ÜBERBLICK: STOCHASTIK

Inhalt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (> 2MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt mit der Schlussprüfung fortfahren.

Lernziele

- Sie können Zufallsexperimente mit diskreten stochastischen Modellen modellieren (Abschnitt 1).
- Sie können Laplace-Modelle und Urnenmodelle anwenden (Abschnitt 2).
- Sie kennen die wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Abschnitt 3).
- Sie können bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen und die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen überprüfen (Abschnitt 4).
- Sie können Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen berechnen (Abschnitt 5).

Vorbemerkung
Im Folgenden werden ausschließlich stochastische Modelle mit endlich vielen Ergebnissen betrachtet. Insbesondere werden bewusst keine stetigen Wahrscheinlichkeitsmodelle (wie etwa die Normalverteilung) sowie vertiefende Themen (wie etwa Grenzwertsätze) behandelt, da diese einerseits weiterführende mathematische Methoden erfordern, andererseits aber in einführenden Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik üblicherweise eingeführt werden. Aus demselben Grund wird auch auf die Diskussion statistischer Verfahren wie Hypothesentests verzichtet, obschon diese durchaus im Mathematikunterricht an Schulen thematisiert werden.

Einführung

Vorgänge, deren Ausgang nicht „mit Sicherheit” vorhergesagt werden kann, begegnen uns in vielen Situationen des Alltags. Die folgenden Beispiele illustrieren Situationen, in denen der Zufall eine wesentliche Rolle für den Ausgang eines Vorgangs spielt.

1 BEISPIEL (ZUFALLSABHÄNGIGE VORGÄNGE)

(i) Münzwurf
(ii) Lotto
(iii) Gesellschaftsspiele
(iv) Würfeln
(v) Sportwetten
(vi) Fertigungsprozesse
(vii) Fahrpläne

Im Beispiel 1 werden bereits wesentliche Unterschiede deutlich. In (i) - (iv) des Beispiels können mögliche Ausgänge des jeweiligen Zufallsexperiments durch natürliche Zahlen beschrieben werden. In (i) - (iii) ist dies durch eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen möglich (z.B. $\{1,2,3,4,5,6\}$ für den Würfelwurf, $\{1,2,\ldots,49\}$ beim Ziehen einer Lottokugel). In (iv) kann prinzipiell jede natürliche Zahl auftreten. In den Situationen (v) - (vii) können die möglichen auftretenden Werte nicht mehr durch natürliche Zahlen beschrieben werden; die Ergebnisse können reelle Zahlen sein. Im Folgenden werden zur Vereinfachung nur Zufallsexperimente mit endlich vielen möglichen Ergebnissen betrachtet.

Gegenstand der Stochastik sind Vorgänge, deren Ausgang nicht sicher ist. Grundlegend für die Stochastik ist der Begriff des Zufallsexperiments, der folgendermaßen formalisiert wird.

2 DEFINITION

Unter einem Zufallsexperiment (Zufallsversuch) wird ein Vorgang (Versuch) unter exakt festgelegten Bedingungen verstanden, wobei

- die möglichen Ergebnisse des Vorgangs zwar bekannt sind,
- das Ergebnis einer konkreten Durchführung jedoch nicht bekannt ist.

Ferner wird angenommen, dass das Experiment unter denselben Bedingungen beliebig oft wiederholt werden kann.

Ehe eine formale Betrachtung (endlicher) stochastischer Modelle erfolgt, wird die Vorgehensweise an einem einfachen Zufallsexperiment erläutert.

3 BEISPIEL (STOCHASTISCHES MODELL FÜR DAS BEISPIEL MÜNZWURF)

Ein zentrales Beispiel zum Verständnis zufallsabhängiger Vorgänge ist der Münzwurf. Hierbei wird der Ausgang des Zufallsexperiments meist mit den Ergebnissen „Kopf" oder „Zahl" modelliert. Zudem wird oft unterstellt, dass die Münze fair ist, d.h. die Chance für das Auftreten der Alternativen „Kopf" oder „Zahl" wird als gleich angenommen. Diese beiden Beobachtungen beschreiben die wesentlichen Elemente eines diskreten stochastischen Modells:

- die Menge der möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments $\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, die auch als Grundmenge bezeichnet wird.
- die Chance für das Eintreten eines Ergebnisses. In der obigen Situation wird angenommen, dass die Münze fair ist, d.h. es besteht eine *50:50* Chance für das Eintreten eines der beiden Ergebnisse. Zur Beschreibung dieses Sachverhalts wird die „Wahrscheinlichkeit" für das Eintreten eines Ergebnisses mit einer Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ beschrieben. Dementsprechend werden die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl in dieser Situation jeweils mit $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ festgelegt. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment *Kopf* oder *Zahl* als Ergebnis auftreten mit 1 zu bewerten.

Kurzgefasst ist das zugehörige stochastische Modell gegeben durch

- die Grundmenge $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$,
- die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Kopf} \longmapsto \frac{1}{2}, \quad \text{Zahl} \longmapsto \frac{1}{2}.$$

4 BEMERKUNG

Eine Anekdote zur Modellierung eines Münzwurfs
Wie bereits eingangs erläutert wird der Münzwurf zu Beginn eines Fußballspiels eingesetzt, um die Mannschaft auszuwählen, die den Anstoß ausführen darf. Bis in die siebziger Jahre war es unter gewissen Umständen üblich, den Sieger eines Spiels per Münzwurf zu ermitteln. Eine solche Situation trat im Viertelfinale des Europapokals der Landesmeister in der Saison 1964/65 ein. Nachdem die zwei vorgesehenen Partien zwischen dem 1. FC Köln und dem FC Liverpool jeweils nach Verlängerung mit 0:0 ausgegangen waren, wurde ein drittes Spiel am 24. März 1965 in Rotterdam angesetzt, das nach Verlängerung ebenfalls Unentschieden (2:2) endete. Aufgrund der geltenden Regeln musste der Schiedsrichter den Sieger durch einen Münzwurf feststellen. Allerdings blieb die Münze auf der Kante im Morast stecken, der Sieger konnte also auch so zunächst nicht ermittelt werden. Eine Wiederholung des Münzwurfs ging zu Gunsten des FC Liverpool aus, der damit das Halbfinale erreichte.
Das Beispiel zeigt, dass eine Modellierung des Münzwurfs mit einer zweielementigen Grundmenge unter Umständen nicht ausreicht. Bei einer geeigneten Wahl der Rahmenbedingungen kann i.Allg. aber davon ausgegangen werden, dass eine zweielementige Grundmenge zur Beschreibung des Münzwurfs genügt.

Das folgende Beispiel illustriert die Modellierung eines einfachen Würfelwurfs.

5 BEISPIEL (STOCHASTISCHES MODELL FÜR DAS BEISPIEL WÜRFELWURF)

Würfelwurf

Das Ergebnis eines Würfelwurfs mit einem handelsüblichen (fairen) Würfel ist eine der Ziffern $1, 2, 3, 4, 5, 6$, wobei das Ergebnis des Wurfs durch die nach dem Wurf obenliegende Seite des Würfels als Summe der Augen festgelegt wird. Andere Ausgänge (etwa der Würfel bleibt auf einer Kante liegen) sind zwar prinzipiell denkbar, können bei einer „vernünftigen" Experimentdurchführung aber vernachlässigt werden.

In Standardmodellen werden daher weitere Ausgänge des Zufallsexperiments nicht weiter betrachtet. Die Intuition legt nun nahe, dass bei einem Wurf mit diesem Würfel jede Seite die gleiche Chance hat, als Ergebnis aufzutreten.

Die Analyse eines einfachen Würfelwurfs mit einem fairen Würfel zeigt, dass im Wesentlichen zwei Bestandteile für die Modellierung der Situation bedeutsam sind:

- die möglichen Ergebnisse des Wurfs sind die Seiten

  die mit den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5, 6$ identifiziert werden,
- die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass ein spezielles Ergebnis eintritt (wobei hier angenommen wird, dass es keine Präferenz für ein Ergebnis gibt).

Das stochastische Modell für den Würfelwurf basiert auf diesen beiden Elementen:

- Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Zuordnung „*Ergebnis* $\longmapsto$ *Wahrscheinlichkeit*"

  Einem Element $\omega \in \Omega$ wird eine Zahl $P(\{\omega\})$ zugeordnet, die die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses ω festlegt. In diesem Beispiel führt diese Vorgehensweise zur Festlegung:

$$P(\{\omega\}) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ausgänge}}{\text{Anzahl möglicher Ausgänge}} = \frac{1}{6}, \quad \omega \in \Omega.$$

1. DISKRETE STOCHASTISCHE MODELLE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt können Sie

- ein einfaches Zufallsexperiment modellieren,
- Wahrscheinlichkeiten in diskreten stochastischen Modellen berechnen.

1.1 Festlegung eines diskreten stochastischen Modells

1.1 DEFINITION

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsvorgangs (Zufallsexperiments) wird **Grundmenge** genannt und mit dem griechischen Großbuchstaben Ω („Omega") bezeichnet:

$$\Omega = \{\omega \,|\, \omega \text{ ist mögliches Ergebnis des zufallsabhängigen Vorgangs}\}.$$

Jedes Element ω von Ω heißt **Ergebnis** und jede Teilmenge von Ω wird als **Ereignis** bezeichnet. Für $\omega \in \Omega$ heißt die einelementige Menge $\{\omega\}$ **Elementarereignis**. (ω ist der griechische Kleinbuchstabe „omega".)

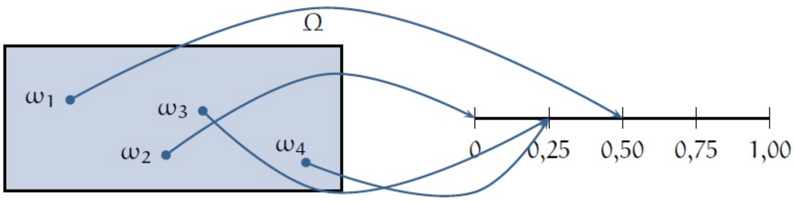
Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $\{\omega\}$ bzw. Ereignisses A wird mit $P(\{\omega\})$ bzw. $P(A)$ bezeichnet, wobei der Buchstabe P an das Wort „Probability" (englisch für Wahrscheinlichkeit) erinnert. Hat das Zufallsexperiment die möglichen Ergebnisse $\omega_1, \ldots, \omega_n$, so wird das zugehörige stochastische Modell durch Festlegung einer Wahrscheinlichkeit $p_i \in [0,1]$ für jedes Ergebnis ω_i definiert. Die Zahlen $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ werden dabei so gewählt, dass ihre Summe $p_1 + \ldots + p_n$ gleich Eins ist.

1.2 BEMERKUNG

Hintergrund der Normierung von Wahrscheinlichkeiten auf die Summe 1 ist, dass dem "sicheren Ereignis" die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet wird. An dieser Stelle sei etwa an die umgangssprachliche Formulierung „*das ist zu 100% sicher*" erinnert, womit gemeint ist, dass keinerlei Zweifel über das Ergebnis bestehen. Berücksichtigt man nun noch dass „Prozent" dem lateinischen Worturssprung nach „pro Hundert" bedeutet, so ergibt sich für 100% gerade der Zahlwert 1.

Dementsprechend werden Wahrscheinlichkeiten gelegentlich auch als Prozentwerte angegeben. Z.B. tritt ein Ereignis, das die Wahrscheinlichkeit $0{,}3$ hat, mit einer 30% Chance ein.

Eine Illustration der Vorgehensweise findet sich in der folgenden Abbildung.



Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Ergebnissen eines Zufallsexperiments mit Grundmenge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$.

1.3 DEFINITION (STOCHASTISCHES MODELL)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Mit der Festlegung $P(\{\omega_i\}) = p_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, für Zahlen $p_1, \ldots, p_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \ldots + p_n = 1$ wird auf Ω ein **stochastisches Modell** definiert.

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** $A \subseteq \Omega$ wird definiert durch

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

P wird als **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** (auf Ω) bezeichnet.

1.4 BEMERKUNG

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ergibt sich also durch Summieren der Wahrscheinlichkeiten der *Ergebnisse* $\omega \in \Omega$, aus denen A besteht.
- Die Notation $\sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ bedeutet, dass für alle Elemente ω aus A die Wahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$ summiert werden.
- Zum Beispiel gilt für $A = \{1, 3, 6, 11\} \subseteq \Omega = \{1, \ldots, 12\}$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \{1,3,6,11\}} P(\{\omega\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{6\}) + P(\{11\}) .$$

- Entsprechend gilt für $B = \{2, 3, 5\}$:

$$P(B) = \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \{2,3,5\}} P(\{\omega\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) .$$

1.5 BEMERKUNG

Die Aussage „Das Ereignis A tritt ein” bedeutet, dass das Zufallsexperiment ein Ergebnis $\omega \in A$ liefert. Im Beispiel eines Würfelwurfs und Ereignis $A = \{2{,}4{,}6\}$ („es fällt eine gerade Zahl”) bedeutet $\omega \in A$ „es fällt eine 2 oder eine 4 oder eine 6”.

c:

Mathematische Beschreibung, Mathematischer Ausdruck	Stochastische Terminologie, Formulierung in der Stochastik	Beispiele Würfelwurf
Menge Ω	Grundmenge, Ergebnismenge	$\{1,2,3,4,5,6\}$
Element ω	(mögliches) Ergebnis	6
Teilmenge A	Ereignis A	$\{1,4,6\}$
Menge $\{\omega\}$	Elementarereignis $\{\omega\}$	$\{6\}$
Menge Ω	sicheres Ereignis	$\{1,2,3,4,5,6\}$
leere Menge $\emptyset$	unmögliches Ereignis	$\emptyset$
Ergebnis $\omega \in A$	Ereignis A tritt ein.	$6 \in \{1,4,6\}$
Ergebnis $\omega \notin A$ $(\omega \in \complement A = \Omega \setminus A)$	Ereignis A tritt nicht ein.	$2 \notin \{1,4,6\}$
$A \cup B$	Ereignisse A oder B oder beide treten ein.	$\{1,2\} \cup \{1,4,6\}$
$A \cap B$	Ereignisse A und B treten ein.	$\{1,2\} \cap \{1,4,6\}$
$A \subseteq B$	Wenn A eintritt, tritt auch B ein.	$\{2,3\} \subseteq \{2,3,4\}$
$A = B$	Ereignisse A und B sind gleich.	$\{2,3\} = \{3,2\}$
$A \cap B = \emptyset$	Die Ereignisse A und B schließen einander aus.	$A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$

Details zu den Mengenoperationen sind im Abschnitt Mengen, Zahlen und Grundrechenarten im Kapitel IA Elementares Rechnen: Mengen und Zahlen und im Abschnitt Mengen im Kapitel Logik und Mengenlehre zu finden.

1.6 BEISPIEL

Ein einfacher Würfelwurf mit einem fairen Würfel wird modelliert durch die

- Grundmenge $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und
- Wahrscheinlichkeiten $p_1 = \frac{1}{6}, \ldots, p_6 = \frac{1}{6}$ mit $p_i = P(\{\omega_i\})$, als Wahrscheinlichkeit die Ziffer i zu werfen, $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

Zur Beantwortung der Frage

$$\text{Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln?}$$

wird daher das Ereignis „gerade Zahl", also $A = \{2, 4, 6\}$, betrachtet. Damit ergibt sich

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

1.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Für Ereignisse A, B gelten folgende Eigenschaften, die mittels der Definition von P in Definition 1.3 nachgewiesen werden können.

1.7 REGEL

Für eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Ω und Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ gilt:

1. $P(A) \geq 0$ (Nicht-Negativität),
2. $P(\Omega) = 1$ (Normierung),
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$ (Additivität).

1.8 BEISPIEL

1. Auf der Grundmenge $\Omega = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ wird durch $P(\{i\}) = p_i \coloneqq \frac{i}{21}$, $i = 1, \ldots, 6$, eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung P definiert, denn die Zahlen $p_i = \frac{i}{21}$ sind nicht-negativ und erfüllen die geforderte Summenbedingung:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{21}{21} = 1.$$

   Für die disjunkten Ereignisse $A = \{1{,}2\}$ und $B = \{6\}$ gilt:

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7},\ P(B) = P(\{6\}) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7},$$

$$P(A \cup B) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{6\}) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} = P(A) + P(B).$$

2. Die Zahlen $p_1 = 0{,}5,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}5$ definieren keine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$, da die Summe $p_1 + p_2 + p_3 = 1{,}1$ größer als Eins ist.

3. Die Zahlen $p_1 = 0{,}5,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}2$ definieren keine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$, da die Summe $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}8$ kleiner als Eins ist.

1.9 BEISPIEL

In einem Supermarkt bewirbt ein Süßigkeitenhersteller verschiedene Schokoladenprodukte. Ein Kunde darf ein Glückrad mit drei gleichgroßen Feldern (mit Nr. $1, 2, 4$) drehen und anschließend jeweils die erzielte Zahl an Produkten aus dem Sortiment auswählen. Als stochastisches Modell wird $\Omega = \{1, 2, 4\}$ gewählt mit $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{4\})$. Die Wahrscheinlichkeit, jeweils $1, 2$ oder 4 Produkte wählen zu dürfen, beträgt $\frac{1}{3}$.

1.10 BEMERKUNG

Die Eigenschaften 1-3 in Regel 1.7 werden als *Kolmogorov-Axiome* bezeichnet und können als alternative Definition von Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet werden. Bei endlichen Grundmengen sind Definition 1.3 und Regel 1.7 gleichbedeutend. Die Bedeutung von Regel 1.7 liegt insbesondere darin, dass sie Ausgangspunkt der Modellierung von Zufallsexperimenten mit nicht-endlichen Ergebnismengen (z.B. Intervallen) ist.

[online-only]

Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P gelten folgende Eigenschaften.

1.11 REGEL (RECHENREGELN FÜR WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN)

Seien $A, B \subseteq \Omega$ und P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Dann gilt:

1. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, falls $A \subseteq B$.
2. $P(A) \leq P(B)$, falls $A \subseteq B$.
3. $P(\complement A) = 1 - P(A)$.
4. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1.12 BEISPIEL

Der einfache Würfelwurf mit einem gezinkten Würfel wird durch die Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sowie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\{1\}) = 0, \quad P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{6\}) = \frac{1}{3}$$

beschrieben. (Wenn bei einem gewöhnlichen Würfel die 1 durch eine zweite 6 ersetzt wird, hat er diese Wahrscheinlichkeiten.) Seien

- $A = \{6\}$ das Ereignis eine Sechs zu würfeln,
- $B = \{2, 3, 5\}$ das Ereignis eine Primzahl zu würfeln,
- $C = \{2, 4, 6\}$ das Ereignis eine gerade Zahl zu würfen.

Dann gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{6\}) = \tfrac{1}{3}, \\ P(B) &= P(\{2,3,5\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}, \\ P(C) &= P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Mit Regel 1.11 berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten anderer Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten für A, B und C.

- Da $A \subseteq C$ gilt für $C \setminus A = \{2, 4\}$:

$$P(C \setminus A) = P(C) - P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- Für das Ereignis D „keine Sechs zu würfeln" gilt mit $D = \complement A = \complement\{6\}$:

$$P(D) = P(\complement A) = 1 - P(\{6\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- $B \cap C = \{2\}$ beschreibt das Ereignis „eine gerade Primzahl” zu würfeln. Mit $P(B \cap C) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ folgt für das Ereignis $B \cup C$ „eine Primzahl oder eine gerade Zahl” zu würfeln:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 1.$$

Man beachte, dass $P(B \cup C) = 1 \neq \frac{7}{6} = P(B) + P(C)$.

Alternativ kann die Wahrscheinlichkeit von $B \cup C = \{2,3,4,5,6\}$ auch über $B \cup C = \complement\{1\}$ berechnet werden, d.h.

$$P(B \cup C) = P(\complement\{1\}) = 1 - P(\{1\}) = 1 - 0 = 1.$$

[online-only]

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Ein einfacher Münzwurf (mit den Ergebnissen *Kopf* und *Zahl*) soll durch ein stochastisches Modell beschrieben werden. Modellieren Sie diese Situation jeweils unter der Annahme, dass

a) die Münze fair ist,

b) die Wahrscheinlichkeit für *Kopf* durch $\frac{3}{4}$ gegeben ist,

c) die Wahrscheinlichkeit für *Kopf* nicht bekannt ist und durch einen Parameter $p \in [0,1]$ repräsentiert wird.

Antwort

a) Grundmenge $\Omega = \{Kopf, Zahl\}$, $P(\{Kopf\}) = P(\{Zahl\}) = \frac{1}{2}$.

b) Grundmenge $\Omega = \{Kopf, Zahl\}$, $P(\{Kopf\}) = \frac{3}{4}$, $P(\{Zahl\}) = \frac{1}{4}$.

c) Grundmenge $\Omega = \{Kopf, Zahl\}$, $P(\{Kopf\}) = p$, $P(\{Zahl\}) = 1 - p$.

Lösung a)

Bei einer fairen Münze ist die Wahrscheinlichkeit für *Kopf* und *Zahl* gleich. Die beiden einzelnen Wahrscheinlichkeiten müssen addiert Eins ergeben.

Also sind $P(\{Kopf\}) = P(\{Zahl\}) = \frac{1}{2}$.

Lösung b)

Die Wahrscheinlichkeit für *Zahl* ergibt sich aus
$P(\{Zahl\}) = 1 - P(\{Kopf\}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Lösung c)

Die Wahrscheinlichkeit für *Zahl* ergibt sich aus $P(\{Zahl\}) = 1 - P(\{Kopf\}) = 1 - p$.

ÜBUNG 2

Ein Glücksrad hat fünf Felder unterschiedlicher Größe, die mit den Zahlen 1, 2, ..., 5 markiert sind.
Beim Drehen des Glücksrads ist die Wahrscheinlichkeit $P(\{1\}) = \frac{1}{4}$, eine 1 zu erhalten.
Entsprechend gilt: $P(\{2\}) = \frac{1}{10}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{5}$ und $P(\{5\}) = \frac{3}{10}$.
Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(\{4\})$,

b) $P(\{A\})$ für $A =$„das Rad zeigt eine gerade Zahl",

c) $P(\{B\})$ für $B =$„das Rad zeigt höchstens eine 3".

Antwort

a) $P(\{4\}) = \frac{3}{20}$

b) $P(\{A\}) = \frac{2}{5}$

c) $P(\{B\}) = \frac{11}{20}$

Lösung a)

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{5\})$ ist Eins.

$$\begin{aligned} P(\{4\}) &= 1 - \Big(P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})\Big) \\ &= 1 - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{10}) = \tfrac{3}{20} \end{aligned}$$

Lösung b)

$A = \{2, 4\}$

$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$

Lösung c)

$$B = \{1,2,3\}$$

$$P(B) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$$

ÜBUNG 3

Betrachten Sie den einfachen Würfelwurf mit einem handelsüblichen Würfel. Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse jeweils als Teilmenge der Grundmenge.

a) Es fällt eine ungerade Zahl.

b) Es fällt eine Primzahl.

c) Die gewürfelte Zahl ist durch Drei teilbar.

Antwort

a) $\{1{,}3{,}5\}$

b) $\{2{,}3{,}5\}$

c) $\{3{,}6\}$

Lösung a)

Die ungeraden Zahlen zwischen 1 und 6 sind 1,3 und 5.

Lösung b)

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die größer als 1 und ausschließlich durch sich selbst und durch 1 teilbar ist. Die Primzahlen zwischen 1 und 6 sind 2,3 und 5.

Lösung c)

Die Zahlen, die durch 3 teilbar sind und zwischen 1 und 6 liegen, sind 3 und 6.

ÜBUNG 4

Betrachten Sie im stochastischen Modell eines einfachen Würfelwurfs mit einem fairen Würfel die Ereignisse.

- A: Die geworfene Augenzahl ist eine Primzahl.
- B: Die geworfene Augenzahl ist größer als 4.
- C: Die geworfene Augenzahl ist größer als 1.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

a) A, B, C

b) $A \cap B$

Berechnen Sie mit Hilfe der Teile a) und b) sowie der Kolmogorov-Regeln und Rechenregeln die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

c) „Die geworfene Augenzahl ist keine Primzahl"

d) $A \cup B$

e) $C \setminus A$

Antwort

a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{5}{6}$

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

c) $P(\complement A) = \frac{1}{2}$

d) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

e) $P(C \setminus A) = \frac{1}{3}$

Lösung a)

Die Situation wird durch $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und die Wahrscheinlichkeiten $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$ modelliert. Es gilt $A = \{2,3,5\},\ B = \{5,6\},\ C = \{2,3,4,5,6\}$.

Dann folgt:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{2},$$
$$P(B) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{3},$$
$$P(C) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{5}{6}.$$

Lösung b)

Die Situation wird durch $\Omega = \{1, ..., 6\}$ und die Wahrscheinlichkeiten $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $i \in \{1, ..., 6\}$ modelliert. Es gilt $A \cap B = \{5\}$.

Damit folgt $P(A \cap B) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$.

Lösung c)

Das Ereignis „Die geworfene Augenzahl ist keine Primzahl" wird durch $\complement A$ beschrieben.

Mit Hilfe der Rechenregeln und Aufgabenteil a) folgt dann: $P(\complement A) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$.

Lösung d)

Mit Hilfe von Aufgabenteil a) und der fünften Rechenregel folgt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Lösung e)

Es gilt $A \subseteq C$, weil Primzahlen größer als 1 sind.

Damit folgt aus Aufgabenteil a) und der ersten Rechenregel:

2. LAPLACE-MODELLE UND ELEMENTARE KOMBINATORISCHE MODELLE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

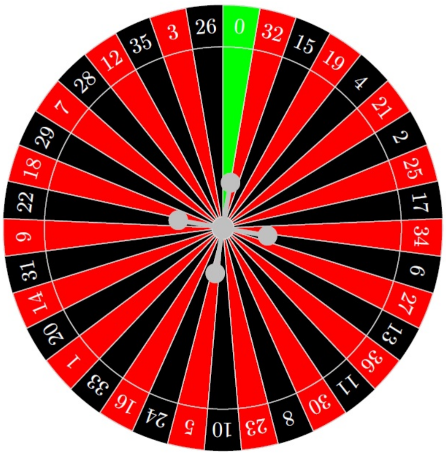
Nach diesem Abschnitt

- kennen Sie Laplace-Modelle,
- können Sie im Laplace-Modell die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis berechnen,
- können Sie Urnenmodelle praktisch nutzen.

2.1 Laplace-Modelle

In einigen bisher vorgestellten Modellen hatten alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments dieselbe Wahrscheinlichkeit:

- Beim Wurf mit einer fairen Münze wurde die Wahrscheinlichkeit für jede Seite mit $\frac{1}{2}$ modelliert.
- Beim Wurf mit einem fairen Würfel wurde die Wahrscheinlichkeit für jede Seite mit $\frac{1}{6}$ angenommen.
- Beim Wurf eines Tetraeders wurde die Wahrscheinlichkeit für jede Seite mit $\frac{1}{4}$ angenommen.
- Beim Roulette-Spiel wird ein Glücksrad mit 37 gleich großen Feldern gedreht (mit Zahlen $0, 1, \ldots, 36)$, so dass die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis jeweils $\frac{1}{37}$ beträgt.



Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind in diesen Modellen einfach zu berechnen. Hat Ω genau n Elemente, so gilt

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n} \quad \text{für jedes} \;\; \omega \in \Omega.$$

Kann jede Person aus einer Gruppe von n Personen als nächste zur Tür hereinkommen und es liegt keine Vorinformation vor, so weist man jeder Person (jedem Ergebnis) im stochastischen Modell dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ zu.

P. Laplace (1749-1829)

Ist $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis, so ist die Wahrscheinlichkeit von A die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse aus A. Da Ω genau n Elemente hat, gilt

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl Elemente von } A}{\text{Anzahl Elemente von } \Omega} = \frac{\text{Anzahl Elemente von } A}{n}.$$

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten wird daher zurückgeführt auf die Bestimmung von Mächtigkeiten von Mengen. Die Mächtigkeit einer endlichen Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente. Sie wird oft mit $|M|$ bezeichnet. Zufallsexperimente mit endlich vielen möglichen Ergebnissen, bei denen dieselbe Wahrscheinlichkeit aller Ausgänge angenommen werden kann, nennt man **Laplace-Experimente**.

2.1 DEFINITION

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ und P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung mit

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}).$$

Dann heißt P **Laplace-Verteilung** oder **diskrete Gleichverteilung** auf Ω. Ein solches stochastisches Modell heißt **Laplace-Modell**.

Für Laplace-Modelle gilt folgende Merkregel.

2.2 REGEL

Für eine Laplace-Verteilung auf Ω und $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}},$$

wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente von A, die Mächtigkeit von A, angibt.

2.3 BEISPIEL

Ein Beispiel für ein Laplace-Modell ist der einfache Würfelwurf mit einem fairen Würfel. Das Modell ist spezifiziert durch:

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}, \quad P(A) = \frac{|A|}{6}.$$

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, eine Primzahl zu würfeln, mit $B = \{2, 3, 5\}$: $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2.4 BEISPIEL (ZWEIFACHER WÜRFELWURF)

Das Zufallsexperiment eines (gleichzeitigen) Wurfs zweier Würfel kann durch das folgende Laplace-Modell beschrieben werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass beide Würfel fair und unterscheidbar sind (etwa einer schwarz und der andere weiß). Das Ergebnis des Wurfs ist dann ein Paar (i, j), wobei

- i die Augenzahl des schwarzen Würfels und
- j die Augenzahl des weißen Würfels

beschreiben. Dies ergibt die Grundmenge

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), \ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\} \\ &= \{(i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,6\}\} \text{ mit } |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36.\end{aligned}$$

Unterstellt man, dass jede der 36 möglichen Kombinationen mit derselben Wahrscheinlichkeit eintritt (die Würfel sich also nicht gegenseitig beeinflussen), so liegt ein Laplace-Modell vor, d.h. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$, $\omega \in \Omega$.
Die Wahrscheinlichkeit einen Pasch zu würfeln, d.h. beide Würfel zeigen dieselbe Zahl, ist dann mit $A = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$ und $|A| = 6$ durch $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ gegeben.

[online-only]

2.2 Elementare kombinatorische Modelle

2.2.1 Allgemeines Zählprinzip

In Laplace-Modellen kann die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten auf die Bestimmung der Mächtigkeit $|A|$ von Ereignissen $A \subseteq \Omega$ zurückgeführt werden, d.h. die Zahl der Elemente von A. Letztlich müssen damit die in einem Ereignis enthaltenen Ergebnisse des Zufallsexperiments abgezählt werden. Aus diesem Grund werden nachfolgend für einige wichtige Mengen allgemeine Formeln für ihre Mächtigkeit angegeben. Die mathematische Disziplin, die sich mit der Bestimmung von Mächtigkeiten von Mengen befasst, heißt **Kombinatorik**. Zunächst sollen einige ausgewählte Beispiele für solche Fragen vorgestellt werden.

2.5 BEISPIEL

(i) In einer Mensa werden zwei Vorspeisen, drei Hauptgerichte sowie zwei Desserts angeboten. Wie viele verschiedene Menüs lassen sich daraus zusammenstellen?

Ein Menü ist ein Tripel (Vorspeise, Hauptgericht, Dessert). Offenbar kann jedes der Elemente mit jedem anderen kombiniert werden. Man erhält daher insgesamt $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ verschiedene Menüs.

(ii) Wie viele Kunstwörter mit fünf Buchstaben können aus den Buchstaben des Worts *SPIEL* erzeugt werden, wobei beliebige Wiederholungen von Buchstaben möglich sind?

Ein Kunstwort entspricht einer Anordnung der Buchstaben in einem Quintupel wie in (S, P, I, E, L). Entsprechend sind Kunstwörter wie (S, E, I, L, E) oder auch (I, I, I, I, I) möglich. Da für jede Position jeder der fünf Buchstaben gewählt werden kann, gibt es insgesamt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$ mögliche Wörter.

Der anschaulichen Vorgehensweise in Beispiel 2.5 liegt folgendes Prinzip zugrunde.

Sind Ω_1 und Ω_2 zwei Mengen, so bezeichnet man die Menge aller Paare (ω_1, ω_2), wobei $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$ sind, als *kartesisches Produkt* $\Omega_1 \times \Omega_2$ dieser beiden Mengen. Ist Ω_3 noch eine weitere Menge, so bezeichnet man die Menge aller Tripel $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, wobei $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$ und $\omega_3 \in \Omega_3$ sind, als *kartesisches Produkt* $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ dieser drei Mengen.

Sind allgemein k Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ vorgegeben, so bezeichnet man Listen $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ mit $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$, ..., $\omega_k \in \Omega_k$ als *k-Tupel*. Die Menge aller solchen k-Tupel ist das kartesische Produkt $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_k$ der Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$.

2.6 REGEL (ALLGEMEINES ZÄHLPRINZIP)

Gegeben seien k Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ mit $|\Omega_1| = n_1$, $|\Omega_2| = n_2$, ..., $|\Omega_k| = n_k$. Dann lassen sich genau $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ verschiedene k-Tupel $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ mit $\omega_i \in \Omega_i$ für $i = 1, \ldots, k$ zusammenstellen. Die Mächtigkeit des kartesischen Produkts der Mengen $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ ist also

$$|\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

2.7 BEISPIEL

Für die Beispiele aus Beispiel 2.5 gilt:

(i) Es gilt $\Omega_1 = \{V_1, V_2\}$, $\Omega_2 = \{H_1, H_2, H_3\}$ und $\Omega_3 = \{D_1, D_2\}$. Mit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ folgt $|\Omega| = |\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3| = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

(ii) Es gilt $\Omega_1 = \ldots = \Omega_5 = \{S, P, I, E, L\}$, $|\Omega_j| = 5$. Mit $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_5$ folgt $|\Omega| = |\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_5| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$.

On retrouve encore le résultat établi précédemment.

2.2.2 Exkurs: Fakultät und Binomialkoeffizient

Von zentraler Bedeutung in der elementaren Kombinatorik sind die Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl n und der Binomialkoeffzient $\binom{n}{k}$ (siehe Definition 2.12), der die Anzahl von Möglichkeiten beschreibt, k aus n (unterscheidbaren) Elementen auszuwählen.

2.8 DEFINITION

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ (natürliche Zahl oder null) wird die Fakultät $n!$ definiert durch

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & \quad n \geq 1, \\ 0! &= 1 & \quad n = 0. \end{aligned}$$

2.9 BEISPIEL

Die Fakultäten der Zahlen $2, 4, 7$ sind gegeben durch $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

[online-only]

2.10 BEMERKUNG

- Für die Fakultät einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ gilt

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{=(n-1)!} = n \cdot (n-1)!.$$

  Diese Eigenschaft vereinfacht die Berechnung. Nach Beispiel 2.9 gilt $7! = 5040$, so dass $8! = 8 \cdot 5040 = 40\,320$.

- Die Fakultät $n!$ gibt die Anzahl der Permutationen (Reihenfolgen) von n verschiedenen Objekten an. Die Zahlen $1, \ldots, n$ können etwa auf $n!$ verschiedene Weisen hintereinander (als n-Tupel) geschrieben werden. Beispielsweise gibt es für $n = 3$ die $3! = 6$ Tripel

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).$$

2.11 BEISPIEL

Sollen drei aus fünf Dingen (z.B. Kaufentscheidung) ausgewählt werden, so gibt es dazu

$$\binom{5}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 10$$

Möglichkeiten.

Dieses Ergebnis kann wie folgt begründet werden:
Werden die auszuwählenden Objekte beispielsweise mit A bis E bezeichnet, so kann im ersten Schritt eines von fünf Objekten ausgewählt werden und es verbleiben vier Objekte zur weiteren Auswahl. Nach der zweiten Auswahl stehen noch drei Objekte zur Verfügung. Trägt man die erste, zweite und dritte Auswahl jeweils in ein Tripel ein, entstehen

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

verschiedene Tripel.

Wenn aber nur die Menge der gezogenen Objekte interessiert und nicht die Reihenfolge der Auswahl, so führen etwa alle Ziehungen $(A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (B,C,A), (C,A,B)$ und (C,B,A) zu derselben Menge $\{A,B,C\}$ gezogener Objekte. Zu jeder Auswahl gibt es daher genau $3! = 6$ verschiedene Ziehungsergebnisse (Tripel). Die Anzahl entstehender Mengen ist daher gegeben durch

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

2.12 DEFINITION (BINOMIALKOEFFIZIENT)

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird für $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$, definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

und als „n über k” gelesen.

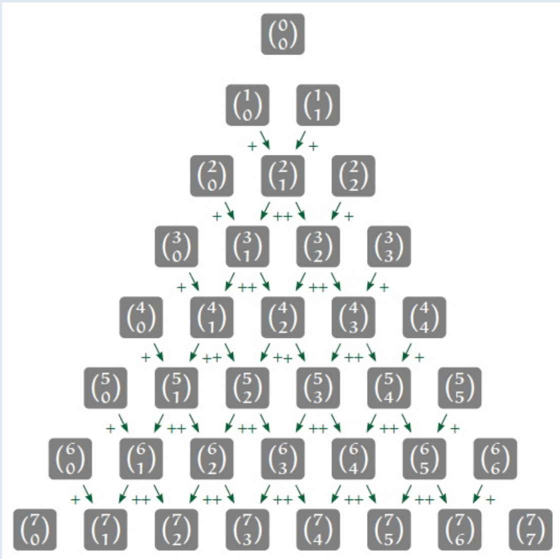
Aus der Definition folgt insbesondere $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Pascalsches Dreieck

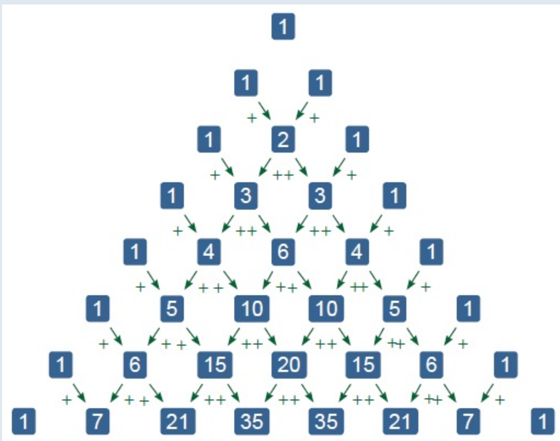
Eine sehr nützliche Eigenschaft zur Berechnung von Binomalkoeffizienten ist die folgende rekursive Beziehung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad n > k \geq 1.$$

Diese Eigenschaft wird im **Pascalschen Dreieck** illustriert, das in der folgenden Graphik dargestellt ist.



In Zahlenwerten lautet das Schema:



2.2.3 Urnenmodelle

Zur Veranschaulichung einfacher Stichprobenverfahren und damit der Bestimmung der Mächtigkeit endlicher Mengen werden Urnenmodelle verwendet. Eine Urne enthalte dazu n nummerierte Kugeln (mit den Nummern $1, \ldots, n$), die die Grundgesamtheit oder die

Grundmenge bilden. Aufgrund der Nummerierung ist jede Kugel eindeutig identifizierbar. Die Kugeln sind also unterscheidbar. In Abschnitt 3 werden Modelle mit teilweise unterschiedlichen (farbigen) Kugeln behandelt. Das Ziehen einer Kugel aus der Urne entspricht der (zufälligen) Auswahl eines Objektes aus der Grundgesamtheit. Die Erhebung einer Stichprobe vom Umfang k aus einer Grundgesamtheit von n Objekten entspricht daher der k-fachen Ziehung einer Kugel aus einer Urne mit n Kugeln. Die Urne wird im Folgenden als die Menge der Zahlen $1, \ldots, n$ verstanden: $U_n = \{1, \ldots, n\}$, wobei die Zahl j der j-ten Kugel entspricht. Resultat einer Ziehung von k Kugeln ist ein k-Tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$, wobei $\omega_i \in U_n$ die im i-ten Zug entnommene Kugel repräsentiert (z.B. durch deren Nummer), d.h. $(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in U_n \times \ldots \times U_n$ mit k Faktoren U_n. Jede Kugel werde jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen, d.h. als Ausgangspunkt wird ein Laplace-Modell gewählt.

2.13 DEFINITION (URNENMODELLE)

Im Folgenden werden insgesamt vier Urnenmodelle unterschieden:

(i) Ziehungsablauf

  a) Die gezogene Kugel wird nach Feststellung ihrer Nummer in die Urne zurückgelegt.

  b) Die gezogene Kugel wird nach Feststellung ihrer Nummer **nicht** in die Urne zurückgelegt.

(ii) Berücksichtigung der Reihenfolge

  a) Die Reihenfolge der Ziehungen wird berücksichtigt.

  b) Die Reihenfolge der Ziehungen wird **nicht** berücksichtigt.

Für die Urnenmodelle werden folgende Bezeichnungen verwendet.

Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	(n, k)-Permutation mit Wiederholung	(n, k)-Permutation ohne Wiederholung
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	(n, k)-Kombination mit Wiederholung	(n, k)-Kombination ohne Wiederholung

Der Fall einer (n, k)-Kombination mit Wiederholung wird hier nicht weiter betrachtet.

2.14 DEFINITION

Die Menge aller (n,k)**-Permutationen mit Wiederholung** ist die Menge aller Ergebnisse, die im Urnenmodell mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge auftreten können (n Kugeln in der Urne, k Ziehungen). Ist $U_n = \{1,\dots,n\}$ die Menge der in der Urne enthaltenen Kugeln, so beschreibt

$$\Omega_{\mathrm{PmW}} = \{(\omega_1,\dots,\omega_k) \mid \omega_1,\dots,\omega_k \in U_n\}$$

die Menge aller (n,k)-Permutationen mit Wiederholung über U_n.

2.15 REGEL

Die Mächtigkeit von Ω_{PmW} ist durch die Zahl

$$\mathrm{Per}_{\mathrm{mW}}(n,k) = |\Omega_{\mathrm{PmW}}| = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\mathrm{mal}} = n^k$$

gegeben, d.h. es gibt n^k Möglichkeiten, k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln mit Zurücklegen und mit Beachtung der Zugreihenfolge zu entnehmen.

2.16 BEISPIEL

Eine Urne enthält vier Kugeln, die mit 1, 2, 3 und 4 nummeriert sind. Drei Mal hintereinander wird aus dieser Urne eine Kugel entnommen, ihre Zahl notiert und danach wieder zurückgelegt. Gesucht ist die Anzahl der $(4,3)$-Permutationen mit Wiederholung.

Dazu wird zunächst die Menge Ω_{PmW} aller $(4,3)$-Permutationen mit Wiederholung explizit angegeben:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{PmW}} = \\ \{&(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,2,4),\\ &(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),(1,3,4),(1,4,1),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,4),\\ &(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,1,4),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,2,4),\\ &(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),(2,3,4),(2,4,1),(2,4,2),(2,4,3),(2,4,4),\\ &(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,1,4),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,2,4),\\ &(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3),(3,3,4),(3,4,1),(3,4,2),(3,4,3),(3,4,4),\\ &(4,1,1),(4,1,2),(4,1,3),(4,1,4),(4,2,1),(4,2,2),(4,2,3),(4,2,4),\\ &(4,3,1),(4,3,2),(4,3,3),(4,3,4),(4,4,1),(4,4,2),(4,4,3),(4,4,4)\}.\end{aligned}$$

Beispielsweise ist $(3,4,4)$ das Ergebnis im Fall, dass in der ersten Ziehung die Kugel Nr. 3 und in der zweiten und dritten Ziehung jeweils die Kugel Nr. 4 gezogen wurde. Abzählen ergibt 64 verschiedene $(4,3)$-Permutationen mit Wiederholung. Mit Anwendung der allgemeinen Formel berechnet sich die Anzahl der $(4,3)$-Permutationen mit Wiederholung gemäß

$$|\Omega_{\mathrm{PmW}}| = 4^3 = 64.$$

2.17 DEFINITION

Die Menge aller (n,k)**-Permutationen ohne Wiederholung** ist die Menge aller Ergebnisse, die im Urnenmodell ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge auftreten können (n Kugeln in der Urne, k Ziehungen). Ist $U_n = \{1,\ldots,n\}$ die Menge der in der Urne enthaltenen Kugeln, so beschreibt

$$\Omega_{\mathrm{PoW}} = \{(\omega_1,\ldots,\omega_k)\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_k \in U_n,\ \text{paarweise verschieden}\}$$

die Menge aller (n,k)-Permutationen ohne Wiederholung über U_n. Bei diesem Urnenmodell ist die Anzahl der Ziehungen k notwendig kleiner oder gleich der Anzahl n von Kugeln in der Urne, d.h. $1 \le k \le n$.

2.18 REGEL

Die Mächtigkeit von Ω_{PoW} ist durch die Zahl

$$\mathrm{Per}_{\mathrm{oW}}(n,k) = |\Omega_{\mathrm{PoW}}| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

gegeben, d.h. es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Zugreihenfolge zu ziehen. Speziell für $n = k$ gilt $|\Omega_{\mathrm{PoW}}| = n!$ und Ω_{PoW} ist die Menge aller Permutationen der Zahlen von 1 bis n.

2.19 BEISPIEL

Eine Urne enthält vier Kugeln, die mit 1, 2, 3 und 4 nummeriert sind. Drei Mal hintereinander wird aus dieser Urne eine Kugel entnommen, ihre Zahl notiert und danach zur Seite gelegt, d.h. nicht in die Urne zurück gelegt. Es werden also Tripel (3-Tupel) mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 notiert, wobei jede Zahl höchstens ein Mal vorkommen darf und die Zugreihenfolge berücksichtigt wird. Gesucht ist die Anzahl der $(4,3)$-Permutationen ohne Wiederholung.

Dazu wird zunächst die Menge Ω_{PoW} aller $(4{,}3)$-Permutationen ohne Wiederholung explizit angegeben:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{PoW}} =\{&(1,2,3),(1,2,4),(1,3,2),(1,3,4),(1,4,2),(1,4,3),\\ &(2,1,3),(2,1,4),(2,3,1),(2,3,4),(2,4,1),(2,4,3),\\ &(3,1,2),(3,1,4),(3,2,1),(3,2,4),(3,4,1),(3,4,2),\\ &(4,1,2),(4,1,3),(4,2,1),(4,2,3),(4,3,1),(4,3,2)\}.\end{aligned}$$

Durch Abzählen erhält man, dass es 24 verschiedene $(4,3)$-Permutationen ohne Wiederholung gibt. Mit Anwendung der allgemeinen Formel berechnet sich die Anzahl der $(4,3)$-Permutationen ohne Wiederholung gemäß

$$|\Omega_{\mathrm{PoW}}| = \frac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

2.20 DEFINITION

Die Menge aller (n, k)**-Kombinationen ohne Wiederholung** ist die Menge aller Ergebnisse, die im Urnenmodell ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auftreten können (n Kugeln in der Urne, k Ziehungen). Ist die Menge der in der Urne enthaltenen Kugeln gegeben durch $U_n = \{1 \ldots, n\}$, so beschreiben

$$\Omega_{\mathrm{KoW}} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_k \in U_n, \omega_1 < \ldots < \omega_k\}$$

die Menge aller (n, k)-Kombinationen ohne Wiederholung über U_n.

2.21 BEMERKUNG

- In der Menge Ω_{KoW} werden die Nummern der gezogenen Kugeln in einem k-Tupel zusammengefasst, dessen Einträge vom kleinsten zum größten sortiert sind. Auf diese Weise wird das konkrete Ziehungsergebnis in eine spezielle Anordnung der gezogenen Zahlen überführt.

  Diese Vorgehensweise wird z.B. beim Lotto „6 aus 49" deutlich. Aus einer Urne mit $n = 49$ Kugeln mit den Zahlen $1, \ldots, 49$ werden $k = 6$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Verfolgt man die Ziehung live, so ergibt sich das Resultat in der zeitlichen Abfolge (z.B. 48, 33, 6, 13, 14, 1). Wird über das Ziehungsergebnis anschließend (etwa in Nachrichtensendungen) berichtet, so werden die Zahlen üblicherweise in aufsteigender Reihenfolge angeben (d.h. 1, 6, 13, 14, 33, 48). Für einen Gewinn im Lotto ist die konkrete Ziehungsreihenfolge eben nicht relevant; es kommt lediglich darauf an, **ob** Zahlen gezogen wurden, nicht wann sie in der Ziehung auftauchten.

- In der Situation von Definition 2.20 werden die Ziehungen hintereinander ausgeführt, d.h. es wird k-mal hintereinander (ohne Zurücklegen) eine Kugel entnommen. Es lässt sich zeigen, dass dieses Modell auch als einmalige (gleichzeitige) Entnahme von k Kugeln interpretiert werden kann.

2.22 REGEL

Die Mächtigkeit von Ω_{KoW} ist durch die Zahl

$$\mathrm{Kom}_{\mathrm{oW}}(n, k) = |\Omega_{\mathrm{KoW}}| = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

gegeben, d.h. es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Zugreihenfolge zu ziehen.

2.23 BEISPIEL

Eine Urne enthält vier Kugeln, die mit 1, 2, 3 und 4 nummeriert sind. Drei Kugeln werden nacheinander der Urne entnommen, ohne dass eine zurückgelegt wird. Anschließend werden die Kugeln gemäß ihrer Nummer aufsteigend sortiert. Alternativ kann die Ziehung auch so durchgeführt werden, dass die drei Kugeln auf einmal aus dieser Urne entnommen werden und die Zahlen aufsteigend notiert werden. Es werden also 3-Tupel mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 notiert, wobei jede Zahl höchstens ein Mal vorkommen darf und die Zugreihenfolge nicht berücksichtigt wird. Gesucht ist die Anzahl der $(4,3)$-Kombinationen ohne Wiederholung.

Dazu wird zunächst die Menge Ω_{KoW} aller $(4,3)$-Kombinationen ohne Wiederholung explizit angegeben:

$$\Omega_{\mathrm{KoW}} = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}.$$

Es gibt also vier verschiedene $(4,3)$-Kombinationen ohne Wiederholung. Mit Anwendung der allgemeinen Formel berechnet sich die Anzahl der $(4,3)$-Kombinationen ohne Wiederholung gemäß

$$|\Omega_{\mathrm{KoW}}| = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\cdot(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4.$$

Für jedes der obigen Urnenmodelle (siehe Definition 2.14, 2.17 und 2.20) kann auf den eingeführten Ergebnismengen Ω_{PwR}, $\Omega_{\mathrm{Pw/oR}}$ und $\Omega_{\mathrm{Cw/oR}}$ als Grundmenge jeweils ein Laplace-Modell formuliert werden, d.h. es wird angenommen, dass jedes Ergebnis im jeweiligen Modell dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt.

2.24 BEISPIEL

Für die drei oben besprochenen Arten der Ziehung betrachten wir folgende Aufgabe: Aus einer Urne mit $n = 4$ nummerierten Kugeln (Nr. $1, 2, 3, 4$) werden $k = 2$ Kugeln entnommen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur Kugeln mit gerader Zahl in der Ziehung auftreten (Ereignis A). Es wird jeweils ein Laplace-Modell unterstellt.

- Zunächst wird angenommen, dass die Kugel nach der Ziehung zurückgelegt wird und die Reihenfolge berücksichtigt wird (siehe Definition 2.14). Als Grundmenge ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{PmW}} =&\{(1{,}1),(1{,}2),(1{,}3),(1{,}4),(2{,}1),(2{,}2),(2{,}3),(2{,}4),\\ &(3{,}1),(3{,}2),(3{,}3),(3{,}4),(4{,}1),(4{,}2),(4{,}3),(4{,}4)\}\end{aligned}$$

  so dass $\left|\Omega_{\mathrm{PmW}}\right| = 4^2 = 16$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{16}$, $\omega \in \Omega_{\mathrm{PmW}}$. Das gesuchte Ereignis A ist dann gegeben durch $A = \{(2{,}2),(2{,}4),(4{,}2),(4{,}4)\}$ mit $|A| = 4$, so dass $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

- Nun wird angenommen, dass die zuerst gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird.

  1. Berücksichtigt man die Ziehungsreihenfolge in der Modellierung (siehe Definition 2.17), so ergibt sich ein Laplace-Modell mit Grundmenge

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{PoW}} =&\{(1{,}2),(1{,}3),(1{,}4),(2{,}1),(2{,}3),(2{,}4),\\ &(3{,}1),(3{,}2),(3{,}4),(4{,}1),(4{,}2),(4{,}3)\},\end{aligned}$$

     $\left|\Omega_{\mathrm{PoW}}\right| = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{12}$, $\omega \in \Omega_{\mathrm{PoW}}$. Das gesuchte Ereignis A ist dann gegeben durch $A = \{(2{,}4),(4{,}2)\}$ mit $|A| = 2$, so dass $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

  2. Berücksichtigt man die Ziehungsreihenfolge in der Modellierung **nicht** (siehe Definition 2.20), so ergibt sich ein Laplace-Modell mit Grundmenge

$$\Omega_{\mathrm{KoW}} = \{(1{,}2),(1{,}3),(1{,}4),(2{,}3),(2{,}4),(3{,}4)\},$$

     $\left|\Omega_{\mathrm{KoW}}\right| = \binom{4}{2} = 6$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$, $\omega \in \Omega_{\mathrm{KoW}}$. Das gesuchte Ereignis A ist dann gegeben durch $A = \{(2{,}4)\}$, so dass $P(A) = \frac{1}{6}$.

2.25 BEMERKUNG

Zu den Beispielen in Bemerkung 2.24 kann Folgendes angemerkt werden:

1. Das Ereignis A wird in allen Fällen mit denselben Worten beschrieben, es enthält aber als Menge je nach Wahl der Ergebnismenge unterschiedliche Ergebnisse.

2. In den beiden letzten Modellen erhält man jeweils dieselbe Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A. Diese Beobachtung ist typisch, da das Ereignis A letztlich nicht von der Reihenfolge der Ziehung abhängt. Diese Beobachtung lässt sich in folgendem Sinne verallgemeinern: Jedes als Teilmenge von Ω_{KoW} formulierbare Ereignis kann auch in der Ergebnismenge Ω_{PoW} formuliert werden. Zudem besitzen die Ereignisse in beiden Fällen die gleiche Wahrscheinlichkeit.

2.26 BEISPIEL

Auf einem Sportfest wird folgendes Glücksspiel angeboten: Ein Glücksrad mit vier gleichgroßen Feldern (repräsentiert durch die Ziffern $1, 2, 3, 4$) wird dreimal hintereinander gedreht. Ein Spieler gewinnt, wenn jedesmal dieselbe Ziffer erscheint. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

Das Ergebnis des Spiels wird in einem Tripel $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dargestellt, wobei $\omega_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jeweils das Ergebnis der i. Drehung wiedergibt. Wir benutzen ein Laplace-Modell auf Ω_{PmW} mit $n = 4$ und $k = 3$, $\left|\Omega_{\mathrm{PmW}}\right| = 4^3 = 64$. Die Menge $A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4)\}$ beschreibt das Ereignis zu gewinnen. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt daher

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_{\mathrm{PmW}}|} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}.$$

2.27 BEISPIEL

Beim Zahlenlotto „6 aus 49” sind in einer Urne $n = 49$ Kugeln mit den Zahlen $1, \ldots, 49$ enthalten. Es wird $k = 6$ mal eine Kugel (ohne Zurücklegen) entnommen.

- Berücksichtigte man die Ziehungsreihenfolge, so hätte man $\frac{49!}{43!} = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ (also mehr als 10 Milliarden) mögliche Ziehungsergebnisse (**mit** Beachtung der Ziehungsreihenfolge).
- Andererseits gibt es „nur” $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ (also etwa 14 Millionen) mögliche „Tipps”, da **die Reihenfolge** der Ziehung **keine Rolle spielt**.

Spieler tippen mittels eines Tippscheins sechs Zahlen (also etwa $1, 2, 3, 4, 5, 6$), d.h. sie wählen ein spezielles Ziehungsergebnis aus. Da alle Ziehungsergebnisse (Menge der sechs Gewinnzahlen) als gleichwahrscheinlich angenommen werden können, wird ein Laplace-Modell mit der Ergebnismenge Ω_{KoW} mit $n = 49$, $k = 6$ und $\left|\Omega_{\mathrm{KoW}}\right| = \binom{49}{6}$ gewählt. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für das Ereignis A „6 Richtige” mit $|A| = 1$ ist dann

$$P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0.000\,000\,071\,5.$$

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Ein Autohersteller bietet ein Sondermodell mit fünf Farben, vier Motoren sowie drei verschiedenen Innenausstattungen an. Ein Händler bekommt ein zufällig daraus ausgewähltes Modell als Vorführwagen.
a) Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es insgesamt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein wählerischer Kunde sein einziges Lieblingsmodell beim Händler probefahren kann?

Antwort

a) 60

b) $\frac{1}{60}$

Lösung a)

Die Situation wird durch ein Tripel (Farbe, Motor, Innenausstattung) beschrieben, wobei es 5 verschiedene Farben, 4 verschiedene Motoren und 3 verschiedene Innenausstattungen gibt.

Also ist die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Lösung b)

Eine von 60 gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten ist das Lieblingsmodell des Kunden.

Also ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{60}$.

ÜBUNG 2

Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, und wie viele von diesen können ohne die Ziffern $1, 3, 6$ und 9 gebildet werden?
Hinweis: Dabei lassen wir die Null als führende Ziffer zu, d.h. wir nehmen an, dass $3 = 00003$ und $0 = 00000$.

Antwort

1. Es gibt $10^5 = 100\,000$ fünfstellige Zahlen.
2. Es können ohne die Ziffern $1, 3, 6$ und 9 genau $6^5 = 7776$ Zahlen gebildet werden.

Lösung

1. Eine fünfstellige Zahl ist ein 5-Tupel, wobei für jede Stelle 10 Möglichkeiten (die Ziffern $0,1,\ldots,9$) gegeben sind. Es gibt daher $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ Möglichkeiten fünfstellige Zahlen zu bilden.
2. Da wir die vier Ziffern $1,3,6,9$ ausschließen, gibt es für jede der 5 Stellen nur noch $(10-4) = 6$ Möglichkeiten. Also können $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$ fünfstellige Zahlen gebildet werden.

ÜBUNG 3

Berechnen Sie

a) $\binom{6}{2}$

b) $\binom{12}{10}$

c) $\binom{100}{3}$

d) $\binom{25}{4}$

e) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 7 Obstsorten drei verschiedene für den Obstsalat auszuwählen?

Antwort

a) $\binom{6}{2} = 15$

b) $\binom{12}{10} = 66$

c) $\binom{100}{3} = 161\,700$

d) $\binom{25}{4} = 12\,650$

e) 35

Lösung a)

Durch Nachrechnen folgt

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 3 = 15.$$

Wir haben $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$ benutzt, um zu kürzen und damit den Bruch zu vereinfachen.

Lösung b)

Durch Nachrechnen folgt

$$\binom{12}{10} = \frac{12!}{10! \cdot (12-10)!} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 11 \cdot 6 = 66.$$

Wir haben $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10!$ benutzt, um zu kürzen und damit den Bruch zu vereinfachen.

Lösung c)

Durch Nachrechnen folgt

$$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!\cdot(100-3)!} = \frac{100!}{3!\cdot 97!} = \frac{98\cdot 99\cdot 100}{1\cdot 2\cdot 3} = 49\cdot 33\cdot 100 = 161700.$$

Wir haben $100! = 100\cdot 99\cdot 98\cdot 97!$ benutzt, um zu kürzen und damit den Bruch zu vereinfachen.

Lösung d)

Durch Nachrechnen folgt

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!\cdot(25-4)!} = \frac{25!}{4!\cdot 21!} = \frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 11\cdot 23\cdot 2\cdot 25 = 12650.$$

Lösung e)

Das ist die Situation einer $(7,3)$-Kombination ohne Wiederholung, denn die gewählten Obstsorten müssen verschieden sein und auf die Reihenfolge der Wahl kommt es nicht an.

Die Anzahl dieser Kombinationen ist $\binom{7}{3}$.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 5 = 35.$$

ÜBUNG 4

In einem Betrieb werden fünf Maschinen, kurz A1, A2 und C1, C2, C3 eingesetzt, die an einem bestimmten Tag jeweils intakt (kurz: 1) oder defekt (kurz: 0) sind. Also bedeutet $\omega_i = 0$, dass die zugehörige Maschine defekt ist, entsprechend heißt $\omega_i = 1$ dass sie intakt ist. Jedes Betriebsszenario $(\omega_1, \ldots, \omega_5)$ der fünf Maschinen habe dieselbe Wahrscheinlichkeit. (Jede Maschine ist mit derselben Wahrscheinlichkeit intakt oder defekt.) Formulieren Sie ein Laplace-Modell für diese Situation, beschreiben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen der Grundmenge Ω und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.

a) E_1: Alle Typ-C Maschinen sind defekt.

b) E_2: Mindestens eine Typ-A Maschine ist intakt.

c) E_3: Genau eine Maschine jeden Typs (A und C) ist intakt.

d) E_4: Ein erfolgreiches Arbeiten ist möglich.

Antwort

Für die Beschreibung der Ereignisse als Teilmengen der Grundmenge Ω werden die Notation $\vee$ (oder) und $\wedge$ (und) benutzt (siehe Abschnitt Aussageformen und Aussagen).

a)

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0\} \\ &= \{(\omega_1, \omega_2, 0,0,0)\}, \\ P(E_1) &= \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid \omega_1 = 1 \vee \omega_2 = 1\}, \\ P(E_2) &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} E_3 = &\{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid [(\omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 0) \vee (\omega_1 = 0 \wedge \omega_2 = 1)] \wedge \\ &[(\omega_3 = 1 \wedge \omega_4 = \omega_5 = 0) \vee (\omega_4 = 1 \wedge \omega_3 = \omega_5 = 0) \vee (\omega_5 = 1 \wedge \omega_3 = \omega_4 = 0)]\}, \\ P(E_3) = &\tfrac{3}{16} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} E_4 &= \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid (\omega_1 = 1 \vee \omega_2 = 1) \wedge (\omega_3 = 1 \vee \omega_4 = 1 \vee \omega_5 = 1)\}, \\ P(E_4) &= \tfrac{21}{32} \end{aligned}$$

Lösung a)

Es wird ein Laplace-Modell unterstellt mit $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5) \mid \omega_i \in \{0{,}1\}\}$, $|\Omega| = 2^5 = 32$.
Da jedes Betriebsszenario dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, gilt $P(\{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5)\}) = \frac{1}{32}$, $(\omega_1, \omega_2, \cdots, w_5) \in \Omega$ und es gilt $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ für Ereignisse $E \subseteq \Omega$.

„Alle Maschinen vom Typ C sind defekt" bedeutet: $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0\} \\ &= \{(\omega_1, \omega_2, 0{,}0{,}0)\}. \end{aligned}$$

Ausführlicher: $E_1 = \{(0{,}0{,}0{,}0{,}0),\ (1{,}0{,}0{,}0{,}0),\ (0{,}1{,}0{,}0{,}0),\ (1{,}1{,}0{,}0{,}0)\}$

Die Anzahl der Szenarien in E_1 ist: 2 Möglichkeiten für Maschine A1 sowie 2 Möglichkeiten für Maschine A2, also $2 \cdot 2 = 4$ Ergebnisse in E_1.
(Oder durch Abzählen der oben explizit angegebenen Ergebnisse in E_1.)

Es folgt $P(E_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, da $|E_1| = 4$.

Lösung b)

Es wird ein Laplace-Modell unterstellt mit $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5) \mid \omega_i \in \{0{,}1\}\}$, $|\Omega| = 2^5 = 32$.
Da jedes Betriebsszenario dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, gilt $P(\{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5)\}) = \frac{1}{32}$, $(\omega_1, \omega_2, \cdots, w_5) \in \Omega$ und es gilt $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ für Ereignisse $E \subseteq \Omega$.

„Mindestens eine Maschine vom Typ A ist intakt" bedeutet $\omega_1 = 1$ oder $\omega_2 = 1$, also

$$E_2 = \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid \omega_1 = 1 \vee \omega_2 = 1\}.$$

Ausführlicher: $E_2 = \{(1{,}0, \omega_3, \omega_4, \omega_5)\} \cup \{(0{,}1, \omega_3, \omega_4, \omega_5)\} \cup \{(1{,}1, \omega_3, \omega_4, \omega_5)\}$.

Für die drei Maschinen vom Typ C gibt es jeweils zwei Zustände, also insgesamt $2^3 = 8$ mögliche Zustände der Typ-C Maschinen. Mit den drei möglichen Zuständen für die Maschinen vom Typ A ergeben sich $3 \cdot 8 = 24$ mögliche Ergebnisse in E_2.

Es folgt $P(E_2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$, da $|E_2| = 24$.
Nun folgt noch ein anderer Weg, $P(E_2)$ zu berechnen:

Die Komplementmenge $\complement E_2$ enthält die Ergebnisse, bei denen alle Maschinen vom Typ A defekt sind, also $\complement E_2 = \{(0{,}0, \omega_3, \omega_4, \omega_5)\}$. Mit 8 möglichen Zuständen der Maschinen vom Typ C, also $|\complement E_2| = 8$, erhalten wir $P(\complement E_2) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Daraus folgt: $P(E_2) = 1 - P(\complement E_2) = \frac{3}{4}$.

Lösung c)

Es wird ein Laplace-Modell unterstellt mit $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5) \mid \omega_i \in \{0,1\}\}$, $|\Omega| = 2^5 = 32$.
Da jedes Betriebsszenario dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, gilt $P(\{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5)\}) = \frac{1}{32}$, $(\omega_1, \omega_2, \cdots, w_5) \in \Omega$ und es gilt $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ für Ereignisse $E \subseteq \Omega$.

„Genau eine Maschine vom Typ A ist intakt" bedeutet entweder $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 0$ oder $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = 1$, zwei Möglichkeiten. Analog für die Maschinen vom Typ C, drei Möglichkeiten. Damit gilt:

$$\begin{aligned} E_3 =& \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid [(\omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 0) \vee (\omega_1 = 0 \wedge \omega_2 = 1)] \wedge \\ & [(\omega_3 = 1 \wedge \omega_4 = \omega_5 = 0) \vee (\omega_4 = 1 \wedge \omega_3 = \omega_5 = 0) \vee (\omega_5 = 1 \wedge \omega_3 = \omega_4 = 0)]\}. \end{aligned}$$

Ausführlicher:
$E_3 = \{(1,0,1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,1), (0,1,1,0,0), (0,1,0,1,0), (0,1,0,0,1)\}$.

Es folgt $P(E_3) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$, da $|E_3| = 2 \cdot 3 = 6$.

Lösung d)

Es wird ein Laplace-Modell unterstellt mit $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5) \mid \omega_i \in \{0,1\}\}$, $|\Omega| = 2^5 = 32$.
Da jedes Betriebsszenario dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, gilt $P(\{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5)\}) = \frac{1}{32}$, $(\omega_1, \omega_2, \cdots, w_5) \in \Omega$ und es gilt $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ für Ereignisse $E \subseteq \Omega$.

Das Ereignis E_4 bedeutet, dass jeweils (mindestens) eine Maschine des Typs A und C intakt ist.
„Mindestens eine Maschine vom Typ C ist intakt" bedeutet z.B.: $\omega_3 = 1$ oder $\omega_4 = 1$ oder $\omega_5 = 1$.

Damit folgt $E_4 = \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid (\omega_1 = 1 \vee \omega_2 = 1) \wedge (\omega_3 = 1 \vee \omega_4 = 1 \vee \omega_5 = 1)\}$.

Für die Maschinen vom Typ A sind das 3 mögliche Szenarien (ein Szenario von vier: „beide Maschinen defekt" ist ausgeschlossen). Für die Maschinen vom Typ C sind das 7 mögliche Szenarien (ein Szenario von acht: „alle drei Maschinen defekt" ist ausgeschlossen).

Es folgt $P(E_4) = \frac{21}{32}$, da $|E_4| = 3 \cdot 7 = 21$.
Nun folgt noch ein anderer Weg, $P(E_4)$ zu berechnen.

Es ist E_1: „Alle Typ-C Maschinen sind defekt" mit $|E_1| = 4$ gemäß Lösung (a).
Genauso erhalten wir E_5: „Beide Typ-A Maschinen sind defekt" aus $E_5 = \Omega \setminus E_2$ gemäß Lösung (b): $|E_5| = |\Omega| - |E_2| = 32 - 24 = 8$.

Schließlich ist $E_1 \cap E_5$: „Alle Maschinen sind defekt", also $E_1 \cap E_5 = \{(0,0,0,0,0)\}$ und $|E_1 \cap E_5| = 1$. Wegen $E_4 = \Omega \setminus (E_1 \cup E_5)$ folgt damit

$$\begin{aligned} P(E_4) =& 1 - P(E_1 \cup E_5) = 1 - (P(E_1) + P(E_5) - P(E_1 \cap E_5)) \\ =& \frac{32}{32} - \left(\frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32}\right) = \frac{21}{32}. \end{aligned}$$

3. WICHTIGE DISKRETE WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt

- kennen Sie die genannten Verteilungen und wichtige stochastische Modelle,
- können Sie die genannten Verteilungen bei entsprechenden Anwendungen verwenden.

In diesem Abschnitt werden zunächst zwei wichtige diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit den üblichen Bezeichnungen eingeführt sowie entsprechende Anwendungen genannt.
Diese speziellen diskreten Verteilungen treten etwa in Urnenmodellen auf, die Kugeln zweier Farben (z.B. rot und schwarz) enthalten. Die Kugeln sind bis auf die Farbe jedoch nicht unterscheidbar. Wie im vorherigen Abschnitt (Exkurs: Urnenmodelle) wird unterschieden, ob die Kugel nach der Ziehung zurückgelegt wird oder nicht. Interessierende Fragestellung ist, wie viele Kugeln einer bestimmten Farbe in der Ziehung enthalten sind.

- Wird die Ziehung **mit** Zurücklegen vorgenommen, ergibt sich die Binomialverteilung (Definition 3.3).
- Wird **ohne** Zurücklegen gezogen, resultiert die hypergeometrische Verteilung (Definition 3.5).

3.1 Binomialverteilung

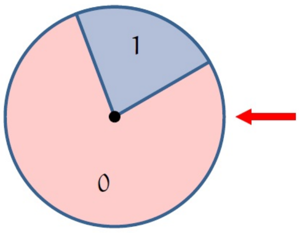
3.1 BEISPIEL (BERNOULLI-MODELL)

Ein Zufallsexperiment, das mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ das Ergebnis 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ das Ergebnis 0 liefert, wird als Bernoulli-Experiment bezeichnet.

Ein geeignetes stochastisches Modell ist gegeben durch die Grundmenge $\Omega = \{0,1\}$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung P, die durch

$$P(\{0\}) = 1-p, \qquad P(\{1\}) = p,$$

definiert ist. Dieses Modell heißt **Bernoulli-Modell**. Mit einem Bernoulli-Modell können Situationen modelliert werden, die nur zwei Ausgänge besitzen (etwa Kopf/Zahl, intakt/defekt, weiß/schwarz, gesund/erkrankt etc.). Das Experiment lässt sich durch ein Glücksrad mit zwei Segmenten illustrieren (siehe Abbildung), wobei die Anteile an der Fläche des Kreises p (blaue Fläche $= 1$, Treffer, Gewinn) bzw. $1-p$ (rote Fläche $= 0$, kein Treffer, Verlust) sind.



3.2 BEISPIEL

Ein Beispiel für ein Bernoulli-Modell ergibt sich aus dem Laplace-Modell für den einfachen Würfelwurf mit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Betrachtet man die Ereignisse $A = \{6\}$ eine Sechs bzw. $\complement A$ keine Sechs zu würfeln, so ergibt sich mit $P(A) = \frac{1}{6}$ und $P(\complement A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ein Bernoulli-Modell mit einem Grundraum $\Omega = \{6, \text{nicht}6\}$, wobei „nicht$6$" das Ergebnis „keine Sechs gewürfelt" bezeichnet. Entsprechend lässt sich allgemein aus anderen stochastischen Modellen ein Bernoulli-Modell ableiten.

Die Binomialverteilung ist Ergebnis der folgenden Modellierung: Ein Bernoulli-Experiment mit genau zwei möglichen Ausgängen, etwa 0 und 1, wird m Mal hintereinander unter identischen Rahmenbedingungen durchgeführt. Dabei tritt in jedem Durchgang der

- Ausgang 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-p \in [0,1]$ und
- Ausgang 1 mit Wahrscheinlichkeit p

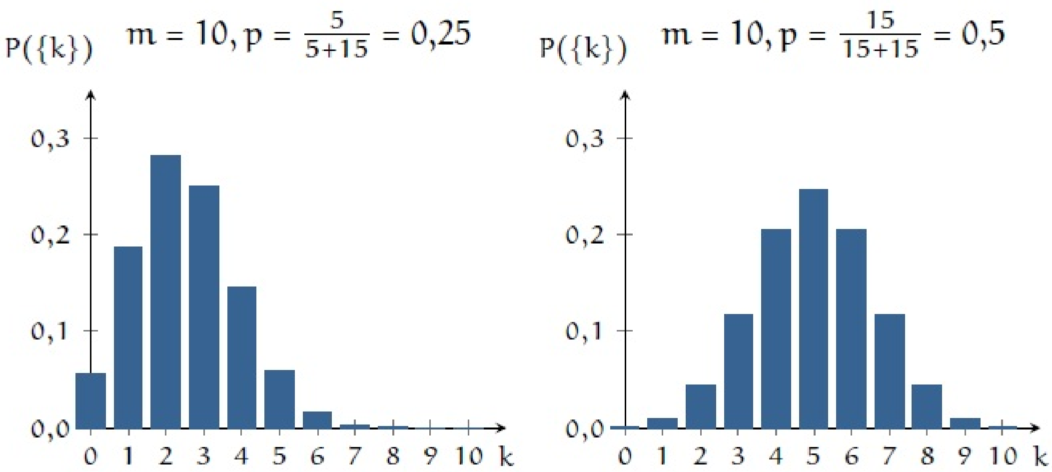
auf. $P(\{k\}) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis 1 in den m Durchgängen insgesamt genau k mal auftritt, $k \in \{0, \ldots, m\}$.

3.3 DEFINITION (BINOMIALVERTEILUNG)

Die **Binomialverteilung** auf der Menge $\{0,1,\ldots,m\} \subseteq \mathbb{N}_0$ ist definiert durch

$$P(\{k\}) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

für $m \in \mathbb{N}$ und den Parameter $p \in [0,1]$.



Binomialverteilung in Urnenmodellen mit Zurücklegen

3.4 BEISPIEL

Ein fairer Würfel wird sieben Mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, genau viermal eine Sechs zu würfeln kann über die Binomialverteilung bestimmt werden. Die Sechs soll in $m = 7$ Durchgängen insgesamt genau $k = 4$ mal auftreten. Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs beträgt bei einem fairen Würfel $p = \frac{1}{6}$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, in sieben Würfen viermal eine Sechs zu würfeln, gegeben durch

$$P(\{4\}) = \binom{7}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = 35 \cdot \frac{1}{1296} \cdot \frac{125}{216} \approx 0{,}0156\,.$$

In diesem Modell können auch Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen des Typs „mindestens fünfmal Sechs” oder „höchstens viermal Sechs” ermittelt werden. Bei einem fairen Würfel ergibt sich z.B. mit $p = \frac{1}{6}$ bei $m = 6$ Würfen:

$$
\begin{aligned}
P(\text{„mindestens fünfmal Sechs"}) & \\
&= P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&= \binom{6}{5}\left(\tfrac{1}{6}\right)^5\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{6-5} + \binom{6}{6}\left(\tfrac{1}{6}\right)^6\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{6-6} \\
&= 6\left(\tfrac{1}{6}\right)^5\left(\tfrac{5}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{6}\right)^6 = \tfrac{30+1}{6^6} = \tfrac{31}{46\,656} \approx 0{,}000\,664\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\text{„höchstens viermal Sechs"}) &= 1 - P(\text{„mindestens fünfmal Sechs"}) \\
&\approx 0{,}999\,336\,.
\end{aligned}
$$

Im letzten Fall wird die Komplementregel aus Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet.

3.2 Hypergeometrische Verteilung

Wir betrachten ein Urnenmodell, bei dem m-mal aus einer Urne mit insgesamt r **r**oten und s **s**chwarzen Kugeln *ohne Zurücklegen* gezogen wird. Die Zahl k gibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an und damit ist $m-k$ die Zahl der gezogenen schwarzen. Da die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden, ist die Anzahl m der Züge durch die Gesamtzahl der Kugeln $r+s$ begrenzt: $m \leq r+s$. Die Anzahl k der gezogenen roten Kugeln kann weder größer als r noch größer als m sein, also gilt: $k \leq k_{\max} \coloneqq \min(r,m)$. Ebenso gilt $0 \leq k$ und für die gezogenen schwarzen Kugeln $m-k \leq s \Leftrightarrow m-s \leq k$. Daraus folgt $\max(0, m-s) \eqqcolon k_{\min} \leq k$. Also sind bei diesem Experiment nur Werte von k mit $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ möglich.

Die folgende diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt für alle möglichen Werte von k die Wahrscheinlichkeit an, bei diesem Experiment k rote Kugeln zu ziehen.

3.5 DEFINITION (HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG)

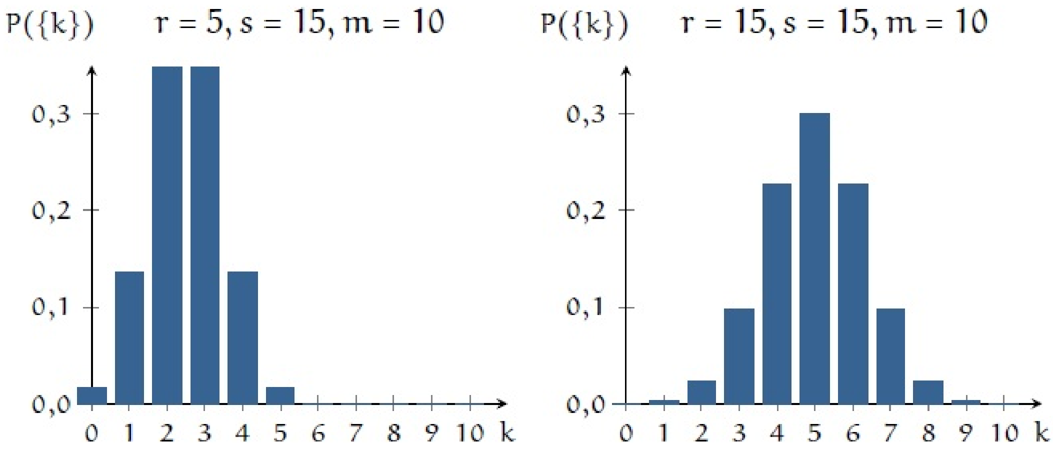
Die **hypergeometrische Verteilung** ist definiert auf $\{k_{\min}, k_{\min}+1, \ldots, k_{\max}\} \subseteq \mathbb{N}_0$ durch

$$
P(\{k\}) := \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{m-k}}{\binom{r+s}{m}}, \quad \max(0, m-s) = k_{\min} \leq k \leq k_{\max} = \min(r,m),
$$

für $m, r, s \in \mathbb{N}$ mit $m \leq r+s$.

Die angegebenen Ungleichungen stellen sicher, dass alle auftretenden Binomialkoeffizienten definiert sind.

Die folgenden Säulendiagramme illustrieren die Wahrscheinlichkeiten $P(\{k\})$ in zwei Fällen (5 rote und 15 schwarze Kugeln; 15 rote und 15 schwarze Kugeln; sowie jeweils $m = 10$ Ziehungen).



Links gilt $0 = k_{\min} \leq k \leq k_{\max} = r = 5$, rechts $0 = k_{\min} \leq k \leq k_{\max} = m = 10$. In der rechten Grafik sind die Wahrscheinlichkeiten $P(\{0\}) = P(\{10\}) = \frac{1}{10005}$ so klein, dass sie nicht sichtbar sind.

Herleitung der hypergeometrischen Verteilung

Eine Anwendung der hypergeometrischen Verteilung

3.6 BEISPIEL

Mittels der hypergeometrischen Verteilung kann die Wahrscheinlichkeit für $k \in \{0, \ldots, 6\}$ Richtige beim Zahlenlotto "6 aus 49" ermittelt werden: Die roten Kugeln entsprechen dabei den vom Spieler getippten Zahlen, während die schwarzen Kugeln die übrigen (nicht-getippten) Zahlen darstellen. Das Ereignis „genau k Richtige” zu tippen, ist daher gleichbedeutend damit, dass **genau** k rote Kugeln in der Ziehung enthalten sind. Damit ergeben sich mit $r = 6$, $s = 43$, $m = 6$ die Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
P(\{0\}) &= \frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{1 \cdot 6\,096\,454}{13\,983\,816} \approx 0{,}436 \\
P(\{1\}) &= \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 962\,598}{13\,983\,816} \approx 0{,}413 \\
P(\{2\}) &= \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 123\,410}{13\,983\,816} \approx 0{,}1324 \\
P(\{3\}) &= \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{20 \cdot 12\,341}{13\,983\,816} \approx 0{,}0177 \\
P(\{4\}) &= \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,969 \\
P(\{5\}) &= \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 43}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,018\,4 \\
P(\{6\}) &= \frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1 \cdot 1}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,000\,071\,5
\end{aligned}$$

Zudem lassen sich mit diesen Wahrscheinlichkeiten Fragen beantworten wie

1. „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens vier Richtige zu besitzen?” oder
2. „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Zahl richtig zu tippen?”

Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(\text{„mindestens vier Richtige”}) &= P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&\approx 0{,}000\,987\,,
\end{aligned}$$

$$P(\text{„mindestens eine Zahl richtig”}) = 1 - P(\{0\}) \approx 0{,}564\,.$$

Im letzten Fall wird die Komplementregel aus den Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsverteilungen benutzt, d.h. das Komplement von „mindestens eine Zahl richtig tippen” ist das Ereignis „keine Zahl richtig zu tippen” bzw. $\{0\}$.

3.3 Weitere Beispiele stochastischer Modelle

Nachfolgend werden zur Ergänzung weitere stochastische Modelle vorgestellt.

3.7 BEISPIEL

Zweifache Ausführung eines Bernoulli-Experiments

3.8 BEISPIEL (GEZINKTER WÜRFEL)

Ein (allgemeiner) gezinkter Würfel mit den Seiten $1, \ldots, 6$, wird durch folgendes Modell beschrieben:

- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$
- $P(\{i\}) = p_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$ mit $p_1 + \ldots + p_6 = 1$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten p_i können (unter Beachtung, dass die Summe gleich Eins ist) beliebig gewählt werden.

3.9 BEISPIEL

Ein spezieller gezinkter Würfel ergibt sich etwa durch die Festlegung

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{10}, \omega \in \{1, \ldots, 5\}, \qquad P(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Dieselben Fragestellungen wie in Beispiel 3.4 für einen fairen Würfel können auch für einen gezinkten Würfel untersucht werden. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs gegeben durch $p = \frac{1}{2}$. Damit ergibt sich mit $m = 6$ für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „genau vier Sechsen” zu werfen

$$P(\{4\}) = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-4} = 15 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}234\,375.$$

Entsprechend werden folgende Wahrscheinlichkeiten bestimmt:

$$\begin{aligned}
&P(\text{„mindestens fünfmal Sechs”}) \\
&\qquad = P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&\qquad = \binom{6}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{6-5} + \binom{6}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{6-6} \\
&\qquad = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \tfrac{6+1}{2^6} = \tfrac{7}{64} = 0{,}109\,375
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{„höchstens viermal Sechs”}) &= 1 - P(\text{„mindestens fünfmal Sechs”}) \\
&= 0{,}890\,625.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit viele Sechsen mit diesem gezinkten Würfel zu werfen deutlich höher ist als beim fairen Würfel. Für das Ereignis „mindestens fünfmal Sechs” ist die Wahrscheinlichkeit etwa 165 mal so groß!

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Ein Glücksrad hat zwei Felder unterschiedlicher Größe, eines davon ist leer, das andere enthält einen Stern. Wenn das Rad einmal gedreht wird, ist die Wahrscheinlichkeit, einen Stern zu erhalten, $p = \frac{1}{4}$.
Sie drehen das Rad 7 Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei
a) einmal einen Stern erhalten,
b) fünfmal einen Stern erhalten?
Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten exakt als Bruch sowie gerundet auf fünf Dezimalstellen an.

Antwort

a) $P(\text{„ein Stern”}) = P(1) = \dfrac{5\,103}{16\,384} \approx 0{,}311\,46$,

b) $P(\text{„fünf Sterne”}) = P(5) = \dfrac{189}{16\,384} \approx 0{,}011\,54$.

Lösung a)

Das Drehen eines Glücksrads mit zwei Feldern ist ein Bernoulli Experiment, das „interessierende Egebnis” ist hier, einen Stern zu erhalten. Wiederholtes Drehen des Glücksrads, hier $m = 7$ Mal, führt auf die Binomialverteilung für die Wahrscheinlichkeit, bei m Wiederholungen „k mal Stern” zu erhalten, wenn p die Wahrscheinlichkeit für „Stern” bei einmaligem Drehen ist. Es gilt

$$P(k) = \tbinom{m}{k}\, p^k\, (1-p)^{(m-k)} \; .$$

Einsetzen von $m = 7,\; p = \frac{1}{4}$ und $k = 1$ ergibt:

$$\begin{aligned} P(1) &= \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 7 \cdot \frac{3^6}{4^7} \\ &= 7 \cdot \frac{729}{16\,384} = \frac{5\,103}{16\,384} \approx 0{,}311\,46\,. \end{aligned}$$

Lösung b)

Das Drehen eines Glücksrads mit zwei Feldern ist ein Bernoulli Experiment, das „interessierende Egebnis” ist hier, einen Stern zu erhalten. Wiederholtes Drehen des Glücksrads, hier $m = 7$ Mal, führt auf die Binomialverteilung für die Wahrscheinlichkeit, bei m Wiederholungen „k mal Stern” zu erhalten, wenn p die Wahrscheinlichkeit für „Stern” bei einmaligem Drehen ist. Es gilt

$$P(k) = \tbinom{m}{k} p^k \, (1-p)^{(m-k)} \; .$$

Einsetzen von $m = 7, \; p = \frac{1}{4}$ und $k = 5$ ergibt:

$$\begin{aligned} P(5) &= \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 21 \cdot \frac{3^2}{4^7} \\ &= 21 \cdot \frac{9}{16\,384} = \frac{189}{16\,384} \approx 0{,}011\,54 \, . \end{aligned}$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) Eine faire Münze wird zehnmal geworfen. Wie wahrscheinlich ist es, genau dreimal Kopf zu werfen?

b) Ein fairer Würfel wird siebenmal geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten

1. genau dreimal eine Vier zu werfen,
2. höchstens zweimal eine Vier zu werfen,
3. mindestens dreimal eine Vier zu werfen.

c) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten in b), wenn der Würfel gezinkt ist und eine Vier mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10}$ auftritt?

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten exakt als Bruch sowie als Dezimalzahl gerundet auf fünf Dezimalstellen an.

Antwort

a) $P(\text{„dreimal Kopf"}) = \frac{15}{128} \approx 0{,}117\,19$.

b) $P(\text{„dreimal Vier"}) = \frac{21\,875}{279\,936} \approx 0{,}078\,14$,

$P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) = \frac{3125}{3456} \approx 0{,}904\,22$,

$P(\text{„mindestens dreimal Vier"}) = \frac{331}{3456} \approx 0{,}095\,78$.

c) $P(\text{„dreimal Vier"}) = \frac{453\,789}{2\,000\,000} \approx 0{,}226\,89$,

$P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) = \frac{1\,294\,139}{2\,000\,000} \approx 0{,}647\,07$,

$P(\text{„mindestens dreimal Vier"}) = \frac{705\,861}{2\,000\,000} \approx 0{,}352\,93$.

Lösung a)

Wir nutzen die Binomialverteilung mit der Wahrscheinlichkeit
$P(\{k\}) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$.
Welche Werte sind für m, k und p einzusetzen?

Die Zahl der Münzwürfe ist $m = 10$, die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p = \frac{1}{2}$ (die Wahrscheinlichkeit, bei *einem* Wurf Kopf zu werfen), $1 - p = \frac{1}{2}$. Bei $k = 3$ Treffern ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(\text{„dreimal Kopf"}) &= P(\{3\}) = \binom{10}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10-3} \\ &= \tfrac{10!}{3!\,7!} \tfrac{1}{2^{10}} = 120 \tfrac{1}{1024} = \tfrac{15}{128} \approx 0{,}117\,19\,. \end{aligned}$$

Lösung b)

Wir nutzen die Binomialverteilung mit der Wahrscheinlichkeit
$P(\{k\}) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$.
Welche Werte sind für m und p einzusetzen?

Der faire Würfel wird $m = 7$ mal geworfen, die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p = \frac{1}{6}$ (die Wahrscheinlichkeit, bei *einem* Wurf eine 4 zu würfeln), $1 - p = \frac{5}{6}$.

$$\begin{aligned} P(\text{„dreimal Vier"}) &= P(\{3\}) = \binom{7}{3} \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{7-3} \\ &= 35 \tfrac{5^4}{6^7} = \tfrac{21\,875}{279\,936} \approx 0{,}078\,14\,. \end{aligned}$$

$P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\})$, wobei
$P(\{0\}) = \binom{7}{0} \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \left(\tfrac{5}{6}\right)^7 = \tfrac{5^7}{6^7} = \tfrac{78\,125}{279\,936} \approx 0{,}279\,08$,
$P(\{1\}) = \binom{7}{1} \left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \left(\tfrac{5}{6}\right)^6 = 7 \tfrac{5^6}{6^7} = \tfrac{109\,375}{279\,936} \approx 0{,}390\,71$ und
$P(\{2\}) = \binom{7}{2} \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \left(\tfrac{5}{6}\right)^5 = 21 \tfrac{5^5}{6^7} = \tfrac{65\,625}{279\,936} = \tfrac{21\,875}{93\,312} \approx 0{,}234\,43\,.$
$P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) = \tfrac{253\,125}{279\,936} = \tfrac{3125}{3456} \approx 0{,}904\,22\,.$

$$\begin{aligned} P(\text{„mindestens dreimal Vier"}) &= 1 - P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) \\ &= \tfrac{331}{3456} \approx 0{,}095\,78\,. \end{aligned}$$

Lösung c)

Wir nutzen die Binomialverteilung mit der Wahrscheinlichkeit
$P(\{k\}) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$.
Welche Werte sind für m und p einzusetzen?

Der gezinkte Würfel wird $m = 7$ mal geworfen, die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p = \frac{3}{10}$ (die Wahrscheinlichkeit, bei *einem* Wurf eine 4 zu würfeln), $1 - p = \frac{7}{10}$.

$$P(\text{„dreimal Vier"}) = P(\{3\}) = \binom{7}{3} \left(\tfrac{3}{10}\right)^3 \left(\tfrac{7}{10}\right)^4$$
$$= 35 \frac{3^3 \cdot 7^4}{10^7} = \frac{2\,268\,945}{10\,000\,000} = \frac{453\,789}{2\,000\,000} \approx 0{,}226\,89 \;,$$

$P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\})$, wobei
$P(\{0\}) = \binom{7}{0} \left(\tfrac{3}{10}\right)^0 \left(\tfrac{7}{10}\right)^7 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{7^7}{10^7} = \frac{823\,543}{10\,000\,000} \approx 0{,}082\,35$,
$P(\{1\}) = \binom{7}{1} \left(\tfrac{3}{10}\right)^1 \left(\tfrac{7}{10}\right)^6 = 7 \frac{3 \cdot 7^6}{10^7} = \frac{2\,470\,629}{10\,000\,000} \approx 0{,}247\,06$ und
$P(\{2\}) = \binom{7}{2} \left(\tfrac{3}{10}\right)^2 \left(\tfrac{7}{10}\right)^5 = 21 \frac{3^2 \cdot 7^5}{10^7} = \frac{3\,176\,523}{10\,000\,000} \approx 0{,}317\,65\,.$
$P(\text{„höchstens zweimal Vier"}) = \frac{6\,470\,695}{10\,000\,000} = \frac{1\,294\,139}{2\,000\,000} \approx 0{,}647\,07\,.$

$$P(\text{„mindestens dreimal Vier"}) = 1 - P(\text{„höchstens zweimal Vier"})$$
$$= \frac{705\,861}{2\,000\,000} \approx 0{,}352\,93\,.$$

ÜBUNG 3

Ermitteln Sie mittels der hypergeometrischen Verteilung die Wahrscheinlichkeit für „k Richtige" beim Zahlenlotto „3 aus 12", wobei $k \in \{0, \ldots, 3\}$ (exakt als Bruch sowie als Dezimalzahl gerundet auf vier Nachkommastellen).

Antwort

Es gilt $P(\{k\}) = \frac{\binom{3}{k}\binom{9}{3-k}}{\binom{12}{3}}$ für $k \in \{0, \ldots, 3\}$ und damit ist die Wahrscheinlichkeit für zum Beispiel drei Richtige gegeben durch

$P(\{3\}) = \frac{1}{220} \approx 0{,}0045\,.$

Weiter gilt:

$P(\{0\}) = \frac{21}{55} \approx 0{,}3818\,,$

$P(\{1\}) = \frac{27}{55} \approx 0{,}4909\,,$

$P(\{2\}) = \frac{27}{220} \approx 0{,}1227\,.$

Lösung

Wir nutzen die hypergeometrische Verteilung mit der Wahrscheinlichkeit $P(\{k\}) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{m-k}}{\binom{r+s}{m}}$, wobei $r+s$ die Anzahl der Elemente der Grundmenge, r die Anzahl der Richtigen und m die Anzahl der Ziehungen beschreibt.

Mit $r = 3$ Richtigen aus $r + s = 12$ Zahlen, also $s = 12 - 3 = 9$, und $m = 3$ Ziehungen ergibt sich $P(\{k\}) = \frac{\binom{3}{k}\binom{9}{3-k}}{\binom{12}{3}}$ für $k \in \{0, \ldots, 3\}$.

Einsetzen von $k \in \{0{,}1{,}2{,}3\}$ in $P(\{k\})$, liefert die Wahrscheinlichkeiten für k Richtige.

$$
\begin{aligned}
P(\{0\}) &= \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1 \cdot 84}{220} = \frac{21}{55} \approx 0{,}3818\,,\\
P(\{1\}) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{3 \cdot 36}{220} = \frac{27}{55} \approx 0{,}4909\,,\\
P(\{2\}) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3 \cdot 9}{220} = \frac{27}{220} \approx 0{,}1227\,,\\
P(\{3\}) &= \frac{\binom{3}{3}\binom{9}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{1 \cdot 1}{220} = \frac{1}{220} \approx 0{,}0045\,.
\end{aligned}
$$

4. BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT UND STOCHASTISCHE UNABHÄNGIGKEIT VON EREIGNISSEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt

- können Sie bedingte Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnen,
- können Sie die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit nutzen,
- können Sie den Satz von Bayes anwenden,
- können Sie Wahrscheinlichkeiten mithilfe einer Baumstruktur einfacher berechnen,
- können Sie Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit überprüfen.

4.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt wird diskutiert, inwieweit eine Zusatzinformation über den Ausgang eines Zufallsexperiments die Bewertung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beeinflusst. Zur Verdeutlichung dieser Fragestellung wird die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer Sechs beim fairen Würfelwurf betrachtet.

4.1 BEISPIEL (MIT WELCHER WAHRSCHEINLICHKEIT WIRD EINE SECHS GEWÜRFELT?)

Ein fairer Würfel wird in einem Knobelbecher geschüttelt, der dann auf einen Tisch gestülpt wird. Der Knobelbecher verdeckt das Wurfergebnis.

Ausgehend von einem Laplace-Modell mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ ergibt sich zunächst der Wert $\frac{1}{6}$ für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, eine Sechs zu würfeln.

Das Spiel wird nun dahingehend abgeändert, dass ein neutraler Beobachter sich das Ergebnis anschauen darf. Er teilt aber nicht das Ergebnis mit, sondern gibt nur die Information, dass eine gerade Zahl gewürfelt wurde. Wie ändert diese Information die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit für eine Sechs?

Die Zusatzinformation „*Es wurde eine gerade Zahl gewürfelt*” entspricht dem Ereignis $B = \{2, 4, 6\}$. Sie erlaubt eine Einschränkung der Grundmenge Ω auf Ergebnisse aus dem Ereignis B, da als Ergebnis eben nur noch eine gerade Zahl in Frage kommt. Man kann das Zufallsexperiment $\underline{\text{nach}}$ Bekanntgabe der Information also beschreiben durch das Modell

- $B = \{2, 4, 6\}$
- P_B definiert durch $P_B(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$, $\omega \in \{2, 4, 6\}$.

Die Information hat daher zu einer Adaption des Modells geführt, d.h. nach Vorliegen der Information wird ein Laplace-Modell auf $B = \{2, 4, 6\}$ unterstellt. Andererseits kann die Wahrscheinlichkeit auch geschrieben werden als

$$P_B(\{\omega\}) = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{|\{\omega\}|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(\{\omega\})}{P(B)}, \quad \omega \in B.$$

Ist $\omega \notin B$, so ist die Wahrscheinlichkeit „ω zu beobachten”, wenn B eingetreten ist, offenbar gleich Null (ist das Ergebnis eine gerade Zahl, so ist eine ungerade Zahl wie 1 als Ergebnis ausgeschlossen). Daher kann die obige Formel so auf die Ergebnismenge $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ erweitert werden:

$$P_B(\{\omega\}) = \frac{P(\{\omega\} \cap B)}{P(B)} = \begin{cases} \frac{P(\{\omega\})}{P(B)} & \text{für } \omega \in B \\ 0 & \text{für } \omega \in \Omega \setminus B \end{cases}, \quad \omega \in \Omega.$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs, wenn bekannt ist, dass eine gerade Zahl gewürfelt wurde, kann daher als das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden, eine Sechs bzw. eine gerade Zahl zu würfeln.

4.2 DEFINITION (BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT)

Seien Ω eine endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω sowie $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$.

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben die in B enthaltene Information** ist definiert durch

$$P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

($P(A|B)$ wird gelesen „P von A unter (der Bedingung) B").

4.3 BEMERKUNG

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit kann **in einem Laplace-Modell** mit Ergebnismenge Ω folgendermaßen interpretiert werden:

Für $B \neq \emptyset$ hat der Quotient $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ nach Kürzen von $1/|\Omega|$ die Darstellung

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|},$$

d.h. für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ gilt nach Definition:

$$P\left(A|B\right) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Für eine beliebige Teilmenge C von B, d.h. $C \cap B = C$, folgt dann

$$P\left(C|B\right) = \frac{|C|}{|B|}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit definiert daher ein Laplace-Modell mit der (eingeschränkten) Ergebnismenge B, die als bekannte Information gegeben ist. Diese Situation liegt auch in Beispiel 4.1 vor.

4.4 BEISPIEL

Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden jeweils einmal geworfen (beide sind fair).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechs geworfen wurde, wenn bekannt ist, dass die gewürfelte Augensumme gleich 8 ist?

   Zunächst gilt für das Ereignis B „Augensumme 8":

   $$B = \{(2{,}6), (3{,}5), (4{,}4), (5{,}3), (6{,}2)\},$$

   d.h. es gibt fünf Möglichkeiten diese Augensumme zu erzielen. Insbesondere gilt im Laplace-Modell dann $P(B) = \frac{5}{36}$. Das Ereignis A „es wurde (mindestens) eine Sechs geworfen" ist gegeben durch

   $$\begin{aligned} A = \{(1{,}6),&(2{,}6), (3{,}6), (4{,}6), (5{,}6), (6{,}6), \\ &(6{,}1), (6{,}2), (6{,}3), (6{,}4), (6{,}5)\} \end{aligned}$$

   mit $P(A) = \frac{11}{36}$. (Mindestens) eine Sechs zu werfen und gleichermaßen Augensumme 8 zu erzielen trifft nur für die Ergebnisse $(2, 6), (6, 2)$ zu, d.h. $A \cap B = \{(2, 6), (6, 2)\}$. Damit ergibt sich

   $$P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}.$$

   Die Information über die Augensumme führt also dazu, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs nun bei $0{,}4$ liegt.

2. Die obige Fragestellung kann auch „umgekehrt" werden: Wie wahrscheinlich ist es, dass die Augensumme 8 beträgt, wenn (mindestens) eine Sechs geworfen wurde?

   In diesem Fall ist das Ereignis A als Information gegeben und die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter A gesucht:

   $$P\left(B|A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

   Das Beispiel zeigt also insbesondere, dass i.Allg. $P(B|A) \neq P(A|B)$.

3. Betrachtet man die Fragestellung aus 1. mit einer Eins anstelle einer Sechs, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit Null. Das Ereignis C „es wurde (mindestens) eine Eins geworfen" ist gegeben durch

   $$\begin{aligned} C = \{(1{,}1),&(2{,}1), (3{,}1), (4{,}1), (5{,}1), (6{,}1), \\ &(1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6)\}. \end{aligned}$$

   Wegen $C \cap B = \emptyset$, folgt dann $P(C|B) = 0$. Das gilt auch für $P(B|C)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, Augensumme 8 zu erhalten, wenn (mindestens) eine Eins geworfen wurde, ist gleich Null (was auch der Anschauung entspricht).

4.2 Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit nutzt gewisse bedingte Wahrscheinlichkeiten zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A.

4.5 REGEL (FORMEL VON DER TOTALEN WAHRSCHEINLICHKEIT)

Seien Ω eine Grundmenge, P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $0 < P(B) < 1$. Dann gilt:

$$P(A) = P\left(A|B\right) P(B) + P\left(A|\complement B\right) P\left(\complement B\right).$$

Die obige Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit beruht auf der folgenden nützlichen Regel, die sich als direkte Anwendung von Regel 1.7 für die disjunkten Mengen $A \cap B$ und $A \cap \complement B$ ergibt (siehe Bemerkungen 4.7 und 4.8).

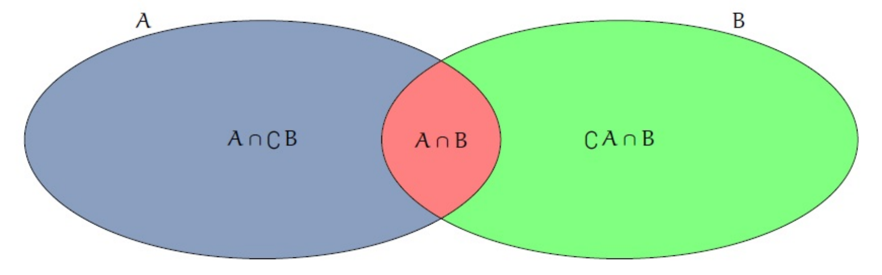
4.6 REGEL

Seien Ω eine Grundmenge, P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Dann gilt:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \complement B).$$

4.7 BEMERKUNG

Wie unmittelbar im folgenden Venn-Diagramm deutlich wird, sind die Mengen $A \cap B$ und $A \cap \complement B$ disjunkte Mengen und ihre Vereinigung ist gleich der Menge A.



4.8 BEMERKUNG

Herleitung der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

4.9 BEISPIEL

Von einem Dopingtest ist bekannt, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}99$ einen Dopingversuch eines Sportlers erkennt. Allerdings liefert er auch mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}04$ einen (falschen) positiven Befund, wenn der Sportler nicht gedopt ist. Ferner sei bekannt, dass ein zufällig ausgewählter Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}05$ tatsächlich gedopt ist.

Wir formulieren ein Laplace-Modell für diesen Dopingtest: Die Menge aller Sportler, aus der einige zum Dopingtest ausgewählt werden, bezeichnen wir mit Ω. Darunter befinden sich einige gedopte Athleten, die wir in der Menge $A \subseteq \Omega$ sammeln. Wir wissen nicht, welche das sind, aber wir wissen, dass $P(A) = |A|/|\Omega| = 0{,}05$ gilt. Ist $B \subseteq \Omega$ die Menge der Sportler, für die der Dopingtest ein positives Resultat liefert („Sportler ist gedopt!"), so gilt also $P(B) = |B|/|\Omega|$. Wir kennen $P(B)$ nicht, aber wir kennen die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A) = 0{,}99$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein gedopter Athlet durch den Dopingtest überführt wird, Wir kennen auch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|\complement A) = 0{,}04$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein nicht gedopter Athlet durch den Dopingtest fälschlicherweise des Doping bezichtigt wird. Es gelten also

$$P\left(B|A\right) = 0{,}99, \quad P\left(B\middle|\complement A\right) = 0{,}04, \quad P(A) = 0{,}05,$$

sowie $P(\complement A) = 1 - P(A) = 0{,}95$.

Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt dann

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(B|A\right)P(A) + P\left(B\middle|\complement A\right)P(\complement A) \\ &= 0{,}99 \cdot 0{,}05 + 0{,}04 \cdot 0{,}95 = 0{,}0875. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Dopingtest bei einem zufällig ausgewählten Sportler beträgt daher 0,0875. Im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0{,}05$, dass der Sportler gedopt ist, ist dieser Wert $1{,}75$ mal so hoch! Ursache dieses Phänomens ist, dass der Dopingtest nicht fehlerfrei ist. Obwohl der Test gute Erkennungsraten für Doping besitzt, führt die Fehlerquote von 4% bei nicht gedopten Sportlern dazu, dass von den mehrheitlich nicht gedopten Sportlern zahlreiche falsch positiv getestet werden. Bei einer Grundmenge von z.B. 1000 Sportlern, von denen etwa 50 gedopt sind (5%) und 950 nicht, werden etwa 38 irrtümlich als gedopt identifiziert ($950 \cdot 0{,}04 = 37{,}5 \approx 38$ Sportler). Von den gedopten werden nahezu alle identifiziert.

Eine weitere wichtige Regel für bedingte Wahrscheinlichkeiten ist der **Satz von Bayes**, der den Austausch von Vorinformation und interessierendem Ereignis beschreibt.

4.10 REGEL (SATZ VON BAYES)

Seien Ω eine Grundmenge, P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Thomas Bayes (1701-1761)

4.11 BEISPIEL

In der Situation von Beispiel 4.9 ergibt sich für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein durch den Test als gedopt identifizierter Sportler *tatsächlich* gedopt ist, mit dem Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}05}{0{,}0875} \approx 0{,}566.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler mit positivem Dopingtest tatsächlich gedopt ist, liegt daher nur bei $0{,}566$.

Andererseits ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein negativ getesteter Sportler doch gedopt hat, sehr klein:

$$\begin{aligned} P\left(A|\complement B\right) &= \frac{P(\complement B|A) \cdot P(A)}{P(\complement B)} = \frac{(1-P(B|A)) \cdot P(A)}{1-P(B)} \\ &= \frac{0{,}01 \cdot 0{,}05}{0{,}9125} \approx 0{,}00055. \end{aligned}$$

Anmerkung zum obigen Beispiel

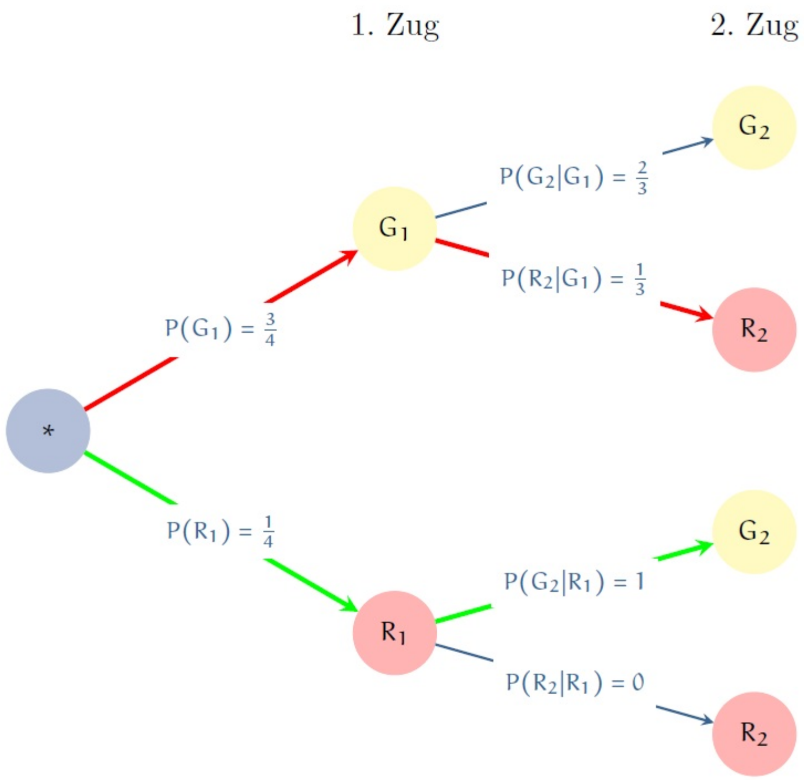
Kombination mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

4.3 Mehrstufige Experimente

In mehrstufigen Experimenten können Wahrscheinlichkeiten mithilfe einer Baumstruktur einfacher berechnet werden. Dies wird exemplarisch am Beispiel von zwei Ziehungen aus einer Urne mit einer roten und drei gelben Kugeln erläutert.

4.12 BEISPIEL

In einer Urne sind vier Kugeln enthalten, von denen eine rot und drei gelb sind. Nacheinander werden zwei Kugeln entnommen. G_1 und R_1 bezeichnet die Ereignisse *„erste gezogene Kugel ist gelb"* und *„erste gezogene Kugel ist rot"*, entsprechend G_2 und R_2 für den zweiten Zug. Die Situation kann in folgender Weise durch ein **Baumdiagramm** illustriert werden.



Eine Ziehung von zwei Kugeln wird durch einen Weg im Baumdiagramm von links nach rechts dargestellt, z.B. ist das Ereignis $G_1 \cap R_2$ (erste Kugel gelb, zweite rot) mit den roten Pfeilen markiert. Die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten an den Pfeilen werden nach den oben erläuterten Regeln berechnet. Wurde etwa im ersten Zug eine gelbe Kugel gezogen, verbleiben in der Urne eine rote und zwei gelbe Kugeln. Für den zweiten Zug gilt daher $P(R_2|G_1) = \frac{1}{3}$ und $P(G_2|G_1) = \frac{2}{3}$. Entsprechend werden die übrigen im Baumdiagramm angegebenen Wahrscheinlichkeiten ermittelt. Man erhält nun die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis einer Ziehung von zwei Kugeln durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades. Beispielsweise erhält man für die Wahrscheinlichkeit im ersten Zug eine rote (gelbe) und im zweiten Zug eine gelbe (rote) Kugel zu ziehen:

$$P(R_1 \cap G_2) = P(G_2|R_1) \cdot P(R_1) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{(grüner Pfad)},$$
$$P(R_2 \cap G_1) = P(R_2|G_1) \cdot P(G_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{(roter Pfad)}.$$

Weiterhin können Wahrscheinlichkeiten von Vereinigungsereignissen auf diese Weise ermittelt werden. Die Wahrscheinlichkeit genau eine rote und eine gelbe Kugel zu ziehen, ist gegeben durch

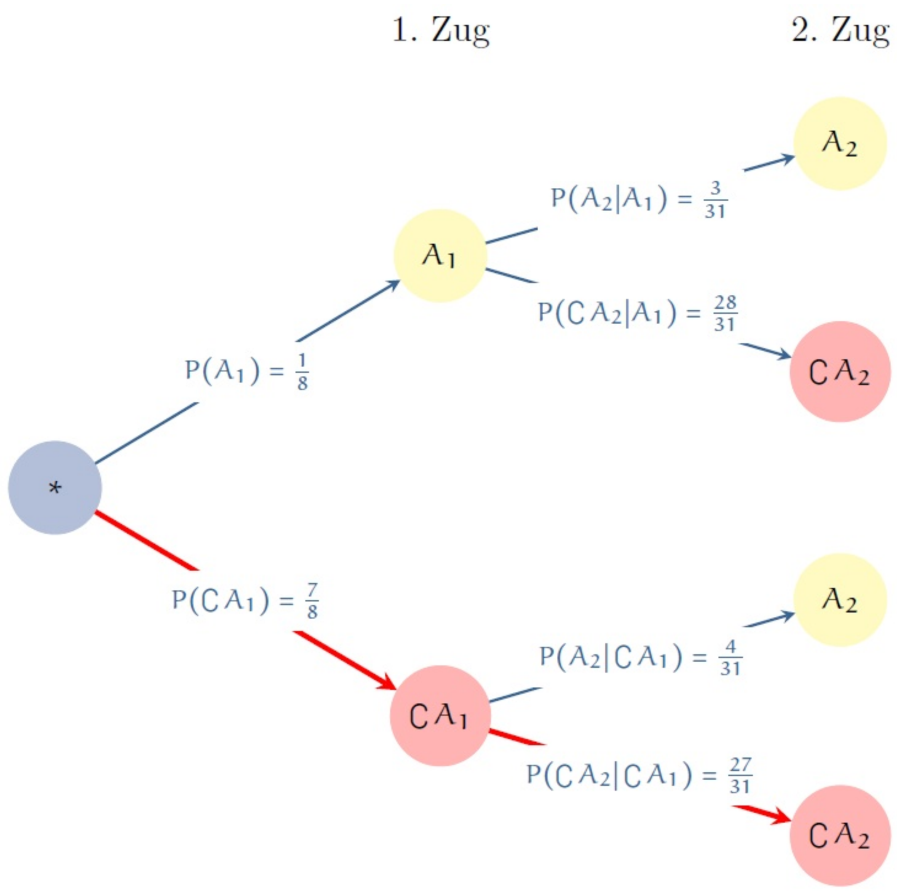
$$\begin{aligned} P((R_1 \cap G_2) \cup (R_2 \cap G_1)) &= P(R_1 \cap G_2) + P(R_2 \cap G_1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hierbei wird benutzt, dass $R_1 \cap G_2$ und $R_2 \cap G_1$ disjunkt sind.

Das obige Verfahren kann entsprechend fortgesetzt werden. Sollen etwa drei Züge vorgenommen werden, erhält man eine weitere Auffächerung des Baumes, wobei die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gegeben sind durch $P(R_3|G_1 \cap G_2)$ etc.

4.13 BEISPIEL

Ein handelsübliches Skatspiel hat 32 Spielkarten, von denen vier Asse sind. Aus dem Stapel der 32 Karten werden nacheinander zwei Karten entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens ein As zu ziehen?
Die Situation wird zunächst in einem Baumdiagramm dargestellt. Hierbei bezeichnen A_1 das Ereignis „As im 1. Zug” sowie A_2 das Ereignis „As im 2. Zug”. Dann gilt $P(A_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. $P(A_2|A_1) = \frac{3}{31}$ resultiert aus der Überlegung, dass nach Ziehen eines Asses noch drei von den verbleibenden 31 Karten Asse sind. Die übrigen Wahrscheinlichkeiten werden analog bestimmt.



Zur Berechnung der gesuchte Wahrscheinlichkeit wird zunächst die Komplementregel verwendet:

$$P(\text{„mindestens ein As"}) = 1 - P(\text{„kein As"}) = 1 - P(\complement A_1 \cap \complement A_2).$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(\complement A_1 \cap \complement A_2)$ wird durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang des roten Pfades bestimmt:

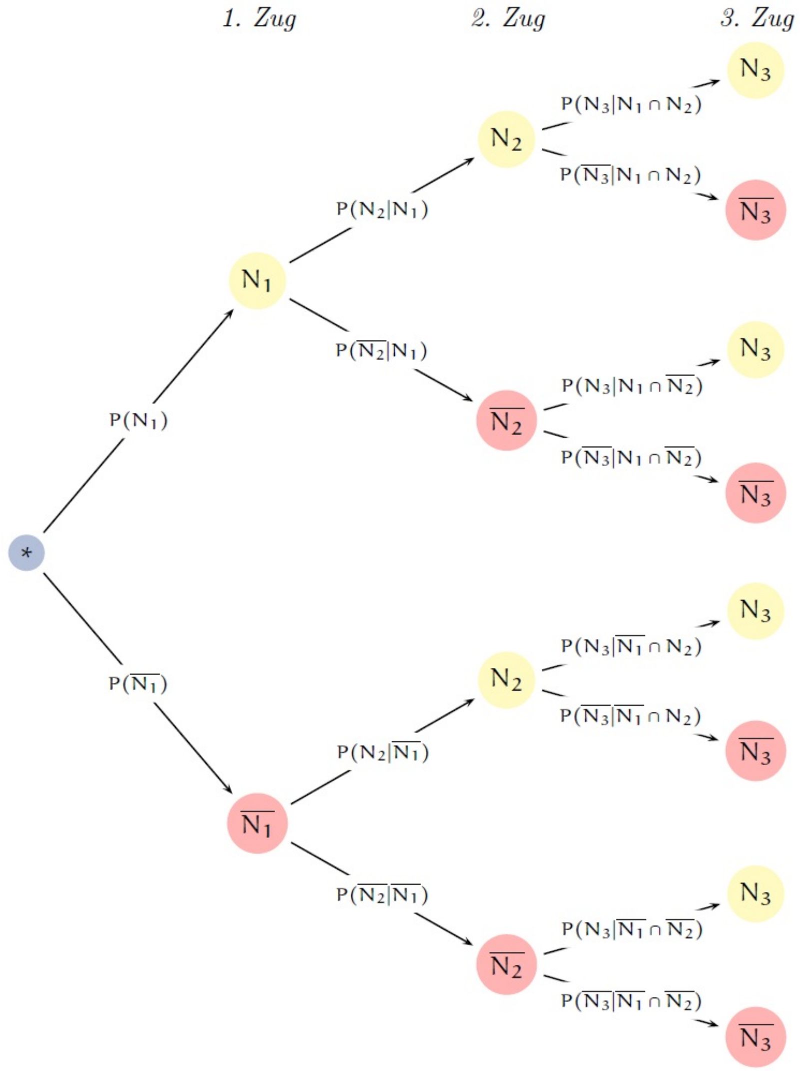
$$P(\complement A_1 \cap \complement A_2) = \frac{7}{8} \cdot \frac{27}{31} = \frac{189}{248},$$

so dass $P(\text{„mindestens ein As"}) = 1 - \frac{189}{248} = \frac{59}{248} \approx 0{,}238.$

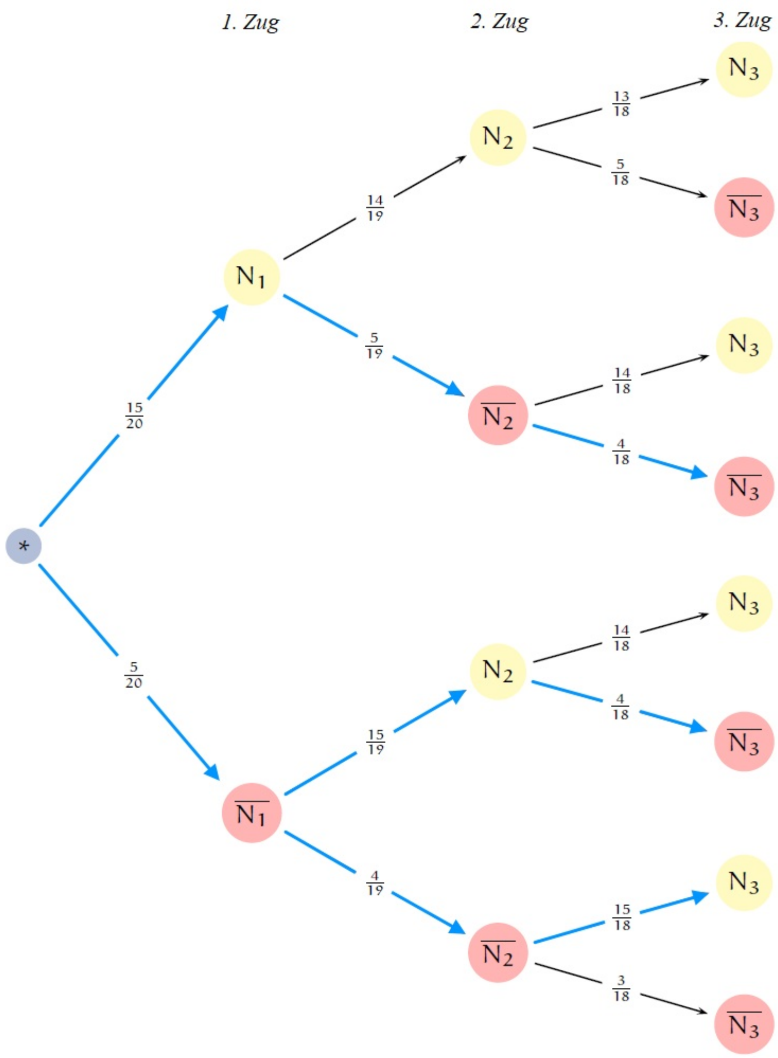
Das folgendes Beispiel beinhaltet einen Baum mit drei Zügen.

4.14 BEISPIEL

In einer Lostrommel sind 20 Lose, von denen 15 Nieten sind. Ein Kind zieht nacheinander drei Lose heraus. Dann kann die Situation in einem Baumdiagramm wie folgt dargestellt werden. Das Ereignis N_i bedeutet, dass im i-ten Zug eine Niete gezogen wurde. Entsprechend beschreibt $\overline{N_i}$ einen Gewinn.



Einsetzen der Zahlen ergibt das folgende Baumschema.



Die drei blau markierten Pfade müssen durchlaufen werden, um die Wahrscheinlichkeit für genau eine Niete zu ermitteln. Dazu müssen die Wahrscheinlichkeiten entlang der blauen Pfade multipliziert und anschließend addiert werden. Genauer wird das gesuchte Ereignis beschrieben durch

$$(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3),$$

wobei die Schnittereignisse paarweise disjunkt sind. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
&P\Big((N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)\Big) \\
&= P(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) + P(\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) + P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3) \\
&= \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} + \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{15}{18} \\
&= 3 \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{900}{6840} = \frac{5}{38}.
\end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für genau $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ Nieten:

Anzahl Nieten	0	1	2	3

Wahrscheinlichkeit	$\frac{6}{684} = \frac{1}{114}$	$\frac{90}{684} = \frac{5}{38}$	$\frac{315}{684} = \frac{35}{76}$	$\frac{273}{684} = \frac{91}{228}$
	$\approx 0{,}9\%$	$\approx 13{,}2\%$	$\approx 46{,}1\%$	$\approx 39{,}9\%$

Die Wahrscheinlichkeit drei Nieten zu ziehen ist somit geringer als 40%, obwohl $3/4$ der Lose Nieten sind.

4.4 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit steht in engem Bezug zum (zentralen) Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen. Bei stochastisch unabhängigen Ereignissen verändert eine Vorinformation über das Eintreten eines Ereignisses nicht die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses. Für A, B mit $P(B) > 0$ bedeutet dieses dann

$$P(A|B) = P(A).$$

Durch Multiplikation von $P(A|B)$ mit $P(B)$ ergibt sich folgende Definition der stochastischen Unabhängigkeit zweier Ereignisse.

4.15 DEFINITION (STOCHASTISCHE UNABHÄNGIGKEIT)

Seien Ω eine endliche Ergebnismenge und P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Dann heißen A und B sind stochastisch unabhängig genau dann, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

4.16 BEISPIEL

Sei P die Laplace-Verteilung auf $\Omega = \{1{,}2{,}3{,}4\}$. Dann sind $A = \{1{,}2\}$ und $B = \{2{,}3\}$ stochastisch unabhängig, denn $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,

$$P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B).$$

Jedoch sind A und $C = \{2{,}3{,}4\}$ nicht stochastisch unabhängig wegen

$$P(A \cap C) = P(\{2\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = P(A) \cdot P(C).$$

4.17 BEISPIEL

Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden jeweils einmal geworfen, beide Würfel sind fair. Das Zufallsexperiment wird durch ein Laplace-Modell mit

$$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,\dots,6\}\}$$

modelliert. Wir zeigen, dass die Ereignisse $A = \text{„weißer Würfel zeigt eine Sechs"}$ und $B = \text{„schwarzer Würfel zeigt eine Sechs"}$ stochastisch unabhängig sind: Mit

$$\begin{aligned} A &= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}, \\ B &= \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}, \\ A \cap B &= \{(6,6)\} \end{aligned}$$

gilt

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B).$$

Die Ereignisse sind daher im stochastischen Sinne unabhängig. Da sich die Ereignisse jeweils nur auf ein Teilexperiment (Ergebnis des weißen (A) bzw. schwarzen Würfels (B)) beziehen, reflektiert dies die Annahme der experimentellen Unabhängigkeit, d.h. die Durchführung der Würfe soll ohne gegenseitige Beeinflussung stattfinden.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

In einer Urne sind fünf Kugeln enthalten, von denen zwei rot und drei gelb sind. Nacheinander werden zwei Kugeln entnommen.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm.

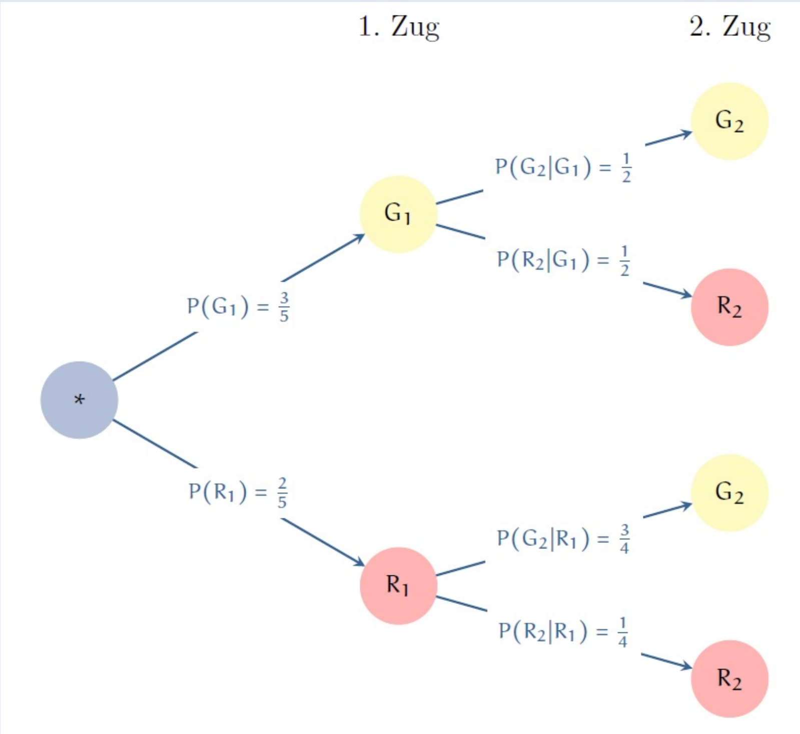
b) Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse
R_1 *„Die erste gezogene Kugel ist rot"* und G_2 *„Die zweite gezogene Kugel ist gelb"*.

c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(G_2|R_1)$ und $P(R_1|G_2)$.

d) Sind R_1 und G_2 stochastisch unabhängig?

Antwort

a) Mit den Ereignissen $G_1 \widehat{=}$ „1. Kugel gelb", $G_2 \widehat{=}$ „2. Kugel gelb",
$R_1 \widehat{=}$ „1. Kugel rot", $R_2 \widehat{=}$ „2. Kugel rot" gilt:



b) Es gilt $P(R_1) = \frac{2}{5}$ und $P(G_2) = \frac{3}{5}$.

c) Es gilt $P(G_2|R_1) = \frac{3}{4}$ und $P(R_1|G_2) = \frac{1}{2}$.

d) R_1 und G_2 sind nicht stochastisch unabhängig.

Lösung a)

Mit den Ereignissen $G_1 \mathrel{\widehat{=}}$ „1. Kugel gelb”, $G_2 \mathrel{\widehat{=}}$ „2. Kugel gelb”, $R_1 \mathrel{\widehat{=}}$ „1. Kugel rot”, $R_2 \mathrel{\widehat{=}}$ „2. Kugel rot” ergibt sich zunächst

$$P(G_1) = \frac{3}{5}, \quad P(R_1) = \frac{2}{5}.$$

Wurde zunächst eine gelbe Kugel gezogen, so sind noch zwei rote und zwei gelbe Kugeln in der Urne. Es gilt also $P(G_2 \middle| G_1) = \frac{1}{2} = P(R_2 \middle| G_1)$. Entsprechend folgt $P(R_2 \middle| R_1) = \frac{1}{4}$ und $P(G_2 \middle| R_1) = \frac{3}{4}$.

Lösung b)

Mit den Ereignissen $G_1 \mathrel{\widehat{=}}$ „1. Kugel gelb”, $G_2 \mathrel{\widehat{=}}$ „2. Kugel gelb”, $R_1 = \complement G_1 \mathrel{\widehat{=}}$ „1. Kugel rot” ergibt sich zunächst

$$P(G_1) = \frac{3}{5}, \quad P(R_1) = \frac{2}{5}.$$

Für das Ereignis G_2 gilt mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2|G_1)\, P(G_1) + P(G_2|R_1)\, P(R_1) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{10} = \tfrac{3}{5}. \end{aligned}$$

Lösung c)

Mit den Ereignissen $G_1 \widehat{=}$ „1. Kugel gelb”, $G_2 \widehat{=}$ „2. Kugel gelb”, $R_1 \widehat{=}$ „1. Kugel rot” ergibt sich zunächst aus dem Baumdiagramm

$$P(R_1) = \frac{2}{5}, \quad P(G_2|R_1) = \frac{3}{4}$$

sowie $P(G_2) = \frac{3}{5}$ aus Teil b).

Mit dem Satz von Bayes gilt:

$$P(R_1|G_2) = \frac{P(G_2|R_1)\ P(R_1)}{P(G_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2},$$

d.h. die Wahrscheinlichkeiten im ersten Zug eine rote Kugel gezogen zu haben, wenn bekannt ist, dass die zweite Kugel gelb war, ist gleich $\frac{1}{2}$.

Lösung d)

Wegen
$P(R_1 \cap G_2) = P(G_2 \big| R_1) \cdot P(R_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \neq \frac{6}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = P(R_1) \cdot P(G_2)$
sind R_1 und G_2 nicht stochastisch unabhängig.
Oder äquivalent: R_1 und G_2 sind nicht stochastisch unabhängig, da
$P(G_2 \big| R_1) = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{5} = P(G_2)$.

ÜBUNG 2

In einem Betrieb werden fünf Maschinen, kurz A1, A2 und C1, C2, C3 eingesetzt, die an einem bestimmten Tag jeweils intakt (kurz: 1) oder defekt (kurz: 0) sind. Zur erfolgreichen Arbeit an diesem Tag ist mindestens jeweils eine Maschine der Typen A und C erforderlich. Die Ereignismenge Ω sei gegeben durch

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_5) | \omega_1, \dots, \omega_5 \in \{0,1\}\},$$

wobei ω_1 den Zustand der Maschine A1, ω_2 den von A2, ω_3 den von C1, usw. beschreibt; $\omega_i = 0$ bedeutet, dass die zugehörige Maschine defekt ist. Entsprechend heißt $\omega_i = 1$ intakt. Jedes Betriebsszenario $(\omega_1, \dots, \omega_5)$ der Maschinen habe dieselbe Wahrscheinlichkeit. Es sei E_1 das Ereignis, dass ein erfolgreiches Arbeiten möglich ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von E_1 gegeben die Information, dass A_1 und C_1 defekt sind.

Antwort

$P(E_1 \big| „A_1, C_1 \text{ defekt”}) = \frac{3}{8}$

Lösung

Für die Beschreibung der Ereignisse als Teilmengen der Grundmenge Ω werden die Notation $\vee$ (oder) und $\wedge$ (und) benutzt (siehe Abschnitt Aussageformen und Aussagen). Es gilt

$$E_1 = \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid (\omega_1 = 1 \vee \omega_2 = 1) \wedge (\omega_3 = 1 \vee \omega_4 = 1 \vee \omega_5 = 1)\}.$$

Weiter sei D das Ereignis „A_1, C_1 defekt". Dann gilt

$$D = \{(\omega_1, \cdots, \omega_5) \mid \omega_1 = 0, \omega_3 = 0\}.$$

Nach Definition ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von E_1 gegeben D definiert als

$$P(E_1|D) = \frac{P(E_1 \cap D)}{P(D)}.$$

Es gilt

$$E_1 \cap D = \{(0,1,0,1,1), (0,1,0,0,1), (0,1,0,1,0)\}.$$

Es folgt $|E_1 \cap D| = 3$. Weiterhin ist $|D| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ und $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$. Damit ergibt sich

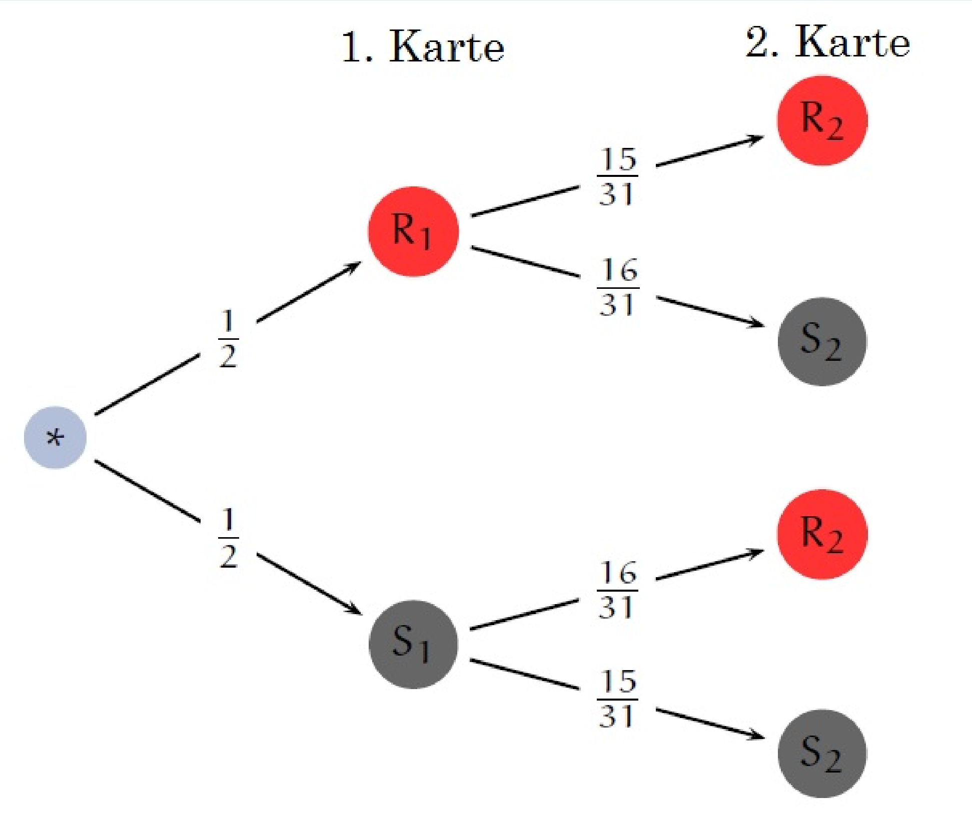
$$P(E_1|D) = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{8}{32}} = \frac{3}{8}.$$

ÜBUNG 3

In einem Skatspiel mit 32 Karten sind je 16 Karten rot oder schwarz. Für den Skat werden zwei Karten zufällig ausgewählt. Stellen Sie die Situation mittels eines Baumdiagramms dar, wobei nur die Farben von Interesse sind. Ermitteln Sie zudem die Wahrscheinlichkeit, dass beide Karten die gleiche bzw. verschiedene Farben haben.

Antwort

Bezeichnen R_i und S_i, $i = 1{,}2$, die Ereignisse „i-te gezogene Karte ist rot” und „i-te gezogene Karte ist schwarz”, so kann die Situation in folgendem Baumdiagramm veranschaulicht werden:



Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit für zwei rote bzw. zwei schwarze Karten durch

$$P(R_1 \cap R_2) = P(S_1 \cap S_2) = \tfrac{15}{62} \approx 0{,}2419\,,$$
$$P(\text{„Beide Karten haben dieselbe Farbe”}) = \tfrac{15}{31} \approx 0{,}4839\,,$$

und die für zwei unterschiedlich farbige Karten durch

$$P(R_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap R_2) = \tfrac{16}{31} \approx 0{,}5161\,.$$

gegeben.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms erhält man wie folgt:
Für die erste Karte haben die Wahrscheinlichkeiten jeweils den Wert $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, da jeweils 16 von insgesamt 32 Karten eine der beiden Farben aufweisen. Für die zweite Karte muss man berücksichtigen, dass eine gezogene erste Karte aus der möglichen, noch zu ziehenden Kartenmenge, entnommen wurde, sodass nur noch 31 übrig sind. Davon sind jeweils noch 15 in der Farbe der zuerst gezogenen Karte und 16 in der anderen Farbe.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass beide Karten rot sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} \cdot P(R_1) = P(R_2 \mid R_1) \cdot P(R_1) \\ &= \frac{15}{31} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{62} \approx 0{,}2419\,. \end{aligned}$$

Dass beide Karten schwarz sind, tritt wegen der Symmetrie der Kartenzahl zu den beiden Farben mit gleicher Wahrscheinlichkeit

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_2 \mid S_1) \cdot P(S_1) = \frac{15}{31} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{62} \approx 0{,}2419$$

ein. Verschiedenfarbige Karten erhält man in zwei Fällen, sodass die Wahrscheinlichkeit dafür durch Summation der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse erhalten werden kann:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap R_2) &= P(R_1) \cdot P(S_2 \mid R_1) + P(S_1) \cdot P(R_2 \mid S_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{31} = \frac{16}{31} \approx 0{,}5161\,. \end{aligned}$$

Eine Alternative zu dieser Berechnung ist über das Komplementärereignis möglich:

Zwei unterschiedlich farbige Karten erhält man, wenn man keine zwei gleichfarbigen Karten zieht. Da es keine weitere mögliche Situation gibt, ist die Wahrscheinlichkeit dann auch über

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap R_2) &= 1 - (P(R_1 \cap R_2) + P(S_1 \cap S_2)) \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{15}{62} = 1 - \frac{15}{31} = \frac{16}{31} \approx 0{,}5161\,. \end{aligned}$$

berechenbar.

ÜBUNG 4

Der zweifache Münzwurf mit einer fairen Münze wird durch ein Laplace-Modell mit Grundraum $\Omega = \{(0{,}0), (0{,}1), (1{,}0), (1{,}1)\}$ beschrieben, wobei Kopf mit 1 und Zahl mit 0 bezeichnet wird. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A =$ *„im ersten Wurf fällt Kopf"* und $B =$ *„im zweiten Wurf fällt Zahl"* stochastisch unabhängig sind.

Lösung 1

Es ist der Grundraum $\Omega = \{(0{,}0), (0{,}1), (1{,}0), (1{,}1)\}$ mit $|\Omega| = 4$ gegeben. Die beschriebenen Ereignisse sind dann gegeben durch die Mengen

$$A = \{(1{,}0), (1{,}1)\} \subseteq \Omega \quad \textbf{und} \quad B = \{(0{,}0), (1{,}0)\} \subseteq \Omega.$$

Weiterhin gilt im Laplace Modell (faire Münzen) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(B)$, sowie mit $A \cap B = \{(1{,}0)\} \subseteq \Omega$ auch $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$. Somit ist

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

und damit sind die Ereignisse A und B definitionsgemäß stochastisch unabhängig.
Unter „Lösung 2" wird ein anderer (aber gleichwertiger) Lösungsweg vorgestellt.

Lösung 2

Sei A das Ereignis „im ersten Wurf fällt Kopf" und B das Ereignis „im zweiten Wurf fällt Zahl". Dann gilt im Laplace Modell mit den in Lösung 1 angegebenen Mengen

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{2} = \frac{|A|}{|\Omega|} = P(A).$$

Die Gleichung $P(A|B) = P(A)$ ist eine gleichwertige Aussage, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.
Unter „Lösung 1" wird ein anderer (aber gleichwertiger) Lösungsweg vorgestellt.

5. ZUFALLSVARIABLEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele: Nach diesem Abschnitt

- können Sie Zufallsvariablen in diskreten stochastischen Modellen verwenden,
- können Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen berechnen.

5.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

In vielen Zufallsexperimenten ist oft nicht der konkrete Ausgang des Zufallsexperiments von Interesse, sondern lediglich ein auf dem Ausgang basierender Aspekt wichtig. Um diesen einfach zu beschreiben wird das Konzept der Zufallsvariablen eingeführt.

5.1 BEISPIEL

- Bei einem Glücksspiel mit den Feldern 0 und 1 setzt ein Spieler 1€ ein und erhält die Auszahlung 2 €, wenn er gewinnt. Ansonsten ist der Einsatz verloren. Die Auszahlung (in €) kann durch eine Funktion X beschrieben werden, die auf der Grundmenge $\Omega = \{0{,}1\}$ definiert ist. Die 1 steht für Gewinn und 0 für Verlust, d.h. $X(1) = 2$ und $X(0) = 0$. Das kann in der folgenden Formel zusammengefasst werden: Für $\omega \in \{0{,}1\}$ ist $X(\omega) = 2 \cdot \omega$. In analoger Weise kann auch der Gewinn bzw. Verlust (in €) durch eine Funktion der Ergebnisse beschrieben werden: $Y(\omega) \coloneqq X(\omega) - 1$. Da wir es mit einem Glücksspiel zu tun haben ist das Eintreten der Ergebnisse 0 und 1 zufällig und damit sind auch die Auszahlung X und natürlich auch der Gewinn/Verlust Y zufällig.
- Bei einer Warenkontrolle wird eine Stichprobe $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ vom Umfang m erhoben. Eine Qualitätsprüfung der Ware ergibt, dass k Objekte defekt sind. Das Ergebnis kann dann in der Form $X(\omega_1, \ldots, \omega_m) = k$ (kurz: $X = k$) geschrieben werden, wobei X die (zufällige) Anzahl defekter Teile bezeichnet.

Die Beispiele zeigen, wie numerische Resultate eines Zufallsexperiments in kompakter Form durch Funktionen X, Y, $\ldots$ darstellt dargestellt werden können. Solche Funktionen nennt man Zufallsvariablen.

5.2 DEFINITION

Ist P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Grundmenge Ω und $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so wird X als **Zufallsvariable** bezeichnet.

Der in der Stochastik benutzte Begriff *Zufallsvariable* bezeichnet keine Variable sondern eine *reellwertige Funktion*! Ihr Definitionsbereich ist eine Grundmenge mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Werte hängen von den *Ergebnissen* ab.

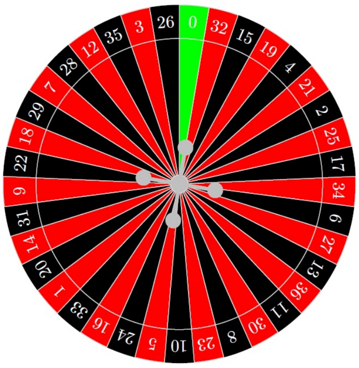
5.3 BEISPIEL

- Im Modell des einfachen Münzwurfs sei $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ die Grundmenge. Die Abbildung $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X(\text{Zahl}) = 0$, $X(\text{Kopf}) = 1$ ist dann eine Zufallsvariable, die einer Kodierung der Ergebnisse durch eine Zahl entspricht.

Wird *Kopf* als „Treffer" interpretiert, so wird das entsprechende Ereignis auch mit $\{X = 1\}$ bezeichnet. Dies ist eine abkürzende Schreibweise für

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = 1\} = \{\text{Kopf}\}.$$

- Das Roulettespiel basiert auf einem Glücksrad mit 37 gleichgroßen mit $0, \ldots, 36$ nummerierten Feldern, wobei der Null die Farbe grün zugeordnet ist. Von den übrigen 36 Feldern sind jeweils 18 rot bzw. schwarz.



Ein Spieler, der auf rot setzt, erhält den doppelten Einsatz ausgezahlt, wenn die Kugel auf ein rotes Feld fällt; ansonsten verliert er den Einsatz. Die durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 10, & \text{wenn die Kugel auf ein rotes Feld fällt,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Zufallsvariable X beschreibt den ausgezahlten Betrag (in €) für einen Roulettespieler, der 5 € auf rot gesetzt hat. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \{X = 0\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ist kein rotes Feld}\}, \\ \{X = 10\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 10\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ist ein rotes Feld}\}. \end{aligned}$$

- Beim zweifachen Münzwurf mit

$$\Omega = \{(\text{Kopf}, \text{Kopf}), (\text{Kopf}, \text{Zahl}), (\text{Zahl}, \text{Kopf}), (\text{Zahl}, \text{Zahl})\}$$

kann die Zufallsvariable X als *Anzahl der Treffer (Kopf)* definiert werden. Dies ergibt dann die Werte
$X(\text{Kopf}, \text{Kopf}) = 2,\;\; X(\text{Kopf}, \text{Zahl}) = X(\text{Zahl}, \text{Kopf}) = 1,\;\; X(\text{Zahl}, \text{Zahl}) = 0.$
Die Zufallsvariable X gibt also an, wie oft beim zweifachen Münzwurf „Kopf" geworfen wurde.

- Beim zweifachen Würfelwurf wird für ein Ergebnis $(i, j) \in \Omega$ mit

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

die Augensumme der zwei Würfe durch $X(i, j) = i + j$ beschrieben. Das Ereignis $\{X = k\}$ entspricht daher einer Augensumme von k, $k = 2, \ldots, 12$:

$$\begin{aligned} \{X = 2\} &= \{(i, j) \in \Omega \,|\, X(i, j) = 2\} = \{(1{,}1)\}, \\ \{X = 3\} &= \{(i, j) \in \Omega \,|\, X(i, j) = 3\} = \{(1{,}2), (2{,}1)\}, \\ \{X = 4\} &= \{(i, j) \in \Omega \,|\, X(i, j) = 4\} = \{(1{,}3), (3{,}1), (2{,}2)\}, \\ \{X = 5\} &= \{(i, j) \in \Omega \,|\, X(i, j) = 5\} = \{(1{,}4), (4{,}1), (2{,}3), (3{,}2)\}, \;\ldots \end{aligned}$$

5.4 BEISPIEL

Beschreibt Ω den n-fachen Münzwurf mit Ausgang $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_i \in \{0,1\}$ für $1 \leq i \leq n$, so gibt die Funktion X mit

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

die Anzahl der Einsen im Vektor ω an. Steht eine Eins in ω jeweils für ein Ergebnis „Kopf", so gibt X an, wie oft in n Würfen „Kopf" geworfen wurde.

Eine Zufallsvariable X in einem diskreten stochastischen Modell besitzt eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Werten von X.

5.5 BEISPIEL

Das zweifache Drehen eines Glücksrad mit den Feldern $0, 1$ und der Wahrscheinlichkeit p für 1, wird durch die Ergebnismenge

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

und die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\{(i,j)\}) = \begin{cases} (1-p)^2, & i = j = 0, \\ p(1-p), & (i,j) \in \{(0,1), (1,0)\}, \\ p^2, & i = j = 1 \end{cases}$$

modelliert (s. Beispiel 3.7). Die Zufallsvariable X (=*Anzahl Treffer*) hat dann auf der Menge $\{0, 1, 2\}$ die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(\{X = 0\}) &= P(\{(0,0)\}) = (1-p)^2, \\ P(\{X = 1\}) &= P(\{(0,1), (1,0)\}) = P(\{(0,1)\}) + P(\{(1,0)\}) \\ &= 2p(1-p), \\ P(\{X = 2\}) &= P(\{(1,1)\}) = p^2. \end{aligned}$$

Die obigen Beispiele motivieren den Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen.

5.6 DEFINITION (WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG EINER ZUFALLSVARIABLEN)

Sind P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Grundmenge Ω und X eine Zufallsvariable auf Ω mit Werten in einer (endlichen) Menge $T \subseteq \mathbb{R}$, so wird die **Wahrscheinlichkeitsverteilung von X** definiert durch

$$P(\{X = t\}) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = t\}), \quad t \in T.$$

Statt $P(\{X = t\})$ wird kurz $P(X = t)$ geschrieben.

Für eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ergibt sich eine Bildmenge $T = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$, die ebenfalls endlich viele Elemente hat. Im Sinne der Definition diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen muss gezeigt werden, dass die Zahlen $P(X = t)$, $t \in \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$, nicht-negativ sind und ihre Summe gleich Eins ist. Dies ist allgemein richtig und wird am folgenden Beispiel illustriert.

5.7 BEISPIEL

Beim zweifachen Würfelwurf wird die Verteilung der Augensumme der beiden Würfel betrachtet. Bezeichnet X die Augensumme, so ergibt sich mit Beispiel 5.3 :

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P(\{(1,1)\}) = \tfrac{1}{36}, \\
P(X=3) &= P(\{(1,2),(2,1)\}) = \tfrac{2}{36}, \\
P(X=4) &= P(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}) = \tfrac{3}{36}, \\
P(X=5) &= P(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}) = \tfrac{4}{36}, \\
P(X=6) &= \tfrac{5}{36}, \qquad P(X=7) = \tfrac{6}{36}, \qquad P(X=8) = \tfrac{5}{36}, \\
P(X=9) &= \tfrac{4}{36}, \qquad P(X=10) = \tfrac{3}{36}, \\
P(X=11) &= \tfrac{2}{36}, \qquad P(X=12) = \tfrac{1}{36}.
\end{aligned}$$

5.8 BEISPIEL

Bei der (unabhängigen) n-fachen Wiederholung eines Bernoulli-Experiments mit Trefferwahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ für jeden Wurf und Grundmenge

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n\}$$

ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt durch

$$P(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k},$$

wobei k die Anzahl der Einsen im Vektor ω angibt.

Ist nur die jeweilige Anzahl von Einsen von Interesse (Anzahl der „Treffer”), beschrieben durch die Zufallsvariable X, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert $k \in \{0, \ldots, n\}$ hat, gegeben durch

$$P(X=k) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

denn es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, bei n Versuchen k Treffer zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist die Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$.

Entsprechend zur Notation $P(X=k)$ werden auch Notationen der Art $P(X \le t)$ oder $P(X > t)$ verwendet. In diesem Fall wird über die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten summiert. Ist etwa X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{1, \ldots, 10\}$, so gilt z.B.

$$\begin{aligned}
P(X \le 3) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3), \\
P(X > 8) &= P(X=9) + P(X=10), \\
P(X < 3) &= P(X=1) + P(X=2).
\end{aligned}$$

Ferner gilt die Rechenregel:

5.9 REGEL

Für eine Zufallsvariable X auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in T gilt für ein $t \in T$

1. $P(X \le t) = P(X < t) + P(X = t)$,
2. $P(X > t) = 1 - P(X \le t)$.

5.2 Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Der Erwartungswert wurde im 17. Jahrhundert eingeführt als „Wert eines Spiels”. Das ist die durchschnittliche Gewinnerwartung bei Glücksspielen zwischen zwei (oder mehr) Spielern, wenn das Spiel *oft wiederholt* wird. Insbesondere sollte damit entschieden werden, ob ein Glücksspiel „fair” ist, d.h. ob die Gewinnerwartung gleich dem Einsatz ist, oder ob eine Seite im Vorteil ist.
Spieler A bietet Spieler B folgendes sehr einfache Spiel an: Für einen Einsatz von 2 € kannst du einmal eine Münze werfen. Bei *Kopf* bekommst du 3 €, bei *Zahl* 1 €. Bei einer fairen Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Kopf und Zahl beide $\frac{1}{2}$ und die Gewinnerwartung ist gleich dem Einsatz:

$$\text{erwarteter Gewinn} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2€.$$

Dieses Spiel is fair, mit einer gezinkten Münze ist es nicht fair.

5.10 BEISPIEL

In der Situation des Roulettespiels in Beispiel 5.3 mit Einsatz 5 € hat die Auszahlung X des Spielers die Werte 0 und 10 €. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist gegeben durch

$$P(X=0) = P(\text{„Zahl ist nicht rot”}) = \tfrac{19}{37},$$
$$P(X=10) = P(\text{„Zahl ist rot”}) = \tfrac{18}{37}.$$

Der „Wert des Spiels”, d.h. der erwartete Gewinn, würde demnach $0 \cdot \frac{19}{37} + 10 \cdot \frac{18}{37} \approx 4{,}86$ € betragen.

Dieser Wert kann so interpretiert werden, dass der Spieler bei häufiger Spielwiederholung im Mittel für einen Einsatz von 5 € eine Auszahlung von $4{,}86$ € erwarten kann. Der Spieler würde demnach also pro Spiel einen Verlust von etwa 14 Ct. machen.

Das Spiel wäre fair, wenn der Spielwert dem Einsatz entspricht. In diesem Fall müsste die Auszahlung a bei einem Gewinn die Gleichung

$$a \cdot \frac{18}{37} = 5 \Longleftrightarrow a = \frac{185}{18} \approx 10{,}28$$

erfüllen. Bei einem Einsatz von 5 € müssten im Gewinnfall daher $10{,}28$ € ausgezahlt werden.

Bemerkung zur Fairness

Entsprechend der obigen Motivation wird der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wie folgt eingeführt.

5.11 DEFINITION (ERWARTUNGSWERT EINER ZUFALLSVARIABLEN)

Seien P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Grundmenge Ω und X eine Zufallsvariable mit Werten in T. Dann heißt

$$E(X) = \sum_{x \in T} x \cdot P(X=x)$$

Erwartungswert von X (unter P).

5.12 BEISPIEL

Die Zufallsvariable X beschreibe die mit einem Würfel geworfene Augenzahl, d.h. $P(X=k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, die Augenzahl k zu würfeln.

1. Ist der Würfel fair, d.h. $P(X=k)=\frac{1}{6}$, $k\in\{1,\ldots,6\}$, so ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^{6} k\cdot P(X=k)=1\cdot\tfrac{1}{6}+2\cdot\tfrac{1}{6}+3\cdot\tfrac{1}{6}+4\cdot\tfrac{1}{6}+5\cdot\tfrac{1}{6}+6\cdot\tfrac{1}{6}\\ &=\tfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\tfrac{21}{6}=\tfrac{7}{2}=3{,}5.\end{aligned}$$

2. Ist der Würfel gezinkt wie in Beispiel 3.12, d.h. $P(X=k)=\frac{1}{10}$, $k\in\{1,\ldots,5\}$, und $P(X=6)=\frac{1}{2}$, so ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^{6} k\cdot P(X=k)=1\cdot\tfrac{1}{10}+2\cdot\tfrac{1}{10}+3\cdot\tfrac{1}{10}+4\cdot\tfrac{1}{10}+5\cdot\tfrac{1}{10}+6\cdot\tfrac{1}{2}\\ &=\tfrac{1}{10}(1+2+3+4+5)+3=\tfrac{15}{10}+3=4{,}5.\end{aligned}$$

   Der Erwartungswert der Augenzahl ist damit um Eins größer als beim fairen Würfel.

Der Erwartungswert ist eine reelle Zahl, die nicht zu den Werten zu gehören braucht, die die Zufallsvariable X annehmen kann. In diesem Beispiel ist die Augenzahl ganzzahlig, ihr Erwartungswert aber i.A. nicht.

5.13 BEISPIEL

Bei einem Glücksrad mit 10 gleichgroßen Feldern tragen 5 Felder eine 0, je zwei Felder eine 1 bzw. 2 und ein Feld eine 5. Diese Zahlen entsprechen der Auszahlung in €, wenn das Glücksrad auf diesem Feld stehen bleibt. Wie hoch muss der Einsatz v sein, damit das Spiel fair ist, d.h. die erwartete Auszahlung ist gleich dem Einsatz?
Bezeichnet X die Auszahlung, so muss $E(X)=v$ gelten. Nun gilt zunächst:

$$\begin{aligned}&P(X=0)=\tfrac{5}{10}=\tfrac{1}{2}, \qquad P(X=1)=P(X=2)=\tfrac{2}{10}=\tfrac{1}{5},\\ &P(X=5)=\tfrac{1}{10},\end{aligned}$$

so dass $E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{10}=\frac{11}{10}=1{,}1.$
Das Spiel ist daher fair bei einem Einsatz $v=1{,}1$ €, d.h. es müssen $1{,}10$ € eingesetzt werden.

Für spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind allgemeine Ausdrücke für die Erwartungswerte bekannt. Als wichtiges Beispiel wird dieses Resultat für die Binomialverteilung angegeben.

5.14 REGEL (ERWARTUNGSWERT EINER BINOMIALVERTEILUNG)

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit Parametern $n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$ gilt

$$E(X)=np.$$

5.15 BEMERKUNG

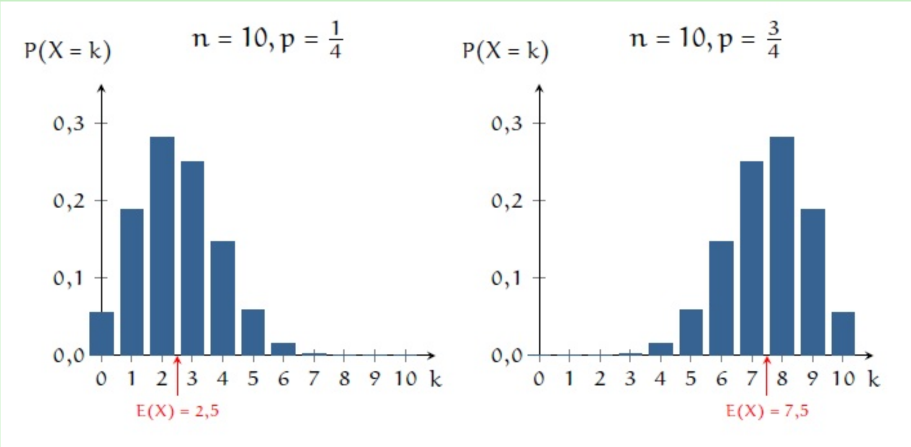
Nachweis für n=1 und n=2

5.16 BEISPIEL

Beschreibt X die Anzahl von „Kopf” beim n-fachen Münzwurf mit einer fairen Münze, so ist X binomialverteilt mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$. Aus Regel 5.14 folgt dann, dass bei n Würfen $E(X) = \frac{n}{2}$ mal Kopf erwartet wird, d.h. man kann damit rechnen, dass in etwa der Hälfte der Würfe Kopf fällt (bei 100 Würfen also in etwa 50 Fällen). Hat die Münze eine Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}6$ für „Kopf”, so besagt Regel 5.14, dass nun in etwa 60% der Würfe „Kopf” auftritt (bei 100 Würfen also in etwa 60 Fällen).

5.17 BEMERKUNG

Der Erwartungswert beschreibt das „Zentrum” einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zur Illustration betrachten wir das Säulendiagramm der Wahrscheinlichkeiten von binomialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $n = 10$ und $p = \frac{1}{4}$ bzw. $p = \frac{3}{4}$, deren Erwartungswert $2{,}5$ bzw. $7{,}5$ ist. Der jeweilige Wert des Erwartungswerts deutet an, wo der „Schwerpunkt” der Wahrscheinlichkeiten liegt.



5.18 REGEL (EIGENSCHAFTEN DES ERWARTUNGSWERTS)

Für eine Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

5.19 BEISPIEL

Mittels eines fairen Würfels werden folgende Glücksspiele durchgeführt:

- Variante I: Mit einem Einsatz von 4 € erhält ein Spieler die gewürfelte Augenzahl als Auszahlung. Der Gewinn des Spielers ergibt sich daher als $Y = X - 4$ (in €), wobei ein negativer Gewinn einem Verlust entspricht. Der erwartete Gewinn ist dann mit Regel 5.18

$$E(Y) = E(X-4) = E(X) - 4 = 3{,}5 - 4 = -0{,}5\,[€],$$

wobei $E(X) = 3{,}5$ in Beispiel 5.12 bestimmt wurde. Der Spieler muss daher (auf lange Sicht) mit einem Verlust von etwa 50 Ct. je Spiel rechnen.

- Variante II: Mit einem Einsatz von 7 € erhält ein Spieler das doppelte der gewürfelten Augenzahl als Auszahlung. Der Gewinn des Spielers ergibt sich daher als $Y = 2X - 7$ (in €), wobei ein negativer Gewinn einem Verlust entspricht. Der erwartete Gewinn ist dann mit Regel 5.18

$$E(Y) = E(2X-7) = 2 \cdot E(X) - 7 = 0\,[€],$$

wobei $E(X) = 3{,}5$ in Beispiel 5.12 bestimmt wurde. Dieses Spiel ist daher fair.

5.20 BEISPIEL

Beschreibt X_n die Anzahl der Einsen bei der n-maligen Hintereinanderausführung eines Bernoulli-Experiments, so ist $Y_n = \frac{1}{n} \cdot X_n$ der Anteil der Einsen in diesen n Versuchsdurchführungen. Mit den Regeln 5.18 und 5.14 ergibt sich dann

$$E(Y_n) = E\Big(\frac{1}{n} \cdot X_n\Big) = \frac{1}{n} \cdot E(X_n) = \frac{1}{n} \cdot np = p,$$

d.h. der erwartete Anteil von Einsen ist die Trefferwahrscheinlichkeit p im Einzelversuch.

5.3 Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen

Mit dem Erwartungswert einer Zufallsvariablen X steht eine Größe zur Verfügung, die den „Schwerpunkt" (das Zentrum) einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt. Allerdings wird bei der Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit identischem Erwartungswert schnell klar, dass diese Größe die Situation oft nur unzureichend wiedergibt. Zur Illustration werden drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet, die alle den Erwartungswert $3{,}5$ besitzen und als Modell für einen einfachen Würfelwurf mit einem fairen bzw. gezinkten Würfel aufgefasst werden können.

5.21 BEISPIEL

Die Wahrscheinlichkeiten der Würfel sind in folgenden Tabellen zusammengestellt und in den Säulendiagrammen visualisiert.

Würfel 1

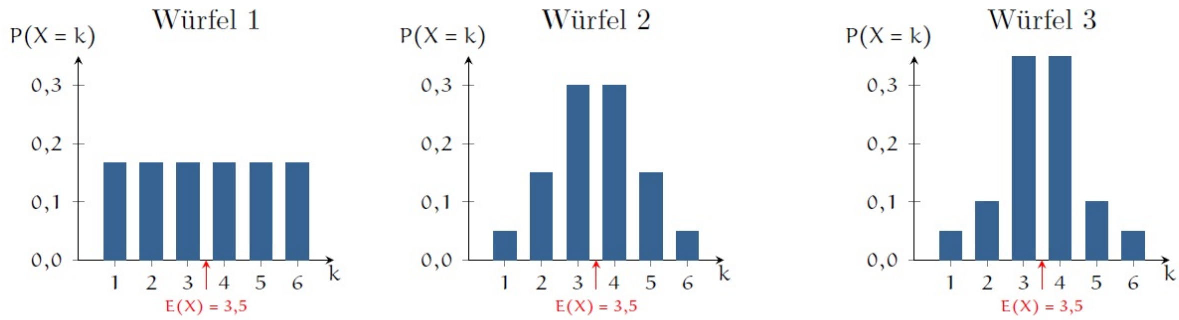
k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Würfel 2

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Würfel 3

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$



Die Säulendiagramme zeigen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei Würfel 2 bzw. 3 stärker in der Mitte, d.h. um den Erwartungswert, konzentrieren als bei Würfel 1. Bei mehrfacher Wiederholung des Zufallsexperiments ist zu erwarten, dass die Ergebnisse der Würfe mit Würfel 1 stärker von $3{,}5$ nach unten bzw. oben abweichen als etwa bei Würfel 3.

Eine Größe um diesen Streuungseffekt zu messen ist die Varianz, sie ist die „erwartete quadratische Abweichung" vom Erwartungswert: Für ein Ergebnis k des Zufallsexperiments ist $(k - E(X))$ der Abstand vom Erwartungswert $E(X)$. Dann ist $(k - E(X))^2$ die *quadratische Abweichung*, die bei Abweichungen sowohl nach oben als auch unten immer positiv ist. Da sie vom Ausgang des Zufallsexperiments abhängt, ist sie eine Zufallsvariable. Der Erwartungswert dieser neuen Zufallsvariablen ist die Varianz.

5.22 DEFINITION (VARIANZ, STANDARDABWEICHUNG)

Seien P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Grundmenge Ω und X eine Zufallsvariable auf Ω mit Werten in $T \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt

$$Var(X) = \sum_{x \in T} (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$$

Varianz (Streuung) von X. Ihre Wurzel $S(X) = \sqrt{Var(X)}$ bezeichnet man als **Standardabweichung**.

5.23 BEISPIEL

Im Beispiel 5.13 gilt wegen $E(X) = 1{,}1$:

$$Var(X) = (0 - 1{,}1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - 1{,}1)^2 \cdot \frac{1}{5} + (2 - 1{,}1)^2 \cdot \frac{1}{5} + (5 - 1{,}1)^2 \cdot \frac{1}{10} = 2{,}29$$

Die Standardabweichung beträgt $S(X) \approx 1.51$.

5.24 BEMERKUNG

1. Wenn die Zufallsvariable X eine Größe wie eine Länge beschreibt, z.B. in cm gemessen, dann gilt dasselbe für ihren Erwartungswert $E(X)$ und die Differenz $(k - E(X))$. Die quadratische Abweichung $(k - E(X))^2$ und ihr Erwartungswert $Var(X)$ beschreiben dann eine Fläche (gemessen in cm^2). Deshalb ist die Varianz ungeeignet zum direkten Vergleich mit dem Erwartungswert $E(X)$. Aber die *Standardabweichung* $S(X)$. die in 5.22 als Quadratwurzel der Varianz definiert wurde, ist eine Länge und damit vergleichbar mit $E(X)$ (beide in cm gemessen).

2. Die Ergebnisse von Zufallsexperimenten streuen weniger um den Erwartungswert, wenn die Varianz und damit die Standardabweichung kleiner ist. Je niedriger der Wert der Varianz/Standardabweichung ist, desto besser repräsentiert der Erwartungswert den Ausgang des Zufallsexperiments. Siehe das folgende Beispiel.

5.25 BEISPIEL

Für die in Beispiel 5.21 vorgestellten Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Würfel 1

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Würfel 2

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Würfel 3

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

ergibt sich jeweils der Erwartungswert $E(X) = \frac{7}{2} = 3{,}5$ (nachrechnen!). Für die Varianz bzw. Standardabweichung berechnet man:

1. Würfel 1:

$$\begin{aligned} Var(X) &= (1-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (2-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (3-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} \\ &\quad + (4-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (5-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (6-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} \\ &= \tfrac{35}{12} \\ S(X) &= \sqrt{\tfrac{35}{12}} \approx 1{,}708 \end{aligned}$$

2. Würfel 2:

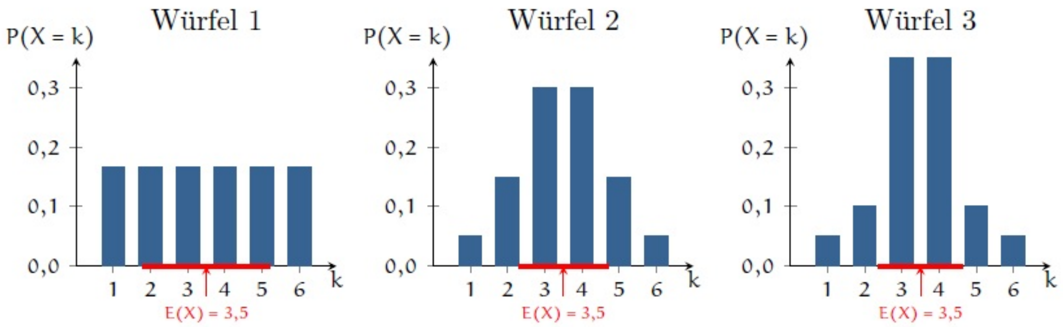
$$\begin{aligned} Var(X) &= (1-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{20} + (2-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{3}{20} + (3-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{6}{20} \\ &\quad + (4-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{6}{20} + (5-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{3}{20} + (6-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{20} \\ &= \tfrac{29}{20} \\ S(X) &= \sqrt{\tfrac{29}{20}} \approx 1{,}204 \end{aligned}$$

3. Würfel 3:

$$\begin{aligned} Var(X) &= (1-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{20} + (2-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{2}{20} + (3-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{7}{20} \\ &\quad + (4-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{7}{20} + (5-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{2}{20} + (6-\tfrac{7}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{20} \\ &= \tfrac{5}{4} \\ S(X) &= \sqrt{\tfrac{5}{4}} \approx 1{,}118 \end{aligned}$$

Die Werte von Varianz und Standardabweichung geben daher die in Beispiel 5.21 beobachtete unterschiedliche Streuung um den Erwartungswert wieder. Die Ergebnisse von Würfel 3 „streuen” weniger um den Erwartungswert als die von Würfel 1 (oder Würfel 2).

Diese Beobachtungen werden in der folgenden Grafik illustriert, in der das Intervall $[E(X) - S(X), E(X) + S(X)]$ jeweils als roter Balken in das Diagramm integriert wurde.



Die folgenden Eigenschaften der Varianz können mit Hilfe der Definition und der Eigenschaften des Erwartungswerts gezeigt werden.

5.26 REGEL (VARIANZ DER BINOMIALVERTEILUNG)

Die Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariable X mit Parametern $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$ ist gegeben durch $Var(X) = np(1-p)$.

5.27 REGEL (EIGENSCHAFTEN DER VARIANZ)

Für eine Zufallsvariable X gilt: $Var(a+bX) = b^2 Var X \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}$.

Andere Formel für die Berechnung der Varianz

5.28 BEISPIEL
Anzeigen

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Ein homogener Tetraeder, dessen vier Seiten mit den Ziffern $1, 2, 3, 4$ beschriftet sind, wird zweimal geworfen. Beschreiben Sie die Augensumme durch eine Zufallsvariable Y und ermitteln Sie ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Antwort

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeiten:

$P(Y = 2) = \frac{1}{16}$

$P(Y = 3) = \frac{1}{8}$

$P(Y = 4) = \frac{3}{16}$

$P(Y = 5) = \frac{1}{4}$

$P(Y = 6) = \frac{3}{16}$

$P(Y = 7) = \frac{1}{8}$

$P(Y = 8) = \frac{1}{16}$

Lösung

Die Grundmenge ist gegeben durch $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1,2,3,4\}\}$ mit $|\Omega| = 4^2 = 16$.
Die Augensumme Y kann beschrieben werden durch die Zufallsvariable
$Y : \Omega \to \mathbb{R}, (i, j) \to i + j.$
Dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(Y = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{16}$$

$$P(Y = 3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$
$$P(Y = 4) = P(\{(2,2), (1,3), (3,1)\}) = \frac{3}{16}$$
$$P(Y = 5) = P(\{(3,2), (2,3), (4,1), (1,4)\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$
$$P(Y = 6) = P(\{(3,3), (4,2), (2,4)\}) = \frac{3}{16}$$
$$P(Y = 7) = P(\{(4,3), (3,4)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$
$$P(Y = 8) = P(\{(4,4)\}) = \frac{1}{16}$$

ÜBUNG 2

Sei X binomialverteilt mit Parametern $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(X \leq 1)$

b) $P(X > 1)$

c) $P(2 \leq X < 4)$

Antwort

a) $P(X \leq 1) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$

b) $P(X > 1) = \frac{13}{16} = 0{,}8125$

c) $P(2 \leq X < 4) = \frac{5}{8} = 0{,}625$

Lösung a)

Ist X binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$, so gilt:

$$P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{k}\frac{1}{32}, \quad k \in \{0, \ldots, 5\}.$$

Dann folgt:

$P(X = 0) = \binom{5}{0}\frac{1}{32} = \frac{1}{32}$ und $P(X = 1) = \binom{5}{1}\frac{1}{32} = \frac{5}{32}$.

Damit erhält man:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$.

Lösung b)

Mit der Komplementärregel (vgl. Rechenregeln) gilt:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} = 0{,}8125.$$

Lösung c)

Ist X binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$, so gilt:

$$P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{k}\frac{1}{32}\,, \quad k \in \{0,\ldots,5\}\,.$$

Dann folgt mit $P(X = 2) = \binom{5}{2}\frac{1}{32} = \frac{10}{32}$ und $P(X = 3) = \binom{5}{3}\frac{1}{32} = \frac{10}{32}$:

$$P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0{,}625\,.$$

ÜBUNG 3

Ein Glücksrad mit 11 gleichgroßen Feldern (nummeriert mit $1,...,11$) wird einmal gedreht, wobei die Zufallsvariable X die Nummer des erzielten Feldes angibt. Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Antwort

a) $E(X) = 6$

b) $Var(X) = 10$

Lösung a)

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X mit Werten in T ist gegeben durch
$E(X) = \sum_{x\in T} x \cdot P(X = x)$.
Beim Glücksrad ist $T = \{1,...,11\}$, und für alle $x \in T$ gilt $P(X = x) = \frac{1}{11}$.

Daraus folgt der Erwartungswert:
$E(X) = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11) \cdot \frac{1}{11} = \frac{66}{11} = 6$.
Bemerkung:

Wer die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ kennt, erhält direkt:
$E(X) = \sum_{x=1}^{11} x \cdot \frac{1}{11} = \frac{11\cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{11} = 6$.

Lösung b)

Die Varianz ist:
$Var(X) = \sum_{x=1}^{11} (x-6)^2 \cdot \frac{1}{11}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Var(X) &= (5^2+4^2+3^2+2^2+1+0+1+2^2+3^2+4^2+5^2)\frac{1}{11} \\ &= \frac{110}{11} = 10\,. \end{aligned}$$

ÜBUNG 4

Bei einem gezinkten Tetraederwürfel haben die vier Flächen die Augenzahlen 0, 2, 4 und 6.
Für die Zufallsvariable $X =$ Augenzahl gilt $P(X = k) = \frac{k+2}{20}$.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

Antwort

a) $E(X) = 4$,

b) Die Standardabweichung von X ist 2.

Lösung a)

Vorbemerkung: Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten bilden eine zulässige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, denn:

$P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{6}{20} + \frac{8}{20} = 1$.

Der Erwartungswert ist:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{20} + 2 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{6}{20} + 6 \cdot \frac{8}{20} = \frac{8+24+48}{20} = \frac{80}{20} = 4 \ .$$

Lösung b)

Um die Standardabweichung zu berechnen, muss zunächst die Varianz bestimmt werden.

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-4)^2 \cdot \frac{2}{20} + (2-4)^2 \cdot \frac{4}{20} + (4-4)^2 \cdot \frac{6}{20} + (6-4)^2 \cdot \frac{8}{20} \\ &= \frac{32+16+0+32}{20} = 4 \end{aligned}$$

Die Standardabweichung von X ist $\sqrt{Var(X)} = 2$.