ÜBERBLICK: GLEICHUNGEN IN EINER UNBEKANNTEN

Inhalt

Abschnitt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (> 7MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt zur Schlussprüfung gelangen.

Lernziele:

- Es ist Ihnen möglich, lineare und quadratische Gleichungen zu lösen. (Abschnitt 1, 2)
- Auch können Sie Gleichungen durch Faktorisieren und Substitution lösen. (Abschnitt 3, 6)
- Sie können einfache Betrags- und Wurzelgleichungen auch mit Brüchen lösen. (Abschnitt 4, 5)

ZUSAMMENFASSUNG

Das Thema dieses Kapitels sind Gleichungen in einer Unbekannten: Verschiedene Lösungswege werden ausführlich behandelt. Bei den Gleichungen handelt es sich um lineare, quadratische, Wurzel- und Betragsgleichungen, die unter anderem mit Hilfe der Methoden des Faktorisierens und der Substitution gelöst werden können.

In diesem Kapitel geht es um Gleichungen, während im nächsten Kapitel Ungleichungen in einer Variablen behandelt werden.

Unter einer Gleichung versteht man einen mathematischen Ausdruck, der zwei Terme mit einem

Gleichheitszeichen „=” verbindet.

Die Menge der Lösungen einer Gleichung wird als Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bezeichnet.

Allgemeine Bezeichnungen

$=$: „gleich”
$<$: „kleiner”
$>$: „größer”
$\leq$: „kleiner gleich”
$\geq$: „größer gleich”
$|\;|$: „Betrag”
$\mathbb{L}$: „Lösungsmenge”

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

1. AUSSAGEN, FOLGERUNGEN, ÄQUIVALENZEN UND LÖSUNGSMENGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können überprüfen, ob ein Satz eine *Aussage* ist und diese auf ihren *Wahrheitsgehalt* überprüfen.
- Sie können den Unterschied zwischen einer *Folgerung* und einer *Äquivalenz* erklären und deren Symbole in einer Gleichungsumformung einsetzen.
- Sie können verschiedene *Äquivalenzumformungen* durchführen.
- Sie können die *Lösungsmenge* einer Gleichung bestimmen.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Abschnitt wird der Begriff der mathematischen Aussage erläutert. Ebenso werden Folgerungen von Aussagen aus anderen, gegebenen Aussagen und die Gleichwertigkeit von Aussagen diskutiert. Schließlich wird ein spezieller Typ von Aussagen, nämlich Gleichungen, betrachtet. Dies führt auf den Begriff ihrer Lösung als die Menge aller Variablenwerte, für die die Aussage wahr, d.h. die Gleichung erfüllt ist.

1.1 Aussagen und Folgerungen

1.1 DEFINITION

Eine *(mathematische) Aussage* ist ein Wortgebilde, von dem man nachprüfen kann, ob es wahr oder falsch ist.

In Definition 1.1 ist die *prinzipielle* Nachprüfbarkeit gemeint. So ist der Satz „Es regnet.” eine

Aussage, denn durch einen Blick aus dem Fenster können wir prüfen, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Aber auch, wenn wir uns in einem fensterlosen Keller befinden, haben wir keinen Zweifel, dass der Satz „Es regnet.” prinzipiell überprüfbar ist. Auch

$$x^2 = 1 \tag{1.1}$$

ist eine Aussage; für $x = 1$ und $x = -1$ ist (1.1) wahr, und für alle anderen reellen Zahlen ist (1.1) falsch - aber stets ist (1.1) entweder wahr oder falsch (und nicht „weder wahr noch falsch”).

Zum Verständnis des Begriffs der Aussage ist es nützlich, Beispiele von Sätzen zu geben, die *keine* Aussagen sind: „Ein Auto” ist keine Aussage, „Sechs Richtige im Lotto” ist keine Aussage, und auch ein einzelner Term,

$$\frac{x^2}{x^2+1} \tag{1.2}$$

ist keine Aussage. An diesem Beispiel erkennt man die Bedeutung der Gleichheits- und Ungleichheitszeichen $=$, $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$: Erst wenn Terme durch diese (und noch viele weitere) Zeichen miteinander in Beziehung gesetzt werden, entstehen Aussagen. Als Faustregel gilt, dass ein *ganzer deutscher Satz* meist eine Aussage im mathematischen Sinn ist.

1.2 DEFINITION

Sind zwei Aussagen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ gegeben, und ist $\mathscr{B}$ wahr, falls $\mathscr{A}$ wahr ist, so heißt $\mathscr{B}$ Folgerung aus $\mathscr{A}$. Wir sagen dann auch, $\mathscr{B}$ folge aus $\mathscr{A}$ oder $\mathscr{A}$ impliziere $\mathscr{B}$, und wir schreiben

$$\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \tag{1.3}$$

1.3 BEISPIEL

- Wählen wir für $\mathscr{A}$: „Es regnet.” und für $\mathscr{B}$: „Die Straße ist nass.”, so ist $\mathscr{B}$ eine Folgerung aus $\mathscr{A}$, d.h. $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$.
  Die Umkehrung ist in diesem Fall jedoch nicht korrekt, denn die Straße könnte auch aus anderen Gründen nass sein. Wir sehen also, dass $\mathscr{B} \not\Rightarrow \mathscr{A}$.

- Wählen wir für $\mathscr{A}$: „$x = 1$.” und für $\mathscr{B}$: „$x^2 = 1$.”, so ist auch diesmal $\mathscr{B}$ eine Folgerung aus $\mathscr{A}$, also $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$.
  Und auch hier gilt nicht die Umkehrung, denn für $x = -1$ ist Aussage $\mathscr{B}$ wahr [weil $(-1)^2 = 1$] und $\mathscr{A}$ falsch [weil $-1 \neq 1$], d.h. $\mathscr{B} \not\Rightarrow \mathscr{A}$.

1.2 Äquivalenz und Äquivalenzumformungen

1.4 DEFINITION

Zwei Aussagen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ heißen *äquivalent* oder *gleichwertig*, falls $\mathscr{A}$ genau dann wahr ist, wenn $\mathscr{B}$ wahr ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B} \tag{1.4}$$

1.5 BEMERKUNG

Die Gleichwertigkeit zweier Aussagen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ lässt sich auch so formulieren: Aus $\mathscr{A}$ folgt $\mathscr{B}$ und aus $\mathscr{B}$ folgt $\mathscr{A}$, d.h. $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$.

Äquivalenzumformungen wandeln Aussagen in gleichwertige Aussagen um.
So ist die Aussage $\mathscr{A}$: „$3y - 3x = 9x$" gleichwertig mit $\mathscr{B}$: „$3y = 12x$" oder auch mit $\mathscr{C}$: „ $y = 4x$", denn die Werte für x und y, für die die Aussage $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ oder $\mathscr{C}$ jeweils wahr ist (d.h. die jeweilige Gleichung erfüllt ist), ist für alle drei Gleichungen gleich.

Diese Umwandlung geschieht durch Anwendung mathematischer Operationen (hier: *Addition von 3x auf beiden Seiten der Gleichung* und *Division beider Seiten der Gleichung durch 3*). Damit die Gleichwertigkeit der Aussagen leichter nachvollzogen werden kann, vermerkt man häufig die angewandte Operation auf der rechten Seite neben einem senkrechten Strich.

Für Gleichungen sind Äquivalenzumformungen solche Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern.

Für Gleichungen sind folgende Operationen Äquivalenzumformungen:

- Vertauschen der Gleichungsseiten, $a = b \Leftrightarrow b = a$;
- auf beiden Seiten das Gleiche addieren oder subtrahieren,
  $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$;
- beide Seiten mit einem Faktor $m \neq 0$ (darf nicht Null sein!) multiplizieren,
  $a = b \Leftrightarrow m \cdot a = m \cdot b$;
- beide Seiten durch einen Dividend $m \neq 0$ (darf nicht Null sein!) dividieren,
  $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

WARNUNG

Potenzieren, Wurzelziehen und Quadrieren sind im Allgemeinen keine Äquivalenzumformungen!

Für die obigen Aussagen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ oder $\mathscr{C}$ sieht dies so aus:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}: 3y-3x &= 9x \quad |+3x && (1.5)\\
\Leftrightarrow \mathscr{B}: 3y &= 12x |: 3 && (1.6)\\
\Leftrightarrow \mathscr{C}: y &= 4x && (1.7)
\end{aligned}$$

Wir lassen ab jetzt die Buchstaben $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ u.s.w. für die Kennzeichnung der Aussagen weg.

1.6 BEISPIEL

1. Seiten vertauschen

$$\begin{aligned}
3x+12 &= 4 && (1.8)\\
\Leftrightarrow 4 &= 3x+12 && (1.9)
\end{aligned}$$

2. Gleiche Zahl addieren oder subtrahieren

$$\begin{aligned}
3x+12 &= 4 \quad |-3 && (1.10)\\
\Leftrightarrow 3x+12-3 &= 4-3 && (1.11)\\
\Leftrightarrow 3x+9 &= 1 && (1.12)
\end{aligned}$$

3. Gleiche Zahl $\neq 0$ multiplizieren oder dividieren

$$\begin{aligned}
3x+12 &= 4 \quad |: 3 && (1.13)\\
\Leftrightarrow (3x): 3+12: 3 &= 4: 3 && (1.14)\\
\Leftrightarrow x+4 &= \tfrac{4}{3} && (1.15)
\end{aligned}$$

1.7 BEISPIEL

$$\begin{aligned}
5(3x-5)+2x &= 7(3-2x)+16 && (1.16)\\
\Leftrightarrow 15x-25+2x &= 21-14x+16 && (1.17)\\
\Leftrightarrow 17x-25 &= 37-14x \quad |+14x && (1.18)\\
\Leftrightarrow 31x-25 &= 37 \quad |+25 && (1.19)\\
\Leftrightarrow 31x &= 62 \quad |: 31 && (1.20)\\
\Leftrightarrow x &= \tfrac{62}{31} && (1.21)\\
\Leftrightarrow x &= 2 && (1.22)\\
\mathbb{L} &= \{2\} && (1.23)
\end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen und Folgerungen lassen sich auch kombinieren. Durch die Schreibweise wie in Gleichung (1.5) lässt sich gut verfolgen, welche der Aussagen Folgerung anderer Aussagen sind, z.B.

$$
\begin{aligned}
3y - 3x &= 9x && |+3x && (1.24)\\
\Leftrightarrow 3y &= 12x && |:3 && (1.25)\\
\Leftrightarrow y &= 4x && |(\cdot)^2 && (1.26)\\
\Rightarrow y^2 &= 16x^2 && |-5 && (1.27)\\
\Leftrightarrow y^2 - 5 &= 16x^2 - 5 && && (1.28)
\end{aligned}
$$

Beachte, dass Gleichung (1.27) nur eine Folgerung ($\Rightarrow$) aus Gleichung (1.26), aber nicht gleichwertig ($\Leftrightarrow$) ist, denn in (1.26) müssen x und y dasselbe Vorzeichen haben, während dies in (1.27) keine Rolle spielt.

1.3 Gleichungen und ihre Lösungen

Gleichungen, die Variablen enthalten, sind eine spezielle Form von Aussagen. Manche Gleichungen haben genau eine Lösung, auf die man durch Äquivalenzumformungen geführt wird, beispielsweise die Gleichung $2x + 1 = 8x - 11$:

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 8x - 11 && |-2x + 11 && (1.29)\\
\Leftrightarrow 12 &= 6x && |:6 && (1.30)\\
\Leftrightarrow x &= 2 && && (1.31)
\end{aligned}
$$

Durch Äquivalenzumformungen wurde die ursprüngliche Gleichung (1.29) in die gleichwertige Gleichung (1.31) überführt, aus der sich die einzige Lösung $x = 2$ direkt ablesen lässt.
Viele Gleichungen haben jedoch mehrere oder gar keine oder sogar unendlich viele Lösungen. Deshalb ist es vernünftig, von der *Lösungsmenge* zu sprechen.

1.8 DEFINITION

Die Menge aller Lösungen einer Gleichung $f(x) = 0$ wird als Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bezeichnet,

$$\mathbb{L} = \{x_0 \mid f(x_0) = 0\} \qquad (1.32)$$

1.9 BEISPIEL

- Besitzt die betrachtete Gleichung genau eine Lösung x_0 - so, wie $x_0 = 2$ für (1.29) - so enthält die Lösungsmenge ein einziges Element, $\mathbb{L} = \{x_0\}$.
- Für $3x - 15 = 0$ ist $x_0 = 5$ die einzige Lösung, d.h. $\mathbb{L} = \{5\}$.
- Die Gleichung $x^2 = -1$ besitzt keine reelle Lösung, deshalb ist die Lösungsmenge leer, $\mathbb{L} = \emptyset$
- Die Gleichung $x^2 = 4$ besitzt zwei Lösungen, nämlich $x_+ = 2$ und $x_- = -2$. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$.
- Die Gleichung $\sin(x) = 0$ besitzt unendlich viele Lösungen (s.Kap.VI), nämlich alle ganzzahligen Vielfachen von π, d.h. $\mathbb{L} = \{\ldots;\ -2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots\}$.

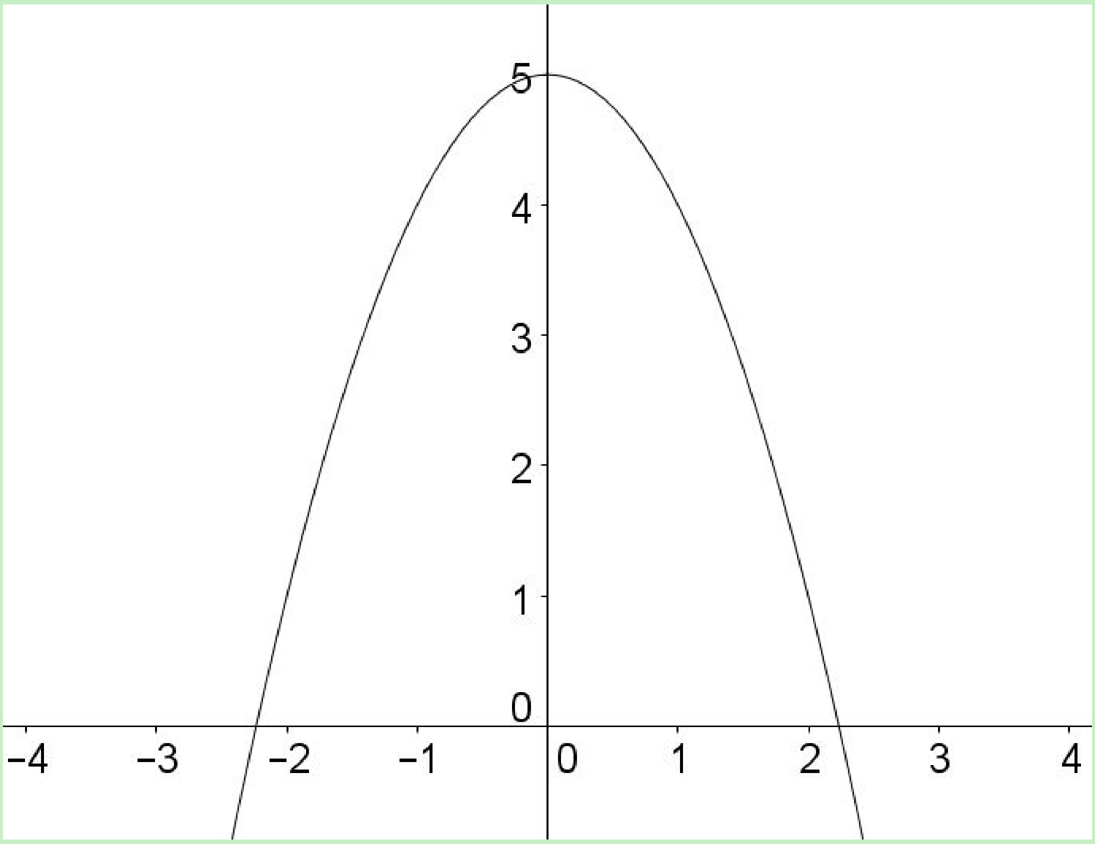
1.10 BEMERKUNG

Der Lösungsbegriff ist nicht auf eine einzige Variable eingeschränkt. Für eine Gleichung der Form $T(x;\ y) = 0$ sind alle Zahlenpaare $(x_0;\ y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung, für die $T(x_0;\ y_0) = 0$ gilt.

Betrachtet man etwa die Gleichung $x^2 + y = 5$, so ist eine Lösung dieser Gleichung also nicht ein x-Wert x_0 oder ein y-Wert y_0, sondern ein Zahlenpaar $(x_0;\ y_0) \in \mathbb{R}^2$. Die Lösungsmenge ist somit eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$. Sie ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{(x_0;\ y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_0^2 + y_0 = 5\right\} = \left\{(x_0;\ 5 - x_0^2) \;\middle|\; x_0 \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (1.33)$$

d.h. die Lösungsmenge ist der Graph der Funktion $y = 5 - x^2$.



Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen handelt.

a)
Tanz mit mir!

b)
Bist du morgen in der Universität?

c)
Das Gras auf dem Mond ist immer blau.

d)
Ein Fisch.

e) x^5

f) $x^2 = 16$

Antworten

a)
Nein

b)
Nein

c)
Ja

d)
Nein

e)
Nein

f)
Ja

Lösung zu a

Der Satz „Tanz mit mir!” ist eine Aufforderung.

Aufforderungen sind keine Aussagen, da diese nicht überprüfbar sind.

Lösung zu b

Der Satz „Bist du morgen in der Universität?” ist eine Frage.

Fragen sind keine Aussagen, da diese nicht überprüfbar sind.

Lösung zu c

Der Satz „Das Gras auf dem Mond ist immer blau.” ist eine Aussage.

Es wird in dieser Aufgabe nicht nach dem Wahrheitsgehalt gefragt, sondern nur nach der Überprüfbarkeit.

Man kann davon ausgehen, dass es auf dem Mond kein Gras gibt und, sollte es dort welches geben, dies nicht immer blau sein muss. Die Aussage wäre somit stets als falsch zu bewerten. Da dies jedoch überprüfbar ist, handelt es sich hier um eine Aussage.

Lösung zu d

Der Satz „Ein Fisch.” ist kein vollständiger Satz.

Dieser Satz lässt sich nicht überprüfen, daher ist er keine Aussage.

Lösung zu e

Der Term x^5 ist keine Aussage.

Einzelne Terme sind keine Aussagen, da sie nichts beinhalten, was man überprüfen kann.

Lösung zu f

Die Gleichung $x^2 = 16$ ist eine Aussage.

Die Gleichung ist zwar nicht für alle x richtig (da $4^2 = 16$ bzw. $(-4)^2 = 16$ ist, ist die Gleichung also nur für $x = 4$ und $x = -4$ wahr), dennoch ist sie überprüfbar.

ÜBUNG 2

Entscheiden Sie, mit welchem Pfeilsymbol ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$) die beiden Aussagen verbunden werden können.

a) $\mathscr{A}$:

„$x = 4$”
$\mathscr{B}$:

„$x^2 = 16$”

b) $\mathscr{A}$:

„Paul ist 16 oder älter.”
$\mathscr{B}$:

„Paul darf an Wahlen (Kommunalwahlen etc.) teilnehmen.”

c) $\mathscr{A}$:

„$x = (a+b)^2$”
$\mathscr{B}$:

„$x = a^2 + 2ab + b^2$”

Antworten

a) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$

b) $\mathscr{A} \Leftarrow \mathscr{B}$

c) $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$

Lösung zu a

Es gilt, dass $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ eingesetzt eine wahre Aussage ergibt, nämlich $4^2 = 16$. Daher gilt $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$.

Für $x^2 = 16$ gibt es jedoch zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 4$ und $x_2 = -4$. Daher gilt $\mathscr{A} \Leftarrow \mathscr{B}$ nicht.

Lösung zu b

Wenn Paul an Wahlen teilnehmen darf, kann man auf jeden Fall davon ausgehen, dass er mindestens 16 Jahre alt ist, denn sonst dürfte er gar nicht wählen gehen. Es gilt daher:

$$\mathscr{A} \Leftarrow \mathscr{B}$$

Für einige Wahlen gilt jedoch, dass Paul volljährig sein muss. Sollte er also 16 sein, muss er nicht zwangsweise bei allen Wahlen wahlberechtigt sein. Hinzu kommen weitere Gründe, wie das Fehlen der Staatsbürgerschaft, die ihn vom Wahlrecht ausschließen können. Es gilt daher nicht:

$$\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$$

Lösung zu c

Die rechte Seite der Gleichung ist bei beiden Aussagen Teil der 1. binomischen Formel.

Die Umformung der binomischen Formel ist für alle reellen Zahlen äquivalent. Daher gilt:

$$\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$$

ÜBUNG 3

Die Aussage in einer der Zeilen wird nicht durch die Aussage der darüberstehenden Zeile impliziert. Um die wievielte Zeile handelt es sich?

$$a \neq 0 \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
&1. \quad a &&= a &(3)\\
&2. \quad a^2 &&= a^2 &(4)\\
&3. \quad a^2 - a^2 &&= a^2 - a^2 &(5)\\
&4. \quad a(a-a) &&= (a+a)(a-a) &(6)\\
&5. \quad a &&= a + a &(7)\\
&6. \quad 1a &&= 2a &(8)\\
&7. \quad 1 &&= 2 &(9)
\end{aligned}
$$

Antwort

Es handelt sich um die fünfte Zeile.

Erklärung

Da $a - a = 0$ ist, steht auf der linken Seite der Gleichung in der vierten Zeile: $a(a - a) = a \cdot 0 = 0$.

Auf der rechten Seite steht: $(a + a)(a - a) = (a + a) \cdot 0 = 0$. Die Gleichung in der vierten Zeile lautet also eigentlich $0 = 0$.

In der fünften Zeile steht jedoch zusammengefasst $a = 2a$, und da man durch $a \neq 0$ teilen darf: $1 = 2$, also eine falsche Aussage.

Der Schritt von der vierten zur fünften Zeile kann also nicht richtig sein,

da man aus der wahren Aussage $0 = 0$ nicht die falsche Aussage $1 = 2$ herleiten darf.

Falls Sie dachten, dass auch dieser Schritt richtig ist, haben Sie wahrscheinlich in diesem Schritt durch $a - a$, also durch 0 geteilt.

Hier sieht man, dass das Teilen durch 0 aus gutem Grund nicht erlaubt ist, denn so kann aus einer wahren Aussage eine falsche gemacht werden.

$$\begin{aligned}
a &= a && \left|(\cdot)^2\right. && (10)\\
a^2 &= a^2 && \left|-a^2\right. && (11)\\
a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 && \left|\text{Ausklammern von } a\text{, bzw. dritte binomische Formel}\right. && (12)\\
a(a-a) &= (a+a)(a-a) && \left|\cdot \frac{1}{(a-a)} (\text{nicht erlaubt!})\right. && (13)\\
a &= a + a && \left|\text{Zusammenfassen von } a\right. && (14)\\
1a &= 2a && \left|\cdot \frac{1}{a}\right. && (15)\\
1 &= 2 && && (16)
\end{aligned}$$

ÜBUNG 4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der jeweiligen Gleichung, wobei $x \in \mathbb{R}$ ist.

a) $x^3 = 27$

b) $x^2 = -10$

c) $x^2 = 10x$

d) $x^4 + 3 = 0$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{3\}$

b) $\mathbb{L} = \emptyset$

c) $\mathbb{L} = \{0;\ 10\}$

d) $\mathbb{L} = \emptyset$

Lösung zu a

Gesucht ist die dritte Wurzel aus 27, also $x = \sqrt[3]{27}$.

Die einzige Lösung ist hier $x = 3$, nicht auch $x = -3$ (wie bei Quadratzahlen, in denen auch der negative Wert als Lösung für x vorkommt), denn $(-3)^3 = -27$.

Lösung zu b

Das Quadrat einer reellen Zahl ist stets positiv. Daher kann für kein x ein negatives Ergebnis bei x^2 entstehen. Es gibt daher keine Lösung und die Lösungsmenge ist leer.

Lösung zu c

Durch Äquivalenzumformung der Gleichung erhalten wir die in Definition 1.8 erwähnte Form $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 10x \,|{-10x} && (1)\\ \Leftrightarrow x^2 - 10x &= 0 && (2)\\ \Leftrightarrow x(x-10) &= 0. && (3) \end{aligned}$$

Aus dieser Linearfaktorzerlegung können wir die beiden Ergebnisse $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ direkt ablesen (Siehe Kapitel II, Abschnitt 3).

Lösung zu d

Durch Umformung erhalten wir die in Definition 1.8 erwähnte Form $f(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 3 &= 0 \quad |-3 && (4)\\
\Leftrightarrow x^4 &= -3 && (5)\\
\Leftrightarrow (x^2)^2 &= -3. && (6)
\end{aligned}
$$

Da das Quadrat $(x^2)^2$ der reellen Zahl x^2 stets positiv oder gleich Null ist, gibt es keine Zahl $x \in \mathbb{R}$, die $x^4 = -3$ erfüllt. Somit ist die Lösungsmenge leer.

2. LÖSEN LINEARER UND QUADRATISCHER GLEICHUNGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie sind mit dem *Lösen linearer Gleichungen* mit Hilfe von Äquivalenz- und Termumformung vertraut.
- Sie besitzen die Fähigkeit, eine *lineare Gleichung aufzustellen*.
- Sie besitzen die Fähigkeit, eine *Diskriminante* zu berechnen.
- Sie besitzen die Fähigkeit, die *binomischen Formeln* zu erkennen und anzuwenden.
- Sie sind mit dem *Lösen quadratischer Gleichungen* mit Hilfe der p-q-Formel und quadratischer Ergänzung vertraut.

2.1 Lineare Gleichungen

2.1 DEFINITION

Eine Gleichung der Form $bx + c = 0$, wobei $b, c \in \mathbb{R}$ vorgegebene reelle Zahlen mit $b \neq 0$ sind und $x \in \mathbb{R}$ die gesuchte Unbekannte ist, heißt *lineare Gleichung (in x)*.

Mit Hilfe der Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned} bx + c &= 0 & &|-c & (2.1)\\ \Leftrightarrow \quad bx &= -c & &|: b & (2.2)\\ \Leftrightarrow \quad x &= -\tfrac{c}{b} & & & (2.3) \end{aligned}$$

sehen wir sofort, dass eine lineare Gleichung in x immer die eindeutige Lösung $x = -\frac{c}{b}$ besitzt, d.h. es gilt

$$\mathbb{L} = \left\{-\tfrac{c}{b}\right\} \tag{2.4}$$

2.2 BEISPIEL

Folgende drei Umformungen sind Äquivalenzumformungen und verändern die Lösungsmenge nicht.

1. Seiten vertauschen

$$\begin{aligned} 5x + 15 &= 10 && (2.5)\\ \Leftrightarrow \quad 10 &= 5x + 15 && (2.6) \end{aligned}$$

2. Gleiche Zahl addieren oder subtrahieren

$$\begin{aligned} 5x + 15 &= 10 \qquad |-5 && (2.7)\\ \Leftrightarrow \quad 5x + 15 - 5 &= 10 - 5 && (2.8)\\ \Leftrightarrow \quad 5x + 10 &= 5 && (2.9) \end{aligned}$$

3. Gleiche Zahl $\neq 0$ multiplizieren oder dividieren

$$\begin{aligned} 5x + 15 &= 10 \qquad |:5 && (2.10)\\ \Leftrightarrow \quad (5x) : 5 + 15 : 5 &= 10 : 5 && (2.11)\\ \Leftrightarrow \quad x + 3 &= 2 && (2.12) \end{aligned}$$

Viele Gleichungen lassen sich durch die in Abschnitt 1.2 aufgeführten Äquivalenzumformungen in eine lineare Gleichung überführen.

2.3 BEISPIEL

$$\begin{aligned} 2(5x - 3) + 3x &= 4(6 - 2x) + 12 && (2.13)\\ \Leftrightarrow \quad 10x - 6 + 3x &= 24 - 8x + 12 && (2.14)\\ \Leftrightarrow \quad 13x - 6 &= 36 - 8x \qquad |+8x && (2.15)\\ \Leftrightarrow \quad 21x - 6 &= 36 \qquad |-36 && (2.16)\\ \Leftrightarrow \quad 21x - 42 &= 0 && (2.17) \end{aligned}$$

2.4 BEMERKUNG

Nichtlineare Gleichungen verwenden Funktionen wie die Exponentialfunktion oder trigonometrische Funktionen, die im Kapitel Elementare Funktionen behandelt werden.

2.2 Quadratische Gleichungen

[video-online-only]

Man bezeichnet eine ganzrationale Gleichung als quadratisch, wenn die Unbekannte mit dem Exponenten 2 auftritt (z.B. als x^2), und auch nicht durch Umformungen wegfällt. Außerdem tritt sie nicht mit irgendwelchen Wurzeln oder sonstigen Funktionen auf.

Solche Gleichungen kann man z. B. durch Äquivalenzumformungen zusammenfassen und umsortieren und so die allgemeine Form und die Normalform dieser Gleichungen erhalten.

2.3 Normalform

2.5 DEFINITION

Eine Gleichung in x der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2.18)$$

mit $a \neq 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$, heißt *quadratisch*. Speziell bezeichnet man

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2.19)$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$, als *quadratische Gleichung in Normalform*.

2.6 BEMERKUNG

Nach Division durch a erhält man für jede quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die quadratische Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ in Normalform, die wegen $a \neq 0$ zur ursprünglichen Gleichung äquivalent ist.

2.7 BEISPIEL

Allgemeine Form und Normalform

$$2x^2 - 26x - 44 = 0 \quad | : 2 \tag{2.20}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 13x - 22 = 0 \tag{2.21}$$

(Das Äquivalenzzeichen „⇔" ist in Abschnitt 1 erklärt.)

2.4 p-q-Formel und Diskriminante

2.8 DEFINITION

Eine Möglichkeit, quadratische Gleichungen zu lösen, ist die Anwendung der p-q-Formel.

Mit der Definition:

$$p = \frac{b}{a} \text{ und } q = \frac{c}{a} \qquad (2.22)$$

lässt sich die Normalform somit als *p-q-Form* schreiben :

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2.23)$$

Folglich besteht die Normalform quadratischer Gleichungen in x immer aus x^2 plus x mit einem Faktor, den man üblicherweise mit p bezeichnet, plus eine Zahl, die man üblicherweise mit q bezeichnet.

Die Summe dieser maximal drei Glieder ergibt 0 (daher heißen die Lösungen auch Nullstellen).

Die Zahlen p und q nennt man auch *Koeffizienten* der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Die Bezeichnungen p und q sind dabei natürlich willkürlich, haben sich aber im deutschen und englischen Sprachraum durchgesetzt.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung kann dann mit Hilfe der p-q-Formel berechnet werden.

$x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit der Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

und der Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{D};\ -\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right\}$.

Die *Diskriminante* gibt Aufschluss über die Lösungen einer quadratischen Gleichung.

Man unterscheidet 3 Fälle:

$$\begin{array}{lcll} D>0 & \Rightarrow & \text{Es gibt zwei Lösungen.} & (2.24) \\ D=0 & \Rightarrow & \text{Es gibt eine Lösung.} & (2.25) \\ D<0 & \Rightarrow & \text{Es gibt keine Lösung.} & (2.26) \end{array}$$

2.9 BEMERKUNG

In der Mathematik wird häufig $p^2 - 4q$ als *Diskriminante* bezeichnet. Der Grund dafür ist eine andere Schreibweise der p-q-Formel, in der ein Faktor $\frac{1}{2}$ aus der Gleichung ausgeklammert wurde:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right). \tag{2.27}$$

2.10 BEMERKUNG

Eine quadratische Gleichung hat maximal zwei reelle Lösungen.

2.11 BEISPIEL

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= 0 && (2.28)\\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} && (2.29)\\ \Rightarrow \quad x_1 &= 3 - 2 = 1 && (2.30)\\ \Rightarrow \quad x_2 &= 3 + 2 = 5 && (2.31)\\ \mathbb{L} &= \{5;\ 1\} && (2.32) \end{aligned}$$

[video-online-only]

2.5 Quadratische Ergänzung

Die Summe $x^2 + px$ kann durch Addition einer Konstanten zu einem vollständigen Quadrat ergänzt und dann kann die erste binomische Formel angewandt werden:

$$\begin{aligned} & x^2 + px && (2.33)\\ =& x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 && (2.34)\\ =& \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 && (2.35) \end{aligned}$$

Fügt man dies in die ursprüngliche quadratische Gleichung ein, erhält man:

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 && \Big| -q && (2.36)\\
\Leftrightarrow \quad x^2 + px &= -q && \Big| + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 && (2.37)\\
\Leftrightarrow \quad x^2 + px + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 && && (2.38)\\
\Leftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 && && (2.39)
\end{aligned}
$$

2.12 DEFINITION

Die äquivalente Umformung der quadratischen Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2.40}$$

in

$$\left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \tag{2.41}$$

wird als *quadratische Ergänzung* bezeichnet.

2.13 BEMERKUNG

Bei der Umformung kommt hier die 1. binomische Formel zum Einsatz. Siehe hierfür Abschnitt IA.3 .

2.14 BEISPIEL

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 8x + 7 &&= 0 && && (2.42)\\
\Leftrightarrow & x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 7 &&= 0 && && (2.43)\\
\Leftrightarrow & (x+4)^2 - 16 + 7 &&= 0 && && (2.44)\\
\Leftrightarrow & (x+4)^2 - 9 &&= 0 && \big| +9 && (2.45)\\
\Leftrightarrow & (x+4)^2 &&= 9 && && (2.46)\\
\Leftrightarrow & x + 4 &&= \pm\sqrt{9} && && (2.47)\\
\Leftrightarrow & x_+ &&= -4 + 3 = -1 && && (2.48)\\
& x_- &&= -4 - 3 = -7 && && (2.49)\\
\Leftrightarrow & \mathbb{L} &&= \{-1;\ -7\} && && (2.50)
\end{aligned}
$$

2.6 Linearfaktorzerlegung und der Satz von Viëta

Sind zwei Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ bekannt, dann gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \qquad (2.51)$$

Ein Faktor der Form $(x - a)$, wobei a eine reelle Zahl ist, wird als Linearfaktor bezeichnet.

Die Beziehung zwischen den Koeffizienten p und q und den Lösungen x_1 und x_2 wird durch den Satz von Viëta beschrieben:

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad (2.52)$$
$$x_1 \cdot x_2 = q. \qquad (2.53)$$

Wenn die quadratische Gleichung nur eine Lösung x_1 hat, so setze man $x_2 = x_1$.

2.15 BEISPIEL

Es sei $x^2 - x - 6 = 0$. Wir suchen x_1 und x_2, für die der Satz von Viëta gilt. Aus der Gleichung lesen wir $-p$ und q aus und erhalten

$$-p = 1, \qquad (2.54)$$
$$q = -6. \qquad (2.55)$$

Wir suchen also Werte für x_1 und x_2, für die gilt

$$-p = x_1 + x_2 = 1, \qquad (2.56)$$
$$q = x_1 \cdot x_2 = -6. \qquad (2.57)$$

Wir sehen schnell, dass aufgrund von $q = -6$, x_1 oder x_2 negativ sein muss. Durch Ausprobieren erkennen wir, dass

$$3 + (-2) = 1, \qquad (2.58)$$
$$3 \cdot (-2) = -6. \qquad (2.59)$$

Die ermittelten Werte wären daher $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$.

Sollten die Werte für x bereits gegeben sein, so lässt sich die Gleichung durch die Rückrechnung ermitteln.

Rückrechnung:

$$x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \qquad (2.60)$$

$$-p = x_1 + x_2 = 3 - 2 = 1 \qquad (2.61)$$
$$\Leftrightarrow \quad p = -1 \qquad (2.62)$$
$$(2.63)$$
$$q = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-2) = -6 \qquad (2.64)$$

Einsetzen in die Normalform ergibt:

$$x^2 - x - 6 = 0. \qquad (2.65)$$

2.16 BEISPIEL

Es sei $x^2 + 4x + 4 = 0$.

$$-p = -4 \qquad (2.66)$$
$$q = 4 \qquad (2.67)$$

Da q positiv ist, müssen x_1 und x_2 beide negativ oder beide positiv sein.

Durch Ausprobieren erhalten wir

$$-p = (-2) + (-2) = -4, \qquad (2.68)$$
$$q = (-2) \cdot (-2) \ = 4. \qquad (2.69)$$

Es gilt hier also $x_1 = x_2 = -2$.

Rückrechnung:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \qquad (2.70)$$

$$-p = x_1 + x_2 = (-2) + (-2) = -4 \qquad (2.71)$$
$$\Leftrightarrow \quad p = 4 \qquad (2.72)$$
$$(2.73)$$
$$q = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot (-2) = 4 \qquad (2.74)$$

Einsetzen in die Normalform ergibt:

$$x^2 + 4x + 4 = 0. \qquad (2.75)$$

2.17 BEISPIEL

Es sei $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$-p = 2 \qquad (2.76)$$
$$q = 3 \qquad (2.77)$$

Durch Ausprobieren lässt sich keine Lösung für x_1 und x_2 finden. Tatsächlich lässt sich für diese quadratische Gleichung keine reelle Lösung finden.

ÜBUNG 1

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner) und überprüfen Sie Ihre Lösungen, indem Sie anschließend auf „Antwort” klicken.

a) $x+5=7$

b) $5x-1=4$

c) $\frac{1}{2}x-2=x$

d) $4x+3=5x+2$

e) $3(x-4)=1-5(2x-2)$

f) $[(x+3)2+4]5-20=40$

g) $2,6(x-1)=-6,5(x+1)-\frac{1}{2}(x-7)$

h) $\frac{7x-3}{8x-5}=2$

i) $\frac{2x}{3}-5=-\frac{5x}{6}-2$

j) $\frac{7}{x}+\frac{4}{x}-1=\frac{1}{2}-4(\frac{2}{x}-2)$

Antworten

a) $x=2$

b) $x=1$

c) $x=-4$

d) $x=1$

e) $x=\frac{23}{13}$

f) $x=1$

g) $x=-\frac{1}{24}$

h) $x=\frac{7}{9}$

i) $x=2$

j) $x=2$

Lösung zu a

Auf beiden Seiten der Gleichung wird 5 subtrahiert,

$x+5-5=7-5$,

um x alleine auf der linken Seite zu erhalten.

Also ist die Lösung $x=2$.

Lösung zu b

Die Addition von 1 wird auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt,

$$5x - 1 + 1 = 4 + 1,$$

und man erhält:

$$5x = 5.$$

Beide Seiten der Gleichung werden durch 5 dividiert:

$$\frac{5x}{5} = \frac{5}{5}$$

und man erhält:

$$x = 1.$$

Lösung zu c

Da x auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt, wird auf beiden Seiten $\frac{1}{2}x$ subtrahiert,

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x - 2 = x - \frac{1}{2}x,$$

sodass x nur noch auf der rechten Seite steht:

$$-2 = \frac{1}{2}x.$$

Danach werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wert 2 multipliziert:

$$2 \cdot (-2) = 2 \cdot \frac{1}{2}x,$$

und man erhält:

$$-4 = x.$$

Lösung zu d

Zuerst werden alle Glieder mit x auf die linke Seite gebracht, indem $5x$ auf beiden Seiten der Gleichungen subtrahiert werden:

$$4x + 3 - 5x = 5x + 2 - 5x,$$

und man erhält:

$$-x + 3 = 2.$$

Jetzt wird 3 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert:

$$-x + 3 - 3 = 2 - 3.$$

Man erhält:

$$-x = -1.$$

Danach werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wert -1 multipliziert und man erhält:

$$x = 1.$$

Lösung zu e

Im ersten Schritt werden die Klammern aufgelöst und man erhält:

$$3x - 12 = 1 - 10x + 10.$$

Nun werden die Glieder zusammengefasst und man erhält weiterhin:

$$3x - 12 = 11 - 10x.$$

Nun werden auf beiden Seiten $10x$ und 12 addiert:

$$13x = 23.$$

Im letzten Schritt wird auf beiden Seiten der Gleichung durch den Wert 13 dividiert:

$$x = \frac{23}{13}.$$

Lösung zu f

Zuerst wird die innere Klammer aufgelöst:

$$[2x + 6 + 4]5 - 20 = 40.$$

Nun wird die äußere Klammer aufgelöst und man erhält:

$$10x + 30 + 20 - 20 = 40.$$

Jetzt werden die Glieder zusammengefasst und anschließend auf beiden Seiten der Wert 30 subtrahiert.

$$10x = 10.$$

Abschließend wird die Gleichung durch den Wert 10 dividiert und man erhält

$$x = 1.$$

Lösung zu g

Im ersten Schritt werden die Klammern auf beiden Seiten der Gleichung aufgelöst und man erhält:

$$2{,}6x - 2{,}6 = -6{,}5x - 6{,}5 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{7}{2}.$$

Nun werden die Glieder zusammengefasst:

$$2{,}6x - 2{,}6 = -7x - 3.$$

Nun wird auf beiden Seiten der Gleichung $7x$ und $2{,}6$ addiert:

$$9{,}6x = -0{,}4.$$

Jetzt muss noch durch $9{,}6$ dividiert werden:

$$x = -\tfrac{1}{24}.$$

Lösung zu h

Bestimmen Sie zuerst den Definitionsbereich für die Variable x allgemein.
Keiner der Brüche darf im Nenner gleich 0 werden, deshalb muss hier $x \neq \frac{5}{8}$ gelten.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{5}{8} \right\}$$

Als erstes wird der Bruch gekürzt, dafür muss auf beiden Seiten der Gleichung mit (8x-5) multipliziert werden:

$$\frac{7x-3}{8x-5} \cdot (8x-5) = 2 \cdot (8x-5)$$

Dies führt zu:

$$7x - 3 = 2 \cdot (8x - 5).$$

Nun wird die rechte Seite ausmultipliziert:

$$7x - 3 = 16x - 10.$$

Da x auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt, wird $7x$ subtrahiert:

$$7x - 3 - 7x = 16x - 10 - 7x$$

und man erhält:

$$-3 = 9x - 10.$$

Damit die Zahlenglieder auch alle auf einer Seite sind, wird 10 addiert und man erhält:

$$7 = 9x.$$

Jetzt muss noch durch 9 dividiert werden und man erhält:

$$x = \frac{7}{9}$$

Anschließend ist noch zu überprüfen, dass die Lösung $x = \frac{7}{9}$ zulässig ist, was wegen $\frac{7}{9} \neq \frac{5}{8}$ offensichtlich der Fall ist.

Lösung zu i

In der Gleichung sind zwei Brüche, die als erstes beseitigt werden. Hierfür wird die Gleichung als erstes mit dem höheren Nenner multipliziert, also mit dem Wert 6:

$$\frac{2x}{3} \cdot 6 - 5 \cdot 6 = -\frac{5x}{6} \cdot 6 - 2 \cdot 6,$$

sodass man folgende Gleichung erhält:

$$\frac{2x \cdot 6}{3} - 30 = -5x - 12.$$

Auf der linken Seite kann die 3 mit der 6 gekürzt werden, dies ergibt:

$$4x - 30 = -5x - 12.$$

Nun steht auf beiden Seiten ein x, daher addiert man beide Seiten mit $5x$ und erhält:

$$9x - 30 = -12.$$

Jetzt müssen die Zahlglieder auf eine Seite "gebracht werden", daher wird auf beiden Seiten der Gleichung der Wert 30 addiert:

$$9x - 30 + 30 = -12 + 30.$$

und man erhält:

$$9x = 18.$$

Um nur ein x auf der linken Seite stehen zu haben, wird durch den Wert 9 dividiert, und man erhält als Lösung:

$$x = 2.$$

Lösung zu j

Bestimmen Sie zuerst den Definitionsbereich für die Variable x allgemein.
Keiner der Brüche darf im Nenner gleich 0 werden, deshalb muss man $x \neq 0$ fordern.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Die Multiplikation mit x ergibt dann:

$$7 + 4 - x = \frac{x}{2} - 4(2 - 2x) \Leftrightarrow 11 - x = \frac{17}{2}x - 8.$$

Anschließend addiert man $x + 8$ und erhält $19 = \frac{19}{2}x$, was nach der Multiplikation mit $\frac{2}{19}$ auf $x = 2$ führt.

ÜBUNG 2

Stellen Sie Gleichungen zu den Textaufgaben auf und lösen Sie diese.

a) In einem Obstladen wird eine Schale Erdbeeren zu je 1,50 Euro verkauft.

Insgesamt hat der Ladenbesitzer durch den Verkauf seiner Erdbeeren einen Erlös von 78 Euro erzielt.

Wieviele Schalen Erdbeeren wurden verkauft?

b) Eine Wandergruppe wandert 2 Tage.

Am 1. Tag legen sie ein Viertel der Gesamtstrecke und zusätzlich 2 km zurück.

Am 2. Tag legen sie die Hälfte der Gesamtstrecke und zusätzlich 1 km zurück.

Wie lang ist die zurückgelegte Gesamtstrecke?

c) Das Achtfache einer Zahl um 6 vermindert ist gleich dem Vierfachen der Zahl um 2 vermehrt.

Wie heißt die Zahl?

Antworten

a)
Es wurden 52 Erdbeerschalen verkauft.

b)
Die Gesamtstrecke ist 12 Kilometer lang.

c)
Die Zahl lautet 2.

Lösung zu a

Gegeben ist: Preis für Erdbeeren: $1{,}50$ Euro pro Schale.
Erlös: 78 Euro.
Gefragt ist: x = Anzahl der Schale Erdbeeren

$$1{,}50 \cdot x = 78$$

Um x zu erhalten, werden beide Seiten der Gleichung durch $1{,}50$ dividiert:

$$x = 52$$

Der Ladenbesitzer hat 52 Schalen Erdbeeren verkauft.

Lösung zu b

Es wird nach der Gesamtstrecke gefragt, daher lassen sich die einzelnen Abschnitte pro Tag in einer Gleichung über die Gesamtstrecke x zusammenfassen:

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{4}x + 2) + (\tfrac{1}{2}x + 1) &= x && (1)\\ \Leftrightarrow \tfrac{3}{4}x + 3 &= x \quad \Big| -\tfrac{3}{4}x && (2)\\ \Leftrightarrow 3 &= \tfrac{1}{4}x \quad \Big| \cdot 4 && (3)\\ \Leftrightarrow 12 &= x && (4) \end{aligned}$$

Die Gesamtstrecke beträgt also 12 Kilometer.

Lösung zu c

x = die gesuchte Zahl.

Auf der linken Seite der Gleichung wird der erste Teil des Satzes stehen und auf der rechten Seite der zweite Teil des Satzes:

Linke Seite: Das Achtfache einer Zahl um 6 vermindert, in einem Term dargestellt:

$8x - 6$

Rechte Seite: Dem Vierfachen der Zahl um 2 vermehrt, in einem Term dargestellt:

$4x + 2$

Somit lautet die Gleichung:

$8x - 6 = 4x + 2$

$$\begin{aligned} 8x - 6 &= 4x + 2 \mid -4x && (5)\\ \Leftrightarrow 4x - 6 &= 2 \qquad \mid +6 && (6)\\ \Leftrightarrow 4x \qquad &= 8 \qquad \mid : 4 && (7)\\ \Leftrightarrow x \qquad &= 2 && (8) \end{aligned}$$

Somit ist 2 die gesuchte Zahl.

ÜBUNG 3

Lösen Sie die Gleichungen durch die Anwendung der quadratischen Ergänzung.

a) $3x^2 - 12x = 36$

b) $2x^2 - 4x = 48$

c) $x^2 + 4x = 5$

d) $2x^2 + 8x - 10 = 32$

Antworten

a) $x_1 = 6$ $x_2 = -2$

b) $x_1 = 6$ $x_2 = -4$

c) $x_1 = 1$ $x_2 = -5$

d) $x_1 = 3$ $x_2 = -7$

Lösung zu a

Zuerst wird die Gleichung normiert. Sie wird dabei durch 3 geteilt:

$$x^2 - 4x = 12$$

Im Anschluss wird die linke Seit durch 4-4 ergänzt:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 = 12$$

Hier kann nun die die 2. binomische Formel angewendet werden:

$$(x-2)^2 - 4 = 12$$

Die Gleichung wird nun weiter vereinfacht:

$$(x-2)^2 = 16$$

Nun wir, unter Berücksichtigung, dass keine Lösung verloren werden darf, auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x - 2 = \pm 4$$

Hieraus ergibt sich die Lösungsmenge von $x_1 = 6$ und $x_2 = -2$.

Lösung zu b

Zuerst wird die Gleichung normiert. Sie wird dabei durch 2 geteilt:

$$x^2 - 2x = 24$$

Im Anschluss wird die linke Seit durch 1-1 ergänzt:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 = 24$$

Hier kann nun die die 2. binomische Formel angewendet werden:

$$(x-1)^2 - 1 = 24$$

Die Gleichung wird nun weiter vereinfacht:

$$(x-1)^2 = 25$$

Nun wir, unter Berücksichtigung, dass keine Lösung verloren werden darf, auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x - 1 = \pm 5$$

Hieraus ergibt sich die Lösungsmenge von $x_1 = 6$ und $x_2 = -4$.

Lösung zu c

In diesem Fall fällt der Schritt der Normierung weg. Es kann direkt mit 4-4 erweitert werden:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 = 5$$

Hier kann nun die die 1. binomische Formel angewendet werden:

$$(x+2)^2 - 4 = 5$$

Die Gleichung wird nun weiter vereinfacht:

$$(x+2)^2 = 9$$

Nun wir, unter Berücksichtigung, dass keine Lösung verloren werden darf, auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x + 2 = \pm 3$$

Hieraus ergibt sich die Lösungsmenge von $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$.

Lösung zu d

Zuerst wird die Gleichung normiert. Sie wird dabei durch 2 geteilt:

$$x^2 + 4x - 5 = 16$$

Im Anschluss wird die linke Seit durch 4-4 ergänzt:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 5 = 16$$

Hier kann nun die die 1. binomische Formel angewendet werden:

$$(x + 2)^2 - 4 - 5 = 16$$

Die Gleichung wird nun weiter vereinfacht:

$$(x + 2)^2 = 25$$

Nun wir, unter Berücksichtigung, dass keine Lösung verloren werden darf, auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x + 2 = \pm 5$$

Hieraus ergibt sich die Lösungsmenge von $x_1 = 3$ und $x_2 = -7$.

ÜBUNG 4

Geben Sie die Lösungsmengen der Gleichungen mit Hilfe der p-q-Formel an sowie die Koeffizienten p und q.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + 3x = -4$

c) $4x^2 - 28x + 13 = 0$

d) $3x^2 - 10x = -8$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{1; 3\}$, $p = -4$, $q = 3$;

b) $\mathbb{L} = \emptyset$, $p = 3$, $q = 4$;

c) $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right\}$, $p = -7$, $q = \frac{13}{4}$;

d) $\mathbb{L} = \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$, $p = -\frac{10}{3}$, $q = \frac{8}{3}$.

Lösung zu a

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Man erhält $p = -4$ und $q = 3$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{-4}{2} + \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 3} = 2 + \sqrt{4 - 3} = 2 + 1 = 3.$$

$$x_2 = -\frac{-4}{2} - \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 3} = 2 - \sqrt{4 - 3} = 2 - 1 = 1.$$

Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{1; 3\}$.

Lösung zu b

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Man erhält $p = 3$ und $q = 4$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 4} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = -\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{7}{4}}.$$

Da man unter der Wurzel eine negative Zahl erhält, gibt es keine reellen Lösungen sowohl für x_1 als auch für x_2.

Lösung zu c

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Um diese Normalform zu erhalten, wird die Gleichung durch den Wert 4 dividiert:

$$x^2 - 7x + \frac{13}{4} = 0$$

Man erhält $p = -7$ und $q = \frac{13}{4}$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{-7}{2} + \sqrt{(\frac{-7}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{6}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$x_2 = -\frac{-7}{2} - \sqrt{(\frac{-7}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} - \frac{6}{2} = \frac{1}{2}.$$

Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Lösung zu d

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0$$

Um diese Normalform zu erhalten, wird die Gleichung durch den Wert 3 dividiert:

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} = 0.$$

Man erhält $p = -\frac{10}{3}$ und $q = \frac{8}{3}$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{-10}{6} + \sqrt{(\frac{-10}{6})^2 - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2.$$

$$x_2 = -\frac{-10}{6} - \sqrt{(\frac{-10}{6})^2 - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{2; \frac{4}{3}\right\}$.

3. LÖSEN VON GLEICHUNGEN DURCH FAKTORISIEREN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie können eine Gleichung durch *Ausklammern* faktorisieren.
- Sie können eine Gleichung mit Hilfe *der binomischen Formeln* faktorisieren.

3.1 Faktorisieren

Wir betrachten zwei reelle Zahlen a, b deren Produkt gleich Null ist: $ab = 0$. Wenn a von Null verschieden ist, können wir die Gleichung durch a dividieren und erhalten $b = 0$. Analog folgt aus $b \neq 0$, dass $a = 0$ ist, d.h. mindestens eine der beiden Zahlen a, b muss Null sein. Dies ist die Grundlage dieses Abschnitts und heisst die *Nullproduktregel*. Dies impliziert die folgende Regel für zwei beliebige Terme.

3.1 REGEL (ANWENDUNG DER NULLPRODUKTREGEL)

Das Produkt zweier Terme hat genau dort Nullstellen, wo mindestens einer der Faktoren eine Nullstelle hat.

Also ist beispielsweise die Nullstellenmenge von $x^2 - 5x$ die Vereinigung der Nullstellenmenge von x und von $x - 5$, oder in Formeln:

$$\begin{array}{lrcll} & x^2 - 5x & = & 0 & (3.1) \\ \Leftrightarrow & x(x-5) & = & 0 & (3.2) \\ \Leftrightarrow & x = 0 & & \text{oder} \quad x - 5 = 0 & (3.3) \end{array}$$

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0;\ 5\}$.

Als zielführendes Verfahren für die Berechnung der Nullstellen eines Ausdruckes bietet sich somit an, ihn als Produkt einfacher Terme zu schreiben.

3.2 DEFINITION

Die Umformung eines Terms in eine Produktform nennt man *Faktorisierung* des Terms. Faktoren der Form $x-a$, wobei a eine reelle Zahl ist, heißen *Linearfaktoren*.

Die wichtigsten Hilfsmittel, um einen Term in ein Produkt umzuformen, sind das Ausklammern von Termen und die Anwendung binomischer Formeln.

3.2 Faktorisierung durch Ausklammern

3.3 BEISPIEL

Haben alle Summanden eines Terms einen gemeinsamen Faktor, so lässt sich dieser ausklammern:

$$4x^2+32x+12=4(x^2+8x+3). \qquad (3.4)$$

Der allgemeine quadratische Term ist durch Ausklammern als Produkt aus der Zahl 4 und einem quadratischen Term in Normalform umgeformt worden.

Besonders nützlich ist es, wenn beide Faktoren die Variable enthalten.

3.4 BEISPIEL

$$x^4+2x^3+3x^2=x^2(x^2+2x+3) \qquad (3.5)$$

Die Faktoren sind quadratische Terme, die wir mit den Methoden des Abschnitts über lineare und quadratische Gleichungen behandeln können. Die Faktoren sind einfacher als der ursprüngliche Term, der sogar die vierte Potenz der Variablen enthält.

$$\begin{aligned} & x^4+2x^3+3x^2=0 && (3.6)\\ \Leftrightarrow \quad & x^2(x^2+2x+3)=0 && (3.7) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2=0 \quad \text{oder} \quad x^2+2x+3=0.$$

Da $x^2+2x+3=0$ keine Lösung hat (siehe dazu Abschnitt II.2), ist die Gleichung nur bei $x^2=0$ erfüllt, also $\mathbb{L}=\{0\}$.

3.5 BEISPIEL

$$\begin{aligned}(x-3)\,x^2-(x-3)(2x-1) &= (x-3)\cdot(x^2-(2x-1)) = (x-3)\cdot(x^2-2x+1) && (3.8)\\ &= (x-3)\cdot(x-1)^2 && (3.9)\end{aligned}$$

(Im letzten Schritt haben wir die binomische Formel $(x-1)^2 = x^2-2x+1$ benutzt.) Damit folgt:

$$(x-3)\,x^2-(2x-1)(x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-3=0 \quad\text{oder}\quad (x-1)^2=0.$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{1;\ 3\}$.

3.3 Faktorisierung mit Hilfe der binomischen Formeln

Terme der Form a^2-b^2 sowie $a^2\pm 2ab+b^2$ können mit den binomischen Formeln als Produkte von $(a+b)$ und $(a-b)$ geschrieben werden. Bei der Differenz von Quadraten, z.B. x^2-9, können wir mit der Wahl $a=x$ und $b=3$ die dritte binomische Formel anwenden und erhalten

$$x^2-9=(x+3)\cdot(x-3).$$

Bei vollständigen Quadraten wie x^2-2x+1 wenden wir die erste oder zweite binomische Formel an, hier die zweite mit $a=x$ und $b=1$:

$$x^2-2x+1=(x-1)\cdot(x-1)=(x-1)^2.$$

3.6 BEISPIEL

$$\begin{aligned} 9x^2-16 &= 0 && && (3.10)\\ \Leftrightarrow (3x+4)(3x-4) &= 0 && && (3.11)\\ \Leftrightarrow 3x+4 &= 0 && \text{oder } 3x-4=0 && (3.12)\\ \Leftrightarrow x &= -\tfrac{4}{3} && \text{oder} \quad x=\tfrac{4}{3} && (3.13)\\ \mathbb{L} &= \{-\tfrac{4}{3};\ \tfrac{4}{3}\} && && (3.14)\end{aligned}$$

Analog erhält man mit $a=4u$ und $b=7v^2$, dass

$$16u^2-49v^4=(4u+7v^2)\cdot(4u-7v^2).$$

3.7 BEISPIEL

$$\begin{aligned} 9x^2+30x+25 &= 0 && (3.15)\\ \Leftrightarrow (3x+5)^2 &= 0 && (3.16)\\ \Leftrightarrow 3x+5 &= 0 && (3.17)\\ \Leftrightarrow 3x &= -5 && (3.18)\\ \Leftrightarrow x &= -\tfrac{5}{3} && (3.19)\\ \mathbb{L} &= \left\{-\tfrac{5}{3}\right\} && (3.20) \end{aligned}$$

Entsprechend kann $4x^4-12x^2+9$ mit der zweiten binomischen Formel und $a=2x^2$, $b=3$ faktorisiert werden:

$$4x^4-12x^2+9=(2x^2-3)\cdot(2x^2-3)=(2x^2-3)^2.$$

Mit der ersten binomischen Formel und $a=x+2$, $b=5$ erhalten wir

$$(x+2)^2+10(x+2)+25=(x+2+5)\cdot(x+2+5)=(x+7)^2.$$

3.4 Faktorisierung eines quadratischen Terms, wenn eine Nullstelle bekannt ist

Wenn bei einem quadratischen Term in Normalform x^2+px+q eine Nullstelle x_1 bekannt ist, dann besagt der Satz von Viëta, dass auch $x_2=\frac{q}{x_1}$ eine Nullstelle ist (evtl. dieselbe). Damit erhalten wir die Faktorisierung $x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

3.8 BEISPIEL

Bei $x^2-15x-34=0$ stellen wir durch Ausprobieren oder Raten fest, dass $x_1=-2$ eine Nullstelle ist. Dann ist auch $x_2=\frac{-34}{-2}=17$ eine Nullstelle und die Faktorisierung lautet:

$$x^2-15x-34=(x+2)\cdot(x-17).$$

3.9 BEISPIEL

$$x^2 + (\sqrt{2} - 1)\,x - \sqrt{2} = 0$$

Wenn wir durch Ausprobieren oder Raten gefunden haben, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, dann folgt daraus, dass auch $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{x_1} = -\sqrt{2}$ eine Nullstelle ist. Also

$$\begin{aligned} & x^2 + (\sqrt{2} - 1)\,x - \sqrt{2} = 0 && (3.21)\\ \Leftrightarrow\quad & (x-1)\cdot(x+\sqrt{2}) = 0, && (3.22) \end{aligned}$$

die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{1;\ -\sqrt{2}\}$.

Dies ist ein einfacher Spezialfall der sogenannten Polynomdivision.

WARNUNG

Das Faktorisieren eines Terms gelingt nicht immer und muss durch Ausprobieren und Raten versucht werden.
Für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ gelingt das Faktorisieren mit Hilfe der p-q-Formel. Für die Spezialfälle $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ und $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ gibt es komplizierte Formeln. Für $x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot x + c_0 = 0$ gibt es überhaupt kein systematisches Verfahren des Faktorisierens, falls $n \geq 5$ ist.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Faktorisieren Sie die folgenden Terme soweit wie möglich.

a) $3a + 4a$

b) $4a + 32b + 12c$

c) $3a + 3x$

d) $xm^2 - xn^2$

e) $xr + xs + r + s$

f) $x(r - s) - 3(s - r)$

Antworten

a) $a(3 + 4) = 7a$

b) $4(a + 8b + 3c)$

c) $3(a + x)$

d) $x(m^2 - n^2)$ bzw. $x(m + n)(m - n)$

e) $(x + 1)(r + s)$

f) $(x + 3)(r - s)$

Lösung zu a

a wird ausgeklammert:

$$a(3 + 4).$$

Lösung zu b

4 wird ausgeklammert:

$$4(a + 8b + 3c).$$

Lösung zu c

Die Zahl 3 wird ausgeklammert:

$$3(a + x).$$

Lösung zu d

Beide Glieder enthalten ein x.

Es bietet sich an, x auszuklammern
und die 3. binomische Formel anzuwenden.

$$xm^2 - xn^2 = x(m^2 - n^2) = x(m+n)(m-n).$$

Lösung zu e

Bei den Termen mit x wird dies ausgeklammert:

$$xr + xs + r + s = x(r+s) + (r+s).$$

Nun wird $r+s$ ausgeklammert:

$$x(r+s) + (r+s) = (x+1)(r+s).$$

Lösung zu f

Da sich die beiden Klammern nur um ein Vorzeichen unterscheiden, wird -1 aus der 2. Klammer ausgeklammert:

$$\begin{aligned} x(r-s) - 3(s-r) &= x(r-s) - 3((-1)(-s) + (-1)r) \\ &= x(r-s) - 3(-1)((-s) + r) \\ &= x(r-s) - 3(-1)(-s+r) \\ &= x(r-s) + 3(-s+r) \\ &= x(r-s) + 3(r-s). \end{aligned}$$

Nun wird noch der Term $(r-s)$ ausgeklammert.

So ergibt sich der Ausdruck:

$$x(r-s) + 3(r-s) = (x+3)(r-s).$$

ÜBUNG 2

Lösen Sie folgende Gleichungen durch Faktorisieren.

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 + \frac{1}{4} = x$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{-1\}$

b) $\mathbb{L} = \{4\}$

c) $\mathbb{L} = \{3;\ -3\}$

d) $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Lösung zu a

Die 1. binomische Formel wird angewendet:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

In dem Ausdruck $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2(1x) + 1^2$ lässt sich der Wert $a = 1$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ eingesetzt:

$$(x + a)^2 = (x + 1)^2 = 0$$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x + 1 = 0$ daraus folgt: $x = -1$

Lösung zu b

Die 2. binomische Formel $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ wird angewendet.

In dem Ausdruck $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2(4x) + 4^2$ lässt sich der Wert $a = 4$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ eingesetzt:

$(x-4)^2 = 0.$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - 4 = 0$, daraus folgt: $x = 4$.

Lösung zu c

Die 3. binomische Formel $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ wird angewendet.

In dem Ausdruck $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$ lässt sich der Wert $a = 3$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ eingesetzt:

$(x-3)(x+3) = 0.$

Mindestens eine der Klammern muss den Wert 0 ergeben:

$(x-3) = 0$ oder $(x+3) = 0$, daraus folgt:

$x_1 = 3$ oder $x_2 = -3$.

Lösung zu d

Auf beiden Seiten der Gleichung wird x subtrahiert,

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$$

Die 2. binomische Formel wird angewendet:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

In dem Ausdruck $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2(\frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2})^2$ lässt sich der Wert $a = \frac{1}{2}$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ eingesetzt:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - \frac{1}{2} = 0$, daraus folgt: $x = \frac{1}{2}$.

ÜBUNG 3

Lösen Sie folgende Gleichungen durch Faktorisieren.

a) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

c) $16x^2 + 40x + 25 = 0$

d) $9x^2 - 36 = 0$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{6\}$

b) $\mathbb{L} = \{0;\ 2\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$

Lösung zu a

Im 1. Schritt werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wert 4 multipliziert:

$x^2 - 12x + 36 = 0.$

Die 2. binomische Formel wird angewendet:

$(x - 6)^2 = 0.$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - 6 = 0$, daraus folgt: $x = 6.$

Lösung zu b

Es wird x^2 ausgeklammert:

$x^2(x^2 - 4x + 4) = 0$, daraus folgt: $x_1 = 0$

Die 2. binomische Formel wird auf die Klammer angewendet:

$(x-2)^2 = 0.$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - 2 = 0$, daraus folgt: $x = 2$.

Lösung zu c

Die 1. binomische Formel wird angewendet:

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Nun wird eingesetzt:

$(4x+5)^2 = (4x+5)(4x+5) = 0.$

Die Nullproduktregel wird verwendet:

$4x + 5 = 0.$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird der Wert 5 subtrahiert und durch den Wert 4 dividiert:

$x = -\frac{5}{4}$.

Lösung zu d

Die 3. binomische Formel wird angewendet:

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2.$

Die Werte der Gleichung werden eingesetzt:

$(3x+6)(3x-6)=0.$

Die Nullproduktregel wird angewendet:

$3x+6=0$ oder $3x-6=0.$

Damit erhält man:

$x_1=-2$ und $x_2=2.$

ÜBUNG 4

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner) durch Faktorisieren.
(Bei den Aufgaben a) und b) werden nur Lösungen im Intervall $[0,\ 2\pi]$ gesucht.)

Diese Aufgabe benutzt Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, die im Kapitel VI ausführlich behandelt werden. Sie soll weitere interessante Beispiele für die Lösungsmethode Faktorisieren vorstellen.

a) $\cos^2(x) - 2\cos(x) = -1$

b) $\frac{1}{2}\sin(x) = -1 + \cos^2(x)$

c) $e^{4x} + 5e^{2x} = 0$

Hinweise:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
(Mehr zu diesen Themen finden Sie in den Abschnitten Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen .)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $e^x > 0$.

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{0;\ 2\pi\}$,

b) $\mathbb{L} = \left\{0;\ \pi;\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ 2\pi\right\}$,

c) $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung zu a

Im 1. Schritt werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$$\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0.$$

Nun wird die 2. binomische Formel angewendet:

$$(\cos(x) - 1)^2 = 0\ .$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird die Wurzel gezogen:

$\cos(x) - 1 = 0$, damit ist $\cos(x) = 1$. Für $0 \leq x \leq 2\pi$ ist somit $x = 0$ oder $x = 2\pi$.

Lösung zu b

Im 1. Schritt werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$\frac{1}{2}\sin(x) + 1 - \cos^2(x) = 0.$

$1 - \cos^2(x)$ wird mit $\sin^2(x)$ ersetzt, damit nur noch Sinus-Terme in der Gleichung enthalten sind.

$\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) = 0.$

Nun wird $\sin(x)$ ausgeklammert:

$\sin(x)\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right) = 0.$

Nach der Nullproduktregel betrachten wir daher zwei Fälle:

Fall 1: $\sin(x) = 0$

Im Intervall $[0,2\pi]$ ist somit $x = 0$, $x = \pi$ oder $x = 2\pi$.

Fall 2:

$\sin(x) + \frac{1}{2} = 0 \quad \Big| - \frac{1}{2}$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}.$

Wendet man den $\arcsin$ an, so erhält man $x = -\frac{\pi}{6}$, aber $x = -\frac{\pi}{6}$ liegt nicht im gewünschten Intervall.

Es ist jedoch möglich, mithilfe dieses Ergebnisses im angegebenen Intervall die gesuchten x-Werte zu bestimmen.

Da der Sinus 2π-periodisch ist, gilt auch

$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\circ$

Also ist $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ eine Lösung.

Eine weitere Lösung erhält man durch die Symmetrie des Sinus, denn

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + h\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - h\right)$

Mit $h = \frac{\pi}{3}$ erhält man die weitere Lösung

$x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ Dass diese beiden Lösungen der Gleichung die einzigen sind, kann man sich mit einem Schaubild des Sinus klarmachen.

Lösung zu c

Im 1. Schritt wird e^{2x} ausgeklammert:

$e^{2x}\left(e^{2x}+5\right)=0.$

Nach der Nullproduktregel muss $e^{2x}=0$ oder $\left(e^{2x}+5\right)=0$ gelten.

Es gilt jedoch stets, dass $e^{2x}\neq 0$ und $\left(e^{2x}+5\right)\neq 0$ ist.

Es gibt daher keine Lösungen.

4. LÖSEN VON WURZELGLEICHUNGEN

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie können den *Definitionsbereich* einer Wurzelgleichung bestimmen.
- Sie können eine *Wurzelgleichung* lösen.

4.1 DEFINITION

Unter einer Wurzelgleichung versteht man eine Gleichung, bei der die Variable unter einer Wurzel steht (und möglicherweise zusätzlich auch außerhalb der Wurzel).

Gemäß Abschnitt 2.2 in Kapitel IB sind Wurzeln nur für positive reelle Zahlen oder Null definiert und sind selbst stets positiv oder Null.

WARNUNG

Demnach muss bei Wurzelgleichungen zuerst der Definitionsbereich bestimmt werden, also die Menge an reellen Zahlen, für die der Radikand positiv oder gleich Null ist.

4.2 REGEL

Zur Lösung von Wurzelgleichungen wird die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isoliert. Dann werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten (im Falle der Quadratwurzel also mit 2) so lange potenziert, bis alle Wurzeln eliminiert sind.
Man bekommt also unter Umständen durch das Quadrieren (das Potenzieren mit einer geraden Zahl ist keine Äquivalenzumformung) neue Lösungen (Scheinlösungen) hinzu, die die ursprüngliche Gleichung nicht hatte.
Die Probe ist folglich für Wurzelgleichungen unverzichtbar!

4.3 BEISPIEL

$\sqrt{2x+1} = x - 17$

Zur Bestimmung des Definitionsbereichs wird die Tatsache benutzt, dass der Radikand nicht negativ werden darf:

$$2x + 1 \geq 0 \qquad (4.1)$$
$$x \geq -\frac{1}{2} \qquad (4.2)$$

Da in der zu lösenden Gleichung

$$\sqrt{2x+1} = x - 17 \qquad (4.3)$$

die Wurzel schon isoliert ist, also alleine auf der linken Seite steht, werden beide Seiten quadriert, um die Wurzel zu eliminieren:

$$2x + 1 = (x - 17)^2 \qquad (4.4)$$

Ausquadrieren der rechten Seite

$$2x + 1 = x^2 - 34x + 289 \qquad (4.5)$$

und Zusammenfassen gleicher Potenzen ergibt eine quadratische Gleichung

$$x^2 - 36x + 288 = 0 \qquad (4.6)$$

die zwei Lösungen besitzt:

$$x_1 = 12 \qquad (4.7)$$
$$x_2 = 24 \qquad (4.8)$$

Da durch das Quadrieren der Gleichung Scheinlösungen entstanden sein können, werden zur Probe beide Lösungen in die Ursprungsgleichung eingesetzt. Das Einsetzen der ersten Lösung liefert eine unwahre Aussage

$$\sqrt{2x_1 + 1} = x_1 - 17 \qquad (4.9)$$
$$\sqrt{2 \cdot 12 + 1} = 12 - 17 \qquad (4.10)$$
$$\sqrt{25} = -5 \qquad (4.11)$$
$$5 = -5 \qquad (4.12)$$

weshalb $x = 12$ keine Lösung der Ursprungsgleichung ist.
Das Einsetzen der zweiten Lösung führt zu einer wahren Aussage:

$$\sqrt{2x_2 + 1} = x_2 - 17 \qquad (4.13)$$
$$\sqrt{2 \cdot 24 + 1} = 24 - 17 \qquad (4.14)$$
$$\sqrt{49} = 7 \qquad (4.15)$$
$$7 = 7 \qquad (4.16)$$

Da die zweite Lösung $x = 24$ außerdem im Definitionsbereich $x \geq -\frac{1}{2}$ liegt, bildet sie die Gesamtlösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{24\} \qquad (4.17)$$

4.4 BEISPIEL

$\sqrt{3x+6} = 1 + \sqrt{5-x}$

Da es in der Gleichung zwei Wurzeln gibt, müssen für den Definitionsbereich beide Radikanden größer oder gleich null sein. Für den ersten Radikanden bedeutet das:

$$\begin{aligned} 3x + 6 &\geq 0 \qquad (4.18) \\ x &\geq -2 \qquad (4.19) \end{aligned}$$

Damit der zweite Radikand nicht negativ wird, muss gelten:

$$\begin{aligned} 5 - x &\geq 0 \qquad (4.20) \\ -x &\geq -5 \qquad (4.21) \\ x &\leq 5 \qquad (4.22) \end{aligned}$$

Für die Gesamtgleichung müssen beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein. Es gilt daher für den Definitionsbereich:

$$-2 \leq x \leq 5 \qquad (4.23)$$

Da die Wurzel auf der linken Seite schon isoliert ist

$$\sqrt{3x+6} = 1 + \sqrt{5-x} \qquad (4.24)$$

kann gleich auf beiden Seiten quadriert werden:

$$3x + 6 = (1 + \sqrt{5-x})^2 \qquad (4.25)$$

Da die Wurzel auf der rechten Seite nicht isoliert ist, liefert das Ausquadrieren als mittleres Glied der binomischen Formel leider wieder eine Wurzel, die erneut isoliert werden muss:

$$3x+6=1+2\sqrt{5-x}+5-x \tag{4.26}$$
$$3x+6=6+2\sqrt{5-x}-x \tag{4.27}$$
$$3x+6-6+x=2\sqrt{5-x} \tag{4.28}$$
$$4x=2\sqrt{5-x} \tag{4.29}$$

Durch ein weiteres Quadrieren beider Seiten verschwindet auch die letzte Wurzel und es entsteht eine quadratische Gleichung

$$16x^2=4(5-x) \tag{4.30}$$
$$16x^2=20-4x \tag{4.31}$$
$$16x^2+4x-20=0 \tag{4.32}$$

mit den beiden Lösungen

$$x_1=1 \tag{4.33}$$
$$x_2=-\frac{5}{4} \tag{4.34}$$

Die Probe mit der ersten Lösung:

$$\sqrt{3x_1+6}=1+\sqrt{5-x_1} \tag{4.35}$$
$$\sqrt{3\cdot 1+6}=1+\sqrt{5-1} \tag{4.36}$$
$$\sqrt{9}=1+\sqrt{4} \tag{4.37}$$
$$3=1+2 \tag{4.38}$$
$$3=3 \tag{4.39}$$

zeigt, dass $x=1$ die Ursprungsgleichung erfüllt und im Definitionsbereich liegt. Das Einsetzen der zweiten Lösung

$$\sqrt{3x_2+6}=1+\sqrt{5-x_2} \tag{4.40}$$
$$\sqrt{3\cdot(-\tfrac{5}{4})+6}=1+\sqrt{5-(-\tfrac{5}{4})} \tag{4.41}$$
$$\sqrt{\tfrac{-15+24}{4}}=1+\sqrt{\tfrac{20+5}{4}} \tag{4.42}$$
$$\sqrt{\tfrac{9}{4}}=1+\sqrt{\tfrac{25}{4}} \tag{4.43}$$
$$\tfrac{3}{2}=1+\tfrac{5}{2} \tag{4.44}$$
$$\tfrac{3}{2}=\tfrac{7}{2} \tag{4.45}$$

führt zu einer unwahren Aussage, sodass $x=-\frac{5}{4}$ eine Scheinlösung darstellt. Die Lösungsmenge lautet daher:

$$\mathbb{L}=\{1\} \tag{4.46}$$

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sqrt{x} = 7$

b) $\sqrt{x+2} = 3$

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+5} = 4$

d) $\sqrt{1-x} = 2 - x$

e) $\sqrt{x-4} = \sqrt{2x+3}$

f) $\sqrt{x+1} = x - 5$

Antworten

a) $x = 49$

b) $x = 7$

c) $x = \frac{5}{4}$

d)
Keine Lösung

e)
Keine Lösung

f) $x = 8$

Lösung zu a

Beide Seiten werden im ersten Schritt quadriert.

$(\sqrt{x})^2 = 49$

$x = 49$

Lösung zu b

Beide Seiten werden im ersten Schritt quadriert.

$(\sqrt{x+2})^2 = 9$

$x + 2 = 9$

Nun wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$x = 9 - 2$

$x = 7$

Lösung zu c

Beide Seiten werden im ersten Schritt quadriert.

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5})^2 = 16$$

Die linke Seite wird nun mithilfe der binomischen Formel ausmultipliziert.

$$(\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5} + (\sqrt{x+5})^2 = 16$$

$$\Rightarrow x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}+x+5 = 16$$

Alle Terme, bis auf die Wurzeln, werden auf die rechte Seite gebracht.

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5} = 10-2x$$

Es wird nochmals quadriert.

$$(2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5})^2 = (10-2x)^2$$

$$\Rightarrow 4(x+1)(x+5) = 100-40x+4x^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2+6x+5) = 4x^2-40x+100$$

$$\Rightarrow 24x+20 = -40x+100$$

$$\Rightarrow 64x = 80$$

$$\Rightarrow x = \frac{80}{64} = \frac{5}{4}$$

Die Probe ergibt beim Einsetzen von $\frac{5}{4}$ in die Ursprungsgleichung:

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1}+\sqrt{\frac{5}{4}+5} = \sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{25}{4}} = 4$$

Also ist die Lösung der Ursprungsgleichung $x = \frac{5}{4}$.

Lösung zu d

Beide Seiten werden quadriert, um die Wurzel zu eliminieren.

$1 - x = (2 - x)^2$

$\Rightarrow 1 - x = 4 - 4x + x^2$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$

Die quadratische Gleichung löst man mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

$(x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = 0$

$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$

$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da ihre linke Seite immer größer oder gleich 0 ist, ihre rechte Seite mit $-\frac{3}{4}$ aber stets negativ ist.

Lösung zu e

Beide Seiten werden quadriert, um die Wurzeln zu eliminieren.

$x - 4 = 2x + 3$

Auf beiden Seiten x und 3 subtrahieren.

$-7 = x$

Man erhält

$x = -7$

$x = -7$ ist jedoch keine erlaubte Lösung für die ursprüngliche Gleichung,
weil beide Wurzelargumente dort dann negativ werden würden und das ist per Definition ausgeschlossen.

Lösung zu f

Beide Seiten werden im ersten Schritt quadriert.

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-5)^2$$

$$\Rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

Die quadratische Gleichung wird faktorisiert.

$$(x-3)(x-8) = 0$$

Durch Einsetzen von $x_1 = 3$ und $x_2 = 8$ in die ursprüngliche Gleichung wird geprüft, ob diese Zahlen wirklich Lösungen sind.

$$\sqrt{3+1} \neq (3-5)$$

und $\sqrt{8+1} = (8-5)$

Also ist die Lösung der Ursprungsgleichung $x = 8$.

ÜBUNG 2

Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sqrt{x+4}+2=x$

b) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$

c) $\sqrt{2x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}$

Antworten

a) $\mathbb{L}=\{5\}$

b) $\mathbb{L}=\{1\}$

c) $\mathbb{L}=\{1\}$

Lösung zu a

$\sqrt{x+4}+2=x \quad \Big| -2$

$\Rightarrow \sqrt{x+4}=x-2 \quad \Big| (\cdot)^2$

$\Rightarrow x+4=(x-2)^2$

Auf der rechten Seite der Gleichung wird die 2. binomische Formel angewendet, so ergibt sich:

$x+4=x^2-4x+4$

Jetzt wird die Gleichung durch Äquivalenzumformungen in die Normalform einer quadratischen Gleichung gebracht:

$x+4=x^2-4x+4 \quad \Big| -x-4$

$x^2-5x=0$

Nun wird ausgeklammert:

$x(x-5)=0$

Dies ist der Fall, wenn $x_1=5$ oder $x_2=0$ ist.

Nun wird die Probe durchgeführt, indem die Ergebnisse für x in die Ursprungsgleichung eingesetzt werden:

Für $x_1=5$ erhält man $\sqrt{5+4}+2=5$

$3+2=5$ ist eine wahre Aussage und somit ist x_1 eine richtige Lösung für die Gleichung.

Für $x_2=0$ ist $\sqrt{4}+2\neq 0$

x_2 in die Gleichung eingesetzt ergibt eine falsche Aussage und ist folglich kein Teil der Lösungsmenge. $\mathbb{L}=\{5\}$

Lösung zu b

Dies ist eine Multiplkation von zwei Wurzeln. Folglich kann man diese Wurzeln zusammenfassen.

$$\sqrt{(x-1)(x+4)} = 0 \quad \big|(\cdot)^2$$

$$(x-1)(x+4) = 0$$

Nun wird die Nullproduktregel angewendet:

$x_1 - 1 = 0$ oder $x_2 + 4 = 0$, daraus folgt, dass $x_1 = 1$ oder $x_2 = -4$ ist.

Nun wird die Probe durchgeführt, indem die Lösungen in die Ursprungsgleichung eingesetzt werden:

Für $x_1 = 1$ ist $\sqrt{1-1}\sqrt{1+4} = 0$. Die Gleichung ist wahr.

Für $x_2 = -4$ ist $\sqrt{(-4)-1}\sqrt{(-4)+4} = 0$, wir erhalten zwar eine wahre Aussage, jedoch ergibt sich $x_2 - 1 = -5 < 0$.
x_2 ist daher nur eine Scheinlösung.

Folglich ist nur x_1 eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

Lösung zu c

Beide Seiten werden quadriert, um die Wurzeln zu eliminieren.

$$2x + 10 = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2})^2$$

Die rechte Seite der Gleichung muss faktorisiert werden.

$$2x + 10 = (2\sqrt{x+2})^2$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 2^2(\sqrt{x+2})^2$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 4 \cdot (x+2)$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 4x + 8$$

Als nächstes wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$2x + 10 = 4x + 8 \quad | - 8 - 2x$$

$$\Rightarrow 2 = 2x \quad | : 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

x_1 ist also Teil der Lösungsmenge der Gleichung.

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

ÜBUNG 3

Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sqrt{2x+10} = \sqrt[4]{32x+96}$

b) $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[6]{8x+8}$

c) $\sqrt[6]{2x+1} = \sqrt[18]{26x+1}$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{-1\}$

b) $\mathbb{L} = \{1\}$

c) $\mathbb{L} = \{0;\ 1\}$

Lösung zu a

Beide Seiten werden mit dem höchsten Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt{2x+10})^4 = (\sqrt[4]{32x+96})^4$$

$$\Rightarrow (2x+10)^{\frac{4}{2}} = (32x+96)^{\frac{4}{4}}$$

Daraus folgt:

$$(2x+10)^2 = 32x+96$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird die 1. binomische Formel angewendet.

$$4x^2+40x+100 = 32x+96$$

Diese Gleichung wird zusammengefasst und durch 4 dividiert,

$$x^2+2x+1=0$$

Mit der p-q-Formel erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{2}{2})^2-1} = -1 \pm 0 = -1$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

Für $x_1 = -1$ ist $\sqrt{-2+10} = \sqrt[4]{-32+96}$.

Da $\sqrt{8} = \sqrt[4]{64}$ ist, ist die Gleichung wahr, x_1 ist also Teil der Lösungsmenge.

$$\mathbb{L} = \{-1\}$$

Lösung zu b

Beide Seiten werden mit dem höchsten Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt[3]{x+3})^6 = (\sqrt[6]{8x+8})^6$$

$$\Rightarrow (x+3)^{\frac{6}{3}} = (8x+8)^{\frac{6}{6}}$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 8x+8$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird die 1. binomische Formel angewendet.

$$x^2 + 6x + 9 = 8x + 8$$

Diese Gleichung wird zusammengefasst.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Die Gleichung wird anschließend mit der p-q-Formel gelöst:

$$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 1} = 1 \pm \sqrt{0} = 1$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

Für $x_1 = 1$ ist $\sqrt[3]{1+3} = \sqrt[6]{8+8}$

Für x_1 ergibt die Gleichung eine wahre Aussage, x_1 ist also Teil der Lösungsmenge.

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

Lösung zu c

Beide Seiten werden mit dem höchsten Wurzelexponenten potenziert.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt[6]{2x+1})^{18} &= (\sqrt[18]{26x+1})^{18} && (1)\\
\Rightarrow (2x+1)^{\frac{18}{6}} &= 26x+1 && (2)\\
\Rightarrow (2x+1)^{3} &= 26x+1 && (3)\\
\Rightarrow (2x+1)(2x+1)^{2} &= 26x+1 && (4)\\
\Rightarrow (4x^2+4x+1)(2x+1) &= 26x+1 && (5)\\
\Rightarrow 8x^3+12x^2+6x+1 &= 26x+1 \quad |-26x-1 && (6)\\
\Rightarrow 8x^3+12x^2-20x &= 0 && (7)\\
\Rightarrow 4x(2x^2+3x-5) &= 0 && (8)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist nach der Null-Produkt-Regel erfüllt, wenn einer der Faktoren, den Wert 0 annimmt.

Da $4x = 0$ sein soll, hat x_1 folglich den Wert 0.

Nun wird der weitere Term durch den Wert 2 dividiert und die p-q-Formel angewendet:

$x^2 + (\frac{3}{2})x - \frac{5}{2} = 0$
$x_{2,3} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + \frac{5}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}$
$x_2 = \frac{4}{4} = 1$ und $x_3 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$

Nun wird die Probe durchgeführt:

$x_1 = 0$ in die Gleichung eingesetzt ergibt $\sqrt[6]{0+1} = \sqrt[18]{0+1}$ und dies ist eine wahre Aussage.

$x_2 = 1$ in die Gleichung eingesetzt ergibt $\sqrt[6]{3} = \sqrt[18]{27}$ und dies ist eine wahre Aussage.

$x_3 = -\frac{5}{2}$ in die Gleichung eingesetzt ergibt $\sqrt[6]{-4} = \sqrt[18]{-64}$ und dies ist eine falsche Aussage.

Man erhält daher $\mathbb{L} = \{0;\ 1\}$.

ÜBUNG 4

Lösen Sie die Wurzelgleichungen.

a) $4\sqrt{x+\sqrt{x-4}}=8$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=-2$

c) $\sqrt{4x+\sqrt{x+5}}=\sqrt{4x+3}$

Antworten

a) $\mathbb{L}=\{4\}$

b) $\mathbb{L}=\emptyset$

c) $\mathbb{L}=\{4\}$

Lösung zu a

Beide Seiten der Gleichung werden durch 4 dividiert und danach quadriert.

$x + \sqrt{x-4} = 4$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird x subtrahiert und anschließend quadriert.

$x - 4 = (4-x)^2$

Auf der rechten Seite der Gleichung wird die 2. binomische Formel angewendet und die Glieder zusammengefasst.

$x^2 - 9x + 20 = 0$

Zur Lösung der quadratischen Gleichung wird die p-q-Formel verwendet:

$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 20}$
$x_1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$ und $x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

Nun wird die Probe durchgeführt:

$x_1 = 5$ in beide Seiten der Gleichung eingesetzt ergibt $4\sqrt{6}$ und $8.$ Da $4\sqrt{6} \neq 8$ ist, ist x_1 keine Lösung der Gleichung.

Für $x_2 = 4$ lautet die Gleichung $4\sqrt{4} = 8$ und $x_2 = 4$ ist damit eine Lösung.

$\mathbb{L} = \{4\}$

Lösung zu b

Der Wertebereich der Wurzelfunktionen liegt nur in den nichtnegativen reellen Zahlen.

Auf der linken Seite der Gleichung steht ein Wurzelausdruck,
auf der rechten Seite aber eine negative Zahl.

Da aus einer Wurzel nie eine negative Zahl entstehen kann, besitzt diese Gleichung für x keine Lösung.

$\mathbb{L} = \{\}$ oder $\mathbb{L} = \emptyset$

Lösung zu c

Beide Seiten der Gleichung werden quadriert, es resultiert

$4x + \sqrt{x+5} = 4x + 3$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird $4x$ subtrahiert und anschließend wird quadriert.

$x + 5 = 9 \quad | - 5$

$\Rightarrow x = 4$

Nun wird die Probe durchgeführt:

Für

$x = 4$ ergibt die Gleichung $\sqrt{16 + \sqrt{9}} = \sqrt{19}$ und damit ist x in der Lösungsmenge.

$\mathbb{L} = \{4\}$

5. LÖSEN VON BETRAGSGLEICHUNGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können den Betrag als Abstand auf der Zahlengeraden interpretieren.
- Sie können Betragsgleichungen durch Fallunterscheidung lösen.

5.1 Betrag als Abstand

5.1 DEFINITION

Der *Absolutbetrag* bzw. *Betrag* ist wie folgt definiert (siehe auch):

$$\begin{aligned} |a| &= a, \quad &\text{für } a \geq 0 \quad \text{und} \qquad (5.1)\\ |a| &= -a, \quad &\text{für } a < 0 \qquad\qquad (5.2) \end{aligned}$$

Das Betragszeichen macht also aus einer negativen Zahl die positive Zahl mit dem selben Abstand zur Null; eine positive Zahl bleibt dagegen unverändert.

Auf der Zahlengeraden kann der Betrag einer Zahl als Abstand der Zahl zur Null interpretiert werden. Sowohl -3 als auch 3 besitzen einen Betrag von 3 und damit den Abstand 3 zur Null:

$$|-3| = |3| = 3$$

Entsprechend kann der Betrag der Differenz zweier Zahlen als der Abstand der Zahlen voneinander interpretiert werden. Durch die Betragsbildung ist es dabei egal, ob die größere Zahl von der kleineren Zahl abgezogen wird oder umgekehrt. So besitzt sowohl der Abstand der 2 zur 5 als auch der Abstand der 5 zur 2 einen Wert von 3:

$$|5-2| = |2-5| = 3$$

Die Abstandsberechnung mit dem Betrag funktioniert auch für negative Zahlen. Auch -5 und -2 besitzen einen Abstand von 3 voneinander:

$$|-5-(-2)| = |-5+2| = |-3| = 3$$

5.2 Betragsgleichungen

5.2 DEFINITION

Als Betragsgleichung wird eine Gleichung bezeichnet, in der der Absolutbetrag eines oder mehrerer Terme vorkommt, die die Variable enthalten.

5.3 Fallunterscheidung beim Lösen von Betragsgleichungen

Eine wichtige Methode zur Lösung von Betragsgleichungen ist die Fallunterscheidung. Hierbei werden die in der Gleichung auftretenden Betragsterme aufgelöst, indem mögliche Fälle unterschieden und dann einzeln untersucht werden.

5.3 BEISPIEL

Wir gehen von der Gleichung aus

$$|x+5|=7$$

und berechnen die Lösungsmenge. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle, die unten noch einmal näher erklärt werden:

$$\left|x+5\right| = \begin{cases} \text{Fall 1: } x+5 & \text{für } x \geq -5 \\ \text{Fall 2: } -(x+5) = -x-5 & \text{für } x < -5 \end{cases}$$

Fall 1: $x+5 \geq 0$ (Der Term innerhalb der Betragsstriche ist positiv)
Ein Umstellen nach x liefert die Bedingung, unter der dieser Fall eintritt und zwar ist dies der Fall für alle $x \geq -5$. Da der Term innerhalb der Betragsstriche bereits positiv ist, vereinfacht sich die Ausgangsgleichung unter dieser Voraussetzung zu einer Gleichung ohne Beträge $x+5=7$. Sie hat die Lösung $x=2$. Da $x=2$ die Voraussetzung $x \geq -5$ erfüllt, ist 2 auch eine Lösung der Ausgangsgleichung. Das lässt sich durch Einsetzen in die Betragsgleichung leicht direkt nachprüfen.

Fall 2: $x+5<0$ (Der Term innerhalb der Betragsstriche ist negativ)
Ein Umstellen nach x liefert wieder die Bedingung, unter der dieser Fall eintritt: $x<-5$. Das heißt für jedes x, das kleiner als -5 ist, wird der Ausdruck negativ und die Betragsstriche kehren das Vorzeichen um. Wollen wir die Betragsstriche also auflösen, so muss also ein Vorzeichenwechsel stattfinden. Wir erhalten $-(x+5)=7$ bzw $-x-5=7$. Die Gleichung hat die Lösung $x=-12$. Da $x=-12$ die Voraussetzung $x<-5$ erfüllt, ist dies eine zweite Lösung der Ausgangsgleichung. Prüfen Sie dies durch Einsetzen in die Betragsgleichung nach.

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L}=\{2;-12\}$.

5.4 BEISPIEL

Nicht immer geht es so glatt, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$|x-1| = 2x$$

Zur Berechnung der Lösungen betrachten wir analog zum vorangehenden Beispiel zwei Fälle:

Fall 1: $x-1 \geq 0$
Die Ausgangsgleichung vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu einer Gleichung ohne Beträge $x-1=2x$. Sie hat die Lösung $x=-1$. Da $x=-1$ die Voraussetzung $x-1 \geq 0$ nicht erfüllt, ist -1 keine Lösung der Ausgangsgleichung. Das lässt sich durch Einsetzen leicht direkt nachprüfen.

Fall 2: $x-1<0$
Der Betrag kann wiederum aufgelöst werden und ergibt $-(x-1)=2x$. Die Gleichung hat die Lösung $x=\frac{1}{3}$. Da $x=\frac{1}{3}$ die Voraussetzung von Fall 2 erfüllt, ist dies eine Lösung der Ausgangsgleichung. Prüfen Sie dies durch Einsetzen nach.

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

5.5 BEISPIEL

$$|x+a| = c \quad \text{mit} \quad a, c \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

Fall 1: $c>0$

Innerhalb dieses Falles untersuchen wir zwei Fälle:

Fall 1a: Wenn $x+a=c$ ist, dann ist

$$|x+a| = |c| = c \tag{5.4}$$

und somit die Gleichung erfüllt.
Also ist

$$x = c-a \tag{5.5}$$

eine Lösung der Betragsgleichung.
Fall 1b: Wenn $x+a=-c$ ist, dann ist

$$|x+a| = |-c| = c \tag{5.6}$$

und somit die Gleichung erfüllt.

Also ist auch

$$x{=}{-}c-a \qquad (5.7)$$

eine Lösung der Betragsgleichung.
Für $c>0$ sind also die Lösungen der Betragsgleichung $|x+a|=c$, gegeben durch:

$$x{=}{-}a \pm c, \qquad (5.8)$$

d.h.

$$\mathbb{L}=\{-a-c;\ -a+c\} \qquad (5.9)$$

Fall 2: $c=0$

In diesem Fall ist die Gleichung $|x+a|=0$ zu lösen. Diese ist äquivalent zu $x+a=0$ mit Lösung $x=-a$, bzw. $\mathbb{L}=\{-a\}$.
Fall 3: $c<0$

Die rechte Seite der Gleichung ist negativ. Wegen des Absolutbetrags ist die linke Seite hingegen positiv oder gleich Null.
Die Gleichung kann in diesem Fall also nicht erfüllt werden und hat damit keine Lösung, d.h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\emptyset$ ist leer.

[video-online-only]

5.4 Graph der Betragsfunktion

Weil alle negativen Zahlen durch den Betrag positiv werden, sieht der Graph der Betragsfunktion

$$f(x)=|x|$$

wie ein „V" aus, dessen Spitze im Ursprung des Koordinatensystems liegt.
Um die Spitze (und damit die Betragsfunktion) in den Punkt

$$S=(\,x_s;\quad y_s\,)$$

zu verschieben, wird gemäß des Kapitels Verschiebung von Funktionen die Verschiebung in x-Richtung innerhalb des Betrages von x subtrahiert und die y-Verschiebung auf den Betrag addiert.
Die verschobene Betragsfunktion lautet dann:

$$f(x)=|x-x_s|+y_s$$

[online-only]

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Stellen sie die Betragsgleichung auf, die den angegebenen Bereich auf der x-Achse beschreibt.

a) $-6 \leq x \leq 0$

b) $1 < x < 5$

c) $x \leq 3$ oder $x \geq 5$

d) $x < -6$ oder $x > 2$

Antworten

a) $|x+3| \leq 3$

b) $|x-3| < 2$

c) $|x-4| \geq 1$

d) $|x+2| > 4$

Lösung zu a

Der Mittelpunkt zwischen -6 und 0 liegt bei -3

Die Entfernung zwischen -6 bzw. 0 und -3 ist 3

Somit ist die gesuchte Gleichung:
$|x+3| \leq 3$

Lösung zu b

Der Mittelpunkt zwischen 1 und 5 liegt bei 3

Die Entfernung zwischen 1 bzw. 5 und 3 ist 2

Somit ist die gesuchte Gleichung:
$|x-3| < 2$

Lösung zu c

Der Mittelpunkt zwischen 3 und 5 liegt bei 4

Die Entfernung zwischen 3 bzw. 5 und 4 ist 1

Somit ist die gesuchte Gleichung:
$|x-4| \geq 1$

Lösung zu d

Der Mittelpunkt zwischen -6 und 2 liegt bei -2

Die Entfernung zwischen -6 bzw. 2 und -2 ist 4

Somit ist die gesuchte Gleichung:
$|x+2|>4$

ÜBUNG 2

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Betragsgleichungen.

a) $\frac{|4x-4|}{x+1} = 1$

b) $\frac{2x-1}{|x-4|+1} = -1$

c) $\frac{|x+4|}{x+2} = \frac{x-1}{x+5}$

d) $\left|\frac{x-4}{x+2}\right| = 4$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{5};\ \frac{5}{3}\right\}$

b) $\mathbb{L} = \{-4\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{11}{4}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \left\{-4;\ -\frac{4}{5}\right\}$

Lösung zu a

Als erstes bestimmmen wir die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die alle Terme in der Gleichung definiert sind, denn als Lösungen der Gleichung kommen nur Elemente aus D in Frage. (Beachten Sie, dass Nenner eines Bruches nicht 0 sein dürfen !)

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Unterscheiden Sie die Fälle $4x - 4 \geq 0$ und $4x - 4 < 0$.

Fall 1: $4x - 4 \geq 0$, also $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \tfrac{4x-4}{x+1} &= 1 \qquad |\cdot(x+1) \\ \Rightarrow 4x - 4 &= x + 1 | -x + 4 \\ \Rightarrow 3x &= 5 \qquad |: 3 \\ \Rightarrow x &= \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

$x = \frac{5}{3}$ ist größer als 1 und demnach Teil der Lösungsmenge der Gleichung .

Fall 2: $4x - 4 < 0$, also $x < 1$:

$$\begin{aligned} -\tfrac{(4x-4)}{x+1} &= 1 \qquad |\cdot(x+1) \\ \Rightarrow -4x + 4 &= x + 1 | -x - 4 \\ \Rightarrow -5x &= -3 \quad |: (-5) \\ \Rightarrow x &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

$x = \frac{3}{5}$ ist kleiner als 1 und demnach Teil der Lösungsmenge der Gleichung .

Folglich ist die Lösungsmenge der Gleichung $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{5};\ \frac{5}{3}\right\}$.

Lösung zu b

Als erstes bestimmmen wir die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die alle Terme in der Gleichung definiert sind, denn als Lösungen der Gleichung kommen nur Elemente aus D in Frage. (Beachten Sie, dass Nenner eines Bruches nicht 0 sein dürfen !)

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, da $|x-4|+1 \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Unterscheiden Sie die Fälle $x-4 \geq 0$ und $x-4 < 0$.

Fall 1: $x-4 \geq 0$, also $x \geq 4$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{2x-1}{x-4+1} &= -1 && |\cdot(x-3) \\
\Rightarrow 2x-1 &= -x+3 && |+x+1 \\
\Rightarrow 3x &= 4 && |:3 \\
\Rightarrow x &= \tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

$x = \frac{4}{3}$ ist nicht größer als 4 und demnach nicht Teil der Lösungsmenge der Gleichung .

Fall 2: $x-4 < 0$, also $x < 4$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{(2x-1)}{-(x-4)+1} &= -1 \\
\Rightarrow \tfrac{(2x-1)}{5-x} &= -1 && |\cdot(5-x) \\
\Rightarrow 2x-1 &= x-5 && |-x+1 \\
\Rightarrow x &= -4
\end{aligned}$$

$x = -4$ ist kleiner als 4 und demnach Teil der Lösungsmenge der Gleichung .

Folglich ist die Lösungsmenge der Gleichung $\mathbb{L} = \{-4\}$.

Lösung zu c

Als erstes bestimmmen wir die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die alle Terme in der Gleichung definiert sind, denn als Lösungen der Gleichung kommen nur Elemente aus D in Frage. (Beachten Sie, dass Nenner eines Bruches nicht 0 sein dürfen !)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2;\ -5\}$

Unterscheiden Sie die Fälle $x + 4 \geq 0$ und $x + 4 < 0$.

Fall 1: $x + 4 \geq 0$, also $x \geq -4$:

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x+2} &= \frac{x-1}{x+5} && |\cdot(x+2)\cdot(x+5) \\
\Rightarrow (x+4)(x+5) &= (x-1)(x+2) \\
\Rightarrow x^2 + 9x + 20 &= x^2 + x - 2 && |-x^2 - x - 20 \\
\Rightarrow 8x &= -22 && |: 8 \\
\Rightarrow x &= -\frac{11}{4}
\end{aligned}$$

$x = -\frac{11}{4}$ ist größer als -4 und demnach Teil der Lösungsmenge der Gleichung .

Fall 2: $x + 4 < 0$, also $x < -4$:

$$\begin{aligned}
-\frac{x+4}{x+2} &= \frac{x-1}{x+5} && |\cdot(x+2)\cdot(x+5) \\
\Rightarrow -(x+4)(x+5) &= (x-1)(x+2) \\
\Rightarrow -x^2 - 9x - 20 &= x^2 + x - 2 && |-x^2 - x + 20 \\
\Rightarrow -2x^2 - 10x &= 18 && |: (-2) \\
\Rightarrow x^2 + 5x &= -9 && |+9 \\
\Rightarrow x^2 + 5x + 9 &= 0 && |\text{p-q-Formel}
\end{aligned}$$

$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{-11}}{2}$ Wurzeln, deren Radikand (Wert unter der Wurzel) negativ sind, sind in den reellen Zahlen nicht definiert. Es gibt daher keine Lösungen für Fall 2.
Folglich ist die Lösungsmenge der Gleichung $\mathbb{L} = \left\{-\frac{11}{4}\right\}$.

Lösung zu d

Als erstes bestimmmen wir die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die alle Terme in der Gleichung definiert sind, denn als Lösungen der Gleichung kommen nur Elemente aus D in Frage. (Beachten Sie, dass Nenner eines Bruches nicht 0 sein dürfen !)
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$

Nun müssen vier Fälle unterschieden werden.

Fall 1: $x-4 \geq 0, x+2 \geq 0$, also $x \geq 4$:

$$\begin{aligned} \tfrac{x-4}{x+2} &= 4 && |\cdot(x+2) \\ \Rightarrow x-4 &= 4x+8 && |-4x+4 \\ \Rightarrow -3x &= 12 && |:(-3) \\ \Rightarrow x &= -4 \end{aligned}$$

Aber $x-4=-8<0$, deshalb ist $x=-4$ keine Lösung in diesem Fall.

Fall 2: $x-4 \geq 0, x+2<0$
$\Leftrightarrow x \geq 4, x<-2$ ist nie erfüllt, daher keine Lösung.

Fall 3: $x-4<0, x+2 \geq 0$, also $-2 \leq x<4$:

$$\begin{aligned} \tfrac{4-x}{x+2} &= 4 && |\cdot(x+2) \\ \Rightarrow 4-x &= 4x+8 && |-4x-4 \\ \Rightarrow -5x &= 4 && |:(-5) \\ \Rightarrow x &= -\tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

$-\frac{4}{5} \in [-2;4) \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{4}{5}$ ist eine Lösung.

Fall 4: $x-4<0, x+2<0$, also $x<-2$:

$$\begin{aligned} \tfrac{4-x}{-2-x} &= 4 && |\cdot(-2-x) \\ \Rightarrow 4-x &= -8-4x && |+4x-4 \\ \Rightarrow 3x &= -12 && :3 \\ \Rightarrow x &= -4 \end{aligned}$$

$-4<-2 \quad \Rightarrow \quad x=-4$ ist eine Lösung.

Insgesamt folgt $\mathbb{L}=\left\{-\frac{4}{5};\ -4\right\}$.

ÜBUNG 3

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Betragsgleichungen.
Lösung a) und Lösung b) stellen zwei verschiedene Methoden vor, derartige Gleichungen zu lösen.
Überzeugen Sie sich, dass beide auf dasselbe Resultat führen.

a) $|x+1|+4=|2x-4|$

b) $6-|4x+6|+|2x-2|=0$

c) $|x-4|-|x-5|=1$

d) $x+|x-2|=2$

Antworten

a) $\mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{3};\ 9\right\}$

b) $\mathbb{L}=\left\{-7;\ \frac{1}{3}\right\}$

c) $\mathbb{L}=\{x|x\geq 5\}$

d) $\mathbb{L}=\{x|x\leq 2\}$

Lösung zu a

Die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definert.

Beide Beträge müssen einzeln aufgelöst werden. Das führt zu insgesamt 4 Fällen.
1. Fall: $x+1 \geq 0$ und $2x-4 \geq 0$.
2. Fall: $x+1 \geq 0$ und $2x-4 < 0$.
3. Fall: $x+1 < 0$ und $2x-4 \geq 0$.
4. Fall: $x+1 < 0$ und $2x-4 < 0$.

1. Fall, $x+1 \geq 0$ und $2x-4 \geq 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $(x+1)+4=(2x-4)$ Bringen Sie alle x-Terme auf die linke Seite und alle Zahlen auf die rechte. Sie erhalten dann die Lösung $x=9$. Die Lösung erfüllt die Voraussetzung dieses Falles und ist somit eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

2. Fall, $x+1 \geq 0$ und $2x-4 < 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $(x+1)+4=-(2x-4)$ Bringen Sie alle x-Terme auf die linke Seite und alle Zahlen auf die rechte. Sie erhalten dann die Lösung $x=-\frac{1}{3}$. Die Lösung erfüllt die Voraussetzung dieses Falles. Sie ist deshalb eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

3. Fall, $x+1 < 0$ und $2x-4 \geq 0$:
Es gibt kein x das beide Ungleichungen erfüllt. Dieser Fall muss deshalb nicht weiter betrachtet werden.

4. Fall, $x+1 < 0$ und $2x-4 < 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $-(x+1)+4=-(2x-4)$ Bringen Sie alle x-Terme auf die linke Seite und alle Zahlen auf die rechte. Sie erhalten dann die Lösung $x=1$. Die Lösung erfüllt die Voraussetzung dieses Falles nicht. Sie zählt somit nicht als Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Zusammenfassend ergibt sich das Resultat:
Die Gleichung $|x+1|+4=|2x-4|$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{3};\ 9\right\}$.

Lösung zu b

Die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definert. Es gibt somit keine Einschränkungen an die Variable x.

Beide Beträge müssen einzeln aufgelöst werden. Das führt zu insgesamt 4 Fällen.
1. Fall, $4x + 6 \geq 0$ und $2x - 2 \geq 0$.
2. Fall, $4x + 6 \geq 0$ und $2x - 2 < 0$.
3. Fall, $4x + 6 < 0$ und $2x - 2 \geq 0$.
4. Fall, $4x + 6 < 0$ und $2x - 2 < 0$.

1. Fall, $4x + 6 \geq 0$ und $2x - 2 \geq 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $6 - (4x + 6) + (2x - 2) = 0$

2. Fall, $4x + 6 \geq 0$ und $2x - 2 < 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $6 - (4x + 6) - (2x - 2) = 0$

3. Fall, $4x + 6 < 0$ und $2x - 2 \geq 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $6 + (4x + 6) + (2x - 2) = 0$

Fall 4, $4x + 6 < 0$ und $2x - 2 < 0$:
Die Gleichung lautet in dem Fall $6 + (4x + 6) - (2x - 2) = 0$

Jeder dieser Fälle wird nun nach x aufgelöst und anschließend werden die Werte für x in die Originalgleichung eingesetzt.

Fall 1, mit $x = -1$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine falsche Aussage.
Fall 2, mit $x = \frac{1}{3}$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine wahre Aussage.
Fall 3, mit $x = -\frac{5}{3}$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine falsche Aussage.
Fall 4, mit $x = -7$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine wahre Aussage.

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet daher: $\mathbb{L} = \left\{-7;\ \frac{1}{3}\right\}$.

Lösung zu c

Da alle Terme für beliebige reelle x-Werte definiert sind, sind im folgenden alle reellen x-Werte zu betrachten.

Beide Beträge müssen einzeln aufgelöst werden. Das führt zu insgesamt 4 Fällen.
1. Fall, $x-4 \geq 0$ und $x-5 \geq 0$.
2. Fall, $x-4 \geq 0$ und $x-5 < 0$.
3. Fall, $x-4 < 0$ und $x-5 \geq 0$.
4. Fall, $x-4 < 0$ und $x-5 < 0$

Vereinfachung der Voraussetzungen:
1. Fall: Da die zweite Ungleichung die erste impliziert, genügt es die zweite d.h. $x-5 \geq 0$ zu betrachten.
2. Fall: Die beiden Ungleichungen können so geschrieben werden: $4 \leq x < 5$.
3. Fall: Es gibt kein x das beide Ungleichungen erfüllt. Der Fall spielt im Folgenden keine Rolle mehr.
4. Fall: Die erste Ungleichung impliziert die zweite. Es genügt also die erste d.h. $x-4 < 0$ zu betrachten.

Die Gleichungen in den einzelnen Fällen sehen so aus:
1. Fall: $(x-4)-(x-5)=1 \Leftrightarrow 1=1$. Die Gleichung ist für alle x richtig.
2. Fall: $(x-4)+(x-5)=1 \Leftrightarrow 2x-9=1$. Sie hat die Lösung $x=5$, die aber die Voraussetzung nicht erfüllt und deshalb nicht zählt. (Beachte: $x=5$ ist dennoch eine Lösung der Ausgangsgleichung, weil sie bereits im 1. Fall enthalten.)
4. Fall: $-(x-4)+(x-5)=1 \Leftrightarrow -x+4+x-5=1 \Leftrightarrow -1=1$. Diese Gleichung ist niemals wahr. Das heißt die Lösungsmenge kann kein x enthalten, das kleiner als 4 ist.

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet daher: $\mathbb{L}=\{x|x \geq 5\}$.

Lösung zu d

Die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definert. Es gibt somit keine Einschränkungen an die Variable x.

In dieser Gleichung ist nur eine Betragsfunktion vorhanden. Der Term wird also zu Beginn isoliert:

$$|x-2| = 2-x.$$

Wir betrachten die beiden Fälle:
1. Fall: $x-2 \geq 0$
2. Fall: $x-2 < 0$

Die Gleichung lautet im
1. Fall: $x+(x-2)=2$ bzw im
2. Fall: $x-(x-2)=2$

Die Lösung im Fall 1 ist $x=2$. Sie genügt der Voraussetzung dieses Falles. Somit ist $x=2$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung, was auch durch Einsetzen verifizieren kann.

Im Fall 2 ist jedes x eine Lösung, denn die Gleichung ist für jedes x wahr. Somit ist jedes reelle x, das der Voraussetzung dieses Falles genügt, d.h. $x<2$, eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Beide Fälle zusammen ergeben die Lösungsmenge der Gleichung $x+|x-2|=2$, also: $\mathbb{L}=\{x|x \leq 2\}$.

ÜBUNG 4

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Betragsgleichungen.

a) $||x-2|-2|=4$

b) $||2x-4|-6x|=6$

c) $||x-3|+4|=3$

Antworten

a) $\mathbb{L}=\{-4;8\}$

b) $\mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{4};\frac{5}{4}\right\}$

c) $\mathbb{L}=\{\}$

Lösung zu a

Die linke Seite der Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Es gibt also keine Einschränkungen an die Menge der zu untersuchenden x-Werte.

Auf der linken Seite der Gleichung sind zwei Betragsfunktionen ineinander verschachtelt. Das führt zu den folgenden beiden Fällen:
Fall 1, $|x-2|-2 \geq 0$.
Fall 2, $|x-2|-2 < 0$.

Die Gleichungen sehen in den beiden Fällen so aus:
Fall 1: $\left(|x-2|-2\right) = 4 \Leftrightarrow |x-2| = 6$
Fall 2: $-\left(|x-2|-2\right) = 4 \Leftrightarrow |x-2| = -2$
Im zweiten Fall kann es keine Lösungen geben, da die Betragsfunktion keine negativen Werte annimmt.

Die Gleichung $\left|x-2\right| = 6$ (Fall 1) gibt zu zwei weiteren Fallunterscheidungen Anlass:
Fall 1.1, $x-2 \geq 0$ und
Fall 1.2, $x-2 < 0$.

Die entsprechenden Gleichungen sind:
Für Fall 1: $x-2=6$ mit der Lösung $x=8$ und
Für Fall 2: $-x+2=6$ mit der Lösung $x=-4$
Beide Lösungen erfüllen die jeweiligen Voraussetzungen und sind deshalb auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Dies kann natürlich auch direkt durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung verifiziert werden.

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet daher: $\mathbb{L} = \{-4;\ 8\}$.

Lösung zu b

Die linke Seite der Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Es gibt also keine Einschränkungen an die Menge der zu untersuchenden x-Werte.

Hier ist ein Betrag in einem anderen Betrag integriert. Das führt zu insgesamt 4 möglichen Fällen.
Da der äußere Betrag schon isoliert auf der linken Seite steht, betrachtet man nun zwei Fälle:

1. Fall: $|2x-4|-6x=6$ und
2. Fall $-(|2x-4|-6x)=6$.

Diese beiden Fälle werden nun einzeln betrachtet.
Für jeden Fall wird die Gleichung so umgeformt, dass hier jeweils wieder der Betragsterm isoliert auf einer Seite steht. Daraus folgen die beiden Gleichungen für die beiden Fälle:
1. Fall: $|2x-4|=6x+6$
2. Fall: $|2x-4|=6x-6$.

Jeder dieser beiden Fälle wird nun nochmals in zwei mögliche Fälle geteilt.
Man erhält daher insgesamt vier Fälle:

Fall 1.1: $2x-4=6x+6$
Fall 1.2: $-(2x-4)=6x+6$
Fall 2.1: $2x-4=6x-6$
Fall 2.2: $-(2x-4)=6x-6$.

Jeder dieser Fälle wird nun nach x aufgelöst und anschließend werden die Werte für x in die Originalgleichung eingesetzt.

Fall 1.1, mit $x=-\frac{5}{2}$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine falsche Aussage.
Fall 1.2, mit $x=-\frac{1}{4}$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine wahre Aussage.
Fall 2.1, mit $x=\frac{1}{2}$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine falsche Aussage.
Fall 2.2, mit $x=\frac{5}{4}$, ergibt in die Originalgleichung eingesetzt eine wahre Aussage.

Alternativ zur Verifikation durch Einsetzen könnte auch geprüft werden, ob die jeweilige Lösung die Voraussetzungen in dem betrachteten Fall erfüllt.

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet daher: $\mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{4};\ \frac{5}{4}\right\}$.

Lösung zu c

Die linke Seite der Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Es gibt also keine Einschränkungen an die Menge der zu untersuchenden x-Werte.

Hier ist ein Betrag in einem anderen Betrag integriert. Da der äußere Betrag schon isoliert auf der linken Seite steht, betrachtet bietet es sich an, die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: $|x-3|+4=3$ und
2. Fall: $-(|x-3|+4)=3$.

Die beiden Fälle werden nun einzeln betrachtet.
Für jeden Fall wird die Gleichung so umgeformt, dass der Betragsterm isoliert auf einer Seite steht.

Daraus folgen dann die beiden Gleichungen:
Fall 1: $|x-3|=-1$ und
Fall 2: $|x-3|=-7$.

In beiden Fällen sind keine Lösungen in $\mathbb{R}$ möglich, da die Werte der Betragsfunktion nicht negativ sind.

Die Lösungsmenge ist daher die leere Menge: $\mathbb{L}=\{\}$.

6. LÖSEN VON GLEICHUNGEN DURCH SUBSTITUTION

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Gleichungen durch *Substitution* lösen.
- Sie besitzen die Fähigkeit, durch *Resubstitution* die Lösung zu überprüfen.

6.1 Substitution

Durch geeignete Substitution (d.h. Ersetzen von Ausdrücken) lassen sich manchmal Gleichungen auf einfachere Gleichungen zurückführen.
Insbesondere wenn die Potenz des einen Terms doppelt so hoch ist wie die des anderen Terms, wie z.B. bei biquadratischen Gleichungen, kann diese Methode nützlich sein.

6.1 BEISPIEL

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \tag{6.1}$$
$$\tag{6.2}$$

Substitution

$x^2 = u$

$$u^2 - 13u + 36 = 0 \qquad | \text{ p-q-Formel} \tag{6.3}$$
$$u_{\pm} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 - 36} \tag{6.4}$$

$$u_+ = 9 \quad \text{und} \quad u_- = 4 \tag{6.5}$$

6.2 Resubstitution

Da Lösungen der ursprünglichen Gleichung gesucht sind, müssen dann die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Diese Resubstitution führt in obigem Beispiel zu folgenden Gleichungen sowie Lösungen:

6.2 BEISPIEL

$u = x^2 = 4 \quad \text{und} \quad x^2 = 9$

Die Lösungen der Gleichung lauten somit:

$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \quad \text{und} \quad x_3 = 3 \quad \text{und} \quad x_4 = -3,$

d.h. $\mathbb{L} = \{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$.

6.3 BEISPIEL

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0 \qquad (6.6)$$
$$(6.7)$$

Substitution

$x^4 = u$

$$u^2 - 15u - 16 = 0 \qquad | \text{ p-q-Formel} \qquad (6.8)$$
$$u_{\pm} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 + 16} \qquad (6.9)$$

$$u_+ = 16 \quad \text{und} \quad u_- = -1 \qquad (6.10)$$

Resubstitution

Es gibt kein x mit $x^4 = u_- = -1$.
$x^4 = u_+ = 16$ hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$,
d.h. $\mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$.

6.3 Weitere Substitutionen

Neben Potenzen können natürlich auch andere Funktionen wie e^x, $\ln x$ und $\sin x$ substitutiert werden, die im Kapitel Elementare Funktionen genauer beleuchtet werden.

6.4 BEISPIEL

$$e^{2x} - 4e^{x} + 4 = 0$$

Mit der Substitution

$$z = e^{x}$$

wird aus der Ursprungsgleichung die quadratische Gleichung

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

die eine doppelte Lösung bei

$$z_{1,2} = 2$$

besitzt. Für die Resubstitution wird die Substitutionsgleichung nach der gesuchten Größe aufgelöst

$$x = \ln z$$

und die z-Lösung in die Resubstitutionsgleichung eingesetzt:

$$x = \ln 2$$

Die Lösungsmenge lautet also:

$$\mathbb{L} = \{\ln 2\}$$

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Berechnen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner) und überprüfen Sie Ihre Lösungen, indem Sie anschließend auf „Antwort” klicken.

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $4x^4 + 8x^2 - 60 = 0$

d) $4x^6 + 3x^3 - 1 = 0$

Antworten

a) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

b) $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

c) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$

d) $x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0,63$

Lösung zu a

Der Wert x^2 wird durch u und folglich x^4 durch u^2 substituiert.

$u^2 - 3u + 2 = 0$

Die p-q-Formel wird angewendet

$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}.$

Man erhält somit die Werte

$u_1 = 1$ und $u_2 = 2$

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt

Damit ist $x_{1,2}^2 = u_1$, $x_{3,4}^2 = u_2$

Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind somit $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{2}$ und $x_4 = -\sqrt{2}$

Lösung zu b

Der Wert x^2 wird durch u und folglich x^4 durch u^2 substituiert.

$u^2 - 13u + 36 = 0$

Alternativ zur p-q-Formel lässt sich hier auch der Satz von Vieta anwenden:

$u_1 \cdot u_2 = 36$ und $u_1 + u_2 = 13$

Daraus ergeben sich die Werte

$u_1 = 4$ und $u_2 = 9$

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt: $x_{1,2}^2 = u_1$ und $x_{3,4}^2 = u_2$

Man erhält somit $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ und $x_4 = 3$

Lösung zu c

Der Wert x^2 wird durch u und folglich x^4 durch u^2 substituiert.

$4u^2 + 8u - 60 = 0 \quad \Big| : 4$

$\Leftrightarrow u^2 + 2u - 15 = 0$

Mit der p-q-Formel erhält man

$u_1 = 3$ und $u_2 = -5$

Nun wird nach Möglichkeit resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt. Damit ist $x_{1,2}^2 = u_1 = 3$ und $x_{3,4}^2 = u_2 = -5$

Die Ergebnisse für $u_1 = 3$ sind $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$
Aber $x^2 = -5$ hat keine relle Lösung, da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist.

Die ursprüngliche Gleichung hat also die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$

Lösung zu d

Der Wert x^3 wird durch u und folglich x^6 durch u^2 substituiert.

$$4u^2 + 3u - 1 = 0 \quad \Big| : 4$$

$$\Leftrightarrow u^2 + \tfrac{3}{4}u - \tfrac{1}{4} = 0$$

Die p-q-Formel ergibt

$$u_{1,2} = -\tfrac{3}{8} \pm \sqrt{\tfrac{9}{64} + \tfrac{16}{64}} = -\tfrac{3}{8} \pm \tfrac{5}{8}$$

Damit ergeben sich die Werte

$$u_1 = -1 \text{ und } u_2 = \tfrac{1}{4}$$

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^3 eingesetzt:

$$(x_1)^3 = u_1 = -1 \text{ und } (x_2)^3 = u_2 = \tfrac{1}{4}$$

Man erhält somit

$$x_1 = -1 \text{ und } x_2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} \approx 0,63$$

ÜBUNG 2

Lösen Sie die Gleichungen durch Substitution.
(Exponential- und Logarithmusfunktionen werden hier im Vorgriff schon verwendet. Die benutzten Eigenschaften werden in Kapitel VI ausführlich behandelt.)

a) $-(x+4)^6+12(x+4)^3=11$

b) $2^{4x}+2^{2x}-6=0$

c) $2^{2x}-2^x-6=0$

Antworten

a)
$x_1=-3$ und $x_2=\sqrt[3]{11}-4\approx-1{,}78$

b) $x=\frac{1}{2}$

c) $x=\log_2(3)\approx 1,58$

Lösung zu a)

Der Wert $(x+4)^3$ wird durch u und folglich $(x+4)^6$ durch u^2 substituiert.

$$\begin{aligned} & -u^2+12u=11 \quad \big| -11 \\ \Leftrightarrow\ & -u^2+12u-11=0 \quad \big| \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow\ & \quad u^2-12u+11=0 \end{aligned}$$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2}=6\pm\sqrt{36-11}=6\pm 5.$$

Damit ergeben sich die Werte $u_1=1$ und $u_2=11$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $(x+4)^3$ eingesetzt:

$(x_1+4)^3=u_1=1$ und $(x_2+4)^3=u_2=11$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & (x_1+4)^3=1 \qquad \big|\sqrt[3]{\cdot} \\ \Leftrightarrow\ & x_1+4=\sqrt[3]{1}=1 \quad \big| -4 \\ \Leftrightarrow\ & x_1=-4+1=-3 \qquad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_2+4)^3=11 \qquad \big|\sqrt[3]{\cdot} \\ \Leftrightarrow\ & x_2+4=\sqrt[3]{11} \qquad \big| -4 \\ \Leftrightarrow\ & x_2=\sqrt[3]{11}-4\approx -1,78\,. \end{aligned}$$

Man erhält die Lösungen $x_1=-3$ und $x_2=\sqrt[3]{11}-4\approx -1{,}78$.

Lösung zu b)

Zum Erkennen der Substitution ist eine andere Schreibweise von 2^{2x} bzw. 2^{4x} hilfreich.

So gilt nach den Potenzregeln:

$2^{2x} = (2^x)^2$ und $2^{4x} = (2^x)^4$.

Der Wert $2^{2x} = (2^x)^2$ wird durch u und folglich $2^{4x} = (2^x)^4$ durch u^2 substituiert:

$u^2 + u - 6 = 0$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$.

Damit ergeben sich die Werte $u_1 = 2$ und $u_2 = -3$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder 2^{2x} eingesetzt. Man erhält $u_1 = 2 = 2^{2x}$. Das ist genau dann erfüllt, wenn $2x = 1$, also $x = \frac{1}{2}$. Zu u_2 gibt es keine Lösung, denn jede Potenz von 2 ist positiv.

Lösung zu c)

Der Wert 2^x wird durch u und folglich $2^{2x} = (2^x)^2$ durch u^2 substituiert:

$u^2 - u - 6 = 0$

Mit der p-q-Formel:

$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

ergeben sich die Werte $u_1 = 3$ und $u_2 = -2$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder 2^x eingesetzt.

Für $u_1 = 3 = 2^x$ ist $x = \log_2(3) \approx 1{,}58$ die Lösung.

Zu $u_2 = -2$ gibt es keine Lösung, da jede Potenz von 2 positiv ist.

ÜBUNG 3

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, die durch Anwendung geeigneter Substitutionen in quadratische Gleichungen umgeformt werden können.

a) $(x-1)^2 - x + 1 - 3x + 3 = 0$

b) $\frac{1}{x} + 2x^{-2} - 10 = 0$

c) $-(\frac{1}{x-2})^2 + (\frac{x-2}{3})^{-1} - \frac{9}{4} = 0$

Antworten

a) $x_1 = 5,\ \ x_2 = 1$

b) $x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_2 = -\frac{2}{5}$

c) $x = \frac{8}{3}$

Lösung zu a

Die Glieder der Gleichung werden abhängig von $x-1$ zusammengefasst:

$$(x-1)^2 - (x-1) - 3(x-1) = 0$$

Der Term $x-1$ wird durch u substituiert:

$$u^2 - 4u = 0\ .$$

Mit Faktorisierung

$$u\,(u-4) = 0$$

und Anwendung der Nullproduktregel ergeben sich die Werte

$u_1 = 4$ und $u_2 = 0$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $x-1$ eingesetzt:

Aus $(x_1 - 1) = u_1 = 4$ ergibt sich $x_1 = 5$,
und aus $(x_2 - 1) = u_2 = 0$ ergibt sich $x_2 = 1$.

Lösung zu b

Der Term $\frac{1}{x}$ wird durch u substituiert:

Beachten Sie hierbei:

$2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$

$$u + 2u^2 - 10 = 0 \quad \Big| \quad : 2$$

$\Leftrightarrow u^2 + \frac{1}{2}u - 5 = 0$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{80}{16}}$$

Daraus folgt $u_1 = 2$ und $u_2 = -\frac{5}{2}$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $\frac{1}{x}$ eingesetzt:

Damit ergeben sich die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Lösung zu c

Der Term $\left(\frac{1}{x-2}\right)$ wird durch u substituiert.

$$-u^2 + 3u - \frac{9}{4} = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$\Leftrightarrow \; u^2 - 3u + \frac{9}{4} = 0$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$$

Damit erhält man

$u = \frac{3}{2}$

Nun wird resubstituiert und für u wieder $\left(\frac{1}{x-2}\right)$ eingesetzt:

Damit ergibt sich $\frac{3}{2} = \frac{1}{x-2}$,

und damit $x = \frac{8}{3}$.

ÜBUNG 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie sie zunächst durch Anwendung geeigneter Substitutionen auf quadratische Gleichungen zurückführen.
(Exponential- und Logarithmusfunktionen werden hier im Vorgriff verwendet.)

a) $16x^4 - 80x^2 + 19 = 0$

b) $2x^5 - 64x^3 - 288x = 0$

c) $5x^4 - 40x^2 - 45 = 0$

d) $e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0$

Antworten

a) $x_1 = \frac{\sqrt{19}}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{19}}{2},\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$

b) $x_1 = 0,\ x_2 = 6,\ x_3 = -6$

c) $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

d) $x_1 = \ln(2) \approx 0,7,\ x_2 = 0$

Lösung zu a

Der Ausdruck x^2 wird durch u substituiert:

$$16u^2 - 80u + 19 = 0 \quad \Big| \quad : 16$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 5u + \frac{19}{16} = 0$$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{16}}\ .$$

Damit erhält man $u_1 = \frac{19}{4}$ und $u_2 = \frac{1}{4}$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt.

Damit ist $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$ und $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$.

Lösung zu b

Zuerst wird x ausgeklammert.

$$x\left(2x^4-64x^2-288\right)=0$$

Daraus folgt, dass $x_1=0$ eine Lösung ist.

Dann wird x^2 durch u substituiert.

$$2u^2-64u-288=0$$

Nun wird durch 2 dividiert:

$$u^2-32u-144=0$$

Mit der p-q-Formel:

$$u_{1,2}=16\pm\sqrt{256+144}=16\pm\sqrt{400}$$

erhält man $u_1=36$ und $u_2=-4$.

Nun wird resubstituiert und für positives u wieder x^2 eingesetzt:

Daraus ergeben sich $x_2=6$ und $x_3=-6$.

Lösung zu c

In der Gleichung wird x^2 durch u substituiert:

$$5u^2-40u-45=0 \quad \Big| \quad :5$$

$$\Leftrightarrow u^2-8u-9=0$$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2}=4\pm\sqrt{16+9}\,.$$

Damit ergeben sich $u_1=9$ und $u_2=-1$.

Nun wird resubstituiert und für positive u wieder x^2 eingesetzt.

Damit ergibt sich $x_1=3$ und $x_2=-3$.

Lösung zu d

Der Ausdruck e^{2x} wird durch u und folglich e^{4x} durch u^2 substituiert.

$u^2 - 5u + 4 = 0$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

erhält man $u_1 = 4$ und $u_2 = 1$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder e^{2x} eingesetzt.

Damit ergeben sich die Bedingungen $e^{2x_1} = 4$ und $e^{2x_2} = 1$.

Durch Anwenden des Logarithmus erhält man $x_1 = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2) \approx 0{,}7$ und $x_2 = 0$.

KAPITELÜBUNGEN

ÜBUNG 1

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $\sqrt{x+4} = x - 2$

b) $\sqrt{2x - 15} = x - 7$

c) $2x^4 + 16x^2 - 40 = 0$

d) $|4 - x| = 3$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{5\}$

b) $\mathbb{L} = \{8\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \{1;\ 7\}$

Lösung zu a

Auf beiden Seiten der Gleichung wird quadriert.

$x + 4 = (x - 2)^2$

Nun wird ausmultipliziert. So ergibt sich:

$x + 4 = x^2 - 4x + 4$

also
$0 = x^2 - 5x$

Es gilt weiter:
$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$

Nach der Null-Produktregel sind also:

$x_1 = 5$ und $x_2 = 0$ mögliche Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Allerdings löst nur $x_1 = 5$ die ursprüngliche Gleichung,

$\sqrt{x + 4} = x - 2$

wie durch das Einsetzen beider Lösungen x_1 , x_2 in diese Gleichung sofort bestätigt wird:

$\sqrt{5 + 4} = 5 - 2$

$\Rightarrow \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{0 + 4} \neq 0 - 2$

Lösung zu b

Beide Seiten der Gleichung werden quadriert.

$2x - 15 = (x - 7)^2$
$\Rightarrow 2x - 15 = x^2 - 14x + 49 \quad \Big| - 2x + 15$
$\Rightarrow 0 = x^2 - 16x + 64$

Mit Hilfe der p-q-Formel erhält man

$x_1 = 8$

Das Einsetzen in die Originalgleichung liefert eine wahre Aussage.

Lösung zu c

Im ersten Schritt wird

x^2 durch u substituiert und anschließend
die dadurch entstehende Gleichung durch 2 dividiert:

$$u^2 + 8u - 20 = 0$$

Danach wird die p-q-Formel angewendet

$$u_{1,2} = -4 \pm \sqrt{36}$$

Dadurch ergeben sich die Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -10$

Nun wird resubstitutiert und für

u wieder x^2 eingesetzt:

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$ 。

Lösung zu d

Fallunterscheidung für

$4-x<0$ und für $4-x\geq 0$:

1. Fall: $4<x$ und $-(4-x)=3$ 。

Man erhält:

$$x=7$$

Da

$7>4$ ist, ist $x=7$ tatsächlich eine Lösung.

2. Fall:

$4\geq x$ und $4-x=3$ 。

Man erhält:

$$x=1$$

Da

$1\leq 4$ ist, ist $x=1$ tatsächlich eine Lösung.
Wir haben also die Lösungen $x_1=7$ und $x_2=1$ 。

ÜBUNG 2

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $3x - 5(3 - 2x) + 3(-4 + 3x) = 3 - 8(7 - 3x)$

b) $3x - 4(2 - 2x) - 4(x + 11) + 25x^2 = 3 - 3(3 - 3x) - (5 + 5x)(5 - 5x)$

c) $\sqrt{4x + \sqrt{x + 3}} = \sqrt{5x + 1}$

d) $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 4$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{13\}$

b) $\mathbb{L} = \{-10,5\}$

c) $\mathbb{L} = \{1\}$

d) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{11}{3};\ -1\right\}$

Lösung zu a

Auf beiden Seiten der Gleichung werden zunächst die Klammern ausmultipliziert und anschließend auf jeder Seite gleichartige Terme zusammengefasst.

$$3x - 15 + 10x - 12 + 9x = 3 - 56 + 24x \quad \Leftrightarrow \quad 22x - 27 = -53 + 24x.$$

Nun wird weiter zusammengefasst und nach

x aufgelöst:

$$26 = 2x,$$
$$13 = x.$$

Lösung zu b

Auf beiden Seiten der Gleichung werden die Klammern aufgelöst.

$$3x - 8 + 8x - 4x - 44 + 25x^2 = 3 - 9 + 9x - 25 + 25x^2$$

Nun wird zusammengefasst und man erhält:

$$-21 = 2x,$$
$$-10{,}5 = x.$$

Lösung zu c

Im ersten Schritt wird auf beiden Seiten der Gleichung quadriert:

$4x + \sqrt{x+3} = 5x + 1$

Danach wird

$4x$ subtrahiert und anschließend nochmal beide Seiten der so entstehenden neuen Gleichung quadriert. Damit ergibt sich: $0 = x^2 + x - 2$

Nun wird die p-q-Formel angewendet und man erhält:

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

Daraus ergeben sich die Werte $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ 。

Nach dem Einsetzen in die Ursprungsgleichung erhält man nur für $x_1 = 1$ eine wahre Aussage. Der Term $\sqrt{5x+1}$ ist für $x = -2$ nicht definiert.

Lösung zu d

Zu Beginn wird $x = -2$ ausgeschlossen, denn der Nenner darf nicht Null sein. Im Weiteren werden nur

$x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ betrachtet.

Fallunterscheidung für

$\frac{x-3}{x+2} \geq 0$ und für $\frac{x-3}{x+2} < 0$: Ein Bruch ist positiv, wenn Zähler und Nenner beide positiv oder beide negativ sind. Das ist der Fall, wenn $x > 3$ oder $x < -2$ gilt. Für $x = 3$ ist der Bruch Null. Der Bruch ist negativ, wenn Zähler und Nenner verschiedene Vorzeichen haben, also für $-2 < x < 3$.

1. Fall: $\frac{x-3}{x+2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$ oder $x \geq 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$\frac{x-3}{x+2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 4x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad -11 = 3x.$

So ergibt sich $x = -\frac{11}{3}$ Das erfüllt $-\frac{11}{3} < -2$ und gehört damit zur Lösungsmenge.

2. Fall: $\frac{x-3}{x+2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$-\frac{x-3}{x+2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x = 4x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad -5 = 5x$

So folgt $x = -1$ und -1 liegt zwischen -2 und 3.

Es ergeben sich also die Lösungen $x_1 = -\frac{11}{3}$ und $x_2 = -1$

ÜBUNG 3

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $\sqrt[7]{x+1} = \sqrt[14]{2x+10}$

b) $\left|x^2 - 9\right| = 5$

c) $\sqrt[8]{7x+1} = \sqrt[4]{x+1}$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{3\}$

b)
$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{14};\ -2;\ 2;\ \sqrt{14}\right\}$

c)
$\mathbb{L} = \{0;\ 5\}$

Lösung zu a

Beide Seiten der Gleichung werden mit dem höheren Wurzelexponenten potenziert.

$(\sqrt[7]{x+1})^{14} = (\sqrt[14]{2x+10})^{14}$

$\Leftrightarrow (x+1)^{\frac{14}{7}} = 2x+10$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+10$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

Daraus folgt: $x_{1,2} = \pm 3$

Es wird die Probe durchgeführt.

Das Ergebnis

$x_2 = -3$ löst die ursprüngliche Gleichung nicht, denn $\sqrt[7]{x+1}$ ist für $x = -3$ nicht definiert, aber $x_1 = 3$ erfüllt die Gleichung.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \{3\}$

Lösung zu b

Fallunterscheidung für $x^2 - 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3$ oder $x \leq -3$

und für $x^2 - 9 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 3$:

1. Fall: $x \leq -3$ oder $x \geq 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$x^2 - 9 = 5$

und man erhält: $x_1 = -\sqrt{14}$ sowie $x_2 = \sqrt{14}$.

2. Fall:

$-3 < x < 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$-x^2 + 9 = 5$

und man erhält: $x_3 = -2$ sowie $x_4 = 2$.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{14};\ -2;\ 2;\ \sqrt{14}\right\}.$

Lösung zu c

Beide Seiten der Gleichung werden mit dem höheren Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt[8]{7x+1})^8 = (\sqrt[4]{x+1})^8$$

$$\Leftrightarrow (7x+1)^{\frac{8}{8}} = (x+1)^{\frac{8}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 7x+1 = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x+1 = x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow 5x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$$

Es wird faktorisiert:

$$x(x-5) = 0.$$

Das wird gelöst von $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$.

Es wird die Probe durchgeführt. Beide Ergebnisse für x ergeben in der Ursprungsgleichung eine wahre Aussage.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{0;\ 5\}.$$

ÜBUNG 4

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $5x^5 - 15x^3 + 10x = 0$

b) $\sqrt[3]{x - 5\sqrt[3]{x+2}} = 2$

c) $|2x + 4| = 6$

d) $|x - 2| = 2x + 5$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 1;\ -1\right\}$

b) $\mathbb{L} = \{6\}$

c) $\mathbb{L} = \{1;\ -5\}$

d) $\mathbb{L} = \{-1\}$

Lösung zu a

Die Gleichung wird faktorisiert.

$$x\left(5x^4 - 15x^2 + 10\right) = 0$$

Diese Gleichung ist nach der Nullproduktregel erfüllt für $x_1 = 0$ 。

Nun wird im zweiten Faktor x^2 mit u substituiert und die Gleichung durch 5 dividiert:

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

Mit der p-q-Formel erhält man folgende Lösungen (in u): $u_1 = 2$ und $u_2 = 1$.

Es wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt:

Damit ergeben sich $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ sowie $x_{4,5} = \pm 1$.

Die Lösungsmenge ist insgesamt:

$$\mathbb{L} = \left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 1;\ -1\right\}.$$

Lösung zu b

Beide Wurzeln werden miteinander multipliziert.

$$\sqrt[3]{(x-5)(x+2)} = 2$$

Nun wird unter der Wurzel ausmultipliziert.

$$\sqrt[3]{x^2+2x-5x-10} = 2$$

Jetzt werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten 3 potenziert und anschließend alle Terme auf eine Seite gebracht.

$$x^2-3x-18=0$$

Mit Hilfe der p-q-Formel erhält man $x_1 = 6$ und $x_2 = -3$.

Es wird die Probe durchgeführt.

Daraus folgt, dass die Zahl -3 keine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist, denn $\sqrt[3]{x+2}$ ist für $x < -2$ nicht definiert. Die andere Lösung erfüllt die ursprüngliche Gleichung.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{6\}$$

Lösung zu c

Fallunterscheidung für $2x+4 \geq 0$ und für $2x+4<0$:

1. Fall: $x \geq -2$

Die Gleichung $2x+4=6$ wird nach x aufgelöst.

Daraus ergibt sich $x_1=1$.

2. Fall: $x<-2$

Die Gleichung $-2x-4=6$ wird nach x aufgelöst.

Folglich ist $x_2=-5$.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}=\{1;\ -5\}.$$

Lösung zu d

Fallunterscheidung für $x-2 \geq 0$ und für $x-2<0$:

1. Fall: $x \geq 2$

Die Gleichung $x-2=2x+5$ wird nach x aufgelöst.

Folglich ist $x=-7$.

Diese Lösung liegt nicht im vorher festgelegten Bereich $x \geq 2$.

2. Fall: $x<2$

Die Gleichung $-x+2=2x+5$ wird nach x aufgelöst.

Folglich ist $x_2=-1$.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$\mathbb{L}=\{-1\}$