ÜBERBLICK: GEOMETRIE

Inhalt

Abschnitt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (> 8MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt zur Schlussprüfung gelangen.

Lernziele

- Sie können elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren (Abschnitt 2).
- Sie können Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen (Abschnitt 1).
- Mit Hilfe grundlegender Sätze der Elementargeometrie (Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, Strahlensätze, Kongruenz von Dreiecken, Winkelsummen, Satz des Pythagoras) können Sie Strecken und Winkel berechnen (Abschnitt 1 , 3 , 4).
- Sinus, Kosinus und Tangens können Sie als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen (Abschnitt 4).
- Sie können Sinus und Kosinus als Koordinaten der Punkte des Einheitskreises identifizieren (Abschnitt 4).
- Sie können Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen (Abschnitt 5).
- Sie können Oberfläche und Volumen einfacher Körper wie Prismen, Zylinder, Pyramiden, Kegel und Kugeln berechnen (Abschnitt 6).

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel werden Begriffe der sogenannten elementaren Geometrie behandelt. Abgesehen vom letzten Abschnitt, in dem es um die Berechnung von Oberflächen und Volumina räumlicher Figuren geht, werden ausschließlich Figuren in der Ebene betrachtet. Grundlage sind Punkte, Geraden, Strecken und Winkel. Das Hauptaugenmerk liegt auf der Berechnung von Streckenlängen und Winkelgrößen im Dreieck, wobei auch die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens eingeführt und verwendet werden.

Allgemeine Bezeichnungen

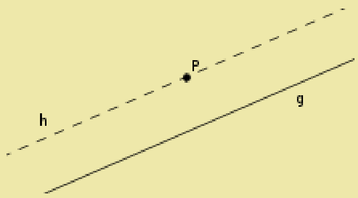
Im Folgenden sind noch einige Bezeichnungen aufgeführt, die im ganzen Kapitel verwendet werden:

Für zwei Punkte P und Q in der Ebene verwenden wir die Bezeichnungen

- *Gerade* PQ für die Gerade, die durch die zwei Punkte geht.
- *Strecke* PQ für die Strecke mit Endpunkten P und Q.
- $\overline{PQ}$ für die Länge der Strecke PQ. Diese ist gleich dem Abstand der Punkte.

1 DEFINITION

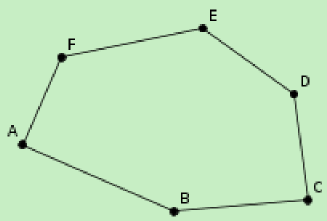
Zwei Geraden in der Ebene heißen *parallel*, wenn sie entweder identisch sind oder keinen gemeinsamen Punkt haben, sich also nicht schneiden. Zu einer gegebenen Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h, die durch P geht und parallel zu g ist (die sogenannte *Parallele zu g durch P*).



Parallele h zu g durch P

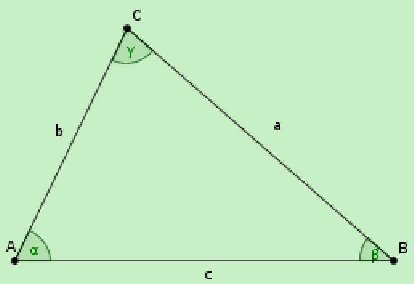
Sind von drei Geraden g, h und k die Geraden g und h parallel, sowie die Geraden h und k parallel, so sind auch die Geraden g und k parallel.

Die Bezeichnung von **Vielecken** (Polygonen) geschieht durch Angabe ihrer Eckpunkte entlang der Kanten. Das Sechseck in der folgenden Abbildung trägt also den Namen „Sechseck $ABCDEF$" (oder auch „Sechseck $BCDEFA$", „Sechseck $AFEDCB$" etc.).



Sechseck $ABCDEF$

Am häufigsten werden **Dreiecke** auftreten, weshalb für diese auch die Seiten und Innenwinkel eine feste Bezeichnung erhalten. Im Dreieck ABC erhalten die Seiten des Dreiecks die Namen a, b und c, wobei a (bzw. b bzw. c) dem Eckpunkt A (bzw. dem Eckpunkt B bzw. dem Eckpunkt C) gegenüber liegt. Die Innenwinkel bei A, B und C heißen dann α, β und γ (vgl. Abbildung).



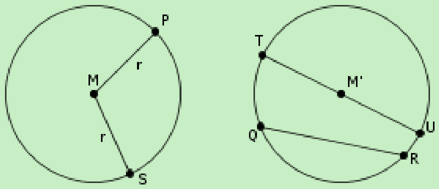
Bezeichnungen im Dreieck ABC.

Entsprechend werden die Seiten und Winkel eines Dreiecks $A'B'C'$ mit a', b', c' und α', β', γ' bezeichnet.

Um Abstände von Punkten bzw. Streckenlängen vergleichen zu können, werden oft **Kreise** benötigt.

- Ein *Kreis* mit Mittelpunkt M und Radius r besteht nämlich genau aus denjenigen Punkten, welche von M den Abstand r haben (vgl. linke Seite der folgenden Abbildung).

Zwei Punkte P und S liegen also genau dann auf demselben Kreis um M, wenn sie denselben Abstand von M haben, d.h. wenn $\overline{PM} = \overline{SM}$ gilt.



Kreis mit Radius sowie Kreis mit Sehnen und Durchmesser

Bezeichnungen im Kreis:

- Eine *Sehne* des Kreises ist eine Strecke, deren Endpunkte auf dem Kreis liegen (in der Abbildung z.B. die Strecken RQ und TU).

- Ein *Durchmesser* des Kreises ist eine Sehne, die den Mittelpunkt enthält (in der Abbildung z.B. die Strecke TU).

Die Länge eines jeden Durchmessers des Kreises ist genau doppelt so groß wie der Radius des Kreises. Insbesondere sind alle Durchmesser eines Kreises gleich lang.
Oft wird nicht nur der Abstand eines Kreispunktes zum Mittelpunkt als Radius bezeichnet, sondern auch die Strecke selbst.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

1. WINKEL

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

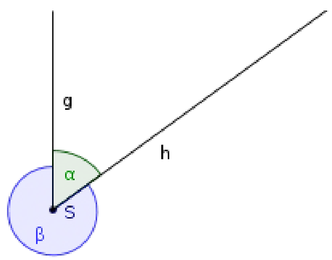
Lernziele

- Sie können spezielle Winkel benennen und ihre Größen im Gradmaß und Bogenmaß angeben.
- Sie können von Gradmaß in Bogenmaß umrechnen und umgekehrt.
- Sie können mit Hilfe von Winkelsätzen aus gegebenen Winkelgrößen neue Winkelgrößen berechnen.

Für die Beschreibung geometrischer Figuren sind außer Streckenlängen (bzw. Abständen von Eckpunkten) auch Winkel und ihre Größen wichtig. Grundlegende Aussagen zu Winkeln und Zusammenhänge der Größen verschiedener Winkel werden hier behandelt.

1.1 Einführung in Winkel

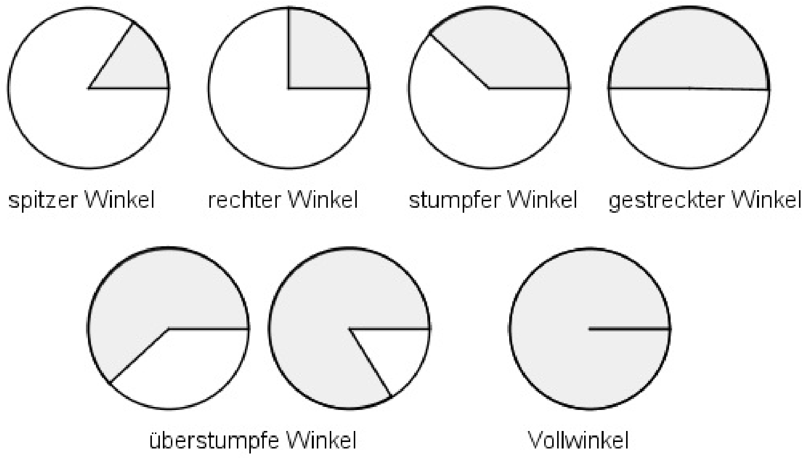
Zwei Halbgeraden (auch Strahlen genannt), die von einem gemeinsamen Punkt S (dem sogenannten *Scheitel*) ausgehen, schließen zwei *Winkel* ein (vgl. Abbildung). Der eingezeichnete Winkel α wird *Winkel zwischen* h *und* g genannt, der Winkel β, der *Winkel zwischen* g *und* h; die Reihenfolge der Nennung geschieht also immer gegen den Uhrzeigersinn.



Winkel zwischen Halbgeraden

Für eine grobe Unterscheidung von Winkelgrößen gibt es einige Bezeichnungen:

Vollwinkel	wenn die Halbgeraden übereinstimmen.
gestreckter Winkel	wenn die Halbgeraden eine Gerade bilden. Dieser ist somit halb so groß wie der Vollwinkel.
rechter Winkel	Winkel, welcher halb so groß ist wie der gestreckte Winkel.
spitzer Winkel	Winkel, der kleiner als der rechte Winkel ist.
stumpfer Winkel	Winkel, der größer als der rechte, aber kleiner als der gestreckte Winkel ist.
überstumpfer Winkel	Winkel, der größer als der gestreckte Winkel ist.



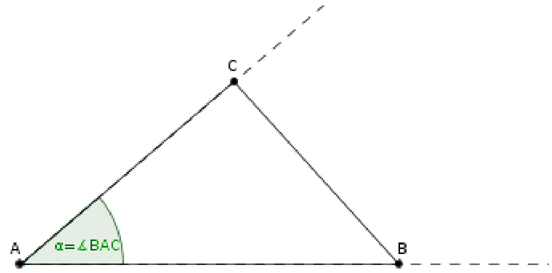
Schließen zwei Halbgeraden (oder Geraden) einen rechten Winkel ein, so sagt man, dass die Halbgeraden (bzw. Geraden) *senkrecht* aufeinander stehen.

Die Halbgeraden, zwischen denen man Winkel betrachtet, sind oft gegeben durch den Anfangspunkt und jeweils einen weiteren Punkt. Der Winkel zwischen der ersten und der zweiten Halbgeraden wird dann mittels der drei Punkte angegeben: $\measuredangle PSQ$.
Hierbei ist stets der erstgenannte Punkt P der weitere Punkt auf der ersten Halbgeraden, der zweitgenannte Punkt S der Scheitelpunkt und der drittgenannte Punkt Q der weitere Punkt auf der zweiten Halbgeraden.

1.1 BEISPIEL

Man betrachte zum Beispiel die Innenwinkel eines Dreiecks ABC. Der Innenwinkel α bei A ist dann der Winkel zwischen den Halbgeraden mit Anfangspunkt A, welche durch B bzw. C gehen. Gemäß obiger Bezeichnungsregelung ist also $\alpha = \measuredangle BAC$. Die Reihenfolge der drei Punkte ist dabei wichtig:

$\measuredangle CAB$ wäre in diesem Beispiel nicht der Innenwinkel bei A, sondern der Außenwinkel. Mit $\measuredangle ABC$ würde der Außenwinkel bei B bezeichnet.



Übung zur Benennung von Winkeln

1.2 Maße für Winkel

Um die Größe eines Winkels anzugeben, sind zwei verschiedene Maßeinheiten gebräuchlich: Das *Gradmaß* (gekennzeichnet durch ein hochgestelltes Gradzeichen, z.B. 90°) und das *Bogenmaß* (ohne besondere Kennzeichnung). Festgelegt ist, dass der Vollwinkel im Gradmaß 360° beträgt und im Bogenmaß 2π, was ungefähr $6{,}283$ ist.

Erläuterung zu dieser Festlegung

Das Gradmaß 360° für den Vollwinkel hat historische Gründe und geht auf die Babylonier zurück, das Bogenmaß von 2π ist der Umfang eines Kreises mit Radius 1. Daher kommt auch der Name „Bogenmaß".

Die Maße der anderen Winkel ergeben sich dann als Anteile aus dem Vollwinkel.

1.2 REGEL

Winkel	im Gradmaß	im Bogenmaß
Vollwinkel	360°	2π
überstumpfer Winkel	zwischen 180° und 360°	zwischen π und 2π
gestreckter Winkel	180°	π
stumpfer Winkel	zwischen 90° und 180°	zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π
rechter Winkel	90°	$\frac{\pi}{2}$
spitzer Winkel	zwischen 0° und 90°	zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$

1.3 BEISPIEL

1. Wenn man einen gestreckten Winkel in drei gleich große Teile teilt, erhält man Winkel, deren Größen $\frac{1}{3}$ der Größe des gestreckten Winkels sind, also $\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$ bzw. im Bogenmaß $\frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$.

2. Wird der rechte Winkel halbiert, erhält man einen Winkel der Größe $\frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ bzw. im Bogenmaß $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.

Zur Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt bezieht man sich immer auf den Vollwinkel: Ein Winkel von zum Beispiel 36° hat also einen Anteil von $\frac{36}{360}$ am Vollwinkel, und beträgt daher im Bogenmaß $\frac{36}{360} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Allgemein erhält man die Umrechnungsformel:

1.4 REGEL

$$\text{Bogenmaß des Winkels} = \frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{180^\circ} \cdot \pi$$

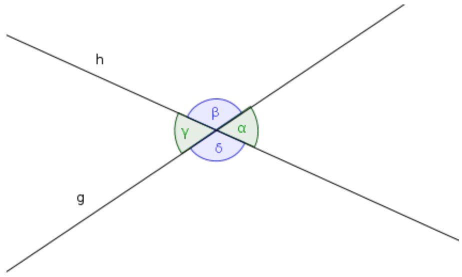
und umkehrt

$$\text{Gradmaß des Winkels} = \frac{\text{Bogenmaß des Winkels}}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{\text{Bogenmaß des Winkels}}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Übung zur Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt

1.3 Beziehung zwischen verschiedenen Winkeln

Zwei sich schneidende Geraden bilden vier Winkel (s. Abbildung).



Winkel zwischen sich schneidenden Geraden

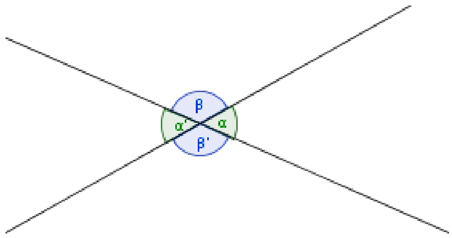
Zwei nebeneinanderliegende Winkel ergänzen sich immer zu einem gestreckten Winkel, weshalb man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 180^\circ \\ \beta+\gamma &= 180^\circ \\ \gamma+\delta &= 180^\circ \\ \delta+\alpha &= 180^\circ \end{aligned}$$

erhält. Insbesondere erhält man also $\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \gamma = \delta$ und daher

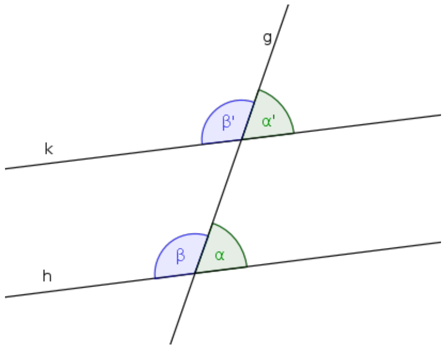
$$\alpha = \gamma \quad \text{und} \quad \beta = \delta.$$

Zwei gegenüberliegende Winkel sind also gleich groß. Gegenüberliegende Winkel nennt man auch *Scheitelwinkel* (voneinander). In folgender Abbildung sind also α und α', sowie β und β' Scheitelwinkel voneinander.



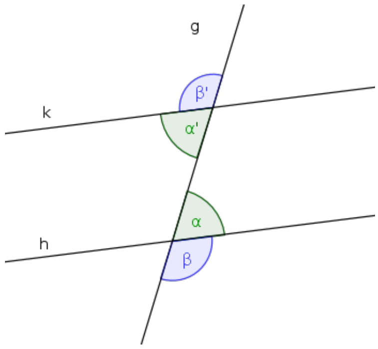
Scheitelwinkel

Schneidet eine Gerade g zwei parallele Geraden h und k, so sind die auf den gleichen Seiten von g bzw. h und k liegenden Winkel gleich groß (in der folgenden Abbildung die Winkel α und α', sowie die Winkel β und β'). Derartige Winkel nennt man auch *Stufenwinkel* (voneinander).



Stufenwinkel

Den Scheitelwinkel zu einem Stufenwinkel nennt man *Wechselwinkel*. In der folgenden Abbildung sind also α und α' Wechselwinkel (voneinander), sowie β und β' . Diese sind ebenfalls gleich groß.



Wechselwinkel

Die letzten drei Aussagen zusammenfassend hat man also:

1.5 REGEL

Scheitelwinkel, Stufenwinkel und Wechselwinkel sind gleich groß.

1.4 Winkel in Dreiecken und in Vielecken

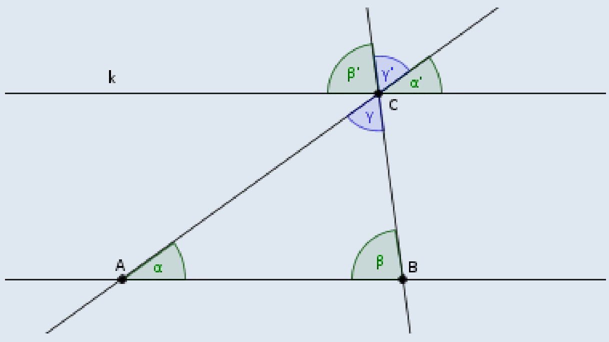
Aus der Gleichheit der Größen von Scheitelwinkeln und Stufenwinkeln lässt sich der Satz über die Winkelsumme im Dreieck gewinnen.

1.6 SATZ

Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt stets 180° (Bogenmaß π).

Herleitung

Die Herleitung erhält man folgendermaßen: Man betrachte ein Dreieck ABC wie in der Abbildung.



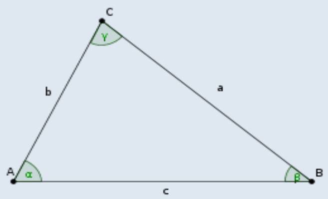
Winkelsumme im Dreieck

Die Gerade k sei die Parallele zur Geraden AB durch den Punkt C. Dann sind α' und α gleich groß, und β' und β gleich groß, weil es jeweils Stufenwinkel sind. Des Weiteren sind γ' und γ gleich groß, weil es Scheitelwinkel sind. Die drei Winkel α', β' und γ' geben aber zusammen den gestreckten Winkel. Also gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ.$$

Kurztest

Im Dreieck ABC wie in der Skizze seien $\alpha = 57^\circ$ und $\beta = 48^\circ$.
Wie groß ist der dritte Innenwinkel γ des Dreiecks?



Antwort: $\gamma =$? °

Prüfen Lösung anzeigen

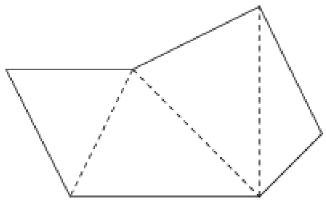
Aus der Winkelsumme im Dreieck erhält man allgemeiner auch eine Winkelsumme im Vieleck, da man das Vieleck in Dreiecke zerlegen kann.

1.7 REGEL

Die Summe der Innenwinkel im n-Eck beträgt $(n-2)\cdot 180^\circ$ (Bogenmaß $(n-2)\cdot\pi$).

1.8 BEISPIEL

Die Winkelsumme im Viereck ($n=4$) beträgt $2\cdot 180^\circ = 360^\circ$.
Die Winkelsumme im Fünfeck ($n=5$) beträgt $3\cdot 180^\circ = 540^\circ$.
Die Winkelsumme im Sechseck ($n=6$) beträgt $4\cdot 180^\circ = 720^\circ$.



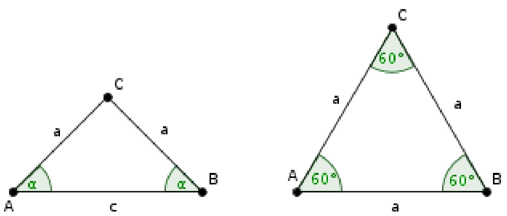
Zerlegung eines Sechsecks in vier Dreiecke

In einem Dreieck lassen sich die Größen der Innenwinkel vergleichen, indem man die ihnen gegenüberliegenden Seiten vergleicht.

1.9 REGEL

1. Sind in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang, so sind die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Solche Dreiecke heißen gleichschenklig (s. Definition 2.1).
2. Ist in einem Dreieck eine Seite länger (bzw. kürzer) als eine zweite Seite, so ist der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel größer (bzw. kleiner) als der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel.

Da hiermit alle Fälle aufgeführt sind, gelten auch die Umkehrungen: Dem größeren Winkel liegt die längere Seite gegenüber. Sind zwei Winkel gleich groß, so sind die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang.



gleichschenkliges Dreieck und gleichseitiges Dreieck

1.10 BEISPIEL

Bei einem *gleichseitigen* Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang. Somit sind auch alle drei Winkel gleich groß. Da aber die Summe der drei Winkel 180° ergibt, beträgt also jeder einzelne Winkel $\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$.

In einem gleichseitigen Dreieck betragen daher die Größen der Innenwinkel 60°.

[video-online-only]

Übung zur Berechnung neuer Winkelgrößen aus bekannten Winkelgrößen

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

In Abbildung 1 ist ein Fünfeck abgebildet. (Die rechtwinkligen Gitterlinien dienen zur Orientierung.)

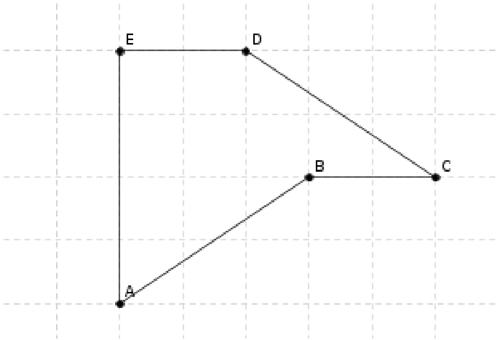


Abbildung 1: Fünfeck $ABCDE$

a) Welcher Winkel wird mit $\measuredangle ABC$ bezeichnet?

b) Wie lauten die Bezeichnungen für die verschiedenen Innenwinkel des Fünfecks?

c) Welche der Innenwinkel sind spitz, stumpf etc.?

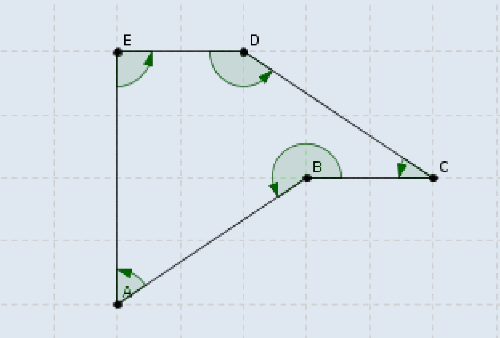
Antworten

a) Der Außenwinkel bei B.

b) Die Bezeichnungen der Innenwinkel sind:

bei A: $\measuredangle BAE$	bei B: $\measuredangle CBA$	bei C: $\measuredangle DCB$
bei D: $\measuredangle EDC$	bei E: $\measuredangle AED$	

c) Die Innenwinkel bei A und C sind spitz, der Innenwinkel bei B ist überstumpf, der Innenwinkel bei D ist stumpf und der Innenwinkel bei E ist ein rechter Winkel.



Fünfeck $ABCDE$ mit Innenwinkeln

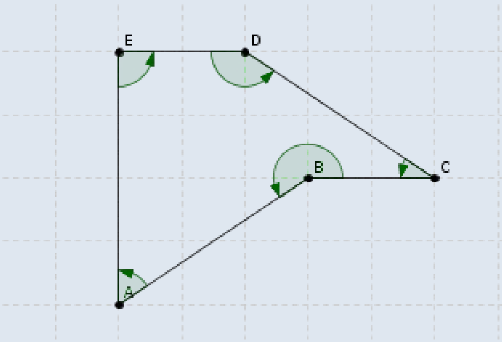
Lösung zu a

Bei der Bezeichnung steht der Schnittpunkt der betreffenden Halbgeraden in der Mitte, d.h. $\measuredangle ABC$ ist ein Winkel beim Punkt B.

Die anderen beiden Punkte bezeichnen die Punkte auf den Halbgeraden, wobei der erste Punkt auf der ersten und der letzte auf der zweiten Halbgeraden liegt. Der Winkel $\measuredangle ABC$ ist also der Winkel zwischen der Halbgeraden durch A und der durch C.

Erste und zweite Halbgerade bezieht sich auf die Durchschreitung des Winkels **gegen** den Uhrzeigersinn. Also bezeichnet $\measuredangle ABC$ den Außenwinkel bei B.

Lösung zu b



Fünfeck $ABCDE$ mit Innenwinkeln

Die Bezeichnung besteht aus den Angaben von drei Punkten, nämlich zuerst ein Punkt auf der ersten Halbgeraden, dann der Scheitelpunkt, an dem der Winkel anzutreffen ist, und zuletzt ein Punkt auf der zweiten Halbgeraden.
Erste und zweite Halbgerade bezieht sich auf die Durchschreitung des Winkels **gegen** den Uhrzeigersinn.

Beim Innenwinkel bei A steht also A in der Mitte, und die anderen beiden Punkte sind die anderen Endpunkte der zwei an A anliegenden Seiten, also E und B. Damit weiß man schon, dass der Innenwinkel also entweder mit $\measuredangle EAB$ oder mit $\measuredangle BAE$ bezeichnet wird.

Wenn man den Winkel gegen den Uhrzeigersinn durchschreiten will, muss man bei B anfangen und kommt dann auf der Halbgeraden durch E an. Der Innenwinkel ist also $\measuredangle BAE$.

Die anderen Innenwinkel erhält man genauso:

bei B: $\measuredangle CBA$	bei C: $\measuredangle DCB$
bei D: $\measuredangle EDC$	bei E: $\measuredangle AED$

Lösung zu c

Die Strecken AE und ED verlaufen entlang der Gitterlinien. Also ist der Innenwinkel bei E ein rechter Winkel.

Der Winkel zwischen einer waagerechten Halbgeraden durch A und der Strecke AE wäre ein rechter Winkel. Der Innenwinkel bei A ist daher kleiner als ein rechter Winkel, also ein spitzer Winkel. Ebenso ist der Innenwinkel bei C ein spitzer Winkel.

Der Innenwinkel bei B ist größer als ein gestreckter Winkel, also ein überstumpfer Winkel.

Die Strecke ED verläuft waagerecht. Wäre also CD senkrecht (mit C unterhalb von D), so läge ein rechter Winkel vor, wäre CD ebenfalls waagerecht, so läge ein gestreckter Winkel vor. Der Innenwinkel bei D ist also größer als ein rechter Winkel, aber kleiner als ein gestreckter Winkel. Somit ist es ein stumpfer Winkel.

ÜBUNG 2

1) Rechnen Sie die folgenden Gradmaße ins Bogenmaß um:

a) 30° b) 50°

c) 122° d) 315°

2) Rechnen Sie die folgenden Bogenmaße ins Gradmaß um:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $0{,}36\pi$

c) $2{,}1$ d) $2{,}1 + \pi$

Antworten zu 1)

a) $\frac{\pi}{6} \approx 0,52$ b) $\frac{5\pi}{18} \approx 0,87$

c) $\frac{61\pi}{90} \approx 2,13$ d) $\frac{7\pi}{4} \approx 5,50$

Es gilt die Umrechnungsformel:

$$\text{Bogenmaß des Winkels} = \frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{180^\circ} \cdot \pi$$

Antworten zu 2)

a) 135° b) $64,8^\circ$

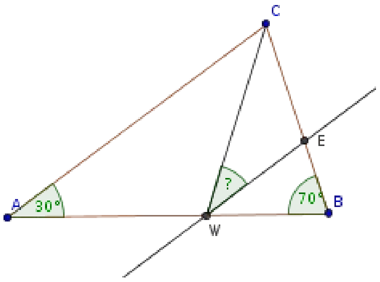
c) $\approx 120,32^\circ$ d) $\approx 300,32^\circ$

Es gilt die Umrechnungsformel:

$$\text{Gradmaß des Winkels} = \frac{\text{Bogenmaß des Winkels}}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{\text{Bogenmaß des Winkels}}{\pi} \cdot 180^\circ$$

ÜBUNG 3

Im Dreieck ABC mit Winkel $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 70^\circ$ wird W auf der Seite c so gewählt, dass die Strecke CW den Winkel γ halbiert. Weiter wird E auf der Seite a so gewählt, dass die Gerade WE parallel zur Seite b ist (vgl. Abbildung).



Wie groß ist der Winkel $\measuredangle EWC$?

Antwort

Der Winkel $\measuredangle EWC$ beträgt 40°.

Lösungsweg 1

Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC ist $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 80^\circ$, und da CW den Winkel halbiert, ist $\measuredangle WCB = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck WBC ist nun $\measuredangle BWC = 180^\circ - \beta - \measuredangle WCB = 70^\circ$.

Da EW parallel zu AC ist, ist $\measuredangle BWE = \measuredangle BAC = \alpha = 30^\circ$ (Stufenwinkel).

Der Winkel $\measuredangle BWE$ und der gesuchte Winkel $\measuredangle EWC$ geben zusammen den Winkel $\measuredangle BWC$, also folgt:

$$\measuredangle EWC = \measuredangle BWC - \measuredangle BWE = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ.$$

Lösungsweg 2

Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC ist $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 80^\circ$, und da CW den Winkel halbiert, ist $\measuredangle ACW = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck AWC ist nun $\measuredangle CWA = 180^\circ - \alpha - 40^\circ = 110^\circ$.

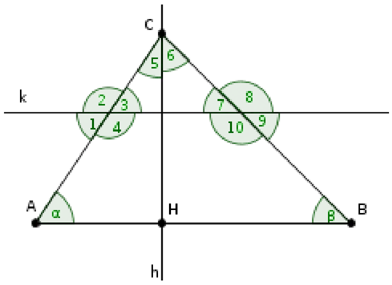
Da EW parallel zu AC ist, ist $\measuredangle BWE = \measuredangle BAC = \alpha = 30^\circ$ (Stufenwinkel).

Der gesuchte Winkel ergibt mit $\measuredangle BWE$ und $\measuredangle CWA$ zusammen den gestreckten Winkel. Also ist $\measuredangle EWC = 180^\circ - \measuredangle BWE - \measuredangle CWA = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ = 40^\circ$.

Weitere Lösungswege

Die angegebenen Lösungswege sind nicht die einzigen möglichen. Zum Beispiel könnte man zunächst den Winkel $\measuredangle WEB$ und dadurch den Winkel $\measuredangle CEW$ bestimmen, sowie den Winkel $\measuredangle WCE$ bestimmen und zuletzt die Winkelsumme im Dreieck WEC verwenden.

ÜBUNG 4



In obiger Skizze ist die Gerade k parallel zur Seite AB des Dreiecks ABC, und die Gerade h ist senkrecht zur Seite AB (d.h. sie schließt mit der Geraden AB rechte Winkel ein) und geht durch den Punkt C.

Welche der nummerierten Winkel sind mit Sicherheit genauso groß wie der Winkel β?

Antwort

Nur die Winkel 7 und 9 sind mit Sicherheit genauso groß wie β.

Lösung

Da die Gerade k parallel zur Seite AB ist, ist der Winkel 7 ein Stufenwinkel zu β und der Winkel 9 ein Wechselwinkel zu β. Diese sind also genauso groß wie β.

Alle anderen nummerierten Winkel haben im Allgemeinen eine andere Größe als β.

Die Winkel 8 und 10 sind Nebenwinkel zu 7 und 9 und haben daher die Größe $180^\circ - \beta$.
Die Winkel 1 und 3 sind Stufen- bzw. Wechselwinkel von α und haben daher die Größe α.
Die Winkel 2 und 4 sind Nebenwinkel zu 1 und 3 und haben daher die Größe $180^\circ - \alpha$.
Der Winkel 5 ist einer der drei Innenwinkel im Dreieck AHC und hat wegen der Winkelsumme von 180° die Größe $180^\circ - \alpha - \measuredangle CHA = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$.
Der Winkel 6 ist einer der drei Innenwinkel im Dreieck BHC und hat wegen der Winkelsumme von 180° die Größe $180^\circ - \beta - \measuredangle BHC = 90^\circ - \beta$.

2. BESONDERE DREIECKE UND VIERECKE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen Eigenschaften gleichschenkliger, gleichseitiger und rechtwinkliger Dreiecke.
- Sie wissen, was Trapeze, Parallelogramme, Rechtecke und Quadrate sind.
- Sie kennen Eigenschaften dieser besonderen Vierecke und können gegebene Vierecke als solche identifizieren.

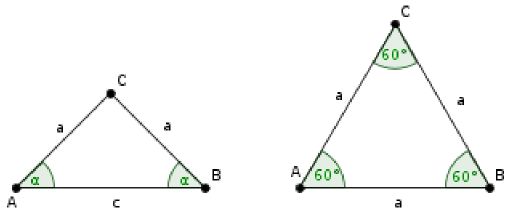
Drei- und Vierecke mit besonderen Eigenschaften (z.B. mit gleich langen Seiten oder besonderen Innenwinkeln) erhalten oft spezielle Namen, die hier erläutert werden.

2.1 Besondere Dreiecke

2.1 DEFINITION

Ein Dreieck, welches (mindestens) zwei gleich lange Seiten besitzt, nennt man *gleichschenkliges Dreieck* und die zwei gleich langen Seiten die *Schenkel* des Dreiecks. Die dritte Seite wird *Basis* des gleichschenkligen Dreiecks genannt.
Ein Dreieck, dessen Seiten alle gleich lang sind, nennt man *gleichseitiges Dreieck*.

Wie im Abschnitt Winkel erklärt, ist ein Dreieck genau dann gleichschenklig, wenn das Dreieck (mindestens) zwei gleich große Innenwinkel besitzt.
Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Winkel gleich groß sind, d.h. wenn alle Innenwinkel 60° betragen.

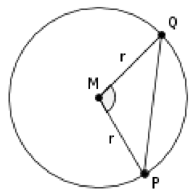


gleichschenkliges Dreieck und gleichseitiges Dreieck

BEMERKUNG

- Ein gleichseitiges Dreieck ist ein spezielles gleichschenkliges Dreieck, bei dem die Basis (die dritte Seite) genauso lang ist wie die zwei Schenkel.
- Weiß man von einem Dreieck schon, dass es gleichschenklig ist und dass ein Winkel 60° beträgt, so sind alle Winkel 60° groß, d.h. das Dreieck ist sogar gleichseitig. Dies ergibt sich aus der Winkelsumme im Dreieck und der Gleichheit zweier Winkel im gleichschenkligen Dreieck.

2.2 BEISPIEL



gleichschenkliges Dreieck im Kreis

Betrachtet man im Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r eine Sehne mit den Endpunkten P und Q (vgl. Skizze), dann ist das Dreieck MPQ gleichschenklig mit den Schenkeln MP und MQ, da $\overline{MP} = r = \overline{MQ}$ gilt.
Das Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn auch $\overline{PQ} = r$ gilt bzw. wenn der Winkel $\measuredangle PMQ$ genau 60° beträgt.

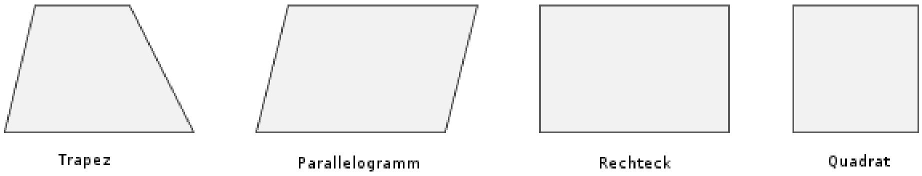
2.3 DEFINITION

Ein Dreieck, welches einen rechten Winkel als Innenwinkel besitzt, heißt *rechtwinkliges Dreieck*.

In einem rechtwinkligen Dreieck gelten spezielle Gleichungen z.B. der Satz des Pythagoras über die Seitenlängen. Daher werden diese in einem eigenen Abschnitt Rechtwinkliges Dreieck behandelt.

Übung zum Erkennen besonderer Dreiecke

2.2 Besondere Vierecke



2.4 DEFINITION

Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem jeweils gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Aus der Parallelität der gegenüberliegenden Seiten ergeben sich noch weitere wichtige Eigenschaften des Parallelogramms:

2.5 REGEL

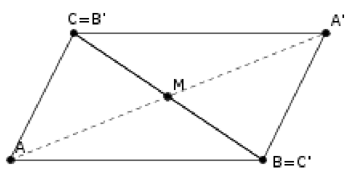
In einem Parallelogramm gilt:

- Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
- Zwei Seiten sind parallel und gleich lang.
- Die Winkel an gegenüberliegenden Ecken sind gleich groß.
- Die Winkel an benachbarten Ecken ergänzen sich zu 180°.
- Die Diagonalen des Vierecks halbieren sich gegenseitig (d.h. ihr Schnittpunkt ist Mittelpunkt beider Diagonalen).

Andererseits ist jedes Viereck automatisch ein Parallelogramm, wenn es eine dieser Eigenschaften erfüllt.

2.6 BEISPIEL

Das Dreieck ABC wird am Mittelpunkt M der Seite CB gespiegelt (vgl. Skizze). Dann ist das Viereck $ABA'C$ ein Parallelogramm, denn sowohl die Seiten AB und $A'C = A'B'$ sind gleich lang, als auch die Seiten $BA' = C'A'$ und CA.



Dreieck an einer Seitenmitte gespiegelt

2.7 BEISPIEL

[online-only]

Verbindet man in einem Viereck die Mittelpunkte der Seiten, so erhält man stets ein Parallelogramm (vgl. Skizze). In der Skizze sind nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes die Strecken M_aM_b und M_cM_d jeweils parallel zur Diagonalen AC und damit zueinander parallel, und die Strecken M_bM_c und M_dM_a sind jeweils parallel zur Diagonalen BD.

2.8 DEFINITION

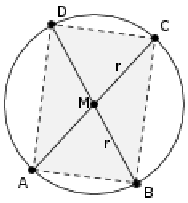
Ein *Rechteck* ist ein Viereck, dessen Innenwinkel alle gleich groß sind. Aufgrund der Winkelsumme im Viereck sind dann alle Innenwinkel rechte Winkel.

Da alle Winkel des Rechtecks gleich groß sind, sind insbesondere gegenüberliegende Winkel gleich groß, d.h. ein Rechteck ist ein spezielles Parallelogramm.
Dies bedeutet auch, dass die Eigenschaften eines Parallelogramms in Regel 2.5 auch für das Rechteck gelten. Im Rechteck erfüllen die Diagonalen sogar noch eine weitere Eigenschaft.

2.9 REGEL

Ein Viereck ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind und sich gegenseitig halbieren.

2.10 BEISPIEL



Ein Viereck, dessen Diagonalen Kreisdurchmesser sind, ist ein Rechteck.

Betrachtet man im Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r zwei Durchmesser AC und BD (vgl. Skizze), dann ist das Viereck $ABCD$, das man so erhält, stets ein Rechteck. Der Kreismittelpunkt M halbiert ja gerade die Durchmesser AC und BD und es gilt $\overline{AC} = 2r = \overline{BD}$, d.h. die Diagonalen des Vierecks sind gleich lang.

2.11 DEFINITION

Ein *Quadrat* ist ein Rechteck, dessen Seiten alle gleich lang sind.

2.12 REGEL

In einem Quadrat gelten:

- Alle Winkel sind rechte Winkel und alle Seiten sind gleich lang.
- Die Diagonalen sind gleich lang, halbieren sich gegenseitig und stehen senkrecht aufeinander.

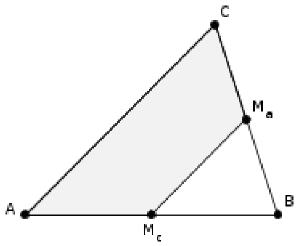
Andererseits ist jedes Viereck automatisch ein Quadrat, wenn es eine der beiden Eigenschaften erfüllt.

Zuletzt soll noch ein Viereck behandelt werden, das im Allgemeinen kein Parallelogramm ist.

2.13 DEFINITION

Ein *Trapez* ist ein Viereck, bei dem (mindestens) zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

2.14 BEISPIEL



Trapez im Dreieck

Im Dreieck ABC seien M_a die Mitte der Seite a und M_c die Mitte der Seite c (vgl. Skizze). Dann ist das Viereck AM_cM_aC ein Trapez, da die Strecke M_cM_a parallel zur Strecke AC ist (vgl. Umkehrung des ersten Strahlensatzes).
Das Viereck AM_cM_aC ist aber kein Parallelogramm, da die Seiten AM_c und M_aC nicht parallel sind. (Die Geraden AM_c und M_aC schneiden sich ja im Punkt B.)

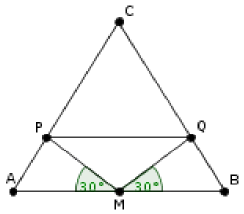
Zwar ist nicht jedes Trapez auch ein Parallelogramm, aber jedes Parallelogramm ist insbesondere auch ein Trapez.

Übung zum Erkennen besonderer Vierecke.

weitere Übung zum Erkennen besonderer Vierecke.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1



gleichseitiges Dreieck in vier Dreiecke zerlegt

In dem gleichseitigen Dreieck ABC in obiger Skizze sind M der Mittelpunkt der Seite c, der Punkt P auf der Seite b so gewählt, dass $\measuredangle PMA = 30°$ gilt, und der Punkt Q auf der Seite a so gewählt, dass $\measuredangle BMQ = 30°$ gilt.

Welche der Teildreiecke sind gleichschenklig, welche gleichseitig und welche rechtwinklig?

Antwort

Die Dreiecke AMP und MBQ sind rechtwinklig bei P und Q, aber weder gleichseitig noch gleichschenklig.

Das Dreieck MQP ist gleichschenklig, aber nicht gleichseitig und auch nicht rechtwinklig.

Das Dreieck PQC ist gleichseitig, und damit auch gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig.

Lösung

Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, betragen alle Innenwinkel 60°. Da außerdem M der Mittelpunkt der Strecke AB ist und die Winkel $\measuredangle PMA$ und $\measuredangle BMQ$ gleich groß sind, ist die ganze Figur symmetrisch zur Geraden CM.

Wegen der Symmetrie sind also sowohl die Strecken PM und QM, als auch die Strecken PC und QC jeweils gleich lang. Die Dreiecke PQM und PQC sind also beide gleichschenklig.

Wie oben erwähnt gilt $\measuredangle PCQ = \measuredangle ACB = 60^\circ$, weshalb das Dreieck PQC nicht nur gleichschenklig, sondern sogar gleichseitig ist.

Das Dreieck PQM ist jedoch weder gleichseitig noch rechtwinklig, da

$$\measuredangle QMP = 180^\circ - \measuredangle PMA - \measuredangle BMQ = 120^\circ$$

ist.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck AMP ist der Winkel $\measuredangle APM$ gegeben durch

$$\measuredangle APM = 180^\circ - \measuredangle MAP - \measuredangle PMA = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Also ist das Dreieck APM rechtwinklig bei P. Da alle Winkel des Dreiecks verschieden groß sind, sind auch alle Seiten unterschiedlich lang. Das Dreieck ist also nicht gleichschenklig und erst recht nicht gleichseitig.
Ebenso ist das Dreieck MBQ rechtwinklig bei Q, aber weder gleichschenklig noch gleichseitig.

ÜBUNG 2

Betrachtet wird das unten skizzierte Rechteck $ABCD$ mit Seitenlängen $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ und $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$ und den Seitenmitten M_a, M_b, M_c und M_d.
Welche der folgenden Vierecke sind Trapeze, Parallelogramme, Rechtecke oder Quadrate?

a) Viereck AM_aM_cD

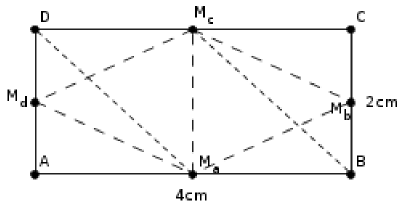
b) Viereck ABM_cD

c) Viereck M_aBM_cD

d) Viereck $M_aBM_cM_d$

e) Viereck $M_aM_bM_cM_d$

f) Viereck ABM_cM_d



Rechteck mit Seitenmitten

Antworten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Trapez	×	×	×		×	
Parallelogramm	×		×		×	
Rechteck	×					
Quadrat	×					

Lösungen nach Vierecktypus

Ein Viereck ist ein Trapez, wenn mindestens zwei Seiten parallel sind.
Von den im obigen Rechteck eingezeichneten Linien sind jeweils parallel:

- AB und CD (und natürlich deren Teilstücke AM_a, M_aB, CM_c und M_cD),
- AD, M_aM_c und BC,
- M_aM_b und M_cM_d,
- M_aM_d und M_bM_c,
- M_aD und BM_c.

Von den aufgeführten Vierecken sind also nur Viereck $M_aBM_cM_d$ (Antwort d) und Viereck ABM_cM_d (Antwort f) **keine** Trapeze.

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten zueinander parallel sind. Dies trifft auf die Vierecke in a), c) und e) zu.

Da ein Rechteck ein spezielles Parallelogramm ist, sind nur noch die Parallelogramme in a), c) und e) zu untersuchen. Da $\measuredangle M_aAD = \measuredangle BAD = 90^\circ$ ist, ist das Viereck AM_aM_cD also ein Rechteck.
Das Viereck M_aBM_cD ist kein Rechteck, da z.B. $\measuredangle M_cBM_a < 90^\circ$ ist.
Um zu sehen, dass das Viereck $M_aM_bM_cM_d$ kein Rechteck ist, verwendet man hier am besten das Kriterium, dass im Rechteck die Diagonalen gleich lang sein müssen. Beim Viereck $M_aM_bM_cM_d$ sind die Diagonalenlängen nämlich gerade die Längen der Seiten AB und BC des Rechtecks $ABCD$, also $\overline{M_aM_c} = \overline{BC} = 2 \text{ cm}$ und $\overline{M_bM_d} = \overline{AB} = 4 \text{ cm}$, und somit nicht gleich lang.

Da ein Quadrat ein Rechteck ist, dessen Seiten alle gleich lang sind, ist nur noch zu überprüfen, ob das Rechteck AM_aM_cD gleich lange Seiten hat. Dies ist wegen

$$\overline{DM_c} = \overline{AM_a} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2 \text{ cm}$$

und

$$\overline{M_aM_c} = \overline{AD} = 2 \text{ cm}$$

der Fall. Also ist das Viereck in a) sogar ein Quadrat.

Lösung zu a)

Da das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist und M_a und M_c jeweils die Seitenmitten sind, ist M_aM_c auch parallel zu AD und BC. Daher sind im Viereck AM_aM_CD alle Innenwinkel rechte Winkel, weshalb das Viereck ein Rechteck ist (und insbesondere auch ein Trapez und ein Parallelogramm).

Nach Voraussetzung gilt weiter

$$\overline{AM_a} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2 \text{ cm} = \overline{AD}.$$

Das Rechteck AM_aM_CD hat also auch gleich lange Seiten und ist daher sogar ein Quadrat.

Lösung zu b)

Im Viereck ABM_cD sind die Seiten AB und M_cD parallel, weil das Ausgangsviereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Also ist das Viereck zumindest ein Trapez.

Das Viereck kann aber kein Parallelogramm (und daher auch weder Rechteck noch Quadrat) sein, da die sich gegenüberliegenden Seiten AB und M_cD nicht gleich lang sind.

Lösung zu c)

Im Viereck M_aBM_cD sind die Seiten M_aB und M_cD parallel, weil das Ausgangsviereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Außerdem sind sie beide 2 cm lang. Also ist das Viereck ein Parallelogramm (und insbesondere ein Trapez).

Da die Innenwinkel aber keine rechten Winkel sind, ist das Viereck kein Rechteck und auch kein Quadrat.

Lösung zu d)

Im Viereck $M_aBM_cM_d$ gibt es keine parallelen Seiten. M_aB ist parallel zu M_cD und daher nicht parallel zu M_cM_d, und M_aM_d ist parallel zu BD und daher nicht parallel zu BM_c.
Also ist $M_aBM_cM_d$ weder ein Trapez, Parallelogramm oder Rechteck, noch ein Quadrat.

Lösung zu e)

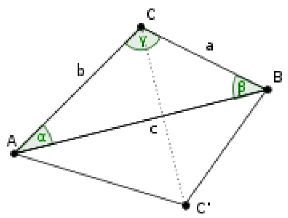
Im Viereck $M_aM_bM_cM_d$ sind die Diagonalen genau die Parallelen zu den Seiten des Rechtecks $ABCD$, und sie halbieren sich gegenseitig. Daher ist das Viereck ein Parallelogramm (und damit auch ein Trapez).

Da die Diagonalen aber verschiedene Längen haben (nämlich 2 cm bzw. 4 cm), ist das Viereck kein Rechteck und erst recht kein Quadrat.

Lösung zu f)

Das Viereck ABM_cM_d besitzt keine parallelen Seiten. Also ist es weder ein Trapez, Parallelogramm oder Rechteck, noch ein Quadrat.

ÜBUNG 3



Dreieck ABC an der Seite c gespiegelt

Das Dreieck ABC in der Skizze wird an der Seite c gespiegelt und C' ist dann der Bildpunkt von C. Unter welchen Voraussetzungen an das Dreieck ABC ist das Viereck $AC'BC$ ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Rechteck oder sogar ein Quadrat?

Antwort

Das Viereck $AC'BC$ ist genau dann ein Trapez, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig mit Schenkeln a und b ist. In diesem Fall ist das Viereck $AC'BC$ sogar ein Parallelogramm.
Das Viereck $AC'BC$ ist genau dann ein Rechteck, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig mit Schenkeln a und b und rechtwinklig bei C ist. In diesem Fall ist das Viereck $AC'BC$ sogar ein Quadrat.

Lösung zu Trapez und Parallelogramm

Damit das Viereck $AC'BC$ ein Trapez ist, müssen die Seiten AC und BC' oder die Seiten AC' und BC parallel sein.
Sind AC und BC' parallel, so sind $\alpha = \measuredangle BAC$ und $\measuredangle ABC'$ Wechselwinkel und daher gleich groß.

Da C' aber der Spiegelpunkt von C ist, gilt $\measuredangle ABC' = \measuredangle CBA = \beta$. Sind also AC und BC' parallel, so gilt $\alpha = \beta$ und daher ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Schenkeln a und b.
Falls AC' und BC parallel sind, erhält man die Wechselwinkel $\measuredangle C'AB$ und $\measuredangle CBA$, und damit ebenfalls $\alpha = \beta$.

Setzt man umgekehrt voraus, dass $\alpha = \beta$ gilt, so sind die jeweils gegenüberliegenden Winkel im Viereck $AC'BC$ gleich groß; die Winkel bei A bzw. B haben die Größe $2\alpha = 2\beta$ und die Winkel bei C und C' betragen jeweils γ. Also ist das Viereck $AC'BC$ in diesem Fall ein Parallelogramm.

Das Viereck $AC'BC$ ist also genau dann ein Trapez, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig mit Schenkeln a und b ist, und in diesem Fall ist das Viereck $AC'BC$ sogar ein Parallelogramm.

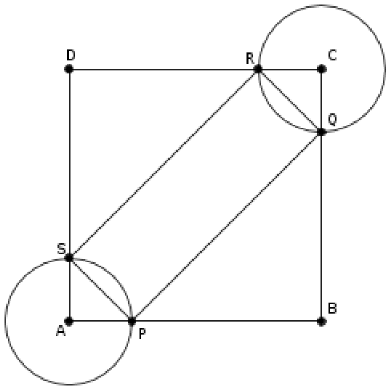
Lösung zu Rechteck und Quadrat

Da ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn mindestens ein Winkel 90° beträgt (wodurch dann im Parallelogramm automatisch alle Winkel 90° betragen), ist das Viereck $AC'BC$ also genau dann ein Rechteck, wenn es ein Parallelogramm ist und wenn z.B. $\measuredangle ACB = \gamma = 90^\circ$ gilt.

Nach der Lösung zum Parallelogramm ist das Viereck $AC'BC$ also genau dann ein Rechteck, wenn $a = b$ und $\gamma = 90^\circ$ gelten, wenn also das Dreieck ABC gleichschenklig mit Schenkeln a und b und rechtwinklig bei C ist.

Dann gilt aber insbesondere $\overline{AC'} = \overline{C'B} = \overline{BC} = \overline{CA}$, d.h. das Viereck $AC'BC$ ist sogar ein Quadrat.

ÜBUNG 4



Um die Ecken A und C eines Quadrates $ABCD$ sind zwei gleich große Kreise gezeichnet, die die Seiten des Quadrates in den Punkten P, Q, R und S schneiden (vgl. Skizze). Durch Verbinden der Punkte P, Q, R und S wird das Quadrat in vier Dreiecke und ein Viereck zerlegt.

Welche besonderen Eigenschaften haben die Dreiecke und das Viereck?

Antwort

Die Dreiecke APS, PBQ, QCR und RDS sind alle gleichschenklig und rechtwinklig.
Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck, aber im Allgemeinen kein Quadrat.

Lösung

Da das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, sind seine Innenwinkel alles rechte Winkel. Die Dreiecke APS, PBQ, QCR und RDS sind daher alle rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A bzw. B bzw. C bzw. D.

Da die Punkte P und S auf demselben Kreis um A liegen, gilt $\overline{AP} = \overline{AS}$. Also ist das Dreieck APS auch gleichschenklig.

Aus dem gleichen Grund gilt $\overline{CQ} = \overline{CR}$, weshalb auch das Dreieck QCR gleichschenklig ist.

Nach Voraussetzung sind die Kreise um A und C gleich groß, d.h. die Strecken AP und CQ sind auch gleich lang. Da außerdem AB und BC gleich lang sind, weil das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, erhält man

$$\overline{PB} = \overline{AB} - \overline{AP} = \overline{BC} - \overline{CQ} = \overline{BQ}.$$

Das Dreieck PBQ ist also auch gleichschenklig.

Mit einer ganz analogen Begründung erhält man, dass auch die Strecken RD und DS gleich lang sind, d.h. dass auch das Dreieck RDS gleichschenklig ist.

Zuletzt zum Viereck $PQRS$: Da die betrachteten Dreiecke alle gleichschenklig und rechtwinklig sind, haben alle ihre Basiswinkel die Größe 45°.

Da die drei Winkel $\measuredangle BPQ$, $\measuredangle QPS$ und $\measuredangle SPA$ zusammen einen gestreckten Winkel bilden, ergibt sich für den Innenwinkel $\measuredangle QPS$ des Vierecks $PQRS$ damit:

$$\measuredangle QPS = 180^\circ - \measuredangle BPQ - \measuredangle SPA = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Analog berechnet man, dass auch die anderen Innenwinkel 90° betragen. Da also alle Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel sind, ist das Viereck ein Rechteck.
Wie schon an der Skizze zu sehen ist, ist das Viereck aber im Allgemeinen kein Quadrat.
Dazu müssten noch zusätzlich die Seiten PS und PQ gleich lang sein, was genau dann der Fall ist, wenn P der Mittelpunkt der Seite AB ist.

3. KONGRUENZ UND ÄHNLICHKEIT

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Begriffe *Kongruenz* und *Ähnlichkeit* und können damit umgehen.
- Sie können die Kongruenzsätze für Dreiecke zielgerichtet anwenden.
- Sie können die Strahlensätze zur Berechnung verschiedener Streckenlängen anwenden.

In diesem Abschnitt werden Kriterien behandelt, mit denen man untersuchen kann, ob zwei Dreiecke die gleiche Gestalt haben, d.h. *kongruent* sind, oder bis auf Skalierung (d. h. Vergrößern oder Verkleinern) die gleiche Gestalt haben, d.h. *ähnlich* sind.

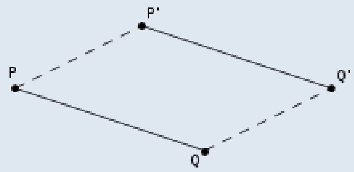
3.1 Kongruenz und Kongruenzsätze für Dreiecke

3.1 DEFINITION

Zwei geometrische Figuren (der Ebene) nennt man *kongruent* (oder *deckungsgleich*), wenn sie durch (mehrfache) Anwendungen von Verschiebungen, Drehungen und/oder Spiegelungen ineinander überführt werden können. Eine Abbildung, die man durch Hintereinanderausführung von Verschiebungen, Drehungen und/oder Spiegelungen erhält, wird *Kongruenzabbildung* genannt.

Verschiebung

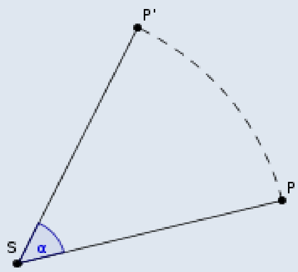
Bei einer Verschiebung wird jeder Punkt um einen festen Vektor verschoben. Sind also P und Q zwei Punkte und P' der Bildpunkt von P, so ist der Bildpunkt Q' von Q genau derjenige Punkt, für den das Viereck $PQQ'P'$ ein Parallelogramm ist, d.h. dass $P'Q'$ parallel zu PQ ist und QQ' parallel zu PP'.



Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{PP'}$

Drehung um einen Punkt

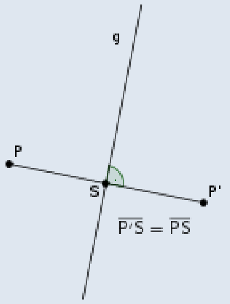
Bei einer Drehung um einen Punkt S um einen festen Winkel α bleibt der Punkt S fest. Ein von S verschiedener Punkt P wird auf denjenigen Punkt P' abgebildet, der von S gleich weit entfernt ist (also $\overline{SP'} = \overline{SP}$ erfüllt) und die Bedingung $\measuredangle PSP' = \alpha$ erfüllt.



Drehung um den Punkt S um den Winkel α

Spiegelung an einer Geraden

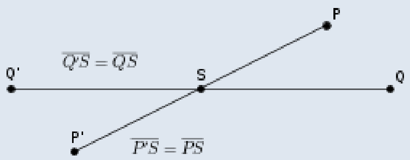
Bei einer Spiegelung an einer Geraden g wird jeder Punkt, der auf der Geraden liegt, festgelassen. Ein Punkt P, der nicht auf g liegt, wird auf denjenigen Punkt auf der anderen Seite von g abgebildet, der auf der Senkrechten zu g durch P liegt, und den gleichen Abstand von g hat wie P.



Spiegelung an der Geraden g

Punktspiegelung

Eine Punktspiegelung am Punkt S in der Ebene ist dasselbe wie die Drehung um S um 180°.



Spiegelung am Punkt S

Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen führen Geraden wieder in Geraden über und erhalten sowohl Streckenlängen, als auch Winkelgrößen zwischen Geraden.

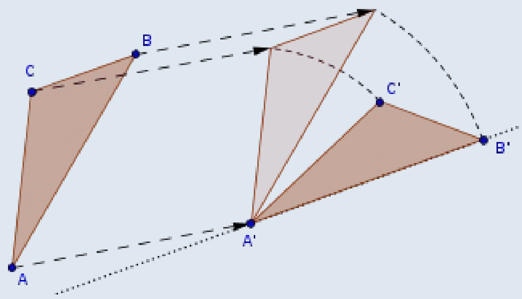
Zwei Dreiecke können also nur dann kongruent sein, wenn die sich entsprechenden Seiten gleich lang sind. Es gilt sogar die Umkehrung, welche als *Kongruenzsatz SSS (Seite-Seite-Seite)* bekannt ist.

3.2 SATZ (KONGRUENZSATZ SSS)

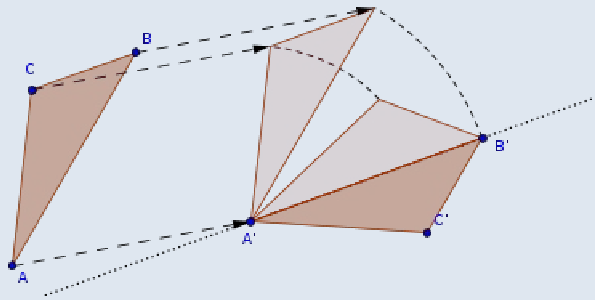
Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn in den Dreiecken alle drei Längen der sich entsprechenden Seiten übereinstimmen.

Erklärung

Sind nämlich zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben mit $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$, so kann durch eine Verschiebung A in A' überführt werden. Wegen $\overline{AB} = c = c' = \overline{A'B'}$ kann durch eine anschließende Drehung um A' auch B in B' überführt werden. Wegen $\overline{AC} = b = b' = \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} = a = a' = \overline{B'C'}$ stimmt dann der Bildpunkt von C mit C' überein (vgl. Abbildung links), oder es ist der Spiegelpunkt von C' bei Spiegelung an der Geraden $A'B'$ (vgl. Abbildung rechts). (In speziellen Fällen sind nicht alle dieser Transformationen erforderlich.)



Überführung von Dreieck ABC in Dreieck A'B'C'. Eine Spiegelung ist nicht notwendig.



Überführung von Dreieck ABC in Dreieck A'B'C'. Eine Spiegelung ist notwendig.

Mit der Sprechweise „Das Dreieck ABC und das Dreieck DEF sind kongruent" ist im Folgenden immer auch gemeint, dass bei der Kongruenzabbildung, die das erste Dreieck in das zweite überführt, auch der Punkt A auf den Punkt D, der Punkt B auf den Punkt E und der Punkt C auf den Punkt F abgebildet wird. Insbesondere sind damit zum Beispiel die Seiten AB und DE gleich lang, und die Dreieckswinkel bei A und bei D gleich groß.

Jeder Satz von Daten (Seitenlängen und Winkel) eines Dreiecks, der die Seitenlängen eindeutig bestimmt, reicht somit aus, die Kongruenz zweier Dreiecke zu entscheiden. Dadurch erhält man die weiteren Kongruenzsätze:

3.3 SATZ

Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn in den Dreiecken...

Kongruenzsatz SWW: eine sich entsprechende Seitenlänge und zwei sich entsprechende Winkel übereinstimmen.

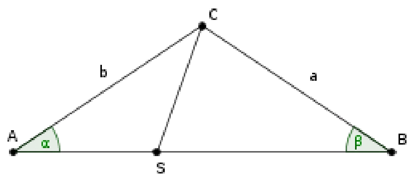
Kongruenzsatz SWS: zwei sich entsprechende Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen.

Kongruenzsatz SsW: zwei sich entsprechende Seitenlängen und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel übereinstimmen.

WARNUNG

Im Kongruenzsatz SsW ist wichtig, dass der gegebene Winkel der längeren Seite gegenüberliegt. Dass es nicht ausreicht, dass zwei Seiten und der der kürzeren Seite gegenüberliegende Winkel übereinstimmen, zeigt folgendes Beispiel.

3.4 BEISPIEL



geteiltes gleichschenkliges Dreieck

In obiger Abbildung sind die Seiten a und b gleich lang und S ein beliebiger Punkt auf der Seite c. Da die Seiten a und b gleich lang sind, sind auch die Winkel α und β gleich groß.

Betrachtet man nun die Teildreiecke SCA und SCB, so stellt man fest, dass sie in zwei entsprechenden Seitenlängen und einem entsprechenden Winkel übereinstimmen: SC ist gemeinsame Seite beider Dreiecke und $\overline{AC} = \overline{BC}$, sowie $\measuredangle SAC = \measuredangle CBS$. Die zwei Dreiecke SCA und SCB sind aber nicht kongruent, da $\overline{AS} \neq \overline{BS}$ (außer S ist zufällig der Mittelpunkt der Strecke).
In der Tat ist dieser Fall auch durch keinen Kongruenzsatz abgedeckt. Die Seite SC ist nämlich kürzer als die Seite AC (und die Seite BC), d.h. man hat Übereinstimmung in zwei Seitenlängen und dem der **kürzeren** Seite gegenüberliegenden Winkel.

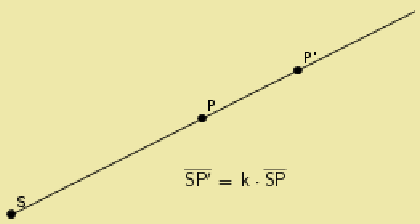
Übung zur Anwendung der Kongruenzsätze

3.2 Ähnlichkeit

Um Ähnlichkeit zu definieren, braucht man den Begriff der Skalierung und genauer der zentrischen Streckung.

3.5 DEFINITION

Für jede positive reelle Zahl k und jeden Punkt S in der Ebene ist die sogenannte *(zentrische) Streckung um den Faktor* k *mit Zentrum* S definiert. Die zentrische Streckung bildet Punkte der Ebene auf Punkte der Ebene ab. Dabei wird der Punkt S festgelassen und jeder andere Punkt wird auf denjenigen Punkt abgebildet, der auf derselben Halbgeraden mit Endpunkt S liegt, aber zu S den k-fachen Abstand hat.



zentrische Streckung um den Faktor k mit Zentrum S

Bei einer Streckung um den Faktor k multiplizieren sich nicht nur die Abstände vom Zentrum mit dem Faktor k, sondern alle Streckenlängen werden auf k-fache Streckenlängen abgebildet. Außerdem wird jede Gerade auf eine Gerade abgebildet, die parallel zur ursprünglichen Geraden ist.

3.6 DEFINITION

Zwei geometrische Figuren heißen *ähnlich*, wenn sie bis auf eine Streckung zueinander kongruent sind.

Aus den Kongruenzsätzen SSS und SWW für Dreiecke erhält man direkt folgende Sätze zur Ähnlichkeit von Dreiecken:

3.7 SATZ

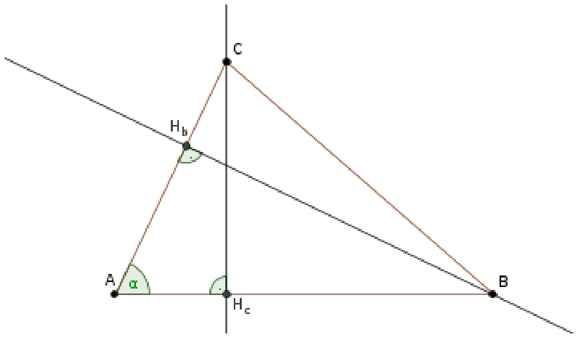
1. Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn in den Dreiecken sich die Längen entsprechender Seiten um einen festen Faktor unterscheiden.
2. Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn in den Dreiecken zwei entsprechende Winkel (und wegen der Winkelsumme damit alle drei) übereinstimmen.

Sind zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich, so erhält man also die Verhältnisgleichungen für die Seitenlängen

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

3.8 BEISPIEL

In der folgenden Abbildung sind im Dreieck ABC die *Höhen* auf die Seite b und auf die Seite c eingezeichnet, d.h. die Geraden die senkrecht auf der entsprechenden Seite stehen und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen. Die Schnittpunkte der Höhen mit den entsprechenden Seiten (sog. *Höhenfußpunkte*) sind mit H_b bzw. H_c bezeichnet. Der kleine Punkt in dem Winkelbogen bei H_b und H_c bedeutet, dass der Winkel ein rechter Winkel ist.



Höhen im Dreieck

Die Dreiecke AH_cC und AH_bB sind ähnlich, da $\measuredangle H_cAC = \alpha = \measuredangle BAH_b$ und $\measuredangle CH_cA = 90^\circ = \measuredangle AH_bB$ gelten. Damit erhält man

$$\frac{\overline{H_cC}}{\overline{H_bB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Durchmultiplizieren mit den Nennern und halbieren der Gleichung ergibt

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{H_cC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{H_bB}.$$

Diese letzte Gleichung zeigt, dass die Flächeninhaltsformel „$\frac{1}{2}$·Grundseite·Höhe" für das Dreieck ABC, unabhängig davon ist, ob man als Grundseite die Seite c oder die Seite b wählt.

Übung zur Überprüfung von Ähnlichkeit

3.3 Strahlensätze

Aus den Ähnlichkeitssätzen für Dreiecke und den daraus resultierenden Verhältnisgleichungen für die Seitenlängen erhält man die Strahlensätze:

3.9 SATZ (1. STRAHLENSATZ)

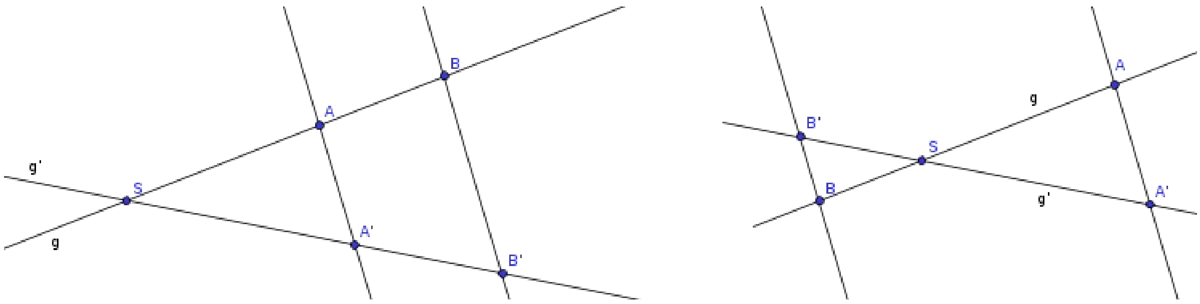
Werden zwei sich in einem Punkt S schneidende Geraden g und g' von zwei parallelen Geraden in den Punkten A und B bzw. in A' und B' geschnitten (vgl. Abbildung), so gilt

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}}.$$

3.10 SATZ (2. STRAHLENSATZ)

Werden zwei sich in einem Punkt S schneidende Geraden g und g' von zwei parallelen Geraden in den Punkten A und B bzw. in A' und B' geschnitten (vgl. Abbildung), so gilt

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}.$$



mögliche Geradenkonfigurationen zu den Strahlensätzen

Begründung

Da die Geraden AA' und BB' parallel sind, sind die Winkel $\measuredangle SAA'$ und $\measuredangle SBB'$ gleich groß, da sie Stufenwinkel bzw. Wechselwinkel sind. Ebenso sind die Winkel $\measuredangle AA'S$ und $\measuredangle BB'S$ gleich groß. Die Dreiecke $AA'S$ und $BB'S$ stimmen also in zwei Winkeln überein und sind daher ähnlich. Damit erhält man die gesuchte Verhältnisgleichung für die Seitenlängen.

Zum ersten Strahlensatz gilt auch die Umkehrung:

3.11 REGEL (UMKEHRUNG DES 1. STRAHLENSATZES)

Gilt für die Punkte in der obigen linken bzw. rechten Abbildung die Verhältnisgleichung

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}},$$

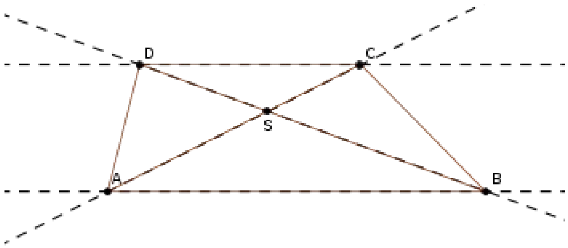
so sind die Geraden AA' und BB' parallel.

Wichtig ist dabei, dass genau dann A' und B' auf der gleichen Seite von S liegen, wenn auch A und B auf der gleichen Seite von S liegen.

Diese Umkehrung des ersten Strahlensatzes kann also dazu verwendet werden, festzustellen, dass zwei Geraden parallel sind, wodurch man verschiedene Winkel vergleichen kann (Stufenwinkel), und auch die Strahlensätze anwenden kann, um weitere Streckenlängen auszurechnen.

3.12 BEISPIEL

Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem mindestens zwei (gegenüberliegende) Seiten parallel sind (s. Abschnitt V.2 Besondere Dreiecke und Vierecke). Betrachtet man nun die Diagonalen im Trapez, so hat man genau die Ausgangssituation für die Strahlensätze (vgl. Abbildung): Die Diagonalen (bzw. deren Verlängerungen) sind zwei sich schneidende Geraden, welche von zwei parallelen Geraden, nämlich den Verlängerungen der parallelen Seiten geschnitten werden.



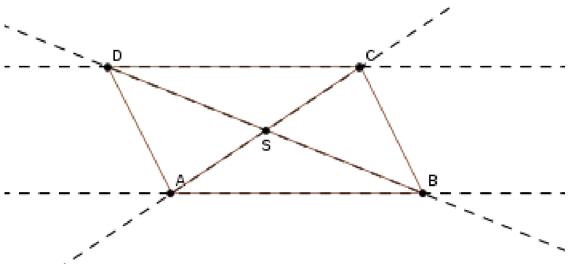
Diagonalen im Trapez

Für die Abschnitte der Diagonalen erhält man also nach dem zweiten Strahlensatz

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}, \quad \text{sowie} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SD}}.$$

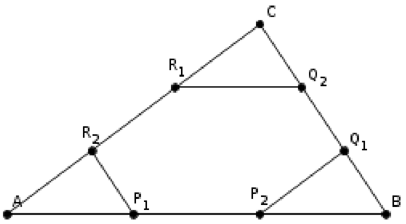
In Worten ausgedrückt: In einem Trapez schneiden sich die Diagonalen im Verhältnis der parallelen Seiten.

Insbesondere gilt, dass die parallelen Seiten genau dann gleich lang sind, wenn sich die Diagonalen gegenseitig halbieren. Weil ersteres gleichbedeutend dazu ist, dass das Trapez ein Parallelogramm ist, erhält man:
Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen (vgl. Abschnitt V.2 Besondere Dreiecke und Vierecke).



Diagonalen im Parallelogramm

3.13 BEISPIEL



Dreieck mit gedrittelten Seiten

Wir betrachten das Dreieck ABC wie in obiger Abbildung. Die Punkte P_1 und P_2 sind so gewählt, dass sie die Seite c dritteln. Ebenso sollen Q_1 und Q_2 die Seite a dritteln und R_1 und R_2 die Seite b dritteln.

Es gilt damit

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{AR_2}}{\overline{AC}}.$$

Nach Umkehrung des ersten Strahlensatzes ist damit P_1R_2 parallel zu BC.
Somit sind zum einen die Winkel $\measuredangle R_2P_1A$ und $\measuredangle CBA$, sowie die Winkel $\measuredangle AR_2P_1$ und $\measuredangle ACB$ gleich (Stufenwinkel), zum anderen ist auch

$$\frac{\overline{R_2P_1}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$$

(zweiter Strahlensatz). Das Dreieck AP_1R_2 ist also ähnlich zum Dreieck ABC und die entsprechenden Seiten sind $\frac{1}{3}$-mal so lang.

Analoge Überlegungen gelten auch für die Dreiecke R_1Q_2C und P_2BQ_1, weshalb diese auch ähnlich zum Dreieck ABC und daher auch zueinander ähnlich sind. Für die kleinen Dreiecke gilt zusätzlich, dass z.B.

$$\overline{AP_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \overline{P_2B}$$

ist, d.h. eine entsprechende Seite der Dreiecke AP_1R_2 und P_2BQ_1 ist gleich lang. Nach dem Kongruenzsatz SWW sind die Dreiecke also sogar kongruent. (Alternativ kann man natürlich auch direkt ausrechnen, dass die anderen sich entsprechenden Seiten jeweils gleich lang sind.)

Übung zur Berechnung neuer Streckenlängen mittels Kongruenzen, Ähnlichkeiten und den Strahlensätzen

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Welche der folgenden Bedingungen an die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind ausreichend, um zu garantieren, dass die Dreiecke kongruent sind? (Fertigen Sie zunächst eine Zeichnung an, um die Fälle bildlich vor Augen zu haben.)

a) $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$

b) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$

c) $a = a'$, $b = b'$ und $\gamma = \gamma'$

d) $a = a'$, $b = b'$ und $\alpha = \alpha'$

e) $a = a'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$

f) $a = a'$, $\alpha = \alpha'$ und $\gamma = \gamma'$

Antworten

Richtig sind: a),c), e) und f)

Erklärung

Sind alle entsprechenden Seiten gleich lang, sind die Dreiecke kongruent (Kongruenzsatz SSS), also ist a) richtig.

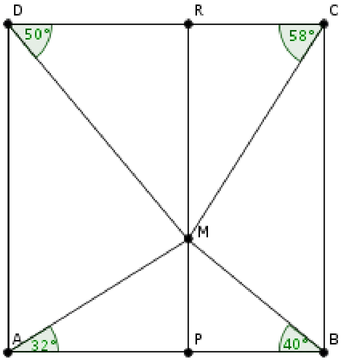
Bei b) weiß man nur, dass alle Winkel übereinstimmen, weshalb die Dreiecke ähnlich sind, aber nicht unbedingt kongruent. Um feststellen zu können, ob die Dreiecke kongruent sind, müsste man noch etwas über die Seitenlängen wissen.

Bei Bedingung c) stimmen die Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein. Nach Kongruenzsatz SWS sind die Dreiecke also kongruent.

Bei Bedingung d) stimmen die Dreiecke in zwei Seiten und dem Winkel überein, der einer Seite gegenüberliegt. Für den Kongruenzsatz SsW müsste der Winkel der längeren Seite gegenüberliegen. Um also auf die Kongruenz schließen zu können, müsste man noch wissen, dass $a > b$ ist. Im Allgemeinen kann man aber nicht beurteilen, ob die Dreiecke kongruent sind.

Bei e) und f) sind nicht nur alle drei Winkel gleich (wegen der Winkelsumme im Dreieck ist mit zweien auch der dritte gleich), sondern auch noch eine Seitenlänge. Also sind e) und f) richtig (Kongruenzsatz SWW).

ÜBUNG 2



In obiger Skizze ist im Rechteck $ABCD$ der Punkt M so gewählt, dass $\measuredangle BAM = 32^\circ$, $\measuredangle MBA = 40^\circ$, $\measuredangle DCM = 58^\circ$ und $\measuredangle MDC = 50^\circ$ gelten. Die Punkte P und R sind auf den Seiten AB bzw. CD so gewählt, dass die Gerade PR die Parallele zu den Seiten BC und AD durch den Punkt M ist.

Dadurch entstehen im Rechteck $ABCD$ acht Dreiecke, nämlich die Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM, sowie die Dreiecke APM, PBM, MCR und MRD.

Welche dieser Dreiecke sind zueinander ähnlich?

Antworten

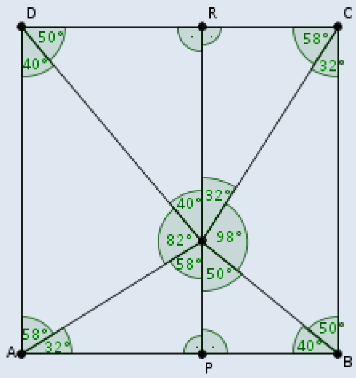
Nur die Dreiecke APM und MRC sind zueinander ähnlich, und die Dreiecke PBM und RMD sind zueinander ähnlich. Von den weiteren eingezeichneten Dreiecken sind keine zueinander ähnlich.

Erklärung

Zunächst betrachtet man die auftretenden Winkel, da Dreiecke genau dann ähnlich sind, wenn ihre Innenwinkel übereinstimmen.

Die Innenwinkel des Rechtecks $ABCD$ sind alle rechte Winkel. Da PR parallel zu BC ist, sind auch $\measuredangle RPA$, $\measuredangle BPR$, $\measuredangle DRP$ und $\measuredangle PRC$ rechte Winkel.

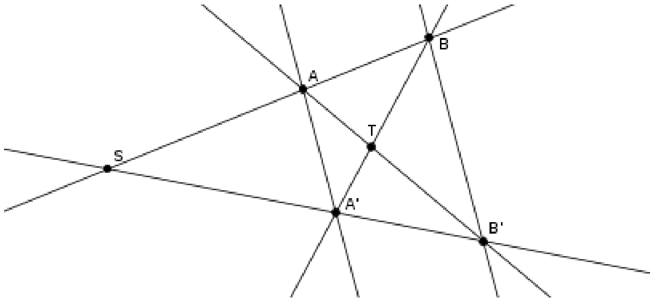
Mittels der Winkelsumme im Dreieck berechnet man nun alle weiteren Winkel, wie in der folgenden Skizze angegeben.



Es gibt also vier Dreiecke mit rechten Winkeln, nämlich APM, PBM, MCR und MRD.
Davon haben die Dreiecke APM und MCR jeweils noch einen Innenwinkel von 32° und einen Innenwinkel von 58°. Diese sind also zueinander ähnlich, wobei die Punkte A, P, M jeweils den Punkten M, R bzw. C entsprechen (entsprechend der Übereinstimmung der Winkelgrößen).
Die Dreiecke PBM und MRD haben jeweils noch Innenwinkel von 40° und von 50°. Diese zwei Dreiecke sind also auch zueinander ähnlich.

Das Dreieck ABM hat Innenwinkel von 32°, 40° und 108°,
das Dreieck BCM hat Innenwinkel von 50°, 32° und 98°,
das Dreieck CDM hat Innenwinkel von 58°, 50° und 72°, und
das Dreieck DAM hat Innenwinkel von 40°, 58° und 82°.
Bei diesen Dreiecken stimmen also nie alle drei Innenwinkel überein, weshalb keine davon zueinander ähnlich sind.

ÜBUNG 3



In obiger Skizze sind die Geraden AA' und BB' parallel. Des Weiteren sind die Streckenlängen $\overline{SA} = 4\text{ cm}$, $\overline{AB} = 2\text{ cm}$, $\overline{AA'} = 1{,}5\text{ cm}$ und $\overline{A'T} = 1{,}2\text{ cm}$ gegeben.

Wie lang ist die Strecke TB?

Antwort

Die Strecke TB ist $1{,}8\text{ cm}$ lang.

Lösungsweg

Zunächst ist $\overline{SB} = \overline{SA} + \overline{AB} = 6\text{ cm}$. Mit dem zweiten Strahlensatz (mit den sich in S schneidenden Geraden) kann man dann die Streckenlänge $\overline{BB'}$ berechnen:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{6}{4}$$

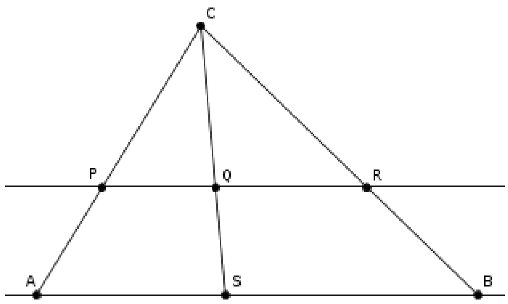
und daher $\overline{BB'} = \frac{3}{2} \cdot 1{,}5\text{ cm} = \frac{9}{4}\text{ cm}$.

Wiederum mit dem zweiten Strahlensatz (diesmal aber mit den sich in T schneidenden Geraden) erhält man als Verhältnis der Längen von TB zu TA':

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{TA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{3}{2}$$

und daher $\overline{TB} = \frac{3}{2}\overline{TA'} = \frac{3}{2} \cdot 1{,}2\text{ cm} = 1{,}8\text{ cm}$.

ÜBUNG 4



In obiger Skizze ist die Gerade PR parallel zur Geraden AB. Bekannt sind außerdem die Streckenlängen $\overline{AS} = 3\ \text{cm}$, $\overline{AB} = 7\ \text{cm}$, $\overline{AP} = 2\ \text{cm}$ und $\overline{AC} = 5\ \text{cm}$.

Welche weiteren Streckenlängen lassen sich aus diesen Angaben berechnen, und wie lang sind dann diese Strecken?

Antwort

Berechnen lassen sich die Längen $\overline{PC} = 3\ \text{cm}$, $\overline{SB} = 4\ \text{cm}$, sowie mit dem zweiten Strahlensatz $\overline{PQ} = 1{,}8\ \text{cm}$, $\overline{PR} = 4{,}2\ \text{cm}$ und $\overline{QR} = 2{,}4\ \text{cm}$.

Lösungsweg

Zunächst berechnet man $\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 3\ \text{cm}$, sowie $\overline{SB} = \overline{AB} - \overline{AS} = 4\ \text{cm}$.

Da die Geraden PR und AB parallel sind, lassen sich die Strahlensätze mit Zentrum C anwenden. Nach dem zweiten Strahlensatz (mit Strahlen CA und CS) erhält man

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{3 \cdot 3}{5}\ \text{cm} = 1{,}8\ \text{cm}.$$

Ebenso nach dem zweiten Strahlensatz (diesmal mit Strahlen CA und CB) erhält man

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \Rightarrow \overline{PR} = \frac{3 \cdot 7}{5}\ \text{cm} = 4{,}2\ \text{cm}.$$

Damit lässt sich auch die Länge der Strecke QR berechnen:

$$\overline{QR} = \overline{PR} - \overline{PQ} = 4{,}2\ \text{cm} - 1{,}8\ \text{cm} = 2{,}4\ \text{cm}.$$

Da auf den Geraden CS und CB keine Streckenlängen bekannt sind, lassen sich auch keine weiteren berechnen. Lediglich die Streckenverhältnisse $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CS}}$ etc. sind durch die Strahlensätze festgelegt.
In der folgenden interaktiven Grafik können Sie durch Verschieben des Punktes C sehen, dass die übrigen Strecken in der Tat verschiedene Längen haben können.

[online-only]

4. RECHTWINKLIGES DREIECK

Inhalt

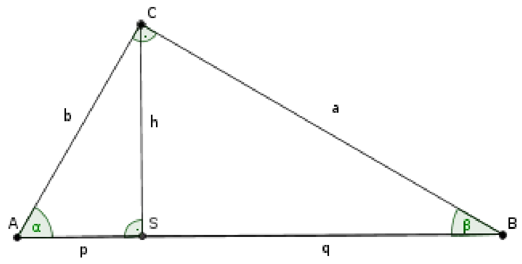
Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie sind mit den Seitenbezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck vertraut und können mit Hilfe des Satzes des Thales feststellen, ob ein Dreieck rechtwinklig ist.
- Sie kennen den Satz des Pythagoras und können diesen anwenden.
- Sie können mithilfe der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktionen Seitenlängen oder Winkelgrößen im rechtwinkligen Dreieck berechnen.
- Sie wissen, wo Sinus und Kosinus verschiedener Winkel im Einheitskreis zu finden sind.

4.1 Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck und Satz des Thales

Wir betrachten im gesamten Abschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel γ bei C, und verwenden die in der folgenden Abbildung angegebenen Notationen. Insbesondere wird die zu c gehörende Höhe mit h bezeichnet und der Höhenfußpunkt mit S.



Notation im rechtwinkligen Dreieck

4.1 DEFINITION

Im rechtwinkligen Dreieck haben die Seiten besondere Namen:

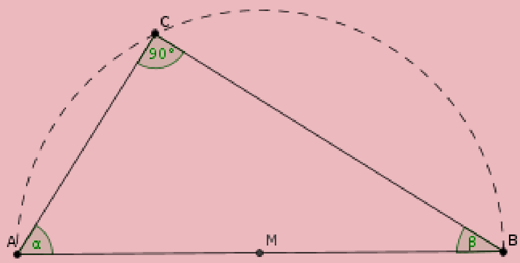
- Die *Hypotenuse* ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite.
- Die *Katheten* sind die dem rechten Winkel anliegenden Seiten.
- Die *Ankathete von* α ist dabei die dem Winkel α anliegende Kathete (also die Seite b), und
- die *Gegenkathete von* α ist die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete (also die Seite a).
- Die *Ankathete von* β ist die dem Winkel β anliegende Kathete (also die Seite a), und
- die *Gegenkathete von* β ist die dem Winkel β gegenüberliegende Kathete (also die Seite b).

Die Ankathete von β ist also zugleich die Gegenkathete von α, und die Gegenkathete von β ist die Ankathete von α.

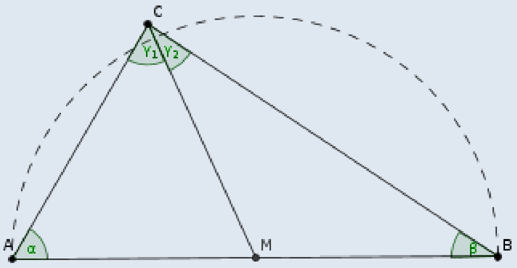
Der Satz des Thales gibt ein Kriterium, wann ein Dreieck rechtwinklig ist.

4.2 SATZ (SATZ DES THALES)

Das Dreieck ABC ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn C auf dem Halbkreis mit den Endpunkten A und B liegt.



Begründung



Zum Satz des Thales

Man wähle M als den Mittelpunkt der Strecke AB, d.h. den Mittelpunkt des Halbkreises (vgl. Abbildung). Die Strecke CM teilt dann γ in zwei Teilwinkel γ_1 und γ_2. Liegt C außerhalb des Kreises, so ist die Strecke CM größer als AM und daher α größer als γ_1, und ebenso ist β größer als γ_2. Damit gilt

$$2 \cdot \gamma = \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 < \gamma + \alpha + \beta = 180^\circ,$$

also $\gamma < 90^\circ$. Entsprechend erhält man $\gamma = 90^\circ$, wenn C auf dem Halbkreis liegt, und man erhält $\gamma > 90^\circ$, wenn C innerhalb des Halbkreises liegt.

4.3 BEISPIEL

In jedem Dreieck PQR schneidet der Halbkreis über der Seite PQ die Seiten PR und QR (bzw. deren Verlängerungen) in den Höhenfußpunkten. Nach dem Satz des Thales ist nämlich in der Skizze unten die Strecke PS_1 senkrecht zu QR, also PS_1 die Höhe zur Seite QR. Ebenso ist QS_2 senkrecht zu PR und daher QS_2 die Höhe zur Seite PR.

[online-only]

Übung zum Erkennen rechtwinkliger Dreiecke und Benennung wichtiger Seiten

4.2 Satz des Pythagoras und verwandte Sätze

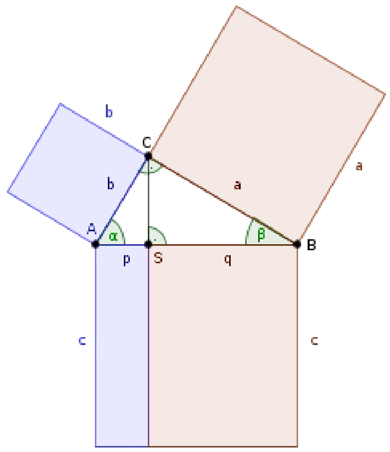
Ein wichtiger Satz, der die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks miteinander in Verbindung bringt, ist der Satz des Pythagoras.

4.4 SATZ (SATZ DES PYTHAGORAS)

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt also

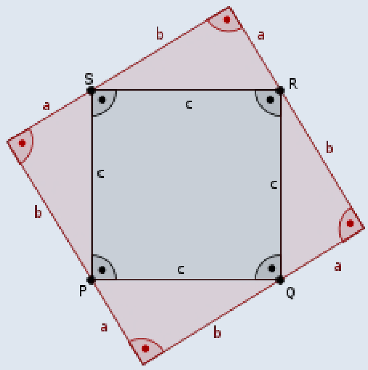
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Satz des Pythagoras

Begründung

Die einfachste Art, dies einzusehen, ist durch Betrachtung der folgenden Abbildung.



Hier wurden auf jede Seite eines Quadrats $PQRS$ der Seitenlänge c das gegebene rechtwinklige Dreieck aufgesetzt. Da das Dreieck rechtwinklig war, bilden die Strecken der Länge a und b, die sich bei einem der Eckpunkte P, Q, R oder S treffen, eine Gerade, da der Winkel zwischen ihnen genau $\beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$ ist. Die gesamt Figur ist also ein Quadrat mit Seitenlänge $a + b$. Mit den Flächeninhaltsformeln aus Abschnitt V.5 ist daher $(a + b)^2$ (=Flächeninhalt des großen Quadrats) gleich groß wie $c^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2}ab)$ (=Flächeninhalt des kleinen Quadrats und der vier rechtwinkligen Dreiecke).
Aufgrund der ersten Binomischen Formel erhält man noch $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und daher

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2}ab) = c^2 + 2ab.$$

Subtraktion von $2ab$ auf beiden Seiten ergibt schließlich

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

[video-online-only]

Weitere Sätze, die die verschiedenen Strecken in einem rechtwinkligen Dreieck zueinander in Relation setzen, sind der Kathetensatz und der Höhensatz. Diese sind zwar nicht Thema dieses Kurses, sollen der Vollständigkeit halber dennoch behandelt werden.

ERGÄNZUNG (KATHETENSATZ UND HÖHENSATZ)
Anzeigen

[video-online-only]

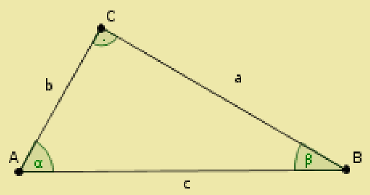
Übung zur Anwendung des Satzes des Pythagoras

4.3 Sinus, Kosinus und Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck hat man auch besondere Zusammenhänge zwischen den Seitenlängen und den Innenwinkeln, welche mithilfe der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens beschrieben werden.

4.7 DEFINITION

Sinus, Kosinus und Tangens ordnen einem Winkel im rechtwinkligen Dreieck die Längenverhältnisse der Katheten und Hypotenuse zu. Für die Definition betrachtet man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck ABC wie in der Abbildung.



Rechtwinkliges Dreieck ABC

Man definiert dann Sinus, Kosinus und Tangens von α durch

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}, \tag{4.1}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}, \tag{4.2}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}. \tag{4.3}$$

Mit den Verhältnisgleichungen für die Seitenlängen ähnlicher Dreiecke lässt sich nachrechnen, dass $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ nicht von der Größe des Dreiecks abhängen, sondern nur von der Winkelgröße von α.

Auf diese Weise sind also Sinus, Kosinus und Tangens für alle spitzen Winkel definiert.
Betrachtet man statt α den Winkel β und beachtet, dass wegen der Winkelsumme im Dreieck $\beta = 90^\circ - \alpha$ gilt, so erhält man die Gleichungen

4.8 REGEL

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha), \tag{4.4}$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha). \tag{4.5}$$

Aus dem Satz des Pythagoras erhält man noch einen Zusammenhang zwischen $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$, nämlich

4.9 REGEL

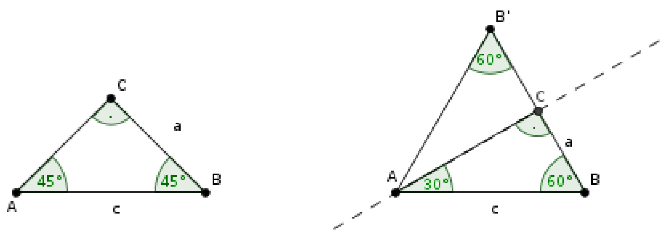
$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1.$$

Erklärung

Nach dem Satz des Pythagoras ist $a^2 + b^2 = c^2$. Daraus folgt

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

4.10 BEISPIEL



Sinus und Kosinus von 45°, 30° und 60°.

1. Betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 45^\circ$. Dann ist auch $\beta = 90^\circ - \alpha = 45^\circ$. D.h. die beiden Winkel sind gleich groß und damit sind auch die beiden Katheten gleich lang. Aus dem Satz des Pythagoras erhält man nun

   $$c^2 = a^2 + b^2 = 2 \cdot a^2.$$

   Teilt man die Gleichung durch a^2 und zieht die Wurzel, erhält man somit

   $$\frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

   Also gilt

   $$\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 30^\circ$. Dann ist $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$. Spiegelt man das Dreieck an der Seite b, so erhält man ein Dreieck ABB', dessen Innenwinkel sämtlich 60°

betragen, das also gleichseitig ist. Daher gilt:

$$a = \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{BB'} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot c$$

Somit erhält man

$$\sin(30^\circ) = \frac{a}{c} = \frac{1}{2},$$

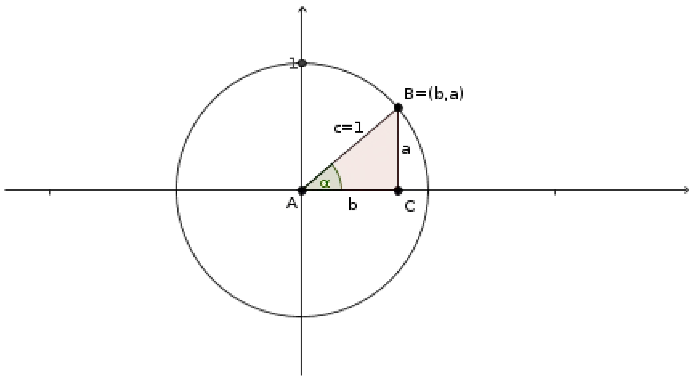
sowie

$$\cos(60^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

$\sin(60^\circ)$ und $\cos(30^\circ)$ ergeben sich nach Regel 4.9 als

$$\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \sqrt{1 - \sin(30^\circ)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Um Sinus- und Kosinuswerte auch für größere Winkel zu erhalten, betrachtet man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck im Koordinatensystem, wobei man den Punkt A als Ursprung wählt, die Seite b auf die x-Achse legt und die Hypotenusenlänge auf 1 setzt (vgl. Abbildung).
Der Punkt B liegt dann auf dem Einheitskreis und hat die Koordinaten $(b; a)$, was wegen $c = 1$ gleich $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ ist.



Kosinus und Sinus am Einheitskreis

Man legt daher für einen beliebigen Winkel α zwischen 0° und 360° (einschließlich) den Sinus und Kosinus folgendermaßen fest:

4.11 DEFINITION

Man schneidet den Einheitskreis mit der Halbgeraden, die mit der positiven x-Achse bei $(0;0)$ den Winkel α einschließt (vgl. obige Abbildung). Dann sind $\cos(\alpha)$ die x-Koordinate des Schnittpunktes und $\sin(\alpha)$ die y-Koordinate des Schnittpunktes. Ist $\cos(\alpha)$ nicht 0, so definiert man noch den Tangens $\tan(\alpha)$ als Quotient aus Sinus und Kosinus, d.h.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Des Weiteren definiert man diese Funktionen auch für Winkelgrößen größer als 360° und kleiner gleich 0° mittels

4.12 DEFINITION

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos(\alpha), && (4.6)\\ \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin(\alpha), && (4.7)\\ \tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \tan(\alpha). && (4.8) \end{aligned}$$

für ganze Zahlen k und Winkel α zwischen 0° und 360°.

Aus dieser Definition erhält man direkt Aussagen über das Vorzeichen der Funktionen für bestimmte $0 \leq \alpha < 360^\circ$:

4.13 REGEL

$$\cos(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha = 90^\circ \text{ oder } \alpha = 270^\circ \\ > 0 & \text{für } 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ \text{ oder } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \\ < 0 & \text{für } 90^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases}, \qquad (4.9)$$

$$\sin(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha = 0^\circ \text{ oder } \alpha = 180^\circ \\ > 0 & \text{für } 0^\circ < \alpha < 180^\circ \\ < 0 & \text{für } 180^\circ < \alpha < 360^\circ \end{cases}. \qquad (4.10)$$

Des Weiteren erhält man verschiedene Gleichungen, welche für alle Winkelgrößen α gültig sind:

4.14 REGEL

Für alle α gilt

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \qquad \text{(nach Regel 4.9)},$$
$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \sin(\alpha) \leq 1.$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + 90^\circ) &= -\sin(\alpha), && (4.11)\\
\cos(\alpha + 180^\circ) &= -\cos(\alpha), && (4.12)\\
\cos(\alpha + 270^\circ) &= \cos(\alpha - 90^\circ) = \sin(\alpha), && (4.13)\\
\cos(\alpha + 360^\circ) &= \cos(\alpha). && (4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 90^\circ) &= \cos(\alpha), && (4.15)\\
\sin(\alpha + 180^\circ) &= -\sin(\alpha), && (4.16)\\
\sin(\alpha + 270^\circ) &= \sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos(\alpha), && (4.17)\\
\sin(\alpha + 360^\circ) &= \sin(\alpha). && (4.18)
\end{aligned}$$

Außerdem gelten noch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos(\alpha), && (4.19)\\
\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin(\alpha), && (4.20)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha), && (4.21)\\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha). && (4.22)
\end{aligned}$$

Natürlich lassen sich die Gleichungen auch im Bogenmaß ausdrücken.

Gleichungen im Bogenmaß

4.15 REGEL

Für $0 \leq \alpha < 2\pi$ gilt

$$\cos(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \alpha = \frac{3\pi}{2} \\ > 0 & \text{für } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\,, \\ < 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad (4.23)$$

$$\sin(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = \pi \\ > 0 & \text{für } 0 < \alpha < \pi \qquad . \\ < 0 & \text{für } \pi < \alpha < 2\pi \end{cases} \qquad (4.24)$$

Für alle α gilt

4.16 REGEL

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1,$$

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \sin(\alpha) \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) &= -\sin(\alpha), && (4.25)\\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha), && (4.26)\\ \cos(\alpha + \tfrac{3\pi}{2}) &= \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) = \sin(\alpha), && (4.27)\\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha). && (4.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos(\alpha), && (4.29)\\ \sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha), && (4.30)\\ \sin(\alpha + \tfrac{3\pi}{2}) &= \sin(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha), && (4.31)\\ \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha). && (4.32) \end{aligned}$$

Außerdem gelten noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) &= \cos(\alpha), && (4.33)\\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) &= \sin(\alpha), && (4.34) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha), && (4.35)\\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha). && (4.36) \end{aligned}$$

4.17 BEISPIEL

Die Anwendung der obigen Regeln soll an dem Beispiel $\alpha = 1020^{\circ}$ verdeutlicht werden:
Wegen $1020 = 660 + 360 = (300 + 360) + 360$ gilt

$$\cos(1020^{\circ}) = \cos(660^{\circ}) = \cos(300^{\circ}) = \cos(30^{\circ} + 270^{\circ}) = \sin(30^{\circ}) = \frac{1}{2},$$

sowie

$$\sin(1020^{\circ}) = \sin(660^{\circ}) = \sin(300^{\circ}) = \sin(30^{\circ} + 270^{\circ}) = -\cos(30^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\tan(1020^{\circ}) = \frac{\sin(1020^{\circ})}{\cos(1020^{\circ})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Anmerkung: Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels lassen sich mit Hilfe analytischer Methoden berechnen, ohne vorher die Seitenlängen des Dreiecks kennen zu müssen (vgl. Analytische Definition von Sinus und Kosinus auf Wikipedia). Diese Methoden verwendet zum Beispiel der Taschenrechner. Man kann daher Sinus, Kosinus und Tangens auch benutzen, um aus gegebenen Winkeln und einer Seitenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks die anderen Seiten zu berechnen. Dazu müssen nur die Gleichungen aus der ersten Definition nach den entsprechenden Seiten aufgelöst werden, also zum Beispiel

$$\text{Länge der Ankathete von } \alpha = \cos(\alpha) \cdot \text{Länge der Hypotenuse.}$$

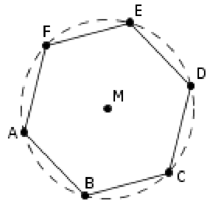
Umgekehrt kann man mit dem Taschenrechner auch den Winkel durch die Umkehrfunktion des Sinus bzw. des Kosinus berechnen, wenn zwei Seiten gegeben sind.

Übung zur Bestimmung von Sinus und Kosinus verschiedener Winkel

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Auf einem Kreis werden in gleichen Abständen sechs Punkte A, B, C, D, E und F gewählt (d.h. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$), wodurch ein sogenanntes regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ entsteht (vgl. Skizze).



Welche Punktetripel bilden ein rechtwinkliges Dreieck? Und welche Seiten sind dann jeweils die Katheten und die Hypotenuse?

Antwort

Jedes Tripel, das zwei Punkte enthält, die einander im Sechseck gegenüberliegen (also z.B. A, D und E), bildet ein rechtwinkliges Dreieck. Die Seite der einander gegenüberliegenden Punkte ist die Hypotenuse, die anderen beiden sind die Katheten.

Erläuterung

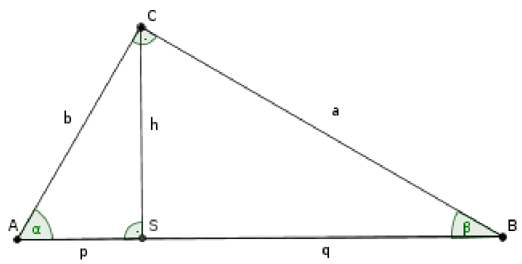
Da die Punkte in gleichen Abständen auf dem Kreis liegen, bilden zwei einander gegenüberliegende Punkte einen Durchmesser des Kreises.

Wählt man also zwei einander gegenüberliegende Punkte (z.B. A und D), so ist nach dem Satz des Thales der Winkel bei jedem anderen Punkt auf dem Kreis ein rechter Winkel. Also sind die Dreiecke ADE, ADF, ADB und ADC alle rechtwinklig mit rechtem Winkel bei dem dritten Punkt.

Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, ist die Hypotenuse, die anderen zwei sind die Katheten. Also ist die Seite, die den Durchmesser des Kreises bildet, die Hypotenuse.

ÜBUNG 2

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C sind die Höhe $h = 6\ \text{cm}$, die Seite $b = 6{,}8\ \text{cm}$ und der Hypotenusen-Abschnitt $q = 11{,}25\ \text{cm}$ gegeben (vgl. Skizze). Berechnen Sie die Seiten a und c des Dreiecks, sowie den Hypotenusen-Abschnitt p.



Rechtwinkliges Dreieck

Antwort

Es sind $a = 12{,}75\ \text{cm}$, $c = 14{,}45\ \text{cm}$ und $p = 3{,}2\ \text{cm}$.

Lösung

Um die anderen Streckenlängen zu berechnen, sollte der Satz des Pythagoras verwendet werden, auch für die kleineren rechtwinkligen Dreiecke ASC und BCS.

Zunächst lässt sich die Strecke p mit Hilfe des Satzes des Pythagoras im Dreieck ASC berechnen:

$$p^2 = b^2 - h^2 = (6{,}8^2 - 6^2)\ \text{cm}^2 = 10{,}24\ \text{cm}^2.$$

Also $p = 3{,}2\ \text{cm}$.

Damit ist dann $c = p + q = 14{,}45\ \text{cm}$.

Für die Berechnung der Seite a hat man nun mehrere Möglichkeiten: Anwendung des Satzes des Pythagoras im Dreieck ABC ($a^2 = c^2 - b^2$) oder des Satzes des Pythagoras im Dreieck BCS ($a^2 = q^2 + h^2$).
In jedem Fall erhält man $a^2 = \frac{2601}{16}\ \text{cm}^2$, und daher $a = \frac{51}{4}\ \text{cm} = 12{,}75\ \text{cm}$.

Anmerkung: Verwendet man auch den Kathetensatz und den Höhensatz, hat man noch mehr Möglichkeiten, die anderen Strecken zu berechnen, und bräuchte insbesondere die Angabe von q nicht. Nach der Berechnung von p kann man nämlich unter Verwendung von p und h die Strecke q mit dem Höhensatz berechnen, oder auch unter Verwendung von p und b die Strecke c mit dem Kathetensatz.

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie zu folgenden Winkeln α einen Winkel β zwischen 0° und 90° (jeweils inklusive) so, dass $\cos(\beta) = |\cos(\alpha)|$ und $\sin(\beta) = |\sin(\alpha)|$ gelten.

a) $\alpha = -10^\circ$

b) $\alpha = 300^\circ$

c) $\alpha = 1000^\circ$

d) $\alpha = 550^\circ$

Antworten

a) $\beta = 10^\circ$

b) $\beta = 60^\circ$

c) $\beta = 80^\circ$

d) $\beta = 10^\circ$

Lösungen

Da für alle Winkel α die Gleichung $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ gilt und da für β zwischen 0° und 90° stets $\sin(\beta) \geq 0$ und $\cos(\beta) \geq 0$ gilt, ist die Gleichung $\sin(\beta) = |\sin(\alpha)|$ genau erfüllt, wenn die Gleichung $\cos(\beta) = |\cos(\alpha)|$ erfüllt ist. Wir werden daher im Folgenden nur die Gleichung $\cos(\beta) = |\cos(\alpha)|$ betrachten. (Genauso gut könnte man auch nur die andere Gleichung betrachten.)

Um β zu finden, verwendet man die Regeln für Sinus und Cosinus.
Zunächst gilt allgemein

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

Daher erfüllt in Teil a) also $\beta = -\alpha = 10^\circ$ die Bedingungen.

Für Teil b) benötigt man noch zusätzlich die Regel

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos(\alpha).$$

Dann erhält man nämlich

$$\cos(300^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ).$$

Also erfüllt in Teil b) der Winkel $\beta = 60^\circ$ die Bedingungen.

Für Teil c) wendet man die obige Regel mehrmals an und erhält
$\cos(1000^\circ) = \cos(-80^\circ) = \cos(80^\circ)$.

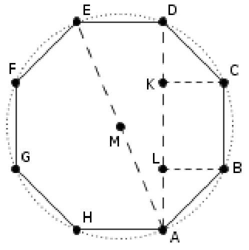
In Teil d) kann man mit obigen Regeln $\alpha = 550^\circ$ zunächst auf 190° oder auf -170° reduzieren. Um in den Bereich zwischen 0° und 90° zu kommen, benötigt man noch:

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos(\alpha).$$

In Teil d) erhält man also, dass für $\beta = 10^\circ$ die Gleichung $\cos(\beta) = -\cos(190^\circ) = -\cos(550^\circ)$ gilt.

ÜBUNG 4

Auf einem Kreis werden in gleichen Abständen acht Punkte A bis H gewählt (d.h. $\overline{AB} = \overline{BC} = \ldots = \overline{GH} = \overline{HA}$), wodurch ein sogenanntes regelmäßiges Achteck $ABCDEFGH$ entsteht (vgl. Skizze). Die Seitenlänge des Achtecks betrage $a = 3\ \mathrm{cm}$. Welchen Radius hat der Umkreis des Achtecks, also der Kreis, der durch alle acht Ecken verläuft?



regelmäßiges Achteck mit Hilfslinien zur Berechnung des Umkreisradius

Antwort

Der Radius beträgt $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot a \approx 3{,}92\ \ \mathrm{cm}.$

Lösung

Zunächst untersucht man die eingezeichneten Stücke des Achtecks, wofür die Winkelgrößen $\measuredangle ADC$ und $\measuredangle BAD$ benötigt werden.

Da die Winkelsumme im n-Eck $(n-2)\cdot 180^\circ$ beträgt und im regelmäßigen n-Eck alle Winkel gleich groß sind (aus Symmetriegründen), beträgt die Größe des Innenwinkels $\measuredangle EDC = \frac{6}{8}\cdot 180^\circ = 135^\circ$ (und ebenso die Größen der anderen Innenwinkel).
Da EA ein Durchmesser des Kreises ist, ist nach dem Satz des Thales der Winkel $\measuredangle EDA$ ein rechter Winkel und daher gilt:

$$\measuredangle ADC = \measuredangle EDC - \measuredangle EDA = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

Ebenso ist $\measuredangle BAD = 45^\circ$.

Die Punkte K und L sollen so gewählt sein, dass KC und LB senkrecht auf AD stehen. Dann sind die Dreiecke ABL und CDK aber rechtwinklig (bei L bzw. bei K) und wegen $\measuredangle BAL = 45^\circ$ und $\measuredangle KDC = 45^\circ$ sogar rechtwinklig und gleichschenklig.

Mit dem Satz des Pythagoras gilt dann

$$\overline{BL}^2 + \overline{AL}^2 = \overline{AB}^2 = a^2,$$

d.h. $2\overline{AL}^2 = a^2$ und daher $\overline{AL} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ebenso erhält man $\overline{KD} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Betrachtet man nun das Viereck $LBCK$, so weiß man schon, dass nicht nur die Seiten LB und KC senkrecht auf LK stehen, sondern dass LB und KC auch gleich lang sind. Daher ist das Viereck $LBCK$ sogar ein Rechteck und insbesondere ist KL parallel zu BC und es gilt $\overline{KL} = \overline{BC} = a$.

Für die Strecke AD erhält man also

$$\overline{AD} = \overline{AL} + \overline{LK} + \overline{KD} = \frac{a}{\sqrt{2}} + a + \frac{a}{\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2})\cdot a.$$

Den Durchmesser AE des Umkreises berechnet man nun wieder mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (a+\sqrt{2}a)^2 + a^2 = a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2 + 2\sqrt{2}a^2.$$

Also: $\overline{AE} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}\,a$. Und daher beträgt der Radius

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,a = \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot a.$$

5. FLÄCHENINHALTE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte und Umfänge von Kreisen und Rechtecken und können sie anwenden.
- Sie können den Flächeninhalt von Dreiecken berechnen.
- Sie können weitere Flächeninhalte berechnen, indem Sie Figuren in bekannte, d.h. mit den Formeln berechenbare, Teile zerlegen.

In diesem Abschnitt geht es um die Berechnung der Flächeninhalte und Umfänge einfacher ebener geometrischer Figuren.

5.1 Umfang und Flächeninhalt von Polygonen (Vielecken)

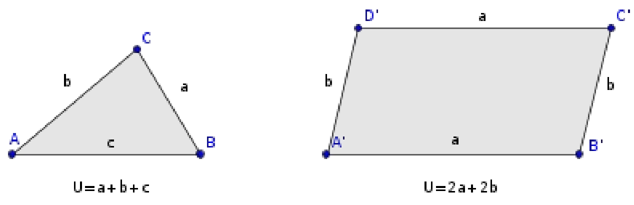
5.1 DEFINITION

Der *Umfang* einer geometrischen Figur ist die Länge der begrenzenden Linie. Der Umfang eines *Polygons* (d.h. Vielecks) ist also genau die Summe seiner Seitenlängen.

5.2 REGEL

1. Der Umfang eines Dreiecks ABC ist gegeben durch $U = a + b + c$.
2. Der Umfang eines Parallelogramms (und somit auch eines Rechtecks) mit den Seitenlängen a und b ist gegeben durch

$$U = a + b + a + b = 2(a + b) = 2a + 2b.$$



Umfänge von Dreieck und Parallelogramm

Kurztest

Bei einem Rechteck mit Umfang $26{,}4$ cm sei die lange Seite 3-mal so lang wie die kurze Seite.

Wie lang ist die lange Seite? Antwort: ? cm

Prüfen Lösung anzeigen

Im Vergleich zu den Umfängen von Polygonen sind deren Flächeninhalte im Allgemeinen aufwändiger zu berechnen. Für besondere Polygone gibt es jedoch einfache Formeln:

5.3 REGEL

Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b beträgt

$$F = a \cdot b.$$

Daraus erhält man eine Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken:

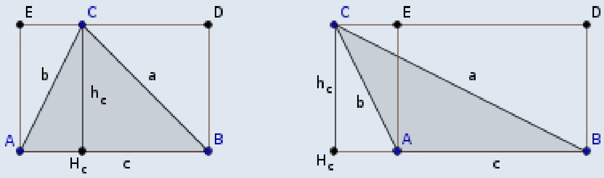
5.4 REGEL

Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt

$$F = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}.$$

Hierbei kann als Grundseite jede beliebige Seite des Dreiecks gewählt werden und die Höhe ist dann die zur Grundseite senkrechte Höhe. Im Abschnitt Kongruenz und Ähnlichkeit wurde in Beispiel 3.8 erklärt, wie man einsehen kann, dass es wirklich egal ist, welche Seite man als Grundseite wählt.

Begründung der Formel



Flächeninhalt des Dreiecks

Das Dreieck ABC links in der Abbildung kann man wie dort gekennzeichnet zu einem Rechteck mit Seitenlängen c und h_c ergänzen. Da das Dreieck ABC jeweils die Hälfte des Rechtecks AH_CCE und des Rechtecks H_CBDC bedeckt, ist also die Fläche des Dreiecks gerade halb so groß wie die des Rechtecks, somit

$$F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c.$$

Im Fall, dass die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt (vgl. rechtes Dreieck in obiger Abbildung), stimmt die Formel auch, die Begründung muss nur etwas geändert werden.

Das Problem, diese Formel anzuwenden, besteht meist darin, dass zunächst die Höhe bestimmt werden muss. Mittels des Sinus im rechtwinkligen Dreieck gilt im Dreieck ABC für die Höhe h_c die Gleichung $h_c = \sin(\alpha) \cdot b$.

Dadurch erhält man für die Fläche $F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$. Oder in Worten: Die Fläche im Dreieck ist gleich der Hälfte des Produkts zweier Seiten und des Sinus ihres eingeschlossenen Winkels. Natürlich gilt die Formel auch, wenn man zwei andere Seiten und deren eingeschlossenen Winkel betrachtet.

5.5 REGEL

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC beträgt

$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma).$$

5.6 BEISPIEL

Die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a:
Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck sind jeweils 60° (vgl. Beispiel 1.11 im Abschnitt Winkel). Nach der zweiten Formel ist also der Flächeninhalt gegeben durch

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

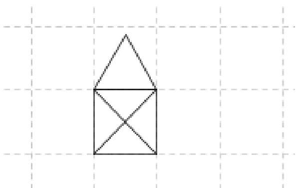
(siehe Beispiel 4.10 im Abschnitt Rechtwinkliges Dreieck für den Wert von $\sin(60^\circ)$).

Flächeninhalte komplexerer Polygone werden meist dadurch berechnet, dass man das Polygon in einfachere Polygone zerlegt.

5.7 BEISPIEL

Das Haus vom Nikolaus (s. Abbildung) ist ein Fünfeck, bei dem alle Seiten die gleiche Länge haben. Der Umfang ist somit das Fünffache dieser Seitenlänge. Um den Flächeninhalt zu berechnen, beachte man, dass sich das Fünfeck aus einem gleichseitigen Dreieck und einem Quadrat zusammensetzt. Ist die Seitenlänge des Nikolaushauses $a = 1$ cm, so erhält man als Flächeninhalt somit

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + a^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4} + 1) \cdot 1 \text{ cm}^2 \approx 1{,}43 \text{ cm}^2 .$$



das Haus vom Nikolaus

Übung zum Berechnen des Umfangs und des Flächeninhalts einfacher Polygone

weitere Übung zum Berechnen des Umfangs und des Flächeninhalts einfacher Polygone

5.2 Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und anderen geometrischen Figuren

Beim Kreis ist der Umfang die Länge der Kreislinie. Wie schon im Abschnitt Winkel erwähnt, ist die Kreiszahl π so definiert, dass der Umfang des Einheitskreises (also des Kreises mit Radius 1) genau 2π beträgt. Da sich der Umfang proportional zum Radius verhält, hat man allgemein die Formel:

5.8 REGEL

Der Umfang eines Kreises mit Radius r beträgt

$$U = 2\pi r.$$

Auch in der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises taucht die Kreiszahl π auf.

5.9 REGEL

Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r beträgt

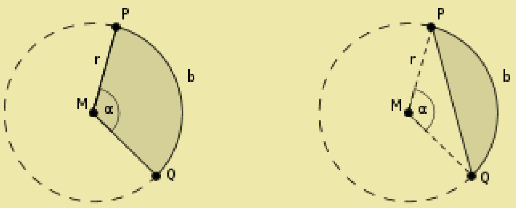
$$F = \pi r^2.$$

Oft werden auch Teile eines Kreises betrachtet. Die wichtigsten Kreisstücke sind der Kreissektor und das Kreissegment.

5.10 DEFINITION

Ein *Kreissektor* ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von zwei Radien und einem Stück des Kreisbogens begrenzt wird (vgl. linker Teil der folgenden Abbildung).

Ein *Kreissegment* ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne des Kreises und einem Stück des Kreisbogens begrenzt wird (vgl. rechter Teil der folgenden Abbildung).



Kreissektor und Kreissegment

Sowohl der Kreissektor als auch das Kreissegment sind (bis auf Drehung des Kreises) festgelegt durch den Radius r des Kreises, den Mittelpunktswinkel α und die Länge b des Kreisbogens.

5.11 REGEL

Die Größen r, α (im Gradmaß) und b erfüllen stets die Gleichung

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

Wenn α im Bogenmaß gegeben ist, erhält man die Formel $b = \alpha r$ (vgl. Umrechnung Gradmaß/Bogenmaß).

5.12 REGEL

Der Flächeninhalt des Kreissektors mit Radius r, Bogenlänge b und Mittelpunktswinkel α (im Gradmaß) beträgt

$$F = \frac{br}{2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.$$

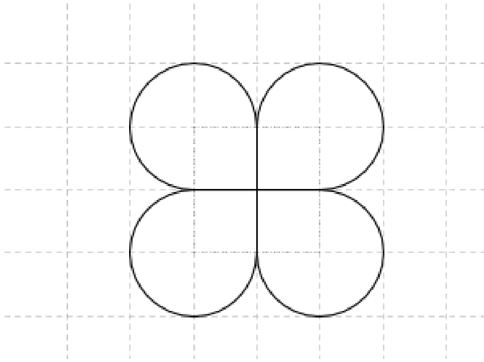
Der Flächeninhalt des Kreissegments mit Radius r, Bogenlänge b und Mittelpunktswinkel α (im Gradmaß) beträgt

$$F = \frac{br}{2} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(\alpha) = r^2 \cdot (\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi - \frac{\sin(\alpha)}{2}).$$

Flächeninhalte komplexerer Figuren können oft dadurch berechnet werden, dass man die Figur in einfachere Figuren zerlegt bzw. zu einfacheren Figuren ergänzt.

5.13 BEISPIEL

Man betrachte das vierblättrige Kleeblatt in der folgenden Abbildung.



vierblättriges Kleeblatt

Jedes einzelne Blatt besteht aus einem Quadrat mit Seitenlänge $a = 1$ cm und einem Kreissektor mit Radius $a = 1$ cm und Mittelpunktswinkel 270°. Der gesamte Flächeninhalt ist somit:

$$F = 4 \cdot (a^2 + \frac{270}{360} \cdot \pi a^2) = (4 + 3\pi) \cdot a^2 \approx 13{,}42\ \mathrm{cm}^2$$

[video-online-only]

Übung zur Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts von Kreisen

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Von einem Rechteck ist bekannt, dass der Umfang $U = 30\ \mathrm{cm}$ beträgt und eine Seite $4\ \mathrm{cm}$ lang ist.

Wie lang ist die zweite Seite und wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?

Antwort

Die andere Seite ist $11\ \mathrm{cm}$ lang und der Flächeninhalt beträgt $A = 44\ \mathrm{cm}^2$.

Lösungsweg

Wegen der Umfangsformel $U = 2a + 2b$ für Rechtecke ist die Länge der zweiten Seite (wenn die erste a genannt wird):

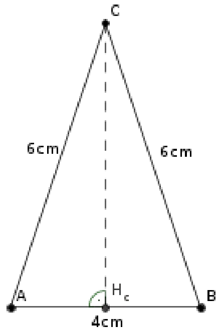
$$b = \frac{U - 2a}{2} = 11\ \mathrm{cm}.$$

Den Flächeninhalt berechnet man dann mit der Flächeninhaltsformel

$$A = a \cdot b = 4\ \mathrm{cm} \cdot 11\ \mathrm{cm} = 44\ \mathrm{cm}^2.$$

ÜBUNG 2

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $c = 4\text{ cm}$ und $a = b = 6\text{ cm}$ (vgl. Skizze). Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?



Antwort

Der Flächeninhalt beträgt $A = 8\sqrt{2}\text{ cm}^2 \approx 11{,}31\text{ cm}^2$.

Lösungsweg 1

Da das Dreieck gleichschenklig ist, ist der Fußpunkt H_c der Höhe zu c genau der Mittelpunkt der Seite c, also ist $AH_c = \frac{c}{2} = 2\text{ cm}$.

Da das Dreieck AH_cC rechtwinklig ist, berechnet sich dann die Höhe $\overline{H_cC}$ des Dreiecks ABC mit dem Satz des Pythagoras durch:

$$\overline{H_cC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH_c}^2 = (6\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2 = 32\text{ cm}^2.$$

Also $\overline{H_cC} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$.

Zuletzt wendet man die Flächeninhaltsformel für Dreiecke an:

$$A = \frac{1}{2}h_c \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\text{ cm}^2 = 8\sqrt{2}\text{ cm}^2 \approx 11{,}31\text{ cm}^2.$$

Lösungsweg 2

Da das Dreieck gleichschenklig ist, ist der Fußpunkt H_c der Höhe zu c genau der Mittelpunkt der Seite c, also ist $AH_c = \frac{c}{2} = 2\text{ cm}$.

Da das Dreieck AH_cC rechtwinklig ist, ist der Cosinus des Winkels α gegeben durch

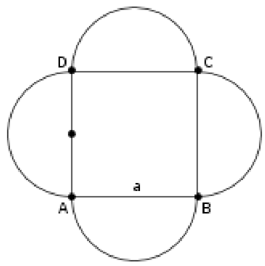
$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH_c}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3}.$$

Mit dem Taschenrechner erhält man daraus $\alpha \approx 70{,}53^\circ$.

Zuletzt wendet man die Sinus-Flächeninhaltsformel für Dreiecke an:

$$A = \frac{1}{2}\sin(\alpha) \cdot b \cdot c = 12 \cdot \sin(\alpha)\text{ cm}^2 \approx 11{,}31\text{ cm}^2.$$

ÜBUNG 3



Auf den Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge $a = 4 \text{ cm}$ sind Halbkreise aufgesetzt (vgl. Skizze).
Wie groß sind der Umfang und der Flächeninhalt der gesamten Figur?

Antwort

Der Umfang der Figur beträgt $U = 8\pi \text{ cm} \approx 25{,}13 \text{ cm}$.
Der Flächeninhalt der Figur beträgt $A = (8\pi + 16) \text{ cm}^2 \approx 41{,}13 \text{ cm}^2$.

Lösungsweg für den Umfang

Der Umfang der Figur besteht aus den vier Halbkreisbögen. Die Halbkreise haben den Durchmesser $a = 4 \text{ cm}$ und daher den Radius $r = \frac{a}{2} = 2 \text{ cm}$.

Die Länge eines Halbkreisbogens beträgt daher $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 2\pi \text{ cm}$.

Der Umfang beträgt also

$$U = 4 \cdot 2\pi \text{ cm} = 8\pi \text{ cm} \approx 25{,}13 \text{ cm}$$

Lösungsweg für den Flächeninhalt

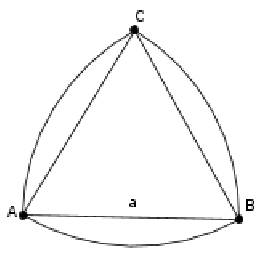
Der Flächeninhalt der Figur besteht aus dem Flächeninhalt des Quadrates ($= a^2 = 16\ \mathrm{cm}^2$) und dem der vier Halbkreise. Die Halbkreise haben den Durchmesser $a = 4\ \mathrm{cm}$ und daher den Radius $r = \frac{a}{2} = 2\ \mathrm{cm}$.

Der Flächeninhalt eines Halbkreises beträgt also $\frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = 2\pi\ \mathrm{cm}^2$.

Der gesamte Flächeninhalt beträgt daher

$$A = 16\ \mathrm{cm}^2 + 4 \cdot 2\pi\ \mathrm{cm}^2 = (16 + 8\pi)\ \mathrm{cm}^2 \approx 41{,}13\ \mathrm{cm}^2.$$

ÜBUNG 4



In obiger Skizze ist das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a = 4$ cm. Die Bögen sind Kreisbögen, die durch zwei Eckpunkte verlaufen und deren Mittelpunkt die jeweils dritte Ecke des Dreiecks ist.

Welchen Flächeninhalt besitzt die gesamte Figur?

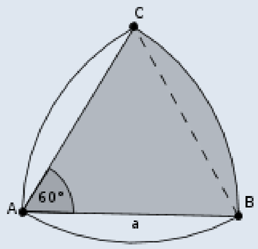
Antwort

Der gesamte Flächeninhalt beträgt

$$F = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} a^2 \approx 11{,}28 \text{ cm}^2.$$

Lösungsweg 1

Da das Dreieck gleichseitig ist, betragen alle Innenwinkel 60°. Der in folgender Abbildung markierte Bereich ist also ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel 60° und Radius $a = 4$ cm.



Er hat also den Flächeninhalt

$$F_{\text{sek}} = a^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi = a^2 \frac{\pi}{6}.$$

Nimmt man die Fläche dieses Sektors drei Mal (einmal für jeden Kreisbogen), so hat man die Dreiecksfläche dreifach gezählt, muss sie also wieder zweimal abziehen. Die Gesamtfläche ist also

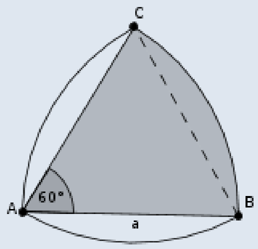
$$F = 3 \cdot F_{\text{sek}} - 2 \cdot F_\Delta.$$

Da der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks $F_\Delta = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ beträgt, ist also die Gesamtfläche gegeben als

$$F = 3 \cdot F_{\text{sek}} - 2 \cdot F_\Delta = a^2 \frac{\pi}{2} - a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} a^2 \approx 11{,}28\ \text{cm}^2.$$

Lösungsweg 2

Da das Dreieck gleichseitig ist, betragen alle Innenwinkel 60°. Die in folgender Abbildung markierten Bereiche sind also Kreissegmente mit Mittelpunktswinkel 60° und Radius $a = 4$ cm.



Jedes einzelne Segment hat also den Flächeninhalt

$$F_{\text{seg}} = a^2 \cdot \left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi - \frac{\sin(60^\circ)}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Da der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks $F_\Delta = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ beträgt ist also die Gesamtfläche

$$F = 3 \cdot F_{\text{seg}} + F_\Delta = 3a^2\frac{\pi}{6} - 3a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 11{,}28 \text{ cm}^2.$$

6. VOLUMINA

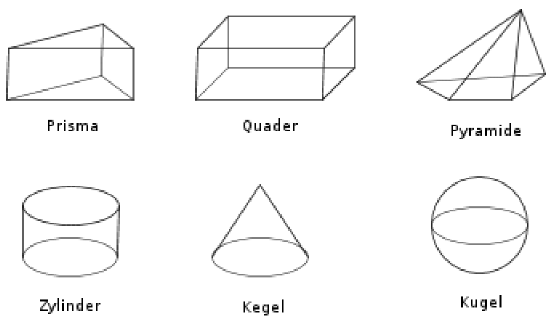
Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Formeln für die Oberflächen und Volumina von Prismen und Pyramiden und können sie anwenden.
- Sie kennen die Formeln für die Oberflächen und Volumina von Zylindern, Kegeln und Kugeln und können sie anwenden.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, das *Volumen* (=Rauminhalt) und die *Oberfläche* (=Flächeninhalt der Begrenzungsflächen) von geometrischen Körpern zu bestimmen. Im Folgenden werden daher nur solche geometrischen Körper betrachtet, bei denen die Berechnungen gut möglich sind, d.h. gewisse Prismen (z.B. Quader), gewisse Pyramiden, Zylinder, Kegel und Kugeln (vgl. Abbildung)

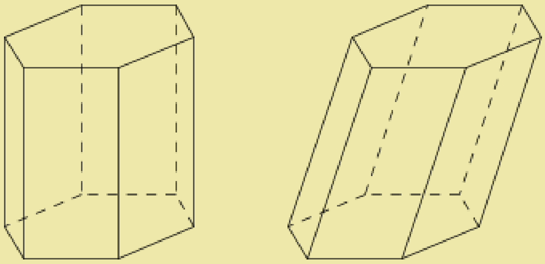


verschiedene geometrische Körper

6.1 Oberfläche und Volumen von Prismen

6.1 DEFINITION

Verschiebt man ein ebenes Polygon im Raum und verbindet dann jeden Punkt der Polygonfläche mit dem entsprechenden verschobenen Punkt, dann entsteht ein sogenanntes *Prisma* (vgl. Abbildung). Wird das Polygon senkrecht zu seiner Ebene verschoben, d.h. die Verbindungskanten des verschobenen Polygons mit dem ursprünglichen sind senkrecht zu den Polygonseiten, so spricht man von einem *geraden* Prisma, ansonsten von einem *schiefen* Prisma.

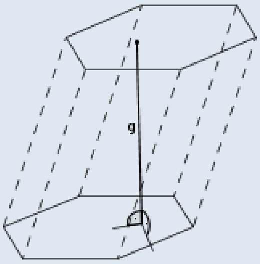


gerades und schiefes Prisma

Die zwei Polygone nennt man *Grund-* und *Deckfläche* des Prismas und die anderen ebenen Flächen *Seitenflächen*. Den Abstand der zwei Polygonebenen voneinander nennt man *Höhe* des Prismas.

Zum Abstand zweier Ebenen

Sind zwei Ebenen im Raum parallel (vgl. Lagebeziehung Ebene-Ebene im Kapitel X. Grundlagen der anschaulichen Vektorgeometrie), z.B. weil die eine durch Verschiebung aus der anderen hervorging, so haben die Ebenen einen wohldefinierten Abstand voneinander. Um den Abstand zu erhalten, wählt man zunächst eine Gerade g, die senkrecht zu den zwei Ebenen liegt. Der Abstand der Ebenen ist dann genau der Abstand der Durchstoßpunkte der Geraden (also der Abstand der Schnittpunkte von g mit den Ebenen).
Wichtig ist, dass die Gerade g wirklich senkrecht zu den Ebenen ist. Dass g senkrecht zu einer Ebene ist, ist gleichbedeutend damit, dass g senkrecht zu jeder Geraden ist, welche in der Ebene liegt.



Abstand der Sechseckebenen

Man beachte, dass nur bei geraden Prismen die Länge der Verbindungskanten gleich der Höhe ist. Bei schiefen Prismen sind die Verbindungskanten länger. Alle Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme, da das zweite Polygon aus dem ersten durch Verschieben entstand (vgl. Definition von Verschiebung im Abschnitt Kongruenz und Ähnlichkeit). Bei einem geraden Prisma sind die Seitenflächen sogar Rechtecke.

6.2 SATZ

Das Volumen eines Prismas beträgt

$$V = A \cdot h,$$

wobei A der Flächeninhalt der Grundfläche ist, und h die Höhe des Prismas.

6.3 SATZ

Die Oberfläche eines Prismas beträgt

$$O = 2 \cdot A + M,$$

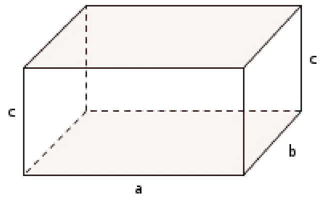
wobei A der Flächeninhalt der Grundfläche (und auch der Deckfläche) ist, und M die sogenannte *Mantelfläche*, d.h. die Summe der Seitenflächen.
Ist das Prisma gerade, so lässt sich M berechnen durch $M = U \cdot h$ mit dem Umfang U der Grundfläche und der Höhe h des Prismas.
Für ein **gerades** Prisma erhält man damit die Oberflächenformel

$$O = 2 \cdot A + U \cdot h.$$

Ist die Grundfläche ein Polygon, für das man eine Flächeninhaltsformel und eine Umfangsformel kennt (vgl. Abschnitt Flächeninhalte), so bekommt man für diese Prismen neue Formeln.

6.4 BEISPIEL

Ein *Quader* ist ein gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche (vgl. Abbildung). Alle Begrenzungsflächen sind somit Rechtecke und der Quader ist durch seine Kantenlängen a, b und c bestimmt (a und b sind die Kantenlängen der Grundfläche und c ist die „senkrechte" Kantenlänge, welche gleich der Höhe ist).



Quader

Aus den Formeln für ein gerades Prisma und für Rechtecke erhält man somit

$$V = a \cdot b \cdot c \quad \text{und} \quad O = 2ab + 2(a+b) \cdot c = 2(ab + ac + bc).$$

Im ganz speziellen Fall, dass $a = b = c$ ist, d.h. dass der Quader ein *Würfel* ist, erhält man noch einfacher

$$V = a^3 \quad \text{und} \quad O = 6a^2.$$

Kurztest Volumen

Ein Quader der Länge 2 cm und Breite $0{,}9$ cm hat ein Volumen von $1{,}62\ \mathrm{cm}^3$.

Welche Höhe hat der Quader? Antwort: ? cm

Prüfen Lösung anzeigen

Kurztest Oberfläche

Ein Quader der Länge 4 cm und Breite $1{,}6$ cm hat eine Oberfläche von $25{,}12\ \mathrm{cm}^2$.

Welche Höhe hat der Quader? Antwort: ? cm

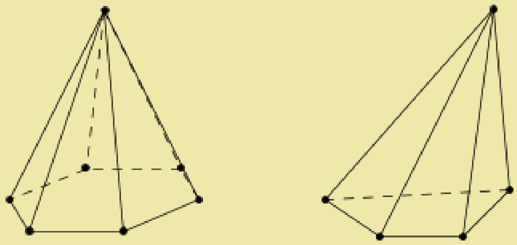
Prüfen Lösung anzeigen

Übung zur Berechnung von Oberfläche und Volumen von Prismen

6.2 Oberfläche und Volumen von Pyramiden

6.5 DEFINITION

Verbindet man ein ebenes Polygon mit einem Punkt S, der nicht in der Polygonebene liegt, dann entsteht eine sogenannte *Pyramide*.



Pyramiden

Der Punkt S heißt *Spitze* der Pyramide, das Polygon heißt *Grundfläche* der Pyramide und die anderen ebenen Flächen heißen *Seitenflächen* der Pyramide. Der Abstand des Punktes S von der Polygonebene heißt *Höhe* der Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind allesamt Dreiecke, da man die Kanten des Polygons mit einem Punkt verbunden hat.

6.6 SATZ

Das Volumen einer Pyramide beträgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h,$$

wobei A der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe der Pyramide ist.

6.7 SATZ

Die Oberfläche einer Pyramide beträgt

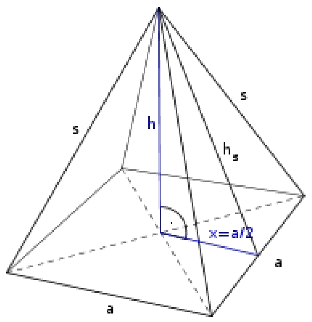
$$O = A + M,$$

wobei A der Flächeninhalt der Grundfläche und M die sogenannte *Mantelfläche*, d.h. die Summe der (dreieckigen) Seitenflächen, ist.

Um die Oberfläche bzw. die Mantelfläche zu berechnen, muss man also nicht nur die Längen der Grundflächenseiten kennen, sondern auch die Höhen der Seitenflächen (was den Abständen der Pyramidenspitze von den Grundflächenseiten entspricht). Es soll daher nur eine Oberflächenformel angegeben werden in einem Fall, in dem die Formel einfach ist.

6.8 BEISPIEL

Eine *gerade quadratische* Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat ist und deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrates liegt. Eine gerade quadratische Pyramide ist also durch die Seitenlänge a des Quadrats und die Höhe h der Pyramide festgelegt.



gerade quadratische Pyramide

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man als Höhen der Seitenflächen $h_s = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2}$ und daher für die Oberfläche der Pyramide

$$O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} h_s \cdot a = a^2 + 2ah_s = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2}$$

und für das Volumen

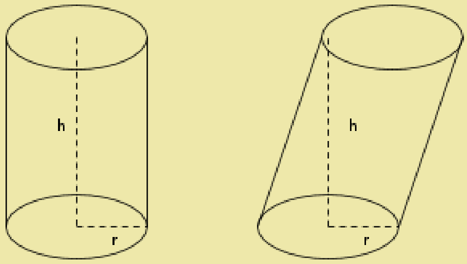
$$V = \frac{1}{3} a^2 h.$$

Übung zur Berechnung von Oberfläche und Volumen von Pyramiden

6.3 Oberfläche und Volumen von Zylindern, Kegeln und Kugeln

6.9 DEFINITION

Verschiebt man einen Kreis im Raum und verbindet jeden Punkt des Kreises mit dem entsprechenden verschobenen Punkt, dann entsteht ein sogenannter *Zylinder* (vgl. Abbildung). Wird der Kreis senkrecht zu seiner Ebene verschoben, so spricht man von einem *geraden* Zylinder, ansonsten von einem *schiefen* Zylinder.

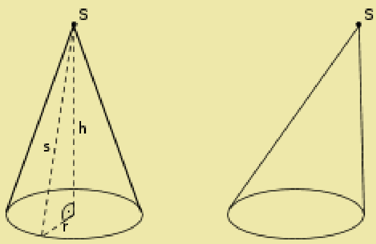


gerader Zylinder und schiefer Zylinder

Die zwei Kreise nennt man *Grund-* und *Deckfläche* des Zylinders und die dritte (nicht-ebene) Fläche *Mantelfläche*. Den Abstand der zwei Kreisebenen voneinander nennt man *Höhe* des Zylinders.

6.10 DEFINITION

Verbindet man einen Kreis mit einem Punkt S, der nicht in der Kreisebene liegt, dann entsteht eine sogenannter *Kegel* (vgl. Abbildung). Liegt der Punkt S senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises, so hat er von allen Punkten der Kreislinie den gleichen Abstand und man spricht von einem *geraden* Kegel, ansonsten von einem *schiefen* Kegel.



gerader Kegel und schiefer Kegel

Der Punkt S heißt *Spitze* des Kegels, der Kreis heißt *Grundfläche* des Kegels und die andere nicht-ebene Fläche heißt *Mantelfläche* des Kegels. Der Abstand des Punktes S von der Kreisebene heißt *Höhe* des Kegels.

Zylinder und Kegel entstehen also auf die gleiche Weise wie Prisma und Pyramide, nur dass statt eines Polygons ein Kreis die Grundfläche bildet. Dementsprechend erhält man ähnliche Formeln für Volumina und Oberflächen:

6.11 SATZ

Das Volumen eines Zylinders beträgt

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

wobei r der Radius des Kreises und h die Höhe des Zylinders ist.
Das Volumen eines Kegels beträgt

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h,$$

wobei r der Radius des Kreises und h die Höhe des Kegels ist.

6.12 SATZ

Die Oberfläche eines **geraden** Zylinders beträgt

$$O = 2\pi r \cdot (r + h),$$

wobei r der Radius des Kreises und h die Höhe des Zylinders ist.
Die Oberfläche eines **geraden** Kegels beträgt

$$O = \pi r \cdot (r + s),$$

wobei r der Radius des Kreises und $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ der Abstand der Spitze von einem Punkt der Kreislinie ist.

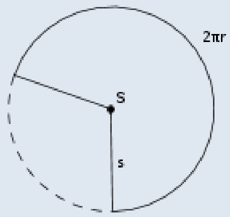
Erklärung für den Zylinder

Die Flächeninhalte der Grund- und Deckfläche (Kreise mit Radius r) betragen jeweils πr^2 (vgl. Fläche eines Kreises). Rollt man den Mantel auf, erhält man ein Rechteck, dessen eine Seitenlänge die Höhe h ist, und dessen andere Seitenlänge der Kreisumfang, also $2\pi r$ ist. Insgesamt also

$$O = \pi r^2 + \pi r^2 + h \cdot 2\pi r = 2\pi r(r + h).$$

Erklärung für den Kegel

Der Flächeninhalt der Grundfläche (Kreise mit Radius r) beträgt πr^2 (vgl. Fläche eines Kreises). Rollt man den Mantel auf, erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Radius der Abstand der Spitze von einem Punkt der Kreislinie ist. Mit dem Satz des Pythagoras berechnet sich dieser Abstand durch $s = \sqrt{h^2 + r^2}$. Die Länge des Bogens des Kreisausschnitts ist der Umfang der Grundfläche, also $2\pi r$.



Aufgerollter Mantel des Kegels

Einen ganzen Kreis (mit Radius s) erhielte man, wenn der Bogen $2\pi s$ betrüge. Also ist das Verhältnis der Fläche des Kreisausschnitts M zur Fläche eines ganzen Kreises mit Radius s dasselbe wie das Verhältnis der zugehörigen Bogenlängen, d.h. $\frac{M}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$. Der Flächeninhalt der Mantelfläche beträgt daher $M = \frac{2\pi r}{2\pi s} \cdot \pi s^2 = \pi rs$. Die gesamte Oberfläche ist also

$$O = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r + s).$$

Die Oberflächen schiefer Zylinder und Kegel werden hier nicht behandelt.

6.13 DEFINITION

Eine *Kugel* mit Radius r besteht aus allen Punkten im Raum, die von einem festen Punkt S höchstens den Abstand r haben.

Die Begrenzungsfläche einer Kugel besteht nur aus einer gekrümmten Fläche, weshalb man diese nicht auf ähnliche Weise berechnen kann wie bei Zylinder oder Kegel. Daher werden hier nur die Formeln zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche angegeben.

6.14 SATZ

Das Volumen einer Kugel mit Radius r beträgt

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r beträgt

$$A = 4\pi r^2.$$

6.15 BEISPIEL

Die Länge des Erdäquators beträgt ca. 40000 km.
Da die Erde annähernd eine Kugel ist, und damit die Äquatorlinie ein Kreis mit demselben Radius r, erhält man aus der Formel für den Kreisumfang

$$r = \frac{U}{2\pi} = \frac{20000}{\pi}\ \mathrm{km} \approx 6366\ \mathrm{km}.$$

Mit obigen Formeln beträgt daher die Erdoberfläche

$$A = 4\pi r^2 \approx 4\pi 6366^2\ \mathrm{km}^2 \approx 5 \cdot 10^8\ \mathrm{km}^2$$

(also ungefähr 500 Millionen Quadratkilometer) und das Volumen der Erde

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3}\pi \cdot 6366^3\ \mathrm{km}^3 \approx 1 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}^3$$

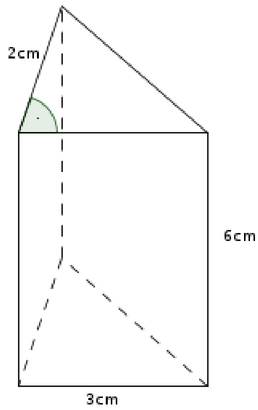
(also ungefähr eine Billion Kubikkilometer).

Übung zu Berechnungen zu Zylinder, Kegel und Kugel

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Die nicht maßstabsgetreue Skizze zeigt ein dreiseitiges gerades Prisma und dessen Abmessungen. Der eingezeichnete Winkel sei ein rechter Winkel. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Prismas.



Dreiseitiges Prisma

Antwort

Die Oberfläche beträgt

$$O = (36 + 6\sqrt{13})\ \mathrm{cm}^2 \approx 57{,}63\ \mathrm{cm}^2$$

und das Volumen

$$V = 18\ \mathrm{cm}^3.$$

Berechnung des Volumens

Nach der Volumenformel berechnet sich das Volumen durch

$$V = A \cdot h,$$

wobei A der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe des Prismas ist.

Hier ist also $h = 6\ \mathrm{cm}$. Weiter ist $A = \frac{1}{2} \cdot 2\ \mathrm{cm} \cdot 3\ \mathrm{cm} = 3\ \mathrm{cm}^2$, da das Dreieck rechtwinklig ist, d.h. die eine Kathete die Höhe zur anderen ist.

In die Formel eingesetzt gilt also:

$$V = 3\ \mathrm{cm}^2 \cdot 6\ \mathrm{cm} = 18\ \mathrm{cm}^3$$

Berechnung der Oberfläche

Nach der Oberflächenformel berechnet sich die Oberfläche durch

$$O = 2 \cdot A + U \cdot h,$$

wobei A der Flächeninhalt der Grundfläche, U der Umfang der Grundfläche und h die Höhe des Prismas ist.

Hier ist also $h = 6\ \mathrm{cm}$. Weiter ist $A = \frac{1}{2} \cdot 2\ \mathrm{cm} \cdot 3\ \mathrm{cm} = 3\ \mathrm{cm}^2$, da das Dreieck rechtwinklig ist, d.h. die eine Kathete die Höhe zur anderen ist.
Für den Umfang ist noch die dritte Seitenlänge, also die Hypotenusenlänge des Dreiecks zu berechnen. Mit dem Satz des Pythagoras ist diese gleich $\sqrt{2^2 + 3^2}\ \mathrm{cm} = \sqrt{13}\ \mathrm{cm}$ und somit

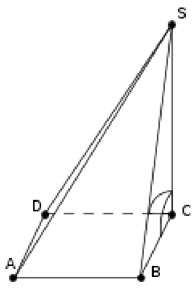
$$U = 2\ \mathrm{cm} + 3\ \mathrm{cm} + \sqrt{13}\ \mathrm{cm} = (5 + \sqrt{13})\ \mathrm{cm}$$

In die Formel eingesetzt gilt also:

$$O = 2 \cdot 3\ \mathrm{cm}^2 + (5 + \sqrt{13})\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm} = (36 + 6\sqrt{13})\ \mathrm{cm}^2.$$

ÜBUNG 2

Die nicht maßstabsgetreue Skizze zeigt eine schiefe quadratische Pyramide mit Grundfläche $ABCD$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt C liegt. Die eingezeichneten Winkel sind also rechte Winkel. Die Seitenlänge der Grundfläche betrage $a = 3 \text{ cm}$ und die Strecke SC habe die Länge $\overline{SC} = 4 \text{ cm}$. Wie groß sind das Volumen und die Oberfläche der Pyramide?



Schiefe quadratische Pyramide

Antwort

Das Volumen beträgt

$$V = 12 \text{ cm}^3$$

und die Oberfläche

$$O = 36 \text{ cm}^2.$$

Berechnung des Volumens

Da der Punkt S senkrecht über dem Punkt C liegt, ist die Strecke SC zugleich die Höhe der Pyramide. Die Höhe der Pyramide beträgt also $h = \overline{SC} = 4 \text{ cm}$.

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenlänge $a = 3 \text{ cm}$, ihr Flächeninhalt beträgt also $A = a^2 = 9 \text{ cm}^2$.

Mit der Formel für das Volumen einer Pyramide erhält man damit

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h = 12 \text{ cm}^3.$$

Berechnung der Oberfläche

Für die Oberfläche müssen die Flächeninhalte aller Seitenflächen und der Grundfläche berechnet werden.

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenlänge $a = 3\ \mathrm{cm}$, ihr Flächeninhalt beträgt also $A = a^2 = 9\ \mathrm{cm}^2$.

Die Seitenflächen BCS und DCS sind beides rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen $\overline{SC} = 4\ \mathrm{cm}$ und $a = 3\ \mathrm{cm}$. Ihre Flächeninhalte betragen also jeweils $\frac{1}{2} \cdot 3\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm} = 6\ \mathrm{cm}^2$.

Da der Punkt S senkrecht über dem Punkt C liegt und die Grundfläche ein Quadrat ist, sind nicht nur die eingezeichneten Winkel rechte Winkel, sondern auch die Winkel $\measuredangle SBA$ und $\measuredangle ADS$. Damit sind auch die Seitenflächen ABS und ADS rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen $\overline{SB}$ bzw. $\overline{SD}$ und a.

$\overline{SB}$ und $\overline{SD}$ berechnet man mit dem Satz des Pythagoras als

$$\overline{SB} = \overline{SD} = \sqrt{\overline{SC}^2 + a^2} = \sqrt{4\ \mathrm{cm}^2 + 3\ \mathrm{cm}^2} = 5\ \mathrm{cm}.$$

Die Flächeninhalte der Seitenflächen ABS und ADS betragen also jeweils

$$\frac{1}{2} \cdot 3\ \mathrm{cm} \cdot 5\ \mathrm{cm} = \frac{15}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

Die gesamte Oberfläche beträgt also:

$$O = 9\ \mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 6\ \mathrm{cm}^2 + 2 \cdot \frac{15}{2}\ \mathrm{cm}^2 = 36\ \mathrm{cm}^2.$$

ÜBUNG 3

Abbildung 1 zeigt eine Kapsel, die aus zwei Halbkugeln und einem geraden Zylinder besteht. Der Abstand der Punkte A und B betrage $4\ \mathrm{cm}$, der Abstand der Punkte A und C betrage $2\ \mathrm{cm}$. Wie groß ist die Oberfläche der Kapsel und wie groß ihr Volumen?

Abb. 1: Kapsel aus Zylinder und Halbkugeln

Antwort

Die Oberfläche beträgt

$$O = 12\pi\ \mathrm{cm}^2$$

und das Volumen

$$V = \frac{16}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3.$$

Lösung

Die Strecke AC ist gerade der Durchmesser der Halbkugeln und der Zylindergrundfläche. Der Radius derselben beträgt daher $r = 1 \ \text{cm}$.

Das Volumen der beiden Halbkugeln beträgt daher (nach der Volumenformel für Kugeln) jeweils

$$V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1 \text{ cm}^3$$

und das des Zylinders (nach der Volumenformel für gerade Zylinder)

$$V_Z = 4 \text{ cm} \cdot \pi \cdot 1 \text{ cm}^2.$$

Insgesamt ist also

$$V = 2 \cdot V_H + V_Z = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3 + 4\pi \text{ cm}^3 = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Die sichtbaren Oberflächen der Halbkugeln sind jeweils die Hälfte der ganzen Kugel. Nach der Oberflächenformel für Kugeln gilt also für jede der Halbkugeln

$$O_H = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 1 \text{ cm}^2.$$

Vom Zylinder ist nur der Mantel sichtbar. Dessen Fläche beträgt

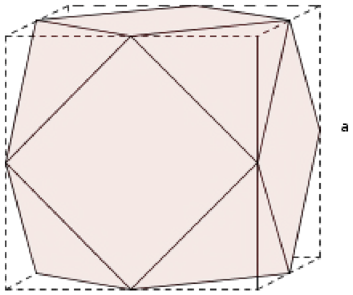
$$M = 4 \text{ cm} \cdot 2\pi \cdot 1 \text{ cm}.$$

Insgesamt ist also

$$O = 2 \cdot O_H + M = 4\pi \text{ cm}^2 + 8\pi \text{ cm}^2 = 12\pi \text{ cm}^2.$$

ÜBUNG 4

Von einem Holzwürfel mit Kantenlänge $a = 20$ cm werden die Ecken abgesägt, so dass die Schnitte genau durch die Mitte der Würfelkanten verlaufen (vgl. Abbildung), wodurch ein sogenanntes *Kuboktaeder* entsteht.



Würfel mit abgesägten Ecken

Welche Oberfläche und welches Volumen hat das Kuboktaeder.

Antwort

Die Oberfläche beträgt

$$O = (1200 + 400\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2 \approx 1893\ \mathrm{cm}^2$$

und das Volumen

$$V = \frac{20000}{3}\ \mathrm{cm}^3 \approx 6667\ \mathrm{cm}^3.$$

Lösung für die Oberfläche

Die Oberfläche des Kuboktaeders besteht aus den sechs Flächen, die von den Seitenflächen des Würfels übrig sind, und den acht Schnittflächen.

Der Inhalt der Seitenflächenreste berechnet sich aus der Differenz des ursprünglichen Seitenflächeninhalts und des Inhalts der abgeschnittenen Dreiecke. Ersteres ist ein Quadrat mit Seitenlänge a und letztere sind gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlänge $\frac{a}{2}$.

Der Inhalt eines Seitenflächenrestes ist also:

$$F_{\text{seite}} = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

Die durch den Schnitt neue Kanten sind gerade die Hypotenusen der gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke und haben daher die Länge

$$s = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Die Schnittflächen sind jeweils gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge s und haben daher jeweils den Flächeninhalt

$$F_{\text{schnitt}} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}.$$

Der gesamte Oberfläche beträgt also

$$O = 6 \cdot F_{\text{seite}} + 8 \cdot F_{\text{schnitt}} = 3a^2 + \sqrt{3}a^2 = (1200 + 400\sqrt{3})\ \text{cm}^2 \approx 1893\ \text{cm}^2.$$

Lösung für das Volumen

Das Volumen des Kuboktaeders ist die Differenz des Würfelvolumens und des Volumens der abgesägten Eckstücke.

Ein abgesägtes Eckstück hat die Form einer Pyramide, deren Höhe gerade die halbe Würfelkante ist, und deren Grundfläche ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge $\frac{a}{2}$ ist. Nach der Volumenformel für Pyramiden beträgt das Volumen eines Eckstücks also

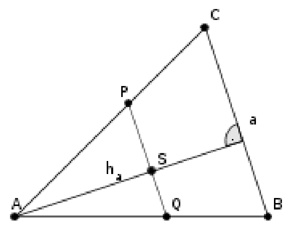
$$V_E = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{a}{2}\big)^2\Big) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}.$$

Da das Würfelvolumen a^3 beträgt, berechnet man das Volumen des Kuboktaeders als

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{48} = \frac{5}{6}a^3 = \frac{20000}{3}\ \mathrm{cm}^3 \approx 6667\ \mathrm{cm}^3.$$

KAPITELÜBUNGEN

ÜBUNG 1



Im Dreieck ABC mit $a = 4\ \text{cm}$ sind auf den Seiten b und c Punkte P und Q gewählt, so dass

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$$

gilt (vgl. Skizze). Die Länge der Höhe auf die Seite a sei $h_a = 3\ \text{cm}$. Wie lang sind die Strecken AS und PQ, und wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks AQP?

Antwort

Es sind $\overline{AS} = 1{,}8\ \text{cm}$ und $\overline{PQ} = 2{,}4\ \text{cm}$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks APQ beträgt $2{,}16\ \text{cm}^2$.

Lösung

Da die Verhältnisse $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$ und $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$ gleich sind, sind nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes die Geraden BC und PQ parallel.
Damit lassen sich aber nach dem ersten und zweiten Strahlensatz die Längen der Strecken AS und PQ berechnen:

$$\frac{\overline{AS}}{h_a} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$$

also $\overline{AS} = \frac{3}{5} \cdot h_a = 1{,}8 \quad \mathrm{cm}.$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$$

also $\overline{PQ} = \frac{3}{5} \cdot \overline{BC} = 2{,}4 \quad \mathrm{cm}.$

Da h_a senkrecht auf der Geraden BC steht und die Gerade PQ parallel zu BC ist, ist der Winkel $\measuredangle ASP$ wieder ein rechter Winkel (Stufenwinkel). Also ist im Dreieck AQP die Strecke AS die Höhe zur Seite PQ. Der Flächeninhalt F des Dreiecks AQP berechnet sich daher mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke als

$$F = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{AS} = 2{,}16 \ \mathrm{cm}^2$$

ÜBUNG 2

Von einem Rechteck $ABCD$ ist die Seitenlänge $\overline{AB} = 5\ \mathrm{cm}$, sowie der Winkel $\measuredangle BAC = 35^\circ$ bekannt. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks (in cm^2 und auf zwei Stellen hinter dem Komma gerundet)?

Antwort

Der Flächeninhalt beträgt $\approx 17{,}51\ \mathrm{cm}^2$.

Lösung

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt seiner Seitenlängen. Daher muss zunächst die Länge der Seite BC bestimmt werden.

Da das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist, ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B.

Mit Hilfe der Tangensfunktion gilt dann $\tan(\measuredangle BAC) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, und daher

$$\overline{BC} = \tan(\measuredangle BAC) \cdot \overline{AB} = \tan(35^\circ) \cdot 5\ \mathrm{cm}.$$

Der Flächeninhalt F beträgt daher

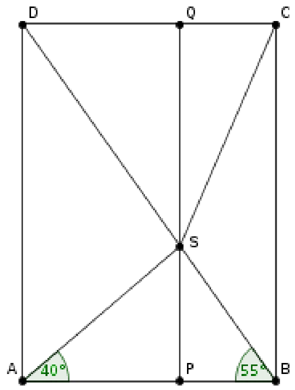
$$F = \overline{BC} \cdot \overline{AB} = \tan(35^\circ) \cdot 5 \cdot 5\ \mathrm{cm}^2 \approx 17{,}51\ \mathrm{cm}^2.$$

Der Flächeninhalt F beträgt daher

$$F = \overline{BC} \cdot \overline{AB} = \tan(35^\circ) \cdot 5 \cdot 5\ \mathrm{cm}^2 \approx 17{,}51\ \mathrm{cm}^2.$$

ÜBUNG 3

Das Viereck $ABCD$ in der folgenden Abbildung ist ein Rechteck mit Seitenlänge $\overline{AB} = \overline{CD} = 4$ cm und $\measuredangle DBA = 55^\circ$. S ist auf der Diagonalen BD so gewählt, dass $\measuredangle BAS = 40^\circ$ gilt, und P und Q sind auf den Seiten AB bzw. CD so gewählt, dass PQ parallel zu BC ist und durch den Punkt S geht.



Welche der eingezeichneten Teildreiecke sind zueinander ähnlich?

Antworten

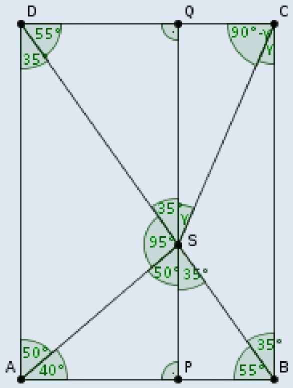
Die Dreiecke ABD, PBS, CDB und QDS sind ähnlich. Von den weiteren eingezeichneten Dreiecken sind keine zueinander ähnlich.

Erklärung

Zunächst betrachtet man die auftretenden Winkel, da Dreiecke genau dann ähnlich sind, wenn ihre Innenwinkel übereinstimmen.

Die Innenwinkel des Rechtecks $ABCD$ sind alle rechte Winkel. Da PQ parallel zu BC ist, sind auch $\measuredangle QPA$, $\measuredangle BPQ$, $\measuredangle DQS$ und $\measuredangle SQC$ rechte Winkel.

Mittels der Winkelsumme im Dreieck und der Gleichheit von Wechselwinkeln, Stufenwinkeln und Scheitelwinkeln berechnet man alle weiteren Winkel, die in der folgenden Skizze beziffert sind.



Der Winkel $\gamma = \measuredangle SCB$ ist (mit den aktuellen Methoden) nicht exakt zu bestimmen, jedoch ist er kleiner als 35°, da $\measuredangle ACB = 35^\circ$ ist.

Daraus erhält man nun schon einige Aussagen zur Ähnlichkeit:
Die Dreiecke ABD, PBS, CDB und QDS sind ähnlich, da sie alle einen rechten Winkel, einen Winkel der Größe 35° und einen Winkel der Größe 55° haben.

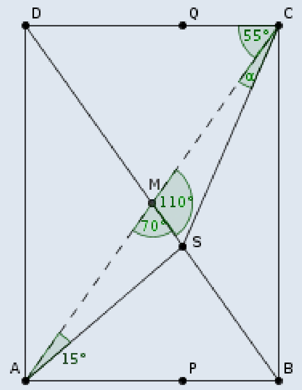
Weitere Dreiecke mit rechtem Winkel sind das Dreieck APS und das Dreieck CQS. Die anderen zwei Winkel im Dreieck APS betragen jedoch 40° und 50°, die weiteren zwei Winkel im Dreieck CQS betragen $\gamma < 35^\circ$ und $90^\circ - \gamma > 55^\circ$.
Beide sind also zu keinem der anderen Dreiecke ähnlich.

Zuletzt bleiben noch die Dreiecke ABS, BCS, CDS und DAS, welche keinen rechten Winkel haben, und daher zu den rechtwinkligen Dreiecken nicht ähnlich sind.

Das Dreieck BCS ist das einzige dieser Dreiecke, das einen Winkel besitzt, der kleiner als 35° ist. Daher ist es zu keinem anderen ähnlich.

Von den verbleibenden drei Dreiecken besitzt nur das Dreieck DAS einen stumpfen Winkel (nämlich $\measuredangle DSA = 95^\circ$). Es ist also auch zu keinem der anderen Dreiecke ähnlich.

Bleibt die Frage, ob die zwei Dreiecke ABS und CDS zueinander ähnlich sind.
Dies ist genau dann der Fall, wenn die Innenwinkel des Dreiecks CDS auch 55°, 40° und 85° betragen, d.h. wenn $\gamma = 5^\circ$ und $\measuredangle DCS = 85^\circ$ gilt.
Dass dies nicht der Fall ist, kann man dadurch sehen, dass man den Winkel in der (ziemlich genauen) Zeichnung misst, oder über die folgende Überlegung.



Da das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist, ist der Schnittpunkt M der Diagonalen genau der Mittelpunkt der Strecken AC und BD (vgl. Skizze) und die Diagonalen sind gleich lang, d.h. es gilt
$\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MB} = \overline{MD}$.
Da somit die Dreiecke MCD und MAB gleichschenklig sind, sind $\measuredangle DCM = \measuredangle MDC = 55^\circ$ und
$\measuredangle BAM = \measuredangle MBA = 55^\circ$. Mit Hilfe der Voraussetzung erhält man daher
$\measuredangle SAM = 55^\circ - 40^\circ = 15^\circ$ (vgl. Skizze).
Aufgrund der Winkelsummen im Dreieck ABM erhält man noch $\measuredangle AMS = 70^\circ$ und daraus
$\measuredangle SMC = 110^\circ$. Da der Winkel $\measuredangle AMS$ also kleiner ist, als der Winkel $\measuredangle SMC$, ist die Strecke AS kürzer als die Strecke SC.
Im Dreieck ASC ist daher die Seite AS kürzer als die Seite SC, weshalb der Winkel $\measuredangle ACS$ kleiner als der Winkel $\measuredangle SAC = \measuredangle SAM = 15^\circ$ ist.
Daher ist der Winkel $\measuredangle DCS$ kleiner als $55^\circ + 15^\circ = 70^\circ$. Insbesondere beträgt der Winkel nicht 85°.