

# Brueckenkurs SoSe24 Uebungen

## SoSe 2023

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

### Aufgabenkatalog - März, 2024

---

#### 1. Reihenfolge der Operationen

Lösen Sie die Klammern auf.

1.  $-(x + y + z)$
2.  $-(3a - 4)$
3.  $-[5 - (6 + x)]$
4.  $-[(b - c) - a]$
5.  $-[2(-4)(-a)]$
6.  $-[-(5 + a - 2(-a)) - 4]$

#### 2. Ausmultiplizieren

Multiplizieren Sie die Klammern aus.

1.  $5(a + b)$
2.  $3(x + 2)$
3.  $(x + a) \cdot 4$
4.  $(a + 4b) \cdot 2$
5.  $3a \cdot (4 + b)$
6.  $7y \cdot (3 + 2y)$
7.  $4y \cdot (2x + 6y)$
8.  $10a \cdot (5x + 4z)$
9.  $(3y + 2b) \cdot 8ax$

#### 3. Ausklammern

Klammern Sie aus

1.  $3a + 3b$
2.  $xy + 2x$
3.  $a^2b + ab^2$

4.  $24ab + 12a^2b - 3ab^2$
5.  $49x^2y^2 + 21x^2 - 14$
6.  $169a^4b^3 + 65a^3b^5 - 26a^5b^4$
7.  $30a^2b^4c^7 - 6a^2b^4c^7 + 8a^7b^4c^2$
8.  $100xy^2 - 20x^2yz + 50x^2z - 25xyz^2$

#### 4. Binomische Formeln

Fassen Sie die Terme mit binomischen Formeln zusammen.

1.  $x^2 + 2xy + y^2$
2.  $49x^2 + 14xy + y^2$
3.  $16x^2 - 16xy + 4y^2$
4.  $25a^4 + 20a^2b^2 + 4b^4$
5.  $a^8 - 2a^4b^2 + b^4$
6.  $18a + 84ab + 98ab^2$
7.  $4a^2 - b^2$
8.  $18x^2 - 2y^4$

#### 5. Brüche in Dezimalzahlen

Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

- (a)  $\frac{1}{10}$       (b)  $\frac{2}{5}$       (c)  $\frac{5}{4}$       (d)  $\frac{6}{3}$       (e)  $\frac{2}{3}$       (f)  $\frac{3}{11}$

#### 6. Brüche Erweitern

Erweitern Sie folgende Brüche, und multiplizieren Sie jeweils Zähler und Nenner aus. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der resultierende Bruch definiert ist.

1.  $\frac{1}{2}$  mit 3
2.  $\frac{5a}{2}$  mit  $a$
3.  $\frac{4a^2}{3b^2}$  mit  $2a^2b$
4.  $\frac{3-c}{ab}$  mit  $(3+c)$
5.  $\frac{3a+b}{4-c}$  mit  $ac$
6.  $\frac{3(x-2y)}{(x+y)(x-y)}$  mit  $xy$

#### 7. Brüche Kürzen

Kürzen Sie folgende Brüche. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

1.  $\frac{64}{24}$
2.  $\frac{27a}{18b}$
3.  $\frac{54a^2}{a^3}$
4.  $\frac{63a^2b}{14ab^2}$
5.  $\frac{25x-5y}{15xy}$
6.  $\frac{56x^2y-16xy^2}{24yz+40y^2}$
7.  $\frac{12xy-4yz}{16xz+8xy}$
8.  $\frac{3ab^4-17ab^2+39a^2b^2}{ab^2}$
9.  $\frac{28a^3b^3-4ab}{12ab+8a^2b^2}$

## 8. Brüche Addieren und Subtrahieren

Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

1.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$
2.  $\frac{a}{5} + \frac{2}{10}$
3.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$
4.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8}$
5.  $\frac{3a}{7} + \frac{6a}{3} - \frac{12a}{21}$
6.  $\frac{2}{a+1} + \frac{1}{3a+3} - \frac{4}{a+1}$
7.  $\frac{2x}{x+1} - \frac{3y}{y+1} + \frac{xy}{(x+1)(y+1)}$
8.  $\frac{3a}{6ab} - \frac{7b}{3a} + \frac{2ab}{4}$
9.  $\frac{x}{-x-2y} + \frac{y}{x+2y}$
10.  $\frac{2y}{3z+6} + \frac{1-y}{z+2} + \frac{3x-2xy}{3xz+6x}$

## 9. Bruchrechnung

Die Aufgaben sollten ohne Taschenrechner gelöst werden. Versuchen Sie daher möglichst frühzeitig zu kürzen!

1.  $\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}$
2.  $\frac{\frac{1}{2}-(2+\frac{1}{2}):(-1-\frac{1}{4})}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}$
3.  $\left[-2^2 : \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\right]^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^4 - \left[-5 : \left(1 + \frac{2}{3}\right)\right]^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

4.  $\frac{-\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3}{-2 + \frac{1}{3}} - \frac{-\frac{3}{2} + 2^{-3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)} + \frac{108}{35}$
5.  $\left(\frac{5}{2^{-1}+3^{-1}} - \frac{1}{3^{-1}-4^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^{-1}-3^{-1}} - \frac{7}{3^{-1}+4^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2$

#### 10. Potenzen

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Potenzen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

1.  $(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$
2.  $\frac{1}{a} \left(-\frac{1}{a}\right) \frac{1}{-a}$
3.  $(-a^2) \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3$
4.  $\frac{xy}{-z} \cdot \frac{-xy^2}{z^2} \cdot \frac{x^2(-y)}{z}$
5.  $(x+y)^{-3}(x+y)^8(x+y)^{-2}$
6.  $\frac{(x-y)^2-1}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^{-2}}{(x-y)^3}$

#### 11. Potenzen Zusammenfassen

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

1.  $(a^2)^3$
2.  $((-2)^2)^4$
3.  $(a^2b)^3$
4.  $\frac{(x-1)^3}{(1-x)^3}$
5.  $(x-1)^4 + 7(x-1)^4 - 12(x-1)^4 + 3(x-1)^4$
6.  $13(a-1)^3 + 2(a-1)^3 - 8(a-1)^3 + 2(a-1)^3$
7.  $2^3a^3b^3 \cdot 7^3c^3$
8.  $x^2yz^3 \cdot xy^2 + (2xyz)^3$
9.  $5^2x^{-1}y^3 \cdot 5^{-2}x^2y^{-2}$
10.  $(4(x^2y^2)^3 - (2xy)^3)^2$
11.  $16xy^2 \cdot (2x)^2 - 2^5x^3y^2 + (8x)^2 \cdot x^{-1}(xy)^2$
12.  $-121ab^3 - (11a^2b)^2 \cdot (-2a^{-3}b)$

#### 12. Wurzelrechnung

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

1.  $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$

2.  $\sqrt[4]{(-2)^2}$
3.  $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$
4.  $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1-x}}$
5.  $\sqrt[4]{x-1} + 7\sqrt[4]{x-1} - 12\sqrt[4]{x-1} + 3\sqrt[4]{x-1}$
6.  $13\sqrt[3]{a-1} + 2\sqrt[3]{a-1} - 8\sqrt[3]{a-1} + 2\sqrt[3]{a-1}$
7.  $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{c}$
8.  $\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[2]{z} \cdot \sqrt[4]{x}\sqrt[6]{y} + \sqrt{2xyz}$
9.  $\frac{\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt[5]{5}\sqrt{y}}$
10.  $(4\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{2xy})^2$

### 13. Logarithmen

Berechnen Sie folgende Logarithmen.

1.  $\log_4(64)$
2.  $\log_4(2)$
3.  $\log_7(7^2)$
4.  $\log_2(8)$
5.  $\log_5(25)$
6.  $\log_3(27)$
7.  $\log_{10}(100)$
8.  $\log_e(e)$
9.  $\log_7(\frac{1}{49})$
10.  $\log_4(16)$
11.  $\log_8(64)$
12.  $\log_6(\frac{1}{216})$
13.  $\log_9(81)$

### 14. Logarithmen zusammenfassen

Fassen Sie die folgenden Logarithmen zusammen.

1.  $\log(2) + 2\log(3) + 3\log(5)$
2.  $3\log(2) - 2\log(7) + \frac{1}{2}\log(3)$
3.  $\frac{1}{2}\log(2) + 4\log(5) - \frac{3}{2}\log(3)$
4.  $2\log(2) + \log(7) - \frac{1}{2}\log(5)$
5.  $5\log(3) - 3\log(2) + \frac{1}{2}\log(7)$

6.  $2 \log(3) + \log(5) - 3 \log(2)$
7.  $3 \log(7) - \frac{1}{2} \log(2) + 2 \log(5)$
8.  $\frac{1}{2} \log(7) + \frac{3}{2} \log(2) - 4 \log(3)$
9.  $4 \log(2) - \frac{1}{2} \log(5) + \log(3)$
10.  $\log(3) + 2 \log(7) - 3 \log(2)$

15. Basiswechsel von Logarithmen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

1.  $\frac{\log_7(8)}{\log_7(2)}$
2.  $\frac{\log_3(25)}{\log_3(5)}$
3.  $\frac{\log_5(27)}{\log_5(3)}$
4.  $\frac{\log_2(100)}{\log_2(10)}$
5.  $\frac{\log_3(e)}{\log_3(e)}$
6.  $\frac{\log_4(49)}{\log_4(7)}$
7.  $\frac{\log_2(16)}{\log_2(4)}$
8.  $\frac{\log_2(64)}{\log_2(8)}$
9.  $\frac{\log_2(216)}{\log_2(6)}$
10.  $\frac{\log_3(81)}{\log_3(9)}$

*✓ Erklärung*

16. Bisektionverfahren

Finden Sie mithilfe des Bisektionsverfahrens zwei rationale Zahlen, zwischen denen das Ergebnis der angegebenen Potenzen liegt.

1.  $2^\pi$
2.  $3^e$
3.  $(2^{10})^\pi$
4.  $(3^{100})^e$

17. *Teilbarkeit und Division mit Rest*

Bestimmen Sie jeweils, ob eine der beiden angegebenen natürlichen Zahlen die andere teilt. Falls nicht, geben Sie jeweils den Rest bei Division der größeren durch die kleinere Zahl an.

- |             |                    |
|-------------|--------------------|
| 1. 5, 15    | 5. 25, 505         |
| 2. 50, 67   | 6. 1024, 9         |
| 3. 3, 102   | 7. 10023, 3        |
| 4. 129, 129 | 8. 978654321081, 8 |

18. *Primzahlen und Faktorisierung*

Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen jeweils, ob es sich um Primzahlen handelt. Falls nicht, geben Sie jeweils die Faktorisierung in Primzahlen an.

- |         |         |
|---------|---------|
| 1. 3    | 5. 3600 |
| 2. 1    | 6. 3060 |
| 3. 1024 | 7. 137  |
| 4. 243  | 8. 237  |

19. *Kürzen von Brüchen*

Kürzen Sie folgende Brüche jeweils soweit wie möglich ( $a, b, c$  seien jeweils beliebige, paarweise teilerfremde, natürliche Zahlen ungleich Null):

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. $\frac{15}{25}$                 | 5. $\frac{(a-b)^3 + (b^3 - a^3)}{36a}$     |
| 2. $\frac{720a^2}{12ab}$           | 6. $\frac{a^{32} - 1024}{a^{16} - 32}$     |
| 3. $\frac{48(a^2 - b^2)}{6a + 6b}$ | 7. $\frac{a^2 + 1024}{a + 1024}$           |
| 4. $\frac{ab + ac}{(a+b)^2 - b^2}$ | 8. $\frac{2310(a^4 - b^2)}{4641(a^2 + b)}$ |

20. *Rechnen mit rationalen Zahlen*

Formen Sie die folgenden Ausdrücke jeweils so um, dass nur ein soweit wie möglich gekürzter Bruch übrigbleibt:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\frac{7}{3} + \frac{15}{24}$            | 5. $\frac{49}{3} - \frac{150-3}{21}$           |
| 2. $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{21+7}{4^2}$ | 6. $\frac{100}{13} \cdot \frac{196}{10}$       |
| 3. $\frac{4}{7} \cdot \frac{49}{12}$        | 7. $\frac{1+2+3}{2^{10}} \cdot \frac{8^2}{3!}$ |
| 4. $\left(2 + \frac{1}{137}\right)^3$       | 8. $\frac{9}{11} / \frac{121}{27}$             |

21. *Rationale und Irrationale Zahlen*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Zahlen rational oder irrational sind, und beweisen Sie gegebenenfalls die Irrationalität:

- |                  |   |
|------------------|---|
| 1. $\frac{5}{2}$ | 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$   |
| 2. $\sqrt{37}$   | 5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$   |
| 3. $\sqrt{36}$   | 6. $\frac{(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5})}$ |

22. *Potenzen und Logarithmen*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke jeweils unter Verwendung der Potenz- und Logarithmengesetze soweit, dass höchstens noch eine Potenz oder ein Logarithmus im

Ergebnis auftritt ( $a, b, c > 0, n, m \in \mathbb{N}$ ):

- |                                       |                             |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $\log_a b + \log_a c - \log_b b^c$ | 5. $a^n b^n c^{-n}$         |
| 2. $\log_b a \cdot \log_a b$          | 6. $(a^n z^{-n})^{1/(n+1)}$ |
| 3. $\log_2 1024 - \log_5 125$         | 7. $a^m a^n$                |
| 4. $2^{\log_3 9}$                     | 8. $(a+b)^m c^m$            |

### 23. Komplexe Zahlen

*komplexe Zahlen noch nicht behandelt*

Bestimmen Sie für folgende komplexe Zahlen  $z$  jeweils  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $|z|$ ,  $\arg(z)$  und  $z^*$  ( $a$  und  $b$  seien jeweils beliebige reelle Zahlen):

- |                     |                                     |
|---------------------|-------------------------------------|
| 1. $z = a + bi$     | 5. $z = \sqrt{3} - 3i$              |
| 2. $z = 4 - 4i$     | 6. $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ |
| 3. $z = 13a$        | 7. $z = e^{\frac{\pi}{6}i}$         |
| 4. $z = (a^6 + 5)i$ | 8. $z = 17e^{3\pi i}$               |

### 24. Rechnen mit komplexen Zahlen

Formen Sie die folgenden Ausdrücke jeweils in die Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  um:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(3 + 5i) - (4 - 2i)$                                    | 8. $\frac{5}{3+4i}$   |
| 2. $\frac{1-2i}{3} + \frac{3+5i}{2}$                        | 9. $(1+i)e^{\frac{3\pi}{4}i}$   |
| 3. $(1+2i)^{-1}$  | 10. $\left(\frac{(1+i)^4}{2-2i}\right)^2$   |
| 4. $(1+i)(1-i)$   | 11. $(e^{\frac{\pi}{4}i} - 1) \left(e^{\frac{\pi}{4}i} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) (e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{2\pi}{3}i})$ |
| 5. $(12 + 3\sqrt{2}i) \left(\frac{1}{3} - \sqrt{2}i\right)$ | 12. $e^{\frac{\pi i}{8}} + e^{\frac{19\pi i}{24}} + e^{-\frac{13\pi i}{24}}$  |
| 6. $e^{\frac{\pi}{2}i} - 5(2 + e^{\pi i})$                  |   |
| 7. $\frac{1+i}{1-i}$  |   |

### 25. Trigonometrische Identitäten

Leiten Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten jeweils mit Hilfe der Euler-Formel  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  her:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha$                              | 4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$   |
| 2. $\cos(3\alpha) = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$            | 5. $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$                 |
| 3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ | 6. $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ |