ÜBERBLICK: INTEGRALRECHNUNG

Inhalt

Abschnitt

1. Definition und grundlegende Eigenschaften des Integrals
2. Stammfunktionen
3. Berechnung von Integralen und Flächen

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (> 6MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt mit der Schlussprüfung fortfahren.

Lernziele

- Sie verstehen das Integral als orientierter Flächeninhalt (Abschnitt 1).
- Sie können das Integral als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate interpretieren (Abschnitt 1).
- Sie verstehen den Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und Obersummen und Untersummen (Abschnitt 1).
- Sie kennen den Begriff der Stammfunktion (Abschnitt 2).
- Sie können die Stammfunktion grundlegender Funktionen bestimmen (Abschnitt 2).
- Sie können die Summen- und Faktorregel zur Berechung von Stammfunktionen anwenden (Abschnitt 2).
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und Stammfunktionen von Funktionen (Abschnitt 2).
- Sie können bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen (Abschnitt 3).
- Sie können die Fläche zwischen zwei Kurven berechnen (Abschnitt 3).

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der *Integralrechnung* behandelt. Im ersten Abschnitt wird das bestimmte Integral als *orientierter Flächeninhalt* eingeführt. Die Definition des Integrals erfolgt mit Hilfe von *Obersummen und Untersummen*. Das Integral der momentanen Änderungsrate (Ableitung einer Funktion) kann zur Rekonstruktion von Funktionswerten verwendet werden.

Stammfunktionen und das unbestimmte Integral werden im zweiten Abschnitt behandelt. Der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* stellt den Zusammenhang zwischen Stammfunktionen und dem bestimmten Integral her.

Der dritte Abschnitt behandelt die Berechnung von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen und die Verwendung von *linearen Substitutionen*. Schließlich wird auch die Berechnung der (positiven) *Fläche* zwischen den Graphen von zwei Funktionen bzw. zwischen einer Funktion und der x-Achse erläutert.

Allgemeine Bezeichnungen Zur Vereinfachung der Notation unterscheiden wir in diesem Kapitel nicht zwischen *Funktionen*, *Funktionsvorschriften* und *Funktionsgleichungen*.

Statt *Funktion* f *mit* $f(x) = \ldots$ schreiben wir auch einfach *Funktion* $f(x) = \ldots$

Eine Stammfunktion von f beziehungsweise $f(x)$ bezeichnen wir in der Regel mit F beziehungsweise $F(x)$.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

1. DEFINITION UND GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN DES INTEGRALS

Inhalt

1. Das bestimmte Integral als Flächeninhalt mit Vorzeichen
2. Das Integral einer Änderungsrate
3. Obersummen und Untersummen
4. Eigenschaften des Integrals

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt

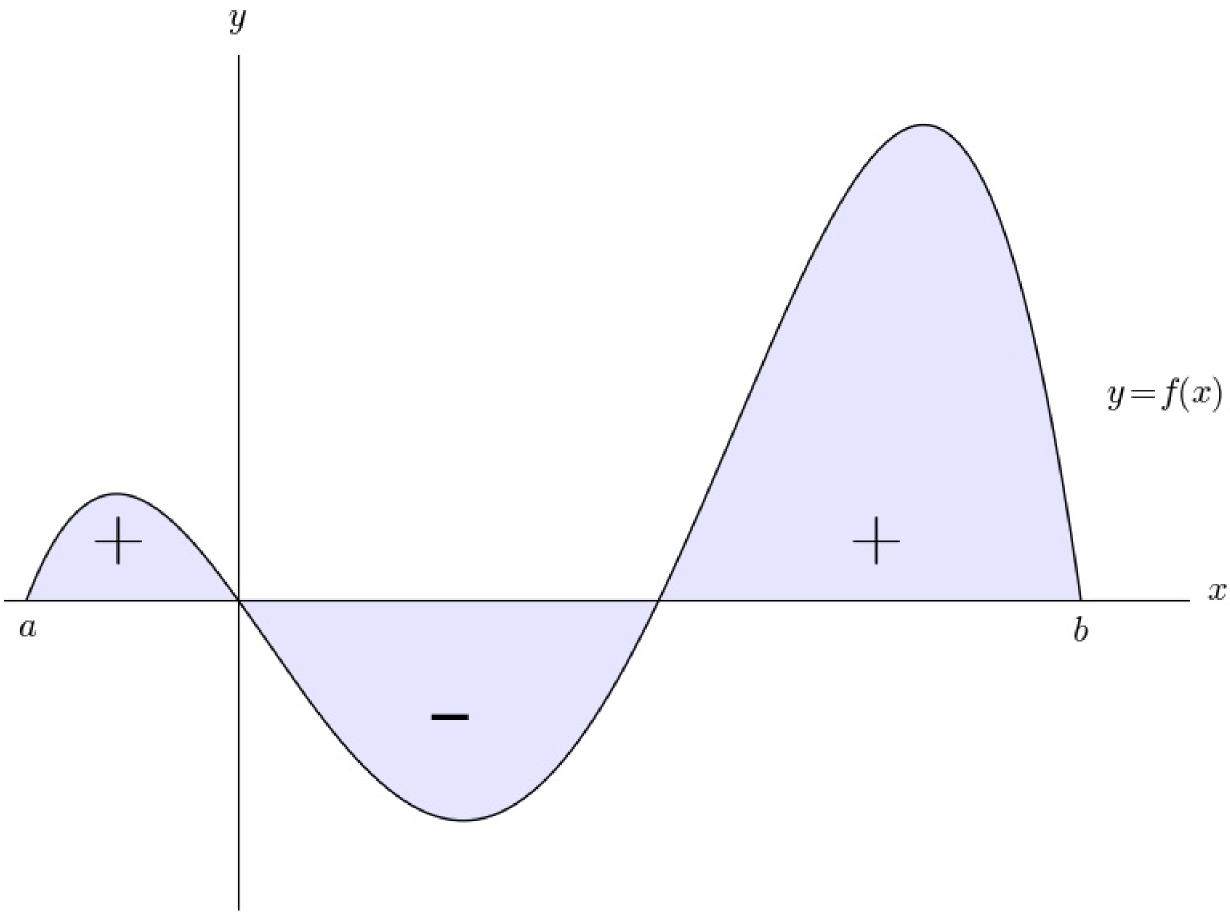
- verstehen Sie das Integral als orientierter Flächeninhalt,
- können Sie das Integral als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate interpretieren,
- verstehen Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und Obersummen und Untersummen.

1.1 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt mit Vorzeichen

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass a und b reelle Zahlen sind und $a < b$ gelte. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ einer Funktion $f(x)$ gibt den *Flächeninhalt mit Vorzeichen* (orientierter Flächeninhalt) an, die der Graph der Funktion mit der x-Achse zwischen den Integrationsgrenzen a und b einschließt, wobei die Flächenteile oberhalb der x-Achse *positiv* und die Flächenteile unterhalb der x-Achse *negativ* in das Integral eingehen.

1.1 BEISPIEL

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist in diesem Beispiel die Summe von drei orientierten Flächeninhalten. Der erste und dritte Flächeninhalt oberhalb der x-Achse zählen positiv, der zweite Flächeninhalt unterhalb der x-Achse zählt negativ.



Schreibweise des bestimmten Integrals

Für das Integral der Funktion $f(x)$ in den Grenzen von a bis b schreibt man

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

a und b sind die *Integrationsgrenzen*, x ist die *Integrationsvariable*, $f(x)$ der *Integrand* und dx das *Differential*.

Das Integralzeichen $\int$ ist aus dem Summenzeichen $\sum$ entstanden: es werden Rechtecksflächen mit Vorzeichen summiert, d.h. Produkte von Funktionswerten $f(x)$ als Höhe des Rechtecks und einer kleinen (infinitesimalen) Intervallbreite dx.

Besonders einfach lassen sich Integrale von konstanten Funktionen bestimmen. Das Integral einer konstanten Funktion $f(x) = c$ ist eine orientierte Rechtecksfläche der Breite $b - a$ und der positiven oder negativen Höhe c.

$$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a)$$

1.2 BEISPIEL

Das Integral der konstanten Funktion $f(x) = -4$ in den Grenzen von -1 bis 2 ist gleich -12.

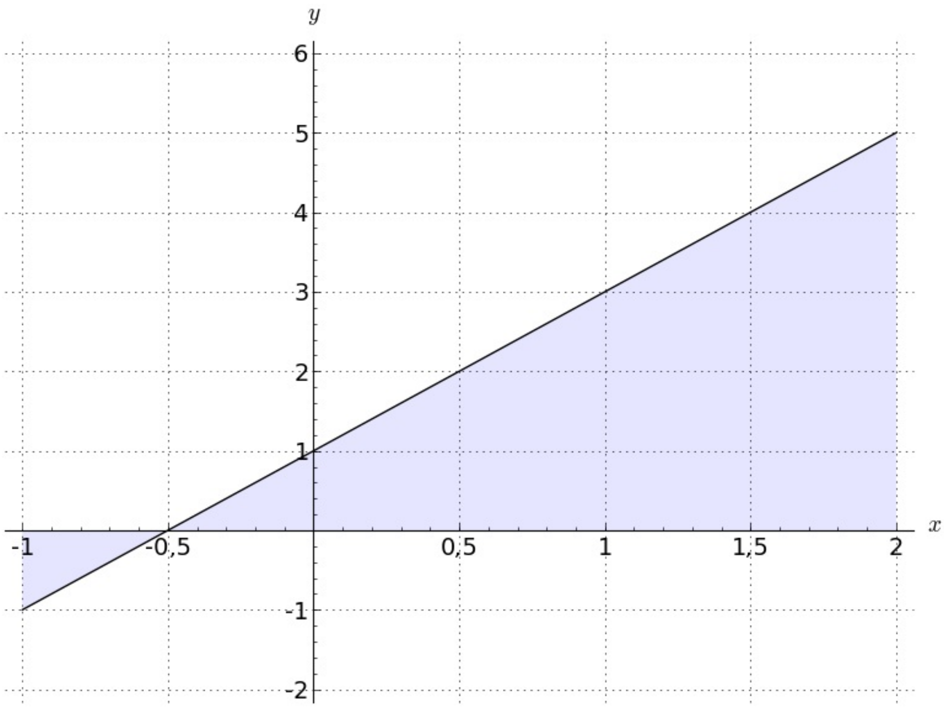
$$\int_{-1}^{2} -4\,dx = (-4) \cdot \big(2 - (-1)\big) = (-4) \cdot 3 = -12$$

Integrale von linearen Funktionen $f(x) = mx + b$ können geometrisch durch Summen von vorzeichenbehafteten Rechtecks- und Dreiecksflächen bestimmt werden. Im nächsten Abschnitt werden wir Integrale von linearen Funktionen zusätzlich auch mit Hilfe einer Stammfunktion berechnen.

1.3 BEISPIEL

Das Integral der Funktion $f(x) = 2x + 1$ in den Grenzen von -1 bis 2 ist eine Summe von zwei Dreiecksflächen mit unterschiedlichem Vorzeichen. Der Flächeninhalt des kleinen Dreiecks zwischen $x = -1$ und $x = -0{,}5$ geht mit negativem, der Flächeninhalt des großen Dreiecks zwischen $x = -0{,}5$ und $x = 2$ geht mit positivem Vorzeichen in das Integral ein. Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt $\frac{1}{2}$ · Breite · Höhe.

$$\int_{-1}^{2} (2x+1)\,dx = \frac{1}{2}(0,5\cdot(-1)) + \frac{1}{2}(2,5\cdot 5) = 6$$



1.4 BEMERKUNG

Der Name der Integrationsvariablen (x, t, ...) hat im bestimmten Integral keine Bedeutung:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(u)\,du = \ldots$$

Bei Integralen über ein Zeitintervall wird häufig die Variable t verwendet.

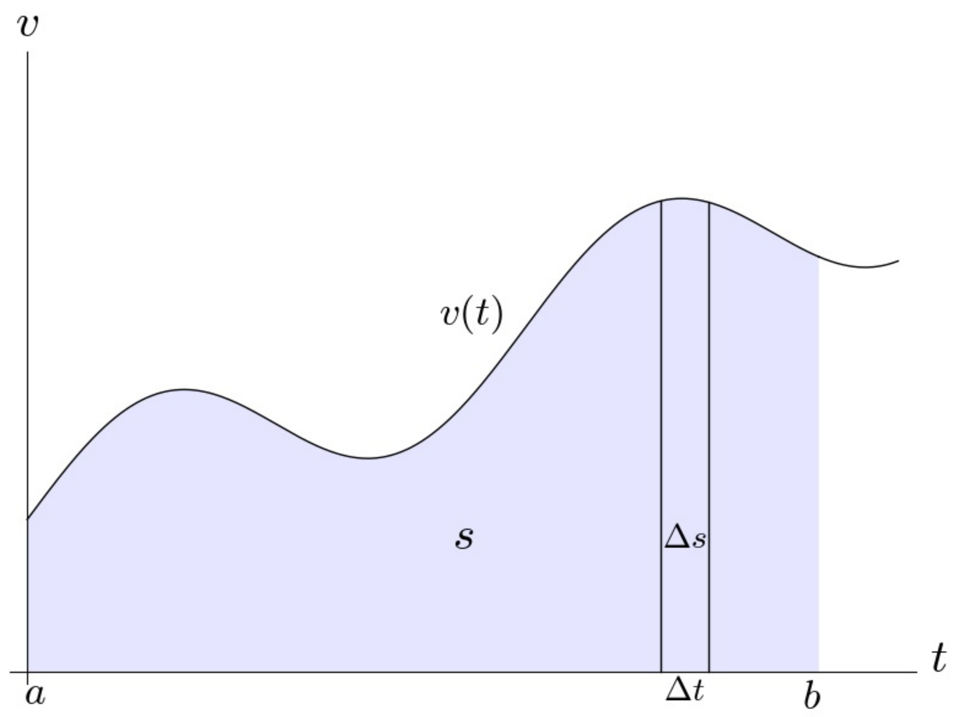
1.2 Das Integral der Änderungsrate

Die Integration hat eine enge Beziehung zur Ableitung einer Funktion und kann als ihre Umkehrung angesehen werden. Wenn die momentane Änderungsrate einer Funktion (d.h. ihre Ableitung) gegeben ist, so liefert die

Integration der Ableitung die ursprünglichen Funktionswerte, oder genauer gesagt: das Integral von $f'(x)$ in den Grenzen von a bis b ergibt die gesamte Änderung $f(b) - f(a)$ der Funktionswerte.

1.5 BEISPIEL

Die zeitabhängige Geschwindigkeit $v(t)$ eines Objektes sei gegeben. Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist die Ableitung der Wegfunktion $s(t)$. Für ein kleines Zeitintervall $[t; t + \Delta t]$ beträgt die Wegänderung näherungsweise $\Delta s = v(t) \cdot \Delta t$. Dies entspricht einer kleinen Rechtsecksfläche der Breite Δt und der Höhe $v(t)$. Dann liefert das Integral $\int_a^b v(t)\, dt$ die Summation der Wegänderungen und somit die gesamte Weglänge $s = s(b) - s(a)$, die zwischen den Zeitpunkten $t = a$ und $t = b$ zurückgelegt wurde. Die Weglänge s entspricht der markierten Fläche.



Funktionen, die eine Ableitung besitzen, heißen *differenzierbar*. Der folgende Satz gilt für differenzierbare Funktionen mit stetiger Ableitung, d.h. für Funktionen, deren Ableitung keine Sprünge besitzen. Diese Voraussetzung ist in den meisten Fällen erfüllt.

1.6 SATZ

Wenn $f(x)$ differenzierbar ist und eine stetige Ableitung $f'(x)$ besitzt, so liefert die Integration von $f'(x)$ im Intervall $[a; b]$ die Differenz $f(b) - f(a)$, d.h. die Änderung von $f(x)$ zwischen den Stellen $x = a$ und $x = b$:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)\,.$$

Erläuterung

Der Satz folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe folgender Abschnitt), der in diesem Kurs aber nicht bewiesen wird. Warum ist die Aussage des Satzes plausibel ?

Setzt man $y = f(x)$ und betrachtet ein kleines Teilintervall $[x; x + \Delta x]$ von $[a; b]$, so beträgt die Differenz der Funktionswerte $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ähnlich wie im Beispiel 1.5 ist Δy näherungsweise gleich $f'(x) \cdot \Delta x$. Zerlegt man das Intervall $[a; b]$ in Teilintervalle der Breite Δx, so ergibt die Summation der Δy (im Grenzwert $\Delta x \to 0$) daher das Integral $\int_a^b f'(x)\,dx$. Andererseits liefert die Summation der $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ aber auch die gesamte Änderung $f(b) - f(a)$ der Funktionswerte zwischen a und b.

1.7 BEISPIEL

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ ist $f'(x) = x$. Integriert man die Ableitung $f'(x) = x$ von 0 bis 1, so erhält man den positiven Flächeninhalt eines Dreiecks der Breite und Höhe 1, sodass gilt

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Andererseits ist die gesamte Änderung (der Zuwachs) der Funktionswerte von $f(x)$ zwischen den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ gleich $f(1) - f(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Man erhält in diesem Beispiel also

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0).$$

Wenn die momentane Änderungsrate $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ gegeben ist, so bietet die Integration von $f'(x)$ also eine Möglichkeit der Bestimmung oder Rekonstruktion der Funktion. Sofern ein Anfangswert $f(a)$ gegeben ist, lässt sich jeder Wert $f(b)$ ausrechnen:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx.$$

1.8 BEISPIEL

Anwendungen:

Energie

Das Integral über die Leistung $P(t)$ (Arbeit pro Zeiteinheit, d.h. die Ableitung der Arbeit nach der Zeit) ergibt die im Zeitintervall $[0;T]$ verrichtete Arbeit W (aufgewendete Energie). Der Anfangswert (d.h. die Energie bei $t=0$) ist hier gleich 0.

$$W = \int_0^T P(t)\,dt$$

Ladung

Beim Aufladen eines Kondensators über einen Widerstand ergibt das Integral über den Strom $I(t)$ (Ladung pro Zeiteinheit, d.h. die Ableitung der Ladung nach der Zeit) die Ladungsmenge Q, die der Kondensator zum Zeitpunkt T speichert, sofern er bei $t=0$ völlig entladen war (Anfangswert gleich 0).

$$Q = \int_0^T I(t)\,dt$$

Volumen

Die Zulaufrate eines Wasserbehälters sei $f(t)$ (Volumen pro Zeiteinheit, d.h. die Ableitung des Volumens nach der Zeit). Das Integral über $f(t)$ ergibt das Volumen V (die Wassermenge im Behälter) zum Zeitpunkt T, sofern der Behälter bei $t=0$ leer war (Anfangswert gleich 0).

$$V = \int_0^T f(t)\,dt$$

Kosten

Die Grenzkosten sind diejenigen Kosten, die durch die Produktion einer zusätzlichen Mengeneinheit eines Produktes entstehen. Die Grenzkostenfunktion für die Herstellung eines bestimmten Produktes sei $f(x)$. Dann können die Kosten K für die Produktion von N Einheiten durch Integration der Grenzkosten und Additon der Fixkosten K_0 bestimmt werden.

$$K = K_0 + \int_0^N f(x)\,dx$$

1.3 Obersummen und Untersummen

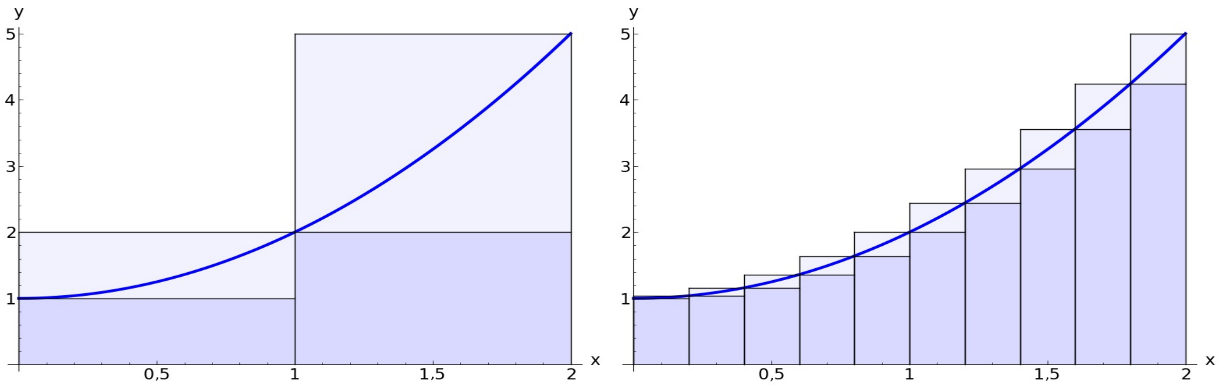
Das Integral entsteht durch Summation von Rechtecksflächen mit Vorzeichen, welche den gesuchten orientierten Flächeninhalt approximieren. Zur Bestimmung des Integrals zerlegt man das Integrationsintervall $[a; b]$ in n Teilintervalle der Breite Δx_k, mit $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$. Auf diesen Intervallen ermittelt man jeweils den kleinsten Funktionswert m_k und den größten Funktionswert M_k. Man erhält je Teilintervall zwei orientierte Rechtecksflächen, $m_k \cdot \Delta x_k$ und $M_k \cdot \Delta x_k$. Die Summation liefert die *Untersumme* $U(Z)$ und die *Obersumme* $O(Z)$. Die Werte hängen von der gewählten Zerlegung Z des Intervalls $[a; b]$ ab.

$$U(Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{und} \quad O(Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \,.$$

Der gesuchte Integralwert liegt *zwischen der Untersumme und der Obersumme*. Die Abschätzung des Integrals mit Hilfe der Untersumme und Obersumme ist umso genauer, je kleiner die Teilintervalle sind, d.h. je feiner die Zerlegung ist.

1.9 BEISPIEL

Links wird das Integrationsintervall $[0;\,2]$ in zwei Teilintervalle und rechts in zehn Teilintervalle aufgeteilt. Die Untersumme ist die dunkel gefärbte Fläche, die Obersumme ist die hell gefärbte plus die dunkel gefärbte Fläche. In beiden Fällen liegt der wahre Integralwert zwischen der Untersumme und der Obersumme. Mit zehn Teilintervallen wird aber eine bessere Näherung als mit zwei Teilintervallen erzielt.



1.10 BEISPIEL

In obigem Beispiel 1.9 ist $f(x) = x^2 + 1$ und die Integrationsgrenzen sind $a = 0$ und $b = 2$. Bei der Aufteilung in zwei Teilintervalle (linker Graph) wird das Intervall $[0;\,2]$ in zwei Teilintervalle $[0;\,1]$ und $[1;\,2]$ zerlegt und für diese Zerlegung die Untersumme $U(Z_2)$ und die Obersumme $O(Z_2)$ berechnet. Die Intervallbreite ist 1, der kleinste Funktionswert liegt am linken Rand, der größte am rechten Rand. Man erhält:

$$U(Z_2) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \quad \text{und} \quad O(Z_2) = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 2 + 5 = 7.$$

In der folgenden Definition wird der Begriff der beschränkten Funktion verwendet. Eine Funktion f ist *beschränkt*, falls es eine Zahl $R > 0$ gibt, so dass $-R \leq f(x) \leq R$ für alle x in ihrem Definitionsbereich gilt.

1.11 DEFINITION

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a; b]$ beschränkte Funktion. f heißt integrierbar auf dem Intervall $[a; b]$, falls sich Untersumme und Obersumme durch Verfeinerung der Zerlegung beliebig genau annähern lassen, d.h. falls es zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ (und sei sie noch so klein) eine Zerlegung Z_n des Intervalls $[a; b]$ in n Teilintveralle gibt, sodass

$$0 \leq O(Z_n) - U(Z_n) \leq \varepsilon$$

gilt.

Ist f integrierbar auf $[a; b]$, so gibt es eine eindeutige reelle Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$, die als *Integral von f von a nach b* bezeichnet wird, sodass

$$U(Z) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq O(Z)$$

für alle Zerlegungen Z des Intervalls $[a; b]$ in endlich viele Teilintervalle gilt.

Das Integral kann also mit Hilfe von Obersummen und Untersummen definiert werden. Zur Berechnung des Integrals einer integrierbaren Funktion f lässt man die Breite der Teilintervalle immer kleiner werden. Schließlich ergibt sich dann der gesuchte Integralwert. Da es weitere Integralbegriffe gibt, spricht man hierbei vom *Riemann-Integral*.

1.12 BEISPIEL

Wir betrachten weiterhin $f(x) = x^2 + 1$ und unterteilen $[0; 2]$ nun in 10 Teilintervalle der Breite $\frac{1}{5}$ (siehe Beispiel 1.9). Der minimale Funktionswert liegt jeweils am linken Rand jedes Teilintervalls. Die Untersumme ist daher:

$$U(Z_{10}) = \Big(f(0) + f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5}) + f(1) + f(\frac{6}{5}) + f(\frac{7}{5}) + f(\frac{8}{5}) + f(\frac{9}{5})\Big) \cdot \frac{1}{5}.$$

Mit Hilfe einer Wertetabelle lässt sich dies leicht ausrechnen: $U(Z_{10}) = \frac{107}{25} = 4,28.$

Der maximale Funktionswert liegt jeweils am rechten Rand der Teilintervalle. Die Obersumme ist daher:

$$O(Z_{10}) = \Big(f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5}) + f(1) + f(\frac{6}{5}) + f(\frac{7}{5}) + f(\frac{8}{5}) + f(\frac{9}{5}) + f(2)\Big) \cdot \frac{1}{5}.$$

Man erhält $O(Z_{10}) = \frac{127}{25} = 5,08$. Der wahre Integralwert, den wir mit feineren Zerlegungen (oder mit Hilfe einer Stammfunktion im nächsten Abschnitt) ausrechnen können, beträgt $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = \frac{14}{3} \approx 4,67$.

Welche Funktionen sind integrierbar? Alle stetigen Funktionen wie Polynome, die Exponentialfunktion e^x, die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und die Betragsfunktion sind integrierbar über beliebigen Intervallen $[a; b]$. Eine Funktion $y = f(x)$ ist *stetig*, wenn kleine (infinitesimale) Änderungen des x-Wertes nur zu kleinen (infinitesimalen) Änderungen des y-Wertes führen. Solche Funktionen besitzen keine Sprünge der Funktionswerte.

Außerdem sind sogar stückweise stetige Funktionen integrierbar, die abschnittsweise aus stetigen Funktionen zusammengefügt werden (siehe Beispiel 1.15).

WARNUNG

Über Definitionslücken darf nicht hinweg integriert werden und auch Integrale über unbeschränkte Intervalle wie z.B. $[0; \infty)$ oder Integrale unbeschränkter Funktionen sind zunächst nicht zugelassen. In diesen Fällen kann der Flächeninhalt unendlich groß oder unbestimmt sein. Manchmal existiert aber ein *uneigentliches Integral*, das wir hier nicht behandeln.

1.13 BEISPIEL

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ hat eine Lücke (Polstelle) bei $x = 0$. Die Integrale $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx$ und $\int_{2}^{4} \frac{1}{x^2}\, dx$ existieren, nicht aber $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ oder $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$, da $x = 0$ dann im Integrationsintveral (bzw. am Rand des Intervalls) liegt.

1.4 Eigenschaften des Integrals

Das Integral ist additiv bezüglich des Integrationsintervalls:

1.14 REGEL

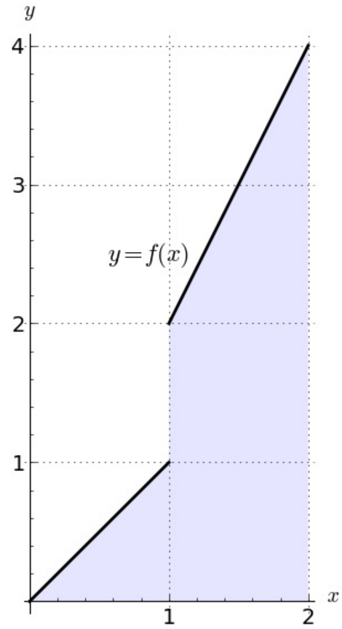
Für reelle Zahlen $a < b < c$ und eine auf dem Intervall $[a; c]$ integrierbare Funktion $f(x)$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx\,.$$

1.15 BEISPIEL

Wir betrachten eine abschnittsweise definierte Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1) \\ 2x, & x \in [1; 2] \end{cases}$$



$f(x)$ hat also eine Sprungstelle bei $x = 1$. An den übrigen Stellen ist sie aber stetig. Daher ist $f(x)$ auf $[0; 2]$ integrierbar und das Integral ergibt sich durch Summe der Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis 2. Das erste Integral ist durch eine Dreiecksfläche und das zweite durch eine Trapezfläche gegeben, die man beispielsweise als Summe einer Rechtecks- und einer Dreieicksfläche berechnen kann. Die Flächeninhalte der markierten Kästchen lassen sich auch direkt aus der Abbildung ablesen. Alle Integrale sind positiv, da $f(x) \geq 0$ für $x \in [0; 2]$ gilt.

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(1 \cdot 1) + 1 \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 \cdot 2) = \frac{7}{2}$$

Für die Integrationsgrenzen a und b gilt üblicherweise $a < b$. Man betrachtet aber auch die Fälle $a = b$ und $a > b$:

1.16 DEFINITION

Wenn $f(x)$ auf dem Intervall $[a;b]$ mit $a < b$ integrierbar ist, dann definiert man auf folgende Weise das Integral mit vertauschten Grenzen:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Außerdem setzt man $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

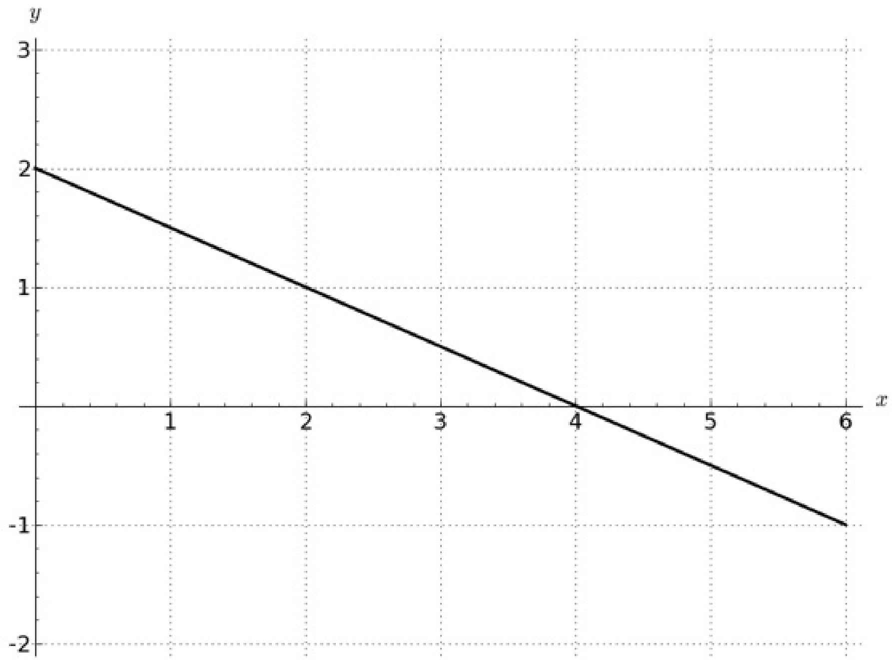
Warum ändert man das Vorzeichen? Bei der Integration von b nach a (d.h. in negativer x-Richtung) ändert sich die Orientierung und daher das Vorzeichen des Integrals. Eine weitere Begründung liefert die Additivität des Integrals bezüglich der Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ und ihr Graph (siehe unten). Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ für verschiedene Grenzen a und b. Lösen Sie die Aufgabe geometrisch!



a) $\int_0^4 f(x)\,dx$,

b) $\int_1^3 f(x)\,dx$,

c) $\int_2^6 f(x)\,dx$. Was passiert hier?

Antworten

a) $\int_0^4 f(x)\,dx = 4$.

b) $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$.

c) $\int_2^6 f(x)\,dx = 0$.

Lösung zu a

Die Gerade $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 4$. Da sie die Steigung $-\frac{1}{2}$ hat, fällt sie und verläuft somit im Intervall $[0; 4]$ oberhalb der x-Achse.

Daher liegt die Fläche, welche von dem Graphen von f und der x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 4$ eingeschlossen wird, komplett oberhalb der x-Achse. Somit ist das gesuchte Integral positiv und kann als Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden.

Die Länge der Dreiecksseite auf der x-Achse beträgt $4 - 0 = 4$. Die Höhe des Dreiecks auf der y-Achse beträgt $2 - 0 = 2$. Als Flächeninhalt ergibt sich daher $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ und somit $\int_0^4 f(x)\,dx = 4$.

Der orientierte Flächeninhalt lässt sich auch anhand der Grafik ablesen. Jedes Kästchen hat die Fläche 1.

Lösung zu b

Die Gerade $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 4$. Da sie die Steigung $-\frac{1}{2}$ hat, fällt sie und verläuft somit im Intervall $[1; 3]$ oberhalb der x-Achse.

Daher liegt die gesuchte Fläche komplett oberhalb der x-Achse. Das Integral ist positiv und kann als Flächeninhalt eines *Trapezes* mit den Eckpunkten $(1; 0), (3; 0), (3; \frac{1}{2}), (1; \frac{3}{2})$ oder als Summe einer Rechtecks- und einer Dreiecksfläche berechnet werden.

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist $(3 - 1) \cdot \frac{1}{2} = 1$, der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $((3 - 1) \cdot 1) \cdot \frac{1}{2} = 1$, was $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$ liefert.

Der orientierte Flächeninhalt lässt sich auch anhand der Grafik ablesen. Jedes Kästchen hat die Fläche 1.

Lösung zu c

Die Gerade $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 4$. Damit liegt sie bezüglich des Integrationsintervalls $[2; 6]$ sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse.

Bei der Berechnung des Integrals muss nun aufgepasst werden! Das Integral besteht aus zwei orientierten Dreiecksflächen.

Das erste Dreieck (oberhalb der x-Achse) hat eine Grundseite von $x = 2$ bis $x = 4$ und eine Höhe von $|f(2)| = |1| = 1$. Der Flächeninhalt beträgt folglich $\frac{(4-2)\cdot 1}{2} = 1$. Diese Fläche trägt positiv zum Integral bei.

Das zweite Dreieck (unterhalb der x-Achse) hat eine Grundseite von $x = 4$ bis $x = 6$ und eine Höhe von $|f(6)| = |-1| = 1$. Der Flächeninhalt beträgt folglich $\frac{(6-4)\cdot 1}{2} = 1$. Diese Fläche trägt negativ zum Integral bei.

Das Integral berechnet sich nun aus der Summe der positiven und der negativen Dreiecksfläche: $1 - 1 = 0$. Die Flächeninhalte heben sich im Integral wegen ihrer unterschiedlichen Orientierung auf. Daher ist $\int\limits_2^6 f(x)\,dx = 0$.

Anhand der Grafik erkennt man, dass die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß sind.

ÜBUNG 2

Ein LKW verliert Motoröl aufgrund eines Lecks das sich vergrößert. Die Verlustrate zum Zeitpunkt t (in Stunden) lässt sich durch die Funktion $f(t) = 2t\ \frac{l}{h}$ beschreiben, d.h. die Verlustrate beträgt $2t$ Liter pro Stunde. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt das Ölvolumen $36l$. Bestimmen Sie...

a) ...den Ölverlust nach $4h$.

b) ...den Zeitpunkt T, zu welchem der Motorölvorrat des LKW aufgebraucht ist.

Antworten

a) Nach $4h$ beträgt der Ölverlust $16l$.

b) Nach $6h$ ist der Öltank leer gelaufen.

Lösung zu a

Die Funktion $f(t) = 2t$ liefert die momentane Änderungsrate (Ausflussgeschwindigkeit von Öl aus dem Tank in Litern pro Stunde).

Um den Ölverlust zu bestimmen, muss diese Funktion integriert werden.

Da der Ölverlust nach $4h$ gefragt ist, muss das Integral $\int_0^4 2t\,dt$ berechnet werden.

Dies kann wie in Übung 1 geschehen: Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit der Seitenlänge $4 - 0 = 4$ und der Höhe $f(4) = 8$.

Dieser Flächeninhalt beträgt $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$, woraus $\int_0^4 2t\,dt = 16$ folgt.

Da die Funktion in $\frac{l}{h}$ angegeben war, hat der LKW nach $4h$ somit $16l$ verloren.

Lösung zu b

Die Funktion $f(t) = 2t$ liefert die momentane Änderungsrate (Ausflussgeschwindigkeit von Öl aus dem Tank in Litern pro Stunde).

Um den Ölverlust zu bestimmen, muss diese Funktion integriert werden.

Da nach dem Zeitpunkt T gefragt ist, zu welchem der Öltank (welcher $36l$ fasst) leer ist, muss die Gleichung $\int_0^T 2t\,dt = 36$ gelöst werden.

Wie in a) wird das Integral über den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmt. Diesmal kommt jedoch noch ein Parameter T vor.

Die Dreiecksfläche beträgt $\frac{1}{2} \cdot (T \cdot f(T)) = \frac{1}{2} \cdot T \cdot 2T = T^2$.

Es ergibt sich die Gleichung $T^2 = 36$, woraus der gesuchte Zeitpunkt $T = 6h$ folgt.

ÜBUNG 3

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 2$. Wir betrachten sie im Intervall $[0;2]$ und wollen den Wert des Integrals $\int_0^2 f(x)\,dx$ mit Hilfe einer Obersumme und einer Untersumme abschätzen.

Dazu wird das Intervall $[0;2]$ in 8 Teilintervalle aufgeteilt. Folgen Sie der Anleitung:

a) Zunächst werden die 9 Funktionswerte $f(0), f(\frac{1}{4}), f(\frac{2}{4}), f(\frac{3}{4}), f(1), f(\frac{5}{4}), f(\frac{6}{4}), f(\frac{7}{4})$ und $f(2)$ benötigt. Berechnen Sie diese!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der in a) berechneten Werte die Untersumme $U(Z)$ für die obige Zerlegung.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der in a) berechneten Werte die Obersumme $O(Z)$ für die obige Zerlegung.

d) In welchem Intervall befindet sich der exakte Integralwert ?

Antworten

a) $f(0) = 2,\ f(\frac{1}{4}) = \frac{129}{64},\ f(\frac{2}{4}) = \frac{17}{8},\ f(\frac{3}{4}) = \frac{155}{64},\ f(1) = 3,\ f(\frac{5}{4}) = \frac{253}{64},\ f(\frac{6}{4}) = \frac{43}{8},\ f(\frac{7}{4}) = \frac{471}{64},\ f(2) = 10$.

b) $U(Z) = \frac{113}{16} = 7{,}0625$.

c) $O(Z) = \frac{145}{16} = 9{,}0625$.

d) $7{,}0625 \leq \int_0^2 f(x)\,dx \leq 9{,}0625$.

Lösung zu a

Die unter " Antworten " gespeicherten Ergebnisse für die Funktionswerte ergeben sich durch simples Einsetzen der Werte $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots, 2$ in die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + 2$.

Lösung zu b

Die Intervallbreite beträgt $\frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$.

Die Funktion ist streng monoton steigend, so dass der kleinste Funktionswert jeweils am linken Rand der Teilintervalle liegt.

Zur Berechnung der Untersumme wird die Intervallbreite mit der Summe der Funktionswerte am linken Rand multipliziert.

Man erhält: $U(Z) = \frac{1}{4} \cdot (2 + \frac{129}{64} + \frac{17}{8} + \frac{155}{64} + 3 + \frac{253}{64} + \frac{43}{8} + \frac{471}{64}) = \frac{113}{16} = 7{,}0625$.

Lösung zu c

Die Intervallbreite beträgt $\frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$.

Die Funktion ist streng monoton steigend, so dass der größte Funktionswert jeweils am rechten Rand der Teilintervalle liegt.

Zur Berechnung der Obersumme wird die Intervallbreite mit der Summe der Funktionswerte am rechten Rand multipliziert.

Man erhält: $O(Z) = \frac{1}{4} \cdot (\frac{129}{64} + \frac{17}{8} + \frac{155}{64} + 3 + \frac{253}{64} + \frac{43}{8} + \frac{471}{64} + 10) = \frac{145}{16} = 9{,}0625$.

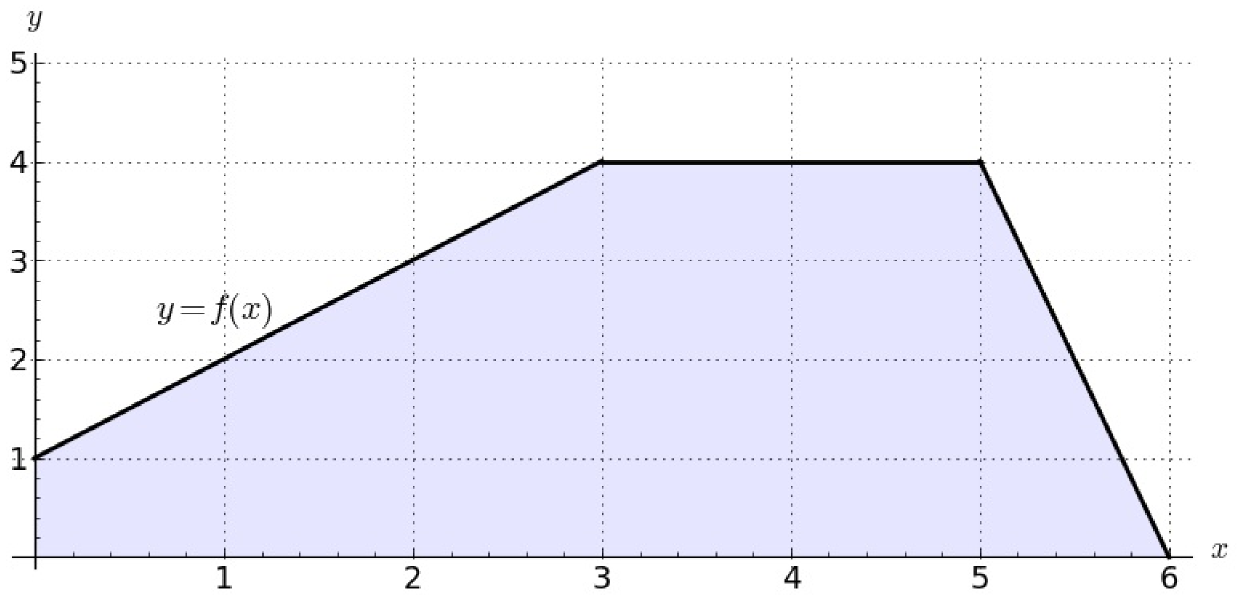
Lösung zu d

Da Unter- und Obersumme eine untere beziehungsweise obere Schranke für den exakten Integralwert liefern, muss $7{,}0625 \leq \int\limits_0^2 f(x)\,dx \leq 9{,}0625$ gelten. Ein gut geratener Wert wäre $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 8$, was dem tatsächlichen Wert des Integrals entspricht; dessen genaue Berechnung erfolgt im nächsten Kapitel mit Hilfe einer Stammfunktion.

ÜBUNG 4

Gegeben sei die abschnittsweise definierte Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [0;3) \\ 4 & x \in [3;5) \\ -4x+24 & x \in [5;6] \end{cases}$$



Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_0^6 f(x)\,dx$.

Hinweis: Nutzen Sie die Additivität des Integrals!

Antwort

$\int\limits_0^6 f(x)\,dx = 17{,}5\,.$

Lösung

Wegen der Additivität des Integrals folgt: $\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 (x+1)\,dx + \int_3^5 4\,dx + \int_5^6 (-4x+24)\,dx$.

Nun können die drei Integrale geometrisch bestimmt werden. Wegen $f(x) \geq 0$ sind alle Flächen positiv orientiert. Die Berechnung kann wie in Übung 1 geschehen:

Das erste Integral als Flächeninhalt eines Trapezes (Summe einer Rechtecks- und Dreiecksfläche):
$\int_0^3 (x+1)\,dx = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot ((4-1) \cdot 3) = 7{,}5$,

das zweite Integral $\int_3^5 4\,dx = 8$ als Flächeninhalt eines Rechtecks,

das dritte Integral $\int_5^6 (-4x+24)\,dx = 2$ als Flächeninhalt eines Dreiecks: $\frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 4)$.

Die Summe dieser drei Flächeninhalte ergibt den Integralwert $\int_0^6 f(x)\,dx = 17{,}5$.

Der orientierte Flächeninhalt lässt sich auch anhand der Grafik ablesen. Jedes Kästchen hat die Fläche 1.

2. STAMMFUNKTIONEN

Inhalt

1. Stammfunktionen und ihre Eigenschaften
2. Das unbestimmte Integral
3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt

- kennen Sie den Begriff der Stammfunktion und ihre Eigenschaften,
- können Sie die Stammfunktion grundlegender Funktionen bestimmen,
- können Sie die Summen- und Faktorregel zur Berechung von Stammfunktionen anwenden,
- kennen Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und Stammfunktionen.

2.1 Stammfunktionen und ihre Eigenschaften

Im vorigen Abschnitt haben wir bereits einen Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung kennengelernt: das Integral der momentanen Änderungsrate (d.h. der Ableitung $f'(x)$) einer Funktion kann zur Rekonstruktion der Funktion $f(x)$ verwendet werden. Die Integration macht auf diese Weise die Ableitung rückgängig.

Stammfunktionen sind Umkehrungen der Ableitung:

2.1 DEFINITION

Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$ auf einem Intervall I, falls gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

2.2 BEISPIEL

Sei $f(x) = x^2 + 1$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf $\mathbb{R}$, denn es gilt $F'(x) = x^2 + 1 = f(x)$.

Wie bestimmt man eine Stammfunktion $F(x)$, wenn nur $f(x)$ gegeben ist? Durch Umkehrung der Ableitung, d.h. man sucht eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist.

Stammfunktionen sind aber (anders als Ableitungen) nicht eindeutig! Falls $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion für eine beliebige reelle Zahl C, denn beim Ableiten fällt diese Konstante weg.

Stammfunktionen einiger grundlegender Funktionen lassen sich einfach angeben. Der Nachweis erfolgt durch Ableitung.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	Bedingung
x^k mit $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq -1$	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}$	$x \neq 0$, falls $k < 0$
x^{-1}	$\ln\|x\|$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$

Ableitung von $\ln |x|$

Für $x > 0$ gilt $\ln |x| = \ln(x)$ und die Ableitung ist $\frac{1}{x}$.
Für $x < 0$ gilt $\ln |x| = \ln(-x)$. Die Ableitung wird mit Hilfe der Kettenregel der Differenzialrechnung bestimmt:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Daher ist $\frac{1}{x} = x^{-1}$ die Ableitung von $\ln |x|$ für beliebige $x \neq 0$.

2.3 BEISPIEL

Sei $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Für Stammfunktionen gilt eine *Summen- und Faktorregel*, die man durch Ableiten einfach nachrechnen kann:

2.4 REGEL

Summen- und Faktorregel

- Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, so ist $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$.
- Wenn $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $c \cdot F(x)$ eine Stammfunktion von $c \cdot f(x)$.

2.5 BEISPIEL

$f(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x) + 4x$. Dann ist

$$F(x) = 2\big(-\cos(x)\big) - 3\sin(x) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) = -2\cos(x) - 3\sin(x) + 2x^2$$

eine Stammfunktion von $f(x)$.

WARNUNG

Die Faktorregel gilt für *nur* für das Produkt einer konstanten Zahl mit einer Funktion, aber nicht für Produkte von zwei Funktionen! Betrachtet man z.B. $f(x) = x \cdot x = x^2$, so ist $\frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von $f(x)$, aber nicht $\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x^4$. Für die Integration von Produkten von Funktionen, wie z.B. für $f(x) = x \cdot e^x$, existiert eine eigene Regel (partielle Integration, siehe untenstehendes Video), die hier nicht behandelt wird.

[video-online-only]

2.2 Das unbestimmte Integral

Im letzten Abschnitt hatten wir bereits gesehen, dass eine Stammfunktion nicht eindeutig ist, weil Konstanten addiert werden können.

2.6 BEISPIEL

$F_1(x) = -\cos(x)$ und $F_2(x) = -\cos(x) + 5$ sind Stammfunktionen von $f(x) = \sin(x)$. Alle Funktionen der Form $-\cos(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ sind Stammfunktionen von $\sin(x)$.

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ lässt sich genau beschreiben: Wenn $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zwei beliebige Stammfunktionen von $f(x)$ auf dem Intervall I sind, so gilt:

$$F_1{}'(x) = F_2{}'(x) = f(x) \Longrightarrow F_1{}'(x) - F_2{}'(x) = 0.$$

Die Ableitung von $F_1(x) - F_2(x)$ ist also konstant gleich 0. Die Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ ändert sich auf dem

Intervall I nicht und ist daher gleich einer konstanten Funktion: $F_1(x) - F_2(x) = C$, oder auch: $F_1(x) = F_2(x) + C$. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich also auf dem Intervall I nur um eine konstante Verschiebung des Funktionswertes.

2.7 DEFINITION

Die Menge der Stammfunktionen einer integrierbaren Funktion $f(x)$ bezeichnet man als *unbestimmtes Integral* und man schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion und $C \in \mathbb{R}$ ist.

[video-online-only]

WARNUNG

Bei einem unbestimmten Integral ist der Name der Integrationsvariablen (z.B. x) üblicherweise auch der Name der unabhängigen Variablen der Stammfunktionen.

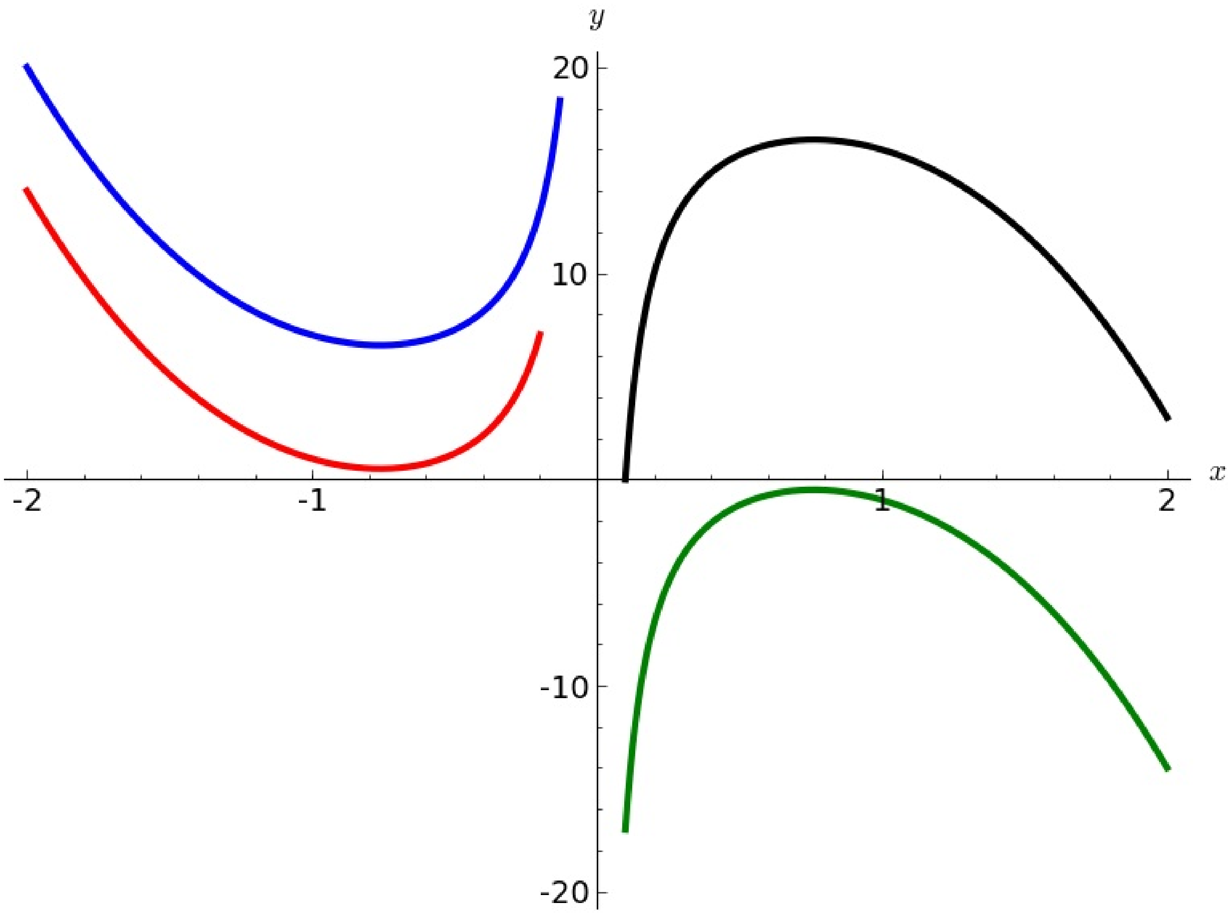
Bei einem unbestimmten Integral lässt man also die Integrationsgrenzen weg und erhält eine Menge von Stammfunktionen. Den Zusammenhang zum bestimmten Integral besprechen wir dann im nächsten Abschnitt.

2.8 BEISPIEL

Es gilt

$$\int \left(\frac{2}{x^2} - 6x^2\right) dx = -\frac{2}{x} - 2x^3 + C.$$

Das Integral und die Stammfunktionen sind nur für Intervalle definiert, die nicht die Null enthalten, z.B. auf $(-\infty; 0)$ und $(0; \infty)$. Die Stammfunktion und die Konstante C kann für positive und negative x-Werte unabhängig gewählt werden. Die folgende Abbildung stellt auf jedem der Intervalle $(-\infty; 0)$ und $(0; \infty)$ zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x) = \frac{2}{x^2} - 6x^2$ dar.



2.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt stellen wir nun die Verbindung zwischen dem *bestimmten Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ und den Stammfunktionen her. Dies erklärt dann auch, warum wir die Menge der Stammfunktionen als *unbestimmtes Integral* bezeichnet haben.

2.9 SATZ

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f(x)$ auf dem Intervall $[a; b]$ stetig, dann existiert eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ (d.h. eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$) und für eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Das bestimmte Integral kann also durch Einsetzen der Grenzen in eine Stammfunktion ausgerechnet werden. Für die Differenz $F(b) - F(a)$ schreibt man auch $[F(x)]_a^b$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt also

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\,F(x)\,\right]_a^b.$$

Der Wert hängt nicht von der Wahl einer Stammfunktion ab. In der Tat würde eine konstante Verschiebung von $F(x)$ (d.h. $F(x) + C$ statt $F(x)$) bei der Bildung der Differenz wieder wegfallen!

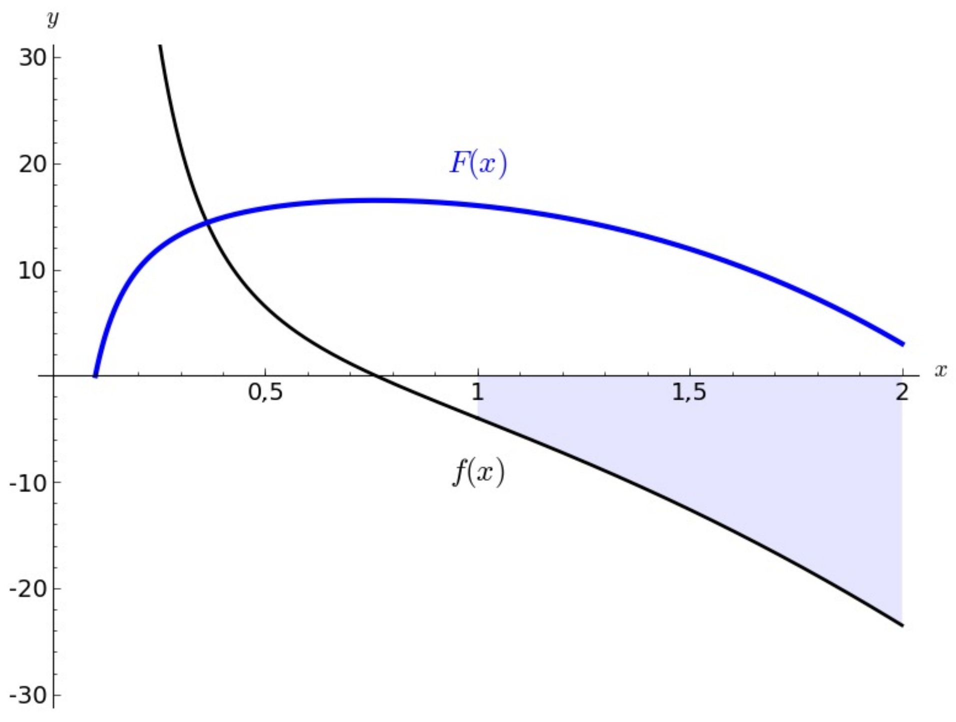
Der Aussage des Hauptsatzes sind wir in etwas anderer Form bereits im vorigen Abschnitt begegnet. Das Integral der momentanen Änderungsrate (Ableitung) einer Funktion ergibt die gesamte Änderung zwischen den Integrationsgrenzen. Nun hat die Stammfunktion $F(x)$ die Ableitung $f(x)$, so dass das Integral von $f(x)$ von a bis b die gesamte Änderung von $F(x)$ ergibt, d.h. die Funktionsdifferenz $F(b) - F(a)$.

2.10 BEISPIEL

$f(x) = \frac{2}{x^2} - 6x^2$ ist auf dem Intervall $[1; 2]$ stetig. Die Funktion $F(x) = -\frac{2}{x} - 2x^3 + 20$ ist eine Stammfunktion und

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - 6x^2\right) dx = \left[-\frac{2}{x} - 2x^3 + 20\right]_1^2 = 3 - 16 = -13.$$

Die Funktion $f(x)$, die Stammfunktion $F(x)$ und der orientierte Flächeninhalt $\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -13$ sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = x^{-2} - \cos(x) - 3e^x$ auf dem Intervall $(0; \infty)$.

b) Welche der folgenden Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = e^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big)$ auf $\mathbb{R}$?

$F_1(x) = e^{-x}\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$, oder

$F_2(x) = -e^{-x}\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$, oder

$F_3(x) = e^{-x}\sin(x)$?

Antworten

a) $F(x) = -x^{-1} - \sin(x) - 3e^x$.

b) $F_3(x) = e^{-x}\sin(x)$.

Lösung zu a

Die Summanden werden einzeln integriert und dann die Summenregel angewendet.

Eine Stammfunktion zu x^{-2} ist $\frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -x^{-1}$.

Eine Stammfunktion zu $\cos(x)$ ist $\sin(x)$.

Eine Stammfunktion zu e^x ist e^x .

Nach der Summen- und Faktorregel ist dann $F(x) = -x^{-1} - \sin(x) - 3e^x$ eine Stammfunktion zu $f(x) = x^{-2} - \cos(x) - 3e^x$ auf dem Intervall $(0; \infty)$.

Lösung zu b

$f(x) = e^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big)$ ist ein *Produkt* von zwei Funktionen.

Man prüft die angegebenen drei Funktionen durch Ableitung. Wenn die Ableitung gleich $f(x)$ ist, so handelt es sich um eine Stammfunktion.

Nach Produktregel der Differentiation gilt:

$$F_1{}'(x) = \Big(e^{-x}\big(\sin(x) + \cos(x)\big)\Big)' = -e^{-x}\big(\sin(x) + \cos(x)\big) + e^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big) = e^{-x}\big(-2\sin(x)\big).$$

Es gilt $F_2(x) = -F_1(x)$. Also folgt:

$$F_2{}'(x) = -F_1{}'(x) = 2e^{-x}\sin(x).$$

$F_3(x)$ ist die gesuchte Stammfunktion, denn nach Produktregel der Differentiation gilt:

$$F_3{}'(x) = \big(e^{-x}\sin(x)\big)' = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) = e^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big) = f(x).$$

ÜBUNG 2

a) Welche der folgenden Formeln für unbestimmte Integrale sind richtig, falls $x > 0$ gilt und $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist?

1) $\int \ln(x)\,dx = \frac{1}{x} + C$

2) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$

3) $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$

4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(2x) + C$

5) $\int \frac{1}{x}\,dx = C\ln(x)$

b) Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, wobei a und b konstante reelle Zahlen sind.

1) $\int \big(a\sin(x) + b\cos(x)\big)\,dx$

2) $\int \frac{ax+b}{x^3}\,dx$

3) $\int \big(\frac{1}{(ax)^6} - b^2e^x\big)\,dx$

Antworten

a) Die Integrale 3) und 4) sind richtig, die übrigen sind fehlerhaft.

b)

1) $\int \big(a\sin(x) + b\cos(x)\big)\,dx = -a\cos(x) + b\sin(x) + C$

2) $\int \frac{ax+b}{x^3}\,dx = -a\frac{1}{x} - \frac{b}{2}\frac{1}{x^2} + C$

3) $\int \big(\frac{1}{(ax)^6} - b^2e^x\big)\,dx = -\frac{1}{5a^6}\frac{1}{x^5} - b^2e^x + C$

Lösung zu a

1) Die Ableitung von $\frac{1}{x}$ ist $-\frac{1}{x^2}$. Die Formel ist also falsch.

2) Es gilt $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$. Die additive Konstante C fehlt in der Formel; das unbestimmte Integral ist eine *Menge* von Stammfunktionen.

3) Die Formel ist richtig, denn die Ableitung von $x\ln(x) - x$ ist $x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) - 1 = \ln(x)$.

4) Die Formel ist richtig, obwohl $\ln(2x)$ statt $\ln(x)$ angegeben ist. Es gilt $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$ und dies ist ebenso eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$.

5) $C \cdot \ln(x)$ ist keine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$, denn $(C\ln(x))' = C\frac{1}{x}$. Die Integrationskonstante ist *additiv*.

Lösung zu b

Wir wenden die Summen- und Faktorregel an.

1) Wegen $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ und $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$ folgt aus der Summen- und Faktorregel:

$$\int \big(a\sin(x) + b\cos(x)\big)\,dx = -a\cos(x) + b\sin(x) + C.$$

2) Es gilt

$$\frac{ax+b}{x^3} = \frac{ax}{x^3} + \frac{b}{x^3} = a \cdot \frac{1}{x^2} + b \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Wegen $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$ und $\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C$ folgt aus der Summen- und Faktorregel:

$$\int \frac{ax+b}{x^3}\,dx = -a\frac{1}{x} - \frac{b}{2}\frac{1}{x^2} + C.$$

3) Wegen $\int \frac{1}{x^6}\,dx = -\frac{1}{5}x^{-5} + C$ und $\int e^x\,dx = e^x + C$ folgt aus der Summen- und Faktorregel:

$$\int \Big(\frac{1}{(ax)^6} - b^2e^x\Big)\,dx = \int \Big(\frac{1}{a^6x^6} - b^2e^x\Big)\,dx = -\frac{1}{5a^6}\frac{1}{x^5} - b^2e^x + C.$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, sofern die bestimmten Integrale existieren:

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{x^2}\,dx$

b) $\int_{-2}^{1} (\frac{3}{x^3} - 2x^2)\,dx$

c) $\int_{\pi}^{0} (2\sin(x) - 3e^x)\,dx$

Antworten

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

b) Das bestimmte Integral existiert nicht.

c) $\int_{\pi}^{0} (2\sin(x) - 3e^x)\,dx = 3e^{\pi} - 7$.

Lösung zu a

Es gilt $f(x) = \frac{1+x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. $f(x)$ ist stetig und daher auch integrierbar auf dem Intervall $[-2; -1]$.

Wir bestimmen eine Stammfunktion und wenden dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.

Eine Stammfunktion ist $F(x) = -\frac{1}{x} + \ln|x| + C$.

Für das bestimmte Integral folgt nach dem Hauptsatz

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} + \ln|x|\right]_{-2}^{-1} = (1 + \ln(1)) - \left(\frac{1}{2} + \ln(2)\right) = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Lösung zu b

Das bestimmte Integral existiert nicht, da wegen $0 \in [-2; 1]$ eine Polstelle von $\frac{3}{x^3}$ im Integrationsintervall liegt, über die nicht hinweg integriert werden darf.

Lösung zu c

$f(x) = 2\sin(x) - 3e^x$ ist stetig und daher integrierbar auf dem Intervall $[0; \pi]$.

Wir bestimmen eine Stammfunktion und wenden dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.

Eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist $F(x) = -2\cos(x) - 3e^x$.

In diesem Beispiel ist π die untere und 0 die obere Grenze. Der Hauptsatz kann trotzdem ohne Änderung verwendet werden.

Es folgt:

$$\int_{\pi}^{0} (2\sin(x) - 3e^x)\, dx = \left[-2\cos(x) - 3e^x\right]_{\pi}^{0} = (-2-3) - (2-3e^{\pi}) = 3e^{\pi} - 7.$$

ÜBUNG 4

a) Die folgende Funktion $f(x)$ ist gegeben:

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f''(x)$ auf dem Intervall $(0; \infty)$.

b) Berechnen Sie anschließend $\int_1^2 f''(x)\,dx$.

Antworten

a) $f'(x) = \frac{\pi\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{x^2}$ ist eine Stammfunktion von $f''(x)$.

b) $\int_1^2 f''(x)\,dx = \frac{3}{2}\pi$.

Lösung zu a

Gesucht ist eine Funktion, deren Ableitung $f''(x)$ ist.

$f'(x)$ hat die Ableitung $f''(x)$ und ist daher eine Stammfunktion von $f''(x)$.

Die Ableitung $f'(x)$ von $f(x) = \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{x}$ wird mit Hilfe der Produktregel bestimmt.

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x) \cdot \frac{1}{x} + \sin(\pi x) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{\pi\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{x^2}$$

Alternativ kann man auch die Quotientenregel zur Ableitung verwenden.

Lösung zu b

$f''(x)$ ist stetig und daher integrierbar auf dem Intervall $[1;2]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_1^2 f''(x)\,dx = \left[f'(x)\right]_1^2.$$

Außerdem gilt

$$f'(x) = \frac{\pi\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{x^2}.$$

Also ist das Integral gleich

$$\left[\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3}{2}\pi.$$

3. BERECHNUNG VON INTEGRALEN UND FLÄCHEN

Inhalt

1. Berechnung von bestimmten Integralen
2. Die lineare Substitution
3. Berechnung von Flächen zwischen zwei Graphen

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt

- können Sie bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen,
- können Sie die Fläche zwischen zwei Kurven berechnen.

3.1 Berechnung von bestimmten Integralen

Im vorigen Abschnitt wurde behandelt, wie man bestimmte Integrale mit Hilfe des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* berechnen kann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b\,.$$

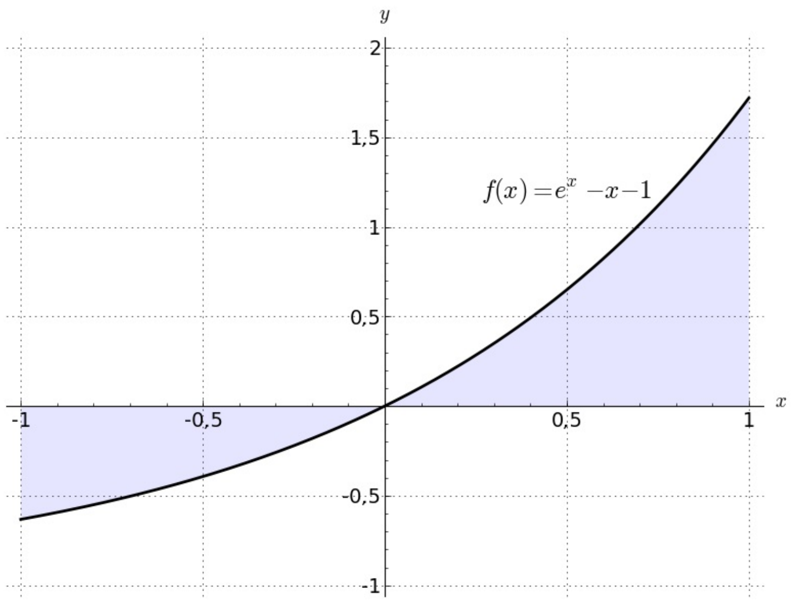
Die Berechnung eines Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ reduziert sich daher im wesentlichen auf die Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$.

Im vorigen Abschnitt wurden auch bereits Stammfunktionen zu mehreren wichtigen Funktionen wie x^k, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und e^x vorgestellt. Außerdem gilt die Summen- und Faktorregel für Integrale.

3.1 BEISPIEL

Sei $f(x) = e^x - x - 1$. Dann gilt $\int f(x)\,dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C$ und

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(e^x - x - 1)\,dx &= \left[e^x - \tfrac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{1} \\ &= (e - \tfrac{1}{2} - 1) - (e^{-1} - \tfrac{1}{2} + 1) \\ &= e - \tfrac{1}{e} - 2 \approx 0,35.\end{aligned}$$



Die Bestimmung einer Stammfunktion kann eine schwierige Aufgabe sein. Es existieren hierzu verschiedene Regeln, die in diesem Kurs nur teilweise behandelt werden. Im Unterschied zur Ableitung führt die Anwendung der Regeln aber nicht automatisch auf eine Lösung, obwohl jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt.

Wenn eine mögliche Stammfunktion gegeben ist, so kann man durch Ableitung überprüfen, ob es sich wirklich um eine solche handelt.

3.2 BEISPIEL

Überprüfe das Integral

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + C$$

durch Ableitung. Man verwendet für den zweiten Summanden die Produktregel (siehe Abschnitt VII.4) und erhält

$$\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right)' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\big(\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)\big) = \\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\big(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)\big) = \sin^2(x).$$

Man beachte hierbei, dass $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gilt. Der Strich $'$ bezeichnet wie üblich die Ableitung nach dem Argument.

Das folgende Integral lässt sich dann leicht berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right]_0^{2\pi} = \pi - 0 = \pi.$$

3.2 Die lineare Substitution

Bei der Ableitung verketteter (zusammengesetzter) Funktionen wird die *Kettenregel* verwendet, die in Abschnitt VII.4 behandelt wurde. Für $h(x) = f\big(g(x)\big)$ gilt:

$$h'(x) = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Ein Spezialfall sind zusammengesetzte Funktionen vom Typ $h(x) = f(mx + b)$. Die innere Funktion $g(x) = mx + b$ beschreibt eine Gerade und ihre Ableitung ist eine Konstante. Die Ableitung von $h(x)$ ist daher

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(mx + b) \cdot m.$$

Wie kann man nun $h(x) = f(mx + b)$ integrieren, wenn nur eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ bekannt ist?

3.3 REGEL

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und Konstanten $m \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gegeben sind, so gilt

$$\int f(mx + b)\,dx = \frac{1}{m}F(mx + b) + C.$$

Die Regel kann man durch Ableiten leicht überprüfen. Diese Regel wird auch *lineare Substitution* genannt. Die lineare Substitution ist ein Spezialfall einer allgemeineren Substitutionsregel, die hier nicht behandelt wird.

Beispiel 1

$$\int e^{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

Beispiel 2

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) - \left(-\frac{1}{\pi}\cos(0)\right) = \frac{2}{\pi}$$

3.3 Berechnung von Flächen zwischen zwei Graphen

Schließlich betrachten wir noch die Berechnung von *Flächen* (positiven Flächeninhalten) zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse oder allgemeiner die Berechnung der Fläche zwischen zwei Graphen.

Das Integral berechnet den *orientierten Flächeninhalt*: die Flächen erhalten dabei ein positives oder ein negatives Vorzeichen. Flächeninhalte mit entgegengesetztem Vorzeichen können sich gegenseitig aufheben. Bei der Berechnung der Fläche zwischen zwei Graphen sollen nun aber alle Flächeninhalte positiv zählen.

Wir setzen voraus, dass a und b reelle Zahlen mit $a < b$ sind und dass $f(x)$ und $g(x)$ auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbar sind. Bei der Berechnung des positiven Flächeninhalts zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ kommt es nun auf die Lage der beiden Funktionsgraphen an. Im Spezalfall $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$ ist der entsprechende Graph die x-Achse.

Besonders einfach ist die Situation dann, wenn $f(x) \geq g(x)$ im *gesamten* Integrationsintervall $[a; b]$ gilt:

3.4 REGEL

Falls $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$ gilt, so beträgt die Fläche zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall von a bis b

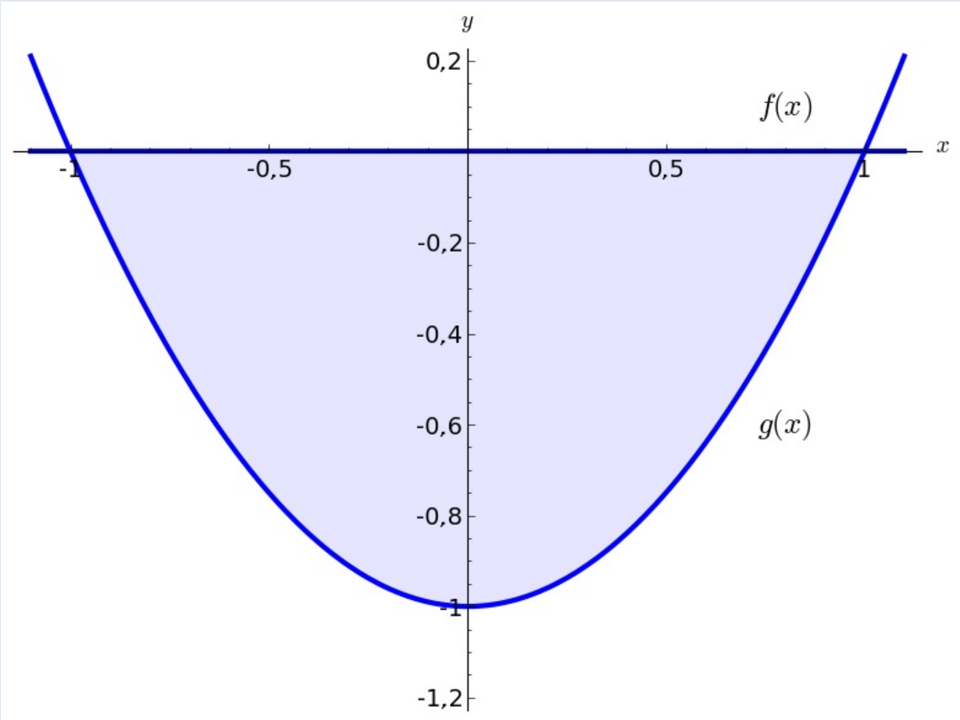
$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx\,.$$

Beispiel 1

Die Fläche zwischen dem Graphen von $g(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse soll bestimmt werden. Gesucht ist die Fläche zwischen den Schnittpunkten. Dann gilt $f(x) = 0$ und Gleichsetzen $f(x) = g(x)$ ergibt die Integrationsgrenzen $a = -1$ und $b = 1$. Im Intervall $[-1; 1]$ gilt $0 \geq x^2 - 1$.

Die gesuchte Fläche beträgt dann

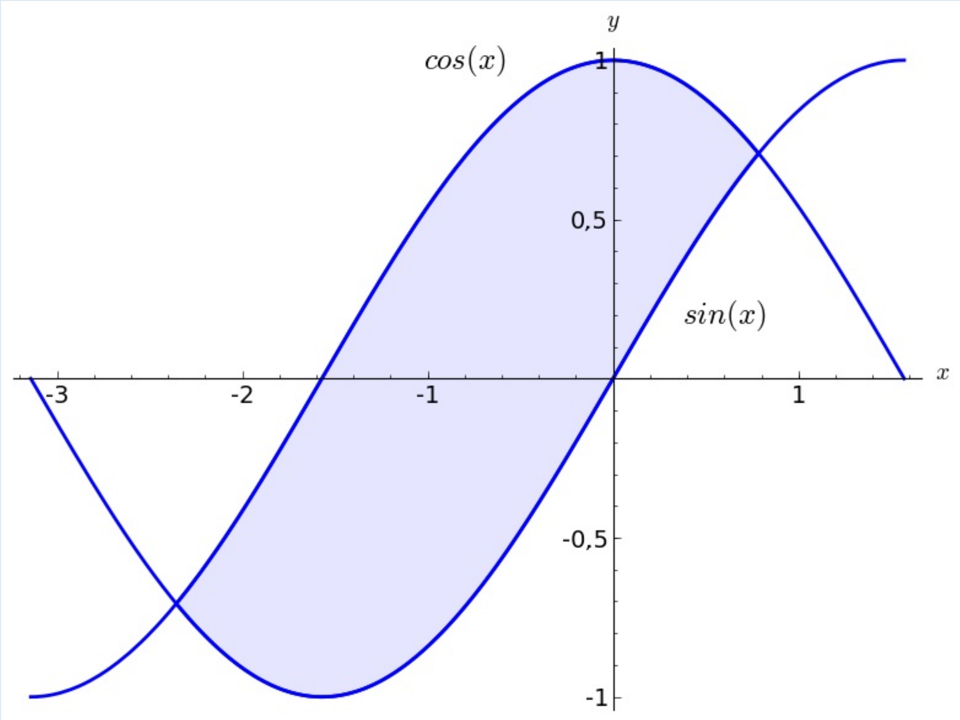
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{1} -(x^2 - 1)\,dx = [-\frac{1}{3}x^3 + x]_{-1}^{1} = (-\frac{1}{3} + 1) - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{4}{3}.$$



Beispiel 2

Die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)$ soll im Intervall $[-\frac{3}{4}\pi; \frac{1}{4}\pi]$ berechnet werden. In diesem Intervall gilt $\cos(x) \geq \sin(x)$. Die Fläche beträgt dann

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} (\cos(x) - \sin(x))\, dx = \left[\sin(x) + \cos(x)\right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$



Etwas schwieriger ist die Situation, wenn das Vorzeichen von $f(x) - g(x)$ im Integrationsintervall $[a; b]$ wechselt. Der Betrag $|f(x) - g(x)|$ beschreibt dann den senkrechten Abstand zwischen den Graphen und das Integral darüber ergibt die gesuchte Fläche.

3.5 REGEL

Die Fläche zwischen den Graphen von zwei stetigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a; b]$ beträgt

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

und kann auf die folgende Weise berechnet werden:

1. Bestimme die Nullstellen von $f(x) - g(x)$ im Intervall $[a; b]$. Dies sind die Schnittstellen
2. Integriere $f(x) - g(x)$ abschnittsweise zwischen dem linken Rand a, den Nullstellen von $f(x) - g(x)$ im Intervall $(a; b)$ (sofern vorhanden) und dem rechten Rand b.
3. Addiere die Beträge der einzelnen Integrale.

Bei der beschriebenen abschnittsweisen Integration darf der Betrag *nach* der Integration angewendet werden, so dass keine gesonderte Überlegung zum Vorzeichen von $f(x) - g(x)$ erforderlich ist.

3.6 BEISPIEL

Seien $f(x) = x^3 - x^2$ und $g(x) = 2x$. Gesucht ist die positive Fläche zwischen den Schnittpunkten der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$. Man bestimmt zunächst die Nullstellen von

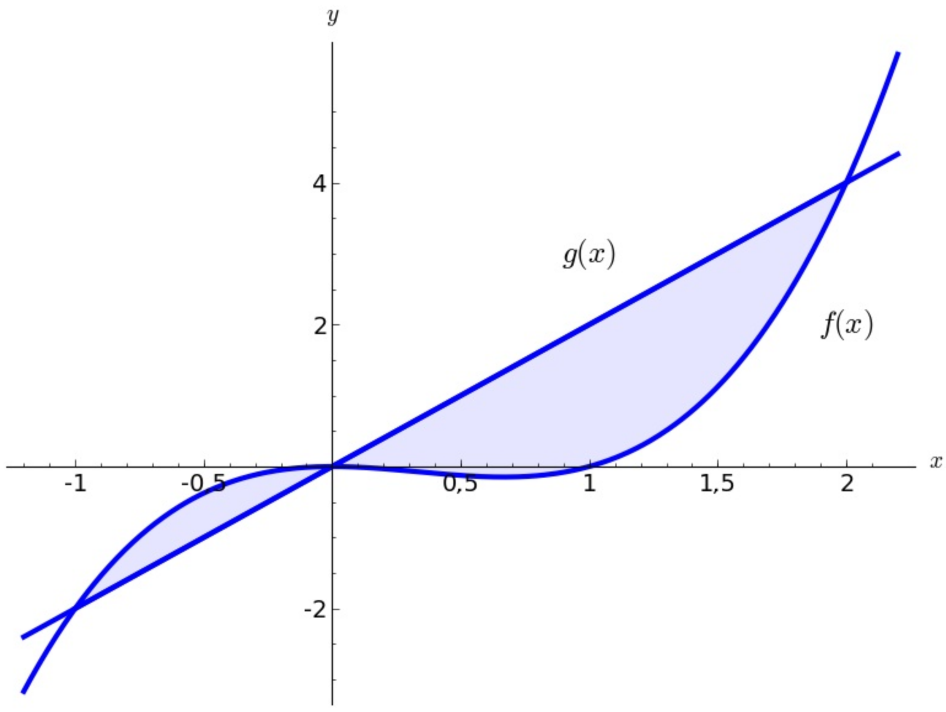
$$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2).$$

Die Nullstellen (Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$) sind daher $x = -1$, $x = 0$ und $x = 2$. Die Fläche zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-1; 2]$ ist dann die Summe der Beträge von zwei Integralen:

$$\int_{-1}^{2} |\, x^3 - x^2 - 2x \,|\, dx = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \right|.$$

Eine Stammfunktion von $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$ ist $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$. Die gesuchte Fläche beträgt dann

$$\left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{2} \right| = \left|\frac{5}{12}\right| + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}.$$



Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist vom Typ $F(x) = \alpha x\sqrt{x} = \alpha x^{\frac{3}{2}}$. Bestimmen Sie α, indem Sie $F(x)$ ableiten.

b) Berechnen Sie dann mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$$

c) Lösen Sie mit Hilfe einer linearen Substitution:

$$\int \sqrt{3x+5}\, dx$$

d) Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{3x+5}\, dx$$

Antworten

a) $\alpha = \frac{2}{3}$.

b) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{14}{3}$.

c) $\int \sqrt{3x+5} \; = \frac{2}{9}(3x+5)\sqrt{3x+5} + C$.

d) $\int_{-1}^{1} \sqrt{3x+5}\; dx = \frac{28}{9}\sqrt{2}$.

Lösung zu a

Die Ableitung von $F(x)$ ist $F'(x) = \alpha\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Es gilt $F'(x) = f(x) = \sqrt{x}$, so dass $\alpha = \frac{2}{3}$ folgt. Es gilt also

$$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Lösung zu b

$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{x}$ (siehe a).

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_1^4 = \Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_1^4.$$

Durch Einsetzen der Grenzen erhält man $\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

Lösung zu c

Die innere Funktion ist die Gerade $g(x) = 3x + 5$, die Ableitung ist $g'(x) = 3$.

Die äußere Funktion ist $f(x) = \sqrt{x}$ und $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ist eine Stammfunktion.

Dann folgt für das unbestimmte Integral:

$$\int \sqrt{3x+5}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x+5)\sqrt{3x+5} + C = \frac{2}{9}(3x+5)\sqrt{3x+5} + C$$

Lösung zu d

Aus c) folgt:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{3x+5}\,dx = \Big[\frac{2}{9}(3x+5)\sqrt{3x+5}\Big]_{-1}^{1}$$

Durch Einsetzen der Grenzen erhält man:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{3x+5}\,dx = \frac{2}{9}8\sqrt{8} - \frac{2}{9}2\sqrt{2} = \frac{32}{9}\sqrt{2} - \frac{4}{9}\sqrt{2} = \frac{28}{9}\sqrt{2}$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe einer linearen Substitution.

a) $\int 2e^{-3x+1}\,dx$

b) $\int (2x+1)^5\,dx$

c) $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$

d) $\int \cos(2\pi t + \frac{\pi}{4})\,dt$

Antworten

a) $\int 2e^{-3x+1}\,dx = -\frac{2}{3}e^{-3x+1} + C$.

b) $\int (2x+1)^5\,dx = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$.

c) $\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \frac{3}{4}\ln\left|4x+1\right| + C$.

d) $\int \cos(2\pi t + \frac{\pi}{4})\,dt = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4}) + C$.

Lösung zu a

Die innere Funktion ist die Gerade $g(x) = -3x + 1$, die Ableitung ist $g'(x) = -3$.

Die äußere Funktion ist $f(x) = e^x$ und $F(x) = e^x$ ist eine Stammfunktion.

Dann folgt für das unbestimmte Integral:

$$\int 2e^{-3x+1}\,dx = 2 \cdot \frac{1}{-3}e^{-3x+1} + C = -\frac{2}{3}e^{-3x+1} + C$$

Lösung zu b

Die innere Funktion ist die Gerade $g(x) = 2x + 1$, die Ableitung ist $g'(x) = 2$.

Die äußere Funktion ist $f(x) = x^5$ und $F(x) = \frac{1}{6}x^6$ ist eine Stammfunktion.

Dann folgt für das unbestimmte Integral:

$$\int (2x+1)^6\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2x+1)^6 + C = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$$

Lösung zu c

Die innere Funktion ist die Gerade $g(x) = 4x + 1$, die Ableitung ist $g'(x) = 4$.

Die äußere Funktion ist $f(x) = \frac{1}{x}$ und $F(x) = \ln|x|$ ist eine Stammfunktion.

Dann folgt für das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = 3\cdot\frac{1}{4}\ln|4x+1| + C = \frac{3}{4}\ln|4x+1| + C$$

Lösung zu d

Die innere Funktion ist die Gerade $g(t) = 2\pi t + \frac{\pi}{4}$, die Ableitung ist $g'(t) = 2\pi$.

Die äußere Funktion ist $f(t) = \cos(t)$ und $F(t) = \sin(t)$ ist eine Stammfunktion.

Dann folgt für das unbestimmte Integral:

$$\int \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

ÜBUNG 3

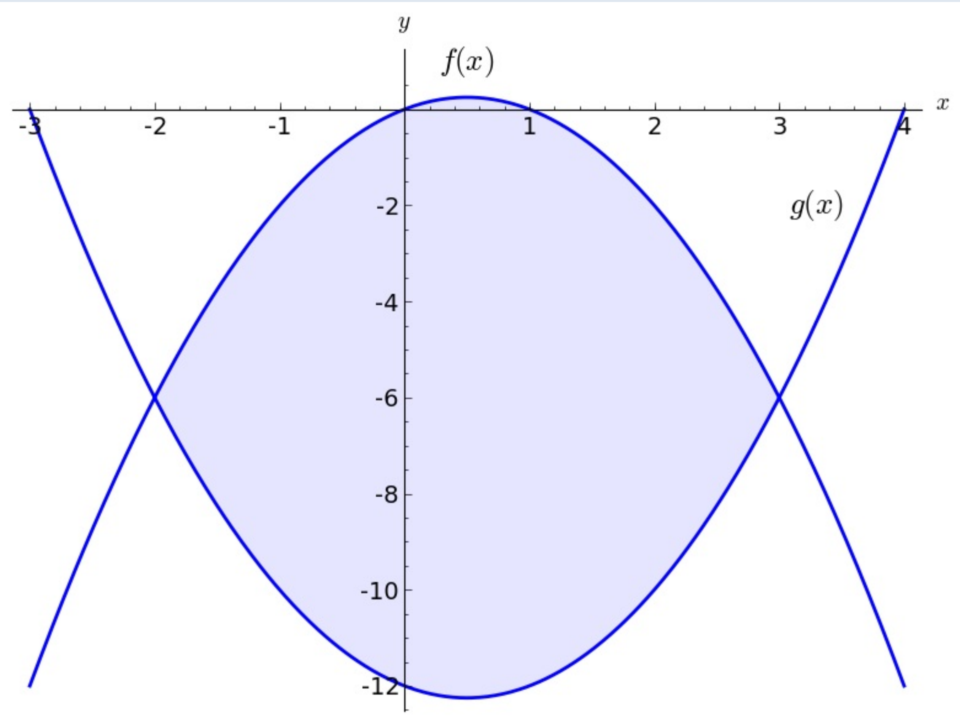
Bestimmen Sie die Fläche zwischen den Schnittpunkten der Graphen der Funktionen $f(x) = -x^2 + x$ und $g(x) = x^2 - x - 12$.

a) Skizzieren Sie (in einer Grafik) die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und schraffieren Sie die gesuchte Fläche.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

c) Berechnen Sie dann die Fläche zwischen den Schnittpunkten der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

Graphen



Schnittpunkte

Man setzt $f(x) = g(x)$ und erhält

$$-x^2 + x = x^2 - x - 12.$$

Die Gleichung ist äquivalent zu

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0.$$

Die Lösungen (Schnittstellen) sind also $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.

Durch Einsetzen von x_1 und x_2 in $f(x)$ oder $g(x)$ erhält man dann die Schnittpunkte $P_1 = (-2; -6)$ und $P_2 = (3; -6)$.

Fläche

Zwischen den Schnittstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ gilt $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$.

Der Flächeninhalt zwischen den Schnittpunkten der Graphen beträgt dann

$$\int_{-2}^{3} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_{-2}^{3} (-2x^2 + 2x + 12)\, dx.$$

Eine Stammfunktion des Integranden ist $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x$.

Die Fläche beträgt also:

$$\Big[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x\Big]_{-2}^{3} = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 9 + 36 - \Big(\frac{2}{3} \cdot 8 + 4 - 24\Big) = \frac{125}{3}$$

ÜBUNG 4

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

a) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von $f(x)$ mit der x-Achse.

b) Integrieren Sie abschnittsweise zwischen den Stellen, die Sie in Aufgabenteil a) bestimmt haben.

c) Berechnen Sie dann mit Hilfe von b) den gesuchten Flächeninhalt.

Antworten

a) Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

b) $\int_{-1}^{0}(2x^3 - 2x^2 - 4x)\,dx = \frac{5}{6}$ und $\int_{0}^{2}(2x^3 - 2x^2 - 4x)\,dx = -\frac{16}{3}$.

c) Der Flächeninhalt beträgt $\frac{37}{6}$.

Lösung zu a

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von $f(x)$ mit der x-Achse sind gerade die Nullstellen von $f(x)$. Man setzt also $f(x) = 0$, d.h. $2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ und löst die Gleichung.

Es gilt

$$2x^3 - 2x^2 - 4x = 2x(x^2 - x - 2) = 2x(x+1)(x-2).$$

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind daher $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

Lösung zu b

Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$.

Das Integral zwischen den Stellen -1 und 0 ist daher

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 2) = \frac{5}{6}.$$

Das Integral zwischen den Stellen 0 und 2 ist

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{0}^{2} = (8 - \frac{16}{3} - 8) - 0 = -\frac{16}{3}.$$

Lösung zu c

Der Flächeninhalt ist die Summe der Absolutbeträge der Integrale, die abschnittsweise zwischen den Schnittstellen berechnet wurden (siehe b).

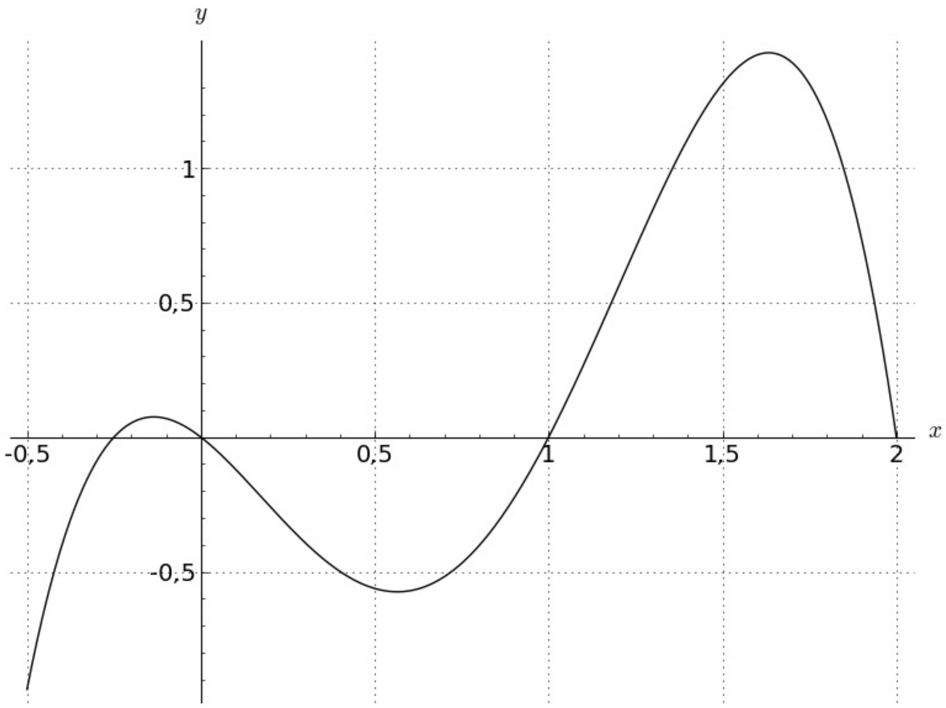
Der Flächeninhalt beträgt daher

$$\left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| = \frac{5}{6} + \frac{16}{3} = \frac{37}{6}.$$

KAPITELÜBUNGEN

ÜBUNG 1

Eine Funktion f mit dem folgenden Graph sei gegeben:



Geben Sie mit Hilfe von geometrischen Überlegungen grobe Abschätzungen der folgenden Integrale an.

a) $\int_0^1 f(x)\,dx$

b) $\int_1^2 f(x)\,dx$

c) $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx$

Zusatz: Nun ist bekannt, dass $f(x) = -2x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x$ gilt. Wie kann man die Integrale genau ausrechnen ?

Antworten

Grobe Abschätzungen:

a) $\int_0^1 f(x)\,dx \approx -0{,}25\,.$

b) $\int_1^2 f(x)\,dx \approx 1\,.$

c) $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx \approx -0{,}25\,.$

Zusatz: $F(x) = -\frac{2}{5}x^5 + \frac{11}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion und die Berechnung der Integrale mit Hilfe der Stammfunktion ergibt:

a) $\int_0^1 f(x)\,dx \approx -0{,}36\,.$

b) $\int_1^2 f(x)\,dx \approx 0{,}89\,.$

c) $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx \approx -0{,}23\,.$

Lösungen zu a, b, c

Ein Kästchen hat den Flächeninhalt $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25\,.$

Das Integral von 0 bis 1 entspricht der Fläche von ungefähr einem Kästchen. Der Flächeninhalt ist negativ orientiert, da $f(x) \leq 0$ in diesem Intervall gilt. Eine mögliche Abschätzung des Integrals ist $-0{,}25$.

Das Integral von 1 bis 2 entspricht der Fläche von ungefähr vier Kästchen. Der Flächeninhalt ist positiv orientiert, da $f(x) \geq 0$ in diesem Intervall gilt. Eine mögliche Abschätzung des Integrals ist 1.

Das Integral von $-0{,}5$ bis $0{,}5$ besteht aus drei Teilflächen. Zwei der Flächeninhalte sind negativ orientiert, eine kleine Fläche oberhalb der x-Achse kann vernachlässigt werden. Insgesamt erhält man einen negativ orientierten Flächeninhalt, der ungefähr einem Kästchen entspricht. Eine mögliche Abschätzung des Integrals ist $-0{,}25$.

Lösung des Zusatzes

Man bestimmt eine Stammfunktion von $f(x) = -2x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x$.

$F(x) = -\frac{2}{5}x^5 + \frac{11}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion.

Die Integrale lassen sich dann durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion bestimmen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Werte für die drei Integrale a), b), c) sind unter *Antworten* angegeben.

ÜBUNG 2

Ein Wasserbecken wird 10 Tage lang mit Wasser gefüllt. Die Zuflussrate wird durch die folgende Funktion f beschrieben:

$$f(t) = -t^3 + 50t + 500\,,$$

wobei t in Tagen seit Beginn und $f(t)$ in m^3 pro Tag angegeben ist. Das Becken enthält zu Beginn $1000\,m^3$ Wasser.

Bestimmen Sie die Wassermenge im Becken zu jedem Zeitpunkt $T \in [0;10]$ und insbesondere nach 10 Tagen.

Antwort

Die Wassermenge beträgt $F(T) = -\frac{1}{4}T^4 + 25T^2 + 500T + 1000$. Nach 10 Tagen befinden sich $F(10) = 6000\,m^3$ Wasser im Becken.

Ausführliche Lösung

Die Zuflussrate $f(t)$ (momentane Änderungsrate) gibt an, wie sich die Wassermenge im Becken zum Zeitpunkt t ändert (in m^3 pro Tag). Um den gesamten Zufluss im Zeitraum $[0;T]$ zu ermitteln, muss $f(t)$ von 0 bis T integriert werden. Der Zufluss ist unabhängig von der zu Beginn vorhandenen Wassermenge im Becken.

Eine Stammfunktion von $f(t) = -t^3 + 50t + 500$ ist

$$F(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 25t^2 + 500t.$$

Das gesuchte Integral beträgt

$$\int_0^T (-t^3 + 50t + 500)\,dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + 25t^2 + 500t\right]_0^T = -\frac{1}{4}T^4 + 25T^2 + 500T.$$

Da sich zum Zeitpunkt $T = 0$ aber bereits $1000\,m^3$ Wasser im Becken befinden, ist die Wassermenge nach T Tagen also die Summe aus dem gesamten Zufluss plus dem Bestand bei $T = 0$:

$$F(T) = \int_0^T (-t^3 + 50t + 500)\,dt + 1000 = -\frac{1}{4}T^4 + 25T^2 + 500T + 1000\,.$$

Nach 10 Tagen befinden sich dann $F(10) = 6000\,m^3$ Wasser im Becken.

ÜBUNG 3

$f(x)$ sei eine stetige Funktion mit der Stammfunktion $F(x)$ und C sei eine beliebige reelle Zahl. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $\int -4 f(x)\,dx = -4\,F(x) + C$.

b) $\frac{1}{F(x)}$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{f(x)}$.

c) $\int_3^1 f(x)\,dx = F(1) - F(3)$.

d) $F'(x) = f(x) + C$.

Antwort

a) und c) sind richtig.

Begründung

a) ist richtig, weil die Faktorregel für Stammfunktionen und Integrale gilt und -4 ein konstanter Faktor ist.

b) ist falsch (auch wenn man $f(x) \neq 0$ und $F(x) \neq 0$ voraussetzt). Beim Ableiten gilt die Produkt- bzw. Quotientenregel und in diesem Beispiel erhält man:

$$\left(\frac{1}{F(x)}\right)' = \frac{-F'(x)}{F(x)^2} = \frac{-f(x)}{F(x)^2}$$

Die Ableitung von $\frac{1}{F(x)}$ ist also nicht $\frac{1}{f(x)}$.
Ein konkrete Beispiel hierzu wäre $f(x) = x$ und $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Die Ableitung von $\frac{1}{F(x)} = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$ ist $-4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$ und nicht $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$. In der Tat ist $\ln|x|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$.

c) ist richtig nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Der Satz gilt auch bei vertauschten Grenzen, wie in diesem Beispiel:

$$\int_3^1 f(x)\,dx = -\int_1^3 f(x)\,dx = -\big(F(3) - F(1)\big) = F(1) - F(3)$$

d) ist falsch, denn die Ableitung ist (im Unterschied zur Stammfunktion) eindeutig bestimmt. $F'(x) = f(x)$ wäre richtig.

ÜBUNG 4

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ und $g(x) = x^3 - x^2 - 3x - 4$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

b) Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse einschließt.

c) Bestimmen Sie die Schnittstellen der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

d) Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird.

Antwort

a) Die Nullstellen sind $x = 0$, $x = -1$ und $x = 3$.
b) Die Fläche beträgt $\frac{71}{6}$.
c) Die Schnittstellen sind $x = -2$ und $x = 2$.
d) Die Fläche beträgt $\frac{32}{3}$.

Lösung zu a

Setze $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = 0$. Durch Ausklammern von x und Faktorisieren des quadratischen Polynoms folgt

$$f(x) = x(x^2 - 2x - 3) = x(x + 1)(x - 3).$$

Die Nullstellen sind daher $x = 0$, $x = -1$ und $x = 3$.

zu b

Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse bestimmt man durch abschnittsweise Integration zwischen den Nullstellen von $f(x)$. Die Fläche ist die Summe der Beträge der Integrale. Die Nullstellen von $f(x)$ sind $x = 0$, $x = -1$ und $x = 3$ (siehe a). Man integriert $f(x)$ also von -1 bis 0 und dann von 0 bis 3.

Eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

Dann erhält man für das Integral im ersten Intervall:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

Im zweiten Intervall erhält man:

$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} = \frac{81}{4} - 18 - \frac{27}{2} - 0 = -\frac{45}{4}$$

Die gesuchte Fläche beträgt dann

$$\left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)\,dx\right| = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}.$$

zu c

Die Schnittstellen der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ sind die Nullstellen von $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x) - (x^3 - x^2 - 3x - 4) = -x^2 + 4 = -(x+2)(x-2)$$

Die Schnittstellen sind also $x = -2$ und $x = 2$.

zu d

Die Fläche ist der Betrag des Integrals von $f(x) - g(x)$ zwischen den beiden Schnittstellen:

$$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = (-\frac{8}{3} + 8) - (\frac{8}{3} - 8) = \frac{32}{3}$$

Der Flächeninhalt zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ beträgt also

$$\left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx\right| = \frac{32}{3}.$$

Graphen