HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Erster Teil

HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Erster Teil

Stefan Wurm

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

Erste deutschsprachige ATICE E-Book Ausgabe | ISBN 978-1-951894-05-4.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

An deutschsprachigen Hochschulen gehören Vorlesungen zu Höherer Mathematik zum festen Bestandteil der Ausbildung in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Diese Vorlesungen zielen darauf ab den Studierenden die mathematischen Grundlagen für ihre jeweiligen Fachgebiete zu vermitteln, typischerweise in den ersten vier Semestern eines Studiengangs. So war es auch bei mir als ich zu Beginn meines Physikstudiums vor gut vierzig Jahren zum ersten Mal den Hörsaal betrat in welchem Prof. Dr. Armin Leutbecher die Vorlesung Höhere Mathematik I hielt. Es ist mir klar, dass sich nicht alle gleichermaßen für Mathematik begeistern können oder wollen. Aber ich vertraue darauf, dass jene die diese Zeilen jetzt lesen es schon richtig verstehen werden, wenn ich hier bekenne, dass diese Vorlesungen mich beglückt haben. Beglückt in dem Sinne, dass ich mich damals auf jede einzelne dieser Vorlesungen im Voraus freute. Das hatte sicher nicht ausschließlich mit dem Inhalt der Vorlesungen zu tun, sondern mindestens ebenso mit der Art und Weise wie dieser von Prof. Leutbecher vermittelt wurde. Natürlich erwartet man von einem Mathematiker Klarheit. Aber jene Klarheit, mit der professionelle Mathematiker in aller Regel ihre Diskussionen führen, überträgt sich nicht notwendigerweise darauf, wie ein Mathematiker dann eventuell sein Wissen Studierenden vermittelt. Prof. Leutbecher's Klarheit und Stil des Vortrags machten seine Höhere Mathematik Vorlesungen zu einem intellektuellen Vergnügen. Zudem hatte ich das Glück, dass die Übungen zu Prof. Leutbecher's Vorlesungen von Dr. Peter Vachenauer betreut wurden. Anfang der 1990er erschien die erste Ausgabe eines zweibändigen Lehrbuchs zu Höherer Mathematik dessen Koautor Dr. Vachenauer ist. Die exemplarische Methodik und Sorgfalt, mit welcher der Stoff mit den Lernenden in Dr. Vachnauers Übungen zu meiner Zeit an der TUM vertieft wurde, findet sich in diesem Lehrbuch wieder.

Vor etwas mehr wie einem Jahr stolperte ich beim Aufräumen über meine Mitschrift der Höhere Mathematik Vorlesungen aus den Jahren 1981-1983 und die entsprechenden Übungen. Zuerst war ich verwundert, dass diese gut vierzig Jahre alten Unterlagen bei diversen Umzügen, auch zwischen Kontinenten, nicht verloren gingen. Neugierig begann ich in meinen Vorlesungsaufzeichnungen zu blättern und unvermittelt beschlich mich dabei wieder die gleiche Freude wie ich sie verspürte als ich damals im Hörsaal saß und gebannt dem Vortrag von Prof. Leutbecher zuhörte. Wiewohl diese Notizen, meine Mitschrift von Prof. Leutbecher's Vorlesungen, kein Lehrbuch ersetzen können, vermitteln sie wesentliche Inhalte Höherer Mathematik mit einer Lebendigkeit, die sie nach meinem Dafürhalten zu einem Lesevergnügen für Studierende oder andere ernstlich an Mathematik Interessierte machen sollten. Allzu oft sind solche Notizen mit Fehlern behaftet und das war auch hier nicht anders. Nach mehrmaliger Durchsicht und Korrektur meiner Aufzeichnungen ist hoffentlich die große Mehrzahl davon bereinigt. Klarheit und Stil von Prof. Leutbecher's Vortrag zu bewahren, so wie ich diese in meiner Mitschrift vor mehr als vierzig Jahren einfing, darauf legte ich bei der Überarbeitung meiner Notizen größten Wert. Inwieweit dies gelungen ist mag der Leser beurteilen. Der vorliegende Band, **HÖHERE MATHEMATIK - Vorlesungen Erster Teil**, beinhaltet den Stoff der Vorlesung Höhere Mathematik I wie sie im Wintersemester 1981/82 an der TUM von Prof. Leutbecher gehalten wurde.

Stefan Wurm

Albany, New York
April 2022

1. Vollständige Induktion

1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Beispiele:

(1) Summation der ersten n Zahlen

Summiere die ersten n Zahlen			n
$1 + 2$	$=$	3	2
$1 + 2 + 3$	$=$	6	3
$1 + 2 + 3 + 4$	$=$	10	4
$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$=$	15	5

Aus der Tabelle ist zu erlesen dass für die Summen der ersten n Zahlen s_n mit $n = 2, 3$ und 4 gilt:

$$2s_2 = 2 \cdot 3 \quad ; \quad 2s_3 = 3 \cdot 4 \quad ; \quad 2s_4 = 4 \cdot 5 \qquad \curvearrowright$$

vermutlich ist: $\quad 2s_n = n\,(n+1)$

Übereinander ausschreiben der Summanden in s_n von 1 bis n und von n bis 1 und addieren:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & s_n \\
n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & s_n \\
\hline
(n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2\,s_n
\end{array}$$

Die Anzahl der Summanden in der letzten Zeile ist n, daher: $2s_n = n\,(n+1)$

(2) Summation der ersten n Quadrate

Summiere die ersten n Quadrate					n
$1+4$	$=$	5	$=$	$1 \cdot 5$	2
$1+4+9$	$=$	14	$=$	$2 \cdot 7$	3
$1+4+9+16$	$=$	30	$=$	$\frac{10}{3} \cdot 9$	4
$1+4+9+16+25$	$=$	55	$=$	$5 \cdot 11$	5

Entdeckung: Wenn man den ersten Faktor nach dem zweiten Gleichheitszeichen mit 3 multipliziert, dann entsteht die Folge aus Beispiel (1).

$$\text{Wetten, dass:} \quad s_n = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)$$

Das ist jedenfalls richtig für $n = 1, 2, 3, 4,$ und 5. Angenommen die gewettete Behauptung gilt für n, dann

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)$$

Das ist die Behauptung für $n+1$ anstelle von n.

(3) Rekursive Defintion einer Folge

- sei $x \geq 0$ gegeben
- $w_0 = 1 + x$ setze voraus, dass n definiert ist
- $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right)$

das ist möglich weil w_n immer größer 0. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist so w_n erklärt für jede natürliche Zahl $n \geq 0$.

Das Prinzip der vollständigen Induktion drückt aus eine Eigenschaft welche der Gesamtheit der natürlichen Zahlen $n \geq 1$ zukommt.

Definition

Wenn M eine Menge von natürlichen Zahlen ist, welche die 1 enthält und überdies $n+1$ enthält, falls sie n enthält, dann ist M die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen.

Beispiel:

(4) Die Fakultäten $n!$

$$0! = 1 \quad ; \quad (n+1)! = n!\,(n+1)$$

n	0	1	2	3	4	5
$n!$	1	1	2	6	24	120

Die kombinatorische Bedeutung der Fakultäten:

$n!$ = Anzahl der Möglichkeiten n Gegenstände $a_1, a_2, \cdots, a_n$ hintereinander anzuordnen.

$$\begin{array}{llll} \text{n} = 2: & \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \qquad \text{n} = 3: & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{array} \qquad \text{n} = 4: & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \end{array}$$

Beweis der Behauptung über die Anzahl $n!$ = Anzahl A_n der möglichen Permutationen von n Gegenständen durch vollständige Induktion.

$n = 1$: $A_1 = 1$

$n \to n+1$: Für die Besetzung der ersten Stelle aus $n+1$ Gegenständen existieren $n+1$ Möglichkeiten, nach dem bewiesenen Teil gibt es $n!$ Möglichkeiten die letzten Stellen zu besetzen.

Zusammen: $(n+1)\,n! \;=\; A_{n+1} \;=\; (n+1)!$

$\square$

1.2 Die Bernoullische Ungleichung

Sei $k > -1$. Dann gilt für alle natürlchen Zahlen n die Ungleichung:

$$\boxed{(1+k)^n \;\geq\; 1 + n\,k}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$: Links wie rechts steht $1 + k$

$n \to n+1$: $(1+k)^{n+1} \;=\; (1+k)\,(1+k)^n$ nach Definition der Potenzen
$\geq\; (1+k)\,(1+n\,k)$ nach Induktionsvoraussetzung und weil Ungleichungen mit positiven Faktoren multipliziert werden dürfen

$$\text{Zusammen:} \quad (1+k)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,k + n\,k^2$$
$$\geq 1 + (n+1)\,k$$

weil $n\,k^2 \geq 0$ ist das die Behauptung für $n+1$ statt für n

$\square$

Bemerkungen:

(1) Die Bedeutung der Bernoullischen Ungleichung liegt in der für die Potenzen gegebenen Abschätzung. Für nahe bei 0 gelegene k ist dies Abschätzung bestmöglich.

(2) Die Potenzen a^n für beliebige reelle Basiszahlen a werden ebenfalls rekursiv erklärt:

$$a^n := 1 \quad ; \quad a^{n+1} := a^n\,a$$

1.3 Die Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{m}$ werden definiert für alle Paare n, m natürlicher Zahlen ≥ 0

$$\binom{n}{0} := 1 \quad ; \quad \binom{n}{m+1} := \binom{n}{m}\frac{n-m}{m+1}$$

$\binom{n}{m}$ ist stets eine natürliche Zahl ≥ 0 $\left[\binom{n}{m} \in \mathbb{N}\right]$, im Falle $0 \leq m \leq n$ gilt

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{n-m}$$

während $\binom{n}{m} = 0$ falls $m > n$. Es gilt überdies die Identität des Pascalschen Dreiecks

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Beweis der ersten Gleichung durch Induktion nach m

$$[m = 0: \quad \binom{n}{m} = 1 \quad ; \quad \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = 1$$

$$m \to m+1: \quad \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m}\frac{n-m}{m+1}$$

Rechte Seite der Gleichung:

$$\frac{n!}{m!\,(m+1)\,(n-m+1)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,\frac{n-m}{m+1}$$

Damit stimmt die Behauptung für $m+1$ statt m. Im Falle $m = n$ betrachte die Rekursionsformel

$$\binom{n}{n+1} = * \cdot \frac{0}{*}$$

Daher sind für $m > n$ immer $\binom{n}{m} = 0$

□

Die Formel des Pascalschen Dreiecks stimmt falls $m \geq n$ (nach dem Bewiesenen = obere Seite des Pascalschen Dreiecks)

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

es bleibt zu zeigen die Gültigkeit für $0 \leq m < n$. Formel für die Summanden:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$\binom{n}{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m+1)!}$$

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m)!}\underbrace{[(m+1)+(n-m)]}_{(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n+1-m-1)!} = \binom{n+1}{m+1}$$

Die Formel des Pascalschen Dreiecks liefert für die möglichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m}$ mit $0 \leq m < n$ und n, m jeweils im Wertebereich von 0 bis 5 und $\binom{n}{m} = 0$ für $m > n$ in Tabellenform:

		m					
		0	1	2	3	4	5
	0	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0
n	2	1	2	1	0	0	0
	3	1	3	3	1	0	0
	4	1	4	6	4	1	0
	5	1	5	10	10	5	1

1.4 Kombinatorische Bedeutung von $\binom{n}{m}$

Ist die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ Teilmengen von m Elementen herauszugreifen.

Beweis:

Die genannte Anzahl wird abgekürzt mit $C^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m}}$. Damit lautet die Behauptung:

$$C^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m}} = \binom{n}{m}$$

Beweis Vorbereitung:

$$C^{\mathrm{n}}_{0} = \binom{n}{0}$$

Diese Aussage ist richtig weil nichts auszuwählen ist (die leere Menge $\emptyset$ ist auszuwählen).

Vollständige Induktion nach n:

$n = 0$: $C^{0}_{\mathrm{k}} = \binom{0}{k}$ fuer $k \geq 0$ ist aus ähnlichem Grunde richtig, da $\emptyset$ keine k-elementige Teilmenge hat

$n \to n+1$: Gefragt wird nach der Anzahl der Möglichkeiten $(m+1)$-elementige Teilmengen aus $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ herauszugreifen!

Teile diese Mengen T in zwei Klassen:

$$A = \text{Mengen } T \text{ mit } a_{n+1} \in T$$

$$B = \text{Mengen } T \text{ mit } a_{n+1} \notin T$$

A hat $C^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m}}$ Elemente T, weil ja noch m Elemente aus $a_1, a_2, \cdots, a_n$ hinzuzuwählen sind.

B hat $C^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m+1}}$ Elemente T, weil alle $m+1$ Elemente von T aus der kleineren Menge $a_1, a_2, \cdots, a_n$ zu wählen sind!

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{m+1}} &= C^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m}} + C^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m+1}} \\ &= \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{m+1} \qquad \text{nach der Identität des Pascalschen Dreiecks}$$

□

1.5 Das Summenzeichen

$$\sum_{m=n}^{N} a_m$$

wird im Sonderfall, dass $n > N$ durch 0 erklärt und ansonsten rekrusiv durch:

$$\sum_{m=n}^{N+1} a_m = \sum_{m=n}^{N} a_m + a_{N+1}$$

Wichtig ist die Möglichkeit des Umindizierens, zum Beispiel:

$$\sum_{m=n}^{N} a_m = \sum_{m=n+1}^{N+1} a_{m-1}$$

Die Summenformel der endlichen geometrische Reihe! Für jede reelle (und auch jede komplexe Zahl) $x \neq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion

$n = 0$: Linke Seite $= 1$,

rechte Seite $= \dfrac{x-1}{x-1} = 1$,

auf beiden Seiten steht also der Wert 1 .

$n \to n+1$: Betrachte

$$\sum_{m=0}^{n+1} x^m = \sum_{m=0}^{n} x^m + x^{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

□

1.6 Binomischer Lehrsatz

Seien a, b reell (oder auch komplex). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$$

Beweis durch Induktion nach n

$n = 0$: Linke Seite $= (a+b)^0$, rechte Seite $= \binom{0}{0} a^0\, b^0$,

beiderseits steht also der Wert 1 .

$n \to n+1$: $(a+b)^{n+1}$

$$\begin{aligned}
&= (a+b)\,(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \qquad \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k}\, b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k
\end{aligned}$$

Das beweist die Formel für $n+1$ statt n

$\square$

Die Fälle $n = 2, 3, 4$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3 b + 6\,a^2 b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

Zwei Fälle spezieller a, b und allgemeinem n:

$$a \;=\; b \;=\; 1: \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 \;=\; 2^n$$

Weil $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist, zeigt die Formel: Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

$$a \;=\; 1\,,\;\; b \;=\; -1 \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \;=\; 0 \qquad \text{falls} \quad n > 0$$

Die Summe der mit wechselnden Vorzeichen versehenen Elemente der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ist 0.

2. Ungleichungen und Beträge

Ungleichungen sind hier Größenvergleiche wie $a \leq b$ bzw. $a < b$ zwischen reellen Zahlen. Sämtliche Ungleichungen (in diesem Sinne) können auf den Begriff der Positivität zurückgeführt werden. So bedeutet $a \leq b$, dass $b - a$ positiv ist oder 0, während $a < b$ bedeutet, dass $b - a$ positiv ist. Die erste Art von Ungleichung heiße gewöhnliche Ungleichung, während die zweite Art strikte Ungleichung heißt. Die Bedeutung der Zurückführung: Die positiven Zahlen (die Menge aller positiven rellen Zahlen $]0, \infty[$) enthält mit irgend zwei Elementen deren Summe und deren Produkt.

Daraus folgen 3 Grundregeln:

U-1 Man darf zu einer Ungleichung beiderseits dieselbe Zahl addieren.

U-2 Man darf eine Ungleichung beiderseits mit demselben positiven Faktor multiplizieren.

U-3 Bei Multiplikation mit (-1) kehrt eine jede Ungleichung sich um (Beispiel: $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$).

Alle 3 Regeln gelten für gewöhnliche und für strikte Ungleichungen. Aus dem Bilde der reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl ist die Vergleichbarkeit je zweier reellen Zahlen zu erkennen.

U-4 Für jedes Paar reeller Zahlen a, b gilt genau eine der folgenden 3 Beziehungen:

$$a = b \ , \quad a < b \ , \quad b < a$$

Anwendung auf den Vergleich der Kehrwerte positiver Zahlen.

$$0 < a < b, \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Beweis: Mitbehauptet ist, wenn b positiv ist

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b} \quad \text{positiv} \quad \left(0 < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b}\right)$$

Indirekt: sicher $\frac{1}{b} \neq 0$. Annahme: $\frac{1}{b} < 0$. Anwendung von U-2 ergibt:

$$1 = b\frac{1}{b} < b \cdot 0 = 0$$

$1 < 0$ ist falsch, daher war die Annahme $\frac{1}{b} < 0$ falsch. Daher ist nach U-4 $\frac{1}{b} > 0$. Die volle Behauptung folgt aus der Betrachtung von

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a\,b}(b-a)$$

Rechts steht das Produkt zweier positiver Zahlen, also eine positive Zahl, das heißt

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

□

2.1 Der Absolutbetrag

Der Absolutbetrag reeller Zahlen x wird erklärt:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Elementare Folgerungen!

- Stets ist $|x| \geq 0$, „=“ steht für $x = 0$
- Stets ist $|-x| = |x|$
- Stets ist $|x\,y| = |x|\,|y|$
- Falls $y \neq 0$, gilt $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Die Dreiecksungleichung

Für alle reellen x, y gilt:

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$$

Beweis: stets gilt

$$x \;\leq\; |x| \quad ; \quad y \;\leq\; |y|$$

ebenso

$$-x \;\leq\; |x| \quad ; \quad -y \;\leq\; |y|$$

Zweimalige Anwendung von U-1 ergibt

$$x + y \;\leq\; |x| + |y|$$

ebenso

$$-x - y \;\leq\; |x| + |y|$$

Das bedeutet:
$|x| + |y|$ ist eine obere Schranke für die beiden Zahlen $x + y$ und $-(x + y)$. Weil eine dieser beiden Zahlen gleich $|x + y|$ ist, gilt die Dreiecksungleichung.

□

Bemerkungen:

(1) Der Hintergrund des Names wird klar beim Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen.

(2) Die umgekehrte Dreiecksungleichung

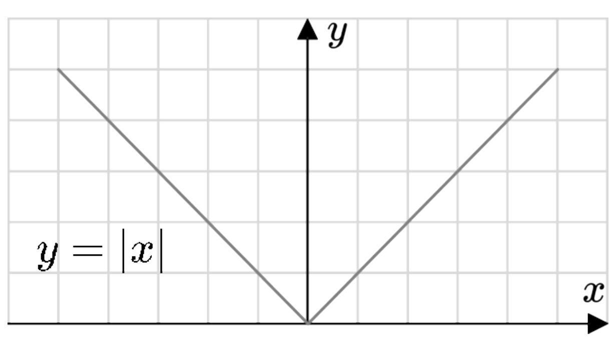
$$|x + y| \;\geq\; |x| - |y|$$

folgt leicht aus der Dreiecksungleichung. Sie wird ebenso häufig in Abschätzungen benutzt.

(3) Durch die Vorschrift

$$x \;\rightarrow\; |x|$$

ist eine Funktion der reellen Zahlen erklärt, die Betragsfunktion.



Weil der Graph durch Spiegelung an der y-Achse sich nicht ändert, ist die <u>Betragsfunktion eine „gerade Funktion“</u>.

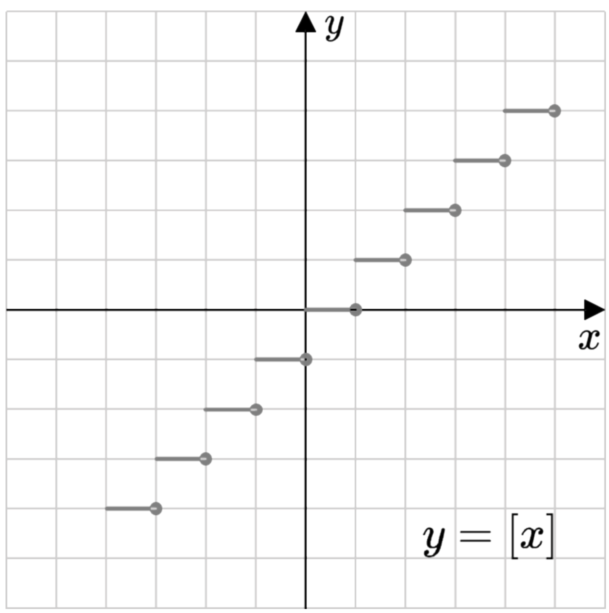
Die <u>archimedische Eigenschaft</u> der Anordnung von $\mathbb{R}$, die Menge aller reellen Zahlen besagt:

> Zu jeder rellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, derart, dass gilt $x < n$.

Diese Eigenschaft gibt zu jeder reellen Zahl x eine ganze Zahl $m = [x]$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{[x] \;\leq\; x \;\leq\; [x] + 1}$$

Durch die Vorschrift $x \to [x]$ wird die Entier Funktion erklärt.



<u>Folgerungen aus der archimedischen Eigenschaft</u>

(1) Zu jeder noch so kleinen Zahl ϵ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n} < \epsilon$

Beweis: $x := \dfrac{1}{\epsilon}$

Nach Archimedes existiert $\dfrac{1}{n} < \epsilon$ mit $x < n$, daher $\dfrac{1}{n} < \epsilon$

$\square$

(2) Zu gegebenem $b > 1$ und beliebger Schranke $M > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < M$

Beweis:

Es ist $\quad b^n \geq 1 + n\,k \qquad (b = 1 + k)$

Zu $x := \dfrac{M}{k}$ existiert nach Archimedes ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$, d.h. $M < n\,k$

Daher $\quad b^n \geq 1 + n\,k > M$

□

(3) Zu gegebenem q mit $0 < q < 1$ und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \epsilon$

Beweis: Setze in Folgerung (2) $\quad b^n := \dfrac{1}{\epsilon} \quad ; \quad M := \dfrac{1}{\epsilon}$

Nach Folgerung (2) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > M$, daher $q^n < \epsilon$.

□

(4) Sind $a < b$ reelle Zahlen, dann existiert eine rationale Zahl

$$c = \frac{m}{n} \qquad (m, n \text{ ganz}, n > 0)$$

für die gilt: $\quad a < c < b$

Beweis: $\quad \epsilon := \dfrac{b-a}{2}$; $\quad$ Dann exisiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n} < \epsilon$

dass heißt $\quad 2 < n\,b - n\,a$

$$m := [n\,a] + 1$$

$$n\,a < m < n\,b \quad / \quad \frac{1}{n}$$

$$a < \frac{m}{n} < b$$

□

Mit der Anordnung von $\mathbb{R}$ durch „<“ lassen sich die Intervalle genannten Teilmengen beschreiben. Seien $a < b$ reell:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

heißt das abgeschlossene Intervall zwischen a und b.

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$$

heißt das offene Intervall zwischen a und b.

Die beiden halboffenen Intervalle $I =]a, b]$ und $I = [a, b[$ erfüllen beide die Inklusionen $]a, b[\subset I \subset [a, b]$.

Zu den Intervallen zählt man noch die Mengen $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]b, \infty[$, $[b, \infty[$ und $]-\infty, \infty[$. Die zweite, dritte und fünfte dieser Mengen sind als offen zu bezeichnen!

2.2 Der Begriff Monotonie

wird verwendet für reelle Folgen und Funktionen f, deren Definitionsbereich D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In Wirklichkeit sind auch die Folgen als Funktionen anzusehen mit Defintionsbereich $D = \mathbb{N}$ bzw. $D = \mathbb{N}_0$.

> Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (steigend) falls
>
> $$x_1, x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$
>
> falls sogar gilt
>
> $$x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$
>
> so heißt f strikt monoton wachsend!

Beispiele:

(1) $f(x) = [x]$, die Entier Funktion ist monoton steigend, aber nicht strikt monoton steigend

(2) Eine Folge wird betrachtet, ein Parameter x kommt vor.

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n , \qquad x \in \mathbb{R}$$

definiert eine monoton wachsende Folge für $n > -x$

Beweis mit Bernoulli Ungleichung:

Falls $n > -x$, ist die Klammer > 0 also auch $e_n(x) > 0$. Betrachte $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n+1+x)^{n+1}}{(n+x)^n} \qquad / \quad \times \quad \frac{n+x}{n+x} \frac{n^{n+1}}{n^{n+1}}$$

$$= \frac{n+x}{n}\left(\frac{n^2+n+n\,x}{(n+1)\,(n+x)}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n+x}{n}\left(1-\underbrace{\frac{x}{(n+1)\,(n+x)}}_{-k \text{ in Bernoulli Ungleichung}}\right)^{n+1}$$

$$\geq \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{n+x}\right) \geq 1$$

Resultat: $\left(e_n(x)\right)_{n>-x}$ ist monoton wachsend!

□

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (strikt) monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Beispiel:

(3) Beispiel (3) aus Kapitel 1

$D = \mathbb{N}$, ein Parameter t taucht auf, $t \geq 0$

$$w_0 = 1 + t \qquad ; \qquad w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{t}{w_n}\right)$$

definiert eine strikt monoton fallende Folge.

Beweis: Die Glieder der Folge sind positiv

Betrachte: $\quad \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{t}{w_n^2}\right)$

Zu zeigen bleibt: $w_n^2 > t$

Induktionsanfang: $\quad n = 0$:

$$w_0^2 - t = t^2 + t + 1 > 0$$

$n \to n+1$: Wir haben

$$w_{n+1}^2 - t = \frac{1}{4}\left(w_n^2 + 2\,t + \frac{t^2}{w_n^2}\right) - t$$

$$= \frac{1}{4}\left(w_n^2 - 2\,t + \frac{t^2}{w_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(w_n - \frac{t}{w_n}\right) > 0$$

weil der Zähler $w_n^2 - t$ nach Induktionsvoraussetzung nicht 0 ist.

□

2.3 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

gründet sich auf die Tatsache, dass jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke besitzt, genannt Supremum von A, abgekürzt $\sup(A)$. Hier heißt obere Schranke von A jede reelle Zahl s mit $a \in A \Rightarrow a \leq s$. Mit s ist auch jede größere Zahl obere Schranke von A.

Der Witz: Wenn A nicht leer und überhaupt obere Schranken besitzt, dann hat die Menge aller oberen Schranken von A ein kleinstes Element.

Drei einfache Beispiele:

$A \coloneqq \mathbb{N}$ hat keine obere Schranke (nach Archimedes).

$A =]-\infty, 1]$ hat das Supremum 1.

$A \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$ ist nach oben durch $\frac{3}{2}$, nach unten durch $-\frac{3}{2}$ beschränkt. Das $\sup(A)$, nämlich $\sqrt{2}$ gehört nicht zu A.

Bemerkungen:

(1) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach unten beschränkt, falls sie eine untere Schranke s besitzt, d.h. $a \in A \Rightarrow s \leq a$.

(2) Aus der Grundregel U-3 folgt: Jede zugleich nicht leere und nach unten beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke, das Infimum von A, abgekürzt $\inf(A)$.

2.4 Das Monotoniekriterium für Folgen

Es sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine reelle Folge, welche monoton steigend und nach oben beschränkt ist. Dann konvergiert diese Folge gegen das Supremum ihrer Wertemenge $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkung:

(1) Aus U-3 folgt: Jede monoton fallende Folge, die nach unten beschränkt ist, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen das Infimum ihrer Wertemenge.

Beweis des Monotoniekriteriums

sei $\alpha = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

α ist die obere Schranke, daher $a_n \leq \alpha$ für jedes n

α ist die kleinste obere Schranke, wenn daher $\epsilon > 0$ (aber beliebig klein) dann ist $\alpha - \epsilon$ selbst keine obere Schranke. Das bedeutet die Existenz eines Index n_ϵ derart, dass:

$$\alpha - \epsilon \;<\; a_{n_\epsilon}$$

Weil nun die Folge monoton wächst, ist $a_{n_\epsilon} \leq a_n$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Gezeigt wurde insbesondere: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_ϵ mit

$$\boxed{n \;\geq\; n_\epsilon \;\Rightarrow\; |a_n - \alpha| \;<\; \epsilon}$$

Die Ungleichung nach dem „$\Rightarrow$“ wird ausgedrückt in solcher Form dass die Folgeglieder a_n in die ϵ-Umgebung von α fallen:

ϵ-Umgebung: $\;]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$

Damit ist gezeigt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \;=\; \alpha$$

<u>Erneute Behandlung von Beispiel (2) und (3):</u>

$$e_n(x) \;=\; \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n , \qquad n \;>\; -x$$

Die Existenz einer oberen Schranke für diese Folge ist klar im Falle $x \leq 0$ weil dann immer $e_n(x) \leq 1$.

Ist dagegen $x > 0$, dann ist die Folge

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} , \qquad n \;>\; x$$

monoton fallend als Kehrwert einer monoton wachsenden Folge positiver Zahlen.

$$0 \;<\; \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \;\leq\; 1 \quad \text{gilt analog zu oben}$$

Multiplikation mit der positiven Zahl $\dfrac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$ ergibt

$$0 \;<\; \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \;\leq\; \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

Weil rechts eine monoton fallende Folge steht, ist sie beschränkt (nach oben) durch das Glied mit dem kleinsten Index, das ist $n = [x]+1$.

Die Folge $w_n(x)$ erklärt für $x \in [0, \infty[$

$$\begin{aligned} w_0(x) &= 1 + x \\ w_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right) \end{aligned}$$

hat lauter Glieder ≥ 0, daher ist sie durch 0 nach unten beschränkt.

<u>Bemerkung:</u>

(2) Der Begriff obere bzw. untere Schranke ist nicht nur für die $A \subseteq \mathbb{R}$ sondern auch definiert für Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$. So heißt f nach oben beschränkt, falls für alle $x \in D$ $f(x) \leq t$. Hierbei ist nicht einmal notwending $D \subset \mathbb{R}$, z.B. könnte D auch ein Kreis sein. Für nach oben unbeschränkte $A \subset \mathbb{R}$ verwendet man $\sup(A) = +\infty$, entsprechend wird $\inf(A) = -\infty$ verwendet für nach unten nicht beschränkte $A \subset \mathbb{R}$.

3. Grenzwerte

3.1 Definition eines Limes

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ mit $\sup D = \infty$, ferner $f : D \to \mathbb{R}$. Man sagt f konvergiere gegen $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn x gegen ∞ geht, falls zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ eine Schranke t_ϵ existiert mit $x \in D$ und $x > t_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - \alpha| < \epsilon$.

Ausgedrückt wird der Sachverhalt durch die „Gleichung“:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} f(x) \;=\; \alpha}$$

Bemerkung:

(1) Wenn f eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann ist $D = \mathbb{N}$, man schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$

$f : D \to \mathbb{R}$; D nach oben unbeschränkt; $\sup D = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} f(x) \;=\; \alpha \qquad \text{bedeutet:}$$

Zu jeder Toleranzgrenze $\epsilon > 0$ existiert eine Schranke t_ϵ für das Argument x und

$$x \geq t_\epsilon \;\wedge\; x \in D \quad\Rightarrow\quad f(x) \in \,]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

Auch in anderen Limesbegriffen wird die Definitionsmenge der betrachteten Funktion häufig weggelassen.

Beispiele:

(1) Sei $a_n = {}^1\!/_n$. Die a_n bilden eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Folgerung (1) aus der archimedischen Eigenschaft besagt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \;=\; 0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n \;=\; 0\;, \quad$ falls $\quad |x| < 1$

Beweis:

Sei $q \;=\; |x|$. Dann ergibt (im Falle $q > 0$) Folgerung (3) aus der archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ die Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} q^n \;=\; 0 \qquad \text{also} \qquad \lim_{x\to\infty} x^n \;=\; 0$$

□

Ausgedrückt durch die geometrische Reihe:

Ihre Glieder bilden eine Nullfolge. Konsequenz für die Folge

$$\boxed{s_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n} x^k}$$

Aus der Summenformel für s_n

$$s_n \;=\; \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Sei x gegeben mit $|x| < 1$, ferner eine Genauigkeitsschranke

$$\epsilon' > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-x} \;>\; 0\,.$$

Die Konvergenzaussage über die Folge $\left(x^k\right)_{k\geq 0}$ ergibt zu $\epsilon := \epsilon'(1-x) > 0$ einen Index n_ϵ mit $|x^n| < \epsilon$ für alle $n > n_\epsilon$. Also

$$\frac{x^n}{1-x} \;<\; \frac{\epsilon}{1-x} \qquad \text{falls nur} \quad n \geq n_\epsilon \;,\ \text{daher}$$

$$\left| s_n - \frac{1}{1-x} \right| \;=\; \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \;<\; \epsilon' \quad , \quad \text{falls} \quad n \geq N_{\epsilon'}\,!$$

Beobachtung: Konvergenzgüte hängt von der Lage des Punktes x ab:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1}{1-x} \;, \quad \text{falls} \quad |x| < 1}$$

Das ist die Summenformel der geometrischen Reihe.

Beispiel:

(3) In jedem unendlichen Dezimalbruch steckt eine (wenn das Vorzeichen nicht beachtet wird) monoton wachsende Folge!

$$a_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{10^k}$$

wobei $z_1, z_2, \ldots$ die Folge der Ziffern des Dezimalbruches nach dem Komma ist. Die Ziffern z_k mit $k > 0$ erfüllen $z_k \in \mathbb{N}_0 \cap [0, 10[$.

Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist nach oben beschränkt

$$0 \;\leq\; z_k \;\leq\; 9 \quad \Rightarrow$$

$$a_n \;\leq\; z_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} \;=\; z_0 + 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

Als monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergent.

Umgekehrt: Jede reelle Zahl $x \geq 0$ lässt sich als unendlicher Dezimalbruch schreiben.

$$x_0 \;:=\; x \qquad z_0 \;:=\; [x]$$

$$x_{n+1} \;=\; 10\,(x_n - z_n) \qquad z_{n+1} \;:=\; [x_{n+1}]$$

Bemerkung:

(2) In konkreten Rechnungen werden fast immer endliche Dezimalzahlen verwendet. Die auftretenden Ungenauigkeiten sind zu kontrollieren. Festzustellen: Ist der verwendete Bruch gewonnen durch Abbrechen oder durch Runden?

$\pi = 3.1415$ (abgebrochen) ; $\pi = 3.1416$ (gerundet)

Beispiel:

(4) $x \;\to\; \dfrac{x}{x-1}$

liefert nicht für alle reellen x eine reellen Wert. Der Nenner wird 0 für $x = -1$. Größtmöglicher Definitionsbereich:

$$D \;=\;]-\infty, +\infty[\;\setminus\; \{-1\}$$

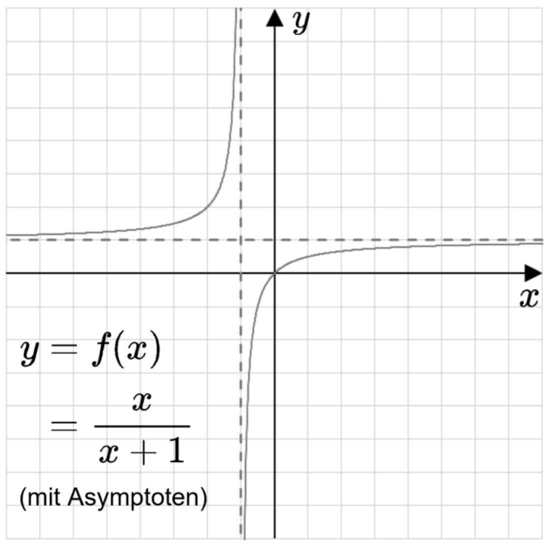
$$f(x) \;=\; \frac{x}{x+1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{k+1}$$

liefert aus der geometrischen Reihe eine sogenannte Potenzreihendarstellung, nur brauchbar für $|x| < 1$.

$$f(x) - 1 \;=\; \frac{-1}{x+1}$$

Zeigt: Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein t_ϵ mit $|f(x) - 1| < \epsilon$ für alle $x \geq t_\epsilon$; mit anderen Worten $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

Der Graph von $f(x)$ lässt erkennen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, ferner deutet er die Notwendigkeit anderer Grenzübergänge an, etwa $x \searrow -1$, beziehungsweise $x \nearrow -1$ oder $x \to 0$.



Grenzwerte sind verträglich mit gewöhnlichen Ungleichungen. Es seien f_1 und f_2 auf derselben und nach oben unbeschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}$ erklärt. Ferner gelte $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} f_k(x) = \alpha_k$ $(k = 1, 2)$. Dann gilt:

a) $$\boxed{\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} (f_1 + f_2)(x) \;=\; \alpha_1 + \alpha_2}$$

b) $$\boxed{\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} (f_1\, f_2)(x) \;=\; \alpha_1\, \alpha_2}$$

Ist $\alpha_2 \neq 0$, dann ist $\dfrac{f_1}{f_2}(x)$ für hinreichend große $x \in D$ erklärt und es gilt:

c) $$\boxed{\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} \frac{f_1}{f_2}(x) \;=\; \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

d) Gilt für alle $x \in D$ $f_1(x) \leq f_2(x)$ dann gilt auch $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Beweis: sei $\epsilon > 0$ gegeben

1) Nach Voraussetzung existiert zu $\frac{\epsilon}{2}$ eine Schranke t_1 mit

$$x \in D \ \wedge \ x \geq t_1 \quad \Rightarrow \quad |f_1(x) - \alpha_1| \ < \ \frac{\epsilon}{2}$$

Analog existiert $t_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$x \in D \ \wedge \ x \geq t_2 \quad \Rightarrow \quad |f_2(x) - \alpha_2| \ < \ \frac{\epsilon}{2}$$

Abzuschätzen ist $|f_1(x) + f_2(x) - \alpha_1 - \alpha_2|$.

Nach der Dreiecksungleichung:

$$|f_1(x) - \alpha_1 + f_2(x) - \alpha_2| \ \leq \ |f_1(x) - \alpha_1| + |f_2(x) - \alpha_2|$$

mit $t_\epsilon := \max(t_1, t_2)$ folgt

$$|f_1(x) + f_2(x) - \alpha_1 - \alpha_2| \ \leq \ |f_1(x) - \alpha_1| + |f_2(x) - \alpha_2| \ < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \ = \ \epsilon$$

falls $x \geq t_\epsilon$, $x \in D$

2) Let $M \ := \ 1 + |\alpha_1| + |\alpha_2|$; Abzuschätzen ist:

$$\begin{aligned}
&|f_1(x)\, f_2(x) - \alpha_1\, \alpha_2| \\
&\quad = \ |f_1(x)\, f_2(x) - \alpha_1\, f_2(x) + \alpha_1\, f_2(x) - \alpha_1\, \alpha_2| \\
&\qquad\qquad \text{(nach der Dreiecksungleichung)} \\
&\quad \leq \ |f_1(x) - \alpha_1|\, |f_2(x)| + |\alpha_1|\, |f_2(x) - \alpha_2|
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert t_ϵ mit

$$x \in D \ \wedge \ x \geq t_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f_2(x) - \alpha_2| \ < \ 1$$

$$|f_2(x) - \alpha_2| \ < \ \frac{\epsilon}{M} \quad , \quad |f_1(x) - \alpha_1| \ < \ \frac{\epsilon}{M}$$

Zunächst abschätzen

$$|f_2(x)| \ = \ |f_2(x) - \alpha_2 + \alpha_2| \ \leq \ |f_2(x) - \alpha_2| + |\alpha_2| \ = \ 1 + |\alpha_2|$$

Daher zusammen

$$\begin{aligned}
|f_1(x)\, f_2(x) - \alpha_1\, \alpha_2| \ &\leq \ |f_1(x) - \alpha_1|\, |f_2(x)| + |\alpha_1|\, |f_2(x) - \alpha_2| \\
&< \ \frac{\epsilon}{M}\, (1 + |\alpha_2|) + |\alpha_1|\, \frac{\epsilon}{M} \ = \ \epsilon
\end{aligned}$$

für alle $x \geq t_\epsilon$

3) Wegen **2)** genügt es den Spezialfall $f_1 = 1$ (konstant) zu diskutieren. f_2 kann Nullstellen haben, aber wegen $\alpha_2 \neq 0$ kann $\epsilon_1 = |\alpha_2|/2$ in der Limesdefinition verwendet werden.

Existiert $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $x \in D,\ x > t_0 \quad \Rightarrow \quad |f_2(x) - \alpha_2| < \frac{1}{2}|\alpha_2|$

Mit der sogenannten umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &= |\alpha_2 + f_2(x) - \alpha_2| \\ &\geq |\alpha_2| - |f_2(x) - \alpha_2| > |\alpha_2| - \left|\frac{\alpha_2}{2}\right| \end{aligned}$$

für $x \in D \ \wedge\ [t_0, \infty[$ ist $\dfrac{1}{f_2(x)}$ erklärt

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{\alpha_2}\right| = \left|\frac{\alpha_2 - f_2(x)}{\alpha_2\, f_2(x)}\right| \leq \frac{|f_2(x) - \alpha_2|}{|\alpha_2|^2/2} < \epsilon$$

$$\text{falls} \quad |f_2(x) - \alpha_2| < \frac{\epsilon\,|\alpha_2|^2}{2} = \epsilon\,'$$

Nach Voraussetzung über $f_2(x)$ gibt es zu $\epsilon\,'$ eine Schranke T mit

$$x \in D, \quad x \geq T \quad \Rightarrow \quad |f_2(x) - \alpha_2| < \epsilon\,'$$

Das eingesetzt $\Rightarrow$ Behauptung.

4) Indirekt: Annahme $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall\ x \in D$ und $\alpha_1 > \alpha_2$

$$\text{setze} \quad \epsilon := \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

Es exisitiert eine Schranke t mit $x \in D, \quad x \geq t \quad \Rightarrow$

$|f_1(x) - \alpha_1| < \epsilon \quad ; \quad |f_2(x) - \alpha_2| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &\leq \alpha_1 - \alpha_2 + f_2(x) - f_1(x) \\ &\leq \alpha_1 - f_1(x) + f_2(x) - \alpha_2 \\ &< 2\,\epsilon = \alpha_1 - \alpha_2 \qquad \text{Widerspruch} \quad \Rightarrow \quad \text{falsch!} \end{aligned}$$

daher $\alpha_1 > \alpha_2$ falsch, daher $\alpha_1 \leq \alpha_2$

□

Anwendung auf die Folge

$$w_0(t) = 1 + t \quad ; \qquad w_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(w_n(t) + \frac{t}{w_n(t)}\right)$$

Nach dem Monotoniekriterium ist

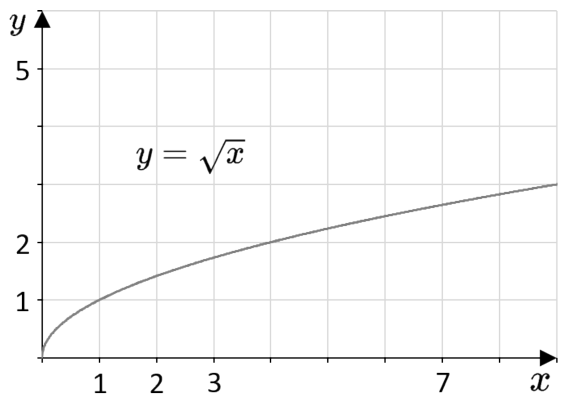
$(w_n)_{n\,\geq\,0}$ konvergent, etwa $\quad w(t) \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} w_n(t)$

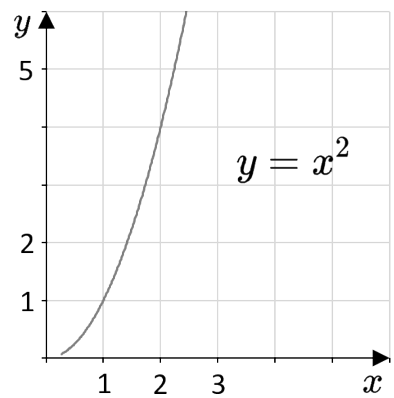
Im Falle $t = 0$ handelt es sich um $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n_{n\,\geq\,0}$, daher $\;w_0 \;=\; 0$

Ist $t > 0\,,$ so wird wegen $\;w_n^2(t) \;>\; t \quad w_n^2(t) \;\geq\; t \;>\; 0$

Übergang zum Grenzwert in der Rekursionsformel: $\quad w(t) \;=\; \dfrac{1}{2}\left(w(t) + \dfrac{t}{w(t)}\right)$

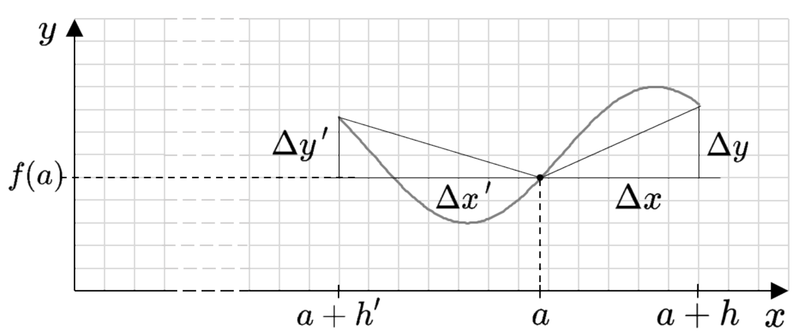
Daher ist $w^2(t) \;=\; t\,;$ konstruiert wurde so die Funktion $t \to \sqrt{t}\,.$





Der anschaulichste und (fürs erste) wichtigste Limesbegriff in Physik und Technik ist die Differentiation.

3.2 Die Differentiation



Betrachtet wird eine reelle Funktion f, welche in einer Umgebung des Punktes a (vielleicht auch noch woanders) erklärt ist. Der feste Punkt $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ liegt auf dem Graphen von f, ebenso $\begin{pmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{pmatrix}$, ein weiterer variabler Punkt.

Untersucht wird die Veränderung der Verbindungsgeraden dieser Punkte bei Variation des zweiten Punktes.

Die Steigung der Geraden ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Gefragt wird nach der Existenz des Limes

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Dies ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$

Übliche Zeichen: $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$; $f'(a)$

In Anwendungen häufig : $x = t$, die Zeit, $f'(a)$ wird $\dot{f}(a)$ geschrieben. Deutung: Änderung der Momentan-Geschwindigkeit! Die Frage nach der Ableitung ist anzusehen auch als Approximationsproblem. Die gegebene Funktion f soll in der Nachbarschaft von a möglichst gut durch eine lineare Funktion (= Gerade) approximiert werden. Differenzieren = linear approximieren.

<u>Beispiele:</u>

(1) Jede konstante Funktion

$$f(x) = c \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist überall differenzierbar mit der Ableitung 0: $f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

(2) Die als Identität bezeichnete Funktion $f(x) = x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls überall differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 1 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

(3) Die Betragsfunktion $x \to |x|$ ist außerhalb des Nullpunktes überall differenzierbar mit der Ableitung $+1$ für die $a > 0$ und Ableitung -1 für die $a < 0$. Im Nullpunkt existiert die Ableitung nicht.

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad , \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

(4) Die Wurzelfunktion $x \to \sqrt{x} = w(x)$ ist in allen Punkten a differenzierbar mit Ableitung $w'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Beweis: Der Differenzenquotient

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \qquad \text{geht gegen} \quad \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \text{wenn} \quad h \to 0 \quad \text{geht}$$

$$\lim_{h\to 0} \sqrt{a+h} = a \qquad \text{(Stetigkeit der Wurzelfunktion im Punkt } a\text{)}$$

Zum Beispiel: Wenn $\epsilon > 0$ dann existiert $d_\epsilon > 0$ mit $|h| < d_\epsilon$

$$\Rightarrow \quad \left|\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right| < \epsilon$$

Damit die Wurzel $\sqrt{a+h}$ überhaupt erklärt ist: Erste Einschränkung $d_\epsilon \leq a$. Wenn $|h| < a \quad \Rightarrow$

$$\left|\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right| = \frac{|h|}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} < \frac{|h|}{\sqrt{a}}$$

Es reicht daher die Zusatzforderung $d_\epsilon \leq \epsilon\sqrt{a}\,.$

□

3.3 Grundregeln der Differentiation

D sei eine Menge reeller Zahlen welche eine Umgebung $]a-\delta, a+\delta[$ $(\delta > 0)$ des Punktes a enthält, ferner seien g, f auf D erklärte reelle Funktionen, welche überdies in a differenzierbar sind, dann gilt:

a) $f+g$ ist in a differenzierbar mit Ableitung

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)} \qquad \text{Summenregel}$$

b) Die Produktfunktion $f\,g$ ist differenzierbar in a mit Ableitung

$$\boxed{(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)} \qquad \text{Produktregel}$$

c) Falls g keine Nullstelle hat, ist f/g erklärt auf D und differenzierbar in Punkt a mit Ableitung

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}} \qquad \text{Quotientenregel}$$

Beweis:

Die erste Aussage **a)** ist ein Spezialfall der allgemeinen Limesregel für Summen. (In den Fällen **b)** und **c)** ist entsprechendes nicht richtig)

Zu **b)**: Differenzenquotient

$$\frac{f(a+h)\,g(a+h) - f(a)\,g(a)}{h}$$
$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,g(a+h) \;+\; f(a)\,\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

lässt die Richtigkeit der Produktregel erkennen, weil:

$$\lim_{h \to 0} g(a+h) \;=\; g(a).$$

Zum Nachweis der Quotientenregel **c)** genügt wegen **b)** der Spezialfall, dass $f = 1$ die Konstante 1 ist. Dann Differenzenquotient für $1/g$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{a}\right) \;=\; -\frac{g(a+h) - g(a)}{g(a+h) \cdot g(a)\,h}$$

konvergiert gegen $\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$ wenn h gegen 0 geht.

□

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Die reelle Funktion f sei im Punkt a differenzierbar, dann gilt

$$\lim_{x \to x} f(x) \;=\; f(a)$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \;=\; f'(0)$$

Ausserdem ist offensichtlich $\lim_{h \to 0} h \;=\; 0$

Aus der Verträglichkeit der Limiten mit dem Produkt folgt

$$\lim_{h \to 0} (f(a+h) \,-\, f(a)) \;=\; 0$$

eine andere Version der Behauptung.

□

Die Kettenregel behandelt das Verhalten von komplizierten Funktionen (Hintereinanderanwendung)

$$f(g(x)) \quad = \quad f \circ g(x) \qquad \text{sprich } f \text{ nach } g$$

Die Kettenregel

Die reelle Funktion g sei in a differenzierbar. Die reelle Funktion f sei differenzierbar im Punkt $g(a)$. Dann ist $f \circ g$ (das Kompositum) differenzierbar in a mit Ableitung

$$(f \circ g)'(a) \quad = \quad f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Beweis-Skizze: Der Differenzenquotient

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \quad = \quad \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \, \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

lässt die Formel ahnen! Zur Ergänzung wird eine Maßnahme gebraucht, falls g nicht strikt monoton verläuft.

4. Wichtige Funktionen

4.1 Die Exponentialfunktion im Reellen

Es gibt genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit Wert 1 im Nullpunkt welche Lösung der Differentialgleichung $y' = y$ ist, die Exponentialfunktion

$$x \;\rightarrow\; \exp(x)$$

Sie ist überall positiv und hat die Funktionalgleichung

$$\exp(x_1 + x_2) \;=\; \exp(x_1) \cdot \exp(x_2) \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Schließlich ist sie strikt monoton wachsend.

Beweis:

1) Die Funktionalgleichung

$$f(x) \;=\; \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ist nach den Beispielen der letzten Paragraphen eine überall positive Funktion. Gegeben x_1, x_2: für hinreichend großes n

$$\frac{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{n}\right)^n} \;=\; \underbrace{\left[1 + \frac{x_1\, x_2 / n^2}{1 + \frac{x_1 + x_2}{n}}\right]^n}_{\text{(Bernoulli)}}$$

$$\geq\; 1 \;+\; \frac{x_1 + x_2}{n + x_1 + x_2}$$

$$\frac{\left(1+\dfrac{x_1+x_2}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{x_1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{x_2}{n}\right)^n} \;=\; \underbrace{\left[1-\frac{x_1\,x_2/n^2}{\left(1+\dfrac{x_1}{n}\right)\left(1+\dfrac{x_2}{n}\right)}\right]^n}_{\text{(Bernoulli)}}$$

$$\geq\; 1-\frac{n\,x_1x_2}{(n+x_1)(n+x_2)}$$

Die zwei Ungleichungen im Limes $n\to\infty$:

$$\frac{f(x_1)\,f(x_2)}{f(x_1+x_2)} \;\geq\; 1 \quad ; \quad \frac{f(x_1+x_2)}{f(x_1)\,f(x_2)} \;\geq\; 1$$

Daher:

$$f(x_1)\,f(x_2) \;=\; f(x_1+x_2)$$

2) Ist $|h|<1$ so

$$1+h \;\leq\; \left(1+\frac{h}{n}\right)^n \;\leq\; 1+h+\frac{h^2}{1-|h|}$$

Links steht die Bernoulli Ungleichung. Mit dem Binomischen Lehrsatz:

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \;=\; \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{h}{n}\right)^j$$

$$=\; 1+h+\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}\,h^j$$

Daher

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \;\leq\; 1+h+\sum_{j=2}^{n}|h|^j \;\leq\; 1+h+\frac{h^2}{1-|h|}$$

Übergang zum Limes $n\to\infty$

$$1+h \;\leq\; f(h) \;\leq\; 1+h+\frac{h^2}{1-|h|}$$

3) Differenzierbarkeit:

Subtraktion von $1+h$ beiderseits und Division durch h

$$0 \;\leq\; \left| \frac{f(h)-1}{h} - 1 \right| \;\leq\; \frac{|h|}{1-|h|}$$

$f(0) \;=\; 1;$ Konsequenz für $h \to 0$

$$f\,'(0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \;=\; 1$$

Gegeben $x \in \mathbb{R}$. Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;&=\; \frac{f(x)\,f(h)-f(x)\,f(0)}{h} \\ &=\; f(x)\,\frac{f(h)-f(0)}{h} \end{aligned}$$

Konsequenz:

$$f\,'(x) \;=\; f(x)\cdot 1 \;=\; f(x)$$

4) Monotonie:

Ungleichung am Schluss von **2)** ergab $f(h)-1 \geq h$. Nun sei h positiv:

$$\begin{aligned} f(x+h) \;-\; f(x) \;&=\; f(x)\,(f(h)-1) \\ &\geq\; f(x)\,h \;>\; 0 \end{aligned}$$

5) Eindeutigkeit:

Angenommen auch g löse die Differentialgleichung: $y\,' = y$

Betrachte den Quotienten $\quad q(x) \;=\; \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$q(x)$ ist differenzierbar mit der Ableitung:

$$\begin{aligned} q\,'(x) \;&=\; \frac{g\,'(x)\,f(x)-g(x)\,f\,'(x)}{f^2(x)} \qquad \text{(Differentialgleichung!)} \\ &=\; \frac{g(x)\,f(x)-g(x)\,f(x)}{f^2(x)} \;=\; 0 \end{aligned}$$

Nach dem (im nächsten Kapitel bewiesenen) Mittelwertsatz ist das aber nur möglich wenn q auf $\mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist.

$\square$

4.2 Der natürliche Logarithmus

Es gibt genau eine auf $]0, \infty[$ erklärte Funktion l mit den Eigenschaften

a) $\boxed{l(x) \;\leq\; x - 1}$

b) $\boxed{l(x_1\, x_2) \;=\; l(x_1) + l(x_2)}$

den natürlichen Logarithmus ln. ln ist strikt monoton wachsend und in seinem Definitionsbereich $]0, \infty[$ differenzierbar mit Ableitung: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Beweis: für $x > 0$ erkläre 3 Folgen

$$x_0 \coloneqq x \quad ; \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad ; \quad g_n \coloneqq 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \quad ;$$

und es sei $\qquad h_n \coloneqq 2^n (x_n - 1) = x_n\, g_n$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$: $\quad$ sei $x \geq 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq \underset{\underset{x_{n+1}}{\|}}{\sqrt{x}} \leq x_n$

$(x_n)_n$ ist als monoton fallende Folge, nach unten beschränkt, konvergent.

$\alpha \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\quad$ Rekursionsformel und $x \geq 1$ ergeben:

$$\alpha^2 = \alpha \geq 1 \ , \quad \text{d.h.:} \quad \alpha = 1 \ ; \qquad \text{Analog für } 0 < x < 1$$

2) $$g_{n+1} - g_n = 2^n \left(2 - \frac{2}{\sqrt{x_n}} - 1 + \frac{1}{x_n}\right) = 2^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \geq 0$$

$$h_n - g_n = 2^n \left(x_n - 1 - 1 + \frac{1}{x_n}\right) = 2^n \left(\sqrt{x_n} - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \geq 0$$

$$h_n - h_{n+1} = 2^n \left(x_n - 1 - 2\sqrt{x_n} + 2\right) = 2^n \left(\sqrt{x_n} - 1\right)^2 \geq 0$$

$$g_n \leq g_{n+1} \leq h_{n+1} \leq h_n$$

Also existieren beide Limiten und wegen $h_n = x_n\, g_n$ gilt nach **1)**

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} h_n =: l(x)$$

Weil h_n monoton fällt gilt insbesondere:

$$l(x) \;\leq\; h_0(x) \;=\; x - 1$$

3) Funktionalgleichung:

Offenbar $\sqrt{x\,y} \;=\; \sqrt{x}\,\sqrt{y} \qquad x, y \geq 0$

Daher ist $(x\,y)_n \;=\; x_n\,y_n$ und damit:

$$h_n(x\,y) \;=\; 2^n(x_n\,y_n - 1)$$

$$h_n(x\,y) - h_n(x)\,h_n(y) \;=\; 2^n(x_n\,y_n - 1 - x_n + 1 - y_n + 1)$$

$$= \; 2^n(x_n - 1)\,(y_n - 1) \;=\; (x_n - 1)\,h_n(y)$$

Übergang zum Limes:

$$l(x\,y) - l(x) - l(y) \;=\; \lim_{n\to\infty}(x_n - 1)\,h_n(y) \;=\; 0$$

da nach **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

4) Eindeutigkeit:

Annahme $\mathscr{L}\colon\,]0,\infty[\,\to\mathbb{R}$ erfülle die Eigenschaften **a)** und **b)**. Funktionalgleichung für $x = y = 1$

$$\mathscr{L}(1) \;=\; \mathscr{L}(1\cdot 1) \;=\; \mathscr{L}(1) + \mathscr{L}(1) \;\Rightarrow\; \mathscr{L}(1) \;=\; 0$$

Funtionalgleichung mit $y = \dfrac{1}{x}$

$$0 \;=\; \mathscr{L}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) \;=\; \mathscr{L}(x) + \mathscr{L}\left(\frac{1}{x}\right)$$

das heißt:

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; -\mathscr{L}(x)$$

verwende Eigenschaft **a)** der Funktion 1 für $\dfrac{1}{x}$ statt x

$$-\mathscr{L}(x) \;=\; \mathscr{L}\left(\frac{1}{x}\right) \;\leq\; \frac{1}{x} - 1 \quad\Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{x} \ \leq \ \mathscr{L}(x) \ \leq \ x - 1 \qquad (*) \quad \text{mehr als Aussage } \mathbf{a)}$$

Wegen $x_n^{2^n} = x$, ergibt **b)**

$$\mathscr{L}(x) \ = \ \mathscr{L}\left(x_n^{2^n}\right) \ = \ 2^n \mathscr{L}(x_n)$$

$$g_n \ = \ 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \underset{(*)}{\leq} 2^n \mathscr{L}(x_n) \ = \ \mathscr{L}(x) \underset{(*)}{\leq} 2^n(x_n - 1)$$

$$g_n \ \leq \ \mathscr{L}(x) \ \leq \ h_n(x) \qquad \forall\, n$$

Übergang zum Limes $n \to \infty$

$$l(x) \ \leq \ \mathscr{L}(x) \ \leq \ l(x)$$

daher

$$l(x) \ = \ -\mathscr{L}(x)$$

5) Monotonie:

Sei $0 < q < 1$. Dafür gilt nach **a)**

$$l(q) \ \leq \ q - 1 \ < \ 0$$

Ist $0 < x_1 < x_2$ dann setze $q = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Damit

$$l(x_1) \ = \ l(x_2\, q) \ = \ l(x_2) + l(q)$$

Weil $l(q) < 0$ folgt $l(x_1) < l(x_2)$

6) Die Ableitung:

Die Abschätzung $(*)$ gilt auch für $l(x)$. Überdies $l(1) = 0$. Für $|h| < 1$ setze $x = 1 + h$ in $(*)$ ein

$$1 - \frac{1}{1+h} \ \leq \ l(1+h) - l(1) \ \leq \ h$$

$$\frac{h}{1+h} \ \leq \ l(1+h) - l(1) \ \leq \ h$$

ist $h > 0$ dann

$$\frac{1}{1+h} \;\leq\; \frac{l(1+h)-l(1)}{h} - 1 \;\leq\; 0$$

das heißt:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{l(1+h)-l(1)}{h} \;=\; 1 \qquad , \qquad \lim_{h \nearrow 0} \frac{l(1+h)-l(1)}{h} \;=\; 1$$

Damit: $\quad l\,'(1) \;=\; 1$

Sei a beliebig und größer 0. Differenzenquotient:

$$\frac{l(a+h)-l(a)}{h} \;=\; \frac{l\left(1+\dfrac{h}{a}\right)-l(1)}{h/a}\,\frac{1}{a}$$

mit dem Bewiesenen: $\quad l\,'(a) \;=\; \dfrac{1}{a}$

$\square$

Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus bilden ein Paar zueinander inverser Funktion, das heißt:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \ln(\exp(x)) & = & x & \forall\; x \in \mathbb{R} \\ \exp(\ln(y)) & = & y & \forall\; y \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Betrachte:

$$f(x) \;:=\; x \,-\, \ln(\exp(x))$$

hat die Ableitung

$$f\,'(x) \;=\; 1 - \frac{1}{\exp(x)} \cdot \exp(x) \;=\; 0$$

nach dem Mittlewertsatz folgt daraus: f = konstant. Da $f(0) \;=\; 0 - \ln(\exp(0)) \;=\; 0$ so ist die Konstante 0. Nun setze $\ln(y) \;=\; x$ in der ersten Gleichung

$$\ln(\exp(\ln(y))) \;=\; \ln(y)$$

Wir haben für zwei Argument denselben Wert unter der strikt monotonen Funktion ln, die Argumente müssen gleich sein

$$\exp(\ln(y)) \;=\; y$$

4.3 Die allgemeine Potenz im Reellen

Wird erklärt für Basis $a > 0$ durch

$$\boxed{a^x \;=\; \exp(x\ln(a)) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}}$$

Das verallgemeinert die gewöhnliche Potenz a^n, denn $a^n \;=\; \exp(n\ln(a))$.

Dies ist leicht mit vollständiger Induktion zu zeigen:

$$n = 1; \quad a^0 \;=\; 1$$

$$n \to n+1 \quad \text{eben bewiesen:} \qquad a \;=\; \exp(\ln(a))$$

$$\begin{aligned} a^{n+1} \;=\; a^n\, a \;&=\; \exp(n\,\ln(a))\,\exp(\ln(a)) \\ &=\; \exp((n+1)\,\ln(a)) \end{aligned}$$

Die gewöhnlichen Potenzregeln bleiben erhalten:

$$a^{x_1}\,a^{x_1} \;=\; a^{x_1+x_2} \quad ; \quad (a^{x_1})^{x_2} \;=\; a^{x_1\,x_2} \qquad \forall\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$a^x\,b^x \;=\; (a\,b)^x \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}$$

Nach der Kettenregel:

$$\boxed{a^x \;=\; \frac{da^x}{dx} \;=\; a^x\ln(a)}$$

Es gibt eine positive Zahl e (Euler) mit $\ln(\mathrm{e}) = 1$, nämlich

$$\mathrm{e} \;=\; \exp(1) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die übliche Notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ steht im Einklang mit der Definition der allgemeinen Potenz. Die allgemeine Potenz $x \to a^x$ besitzt eine Umkehrfunktion, nämlich

$${}^a\!\log(x) \;=\; \frac{1}{\ln(a)}\cdot\ln(x) \qquad \text{der Logarithmus zur Basis } a$$

Die allgemeine Potenz $x \to x^v$ (für $x \geq 0$) ist differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{dx^v}{dx} \;=\; v\,x^{v-1}$$

Nach Definition ist nämlich $x^v = \exp(v\ \ln(x))$. Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{dx^v}{dx} &= \exp(v\ \ln(x))\,\frac{v}{x}\\ &= \exp(v\ \ln(x))\,v\ \exp(-\ln(x))\\ &= v\ \exp((v-1)\ln(x)) \;=\; v\,x^{v-1}\end{aligned}$$

Unter den Funktionen x^v kommen die gewöhnlichen Potenzen vor aber auch diverse Wurzelfunktionen $\sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ allerdings nur für $x > 0$.

Wachstumsvergleiche:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^k} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{\mathrm{e}^x} = 0 \qquad \forall\ k\in\mathbb{N}_0$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty \qquad \lim_{x\searrow 0}\ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \infty \qquad \forall\ \alpha>0$$

$$\lim_{x\searrow 0}x^\alpha = 0 \qquad \lim_{x\searrow 0}x^{-\alpha} = \infty$$

Beweis-Skizze:

Nach Definition ist

$$\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{k+1} \le \mathrm{e}^x \quad \text{daher}$$

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \le \mathrm{e}^x \quad \text{also} \quad \frac{x}{(k+1)^{k+1}} \le \frac{\mathrm{e}^x}{x^k}$$

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 > 0 \quad ; \quad \ln(\mathrm{e}^n) = n\ln(\mathrm{e})$$

Aus der Monotonie von ln folgt so die erste Limesaussage. Zweite Aussage der ersten Zeile: Ersetze x durch $\alpha\ln(x)$, betrachte $k=1$. Das ergibt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\ \ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad ; \quad x^\alpha \text{ ist nach Definition } = \exp(\alpha\ln(x))$$

4.4 Polynome

Aus der konstanten Funktion und aus der Identiät ($x \to x$) entstehen durch eventuell wiederholte Multiplikationen oder Additionen die Polynome.

Typisches Beispiel:

$$P(x) \;=\; a_0x^n \,+\, a_1x^{n-1} \,+\, \ldots \,+\, a_{n-1}x \,+\, a_n$$

Die a_k im Augenblick reell, später auch komplex, heißen „Koeffizienten" von P, insbesondere ist a_0 der „Leitkoeffizient". Ist $a_0 \neq 0$, so heißt n „Grad" von P ($\deg P$). Ist $a_0 = 1$ so heißt P „normiert".

Bezüglich Differenzierbarkeit sind die Polynome überschaubar. Die Gesamtheit dieser Polynome wird abgekürzt mit $\mathbb{R}[x]$ beziehungsweise $\mathbb{C}[x]$, je nach Einschränkung für die Koeffizienten.

Mit Polynomen kann gerechnet werden wie mit ganzen Zahlen. Zur Beschreibung von Addition und Multiplikation ist die gleichlaufende Indizierung vorzuziehen!

$$P \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad ; \quad Q \;=\; \sum_{j=0}^{r} b_j x^r$$

Bildung von $P \circ Q$ koeffizientenweise. Durch Ordnen nach fester x-Potenz ensteht für das Produkt

$$P \circ Q \;=\; \sum_{l=0}^{n+r} \Big(\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} \Big) x^l$$

wobei die obe eingeführten Koeffizienten $a_k = 0$, $b_j = 0$ falls $k > n$ bzw. falls $j > r$. Für $l = n+r$ reduziert sich die Summe zu $a_n b_r$. Daraus folgt $\deg P \circ Q = \deg P + \deg Q$.

Auch Division mit Rest kann durchgeführt werden:

Sei f ein Polynom vom Grad n mit Leitkeoffizienten a, g ein Polynom mit Leitkoeffizienten b vom Grad m. Wenn der Grad n von f kleiner als $m = \deg g$ ist, wird f selbst Rest der Division. Sonst bildet man

$$f_1(x) \;=\; f(x) \,-\, \frac{a}{b} x^{n-m} g(x)$$

f_1 hat einen kleineren Grad als f. In jedem Falle führt eventuelle Wiederholung auf einen Rest mit Grad $< m = \deg g$

$$f(x) \;=\; q(x)\, g(x) \,+\, h$$

wobei g, h Polynome mit $\deg h < \deg g$. Hier könnte $h = 0$ auch das Nullpolynom sein, diesem wird der Grad $-\infty$ zugeordnet.

Besondere Bedeutung hat der Fall

$$g(x) \;=\; x \,-\, \alpha$$

Er führt auf das Horner-Schema und einen Algorithmus zur Auswertung von Polynomen.

$$f(x) \;=\; a_0 x^n \,+\, a_1 x^{n-1} \,+\, \ldots \,+\, a_n$$

Polynomauswertung von $f(x)$ mit Horner-Schema an der Stelle $x = \alpha$ über

$$(\ldots \quad (((a_0\alpha + a_1)\alpha + a_2)\alpha + a_3)\ldots \quad + a_{n-1})\,\alpha$$

Von Innen nach außen ausmultiplizieren. Anzahl der Multiplikationen $\leq n$

$$\begin{array}{cccccccl}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & \\
+ & & (a_0^{(1)}\cdot\alpha) & (a_1^{(1)}\cdot\alpha) & (a_2^{(1)}\cdot\alpha) & \ldots & (a_{n-1}^{(1)}\cdot\alpha) & \\
\hline
 & a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} & = f(\alpha) \;=\; h
\end{array}$$

$a_n^1 \;=\; f(\alpha)$ ist auch Divisionsrest.

Beispiel:

$$f(x) \;=\; x^3 \,+\, x^2 \,-\, 2x \,-\, 1$$

Auswertung an den Stellen $\alpha \;=\; 2, -2, -3$

$\alpha = 2:$

$$\begin{array}{ccccc|}
 & 1 & 1 & -2 & -1 \\
+ & & 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\
\hline
 & 1 & 3 & 4 & 7
\end{array}$$

somit: $a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 3 \quad , \quad a_2 = 4$ und Rest $= 7$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x-2)(x^2+3x+4) + 7$$

$\underline{\alpha = -2:}$

$$\begin{array}{rcccc|}
 & 1 & 1 & -2 & -1 \\
+ & & 1\cdot(-2) & (-1)\cdot(-2) & 0\cdot(-2) \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & -1
\end{array}$$

somit: $a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -1 \quad , \quad a_2 = 0$ und Rest $= -1$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x+2)(x^2-x) - 1$$

$\underline{\alpha = -3:}$

$$\begin{array}{rcccc|}
 & 1 & 1 & -2 & -1 \\
+ & & 1\cdot(-3) & (-2)\cdot(-3) & 4\cdot(-3) \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & -13
\end{array}$$

somit: $a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -2 \quad , \quad a_2 = 4$ und Rest $= -13$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x+3)(x^2-2x+4) - 13$$

$$a_n^{(1)} = f(\alpha) = h \quad ; \quad g = \alpha - x$$

$$q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{n-1-k}$$

Es kann α Nullstelle von f sein; dann ist $h = a_n^{(1)} = 0$, also

$$f(x) = q(x)(x-\alpha)$$

Die Nullstelle kann abgespalten werden, der Grad von q ist:

$$\deg q = \deg f - 1$$

Insbesonders hat jedes nicht konstante Polynom f höchstens $n = \deg f$ Nullstellen.

Eine andere Formulierung dieser Beobachtung ist der Identitätssatz für Polynome.

4.4.1 Identitätssatz für Polynome

Zwei Polynome f_1, f_2 vom Grad $\leq n$, welche an $n+1$ Stellen übereinstimmen sind identisch! Denn $f = f_1 - f_2$ hat (mehr) $n+1$ Nullstellen und $n \geq \deg f$ ist das Nullpolynom.

Beispiel:

$$(1) \qquad \begin{aligned} (x+1)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \\ \| \qquad & \\ (x+1)^n (x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \\ &= \sum_{r=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{n}{r-k} \right) x^r \end{aligned}$$

Die beiden äußeren Polynome haben an mehr als $2n$ Stellen den gleichen Wert, sind also identisch. Insbesonders sind die Koeffizienten bei x^n gleich:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Gegeben seien $n+1$ „Stützstellen“:

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\ldots\, x_n$$

und $n+1$ „Stützwerte“:

$$y_0,\, y_1,\, y_2,\, \ldots\ldots\, y_n$$

Dazu existiert ein „Interpolationspolynom“ P mit $\deg P \leq n$

$$P(x_i) = y_i \quad ; \quad 0 \leq i \leq n$$

Rekursive Konstruktion von Newton!

$$P_0 = y_0 \quad ; \quad P_{k+1} = P_k + c_{k+1}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)$$

Dabei ist c_{k+1} zu wählen, als Lösung der Gleichung

$$y_{k+1} = P_k(x_k) + c_{k+1}(x_{k+1}-x_0)\ldots(x_{k+1}-x_k)$$

Beispiel:

(2) Stützstellen: $-2, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$

Stützwerte: $-1, \quad 1, -1, -1, \quad 7$

$$P_0 = -1; \quad P_1 = P_0 + c_1(x - x_0)$$

$$P_1 = -1 + c_1(x+2)$$

$$P_1(-1) = 1 = -1 + c_1 \cdot 1 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$P_1 = -1 + 2(x+2) = 2x + 3$$

$$P_2 = P_1 + c_2(x+2)(x+1)$$

$$P_2(0) = -1 = P_1(0) + c_2 \cdot 2 = 3 + c_2 \cdot 2 \Rightarrow c_2 = -2$$

$$P_2 = P_1 - 2(x+2)(x+1) = -2x^2 - 4x - 1$$

$$P_3 = P_2 + c_3(x+2)(x+1)(x-0)$$

$$P_3(1) = -1 = P_2(1) + c_3 \cdot 6 = -7 + c_3 \cdot 6 \Rightarrow c_3 = 1$$

$$\begin{aligned} P_3 &= -1 + 2(x+2) - 2((x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) \cdot x \\ &= \ x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

$$P_4 = P_3 + c_4(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$P_4(2) = 7 = P_3(2) + c_4(*) = 7 + c_4(*) \Rightarrow c_4 = 0$$

Zusammen:

$$P_0 = -1$$

$$P_1 = 2x + 3$$

$$P_2 = -2x^2 - 4x - 1$$

$$P_3 = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$P_4 = P_3$$

5. Existenzsätze

5.1 Der Satz von der Intervallschachtelung

Es sei $\quad I_n = [a_n, b_n] \ , \quad n \in \mathbb{N}$

eine bezüglich Inklusion $\subset$ monoton abnehmende Folge von abgeschlossenen Intervallen. Dann existiert ein Punkt α, der in allen Intervallen liegt.

Beweis:

$$I_{n+1} \subset I_n \ ; \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

bedeutet $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Insbesonders ist $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend und beschränkt. Daher gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \ = \ \alpha \ = \ \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Behauptung: $\quad a_k \leq \alpha \leq b_k \qquad \forall \ k$

Ist $k \leq n$ dann $\ a_k \leq a_n \leq b_k$; Übergang zum Limes $n \to \infty$: $\ a_k \leq \alpha \leq b_k$

$\square$

Erste Anwendung: Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

5.2 Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen c_n , $n \geq 1$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(c_{n_k})_{k \geq 1}$.

Beweis:

$a_1 < b_1$ seien untere bzw. obere Schranke der Folge

$$I_1 \ := \ [a_1, b_1]$$

Halbiere I_1 in I_k, $k = 1, 2$. Ist $I_k = [a_k, b_k]$ derart, dass für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ $c_n \in I_k$, dann halbieren und wähle als I_{k+1} dasjenige erste Teilinterval I links für das $c_n \in I$ für unendlich viele n. Die Folge der Intervalle I_k, $k \geq 1$ ist bezüglich Inklusion monoton abnehmend. Daher existiert ein $\alpha \in I_k \ \forall \ k$.

Rekursive Definition der n_k: $n_1 = 1$

Ist n_k so gewählt, dass $c_{n_k} \in I_k$, dann wählen wir $n_{k+1} > n_k$ so, und minimal mit der Eigenschaft

$$c_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$$

Weil die Folge der Intervalllängen gegen 0 geht, ist α der einzige Punkt in allen I_k daher

$$\lim_{k \to \infty} c_{n_k} = \alpha$$

□

Definition der Cauchy-Folgen (im Reellen)
Eine reelle Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ heißt „Cauchy-Folge“ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index n_ϵ existiert mit

$$m, n \geq n_\epsilon \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \epsilon$$

Eine Anwendung des Satzes über Intervallschachtelung ist das Cauchy-Kriterium für $\mathbb{R}$: Jede reelle Cauchy-Folge ist konvergent.

Beweis Idee:

Es sei $(a_n)_{n \geq 1}$ die gegebene Cauchy-Folge. Man findet zu $\epsilon = \dfrac{1}{2 \cdot 2^k}$ ein n_k mit

$$m, n > n_k \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{2} \cdot 2^{-k}$$

Überdies kann $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ erreicht werden. Intervallfolge:

$$I_k := [a_{n_k} - 2^{-k}, a_{n_k} + 2^{-k}]$$

I_k ist bezgl. Inklusion monoton abnehmend, es gibt daher ein $\alpha \in I_k \ \forall \ k$. Weil die Intervallängen gegen 0 gehen folgt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

Definition der Stetigkeit)
Sei a ein Punkt im Definitionsbereich D der reellen Funktion f. f heißt „stetig“ in a, falls

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) \;=\; f(a)$$

Ist das für alle $a \in D$ richtig so heißt f stetig!

Bemerkungen:

(1) Ausgedrückt durch den Umgebungsbegriff bedeutet die Stetigkeit von f in a: Zu jeder Umgebung $U =]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$ des Bildpunktes $f(a)$ existiert eine Umgebung $V =]a - \delta, a + \delta[$ des Punktes a mit $f(V \cap D) \subset U$.

(2) Anwendung der Stetigkeit von f im Punkt a. Für jede Folge von Punkten $a_n \in D$

$$\text{mit} \quad \lim_{n \to \infty} a_n \;=\; a \quad \text{gilt} \quad \lim_{n \to \infty} f(a_n) \;=\; f(a)$$

(siehe in Kapitel 3 vor der Kettenregel). Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Beispiel:

Die Wurzelfunktion $w(x) = \sqrt{x}$ ist auch in $x = 0$ stetig. $D = [0, \infty[\,,\; w(0) = 0$

$$\lim_{x \searrow 0} w(x) \;=\; \lim_{x \searrow 0} x^{1/2} \;=\; 0 \;=\; w(0)$$

Bemerkung:

(3) Analog kann die allgemeine Potenz $x \to x^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ durch $0^{\alpha} := 0$ stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden.

5.3 Der Satz vom Maximum und vom Minimum

f sei stetig reelle Funktion auf $[a, b]$. Dann ist die Wertemenge $f([a, b]) := \{f(x),\, x \in [a, b]\}$ beschränkt und besitzt daher ein $\sup M$ und ein $\inf m$. Ferner gibt es Zahlen $c,\, d \in [a, b]$ und $f(c) = m,\; f(d) = M$.

Beweis Skizze:

1) Beschränktheit: (indirekt)

Annahme: Es gibt ein $a_n \in [a, b]$ mit $\lim_{n \to \infty} |f(a_n)| \;=\; \infty$

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge. Sie wird mit $(a_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet. Für sie $\lim_{n\to\infty} |f(a_n)| = \infty$

$$\alpha \;:=\; \lim_{n\to\infty} a_n \in [a,b] \qquad a \leq a_n \leq b$$

Da f in α stetig, müsste aber gelten $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$

Widerspruch: Also war $f([a,b])$ doch beschränkt.

2) Maximum und Minimum:

Es gibt $c_n \in [a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = M$. Nach Bolzano-Weierstraß hat $(c_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge. Sie wird wieder c_n genannt.

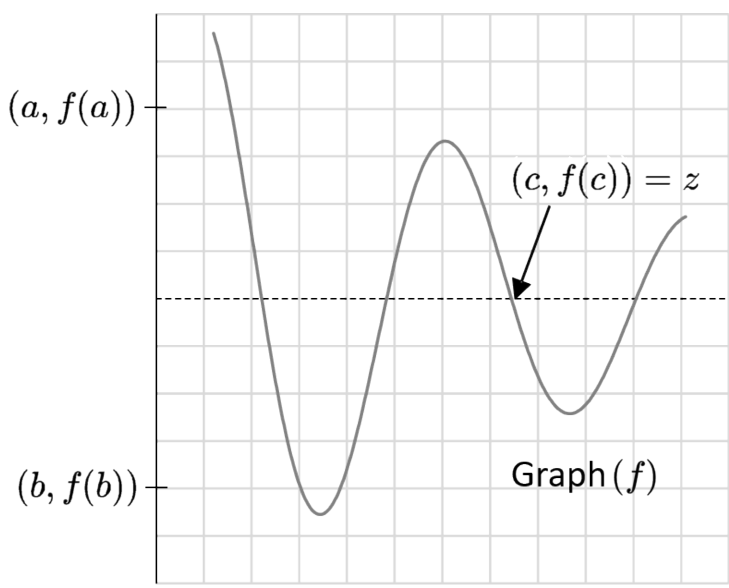
$$\lim_{n\to\infty} c_n \;=:\; d$$

Daher gilt wegen der Stetigkeit von f in d

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) \;=\; M \;=\; f(d)$$

Genauso findet man $f(c) = m$ für ein passendes $c \in [a,b]$.

5.4 Der Zwischenwertsatz



f sei stetig auf dem Interval $[a,b]$, z sei eine Zahl zwischen den Werten $f(a),\ f(b)$ von f in den Endpunkten des Intervalls. Dann existiert wenigstens ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = z$.

Beweis:

Es sei (ohne Einschränkung)

$$f(b) \;<\; z \;<\; f(a) \qquad A : \{x \in [a,b],\;\; f(x) > z\}$$

Nach Voraussetzung $A \neq \emptyset$ beschränkt. A besitzt daher ein Supremum $(\sup(A))$.

Behauptung: $f(c) = z$

1) Ist $x_1 \in [a,b]$ mit $f(x_1) > z$ dann ist $\epsilon_1 = f(x_1) - z > 0$.

Weil f stetig in x_1, existiert $\delta_1 > 0$ und

$$|f(x) - f(x_1)| \;<\; \epsilon_1 \qquad \forall\; x \in [x_1, x_1 + \delta_1[$$

Dann ist hier $f(x) > z$, daher $x_1 \neq c$.

2) Sei $x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_2) < z$, wähle $\epsilon_2 = z - f(x_2) > 0$.

Weil f stetig in x_2, existiert $\delta_2 > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_2)| \;<\; \epsilon_2 \qquad \forall\; x \in \,]x_2 - \delta_2, x_2]$$

Insbesondere ist $f(x) < z$, daher $x_2 \neq c$.

3) Es ist $f(x) > z$ falsch, es ist $f(x) < z$ falsch, daher $f(x) = z$.

$\square$

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \;=\; x^3 \,-\, x \,-\, 1 \\[2ex] a \,=\, 1,\, b \,=\, 2,\, z \,=\, 0 \end{array}\right\} \quad f(c) = 0 \quad \text{für ein} \quad c \in [1,2]$$

5.5 Die Umkehrfunktion

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend. $A := f(a)$, $B := f(b)$ seien die Werte in den Endpunkten des Intervalls. Zu jedem $y \in [A,B]$ existiert genau ein Punkt $x = g(y)$, $g(y) \in [a,b]$, mit der Eigenschaft $f(x) = y$. Die auf diese Weise erklärte Funktion aus f, die „Umkehrfunktion von f“, ist streng monoton wachsend und stetig auf $[A,B]$. Überdies gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} f(g(y)) & = & y & \qquad & g(f(x)) & = & x \\ \multicolumn{3}{c}{\forall\ y \in [A,B]} & & \multicolumn{3}{c}{\forall\ x \in [a,b]} \end{array}}$$

Beweis:

1) Die Existenz von $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$ folgt aus dem Zwischenwertsatz. Die Eindeutigkeit folgt aus der strikten Monotonie von f. Sind $y_1 < y_2$ aus $[A,B]$, dann ist $x_1 = g(y_1) \geq x_2 = g(y_2)$ nicht möglich, weil f sonst nicht strikt monoton wachsend wäre.

2) Die Stetigkeit von g:
Zunächst sei $y \in \,]A,B[$; dann ist $g(y) \in \,]a,b[\,=: c$. Betrachte $\epsilon > 0$ und so klein, dass $]c-\epsilon, c+\epsilon[\,\subset [a,b]$, dann ergibt die Monotonie von f und g die Existenz eines $\delta > 0$ mit $g(\,]y-\delta, y+\delta[\,) \subset \,]c-\epsilon, c+\epsilon[$. Für die Stetigkeit in den Punkten A und B ist der Beweis leicht zu modifizieren.

3) Die Gleichung $f(g(y)) = y$ gilt nach Definition von g. Insbesonders gilt die erste Gleichung für $y = f(x)$:

$$f(\underbrace{g(f(x))}_{x_1}) \;=\; f(x) \qquad \forall\ x \in [a,b]$$

$f(x_1) \geq f(x)$ ist für die streng monotone Funktion f nur möglich wenn $x_1 = x$, d.h.

$$g(f(x)) \;=\; x \qquad \forall\ x \in [a,b]$$

$\square$

Bemerkungen:

(1) Ein entsprechender Satz gilt auch für strikt monoton fallende Funktionen. Die Umkehrfunktionen werden dann ebenfalls strikt monton fallend!

(2) Ein ähnlicher Satz gilt auch, wenn man strikt monotone, stetige Funktionen auf offenen oder halboffenen Intervallen hat (vergleiche exp und ln).

(3) Auch wenn für f eine explizite Formel (etwa $f(x) = x^5 - x - 1$) gegeben ist, so braucht für die Umkehrfunktion keine solche Formel zu existieren. Gelegentlich liefert die Ableitung der Umkehrfunktion eine Formel für die Umkehrfunktion.

Ableitung der Umkehrfunktion:

Es sei $f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend und $g\,:\,[A,B]\to\mathbb{R}$ sei ihre Umkehrfunktion. Ist f in den inneren Punkten $x\in\,]a,b[$ differenzierbar und $f'(x)\neq 0$ dann ist g in $y=f(x)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(g(y))}$$

Beweis:

Betrachte den Quotienten von g

$$\frac{g(y+h)-g(h)}{y+h-y} \;=\; \frac{1}{\dfrac{f(g(y+h))-f(g(y))}{g(y+y)-g(y)}}$$

Weil g insbesonders im Punkt y stetig ist existiert der Limes für $h\to 0$, also

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(g(y))}$$

$\square$

Beispiel:

$$f(x) \;=\; \sinh(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Monotonie: $x_1<x_2\,,$ damit

$$(f(x_2)-f(x_1))\cdot 2 \;=\; \underbrace{(\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1})}_{>0} \;+\; \underbrace{(\mathrm{e}^{-x_1}-\mathrm{e}^{-x_2})}_{>0} \;>\; 0$$

f ist stetig weil überall differenzierbar. Die Umkehrfunktion heiße g

$$f'(x) \;=\; \sinh'(x) \;=\; \cosh(x)$$

$\operatorname{arsinh}(y)$ ist die Abkürzung von *area sinus hyperbolicus* von (y) und damit ergibt sich die Umkehrfunktion von $\sinh(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)$ aus

$$\sinh'(x) \;=\; \cosh(x)=\sqrt{\sinh^2(x)+1}$$

und der Ableitung der Umkehrfunktion $g=\operatorname{arsinh}$

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(g(y))} \;=\; \frac{1}{\sqrt{(\sinh(g(y)))^2+1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Betrachte daneben: $\quad h(y) \;=\; \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

Überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

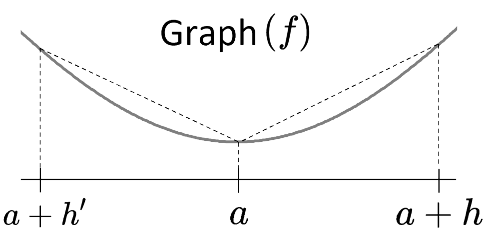
$$h'(y) \;=\; \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\left(1+\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \;=\; g'(y)$$

Die Differenz $g-h$ ist eine auf $\mathbb{R}$ erklärte Funktion mit Ableitung 0, daher konstant. Berechnung der Konstanten durch Auswertung an beliebiger Stelle:

$$y = 0 \quad ; \quad g(0) = 0 \quad ; \quad h(0) = 0 \quad \text{daher} \quad g = h: \;\Rightarrow$$

$$\operatorname{arsinh}(y) \;=\; \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

5.6 Lokale Extrema



Lokale Extrema bilden Oberbegriff für lokale Maxima und lokale Minima. Ist f eine in einer Umgebung U des Punktes a erklärte reelle Funktion dann heißt a lokales Maximum von f wenn eine eventuell kleinere Umgebung $]a-\delta, a+\delta[$ von a existiert mit $f(x) \le f(a)$, falls $|x-a| \le \delta$; Entsprechend nennt man a ein lokales Minimum von f falls für eine Umgebung von a gilt: $f(x) \ge f(a)$. Eine jede differenzierbare reelle Funktion f hat in jedem lokalen Extremum a eine Nullstelle der Ableitung $f'(0) = 0$.

Beweis:

Es genügt ein Beweis im Falle eines lokalen Minimums a von f. Für positives h mit $a+h$ in der relvanten Umgebung ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \;\ge\; 0$$

entsprechend ist für $h' < 0$ mit $a+h'$ in der relevanten Umgebung der Differenzenquotient

$$\frac{f(a+h')-f(a)}{h'} \;\le\; 0$$

Sodann gilt, weil f in a differenzierbar nach Voraussetzung

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h\searrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= f'(a) \\ \lim_{h'\nearrow 0} \frac{f(a+h')-f(a)}{h'} &= f'(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

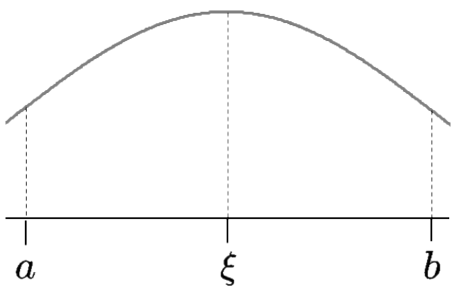
$\square$

Bemerkung:

Es kann $f'(a) = 0$ sein, ohne dass a ein lokales Extremum ist. Beispielsweise für

$$f(x) = x^{2n+1} \quad n \in \mathbb{N}\ , \quad \text{bei} \quad a = 0$$

5.7 Der Satz von Rolle



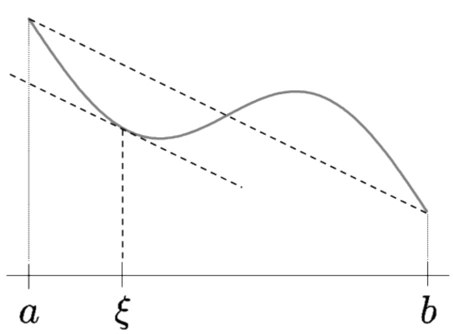
Es sei f eine auf dem offenen Interval I differenzierbare reelle Funktion. Dann gilt für Punkte $a < b$ in I mit $f(a) = f(b)$:

Es existiert ein ξ mit $a < \xi < b$ und $f'(\xi) = 0$.

Beweis:

Ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in]a, b[$ dann ist f dort konstant und $f'(\xi) = 0\ \forall\ \xi \in]a, b[$. Sonst gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f(c) \neq f(a)$ und ohne Einschränkung $f(c) > f(a)$. Dann liegt das Maximum der Funktion auf $[a, b]$ nicht in den Endpunkten. ξ sei eine Stelle an der f maximal wird. Dann $a < \xi < b$ und ξ ist zugleich lokales Maximum von f, daher ergibt der Satz über lokale Extrema die Behauptung $f'(\xi) = 0$.

5.8 Der Mittelwertsatz



f sei eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare reelle Funktion, für Punkte $a < b$ auf I gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)}$$

Beweis:

Gestützt auf den Satz von Rolle mit Hilfsfunktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

F ist differenzierbar mit f:

$$F(a) \;=\; f(a) \quad ; \quad F(b) \;=\; f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \;=\; f(a)$$

Rolle $\Rightarrow$ es existiert ein $\xi \in \,]a,b[$ mit

$$F(\xi) \;=\; 0 \;=\; f'(\xi) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

Erste Anwendung:

Wenn f die Voraussetzung des Satzes erfüllt und außerdem $f'(c) = 0 \;\forall\; x \in I$ dann ist f konstant auf I. Denn nach dem Mittelwertsatz ist für Punkte $a < b$ in I

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;=\; 0$$

Daher:

$$f(b) \;=\; f(a) \qquad \forall\; a \in I \quad \forall\; b \in I$$

6. Anwendungen des Mittelwertsatzes

6.1 Monotonie, lokale Extrema, Konvexität

6.1.1 Das Monotoniekriterium der Differentialrechnung

Sei f eine reelle auf einem offenen Intervall I differenzierbare Funktion. Es gilt f ist dann und nur dann monoton wachsend auf I falls dort überall $f'(x) \geq 0$.

Zusatz: Unter der Monotoniebedingung ist f nicht auch schon strikt wachsend, wenn $f'(x) = 0$ auf einem ganzen Teilintervall.

Beweis:

Annahme:

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall\ x \in I$$

Seien $a < b$ beide in I, dann ist nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \geq 0 \quad (a < \xi < b)$$

Daher $\quad f(b) \geq f(a)$

$\square$

<u>Bemerkung:</u>

Natürlich liefert der Satz auch eine Kriterium für monotones Abfallen! In jedem lokalen Extremum a der differenzierbaren Funktion f ist notwendigerweise $f'(a) = 0$. Ob es sich dann um ein lokales Maximum oder Minimum oder keines von beiden handelt, kann oft direkt entschieden werden!

6.1.2 Kriterium für strikte lokale Extrema

x_0 sei eine Nullstelle der Ableitung f' einer zweimal differenzierbaren Funktion f, dann ist x_0 im Falle $f''(x_0) > 0$ ein lokales Minimum, im Falle $f''(x_0) < 0$ ist x_0 ein lokaes Maximum von f.

Beweis: Im Falle $f''(x) < 0$

Es sei $f''(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

Weil $f'(x_0) = 0$ nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung von x_0 in der $f'(x)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat wie die Differenz $x - x_0$. Ist daher (in der Umgebung $:= |x - x_0| < \delta$) $x_0 - \delta < a < x_0 < b < x_0 + \delta$, dann ist nach dem Mittelwertsatz:

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = f'(\xi) \qquad ; \qquad \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = f'(\eta)$$

mit passenden ξ und η

$$\xi \in \,]a, x_0[\; > 0 \qquad \text{d.h.} \qquad f(a) < f(x_0)$$

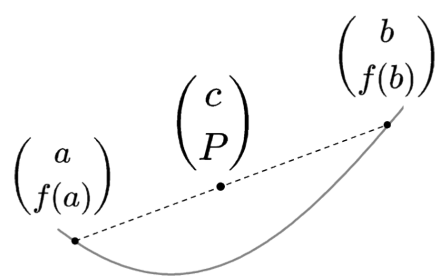
$$\eta \in \,]x_0, b[\; > 0 \qquad \text{d.h.} \qquad f(b) < f(x_0)$$

$\square$

Eine auf einem Intervall erklärte reelle Funktion f heißt konvex (von unten konvex) falls für je drei Punkte $a < c < b$ des Intervalls der Funktionswert $f(c)$ einen Punkt nicht oberhalb der Verbindungsstrecke von $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$ ergibt. Das heißt:

$$f(c) \leq \frac{b - c}{b - a} f(a) + \frac{c - a}{b - a} f(b)$$

$$c = \frac{b - c}{b - a} a + \frac{c - a}{b - a} b$$



Anders ausgedrückt: für alle $\lambda \in \,]0, 1[$

$$f(\lambda a + (1 - \lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$$

auf der Verbindungsgeraden gilt:

$$\frac{P - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - P}{b - c}$$

das heißt:

$$(b-a)\,P \;=\; (b-c)\,f(a) \,+\, (c-a)\,f(b)$$

$$P \;=\; \frac{b-c}{b-a}\,f(a) \,+\, \frac{c-a}{b-a}\,f(b)$$

6.1.3 Konvexitätskriterium

Eine auf einem offenen Interval I zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex dann und nur dann, wenn überall auf I $f''(x) \geq 0$

Beweis:

1) $f''(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in I$, bedeutet, dass f' auf I monoton wächst. Seien $a < c < b$ in I. Nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \;=\; f'(\xi) \qquad \text{für ein} \qquad \xi \in\,]a,c[$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \;=\; f'(\eta) \qquad \text{für ein} \qquad \eta \in\,]c,b[$$

Zusammen wegen $\quad f'(\xi) \;\leq\; f'(\eta)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \;\leq\; \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$$(b-a)\,f(c) \;\leq\; (b-c)\,f(a) \,+\, (c-a)\,f(b)$$

$$f(c) \;\leq\; \frac{b-c}{b-a}\,f(a) \,+\, \frac{c-a}{b-a}\,f(b)$$

2) Annahme $f''(x) < 0$ für ein $x_0 \in I$ und $c := f'(x_0)$. Dann betrachte $F(x) \;=\; f(x) - c\,(x-x_0)$. F ist mit f zweimal differenzierbar: speziell $F'(x_0) \;=\; f'(x_0) - c \;=\; 0$. x_0 ist ein stationärer Punkt von F; $F''(x_0) \;=\; f''(x_0) \;<\; 0$. Nach dem Kriterium über strikte lokale Extrema ist x_0 ein striktes lokales Maximum von F.

Insbesonders ist für kleine $\delta > 0$

$$F(x_0-\delta) \;<\; F(x_0) \quad ; \quad F(x_0+\delta) \;<\; F(x_0)$$

das heißt:

$$f(x_0-\delta) \,+\, c\,\delta \;<\; f(x_0) \quad ; \quad f(x_0+\delta) \,-\, c\,\delta \;<\; f(x_0)$$

$$f(x_0) \;>\; \frac{1}{2}f(x_0-\delta) \,+\, \frac{1}{2}f(x_0+\delta)$$

Daher ist f nicht konvex $(a = x_0 - \delta,\ b = x_0 + \delta,\ c = x_0\,)$.

$\square$

Bemerkung:

Es liegt hier auch ein Kriterium für Konvexität von oben vor, die zugehörigen Funktionen f heißen konkav!

6.2 Die Höldersche Ungleichung

Es seien p, $q \geq 1$ und sei $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt für je zwei Systeme $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ beziehungsweise $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ nicht negativer reeller Zahlen die Abschätzung:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \ \leq\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}}$$

Bemerkung:

(1) Der meist verwendete Spezialfall ist $p = q = 2$. In diesem Falle heißt die Ungleichung auch Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Beweis der Hölderschen Ungleichung:

1) Hilfsatz: Für alle Paare $a \geq 0\,,\ \ b \geq 0$ gilt

$$a\,b \ \leq\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Im Falle $a = 0$ beziehungsweise $b = 0$ ist das richtig. Sei nun $a > 0\,,\ b > 0$

$$(\ln(x))'' \ =\ -\frac{1}{x^2} \quad \text{daher ist } \ln(x) \text{ auf }]0, \infty[\text{ konkav}$$

Verwende das für die Konvexkombination $\quad \dfrac{1}{p}\,a^p + \dfrac{1}{q}\,b^q$

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ \geq\ \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \ =\ \ln(a\,b)$$

Anwendung der monoton wachsenden Funktion exp

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ \geq\ a\,b$$

2) Ist mit $a_i \geq 0\,,\quad b_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \;=\; 1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_i^q$$

dann ist nach **1)**

$$a_i\, b_i \;\leq\; \frac{1}{p}\, a_i^p \;+\; \frac{1}{q}\, b_i^q$$

Summation über i ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \;\leq\; \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p \;+\; \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q \;=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1$$

3) Schluss des Beweises

Abkürzungen $\quad s = \sum_{i=1}^{n} x_i^p \quad , \quad t = \sum_{i=1}^{n} y_i^p$

$$a_i \;=\; \frac{x_i}{s^{1/p}} \quad , \quad b_i \;=\; \frac{y_i}{t^{1/q}} \quad \text{erfüllen } \mathbf{2)}$$

Die Behauptung: $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \;\leq\; s^{1/p}\, t^{1/q}$

stimmt wenn $s = 0$ oder wenn $t = 0$; gilt $s,\, t > 0$ dann

$$a_i := \frac{1}{s^{1/p}}\, x_i \quad ; \quad b_i := \frac{1}{t^{1/q}}\, y_i$$

erfüllen die Voraussetzung von **2)**, daher

$$1 \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \;=\; \frac{1}{s^{1/p}\, t^{1/q}} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

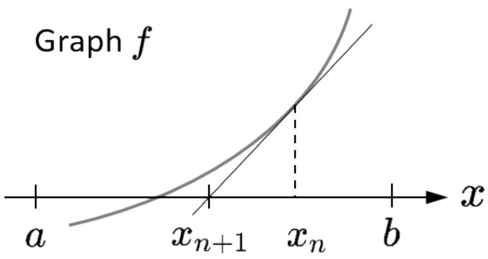
□

Bemerkung:

(2) Eine Konsequenz ist auch die Minkowskische Ungleichung. Für $p \geq 1$ und jedes Paar von Systemen $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$; $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ gilt die Abschätzung:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k + w_k|^p \right)^{1/p} \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p \right)^{1/p} \;+\; \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^p \right)^{1/p}$$

6.3 Das Newton-Verfahren



Das Newton-Verfahren zur Approximation einer Nullstelle α einer differenzierbaren Funktion f gewinnt aus einem Startwert x_n in der Nähe von α eine zweite Approximation x_{n+1} als Schnittpunkt der x-Achse mit der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\begin{pmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{pmatrix}$, in Formeln

$$x_{n+1} \;=\; x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Funktioniert nicht in jedem Fall, nicht in jedem Fall eine gegen α konvergente Folge!

Ein Satz zum Newton-Verfahren

Die wenigstens zweimal differenzierbare Funktion f sei reell und konvex auf dem Intervall I. Überdies sei mit $a < b$ in I $f(a) < 0 < f(b)$

Dann gilt:

a) Rechts von a in I liegt genau eine Nullstelle α von f. Dort ist

$$f'(\alpha) \;\geq\; -\frac{f(a)}{\alpha - a} \;>\; 0$$

b) Das Newton-Verfahren liefert für jeden Startwert x_0 rechts von α ($x_0 \geq \alpha$) eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit Limes α

c) Ist $f''(x) \leq K \quad \forall\; x \in [\alpha, x_n]$ dann gilt die Abschätzung

$$0 \;\leq\; x_{n+1} - \alpha \;\leq\; \frac{K}{f'(x)}\,(x_n - \alpha)^2$$

Beweis:

1) Zwischenwertsatz $\quad\Rightarrow$

Es gibt eine Nullstelle $\alpha \in \,]a, b[$ von f. Nach dem Monotoniekriterium ist die Ableitung f' monoton wachsend

$$\frac{-f(a)}{\alpha - a} \;=\; \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} \;\leq\; f'(\alpha)$$

Daher ist f rechts von α strikt wachsend also positiv. Insbesonders ist α eindeutig!

2) In $I \cap [a, \infty[$ ist die Funktion f links von α negativ, rechts von α positiv. Dort ist $\alpha \leq x$ gleichbedeutend $0 \leq f(x)$. Ist nun $x_n = \alpha$, dann ist $x_{n+1} = \alpha$, dann sind alle weiteren Behauptungen offenbar. Ist $x_n > \alpha$

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_n)}$$

da α Nullstelle von $f(x)$. Anwendung des Mittlewertsatzes ergibt

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\left[1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_n)}\right] \qquad (*)$$

mit positivem $\xi \in \,]\alpha, x_n[\,$.

Wegen der Monotonie von f' folgt insbesonders $0 \leq x_{n+1} \leq x_n - \alpha$

$(x_n)_{n \geq 0}$ ist monoton fallend mit Limes $x_* \geq \alpha$, $n \to \infty$ in der Rekursionsformel

$$x_* = \frac{f(x_*)}{f'(x_*)} \qquad \text{also} \qquad \begin{cases} f(x_*) = 0 \\ x_* = 0 \end{cases}$$

3) Auf die Gleichung $(*)$ kann nochmals der Mittelwertsatz angewandt werden

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &= \frac{x_n - \alpha}{f'(x_n)}\left[f'(x_n) - f'(\xi)\right] \\ &= \frac{(x_n - \alpha)(x_n - \xi)}{f'(x_n)} f''(\eta) \end{aligned}$$

mit passendem $\eta \in \,]\xi, x_n[\,$, und

$$0 \leq x_{n+1} - \alpha \leq \frac{(x_n - \alpha)^2 K}{f'(\alpha)}$$

Bemerkung:

Die Abschätzung kann durch folgende rechte Seite verbessert werden:

$$\frac{K}{2 f'(\alpha)} (x_n - x_{n+1})^2$$

□

6.4 Der erweiterte Mittelwertsatz

Gegeben seien auf $]a, b[$ zwei differenzierbare reelle Funktionen f, g, welche überdies in den Endpunkten des Intervalls a, b noch stetig sind. Ferner sei $g'(x) \neq 0 \;\forall\; x \in\,]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und außerdem

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad , \qquad \xi \in\,]a, b[$$

Beweis:

$g(b) = g(a)$ ist sicher falsch, denn nach einer Verallgemeinerung unserer Version des Satzes von Rolle $g'(\eta) = 0$ für $\eta \in\,]a, b[$ im Gegensatz zur Voraussetzung.

Die Hilfsfunktion:

$$h(x) \;=\; (g(b) - g(a))\, f(x) \;-\; (f(b) - f(a))\, g(x)$$

ist auf $]a, b[$ differenzierbar und stetig auch in den Endpunkten a, b

$$h(b) \;=\; f(a)\, g(b) \;-\; g(a)\, f(b) \;=\; h(a)$$

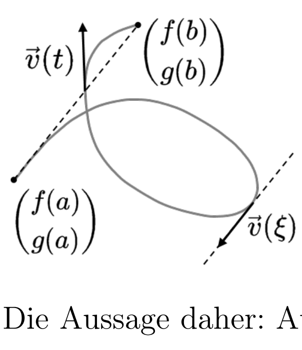
Daher nach Rolle $h'(\xi) = 0$ für ein passendes $\xi \in\,]a, b[$. Einsetzen in die Ableitung der Hilfsfunktion ergibt direkt die Behauptung.

□

Bemerkung:

Für $g(x) = x$ ergibt sich der gewöhnliche Mittelwertsatz.

Geometrische Interpretation des Resultats, $x = t$ sei die Zeit:



$t \to \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ beschreibe die Bahnkurve eines Punktes in der Ebene während des Verlaufs der Zeit im Intervall $[a, b]$. Der „Geschwindigkeitsvektor" $\vec{v} := \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ \dot{g}(t) \end{pmatrix}$ ist zu denken angetragen auf den Bahnpunkt $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$, Richtung = Tangentenrichtung.

Die Aussage daher: Auf der Bahnkurve gibt es einen Punkt in dem die Geschwindigkeit dieselbe Richtung hat wie die Verbindungsgerade durch die Endpunkte der Bahn.

6.5 Die Regel von de l'Hospital

f, g seien differenzierbare Funktionen auf $]a,b[$ mit reellen Werten. Ferner sei dort

$$g'(x) \neq 0 \quad \begin{cases} \text{und} & \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = 0 \\ \text{oder} & \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \infty \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{falls der rechte Limes existiert.}$$

Beweis im ersten Fall:

Setzt man $f(a) = g(a) = 0$, dann werden f und g auch in a stetig. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz wird angewendet auf das Interval $[a,x]$ mit beliebigen $x \in \,]a,b[$. Wir setzen ein, danach ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \qquad \text{mit} \qquad \xi = \xi(x) \in \,]a,x[$$

Aus dieser Formel folgt die Behauptung.

□

Bemerkung:

Ein analoger Satz gilt auch für die Linkslimiten und damit auch für zweiseitige Limiten.

Beispiel:

(1) $\mu, \nu \neq 0 \quad , \quad a > 0$

$$\lim_{x \searrow a} \frac{x^\mu - a^\nu}{x^\nu - a^\mu} = \lim_{x \searrow a} \frac{\mu\, x^{\mu-1}}{\nu\, x^{\nu-1}} = \lim_{x \searrow a} \frac{\mu}{\nu}\, x^{\mu-\nu} = \frac{\mu}{\nu}\, a^{\mu-\nu}$$

Ergänzung: Ist f und g differenzierbar in $]a,\infty[$, dass

$$g'(x) \neq 0 \quad \begin{cases} \text{und} & \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0 \\ \text{oder} & \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{falls der rechte Limes existiert!}$$

Beispiel:

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp\left(x\,\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+{}^a/_x)}{{}^1/_x}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-\,{}^a/_{x^2}}{-\,{}^1/_{x^2}\cdot(1+{}^a/_x)}\right)$$

wegen $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right) = 1$ folgt $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$

6.6 Die Taylorsche Formel

Sei f eine reelle, in einer Umgebung von $a\in\mathbb{R}$ mindestens $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion $N\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt dort

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{N!}f^{(N)}(a)(x-a)^N + R_{N+1}(x)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{N+1}(x)}$$

mit einem Restglied $R_{N+1}(x)$ welches nach Lagrange folgende Form hat:

$$\boxed{R_{N+1}(x) = \frac{1}{(N+1)!}f^{(N+1)}(a+\vartheta(x-a))(x-a)^{N+1}}$$

wo $\vartheta\in\,]0,1[$; und nach Cauchy, mit $\vartheta'\in\,]0,1[$

$$\boxed{R_{N+1}(x) = \frac{1}{N!}f^{(N+1)}(a+\vartheta'(x-a))(1-\vartheta')^N(x-a)^{N+1}}$$

Bemerkungen:

(1) Die Taylor Formel gibt für f in einer Umgebung eines frei gewählten Aufpunktes a eine Approximation durch ein Polynom T_N vom Grad $\leq N$. Dieses Polynom ist ausgezeichnet durch $T_N^{(n)}(a) = f_N^{(n)}(a)\,, n = 0,1,2\ldots,N$; Die Güte der Approximation kommt durch das Restglied $R_{N+1}(x) = f(x) - T_N(x)$ zum Ausdruck.

(2) Der Fall $N = 0$

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a + \vartheta(x-a))(x-a)$$

ist eine Version des Mittelwertsatzes.

(3) Es gibt weitere Formen für das Restglied R_{N+1}.

Beweis für den Lagrangschen Fall:

Kunstgriff: Der Aufpunkt $a = t$ wird variabel gemacht.

$$F(t) \;=\; f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n$$

$$G(t) \;=\; (x-t)^{N+1}$$

werden (für den interessanten Fall $x \neq a$) auf dem Interval mit den Endpunkten a und x betrachtet. Verallgemeinerter Mittelwertsatz

$$\frac{F(a) - F(x)}{G(a) - G(x)} \;=\; \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \qquad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x$$

also $\quad \xi = a + \vartheta(x-a) \quad$ mit $\quad 0 < \vartheta < 1$

$$G'(t) \;=\; -(N+1)(x-t)^N$$

$$F'(t) \;=\; -\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}$$

$$F'(t) \;=\; -\frac{1}{N!} f^{N+1}(t)(a-t)^N$$

Daher

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \;=\; \frac{1}{(N+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\frac{F(a) - F(x)}{G(a) - G(x)} \;=\; \frac{R_{N+1}(x)}{(x-a)^{N+1}} \quad ; \quad F(x) = 0 \quad , \quad F(a) = R_{N+1}(x)$$

□

Bemerkung:

(4) Im Falle eines stetigen $f^{(N+1)}$ mit $f^{(N+1)}(a) \neq 0$ lässt sich eine Aussage machen über das Vorzeichen von $R_{N+1}(x)$ in einer Umgebung von a: Für hinreichend nah bei a gelegene x ist $f^{(N+1)}(a + \vartheta(x-a))$ von gleichem Vorzeichen wie $f^{(N+1)}(a)$. Ist N ungerade und dann $N+1$ gerade, so hat $R_{N+1}(x)$ beiderseits von a dasselbe Vorzeichen. Ist dagegen N gerade und $N+1$ daher ungerade, dann wechselt der Rest sein Vorzeichen, wenn x von einer Seite auf die andere Seite wechselt.

Beispiel:

Es sei $f^{(n)}(a) = 0$ $(1 \leq n \leq N)$ und $f^{(N+1)}(a) \neq 0$. Das Taylorpolynom ist dann konstant $= f(a)$.

Ist N ungerade und $N+1$ also gerade, dann hat f in a ein lokales Extremum. Ist N gerade, dann hat f in a kein lokales Extremum.

Bemerkung:

(5) Ist f beliebig oft differenzierbar dann liegt die Frage nahe: Ist $\lim\limits_{N \to \infty} R_{N+1}(x) = 0$? Falls dies für alle x einer Umgebung gilt hat man die „Taylor Entwicklung“ von f!

6.6.1 Die Exponentialreihe

$$f(x) = \exp(x) \quad , \quad a = 0$$

Aus der Charakterisierung der Funktion exp, Lösung von $y' = y$ mit Wert 1 bei 0, folgt $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$, das n-te Glied der Taylor Formel ist:

$$\frac{1}{n!}\, x^n$$

Wir verwenden das Restglied nach Lagrange

$$R_{N+1}(x) = \frac{\exp(\vartheta_N\, x)}{(N+1)!}\, x^{N+1}$$

Für $x \in [-T, T]$ folgt wegen der Montonie von exp

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{\mathrm{e}^T\, T^{N+1}}{(N+1)!}$$

und daraus im Falle $N \geq 2\,T$

$$|R_{N+k}(x)| \leq \frac{\mathrm{e}^T\, T^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Daraus folgt

$$\lim_{k \to \infty} R_{N+k}(x) \;=\; 0 \qquad \forall\; x \in [-T, T]$$

$$\exp(x) \;=\; \mathrm{e}^x \;=\; 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$

$$\boxed{\mathrm{e}^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Bemerkungen:

(1) Ganz analog wird $\quad \mathrm{e}^{-x} \;=\; 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \pm \ldots$

$$\mathrm{e}^{-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

(2) Die Eulersche Zahl e ist irrational

Beweis: Angenommen $p, q \in \mathbb{N}$. Die Gleichung

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!} + \frac{\mathrm{e}^{\vartheta_N}}{(N+1)!} \;=\; \frac{p}{q} \qquad (*)$$

ist für $N > q$ und beliebiges $\vartheta_N \in \,]0, 1[$ unmöglich! Sonst Multiplikation mit $N!$ mit dem Resultat

$$\frac{N!\,p}{q} - \sum_{n=0}^{n} \frac{N!}{n!} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\vartheta_N}}{N+1}$$

Nun steht links eine ganze Zahl, weil Summe von ganzen Zahlen, aber rechts steht eine positive Zahl $< \mathrm{e}/3 < 1 \;\Rightarrow\;$ Gleichung $(*)$ unmöglich.

$\square$

6.6.2 Die Logarithmus-Reihe

Taylor Entwicklung des natürlichen Logarithmus um den Aufpunkt $a = 1$

$$x \;\to\; \ln(1 + x)$$

Ableitungen

$$\ln^{(n)}(1 + x) \;=\; \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad n \geq 1 \quad \text{(mit Induktion)}$$

Das Glied zur 0-ten Potenz von x in der Taylor Entwicklung ist $\ln(1 + 0) \;=\; 0$, dagegen das Glied zur n-ten Potenz

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

Zur Frage $\quad R_{N+1}(x) \;\to\; 0$?

Für $\;0 \le x \le 1\;$ Lagrange Restglied:

$$R_{N+1}(x) \;=\; \frac{(-1)^N}{N+1}\,\frac{1 \cdot x^{N+1}}{(1+\vartheta\,x)^{N+1}}$$

Für $0 \le x \le 1$ wird der zweite Faktor ≤ 1, der erste Faktor bildet eine Nullfolge, daher

$$\lim_{N\to\infty} R_{N+1}(x) \;=\; 0 \qquad \text{falls} \quad 0 \le x \le 1$$

Für $\;-1 < x \le 0\;$ Cauchy Restglied:

$$R_{N+1}(x) \;=\; \frac{(-1)^N\,(1-\vartheta\,')^N}{(1+\vartheta\,'x)^{N+1}}\,x^{N+1}$$

Wegen

$$1 \,-\, \vartheta'\,|x| \;\ge\; 1 \,-\, \vartheta\,' \qquad \text{wird} \qquad \left(\frac{1-\vartheta\,'}{1+\vartheta\,'x}\right)^N \;\le\; 1$$

Daher

$$|R_{N+1}(x)| \;\le\; \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$$

und daher

$$\lim_{N\to\infty} R_{N+1}(x) \;=\; 0 \qquad \text{falls} \qquad -1 < x \le 0$$

$$\ln(1+x) \;=\; \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \ldots$$

$$\boxed{\ln(1+x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n} \qquad -1 < x \le 1}$$

Insbesondere wird der Wert der alternierenden harmonischen Reihe

$$1 \,-\, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \ldots \;=\; \ln 2$$

Diese Reihe ist aber unbrauchbar für die Berechnung von $\ln 2$.

Die Binomische Formel

$$(1+x)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

besitzt eine Verallgemeinerung für beliebige Exponenten α statt n.

6.6.3 Die Binominalreihe

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ wird der verallgemeinerte Binominalkoeffizient $\binom{\alpha}{n}$ für natürliche $n \geq 0$ rekursiv erklärt durch

$$\binom{\alpha}{0} \;=\; 1 \quad , \qquad \binom{\alpha}{n+1} \;=\; \frac{\alpha-n}{n+1} \cdot \binom{\alpha}{n}$$

also ausgeschrieben

$$\binom{\alpha}{n} \;=\; \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-1}{n-1} \cdot \frac{\alpha-2}{n-2} \cdot \;\ldots\; \cdot \frac{\alpha-n+1}{1}$$

Für $-1 < x < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha \;=\; 1 \,+\, \alpha\, x \,+\, \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{1\cdot 2}\, x^2 \,+\, \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\, x^3 \,+\, \ldots$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$$

Für $\quad f(x) \,=\, (1+x)^\alpha \quad$ gilt in $\quad -1 < x < \infty$

$$f^{(n)}(x) \;=\; n! \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot (1+x)^{\alpha-n}$$

Beweis durch Induktion!

für $n \,=\, 0$ richtig: $\qquad f^{\,(n+1)} \;=\; (n+1)! \binom{\alpha}{n+1} (1+x)^{\alpha-(n+1)}$

Das Restglied nach Lagrange

$$R_{N+1}(x, a=0) \;=\; \binom{\alpha}{N+1} (1+\vartheta\, x)^{\alpha-N-1} x^{N+1}$$

Daraus kann geschlossen werden

$$\lim_{N\to\infty} R_{N+1}(x) \;=\; 0 \ , \qquad \text{falls} \quad 0 \leq x < 1$$

Für $-1 < x \leq 0$ ist das Cauchy-Restglied zu verwenden mit Zusatzüberlegung.

Sonderfall $N = 1$: $\quad (1+x)^\alpha \;=\; 1 + \alpha\, x + R_2$

Nach Lagrange

$$R_2(x, a=0) \;=\; \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,(1-\vartheta\, x)^{\alpha-2}\, x^2$$

Nach Cauchy

$$R_2(x, a=0) \;=\; \alpha\,(\alpha-1)\,(1+\vartheta' x)^{\alpha-2}\,(1-\vartheta')\, x^2$$

Konkret: Restglieder für $\alpha = \frac{1}{2}, \; -\frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}$

$\alpha = 1/2$:
$$\binom{\alpha}{2} \;=\; \binom{1/2}{2} \;=\; \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2} \;=\; -\frac{1}{8}$$
$$\sqrt{1+x} \;=\; 1 + \frac{x}{2} + R_2 \,,$$
mit $R_2 < 0$ und $|R_2| \leq \frac{x^2}{8}$, falls $x > 0$

$\alpha = -1/2$:
$$\binom{\alpha}{2} \;=\; \binom{-1/2}{2} \;=\; \frac{-1/2\cdot(-3/2)}{2} \;=\; \frac{3}{8}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1 - \frac{x}{2} + R_2 \,,$$
mit $R_2 > 0$ und $|R_2| \leq \frac{3\cdot x^2}{8}$, falls $x > 0$

$\alpha = 1/3$:
$$\binom{\alpha}{2} \;=\; \binom{1/3}{2} \;=\; \frac{1/3\cdot(-2/3)}{2} \;=\; -\frac{1}{9}$$
$$\sqrt[3]{1+x} \;=\; 1 + \frac{x}{3} + R_2 \,,$$
mit $R_2 < 0$ und $|R_2| \leq \frac{x^2}{9}$, falls $x > 0$

7. Schwingungsgleichung und Winkelfunktionen

$$\boxed{y'' + y \;=\; 0 \qquad \text{(L)}}$$

Gesucht sind alle zweimal differenzierbaren Funktionen die (L) erfüllen!

<u>Eigenschaften der Lösungen von (L):</u>

(1) Ist f Lösung von (L), dann $f'' = -f$, also ist f sogar viermal differenzierbar, $-f$ ist wieder Lösung, also $f^{(IV)} = f$. Insbesondere ist f beliebig oft differenzierbar.

(2) Für je zwei Lösungen f, g von (L) und beliebige Konstanten a, $b \in \mathbb{R}$ ist

$$af + bg$$

wieder eine Lösung.

(3) Für je zwei Lösungen f, g von (L) wird die „Wronski-Determinante“ erklärt als

$$w(x) \;=\; w_{f,g}(x) \;=\; (fg' - f'g)(x)$$

w ist differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned} w' &= fg'' - f''g \\ &= -fg + fg \;=\; 0 \end{aligned}$$

Daher ist $w_{f,g} = w$ eine Konstante.

(4) Zu jedem Paar von Anfangsbedingungen $f(0) = a\,,\; f'(0) = b \;\; (a, b \in \mathbb{R})$ gibt es höchstens eine Lösung f von (L).

Beweis:

Angenommen f und g seien zwei Lösungen von (L) mit den selben Anfangsbedingungen, dann ist $h = f - g$ eine Lösung von (L) mit den Anfangsbedingungen $h(0) = h'(0) = 0$.

Betrachte:

$$h^2(x) + h'^2(x) \quad \text{ist differenzierbar mit Ableitung}$$

$$2\,h'(x)\,(h(x) + h''(x)) \;\equiv\; 0$$

Daher ist (für jede Lösung h) $h^2(x) + h'^2(x)$ konstant. Auswertung für unsere Lösung h im Punkt 0 ergibt 0 für die Konstante.

$$h^2(x) + h'^2(x) \;=\; 0 \qquad \forall\ x$$

Insbesondere ist $h(x) = 0\ \forall\ x$. Daher ist $f = g$.

$\square$

(5) Ist f irgendeine Lösung von (L) mit Anfangsbedingungen $f(0) = a$, $f'(0) = b$, dann hat man mit (1) die Taylor Entwicklung von f um den Nullpunkt.

$$f(x) \;=\; a + \frac{b}{1!}\,x - \frac{a}{2!}\,x^2 - \frac{b}{3!}\,x^3 + \frac{a}{4!}\,x^4 + \frac{b}{5!}\,x^5 -, -, +, +, \;\cdots$$

$\cos x$ bzw. $\sin x$ wird erklärt als jene Lösung der Schwingungsgleichung (L) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \cos(0) &=& 1 \\ \cos'(0) &=& 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} \sin(0) &=& 0 \\ \sin'(0) &=& 1 \end{array}$$

(6) Die Wronski-Determinante für $f = \cos$, $g = \sin$ berechnet sich aus der Kenntnis der Funktionen $\cos' x$ und $\sin' x$, welche Lösungen von (L) sind mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \cos'(0) &=& 0 \\ \cos''(0) &=& -1 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} \sin'(0) &=& 1 \\ \sin''(0) &=& 0 \end{array}$$

das heißt $\cos' x \;=\; -\sin x$ und $\sin' x \;=\; \cos x$ und daher ist die konstante Wronski-Determinante:

$$\cos^2 x + \sin^2 x \;=\; 1$$

(7) Eine Lösung von (L) mit $f(0) = a$, $f'(0) = b$ ist also

$$f(x) \;=\; a\cos x + b\sin x$$

Sie ist eindeutig nach (4) durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Kurz: Der Lösungsraum der Schwingungsgleichung ist

$$\{f \;=\; a\cos + b\sin\,;\;\; a, b \in \mathbb{R}\}$$

(8) Mit $f(x)$ ist auch $g(x) \coloneqq f(x_1 + x)$ eine Lösung von (L), gesucht wird insbesondere für $f = \cos$ beziehungsweise $f = \sin$ die Darstellung von

$$f(x_1 + x) \;=\; a\cos(x) \,+\, b\sin(x)$$

Die Konstanten gewinnt man durch Auswertung bei $x = 0$ für die Funktion und deren Ableitung

$$f(x_1) \,=\, a \quad ; \quad f'(x_1) \,=\, b$$

Speziell:

Additionstheorem oder Funktionalgleichung

$$\cos(x_1 + x_2) \;=\; \cos x_1 \cos x_2 \,-\, \sin x_1 \sin x_2$$

$$sin(x_1 + x_2) \;=\; \sin x_1 \cos x_2 \,+\, \cos x_1 \sin x_2$$

(9) Häufig benutzte Folgerungen

$$\cos(-x) \;=\; \cos x \quad , \quad \sin(-x) \;=\; -\sin x$$

$$\cos 2x \;=\; \cos^2 x \,-\, \sin^2 x$$

$$\sin 2x \;=\; 2\,\sin x \cos x$$

$$\sin x \,-\, \sin y \;=\; 2\,\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2} \qquad (IV)$$

$$\cos x \,-\, \cos y \;=\; -2\,\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2} \qquad (V)$$

Denn $\cos(-x)$, $\sin(-x)$ sind Lösungen von (L) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Verdopplungsformeln folgen durch $x_1 = x_2 = x$ aus den Additionstheoremen!

Mit $x_1 = \dfrac{x+y}{2}$, $x_2 = \dfrac{x-y}{2}$ gilt $\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ x_1 - x_2 = y \end{cases}$

Folgerung (IV) linke Seite:

$$\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) =$$

$$= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 - \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$= 2 \cos x_1 \sin x_2$$

Folgerung (V) linke Seite:

$$\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) = -2 \sin x_1 \sin x_2$$

7.1 Zwischenabschnitt über Potenzreihen

Das Wort „(unendliche) Reihe“ bezeichnet einen Ausdruck $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Es hat zwei Bedeutungen:

(1) Es bezeichnet die Folge $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ der sogenannten „Partialsummen“ s_n .

(2) Hat diese Folge einen Limes $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ dann wird auch $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als unendliche Reihe bezeichnet.

Die Rechengesetze über konvergente Folgen können auf die konvergenten unendlichen Reihen übertragen werden!

Wegen $a_n = s_n - s_{n-1}$ hat man als notwendige Bedingung für die Konvergenz der Partialsummenfolge: Die Folge der „Glieder“ a_n einer konvergenten Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist eine Nullfolge.

Die Bedingung ist nicht hinreichend! Beispiel (harmonische Reihe):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \qquad \text{ist divergent}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2} \\ s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq s_4 + 4\frac{1}{8} = s_4 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Allgemein

$$s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + \sum_{m=2^k+1}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{m} \geq s_{2^k} + 2^k \sum \frac{1}{2^{k+1}} = s_{2^k} + \frac{1}{2}$$

Die monoton wachsende Folge der s_n ist daher nicht beschränkt, also nicht eigentlich konvergent!

7.1.1 Das Konvergenzkriterium von Leibniz

Für jede monoton fallende Nullfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist die „alternierende“ Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergent und für die Partialsummen s_n sowie den Limes s gilt

$$s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s \geq s_{2n} \geq s_{2n+2}$$

und

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + (-1)^n a_n \\ s_{n+1} &= s_{n-1} + (-1)^n \underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Die ungerade indizierten Partialsummen bilden eine wachsende Folge, die gerade indizierten eine monoton fallende Folge, stets $s_{2n+1} \leq s_0$, $s_{2n} \geq s_1$. Beide Folgen sind nach dem Monotoniekriterium der Folgen konvergent und $|s_{2n+1} - s_{2n}| = a_{2n+1}$ zeigt, dass die beiden Limiten übereinstimmen!

□

Beispiele:

(1) Alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

(2) Leibnizsche Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

werden „Potenzreihen" genannt mit Entwicklungspunkt x_0. Die Zahlen a_n (reell oder komplex) heißen „Koeffizienten" der Potenzreihe. Die Verschiebung $x \mapsto x + x_0$ lässt daraus eine Potenzreihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit Entwicklungspunkt 0 werden. Jeder derartigen Reihe wird ein Element $\varrho \in [0, \infty]$ zugeordnet (N.H. Abel):

$$\varrho := \sup\{r \geq 0 \,/\, \text{die Folge } (a_n r^n) \text{ beschränkt}\}$$

ist der Konvergenzradius von S.

7.1.2 Satz zum Konvergenzradius

Wenn ϱ der Konvergenzradius von $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist, dann konvergiert S für $|x| < \varrho$ und divergiert für $|x| > \varrho$.

Beweis:

1) Gilt $|x| > \varrho$, dann ist $r = |x|$ nicht zugelassen unter der Supremumsklammer für ϱ. Also ist die Folge $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ der Reihenglieder nicht beschränkt. Weil die Folge der Glieder jeder konvergenten Reihe notwendigerweise beschränkt ist als Nullfolge, konvergiert die vorliegende Reihe nicht!

2) Sei nun $|x| < \varrho$. Nach Definition von ϱ gibt es ein r mit $|x| < r \leq \varrho$ mit $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ beschränkt, etwa $|a_n| r^n \leq M \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$.

Behandlung der Partialsummenfolge nach dem Cauchy-Kriterium:

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m x^m \right|$$

(mit Dreiecksungleichung)

$$\leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m||x|^m \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m|\, r^m \left(\frac{|x|}{r}\right)^m$$

(nach Voraussetzung)

$$\leq \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1} \cdot M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x}{r}\right|^k = \frac{M\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x|}{r}} < \epsilon$$

falls $n \geq n_\epsilon$, denn $q := \frac{|x|}{r} < 1$

□

Bemerkung:

Der Beweis gestattet sogar den Schluss, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ konvergent, falls $|x| < \varrho$; in Worten, Potenzreihen konvergieren im Innern ihres Konvergenzbereichs absolut.

7.1.3 Ein Kriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius

Gilt $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$, dann ist $R = \varrho$ der Konvergenzradius von $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Beweis: Die Voraussetzung bedeutet insbesondere $a_n \neq 0$ falls $n \geq 0$.

1) Sei $0 \leq r < R$. Dann ist

$$|a_{n+1}|\, r \leq |a_n| \quad \text{falls} \quad n \geq n_1 \geq n_0$$

Daher $|a_n|\, r^n \geq |a_{n+1}|\, r^{n+1}$ und die Folge $(|a_n|\, r^n)$ ist eine monoton fallende beschränkte Folge! Somit$R \leq \varrho$.

2) Sei $R < r$, dann $(|a_n|\, r^n)$ unbeschränkt. Wähle r_1 mit $R < r_1 < r$

$$|a_n| \leq |a_{n+1}|\, r_1 \quad \text{falls} \quad n \geq n_2 \geq n_0$$

Daher

$$0 \;\le\; M \;:=\; |a_{n_2}| r_1^{n_2} \;\le\; |a_n| r_1^n \quad ; \qquad n \ge n_2 \quad \text{(induktiv)}$$

$$|a_n| r^n \;=\; |a_n| r_1^n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \;\ge\; M \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \;\to\; \infty$$

Insbesondere ist diese Folge $(|a_n| r^n)_{n \ge 0}$ nicht beschränkt!

$\square$

Beispiele:

(1) Die geometrische Reihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

hat lauter Koeffizienten $a_n = 1$, daher $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, also $\varrho = 1$.

(2) Die Exponentialreihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

hat die Koeffizienten $a_n = \dfrac{1}{n!}$, daher $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = n+1$, also $\varrho = \infty$; daher ist jede Folge $\left(\dfrac{r^n}{n!}\right)_{n \ge 0}$ $(r \ge 0)$ beschränkt!

(3) Die Reihen:

$$C(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad ; \quad S(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

haben beide den Konvergenzradius $\varrho = \infty$, denn die Folgen

$$\left(\frac{r^{2n}}{(2n)!}\right)_{n \ge 0} \quad , \quad \left(\frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n \ge 0}$$

sind dann nach Beispiel (2) beschränkt für jedes $r \ge 0$.

7.1.4 Die Ableitung einer Potenzreihe

Es sei $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit reellen (oder auch komplexen) Koeffizienten a_n und mit dem Konvergenzradius ϱ.

$$DS \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

ist die gliedweise differenzierte Reihe von S und habe den Konvergenzradius ϱ'.

a) Es gilt $\varrho = \varrho'$

b) Für alle z mit $|z| < \varrho$ gilt

$$\boxed{\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left[\frac{1}{h}(S(z+h) - S(z)) - DS(z) \right] = 0}$$

Beweis: von **a)**

1) Zeige: $\varrho' \leq \varrho$

Sei $r < \varrho'$, dann ist nach Definition von ϱ'

$(n\,|a_n|\,r^{n-1})_{n \geq 1}$ beschränkt,

$(|a_n|\,r^n)_{n \geq 0}$ ist daher erst recht beschränkt, das heißt $r < \varrho$ und daher ist $\varrho' \leq \varrho$.

2) Sei $q \in\,]0,1[$ dann $q = \dfrac{1}{1+\delta}$ mit $\delta > 0$ und Benutzung der Bernoulli Ungleichung

$$n\,q^n = \frac{n}{(1+\delta)^n} \leq \frac{n}{1+n\,\delta} \leq \frac{1}{\delta}$$

Ohne Einschränkung sei $\varrho > 0$ (sonst ist die Behauptung $\varrho = \varrho'$ klar), $0 < r < \varrho$. Hilfszahl r_1 mit $r < r_1 < \varrho$; $q = \dfrac{r}{r_1}$

$$n\,|a_n|\,r^{n-1} = n\,q^n\,|a_n|\,r_1^n\,\frac{1}{r}$$

Diese Folge ist als Produktfolge zweier beschränkter Folgen selbst beschränkt, daher $r \leq \varrho'$, daher ist $\varrho' \leq \varrho$ falsch, also $\varrho \leq \varrho'$.

Zusammen folgt $\varrho = \varrho'$.

□

Beweis: von **b)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\,r^{n-1}$$

Nach Teil **a)** (und wegen der Bemerkung zum Satz über den Konvergenzradius) konvergiert diese Reihe falls $r < \varrho = \varrho'$

1) Zu festem z mit $|z| < \varrho$ wähle r mit

$$|z| < r < \varrho = \varrho'$$

Beschränkung der h auf $|h| \leq r - |z|$. Dann $|z+h| \leq r$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index N_ϵ mit

$$\sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} n\,|a_n|\,r^{n-1} \;<\; \frac{\epsilon}{4}$$

2) $$a^n - b^n \;=\; (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \ldots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$= \;(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\,b^k$$

ergibt für

$$T(h) \;=\; \left[\frac{1}{h}(S(z+h) - S(z)) - DS(z)\right]$$

$$= \;\sum a_n\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n\,z^{n-1}\right)$$

als Fehler bei a_n den Ausdruck

$$p_n(h) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z+h)^{n-1-k}\,z^k - n\,z^{n-1}$$

und die Abschätzung

$$|p_n(h)| \;\le\; 2\,n\,r^{n-1}$$

3) $T(h)$ ist (als unendliche Reihe) der Limes der Partialsummenfolge t_n. Subtraktion der von n unabhängigen Größe t_{N_ϵ} liefert eine Zerlegung von T.

$$T \;=\; t_{N_\epsilon} + \widetilde{T} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{T} \;=\; \sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} a_n p_n(h)$$

Abschätzung von $\widetilde{T}$ über die Partialsummen:

$$\sum_{n=N_\epsilon+1}^{N_\epsilon+p} a_n p_n(h) \;\overset{\text{nach } \mathbf{2)}}{\underset{\Downarrow}{\le}}\; 2\sum_{n=N_\epsilon+1}^{N_\epsilon+p}|a_n|\,n\,r^{n-1}$$

$$\le\; 2\sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty}|a_n|\,n\,r^{n-1} \;<\; \frac{\epsilon}{2}$$

Abschätzung von $t_{N_\epsilon}(h)$:

Das ist eine endliche Summe von Polynomen $a_n p_n(h)$ mit Wert 0 im Nullpunkt ($h = 0$). Insbesondere ist $t_{N_\epsilon}(h)$ stetig von h abhängig mit Wert Null bei Null. Daher gibt es $\delta_\epsilon > 0$ mit

$$|t_{N_\epsilon}(h)| \;<\; \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{mit} \qquad |h| < \delta_\epsilon$$

Zusammen:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\epsilon > 0$ mit $|T(h)| < \epsilon$ falls (zusätzlich) $0 < |h| < \delta_\epsilon$.

□

Bemerkung:

Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ positiven Konvergenzradius $\varrho > 0$ dann definiert die Reihensumme

$$f(x) \;\coloneqq\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \text{für} \quad |x-a| \;<\; \varrho$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Ableitungen:

$$f^{(k)}(x) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}$$

Auswertung im Aufpunkt a

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \;=\; a_k \qquad (k \;=\; 0,1,2\ldots)$$

Die Potenzreihe ist zugleich die Taylor Entwicklung der durch die Reihe dargestellten Funktion.

Beispiel:

$$\cos x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad ; \quad \sin x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

sind die eingangs betrachteten Fundamentallösungen der Schwingungsgleichung:

$$y'' + y \;=\; 0$$

Für $0 \le x \le 2$ handelt es sich um die alternierenden Reihen im Sinne des Leibnizkriteriums, daraus resultieren die Ableitungen

$$1 - \frac{x^2}{2} \;\le\; \cos x \;\le\; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$1 - \frac{x^3}{6} \;\le\; \sin x \;\le\; x\;, \quad \text{falls} \quad 0 \le x \le 2$$

Insbesondere ist

$$\cos 2 \;\le\; 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} \;=\; -\frac{1}{3} \;<\; 0 \;<\; \cos 0.$$

Daher hat $\cos x$ im Interval $]0,2[$ eine Nullstelle (genau eine, nämlich $\pi/2$).

7.2 Umkehrfunktionen

Die Kreiszahl π wird erklärt als die kleinste positive Nullstelle von $\sin x$! Wegen der Formel $\sin x = \sin(x/2)\cos(x/2)$ lässt sich erkennen, dass dann $\pi/2$ die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ ist.

Für $\sin x$ ist in $0 < x < 2:\quad \sin x \;\geq\; x\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) \;>\; 0$

da $\cos' x = -\sin x$, $\cos x$ in $]0,2[$ strikt fallend besitzt dort also genau eine Nullstelle: $\pi/2$

$$\sin(x+\pi/2) = \cos x \quad ; \quad \cos(x+\pi/2) = -\sin x \qquad (*)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad ; \quad \cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad ; \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

Insbesondere sind alle Lösungen der Schwingungsgleichung $y'' + y = 0$ periodische Funktionen der Periode 2π!

Es genügt, die erste Gleichung zu beweisen. Beide Seiten sind Lösung der Schwingungsgleichung. Wegen $\sin'(x) = \cos x$ und $\cos x > 0$ für $0 \leq x < \pi/2$ ist $\sin x \geq 0$ für $0 \leq x < \pi/2$. Außerdem $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für alle x! Auswertung bei $x = \pi/2$, $\sin^2 \pi/2 = 1$, $\sin \pi/2 = 1$.

Links steht (ebenso wie rechts) jene Lösung der Schwingungsgleichung, welche den Wert 1 bei 0 und Ableitungswert 0 bei 0 hat! Lösungen mit gleichen Anfangsbedingungen sind überhaupt gleich.

Die Nullstellenmenge von $\sin x$ ist $\quad \pi\mathbb{Z} := \{\pi k \;/\; k \text{ ganz}\}$

Die Nullstellenmenge von $\cos x$ ist $\quad \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} := \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k \;/\; k \text{ ganz}\right\}$

Insbesondere kann der Quotient definiert werden:

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{für die} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2k-1}{2}\pi \;/\; k \text{ ganz}\right\}$$

Der Tangens ist wegen der Gleichung $(*)$ eine periodische Funktion mit Periode π.

Wie bei allen periodischen Funktionen hat man sich auch bei Sinus, Cosinus, und Tangens zur Bildung der Umkehrfunktion auf Monotonie Intervalle zu beschränken. Als Hauptwerte bezeichnet man (für Sinus bzw. Tangens) die aus $\sin \mid [-\pi/2, \pi/2]$ bzw.

$\tan \mid \,]-\pi/2, \pi/2[$ (mit Restriktionen) gewonnenen Umkehrfunktionen $\arcsin(y)$ bzw. $\arctan(y)$.

Konstruktion der Ableitung dieser Funktionen nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\sin' x = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Daher folgt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad ; \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Wegen $\lim\limits_{x \nearrow \pi/2} \dfrac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ und $\tan(-x) = -\tan x$ wird

$$\tan\big(\,]-\pi/2, \pi/2[\,\big) = \,]-\infty, \infty[;$$

das ist der Definitonsbereich von arctan!

Entsprechend ist für arcsin der Definitonsbereich

$$\sin\big([-\pi/2, \pi/2]\big) = [-1, 1]$$

In den Endpunkten des Defintionsbereichs von arcsin ist die Ableitung nicht existent da dort nicht differenzierbar.

Aus der Taylor-Reihe der Ableitung

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

gewinnt man die Taylor-Reihe von arctan selbst (um $x = 0$)

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}$$

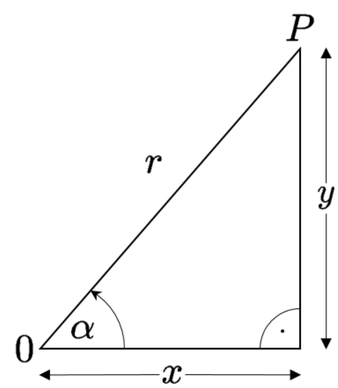
$$\boxed{\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Der Beweis ensteht aus der Taylor Entwicklung der jeweiligen Ableitungsfunktion durch Angabe einer „Stammfunktion“ (einer Funktion mit der vorgeschriebenen Ableitung) und Justierung im Nullpunkt. Beide haben den Konvergenzradius $\varrho = 1$.

Bemerkenswert, dass $\arctan x$ beliebig oft differenzierbar ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Die arctan-Reihe konvergiert auch für $x = 1$, ihr Wert wird $\arctan 1 = {}^{\pi}/_{4}$

$$\frac{\pi}{4} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

7.2.1 Anschauliche Bedeutung der Winkelfuntionen Sinus und Cosinus



Die anschauliche Bedeutung der Winkelfuntionen Sinus und Cosinus ist gegeben durch ein Seitenverhältnis im rechtwinkeligen Dreieck:

$$Sin\alpha = \frac{y}{r} \quad ; \quad Cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Der Name „Winkel“ steht für eine Zahl aus der Kreisteilung. Der volle Kreisumfang wird eingeteilt in 360° (in der Vermessungslehre auch 400 Neugrad). In mathematischen, physikalischen und einigen technischen Anwendungen wird der Kreisteilung die euklidische Länge des Kreisumfangs $2\pi r$ zugrundegelegt. Dabei bedeutet $2r$ den Durchmesser des betrachteten Kreises! 1 Rad $= 180\,\mathrm{deg}/\pi \approx 57{,}296°$. Die Fortsetzung der Winkelfunktionen auf alle $\alpha \in \mathbb{R}$ geschieht über die Vorzeichenkonvention für die 4 Quadranten der Ebene: $x > 0, y > 0$; $x < 0, y > 0$; $x < 0, y < 0$; $x > 0, y < 0$;

$$\left\| \; Cos^2\alpha + Sin^2\alpha \;=\; 1 \right. \qquad \text{ist eine Ausdruck für den Satz des Pythaogras.}$$

Projektion der Ecken des schrägen Rechtecks (siehe Skizze zu Winkelbezeichnungen)

$$x \;=\; Cos\beta\, x' - Sin\beta\, y' \quad , \quad y \;=\; Sin\beta\, x' + Cos\beta\, y'$$

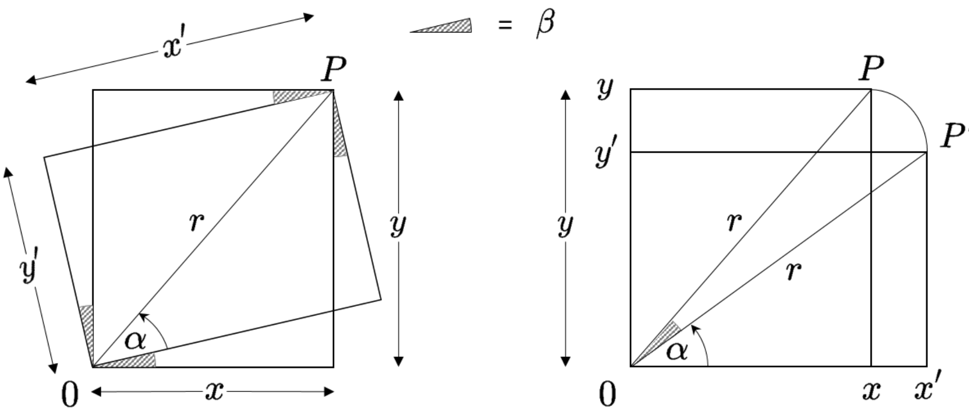
Rückdrehung des schrägen Rechtecks

$$x \;=\; r\,Cos(\alpha+\beta) \quad , \quad y \;=\; r\,Sin(\alpha+\beta)$$

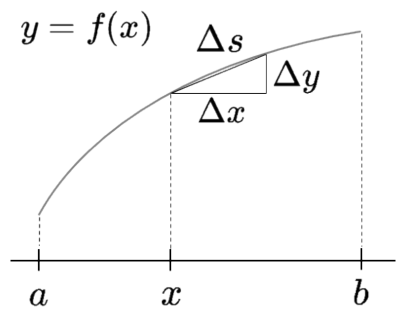
$$x' \;=\; r\,Cos\alpha \quad , \quad y' \;=\; r\,Sin\alpha$$

$$Cos(\alpha+\beta) \;=\; Cos\alpha\, Cos\beta - Sin\alpha\, Sin\beta$$

$$Sin(\alpha+\beta) \;=\; Sin\alpha\, Cos\beta + Cos\alpha\, Sin\beta$$



Euklidische Länge eines Kreisbogens $s(x)$ der Form:



$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad , \quad x \in [a, b]$$

Nach Pythagoras

$$(\Delta s)^2 \;=\; (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

In differenzieller Form, aus

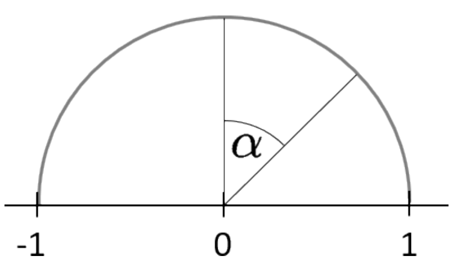
$$\frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2} \;=\; 1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \qquad \to \qquad s' \;=\; \sqrt{1 + f'(x)}$$

Diese heuristische Formel für die Ableitung $s'(x)$ der Bogenlänge $s(x)$ führt zur Lösung der Frage nach der Bogenlänge.

Beispiel:

$$f(x) \;=\; \sqrt{1 - x^2}$$

beschreibt den Bogen des Einheitskreises in der oberen Halbebene ($y > 0$).



$$f'(x) \;=\; \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$s'(x) \;=\; \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Die Stammfunktion mit Wert 0 in $x = 0$ ist nach der Diskussion der Schwingungsgleichung $\arcsin x$.

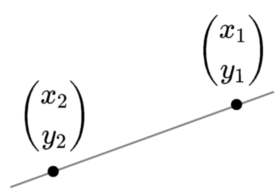
$$Sin \alpha \quad = \quad \sin \alpha \quad = \quad x$$

8. Die Ebene und ihre affinen Abbildungen

Bei Fixierung eines Systems von Koordinaten wird jeder Punkt P in der Ebene beschrieben durch das Paar seiner Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\{\vee\,(x/y)\}$.

Auch ausgedehnte Objekte der Ebene werden beschrieben durch die Koordinatensysteme ihrer Punkte.

(1) Gerade durch zwei verschiedene Punkte $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$



$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} (1-t)\,;\;\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und Radius $r > 0$

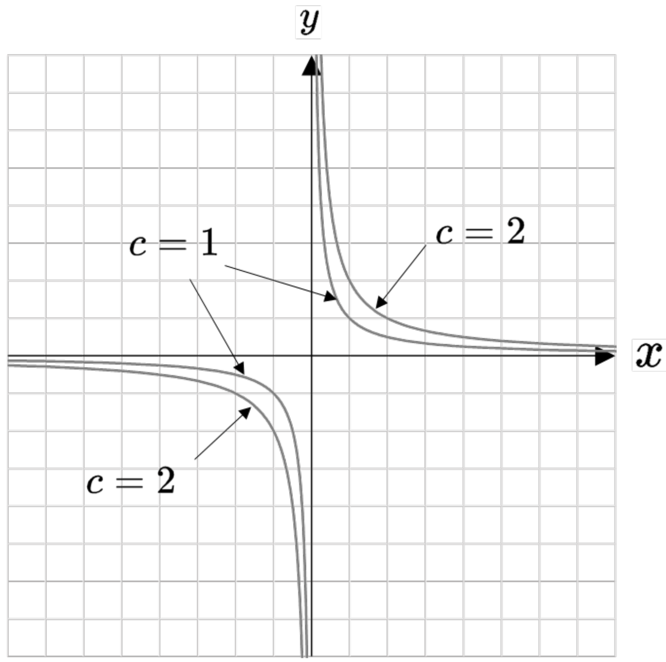
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;\;\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \;=\; r^2 \right\}$$

(3) Offene und abgeschlossene Kreisscheibe!

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;\;\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \;\underset{(\leq)}{<}\; r^2 \right\}$$

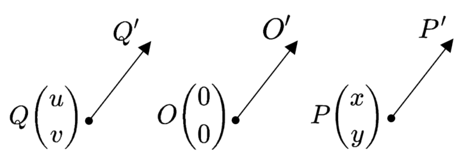
(4) Schar gleichseitiger Hyperbeln

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;\;\; x\,y \;=\; c \right\}, \quad c \in \,]0, \infty[\quad \text{Scharparameter}$$



Die Zahlenpaare $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bilden die Menge $\mathbb{R}^2$. Objekten in $\mathbb{R}^2$ kann auch eine andere Bedeutung zukommen als die des Koordinatenpaares eines Punktes. Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, damit ist verbunden die Selbstabbildung der Ebene, genannt

Translation um $\vec{a}$:



$$t_{\vec{a}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + a_1 \\ y + a_2 \end{pmatrix}$$

Hintereineanderausführung zweier Translationen

$$t_{\vec{a}}\left(t_{\vec{b}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = t_{\vec{a}}\begin{pmatrix} x + b_1 \\ y + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a_1 + b_1 \\ y + a_2 + b_2 \end{pmatrix} = t_{\vec{a}+\vec{b}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}+\vec{b}} \quad \text{wobei die Summe erklärt ist als} \quad \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Streckungen (Stauchungen) um einen Faktor $\lambda > 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda\, x \\ \lambda\, y \end{pmatrix} =: \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{Der Sonderfall } \lambda = 1 \text{ liefert die Identität!}$$

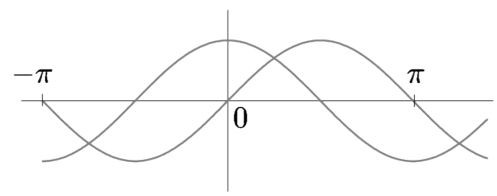
Spiegelung am Ursprung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \text{Zweimalige Anwendung ergibt die Identität.}$$

Zusammenfassung zur Vielfachenbildung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \;=:\; \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^* \;=\; \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

8.1 Drehungen um den Ursprung



Es seien $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$; Dann existiert genau ein $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$ mit $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$. Ist nämlich $s = 0$, dann $c = 1$, $\varphi = 0$ oder $c = -1$, $\varphi = \pi$. Sei nun $s \neq 0$. Dann ist $c \in \,]-1, 1]$. Weil $\cos\varphi$ gerade gibt es ein

$$\begin{aligned} \varphi_+ &\in \,]0, \pi[\quad \text{mit} \quad \cos\varphi_+ = c \quad \text{und ein} \\ \varphi_- &\in \,]-\pi, 0[\quad \text{mit} \quad \cos\varphi_- = c \quad \text{nämlich } \varphi_- = -\varphi_+. \end{aligned}$$

Je nach Vorzeichen von s ist $\varphi = \varphi_+$ bzw. $\varphi = \varphi_-$ die einzige Möglichkeit. Die Abbildungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} c\,x - s\,y \\ s\,x + c\,y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

heißen Drehungen um den Ursprung [Merkregel für die Matrixmultiplikation: Zeile mal Spalte]. Hintereinanderausführung zweier Drehungen! Es sei

$$\begin{pmatrix} \tilde{c} & -\tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \tilde{c} &= \cos\tilde{\varphi} \\ \tilde{s} &= \sin\tilde{\varphi} \end{aligned}$$

eine weitere Drehung um den Ursprung!

Berechnung $D(\tilde{\varphi})\,D(\varphi)$:

$$D(\varphi) D(\tilde{\varphi}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; D(\varphi) \left(D(\tilde{\varphi}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$D(\varphi) \begin{pmatrix} \tilde{c}\,x - \tilde{s}\,y \\ \tilde{s}\,x + \tilde{c}\,y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} c(\tilde{c}\,x - \tilde{s}\,y) - s(\tilde{s}\,x + \tilde{c}\,y) \\ s(\tilde{c}\,x - \tilde{s}\,y) + c(\tilde{s}\,x + \tilde{c}\,y) \end{pmatrix}$$

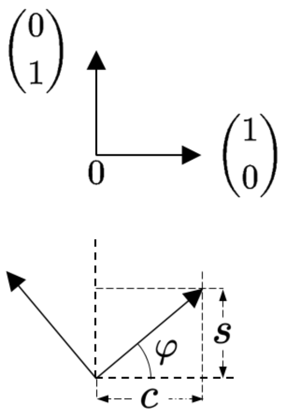
$$= \begin{pmatrix} (c\,\tilde{c} - s\,\tilde{s}) & -(c\,\tilde{s} + s\,\tilde{c}) \\ (c\,\tilde{s} + s\,\tilde{c}) & (c\,\tilde{c} - s\,\tilde{s}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \tilde{\varphi}) & -\sin(\varphi + \tilde{\varphi}) \\ \sin(\varphi + \tilde{\varphi}) & \cos(\varphi + \tilde{\varphi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Kurz: $D(\varphi) \circ D(\tilde{\varphi}) \;=\; D(\varphi + \tilde{\varphi})$

Anwendung der Matrixschreibweise auf die speziellen Paare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



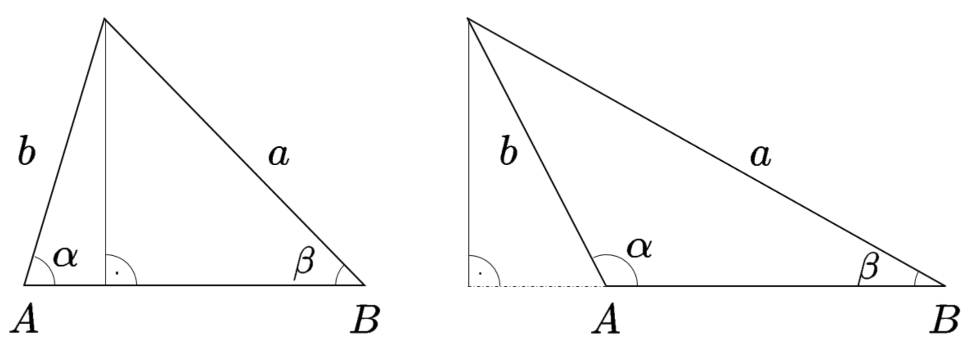
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \pi/2) \\ \sin(\varphi + \pi/2) \end{pmatrix}$$

Hintereinanderanwendung zweier Drehungen ist die Drehung um die Summe der zugehörigen Winkel!

8.2 Die elementargeometrischen Sinus und Cosinussätze



$h \;=\; b\sin\alpha \;=\; a\sin\beta$; Beachte: $\sin(\pi - \alpha) \;=\; \sin\alpha$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Betrachte die Zerlegung der Grundseite durch die Höhe

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta\ ; \qquad \text{Beachte: } \cos\alpha < 0 \text{ für } \alpha > \pi/2$$

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2(1-\sin^2\alpha) + a^2(1-\sin^2\beta) + 2ab\cos\alpha\cos\beta \\ &= a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

Wegen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

8.3 Das Skalarprodukt

ist das innere Produkt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}\,\vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

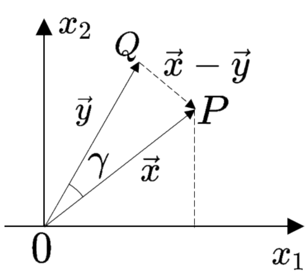
Durch Spezialisierung ergibt sich die sogenannte euklidische Norm

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x}\,\vec{x}} \quad \text{Norm von } \vec{x}$$

weitere gebräuchliche Notationen für das innere Produkt:

$$\vec{x}\,\vec{y} = \langle \vec{x}\,\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl.



Die euklische Norm ist nach Pythagoras der Abstand des Punktes P mit Orstvektor $\vec{x}$ vom Ursprung 0.

Zur Interpretation des Skalarprodukts betrachte das Normquadrat der Differenz $\vec{x} - \vec{y}$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}-\vec{y}\rangle - \langle \vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \qquad \text{(Cosinussatz)} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\gamma \end{aligned}$$

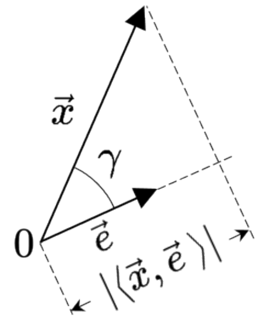
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist gleich dem Produkt ihrer Längen mal Cosinus des eingeschlossenen Winkels!

$$\vec{x}\,\vec{y} \;=\; \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\gamma$$

Bild (rechts) für den Fall eines normierten

$$\vec{y} \;=\; \vec{e}$$

(das heißt: $\|\vec{y}\| \;=\; 1$)



Hervorzuheben:
Das Skalarprodukt ist algebraisch einfach definiert im Vergleich mit der Formel $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\gamma$. Insbesondere: $\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow \langle\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; 0$.

Hier ist festgelegt, dass z.B. der Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ orthogonal ist zu allen Vektoren.

Die Haupteigenschaften der Norm!

(N1) $\|\vec{x}\| \;\geq\; 0 \;\forall\; \vec{x},$ „=“ nur für $\vec{x}=\vec{0}$

(N2) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \;\leq\; \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

(N3) $\|\lambda\cdot\vec{x}\| \;=\; |\lambda|\,\|\vec{x}\| \qquad \forall\; \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2,\;\forall\;\lambda\in\mathbb{R}$

Beweis der Dreiecksungleichung!

LS und RS bezeichnen jeweils die linke und die rechte Seite der Ungleichung (N2).

$$\begin{aligned}
&(RS)^2-(LS)^2\\
&\quad= x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| - (x_1+y_1)^2 - (x_2+y_2)^2\\
&\quad= 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| - 2x_1y_1 - 2x_2y_2\\
&\quad= 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| - 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\\
&\quad= 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|(1-\cos\gamma) \;\geq\; 0
\end{aligned}$$

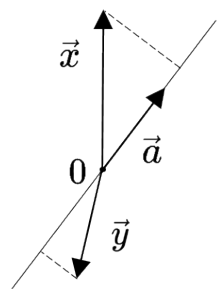
□

Zusatz: Für Vektoren $\vec{x}\neq\vec{0},\;\vec{y}\neq\vec{0}$ gilt

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \;=\; \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\,,$$

wenn der eingeschlossene Winkel $\gamma=0$ ist.

Orthogonalprojektion der Punkte auf eine Gerade durch den Ursprung



Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ normiert, das heißt $\|\vec{a}\| = 1$

$$\{t\vec{a}\,;\ t \in \mathbb{R}\} \;=\; \mathbb{R}\,\vec{a}$$

beschreibt die Gerade durch 0 in Richtung $\vec{a}$

$$p_{\vec{a}}(\vec{x}) \;:=\; \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle\, \vec{a}$$

Zur Begründung:

Der Differenzvektor $\vec{x} - p_{\vec{a}}(\vec{x})$ steht senkrecht auf dem Vektor $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} - p_{\vec{a}}(\vec{x})\,,\, \vec{a}\,\rangle \;&=\; \langle \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle\, \vec{a}\,,\, \vec{a}\,\rangle \\
&=\; \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle \;-\; \langle \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle\, \vec{a}\,,\, \vec{a}\,\rangle \\
&=\; \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle \;-\; \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle\, \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a}\,\rangle}_{=1} \;=\; 0
\end{aligned}$$

Fundamentale Rechenregeln für das Skalarprodukt

(SK1) $\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle \;=\; \langle \vec{y}, \vec{x}\,\rangle$ (Symmetrie)

(SK2) $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z}\,\rangle \;=\; \langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, \vec{z}\,\rangle$

(SK3) $\langle \vec{x}, \lambda\, \vec{y}\,\rangle \;=\; \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle \qquad \forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

Aus (SK2) und (SK3) folgt Linerarität im zweiten Argument. Aus (SK1) folgt die Linerarität im ersten Argument. (SK4) ist eine Wiederholung von (N1):

(SK4) $\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle \;\geq\; 0$, „=“ nur für $\vec{x} = \vec{0}$

Darstellung der Orthogonalprojektionen auf eine Gerade $\vec{a}\,\mathbb{R}$ ($\|\vec{a} = 1\|$) mit einer Matrix

$$\begin{aligned}
p_{\vec{a}}(\vec{x}) \;&=\; \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle \vec{a} \;=\; (x_1 a_1 + x_2 a_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&=\; \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

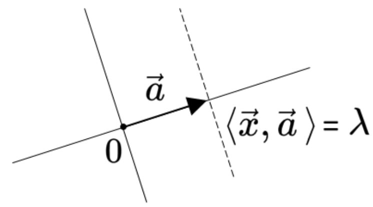
$p_{\vec{a}} \cdot p_{\vec{a}} \;=\; p_{\vec{a}}$ Projektionen sind idempotent.

8.4 Hessesche Normalform einer Geraden

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\{\vec{x}\,;\ \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle = 0\} = \vec{a}^{\perp}$; $\|\vec{a}\| = 1$ besteht aus allen zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektoren, das ist eine Gerade durch 0:

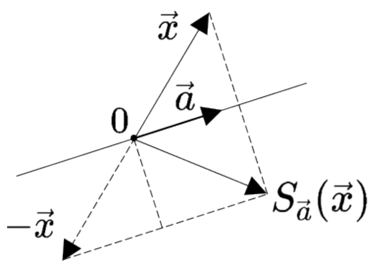
$$\{\vec{x};\ \langle \vec{x}, \vec{a}\,\rangle = \lambda\}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



enthält den Vektor $\lambda\,\vec{a}$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = \lambda$$

<u>Spiegelung an einer Geraden $\mathbb{R}\,\vec{a}$</u>



Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ normiert.

$$S_{\vec{a}}(\vec{x}) = -\vec{x} + 2p_{\vec{a}}(\vec{x})$$

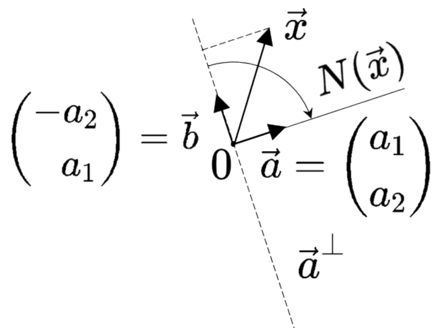
heißt Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}\,\vec{a}$

Matrixschreibweise für $\vec{x} \longmapsto -\vec{x}$ durch $\vec{x} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Damit

$$S_{\vec{a}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 + 2a_1^2 & 2a_1 a_2 \\ 2a_1 a_2 & -1 + 2a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad S_{\vec{a}} \circ S_{\vec{a}} = \text{Identität}$$

<u>Beispiel einer nilpotenten linearen Abbildung!</u>



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei normiert.

Dann $\vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ebenfalls normiert und $\vec{b} \in \vec{a}^{\perp}$

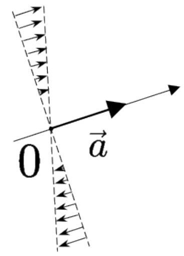
$$N(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{b}\,\rangle\,\vec{a}$$

heißt eine nilpotente lineare Abbildung.

$$N(N(\vec{x})) = N(\langle \vec{x}, \vec{b}\,\rangle\,\vec{a}) = \langle\langle \vec{x}, \vec{b}\,\rangle\,\vec{a}\,,\,\vec{b}\,\rangle\,\vec{a} = \langle \vec{x}, \vec{b}\,\rangle\,\underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b}\,\rangle}_{=0} = 0$$

$N \circ N$ ist die Nullabbildung!

<u>Scherung in $\mathbb{R}\,\vec{a}$</u>



Gegeben $\mu \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} \longmapsto \underbrace{\vec{x} + \mu\, N(\vec{x})}_{S(\vec{x})}$$

Matrixschreibweise für N

$$N(\vec{x}) = (-a_2 x_1 + a_1 x_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1^2 \\ -a_2^2 & a_1 a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise für die Scherungen

$$S(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 - a_1 a_2\,\mu & a_1^2\,\mu \\ -a_2^2\,\mu & 1 + a_1 a_2\,\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Zusammenstellung einheitlicher Gesichtspunkte!</u>

$$\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ bildet ein Beispiel für einen reellen „Vektorraum“.

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition}$$

$$\lambda\,\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation mit skalaren } \lambda \in \mathbb{R}$$

Aus den Rechengesetzen in $\mathbb{R}$ ergeben sich Reglen in diesem Vektorraum, zum Beispiel:

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$(\lambda\,\mu)\,\vec{x} = \lambda\,(\mu\,\vec{x})$$

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \qquad \forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Abgesehen von den Translationen haben die betrachteten Selbstabbildungen $F : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ gemeinsam die Eigenschaften der Linearität, das heißt

$$F(\vec{x} + \vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y})$$

$$F(\lambda\,\vec{x}) = \lambda\, F(\vec{x}) \qquad \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Solche F bilden z.B. die Geraden

$$g \;=\; \vec{a} + \mathbb{R}\,\vec{b}\;; \qquad \vec{b} \neq \vec{0}$$

wie folgt ab:

$$F(g) \;=\; F(\vec{a} + \mathbb{R}\,\vec{b}) \;=\; F(\vec{a}) \;+\; \mathbb{R}\,F(\vec{b})$$

Dieses ist entweder ein Punkt (falls $F(\vec{b}) = 0$) oder aber eine Gerade. Ferner ist jedes solche F bereits vollständig festgelegt, durch die Bilder $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ und $F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Sei $\quad F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \quad$ und $\quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$

Durch Nebeneinanderschreiben dieser beiden Bildvektoren entsteht die F beschreibende Matrix

$$M \;=\; \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$F(\vec{x}) \;=\; \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}a\,x_1 + b\,x_2\\ c\,x_1 + d\,x_2\end{pmatrix} \;=\; M\vec{x}$$

Sei nun auch $\widetilde{F}$ eine lineare Selbstabbildung von $\mathbb{R}^2$, beschrieben durch die Matrix

$$\widetilde{M} \;=\; \begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b}\\ \tilde{c} & \tilde{d}\end{pmatrix}$$

<u>Fragen:</u> a) Ist $\widetilde{F} \circ F$, das Kompositum, wieder linear?
b) Wenn ja, welche Matrix beschreibt $\widetilde{F} \circ F$?

$$\widetilde{F}(F(\vec{x} + \vec{y})) \underset{\substack{\uparrow\\ F \text{ additiv}}}{=} \widetilde{F}(F(\vec{x}) + F(\vec{y})) \underset{\substack{\uparrow\\ \widetilde{F} \text{ additiv}}}{=} \widetilde{F}(F(\vec{x})) \;+\; \widetilde{F}(F(\vec{y}))$$

das heißt

$$\widetilde{F} \circ F(\vec{x} + \vec{y}) \;=\; \widetilde{F} \circ F(\vec{x}) \;+\; \widetilde{F} \circ F(\vec{y})$$

$$\widetilde{F} \circ F(\lambda\,\vec{x}) \;=\; \widetilde{F}(F(\lambda\,\vec{x})) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linearität}\\ \text{von } F}}{=} \widetilde{F}(\lambda\,F(\vec{x})) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linearität}\\ \text{von } \widetilde{F}}}{=} \lambda\,\widetilde{F} \circ F(\vec{x})$$

Die Matrix zu $\widetilde{F} \circ F$ hat die erste Spalte

$$\widetilde{F} \circ F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \;=\; \widetilde{F}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b}\\ \tilde{c} & \tilde{d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\tilde{a}\,a + \tilde{b}\,c\\ \tilde{c}\,a + \tilde{d}\,c\end{pmatrix}$$

und die zweite Spalte

$$\widetilde{F} \circ F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \;=\; \widetilde{F}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \tilde{a}\,b + \tilde{b}\,d \\ \tilde{c}\,b + \tilde{d}\,d \end{pmatrix}$$

Die resultierende Matrix für das Kompositum $\widetilde{F} \circ F$ ist

$$\widetilde{M}\,M \;=\; \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \tilde{a}\,a + \tilde{b}\,c & \tilde{a}\,b + \tilde{b}\,d \\ \tilde{c}\,a + \tilde{d}\,c & \tilde{c}\,b + \tilde{d}\,d \end{pmatrix}$$

das sogenannte Matrizenprodukt von $\widetilde{M}$ und M!

<u>Abschliessende Frage:</u> Welche linearen Selbstabbildungen sind längentreu?

$$(*) \qquad \|M\,\vec{x}\| \;=\; \|\vec{x}\| \qquad \forall\; \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{(Isometriebedingung)}$$

Sei $\quad M \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Drei Bedingungen:

$$\sqrt{a^2 + c^2} \;=\; 1 \quad , \quad \sqrt{b^2 + d^2} \;=\; 1 \quad , \quad \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \;=\; \sqrt{2}$$

das heißt

$$a^2 \,+\, c^2 \;=\; 1 \quad , \quad b^2 \,+\, d^2 \;=\; 1 \quad , \quad 2\,(a\,b \,+\, c\,d) \;=\; 0$$

das heißt

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sind normiert auf die Länge 1; ferner $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}^{\perp}$

Zu gegebenem normierten Vektor $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ gibt es genau zwei mögliche zweite Spalten $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ nämlich $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$:

$$M \;=\; \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad \text{(Drehung)} \quad \text{oder}$$

$$M \;=\; \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{(Geradenspiegelung)}$$

$$M \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;,\quad a^2 \,+\, c^2 \;=\; b^2 \,+\, d^2 \;=\; 1 \;,\quad a\,b \,+\, c\,d \;=\; 0$$

$$\begin{aligned}
\langle M\,\vec{x}, M\,\vec{y}\rangle \;&=\; \left\langle \begin{pmatrix} a\,x_1 + b\,x_2 \\ c\,x_1 + d\,x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,y_1 + b\,y_2 \\ c\,y_1 + d\,y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \; (\underbrace{a^2 + c^2}_{=\,1})x_1y_1 \;+\; (\underbrace{b^2 + d^2}_{=\,1})x_2y_2 \;+\; (\underbrace{a\,b + c\,d}_{=\,0})(x_1y_2 + x_2y_1) \\
&= \; \langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle \;, \quad \text{für alle} \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Weitergehend als $(*)$:

$$\langle M\,\vec{x}, M\,\vec{y}\,\rangle \;=\; \langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle \qquad \forall\;\; \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$$

für die gefundenen Matrizen M.

<u>Zum Schluss:</u>
Jede Translation $t_{\vec{a}}\,,\;\; \vec{a} \in \mathbb{R}^2$ liefert eine längentreue (allerdings im jetzigen Sinne nicht lineare) Abbildung

$$\begin{aligned}
\|t_{\vec{a}}(\vec{x}) - t_{\vec{a}}(\vec{y})\| \;&=\; \|(\vec{x} + \vec{a}) - (\vec{y} + \vec{a})\| \qquad \text{(nach Definition von } t_{\vec{a}}) \\
&=\; \|\vec{x} - \vec{y}\,\| \qquad \forall\;\; \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

9. Die komplexen Zahlen

Wahl eines Ursprungs und eines Paares von Koordinatenachsen ergibt die Möglichkeit, die Punkte über die (vektorielle) Addition zu verknüpfen. Außerdem ergibt sich die Multiplikation mit den Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$. Bedeutung von $\mathbb{C}$: Diese Skalarmultiplikation ist in Wirklichkeit nur die Einschränkung auf die reelle Achse (x-Achse) einer Allgemeineren Multiplikation mit beliebigen $\vec{a}$ der Ebene! Mit der geometrischen Bedeutung einer Drehstreckung, deren Drehwinkel der Neigungswinkel von $\vec{a}$ gegen die x-Achse ist, und deren Streckungsfaktor $\|\vec{a}\|$ ist! In diesem Zusammenhang wird ein $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der ihn beschreibenden reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ identifiziert. Für den Basisvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der y-Achse wird das Zeichen j (sehr oft i) gewählt. Dann sind die Punkte der Ebene

$$z \;=\; x + jy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Wenn weiter distributiv gerechnet wird und 1 neutral bei Multiplikationen bleibt, dann ist für die Fixierung der Multiplikationen nur festzulegen $j \cdot j$. Die geometrische Interpretation erzwingt $j^2 = -1$. Es entsteht so der Körper der komplexen Zahlen. Die 9 Körperaxiome werden z.B. von $\mathbb{Q}$, von $\mathbb{R}$ erfüllt! Es gibt sogar eine zweielementiges Modell $\mathbb{F}_2 = \{O, L\}$ mit den Verknüpfungen

$$O + O \;=\; O \;=\; L + L \quad , \quad O + L \;=\; L$$

$$O \cdot O \;=\; O \;=\; O \cdot L \quad , \quad L \cdot L \;=\; 1$$

Prüfe inwieweit die 9 Körperaxiome für die Menge $M_2(\mathbb{R})$ der reellen 2×2 Matrizen gelten.

Addition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ c + c_1 & d + d_1 \end{pmatrix}$$

Dann gelten die Axiome der Addition mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ als Null.

Die Interpretation der Matrizen als lineare Abbildungen zeigt die Gültigkeit des Distributivgesetzes in $M_2(\mathbb{R})$. Die Matrizen als lineare Abbildungen lieferen das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Seien F_1, F_2, F_3 lineare Abbildungen der Ebene.

Behauptung: $\quad (F_1 \circ F_2) \circ F_3 \;=\; F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$

Das ist eine Gleichung zwischen Abbildungen!

$$(F_1 \circ F_2) \circ F_3(\vec{x}) \;=\; (F_1 \circ F_2)(F_3(\vec{x})) \;=\; F_1(F_2(F_3(\vec{x})))$$

$$F_1 \circ (F_2 \circ F_3)(\vec{x}) \;=\; F_1((F_2 \circ F_3)(\vec{x})) \;=\; F_1(F_2(F_3(\vec{x})))$$

Eins-Element in $M_2(\mathbb{R})$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Das Produkt M_1M_2 stimmt mit M_2M_1 nur manchmal überein (man sagt dann, M_1 und M_2 kommutieren).

$M \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, nur dann, wenn die Determinante $\det M \;=\; a\,d - b\,c \neq 0$ ist. Das zeigt der Multiplikationssatz für Determinanten!

$$\det(M_2M_1) \;=\; (\det M_1)\,(\det M_2) \qquad (\text{LS/RS} \;=\; \text{Linke/Rechte Seite})$$

LS: $(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) \;-\; (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2)$

RS: $(a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2)$

$\square$

Ist $\det M \;=\; a\,d - b\,c \neq 0$ dann

$$M^{-1} \;=\; \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Zusammenfassung:</u>
In $M_2(\mathbb{R})$ gelten das erste und das vierte Axiom nur bedingt, die übrigen Axiome gelten ohne Einschränkung!

Matrixdarstellung von $\mathbb{C}$

$$z \;=\; x + jy \;\longmapsto\; D(z) \;=\; \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Für die Addition gilt

$$D(z_1) + D(z_2) \;=\; D(z_1 + z_2) \qquad \forall\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Die Matrixdarstellung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1, z_2

$$(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \;=\; x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$

ist entsprechend

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$D(z_1) \cdot D(z_2) \;=\; D(z_1 \cdot z_2) \qquad \forall\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Die Bedeutung von D besteht unter anderem darin, dass sie die Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$ in $M_2(\mathbb{R})$ transportiert (und zurück).

Insbesondere gelten Assoziativität der Multiplikation und das Distributivgesetz in $\mathbb{C}$, weil sie in $M_2(\mathbb{R})$ gelten.

$$\det D(z) \;=\; x^2 + y^2 \;=\; \|z\|^2 \;=\; |z|^2$$

Die Determinante von $D(z)$ ist das Quadrat der euklidischen Norm von z, also des Betrages von $|z|$.

Der Determinanten-Multiplikationssatz:

$$|z_1\, z_2| \;=\; |z_1|\,|z_2| \qquad \forall\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Die Deutung über die euklidische Norm liefert die Dreiecksungleichung:

$$|z_1 + z_2| \;\leq\; |z_1| + |z_2|$$

Für alle $z \neq 0$ ist $D(z)$ invertierbar, damit ist z dann invertierbar mit dem Inversen

$$\frac{1}{z} \;=\; z^{-1} \;=\; \frac{1}{x^2 + x^2}\,(x - jy)$$

$$D(z) \;=\; |z|\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c^2 + s^2 = 1$$

$$\;=\; |z|\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi \in \,]-\pi, \pi[$$

Diese Form lässt die zugrundegelegte geometrische Interpretation der Multiplikation als Drehstreckung erkennen. Überdies ergibt die Vertauschbarkeit je zweier Drehmatrizen

$$\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

die Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$.

Die offene Kreisscheibe

$$B_\epsilon(a) \;=\; \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - a| < \epsilon\}$$

dient als ϵ-Umgebung für $a \in \mathbb{C}$, $(\epsilon > 0)$!

Damit lassen sich die diversen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ untersuchen, zum Beispiel auf Stetigkeit!

$$f : X \to Y$$

heißt stetig in $a \in X$ wenn für jede (noch so kleine) Umgebung V des Bildpunktes $b = f(a)$ eine Umgebung U von a existiert mit $f(U) \subset V$.

Beispiele:

(1) Die Funktionen Realteil und Imaginärteil

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & \mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ x + jy \longmapsto x & x + jy \longmapsto y \end{array}$$

sind $\mathbb{R}$-linear und stetig

$$z_0 \;=\; x_0 + jy_0$$

$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)| \;\le\; |z - z_0| \quad ; \quad |\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0)| \;\le\; |z - z_0|$$

(2) Die Konjugation (Konjugiertenbildung) in $\mathbb{C}$

$$z \;=\; x + jy \;\longmapsto\; \bar{z} \;=\; x - jy$$

liefert eine mit Addition und ebenso mit der Multiplikation vertauschbare, involutorische Selbstabbildung von $\mathbb{C}$. Sie ist insbesondere stetig.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - j(y_1 + y_2) \\
&= (x_1 - jy_1) + (x_2 - jy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)} \\
&= x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1(-y_2) - y_1 x_2) \\
&= (x_1 - jy_1)(x_2 - jy_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2
\end{aligned}$$

□

(3) Die Addition und die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ sind stetig

Zu zeigen ist in beiden Fällen: Das Resultat von Addition und Multiplikation ändert sich beliebig wenig, falls die Argumente nur hinreichend wenig verändert werden.

Beweis:

$$\begin{aligned}
|(a+b) - (a_0 + b_0)| &= |(a - a_0) + (b - b_0)| \qquad / \text{ Dreiecksungleichung} \\
&\leq |a - a_0| + |b - b_0|
\end{aligned}$$

Sei nun $M \geq |a_0| + |b_0| + 1$

$$\begin{aligned}
|ab - a_0 b_0| &= |(ab - a_0 b) + (a_0 b - a_0 b_0))| \\
&\leq |a - a_0|\,|b| + |a_0|\,|b - b_0| \\
&\leq M\,(|a - a_0| + |b - b_0|)
\end{aligned}$$

falls $|b - b_0| \leq 1$

□

<u>Bemerkung:</u>

Nach Beispiel (3) wird (durch wiederholte Anwendung) jede Polynomfunktion

$$z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$$

stetig (Koeffizienten a_k reell oder komplex).

9.1 In $\mathbb{C}$ gilt das Cauchy-Kriterium

Jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von komplexen Zahlen hat in $\mathbb{C}$ einen Limes. (Cauchy-Folge: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index N_ϵ derart, dass für alle Indizes $k, m \geq N_\epsilon$ gilt $|a_k - a_m| < \epsilon$.)

Beweis:

Die beiden reellen Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_{n\geq 0}$, $(\operatorname{Im} a_n)_{n\geq 0}$ sind mit $(a_n)_{n\geq 0}$ ebenfalls Cauchy-Folgen aber reelle, und daher nach dem reellen Cauchy-Kriterium konvergent gegen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$a_n \;=\; \operatorname{Re} a_n + j \operatorname{Im} a_n \;=\; \alpha + j\beta$$

Beispiel:

Die Exponentialreihe im Komplexen

$$\exp(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;; \qquad z \in \mathbb{C}$$

Die Partialsummen dieser Reihe bilden nach der Diskussion der Potenzreihen eine Cauchy-Folge für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Nach dem Cauchy-Kriterium ist die Partialsummenfolge konvergent, Zeichen für den Limes ist wieder $\exp(z)$.

Nach dem Satz über die Differentiation von Potenzreihen in Abschnitt 7.2 definiert diese Reihe eine Funktion $y(z)$, für die überall der Limes

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}^x}} \frac{y(z+h) - y(z)}{h} \qquad \text{existiert,}$$

die sogenannte komplexe Ableitung. Ihr Wert ist nach dem Satz der Wert der gliedweise differenzierten Reihe!

$\exp(z)$ ist daher eine in $\mathbb{C}$ „holomorphe“ Lösung der Differentialgleichung

$$(*) \quad y' \;=\; y \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(0) \;=\; 1$$

Beachte:

$$j^2 \;=\; -1 \quad ; \quad j^3 \;=\; -j \quad ; \quad j^4 \;=\; 1 \quad ; \quad \ldots\ldots$$

ergibt die Zerlegung der Restriktion von exp auf die imaginäre Achse.

$$\exp(jt) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \;+\; j\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{\exp(jt) \;=\; \cos t \;+\; j\sin t}$$

Eulersche Formel

Für die $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit gilt wieder die Produktregel und die Kettenregel!

Sei nun $f(z)$ irgendeine Lösung von $(*)$

Betrachte:

$$g(z) \;=\; \exp(-z)\, f(z)$$

$$g'(z) \;=\; \exp(-z)\,(-f(z) \;+\; f'(z)) \;=\; 0 \quad \forall\; z \in \mathbb{C}$$

Daraus folgt: g ist konstant.

Anwendungsbeispiel: $\exp(z+w) \;=\; \exp(z) \;+\; \exp(w)$

9.1.1 Satz von Moivre

Fü alle natürlichen n und alle reellen φ:

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n \;=\; \cos(n\varphi) \;+\; j\sin(n\varphi)$$

Beweis entweder aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion im Komplexen oder aus den Additionstheoremen für cos und sin!

Die Gleichung $z^n = 1$ hat daher die Lösungen

$$\zeta_n^k \;=\; \exp\left(\frac{2\pi j}{n}\,k\right) \qquad 1 \le k \le n$$

Dies sind die sogenannten n-ten Einheitswurzeln. Bemerkenswert: Aus

$$\zeta_n \;=\; \exp\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$$

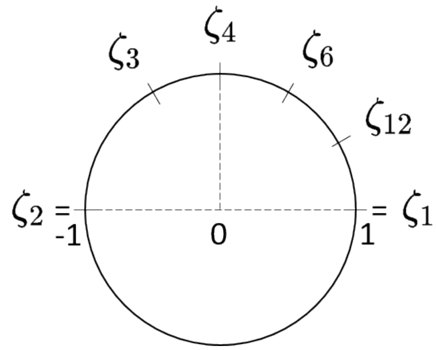
entstehen die übrigen n-ten Einheitswurzeln durch Potenzieren.

$$\zeta_2 = -1$$

$$\zeta_3 = -\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\zeta_4 = j$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Die geometrische Bedeutung der Multiplikation zeigt unmittelbar, dass jedes komplexe w ein Quadrat ist:

$$w = |w|\,\mathrm{e}^{j\psi}$$

Daher ist w das Quadrat von $|w|^{1/2}\,\mathrm{e}^{j\psi/2}$.

Daher lässt sich in $\mathbb{C}$ jede quadratische Gleichung durch quadratische Ergänzung lösen.

$$z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right) - \frac{1}{4}(p^2 - 4q)$$

9.2 Fundamentalsatz der Algebra in $\mathbb{C}$

Jedes nichtkonstante Polynom

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$$

hat in $\mathbb{C}$ wenigstens eine Nullstelle!

Folgerungen aus dem Fundamentalsatz

Die Faktorisierung der Polynome:

Jedes nichtkonstante Polynom $P(z)$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten vom Grad $n > 0$ besitzt genau eine Zerlegung

$$P(z) = a(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_p)^{r_p}$$

worin a der Leitkoeffizient von P ist, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ die verschiedenen Nullstellen in $\mathbb{C}$ von P und die Exponenten $r_1, r_2, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ mit der Summe $r_1 + r_2 + \ldots + r_p = n$.

Zusatz: Ist speziell P ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann taucht in der Faktorisierung mit jeder nicht reellen Nullstelle z_k auch deren konjugierte $\bar{z}_k$ als Nullstelle auf, ferner haben $(z - z_k)$ und $(z - \bar{z}_k)$ denselben Exponenten.

Zum **Beweis** der Folgerung:

Wiederholte Anwendung des Fundamentalsatzes liefert eine der angegebenen Faktorisierungen für P.

Die Eindeutigkeit der Faktorisierung stützt sich auf die Beobachtung, dass $\{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ nichts anderes ist als die Nullstellenmenge von P.

Für den Zusatz betrachtet man $z = x$ reell

$$P(x) \;=\; a(x - z_1)^{r_1}(x - z_2)^{r_2} \cdot \;\ldots\; \cdot (x - z_p)^{r_p}$$

Anwendung der Konjugation

$$\overline{P(x)} \;=\; P(x) \;=\; \bar{a}(x - \bar{z}_1)^{r_1}(x - \bar{z}_2)^{r_2} \cdot \;\ldots\; \cdot (x - \bar{z}_p)^{r_p}$$

Die Eindeutigkeit der Faktorisierung liefert die Behauptung!

$\square$

Zum **Beweis** des Fundamentalsatzes:

Hilfssatz 1:

Sei

$$P(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$$

ein nichtkonstantes Polynom. Ferner sei $z_1 \in \mathbb{C}$, $P(z_1) \neq 0$. Dann existieren in jeder Umgebung von z_1 Zahlen z_0 und z_2 mit $|P(z_0)| < |P(z_1)| < |P(z_2)|$.

Hilfssatz 2:

Zu jedem Polynom P über den komplexen Zahlen gibt es eine Stelle z_1 mit $|P(z_1)| \leq |P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Zusammen:

Das z_1 des zweiten Hilfssatzes kann nicht das z_1 des ersten Hilfssatzes sein, daher ist für dieses z_1 die Voraussetzung $P(z_1) \neq 0$ falsch!

$\square$

Beweis von Hilfsatz 1:

Keine Einschränkung: $z_1 = 0$. Sonst betrachte $Q(z) = P(z - z_1)$. Ferner ohne Einschränkung $P(0) = 1$. Zu betrachten ist dann ein Polynom

$$P(z) \;=\; 1 + a\, z^m (1 + R(z))$$

wo $a \neq 0$, $m > 0$ und das Restpolynom $R(z)$ bei 0 verschwindet. Insbesondere existiert ein $\varrho > 0$ mit

$$|R(z)| \;\leq\; \frac{1}{2} \qquad \text{falls} \qquad |z| \;\leq\; \varrho$$

wähle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $a \;=\; |a|\, \mathrm{e}^{j\varphi}$

$z_2 \;=\; r\, \mathrm{e}^{-j\varphi/m} \qquad r \in \,]0, \varrho]$, dann

$$\big|P(z_2)\big| \;=\; \big|1 + |a|\, r^m + |a|\, r^m R(z_2)\big|$$

und mit umgekehrter Dreiecksungleichung folgt

$$\big|P(z_2)\big| \;\geq\; 1 + |a|\, r^m - |a|\, r^m \frac{1}{2} \;>\; 1$$

$z_0 \;=\; r\, \mathrm{e}^{-j(\varphi+\pi)/m}$, dann

$$\big|P(z_0)\big| \;=\; \big|\, 1 + |a|\, (-1)\, r^m - |a|\, r^m R(z_0)\,\big|$$

und mit gewöhnlicher Dreiecksungleichung folgt

$$\Big|P(z_0)\Big| \;\geq\; 1 - |a| \cdot r^m + |a| \cdot r^m \cdot \frac{1}{2} \;>\; 1 \quad ,$$

falls zusätzlich r so klein, dass $|a|\, r^m < 1$. Das geht.

$\square$

Beweis von Hilfsatz 2:

Die (reelle) Funktion $z \longmapsto |P(z)|$ besitzt auf $\mathbb{C}$ ein absolutes Minimum. Zum Beweis für nichtkonstante P:

1) $|P(z)|$ wächst für $|z| \to \infty$ ungefähr wie der Betrag des höchsten Terms in P.

2) Jede stetige Funktion auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe hat dem Betrage nach ein Minimum. Durchführung des Beweises wird später Routine!

9.3 Partialbruchzerlegung

Für Polynome Q_0, Q_1 mit Koeffizienten in einem Körper (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc.) lässt sich im Falle $Q_1 \neq 0$ wiederholte Division mit Rest durchführen. Wegen der ständig fallenden Grade der Restgliedpolynome tritt einmal Rest $Q_{n+1} = 0$ auf.

$$\begin{array}{rcll} Q_0 & = & Q_1 \cdot q_1 + Q_2 & \deg Q_2 < \deg Q_1 \\ Q_1 & = & Q_2 \cdot q_2 + Q_3 & \deg Q_3 < \deg Q_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Q_{n-2} & = & Q_{n-1} \cdot q_{n-1} + Q_n & \deg Q_n < \deg Q_{n-1} \\ Q_{n-1} & = & Q_n \cdot q_n + 0 & \end{array}$$

$$Q_n = \text{ggT von } Q_0 \text{ und } Q_0$$

Der unmittelbar vorhergehende Rest Q_n ist (bezüglich des Grades) der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Q_0 und Q_1. Rückwärtssubstitution ergibt in jedem Falle

$$Q_n = Q_0\widetilde{Q}_0 + Q_1\widetilde{Q}_1$$

Sind speziell Q_0, Q_1 teilerfremd, dann ist Q_n konstant $\neq 0$, also

$$1 = Q_0\widetilde{Q}_0 + Q_1\widetilde{Q}_1 \qquad (*)$$

Für Brüche P/Q mit $Q = Q_0 Q_1$ ergibt das eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_0}{Q_0} + \frac{P_1}{Q_1} \qquad \text{(Multipliziere } (*) \text{ mit } P \text{ durch)}$$

Die Zähler P_0, P_1 sind noch nicht eindeutig. Der Prozess lässt sich für die Summanden wiederholen, falls der Nenner als Produkt teilerfremder Polynome faktorisiert werden kann! Resultat:

$$\frac{P}{Q} = p + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_r}{q_r}$$

wo jeder Nenner q_i eine Potenz eines Primpolynoms ist und jeweils $\deg p_i < \deg q_i$.

<u>Fundamentalsatz der Algebra sagt:</u>

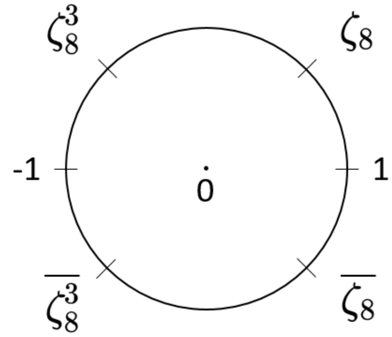
(1) Primpolynome in $\mathbb{C}$ sind: $X - c$, $c \in \mathbb{C}$

(2) Primpolynome über $\mathbb{R}$ sind: $X - a\,,\ a \in \mathbb{R}\,;\ X^2 + aX + b\,,\ (a^2 - 4b < 0)$

Übliche Form der Partialbruchzerlegung ensteht durch Entwicklung des Zählers p_i nach Potenzen des Primpolynoms in q_i.

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{x^4}{x^4+1} \qquad \zeta_8 = -\frac{1+j}{\sqrt{2}}$$



$$\begin{aligned}
(x^4+1) &= (x-\zeta_8)\,(x-\overline{\zeta_8})\,(x-\overline{\zeta_8^3})\,(x-\zeta_8^3) \\
&= (x^2-\sqrt{2}\,x+1)\,(x^2+\sqrt{2}\,x+1) \\
(x^4+1) &= \left(x-\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1+j}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1-j}{\sqrt{2}}\right) \\
&= (x^2-\sqrt{2}\,x+1)\,(x^2+\sqrt{2}\,x+1) \\
\frac{x^4}{x^4+1} &= 1-\frac{1}{x^4+1} \\
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{a_0x+a_1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{b_0x+b_1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}
\end{aligned}$$

Zählervergleich:

$$\begin{aligned}
1 = {} & \underbrace{(a_0+b_0)}_{=0}\,x^3 + \underbrace{(a_1+b_1+\sqrt{2}\,(a_0-b_0))}_{=0}\cdot x^2 \\
& + \underbrace{(a_0+b_0+\sqrt{2}\,(a_1-b_1))}_{=0}\,x + \underbrace{a_1\ +\ b_1}_{=1}
\end{aligned}$$

$$\text{Das heißt}\quad \left\{\begin{array}{lllll}
x^3: & a_0 & = & -b_0 & \\
x^1: & a_1 & = & b_1 & \\
x^0: & a_1 & = & b_1 & = \ 1/2 \\
x^2: & 1 & + & \sqrt{2}\,2\,a_0 & = \ 0
\end{array}\right\} \Rightarrow\ a_0 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right)$$

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

ISBN 978-1-951894-05-4