

HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Vierter Teil



HÖHERE MATHEMATIK

Vorlesungen

Vierter Teil

Stefan Wurm

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

Copyright © 2022 ATICE-LLC. Alle Rechte vorbehalten. Veröffentlicht in den Vereinigten Staaten von Amerika.

Erste deutschsprachige ATICE E-Book Ausgabe | ISBN 978-1-951894-08-5.

Für Informationen über die Genehmigung zur Vervielfältigung von Auszügen aus diesem Buch wenden Sie sich bitte an ATICE LLC, www.atice-llc.com.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| Vorwort | i |
| 1 Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen | 1 |
| 1.1 Der Euler-Multiplikator | 5 |
| 1.2 Autonome Systeme | 8 |
| 1.2.1 Klasse von Beispielen | 8 |
| 1.2.2 Zustandsraum eines Systems zweier homogener reeller Differentialgleichungen 1-ter Ordnung | 12 |
| 1.3 Zur Stabilität von Gleichgewichtslagen | 16 |
| 2 Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen | 21 |
| 2.1 Die allgemeine lineare Randwertaufgabe | 22 |
| 2.1.1 Eindeutigkeitskriterium | 23 |
| 2.1.2 Die Greensche Funktion für das allgemeine halbhomogene (lineare) Randwertproblem | 26 |
| 2.2 Schwingungen einer Saite | 29 |
| 2.2.1 Lösungsansatz von d'Alembert | 29 |
| 2.2.2 Lösungsmethode von Fourier | 31 |
| 3 Inverse und Zahlenkugel | 33 |
| 3.1 Das Doppelverhältnis | 36 |
| 3.1.1 Die rationalen Funktionen als Abbildung der Zahlenkugel \mathbb{P} in sich | 38 |
| 3.2 Eine Klasse \mathcal{H} von rationalen Funktionen | 39 |
| 3.2.1 Elementare Eigenschaften von \mathcal{H} | 39 |
| 3.2.2 Die Partialbruchzerlegung der Funktion $h(z) \in \mathcal{H}$ | 40 |
| 3.2.3 Der Divisionsalgorithmus für die Funktionen in \mathcal{H} | 41 |
| 3.2.4 Anwendung: Das Stabilitätskriterium | 42 |

| | |
|---|-----------|
| 4 Holomorphe oder analytische Funktionen | 45 |
| 4.1 Geometrische Deutung der Holomorphie | 46 |
| 4.2 Holomorphie und Cauchy-Riemann Differentialgleichungen | 47 |
| 4.2.1 Harmonische Funktionen | 48 |
| 4.2.2 Die Verpfanzung harmonischer Funktionen | 50 |
| 4.3 Potenzreihen, das Grundbeispiel holomorpher Funktionen | 52 |
| 4.3.1 Satz über die Holomorphie von Potenzreihen | 53 |
| 5 Integration komplexwertiger Funktionen | 55 |
| 5.1 Integral und Stammfunktion | 56 |
| 5.2 Die Integralformel von Cauchy | 58 |
| 5.2.1 Satz von der Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen | 58 |
| 5.2.2 Satz von Liouville | 60 |
| 5.3 Identitätssatz für analytische Funktionen | 61 |
| 5.3.1 Satz über die Nullstellen analytischer Funktionen | 61 |
| 5.3.2 Spezialisierung der Cauchy-Integralformel für $z = z_0$ | 62 |
| 5.3.3 Prinzip vom Maximum und Minimum für analytische Funktionen | 63 |
| 5.4 Die Poissonsche Integralformel | 65 |
| 5.4.1 Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe für eine Kreisscheibe | 66 |
| 6 Ausbau der Theorie analytischer Funktionen | 69 |
| 6.1 Der holomorphe Logarithmus | 69 |
| 6.2 Die Umlaufzahl | 72 |
| 6.2.1 Allgemeine Version der Cauchy Integralformel | 73 |
| 6.3 Allgemeine Version des Integralsatzes von Cauchy | 75 |
| 6.3.1 Existenz globaler Stammfunktionen | 76 |
| 6.3.2 Isolierte Singularitäten | 77 |
| 6.3.3 Eine Residuenformel | 79 |
| 6.3.4 Logarithmische Ableitungen | 80 |
| 6.4 Residuensatz | 81 |
| 6.4.1 Die Klassifizierung isolierter Singularitäten | 82 |
| 6.4.2 Das Null- und Polstellen zählende Integral | 84 |
| 6.4.3 Der Satz von Ronché | 84 |
| 7 Anwendungen des Residuensatzes | 87 |
| 7.1 Anwendungen I | 87 |
| 7.2 Anwendungen II | 90 |

| | |
|-------------------------------|----|
| 7.3 Anwendungen III | 94 |
|-------------------------------|----|

Vorwort

An deutschsprachigen Hochschulen gehören Vorlesungen zu Höherer Mathematik zum festen Bestandteil der Ausbildung in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Diese Vorlesungen zielen darauf ab den Studierenden die mathematischen Grundlagen für ihre jeweiligen Fachgebiete zu vermitteln, typischerweise in den ersten vier Semestern eines Studiengangs. So war es auch bei mir als ich zu Beginn meines Physikstudiums vor gut vierzig Jahren zum ersten Mal den Hörsaal betrat in welchem Prof. Dr. Armin Leutbecher die Vorlesung Höhere Mathematik I hielt. Es ist mir klar, dass sich nicht alle gleichermaßen für Mathematik begeistern können oder wollen. Aber ich vertraue darauf, dass jene die diese Zeilen jetzt lesen es schon richtig verstehen werden, wenn ich hier bekenne, dass diese Vorlesungen mich beglückt haben. Beglückt in dem Sinne, dass ich mich damals auf jede einzelne dieser Vorlesungen im Voraus freute. Das hatte sicher nicht ausschließlich mit dem Inhalt der Vorlesungen zu tun, sondern mindestens ebenso mit der Art und Weise wie dieser von Prof. Leutbecher vermittelt wurde. Natürlich erwartet man von einem Mathematiker Klarheit. Aber jene Klarheit, mit der professionelle Mathematiker in aller Regel ihre Diskussionen führen, überträgt sich nicht notwendigerweise darauf, wie ein Mathematiker dann eventuell sein Wissen Studierenden vermittelt. Prof. Leutbecher's Klarheit und Stil des Vortrags machten seine Höhere Mathematik Vorlesungen zu einem intellektuellen Vergnügen. Zudem hatte ich das Glück, dass die Übungen zu Prof. Leutbecher's Vorlesungen von Dr. Peter Vachenauer betreut wurden. Anfang der 1990er erschien die erste Ausgabe eines zweibändigen Lehrbuchs zu Höherer Mathematik dessen Koautor Dr. Vachenauer ist. Die exemplarische Methodik und Sorgfalt, mit welcher der Stoff mit den Lernenden in Dr. Vachnauers Übungen zu meiner Zeit an der TUM vertieft wurde, findet sich in diesem Lehrbuch wieder.

Vor etwas mehr wie einem Jahr stolperte ich beim Aufräumen über meine Mitschrift der Höhere Mathematik Vorlesungen aus den Jahren 1981-1983 und die entsprechenden Übungen. Zuerst war ich verwundert, dass diese gut vierzig Jahre alten Unterlagen bei diversen Umzügen, auch zwischen Kontinenten, nicht verloren gingen. Neugierig begann ich in meinen Vorlesungsaufzeichnungen zu blättern und unvermittelt beschlich mich dabei wieder die gleiche Freude wie ich sie verspürte als ich damals im Hörsaal saß und gebannt dem Vortrag von Prof. Leutbecher zuhörte. Wiewohl diese Notizen, meine Mitschrift von Prof. Leutbecher's Vorlesungen, kein Lehrbuch ersetzen können, vermitteln

sie wesentliche Inhalte Höherer Mathematik mit einer Lebendigkeit, die sie nach meinem Dafürhalten zu einem Lesevergnügen für Studierende oder andere ernstlich an Mathematik Interessierte machen sollten. Allzu oft sind solche Notizen mit Fehlern behaftet und das war auch hier nicht anders. Nach mehrmaliger Durchsicht und Korrektur meiner Aufzeichnungen ist hoffentlich die große Mehrzahl davon bereinigt. Klarheit und Stil von Prof. Leutbecher's Vortrag zu bewahren, so wie ich diese in meiner Mitschrift vor mehr als vierzig Jahren einfing, darauf legte ich bei der Überarbeitung meiner Notizen größten Wert. Inwieweit dies gelungen ist mag der Leser beurteilen. Der vorliegende Band, **HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Vierter Teil**, beinhaltet den Stoff der Vorlesung Höhere Mathematik IV wie sie im Sommersemester 1983 an der TUM von Prof. Leutbecher gehalten wurde.

Stefan Wurm

Albany, New York im Mai 2022.

1. Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

Auf dem Intervall I sei f reell und stetig und auf dem Intervall J sei g reell und stetig.
Damit erklärt

$$y' = f(x)g(y) \quad (1)$$

die Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Ansatz: $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$

Integration beider Seiten nach x ergibt $G(y) = F(x)$. Auflösen nach y .

Satz 1:

Angenommen, g sei stetig und nullstellenfrei auf J . Zu Anfangsbedingungen $(x_0, y_0) \in D = I \times J$ betrachte

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad G(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} \quad x \in I, \quad y \in J$$

Sei I' eine Teilintervall von I mit $F(I') \subset G(J)$, $x_0 \in I'$. Dann existiert genau eine Lösung φ auf I' mit $\varphi(x_0) = y_0$ und dafür ist

$$G(\varphi(x)) = F(x)$$

Beweis von Satz 1:

$$1) \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi \quad G(y) = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

Da $g(\eta)$ auf J festes Vorzeichen hat, wird $G(y)$ strikt monoton mit differenzierbarer Umkehrfunktion

$$H : G(J) \longrightarrow J$$

mit Ableitung: $H'(w) = \frac{1}{G'(H(w))}$

- 2) Sei $I' \subset I$ mit $x_0 \in I'$, $F(I') \subset G(J)$. Ferner $\varphi : I' \mapsto \mathbb{R}$ Lösung von Differentigleichung (1) mit $\varphi(x_0) = y_0$. Dann

$$\frac{\varphi'(\xi)}{g(\varphi(\xi))} = f(\xi)$$

Integration über ξ von x_0 bis x

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\xi)}{g(\varphi(\xi))} d\xi \quad \text{Substitution: } \eta = \varphi(\xi) \\ &= \int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = G(\varphi(x)) - G(y_0) \end{aligned}$$

Nach Definition von $G(y)$ ist $G(y_0) = 0$. Das heißt

$$G(\varphi(x)) = F(x)$$

Anwende H

$$\varphi(x) = HF(x) \quad (*)$$

hier wird $F(I') \subset G(J)$ benötigt. Damit einerseits Eindeutigkeit bewiesen andererseits definiert $(*)$ eine differenzierbare Funktion φ mit Wert

$$\varphi(x_0) = H(F(x_0)) = H(0) = y_0$$

und mit der Ableitung

$$\varphi'(x) = H'(F(x))F'(x) = \frac{1}{G'(H(F(x)))} f(x) = g(\varphi(x))f(x)$$

□

Bemerkungen:

- (1) In der Formel $G(\varphi(x)) = F(x)$ ist φ implizit gegeben.
- (2) Die Eindeutigkeit konnte hier ohne die Lipschitzbedingung bewiesen werden.

Beispiel:

$$(1) y' = y^2, \quad f(x) = 1 \quad \forall x \in I = \mathbb{R}$$

$$g(y) = y^2 \quad J =]0, \infty[\quad \text{oder} \quad J =]-\infty, 0[$$

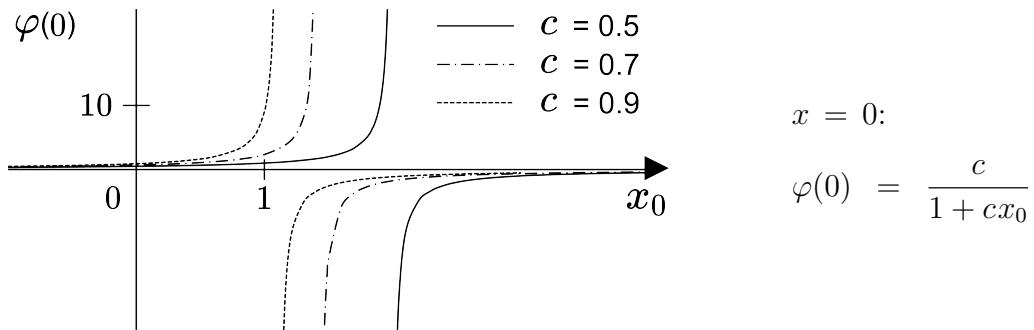
Die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ fällt nicht unter Satz 1. Trotzdem existiert genau eine Lösung dazu mit $\varphi(0) = 0$, nämlich die Nullfunktion. Ist $y_0 = c \neq 0$, dann

$$G(y) = \int_c^y \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$$

$$G(J) = \begin{cases} \left] -\infty, \frac{1}{c} \right[, & \text{falls } c > 0 \\ \left] \frac{1}{c}, +\infty \right[, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = G(\varphi(x)) = x - x_0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\frac{1}{c} - (x - x_0)} = \frac{c}{1 - c(x - x_0)}$$



$$y' = f(x/y) \quad (2)$$

(sogenannte homogene Differentialgleichung)

Nicht zu verwechseln mit homogener linearer Differentialgleichung.

f ist erklärt und stetig auf einem Intervall J

$$J =]0, \infty[\quad \text{oder} \quad J =]-\infty, 0[$$

$$D = \{(x, y); x > 0, \frac{x}{y} \in J\} \quad \text{oder} \quad D = \{(x, y); x < 0, \frac{x}{y} \in J\}$$

Satz 2:

Sei f stetig auf J und $(x_0, y_0) \in D$. Die auf dem Intervall I erklärte und differenzierbare Funktion φ ist Lösung der Differentialgleichung (2) mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ genau dann, wenn dort die Funktion

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

Lösung der Differentialgleichung

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} \quad (3)$$

$$\text{mit } \psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$$

Bemerkung:

- (3) Satz 2 führt die homogene Differentialgleichung (2) zurück auf eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Beweisskizze:

Sei φ Lösung von (2) mit $\varphi(x_0) = y_0$.

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

ist differenzierbar auf I mit Ableitung

$$\psi'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{xf\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{f(\psi(x)) - \psi(x)}{x}$$

Analog die umgekehrte Richtung.

□

Beispiele:

$$(2) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x} \quad ; \quad f(t) = t + t^2 \quad \text{erklärt auf } J = \mathbb{R}$$

$$z' = \frac{z^2}{x} \quad (3) \quad \text{getrennte Variablen}$$

Ansatz $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(z) = z^2$. Damit

$$G(z) = \int_{z_0}^z \frac{dw}{w^2} = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z}$$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{t} = \ln x_0 - \ln x$$

Wegen $G(\psi(x)) = F(x)$ (Satz 1)

$$\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\psi(x)} = \ln \frac{x}{x_0}$$

$$(3) \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} \quad x < 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad x > 0$$

$$D_{\pm} = \{(x, y); \operatorname{sgn} x = \pm 1, y/x \in]-1, 1[\}$$

Ansatz zur Lösung: $y = xz$

$$y' = xz' + z = z + \sqrt{1 - z^2}$$

$$z' = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x} \quad \text{getrennte Variablen}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{x} \quad \text{Integration liefert}$$

$$\arcsin(z) - \arcsin(z_0) = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|$$

$$\arcsin(z) = \ln |x| + \text{const}$$

$$z = \sin(\ln |x| + \text{const})$$

$$y(x) = x \sin(\ln |x| + \text{const})$$

Lösung für $y = \pm x$ fehlt (mit Standardmethode nicht erfasst).

1.1 Der Euler-Multiplikator

Erinnerung an die Beschreibung der Niveau-Linien einer stetig differenzierbaren Funktion $U(x, y)$ durch implizite Funktionen, das heißt Kurven $U(x, y) = c$.

Ist $U(x_0, y_0) = c$ und $\partial U / \partial y \neq 0$, dann gibt es eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion $\psi(x)$ mit

$$\psi(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad U(x, \psi(x)) = c.$$

Sie ist (falls stetig) sogar differenzierbar mit Ableitung

$$\psi'(x) = - \frac{\partial U}{\partial x} \Big/ \frac{\partial U}{\partial y}$$

(Vergleiche Satz über implizite Funktionen.¹)

Ganz analog existiert, falls $\partial U / \partial x \neq 0$, eine Funktion $\varphi(y)$ mit $\varphi(y_0) = x_0$ und $U(\varphi(y), y) = c$. Wieder ist φ (falls stetig) sogar differenzierbar mit Ableitung

¹Siehe Kapitel 9, Abschnitt 1 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Zweiter Teil.

$$\varphi'(y) = -\frac{\partial U}{\partial y} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x}$$

Beide Funktionen sind Lösung der Differentialgleichung

| | |
|----------------------------------|---|
| $Adx + Bdy = 0 \quad (\text{E})$ | mit $A = \frac{\partial U}{\partial x}$, $B = \frac{\partial U}{\partial y}$ |
|----------------------------------|---|

Die Frage, wann das Vektorfeld $(A(x, y), B(x, y))$ Gradient einer skalarwertigen Funktion U ist, wird lokal beantwortet im Integrabilitätskriterium.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Ist das der Fall, so heißt $Adx + Bdy = 0$ „exakt“. Ist (E) nicht exakt, so versucht man mit einer nullstellenfreien Funktion $\mu(x, y)$ zu erreichen, dass $\mu A, \mu B$ exakt wird.

Das Integrabilitätskriterium:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu A) = \frac{\partial \mu}{\partial y} A + \mu \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu B) = \frac{\partial \mu}{\partial x} B + \mu \frac{\partial B}{\partial x}$$

μ wird also ein Euler-Multiplikator (integrierender Faktor) genau dann, wenn gilt

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \mu = B \frac{\partial \mu}{\partial x} - A \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

Einfache Fälle: Existenz eines nur von x abhängigen Multiplikators, falls

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{B} \quad \text{unabhängig von } y$$

Beispiele:

$$(4) \underbrace{(a(x)y + b(x))}_{A} dx - \underbrace{dy}_{-1 = B} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = a(x)$$

Differentialgleichung für den nur von x abhängigen Multiplikator

$$\mu'(x) = \frac{\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}}{B} \mu = -a(x)\mu(x)$$

also

$$\mu(x) = \exp \left(- \int_{x_0}^x a(t) dt \right)$$

(5) Die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\underbrace{f(x) dx}_{A} - \underbrace{\frac{dy}{g(y)}}_{B} = 0 \quad \text{erfüllt das Integrabilitätskriterium} \Rightarrow \text{exakt.}$$

$$(6) \underbrace{(2x^2y + 2xy^3 + y)}_{A} dx + \underbrace{(3y^2 + x)}_{B} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x^2 + 6xy^2 + 1 ; \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 1 \quad \text{nicht exakt}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{B} = \frac{2x^2 + 6xy^2}{3y^2 + x} = 2x$$

Daher existiert ein nur von x abhängiger Multiplikator μ mit

$$\mu'(x) = 2x\mu(x) ; \quad \mu(x) = e^{x^2}$$

Gesucht die skalarwertige Funktion U mit Gradient $\mu A, \mu B$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (2x^2y + 2xy^3 + y)e^{x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = (3y^2 + x)e^{x^2}$$

Integration der zweiten Gleichung

$$U(x, y) = (y^3 + xy)e^{x^2} + V(x)$$

Einsetzen in die erste Gleichung

$$\left(\underbrace{y + (y^3 + xy)2x}_{2x^2y + 2xy^3 + y} \right) e^{x^2} + V'(x) = (2x^2y + 2xy^3 + y)e^{x^2}$$

Daher liefert $V(x)$ ein U ,

$$U(x, y) = (y^3 + xy)e^{x^2}$$

Resultat: Die Niveaulinien $U(x, y) = \text{const}$ sind Lösungen von $Adx + Bdy = 0$ (implizit).

Ist allgemein das stetige Vektorfeld A, B proportional zu einem Gradienten einer stetig differenzierbaren Potentialfunktion $U(x, y)$

$$\operatorname{grad} U(x, y) = \mu(A, B)$$

mit stetigem nullstellenfreien $\mu(x, y)$ und ist $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine parametrisierte Niveaulinie von $U(x, y)$, also $U(\varphi(t), \psi(t)) = \text{const}$, dann liefert die Kettenregel (für differenzierbare φ, ψ)

$$U(\varphi(t), \psi(t)) \cdot (\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)) = 0$$

Daher

$$A(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) + B(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) = 0$$

also

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad \text{löst} \quad A\dot{x} + B\dot{y} = 0$$

1.2 Autonome Systeme

werden genannt Systeme

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (\text{A}), \quad \text{vektoriell: } \dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$$

in denen die unabhängige Variable t (oft die Zeit) nicht explizit auftaucht.

1.2.1 Klasse von Beispielen

Die linearen homogenen Systeme mit konstanten Koeffizienten! Ist in \vec{y}_0 nicht gleichzeitig $f_1(\vec{y}_0) = f_2(\vec{y}_0) = 0$ dann ist bei \vec{y}_0 wenigstens eine der Koordinatenfunktionen $y_i(t)$ umkehrbar, die Zeit kann dann lokal als Funktion von y_1 (beziehungsweise von y_2) geschrieben werden, die Zeit lässt sich aus (A) eliminieren:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2(y_1, y_2)}{f_1(y_1, y_2)} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_1(y_1, y_2)}{f_2(y_1, y_2)}$$

Zusammen:

$$f_2(y_1, y_2)dy_1 - f_1(y_1, y_2)dy_2 = 0$$

Bemerkung:

- (4) Ist $\vec{\varphi}(t)$ in einer Umgebung von t_0 erklärt und Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$$

dann wird

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t - t_0)$$

eine in einer Nullumgebung (der Zeitachse) erklärte Lösung. Normierungsmöglichkeit.

In den Ausnahmepunkten y_1, y_2 mit $f_1(y_1, y_2) = 0, f_2(y_1, y_2) = 0$ sind Ruhelagen des Systems, das heißt die konstanten Funktionen $y_1(t) = y_1, y_2(t) = y_2$ lösen die Differentialgleichung.

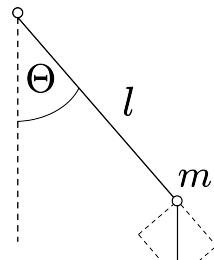
Beispiel:

- (1) Das mathematische Pendel (ohne Reibung)

Pendelarm der Länge l (masselos)

$$\ddot{\Theta} = -\alpha^2 \sin \Theta \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta} = \alpha^2 \cos \Theta + c$$



Ansatz: $y_1 = \Theta; y_2 = \dot{\Theta}$. (y_1, y_2) -Ebene heißt „Phasenraum“ oder Zustandsraum.

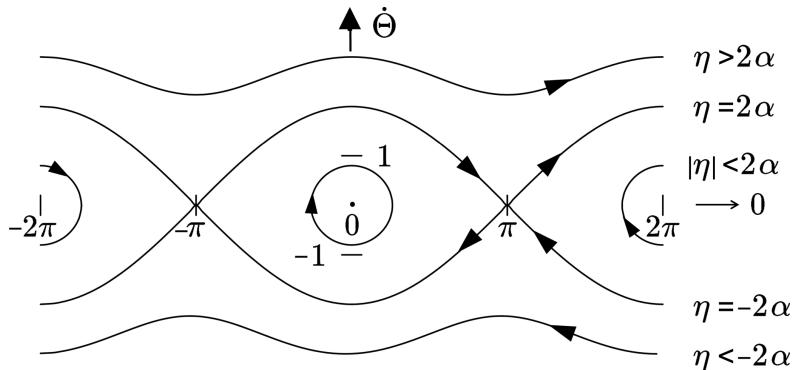
Differentialgleichung der Phasenkurven ist

$$\dot{\Theta} = \pm \sqrt{2c + 2\alpha^2 \cos \Theta} \quad ; \quad \cos \Theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

$$\dot{\Theta} = \pm \sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

η = Geschwindigkeit von Θ im Nulldurchgang.

Ruhelagen: $\Theta = \pi m \quad ; \quad \dot{\Theta} = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$



Bei $2\alpha = \pm\eta$ Separatrix: $\dot{\Theta} = \pm 2\alpha \cos \frac{\Theta}{2}$

Wenn nicht $\Theta \equiv 0$ und $\Theta = \pi m$ mit ungeradem m ist (instabile Ruhelage) und $\Theta(t)$ eine Lösung der Pendelgleichung ist, dann wird Θ durch die Nulllage gehen. Normierung $t_0 = 0$, $\Theta(t_0) = \Theta(0) = 0$.

Integration der Pendelgleichung nach der Zeit

Fall 1: $\eta > 2\alpha$ (Umlaufendes Pendel)

Fall 2: $\eta = 2\alpha$ (Bewegung auf der Separatrix)

Fall 3: $0 < \eta < 2\alpha$ (Schwindgendes Pendel)

$$\underline{\text{Fall 1: }} \dot{\Theta} = \pm \sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\int_0^{\Theta(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = t$$

$$\frac{T}{2} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad T = \text{Umlaufzeit}$$

$$\Theta(t + T) = \Theta(t) + 2\pi$$

$$\underline{\text{Fall 2: }} \dot{\Theta} = 2\alpha \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

$$\frac{1}{2\alpha} = \int_0^{\Theta(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = t \quad \text{Substitution: } s = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad ds = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

$$2\alpha t = 2 \int_0^{\sin(\Theta(t)/2)} \frac{ds}{1 - s^2} = \ln \frac{1+s}{1-s} \Big|_0^{\sin(\Theta(t)/2)}$$

$$e^{2\alpha t} = \frac{1 + \sin(\Theta(t)/2)}{1 - \sin(\Theta(t)/2)} \quad ; \quad \sin\left(\frac{\Theta(t)}{2}\right) = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}} = \tanh(\alpha t)$$

$$\Theta(t) = \arcsin(\tanh(\alpha t))$$

Insbesondere für alle Zeiten t : $-\pi < \Theta(t) < \pi$

Fall 3: $0 < \eta < 2\alpha$

$$\delta := 2 \arcsin(\eta/2\alpha) \quad , \quad \frac{T}{4} := \int_0^\delta \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

$$\int_0^{\Theta(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = t \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

Sinnvolle Fortsetzung: $\Theta(t + T/2) = -\Theta(t)$

T ist die Schwingungsdauer des schwingenden Pendels.

Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen von Jacobi ($0 \leq k < 1$)

Vollständiges elliptisches Integral erster Gattung:

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad , \quad y = \operatorname{sn}(x, k) \quad , \quad -K \leq x < K$$

sn , der sogenannte *sinus amplitudinis*, ist die elliptische Sinus-Funktion.

$$\operatorname{sn}(x + 2K, k) = \operatorname{sn}(x, k) \quad , \quad \text{periodisch mit Periode } 4K$$

$$\operatorname{sn}(x, 0) = \sin x \quad ; \quad \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{sn}(x, k) = \tanh x$$

$\operatorname{sn}(x, k)$ ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y'^2 = (1+y^2)(1-k^2y^2)$$

mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$

Beispiel:

$$(2) \text{ Fall 3: } 0 < \eta < 2\alpha \quad ; \quad k = \frac{1}{2\alpha} \quad ; \quad \delta = 2 \arcsin(\eta/2\alpha)$$

$$T = \int_0^\delta \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad \text{Substitution: } s = \frac{2\alpha}{\eta} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{4}{\alpha} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} > \frac{4}{\alpha} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{2\pi}{\alpha}$$

1.2.2 Zustandsraum eines Systems zweier homogener reeller Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad A \in M_2(\mathbb{R})}$$

Die reelle Normalform $S^{-1}AS$ ist in der Ähnlichkeitsklasse von A . Das charakteristische Polynom ist nur abhängig von der Ähnlichkeitsklasse

$$P_A(x) = P_{S^{-1}AS}(x)$$

Allgemein für n statt 2

$$P_A(x) = \det(1_n X - A) = \det S^{-1} \det(1_n X - A) \det S$$

Produktsatz für Determinaten²

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det(S^{-1}(1_n X - A)S) \\ &= \det(1_n X - S^{-1}AS) = P_{S^{-1}AS}(x) \end{aligned}$$

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird

$$P_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$$

Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc \quad \text{Diskriminante}$$

Drei Typen der Normalform

- I.** A reell diagonalisierbar wenn $\Delta > 0$ oder $\Delta = 0$ und $\text{rg}(A - \lambda 1_n) = 0$.
- II.** A hat doppelten reellen Eigenwert, ist nicht diagonalisierbar, das heißt $\Delta = 0$ und $\text{rg}(A - \lambda 1_n) = 1$.
- III.** A besitzt ein Paar nicht reeller konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \mu \pm j\omega$ ($\omega > 0$), falls $\Delta < 0$.

Die Normalform $S^{-1}AS$ wird in diesen Fällen

²Siehe Kapitel 5, Abschnitt 2 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Dritter Teil.

$$\text{I. } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{II. } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{III. } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix} \quad \mu \text{ und } \omega \text{ reell}$$

Herstellung der reellen Normalform im Fall **III**

$$0 > \Delta = (a-d)^2 + 4bc \Rightarrow bc \neq 0$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ \sqrt{|\Delta|} & a-d \end{pmatrix} \quad \text{liefert}$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}$$

Das Phasendiagramm der Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Neue Koordinaten im Zustandsraum:

$$\dot{\vec{x}} = S\dot{\vec{y}} ; \quad \vec{x} = S\vec{y} ; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

also

$$S\dot{\vec{y}} = AS\vec{y} ; \quad \dot{\vec{y}} = S^{-1}AS\vec{y}$$

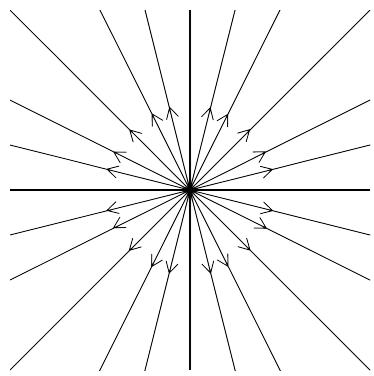
Fall I:

$$\begin{array}{lll} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 & \text{Abkürzung} & x = y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 & & y = y_2 \end{array}$$

Die Differentialgleichung der Phasenkurven

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{y}{x} \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

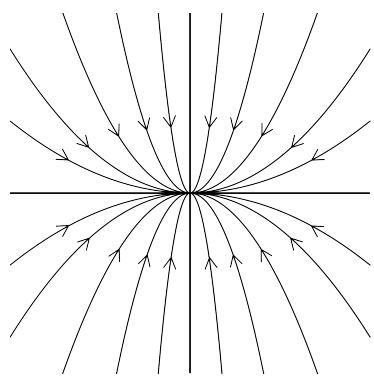
Gleichung der Phasenkurven: $y = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$



$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

(der Fall wenn $\Delta = 0$ und $\text{rg}(A - \lambda 1_n) = 0$)

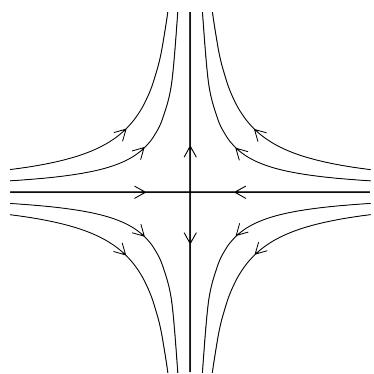
Quellpunkt, falls $\lambda_1 > 0$ Knoten 1-ter Art.



$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2 > 0$$

$$\lambda_1 < 0$$

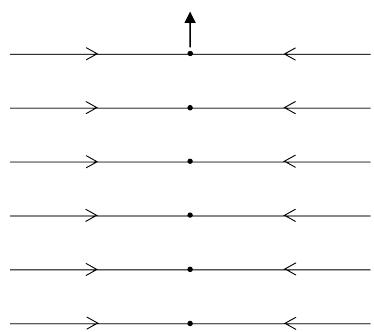
Knoten 2-ter Art, stabil!



$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

Sattelpunkt, instabil.



$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

Sonderfall, schwach instabil.

Bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel für die Eigenwerte ändern sich die Phasenkurven nicht. Die Durchlaufsrichtung ($t \rightarrow \infty$) wird überall umgekehrt.

Fall II:

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = \lambda y_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 + \lambda y_2 \end{array} \quad \text{Abkürzung} \quad \begin{array}{l} x = y_1 \\ y = y_2 \end{array}$$

Die Differentialgleichung der Phasenkurven

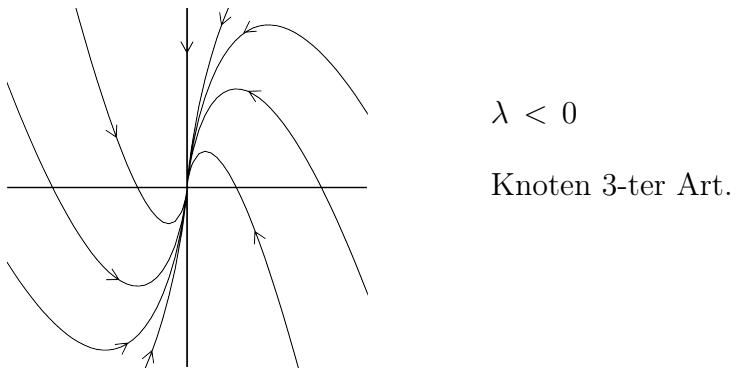
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} + \frac{y}{x} \quad \text{Homogene Differentialgleichung}$$

Ansatz: $y = xz$

$$\begin{aligned} y' &= z + xz' = \frac{1}{\lambda} + z \\ z' &= \frac{1}{\lambda x} ; \quad z = \ln |\lambda x| + C \end{aligned}$$

Gleichung der Phasenkurven

$$y = x \ln |\lambda x| + Cx$$

Fall III:

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = \mu y_1 + \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega y_1 + \mu y_2 \end{array} \quad \text{Abkürzung} \quad \begin{array}{l} x = y_1 \\ y = y_2 \end{array}$$

Die Differentialgleichung der Phasenkurven

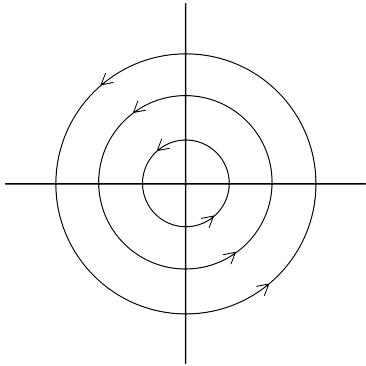
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega x - \mu y}{\mu x + \omega y}$$

Ansatz: Parametrisierung

$$\left. \begin{array}{l} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{array}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung der Phasenkurven und Vergleich

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-\frac{\mu}{\omega} \sin \varphi + \cos \varphi}{-\frac{\mu}{\omega} \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{\frac{r'}{r} \sin \varphi + \cos \varphi}{\frac{r'}{r} \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{x'}{y'} \\ \Rightarrow \frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} &= -\frac{\mu}{\omega} \quad ; \quad r(\varphi) = C \exp\left(-\frac{\omega}{\mu}\varphi\right)\end{aligned}$$



$$\mu = 0$$

Zentrum, Wirbel, schwach stabil.

1.3 Zur Stabilität von Gleichgewichtslagen

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) \quad (\text{A}) \quad ; \quad \vec{f} \text{ stetig differenzierbar}$$

Definitionen (zur Stabilität):

- (i) $\vec{\varphi}$ sei eine (auf $[0, \infty[$ erklärte) Lösungsfunktion von (A). $\vec{\varphi}$ stabil (im Sinne von Ljapunow) falls ein $\delta_0 > 0$ existiert derart, dass erstens jede weitere Lösung $\vec{\psi}$ von (A) mit

$$\|\vec{\varphi}(0) - \vec{\psi}(0)\| \leq \delta_0$$

auf ganz $[0, \infty[$ als Lösung fortgesetzt werden kann und zweitens, dass zu jedem $\epsilon > 0$ eine Schranke $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert derart, dass für jede (auf ganz $[0, \infty[$) fortgesetzte Lösung $\vec{\psi}$ von (A) mit

$$\|\vec{\varphi}(0) - \vec{\psi}(0)\| \leq \delta$$

für alle zukünftigen Zeiten $t \geq 0$ gilt

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| \leq \epsilon$$

- (ii) Ist $\vec{\varphi}$ auf $[0, \infty[$ eine stabile Lösung, so heißt $\vec{\varphi}$ asymptotisch stabil falls für alle auf $[0, \infty[$ fortgesetzten Lösungen $\vec{\psi}$ von (A) mit

$$\|\vec{\varphi}(0) - \vec{\psi}(0)\| \leq \delta \quad \text{gilt} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| = 0$$

Hauptbeispiel: Die linearen autonomen Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} \quad (\text{H}) \quad ; \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

Ruhelagen (Gleichgewichte) $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{y}_0 = \vec{0}$ (für invertierbares A nur $\vec{y}_0 = \vec{0}$).

Haben alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A negativen Realteil, dann existiert $\beta > 0$ mit³

$$\operatorname{Re} \lambda < -\beta \quad \forall \lambda$$

Daher

$$\|\mathrm{e}^{At}\| \leq \gamma \mathrm{e}^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0$$

falls $\gamma > 0$ und groß genug. Dann wird für jede Lösung von (H)

$$\vec{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{At} \vec{c}$$

also

$$\|\vec{\varphi}(t)\|_{\mathrm{e}} = \|\mathrm{e}^{At} \vec{c}\|_{\mathrm{e}} \leq \|\mathrm{e}^{At}\|_{\mathrm{e}} \|\vec{c}\|_{\mathrm{e}} \leq \gamma \|\vec{c}\|_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-\beta t}$$

Resultat: Im Fall $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A ist die Nulllösung $\vec{0}$ von A asymptotisch stabil.

Existiert dagegen ein Eigenwert λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$, dann ist die Nulllösung instabil.

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{b} \quad (\text{L}):$$

ist nur dann autonom, falls die Inhomogenität \vec{b} zeitunabhängig, also konstant ist.

Ruhelagen: \vec{y}_0 mit $A\vec{y}_0 + \vec{b} = \vec{0}$

Ist A invertierbar, so existiert genau eine Ruhelage, nämlich $\vec{y}_0 = -A^{-1}\vec{b}$.

Weil die Differenz je zweier Lösungen von (L) eine Lösung von (H) ist, übertragen sich die Stabilitätsfragen bezüglich der Ruhelage.

Bemerkung über die Stabilität der übrigen Lösungen von (L)

- (5) Die Differenz $\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)$ zweier Lösungen von (L) ist Lösung des homogenen Systems, also

$$\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t) = \mathrm{e}^{At}(\vec{\varphi}(0) - \vec{\psi}(0))$$

Abschätzung der Norm

³Vergleiche mit Kapitel 7, Abschnitt 8 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Dritter Teil.

$$\left\| \vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t) \right\|_e \leq \| e^{At} \|_e \left\| \vec{\varphi}(0) - \vec{\psi}(0) \right\|_e$$

Ist also $\| e^{At} \|_e$ auf $[0, \infty[$ beschränkt, so ist jede Lösung von (L) stabil.

Für das allgemeine autonome System

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) \quad (\text{A}) \quad ; \quad \vec{f} \text{ stetig differenzierbar}$$

werden Ruhelagen \vec{y}_0 mit $\vec{f}(\vec{y}_0) = \vec{0}$ untersucht auf Stabilität durch Linearisierung.

Weil \vec{f} stetig differenzierbar, wird für Nullstellen \vec{y}_0 von \vec{f}

$$\vec{f}(\vec{y}) = A(\vec{y} - \vec{y}_0) + \vec{g}(\vec{y}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{y}_0} \frac{\vec{g}(\vec{y})}{\|\vec{y} - \vec{y}_0\|} = 0$$

Ohne Einschränkung $\vec{y}_0 = \vec{0}$ (sonst $\vec{z} = \vec{y} - \vec{y}_0$).

Stabilitätssatz:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) \quad (\text{A})$$

mit stetig differenzierbarem \vec{f} sei ein autonomes System mit der Gleichgewichtslage $\vec{y}_0 = \vec{0}$. Ferner sei A die Jacobi-Matrix von \vec{f} im Punkt $\vec{y} = \vec{y}_0$. Dann ist die Ruhelage $\vec{y}_0 = \vec{0}$ asymptotisch stabil, falls sämtliche Eigenwerte λ von A negativen Realteil besitzen. Hat aber ein Eigenwert λ Realteil > 0 , so ist die Ruhelage instabil.

Beweisskizze für den ersten Teil:

Es sei $\beta > 0$ mit

$$\| e^{At} \| \leq \gamma e^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0 \quad (*)$$

nach Voraussetzung über A . Falls $\|\vec{y}\| \leq \delta$ folgt aus der Differenzierbarkeit von \vec{f}

$$\left\| \vec{f}(\vec{y}) - A\vec{y} \right\| \leq \frac{\beta}{2\gamma} \|\vec{y}\| \quad (**)$$

$\vec{f}(\vec{y}) - A\vec{y} = \vec{g}(\vec{y})$ wird betrachtet als „Störung“ der Linearität bei \vec{y}_0 .

Schluss aus (*) und (**): Für alle Lösungen $\vec{\psi}$ von (A) mit

$$\left\| \underbrace{\vec{\psi}(0)}_{\vec{\eta}_0} \right\| \leq \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{gilt} \quad \left\| \vec{\psi}(t) \right\| \leq \gamma \|\vec{\eta}_0\| e^{-\beta t/2}$$

Erster Schritt: Integraldarstellung von $\vec{\psi}(t)$

$$\vec{\psi}(t) = e^{At} \vec{\eta}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \vec{g}(\vec{\psi}(s)) ds$$

Zweiter Schritt: Standard Integralabschätzung mit (*), (**)

$$\|\vec{\psi}(t)\| \leq \gamma \|\vec{\eta}_0\| e^{-\beta t} + \int_0^t \gamma e^{-\beta(t-s)} \frac{\beta}{2\gamma} \|\vec{\psi}(s)\| ds$$

Hilfsfunktion:

$$\phi(t) = e^{\beta t} \|\vec{\psi}(t)\| \leq \gamma \|\vec{\eta}_0\| + \int_0^t \frac{\beta}{2} \phi(s) ds$$

Dritter Schritt: Gronwallsches Lemma⁴

$$\phi(t) \leq \gamma \|\vec{\eta}_0\| e^{\beta t/2}$$

□

⁴Siehe Kapitel 8, Abschnitt 1 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Dritter Teil.

2. Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Beispiel:

(1) Gegeben auf $0 \leq x \leq l$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (\text{H})$$

Gesucht eine nichttriviale ($\neq 0$) Lösung $\varphi(x)$ mit den Randbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$ wo $\lambda > 0$.

Die Gesamtheit aller Lösungen von (H))

$$\varphi(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x \quad (\omega = \sqrt{\lambda}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Randwerte: $\varphi(0) = c_1 = 0$ dann $\varphi(l) = c_2 \sin \omega l = 0$

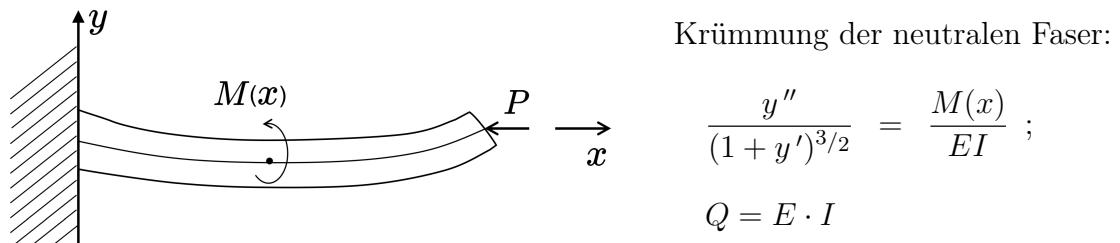
Resultat: Nur dann hat die homogene Randwertaufgabe eine Lösung $\varphi(x) \neq 0$, wenn ωl Nullstelle des Sinus, das heißt für

$$\omega l = \sqrt{\lambda}l = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

falls also

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

Anwendung in der Mechanik (Knickbalken)



Voraussetzung: $|y'| \ll 1 \rightarrow$ dann Linearisierung

$$y'' = \frac{M(x)}{Q} \quad , \quad M(x) = -y(x)P$$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{P}{Q}$$

Randbedingung $y(0) = y(l) = 0$. Ist

$$0 < P < \frac{\pi^2 EI}{l^2} =: P^*$$

so existiert nur die triviale Lösung $y = 0$. Aber für $P = P^*$ existiert erstmalig eine nichttriviale Lösung. P^* = „Eulersche Knicklast“.

2.1 Die allgemeine lineare Randwertaufgabe

Gegeben sei kompaktes Intervall $I = [a, b]$, dort drei stetige Funktionen p, q, r

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (\text{L})$$

mit zwei linearen Randbedingungen:

$$R_i(y) = \alpha_{i1}y(a) + \alpha_{i2}y'(a) + \beta_{i1}y(b) + \beta_{i2}y'(b) = \eta_i$$

mit reellen $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \eta_i$; ferner $i = 1, 2$

Im Falle

$$\eta_1 = \eta_2 = 0 \quad \text{„halbhomogenes Randwertproblem“}$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0 ; r(x) = 0 \quad \text{„vollhomogenes Randwertproblem“}$$

Allgemeiner Fall: „Inhomogenes Randwertproblem“.

Beispiel:

$$(2) \quad y'' - y = 0 \quad (\text{H}) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\text{Randbedingungen: } y(0) + y(l) = \eta_1$$

$$y(0) - y'(l) = \eta_2$$

Allgemeine Lösung aus einem Fundamentalsystem, etwa e^x, e^{-x}

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$\text{Randbedingungen: } \varphi(0) + \varphi(l) = c_1 + c_2 + c_1 e^l + c_2 e^{-l} = \eta_1$$

$$\varphi(0) - \varphi'(l) = c_1 + c_2 - c_1 e^l + c_2 e^{-l} = \eta_2$$

Lineares Gleichungssystem in c_1, c_2 ; $u_1(x) = e^x, u_2(x) = e^{-x}$

$$c_1 R_1(u_1) + c_2 R_1(u_2) = \eta_1$$

$$c_1 R_2(u_1) + c_2 R_2(u_2) = \eta_2$$

Es ist genau dann eindeutig lösbar, falls die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

$$\begin{pmatrix} 1 + e^l & 1 + e^{-l} \\ 1 - e^l & 1 + e^{-l} \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar.}$$

2.1.1 Eindeutigkeitskriterium

Bezeichne

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

die linke Seite der allgemeinen linearen Randwertaufgabe. Die Funktionen u_1, u_2 seien eine Basis des Lösungsraumes von

$$L(y) = 0 \quad (\text{H})$$

Die halbhomogene Randwertaufgabe ist genau dann lösbar, falls

$$\det \begin{pmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

Beweis:

Sei $v(x)$ eine partikuläre Lösung von

$$L(y) = r(x) \quad (\text{L})$$

Aus der Theorie: Allgemeine Lösung

$$\varphi(x) = v(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

Randbedingungen

$$R_i(v) + c_1 R_i(u_1) + c_2 R_i(u_2) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2$$

Lineares Gleichungssystem für c_1, c_2 . Eindeutig lösbar genau dann, falls

$$\det(R_i(u_k))_{i,k=1,2} \neq 0$$

□

Bemerkung:

- (1) Im Falle $\det(R_i(u_k)) = 0$ kann die Randwertaufgabe unlösbar sein, oder sie hat mehrere Lösungen. Insbesondere hat dann die vollhomogene Randwertaufgabe eine nichttriviale Lösung!

Beispiel:

$$(3) \quad y'' = r(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

Randbedingungen: $y(0) = 0$, $y(l) = 0$

Basis des Lösungraumes von $y'' = 0$

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x$$

$$\det \begin{pmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{pmatrix} = l \neq 0$$

$$y'(x) = \int_0^x r(\xi) d\xi + c_1$$

$$y(x) = \int_0^x 1 \left(\underbrace{\int_0^\xi r(\eta) d\eta}_{u'} \right) d\xi + c_1 x + c_2$$

$$= \left[\xi \int_0^\xi r(\eta) d\eta \right]_0^x - \int_0^x \xi r(\xi) d\xi + c_1 x + c_2$$

$$= \int_0^x (x - \xi) r(\xi) d\xi + c_1 x + c_2$$

ist die allgemeine Lösung von $y'' = r(x)$.

1. Randbedingung: $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

2. Randbedingung: $y(l) = 0 \Rightarrow c_1 l = \int_0^l (\xi - l) r(\xi) d\xi$

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \int_0^x (x - \xi) r(\xi) d\xi + \underbrace{\frac{x}{l} \int_0^l (\xi - l) r(\xi) d\xi}_{\int_0^x + \int_x^l} \\
 &= \int_0^x \frac{\xi}{l} (x - l) r(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} (\xi - l) r(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

Resultat: Die allgemeine Lösung des halbhomogenen Randwertproblems ist

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) d\xi$$

mit der „Greenschen Funktion“

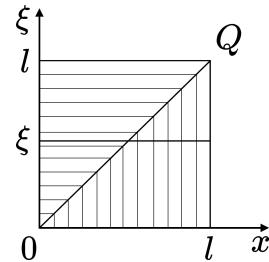
$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{l}(x - l) & \text{falls } 0 \leq \xi \leq x \leq l \\ \frac{x}{l}(\xi - l) & \text{falls } 0 \leq x \leq \xi \leq l \end{cases}$$

Eigenschaften von $G(x, \xi)$

a) Stetigkeit:

$G(x, \xi)$ ist stetig auf dem Quadrat

$$Q = \{(x, \xi); 0 \leq x \leq l, 0 \leq \xi \leq l\}$$



- b) Differenzierbarkeit: Für jedes ξ ist $x \mapsto G(x, \xi)$ zweimal stetig differenzierbar auf den Teilintervallen $0 \leq x \leq \xi$, $\xi \leq x \leq l$ und erfüllt die zugeordnete homogene lineare Differentialgleichung $y'' = 0$.
- c) $x \mapsto G(x, \xi)$ erfüllt die Randbedingungen des halbhomogenen Randwertproblems.

$$d) \lim_{x \searrow \xi} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) - \lim_{x \nearrow \xi} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi - l}{l} = 1 \quad (\text{Sprungbedingung})$$

2.1.2 Die Greensche Funktion für das allgemeine halbhomogene (lineare) Randwertproblem

Auf $J = [a, b]$ gegeben drei stetige Funktionen p, q, r , ferner die lineare Differentialgleichung

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (\text{L})$$

und die Randbedingungen ($i = 1, 2$):

$$R_i(y) = \alpha_{i1}y(a) + \alpha_{i2}y'(a) + \beta_{i1}y(b) + \beta_{i2}y'(b) = 0$$

Schließlich gelte das Eindeutigkeitskriterium

$$\det(R_i(u_k))_{1 \leq i,k \leq 2} \neq 0$$

für eine Basis u_1, u_2 des Lösungsraumes $L(y) = 0$. Dann ist die eindeutige Lösung $y(x)$ des halbhomogenen Randwertproblems

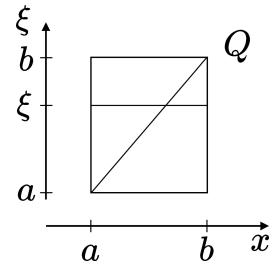
$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)r(\xi) d\xi$$

Darin ist die „Greensche Funktion“ $G(x, \xi)$ bestimmt durch

a) Stetigkeit:

$G(x, \xi)$ ist stetig auf dem Quadrat

$$Q = \{(x, \xi); a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b\}$$



b) Differenzierbarkeit: Für alle ξ ist $x \mapsto G(x, \xi)$ auf jedem Teilintervall $a \leq x \leq \xi, \xi \leq x \leq b$ zweimal stetig differenzierbar und Lösung von $L(y) = 0$.

c) Für jedes ξ erfüllt $G(x, \xi)$ die Randbedingungen

$$R_i(G(-, \xi)) = 0 \quad i = 1, 2$$

$$d) \lim_{x \searrow \xi} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) - \lim_{x \nearrow \xi} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) = 1 \quad (\text{Sprungbedingung})$$

Beweis:**1) Konstruktion der Greenschen Funktion.**

Jede Lösung von $L(y) = 0$ ist Linearkombination von u_1 und u_2 . Daher Ansatz

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (a_1 - b_1)u_1(x) + (a_2 - b_2)u_2(x) , & (a \leq x \leq \xi) \\ (a_1 + b_1)u_1(x) + (a_2 + b_2)u_2(x) , & (\xi \leq x \leq b) \end{cases}$$

mit Koeffizienten a_i, b_i , welche von ξ abhängen. Stetigkeit auf der Diagonalen und Sprungbedingung

$$(a_1 - b_1)(\xi)u_1(\xi) + (a_2 - b_2)(\xi)u_2(\xi) = (a_1 + b_1)(\xi)u_1(\xi) + (a_2 + b_2)(\xi)u_2(\xi)$$

also

$$\left. \begin{array}{l} 2b_1(\xi)u_1(\xi) + 2b_2(\xi)u_2(\xi) = 0 \quad (\text{Diagonalenbedingung}) \\ 2b_1(\xi)u'_1(\xi) + 2b_2(\xi)u'_2(\xi) = 1 \quad (\text{Sprungbedingung}) \end{array} \right\} (*)$$

Koeffizientmatrix $2 \begin{pmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u'_1(\xi) & u'_2(\xi) \end{pmatrix}$ ist invertierbar (Wronski)

(*) ist also eindeutig auflösbar nach b_1 und b_2 .

Randbedingungen für G

$$\begin{aligned} R_i(G(-, \xi)) &= \alpha_{i1}G(a, \xi) + \alpha_{i2}\frac{\partial}{\partial x}G(a, \xi) \\ &\quad + \beta_{i1}G(b, \xi) + \beta_{i2}\frac{\partial}{\partial x}G(b, \xi) = 0 \\ 0 &= \alpha_{i1}(a_1 - b_1)u_1(a) + \alpha_{i1}(a_2 - b_2)u_2(a) \\ &\quad + \alpha_{i2}(a_1 - b_1)u'_1(a) + \alpha_{i2}(a_2 - b_2)u'_2(a) \\ &\quad + \beta_{i1}(a_1 + b_1)u_1(b) + \beta_{i1}(a_2 + b_2)u_2(b) \\ &\quad + \beta_{i2}(a_1 + b_1)u'_1(b) + \beta_{i2}(a_2 + b_2)u'_2(b) ; \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Ausgedrückt für a_1, a_2

$$a_1R_i(u_1) + a_2R_i(u_2) = f_i(b_1, b_2) \quad (**)\quad (i = 1, 2)$$

Lineares Gleichungssystem für a_1 und a_2 mit invertierbarer Koeffizientenmatrix also eindeutig lösbar.

$$\mathbf{2)} \quad y(x) = \int_a^b G(x, \xi)r(\xi) d\xi$$

ist Lösung der halbhomogenen Randwertaufgabe. Aus der Konstruktion von G :

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x-0, x) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, x+0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x+0, x) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, x-0)$$

Differentiation von $y(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi$

nach der Regel für Integrale mit Parametern

$$y'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) r(\xi) d\xi = \int_a^x \dots + \int_x^b \dots$$

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, \xi) r(\xi) d\xi + \frac{\partial}{\partial x} G(x, x-0) r(x)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, \xi) r(\xi) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} G(x, x+0) r(x)$$

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, \xi) r(\xi) d\xi + r(x)$$

$$L(y) = \int_a^b \underbrace{\left[\frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} + p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} + q(x) G(x, \xi) \right]}_{=0} r(\xi) d\xi + r(x) \implies$$

$$L(y) = r(x) \quad (L(y) = 0 \text{ ist falsch})$$

$$R_i(y) = \int_a^b \underbrace{R_i(G(-, \xi))}_{=0} r(\xi) d\xi = 0 \quad (i = 1, 2)$$

□

Bemerkung:

(2) Im Falle der inhomogenen linearen Randwertaufgabe

$$R_i(y) = \eta_i \quad (i = 1, 2)$$

verschafft man sich leicht eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ϕ mit

$$R_i(\phi) = \eta_i$$

Betrachte statt y die Differenz $z = y - \phi$. Bedingungen an z :

$$L(z) = L(y) - L(\phi) = r(x) - L(\phi)(x)$$

$$R_i(z) = R_i - R_i(\phi) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Die modifizierte Aufgabe kann (im Falle $\det(R_i(u_k)) \neq 0$) mit der Greenschen Funktion gelöst werden.

2.2 Schwingungen einer Saite

Bezeichne l die Saitenlänge und t die Zeit ($0 \leq t$), dann lautet auf $0 \leq x \leq l$ die Differentialgleichung der schwingenden Saite

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = 0$$

Randbedingungen für die gesuchte Funktion $y(x, t)$

$$\left. \begin{array}{l} y(x, 0) = p(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = q(x) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y(0, t) = 0 \\ y(l, t) = 0 \end{array} \right\} \quad \forall t$$

2.2.1 Lösungsansatz von d'Alembert

Neue Variable $\xi = x + ct$; $\eta = x - ct$ das heißt $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ und $t = \frac{1}{2c}$

$$z(\xi, \eta) = y\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} z(\xi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) \right]}_{= 0 \text{ für die Lösung } y} \end{aligned}$$

Gesucht also zweimal stetig differenzierbare Funktion z mit $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} z = 0$

Das heißt $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ ist unabhängig von ξ daher Ansatz

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \psi'(\eta) \quad z = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen ϕ, ψ .

Damit für die Ausgangsfunktion

$$y(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

Interpretation: Überlagerung zweier Wellen, deren eine links, deren andere nach rechts fortschreitet.

Damit lauten die Randbedingungen für $t = 0$ (das heißt das erste Paar von Randbedingungen)

$$\phi(x) + \psi(x) = p(x) \Rightarrow \phi' + \psi' = p'$$

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = q(x)$$

Daraus folgt

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}p'(x) + \frac{1}{2c}q(x)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{2c}q(x)$$

Integration

$$\phi(x) = \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x q(\xi) d\xi + c_1$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}p(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x q(\xi) d\xi + c_2$$

Zweites Paar von Randbedingungen

$$\phi(ct) + \psi(ct) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\phi(l + ct) + \psi(l - ct) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Ergebnis: Fortsetzung von ϕ und ψ auf ganz \mathbb{R}

$$\phi(ct) = -\psi(-ct)$$

$$\phi(l + ct) = -\psi(l - ct) = \phi(-l + ct)$$

ϕ, ψ werden periodisch mit Periode $2l$.

p, q werden automatisch zu $2l$ -periodischen Funktionen fortgesetzt.

2.2.2 Lösungsmethode von Fourier

Mit zwei Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

ist auch jede Linearkombination eine Lösung.

Ferner: Wenn die Ausgangslösungen das zweite Paar der Randbedingungen $y(0, t) = y(l, t) = 0$ erfüllen, dann erfüllt auch jede Linearkombination diese Randbedingungen.

Lösungsansatz als Produkt:

$$y(x, t) = U(x)V(t)$$

sei nichttriviale Lösung mit $U(x_0) \neq 0 \neq V(t_0)$.

Wellengleichung

$$\begin{aligned} U''(x)V(t) - \frac{1}{c^2}U(x)V''(t) &= 0 \\ U''(x) + \lambda U(x) &= 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{V''(t_0)}{c^2 V(t_0)} = -\frac{U''(x_0)}{U(x_0)} \\ V''(t) + c^2 \lambda V(t) &= 0 \end{aligned}$$

Unter den Randbedingungen $U(0) = U(l) = 0$ besitzt die erste Differentialgleichung (siehe [Beispiel 1](#)) nur für die speziellen Eigenwerte $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, $n = 1, 2, 3 \dots$ eine nichttriviale Lösung, nämlich

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sin \frac{n\pi x}{l} \\ V_n(x) &= A_n \cos \frac{\pi nct}{l} + B_n \sin \frac{\pi nct}{l} \end{aligned}$$

und daher

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{\pi nct}{l} + B_n \sin \frac{\pi nct}{l} \right)$$

Damit werden alle endlichen Summen Lösungen.

$$y_n(x, t) = \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{\pi nct}{l} + B_n \sin \frac{\pi nct}{l} \right)$$

ist damit Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

mit Randbedingungen $y(0, t) = y(l, t) = 0$.

Schlussfrage: Wann entstehen für $N \rightarrow \infty$ Lösungen?

3. Inverse und Zahlenkugel

Betrachte $z \mapsto \frac{1}{z}$ (für $z \in \mathbb{C}^*$)

Diese Abbildung ist „kreistreu“. Durch Hinzunahme von ∞ (als Bild und Urbild von 0 bei $z \mapsto \frac{1}{z}$) entsteht auf \mathbb{C} die Zahlenkugel $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (Riemann-Sphäre).

Auch die Translationen sind kreistreu ($z \mapsto z + c$, c konstant).

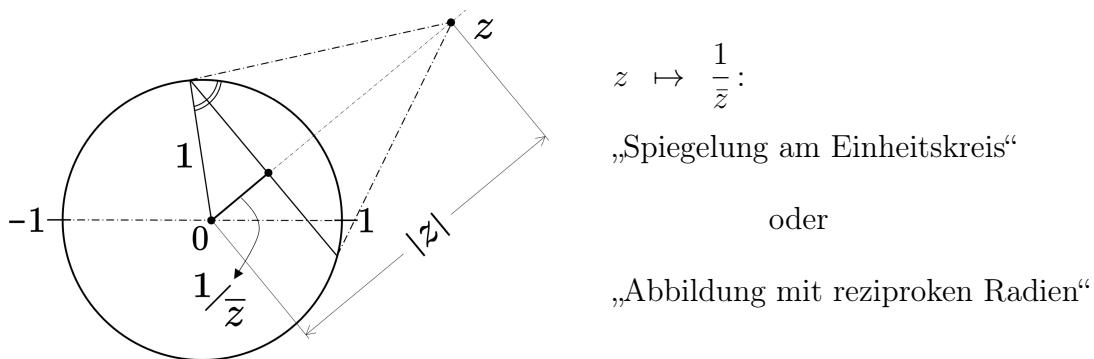
Durch Zusammensetzung dieser Abbildungstypen entsteht die Gruppe der kreistreuen „Möbiustransformationen“

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ ist zusammengesetzt aus $z \mapsto \bar{z}$ und $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} z$

Geometrische Deutung:

Falls $z \in \mathbb{C}^*$, so liegen z und $\frac{1}{\bar{z}}$ auf dem gleichen Strahl durch 0 und habe das Betragprodukt 1.



$z \mapsto \frac{1}{z}$ bedeutet daher Spiegelung am Einheitskreis mit nachträglicher Spiegelung an der reellen Achse.

Kreistreu

Beispiele:

(1) Der Kreis $|z - 2| = 1$

geht bei $w = \frac{1}{z}$ über in die Menge aller w mit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{w} - 2 \right\| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{w} - 2 \right) \left(\frac{1}{\bar{w}} - 2 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow (1 - 2\bar{w})(1 - 2w) &= |w|^2 \\ \Leftrightarrow 3|w|^2 - 2(w + \bar{w}) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

und somit $\left\| w - \frac{2}{3} \right\|^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2$

(2) $|z - 1| = 1$

geht über in die Menge aller w wo entweder $w = \infty$ oder

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{w} - 1 \right) \left(\frac{1}{\bar{w}} - 1 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow (1 - \bar{w})(1 - w) &= |w|^2 \\ \Leftrightarrow 1 - (w + \bar{w}) &= 0 \quad \Leftrightarrow \operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definition:

Unter einem „Kreis“ auf der Zahlenkugel \mathbb{P} versteht man die gewöhnlichen Kreise in \mathbb{C} und die durch ∞ ergänzten Geraden in \mathbb{C} .

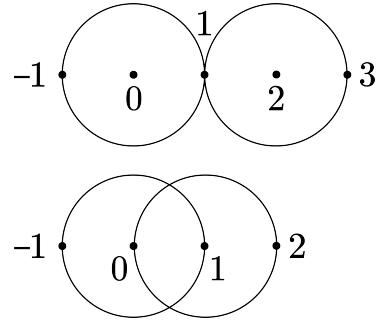
Gleichung der Kreisdarstellung in \mathbb{P}

$$\varrho|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \sigma = 0 \quad \text{mit reellen } \varrho, \sigma \text{ und } \alpha\bar{\alpha} - \varrho\sigma = 1$$

Begründung der Kreistreu von $z \mapsto w = \frac{1}{z}$:

Die z der Gleichung $\varrho|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \sigma = 0$ gehen über in die w der Gleichung

$$\varrho - \bar{\alpha}\bar{w} - \alpha w + \sigma|w|^2 = 0$$



Beispiel:

(3) ϱ, α, σ für Einheitskreis $|z|^2 = 1$

$$\varrho = 1 ; \quad \alpha = 0 ; \quad \sigma = -1$$

für die imaginäre Achse $\operatorname{Re} z = 0$

$$\varrho = 0 ; \quad \alpha = 1 ; \quad \sigma = 0$$

für die reelle Achse $\operatorname{Im} z = 0$

$$\varrho = 0 ; \quad \alpha = j ; \quad \sigma = 0$$

Eigentliche Kreise $\iff \varrho \neq 0$

Uneigentliche Kreise $\iff \varrho = 0$

Eigentliche Kreise durch 0 $\iff \varrho \neq 0, \sigma = 0$

Geraden nicht durch 0 $\iff \varrho = 0, \sigma \neq 0$

Rechenregel 1 für ∞

Für jede Translation $z \mapsto z + c$ ($c \in \mathbb{C}$) ist ∞ ein Fixpunkt.

Möbiustransformationen nennt man die durch Iteration von Inversenbildung und Translationen entstehenden Abbildungen der Zahlenkugel. Sie sind sämtlich kreistreu. Die allgemeine Form

$$z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

$$z = 0 \text{ geht über in } \begin{cases} w = \frac{b}{d} & \text{falls } d \neq 0 \\ w = \infty & \text{falls } d = 0 \end{cases}$$

$$z = \infty \text{ geht über in } \begin{cases} w = \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ w = \infty & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ist } c \neq 0, \text{ dann } w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{ad - bc}{c(cz + d)}$$

Der Feststellung, dass alle genannten Abbildungen sich aus Inversionen und Translationen zusammensetzen, ist noch hinzuzufügen:

$$z \mapsto hz \quad h \in \mathbb{C}^*$$

ist eine Möbiustransformation.

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{-a^{-1} + \frac{1}{a + \frac{1}{z}}} &= a + \frac{1}{-a^{-1} + \frac{z}{az + 1}} \\ &= a + \frac{az + 1}{a^{-1}} = -a^2 z , \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

(h hat stets die Form $-a^2$)

Rechenregel 2 für ∞

Bei jeder Drehstreckung $z \mapsto hz$ ($h \in \mathbb{C}^*$) ist ∞ ein Fixpunkt.

3.1 Das Doppelverhältnis

Zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{P}$ gibt es genau eine Möbiustransformation T mit $Tz_0 = 0, Tz_1 = 1, Tz_\infty = \infty$, nämlich

$$\frac{z - z_0}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0}$$

Falls einer dieser Punkte $z_k = \infty$ dividiere man Zähler und Nenner formal durch z_k .

Ist etwa $z_0 = \infty$

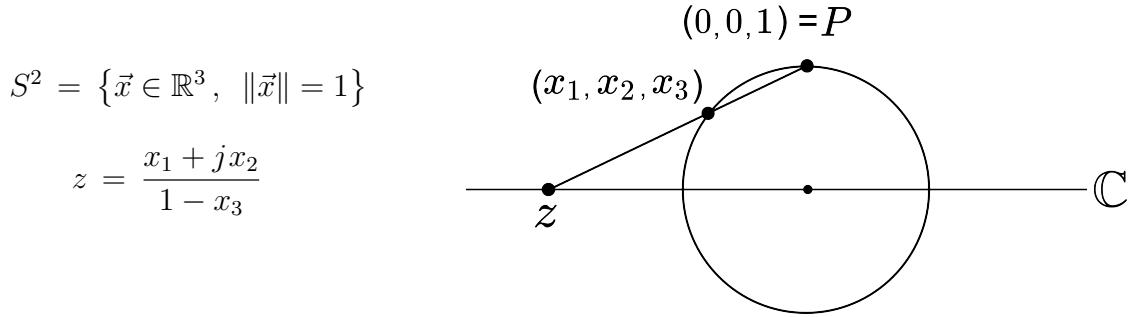
$$\frac{z - z_0}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0} = \frac{z/z_0 - 1}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1/z_0 - 1} = \frac{z_1 - z_\infty}{z - z_\infty}$$

Diese Möbiustransformation T heißt auch Doppelverhältnis von z, z_0, z_1, z_∞ , geschrieben $D(z, z_0, z_1, z_\infty)$. Das Doppelverhältnis ist invariant gegenüber Möbiustransformationen S

$$D(Sz, Sz_0, Sz_1, Sz_\infty) = D(z, z_0, z_1, z_\infty)$$

Für die Translationen unmittelbar klar. Prüfe: $Sz = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z_0}, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_\infty}\right) &= \frac{1/z - 1/z_0}{1/z - 1/z_\infty} \cdot \frac{1/z_1 - 1/z_\infty}{1/z_1 - 1/z_0} \quad \text{Erweitern} \\ &= \frac{z_0 - z}{z_\infty - z} \cdot \frac{z_\infty - z_1}{z_0 - z_1} = D(z, z_0, z_1, z_\infty) \end{aligned}$$



Ausgehend von der 1-Sphäre in \mathbb{R}^3 wird vom Nordpol $P = (0, 0, 1)$ aus jeder weitere Punkt (x_1, x_2, x_3) geradlinig auf die Äquatorebene \mathbb{C} projiziert

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

$$|z|^2 + 1 = \frac{2}{1 - x_3}, \quad |z|^2 - 1 = \frac{2x_3}{1 - x_3}$$

Die stereographische Projektion ist kreistreu.

Zum Nachweis: Die Kreise auf S^2 sind die nichttrivialen Ebenenschnitte $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0$, wo $a_k \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, $-1 < a_0 < 1$

Multiplikation der Ebenenschnitt-Gleichung mit $\frac{2}{1 - x_3}$ ergibt für z die Bildpunkte

$$a_1(z + \bar{z}) - a_2j(z - \bar{z}) + a_3(|z|^2 - 1) = a_0(|z|^2 + 1)$$

$$\underbrace{(a_0 - a_3)}_{\varrho} |z|^2 - \underbrace{(a_1 - ja_2)}_{\bar{\alpha}} z - \underbrace{(a_1 + ja_2)}_{\alpha} \bar{z} + \underbrace{(a_0 + a_3)}_{\sigma} = 0$$

$$\alpha\bar{\alpha} - \varrho\sigma = a_1^2 + a_2^2 - (a_0^2 - a_3^2) = 1 - a_0^2 \quad (\text{eventuell jetzt Normierung})$$

Deutung der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf der S^2

$$z = \frac{x_1 + jx_2}{1 - x_3}; \quad \frac{1}{z} = \frac{x_1 - jx_2}{1 + x_3} \quad (\text{das Produkt} = 1)$$

$$\text{also } (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3)$$

das heißt eine Drehung von 180° um die x_1 -Achse.

3.1.1 Die rationalen Funktionen als Abbildung der Zahlenkugel \mathbb{P} in sich

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $P(z)$, $Q(z)$ Polynome in z sind, ohne gemeinsame Nullstelle, Q sei nicht das Nullpolynom, eventuell normiert. Den Nullstellen des Nenners Q wird der Wert $f(z_0) = \infty$ zugeordnet. Dem Punkt $z = \infty$ wird der (eventuell uneigentliche) Limes zugeordnet $\lim_{z \rightarrow \infty} [P(z) / Q(z)]$. Die Nullstellen z_0 von Q heißen Pole von f .

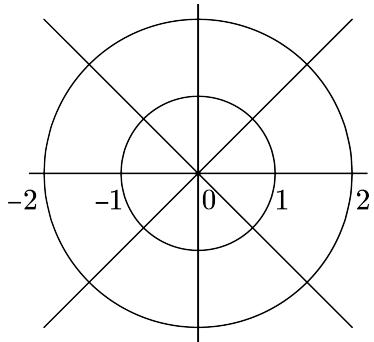
Die Schukowski-Abbildung

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Jeder Punkt erhält dasselbe Bild wie der reziproke Punkt

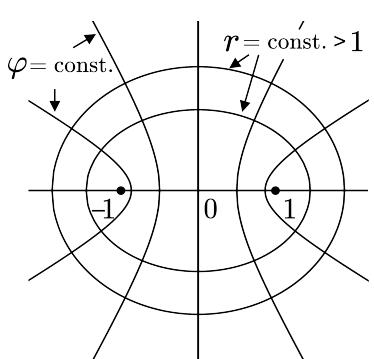
$$0 \mapsto \infty ; \quad \infty \mapsto 0 ; \quad 1 \mapsto 1 ; \quad -1 \mapsto -1$$

Jeder von ± 1 verschiedene Punkt w hat zwei Urbilder.



Polarschreibweise:

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\phi} \\ w &= \frac{1}{2} \left(r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) \\ u &= \operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi \\ v &= \operatorname{Im} w = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad a = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \\ \Rightarrow \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= 1 \\ \varphi &= \text{const} \neq 0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} &= 1 \end{aligned}$$

3.2 Eine Klasse \mathcal{H} von rationalen Funktionen

\mathcal{H} enthält alle rationalen Funktionen $h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ welche folgenden drei Eigenschaften haben

$$\operatorname{Re} h(z) > 0, \text{ falls } \operatorname{Re} z > 0$$

$$\operatorname{Re} h(z) < 0, \text{ falls } \operatorname{Re} z < 0$$

$$h(i\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \subset i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

3.2.1 Elementare Eigenschaften von \mathcal{H}

Seien h, h_1 Funktionen in \mathcal{H} und $a > 0, b$ rein imaginär. Dann sind ebenfalls in \mathcal{H}

$$h + h_1, \quad \frac{1}{h}, \quad ah + b, \quad z \mapsto h(az + b), \quad z \mapsto h\left(\frac{1}{z}\right)$$

Begründung: Jede der drei Mengen $\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Re}(z) = 0$ enthalten mit je zwei Punkten deren Summe, mit jedem Punkt den reziproken Punkt und mit jedem Punkt positive Vielfache und rein imaginäre Translationen. Etwa die Schukowski-Abbildung

$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

ist ein Element von \mathcal{H} .

Funktionen $h \in \mathcal{H}$ haben ihre Nullstellen auf der imaginären Achse und alle Nullstellen sind einfach. Offenbar haben Nullstellen z_0 von h Realteil 0. Wegen der vierten elementaren Eigenschaft genügt es, $z_0 = 0$ zu betrachten.

$$h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \text{ ohne gemeinsame Nullstellen}$$

$$P(z) = z^m P_1(z) \quad \text{mit} \quad P_1(0) \neq 0 \neq Q(0)$$

$$m \geq 1, \quad z = r e^{i\varphi}$$

$$h(z) = e^{im\varphi} r^m \frac{P_1(z)}{Q(z)}$$

Wäre $m > 1$, dann würde für z in der rechten Halbebene, also für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} h(z)$ sein Vorzeichen wechseln (Widerspruch).

3.2.2 Die Partialbruchzerlegung der Funktion $h(z) \in \mathcal{H}$

$$h(z) = c_0 z + d_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - i\beta_k}$$

wobei $n \geq 0$, alle $a_k > 0$, die β_k paarweise verschieden und reell, $c_0 \geq 0$, $\operatorname{Re}(d_0) = 0$. Ist überdies $n = 0$, so ist $c_0 > 0$.

Beweis:

Alle Summanden liegen in \mathcal{H} wegen der elementaren Eigenschaften, daher ist \sum in \mathcal{H} (falls $\neq 0$). Also gehören all jene Partialbrüche zu \mathcal{H} .

Ist $h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ in \mathcal{H} , dann $\frac{1}{h} \in \mathcal{H}$, daher hat $Q(z)$ lauter einfache Nullstellen $i\beta_k$ ($1 \leq k \leq n$). Zur Herleitung der Partialbruchentwicklung mit

$$Q(z) = \prod_{k=1}^n (z - i\beta_k)$$

Hilfspolynome

$$Q_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z - i\beta_j) \quad \text{ergeben} \quad 1 = \sum_{k=1}^n q_k(x) Q_k(x)$$

Multiplikation mit $P(z)$

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=1}^n P_k(z) Q_k(z) \\ &= P_0(z) Q(z) + \sum_{k=1}^n \underset{\substack{\downarrow \\ \text{konstant}}}{a_k} Q_k(z) \end{aligned}$$

Division durch $Q(z) \Rightarrow$

$$h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = P_0(z) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - i\beta_k}$$

Sonderbetrachtung in der Umgebung jedes Pols $i\beta_k$ ergibt $a_k > 0$ (weil $h(z) \in \mathcal{H}$).

Zur Untersuchung $z \rightarrow \infty$. Resultat $\deg P_0 \leq 1$, da sonst in $\operatorname{Re} z > 0$ $\operatorname{Re} h(z)$ das Vorzeichen wechselt würde. Abschließend $P_0(z) = c_0 z + d_0$ mit $c_0 \geq 0$, $\operatorname{Re}(d_0) = 0$.

□

3.2.3 Der Divisionsalgorithmus für die Funktionen in \mathcal{H}

Seien P_0, P_1 Polynome, $P_1 \neq 0$ und $\deg P_0 > \deg P_1$, sowie P_0, P_1 ohne gemeinsame Nullstellen. Dann ist $\frac{P_0}{P_1}(z) = h(z)$ eine Funktion in \mathcal{H} genau dann wenn der Divisionsalgorithmus für P_0 und P_1

$$P_{k-1}(z) = q_k P_k(z) + P_{k+1}(z) , \quad \deg P_{k+1} < \deg P_k$$

die Gestalt hat

$$q_k(z) = c_k z + d_k \quad \text{mit} \quad c_k > 0, \operatorname{Re} d_k = 0$$

bis zum Abbruch des Algorithmus.

Beweis:

Zählergrad > Nennergrad bedeutet $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$

1) Sei $h(z) \in \mathcal{H}$. Partialbruchzerlegung \Rightarrow

$$P_0(z) = (c_0 z + d_0) P_1(z) + P_2(z)$$

wobei $c_0 > 0$ wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$

Ist P_2 nicht das Nullpolynom dann ist

$$\frac{P_2(z)}{P_1(z)} = \sum \frac{a_k}{z - i\beta_k} \in \mathcal{H}$$

Damit ist auch $h_1(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} \in \mathcal{H}$

und derselbe Schluss wird so bis zum Abbruch fortgesetzt.

2) Wenn der Divisionsalgorithmus die spezielle Form hat, dann wird erstmals $P_{n+1} = 0$

$$\frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)} = (c_n z + d_n) + 0 \in \mathcal{H}$$

$$\frac{P_{k-1}(z)}{P_k(z)} = \underbrace{(c_k z + d_k)}_{\in \mathcal{H}} + \underbrace{\frac{P_{k+1}(z)}{P_k(z)}}_{\in \mathcal{H}}$$

Induktions-
voraussetzung

$$\Rightarrow \frac{P_{k-1}}{P_k} \in \mathcal{H} \quad \text{daher auch} \quad \frac{P_0}{P_1} = h(z) \in \mathcal{H}$$

□

3.2.4 Anwendung: Das Stabilitätskriterium

Sei $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0$ ein normiertes Polynom. Mit den Hilfspolynomen

$$P_0(z) = z^n + (i \operatorname{Im} a_{n-1})z^{n-1} + (\operatorname{Re} a_{n-2})z^{n-2} + \dots$$

$$P_1(z) = (\operatorname{Re} a_{n-1})z^{n-1} + (i \operatorname{Im} a_{n-2})z^{n-2} + \dots$$

gilt: f ist genau dann stabil (das heißt sämtliche Nullstellen haben Realteil < 0) wenn im Divisionsalgorithmus

$$P_{k-1}(z) = q_k(z)P_k(z) + P_{k+1}(z) \quad (\deg P_{k+1} < \deg P_k)$$

erstens die Länge bis zum Abbruch genau $n = \deg f$ ist und zweitens die Faktoren

$$q_k(z) = c_k z + d_k$$

sind, mit $c_k > 0$ und $\operatorname{Re} d_k = 0$.

Beweisskizze:

Die Möbiustransformation $w \mapsto \frac{-w+1}{w+1}$ bildet den Einheitskreis ab auf die imaginäre Achse $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und das Innere des Einheitskreises wird auf die Halbebene $\operatorname{Re} w > 0$ abgebildet. Bilde aus $f(z)$ die Funktion $f^*(z) = \overline{f(-\bar{z})}$

$$h(z) = \frac{f(z) - f^*(z)}{f(z) + f^*(z)} = \frac{-\frac{f^*(z)}{f(z)} + 1}{\frac{f^*(z)}{f(z)} + 1}$$

Daher ist $\operatorname{Re} h(z) > 0$ gleichbedeutend damit, dass $\frac{f^*(z)}{f(z)}$ im Einheitskreis liegt! Zusätzlich benutzt man $h^*(z) = -h(z)$ in unserem Spezialfall. Daraus folgt mit der Kenntnis von \mathcal{H} die Behauptung!

Beispiele:

$$(4) \quad f(z) = z^3 + (1+2i)z^2 + (3+i)z + 3 + 2i$$

$$P_0(z) = z^3 + 2iz^2 + 3z + 2i$$

$$P_1(z) = z^2 + iz + 3$$

$$P_0(z) = (z+i)P_1(z) + \underbrace{(z-i)}_{P_2(z)}$$

$$\begin{aligned} P_1(z) &= (z + 2i)P_2(z) + 1 \\ &\quad \downarrow \\ &P_3(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(z) &= (z - i)P_3(z) + 0 \\ &\quad \downarrow \\ &P_4(z) \end{aligned}$$

Länge = 3 = grad f , alle Faktoren gut $\Rightarrow f$ stabil.

$$(5) \quad f(z) = z^3 + (1+i)z^2 + 2z + 2 + 2i$$

$$P_0(z) = z^3 + iz^2 + 2z + 2i$$

$$P_1(z) = z + 2$$

$$P_0(z) = (z + i)P_1(z) + 0$$

Länge = 1 < grad $f \Rightarrow f$ nicht stabil.

$$\frac{P_0(z)}{P_1(z)} = h(z) \in \mathcal{H}$$

$$f(z) = P_0(z) + P_1(z) = (z + i + 1)(z^2 + 2)$$

Nullstellen sind: $\pm i\sqrt{2}$; $-1 - i$

4. Holomorphe oder analytische Funktionen

Es handelt sich um komplexwertige Funktionen $f(z)$, welche definiert sind auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und für die folgender Limes existiert in jedem Punkt $z_0 \in D$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Er wird als (komplexe) Ableitung von f im Punkt z_0 bezeichnet. Abkürzungen:

$$f'(z_0), \quad \left(\frac{d}{dz} f \right)(z_0) \dots$$

Beispiele:

- (1) Alle konstanten Funktionen sind überall analytisch und haben die Ableitung 0.
- (2) $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist überall holomorph mit Ableitung

$$f'(z) = nz^{n-1}$$

Polarschreibweise

$$r e^{i\varphi} = z \quad , \quad f(z) = r^n e^{ni\varphi}$$

- (3) Sind f und g beide (im gleichen Gebiet) holomorph, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ dort holomorph mit den Ableitungen

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

Insbesondere sind alle Polynomfunktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

überall in \mathbb{C} analytisch mit der Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=1}^N a_n n z^{n-1}$$

- (4) Sind f und g beide (im gleichen Gebiet) holomorph, so ist dort (mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners) der Quotient $\frac{f(z)}{g(z)}$ holomorph und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

Insbesondere sind die rationalen Funktionen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (mit Polynomen P, Q) außerhalb der Nullstellenmenge von Q holomorph.

- (5) Sind f und g analytisch und liegen die Werte $g(z)$ im Definitionsbereich von f , dann ist auch $f(g(z))$ analytisch und die \mathbb{C} -Ableitung berechnet sich nach der Kettenregel

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

4.1 Geometrische Deutung der Holomorphie

Beispiel:

Die Quadratfunktion $q(z) = z^2$ hat die Ableitung $q'(z) = 2z$. Diese Ableitung hat genau eine Nullstelle, nämlich bei $z = 0$. Polarschreibweise $z = re^{i\varphi}$ ergibt $q(z) = r^2 e^{2i\varphi}$, z wird also abgebildet durch Verdoppelung des Argumentes und Quadrierung des Betrages. Die Strahlen durch 0 ($\varphi = \text{const}$) werden in Strahlen durch 0 abgebildet, die Kreise um 0 werden in Kreise um 0 mit Radius r^2 abgebildet ($r = \text{const}$). Abbildung der Koordinatenlinien $y = \text{Im } z = \text{const}$ beziehungsweise $x = \text{Re } z = \text{const}$!

$$u = \text{Re } q(x + iy) = x^2 - y^2 ; \quad v = \text{Im } q(x + iy) = 2xy$$

mit $y = c \Rightarrow$

$$u = x^2 - c^2 ; \quad v = 2cx = \pm 2c\sqrt{u + c^2} \quad (\text{Parabeln mit Fokus } 0)$$

Die Bedeutung der \mathbb{C} -Differenzierbarkeit für die reellen Funktionen

$$u = \text{Re } q(x + iy) , \quad v = \text{Im } q(x + iy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = 2x , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_x = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = -2y , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y = 2y$$

Es gelten also die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad ; \quad u_y = -v_x$$

Die Jacobi-Matrix der reellen Abbildung

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren sind orthogonal von gleicher Länge und die Funktionaldeterminante > 0 (wenn nicht $x = y = 0$). Diese Abbildung ist daher winkeltreu.

Definition der Winkeltreue für komplexwertige Funktionen f im Punkte z_0 .

Für jedes φ ist mit einer Konstanten $\zeta \neq 0$ gültig

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{f(z_0 + r e^{i\varphi}) - f(z_0)}{|f(z_0 + r e^{i\varphi}) - f(z_0)|} = \zeta e^{i\varphi}$$

Jede auf D holomorphe Funktion f ist in allen Punkten $z_0 \in D$ winkeltreu, wo $f'(z_0) \neq 0$.

Denn dort

$$\frac{f(z_0 + r e^{i\varphi}) - f(z_0)}{r e^{i\varphi}} \rightarrow f'(z_0) \quad \text{falls} \quad r \searrow 0$$

daher

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{f(z_0 + r e^{i\varphi}) - f(z_0)}{|f(z_0 + r e^{i\varphi}) - f(z_0)|} = e^{i\varphi} \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|}$$

4.2 Holomorphie und Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

f sei auf D holomorph, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Durch spezielle Wahl von $h = t$ oder $h = it$ ($t \in \mathbb{R}$) wird die Ableitung

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + t) - f(z)}{t} = u_x + iv_x$$

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + it) - f(z)}{it} = \frac{u_y}{i} + v_y = v_y - iu_y$$

Daher (Real- beziehungsweise Imaginärteil)

$$u_x = v_y \quad , \quad v_x = -u_y$$

Sind umgekehrt u, v stetig differenzierbare Lösungen der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf D , dann:

Definition:

$$f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{auf } D \text{ eine holomorphe Funktion}$$



Zur Ableitung von $f(z)$:

$$f(z+h) - f(z) = \operatorname{grad} u \cdot (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) + i \cdot \operatorname{grad} v \cdot (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) + \operatorname{Rest}(h)$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Rest}(h)}{|h|} = 0$; Damit:

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= (u_x, u_y) \cdot (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) + i \cdot (-u_y, u_x) \cdot (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) + \operatorname{Rest}(h) \\ &= u_x \underbrace{\cdot (\operatorname{Re} h + i \cdot \operatorname{Im} h)}_h - i u_y \underbrace{\cdot (\operatorname{Re} h + i \cdot \operatorname{Im} h)}_h + \operatorname{Rest}(h) \\ &= u_x h - i u_y h + \operatorname{Rest}(h) \end{aligned}$$

Daraus: f ist in z komplex differenzierbar mit Ableitung

$$f'(z) = u_x - i u_y$$

4.2.1 Harmonische Funktionen

Es ergibt sich: Jede auf D holomorphe Funktion $f = u + iv$ ist dort beliebig oft differenzierbar. Das Vektorfeld auf D

$$\operatorname{grad} u = (u_x, u_y)$$

ist daher nicht nur ein Potentialfeld (Gravitationsfeld), das heißt

$$\operatorname{rot} (u_x, u_y) = 0$$

sondern die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen ergeben noch

$$\operatorname{div} (u_x, u_y) = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Daher ist u eine Lösung der Laplace Gleichung in der Ebene

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Das betrachtete Vektorfeld ist also zugleich wirbelfrei und quellenfrei! Ist umgekehrt $u(x, y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ auf D , dann ist u auf jeder Kreisscheibe $K \subset D$ (sogar auf jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet D' von D) der Realteil einer auf K (beziehungsweise D') holomorphen Funktion f .

Beweis:

Betrachte das Vektorfeld

$$(v_x, v_y) := -(u_y, -u_x)$$

Es erfüllt die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -u_{yy} = u_{xx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Daher ist tatsächlich (wie die Schreibweise bereits suggeriert) das neue Vektorfeld der Gradient einer stetig differenzierbaren Funktion v auf D' . Daher folgt wie oben

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ist holomorph.

□

Beispiel:

Eine harmonischen Funktion u , die keine globale harmonisch konjugierte besitzt.

$$u(x, y) = \ln|x + iy| \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u_{xx} = (x^2 + y^2)^{-2}(x^2 + y^2 - 2x^2)$$

$$u_{yy} = (x^2 + y^2)^{-2}(x^2 + y^2 - 2y^2)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Eine Bedeutung der Kettenregel für holomorphe Funktionen: Die Verpflanzung harmonischer Funktionen.

4.2.2 Die Verpflanzung harmonischer Funktionen

Sei $U(x, y)$ eine reelle harmonische Funktion auf D , ferner $D : \tilde{D} \mapsto D$ sei holomorph. Dann ist

$$V(x, y) = U(\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$$

eine auf \tilde{D} harmonische Funktion.

Begründung: Sei $z_0 \in D$ und $k \subset D$ eine Kreisscheibe um z_0 . Dann ist U auf D Realteil einer dort holomorphen Funktion F . Damit wird V der Realteil der Funktion $F(f(z))$. $F \circ f$ ist nach der Kettenregel differenzierbar, also $\operatorname{Re}(F \circ f) = V$ harmonisch.

Anwendung: Für jede holomorphe Funktion $f(z)$ ist außerhalb der Nullmenge von f

$$V(x, y) = \ln |f(x + iy)|$$

eine harmonische Funktion.

Bemerkung:

- (1) Die Imaginärteile holomorpher Funktionen sind ebenfalls harmonisch, denn mit $f(z)$ ist auch $g(z) = -if(z)$ holomorph.

Definition:

Eine bijektive Abbildung $f : \tilde{D} \mapsto D$ zwischen zwei Gebieten \tilde{D}, D der Ebene heißt „konform“ falls f samt Umkehrabbildung in allen Punkten des entsprechenden Gebietes holomorph ist. (Dann hat f überall die Ableitung $f'(z) \neq 0$, ist also in jedem Punkt $z_0 \in D$ winkeltreu.)

Beispiel:

$$f(z) = \frac{-z^2 - 2z + 1}{z^2 - 2z - 1}$$

liefert eine konforme Abbildung der halbierten Kreisscheibe

$$\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$$

auf die Kreisscheibe

$$E = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$$

Durchführung der Konstruktion:

i) Der Nenner

$$z^2 - 2z - 1 = (z - 1 + \sqrt{2})(z - 1 - \sqrt{2})$$

hat nur zwei Nullstellen, außerhalb dieser Nullstellen ist f holomorph.

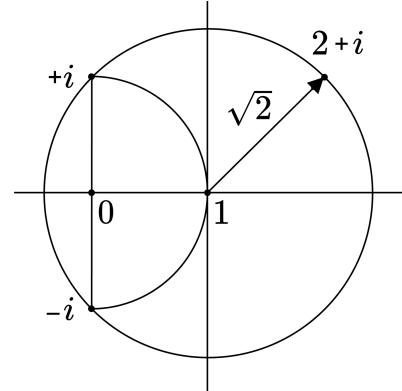
ii) Die Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{z+i}{iz+1}$$

$$T(0) = i ; \quad T(1) = 1 ; \quad T(\infty) = -i$$

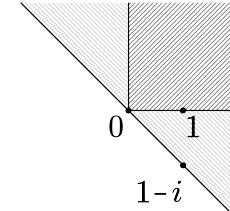
$$T(i) = \infty ; \quad T(-i) = 0$$

$$T(2+i) = \frac{2+2i}{2i} = i-1$$



T bildet ab den Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ um 1 auf die Gerade $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$, das Innere wird abgebildet bijektiv und holomorph auf die Halbebene $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$.

Ferner wird \tilde{D} abgebildet auf den positiven Quadranten Q .



iii) Die Quadrat-Abbildung $q(z) = z^2$ bildet die Halbebene $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$ ab auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{-ti; t \geq 0\}$ während Q auf die obere Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ bijektiv und holomorph abgebildet wird.

iv) Weil T die Kreisscheibe E auf die obere Halbebene abbildet, bildet T^{-1} die obere Halbebene konform auf E ab. Die gesuchte Abbildung ist:

$$T^{-1} \circ q \circ T(z)$$

Dabei ist

$$T^{-1}(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$$

$$\text{Mit } q \circ T(z) = (T(z))^2 = \frac{(z+i)^2}{(iz+1)^2} \text{ wird}$$

$$T^{-1} \circ q \circ T(z) = \frac{(T(z))^2 - i}{-i(T(z))^2 + 1} = \frac{(z+i)^2 - i(iz+1)^2}{-i(z+i)^2 + (iz+1)^2}$$

$$= \frac{(1+i)[z^2 + 2z - 1]}{-(1+i)[z^2 - 2z - 1]} = f(z)$$

4.3 Potenzreihen, das Grundbeispiel holomorpher Funktionen

Zu jeder Potenzreihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_n gehört ihr Konvergenzradius

$$\varrho := \{ r \geq 0 ; (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ ist beschränkt} \}$$

Haupteigenschaft:

Ist $|z - z_0| < \varrho$, dann konvergiert $S(z)$ sogar absolut (vergleiche mit der geometrischen Reihe), ist $|z - z_0| > \varrho$, dann ist $S(z)$ divergent.

$S(z)$ hat stets denselben Konvergenzradius wie ihre Ableitung $S'(z)$ (welche durch gewisse Differenzierung nach z aus $S(z)$ entsteht).

Beweis:

Sei ϱ (beziehungsweise ϱ') je der Konvergenzradius

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1} ; \quad \varrho' \leq \varrho \text{ ist fast direkt klar.}$$

Nun zeigt man: Falls $r < \varrho$, dann $r \leq \varrho'$, daher ist dann auch $\varrho' \geq \varrho$.

Sei ohne Einschränkung $r > 0$. Wähle $r_1 = r(1 + \vartheta) < \varrho$ mit $\vartheta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} n \left(\frac{r}{r_1} \right)^n &= \frac{n}{(1 + \vartheta)^n} \quad (\text{Bernoulli}) \\ &\leq \frac{n}{1 + n\vartheta} \leq \frac{1}{\vartheta} \end{aligned}$$

überdies wegen $r_1 < \varrho$ ist $a_n r_1^n$ beschränkt. Daher

$$|n a_n r^{n-1}| = |a_n r_1^n| \frac{1}{r} n \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$$

ebenfalls beschränkt.

□

4.3.1 Satz über die Holomorphie von Potenzreihen

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

habe positiven Konvergenzradius ϱ . Für z mit $|z - z_0| < \varrho$ gilt stets

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = S'(z)$$

Beweis:

Ohne Einschränkung $z_0 = 0$; Wähle r mit $|z| < r < \varrho$

$$\text{Erinnere: } a^n - b^n = (a - b) \sum_{m=0}^{n-1} a^m b^{n-m-1}$$

$$p_n(z, h) = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{m=0}^{n-1} (z+h)^m z^{n-m-1}$$

ist ein Polynom in h mit $p_n(z, 0) = nz^{n-1}$.

Außerdem gilt für $|z+h| \leq r$

$$|p_n(z, h)| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |z+h|^m |z|^{n-m-1} \leq n \cdot r^{n-1}$$

$$\text{Zu } \epsilon > 0 \text{ wähle } N \text{ mit } \sum_{n=N+1}^{\infty} |n a_n| r^{n-1} < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Damit } & \left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N a_n [p_n(z, h) - nz^{n-1}] + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n [p_n(z, h) - nz^{n-1}] \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N a_n [p_n(z, h) - nz^{n-1}] \right| + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Weil $\lim_{h \rightarrow 0} p_n(z, h) = nz^{n-1}$, folgt

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n [p_n(z, h) - nz^{n-1}] \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{falls } |h| < \delta$$

□

Quotientenkriterium für den Konvergenzradius

Gilt für die Koeffizienten a_n der Reihe

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$$

dann hat $S(z)$ den Konvergenzradius $\varrho = R$.

Beispiele:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad \text{hat den Konvergenzradius } \varrho = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ Für alle } k \in \mathbb{N}, \text{ hat } \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n \quad \text{den Konvergenzradius } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k = 1$$

5. Integration komplexwertiger Funktionen

Es wird ein Kurvenintegral für komplexwertige Funktionen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ auf Gebieten $D \subset \mathbb{C}$ und für (stückweise stetig differenzierbare) Kurven

$\gamma : [a, b] \rightarrow D$ erklärt,

sobald f stetig ist (das heißt $\operatorname{Re} f = u$ und $\operatorname{Im} f = v$ beide stetig auf D)¹ durch die Formel

$$\int_{\gamma} f(w) dw := \int_a^b [u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t), \gamma_2(t))] [\dot{\gamma}_1(t) + i\dot{\gamma}_2(t)] dt$$

worin $\gamma_1(t) = \operatorname{Re} \gamma(t)$; $\gamma_2(t) = \operatorname{Im} \gamma(t)$

Trennung in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(w) dw &= \int_a^b (u(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t)) dt \\ &\quad + i \int_a^b (u(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) + v(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t)) dt \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} f(w) dw := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$$

Darin ist $[a, b]$ Definitionssintervall der Kurve γ , welche im Definitionsbereich D von f verläuft. Bei Zerlegung $f = u + iv$ in Real- und Imaginärteil von f wird

¹Vergleiche Kapitel 3 in HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Dritter Teil.

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} (u, -v) d\vec{x} + i \int_{\gamma} (v, u) d\vec{x}$$

5.1 Integral und Stammfunktion

Es sei f die (stetige) Ableitung der auf D holomorphen Funktion F . Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [a, b] \mapsto D$ die Formel

$$\int_{\gamma} f(w) dw = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Insbesondere gilt dann für jede geschlossene Kurve $\delta : [a, b] \rightarrow D$ (das heißt $\delta(a) = \delta(b)$)

$$\oint_{\delta} f(w) dw = 0$$

Begründung:

$$\begin{aligned} F &= U + iV \quad \Rightarrow \\ f(x + iy) &= F'(x + iy) = U_x + iV_x \\ &= u + iv = V_y - iU_y \end{aligned}$$

Daher ist $(u, -v) = \text{grad } U$ und $(v, u) = \text{grad } V$

Damit²

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (u, -v) d\vec{x} &= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) \\ \int_{\gamma} (v, u) d\vec{x} &= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) \\ \int_{\gamma} f(w) dw &= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) + i[V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))] \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung über δ ist Spezialfall.

□

²Siehe HÖHERE MATHEMATIK Vorlesungen Dritter Teil.

Bemerkung:

(1) Für jede Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

ist im Innern des Konvergenzkreises

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion von f .

Warnendes Beispiel: Nichtexistenz eines globalen holomorphen Logarithmus.

Die in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ besitzt dort keine Stammfunktion.

Zur Begründung:

Denn angenommen F sei eine Stammfunktion von f in D . Dann wäre

$$\int_{\delta} f(w) dw = 0$$

für (zum Beispiel) die Randkurve $\delta = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ des Einheitskreises.

Damit falsch! Direkte Integralberechnung

$$\int_{\delta} \frac{dw}{w} = \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\delta}(t) dt}{\delta(t)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i \neq 0$$

□

||| Drei elementare Eigenschaften des Kurvenintegrals $\int_{\gamma} f(w) dw$

(E1) Es ist \mathbb{C} -linear bezüglich des Integranden:

$$\int_{\gamma} (f + g)(w) dw = \int_{\gamma} f(w) dw + \int_{\gamma} g(w) dw$$

$$\int_{\gamma} \lambda f(w) dw = \lambda \int_{\gamma} f(w) dw \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

(E2) Es ist invariant gegenüber Parametertransformation. Ist $\varphi : [c, d] \mapsto [a, b]$ eine (samt Umkehrabbildung) stetig differenzierbare Transformation mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, dann gilt für die transformierte Kurve $\delta(t) = \gamma(\varphi(t))$:

$$\int_{\delta} f(w) dw = \int_{\gamma} f(w) dw$$

Ist dagegen $\gamma^*(t) = \gamma((a+b)-t)$ die zu γ entgegengesetzte Kurve, dann

$$\int_{\gamma^*} f(w) dw = - \int_{\gamma} f(w) dw$$

(E3) Das Kurvenintegral ist additiv bezüglich Zusammensetzung von Kurven.

Seien $\gamma_1 : [a, b] \mapsto D$, $\gamma_2 : [b, c] \mapsto D$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$$\text{und } \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq c \end{cases}$$

dann gilt

$$\int_{\gamma=\gamma_1 \cup \gamma_2} f(w) dw = \int_{\gamma_1} f(w) dw + \int_{\gamma_2} f(w) dw$$

5.2 Die Integralformel von Cauchy

f sei holomorph auf D . Für jedes $z_0 \in D$ und jedes $r > 0$ derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ in D enthalten ist, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Dabei ist $|z - z_0| < r$ und $\gamma_r = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.2.1 Satz von der Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen

i) Eine im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z)$ lässt sich um jeden Punkt $z_0 \in D$ entwickeln in eine Potenzeihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ii) Ihr Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der Radius der größten offenen Kreisscheibe um z_0 in D .

iii) Für die Taylorkoeffizienten gelten die Formeln

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Dabei ist $\gamma_r = z_0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $r > 0$ ist beliebig unter der Nebenbedingung dass die Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ in D liegt.

Beweis:

Aus der Cauchy-Formel folgt für $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it}) \dot{\gamma}_r}{r e^{it} - (z - z_0)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it}) i}{1 - \left(\frac{z - z_0}{r e^{it}}\right)} dt \end{aligned}$$

mit Hilfe der geometrischen Reihe umschreiben:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{r e^{it}}\right)^n dt$$

da in t gleichmäßig konvergent folgt ($w = z_0 + r e^{it}$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it}) \dot{\gamma}_r(t)}{(r e^{it})^{n+1}} dt}_{a_n} \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

Nach der Herleitung konvergiert diese Reihe, sobald $|z - z_0| < r$ ist und die Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ in D liegt. Die (zweite) Integralformel für die a_n ist bewiesen (bei festem r). Die Formel $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ ist nun eine direkte Konsequenz des Zusammenhangs zwischen Potenzreihe und Derivirter. Diese Formel zeigt, dass die Koeffizienten unabhängig von der Hilfszahl r sind.

□

Durch Verwendung der Standard Integralabschätzung

$$\left| \int_{\gamma} g(w) dw \right| \leq l(\gamma) \max_{z \text{ längs } \gamma} |g(z)|$$

mit der Kreislänge

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t)} dt$$

ergeben sich die Cauchy-Ungleichungen für die Taylorkoeffizienten:

$$\text{Sei } M(r) = \max_{z-z_0=r} |f(z)|$$

Dann ist: $|a_n| \leq M(r)r^{-n}$

Definition:

Jede auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion heißt „ganze Funktion“.



Beispiele:

Alle Polynome, ferner e^z , e^{it} und Linearkombinationen wie beispielsweise

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) & \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) & \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- (2) Die Taylorentwicklung einer ganzen Funktion hat um jeden Punkt z_0 den Konvergenzradius $\varrho = \infty$.

5.2.2 Satz von Liouville

Jede beschränkte ganze Funktion f ist konstant.

Beweis aus der Cauchy-Ungleichung:

Nach Voraussetzung (für $z_0 = 0$) ist $M(r)$ beschränkt, etwa $\leq M$. Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad |a_n| \leq Mr^{-n} \quad \text{gilt für jedes } r > 0$$

Für $n > 0$ ergibt der Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ $|a_n| = 0$, also $a_n = 0 \quad \forall n > 0$.

□

Anwendung:

Neuer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra über \mathbb{C} . Jedes nichtkonstante Polynom P hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

5.3 Identitätssatz für analytische Funktionen

Es seien $f(z)$ und $g(z)$ analytisch im Gebiet D . $A = \{z \in D ; f(z) = g(z)\}$ hat nur zwei Möglichkeiten. Entweder $A = D$ oder jeder Punkt $a \in A$ besitzt eine Umgebung U mit $f(z) \neq g(z)$ für alle $z \in U$, $z \neq a$. Äquivalente Formulierung für die Differenz $h(z) = f(z) - g(z)$.

5.3.1 Satz über die Nullstellen analytischer Funktionen

Die Nullstellenmenge N einer auf dem Gebiet D analytischen nichtkonstanten Funktion $h(z)$ besteht nur aus isolierten Punkten in D . (Auf dem Rand von D können Häufungspunkte von Nullstellen liegen.)

Der **Beweis** besteht aus einer lokalen und einer globalen Betrachtung.

1) Die lokale Betrachtung:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sei die nichtkonstante Taylor-Reihe von h um z_0

$$k := \min_{a_n \neq 0} n$$

$$h(z) = a_k (z - z_0)^k \left[1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_k} (z - z_0)^{n-k} \right]$$

Die eckige Klammer ist stetig mit Wert 1 im Punkt $z = z_0$. Daher gibt es ein $r > 0$ derart, dass sie auf $|z - z_0| \leq r$ keine Nullstelle hat.

Daher hat auch $h(z)$ auf $|z - z_0| \leq r$ höchstens die eine Nullstelle $z = z_0$. Anders ausgedrückt: In einem Häufungspunkt z_0 von Nullstellen der analytischen Funktion $h(z)$ hat deren Taylorreihe lauter Koeffizienten $a_n = 0$.

2) Die globale Betrachtung:

Annahme, $z_0 \in D$ sei ein Häufungspunkt von Nullstellen von $h(z)$. Dann ist nach **1)** $h(z)$ auf einer in D enthaltenen (abgeschlossenen) Kreisscheibe K_0 um z_0 identisch 0. z_1 sei ein weiterer Punkt in D . Verbinde z_0 mit z_1 durch eine Kurve γ in D . Kreisscheiben-Überdeckung von $\gamma([a, b])$ mit endlich vielen abgeschlossenen Kreisen K_n in D derart, dass der Mittelpunkt von K_{n+1} in K_n fällt.

Lokale Betrachtung: Wenn $h(z)$ auf K_n identisch verschwindet, dann ist der Mittelpunkt von K_{n+1} Häufungspunkt von Nullstellen, daher ist $h(z)$ identisch 0 auch auf K_{n+1} .

□

5.3.2 Spezialisierung der Cauchy-Integralformel für $z = z_0$

Mittelwerteigenschaft analytischer Funktionen

Für jede Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ im Holomorphiegebiet D der Funktionen f gilt die Formel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Der Wert von f im Mittelpunkt ist gleich dem Integralwert über den Rand des Kreises!

Übertragung auf Lösungen $u(x, y)$ der Laplace Gleichung, also auf harmonische Funktionen $u(x, y)$. u ist auf Kreisscheiben im Definitionsbereich von u bekanntlich der Realteil einer analytischen Funktion $f(z)$.

Trenne im obigen Integral Real- und Imaginärteile:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt$$

Diese Mittelwertformel für harmonische Funktionen $u(x, y)$ gilt für jede ganz im Definitionsbereich von u enthaltene Kreisscheibe:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

5.3.3 Prinzip vom Maximum und Minimum für analytische Funktionen

Jede auf dem Gebiet D harmonische Funktion $u(x, y)$ welche im Punkt $(x_0, y_0) \in D$ ein Maximum oder ein Minimum hat, ist schon konstant auf D .

Beweis:

Es genügt Maxima zu diskutieren, da mit $u(x, y)$ auch $-u(x, y)$ die Laplace Gleichung löst. Ferner darf ohne Einschränkung $u(x, y) > 0$ vorausgesetzt werden denn mit $u(x, y)$ ist auch $u(x, y) + \text{const}$ harmonisch.

Der Rest des Beweises enthält neben einer lokalen Betrachtung eine globale Betrachtung, die mit der Methode der Kreisscheibenüberdeckung durchgeführt wird.

Die lokale Betrachtung: Integralabschätzung aus der Mittelwertformel.

$M(r)$ bezeichne das Maximum von $u(x, y)$ auf

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

wobei $|z - z_0|^2 \leq r^2$ in D liegt. Da $u(x_0, y_0)$ maximal, wird

$$M(r) \leq u(x_0, y_0)$$

Ferner auf dem Kreise

$$u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \leq M(r) \quad \forall t$$

Mittelwertformel:

$$0 \leq u(x_0, y_0) - u(r)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) - u(r)] dt \leq 0$$

Die Ungleichungskette ist nur gültig, falls gleichzeitig

$$u(x_0, y_0) = M(r) \quad \text{und}$$

$$M(r) = u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \quad \forall t$$

Daher ist für jedes zulässige $r > 0$ $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ auf dem Kreis $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Das heißt u ist konstant auf jenen Kreisscheiben um (x_0, y_0) .

□

Das Maximumprinzip für analytische Funktionen

Hat für die auf D holomorphe Funktion $f(z)$ die Betragsfunktion $|f(z)|$ im Punkt $z_0 \in D$ ein Maximum, dann ist $f(z)$ konstant.

Beweis:

Im Fall $f(z_0) = 0$ ist nichts zu zeigen. Daher ohne Einschränkung $f(z_0) \neq 0$. Es darf sogar $f(z_0) = 1$ betrachtet werden (sonst betrachte $g(z) = f(z)/f(z_0)$). Der Realteil $u(x, y)$ von $f(x + iy)$ ist harmonisch, ferner

$$u(x, y) \leq |u(x, y)| \leq |f(x + iy)|$$

und

$$u(x_0, y_0) = f(x_0 + iy_0) = 1$$

Also ist (x_0, y_0) ein Maximum von $u(x, y)$ daher $u(x, y) = \text{const}$ nach dem letzten Satz.

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen:

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) - iv_y(x, y) = 0$$

$f'(z) = 0$ impliziert $f(z) = \text{const}$ auf dem Gebiet D .

□

Anwendung:

Harmonische Funktionen nehmen ihre Maxima und Minima auf dem Rand an.

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet D . $u(x, y)$ sei harmonisch auf D und auf $\bar{D} = D \cup \text{RdD}$ ($\text{RdD} = \text{Menge der Randpunkt auf } D$). Dann nimmt u seine Maxima und Minima auf RdD an.

Beweis:

\bar{D} ist kompakt, deshalb nimmt die stetige reelle Funktion u auf \bar{D} sowohl Maxima als auch Minima an. Wenn u nicht konstant ist, werden nach dem Maximumprinzip die Maxima und Minima nicht in D angenommen.

□

Konsequenz:

Das Dirichlet-Problem für beschränkte Gebiete hat höchstens eine Lösung.

Begründung:

Gegeben ist auf dem Rand eines beschränkten Gebietes eine stetige Funktion $u(x, y)$. Dann existiert höchstens eine auf \bar{D} stetig und auf D harmonische Fortsetzung von $u(x, y)$. Denn angenommen, $U(x, y), V(x, y)$ seien zwei Lösungen des Problems. Dann ist $U(x, y) - V(x, y)$ stetig auf \bar{D} und harmonisch auf D . Überdies hat diese Differenz auf dem Rand RdD überall den Wert 0. Also ist für $W(x, y) = U(x, y) - V(x, y)$ das Maximum = Minimum = 0, also $U = V$.

5.4 Die Poissonsche Integralformel

$f(z)$ sei holomorph in einer Umgebung von $|z| \leq 1$. Dann gilt für $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt$$

Beweis:

Im Fall $z = 0$ ist das die Mittelwertsformel. Für $0 < |z| < 1$ ist $\frac{1}{\bar{z}}$ im Äußeren des Einheitskreises. Die Funktion

$$g(w) = \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\bar{z}}}$$

ist dann holomorph in einem Kreis, der $|z| \leq 1$ im Innern enthält. Sie hat daher auf diesem Kreis eine Stammfunktion $G(w)$. Daher wird für $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$0 = \int_{\gamma} g(w) dw = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) \dot{\gamma}(t)}{e^{it} - \frac{1}{\bar{z}}} dt = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\bar{z}}} dw \quad (*)$$

denn $\frac{1}{\bar{z}}$ außerhalb γ ! Auf $|w| = 1$ gilt $\bar{w} = w^{-1}$. Damit

$$\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \frac{1}{\bar{z}}} = \frac{z - \frac{1}{\bar{z}}}{(w - z)(w - \frac{1}{\bar{z}})} \quad (\text{erweitern mit } \bar{z}\bar{w})$$

$$\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \frac{1}{\bar{z}}} = \frac{(1 - |z|^2)\bar{w}}{|w - z|^2} \quad (**)$$

Mit Hilfe von (*) die Null von der Cauchy Integralformel abziehen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-\frac{1}{\bar{z}}} dw}_{=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-\frac{1}{\bar{z}}} \right] dw \end{aligned}$$

und unter dem Integral für den Ausdruck in den eckigen Klammern (**) verwenden:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)\bar{w}(1-|z|^2)}{|w-z|^2} dw \quad ; \quad w = e^{it} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} dt \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

(3) Für die konstante Funktion $f(z) \equiv 1$ folgt die Beziehung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} dt = 2\pi$$

Aus ihr lässt sich die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe für die Kreisscheibe ableiten.

5.4.1 Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe für eine Kreisscheibe

Gegeben sei eine stetige reelle Funktion \hat{u} auf dem Rand S^1 des Einheitskreises. Dann definiert

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} dt$$

eine stetige Fortsetzung von \hat{u} in $|z| \leq 1$. Für $|z| < 1$ ist $u(z)$ der Realteil der in $|z| < 1$ holomorphen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

Insbesondere ist $u(z)$ eine in $|z| < 1$ harmonische Fortsetzung von \hat{u} .

Bemerkung:

- (4) Schwierig im Beweis ist nur die Stetigkeit der Fortsetzung in den Punkten von S^1 .

6. Ausbau der Theorie analytischer Funktionen

6.1 Der holomorphe Logarithmus

$$\oint_{|w|=1} \frac{dw}{w} = 2\pi i \quad \text{ist ungleich } 0$$

Daher besitzt $z \mapsto \frac{1}{z}$ im ganzen Definitionsgebiet $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion.
Die Frage nach einer holomorphen Stammfunktion

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

führt auf die Vektorfelder

$$(u(x, y), -v(x, y)) \quad \text{beziehungsweise} \quad (v(x, y), u(x, y))$$

wo $u = \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $v = \operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

$$(u, -v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

ist Gradient von $U(x, y) = \ln |z|$ und

$$(v, u) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

ist das orthogonale Vektorfeld.

Polarkoordinaten in der Ebene:

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Implizite Differentiation ergibt aus der zweiten (beziehungsweise ersten) Gleichung

$$\varphi_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Mögliche Lösungen für $V(x, y)$ bilden die stetigen Fixierungen von $\varphi(x, y) = \arg z$ des Winkels zwischen Ortsvektor von z und positiver reeller Achse. Das Hemmnis für die Existenz eines stetigen globalen Arguments ist zugleich das Hemmnis für die Existenz eines globalen analytischen Logarithmus.

Auf $D_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ wird der Hauptwert(-zweig) des komplexen Logarithmus

$$\text{Log } z = \ln |z| + i\varphi(x, y) \quad -\pi < \varphi(x, y) < \pi$$

Nebenzweige sind

$$\text{Log } z = \ln |z| + i\varphi(x, y) \pm 2\pi ik \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$D_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\} \quad \text{Log } z = \ln |z| + i\varphi(x, y) \quad (-\pi < \varphi(x, y) < \pi)$$

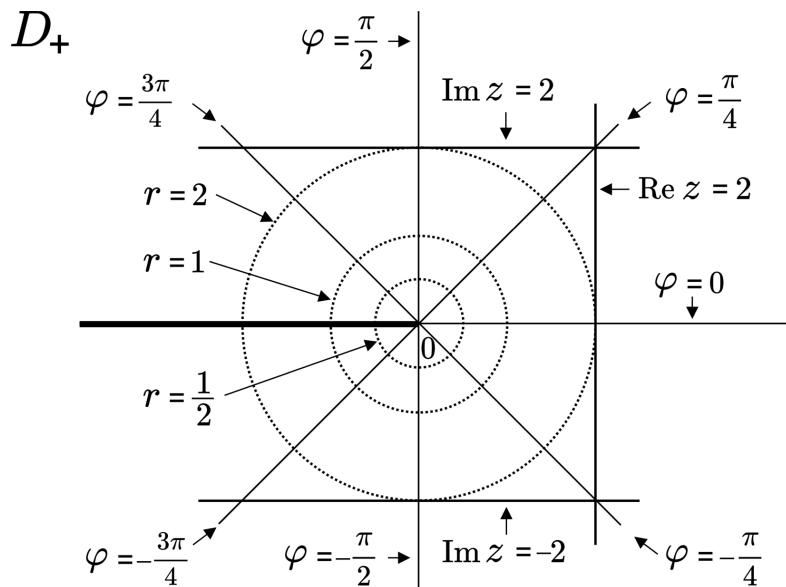
$$D_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \quad \text{Log } z = \ln |z| + i\varphi(x, y) \quad (0 < \varphi(x, y) < 2\pi)$$

Definition der allgemeinen Potenz z^α mittels des holomorphen Logarithmus

$$z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log } z)$$

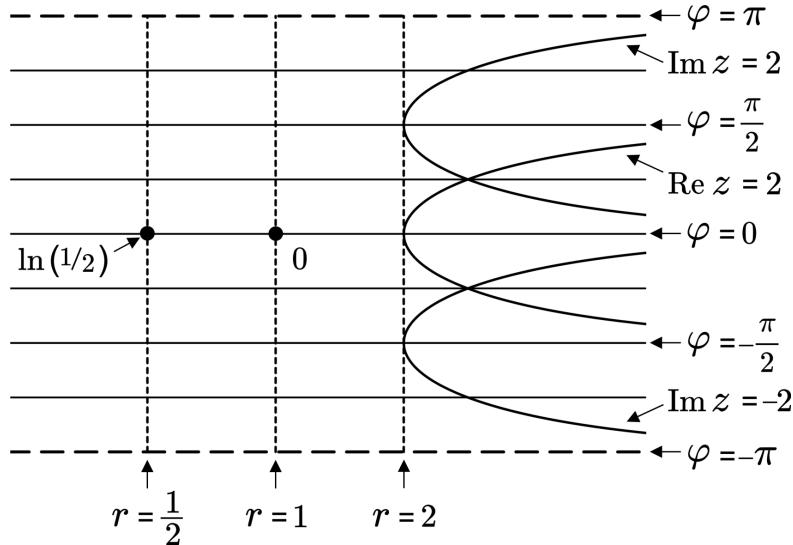
Festhalten: Zur exakten Definition gehört ein Schnitt von ∞ nach 0 in einer Ebene, der erst die Definition des holomorphen Logarithmus möglich macht. Ferner gehört dazu die Fixierung eines der Haupt- oder Nebenzweige.

Abbildungseigenschaften des holomorphen Logarithmus:



w-Ebene:

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i\varphi$$



- Die Strahlen

$$z = re^{i\varphi} ; \quad r \in]0, \infty[$$

werden abgebildet auf Geraden

$$\{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w = \varphi\}$$

- Die punktierten Kreise

$$\{z = re^{i\varphi}, -\pi < \varphi < \pi\}$$

werden abgebildet auf Geradenstücke

$$\{w \in \mathbb{C}, -\pi < \operatorname{Im} w < \pi, \operatorname{Re} w = \ln r\}$$

- Die Geraden $\operatorname{Re} z = c > 0; z = c + it$ werden abgebildet auf die $t \in \mathbb{R}$ Kurven

$$w = \ln |c + it| + i \arctan \left(\frac{t}{c} \right)$$

- Den Drehungen in der z-Ebene um einen Winkel α entspricht in der w-Ebene eine rein imaginäre Translation

- Die Geraden $\operatorname{Im} z = \pm 2$ in der z-Ebene sind Drehungen von $\operatorname{Re} z = 2$ um $\pm \frac{\pi}{2}$

- In der w-Ebene entsprechen diesen Geraden somit Translationen der Abbildung von $\operatorname{Re} z = 2$ um $\pm \frac{\pi}{2}$

6.2 Die Umlaufzahl

wird erklärt für geschlossene Kurven $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ und für Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, aus dem Komplement des Kurvenbildes

$$n_\gamma(z) = \oint_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

Diese Zahl (betrachte lokale Stammfunktion von $w \mapsto \frac{1}{w - z}$) misst den (durch den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ normierten) Zuwachs des Winkels von $\gamma(t) - z$ beim Durchlaufen der Kurve.

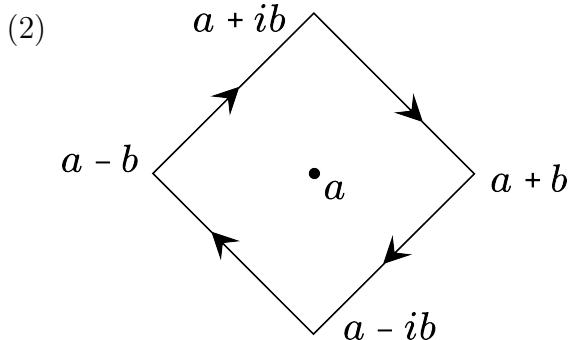
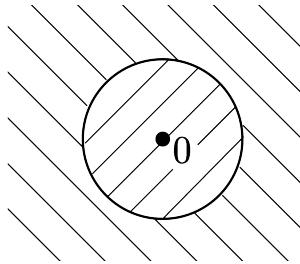
Weil γ geschlossen ist, wird $n_\gamma(z)$ stets ganzahlig. $n_\gamma(z)$ ist als Funktion von z stetig. Daher ist $n_\gamma(z)$ je konstant auf den Teilgebieten von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Auf dem unbeschränkten Teilgebiet von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ ist die Umlaufzahl $n_\gamma(z) = 0$.

Beispiele:

$$(1) \quad \gamma(t) = re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$n_\gamma(z) = 1, \quad \text{falls } |z| < r$$

$$n_\gamma(z) = 0, \quad \text{falls } |z| > r$$



$b \neq 0$; γ = Randkurve des Quadrates mit den Ecken

$$a + b ; a - ib ; a - b ; a + ib$$

$n_\gamma(z) = 0$ außerhalb des Quadrates

$n_\gamma(z) = -1$ im Innern des Quadrates

Rechnerisch (zur Warnung)

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

wo je γ_k die Verbindungsstrecke von $a + i^k b$ nach $a + i^{k-1} b$.

$$\gamma_k(t) = a + i^k b + (t - k)(i^{k-1} b - i^k b) \quad k \leq t \leq k + 1$$

$$\dot{\gamma}_k(t) = -i^k b(1 + i)$$

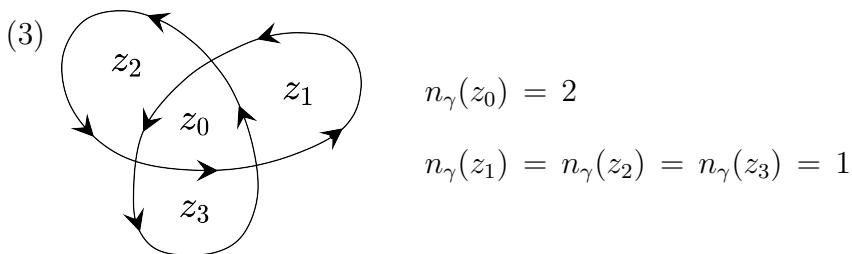
$$\begin{aligned}
2\pi i n_\gamma(a) &= \sum_{k=0}^3 \int_k^{k+1} \frac{\dot{\gamma}_k(t)}{\gamma_k(t) - a} dt \\
&= \sum_{k=0}^3 \int_k^{k+1} \frac{-bi^k(1+i)}{bi^k(1-(t-k)(1+i))} dt \\
&= -4 \int_0^1 \frac{(1+i)}{1-t((i+1))} dt = -4 \int_0^1 \frac{(1+i)(1-t+it)}{(1-t)^2+t^2} dt
\end{aligned}$$

Damit

$$2\pi i n_\gamma(a) = -4 \int_0^1 \frac{1-2t+i}{(1-t)^2+t^2} dt$$

Die linke Seite (also auch das Integral) ist rein imaginär. Daher

$$\begin{aligned}
2\pi i n_\gamma(a) &= -4i \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^2+t^2} dt \quad (x = 2t-1) \\
&= -4i \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} = -4i \arctan x \Big|_{-1}^{+1} = -2\pi i
\end{aligned}$$



Prinzip zur Erkennung der Umlaufzahl im Falle von Kurven mit Selbstüberschneidungen: Zerlegung in mehrere einfach geschlossene Teilkurven.

6.2.1 Allgemeine Version der Cauchy Integralformel

f sei holomorph im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma : I \mapsto D$ eine geschlossene Kurve derart, dass für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ die Umlaufzahl $n_\gamma(z_0) = 0$ (eventuell vorhandene Löcher in D sollen von γ nicht umschlossen werden). Dann gilt

$$\boxed{n_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad z \in D \setminus \gamma(I)}$$

Ein **Beweis** aus dem Liouvillschen Satz nach Dixon (1971):

$$E := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I); n_\gamma(z) = 0\}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C} = D \cup E$

1) Hilfsfunktion für $(z, w) \in D \times D$

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(w) & \text{falls } w = z \end{cases}$$

g ist in $D \times D$ stetig und für jedes w holomorph in z .

2) Durch Integration erhält man eine zweite Hilfsfunktion

$$G(z) = \begin{cases} \int_{\gamma} g(z, w) dw & \text{falls } z \in D \\ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw & \text{falls } z \in E \end{cases}$$

Auf $z \in D \cap E$ gilt, dass beide Ausdrücke für $G(z)$ identisch sind weil die Umlaufzahl n_γ dort 0 ist:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i n_\gamma(z) f(z) \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} g(w, z) dw \end{aligned}$$

Daher ist $G(z)$ eine ganze Funktion. Aus der Erklärung für $z \in E$ kommt $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = 0$. $G(z)$ ist also eine beschränkte ganze Funktion und somit nach dem Satz von Liouville konstant mit $G(z) = 0$ für alle z .

3) Für die $z \in D \setminus \gamma(I)$ ist die erste Formel zuständig. Resultat:

$$0 = G(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw$$

das heißt

$$n_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

□

6.3 Allgemeine Version des Integralsatzes von Cauchy

f sei holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma : I \mapsto D$ sei eine geschlossene Kurve mit Umlaufzahl $n_\gamma(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Dann ist

$$\oint_{\gamma} f(w) dw = 0$$

Beweis:

Durch Einsetzen der beiden Funktionen $f(z)$, $zf(z)$ in die Integralformel.

Für $z \in D$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{wf(w)}{w-z} dw}_{n_\gamma(z)(zf(z))} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf(w)}{w-z} dw}_{z \cdot n_\gamma(z)f(z)} = 0 \end{aligned}$$

□

Definition des einfachen Zusammenhangs:

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt „einfach zusammenhängend“, wenn für jede geschlossene Kurve $\gamma : I \mapsto D$ und alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ die Umlaufzahl $n_\gamma(z_0) = 0$.

Bemerkung:

- (1) Für auf einfach zusammenhängenden Gebieten D holomorphe Funktionen f gilt für jede geschlossene Kurve $\gamma : I \mapsto D$

$$\oint_{\gamma} f(w) dw = 0$$

6.3.1 Existenz globaler Stammfunktionen

$f(z)$ sei holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet D . Dann existiert auf D eine holomorphe Funktion $F(z)$ mit

$$F'(z) = f(z)$$

Beweis:

$z_0 \in D$ fest gewählt. Zwei Verbindungskurven $\gamma, \delta : I \mapsto D$ mit gleichem Anfangspunkt z_0 und gleichem Endpunkt $z \in D$ liefern

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\delta} f(w) dw$$

da nach Cauchy

$$\int_{\gamma \cup \delta^*} f(w) dw = 0$$

Mit anderen Worten, jede Verbindungskurve γ_z von z_0 mit $z \in D$ liefert dasselbe Integral

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

Elementare Integralabschätzung ergibt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = 0$$

□

Anwendung: Existenz holomorpher Logarithmen

$f(z)$ sei holomorph und nullstellenfrei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet D . Dann existiert auf D eine holomorphe Funktion $g(z)$ mit

$$f(z) = e^{g(z)}$$

Zum **Beweis:**

integriert man die logarithmische Ableitung $\frac{f'(z)}{f(z)}$ der Funktion $f(z)$

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} dw + \text{const}$$

mit $e^{\text{const}} = f(z_0)$

□

6.3.2 Isolierte Singularitäten

Wenn $f(z)$ holomorph ist in der punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < \varrho$ dann heißt z_0 eine „isolierte Singularität“ von f . Ist das der Fall, dann besitzt $f(z)$ in $0 < |z - z_0| < \varrho$ eine sogenannte Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Sie ist absolut konvergent in $0 < |z - z_0| < \varrho$ und die (durch f eindeutig bestimmten) Koeffizienten haben die Integralform

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

mit $\gamma_r = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, r beliebig in $]0, \varrho[$.

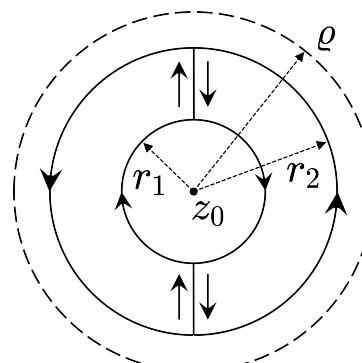
Beweisskizze:

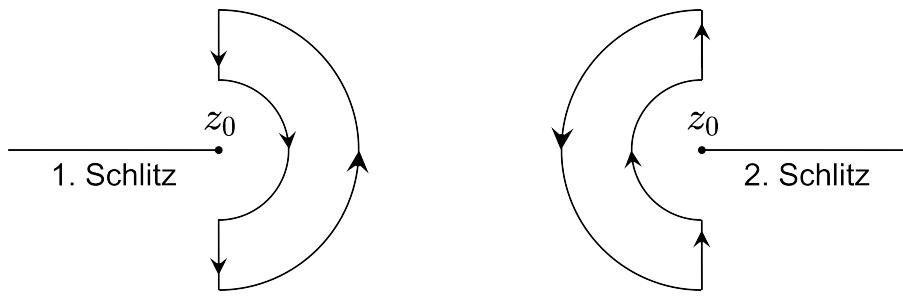
- 1) Die Integrale sind von r unabhängig

$$0 < r_1 < r_2 < \varrho$$

Zerlegung der Integrationsweg in zwei einfach geschlossene Kurven in einem einfach zusammenhängenden Holomorphiegebiet von

$$\frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}$$





2) Gültigkeit der Laurent-Entwicklung durch Integration der Hilfsfunktion

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(w) & \text{falls } w = z \end{cases}$$

Wichtige Bemerkung:

(2) Genau dann besitzt die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in} \quad 0 < |z - z_0| < \varrho$$

eine Stammfunktion, nämlich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n (z - z_0)^{n+1}}{n+1} \quad , \quad \text{wenn } a_{-1} = 0.$$

Definition:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(w) dw = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

heißt das Residuum von f in der isolierten Singularität z_0 .

Natürliches Auftreten isolierter Singularitäten

bei Quotienten $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ zweier in einem Gebiet D analytischer Funktionen $g, h \neq 0$.

h hat nur isolierte Nullstellen (vergleiche [Identitätssatz](#)) daher werden im Quotienten $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ die Nullstellen von h zu isolierten Singularitäten. Ist z_0 eine Nullstelle von h , dann existiert eine größte Zahl n mit

$$f^{(k)} = 0 \quad (0 \leq k < n)$$

mit anderen Worten

$$n = \min_{c_k \neq 0} k ,$$

wobei die c_k aus der Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ von h stammen.

n heißt „Vielfachheit“ oder „Ordnung“ der Nullstelle von h .

6.3.3 Eine Residuenformel

z_0 sei eine einfache Nullstelle von $h(z)$, dann gilt

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Beweis:

Weil z_0 von 1-ter Ordnung, $h(z) = (z - z_0)h_1(z)$ wobei $h_1(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph und nullstellenfrei ist.

$$f_1(z) = \frac{g(z)}{h_1(z)}$$

ist also holomorph in einer Umgebung von z_0 . Wegen

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{g(z)}{h_1(z)}$$

entsteht die Laurentreihe von $f(z)$ um z_0 aus der Taylorreihe von $f_1(z)$ um z_0 durch Division mit $z - z_0$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= f_1(z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$(1) \quad f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$z_0 = k\pi$, $\sin z$ hat dort eine einfache Nullstelle

$$\text{Res}(\cot z, k\pi) = \frac{\cos k\pi}{\sin' k\pi} = 1$$

6.3.4 Logarithmische Ableitungen

$\frac{h'(z)}{h(z)}$ für holomorphe Funktionen $h \neq \text{const}$ haben isolierte Singularitäten in den Nullstellen z_0 (n -fach) von $h(z)$.

Taylorreihe von $h(z)$

$$h(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad c_n \neq 0$$

$$h(z) = c_n (z - z_0)^n [1 + \text{ höhere Terme in } (z - z_0)]$$

$$h'(z) = n c_n (z - z_0)^{n-1} [1 + \text{ höhere Terme in } (z - z_0)] \implies$$

$$\text{Res} \left(\frac{h'(z)}{h(z)}; z_0 \right) = n$$

In Worten: Das Residuum der logarithmischen Ableitung $\frac{h'(z)}{h(z)}$ in einer Nullstelle der nichtkonstanten holomorphen Funktion h ist gleich der Ordnung der Nullstelle.

Zerlegung der Laurent-Reihe in Haupt- und Nebenteil

z_0 sei eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f(z)$. In $0 < |z - z_0| < \varrho$ ist also f holomorph und hat die dort eindeutige, absolut konvergente Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dabei heißen

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

beziehungsweise

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

„Hauptteil“ beziehungsweise „Nebenteil“ von f im Punkt z_0 . Die Hauptteilreihe konvergiert (Betrags Abschätzung) falls $z \neq z_0$, sie stellt damit eine in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktionsreihe dar. Dagegen ist die Nebenteilreihe mindestens in $|z - z_0| < \varrho$ (einschließlich des Mittelpunktes) holomorph.

6.4 Residuensatz

Im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ sei gegeben eine analytische Funktion $f(z)$. Ferner sei $\gamma : I \mapsto D$ eine geschlossene Kurve, deren Umlaufzahl $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ abgesehen von endlich vielen Ausnahmen z_1, z_2, \dots, z_N . Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w) dw = \sum_{k=1}^N n_\gamma(z_k) \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Beweis:

z_1, z_2, \dots, z_N sind isolierte Singularitäten, deshalb ist in einer punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_k| < \varrho$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)} (z - z_k)^n$$

Sei

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(k)} (z - z_k)^{-n}$$

der Haupteil von f bei z_k . Dann ist

$$g(z) = f(z) - f_1(z) - \dots - f_N(z)$$

sogar in $D' = D \cup \{z_1, \dots, z_N\}$ holomorph (beachte: $f_k(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$). Dann ist nach dem Cauchy Integralsatz

$$\int_{\gamma} g(w) dw = 0$$

also

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma} f_k(w) dw$$

In

$$f_k(z) = \frac{a_{-1}^{(k)}}{(z - z_k)} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}^{(k)} (z - z_k)^{-n}$$

hat der zweite Summand in $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ eine Stammfunktion, das heißt

$$\int_{\gamma} f_k(w) dw = \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^{(k)}}{w - z_k} dw = \text{Res}(f, z_k) \cdot 2\pi i n_{\gamma}(z_k)$$

□

Beispiel:

- (1) Sei h holomorph in einer Umgebung der Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ und ohne Nullstelle auf $|z - z_0| = r$. Dann ist der Wert von

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

gleich der Anzahl der mit Vielfachheit gezählten Nullstellen von h in $|z - z_0| < r$.

6.4.1 Die Klassifizierung isolierter Singularitäten

f sei auf $0 < |z - z_0| \leq \varrho$ holomorph, das heißt z_0 ist eine isolierte Singularität von f . Sie heißt

hebbare: wenn $f(z)$ nach z_0 holomorph fortgesetzt werden kann.

außerwesentlich: wenn $(z - z_0)^n f(z)$ nach z_0 holomorph fortgesetzt werden kann für ein $n \in \mathbb{N}$.

wesentlich: wenn $(z - z_0)^n f(z)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ holomorph nach z_0 fortgesetzt werden kann.

Außerwesentliche Singularitäten von z_0 heißen auch Pole; es gibt in diesem Fall eine kleinste natürliche Zahl n_0 , so dass $(z - z_0)^{n_0} f(z)$ holomorph nach z_0 fortgesetzt werden kann; n_0 heißt „Polstellenordnung“.

Beispiele:

- (2) $\frac{\sin z}{z}$ hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität, die holomorphe Fortsetzung ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

- (3) $\frac{e^z}{z^n}$ hat in $z_0 = 0$ einen Pol n -ter Ordnung.

$$(4) \ e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad \text{hat in } z_0 = 0 \text{ eine wesentliche Singularität.}$$

An der Laurent-Entwicklung von f um z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

beziehungsweise am Hauptteil

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

lässt sich die Art der Singularität ablesen: Ist

$$f_-(z) \text{ identisch Null} \iff z_0 \text{ hebbbar.}$$

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^N a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad a_{-N} \neq 0 \iff z_0 \text{ ist Pol } N\text{-ter Ordnung.}$$

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \text{ mit unendlich vielen } a_{-n} \neq 0 \iff z_0 \text{ ist wesentliche Singularität.}$$

h habe in z_0 einen Pol n -ter Ordnung. Dann gilt für das Residuum der logarithmischen Ableitung $\frac{h'(z)}{h(z)}$ von h

$$\text{Res}\left(\frac{h'(z)}{h(z)}, z_0\right) = -n$$

Denn

$$h(z) = (z - z_0)^{-n} h_1(z), \quad h_1(z) \neq 0 \text{ und holomorph}$$

$$h'(z) = -n(z - z_0)^{-n-1} h_1(z) + (z - z_0)^n h'_1(z)$$

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{-n}{(z - z_0)} + \frac{h'_1(z)}{h_1(z)}$$

Also: $\frac{h'_1(z)}{h_1(z)}$ als Taylorreihe

$$\text{Res}\left(\frac{h'(z)}{h(z)}, z_0\right) = -n, \quad \text{da } a_{-1} = -n$$

6.4.2 Das Null- und Polstellen zählende Integral

Sei $\gamma : I \mapsto \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve, deren Komplement $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ in genau zwei Gebiete zerfällt, ein beschränktes D und ein unbeschränktes. Ferner sei $n_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in D$. Ist dann $h(z)$ in einer Umgebung $\overline{D} = D \cup \gamma(I)$ bis auf Pole holomorph (also meromorph), sowie ohne Null- und Polstellen auf $\gamma(I)$, so ist

$$\oint_{\gamma} \frac{h'(w)}{h(w)} dw = N - P$$

wobei N die Anzahl der Null- und P die Anzahl der Polstellen von h bezeichnen, entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Bemerkung:

$$(3) \quad \Gamma(t) = h(\gamma(t)) , \quad t \in I = [a, b]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h'(w)}{h(w)} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{h'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{h(\gamma(t))} dt = n_{\Gamma}(0) \end{aligned}$$

6.4.3 Der Satz von Ronché

Wieder sei $\gamma : I \mapsto \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve deren Komplement $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ in eine beschränkte Komponente D und eine unbeschränkte zerfällt; $n_\gamma(z) = 1 \forall z \in D$. Sind dann $f(z)$ und $g(z)$ analytisch in einer Umgebung von $\overline{D} = D \cup \gamma(I)$ und gilt $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \gamma(I)$ dann haben f und $f+g$ in D dieselbe Anzahl von Nullstellen!

Beweis:

f und $f+g$ sind ohne Nullstellen auf $\gamma(I)$; N_{f+g} bezeichne die Anzahl der Nullstellen von $f+g$ in D :

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f' + g'}{f + g} dw$$

$$\frac{f' + g'}{f + g} - \frac{f'}{f} = \frac{g'f - f'g}{f(f+g)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{g'f - f'g}{f^2} \cdot \frac{1}{1 + g/f} \\
 &= (1 + g/f)' \cdot \frac{1}{1 + g/f}
 \end{aligned}$$

Also ist

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(1 + g/f)'}{1 + g/f} dw = N_f + n_{\Gamma}(0)$$

wobei

$$\Gamma(t) = 1 + \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$$

und $\Gamma(t)$ liegt in $|z - 1| < 1$ für alle $t \in I$, das heißt $n_{\Gamma}(0) = 0$.

□

7. Anwendungen des Residuensatzes

7.1 Anwendungen I

Auswertung von Integralen der Form

$$\int_0^{2\pi} R(e^{it}) dt$$

mit rationalem $R(z)$ ohne Polstellen auf dem Rand S^1 des Einheitskreises.

Mit $f(z) = \frac{R(z)}{iz}$ ist

$$\int_0^{2\pi} R(e^{it}) dt = 2\pi i \sum_{|\zeta| < 1} \text{Res}(f, \zeta) \quad (\text{I})$$

$$2\pi i \sum_{|\zeta| < 1} \text{Res}(f, \zeta) = \oint_{|z|=1} f(w) dw = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} R(e^{it}) dt$$

\downarrow

$$\gamma(t) = e^{it}$$

Beispiele:

(1) ($|a| \neq 1$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - a^2} & \text{falls } |a| < 1 \\ \frac{2\pi}{a^2 - 1} & \text{falls } |a| > 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t + z} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad z \in \underbrace{\mathbb{C} \setminus [-1, 1]}_D$$

wobei für $z = x > 1$ der holomorphe Wurzelzweig durch $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ normiert ist.

Bemerkenswert:

Obwohl D nicht einfach zusammenhängend ist, kann der Wurzelzweig auf D definiert werden.

Beweis:

Beide Seiten sind holomorph, für die linke Seite verwendet man den Satz über parameterabhängige Integrale $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Sie ist danach zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Nach dem Identitätssatz genügt der Beweis für $z = x > 1$. Verwende (I)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t + x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{ie^{it}} \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + x} ie^{it} dt}_{f(e^{it})}$$

$$\begin{aligned} w &= e^{it} \\ &\downarrow \\ &= i \operatorname{Res} \left(\frac{i}{iw(w/2 + w^{-1}/2 + x)}, x_0 \right) \\ &= \operatorname{Res} \left(\frac{2}{w^2 + 2wx + 1}, x_0 \right) \end{aligned}$$

worin x_0 die betragsmäßig kleinere Wurzel des Nennerpolynoms ist

$$x_0 = -x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Weil x_0 einfache Nullstelle des Nennerpolynoms ist, folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{2}{w^2 + 2wx + 1}, w = x_0 \right) &= \frac{1}{x_0 + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

- (1) Für $z = x < -1$ ist der Integrand ständig negativ also auch der Wert der durch das Integral dargestellten Funktion $g(z)$.

Daraus folgt: Die durch das Integral definierte analytische Fortsetzung der Wurzelfunktion $g(z)$ ist ungerade: $g(-z) = -g(z)$

Aus der Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale:

Hilfsatz 1:

Sei $B = \{e^{it}; \alpha \leq t \leq \beta\}$ ein Teilbogen des Einheitskreises S^1 mit $0 < \beta - \alpha < 2\pi$; $R > 0$.

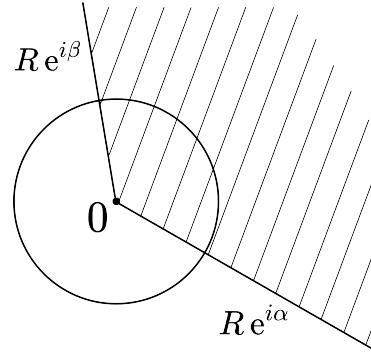
Sei $f(z)$ stetig im Winkelraum $|z| \geq R$, $\frac{z}{|z|} \in B$.

i) Gilt

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z/|z| \in B}} |zf(z)| = 0$$

dann gilt mit $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(w) dw = 0$$

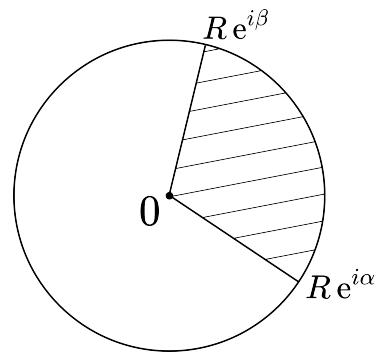


ii) Gilt

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z/|z| \in B}} |zf(z)| = 0$$

dann

$$\lim_{r \searrow 0} \int_{\gamma_r} f(w) dw = 0$$



Polynomabschätzung:

Sei $P(z)$ ein reelles oder komplexes Polynom vom Grad $n > 0$ mit dem Leitkoeffizienten a_0 . Dann existiert ein $R > 1$ derart, dass

$$\frac{1}{2}|a_0||z|^n \leq |P(z)| \leq 2|a_0||z|^n ; \quad |z| \geq R$$

Beweis:

folgt aus der Polynomdarstellung

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \\ &= a_0 z^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{z} + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{z^n} \right) \end{aligned}$$

Für $z \rightarrow \infty$ hat die runde Klammer den Limes 1, falls also $|z|$ groß genug ist ihr Betrag $\geq \frac{1}{2}$ und ≤ 2 .

□

7.2 Anwendungen II

Es seien $P(z), Q(z)$ Polynome, wobei $Q(z)$ keine reellen Nullstellen hat. Ferner gelte für die Gerade

$$\deg Q \geq 2 + \deg P$$

schließlich sei $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t} dt = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} a > 0 \\ Q(a)=0}} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, a \right) \quad (\text{II})$$

Überdies ist das Integral absolut konvergent.

Beweisskizze:

$\frac{P(z)}{Q(z)} e^{-i\alpha z}$ hat in \mathbb{C} unendlich viele Singularitäten.

Ist $\gamma_r = re^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) und ist r größer als der Betrag aller Nullstellen von Q dann ergibt der Residuensatz für den aus $[-r, r]$ und $\gamma_r(t)$ zusammengesetzten (geschlossenen) Weg δ_r

$$\int_{\delta_r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} a > 0 \\ Q(a)=0}} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, a \right)$$

Nach Voraussetzung $\deg Q \geq 2 + \deg P$ existiert $R > 1, M > 1$ mit

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2} ; \quad |z| \geq R$$

Überdies wegen $\alpha \geq 0$ in $\operatorname{Im} z \geq 0$

$$|\mathrm{e}^{i\alpha z}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Im} \alpha z} \leq 1$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind für den Winkelraum $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z| \geq R$ erfüllt. Daher für $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{P(t)}{Q(t)} \mathrm{e}^{i\alpha t} dt = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\alpha z}, a \right)$$

□

Bemerkung:

- (2) Im Fall $\alpha < 0$ kann analog mit einem Hilfsweg in der unteren Halbebene gearbeitet werden.

Beispiele:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}} dt = \frac{\pi/n}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}$$

falls k, n natürliche Zahlen und $k < n$.

Die Nullstellen von $1+z^{2n}$ sind die ungeraden Potenzen von $\mathrm{e}^{2\pi i/4n} = \mathrm{e}^{\pi i/2n}$. In der oberen Halbebene liegen davon

$$a_m = \exp \frac{\pi i (2m+1)}{2n} ; \quad 0 \leq m < n$$

Die Ableitung von $Q(z) = 1+z^{2n}$

$$Q'(z) = 2nz^{2n-1}$$

hat in a_m keine Nullstelle daher

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^{2k}}{1+z^{2n}}, a_m \right) = \frac{1}{2n} a_m^{2k-2n+1} = -\frac{1}{2n} a_m^{2k+1}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m^{2k+1} = \sum_{m=0}^{n-1} \exp \left(\frac{\pi i}{2n} (2k+1)(2m+1) \right)$$

$$= \exp \frac{\pi i(2k+1)}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp \left(\frac{\pi i}{n}(2k+1)m \right)$$

Geometrische Reihe \Rightarrow

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} a_m^{2k+1} &= \exp \frac{\pi i(2k+1)}{2n} \frac{1 - \exp(\pi i(2k+1))}{1 - \exp\left(\frac{\pi i(2k+1)}{n}\right)} \\ &= \frac{2}{\exp\left(\frac{-\pi i(2k+1)}{2n}\right) - \exp\left(\frac{\pi i(2k+1)}{2n}\right)} \\ &= \frac{i}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)} \end{aligned}$$

Mit (II) folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{iat} dt &= 2\pi i \sum \text{Res} = -\frac{\pi i}{n} \frac{i}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)} \\ &= \frac{\pi/n}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)} \end{aligned}$$

Mit analytischer Fortsetzung (Identitätssatz) folgt

$$\int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s} ds = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

Bewiesen wurde die Formel für unendlich viele rationale $z = \frac{2k+1}{2n}$.

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{w^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2w} e^{-w}; \quad \operatorname{Re} w > 0$$

Da $\cos t$ gerade \Rightarrow

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{w^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{w^2 + t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{w^2 + t^2} dt \quad (\text{II}) \quad \text{mit } \alpha = 1 \text{ ist anwendbar}$$

Nullstellen von $Q(z) = w^2 + z^2$ sind $\pm iw$, wobei iw in $\operatorname{Im} z > 0$ liegt.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{w^2 + t^2} dt &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{w^2 + z^2}, iw \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} 2\pi i \frac{e^{-w}}{2iw} = \frac{\pi}{2w} e^{-w}, \quad \text{falls } w \text{ reell und } w > 0 \end{aligned}$$

Weil in der behaupteten Formel beide Seiten (in $\operatorname{Re} w > 0$) analytisch sind, folgt die allgemeine Formel aus dem Identitätssatz.

Hilfsatz 2:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

ist holomorph in \mathbb{C} bis auf einfache Pole in den $m \in \mathbb{Z}$, das Residuum ist

$$\operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z), m) = 1$$

Es gilt für die $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|\cot(\pi z)| \leq \frac{1 + \exp(-2\pi|\operatorname{Im} z|)}{1 - \exp(-2\pi|\operatorname{Im} z|)}$$

Beweis:

$$\text{Die erste Hälfte folgt aus } \frac{\sin'(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z)$$

$\cot(\pi z)$ ist ungerade, also Abschätzung nur für z mit $\operatorname{Im} z > 0$

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left| \frac{\exp(\pi iz) + \exp(-\pi iz)}{\exp(\pi iz) - \exp(-\pi iz)} \right| \\ &= \left| \frac{1 + \exp(-2\pi iz)}{1 - \exp(-2\pi iz)} \right| \leq \frac{1 + |\exp(-2\pi iz)|}{1 - |\exp(-2\pi iz)|} \end{aligned}$$

□

7.3 Anwendungen III

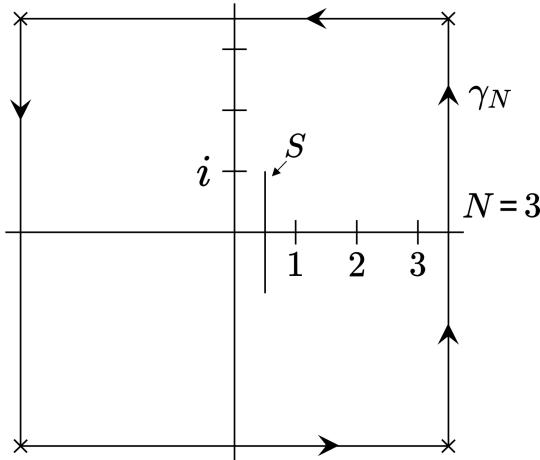
Sei $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ Quotient der Polynome $P(z)$, $Q(z)$ mit $\deg Q \geq 2 + \deg P$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ Q(m) \neq 0}}^{\infty} R(m) = - \sum_{\substack{Q \in C \\ Q(a)=0}} \operatorname{Res}(R(z) \pi \cot(\pi z), a) \quad (\text{III})$$

Die Reihe links ist absolut konvergent.

Beweis:

- 1) Sei N eine (große) natürliche Zahl. γ_N bezeichne die positive orientierte Randkurve des Quadrates mit den vier Ecken $(\pm 1, \pm i)(N + \frac{1}{2})$.



Sei $N > |a|$ für alle Nullstellen a von $Q(z)$. Dann ergibt der Residuensatz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} R(w) \pi \cot(\pi w) dw \quad (*) \\ &= \sum_{\substack{Q \in C \\ Q(a)=0}} \operatorname{Res}(R(z) \pi \cot(\pi z), a) + \sum_{\substack{m=-N \\ Q(m) \neq 0}}^N \operatorname{Res}(R(z) \pi \cot(\pi z), z = m) \end{aligned}$$

Im zweiten Summanden ist nach Hilfssatz 2

$$\operatorname{Res}(R(z) \pi \cot(\pi z), m) = R(m) \cdot 1 \quad (**)$$

Nach der Polynomabschätzung (nach Hilfssatz 1) gibt es $R \geq 1$ und ein $M_1 > 0$ mit

$$|R(z)| \leq \frac{M_1}{|z|^2} \quad \text{für } |z| \geq R$$

Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2M_1}{m^2}$ ergibt absolute Konvergenz der fraglichen Reihe.

2) $\pi \cot(\pi z)$ ist 1-periodisch und für $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ gilt nach Hilfssatz 2

$$|\pi \cot \pi z| \leq \pi \frac{1 + |\exp(-2\pi|\operatorname{Im} z|)|}{1 - |\exp(-2\pi|\operatorname{Im} z|)|} \leq \pi \frac{1 + \exp(-2\pi)}{1 - \exp(-2\pi)}$$

Auf $S = \left\{ \frac{1}{2} + it; -1 \leq t \leq 1 \right\}$ ist $\pi \cot(\pi z)$ als stetige Funktion beschränkt, damit auch auf dem durch γ_N berandeten Gebiet mit der gleichen Schranke beschränkt. Damit gilt mit einer Konstanten $M_2 > 0$

$$|R(z)\pi \cot(\pi z)| \leq \frac{M_2}{|z|^2}, \quad \text{falls } |z| > R \text{ und } z \text{ auf einem } \gamma_N$$

Auf γ_N ist überall $|z| \geq N$, daher liefert Standard Integralabschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N} R(w)\pi \cot(\pi z) dw \right| &\leq l(\gamma_N) \frac{M_2}{N^2} \\ &\leq \frac{M_2 4(2N+1)}{N^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Mit (*) und Einsetzen von (**) folgt

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ Q(m) \neq 0}}^{\infty} R(m) = - \sum_{\substack{Q \in C \\ Q(a)=0}} \operatorname{Res}(R(z)\pi \cot(\pi z), a)$$

Beispiel:

(1) Partialbruchzerlegung des Cotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

Beweis:

Durch Anwendung des Summationsprinzips III auf die Reihe rechts (z ist ein fester Parameter):

$$R(w) = \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} = \frac{z}{zw-w^2}$$

Das Nennerpolynom

$$Q(w) = zw - w^2 \quad \text{vom Grad 2}$$

mit zwei einfachen Nullstellen bei $w = 0$ und $w = z$. Das Zählerpolynom $P(w) = z$ ist konstant.

Nach (III) wird

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right) &= \\ - \operatorname{Res} \left(\frac{z}{zw-w^2} \pi \cot(\pi z), w=0 \right) - \operatorname{Res} \left(\frac{z}{zw-w^2} \pi \cot(\pi z), w=z \right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z}{zw-w^2} \pi \cot(\pi z), w=z \right) = -\pi \cot(\pi z)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z}{zw-w^2} \pi \cot(\pi z), w=0 \right) &= \\ \underbrace{\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z-w} \pi \cot(\pi z), w=0 \right)}_{\frac{1}{z}} + \underbrace{\operatorname{Res} \left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{w}, w=0 \right)}_{=0^{(*)}} \end{aligned}$$

(*) : Weil $\frac{\cot(\pi w)}{w}$ eine gerade Funktion ist und daher die Leitkoeffizienten a_{2k+1} sämtlich = 0 sind. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right) &= -\frac{1}{z} + \pi \cot(\pi z) \\ &\downarrow \\ &\text{konvergenzerzeugende Summanden} \end{aligned}$$

□

Behauptung: Für jedes $R > 0$ konvergiert die Reihe (Teilreihe)

$$\sum_{|m| \geq 2R} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right)$$

absolut gleichmässig auf $|z| \leq R$.

Begründung:

$$\left| \frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{z}{(z-m)m} \right| \leq \frac{R}{|m|(|m|-R)} \leq \frac{2R}{m^2}$$

Vergleich mit der von z unabhängigen konvergenten Reihe $\sum_{n \geq 2R} \frac{4R}{n^2}$ liefert die Behauptung.

Anwendung: Produktzerlegung des Sinus

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{m=\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{z/m} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Beweis:

$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ ist holomorph und nullstellenfrei auf

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}$$

nachdem die hebbare Singularität in $z = 0$ durch

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

gehoben ist.

Als bezüglich 0 sternförmiges Gebiet ist D einfach zusammenhängend. Also hat $f(z)$ auf D einen holomorphen Logarithmus

$$l(z) : f(z) = \exp(l(z))$$

$l(z)$ ist eine geeignete Stammfunktion der logarithmischen Ableitung $f'(z)/f(z)$, normiert durch $l(0) = 0$.

Geradlinige Integration von 0 nach z

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{z} + \pi \cot(\pi z)$$

$$= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right)$$

$\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m}$ ist die logarithmische Ableitung von $\left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{z/m}$

Gliedweise Integration (zulässig wegen lokal gleichmäßiger Konvergenz)

$$l(z) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \underbrace{\log \left(\left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{z/m} \right)}_{\downarrow} \text{normiert durch 0 im Nullpunkt.}$$

Stetigkeit und Funktionalgleichung von \exp

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} &= f(z) = \exp(l(z)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N \left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{z/m} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

□

Die Bedeutung der lokal gleichmäßigen Konvergenz für Folgen holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$:

Satz von Weierstraß

Ist $(f_n(z))_{n \geq 1}$ eine gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen auf dem gemeinsamen Gebiet D , dann ist die Grenzfunktion $f(z)$ selbst holomorph. Darüber konvergiert die Folge $f'_n(z)$ lokal gleichmäßig auf D gegen die Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$.

Beispiel:

$$(2) D = \{z \in \mathbb{C}; \Re z > 0\}$$

$$f_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt$$

Grenzfunktion:

$$\Gamma_n(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Mittels partieller Integraton von $\Gamma(z + 1)$ ist unmittelbar ersichtlich

$$\Gamma(z + 1) = z \cdot \Gamma(z)$$

A·T·I·C·E

ATICE LLC, Albany NY

ISBN 978-1-951894-08-5