# ÜBERBLICK: LOGIK UND MENGENLEHRE

**Inhalt**

**Abschnitt**



Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. ( > 2MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt zur Schlussprüfung gelangen.

**Lernziele**

- Sie kennen Aussageformen, Wahrheitswerte und Aussagen (Abschnitt 1.1).
- Sie können mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen bestimmen und nachprüfen, ob gegebene Formeln äquivalent sind (Abschnitte 1.2 und 1.3).
- Sie können mit den Begriffen Folgerung/Implikation und Äquivalenz umgehen (Abschnitt 2.1).
- Sie kennen den Existenz- und den Allquantor und können Aussagen mit diesen Quantoren korrekt negieren (Abschnitte 2.2 und 2.3).
- Sie wissen, was ein direkter, ein indirekter und ein Widerspruchsbeweis sind, und können diese in einfachen Beispielen durchführen (Abschnitte 3.1 und 3.2).
- Sie können Aussagen mit vollständiger Induktion beweisen (Abschnitt 3.3).
- Sie können mit den Begriffen Menge, Teilmenge und Element einer Menge umgehen (Abschnitt 4.1).
- Sie können Durchschnitte, Vereinigungen und Komplemente von Teilmengen bestimmen (Abschnitt 4.2).
- Sie wissen, was Mengendiagramme sind, und können konkrete Probleme damit verbildlichen (Abschnitt 4.3).
- Sie wissen, was eine Abbildung zwischen Mengen ist, und können nachprüfen, ob eine gegebene Zuordnung eine Abbildung ist (Abschnitt 5.1).
- Sie können Abbildungen grafisch darstellen (Abschnitt 5.2).
- Sie kennen das kartesische Produkt zweier (Abschnitt 6.1) und mehrerer Mengen (Abschnitt 6.3).

**ZUSAMMENFASSUNG**

Logik gehört zu den grundlegenden Bereichen der Mathematik. Es geht dort um Aussagen, Verknüpfung von Aussagen und deren Wahrheitswerte. In diesem Kapitel wird des Weiteren das Grundprinzip mathematischer Beweise behandelt und auch auf Mengen, ihre Teilmengen und Abbildungen zwischen Mengen eingegangen.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

# 1. AUSSAGEN UND WAHRHEITSTAFELN

**Inhalt**



Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

**Lernziele**

- Sie kennen Aussageformen, Wahrheitswerte und Aussagen.
- Sie können mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen bestimmen.
- Sie können nachprüfen, ob gegebene Aussageformen äquivalent sind.

## 1.1 Aussageformen und Aussagen

Zentraler Punkt in der Aussagenlogik sind Aussagen und ihre Wahrheitswerte. Das Ziel ist es, von einer Aussage zu entscheiden, ob sie **wahr** oder **falsch** ist. Zum Beispiel ist „Ein Würfel ist rund.” eine falsche Aussage. Manche Aussagen sind auch aus einzelnen Aussagen zusammengesetzt. Zum Beispiel ist die Aussage „Wenn die Sonne scheint, ist es hell.” aus den Aussagen „Die Sonne scheint.” und „Es ist hell.” mittels einer Wenn-Dann-Verknüpfung zusammengesetzt. Oft hängt es vom Kontext ab, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, und manchmal ist dies aus verschiedenen Gründen auch nicht einfach zu entscheiden. In der Mathematik geht man daher formal etwas anders vor.

**1.1 DEFINITION**

Die Objekte der Aussagenlogik sind

- *Aussagenvariablen* (kurz *Variablen*), welche im folgenden meist mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet werden,
- die *Wahrheitswerte* (auch *Konstanten* genannt) „wahr" und „falsch", bezeichnet mit W und F, und
- die *Junktoren*

  $\neg$ *Negation*, gelesen „nicht",

  $\wedge$ *Konjunktion*, gelesen „und",

  $\vee$ *Disjunktion*, gelesen „oder".

Eine Formel aus Variablen, Wahrheitswerten und Junktoren wird auch *Aussageform* genannt.

Sind $A$ und $B$ Variablen, dann kann man zunächst die folgenden *elementaren Formeln* bilden:

| | |
|---|---|
| $A$ | Formel, die nur aus der Variablen besteht |
| $\neg A$ | Negation von $A$, gelesen „nicht $A$" |
| $A \wedge B$ | „$A$ und $B$" |
| $A \vee B$ | „$A$ oder $B$" |

Aber auch kompliziertere Formeln wie

$$\neg(A \wedge (\neg B)),$$

d.h. die Negation von „$A$ und nicht $B$". Aber auch die Konstanten W und F können in Formeln auftauchen, z.B.

$$A \vee \mathrm{F}, \quad (A \vee B) \vee \mathrm{W} \quad \text{oder} \quad \neg(\mathrm{F} \wedge B).$$

**1.2 BEISPIEL**

Steht zum Beispiel $A$ für „Die Sonne scheint." und $B$ für „Es regnet.", so stehen

| | |
|---|---|
| $\neg A$ | für „Die Sonne scheint nicht.", |
| $A \wedge B$ | für „Die Sonne scheint und es regnet.", |
| $A \vee B$ | für „Die Sonne scheint oder es regnet.", sowie |
| $\neg(A \wedge \neg B)$ | für „Es ist nicht wahr, dass die Sonne scheint und es nicht regnet.". |

Variablen kann man einen Wahrheitswert W (=wahr) oder F (=falsch) zuordnen. Man spricht dann von einer *Bewertung* der Variablen. Ordnet man allen Variablen einer Formel Wahrheitswerte zu, dann spricht man von einer *Bewertung der Formel* oder *Bewertung der Aussageform*.

**1.3 DEFINITION**

Eine *Aussage* ist eine bewertete Aussageform/Formel.

## 1.2 Wahrheitswerte von Aussagen und Wahrheitstafeln

Um zu wissen, welchen Wahrheitswert man nun einer Aussage (also einer bewerteten Formel) zuordnet, muss zunächst geklärt werden, welche Wahrheitswerte die elementaren Formeln bekommen.

**1.4 DEFINITION**

Per Definition gelten:

| | |
|---|---|
| $A$ | bekommt denselben Wahrheitswert wie die Variable $A$. |
| $\neg A$ | ist wahr, wenn die Variable $A$ den Wahrheitswert F bekommt, und falsch, wenn $A$ den Wahrheitswert W hat. |
| $A \wedge B$ | ist genau dann wahr, wenn $A$ und $B$ wahr sind. |
| $A \vee B$ | ist genau dann wahr, wenn $A$ oder $B$ wahr sind (oder beide). |

Man spricht bei „oder" auch vom *einschließenden* „oder", da die Formel wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Variablen wahr ist. Dies ist bewusst zu unterscheiden vom ausschließenden „(entweder) oder", welches im Sprachgebrauch häufig verwendet wird.

**1.5 BEISPIEL**

Im obigen Beispiel, wenn $A$ für „Die Sonne scheint." und $B$ für „Es regnet." stehen, ist also die Aussage $\neg A$: „Die Sonne scheint nicht." genau dann wahr, wenn die Aussage $A$:„Die Sonne scheint." falsch ist, wie man das intuitiv erwarten würde. Die Aussage $A \wedge B$: „Die Sonne scheint und es regnet." ist wahr, wenn $A$ und $B$ beide wahr sind, die Sonne also tatsächlich scheint und es gleichzeitig regnet. Die Aussage $A \vee B$ ist wiederum wahr, wenn *mindestens* eines der beiden Ereignisse zutrifft. Es dürfte aber auch sowohl die Sonne scheinen, als auch regnen.

Um die Wahrheitswerte von Formeln für verschiedene Belegungen übersichtlich anzugeben, verwendet man sogenannte *Wahrheitstafeln*, bei denen in den Zeilen links vom Doppelstrich die verschiedenen Möglichkeiten zur Belegung der Variablen stehen und rechts vom Doppelstrich die entsprechenden Wahrheitswerte der Formeln.

Die Wahrheitstafeln für $\neg A$, $A \wedge B$ und $A \vee B$ sind zum Beispiel

| $A$ | | $\neg A$ |
|---|---|---|
| W | | F |
| F | | W |

| $A$ | $B$ | | $A \wedge B$ |
|---|---|---|---|
| W | W | | W |
| W | F | | F |
| F | W | | F |
| F | F | | F |

| $A$ | $B$ | | $A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| W | W | | W |
| W | F | | W |
| F | W | | W |
| F | F | | F |

Dieselben Regeln werden angewendet, wenn man Formeln mit $\neg$, $\wedge$ oder $\vee$ verknüpft. Hierbei bekommen die Konstanten W und F natürlich stets den Wahrheitswert W bzw. F. Dadurch kann man für alle Aussagen die Wahrheitswerte bestimmen. Bei den Wahrheitstafeln für kompliziertere Formeln fügt man oft weitere Spalten mit Teilformeln hinzu.

**1.6 BEISPIEL**

Man betrachte die Formel $(\neg A) \vee B$. Deren Wahrheitswerte erhält man folgendermaßen:
Wenn $A$ und $B$ beide wahr sind, ist $\neg A$ falsch, und daher $(\neg A) \vee B$ die „Oder"-Verknüpfung einer falschen mit einer wahren Aussage, also wahr.
Wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist, ist $(\neg A) \vee B$ die „Oder"-Verknüpfung der falschen Aussage $\neg A$ und der falschen Aussage $B$, und daher falsch.
Ist $A$ falsch, dann ist $\neg A$ wahr und $(\neg A) \vee B$ ist wahr unabhängig davon, ob $B$ wahr oder falsch ist.
$(\neg A) \vee B$ ist also falsch, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist, und in allen anderen Fällen ist $(\neg A) \vee B$ wahr.

Dies erkennt man wesentlich übersichtlicher mit einer Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | | $\neg A$ | $(\neg A) \vee B$ |
|---|---|---|---|---|
| W | W | | F | W |
| W | F | | F | F |
| F | W | | W | W |
| F | F | | W | W |

**1.7 BEISPIEL**

Wir betrachten die Formel $\neg(\mathrm{F} \wedge B)$ und deren Wahrheitswerte mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

| $B$ | | $\mathrm{F} \wedge B$ | $\neg(\mathrm{F} \wedge B)$ |
|---|---|---|---|
| W | | F | W |
| F | | F | W |

Die Formel $\neg(\mathrm{F} \wedge B)$ ist also für alle Bewertungen von $B$ eine wahre Aussage.

**1.8 DEFINITION ( TAUTOLOGIE UND WIDERSPRUCH )**

Eine Formel, die für alle Bewertungen wahr ist, heißt *Tautologie* oder *allgemeingültige Formel*. Eine Formel, die für alle Bewertungen falsch ist, heißt *Widerspruch*, *Kontradiktion* oder *unerfüllbare Formel*.

**1.9 BEISPIEL**

1. Wie in Beispiel 1.7 gesehen ist $\neg(\mathrm{F} \wedge B)$ eine Tautologie.
2. $A \vee \neg A$ ist eine Tautologie.
3. $A \wedge \neg A$ ist ein Widerspruch.
4. $(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$ ist eine Tautologie, denn

| $A$ | $B$ | | $A \wedge B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | W | F | **W** |
| W | F | | F | W | **W** |
| F | W | | F | W | **W** |
| F | F | | F | W | **W** |

5. Die Negation einer Tautologie ist stets ein Widerspruch, und die Negation eines Widerspruchs ist stets eine Tautologie.

## 1.3 Äquivalente Formeln

**1.10 DEFINITION**

Für zwei Aussageformen (Formeln) $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ sagt man:

„$\mathscr{F}$ ist *äquivalent* zu $\mathscr{G}$" (geschrieben $\mathscr{F} \Leftrightarrow \mathscr{G}$),

wenn für alle Bewertungen der Variablen in $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$, die entsprechenden Aussagen denselben Wahrheitswert haben.

**1.11 BEISPIEL**

Eine Tautologie ist ja für jede Bewertung wahr, ebenso wie die Konstante W. Also ist jede Tautologie äquivalent zu W. Entsprechend ist jeder Widerspruch äquivalent zu F.
Nach Beispiel 1.9 gilt also insbesondere (für Variablen $A$ und $B$):

1. $\neg(\mathrm{F} \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{W}$
2. $A \vee \neg A \;\Leftrightarrow\; \mathrm{W}$
3. $A \wedge \neg A \;\Leftrightarrow\; \mathrm{F}$
4. $(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{W}$

Im folgenden Satz sind wichtige grundlegende Äquivalenzen zusammengefasst.

**1.12 SATZ**

Für Variablen $A$, $B$ und $C$ gelten:

1. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$,
2. $(A \wedge B) \wedge C \;\Leftrightarrow\; A \wedge (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \vee C \;\Leftrightarrow\; A \vee (B \vee C)$,
3. $\neg(\neg A) \;\Leftrightarrow\; A$,
4. $\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B)$ und $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$,
5. $(A \vee B) \wedge C \;\Leftrightarrow\; (A \wedge C) \;\vee\; (B \wedge C)$,
6. $(A \wedge B) \vee C \;\Leftrightarrow\; (A \vee C) \;\wedge\; (B \vee C)$,
7. $A \wedge (A \vee B) \;\Leftrightarrow\; A \;\Leftrightarrow\; A \vee (A \wedge B)$.
8. $A \vee \mathrm{W} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{W}$ und $A \wedge \mathrm{F} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{F}$,
9. $A \wedge \mathrm{W} \;\Leftrightarrow\; A$ und $A \vee \mathrm{F} \;\Leftrightarrow\; A$

Um nachzuprüfen, dass die Formeln wirklich äquivalent sind, ermittelt man also für alle Belegungen der Formeln den Wahrheitswert und vergleicht dann die Wahrheitswerte beider Seiten. Dies soll hier beispielhaft mit der Äquivalenz $\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B)$ (Punkt 4.) ausgeführt werden.

Wahrheitstafel für $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A) \vee (\neg B)$:

| $A$ | $B$ | | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | W | **F** | F | F | **F** |
| W | F | | F | **W** | F | W | **W** |
| F | W | | F | **W** | W | F | **W** |
| F | F | | F | **W** | W | W | **W** |

Die Wahrheitswerte von $\neg(A \wedge B)$ und von $(\neg A) \vee (\neg B)$ sind in jeder Zeile gleich, also sind die Formeln äquivalent.

Die Äquivalenzen in Satz 1.12 gelten auch, wenn man für die Variablen Formeln einsetzt. Außerdem erhält man aus einer Formel eine dazu äquivalente Formel, wenn man einen Teil dieser Formel durch eine dazu äquivalente Formel ersetzt. Dadurch ist es möglich, komplizierte Formeln in einfachere Formeln umzuwandeln, welche aber äquivalent zu den ursprünglichen Formeln sind.

**1.13 BEISPIEL**

Für Variablen $A$ und $B$ lässt sich die Formel $(A \vee B) \wedge (\neg B)$ vereinfachen zu:

$$
\begin{aligned}
(A \vee B) \wedge (\neg B) \quad &\overset{5.}{\Leftrightarrow} \quad (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \overset{Bsp. 2,3.}{\Longleftrightarrow} (A \wedge \neg B) \vee \mathrm{F} \\
&\overset{9.}{\Leftrightarrow} \quad A \wedge \neg B
\end{aligned}
$$

**ERGÄNZUNG ( DISJUNKTIVE NORMALFORM )**

Anzeigen

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

## ÜBUNG 1

Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die Aussagenform

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$$

mit Aussagenvariablen $A$, $B$ und $C$.

Antwort

| $A$ | $B$ | $C$ | | $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|
| W | W | W | | W |
| W | W | F | | W |
| W | F | W | | F |
| W | F | F | | F |
| F | W | W | | W |
| F | W | F | | F |
| F | F | W | | W |
| F | F | F | | F |

Lösung

In der Wahrheitstafel müssen alle W/F-Kombinationen der Variablen auftreten. Bei $3$ Variablen sind das $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ Möglichkeiten, von WWW, WWF,. . . bis zu FFF. Zur übersichtlicheren Berechnung sollten noch Spalten für die Ausdrücke $A \wedge B$ und $\neg A \wedge C$ hinzugefügt werden, damit alle Berechnungen fast elementare Formeln sind. Die Ausgangstabelle ist also:

| $A$ | $B$ | $C$ | | $A \wedge B$ | $\neg A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | | | | |
| W | W | F | | | | |
| W | F | W | | | | |
| W | F | F | | | | |
| F | W | W | | | | |
| F | W | F | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | W | | | | |
| F | F | F | | | | |

$A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn $A$ und $B$ beide wahr sind. Ebenso ist $\neg A \wedge C$ genau dann wahr, wenn $\neg A$ und $C$ beide wahr sind, d.h. wenn $A$ falsch und $C$ wahr ist. Also sind die nächsten zwei Spalten

| $A$ | $B$ | $C$ | | $A \wedge B$ | $\neg A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | | W | F | |
| W | W | F | | W | F | |
| W | F | W | | F | F | |
| W | F | F | | F | F | |
| F | W | W | | F | W | |
| F | W | F | | F | F | |
| F | F | W | | F | W | |
| F | F | F | | F | F | |

Schließlich ist die "Oder"-Verknüpfung zweier Aussagen genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Die volle Tabelle lautet also

| $A$ | $B$ | $C$ | | $A \wedge B$ | $\neg A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | | W | F | **W** |
| W | W | F | | W | F | **W** |
| W | F | W | | F | F | **F** |
| W | F | F | | F | F | **F** |
| F | W | W | | F | W | **W** |
| F | W | F | | F | F | **F** |
| F | F | W | | F | W | **W** |
| F | F | F | | F | F | **F** |

## ÜBUNG 2

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien, welche sind Widersprüche, welche weder noch?

a) $(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

b) $A \land (B \land \neg(B \land (A \lor B)))$

c) $A \lor (B \lor \neg A)$

d) $(A \lor B) \land (B \lor C) \land (C \lor A) \land \neg(A \land B \land C)$

Antwort

Die Formel $A \land (B \land \neg(B \land (A \lor B)))$ ist ein Widerspruch, $A \lor B \lor \neg A$ ist eine Tautologie und die anderen zwei Formeln sind weder das eine noch das andere

Lösung zu a)

Um zu entscheiden, ob es sich um eine Tautologie oder einen Widerspruch handelt, muss untersucht werden, welche Wahrheitswerte die Formel annehmen kann. Es ist eine Tautologie, wenn die Formel immer wahr ist, und ein Widerspruch, wenn sie immer falsch ist. Mit Hilfe der Wahrheitstafel

| $A$ | $B$ | | $A \land B$ | $\neg A \land \neg B$ | $(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | W | F | **W** |
| W | F | | F | F | **F** |
| F | W | | F | F | **F** |
| F | F | | F | W | **W** |

sieht man also, dass $(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$ weder eine Tautologie noch ein Widerspruch ist.

Lösung zu b)

Die Wahrheitstafel für $A \wedge (B \wedge \neg(B \wedge (A \vee B)))$ ist

| $A$ | $B$ | | $A \vee B$ | $B \wedge (A \vee B)$ | $B \wedge \neg(B \wedge (A \vee B))$ | $A \wedge (B \wedge \neg(B \wedge (A \vee B)))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | W | W | F | **F** |
| W | F | | W | F | F | **F** |
| F | W | | W | W | F | **F** |
| F | F | | F | F | F | **F** |

Die Formel $A \wedge (B \wedge \neg(B \wedge (A \vee B)))$ nimmt also immer den Wahrheitswert F an, ist also ein Widerspruch.

Lösung zu c)

Die Wahrheitstafel für $A \vee (B \vee \neg A)$ ist

| $A$ | $B$ | | $B \vee \neg A$ | $A \vee (B \vee \neg A)$ |
|---|---|---|---|---|
| W | W | | W | **W** |
| W | F | | F | **W** |
| F | W | | W | **W** |
| F | F | | W | **W** |

Also ist $A \vee (B \vee \neg A)$ eine Tautologie.

Alternativ kann man die Formel auch äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} A \vee (B \vee \neg A) &\Longleftrightarrow A \vee (\neg A \vee B) \\ &\Longleftrightarrow (A \vee \neg A) \vee B \\ &\Longleftrightarrow W \vee B \quad \text{nach Vorlesungstext} \\ &\Longleftrightarrow W \end{aligned}$$

$A \vee (B \vee \neg A)$ ist also äquivalent zur wahren Aussage W, also eine Tautologie.

Lösung zu d)

Die Wahrheitstafel für $\mathscr{F} = (A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A) \wedge \neg(A \wedge B \wedge C)$ ist

| $A$ | $B$ | $C$ | | $A \vee B$ | $B \vee C$ | $C \vee A$ | $\neg(A \wedge B \wedge C)$ | $\mathscr{F}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | | W | W | W | F | **F** |
| W | W | F | | W | W | W | W | **W** |
| W | F | W | | W | W | W | W | **W** |
| W | F | F | | W | F | W | W | **F** |
| F | W | W | | W | W | W | W | **W** |
| F | W | F | | W | W | F | W | **F** |
| F | F | W | | F | W | W | W | **F** |
| F | F | F | | F | F | F | W | **F** |

Da die Formel sowohl wahr als auch falsch werden kann, ist sie weder eine Tautologie noch ein Widerspruch.

## ÜBUNG 3

Vereinfachen Sie die folgenden Formeln so weit wie möglich:

a) $\neg(A \wedge \neg B)$

b) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C)$

c) $A \wedge (B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C)$

d) $(A \vee C) \wedge \neg(B \wedge (A \vee B))$

Antwort

a) $\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

b) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \Leftrightarrow A \vee (B \wedge \neg C)$

c) $A \wedge (B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C) \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C$

d) $(A \vee C) \wedge \neg(B \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg B)$

Lösung zu a)

Mit den Äquivalenzen aus Satz 1.12 ist zunächst die Negation der "Und"-Verknüpfung äquivalent zur "Oder"-Verknüpfung der Negationen, also

$$\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B).$$

Des Weiteren ist die Negation der Negation einer Formel äquivalent zur Formel selbst, also

$$\neg(\neg B) \Leftrightarrow B.$$

Daher ist

$$\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

Lösung zu b)

Da allgemein $(A \vee B) \wedge D$ äquivalent zu $(A \wedge D) \vee (B \wedge D)$ ist (vgl. Satz 1.12,5. ), gilt:

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) &\Leftrightarrow (A \wedge (A \vee \neg C)) \vee (B \wedge (A \vee \neg C)) \\ &\Leftrightarrow (A \wedge A) \vee (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge \neg C)\end{aligned}$$

Letzteres lässt sich noch weiter vereinfachen, denn $A \wedge A$ ist äquivalent zu $A$, und $A \vee (A \wedge D)$ ist auch äquivalent zu $A$.

Also ist sukzessive

$$\begin{aligned} & (A \wedge A) \vee (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge A) \\ \Leftrightarrow \quad & A \quad \vee (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge A) \\ \Leftrightarrow \quad & \qquad A \qquad \vee (B \wedge A) \\ \Leftrightarrow \quad & \qquad\qquad A \end{aligned}$$

weshalb schließlich

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \;\Leftrightarrow\; A \vee (B \wedge \neg C).$$

**Bemerkung:** Die letzte einfache Form hätte man auch direkt erreichen können, wenn man sieht, dass man die 6. Äquivalenz in Satz 1.12 von rechts nach links anwenden kann.

Lösung zu c)

Wie schon bei b) wendet man sukzessiv die Äquivalenz von $(A \lor B) \land D$ zu $(A \land D) \lor (B \land D)$ an, um "Oder"-Verknüpfungen von "Und"-Verknüpfungen zu bekommen:

$$\begin{aligned} & A \land (B \lor \neg A) \land (\neg B \lor C) \\ \Leftrightarrow & (A \land B \land \neg B) \lor (A \land B \land C) \lor (A \land \neg A \land \neg B) \lor (A \land \neg A \land C) \end{aligned}$$

Letzteres lässt sich wieder vereinfachen, unter Verwendung von $D \land \neg D \Leftrightarrow \mathrm{F}$ und $D \land \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ :

$$\begin{aligned} & (A \land B \land \neg B) \lor (A \land B \land C) \lor (A \land \neg A \land \neg B) \lor (A \land \neg A \land C) \\ \Leftrightarrow & (A \land \quad \mathrm{F} \quad ) \lor (A \land B \land C) \lor ( \quad \mathrm{F} \quad \land \neg B) \lor ( \quad \mathrm{F} \quad \land C) \\ \Leftrightarrow & \quad \mathrm{F} \quad \lor (A \land B \land C) \lor \quad \mathrm{F} \quad \lor \quad \mathrm{F} \\ \Leftrightarrow & \quad A \land B \land C \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde noch benutzt, dass $D \lor \mathrm{F}$ äquivalent zu $D$ ist.

Lösung zu d)

Zunächst ist $B \land (A \lor B)$ äquivalent zu $B$ (vgl. Satz 1.12,7. ), weshalb $(A \lor C) \land \neg(B \land (A \lor B))$ äquivalent zu $(A \lor C) \land \neg B$ ist.

Verwendet man nun wieder die 5. Äquivalenz aus Satz 1.12, so erhält man die gewünschte einfache Form:

$$(A \land \neg B) \lor (C \land \neg B).$$

Es ist also

$$(A \lor C) \land \neg(B \land (A \lor B)) \ \Leftrightarrow \ (A \land \neg B) \lor (C \land \neg B).$$

## ÜBUNG 4

Aus welchen Teilaussagen setzen sich die folgenden Aussagen mittels "Und", "Oder" und Negation zusammen?
Geben Sie auch den formalen Ausdruck als Verknüpfung der Teilaussagen an. Formulieren Sie außerdem die Negation dieser Aussagen in einem "möglichst einfachen" Satz.

a)
Petra und Peter essen Pizza oder Pasta.

b)
Heike spielt mit Bernd und mit Bettina oder mit keinem von beiden.

c)
Von den drei Kindern Armin, Benjamin und Jasmin mag genau eines keinen Spinat.

Lösung zu a)

Die elementaren Teilaussagen sind

$A$ : Petra isst Pizza.

$B$ : Petra isst Pasta.

$C$ : Peter isst Pizza.

$D$ : Peter isst Pasta.

Ausführlicher formuliert ist die obige Aussage

*Petra isst Pizza oder Pasta, und Peter isst Pizza oder Pasta.*
Als Verknüpfung der Teilaussagen $A$-$D$ erhält man die Aussage *Petra und Peter essen Pizza oder Pasta* also mittels

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$$

Die Negation kann man etwas umständlich so formulieren:

*Es ist nicht wahr, dass Petra und Peter Pizza oder Pasta essen.*
Mit Hilfe der Umformungsregeln für Formeln (s. Satz 1.12) erhält man aber auch

$$\neg\big((A \vee B) \wedge (C \vee D)\big) \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg(C \vee D) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D)$$

Eine Negation der obigen Aussage kann man also auch formulieren, indem man die letzte Formel in Worte fasst:

*Petra isst weder Pizza noch Pasta, oder Peter isst weder Pizza noch Pasta (oder beide).*

Lösung zu b)

Hier sind die Grundbausteine der Aussage gegeben durch

$A$ :

Heike spielt mit Bernd.

$B$ :

Heike spielt mit Bettina.

Die gesamte Aussage sagt aus, dass Heike mit Bernd spielt und mit Bettina spielt, oder dass Heike nicht mit Bernd spielt und auch nicht mit Bettina. Formal also:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Um die negierte Aussage zu bekommen, sollte man zunächst die Formel negieren und vereinfachen.

$$\begin{aligned} &\neg\big((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\big) \\ \Leftrightarrow &\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B) \\ \Leftrightarrow &(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \\ \Leftrightarrow &\big(\neg A \wedge (A \vee B)\big) \vee \big(\neg B \wedge (A \vee B)\big) \end{aligned}$$

Mit der Äquivalenz aus Beispiel 1.13 vereinfacht sich dies zu

$$(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A).$$

In Worte gefasst:

*Heike spielt nicht mit Bernd, aber mit Bettina, oder Heike spielt nicht mit Bettina, aber mit Bernd.*
Oder kürzer ausgedrückt:

*Heike spielt mit Bernd oder Bettina, aber nicht mit beiden.*

Lösung zu c)

Die Grundbausteine der Aussage sind gegeben durch

$A:$

Armin mag Spinat.

$B:$

Benjamin mag Spinat.

$C:$

Jasmin mag Spinat.

(Oder alternativ auch durch die jeweils verneinte Aussage, dass sie keinen Spinat mögen.)

Dass genau eines keinen Spinat mag, bedeutet ja, dass Armin keinen Spinat mag oder Benjamin oder Jasmin, und die jeweils anderen beiden mögen Spinat. Also: Armin mag keinen Spinat und Benjamin und Jasmin mögen Spinat (entspricht $\neg A \wedge B \wedge C$), oder Benjamin mag keinen Spinat und Armin und Jasmin mögen Spinat (entspricht $\neg B \wedge A \wedge C$), oder Jasmin mag keinen Spinat und Armin und Benjamin mögen Spinat (entspricht $\neg C \wedge A \wedge B$).

Insgesamt ist die Aussage also

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \ \vee \ (\neg B \wedge A \wedge C) \ \vee \ (\neg C \wedge A \wedge B)$$

Die Negation der Aussage ist, dass es falsch ist, dass genau eines keinen Spinat mag. D.h. entweder mögen alle drei Spinat (entspricht $A \wedge B \wedge C$), oder mindestens zwei mögen keinen Spinat (entspricht: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$)

Insgesamt also:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

was man auch durch Umformen der Formel

$$\neg\big((\neg A \wedge B \wedge C) \ \vee \ (\neg B \wedge A \wedge C) \ \vee \ (\neg C \wedge A \wedge B)\big)$$

hätte erhalten können.

# 2. IMPLIKATION, ÄQUIVALENZ UND QUANTOREN

**Inhalt**



Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

**Lernziele**

- Sie können mit den Begriffen Folgerung/Implikation und Äquivalenz umgehen.
- Sie kennen den Existenzquantor und den Allquantor.
- Sie können Aussagen mit Quantoren korrekt negieren.

## 2.1 Folgerung/Implikation und Äquivalenz

In der Mathematik gibt es oft Aussagen der Art „wenn ..., dann ...”, sogenannte *Folgerungen* oder *Implikationen*, oder auch Aussagen der Form „... genau dann, wenn ...”, sogenannte *Äquivalenzen*.

**2.1 DEFINITION ( IMPLIKATION )**

Für zwei Aussagen $A$ und $B$ wird die Folgerung (Implikation) „Wenn $A$ wahr ist, dann ist auch $B$ wahr." ausgedrückt durch die Schreibweise

$$A \Rightarrow B \quad \text{oder} \quad B \Leftarrow A,$$

und gelesen als „aus $A$ folgt $B$", „$A$ impliziert $B$" oder „$B$ folgt aus $A$". Dabei heißt $A$ die *Prämisse* und $B$ die *Konklusion* der Folgerung.

Die Wahrheitstafel für „$A \Rightarrow B$" ist per Definition

| $A$ | $B$ | | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|
| W | W | | W |
| W | F | | F |
| F | W | | W |
| F | F | | W |

Wenn die Aussage $A$ falsch ist, ist die Implikation also unabhängig vom Wert von $B$ wahr.

### 2.2 BEISPIEL

1. Seien $A$ die Aussage „Herr X ist größer als Frau Y." und $B$ die Aussage „Frau Y ist kleiner als Herr X." Dann ist die Implikation $A \Rightarrow B$ die Aussage „Wenn Herr X größer als Frau Y ist, ist Frau Y kleiner als Herr X." Diese Aussage ist stets wahr, auch wenn wir nicht wissen, ob Herr X tatsächlich größer als Frau Y ist.

2. Seien

   $A$ die Aussage „Anna hat mehr Gummibärchen als Ben",
   $B$ die Aussage „Ben hat mehr Gummibärchen als Carla"

   und

   $C$ die Aussage „Anna hat mehr Gummibärchen als Carla".

   Die Implikation $(A \wedge B) \Rightarrow C$ ist dann die Aussage

   „Wenn Anna mehr Gummibärchen hat als Ben und Ben mehr Gummibärchen hat als Carla, dann hat Anna mehr Gummibärchen als Carla."

   Auch diese Aussage ist stets richtig. Zu beachten ist auch hier wieder, dass die Implikation als Aussage richtig ist, auch wenn die Prämisse „Anna hat mehr Gummibärchen als Ben und Ben hat mehr Gummibärchen als Carla" sich als falsch erweisen sollte.

   In einer konkreten Situation, in der Anna $2$ Gummibärchen, Ben $3$ Gummibärchen und Carla $4$ Gummibärchen hat, ist auch die Implikation $A \Rightarrow B$, also die Aussage „Wenn Anna mehr Gummibärchen hat als Ben, dann hat Ben mehr Gummibärchen als Carla" wahr, weil die Prämisse $A$ falsch ist. In anderen Situationen, wenn z.B. Anna und Carla $4$ Gummibärchen haben, aber Ben nur $3$, ist die Implikation $A \Rightarrow B$ eine falsche Aussage.

3. Um den Unterschied im vorherigen Beispiel deutlicher zu machen, formulieren wir die Aussagen und Implikationen mathematisch: Wir bezeichnen daher die Anzahl der Gummibärchen von Anna mit $a$, die von Ben mit $b$ und die von Carla mit $c$. Die Aussage $A$ ist dann $a > b$, die Aussage $B$ ist $b > c$ und die Aussage $C$ ist $a > c$, aber jeweils auf eine konkrete Situation bezogen, in der $a$, $b$ und $c$ für feste Zahlen stehen. Für manche Situationen ist nun die Implikation $a > b \Rightarrow b > c$ eine wahre Aussage, z.B. für $a = 4$, $b = 3$ und $c = 2$, weil sowohl die Prämisse $4 > 3$ als auch die Konklusion $3 > 2$ wahr sind, oder eben für $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$, weil die Prämisse $2 > 3$ schon falsch ist. In anderen Situationen ist die Implikation $a > b \Rightarrow b > c$ jedoch falsch, z.B. für $a = 4$, $b = 3$ und $c = 4$, weil die Prämisse $4 > 3$ wahr ist, aber die Konklusion $3 > 4$ falsch.

**WARNUNG**

Der Wahrheitswert einer Implikation beschreibt in der Logik den Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert einer konkreten Prämisse und dem Wahrheitswert einer konkreten Konklusion. Ist die Implikation wahr, ist also entweder die Prämisse falsch oder sowohl Prämisse als auch Konklusion sind wahr.

Dies wird oft verwechselt damit, ob eine Implikation generell gültig ist. Umgangssprachlich versteht man unter dem Satz „Wenn Anna mehr Gummibärchen hat als Ben, dann hat Ben mehr Gummibärchen als Carla” oft die Aussage:

*In allen Situationen, in denen Anna mehr Gummibärchen hat als Ben, hat Ben auch mehr Gummibärchen als Carla.*

Mathematisch ist letztere Aussage aber eine Aussage mit dem Allquantor $\forall$ („für alle”) (s. 2.2 ), nämlich

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a > b \Rightarrow b > c.$$

Für den umgangssprachlichen Satz „Wenn Anna mehr Gummibärchen hat als Ben, und Ben mehr Gummibärchen hat als Carla, dann hat Anna mehr Gummibärchen als Carla.”, welcher als „In allen Situationen,...” verstanden wird, ist die mathematische Formulierung

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a > c.$$

Beides sind aber jeweils ganz andere Aussagen, als die Aussagen $a > b \Rightarrow b > c$ und $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a > c$ für konkrete Zahlen $a$, $b$ und $c$.

**2.3 DEFINITION ( ÄQUIVALENZ VON AUSSAGEN )**

Für zwei Aussagen $A$ und $B$ wird die Äquivalenz „$A$ ist genau dann wahr, wenn $B$ wahr ist.” ausgedrückt durch die Schreibweise

$$A \Leftrightarrow B$$

und gelesen als „$A$ ist äquivalent zu $B$” oder „$A$ gilt genau dann, wenn $B$ gilt”.

Die Wahrheitstafel für „$A \Leftrightarrow B$” ist per Definition

| $A$ | $B$ | | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|
| W | W | | W |
| W | F | | F |
| F | W | | F |
| F | F | | W |

**2.4 BEMERKUNG**

Vergleicht man die Wahrheitstafeln der Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ mit der Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow B$, so stellt man fest, dass die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn beide Implikationen wahr sind.

| $A$ | $B$ | | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | W | W | W |
| W | F | | F | W | F |
| F | W | | W | F | F |
| F | F | | W | W | W |

Dies wird benutzt, wenn man zeigen möchte, dass zwei Aussagen $A$ und $B$ äquivalent sind. Man beweist dann, dass sowohl die Implikation $A \Rightarrow B$, als auch die Implikation $B \Rightarrow A$ wahr sind.

**WARNUNG**

Man sollte die Äquivalenz von Aussagen nicht mit der Äquivalenz von Formeln verwechseln. Bei der Äquivalenz von Aussagen haben die Aussagen einen festgelegten Wahrheitswert, welcher aber dem Leser vielleicht nicht bekannt ist. Die Äquivalenz drückt dann aus, dass die Wahrheitswerte der beiden Aussagen gleich sind. Findet man also den Wahrheitswert der einen Aussage heraus, kennt man damit auch den der anderen Aussage.

**2.5 BEISPIEL**

Für eine reelle Zahl $x$ seien

$$A \text{ die Aussage } x^2 + 4 = 4x$$

und

$$B \text{ die Aussage } x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Dann sind die Aussagen $A$ und $B$ äquivalent, denn wenn die Aussage $A$ wahr ist, also $x$ die Gleichung in $A$ erfüllt, gilt

$$x^2 - 4x + 4 = (x^2 + 4) - 4x = 4x - 4x = 0,$$

d.h. Aussage $B$ ist auch wahr. Und umgekehrt, wenn $x$ die Gleichung in $B$ erfüllt, gilt

$$x^2 + 4 = (x^2 - 4x + 4) + 4x = 0 + 4x = 4x.$$

Ob die Aussagen $A$ und $B$ wahr sind oder falsch, hängt natürlich davon ab, welche reelle Zahl $x$ ist. Die Äquivalenz drückt „nur" aus, dass beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Das eben genannte Beispiel gehört zu einer der wichtigsten Arten äquivalenter Aussagen. Die Aussagen bestehen aus einer Gleichung für variable reelle Zahlen und man erhält die eine Gleichung durch sogenannte Äquivalenz-Umformung aus der anderen. Vgl. dazu auch OMB+-Kapitel II.1

## 2.2 Quantoren

Wenn man Aussagen $A$ über Elemente $x$ aus einer bestimmten Menge $M$ macht, dann schreibt man auch $A(x)$, um auszudrücken, dass der Wahrheitsgehalt dieser Aussage von dem speziell betrachteten $x$ abhängen kann. In diesem Zusammenhang möchte man oft die Aussagen machen, dass $A(x)$ für ein $x$ wahr ist oder sogar für alle $x$.

**2.6 DEFINITION ( EXISTENZ- UND ALLQUANTOR )**

$A(x)$ sei eine Aussage, die von einem Element $x$ aus einer Menge $M$ abhängt. Dann führt man die folgenden Aussagen ein:

$$\exists x \in M : A(x)$$

(*sprich: es gibt ein $x$ in $M$, für das $A(x)$ gilt*). Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn es ein $x$ in der Menge $M$ gibt, sodass die Aussage $A(x)$ wahr ist.

$$\forall x \in M : A(x)$$

(*sprich: für alle $x$ in $M$ gilt $A(x)$*). Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn für alle $x$ in der Menge $M$ die Aussage $A(x)$ wahr ist.
Man nennt das Symbol $\exists$ den *Existenzquantor*, und das Symbol $\forall$ den *Allquantor*.

Aus Gründen der Konsistenz legt man für $M = \emptyset$ (leere Menge) fest, dass die Aussage $\exists x \in M : A(x)$ immer falsch ist, und die Aussage $\forall x \in M : A(x)$ immer wahr ist. Wenn nämlich $M$ die leere Menge ist, gibt es kein Element in $M$ und daher schon gar keines, welches $A(x)$ erfüllen könnte, weshalb $\exists x \in M : A(x)$ falsch ist. Dass $\forall x \in \emptyset : A(x)$ als wahr festgelegt wird, hat unter Anderem den Grund, dass die Formeln in Satz 2.11 auch für die leere Menge gelten.

**2.7 BEISPIEL**

$A(x) =$ „$x$ ist eine natürliche Zahl".
Dann ist die Aussage $\exists x \in \mathbb{Z} : A(x)$ wahr, da z.B. für $x = 1$ die Aussage $A(1)$ wahr ist.
Die Aussage $\forall x \in \mathbb{Z} : A(x)$ ist dagegen nicht wahr, da z.B. $A(-1)$ falsch ist.
Die Aussage $\forall x \in \{1; 2\} : A(x)$ ist hingegen wieder wahr, da $A(1)$ und $A(2)$ wahr sind.

**2.8 BEISPIEL**

In der Warnung nach Beispiel 2.2 hatten wir die Aussage

*In allen Situationen, in denen Anna mehr Gummibärchen hat als Ben, hat Ben auch mehr Gummibärchen als Carla.*

mathematisch ausgedrückt durch

$$\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : \forall c \in \mathbb{N} : a > b \Rightarrow b > c.$$

Diese Aussage ist falsch, denn die Aussage $a > b \Rightarrow b > c$ ist zum Beispiel für $a = 4$, $b = 3$ und $c = 4$ falsch.

**2.9 REGEL**

Tauchen hintereinander mehrere Elemente $a$, $b$, $c$ etc. mit den gleichen Quantoren auf, so darf deren Reihenfolge vertauscht werden und man kann die Notation auch kürzen, indem man den Quantor nur einmal schreibt.

Bei verschiedenen Quantoren darf deren Reihenfolge jedoch nicht vertauscht werden.

**2.10 BEISPIEL**

1. Die Aussage aus Beispiel 2.8
$$\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : \forall c \in \mathbb{N} : a > b \Rightarrow b > c$$
ist äquivalent zu
$$\forall b \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{N} : \forall c \in \mathbb{N} : a > b \Rightarrow b > c \quad \text{und zu}$$
$$\forall a \in \mathbb{N} : \forall c \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : a > b \Rightarrow b > c \quad \text{etc.}$$
und man kann auch kürzer
$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a > b \Rightarrow b > c$$
schreiben.
2. Die (wahre) Aussage $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$ ist äquivalent zu der Aussage $\forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt schreibt man auch kürzer:
$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$$
3. Die Aussage $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : y - x \in \mathbb{N}$ ist nicht äquivalent zu der Aussage $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{N} : y - x \in \mathbb{N}$. Die erste sagt nämlich aus, dass man zu jeder natürlichen Zahl $x$ eine ganze Zahl $y$ finden kann, sodass $y - x$ wieder eine natürliche Zahl ist. Die zweite Aussage sagt jedoch aus, dass es eine ganze Zahl $y$ gibt, sodass für jede beliebige natürliche Zahl $x$ die Zahl $y - x$ wieder eine natürliche Zahl ist. Im ersten Fall ist also für jedes $x$ eine Zahl $y$ gesucht, welche von $x$ abhängen kann, im zweiten Fall ist eine feste Zahl $y$ gesucht, sodass die Bedingung für alle $x$ erfüllt ist. Daran sieht man auch, dass die erste Aussage wahr ist, weil für beliebiges $x \in \mathbb{N}$ die Zahl $y = x + 1$ eine ganze Zahl ist, die $y - x \in \mathbb{N}$ erfüllt. Die zweite Aussage jedoch ist falsch: Egal welche ganze Zahl $y$ man wählt, die Bedingung $y - x \in \mathbb{N}$ ist für gewisse natürliche Zahlen $x$ nicht erfüllt (nämlich für die, die größer als $y$ sind), und insbesondere ist die Bedingung $y - x \in \mathbb{N}$ *nicht* für alle natürliche Zahlen $x$ erfüllt.

## 2.3 Negation von Quantoren

**2.11 SATZ ( NEGATION DER QUANTOREN )**

Für eine Menge $M$ und Aussagen $A(x)$, die von Elementen $x \in M$ abhängen (können), gelten:

1. $\neg(\forall x \in M : A(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists x \in M : \neg A(x))$
2. $\neg(\exists x \in M : A(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in M : \neg A(x))$

Umgangssprachlich: Wenn eine Aussage nicht für alle $x$ wahr ist, gibt es (mindestens) ein $x$, für das die Aussage nicht wahr ist, und umgekehrt.
Wenn es nicht ein (einziges) $x$ gibt, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist, ist die Aussage $A(x)$ für alle $x$ nicht wahr, und umgekehrt.

**2.12 BEISPIEL**

Wie lautet die Negation der Aussage *Für alle reellen Zahlen $x$ gilt $x^2 > 0$.*?

Mit den Quantoren geschrieben ist diese Aussage: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$. Wie in Satz 2.11 angegeben, ist die Negation davon die Aussage $\exists x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 > 0)$, also

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0.$$

Oder in Worten: *Es gibt eine reelle Zahl $x$ mit $x^2 \leq 0$.*

Letztere Aussage ist übrigens wahr, weil die reelle Zahl $x = 0$ die Ungleichung $x^2 \leq 0$ erfüllt. Demgemäß war die ursprüngliche Aussage *Für alle reellen Zahlen $x$ gilt $x^2 > 0$.* eine falsche Aussage.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

## ÜBUNG 1

Man betrachte die Aussagen

$$\begin{aligned} &A{:}x = 2, \\ &B{:}x^2 = 4 \quad \text{und} \\ &C{:}x - 3 = 1 - x \end{aligned}$$

Welche Implikationen bestehen zwischen diesen Aussagen?

Antwort

$A$ und $C$ sind äquivalent, und jede einzelne der beiden impliziert $B$. Aber $B$ impliziert weder $A$ noch $C$. In Formeln:

$$A \Leftrightarrow C, \quad A \Rightarrow B, \quad C \Rightarrow B.$$

Lösung

Dass $A$ sowohl $B$ als auch $C$ impliziert, sieht man direkt, durch einsetzen: Wenn $A$ gilt, d.h. $x$ gleich $2$ ist, dann gilt $x^2 = 2^2 = 4$. D.h. $B$ ist wahr.
Außerdem gilt dann $x - 3 = 2 - 3 = -1$ und $1 - x = 1 - 2 = -1$, d.h. auch $C$ ist wahr.

Dass $B$ die Aussage $A$ nicht impliziert, sieht man dadurch, dass die Gleichung $x^2 = 4$ nicht nur für $x = 2$, sondern auch für $x = -2$ erfüllt ist. Die Aussage $A$ kann also falsch sein, auch wenn $B$ wahr ist.

Die Aussage $A$ und die Aussage $C$ sind in der Tat äquivalent:

$$\begin{aligned} x - 3 &= 1 - x \,|+3 \\ \Leftrightarrow x &= 4 - x \,|+x \\ \Leftrightarrow 2x &= 4 \quad |:2 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Für die Äquivalenz von $A$ und $C$ wurden Äquivalenzumformungen von Gleichungen gemacht, also Umformungen, für die es auch entsprechende Umformungen in die andere Richtung gibt (z.B. Subtraktion von $3$, um von der zweiten Zeile zur ersten zu gelangen). Um aus der Aussage $A$ die Aussage $B$ zu folgern, wurde quadriert, was keine Äquivalenzumformung ist (vgl. auch OMB+-Kapitel II.1 zu Äquivalenzumformungen von Gleichungen.)

## ÜBUNG 2

Man betrachte die Aussagen

$$\begin{aligned} A &: \text{Karin hat (mindestens) einen Stift.} \\ B &: \text{Hans hat (mindestens) einen Stift.} \\ C &: \text{Zusammen haben Karin und Hans (mindestens) zwei Stifte.} \end{aligned}$$

sowie die Aussagen

$$\begin{aligned} F &: \text{Wenn Karin einen Stift hat und auch Hans, dann haben sie zusammen (mindestens) zwei Stifte.} \\ G &: \text{Wenn Karin keinen Stift hat oder Hans keinen, dann haben sie zusammen keine zwei Stifte.} \\ H &: \text{Wenn Karin und Hans zusammen keine zwei Stifte haben, dann hat Karin keinen Stift oder Hans hat keinen Stift.} \\ I &: \text{Wenn Karin und Hans zusammen zwei Stifte haben und Karin hat keinen Stift, dann hat Hans einen Stift.} \end{aligned}$$

Wie setzen sich die Aussagen $F$, $G$, $H$ und $I$ aus den anderen zusammen?
Formulieren Sie auch alle Aussagen mathematisch (mit $k$ als Anzahl von Karins Stifte und $h$ als Anzahl von Hans Stifte).
Welche dieser Aussagen sind für alle Anzahlen $k$ und $h$ gültig?

Antwort

Unter Beachtung der Tatsache, dass kein Stift zu haben, die Negation davon ist, mindestens einen Stift zu haben, ist die Zusammensetzung folgendermaßen:

| | |
|---|---|
| $F$ | $(A \wedge B) \Rightarrow C$ |
| $G$ | $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg C$ |
| $H$ | $\neg C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ |
| $I$ | $(C \wedge \neg A) \Rightarrow B$ |

Mathematisch formuliert lauten die Aussagen:

| | |
|---|---|
| $A$ | $k \geq 1$ |
| $B$ | $h \geq 1$ |
| $C$ | $k + h \geq 2$ |
| $F$ | $(k \geq 1) \wedge (h \geq 1) \Rightarrow (k + h \geq 2)$ |
| $G$ | $(k = 0) \vee (h = 0) \Rightarrow k + h < 2$ |
| $H$ | $k + h < 2 \Rightarrow (k = 0) \vee (h = 0)$ |
| $I$ | $(k + h \geq 2 \wedge k = 0) \Rightarrow h \geq 1$ |

Zu beachten ist wieder, dass Anzahlen immer ganze Zahlen $\geq 0$ sind, und daher die Aussage $k = 0$ gleichbedeutend zu $k < 1$ ist, was die Negation von $k \geq 1$ ist.

Die Aussagen $F$, $H$ und $I$ sind stets (also für alle ganzen Zahlen $k, h \geq 0$) gültig, $G$ jedoch nicht.

Lösung zur Zusammensetzung

Alle Aussagen $F$ bis $I$ sind Implikationen. Bei $F$ ist die Prämisse, dass Karin und Hans jeweils einen Stift haben, also dass $A$ und $B$ beide wahr sind, also $A \wedge B$. Die Konklusion ist die Aussage $C$. Insgesamt ist also $F$ die Aussage

$$(A \wedge B) \Rightarrow C.$$

Entsprechend ist bei $G$ die Prämisse, dass $A$ falsch ist oder $B$, dass also $\neg A$ wahr ist oder $\neg B$ wahr ist, also $\neg A \vee \neg B$. Die Konklusion ist, dass $C$ falsch ist, also dass $\neg C$ wahr ist. Insgesamt ist also $G$ die Aussage

$$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg C.$$

Die Prämisse von $H$ ist gerade die Konklusion von $G$, also $\neg C$, und die Konklusion von $H$ ist gerade die Prämisse von $G$, also $\neg A \vee \neg B$. Damit ist $H$ die Aussage

$$\neg C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B).$$

Entsprechend ist $C \wedge \neg A$ die Prämisse von $I$ und $B$ ihre Konklusion, $I$ also die Aussage

$$(C \wedge \neg A) \Rightarrow B.$$

Lösung zur mathematischen Formulierung

Die Aussage $A$, dass Karin mindestens einen Stift hat, bedeutet, dass die Anzahl $k$ ihrer Stifte mindestens $1$ ist, also $k \geq 1$. Ebenso ist die Aussage $B$: $h \geq 1$.

Die Aussage $C$ besagt, dass sie zusammen mindestens $2$ Stifte haben, also dass $k + h \geq 2$ ist.

Die Negation $\neg A$ ist dann $k < 1$, und $\neg B$ ist die Aussage $h < 1$. Da aber die Anzahlen $k$ und $h$ ganze Zahlen größer oder gleich $0$ sind, ist dies gleichbedeutend zu $k = 0$ bzw. zu $h = 0$. Dementsprechend erhält man daraus, wie die Aussagen $F$-$I$ aus den Aussagen $A$, $B$ und $C$ zusammengesetzt sind, ihre mathematischen Formulierungen als

| | |
|---|---|
| $F$ | $(k \geq 1) \wedge (h \geq 1) \Rightarrow (k + h \geq 2)$ |
| $G$ | $(k = 0) \vee (h = 0) \Rightarrow k + h < 2$ |
| $H$ | $k + h < 2 \Rightarrow (k = 0) \vee (h = 0)$ |
| $I$ | $(k + h \geq 2) \wedge (k = 0) \Rightarrow h \geq 1$ |

Lösung zur Gültigkeit

Wenn $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der $0$ bezeichnet, ist also gefragt, welche der Aussagen

| | |
|---|---|
| $F$ | $(k \geq 1) \wedge (h \geq 1) \Rightarrow (k+h \geq 2)$ |
| $G$ | $(k = 0) \vee (h = 0) \Rightarrow k+h < 2$ |
| $H$ | $k+h < 2 \Rightarrow (k = 0) \vee (h = 0)$ |
| $I$ | $(k+h \geq 2 \wedge k = 0) \Rightarrow h \geq 1$ |

für alle $k, h \in \mathbb{N}_0$ gültig sind, d.h. welche der Aussagen

| |
|---|
| $\forall k, h \in \mathbb{N}_0 : (k \geq 1) \wedge (h \geq 1) \Rightarrow (k+h \geq 2)$ |
| $\forall k, h \in \mathbb{N}_0 : (k = 0) \vee (h = 0) \Rightarrow k+h < 2$ |
| $\forall k, h \in \mathbb{N}_0 : k+h < 2 \Rightarrow (k = 0) \vee (h = 0)$ |
| $\forall k, h \in \mathbb{N}_0 : (k+h \geq 2 \wedge k = 0) \Rightarrow h \geq 1$ |

wahr sind.

Da eine Implikation genau dann falsch ist, wenn die Prämisse wahr und die Konklusion falsch sind, ist also zu untersuchen, ob es $k, h \in \mathbb{N}_0$ gibt, für die dieser Fall eintritt.
Für die Implikation $F$ tritt so ein Fall offensichtlich nicht ein, denn wenn die Prämisse wahr ist, also $k \geq 1$ und $h \geq 1$ sind, ist deren Summe $k+h$ mindestens $1+1=2$. Da also kein Fall eintritt, in dem $F$ falsch ist, ist die Aussage $F$ stets wahr.

Die Implikation $G$ ist nicht in allen Situationen wahr. Es kann nämlich durchaus sein, dass die Prämisse wahr ist, aber die Konklusion nicht. Zum Beispiel in dem Fall, dass $k = 0$ und $h = 3$ ist. Dann ist die Prämisse $(k = 0) \vee (h = 0)$ wahr, weil $k = 0$ wahr ist, aber $k + h$ ist gleich $3$, d.h. die Konklusion $k + h < 2$ ist falsch.

Wie die Aussage $F$ sind auch die Aussagen $H$ und $I$ in allen Situationen gültig. Man kann sich das entsprechend zur Aussage $F$ überlegen.

**Anmerkung:** In der Tat sind sogar für beliebige Aussagen $A$, $B$ und $C$ die Implikationen

$$(A \wedge B) \Rightarrow C$$

und

$$\neg C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

zueinander äquivalent, wie man durch Aufstellen der Wahrheitstafeln verifizieren kann (vgl. auch Abschnitt 3). Da also für beliebige Anzahlen $k$ und $h$ die Aussage $F$ stets gültig ist, ist auch die Aussage $H$ stets gültig.

## ÜBUNG 3

Wie lauten die folgenden Aussagen in formaler Schreibweise?

a) Für alle natürlichen Zahlen $x$ gibt es eine ganze Zahl $y$, so dass die Summe der beiden Zahlen $0$ ergibt.

b) Es gibt zwei reelle Zahlen $a$ und $b$ so, dass für alle ganzen Zahlen $z$, entweder $z$ kleiner als $a$ ist, oder $z$ größer als $b$ ist (aber nicht sowohl als auch).

c) Es gibt eine positive reelle Zahl $r$, die kleiner als alle ganzen Zahlen ist.

Welche dieser Aussagen sind wahr, welche falsch?

Antwort

a) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$
Diese Aussage ist wahr.

b) $\exists a, b \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{Z} : (z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$
Diese Aussage ist auch wahr.

c) $\exists r \in \{s \in \mathbb{R} \,|\, s > 0\}\, \forall z \in \mathbb{Z} : r < z$
Diese Aussage ist falsch.

Lösung zu a)

„Für alle natürlichen Zahlen $x$”, also „für alle $x$ aus der Menge der natürlichen Zahlen”, ist formal $\forall x \in \mathbb{N}$.
„Es gibt eine ganze Zahl $y$” ist formal $\exists y \in \mathbb{Z}$, und die Aussage, die für $x$ und $y$ gelten soll „die Summe beider Zahlen ergibt 0” ist formal geschrieben: $x + y = 0$.

Alles der Reihe nach zusammengesetzt ergibt also:

$$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$$

Nach Definition der Quantoren ist die gesamte Aussage wahr, wenn für jede beliebige natürliche Zahl $x$ die Aussage

$$\exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$$

wahr ist.

Dies ist aber äquivalent dazu, dass die einzige Zahl $y$, die $x + y = 0$ erfüllt, nämlich die Zahl $y = -x$, eine ganze Zahl ist.

Für jede natürliche Zahl $x$ ist $-x$ eine ganze Zahl. Somit ist die Aussage wahr.

Lösung zu b)

„Es gibt zwei reelle Zahlen $a$ und $b$" ist formal $\exists a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R}$ oder $\exists b \in \mathbb{R}\, \exists a \in \mathbb{R}$ oder kurz $\exists a, b \in \mathbb{R}$.
„Für alle ganzen Zahlen $z$" ist formal: $\forall z \in \mathbb{Z}$, und die Aussage, die für $a$, $b$ und $z$ gemacht wird „entweder ist $z$ kleiner als $a$, oder $z$ ist größer als $b$ (aber nicht sowohl als auch)" ist formal $(z < a \vee z > b) \wedge \neg(z < a \wedge z > b)$, oder kürzer $(z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$.

Richtig zusammengesetzt erhält man also:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{Z} : (z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$$

Nach Definition der Quantoren ist die gesamte Aussage wahr, wenn man zwei reelle Zahlen $a$ und $b$ finden kann, für die die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : (z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$$

wahr ist, dass also für jede beliebige ganze Zahl $z$ die Aussage $(z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$ wahr ist.

Da die Formeln $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ und $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ äquivalent sind, lässt sich letzteres auch schreiben als

$$(z < a \wedge z \leq b) \vee (z > b \wedge z \geq a).$$

Gesucht sind also reelle Zahlen $a$ und $b$, so dass jede ganze Zahl kleiner $a$ und $\leq b$ ist, oder $\geq a$ und größer als $b$ ist.

Für $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{2}{3}$ ist dies zum Beispiel erfüllt: Wenn eine ganze Zahl kleiner als $a$ ist, ist sie auch kleiner als $b$, insbesondere $\leq b$, und wenn sie $\geq a$ ist, ist sie mindestens $1$, und damit auch größer als $b$.
Die gesamte Aussage ist also wahr.

**Bemerkung:** Es gibt sogar unendlich viele reelle Zahlen $a$ und $b$, für die die Aussage $\forall z \in \mathbb{Z} : (z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$ wahr ist. Damit die gesamte Aussage

$$\exists a, b \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{Z} : (z < a \vee z > b) \wedge \neg(b < z < a)$$

als wahre Aussage erkannt wird, genügt es aber ein einziges $a$ und $b$ zu finden.

Lösung zu c)

„Es gibt eine positive reelle Zahl $r$", also „Es gibt ein $r$ in der Menge der positiven reellen Zahlen", ist formal $\exists r \in \{s \in \mathbb{R} \,|\, s > 0\}$. (vgl. auch Abschnitt 4 zur Mengennotation). „die kleiner als alle ganzen Zahlen ist" lässt sich auch formulieren als „für alle ganzen Zahlen $z$ ist $r$ kleiner als $z$", oder ganz formal $\forall z \in \mathbb{Z} : r < z$.

Die gesamte Aussage ist also

$$\exists r \in \{s \in \mathbb{R} \,|\, s > 0\} \forall z \in \mathbb{Z} : r < z.$$

Die gesamte Aussage ist wahr, wenn es gelingt, eine positive reelle Zahl $r$ zu finden, für die die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : r < z$$

wahr ist, und die Aussage $\forall z \in \mathbb{Z} : r < z$ ist wahr, wenn für jede ganze Zahl $z$ die Aussage $r < z$ wahr ist.

Für $z = -1$ ist aber $z < 0$ und insbesondere $z < r$, da ja $r$ eine positive Zahl ist. Die Aussage $r < z$ ist also für $z = -1$ stets falsch, und daher ist $\forall z \in \mathbb{Z} : r < z$ stets falsch. Es gibt also keine positive reelle Zahl $r$, für die die Aussage $\forall z \in \mathbb{Z} : r < z$ wahr ist, und daher ist die gesamte Aussage

$$\exists r \in \{s \in \mathbb{R} \,|\, s > 0\} : \forall z \in \mathbb{Z} : r < z$$

eine falsche Aussage.

## ÜBUNG 4

Bestimmen Sie die Negation der folgenden Aussagen:

a) $\forall x \in \mathbb{Z} : (x^2 > 0 \vee x < 0)$

b) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

c) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : k + n \leq m$

Sind jeweils die Aussagen wahr, oder deren Negation?

Antwort

a) Negation ist

$$\exists x \in \mathbb{Z} : (x^2 \leq 0 \wedge x \geq 0).$$

Die Negation ist wahr.

b) Negation ist

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq x.$$

Die ursprüngliche Aussage ist wahr.

c) Negation ist

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : k + n > m.$$

Die Negation ist wahr.

Lösung zu a)

Für die Negation einer Aussage mit Quantoren ist stets der Allquantor durch den Existenzquantor und der Existenzquantor durch den Allquantor zu ersetzen und die Aussage nach dem Quantor zu negieren.

Die Negation von $\forall x \in \mathbb{Z} : \left(x^2 > 0 \vee x < 0\right)$ ist also

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \neg(x^2 > 0 \vee x < 0).$$

Da außerdem $\neg(x^2 > 0 \vee x < 0)$ äquivalent zu $\neg(x^2 > 0) \wedge \neg(x < 0)$ ist, also zu $x^2 \leq 0 \wedge x \geq 0$, ist die gesamte Negation also

$$\exists x \in \mathbb{Z} : (x^2 \leq 0 \wedge x \geq 0).$$

Die Negation ist wahr, denn für die ganze Zahl $x = 0$ ist sowohl $x^2 \leq 0$, als auch $x \geq 0$ erfüllt.

Lösung zu b)

Es ist

$$\begin{aligned}
& \neg\left(\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{n} < x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}\, \neg\left(\forall n \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{n} < x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : \neg(\tfrac{1}{n} < x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{n} \geq x.
\end{aligned}$$

Die Negation der Aussage $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$ ist also die Aussage $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq x$.

Die ursprüngliche Aussage ist wahr: Für jede natürliche Zahl $n$ gilt nämlich $\frac{1}{n} \leq 1$. Für jede reelle Zahl $x > 1$ gilt daher

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x. \tag{1}$$

Insbesondere gibt es eine reelle Zahl $x$, für die die Aussage ( 1 ) wahr ist.

Die Aussage $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$ ist also wahr.

Lösung zu c)

Wie in b) formt man um:

$$
\begin{aligned}
& \neg\big(\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : k + n \leq m\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \neg\big(\exists k \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : k + n \leq m\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N} \neg\big(\forall m \in \mathbb{N} : k + n \leq m\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : \neg\big(k + n \leq m\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : k + n > m
\end{aligned}
$$

Die Negation der ursprünglichen Aussage ist also

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : k + n > m.$$

Damit die Negation wahr ist, muss man also eine natürliche Zahl $n$ finden können, für die die Aussage $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : k + n > m$ wahr ist.

Man muss also für beliebiges $k$ eine Zahl $m$ (in Abhängigkeit von $k$) angeben können, so dass für diese $n$, $k$ und $m$ die Ungleichung $k + n > m$ erfüllt ist.

Da $n$ eine natürliche Zahl ist, und insbesondere größer $0$ ist, ist für alle natürlichen Zahlen $k$ die Ungleichung $k + n > k$ erfüllt, weshalb man für jedes $k$ die Zahl $m = k$ wählen kann.

Die Aussage $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : k + n > m$ ist also sogar für jede beliebige natürliche Zahl $n$ wahr. Aber insbesondere gibt es auch eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist.
Die Negation der ursprünglichen Aussage, also die Aussage $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : k + n > m$ , ist daher wahr.

# 3. MATHEMATISCHE BEWEISE

**Inhalt**



Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

**Lernziele**

- Sie wissen, was ein direkter, ein indirekter und ein Widerspruchsbeweis sind.
- Sie können zu beweisende Aussagen äquivalent umformen.
- Sie kennen die vollständige Induktion und können einfache Aussagen damit beweisen.

Mathematische Sätze sind häufig Aussagen der Form

$$\text{Voraussetzung} \Rightarrow \text{Behauptung}.$$

Der Beweis eines solchen Satzes besteht darin, zu zeigen, dass diese Implikation wahr ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten, einen solchen Beweis zu führen. Die grundlegenden Hauptmethoden sollen hier vorgestellt werden.

## 3.1 Direkter Beweis

Beim *direkten Beweis* wird die zu beweisende Implikation in eine Kette von Implikationen aufgeteilt, z.B.

$$\text{Voraussetzung} \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \text{Behauptung}$$

mit gewissen Aussagen $A_1$, $A_2$ und $A_3$, wobei von jeder einzelnen dieser Implikationen der Wahrheitswert W bereits bekannt oder unmittelbar einsichtig ist.

**3.1 BEISPIEL**

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \text{ ungerade} \Rightarrow n^2 - 1 \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}$$

Ein Beweis dieser Aussage geht zum Beispiel so:

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade} \quad & \Rightarrow \quad \text{Es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k - 1 \\ & \Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n^2 - 1 = (2k-1)^2 - 1 = (4k^2 - 4k + 1) - 1 = 4k^2 - 4k = 4 \cdot (k^2 - k) \\ & \Rightarrow \quad \exists l \in \mathbb{N} \text{ mit } n^2 - 1 = 4l \quad (\text{nämlich } l = k^2 - k) \\ & \Rightarrow \quad n^2 - 1 \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar} \end{aligned}$$

(Bei der Umformung in der zweiten Zeile wurde übrigens die zweite Binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ benutzt.) Da jede einzelne Implikation in der Kette wahr ist, ist auch die Implikation des Satzes wahr.

Begründung für das Verfahren

Um festzustellen, dass die gesamte Implikation wahr ist, wenn die einzelnen Implikationen wahr sind, vergleicht man am besten die Wahrheitstafeln von

$$(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n \Rightarrow B)$$

und von

$$A \Rightarrow B$$

Hier beispielhaft der Fall eines Zwischenschritts:

| $A$ | $A_1$ | $B$ | | $A \Rightarrow A_1$ | $A_1 \Rightarrow B$ | $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)$ | | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | | W | W | W | | W |
| W | W | F | | W | F | F | | F |
| W | F | W | | F | W | F | | W |
| W | F | F | | F | W | F | | F |
| F | W | W | | W | W | W | | W |
| F | W | F | | W | F | F | | W |
| F | F | W | | W | W | W | | W |
| F | F | F | | W | W | W | | W |

Wenn in der Tabelle die Aussageform $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)$ den Wahrheitswert W hat, hat auch $A \Rightarrow B$ den Wahrheitswert W, also folgt die Richtigkeit der gesamten Implikation aus der Richtigkeit der einzelnen Implikationen.

## 3.2 Indirekter Beweis und Widerspruchsbeweis

Manchmal ist es sehr schwer oder gar unmöglich, einen direkten Beweis zu führen. Dann ersetzt man die eigentlich zu zeigende Implikation durch eine dazu äquivalente Aussage.

**3.2 SATZ**

Für beliebige Aussagen $A$ und $B$ sind die folgenden Implikationen zueinander äquivalent:

1. $A \Rightarrow B$
2. $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. $A \wedge \neg B \Rightarrow$F

Beweis des Satzes

Um zu sehen, dass die Implikationen äquivalent sind, betrachtet man die zugehörigen Wahrheitstafeln:

| $A$ | $B$ | | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|
| W | W | | W |
| W | F | | F |
| F | W | | W |
| F | F | | W |

| $A$ | $B$ | | $\neg B$ | $\neg A$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | F | F | W |
| W | F | | W | F | F |
| F | W | | F | W | W |
| F | F | | W | W | W |

| $A$ | $B$ | | $\neg B$ | $A \wedge \neg B$ | $A \wedge \neg B \Rightarrow$ **F** |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | F | F | W |
| W | F | | W | W | F |
| F | W | | F | F | W |
| F | F | | W | F | W |

Für jeden Wahrheitswert von $A$ und $B$ haben alle drei Implikationen denselben Wahrheitswert. Also sind sie äquivalent.

Beim sogenannten *indirekten Beweis* (oder *Beweis durch Kontraposition*) wird nun statt der Implikation $\text{Voraussetzung} \Rightarrow \text{Behauptung}$ die dazu äquivalente Implikation

$$\text{Negation der Behauptung} \Rightarrow \text{Negation der Voraussetzung}$$

gezeigt. Dies macht man dann üblicherweise in mehreren Schritten, wie es beim direkten Beweis erklärt wurde.

**3.3 BEISPIEL**

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad nm \text{ ungerade } \Rightarrow n \text{ ungerade und } m \text{ ungerade.}$
Dies kann man durch einen indirekten Beweis zeigen, indem man also für $n, m \in \mathbb{N}$ die Aussage:

*Wenn nicht $n$ und $m$ beide ungerade sind, ist $nm$ nicht ungerade.*

zeigt:

$n$ und $m$ nicht beide ungerade
$\Rightarrow n$ gerade oder $m$ gerade
$\Rightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$ oder es gibt $l \in \mathbb{N}$ mit $m = 2l$
$\Rightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $nm = 2km$ oder es gibt $l \in \mathbb{N}$ mit $nm = 2nl$
$\Rightarrow$ es gibt $j \in \mathbb{N}$ mit $nm = 2j$ (nämlich $j = km$ oder $j = ln$)
$\Rightarrow nm$ gerade, d.h. nicht ungerade.

Eine dritte Möglichkeit des Beweises der Implikation $\text{Voraussetzung} \Rightarrow \text{Behauptung}$ ergibt sich aus der dritten Implikation in Satz 3.2 . Man zeigt dabei, die Implikation

$$\text{Voraussetzung und Negation der Behauptung} \Rightarrow \text{F},$$

d.h. aus der Annahme, dass die Voraussetzung und die Negation der Behauptung beide wahr sind, leitet man eine Aussage her, die bekanntermaßen falsch ist (d.h. den Wahrheitswert F hat), also einen Widerspruch. Diese Form des Beweises heißt daher auch *Beweis durch Widerspruch* oder *Widerspruchsbeweis*.

**3.4 BEISPIEL**

Es soll die Implikation

$$x^2 = 2 \Rightarrow x \not\in \mathbb{Q}$$

gezeigt werden. (Oder anders ausgedrückt: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.)

Hier führt man den Beweis am besten als Widerspruchsbeweis. Man zeigt also, dass die Aussage $x^2 = 2 \wedge x \in \mathbb{Q}$ eine (offensichtlich) falsche Aussage impliziert. D.h. man nimmt an, dass eine rationale Zahl $x$ die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt, und leitet daraus eine falsche Aussage her.

Der ausführliche Beweis kann im OMB+-Kapitel I.6.1 nachgelesen werden.

## 3.3 Beweis durch vollständige Induktion

Im folgenden bezeichne $A(n)$ eine Aussage, die von einer natürlichen Zahl $n$ abhängt.
Die *Beweismethode der vollständigen Induktion* ist eine Methode, um Aussagen der Form

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

zu beweisen, wenn ein direkter Beweis nur schwer (oder gar nicht) möglich ist. Die Methode besteht aus zwei Teilen:

(IA) Dem *Induktionsanfang* (oder *Induktionsverankerung*), in dem gezeigt wird, dass $A(1)$ wahr ist.

(IS) Dem *Induktionsschritt* (oder *Induktionsschluss*), in dem gezeigt wird, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist.

Im Induktionsschritt heißt $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* (IV), da sie die Voraussetzung der Implikation ist.

**3.5 BEMERKUNG**

Im Induktionsschritt muss man also nicht zeigen, dass $A(n)$ wahr ist, sondern man zeigt, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist. D.h. man setzt für beliebiges $n$ (das dann auch fest gelassen wird) voraus, dass $A(n)$ wahr ist, und zeigt damit, dass für dieses $n$ auch die Aussage $A(n+1)$ wahr ist.
"Beliebig" heißt dabei nicht, dass man sich ein $n$ wählen darf, sondern dass an die natürliche Zahl, für die $n$ stehen soll, keine Einschränkungen gemacht werden.

**3.6 BEMERKUNG**

Der Unterschied zwischen dem direkten Beweis und dem Beweis durch vollständige Induktion ist vergleichbar mit dem Verteilen von Aufgabenblättern in einer (unendlich großen) Schulklasse: Die direkte Methode entspricht dem Verfahren, dass man jedem Schüler ein Aufgabenblatt gibt. Dann hat jeder ein Blatt.
Der Beweis durch vollständige Induktion entspricht dem Verfahren, dass man dem ersten Schüler den Stapel an Blättern gibt (Induktionsanfang) und Folgendes sicherstellt (Induktionsschritt): Wenn ein Schüler den Stapel bekommt (Induktionsvoraussetzung), nimmt er sich ein Blatt und gibt den restlichen Stapel an den nächsten Schüler weiter.

**3.7 BEISPIEL**

Es soll gezeigt werden, dass für jede natürliche Zahl $n$ die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen genau die Zahl $n^2$ gibt. Zu zeigen ist also $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ wobei

$$A(n) : 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Beweis:

(IA) $n = 1$: Die Summe besteht nur aus einer Zahl, nämlich der $1$ und $n^2 = 1$, also ist die Aussage $A(1) : 1 = 1$ wahr.

(IS) $n \to n+1$: Man hat also die Induktionsvoraussetzung für ein festes $n \in \mathbb{N}$:

(IV) Es gelte $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$

und muss für dieses $n$ die Aussage $A(n+1) : 1 + 3 + \ldots + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$ zeigen:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2(n+1)-1) &= 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + (2(n+1)-1) \quad \text{nach (IV)} \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \quad \text{nach erster binomischer Formel.} \end{aligned}$$

Im Induktionsschritt $n \to n+1$ wurde also gezeigt: Wenn (für eine feste natürliche Zahl $n$) die Aussage $A(n)$ wahr ist, dann ist auch die Aussage $A(n+1)$ wahr.

[video-online-only]

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

## ÜBUNG 1

Beweisen Sie, dass für jede beliebige reelle Zahl $x$ die Aussage

$$x > 4 \Rightarrow x^2 - 4x > 0$$

gilt. Finden Sie einen direkten Beweis, einen indirekten und einen Widerspruchsbeweis.

**Anmerkung:** Natürlich gibt es keine eindeutige Vorgehensweise für einen Beweis. Die unten angegebenen sind daher nur Beispielbeweise.

Direkter Beweis

Hier ist also die Implikation $x > 4 \Rightarrow x^2 - 4x > 0$ direkt zu zeigen, indem man sie in „kleinere" Implikationen zerlegt, von denen man weiß, dass sie wahr sind.

Angenommen $x > 4$, dann folgt insbesondere $x > 0$. Also bleibt bei Multiplikation mit $x$ das Ungleichheitszeichen gleich. Also folgt: $x \cdot x > 4 \cdot x$, d.h. $x^2 > 4x$.

Subtraktion von $4x$ auf beiden Seiten ergibt:

$$x^2 - 4x > 0.$$

**Anmerkung:** Formal geschrieben hat man also folgende Implikationskette benutzt:

$$x > 4 \Rightarrow x > 4 \wedge x > 0 \Rightarrow x^2 > 4x \Rightarrow x^2 - 4x > 0$$

Indirekter Beweis

Für einen indirekten Beweis muss man also die Implikation $\neg(x^2-4x>0) \Rightarrow \neg(x>4)$ zeigen, indem man diese in "kleinere" Implikationen zerlegt. Die Negation von $x^2-4x>0$ ist $x^2-4x\leq 0$ und die Negation von $x>4$ ist $x\leq 4$. Zu zeigen ist also

$$x^2-4x\leq 0 \Rightarrow x\leq 4.$$

Angenommen es gilt $x^2-4x\leq 0$. Wegen $x^2-4x=x\cdot(x-4)$ bedeutet dies also

$$x\cdot(x-4)\leq 0.$$

Ein Produkt ist aber nur dann $\leq 0$, wenn ein Faktor $0$ ist, oder der eine Faktor positiv und der andere Faktor negativ ist. Aus der Bedingung $x\cdot(x-4)\leq 0$ folgt also

$$(x=0\vee x-4=0)\vee(x>0\wedge x-4<0)\vee(x<0\wedge x-4>0).$$

Die Bedingung $x<0\wedge x-4>0$ ist aber unerfüllbar, d.h. immer falsch, also folgt

$$(x=0\vee x=4)\vee(x>0\wedge x<4).$$

Sowohl $x=0$, als auch $x=4$, als auch $0<x<4$ implizieren $x\leq 4$. Daher folgt $x\leq 4$, was gerade die Negation von $x>4$ ist.

**Anmerkung:** Formal geschrieben hat man also folgende Äquivalenz-/Implikationskette benutzt:

$$\begin{aligned}
\neg(x^2-4x>0) &\Leftrightarrow x^2-4x\leq 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-4)\leq 0\\
&\Rightarrow (x=0\vee x-4=0)\vee(x>0\wedge x-4<0)\vee(x<0\wedge x-4>0)\\
&\Leftrightarrow (x=0\vee x-4=0)\vee(x>0\wedge x-4<0)\vee \mathrm{F}\\
&\Leftrightarrow (x=0\vee x=4)\vee(x>0\wedge x<4)\\
&\Rightarrow x\leq 4 \Leftrightarrow \neg(x>4)
\end{aligned}$$

Notez bien qu'à la deuxième ligne, on a une implication (c'est ce qu'on cherche à démontrer) qui nous conduit au résultat final $x\leq 4$, ce qui est correct car si $x^2-4x\leq 0$, nécessairement $x\leq 4$. Une équivalence nous aurait conduit au résultat $0\leq x\leq 4$ car $x^2-4x\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 4$.

Widerspruchsbeweis

Für den Widerspruchsbeweis muss man die Annahme $x > 4 \wedge \neg(x^2 - 4x > 0)$ zu einem Widerspruch, also einer (offensichtlich) falschen Aussage führen.

Angenommen, $x > 4 \wedge x^2 - 4x \leq 0$. Wegen $x^2 - 4x = x \cdot (x-4)$ bedeutet letzteres also $x \cdot (x-4) \leq 0$.

Ein Produkt ist aber $\leq 0$, wenn ein Faktor $0$ ist, oder der eine Faktor positiv und der andere Faktor negativ ist. Wegen $x > 4$ ist $x - 4$ positiv. Also folgt aus $x > 4$ und $x(x-4) \leq 0$, dass $x \leq 0$ ist.

$x \leq 0$ steht aber im Widerspruch zur Annahme $x > 4$ (denn die Bedingungen können nicht gleichzeitig erfüllt sein). Oder anders ausgedrückt: Die Bedingung $x > 4 \wedge x \leq 0$ ist für jede Zahl $x$ eine falsche Aussage, also ist $x > 4 \wedge x \leq 0$ ein Widerspruch.

**Anmerkung:** Formal geschrieben hat man also folgende Äquivalenz-/Implikationskette benutzt:

$$
\begin{aligned}
x > 4 \wedge \neg(x^2 - 4x > 0) \quad &\Leftrightarrow \quad x > 4 \wedge x^2 - 4x \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 4 \wedge x \cdot (x-4) \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad x > 4 \wedge x \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{F}
\end{aligned}
$$

## ÜBUNG 2

Für eine reelle Zahl $x$ sollen folgende Aussagen betrachtet werden.

a) $x^3 + x - 3 > 0 \Rightarrow x > 0$

b) $x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Formulieren Sie die Aussagen so um, wie man sie für einen indirekten Beweis beziehungsweise für einen Widerspruchsbeweis benötigen würde.

Antwort

Für indirekten Beweis:

a) $x \leq 0 \Rightarrow\ x^3 + x - 3 \leq 0$

b) $x \neq 3 \Rightarrow\ x \notin \mathbb{N} \vee x^2 - 2x - 3 \neq 0$

Für Widerspruchsbeweis:

a) $x^3 + x - 3 > 0 \wedge x \leq 0 \Rightarrow\ \mathbf{F}$

b) $x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge x \neq 3 \Rightarrow\ \mathbf{F}$

Lösung

Für einen indirekten Beweis muss die Implikation $A \Rightarrow B$ durch die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ ersetzt werden, für einen Widerspruchsbeweis durch die Implikation $A \wedge \neg B \Rightarrow \mathrm{F}$.

Die Negation einer Ungleichung $a > b$ ist $a \leq b$, weshalb also im Fall a) die äquivalenten Aussagen

$$x \leq 0 \Rightarrow x^3 + x - 3 \leq 0$$

bzw.

$$x^3 + x - 3 > 0 \wedge x \leq 0 \Rightarrow \mathrm{F}$$

sind.

Im Fall b) muss die „Und"-Verknüpfung negiert werden, welche ja gerade die „Oder"-Verknüpfung der Negationen ist. Die Negation von $x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 2x - 3 = 0$ ist also $x \notin \mathbb{N} \vee x^2 - 2x - 3 \neq 0$. Die äquivalenten Aussagen sind also hier

$$x \neq 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{N} \vee x^2 - 2x - 3 \neq 0$$

bzw.

$$x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge x \neq 3 \Rightarrow \mathrm{F}.$$

## ÜBUNG 3

Schreiben Sie die folgenden Aussagen möglichst formal, und formulieren Sie sie auf verschiedene Weisen als Implikationen um. $x$ bezeichne hierbei eine reelle Zahl und $n$ eine natürliche Zahl.

a)
Die Lösungen der Gleichung $x^3 - 3x + 3 = 0$ sind keine rationalen Zahlen.

b)
Höchstens wenn $n = 2$ ist, sind $2^n - 1$ und $2^n + 1$ beides Primzahlen.

c)
Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen $a$ und $b$ liegt stets eine rationale Zahl $r$.

**Anmerkung:** In allen Fällen gibt es natürlich mehrere Möglichkeiten. Die unten angegebenen sind daher nur typische Beispiele.

Lösungen zu a)

Formalisiert lautet die Aussage: $x^3 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$.
Dies ist schon eine Implikation.

Weitere dazu äquivalente Implikationen (für indirekten oder Widerspruchsbeweis) sind dann

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^3 - 3x + 3 \neq 0$$

bzw.

$$x \in \mathbb{Q} \wedge x^3 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}$$

Lösungen zu b)

Die Aussage bedeutet, dass für $n \neq 2$ nicht beide angegebenen Zahlen Primzahlen sind, also

$$n \neq 2 \Rightarrow 2^n - 1 \text{ keine Primzahl } \vee 2^n + 1 \text{ keine Primzahl}$$

Weitere dazu äquivalente Implikationen erhält man aus der logischen Äquivalenz der Formeln $A \Rightarrow B$ und $A \wedge \neg B \Rightarrow \mathrm{F}$, die man auch mehrmals mit verschiedenen $A$ und $B$ anwenden kann. Zunächst also

$$n \neq 2 \,\wedge\, 2^n - 1 \text{ Primzahl } \wedge 2^n + 1 \text{ Primzahl } \Rightarrow \mathrm{F} \quad (1)$$

Wählt man dann in (1) als Aussage $A$ die Aussage „$2^n - 1 \text{ Primzahl } \wedge 2^n + 1 \text{ Primzahl}$" und dementsprechend „$n \neq 2$" als $\neg B$ erhält man mittels obiger Äquivalenz

$$2^n - 1 \text{ Primzahl } \wedge 2^n + 1 \text{ Primzahl } \Rightarrow n = 2.$$

Dies ist natürlich gerade die Implikation für den indirekten Beweis der ursprünglichen Aussage.

Entsprechend erhält man aus (1) durch Wahl von $A$ als „$n \neq 2 \,\wedge\, 2^n - 1 \text{ Primzahl}$" bzw. als „$n \neq 2 \,\wedge\, 2^n + 1 \text{ Primzahl}$" die Aussagen

$$n \neq 2 \,\wedge\, 2^n - 1 \text{ Primzahl } \Rightarrow 2^n + 1 \text{ keine Primzahl}$$

bzw.

$$n \neq 2 \,\wedge\, 2^n + 1 \text{ Primzahl } \Rightarrow 2^n - 1 \text{ keine Primzahl}$$

Weitere Möglichkeiten wären z.B.

$$2^n - 1 \text{ Primzahl } \Rightarrow n = 2 \,\vee\, 2^n + 1 \text{ keine Primzahl}$$

oder

$$2^n + 1 \text{ Primzahl } \Rightarrow n = 2 \,\vee\, 2^n - 1 \text{ keine Primzahl}$$

Lösungen zu c)

Formalisiert lautet die Aussage:

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \exists r \in \mathbb{Q} : (a < r < b \lor a > r > b)$$

Auch hier gibt es verschiedene Implikationen, die zu dieser Aussage äquivalent sind. Die einfachste Möglichkeit ist es, den ersten Allquantor $\forall a \in \mathbb{R}$ als Prämisse $a \in \mathbb{R}$ zu verwenden:

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \exists r \in \mathbb{Q} : (a < r < b \lor a > r > b)$$

Man kann aber auch beide Allquantoren in eine Prämisse umformen:

$$a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land b \neq a \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : (a < r < b \lor a > r > b)$$

Wie es für einen Widerspruchsbeweis verwendet wird, kann man dann diese letzte Aussage auch umformen zu:

$$a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land b \neq a \land \neg(\exists r \in \mathbb{Q} : (a < r < b \lor a > r > b)) \Rightarrow \mathbf{F}$$

bzw.

$$a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land b \neq a \land \forall r \in \mathbb{Q} : \neg(a < r < b \lor a > r > b) \Rightarrow \mathbf{F}$$

Aus der logischen Äquivalenz der Aussagen $A \land B \Rightarrow \mathbf{F}$ und $A \Rightarrow \neg B$ erhält man aus dieser letzten Formulierung noch mehrere weitere. Je nachdem, welche Teile der Prämisse

$$a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land b \neq a \land \forall r \in \mathbb{Q} : \neg(a < r < b \lor a > r > b)$$

man als $A$ und welche als $B$ interpretiert. Also z.B.

$$a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land \forall r \in \mathbb{Q} : \neg(a < r < b \lor a > r > b) \Rightarrow a = b$$

(für $b \neq a$ als Aussage $B$) oder

$$a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b \lor \exists r \in \mathbb{Q} : (a < r < b \lor a > r > b)$$

(wenn man als Aussage $B$ die Aussage $b \neq a \land \neg(\exists r \in \mathbb{Q} : (a < r < b \lor a > r > b))$ wählt).

## ÜBUNG 4

Für jede natürliche Zahl $n$ sei eine Zahl $a_n$ definiert durch

$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + 1}{2}$$

für alle $n > 1$. Also zum Beispiel für $n = 2$ und $n = 3$:

$$a_2 = \frac{a_1 + 1}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{sowie}$$

$$a_3 = \frac{a_2 + 1}{2} = \frac{\frac{3}{2} + 1}{2} = \frac{5}{4}$$

*Bemerkung: Das unendliche „Tupel" $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ist also eine sogenannte Folge, die rekursiv definiert ist. Rekursiv definiert bedeutet hierbei, dass in der Definition der einzelnen $a_n$ vorhergehende $a_k$'s, also $a_k$'s mit $k < n$, vorkommen.*

Für diese Folge soll die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} 1 < a_{n+1} < a_n \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion gezeigt werden.

Welche Aussage ist der Induktionsanfang, welche der Induktionsschritt? Was ist die Induktionsvoraussetzung im Induktionsschritt?

Beweisen Sie die Aussage (1) auch.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -schritt

Die zu zeigende Aussage ist $\forall n \in \mathbb{N}:\ A(n)$, wobei $A(n)$ die Aussage $1 < a_{n+1} < a_n$ ist. Der Induktionsanfang ist die Aussage $A(1)$, wenn man also $n$ durch $1$ ersetzt. Also ist

$$\text{Induktionsanfang (IA)} : 1 < a_{1+1} < a_1 .$$

Der Induktionsschritt ist die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden muss. In diesem Fall also die Aussage:

$$\text{Induktionsschritt (IS)} : 1 < a_{n+1} < a_n \Rightarrow 1 < a_{(n+1)+1} < a_{n+1}$$

Die Induktionsvoraussetzung (IV) beim Induktionsschritt ist die Aussage $A(n)$, also $1 < a_{n+1} < a_n$.

Beweis der Aussage

Für den Beweis der Aussage durch vollständige Induktion ist zunächst der Induktionsanfang zu zeigen.

$$\text{Induktionsanfang (IA)}: 1 < a_{1+1} < a_1$$

Da $a_1 = 2$ und $a_{1+1} = a_2 = \frac{3}{2}$ ist, ist die Aussage also äquivalent zu $1 < \frac{3}{2} < 2$. Letztere ist offensichtlich richtig, also ist der Induktionsanfang $A(1)$ gezeigt.

Für den Induktionsschritt setzt man voraus, dass die Induktionsvoraussetzung

$$\text{Induktionsvoraussetzung (IV)}: 1 < a_{n+1} < a_n$$

wahr ist, und muss damit die Aussage $A(n+1): 1 < a_{(n+1)+1} < a_{n+1}$ zeigen.

Nach Definition von $a_{n+2}$ (in obiger Definition $n$ durch $n+2$ ersetzen) ist

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{2}$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $1 < a_{n+1}$ ist, gilt zum einen

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1$$

und zum anderen

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{2} < \frac{a_{n+1} + a_{n+1}}{2} = a_{n+1}.$$

Damit ist die Aussage $1 < a_{n+2} < a_{n+1}$ gezeigt.

# 4. MENGEN

**Inhalt**



Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

**Lernziele**

- Sie können mit den Begriffen Menge, Teilmenge und Element einer Menge umgehen.
- Sie können Durchschnitte, Vereinigungen und Komplemente von Teilmengen bestimmen.
- Sie wissen, was Mengendiagramme sind, und können konkrete Probleme damit verbildlichen.

## 4.1 Mengen und Teilmengen

Die grundlegendsten Objekte in der Mathematik sind Mengen.

**4.1 DEFINITION ( MENGE )**

Eine *Menge* ist die Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte in einer Menge nennt man *Elemente*. Ist $x$ ein Element der Menge $M$, so schreibt man

$$x \in M$$

(sprich: „x ist Element von M” oder „x liegt in M”); andernfalls schreibt man

$$x \notin M$$

(sprich: „x ist kein Element von M” oder „x liegt nicht in M”).

Zwei Mengen $M$ und $N$ sind per Definition genau dann gleich (geschrieben $M = N$), wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die einfachste Form, eine Menge zu beschreiben, ist die aufzählende Mengenschreibweise, bei der die Elemente der Menge zwischen geschweifte Klammern gesetzt werden, z.B. ist

$$B = \{a; b; c\}$$

die Menge, die die Buchstaben $a, b, c$ und sonst nichts enthält. Offensichtlich gilt $a \in B$ und $d \notin B$.

**4.2 BEMERKUNG**

Bei Mengen spielt es keine Rolle, wie oft ein Element aufgezählt wird und in welcher Reihenfolge die Elemente aufgezählt werden. Die Mengen $\{a; a; b; b; c; b\}$, $\{c; b; a\}$ und $\{b; c; c; a\}$ sind daher alle gleich der Menge $\{a; b; c\}$. Insbesondere besitzt zum Beispiel die Menge $\{a; a; b; b; c; b\}$ nur genau drei Elemente, nämlich die Buchstaben $a$, $b$ und $c$.

Um die Beschreibung der Mengen möglichst einfach zu halten, sollte man in der Regel Mehrfachnennungen von Elementen vermeiden.

**4.3 DEFINITION**

Ist $M$ eine Menge, so wird die Anzahl ihrer Elemente mit

$$|M|$$

bezeichnet.

Für Mengen mit unendlich vielen Elementen schreibt man dann

$$|M| = \infty.$$

**4.4 BEISPIEL**

Für die Menge $M = \{a; a; b; b; c; b\} = \{a; b; c\}$ ist $|M| = 3$.

Für die Menge $N = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ ist $|N| = 13$.

Ist die Zahl der Elemente einer Menge zu groß, um alle aufzuführen (oder das Aufführen aller Elemente zu umständlich), kann man manchmal Elemente durch Punkte ersetzen, wenn leicht zu erraten ist, welche Elemente weggelassen wurden. Für die Menge der natürlichen Zahlen zwischen $2$ und $16$, also von $3$ bis $15$ einschließlich, welche man eigentlich durch

$$\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

angeben müsste, kann man kürzer auch

$$\{3;4;5;\ldots;15\}$$

schreiben, da der Anfang $3,4,5$ die richtige Fortsetzung suggeriert.

**4.5 BEISPIEL**

Wichtige Beispiele von Mengen sind verschiedene Mengen von Zahlen:

1. $\mathbb{N} = \{1;2;\ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$ die Menge der ganzen Zahlen,
3. $\emptyset = \{\}$ die leere Menge, also die Menge, die gar keine Elemente enthält.

Die Elemente einer Menge können auch selbst wieder Mengen sein. So ist zum Beispiel

$$\{\mathbb{N};\mathbb{Z};\mathbb{Q};\mathbb{R}\}$$

die Menge der aus der Schule bekannten Zahlenbereiche. Diese Menge enthält vier Elemente, nämlich die Menge $\mathbb{N}$, die Menge $\mathbb{Z}$, die Menge $\mathbb{Q}$ und die Menge $\mathbb{R}$.

In vielen Fällen ist die Anzahl der Elemente aber zu groß und zu unübersichtlich, um sie (mit oder ohne Pünktchen) aufzuzählen. In diesem Fall werden die Elemente der Menge über die Eigenschaften charakterisiert, die hinter einem senkrechten Trennstrich angegeben werden.

**4.6 BEISPIEL**

Die Menge der geraden Zahlen lässt sich durch

$$G = \{\, y \in \mathbb{Z} \,|\, y \text{ ist eine gerade Zahl} \,\}$$

beschreiben. Die Menge aller natürlichen Zahlen, die zwischen $2$ und $16$ liegen (vgl. oben), kann man auch schreiben als

$$\{3;4;\ldots;15\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ liegt zwischen } 2 \text{ und } 16\}.$$

Hier wird vor dem Trennstrich eine schon bekannte Menge (in diesem Fall $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$) angegeben, in der die Elemente mit der angegebenen Eigenschaft zusätzlich liegen sollen. (Z.B. liegt die Zahl $3{,}5$ auch zwischen $2$ und $16$, sie gehört aber nicht zur Menge $\mathbb{N}$. Sie wird durch „$x \in \mathbb{N}$” ausgeschlossen.)

**4.7 DEFINITION**

Eine Menge $N$ heißt *Teilmenge* einer Menge $M$, wenn jedes Element von $N$ auch ein Element von $M$ ist. $N$ heißt *echte Teilmenge* von $M$, wenn $N$ eine Teilmenge ist und nicht gleich $M$ ist.

In Formeln schreibt man

$$N \subseteq M,$$

um auszudrücken, dass $N$ eine Teilmenge von $M$ ist (die auch gleich $M$ sein kann), und man schreibt

$$N \subsetneq M,$$

um auszudrücken, dass $N$ eine echte Teilmenge von $M$ ist.

**4.8 BEMERKUNG**

Manche Autoren benutzen anstelle von $\subseteq$ und $\subsetneq$ die Symbole $\subseteq$ und $\subset$, wobei bei $A \subseteq B$ die Gleichheit $A = B$ zugelassen ist, während bei $A \subset B$ die Gleichheit von $A$ und $B$ ausgeschlossen ist.
Andere Autoren verwenden die Kombination $\subset$ und $\subsetneq$. Hier ist bei $A \subset B$ die Gleichheit zugelassen, während bei $A \subsetneq B$ die Gleichheit nicht zugelassen ist.
Das Symbol $\subset$ wird also in der Literatur unterschiedlich verwendet, weshalb wir es nicht benutzen.

Statt $\subseteq$ und $\subsetneq$ sind auch die Symbole $\subseteqq$ und $\subsetneqq$ gebräuchlich.

**4.9 BEISPIEL**

1. Ist $N$ eine echte Teilmenge von $M$, so ist $N$ insbesondere auch eine Teilmenge von $M$, d.h. wenn $N \subsetneq M$ gilt, ist auch $N \subseteq M$ erfüllt. Die Aussage $N \subseteq M$ ist nur etwas schwächer.

2. Es gelten

$$\{1; 2\} \subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n > 0\}.$$

   Die ersten beiden Teilmengen sind sogar echte Teilmengen, weshalb man $\subseteq$ durch $\subsetneq$ ersetzen kann. Die Aussage $\mathbb{N} \subsetneq \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n > 0\}$ wäre aber falsch, da $\mathbb{N}$ keine echte Teilmenge, sondern genau gleich der anderen Menge ist.

3. Für jede Menge $M$ gilt:

   $\emptyset \subseteq M$

Aus der Definition der Teilmenge kann man sich direkt die folgenden Eigenschaften herleiten.

**4.10 SATZ**

Für Mengen $M$, $N$ und $P$ gelten:

1. $M \subseteq M$
2. $M = N \Leftrightarrow M \subseteq N$ und $N \subseteq M$
3. $P \subseteq N$ und $N \subseteq M \Rightarrow P \subseteq M$

**ERGÄNZUNG ( POTENZMENGEN )**

Anzeigen

## 4.2 Durchschnitt, Vereinigung und Komplement

Aus gegebenen Mengen können neue konstruiert werden. Beipiele dafür sind die *Vereinigung* und der *Durchschnitt* von Mengen.

**4.14 DEFINITION ( VEREINIGUNG UND DURCHSCHNITT VON ZWEI MENGEN )**

Wir betrachten zwei Mengen $A$ und $B$ und definieren
die *Vereinigung* $A \cup B$ von $A$ und $B$ durch

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

den *Durchschnitt* $A \cap B$ von $A$ und $B$ durch

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

und die *Differenz* $A \setminus B$ von $A$ und $B$ (oder besser die *Differenz* $A$ *ohne* $B$ genannt) durch

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

In dem Fall, dass $B$ eine Teilmenge von $A$ ist, spricht man bei $A \setminus B$ auch vom *Komplement von* $B$ *in* $A$ und bezeichnet es auch mit

$$\complement_A(B),\ \complement(B) \text{ oder } B^c \text{ oder } \overline{B}.$$

Die letzten drei Notationen sind jedoch nur möglich, wenn die umgebende Menge $A$ schon vorher festgelegt wurde.

**4.15 BEISPIEL**

Wir betrachten die zwei Mengen

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \quad \text{und} \quad B = \{3; 4; 5\}.$$

Die Vereinigung von $A$ und $B$ enthält dann alle Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind, also ist

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Der Durchschnitt enthält alle Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind, also ist

$$A \cap B = \{3; 4\}.$$

Die Differenz $A$ ohne $B$ enthält diejenigen Elemente, die in $A$ enthalten sind, aber nicht in $B$, also ist

$$A \setminus B = \{1; 2\}.$$

Die Differenz $B$ ohne $A$ hingegen enthält diejenigen Elemente, die in $B$ enthalten sind, aber nicht in $A$, also ist

$$B \setminus A = \{5\}.$$

**4.16 BEISPIEL**

Sei $A = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Die Menge $B = \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist dann eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ und das Komplement ist

$$\complement_A(B) = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x \notin \mathbb{N}\right\} = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x \leq 0\right\},$$

also die Menge der ganzen Zahlen, welche kleiner oder gleich $0$ sind.

Ist $G$ die Menge der geraden ganzen Zahlen, so ist das Komplement $\complement_{\mathbb{Z}}(G)$ die Menge der ganzen Zahlen, die nicht gerade sind, also die Menge der ungeraden ganzen Zahlen.

**WARNUNG**

Während bei der Vereinigung und beim Durchschnitt die Reihenfolge egal ist, also

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

gelten, kann bei der Differenz die Reihenfolge nicht vertauscht werden! Es ist nämlich

$$A \setminus B \neq B \setminus A,$$

außer in dem speziellen Fall, dass $A$ und $B$ gleich sind.

**4.17 REGEL**

Nimmt man den Durchschnitt mehrerer Mengen, also zum Beispiel

$$\big((A_1 \cap A_2) \cap A_3\big) \cap A_4,$$

so ist es egal, in welcher Reihenfolge man die Durchschnitte bildet, denn der Durchschnitt besteht stets aus denjenigen Elementen, die in allen vier Mengen $A_1, A_2, A_3$ und $A_4$ enthalten sind. Man kann daher auch einfach die Klammern weglassen und

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

für obigen Durchschnitt schreiben.

Ebenso ist es bei der Vereinigung egal, in welcher Reihenfolge man die Vereinigungen bildet. Die Menge $\big((A_1 \cup A_2) \cup A_3\big) \cup A_4$ zum Beispiel besteht aus allen Elementen, die in mindestens einer dieser vier Mengen $A_1, A_2, A_3$ und $A_4$ enthalten sind. Auch hier kann man daher die Klammern weglassen

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

Wenn Durchschnitt und Vereinigungen zusammen auftreten, spielt die Reihenfolge, in der Durchschnitte bzw. Vereinigungen gebildet werden, jedoch eine Rolle. Genauer gelten folgende Regeln.

**4.18 REGEL**

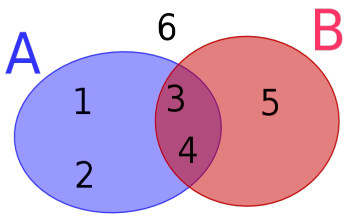
Für Mengen $A$, $B$ und $C$ gelten:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
2. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

## 4.3 Mengen-Diagramme

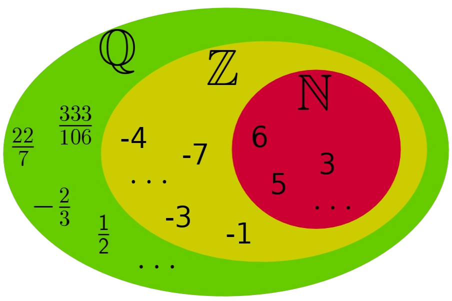
Um Beziehungen zwischen Mengen zu veranschaulichen, verwendet man häufig Mengen-Diagramme. Dabei werden die Mengen als Kreise oder ähnliches gezeichnet, deren Elemente in den Kreisen liegen.

**4.19 BEISPIEL**




In der Abbildung sind die Mengen $A = \{1; 2; 3; 4\}$ als blauer Bereich und $B = \{3; 4; 5\}$ als roter Bereich dargestellt. Die Zahlen $1$ und $2$ liegen nur im blauen Bereich, da sie nur zur Menge $A$, aber nicht zu $B$ gehören. Die Zahl $5$ liegt dementsprechend nur in dem roten zu $B$ gehörenden Bereich. Da die Zahlen $3$ und $4$ zu beiden Mengen gehören, liegen sie in dem gemeinsamen Bereich von $A$ und $B$. Die Zahl $6$ gehört jedoch weder zu $A$ noch zu $B$ und liegt daher in keinem der beiden Bereiche.

Auf diese Weise lassen sich auch bildlich besondere Relationen zwischen Mengen darstellen. Die Grafik

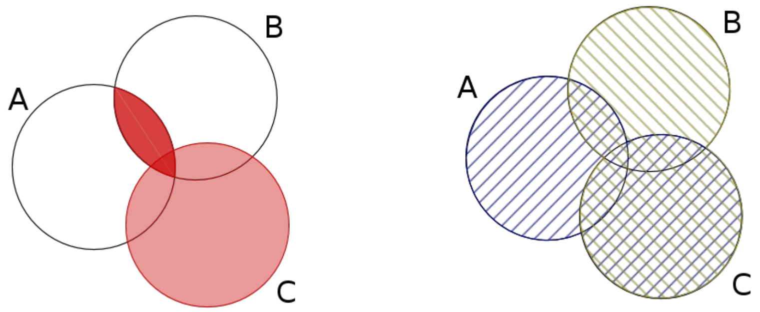



impliziert zum Beispiel, dass die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen und diese eine Teilmenge der rationalen Zahlen sind, weil die Fläche für $\mathbb{N}$ ein Teil der Fläche für $\mathbb{Z}$ ist und diese wiederum ein Teil der Fläche für $\mathbb{Q}$ ist.

Mengen-Diagramme werden oft auch dazu verwendet, sich mengentheoretische Gleichungen zu veranschaulichen. Im Allgemeinen genügen sie aber nicht als Beweis solcher Gleichungen.

**4.20 BEISPIEL**

Die Gleichheit $(A \cap B) \cup C = (A \cup C)\ \cap\ (B \cup C)$ aus Regel 4.18 wird wie in der Grafik dargestellt:




Darstellung von $(A \cap B) \cup C$ und $(A \cup C)\ \cap\ (B \cup C)$

Die Menge $(A \cap B) \cup C$ ist die Vereinigung der dunkelroten Menge $A \cap B$ und der hellroten Menge $C$ auf der linken Seite. Auf der rechten Seite sind die Vereinigungen $A \cup C$ blau gestreift und $B \cup C$ gelb gestreift dargestellt. Deren Durchschnitt ist also die Menge, die sowohl blau als auch gelb gestreift ist.
Man erkennt also, dass dies genau der gleiche Bereich ist, wie derjenige auf der linken Seite.

**4.21 BEMERKUNG**

Mengendiagramme wie im letzten Beispiel werden auch *Venn-Diagramme* genannt. Bei ihnen sind alle möglichen Schnitte und Differenzen der einzelnen Mengen (also $A \cap B \cap C$, $(A \cap B) \setminus C$, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ etc.) zu sehen.
Im Gegensatz dazu sind die sogenannten *Euler-Diagramme* wie in der Grafik zu den Zahlenbereichen wesentlich übersichtlicher, wenn verschiedene Mengen ineinander enthalten sind, oder zueinander disjunkt sind (d.h. keine gemeinsamen Elemente enthalten).

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

## ÜBUNG 1

Gegeben sind die Mengen von ganzen Zahlen

$$M = \{2; 5; -1; 9; -2\} \quad \text{und} \quad K = \{-3; -2; -1; \ldots; 5; 6\}.$$

Bestimmen Sie den Durchschnitt $M \cap K$ und die Vereinigung $M \cup K$, sowie die Menge

$$A = \{x \in K \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}.$$

Bestimmen Sie weiter das Komplement von $A$ in $K$.

Welche Anzahlen an Elementen haben die gesuchten Mengen?

Antwort

Es sind

$$\begin{aligned} M \cap K &= \{2; 5; -1; -2\}, & (1)\\ M \cup K &= \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}, & (2)\\ A &= \{-3; 0; 3; 6\} \quad \text{und} & (3)\\ \complement_K(A) &= K \setminus A = \{-2; -1; 1; 2; 4; 5\}. & (4) \end{aligned}$$

$M \cap K$ und $A$ enthalten also 4 Elemente, $\complement_K(A)$ enthält 6 Elemente und $M \cup K$ sogar 11.

Lösung zu $M \cap K$

Der Durchschnitt $M \cap K$ enthält alle Zahlen, die sowohl in $M$ als auch in $K$ enthalten sind.

Von den Zahlen, die in der Menge $M$ liegen, liegt nur die $9$ nicht in $K$, also ist

$$M \cap K = \{2; 5; -1; -2\}.$$

Da die Menge also 4 verschiedene Elemente enthält, ist ihre Elementanzahl dementsprechend 4.

Lösung zu $M \cup K$

Die Vereinigung $M \cup K$ enthält alle Zahlen, die in $M$ oder in $K$ oder sogar in beiden liegen.

$M$ enthält die Zahlen $2, 5, -1, 9$ und $-2$, und $K$ enthält die Zahlen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $6$. Also ist

$$M \cup K = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\},$$

und ihre Elementanzahl ist dementsprechend 11.

Lösung zu $A$

Die Menge $A$ enthält alle Zahlen, die in $K$ liegen und die angegebene Eigenschaft haben, also durch $3$ teilbar sind.

Da $K$ die Zahlen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $6$ enthält, und von diesen nur die Zahlen $-3$, $0$, $3$ und $6$ durch $3$ teilbar sind, gilt somit

$$A = \{-3; 0; 3; 6\},$$

und ihre Elementanzahl ist dementsprechend 4.

Lösung zum Komplement von $A$ in $K$

Das Komplement $\complement_K(A)$ besteht aus allen Zahlen von $K$, die nicht durch $3$ teilbar sind.

Definitionsgemäß ist $\complement_K(A) = K \setminus A$ die Menge aller Zahlen, die in $K$ und nicht in $A$ liegen. Also erhalten wir

$$\complement_K(A) = K \setminus A = \left\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\right\} \setminus \left\{-3; 0; 3; 6\right\} = \left\{-2; -1; 1; 2; 4; 5\right\}.$$

Dementsprechend enthält $\complement_K(A)$ genau 6 Elemente.

## ÜBUNG 2

Von der Menge

$$N = \{1; 2; \ldots; 10\}$$

werden die Teilmengen

$$A = \{1; 3; 5; 7; 8; 9\} \quad \text{und} \quad B = \{3; 4; 6; 8; 10\}$$

betrachtet.

Was sind die Komplemente in $N$ der Teilmengen $A$, $B$, $A \cup B$ und $A \cap B$?
Welche Beziehung besteht zwischen diesen Komplementen?

Antwort

Die Komplemente sind

$$\begin{aligned} \complement_N(A) &= \{2; 4; 6; 10\}, \\ \complement_N(B) &= \{1; 2; 5; 7; 9\}, \\ \complement_N(A \cup B) &= \{2\}, \\ \complement_N(A \cap B) &= \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}. \end{aligned}$$

Das Komplement $\complement_N(A \cup B)$ ist gerade der Durchschnitt von $\complement_N(A)$ und $\complement_N(B)$, und das Komplement $\complement_N(A \cap B)$ ist die Vereinigung von $\complement_N(A)$ und $\complement_N(B)$.

Lösung zu den Komplementen

Das Komplement einer Teilmenge besteht aus genau den Elementen, die in der umgebenden Menge liegen, aber nicht in der Teilmenge. Daraus liest man die Komplemente

$$\complement_N(A) = \{2;4;6;10\} \quad \text{und} \quad \complement_N(B) = \{1;2;5;7;9\}$$

direkt ab.

Für das Komplement von $A \cup B$ und $A \cap B$ muss man diese Teilmengen zunächst bestimmen:

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\} = \{1;3;4;5;6;7;8;9;10\}$$

sowie

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\} = \{3;8\}.$$

Daraus ergeben sich die Komplemente

$$\complement_N(A \cup B) = \{2\}$$

und

$$\complement_N(A \cap B) = \{1;2;4;5;6;7;9;10\}.$$

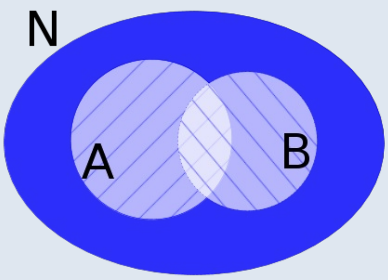
Lösung zum Zusammenhang zwischen den Komplementen

Wenn man sich die Komplemente

$$\begin{aligned} \complement_N(A) &= \{2;4;6;10\}, \\ \complement_N(B) &= \{1;2;5;7;9\}, \\ \complement_N(A \cup B) &= \{2\}, \\ \complement_N(A \cap B) &= \{1;2;4;5;6;7;9;10\} \end{aligned}$$

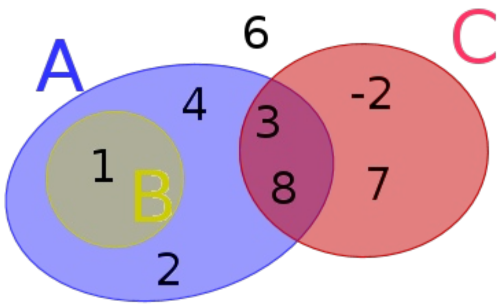
genau anschaut, kann man erkennen, dass $\complement_N(A \cup B)$ genau der Durchschnitt von $\complement_N(A)$ und $\complement_N(B)$ ist, und $\complement_N(A \cap B)$ genau deren Vereinigung.

Dies ist nicht nur in dem vorliegenden Beispiel der Fall, sondern sogar allgemein, wie man sich mit Hilfe eines Mengendiagramms klar machen kann:




$\complement_N(A)$ ist der Bereich in $N$ ohne $A$ und $\complement_N(B)$ ist der Bereich in $N$ ohne $B$. Der Durchschnitt beider Bereiche ist genau der Bereich in $N$, der außerhalb von $A$ und außerhalb von $B$ liegt, also das Komplement von $A \cup B$.
Die Vereinigung beider Bereiche ist der Bereich in $N$, der außerhalb von $A$ oder außerhalb von $B$ liegt, der also nicht von beiden Bereichen gleichzeitig bedeckt ist. Das ist also gleich dem Komplement von $A \cap B$.

## ÜBUNG 3




Bestimmen Sie anhand des obigen Mengendiagramms die Mengen $A$, $B$ und $C$, sowie $A \cap C$, $A \setminus B$ und $C \cup B$. Welche besonderen Beziehungen zwischen den Mengen $A$, $B$ und $C$ kann man direkt an dem Diagramm erkennen?

Antwort

Die Elemente der Mengen $A$, $B$ und $C$ sind diejenigen Zahlen, die im jeweils gefärbten Bereich liegen. Also

$$A=\{1;2;3;4;8\}$$
$$B=\{1\}$$
$$C=\{-2;3;7;8\}$$

Der Durchschnitt von $A$ und $C$ sind diejenigen Elemente, die sowohl im blauen als auch roten Bereich liegen, also

$$A\cap C=\{3;8\}.$$

Die Mengendifferenz $A\setminus B$ besteht aus allen Elementen, die im blauen, aber nicht im gelben Bereich liegen, also

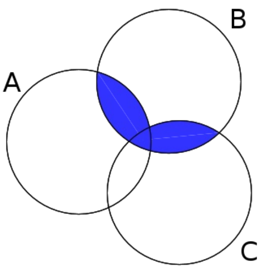
$$A\setminus B=\{2;3;4;8\},$$

und die Vereinigung von $C$ und $B$ enthält alle Elemente, die im gelben oder im roten Bereich liegen:

$$C\cup B=\{-2;1;3;7;8\}.$$

Da der gelbe Bereich ein Teil des blauen Bereichs ist, ist $B$ eine Teilmenge von $A$. Des Weiteren haben der gelbe und der rote Bereich keine gemeinsame Fläche. Deshalb ist der Durchschnitt der Mengen $B$ und $C$ leer. Anders ausgedrückt: Die Mengen $B$ und $C$ sind *disjunkt*.

## ÜBUNG 4



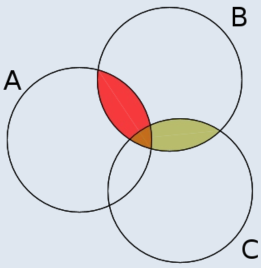

Wie lässt sich der in der Abbildung blau gefärbte Bereich in Abhängigkeit der Mengen $A$, $B$ und $C$ beschreiben?

Antwort

Der blau gefärbte Bereich entspricht der Menge $(A \cap B) \cup (C \cap B)$, welche sich auch als $(A \cup C) \cap B$ schreiben lässt.

Lösung 1

Der in obigem Diagramm blaue Bereich lässt sich als Vereinigung zweier Bereiche auffassen, wie sie in folgender Abbildung rot und gelb gefärbt sind.



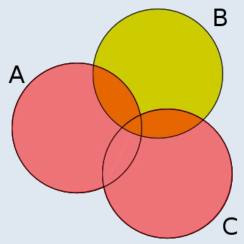

Der rote Bereich entspricht dem Durchschnitt von $A$ und $B$, also der Menge $A \cap B$, und der gelbe Bereich entspricht dem Durchschnitt von $C$ und $B$, also der Menge $C \cap B$.

Der blaue Bereich entspricht also der Menge

$$(A \cap B) \cup (C \cap B).$$

Lösung 2

Der in obigem Diagramm blaue Bereich lässt sich als Durchschnitt zweier Bereiche auffassen, wie sie in folgender Abbildung rot und gelb gefärbt sind.




Der gelbe Bereich entspricht gerade der Menge $B$, und der rote Bereich entspricht der Vereinigung von $A$ und $C$, also der Menge $A \cup C$.

Der blaue Bereich entspricht also der Menge

$$(A \cup C) \cap B.$$

# 5. ABBILDUNGEN, FUNKTIONEN

**Inhalt**



Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

**Lernziele**

- Sie wissen, was eine Abbildung zwischen Mengen ist, und können nachprüfen, ob eine gegebene Zuordnung eine Abbildung ist.
- Sie kennen die Begriffe Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge.
- Sie können Abbildungen grafisch darstellen.
- Sie können Abbildungen miteinander verknüpfen.

## 5.1 Abbildungen

**5.1 DEFINITION**

Seien $M$ und $N$ Mengen. Eine Vorschrift $T$, die jedem $x$ aus der Menge $M$ genau ein $y$ aus der Menge $N$ zuordnet, heißt *Abbildung* oder auch *Funktion* (bzw. *Operator* bzw. *Transformation*) von $M$ nach $N$.

Das Element $y$, das einem Element $x$ zugeordnet wird, nennt man dann *Bild* oder *Funktionswert von* $x$ unter der Abbildung $T$, und schreibt für dieses Element oft $T(x)$.

Für "$T$ ist eine Abbildung von $M$ nach $N$" schreibt man

$$T : M \to N \quad \text{oder ausführlicher} \quad T : M \to N, x \mapsto T(x).$$

**5.2 BEISPIEL**

1. Aus der Schule bekannte reelle Funktionen (vgl. Kapitel VI.1 "Elementare Funktionen"), wie

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

   b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

2. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_M$ auf einer Menge $M$, die jedem Element $x$ das Element selbst zuordnet. In Formeln

$$\mathrm{id}_M : M \to M,\ x \mapsto x$$

3. Sei $S$ die Menge der Studenten an der Universität X. Dann ist

$$m : S \to \mathbb{N}, s \mapsto \text{Matrikelnummer des Studenten } s$$

   eine Abbildung von der Menge $S$ in die Menge der natürlichen Zahlen.

4. Für $M = \{0; 1; 3\}$ und $N = \{1; 2\}$ ist die Vorschrift $T$:

$$0 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2$$

   eine Abbildung.

Nach diesen Beispielen für Abbildungen stellt sich die Frage, was für Vorschriften denn keine Abbildungen sind.

**5.3 BEISPIEL**

Für $M = \{0; 1; 3\}$ und $N = \{1; 2\}$ ist die Vorschrift $F$

"Ordne jeder Zahl $x$ in $M$ die Zahlen in $N$ zu, die größere als $x$ sind."

keine Abbildung. Dies hat sogar zwei Gründe. Zum einen werden nach dieser Vorschrift der Zahl $0$ in $M$ zwei Zahlen in $N$ zugeordnet, nämlich die $1$ und die $2$. Bei einer Abbildung $F : M \to N$ darf jedem Element aber nur *ein* Element zugeordnet werden. Zum anderen wird nach dieser Vorschrift der Zahl $3$ in $M$ keine Zahl in $N$ zugeordnet. Bei einer Abbildung $F : M \to N$ muss aber *jedem* Element in $M$ ein Element in $N$ zugeordnet werden.

**5.4 DEFINITION**

Für eine Funktion $T : M \to N$ heißt die Menge $M$ der *Definitionsbereich* von $T$ (auch bezeichnet mit $D(T)$) und $N$ der *Zielbereich* von $T$. Der Zielbereich sollte nicht mit dem *Wertebereich* von $T$ (bezeichnet mit $W(T)$) verwechselt werden, welcher definiert ist als

$$W(T) = \{y \in N \,|\, \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } T(x) = y\}.$$

Der Wertebereich ist also eine Teilmenge des Zielbereichs $N$. Seine Elemente sind genau diejenigen Elemente in $N$, welche Funktionswerte von Elementen $x$ aus $M$ unter der Abbildung $T$ sind.

**5.5 BEISPIEL**

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ hat als Definitionsbereich und Zielbereich $\mathbb{R}$. Der Wertebereich besteht jedoch nur aus den reellen Zahlen, die $\geq 0$ sind.
2. Die Abbildung $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ hat als Definitionsbereich und Zielbereich die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hier ist der Wertebereich sogar gleich dem Zielbereich, weil jede Zahl $y \neq 0$ der Funktionswert einer Zahl $x$ aus der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, nämlich von der Zahl $x = \frac{1}{y}$.
3. Für die Abbildung

$$T : S \to \mathbb{N}, s \mapsto \text{Matrikelnummer des Studenten } s$$

aus Beispiel 5.2, wobei $S$ die Menge der Studenten an der Universität X ist, ist auch $S$ der Definitionsbereich und $\mathbb{N}$ der Zielbereich. Der Wertebereich besteht jedoch aus allen natürlichen Zahlen, die tatsächlich als Matrikelnummer vergeben sind.

**WARNUNG**

Beim Rechnen mit reellen Funktionen wird oft nur die Funktionsvorschrift angegeben, z.B. $f(x) = x^2$ oder $g(x) = \frac{1}{x}$, ohne Definitionsbereich und Zielbereich explizit zu nennen. Man impliziert damit dann, dass der Zielbereich $\mathbb{R}$ ist, und der Definitionsbereich der sogenannte *maximale Definitionsbereich* ist, d.h. die Teilmenge der reellen Zahlen, die als Wert für die Variable $x$ in die Funktionsvorschrift $f(x)$ bzw. $g(x)$ eingesetzt werden dürfen (vgl. Kapitel VI.1 "Elementare Funktionen").

In diesen Beispielen wäre der Definitionsbereich von $f$ also gleich $\mathbb{R}$ und der von $g$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

## 5.2 Grafische Darstellung von Abbildungen

Um Funktionen anschaulich darzustellen, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, wobei nicht jede der beiden Möglichkeiten immer verwendet werden kann.

Eine Möglichkeit ist es, den sogenannten *Graph einer Funktion* zu zeichnen/skizzieren, was insbesondere bei Abbildungen verwendet wird, deren Definitions- und Zielbereich Teilmengen der reellen Zahlen sind.
Hierfür benötigen wir die Menge $M \times N$ aller Paare $(x; y)$ mit $x \in M$ und $y \in N$ (vgl. auch Abschnitt Kartesische Produkte).

**5.6 DEFINITION**

Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Der *Graph der Funktion* $f$ ist die Menge aller Paare $(x; y)$ in $M \times N$, für die $y = f(x)$ gilt, also

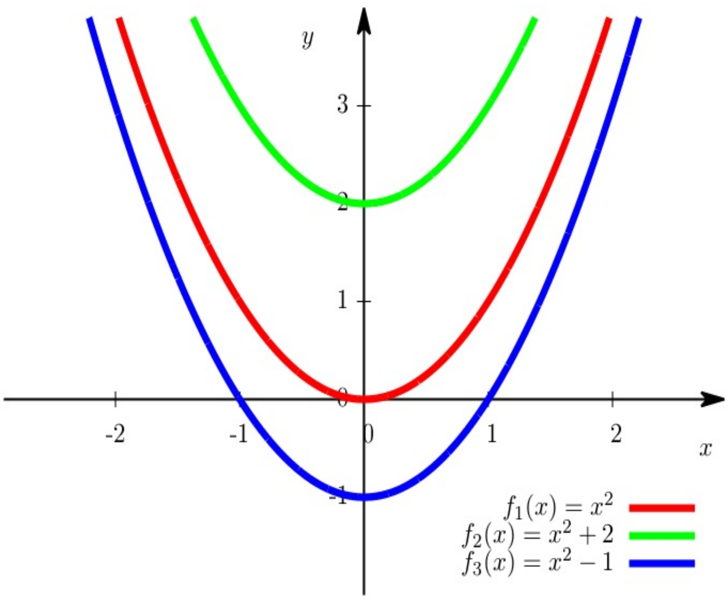
$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x; y) \in M \times N \,|\, y = f(x)\} = \{(x; f(x)) \in M \times N \,|\, x \in M\}.$$

**5.7 BEISPIEL**

Für die Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist der Graph von $f_1$ die Menge

$$\mathrm{Graph}(f_1) = \left\{(x; x^2) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

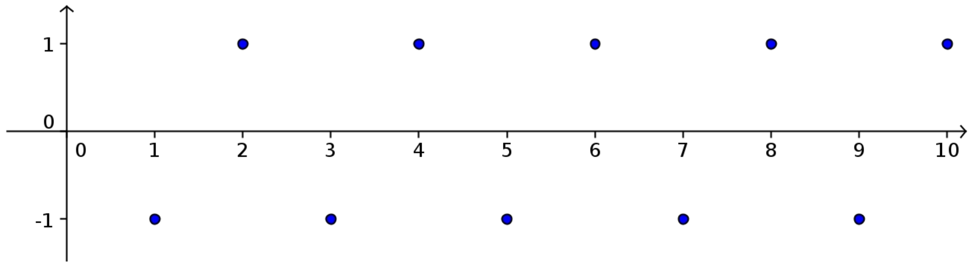
da ja $f_1(x) = x^2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Punkte des Graphen sind also genau die Punkte auf der Normalparabel, welche in der Zeichnung rot eingezeichnet ist.




Entsprechend sind die grüne und die blaue Kurve, die Punkte, die auf dem Graphen der Funktion $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2$ bzw. der Funktion $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$ liegen.

### 5.8 BEISPIEL

Man betrachte die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \{-1; 1\}, n \mapsto (-1)^n$. Definitionsbereich und Zielbereich sind beides Teilmengen von $\mathbb{R}$, weshalb wir auch hier wieder den Graph als Punkte in der Ebene darstellen können wie in folgender Zeichnung:



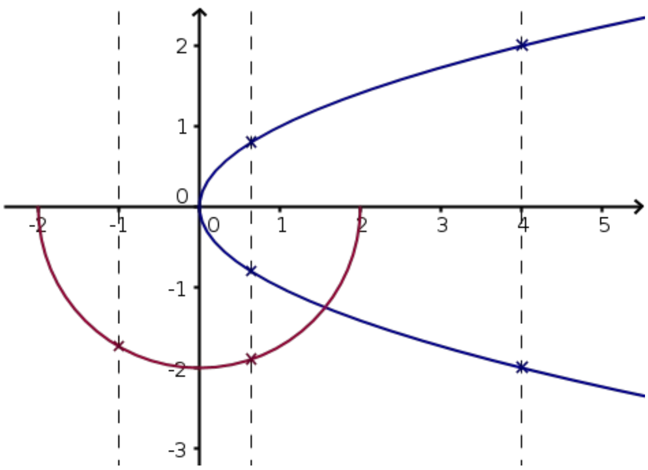

An dem Graphen im $\mathbb{R}^2$ einer Zuordnung von einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ in eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ kann man auch einiges ablesen:

1. Die Definitionsmenge $D$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die senkrechte Gerade durch den Punkt $(x; 0)$ den Graphen schneidet.

2. Die Zuordnung ist genau dann eine Abbildung, wenn für jedes $x \in D$ die senkrechte Gerade durch den Punkt $(x; 0)$, den Graphen in genau einem Punkt schneidet.

### 5.9 BEISPIEL

In der folgenden Grafik beschreibt die blaue Kurve keine Abbildung, denn zum Beispiel die senkrechte Gerade durch den Punkt $(4; 0)$ schneidet die Kurve in zwei Punkten.
Die rote Kurve beschreibt jedoch eine Abbildung, da jede senkrechte Gerade die Kurve in höchstens einem Punkt schneidet. Da eine senkrechte Gerade die rote Kurve genau dann schneidet, wenn die $x$-Koordinate zwischen $-2$ und $2$ (jeweils einschließlich) liegt, ist der Definitionsbereich die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, also das Intervall $[-2; 2]$.




Die oben erwähnte zweite Möglichkeit, Abbildungen grafisch darzustellen, wird vor allem bei

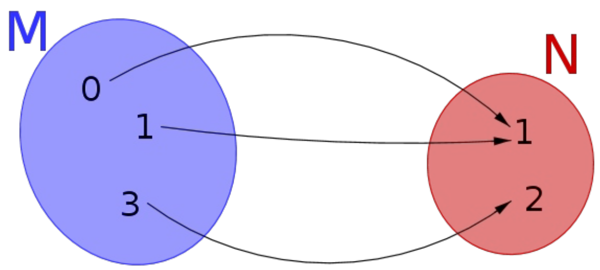
Abbildungen zwischen endlichen Mengen verwendet. Hierbei werden die zwei Mengen durch Aufzählung in einer kreisähnlichen Fläche (ähnlich wie bei den Mengen-Diagrammen) dargestellt und die Zuordnung mittels Pfeilen zwischen den Elementen.

**5.10 BEISPIEL**

Für $M=\{0;1;3\}$ und $N=\{1;2\}$ und die Funktion $T$ mit

$$0 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2$$

ist die grafische Darstellung:

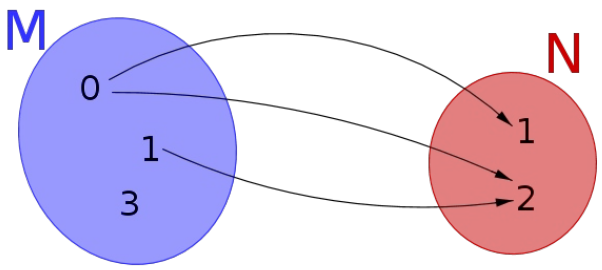



**5.11 REGEL**

Anhand der grafischen Darstellung kann man direkt erkennen, ob eine Zuordnung wirklich eine Abbildung ist. Die Zuordnung ist eine Abbildung, wenn **bei jedem Element** der Definitionsmenge **genau ein Pfeil startet**.

**5.12 BEISPIEL**

Die grafische Darstellung der Zuordnung aus Beispiel 5.3 ist die Folgende. Es ist leicht zu erkennen, dass diese Zuordnung keine Abbildung ist. Ein Grund ist, dass bei der Zahl $0$ zwei Pfeile starten, ein anderer Grund ist, dass bei der Zahl $3$ kein Pfeil startet. Beides ist bei Abbildungen nicht zulässig.




Eine Zuordnung, die keine Abbildung ist.

## 5.3 Komposition von Abbildungen

**5.13 DEFINITION**

Sind $T : L \to M$ und $S : M \to N$ Abbildungen. Dann ist die *zusammengesetzte Abbildung* $S \circ T$ -- gelesen „$S$ nach $T$" -- (auch *Komposition der Abbildungen $T$ und $S$ genannt*) eine Abbildung von $L$ nach $N$ definiert durch

$$S \circ T : L \to N, x \mapsto S(T(x)).$$

Man bildet also zunächst ein Element in $L$ mittels $T$ auf ein Element in $M$ ab und anschließend dieses Element mittels $S$ auf ein Element in $N$.

**WARNUNG**

Die zusammengesetzte Abbildung $S \circ T$ zweier Abbildungen $S$ und $T$ ist nur definiert, wenn der Zielbereich von $T$ gleich dem Definitionsbereich von $S$ ist.

**5.14 BEISPIEL**

1. Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x+1$, dann sind

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+1$$

und

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=(x+1)^2$$

für alle reellen Zahlen $x$.

2. Für $L=\{0;2\}$, $M=\{0;1;3\}$ und $N=\{1;2\}$ mit den Funktionen $T:L\to M$ gegeben durch

$$0\mapsto 3,\quad 2\mapsto 0$$

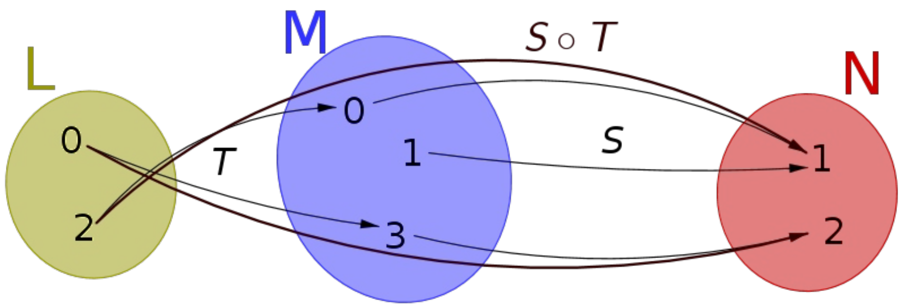
und $S:M\to N$ gegeben durch

$$0\mapsto 1,\quad 1\mapsto 1,\quad 3\mapsto 2$$

ist die zusammengesetzte Abbildung gegeben durch

$$0\mapsto S(T(0))=S(3)=2,\quad 2\mapsto S(T(2))=S(0)=1.$$

Grafisch sieht dies folgendermaßen aus:




Die Pfeile für $S\circ T$ erhält man also, wenn man bei der Menge $L$ beginnend den Pfeilen folgt. Also hier im Beispiel von der $0$ über die $3$ zur $2$ und von der $2$ über die $0$ zur $1$.

**WARNUNG**

Sind $f$ und $g$ zwei Abbildungen, dann sind im Allgemeinen $f\circ g$ und $g\circ f$ **nicht** gleich, selbst wenn beide Kompositionen definiert sind.
Dies ist in Punkt 1 des vorigen Beispiels gut zu sehen.

**ERGÄNZUNG ( INJEKTIVITÄT, SURJEKTIVITÄT UND BIJEKTIVITÄT )**

Anzeigen

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

## ÜBUNG 1

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich zu den Funktionsvorschriften $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-1}$

Antwort

a) $D_f$ besteht aus allen nicht-negativen reellen Zahlen.

b) $D_f$ besteht aus allen reellen Zahlen ungleich Null.

c) $D_f = \mathbb{R}$

d) $D_f$ besteht aus allen reellen Zahlen $x \geq 1$, die ungleich $2$ sind.

Lösung a)

Die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ ist nur für nicht-negative reelle Zahlen $x$ definiert. Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}_0^+$ besteht also aus allen positiven reellen Zahlen und der Null.

Lösung b)

Bei Brüchen müssen wir beachten, dass man nicht durch Null dividiert. Der Definitionsbereich $D_f$ enthält also alle reellen Zahlen ungleich Null.

Lösung c)

Man muss beachten, dass der Nenner nicht Null wird. Der Definitionsbereich $D_f$ enthält also keine Zahlen $x$ mit $x^2 + 2 = 0$.

Die Gleichung $x^2 + 2 = 0$ besitzt aber keine reellen Lösungen.

Man darf also jede Zahl $x$ in $f(x)$ einsetzen. Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ besteht aus allen reellen Zahlen.

Lösung d)

Man muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. Wegen der Wurzel $\sqrt{x}$ im Zähler muss $x \geq 0$ erfüllt sein.
2. Wegen der Wurzel $\sqrt{x-1}$ im Nenner muss $x \geq 1$ erfüllt sein.
3. Da wir einen Bruch haben, darf der Nenner $\sqrt{x-1}-1$ nicht Null werden.

Um die letzte Bedingung zu erfüllen, berechnen wir:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} &= 1 \\ \Rightarrow x-1 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow x-1 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{x-1}-1 \neq 0$ für $x \neq 2$ und offenbar ist $\sqrt{x-1}-1=0$ für $x=2$.

Insgesamt besteht der Definitionsbereich $D_f$ aus allen Zahlen $x$ mit $x \geq 0$ und $x \geq 1$ und $x \neq 2$.

Da mit $x \geq 1$ natürlich auch $x \geq 0$ gilt, ist die Bedingung $x \geq 0$ überflüssig. Also besteht $D_f$ aus allen reellen Zahlen $x \geq 1$ mit $x \neq 2$.

## ÜBUNG 2

Welche der folgenden Zuordnungen sind Abbildungen? Geben Sie auch Definitionsbereiche und kanonische Zielbereiche, sowie die Wertebereiche der Abbildungen an.

a) Jeder natürlichen Zahl wird ihr Nachfolger in den natürlichen Zahlen zugeordnet (falls vorhanden).

b) Jeder natürlichen Zahl wird ihr Vorgänger in den natürlichen Zahlen zugeordnet (falls vorhanden).

c) Jeder Teilmenge der Menge $M = \{1; 2; 3\}$ wird ihr Komplement in $M$ zugeordnet.

d) Jeder ganzen Zahl werden alle ihre Ziffern zugeordnet.

Antwort

Die Zuordnungen a) und c) sind Abbildungen, b) und d) nicht.
Definitionsbereich für die Abbildung in a) ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Kanonischer Zielbereich ist auch $\mathbb{N}$ und die Wertemenge ist $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 2\}$.
Definitions-, Ziel- und Wertebereich für die Abbildung in c) ist die sogenannte *Potenzmenge* von $M$, d.h. die Menge aller Teilmengen von $M$:

$$\mathscr{P}(M) = \{N \,|\, N \subseteq M\}.$$

**Bemerkung:** Die umgangssprachliche Formulierung der Zuordnung legt den Zielbereich nicht eindeutig fest. Normalerweise verwendet man als Zielbereich dann eine Menge, die zum einen einfach zu beschreiben ist, und zum anderen garantiert den Wertebereich enthält.

Lösung zu a)

Jede natürliche Zahl $x$ besitzt genau einen Nachfolger, nämlich die Zahl $x+1$. Daher wird bei dieser Zuordnung jedem Element $x$ **genau ein** Element zugeordnet. Es handelt sich also um eine Abbildung.

Der Definitionsbereich ist die Menge der Elemente, denen etwas zugeordnet wird, also die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, und der Zielbereich ist eine Menge, in der die Elemente liegen, die zugeordnet werden. Auch wenn diese in der Aufgabenstellung nicht klar genannt ist, ist hier die kanonische Wahl wiederum die Menge der natürlichen Zahlen.

Der Wertebereich ist die Menge von Elementen im Zielbereich, denen auch tatsächlich Elemente zugeordnet werden. Hier also die natürlichen Zahlen, die Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl sind. Mit Ausnahme der Zahl $1$ sind dies alle, weshalb der Wertebereich also genau die Menge

$$\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 2\}$$

ist.

Lösung zu b)

Die angegebene Zuordnung ist eine Zuordnung von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen. Da die Zahl $1$ aber keinen Vorgänger hat, wird also der Zahl $1$ in der Ausgangsmenge keine Zahl zugeordnet. Daher ist diese Zuordnung keine Abbildung.

Lösung zu c)

Hier liegt eine Zuordnung vor, die jeder Teilmenge von $M$ Teilmengen von $M$ zuordnet. Definitionsbereich und Zielbereich sind also beides die Menge aller Teilmengen von $M$, die sogenannte *Potenzmenge* $\mathscr{P}(M)$ von $M$.

Die Zuordnung ordnet nun jeder Teilmenge $N$ von $M$, also jedem Element von $\mathscr{P}(M)$, genau eine Teilmenge von $M$ zu, nämlich das Komplement $\complement_M(N)$, also genau ein Element von $\mathscr{P}(M)$.
Daher ist diese Zuordnung eine Abbildung $h: \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(M), N \mapsto \complement_M(N)$.

Um den Wertebereich zu bestimmen, muss man sich überlegen, welche Elemente von $\mathscr{P}(M)$ (also welche Teilmengen von $M$) anderen Elementen zugeordnet wurden, welche Teilmengen von $M$ also Komplemente von anderen Teilmengen sind. Für jede Teilmenge $N \subset M$ ist aber

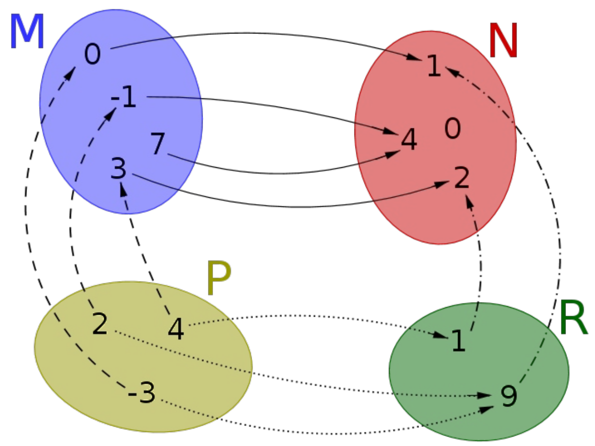
$$N = \complement_M(\complement_M(N)) = h(\complement_M(N)),$$

d.h. $N$ ist das Bild einer anderen Teilmenge (nämlich von $\complement_M(N)$).
Der Wertebereich ist also die ganze Menge $\mathscr{P}(M)$.

Lösung zu d)

Diese Zuordnung ist keine Abbildung. Zwar wird hier jeder ganzen Zahl etwas zugeordnet, aber es gibt Zahlen (sogar die meisten), denen mehr als nur ein Objekt zugeordnet wird. Zum Beispiel werden der Zahl $12$ die Ziffern $1$ und $2$ zugeordnet. Bei einer Abbildung dürfte der Zahl $12$ aber nur ein Objekt zugeordnet werden.

## ÜBUNG 3




Welche Abbildungen sind in der Graphik dargestellt? Welche dieser Abbildungen lassen sich zusammensetzen? Bestimmen Sie auch alle möglichen zusammengesetzten Abbildungen.

Antwort

Die Mengen $M$ (blau), $N$ (rot), $P$ (gelb) und $R$ (grün) sind gegeben durch

$$M = \{0; -1; 3; 7\}, \quad N = \{0; 1; 2; 4\}, \quad P = \{-3; 2; 4\} \quad \text{und} \quad R = \{1; 9\}.$$

- Die durchgezogenen Pfeile stellen eine Abbildung $T_1 : M \to N$ dar mit
$$T_1(0) = 1, T_1(-1) = 4, T_1(7) = 4, T_1(3) = 2.$$

- Die gestrichelten Pfeile stellen eine Abbildung $T_2 : P \to M$ dar mit
$$T_2(2) = -1, T_2(4) = 3, T_2(-3) = 0.$$

- Die gepunkteten Pfeile stellen eine Abbildung $T_3 : P \to R$ dar mit
$$T_3(2) = 9, T_3(4) = 1, T_3(-3) = 9.$$

- Die Strichpunkt-Pfeile stellen eine Abbildung $T_4 : R \to N$ dar mit
$$T_4(1) = 2 \text{ und } T_4(9) = 1.$$

Die Abbildungen $T_2 : P \to M$ und $T_1 : M \to N$ lassen sich zu einer Abbildung $T_1 \circ T_2 : P \to N$ zusammensetzen, und die Abbildungen $T_3 : P \to R$ und $T_4 : R \to N$ lassen sich zu einer Abbildung $T_4 \circ T_3 : P \to N$ zusammensetzen.

Hierbei sind die Zuordnungen für die Abbildung $T_1 \circ T_2 : P \to N$ geben als

$$2 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 2 \text{ und } -3 \mapsto 1.$$

Die Zuordnungen für die Abbildung $T_4 \circ T_3 : P \to N$ sind geben als

$$2 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 2 \text{ und } -3 \mapsto 1.$$

Lösung zu den Abbildungen

Definitionsbereich der Abbildungen ist stets der Bereich, in dem die Pfeile starten, und Zielbereich ist der Bereich, in dem die Pfeile enden.

Die durchgezogenen Pfeile stellen daher eine Zuordnung $T_1 : M \to N$ dar, welche in der Tat eine Abbildung ist, weil bei jedem Element in $M$ genau ein Pfeil startet.
Ebenso stellen die gestrichelten Pfeile eine Abbildung $T_2 : P \to M$ dar, die gepunkteten Pfeile eine Abbildung $T_3 : P \to R$ und die Strichpunkt-Pfeile eine Abbildung $T_4 : R \to N$.

Um angeben zu können, auf welche Elemente aus den Zielbereichen die Elemente aus den Definitionsbereichen abgebildet werden, muss man lediglich den Pfeilen folgen. Man sieht daher, dass für die Abbildung $T_1 : M \to N$ gilt:

$$0 \mapsto 1,\ -1 \mapsto 4,\ 7 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 2.$$

Oder anders ausgedrückt:

$$T_1(0) = 1,\ T_1(-1) = 4,\ T_1(7) = 4,\ T_1(3) = 2.$$

Für die anderen Abbildungen erhält man entsprechend:

$$T_2(2) = -1,\ T_2(4) = 3,\ T_2(-3) = 0$$

$$T_3(2) = 9,\ T_3(4) = 1,\ T_3(-3) = 9$$

sowie

$$T_4(1) = 2 \text{ und } T_4(9) = 1.$$

Lösung zur Zusammensetzung der Abbildungen

Zwei Abbildungen lassen sich genau dann zusammensetzen, wenn der Zeilbereich der einen Abbildung gleich dem Definitionsbereich der anderen Abbildung ist. Oder in der Graphik ausgedrückt: Wenn dort, wo die einen Pfeile enden, andere Pfeile starten.

Im vorliegenden Beispiel lassen sich also die Abbildungen $T_2 : P \to M$ und $T_1 : M \to N$ zusammensetzen, sowie die Abbildungen $T_3 : P \to R$ und $T_4 : R \to N$. Beide Zusammensetzungen ergeben dann Abbildungen von $P$ nach $N$.

Die Abbildung $T_1 \circ T_2 : P \to N$ erfüllt dann:

$$(T_1 \circ T_2)(2) = T_1(T_2(2)) = T_1(-1) = 4,$$

d.h. $2$ wird auf $4$ abgebildet. Entsprechend sind

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)(4) &= T_1(T_2(4)) = T_1(3) = 2\\ (T_1 \circ T_2)(-3) &= T_1(T_2(-3)) = T_1(0) = 1\end{aligned}$$

Für die Abbildung $T_4 \circ T_3 : P \to N$ erhält man

$$\begin{aligned}(T_4 \circ T_3)(2) &= T_4(T_3(2)) = T_4(9) = 1\\ (T_4 \circ T_3)(4) &= T_4(T_3(4)) = T_4(1) = 2\\ (T_4 \circ T_3)(-3) &= T_4(T_3(-3)) = T_4(9) = 1\end{aligned}$$

## ÜBUNG 4

Gegeben sind die vier Abbildungen

- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}, n\mapsto(-2)^n$
- $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, z\mapsto z^2+1$
- $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, z\mapsto -z$
- $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto 1$

Welche dieser Abbildungen lassen sich zusammensetzen? Bestimmen Sie alle Zusammensetzungen von zweien (evtl. auch gleichen) Abbildungen.

Antwort

Die möglichen Zusammensetzungen sind

- $f\circ g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, z\mapsto(-2)^{z^2+1}$
- $f\circ k:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}, n\mapsto -2$
- $k\circ g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, z\mapsto 1$
- $k\circ k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto 1$
- $g\circ f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto((-2)^n)^2+1=(-2)^{2n}+1$
- $g\circ h:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, z\mapsto(-z)^2+1=z^2+1$
- $h\circ f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}, n\mapsto -(-2)^n$
- $h\circ h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, z\mapsto -(-z)=z$

Lösung

Ganz allgemein lassen sich Abbildungen $T$ und $S$ zu $T \circ S$ zusammensetzen, wenn der Definitionsbereich von $T$ gleich dem Zielbereich von $S$ ist. Da $f$ und $k$ die Definitionsbereiche $\mathbb{N}$ haben, $g$ und $h$ die Definitionsbereiche $\mathbb{Z}$, und $g$ und $k$ die Zielbereiche $\mathbb{N}$ und $f$ und $h$ die Zielbereiche $\mathbb{Z}$, sind die möglichen Zusammensetzungen: $f \circ g$, $f \circ k$, $k \circ g$ und $k \circ k$, sowie $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ f$ und $h \circ h$.

Die Abbildungsvorschrift bestimmt man durch Hintereinanderausführung der Abbildungen, also

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(z^2 + 1) = (-2)^{z^2+1}.$$

Definitionsbereich ist wieder der Definitionsbereich der zuerst ausgeführten Abbildung und Zielbereich ist der Zielbereich der zuletzt ausgeführten Abbildung. Insgesamt also

$$f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto (-2)^{z^2+1}.$$

Für die anderen Zusammensetzungen geht man genauso vor:

$$(f \circ k)(n) = f(k(n)) = f(1) = (-2)^1 = -2.$$

Also erhält man die Abbildung

$$f \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto -2$$

Für $k \circ g$ erhält man

$$k \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto k(g(z)) = k(z^2 + 1) = 1.$$

Entsprechend für die restlichen fünf Zusammensetzungen:

$$\begin{aligned}
k \circ k &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto k(k(n)) = k(1) = 1, \\
g \circ f &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto g(f(n)) = g((-2)^n) = ((-2)^n)^2 + 1 = (-2)^{2n} + 1, \\
g \circ h &: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto g(h(z)) = g(-z) = (-z)^2 + 1 = z^2 + 1, \\
h \circ f &: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto h(f(n)) = h((-2)^n) = -(-2)^n, \\
h \circ h &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto h(h(z)) = h(-z) = -(-z) = z.
\end{aligned}$$

# 6. KARTESISCHE PRODUKTE

**Inhalt**



Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

**Lernziele**

- Sie wissen Paare als Elemente des kartesischen Produkts zweier Menge zu deuten.
- Sie können das kartesische Produkt von Intervallen grafisch darstellen.
- Sie kennen das kartesische Produkt mehrere Mengen.

## 6.1 Kartesisches Produkt zweier Mengen

Ein Punkt in der Ebene wird oft in Koordinaten $(x;y)$ angegeben, wobei $x$ und $y$ reelle Zahlen sind. Allgemein nennt man einen Ausdruck $(x;y)$ ein *geordnetes Paar*. Es heißt deshalb "geordnet", weil die Reihenfolge, in der $x$ und $y$ genannt werden, eine Rolle spielt.

**6.1 DEFINITION**

Zwei geordnete Paare $(x;y)$ und $(x';y')$ sind per Definition genau dann gleich, wenn $x=x'$ und $y=y'$ gelten.

Sind $M$ und $N$ Mengen, so wird die Menge aller Paare $(x;y)$, für die $x$ in $M$ und $y$ in $N$ liegt, mit

$$M \times N$$

bezeichnet, und *kartesisches Produkt* der Mengen $M$ und $N$ genannt.

Im Fall, dass $M=N$ gilt, schreibt man statt $M \times N$ auch $M^2$.

**6.2 BEISPIEL**

1. Die Menge $\mathbb{R}^2$ ist die Menge alle Paare $(x;y)$ mit reellen Zahlen $x$ und $y$. Diese Menge entspricht also genau der Menge der Punkte in der Ebene. Hier wird auch anschaulich, dass die Reihenfolge, in der die Komponenten genannt werden, eine Rolle spielt: Der Punkt $(0;2)$ ist ein anderer, als der Punkt $(2;0)$.

2. Für $M = \{0;1;3\}$ und $N = \{1;2\}$ sind

$$M \times N = \{(0;1);\ (0;2);\ (1;1);\ (1;2);\ (3;1);\ (3;2)\}, \tag{6.1}$$
$$N \times M = \{(1;0);\ (2;0);\ (1;1);\ (2;1);\ (1;3);\ (2;3)\}, \tag{6.2}$$
$$N^2 = \{(1;1);\ (1;2);\ (2;1);\ (2;2)\} \quad \text{und} \tag{6.3}$$
$$M^2 = \{(0;0);\ (0;1);\ (0;3);\ (1;0);\ (1;1);\ (1;3);\ (3;0);\ (3;1);\ (3;3)\}. \tag{6.4}$$

**WARNUNG**

Das kartesische Produkt $M \times N$ zweier Mengen ist nicht zu verwechseln mit der Vereinigung $M \cup N$. Während die Vereinigung $M \cup N$ aus den Elementen besteht, die in $M$ oder in $N$ enthalten sind, und damit sowohl $M$ als auch $N$ als Teilmenge enthält, besteht das kartesische Produkt $M \times N$ aus Paaren $(m;n)$. Also sind im Allgemeinen weder $M$ noch $N$ Teilmengen des kartesischen Produkts, sondern lediglich die Bereiche, aus denen die Koordinaten der Paare $(m;n)$ entnommen werden.

Des weiteren ist zu beachten, dass die Mengen $M \times N$ und $N \times M$ im Allgemeinen verschieden sind, wie in vorigem Beispiel gut zu sehen ist.

**6.3 BEMERKUNG**

Sind $M$ und $N$ zwei Mengen mit einer endlichen Anzahl an Elementen, so ist die Anzahl der Elemente des kartesischen Produkts $M \times N$ genau das Produkt der Elementanzahl von $M$ und der von $N$.
Dies sieht man auch leicht ein, da es ja für jedes Element $m \in M$ genau so viele Paare $(m;n) \in M \times N$ gibt, wie $N$ Elemente hat.
Wenn man alle Elemente des Produkts $M \times N$ aufschreiben möchte, ist es gut zu wissen, wie viele Elemente man aufschreiben muss, um leichter kontrollieren zu können, ob man etwas vergessen hat.

## 6.2 Grafische Darstellung kartesischer Produkte

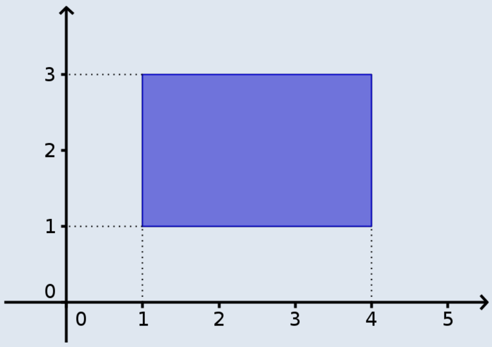
Wir hatten in Beispiel 6.2 gesehen, dass das kartesische Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau die Koordinatenebene darstellt, wobei für einen Punkt $(a;b)$ im $\mathbb{R}^2$ die erste Komponente die x-Koordinate bestimmt und die zweite die $y$-Koordinate.

Sind nun $M$ und $N$ beides Teilmengen der reellen Zahlen, so kann man deren kartesisches Produkt $M \times N$ als Teilmenge der Ebene darstellen. Im Falle, dass $M$ und $N$ Intervalle sind, ist das kartesische Produkt $M \times N$ ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

**6.4 BEISPIEL**

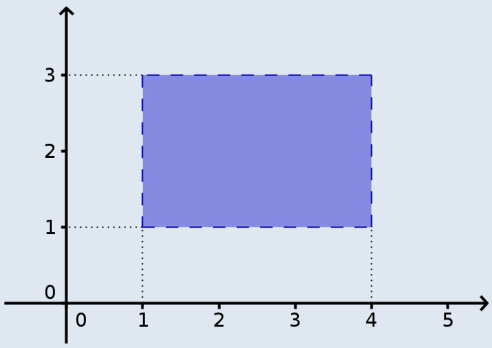
$[1;4] \times [1;3]$

Das kartesische Produkt $[1;4] \times [1;3]$ der abgeschlossenen Intervalle $M = [1;4]$ und $N = [1;3]$ ist das in der Grafik blau gefärbte Rechteck. Da die Randwerte $1$ und $4$ zum Intervall $[1;4]$ gehören, gehören auch die linke Kante $\{1\} \times [1;3]$ und die rechte Kante $\{4\} \times [1;3]$ zu der Menge $M \times N$. Auch beim Intervall $[1;3]$ gehören die Randwerte $1$ und $3$ dazu, weshalb die obere und die untere Kante ebenfalls zur Menge $M \times N$ gehören, genauso wie die vier Eckpunkte $(1;1)$, $(4;1)$, $(4;3)$ und $(1;3)$.



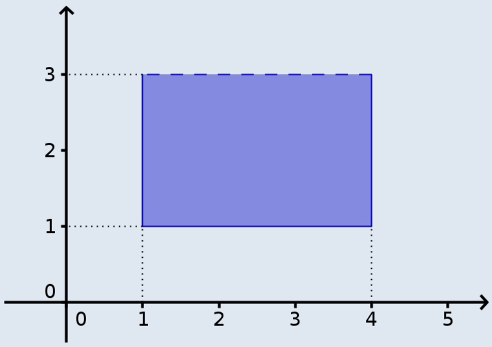

$]1;4[ \times ]1;3[$

Für die offenen Intervalle $]1;4[$ und $]1;3[$ wird das kartesische Produkt $]1;4[ \times ]1;3[$ ebenfalls durch das in der Grafik blau gefärbte Rechteck dargestellt. Hier gehören die Kanten und Ecken des Rechtecks jedoch nicht zu der Menge $M \times N$, was durch die gestrichelten Kanten angedeutet ist.



$[1;4] \times [1;3[$

Allgemeiner gehören bei kartesischen Produkten manche Kanten zur Menge und manche nicht, je nachdem welche Randwerte der Intervalle zu den Intervallen gehören. Für das kartesische Produkt $[1;4] \times [1;3[$ gehört die „obere” Kante und die anliegenden Eckpunkte **nicht** zu der Menge (vgl. Abbildung), weil der Randwert $3$ des zweiten Intervalls nicht zum Intervall gehört. Alle anderen Kanten und Ecken gehören zum Produkt $[1;4] \times [1;3[$




## 6.3 Kartesisches Produkt mehrerer Mengen

Man kann das kartesische Produkt auch von mehreren Mengen definieren, wie man es zum Beispiel für die Koordinaten von Punkten im Raum benötigt.

**6.5 DEFINITION**

Für $n$ Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ definiert man das *kartesische Produkt* der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ als

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n) \,|\, x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n\}.$$

Die Elemente $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ nennt man *geordnete $n$-Tupel* (oder manchmal auch kurz *$n$-Tupel*), und per Definition sind zwei $n$-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ und $(x_1'; x_2'; \ldots; x_n')$ genau dann gleich, wenn $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, ..., $x_n = x_n'$ gilt.

Sind die Mengen alle gleich, d.h. $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, so schreibt man kurz auch $M^n$ für dieses kartesische Produkt.

**6.6 BEMERKUNG**

Statt $3$-Tupel sagt man meist *Tripel*. Auch gebräuchlich, aber weniger verbreitet, sind die Bezeichnungen *Quadrupel* statt $4$-Tupel und *Quintupel* statt $5$-Tupel.

**6.7 BEISPIEL**

1. Die Menge $\mathbb{R}^3$ ist die Menge aller Tripel $(x;y;z)$ mit reellen Zahlen $x$, $y$ und $z$. Diese Menge entspricht also genau der Menge der Punkte im Raum.

2. Für $M_1 = \{0;1\}$ und $M_2 = \{1;2\}$ und $M_3 = \{5\}$ sind

$$M_1 \times M_2 \times M_3 = \{(0;1;5);\ (0;2;5);\ (1;1;5);\ (1;2;5)\}, \tag{6.5}$$
$$M_3 \times M_2 \times M_2 = \{(5;1;1);\ (5;1;2);\ (5;2;1);\ (5;2;2)\} \quad \text{und} \tag{6.6}$$
$$M_1^3 = \{(0;0;0);\ (0;0;1);\ (0;1;0);\ (0;1;1);\ (1;0;0);\ (1;0;1);\ (1;1;0);\ (1;1;1)\}. \tag{6.7}$$

**6.8 BEMERKUNG**

Formal sind die Mengen $(M_1 \times M_2) \times M_3$, $M_1 \times (M_2 \times M_3)$ und $M_1 \times M_2 \times M_3$ verschieden. Die erste Menge besteht nämlich aus Paaren, bei denen die erste Koordinate selbst ein Paar ist, die zweite besteht aus Paaren, bei denen die zweite Koordinate ein Paar ist, und die dritte Menge besteht aus Tripeln. In der Regel werden diese Mengen aber miteinander identifiziert (d.h. als gleich angesehen), weil die Elemente jeder dieser Mengen durch Tripel $(x_1;x_2;x_3)$ mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ und $x_3 \in M_3$ eindeutig gegeben sind. In den ersten beiden Fällen würden lediglich noch mehr Klammern zu schreiben sein.
Gleiches gilt auch für kartesische Produkte von mehr als drei Mengen.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

## ÜBUNG 1

Man betrachte die Mengen $F = \{1; 2; -1\}$ und $G = \{1; 2\}$. Geben Sie die folgenden Mengen an:

a) $F \times G$

b) $G \times F$

c) $\{(x; y) \in F \times G \,|\, x \neq y\}$ $\{(x, y) \in F \times G \,|\, x \neq y\}$

Antwort

a) $F \times G = \{(1; 1)\,;\, (1; 2)\,;\, (2; 1)\,;\, (2; 2)\,;\, (-1; 1)\,;\, (-1; 2)\}$

b) $G \times F = \{(1; 1)\,;\, (2; 1)\,;\, (1; 2)\,;\, (2; 2)\,;\, (1; -1)\,;\, (2; -1)\}$

c) $\{(x; y) \in F \times G \,|\, x \neq y\} = \{(1; 2)\,;\, (2; 1)\,;\, (-1; 1)\,;\, (-1; 2)\}$

Lösung zu a)

Die Menge $F \times G$ besteht definitionsgemäß aus allen Paaren $(x; y)$ für welche $x$ ein Element in $F$ ist und $y$ ein Element in $G$. Es sind also alle Möglichkeiten, solche Paare zu bilden, aufzulisten.

Um systematisch alle Elemente zu erhalten, wählen wir nacheinander jedes Element von $F$ aus, und für jede Wahl eines Elements $x$ in $F$ gehen wir alle Elemente in $G$ durch.

Für $x = 1$ erhalten wir also zunächst die Paare $(1; 1)$ und $(1; 2)$.

Für $x = 2$ erhalten wir anschließend $(2; 1)$ und $(2; 2)$, und zuletzt für $x = -1$ die Paare $(-1; 1)$ und $(-1; 2)$.

Insgesamt hat die Menge $F \times G$ also sechs Elemente, nämlich

$$F \times G = \{(1; 1)\,;\, (1; 2)\,;\, (2; 1)\,;\, (2; 2)\,;\, (-1; 1)\,;\, (-1; 2)\}.$$

Lösung zu b)

Die Menge $G \times F$ besteht definitionsgemäß aus allen Paaren $(x;y)$ für welche $x$ ein Element in $G$ ist und $y$ ein Element in $F$. Es sind also alle solche Paare aufzulisten.

Eine Möglichkeit diese Paare zu bestimmen, ist - entsprechend wie in a) - nacheinander für jedes Element $x$ in $G$ alle Elemente $y$ von $F$ durchzugehen und die erhaltenen Paare $(x;y)$ aufzulisten. Dadurch erhält man

$$G \times F = \{(1;1)\,;\,(1;2)\,;\,(1;-1)\,;\,(2;1)\,;\,(2;2)\,;\,(2;-1)\}.$$

Nachdem in a) schon die Menge $F \times G$ bestimmt wurde, lässt sich die Menge $G \times F$ auch viel leichter bestimmen. Man muss in den Paaren aus $F \times G$ nur die Koordinaten vertauschen und erhält die Paare in $G \times F$. Damit erhält man

$$G \times F = \{(1;1)\,;\,(2;1)\,;\,(1;2)\,;\,(2;2)\,;\,(1;-1)\,;\,(2;-1)\}.$$

**Bemerkung:** Da es bei Mengen nicht auf die Reihenfolge der aufgezählten Elemente ankommt, sind die zwei angegebenen Mengendarstellungen für $G \times F$ auch wirklich die gleiche Menge.

Lösung zu c)

Nach der Schreibweise für Mengen besteht die Menge $\{(x;y) \in F \times G \,|\, x \neq y\}$ aus allen Paaren $(x;y)$ in $F \times G$, die die Bedingung $x \neq y$ erfüllen, bei denen also die erste und die zweite Koordinate verschieden sind.

Die Menge $F \times G$ wurde schon in a) bestimmt:

$$F \times G = \{(1;1)\,;\,(1;2)\,;\,(2;1)\,;\,(2;2)\,;\,(-1;1)\,;\,(-1;2)\}.$$

Davon haben alle bis auf $(1;1)$ und $(2;2)$ zwei verschiedene Koordinaten. Also ist

$$\{(x;y) \in F \times G \,|\, x \neq y\} = \{(1;2)\,;\,(2;1)\,;\,(-1;1)\,;\,(-1;2)\}.$$

## ÜBUNG 2

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

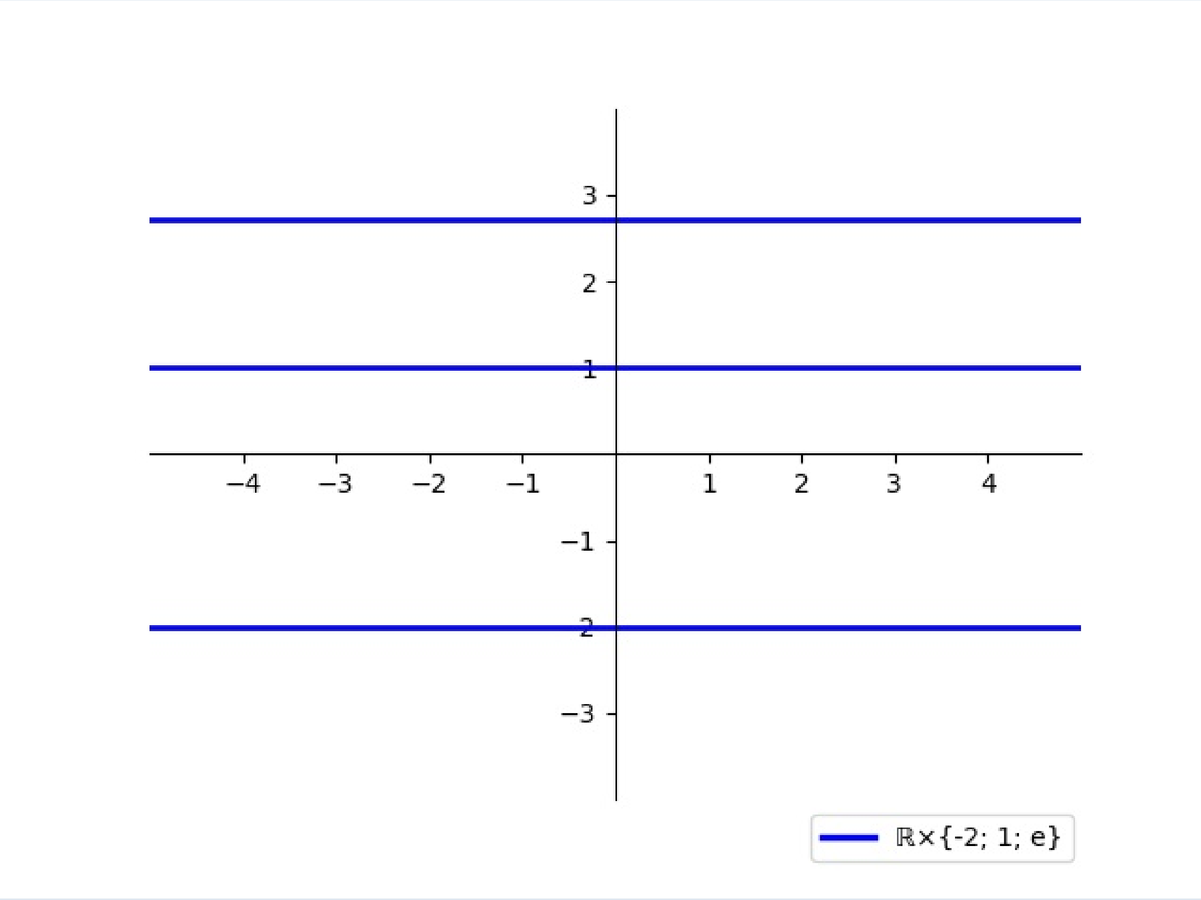
a)
$\mathbb{R} \times \{-2;\, 1;\, e\}$

b)
$\{-1;\, \pi\} \times \mathbb{R}$

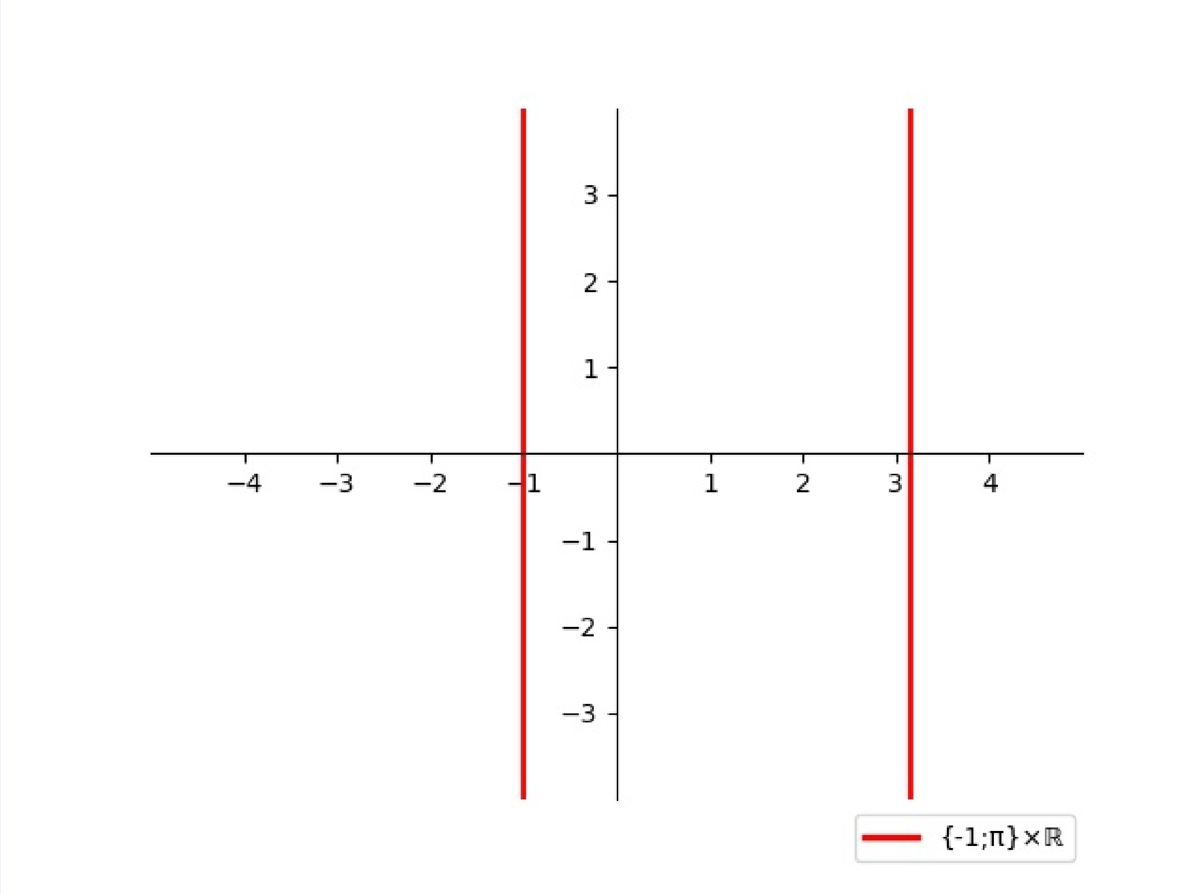
c)
$\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y\right\}$

Antwort

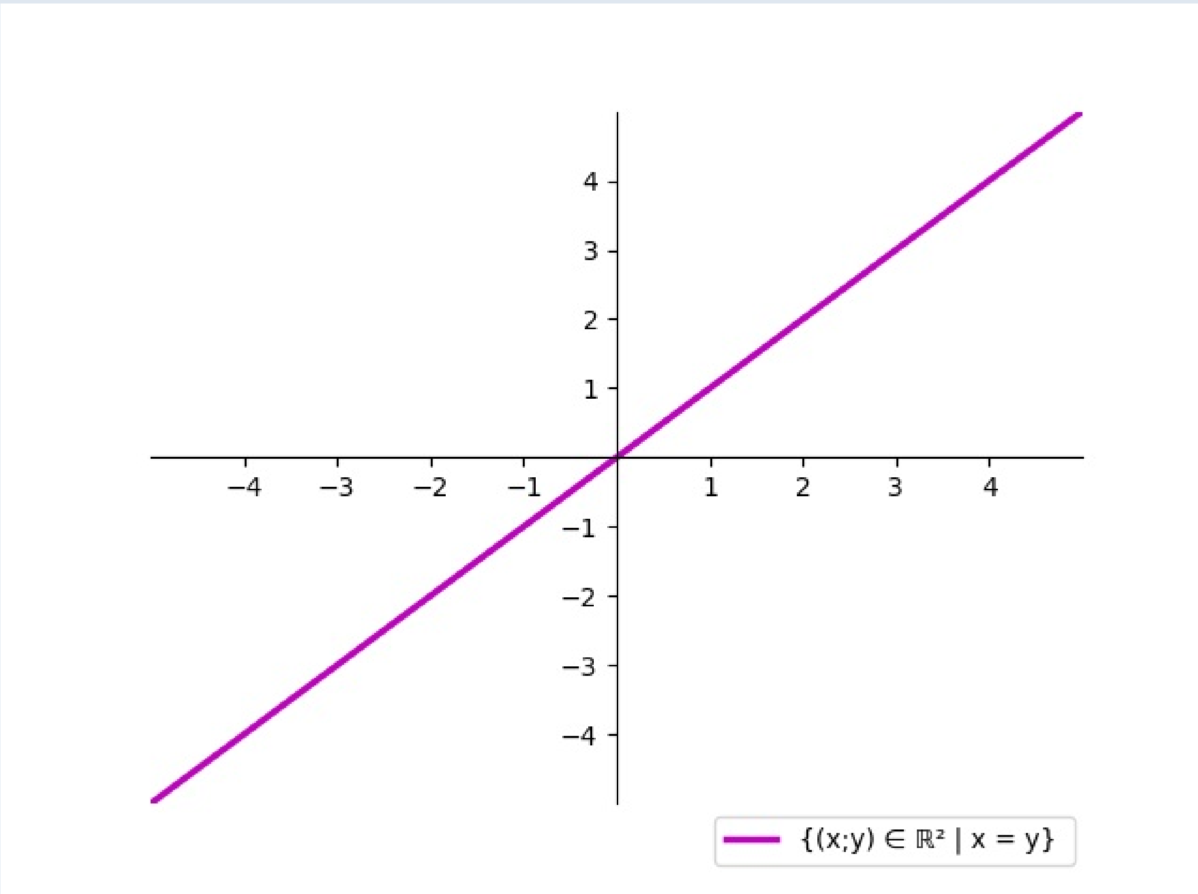
a)




b)



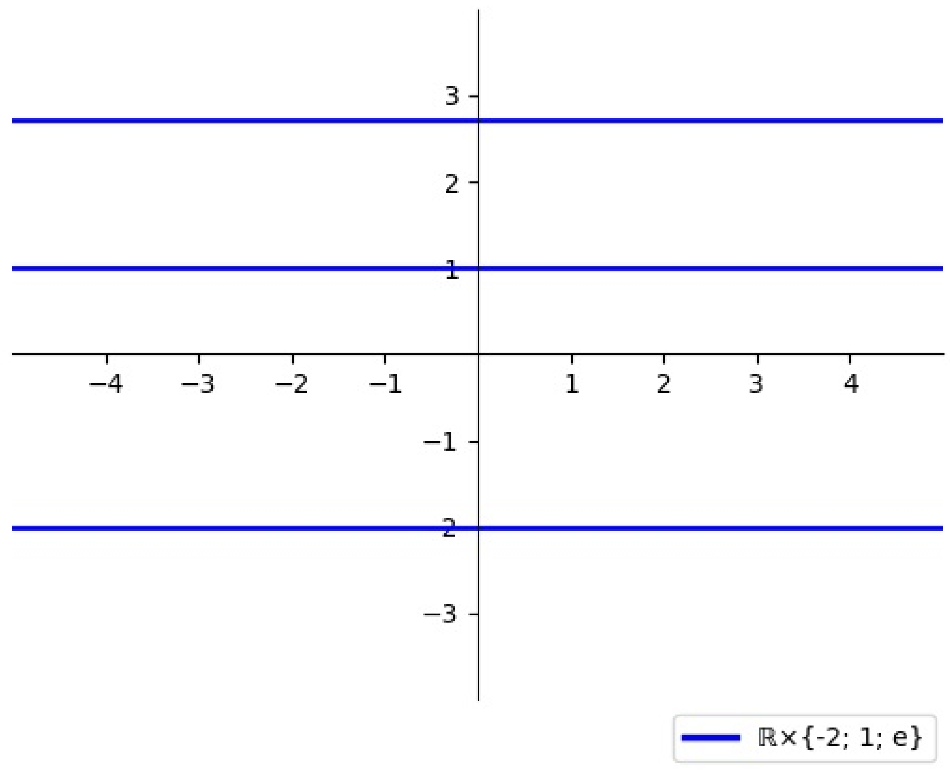

c)



Lösung zu a)

Die Menge besteht aus allen Punkten $(x;y)$, deren $y$-Koordinate einen der drei Werte $-2$, $1$ oder $e \approx 2{,}718\dots$ hat. Die $x$-Koordinate kann jeweils einen beliebigen reellen Wert annehmen.

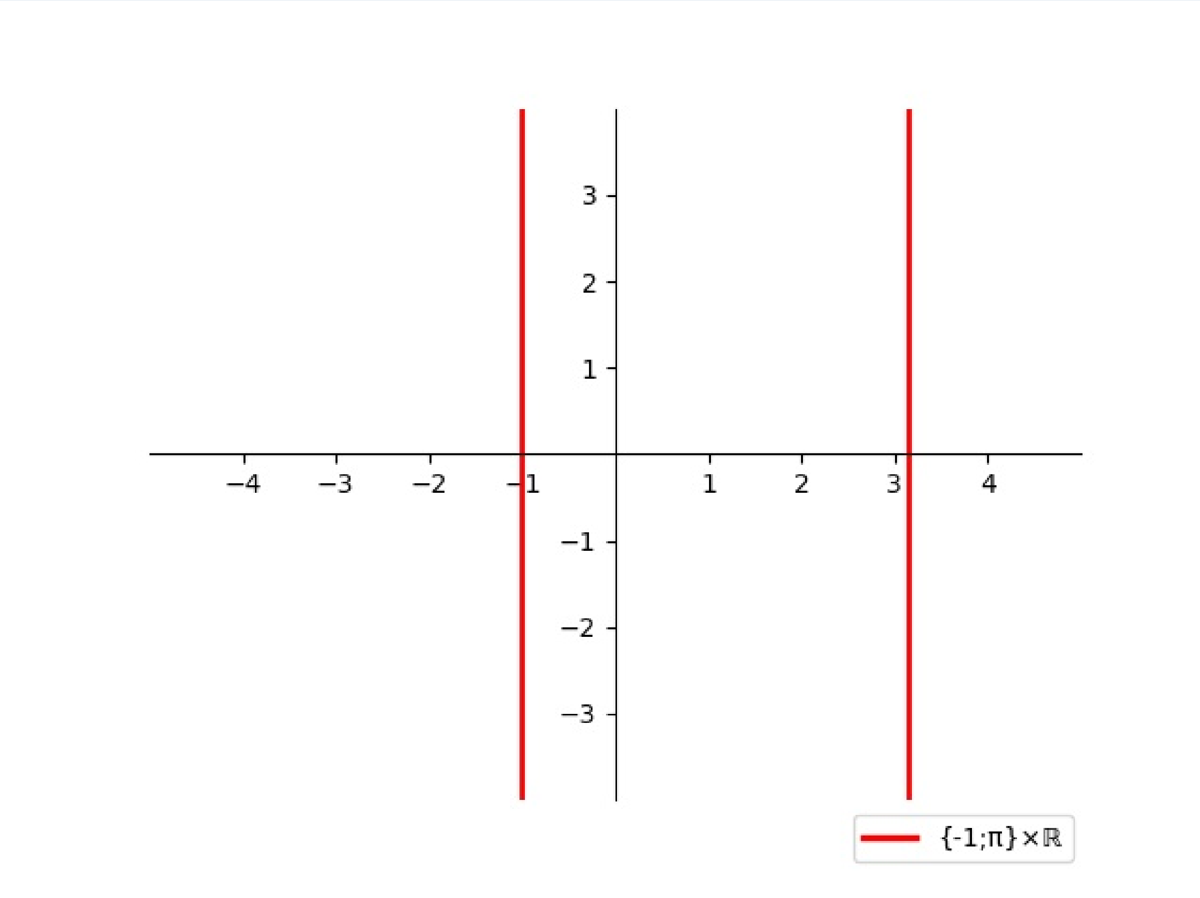
Diese Punkte bilden drei horizontale Geraden, die die $y$-Achse bei den „Höhen” $-2$, $1$ und $e$ schneiden.



Lösung zu b)

Die Menge besteht aus allen Punkten $(x;y)$, deren $x$-Koordinate einen der beiden Werte $-1$ oder $\pi \approx 3{,}14\ldots$ hat. Die $y$-Koordinate kann jeweils einen beliebigen reellen Wert annehmen.

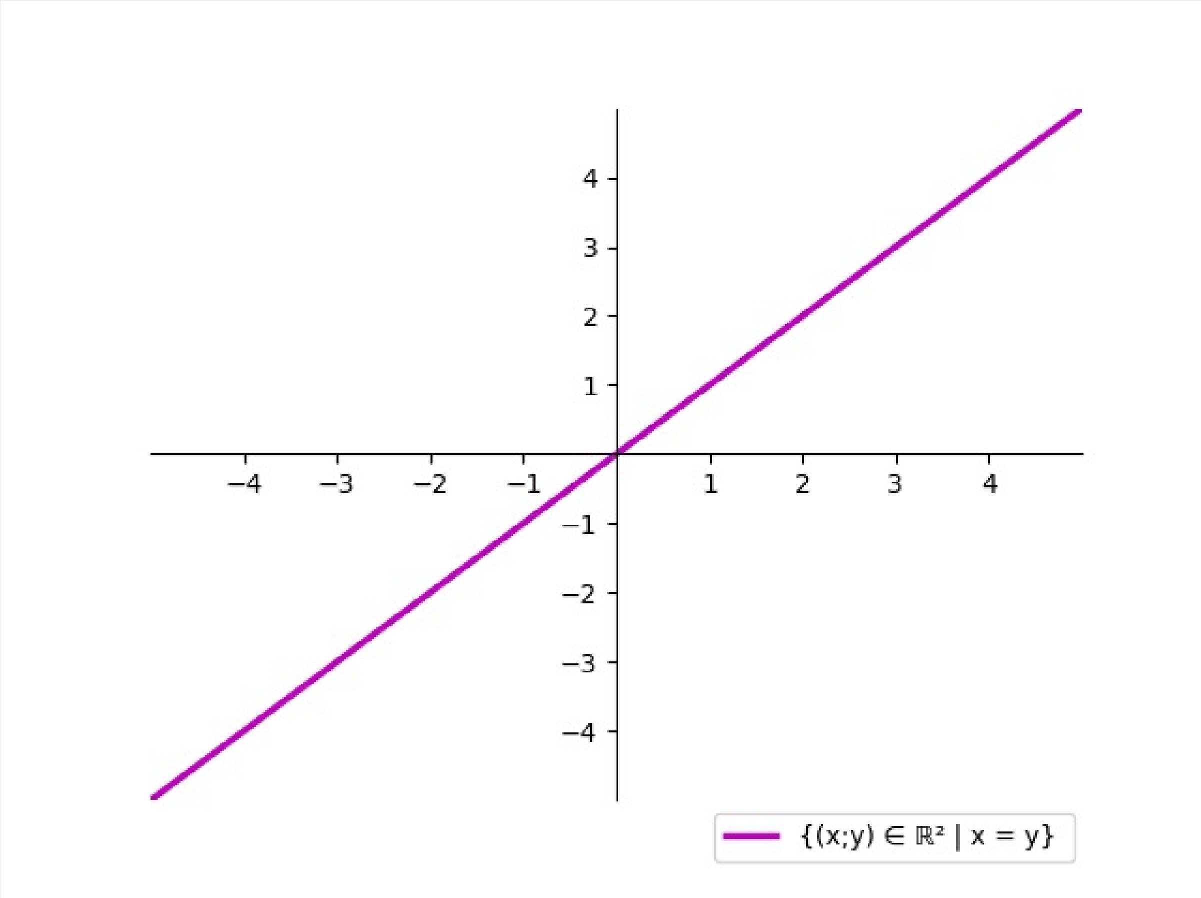
Diese Punkte bilden zwei vertikale (senkrechte) Geraden, die die $x$-Achse in den Punkten $x=-1$ und $x=\pi$ schneiden.



Lösung zu c)

Die Menge besteht aus allen Punkten $(x; y)$, deren $x$-Koordinate und $y$-Koordinate gleich sind.

Diese Punkte liegen auf einer Geraden durch den Ursprung $(0;\, 0)$. Wenn der Maßstab auf der $x$- und $y$-Achse gleich ist, dann ist es die Winkelhalbierende zwischen den beiden Achsen.



## ÜBUNG 3

Bestimmen Sie jeweils drei verschiedene Elemente in den angegebenen kartesischen Produkten der Mengen
$K = \{a;\, c;\, g\}$ und $L = \{-4;\, -3;\, -2;\, \ldots\,;\, 8;\, 9\}$. Bestimmen Sie auch die Anzahl der Elemente in den kartesischen Produkten.

a)
Drei verschiedene Elemente in $L \times K \times L$

b)
Drei verschiedene Elemente in $K^2 \times L^2$

c)
Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in $L \times K \times L$ und $K^2 \times L^2$

Antwort

Bei a) und b) ist jeweils eine von sehr vielen Lösungen angegeben.
a) $(0;\, c;\, 0)$, $(4;\, c;\, 0)$, $(0;\, g;\, 0) \in L \times K \times L$.

b) $(g;\, a;\, -3;\, 7)$, $(c;\, c;\, -2;\, 6)$, $(a;\, g;\, 9;\, -4) \in K^2 \times L^2$.

c) $|L \times K \times L| = 588$, $\left|K^2 \times L^2\right| = 1\,764$.

Lösung zu a)

Zwei Elemente eines kartesischen Produkts sind verschieden, wenn sie sich in mindestens einer Komponente unterscheiden.

Die Elemente eines dreifachen kartesischen Produkts haben drei Komponenten, es sind Tripel.

Mit $0 \in L$ und $c \in K$ ist z.B. $(0;\, c;\, 0) \in L \times K \times L$.

$(4;\, c;\, 0)$ und $(0;\, g;\, 0)$ sind zwei davon verschiedene Elemente in $L \times K \times L$.

Bemerkung: Die Elemente können sich natürlich auch in mehreren oder allen Komponenten unterscheiden.

Lösung zu b)

Zwei Elemente eines kartesischen Produkts sind verschieden, wenn sie sich in mindestens einer Komponente unterscheiden.

Die Elemente eines vierfachen kartesischen Produkts haben vier Komponenten, es sind $4$-Tupel (Quadrupel).

Mit $a,\ g \in K$ sowie $-3,\ 7 \in L$ ist z.B. $(g;\, a;\, -3;\, 7) \in K^2 \times L^2$.

$(c;\, c;\, -2;\, 6)$ und $(a;\, g;\, 9;\, -4)$ sind zwei davon verschiedene Elemente in $K^2 \times L^2$.
(In diesen Beispielen unterscheiden sich die angegebenen $4$-Tupel sogar in allen Komponenten.)

Lösung zu c)

Die Menge $K$ enthält drei Elemente, also $|K| = 3$, und $L$ enthält $9 - (-5) = 14$ ganze Zahlen als Elemente, also $|L| = 14$.

Die Menge $L \times K \times L$ enthält $|L| \cdot |K| \cdot |L| = 14 \cdot 3 \cdot 14$ Elemente, also $|L \times K \times L| = 588$.

Die Menge $K^2 \times L^2$ enthält $|K|^2 \cdot |L|^2 = 9 \cdot 196$ Elemente, also $\left|K^2 \times L^2\right| = 1\,764$.

## ÜBUNG 4

Betrachten Sie die Mengen $L = \{a;\, e;\, i;\, o;\, u\}$, $M = \{m;\, n;\, o;\, p\}$ und $N = \{n;\, o;\, p;\, t;\, u;\, v\}$.
In welchen kartesischen Produkten aus diesen Mengen liegen die folgenden $n$-Tupel?

a)
$(m;\, t)$

b)
$(a;\, n)$

c)
$(i;\, o;\, p)$

d)
$(v;\, u;\, e;\, m)$

Antwort

a) $M \times N$

b) $L \times M$

und
$L \times N$

c) $L^2 \times M, \quad L^2 \times N, \quad L \times M^2, \quad L \times M \times N, \quad L \times N \times M$

und
$L \times N^2$

d) $N \times L \times L \times M$

und
$N \times N \times L \times M$

Lösung zu a)

$(m;\, t)$ ist ein Paar, deshalb liegt es im kartesischen Produkt von zwei Mengen.

Die erste Komponente $m$ liegt nur in der Menge $M$, deshalb ist der erste Faktor im kartesischen Produkt $M$.

Die zweite Komponente $t$ liegt nur in der Menge $N$, deshalb ist der zweite Faktor im kartesischen Produkt $N$.

Also gilt $(m;\, t) \in M \times N$.

Lösung zu b)

$(a;\, n)$ ist ein Paar, deshalb liegt es im kartesischen Produkt von zwei Mengen.

Die erste Komponente $a$ liegt nur in der Menge $L$, deshalb ist der erste Faktor im kartesischen Produkt $L$.

Die zweite Komponente $n$ liegt in den Mengen $M$ und $N$, deshalb ist der zweite Faktor im kartesischen Produkt $M$ oder $N$.

Also gilt $(a;\, n) \in L \times M$ und $(a;\, n) \in L \times N$.

Lösung zu c)

$(i;\, o;\, p)$ ist ein Tripel, deshalb liegt es im kartesischen Produkt von drei Mengen.

Die erste Komponente $i$ liegt nur in der Menge $L$, deshalb ist der erste Faktor im kartesischen Produkt $L$.

Die zweite Komponente $o$ liegt in allen drei Mengen $L$, $M$ und $N$, deshalb ist der zweite Faktor im kartesischen Produkt $L$, $M$ oder $N$.

Die dritte Komponente $p$ liegt in den Mengen $M$ und $N$, deshalb ist der dritte Faktor im kartesischen Produkt $M$ oder $N$.

Also ist $(i;\, o;\, p)$ ein Element von jeder der sechs Mengen

$$L \times L \times M = L^2 \times M, \quad L \times L \times N = L^2 \times N, \quad L \times M \times M = L \times M^2,$$
$$L \times M \times N, \quad L \times N \times M, \quad L \times N \times N = L \times N^2.$$

Lösung zu d)

$(v;\, u;\, e;\, m)$ ist ein $4$-Tupel (Quadrupel), deshalb liegt es im kartesischen Produkt von vier Mengen.

Die erste Komponente $v$ liegt nur in der Menge $N$, deshalb ist der erste Faktor im kartesischen Produkt $N$.

Die zweite Komponente $u$ liegt in den Mengen $L$ und $N$, deshalb ist der zweite Faktor im kartesischen Produkt $L$ oder $N$.

Die dritte Komponente $e$ liegt nur in der Menge $L$, deshalb ist der dritte Faktor im kartesischen Produkt $L$.

Die vierte Komponente $m$ liegt nur in der Menge $M$, deshalb ist der vierte Faktor im kartesischen Produkt $M$.

Also gilt $(v;\, u;\, e;\, m) \in N \times L \times L \times M = N \times L^2 \times M$ und
$(v;\, u;\, e;\, m) \in N \times N \times L \times M = N^2 \times L \times M$.