Übungen zum Brückenkurs B
SoSe 2024

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Blatt 11 - 10. April, 2024

Die Aufgaben sind unterteilt in
$\circ$ Verständnisaufgaben, $\square$ Vertiefungsaufgaben, $*$ schwierige Aufgaben

---

Aufgabe 1: $\circ$ *Partialbruchzerlegung*
Bilden Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\ .$$

Aufgabe 2: *Vektoroperationen*
Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}$ sowie $\lambda\vec{a}$ und $\lambda\vec{b}$.

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 5$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 0$

c) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1$

d) $\square\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2$

Aufgabe 3: *Lineare Abhängigkeit*
Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: *Skalarprodukt*
Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ folgender Vektoren.

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: *Betrag von Vektoren*
Bestimmen Sie den Betrag $|\vec{a}|$ folgender Vektoren.

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: *Winkel zwischen Vektoren*
Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Welche der Vektoren sind orthogonal zueinander?

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

d) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: *Kreuzprodukt*
Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ folgender Vektoren. Überprüfen Sie das Ergebnis, in dem Sie $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$ berechnen.

a) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) □ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8: *Lineare Abhängigleit mittels Kreuzprodukt*
Testen Sie mit Hilfe des Kreuzprduktes ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig oder unabhängig sind.

a) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) ○ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9: *Flächeninhalte*
Bestimmen Sie die Fläche des Parallelograms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10: *Volumeninhalte*
Bestimmen Sie das Volumen des Spates, der durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

a) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\circ\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11: $*$ *Summendarstellung*
Schreiben Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der (einsteinschen) Summenschreibweise $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_i$ die üblichen kartesichen Basisvektoren sind.

Aufgabe 12: $*$ *Andere Koordinatensysteme*
Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ in einem neuen Koordinatensystem, welches durch die Basisvektoren $\vec{e}_1\,' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{e}_2\,' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ bestimmt ist.

Aufgabe 13: $*$ *Kronecker Delta und Levi-Civita Tensor*
Das sogenannte Kronecker-Delta δ_{ij} kann definiert werden als

$$\delta_{ij} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

wobei $\vec{e}_i$ die üblichen kartesichen Basisvektoren sind. Eine weitere hilfreiche Größe ist der sogenannte Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk}. Dieser kann definiert werden als

$$\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \begin{cases} 1 & \text{für eine zyklische Permutation von } i, j, k \\ -1 & \text{für eine antizyklische Permutation von } i, j, k \\ 0 & \text{für alle anderen Fälle, d.h. wenn zwei Indizes übereinstimmen} \end{cases}$$

Vereinfachen Sie nun die folgenden Ausdrücke.

a) $\sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i2}$

b) $\sum_{i=1}^{3} (a_i - a_j) \delta_{ij}$

c) $\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}$

d) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{i1k} \delta_{i2}$