

# Übungsblatt 3

zum Mathematischen Brückenkurs  
für Naturwissenschaftler:innen  
im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

## 1. Eigenschaften von reellen Funktionen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen  $f : \rightarrow$  jeweils, ob diese nach oben bzw. nach unten beschränkt, beschränkt, monoton wachsend bzw. fallend, streng monoton wachsend bzw. fallend, und gerade bzw. ungerade sind.

- |                       |                              |
|-----------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2$       | 6. $f(x) = x^5 + x^3 - x$    |
| 2. $f(x) = x$         | 7. $f(x) = (x^2 - 1)^2$      |
| 3. $f(x) = -x^2$      | 8. $f(x) = x +^{-x}$         |
| 4. $f(x) = \sin x$    | 9. $f(x) = x -^{-x}$         |
| 5. $f(x) = \sin(x^2)$ | 10. $f(x) = x \log(x^2 + 1)$ |

## 2. Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Grenzwerte:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$                         | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x}$                    |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{-\frac{1}{x^2}}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)^2}{1-x}$             |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2+1}$           | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$                          |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+1}$           | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sinh^3 x}$             |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \sqrt{x-1})$          | 10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |

## 3. Ableitung von Funktionen – I

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen ausgehend von der Definition der Ableitung:

- |                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| 1. $f(x) = x^2$ | 3. $f(y) = \sin y$ |
| 2. $f(x) = x^3$ | 4. $f(y) = \cos x$ |

#### 4. Ableitung von Funktionen – II

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen nach dem angegebenen Argument, und geben Sie die zugehörigen Definitionsbereiche an:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f(x) = x^2$  | 11. $f(y) = \frac{y^2-2y-1}{y^2+4}$                     |
| 2. $f(x) = x^n + x^p - c$ , $n \in \mathbb{N}$ , $p > 0$ | 12. $f(y) = \frac{y^2-2y-1}{y^2-4}$                     |
| 3. $g(\omega) = \sin(\omega t + \varphi)$                | 13. $f(x) = \frac{x+2x}{1+x^2}$                         |
| 4. $h(t) = \sin(\omega t + \varphi)$                     | 14. $s(x) = x\sqrt{1+x^2}$                              |
| 5. $f(s) = \sqrt{s^2+1}$                                 | 15. $w(t) = \sqrt{(1-x^2)^2}$                           |
| 6. $p(q) = -(q^2 - a^2)^2$                               | 16. $\sigma(t) =  t+1 $                                 |
| 7. $S(h) = \alpha h^2 + \beta h - \gamma + \omega h$     | 17. $r(t) = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t + \phi)$ |
| 8. $\lambda(x) = x \sin x + x^2 \cos x$                  | 18. $z(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x^2+2}$              |
| 9. $\rho(\sigma) = \sigma \log \sigma - \sigma$          | 19. $k(x) = \log \sqrt{x^4+1}$                          |
| 10. $\theta(z) = \sum_{k=1}^8 k z^k$                     | 20. $f(x) = \sqrt{\log(x^4+1)}$                         |

#### 5. Höhere Ableitungen

Bestimmen Sie jeweils die ersten, zweiten und dritten Ableitungen folgender Funktionen nach dem angegebenen Argument:

- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| 1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$    | 5. $u(\tau) = \sin^2(\tau^3)$              |
| 2. $f(x) = -\frac{x^2}{2}$  | 6. $g(x) = \sin x$                         |
| 3. $g(y) = y \log y$        | 7. $f(x) = \sin(\alpha x) + \alpha \cos x$ |
| 4. $h(r) = \frac{1}{1+r^2}$ | 8. $t(\alpha) = \tan \alpha$               |

#### 6. Taylor-Reihen

Entwickeln Sie folgende Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um den angegebenen Punkt:

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. $P(x) = x^2 + px + q$ , $x = p$ | 4. $f(y) = \log y$ , $y = 1$                 |
| 2. $f(x) = -x$ , $x = 0$           | 5. $f(x) = \log(x+1)$ , $x = 0$              |
| 3. $f(x) = \sin x$ , $x = \pi$     | 6. $g(\rho) = \frac{1}{1-\rho}$ , $\rho = 0$ |

#### 7. Extrema von Funktionen

Bestimmen Sie jeweils alle lokalen sowie die globalen Extrema der folgenden Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f(x) = \lambda(x^2 - v^2)^2$ , $x \in \mathbb{R}$ | 4. $f(x) =  x^2 - 1 $ , $x \in [-2; 5]$                                |
| 2. $f(x) = -x$ , $x \in [0; 1]$                       | 5. $f(x) = x^{2-x^2}$ , $x \in [0; \infty)$                            |
| 3. $f(x) = \sin x$ , $x \in [-\pi/2; \pi]$            | 6. $g(t) = \frac{t+1}{t^2-4}$ , $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ |