Übungen zum Brückenkurs B
SoSe 2024

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Blatt 07 - 04. April, 2024

Die Aufgaben sind unterteilt in
$\circ$ Verständnisaufgaben, $\square$ Vertiefungsaufgaben, $*$ schwierige Aufgaben

---

Aufgabe 1: *Weitere Ableitungen*
Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $\circ$ $f(x) = \sin(x^2 + 3x + 4)$
b) $\circ$ $f(x) = \sin(\cos(e^{2x}))$
c) $\circ$ $f(x) = \cos(x^2)e^{-x}$
d) $\square$ $f(x) = \cos(e^x)\sin(e^{-x})$
e) $\square$ $f(x) = (x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x))^{-\frac{3}{2}}$

Aufgabe 2: *Höhere Ableitungen*
Bilden Sie die Ableitungen bis zur dritten Ordnung.

a) $\circ$ $f(x) = e^{2x} + e^x + 1$
b) $\square$ $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
c) $\square$ $f(x) = (x + 1)^4$

Aufgabe 3: *Partielle Ableitungen*
Bilden Sie die partiellen Ableitungen jeweils nach den Variablen x und y.

a) $\circ$ $f(x, y) = x^2 + y^3$
b) $\square$ $f(x, y) = \sin(x + 2y)$
c) $\square$ $f(x, y) = e^x \ln(y)$
d) $\square$ $f(x, y) = \cos(x)$
e) $*$ $f(x) = x^y$

Aufgabe 4: $*$ *Beweise der Ableitungsregeln*
Beweisen Sie die mit Hilfe der vollständigen Induktion und der Produktregel, dass die Ableitung von $f(x) = x^n$ für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch $f'(x) = nx^{n-1}$.

Aufgabe 5: *Regeln von l'Hospital*
Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Funktionen mit den Regeln von l'Hospital.

a) □ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $*$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

c) $*$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{x}$

d) $*$ $\lim\limits_{x \to \infty} x e^{-x}$

Aufgabe 6: $*$ *Kurvendiskussion*
Untersuchen/Bestimmen Sie von der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\ln^2(x)}$$

den Definitions- und Wertebereich, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Symmetrieverhalten, das Verhalten im Unendlichen, die Ableitungen bis zur dritten Ordnung sowie die Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie die Funktion in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 7: □ *Schräger Wurf*
Beim schrägen Wurf ergibt sich die Höhe des geworfenen Gegenstandes über dem Abwurfpunkt aus der Gleichung

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t + y_0$$

und der horizontale Abstand aus

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t.$$

v_0 ist die Wurfgeschwindigkeit, α der Wurfwinkel gegen die Horizontale, g die Fallbeschleunigung und t die Zeit nach dem Abwurf.

a) Zeichnen Sie eine Skizze des Wurfes in der x-y-Ebene.

b) Berechnen Sie die vertikale und horizontale Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit t.

c) Berechnen Sie außerdem die erreichte Höhe.

d) Ermitteln Sie durch Elimination von t aus beiden Gleichungen die Bahngleichung $y = f(x)$.

Aufgabe 8: *Folgen*
Geben Sie an, ob die folgenden Folgen beschränkt und/oder monoton steigen bzw. fallend sind sowie ob sie konvergieren oder divergieren.

a) ○ $a_n = \frac{1}{n}$

b) ○ $a_n = n^2$

c) ○ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) ☐ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

e) ☐ $a_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}$

f) ☐ $a_n = \frac{n+1}{n+2}$,

Aufgabe 9: *Grenzwerte von Folgen*
Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen.

a) ○ $a_n = 4(\frac{1}{2})^n$

b) ○ $a_n = 1 + 3^{-n}$

c) ○ $a_n = \frac{n+1}{n-2} + \frac{1}{n}$

d) ☐ $a_n = (2 + 3^{-n})\left(\frac{n^2+1}{2n^2-2} + \frac{1}{n!}\right)$

e) ☐ $\sin(n\pi)$