

Übungen zum Brückenkurs B

SoSe 2024

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Blatt 05 - 02. April, 2024

Die Aufgaben sind unterteilt in

◦ Verständnisaufgaben, ◻ Vertiefungsaufgaben, * schwierige Aufgaben

Aufgabe 1: ◦ *Übungen zur Injektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Definitionsbereichen injektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- a) $f(x) = 2x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- d) $k(x) = \sqrt{x+2}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$

Aufgabe 2: ◦ *Übungen zur Surjektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Wertebereichen surjektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- a) $f(x) = 2x + 3$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- d) $k(x) = \sqrt{x+2}$, $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$

Aufgabe 3: ◦ *Übungen zur Bijektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Definitions- und Wertebereichen bijektiv sind.

- a) $f(x) = 2x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- d) $k(x) = \sqrt{x+2}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$, $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$

Aufgabe 4: ◦ *Übungen zu Umkehrfunktionen*

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen auf den angegebenen Definitions- und Wertebereichen, falls diese existieren.

a) $f(x) = 2x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

d) $k(x) = \sqrt{x+2}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$, $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$

Aufgabe 5: ◦ *Unterschied Umkehrfunktion und inverse Funktion*

Finden Sie eine *inverse* Funktion für die folgenden Funktionen. Sind diese auch *Umkehrfunktionen* auf den angegebenen Definitions- und Wertebereichen?

a) $f(x) = 2x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

d) $k(x) = \sqrt{x+2}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$, $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$

Aufgabe 6: ◦ *Funktionengraphen*

Zeichnen Sie folgende Funktionen

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c) $f(x) = \sqrt{x+2} + 1$

d) $f(x) = e^{x-2} - 1$

Aufgabe 7: ◦ *Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis*

Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis und ein rechtwinkliges Dreieck mit dem angegebenen Winkel. Eine Seite soll dabei dem Radius des Einheitskreises entsprechen und die anderen beiden Seiten sollen jeweils parallel zur x- und y-Achse liegen. Tragen Sie außerdem Sinus und Kosinus in das Diagramm ein. Was sind deren Werte?

a) $\alpha = 45^\circ$

b) $\alpha = 60^\circ$

c) $\alpha = 0^\circ$

d) $\alpha = 90^\circ$

Aufgabe 8: ◦ *Graphen trigonometrischer Funktionen*

Zeichnen Sie folgende Trigonometrische Funktionen

- a) $\sin(x)$
- b) $\cos(x)$
- c) $\sin(x + \frac{\pi}{2})$
- d) $\sin(x - \pi) + 1$

Aufgabe 9: ◦ *Übungen zur Verkettung von Funktionen*

Berechnen Sie die Verkettung $p = f \circ g$ und $q = g \circ f$ der folgenden Funktionen.

- a) $f(x) = 2x + 3, g(x) = x^2$
- b) $f(x) = e^x, g(x) = 2x$
- c) $f(x) = x + 2, g(x) = \frac{1}{x}$
- d) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \cos(\frac{1}{x})$

Aufgabe 10: ◦ *Übungen zur Spiegelsymmetrie*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen spiegelsymmetrisch zur y-Achse sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- a) $f(x) = -x^{10} + 10$
- b) $g(x) = \sin(x)$
- c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$
- d) $k(x) = e^x$

Aufgabe 11: ◦ *Übungen zur Monotonie*

Untersuchen Sie die Monotonie der folgenden Funktionen und bestimmen Sie, ob sie monoton steigend, monoton fallend oder weder noch sind.

- a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
- b) $g(x) = \sin(x)$
- c) $h(x) = \sqrt{x}$
- d) $k(x) = e^x$

Aufgabe 12: ◦ *Übungen zur Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Beschränktheit der folgenden Funktionen und bestimmen Sie, ob sie beschränkt, unbeschränkt nach oben oder unbeschränkt nach unten sind.

- a) $f(x) = -x^2 + 3$
- b) $g(x) = \sin(x)$
- c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$
- d) $k(x) = e^x$