Übungen zum

Brueckenkurs B SoSe~~24~~ ~~Uebungen~~

SoSe 202~~3~~4

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Aufgabenkatalog - 25. März 2024

Die Aufgaben sind unterteilt in
∘ Verständnisaufgaben, ☐ Vertiefungsaufgaben, ∗ schwierige Aufgaben

---

Aufgabe 1: ∘ *Symbole im griechischen Alphabet I*
Benennen Sie die folgenden griechischen Buchstaben:

a) α
b) δ
c) Δ
d) θ
e) ϑ
f) ρ
g) ω

Aufgabe 2: ∘ *Symbole im griechischen Alphabet II*
Schreiben Sie die zugehörigen griechischen Buchstaben auf:

a) beta
b) gamma
c) epsilon
d) lambda
e) mü
f) nü

Aufgabe 3: ∘ *Einheiten und Größenordnungen*
Rechenen Sie (wenn möglich) die folgenden Größen in die angegebenen Einheiten um:

a) 10 cm in m, km, dm, mm
b) 57 s in cm, ms, µs, ns
c) 120 cm^3 in m^3, km^3, mm^3, L (Liter)

d) $2.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg}$ in g, µg, cm^3

e) $5\,\mathrm{N}$ in $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$, $\mathrm{J\,m^{-1}}$, $\mathrm{W\,s\,m^{-1}}$, $\mathrm{Pa\,m}$

Aufgabe 4: ○ *Wissenschaftliche Notation*
Schreiben Sie folgende Zahlen jeweils in wissenschaftlicher Notation bzw. als Dezimalbruch:

a) $0,003$

b) 1024

c) $1\,000\,000\,000$

d) $0,00000000723455$

e) $1,2 \times 10^{-5}$

f) $9,931 \times 10^{9}$

g) $7,04 \times 10^{-1}$

h) $1,01 \times 10^{3}$

Aufgabe 5: ○ *Mengen*
Listen Sie die Elemente der Mengen auf.

a) Menge aller Vokale des deutschen Alphabets

b) Menge der Buchstaben des Wortes Summe

c) Menge der geraden natürlichen Zahlen kleiner als 13

d) Menge der Ziffern der Zahl 1494

Aufgabe 6: □ *Beschreibende Mengendarstellungen*
Finden Sie eine beschreibende Darstellung für die Mengen.

a) $\{\mathrm{l}, \mathrm{a}, \mathrm{g}, \mathrm{e}, \mathrm{r}\}$

b) {Nord, West, Süd, Ost}

c) $\{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$

d) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}\}$

e) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

f) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$

g) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

h) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$

Aufgabe 7: □ *Aufzählende Mengendarstellungen*
Geben Sie die Mengen in aufzählender Darstellung an.

- $\{k^2 | k \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq k \leq 7\}$
- $\{k^2 | k \in \mathbb{Z} \text{ und } -7 \leq k \leq 7\}$
- $\{6k + 3 | k \in \mathbb{Z} \text{ und } -3 \leq k \leq 3\}$
- $\{\frac{1}{k} | k \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{k} \in \mathbb{N}\}$
- $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ und } x \notin \mathbb{N}\}$

- $\{\frac{1}{3k} | \ k \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\ \}$

Aufgabe 8: ∘ *Mengengleichheit*
Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen jeweils identisch sind (es gibt insgesamt fünf verschiedene Übereinstimmungen):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x|x \in \mathbb{N},\, x \cdot x = 4\} & A_7 &= \{-2, 2\} \\
A_2 &= \{x|x \in \mathbb{Q},\, x \notin \mathbb{Z}\} & A_8 &= \{0\} \\
A_3 &= \{2x|x \in \mathbb{Z},\, x - 1 \leq x \leq 1\} & A_9 &= \{2\} \\
A_4 &= \{x|x \in \mathbb{Z},\, x \cdot x = 4\} & A_{10} &= \{-2, 0, 2\} \\
A_5 &= \{x|x \in \mathbb{N}_0,\, x + x = 0\} & A_{11} &= \emptyset \\
A_6 &= \{2x|x \in \mathbb{N},\, 0 \leq x \leq 1\} & A_{12} &= \{\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9: □ *Mengenbeschreibung*
Ordnen Sie den Grundmengen

$$\begin{array}{lll}
\Omega_1 = \{2, 3, 4, \ldots, 12\} & \Omega_2 = \{1, 2, 3, \ldots, 31\} & \Omega_3 = \mathbb{N}_0 \\
\Omega_4 = \mathbb{R} & \Omega_5 = \{(a, b)|a, b \in \{1, \ldots, 6\}\} & \Omega_6 = [0, \infty)
\end{array}$$

jeweils eine der folgenden Situationen zu:

a) Jahresumsatz einer Firma
b) Geburtstage im Januar
c) Augensummen beim zweifachen Würfelwurf
d) Zweifacher Würfelwurf
e) Lufttemperaturen im März
f) Anzahl weltweiter Erdbeben pro Jahr

Aufgabe 10: ∘ *Teilmengen*
Entscheiden Sie, welche der Mengen Teilmengen der Menge $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ sind.

a) $B_1 = \{0\}$
b) $B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
c) $B_3 = \emptyset$
d) $B_4 = \{0, -1\}$
e) $B_5 = \{3, 0, 2, -1, 1\}$
f) $B_6 = \{1, 0, -2\}$

Aufgabe 11: ∘ *Obermenge*
Entscheiden Sie, welche der Mengen Obermengen der Menge $A = \{-1, 2, 3\}$ sind.

a) $B_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $B_2 = \{-1, 0, 1, 3\}$
c) $B_3 = \emptyset$
d) $B_4 = \{-5, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $B_5 = \{2\}$
f) $B_6 = \{3, 2, -1\}$

Aufgabe 12: ○ *Schnittmengen*
Bilden Sie die Schnittmengen mit der Menge $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$:

a) $B_1 = \{0\}$
b) $B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
c) $B_3 = \emptyset$
d) $B_4 = \{0, -1\}$
e) $B_5 = \{3, 0, 2, -1, 1\}$
f) $B_6 = \{1, 0, -2\}$

Aufgabe 13: ○ *Vereinigungsmenge*
Bilden Sie die Vereinigungsmenge mit der Menge $A = \{-1, 2, 3\}$:

a) $B_1 = \{4, 5, 6\}$
b) $B_2 = \{-1, 0, 1, 3\}$
c) $B_3 = \emptyset$
d) $B_4 = \{-5, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $B_5 = \{2\}$
f) $B_6 = \{3, 2, -1\}$

Aufgabe 14: □ *Mächtigkeit*
Bestimmen Sie die Mächtigkeit folgender Mengen

a) $\{1, 4, -3\}$
b) {L,i,s,a}
c) $\emptyset$
d) $\mathbb{N}$
e) $\{\emptyset, 1, 2, 3, 1, 2\}$
f) $\mathcal{P}\left(\{1, 2, 3\}\right)$
g) $\mathcal{P}(k, r, u, g)$
h) $\mathcal{P}(\text{blau}, \text{rot})$

i) $\mathcal{P}(\emptyset)$

Aufgabe 15: ∘ *Mengenoperationen*
Gegeben sind die Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ sowie die Mengen $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $C = \{5, 7, 8\}$. Bestimmen Sie:

(a) $A \cap B$
(b) $A \cup C$
(c) $A \cap B \cap C$
(d) $A \cup \overline{C}$
(e) $B \cap \overline{C}$
(f) $C \cup A \cup B$
(g) $B \setminus C$
(i) $C \setminus B$
(i) $(\overline{A \cup B}) \cap C$
(j) $(A \cup B) \setminus C$
(k) $(B \setminus C) \cap A$
(l) $A \cap (A \setminus C)$

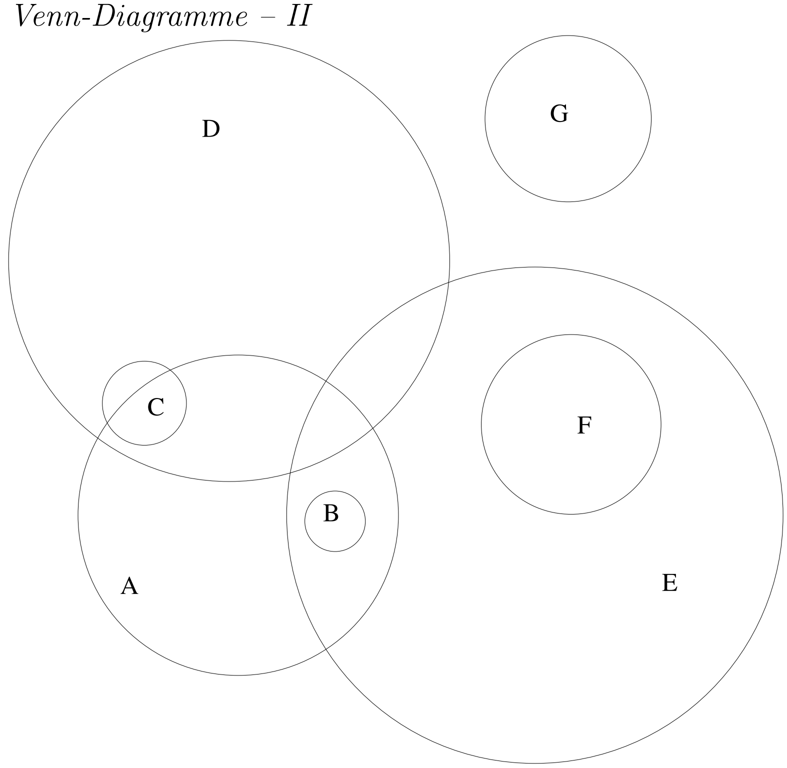
Aufgabe 16: ∘ *Einfache Operationen mit endlichen Mengen*
Geben Sie für die folgenden Paare von Mengen A, B jeweils $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \times B$ und $B \times A$ an:

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = A$
c) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{A\}$

Aufgabe 17: □ *Venn-Diagramme – I*
Zeichnen Sie jeweils ein Venn-Diagram, das die folgenden Verhältnisse zwischen Mengen widerspiegelt:

a) $B \subset A$, $C \cap A = \emptyset$
b) $A \cap B \neq \emptyset$, $\neg((A \subseteq B) \vee (B \subseteq A))$, $C \subset A$, $C \cap B = \emptyset$
c) $B \subset A$, $C \subset B$, $D \subset A$, $D \cap B = \emptyset$

Aufgabe 18: □ *Venn-Diagramme – II*



Betrachten Sie das obenstehende Venn-Diagramm und bestimmen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

a) $A \subseteq B$

b) $B \subset A$

c) $B \cap C = \emptyset$

d) $B \subseteq E$

e) $B \subset (A \cap E)$

f) $C \subseteq (A \cap D)$

g) $C \subseteq (A \cup D)$

h) $F \subset (E \backslash D)$

i) $C \subseteq (D \backslash A)$

j) $C \cap (D \backslash A) = \emptyset$

k) $F \subset (E \cup G)$

l) $C \subset (D \backslash E)$

m) $(C \cap A) \subset D$

n) $G \cup F = \emptyset$

o) $F \backslash E = \emptyset$

p) $(B \cap C) \subseteq (D \cap G)$

Aufgabe 19: $*$ *Mengentheoretische Gesetze*
Beweisen Sie folgende Mengentheoretische Gesetze jeweils indem sie zeigen, dass die linke und rechte Seite jeweils Teilmengen voneinander sind:

a) $(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$

b) $(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C)$

c) $(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$

d) $(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

Aufgabe 20: □ *Mengenoperationen*
Gegeben seien die Mengen $A = \{2, 3, 4\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$. Bestimmen Sie die Mengen:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$

d) $A \Delta B$

e) $A \times B$

Aufgabe 21: $*$ *De Morgansche Regeln für Mengenoperationen*
Leiten Sie die Gültigkeit der De Morganschen Regeln für Vereinigungs- und Durchschnittsmenge aus den De Morganschen Regeln für Aussagenlogik her. De Morgansche Regeln für Mengen AB und M mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$:

a) $M \setminus (A \cup B) \ = \ (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

b) $M \setminus (A \cap B) \ = \ (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

Aufgabe 22: *Aussagenlogik*
Bilden Sie die Wahrheitstabellen für die folgenden Ausdrücke:

a) $p \wedge (p \vee q)$

b) $(\neg q) \wedge (p \vee q)$

c) $p \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$

d) $q \wedge (q \Rightarrow \neg p)$

e) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p$

Aufgabe 23: ∘ *Aussagenlogische Gesetze*
Beweisen Sie folgende aussagenlogische Gesetze mit Hilfe von Wahrheitstafeln:

a) $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$

b) $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$

c) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$

d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

e) $(r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow ((r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow r))$

f) $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$

g) $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$

h) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r))$

Aufgabe 24: ∘ *Aussagen mit Quantoren*
Übersetzen Sie folgende Aussagen in umgangssprachliche Sätze bzw. umgekehrt, wobei $s(x)$ für “x ist ein Snark”, $b(x)$ für “x ist ein Boojum”, $f(x, y)$ für “x findet y” stehen möge:

a) $\exists x \ (s(x) \wedge b(x))$

b) $\exists x \ \exists y \ (s(y) \wedge f(x, y))$

c) $\forall x \ b(x) \Rightarrow (s(x) \wedge \neg f(x, x))$

d) Jeder Snark, der von jemandem gefunden wird, ist ein Boojum.

e) Alle Boojums sind Snarks, aber nicht alle Snarks sind Boojums.

f) Jeder Boojum wird von jemandem gefunden.

Aufgabe 25: ∘ *Zum Nachdenken und Diskutieren* a)
Machen Sie sich den Unterschied zwischen dem umgangssprachlichen Gebrauch von “wenn . . . dann . . . ” und der Bedeutung des aussagenlogischen $p \Rightarrow q$ an Beispielen wie “Wenn Du Deine Suppe aufißt, bekommst Du Dessert.” klar.

b) Erklären Sie ihrem Sitznachbarn Ihre Einsichten.

c) Wiederholen Sie die beiden vorangehenden Schritte für umgangssprachlichen “oder” und aussagenlogisches $\vee$. Welche Unklarheit in der Bedeutung hat das umgangssprachliche “oder”?

Aufgabe 26: □ *Gruppen I*
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit der Addition modulo 2 eine Gruppe ist. Explizit sind die Addition modulo 2 gegeben durch $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 0$. Ist es auch eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 27: ○ *Gruppen II*
Ist die Menge $\mathbb{Q}/\{0\}$, d.h. der rationalen Zahlen ohne die Null, eine Gruppe bezüglich der Multiplikation und warum? Falls ja, handelt es sich um eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 28: □ *Halbgruppen*
Gegeben ist die Menge $A = \{a, b, c\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen a, b, c. Außerdem sollen die Produkte $a \cdot b = c, b \cdot c = a, c \cdot a = b$ gelten. Zeigen Sie, dass A mit dieser Multiplikation nur eine Halbgruppe sein kann.

Aufgabe 29: ○ *Ringe I*
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, mit der Addition und Multiplikation modulo 4 ein Ring ist.

Aufgabe 30: □ *Ringe II*
Ist die Menge $\mathbb{Q}$, d.h. der rationalen Zahlen, ein Ring bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation? Begründen Sie.

Aufgabe 31: ○ *Körper I*
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit der Addition und Multiplikation modulo 2 ein Körper ist. Explizit sind die Operationen modulo 2 gegeben durch $0+0 = 0, 0+1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$.

Aufgabe 32: $*$ *Körper II*
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, mit der Addition und Multiplikation modulo 4 kein Körper ist.

Aufgabe 33: ○ *Körper III*
Ist die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + \sqrt{3}b | a, b \in \mathbb{Q}\}$ und der üblichen Addition eine Gruppe? Ist sie auch ein Körper mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 34: ○ *Zahlenmengen*
Geben Sie an, ob die angebenen Zahlen Elemente von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und/oder $\mathbb{R}$ sind.

a) 5
b) 0
c) -17
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{2}{7}$
f) $\frac{8}{3}$
g) $\frac{16}{4}$
h) $\sqrt{3}$
i) $\sqrt{16}$
j) π

Aufgabe 35: ∘ *Eigenschaften von Zahlenmengen*
Geben Sie an, ob die gegebenen Zahlenmengen mit der üblichen Addition und Mulitplikation Halbgruppen, Gruppen, Ringe und/oder Körper sind. Sind die Gruppen alle abelsch?

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{N}_0$

c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Q}$

e) $\mathbb{R}$

Aufgabe 36: ∗ *Vollständige Induktion*
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

a) $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$

b) Das Produkt von drei aufeinander folgenden, natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

Aufgabe 37: ∗ *Beweis mittels vollständiger Induktion*
Beweisen Sie folgenden Aussagen jeweils mittels vollständiger Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}\ n^2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}\ 2^n - 1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k$

c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-1}{2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

e) $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

f) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;\infty)\ (1+x)^n \geq 1 + nx$

Aufgabe 38: ∗ *Irrationalität von* $\sqrt{2}$
Zeigen Sie, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt, dass die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt.