ÜBERBLICK: MENGEN UND ZAHLEN

Inhalt

Abschnitt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (2MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie hier direkt zur Schlussprüfung gelangen.

ZUSAMMENFASSUNG

Thema dieses Kapitels sind die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen und wie damit gerechnet wird. Das Hauptaugenmerk liegt auf den Vorzeichen- und Klammerregeln, dem Umgang mit Brüchen und der Anordnung von Zahlen auf dem Zahlenstrahl. Außerdem werden Sie an die binomischen Formeln erinnert.

Die komplexen Zahlen sind nicht Gegenstand dieses Kurses. Sie werden in der Regel im ersten Studienjahr eingeführt.

Die untenstehende Tabelle gibt einen Überblick über die verschiedenen Zahlenbereiche. Darin wird unter anderem die Frage beantwortet, welche Rechnungen in einem Zahlenbereich ausgeführt werden können und welche Probleme machen.

Zahlenbereich	**Menge**	**Eigenschaften**	**Problem**
$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen	$\{1;\ 2;\ 3;\ldots\}$	Ergebnis bei $+$ und $\cdot$ ist wieder eine natürliche Zahl.	Ergebnis bei $-$ ist nicht immer eine natürliche Zahl.
$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen	$\{\ldots;-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ldots\}$	Ergebnis bei $+$,$-$ und $\cdot$ ist wieder eine ganze Zahl.	Ergebnis bei $:$ ist nicht immer eine ganze Zahl.
$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen	$\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}$	Ergebnis bei $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ ist wieder eine rationale Zahl.	„Lücken” in der Zahlengeraden, z.B. fehlt eine rationalen Zahl, deren Quadrat 2 ist.
$\mathbb{R}$ reelle Zahlen	ganze Zahlengerade, die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}\approx 1{,}41;\ \pi\approx 3{,}14$ sind z.B. reell.	Ergebnis bei $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ ist wieder eine reelle Zahl.	Die Gleichung $x^2=-1$ hat keine reelle Lösung.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

1. MENGEN, ZAHLEN UND GRUNDRECHENARTEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Definition und die Schreibweise von Mengen. Sie verstehen die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und ihre grundlegenden Eigenschaften.
- Sie beherrschen die Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$.

1.1 Mengen und die natürlichen Zahlen

Die einfachsten Zahlen sind die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$, die zum Zählen benutzt werden. Man nennt diese Zahlen *natürliche Zahlen* und bezeichnet die Menge aller dieser Zahlen mit dem Symbol $\mathbb{N}$. *Mengen* sind ein sehr nützliches Hilfsmittel, um mathematische Aussagen kurz, präzise und übersichtlich aufzuschreiben.

1.1 DEFINITION (MENGE)

Eine *Menge* ist die Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte in einer Menge nennt man *Elemente*. Ist x ein Element der Menge M, so schreibt man

$$x \in M$$

(sprich: „x ist Element von M" oder „x liegt in M"); andernfalls schreibt man

$$x \notin M$$

(sprich: „x ist kein Element von M" oder „x liegt nicht in M").

Die einfachste Form, eine Menge zu beschreiben, ist die aufzählende Mengenschreibweise, bei der die Elemente der Menge zwischen geschweifte Klammern gesetzt werden, z.B. ist

$$B = \{a; b; c\}$$

die Menge, die die Buchstaben a, b, c und sonst nichts enthält. Offensichtlich gilt $a \in B$ und $d \notin B$.

Ist die Zahl der Elemente einer Menge zu groß, um alle aufzuführen (oder das Aufführen aller Elemente zu umständlich), kann man manchmal Elemente durch Punkte ersetzen, wenn leicht zu erraten ist, welche Elemente weggelassen wurden. Für die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 2 und 16, also von 3 bis 15 einschließlich, welche man eigentlich durch

$$\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

angeben müsste, kann man kürzer auch

$$\{3; 4; 5; \ldots; 15\}$$

schreiben, da der Anfang $3, 4, 5$ die richtige Fortsetzung suggeriert.

1.2 DEFINITION (NATÜRLICHE ZAHLEN)

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist/

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Nimmt man die Null hinzu, wird das durch einen Index Null an dem Buchstaben $\mathbb{N}$ bezeichnet:

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Oft wird auch die Menge $\mathbb{N}_0$ als „Menge der natürlichen Zahlen" bezeichnet.

In vielen Fällen ist die Anzahl der Elemente aber zu groß und zu unübersichtlich, um sie (mit oder ohne Pünktchen) aufzuzählen. In diesem Fall werden die Elemente der Menge über die Eigenschaften charakterisiert, die hinter einem senkrechten Trennstrich angegeben werden.

1.3 BEISPIEL

Die Menge aller natürlichen Zahlen, die zwischen 2 und 16 liegen (vgl. oben), kann man auch schreiben als

$$\{3; 4; \ldots; 15\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ liegt zwischen } 2 \text{ und } 16\}.$$

Hier wird vor dem Trennstrich noch eine schon bekannte Menge (in diesem Fall $\mathbb{N}$) angegeben, in der die Elemente mit der angegebenen Eigenschaft zusätzlich liegen sollen. (Z.B. liegt die Zahl $3{,}5$ auch zwischen 2 und 16, sie gehört aber nicht zur Menge. Sie wird durch „$x \in \mathbb{N}$" ausgeschlossen.)

Bei Mengen spielt es keine Rolle, wie oft ein Element aufgezählt wird. Sie werden insbesondere nicht größer, wenn ihre Elemente mehrfach aufgezählt werden. Z.B. ist $\{1; 1; 2; 2; 2; 2\} = \{1; 2\}$. Auch auf die Reihenfolge der Elemente kommt es nicht an:
$\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\} = \{2; 1; 3; 1; 2; 3\} = \ldots$

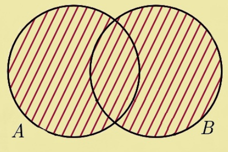
Es erweist sich als zweckmäßig, eine Menge zur Verfügung zu haben, die keine Elemente besitzt. Diese heißt die *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Aus gegebenen Mengen können neue konstruiert werden. Beipiele dafür sind die *Vereinigung* und der *Durchschnitt* von Mengen. Sie spielen bei der Bestimmung der Lösungsmengen von Ungleichungen eine nützliche Rolle.

1.4 DEFINITION (VEREINIGUNG UND DURCHSCHNITT VON ZWEI MENGEN)

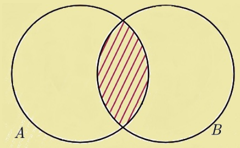
Wir betrachten zwei Mengen A und B und definieren die *Vereinigung* $A \cup B$ von A und B als die Menge, die alle Elemente von A und alle von B enthält:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$



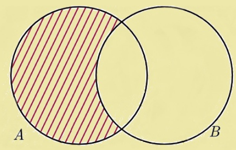
Der *Durchschnitt* $A \cap B$ von A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$



Die *Differenz* $A \setminus B$ von A und B (oder auch die *Differenz* A *ohne* B genannt) ist die Menge der Elemente in A, die nicht in B liegen:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$



In obiger Definition ist bei $x \in A$ oder $x \in B$ kein „entweder oder”, sondern ein „logisches Oder” gemeint: x ist in A oder in B oder in beiden Mengen (gleichzeitig) enthalten. Ebenso ist $x \in A$ und $x \in B$ als „logisches Und” gemeint: x ist sowohl in A als auch in B enthalten.

1.5 BEISPIEL

Wir betrachten die zwei Mengen

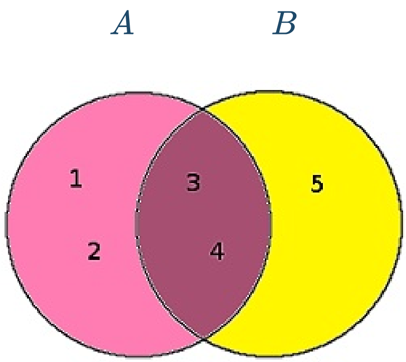
$$A = \{1;2;3;4\} \quad \text{und} \quad B = \{3;4;5\}.$$

Die Vereinigung von A und B enthält dann alle Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind, also ist

$$A \cup B = \{1;2;3;4;5\}.$$

Der Durchschnitt enthält alle Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind, also ist

$$A \cap B = \{3;4\}.$$



Die Differenz von A und B enthält diejenigen Elemente, die in A enthalten sind, aber nicht in B, also ist

$$A \smallsetminus B = \{1;2\}.$$

1.2 Die ganzen Zahlen

Mit den natürlichen Zahlen kann man wie gewohnt rechnen und erhält bei diesen Rechnungen in vielen Fällen wieder natürliche Zahlen als Ergebnisse. Zum Beispiel ist $2+3=5$ oder $4 \cdot 23 = 92$, aber schon die einfache Rechnung

$$1 - 2 = -1$$

ergibt keine natürliche sondern eine *ganze* Zahl.

Für jede natürliche Zahl $1, 2, \ldots$ lässt sich eine *Gegenzahl* konstruieren, sodass die Summe aus Zahl und Gegenzahl gerade Null ergibt. Sie wird durch Hinzufügen eines negativen Vorzeichens mit $-1, -2, \ldots$ bezeichnet. Damit wird die Menge der natürlichen Zahlen so vergrößert, dass damit auch Gleichungen wie $3 + x = 0$ gelöst werden können.

1.6 BEISPIEL

$$1 + (-1) = 0, \qquad -3 + 3 = 0, \qquad 15 + (-15) = 0, \qquad \dots$$

Wählen Sie alle richtigen Aussagen aus:
[online-only]

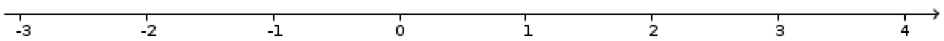
Fügt man nun die Gegenzahlen und die Null zur Menge der natürlichen Zahlen hinzu, so entsteht die Menge der *ganzen Zahlen*.

1.7 DEFINITION (GANZE ZAHLEN)

Die *Menge der ganzen Zahlen* ist die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}.$$

Die ganzen Zahlen kann man sich als Punkte auf der sogenannten *Zahlengeraden* veranschaulichen. Von der Null als Referenzpunkt liegen dann in immer gleichen Abständen nach rechts die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw., und in immer gleichen Abständen nach links die zugehörigen Gegenzahlen -1, -2, -3 usw.



Um mit ganzen, insbesondere negativen Zahlen rechnen zu können, muss noch geklärt werden, was nun ein Ausdruck wie $-(-a)$ bedeutet. Nach unserem bisherigen Verständnis ist diese Zahl gerade die Gegenzahl zu $-a$, also diejenige, die bei Addition zu $-a$ Null ergibt. Diese Eigenschaft hat aber schon die Zahl a. Es gilt also:

$$-(-a) = a.$$

Für die Gegenzahlen wird die Multiplikation und Division auf die Multiplikation und Division natürlicher Zahlen zurückgeführt:

1.8 REGEL (VORZEICHENREGEL)

Für beliebige ganze Zahlen a und b gilt:

$$(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)\,.$$

Man kann die letzten Klammern auch weglassen und schreibt $-a\cdot b$. Außerdem ist

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b\,.$$

Entsprechend gelten für die Division

$$(-a):b = a:(-b) = -(a:b) = -a:b\,,$$

$$(-a):(-b) = a:b\,.$$

Da die Division natürlicher oder ganzer Zahlen meist nicht ohne Rest möglich ist, werden wir auf die Menge der rationalen Zahlen geführt.

1.3 Die rationalen Zahlen

Addiert oder multipliziert man zwei ganze Zahlen oder subtrahiert man eine ganze Zahl von einer anderen, erhält man stets wieder eine ganze Zahl. Wenn man jedoch eine ganze Zahl durch eine andere teilt (dividiert), ist das Ergebnis im Allgemeinen keine ganze Zahl mehr, sondern man erhält Hälften, Drittel, Zehntel oder ähnliches.

Diese Zahlen können wiederum als Punkte auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Als Beispiel betrachten wir die Zahl „Drei durch Fünf" (auch „Dreifünftel" genannt). Dazu wird die Strecke, die von Null nach Drei geht, in fünf Teile gleicher Länge geteilt. Das erste Teilstück geht von der Zahl Null zur Zahl Dreifünftel auf der Zahlengeraden. Sie wird als Bruch $\frac{3}{5}$ geschrieben. (Der Bruch $\frac{3}{5}$ oder $3/5$ und $3:5$ sind verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl „Drei dividiert durch Fünf".)

Alternativ kann man auch alle Abschnitte zwischen den ganzen Zahlen in jeweils fünf gleiche Teile teilen. Dann ist das Stück von einem Teilungspunkt zum nächsten immer ein Fünftel, und die Zahl $\frac{3}{5}$ liegt also rechts von der Null beim dritten Teilungspunkt.

Entsprechend erhält man die Zahlen $\frac{7}{5}$ und $-\frac{2}{5}$ (links von Null) auf der Zahlengeraden.

Die Zahlen, die als Ergebnis einer Division ganzer Zahlen entstehen können, heißen *rationale Zahlen*. Die Menge aller rationaler Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Da eine Division durch Null nicht erlaubt ist, ist insbesondere klar, dass die Zahl unter dem Bruchstrich, also der Nenner, von Null verschieden sein muss.

1.9 DEFINITION (RATIONALE ZAHLEN)

Für die Menge der rationalen Zahlen schreibt man

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Hierbei nennt man p den **Zähler** des Bruchs und q den **Nenner** des Bruchs.

Anmerkung zur Definition

In Definition 1.9 werden alle rationalen Zahlen mehrfach (sogar unendlich oft) aufgezählt, da zum Beispiel $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ gilt. Da aber mehrfach aufgezählte Elemente eine Menge nicht vergrößern (siehe obige Bemerkung), stellt diese Definition dennoch kein Problem dar.

Mit der Regel 1.8 kann man aus Brüchen mit negativen Nennern leicht Brüche mit positiven Nennern machen, weshalb man jede rationale Zahl als Bruch $\frac{p}{q}$ mit einer natürlichen Zahl q schreiben kann.

1.10 BEISPIEL

Es sind

$$\frac{12}{-57} = -\frac{12}{57} = \frac{-12}{57}$$

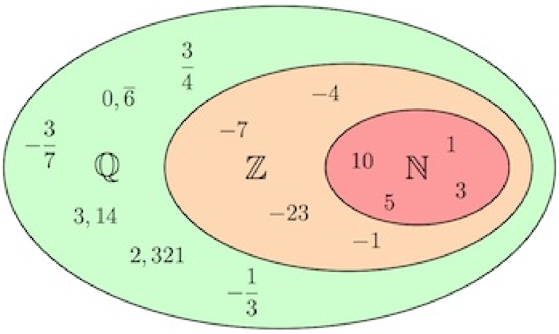
und

$$\frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}.$$

Da

$$-3 = \frac{-3}{1}, \qquad 0 = \frac{0}{1}, \qquad 5 = \frac{5}{1}, \qquad \text{etc.}$$

gilt, gehören auch die ganzen und damit auch die natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen.



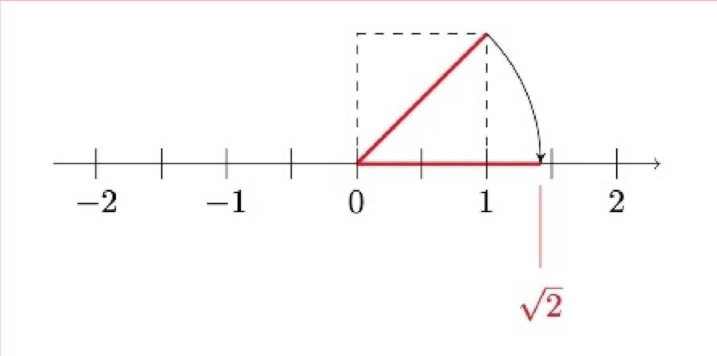
Rationale Zahlen können durch Brüche (vgl. Abschnitt IA.4 Bruchrechnung) sowie durch abbrechende oder periodische Dezimalzahlen dargestellt werden.

1.4 Die reellen Zahlen

Alle natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen können auf einer Zahlengeraden dargestellt werden. Jedoch füllen sie die Zahlengerade nicht völlig aus; zum Beispiel:

1.11 SATZ

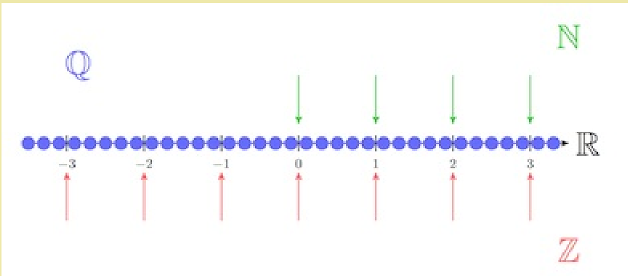
Konstruiert man über dem Einheitsintervall der Zahlengerade von 0 bis 1 ein Quadrat und schlägt um 0 einen Kreis, der durch die rechte obere Ecke des Quadrates geht, so schneidet dieser die Zahlengerade in keinem rationalen Punkt! (vgl. Abschnitt IB.2.1 Die Quadratwurzel)



Diese Zahl, die man mit $\sqrt{2}$ (sprich: „Wurzel aus 2") bezeichnet, ist also keine rationale Zahl, sie liegt aber dennoch auf der Zahlengeraden. Zahlen auf der Zahlengeraden, die nicht als rationale Zahlen dargestellt werden können, nennt man *irrationale Zahlen*. Tatsächlich sind die meisten Wurzeln wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oder $\sqrt{7}$ irrationale Zahlen, aber auch andere Zahlen wie die Kreiszahl $\pi = 3{,}14\ldots$ oder die Eulersche Zahl $e = 2{,}71\ldots$

1.12 DEFINITION

Nimmt man die irrationalen Zahlen zu den rationalen hinzu - nimmt man also alle Zahlen der Zahlengeraden - so erhält man die *reellen Zahlen*.



Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Reelle Zahlen können auch durch Dezimalzahlen dargestellt werden (vgl. Abschnitt IA.2.4 Dezimalzahlen).

1.5 Die Grundrechenarten

Der Erfolg im Umgang mit mathematischen Ausdrücken hängt letztlich entscheidend von der sicheren Beherrschung der vier Grundrechenarten ab. Diese sind die *Addition* $+$, die *Subtraktion* $-$, die *Multiplikation* $\cdot$ und die *Division* $:$.

1.13 DEFINITION (GRUNDRECHENARTEN)

1. *Addition*: $5 + 8 = 13$; die Zahlen 5 und 8 heißen *Summanden* und die Zahl 13 heißt *Summe*.
2. *Subtraktion*: $\frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$; die Zahl $\frac{6}{3}$ nennt man *Minuend* und die Zahl $\frac{4}{3}$ *Subtrahend*.

   Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist die *Differenz*.
3. *Multiplikation*: $1{,}5 \cdot 6 = 9$; die Zahlen 1,5 und 6 heißen *Faktoren* und die Zahl 9 heißt *Produkt*.
4. *Division*: $6 : 0{,}5 = 12$; die Zahl 6 nennt man *Dividend* und die Zahl 0,5 *Divisor*. Die Zahl 12 heißt *Quotient*.

Wie man rationale Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, wird in Abschnitt IA.4 Bruchrechnung erklärt.

1.14 BEMERKUNG

Grundsätzlich dürfen zwei Rechensymbole nicht direkt hintereinander stehen. Statt $5 + -3$ schreibt man daher $5 + (-3)$, was dasselbe wie $5 - 3$ ist.
Statt $5 - -3$ schreibt man daher $5 - (-3)$, was dasselbe wie $5 + 3$ ist.
„Vier multipliziert mit minus Zwei" muss mit Klammern als $4 \cdot (-2)$ geschrieben werden, und ebenso „Vier geteilt durch minus Zwei" als $4 : (-2)$.

Häufig wird man Ausdrücken begegnen, die zwei oder mehr Rechenoperationen enthalten, wie etwa

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot (3 + 2),$$

weshalb geklärt werden muss, in welcher Reihenfolge die Rechnungen durchzuführen sind.

1.15 VERFAHREN

Wenn ein Ausdruck mehrere Rechenoperationen enthält, so ist bei der Berechnung folgende Reihenfolge einzuhalten:

1. Ausdrücke in Klammern berechnen (die innersten Klammern zuerst).
2. Multiplikationen und Divisionen von links nach rechts.
3. Additionen und Subtraktionen von links nach rechts.

Man sagt auch:

1.16 REGEL (PUNKT-VOR-STRICH-REGEL)

"*Punktrechnung* (Multiplikation und Division) *geht vor Strichrechnung*" (Addition und Subtraktion).

In obigem Beispiel $2 \cdot 4 + 5 \cdot (3 + 2)$ wird also zunächst der Ausdruck in der Klammer berechnet: $3 + 2 = 5$. Dann werden die Multiplikationen (von links nach rechts) ausgeführt: $2 \cdot 4 = 8$ und $5 \cdot 5 = 25$. Zuletzt wird die Addition $8 + 25$ ausgeführt: $8 + 25 = 33$.

Also:

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot (3 + 2) = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 8 + 25 = 33.$$

1.17 BEISPIEL

richtig	**falsch**
$3 - 2 \cdot 8 = 3 - 16 = -13$	$3 - 2 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8$
$2 - 3 - 4 = -1 - 4 = -5$	$2 - 3 - 4 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$
$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie, welche der folgenden Zahlen natürliche, ganze, rationale oder reelle Zahlen sind. (Geben Sie jeweils alle zutreffenden Bezeichnungen an.)

a) 3 b) -3 c) $-\frac{8}{2}$ d) $\frac{4}{10}$

e) π f) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ g) $(-4)(-3)$

Antwort

a) natürliche , ganze, rationale, reelle Zahl

b) ganze, rationale, reelle Zahl

c) ganze , rationale , reelle Zahl

d) rationale , reelle Zahl

e) reelle Zahl

f) reelle Zahl

g) natürliche, ganze, rationale, reelle Zahl

Lösung a)

3 ist eine natürliche Zahl. Da jede natürliche Zahl eine ganze Zahl und jede ganze Zahl eine rationale Zahl ist, ist 3 auch eine ganze, rationale und reelle Zahl.

Durch die Darstellung $3 = \frac{3}{1}$ erkennt man direkt, dass 3 eine rationale Zahl ist.

Lösung b)

-3 ist eine negative ganze Zahl und daher keine natürliche Zahl. Als ganze Zahl ist -3 auch rational und reell.

Lösung c)

Da $-\frac{8}{2} = -4$ gilt, ist $-\frac{8}{2}$ eine ganze Zahl und damit auch eine rationale und reelle Zahl. Da aber -4 eine negative Zahl ist, ist $-\frac{8}{2}$ keine natürliche Zahl.

Lösung d)

Die Zahl $\frac{4}{10}$ ist ein Bruch und daher eine rationale und reelle Zahl. Da aber 4 nicht durch 10 teilbar ist, ist $\frac{4}{10}$ keine ganze Zahl und auch keine natürliche Zahl.

Lösung e)

Die Zahl π ist irrational, also ist auch die Zahl $-\pi$ irrational und somit keine ganze und auch keine natürliche Zahl.

Lösung f)

$\sqrt{2}$ ist irrational, kann also nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden. Daher ist auch $\frac{\sqrt{2}}{7}$ irrational. Wäre nämlich $\frac{\sqrt{2}}{7}$ rational, so wäre auch $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{7} \cdot 7$ rational als Produkt zweier rationaler Zahlen. Ein Widerspruch!

Lösung g)

$(-4) \cdot (-3) = 12$ ist eine natürliche Zahl, also auch eine ganze und eine rationale und reelle Zahl.

ÜBUNG 2

Gegeben sind die Mengen von ganzen Zahlen

$$M = \{2; 3; -1; 10; -2\} \quad \text{und} \quad K = \{-2; -1; 0; \ldots; 5; 6\}.$$

Bestimmen Sie den Durchschnitt $M \cap K$ und die Vereinigung $M \cup K$, sowie die Menge

$$A = \{x \in K \mid x \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}.$$

Bestimmen Sie weiter die Mengendifferenz $K \setminus A$.

Antwort

Es sind

$$\begin{aligned} M \cap K &= \{2; 3; -1; -2\}, && (1)\\ M \cup K &= \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}, && (2)\\ A &= \{0; 3; 6\} \quad \text{und} && (3)\\ K \setminus A &= \{-2; -1; 1; 2; 4; 5\}. && (4) \end{aligned}$$

Lösung zu $M \cap K$

Der Durchschnitt $M \cap K$ enthält alle Zahlen, die sowohl in M als auch in K enthalten sind.

Von den Zahlen, die in der Menge M liegen, liegt nur die 10 nicht in K, also ist

$$M \cap K = \{2; 3; -1; -2\}.$$

Lösung zu $M \cup K$

Die Vereinigung $M \cup K$ enthält alle Zahlen, die in M oder in K oder sogar in beiden liegen.

M enthält die Zahlen $2, 3, -1, 10$ und -2, und K enthält die Zahlen $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6. Also ist

$$M \cup K = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}.$$

Lösung zu A

Die Menge A enthält alle Zahlen, die in K liegen und die angegebene Eigenschaft haben, also durch 3 teilbar sind.

Da K die Zahlen $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6 enthält, und von diesen nur die Zahlen 0, 3 und 6 durch 3 teilbar sind, gilt somit

$$A = \{0; 3; 6\}.$$

Lösung zu $K \setminus A$

Die Menge $K \setminus A$ besteht aus allen Zahlen von K, die nicht durch 3 teilbar sind.

Definitionsgemäß ist $K \setminus A$ die Menge aller Zahlen, die in K und nicht in A liegen. Also erhalten wir

$$K \setminus A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \setminus \{0; 3; 6\} = \{-2; -1; 1; 2; 4; 5\}.$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung eines Taschenrechners:

a) $2-3+2-1-5$

b) $2{,}1\cdot 3+(-2)\cdot 3+2\cdot(-3{,}5)+5\cdot 6$

c) $4:2+(-6):3+8:(-4)+9:3$

d) $-\frac{32}{8}+(-3{,}2):3{,}2+10\cdot(-\frac{4}{5})+(-9)\cdot 11$

Antwort

a) -5

b) $23{,}3$

c) 1

d) -112

Lösung a)

Der Term enthält ausschließlich Additionen und Subtraktionen. In diesem Fall werten wir die Rechenoperationen im Ausdruck einfach von links nach rechts der Reihe nach aus:

$$2-3+2-1-5=-1+2-1-5=1-1-5=0-5=-5$$

Lösung b)

Der Ausdruck enthält sowohl Additionen als auch Multiplikationen. In diesem Fall werden zunächst die Multiplikationen berechnet (Regel: Punkt vor Strich):

$$2{,}1 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-3{,}5) + 5 \cdot 6 = 6{,}3 + (-6) + (-7) + 30\,.$$

Es verbleiben nur Additionen und Subtraktionen, also werten wir von links nach rechts aus und erhalten

$$6{,}3 - 6 - 7 + 30 = 0{,}3 - 7 + 30 = -6{,}7 + 30 = 23{,}3\,.$$

Damit ist

$$2{,}1 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-3{,}5) + 5 \cdot 6 = 23{,}3\,.$$

Lösung c)

Weil sowohl Additionen als auch Divisionen vorkommen, werden zuerst die Divisionen ausgewertet:

$$4 : 2 + (-6) : 3 + 8 : (-4) + 9 : 3 = 2 + (-2) + (-2) + 3\,.$$

Der verbleibende Term enthält nur noch Additionen und Subtraktionen, also wird das Ergebnis von links nach rechts berechnet:

$$2 + (-2) + (-2) + 3 = 0 + (-2) + 3 = -2 + 3 = 1$$

Lösung d)

Multiplikationen und Divisionen werden zuerst ausgewertet:

$$-\frac{32}{8} + (-3{,}2) : 3{,}2 + 10 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + (-9) \cdot 11 = -\frac{32}{8} + (-1) + (-8) + (-99)\,.$$

Die verbleibenden Additionen und Subtraktionen werden anschließend von links nach rechts berechnet:

$$-4 + (-1) + (-8) + (-99) = -5 + (-8) + (-99) = -13 + (-99) = -112$$

ÜBUNG 4

Welche der folgenden Zahlen sind rational, welche irrational?

a) $0{,}12$

b) $0{,}12121212\ldots$

c) $0{,}121122111222111112222\ldots$

d) $0{,}2221212121212\ldots$

Antwort

a) Die Zahl ist rational.

b) Die Zahl ist rational.

c) Die Zahl ist irrational.

d) Die Zahl ist rational.

Lösung a)

Die Zahl $0{,}12$ lässt sich darstellen als

$$0.12 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = \frac{10+2}{100} = \frac{12}{100}\,.$$

Dies zeigt, dass $0{,}12$ rational ist.

Lösung b)

Die Zahl $0{,}12121212\ldots$ entspricht $0{,}\overline{12}$ und besitzt somit eine periodische Dezimaldarstellung. Folglich ist sie eine rationale Zahl.

Lösung c)

Die Zahl $0{,}121122111222111112222\ldots$, deren Nachkommastellen aus immer längeren Blöcken von Einsen und Zweien bestehen (zuerst je eine 1 und eine 2, dann zwei Ziffern 1 und zwei Ziffern 2 etc.), ist nicht rational, denn sonst müsste die Dezimaldarstellung entweder abbrechen oder periodisch werden, sich also schließlich wiederholen. Diese Zahl ist also irrational.

Lösung d)

Die Zahl $0{,}2221212121212\ldots$ entspricht $0{,}222\overline{12}$. Somit ist sie ab der vierten Nachkommastelle periodisch und daher rational.

2. ANORDNUNG, INTERVALLE UND DEZIMALZAHLEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Vergleichszeichen $>$ (ist größer als) und $<$ (ist kleiner als).
- Sie beherrschen die Regeln zur Kommaverschiebung.
- Sie sind in der Lage, den Näherungswert eines Bruches oder eines Dezimalbruches bis auf eine vorgegebene Zahl von Stellen zu berechnen, d.h. Sie können korrekt runden.
- Sie können mit Dezimalzahlen rechnen.
- Sie können überschlägige Rechnungen anstellen, um die Größenordnung von Ergebnissen abzuschätzen.

2.1 Anordnung der Zahlen

Die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen kann man ihrer *Größe* nach anordnen. Bei den natürlichen Zahlen geht das intuitiv dadurch, dass diese Zahlen Anzahlen von Dingen beschreiben: Eine natürliche Zahl ist größer als die andere, wenn sie eine größere Anzahl beschreibt. Wenn man die Zahlen auf der Zahlengeraden betrachtet, sieht man, dass die größeren natürlichen Zahlen jeweils rechts von den kleineren liegen.
Dies verwendet man dann als Kriterium für alle Zahlen der Zahlengeraden:

2.1 DEFINITION

Eine Zahl a ist *kleiner als* eine Zahl b, wenn a auf der Zahlengeraden weiter links liegt als b.
Eine Zahl a ist *größer als* eine Zahl b, wenn a auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt als b.

Zum Vergleichen von Zahlen verwendet man die Symbole

$>$ (sprich: „ist größer als”), $\geq$ (sprich: „ist größer oder gleich”),

und die Symbole

$<$ (sprich: „ist kleiner als”), $\leq$ (sprich: „ist kleiner oder gleich”)

sowie natürlich das Symbol $=$ (sprich: „ist gleich (groß wie)”). Dabei zeigt die Spitze der Symbole „$>$” und „$<$” immer auf den kleineren Term.

Für zwei reelle Zahlen x und y gilt stets genau eine der drei Beziehungen

$$x > y, \qquad x = y, \qquad x < y.$$

2.2 BEISPIEL

Durch Veranschaulichung auf der Zahlengeraden erkennt man leicht, dass folgende Ungleichungen richtig sind:

$$1 < 2 < 4,$$

$$-7 < -3 < -\frac{5}{2} < -1 \leq 0 < \frac{5}{2}.$$

Bei zwei Brüchen mit demselben positiven Nennern ist der Bruch der kleinere, der den kleineren Zähler hat, z.B.

$$\frac{-5}{3} < \frac{-2}{3} < \frac{4}{3} < \frac{7}{3}$$

Wenn zwei Brüche verschiedene Nenner haben, können sie durch Erweitern in Brüche mit gleichen Nennern überführt werden.

Mehr zu Vergleichszeichen und zum Einfluss von Rechenoperationen auf Vergleichszeichen finden Sie in Kapitel III.1.
[online-only]

2.2 Vorzeichen und Betrag

Jede Zahl (natürlich, ganz, rational oder reell) hat ein *Vorzeichen* und einen *Betrag*. Eine Zahl, die auf dem rechten Abschnitt der Zahlengeraden liegt, hat positives Vorzeichen oder Vorzeichen $+1$. Eine Zahl auf der linken Seite der Zahlengeraden hat negatives Vorzeichen oder Vorzeichen -1. Die Null ist ihre eigene Gegenzahl, $0 = 0 - 0$. Deswegen ist $0 = -0$ und das Vorzeichen kann frei gewählt werden und wird meistens $+1$ gewählt.

Nun kommen wir zum Betrag einer Zahl a, die wir uns wiederum als Punkt auf der Zahlengeraden vorstellen. Der Betrag $|a|$ von a ist der Abstand von a zur Null auf der Zahlengeraden, oder in Formeln ausgedrückt:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Mithilfe der folgenden Applikation können Sie das Verhalten einer Zahl a und ihres Betrags $|a|$ auf der Zahlengeraden beobachten:

[online-only]

2.3 Intervalle

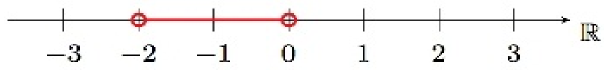
Für spezielle Teilmengen der reellen Zahlen, die *Intervalle*, gibt es noch eine besondere Notation, die im Folgenden erläutert wird. Für die Visualisierung der Intervalle gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die unten angegebene ist nur eine davon.

Das *offene Intervall* von a bis b, wobei $a < b$, ist die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b. Sie wird mit $(a;b)$ bezeichnet:

$$(a;b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}.$$

2.3 BEISPIEL

$$(-2;0) = \{\, x \,|\, -2 < x < 0 \,\}$$



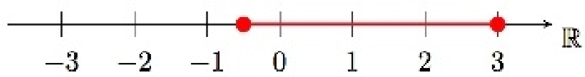
Da Intervalle immer Teilmengen der reellen Zahlen sind, wird anstelle von $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ auch kürzer $\{x \mid a < x < b\}$ etc. geschrieben.

Das *abgeschlossene Intervall* von a bis b ist die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b einschließlich der Randpunkte a und b, also

$$[a;b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b \,\}.$$

2.4 BEISPIEL

$$\left[-\frac{1}{2};3\right] = \left\{\, x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \,\right\}$$



Das Intervall $[a;a] = \{a\}$ ist die einpunktige Menge, die nur aus a besteht.

Außer den offenen und abgeschlossenen Intervallen gibt es auch halboffene Intervalle bei denen genau einer der beiden Randpunkte zur Menge gehört. Genauer gesagt hat man das *rechtsoffene Intervall* von a bis b

$$[a;b) = \{\, x \,|\, a \leq x < b \,\},$$

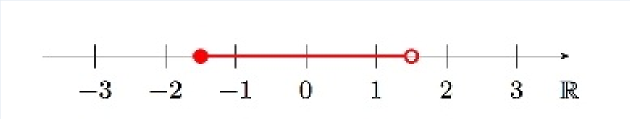
sowie das *linksoffene Intervall* von a bis b

$$(a;b] = \{\, x \,|\, a < x \le b \,\}.$$

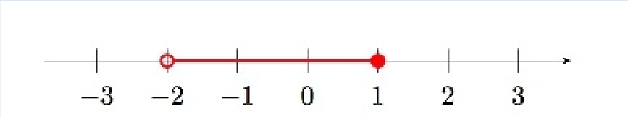
Beispiel

2.5 BEISPIEL

Rechtsoffenes Intervall $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) = \left\{\, x \,\middle|\, -\frac{3}{2} \le x < \frac{3}{2} \,\right\}$



Linksoffenes Intervall $(-2;1] = \{\, x \,|\, -2 < x \le 1 \,\}$



Oft werden auch die Zahlenmengen $\{\, x \,|\, x > a \,\}$, $\{\, x \,|\, x \ge a \,\}$, $\{\, x \,|\, x < a \,\}$ und $\{\, x \,|\, x \le a \,\}$ für feste reelle Zahlen a benötigt. In Anlehnung an die Intervalle werden diese Mengen bezeichnet als

$$\begin{aligned}
\{\, x \,|\, x > a \,\} &= (a;\infty) && (2.1)\\
\{\, x \,|\, x \ge a \,\} &= [a;\infty) && (2.2)\\
\{\, x \,|\, x < a \,\} &= (-\infty;a) && (2.3)\\
\{\, x \,|\, x \le a \,\} &= (-\infty;a] && (2.4)\\
\mathbb{R} &= (-\infty;\infty) && (2.5)
\end{aligned}$$

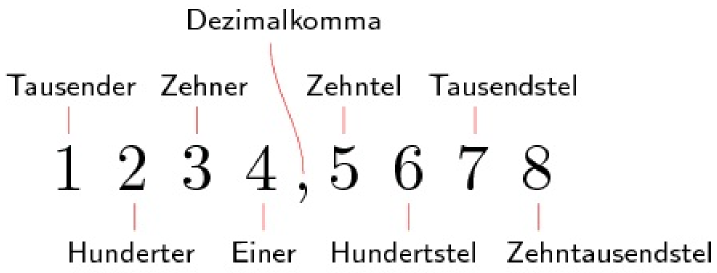
mit oberen „Grenzen” ∞ (sprich: *unendlich*) bzw. unteren „Grenzen” $-\infty$ (sprich: *minus unendlich* oder *negativ unendlich*). Da ∞ und $-\infty$ keine Zahlen sind, steht dort immer eine runde Klammer. Dabei sind ∞ und $-\infty$ nur als Symbole zu verstehen, sie sind keine reellen Zahlen und sind auch nie Ergebnis einer Rechnung (auch nicht bei einer "Division durch Null", denn die Division durch Null ist nicht definiert!).

Anmerkung zu weiteren Notationen

Während die Notation zu abgeschlossenen Intervallen in der Literatur als $[a;b]$ einheitlich ist, gibt es für rechts-, links- bzw. offene Intervalle auch eine weitere Notation, nämlich anstelle der runden Klammer die nach außen geöffnete eckige Klammer, d.h. das rechtsoffene Intervall von a bis b wird auch mit $[a;b[$ bezeichnet, das linksoffene mit $]a;b]$ und das offene Intervall von a bis b mit $]a;b[$.
In diesem Kurs wird aber durchgängig die Notation mit runden Klammern verwendet.

2.4 Dezimalzahlen

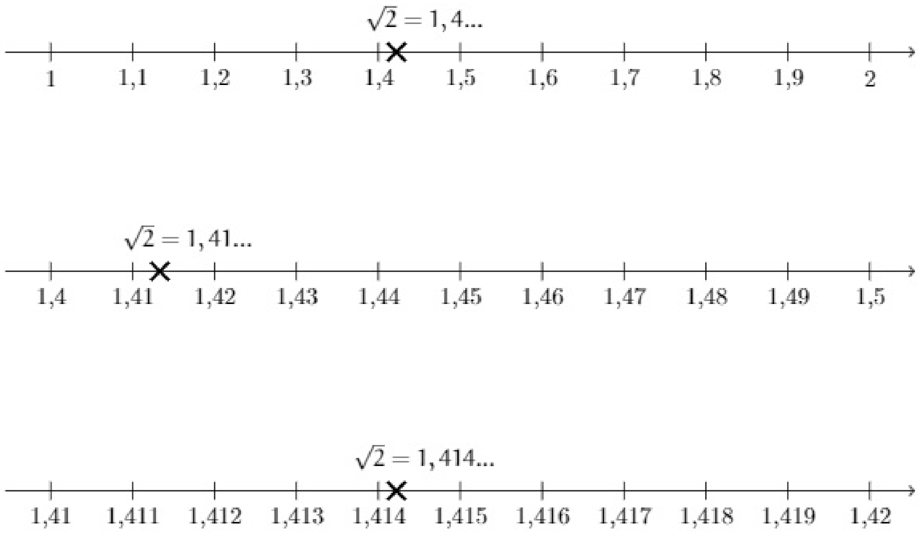
Reelle Zahlen kann man verschieden beschreiben, es gibt aber eine Darstellung, die für alle reellen Zahlen einheitlich ist und mit der man außerdem die Größe der reellen Zahlen gut vergleichen kann, die *Dezimalschreibweise*. Eine reelle Zahl, die in der Dezimalschreibweise dargestellt ist, nennt man *Dezimalzahl*.



In der Abbildung ist eine *abbrechende* Dezimalzahl dargestellt, d.h. sie besitzt nur eine endliche Anzahl an Nachkommastellen (oder auch *Dezimalstellen*). Im Allgemeinen ist die Ziffernfolge nach dem Komma aber unendlich lang.

2.6 BEISPIEL

Um die Dezimaldarstellung zum Beispiel der Zahl $\sqrt{2}$ zu bekommen, muss man sich ihre Lage auf der Zahlengeraden genau anschauen, also den Bild-Ausschnitt vergrößern (siehe Satz 1.11):



Zunächst liegt diese Zahl zwischen den ganzen Zahlen 1 und 2, weshalb die Darstellung mit $1,\ldots$ beginnt.
Vergrößert man den Ausschnitt der Zahlengeraden sieht man, dass $\sqrt{2}$ zwischen $1+\frac{4}{10}=1{,}4$ und $1+\frac{5}{10}=1{,}5$ liegt. Also beginnt die Darstellung mit $1{,}4\ldots$.
Eine weitere Vergrößerung zeigt, dass $\sqrt{2}$ zwischen $1{,}4+\frac{1}{100}=1{,}41$ und $1{,}4+\frac{2}{100}=1{,}42$ liegt. Die Darstellung beginnt daher mit $1{,}41\ldots$.
Eine dritte Vergrößerung des Ausschnitts liefert, dass die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ mit $1{,}414\ldots$ beginnt.
Anstatt auf diese grafische Weise die Nachkommastellen zu bestimmen, werden diese näherungsweise berechnet.

2.7 BEMERKUNG

Anstelle des Kommas wird auch ein „Dezimalpunkt” als Dezimalzeichen verwendet, insbesondere im angelsächsischen Sprachbereich, auf Taschenrechnern und in vielen Computerprogrammen.

Bei den nicht-abbrechenden Dezimalzahlen unterscheidet man noch grob zwei Fälle:

1. Periodische Dezimalzahlen: Bei diesen wiederholt sich ab einer bestimmten Nachkommastelle immer die gleiche Folge von Ziffern, die sogenannte *Periode*.
   Zum Beispiel ist $2{,}2151515\ldots$ eine periodische Dezimalzahl mit Periode 15. Man schreibt diese Dezimalzahl dann auch als $2{,}2\overline{15}$, d.h. man setzt einen Überstrich über die Periode.

2. Nicht-periodische Dezimalzahlen: Bei diesen gibt es keine Periode.

Da jeder Bruch, d.h. jede rationale Zahl, auch eine reelle Zahl ist, besitzt jeder Bruch auch eine Dezimaldarstellung. Umgekehrt stellt sich natürlich die Frage, welche Dezimalzahlen rationale Zahlen sind.

2.8 SATZ

Jede rationale Zahl wird durch eine abbrechende oder periodische Dezimalzahl dargestellt, und jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl wird durch eine rationale Zahl dargestellt. Die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalzahlen entsprechen den irrationalen reellen Zahlen.

Diese Aussage ergibt sich direkt aus den Verfahren, wie man einen Bruch in eine (abbrechende oder periodische) Dezimalzahl umrechnet, und wie man aus einer abbrechenden oder periodischen Dezimalzahl einen Bruch erhält.

Um einen Bruch $\frac{p}{q}$ in eine Dezimalzahl umzuwandeln, berechnet man das Ergebnis der Division $p : q$ mit schriftlicher Division wie in Abschnitt 2.5 erklärt, und erhält eine abbrechende oder periodische Dezimalzahl.

Umrechnung einer abbrechenden Dezimalzahl in einen Bruch

Ist eine abbrechende Dezimalzahl gegeben, so erhält man den zugehörigen Bruch, indem man die Regel zur Kommaverschiebung anwendet: Das Verschieben des Kommas nach rechts ist nichts anderes als mit einer Zehnerpotenz zu multiplizieren. Also muss man die Zahl ohne Komma wieder durch die entsprechende Zehnerpotenz dividieren, um die ursprüngliche Zahl zu bekommen.

2.9 BEISPIEL

$1{,}2 \cdot 10 = 12$, also ist $1{,}2 = 12 : 10 = \frac{12}{10}$.

$32{,}177 \cdot 1000 = 32177$, also ist $32{,}177 = 32177 : 1000 = \frac{32177}{1000}$.

Umrechnung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch

Zur Umrechnung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch kommt auch die Kommaverschiebung zur Anwendung:
Man verschiebt zunächst das Komma um die Länge der Periode nach rechts. Die so entstandene Zahl hat dann ab einer gewissen Nachkommastelle genau die gleichen Nachkommastellen wie die ursprüngliche Zahl, sodass die Differenz aus neuer Zahl und ursprünglicher Zahl eine abbrechende Dezimalzahl ist. Für letztere wurde die Berechnung des zugehörigen Bruchs eben erklärt.
Die genaue Berechnung des Bruchs zur ursprünglichen Dezimalzahl soll anhand des folgenden Beispiels deutlich werden:

2.10 BEISPIEL

Um $2{,}2\overline{15}$ als Bruch darzustellen, wird zunächst das Komma um die Länge der Periode, also um 2 Stellen verschoben, wodurch man die Zahl $221{,}5\overline{15} = 100 \cdot 2{,}2\overline{15}$ erhält. Nun subtrahiert man diese zwei Zahlen:

$$\begin{array}{rr} & 221{,}5\overline{15} \\ - & 2{,}2\overline{15} \\ \hline & 219{,}3 \end{array}$$

Das Ergebnis der Subtraktion ist also $219{,}3 = \frac{2193}{10}$.

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{2193}{10} = 100 \cdot 2{,}2\overline{15} - 1 \cdot 2{,}2\overline{15} = 99 \cdot 2{,}2\overline{15}.$$

Mit den Rechenregeln für Brüche erhält man dann

$$2{,}2\overline{15} = \frac{2193}{10} : 99 = \frac{2193}{10} \cdot \frac{1}{99} = \frac{2193}{990}.$$

2.11 BEISPIEL

Die Zahlen π und $\sqrt{3}$ sind irrational, ihre Darstellung als Dezimalzahl ist nicht periodisch.

$$\pi = 3{,}1415926535897932\ldots \qquad (2.6)$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772\ldots \qquad (2.7)$$

ERGÄNZUNG (ZUR EINDEUTIGKEIT DER DEZIMALDARSTELLUNG)
Anzeigen

2.5 Rechnen mit Dezimalzahlen

Um mit Dezimalzahlen rechnen zu können, ist zunächst wichtig zu wissen, wie sich die Zahl verändert, wenn das Komma verschoben wird.

2.12 REGEL

Kommaverschiebung

Wird eine Dezimalzahl mit $10, 100, 1000, \ldots$ multipliziert, so wird das Komma um die Anzahl der Nullen nach rechts verschoben. Entsprechend wird bei der Division durch $10, 100, 1000, \ldots$, das Komma um die entsprechende Anzahl der Nullen nach links verschoben.

Falls beim Verschieben nach links die Anzahl der Dezimalstellen vor dem Komma nicht ausreicht, müssen der Zahl zunächst noch Nullen vorangestellt werden. Ebenso müssen der Zahl nach den letzten Dezimalstellen noch Nullen angehängt werden, falls die Anzahl der Dezimalstellen nach dem Komma beim Verschieben nach rechts nicht ausreicht.

2.13 BEISPIEL

- $32{,}174 \cdot 100 = 3217{,}4$,
- $143{,}27 : 1000 = 0143{,}27 : 1000 = 0{,}14327$,
- $13{,}1 \cdot 100 = 13{,}10 \cdot 100 = 1310$,
- $2{,}2\overline{15} \cdot 100 = 221{,}5\overline{15}$.

Das schriftliche Addieren und Subtrahieren von Dezimalzahlen funktioniert genauso wie das Addieren und Subtrahieren mit ganzen Zahlen. Die Zahlen müssen natürlich stellenwertrichtig untereinander geschrieben werden, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Zehntel unter Zehntel usw., sowie Komma unter Komma. Dann müssen die stellenwertrichtig untereinander geschriebenen Zahlen mit Übertrag addiert bzw. subtrahiert werden. Das Komma im Ergebnis wird genau unter die anderen Kommas gesetzt:

2.14 BEISPIEL

Wir betrachten die Addition $1{,}34 + 32{,}7$.

$$\begin{array}{r} 1{,}34 \\ 32{,}7 \\ \hline 34{,}04 \end{array}$$

Das Endergebnis lautet $34{,}04$.

Die Multiplikation zweier abbrechender Dezimalzahlen lässt sich auch auf die Multiplikation ganzer Zahlen zurückführen. Hier werden die Kommas in beiden Zahlen einfach ganz nach rechts verschoben, so dass sie praktisch verschwinden, und die neuen Zahlen wie gewohnt multipliziert. Im Ergebnis verschiebt man dann das Komma wieder um so viele Stellen nach links, wie man vorher insgesamt nach rechts geschoben hat.
Haben also zum Beispiel der erste Faktor 3 Nachkommastellen und der zweite 2, so verschiebt man insgesamt um $3 + 2 = 5$ Stellen.

Erklärung

Nach Regel 2.12 zur Kommaverschiebung ist das Verschieben des Kommas nach rechts nichts anderes, als mit einer Zehnerpotenz zu multiplizieren. Haben also zum Beispiel der erste Faktor 3 Nachkommastellen und der zweite 2, so hat man durch Weglassen der Kommas die erste Zahl mit 1000 und die zweite Zahl mit 100 multipliziert. Das Ergebnis, das man ohne Kommas erhält, muss man also anschließend durch $1000 \cdot 100 = 100000$ teilen. Das heißt man muss das Komma um $3 + 2 = 5$ Stellen nach links verschieben.

2.15 BEISPIEL

$$3{,}3 \cdot 1{,}5 = ?$$

Wir lassen die Kommas weg (d.h. verschieben es um 1 Stelle nach rechts). Nun ist

$$33 \cdot 15 = 495.$$

$$\begin{array}{r} 33 \cdot 15 = 495 \\ 330 \\ \underline{\ 165} \\ 495 \end{array}$$

In diesem Ergebnis müssen wir das Komma wieder um $1 + 1 = 2$ Stellen nach links verschieben und erhalten $4{,}95$. Also gilt:

$$3{,}3 \cdot 1{,}5 = 4{,}95.$$

Auch die Division zweier abbrechender Dezimalzahlen lässt sich auf die Division ganzer Zahlen zurückführen. Hier werden die Kommas in beiden Zahlen um die gleiche Anzahl an Stellen nach rechts verschoben, so dass beide verschwinden. Dann werden die neuen Zahlen dividiert. Das Ergebnis der schriftlichen Division ist das gesuchte Resultat.

Erklärung

Nach Regel 2.12 zur Kommaverschiebung ist das Verschieben des Kommas nach rechts nichts anderes als mit einer Zehnerpotenz zu multiplizieren. Verschiebt man beide Kommas gleich weit nach rechts, hat man also sowohl den Dividenden als auch den Divisor mit der gleichen Zahl multipliziert. Das Ergebnis bleibt dann aber dasselbe.

Bei der durchzuführenden schriftlichen Division hört man aber nicht auf, wenn der Rest kleiner als der Divisor ist, sondern man setzt ein Komma und rechnet nach Anhängen von Nullen weiter bis entweder irgendwann der Rest 0 auftaucht, oder ein Rest auftritt, der schon einmal da war. Im ersten Fall erhält man eine abbrechende Dezimalzahl, im zweiten Fall eine periodische Dezimalzahl.
Die genaue Berechnung der Dezimalzahl soll anhand der folgenden Beispiele deutlich werden:

2.16 BEISPIEL

1. Beispiel

Für den Quotienten $25:4$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l} 25:4=6 \\ \underline{24} \\ \ \,1 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 6 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 1) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 25:4=6{,}25 \\ \underline{24} \\ \ \,10 \\ \ \,\underline{\ 8} \\ \ \ \,20 \\ \ \ \,\underline{20} \\ \ \ \ \,0 \end{array}$$

Nun ist der Rest 0 aufgetreten, weshalb die Rechnung fertig ist.
Also ist $25:4=6{,}25$.

2. Beispiel

Für den Quotienten $233 : 11$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l}
233 : 11 = 21 \\
\underline{22} \\
13 \\
\underline{11} \\
2
\end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 21 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 2) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l}
233 : 11 = 21{,}18 \\
\underline{22} \\
13 \\
\underline{11} \\
\mathbf{2}0 \\
\underline{11} \\
90 \\
\underline{88} \\
\mathbf{2}
\end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzten zwei Dezimalstellen weitergehen würde.
Also ist $233 : 11 = 21{,}18181818\ldots = 21,\overline{18}$.

3. Beispiel

Für den Quotienten $41 : 6$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l} 41 : 6 = 6 \\ \underline{36} \\ \ \ 5 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 6 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 5) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 41 : 6 = 6{,}83 \\ \underline{36} \\ \ \ 50 \\ \ \ \underline{48} \\ \ \ \ \ \mathbf{2}0 \\ \ \ \ \ \underline{18} \\ \ \ \ \ \ \ \mathbf{2} \end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzte Dezimalstelle weitergehen würde.
Also ist $41 : 6 = 6{,}8333333\ldots = 6{,}8\overline{3}$.

4. Beispiel

Für den Quotienten $43 : 11$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch::

$$\begin{array}{l} 43 : 11 = 3 \\ \underline{33} \\ 10 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 3 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 10) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 43 : 11 = 3{,}90 \\ \underline{33} \\ \mathbf{10}0 \\ \ \underline{99} \\ \ \ 10 \\ \ \ \underline{\ 0} \\ \ \ \mathbf{10} \end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzten zwei Dezimalstellen weitergehen würde.
Also ist $43 : 11 = 3{,}909090\ldots = 3,\overline{90}$.

2.17 BEISPIEL

$$2{,}48 : 0{,}4 = ?$$

Da die erste Dezimalzahl zwei Nachkommastellen und die zweite Dezimalzahl nur eine Nachkommastelle besitzt, verschiebt man das Komma also jeweils um zwei Stellen:

$$248 : 40 = \frac{248}{40} = \frac{62}{10} = 6{,}2.$$

$$\begin{array}{l} 248 : 40 = 6{,}2 \\ \underline{240} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

Also ist

$$2{,}48 : 0{,}4 = 6{,}2.$$

Beim Berechnen von Ausdrücken mit mehreren Rechenoperationen und Klammern geht man genauso vor, wie im vorigen Abschnitt beschrieben.

2.6 Rundung und Näherungsrechnung

In vielen praktischen Anwendungen der Mathematik, wie etwa beim Überschlagen der Einkaufssumme oder dem Vermessen von Objekten, ist es häufig unpraktisch oder auch unnötig mit langen Dezimalzahlen zu rechnen. Daher werden lange Dezimalzahlen oft auf eine bestimmte Anzahl von Nachkommastellen gerundet, oder bei großen Zahlen auch durch ganze Zehner, Hunderter oder gar Tausender angenähert.

2.18 REGEL

Rundung

Zur Rundung einer reellen Zahl auf eine vorgegebene Anzahl von Nachkommastellen (kurz: Stellen) schneidet man die Dezimalzahl an der vorgegebenen Stelle ab und betrachtet die letzte Ziffer in der abgeschnittenen Dezimalzahl. Sie wird unverändert gelassen, wenn die darauf folgende Ziffer in der ursprünglichen Dezimalzahl eine $0, 1, 2, 3$ oder 4 ist (man spricht von *Abrunden*). Ist diese jedoch eine $5, 6, 7, 8$ oder 9, dann wird die letzte Ziffer in der abgeschnittenen Dezimalzahl um eins erhöht (man spricht von *Aufrunden*).
Das Symbol $\approx$ (sprich: „ungefähr gleich”) zeigt an, dass die Gleichheit nur näherungsweise gilt.

2.19 BEISPIEL

Zum Beispiel ist $2{,}954\,467$ gerundet auf

- vier Stellen: $2{,}954\,467 \approx 2{,}9545$,
- drei Stellen: $2{,}954\,467 \approx 2{,}954$,
- zwei Stellen: $2{,}954\,467 \approx 2{,}95$,
- eine Stelle: $2{,}954\,467 \approx 3{,}0$,

und $\pi = 3{,}141\,592\ldots$ gerundet auf

- vier Stellen: $\pi = 3{,}141\,592\ldots \approx 3{,}1416$,
- drei Stellen: $\pi = 3{,}141\,592\ldots \approx 3{,}142$,
- zwei Stellen: $\pi = 3{,}141\,592\ldots \approx 3{,}14$.

Eine gröbere Form der Näherungsrechnung wird beim überschlägigen Rechnen verwendet. Hierbei geht es darum, schnell die Größenordnung eines Ergebnisses abschätzen zu können. Die Zahlen in der Rechnung werden daher nicht notwendigerweise gerundet, sondern durch Zahlen angenähert, mit denen man gut im Kopf rechnen kann.

2.20 BEISPIEL

1. Beispiel

In welchem Zahlenbereich liegt das Ergebnis von $18 \cdot 25 \cdot 39$?

a) unter 5000

b) zwischen 5000 und 10000

c) zwischen 10000 und 20000

d) zwischen 20000 und 30000

Antwort: Rechnet man näherungsweise mit 20 statt 18 und 40 statt 39, erhält man

$$20 \cdot 25 = 500 \quad \text{und} \quad 500 \cdot 40 = 20000.$$

Also ist $18 \cdot 25 \cdot 39 \approx 20000$. Da die Näherungen jeweils größer als die exakten Zahlen waren, liegt das exakte Ergebnis unter dem Näherungsergebnis von 20000. Also ist c) die richtige Antwort.

2. Beispiel

Peter hat noch 15 Euro im Geldbeutel und will im Supermarkt 6 Liter Wasser für $0{,}39$ Euro pro Liter, 2 Tafeln Schokolade für je $1{,}19$ Euro und eine Tiefkühlpizza für $3{,}69$ Euro kaufen. Reicht sein Geld?

Um diese Frage schnell zu beantworten, schätzt man alle Preise grob nach oben ab zu Werten, mit denen man gut rechnen kann:

- 1 Liter Wasser weniger als 50 ct,
- 1 Schokoladentafel weniger als $1{,}50$ Euro,
- die Tiefkühlpizza weniger als 4 Euro.

Insgesamt muss Peter also weniger bezahlen als

$$6 \cdot 50\text{ct} + 2 \cdot 1{,}50€ + 4€ = (3 + 3 + 4)€ = 10€.$$

Das Geld, das Peter dabei hat, reicht also aus.

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Ordnen Sie die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an.

a) $-5; \quad -2; \quad 0; \quad -100; \quad -50$

b) $-5; \quad 2; \quad -2; \quad 0; \quad 5; \quad 7; \quad -100; \quad 100$

c) $\frac{3}{10}; \quad -20; \quad \frac{-5}{2}; \quad 1; \quad \frac{-15}{-3}$

Antwort

a) $-100; \quad -50; \quad -5; \quad -2; \quad 0$

b) $-100; \quad -5; \quad -2; \quad 0; \quad 2; \quad 5; \quad 7; \quad 100$

c) $-20; \quad \frac{-5}{2}; \quad \frac{3}{10}; \quad 1; \quad \frac{-15}{-3}$

Lösung a)

Es gilt $0 < 2 < 5 < 50 < 100$. Ein Wechsel des Vorzeichens dreht die Reihenfolge der Ordnung um, was ein Blick auf die Zahlengerade verdeutlicht. Deshalb gilt

$$-100 < -50 < -5 < -2 < 0\,.$$

Lösung b)

Es gilt $0 < 2 < 5 < 7 < 100$ und $0 < 2 < 5 < 100$. Der Übergang zu negativen Zahlen dreht die Reihenfolge um: $-100 < -5 < -2 < 0$. Insgesamt gilt damit

$$-100 < -5 < -2 < 0 < 2 < 5 < 7 < 100\,.$$

Lösung c)

Zunächst sind die negativen Zahlen kleiner als die positiven.
Die einzigen negativen Zahlen sind also -20 und $\frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$. Da $\frac{-15}{-3} = \frac{15}{3} = 5$ gilt, ist diese Zahl positiv. Zumal für $\frac{5}{2} < \frac{40}{2} = 20$ gilt, ist $-20 < -\frac{5}{2}$. Bei den positiven Zahlen sieht man schnell $\frac{3}{10} < \frac{10}{10} = 1 < 5 = \frac{-15}{-3}$.
Insgesamt ergibt sich also

$$-20 < \frac{-5}{2} < \frac{3}{10} < 1 < \frac{-15}{-3}$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie zu folgenden Brüchen ihre Dezimaldarstellung:

a) $\frac{17}{20}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{40}{11}$

d) $\frac{5}{18}$

Antwort

a) $0{,}85$

b) $2,\overline{3}$

c) $3,\overline{63}$

d) $0{,}2\overline{7}$

Lösung a)

Wir führen die schriftliche Division durch, bis ein Rest ein zweites Mal auftritt, oder der Rest 0 wird.

$$
\begin{array}{l}
17 : 20 = 0{,}85 \\
\underline{\ 0} \\
170 \\
\underline{160} \\
\ \ 100 \\
\ \ \underline{100} \\
\ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Da der Rest 0 ist, ist somit $\frac{17}{20} = 0{,}85$.

Alternativ kann man hier auch den Bruch mit 5 erweitern:

$$\frac{17}{20} = \frac{5 \cdot 17}{5 \cdot 20} = \frac{85}{100}.$$

Mit der Regel zur Kommaverschiebung ist letzteres gleich $0{,}85$. Also ist $\frac{17}{20} = \frac{85}{100} = 0{,}85$.

Lösung b)

Wir führen die schriftliche Division durch, bis ein Rest ein zweites Mal auftritt, oder der Rest 0 wird.

$$
\begin{array}{l}
7 : 3 = 2{,}3\ldots \\
\underline{6} \\
\mathbf{10} \\
\underline{\ \ 9} \\
\ \ \mathbf{1}
\end{array}
$$

Der letzte Rest 1 ist der gleiche wie der vorherige, weshalb sich die letzte Dezimalziffer immer wiederholt. Also ist $\frac{7}{3} = 2{,}33333\ldots = 2,\overline{3}$.

Lösung c)

Wir führen die schriftliche Division durch, bis ein Rest ein zweites Mal auftritt, oder der Rest 0 wird.

$$
\begin{array}{l}
40 : 11 = 3{,}63\ldots \\
\underline{33} \\
\ \ \mathbf{7}0 \\
\ \ \underline{66} \\
\ \ \ \ 40 \\
\ \ \ \ \underline{33} \\
\ \ \ \ \ \mathbf{7}
\end{array}
$$

Hier ist der letzte Rest 7 gleich dem vorigen Rest, weshalb sich die letzten beiden Ziffern immer wiederholen. Also ist $\frac{40}{11} = 3{,}636363\ldots = 3,\overline{63}$.

Lösung d)

Wir führen die schriftliche Division durch, bis ein Rest ein zweites Mal auftritt, oder der Rest 0 wird.

$$\begin{array}{l} 5 : 18 = 0{,}27\ldots \\ \underline{0} \\ 50 \\ \underline{36} \\ \mathbf{14}0 \\ \underline{126} \\ \ \mathbf{14} \end{array}$$

Der letzte Rest 14 ist gleich dem vorigen Rest, weshalb sich die letzte Dezimalziffer immer wiederholt. Somit ist $\frac{5}{18} = 0{,}277777\ldots = 0{,}2\overline{7}$.

ÜBUNG 3

Ordnen Sie die Ergebnisse A bis F in aufsteigender Reihenfolge, indem Sie sie zunächst näherungsweise berechnen:

$A = 1{,}37 \cdot 2{,}05;$ $B = 235 : 153;$ $C = -7{,}45 \cdot 3{,}1415;$

$D = -7{,}45 + 3{,}1;$ $E = 22{,}357 - 3{,}312;$ $F = \frac{43}{7}$

Antwort

$$C < D < B < A < F < E.$$

Lösung

Zunächst sollen die Ergebnisse näherungsweise berechnet werden:

- $A = 1{,}37 \cdot 2{,}05 \approx 1{,}4 \cdot 2 = 2{,}8$
- $B = 235 : 153 \approx \frac{240}{150} = \frac{8}{5} = 1{,}6$
- $C = -7{,}45 \cdot 3{,}1 \approx -7 \cdot 3 = -21$
- $D = -7{,}45 + 3{,}1 = -4{,}35$
- $E = 22{,}357 - 3{,}312 \approx 22 - 4 = 18$
- $F = \frac{43}{7} \approx \frac{42}{7} = 6$

Nimmt man an, dass die Näherungen nicht allzu schlecht sind, erhält man wegen

$$-21 < -4{,}35 < 1{,}6 < 2{,}8 < 6 < 18$$

die Anordnung

$$C \; < \quad D \; < \; B \; < \; A < F < \; E.$$

Aber:

Um ganz sicher zu gehen, dass die Anordnung richtig ist, müsste man die Werte jeweils nach oben und nach unten abschätzen (oder doch die Werte exakt berechnen), z.B.

- $A = 1{,}37 \cdot 2{,}05 > 1 \cdot 2 = 2$ und $A = 1{,}37 \cdot 2{,}05 < 2 \cdot 2{,}5 = 5$
- $B = 235 : 153 > 0$ und $B = 235 : 153 < \frac{240}{150} = \frac{8}{5} = 1{,}6$
- $C = -7{,}45 \cdot 3{,}1 < -7 \cdot 3 = -21$
- $D = -7{,}45 + 3{,}1 = -4{,}35$
- $E = 22{,}357 - 3{,}312 > 22 - 4 = 18$
- $F = \frac{43}{7} > \frac{42}{7} = 6$ und $F = \frac{43}{7} < \frac{49}{7} = 7$

Damit erhält man

$$\mathbf{C} < -21 < -4{,}35 = \mathbf{D} < 0 < \mathbf{B} < 1{,}6 < 2 < \mathbf{A} < 5 < 6 < \mathbf{F} < 7 < 18 < \mathbf{E}.$$

ÜBUNG 4

Berechnen Sie folgende Terme ohne die Verwendung eines Taschenrechners:

a) $19{,}23 + 352{,}4 + 4807{,}721$

b) $3{,}3 - 2{,}3 \cdot 0{,}11$

c) $4{,}41 : 2{,}1 + 6 : 0{,}3 + (-7) \cdot 0{,}3$

Runden Sie das Ergebnis anschließend zu einer ganzen Zahl.

Antwort

a) $5179{,}351 \approx 5179$

b) $3{,}047 \approx 3$

c) 20

Lösung a)

Das schriftliche Addieren von Dezimalzahlen funktioniert genauso wie das Addieren mit natürlichen Zahlen. Die Zahlen müssen natürlich stellenwertrichtig untereinander geschrieben werden, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Zehntel unter Zehntel usw., sowie Komma unter Komma. Letztlich müssen die stellenwertrichtig untereinander geschriebenen Zahlen addiert werden. Das Komma im Ergebnis wird genau unter die anderen Kommas gesetzt:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & & 1 & 9 & .2 & 3 & \\ + & & 3 & 5 & 2 & .4 & & \\ + & 4 & 8 & 0 & 7 & .7 & 2 & 1 \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 9 & .3 & 5 & 1 \end{array}$$

Das Endergebnis lautet $5179{,}351$. Um dieses Ergebnis zu einer ganzen Zahl zu runden, müssen wir die erste Nachkommastelle betrachten. In diesem Fall lautet das gerundete Ergebnis also 5179.

Lösung b)

Nach der Regel Punkt-Vor-Strich wird zuerst die Multiplikation berechnet, wobei die Regel für die Multiplikation von Dezimalzahlen angewendet wird: Kommas ganz nach rechts, also um 1 bzw. 2 Stellen, verschieben, die ganzen Zahlen multiplizieren, und im Ergebnis das Komma wieder um $1+2=3$ Stellen nach links verschieben.

Wegen $23 \cdot 11 = 253$ ist also $2{,}3 \cdot 0{,}11 = 0{,}253$.

Anschließend wird die Subtraktion wie in Teil a) durchgeführt:

$$\begin{array}{r} 3{,}3\,0\,0 \\ -\;\; 0{,}2\,5\,3 \\ \hline 3{,}0\,4\,7 \end{array}$$

Insgesamt erhält man also

$$3{,}3 - 2{,}3 \cdot 0{,}11 = 3{,}047 \approx 3.$$

Lösung c)

Wieder werden die Divisionen und die Multiplikationen vor den Additionen ausgewertet.

Für die Berechnung der Division werden in Dividend und Divisor die Kommas gleich weit nach rechts verschoben, sodass beide Kommas verschwinden. Dadurch ändert sich das Ergebnis nicht. Also $4{,}41 : 2{,}1 = 441 : 210$ und $6 : 0{,}3 = 60 : 3$.

Schriftliche Division von 441 durch 210 ergibt:

$$\begin{array}{l} 441 : 210 = 2{,}1 \\ \underline{420} \\ \ \mathbf{21}0 \\ \ \underline{210} \\ \quad 0 \end{array}$$

60 ist sogar durch 3 teilbar und ergibt $60 : 3 = 20$.

Für die Multiplikation $(-7) \cdot 0{,}3$ wird das Komma in $0{,}3$ um eine Stelle nach rechts verschoben, dann -7 mit $10 \cdot 0{,}3 = 3$ multipliziert und im Ergebnis ($(-7) \cdot 3 = -21$) das Komma wieder um eine Stelle nach links verschoben. Also ist $(-7) \cdot 0{,}3 = -2{,}1$.

Anschließend bleibt die Addition $2{,}1 + 20 + (-2{,}1)$ zu berechnen, und man erhält:

$$2{,}1 + 20 + (-2{,}1) = 22{,}1 - 2{,}1 = 20.$$

In diesem Fall ist das exakte Ergebnis bereits eine ganze Zahl. Wir brauchen also nicht mehr zu runden.

3. RECHENREGELN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie beherrschen den Umgang mit Klammern.
- Sie können Terme ausmultiplizieren und ausklammern.
- Sie kennen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz.
- Sie können Terme zielgerichtet umformen.
- Sie sind in der Lage, algebraische Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln zu faktorisieren.
- Sie können algebraische Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln ausmultiplizieren.

3.1 Grundlegende Regeln der Algebra

Die *Algebra* ist ein Teilgebiet der Mathematik. In Fokus stehen **Terme** und die Regeln, wie damit gerechnet wird. Terme sind Ausdrücke die Zahlen, Variablen, Klammern und verschiedene Rechenoperationen enthalten können. Die Regeln gelten also insbesondere auch für Zahlen.

Zusätzlich zu den Grundrechenarten führen wir die folgenden abkürzenden Schreibweisen (sog. *Potenzen*) ein, sie werden in Abschnitt IB.1 Potenzgesetze ausführlich behandelt.

3.1 DEFINITION (POTENZEN MIT NATÜRLICHEN ZAHLEN ALS EXPONENTEN)

Ist a eine beliebige reelle Zahl oder eine Variable und n eine natürliche Zahl, so wird a^n definiert durch das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Insbesondere ist

$$a^1 = a.$$

Die wichtigsten Regeln, die man zur Berechnung von Ausdrücken wie $2 \cdot 4 + 5 \cdot (3+2)$ benötigt, wurden schon in Abschnitt IA.1 erklärt:

- Klammern zuerst (von innen nach außen),
- Punkt vor Strich,
- von links nach rechts.

In einem Term, in dem auch Potenzen vorkommen, gilt dann die zusätzliche Regel, dass Potenzen noch vor Multiplikation und Division auszuführen sind, jedoch nach Klammern.

Diese Regeln gelten genauso, wenn die Ausdrücke nicht nur Zahlen, sondern auch Variablen enthalten.

3.2 BEISPIEL

richtig	**falsch**
$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$	$2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$
$3 + 2^3 = 3 + 8 = 11$	$3 + 2^3 = 5^3 = 125$
$(1+3)^2 = 4^2 = 16$	$(1+3)^2 = 1 + 9 = 10$

3.3 BEMERKUNG

Bei Potenzen wird die höchstgestellte Potenz zuerst berechnet, es ist also $10^{3^2} = 10^{(3^2)} = 10^9 = 1000000000$ (und nicht $(10^3)^2 = 1000^2 = 1000000$).

[online-only]

3.2 Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz

Insbesondere bei Termen, in denen Variablen vorkommen, ist es wichtig, dass man Regeln hat, mit denen man die Terme, ohne etwas „rechnen” zu müssen, so umformen kann, dass man einfachere oder übersichtlichere Terme bekommt. Die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für die Addition und Multiplikation sind solche Regeln.

3.4 DEFINITION

Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle a und b aus M gilt:

$$a * b = b * a.$$

3.5 SATZ (KOMMUTATIVGESETZ)

Die Addition und die Multiplikation reeller Zahlen sind kommutativ, d.h. für alle reellen Zahlen a und b gelten

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

3.6 BEISPIEL

- $2{,}1 + 12 = 14{,}1$ und $12 + 2{,}1 = 14{,}1$,
- $(-\frac{1}{2}) \cdot 4 = -2$ und $4 \cdot (-\frac{1}{2}) = -2$.

Subtraktion und Division dagegen sind nicht kommutativ, denn

$$2 - 3 = -1 \neq 1 = 3 - 2$$

und

$$2 : 10 = \frac{2}{10} = 0{,}2 \neq 5 = \frac{10}{2} = 10 : 2.$$

3.7 DEFINITION

Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle a, b und c aus M gilt:

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

3.8 BEMERKUNG

Terme und Gleichungen können Parameter oder Variablen enthalten, für die Buchstaben wie a,b,c oder x verwendet werden. Variablen sind Platzhalter für Zahlen, die an deren Stelle eingesetzt werden.

3.9 SATZ (ASSOZIATIVGESETZ)

Die Addition und Multiplikation reeller Zahlen sind assoziativ, d.h. für alle reellen Zahlen a, b und c gelten

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Multipliziert oder addiert man also mehrere Zahlen hintereinander, so spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Operation ausgeführt wird; bei Division oder Subtraktion schon. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-5) = -5 &= 2 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot (-5)) \\ &= (2 \cdot \tfrac{1}{2}) \cdot (-5) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 3{,}5 + 4{,}5 + 5 = 13 &= (3{,}5 + 4{,}5) + 5 \\ &= 3{,}5 + (4{,}5 + 5)\,, \end{aligned}$$

aber

$$(24:4):2=6:2=3\neq 12=24:2=24:(4:2)$$

und

$$(2-4)-6=-2-6=-8\neq 4=2-(-2)=2-(4-6).$$

3.10 REGEL

- Aufgrund des Assoziativ- und des Kommutativgesetzes für die Addition darf man in Summen mit mehreren Summanden alle Klammern weglassen, die Summanden beliebig vertauschen und die Summation in beliebiger Reihenfolge ausführen, z.B. gilt
$2+2\cdot x+1+x=2+1+2\cdot x+x=(2+1)+(2\cdot x+x)=3+3x.$
- Wegen $a-b=a+(-b)$ ist das beliebige Vertauschen auch in Differenzen erlaubt, solange man die Vorzeichen immer „mitnimmt", z.B. gilt
$2+2x-3-x=2-3+2x-x=(2-3)+(2x-x)=-1+x.$
- Aufgrund des Assoziativ- und des Kommutativgesetzes für die Multiplikation darf man in Produkten mit mehreren Faktoren die Klammern weglassen, die Faktoren beliebig vertauschen und die Mulitplikation in beliebiger Reihenfolge ausführen, z.B. gilt
$(2\cdot x)\cdot((-3)\cdot x)=2\cdot x\cdot(-3)\cdot x=2\cdot(-3)\cdot x\cdot x=-6x^2.$

Treten Addition und Multiplikation zusammen auf, kann das *Distributivgesetz* hilfreich sein.

3.11 SATZ (DISTRIBUTIVGESETZ)

Für drei beliebige reelle Zahlen a, b und c ist

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

und

$$(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a).$$

Zum Beispiel ist

$$3\cdot(5+2)=3\cdot 7=21$$

oder unter Anwendung des Distributivgesetzes

$$3\cdot(5+2)=(3\cdot 5)+(3\cdot 2)=15+6=21.$$

3.12 BEMERKUNG

1. Wegen der Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung” können die Klammern in der obigen Rechnung bei $(3 \cdot 5) + (3 \cdot 2)$ entfallen.
2. Der Übergang von der linken Seite zur rechten Seite im obigen Beispiel wird oft *Ausmultiplizieren* genannt, der Übergang von der rechten zur linken Seite *Ausklammern*.
3. Da $b - c = b + (-c)$ ist, und $a \cdot (-c) = -a \cdot c$ gilt das Distributivgesetz auch für Multiplikation und Subtraktion, d.h. für drei beliebige reellen Zahlen a, b und c gelten
$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$
und
$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$
4. Durch sukzessive Anwendung des Distributivgesetzes erhält man das Gesetz auch für mehr als zwei Summanden. Zum Beispiel gilt für alle reellen Zahlen a, b, c und d:
$$a \cdot (b - c + d) = a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d.$$

3.13 BEISPIEL

Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt:

- $4 \cdot (a - 2b) = 4a - 4 \cdot (2b) = 4a - 8b$
- $(3 + 2b) \cdot 5 = 5 \cdot (3 + 2b) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2b = 15 + 10b$
- $(2 + a) \cdot (a + 1) = 2 \cdot (a + 1) + a \cdot (a + 1) = 2a + 2 + a \cdot a + a = a^2 + 3a + 2$

Anmerkung: Wie in den obigen Ausdrücken wird der Malpunkt zwischen Zahlen und Variablen und auch zwischen mehreren Buchstaben oft weggelassen, d.h. statt $2 \cdot b$ schreibt man auch $2b$.

Das Distributivgesetz erklärt auch, wie ein Minuszeichen vor der Klammer interpretiert werden muss.

3.14 REGEL

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, so müssen die Vorzeichen *aller* Summanden in der Klammer umgedreht werden, da eine Multiplikation mit (-1) stattfindet.

Erklärung

Es ist stets $-x = (-1) \cdot x$ und daher gilt für alle reellen Zahlen a und b
$$-(a + b) = (-1) \cdot (a + b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = (-a) + (-b) = -a - b.$$

Zum Beispiel ist also

$$6-(3a+2)=6+(-1)(3a+2)=6+(-3a-2)=6-3a-2=4-3a$$

oder auch

$$5{,}5-(y^2+y-4{,}5)=5{,}5-y^2-y+4{,}5=10-y^2-y\,.$$

3.15 BEISPIEL

Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt:

- $-(x+\frac{10}{2})+x=-x+(-\frac{10}{2})+x=(-\frac{10}{2})=-5$,
- $3\cdot(x-(2+y))+4y=3\cdot(x-2-y)+4y=3x-6-3y+4y=3x+y-6$.

Manchmal möchte man lange, unübersichtliche Terme zu kürzeren, kompakteren Termen zusammenfassen. Dazu kann man das Distributivgesetz auch umgekehrt zum Ausklammern anwenden. Zum Beispiel ist

$$3b+9ab=3b\cdot 1+3b\cdot 3a=3b\cdot(1+3a)$$

und

$$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}z=\frac{1}{8}\cdot 2x-\frac{1}{8}\cdot 4y+\frac{1}{8}\cdot 3z=\frac{1}{8}\cdot\Big(2x-4y+3z\Big).$$

3.16 BEISPIEL

Für beliebige reelle Zahlen x, y, z gilt:

- $xy+y^2=x\cdot y+y\cdot y=(x+y)\cdot y$
- $4x^2y-3xyz+y^2x=xy\cdot 4x-xy\cdot 3z+xy\cdot y=xy\cdot(4x-3z+y)$
- $-3x^2+6x-18=-3\cdot x^2+(-3)\cdot(-2x)+(-3)\cdot 6=-3(x^2-2x+6)$
- $2x^3-4x^2-8x=2x\cdot x^2-2x\cdot(2x)-2x\cdot 4=2x(x^2-2x-4)$

[online-only]

3.3 Erste und zweite binomische Formel

Mit Hilfe des Distributivgesetzes lassen sich die sogenannten *binomischen Formeln* herleiten.

3.17 REGEL (ERSTE UND ZWEITE BINOMISCHE FORMEL)

Für alle reellen Zahlen a und b gelten

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad \text{und} \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (3.1)$$

Herleitung

Betrachtet man den Ausdruck

$$(a+b)(c+d)$$

und fasst $(a+b)$ als einen Faktor auf, der mit der Klammer $(c+d)$ multipliziert wird, erhält man

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d.$$

Eine erneute Anwendung des Distributivgesetzes und Multiplikation von c und d mit ihren jeweiligen Klammern führt dann auf

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Für $c = a$ und $d = b$ folgen aus dieser Gleichung nun zwei wichtige Spezialfälle dieser Regel, nämlich

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und nach Ersetzung von b durch $-b$ weiter

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + (-b)a + a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Zum Beispiel ist also

$$(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

und

$$(x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$$

3.18 BEISPIEL

- $32^2 = (30+2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$
- $39^2 = (40-1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$
- $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- $$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^2 &= (x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 \\ &= 2x + 2x = 4x\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(x+y+4)^2 &= ((x+y)+4)^2 \\ &= (x+y)^2 + 2 \cdot (x+y) \cdot 4 + 4^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 8(x+y) + 16 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 8y + 16\end{aligned}$$

Die binomischen Formeln können auch rückwärts verwendet werden, um eine Summe in ein Produkt umzuwandeln. Weil die Bestandteile eines Produktes Faktoren heißen, sagt man dazu auch *„einen Ausdruck faktorisieren"*.

3.19 BEISPIEL

- $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x+1)^2$
- $x^6 - 4x^3 + 4 = (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 2 + 2^2 = (x^3-2)^2$
- $4x^4 - 12x^2 + 15 = 4x^4 - 12x^2 + 9 + 6 = (2x^2)^2 - 2 \cdot (2x^2) \cdot 3 + 3^2 + 6 = (2x^2-3)^2 + 6$

3.4 Dritte binomische Formel

Auch die *dritte binomische Formel* kann mit Hilfe des Distributivgesetzes leicht hergeleitet werden.

3.20 REGEL (DRITTE BINOMISCHE FORMEL)

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Herleitung

Aus der oben abgeleiteten Formel

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

erhält man mit $c = a$ und $d = -b$ den Spezialfall:

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot (-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Es ist also

$$(3x-4)(3x+4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$$

oder

$$(5+y)(5-y)=5^2-y^2=25-y^2$$

[online-only]

Auch die dritte binomische Formel wird oft dazu benutzt, um Terme zu faktorisieren. Dies wird insbesondere beim Kürzen von Brüchen wichtig.

3.21 BEISPIEL

- $26^2-4^2=(26+4)\cdot(26-4)=30\cdot 22=660$
- $1-(x+2)^2=1^2-(x+2)^2=\big(1+(x+2)\big)\big(1-(x+2)\big)=(x+3)(-x-1)=-(x+3)(x+1)$
- $(x+1)^2-(x-1)^2=\big((x+1)+(x-1)\big)\big((x+1)-(x-1)\big)=2x\cdot 2=4x$
- $\dfrac{9}{25}-\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2$

$$=\left(\tfrac{3}{5}+\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\right)\cdot\left(\tfrac{3}{5}-\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\right)=\left(\tfrac{2}{5}+x\right)\cdot\left(\tfrac{4}{5}-x\right)$$

[video-online-only]

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $x \cdot 4 + 3 + 2 \cdot x \cdot 3 - 1$

b) $2 \cdot x - x \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 1$

Antwort

a) $10x + 2$

b) $-3x^2 + 2x - 1$

Lösung a)

Mit Hilfe des Kommutativgesetzes werden zunächst in allen Produkten die Faktoren so vertauscht, dass die Faktoren x ganz rechts stehen:

$$x \cdot 4 + 3 + 2 \cdot x \cdot 3 - 1 = 4 \cdot x + 3 + 2 \cdot 3 \cdot x - 1 = 4x + 3 + 6x - 1$$

Anschließend werden die Summanden nach Potenzen von x sortiert und gleiche Potenzen addiert:

$$4x + 3 + 6x - 1 = 4x + 6x + 3 - 1 = 10x + 2$$

Lösung b)

Wieder werden die Faktoren in allen Produkten so vertauscht, dass die Faktoren x ganz rechts stehen:

$$2\cdot x - x\cdot 5\cdot x + 2\cdot x^2 - 1 = 2\cdot x - 5\cdot x\cdot x + 2\cdot x^2 - 1 = 2x - 5x^2 + 2x^2 - 1$$

Anschließend werden die Summanden nach Potenzen von x sortiert und gleiche Potenzen addiert:

$$2x - 5x^2 + 2x^2 - 1 = -5x^2 + 2x^2 + 2x - 1 = -3x^2 + 2x - 1$$

ÜBUNG 2

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $2x(1-x)-(2-x)$

b) $(x-1)(2-x)-(3x+x^2)+x\cdot 3$

c) $(5+x)(5-x)+(3-x)^2$

d) $(x+y)^2-(x-1)^2-(y-1)^2$

Antwort

a) $-2x^2+3x-2$

b) $-2x^2+3x-2$

c) $-6x+34$

d) $2(xy+x+y-1)=2xy+2x+2y-2$

(Welcher der beiden Ausdrücke nun einfacher ist, ist Ansichtssache.)

Lösung a)

Zunächst werden alle Terme mit dem Distributivgesetz ausmultipliziert:

$$2x(1-x)-(2-x)=2x\cdot 1-2x\cdot x-2-(-x)=2x-2x^2-2+x$$

Dann werden die Summanden nach x-Potenzen sortiert und zusammengefasst:

$$2x-2x^2-2+x=-2x^2+2x+x-2=-2x^2+3x-2$$

Lösung b)

Zunächst werden alle Terme mit dem Distributivgesetz ausmultipliziert:

$$\begin{aligned}(x-1)(2-x)-(3x+x^2)+x\cdot 3 &= x\cdot(2-x)-1\cdot(2-x)-3x-x^2+3x\\ &= x\cdot 2-x\cdot x-2-(-x)-3x-x^2+3x\\ &= 2x-x^2-2+x-3x-x^2+3x\end{aligned}$$

Dann werden die Summanden nach x-Potenzen sortiert und zusammengefasst:

$$2x-x^2-2+x-3x-x^2+3x=-x^2-x^2+2x+x-3x+3x-2=-2x^2+3x-2$$

Lösung c)

Unter Verwendung der zweiten und dritten binomischen Formel vereinfacht sich der Term zu:

$$\begin{aligned}(5+x)(5-x)+(3-x)^2 &= 5^2-x^2+3^2-2\cdot 3\cdot x+x^2\\ &= 25-x^2+9-6x+x^2=-6x+34\end{aligned}$$

Lösung d)

Unter Verwendung der ersten und zweiten binomischen Formel vereinfacht sich der Term zu:

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-1)^2-(y-1)^2 &= x^2+2xy+y^2-(x^2-2x+1)-(y^2-2y+1)\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2+2x-1-y^2+2y-1\\ &= x^2-x^2+2xy+2x+y^2-y^2+2y-1-1\\ &= 2xy+2x+2y-2=2(xy+x+y-1)\end{aligned}$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie folgende Terme mit Hilfe der binomischen Formeln ohne die Verwendung eines Taschenrechners:

a) 103^2

b) 98^2

c) $104 \cdot 96$

d) $107 \cdot 95$

Antwort

a) $10\,609$

b) $9\,604$

c) $9\,984$

d) $10\,165$

Lösung a)

Wegen $103 = 100 + 3$ verwendet man am besten die erste binomische Formel, um einfacher rechnen zu können:

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609.$$

Lösung b)

Auch hier könnte man $98 = 90 + 8$ schreiben und die erste binomische Formel verwenden. Deutlich einfacher zu rechnen ist es aber, wenn man 98 als $98 = 100 - 2$ schreibt, und die zweite binomische Formel verwendet:

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604\,.$$

Lösung c)

Mithilfe der dritten binomischen Formel kann man Produkte auf die Berechnung von Quadraten zurückführen. In diesem Fall ist

$$104 \cdot 96 = (100+4)(100-4) = 100^2 - 4^2 = 10\,000 - 16 = 9\,984\,.$$

Die Berechnung des Produkts lässt sich so deutlich vereinfachen.

Lösung d)

Auch hier lässt sich zur Berechnung des Produkts die dritte binomische Formel anwenden:

$$107 \cdot 95 = (101+6)(101-6) = 101^2 - 6^2\,.$$

Die Quadratzahl 101^2 kann nun mithilfe der ersten binomischen Formel berechnet werden:

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201\,.$$

Das gesuchte Ergebnis ist also

$$107 \cdot 95 = (101+6)(101-6) = 101^2 - 6^2 = 10\,201 - 36 = 10\,165\,.$$

ÜBUNG 4

Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie die binomischen Formeln "rückwärts" anwenden:

a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $25x^2 - z^2$

d)
Geben Sie Parameter c und d an, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
$(2x - 4y)^2 - (x + y)^2 = (cx - 3y)(x + dy)$

Beachen Sie: Die linke Seite ist die Differenz zweier Quadrate.

Antwort

a) $(2x + 3)^2$

b) $(3x - 2y)^2$

c) $(5x - z)(5x + z)$

d) $c = 3,\ d = -5$

Lösung a)

Die erste binomische Formel lautet

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2 .$$

Wenden wir diese mit $a = 2x$ und $b = 3$ an, so erhalten wir

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2 .$$

Lösung b)

Wir verwenden die zweite binomische Formel,

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2 \,,$$

mit $a = 3x$ und $b = 2y$ und erhalten

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x - 2y)^2 \,.$$

Lösung c)

In diesem Fall lässt sich die dritte binomische Formel anwenden:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \,.$$

Mit $a = 5x$ und $b = z$ ergibt sich

$$25x^2 - z^2 = (5x)^2 - z^2 = (5x + z)(5x - z) \,.$$

Lösung d)

Die dritte binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ist auf

$$(2x-4y)^2 - (x+y)^2$$

anwendbar mit

$a = 2x - 4y$ und $b = x + y$

Damit gilt

$$(2x-4y)^2 - (x+y)^2 = (3x-3y)(x-5y) = (cx-3y)(x+dy)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wenn $c = 3$ und $d = -5$ ist.

4. BRUCHRECHNUNG

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie beherrschen das Erweitern und Kürzen von Brüchen.
- Sie beherrschen das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Brüchen.

4.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

haben Sie bereits im Abschnitt IA.1 über die Zahlenmengen kennengelernt. Sie besteht aus allen Brüchen der Form $\frac{p}{q}$, wobei p eine beliebige und q eine von Null verschiedene ganze Zahl sein darf. Man nennt p den ***Zähler*** und q den ***Nenner*** des Bruches.

Da ein Bruch das Ergebnis einer Division ist, kann man ein und dieselbe rationale Zahl auf verschiedene Arten schreiben; zum Beispiel ist

$$\frac{8}{14} = \frac{4}{7} = \frac{12}{21}.$$

Dabei wurde zunächst mit 2 *„gekürzt"* und anschließend mit 3 *„erweitert"*, d.h.

$$\frac{8}{14} = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{7 \cdot \cancel{2}} = \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}.$$

Im Allgemeinen können Zähler und Nenner von Brüchen nicht nur ganze Zahlen sondern beliebige reelle Zahlen oder sogar Terme mit Variablen enthalten.

4.1 REGEL (ERWEITERN UND KÜRZEN)

Beim Erweitern und Kürzen von Brüchen bleibt ihr Wert unverändert.
Brüche werden *erweitert*, indem Zähler und Nenner mit derselben, von Null verschiedenen reellen Zahl multipliziert werden.
Brüche werden *gekürzt*, indem Zähler und Nenner durch dieselbe, von Null verschiedene Zahl dividiert werden.
Kürzen und Erweitern bedeutet den Faktor 1 zu streichen oder mit 1 zu multiplizieren. Der Wert des Bruchs ändert sich also durch Kürzen und Erweitern nicht.

4.2 BEISPIEL

- $$\frac{35}{5} = \frac{7}{1} = 7$$
- $$\frac{3}{11} = \frac{3 \cdot (-4)}{11 \cdot (-4)} = \frac{-12}{-44}$$
- $$-\frac{42}{12} = -\frac{7 \cdot \cancel{6}}{2 \cdot \cancel{6}} = -\frac{7}{2}$$
- $$\frac{4\pi^2}{3\pi} = \frac{4\pi \cdot \cancel{\pi}}{3 \cdot \cancel{\pi}} = \frac{4\pi}{3}$$
- $$\frac{24y - 72x^2}{28} = \frac{(6y - 18x^2) \cdot \cancel{4}}{7 \cdot \cancel{4}} = \frac{6y - 18x^2}{7} = \frac{6(y - 3x^2)}{7}$$

Gekürzt werden kann auch ein Bruch, der im Zähler und Nenner denselben Term als Faktor enthält:

$$\frac{(x-3)(1+x)}{2(x-3)} = \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (1+x)}{2 \cdot \cancel{(x-3)}} = \frac{1+x}{2}$$

Beachten Sie dabei:

4.3 REGEL

Wenn in einem Bruch durch Terme gekürzt wird, dann gelten die Gleichungen nur für diejenigen Werte der Variablen, für die alle Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung definiert sind (insbesondere alle Nenner ungleich Null sind).
Entsprechendes gilt beim Erweitern.

Die obige Gleichung gilt also nur für $x \neq 3$. Wir verabreden, dass in allen weiteren Beispielen die Gleichheit von Brüchen mit Termen im Sinne dieser Regel verstanden wird.

4.4 BEISPIEL

- $$\frac{4ab-7a}{a^2+ab} = \frac{(4b-7)a}{(a+b)a} = \frac{(4b-7)\cancel{a}}{(a+b)\cancel{a}} = \frac{4b-7}{a+b}, a \neq 0$$

- $$\frac{x^2-4}{3x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x+2)} = \frac{(x-2)\ \cancel{(x+2)}}{3\ \cancel{(x+2)}} = \frac{x-2}{3}, x \neq -2$$

- $$\frac{2-\frac{4}{x}}{3} = \frac{\left(2-\frac{4}{x}\right)\cdot x}{3 \cdot x} = \frac{2x-4}{3x}, x \neq 0$$

Natürlich kann man einen Bruch auch *schrittweise* kürzen bzw. erweitern.

4.5 BEISPIEL

$$\frac{36x}{24x} = \frac{\cancel{3}\cdot 12x}{\cancel{3}\cdot 8x} = \frac{12x}{8x} = \frac{12\cdot\cancel{x}}{8\cdot\cancel{x}} = \frac{12}{8} = \frac{3\cdot\cancel{4}}{2\cdot\cancel{4}} = \frac{3}{2}$$

führt auf dasselbe Ergebnis wie

$$\frac{36x}{24x} = \frac{3\cdot\cancel{12x}}{2\cdot\cancel{12x}} = \frac{3}{2}$$

Wenn man einen Bruch $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ kürzen möchte, reicht es aus, bei der Suche nach gemeinsamen Teilern des Zählers und des Nenners *Primzahlen* zu betrachten. Primzahlen sind solche natürlichen Zahlen größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Die kleinsten Primzahlen sind: $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$

Bei Brüchen mit sehr großen Zählern und Nennern wie z.B. $\frac{255}{119}$ oder $\frac{1023}{217}$, ist das Suchen nach

gemeinsamen Teilern mühsam, selbst wenn man nur nach Primzahlen sucht.
In diesen Fällen hilft ein Algorithmus, mit dem man, ohne zu suchen, einen gemeinsamen Teiler findet, und nicht nur irgendeinen, sondern sogar den größten gemeinsamen Teiler (kurz den ggT).
Dieser Algorithmus heißt *Euklidischer Algorithmus* und wird hier der Vollständigkeit halber angeführt. Für den weiteren Kurs wird er jedoch nicht benötigt.

ERGÄNZUNG (DER EUKLIDISCHE ALGORITHMUS)
Anzeigen

Dieselbe rationale Zahl ist in der Form $\frac{2}{3}$ leichter zu erfassen als in der Form $\frac{24}{36}$. Deshalb ist es in der Regel zweckmässig Brüche *vollständig zu kürzen*. Ein Ausdruck oder eine ganze Rechnung wird dadurch fast immer übersichtlicher.

4.8 DEFINITION (VOLLSTÄNDIG GEKÜRZT)

Ein Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner heißt *vollständig gekürzt*, wenn Zähler und Nenner durch keine ganze Zahl (außer durch 1 und -1) gekürzt werden können.

Außerdem ist es üblich, bei positiven Brüchen Zähler und Nenner positiv zu wählen, bei negativen Brüchen das negative Vorzeichen vor den Bruch oder in den Zähler zu schreiben. Dazu muss unter Umständen der Bruch mit -1 erweitert werden.

4.9 BEISPIEL

Bruch	vollständig gekürzter Bruch
$\dfrac{9}{12}$	$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{2}{-6}$	$-\dfrac{1}{3}$ oder $\frac{-1}{3}$
$\dfrac{-84}{-144}$	$\dfrac{7}{12}$

4.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

In diesem und dem nächsten Abschnitt erklären wir die Grundrechenarten für Brüche.

Zwei Brüche können leicht addiert oder subtrahiert werden, wenn sie den gleichen Nenner haben. Dann ist der Zähler die Summe bzw. die Differenz der Zähler, und der Nenner ist der gemeinsame Nenner der beiden Brüche.

Besitzen die Brüche nicht den gleichen Nenner, dann müssen zunächst die beide Brüche so erweitert werden, dass sie denselben Nenner haben. Die einfachste Möglichkeit, dies zu erreichen, ist es, die beiden Brüche „übers Kreuz ” mit dem Nenner des jeweils anderen Bruches zu erweitern.

Will man also die Summe der beiden Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ ermitteln, so kann man zunächst den ersten Bruch mit q_2, den zweiten mit q_1 erweitern und dann die neuen Zähler addieren:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

Analog erhält man bei der Subtraktion:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} - \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

[video-online-only]

4.10 BEISPIEL

Mit diesen Regeln berechnet man zum Beispiel

- $$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{8 + 15}{20} = \frac{23}{20}$$
- $$\frac{14}{9} - \frac{-7}{5} = \frac{14 \cdot 5}{9 \cdot 5} - \frac{-7 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{70 - (-63)}{45} = \frac{70 + 63}{45} = \frac{133}{45}$$
- $$\frac{5}{8} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 8 \cdot 5}{3 \cdot 8 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 8 \cdot 3}{5 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{75 + 80 - 96}{120} = \frac{59}{120}$$
- $$\begin{aligned} \frac{2a + 3b + 4}{5 + b} - \frac{3}{7} &= \frac{(2a + 3b + 4) \cdot 7}{(5 + b) \cdot 7} - \frac{3 \cdot (5 + b)}{7 \cdot (5 + b)} \\ &= \frac{14a + 21b + 28 - 15 - 3b}{35 + 7b} = \frac{14a + 18b + 13}{35 + 7b} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \frac{x - 2y}{x + 2y} - \frac{x + 2y}{x - 2y} &= \frac{(x - 2y)^2}{(x + 2y)(x - 2y)} - \frac{(x + 2y)^2}{(x - 2y)(x + 2y)} \\ &= \frac{(x - 2y)^2 - (x + 2y)^2}{x^2 - 4y^2} = -\frac{8xy}{x^2 - 4y^2} \end{aligned}$$

Oft führt die obige Methode, die beiden Brüche „übers Kreuz ” zu erweitern, zu unnötig großen Zahlen. Bei der Addition $\frac{1}{16}+\frac{3}{8}$ zum Beispiel, erhielte man

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{8}{16\cdot 8}+\frac{16\cdot 3}{16\cdot 8}=\frac{56}{128},$$

was wiederum mit der Zahl 8 gekürzt werden kann

$$\frac{56}{128}=\frac{7\cdot 8}{16\cdot 8}=\frac{7}{16}.$$

Schneller und einfacher wäre in diesem Fall gewesen, als gemeinsamen Nenner gleich die Zahl 16 zu wählen:

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{1}{16}+\frac{3\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{1}{16}+\frac{6}{16}=\frac{7}{16}.$$

Diese Zahl 16 ist sogar die kleinste Zahl, die man als gemeinsamen Nenner wählen kann. Eine solche Zahl nennt man auch den *Hauptnenner* der beiden Brüche. Der Hauptnenner ist also die kleinste Zahl, die ein Vielfaches beider Nenner ist, also das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz *kgV*) der beiden Nenner.

Will man zum Beispiel die Differenz $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}$ berechnen, so ist der Hauptnenner der Brüche gerade $24=2\cdot 12=3\cdot 8$ und

$$\frac{5}{12}-\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}-\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{10}{24}-\frac{9}{24}=\frac{1}{24}.$$

Hinter dieser vereinfachten Rechnung steckt Folgendes: Immer wenn die beiden Nenner einen gemeinsamen Teiler ungleich 1 haben, gibt es auch ein gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner, welches kleiner als ihr Produkt ist. Die Nenner sind $12=4\cdot 3$ und $8=4\cdot 2$. Um ein gemeinsames Vielfaches zu erhalten, reicht es daher, die 12 mit 2 und die 8 mit 3 zu multiplizieren.

4.11 BEISPIEL

- $$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5+4}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$
- $$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{4}{8}-\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{4-2-1}{8}=\frac{1}{8}$$
- $$\frac{2-y}{xy}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{(2-y)\cdot x}{x^2y}+\frac{(x-1)\cdot y}{x^2y}=\frac{2x-yx+xy-y}{x^2y}=\frac{2x-y}{x^2y}$$

ERGÄNZUNG (GEMISCHTE BRÜCHE)
Anzeigen

[online-only]

4.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Die Multiplikation und die Division von Brüchen ist einfacher als die Addition und Subtraktion. Der Zähler des Produktes von zwei Brüchen ist das Produkt der beiden Zähler. Der Nenner ist das Produkt der beiden Nenner.
Somit ist das Produkt der beiden Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}.$$

4.12 BEISPIEL

- $$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
- $$\frac{25}{36} \cdot \left(-\frac{81}{35}\right) = -\frac{25 \cdot 81}{36 \cdot 35} = -\frac{5 \cdot \cancel{5} \cdot 9 \cdot \cancel{9}}{4 \cdot \cancel{9} \cdot 7 \cdot \cancel{5}} = -\frac{45}{28}$$
- $$-\frac{a}{b} \cdot \frac{3b-a}{3b+a} \cdot \left(-\frac{4b}{7}\right) = \frac{a \cdot (3b-a) \cdot 4\cancel{b}}{7 \cdot \cancel{b} \cdot (3b+a)} = \frac{12ab - 4a^2}{21b + 7a}$$

TIPP

Wie bei 2. im obigen Beispiel 4.12, sollte man beim Multiplizieren von Brüchen zunächst prüfen, ob gekürzt werden kann, bevor man die Multiplikationen im Zähler und im Nenner ausführt; Kürzen macht die Rechnung übersichtlicher und einfacher.

Um die Divisionsvorschrift für Brüche formulieren zu können, benötigen wir aber den Begriff des *„Kehrwerts"* (auch *„Kehrbruch"* genannt).

4.13 DEFINITION (KEHRWERT)

Der Kehrwert des Bruches $\dfrac{p}{q}$ ist der Bruch $\dfrac{q}{p}$, wobei natürlich p und q nicht Null sein dürfen.

Man erhält also den Kehrwert eines Bruches, indem man Zähler und Nenner vertauscht.

4.14 BEISPIEL

	Bruch	Kehrwert
1.	$\frac{32}{117}$	$\frac{117}{32}$
2.	$-\frac{6}{3}$	$-\frac{3}{6}$
3.	$\frac{(a-2b+c)(3a-4)}{7a^2-4ab^3+b}$	$\frac{7a^2-4ab^3+b}{(a-2b+c)(3a-4)}$

Zwei Brüche werden dividiert indem man den ersten (den Dividenden) mit dem Kehrwert des zweiten (des Divisors) multipliziert. In Formeln :

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}.$$

Bei einem Doppelbruch handelt es sich um einen Term, bei dem ein Bruch durch einen weiteren Bruch geteilt wird. Doppelbrüche können vereinfacht werden, indem man den Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruchs multipliziert:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}.$$

4.15 BEISPIEL

- $\frac{13}{15} : \frac{2}{7} = \frac{13}{15} \cdot \frac{7}{2} = \frac{13 \cdot 7}{15 \cdot 2} = \frac{91}{30}$
- $\frac{256}{325} : \left(-\frac{192}{13}\right) = \frac{256}{325} \cdot \left(-\frac{13}{192}\right) = -\frac{4 \cdot \cancel{64} \cdot \cancel{13}}{25 \cdot \cancel{13} \cdot 3 \cdot \cancel{64}} = -\frac{4}{25 \cdot 3} = -\frac{4}{75}$
- $$\begin{aligned} \left(\frac{7}{5} + \frac{4}{3}\right) : \frac{7}{10} &= \left(\frac{7 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{3 \cdot 5}\right) \cdot \frac{10}{7} \\ &= \frac{41}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{41 \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{82}{21} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \frac{4a^2 - b^2}{5+b} : \frac{2a+b}{25+10b+b^2} &= \frac{(2a-b)\cdot(2a+b)}{5+b} \cdot \frac{5^2 + 2\cdot 5 \cdot b + b^2}{2a+b} \\ &= \frac{(2a-b)\cdot \cancel{(2a+b)} \cdot (5+b)^2}{(5+b)\cdot \cancel{(2a+b)}} \\ &= \frac{(2a-b)\cdot(5+b)\cdot \cancel{(5+b)}}{\cancel{5+b}} = (2a-b)(5+b). \end{aligned}$$
- $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$

Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen

Grundsätzlich existieren zwei Möglichkeiten, um einen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln. Im besten Fall steht im Nenner des Bruchs eine Potenz von 10 ($10, 100, 1000, \ldots$) oder es wird durch Kürzen und Erweitern eine Zehner-Potenz im Nenner erzeugt.

$$\frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

$$\frac{40}{400} = \frac{40 : 40}{400 : 40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Um nun beliebige Brüche in Dezimalzahlen umzuwandeln, wird die schriftliche Division benötigt.

Für den Quotienten $233 : 11$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l}
233 : 11 = 21 \\
\underline{22} \\
13 \\
\underline{11} \\
2
\end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 21 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 2) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l}
233 : 11 = 21{,}18 \\
\underline{22} \\
13 \\
\underline{11} \\
\mathbf{2}0 \\
\underline{11} \\
90 \\
\underline{88} \\
\mathbf{2}
\end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzten zwei Dezimalstellen weitergehen würde.
Also ist $233 : 11 = 21{,}18181818\ldots = 21{,}\overline{18}$.

Mehr zu Rechnen mit Dezimalzahlen und Runden von Dezimalzahlen finden Sie in Abschnitt IA.2 .

[video-online-only]

Noch Fragen? Dann schnell ins Chat oder ans Telefon. Die Tutoren helfen gerne. Übrigens, vielleicht hat die Frage auch schon mal jemand im Forum gestellt.

ÜBUNG 1

Erweitern Sie die Brüche mit den angegebenen Faktoren.

a) $\frac{2}{3}$ mit 2

b) $\frac{3}{2}$ mit 5

c) $\frac{3x}{5}$ mit $5x$

Kürzen Sie die Brüche

d) $\frac{10}{20}$ durch 2

e) $\frac{x^2-1}{x-1}$ durch $x-1$

Antwort

a) $\frac{4}{6}$

b) $\frac{15}{10}$

c) $\frac{15x^2}{25x}$

d) $\frac{5}{10}$

e) $x+1$

Lösung a)

Um einen Bruch mit einer Zahl $a \neq 0$ zu erweitern, multipliziert man Zähler und Nenner des Bruchs mit a. Man erweitert also $\frac{2}{3}$ mit 2 wie folgt:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

Lösung b)

Multipliziert man den Zähler und den Nenner des Bruches mit 5, so ergibt sich

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$$

Lösung c)

Multipliziert man den Zähler und den Nenner des Bruches mit $5x$, so ergibt sich

$$\frac{3x}{5} = \frac{3x}{5} \cdot \frac{5x}{5x} = \frac{15x^2}{25x}.$$

Lösung d)

Um einen Bruch durch eine Zahl $b \neq 0$ zu kürzen, dividiert man Zähler und Nenner des Bruchs durch b. Dividiert man den Zähler und den Nenner des Bruches durch 2, ergibt sich

$$\frac{10}{20} = \frac{10:2}{20:2} = \frac{5}{10}.$$

Lösung e)

Um den Bruch durch $x-1$ zu kürzen, teilen wir einfach Zähler und Nenner des Bruchs durch $x-1$. Dazu hilft es, die dritte binomische Formel zu verwenden und x^2-1 als $(x+1)(x-1)$ zu schreiben:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x^2-1):(x-1)}{(x-1):(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1):(x-1)}{1} = \frac{x+1}{1} = x+1.$$

Da die Division durch eine Zahl b nur für $b \neq 0$ definiert ist, müssen wir für diese Rechnung natürlich voraussetzen, dass $x-1 \neq 0$, also $x \neq 1$ ist.

ÜBUNG 2

Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich:

a) $\frac{42}{56}$ b) $\frac{512}{768}$ c) $\frac{(x^2-4x+4)(x+2)}{(x^2-4)(x+1)}$ d) $\frac{\frac{11}{6}}{\frac{5}{9}}$

Antwort

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{x-2}{x+1}$ d) $\frac{33}{10}$

Lösung a)

Um den gegebenen Bruch zu kürzen, sucht man nach gemeinsamen Teilern des Zählers und des Nenners:

$$\frac{42}{56} = \frac{2 \cdot 21}{2 \cdot 28} = \frac{21}{28} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{3}{4}$$

Lösung b)

Wir kürzen den Bruch Schritt für Schritt und erhalten

$$\frac{512}{768} = \frac{2 \cdot 256}{2 \cdot 384} = \frac{256}{384} = \frac{2 \cdot 128}{2 \cdot 192} = \frac{128}{192} = \frac{2 \cdot 64}{2 \cdot 96} = \frac{64}{96} = \frac{8 \cdot 8}{8 \cdot 12} = \frac{8}{12} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Lösung c)

Um gemeinsame Faktoren des Zählers und des Nenners zu finden, muss man im Zähler und Nenner weitere Faktoren finden. Mit Hilfe der binomischen Formeln sieht man $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ und $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Damit gilt:

$$\frac{(x^2-4x+4)(x+2)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{(x-2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}.$$

Da die Division durch eine Zahl b nur für $b \neq 0$ definiert ist, müssen wir für diese Rechnung natürlich voraussetzen, dass $x+1 \neq 0$, $x-2 \neq 0$ und $x+2 \neq 0$, also $x \neq -1$, $x \neq 2$ und $x \neq -2$ ist.

Lösung d)

Wir kürzen den Bruch Schritt für Schritt und erhalten

$$\frac{\frac{11}{6}}{\frac{5}{9}} = \frac{11}{6} \cdot \frac{9}{5} = \frac{11}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{9}}{5} = \frac{33}{10}$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie folgende Terme ohne Verwendung eines Taschenrechners:

a) $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{6}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

d) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) : \frac{1}{x}$

e) $\frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)}$

f) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)} + \frac{2}{a}\right)$

Antwort

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{14}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{x+1}{x}$

e) $\frac{5}{2}$

f) $2 + \frac{b}{a}$

Lösung a)

Wegen der Punkt-vor-Strich-Regel wird zunächst multipliziert und anschließend subtrahiert. Beim Multiplizieren müssen einfach die jeweiligen Zähler miteinander multipliziert werden und die jeweiligen Nenner:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

Also gilt:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Da beide Brüche schon die gleichen Nenner haben, müssen bei der Subtraktion lediglich die Zähler subtrahiert werden, also

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6}.$$

Kürzt man nun noch mit dem Faktor 2, erhält man als Ergebnis $\frac{2}{3}$.

Lösung b)

Wegen der Klammer wird die Addition zuerst ausgeführt. Hierzu müssen zunächst die Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden und dann die neuen Zähler addiert werden:

$$\frac{6}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{18+10}{15}=\frac{28}{15}$$

Anschließend sind die zwei Brüche zu multiplizieren und das Ergebnis zu kürzen:

$$\frac{28}{15}\cdot\frac{3}{2}=\frac{28\cdot 3}{15\cdot 2}=\frac{14\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{14}{5}$$

Lösung b) weitere Möglichkeit

Anstatt zuerst die Addition auszuführen, könnte man auch mit dem Distributivgesetz ausmultiplizieren und anschließend die einzelnen Produkte berechnen:

$$\left(\frac{6}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6\cdot 3}{5\cdot 2}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 2}=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 1}+1=\frac{9}{5}+1.$$

Für die Summe schließlich müssen die Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden und dann die neuen Zähler addiert werden:

$$\frac{9}{5}+1=\frac{9}{5}+\frac{5}{5}=\frac{9+5}{5}=\frac{14}{5}.$$

Anmerkung: Im Vergleich mit der anderen Lösung sieht man, dass die Rechnungen hier einfacher waren, weil sich durch das Multiplizieren einiges kürzen ließ. Es war also durchaus sinnvoll, das Distributivgesetz anzuwenden. Im Allgemeinen ist es jedoch besser, zuerst die Addition auszuführen und anschließend zu multiplizieren.

Lösung c)

Auch wenn man versucht sein könnte, die dritte binomische Formel anzuwenden, so gilt diese nur bei Produkten, nicht aber bei Quotienten! Es müssen also zunächst die Differenz und die Summe berechnet werden:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Durch einen Bruch wird nun dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Daher gilt

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}:\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

Lösung d)

Man geht wie bei den anderen Aufgaben vor, und berechnet zuerst die Summe in der Klammer, wofür die beiden Brüche erst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden müssen:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}.$$

Nun wird durch einen Bruch dividiert, indem mit dem Kehrbruch multipliziert wird:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{1}=\frac{(x+1)x}{x^2\cdot 1}=\frac{(x+1)\cdot\cancel{x}}{x\cdot\cancel{x}\cdot 1}=\frac{x+1}{x}.$$

Lösung e)

Die Differenzen im Zähler sowie im Nenner werden berechnet, indem man die Brüche gleichnamig macht:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)}=\frac{\frac{9}{12}-\frac{8}{12}}{\frac{25}{30}-\frac{24}{30}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{30}}.$$

Um den Doppelbruch nun aufzulösen, wird der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert:

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{30}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{30}{1}=\frac{30}{12}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

Lösung f)

Zunächst werden die Brüche gleichnamig gemacht:

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{4}\right)=\frac{2a}{4}+\frac{b}{4}=\frac{2a+b}{4}$$

und

$$\left(\frac{1}{\frac{a}{2}}+\frac{2}{a}\right)=\frac{2}{a}+\frac{2}{a}=\frac{4}{a}.$$

Im nächsten Schritt werden die beiden Terme miteinander mulitpliziert und entsprechend gekürzt:

$$\frac{2a+b}{4}\cdot\frac{4}{a}=\frac{2a+b}{a}=\frac{2a}{a}+\frac{b}{a}=2+\frac{b}{a}.$$

ÜBUNG 4

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

a) Claudia hat 12 Flaschen Limonade für ihre Geburtstagsfeier gekauft. Jede Flasche enthält $\frac{3}{4}$ Liter Limonade. Sie füllt je $\frac{1}{5}$ Liter in die Gläser ihrer Gäste. Wie viele Gläser kann Claudia füllen?

b) Leon und Max schwimmen 1000 m um die Wette. Leon hat bereits $\frac{3}{8}$ und Max $\frac{2}{5}$ der Strecke zurückgelegt. Wieviele Meter müssen Leon und Max jeweils noch schwimmen? Wer liegt in Führung?

Antwort

a) 45

b) Leon muss noch 625 m schwimmen, Max muss noch 600 m schwimmen. Max liegt in Führung.

Lösung a)

Wir können leicht die Gesamtmenge der Limonade, die Claudia gekauft hat, berechnen:

$$12 \cdot \frac{3}{4}\,\text{Liter} = \frac{12 \cdot 3}{4}\,\text{Liter} = 3 \cdot 3\ \text{Liter} = 9\ \text{Liter}.$$

Anschließend berechnen wir die Anzahl der Gläser zu je $\frac{1}{5}$ Liter, auf die sich diese Menge aufteilen lässt:

$$9\,\text{Liter} : \frac{1}{5}\,\text{Liter} = 9 \cdot 5 = 45.$$

Claudia kann also 45 Gläser füllen.

Lösung b)

Wir berechnen zuerst die Strecke, die Leon zurückgelegt hat:

$$\frac{3}{8} \cdot 1000\,\mathrm{m} = \frac{3 \cdot 1000}{8}\,\mathrm{m} = \frac{3 \cdot 125}{1}\,\mathrm{m} = 375\,\mathrm{m}\,.$$

Die von Max zurückgelegte Strecke ist

$$\frac{2}{5} \cdot 1000\,\mathrm{m} = \frac{2 \cdot 1000}{5}\,\mathrm{m} = \frac{2 \cdot 200}{1}\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}\,.$$

Die verbleibende Strecke für Leon ist also

$$1000\,\mathrm{m} - 375\,\mathrm{m} = 625\,\mathrm{m}\,,$$

Max hingegen muss nur noch

$$1000\,\mathrm{m} - 400\,\mathrm{m} = 600\,\mathrm{m}$$

schwimmen. Insbesondere liegt Max also in Führung.