

HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Zweiter Teil



HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Zweiter Teil

Stefan Wurm

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

Copyright © 2022 ATICE-LLC. Alle Rechte vorbehalten. Veröffentlicht in den Vereinigten Staaten von Amerika.

Erste deutschsprachige ATICE E-Book Ausgabe | ISBN 978-1-951894-06-1.

Für Informationen über die Genehmigung zur Vervielfältigung von Auszügen aus diesem Buch wenden Sie sich bitte an ATICE LLC, www.atice-llc.com.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Grundzüge der Integralrechnung	1
1.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	7
1.1.1 Die Substitutionsmethode	8
1.1.2 Methode der partiellen Integration	9
1.2 Uneigentliches Integral	10
1.2.1 Die Eulersche Gammafunktion	12
1.3 Riemann-Summen und Bogenlänge	13
2 Fourier Reihen	17
2.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen	20
2.1.1 Das Gibbs'sche Phänomen	25
2.1.2 Differentiation der Grenzfunktion	26
2.2 Absolut konvergente Reihen	28
2.3 Theorie der Fourier-Reihen	30
2.3.1 Der Vollständigkeitssatz	35
3 Der dreidimensionale euklidische Raum	39
3.1 Das Skalarprodukt	40
3.2 Das Vektorprodukt	42
3.2.1 Geometrische Interpretation	43
3.3 Die Isometrie des euklidischen \mathbb{R}^3	46
3.3.1 Beschreibung der linearen Selbstabbildungen durch Matrizen	47
3.4 Das Spatprodukt dreier Vektoren	48
3.4.1 Geometrische Bedeutung des Spatprodukts	49
3.5 Die Inverse Matrix	51

3.5.1	Die orthogonale Gruppe O_3 des euklidischen \mathbb{R}^3	52
4	Lineare Gleichungssysteme	55
4.1	Die Lösung linearer Gleichungssysteme	57
4.1.1	Der Gaußsche Algorithmus	57
5	Ebene und räumliche Kurven	63
5.1	Definition der Kurvenlänge	65
5.2	Das Kurvenintegral über ein Vektorfeld	66
5.3	Polarkoordinaten für ebene Kurven	68
5.4	Die Krümmung einer ebenen Kurve	70
6	Umgebungen und Limiten	77
6.1	Fixpunktsatz	81
7	Partielle und totale Ableitung	85
7.1	Definition der partiellen Ableitung	85
7.1.1	Verallgemeinerte Kettenregel	88
7.2	Definition der totalen Ableitung	90
7.2.1	Geometrische Eigenschaften der totalen Ableitung	92
8	Höhere Ableitungen, Taylor Formel und lokale Extrema	95
8.1	Die Symmetrie der zweiten Ableitung	95
8.1.1	Integrabilitätskriterium für Vektorfelder	96
8.2	Eine einfache Version der Taylorformel im \mathbb{R}^n	98
8.2.1	Anwendung der einfachen Version der Taylorformel auf die statio-nären Punkte	99
9	Implizite Funktionen und Anwendungen	103
9.1	Existenzsatz für implizite Funktionen	105
9.2	Lokale Extrema mit Nebenbedingungen	107
9.3	Das Problem der Umkehrabbildung (Koordinatentransformation)	113

Vorwort

An deutschsprachigen Hochschulen gehören Vorlesungen zu Höherer Mathematik zum festen Bestandteil der Ausbildung in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Diese Vorlesungen zielen darauf ab den Studierenden die mathematischen Grundlagen für ihre jeweiligen Fachgebiete zu vermitteln, typischerweise in den ersten vier Semestern eines Studiengangs. So war es auch bei mir als ich zu Beginn meines Physikstudiums vor gut vierzig Jahren zum ersten Mal den Hörsaal betrat in welchem Prof. Dr. Armin Leutbecher die Vorlesung Höhere Mathematik I hielt. Es ist mir klar, dass sich nicht alle gleichermaßen für Mathematik begeistern können oder wollen. Aber ich vertraue darauf, dass jene die diese Zeilen jetzt lesen es schon richtig verstehen werden, wenn ich hier bekenne, dass diese Vorlesungen mich beglückt haben. Beglückt in dem Sinne, dass ich mich damals auf jede einzelne dieser Vorlesungen im Voraus freute. Das hatte sicher nicht ausschließlich mit dem Inhalt der Vorlesungen zu tun, sondern mindestens ebenso mit der Art und Weise wie dieser von Prof. Leutbecher vermittelt wurde. Natürlich erwartet man von einem Mathematiker Klarheit. Aber jene Klarheit, mit der professionelle Mathematiker in aller Regel ihre Diskussionen führen, überträgt sich nicht notwendigerweise darauf, wie ein Mathematiker dann eventuell sein Wissen Studierenden vermittelt. Prof. Leutbecher's Klarheit und Stil des Vortrags machten seine Höhere Mathematik Vorlesungen zu einem intellektuellen Vergnügen. Zudem hatte ich das Glück, dass die Übungen zu Prof. Leutbecher's Vorlesungen von Dr. Peter Vachenauer betreut wurden. Anfang der 1990er erschien die erste Ausgabe eines zweibändigen Lehrbuchs zu Höherer Mathematik dessen Koautor Dr. Vachenauer ist. Die exemplarische Methodik und Sorgfalt, mit welcher der Stoff mit den Lernenden in Dr. Vachnauers Übungen zu meiner Zeit an der TUM vertieft wurde, findet sich in diesem Lehrbuch wieder.

Vor etwas mehr wie einem Jahr stolperte ich beim Aufräumen über meine Mitschrift der Höhere Mathematik Vorlesungen aus den Jahren 1981-1983 und die entsprechenden Übungen. Zuerst war ich verwundert, dass diese gut vierzig Jahre alten Unterlagen bei diversen Umzügen, auch zwischen Kontinenten, nicht verloren gingen. Neugierig begann ich in meinen Vorlesungsaufzeichnungen zu blättern und unvermittelt beschlich mich dabei wieder die gleiche Freude wie ich sie verspürte als ich damals im Hörsaal saß und gebannt dem Vortrag von Prof. Leutbecher zuhörte. Wiewohl diese Notizen, meine Mitschrift von Prof. Leutbecher's Vorlesungen, kein Lehrbuch ersetzen können, vermitteln

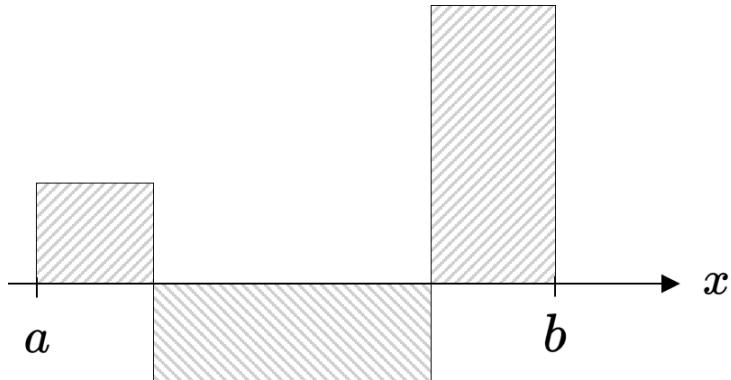
sie wesentliche Inhalte Höherer Mathematik mit einer Lebendigkeit, die sie nach meinem Dafürhalten zu einem Lesevergnügen für Studierende oder andere ernstlich an Mathematik Interessierte machen sollten. Allzu oft sind solche Notizen mit Fehlern behaftet und das war auch hier nicht anders. Nach mehrmaliger Durchsicht und Korrektur meiner Aufzeichnungen ist hoffentlich die große Mehrzahl davon bereinigt. Klarheit und Stil von Prof. Leutbecher's Vortrag zu bewahren, so wie ich diese in meiner Mitschrift vor mehr als vierzig Jahren einfing, darauf legte ich bei der Überarbeitung meiner Notizen größten Wert. Inwieweit dies gelungen ist mag der Leser beurteilen. Der vorliegende Band, **HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil**, beinhaltet den Stoff der Vorlesung Höhere Mathematik II wie sie im Sommersemester 1982 an der TUM von Prof. Leutbecher gehalten wurde.

Stefan Wurm

Albany, New York

Mai 2022

1. Grundzüge der Integralrechnung



Ein Integral für Treppenfunktionen

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Treppenfunktion, falls eine Unterteilung von $[a, b]$ existiert, das heißt eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ derart, dass jede der Restriktionen $\varphi /]x_{k-1}, x_k[$ konstant ist. Eine solche Unterteilung heißt mit φ verträglich. Jede Verfeinerung (Hinzufügung weiterer Punkte) ist ebenfalls mit φ verträglich!

Das Integral als Rechtecksumme:

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)(x_k - x_{k-1})$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der φ -zulässigen Unterteilung weil je zwei Unterteilungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen!

Größenvergleich zwischen reellen Funktionen!

$$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Man sagt $f \leq g$, falls gilt

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$$

Elementare Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen

Für je zwei Treppenfunktionen ψ, φ auf $[a, b]$ gilt:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx &= \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx \\ \int_a^b (\lambda \varphi)(x) dx &= \lambda \int_a^b \varphi(x) dx \end{aligned} \right\} \text{Linearität}$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx, \quad \text{falls } \varphi \leq \psi \quad \text{Monotonie}$$

Man hat zu beachten, dass Unterteilungen von $[a, b]$ existieren, die mit φ und ψ gleichzeitig verträglich sind!

Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion f ist dort sogar gleichmäßig stetig, das heißt zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \quad \text{falls } x, x' \in [a, b] \quad \text{und} \quad |x - x'| < \delta$$

Indirekter Beweis:

Wie lautet die Negation der Behauptung im Satz? Es gibt ein $\epsilon_0 > 0$ derart, dass für jedes noch so kleine $\delta > 0$ Punkte $x, x' \in [a, b]$ existieren mit

$$|x - x'| < \delta \quad \text{aber} \quad |f(x) - f(x')| \geq \epsilon_0$$

Beweisgedanke: $\delta = 1/k$ für $k = 1, 2, 3, \dots$; Dann existieren Folgen $(x_k), (x'_k)$ von Punkten auf $[a, b]$ mit

$$|x_k - x'_k| < \frac{1}{k} \quad (*)$$

$$|f(x_k) - f(x'_k)| \geq \epsilon_0 \quad (**)$$

Das führt zu einem Widerspruch. Nach Bolzano-Weierstraß findet man Teilfolgen $x_{n_k} = y_k, x'_{n_k} = y'_k$ welche konvergieren auf $[a, b]$. Sei etwa

$$y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \quad \text{dann gilt auch wegen } (*) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y'_k = y_\infty$$

Nach (**)

$$\epsilon_0 \leq |f(y_k) - f(y'_k)| \leq |f(y_k) - f(y_\infty)| + |f(y_\infty - f(y'_k))|$$

Weil f in y_∞ stetig ist konvergiert die rechte Seite gegen 0, ist also nicht immer $\geq \epsilon_0$. Daher ist f im Gegensatz zur Annahme gleichmäßig stetig.

□

Approximation durch Treppenfunktionen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi(x) - \varphi(x) \leq \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + \frac{\epsilon}{2} \\ \varphi(x) &:= f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{falls } x_{k-1} < x < x_k \end{aligned}$$

Für stetiges $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt daher

$$\inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx = \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x) dx$$

wobei φ die Treppenfunktionen $\leq f$ durchläuft und ψ die Treppenfunktionen $\geq f$.

Definition

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x) dx$$



Die Identität von Infimum der Obersummen und Supremum der Untersummen gilt für stückweise stetige Funktionen, das heißt solche f für die eine Unterteilung

$$E = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\} \quad (x_{k-1} < x_k)$$

existiert mit stetigen Restriktionen $f /]x_{k-1}, x_k[\quad 1 \leq k \leq n$, welche sich überdies stetig in die Endpunkte fortsetzen lassen.

Elementare Integrationsregeln

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b (\lambda f)(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &\leq \int_a^b g(x) dx , \quad \text{falls } f \leq g \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Linearität} \\ \text{Monotonie} \end{array}$$

Integralabschätzungen

- a) Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, $g(x) \geq 0$
 $\forall x \in [a, b]$ dann

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

- b) Ist f überdies stetig auf $[a, b]$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

Das ist der Mittlewertsatz der Integralrechnung!

Der Beweis der ersten beiden Ungleichungen a) benutzt nur Monotonie und Linearität des Integrals. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx - m \int_a^b g(x) dx &= \\ &= \int_a^b \underbrace{(f(x) - m)g(x)}_{\geq 0} dx \stackrel{\text{Monotonie}}{\geq} \int_a^b 0 dx = 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung

Für Teil b): $m = \text{Minimum } f(x) \ x \in [a, b]$
 $M = \text{Maximum } f(x) \ x \in [a, b]$

m, M sind Funktionswerte von f nach dem Satz vom Maximum und vom Minimum.¹

¹Vergleiche mit Kapitel 5, Abschnitt 3 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Erster Teil.

Nach **a)** ist $\int_a^b f(x)g(x) dx$ eine Zahl zwischen

$$m \int_a^b g(x) dx \quad \text{und} \quad M \int_a^b g(x) dx$$

also gleich

$$Z \int_a^b g(x) dx \quad \text{mit} \quad m \leq Z \leq M$$

Zwischenwertsatz: $Z = f(\xi)$

□

Bemerkung:

- (1) Wählt man $M := \sup |f(x)|$ $x \in [a, b]$, $m = -M$ und $g(x) = 1$ $\forall x \in [a, b]$, so folgt die Standard-Integralabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |b - a| M$$

Differentiation und Integration

Das Integral wird als Funktion der oberen (oder unteren) Integralgrenze betrachtet. Zur Vereinheitlichung der Berechnung

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad ; \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{falls } a < b)$$

Ist f eine stetige reelle Funktion auf dem offenen Intervall I , dann gilt für jedes Triple $a_1, a_2, a_3 \in I$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x) dx = \int_{a_1}^{a_3} f(x) dx$$

Ist nämlich $a = \min(a_1, a_2, a_3)$, $b = \max(a_1, a_2, a_3)$ und c die dritte Zahl, dann

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

Daraus folgen alle sechs Fälle durch Vertauschung von Integralgrenzen. Die Standard-Integralabschätzung bleibt für die Erweiterung gültig.

Existenzsatz für Stammfunktionen

Ist f eine auf dem offenen Intervall I stetige Funktion und $a \in I$, dann definiert

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

eine Stammfunktion F von f auf I , das heißt F ist auf I differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Bemerkung:

- (2) Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ergibt sich, dass je zwei Stammfunktionen von f auf dem Intervall I als Differenz eine Konstante haben.

Beweis:

Sei $x \in I$ fest, $\delta > 0$ sei stets so klein, dass $[x - \delta, x + \delta] \subset I$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig; Abzuschätzen ist

$$\frac{1}{h} F(x+h) - \frac{1}{h} F(x) = f(x)$$

also die Differenz vom Differentenquotienten für $F(x)$ und von $f(x)$, dem Betrage nach.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^x f(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \right| \cdot \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \left| \frac{1}{h} \right| \cdot |h| \cdot \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)| \end{aligned}$$

Da f stetig in x , existiert $\delta > 0$ mit

$$\sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)| \leq \epsilon$$

Damit ist gezeigt: $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) = f(x)$

□

1.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei f stetig auf dem offenen Intervall I , ferner sei F irgendeine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

Bemerkung: Bedeutung des Hauptsatzes

Für viele f ist je eine Stammfunktion bekannt (F). Für solche f ist die Berechnung von

$$\int_a^b f(x) dx$$

ebenso einfach wie die Berechnung der Werte $F(a)$, $F(b)$; Ein Kürzel für Stammfunktionen von f ist

$$\int f(x) dx \quad (\text{unbestimmtes Integral})$$

Beispiel Integrale:

$$\underline{1.} \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \text{falls } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\underline{2.} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\underline{3.} \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\underline{4.} \quad \int \sin x dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\underline{5.} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\underline{6.} \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \arcsin x + c \quad |x| < 1$$

Die hauptsächlichen Integrationsmethoden gewinnt man aus a) der Kettenregel und b) der Produktregel.

1.1.1 Die Substitutionsmethode

Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und ist f auf dem Bildintervall $\varphi([a, b])$ stetig, dann

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Beweis:

Sei F eine Stammfunktion von f auf dem Bildintervall $\varphi([a, b])$. Die Kettenregel sagt:

$F \circ \varphi$ ist die Stammfunktion der Funktion $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Auswertung nach dem Hauptsatz: ($LS = \text{Linke Seite}, RS = \text{Rechte Seite}$)

$$LS = F(x) \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$RS = F \circ \varphi(t) \Big|_a^b = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a)$$

□

Ein Beispiel: Integration der logarithmischen Ableitung

Für stetig differenzierbare und nullstellenfreie Funktion φ gilt

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln |\varphi(t)| + c$$

Beweis kommt aus Integral Beispiel 2) mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Beispiel Integrale (fortgesetzt):

$$7. \quad \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$8. \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^{k+1}} dx = \frac{-1}{2k(1+x^2)^k} + c$$

Lösungsansatz etwa mit Substitution $u = \varphi(x) = 1 + x^2$ und Integral Beispiel 1) oder direkt prüfen.

1.1.2 Methode der partiellen Integration

Für je zwei stetige differenzierbare Funktionen $u(x), v(x)$ gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Beweis:

Die Produktregel der Differentialrechnung sagt $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ hat als Stammfunktion $u(x)v(x)$. Unter Verwendung der Linearität des Integrals ergibt sich die Behauptung.

Zur Integration von rationalen Funktionen

Die Partialbruchzerlegung im Reellen führt auf drei Typen von Integralen

$$\int p(x) dx , \quad \int \frac{dx}{(x - x_0)^k} , \quad \int \frac{Ax + B}{(x^2 + ax + b)^k} dx$$

wo $p(x)$ eine Polynomfunktion bezeichnet. Die ersten beiden gewinnt man aus Integral Beispielen 1) und 2). Ferner

$$a^2 - 4b < 0 < \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b)$$

legt nahe, dass der dritte Typ zurückgeführt werden kann auf

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^k} dx , \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^k}$$

Die erste Klasse ist mit den Integral Beispielen 7) und 8) behandelt. Der Fall $k = 1$ in der letzten Klasse ist Integral Beispiel 5).

$$\text{Sei } J_k(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^k} :$$

$$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{k+1}} dx$$

Partielle Integration mit:

$$u = x , \quad v' = \frac{x}{(1+x^2)^{k+1}} ; \quad v = \frac{-1}{2k(1+x^2)^k}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{k+1}}}_{v'} dx = \frac{-x}{2k(1+x^2)^k} + \int \frac{dx}{2k(1+x^2)^k}$$

Beispiel Integrale (fortgesetzt):

$$9. \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}} dx = \frac{2k-1}{2k} \int \frac{dx}{(1+x^2)^k} + \frac{x}{2k(1+x^2)^k}$$

1.2 Uneigentliches Integral

Bisherige Einschränkungen: Der Integrand $f(x)$ ist erklärt auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall, ferner ist f dort beschränkt. Gelegentlich kann man sich von diesen Bedingungen befreien. Ist zum Beispiel $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und stetig, dann wird als uneigentliches Integral erklärt im Falle des Limes

$$\lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

Hier ist $b = \infty$ zugelassen. Ist bei endlichem b , f stetig ergänzbar auf $[a, b]$, dann ist der Begriff des uneigentlichen Integrals derselbe wie der bisherige des „eigentlichen“ Integrals. Klar ist die Erweiterung auf den Fall, dass das Integral ebenso definiert ist für Intervalle $]a, b]$, $]a, b[$.

Beispiel:

$$(1) \quad \int_1^\infty x^\alpha dx$$

konvergiert gegen $\frac{-1}{\alpha+1}$, falls $\alpha < -1$ ist, sonst ist das Integral divergent.

Beweis: Sei zunächst $\alpha \neq -1$, dann

$$\int_1^\beta x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^\beta = \frac{-1}{\alpha+1} + \frac{\beta^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Für $\alpha+1 < 0$ ist $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^{\alpha+1} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{(\alpha+1)\ln \beta} = 0$

Ist $\alpha + 1 > 0$, dann sogar $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^{\alpha+1} = \infty$, das Integral ist also divergent

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x} = \ln \beta$$

□

Beispiel:

$$(2) \quad \int_0^1 x^\alpha dx$$

konvergiert gegen $\frac{1}{\alpha+1}$, falls $\alpha > -1$ und divergiert sonst!

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 x^\alpha dx &= - \int_{1/\epsilon}^1 t^{-\alpha-2} dt \quad x = \frac{1}{t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{t^2} \\ &= \int_1^{1/\epsilon} t^{-\alpha-2} dt \end{aligned}$$

Limes für $\epsilon \searrow 0$ existiert genau dann (siehe [Beispiel 1](#)), wenn der Exponent < -1 , das heißt $\alpha > -1$. Ist das der Fall dann ist der Limes gleich

$$\frac{-1}{(-\alpha - 2) + 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale

Es sei $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, stetig und ≥ 0 , und das uneigentliche Integral

$$\int_a^b g(t) dt \quad \text{existiere.}$$

Ferner sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, stetig und $|f(t)| \leq g(t) \quad \forall t \in]a, b[$. Dann konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

Zum Beweis wird eine (verfeinerte) Version des Cauchy-Kriteriums verwendet.

Beispiel:

$$(3) \text{ Für jedes reelle } x \text{ konvergiert} \quad \int_1^\infty t^x e^{-t} dt$$

Beweis:

$$\text{Nach Beispiel 1 konvergiert} \quad \int_1^\infty t^{-2} dt$$

$$\text{Für jede Schranke } M > 0 \text{ konvergiert auch} \quad M \int_1^\infty t^{-2} dt$$

Die Exponentialreihe ergibt $e^t \geq \frac{t^N}{N!}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, falls $t \geq 0$. Daher $e^{-t} \leq \frac{1}{N! t^N}$ und somit

$$t^x e^{-t} \leq N! t^{x-N} \leq N! t^{-2}, \quad \text{falls } N \geq x + 2$$

Nach dem Majorantenkriterium ist daher $\int_1^\infty t^x e^{-t} dt$ konvergent!

1.2.1 Die Eulersche Gammafunktion

wird für positive x erklärt durch das (konvergente) uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Die Konvergenz ergibt sich durch Betrachtung der Teilintervalle

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{zusammen mit Beispiel 3}$$

und

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{zusammen mit Beispiel 1}$$

unter Verwendung des Majorantenkriteriums. Es gilt speziell:

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad \forall x > 0 \quad (\text{Funktionalgleichung})$$

Daher $\Gamma(n+1) = n!$

$$\int_0^\beta e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\beta = 1 - e^{-\beta} \rightarrow 1, \quad \text{falls } \beta \rightarrow \infty$$

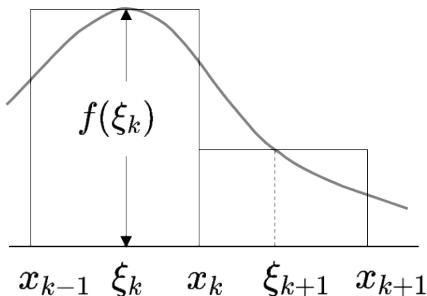
$$\Gamma(x+1) \leftarrow \int_{(\epsilon)}^\beta \underbrace{t^x}_{u} \underbrace{e^{-t}}_{v'} = -t^x e^{-t} \Big|_{(\epsilon)}^\beta + \int_{(\epsilon)}^\beta x t^{x-1} e^{-t} dt \rightarrow \Gamma(x)$$

1.3 Riemann-Summen und Bogenlänge

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stückweise stetig. Zu jeder Unterteilung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ und zu jedem System von Zwischenpunkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$ heißt

$$S = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

eine Riemann-Summe zur Unterteilung E für das Integral $\int_a^b f(x) dx$



$$S = \int_a^b \varrho(t) dt \quad \text{gilt für die spezielle Treppenfunktion} \\ \varrho(x) = f(\xi_k), \quad \text{falls } x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \varrho(b) = f(b) \quad (1 \leq k \leq n)$$

Das Integral $\int_a^b f(t) dt$ über den stückweise stetigen Integranden f wird beliebig genau approximiert durch jede Riemann-Summe zu hinreichend feiner Unterteilung E von $[a, b]$.

Beweis (für stetiges f):

f ist nach der Einleitung des Kapitels sogar gleichmäßig stetig. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon'$ für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| \leq \delta$. Daher ist für Feinheit $\max_k |x_k - x_{k-1}| \leq \delta$

$$\left| S - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (\varrho(t) - f(t)) dt \right|$$

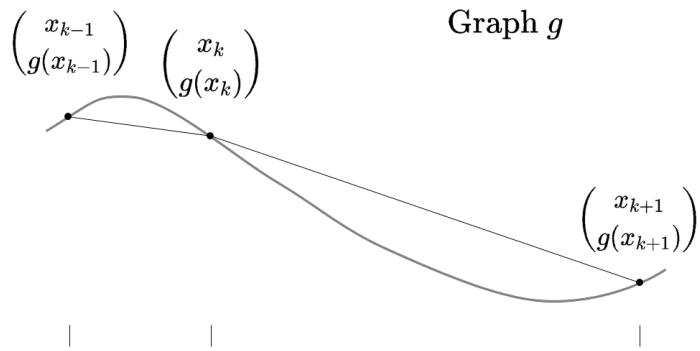
und das ist mit Standard-Abschätzung

$$\leq |b-a| \epsilon' = \epsilon$$

□

Sei eine Kurve in der Ebene gegeben durch die (stückweise) stetig differenzierbare Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in der Punktmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}; \quad x \in [a, b] \right\} = \text{Graph } g$$



Mit einer Unterteilung E von $[a, b]$ werden benachbarte Punkte

$$\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ g(x_{k-1}) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ g(x_k) \end{pmatrix}$$

durch eine Strecke verbunden. Das entstehende Sehnenpolynom hat die folgende euklidische Länge:

$$S = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (g(x_k) - g(x_{k-1}))^2}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \xi \in [x_{k-1}, x_k]$$

das heißt:

$$S = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + g'^2(\xi_k)} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

ist eine Riemann-Summe zur Unterteilung E für das Integral

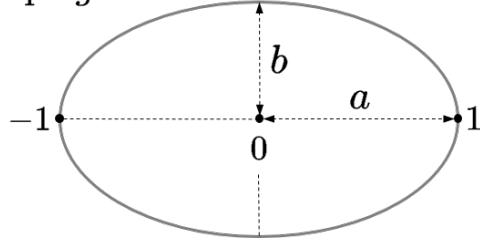
$$\int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)} dt$$

Die Längen der Sehnenpolynome zu hinreichend feiner Unterteilung von $[a, b]$ approximieren das Integral beliebig genau. Deshalb ist dieses Integral die Bogenlänge der Kurve!

Beispiel:

Die Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit großer Halbachse $a = 1$ und $b = \sqrt{1 - \epsilon^2} \leq 1$ als kleiner Halbachse.

Graph g



$$y = g(x) = b \sqrt{1 - x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-bx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + g'^2(x)} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2 x^2}{1 - x^2}} dx$$

Dieses ist eines der sogenannten elliptischen Integrale. Es kann mit den bisher diskutierten elementaren Funktionen nicht ausgewertet werden. Überdies handelt es sich um ein uneigentliches Integral. Die Konvergenz: Aus dem Majorantenkriterium

$$2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\epsilon}^{1+\epsilon} = 2\pi$$

Dies ist zugleich der Umfang im Sonderfall $\epsilon = 0$, also der Umfang des Einheitskreises.

2. Fourier Reihen

Periodische Vorgänge werden beschrieben mit periodischen Funktionen f , f mag reellwertig oder komplexwertig sein.

Es gibt also $T \neq 0$ mit

$$f(x+T) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ersetzt man $t = \frac{2\pi x}{T}$ und betrachtet $g(t) = f(x)$ dann hat $g(t)$ die Periode 2π . Daher genügt im Prinzip die Betrachtung periodischer Funktionen mit Periode 2π .

Bekannte Beispiele sind $\sin x$ und $\cos x$ und in komplexer Schreibweise:

$$t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$t \mapsto e^{int} = \cos nt + i \sin nt \quad n \in \mathbb{Z}$$

Die letzte Funktion hat zwar die kleinste Periode $\frac{2\pi}{n}$ aber (als Vielfaches) ist auch 2π eine Periode.

Für je zwei Funktionen f_1, f_2 mit der Periode 2π und je zwei (reelle oder komplexe) Zahlen λ_1, λ_2 ist die „Linearkombination“

$$f := \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad (f(t) := \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R})$$

eine periodische Funktion mit Periode 2π . Damit ergibt sich eine Fülle 2π -periodischer Funktionen in den „trigonometrischen Polynomen“

$$\begin{aligned} t \mapsto & \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} \\ &= c_0 + (c_1 e^{it} + c_{-1} e^{-it}) + \dots + (c_N e^{iNt} + c_{-N} e^{-iNt}) \\ &= c_0 + (c_1 + c_{-1}) \cos t + \dots + (c_N + c_{-N}) \cos Nt + \\ &\quad + i(c_1 - c_{-1}) \sin t + \dots + i(c_N - c_{-N}) \sin Nt \end{aligned}$$

Die Theorie der Fourier-Reihen behandelt die Frage, welche 2π -periodischen Funktionen sich approximieren lassen durch trigonometrische Polynome.

Grundbeispiel:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin Nx}{N}$$

Behauptung: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$, nämlich

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{falls } 0 < x < 2\pi \\ 2\pi\text{-periodisch sonst.} \end{cases}$$

Beweis:

$$\text{Betrachte: } \sum_{n=0}^N e^{int} = \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}}$$

Zur Trennung von Real- und Imaginärteil mit konjugiert komplexer Zahl erweitern!

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \cos [(N+1)t] - i \sin [(N+1)t]}{1 - \cos t - i \sin t} \quad / \quad \times \frac{1 - \cos t + i \sin t}{1 - \cos t + i \sin t} \\ &= \frac{1}{2 - 2 \cos t} \left[\left(1 - \cos [(N+1)t] \right) (1 - \cos t) + \sin [(N+1)t] \sin t \right] \\ &\quad + \frac{i}{2 - 2 \cos t} \left[\left(1 - \cos [(N+1)t] \right) \sin t - \sin [(N+1)t] (1 - \cos t) \right] \end{aligned}$$

Realteilberechnung unter Verwendung von

$$\sin t = 2 \sin(t/2) \cos(t/2)$$

und

$$1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$$

ergibt:

$$1 + \sum_{n=1}^N \cos nt = \frac{1}{2} - \frac{\cos [(N+1)t] \sin(t/2)}{2 \sin(t/2)} + \frac{\sin [(N+1)t] \cos(t/2)}{2 \sin(t/2)}$$

$$\sum_{n=1}^N \cos nt = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+1/2)t}{2 \sin(t/2)}$$

Integration von π bis x ergibt

$$S_N(x) = \frac{\pi - x}{2} + J_N(x)$$

Berechnung von $J_N(x)$ mittels partieller Integration

$$u = -\frac{\cos((N+1/2)t)}{N+t/2}, \quad v = \frac{1}{2 \sin(t/2)}$$

$$\begin{aligned} J_N(x) &= \int_{\pi}^x u'(t) v(t) dt = u(t) v(t) \Big|_{\pi}^x - \int_{\pi}^x u(t) v'(t) dt \\ &= \left[\frac{\cos((N+1/2)t)}{(2N+1) \sin(t/2)} \right]_{\pi}^x - \int_{\pi}^x \frac{\cos((N+1/2)t) \cos(t/2)}{(2N+1) 2 \sin^2(t/2)} dt \end{aligned}$$

Daraus folgt die Abschätzung:

$$|J_N(x)| \leq \frac{1}{(2N+1) \sin(x/2)} + \frac{\pi}{(2N+1) 2 \sin^2(x/2)}$$

Daraus folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(x) = 0 \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

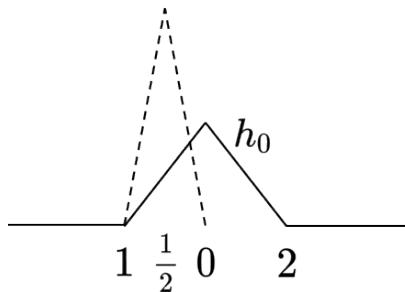
□

Zur Behandlung von Funktionen, welche durch Reihen dargestellt werden, zwei allgemeine Konvergenzbegriffe betrachtet:

1. Gleichmäßige Konvergenz einer Folge von (reellen beziehungsweise komplexwertigen) Funktionen f .
2. Die absolute Konvergenz einer unendlichen Reihe.

2.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Gegenbeispiel:



$$h_0(t) = \max(1 - |t - 1|, 0)$$

$$h_{n+1}(t) = 2 h_n(2t)$$

für jedes reelle $t \in \mathbb{R}$ ist $h_n(t)$ eine Nullfolge.

Definition der gleichmäßigen Konvergenz:

Es sei $(f_n(x))_{n \geq 1}$ eine Folge von Funktionen (mit reellen oder komplexen Werten), definiert für $x \in X$. Sie heißt gleichmäßig konvergent gegen die Funktion $f(x)$ wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index N_ϵ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \quad \forall x \in X$$

$(h_n(x))_{n \geq 0}$ konvergiert „punktweise“ gegen die Nullfunktion.

$$h_n(2^{-n}) = 2^n$$

Die Konvergenz ist ungleichmäßig!

Jede gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ hat eine stetige Grenzfunktion f .

Beweis:

Sei $a \in X$ und sei $\eta > 0$ eine Toleranzgrenze. Dann ist $V = \{w \in \mathbb{C} ; |w - f(a)| < \eta\}$ die η -Umgebung von $f(a)$. Sei $\epsilon = \eta/3$. Die Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \epsilon + |f_n(x) - f_n(a)| + \epsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ und alle $n \geq N_\epsilon$ (nach Voraussetzung).

Nun wird $n = n_0 \geq N_\epsilon$ festgehalten und die Stetigkeit von f_n benutzt. Dazu gibt es eine Umgebung U von a derart, dass $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \epsilon$ falls $x \in U$. Daher zusammen für alle $x \in U$:

$$|f(x) - f(a)| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = \eta$$

□

Bemerkung:

$$(1) \text{ Die Funktionenfolge } S_n(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}$$

besteht aus stetigen Funktionen und hat eine unstetige Grenzfunktion $S(x)$. Daher ist die Konvergenz nicht gleichmäig auf ganz \mathbb{R} . Die Abschätzung für die Grenzfunktion $J_n(x) = S_N(x) - S(x)$, $0 < x < 2\pi$ zeigt indes, dass die Restriktionen auf ein Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ ($\delta \in]0, \pi[$) stets gleichmäig denn mit dem relevante Nenner $\sin^2(x/2)$ gilt dort

$$\sin^2(x/2) \geq \sin^2(\delta/2) > 0$$

Für das Integral über die Grenzfunktion f einer gleichmäig konvergenten Folge von stetigen Funktionen f_n gilt die Formel

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

Beweis: Eine andere Form der Behauptung ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - f_n(t)) dt = 0$$

Nun ist nach der Standardintegralabschätzung

$$\left| \int_a^b (f(t) - f_n(t)) dt \right| \leq |b - a| \epsilon_n$$

wo $\epsilon_n = \sup |f(x) - f_n(x)|$ $a \leq x \leq b$

Nach Voraussetzung der gleichmäigen Konvergenz bilden die ϵ_n eine Nullfolge, daher gilt die Behauptung.

□

Orthogonalitätsrelationen

Für ganze k gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{kit} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \neq 0 \end{cases}$$

Beweis:

Im Fall $k = 0$ ist der Integrand $e^{0it} = 1$, die konstante Funktion 1. Daher ist die Behauptung klar.

Im Fall $k \neq 0$ folgt die Behauptung daraus, dass der Integrand $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$ die 2π -periodische Stammfunktion besitzt:

$$\frac{e^{ikt}}{ik} = \frac{\sin kt}{k} - i \frac{\cos kt}{k}$$

□

Gegeben sei die Fourier-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

und vorausgesetzt sei, dass sie gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$ konvergiert. Dann gilt für die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Bemerkung:

- (2) Für beliebige stückweise stetige 2π -periodische Funktionen $f(t)$ wird mit der Formel von oben eine zu f gehörige Fourier-Reihe erklärt, die „Fourier-Reihe“ von f .

Beweis:

Gleichmäßige Konvergenz bezieht sich auf die Folge $f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$

Daher ist $f_N(t) e^{ikt}$ gleichmäßig konvergent da

$$|f_N(t) e^{ikt} - f(t) e^{ikt}| = |f_N(t) - f(t)| \underbrace{|e^{ikt}|}_{=1}$$

Nun darf gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t) e^{ikt} dt \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{e^{int} e^{-ikt}}_{e^{i(n-k)t}} dt \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt}_{= 0 \text{ außer für } n = k} \quad \text{Orthogonalitätsrelation} \\
&= c_k \cdot 2\pi
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

- (3) Verwendet wurde Integration über komplexwertige stetige Funktionen $g(t)$ mit der Zerlegung

$$g(t) = u(t) + iv(t)$$

in Real- und Imaginärteil. Dies bedeutet

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Offenbar ist dann für Summen $g = g_1 + g_2$ (g_1, g_2 stetig)

$$\int_a^b (g_1(t) + g_2(t)) dt = \int_a^b g_1(t) dt + \int_a^b g_2(t) dt$$

Ist $c = c_1 + ic_2$ ein zerlegter komplexer Skalar, dann

$$cg(t) = c_1 u(t) - c_2 v(t) + i(c_1 v(t) + c_2 u(t))$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\int_a^b cg(t) dt &= \int_a^b (c_1 u(t) - c_2 v(t)) dt + i \int_a^b (c_1 v(t) + c_2 u(t)) dt \\
&= c_1 \int_a^b g(t) dt + c_2 i \int_a^b g(t) dt = c \int_a^b g(t) dt
\end{aligned}$$

Die beiden Rechenregeln werden kurz bezeichnet: Das Integral über komplexwertige stetige Integranden ist \mathbb{R} linear.

$$\text{Behandlung des Grundbeispiels: } S(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{falls } 0 < x < 2\pi \\ 2\pi\text{-periodisch sonst.} \end{cases}$$

Die zugeordnete Fourier-Reihe hat die Koeffizienten

$$c_k(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} e^{-ikt} dt$$

(weil S ungerade, wird $c_0 = 0$)

falls $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k(S) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{t}{2}}_u e^{-ikt} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{t}{2} \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi k i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^{-ikt} dt}_{=0} = \frac{1}{2\pi i} \\ &\quad (\text{Orthogonalitätsrelation}) \end{aligned}$$

$$\text{daher } c_k = \frac{1}{2\pi i} \quad \text{falls } k \neq 0$$

Für $k > 0$ zusammenfassen (vergleiche Anfang des Kapitels)

$$c_k + c_{-k} = 0 \quad ; \quad i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{k}$$

Bemerkung:

(4) Für stetige Funktionen f mit Periode T gilt

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$$

Denn aus der Zerlegung

$$\int_a^{a+T} = \int_a^b + \int_b^{b+T} + \int_{b+T}^{a+T}$$

erhält man das Resultat durch Substitution im dritten Integral unter Ausnutzung von $f(s+T) = f(s)$.

2.1.1 Das Gibbs'sche Phänomen

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} \quad \text{haben die Ableitung}$$

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= \sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{\sin [(N+1/2)x] - \sin (x/2)}{2 \sin (x/2)} \\ &= \frac{2 \cos [(N+1)x/2] \sin (Nx/2)}{2 \sin (x/2)} \end{aligned}$$

Die kleinste Nullstelle $a_n = \frac{\pi}{N+1} > 0$ gehört zu einem lokalen Maximum von S_N ; der Wert dort ist

$$S_N(a_n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

Das ist eine Riemann-Summe zum Integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

zur Unterteilung von $[0, \pi]$ in $N+1$ Teilintervalle mit Teilpunkten $x_i = \frac{i\pi}{N+1}$ ($0 \leq i \leq N+1$) und den Zwischenpunkten $\xi_i = x_i$. Damit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(a_n) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

Dessen Wert ist um 18% größer als $\lim_{x \searrow 0} S(x) = \frac{\pi}{2}$.

2.1.2 Differentiation der Grenzfunktion

Es sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ auf dem Intervall I punktweise konvergent gegen f . Alle f_n seien stetig differenzierbar. Die Folge $(f'_n)_{n \geq 0}$ der Ableitungen sei gleichmäßig konvergent auf I gegen die Grenzfunktion g .

Dann gilt: f ist auf I differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

Beweis:

Die Grenzfunktion ist stetig als gleichmäßiger Limes einer stetigen Funktionenfolge.

Seien $x, x+h \in I$ mit $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x+h) - f_n(x))$$

$$= \frac{1}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+h} f'_n(t) dt$$

(und nachdem f'_n gleichmäßig konvergent gegen g)

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt$$

Wie im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x)$$

□

Beispiel:

Wegen $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ und da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Für $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ mit $\delta \in]0, \pi[$ ist die Folge der Ableitungen der Partialsummen

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \text{gleichmäßig konvergent gegen} \quad \frac{x - \pi}{2}$$

Nach dem letzten Satz ist deshalb $F(x)$ in jedem dieser Intervalle, also auch in $0 < x < 2\pi$, differenzierbar mit der Ableitung

$$F'(x) = \frac{x - \pi}{2}$$

Daraus folgt

$$F(x) = \left(\frac{x - \pi}{2} \right)^2 + c, \quad c \text{ passend konstant.}$$

Weil beide Seiten im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ stetig sind, folgt

$$F(0) = \frac{\pi^2}{4} + c$$

Nun gleichmäßige Konvergenz der F definierenden Reihe ausgenutzt zur gliedweisen Integration

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} dx}_{= 0} = 0$$

(Orthogonalitätsrelation)

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{x - \pi}{2} + c \right) dx = \frac{(x - \pi)^3}{12} \Big|_0^{2\pi} + 2\pi c$$

Damit folgt: $0 = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c \Rightarrow c = -\frac{\pi^2}{12}$

$$F(x) = \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.2 Absolut konvergente Reihen

Definition

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit reellen oder komplexen Gliedern a_n heißt „absolut konvergent“, wenn die Reihe der Absolutbeträge, also $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, konvergiert.

Bemerkung:

Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Folge $\left(\sum_{n=0}^N |a_n| \right)_{N \geq 0}$ beschränkt ist:

Monotoniekriterium. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis:

Die Folge $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ erfüllt das Cauchy-Kriterium! Denn für $N, p \in \mathbb{R}$ ist

$$|S_{N+p} - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n \right|$$

und das ist mit der Dreiecksungleichung $\leq \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_n|$

□

Vergleichskriterium

Es sei $b_n \geq 0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$. Dann gilt für jede Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolute Konvergenz falls $|a_n| \leq b_n \forall n$. Beweis genau wie vorher!

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ mit $0 < q < 1$ ist für jedes $M > 0$ konvergent.

Quotientenkriterium

Gilt für die Glieder a_n mit einem $q \in]0, 1[$ die Abschätzung

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| q$$

für alle $n \geq n_0$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, also konvergent.

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Für jedes r mit $0 < r < \varrho$ ist die Potenzreihe absolut gleichmäßig konvergent auf der Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$.

Beweis:

Nach Definition von ϱ existiert ein $R : r < R < \varrho$ derart, dass die Folge $(a_n R^n)_{n \geq 0}$ beschränkt ist.

Etwa $|a_n| R^n \leq M$. Bezeichnung $q := \frac{r}{R} \in]0, 1[$

Falls $|z - z_0| \leq r$, dann $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n \leq |a_n|R^n q^n \leq M q^n$

Daher ist einerseits $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absolut konvergent, andererseits kann der Reihenrest abgeschätzt werden durch den Reihenrest der geometrischen Reihe $\sum M q^n$.

Dieser ist unabhängig vom speziellen z . Also folgt gleichmäßige Konvergenz auf der Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$.

□

Umordnungssatz

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit reellen oder komplexen Gliedern. Sei ferner $\pi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Permutation der Indexmenge $s := \sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$. Dann ist auch die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolut konvergent mit Limes s .

Beispiel einer Umordnung:

$$0, \boxed{1}, \boxed{2}, 4, \boxed{3}, \boxed{6}, 8, \boxed{5}, \boxed{10}, 12, \boxed{7}, \boxed{14}, 16, \dots$$

2.3 Theorie der Fourier-Reihen

Orthogonalitäts-Relationen: Im „Raum“ V aller reell- und komplexwertigen 2π -periodischen, stückweise stetigen Funktionen sollen geometrische Vorstellungen entwickelt werden. Wie man in der Ebene \mathbb{R}^2 das Senkrechtstehen zweier Vektoren \vec{x}, \vec{y} erkennt am Wert des euklidischen Skalarprodukts $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, so kann man gewisse Minimalitätseigenschaften in V durch ein Skalarprodukt erkennen

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \quad f, g \in V$$

Grundlegende Rechengesetze

$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$$

$$\langle \alpha f, g \rangle = \bar{\alpha} \langle f, g \rangle$$

$$\langle f, \beta g \rangle = \beta \langle f, g \rangle$$

$$\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$$

$$(P) : \langle f, f \rangle \geq 0 \quad \text{Positivität des Skalarprodukts}$$

für alle $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \subset V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Ein Abstandsbeispiel in V

(Mittlere quadratische Abweichung oder auch 2-Norm genannt)

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Stets

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

Beweis aus (P) mit $f + \lambda g$ statt f

$$0 \leq \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle = \langle f, f \rangle + \underbrace{\overline{\lambda} \langle g, f \rangle}_{\langle f, g \rangle} + \lambda \langle f, g \rangle + |\lambda|^2 \langle g, g \rangle$$

$$\text{Im Falle } \langle g, g \rangle \neq 0 \text{ wähle } \lambda = -\frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\langle g, g \rangle}$$

$$0 \leq \|f\|^2 - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} ; \quad |\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$$

Ist $\langle g, g \rangle = 0$ aber $\langle f, f \rangle \neq 0$ dann vertausche die Rolle von f und g .

Letzter Fall: $\langle f, f \rangle = 0 = \langle g, g \rangle$

$$\text{setze } \lambda = -\overline{\langle f, g \rangle}, \text{ dann } 2|\langle f, g \rangle|^2 \leq 0$$

□

Die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Beweis mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CS-U)

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} \\ &\leq \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + 2|\langle f, g \rangle| \\ &\stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{CS-U}}}{\leq} \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\| \leq (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

□

Die Basisfunktionen e_k in V

werden erklärt durch: $e_k(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$

$$\left\| \langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)x} dx \right.$$

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \\ 0 & \text{falls } k \neq l \end{cases}$$

Beschreibung der Fourierkoeffizienten für $f \in V$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \langle e_k, f \rangle$$

Die f zugeordneten trigonometrischen Polynome sind

$$f_N = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k = \sum_{k=-N}^N \langle e_k, f \rangle e_k$$

Hilfsatz 1: (vergleiche mit dem Satz des Pythagoras)

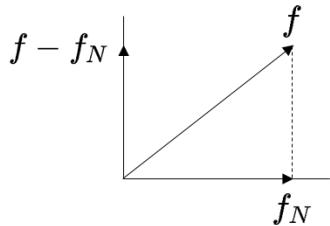
$$\|f\|^2 - \|f_N\|^2 = \|f - f_N\|^2$$

Beweis:

$$1) \quad c_k(f) = \langle e_k, f \rangle = \langle e_k, f_N \rangle \quad -N \leq k \leq N$$

$$2) \quad \langle f, f_N \rangle = \left\langle f, \sum_{k=-N}^N c_k e_k \right\rangle = \sum_{k=-N}^N c_k \underbrace{\langle f, e_k \rangle}_{\overline{c_k}} = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

$$3) \quad \langle f_N, f_N \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^N c_k e_k, f_N \right\rangle = \sum_{k=-N}^N \overline{c_k} \underbrace{\langle e_k, f_N \rangle}_{c_k} = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$



$$\text{Hilfsatz 1: } \|f - f_N\|^2 = \|f\|^2 - \|f_N\|^2$$

$$\langle f, f_N \rangle = \langle f_N, f_N \rangle = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|^2 &= \langle f - f_N, f - f_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle f_N, f \rangle + \langle f, f_N \rangle + \langle f_N, f_N \rangle \\ &= \|f\|^2 - \|f_N\|^2 \end{aligned}$$

Die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)^2 dx|$$

Denn nach Hilfsatz 1 ist dort die linke Seite ≥ 0 , daher für alle N

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

Eine Extremaleigenschaft

Unter allen „Linearkombinationen“

$$g = \sum_{k=-N}^N \gamma_k e_k$$

der Basisfunktion e_k hat nur

$$f_N \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k$$

Minimalabstand von f im Sinne unserer Norm.

Beweis:

$$\langle f_N, f - f_N \rangle = 0 \quad , \quad \langle e_k, f - f_N \rangle = 0 \quad , \quad -N \leq k \leq N$$

Die Veträglichkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit Addition (im ersten Argument) ergibt $\langle g, f - f_N \rangle = 0$

Betrachte:

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g \rangle \\ &= \langle (f - f_N) + (f_N - g), (f - f_N) + (f_N - g) \rangle \\ &= \langle f - f_N, f - f_N \rangle + \langle f_N - g, f_N - g \rangle \\ &= \|f - f_N\|^2 + \|f_N - g\|^2 \end{aligned}$$

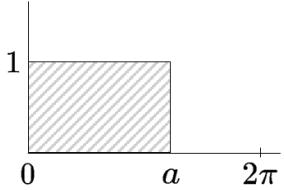
$$\|f_N - g\|^2 = 0 \quad \text{nur dann, wenn } f_N = g$$

□

Hilfssatz 2: Ist $f \in V$ derart, dass die Restriktion auf $[0, 2\pi]$ eine Treppenfunktion ist, dann gilt für die approximierenden trigonometrischen Polynome: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$.

Beweis:

1)



Nach Voraussetzung existieren Punkte

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_i = 2\pi$$

derart, dass $f /]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Andererseits ist die Zuordnung $f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ linear in f (verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation), daher genügt die Behandlung der speziellen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } a \leq x < 2\pi \\ 2\pi\text{-periodisch sonst.} \end{cases}$$

2) Für das spezielle f werden die Fourerkoeffizienten

$$c_0 = \frac{a}{2\pi} \quad \text{und für } k \neq 0 \quad c_k = i \frac{e^{-ika} - 1}{2\pi k}$$

Zu zeigen ist (nach Hilfssatz 1): Es gilt die „Parseval-Gleichung“

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$\text{für } k \neq 0: |c_k|^2 = \frac{|\cos ka - i \sin ka - 1|}{2\pi^2 k^2} = \frac{2 - 2 \cos ka}{2\pi^2 k^2}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2}$$

mit dem Beispiel zur Integration gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{(\pi - a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right)$$

$$= \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

2.3.1 Der Vollständigkeitssatz

Es sei $f \in V$, also 2π -periodisch und mit stückweise stetigen Restriktionen $f / [0, 2\pi]$. Ferner sei je

$$f_N = \sum_{n=-N}^N c_n e_n$$

das f approximierende trigonometrische Polynom. Dann gilt für die Norm der mittleren quadratischen Abweichung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$$

Insbesondere ist stets die Parseval-Gleichung erfüllt

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$

Beweis: Ohne Einschränkung f reell und $-1 \leq f(x) \leq 1$. Begründung: $f \mapsto (c_k)$ $k \in \mathbb{Z}$ ist \mathbb{R} linear.

- 1) Aus der Integrationstheorie findet man zu beliebigem $\eta > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ auf $[0, 2\pi]$ mit $-1 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \leq 1$ und

$$\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \eta$$

Mit $g := f - \varphi$ ($0 \leq g(x) \leq 2$) gilt: $g^2(x) \leq 2g(x)$

$$\|g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^2(x) dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx \leq \frac{\eta}{\pi}$$

- 2) Für $f = g + \varphi$ gilt $f_N = g_N + \varphi_N$

Hilfssatz 1: $\|g - g_N\|^2 \leq \|g\|^2$

$$\text{Nun } \eta \leq \frac{\epsilon^2}{4} ; \quad \|g - g_N\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4\pi} ; \quad \|g - g_N\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Mit Hilfssatz 2 gilt: $\|\varphi - \varphi_N\| \mapsto 0$ für $N \rightarrow \infty$.

Für $N \geq N_\epsilon$ ist $\|\varphi - \varphi_N\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Zusammen mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|f - f_N\| &= \|g - g_N + \varphi - \varphi_N\| \\ &\leq \|g - g_N\| + \|\varphi - \varphi_N\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

falls $N \geq N_\epsilon$

3) Nach Hilfssatz 1

$$\|f\|^2 = \|f - f_N\|^2 + \|f_N\|^2 \quad \text{mit} \quad \|f\|^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

□

Darstellungssatz

Für jede stetige Funktion $f \in V$, welche überdies stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe gegen f .

Beweiskern:

- 1) Die Besselsche Ungleichung für die Ableitungsfunktion.
- 2) Berechnung der Fourier-Koeffizienten $c_k(f)$ mittels partieller Integration aus denen der Ableitung $\gamma_k = c_k(f')$

$$\text{Resultat: } c_k = \frac{\gamma_k}{ik} \quad (k \neq 0)$$

3) Abschätzung

$$|a||b| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$$

liefert

$$|c_k|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2 \right)$$

Absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f e^{ikx}$

4) Anwendung des Satzes über gleichmäßig konvergente Fourier-Reihen!

Beispiel von H. Lebesgue:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{2^n}$$

ist eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe, aber die Summe $g(x)$ ist nirgends differenzierbar (obwohl g überall stetig ist).

Beweis über die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin [2^{n^2}(x+h)] - \sin [2^{n^2}x]}{2^n h} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos [2^{n^2}(x+h/2)] \sin [2^{n^2}(h/2)]}{2^n (h/2)}\end{aligned}$$

Betrachte: $h_N := \pm 2^{-N^2} \cdot \frac{\pi}{2}$

Dann sind für $n > N$ alle Reihenglieder 0. Der Anteil von $n = N$ überwiegt bei passendem Vorzeichen die Betragssumme der übrigen bei weitem!

3. Der dreidimensionale euklidische Raum

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$0$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Wahl eines Systems von drei paarweise zueinander senkrechten Geraden durch einen gemeinsamen Punkt 0, den Ursprung, und nach Festlegung eines je gleichen Maßstabes auf jeder der drei Geraden (Achsen), wird jedem Punkt P des Raumes ein System x_1, x_2, x_3 von drei Zahlen zugeordnet (die Koordinaten); deren erste bezeichnet den Abschnitt, den die Ebene durch P , welche parallel zur zweiten und dritten Achse ist, auf der ersten Achse abschneidet. Dagegen markiert die zweite Zahl den Schnittpunkt mit der zweiten Achse der zur ersten und dritten Achse parallelen Ebene

durch P . Analog ist x_k die Marke auf der k -ten Achse für den Schnittpunkt mit der zu den übrigen Achsen parallelen Ebene durch P .

Die Reihenfolge der drei Achsen wird oft entsprechend der Reihenfolge der ersten drei Finger der rechten Hand orientiert!

Beispiel:

Eckpunkte eines achsenparallelen Würfels mit Kantenlänge 2 und 0 als Mittelpunkt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Außer zur Koordinatisierung des Raumes werden die Zahlentripel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

verwendet zur (Bestimmung) Beschreibung der Translation des Raumes. Wirkung der Translation um \vec{a} :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \\ x_3 + a_3 \end{pmatrix} = \vec{x} + \vec{a}$$

Übt man nach der Translation um \vec{a} die Translation um $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ aus, dann ist die komponierte Abbildung wieder eine Translation, und zwar um den Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$.

3.1 Das Skalarprodukt

Beschreibung vieler geometrischen Situationen mit dem euklidischen Skalarprodukt (inneres Produkt)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Beispiel:

- (1) Der Abstand des Punktes mit dem Koordinatenvektor \vec{x} vom Ursprung, auch „euklidische Norm“ von \vec{x}

$$\|\vec{x}\| := (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Es gilt wieder die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Als Konsequenz die Dreiecksungleichung

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Wie in der Ebene ist die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts

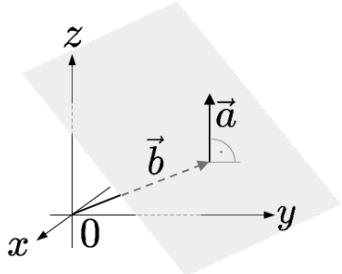
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$$

Algebraische Grundregeln für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
 (\vec{x} + \vec{x}) \vec{y} &= \vec{x} \vec{y} + \vec{x} \vec{y} \\
 \vec{x} (\vec{y} + \vec{y}) &= \vec{x} \vec{y} + \vec{x} \vec{y} \\
 (\lambda \vec{x}) \vec{y} &= \lambda (\vec{x} \vec{y}) = \vec{x} (\lambda \vec{y}) \\
 \vec{x} \vec{y} &= \vec{y} \vec{x} \\
 \vec{x} \vec{x} &\geq 0, \quad \text{„=}“ \text{ nur für } \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt ist also bilinear und positiv definiert!

Ebenengleichung (implizit mit Skalarprodukt)



$$\begin{aligned}
 (\vec{x} - \vec{b}) \cdot \vec{a} &= 0 \\
 \vec{a} \neq 0, \quad \text{sonst sind alle } \vec{x} \text{ Lösungen!} \\
 \vec{a} &\text{ „Normalvektor der betrachteten Ebene“.}
 \end{aligned}$$

Andere Form der Ebenengleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \beta \quad \vec{a} \neq 0$$

kann zurückgeführt werden mit $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

$$\vec{a} \vec{b} = \lambda \|\vec{a}\|^2 \quad \text{daher} \quad \lambda = \frac{\beta}{\|\vec{a}\|^2}$$

Dieser Vektor $\vec{b} = \frac{\beta}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$ ist auf der Ebene E der Ortsvektor des Punktes mit minimalem

Abstand von $\vec{0}$. Denn für $\vec{x} \in E$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{x}\|^2 &= ((\vec{x} - \lambda \vec{a}) + \lambda \vec{a}) ((\vec{x} - \lambda \vec{a}) + \lambda \vec{a}) \\
 &= \|\vec{x} - \lambda \vec{a}\|^2 + \lambda^2 \|\vec{a}\|^2 \geq \lambda^2 \|\vec{a}\|^2
 \end{aligned}$$

Parameterdefinition der Ebene (explizit)

$$\vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

mit nichtparallelen Vektoren \vec{u}, \vec{v}

Beispiel:

(2) Ebene durch die nicht kollinearen Punkte $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{b}_1 + \lambda(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) + \mu(\vec{b}_3 - \vec{b}_1) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &= \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1) \end{aligned}$$

(Konvexitätskombination von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$)

Weil die Geraden im Raum auftreten als Schnittgeraden von nicht parallelen Ebenen, werden zur Beschreibung der Geraden in Skalarproduktform zwei Gleichungen verwendet

$$\vec{a}_1(\vec{x}_1 - \vec{b}_1) = 0 \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2 \neq 0$$

$$\vec{a}_2(\vec{x}_2 - \vec{b}_2) = 0 \quad \vec{a}_1 \mathbb{R} \neq \vec{a}_2 \mathbb{R}$$

Die Parallelität der Ebenen wird ausgeschlossen durch die verbotene Parallelität der Normalen. Die Schnittgerade besteht aus \vec{x} , die das System der beiden Gleichungen lösen.

Ebenso häufig: Parameterform der Geraden (explizit)

$$\vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{u} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{wobei} \quad \vec{u} \neq 0$$

Nun zum Übergang von der Parameterform einer Ebene zur impliziten Ebenengleichung.

3.2 Das Vektorprodukt

Problem: Zu Vektoren \vec{a}, \vec{b} bestimme einen Vektor der auf beiden senkrecht steht.

Lösung: Vektorprodukt (äußeres Produkt)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Probe: $\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0 ; \vec{b}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$$a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

$$b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

Beispiele: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 ; \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 ; \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

Algebraische Grundregeln des Vektorprodukts

$$(\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a}' \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{b}') = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b}')$$

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a}) , \text{ Schiefsymmetrie}$$

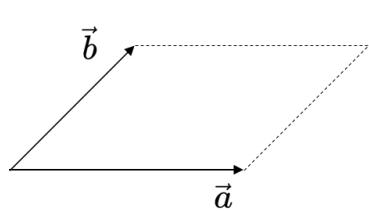
Bemerkung:

Die drei Beispiele und die Regeln reichen zur Berechnung aller Vektorprodukte!

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b})$$

3.2.1 Geometrische Interpretation



Die Norm von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist zugleich der Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms. Insbesondere verschwindet das Vektorprodukt, wenn entweder einer der beiden Vektoren verschwindet oder die beiden Vektoren in der selben Geraden liegen.

Die Ebenen $\vec{a}_k(\vec{x} - \vec{b}_k) = 0$ ($k = 1, 2$) sind dann und nur dann nicht parallel, wenn für die Normalen gilt $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$.

Ist das der Fall, und ist \vec{x}_0 ein Punkt auf der Schnittgeraden, dann ist die ganze Schnittgerade in Parameterform

$$\vec{x}_0 + \mathbb{R}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$$

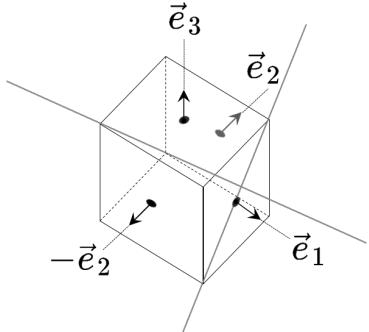
Die Großmann-Identität

Für das Vektorprodukt dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \vec{c}) \vec{a}$$

Beispiel:

(1)



Betrachte die Geraden

$$\vec{e}_1 = \mathbb{R}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

$$-\vec{e}_1 = \mathbb{R}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$$

Sie sind windschief, das heißt punktfremd und nicht parallel. Schnitte mit der Ebene $x_2 = \text{konstant} = c$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -c \end{pmatrix}$$

Verbindungsgerade:

$$g_c = \begin{pmatrix} -1 \\ c \\ -c \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2c \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ c \\ c(-1 + 2\lambda) \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Vereinigungsmenge: $F = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} g_c$

Alle Punkte \vec{x} auf F erfüllen $x_1 x_2 = x_3$. Umgekehrt liegt jede Lösung dieser Gleichung auf einer Geraden. Je zwei Geraden der Schar sind windschief, weil für die aufspannenden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{wird das Vektorprodukt}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 - c_2 \\ c_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{für verschiedene } c_1, c_2$$

Schnitte von F mit der Ebene $x_1 = \text{konstant} = c$

$$h_c = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ \lambda \\ c\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

Das ist eine zweite Geradenschar auf der Fläche.

Wegen jeder der beiden Geradenscharen auf F gehört F zu den „Regelflächen“.

Schnitte mit den Ebenen $x_3 = \text{konstant} \neq 0$ ergeben (in dieser Ebene) die Punkte mit $x_1 x_2 = c$, das ist eine Hyperbel.

Schnitte mit den Ebenen, welche die x_3 -Achse enthalten

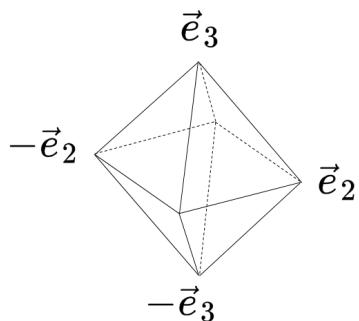
$x_1 = x_2$: Flächenpunkte in dieser Ebene $x_3 = x_1^2$, bilden eine nach oben geöffnete Parabel.

$x_2 = -x_1$: $\Rightarrow x_3 = -x_1^2$; Das ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Allgemein: $x_2 = \lambda x_1$ ist eine die x_3 -Achse enthaltende Ebene und schneidet F in den Punkten $\lambda x_1^2 = x_3$. Das ist eine Parable mit Ausnahme $\lambda = 0$.

Beispiel:

(2) Betrachte 6 Punkte: $\pm \vec{e}_1, \pm \vec{e}_2, \pm \vec{e}_3$ – die Ecken eines Oktaeders.



Bestimme den Neigungswinkel zwischen den Seitenflächen durch $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ beziehungsweise $\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3$ in den Ebenen

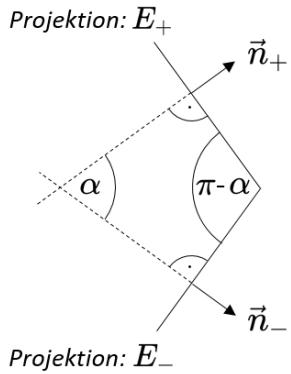
$$E_+ : \vec{e}_1 + \mathbb{R}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) + \mathbb{R}(\vec{e}_3 - \vec{e}_1)$$

$$E_- : \vec{e}_1 + \mathbb{R}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) + \mathbb{R}(-\vec{e}_3 - \vec{e}_1)$$

Normalen (nach außengehend bezüglich des Oktaeders)

$$\vec{n}_+ = (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) \times (\vec{e}_3 - \vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_- = (-\vec{e}_3 - \vec{e}_1) \times (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) \times (\vec{e}_3 + \vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_+ \cdot \vec{n}_-}{\|\vec{n}_+\| \|\vec{n}_-\|} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha \triangleq 70.53^\circ$$

Der Neigungswinkel zwischen beiden Seitenflächen ist
 $180^\circ - \alpha \cong 109.47^\circ$

Der Neigungswinkel \$\alpha\$ tritt auf zwischen den Seitenflächen des Tetraeders mit Ecken

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

(Zerlegung eines Tetraeders über die Kantenmitten in vier Tetraeder halber Kantenlänge und ein zentrales Oktaeder.)

3.3 Die Isometrie des euklidischen \mathbb{R}^3

Der Abstand zwischen den Punkten \vec{x} und \vec{y} ist $\|\vec{x} - \vec{y}\|$, also die Norm des Differenzvektors. Daher bleiben bei Translation des Raumes um den Vektor \vec{a} alle Abstände invariant. Die euklidische Metrik ist also translationsinvariant. Mit anderen Worten, Translaton um \vec{a} ist stets eine Isometrie.

Hauptfrage: Isometrie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Fixpunkt $\vec{0}$. Dabei bedeutet Isometrie

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{I})$$

Resultat: Es handelt sich um die sämtlichen linearen Selbstabbildungen des \mathbb{R}^3 , welche Skalarprodukte invariant lassen, das heißt

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$$

Beweis der Skalarprodukt-Treue

Betrachte (I) für $\vec{y} = \vec{0}$, da $\vec{0}$ Fixpunkt von f ,

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x})\| &= \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|^2 &= \|f(\vec{x})\|^2 - 2f(\vec{x})f(\vec{y}) + \|f(\vec{y})\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 - 2f(\vec{x})f(\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \quad (\text{siehe oben})\end{aligned}$$

Isometrie

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

□

Die Linearität von f besagt

$$\begin{aligned}f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\lambda \vec{x}) &= \lambda f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Berechnet werden kann das hier durch das Normquadrat der Differenz beider Seiten.

3.3.1 Beschreibung der linearen Selbstabbildungen durch Matrizen

$$A = (a_{ik})_{1 \leq i, k \leq 3}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

wobei der Vektor $A\vec{x}$ als Element in der k -ten Zeile hat

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3$$

Dabei enthält die Matrix A als k -te Spalte das Bild $A\vec{e}_m$ des m -ten Basisvektors ($m = 1, 2, 3$). Zu den Matrizen zu Isometrien mit Fixpunkt, also zu den orthogonalen Transformationen, gehören nur Matrizen A , deren Spaltenvektoren die Länge 1 haben und die paarweise aufeinander senkrecht stehen.

$$A\vec{e}_m = \vec{a}_m, \quad \|\vec{a}_m\| = 1 \quad \text{und}$$

$$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = 0, \quad \text{falls } k \neq m$$

zusammengefasst:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq 3$$

Eine reelle 3×3 Matrix $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ stellt dann und nur dann eine orthogonale Transformation dar wenn gilt

$$\left| \begin{array}{l} \vec{a}_k \cdot \vec{a}_l = \delta_{kl} \quad 1 \leq k, l \leq 3 \end{array} \right.$$

Beweis für „nur dann“ folgt daraus, dass \vec{a}_k das Bild des \vec{e}_k ist ($k = 1, 2, 3$)

"dann": Zu zeigen unter der Bedingung gilt

$$A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$$

$$A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \left(A \sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k \right) \left(A \sum_{l=1}^3 y_l \vec{e}_l \right)$$

(Linearität von A)

$$= \left(\sum_{k=1}^3 x_k A\vec{e}_k \right) \left(\sum_{l=1}^3 y_l A\vec{e}_l \right)$$

(Bilinearität des Skalarprodukts)

$$= \sum_{k,l=1}^3 x_k y_l \underbrace{(A\vec{e}_k)}_{\vec{a}_k} \underbrace{(A\vec{e}_l)}_{\vec{a}_l} = \sum_{k,l=1}^3 x_k y_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^3 x_k y_k$$

□

3.4 Das Spatprodukt dreier Vektoren

$$D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Charakteristische Eigenschaften

Detail (1): $D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ist linear in jedem Argument.

Detail (2): Sind in $D(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ irgend zwei Argumente gleich, dann ist der Wert des Spatprodukts Null.

Detail (3): $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$

Bemerkung:

Aus Detail (1) und Detail (2) folgt: Vertauscht man im Spatprodukt irgend zwei der drei Argumente, so ändert das Spatprodukt sein Vorzeichen!

Beweis:

$$D(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}) \stackrel{\text{Detail (2)}}{=} 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Detail (1)} \\ & \stackrel{\text{Detail (1)}}{=} D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}) + D(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Detail (1)} \\ & \stackrel{\text{Detail (1)}}{=} D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) + D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + D(\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}) + D(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) \end{aligned}$$

□

3.4.1 Geometrische Bedeutung des Spatprodukts

$$D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}$$

aus der geometrischen Bedeutung des Vektorprodukts und des Skalarprodukts: $D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ist das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelflachs (Spat).

$D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ bedeutet daher, dass erstens \vec{a} und \vec{b} nicht parallel zu einer Geraden sind und zweitens, dass \vec{c} nicht in ihrer Ebene liegt. Mit anderen Worten, $D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ bedeutet, dass jeder Vektor \vec{x} des \mathbb{R}^3 eine Linearkombination von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} ist.

Die Determinante einer 3×3 Matrix $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ wird definiert durch die Formel

$$\det A = D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

Insbesondere bedeutet $\det A \neq 0$, dass jeder Vektor des \mathbb{R}^3 eine Linearkombination der Spalten von A ist. Speziell also $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Falls $\det A \neq 0$, dann existieren $\vec{b}_k \in \mathbb{R}^3$ mit $A\vec{b}_k = \vec{e}_k$ ($1 \leq k \leq 3$). Mit anderen Worten, falls $\det A \neq 0$ gibt es eine zweite Matrix B (mit Spalten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$) und $AB = 1_3 = E$, wobei

$$1_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und wo das Matrizenprodukt spaltenweise aus B gewonnen wird.

Für 3×3 Matrizen gilt der Determinantenproduktsatz:

$$\left| \det(AB) = (\det A)(\det B) \right|$$

Beweis:**1) Interpretation des Matrizenproduktes**

Sei $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ eine 3×3 Matrix ebenso wie A . Das Matrizenprodukt (spaltenweise ausgeführt)

$$AB = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3)$$

steht für jene lineare Selbstabbildung des \mathbb{R}^3 die \vec{e}_1 in $A\vec{b}_1$, \vec{e}_2 auf $A\vec{b}_2$, \vec{e}_3 auf $A\vec{b}_3$ abbildet. Daher beschreibt $A \cdot B$ die Abbildung mit der Vorschrift „ A nach B “ (Abbildungskompositum).

2) Betrachte

$$\delta(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) := \det(AB) = D(A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3)$$

δ ist mit D linear in jedem Argument und erfüllt auch Detail (2). Daraus ergibt sich die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\left| \begin{array}{l} \delta(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \lambda D(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \\ (*) \end{array} \right|$$

Spezialisiere:

$$\vec{b}_k = \vec{e}_k \quad ; \quad \det A = \lambda$$

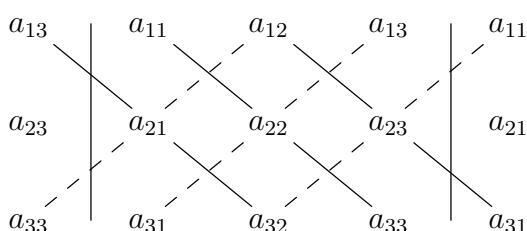
□

Bemerkung:

Durchführung der Rechnung $f(*)$ ergibt die vollständige Entwicklung der Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regel von Sarrus:

Die „Transponierte“ von A

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} ; \quad \det A^T = \det A ; \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Beweis von $(AB)^T = B^T A^T$:

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk}$$

ist das Element in Zeile Nummer k , Spalte Nummer i für $(AB)^T$

$$= \sum_{j=1}^3 b_{jk} a_{ij}$$

□

Für $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ gilt: $(AB)C = A(BC)$

3.5 Die Inverse Matrix

Wenn für $A \in M_3(\mathbb{R})$ $\det A \neq 0$ (und nur dann) lässt sich jeder Vektor des \mathbb{R}^3 als Linearkombination der Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ schreiben, daher (speziell $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dargestellt) gibt es eine Matrix $A^* = (\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*)$ derart

$$AA^* = 1_3$$

Produktsatz: $\det A^* = \frac{1}{\det A}$ weil $\det 1_3 = 1$; insbesondere $\det A^* \neq 0$

Daher existiert $A^{**} \in M_3(\mathbb{R})$ mit

$$A^* A^{**} = 1_3 \quad \text{und daher}$$

$$A = A 1_3 = A(A^* A^{**}) = (\underbrace{AA^*}_{1_3}) A^{**} = A^{**}$$

$$A = A^{**} ; \quad A^* A = 1_3$$

Die inverse Matrix ist eindeutig bestimmt. Annahme $AB = 1_3$; Multiplikation von links mit A^*

$$A^* = A^* 1_3 = (\underbrace{A^* A}_{1_3}) B = B$$

3.5.1 Die orthogonale Gruppe O_3 des euklidischen \mathbb{R}^3

bezeichnet die Menge aller orthogonalen Transformationen A des \mathbb{R}^3 . Die zugehörigen Matrizen $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ sind gekennzeichnet dadurch, dass die Spalten paarweise orthogonale Einheitsvektoren bilden. In Matrizenform

$$A^T A = 1_3$$

Algebraisch äquivalent ist $AA^T = 1_3$ denn beide Aussagen bedeuten $A^{-1} = A^T$.

Geometrische Bedeutung der zweiten Relation: Die Zeilenvektoren von A sind paarweise orthogonale Einheitsvektoren.

Mit $A, B \in O_3$ ist auch das (Matrizen-)produkt $AB \in O_3$. Denn

$$(AB)^T(AB) = B^T(A^T(AB)) = B^T(1_3B) = B^TB = 1_3$$

Für alle $A \in O_3$ ist auch $A^{-1} \in O_3$. Denn wegen $A \in O_3$ gilt $A^{-1} = A^T$

$$(A^{-1})^T(A^{-1}) = A^{TT}A^T = AA^T = 1_3$$

Insbesondere ist $1_3 \in O_3$. Die Determinante von $A \in O_3$ ist nach dem Produktsatz für Determinanten

$$(\det A)^2 = (\det AA^T) = 1$$

Daher: $\det A = +1$ (Drehung)

$\det A = -1$ (uneigentliche Bewegung)

Das einfachste Beispiel einer uneigentlichen Bewegung liefert

$$A = -1_3 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Die Bilder der Einheitsvektoren sind $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3$ also orientiert wie die ersten drei Finger der linken Hand (A mit $\det A = -1$ ist orientierungsumkehrend).

Die zwölf Drehungen des Tetraeders

Ecken: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

180°-Drehungen um die gegenüberliegenden Kantenmitten $\pm \vec{e}_k$

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} ; \quad z_2 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} ; \quad z_3 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = z_3 = z_2 z_1$$

$$z_2 z_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = z_1 = z_3 z_2$$

$$z_3 z_1 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = z_2 = z_1 z_3$$

120°-Drehung um die Achse $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbb{R}$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T\vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad T\vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad T\vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = T^{-1} ; \quad T^3 = 1_3$$

$$z_1 T = \begin{bmatrix} & & 1 \\ -1 & & \\ & -1 & \end{bmatrix} = T z_3$$

$$z_2 T = \begin{bmatrix} & & -1 \\ 1 & & \\ & -1 & \end{bmatrix} = T z_1$$

$$z_3 T = \begin{bmatrix} & & -1 \\ -1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} = T z_2$$

$$z_1 T^2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \\ -1 & \end{bmatrix} = T^2 z_2$$

$$z_2 T^2 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} = T^2 z_3$$

$$z_3 T^2 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} = T^2 z_1$$

$z_k T z_k$ hat die Drehachse $T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbb{R}$

$$z_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad z_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad z_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe: Zur reellen orthogonalen Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

mit $\det A = 1$ ist zu bestimmen ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{x}$ ($\mathbb{R}\vec{x}$ ist die „Drehachse“ von A).

Etwas allgemeiner ist die Frage nach „Eigenvektoren“ $\vec{x} \neq 0$ für lineare Transformationen A , das heißt $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für passendes λ

$$(E) \quad A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad |$$

In (E) alles auf die linke Seite ergibt drei Gleichungen in drei Unbestimmten x_1, x_2, x_3

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{lclclclclclcl} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 & = & 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix $A = \lambda 1_3$.

Ein homogenes Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{0}$ hat höchstens dann eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$, wenn gilt $\det B \neq 0$. Denn im Falle $\det B \neq 0$ existiert die zu B inverse Matrix B^{-1} . Sie ergibt sich durch Anwendung auf $B\vec{x} = \vec{0}$

$$B^{-1}(B\vec{x}) = (\underbrace{B^{-1}B}_{1_3})\vec{x} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Insbesondere:

Kriterium für die Lösbarkeit der Eigenwertgleichung (E) mit einem $\vec{x} \neq \vec{0}$

$$\det(A - \lambda 1_3) = 0$$

Diese Bedingung an den Eigenwert λ lautet ausgeschrieben (siehe die Regel von Sarrus im vorangegangenen Kapitel)

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda 1_3) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) \\ &\quad + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31}(a_{22} - \lambda) \\ &\quad - a_{12} a_{21} (a_{33} - \lambda) - a_{23} a_{32}(a_{11} - \lambda) = 0\end{aligned}$$

also geordnet nach Potenzen von λ

$$\begin{aligned}0 &= + \lambda^0 \det A \\ &\quad - \lambda^1(a_{11} a_{22} + a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} - a_{13} a_{31} - a_{12} a_{21} - a_{23} a_{32}) \\ &\quad + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda^3\end{aligned}$$

$\det(A - \lambda 1_3) = 0$ heißt „charakteristisches“ Polynom von A . Existenz der Drehachse bedeutet, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert der orthogonalen Matrix $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ ist. ($\det A = 1$) $A^T A = 1$ und $\det A = 1$ besagt: Für die Einheitsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ gelten die Formeln

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

$$\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{a}_2$$

Daher

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = a_{33}$$

$$a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23} = a_{11}$$

$$a_{33} a_{11} - a_{13} a_{31} = a_{22}$$

Eingesetzt in die rechte Seite der obigen nach Potenzen von λ geordneten Gleichung $\det(A - \lambda 1_3) = 0$ folgt das charakteristische Polynom für orthogonales A mit $\det A = 1$

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda - 1$$

Offenbar ist $\lambda = 1$ eine Nullstelle.

Ist dagegen A orthogonal und $\det A = -1$, so wird das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda + 1$$

Es hat sicher den Eigenwert $\lambda = -1$ (Nullstelle).

4.1 Die Lösung linearer Gleichungssysteme

$$(L) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

von m Gleichungen in n Unbekannten x_k ($1 \leq k \leq n$) mit Koeffizienten a_{ik} und rechten Seiten b_i , in einem zuvor festgelegten Körper K (zum Beispiel $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc.).

Die beiden einfachen Sonderfälle:

- (1) Alle $a_{ik} = 0$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$). Ist auch nur ein $b_i \neq 0$, dann ist das Gleichungssystem unlösbar. Wenn dagegen alle $b_i = 0$, dann ist jedes n -Tupel $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ von Elementen des Körpers K eine Lösung des Gleichungssystems.
- (2) Ist $m = 1$ und wenigstens ein $a_{ij} \neq 0$, dann findet man alle Lösungen, wenn man x_k beliebig wählt für alle $k \neq j$ und danach x_j berechnet aus der Gleichung.

Elementare Umformungen:

Unverändert bleibt das System der Lösungen $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ von (L) unter jeder der folgenden Operationen

- | |
|---|
| (M) Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $\neq 0$.
(V) Vertauschung von zwei Gleichungen.
(A) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung. |
|---|

4.1.1 Der Gaußsche Algorithmus

führt ein beliebiges System linearer Gleichungen schrittweise durch elementare Umformungen zurück auf ein System, das zu einem der beiden einfachen Sonderfälle gehört.

Beispiel:

- (1) ($m = n = 3$, $K = \mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= -4 \\
 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\
 x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3
 \end{aligned}$$

Tabellenform (RS = rechte Seite der Gleichungen):

x_1	x_2	x_3	RS
3	5	1	-4
2	4	5	9
<u>1</u>	2	2	3

Vorwärtselemination:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 2 & 3 & | \text{ 3. Zeile} \\
 0 & +1 & +5 & +13 & | 3 \times 3. \text{ Zeile} - 1. \text{ Zeile} \\
 0 & 0 & 1 & 3 & | 2. \text{ Zeile} - 2 \times 3. \text{ Zeile}
 \end{array}$$

Rückwärtssubstitution: $x_3 = 3$; $x_2 = -2$; $x_1 = 1$

Probe:

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -4 \\ 9 \\ 3 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung nämlich $(1, -2, 3)$.

(2) ($m = 4, n = 5, K = \mathbb{R}$)

Homogenes Gleichungssystem (das heißt $b_i = 0$) in Tabellenform:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
<u>1</u>	1	0	0	-2
2	0	0	-1	0
1	-1	0	-1	2
1	0	0	2	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	0	-2	1. Zeile
0	-2	0	-1	4	2. Zeile - 2 × 1. Zeile
0	-2	0	-1	4	3. Zeile - 1. Zeile
0	<u>-1</u>	0	2	2	4. Zeile - 1. Zeile

$$\begin{array}{ccccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & | 1. \text{ Zeile} \\
 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & | 4. \text{ Zeile} \times (-1) \\
 0 & 0 & 0 & -\underline{\underline{5}} & 0 & | 2. \text{ Zeile} - 2 \times 4. \text{ Zeile} \\
 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & | 3. \text{ Zeile} - 2 \times 4. \text{ Zeile}
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ccccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | 3. \text{ Zeile} \div (-5) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | 3. \text{ Zeile} - 4. \text{ Zeile}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zeilenstufen} \\ \text{Form} \end{array}$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution: $x_5 = t$ beliebig; $x_4 = 0$; $x_3 = s$ beliebig; $x_2 = 2t$; und $x_1 = 0$.

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Eliminationsschritt im Gaußschen Algorithmus

Das Gleichungssystem (L) gehöre nicht zu den beiden einfachen Sonderfällen. Dann existiert eine erste Spalte in der Koeffizientenmatrix $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m}$ welche nicht lauter Nullen enthält. Man wählt ein „Pivot-Element“ $a_{i_0j} \neq 0$. Operation (M): Multiplikation der Gleichung Nummer i_0 mit dem Skalar $1/a_{i_0j}$. Operation (V) bringt die bisherige Gleichung mit Nummer i_0 in die erste Zeile. Danach mehrfache Anwendung der Operation (A), um die Koeffizienten in der Spalte Nummer j für die übrigen Gleichungen zu 0 zu machen. Bezeichnet $(b'_i)_{1 \leq i \leq m}$ die Spalte der rechten Seite für die Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix $A' = (a'_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ dann ergibt sich das Lösbarkeitskriterium:

(L) ist dann und nur dann lösbar, wenn gilt $b'_i = 0$ falls $r + 1 \leq i \leq m$

Hierbei ist r der „Rang“ der Koeffizientenmatrix, welcher der Anzahl der Zeilen entspricht, in der nicht ausschließlich Nullen vorkommen. Das Lösbarkeitskriterium ist insbesondere dann erfüllt wenn r gleich der Anzahl m der Gleichungen ist.

| Der kleinste Körper hat genau 2 Elemente: $\mathbb{F}_2 = \{0, L\}$

Rechenregeln: (Rechnen mit ganzen Zahlen modulo 2)

$$\begin{array}{l} \text{Addition: } 0 + 0 = L + L = 0 \\ \quad 0 + L = L + 0 = L \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Multiplikation: } 0 \cdot 0 = 0 \cdot L = L \cdot 0 = 0 \\ \quad L \cdot L = L \end{array}$$

Über \mathbb{F}_2 wird auch Matrizenrechnung betrieben.

Beispiel:

- (3) 3×3 Matrizen Gesamtheit: $M_3\mathbb{F}_2$. Die Anzahl dieser Matrizen ist $2^9 = 512$. Die Anzahl der invertierbaren Matrizen in $M_3\mathbb{F}_2$ ist 168.

Frage: Ist $\begin{bmatrix} L & 0 & L \\ L & L & 0 \\ L & L & L \end{bmatrix}$ invertierbar?

Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \text{RS} \\ L & 0 & L & b_1 \\ \underline{L} & L & 0 & b_2 \\ L & L & L & b_3 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} L & L & 0 & b_2 \\ 0 & L & L & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & L & b_2 + b_3 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] ; \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ L \\ 0 \end{array} \right] ; \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ L \end{array} \right]$$

$$\underline{\underline{1}} \quad \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L \\ L \\ 0 \end{array} \right] ; \quad \underline{\underline{2}} \quad \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L \\ 0 \\ L \end{array} \right] ; \quad \underline{\underline{3}} \quad \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L \\ L \\ L \end{array} \right]$$

Probe:

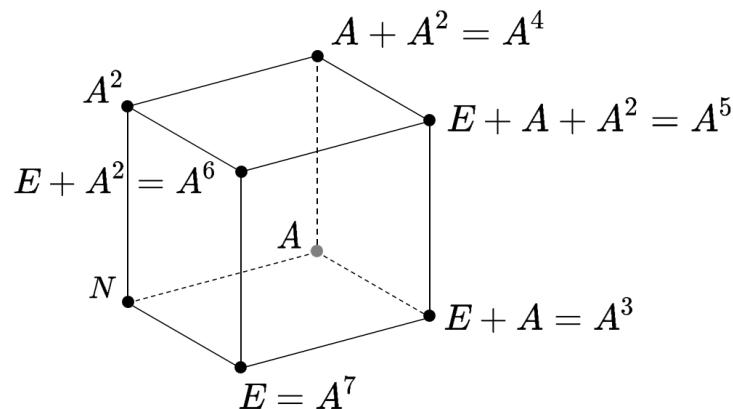
$$\begin{bmatrix} L & 0 & L \\ L & L & 0 \\ L & L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & L & L \\ L & 0 & L \\ 0 & L & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} = E$$

In $M_3\mathbb{F}_2$ lassen sich 8 Matrizen so auswählen, dass sie unter Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bilden.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \\ L & L & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ L & L & 0 \\ 0 & L & L \end{bmatrix}; \quad A^3 = \begin{bmatrix} L & L & 0 \\ 0 & L & L \\ L & L & L \end{bmatrix} = E + A$$

$$A^4 = A + A^2; \quad A^5 = E + A + A^2; \quad A^6 = E + A^2; \quad A^7 = E$$



5. Ebene und räumliche Kurven

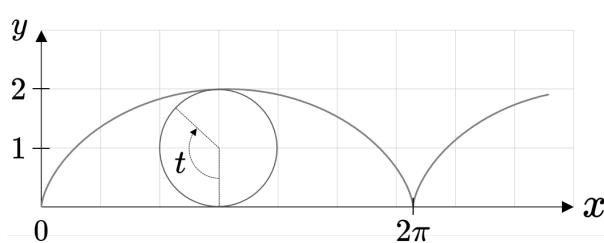
Definition

Unter einer Kurve wird verstanden eine Abbildung eines Intervalls I mit Bildern in der Ebene \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C} oder im Raum \mathbb{R}^3 , deren Koordinaten als Funktion von $t \in I$ stetig differenzierbar sind (gelegentlich: stetig und stückweise stetig differenzierbar).

Beispiel:

(0) Die Einheitskreislinie $I = \mathbb{R}; \quad \vec{\gamma}(t) = e^{it}$

(1) Die gemeine Zykloide

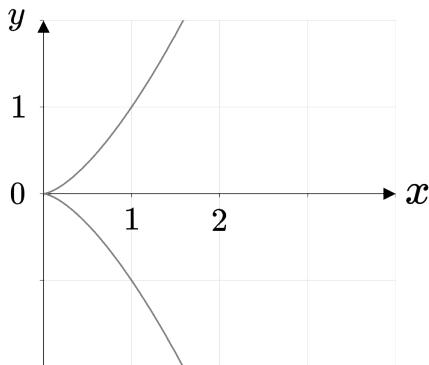


$$I = \mathbb{R};$$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

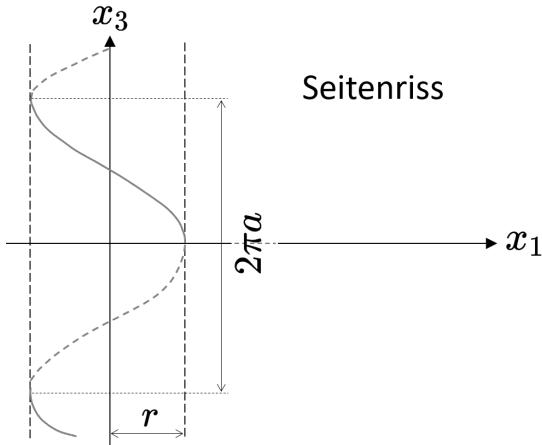
Allgemeiner: verkürzte und verlängerte Zykloide.

(2) Die Neilsche Parabel



$$I = \mathbb{R}; \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

(3) Die Schraubenlinie



$$I = \mathbb{R}; \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ at \end{pmatrix}$$

Über die Kurven wurde vorausgesetzt die Existenz des Limes für jedes $t \in I$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{1}{h} (\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)) = \dot{\vec{\gamma}}(t)$$

Geometrische Interpretation

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$ gibt einen Vektor in Richtung der Kurventangente zum „Zeit“-Punkt t . Seine Länge hängt von der Durchlaufgeschwindigkeit ab. $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ ist die vektorielle Momentangeschwindigkeit. Tangente: $\vec{\gamma}(t) + \mathbb{R} \dot{\vec{\gamma}}(t)$

Tangenten an die obigen Kurvenlinien:

$$\text{Kreislinie: } \vec{\gamma}(t) = e^{it} \quad \dot{\vec{\gamma}}(t) = ie^{it}$$

$$\text{Zykloide: } \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\text{Neilsche Parabel: } \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schraubenlinie: } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ at \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ a \end{pmatrix}$$

Kurvenpunkte mit $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{0}$ werden als „singuläre Kurvenpunkte“ bezeichnet. Eine Kurve heißt regulär wenn sie keine singulären Punkte enthält. Die Zykloide hat die singuläre Punktmenge $2\pi\mathbb{Z}$. Die Neilsche Parabel hat nur $t_0 = 0$ als singulären Punkt. Kreislinie und Schraubenlinie sind reguläre Kurven.

5.1 Definition der Kurvenlänge

Konvention: Die Pfeile für die Vektoren werden gelegentlich fortgelassen.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) sei eine Kurve

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Länge der Kreislinie:

$$\int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = 2\pi$$

Länge der Zykloide:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$$

$$\text{wegen } 1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8$$

Länge der Schraubenlinie:

$$\begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ at \end{pmatrix} = \vec{x}(t) ; \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ a \end{pmatrix}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + a^2} dt = 2\pi\sqrt{r^2 + a^2}$$

Beim Abwickeln der Zylinderfläche wird aus der Schraubenlinie die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten der Länge $2\pi r$ beziehungsweise $2\pi a$.

Parametertransformation

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Eine Abbildung $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ zwischen Parametern in Intervallen heißt Parametertransformation, falls $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, ferner φ stetig differenzierbar mit $\dot{\varphi}(t) > 0 \ \forall t$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{x}(t) = \gamma(\varphi(t)) \end{array} \right.$$

heißt Umparametrisierung der Kurve γ .

Verhalten der Ableitung

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \gamma_1(\varphi(t)) \\ \frac{d}{dt} \gamma_2(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(\varphi(t)) \\ \gamma'_2(\varphi(t)) \end{pmatrix} \dot{\varphi}(t)$$

kurz

$$\frac{d}{dt} \gamma(\varphi(t)) = \gamma'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)$$

Verhalten der Kurvenlänge

$$L(\vec{x}) = \int_c^d \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t) dt$$

(mit Transformationsformel von [Abschnitt 1.1.1](#))

$$= \int_{a=\varphi(c)}^{b=\varphi(d)} \|\gamma'(s)\| ds$$

Resultat: Kurvenlängen sind invariant gegenüber Parametertransformationen.

5.2 Das Kurvenintegral über ein Vektorfeld

Es sei $n = 2, 3$, $\vec{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld (Stetigkeit bedeutet, dass kleine Störungen im Argument nur kleine Änderungen im Wert hervorrufen). $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine Kurve. Das Kurvenintegral längs $\vec{\gamma}$ über das Vektorfeld \vec{h}

$$\int_{\gamma} \vec{h}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_a^b \vec{h}(\vec{\gamma}(t)) \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

Satz: Das Kurvenintegral längs γ über das Vektorfeld \vec{h} ändert sich nicht bei Umparametrisierung von γ .

Beweis:

Sei $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation. Abbildung $\vec{\delta}(t) = \vec{\gamma}(\varphi(t))$.

$$\text{Berechne} \quad \int_{\delta} \vec{h}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_c^d \vec{h}(\vec{\delta}(t)) \dot{\vec{\delta}}(t) dt$$

Transformations-
Formel

$$= \int_c^d \left[\vec{h}(\vec{\gamma}(\varphi(t))) \dot{\vec{\gamma}}(\varphi(t)) \right] \dot{\varphi}(t) dt \stackrel{\downarrow}{=} \int_a^b \vec{h}(\vec{\gamma}(s)) \dot{\vec{\gamma}}(s) ds$$

Ein Beispiel: $\vec{h}(\vec{x}) = -\alpha \|\vec{x}\|^{-3} \vec{x}$ (Gravitationsfeld) $n = 3$; $\vec{x} \neq 0$

Bemerkung: Dieses Feld kann im Ursprung nicht stetig erklärt werden.

Ein Probeteilchen der Masse 1 durchlaufe das Gravitationsfeld längs der Kurve γ : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{h}(\vec{x}) d\vec{x} &= -\alpha \int_a^b \|\gamma(t)\|^{-3} (\gamma(t) \dot{\gamma}(t)) dt \\ &= \alpha \int_a^b \frac{-\gamma_1(t)\dot{\gamma}_1(t) - \gamma_2(t)\dot{\gamma}_2(t) - \gamma_3(t)\dot{\gamma}_3(t)}{[\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t)]^{3/2}} dt \\ &= \alpha \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\gamma(t)\|} \right) dt = \alpha \left(\frac{1}{\|\gamma(b)\|} - \frac{1}{\|\gamma(a)\|} \right) \end{aligned}$$

Das Arbeitsintegral im Gravitationsfeld hängt nur ab von Anfangs und Endpunkt der Kurve γ ; fallen diese Punkte zusammen, so verschwindet das Integral. Newtons Bewegungsgesetz besagt, dass die Änderung der Bewegungsgröße mit der Zeit $m \dot{\vec{x}}$ eines Teilchens der Masse m im Kraftfeld $\vec{h}(\vec{x})$ des Raumes proportional ist zu $\vec{h}(\vec{x})$

$$m \ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} (m \dot{\vec{x}}) = \vec{h}(\vec{x})$$

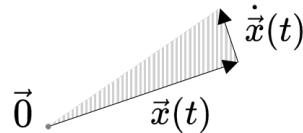
falls die Masse zeitlich konstant ist. Von besonderer Bedeutung: Zentraffelder mit Zentrum als Koordinatenursprung

$$\vec{h}(\vec{x}) = \lambda(\|\vec{x}\|) \vec{x} \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

mit einer stetigen Funktion $\lambda :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Flächensatz: Für die (freie) Bewegung längs der aus der Bewegungsgleichung folgenden Kurve $\vec{x}(t)$ eines Teilchens im Zentraffeld ist der Vektor

$$\frac{1}{2} (\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)) \quad \text{konstant.}$$



Beweis:

Wegen $m \ddot{\vec{x}} = \vec{h}(\vec{x})$ sind die Koordinatenfunktionen von $\vec{x}(t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Zeit, daher ist $\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)$ vektorwertige Funktion der Zeit, deren Koordinaten stetig differenzierbar sind.

Der Beweis: Jede Koordinatenfunktion von $\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)$ hat die Ableitung 0.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2 \\ x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_3 \\ x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_3 \dot{x}_2 + x_2 \ddot{x}_3 - x_3 \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{x}_3 + x_3 \ddot{x}_1 - x_1 \ddot{x}_3 \\ \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_2 \dot{x}_1 + x_1 \ddot{x}_2 - x_2 \ddot{x}_1 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\dot{\vec{x}}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)}_{= \vec{0}} + \vec{x}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \quad (\text{wegen der Bewegungsgleichung}) \\
&= \vec{x}(t) \times \left(\frac{1}{m} \vec{h}(\vec{x}) \right) = \frac{1}{m} \lambda(\|\vec{x}\|) \underbrace{(\vec{x} \times \vec{x})}_{= \vec{0}}
\end{aligned}$$

□

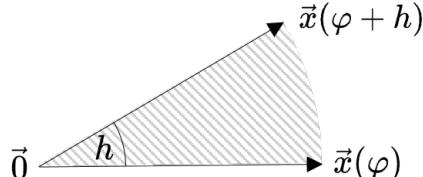
5.3 Polarkoordinaten für ebene Kurven

Kurzform: $r = r(\varphi)$

Der Parameter φ ist der Winkel zwischen der x -Achse und dem Ortsvektor des Kurvenpunktes (\vec{x}); $r = \|\vec{x}\|$. Ausgeschrieben

$$\vec{x}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{im } \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x}(\varphi) = r(\varphi) e^{i\varphi} \quad \text{in } \mathbb{C}$$



Nützliche Verallgemeinerung: φ kann selbst als Funktion eines weiteren Parameters t aufgefasst werden. Der Vektor

$$\vec{x}(\varphi) \times (\vec{x}(\varphi + h) - \vec{x}(\varphi)) = \vec{x}(\varphi) \times \vec{x}(\varphi + h)$$

hat als Norm den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $\vec{0}$, $\vec{x}(\varphi)$, $\vec{x}(\varphi + h)$. Durch Grenzübergang $h \rightarrow 0$ und Integration ergibt sich

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{x}(\varphi) \times \vec{x}'(\varphi) d\varphi$$

in vektorieller Form die vom „Fahrstrahl“ überstrichene Fläche

$$\vec{x}(\varphi) \times \vec{x}'(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1(\varphi)x'_2(\varphi) - x_2(\varphi)x'_1(\varphi) \end{bmatrix}$$

Erweiterung für den Fall, dass φ Funktion eines Parameters t ist

$$\vec{x}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(\varphi) = r'(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r(\varphi) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

damit wird die dritte Koordinate im Vektorprodukt

$$x_1 x'_2 - x_2 x'_1 = r^2(\varphi)$$

und somit wird die dritte Komponente des Vektorprodukts

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 \dot{\varphi} dt$$

Beispiel:

- (4) Die Archimedische Spirale: $r = a\varphi$ ($a > 0$) $\varphi \geq 0$

Ausführlich:

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} a\varphi \cos \varphi \\ a\varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi + \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{x}'(\varphi)\|^2 = a^2(1 + \varphi^2)$$

Bogenlänge:

$$s(\phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 + \varphi^2} = \frac{a}{2} [\phi(1 + \phi^2)^{1/2} + \ln(\phi + (1 + \phi^2)^{1/2})]$$

Überstrichene Fläche:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^\phi a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} \phi^3$$

Wenn $\phi > 2\pi$ ist, dann werden gewisse Teile der Ebene mehrfach überstrichen.

Bemerkung:

Auch in der Form $y = f(x)$ bei stetig differenzierbarem $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ handelt es sich um eine parametrisierte Kurve. Der Parameter ist hier $x \in I$.

5.4 Die Krümmung einer ebenen Kurve

γ sei eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurve in \mathbb{R}^2 (oder \mathbb{C}) ohne singuläre Punkte. Als Krümmung im Kurvenpunkt $\gamma(t)$ bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit des Tangenteneinheitsvektors bezogen auf die Bogenlänge!

Formel für die Krümmung der Kurve im Punkt $\gamma(t)$:

$$\kappa = \frac{\dot{\gamma}_1 \ddot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_2 \ddot{\gamma}_1}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Beispiel:

(0) Die Kreislinie um 0 mit Radius $r > 0$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r e^{it} & \dot{\gamma}(t) &= i r e^{it} & \ddot{\gamma}(t) &= -r e^{it} \\ \kappa &= \frac{r^2[(-\sin t)^2 + (\cos t)^2]}{r^3} & & & &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Die Krümmung der positiv durchlaufenen Kreislinie ist gleich dem reziproken Radius des Kreises.

$$\left| \frac{1}{\kappa} \right| = \text{„Krümmungsradius“}$$

|| Invarianz der Krümmung gegenüber Parametertransformationen

Sei $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Parametertransformation.

Betrachte: $\delta(t) = \gamma(\varphi(t))$

Komponentenweise Differentiation!

$$\dot{\delta}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(\varphi(t)) \\ \dot{\gamma}_2(\varphi(t)) \end{pmatrix} \dot{\varphi}(t)$$

$$\ddot{\delta}(t) = \ddot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\gamma}(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t)$$

$$\frac{\dot{\delta}_1 \ddot{\delta}_2 - \dot{\delta}_2 \ddot{\delta}_1}{\|\delta\|^3} = \frac{[\dot{\gamma}_1(\varphi(t)) \ddot{\gamma}_2(\varphi(t)) - \dot{\gamma}_2(\varphi(t)) \ddot{\gamma}_1(\varphi(t))] \dot{\varphi}^3(t)}{\|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|^3 \dot{\varphi}^3(t)} + 0$$

$$\frac{\dot{\delta}_1 \ddot{\delta}_2 - \dot{\delta}_2 \ddot{\delta}_1}{\|\delta\|^3} = \frac{(\dot{\gamma}_1 \circ \varphi)(\ddot{\gamma}_2 \circ \varphi) - (\dot{\gamma}_2 \circ \varphi)(\ddot{\gamma}_1 \circ \varphi)}{\|\dot{\gamma} \circ \varphi\|^3}$$

Parametrisierung bezüglich der Bogenlänge s

Es sei γ eine reguläre Kurve in \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Bogenlänge

$$s(T) = \int_{T_0}^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad T \in [a, b]$$

ist eine differenzierbare Funktion von T mit Ableitung $\dot{s}(T) = \|\dot{\gamma}(T)\| > 0$. Mit $A = s(a)$, $B = s(b)$ existiert daher zu s eine Umkehrfunktion $\varphi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ mit der Ableitung

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\dot{s}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|} \quad (*)$$

Durch φ wird daher γ parametrisiert:

$$\delta(s) = \gamma(\varphi(s))$$

Ableitung:

$$\delta'(s) = \dot{\gamma}(\varphi(s)) \varphi'(s) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\dot{\gamma}(\varphi(s))}{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|}$$

wegen $(*)$

Die Tangentenvektoren $\delta'(s)$ sind an jeder Stelle Einheitsvektoren.

Sei jetzt $n = 2$. Die Krümmung bei Parametrisierung bezüglich s ist

$$\kappa = \delta'_1(s) \delta''_2(s) - \delta'_2(s) \delta''_1(s)$$

Mit

$$\delta'(s) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(s) \\ \sin \alpha(s) \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad \delta''(s) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha(s) \\ \cos \alpha(s) \end{pmatrix} \alpha'(s)$$

und damit

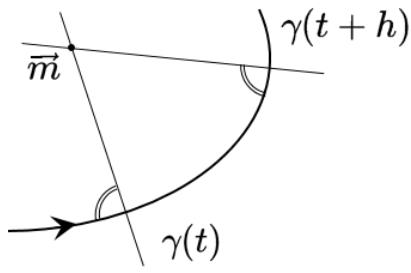
$$\kappa(s) = \alpha'(s)$$

Zurück zu Beispiel 0:

Die Einheitskreislinie $\gamma(t) = e^{it}$ ist bereits bezüglich der Bogenlänge parametrisiert:

$$|\dot{\gamma}(t)| = |ie^{it}| = 1$$

Der Krümmungskreis



Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve und regulär. Für hinreichend kleine $h \neq 0$ wird berechnet der Schnittpunkt \vec{m} der beiden Normalen zu den Tangenten in den Kurvenpunkten $\gamma(t)$, $\gamma(t + h)$. Man erhält den Normaleneinheitsvektor senkrecht zu $\dot{\gamma}(t)$ beziehungsweise zu $\dot{\gamma}(t + h)$ aus den

Normalengleichungen:

$$\left. \begin{array}{rcl} \dot{\gamma}(t)[\gamma(t) - \vec{m}] & = & 0 \\ \dot{\gamma}(t+h)[\gamma(t+h) - \vec{m}] & = & 0 \end{array} \right\} \text{lineares Gleichungssystem in } m_1 \text{ und } m_2$$

Elementare Umformung

$$1. \quad \dot{\gamma}(t) \vec{m} = \gamma(t) \dot{\gamma}(t) := g(t)$$

$$\dot{\gamma}(t+h) \vec{m} = \gamma(t+h) \dot{\gamma}(t+h) := g(t+h)$$

$$2. \quad \frac{1}{h}(\dot{\gamma}(t+h) - \dot{\gamma}(t)) = \frac{1}{h}(g(t+h) - g(t))$$

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1(t) & \dot{\gamma}_2(t) \\ \frac{1}{h}(\dot{\gamma}_1(t+h) - \dot{\gamma}_1(t)) & \frac{1}{h}(\dot{\gamma}_2(t+h) - \dot{\gamma}_2(t)) \end{bmatrix}$$

Die Determinante für $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \det A = \dot{\gamma}_1 \ddot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_2 \ddot{\gamma}_1 \neq 0 \quad \text{dieses ist nunmehr vorausgesetzt!}$$

Daher ist A für kleine h invertierbar und dafür ist der Normalenschnittpunkt

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \gamma(t)\dot{\gamma}(t) \\ \frac{1}{h}(\gamma(t+h)\dot{\gamma}(t+h) - \gamma(t)\dot{\gamma}(t)) \end{bmatrix}$$

Es existiert für diesen Schnittpunkt also eine Grenzlage bezeichnet wieder mit \vec{m} (für $h \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{\dot{\gamma}_1\ddot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_2\ddot{\gamma}_1} \begin{bmatrix} \ddot{\gamma}_2 & -\dot{\gamma}_2 \\ -\ddot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}\dot{\gamma} + \gamma\ddot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{Produktregel}) \\ &= \frac{1}{\dot{\gamma}_1\ddot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_2\ddot{\gamma}_1} \begin{bmatrix} +\ddot{\gamma}_2(\gamma\dot{\gamma}) - \dot{\gamma}_2(\dot{\gamma}\dot{\gamma}) - \dot{\gamma}_2(\gamma\ddot{\gamma}) \\ -\ddot{\gamma}_1(\gamma\dot{\gamma}) + \dot{\gamma}_1(\dot{\gamma}\dot{\gamma}) + \dot{\gamma}_1(\gamma\ddot{\gamma}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \frac{\|\dot{\gamma}\dot{\gamma}\|^2}{\dot{\gamma}_1\ddot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_2\ddot{\gamma}_1} \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resultat: Die Krümmungsmittelpunkt-Kurve

$$\vec{m} = \vec{\gamma} + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$$

Evolute von $\vec{\gamma}$

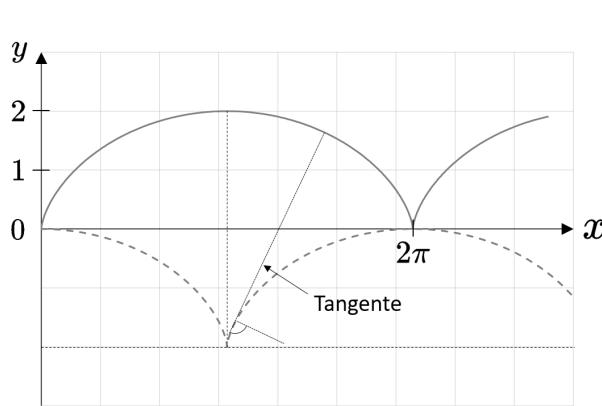
wo \vec{n} der Normaleneinheitsvektor ist, entstanden aus dem Tangenteneinheitsvektor

$$\frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

durch Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Der Kreis mit Mittelpunkt \vec{m} durch den Kurvenpunkt $\vec{\gamma}$ hat die gleiche Krümmung wie die Kurve.

Beispiel:

(1) Die Evolute der gemeinen Zykloide



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

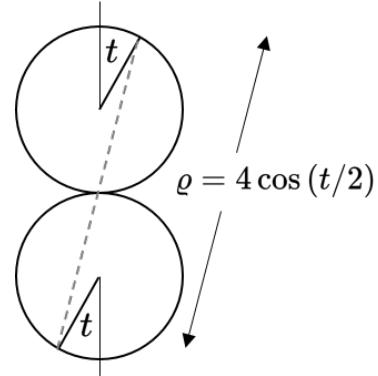
$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2 \cos t$$

$$\kappa(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^3 \quad / \times \text{dritte Komponente von } \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$$

$$= \|\dot{\gamma}(t)\|^3 (\cos t - 1) = -\frac{1}{2} \|\dot{\gamma}(t)\|^{-1}$$

$$\vec{m} = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \vec{n}(t) = \gamma(t) - 2 \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$



Allgemeine Eigenschaften der Evoluten

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine bezüglich der Bogenlänge s parametrisierte Kurve und mindestens dreimal stetig differenzierbar und regulär.

a) $\gamma_1'^2(s) + \gamma_2'^2(s) = 1$ konstant

durch Differentiation:

$$\gamma_1'(s)\gamma_1''(s) + \gamma_2'(s)\gamma_2''(s) = 0$$

Geometrische Bedeutung: $\gamma'(s)$ steht überall senkrecht auf $\gamma''(s)$.

b) Differentiation der Evolutengleichung nach s

$$\vec{m}' = \vec{\gamma}'(s) + \frac{1}{\kappa} \vec{n}'(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \vec{n}(s)$$

$$\kappa \vec{\gamma}' + \vec{n}' = (\gamma_1' \gamma_2'' - \gamma_2' \gamma_1'') \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma_2' \\ \gamma_1' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\gamma_1'^2 - 1)\gamma_2'' & -\gamma_1' \gamma_1'' \gamma_2' \\ \gamma_1' \gamma_2' \gamma_2'' & (1 - \gamma_2'^2)\gamma_1'' \end{bmatrix}$$

$$= (\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2') \begin{pmatrix} -\gamma_2' \\ \gamma_1' \end{pmatrix}$$

$$\vec{m}' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}(s) \vec{n}(s)$$

Konsequenzen:

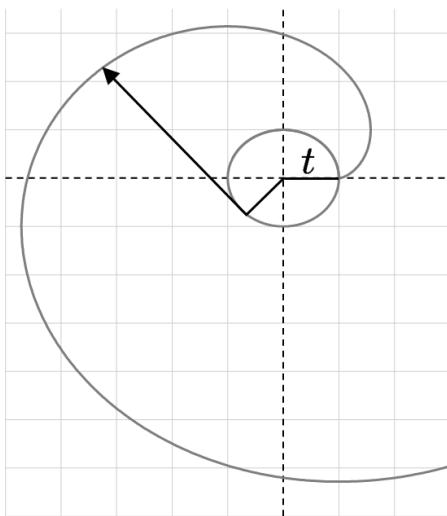
In jedem Extremum der Krümmung von $\vec{\gamma}$ entsteht eine Singularität der Evolute. In den Punkten in denen die Ausgangskurve und ihre Evolute regulär sind, ist die Tangente an die Evolute zugleich die Normale an die Ausgangskurve.

$$\text{Übergang zur Norm} \quad \|\vec{m}'(s)\| = \pm \frac{d}{ds} \frac{1}{\kappa}$$

Geometrisch ausgedrückt: In Breichen steeper Monotonie von κ ist entweder die Summe oder die Differenz aus Krümmungsradius von γ und Bogenlänge von \vec{m} konstant.

- || Fadenkonstruktion der Kurve $\vec{\gamma}$ aus ihrer Evolute

Welche Kurve entsteht aus einer vorgegebenen Evolute durch die Fadenkonstruktion? Es sind die sogenannten Evolventen einer Kurve!

Die Kreisevolvente:

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}; \quad t > 0$$

Probe: Berechnung der Evoluten

$$\dot{\gamma}(t) = t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (\text{Archimedische Spirale})$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = t$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\kappa(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^{-3} t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{1}{t}$$

$$\vec{m} = \vec{\gamma} + \frac{1}{\kappa} \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

6. Umgebungen und Limiten

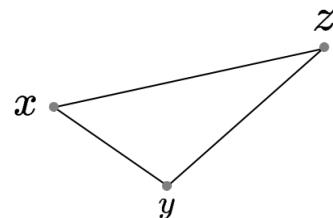
Definition:

Ein metrischer Raum X ist eine Menge mit einer Abstandsfunktion (Metrik) $(x, y) \mapsto |x, y| \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(M1) \quad |x, y| = 0, \quad \text{genau dann, wenn } x = y$$

$$(M2) \quad |x, y| = |y, x| \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(M3) \quad |x, z| \leq |x, y| + |y, z| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$



Beispiele:

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) mit euklidischem Abstand

(2) $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$

$$|f, g| := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus der für die reellen Zahlen (im Zusammenhang mit gleichmäßiger Konvergenz).

(3) Für jeden metrischen Raum X ergibt jede Teilmenge U mit der Restriktion der Metrik von X auf U wieder einen metrischen Raum!

Die (offene) ϵ -Kugel $B_\epsilon(a)$ vom Radius $\epsilon > 0$ um den Punkt $a \in X$

$$B_\epsilon(a) := \{x \in X; |x, a| < \epsilon\}$$

Eine Teilmenge V von X heißt eine „Umgebung“ von a , wenn für wenigstens ein $\epsilon > 0$ gilt

$$B_\epsilon(a) \subset V$$

Eine Menge U von X heißt offen, wenn U eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Beispiel:

(4) $B_\epsilon(a)$ ist offen

Für $x \in B_\epsilon(a)$ ist $\eta = |x, a| < \epsilon$

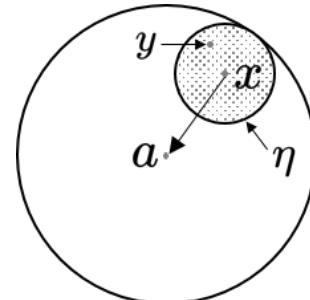
Behauptung: $B_{\epsilon-\eta}(x) \subset B_\epsilon(a)$

Sei $y \in B_{\epsilon-\eta}(x)$, das heißt $|x, y| < \epsilon - \eta$

Mit der Dreiecksungleichung:

$$|y, a| \leq |x, y| + |x, a| < \epsilon - \eta + \eta = \epsilon$$

also $y \in B_\epsilon(a) \quad \forall y \in B_{\epsilon-\eta}(x)$



Definition der Stetigkeit:

$f : X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung (Funktion) zwischen metrischen Räumen. f heißt „stetig“ im Punkt $a \in X$ wenn für jede Umgebung V in Y des Bildpunktes $f(a)$ eine Umgebung U existiert des Urbildpunktes $a \in X$ mit

$$f(U) \subset V$$

(speziell $V = B_\epsilon(f(a))$, $B_d(a) \subset U$)

$f(B_d(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$, das heißt

für x mit $|x, a| < \delta$ ist $|f(x), f(a)| < \epsilon$. f heißt stetig auf X , falls f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.

Beispiele:

Jede kontrahierende Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist stetig.

Jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Beweis:

f „kontrahierend“, wenn ein $\vartheta \in]0, 1[$ existiert mit

$$|f(x), f(y)| \leq \vartheta |x, y| \quad \forall x, y \in X$$

L „linear“, wenn

$$\left. \begin{array}{lcl} L(\vec{x} + \vec{y}) & = & L(\vec{x}) + L(\vec{y}) \\ L(\lambda \vec{x}) & = & \lambda L(\vec{x}) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ist $\epsilon > 0$ und $|x, a| < \epsilon$, dann

$$|f(x), f(a)| \leq \vartheta |x, a| \leq \vartheta \epsilon < \epsilon$$

das heißt

$$\begin{aligned} f(B_\epsilon(a)) &\subset B_\epsilon(f(a)) \quad \forall \epsilon > 0 \\ \left\| L\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i - \underbrace{L(\vec{0})}_{=\vec{0}}\right) \right\| &= \left\| \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i\right) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|L(\vec{e}_i)\| \leq M \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \\ &\leq Mn \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{1/2}; \quad M := \max_{1 \leq i \leq n} \|L(\vec{e}_i)\| \end{aligned}$$

$$\|L(\vec{x}) - L(\vec{a})\| = \|L(\vec{x} - \vec{a})\| \leq Mn \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

□

Das Kompositum zweier stetigen Abbildungen ist wieder stetig.

Es seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen X, Y, Z . Ist f in $a \in X$ stetig und g in $b = f(a) \in Y$ stetig dann ist $g \circ f$ stetig in $a \in X$.

Beweis:

Sei $c := g(\underbrace{f(a)}_b)$ und $W \subset Z$ sei eine Umgebung von c .

Weil g in b stetig ist, existiert eine Umgebung V von b mit

$$g(V) \subset W$$

Weil f in a stetig ist, existiert eine Umgebung U von a mit

$$f(U) \subset V$$

Anwendung von g :

$$g \circ f(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

zu a hat U die Eigenschaft: $(g \circ f)(U) \subset W$.

□

Beispiel:

$$(5) \quad X = Y = \mathbb{C}, \quad Z = \mathbb{R}$$

$f(w) = w^3$ ist stetig

$g(z) = \operatorname{Re}(z)$ ist stetig (da \mathbb{R} linear)

Daher ist $g \circ f(z) = \operatorname{Re}(z^3)$ ebenfalls stetig (der Graph ist ein sogenannter Affensattel).

Definition:

X sei ein metrischer Raum, $a_k \in X$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heißt „konvergent“ gegen $a \in X$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$) falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k, a| = 0$$

Ausgedrückt mit Umgebungen!

In jeder Umgebung U von a existiert ein Index N_U mit $a_k \in U$ für alle $k \geq N_U$.

Satz:

Ist $(a_k)_{k \geq 0}$ eine konvergente Folge auf dem metrischen Raum X mit Limes a und ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, dann gilt in Y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(a)$$

Beweis:

Sei $V = B_\epsilon(f(a))$ eine Umgebung von $f(a)$. Da f stetig, existiert eine Umgebung $U = B_\delta(a)$ mit $f(U) \subset V$

$(a_k)_{k \geq 0}$ konvergent gegen a , also existiert eine Indexschranke N_U mit $a_k \in U \quad \forall k \geq N_U$, daher

$$f(a_k) \in f(U) \subset V \quad \forall k \geq N_U$$

□

Definition:

Eine Folge $(c_k)_{k \geq 0}$ auf dem metrischen Raum X heißt eine „Cauchy-Folge“, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein N_ϵ existiert mit

$$|c_k - c_l| \leq \epsilon \quad \forall k, l \geq N_\epsilon$$

Der Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge auf X konvergent ist.

Beispiel:

(6) \mathbb{R}^n ist mit der euklidischen Metrik vollständig ($n = 1, 2, 3$). Im Falle $n = 1$ ist das die Grunderkenntnis der Analysis. Sei nun n beliebig. Sei ferner $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge auf \mathbb{R}^n , r sei einer der Koordinatenindizes ($1 \leq r \leq n$)

$$|c_{k,r} - c_{l,r}| \leq \|c_k - c_l\| \quad (\text{Ungleichung für die Koordinatendifferenzen})$$

Daher ist für jedes r die reelle Folge $(c_{k,r})_{k \geq 0}$ als Cauchy-Folge in \mathbb{R} konvergent!

$$\text{Etwa } \gamma_r := \lim_{k \rightarrow \infty} c_{k,r}$$

Behauptung: $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \gamma$ wo $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|c_k - \gamma\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{r=1}^n (c_{k,r} - \gamma_r)^2} = 0$$

6.1 Fixpunktsatz

Es sei X ein vollständig metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ ist eine kontrahierende Abbildung. Dann gilt: f hat genau einen Fixpunkt x_∞ in X (das heißt $f(x_\infty) = x_\infty$).

Beweis:

weil f kontrahiert, existiert $\vartheta \in]0, 1[$ mit $|f(x), f(y)| \leq \vartheta |x, y|$

Annahme: $f(x_\infty) = x_\infty$ und $f(a) = a$

$$|x, a| = |f(x_\infty), f(a)| \leq \vartheta |x_\infty, a|$$

das heißt $(1 - \vartheta) |x_\infty, a| \leq 0$ obwohl $\vartheta < 1$

daher $|x_\infty, a| = 0$, also nach M1, $x_\infty = a$

Existenz des Fixpunktes

Sei $a_0 \in X$ beliebig. Rekursive Definiton

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

$(a_n)_{n \geq 0}$ ist eine Cauchy-Folge:

$$|a_{r+1}, a_r| \leq \vartheta^r |a_0, a_1| \quad (\text{vollständige Induktion})$$

$$|a_n, a_{n+p}| \leq \sum_{r=n}^{n+p-1} |a_r, a_{r+1}| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$\leq |a_0, a_1| \sum_{r=n}^{n+p-1} \vartheta^r \leq \underbrace{\frac{|a_0, a_1| \vartheta^n}{1 - \vartheta}}_{\rightarrow 0} \quad (\text{geometrische Reihe})$$

Daher ist $(a_k)_{k \geq 0}$ als Cauchy-Folge konvergent: Es existiert $x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$

Aus $a_{k+1} = f(a_k)$ und der Stetigkeit von f folgt durch Übergang zum Limes

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right) = f(x_\infty)$$

□

Definition:

Es seien $f_k : X \rightarrow Y$ Abbildungen (Funktionen) zwischen metrischen Räumen X, Y ($k \geq 0$). $(f_k)_{k \geq 0}$ heißt gleichmäßig konvergent, falls erstens für jedes $x \in X$ die Punktfolge

$$(f_k(x))_{k \geq 0}$$

in Y konvergiert und zweitens (mit der Bezeichnung $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ für Limes) zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index N_ϵ existiert mit

$$|f_k(x), f(x)| \leq \epsilon \quad \forall k \geq N_\epsilon \quad \forall x \in X$$

Gleichmäßige Limiten stetiger Funktionenfolgen sind stetig!

Beweis:

Zweifache Anwendung der Dreiecksungleichung ($x, a \in X, N \geq 0$)

$$|f(x), f(a)| \leq |f(x), f_N(x)| + |f_N(x), f_N(a)| + |f_N(a), f(a)|$$

Sei $\epsilon > 0$, wähle $N = N_{\epsilon/3}$

$$|f(x), f(a)| \leq \frac{2}{3}\epsilon + |f_N(x), f_N(a)|$$

weil f_N nach Voraussetzung stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f_N(x), f_N(a)| < \epsilon/3$ falls $|x, a| < \delta$.

Zusammengesetzt: Ist $|x, a| < \delta$ dann

$$|f(x), f(a)| < \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

7. Partielle und totale Ableitung

Abbildungen (Funktionen) von Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Werten in \mathbb{R} werden betrachtet bezüglich Differenzierbarkeit. An die Stelle der Intervalle I in \mathbb{R} treten hier die „Gebiete“ U im \mathbb{R}^n , das sind offene, nichtleere Teilmengen, in denen man je zwei Punkte durch eine Kurve in U verbinden kann.

Zu Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wird der Graph als Teilmenge des \mathbb{R}^{n+1} folgendermaßen

$$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, y) ; (x_1, \dots, x_n) \in U, y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

und die Niveaulinien

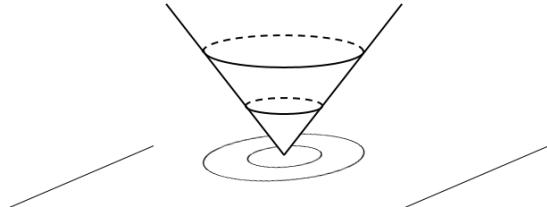
$$\{\vec{x} \in U : f(\vec{x}) = c\}, \quad c = \text{konstant}$$

Beste Veranschaulichung für $n = 2$; dann ist der Graph f eine Art Gebirge über der Ebenen-Menge U .

Beispiel:

$$(0) n = 2, \quad U = \mathbb{R}^2$$

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$$



7.1 Definition der partiellen Ableitung

Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf dem Gebiet U des \mathbb{R}^n . Die k -te partielle Ableitung in $\vec{x} \in U$ wird erklärt (im Falle der Existenz) als der Limes

$$D_k f(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots x_k + h \dots) - f(\dots x_k \dots)}{h}$$

Andere Bezeichnungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) ; \quad f_{x_k}(\vec{x}) ; \quad f'_{x_k}(\vec{x})$$

Falls f im Punkte \vec{x} nach allen n Variablen differenzierbar ist, dann wird der Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) = \text{grad } f$$

„Gradient“ von f in \vec{x} genannt. Mit dem symbolischen Nabla-Vektor

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \nabla$$

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Bemerkungen:

- (1) Jede partielle Ableitung ist nichts anderes als eine gewöhnliche Ableitung nach einer reellen Variablen. Die übrigen Variablen werden als konstant betrachtet!
- (2) Hat f überall auf U partielle Ableitungen nach x_1, \dots, x_n dann liefert der Gradient ein Vektorfeld $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Zurück zu Beispiel (0):

$$\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

ist differenzierbar auf $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_k} = \frac{2x_k}{2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}} ; \quad \text{grad } \|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|^{-1} \vec{x}$$

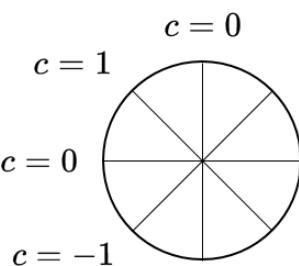
Beispiel:

- (1) Zylindroid $n = 2$, $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}; \|\vec{x}\| < 1\}$

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{falls nicht } x = y = 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

Niveaulinien:

$$\{\vec{x}, f(\vec{x}) = c\}$$



Die partiellen Ableitungen

$$\vec{x} \neq \vec{0}: \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2y(x^2 + y^2) - 4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x(x^2 + y^2) - 4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \vec{0}: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0$$

Bemerkung:

- (3) Obwohl die Funktion f für den Zylindroid überall partielle Ableitungen nach beiden Variablen besitzt ist f im Nullpunkt unstetig!

Satz:

Es sei f auf dem Gebiet U des \mathbb{R}^n reell und partiell differenzierbar nach allen Variablen. Überdies seien die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ für alle k auf U beschränkt. Dann ist f in jedem Punkt $\vec{a} \in U$ stetig.

Beweis: Aus dem gewöhnlichen Mittelwertsatz

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

wird durch Einschübe

$$\begin{aligned} &= f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots) + f(a_1, a_2 + h_2, \dots) - \dots \\ &\quad + \dots - f(a_1, a_2, \dots, a_n + h_n) + f(a_1, a_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a} + \vec{t}_1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a} + \vec{t}_2) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a} + \vec{t}_n) \end{aligned}$$

Daher ergibt die Voraussetzung über die $\frac{\partial f}{\partial x_k}$

$$|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})| = \|\vec{h}\| M n$$

Insbesondere folgt die Stetigkeit von f in \vec{a} .

□

Bemerkung:

- (4) Stetige Funktionen sind lokal beschränkt! Denn ist g in \vec{a} stetig, dann existiert eine Umgebung U von \vec{a} mit

$$|g(\vec{x}) - g(\vec{a})| \leq 1, \text{ also}$$

$$|g(\vec{x})| \leq |g(\vec{a})| + 1$$

Konsequenz:

Ist mit der Voraussetzung des Satzes jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ als Funktion auf U stetig, dann ist f selbst stetig auf U .

Ein Vektorfeld $\vec{h} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet G des \mathbb{R}^n heißt „konservativ“, falls dieses Vektorfeld Gradient einer Funktion $-V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist (V heißt Potential von \vec{h}). Es gilt für stetige konservative Vektorfelder $\vec{h} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und beliebige Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow G$:

$$\int_{\gamma} \vec{h}(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\gamma} \text{grad } V(\vec{x}) d\vec{x} = V(\gamma(a)) - V(\gamma(b))$$

Das Kurvenintegral über den (negativen) Gradienten eines Potentials V ist gleich der Potentialdifferenz in den Endpunkten der Kurve!

7.1.1 Verallgemeinerte Kettenregel

Gegeben sei eine reelle Funktion $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet G des \mathbb{R}^n , welche partiell differenzierbar ist nach allen Variablen und die partiellen Ableitungen seien stetig!

Dann gilt für jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ mit der zusammengesetzten Funktion

$$\begin{aligned} F(t) &:= V(\gamma(t)) \\ \dot{F}(t) &= \text{grad } V(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{\gamma}_i(t) \end{aligned}$$

Jede stetig partiell differenzierbare Funktion ist linear approximierbar. f sei eine auf dem Gebiete $G \subset \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt $\vec{x}, \vec{x} + \vec{y} \in G$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) \vec{y} + \|\vec{y}\| r(\vec{y})$$

$$\text{mit } \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{0}} r(\vec{y}) = 0$$

Beweis: der Approximationsformel

$f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x})$ wird durch Einschübe zu

$$\begin{aligned} &= f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) - f(x_1, x_2 + y_1, \dots) \dots \\ &\quad \pm \dots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

mit Mittelwertsatz

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} (\vec{x} + \vec{w}_1) \vec{y}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (\vec{x} + \vec{w}_n) \vec{y}_n$$

Daher hat der Rest die explizite Gestalt

$$\begin{aligned} r(\vec{y}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} (\vec{x} + \vec{w}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1} (\vec{x}) \right) \frac{y_1}{\|\vec{y}\|} + \dots \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} (\vec{x} + \vec{w}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n} (\vec{x}) \right) \frac{y_n}{\|\vec{y}\|} \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Punkt \vec{x} folgt:

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{0}} r(\vec{y}) = 0$$

□

Beweis: der Kettenregel

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{V(\gamma(t+h)) - V(\gamma(t))}{h}$$

(Aus der Approximationsformel mit $\vec{x} = \gamma(t)$ und $\vec{y} = \gamma(t+h) - \gamma(t)$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \operatorname{grad} V(\gamma(t)) (\gamma(t+h) - \gamma(t)) + \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| r(\gamma(t+h) - \gamma(t)) \\ &= \operatorname{grad} V(\gamma(t)) \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} + \left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| r(\gamma(t+h) - \gamma(t)) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Kettenregel.

□

Beweis der Aussage über die konservativen Vektorfelder

$$\int_{\gamma} -\operatorname{grad} V(\vec{x}) d\vec{x} \underset{\downarrow}{=} \int_a^b -\operatorname{grad} V(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

nach Definition

Nach der Kettenregel ist der Integrand die Ableitung nach t der Funktion $-V(\gamma(t))$.

Wert des Integrals daher:

$$\int_a^b -\operatorname{grad} V(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = -V(\gamma(b)) + V(\gamma(a))$$

□

Beispiele: Alle Zentraffelder

$$\vec{h}(\vec{x}) = \lambda(\|\vec{x}\|) \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$$

sind konservativ, wenn $\lambda :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(s) = \int_1^s t\lambda(t) dt \quad s \in]0, \infty[$$

Mit $V(\vec{x}) := -g(\|\vec{x}\|)$ gilt

$$\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} = -g'(\|\vec{x}\|) \frac{\partial}{\partial x_i} \|\vec{x}\|$$

und mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung daher

$$\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} = -\|\vec{x}\| \lambda(\|\vec{x}\|) \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}$$

$$\text{grad } V(\vec{x}) = -\lambda(\|\vec{x}\|) \vec{x}$$

Etwa $n = 3$, $\vec{h}(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$ (Gravitationsfeld, $\lambda(t) = -\alpha t^{-3}$)

$$g(s) = \alpha \int_1^2 t^{-2} dt = \frac{\alpha}{s} + \text{const.}$$

$$V(\vec{x}) = \frac{-\alpha}{\|\vec{x}\|} \quad \text{nach Normierung} \quad V(\vec{x} \rightarrow \infty) = 0$$

7.2 Definiton der totalen Ableitung

Vorbemerkung zum Begriff der totalen Ableitung über Linearformen des \mathbb{R}^n .

Gefragt wird nach den linearen Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (auch Linearformen genannt). Sie sind eindeutig bestimmt durch die n Werte $L(\vec{e}_i) = a_i$ ($1 \leq i \leq n$). Dann

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= L(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \vec{a} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

Definition:

Sei f eine auf dem Gebiet G des \mathbb{R}^n reellwertige Funktion. f heißt in $\vec{x} \in G$ „total differenzierbar“ (linear approximierbar), wenn mit einer Linearform (linearen Abbildung) $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = L(\vec{h}) + \|\vec{h}\| r(\vec{h}) \quad \text{wo} \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} r(\vec{h}) = 0$$

Bemerkungen:

- (1) Ist f in \vec{x} total differenzierbar, dann hat f in \vec{x} partielle Ableitungen nach allen Variablen: Denn dann

$$\frac{f(\vec{x} + t\vec{e}_k) - f(\vec{x})}{t} = \frac{L(t\vec{e}_k)}{t} + \text{sign}(t) r(t\vec{e}_k) = L(\vec{e}_k)$$

- (2) Wenn f in $\vec{x} \in G$ total differenzierbar ist, dann existiert für jeden Einheitsvektor \vec{e} die „Richtungsableitung“

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{e}) - f(\vec{x})}{t} = L(\vec{e})$$

- (3) Ist f in allen Punkten von G nach allen Variablen differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen stetig, dann ist f in allen Punkten differenzierbar (vergleiche Kettenregel).

Beispiel:

- (1) Der Sinuskegel $n = 2$, $G = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{falls } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases} = r \sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{sonst}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 2 \sin^3 \varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 2 \cos^3 \varphi$$

f ist im Nullpunkt nicht total differenzierbar (Begründung: Die Richtungsableitungen existieren nicht immer)

$$\vec{e} = (c, s) \quad (c^2 + s^2 = 1)$$

$$\frac{f(ct, st) - f(0, 0)}{t} = \frac{2cst^2}{t|t|} = 2cs \text{ sign } t$$

Der Limes $t \xrightarrow[t \neq 0]{} 0$ existiert (wegen $\text{sign } t$) deshalb nicht!

7.2.1 Geometrische Eigenschaften der totalen Ableitung

1. Wenn f total differenzierbar in \vec{x} ist, dann ist die Linearform L eindeutig nach Bemerkung (1), und zwar

$$L(\vec{h}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \vec{h} \quad (\vec{h} \mapsto L(\vec{h})) \quad \text{weil} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = L(\vec{e}_k)$$

Es weist der Gradient in Richtung größten Wachstums von f . Insbesondere verschwindet der Gradient in den lokalen Extrema! Senkrecht zum Gradienten verlaufen die Niveaulinien ($n = 2$) beziehungsweise Niveauflächen (falls $n = 3$).

2. Betrachtung des Graphen von f

$$\Gamma_f = \{\vec{x}, f(\vec{x}), \vec{x} \in G\}$$

Die Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ lassen sich liften auf Γ_f

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t))) \quad (n = 2)$$

Sie hat die Ableitung

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t))$$

Tangente im Kurvenpunkt

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0), f(\gamma(t_0)))$$

$$\vec{x}_0 + \mathbb{R} \dot{\tilde{\gamma}}(t_0) = \vec{x}_0 + \mathbb{R} (\dot{\gamma}_1(t_0), \dot{\gamma}_2(t_0), \operatorname{grad} f(\gamma(t_0)) \dot{\gamma}(t_0))$$

Die Tangenten liegen also für jede der Kurven $\tilde{\gamma}$ durch \vec{x}_0 auf der Ebene

$$(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dies ist die „Tangentialebene“ an Γ_f im Punkt \vec{x}_0 . Normale:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$$

Im allgemeinen ist $\vec{n} = \vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ nicht normiert.

Beispiel:

- (2) $n = 2$, $G = \mathbb{R}^2$; Funktion $q(x, y)$ sei das Quadrat der Abstandsprodukte des Punktes (x, y) von den festen Punkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$

$$\begin{aligned}
q(x, y) &= ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) \\
&= ((x^2 + y^2 + 1) + 2x)((x^2 + y^2 + 1) - 2x) \\
&= (x^2 + y^2 + 1)^2 + 4x^2 \\
&= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2 + 1
\end{aligned}$$

Niveaulinien sind die Cassini-Kurven. Besonders benannt unter ihnen die Kurve $q(x, y) = 1$, die Lemniskate!

Es existiert je in Richtung der Gradienten eine zu den Cassini-Kurven orthogonale Kurvenschar, die neben den Koordinatenachsen lauter Hyperbeln enthält mit senkrechten Asymptoten, deren linke (beziehungsweise rechte) Äste durch $(-1, 0)$ (beziehungsweise $(1, 0)$) gehen.

$$x^2 - y^2 - 1 = 2cxy$$

Sei $x(t), y(t)$ eine Parametrisierung dieser Kurve. Differentiation:

$$2x\dot{x} - 2y\dot{y} = 2c\dot{xy} + 2cxy\dot{y}$$

Elimination von c ergibt

$$\begin{aligned}
\dot{xy}(x^2 + y^2 + 1) &= \dot{y}x(x^2 + y^2 - 1) \\
\text{grad } q &= (4x^3 + 4xy^2 - 4x, 4y^3 + 4x^2y + 4y) \\
&= 4(x(x^2 + y^2 - 1), y(x^2 + y^2 + 1))
\end{aligned}$$

8. Höhere Ableitungen, Taylor Formel und lokale Extrema

8.1 Die Symmetrie der zweiten Ableitung

Es sei f eine reelle Funktion auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, welche zweimal stetig (partiell) differenzierbar ist (die partiellen Ableitungen sind also wieder stetig partiell differenzierbar). Dann gilt die Vertauschungsregel

$$D_i(D_k f) = D_k(D_i f) \quad (1 \leq i, k \leq n)$$

für die Differentiationsoperatoren!

Beweisidee:

1) Es genügt, $n = 2$ zu betrachten.

2) Für Polynome $x^k y^l$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (x^k y^l) &= k l x^{k-1} y^{l-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (x^k y^l) = k l x^{k-1} y^{l-1} \end{aligned}$$

3) Allgemein betrachte

$$f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)$$

Mehrfache Anwendung des Mittelwertsatzes \Rightarrow Behauptung.

Beispiel:

$$(1) \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases} = \frac{r^2}{4} \sin 4\varphi$$

Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{sonst} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= r^{-4}((3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y + xy^3)2x) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{r^4} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= r^{-4}((x^3 - 3y^2x)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{r^4} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1\end{aligned}$$

8.1.1 Integrabilitätskriterium für Vektorfelder

Es sei im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig partiell differenzierbares Vektorfeld gegeben (das heißt die Koordinaten v_i seien stetig differenzierbar auf G)

$$\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Es ist $\vec{v} = \operatorname{grad} V$ Gradient eines Potentials V nur dann, wenn gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, k \leq n \quad (*)$$

G sei sternförmig. Wenn umgekehrt $(*)$ erfüllt ist und das Gebiet G sternförmig ist, dann gibt es ein Potential V auf G mit $\vec{v} = \operatorname{grad} V$.

Beweis:

- 1) Ist $\vec{v} = \operatorname{grad} V$, dann ist nach Voraussetzung über \vec{v} das Potential V zweimal stetig partiell differenzierbar. Wegen der Symmetrie der zweiten Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}}_{v_k} V = \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{v_i} V$$

- 2) Sei G sternförmig und das Kriterium $(*)$ für \vec{v} erfüllt. Ohne Einschränkung sei $\vec{0}$ der Sternpunkt von G , das heißt für alle $\vec{x} \in G$ ist die Strecke zwischen \vec{x} und $\vec{0}$ enthalten.

$$V(\vec{x}) = \int_0^1 (\vec{v}(t\vec{x}) \cdot \vec{x}) dt \quad (\text{Integral mit Parameter } \vec{x} \in G)$$

Mit einem Satz über Integrale mit Parameter

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v}(t\vec{x}) \cdot \vec{x}) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^n v_k(t \vec{x}) x_k \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(v_i(t \vec{x}) + \sum_{k=1}^n t \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(t \vec{x}) x_k \right) dt \quad \text{Kettenregel} \\
&= \int_0^1 \left(v_i(t \vec{x}) + \sum_{k=1}^n t \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(t \vec{x}) x_k \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tv_i(t \vec{x})) dt \quad \text{allgemeine Kettenregel} \\
&= v_i(\vec{x}) - 0 = v_i(\vec{x}) \quad (1 \leq i \leq n)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Im Falle $n = 3$: Integrabilitätskriterium im Vektorfeld

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \vec{0}$$

Symbolische Schreibweise

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \vec{0}$$

In Worten: Im Gebiet G des \mathbb{R}^3 , welches sternförmig ist, wird ein Vektorfeld $\vec{v}: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ (welches stetig partiell differenzierbar ist) dann und nur dann Gradient eines Potentials V wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ ist!

Beispiel:

(2) Isolierter Wirbel, $n = 2$ $G = \mathbb{R}^2 \setminus \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\vec{v}(x, y) &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{r}(-\sin \varphi, \cos \varphi) \\
\frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial v_2}{\partial y} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

Berechnung eines Kurvenintegrals entlang der Einheits-Kurve

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad I = [0, 2\pi]$$

Das Kurvenintegral über das Vektorfeld entlang der Einheits-Kurve ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt \\ &\int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t)}_{\sin^2 t + \cos^2 t = 1} \, dt = 2\pi\end{aligned}$$

Daher ist \vec{v} in diesem Falle nicht der Gradient eines Potentials, obwohl das Kriterium (*) erfüllt ist. Grund: $\mathbb{R}^2 \setminus \vec{0}$ ist nicht sternförmig.

Aus der Symmetrie der zweiten Ableitung für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ folgt:

Die „Hesse-Matrix“ von f

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{1 \leq i, k \leq n} = A^T$$

ist symmetrisch in jedem Punkt \vec{a} des Gebietes G . Unter diesen Voraussetzungen gilt eine einfache Version der Taylorformel im \mathbb{R}^n .

8.2 Eine einfache Version der Taylorformel im \mathbb{R}^n

$$f(\vec{a} + \vec{x}) = f(\vec{a}) + \text{grad } f(\vec{a}) \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x} A \vec{x} + \varphi_2(\vec{x})$$

wobei A die Hesse-Matrix von f im Punkt \vec{a} ist und wobei die Restfunktion φ_2 die Limesbezeichnung erfüllt

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{x} \neq \vec{0}}} \|\vec{x}\|^{-2} \varphi_2(\vec{x}) = 0$$

Beweis durch Zurückführung auf den eindimensionalen Fall:

$g(t) = f(\vec{a} + t\vec{x})$ ist als Funktion von $t \in [0, 1]$ mindestens zweimal differenzierbar.
Bildung der Ableitung und Kettenregel

$$g'(t) = \text{grad } f(\vec{a} + t\vec{x}) \vec{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} (\vec{a} + t\vec{x}) x_k$$

$$g''(t) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} (\vec{a} + t\vec{x}) x_i x_k$$

Taylorformel zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} g(1) &= g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\vartheta) \quad 0 \leq \vartheta = \vartheta_{\vec{x}} \leq 1 \\ &= g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{2} (g''(\vartheta) - g''(0)) \end{aligned}$$

Eintragen

$$f(\vec{a} + \vec{x}) = f(\vec{a}) + \text{grad } f(\vec{a}) \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x} A \vec{x} + \varphi_2(\vec{x})$$

wobei

$$\varphi_2(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} (\vec{a} + \vartheta \vec{x}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} (\vec{a}) \right) x_i x_k$$

Aus der Stetigkeit der zweiten Ableitung folgt nun die Restabschätzung.

□

8.2.1 Anwendung der einfachen Version der Taylorformel auf die stationären Punkte

f sei auf $G \subset \mathbb{R}^n$ reell und zweimal stetig differenzierbar. Die Nullstellen \vec{a} von $\text{grad } f$ heißen stationäre Punkte von f . Dort:

$$f(\vec{a} + \vec{x}) - f(\vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{x} A \vec{x} + \varphi_2(\vec{x})$$

Konsequenzen für das Vorliegen von Extremwerten in \vec{a}

1. Hat die Hesse-Matrix von f im Aufpunkt \vec{a} die Eigenschaft

$$\vec{x} A \vec{x} > 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0$$

(dann heißt A „positiv definit“), so liegt in \vec{a} ein isoliertes lokales Minimum von f vor.

2. Ist für alle $\vec{x} \neq 0$ $\vec{x} A \vec{x} < 0$ (ist also die Hesse-Matrix negativ definit) dann liegt in \vec{a} ein isoliertes lokales Maximum von f .
3. Existieren zu A Vektoren \vec{x}_+ , \vec{x}_- mit $\vec{x}_+ A \vec{x}_+ > 0$ und $\vec{x}_- A \vec{x}_- < 0$, ist also A indefinit: dann ist \vec{a} weder eine lokales Minimum noch ein lokales Maximum von f , sondern eine Sattelpunkt.
4. Liegt keiner der Fälle 1, 2, 3 vor, dann gibt die Hesse-Matrix alleine keinen Aufschluss über die Art des stationären Punktes \vec{a} .

Der **Beweis** von 1, 2 , 3 ergibt sich aus der Limesaussage

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{x} \neq \vec{0}}} \|\vec{x}\|^{-2} \varphi_2(\vec{x}) = 0$$

Untersuchung der symmetrischen reellen 2×2 Matrizen A

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ ist } \begin{cases} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{indefinit} \end{cases} \text{ falls } \begin{cases} ac - b^2 > 0 \text{ und } a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \text{ und } a < 0 \\ ac - b^2 < 0 \end{cases}$$

Ist $ac - b^2 = 0$, dann liegt keiner dieser Fälle vor.

Beweis:

$$\vec{x} A \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

1) Der Fall $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \vec{x} A \vec{x} &= a \left(x^2 + \frac{2b}{a} xy + \frac{b^2}{a^2} y^2 \right) + \frac{ac - b^2}{a} y^2 \\ &= a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a} y^2 \end{aligned}$$

Falls $ac - b^2 > 0$ dann haben die beiden Summanden das Vorzeichen von a und gleichzeitig 0 werden sie nur im Fall $x = y = 0$.

Ist dagegen $ac - b^2 < 0$, so haben die beiden Summanden (falls sie nicht 0 sind) verschiedene Vorzeichen. Durch geeignete Wahl von x und y kann die Summe jedes Vorzeichen annehmen.

Im Falle $ac - b^2 = 0$ bestimmt der erste Summand das Vorzeichen, falls er nicht Null ist.

2) Der Fall $c \neq 0$: Ist $c \neq 0$, so c ausklammern, quadratische Ergänzung, gleiches Resultat.

3) Der Fall $a = c = 0$: Das Resultat ist an $\vec{x} A \vec{x} = 2bxy$ direkt abzulesen!

□

Beispiel: $f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$

f ist nach beiden Variablen beliebig oft partiell differenzierbar. Bestimmung der stationären Punkte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (8x - 8x^3 - 2xy^2)e^{-x^2-4y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - 32x^2y - 8y^3)e^{-x^2-4y^2}$$

Nullstellen:

$$1. \vec{a} = (0, 0) ; \quad 2. \vec{a} = (\pm 1, 0) ; \quad 3. \vec{a} = (0, \pm \frac{1}{2})$$

Punkte (x, y) mit $x \neq 0 \neq y$ sind hier nicht stationär, denn andernfalls wäre

$$4x^2 + y^2 = 4$$

$$16x^2 + 4y^2 = 1$$

Dieses lineare Gleichungssystem in den Unbestimmten $s = x^2$ und $t = y^2$ ist unlösbar.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (8 - 24x - 2y^2 - 16x^2 + 16x^4 + 4x^2y^2)e^{-x^2-4y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy \text{ mal irgendwas}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2 - 32x^2 - 24y^2 - 16y^2 + 256x^2y^2 + 64y^4)e^{-x^2-4y^2}$$

$$1. \vec{a} = (0, 0): A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \text{ lokales Minimum}$$

$$2. \vec{a} = (\pm 1, 0): A = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} e^{-1}; \text{ zwei Maxima (lokal)}$$

$$3. \vec{a} = (0, \pm \frac{1}{2}): A = \begin{bmatrix} 15/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} e^{-1}; \text{ zwei Sattelpunkte}$$

Bemerkungen:

- (1) Weil die Funktion außerhalb der großen Kreisscheibe beliebig klein wird, aber positiv bleibt, handelt es sich in $\vec{0}$ um das globale Minimum und in $(\pm 1, 0)$ um die globalen Maxima von f . Das folgt aus einer allgemeinen Eigenschaft stetiger reeller Funktionen.
- (2) Jede stetige reelle Funktion nimmt auf einem Kompaktum C stets ein Maximum und ein Minimum an.
- (3) Der Name des Kompaktums ist gerade so gewählt worden, dass der Satz gilt.

Beispiele von Kompakta:

- a) Achsenparallele geschlossene Quader im \mathbb{R}^n

$$\mathbb{Q} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; a_i \leq x_i \leq b_i; (1 \leq i \leq n)\}, \text{ wo } a_i \leq b_i$$

b) Abgeschlossene Kugeln im \mathbb{R}^n

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0$$

c) Jede zugleich abgeschlossene und beschränkte Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Dabei sind „abgeschlossen“ zu nennen jene Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$, deren Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist, das heißt für die $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit jedem Punkt eine Umgebung enthält.

Bemerkung:

- (4) Beispiel c) ist tatsächlich eine Charakterisierung aller Kompakta im \mathbb{R}^n . Es sind gerade die Mengen C im \mathbb{R}^n , für die der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt: Jede Folge auf C hat eine konvergente Teilfolge mit Limes in C .

Anwendung auf die Taylorformel für stationäre Punkte.

$A = (a_{ik})$ sei eine symmetrische reelle $n \times n$ Matrix.

$$q(\vec{x}) = \vec{x} A \vec{x} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

ist stetig auf \mathbb{R}^n . Die „Einheits-Sphäre“

$$S = \{\vec{e}, \|\vec{e}\| = 1\}$$

ist kompakt, weil beschränkt und abgeschlossen. q nimmt daher auf S ein Maximum M_1 und eine Minimum M_0 an, etwa $q(\vec{e}_+) = M_1$, $q(\vec{e}_-) = M_0$. Für definites A ist $M_0 > 0$ beziehungsweise $M_1 < 0$. Dagegen ist $M_0 < 0 < M_1$ für indefinites A .

\vec{a} sei nun stationärer Punkt von f (im \mathbb{R}^n erklärt)

$$f(\vec{a} + \vec{x}) - f(\vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{x} A \vec{x} + \varphi_2(\vec{x}), \quad x \neq 0$$

$$f(\vec{a} + \vec{x}) - f(\vec{a}) = \|\vec{x}\|^2 \left(\frac{1}{2} q(\vec{e}) + \frac{\varphi_2(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} \right), \quad \text{mit } \vec{e} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Anwendung auf Extremwertaufgaben.

Problemstellung: Man bestimme für eine stetig partiell differenzierbare Funktion im \mathbb{R}^n auf einem Kompaktum C das Maximum.

1. Weil f stetig, existiert ein solches Maximum.
2. Von den inneren Punkten von C , für die also eine Umgebung in C liegt, sind nur die stationären Punkte Kandidaten für das Maximum.
3. Die Randpunkte gesondert behandeln - Maxima mit Nebenbedingungen!

9. Implizite Funktionen und Anwendungen

Als Beispiel die Lemniskate, die Nullstellenmenge der Funktion

$$\begin{aligned} F(x, y) &= ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) - 1 \\ &= (x^2 + y^2 + 1)^2 - (2x)^2 - 1 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 \\ \text{grad } F &= (4x^3 + 4xy^2 - 4x, 4x^2y + 4y^3 + 4y) \\ &= (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 + 1)) \end{aligned}$$

Auf der Nullstellenmenge von F liegt nur ein stationärer Punkt von F , nämlich $\vec{a} = (0, 0)$. Allgemein sind die stationären Punkte einer Funktion F in der Ebene, welche zugleich in der Nullstellenmenge von F liegen, genau diejenigen Punkte des Graphen von F , deren Tangentialebene zusammenfällt mit der x, y -Ebene. In den übrigen Punkten der Nullstellenmenge von F schneiden sich diese beiden Ebenen in einer Geraden.

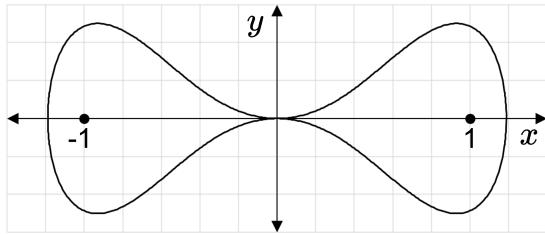
In den Punkten mit $\text{grad } F(\vec{x}_0) \neq 0$ kann die Nullstellenmenge als Funktion (lokal) geschrieben werden, und zwar

$$y = f(x) , \quad \text{falls } \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0) \neq 0$$

beziehungsweise

$$x = g(y) , \quad \text{falls } \frac{\partial F}{\partial x}(\vec{x}_0) \neq 0$$

Explizite Berechnung ist im Beispiel möglich.



$$y^2 = -x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$y = \pm \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - x^2 - 1}$$

wobei $0 < x^2 < 2$; (dies sind zwei Zweige auf jedem x -Intervall)

$$x^4 - 2x^2(1 - y^2) + (1 - y^2)^2 = 1 - 4y^2$$

(quadratische Ergänzung für $F(x, y) = 0$)

$$x^2 = 1 - y^2 \pm \sqrt{1 - 4y^2}$$

$$x = \pm \sqrt{1 - y^2} \pm \sqrt{1 - 4y^2} \quad 0 < y^2 < \frac{1}{4}$$

(dies sind vier Zweige auf jedem Intervall)

Eine Ableitungsformel für implizite Funktionen

Es sei F eine auf dem Gebiet G des \mathbb{R}^n stetig partiell differenzierbare Funktion. Ferner sei $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ eine Nullstelle von F mit Zusatzeigenschaft $\partial F / \partial y(\vec{x}_0) \neq 0$. Schließlich sei auf einem x_0 enthaltenden Intervall I eine in x_0 stetige Funktion bekannt $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit drei Eigenschaften

$$f(x_0) = y_0, \quad (x, f(x)) \in G \quad \text{und} \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

Dann ist f in x_0 differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x_0) = -\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{x}_0) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0), \quad \text{Kurzform: } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Beweis:

F ist im Punkt \vec{x}_0 total differenzierbar, daher

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \underbrace{a}_{\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{x}_0)}(x - x_0) + \underbrace{b}_{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0)}(y - y_0) + \varphi(x - x_0, y - y_0)$$

Einsetzen $y = f(x)$

$$b(f(x) - f(x_0)) = -a(x - x_0) - \varphi(x - x_0, f(x) - f(x_0)) \quad (*)$$

Eine erste Konsequenz: Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bleibt beschränkt für } x \rightarrow x_0$$

Dann Division von (*) durch $b(x - x_0)$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= -\frac{a}{b} - \frac{1}{b(x - x_0)}\varphi(x - x_0, f(x) - f(x_0)) \\ \Rightarrow f'(x_0) &= -\frac{a}{b}\end{aligned}$$

□

9.1 Existenzsatz für implizite Funktionen

Es sei F reell und stetig differenzierbar auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Ferner sei $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$ eine Nullstelle von F mit $\partial F / \partial y(\vec{x}_1) \neq 0$. Dann existiert ein Paar von Intervallen

$$I =]x_1 - a, x_1 + a[\quad \text{und} \quad J =]y_1 - b, y_1 + b[$$

mit

$$I \times J \subset G \quad (I \times J = \{(x, y); x \in I, y \in J\})$$

und folgenden drei Eigenschaften: erstens

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}) \neq 0 \quad \forall \vec{x} \in I \times J$$

zweitens gibt es eine Funktion $f : I \rightarrow J$, welche stetig ist,

$$f(x_1) = y_1, \quad F(x_1, f(x_1)) = 0 \quad \forall \vec{x} \in I$$

und wenn drittens $\vec{x}_0 \in I \times J$ mit $F(\vec{x}_0) = 0$ dann gilt

$$f(x_0) = y_0$$

$F : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar

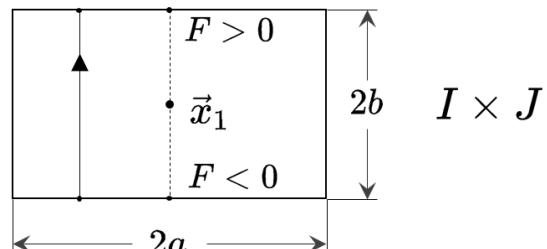
$$\cap \quad \mathbb{R}_2 \quad \vec{x}_1 \in G, \quad F(\vec{x}_1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\vec{x}_1) \neq 0$$

Dann existieren Intervalle

$$I =]x_1 - a, x_1 + a[$$

$$J =]y_1 - b, y_1 + b[$$

mit $I \times J \subset G$



$$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}) \neq 0, \quad \vec{x} \in I \times J$$

Es existiert ein stetiges $f : I \rightarrow J$ mit

$$f(x_1) = y_1 , \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

Wenn

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in I \times J \quad \text{und} \quad F(x_0, y_0) = 0$$

dann

$$y_0 = f(x_0)$$

Beweis:

1) Weil F und $-F$ dieselbe Nullstellenmenge haben, kann vorausgesetzt werden

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_1) > 0$$

Weil $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetig ist existiert eine Umgebung U von \vec{x}_1 in G mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in U.$$

Auf diese Umgebung wird $I \times J$ eingeschränkt. Weil

$$y \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad \text{positiv ist, wird}$$

$$y \mapsto F(x, y) \quad \text{streng monoton wachsend}$$

Wenn $b > 0$ nur hinreichend klein ist, dann

$$F(x_1, y_1 - b) < 0 \quad \text{und} \quad F(x_1, y_1 + b) > 0.$$

Weil F stetig, existiert a (hinreichend klein) derart, dass

$$F(x, y_1 - b) < 0, \quad F(x, y_1 + b) > 0 \quad \text{falls} \quad |x - x_1| < a \quad (*)$$

Ist $x_0 \in I = [x_1 - a, x_1 + a]$ dann betrachte die Funktion

$$y \mapsto F(x_0, y), \quad y \in J$$

Diese Funktion ist streng monoton wachsend und stetig. Wegen $(*)$ hat sie genau eine Nullstelle: $y_0 \in J$. Damit

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

2) Stetigkeit der impliziten Funktion f in \vec{x}_1

Statt mit b zu beginnen hätte man unter **1)** auch $b = \epsilon/2$ wählen können. Eventuell wäre dann a' zu b' kleiner als a zu b zu wählen. Zu den Punkten $x \in]x_1 - a', x_1 + a'[$ werden nach wie vor die Punkte $(x, f(x))$ Nullstellen.

Dafür ist $|f(x) - f(x_1)| < \epsilon$. Also ist f in x_1 stetig.

3) Stetigkeit von f im Punkt $x_0 \in I$.

Nach **1)** und **2)** gibt es auch zu dem Aufpunkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$ in einer Umgebung eine Funktion von x deren Werte die zweiten Koordinaten sind.

Diese eindeutige Funktion ist nach **2)** stetig in x_0 , andererseits muss sie mit f übereinstimmen; Daher ist f in x_0 stetig.

□

9.2 Lokale Extrema mit Nebenbedingungen

Auf dem Gebiet G des \mathbb{R}^n seien zwei stetige, partiell differenzierbare reelle Funktionen F, h gegeben. Gefragt wird nach (lokalen) Extremwerten der Restriktion von h auf die Nullstellenmenge von F .

Ist $\vec{a} \in G$ eine Nullstelle von F mit $\text{grad } F(\vec{a}) \neq 0$, dann ist \vec{a} ein lokales Extremum für die Restriktion h nur dann, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator) existiert mit $\text{grad } h(\vec{a}) = \lambda \text{grad } F(\vec{a})$.

Beweis: für $n = 2$

$$\text{grad } F(\vec{a}) \neq 0 , \quad F(\vec{a}) = 0 ;$$

$$\text{Sei ohne Einschränkung} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2) \neq 0$$

Nach dem Existenzsatz für implizite Funktionen existiert ein a_1 enthaltendes offenes Intervall I , und ein a_2 enthaltendes Interval J mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow J$ derart, dass

$$f(a_1) = a_2 , \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$(x_0, y_0) \in I \times J \quad \text{und} \quad F(x_0, y_0) = 0 , \quad \text{dann ist} \quad y_0 = f(x_0)$$

$H(x) := h(x, f(x))$ beschreibt lokal (in einer Umgebung von \vec{a}) die Restriktion von h auf die Nullstellenmenge von F . H ist differenzierbar auf I ; Daher wird $H'(a_1)$ ein Extremum (lokal) von H nur, wenn $H'(a_1) = 0$.

Bestimmung der Ableitung von H nach der Kettenregel

$$0 = H'(a_1) = \operatorname{grad} h(a_1, a_2)(1, f'(a_1))$$

also nach der Ableitungsformel für die implizite Funktion f

$$0 = \operatorname{grad} h(\vec{a}) \left(1, -\frac{F_x(\vec{a})}{F_y(\vec{a})} \right)$$

Der zweite Vektor steht senkrecht auf $\operatorname{grad} F(\vec{a})$. Daher bedeutet die Bedingung oben:

$\operatorname{grad} h(\vec{a})$ ist ein skalares Vielfaches von $\operatorname{grad} F(\vec{a})$.

□

Beispiel:

(0) Produkt $h(x, y, z) = xyz$ soll auf der abgeschlossenen Einheitskugel nach Extremwerten untersucht werden.

a) $\operatorname{grad} h(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Die Nullstellen des Gradienten liegen auf den Koordinatenachsen, alle diese Punkte sind Sattelpunkte. h ist dort 0.

b) Der Rand der Einheitskugel wird beschrieben durch die Nebenbedingungen:

$$0 = F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = 2(x, y, z)$$

ohne stationäre Punkte auf dem Rand der Einheitskugel.

Gesucht $\vec{a} = (a, b, c)$ mit

$$\operatorname{grad} h(\vec{a}) = \lambda F(\vec{a}) = 2\lambda \vec{a} = (bc, ac, ab)$$

Drei Gleichungen:

$$2\lambda a = bc, \quad 2\lambda b = ac, \quad 2\lambda c = ab$$

Außerhalb der Koordinatenachsen

$$abc = 2\lambda a^2 = 2\lambda b^2 = 2\lambda c^2$$

$$a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$$

$$a, b, c \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \right\}$$

Werte von h an diesen Stellen

$$h(a, b, c) = \pm \sqrt{\frac{1}{27}}$$

Die Extrema sind insgesamt acht, vier Minima und vier Maxima. Sie liegen auf dem Rand der Einheitskugel, in den Ecken des eingeschriebenen achsenparallelen Würfels.

Beispiel:

- (1) Heron von Alexandria (erstes Jahrhundert): Inhalt des ebenen Dreiecks mit Seitenlängen a, b, c

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{wobei} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

der halbe Umfang des Dreiecks ist.

Frage: Wann ist bei festem Umfang $2s$ der Flächeninhalt A maximal?

Genau dann, wenn

$$h(a, b, c) = (s-a)(s-b)(s-c)$$

unter der Nebenbedingung $a+b+c = 2s$ ein Maximum hat.

$$h = s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc$$

$$\text{grad } h(a, b, c) = \begin{pmatrix} -s^2 + (b+c)s - ba \\ -s^2 + (a+c)s - ac \\ -s^2 + (a+b)s - ab \end{pmatrix}$$

$$F(a, b, c) = a + b + c - 2s = 0$$

$$\text{grad } F = (1, 1, 1)$$

Lagrange-Bedingung ($\text{grad } h(a, b, c) = \lambda \text{grad } F(a, b, c)$) in Differenzenform:

$$(a-b)s = (a-b)c \quad (\text{aus } 2^{te} - 1^{te} \text{ Koordinate} = 0)$$

$$(b-c)s = (b-c)a \quad (\text{aus } 3^{te} - 2^{te} \text{ Koordinate} = 0)$$

da gilt $0 < a < s$, $0 < b < s$, $0 < c < s$ sind diese beiden Gleichungen nur dann zu erfüllen wenn $a = b = c$. Daher ist das Resultat:

$$a = b = c = \frac{2}{3}s$$

$$A_{\max} = \sqrt{s \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{s}{3}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

Beispiel:

(2) $A = (a_{ik})$ sei eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix

$$q(\vec{x}) = \vec{x} A \vec{x} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

Aufgabe: Untersuchung der Extrema von $q(\vec{x})$ auf der Einheitssphäre

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\| = 1\}$$

$$\text{Nebenbedingung: } F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$$

$\text{grad } F(\vec{x}) = 2\vec{x}$ ist nullstellenfrei auf S

$$\begin{aligned} \text{grad } q(\vec{x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} q(\vec{x}) \right)_{1 \leq j \leq n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \right)_{1 \leq j \leq n} \\ &= \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i x_k)_{1 \leq j \leq n} \quad \text{Produktregel} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right)_{1 \leq j \leq n} \quad \text{Symmetrie von } A \\ &= \left(2 \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right)_{1 \leq j \leq n} = 2 A \vec{x} \end{aligned}$$

Wo gilt $\text{grad } q(\vec{a}) = \lambda \text{grad } F(\vec{a})$ $\vec{a} \in S$? Genau dort, wo

$$A \vec{a} = \lambda \vec{a}$$

Die Extrema von $q(\vec{x})$ auf S findet man daher unter den Eigenvektoren \vec{a} von A mit Länge 1. Weil S kompakt ist und weil $q(\vec{x})$ stetig ist, nimmt $q(\vec{x})$ auf S ein Maximum und ein Minimum an. Also hat insbesondere die symmetrische reelle Matrix stets mindestens einen reellen Eigenwert!

Beispiel:

(3) $b_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) ; ferner sei $p > 1$, $(b_i)_{1 \leq i \leq n} = \vec{b}$

Die Linearform $L(\vec{x}) = \vec{x} \vec{b}$ soll auf dem positiven Kegel $P = \{\vec{x}, x_i \geq 0 \forall i\}$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$ auf Extrema (Maxima) untersucht werden.

Die Nebenbedingung $F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^p - 1 = 0$ beschreibt ein Kompaktum C in P .

Zunächst das „Innere“ von P , also $\overset{\circ}{P} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, x_i > 0 \ \forall i\}$. Dort

$$\text{grad } F(\vec{x}) = (p x_j^{p-1})_{1 \leq j \leq n}$$

$$\text{grad } L(\vec{x}) = (b_j)_{1 \leq j \leq n} = \vec{b} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Bestimme \vec{a} mit $F(\vec{a}) = 0$, $\text{grad } L(\vec{a}) = \lambda \text{grad } F(\vec{a})$

$$\text{Also } \lambda p a_j^{p-1} = b_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

Bestimmung von λ aus der Nebenbedingung:

$$\sum_{j=1}^n a_j^p = 1 \quad \text{das heißt} \quad \left(\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \sum_{j=1}^n b_j^{\frac{p}{p-1}} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n b_j^q = (\lambda p)^q \quad (*)$$

$$\text{wo } q = \frac{p}{p-1}, \quad \text{also } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Bestimmung des Wertes $L(\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned} L(\vec{a}) &= \sum_{j=1}^n a_j b_j = \left(\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \sum_{j=1}^n b_j^{\frac{1}{p-1}+1} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{1/q} =: M_n \end{aligned}$$

Hier in \vec{a} hat L tatsächlich eine Maximum auf C , weil einerseits M_n strikt wächst und andererseits, die Stütze von C auf dem Rand von P (etwa $x_n = 0$) zu dem analogen $(n-1)$ -dimensionalen Problem gehören. Weil $n = 1$ trivial, folgt nun durch Induktion nach n die Maximalität von M_n . Bewiesen ist damit die

Höldersche Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

wo die a_i, b_i sämtliche ≥ 0 sind.

Die Frage:

Wann ist eine Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n ; (f_i)_{1 \leq i \leq n}$, wo G ein Gebiet im \mathbb{R}^n bedeutet, im Punkt $\vec{a} \in G$ differenzierbar (linear approximierbar) zu nennen?

Definition

F heißt im Punkt $\vec{a} \in G$ total differenzierbar (linear approximierbar) wenn eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

existiert derart, dass in der Formel

$$F(\vec{a} + \vec{h}) = F(\vec{a}) + L\vec{h} + \varphi(\vec{h})$$

die Restfunktion φ die Limeseigenschaft hat

$$\lim_{\substack{\vec{h} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{h} \neq \vec{0}}} \|\vec{h}\|^{-1} \varphi(\vec{h}) = \vec{0}_m$$

Bemerkungen:

- (1) Ist F in \vec{a} differenzierbar dann sind alle Koordinaten f_i partiell nach allen Variablen differenzierbar und die lineare Abbildung L wird beschrieben in Matrizenform durch

$$D F(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} (\vec{a}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \text{ „Funktionalmatrix oder Jakobimatrix“ von } F$$

- (2) Sind alle f_i auf G stetig partiell differenzierbar, dann ist F überall auf G total differenzierbar.

Eine Haupteigenschaft des allgemeinen Differenzierbarkeitsbegriffes ist die generelle Kettenregel. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ erklärt, $\vec{a} \in G$ mit $F(\vec{a}) = \vec{a}_1$ wobei \vec{a}_1 im Definitionsbereich einer weiteren Abbildung F_1 liegt.

$$F_1 : G_1 \in \mathbb{R}^h ; G_1 \subset \mathbb{R}^m$$

Wenn F in \vec{a} total differenzierbar ist und F_1 in \vec{a}_1 total differenzierbar ist, dann ist die zusammengesetzte Abbildung $F_1 \circ F$ total differenzierbar im Punkt \vec{a} mit der totalen Ableitung

$$D(F_1 \circ F)(\vec{a}) = D F_1(F(\vec{a})) \circ D F(\vec{a})$$

9.3 Das Problem der Umkehrabbildung (Koordinatentransformation)

Im Falle $m = n$ wird die Funktionalmatrix

$$D F(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} (\vec{a}) \right)$$

eine quadratische Matrix welche genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante (die Jakobi-Determinante von F) $\neq 0$ ist. Als höherdimensionales Analogon des Monotoniekriteriums der Differentialrechnung ist anzusehen der Existenzsatz für Umkehrbarkeit.

Satz:

F sei eine Abbildung eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ in den \mathbb{R}^n welche stetig partiell differenzierbar ist in allen Punkten von G . Ferner sei $D F(\vec{a})$ invertierbar, also die Jacobi-Determinate $\det D F(\vec{a}) \neq 0$; dann existieren Umgebungen U von \vec{a} und U_1 von $\vec{a}_1 = F(\vec{a})$ derart, dass F eine „bijektive“ Abbildung von U auf U_1 ist (das heißt, $F(U) = U_1$ und jeder Punkt von U_1 hat genau ein F -Urbild in U). Die so erklärte Umkehrabbildung $F_1 : U_1 \rightarrow U$ ist total differenzierbar in $\vec{a}_1 = F(\vec{a})$ ($F_1 \circ F(\vec{x}) = \vec{x} = \text{id}(\vec{x})$).

$$1_n = D(F_1 \circ F)) = D F_1(F(\vec{x})) \circ D F(\vec{x})$$

Multiplikation mit der inversen Matrix von $D F(\vec{x})$ für $\vec{x} = \vec{a}$:

$$D F_1(F(\vec{a})) = (D F(\vec{a}))^{-1}$$

Beispiel:

(1) Polarkoordinaten in der Ebene

$$x = r \cos \varphi = f_1(r, \varphi)$$

$$y = r \sin \varphi = f_2(r, \varphi)$$

$$F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f_1(r, \varphi) \\ f_2(r, \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{definiert auf } \mathbb{R}^2$$

Eine globale Umkehrfunktion besitzt F nicht, weil zum Beispiel F als Funktion von φ periodisch ist. Die Funktionalmatrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = D F(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Jacobi-Determinante

$$\det D F(r, \varphi) = r$$

Die Bedingung für die lokale Umkehrfunktion $\det D F \neq 0$ ist auf der Geraden $r = 0$ verletzt. Diese Gerade hat nur den Nullpunkt als F -Bild.

Beispiel:

(2) Die elliptischen Koordinaten in der Ebene

$$x = \cosh u \cos v = f_1(u, v)$$

$$y = \sinh u \sin v = f_2(u, v)$$

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{definiert auf } \mathbb{R}^2$$

$$D F(u, v) = \begin{bmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v \end{bmatrix}$$

Jacobi-Determinante

$$\det D F(u, v) = \sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v = \sinh^2 u + \sin^2 v$$

Wenn $n = 0$ und $v = \pi k$, dann ist die Jakobi-Determinante 0, sonst aber nicht!

Bildkurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$:

$u = 0$: Das Bild ist die Strecke $[-1, 1]$ auf der x -Achse

$u \neq 0$: $\cosh u =: a$, $|\sinh u| =: b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

Das ist eine Ellipse mit den Brennpunkten $\pm(1, 0)$

$v = \text{const}$: Ist $v = \frac{\pi}{2} k$, dann ergeben sich Geraden(stücke) als Bilder;
sonst mit $a' = |\cos v|$, $b' = |\sin v|$

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2 - \left(\frac{y}{b'}\right)^2 = \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

Das ist die Gleichung einer Hyperbel mit Brennpunkten $\pm(1, 0)$

Beispiel:

(3) Kugelkoordinaten im Raum

$$\left. \begin{array}{lcl} x = R \cos \varphi \cos \vartheta & = & f_1(R, \varphi, \vartheta) \\ y = R \sin \varphi \cos \vartheta & = & f_2(R, \varphi, \vartheta) \\ z = R \sin \vartheta & = & f_3(R, \varphi, \vartheta) \end{array} \right\} = F(R, \varphi, \vartheta)$$

$$D F(R, \varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} x_R & x_\varphi & x_\vartheta \\ y_R & y_\varphi & y_\vartheta \\ z_R & z_\varphi & z_\vartheta \end{bmatrix}$$

$$D F(R, \varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -R \sin \varphi \cos \vartheta & -R \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & R \cos \varphi \cos \vartheta & -R \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & R \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Jacobi-Determinante

$$\begin{aligned} \det D F(R, \varphi, \vartheta) &= R^2 (\cos^2 \varphi \cos^3 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + \cos^2 \varphi \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^3 \vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det D F(R, \varphi, \vartheta) &= R^2 (\cos^3 \vartheta + \cos \vartheta \sin^2 \vartheta) \\ &= R^2 \cos \vartheta \neq 0 \quad (\text{außer } R = 0 \text{ oder } \cos \vartheta = 0) \end{aligned}$$

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

ISBN 978-1-951894-06-1