

Brueckenkurs SoSe24 Uebungen

SoSe 2023

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Aufgabenkatalog - März, 2024

Die Aufgaben sind unterteilt in
○ Verständnisaufgaben, □ Vertiefungsaufgaben, * schwierige Aufgaben

Aufgabe 1: ○ *Reihenfolge der Operationen*
Lösen Sie die Klammern auf.

- a) $-(x + y + z)$
- b) $-(3a - 4)$
- c) $-[5 - (6 + x)]$
- d) $-[(b - c) - a]$
- e) $-[2(-4)(-a)]$
- f) $-[-(5 + a - 2(-a)) - 4]$

Aufgabe 2: ○ *Ausmultiplizieren*
Multiplizieren Sie die Klammern aus.

- a) $5(a + b)$
- b) $3(x + 2)$
- c) $(x + a) \cdot 4$
- d) $(a + 4b) \cdot 2$
- e) $3a \cdot (4 + b)$
- f) $7y \cdot (3 + 2y)$
- g) $4y \cdot (2x + 6y)$
- h) $10a \cdot (5x + 4z)$
- i) $(3y + 2b) \cdot 8ax$

Aufgabe 3: ○ *Ausklammern*
Klammern Sie aus

- a) $3a + 3b$

- b) $xy + 2x$
- c) $a^2b + ab^2$
- d) $24ab + 12a^2b - 3ab^2$
- e) $49x^2y^2 + 21x^2 - 14$
- f) $169a^4b^3 + 65a^3b^5 - 26a^5b^4$
- g) $30a^2b^4c^7 - 6a^2b^4c^7 + 8a^7b^4c^2$
- h) $100xy^2 - 20x^2yz + 50x^2z - 25xyz^2$

Aufgabe 4: \circ *Binomische Formeln*

Fassen Sie die Terme mit binomischen Formeln zusammen.

- a) $x^2 + 2xy + y^2$
- b) $49x^2 + 14xy + y^2$
- c) $16x^2 - 16xy + 4y^2$
- d) $25a^4 + 20a^2b^2 + 4b^4$
- e) $a^8 - 2a^4b^2 + b^4$
- f) $18a + 84ab + 98ab^2$
- g) $4a^2 - b^2$
- h) $18x^2 - 2y^4$

Aufgabe 5: \circ *Brüche in Dezimalzahlen*

Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

- (a) $\frac{1}{10}$
- (b) $\frac{2}{5}$
- (c) $\frac{5}{4}$
- (d) $\frac{6}{3}$
- (e) $\frac{2}{3}$
- (f) $\frac{3}{11}$

Aufgabe 6: \circ *Brüche Erweitern*

Erweitern Sie folgende Brüche, und multiplizieren Sie jeweils Zähler und Nenner aus. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der resultierende Bruch definiert ist.

- a) $\frac{1}{2}$ mit 3
- b) $\frac{5a}{2}$ mit a
- c) $\frac{4a^2}{3b^2}$ mit $2a^2b$
- d) $\frac{3-c}{ab}$ mit $(3+c)$
- e) $\frac{3a+b}{4-c}$ mit ac
- f) $\frac{3(x-2y)}{(x+y)(x-y)}$ mit xy

Aufgabe 7: \circ *Brüche Kürzen*

Kürzen Sie folgende Brüche. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

- a) $\frac{64}{24}$
 b) $\frac{27a}{18b}$
 c) $\frac{54a^2}{a^3}$
 d) $\frac{63a^2b}{14ab^2}$
 e) $\frac{25x-5y}{15xy}$
 f) $\frac{56x^2y-16xy^2}{24yz+40y^2}$
 g) $\frac{12xy-4yz}{16xz+8xy}$
 h) $\frac{3ab^4-17ab^2+39a^2b^2}{ab^2}$
 i) $\frac{28a^3b^3-4ab}{12ab+8a^2b^2}$

Aufgabe 8: \circ *Brüche Addieren und Subtrahieren*

Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

- a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$
 b) $\frac{a}{5} + \frac{2}{10}$
 c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$
 d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8}$
 e) $\frac{3a}{7} + \frac{6a}{3} - \frac{12a}{21}$
 f) $\frac{2}{a+1} + \frac{1}{3a+3} - \frac{4}{a+1}$
 g) $\frac{2x}{x+1} - \frac{3y}{y+1} + \frac{xy}{(x+1)(y+1)}$
 h) $\frac{3a}{6ab} - \frac{7b}{3a} + \frac{2ab}{4}$
 i) $\frac{x}{-x-2y} + \frac{y}{x+2y}$
 j) $\frac{2y}{3z+6} + \frac{1-y}{z+2} + \frac{3x-2xy}{3xz+6x}$

Aufgabe 9: \square *Bruchrechnung*

Die Aufgaben sollten ohne Taschenrechner gelöst werden. Versuchen Sie daher möglichst frühzeitig zu kürzen!

- a) $\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}$
 b) $\frac{\frac{1}{2}-(2+\frac{1}{2})\cdot(-1-\frac{1}{4})}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}$
 c) $\left[-2^2 : \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\right]^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^4 - \left[-5 : \left(1 + \frac{2}{3}\right)\right]^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
 d) $\frac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{-2+\frac{1}{3}} - \frac{-\frac{3}{2}+2^{-3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{7}{12}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)} + \frac{108}{35}$

$$e) \left(\frac{5}{2^{-1}+3^{-1}} - \frac{1}{3^{-1}-4^{-1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{2^{-1}-3^{-1}} - \frac{7}{3^{-1}+4^{-1}} \right) \cdot \left(\frac{5}{6} - 1 \right)^2$$

Aufgabe 10: \circ *Potenzen*

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Potenzen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

$$a) (x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$$

$$b) \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{a} \right) \frac{1}{-a}$$

$$c) (-a^2) \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3$$

$$d) \frac{xy}{-z} \cdot \frac{-xy^2}{z^2} \cdot \frac{x^2(-y)}{z}$$

$$e) (x+y)^{-3}(x+y)^8(x+y)^{-2}$$

$$f) \frac{(x-y)^2-1}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^{-2}}{(x-y)^3}$$

Aufgabe 11: \circ *Potenzen Zusammenfassen*

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

$$a) (a^2)^3$$

$$b) ((-2)^2)^4$$

$$c) (a^2b)^3$$

$$d) \frac{(x-1)^3}{(1-x)^3}$$

$$e) (x-1)^4 + 7(x-1)^4 - 12(x-1)^4 + 3(x-1)^4$$

$$f) 13(a-1)^3 + 2(a-1)^3 - 8(a-1)^3 + 2(a-1)^3$$

$$g) 2^3a^3b^3 \cdot 7^3c^3$$

$$h) x^2yz^3 \cdot xy^2 + (2xyz)^3$$

$$i) 5^2x^{-1}y^3 \cdot 5^{-2}x^2y^{-2}$$

$$j) (4(x^2y^2)^3 - (2xy)^3)^2$$

$$k) 16xy^2 \cdot (2x)^2 - 2^5x^3y^2 + (8x)^2 \cdot x^{-1}(xy)^2$$

$$l) -121ab^3 - (11a^2b)^2 \cdot (-2a^{-3}b)$$

Aufgabe 12: \circ *Wurzelrechnung*

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

$$a) \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$$

$$b) \sqrt[4]{(-2)^2}$$

$$c) \sqrt[3]{\sqrt{ab}}$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1-x}}$$

- e) $\sqrt[4]{x-1} + 7\sqrt[4]{x-1} - 12\sqrt[4]{x-1} + 3\sqrt[4]{x-1}$
- f) $13\sqrt[3]{a-1} + 2\sqrt[3]{a-1} - 8\sqrt[3]{a-1} + 2\sqrt[3]{a-1}$
- g) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{c}$
- h) $\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[2]{z} \cdot \sqrt[4]{x}\sqrt[6]{y} + \sqrt{2xyz}$
- i) $\frac{\sqrt{5}\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}\sqrt{y}}$
- j) $(4\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{2xy})^2$

Aufgabe 13: \circ *Logarithmen*

Berechnen Sie folgende Logarithmen.

- a) $\log_4(64)$
- b) $\log_4(2)$
- c) $\log_7(7^2)$
- d) $\log_2(8)$
- e) $\log_5(25)$
- f) $\log_3(27)$
- g) $\log_{10}(100)$
- h) $\log_e(e)$
- i) $\log_7(\frac{1}{49})$
- j) $\log_4(16)$
- k) $\log_8(64)$
- l) $\log_6(\frac{1}{216})$
- m) $\log_9(81)$

Aufgabe 14: \circ *Logarithmen zusammenfassen*

Fassen Sie die folgenden Logarithmen zusammen.

- a) $\log(2) + 2\log(3) + 3\log(5)$
- b) $3\log(2) - 2\log(7) + \frac{1}{2}\log(3)$
- c) $\frac{1}{2}\log(2) + 4\log(5) - \frac{3}{2}\log(3)$
- d) $2\log(2) + \log(7) - \frac{1}{2}\log(5)$
- e) $5\log(3) - 3\log(2) + \frac{1}{2}\log(7)$
- f) $2\log(3) + \log(5) - 3\log(2)$
- g) $3\log(7) - \frac{1}{2}\log(2) + 2\log(5)$
- h) $\frac{1}{2}\log(7) + \frac{3}{2}\log(2) - 4\log(3)$

i) $4 \log(2) - \frac{1}{2} \log(5) + \log(3)$

j) $\log(3) + 2 \log(7) - 3 \log(2)$

Aufgabe 15: \circ *Basiswechsel von Logarithmen*

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $\frac{\log_7(8)}{\log_7(2)}$

b) $\frac{\log_3(25)}{\log_3(5)}$

c) $\frac{\log_5(27)}{\log_5(3)}$

d) $\frac{\log_2(100)}{\log_2(10)}$

e) $\frac{\log_3(e)}{\log_3(e)}$

f) $\frac{\log_4(49)}{\log_4(7)}$

g) $\frac{\log_2(16)}{\log_2(4)}$

h) $\frac{\log_2(64)}{\log_2(8)}$

i) $\frac{\log_2(216)}{\log_2(6)}$

j) $\frac{\log_3(81)}{\log_3(9)}$

Aufgabe 16: $*$ *Bisektionsverfahren*

Die Idee des Bisektionsverfahrens besteht darin, zunächst untere Schranke a und eine obere Schranke b für eine irrationale Zahl x zu finden. Danach schaut man sich den mittleren Wert $\frac{b-a}{2}$ an und überprüft, ob er eine obere/untere Schranke für die gesuchte Zahl ist und ersetzt die alte obere/untere Schranke durch diesen neuen Wert. Dies wird bis zur gewünschten Genauigkeit wiederholt.

Wenden Sie das Bisektionsverfahren an um Näherungen für die angegebenen irrationalen Zahlen zu finden.

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\log_3(6)$

Aufgabe 17: $*$ *Potenzen von irrationalen Zahlen*

Finden Sie zwei rationale Zahlen, zwischen denen das Ergebnis der angegebenen Potenzen liegt.

a) 2^π

b) 3^e

c) $(2^{10})^\pi$

d) $(3^{100})^e$

Aufgabe 18: ☐ *Teilbarkeit und Division mit Rest*

Bestimmen Sie jeweils, ob eine der beiden angegebenen natürlichen Zahlen die andere teilt. Falls nicht, geben Sie jeweils den Rest bei Division der größeren durch die kleinere Zahl an.

a) 5, 15

e) 25, 505

b) 50, 67

f) 1024, 9

c) 3, 102

g) 10023, 3

d) 129, 129

h) 978654321081, 8

Aufgabe 19: ☐ *Primzahlen und Faktorisierung*

Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen jeweils, ob es sich um Primzahlen handelt. Falls nicht, geben Sie jeweils die Faktorisierung in Primzahlen an.

a) 3

e) 3600

b) 1

f) 3060

c) 1024

g) 137

d) 243

h) 237

Aufgabe 20: ☐ *Kürzen von Brüchen*

Kürzen Sie folgende Brüche jeweils soweit wie möglich (a , b , c seien jeweils beliebige, paarweise teilerfremde, natürliche Zahlen ungleich Null):

a) $\frac{15}{25}$

e) $\frac{(a-b)^3 + (b^3 - a^3)}{36a}$

b) $\frac{720a^2}{12ab}$

f) $\frac{a^{32} - 1024}{a^{16} - 32}$

c) $\frac{48(a^2 - b^2)}{6a + 6b}$

g) $\frac{a^2 + 1024}{a + 1024}$

d) $\frac{ab + ac}{(a+b)^2 - b^2}$

h) $\frac{2310(a^4 - b^2)}{4641(a^2 + b)}$

Aufgabe 21: ☐ *Rechnen mit rationalen Zahlen*

Formen Sie die folgenden Ausdrücke jeweils so um, dass nur ein soweit wie möglich gekürzter Bruch übrigbleibt:

a) $\frac{7}{3} + \frac{15}{24}$

e) $\frac{49}{3} - \frac{150-3}{21}$

b) $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{21+7}{4^2}$

f) $\frac{100}{13} \cdot \frac{196}{10}$

c) $\frac{4}{7} \cdot \frac{49}{12}$

g) $\frac{1+2+3}{2^{10}} \cdot \frac{8^2}{3!}$

d) $\left(2 + \frac{1}{137}\right)^3$

h) $\frac{9}{11} / \frac{121}{27}$

Aufgabe 22: ☐ *Rationale und Irrationale Zahlen*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Zahlen rational oder irrational sind, und be-

weisen Sie gegebenenfalls die Irrationalität:

a) $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{37}$

c) $\sqrt{36}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

f) $\frac{(1+\sqrt{5})^2+(1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})^2-2(1+\sqrt{5})}$

Aufgabe 23: \square *Potenzen und Logarithmen*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke jeweils unter Verwendung der Potenz- und Logarithmengesetze soweit, dass höchstens noch eine Potenz oder ein Logarithmus im Ergebnis auftritt ($a, b, c > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$):

a) $\log_a b + \log_a c - \log_b b^c$

b) $\log_b a \cdot \log_a b$

c) $\log_2 1024 - \log_5 125$

d) $2^{\log_3 9}$

e) $a^n b^n c^{-n}$

f) $(a^n z^{-n})^{1/(n+1)}$

g) $a^m a^n$

h) $(a + b)^m c^m$