ÜBERBLICK: POTENZEN, PROPORTIONALITÄT

Hier ist ein erstes Trailer-Video zu diesem Kapitel

[video-online-only]

Inhalt

Abschnitt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (2MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie hier direkt zur Schlussprüfung gelangen.

Lernziele

- Sie beherrschen die Potenzgesetze (Abschnitte 1).
- Sie können Potenz- und Wurzelgesetze zielgerichtet anwenden (Abschnitte 2).
- Sie wissen, wie Wurzeln auf Potenzen zurückgeführt werden, und können damit rechnen (Abschnitt 3).
- Sie sind sicher im Umgang mit Prozentangaben und beherrschen die Zins- und Zinseszinsrechnung (Abschnitt 5).

ZUSAMMENFASSUNG

Thema dieses Kapitels sind Wurzeln und Potenzen und der Umgang damit sowie Proportionalität, Prozente und Berechnung von Zins und Zinseszins.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

1. POTENZGESETZE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie verstehen die Begriffe „Basis” und „Exponent”.
- Sie sind in der Lage, die Potenzgesetze anzuwenden, um Ausdrücke zu vereinfachen.

1.1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

Multipliziert man eine Zahl a mehrfach mit sich selbst, so kann dies abgekürzt geschrieben werden. Dazu wird die Anzahl der Male, mit der a mit sich selbst multipliziert wird, als Index an die Zahl a rechts oben anfügt.

1.1 DEFINITION (
n-TE POTENZ, BASIS UND EXPONENT)

Das
n-fache Produkt eine reellen Zahl
a mit sich selbst heisst
n-*te Potenz* von
a und wird so geschrieben

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Insbesondere ist

$$a^1 = a.$$

a heisst die *Basis* von
a^n und
n der *Exponent*.

1.2 BEISPIEL

Es ist

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$
2. $1^{2234556567} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{2234556567\text{-mal}} = 1.$
3. $$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + x^2 = \frac{1}{4} - x + x^2. \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{3}\right)^3 &= \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{(-4)^3}{3^3} = -\frac{64}{27}. \end{aligned}$$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^4}{b^4}.$

1.3 BEMERKUNG

Für eine reelle Zahl
a und natürliche Zahlen
$m, n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden beiden Gleichungen für Potenzen:

$$a^n\, a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n\text{-mal}} = a^{n+m},$$

$$\begin{aligned}(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m\text{-mal}} &= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}}_{m\text{-mal}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \cdot m\text{-mal}} = a^{n \cdot m}.\end{aligned}$$

1.2 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

Im Folgenden sollen Potenzen
a^k auch für Exponenten
$k \leq 0$ definiert werden. Eine sinnvolle Definition gibt es jedoch nur für Basen
a, die verschieden von Null sind:

1.4 DEFINITION

Für
$a \in \mathbb{R}$ mit
$a \neq 0$ und
$n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sich für ganzzahlige Exponenten analoge Potenzgesetze ergeben, wie für Exponenten aus den natürlichen Zahlen.

ERGÄNZUNG (BEGRÜNDUNG DER DEFINITION)
Anzeigen

1.5 BEMERKUNG

Durch die Forderung, dass sich die Potenzgesetze von natürlichen Exponenten auf ganzzahlige (auch negative und null) singgemäß übertragen, konnten wir allen Potenzen a^n mit $a \neq 0$ einen eindeutigen Wert zuweisen. Insbesondere muss für $a \neq 0$ dann $a^0 = 1$ gelten. Für $a = 0$ liefert diese Forderung jedoch keine Bedingung an den Wert von 0^0 (und 0^n ist für negative n nicht definiert).

Wird jedoch mit Variablen gerechnet und taucht dabei ein Ausdruck wie x^0 auf, so ist es üblich, die Identität $x^0 = 1$ für alle reellen Zahlen x festzulegen - auch für $x = 0$ [und entsprechend bedeutet dies auch zum Beispiel $(4x-3)^0 = 1$ usw.]. Das bedeutet, dass man die Konvention $0^0 = 1$ gewählt hat (vgl. auch die Definition von Monomen in Abschnitt VI.2).Dies ist wie gesagt nicht zwingend, sondern eine von mehreren Möglichkeiten.

1.6 BEISPIEL

Für $a, x \neq 0$ gilt:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}, \qquad 4a^{-3} = \frac{4}{a^3},$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}, \qquad x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Für die Multiplikation und Division von Potenzen gelten folgende Regeln:

1.7 SATZ (POTENZGESETZE)

Für zwei reelle Zahlen
a und
b mit
$b \neq 0$ und zwei ganze Zahlen
k und
m gelten die folgenden Regeln:

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

(*Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert*)

$$\frac{b^k}{b^m} = b^{k-m}$$

(*Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert*)

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

(*Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert*)

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

(*Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert*)

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

(*Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert*)

1.8 BEISPIEL

1. $(-5)^2 \cdot (-5)^{-3} = (-5)^{2-3} = (-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

2. $\frac{(13^2)^{-6}}{13^9 \cdot 13^{-3}} = \frac{13^{-12}}{13^6} = \frac{1}{13^{12} \cdot 13^6} = \frac{1}{13^{18}}$

3. $0{,}000027^{-1} = \left(\frac{27}{1000000}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{27}{1000000}} = \frac{1000000}{27}$

4. $\frac{4^6}{(2^2 \cdot 3^2)^3} = \frac{4^6}{(6^2)^3} = \frac{4^6}{6^6} = \left(\frac{4}{6}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

5. $3^2 \cdot 3^{-4} \cdot 2^8 \cdot 2^{-5} = 3^{2-4} \cdot 2^{8-5} = 3^{-2} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$

6. $$\begin{aligned}(x^{-2} \cdot y^{-3})^{-3} \cdot x &= (x^{(-2)\cdot(-3)} \cdot y^{(-3)\cdot(-3)}) \cdot x \\ &= x^6 \cdot y^9 \cdot x = x^6 \cdot x^1 \cdot y^9 = x^7 \cdot y^9, \ x, y \neq 0\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{x-y}\right)^2 &= \frac{5^{-1}}{7^{-1}} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} \\ &= \frac{7}{5} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} = \frac{35}{(x-y)^2}, \ x - y \neq 0\end{aligned}$$

[online-only]

Bei der Addition und Subtraktion von Potenzen ist zu beachten, dass nur Potenzen mit gleicher Basis **und** gleichem Exponenten zusammengefasst werden können. So ist etwa

$$2^3 + 4 \cdot 2^3 - \frac{1}{5} \cdot 2^3 = 2^3 \cdot \left(1 + 4 - \frac{1}{5}\right) = 2^3 \cdot \frac{24}{5} = 8 \cdot \frac{24}{5} = \frac{192}{5},$$

aber, um gleich einmal zwei sehr populäre Fehler als solche zu brandmarken, auch

$$\begin{aligned}&5^3 - 6^3 = 125 - 216 = -91 \neq -1 = (-1)^3 = (5-6)^3 \quad \text{und} \\ &4^7 - 4^4 = 16128 \neq 64 = 4^{7-4}.\end{aligned}$$

Im folgenden und in einem späteren Abschnitt werden auch Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten behandelt.

Die nächsten Beispiele zeigen, wie nützlich Potenzen bei der mathematischen Beschreibung von Zusammenhängen in der Natur sind.

ERGÄNZUNG (BEISPIELE AUS DEN NATURWISSENSCHAFTEN)
Anzeigen

ERGÄNZUNG (LEGENDE ZUM SCHACHSPIEL)
Anzeigen

Zurück zum Kapitelüberblick

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Berechnen Sie:

a)
$2^2 \cdot 5^2$

b)
$5^5 \cdot 25^{-2}$

c)
$(-3)^3$

d)
$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

Antwort

a)
100

b)
5

c)
-27

d)
$\frac{125}{8}$

Lösung a)

Wir berechnen zuerst
2^2 und
5^2 getrennt:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2 \cdot 2 = 4 \\ 5^2 &= 5 \cdot 5 = 25 \end{aligned}$$

Daher ist

$$2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

Alternativ folgt unter Benutzung der Potenzgesetze:

$$2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2 = 100$$

Lösung b)

Wir schreiben
25 als
5^2, um die Rechenregeln für Potenzen anwenden zu können. Dadurch ergibt sich

$$5^5 \cdot 25^{-2} = 5^5 \cdot (5^2)^{-2} = 5^5 \cdot 5^{2\cdot(-2)} = 5^5 \cdot 5^{-4} = 5^{5-4} = 5^1 = 5$$

Lösung c)

Wir berechnen den Ausdruck direkt mithilfe der Definition der Potenz:

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$$

Lösung d)

Der Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Rechenregeln für Potenzen umformen:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right]^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{125}{8}$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie:

a)
$2^{12} \cdot 2^{-11}$

b)
$4^3 \cdot 16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

c)
$\frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot (3^3)^{-5}$

d)
$\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$

Antwort

a)
2

b)
1

c)
3

d)
3^{18}

Lösung a)

Das Produkt zweier Potenzen mit gleicher Basis lässt sich zu einer Potenz vereinfachen:

$$2^{12} \cdot 2^{-11} = 2^{12-11} = 2^1 = 2$$

Lösung b)

Wir schreiben zuerst die drei Faktoren als Potenzen mit der gemeinsamen Basis 2 und erhalten

$$4^3 = (2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 \quad 16^{-2} = (2^4)^{-2} = 2^{-8} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^{(-1)(-2)} = 2^2$$

Das Produkt kann nun vereinfacht werden:

$$4^3 \cdot 16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^6 \cdot 2^{-8} \cdot 2^2 = 2^{6-8+2} = 2^0 = 1$$

Lösung c)

Erneut vereinfachen wir den Term zuerst durch die Anwendung der Rechenregeln für Potenzen:

$$\frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot (3^3)^{-5} = \frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot 3^{3\cdot(-5)} = \frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot 3^{-15} = \frac{3^{11} \cdot 3^{-15}}{3^{-5}} = \frac{3^{-4}}{3^{-5}} = 3^{-4-(-5)} = 3^1 = 3$$

Lösung d)

Wir berechnen:

$$\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3} = \frac{3^{27}}{3^{3\cdot 3}} = \frac{3^{27}}{3^9} = 3^{18} = 387\,420\,489$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie:

a)
$\left(a^2 - ab + b^2\right)(a + b)$

b)
$(7xy + z)(4z - 8x + xy)$

c)
$\frac{12x^2 + 84xy + 147y^2}{6x + 21y}$

Antwort

a)
$a^3 + b^3$

b)
$29xyz - 56x^2y - 8xz + 4z^2 + 7x^2y^2$

c)
$2x + 7y$

Lösung a)

Wir berechnen

$$a(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2$$

sowie

$$b(a^2 - ab + b^2) = ba^2 - ab^2 + b^3$$

Zusammen ergibt sich

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

Lösung b)

Wir berechnen

$$7xy(4z - 8x + xy) = 28xyz - 56x^2y + 7x^2y^2$$

sowie

$$z(4z - 8x + xy) = 4z^2 - 8xz + xyz$$

Zusammen ergibt sich

$$(7xy + z)(4z - 8x + xy) = 28xyz - 56x^2y + 7x^2y^2 + 4z^2 - 8xz + xyz = 29xyz - 56x^2y - 8xz + 4z^2 + 7x^2y^2$$

Lösung c)

Wegen
$x, y > 0$ ist auch
$6x + 21y > 0$ und der Ausdruck ist immer definiert. Wir berechnen

$$12x^2 + 84xy + 147y^2 = 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 28xy + 3 \cdot 49y^2 = 3(4x^2 + 28xy + 49y^2) = 3((2x)^2 + 2 \cdot (2x)(7y) + (7y)^2) = 3(2x + 7y)^2$$

sowie

$$6x + 21y = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 7y = 3(2x + 7y)$$

Zusammen ergibt sich

$$\frac{12x^2 + 84xy + 147y^2}{6x + 21y} = \frac{3(2x + 7y)^2}{3(2x + 7y)} = 2x + 7y$$

ÜBUNG 4

(1) Berechnen Sie für
$a, b \neq 0$:

$$\frac{\left(a^2\right)^3 b^7 a^{-\left(2^4\right)}}{\left(a^{-1}\right)^7 b^{-2} b^{(-2)\cdot(-3)}}$$

Antwort

$\left(\frac{b}{a}\right)^3$

Lösung

Wegen
$a, b \neq 0$ sind alle ganzzahligen Potenzen von
a und
b definiert und somit auch der vorliegende Ausdruck

$$(a^2)^3 b^7 a^{-(2^4)} = a^6 b^7 a^{-16} = a^{6-16} b^7 = a^{-10} b^7$$

Wir betrachten Zähler und Nenner zunächst separat. Für den Zähler haben wir

$$\left(a^2\right)^3 b^7 a^{-\left(2^4\right)} = a^{-10} b^7$$

und für den Nenner

$$\left(a^{-1}\right)^7 b^{-2} b^{(-2)\cdot(-3)} = a^{-7} b^{-2} b^6 = a^{-7} b^4$$

Daraus folgt

$$\frac{\left(a^2\right)^3 b^7 a^{-\left(2^4\right)}}{\left(a^{-1}\right)^7 b^{-2} b^{(-2)\cdot(-3)}} = \frac{a^{-10} b^7}{a^{-7} b^4} = a^{-10} b^7 a^7 b^{-4} = a^{-3} b^3 = \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

(2) Berechnen Sie für
$x, y \neq 0$ und

$n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{x^{n+1}x^{2n-1}y^3}{x^{3n-2}y}$$

Antwort

$(xy)^2$

Lösung

Für
$x, y \neq 0$ und
$n \in \mathbb{N}$ sind alle auftretenden Ausdrücke definiert. Für den Zähler haben wir

$$x^{n+1}x^{2n-1}y^3 = x^{(n+1)+(2n-1)}y^3 = x^{3n}y^3$$

und den Nenner wandeln wir durch Umkehrung der Vorzeichen in den Exponenten um zu

$$\frac{1}{x^{3n-2}y} = x^{2-3n}y^{-1}$$

Daraus folgt

$$\frac{x^{n+1}x^{2n-1}y^3}{x^{3n-2}y} = x^{3n}y^3x^{2-3n}y^{-1} = x^{3n+(2-3n)}y^{3-1} = x^2y^2 = (xy)^2$$

---

(3) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck für
$x, y \neq 0$,
$n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\left(\frac{2x^2y^n}{4x^n}\right)^3\left(\frac{x^{n+1}y^{2n-1}}{3x}\right)^2}{\left(\frac{3x^{n-1}y^{n+1}}{(xy)^{2n}}\right)^{-2}}$$

Antwort

$$\frac{y^{5n}}{8x^{3n-4}}$$

Lösung

Für
$x, y \neq 0$,
$n \in \mathbb{N}$ sind alle auftretenden Ausdrücke definiert.

Wir betrachten die einzelnen Faktoren separat

$$\left(\frac{2x^2 y^n}{4x^n}\right)^3 = \left(\frac{x^2 y^n}{2x^n}\right)^3 = \left(\frac{x^{2-n} y^n}{2}\right)^3 = \frac{(x^{2-n} y^n)^3}{2^3} = \frac{x^{3(2-n)} y^{3n}}{8} = \frac{x^{6-3n} y^{3n}}{8}$$

$$\left(\frac{x^{n+1} y^{2n-1}}{3x}\right)^2 = \left(\frac{x^n y^{2n-1}}{3}\right)^2 = \frac{(x^n y^{2n-1})^2}{3^2} = \frac{x^{2n} y^{4n-2}}{9}$$

und den Nenner wandeln wir durch Umkehrung der Vorzeichen in den Exponenten um zu

$$\frac{1}{\left(\frac{3x^{n-1} y^{n+1}}{(xy)^{2n}}\right)^{-2}} = \left(\frac{3x^{n-1} y^{n+1}}{(xy)^{2n}}\right)^2 = \left(\frac{3x^{n-1} y^{n+1}}{x^{2n} y^{2n}}\right)^2 = \left(\frac{3x^{n-1} y^{n+1}}{x^{2n} y^{2n}}\right)^2 = \left(3x^{-n-1} y^{-n+1}\right)^2$$

Wenn wir in diesem Ausdruck noch die Klammer quadrieren, erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{\left(\frac{3x^{n-1} y^{n+1}}{(xy)^{2n}}\right)^{-2}} = \left(3x^{-n-1} y^{-n+1}\right)^2 = 9x^{-2n-2} y^{-2n+2}$$

Insgesamt erhalten wir also für den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{2x^2 y^n}{4x^n}\right)^3 \left(\frac{x^{n+1} y^{2n-1}}{3x}\right)^2}{\left(\frac{3x^{n-1} y^{n+1}}{(xy)^{2n}}\right)^{-2}} &= \frac{x^{6-3n} y^{3n}}{8} \cdot \frac{x^{2n} y^{4n-2}}{9} \cdot 9x^{-2n-2} y^{-2n+2} \\
&= \frac{1}{8} x^{6-3n+2n-2n-2} y^{3n+4n-2-2n+2} \\
&= \frac{1}{8} x^{4-3n} y^{5n} = \frac{y^{5n}}{8x^{3n-4}}
\end{aligned}$$

2. WURZELN UND POTENZEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Quadratwurzel und die n-te Wurzel.
- Sie können mit rationalen Exponenten umgehen.
- Sie beherrschen die Wurzel- und Potenzgesetze und können Wurzel- und Potenzausdrücke vereinfachen.

2.1 Die Quadratwurzel

Im fünften Jahrhundert v. Chr. stellte Hippasos von Metapont die Frage, wie die Fläche eines Quadrats verdoppelt werden könne. Das führte auf die Frage nach einer Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Die Antwort löste eine mathematische Revolution aus, denn eine einfache Betrachtung zeigt, dass es unter den rationalen Zahlen keine solche Zahl gibt. Die Entdeckung bedeutet, dass es auf der Zahlengeraden mehr Zahlen gibt als die rationalen.

ERGÄNZUNG (DIE WURZEL AUS 2 IST NICHT RATIONAL)
Anzeigen

Mit Mitteln, die uns an dieser Stelle nicht zur Verfügung stehen, kann man beweisen, dass es zu jeder positiven reellen Zahl $a > 0$ genau eine positive reelle Zahl gibt, deren Quadrat a ist. Ferner ist Null die einzige Zahl, die mit sich selbst multipliziert Null ergibt. Die in der folgenden Definition der *Quadratwurzel* definierte Zahl $\sqrt{a}$ ist also durch die dort genannten Eigenschaften eindeutig festgelegt.

2.1 DEFINITION (QUADRATWURZEL)

Für jede nichtnegative Zahl
$a \geq 0$ ist
$\sqrt{a} \geq 0$ als diejenige nichtnegative reelle Zahl definiert, die mit sich selbst multipliziert
a ergibt:
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Man bezeichnet
$\sqrt{a}$ als *Quadratwurzel* oder *zweite Wurzel* oder einfach als *Wurzel* aus
a.
a heißt *Radikand* oder *Wurzelbasis*.

2.2 BEMERKUNG

Da sowohl das Produkt zweier negativer, als auch das zweier positiver reeller Zahlen positiv ist, ist das Quadrat
a^2 einer reellen Zahl
a immer positiv oder null. Daraus ergeben sich zwei interessante Resultate, die Sie für sich überprüfen sollten:

1. Für jede reelle Zahl
   a ist
   $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Negative Zahlen haben keine reelle Wurzeln. (Die Frage, nach der Wurzel einer negativen Zahl führt auf die komplexen Zahlen.)

2.3 BEISPIEL

1. $\sqrt{2 \cdot 2} = 2, \quad \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = 2 = |-2|\,.$
2. Ist
   $b > 0$ die Kantenlänge eines Quadrates und
   d die Länge der Diagonalen, so gilt
   $$d = \sqrt{2}\, b.$$
   Insbesondere ist die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrates gleich
   $\sqrt{2}$.
3. $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, da
   $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
4. Die positive Lösung der Gleichung
   $$x^2 - 5 = 0$$
   ist
   $x = \sqrt{5}$, da
   $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$

Bei der Multiplikation und Division gelten die folgenden *Wurzelgesetze*.

2.4 SATZ (WURZELGESETZE)

Für
$a, b, c \in \mathbb{R}$ mit
$a, b \geq 0,$
$c > 0$ gilt:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$$

Beachten Sie bei allen Beispielen, dass die Werte für
$a,\ b,\ x$ und
y so eingeschränkt werden müssen, dass *alle* Ausdrücke in einer Gleichung definiert sind. Sonst können Gleichungsketten enstehen, die absurde Ergebnisse liefern. Zum Beispiel sehen in der Gleichungskette

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{(falsch)}$$

die ersten beiden Gleichungen (die nicht stimmen) wie eine Anwendung der Wurzelgesetze aus. Es ist also sehr wichtig, in jedem Schritt darauf zu achten, dass die Wurzel nur für positive Basen definiert ist und auch die Rechenregeln nur dann gelten, wenn
a und
b größer oder gleich Null sind.

2.5 BEISPIEL

1. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5},$
2. $\sqrt{5184} = \sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{81} = 8 \cdot 9 = 72,$
3. Nach der dritten Binomischen Formel gilt für
   $a, b > 0,\ a \neq b$:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

WARNUNG

$\sqrt{a}$ ist nur für
$a \geq 0$ definiert und es gilt stets
$\sqrt{a} \geq 0$. Somit ist
$\sqrt{4} = 2$, aber
$\sqrt{4} \neq -2$. Die Schreibweise

$$„\sqrt{4} = \pm 2“$$

ist unzulässig, auch wenn sowohl
$2^2 = 4$ als auch
$(-2)^2 = 4$ gelten.
Anders ausgedrückt: Die Menge *aller* Lösungen der Gleichung
$x^2 = 4$ ist
$\{\sqrt{4}; -\sqrt{4}\}$Die Zahl
$\sqrt{4}$ ist nur eine der beiden Lösungen
— nämlich diejenige, die *nicht negativ* ist.

Wie schon bei Potenzen ist bei der Addition und Subtraktion von Wurzeln zu beachten, dass nur gleichartige Wurzeln zusammengefasst werden können. So ist etwa

$$\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{2}\,,$$

nicht aber

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{25} = 5 = 2+3 = \sqrt{4} + \sqrt{9} \qquad \text{und}$$

$$\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \neq 2 = 5-3 = \sqrt{25} - \sqrt{9}\,.$$

WARNUNG

Für
$a > 0$ und
$b > 0$ ist stets
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}\,.$

2.2 Allgemeine Wurzeln

Mit Mitteln, die uns an dieser Stelle nicht zur Verfügung stehen, kann man beweisen, dass es zu jeder positiven reellen Zahl
$a > 0$ und zu jedem
$n \in \mathbb{N}$ genau eine positive reelle Zahl gibt, deren
n-te Potenz gleich
a ist. Ferner ist Null die einzige Zahl, die
n mal mit sich selbst multipliziert Null ergibt. Die in der folgenden Definition des Begriffes der
n*-ten Wurzel* definierte Zahl
$\sqrt[n]{a}$ ist also durch die dort genannten Eigenschaften eindeutig festgelegt.

2.6 DEFINITION (
n-TE WURZEL)

Für jede nichtnegative Zahl
$a \geq 0$ ist
$\sqrt[n]{a} \geq 0$ diejenige nichtnegative reelle Zahl, deren
n-te Potenz gleich
a ist, d.h.
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Man nennt
a *Radikand* (oder *Wurzelbasis*) und
n *Wurzelexponent*. Man bezeichnet
$\sqrt[n]{a}$ als
n-te *Wurzel* aus
$a.$

2.7 BEISPIEL

1. $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3\,, \qquad \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{5}\,, \qquad \sqrt[6]{4096} = 4\,, \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}.$

2. Für alle
   $x \geq 0$ ist
   $\sqrt[1]{x} = x.$

3. Für alle
   $x \in \mathbb{R}$ und alle ***geraden***
   $n \in \mathbb{N}$ ist
   $x^n \geq 0$ und

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}.$$

Tatsächlich gelten die Wurzelgesetze, wie sie oben formuliert wurden, auch für die n-ten Wurzeln, werden aber um eine zusätzliche Regel erweitert.

2.8 SATZ (WURZELGESETZE)

Für
$a, b, c \in \mathbb{R}$ mit
$a, b \geq 0,\ c > 0$ und
$m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{c}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[n \cdot m]{a} \end{aligned}$$

2.9 BEISPIEL

1. $3\sqrt[4]{256}+4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}-2\sqrt[5]{32}=3\cdot 4+4\cdot 7-7\cdot 3-2\cdot 2=15,$

2. Für
   $a,b\geq 0$ gilt:

   $$\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}}=\sqrt[3]{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}=\sqrt[3\cdot 2]{a}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{b}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[12]{b}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(1+a^2)\cdot(a-b)^2}}{\sqrt[4]{16\,(1+a^2)^2}}&=\sqrt{\frac{(1+a^2)\cdot(a-b)^2}{\sqrt{16\,(1+a^2)^2}}}=\sqrt{\frac{(1+a^2)\cdot(a-b)^2}{4\,(1+a^2)}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2}=\frac{|a-b|}{2}\end{aligned}$$

Im letzten Beispiel wurde benutzt, dass
$1+a^2\geq 1$ immer positiv ist und daher
$\sqrt{(1+a^2)^2}=\left|1+a^2\right|=(1+a^2)$.

2.10 BEMERKUNG

Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist die n-te Potenz a^n einer reellen Zahl a immer positiv (oder gleich Null, falls $a = 0$ ist). Wenn man nach reellen n-ten Wurzeln sucht, ist es also bei geradem Wurzelexponenten nicht möglich, eine n-te Wurzel aus einer negativen Zahl zu definieren.

Für ungerade Exponenten $n \in \mathbb{N}$ ist das anders: Zum Beispiel ist $(-3)^3 = -27$. Allgemein lässt sich zeigen, dass es bei ungeradem Exponenten zu jeder beliebigen reellen Zahl a eine eindeutig bestimmte reelle Zahl gibt, deren n-te Potenz gleich a ist. Für ungerade Exponenten könnten wir also die n-te Wurzel von a für alle reellen a (und nicht nur für $a \geq 0$) auf diese Weise erklären.

*Trotzdem wird das so **nicht** gemacht !* Alle n-ten Wurzeln werden nur für positive Radikanden oder die Null definiert, und sind auch immer selbst positiv oder Null. Folglich sind Terme wie $\sqrt[3]{-1}$ oder $\sqrt[5]{-32}$ *nicht definiert*, obwohl $(-1)^3 = -1$ bzw. $(-2)^5 = -32$ gilt und die Zahlen -1 bzw. -2 die einzigen reellen Zahlen mit dieser Eigenschaft sind.

2.3 Potenzen mit reellen Exponenten

Im Abschnitt Potenzgesetze werden Potenzen nur für ganzzahlige Exponenten erklärt. In diesem Abschnitt führen wir Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten ein und zwar so, dass die Potenzgesetze weiterhin ihre Gültigkeit behalten. Dazu betrachten wir erst Potenzen mit rationalen Exponenten und erklären dann, wie daraus die Verallgemeinerung auf reelle Exponenten folgt.

2.11 DEFINITION (POTENZEN MIT RATIONALEN EXPONENTEN)

Für
$a > 0$ und jede rationale Zahl
$\frac{p}{q}$ (mit
$p, q \in \mathbb{Z}$ und
$q > 0$) ist

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p .$$

Für
$\frac{p}{q} > 0$ setzen wir ebenfalls
$0^{\frac{p}{q}} = 0$.

ERGÄNZUNG (BEGRÜNDUNG DER DEFINITION 2.11)

Anzeigen

2.12 BEMERKUNG

Sind
$r_1, r_2, r_3, \ldots$ rationale Zahlen, die sich der reellen Zahl
x annähern, so nähern sich auch die Zahlen
$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ einer reellen Zahl an, die als
a^x definiert wird. Beispielsweise gewinnt man
$5^{\sqrt{2}}$ wegen
$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ durch die Berechnung der Zahlen
$5^1, 5^{\frac{14}{10}}, 5^{\frac{141}{100}}, 5^{\frac{1414}{1000}}, \ldots$, die sich
$5^{\sqrt{2}}$ immer dichter annähern. Mathematisch präzise formuliert, wird für
$a > 0$ die Potenz
a^x für reelle Zahlen
$x \in \mathbb{R}$ (auch irrationale) durch die stetige Fortsetzung der für rationale
$x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ oben eingeführten Funktion
$f_a(\frac{p}{q}) := a^{\frac{p}{q}}$ definiert. Der Begriff der Stetigkeit sprengt jedoch den Rahmen dieses Kurses, und wir sehen von seiner genauen Einführung ab.

2.13 BEISPIEL

1. Für
   $\frac{p}{q} = \frac{1}{n}$ mit
   $n \in \mathbb{N}$ ist also
   $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
2. $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}, \quad \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{5}}$
3. $(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{0{,}09} = \sqrt[3]{\frac{9}{100}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{10}}\right)^2$

Für negative Zahlen sind Potenzen mit **nicht** ganzzahligen Exponenten nicht definiert. Daher sind Ausdrücke wie

$$(-8)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{oder} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

sinnlos.

Die Rechenregeln für Potenzen gelten unverändert auch für reelle Exponenten.

2.14 SATZ (POTENZGESETZE)

Für
$a, b \in \mathbb{R}$ mit
$a, b > 0$ und
$x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

(Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.)

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

(Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.)

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

(Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert.)

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

(Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert.)

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

(Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.)

2.15 BEISPIEL

1. Die Wurzelgesetze folgen aus den allgemeinen Potenzgesetzen, zum Beispiel ist für $a \geq 0$:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}.$$

   Wenn Sie sich die allgemeinen Potenzgesetze und den Zusammenhang zwischen Wurzeln und rationalen Potenzen merken, brauchen Sie sich folglich die Wurzelgesetze nicht mehr unbedingt zu merken.

2. $$256^{\frac{5}{8}} = \left(256^{\frac{1}{8}}\right)^5 = (\sqrt[8]{256})^5 = 2^5 = 32,$$

3. $$\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

4. Für
   $x, y \in \mathbb{R}$ mit
   $x + y \geq 0$ gilt:
   $(\sqrt[6]{x+y})^4 = \left((x+y)^{\frac{1}{6}}\right)^4 = (x+y)^{\frac{1}{6}\cdot 4} = (x+y)^{\frac{4}{6}} = (x+y)^{\frac{2}{3}},$

5. Für
   $a, b \in \mathbb{R}$ mit
   $2a + b > 0$ gilt:
   $(2a+b)^{-\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{2a+b}\right)^{-4} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{2a+b})^4},$

6. Für
   $a \geq 0$ gilt:
   $\left(a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}.$

[online-only]

Zurück zum Kapitelüberblick

ÜBUNG 1

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Potenzen:

a)
$\sqrt{2}$

b)
$\sqrt{7^5}$

c)
$(\sqrt[3]{3})^4$

d)
$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Antwort

a)
$2^{\frac{1}{2}}$

b)
$7^{\frac{5}{2}}$

c)
$3^{\frac{4}{3}}$

d)
$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}}$

Lösung a)

1. Methode: Wir verwenden die Definition von
$2^{\frac{1}{2}}$:

Nach Definition gilt

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

2. Methode: Wir verwenden eine der Potenzregeln und überprüfen damit, dass
$2^{\frac{1}{2}}$ die Wurzel aus
2 ist.

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = 2^1 = 2$$

Es bleibt zu zeigen, dass
$2^{\frac{1}{2}} > 0 ist$

$2^{\frac{1}{2}}$ ist das Quadrat einer reellen Zahl und damit positiv.

$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} > 0$ Damit haben wir gezeigt, dass
$2^{\frac{1}{2}}$ die Wurzel aus
2 ist.

Lösung b)

Der Ausdruck
$\sqrt{7^5}$ kann als
$(7^5)^{\frac{1}{2}}$ geschrieben werden.

Wir erhalten mit den Rechenregeln für Potenzen:
$7^{5 \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{2}}$.

Lösung c)

$\sqrt[3]{3}$ ist per Definition
$3^{\frac{1}{3}}$. Also ist
$(\sqrt[3]{3})^4 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{3}}$.

Lösung d)

Wir schreiben
$\sqrt{\frac{2}{3}}$ als
$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ und berechnen

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{8}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}}$$

ÜBUNG 2

Schreiben Sie die folgenden Terme als Wurzel:

a)
$3^{\frac{1}{5}}$

b)
$3^{-\frac{1}{5}}$

c)
$15^{-\frac{5}{6}}$

d)
$25^{-0{,}75}$

Antwort

a)
$\sqrt[5]{3}$

b)
$\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

c)
$\sqrt[6]{\frac{1}{15^5}}$

d)
$\sqrt[4]{\frac{1}{25^3}}$

Lösung a)

Nach Definition ist

$$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$$

Lösung b)

Es gilt

$$3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

Lösung c)

$15^{-\frac{5}{6}}$ lässt sich mit Hilfe der Potenzgesetze darstellen als

$$15^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{15^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{15^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{15^5}}$$

Lösung d)

Zunächst ist
$0{,}75 = \frac{3}{4}$, somit erhalten wir
$25^{-0{,}75} = 25^{-\frac{3}{4}}$.

Nun wenden wir die Potenzgesetze an und erhalten

$$25^{-0{,}75} = 25^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{25^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{25^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{25^3}}\,.$$

ÜBUNG 3

Es seien
$a, b, m > 0$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme und fassen Sie sie soweit wie möglich zusammen:

a)
$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot 5$

b)
$\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

c)
$\sqrt[m+2]{u^{5m+10}}$

d)
$\sqrt{\frac{4\,a^2}{9\,b^2}}$

Antwort

a)
$5^{\frac{11}{6}}$

b)
$\sqrt{5}$

c)
u^5

d)
$\frac{2a}{3b}$

Lösung a)

Wir schreiben den Ausdruck als Produkt von Potenzen und erhalten so

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot 5 = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5 = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1} = 5^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{6}{6}} = 5^{\frac{11}{6}}$$

Lösung b)

Es fällt auf: Einerseits müssen wir eine dritte Wurzel ziehn, andererseits ist
125 die dritte Potenz von
5:
$5^3 = 125$. Nun steht aber die dritte Wurzel ganz außen und leider nicht als dritte Wurzel vor
125. Das können wir aber folgendermaßen ändern:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{125}} &= \sqrt[3]{125^{\frac{1}{2}}} = \left(125^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((5^3)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (5^{3\cdot\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \\ &= 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Lösung c)

Als erstes schreiben wir die
$m+2$-te Wurzel als Potenz und wenden danach die Potenzgesetze für eine vereinfachte Darstellung an:

$$\sqrt[m+2]{u^{5m+10}} = \left(u^{5m+10}\right)^{\frac{1}{m+2}} = u^{\frac{5m+10}{m+2}}$$

Der Exponent lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$\frac{5m+10}{m+2} = \frac{5(m+2)}{m+2} = 5$$

Insgesamt erhalten wir also

$$u^{\frac{5m+10}{m+2}} = u^5$$

Lösung d)

Wir wenden die Potenzgesetze an:

$$\sqrt{\frac{4\,a^2}{9\,b^2}} = \left(\frac{4\,a^2}{9\,b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(4\,a^2)^{\frac{1}{2}}}{(9\,b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}} \cdot (b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2|a|}{3|b|} = \frac{2a}{3b}$$

ÜBUNG 4

Vereinfachen Sie folgende Terme:

a)
$\sqrt{x^2-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ für $x > 1$

b)
$\sqrt{5\,a^2-5\,b^2}\sqrt{\frac{5\,a+5\,b}{a-b}}$ für $a > b > 0$

c)
$\sqrt[3]{\sqrt{x^4y^6}}$ für $x, y > 0$

d)
$\sqrt[n]{\frac{c^{n+1}b^n}{a^{-n}c\,a^n}}$ für $a, b, c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

Antwort

a)
$x+1$

b)
$5(a+b)$

c)
$\sqrt[3]{x^2}\cdot y$

d)
$b\cdot c$

Lösung a)

Wir schreiben den Term um zu

$$\sqrt{\frac{(x^2-1)(x+1)}{x-1}}$$

Mit der dritten binomischen Formel erhalten wir $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Dadurch lässt sich der Radikand vereinfacht darstellen als

$$\sqrt{\frac{(x^2-1)(x+1)}{x-1}} = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)(x+1)}{x-1}} = \sqrt{(x+1)^2} = x+1\,.$$

Lösung b)

Zunächst fassen wir das Produkt zu einer Wurzel zusammen. Anschliessend fassen wir den Radikanden durch die Anwendung der dritten binomischen Formel zusammen und wenden die Potenzgesetze an:

$$\begin{aligned}\sqrt{5\,a^2-5\,b^2}\cdot\sqrt{\tfrac{5\,a+5\,b}{a-b}} &= \sqrt{\tfrac{(5\,a^2-5\,b^2)\cdot(5\,a+5\,b)}{a-b}}\\ &= \sqrt{\tfrac{25(a^2-b^2)(a+b)}{a-b}}\\ &= \sqrt{\tfrac{25(a-b)(a+b)(a+b)}{a-b}}\\ &= \sqrt{25(a+b)^2} = 5\cdot(a+b)\end{aligned}$$

Lösung c)

Wir schreiben die Wurzeln der Reihe nach in Potenzen um und wenden die Potenzgesetze an:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^4\,y^6}} = \sqrt[3]{(x^4\,y^6)^{\frac{1}{2}}} = \left[(x^4\,y^6)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = (x^4)^{\frac{1}{6}}\cdot(y^6)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3}}\cdot y$$

Lösung d)

Wir schreiben zuerst den Nenner mithilfe des Kommutativgesetzes und der Potenzgesetze um zu

$$a^{-n}\,c\,a^n = a^{-n}\,a^n\,c = a^{n+(-n)}\,c = a^0\,c = 1\cdot c = c$$

Wir erhalten dadurch:

$$\sqrt[n]{\frac{c^{n+1}\,b^n}{a^{-n}\,c\,a^n}} = \sqrt[n]{\frac{c^{n+1}\,b^n}{c}} = \sqrt[n]{b^n\cdot\frac{c^n\cdot c}{c}} = \sqrt[n]{b^n}\cdot\sqrt[n]{\frac{c^n\cdot c}{c}} = b\cdot\sqrt[n]{c^n} = b\cdot c$$

ÜBUNG 5

Vereinfachen Sie folgende Terme für
$x \in \mathbb{R}$ und
$y > 0$:

a)
$\sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}$,

b)
$\sqrt{x^{-2} \cdot (x+1)^4 \cdot y^3}$

c)
$\sqrt{y + x^2 - \sqrt{y^2}}$,

Antwort

a)
$\sqrt{|x-1|}$

b)
$\frac{(x+1)^2 \sqrt{y^3}}{|x|}$

c)
$|x|$

Lösung a)

Mit der zweiten binomischen Formel erhalten wir
$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Danach wenden wir das Wurzelgesetz an. (Beachte es gilt
$\sqrt{a^2} = |a|$ für alle reellen
a)

$$\sqrt[4]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt{\sqrt{(x-1)^2}} = \sqrt{|x-1|}$$

Lösung b)

Zunächst ziehen wir das Produkt in der Wurzel auseinander. (Beachte es gilt $\sqrt{a^2} = |a|$ für alle reellen a)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{-2}\cdot(x+1)^4\cdot y^3} &= \sqrt{x^{-2}}\cdot\sqrt{(x+1)^4}\cdot\sqrt{y^3}\\ &= \sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{\left((x+1)^2\right)^2}\cdot\sqrt{y^3}\\ &= \frac{1}{|x|}\cdot\left|(x+1)^2\right|\cdot\sqrt{y^3}\\ &= \frac{1}{|x|}\cdot(x+1)^2\cdot\sqrt{y^3}\end{aligned}$$

Dies ist bereits das Endergebnis, das wir auch als $\frac{(x+1)^2\sqrt{y^3}}{|x|}$ schreiben können.

Lösung c)

Zunächst beachten wir, dass $\sqrt{y^2} = y$, da $y > 0$ ist. (Für eine beliebige reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$). Dann folgt daraus

$$\sqrt{y+x^2-\sqrt{y^2}} = \sqrt{y+x^2-y} = \sqrt{x^2} = |x|$$

3. RECHNEN MIT WURZELN UND POTENZEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Bruchausdrücke umformen, sodass deren Nenner keine Wurzeln enthalten.
- Sie können Ausdrücke mit Wurzeln vereinfachen.
- Sie sind in der Lage, verschiedene Potenzausdrücke zu vergleichen.
- Sie sind in der Lage, Wurzeln und Potenzen rationaler Zahlen grob durch ganze Zahlen abzuschätzen.

3.1 Vereinfachen von Termen mit Wurzeln

Bei der Addition und Subtraktion von Brüchen ist es oft störend, wenn im Nenner der Brüche Wurzeln stehen. Deshalb werden hier Umformungen von Brüchen betrachtet, mit denen Wurzeln im Nenner beseitigt werden können. Um $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$ zu berechnen, kann der erste Bruch mit $\sqrt{2}$ erweitert werden. Damit kann die Summe leicht zusammengefasst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,.$$

Auch wenn anstelle einer einfachen Wurzel die Summe oder Differenz von Wurzeln im Nenner stehen, können diese Brüche umgeformt werden.

3.1 REGEL (WURZELN AUS DEM NENNER EINES BRUCHS ENTFERNEN)

Mit den folgenden Regeln werden Wurzeln aus dem Nenner eines Bruchs entfernt (sofern die Voraussetzungen dafür erfüllt sind):

1. Besteht der Nenner nur aus einer Quadratwurzel, so erweitert man den Bruch mit dieser Wurzel.
2. Besteht der Nenner aus der Summe oder der Differenz zweier Quadratwurzeln (oder einer Quadratwurzel und einer rationalen Zahl), so erweitert man mit der Differenz bzw. der Summe der beiden Zahlen.

Bei 1. enthält der Nenner keine Wurzel mehr, weil
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ für alle positiven Zahlen
a gilt.
Bei 2. findet die dritte binomische Formel Anwendung: Ist nämlich der Nenner gegeben durch
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ erhält man nach Erweitern mit
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ als neuen Nenner den Ausdruck

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

Entsprechend, wenn man einen Bruch mit dem Nenner
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ mit
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ erweitert.

Wenn
a und
b rationale Zahlen sind, ist der Nenner nach der Umformung rational. Deshalb wird diese Umformung auch „Rational-Machen des Nenners” genannt.

3.2 BEISPIEL

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \dfrac{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \dfrac{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}$
   $= \dfrac{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3 - 5} = -(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = -\sqrt{3} - \sqrt{5}$
3. $\dfrac{1}{4 + \sqrt{3}} = \dfrac{4 - \sqrt{3}}{(4 + \sqrt{3}) \cdot (4 - \sqrt{3})} = \dfrac{4 - \sqrt{3}}{16 - 3} = \dfrac{1}{13}(4 - \sqrt{3})$

Die Umformung ist auch möglich, wenn der Nenner ein Produkt ist, dessen Faktoren eine der beiden Bedingungen aus Regel 3.1 erfüllen. Dann wird die Regel zum Erweitern einfach für jeden Faktor ausgeführt.

3.3 BEISPIEL

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)} &= \frac{\sqrt{7}\cdot(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{7}\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}+1)}{7\cdot(\sqrt{2}^2-1^2)}\\ &= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}+1)}{7\cdot(2-1)} = \frac{1}{7}\sqrt{7}(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

Mit dieser Methode lassen sich viele komplizierte Ausdrücke vereinfachen.

3.4 BEISPIEL

1. Vereinfachen Sie den Ausdruck
$\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}+3}$ so weit wie möglich.

Um dies zu bewerkstelligen, wird zunächst der Nenner des zweiten Bruchs rational gemacht und anschließend mit den üblichen Regeln möglichst viele Terme zusammengefasst:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}+3} &= \sqrt{2}+\frac{2\cdot(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)\cdot(2\sqrt{2}-3)}\\ &= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{(2\sqrt{2})^2-3^2}\\ &= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{-1}\\ &= \sqrt{2}-4\sqrt{2}+6 = 6-3\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

2. Vereinfachen Sie den Ausdruck
$\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ so weit wie möglich.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2+\sqrt{x}} &= \frac{2+\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})\cdot(2+\sqrt{x})}+\frac{2-\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})\cdot(2-\sqrt{x})}\\ &= \frac{2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4}{4-x}\,.\end{aligned}$$

3. Vereinfachen Sie den Ausdruck
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$ so weit wie möglich.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} &= \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{(\sqrt{1+x^2}+1)\cdot(\sqrt{1+x^2}-1)}\\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2}+1)-(\sqrt{1+x^2}-1)}{1+x^2-1} = \frac{2}{x^2}\,.\end{aligned}$$

3.2 Vergleichen von Potenzen und Wurzeln bei gleichen Basen bzw. Exponenten

Wenn man Potenzen ohne größeren Rechenaufwand miteinander vergleichen möchte, kann man dies oft (aber

nicht immer) dadurch machen, dass man sich überlegt, wie sich Potenzen verhalten, wenn man bei gleichen Basen die Exponenten oder bei gleichen Exponenten die Basen verändert.
Dieses Verhalten werden wir jetzt betrachten. Da wir beliebige (rationale) Exponenten betrachten und die bereits erläuterten Schwierigkeiten mit der Definition von
0^0 vermeiden möchten, beschränken wir uns im Folgenden bei allen Betrachtungen auf Basen
$a > 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall fester Basis und variabler Exponenten.

3.5 REGEL

Seien
$r > s$ zwei reelle Exponenten. Dann gilt bei fester Basis
$a > 0$:

- Für eine Basis
  $a > 1$ gilt
  $a^r > a^s$, d.h. wenn die Basis
  $a > 1$ größer als
  1 ist, wird die Potenz größer, je größer der Exponent wird.

- Für Basis
  $a = 1$ gilt
  $a^r = a^s = 1$.

- Für eine Basis
  $0 < a < 1$ gilt
  $a^r < a^s$, d.h. wenn die Basis
  a kleiner als
  1 (und größer als
  0) ist, wird die Potenz kleiner, je größer der Exponent
  wird.

Dies gilt unabhängig vom Vorzeichen des Exponenten.

Da man eine
n-te Wurzel auch als Potenz mit Exponent
$\frac{1}{n}$ schreiben kann, erhält man entsprechende Regeln für Wurzeln:

3.6 REGEL

Ist
a eine positive reelle Zahl und
m, n natürliche Zahlen mit
$m > n > 1$, so gilt:

- $1 < \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a} < a$, wenn der Radikand a größer als 1 ist.
- $1 > \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a} > a$, wenn der Radikand a kleiner als 1 und größer als 0 ist.

3.7 BEISPIEL

1. $3^{\frac{5}{4}} > 3^{\frac{3}{4}}$, weil die Basis 3 größer als 1 und der erste Exponent $\frac{5}{4}$ größer als der zweite Exponent $\frac{3}{4}$ ist.
2. $5^{-4} > 5^{-6}$, weil die Basis 5 größer als 1 und der erste Exponent -4 größer als der zweite Exponent -6 ist.
3. $0{,}3^5 < 0{,}3^4$, da die Basis $0{,}3$ zwischen 0 und 1 ist, und für die Exponenten $5 > 4$ gilt. (Beachten Sie, dass sich der Exponent auf die ganze Dezimalzahl bezieht, also etwas $0{,}3^5 = (0{,}3)^5$ ist.)
4. $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$, da der Radikand 2 größer als 1 ist und für die Wurzelexponenten $3 > 2$ gilt.

Umgekehrt erhalten wir ebenfalls eine einfache Abhängigkeit, wenn der Exponent fest und die Basen variabel sind.

3.8 REGEL

Seien
$b > a > 0$ zwei Basen und
r ein fester reeller Exponent. Dann gilt:

- Für
  $r > 0$ gilt
  $b^r > a^r$, bei positivem Exponenten wird die Potenz größer, je größer die Basis wird.
- Für
  $r = 0$ gilt
  $b^r = a^r = 1$ unabhängig von der Basis.
- Für
  $r < 0$ gilt
  $b^r < a^r$, bei negativem Exponenten wird die Potenz kleiner, je größer die Basis wird.

Analog zu oben gilt die erste Regel auch für Wurzeln, da man eine
n-te Wurzel ja auch als Potenz mit Exponent
$\frac{1}{n} > 0$ schreiben kann.

3.9 BEISPIEL

1. $5^{\frac{3}{2}} > 4^{\frac{3}{2}}$, weil die Basis
   5 größer als die Basis
   4 ist und beide Potenzen denselben positiven Exponenten
   $\frac{3}{2}$ haben.
2. $2^{\frac{-5}{3}} > 3^{\frac{-5}{3}}$, weil für die Basen gilt, dass
   $2 < 3$, und die Potenzen den negativen Exponenten
   $\frac{-5}{3}$ haben.
3. $\sqrt[7]{14} < \sqrt[7]{17}$, da
   $14 < 17$ ist.

Wir können beide Regeln auch kombinieren, um die Größen von Potenzen mit verschiedenen Basen und Exponenten miteinander zu vergleichen.

3.10 BEISPIEL

1. Welche Zahl ist größer, 2^3 oder 5^4? Wegen $2 < 5$ und $3 > 0$ gilt nach Regel 3.8 die Ungleichung $2^3 < 5^3$. Wegen $3 < 4$ und $5 > 1$ folgt nach Regel 3.5, dass $5^3 < 5^4$ ist. Somit erhalten wir insgesamt $2^3 < 5^4$.

2. Welche Zahl ist größer, 2^3 oder 5^2? Wir können nicht direkt so vorgehen, wie im ersten Beispiel, sondern modifizieren das Problem zunächst durch
$$2^3 = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}.$$
Damit ist wieder nach den beiden Regeln $2^3 = 4^{\frac{3}{2}} < 5^{\frac{3}{2}} < 5^2$ wegen $1 < 4 < 5$ und $\frac{3}{2} < 2$.

3. Die beiden Ungleichungen eben hätte man genausogut direkt ausrechnen können ($2^3 = 8$, $5^2 = 25$, $5^4 = 625$). Wie ist es jedoch mit der Frage, ob $\sqrt{2}$ oder $\sqrt[5]{7}$ größer ist? Dazu nehmen wir die beide Zahlen hoch Zehn, d.h. mit den Potenzgesetzen erhalten wir $\sqrt{2}^{10} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$ und $\sqrt[5]{7}^{10} = 7^{\frac{10}{5}} = 7^2 = 49$. Wegen 3.5 ist $\sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$ und $\sqrt[5]{7} > \sqrt[5]{1} = 1$ und damit folgt aus Regel 3.8 : Wäre $\sqrt{2}$ größer als $\sqrt[5]{7}$, so wäre auch $\sqrt{2}^{10} = 32$ größer als $\sqrt[5]{7}^{10} = 49$. Das ist aber offenbar nicht der Fall. Also muss $\sqrt{2} < \sqrt[5]{7}$ richtig sein.

Wir können diese Regeln gegebenenfalls auch dafür verwenden, die Größenordnungen von Potenzausdrücken zu bestimmen.

3.11 BEISPIEL

1. Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{14}$?
   Wegen $9 < 14 < 16$ gilt nach Regel 3.8
   $$3 = \sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16} = 4.$$
   Also liegt die Zahl $\sqrt{14}$ zwischen 3 und 4.

2. In welchem der folgenden Bereiche liegt die Zahl $\left(\frac{4}{3}\right)^3$?

a) zwischen 0 und 1	b) zwischen 1 und 10	c) zwischen 10 und 100

   Da der Bruch $\frac{4}{3}$ zwischen 1 und 2 liegt, liegt nach Regel 3.8 die Zahl $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ zwischen $1^3 = 1$ und $2^3 = 8$. Also ist der Bereich b) der richtige.

ERGÄNZUNG (EINE NÄHERUNG FÜR DIE WURZEL AUS 2 DURCH INTERVALLSCHACHTELUNG)

Anzeigen

Zurück zum Kapitelüberblick

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie zu jedem der Zahlenpaare, welche Zahl die größere ist:

a)
$3^{\frac{5}{6}}$ und
$3^{\frac{3}{4}}$

b)
$\left(\frac{2}{5}\right)^8$ und
$\left(\frac{2}{5}\right)^0$

c)
$64^{0,5}$ und
$128^{\frac{1}{4}}$

d)
$\sqrt[3]{81}$ und
$3^{\frac{3}{4}}$

Antwort

a)
$3^{\frac{5}{6}} > 3^{\frac{3}{4}}$

b)
$\frac{2}{5}^8 < \frac{2}{5}^0$

c)
$0{,}3^4 > 0{,}3^{4{,}2}$

d)
$\sqrt[3]{81} > 3^{\frac{3}{4}}$

Lösung a)

In diesem Fall ist die gemeinsame Basis größer als
1. Die größere Potenz ist deshalb diejenige mit dem größeren Exponenten.

Somit ergibt sich:

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24} > \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Es folgt daher direkt

$$3^{\frac{5}{6}} > 3^{\frac{3}{4}}$$

Lösung b)

Erneut liegt die Basis zwischen
0 und
1, also gilt: Aus

$$8 > 0$$

folgt

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{8} < \left(\frac{2}{5}\right)^{0}$$

Lösung c)

Wir schreiben
64 und
128 als Potenzen mit Basis
2 und erhalten

$$64 = 2^6\,, \quad 128 = 2^7$$

Dadurch können wir die zu vergleichenden Ausdrücke umschreiben zu

$$64^{0,5} = 64^{\frac{1}{2}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{6\cdot\frac{1}{2}} = 2^3, \quad 128^{\frac{1}{4}} = \left(2^7\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{4}}\ .$$

Die gemeinsame Basis der beiden Terme ist
$2 > 1$, also ist die größere Zahl diejenige mit dem größeren Exponenten; deshalb gilt wegen
$3 = \frac{12}{4} > \frac{7}{4}$ auch

$$64^{0,5} = 64^{\frac{1}{2}} = 2^3 > 2^{\frac{7}{4}} = 128^{\frac{1}{4}}$$

Lösung d)

Durch Umformen erhalten wir

$$\sqrt[3]{81} = (9^2)^{\frac{1}{3}} = ((3^2)^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{2\cdot 2\cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$$

Wegen
$\frac{4}{3} = \frac{16}{12} > \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ gilt also

$$\sqrt[3]{81} = 3^{\frac{4}{3}} > 3^{\frac{3}{4}}$$

denn die größere der beiden Potenzen mit Basis
$3 > 1$ ist diejenige mit dem größeren Exponenten.

ÜBUNG 2

Vereinfachen Sie so weit wie möglich

a)
$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

b)
$\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}}$

c)
$\sqrt{16+\sqrt{16}}$

d)
$\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

Antwort

a)
3

b)
$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

c)
$2\sqrt{5}$

d)
$2-\sqrt{2}$

Lösung a)

Mit der dritten binomischen Formel

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ schreiben wir den Ausdruck als

$$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2=5-2=3$$

Lösung b)

Wir zerlegen alle Zahlen im Ausdruck in ihre Primfaktoren, um den Ausdruck zu vereinfachen.

Durch mehrfache Division mit
2 und
3 erhalten wir

$$96 = 2^5 \cdot 3\,, \qquad 18 = 2 \cdot 3^2$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sqrt{96} &= \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Für den Bruch gilt also

$$\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Lösung c)

Wir betrachten zuerst die Wurzel
$\sqrt{16}$. Aus
$16 = 4 \cdot 4 = 4^2$ folgt direkt
$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ und der Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\sqrt{16 + \sqrt{16}} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Um zu testen, ob
$\sqrt{20}$ vereinfacht werden kann, schreiben wir
20 in Primfaktoren:

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

Wir sehen, dass
20 den Faktor
2^2 enthält, also können wir die Wurzel weiter vereinfachen:

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Lösung d)

Wir multiplizieren beide Terme in der Klammer mit
$\sqrt{\frac{2}{3}}$ und benutzen die Regel
$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, um den Ausdruck zu vereinfachen:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{3}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3}} = \sqrt{2 \cdot 2} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$$

ÜBUNG 3

Machen Sie in folgenden Ausdrücken den Nenner rational und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a)
$\frac{2}{\sqrt{12}}$

b)
$\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

c)
$\frac{2}{3+\sqrt{7}}$

d)
$\frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}}$

Antwort

a)
$\frac{\sqrt{3}}{3}$

b)
$\frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$

c)
$3-\sqrt{7}$

d)
$\frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}$

Lösung a)

Der Bruch wird mit $\sqrt{12}$ erweitert, sodass man den Nenner $\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}=12$ erhält:

$$\frac{2}{\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{12}}{12}=\frac{2\sqrt{12}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{12}}{6}$$

Dieser Ausdruck kann weiter vereinfacht werden, indem man 12 als $12=2\cdot 6=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3$ schreibt:

$$\frac{\sqrt{12}}{6}=\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lösung b)

Um den Ausdruck des Nenners rational zu machen, nutzt man aus, dass $\sqrt[3]{7}^3 = 7$ rational ist. Mit den Potenzgesetzen hat man $\sqrt[3]{7}^3 = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}^2$. Erweitert man also den Bruch mit $\sqrt[3]{7}^2$, erhält man

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7}^2}{\sqrt[3]{7}^2} = \frac{\sqrt[3]{7}^2}{\sqrt[3]{7}^3} = \frac{\sqrt[3]{7}^2}{7}$$

Lösung c)

Verwenden Sie die dritte binomische Formel

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Wählen Sie
$a = 3$ und
$b = \sqrt{7}$:

$$(3+\sqrt{7}) \cdot (3-\sqrt{7}) = 3^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 9 - 7 = 2$$

Um die Wurzel aus dem Nenner zu entfernen, erweitern Sie den Bruch mit $3 - \sqrt{7}$ und erhalten

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7}) \cdot (3-\sqrt{7})} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{2} = 3 - \sqrt{7}$$

Lösung d)

Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ und erhalten mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}} &= \frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{\sqrt{17}+\sqrt{13}} \\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{(\sqrt{17}-\sqrt{13})(\sqrt{17}+\sqrt{13})} \\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{13})^2} \\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{17-13} \\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}\end{aligned}$$

ÜBUNG 4

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a)
$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{21}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$,

b)
$\frac{2}{1+\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ für
$x>1$,

c)
$\frac{21\sqrt{x}+7\sqrt{xy}}{3+\sqrt{y}}$ für
$x,y>0$.

Antwort

a)
$\sqrt{3}$

b)
$2\cdot\frac{1+x}{1-x}$

c)
$7\sqrt{x}$

Lösung a)

Wir erweitern den Bruch mit
$\sqrt{8}+\sqrt{7}$, sodass der Nenner rational aufgrund der dritten binomischen Formel wird.

Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{24}-\sqrt{21}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} &= \frac{(\sqrt{24}-\sqrt{21})(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7})}\\ &= \frac{\sqrt{24}\sqrt{8}+\sqrt{24}\sqrt{7}-\sqrt{21}\sqrt{8}-\sqrt{21}\sqrt{7}}{\sqrt{8}^2-\sqrt{7}^2}\\ &= \frac{\sqrt{3\cdot 8}\sqrt{8}+\sqrt{3\cdot 8}\sqrt{7}-\sqrt{3\cdot 7}\sqrt{8}-\sqrt{3\cdot 7}\sqrt{7}}{8-7}\\ &= \sqrt{3}\sqrt{8}\sqrt{8}+\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{7}\\ &= 8\sqrt{3}-7\sqrt{3}=\sqrt{3}\end{aligned}$$

Lösung b)

Wir bringen die beiden Brüche auf den Hauptnenner und nutzen die dritte binomische Formel.

Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}&=\frac{2(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}+\frac{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\\&=\frac{2(1-\sqrt{x})+2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{1^2-\sqrt{x}^2}\\&=\frac{2-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+2x}{1-x}=\frac{2+2x}{1-x}=2\cdot\frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

Lösung c)

Wir klammern
$7\sqrt{x}$ im Zähler aus und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{21\sqrt{x}+7\sqrt{xy}}{3+\sqrt{y}}&=\frac{7\sqrt{x}(3+\sqrt{y})}{3+\sqrt{y}}\\&=7\sqrt{x}\end{aligned}$$

4. PROPORTIONALITÄT UND DREISATZ

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie verstehen den Begriff der „Proportionalität" und sind in der Lage, Verhältnisse bzw. Verhältnisgleichungen aufzustellen und zu interpretieren.
- Sie können Verhältnisgleichungen mit Hilfe des Dreisatzes und der Proportionalitätsgleichung lösen.
- Sie verstehen den Begriff der „umgekehrten Proportionalität" (Antiproportionalität), und können damit umgehen.

4.1 Proportionalität

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

4.1 BEISPIEL

Auf dem Markt werden Äpfel zu
3 Euro pro Kilogramm verkauft, d.h.

1 kg Äpfel kosten
3 Euro,
2 kg Äpfel kosten
6 Euro,
4 kg Äpfel kosten
12 Euro
und allgemein:
x kg Äpfel kosten
$y = 3x$ Euro.

Das Verhältnis des Preises zu der jeweils verkauften Menge Äpfel (in Kilogramm) ist konstant. Man sagt, die beiden voneinander abhängigen Größen

x: Menge verkaufter Äpfel in Kilogramm y: Verkaufspreis von x kg Äpfeln

seien *proportional*.

4.2 DEFINITION (PROPORTIONAL)

Wenn zwei voneinander abhängige Größen
x und
y immer in demselben Verhältnis zueinander stehen, d.h. für den Quotienten der beiden Größen gilt für alle zulässigen
x und
y

$$\frac{y}{x} = k = \frac{k}{1},$$

mit einer festen Zahl
$k \neq 0$, so nennt man
y proportional (oder *direkt proportional*) zu
x. Dabei heißt
k *Proportionalitätsfaktor* oder auch *Proportionalitätskonstante von*
y zu
x. Die obige Gleichung wird *Proportionalitätsgleichung* (auch *Verhältnisgleichung*) genannt.

4.3 BEMERKUNG

1. Ist
   y proportional zu
   x, so führt eine Verdopplung (Verdreifachung, Halbierung,...) der
   Größe
   x zu einer Verdopplung (Verdreifachung, Halbierung,...) der Größe
   y.

2. Wenn
   y zu
   x proportional ist, ist auch
   x zu
   y proportional. Der Proportionalitätsfaktor von
   x zu
   y ist dabei der Kehrwert des Proportionalitätsfaktors von
   y zu
   x, denn

$$\frac{y}{x} = \frac{k}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{k}.$$

3. Oft ist es zweckmäßig, die Verhältnisgleichung mit
   x zu multiplizieren. Die proportionale Abhängigkeit von
   y und
   x wird somit durch die Gleichung

$$y = k \cdot x$$

   ausgedrückt.

4.4 BEISPIEL

Ein mit einer konstanten Geschwindigkeit fahrendes Auto legt in vier Stunden 200 Kilometer zurück. Wie weit kommt es nach einer, drei, acht und zwölf Stunden ?

Fährt das Auto mit einer konstanten Geschwindigkeit, so ist der nach einer bestimmten Zeit zurückgelegte Weg
s proportional zu der gefahrenen Zeit
t. Da wir bereits wissen, dass nach
$t = 4h$ die Strecke
$s = 200km$ zurückgelegt wurde, können wir den Proportionalitätsfaktor von
s zu
t bestimmen: Es ist die durchschnittliche *Geschwindigkeit*

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200km}{4h} = 50\frac{km}{h}$$

des Autos. Damit ist
$s = 50 \cdot t$ und wir können die folgende Tabelle berechnen:

Zeit t **in h**	1	3	4	8	12	...
Weg s **in km**	50	150	200	400	600	...

Im folgenden Beispiel stellen wir die beiden gängigsten Methoden vor, mit denen man Aufgaben zu proportionalen Größen lösen kann.

4.5 BEISPIEL

Ein Behälter, der
$600\,\ell$ *Wasser aufnehmen kann, wird bei geöffnetem Hahn in*
12 *min gefüllt. Wieviel Wasser war nach*
9 *min in dem Behälter?*

Die Füllmenge ist proportional zur Füllzeit. Unter der Annahme, dass die Menge an Wasser im Tank (Größe
y in Litern) proportional ist zu der Zeit (Größe
x in Minuten), die der Tank bis dahin gefüllt wurde, erhalten wir folgende Antwort:

1. Methode: Dreisatz

1. Satz: In
12 min fließen
$600\,\ell$ Wasser.

2. Satz: In
1 min fließen
$\frac{600\,\ell}{12} = 50\,\ell$ Wasser.

3. Satz: In
9 min fließen
$50\,\ell \cdot 9 = 450\,\ell$ Wasser.

Dies wird meistens kürzer schematisch dargestellt (das Zeichen $\triangleq$ bedeutet „entspricht"):

$$\begin{aligned} 12\,\mathrm{min} &\triangleq 600\,\ell, \\ 1\,\mathrm{min} &\triangleq \frac{600\,\ell}{12} = 50\,\ell, \\ 9\,\mathrm{min} &\triangleq 50\,\ell \cdot 9 = 450\,\ell. \end{aligned}$$

In dem Behälter sind also nach
9 min
$450\,\ell$ Wasser.

2. Methode: Verhältnisgleichung

Mit der Verhältnisgleichung in der Form
$y = k \cdot x$ und
$k = \frac{600}{12}$ erhalten wir für
$x = 9$

$$y = \frac{600}{12} \cdot 9 = 600 \cdot \frac{9}{12} = 600 \cdot \frac{3}{4} = 150 \cdot 3 = 450.$$

In dem Behälter sind also nach
9 min
$450\,\ell$ Wasser.

4.2 Umgekehrte Proportionalität

Eine weiteres mögliches Verhalten voneinander abhängiger Größen ist die *umgekehrte Proportionalität* (oder *Antiproportionalität*): Wird beispielsweise

x verdoppelt (verdreifacht oder halbiert), so wird
y halbiert (durch drei geteilt oder verdoppelt). Sie zeichnet sich also dadurch aus, dass nicht der Quotient, sondern *das Produkt* der voneinander abhängigen Größen konstant ist.

4.6 DEFINITION (UMGEKEHRT PROPORTIONAL)

Wenn das Produkt zweier voneinender abhängiger Größen
x und
y konstant gleich
k ist, wenn also

$$y \cdot x = k \quad (*)$$

für eine feste Zahl
$k \neq 0$ und für alle zulässigen Werte von
x und
y gilt, so nennt man
y *umgekehrt proportional* (oder *antiproportional*) zu
x. In Gleichung (*) wird die Antiproportionalität in der *Produktform* ausgedrückt.

4.7 BEMERKUNG

1. Die Antiproportionalität zweier Größen
   x und
   y kann man auch ausdrücken, indem man die Produktform auf beiden Seiten z.B. durch
   x teilt:

   $$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

   Diese Gleichung bedeutet, *dass*
   y *proportional zum Kehrwert*
   $\frac{1}{x}$ *von*
   x *ist.* Zwei Größen sind also antiproportional, wenn eine proportional zum Kehrwert der anderen ist.

2. Wenn
   y umgekehrt proportional zu
   x ist, ist natürlich auch
   x umgekehrt proportional zu
   y. Da die Definition symmetrisch in
   x und
   y ist, ändert sich die Konstante
   k dabei nicht.

4.8 BEISPIEL (GESCHWINDIGKEIT, FAHRZEIT)

Ein typisches Beispiel für umgekehrt proportionale Größen sind *Geschwindigkeit* und *Fahrzeit* (wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird, halbiert sich die Fahrzeit). Ein Autofahrer der mit einer Geschwindigkeit von
60 km/h fährt, braucht für eine
60 Kilometer lange Strecke
1 Stunde.
Ein Fahrradfahrer, der mit einer Geschwindigkeit von
20 km/h dieselbe Strecke fährt, braucht
3 Stunden.
Ein Mopedfahrer, der mit einer Geschwindigkeit von
40 km/h dieselbe Strecke fährt, braucht
$1{,}5$ Stunden. Allgemein benötigt ein Fahrzeug, das mit der Geschwindigkeit
x km/h fährt, für diese Strecke
$y = 60 \cdot \frac{1}{x}$ Stunden, da das Produkt aus Geschwindigkeit (Größe
x) und benötigter Zeit (Größe
y) stets die gefahrene Strecke ergibt, welche in diesem Beispiel immer gleich
60 km ist. Die benötigte Zeit
y ist also umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit
x.

Analog zu den Aufgaben zur Proportionalität, gibt es für Aufgaben zur umgekehrten Proportionalität abhängiger Größen ebenfalls zwei gängige Methoden; in der ersten spielt der *Dreisatz* die zentrale Rolle, in der zweiten die *Produktform*.

4.9 BEISPIEL

Um ein Rasengrundstück von 4250 qm zu mähen, brauchen zwei Rasenmäher 6 Stunden. Wie lange dauert es, wenn statt zwei Rasenmähern drei eingesetzt werden?

Offenbar ist es sinnvoll, anzunehmen dass die insgesamt benötigte Zeit (Größe
y in Stunden) umgekehrt proportional zur Anzahl der eingesetzten Rasenmäher (Größe
x) ist, da die (baugleichen) Rasenmäher in gleichen Zeiträumen gleichgroße Flächen abmähen können.

1. Methode: Dreisatz

1. Satz: Mit
   2 Rasenmähern benötigt
   man
   6 Stunden.

2. Satz: Mit
   1 Rasenmäher benötigt man
   $6 \cdot 2 = 12$ Stunden.

3. Satz: Mit
   3 Rasenmähern benötigt
   man
   $12 : 3 = 4$ Stunden.

Dies wird meistens kürzer schematisch dargestellt (das Zeichen
$\hat{=}$ bedeutet „entspricht”):

$$\begin{aligned} 2 &\hat{=} 6\,\mathrm{h}, \\ 1 &\hat{=} 6\,\mathrm{h} \cdot 2 = 12\,\mathrm{h}, \\ 3 &\hat{=} \tfrac{12\,\mathrm{h}}{3} = 4\,\mathrm{h}. \end{aligned}$$

Mit
3 Rasenmähern werden
4 Stunden benötigt.

Zu beachten ist, dass im Vergleich zur linken Seite auf der rechten Seite immer die *umgekehrte* Operation (Multiplikation statt Division bzw. Division statt Multiplikation) durchgeführt wird, da die beiden Größen *umgekehrt* proportional sind.

2. Methode: Produktform

Wenn die Zahl der Rasenmäher um den Faktor
f geändert wird (z.B. verdoppelt für
$f = 2$ oder verdreifacht für
$f = 3$), ändert sich die benötigte Zeit um den Kehrwert des Faktors, also um
$\frac{1}{f}$ (z.B. halbiert für
$f = 2$ oder gedrittelt für
$f = 3$). Werden nun
3 statt
2 Rasenmäher verwendet, wird die Anzahl also um den Faktor
$f = \frac{3}{2}$ erhöht, und somit die benötigte Zeit auf das
$\frac{2}{3}$-fache verringert:

$$y = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

d.h. mit
3 Rasenmähern werden
4 Stunden benötigt.

Die Gleichung
$y = 6 \cdot \frac{2}{3}$ ist eine unmittelbare Folge der Produktform . Das konstante Produkt beider Größen ist hier

$$k = y \cdot x = 6 \cdot 2 = 12 = 4 \cdot 3.$$

ERGÄNZUNG (UMGEKEHRTE PROPORTIONALITÄT)
Anzeigen

Zurück zum Kapitelüberblick

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Ist die Größe
X direkt proportional zu
Y ? Bestimmen Sie ggf. die Proportionalitätskonstante.

X	4	8	12	16
Y	6	12	18	24

Lösung

Es gilt

$$4 = \frac{2}{3} \cdot 6 \quad 8 = \frac{2}{3} \cdot 12 \quad 12 = \frac{2}{3} \cdot 18 \quad 16 = \frac{2}{3} \cdot 24$$

Die Größe
X ist also immer das Produkt aus dem konstanten Faktor
$\frac{2}{3}$ und der Größe
Y . Die Größe
X ist daher direkt proportional zu
Y und der Proportionalitätsfaktor ist
$\frac{2}{3}$.

ÜBUNG 2

Ein Pkw verbraucht auf
$100\,\mathrm{km}$
$9{,}6$ Liter Benzin. Mit einer Tankfüllung kommt er
$540\,\mathrm{km}$ weit. Wie viele Liter Benzin fasst der Tank? Das Ergebnis ist auf ganze Liter zu runden.

Antwort

52 Liter Benzin

Lösung

Der Zusammenhang zwischen der zurückgelegten Strecke und dem Benzinverbrauch ist proportional und es gelten die folgenden Entsprechungen: (Das Zeichen
$\triangleq$ bedeutet: entspricht.)

$$\begin{aligned} 100\,\mathrm{km} &\triangleq 9{,}6\,\ell \\ 1\,\mathrm{km} &\triangleq \tfrac{9{,}6}{100}\,\ell \\ 540\,\mathrm{km} &\triangleq 540 \cdot \tfrac{9{,}6}{100}\,\ell \end{aligned}$$

Um
$540\,\mathrm{km}$ weit fahren zu können, benötigt man also

$$\frac{540 \cdot 9{,}6}{100} = 51{,}84 \approx 52$$

Liter Benzin.

Der Tank fasst also etwa
52 Liter.

ÜBUNG 3

Drei Pflasterer benötigen für eine Hofeinfahrt
$11{,}5$ Stunden. Wie lange brauchen
5 Pflasterer?

Antwort

$6{,}9$ Stunden

Lösung

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Pflasterer und der Arbeitsdauer ist umgekehrt proportional.

Daher gelten die folgenden Entsprechungen:

$$\begin{aligned} {\color{red}3}\text{ Pflasterer} &\triangleq \quad {\color{red}11{,}5}\,\text{h} \\ 1\text{ Pflasterer} &\triangleq \quad 11{,}5 \cdot 3 = 34{,}5\,\text{h} \\ {\color{blue}5}\text{ Pflasterer} &\triangleq \quad 34{,}5 : 5 = 6{,}9\,\text{h} \end{aligned}$$

5 Pflasterer benötigen also
$6{,}9$ Stunden für die Hofeinfahrt.

Die Grenzen der Modellierung mit Proportionalität oder umgekehrter Proportionalität werden z.B. daran deutlich, dass nach dieser Rechnung
1000 Pflasterer nur etwa
2 Minuten benötigten!

ÜBUNG 4

Für ein Rasengrundstück von 4250 qm brauchen zwei Rasenmäher 6 Stunden. Wie lange brauchen 3 Rasenmäher für die doppelte Rasenfläche?

Antwort

8 Stunden

Lösung

Die benötigte Zeit y (in Stunden gemessen) ist bei fester Anzahl von Rasenmähern x offenbar proportional zur Grundstücksfläche z (in qm gemessen).

Für die doppelte Rasenfläche ($8500\,\mathrm{qm}$) brauchen zwei Rasenmäher also die doppelte Zeit, d.h.

$$2 \cdot 6 = 12$$

Stunden.

Bei gleichbleibender Rasenfläche ist die benötigte Zeit y umgekehrt proportional zur Anzahl der Rasenmäher x. Mit dem Dreisatz erhält man daher für die Fläche von $8500\,\mathrm{qm}$:

$$\begin{aligned} 2\ \text{Rasenmäher} &\triangleq\quad 12\,\mathrm{h} \\ 1\ \text{Rasenmäher} &\triangleq\quad 12 \cdot 2 = 24\,\mathrm{h} \\ 3\ \text{Rasenmäher} &\triangleq\quad 24 : 3 = 8\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Drei Rasenmäher brauchen also für die doppelte Rasenfläche 8 Stunden.

5. PROZENT- UND ZINSRECHNUNG

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie sind sicher im Umgang mit den Begriffen Prozentsatz, Grundwert und Prozentwert.
- Sie können die Prozentrechnung in Alltagsproblemen anwenden.
- Sie beherrschen die Zins- und Zinseszinsrechnung.

5.1 Prozente

Der Begriff „Prozent" kommt aus dem Lateinischen und, bedeutet wörtlich übersetzt „von" (=pro) „Hundert" (=centum) und wird mit dem Zeichen % abgekürzt.

Trifft ein Fußballspieler das Tor in
65 von
100 Schüssen, so ist seine Trefferquote
65% oder
65 Hundertstel.

In diesem Beispiel ist die Gesamtzahl der abgegebenen Schüsse der ***Grundwert***, die Anzahl der aufs Tor abgegebene Schüsse der ***Prozentwert*** und die Trefferquote der ***Prozentsatz***.

Wir betrachten nun beispielhaft drei Typen von Aufgaben in der Prozentrechnung, in denen jeweils eine der in der Gleichung

$$\frac{\text{Prozentsatz}}{100\%} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}$$

vorkommenden Größen ***Prozentsatz***, ***Grundwert*** und ***Prozentwert*** aus den beiden anderen ermittelt wird.

1. Typ (Ermittlung eines Prozentwertes): Wieviel ist
5% ***von***
120 ***€ ?***

Lösung:
5% von
$120€$ sind
$\frac{5\%}{100\%} \cdot 120\,€ = 6\,€.$

5% ist der *Prozentsatz*,
120 € der *Grundwert* und
6 € der berechnete *Prozentwert*.

2. Typ (Ermittlung eines Prozentsatzes): Wieviel Prozent von
120 ***€ sind***
6***€?***

Beachten Sie, dass
100% des Grundwertes der Grundwert selbst ist.

Ausführliche Lösung (mit Dreisatz):
120 € sind
100% des Grundwertes,
1 € sind
$\frac{100}{120}\%$ des Grundwertes,
6 € sind
$6 \cdot \frac{100}{120}\% = 5\%$ des Grundwertes.

3. Typ (Ermittlung eines Grundwertes):
150% ***des Grundwertes ist***
180 ***€. Wieviel Euro ist der Grundwert?***

Ausführliche Lösung (mit Dreisatz):
150%(Prozentsatz) des Grundwertes sind
180 €,
1% des Grundwertes sind
$\frac{180\,€}{150} = 1{,}20\,€,$
100% des Grundwertes
$-$ d.h. der Grundwert selbst
$-$ sind
$1{,}2\,€$
$\cdot 100 = 120\,€\,;$

oder kurz:
$\frac{180\,€}{150} \cdot 100 = 1{,}2€ \cdot 100 = 120\,€\,.$

5.1 BEISPIEL (1. TYP (PROZENTWERT))

1. Beispiel

25% von
60 € sind
$25 \cdot \frac{60}{100}€ = 15\,€.$

2. Beispiel

48% von
$600\,\ell$ sind
$48 \cdot \frac{600}{100}\,\ell = 288\,\ell.$

3. Beispiel

80% von
$420\,\mathrm{m}^2$ sind
$80 \cdot \frac{420}{100}\,\mathrm{m}^2 = 336\,\mathrm{m}^2.$

[online-only]

5.2 BEISPIEL (2. TYP (PROZENTSATZ))

1. Beispiel

Wieviel Prozent von
$420\,\mathrm{m}^2$ sind
$336\,\mathrm{m}^2$?

Ausführliche Lösung:

- $420\,\mathrm{m}^2$ ist
  100% von
  $420\,\mathrm{m}^2$,

- $1\,\mathrm{m}^2$ ist
  $\frac{100}{420}\%$ von
  $420\,\mathrm{m}^2$,

- $336\,\mathrm{m}^2$ ist
  $336\cdot\frac{100}{420}\% = 80\%$ von
  $420\,\mathrm{m}^2$

oder kürzer:
$\frac{336}{4{,}20}\% = 80\%.$

2. Beispiel

Wieviel Prozent von
$600\,\ell$ sind
$288\,\ell$?

Ausführliche Lösung:

- $600\,\ell$ ist
  100% von
  $600\,\ell$,

- $1\,\ell$ ist
  $\frac{100}{600}\%$ von
  $600\,\ell$,

- $288\,\ell$ ist
  $288\ell\cdot\frac{100}{600}\% = 48\%$ von
  $600\,\ell$;

oder kürzer:
$\frac{288}{6}\% = 48\%.$

3. Beispiel

Wieviel Prozent von
60 ist
15?

Kurze Lösung:
$\frac{15}{0{,}6}\% = \frac{150}{6}\% = 25\%.$

5.3 BEISPIEL (3. TYP (GRUNDWERT))

1. Beispiel

120% des Grundwertes ist
72. Was ist der Grundwert?

Ausführliche Lösung:

- 120% des Grundwertes ist 72,
- 1% des Grundwertes ist $0{,}6$,
- 100% des Grundwertes — d.h. der Grundwert selbst — ist 60;

oder kürzer:
$\frac{72}{120} \cdot 100 = 0{,}6 \cdot 100 = 60.$

2. Beispiel

110% des Grundwertes sind
$330\,\ell$. Was ist der Grundwert?

Ausführliche Lösung:

- 110% des Grundwertes ist $330\,\ell$,
- 1% des Grundwertes ist $3\,\ell$,
- 100% des Grundwertes ist $300\,\ell$;

oder kürzer:
$\frac{330\,\ell}{110} \cdot 100 = 3\,\ell \cdot 100 = 300\,\ell\,.$

3. Beispiel

140% des Grundwertes sind
$420\,\mathrm{m}^2$. Was ist der Grundwert?

Kurze Lösung:
$\frac{420\,\mathrm{m}^2}{140} \cdot 100 = 3\,\mathrm{m}^2 \cdot 100 = 300\,\mathrm{m}^2\,.$

[online-only]

5.4 BEISPIEL

Ein Kaufmann verkauft einen Teil seiner Ware für $1\,320$ €. Wie hoch war der Einkaufspreis, wenn er die Ware mit 20% Aufschlag (bezogen auf den Einkaufspreis) verkauft?

Wenn er die Ware mit 20% Aufschlag verkauft, entspricht der Verkaufspreis einem Prozentsatz von 120% des Einkaufspreises. Der Einkaufspreis G (Grundwert) ist dann:

$$G = \frac{100}{120} \cdot 1\,320€ = 1\,100\,€.$$

5.5 BEISPIEL

Sie investieren
$3\,000\,€$ *an der Börse und verlieren bei einem riskanten Spekulationsgeschäft auf einen Schlag 56% ihres Geldes. Glücklicherweise erholen sich Ihre Aktien aber wieder und legen in den nächsten zwei Wochen um 75% zu, bevor Sie sie dann verkaufen. Hat sich die Investition gelohnt?*

Zunächst einmal bestimmt man den Wert der Aktien nach dem Einbruch. Da der Aktienwert um
56% fällt, bleiben
44% der
$3\,000\,€$ als Rest erhalten:

$$\text{Restwert} = \frac{44}{100} \cdot 3\,000\,€ = 1\,320\,€.$$

Dieser Rest legt in den nächsten Tagen um
75% zu und wächst somit auf
175% der noch vorhandenen
$1\,320\,€$ an. Folglich steigt der Wert der Aktien bis zum Verkauf auf einen Gesamtwert von

$$\text{Verkaufswert} = \frac{175}{100} \cdot 1\,320\,€ = \frac{7}{4} \cdot 1\,320\,€ = 2\,310\,€.$$

Offensichtlich hat sich Ihre Investition nicht gelohnt, da Sie einen Verlust von
$3\,000\,€ - 2\,310\,€ = 690\,€$ haben.

5.6 BEISPIEL

Ein Kreissektor füllt
30% *der Fläche einer Kreisscheibe aus. Welchem Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) entspricht das?*

Lösung:
Die Fläche eines Kreissektors ist proportional zum Mittelpunktswinkel
α:

$$\text{Fläche des Kreissektors} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe.}$$

Jetzt suchen wir den Winkel
α so, dass der zugehörige Kreissektor
30% der Fläche der Kreisscheibe ist. Dies ergibt die folgende Gleichung für
α:

$$\tfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe} = \tfrac{30}{100} \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe,}$$
$$\alpha = 360^\circ \cdot \tfrac{30}{100} = 108^\circ.$$

5.2 Zinsrechnung

Zins ist Geld, das ein Schuldner einem Gläubiger für ein vorübergehend überlassenes Kapital zahlt. Wieviel Geld zu zahlen ist, wird meistens durch den sogenannten Zinssatz in Prozenten angegeben. Der Zins ist in diesen Fällen proportional zum Kapital.

Leihen Sie sich beispielsweise von der Bank
$5\,000$€ zu einem Zinssatz
$p = 3\%$ aus, dann müssen Sie dafür
$\frac{3}{100} \cdot 5\,000 = 150$ € Zins zahlen.

Leihen Sie sich Geld von einer Bank über längere Zeit aus, dann ist der Zins meistens einmal pro Jahr zu zahlen. Die Bank verlangt beispielsweise
4% Zins pro Jahr (wird oft mit *p.a.* abgekürzt; *p.a.* bedeutet per annum=pro Jahr). (Bei Kreditkarten werden die Zinsen oft täglich berechnet.)

5.7 BEISPIEL

Frau Markoni nimmt bei ihrer Bank einen Kredit über
$20\,000$ € *auf und muss der Bank dafür*
$2{,}4\,\%$ *pro Jahr Zins zahlen. Wieviel Zins zahlt sie am Ende des Jahres?*

Lösung: Frau Markoni zahlt am Ende des Jahres den

$$\text{Zins} = \frac{2{,}4}{100} \cdot 20\,000\,€ = 480\,€.$$

5.8 BEISPIEL (ZINSESZINS)

Sie zahlen zu Beginn des Jahres 2020 den Betrag von
$32\,000$€ *auf ihr Sparkonto ein. Das Guthaben wird mit einem Zinssatz von*
5% *pro Jahr verzinst und die Zinsen am Ende jeden Jahres dem Guthaben zugeschlagen.*

Wie groß ist ihr Guthaben am Ende des Jahres 2024?

Um das Guthaben am Ende des Jahres 2024 zu berechnen, gehen wir schrittweise vor (Beträge in Euro und Cent). Das Guthaben beträgt am Ende der Jahre eins bis fünf:

$$\begin{aligned}
&\text{1. Jahr: } 32\,000{,}00 + \tfrac{5}{100} \cdot 32\,000{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right) &= 33\,600{,}00\\
&\text{2. Jahr: } 33\,600{,}00 + \tfrac{5}{100} \cdot 33\,600{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^2 &= 35\,280{,}00\\
&\text{3. Jahr: } 35\,280{,}00 + \tfrac{5}{100} \cdot 35\,280{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^3 &= 37\,044{,}00\\
&\text{4. Jahr: } 37\,044{,}00 + \tfrac{5}{100} \cdot 37\,044{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^4 &= 38\,896{,}20\\
&\text{5. Jahr: } 38\,896{,}20 + \tfrac{5}{100} \cdot 38\,896{,}20 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^5 &= 40\,841{,}01
\end{aligned}$$

Wie das Beispiel zeigt, gilt für mehrjährige Anlagen die „Zinseszinsformel". Der Name beschreibt, dass ab dem zweiten Jahr auch die Zinsen der Vorjahre verzinst werden.

5.9 REGEL (ZINSESZINSFORMEL)

Wird ein Anfangskapital
K_0 pro Jahr mit
$p\,\%$ verzinst, so wächst das Kapital nach
n Jahren auf einen Betrag von

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

an.

In Beispiel 5.8 ist
$K_0 = 32\,000{,}00\,€,\ p = 5$ und
$n = 1,\dots,5.$

5.10 BEISPIEL

Zu Beginn eines Jahres werden auf ein Sparbuch
$5\,000€$ *einbezahlt. Das Guthaben wird mit einem Zinssatz von*
4% *pro Jahr verzinst und am Ende jeden Jahres dem Guthaben zugeschlagen.*

a) Schätzen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 4. Jahres am nächsten kommt.

$$5\,000€, \quad 5\,160€, \quad 5740€, \quad 5\,860€, \quad 6\,250€.$$

Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das Ergebnis genau zu berechnen.

b) Berechnen Sie das Ergebnis am Ende des zweiten und vierten Jahres genau in Euro und Cent (gerundet).

Lösung a)

Die Zinsen auf die Einlage von
$5\,000€$ sind am Ende des 1. Jahres
$200€$, am Ende des 2. Jahres
$400€$, am Ende des 3. Jahres
$600€$ und am Ende des 4. Jahres
$800€$. Insgesamt sind dies
$800€$ an Zinsen. Zusammen mit den eingezahlten
$5\,000€$ ergibt dies
$5\,800€$. Das tatsächliche Guthaben am Ende des 4. Jahres ist größer als dieser Betrag, da wir bei der Berechnung der Zinsen in einem Jahr den Zuwachs durch die Zinsen der vorangegangenen Jahre nicht berücksichtigt haben. Allerdings ist der Fehler gering, weil die Zinsbeträge deutlich kleiner sind als das eingezahlte Kapital. Somit ist die beste Schätzung
$5\,860€$.

Lösung b)

Das Guthaben am Ende des 2. und 4. Jahres wird mit der Zinseszinsformel berechnet (Beträge in Euro und Cent, auf ganze Cent gerundet).

$$\begin{aligned} \text{Ende 2. Jahr: } & 5\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{4}{100}\right)^2 = 5\,408{,}00€ \\ \text{Ende 4. Jahr: } & 5\,000{,}00 \cdot \left(1 + \tfrac{4}{100}\right)^4 = 5\,849{,}2928 \approx 5\,849{,}29€ \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn am Ende jeden Jahres die Zinsen vom Konto abgehoben werden, ist der Ertrag in vier Jahren nur
$800€$ anstelle der fast
$850€$ bei der Anlage mit Zinseszins.

Eine andere typische Aufgabe fragt nach der nötigen Einlage am Anfang, wenn bei gegebener Verzinsung und Dauer ein festes Sparziel erreicht werden soll. Manchmal ist auch bei gegebener Wertsteigerung und Dauer einer Anlage der Zinssatz von Interesse, der zu dieser Wertsteigerung führt. Dafür muss die Zinseszinsformel nach dem Anfangskapital
K_0 bzw. nach dem Zinssatz
p aufgelöst werden.

5.11 BEISPIEL

Herr Meier möchte den nötigen Betrag zurücklegen, um in fünf Jahren für die Sanierung des Daches seines Hauses einen Betrag in Höhe von
$10\,000$ *€ zur Verfügung zu haben. Eine Bausparkasse sagt ihm für diese Zeit einen festen Zins von*
3% *zu.*
Welche Summe muss er jetzt einzahlen, um sein Sparziel zu erreichen?

Lösung:
Nach der Zinseszinsformel gilt

$$K_5 = 10\,000 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = K_0 \cdot 1{,}159274074$$

$$K_0 = \frac{10\,000\text{ €}}{1{,}159274074} \approx 8\,626{,}09\text{ €}$$

Er muss also (mindestens)
$8\,626{,}09$ € bei der Bausparkasse einzahlen.

5.12 BEISPIEL

Ein Finanzberater bietet Frau Schulze eine Anlage von
$8\,000$*€ an, bei der nach vier Jahren der Wert um*
$1\,150$*€ steigt. Er gibt an, dass das einer besseren Verzinzung als*
$3{,}5\%$ *p.a. entspricht. Stimmt die Behauptung?*

Lösung:
Mit der Zinseszinsformel berechnen wir die jährliche Zinsrate, die dem Angebot zu Grunde liegt.

$$K_4 = 8\,000 + 1\,150 = 9\,150 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 8\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = \frac{9\,150}{8\,000} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \sqrt[4]{\frac{9\,150}{8\,000}} \approx 1{,}034148$$

$$p \approx 100 \cdot (1{,}034148 - 1) \approx 3{,}41$$

Die Anlage hat mit rund
$3{,}41\%$ einen geringeren Ertrag als versprochen.

Zurück zum Kapitelüberblick

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

(1) Berechnen Sie folgende Ausdrücke, ohne einen Taschenrechner zu verwenden:

a)	b)	c)
2% von 20	25% von 990	200% von 15

Antwort

a)	b)	c)
$0{,}4$	$247{,}5$	30

Lösung a)

$$2\ \%\ \text{von}\ 20 = \frac{2}{100} \cdot 20 = \frac{2 \cdot 20}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4\,.$$

Lösung b)

$$25\ \%\ \text{von}\ 990 = \frac{25}{100} \cdot 990 = \frac{25 \cdot 990}{100} = \frac{990}{4} = 247{,}5\,.$$

Lösung c)

$$200\ \%\ \text{von}\ 15 = \frac{200}{100} \cdot 15 = \frac{200 \cdot 15}{100} = \frac{2 \cdot 15}{1} = 30\,.$$

---

(2) Wieviel Prozent entsprechen
$1/7$des Grundwertes ? Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Antwort

$14{,}29$ %

Lösung

G bezeichne den Grundwert. Dann ist
$\frac{1}{7}$ des Grundwertes auf vier Stellen gerundet.

$$\frac{1}{7}G \approx 0{,}1429G = \frac{14{,}29}{100}G.$$

Somit entsprechen
$1/7$des Grundwertes
$14{,}29$ Prozent (auf zwei Stellen gerundet).

ÜBUNG 2

(1) Ein Kapital von
4.000 € wird bei einer jährlichen Verzinsung von
10% pro Jahr für
3 Jahre angelegt. Wie hoch sind insgesamt die Zinsen (inklusive Zinseszins)?

Antwort

Die Zinsen nach
3 Jahren betragen
1.324 €.

Lösung

Die allgemeine Zinseszinsformel lautet

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad K_n = \text{Kapital nach } n \text{ Jahren} \quad K_0 = \text{Startkapital}$$

Nach
3 Jahren ergibt sich also, bei einem Startkapital von
4000 € und einem Zinssatz von
10%, ein Kapital von

$$\begin{aligned} K_3 &= 4000 \cdot \left(1 + \tfrac{10}{100}\right)^3 \\ &= 4000 \cdot \left(\tfrac{110}{100}\right)^3 \\ &= 4000 \cdot \left(\tfrac{11}{10}\right)^3 \\ &= 4000 \cdot \tfrac{11^3}{10^3} \\ &= 4000 \cdot \tfrac{1331}{1000} \\ &= \tfrac{4 \cdot 1000 \cdot 1331}{1000} = \tfrac{4 \cdot 1331}{1} = 5324 \quad (€) \end{aligned}$$

Um die reinen Zinsen zu erhalten, muss man nun das ursprüngliche Kapital wieder abziehen:

$$Z = K_3 - K_0 = 5324 - 4000 = 1324 \quad (€)$$

Die Zinsen nach
3 Jahren betragen insgesamt also
1324 €.

(2) Karl leiht sich
128 € zu einem jährlichen Zinssatz von
50%. Wieviel Geld muss Karl nach
6 Jahren zurückzahlen?

Antwort

Nach
6 Jahren muss Karl
1458 € zurückzahlen.

Lösung

Wir verwenden die allgemeine Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad K_n = \text{Kapital nach } n \text{ Jahren} \quad K_0 = \text{Startkapital}$$

Nach
6 Jahren ergibt sich also, bei einem Kapital von
128 € und einem Zinssatz von
50%, ein Kapital von

$$\begin{aligned} K_6 &= 128 \cdot \left(1 + \tfrac{50}{100}\right)^6 \\ &= 128 \cdot \left(\tfrac{150}{100}\right)^6 \\ &= 128 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^6 \\ &= 128 \cdot \tfrac{3^6}{2^6} \\ &= 128 \cdot \tfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \tfrac{128 \cdot 729}{64} = 2 \cdot 729 = 1458 \quad (€) \end{aligned}$$

(3) Welches Kapital legte Sylvia vor einem Jahr zu einem Zinssatz von
$4{,}5\%$ an, wenn sie nach Ablauf dieser Zeit
$22{,}50$ € Zinsen erhält?

Antwort

500 €

Lösung

Wir lösen die allgemeine Formel für die Zinsen nach einem Jahr,

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \quad Z = \text{Zinsen} \quad K = \text{Kapital} \quad p = \text{Zinssatz}$$

nach dem Startkapital
K auf:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \Leftrightarrow K = Z \cdot \frac{100}{p}$$

Wir setzen die bekannten Werte
Z und
p ein. Daraus ergibt sich, dass Sylvia vor einem Jahr ein Kapital in folgender Höhe angelegt hatte:

$$K = 22{,}5 \cdot \frac{100}{4{,}5} = 500\ (€)$$

ÜBUNG 3

(1) Ein Auto kostet in der Grundausstattung
13.500 Euro. Sie bestellen es mit einer Sonderausstattung, die
1.500 Euro zusätzlich kostet und erhalten bei Barzahlung
$12{,}5$ % Rabatt auf den Gesamtpreis. Wieviel Prozent des ***Grundpreises*** haben Sie bezahlt ? Runden Sie auf die erste Stelle nach dem Komma.

Antwort

Etwa
$97{,}2\,\%$

Lösung

Prozentwert: Bei einem Rabatt von
$12{,}5$ % müssen
$87{,}5$ % des Gesamtpreises von
$13.500 + 1.500 = 15.000$ Euro gezahlt werden, also erhalten wir einen Prozentwert von

$$\frac{87{,}5}{100} \cdot 15000 = \frac{875}{1000} \cdot 15000 = 875 \cdot 15 = 13125$$

Euro.

Der prozentuale Anteil am Grundpreis ergibt sich also zu

$$p = \frac{13125}{13500} \cdot 100 = \frac{13125}{135} = 97,\bar{2}$$

Prozent. Runden auf die erste Nachkommastelle ergibt
$97{,}2$ %.

---

(2) Nachdem Sie in der ersten Woche ihres Urlaubs mit ihrer fabrikneuen Kamera 235 Bilder gemacht haben, sind
62 % des Speicherchips belegt. Wenn Sie annehmen, dass alle Bilder denselben Speicherplatz benötigen, wieviele Bilder werden Sie ungefähr noch machen können, bevor Sie die Bilder herunterladen müssen ?

Antwort

Sie werden noch etwa
144 Bilder machen können.

Lösung

Bei festem Speicherplatz pro Bild sei
x die Anzahl Bilder, bei der der Speicherchip voll ist. Dann sind
62 % von
x die bereits abgespeicherten
235 Bilder, oder

$$x \cdot \frac{62}{100} = 235$$

und somit auf drei Nachkommastellen gerundet

$$x = \frac{235 \cdot 100}{62} = 379{,}032.$$

Sie können also noch etwa
$379 - 235 = 144$ Bilder machen.

(3) Zwei Discounter machen Werbung mit Rabattangeboten. Discounter 1 gibt immer 10 % Rabatt auf alle Produkte und in der Woche vor Weihnachten nochmal 5 % auf den Restpreis. Discounter 2 gibt um Weihnachten 15 % Rabatt auf alle Produkte. Wo gehen Sie einkaufen ?

Antwort

Sie können natürlich einkaufen, wo Sie wollen, aber Discounter 2 ist etwas billiger.

Lösung

Bei Discounter 1 werden regulär
10 % Rabatt gegeben, was bedeutet, dass von einem Ausgangspreis
x nur

$$x - \frac{10}{100}x = 0{,}9x = \frac{90}{100}x$$

d.h.
90 % tatsächlich bezahlt werden müssen. Auf diesen Preis werden nun noch einmal
5 % Rabatt gegeben, was bedeutet, dass Sie wegen

$$\frac{90}{100}x - \frac{5}{100}\frac{90}{100}x = \left(1 - \frac{5}{100}\right)\frac{90}{100}x = \frac{95 \cdot 90}{10000}x = 0{,}855x$$

$85{,}5$ % des Grundpreises bezahlen müssen.

Das ist ein halbes Prozent mehr, als bei Discounter 2, wo Sie wegen

$$x - \frac{15}{100}x = 0{,}85x = \frac{85}{100}x,$$

85 % des Grundpreises bezahlen.

ÜBUNG 4

Eine Krankheit, die in schwerer oder weniger schwerer Form auftreten kann, kann auf zwei Arten behandelt werden. Um herauszufinden, welche Behandlung besser ist, werden die Behandlungsergebnisse in folgender Tabelle aufgeführt:

	behandelt mit Behandlung A	**davon erfolgreich**	**behandelt mit Behandlung B**	**davon erfolgreich**
schwere Form	233	186	70	53
minderschwere Form	100	89	280	241

Die Tabelle ist so zu lesen, dass z.B. mit Behandlung A
233 schwere Fälle behandelt wurden, wobei in
186 Fällen die Behandlung erfolgreich war.
Bestimmen Sie die prozentualen Erfolgsquoten in allen vier Fällen und die Gesamterfolgsquoten von Behandlung A und Behandlung B, und runden Sie jeweils auf eine Nachkommastelle. Was fällt Ihnen auf ?

Antwort

Die Erfolgsquoten sind (gerundet):

	Behandlung A	**Behandlung B**
schwere Form	$79{,}8\ \%$	$75{,}7\ \%$
minderschwere Form	$89\ \%$	$86{,}1\ \%$
gesamt	$82{,}6\ \%$	$84\ \%$

Erstaunlich dabei ist, dass die Gesamterfolgsquote von Behandlung 1 niedriger ist, als von Behandlung 2, obwohl Behandlung 1 überlegen ist, wenn man die beiden Formen der Krankheit einzeln betrachtet. Dieses Phänomen nennt man in der Statistik das ***Simpson-Paradoxon***

Lösung

Die Erfolgsquoten in den einzelnen Fällen werden auf eine Nachkommastelle gerundet angegeben:

	Behandlung A	**Behandlung B**
schwere Form	$\frac{186}{233} = 79{,}8\,\%$	$\frac{53}{70} = 75{,}7\,\%$
minderschwere Form	$\frac{89}{100} = 89\,\%$	$\frac{241}{280} = 86{,}1\,\%$
gesamt	$\frac{186+89}{233+100} = \frac{275}{333} = 82{,}6$ %	$\frac{53+241}{80+270} = \frac{294}{350} = 84$ %

Es fällt auf, dass die minderschwere Form, bei der ein Behandlungserfolg per se wahrscheinlicher ist, viel öfter mit der zweiten Methode behandelt wurde, während dies für die schwierigen Fälle genau umgekehrt war. Daher erscheint in der Gesamtbetrachtung die zweite Behandlungsmethode besser. Aus diesem Grund ergibt sich aus der Betrachtung der Gesamterfolgsquoten kein fairer Vergleich beider Methoden.