ÜBERBLICK

Inhalt

Abschnitt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (11MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt mit der Schlussprüfung fortfahren.

Lernziele:

- Sie kennen die Unterschiede zwischen natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. (Gehe zum Abschnitt Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen unten.)
- Sie können eine komplexe Zahl als Vektor in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. (Gehe zum Abschnitt Die Definition der komplexen Zahlen.)
- Sie kennen den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag einer komplexen Zahl und die zu ihr konjugerte Zahl. (Gehe zum Abschnitt Die Definition der komplexen Zahlen.)
- Sie können komplexe Zahlen miteinander addieren, voneinander subtrahieren, miteinander multiplizieren und durcheinander dividieren. (Gehe zum Abschnitt Die Definition der komplexen Zahlen und Polardarstellung, Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen .)
- Sie wissen in welchem Sinne die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen bilden. (Gehe zu Reelle Zahlen als spezielle komplexe Zahlen und die imaginäre Einheit.)
- Sie können eine komplexe Zahl in Polardarstellung hinschreiben. (Gehe zum Abschnitt Polardarstellung, Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen.)
- Sie können eine komplexe Zahl potenzieren. (Gehe zum Abschnitt Polardarstellung, Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen.)
- Sie können aus einer komplexen Zahl Wurzeln ziehen. (Gehe zum Abschnitt Polardarstellung, Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen.)

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel werden komplexe Zahlen eingeführt und in verschiedenen Formen dargestellt. Außerdem wird gezeigt, wie man komplexe Zahlen addieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren kann und wie man Wurzeln komplexer Zahlen berechnet.

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Bevor wir die komplexen Zahlen definieren, machen wir uns den Weg klar, der uns von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ über die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ führt.

- In den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ können wir addieren und multiplizieren, denn die Summe $a+b$ und das Produkt $a \cdot b$ zweier natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ sind jeweils wieder natürliche Zahlen; so sind etwa $5 + 7 = 12 \in \mathbb{N}$ und $5 \cdot 7 = 35 \in \mathbb{N}$.

- Subtraktion ist jedoch in $\mathbb{N}$ nicht immer möglich, beispielsweise ist die Differenz $5 - 7 \notin \mathbb{N}$ keine natürliche Zahl. Wenn wir aber die negativen Zahlen und null hinzunehmen, erhalten wir die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, die auch Subtraktion stets zulässt: Mit $a, b \in \mathbb{Z}$ sind auch $a + b, a - b, a \cdot b \in \mathbb{Z}$. Beispielsweise liegen $5 + 7 = 12$, $5 - 7 = -2$ und $5 \cdot 7 = 35$ jeweils in $\mathbb{Z}$.

  Subtraktion ist die Umkehroperation zur Addition: Gibt man zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ vor, so ist $x = b - a \in \mathbb{Z}$ die Lösung der Gleichung $x + a = b$.

- Die Division zweier ganzer Zahlen ist aber nicht immer ganzzahlig, etwa $\frac{5}{7}$ ist keine ganze Zahl. Wir fügen zu den ganzen Zahlen noch alle Brüche hinzu und erhalten die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$.

  Division ist die Umkehroperation zur Multiplikation: Gibt man zwei rationale Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ vor, so ist $x = b : a \in \mathbb{Q}$ die Lösung der Gleichung $x \cdot a = b$.

- Auf $\mathbb{Q}$ sind alle vier Grundrechenarten definiert, beispielsweise sind

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8} \qquad \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{8} \tag{1}$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 4} = \frac{15}{32} \qquad \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \tag{2}$$

- Damit können wir in den rationalen Zahlen alle vier Grundrechenarten anwenden und erhalten jedes Mal wieder eine rationale Zahl. Allerdings stellt sich das Problem, dass nicht alle „vernünftig definierten" Zahlen rational sind. Beispielsweise kann man beweisen, dass die Gleichung $x^2 = 2$ keine rationale Lösung besitzt. D.h. es gibt keine ganzen Zahlen $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ so, dass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ wäre. Trotzdem besitzt die Gleichung $x^2 = 2$ Lösungen, die *real* sind -- wir können die Lösung $x_+ > 0$ beispielsweise grafisch gewinnen, indem wir ein Quadrat mit einem Meter Kantenlänge zeichnen und dann die Länge der Diagonalen nachmessen.

Wir können die Lösungen $x_\pm$ in Form von Dezimalzahlen $x_\pm = \pm 1{,}4142\ldots$ darstellen. Dass zwischen den Brüchen und den Dezimalzahlen ein großer Unterschied liegt, macht die Tatsache deutlich, dass die Dezimaldarstellung eines jeden Bruchs entweder (nach endlich vielen Stellen irgendwann) abbricht oder periodisch ist.

Die Menge aller Dezimalzahlen -- abbrechende, periodische und auch nicht-periodische -- bildet den Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Sie umfasst die Lösungen $x_\pm = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}4142\ldots$ der Gleichung $x^2 = 2$ ebenso wie die Kreiszahl $\pi = 3{,}1415\ldots$ oder die Eulersche Zahl $e = 2{,}7182\ldots$.

- Mit Hilfe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können wir also die Lösungen der Gleichung $x^2 = 2$ angeben. Wenn wir hingegen die Lösungen der Gleichung $x^2 = -2$ suchen, werden wir erneut vor ein Problem gestellt: Da Quadrate reeller Zahlen stets positiv oder null sind, kann $x^2 = -2$ keine reelle Lösung haben.

Nun stellt sich die Frage: „*Können wir den Zahlenbereich der reellen Zahlen so erweitern, dass wir darin auch Lösungen von $x^2 = -2$ finden?*” Die Antwort auf diese Frage führt uns von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Die obige Diskussion ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

Zahlenbereich	**Eigenschaften**	**Problem**
Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1;\, 2;\, 3;\ldots\}$	Ergebnis bei „$+$” und „$\cdot$” ist wieder natürliche Zahl.	Lösung $x = b - a$ der Gleichung $x + a = b$ ist im Allg. keine natürliche Zahl mehr.
Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\ldots;-2;\,-1;\,0;\,1;\,2;\ldots\}$, wobei $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$	Ergebnis bei „$+$”, „$-$” und „$\cdot$” ist wieder ganze Zahl.	Lösung $x = b : a$ der Gleichung $x \cdot a = b$, mit $a \neq 0$, ist im Allg. keine ganze Zahl mehr.
Rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\right\}$, wobei $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$	Ergebnis bei „$+$”, „$-$”, „$\cdot$” und „$:$” ist wieder rationale Zahl.	Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$ der Gleichung $x^2 = a$, mit $a \geq 0$, sind im Allg. keine rationalen Zahlen mehr.
Reelle Zahlen $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$	Ergebnis bei allen Grundrechenarten „$+$”, „$-$”, „$\cdot$” und „$:$” ist wieder reelle Zahl,enthält auch die irrationalen Zahlen.	Lösungen der Gleichung $x^n = a$, mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, sind im Allg. keine reellen Zahlen mehr.
Komplexe Zahlen $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.	Ergebnis bei allen Grundrechenarten „$+$”, „$-$”, „$\cdot$” und „$:$” ist wieder komplexe Zahl,	Keine Probleme.

	enthält auch alle Lösungen x der Glg. $x^n = y$ (Wurzeln).	

DIE DEFINITION DER KOMPLEXEN ZAHLEN

Eine komplexe Zahl $\mathbf{z}$ ist ein Vektor mit zwei reellen Komponenten,

$$\mathbf{z} \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \;\in\; \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hier und im Weiteren schreiben wir komplexe Zahlen -- also Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ -- mit fettgedruckten Buchstaben (und nicht mit Vektorpfeilen). Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man auch nicht mit $\mathbb{R}^2$, sondern mit $\mathbb{C}$.

Zu jeder komplexen Zahl $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$\begin{aligned}
\text{ihre erste Komponente als ihren Realteil:} \qquad & \mathrm{Re}\{\mathbf{z}\} \;:=\; a \;\in\; \mathbb{R}, & (2)\\
\text{ihre zweite Komponente als ihren Imaginärteil:} \qquad & \mathrm{Im}\{\mathbf{z}\} \;:=\; b \;\in\; \mathbb{R}, & (3)\\
\text{ihre Länge als Vektor als ihren Betrag:} \qquad & |\mathbf{z}| \;:=\; \sqrt{a^2 + b^2} \;\geq\; 0, & (4)\\
\text{und definieren die zu } \mathbf{z} \text{ konjugierte Zahl:} \qquad & \bar{\mathbf{z}} \;:=\; \mathbf{z}^* \;:=\; \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{C}. & (5)
\end{aligned}$$

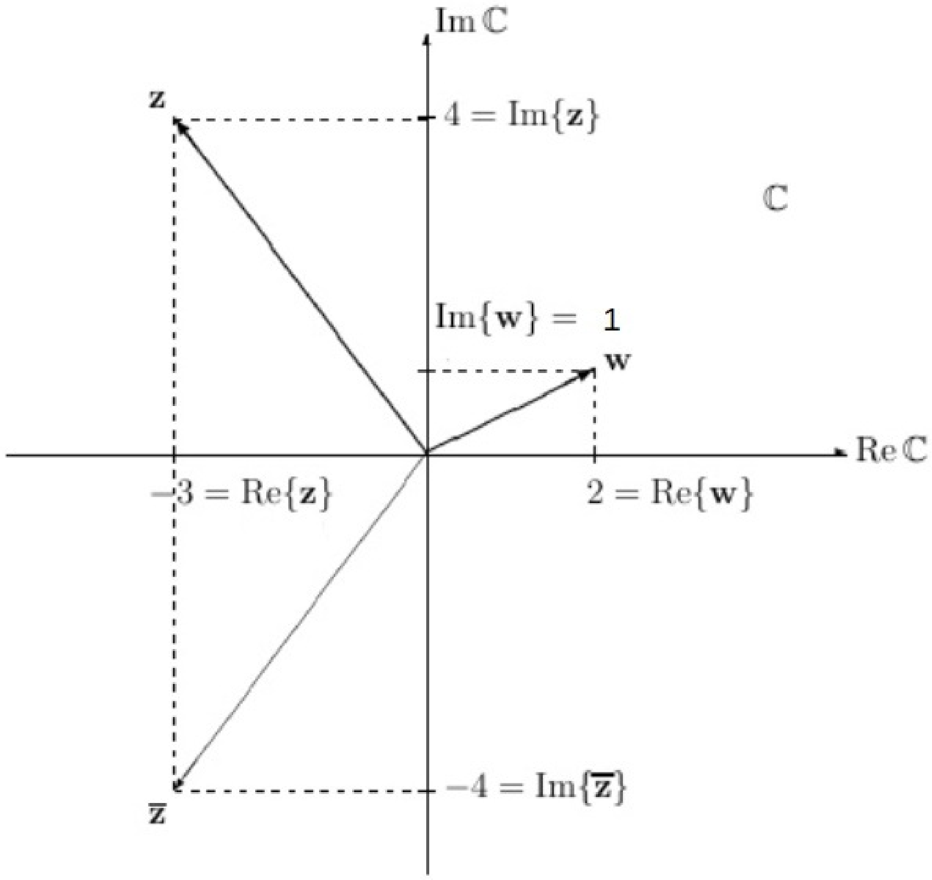
1 BEISPIEL

Sind $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, so sind

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{w}\} = 2,\ \operatorname{Im}\{\mathbf{w}\} = 1, \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\{\mathbf{z}\} = -3,\ \operatorname{Im}\{\mathbf{z}\} = 4, \tag{6}$$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}, \quad \text{und} \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5, \tag{7}$$

$$\overline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{8}$$



Gaußsche Zahlenebene mit $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$*, ihren Real- u. Imaginärteilen, Beträgen und der zu* $\mathbf{z}$ *komplex konjugierten Zahl* $\bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Für zwei komplexe Zahlen $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$, also Vektoren

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

kennen wir bereits aus Kapitel X deren Summe und Differenz,

$$\mathbf{z}+\mathbf{w} \;:=\; \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}-\mathbf{w} \;:=\; \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Hinzu kommt nun noch das Produkt und der Quotient - vorausgesetzt es wird nicht durch Null dividiert.

Das Produkt ist so definiert:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd \\ bc+ad \end{pmatrix} \qquad (11)$$

In Worten:

- Der Realteil ist das Produkt der Realteile minus das Produkt der Imaginärteile.
- Der Imaginärteil ist Imaginärteil mal Realteil plus Realteil mal Imaginärteil.

2 BEMERKUNG

Die Definition des Produkts (11) komplexer Zahlen wirkt auf den ersten Blick merkwürdig und unmotiviert. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt die komplexe Einheit $\mathbf{i}$ einführen. Damit können komplexe Zahlen in einer anderen Weise geschrieben werden. Die obige Definition des Produktes - übersetzt in die neue Art komplexe Zahlen zu schreiben - wirkt dann plötzlich natürlich und einfach.

Eine Formel für den Quotienten gibt es, sie ist aber kompliziert und schwer zu merken. Deshalb wird der Quotient $\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{z}}$ in zwei Schritten ausgerechnet: Im ersten wird $\frac{1}{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z} \neq 0$, ausgerechnet und danach im zweiten das Resultat mit $\mathbf{w}$ multipliziert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{z}} &= \frac{\bar{\mathbf{z}}}{\mathbf{z}\cdot\bar{\mathbf{z}}} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2} \end{aligned}$$

Der mit $\bar{\mathbf{z}}$ erweiterte Bruch ist einfach auszurechnen, denn der Nenner ist reel.

$$\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{z}} = \mathbf{w} \cdot \frac{1}{\mathbf{z}}$$

3 BEISPIEL

Sind $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

so sind

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} + \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} && (12) \\
\mathbf{w} - \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} && (13) \\
\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} && (14) \\
\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{z}} &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-3)^2+4^2} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} && (15) \\
&= \frac{1}{(-3)^2+4^2} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{25} \\ -\frac{11}{25} \end{pmatrix} && (16)
\end{aligned}$$

Wir führen noch die **komplexe Null** $\mathbf{0}$ und die **komplexe Eins** $\mathbf{1}$ durch

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

ein und beobachten, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} + \mathbf{0} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{z}, && (18) \\
\mathbf{z} \cdot \mathbf{1} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 - b \cdot 0 \\ b \cdot 1 + a \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{z} && (19)
\end{aligned}$$

sowie $\mathbf{z} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ für alle komplexen Zahlen $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ gelten.

Setzen wir in (15) speziell $\mathbf{w} := \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, so erhalten wir

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ ba - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \qquad (20)$$

da $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$ und $b \cdot a = a \cdot b$.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Berechne

a) den Realteil $\mathrm{Re}\{\mathbf{z}\}$,

b) den Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\mathbf{z}\}$,

c) den Betrag $|\mathbf{z}|$ und

d) die komplex konjugierte Zahl $\bar{\mathbf{z}}(=\mathbf{z}^*)$

für die komplexe Zahl $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Antwort

a) $\mathrm{Re}\{\mathbf{z}\} = 3$

b) $\mathrm{Im}\{\mathbf{z}\} = -4$

c) $|\mathbf{z}| = 5$

d) $\bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung a)

Der Realteil $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}\}$ einer komplexen Zahl $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist als die erste Komponente a definiert.

Die erste Komponente von $\mathbf{z}$ ist 3, also ist $\mathrm{Re}\{\mathbf{z}\} = 3$.

Lösung b)

Der Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\mathbf{w}\}$ einer komplexen Zahl $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist als die zweite Komponente b definiert.

Die zweite Komponente von $\mathbf{z}$ ist -4, also ist $\mathrm{Im}\{\mathbf{z}\} = -4$.

Lösung c)

Der Betrag $|\mathbf{w}|$ einer komplexen Zahl $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist durch ihre Länge als Vektor definiert:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wir erhalten also:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Lösung d)

Eine komplexe Zahl wird konjugiert, indem man den Imaginärteil mit -1 multipliziert.

Es ist $\bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 3 \\ (-1) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

ÜBUNG 2

Berechne für die komplexen Zahlen $\mathbf{z_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) ihre Summe $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}$,

b) ihre Differenz $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}$ und

c) ihr Produkt $\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2}$.

Antwort

a) $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \end{pmatrix}$

Lösung a)

Die Addition komplexer Zahlen ist durch die Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

$$\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung b)

Die Subtraktion komplexer Zahlen ist durch die Subtraktion der Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung c)

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist durch die Regel

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

gegeben.

$$\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 \\ 2\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNG 3

Berechne für die komplexen Zahlen $\mathbf{z_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) den Realteil $\mathrm{Re}\{\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}\}$ ihrer Summe und

b) den Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}\}$ ihrer Differenz.

Antwort

a) $\mathrm{Re}\{\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}\} = 2,$

b) $\mathrm{Im}\{\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}\} = -3.$

Lösung a)

Die Addition komplexer Zahlen ist durch die Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Der Realteil einer komplexen Zahl ist ihre erste Komponente.

$$\mathrm{Re}\left\{\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = 2.$$

Lösung b)

Die Subtraktion komplexer Zahlen ist durch die Subtraktion der Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist ihre zweite Komponente.

$$\mathrm{Im}\left\{\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} = -3.$$

ÜBUNG 4

Berechne zur komplexen Zahl $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) die komplex konjugierte Zahl $\bar{\mathbf{z}}$ und

b) ihren Kehrwert $\frac{1}{\mathbf{z}}$.

Antwort

a) $\bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{\mathbf{z}} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

Lösung a)

Eine komplexe Zahl wird konjugiert, indem man den Imaginärteil mit -1 multipliziert.

Es ist $\bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -1 \\ (-1) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Lösung b)

Der Kehrwert oder auch das Inverse einer komplexen Zahl, die von Null verschieden ist, ergibt sich am einfachsten aus der leicht verifizierbaren Formel:

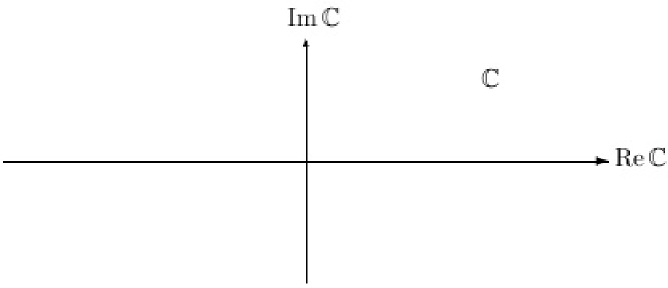
$$\frac{1}{\mathbf{z}} = \frac{\bar{\mathbf{z}}}{\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}} = \frac{1}{|\mathbf{z}|^2}\bar{\mathbf{z}}$$

Für den hier vorliegenden Fall erhalten wir damit:

$\frac{1}{\mathbf{z}} = \frac{1}{(-1)^2+7^2} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

REELLE ZAHLEN ALS SPEZIELLE KOMPLEXE ZAHLEN UND DIE IMAGINÄRE EINHEIT I

Wie in der Tabelle in der Übersicht angedeutet, lassen sich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ auffassen, nämlich als alle komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil, d.h. alle komplexen Zahlen der Form $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \mathbf{1}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl ist. In der Gaußschen Zahlenebene nehmen die reellen Zahlen damit gerade die Abzisse (x-Achse) ein.



In der Gaußschen Zahlenebene identifiziert man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil.

Rechnungen mit diesen komplexen Zahlen unterscheiden sich von Rechnungen mit reellen Zahlen nur durch die zweite Vektorkomponente null bzw. dem Faktor $\mathbf{1}$, die bzw. der überall einzufügen ist. Dies illustrieren wir mit einigen Beispielen:

1 BEISPIEL

$$(5 \cdot \mathbf{1}) + (2 \cdot \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$(5 \cdot \mathbf{1}) - (2 \cdot \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(5 \cdot \mathbf{1}) \cdot (2 \cdot \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$(5 \cdot \mathbf{1}) : (2 \cdot \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5:2 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{5}{2} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Das Mitschreiben der zweiten Vektorkomponenten null bzw. der Faktoren $\mathbf{1}$ bei diesen Rechnungen ist lästig, und weil keine Gefahr von Verwechselungen besteht, lässt man diese weg und schreibt einfach

$$a \quad \text{statt} \quad a \cdot \mathbf{1} \;=\; \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$. Wir fassen reelle Zahlen also auch als (spezielle) komplexe Zahlen auf, nämlich als komplexe Zahlen mit Imaginärteil null.

Im Prinzip lassen sich alle Berechnungen mit komplexen Zahlen mit den in (10) - (12) definierten Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen. Mit der in Abschnitt *Die Defintion der komplexen Zahlen*, Gleichungen (10) - (12) verwendeten Vektorenschreibweise werden die Rechnungen aber schnell unübersichtlich.

Um dies zu vermeiden, ist es nützlich, die **imaginäre Einheit**

$$\mathbf{i} \;:=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

einzuführen und zu beobachten, dass

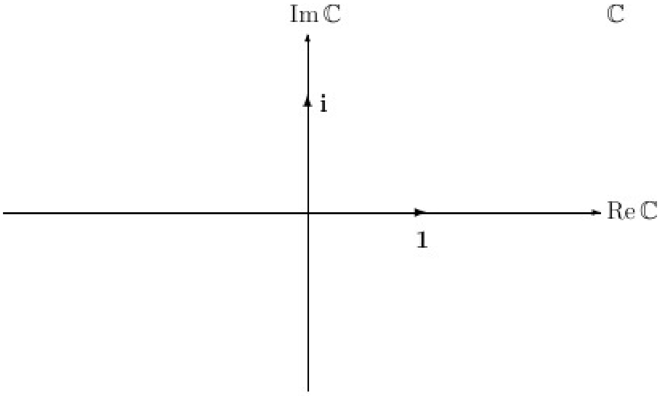
$$\mathbf{i}^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; -\mathbf{1} \qquad (7)$$

gilt.

Die imaginäre Einheit $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die schon vorher eingeführte komplexe Eins $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entsprechen den Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^2$. Jede komplexe Zahl $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ lässt sich deshalb als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren darstellen, nämlich

$$\mathbf{z} \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;= a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i}. \qquad (8)$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind dann Vektoren in der *Gaußschen Zahlenebene*. Die Abzisse (x-Achse) wird dabei als $\mathrm{Re}\ \mathbb{C}$ bezeichnet und ist die Richtung des Standardbasisvektors $\mathbf{1}$, die Ordinate (y-Achse) wird als $\mathrm{Im}\ \mathbb{C}$ bezeichnet und ist die Richtung des Standardbasisvektors $\mathbf{i}$.



Gaußsche Zahlenebene mit Standardbasisvektoren $\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *und* $\mathbf{i}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

2 BEMERKUNG

Der Nutzen der Einführung von $\mathbf{i}$ *liegt darin, dass man sich zum Rechnen mit komplexen Zahlen nur die Gleichung (7) zusätzlich merken muss:* $\mathbf{i}^2=-\mathbf{1}$.

[online-only]

Für

$\mathbf{z}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}$ und $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=c\cdot\mathbf{1}+d\cdot\mathbf{i}$ sind

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}+\mathbf{w} &= a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}+c\cdot\mathbf{1}+d\cdot\mathbf{i} && =(a+c)\cdot\mathbf{1}+(b+d)\cdot\mathbf{i} && (9)\\
\mathbf{z}\cdot\mathbf{w} &= (a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i})\cdot(c\cdot\mathbf{1}+d\cdot\mathbf{i}) && =ac\cdot\mathbf{1}^2+ad\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{i}+bc\cdot\mathbf{i}\cdot\mathbf{1}+bd\cdot\mathbf{i}^2 && (10)\\
&= ac\cdot\mathbf{1}+ad\cdot\mathbf{i}+bc\cdot\mathbf{i}-bd\cdot\mathbf{1} && =(ac-bd)\cdot\mathbf{1}+(ad+bc)\cdot\mathbf{i} && (11)
\end{aligned}$$

3 BEISPIEL

Sind $\mathbf{w}=5\cdot\mathbf{1}+2\cdot\mathbf{i}$ und $\mathbf{z}=\mathbf{1}-5\cdot\mathbf{i}$, so sind

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}+\mathbf{z} &= 5\cdot\mathbf{1}+2\cdot\mathbf{i}+\mathbf{1}-5\cdot\mathbf{i} && =6\cdot\mathbf{1}-3\cdot\mathbf{i} && (12)\\
\mathbf{w}\cdot\mathbf{z} &= (5\cdot\mathbf{1}+2\cdot\mathbf{i})\cdot(\mathbf{1}-5\cdot\mathbf{i}) && =5\cdot\mathbf{1}^2-25\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{i}\cdot\mathbf{1}-10\cdot\mathbf{i}^2 && (13)\\
&= 5\cdot\mathbf{1}-25\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{i}+10\cdot\mathbf{1} && =15\cdot\mathbf{1}-23\cdot\mathbf{i} && (14)
\end{aligned}$$

Um auch die Division zu vereinfachen, beobachten wir, dass die zu $\mathbf{z}=a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}$ konjugierte Zahl geschrieben werden kann als $\bar{\mathbf{z}}=a\cdot\mathbf{1}-b\cdot\mathbf{i}$ und dass damit

$$\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{z} = (a\cdot\mathbf{1}-b\cdot\mathbf{i})\cdot(a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}) = a^2\cdot\mathbf{1}^2-b^2\cdot\mathbf{i}^2 = (a^2+b^2)\cdot\mathbf{1} = |\mathbf{z}|^2\cdot\mathbf{1} \qquad (15)$$

gilt.

Somit ist für $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$

$$\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{z}} = \frac{\bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}}{\bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{z}} = \frac{\bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{z}|^2 \cdot \mathbf{1}} = \frac{1}{|\mathbf{z}|^2} \frac{\bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{1}} = \frac{1}{|\mathbf{z}|^2} \bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}. \tag{16}$$

4 BEISPIEL

$$\frac{5 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{i}}{\mathbf{1} - 5 \cdot \mathbf{i}} = \frac{(\mathbf{1} + 5 \cdot \mathbf{i}) \cdot (5 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{i})}{(\mathbf{1} + 5 \cdot \mathbf{i}) \cdot (\mathbf{1} - 5 \cdot \mathbf{i})} = \frac{5 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{i} + 25 \cdot \mathbf{i} + 10 \cdot \mathbf{i}^2}{(1^2 + 5^2) \cdot \mathbf{1}} \tag{17}$$

$$= \frac{(-5) \cdot \mathbf{1} + 27 \cdot \mathbf{i}}{(1^2 + 5^2) \cdot \mathbf{1}} = -\frac{5}{26} \cdot \mathbf{1} + \frac{27}{26} \cdot \mathbf{i} \tag{18}$$

Das Mitschreiben der Einsen bei diesen Rechnungen ist lästig, und weil man die Faktoren $\mathbf{1}$ ohne Gefahr von Verwechselungen weglassen kann, schreibt man für komplexe Zahlen einfach

$$z = a + bi = a + ib \quad \text{statt} \quad \mathbf{z} = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i}. \tag{19}$$

Die komplexen Zahlen werden also im Weiteren nicht mehr fett geschrieben -- auch $\mathbf{i}$ nicht. Dies ist nun möglich, da wir reelle Zahlen auch als (spezielle) komplexe Zahlen auffassen, nämlich die komplexen Zahlen mit Imaginärteil null. Mit dieser Notation wird dann auch

$$|z|^2 \cdot \mathbf{1} = \bar{z} \cdot z \quad \text{zu} \quad |z|^2 = \bar{z} \cdot z, \tag{20}$$

für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, wobei -- scheinbar paradox -- auf der linken Seite in (20) eine reelle und auf der rechten Seite eine komplexe Zahl steht.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = -3 + 4i$.
Berechne

a) die dazu komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$

b) ihren Betrag $|z|$

c) ihren Kehrwert $\frac{1}{z}$

d) den Kehrwert $\frac{1}{\bar{z}}$ der zu z komplex konjugierten Zahl $\bar{z}$.

Antwort

a) $\bar{z} = -3 - 4i$

b) $|z| = 5$

c) $\frac{1}{-3+4i} = -\frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^2}i$

d) $\frac{1}{-3-4i} = -\frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^2}i$

Lösung a

Die Vorzeichen der Imaginärteile von z und $\bar{z}$ sind verschieden.

Wird z als Punkt in der Zahlenebene aufgefasst, entspricht der Übergang von z nach $\bar{z}$ einer Spiegelung an der x-Achse.

$$z = -3 + 4i,\ \bar{z} = -3 - 4i$$

Lösung b

Betrachte z als Punkt in der Zahlenebene. Der Betrag von z ist der Abstand vom Ursprung oder die Länge des Vektors mit den Komponenten $\mathrm{Re}\{z\}$ und $\mathrm{Im}\{z\}$.

Nach Pythagoras ist somit $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Lösung c

Erweitere den Bruch $\frac{1}{z}$ mit $\bar{z}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{1}{-3+4i} = \frac{-3-4i}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-3-4i}{5^2} = -\frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^2}i$$

Lösung d

Erweitere den Bruch $\frac{1}{\bar{z}}$ mit z.

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

$$\frac{1}{-3-4i} = \frac{-3+4i}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-3+4i}{5^2} = -\frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^2}i$$

ÜBUNG 2

Gegeben ist eine komplexe Zahl $z = 3 - 2i$
Berechne die beiden Ausdrücke

a) z^2

b) $z\bar{z}$

Antwort

a) $z^2 = 5 - 12i$

b) $z\bar{z} = 13$

Lösung a

$$z^2 = (3 - 2i)(3 - 2i) = 3^2 + 2 * 3 * (-2i) + (-2)^2 = 9 - 4 + 6 * (-2i)$$

$$z^2 = 5 - 12i$$

Lösung b

$$z\bar{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 3^2 - i^2 * (-2)^2 = 3^2 + 2^2$$

$$z\bar{z} = 9 + 4 = 13$$

ÜBUNG 3

Gegeben sind die komplexen Zahl $z_1 = -3 + 4i$ und $z_2 = 5 + 2i$.
Berechne die folgenden vier komplexen Zahlen:

a) ihre Summe $z_1 + z_2$

b) ihre Differenz $z_1 - z_2$

c) ihr Produkt $z_1 \cdot z_2$

d) ihren Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$.

Antwort

a) $z_1 + z_2 = 2 + 6i$

b) $z_1 - z_2 = -8 + 2i$

c) $z_1 \cdot z_2 = -23 + 14i$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7+26i}{29}$

Lösung a

Der Realteil der Summe ist die Summe der Realteile; der Imaginärteil der Summe ist die Summe der Imaginärteile. Äquivalent dazu: Als Vektoren in der Zahlenebene werden die Vektoren addiert.

$$\mathrm{Re}\{z_1 + z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\} + \mathrm{Re}\{z_2\}$$
$$\mathrm{Im}\{z_1 + z_2\} = \mathrm{Im}\{z_1\} + \mathrm{Im}\{z_2\}$$

$$z_1 + z_2 = 2 + 6i$$

Lösung b

Der Realteil der Differenz ist die Differenz der Realteile; der Imaginärteil der Differenz ist die Differenz der Imaginärteile. Äquivalent dazu: Als Vektoren in der Zahlenebene werden die Vektoren subtrahiert.

$$\mathrm{Re}\{z_1 - z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\} - \mathrm{Re}\{z_2\}$$
$$\mathrm{Im}\{z_1 - z_2\} = \mathrm{Im}\{z_1\} - \mathrm{Im}\{z_2\}$$

$$z_1 - z_2 = -8 + 2i$$

Lösung c

Der Realteil des Produkts $z_1 \cdot z_2$ ist die Differenz von $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2$ und $\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2$.
Der Imaginärteil des Produkts $z_1 \cdot z_2$ ist die Summe von $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2$ und $\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2$.

$$\operatorname{Re}\{z_1 \cdot z_2\} = \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2$$
$$\operatorname{Im}\{z_1 \cdot z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\} \cdot \operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\} \cdot \operatorname{Re}\{z_2\}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 \cdot 5 - 4 \cdot 2) + (-3 \cdot 2 + 4 \cdot 5)i = -23 + 14i$$

Lösung d

Erweitere den Bruch $\frac{z_1}{z_2}$ mit $\overline{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Berechne $z_1 \cdot \overline{z_2}$ und $z_2 \cdot \overline{z_2}$.

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = -7 + 26i \text{ ; } z_2 \cdot \overline{z_2} = 29$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7+26i}{29}$$

ÜBUNG 4

In dieser Visualisierung soll der Zusammenhang zwischen einer komplexen Zahl $z = \mathrm{Re}\{z\} + \mathrm{Im}\{z\}i$, ihrer Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene und ihres Real- und Imaginärteils geübt werden.

[online-only]

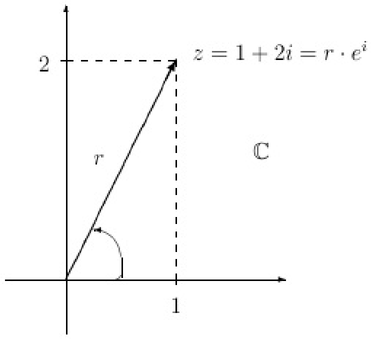
POLARDARSTELLUNG, POTENZEN UND WURZELN KOMPLEXER ZAHLEN

Von großer Bedeutung ist die Polardarstellung für komplexe Zahlen. Für eine komplexe Zahl $z = a + ib \neq 0$, die nicht null ist, definieren wir einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathrm{Re}\{z\}}{|z|} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Im\{z\}}{|z|} \qquad (1)$$

gelten.

In der Gaußschen Zahlenebene ist φ der von der Abzisse und dem zu z gehörigen Vektor eingeschlossene Winkel.



Gaußsche Zahlenebene mit $z = 1 + 2i = r \cdot e^{i\varphi}$, wobei r die Länge des Vektors z und φ der von der Abzisse und z eingeschlossene Winkel sind.

Mit diesem Winkel wird dann

$$z = |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right). \qquad (2)$$

Wegen der Periodizität $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$ der Kosinusfunktion und der Periodizität $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$ der Sinusfunktion ändert sich die Zahl z in (2) nicht, wenn man 2π zu φ hinzuaddiert. Daher kann der Winkel φ stets zwischen 0 und 2π gewählt werden,

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \qquad (3)$$

und man bezeichnet φ in diesem Zusammenhang als **Argument** der Zahl z oder als eine **Phase**.

Dieser Fakt ist auch in der Gaußschen Zahlenebene klar erkennbar: Eine Addition von 2π zu φ bedeutet geometrisch ein Schwenken des zu z gehörigen Vektors genau um einen geschlossenen Kreis $360^\circ = 2\pi$ um den Ursprung.

1 BEMERKUNG

Zur konkreten Bestimmung des Winkels φ für eine komplexe Zahl $z = a + ib \neq 0$ kann man zuerst

$$\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \in [0;\pi] \qquad (4)$$

z.B. mit dem Taschenrechner berechnen. (Achtung: Rechner auf Winkeleinheit *RAD (radian)* ggf. umstellen!) Diesen Wert setzt man in die Sinusfunktion ein und überprüft

$$\begin{aligned} b \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta \coloneqq \alpha, && (5) \\ b < 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin(\alpha) = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta \coloneqq -\alpha. && (6) \end{aligned}$$

Schließlich soll das Ergebnis noch zwischen 0 und 2π liegen, deshalb setzt man

$$\begin{aligned} \beta \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi \coloneqq \beta, && (7) \\ \beta < 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi \coloneqq 2\pi + \beta. && (8) \end{aligned}$$

Ist nun $\tilde{z} = |\tilde{z}|\,\{\cos(\psi) + i\sin(\psi)\}$ eine weitere komplexe Zahl mit zugehöriger Phase $\psi \in \mathbb{R}$, so erhalten wir aus den *Additionstheoremen für Sinus und Kosinus*,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \qquad (9)$$

die für beliebige Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} z\cdot\tilde{z} &= |z|\cdot\left\{\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\right\}\cdot|\tilde{z}|\cdot\left\{\cos(\psi) + i\,\sin(\psi)\right\} && (10) \\ &= |z|\,|\tilde{z}|\,\left\{\left[\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)\right] + i\left[\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)\right]\right\} && (11) \\ &= |z|\,|\tilde{z}|\,\left\{\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\right\}. && (12) \end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen erfolgt also durch Multiplikation ihrer Beträge und Addition der Phasen, und es gelten sogar

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) \quad \text{und} \quad z = |z|\cdot e^{i\varphi}, \qquad (13)$$

sodass (12) nur das Potenzgesetz $e^x e^y = e^{x+y}$ widerspiegelt.

$$z\cdot\tilde{z} = \left(|z|\cdot e^{i\varphi}\right)\cdot\left(|\tilde{z}|\cdot e^{i\psi}\right) = |z|\cdot|\tilde{z}|\cdot\left(e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi}\right) = |z|\cdot|\tilde{z}|\cdot e^{i(\varphi+\psi)}. \qquad (14)$$

Gleichung (13) lässt sich durch Entwicklungen der Exponential-, der Kosinus- und der Sinusfunktion in *Potenzreihen* streng begründen -- letztere gehen aber deutlich über den Stoff von OMB+ hinaus.

Mit $r \coloneqq |z|$ wird (13) zur **Polardarstellung**

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \qquad (15)$$

der komplexen Zahl z. (Diese ist auch für $z = 0$ gültig, da in diesem Fall $r = 0$ ist und die Phase φ beliebig gewählt werden kann.)

In der Polardarstellung haben dann Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen folgende grafische Interpretation:

- Die Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a + ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $z_2 = c + id = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ erfolgt komponentenweise, wie bei Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$,

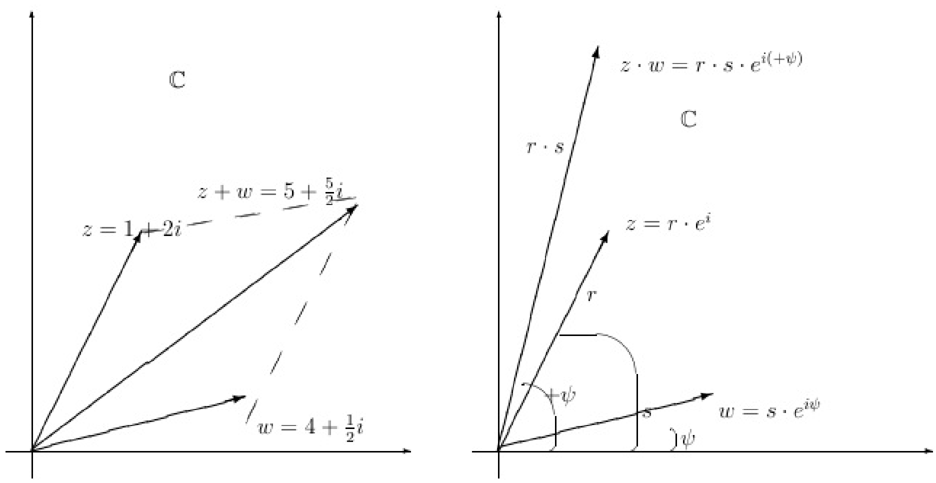
$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = (a+c) + i(b+d). \qquad (16)$$

- Die Multiplikation zweier in Polardarstellung gegebener komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ erfolgt durch Multiplikation ihrer Beträge und Addition ihrer Phasen,

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1\, e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2\, e^{i\varphi_2}) = r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (17)$$

- Die Division zweier in Polardarstellung gegebener komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \neq 0$ erfolgt durch Division ihrer Beträge und Subtraktion ihrer Phasen,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2\, e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (18)$$



Links ist die Summe $z + w = 5 + \frac{5}{2}i$ von $z = 1 + 2i = r \cdot e^{i\varphi}$ und $w = 4 + \frac{1}{2}i = s \cdot e^{i\psi}$ dargestellt und rechts das Produkt $z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$.

2 BEISPIEL

Wir belegen die obigen Aussagen mit einem Zahlenbeispiel.
Sind $w = 2 + i$ und $z = -3 - 4i$, so sind $w = |w| \cdot e^{i\alpha}$ und $z = |z| \cdot e^{i\beta}$ mit

$$
\begin{aligned}
|w| &= \sqrt{5}, \quad \cos(\alpha) = \tfrac{2}{\sqrt{5}},\ \sin(\alpha) = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \ \Rightarrow \alpha \approx 0{,}46 \ \Rightarrow w \approx \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot(0{,}46)}, && (19)\\
|z| &= 5, \quad \cos(\beta) = \tfrac{-3}{5},\ \sin(\beta) = \tfrac{-4}{5} \ \Rightarrow \beta \approx 4{,}07 \ \Rightarrow z \approx 5 \cdot e^{i\cdot(4{,}07)}. && (20)
\end{aligned}
$$

Andererseits können wir direkt ausrechnen, dass
$w \cdot z = |w \cdot z| \cdot e^{i\gamma}$ mit

$$
\begin{aligned}
w \cdot z &= -2-11i, && (21)\\
|w \cdot z| &= \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = \sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5}, && (22)\\
\cos(\gamma) &= \tfrac{-2}{\sqrt{125}},\ \sin(\gamma) = \tfrac{-11}{\sqrt{125}} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 4{,}53\,, && (23)\\
\Rightarrow \quad w \cdot z &\approx \sqrt{125} \cdot e^{i\cdot(4{,}53)} = \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot(0{,}46)} \cdot 5 \cdot e^{i\cdot(4{,}07)}. && (24)
\end{aligned}
$$

Die wahre Stärke der Polardarstellung $z = r \cdot e^{i\varphi}$ einer komplexen Zahl z liegt in der Vereinfachung der Berechnung von Potenzen z^n und Wurzeln $\sqrt[n]{z}$ von z. Für eine nichtnegative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist nämlich nach (17)

$$
z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot \left(e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i\,n\cdot\varphi}, \qquad (25)
$$

und für $z \neq 0$ gilt dies auch für negative n, also für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$.

3 BEISPIEL

Sind etwa $z = 3 + 4i$ und $n = 4$, so kann man ausmultiplizieren und erhält

$$
\begin{aligned}
z^4 &= (3+4i)^4 = \left((3+4i)^2\right)^2 = \left(3^2 + 2\cdot 3\cdot 4i + (4i)^2\right)^2 = \left(9 + 24i - 16\right)^2 && (26)\\
&= (-7+24i)^2 = (-7)^2 + 2\cdot(-7)\cdot 24i + (24i)^2 = 49 - 336i - 576 = -527 - 336i && (27)
\end{aligned}
$$

durch mühsame Rechnung. Schreibt man aber z in Polardarstellung, $z \approx 5 \cdot e^{i\cdot 0{,}927}$, so erhält man mit (17) ganz einfach

$$
z^4 \approx \left(5 \cdot e^{i\cdot 0{,}927}\right)^4 = 5^4 \cdot \left(e^{i\cdot 0{,}927}\right)^4 = 5^4 \cdot e^{i\cdot 4\cdot 0{,}927} = 625 \cdot e^{i\cdot 3{,}71}. \qquad (28)
$$

Um die Übereinstimmung der Ergebnisse zu überprüfen, beobachtet man, dass $\cos(3{,}71) \approx -0{,}843$ und $\sin(3{,}71) \approx -0{,}538$ sind und daher

$$
\begin{aligned}
625 \cdot e^{i\cdot 3{,}71} &= 625 \cdot \cos(3{,}71) + 625 \cdot \sin(3{,}71)i \approx 625 \cdot (-0{,}843) + i\,625 \cdot (-0{,}538) && (29)\\
&= -526{,}875 - (336{,}25)i \approx -527 - 336i && (30)
\end{aligned}
$$

gilt, wobei die Fehler nur durch das Runden von Sinus und Kosinus auf zwei signifikante Stellen hinter dem Komma entstehen -- und nicht durch falsche Rechnung.

Auch das Wurzelziehen ist bei komplexen Zahlen leicht und funktioniert vor allem immer. Ist $z = r \cdot e^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, so sind die komplexen Quadratwurzeln von z alle komplexen Zahlen w, für die $w^2 = z$ gilt.

In Polardarstellung $w = s \cdot e^{i\alpha}$ muss also

$$s^2 \cdot e^{i2\alpha} = r \cdot e^{i\varphi} \qquad (31)$$

gelten, wobei $s \geq 0$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$. Somit ist $s = \sqrt{r} > 0$, und es muss $e^{i2\alpha} = e^{i\varphi}$ gelten.

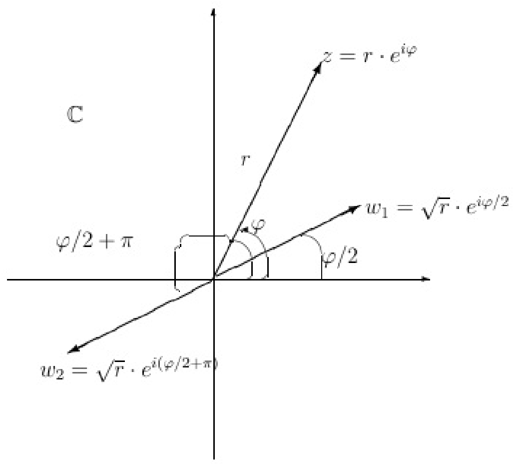
Letztere Gleichung hat zwei Lösungen im Intervall $[0, 2\pi)$, nämlich

$$\alpha_1 = \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\varphi}{2} + \pi, \qquad (32)$$

da $e^{2\pi i} = 1$. Außerdem ist $e^{\pi i} = -1$, und wir erhalten $z = w_1^2 = w_2^2$ mit

$$w_1 = \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2} \quad \text{und} \quad w_2 = \sqrt{r} \cdot e^{i(\pi+\varphi/2)} = \sqrt{r} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\varphi/2} = -\sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2} = -w_1, \qquad (33)$$

wie gewohnt.



$z = 1 + 2i$ in der Gaußschen Zahlenebene mit Quadratwurzeln w_1 und w_2.

Unterschied zwischen reellen und komplexen Wurzeln

Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ und natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es *genau eine* Zahl $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \geq 0$, die $(\sqrt[n]{a})^n = a$ erfüllt, die *reelle* n. Wurzel aus a. Für jedes $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{\cdot} : [0; \infty) \to [0; \infty)$ eine Funktion. Der Funktionswert ist die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Im Gegensatz dazu sind die *komplexen* n. Wurzeln aus einer komplexen Zahl $z \neq 0$ alle n verschiedenen Lösungen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von $w^n = z$.

Die reelle Quadratwurzel aus 4 ist $\sqrt{4} = 2$, die komplexen Quadratwurzeln aus $4 = 4 + 0i$ sind $w_1 = 2 = 2 + 0i$ und $w_2 = -2 = -2 + 0i$, die beiden Lösungen von $w^2 = 4$.

Wenn man das oben beschriebene Ziehen der Quadratwurzel und insbesondere den Grund für die Existenz genau zweier Lösungen α_1, α_2 von $e^{i2\alpha} = e^{i\varphi}$ verstanden hat, dann ist das Ziehen der allgemeinen n. Wurzeln auch nicht viel schwerer:

Sind $z = r \cdot e^{i\varphi} \neq 0$ eine komplexe und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, wobei wir abermals $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ annehmen können, so sind die n. Wurzeln von z alle komplexen Zahlen w, für die $w^n = z$ gilt. In Polardarstellung $w = s \cdot e^{i\alpha}$ mit $s \geq 0$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$ muss also wieder $s^n \cdot e^{in\alpha} = r \cdot e^{i\varphi}$ gelten, was auf $s = \sqrt[n]{r} = r^{1/n} > 0$ und

$$e^{in\alpha} = e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i(n\alpha - \varphi)} = 1 \qquad (34)$$

führt.

Daher muss $n\alpha - \varphi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, und die möglichen Lösungen haben die Gestalt

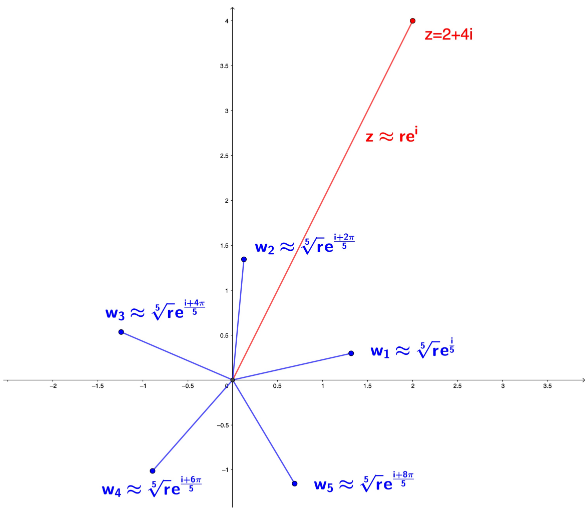
$$\alpha_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(k-1)}{n}, \qquad (35)$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist. Da wir außerdem $0 \leq \alpha_k < 2\pi$ fordern, gibt es für α genau n Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\varphi}{n}, && (36)\\ \alpha_2 &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, && (37)\\ &\vdots && (38)\\ \alpha_n &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}. && (39) \end{aligned}$$

Daher besitzt z genau die n Wurzeln

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}, && (40)\\ w_2 &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n} + \frac{i2\pi}{n}}, && (41)\\ &\vdots && (42)\\ w_n &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n} + \frac{i2\pi(n-1)}{n}}. && (43) \end{aligned}$$



$z = 2 + 4i$ *in Gaußscher Zahlenebene mit* 5 *Wurzeln* w_1, w_2, w_3, w_4, w_5. Die obigen Überlegungen zeigen, dass eine komplexe Zahl $z \neq 0$ stets n (voneinander verschiedene) n. Wurzeln besitzt -- im Gegensatz zu den reellen Zahlen, in denen etwa -1 keine reelle Quadratwurzel besitzt (sondern nur die komplexen Wurzeln $\pm i$, wobei wir dann aber schon wieder -1 als komplexe Zahl mit Imaginärteil null betrachten). Diese bemerkenswerte Eigenschaft der komplexen Zahlen führt letztendlich dazu, dass jedes komplexe Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Genauer gilt der folgende Satz.

4 SATZ (FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und p das Polynom

$$p(z) \;\; := z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0. \qquad (44)$$

Dann gibt es komplexe Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$p(z) \;\; := (z - \lambda_1) \cdot (z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \qquad (45)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind die Nullstellen des Polynoms p. Die λ_i können teilweise oder auch alle gleich sein.

5 BEISPIEL

- Das *reelle* Polynom $p(x) = x^2 + 1$ besitzt keine *reellen* Nullstellen und lässt sich nicht in der Form $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zerlegen. Der Fundamentalsatz der Algebra ist für reelle Zahlen also falsch.
- Das *komplexe* Polynom $p(z) = z^2 + 1$ (mit $1 = 1 + 0 \cdot i$ als komplexe Zahl) besitzt die *komplexen* Nullstellen $\pm i$ und zerfällt zu $p(z) = (z - i)(z + i)$ in Linearfaktoren $z - i$ und $z + i$ -- so, wie es der Fundamentalsatz der Algebra behauptet.

6 BEMERKUNG

Der Fundamentalsatz der Algebra, Satz 4, sichert zwar für jedes Polynom $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$ vom Grad n die Existenz von mindestens einer und maximal n Nullstellen in $\mathbb{C}$. Er beinhaltet aber keine Lösungsformel und kein Verfahren um diese aufzufinden.

Für Grad $n = 1$ ist $p(z) = z + c_0$ und offensichtlich gilt die Lösungsformel $\lambda_1 = -c_0$ (s. Kap. II.2.1).

Für Grad $n = 2$ ist $p(z) = z^2 + c_1 z + c_0$ und λ_1 und λ_2 können mit Hilfe der p-q-Formel (s. Kap. II.2.2) bestimmt werden, $\lambda_1 = -\frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}$ und $\lambda_2 = -\frac{c_1}{2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}$.

Für Grad $n = 3, 4$ gibt es allgemeine Lösungsformeln für die Nullstellen. Sie sind jedoch zu kompliziert um wirklich nützlich zu sein. Hier gibt es Formeln für den Fall n=4 .

Nun zu $n > 4$: Vor etwa zweihundert Jahren haben zwei (leider jung verstorbene) Mathematiker, der Norweger Niels Henrik Abel (1802-1829) und der Franzose Evariste Galois (1811-1832), die bemerkenswerte Tatsache bewiesen, dass es Lösungsformeln für die Bestimmung der Nullstellen von Polynomem vom Grad $n \geq 5$ prinzipiell nicht geben kann!

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Berechne

a) den Realteil

b) den Imaginärteil

c) den Betrag

d) die komplex Konjugierte in der Form $\bar{z} = a + ib$.

Antwort

a) $\mathrm{Re}\, 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\cos(\frac{2\pi}{3}) = -2$

b) $\mathrm{Im}\, 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\sin(\frac{2\pi}{3}) = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ (auf 2 Stellen gerundet)

c) $|z| = 4$

d) $\bar{z} = 4(-\frac{1}{2}) - i4(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2 - i3{,}46$ (auf 2 Stellen gerundet).

Lösung a

Berechne den Realteil von $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ aus der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$.

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$

Die Formel sagt uns: $\mathrm{Re}\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3})$.

Multipliziere diese Gleichung mit der Länge von z, d.h. mit 4:

$$\begin{aligned} z &= 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 4(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3})) \\ &= 4\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i4\sin(\tfrac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann der Realteil (und auch der Imaginärteil) von z abgelesen werden.

$\mathrm{Re}\, 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\cos(\frac{2\pi}{3}) = -2$.

Lösung b

Berechne den Imaginärteil von $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ aus der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$.

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$
Die Formel sagt uns: $\operatorname{Im} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sin(\frac{2\pi}{3})$.

Multipliziere diese Gleichung mit der Länge von z, d.h. mit 4:

$$\begin{aligned} z =& 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ =& 4(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3})) \\ =& 4\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i4\sin(\tfrac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann der Imaginärteil (und auch der Realteil) von z abgelesen weren.

$\operatorname{Im} 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\sin(\frac{2\pi}{3}) = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ (auf 2 Stellen gerundet).

Lösung c

Der Betrag von z kann unmittelbar aus der Polardarstellung abgelesen werden.

$z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$, d.h. die Länge des Vektors z in der komplexen Zahlenebene ist 4.

Lösung d

Die zu z konjugiert komplexe Zahl ist $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z$. Die Real- und Imaginärteile haben wir bereits in den Teilaufgaben a) und b) berechnet.

$\bar{z} = 4\cos(\frac{2\pi}{3}) - i4\sin(\frac{2\pi}{3}) = 4 \cdot (-\frac{1}{2}) - i4(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2 - i3{,}46$ (auf zwei Stellen gerundet).

ÜBUNG 2

Die komplexe Zahl $z = -3 + 6i$ soll in der Polardarstellung geschrieben werden: $z = re^{i\varphi}$. Dezimalzahlen sollen auf 2 Stellen gerundet werden.

a) Berechne die Länge r (gerundet auf 2 Stellen)

b) Berechne die Phase φ (gerundet auf 2 Stellen)

Antwort

a) $r = \sqrt{45} = 6{,}71$ (gerundet auf 2 Stellen)

b) $\varphi = \arccos \frac{-3}{\sqrt{45}} = 2{,}03$ (gerundet auf 2 Stellen)

Lösung a

Für die Darstellung von z in Polarkoordinaten, benötigen wir den Betrag $r = |z|$ und die Phase φ. Hier geht es erst mal um r.

$r = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ (mit dem Taschenrechner, gerundet auf 2 Stellen)

Lösung b

Für die Darstellung von z in Polarkoordinaten, benötigen wir die Länge $r = |z|$ und die Phase φ. Hier geht es um φ, das $\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re} z}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im} z}{r}$ erfüllen muss.

Der Taschenrechner liefert mit $\varphi = \arccos(\frac{\operatorname{Re} z}{r})$ einen Winkel φ_1 mit $0 \leq \varphi_1 \leq \pi$. Wenn $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, ist $\varphi = \varphi_1$ die richtige Phase, denn $\sin(\varphi_1) \geq 0$.

Wenn aber $\operatorname{Im}(z) < 0$, dann ist die Phase $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 = 2\pi - \arccos(\frac{\operatorname{Re} z}{r})$ mit $\pi < \varphi_2 < 2\pi$. Auch der Winkel φ_2 erfüllt $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) = \frac{\operatorname{Re} z}{r}$ und es gilt $\sin(\varphi_2) < 0$.

Im vorliegenden Fall ist $\operatorname{Im}(z) = r\sin(\varphi) = 6 \geq 0$, deshalb ist φ_1 die Phase von z.

$\varphi = \arccos \frac{-3}{\sqrt{45}} = 2{,}03$ (mit dem Taschenrechner, gerundet auf 2 Stellen).

(Ein Beispiel mit negativem Imaginärteil wird in Übung 4 gezeigt.)

ÜBUNG 3

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = 7e^{i1{,}2\pi}$ und $z_2 = 3e^{i1{,}5\pi}$. Berechnen Sie das Produkt und den Quotienten und drücken Sie das Resultat wieder in der Polardarstellung aus.

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

Antwort

a) $z_1 \cdot z_2 = 21e^{i0{,}7\pi}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{3}e^{i1{,}7\pi}$

Lösung a

Der Betrag von $z_1 \cdot z_2$ ist das Produkt der Beträge von z_1 und z_2.

$|z_1 \cdot z_2| = 7 \cdot 3 = 21$

Die Phase von $z_1 \cdot z_2$ ist die Summe der Phasen plus ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, das so gewählt wird, dass das Resultat zwischen 0 (eingeschlossen) und 2π (nicht eingeschlossen) liegt.

$\varphi_1 = 1{,}2\pi$, $\varphi_2 = 1{,}5\pi$, $\varphi_1 + \varphi_2 = 2{,}7\pi$. Wir subtrahieren von diesem Wert 2π und erhalten die Phase des Produktes $\varphi_{prod} = 2{,}7\pi - 2\pi = 0{,}7\pi$. Sie liegt zwischen 0 und 2π.

Lösung b

Der Betrag von $\frac{z_1}{z_2}$ ist der Quotient der Beträge von z_1 und z_2.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{3}$

Die Phase von $\frac{z_1}{z_2}$ ist die Differenz der Phasen plus ein Vielfaches von 2π, das so gewählt wird, dass das Resultat zwischen 0 (eingeschlossen) und 2π (nicht eingeschlossen) liegt.

$\varphi_1 = 1{,}2\pi,\ \varphi_2 = 1{,}5\pi$, $\varphi_1 - \varphi_2 = -0{,}3\pi$. Wir addieren zu diesem Wert 2π und erhalten die Phase des Quotienten $\varphi_{quot} = -0{,}3\pi + 2\pi = 1{,}7\pi$. Sie liegt zwischen 0 und 2π.

ÜBUNG 4

Berechne alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 3 - 4i$, also alle komplexen dritten Wurzeln aus $3 - 4i$. Gib die Ergebnisse in Polardarstellung an, Beträge und Phasen mit 2 Nachkommastellen gerundet.

Antwort

a) $1{,}71\, e^{i\, 1{,}79}$

b) $1{,}71\, e^{i\, 3{,}88}$

c) $1{,}71\, e^{i\, 5{,}98}$

Lösung a)

Zunächst wird die Polardarstellung $re^{i\varphi}$ von $3 - 4i$ berechnet (siehe Übung 2). Die erste gesuchte Wurzel ist dann $w_1 = \sqrt[3]{5} \cdot re^{i\varphi/3}$.

Der Betrag ist $|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$ und die Phase bestimmen wir mit $\cos(\varphi) = \frac{3}{5}$ und $\sin(\varphi) = \frac{-4}{5}$. Der Taschenrechner liefert (gerundet) $\varphi_1 = \arccos(\frac{3}{5}) = 0{,}93$ und $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 = 5{,}36$. Da der Imaginärteil negativ ist, ist die Phase $\varphi = \varphi_2 = 5{,}36$.
Also:
$3 - 4i = 5e^{i5{,}36}$.

Es gibt drei komplexe dritte Wurzeln, Berechnung der ersten:

$$w_1 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\,\frac{5{,}36}{3}} = 1{,}71\, e^{i\, 1{,}79}$$

Lösung b) und c)

Die weiteren Wurzeln erhält man durch Addition von $\frac{2\pi}{3}$ bzw. $2\frac{2\pi}{3}$ zur Phase von w_1.

Die Phase der zweiten Wurzel ist gerundet $1{,}79 + \frac{2\pi}{3} = 3{,}88$.

$$w_2 = 1{,}71\, e^{i\, 3{,}88}$$

Die Phase der dritten Wurzel ist gerundet $1{,}79 + 2\frac{2\pi}{3} = 5{,}98$.

$$w_3 = 1{,}71\, e^{i\, 5{,}98}$$