

# 2024 年度 4 ターム 「モデリングとシミュレーション」

## レポートその 4

### 最適化・分類、動的システム

教育学部 第二類 技術・情報系コース 3 年  
B220052 長田 麗生

提出期限：2025 年 1 月 29 日

提出日：2025 年 2 月 13 日

担当教員：田中秀幸 先生

#### 1. はじめに

筆者はこのレポートを自らの学習状況を示すことを目的として書く。定義、証明、定式化、等の厳密さについては、本講義で求められていると筆者が考える水準に照らし、問題ないとする範囲において放棄する。また線型代数はごく一般的な分野であるため、広く知られているであろうことについては参考文献を記載しない。

このレポートを書くにあたって、授業を受けていない人が読んで学習できる程度に、流れよく書くことを心がけた。自らも線型代数や統計についての知識が浅いため、式の解釈など理解の補助に LLM を活用したこともここで述べておく。

#### 2. 固有値分解

#### 3. 正定行列

対称行列  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が任意の  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n (\boldsymbol{x} \neq 0)$  に対して次を満たすとき、 $P$  を正定行列とよび、 $P > 0$  と書く。

$$\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} > 0$$

対称行列  $P$  について、以下は同値である。

- $P$  の固有値が全て正
- $P$  は正定行列

## 4. 最適化問題

### 4.1. りんごの例

$$\begin{aligned}x &> 0 \\y &> 0 \\0.3x + 0.6y &< 15 \\240x + 180y &< 7200 \\ \min -(x + y)\end{aligned}$$

4つの不等式の境界線の交点について調べれば良い（調べるとはすなわち、評価関数を計算し、最小値を取るようなものを選ぶという意味である）ことが知られており、この解法はシンプレックス法と呼ばれている。

### 4.2. 線型行列不等式問題 (LMI)

線型行列不等式問題 (Linear Matrix Inequality, LMI) は、行列の不等式制約を持つ最適化問題である。LMI は、線形システムの安定性、制御システムの性能、信号処理、統計、機械学習、量子情報理論など、さまざまな分野で応用されている。

LMI は、次のような形式で表される。

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n \leq 0$$

Scilab には LMI Solver が実装されている。

### 4.3. 点と直線の距離

点  $z = (z_1 \ z_2)$  と直線  $w_1 x_1 + w_2 x_2 + b = 0$  の距離  $d$  は次のように求められる。

$$\begin{aligned}d &= \frac{|w_1 z_1 + w_2 z_2 + b|}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \\ &= \frac{|w^T z + b|}{\|w\|}\end{aligned}$$

正と負を区別するなら

$$d = \frac{w^T z + b}{\|w\|}$$

直線上の領域は  $w^T z + b = 0$ 、直線より上の領域は  $w^T z + b > 0$ 、直線より下の領域は  $w^T z + b < 0$  である。（よく考えれば当然である。）

## 5. 実習の記録

### 5.1. 第 11 回 実習(1), (2) 固有値分解

$[U, L] = \text{spec}(A)$  のように書くことで固有値分解を行うことができる。複素数が出てくることに注意する必要がある。

対称行列の固有値分解に対して、 $A = U * L * \text{inv}(U)'$  が成り立つことを確認した。対称行列はランダムに生成した  $B = \text{rand}(N, N, 'normal')$  を用いて  $A = B * B'$  として作成することができる。

### 5.2. 第 11 回 実習(5) りんごの問題を LMI で解く

```
1 mode(0);
2
3 funcprot(0);
4 function [LME,LMI,OBJ] = apple(xy);
5     x = xy(1);
6     y = xy(2);
7
8     LME = []; // 等式制約なし.
9     eps = 0;
10    LMI = [x, 0, 0, 0;
11           0, y, 0, 0;
12           0, 0, 15-0.3*x-0.6*y, 0;
13           0, 0, 0, 7200-240*x-180*y];
14    LMI = LMI - eps*eye(4,4);
15    OBJ = -(x+y); // 評価関数
16 endfunction
17
18 x = 0;
19 y = 0;
20 xy = list(x,y);
21 xy = lmisolver(xy,apple);
22 x = xy(1)
23 y = xy(2)
```

コード 1: りんごの問題

```

1  lmsolver: 正準表現の構築
2  lufact: Warning: Matrix is singular.
3  lmsolver: 実行可能解生成フェーズ.
4
5      primal obj.   dual obj.   dual. gap
6      1.00e-05      -3.55e+01   3.55e+01
7      -5.90e+00      -3.55e+01   2.96e+01
8  lmsolver: 目標値に到達しました.
9  lmsolver: 実行可能解が見つかりました.
10 lmsolver: 最適化フェーズ.
11
12      primal obj.   dual obj.   dual. gap
13      -2.04e+01      -1.40e+02   1.20e+02
14      -3.35e+01      -4.05e+01   6.94e+00
15      -3.35e+01      -3.43e+01   8.06e-01
16      -3.40e+01      -3.41e+01   6.51e-02
17      -3.40e+01      -3.40e+01   7.66e-03
18      -3.40e+01      -3.40e+01   7.84e-04
19      -3.40e+01      -3.40e+01   6.75e-05
20      -3.40e+01      -3.40e+01   7.83e-06
21      -3.40e+01      -3.40e+01   6.61e-07
22      -3.40e+01      -3.40e+01   7.68e-08
23      -3.40e+01      -3.40e+01   5.92e-09
24 lmsolver: 最適解が見つかりました
25 x =
26    18.000000
27 y =
28    16.000000

```

コード 2: 実行結果

### 5.3. 第 12 回 実習(1) Schur Complement

```

1  mode(0);
2
3  n = 2;
4  for k = 1:100,
5      w = rand(n,1,'normal');
6      r = w'*w + 0.01;
7      In = eye(n,n);
8
9      X = [r, w';
10          w, In];
11
12      [U,S] = spec(X);
13      minS = min( diag(S) )
14  end

```

コード 3: Schur Complement の確認

次の通り、Schur Complement が正定値であることが確認された。

```
1 minS =  
2   0.0099347  
3 minS =  
4   0.0033420  
5 minS =  
6   0.0075595  
7 minS =  
8   0.0029835  
9 minS =  
10  0.0033879
```

コード 4: 実行結果

## 5.4. 第 12 回 実習(2), (3) 線型 2 値クラス分類

次のコードを実行した。

```

1 mode(0);
2
3 exec("hardmargine_data.sce");
4
5 //-----
6 // plotting the data
7 //-----
8 t_ = tx(:,1);
9 x_ = tx(:,2:3);
10 N = size(t_,1);
11
12 t = t_';
13 x = x_';
14
15 //-----
16 // defining LME, LMI constraints
17 // and cost function OBJ
18 //-----
19 funcprot(0);
20 function [LME,LMI,OBJ] = evalf(rwb)
21     [r,w,b] = rwb(:);
22     LME = [];
23     LMI = [r,w'
24            w,eye(2,2)];
25     LMI = list(LMI);
26     for i = 1:N,
27         LMIi = t(i)*(w'*x(:,i)+b)-1;
28
29         LMIi = list(LMIi);
30         LMI = lstcat(LMI,LMIi);
31     end
32     OBJ = r;
33 endfunction
34
35 //-----
36 // initial value
37 //-----
38 r = 1;
39 w = [1;1];
40 b = 1;
41 rwb = list(r,w,b);
42
43 //-----
44 // Now, solving the problem
45 //-----
46 rwb = lmsolver(rwb,evalf);
47 [r_,w_,b_] = rwb(:);
48 w1 = w_(1);
49 w2 = w_(2);
50
51 //-----
52 // plotting the estimated plane
53 plot(x_(:,2),x_(:,3),w1*x_(:,2)+w2*x_(:,3)+b,'r');
54 hold on;
55 plot(x_(:,2),x_(:,3),t_,'b');
56 axis([0 1 0 1]);
57 title('Estimated plane');
58

```

コード 5:

次に示すプロットの通り、分類できている。

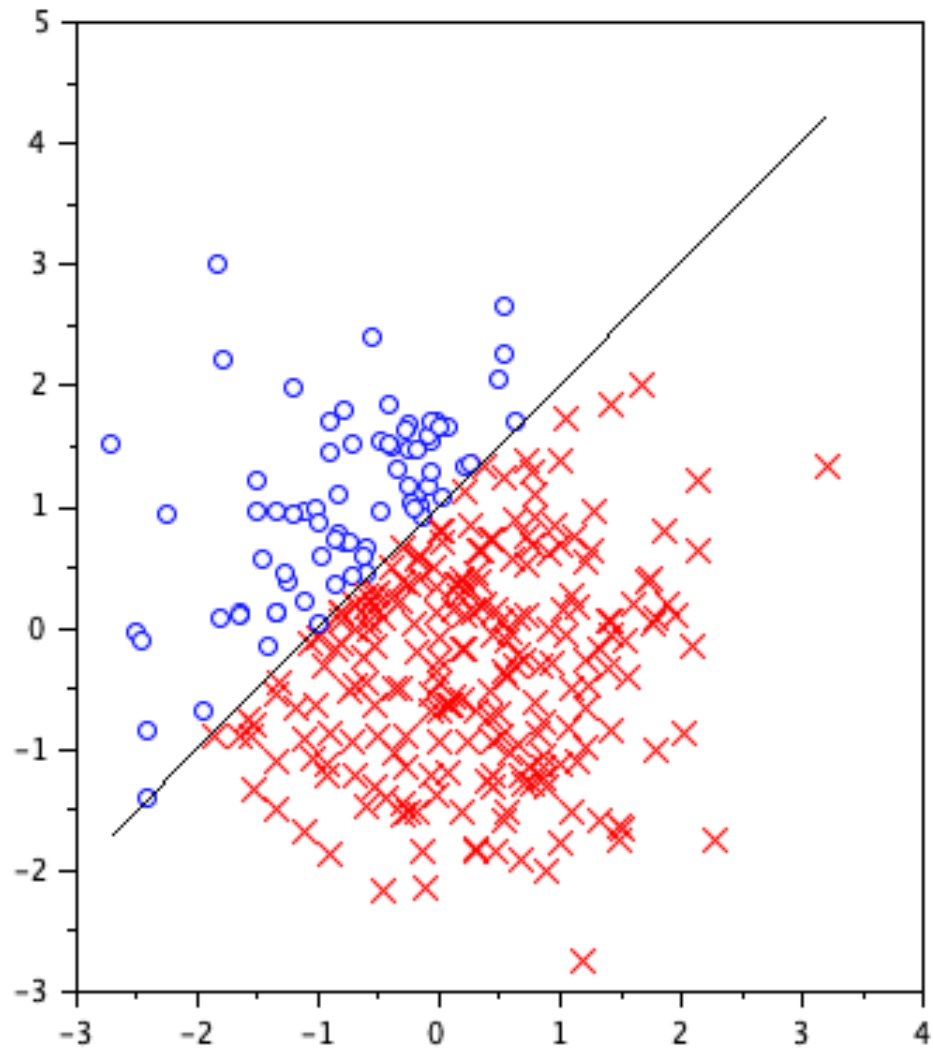


図 1: プロット

## 5.5. 第 13 回 RC 回路のシミュレーション

## 6. まとめ

## 7. 参考文献