고1 수학(하) 실전테스트

10회

2024년 2학기 중간 휘문고 기출

개념의 神 이재섭

High Level Test Culminating In

Test

학교

이름

the 다원수학

1. 명제

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-7x+k\geq 0$이다.'

가 거짓인 명제가 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

2. $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, $\overline{BC}^2$의 최솟값은?

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

3. <보기>의 두 가지 이동에 대하여 직선 l : $x-3y-2=0$을

(가) → (나) 순으로 이동한 도형을 l_1,

(나) → (가) 순으로 이동한 도형을 l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는?

〈 보 기 〉

(가) x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한다.
(나) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다.

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{30}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

4. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에서의 두 조건

p : x와 $x+2$의 공약수의 개수는 2이다.
q : x와 $x+3$의 공약수의 개수는 2이다.

의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $n(P\cap Q^C)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 직선 $y=3x+1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형 위의 점 P와 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=10$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $\frac{5}{2}\sqrt{10}$ ⑤ $3\sqrt{10}$

6. 세 실수 a, b, c에 대하여 보기에서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. p : $abc=0$
　q : $a^2+b^2+c^2=0$
ㄴ. p : $a+b+c>0$이고 $ab+bc+ca<0$
　q : $a^2+b^2+c^2>0$
ㄷ. p : $a^3+b^3=0$
　q : $a+b=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

7. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p : x^2-5x-6=0$$
$$q : |2x-3|>k$$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

8. 두 집합

$$A=\{x \mid x^2-2(k+1)x+k^2+2k \le 0\},$$
$$B=\{x \mid x^2-(3k^2+1)x+2k^4+k^2 \le 0\}$$

에 대하여 $A \cap B \ne \varnothing$을 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 B의 모든 원소의 합은?

(가) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $A^C \cup B^C=\{1,\ 4,\ 5,\ 6\}$
(나) $X \subset U$이고 $n(X)=1$인 모든 집합 X에 대하여
$n((A \cup X)-B)=1$

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

10. 10이하의 자연수 k와

전체집합 $U=\{x \mid -10 \le x \le 10,\ x\text{는 정수}\}$의 두 부분집합

$$A_k=\left\{x \,\middle|\, -k<x<\frac{k}{2}\right\},\ B_k=\left\{x \,\middle|\, -\frac{k}{2}<x<k\right\}$$

에 대하여 $C_k=\begin{cases} A_k{}^C & (k\text{는 홀수}) \\ B_k{}^C & (k\text{는 짝수}) \end{cases}$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $n(C_7 \cap C_8)=7$
ㄴ. $k \le 8$일 때, $n(C_k-C_{k+1})=n(C_{k+1}-C_{k+2})$이면 k는 홀수이다.
ㄷ. k가 짝수이면 $n(A_k \cap C_k)=\frac{k}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x \mid x$는 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수$\}$,
$B=\{x \mid x$는 짝수$\}$

에 대하여 집합 $A-B$의 모든 원소의 합을 구하시오.

12. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A\cup B)=50$, $n(A\cap B)=34$일 때, $n(A-B)\times n(B-A)$의 최댓값을 구하시오.

13. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10이하의 자연수$\}$의 부분집합

$A=\{x \mid x^2-2x+1>0\}$,
$B=\{x \mid x^2-x-2>0\}$,
$C=\{x \mid x^2-9<0\}$

에 대하여 $n(A\cap B)+n(B\cup C)+n(C-A)$의 값을 구하시오.

14. 두 실수 a, b에 대하여 원 $(x+2)^2+(y+3)^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대칭이동한 도형이 원점을 지날 때 $(a^2+b^2-14)^2$의 최댓값을 구하시오.

15. 두 실수 a, b에 대하여 곡선 $y=x^2-6x+8$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 직선 $y=x+1$과 한 점에서 만난다. $16(a-b)^2$의 값을 구하여라.

16. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$과 공집합이 아닌 두 집합 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $X\subset A$이고, $A\not\subset X$이다.
(나) $Y\subset B$이고, $B\not\subset Y$이다.
(다) $n(X\cup Y)=5$

$n(X^C\cup Y^C)$이 최소일 때, 집합 $X^C\cap Y^C$의 모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $2M+m$의 값을 구하시오.

17. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 4)$와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$에 대하여 점 P, Q는 각각 선분 OA, 선분 OB 위의 점이다. $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QC}}+\overline{\mathrm{CP}}$의 값이 최소가 되게 하는 점 P와 Q를 각각 P', Q'라 할 때, 직선 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$과 직선 OC는 서로 수직이다. $(3a+b)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

18. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 공집합이 아닌 집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 어떤 정수 n에 대하여
> $$\{f(n)\}^2+\{f(n+1)\}^2=0$$
> (나) 어떤 실수 k에 대하여
> $A=\{x \mid f(x)=k\}$이고, $A-\{10k\}=\varnothing$이다.

$f(7)$의 값을 구하시오.

19. 좌표평면 위의 세 실수 a, b, m $(m>1)$에 대하여 세 원

C_1 : $(x-2)^2+(y-2)^2=1$
C_2 : 원 C_1을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 am만큼 평행이동한 도형,
C_3 : 원 C_1을 x축의 방향으로 bm만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형

과 직선 l : $y=mx$가 있다. 직선 l이 원 C_1과 만나는 점의 개수가 1이고, 원 C_2의 중심 P와 원 C_3의 중심 Q에 대하여 선분 PQ가 원점을 지날 때, $7ab+8\sqrt{7}$의 최솟값을 구하시오.

20. 집합 A에 대하여 $\{0\}\cup A$의 모든 원소의 합을 $S(A)$라 하자. $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $X\cup Y\neq U$
> (나) $5\leq S(X\cap Y)\leq 7$

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)$의 최댓값을 구하시오.

2024년 2학기 중간 수학하 휘문고 기출

한눈에 보는 정답

1. [정답] ③
2. [정답] ⑤
3. [정답] ④
4. [정답] ④
5. [정답] ②
6. [정답] ②
7. [정답] ④
8. [정답] ①
9. [정답] ③
10. [정답] ④
11. [정답] 8
12. [정답] 64
13. [정답] 19
14. [정답] 52
15. [정답] 441
16. [정답] 103
17. [정답] 288
18. [정답] 90
19. [정답] 32
20. [정답] 15

정답과 풀이

1. [정답] ③

$D=49-4k>0$이어야 하므로 $k<\frac{49}{4}$

최대의 정수 k는 12

2. [정답] ⑤

$bc=18$이므로 $b^2+c^2 \geq 2\sqrt{b^2c^2}=36$

3. [정답] ④

직선 l : $x-3y-2=0$을 (가)로 이동하면

$x+2-3(y-3)-2=x-3y+9=0$

다시 이를 (나)로 이동하면 l_1 : $-3x+y+9=0$

직선 l : $x-3y-2=0$을 (나)로 이동하면

$-3x+y-2=0$

다시 이를 (가)로 이동하면 l_2 : $-3x+y-11=0$

l_1, l_2 사이의 거리는 $\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

4. [정답] ④

x, y의 공약수의 개수가 2려면 x, y의 최대공약수가 소수여야 한다.

$P=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $Q=\{3,\ 6,\ 9\}$이므로

$P\cap Q^C=\{2,\ 4,\ 8,\ 10\}$

$n(P\cap Q^C)=4$

5. [정답] ②

직선 $y=3x+1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=3x-9$

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=10$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $(x+4)^2+(y-4)^2=10$

이 원의 중심과 직선 $y=3x-9$과의 거리는 $\frac{4+12+9}{\sqrt{10}}=\frac{5}{2}\sqrt{10}$

반지름 $\sqrt{10}$을 빼면 구하는 최솟값 $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

6. [정답] ②

$p\to q$는 참이지만 $q\to p$는 거짓인 것을 골라야 한다.

ㄱ : $a=1$, $b=c=0$이면 p는 만족하지만 q를 만족하지 않는다.

ㄴ : p를 만족한다면 a, b, c가 모두 0일 수 없으므로 $p\Rightarrow q$
역은 성립하지 않는다. 반례 $a=b=c=1$

ㄷ : 서로 필요충분조건이다.

7. [정답] ④

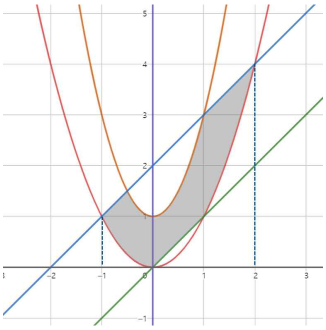
p의 진리집합은 $\{-1,\ 6\}$

이 두 원소가 모두 $\sim q$를 만족하려면 $5 \le k,\ 9 \le k$이어야 한다.

즉 $k \ge 9$이어야 하므로 최소의 자연수 k는 9

8. [정답] ①

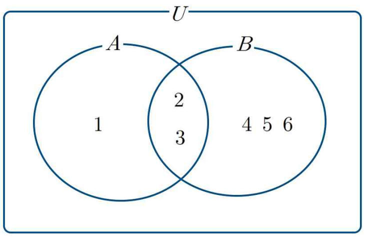
$k \le x \le k+2$와 $k^2 \le x \le 2k^2+1$의 공통해가 있어야 한다.



최솟값 -1, 최댓값 2

9. [정답] ③

아래 밴 다이어그램과 같아야 한다.



10. [정답] ④

ㄱ. $C_7 \cap C_8 = \{x \mid x \le -7$ 또는 $x \ge 8\}$이므로 개수는 7 (참)

ㄴ.

$C_k - C_{k+1}$

$$=\begin{cases} A_k^C \cap B_{k+1} = \left\{x \mid \dfrac{k}{2} \le x < k+1\right\} & (k : odd) \\ B_k^C \cap A_{k+1} = \left\{x \mid -k-1 < x \le -\dfrac{k}{2}\right\} & (k : even) \end{cases}$$

이므로

k가 홀수이면 $n(C_k - C_{k+1}) = \dfrac{k+1}{2}$

k가 짝수이면 $n(C_k - C_{k+1}) = \dfrac{k}{2}+1$

따라서

$n(C_k - C_{k+1}) - n(C_{k+1} - C_{k+2})$

$$=\begin{cases} \dfrac{k+1}{2} - \left(\dfrac{k+1}{2}+1\right) = -1 & (k : odd) \\ \dfrac{k}{2}+1-\dfrac{k+2}{2} = 0 & (k : even) \end{cases}$$

(거짓)

ㄷ. k가 짝수이면 $A_k \cap C_k = A_k \cap B_k^C = \left\{x \,\middle|\, -k < x \le -\dfrac{k}{2}\right\}$

이므로 $n(A_k \cap C_k) = \dfrac{k}{2}$ (참)

11. [정답] 8

$A=\{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$A-B=\{1,\ 7\}$이므로 8

12. [정답] 64

$n(A-B)+n(B-A)=n(A \cup B)-n(A \cap B)=16$

산술평균과 기하평균의 관계로부터

$n(A-B)+n(B-A) \ge 2\sqrt{n(A-B)n(B-A)}$

$n(A-B) \times n(B-A) \le 64$ (등호는 $n(A-B)=n(B-A)=8$)

13. [정답] 19

$A=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9,\ 10\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 9,\ 10\}$,

$C=\{1,\ 2\}$

$n(A \cap B)+n(B \cup C)+n(C-A)=8+10+1=19$

14. [정답] 52

평행이동하면 $(x-a+2)^2+(y-b+3)^2=1$

대칭시키면 $(x-b+3)^2+(y-a+2)^2=1$

원점을 지나므로 $(b-3)^2+(a-2)^2=1$

$\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{13}+1$이므로

$a^2+b^2-14 \le 2\sqrt{13}$

$(a^2+b^2-14)^2 \le 52$

15. [정답] 441

$y=(x-a)^2-6(x-a)+8+b$가 $y=x+1$과 접해야 하므로

$(x-a)^2-6(x-a)+8+b=x+1$은 중근을 가져야 한다.

$x^2-(2a+7)x+a^2+6a+b+7=0$의 판별식 $D=0$

$D=(2a+7)^2-4(a^2+6a+b+7)=0$

$a-b=-\dfrac{21}{4}$ $\therefore$ $16(a-b)^2=441$

16. [정답] 103

$n(X^C \cup Y^C)=10-n(X \cap Y)$이므로 최소이려면 $n(X \cap Y)$가 최대이어야 한다. $X \cap Y \subset A \cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$이므로 $n(X \cap Y) \le 3$

(i) $n(X \cap Y)=3$인 경우 :

$B \not\subset Y$이므로 $n(Y-X)=0$, $A \not\subset X$, $n(X-Y) \le 1$

$5=n(X \cup Y)=n(X-Y)+n(X \cap Y)+n(Y-X) \le 4$이므로 모순

(ii) $n(X \cap Y)=2$인 경우 : $n(X-Y)=2$, $n(Y-X)=1$이어야 한다.

$S(X^C \cap Y^C)=S(U)-S(X \cup Y)$이므로 $S(X^C \cap Y^C)$는 $S(X \cup Y)$가 최소일 때 최대이고, 최대일 때 최소이다.

$S(X \cup Y)$가 최소이려면 $X=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Y=\{2,\ 3,\ 5\}$일 때이고,

이때, $S(X \cup Y)=1+2+3+5+7=18$

$M=S(X^C\cap Y^C)=S(U)-S(X\cup Y)=55-18=37$

$S(X\cup Y)$가 최대이려면 $X=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $Y=\{2,\ 3,\ 5\}$일 때이고,

이때, $S(X\cup Y)=2+3+5+7+9=26$

$m=S(X^C\cap Y^C)=S(U)-S(X\cup Y)=55-26=29$

$\therefore\ 2M+m=74+29=103$

17. [정답] 288

직선 P′Q′의 기울기는 $\dfrac{a+b}{b-a}$, 직선 OC의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$

수직이므로 $\dfrac{a+b}{b-a}\times\dfrac{b}{a}=-1$

$b=-2a+12$를 대입하여 정리하면

$a^2+24a-144=0$

한편

$(3a+b)^2=(a+12)^2=a^2+24a+144=288$

18. [정답] 90

$f(n)=f(n+1)=0$이므로 $f(x)=(x-n)(x-n-1)$

이고 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\dfrac{2n+1}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$

한편 (나)에 의하면 꼭짓점의 좌표는 $(10k,\ k)$

$10k=\dfrac{2n+1}{2}$, $k=-\dfrac{1}{4}$이므로 $n=-3$

$f(x)=(x+3)(x+2)$

$\therefore\ f(7)=10\times9=90$

19. [정답] 32

직선 $y=mx(m>1)$와 원의 중심 $(2,\ 2)$ 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|2m-2|}{\sqrt{1+m^2}}=1$

$3m^2-8m+3=0(m>1)$

C_2의 중심은 $\mathrm{P}(2+a,\ 2+am)$, C_3의 중심은 $\mathrm{Q}(bm+2,\ b+2)$

선분 PQ가 원점을 지나므로 PO의 기울기와 QO의 기울기는 같아야 한다.

즉, $\dfrac{2+am}{2+a}=\dfrac{b+2}{bm+2}$

$2(a+b)+ab(m+1)=0$

그림을 그려보면 $a<0$, $b<0$이어야 한다.

산술기하평균의 관계로 부터

$(-a)+(-b)=\dfrac{(m+1)ab}{2}\geq 2\sqrt{(-a)(-b)}$

정리하면 $ab\geq\dfrac{16}{(m+1)^2}$ (등호는 $a=b$일 때 성립)

$3m^2-8m+3=0$이므로 $\dfrac{16}{(m+1)^2}=\dfrac{24}{7m}=\dfrac{24}{7}\times\left\{\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right\}$

$=\dfrac{8}{7}(4-\sqrt{7})$

따라서 $7ab+8\sqrt{7}$의 최솟값은 $8(4-\sqrt{7})+8\sqrt{7}=32$

20. [정답] 15

(ⅰ) $S(X\cap Y)=5$인 경우 :

$X\cap Y=\{5\}$ 또는 $\{1,\ 4\}$ 또는 $\{2,\ 3\}$이 가능하다.

$X\cap Y=\{5\}$인 경우는 $X-Y=\{2,\ 3,\ 4\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times1+9=12$

$X\cap Y=\{1,\ 4\}$인 경우는 $X-Y=\{3,\ 5\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times2+8=14$

$X\cap Y=\{2,\ 3\}$인 경우는 $X-Y=\{4,\ 5\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times2+9=15$

(ⅱ) $S(X\cap Y)=6$인 경우 :

$X\cap Y=\{1,\ 5\}$ 또는 $\{2,\ 4\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3\}$이 가능하다.

$X\cap Y=\{1,\ 5\}$인 경우는 $X-Y=\{3,\ 4\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times2+7=13$

$X\cap Y=\{2,\ 4\}$인 경우는 $X-Y=\{3,\ 5\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times2+8=14$

$X\cap Y=\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우는 $X-Y=\{5\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times3+5=14$

(ⅲ) $S(X\cap Y)=7$인 경우 :

$X\cap Y=\{2,\ 5\}$ 또는 $\{3,\ 4\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 4\}$이 가능하다.

$X\cap Y=\{2,\ 5\}$인 경우는 $X-Y=\{3,\ 4\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times2+7=13$

$X\cap Y=\{3,\ 4\}$인 경우는 $X-Y=\{2,\ 5\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times2+7=13$

$X\cap Y=\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우는 $X-Y=\{5\}$, $Y-X=\varnothing$일 때이고

$3\times n(X\cap Y)+S(X-Y)=3\times3+5=14$

이상으로 최댓값은 15