(k)} (z - z_k)^{-n}$$

der Hauptteil von f bei z_k . Dann ist

$$g(z) = f(z) - f_1(z) - \dots - f_N(z)$$

sogar in $D' = D \cup \{z_1, \dots, z_N\}$ holomorph (beachte: $f_k(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$). Dann ist nach dem Cauchy Integralsatz

$$\int_{\gamma} g(w) dw = 0$$

also

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma} f_k(w) dw$$

In

$$f_k(z) = \frac{a_{-1}^{(k)}}{(z - z_k)} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}^{(k)} (z - z_k)^{-n}$$

hat der zweite Summand in $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ eine Stammfunktion, das heißt

$$\int_{\gamma} f_k(w) dw = \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^{(k)}}{w - z_k} dw = \text{Res}(f, z_k) \cdot 2\pi i n_{\gamma}(z_k)$$

□

z_0 heißt eine außerwesentliche Singularität bzw. Pol n -ter Ordnung, wenn $(z - z_0)^n f(z)$ nach z_0 holomorph fortgesetzt werden kann für ein $n \in \mathbb{N}$. Für das Residuum gilt dann

$$\text{Res}(f, z = z_0) = a_{-1}$$

und a_{-1} kann berechnet werden, ohne dass die Laurent-Reihe von $f(z)$ bestimmt werden muss. Hat $f(z)$ in z_0 einen Pol n -ter Ordnung dann gilt

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right)$$

III) Häufig gebrauchte Näherungen

Für kleine x gelten nach der Taylor-Entwicklung um den Aufpunkt $x = 0$ die folgenden Näherungen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots \quad (\text{A.10})$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \dots \quad (\text{A.11})$$

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

ISBN 978-1-951894-18-4