- Aufgaben sollten realistisch in 3h machbar sein.
- es treten einige Begriffe / Aufgaben auf, die nicht in der Vorlesung behandelt werden ⇒ bitte mit Skript abgleichen → Dropbox

Brueckenkurs SoSe24 Uebungen

SoSe 2023

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

- Bitte Aufgabenüberschriften einheitlich kursiv

Aufgabenkatalog - März, 2024

---

1. Symbole im griechischen Alphabet I

   Benennen Sie die folgenden griechischen Buchstaben:

   Um bei der Übungsdiskussion Unklarheiten zu vermeiden bitte immer a), b), c) .... verwenden.

   1. α
   2. δ
   3. Δ
   4. θ
   5. ϑ
   6. ρ
   7. ω

2. Symbole im griechischen Alphabet II

   Schreiben Sie die zugehörigen griechischen Buchstaben auf:

   1. beta
   2. gamma
   3. epsilon
   4. lambda
   5. my
   6. ny

3. Einheiten und Größenordnungen

   Rechenen Sie (wenn möglich) die folgenden Größen in die angegebenen Einheiten um.

   1. $10\,\text{cm}$ in m, km, dm, mm
   2. $57\,\text{s}$ in cm, ms, µs, ns
   3. $120\,\text{cm}^3$ in m^3, km^3, mm^3, L (Liter)
   4. $2.5 \times 10^{-5}\,\text{kg}$ in g, µg, cm^3

5. 5 N in $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$, $\mathrm{J\,m^{-1}}$, $\mathrm{W\,s\,m^{-1}}$, $\mathrm{Pa\,m}$

4. Wissenschaftliche Notation

   Schreiben Sie folgende Zahlen jeweils in wissenschaftlicher Notation bzw. als Dezimalbruch:

   1. $0{,}003$
   2. 1024
   3. $1\,000\,000\,000$
   4. $0{,}00000000723455$
   5. $1{,}2 \times 10^{-5}$
   6. $9{,}931 \times 10^{9}$
   7. $7{,}04 \times 10^{-1}$
   8. $1{,}01 \times 10^{3}$

5. Mengen

   Listen Sie die Elemente der Mengen auf.

   1. Menge aller Vokale des deutschen Alphabets
   2. Menge der Buchstaben des Wortes Summe
   3. Menge der geraden natürlichen Zahlen kleiner als 13
   4. Menge der Ziffern der Zahl 1494

6. Beschreibende Mengendarstellungen

   Finden Sie eine beschreibende Darstellung für die Mengen.

   1. $\{\mathrm{l}, \mathrm{a}, \mathrm{g}, \mathrm{e}, \mathrm{r}\}$
   2. {Nord, West, Süd, Ost}
   3. $\{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$
   4. $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}\}$
   5. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
   6. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$
   7. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
   8. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$

7. Aufzählende Mengendarstellungen

   Geben Sie die Mengen in aufzählender Darstellung an.

   - $\{k^2 | k \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq k \leq 7\}$
   - $\{k^2 | k \in \mathbb{Z} \text{ und } -7 \leq k \leq 7\}$
   - $\{6k + 3 | k \in \mathbb{Z} \text{ und} - 3 \leq k \leq 3\}$
   - $\{\frac{1}{k} | k \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{k} \in \mathbb{N}\}$
   - $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ und } x \notin \mathbb{N}\}$

- $\{\frac{1}{3k} | \, k \in \mathbb{Z}$ und $\frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\ \}$

8. Mengengleichheit

   Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen jeweils identisch sind (es gibt insgesamt fünf verschiedene Übereinstimmungen):

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{x | x \in \mathbb{N},\, x \cdot x = 4\} & A_7 = \{-2, 2\} \\ A_2 = \{x | x \in \mathbb{Q},\, x \notin \mathbb{Z}\} & A_8 = \{0\} \\ A_3 = \{2x | x \in \mathbb{Z},\, x - 1 \leq x \leq 1\} & A_9 = \{2\} \\ A_4 = \{x | x \in \mathbb{Z},\, x \cdot x = 4\} & A_{10} = \{-2, 0, 2\} \\ A_5 = \{x | x \in \mathbb{N}_0,\, x + x = 0\} & A_{11} = \emptyset \\ A_6 = \{2x | x \in \mathbb{N},\, 0 \leq x \leq 1\} & A_{12} = \{\} \end{array}$$

9. Mengenbeschreibung

   Ordnen Sie den Grundmengen

$$\begin{array}{lll} \Omega_1 = \{2, 3, 4, \ldots, 12\} & \Omega_2 = \{1, 2, 3, \ldots, 31\} & \Omega_3 = \mathbb{N}_0 \\ \Omega_4 = \mathbb{R} & \Omega_5 = \{(a, b) | a, b \in \{1, \ldots, 6\}\} & \Omega_6 = [0, \infty) \end{array}$$

   jeweils eine der folgenden Situationen zu:

   1. Jahresumsatz einer Firma
   2. Geburtstage im Januar
   3. Augensummen beim zweifachen Würfelwurf
   4. Zweifacher Würfelwurf
   5. Lufttemperaturen im März
   6. Anzahl weltweiter Erdbeben pro Jahr

10. Teilmengen

    Entscheiden Sie, welche der Mengen Teilmengen der Menge $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ sind.

    1. $B_1 = \{0\}$
    2. $B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
    3. $B_3 = \emptyset$
    4. $B_4 = \{0, -1\}$
    5. $B_5 = \{3, 0, 2, -1, 1\}$
    6. $B_6 = \{1, 0, -2\}$

11. Obermenge

    Entscheiden Sie, welche der Mengen Obermengen der Menge $A = \{-1, 2, 3\}$ sind.

    1. $B_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
    2. $B_2 = \{-1, 0, 1, 3\}$
    3. $B_3 = \emptyset$
    4. $B_4 = \{-5, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
    5. $B_5 = \{2\}$
    6. $B_6 = \{3, 2, -1\}$

12. Schnittmengen

    Bilden Sie die Schnittmengen mit der Menge $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$:

    1. $B_1 = \{0\}$
    2. $B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
    3. $B_3 = \emptyset$
    4. $B_4 = \{0, -1\}$
    5. $B_5 = \{3, 0, 2, -1, 1\}$
    6. $B_6 = \{1, 0, -2\}$

13. Vereinigungsmenge

    Bilden Sie die Vereinigungsmenge mit der Menge $A = \{-1, 2, 3\}$:

    1. $B_1 = \{4, 5, 6\}$
    2. $B_2 = \{-1, 0, 1, 3\}$
    3. $B_3 = \emptyset$
    4. $B_4 = \{-5, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
    5. $B_5 = \{2\}$
    6. $B_6 = \{3, 2, -1\}$

14. Mächtigkeit

    Bestimmen Sie die Mächtigkeit folgender Mengen

    1. $\{1, 4, -3\}$
    2. {L,i,s,a}
    3. $\emptyset$
    4. $\mathbb{N}$
    5. $\{\emptyset, 1, 2, 3, 1, 2\}$

6. $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$
7. $\mathcal{P}(k,r,u,g)$
8. $\mathcal{P}(\text{blau}, \text{rot})$
9. $\mathcal{P}(\emptyset)$

15. Mengenoperationen

    Gegeben sind die Grundmenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sowie die Mengen $A = \{1,3,4,5,7\}$, $B = \{1,2,6,7,8\}$, $C = \{5,7,8\}$. Bestimmen Sie:

(a) $A \cap B$	(d) $A \cup \overline{C}$	(g) $B \setminus C$	(j) $(A \cup B) \setminus C$
(b) $A \cup C$	(e) $B \cap \overline{C}$	(i) $C \setminus B$	(k) $(B \setminus C) \cap A$
(c) $A \cap B \cap C$	(f) $C \cup A \cup B$	(i) $(\overline{A \cup B}) \cap C$	(l) $A \cap (A \setminus C)$

16. Disjunkte Mengen

    Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen jeweils disjunkt und/oder paarweise disjunkt sind

$$A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3\}, \quad C = \{2,4\}$$
$$A = \{1,2\}, \quad B = \{3,4\}, \quad C = \{5,6\}$$
$$A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3\}, \quad C = \{3,4\}, \quad D = \{5,6\}$$
$$A = \{1,2,3\}, \; B = \{3,4,5\}, \quad C = \{5,6,1\}$$
$$A = \{1,2,3\}, \; B = \{3,4,5\}, \quad C = \{5,6,3\}$$
$$A = \{1,2,3\}, \; B = \{3,4,5\}, \quad C = \{5,6,3\}, \quad D = \{1,6,4\}$$

17. Kartesisches Produkt

    Gegeben sind die Mengen $A = \{1,3,5\}$ und $B = \{2,4\}$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen das kartesische Produkt $B \times A$ darstellen.

    1. $M_1 = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$
    2. $M_2 = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$
    3. $M_3 = \{(a,b) | a \in (2,4) \,\text{und}\, b \in \{1,3,5\}\}$
    4. $M_4 = \{(a,b) | a \in A \,\text{und}\, b \in B\}$
    5. $M_5 = \{(a,b) | a \in \{1,2,3,4\}, \text{und}\, b \in A\}$
    6. $M_6 = \{(a,b) | a \in B \,\text{oder}\, b \in A\}$
    7. $M_7 = \{(a,b), a \in B \,\text{und}\, b \in \{1,3,5\}\}$
    8. $M_8 = \{1,3,5,2,4\}$
    9. $M_9 = \{(2,3),(2,5),(2,1),(2,4),(4,3),(4,5),(4,1)\}$

nicht in Vorlesung

$\Rightarrow$ Bitte checke jeweils, ob was in der Übung abgefragt wird, auch im Vorlesungsskript behandelt wird!

10. $M_9 = \{(2,1),(4,1),(2,3),(4,3),(2,5),(4,5)\}$

18\. *Einfache Operationen mit endlichen Mengen*

Geben Sie für die folgenden Paare von Mengen A, B jeweils $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \times B$ und $B \times A$ an:

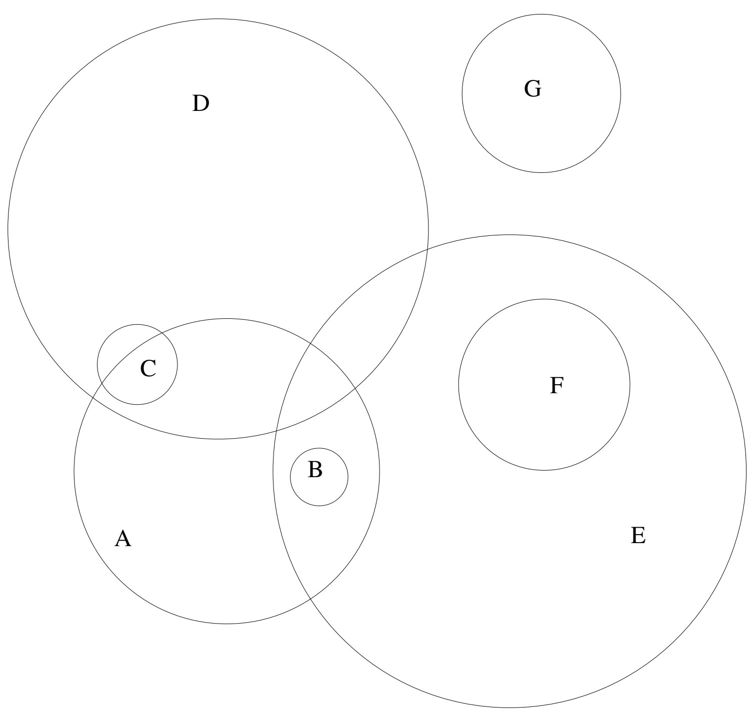
1. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$
2. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = A$
3. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
4. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{A\}$

19\. *Venn-Diagramme – I*

Zeichnen Sie jeweils ein Venn-Diagram, das die folgenden Verhältnisse zwischen Mengen widerspiegelt:

1. $B \subset A$, $C \cap A = \emptyset$
2. $A \cap B \neq \emptyset$, $\neg((A \subseteq B) \vee (B \subseteq A))$, $C \subset A$, $C \cap B = \emptyset$
3. $B \subset A$, $C \subset B$, $D \subset A$, $D \cap B = \emptyset$

20\. *Venn-Diagramme – II*



Betrachten Sie das obenstehende Venn-Diagramm~~,~~ und bestimmen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

1. $A \subseteq B$
2. $B \subset A$
3. $B \cap C = \emptyset$
4. $B \subseteq E$
5. $B \subset (A \cap E)$
6. $C \subseteq (A \cap D)$
7. $C \subseteq (A \cup D)$
8. $F \subset (E \backslash D)$
9. $C \subseteq (D \backslash A)$
10. $C \cap (D \backslash A) = \emptyset$
11. $F \subset (E \cup G)$
12. $C \subset (D \backslash E)$
13. $(C \cap A) \subset D$
14. $G \cup F = \emptyset$
15. $F \backslash E = \emptyset$
16. $(B \cap C) \subseteq (D \cap G)$

21. *Mengentheoretische Gesetze* wo definiert

    Beweisen Sie folgende Mengentheoretische Gesetze jeweils mit Hilfe des Extensionalitätsprinzips sowie der aussagenlogischen Gesetze aus Aufgabe 1:

    1. $(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$
    2. $(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C)$
    3. $(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$
    4. $(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

22. Mengenoperationen

    Gegeben seien die Mengen $A = \{2, 3, 4\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$. Bestimmen Sie die Mengen:

    1. $A \cap B$
    2. $A \cup B$
    3. $A \setminus B$
    4. $A \Delta B$
    5. $A \times B$

23. De Morgansche Regeln für Mengenoperationen

    Leiten Sie die Gültigkeit der De Morganschen Regeln für Vereinigungs- und Durchschnittsmenge aus den De Morganschen Regeln für Aussagenlogik her. De Morgansche Regeln für Mengen AB und M mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$:

    1. $M \setminus (A \cup B) \;=\; (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$
    2. $M \setminus (A \cap B) \;=\; (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

24. Aussagenlogik

    Bilden Sie die Wahrheitstabellen für die folgenden Ausdrücke:

1. $p \wedge (p \vee q)$
2. $(\neg q) \wedge (p \vee q)$
3. $p \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$
4. $q \wedge (q \Rightarrow \neg p)$
5. $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p$

25. *Aussagenlogische Gesetze*

    Beweisen Sie folgende aussagenlogische Gesetze mit Hilfe von Wahrheitstafeln:

    1. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$
    2. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$
    3. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$
    4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
    5. $(r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow ((r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow r))$
    6. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$
    7. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$
    8. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r))$

26. *Aussagen mit Quantoren*

    Übersetzen Sie folgende Aussagen in umgangssprachliche Sätze bzw. umgekehrt, wobei $s(x)$ für “x ist ein Snark”, $b(x)$ für “x ist ein Boojum”, $f(x, y)$ für “x findet y” stehen möge:

    1. $\exists x\ (s(x) \wedge b(x))$
    2. $\exists x\ \exists y\ (s(y) \wedge f(x, y))$
    3. $\forall x\ b(x) \Rightarrow (s(x) \wedge \neg f(x, x))$
    4. Jeder Snark, der von jemandem gefunden wird, ist ein Boojum.
    5. Alle Boojums sind Snarks, aber nicht alle Snarks sind Boojums.
    6. Jeder Boojum wird von jemandem gefunden.

27. *Zum Nachdenken und Diskutieren*

    1. Machen Sie sich den Unterschied zwischen dem umgangssprachlichen Gebrauch von “wenn … dann …” und der Bedeutung des aussagenlogischen $p \Rightarrow q$ an Beispielen wie “Wenn Du Deine Suppe aufißt, bekommst Du Dessert.” klar.
    2. Erklären Sie ihrem ~~Bank~~Sitznachbarn Ihre Einsichten.

3. Wiederholen Sie die beiden vorangehenden Schritte für umgangssprachlichen "oder" und aussagenlogisches $\vee$. Welche Unklarheit in der Bedeutung hat das umgangssprachliche "oder"?

28. Gruppen I

    Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit der Addition modulo 2 eine Gruppe ist. Explizit sind die Addition modulo 2 gegeben durch $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 0$. Ist es auch eine abelsche Gruppe?

29. Gruppen II

    Ist die Menge $\mathbb{Q}/\{0\}$, d.h. der rationalen Zahlen ohne die Null, eine Gruppe bezüglich der Multiplikation und warum? Falls ja, handelt es sich um eine abelsche Gruppe?

30. Halbgruppen

    Gegeben ist die Menge $A = \{a, b, c\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen a, b, c. Außerdem sollen die Produkte $a \cdot b = c, b \cdot c = a, c \cdot a = b$ gelten. Zeigen Sie, dass A mit dieser Multiplikation nur eine Halbgruppe sein kann.

31. Ringe

    Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, mit der Addition und Multiplikation modulo 4 ein Ring ist.

32. Ringe

    Ist die Menge $\mathbb{Q}$, d.h. der rationalen Zahlen, ein Ring bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation? Begründen Sie.

33. Körper

    Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit der Addition und Multiplikation modulo 2 ein Körper ist. Explizit sind die Operationen modulo 2 gegeben durch $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$.

34. Körper II

    Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, mit der Addition und Multiplikation modulo 4 kein Körper ist.

35. Körper III

    Ist die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + \sqrt{3}b | a, b \in \mathbb{Q}\}$ und der üblichen Addition eine Gruppe? Ist sie auch ein Körper mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{Q}$?

36. Zahlenmengen

Geben Sie an, ob die angebenen Zahlen Elemente von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und/oder $\mathbb{R}$ sind.

1. 5
2. 0
3. -17
4. $\frac{1}{5}$
5. $\frac{2}{7}$
6. $\frac{8}{3}$
7. $\frac{16}{4}$
8. $\sqrt{3}$
9. $\sqrt{16}$
10. π

37. Eigenschaften von Zahlenmengen

Geben Sie an, ob die gegebenen Zahlenmengen mit der üblichen Addition und Mulitplikation Halbgruppen, Gruppen, Ringe und/oder Körper sind. Sind die Gruppen alle abelsch?

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{N}_0$
3. $\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Q}$
5. $\mathbb{R}$

38. Vollständige Induktion

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

1. $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$
2. Das Produkt von drei aufeinander folgenden, natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

39. *Beweis mittels vollständiger Induktion*

Beweisen Sie folgenden Aussagen jeweils mittels vollständiger Induktion:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ n^2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ 2^n - 1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k$
3. $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-1}{2}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0; \infty)\ (1+x)^n \geq 1 + nx$

40. Irrationalität von $\sqrt{2}$

Zeigen Sie, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt, dass die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt.