1.

Gaussian Filter (smoothing) : $g(i,j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sum_{m=1}\sum_{n=1}\exp\left(-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}\right) f(i-m, j-n)$

Bilateral Filter (smoothing) : $BF[I]_p = \frac{1}{W_p}\sum_{q\in S} \underbrace{G_{\sigma_s}(\|p-q\|)}_{\text{spatial Gaussian: influence of distant pixels}} \underbrace{G_{\sigma_r}(I_p - I_q)}_{\text{range Gaussian: influence of pixels with different intensity value from } I_p} I_q$

$$W_p = \sum_{q\in S} G_{\sigma_s}(\|p-q\|)\, G_{\sigma_r}(I_p - I_q)$$

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

spatial Gaussian
: influence of distant pixels

range Gaussian
influence of pixels with different intensity value from I_p.

Pros : Bilateral Filter를 사용한 Smoothing은 edge를 보전한다. intensity가 많이 다르면 G_{σ_r}에서 낮은 확률이 곱해져서 해당 pixel의 intensity에 잘 반영이 되지 않는다.

σ_r 값을 키우면 Gaussian filter처럼 사용할 수 있다.

Cons : Gaussian Filter에 비해 연산량이 많다.

edge가 없으면 매우 비슷한 pixel intensity로 smoothing 되므로 cartoonize 효과가 생긴다.

edge는 보전하지만 gradient는 보전하지 않는다.

Appropriate cases : edge를 보전하며 대략적인 형태를 알고 싶을 때

2.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\,dx$$

$f(x-T)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-T)\exp(-i\omega x)\,dx \underset{\substack{x-T=u \\ dx=du}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp(-i\omega(u+T))\,du = e^{-i\omega T}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp(-i\omega u)\,du$$

$$= e^{-i\omega T} F(\omega)$$