Übungsblatt 1

zum Mathematischen Brückenkurs für Naturwissenschaftler:innen

im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

1. *Aussagenlogische Gesetze*

   Beweisen Sie folgende aussagenlogische Gesetze mit Hilfe von Wahrheitstafeln:

   1. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$
   2. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$
   3. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$
   4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
   5. $(r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow ((r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow r))$
   6. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$
   7. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$
   8. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r))$

2. *Aussagen mit Quantoren*

   Übersetzen Sie folgende Aussagen in umgangssprachliche Sätze bzw. umgekehrt, wobei $s(x)$ für “x ist ein Snark”, $b(x)$ für “x ist ein Boojum”, $f(x, y)$ für “x findet y” stehen möge:

   1. $\exists x\ (s(x) \wedge b(x))$
   2. $\exists x\ \exists y\ (s(y) \wedge f(x, y))$
   3. $\forall x\ b(x) \Rightarrow (s(x) \wedge \neg f(x, x))$
   4. Jeder Snark, der von jemandem gefunden wird, ist ein Boojum.
   5. Alle Boojums sind Snarks, aber nicht alle Snarks sind Boojums.
   6. Jeder Boojum wird von jemandem gefunden.

3. *Einfache Operationen mit endlichen Mengen*

   Geben Sie für die folgenden Paare von Mengen A, B jeweils $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \times B$ und $B \times A$ an:

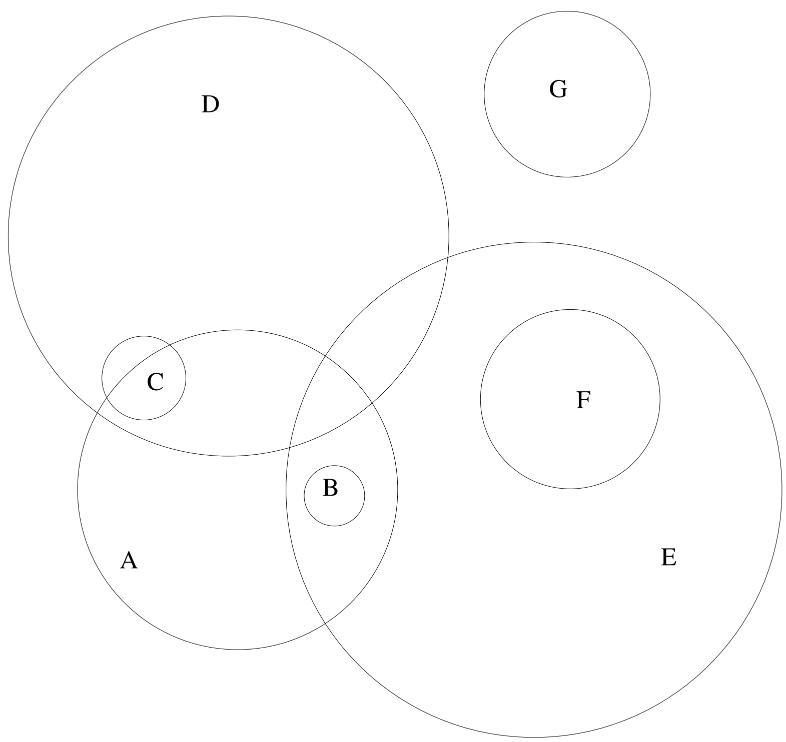
   1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
   2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = A$
   3. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
   4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{A\}$

4. *Venn-Diagramme – I*

   Zeichnen Sie jeweils ein Venn-Diagram, das die folgenden Verhältnisse zwischen Mengen widerspiegelt:

   1. $B \subset A$, $C \cap A = \emptyset$
   2. $A \cap B \neq \emptyset$, $\neg((A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$, $C \subset A$, $C \cap B = \emptyset$
   3. $B \subset A$, $C \subset B$, $D \subset A$, $D \cap B = \emptyset$

5. *Venn-Diagramme – II*



   Betrachten Sie das obenstehende Venn-Diagramm, und bestimmen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

   1. $A \subseteq B$
   2. $B \subset A$
   3. $B \cap C = \emptyset$
   4. $B \subseteq E$
   5. $B \subset (A \cap E)$
   6. $C \subseteq (A \cap D)$
   7. $C \subseteq (A \cup D)$
   8. $F \subset (E \backslash D)$
   9. $C \subseteq (D \backslash A)$
   10. $C \cap (D \backslash A) = \emptyset$
   11. $F \subset (E \cup G)$
   12. $C \subset (D \backslash E)$
   13. $(C \cap A) \subset D$
   14. $G \cup F = \emptyset$
   15. $F \backslash E = \emptyset$
   16. $(B \cap C) \subseteq (D \cap G)$

6. *Mengentheoretische Gesetze*

   Beweisen Sie folgende Mengentheoretische Gesetze jeweils mit Hilfe des Extensionalitätsprinzips sowie der aussagenlogischen Gesetze aus Aufgabe 1:

   1. $(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$
   2. $(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C)$
   3. $(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$
   4. $(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

7. *Zum Nachdenken und Diskutieren*

   1. Machen Sie sich den Unterschied zwischen dem umgangssprachlichen Gebrauch von "wenn ... dann ..." und der Bedeutung des aussagenlogischen $p \Rightarrow q$ an Beispielen wie "Wenn Du Deine Suppe aufißt, bekommst Du Dessert." klar.
   2. Erklären Sie ihrem Banknachbarn Ihre Einsichten.
   3. Wiederholen Sie die beiden vorangehenden Schritte für umgangssprachlichen "oder" und aussagenlogisches $\vee$. Welche Unklarheit in der Bedeutung hat das umgangssprachliche "oder"?

8. *Teilbarkeit und Division mit Rest*

   Bestimmen Sie jeweils, ob eine der beiden angegebenen natürlichen Zahlen die andere teilt. Falls nicht, geben Sie jeweils den Rest bei Division der größeren durch die kleinere Zahl an.

   1. 5, 15
   2. 50, 67
   3. 3, 102
   4. 129, 129
   5. 25, 505
   6. 1024, 9
   7. 10023, 3
   8. 978654321081, 8

9. *Primzahlen und Faktorisierung*

   Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen jeweils, ob es sich um Primzahlen handelt. Falls nicht, geben Sie jeweils die Faktorisierung in Primzahlen an.

   1. 3
   2. 1
   3. 1024
   4. 243
   5. 3600
   6. 3060
   7. 137
   8. 237

10. *Kürzen von Brüchen*

    Kürzen Sie folgende Brüche jeweils soweit wie möglich (a, b, c seien jeweils beliebige, paarweise teilerfremde, natürliche Zahlen ungleich Null):

    1. $\frac{15}{25}$
    2. $\frac{720a^2}{12ab}$
    3. $\frac{48(a^2-b^2)}{6a+6b}$
    4. $\frac{ab+ac}{(a+b)^2-b^2}$
    5. $\frac{(a-b)^3+(b^3-a^3)}{36a}$
    6. $\frac{a^{32}-1024}{a^{16}-32}$
    7. $\frac{a^2+1024}{a+1024}$
    8. $\frac{2310(a^4-b^2)}{4641(a^2+b)}$

11. *Rechnen mit rationalen Zahlen*

    Formen Sie die folgenden Ausdrücke jeweils so um, dass nur ein soweit wie möglich gekürzter Bruch übrigbleibt:

    1. $\frac{7}{3}+\frac{15}{24}$
    2. $3\cdot\frac{2}{9}-\frac{21+7}{4^2}$
    3. $\frac{4}{7}\cdot\frac{49}{12}$
    4. $\left(2+\frac{1}{137}\right)^3$
    5. $\frac{49}{3}-\frac{150-3}{21}$
    6. $\frac{100}{13}\cdot\frac{196}{10}$
    7. $\frac{1+2+3}{2^{10}}\cdot\frac{8^2}{3!}$
    8. $\frac{9}{11}/\frac{121}{27}$

12. *Rationale und Irrationale Zahlen*

    Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Zahlen rational oder irrational sind, und beweisen Sie gegebenenfalls die Irrationalität:

    1. $\frac{5}{2}$
    2. $\sqrt{37}$
    3. $\sqrt{36}$
    4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
    5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
    6. $\frac{(1+\sqrt{5})^2+(1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})^2-2(1+\sqrt{5})}$

13. *Potenzen und Logarithmen*

    Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke jeweils unter Verwendung der Potenz- und Logarithmengesetze soweit, dass höchstens noch eine Potenz oder ein Logarithmus im Ergebnis auftritt ($a, b, c > 0,\ n, m \in$):

    1. $\log_a b + \log_a c - \log_b b^c$
    2. $\log_b a \cdot \log_a b$
    3. $\log_2 1024 - \log_5 125$
    4. $2^{\log_3 9}$
    5. $a^n b^n c^{-n}$
    6. $(a^n z^{-n})^{1/(n+1)}$
    7. $a^m a^n$
    8. $(a+b)^m c^m$

14. *Wissenschaftliche Notation*

    Schreiben Sie folgende Zahlen jeweils in wissenschaftlicher Notation bzw. als Dezimalbruch:

    1. $0,003$
    2. 1024
    3. $1\,000\,000\,000$
    4. $0,00000000723455$
    5. $1,2 \times 10^{-5}$
    6. $9,931 \times 10^{9}$
    7. $7,04 \times 10^{-1}$
    8. $1,01 \times 10^{3}$

15. *Komplexe Zahlen*

    Bestimmen Sie für folgende komplexe Zahlen z jeweils Re z, Im z, $|z|$, $\arg(z)$ und z^* (a und b seien jeweils beliebige reelle Zahlen):

    1. $z = a + bi$
    2. $z = 4 - 4i$
    3. $z = 13a$
    4. $z = (a^6 + 5)i$
    5. $z = \sqrt{3} - 3i$
    6. $z = \sqrt{2}^{\frac{\pi}{4}i}$
    7. $z = {}^{\frac{\pi}{6}i}$
    8. $z = 17^{3\pi i}$

16. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

    Formen Sie die folgenden Ausdrücke jeweils in die Form $a + bi$ mit $a, b \in$ um:

    1. $(3 + 5i) - (4 - 2i)$
    2. $\frac{1-2i}{3} + \frac{3+5i}{2}$
    3. $(1 + 2i)^{-1}$
    4. $(1 + i)(1 - i)$
    5. $(12 + 3\sqrt{2}i)\left(\frac{1}{3} - \sqrt{2}i\right)$
    6. ${}^{\frac{\pi}{2}i} - 5\,(2 + {}^{\pi i})$
    7. $\frac{1+i}{1-i}$
    8. $\frac{5}{3+4i}$
    9. $(1 + i)^{\frac{3\pi}{4}i}$
    10. $\left(\frac{(1+i)^4}{2-2i}\right)^2$
    11. $\left({}^{\frac{\pi}{4}i} - 1\right)\left({}^{\frac{\pi}{4}i} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left({}^{\frac{\pi}{4}i - \frac{2\pi i}{3}}\right)$
    12. ${}^{\frac{\pi i}{8}} + {}^{\frac{19\pi i}{24}} + {}^{-\frac{13\pi i}{24}}$

17. *Trigonometrische Identitäten*

    Leiten Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten jeweils mit Hilfe der Euler-Formel ${}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ her:

    1. $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$
    2. $\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$
    3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
    4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
    5. $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$
    6. $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

18. *Beweis mittels vollständiger Induktion*

Beweisen Sie folgenden Aussagen jeweils mittels vollständiger Induktion:

1. $\forall n \in \ n^2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$
2. $\forall n \in \ 2^n - 1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k$
3. $\forall n \in \ \sum\limits_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-1}{2}$
4. $\forall n \in \ \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
5. $\forall n \in \ \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
6. $\forall n \in \ \forall x \in [0; \infty) \ (1+x)^n \geq 1 + nx$

19. *Polynomdivision*

Führen Sie für die folgenden Paare von Polynomen jeweils die Polynomdivision durch.

1. $(x^3 - x^2 - 5x - 3)$, $(3 - x)$
2. $(x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1)$, $(x^2 + x + 1)$
3. $(6x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 48x + 45)$, $(2x^2 - 4x + 4)$
4. $(x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 40x^2 - 4x + 48)$, $(x^2 + 4x + 4)$
5. $(x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 40x^2 - 4x + 48)$, $(x^3 - 13x + 12)$
6. $(2x^8 + 4x^7 + 3x^6 - 5x^5 - 16x^4 - 13x^3 + 4x^2 - 4x + 18)$, $(x^3 + x - 4)$
7. $(x^8 - 4x^7 + 14x^6 - 4x^5 + 13x^4 + x^2 - 3)$, $(x^5 - 4x^4 + 13x^3)$
8. $(x^{10} - 1)$, $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)$

20. *Faktorisierung von Polynomen*

Bestimmen Sie für die folgenden Polynome jeweils alle reellen Nullstellen und überprüfen Sie, ob das Polynom über in Linearfaktoren zerfällt. Falls nicht, geben Sie die verbleibenden quadratischen Faktoren an und bestimmen Sie die zugehörigen komplexen Nullstellen.

1. $x^2 - 2x + 1$
2. $x^2 + 2x + 1$
3. $x^2 + 4$
4. $x^3 + 9x$
5. $x^3 - 13x + 12$
6. $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
7. $6x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 48x + 48$
8. $x^8 - 2x^4 + 1$