# Übungen zum Brückenkurs B
# SoSe 2024

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Blatt 06 - 03. April, 2024

---

Die Aufgaben sind unterteilt in
$\circ$ Verständnisaufgaben, $\square$ Vertiefungsaufgaben, $*$ schwierige Aufgaben

---

Aufgabe 1: *Grenzwerte*
Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Funktionen.

a) $\circ \lim\limits_{x\to 0}(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1)$

b) $\circ \lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x}$

c) $\circ \lim\limits_{x\to \infty} \frac{2}{2+x}$

d) $\circ \lim\limits_{x\to \infty} e^{-x}$

e) $\circ \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{1-x}$

f) $\circ \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

g) $\square \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-1}{2x-5}$

h) $\square \lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2+3x-1}{2x^2+4x-5}$

Aufgabe 2: *Stetigkeit*
Untersuchen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen.

a) $\circ\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ , an der Stelle $x_0 = 0$

b) $\circ\ f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{für } x < 1 \\ x^2+1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ , an der Stelle $x_0 = 1$

c) $\square\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 4 & \text{für } x = 2 \end{cases}$ , an der Stelle $x_0 = 2$

d) $\square\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ , an der Stelle $x_0 = 1$

Aufgabe 3: *Differenzierbarkeit*
Geben Sie an, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar sind. Sind sie auch stetig differenzierbar?

a) ∘ $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) ∘ $f(x) = |x|$

c) □ $f(x) = \sqrt{x}$

d) □ $f(x) = e^{-x^2}$

e) ∗ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ , an der Stelle $x_0 = 0$

Aufgabe 4: *Ableitungen*
Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) ∘ $f(x) = x^2 + \sin(x)$

b) ∘ $f(x) = 3e^x + 4x^3$

c) ∘ $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

d) ∘ $f(x) = \frac{1}{x^3+2x^2+4}$

e) ∘ $f(x) = \frac{x^4+\sin(x)}{e^x+2}$

f) ∘ $f(x) = \sin(\cos(x))$

g) □ $f(x) = \ln(x+1)$

h) □ $f(x) = (x^2e^x)^2$

i) □ $f(x) = (2x)^{-\frac{3}{2}}$

j) □ $f(x) = \sqrt[3]{x}$

k) □ $f(x) = 2^x$

l) □ $f(x) = \log_3(2x^2)$

m) □ $f(x) = a\sin(bx+c) + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: *Höhere Ableitungen*
Bilden Sie die Ableitungen bis zur dritten Ordnung.

a) ∘ $f(x) = e^{2x} + e^x + 1$

b) □ $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

c) □ $f(x) = (x+1)^4$

Aufgabe 6: *Partielle Ableitungen*
Bilden Sie die partiellen Ableitungen jeweils nach den Variablen $x$ und $y$.

a) $\circ$ $f(x,y) = x^2 + y^3$

b) $\square$ $f(x,y) = \sin(x+2y)$

c) $\square$ $f(x,y) = e^x \ln(y)$

d) $\square$ $f(x,y) = \cos(x)$

e) $*$ $f(x) = x^y$

Aufgabe 7: $*$ *Beweise der Ableitungsregeln*
Beweisen Sie die mit Hilfe der vollständigen Induktion und der Produktregel, dass die Ableitung von $f(x) = x^n$ für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch $f'(x) = nx^{n-1}$.

Aufgabe 8: *Regeln von l'Hospital*
Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Funktionen mit den Regeln von l'Hospital.

a) $\square$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\square$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

c) $\square$ $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x - 1}{x}$

d) $*$ $\lim\limits_{x\to \infty} xe^{-x}$