

# Übungsblatt 4

zum Mathematischen Brückenkurs  
für Naturwissenschaftler:innen  
im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

## 1. Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Zeigen Sie, dass die Hyperbelfunktionen  $\sinh$  und  $\cosh$  folgenden Beziehungen genügen:

1.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2.  $\sinh(ix) = i \sin x$
3.  $\cosh(ix) = \cos x$
4.  $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$
5.  $\sinh x + \cosh x = e^x$
6.  $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

## 2. Ableitungen von Umkehrfunktionen

Benutzen Sie jeweils die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion, um die Ableitungen folgender Funktionen zu bestimmen:

1.  $x \mapsto \arcsin x$
2.  $x \mapsto \arctan x$
3.  $x \mapsto \operatorname{arsinh} x$
4.  $x \mapsto \operatorname{artanh} x$

## 3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils die maximale Definitionsmenge  $D$  sowie eine Stammfunktion auf  $D$ :

1.  $f(x) = x^2$
2.  $f(x) = \frac{1}{x^4}$
3.  $f(x) = x^5 + x^3 - x$
4.  $f(x) = (x^2 - 1)^2$
5.  $f(x) = e^x$
6.  $f(x) = e^{-x}$
7.  $f(x) = \sin x$
8.  $f(x) = \cos(x + a)$
9.  $f(x) = \sinh x$
10.  $f(x) = \cosh x$
11.  $f(x) = \log x$
12.  $f(x) = ax^2 + e^{-bx} + \log(cx + d)$
13.  $f(x) = x \log x$
14.  $f(x) = x^n \log x$
15.  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$
16.  $f(x) = x^x$
17.  $f(x) = e^{ax} \sin(\omega x)$
18.  $f(x) = \sin x \cos x$
19.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20.  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
21.  $f(x) = \sin(\lambda x) \cos(\lambda x)$
22.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
23.  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}$
24.  $f(x) = e^{-\sin^2 x} \cos x \sin x$
25.  $f(x) = \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$
26.  $f(x) = \frac{7x^3-5x^2-6}{x^4-x^3-x^2-x-2}$

#### 4. Bestimmte Integrale

Bestimmen Sie jeweils den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 x \, x$  | 14. $\int_{-\pi}^{\pi/3} \sin x \cos x \, x$                            |
| 2. $\int_a^b x^n \, x$                                      | 15. $\int_1^n x^n \log x \, x$  |
| 3. $\int_\alpha^\beta (3x^2 - 2\beta x + \alpha\beta) \, x$ | 16. $\int_0^1 \frac{7x^3 - 5x^2 - 6}{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2} x$        |
| 4. $\int_0^1 x \, x$  | 17. $\int_2^3 \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} x$                                 |
| 5. $\int_0^\pi \sin \alpha \, \alpha$                       | 18. $\int_0^y \frac{x}{1-xy}, y < 1$                                    |
| 6. $\int_0^\pi \cos \beta \, \beta$                         | 19. $\int_0^y \frac{x}{1+xy}, y > 0$                                    |
| 7. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, x$                          | 20. $\int_0^{\pi/2 - \sin^2 x} \cos x \sin x \, x$                      |
| 8. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} \, x$                          | 21. $\int_{-1}^1 \tanh t \, t$  |
| 9. $\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2} x$                            | 22. $\int_2^{\frac{\log(\log \xi)}{\xi}} \xi$                           |
| 10. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \log x \, x$                      | 23. $\int_2^{\frac{\log \xi \log(\log \xi)}{\xi}} \xi$                  |
| 11. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log x}{x} x$               | 24. $\int_0^\omega \sinh(\cosh u) \sinh u \, u$                         |
| 12. $\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega \, \omega$                 | 25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 9) \cos x}{\cos^2 x + 8} x$ |
| 13. $\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega \cos \omega \, \omega$     | 26. $\int_0^2 x^{5-x^2} \, x$   |

#### 5. Uneigentliche Integrale

Bestimmen Sie jeweils, ob folgende uneigentliche Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert:

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 1. $\int_0^\infty \frac{x}{x}$        | 8. $\int_0^\infty x \, x$                             |
| 2. $\int_1^\infty \frac{y}{y}$        | 9. $\int_{-\infty}^0 x \, x$                          |
| 3. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2}$      | 10. $\int_0^\infty -x \, x$                           |
| 4. $\int_1^\infty \frac{x}{x^2}$      | 11. $\int_{-\infty}^0 -x \, x$                        |
| 5. $\int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{z}}$ | 12. $\int_0^\infty x^{-x} \, x$                       |
| 6. $\int_1^\infty \frac{u}{\sqrt{u}}$ | 13. $\int_{-\infty}^\infty x^{-x^2/2} \, x$           |
| 7. $\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{u}}$      | 14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{1+\omega^2}$ |