Mathematischer Brückenkurs

Einführung

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Willkommen an der Universität Mainz!

- Mathematik ist die Grundlage aller Naturwissenschaften.
- Dieser Brückenkurs richtet sich an Studienanfänger in naturwissenschaftlichen Fächern (Biologie, Geowissenschaften, Physik, Chemie, ...)
- Zeitumfang: Ganztätig drei Wochen vor Semesterbeginn.

Ziele des Brückenkurses

- Sie haben Themen aus der Schulmathematik vergessen:
  Auffrischen der Kenntnisse.
- Sie kommen von unterschiedlichen Schulen, aus verschiedenen (Bundes-) Ländern und haben in der Schule unterschiedliche optionale Themen behandelt:
  Angleichen des Kenntnisstandes.
- Sie sind neu an der Universität:
  Knüpfen neuer sozialer Kontakte.

Uni ist nicht gleich Schule!

- Mit der Uni beginnt ein neuer Lebensabschnitt.
- Sie sind erwachsen und werden als erwachsene Menschen behandelt.
- Im Allgemeinen keine Anwesenheitspflicht!

Uni ist nicht gleich Schule:

Die Kehrseite der Freiheit:

- Sie sind selbst verantwortlich, wie Sie lernen.
- Stoffmenge und Tempo einer Vorlesung liegt deutlich über einer Schulstunde.
- In der Vorlesung wird ein neues Thema einmal diskutiert, es wird nicht gewartet, bis es auch der Letzte verstanden hat.

Abschnitt 2

Organisatorisches

Corona

Im Wintersemester 2020/21:

- Mathematischer Brückenkurs A (Prof. T. Hurth):
  Soviel Präsenz wie möglich.
- Mathematischer Brückenkurs B (Prof. S. Weinzierl):
  Rein Online.

Organisation

Mathematischer Brückenkurs B:

9:15	Vorlesung (via BigBlueButton, wird aufgezeichnet)
11:30	Plenumsdiskussion (via BigBlueButton)
14:00	Übungsgruppen (via BigBlueButton)

Organisation

Als Plattform wird BigBlueButton verwendet:

- Link für Vorlesung und Plenumsdiskussion:
  `https://bbb.rlp.net/b/wei-hgp-axv-fqv`
- Übungsgruppen:

Gruppe 1	`https://bbb.rlp.net/b/sch-ki2-awt-bxf`
Gruppe 2	`https://bbb.rlp.net/b/sau-pff-7xa-fi5`
Gruppe 3	`https://bbb.rlp.net/b/koc-jeb-381-rvo`
Gruppe 4	`https://bbb.rlp.net/b/kre-k13-ljh-nbc`

Webseite des Brückenkurses (Aktuelle Informationen, Folien der Vorlesung und Übungsblätter als pdf-Dateien):
`https://particlephysics.uni-mainz.de/weinzierl/vorkurs/`

Studienfächer

Sie studieren:

(A) Biologie

(B) Geowissenschaften

(C) Chemie

(D) Physik

(E) sonstige Fächer

Ort

Sie befinden sich jetzt

(A) in Mainz

(B) im Umkreis von 10 km um Mainz

(C) im Umkreis von 50 km um Mainz

(D) im restlichen Universum

Quiz

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = ?$$

(A) $\frac{5}{8}$

(B) $\frac{5}{15}$

(C) $\frac{19}{15}$

(D) $\frac{2}{5}$

Quiz

Bestimmen Sie x:

$$\frac{2x-3}{x+3} = 5$$

(A) $x = \frac{3}{2}$
(B) $x = -3$
(C) $x = -6$
(D) $x = \frac{5}{2}$

Quiz

$$\log_2\left(32^4\right) = ?$$

(A) $\frac{5}{4}$
(B) 9
(C) 20
(D) 32

Quiz

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 1$$

Die Ableitung $f'(1)$ ist

(A) 0

(B) 5

(C) 6

(D) 7

Quiz

$$\int\limits_0^1 \left(3x^2 - 6x + 1\right) dx = ?$$

(A) -42

(B) -2

(C) -1

(D) 7

Einteilung der Übungsgruppen

Sei N die Anzahl der Übungsgruppen.

- Sie nehmen die Zahl Ihres Geburtsmonats (Januar = 1, ..., Dezember = 12).
- Sie teilen diese Zahl durch N mit Rest.
- Falls ein Rest übrig bleibt, gibt der Rest Ihre Übungsgruppe an.
- Bleibt kein Rest übrig, so sind Sie in Gruppe N.

Einteilung der Übungsgruppen

Beispiel (3 Übungsgruppen)

- Gruppe 1: Januar, April, Juli, Oktober
- Gruppe 2: Februar, Mai, August, November
- Gruppe 3: März, Juni, September, Dezember

Beispiel (4 Übungsgruppen)

- Gruppe 1: Januar, Mai, September
- Gruppe 2: Februar, Juni, Oktober
- Gruppe 3: März, Juli, November
- Gruppe 4: April, August, Dezember

Organisation

Erste Übungsgruppen am Montag, 12.10.2020, 14h:

- Kennenlernen.
- Noch keine mathematischen Übungen.
- Nutzen Sie diese Gelegenheit, um Kontaktdaten auszutauschen!

Literatur

- R. Brauner, F. Geiß
  Abiturwissen Mathematik.
  Fischer-Verlag, 2004.
- S. Proß, Th. Imkamp
  Brückenkurs Mathematik.
  Springer-Verlag, 2018.
- G. Walz, F. Zeilfelder, Th. Rießinger
  Brückenkurs Mathematik.
  Springer-Verlag, 2019.

Abschnitt 3

Schreibweisen und Notation

Notation

- $\{a, b, c\}$: Menge der Elemente a, b, und c.
  Die Ordnung spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$

Notation

- $\{a, b, c\}$: Menge der Elemente a, b, und c.
  Die Ordnung spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$
- $a \in A$: a ist ein Element der Menge A.

Notation

- $\{a, b, c\}$: Menge der Elemente a, b, und c.
  Die Ordnung spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$
- $a \in A$: a ist ein Element der Menge A.
- $A \subset B$: Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B.

Notation

- $\{a, b, c\}$: Menge der Elemente a, b, und c.
  Die Ordnung spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$
- $a \in A$: a ist ein Element der Menge A.
- $A \subset B$: Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B.
- Vereinigung: $A \cup B$ enthält alle Elemente sowohl aus A als auch aus B.
  $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.

Notation

- $\{a, b, c\}$: Menge der Elemente a, b, und c.
  Die Ordnung spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$
- $a \in A$: a ist ein Element der Menge A.
- $A \subset B$: Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B.
- Vereinigung: $A \cup B$ enthält alle Elemente sowohl aus A als auch aus B.
  $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.
- Durchschnitt: $A \cap B$ enhält alle Elemente die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
  $\{a, b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\}$.

Notation

- Differenzmenge: $A \backslash B$ enthält alle Elemente, die in A enthalten sind, die aber nicht in B enthalten sind.
  $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c\} = \{a, d\}$

Notation

- Differenzmenge: $A \backslash B$ enthält alle Elemente, die in A enthalten sind, die aber nicht in B enthalten sind.
  $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c\} = \{a, d\}$
- $A \times B$: Produktmenge, dies ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$ gilt.
  $\{a\} \times \{b, c\} = \{(a, b), (a, c)\}$

Notation

- Differenzmenge: $A \backslash B$ enthält alle Elemente, die in A enthalten sind, die aber nicht in B enthalten sind.
  $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c\} = \{a, d\}$
- $A \times B$: Produktmenge, dies ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$ gilt.
  $\{a\} \times \{b, c\} = \{(a, b), (a, c)\}$
- $[a, b]$: Intervall, die Grenzen sind im Intervall enthalten:
  $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$

Notation

- Differenzmenge: $A \backslash B$ enthält alle Elemente, die in A enthalten sind, die aber nicht in B enthalten sind.
  $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c\} = \{a, d\}$
- $A \times B$: Produktmenge, dies ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$ gilt.
  $\{a\} \times \{b, c\} = \{(a, b), (a, c)\}$
- $[a, b]$: Intervall, die Grenzen sind im Intervall enthalten:
  $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$
- $]a, b[$: Intervall, die Grenzen sind im Intervall nicht enthalten:
  $a \notin [a, b]$, $b \notin [a, b]$

Stefan Weinzierl (Uni Mainz) Mathematischer Brückenkurs WiSe 2020/21 23 / 30

Notation

- Differenzmenge: $A \backslash B$ enthält alle Elemente, die in A enthalten sind, die aber nicht in B enthalten sind.
  $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c\} = \{a, d\}$
- $A \times B$: Produktmenge, dies ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$ gilt.
  $\{a\} \times \{b, c\} = \{(a, b), (a, c)\}$
- $[a, b]$: Intervall, die Grenzen sind im Intervall enthalten:
  $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$
- $]a, b[$: Intervall, die Grenzen sind im Intervall nicht enthalten:
  $a \notin [a, b]$, $b \notin [a, b]$
- Analog: $[a, b[$ und $]a, b]$.

Notation

- Logisch und: $\wedge$

$$
\begin{aligned}
0 \wedge 0 &= 0 \\
0 \wedge 1 &= 0 \\
1 \wedge 0 &= 0 \\
1 \wedge 1 &= 1
\end{aligned}
$$

Notation

- Logisch und: $\wedge$

$$\begin{aligned} 0 \wedge 0 &= 0 \\ 0 \wedge 1 &= 0 \\ 1 \wedge 0 &= 0 \\ 1 \wedge 1 &= 1 \end{aligned}$$

- Logisch oder: $\vee$

$$\begin{aligned} 0 \vee 0 &= 0 \\ 0 \vee 1 &= 1 \\ 1 \vee 0 &= 1 \\ 1 \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

Notation

- Logisch und: $\wedge$

$$\begin{aligned} 0 \wedge 0 &= 0 \\ 0 \wedge 1 &= 0 \\ 1 \wedge 0 &= 0 \\ 1 \wedge 1 &= 1 \end{aligned}$$

- Logisch oder: $\vee$

$$\begin{aligned} 0 \vee 0 &= 0 \\ 0 \vee 1 &= 1 \\ 1 \vee 0 &= 1 \\ 1 \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

- Negation: $\neg$

$$\begin{aligned} \neg 0 &= 1 \\ \neg 1 &= 0 \end{aligned}$$

Notation

- $\exists$: Es existiert

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle
- ∞: Symbol für Unendlich.

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle
- ∞: Symbol für Unendlich.
- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle
- ∞: Symbol für Unendlich.
- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$: Die ganzen Zahlen $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle
- ∞: Symbol für Unendlich.
- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$: Die ganzen Zahlen $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Q}$: Die rationalen Zahlen, z.B. $\frac{2}{3}$

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle
- ∞: Symbol für Unendlich.
- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$: Die ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{Q}$: Die rationalen Zahlen, z.B. $\frac{2}{3}$
- $\mathbb{R}$: Die reellen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$

Notation

- $\exists$: Es existiert
- $\forall$: Für alle
- ∞: Symbol für Unendlich.
- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$: Die ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{Q}$: Die rationalen Zahlen, z.B. $\frac{2}{3}$
- $\mathbb{R}$: Die reellen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$
- $\mathbb{C}$: Die komplexen Zahlen, z.B. $\sqrt{-2}$

Notation

- $\sum$: Summenzeichen

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

Notation

- $\sum$: Summenzeichen

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

- $\prod$: Produktzeichen

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Notation

- $\sum$: Summenzeichen

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

- $\prod$: Produktzeichen

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

- $n!$: Fakultät.

$$n! \; = \; 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \qquad 0! \; = \; 1.$$

Notation

- $\sum$: Summenzeichen

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

- $\prod$: Produktzeichen

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \quad = \quad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

- $n!$: Fakultät.

$$n! \; = \; 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \qquad 0! \; = \; 1.$$

- $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$: Binomialkoeffizient:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Notation

- $\lim\limits_{x \to a}$: Grenzwert für den Fall, daß sich x dem Wert a annähert.

Notation

- $\lim\limits_{x \to a}$: Grenzwert für den Fall, daß sich x dem Wert a annähert.
- Ableitung: Sei $f(x)$ eine Funktion von x.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

Stefan Weinzierl (Uni Mainz) Mathematischer Brückenkurs WiSe 2020/21 27 / 30

Notation

- $\lim\limits_{x \to a}$: Grenzwert für den Fall, daß sich x dem Wert a annähert.
- Ableitung: Sei $f(x)$ eine Funktion von x.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

- Integral:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \Delta x_j,$$
$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \ x_0 = a, \ x_n = b, \ \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Notation

Neben lateinischen Buchstaben verwendet man auch oft griechische Buchstaben:

α	alpha	β	beta	γ	gamma
δ	delta	ϵ oder ε	epsilon	ζ	zeta
η	eta	θ oder ϑ	theta	ι	iota
κ	kappa	λ	lambda	μ	mu
ν	nu	ξ	xi	o	o
π oder ϖ	pi	ρ oder ϱ	rho	σ oder ς	sigma
τ	tau	υ	upsilon	ϕ oder φ	phi
χ	chi	ψ	psi	ω	omega

Notation

Griechische Großbuchstaben:

A	Alpha	B	Beta	Γ	Gamma
Δ	Delta	E	Epsilon	Z	Zeta
H	Eta	Θ	Theta	I	Iota
K	Kappa	Λ	Lambda	M	Mu
N	Nu	Ξ	Xi	O	O
Π	Pi	P	Rho	Σ	Sigma
T	Tau	Υ	Upsilon	Φ	Phi
X	Chi	Ψ	Psi	Ω	Omega

Notation

- Aus dem hebräischen Alphabet:

  $$\aleph \qquad \text{Aleph.}$$

  Üblicherweise wird dieser Buchstabe zur Beschreibung der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen verwendet.

- Aus dem kyrillischen Alphabet:

  $$\text{ш} \qquad \text{Sha.}$$

  Üblicherweise verwendet man dieses Zeichen zur Notation für das Shuffle-Produkt.

  Dies ist ein spezielles Produkt, wird aber in dieser Vorlesung nicht vorkommen.

Zahlen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen

- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Die Axiome von Peano für die natürlichen Zahlen:

- *(P1) Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl.*
- *(P2) Falls n eine natürliche Zahl, so ist die nachfolgende Zahl $n + 1$ ebenfalls eine natürliche Zahl.*
- *(P3) Die natürlichen Zahlen sind die minimale Menge, welche die ersten beiden Axiome erfüllt.*

- $\mathbb{N}_0$: Die natürlichen Zahlen mit der Null $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Die natürlichen Zahlen

Sei $a, b \in \mathbb{N}$:

- Addition: $a + b \in \mathbb{N}$
- Aber: $a - b$ ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl.
  Gegenbeispiel: $a = 1$ und $b = 3$.
- Multiplikation: $a \cdot b \in \mathbb{N}$
- Aber: a/b ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl.
  Gegenbeispiel: $a = 1$ und $b = 3$.

Der Induktionsbeweis

Man ist oft in der Situation eine Aussage der Form

$$f(n) \quad = \quad g(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen zu müssen. Hier bietet sich der Induktionsbeweis an.

Der Induktionsbeweis verläuft in zwei Teilen:

1. Induktionsanfang: Im ersten Teil zeigt man zunächst, daß die Behauptung für $n = 1$ richtig ist.
2. Induktionsschritt: Im zweiten Teil nimmt man an, daß die Behauptung für $(n-1)$ richtig ist und zeigt, daß sie dann auch für n richtig ist.

Der Induktionsbeweis

Man sieht leicht, daß dies die allgemeine Aussage beweist:

- Für $n = 1$ wird die Aussage im ersten Teil bewiesen.
- Für $n = 2$ können wir dann verwenden, daß die Aussage für $n = 1$ richtig ist.
  Somit liegt die Voraussetzung für den zweiten Teil vor und es folgt aufgrund des zweiten Teils die Richtigkeit für $n = 2$.
- Diese Argumentation läß sich nun fortsetzen:
  Da die Aussage für $n = 2$ richtig ist, muß sie aufgrund des zweiten Teils auch für $n = 3$ richtig sein, usw..

Der Induktionsbeweis

Beispiel

Für jede natürliche Zahl n ist die folgende Behauptung zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ haben wir

$$\textit{linke Seite}: \quad \sum_{j=1}^{1} j = 1.$$

$$\textit{rechte Seite}: \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Der Induktionsbeweis

Induktionsschritt:

Wir dürfen nun annehmen, daß die Behauptung für $n-1$ richtig ist, und müssen zeigen, daß sie dann auch für n gilt. In unserem Fall:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \left(\sum_{j=1}^{n-1} j \right) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Abschnitt 2

Die ganzen Zahlen

Gruppen

Definition einer Gruppe:

Sei G eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung $\circ$, d.h. eine Abbildung $\circ : G \times G \to G$. Das Paar $(G, \circ)$ ist eine Gruppe, falls:

- *(G1) $\circ$ ist assoziativ: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$*
- *(G2) Es gibt ein links-neutrales Element : $e \circ a = a$ für alle $a \in G$*
- *(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein links-inverses Element a^{-1} : $a^{-1} \circ a = e$*

Eine Gruppe $(G, \circ)$ nennt man kommutativ oder Abelsch, falls $a \circ b = b \circ a$.

In einer Gruppe ist das links-neutrale Element identisch mit dem recht-neutralen Element.
Ebenso sind links- und rechts-inverses Element identisch.

Die ganzen Zahlen

$\mathbb{Z}$: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
Die ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine Gruppe.

- Assoziativgesetz:
  Beispiel: $3 + (5 + 7) = (3 + 5) + 7$
- Die Null ist das links-neutrale Element:
  Beispiel: $0 + 7 = 7$.
- Das links-inverse Element zu a ist $(-a)$:
  Beispiel: Es ist $(-7) + 7 = 0$.
- Die Gruppe ist kommutativ:
  Beispiel: $5 + 7 = 7 + 5$.

Ringe

Definition eines Rings:

Ein **Ring** *ist eine nicht-leere Menge R mit zwei Verknüpfungen, die üblicherweise als $+$ und $\cdot$ geschrieben werden, so daß*

- *(R1) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.*
- *(R2) $(R, \cdot)$ ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*
- *(R3) Es gelten die Distributivgesetze:*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

Die ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen Ring.

- Assoziativgesetz:
  Beispiel: $3 \cdot (5 \cdot 7) = (3 \cdot 5) \cdot 7$
- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (5 + 7) &= (3 \cdot 5) + (3 \cdot 7) \\ (3 + 5) \cdot 7 &= (3 \cdot 7) + (5 \cdot 7) \end{aligned}$$

Abschnitt 3

Die rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}$: Die rationalen Zahlen.

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{ r \;\middle|\; r = \frac{p}{q}, \;\; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \right\}.$$

Die rationalen Zahlen sind bezüglich der Division abgeschlossen. Sie bilden einen Körper.

Körper

Definition eines Körpers:

Eine nicht-leere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ nennt man **Körper**, *falls gilt:*

- *(K1) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe.*
- *(K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.*
- *(K3) Es gelten die Distributivgesetze:*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

Bruchrechnen

- Erweitern/Kürzen:

$$\frac{c \cdot p_1}{c \cdot q_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

- Multiplikation:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- Division:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Bruchrechnen

- Addition:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- Subtraktion:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

Beispiele

- Erweitern/Kürzen:

$$\frac{15}{9} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

- Addition:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15}$$

- Division:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Potenzen

Für Potenzen schreiben wir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

Rechnen mit Potenzen:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiele

- Gleicher Exponent:

$$2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7 = 6^7$$

- Gleiche Basis:

$$2^5 \cdot 2^7 = 2^{(5+7)} = 2^{12}$$

- Potenz einer Potenz:

$$\left(3^2\right)^5 = 3^{(2 \cdot 5)} = 3^{10}$$

Quiz

$$\frac{x^{-1} x^3 x^5}{x^2 x^7} = ?$$

(A) 0

(B) 1

(C) x^2

(D) $\frac{1}{x^2}$

Die binomischen Formeln

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b \\
&= a^2 - ab + ab - b^2 \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

Abschnitt 4

Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen

$\mathbb{R}$: Die reellen Zahlen.
Die reellen Zahlen bilden einen Körper.

- Alle rationalen Zahlen sind in den reellen Zahlen enthalten.
- $\mathbb{R}$ enthält Zahlen, die nicht rational sind. Diese nennt man irrational.
  - $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. $\sqrt{2}$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Zahlen, welche Lösungen einer algebraischen Gleichung sind, nennt man algebraisch.
  - $\mathbb{R}$ enthält auch irrationale Zahlen, die keine Lösung einer algebraischen Gleichung sind. Solche Zahlen nennt man transzendental. Die Kreiszahl π oder die Eulersche Konstante e sind transzendental.

Cauchy-Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen nennt man **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Anordnungseigenschaften

Die reellen Zahlen sind **angeordnet**:

Anordnungsaxiome:

Es sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet ($x > 0$), *so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:*

- *(O1) Es gilt genau eine der Beziehungen* $x < 0$, $x = 0$ *oder* $x > 0$.
- *(O2) Aus* $x > 0$ *und* $y > 0$ *folgt* $x + y > 0$.
- *(O3) Aus* $x > 0$ *und* $y > 0$ *folgt* $x \cdot y > 0$.

Man nennt eine Ordnung **archimedisch**, falls zu jedem $x > 0$ und $y > 0$ ein natürliche Zahl n existiert, so daß

$$n \cdot x > y.$$

Die reellen Zahlen

Axiomatisch lassen sich die reellen Zahlen als ein Körper, der archimedisch angeordnet ist und in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, charakterisieren.

Lineare Gleichungen

Es seien $a \neq 0$ und b gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte. Man nennt

$$ax + b = 0$$

eine lineare Gleichung für x.

Die Gleichung hat die Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

Quadratische Gleichungen (*abc*-Formel)

Es seien $a \neq 0$, b und c gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte. Man nennt

$$ax^2 + bx + c = 0$$

eine quadratische Gleichung für x.
Falls $D = b^2 - 4ac \geq 0$, so hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

Quadratische Gleichungen (*pq*-Formel)

Da $a \neq 0$ können wir durch a teilen:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

Setzen wir $p = b/a$ und $q = c/a$ so ergibt sich

$$x^2 + px + q = 0$$

Falls $D = p^2 - 4q \geq 0$, so hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Abschnitt 5

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Wir betrachten Zahlen der Form

$$a + b\sqrt{3}, \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$

Wir bezeichnen die Menge dieser Zahlen als

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{8}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$
$$\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Satz

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ *ist ein Körper.*

Abgeschlossenheit

- Addition:

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3}$$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned}\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) \cdot \left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right) &= \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2\sqrt{3} + b_1 a_2\sqrt{3} + b_1 b_2 \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2\sqrt{3} + b_1 a_2\sqrt{3} + 3 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 + 3 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\sqrt{3}\end{aligned}$$

Neutrale Elemente

- Addition:

$$0 + \left(a + b\sqrt{3}\right) = \left(0 + 0 \cdot \sqrt{3}\right) + \left(a + b\sqrt{3}\right) = a + b\sqrt{3}$$

- Multiplikation:

$$1 \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) = \left(1 + 0 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) = a + b\sqrt{3}$$

Inverse Elemente

- Addition:

$$-\left(a+b\sqrt{3}\right) = (-a)+(-b)\sqrt{3}$$

- Multiplikation $(a,b)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b\sqrt{3}} &= \frac{a-b\sqrt{3}}{\left(a+b\sqrt{3}\right)\left(a-b\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}\\ &= \frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Beispiel

Das zu $1+\sqrt{3}$ bezüglich der Multiplikation inverse Element ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{3}} &= \frac{1-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 1\end{aligned}$$

Bemerkung

Bei den Grundrechenarten mit Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ ist der wesentliche Trick

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3.$$

Setzen wir $w = \sqrt{3}$ und betrachten Zahlen $a + bw$, so lautet der wesentliche Trick

$$w^2 = 3.$$

Quiz

$$i^2 = ?$$

(A) -1

(B) unbekannt

Komplexe Zahlen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Motivation und Definition

Motivation

Die reellen Zahlen enthalten algebraische Zahlen, so zum Beispiel die Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ der Gleichung

$$x^2 = 2.$$

Aber: Nicht jede algebraische Zahl ist eine reelle Zahl. So hat zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 = -2$$

keine reellen Lösungen.

Definition der komplexen Zahlen

Definition

Man definiert die **imaginäre Einheit** i als eine Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Analogie mit $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Definition

Setzen wir $w = \sqrt{3}$, so ist w eine Lösung der Gleichung

$$w^2 = 3.$$

Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + bw \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition der Addition und der Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,, \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} (1+2i) + (3+4i) &= 4 + 6i \\ (1+2i) \cdot (3+4i) &= -5 + 10i \end{aligned}$$

Quiz

Sei $z_1 = 7 + 13i$ und $z_2 = 2 - 5i$.

$$z_1 + z_2 = ?$$

(A) $17i$

(B) $9 + 8i$

(C) $9 + 18i$

(D) $5 - 18i$

Quiz

Sei $z_1 = 5 + 9i$ und $z_2 = 2i$.

$$z_1 \cdot z_2 \quad = \quad ?$$

(A) $10 + 18i$

(B) $10 - 18i$

(C) $-18 + 10i$

(D) $18 + 10i$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition der Subtraktion und Division:

$$\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,, \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.
\end{aligned}$$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
(1+2i)-(3+4i) &= (1-3)+i\,(2-4) \\
&= -2-2i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1+2i}{3+4i} &= \frac{(1+2i)\,(3-4i)}{(3+4i)\,(3-4i)} \\
&= \frac{(3+8)+i\,(6-4)}{9+16} \\
&= \frac{11}{25}+\frac{2}{25}i.
\end{aligned}
$$

Quiz

Sei $z_1 = 6+8i$ und $z_2 = 2i$.

$$
\frac{z_1}{z_2} = ?
$$

(A) 10
(B) $3+4i$
(C) $4-3i$
(D) $4+3i$

Der Körper der komplexen Zahlen

- Mit dieser Addition und Multiplikation bilden die komplexen Zahlen einen Körper.
- Dieser Körper ist algebraisch abgeschlossen, d.h. die Nullstellen eines jeden Polynoms liegen in dem Körper.
- Der Körper ist allerdings nicht angeordnet.
- Das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Nullstellen eines Polynoms

Es seien $c_n, c_{n-1}, \dots c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Gleichung

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 \quad = \quad 0.$$

Diese Gleichung hat für die unbekannte Variable z in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Anders ausgedrückt: Ein Polynom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Vielfachheiten

Beispiel

Betrachte das Polynom

$$(z-4)\,(z-5)^2$$

Die Nullstelle $z = 4$ hat die Vielfachtheit 1, die Nullstelle 5 hat die Vielfachtheit 2.
Das Polynom hat den Grad 3, es sollte also drei Nullstellen haben.
Eine einfache Nullstelle und eine doppelte Nullstelle ergibt

$$1+2 \quad = \quad 3.$$

Nullstellen eines Polynoms

Beispiel

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$2z^2 - 8z + 26 \quad = \quad 0$$

Die Diskriminante ist

$$D \quad = \quad b^2 - 4ac \quad = \quad -144$$

Somit

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{-144}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{(-1)\cdot(12)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(8 \pm 12i\right) = 2 \pm 3i \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil

Definition

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.
Man bezeichnet x als Realteil und y als Imaginärteil.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z &= x, \\ \mathrm{Im}\, z &= y. \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, (3+5i) &= 3, \\ \mathrm{Im}\, (3+5i) &= 5. \end{aligned}$$

Konjugation

Definition

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl ist

$$z^* = x - iy.$$

Beispiel

$$(3+5i)^* = 3 - 5i$$

Rechenregeln

$$(z^*)^* = z,$$

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^*,\\ (z_1 - z_2)^* &= z_1^* - z_2^*,\\ (z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^*,\\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}\left(z + z^*\right), \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}\left(z - z^*\right).$$

Betrag einer komplexen Zahl

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Es ist

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2.$$

Definition

Als Betrag der komplexen Zahl bezeichnet man

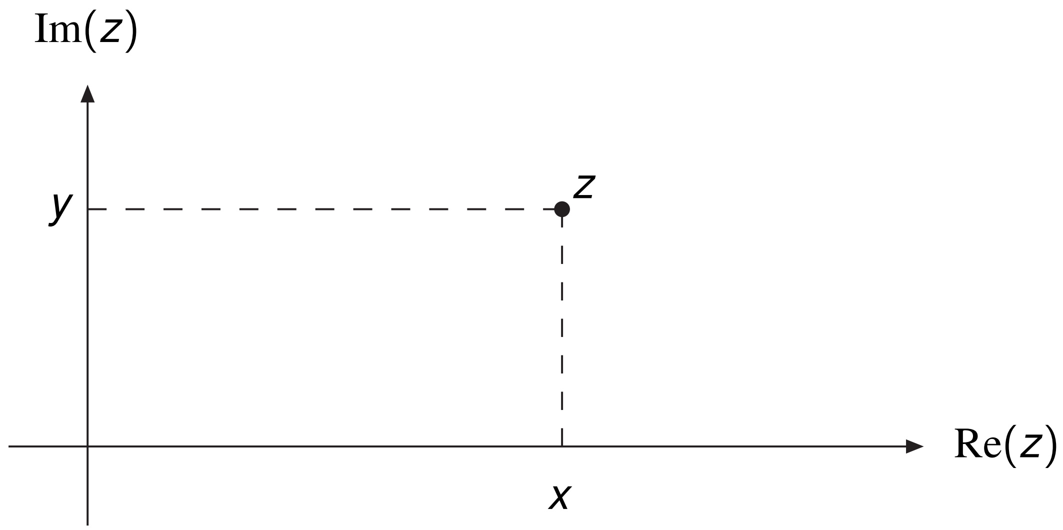
$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Beispiel

$$|3 + 5i| = \sqrt{(3 + 5i)(3 - 5i)} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

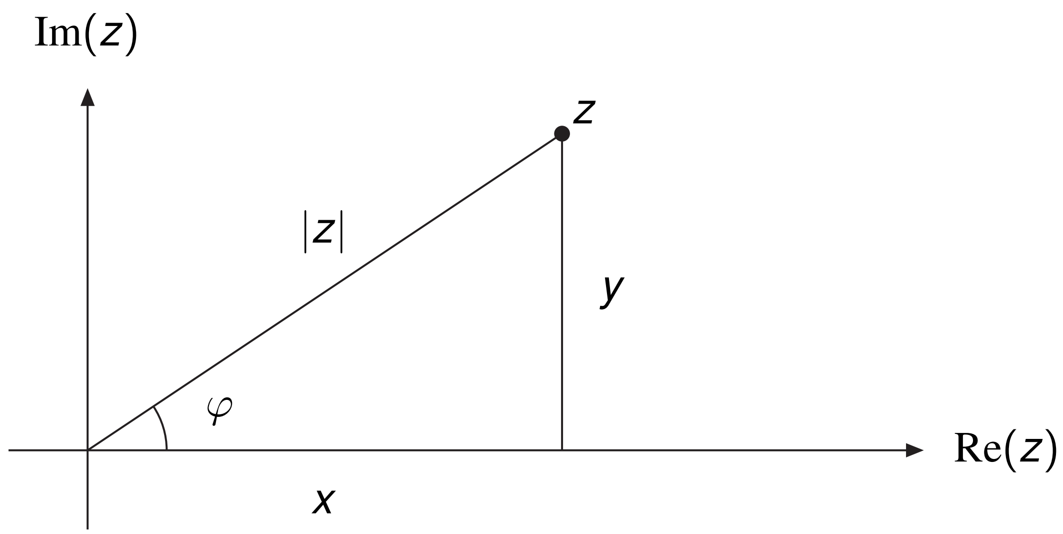
Die komplexe Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch ein Paar (x, y) zweier reeller Zahlen beschrieben.



Die reellen Zahlen sind genau die Zahlen, für die $\mathrm{Im}(z) = 0$ gilt.

Die komplexe Zahlenebene



Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

φ nennt man das Argument oder die Phase der komplexen Zahl.

Umrechnung: Normalform in Polarform

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \ x=0,\ y>0, \\ \varphi &= \frac{3\pi}{2} \quad \text{für } \ x=0,\ y<0. \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichung $\tan\varphi = y/x$ nach φ ergibt

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\frac{y}{x}, && \text{für } x>0, y\geq 0, \\ \varphi &= \pi + \arctan\frac{y}{x}, && \text{für } x<0 \\ \varphi &= 2\pi + \arctan\frac{y}{x}, && \text{für } x>0, y<0. \end{aligned}$$

Umrechnung: Polarform in Normalform

$$x = |z|\cos\varphi, \qquad y = |z|\sin\varphi.$$

Multiplikation und Division in Polarform

In der Normalform hatten wir:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

In der Polarform sind Multiplikation und Division besonders einfach:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\,. \end{aligned}$$

Die Formel von Moivre

Aus

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

folgt insbesondere

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)\,.$$

Diese Gleichung wird auch als Formel von Moivre bezeichnet.

Die Formel von Euler

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Wir werden später komplexwertige Funktionen kennenlernen. Im Vorgriff soll allerdings hier schon die Formel von Euler erwähnt werden

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Diese Formel werden wir später mit Hilfe der Reihendarstellung der Funktionen $\exp$, $\sin$ und $\cos$ relativ einfach beweisen können. Somit

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Multiplikation und Division mit der Formel von Euler

Es sei $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$. Dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Quiz

$$i^9 \quad = \quad ?$$

(A) $-i$

(B) i

(C) $9i$

(D) $9+i$

Antwort

$$\begin{aligned} i^9 &= i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \\ &= i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i \\ &= (-1)^4 \cdot i \\ &= i \end{aligned}$$

Betrag und Argument von i

Wir schreiben i in Polarform: Es ist

$$|i| = \sqrt{i \cdot i^*} = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1.$$

Da $i = 0 + 1 \cdot i$ und somit $x = 0$ und $y = 1$ gilt

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Somit

$$i = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}.$$

Potenzen von i

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Mit Formel von Moivre haben wir

$$i^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Insbesondere:

$$\begin{array}{cccc}
i^{-4} = 1, & i^{-3} = i, & i^{-2} = -1, & i^{-1} = -i, \\
i^{0} = 1, & i^{1} = i, & i^{2} = -1, & i^{3} = -i, \\
i^{4} = 1, & i^{5} = i, & i^{6} = -1, & i^{7} = -i, \\
i^{8} = 1, & i^{9} = i, & i^{10} = -1, & i^{11} = -i,
\end{array}$$

Quiz

$$\sqrt{i} \quad = \quad ?$$

(A) -1

(B) i

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

(D) $-1+i$

Vektoren

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Motivation und Definition

Motivation

Aus der Schulmathematik sind die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bekannt. Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ können durch zwei reelle Zahlen x und y beschrieben werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ können durch drei reelle Zahlen x, y und z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Motivation

Wir können das Konzept in zwei Richtungen erweitern:

- Wir lassen andere Dimensionen zu und beschränken uns nicht mehr auf Vektorräume der Dimension 2 und 3.
  Beispiel: $\mathbb{R}^n$
- Wir lassen andere Grundkörper zu, z.B die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
  Beispiel: $\mathbb{C}^n$

Vektorräume

Sei K ein Körper und $(V, +)$ eine kommutative Gruppe. Weiter sei eine zusätzliche Verknüpfung gegeben, die man skalare Multiplikation nennt:

$$\begin{array}{rcl} K \times V & \rightarrow & V \\ (k, \vec{v}) & \rightarrow & k \cdot \vec{v} \end{array}$$

Definition eines Vektorraumes

V ist ein K-Vektorraum falls gilt:

- *(V1) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper*
- *(V2) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe*

(Fortsetzung nächste Folie)

Vektorräume

Definition eines Vektorraumes (Fortsetzung)

- *(V3) Es gelten die Distributivgesetze:*

$$\begin{array}{rcl} k \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) & = & (k \cdot \vec{v}_1) + (k \cdot \vec{v}_2) \\ (k_1 + k_2) \cdot \vec{v} & = & (k_1 \cdot \vec{v}) + (k_2 \cdot \vec{v}) \end{array}$$

- *(V4) Es gilt das Assoziativgesetz:*

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{v}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{v}$$

- *(V5) Für die Eins gilt:*

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Bemerkung: Bei $(k_1 \cdot k_2)$ ist die Multiplikation im Körper gemeint.

Vektorräume

Als Grundkörper treten in den Naturwissenschaften fast immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf. Beispiele für Vektorräume sind der $\mathbb{R}^n$ (mit Grundkörper $\mathbb{R}$) und der $\mathbb{C}^n$ (mit Grundkörper $\mathbb{C}$).

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \middle| \; z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dualer Vektorraum

Man schreibt die Elemente aus dem Vektorraum als Spaltenvektoren, so zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ebenso ist die Schreibweise als Zeilenvektor gebräuchlich:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^{3\,*}.$$

V^* bezeichnet den zu V **dualen Vektorraum** (falls V alle Spaltenvektoren enthält, so enthält V^* die Zeilenvektoren).

Transposition

Man bezeichnet mit $\vec{v}^T$ den zu $\vec{v}$ transponierten Vektor (d.h. aus einem Spaltenvektor wird ein Zeilenvektor, und aus einem Zeilenvektor wird ein Spaltenvektor):

$$(x_1, x_2, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Addition und skalare Multiplikation

Bei der Summe zweier Vektoren werden die Vektoren komponentenweise addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bei der skalaren Multiplikation wird jede Komponente mit dem Skalar multipliziert:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Quiz

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

$$i\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2i \\ 2i \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren

Definition

Vektoren, die in fast allen Komponenten eine Null haben, bis auf eine Komponente, in der sie eine Eins haben, spielen eine wichtige Rolle. Hat so ein Vektor in der i-ten Komponente eine Eins,

$$\vec{e}_i = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{i-1}, 1, 0, ..., 0 \right)^T,$$

so bezeichnet man diesen Vektor als den ***i*-ten Einheitsvektor**.

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Seien n Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ gegeben. Folgt aus

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + ... + a_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$

so nennt man die Vektoren **linear unabhängig**. Anderfalls nennt man sie linear abhängig.

Basis und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V nennt man die **Dimension des Vektorraumes**.
Eine Menge linearer unabhängiger Vektoren, die maximal ist, nennt man eine **Basis** von V.

Beispiel

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ haben die Dimension n. Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ ist zum Beispiel

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}.$$

Man nennt diese Basis die Standardbasis.

Standardbasis

Beispiel (Standardbasis des $\mathbb{R}^4$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quiz

Die Standardbasis des $\mathbb{C}^2$ ist

(A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(B) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

(C) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

(D) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

Abschnitt 2

Skalarprodukte

Das euklidische Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten zunächst den $\mathbb{R}^n$. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Die Komponentendarstellung der beiden Vektoren bezüglich der Standardbasis sei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Wir definieren das euklidische Standardskalarprodukt zwischen zwei Vektoren als die Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\to \mathbb{R}, \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Euklidische Skalarprodukte

Ein euklidische Skalarprodukt eines reellen Vektorraumes ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$:

- *Linear in der ersten Komponente:*

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}, \qquad (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}).$$

- *Linear in der zweiten Komponente:*

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}, \qquad \vec{x} \cdot (\lambda \cdot \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}).$$

- *Symmetrisch:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}.$$

- *Positiv definit:*

$$\vec{x} \cdot \vec{x} > 0, \quad \textit{falls} \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Euklidische Skalarprodukte

- Ein reeller Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt bezeichnet man als einen euklidischen Vektorraum.
- Die Bezeichnung “euklidisch” bezieht sich insbesondere auf Forderung nach positiver Definitheit.
- In der Physik treten auch Skalarprodukte auf, bei denen die Forderung nach positiv Definitheit aufgegeben wird.
  Ein Beispiel hierfür ist das Skalarprodukt im Minkowskiraum.

Euklidische Skalarprodukte

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$$

(A) 1

(B) 2

(C) 32

(D) 42

Das unitäre Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

Wir betrachten nun $\mathbb{C}^n$.
Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$.
In diesem Fall definieren wir das unitäre Standardskalarprodukt als

$$\begin{aligned} V \times V &\to \mathbb{C}, \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + ... + x_n^* y_n. \end{aligned}$$

Unitäre Skalarprodukte

Ein unitäres Skalarprodukt eines komplexen Vektorraumes ist eine positiv definite Hermitische Form $V \times V \to \mathbb{C}$:

- *Semilinear in der ersten Komponente:*

$$\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\cdot\vec{z} \;=\; \vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}, \qquad \left(\lambda\cdot\vec{x}\right)\cdot\vec{y} \;=\; \lambda^{*}\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right).$$

- *Linear in der zweiten Komponente:*

$$\vec{x}\cdot\left(\vec{y}+\vec{z}\right) \;=\; \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}, \qquad \vec{x}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{y}\right) \;=\; \lambda\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right).$$

- *Hermitisch:*

$$\vec{x}\cdot\vec{y} \;=\; \left(\vec{y}\cdot\vec{x}\right)^{*}.$$

- *Positiv definit:*

$$\vec{x}\cdot\vec{x} \;>\; 0, \quad \textit{falls} \quad \vec{x}\neq\vec{0}.$$

Unitäre Skalarprodukte

Beispiel

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} &= i^{*}\cdot(4i)+(2)^{*}\cdot 5+(3i)^{*}\cdot 6 \\
&= (-i)\cdot(4i)+2\cdot 5+(-3i)\cdot 6 \\
&= 4+10-18i \\
&= 14-18i.
\end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

(A) $1+3i$

(B) 2

(C) 3

(D) $-1+2i$

Betrag eines Vektors

Definition

Man bezeichnet mit

$$\left|\vec{x}\right| \quad = \quad \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

die Länge oder den **Betrag von** $\vec{x}$.

Winkel zweier Vektoren und Orthogonalität

Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist gegeben durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \quad = \quad |\vec{x}| \, |\vec{y}| \cos \varphi,$$

also

$$\varphi \quad = \quad \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \, |\vec{y}|}.$$

Zwei Vektoren stehen **senkrecht** aufeinander ($\varphi = 90°$), falls

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \quad = \quad 0.$$

Abschnitt 3

Das Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt

Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{C}^3$.
In einem dreidimensionalen Vektorraum ist zusätzlich das Kreuzprodukt als eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\to V, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

definiert.

Wichtig: Das Kreuzprodukt gibt es nur in drei Dimensionen!

Das Kreuzprodukt

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzproduktes

Das Kreuzprodukt ist anti-symmetrisch:

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}.$$

Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \left(\vec{x} \times \vec{y}\right) &= 0, \\ \vec{y} \cdot \left(\vec{x} \times \vec{y}\right) &= 0, \end{aligned}$$

Für den Betrag von $\vec{x} \times \vec{y}$ gilt:

$$\left|\vec{x} \times \vec{y}\right| = \left|\vec{x}\right| \left|\vec{y}\right| \sin\varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Antisymmetrischer Tensor

Sei $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Für die Komponenten von $\vec{z}$ gilt:

$$z_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_j y_k$$

Hier wurde der **antisymmetrische Tensor** (oder **Levi-Civita-Tensor**) ε_{ijk} verwendet.

Definition (antisymmetrischer Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3), \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Permutationen

Definition

Eine Permutation $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ nennt man gerade, wenn man sie durch eine gerade Anzahl von paarweisen Vertauschungen aus $(1, 2, ..., n)$ erzeugen kann. Benötigt man eine ungerade Anzahl von Vertauschungen, so nennt man die Permutation ungerade.

Beispiel

$$\begin{array}{ll} (3, 2, 1, 5, 4) & \text{ist eine gerade Permutation} \\ & (\text{vertausche } 1 \leftrightarrow 3 \text{ und } 4 \leftrightarrow 5), \\ (1, 5, 3, 4, 2) & \text{ist eine ungerade Permutation} \\ & (\text{vertausche } 2 \leftrightarrow 5). \end{array}$$

Kronecker-Delta-Symbol

Definition (Kronecker-Delta-Symbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Quiz

$$\varepsilon_{132} = ?$$

(A) -1
(B) 0
(C) 1
(D) 6

Bemerkungen

Unitäres Skalarprodukt: Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$. Im Allgemeinen

$$\vec{y} \cdot \vec{x} \neq \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Es ist

$$\vec{y} \cdot \vec{x} = \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right)^* .$$

Kreuzprodukt: Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Im Allgemeinen

$$\vec{y} \times \vec{x} \neq \vec{x} \times \vec{y}.$$

Es ist

$$\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}.$$

Lineare Gleichungssysteme

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Definition und Problemstellung

Motivation

- Lineare Gleichungssysteme treten in den Naturwissenschaften relativ oft auf, viele Problemstellungen lassen sich auf lineare Gleichungssysteme zurückführen.
- Lineare Gleichungssysteme sind systematisch lösbar.
- Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus ist eine systematische Lösungsmethode.

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Unter einem linearen Gleichungssystem versteht man ***n* Gleichungen** mit ***m* Unbekannten** x_1, x_2, ..., x_m der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ij} und b_i sind gegebene reelle oder komplexe Zahlen.

Jede Variable kommt nur linear vor und jeder Summand auf der linken Seite enthält nur eine Variable.

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 36, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 29, \\ x_2 + 4x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Gegenbeispiel

$$\begin{aligned} 3x_1^5 + 3x_2 + 9x_3 &= 36, \\ x_1 + x_1x_2 + 4x_3 &= 14, \\ \sin(x_1) + 7x_3 &= 29. \end{aligned}$$

- $3x_1^5$ ist nicht linear: höhere Potenz in x_1
- x_1x_2 ist nicht linear: enthält mehr als eine Variable.
- $\sin(x_1)$ ist keine lineare Funktion von x_1.

Abschnitt 2

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Zeilenvertauschungen

Wir betrachten nun einen Algorithmus um ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten systematisch zu vereinfachen und zu lösen.

Wir beginnen mit einer trivialen Beobachtung: Offensichtlich können Zeilen vertauscht werden, d.h. das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \end{aligned}$$

ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1. \end{aligned}$$

Multiplikation mit Konstanten

Desweiteren sei $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ein m-Tupel, welches die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_mx_m = b,$$

erfüllt. Dann erfüllt es auch die Gleichung

$$(ca_1)x_1 + (ca_2)x_2 + (ca_3)x_3 + ... + (ca_m)x_m = cb,$$

Umgekehrt gilt, daß für $c \neq 0$ jedes m-Tupel, welches die zweite Gleichung erfüllt, auch die erste Gleichung erfüllt.

Daraus folgt, daß man die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einer konstanten Zahl c ungleich Null multiplizieren darf.

Addition von Zeilen

Die dritte elementare Umformung ist die folgende: Man darf eine Zeile durch die Summe dieser Zeile mit einer anderen Zeile ersetzen, d.h. die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21})\, x_1 + (a_{12} + a_{22})\, x_2 + ... + (a_{1m} + a_{2m})\, x_m &= b_1 + b_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \end{aligned}$$

haben die gleichen Lösungen.

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Mit Hilfe dieser drei elementaren Umformungen

1. Zeilenvertauschungen
2. Multiplikation mit Konstanten
3. Addition von Zeilen

läßt sich ein Algorithmus zur systematischen Vereinfachung von linearen Gleichungssystemen angeben.

Strategie

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&... \\
0 \cdot x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}$$

Strategie

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&... \\
0 \cdot x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13} x_3 + ... + a_{1m} x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23} x_3 + ... + a_{2m} x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33} x_3 + ... + a_{3m} x_m &= b_3, \\
& ... \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3} x_3 + ... + a_{nm} x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13} x_3 + ... + a_{1m} x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23} x_3 + ... + a_{2m} x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + ... + a_{3m} x_m &= b_3, \\
& ... \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3} x_3 + ... + a_{nm} x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&\;... \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}$$

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Algorithmus

1. *Setze $i = 1$ (Zeilenindex), $j = 1$ (Spaltenindex).*
2. *Falls $a_{ij} = 0$ suche $k > i$, so daß $a_{kj} \neq 0$ und* **vertausche** *Zeilen i und k.*
3. *Falls ein solches k aus Schritt 2 nicht gefunden werden kann, setze $j \to j + 1$.*
4. *Falls man in Schritt 3 den Wert $j = m + 1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.*
5. **Multipliziere** *Zeile i mit $1/a_{ij}$.*
6. *Für alle Zeilen $k \neq i$* **addiere** *zur Zeile k das $(-a_{kj})$-fache der i-ten Zeile.*
7. *Setze $i \to i + 1$ und $j \to j + 1$.*
8. *Falls man in Schritt 7 den Wert $i = n + 1$ oder den Wert $j = m + 1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.*

Notation

In der Praxis schreibt man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

wie folgt auf:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2m} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nm} & b_1 \end{array}$$

Dies ist ausreichend, da alle Umformungen nur auf die Koeffizienten a_{ij} und b_i wirken.

Beispiel

Wir betrachten das obige Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 36, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 29, \\ x_2 + 4x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben ergibt dies:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Umformungen

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array} \quad \text{Multipliziere mit } \tfrac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 3 & 12 & \\ 2 & 3 & 7 & 29 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 1. Zeile} \\ 0 & 1 & 4 & 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 3 & 12 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \\ 0 & 1 & 4 & 14 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}$$

Umformungen (Fortsetzung)

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & 2 & 7 & \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \\ 0 & 0 & 3 & 9 & \text{Multipliziere mit } \tfrac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & 2 & 7 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 3. Zeile} \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 3. Zeile} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Ergebnis

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus endete mit

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist somit äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2, \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Der Rang eines linearen Gleichungssystems

Durch Umbenennung der Variablen x_1, ..., x_m (dies ist gleichbedeutend mit Spaltenvertauschungen) lässt sich durch den Gauß'schen Eliminationsalgorithmus die folgende Form erreichen:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & ... & 0 & a_{1(r+1)} & ... & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_{2(r+1)} & ... & a_{2m} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{r(r+1)} & ... & a_{rm} & b_r \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_{r+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_n \end{array}$$

Man bezeichnet r als den Rang (engl. "rank").

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, eine eindeutige Lösung oder mehrere Lösungen falls:

- Ist eine der Zahlen b_{r+1}, ..., b_n ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.
- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es mehrere Lösungen.

1. Fall: Keine Lösung

- Ist eine der Zahlen b_{r+1}, ..., b_n ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- In diesem Fall ist notwendigerweise $r < n$.

$$\left. \begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & ... & 0 & a_{1(r+1)} & ... & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & ... & 0 & a_{2(r+1)} & ... & a_{2m} & b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 1 & a_{r(r+1)} & ... & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_{r+1} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_n
\end{array} \right.$$

2. Fall: Eindeutige Lösung

- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.
- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$. Für $r = n$ ist $\{b_{r+1}, ..., b_n\} = \emptyset$ und der zweite Fall reduziert sich auf $r = n = m$.

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & ... & 0 & b_1 \\
0 & 1 & ... & 0 & b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 1 & b_r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & 0
\end{array}$$

3. Fall: Mehrere Lösungen

- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es mehrere Lösungen.
- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$. Für $r = n$ ist $\{b_{r+1}, ..., b_n\} = \emptyset$ und der dritte Fall reduziert sich auf auf $r = n$ und $r < m$.

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & ... & 0 & a_{1(r+1)} & ... & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & ... & 0 & a_{2(r+1)} & ... & a_{2m} & b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 1 & a_{r(r+1)} & ... & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0
\end{array}$$

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

- Ist $r < n$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so reduzieren sich die Zeilen $(r+1)$ bis n

$$\left.\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{array}\right.$$

auf die triviale Gleichung

$$0 = 0.$$

Diese Zeilen enthalten keine zusätzliche Information und können auch weggelassen werden.

Quiz

Für ein lineares Gleichungssystem mit vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 liefert der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

(A) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(B) Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$.

(C) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Geraden im $\mathbb{R}^4$ liegen: $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 2 - t$, $x_3 = 3$, $x_4 = t$.

(D) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Ebene im $\mathbb{R}^4$ liegen: $x_1 = 1 - t_2$, $x_2 = 2 - t_2$, $x_3 = 3 + t_1$, $x_4 = t_2$.

Abschnitt 3

Anwendungen

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Zur Erinnerung: m Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_m$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

nur die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = (0, 0, ..., 0)$ hat.
Andernfalls nennt man sie linear abhängig.
Ist der zugrundeliegende Vektorraum n-dimensional, so ergibt die obige Gleichung ausgeschrieben in Komponenten n lineare Gleichungen mit m Unbekannten λ_1,..., λ_m.
Man kann nun mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsalgorithmuses feststellen, ob die Vektoren linear abhängig sind.

Beispiel

Sei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir formen dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsalgorithmuses um:

$$\begin{array}{ccc|cl}
1 & 2 & -1 & 0 & \\
1 & 3 & -4 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 1. Zeile} \\
1 & 4 & -7 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 1. Zeile} \\
 & & & & \\
1 & 2 & -1 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 2. Zeile} \\
0 & 1 & -3 & 0 & \\
0 & 2 & -6 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 2. Zeile} \\
 & & & & \\
1 & 0 & 5 & 0 & \\
0 & 1 & -3 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$$\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit gibt es mehrere Lösungen:

$$\lambda_1 = -5t, \quad \lambda_2 = 3t, \quad \lambda_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die drei Vektoren sind linear abhängig.

Matrizen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Definition

Matrizen

Definition

Eine rechteckige Anordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

von Elementen a_{ij} aus einem Körper nennt man Matrix.
Die Elemente a_{ij} nennt man die Komponenten der Matrix.
Eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten bezeichnet man als $n \times m$-Matrix.

Matrizen

- Eine Matrix bezeichnet man als quadratisch, falls $n = m$.
- Eine Matrix bezeichnet man als Einheitsmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = \delta_{ij}$.
- Eine Matrix bezeichnet man als Diagonalmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
- Eine Matrix bezeichnet man als obere Dreiecksmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

Matrizen

Quadratisch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Seien A und B zwei $n \times m$-Matrizen.

Die Addition zweier Matrizen mit gleicher Spalten- und Zeilenanzahl ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

Eine Multiplikation mit Skalaren ist definiert durch

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

Beispiel

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Der Vektorraum der $n \times m$-Matrizen

- Mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation bilden die $n \times m$-Matrizen einen Vektorraum.
- Die Dimension dieses Vektorraumes ist $n \cdot m$.
- Eine Basis ist gegegeben durch die Matrizen e_{ij},

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix},$$

die nur in dem Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine Eins haben, ansonsten nur Nullen.

Multiplikation

Die Multiplikation einer $n \times k$-Matrix A mit einer $k \times m$-Matrix B ist wie folgt definiert:

Das Ergebnis ist eine $n \times m$-Matrix C

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

wobei

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Regel: Zeile $\times$ Spalte

Multiplikation

Beispiel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren und Zeilenvektoren als Matrizen

- Ein n-dimensionaler Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

kann als eine $n \times 1$-Matrix aufgefasst werden.

- Ebenso kann ein n-dimensionaler Zeilenvektor

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

als eine $1 \times n$-Matrix betrachtet werden.

Lineare Gleichungssysteme

Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$

so läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

auch wie folgt schreiben:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Abschnitt 2

Spuren und Determinanten

Quadratische Matrizen

Wir betrachten im folgenden die quadratischen $n \times n$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und führen die Begriffe **Spur** und **Determinante** ein.

Spur

Sei A eine $n \times n$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Spur (engl. “trace”) einer quadratischen Matrix ist die Summe der Diagonalelemente:

$$Tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Rechenregeln für die Spur

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\ (A + B) &= \text{Tr}\ A + \text{Tr}\ B, \\ \text{Tr}\ (\lambda \cdot A) &= \lambda\ \text{Tr}\ A. \end{aligned}$$

Spur

Beispiel

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1+6+11+16 = 34$$

Quiz

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

(A) $\sqrt{3}$
(B) 3
(C) 6
(D) 45

Determinante

Die Determinante einer quadratischen $n \times n$-Matrix ist definiert durch

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n},$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ das total antisymmetrische Symbol in n Dimensionen ist

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, \dots, n), \\ -1 & \text{für } (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Determinante

Für die Determinante existiert auch die folgende Schreibweise

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinante einer Diagonalmatrix

Sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix.

Dann ist

$$\det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n.$$

Eine 1×1-Matrix ist immer eine Diagonalmatrix und somit

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Berechnung der Determinante

Zu einer $n \times n$-Matrix A definieren wir zunächst eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_{ij}, die dadurch ensteht, daß man die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix A entfernt.

Laplace'sche Entwicklungssatz:

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Äquivalent kann auch nach der j-ten Spalte entwickelt werden:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Dies erlaubt die rekursive Berechnung einer Determinante.

Rechenregeln für die Determinante:

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= (\det A) \cdot (\det B), \\ \det(\lambda \cdot A) &= \lambda^n \cdot \det A. \end{aligned}$$

Determinante

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (5 \cdot 11 - 7 \cdot 9) = 24$$

Quiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = ?$$

(A) 0

(B) 10

(C) 24

(D) -228

Quadratische Matrizen

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen. In diesem Fall ist das Matrixprodukt

$$A \cdot B$$

wieder eine $n \times n$-Matrix.
Für $n \times n$-Matrizen ist die Matrizenmultiplikation also abgeschlossen.

Das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist offensichtlich die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix

Unter welchen Bedingungen existiert auch ein inverses Element? Falls so ein Element existiert bezeichnen wir es mit A^{-1}. Es soll also gelten

$$A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Determinante, so erhalten wir

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det \mathbf{1} = 1,$$

also falls $\det A \neq 0$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$\det A \neq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Inversen.

Die inverse Matrix

Es läßt sich zeigen, daß $\det A \neq 0$ auch eine hinreichende Bedingung ist.

Satz

A^{-1} existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$.

Die Gruppe der invertierbaren Matrizen

Wir betrachten nun die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft $\det A \neq 0$.
Wegen $\det(AB) = \det A \det B$ ist diese Menge abgeschlossen bezüglich der Matrizenmultiplikation.
Wie gerade diskutiert wurde, existiert in dieser Menge zu jeder Matrix auch ein Inverses.
Diese Menge bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die man als

$$GL(n, \mathbb{R}), \quad \text{bzw.} \quad GL(n, \mathbb{C})$$

bezeichnet.

Abschnitt 3

Berechnung der inversen Matrix

Die inverse Matrix

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit $\det A \neq 0$. Gesucht ist eine $n \times n$-Matrix X

$$X = \left(\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{array} \right),$$

so daß gilt:

$$A \cdot X = \mathbf{1}$$

Die inverse Matrix

Wir multiplizieren die linke Seite aus und betrachten danach die j-te Spalte auf beiden Seiten:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + ... + a_{1n}x_{nj} & = & 0, \\ ... & = & 0 \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + ... + a_{jn}x_{nj} & = & 1, \\ ... & = & 0 \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + ... + a_{nn}x_{nj} & = & 0. \end{array}$$

Diese n Gleichungen bilden eine lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj}, welches mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus gelöst werden kann.

Die inverse Matrix

Da dies für jede Spalte j gilt, kann man so alle n^2 Unbekannten x_{ij} bestimmen.
Da die Koeffizienten der linken Seite des linearen Gleichungssystems immer gleich sind, verfährt man in der Praxis wie folgt:
Man schreibt die Gleichungen wie folgt an

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

und bringt dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus auf die Form

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}$$

Die inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1} ist dann gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir beginnen mit

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$\begin{array}{ccc|cccl}
1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 1. Zeile} \\
0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & \\
1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\
 & & & & & & \\
1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & \text{Multipliziere mit } \frac{1}{3} \\
 & & & & & & \\
1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 3. Zeile} \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 3. Zeile} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\
 & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} &
\end{array}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Somit ist A^{-1} gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgen und Reihen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Folgen

Folgen

Definition

Unter einer Folge (a_n) reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Beispiel

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

definiert eine Folge.

Explizit: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{25}$, ...

Konvergente Folgen

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

In anderen Worten liegen für eine konvergente Folge ab einem bestimmten N alle Folgenglieder im Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Divergente Folgen

Definition

Eine Folge nennt man **divergent**, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Beispiel

Beispiele für divergente Folgen sind

$$\begin{aligned} a_n &= n, \\ b_n &= \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Beschränkte Folgen

Definition

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $a_n \geq c$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

- Jede konvergente Folge beschränkt.
- Die Umkehrung gilt nicht, eine beschränkte Folge ist nicht notwendiger Weise konvergent, siehe obiges Beispiel mit der Folge (b_n).

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (λa_n), $(a_n b_n)$ konvergent ($\lambda \in \mathbb{R}$) und es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= a - b, \\
\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) &= \lambda a, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b.
\end{aligned}$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Ist weiter $b \neq 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und wir können die Folge

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq N}$$

betrachten. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle n. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Bemerkung: Aus $a_n < b_n$ folgt nicht

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad < \quad \lim_{n\to\infty} b_n,$$

wie das Beispiel $a_n = 0$ und $b_n = 1/n$ zeigt.

Cauchy-Folgen

Wir hatten bereits bei der axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen den Begriff einer Cauchy-Folge eingeführt, den wir uns nochmal in Erinnerung rufen:

Definition

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen nennt man **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_n - a_m| \quad < \quad \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N.$$

Satz

Ist eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergent, so ist sie auch eine Cauchy-Folge.

Vollständigkeitsaxiom

Die Umkehrung dieses Satzes postuliert nennt man als Axiom:

Vollständigkeitsaxiom:

In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Wir hatten dies bei der axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen bereits erwähnt.
Somit gilt in $\mathbb{R}$, daß eine Folge (a_n) reeller Zahlen genau dann konvergent ist, falls sie eine Cauchy-Folge ist.

Der Vorteil der Definition einer Cauchy-Folge gegenüber der Definition des Begriffes Konvergenz besteht darin, daß sich erstere nur auf einzelne Folgenglieder bezieht und keinen Bezug auf einen (eventuellen) Grenzwert nimmt.

Quiz

Die Folge

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ist

(A) divergent

(B) konvergent mit Grenzwert 0

(C) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(D) konvergent mit Grenzwert 1

Abschnitt 2

Reihen

Reihen

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man betrachtet nun die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Als unendliche Reihe bezeichnet man nun die Folge dieser Partialsummen. Man schreibt

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Eine unendliche Reihe heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

Absolute Konvergenz

Definition

Eine unendliche Reihe heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$$

konvergent ist.

Satz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Konvergenzkriterien

Satz

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, daß

$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad = \quad 0.$$

Konvergenzkriterium von Cauchy:

Die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\left| \sum_{j=m}^{n} a_j \right| \quad < \quad \varepsilon, \quad \forall n \geq m \geq N.$$

Konvergenzkriterien

Satz

Eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *mit* $a_j \geq 0$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:

Sei (a_n) *eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j.$$

Konvergenzkriterien

Majorantenkriterium:

Sei $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ *eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und* (a_n) *eine Folge mit* $|a_n| \leq c_n$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

absolut. Man nennt $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ *eine Majorante von* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium:

Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle n und x eine reelle Zahl $0 < x < 1$, so daß

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq x, \quad \forall n \geq N.$$

Dann konvergiert die Reihe absolut.

Reihen

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} < 1 \quad \text{für } n > |x|$$

Die Reihe ist nach dem Quotientenkriterium konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x) - 1, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x).$$

Reihen

Beispiel

Es sei $|x| < 1$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$$

Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \leq |x| < 1$$

Die Reihe ist nach dem Quotientenkriterium konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x).$$

Reihen

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$$

Die Reihe ist alternierend und $a_n = 1/n$ ist eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen.
Die Reihe ist nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\ln(2).$$

Reihen

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

Diese Reihe wird als harmonische Reihe bezeichnet. Diese Reihe ist divergent. Für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$c_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_{n-j}.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right).$$

Bemerkung: Die absolute Konvergenz ist wesentlich für die Gültigkeit des Satzes! Im Allgemeinen gilt, daß Umordnungen innerhalb einer Reihe nur erlaubt sind, falls die Reihe absolut konvergiert.

Abschnitt 3

Beispiele und Anwendungen

Wichtige Reihen

$$\begin{aligned}
\exp x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \\
-\ln(1-x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}, \qquad |x| < 1, \\
\sin x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \\
\cos x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \\
\sinh x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \\
\cosh x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}.
\end{aligned}$$

Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
&= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \\
\cos x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\
&= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots
\end{aligned}$$

Bemerkungen

- sinh und cosh bezeichnet man als Sinus Hyperbolicus bzw. Kosinus Hyperbolicus.
- Mit Ausnahme der Reihe für $\ln(1-x)$ konvergieren alle Reihen absolut für alle Werte von x. Man sagt die Reihen haben einen unendlichen **Konvergenzradius**.
- Die Reihe für $\ln(1-x)$ konvergiert absolut für $|x| < 1$. Somit hat diese Reihe den Konvergenzradius 1.
- Man spricht von einem Konvergenzradius, da die obigen Reihen auch definiert sind, wenn man die reelle Variable x durch eine komplexe Variable z ersetzt.

Quiz

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad = \quad ?$$

(A) $\frac{1}{2}\cos(x)$
(B) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
(C) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$
(D) $\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)$

Die Formel von Euler

Wir betrachten $\exp(ix)$:

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} i^{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} i^{2j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

Die Reihendarstellung liefert also einen einfachen Beweis der Formel:

$$\exp(ix) \quad = \quad \cos x + i \sin x.$$

Ebenso findet man

$$\exp x \quad = \quad \cosh x + \sinh x.$$

Man beachte, daß für die Umordnung der Reihen die absolute Konvergenz notwendig ist.

Trigometrische und hyperbolische Funktionen

Man kann die trigometrischen und die hyperbolischen Funktionen auch durch die Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right).$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Leichter zu merken:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

Additionstheoreme

Es ist

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ e^{i\alpha} &= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \\ e^{i\beta} &= \cos(\beta) + i\sin(\beta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\beta} &= [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]\,[\cos(\beta) + i\sin(\beta)] \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + i^2\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &= [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] + i\,[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)] \end{aligned}$$

Additionstheoreme

Somit folgt aus $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \\ &\quad [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] + i\,[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)] \end{aligned}$$

Nimmt man nun den Real- bzw. Imaginärteil dieser Gleichung, so erhält man die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus.

Funktionen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Grundlagen

Funktionen

Definition

Seien D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen Funktion auf D versteht man eine Abbildung

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \rightarrow W, \\ & x \rightarrow y = f(x). \end{aligned}$$

Man nennt D den Definitionsbereich und W den Wertebereich der Funktion.
Eine Funktion f ordnet jedem $x \in D$ ein $y \in W$ zu.

Umkehrfunktion

Definition

Gibt es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$, so ist die Funktion f umkehrbar. In diesem Fall bezeichnet man mit f^{-1} die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & W \to D, \\ & y \to x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Umkehrfunktion

Beispiel

Es sei $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$ sowie

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to W, \\ & x \to x^2. \end{aligned}$$

Dann lautet die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & W \to D, \\ & y \to \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Abschnitt 2

Stetigkeit

Grenzwerte von Funktionen

Definition

Man sagt eine Funktion hat im Punkte a den Grenzwert c, falls es mindestens eine Folge $(x_n) \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gibt. Gilt dann für jede Folge $(x_n) \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, daß

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c,$$

so bezeichnet man c als den Grenzwert der Funktion $f(x)$ im Punkte a.

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Grenzwerte von Funktionen

Satz

Die obige Bedingung ist äquivalent zu der Forderung, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - c| \quad < \quad \varepsilon, \quad \forall\, |x - a| < \delta \quad \textit{und} \quad x \in D.$$

Bemerkung: Es wird nicht vorausgesetzt, daß $a \in D$ liegt. Die Definition macht auch Sinn, falls D ein offenes Intervall ist und der Grenzwert an den Intervallgrenzen betrachtet wird.

Stetigkeit

Definition

Sei nun $a \in D$. Man bezeichnet eine Funktion als **stetig** im Punkte a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad = \quad f(a)$$

gilt.

Definition

Man bezeichnet eine Funktion als in einem Intervall stetig, falls sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Die Heaviside-Funktion

Beispiel

Wir betrachten die Heaviside-Funktion, definiert durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $\Theta(0) = 0$, aber

$$\lim_{x \to 0+} \Theta(x) = 1.$$

Die Heaviside-Funktion ist im Punkte 0 nicht stetig.

Stetige Funktionen

Beispiel

Beispiele von Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, sind Polynomfunktionen, $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$.

Sätze über stetige Funktionen

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in a stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} f+g &: D \to \mathbb{R}, \\ \lambda \cdot f &: D \to \mathbb{R}, \\ f \cdot g &: D \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

im Punkte a stetig. Ist ferner $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} \quad : \quad D' \to \mathbb{R}$$

in a stetig, wobei $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in D gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall \ |x - y| < \delta.$$

- Jede Funktion, die auf D gleichmässig stetig ist, ist auch in jedem Punkte aus D stetig im herkömmlichen Sinne. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.
- Ist eine Funktion in jedem Punkte $x \in D$ stetig im herkömmlichen Sinne, so genügt es für ein vorgegebenes ε für jeden Punkt ein δ_x zu finden. Dieses δ_x darf mit x variieren. Für die gleichmäßige Stetigkeit wird dagegen gefordert, daß δ von x unabhängig ist.

Quiz

Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + e^{x} & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Abschnitt 3

Rationale Funktionen

Rationale Funktionen

Definition

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Unter einer rationalen Funktion versteht man eine Funktion

$$R(x) \quad = \quad \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion ist gegeben durch $D = \{x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$.

Eine rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen können in **Partialbrüche** zerlegt werden. Ist

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + ... + p_1 x + p_0,$$
$$q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + ... + q_1 x + q_0,$$

und ist ausserdem die Faktorisierung des Nennerpolynoms bekannt

$$q(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\lambda_j},$$

wobei λ_j die Multiziplität der Nullstelle x_j angibt, so läßt sich die rationale Funktion schreiben als

$$R(x) \quad = \quad \frac{p(x)}{q(x)} \quad = \quad P(x) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k},$$

wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $\deg p(x) - \deg q(x)$ ist und $a_{jk} \in \mathbb{R}$.

Partialbruchzerlegung

Berechnung von $P(x)$ und der Konstanten a_{jk}:

$P(x)$ bestimmt sich durch Polynomdivision mit Rest.

Wir betrachten als Beispiel die rationale Funktion

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)}$$

Für das Nennerpolynom haben wir

$$(x-2)^2(x+2) \quad = \quad x^3 - 2x^2 - 4x + 8.$$

Polynomdivision

Polynomdivision mit Rest liefert

$$\begin{array}{rcccl}
(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18) & : & (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) & = & x + 5 + \frac{(2x^2+9x-22)}{(x^3-2x^2-4x+8)} \\
-(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x) & & & & \\
\hline
5x^3 - 8x^2 - 11x + 18 & & & & \\
-(5x^3 - 10x^2 - 20x + 40) & & & & \\
\hline
2x^2 + 9x - 22 & & & &
\end{array}$$

Somit ist also $P(x) = x + 5$.

Partialbruchzerlegung

Für den Rest verwendet man den Ansatz

$$\frac{2x^2+9x-22}{x^3-2x^2-4x+8} = \frac{a_{12}}{(x-2)^2}+\frac{a_{11}}{x-2}+\frac{a_{21}}{x+2}.$$

Man bringt die rechte Seite auf den Hauptnenner

$$\frac{a_{12}}{(x-2)^2}+\frac{a_{11}}{x-2}+\frac{a_{21}}{x+2} = \frac{(a_{11}+a_{21})x^2+(a_{12}-4a_{21})x+(2a_{12}-4a_{11}+4a_{21})}{x^3-2x^2-4x+8}$$

Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{21} &= 2, \\ a_{12}-4a_{21} &= 9, \\ 2a_{12}-4a_{11}+4a_{21} &= -22. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{21} &= 2, \\ a_{12}-4a_{21} &= 9, \\ 2a_{12}-4a_{11}+4a_{21} &= -22, \end{aligned}$$

findet man

$$a_{12}=1, \quad a_{11}=4, \quad a_{21}=-2.$$

Somit erhalten wir das Ergebnis

$$\frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)} = x+5+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x+2}.$$

Trick

Die Koeffizienten der Partialbrüche mit der höchsten Potenz einer Nullstelle lassen sich einfacher bestimmen, indem man im Ansatz mit $(x - x_j)^{\lambda_j}$ multipliziert und dann $x = x_j$ setzt.

In unserem Beispiel lassen sich so a_{12} und a_{21} bestimmen:

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= \left. \frac{2x^2+9x-22}{(x-2)^2(x+2)}(x-2)^2 \right|_{x=2} = \left. \frac{2x^2+9x-22}{x+2} \right|_{x=2} = \frac{8+18-22}{4} = 1, \\
a_{21} &= \left. \frac{2x^2+9x-22}{(x-2)^2(x+2)}(x+2) \right|_{x=-2} = \left. \frac{2x^2+9x-22}{(x-2)^2} \right|_{x=-2} = \frac{8-18-22}{16} = -2.
\end{aligned}
$$

Abschnitt 4

Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Neben den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$

gibt es weitere trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, && \text{Tangens} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, && \text{Kotangens} \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x}, && \text{Sekans} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x}, && \text{Kosekans} \end{aligned}$$

Umkehrfunktionenen

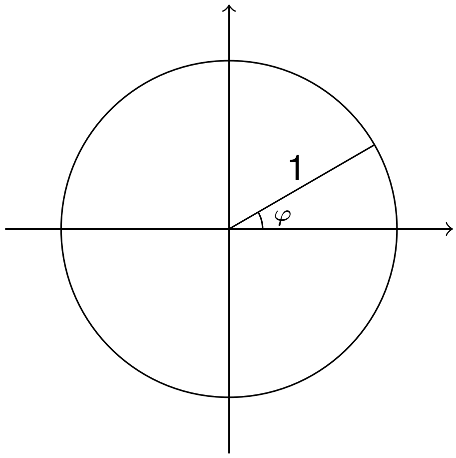
Die Umkehrfunktionen werden mit arcsin, arccos, arctan, etc. bezeichnet:

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \sin^{-1}(x), && \text{Arkussinus} \\ \arccos(x) &= \cos^{-1}(x), && \text{Arkuskosinus} \\ \arctan(x) &= \tan^{-1}(x), && \text{Arkustangens} \end{aligned}$$

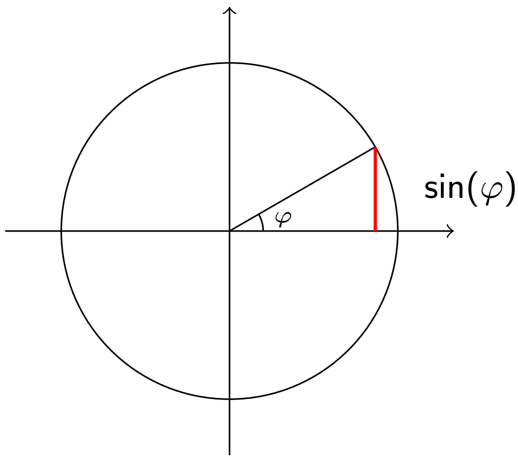
Diese Umkehrfunktionen lassen sich durch den Logarithmus ausdrücken:

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \frac{1}{i}\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right), \\ \arccos(x) &= \frac{1}{i}\ln\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right), \\ \arctan(x) &= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right). \end{aligned}$$

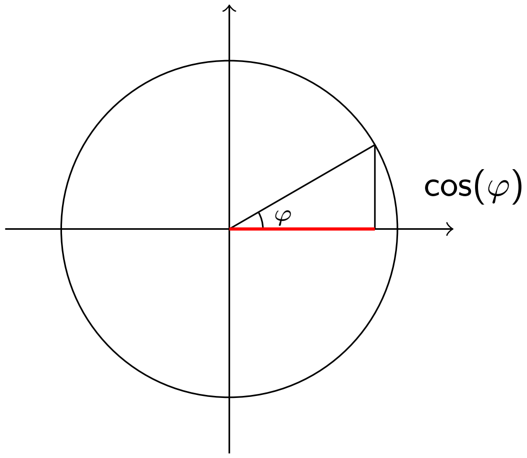
Geometrie



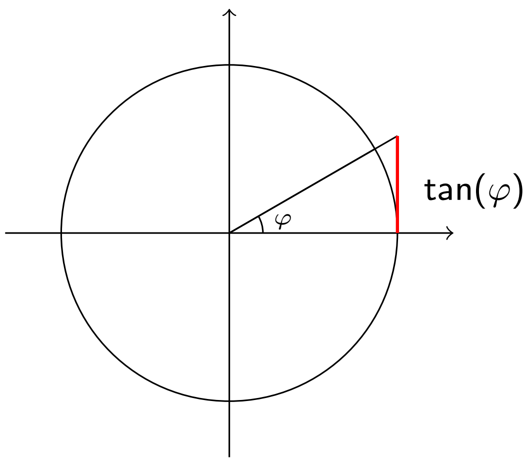
Geometrie



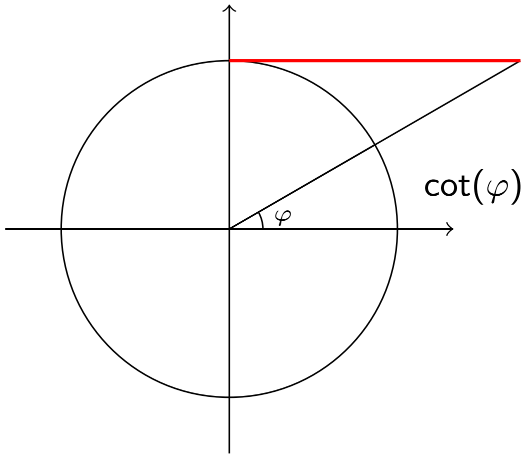
Geometrie



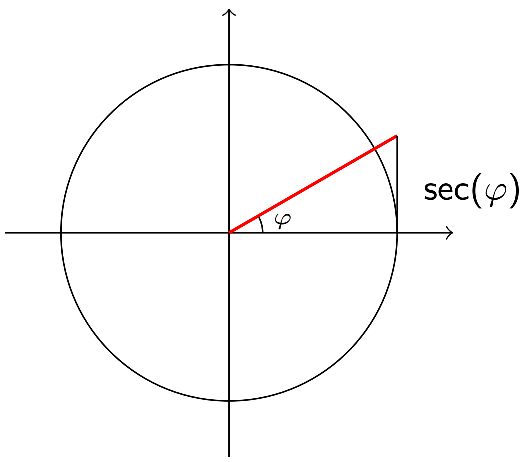
Geometrie



Geometrie

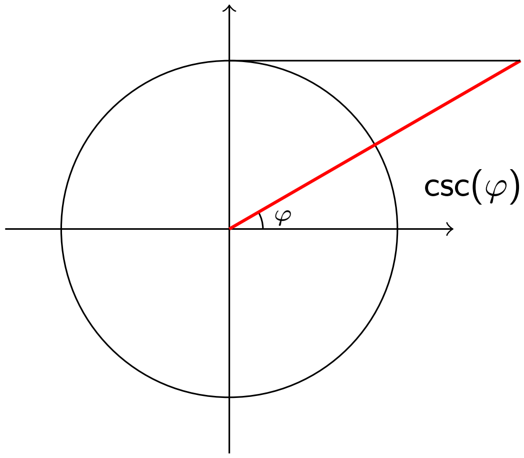


Geometrie



Stefan Weinzierl (Uni Mainz) Funktionen WiSe 2020/21 28 / 35

Geometrie



Abschnitt 5

Hyperbolische Funktionen

Hyperbolische Funktionen

Neben den bereits eingeführten hyperbolischen Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

definiert man auch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Bemerkung: Für $\sinh$ und $\cosh$ gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Umkehrfunktionen

Die inversen Funktionen werden als Areafunktionen bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{arsinh}(x) &= \sinh^{-1}(x), && \text{Areasinus Hyperbolicus} \\ \text{arcosh}(x) &= \cosh^{-1}(x), && \text{Areakosinus Hyperbolicus} \\ \text{artanh}(x) &= \tanh^{-1}(x), && \text{Areatangens Hyperbolicus} \end{aligned}$$

Diese Umkehrfunktionen lassen sich ebenfalls durch den Logarithmus ausdrücken:

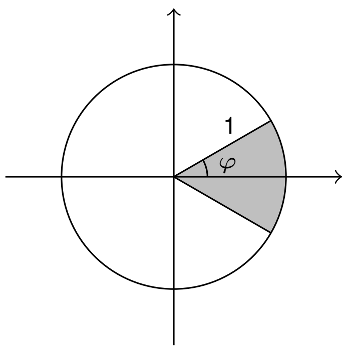
$$\begin{aligned} \text{arsinh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \\ \text{arcosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \\ \text{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und hyperbolischen Funktionen

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{i} \sinh(ix), \\
\cos x &= \cosh(ix), \\
\tan x &= \frac{1}{i} \tanh(ix), \\
\arcsin(x) &= \frac{1}{i} \operatorname{arsinh}(ix), \\
\arccos(x) &= \frac{1}{i} \operatorname{arcosh}(x), \\
\arctan(x) &= \frac{1}{i} \operatorname{artanh}(ix).
\end{aligned}
$$

Quiz

Die Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist



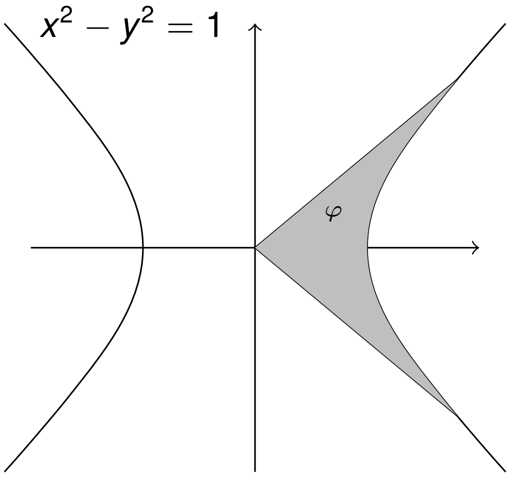
(A) $\frac{1}{6}$

(B) φ

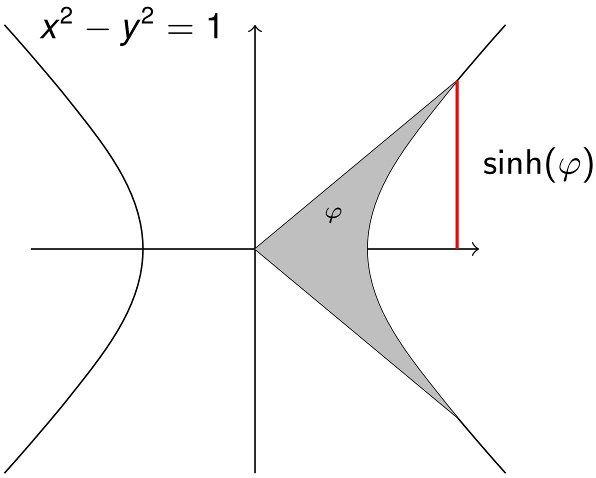
(C) 2φ

(D) $\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

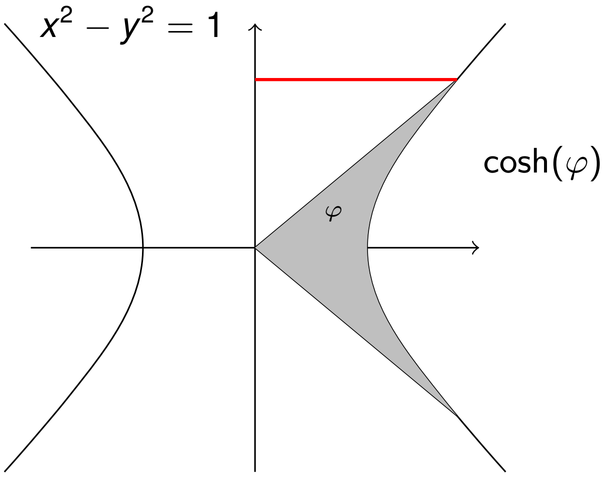
Hyperbolische Geometrie



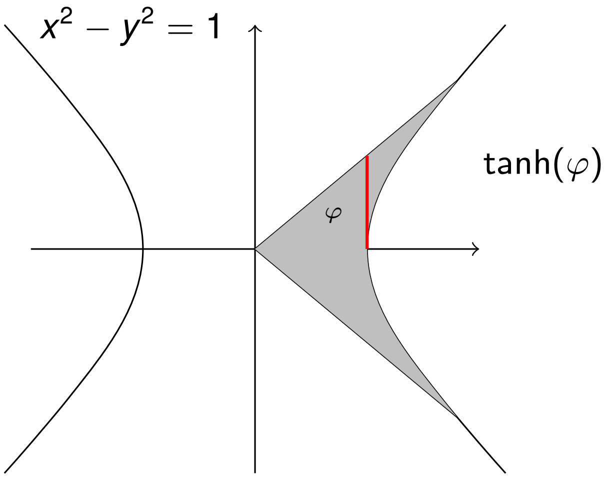
Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie



Differentialrechnung

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Die Ableitung

Die Ableitung

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f nennt man im Punkte $x \in D$ **differenzierbar**, falls es mindestens eine Folge $(\xi_n) \in D \backslash x$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x$ gibt und für jede solche Folge der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x)}{\xi_n - x} = \lim_{\xi\to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

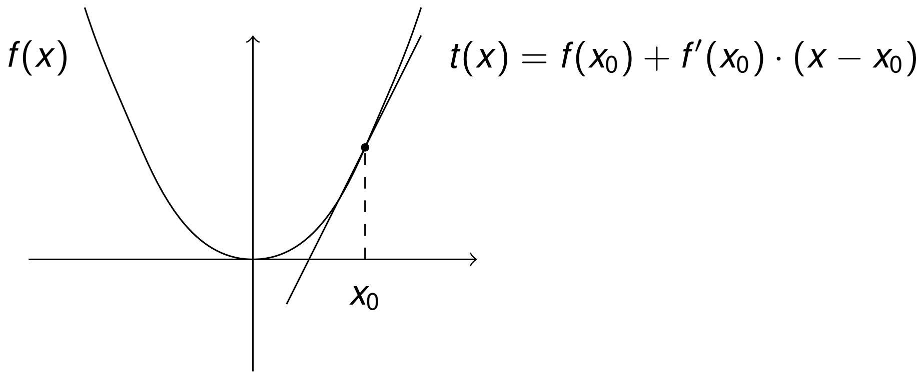
existiert.

Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente im Punkte x_0 an:



Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) differenzierbar

(B) nicht differenzierbar

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) differenzierbar

(B) nicht differenzierbar

Sätze über Ableitungen

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, und λf in x differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x). \end{aligned}$$

Produktregel:

Mit den Voraussetzungen wie oben ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beweis der Produktregel

$$
\begin{aligned}
&(f \cdot g)'(x) = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \right] \\
&= \lim_{h \to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}
$$

Die Produktregel

Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{x^2}_{f_1(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)} \\
f'(x) &= \underbrace{2x}_{f_1'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)} + \underbrace{x^2}_{f_1(x)} \underbrace{\cos(x)}_{f_2'(x)}
\end{aligned}
$$

Sätze über Ableitungen

Quotientenregel:

Quotientenregel: *Ist weiter $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion f/g in x differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Die Quotientenregel

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1) - (2x-3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Sätze über Ableitungen

Kettenregel:

Kettenregel: *Seien $f : D_1 \to W_1$ und $g : D_2 \to W_2$ Funktionen mit $W_1 \subset D_2$. Falls f im Punkte $x \in D_1$ differenzierbar ist und g im Punkte $y = f(x) \in D_2$ differenzierbar ist, so ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : D_1 \to W_2$ in x differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Die Kettenregel

Beispiel

$$f(x) = \sin\left(3x^2 + 4x + 5\right)$$
$$f'(x) = (6x + 4) \cdot \cos\left(3x^2 + 4x + 5\right)$$

Sätze über Ableitungen

Ableitung der Umkehrfunktion:

Ableitung der Umkehrfunktion: *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to W$ eine stetige, steng monotone Funktion und $f^{-1} : W \to D$ die Umkehrfunktion. Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Beispiel

Die Ableitung des Logarithmus erhält man mit Hilfe der Regel über die Umkehrfunktion:
Wir beginnen mit der Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$.
Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus:

$$f^{-1}(y) = \ln y$$

Nun ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y},$$

also

$$f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ableitungen

Beispiel

Die Ableitungen von Sinus und Kosinus erhält man aus der Darstellung

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

zu

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x), \\ f(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x). \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dx}e^{ix} - \frac{d}{dx}e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} + ie^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Wichtige Ableitungen

Ableitungen einiger Grundfunktionen:

$$\begin{aligned} f(x) = x^n \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}, \\ f(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = e^x. \end{aligned}$$

Die Ableitung des Logarithmus erhält man mit Hilfe der Regel über die Umkehrfunktion:

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Die Ableitungen von Sinus und Kosinus erhält man aus der Darstellung mittels der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x), \\ f(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x). \end{aligned}$$

Weitere Ableitungen

Die Ableitung aller weiteren trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen lassen sich ebenfalls mit den obigen Regeln bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(x) = \tan(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\
f(x) = \arcsin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
f(x) = \arctan(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\
f(x) = \sinh(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cosh(x), \\
f(x) = \cosh(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \sinh(x), \\
f(x) = \tanh(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \\
f(x) = \mathrm{arsinh}(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\
f(x) = \mathrm{artanh}(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^3 - 4 \\
f'(x) &= ?
\end{aligned}$$

(A) $\frac{3}{4}x^4 - 4x$
(B) $9x^2 - 4$
(C) $9x^2$
(D) $3x^2 - 4$

Quiz

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(\cos(2x)) \\
f'(x) &= ?
\end{aligned}
$$

(A) $2\cos(\cos(2x))$

(B) $2\sin(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$

(C) $-2\cos(2x) \cdot \cos(\sin(2x))$

(D) $-2\sin(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$

Höhere Ableitungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls wieder differenzierbar, so bezeichnet man mit

$$
f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (f')'(x)
$$

die zweite Ableitung. Ist auch $f''(x)$ wieder differenzierbar, so erhält man durch Ableiten die dritte Ableitung $f'''(x)$. Allgemein schreiben wir für die n-te Ableitung

$$
f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.
$$

Unter der 0-ten Ableitung einer Funktion versteht man die Funktion selbst.

Höhere Ableitungen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5 \\
f'(x) &= 15x^4 + 28x^3 + 6x^2 + 2x - 1 \\
f''(x) &= 60x^3 + 84x^2 + 12x + 2 \\
f'''(x) &= 180x^2 + 168x + 12 \\
f^{(4)}(x) &= 360x + 168 \\
f^{(5)}(x) &= 360 \\
f^{(6)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Höhere Ableitungen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \cos(x) \\
f''(x) &= -\sin(x) \\
f'''(x) &= -\cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) \\
f^{(5)}(x) &= \cos(x)
\end{aligned}
$$

Quiz

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{2x} \\
f^{(4)}(x) &= ?
\end{aligned}
$$

(A) e^{2x}
(B) $2e^{2x}$
(C) $16e^{2x}$
(D) $24e^{2x}$

Stetige Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man stetig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man n-mal stetig differenzierbar, falls sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

Stetige Differenzierbarkeit

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist differenzierbar im Punkt $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0.$$

Somit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f' ist nicht stetig im Punkt $x = 0$.

Abschnitt 2

Taylorreihen

Taylorreihen

Motivation:

- Wir haben bereits die Reihendarstellung einiger Funktionen, wie zum Beispiel der Exponentialfunktion, Sinus oder Kosinus kennengelernt.
- In diesem Abschnitt geht es um die systematische Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen.

Taylorentwicklung

Satz (Taylorsche Formel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $a \in I$ und $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_{n+1}(x).$$

Für das Restglied gilt: Es gibt ein ξ zwischen a und x (d.h. $\xi \in [a, x]$ für $x > a$ bzw. $\xi \in [x, a]$ für $x < a$), so daß

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Bemerkung: Dies ist eine Existenzaussage, ξ ist im allgemeinen schwer zu bestimmen.

Taylorentwicklung

- In der Praxis verwendet man die ersten n Terme der Taylorentwicklung, um eine Funktion zu approximieren und vernachlässigt das Restglied.
- Das vernachlässigte Restglied liefert den Fehler dieser Abschätzung.

Taylorentwicklung

Beispiel

$$f(x) = \cos(x \cdot e^x) + \sin\left(x^2 \cdot e^{-x}\right)$$

Taylorentwicklung um $x_0 = 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{11}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Taylorreihen

Definition (Taylorreihe)

Sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig of differenzierbare Funktion und $a \in I$. Wir definieren die Taylorreihe einer Funktion f um den Entwicklungspunkt a:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Taylorreihen

Bemerkungen:

1. Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist nicht notwendig > 0.
2. Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.
3. Die Taylorreihe konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied gegen Null konvergiert.

Taylorreihen

Beispiel

Wir geben ein Gegenbeispiel zu Punkt 2 an: Wir betrachten die Taylorreihe der Funktion

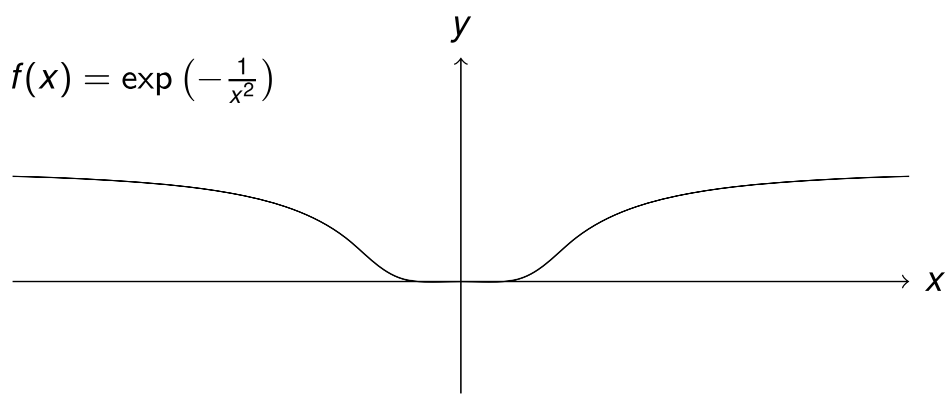
$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkte $a = 0$. f ist beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(0) \quad = \quad 0.$$

Die Taylorreihe von f um den Nullpunkt ist also identisch Null.

Taylorreihen



Abschnitt 3

Die Regeln von l'Hospital

Die erste Regel von l'Hospital

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in D$ stetige Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Weiter seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die erste Regel von l'Hospital

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}.$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Satz

Ist $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$ *und existiert* $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$*, so gilt ebenfalls*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0.$$

Bemerkung: Die l'Hospitalschen Regeln gelten auch für $x_0 \to \pm\infty$.

Quiz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{x^2+6x+5} \quad = \quad ?$$

(A) 0
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 3

Quiz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+5x^2-3x-1}{x^3-20x^2+x+10} \quad = \quad ?$$

(A) 0

(B) $-\frac{1}{10}$

(C) 7

(D) 21

Mentoring-Programm für Studienanfängerinnen und -anfänger im Fach Physik

Was ist das Mentoring-Programm?

- Studierende („Mentees“) werden im ersten Bachelorsemester durch einen Professor bzw. eine Professorin aus der Physik unterstützt.
- Der Mentor/die Mentorin ist Anlaufstelle für Fragen zum Studium.
- Die Teilnahme ist freiwillig und kostet Sie nichts.

So können Sie teilnehmen:

- Alle Physik-Erstsemester erhalten am Ende der Einführungswoche, Freitag, 30. Oktober 2020, eine E-Mail mit näheren Anmeldeinfos.

Integralrechnung

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Integrale

Treppenfunktionen

Definition

Man nennt $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Treppenfunktion**, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

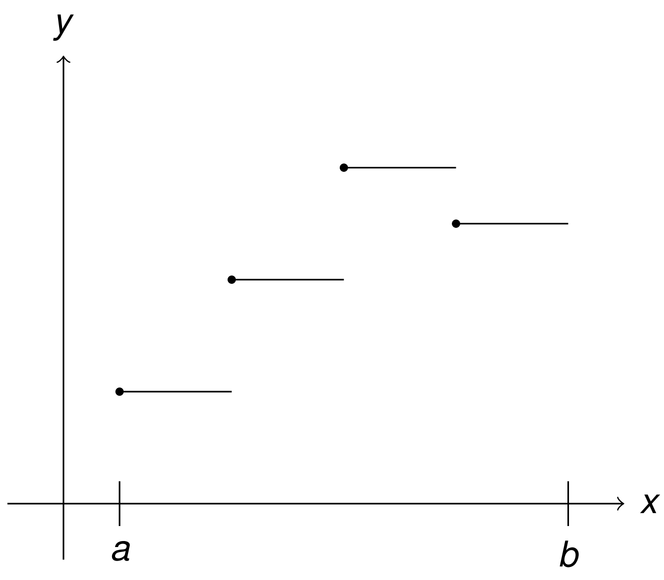
gibt, so daß t auf jedem offenen Intervall $]x_{j-1}, x_j[$ konstant ist. Der Wert auf diesem Intervall sei mit c_j bezeichnet.

Definition

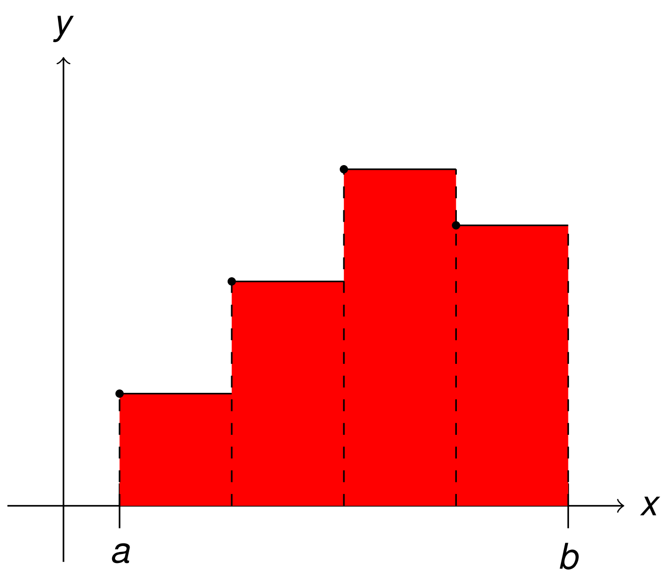
Das **Integral einer Treppenfunktion** wird definiert als

$$\int\limits_a^b t(x)\, dx \;=\; \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \left(x_j - x_{j-1} \right).$$

Treppenfunktionen



Treppenfunktionen



Treppenfunktionen

- Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bilden einen Vektorraum.
- Wir bezeichnen diesen Vektorraum mit $T[a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion und $t \in T[a, b]$.
  Man schreibt $f \geq t$ falls $f(x) \geq t(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Ober- und Unterintegrale

Definition

Wir definieren nun das Ober- und Unterintegral für f:

$$\int\limits_a^{b^*} f(x)\, dx = \inf \left\{ \int\limits_a^b t(x)\, dx;\ t \in T[a, b],\ t \geq f \right\},$$

$$\int\limits_{a\ *}^{b} f(x)\, dx = \sup \left\{ \int\limits_a^b t(x)\, dx;\ t \in T[a, b],\ t \leq f \right\}.$$

Das Riemann-Integral

Definition

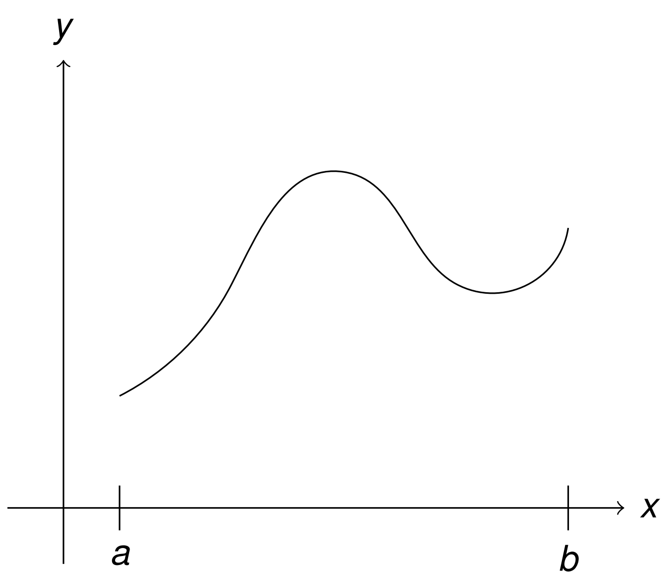
Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a_*}^{b} f(x)\,dx.$$

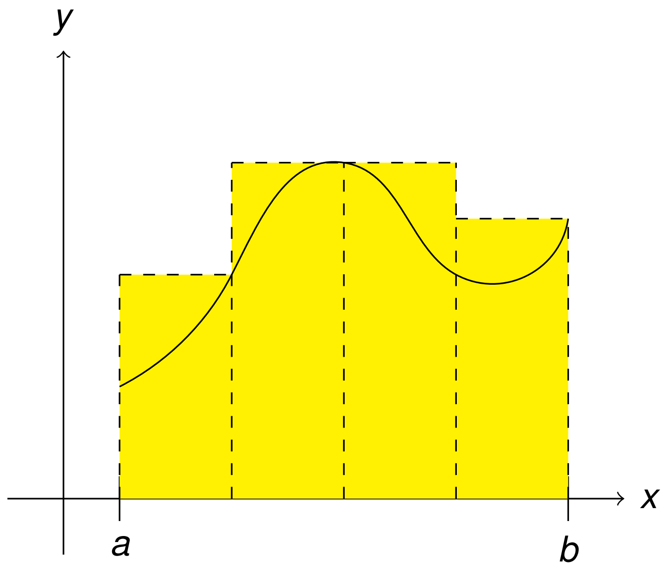
In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b^*} f(x)\,dx.$$

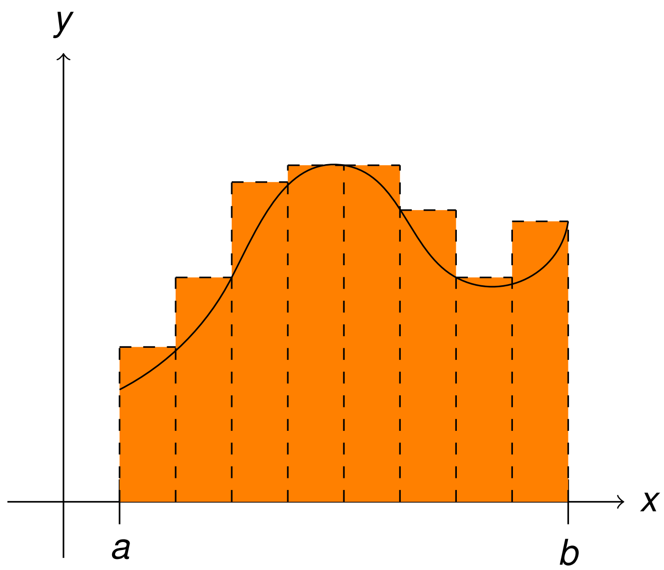
Approximation durch Treppenfunktionen



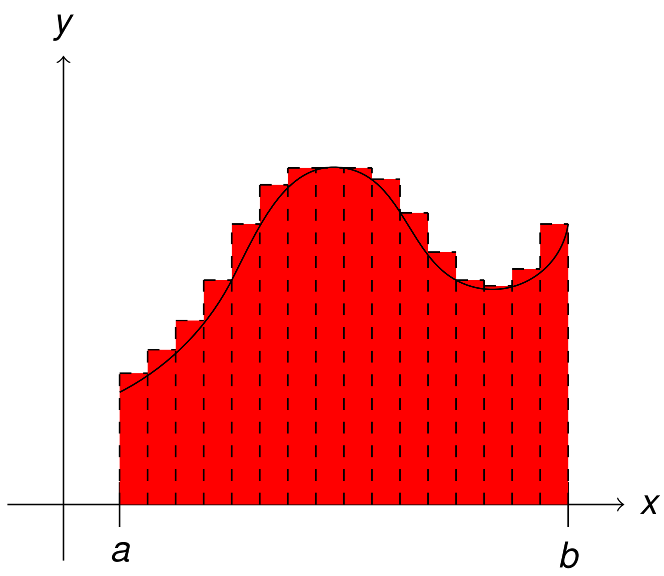
Approximation durch Treppenfunktionen



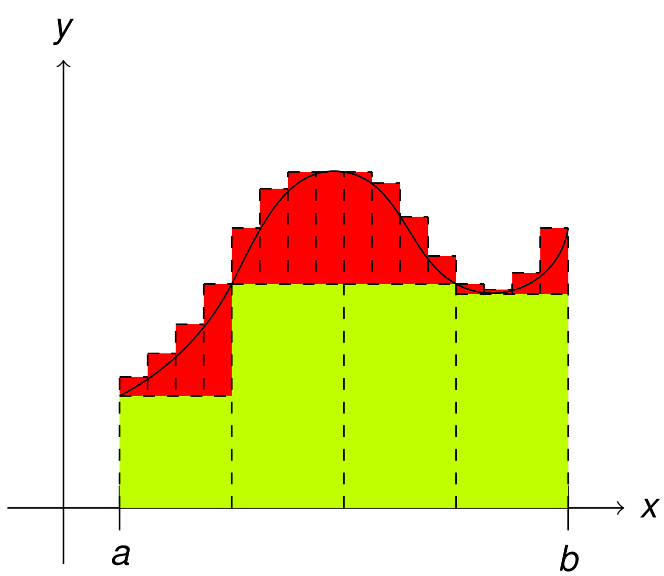
Approximation durch Treppenfunktionen



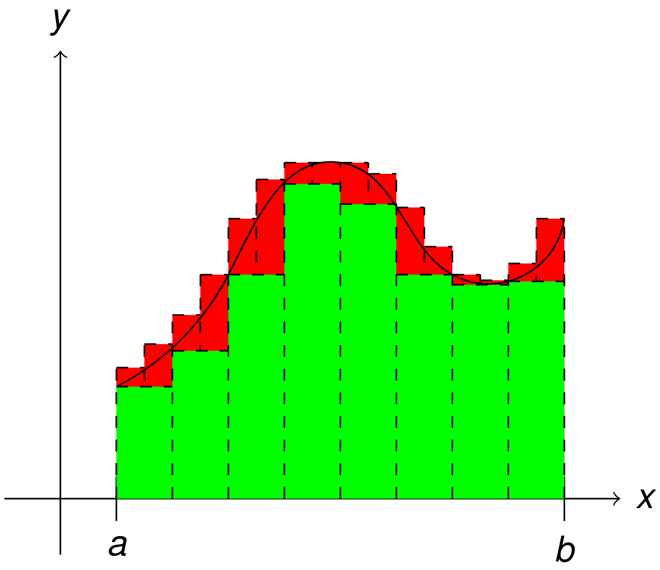
Approximation durch Treppenfunktionen



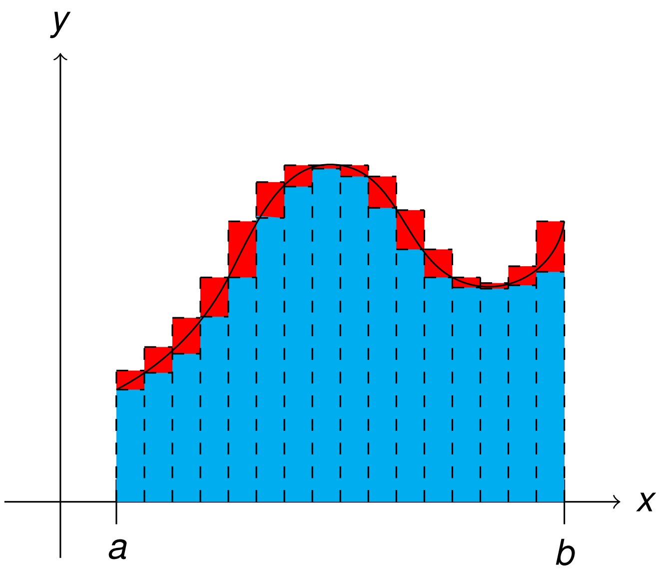
Approximation durch Treppenfunktionen



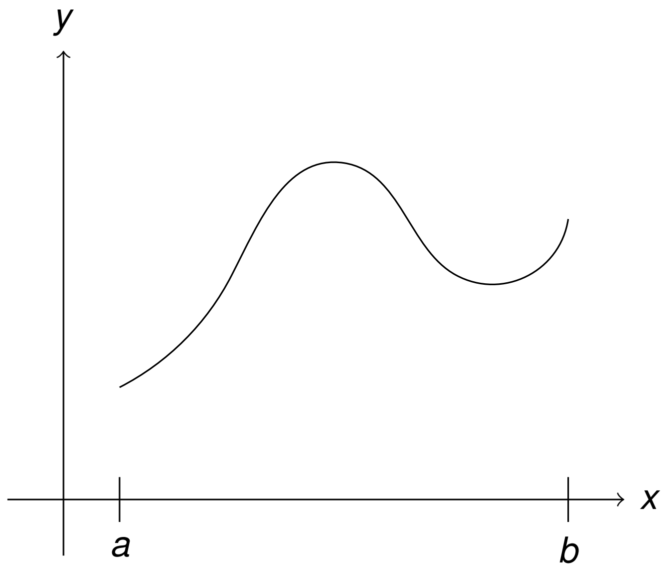
Approximation durch Treppenfunktionen



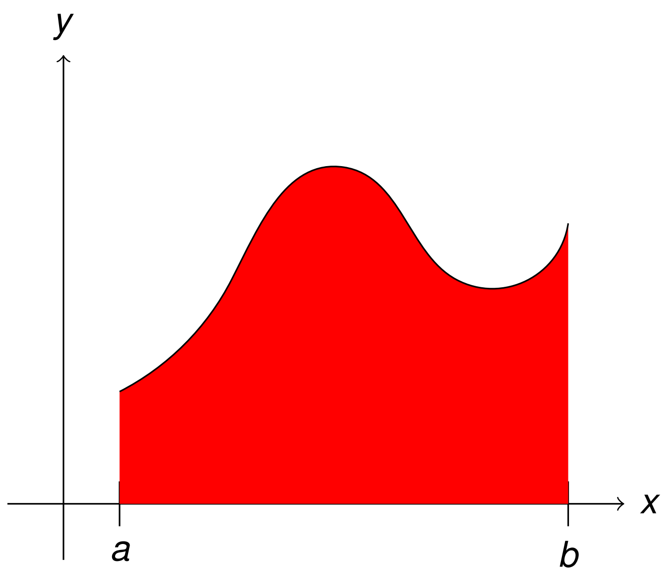
Approximation durch Treppenfunktionen



Geometrische Interpretation des Integrals



Geometrische Interpretation des Integrals



Das Riemann-Integral

Beispiel

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar: Alle Obersummen sind stets 1, alle Untersummen sind stets 0.

(Diese Funktion ist Lebesgue-integrierbar.)

Sätze über integrierbare Funktionen

Satz

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz

Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \\ \int_a^b (\lambda f)(x)\,dx &= \lambda \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Sätze über integrierbare Funktionen

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ integrierbar.

Im Allgemeinen ist allerdings

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx \neq \left(\int_a^b f(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\, dx\right).$$

Stammfunktionen

Definition

Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$.

Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann ebenfalls eine Stammfunktion, falls $F - G$ eine Konstante ist.

Man schreibt auch

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird auch als **unbestimmtes Integral** bezeichnet.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a).$$

Man schreibt auch

$$F(x)\big|_a^b \quad = \quad F(b) - F(a).$$

Stammfunktionen

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen:

$$\begin{aligned}
f(x) = x^n \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1,\\
f(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad F(x) = e^x,\\
f(x) = \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \ln|x|,\\
f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = -\cos(x),\\
f(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \sin(x),\\
f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \arctan(x).
\end{aligned}$$

Quiz

Gesucht ist eine Stammfunktion zu

$$3x^2 - 4x + 5$$

(A) $6x - 4$
(B) $3x^3 - 4x^2 + 5x$
(C) $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5x$
(D) $x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

Substitutionsregel

Satz

Sei $f : [a, b] \rightarrow W_1$ eine stetig differenzierbare Funktion und $g : D_2 \rightarrow W_2$ eine stetige Funktion mit $W_1 \subset D_2$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b g\left(f(x)\right) f'(x)\, dx = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)\, dx.$$

Substitutionsregel

Beispiel

Wir betrachten das Integral

$$I = \int\limits_0^\pi d\theta \; \sin\theta \left(5\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1\right).$$

Für die Substitution $u = -\cos\theta$ gilt

$$\frac{du}{d\theta} = \sin\theta$$

und daher ergibt sich mit Hilfe der Substitutionsregel

$$I = \int\limits_{-1}^{1} du \left(5u^2 - 3u + 1\right) = \left.\left(\frac{5}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + u\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}.$$

Partielle Integration

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x) g'(x) \; dx = \left. f(x) g(x) \right|_a^b - \int\limits_a^b f'(x) g(x) \; dx.$$

Partielle Integration

Beispiel

Wir betrachten das Integral

$$I = \int\limits_0^1 dx \; x \; e^x .$$

Setzen wir $f(x) = x$ und $g'(x) = \exp(x)$, so läßt sich die partielle Integration anwenden, falls wir eine Stammfunktion zu $g'(x)$ kennen. In diesem Beispiel ist dies besonders einfach, es ist $g(x) = \exp(x)$. Somit erhalten wir

$$I = x \; e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 dx \; e^x = (x-1) \; e^x \Big|_0^1 = 1 .$$

Abschnitt 2

Integrale über rationale Funktionen

Integrale über rationale Funktionen

Wir betrachten als Beispiel

$$I = \int_0^1 \frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)}\,dx.$$

Im ersten Schritt zerlegt man den Integranden mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)} = x+5+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x+2}.$$

Somit ist

$$I = \int_0^1 (x+5)\;dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} + 4\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2}.$$

Integrale über rationale Funktionen

$$I = \int_0^1 (x+5)\;dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} + 4\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2}.$$

Wir berechnen nun die einzelnen Integrale:

$$\int_0^1 (x+5)\;dx = \left.\frac{1}{2}x^2+5x\right|_0^1 = \frac{11}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left.-\frac{1}{x-2}\right|_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-2} = \ln\left(|x-2|\right)|_0^1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln\left(|x+2|\right)|_0^1 = \ln 3 - \ln 2,$$

Integrale über rationale Funktionen

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)}\,dx \\ &= \frac{11}{2}+\frac{1}{2}+4\left(-\ln 2\right)-2\left(\ln 3-\ln 2\right) \\ &= 6-2\ln 2-2\ln 3 \\ &= 6-2\ln 6. \end{aligned}$$

Abschnitt 3

Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale

Definition

Unter einem uneigentlichen Integral versteht man ein Integral, bei dem eine Integrationsgrenze unendlich ist oder bei dem der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht definiert ist. Es kann auch eine Kombination der beiden Fälle auftreten.

Uneigentliche Integrale

Wir betrachten zunächst den Fall, daß eine Integrationsgrenze unendlich ist. Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, \Lambda]$ mit $a < \Lambda < \infty$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \int\limits_a^\Lambda f(x)\, dx$$

existiert, nennt man das Integral von a bis Unendlich konvergent und man setzt

$$\int\limits_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\Lambda \to \infty} \int\limits_a^\Lambda f(x)\, dx.$$

Analog definiert man das Integral für das Intervall $]-\infty, b]$.

Uneigentliche Integrale

Beispiel

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} \;=\; \lim_{\Lambda\to\infty} \int\limits_1^\Lambda \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\Lambda\to\infty} \left.\frac{1}{x}\right|_1^\Lambda = 1 - \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{\Lambda} = 1.$$

Uneigentliche Integrale

Wir betrachten nun den Fall, daß der Integrand an einer Intervallgrenze nicht definiert ist. Sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < (b - a)$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$$

existiert, nennt man das Integral über $[a, b]$ konvergent und man setzt

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$$

Analog definiert man das Integral für den Fall in der die Funktion an der oberen Intevallgrenze nicht definiert ist.

Uneigentliche Integrale

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\varepsilon\to 0+} \sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2 \lim_{\varepsilon\to 0+} \sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Uneigentliche Integrale: Allgemeiner Fall

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ Riemann-integrierbar ist und sei $c \in]a, b[$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^c f(x)\, dx, \qquad \int_c^b f(x)\, dx = \lim_{\beta\to b-} \int_c^\beta f(x)\, dx$$

existieren, nennt man das Integral über $]a, b[$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Quiz

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{9}{10}}} = ?$$

(A) 0
(B) 1
(C) 9
(D) 10

Organisation der nächsten Woche

Aufgrund von diversen Einführungsveranstaltungen:

- Mittwoch, 28.10.2020: Plenum um 13:00h (11:00h Erstsemesterbegrüßung des Präsidenten)
- Freitag, 30.10.2020: keine Vorlesung, kein neues Übungsblatt. Plenum und Übungsgruppen finden wie gewohnt statt.

Differentialgleichungen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Allgemeines

Einführung

Es sei $f(x)$ eine unbekannte Funktion der Variablen x.
Nehmen wir weiter an, es sei bekannt, daß $f(x)$ die Gleichung

$$f(x)^2 - x \cdot f(x) - 1 = 0$$

erfüllt.
Dies ist eine algebraische Gleichung für $f(x)$.
Durch Auflösen nach $f(x)$ finden wir

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{x^2+4}\right)$$

Einführung

In den Naturwissenschaften tritt oft der Fall auf, daß wir eine Gleichung bestimmen können, die die unbekannte Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ enthält.

Beispiel

$$f'(x) - x \cdot f(x) = 0$$

Eine solche Gleichung nennt man eine Differentialgleichung.

Einführung

- Die Theorie der Differentialgleichungen geht weit über den Inhalt des mathematischen Brückenkurses hinaus.
- In den Naturwissenschaften treten einige wenige Differentialgleichungen relativ oft auf.
- In dieser Vorlesung: Einstieg in die Differentialgleichungen mittels wichtiger Beispiele und elementarer Lösungsmethoden.

Klassifizierung

- Tritt nur die Ableitung nach einer Variablen auf, spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung.
- Hängt dagegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, und treten Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf, so spricht man von einer partiellen Differentialgleichung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Tritt neben der unbekannten Funktion f nur die erste Ableitung f' auf, so spricht man von einer Differentialgleichung erster Ordnung.
- Ist die höchste auftretende Ableitung $f^{(n)}$, so spricht man von einer Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$G : D \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(x,y) \rightarrow G(x,y)$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = G(x,y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Der Graph von f ist in D enthalten, d.h.*

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset D.$$

- *Es gilt*

$$f'(x) = G(x, f(x)).$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel

$G(x, y) = -\lambda y$ führt auf die Differentialgleichung

$$f'(x) \quad = \quad -\lambda f(x).$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} G \quad : \quad & D \to \mathbb{R}, \\ & (x, \vec{y}) \to G(x, \vec{y}) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y^{(n)} \quad = \quad G\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$$

eine Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion

$$f \quad : \quad I \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Die Menge*

  $$\left\{(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n : y_j = f^{(j)}(x), 0 \leq j < n\right\}$$

  ist in D enthalten.
- *Es gilt*

  $$f^{(n)}(x) \quad = \quad G\left(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)\right).$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel

$G(x, y_0, y_1) = -\omega^2 y_0$ führt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(x) \quad = \quad -\omega^2 f(x).$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

- Die Sätze über die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung setzen voraus, daß die Funktion G lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Lipschitz-Bedingung

Definition (Lipschitz-Bedingung für eine Differentialgleichung erster Ordnung)

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} G \quad : \quad & D \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \to G(x, y) \end{aligned}$$

eine Funktion. Man sagt, G genügt in D einer **Lipschitz-Bedingung** mit der Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, falls für alle $(x, y), (x, z) \in D$ gilt

$$|G(x, y) - G(x, z)| \quad \leq \quad L\,|y - z|\,.$$

Eindeutigkeit von Lösungen

Satz

Wir setzen voraus, daß die Funktion G in D lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = G\left(x, \vec{y}\right)$$

über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Gilt dann

$$f^{(j)}\left(x_0\right) = g^{(j)}\left(x_0\right) \qquad \forall\, 0 \leq j < n$$

für ein $x_0 \in I$, so folgt

$$f\left(x\right) = g\left(x\right)$$

für alle $x \in I$.

Existenz von Lösungen

Satz (Picard – Lindelöf)

Sei D offen und $G : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(x_0, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \in D$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung

$$f : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung $y^{(n)} = G\left(x, \vec{y}\right)$ mit der Anfangsbedinung

$$f^{(j)}(x_0) = \tilde{y}_j \qquad 0 \leq j < n.$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Zusammenfassung:

Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung wird eindeutig durch n Anfangsbedingungen

$$f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(n-1)}(x_0)$$

bestimmt.

Abschnitt 2

Wichtige Beispiele

Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(x) = -\lambda f(x).$$

Gesucht ist eine Lösung zur Anfangsbedingung

$$f(0) = C.$$

Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = Ce^{-\lambda x}.$$

Es ist

$$f'(x) = -\lambda C e^{-\lambda x} = -\lambda f(x).$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$f(0) = C.$$

Quiz

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = 2f(x)$$

zur Anfangsbedingung $f(0) = 2$ ist

(A) $f(x) = 2e^x$

(B) $f(x) = e^{2x}$

(C) $f(x) = 2e^{2x}$

(D) $f(x) = 2e^{-2x}$

Exponentielles Wachstum

Beispiel

Annahme: Eine mit einem Virus infizierte Person steckt im Mittel pro Tag 1.3 nicht-infizierte Personen an.
Zu Beginn der Zählung seien 10 000 Personen infiziert.
Wie viele Personen sind nach 10 Tagen infiziert?

Exponentielles Wachstum

Es sei $f(t)$ die Anzahl der infizierten Personen am Tag t.
Die Anzahl der Neuinfizierten pro Tag ist proportional zur Anzahl der bereits infizierten Personen, daher haben wir die Differentialgleichung

$$f'(t) = \kappa f(t),$$

deren Lösung durch

$$f(t) = Ce^{\kappa t}$$

gegeben ist.

Exponentielles Wachstum

Wir bestimmen die Konstante C aus der Anfangsbedingung:

$$f(0) = 10000 \quad \Rightarrow \quad C = 10000.$$

Wir bestimmen die Konstante κ aus der Veränderung pro Tag:
Nach einem Tag haben wir 23000 Infizierte
(13000 neu Infizierte plus 10000 bereits Infizierte):

$$f(1) = 23000 \quad \Rightarrow \quad 10000 e^{\kappa} = 23000 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \ln(2.3)$$

Somit

$$\begin{aligned} f(t) &= 10000 \cdot (2.3)^t, \\ f(10) &\approx 41 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Exponentielles Wachstum

Bemerkungen:

- Wir haben angenommen, daß eine infizierte Person ansteckend bleibt.
- Wir haben Sättigungseffekte vernachlässigt: Sind alle Personen infiziert, können keine neuen Personen mehr infiziert werden.

Der harmonische Oszillator

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(t) = -\omega^2 f(t).$$

Gesucht ist eine Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$f(0) = x_0, \qquad f'(0) = v_0.$$

Der harmonische Oszillator

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) \;=\; A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

Es ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= \omega A_1 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t)\,, \\ f''(t) &= -\omega^2 A_1 \sin(\omega t) - \omega^2 A_2 \cos(\omega t) \;=\; -\omega^2 f(t). \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= f(0) \;=\; A_1 \sin(0) + A_2 \cos(0) \;=\; A_2, \\ v_0 &= f'(0) \;=\; \omega A_1 \cos(0) - \omega A_2 \sin(0) \;=\; \omega A_1\,. \end{aligned}$$

Der harmonische Oszillator

Somit lautet die Lösung

$$f(t) \;=\; x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Der harmonische Oszillator

Wir können auch die Funktion

$$f(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

betrachten. Es ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega c_2 e^{-i\omega t}, \\ f''(t) &= -\omega^2 c_1 e^{i\omega t} - \omega^2 c_2 e^{-i\omega t} = -\omega^2 f(t). \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \qquad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right),$$

ist dies äquivalent zur vorherigen Lösung.

Der harmonische Oszillator

Beispiel

Für ein Federpendel ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung:

$$F = -Dx,$$

wobei D die Federkonstante angibt. Das Newtonsche Gesetz lautet

$$F = ma,$$

wobei a die Beschleunigung angibt. Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Der harmonische Oszillator

Für die Auslenkung $x(t)$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\frac{D}{m} x(t).$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Lösung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Quiz

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = \omega^2 f(x)$$

zu den Anfangsbedingungen $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$ ist

(A) $f(x) = 2cos(\omega x)$

(B) $f(x) = 2cos(\omega x) + \frac{2}{\omega} sin(\omega x)$

(C) $f(x) = cos(2\omega x)$

(D) $f(x) = 2cosh(\omega x)$

Abschnitt 3

Elementare Lösungsmethoden

Elementare Lösungsmethoden

Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = G(x, y)$$

Elementare Lösungsmethoden

Hängt die Funktion G nur von x, aber nicht von y ab, so hat man

$$f'(x) = G(x)$$

und man erhält eine Lösung durch Integration:

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} G(t)\, dt.$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß die Funktion G faktorisiert:

$$G(x, y) = h(x)k(y).$$

In diesem Fall spricht man von einer Differentialgleichungen mit separierten Variablen.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir wollen annehmen, daß

$$h : I \to \mathbb{R}, \qquad k : J \to \mathbb{R},$$

stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ sind. Weiter sei $k(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Sei nun $(x_0, y_0) \in I \times J$. Wir setzen

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)dt, \qquad K(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{k(t)}.$$

Es sei $I' \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $H(I') \subset K(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $f : I' \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_0) = y_0.$$

Diese Lösung erfüllt die Beziehung

$$K(f(x)) \quad = \quad H(x).$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' \quad = \quad 2xe^{-y}$$

und suchen eine Lösung zu der Anfangsbedingung $f(0) = c$. Die Variablen sind klarerweise getrennt. Für dieses Beispiel können wir

$$h(x) = 2x, \qquad k(y) = e^{-y}$$

setzen.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir erhalten

$$\begin{aligned} H(x) &= 2 \int\limits_0^x t \, dt = x^2, \\ K(y) &= \int\limits_c^y \frac{dt}{e^{-t}} = e^y - e^c. \end{aligned}$$

Somit

$$e^{f(x)} - e^c = x^2.$$

Umgeformt ergibt sich

$$f(x) = \ln\left(x^2 + e^c\right).$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Beispiel

Als zweites Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = y^2.$$

Gesucht ist eine Lösung zu der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir haben

$$\frac{dy}{y^2} = dx,$$

und somit liefert die Integration

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

Durch Auflösen nach y erhält man

$$y = -\frac{1}{x+c}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $c = -1$, somit lautet die Lösung

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Fehlerrechnung

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Motivation

Motivation

Eine Person A mißt eine bestimmte Größe experimentell. Sie führt diese Messung öfters durch. Aufgrund der experimentellen Meßungenauigkeit ergeben sich leicht unterschiedliche Werte.

Meßreihe 1:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ergebnis	2.6	2.3	2.5	2.3	2.6	2.4	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.8	2.7

Wir definieren den Mittelwert einer Meßreihe mit n Meßpunkten als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Für die obige Meßreihe ergibt sich

$$\bar{x} = 2.48$$

Motivation

Eine Person B bestimmt die gleiche Größe ebenfalls experimentell. Person B verwendet allerdings eine schlechtere Meßapparatur und führt weniger Messungen durch. Person B erhält die folgenden Meßwerte:

Meßreihe 2:

Messung	1	2	3	4
Ergebnis	0.3	5.2	3.1	1.4

Der Mittelwert ergibt sich zu

$$\bar{x} = 2.48$$

Motivation

- Im zweiten Fall streuen die einzelnen Messungen wesentlich stärker als im ersten Fall.
- Es ist daher offensichtlich, daß das Ergebnis von Person A vertauenswürdiger als das Ergebnis von Person B ist.
- Wir wollen nun diese Aussage quantitativ machen und suchen ein Maß für die Streuung der Meßpunkte.

Abschnitt 2

Grundlagen

Stochastik

Definition

$$\begin{aligned} \Omega &: \text{Ergebnismenge eines Zufallsexperiments,} \\ \text{Zufallsfunktion} &: \text{Funktion } X : \Omega \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsgröße X:

$$W : x \quad \to \quad P\left(\omega | X(\omega) = x\right).$$

Erwartungswert einer Zufallsgröße: Nimmt die Zufallsgröße X die Werte x_1, x_2, ..., x_n an, so bezeichnet man mit

$$\mu\left(X\right) \quad = \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_j W(x_j)$$

den Erwartungswert von X.

Stochastik

Satz

Entsprechen die einzelnen Messungen einzelnen unabhängigen Realisierungen eines Zufallsexperiments, so ist der Mittelwert $\bar{x}$ eine Schätzung für $\mu(X)$.

Varianz und Standardabweichung

Definition

Die Varianz einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\mathrm{Var}(X) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \, W(x_j).$$

Definition

Die Standardabweichung einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\sigma(X) \quad = \quad \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Schätzfunktion für die Varianz

Kennen wir den Erwartungswert μ einer Zufallsgröße und machen n Messungen x_j, so ist

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz.

Im Allgemeinen ist μ aber nicht bekannt und man verwendet $\bar{x}$ als Schätzung für μ. In diesem Fall ist

$$S^2 \quad = \quad \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz der Zufallsgröße X.

Sätze über die Varianz

Sei $c \in \mathbb{R}$ und seien X_1, X_2, ..., X_n unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Var(cX) &= c^2\ Var(X)\,, \\ Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) &= Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)\,. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{n}\underbrace{(X + X + ... + X)}_{n\text{ mal}}\right) &= \frac{1}{n^2}\left(\text{Var}\,(X) + \text{Var}\,(X) + ... + \text{Var}\,(X)\right) \\ &= \frac{1}{n}\text{Var}\,(X)\,. \end{aligned}$$

Varianz des Mittelwertes

Es interessiert in erster Linie nicht die Varianz der einzelnen Messungen Var(X), sondern die Varianz des Mittelwertes Var($\bar{X}$). Bei n Messungen gilt:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\text{Var}(X).$$

Somit erhält man als Schätzung für die Varianz des Mittelwertes

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n}S^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2.$$

Für die Standardabweichung erhält man

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2}.$$

Beispiel

Somit findet man für die beiden oben aufgeführten Meßreihen:

$$\text{Meßreihe 1}: \quad \sigma_{\bar{X}} = 0.05,$$
$$\text{Meßreihe 2}: \quad \sigma_{\bar{X}} = 1.07.$$

Es ist üblich mit dem Mittelwert auch immer die Standardabweichung anzugeben, also

$$\text{Meßreihe 1}: \quad x = 2.48 \pm 0.05,$$
$$\text{Meßreihe 2}: \quad x = 2.48 \pm 1.07.$$

Die Normalverteilung

Zur Interpretation der Standardabweichung betrachten wir zunächst kontinuierliche Zufallsgrößen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$ für eine kontinuierliche Zufallsgröße beschreibt

$$P\left(a < X \leq b\right) = \int\limits_a^b p(x)\, dx.$$

Definition: Man nennt eine kontinuierliche Zufallsgröße normalverteilt, falls sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right)$$

besitzt. Der Erwartungswert dieser normalverteilten Zufallsgröße ist μ, die Standardabweichung ist σ.

Die Normalverteilung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße gilt:

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &\approx 68.27\%, \\ P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 95.45\%, \\ P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 99.73\%. \end{aligned}$$

Quiz

Ein Experiment mißt eine Größe O und berichtet

$$O = 5.94 \pm 0.02$$

Dies bedeutet:

(A) Der wahre Wert der Observablen O ist 5.94.

(B) Der wahre Wert der Observablen O liegt im Intervall $[5.92, 5.96]$.

(C) Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92, 5.96]$ liegt, beträgt 99.7%.

(D) Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92, 5.96]$ liegt, beträgt 68.3%, falls der Meßwert einer Normalverteilung folgt.

Abschnitt 3

Fehlerfortpflanzung

Problemstellung

Gesucht wird eine Größe $f = f(x, y)$ die von zwei weiteren Größen x und y abhängt.
Die Funktion f wird als bekannt vorausgesetzt, die Größen x und y werden durch eine Messung mit Fehlern $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ bestimmt.
Gesucht ist nun der Fehler für die Größe f.

Fehlerfortpflanzung

Für die Größe f beginnen wir mit der Taylorentwicklung:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad = \quad f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \ldots$$

Wir nehmen an, daß wir n Messungen für die Größen x und y haben, die einzelnen Meßwerte seien mit x_j und y_j bezeichnet. Somit haben wir auch n Ergebnisse für f. Für die Abweichung eines Einzelergebnisses vom Mittelwert gilt für kleine Abweichungen

$$f_j - \bar{f} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \ldots$$

Fehlerfortpflanzung

$$f_j - \bar{f} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \ldots$$

Somit gilt für die Varianz:

$$\sigma_f^2 =$$

$$= \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_j - \bar{f})^2$$

$$= \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_j - \bar{x})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (y_j - \bar{y})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2 (x_j - \bar{x}) (y_j - \bar{y}) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]$$

Kovarianz

Wir definieren die **Kovarianz** als

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

Somit haben wir

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_{xy}.$$

Unkorrelierte Zufallsgrößen

Falls x und y unkorreliert sind, gilt $\sigma_{xy} = 0$ und somit

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2,$$

bzw.

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}.$$

Beispiele: Addition

1. $f = x + y$. In diesem Fall haben wir

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

man sagt, die (absoluten) Fehler addieren sich quadratisch.

Beispiele: Addition

Beispiel

$$f = x + y, \qquad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Es sei $x = 15 \pm 3$ und $y = 17 \pm 4$.

Es ist

$$\bar{f} = \bar{x} + \bar{y} = 15 + 17 = 32,$$
$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Somit

$$f = 32 \pm 5.$$

Beispiele: Multiplikation

2. $f = x \cdot y$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2},$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Bei einem Produkt addieren sich die relativen Fehler quadratisch.

Beispiele: Multiplikation

Beispiel

$$f = x \cdot y, \qquad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$.

Es ist

$$\bar{f} = \bar{x} \cdot \bar{y} = 2 \cdot 5 = 10,$$

$$\sigma_f = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 10 \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{1}{2}.$$

Somit

$$f = 10 \pm 0.5.$$

Beispiele: Subtraktion

3. $f = x - y$. Hier findet man wie bei einer Summe

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Quiz

Es sei $x = 17 \pm 4$ und $y = 15 \pm 3$, sowie

$$f = x - y.$$

Mittelwert und Fehler für f ergeben sich zu

(A) $f = 2 \pm 1$

(B) $f = 2 \pm \sqrt{7}$

(C) $f = 2 \pm 4$

(D) $f = 2 \pm 5$

Beispiele: Division

4. $f = \frac{x}{y}$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{y^2}\sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2}.$$

Schreibt man dies mit Hilfe der relativen Fehler erhält man wie beim Produkt

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Beispiele: Division

Beispiel

$$f = \frac{x}{y}, \qquad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$.

Es ist

$$\bar{f} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{2}{5} = 0.4,$$

$$\sigma_f = f\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{2}{5\sqrt{400}} = \frac{1}{50}.$$

Somit

$$f = 0.4 \pm 0.02.$$

Beispiele: Potenzen

5. Zum Abschluss betrachten wir noch $f = x^a y^b$. Man erhält

$$\sigma_f = \sqrt{\left(a x^{a-1} y^b\right)^2 \sigma_x^2 + \left(b x^a y^{b-1}\right)^2 \sigma_y^2}$$

Auch hier empfiehlt es sich wieder, die Formel in relativen Fehler zu schreiben:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Abschnitt 4

Kombination von Messungen

Anwendungsbeispiel

Wir hatten zuvor den Fall betrachtet, daß eine Größe durch zwei Meßreihen experimentell bestimmt wird:

$$\begin{aligned} \text{Meßreihe 1}: &\quad x = 2.48 \pm 0.05, \\ \text{Meßreihe 2}: &\quad x = 2.48 \pm 1.07. \end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man diese Ergebnisse miteinander kombiniert.

Kombination von Messungen

Etwas allgemeiner seien für eine Größe x n Messungen x_j mit Fehlern σ_j gegeben.

Dann setzt man

$$x = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2} x_1 + \frac{1}{\sigma_2^2} x_2 + ... + \frac{1}{\sigma_n^2} x_n}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + ... + \frac{1}{\sigma_n^2}}, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + ... + \frac{1}{\sigma_n^2}}}.$$

Anwendungsbeispiel

Für das Beispiel hat man

$$x_1 = 2.48, \qquad \sigma_1 = 0.05,$$
$$x_2 = 2.48, \qquad \sigma_2 = 1.07.$$

Man findet somit

$$x = 2.48, \qquad \sigma = 0.04995.$$

Die zweite Meßreihe liefert keinen wesentlichen Beitrag zur Verbesserung des Fehlers.

Funktionen mehrerer Variablen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Partielle Ableitungen

Funktionen mehrerer Variablen

Definition

Sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten Funktionen

$$\begin{aligned} f &: U \to \mathbb{R}, \\ (x_1, ..., x_n) &\to f(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Beispiel

$U = \mathbb{R}^2$.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Partielle Ableitung

Definition

Die Funktion f ist **partiell differenzierbar in der i-ten Koordinate**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

existiert.

Man schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h}.$$

Diese Formel zeigt auch, wie man die i-te partielle Ableitung berechnet: Man hält alle anderen Variablen $x_1,...,x_{i-1}$, x_{i+1}, ..., x_n fest und nimmt die gewöhnliche Ableitung nach der Variablen x_i.

Partielle Differenzierbarkeit

Definition

Wir nennen eine Funktion **partiell differenzierbar**, falls sie in allen Variablen partiell differenzierbar ist.

Definition

Ebenso nennen wir eine Funktion **stetig partiell differenzierbar**, falls sie partiell differenzierbar ist und alle Ableitungen stetig sind.

Partielle Ableitungen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, x_3) \to \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{aligned} f(x,t) &= A\sin(x - vt) \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) &= ? \end{aligned}$$

(A) $A\cos(x - vt)$

(B) $-A\cos(x - vt)$

(C) $vA\cos(x - vt)$

(D) $-vA\cos(x - vt)$

Höhere partielle Ableitungen

Definition

Wir können partielle Ableitungen auch hintereinander ausführen und erhalten höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, ..., x_n)\right).$$

Man beachte, daß diese Schreibweise impliziert, daß zunächst die Ableitung nach x_j ausgeführt wird, und das Zwischenergebniss dann nach x_i abgeleitet wird.

Wir interessieren uns dafür unter welchen Voraussetzungen das Endergebniss nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt.

Höhere partielle Ableitungen

Satz

Satz: Sei f zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_n)$$

Satz

Allgemeiner gilt: Ist f k-mal stetig partiell differenzierbar, so vertauschen die k-ten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} ... \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_1)}} ... \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_k)}} f(x_1, ..., x_n),$$

wobei σ eine Permutation von $(i_1, ..., i_k)$ ist.

Höhere partielle Ableitungen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f \; : \; & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, x_3) \to x_1^3 + 3x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_1x_2 + x_1x_3) = 6x_2 + x_3 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2x_3\right) = 6x_1. \end{aligned}$$

Quiz

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= 3x_1^2 x_2^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) &= ?
\end{aligned}
$$

(A) 0
(B) $9x_1^2$
(C) $18x_1 x_2^2$
(D) $9x_1^2 x_2^2 + 6x_1 x_2^3$

Abschnitt 2

Lokale Extremwerte

Lokale Maxima und Minima

Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir sagen, daß f in $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein **lokales Maximum** hat, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\vec{x}_0$ existiert, so daß

$$f\left(\vec{x}_0\right) \quad \geq \quad f\left(\vec{x}\right),$$

für alle $\vec{x} \in U$.

Definition

Gilt dagegen

$$f\left(\vec{x}_0\right) \quad \leq \quad f\left(\vec{x}\right),$$

für alle $\vec{x} \in U$, so spricht man von einem **lokalen Minimum**.

Lokale Maxima und Minima

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums oder lokalen Maximums ist das Verschwinden aller partiellen Ableitungen an der Stelle $\vec{x}_0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\vec{x}\right) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \quad = \quad 0.$$

Würde eine partielle Ableitung nicht verschwinden, so gibt es in jeder Umgebung von $\vec{x}_0$ einen Punkt, an dem $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ gilt, sowie einen Punkt an dem $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ gilt. Ist zum Beispiel die i-te partielle Ableitung ungleich Null, so betrachtet man hierzu zwei Punkte, die um einen infinitessimalen positiven bzw. negativen Wert in Richtung des i-ten Einheitsvektors verschoben sind.

Die Hessesche Matrix

Um eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums oder Maximums zu finden betrachten wir die zweiten Ableitungen und definieren die **Hessesche Matrix**:

Definition

$$H_{ij}\left(\vec{x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\left(\vec{x}\right), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Da nach Voraussetzung f zweimal stetig differenzierbar ist, vertauschen die partiellen Ableitungen und die Hessesche Matrix ist offensichtliche symmetrisch:

$$H_{ij}\left(\vec{x}\right) = H_{ji}\left(\vec{x}\right).$$

Positiv definit, negativ definit und indefinit

Definition

Wir bezeichnen eine symmetrische $n \times n$ Matrix A als **positiv definit**, falls für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ gilt:

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} > 0.$$

Definition

Wir bezeichnen sie als **negativ definit**, falls für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ gilt:

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} < 0.$$

Definition

Wir bezeichnen die Matrix A als **indefinit**, falls es ein $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ und ein $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} > 0, \qquad \vec{\eta}^T A \vec{\eta} < 0.$$

Positiv semi-definit und negativ semi-definit

Man findet auch die Begriffe “positiv semi-definit” und “negativ semi-definit”.

Definition

Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A nennt man **positiv semi-definit** bzw. **negativ semi-definit**, falls für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} \geq 0, \quad \text{bzw.} \quad \vec{\xi}^T A \vec{\xi} \leq 0.$$

Hurwitz-Kriterium

Um zu entscheiden, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist, kann das Hurwitz-Kriterium verwendet werden:

Satz (Hurwitz)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix. A ist positive definit, falls

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ ... & & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt.

Hurwitz-Kriterium

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} &= 3, \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} &= 11, \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 50. \end{aligned}$$

Hurwitz-Kriterium

Satz

Eine reelle Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist

- *positiv definit, falls alle Diagonaleinträge positiv sind:*

$$\lambda_j > 0, \quad \forall\, 1 \le j \le n.$$

- *negativ definit, falls alle Diagonaleinträge negativ sind:*

$$\lambda_j < 0, \quad \forall\, 1 \le j \le n.$$

Hurwitz-Kriterium

Beispiel

Die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit.

Quiz

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist

(A) positiv definit

(B) negativ definit

(C) negativ semi-definit

(D) indefinit

Lokale Extremwerte

Wir kehren zur Betrachtung der lokalen Minima und Maxima einer Funktion zurück. Wir erhalten die folgende Aussage:

Satz

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, so daß

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

- *Ist die Hessesche Matrix $H_{ij}(\vec{x}_0)$ positiv definit, so besitzt f in $\vec{x}_0$ ein* **lokales Minimum***.*
- *Ist sie negativ definit, so besitzt f in $\vec{x}_0$ ein* **lokales Maximum***.*
- *Ist die Hessesche Matrix indefinit, so sagt man, daß f in $\vec{x}_0$ einen* **Sattelpunkt** *besitzt.*

Beispiel 1

Beispiel

Sei

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Im Punkte $\vec{x}_0 = (0,0)$ verschwinden die partiellen Ableitungen:

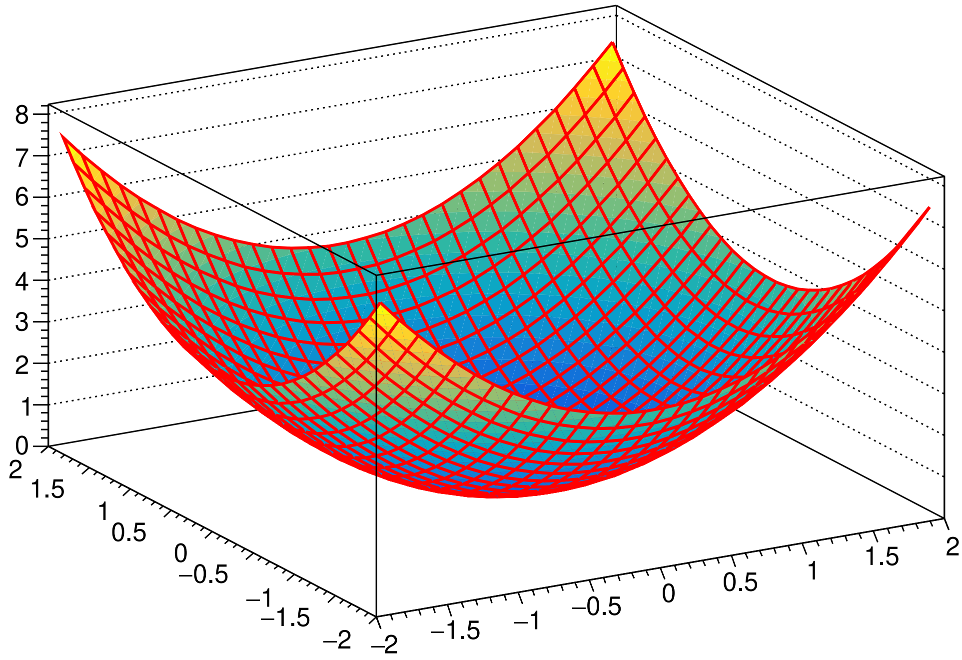
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2x|_{\vec{x}=(0,0)} = 0, \qquad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2y|_{\vec{x}=(0,0)} = 0.$$

Die Hessesche Matrix ist gegeben durch

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit und f hat an der Stelle $\vec{x}_0 = (0,0)$ ein Minimum.

Beispiel 1



Beispiel 2

Beispiel

Sei nun

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Im Punkte $\vec{x}_0 = (0,0)$ verschwinden die partiellen Ableitungen:

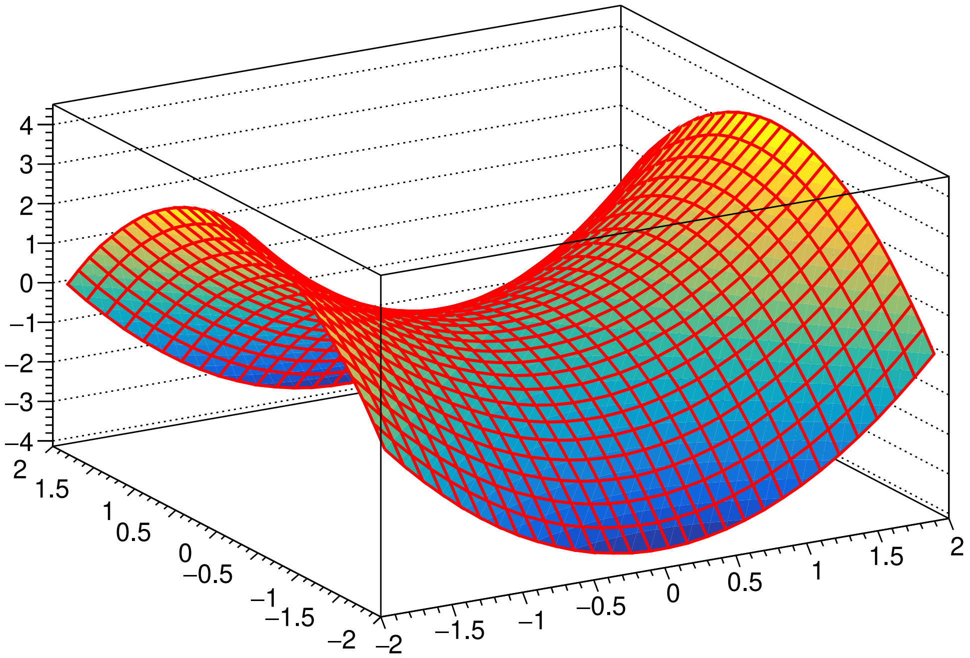
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2x|_{\vec{x}=(0,0)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{x}=(0,0)} = -2y|_{\vec{x}=(0,0)} = 0.$$

Die Hessesche Matrix ist gegeben durch

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit und f hat an der Stelle $\vec{x}_0 = (0,0)$ einen Sattelpunkt.

Beispiel 2



Organisatorisches

Plenumsdiskussion heute um 13:00h!

Vektoranalysis

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Allgemeines

Motivation

- Eine gewöhnliche Funktion ist beispielsweise eine Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow f(x). \end{aligned}$$

- Eine Funktion mehrerer Variablen ist beispielsweise eine Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, ..., x_n) &\rightarrow f(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

- Wir betrachten nun den allgemeinen Fall und lassen nun auch einen höherdimensionalen Wertebereich zu, beispielsweise

$$\begin{aligned} \vec{f} &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ (x_1, ..., x_n) &\rightarrow \vec{f}(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Definition

Definition

Wir betrachten eine Abbildung, in dem der Definitionsbereich U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und der Wertebereich W eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist:

$$\begin{array}{rcl} \vec{f} & : & U \rightarrow W, \\ (x_1, ..., x_n) & \rightarrow & \vec{f}(x_1, ..., x_n). \end{array}$$

Man bezeichnet $\vec{f}$ als ein Vektorfeld.
Jedem Punkt $(x_1, ..., x_n) \in U$ wird ein Vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet.

Vektorfelder

Schreiben wir $\vec{f}$ in Komponenten

$$\vec{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

so haben wir m Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} f_j & : & U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, ..., x_n) & \rightarrow & f_j(x_1, ..., x_n). \end{array}$$

Wir schreiben im folgenden $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$.

Beispiele

- Elektrische Felder: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{E}(\vec{x})$ zugeordnet, daß das elektrische Feld an diesem Ort angibt.
- Magnetische Felder: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{B}(\vec{x})$ zugeordnet, daß das magnetische Feld an diesem Ort angibt.
- Strömungsfelder: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{v}(\vec{x})$ zugeordnet, daß die Geschwindigkeit des Mediums an diesem Ort angibt. (Dies kann eine strömende Flüssigkeit sein, oder der Wind in der Atmosphäre.)

Beispiele

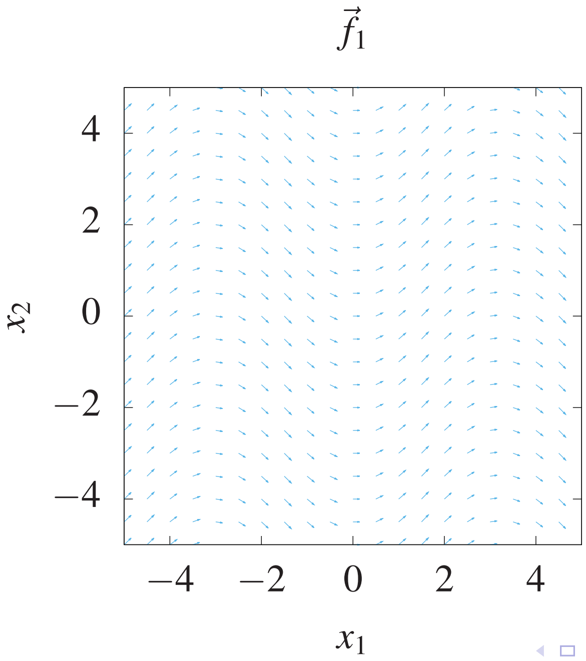
Beispiel

Wir betrachten drei Beispiele für Vektorfelder:

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
&\quad \vec{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}, \\
\vec{f}_2 \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
&\quad \vec{f}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\
\vec{f}_3 \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
&\quad \vec{f}_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

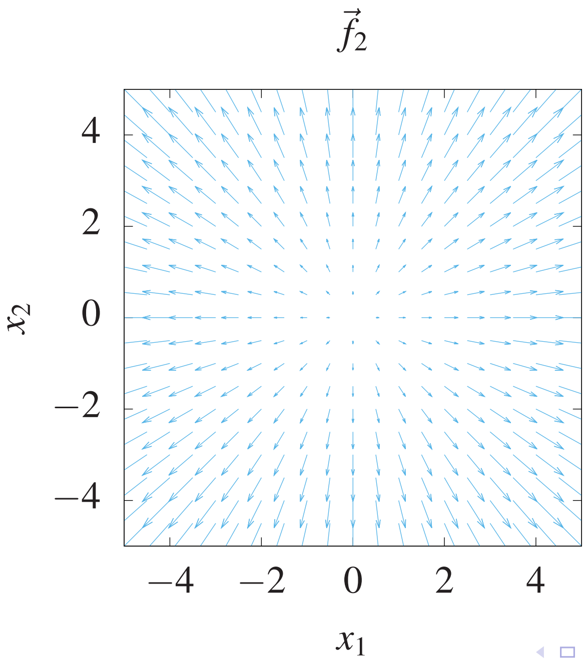
Beispiel 1

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}$$



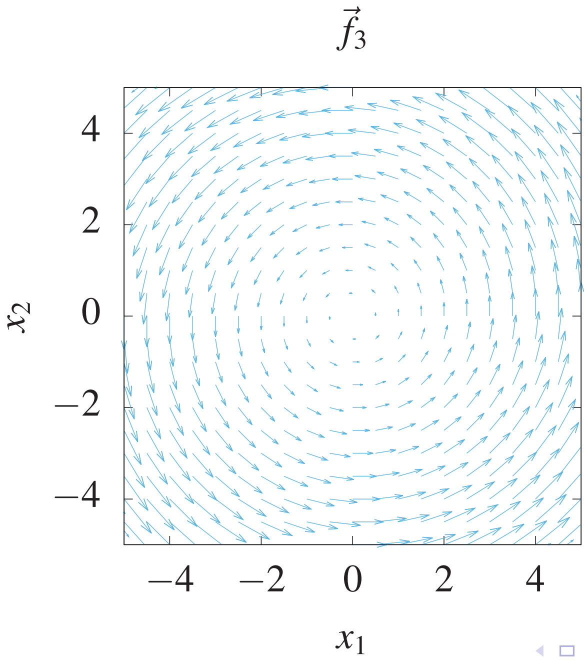
Beispiel 2

$$\vec{f}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Beispiel 3

$$\vec{f}_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Abschnitt 2

Die totale Ableitung

Die totale Ableitung

Definition

Wir bezeichnen eine Abbildung $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ als im Punkte $\vec{x}_0 \in U$ **total differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \\ \vec{x} &\to A\vec{x}, \end{aligned}$$

gibt, so daß in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ gilt:

$$\vec{f}\left(\vec{x}_0 + \vec{\xi}\right) = \vec{f}\left(\vec{x}_0\right) + A\vec{\xi} + o\left(|\vec{\xi}|\right).$$

A ist eine von $\vec{x}$ unabhängige $m \times n$-Matrix.

Die totale Ableitung

- Die kleine “o”-Schreibweise bedeutet, daß das Restglied durch eine Funktion $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ gegeben ist, für die gilt

$$\lim_{|\vec{\xi}| \to 0} \frac{\vec{\varphi}(\vec{\xi})}{|\vec{\xi}|} = \vec{0}.$$

  Das Restglied verschwindet also schneller als der lineare Term für $|\vec{\xi}| \to 0$.
- Die Bedingung an die totale Differenzierbarkeit bedeutet also, daß sich die Abbildung in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\vec{x}_0$ durch eine Konstante $\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)$ und einen linearen Term $A\vec{\xi}$ beschreiben läßt.

Die Jacobi-Matrix

Neben der totalen Differenzierbarkeit haben wir natürlich noch die partiellen Ableitungen der i-ten Komponente f_i nach der j-ten Koordinate:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_1, ..., x_j + h, ..., x_n) - f_i(x_1, ..., x_j, ..., x_n)}{h}.$$

Diese partiellen Ableitungen definieren eine $m \times n$ Matrix J_{ij}

$$J_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die man als Jacobi-Matrix oder Funktional-Matrix bezeichnet. Auch die Bezeichnung Differential wird verwendet, und man findet die Notation

$$D\vec{f}(\vec{x}) = J(\vec{x}).$$

Die totale Ableitung

Für den Zusammenhang zwischen totaler Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit haben wir die folgenden Sätze:

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkte $\vec{x}_0 \in U$ **total differenzierbar** *sei, d.h.*

$$\vec{f}\left(\vec{x}_0 + \vec{\xi}\right) = \vec{f}(\vec{x}_0) + A\vec{\xi} + o\left(||\vec{\xi}||\right).$$

Dann ist $\vec{f}$ im Punkte $\vec{x}_0$ stetig und alle Komponenten $f_j : U \to \mathbb{R}$ von $\vec{f}$ sind im Punkte $\vec{x}_0$ **partiell differenzierbar** *und es gilt*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = A_{ij}.$$

Die totale Ableitung

Satz

Sei wieder $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Es sei weiter vorausgesetzt, daß die Abbildung $\vec{f}$ im Punkte $\vec{x}_0 \in U$ **stetig partiell differenzierbar** *ist, d.h. alle partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$$

existieren und sind stetig. Dann ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ **total differenzierbar**.

Die totale Ableitung

Wir haben also die folgenden Implikationen:

stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ *total differenzierbar* $\Rightarrow$ *partiell differenzierbar*

Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Abschnitt 3

Der Nabla-Operator

Der Gradient

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion von n Variablen.

Definition

Die partiellen Ableitungen von φ definieren ein Vektorfeld, welches man als den Gradienten von φ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{grad}\, \varphi \quad &: \quad U \to \mathbb{R}^n, \\ \text{grad}\, \varphi\, (\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Gradient einer skalaren Funktion ist also ein Vektorfeld, daß in der j-ten Komponente die j-te partielle Ableitung enthält.

Der Nabla-Operator

Definition

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators läßt sich der Gradient auch wie folgt schreiben:

$$\text{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi$$

Der Nabla-Operator

- $\vec{\nabla}$ ist ein Operator, der auf eine Größe, wie zum Beispiel eine Funktion, die abgeleitet werden kann, wirkt. Man sollte diese Größe daher immer mitangeben.
- Mathematische Beziehungen, in denen die Größe auf die ein Operator wirkt fehlt, machen nur Sinn, wenn sie für alle möglichen Größen des Problems (wie zum Beispiel für alle Testfunktionen) gelten.

Der Nabla-Operator

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi \quad : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$
$$\varphi\left(\vec{x}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Wir erhalten für den Gradienten

$$\text{grad}\, \varphi\left(\vec{x}\right) \quad = \quad \vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Minima und Maxima

- Wir hatten bereits gesehen, daß eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums bzw. eines lokalen Minimums im Punkte $\vec{x}_0$ das Verschwinden aller partiellen Ableitungen in diesem Punkte ist.
- Das Verschwinden aller partiellen Ableitungen ist gleichbedeutend mit der Aussage

  $$\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}_0\right) \quad = \quad \vec{0},$$

  d.h. der Gradient verschwindet.

Quiz

$$\varphi \quad : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$\varphi\left(\vec{x}\right) = x_1 x_2$$

$$\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right) \quad = \quad ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Die Divergenz

Definition

Sei $U \subset \mathrm{R}^n$ eine offene Menge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ eine partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Divergenz dieses Vektorfeldes als eine skalare Funktion der n Variablen

$$\text{div}\, \vec{f} \quad : \quad U \to \mathbb{R},$$

die durch

$$\text{div}\, \vec{f}\left(\vec{x}\right) \quad = \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j\left(\vec{x}\right)}{\partial x_j}$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Nabla-Operators schreibt man auch oft

$$\text{div}\, \vec{f}\left(\vec{x}\right) \quad = \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\left(\vec{x}\right).$$

Die Divergenz

Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ 3x_2 - x_1 \\ 5x_3 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für die Divergenz

$$\text{div } \vec{f}\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\left(\vec{x}\right) = 2x_1 + 3 + 5 = 2x_1 + 8.$$

Die Divergenz

Beispiel

Es ist auch interessant die Divergenz der drei eingangs gezeigten Vektorfelder zu berechnen. Man findet:

$$\text{div } \vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin x_1 = 0,$$
$$\text{div } \vec{f}_2(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_2(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 = 2,$$
$$\text{div } \vec{f}_3(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_3(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0.$$

Von diesen drei Beispielen hat also nur $\vec{f}_2$ eine nicht-verschwindende Divergenz.
Die Divergenz beschreibt die **Quellen** und **Senken** eines Vektorfeldes.

Quiz

$$\vec{f} \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 3x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\left(\vec{x}\right) \;=\; ?$$

(A) 4
(B) $3x_1 + x_2$
(C) $x_1 + 3x_2$
(D) $4x_1 x_2$

Der Laplace-Operator

Wir betrachten noch die folgende Kombination von Gradient und Divergenz:

Sei $U \subset \mathrm{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion von n Variablen.

Wir wenden erst den Gradienten auf φ an, und dann die Divergenz auf das resultierende Vektorfeld. Wir erhalten somit wieder eine skalare Funktion:

Definition

$$\Delta\varphi \;:\; U \to \mathbb{R},$$
$$\Delta\varphi\left(\vec{x}\right) = \text{div grad}\,\varphi\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi\left(\vec{x}\right)}{\partial x_j^2}.$$

Der Laplace-Operator

Mit Hilfe des Nabla-Operators können wir wieder schreiben:

$$\Delta\varphi\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right).$$

Definition

Wir bezeichnen mit

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

den Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned}\varphi \; : \; & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\\ & \varphi\left(\vec{x}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.\end{aligned}$$

Wir hatten bereits den Gradienten berechnet:

$$\mathrm{grad}\,\varphi\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung des Laplace-Operators ergibt

$$\Delta\varphi\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = 2+2+2 = 6.$$

Abschnitt 4

Vektorfelder in drei Dimensionen

Vektorfelder in drei Dimensionen

Wir betrachten noch den Spezialfall von Vektorfeldern in drei Dimensionen:

$$\vec{A} \quad : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Die Rotation

Definition

Hier können wir noch eine weitere Operation einführen, die man als Rotation bezeichnet und wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \text{rot}\, \vec{A} \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \\ \text{rot}\, \vec{A}\,(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators und des Kreuzproduktes läßt sich dies auch schreiben als

$$\textit{rot}\, \vec{A}\,(\vec{x}) \quad = \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}\,(\vec{x})\,.$$

Die Rotation

Beispiel

Sei

$$\begin{aligned} \vec{A} \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \\ \vec{A}\,(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\text{rot}\, \vec{A}\,(\vec{x}) \quad = \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}\,(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Rotation

Beispiel

Kehren wir nocheinmal zu den eingangs diskutierten Vektorfeldern zurück.

Diese Vektorfelder sind Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, daher ist die Operation der Rotation nicht unmittelbar darauf anwendbar.

Wir können aber trotzdem für ein Vektorfeld $\vec{f} = (f_1, f_2)$ die anti-symmetrische Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1$$

betrachten.

Die Rotation

Beispiel

Wir finden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} f_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \sin x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} 1 = \cos(x_1), \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f_{22} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{21} &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0, \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f_{32} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{31} &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_2) = 2.
\end{aligned}$$

Die Rotation beschreibt die **Wirbel** eines Vektorfeldes.

Rotation eines Gradientenfeldes

Satz

Sei $U \subset \mathrm{R}^3$ eine offene Menge und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann

$$\begin{aligned} \textit{rot grad}\,\varphi &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \varphi \right) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis.

Wir betrachten die erste Komponente von rot grad φ:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi = 0.$$

Gleiches gilt für die anderen Komponenten.

Ein Gradientenfeld ist also rotationsfrei. □

Divergenz eines Rotationsfeldes

Satz

Sei $U \subset \mathrm{R}^3$ eine offene Menge und $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann

$$\begin{aligned} \textit{div rot}\,\vec{f} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ein Rotationsfeld ist also divergenzfrei. □

Zum Schluss des Brückenkurses:

Viel Erfolg in Ihrem Studium!