

Brueckenkurs SoSe24 Uebungen

SoSe 2023

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Aufgabenkatalog - März, 2024

1. Übungen zur Injektivität

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
2. $g(x) = e^x$
3. $h(x) = \sin(x)$
4. $k(x) = \sqrt{x}$
5. $m(x) = x^3$
6. $n(x) = \frac{1}{x}$
7. $p(x) = |x|$
8. $q(x) = x^2 + 2x + 1$
9. $r(x) = e^{x^2}$
10. $s(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

2. Übungen zur Surjektivität

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen surjektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$
3. $h(x) = x^2$
4. $k(x) = \sin(x)$
5. $m(x) = e^x$
6. $n(x) = |x|$
7. $p(x) = \operatorname{sgn}(x)$
8. $q(x) = x^3$
9. $r(x) = e^{x^2}$

$$10. s(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

3. Übungen zur Bijektivität

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen bijektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

$$1. f(x) = 2x + 3$$

$$2. g(x) = x^3$$

$$3. h(x) = e^x$$

$$4. k(x) = \sin(x)$$

$$5. m(x) = \frac{1}{x}$$

$$6. n(x) = x^2$$

$$7. p(x) = \sqrt{x}$$

$$8. q(x) = |x|$$

$$9. r(x) = x$$

$$10. s(x) = -x + 1$$

4. Übungen zu Umkehrfunktionen

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen, falls diese existieren.

$$1. f(x) = 3x + 4$$

$$2. g(x) = \frac{1}{x}$$

$$3. h(x) = x^2 + 5$$

$$4. k(x) = \sin(x)$$

$$5. m(x) = e^x$$

$$6. n(x) = x^3$$

$$7. p(x) = \sqrt{x}$$

$$8. q(x) = |x|$$

$$9. r(x) = x + 2$$

$$10. s(x) = \frac{x}{2}$$

5. Unterschied Umkehrfunktion und inverse Funktion

Finden Sie eine inverse Funktion für die folgenden Funktionen. Sind diese auch Umkehrfunktionen?

$$1. f(x) = 3x + 4$$

$$2. g(x) = \frac{1}{x}$$

3. $h(x) = x^2 + 5$

4. $k(x) = \sin(x)$

5. $m(x) = e^x$

6. $n(x) = x^3$

7. $p(x) = \sqrt{x}$

8. $q(x) = |x|$

9. $r(x) = x + 2$

10. $s(x) = \frac{x}{2}$

6. Funktionengraphen

Zeichnen Sie folgende Funktionen

1. $f(x) = 3x + 4$

2. $f(x) = x^2 + 2x + 4$

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$

4. $f(x) = 2ex - 3$

5. $f(x) = 3 \log(x - 1) + 4$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

7. $f(x) = (x^5 - 2)$

8. $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 2)$

7. Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Zeichnen Sie in einen Einheitskreis ein Dreieck mit einem Punkt auf dem Kreis, einer Seite auf der x-Achse und dem unten angegebenen Winkel. Zeichnen Sie Sinus, Kosinus und Tangens ein. Was sind deren Werte?

1. $\alpha = 45^\circ$

2. $\alpha = 90^\circ$

3. $\alpha = 135^\circ$

4. $\alpha = 180^\circ$

5. $\alpha = 225^\circ$

8. Graphen trigonometrischer Funktionen

Zeichnen Sie folgende Trigonometrische Funktionen

1. $\sin(x)$

2. $\cos(x)$

3. $\tan(x)$
4. $\sin(x + 2\pi)$
5. $2\sin(x - \frac{\pi}{2})$
6. $\cos(5x)$
7. $\tan(x + \frac{\pi}{2})$

9. Umformungen von trigonometrischen Funktionen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

1. $\tan(x) \cos(x)$
2. $\csc(x) \sin(x)$
3. $\sec(x) \sin(x)$
4. $\cot(x) \sin(x)$
5. $\frac{\tan(x)}{\sec(x)}$

10. Übungen zur Verkettung von Funktionen

Berechnen Sie die Verkettung $r = f \circ g$ und $s = g \circ f$ der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = 2x + 3, g(x) = x^2$
2. $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$
5. $f(x) = 3x, g(x) = \frac{1}{x}$
6. $f(x) = |x|, g(x) = x^2$
7. $f(x) = x + 2, g(x) = \frac{1}{x}$
8. $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x}$
9. $f(x) = \frac{x}{2}, g(x) = \cos(x)$
10. $f(x) = x^2 - 3, g(x) = x^3$

11. Übungen zur Spiegelsymmetrie

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen spiegelsymmetrisch zur y-Achse sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = \sin(x)$
3. $h(x) = \frac{1}{x}$
4. $k(x) = e^x$

5. $m(x) = |x|$
6. $n(x) = \sqrt{x}$
7. $p(x) = x^3$
8. $q(x) = e^{x^2}$
9. $r(x) = x$
10. $s(x) = -x + 2$

12. Übungen zur Monotonie

Untersuchen Sie die Monotonie der folgenden Funktionen und bestimmen Sie, ob sie monoton steigend, monoton fallend oder weder noch sind.

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = \sin(x)$
3. $h(x) = \frac{1}{x}$
4. $k(x) = e^x$
5. $m(x) = |x|$
6. $n(x) = \sqrt{x}$
7. $p(x) = x^3$
8. $q(x) = e^{x^2}$
9. $r(x) = x$
10. $s(x) = -x + 2$

13. Übungen zur Beschränktheit

Untersuchen Sie die Beschränktheit der folgenden Funktionen und bestimmen Sie, ob sie beschränkt, unbeschränkt nach oben oder unbeschränkt nach unten sind.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $g(x) = \sin(x)$
3. $h(x) = e^x$
4. $k(x) = \sqrt{x}$
5. $m(x) = x^3$
6. $n(x) = \ln(x)$
7. $p(x) = e^{x^2}$
8. $q(x) = x^2 - 1$
9. $r(x) = \frac{x}{2}$
10. $s(x) = 2^x$

14. Übungen zu Grenzwerten

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Funktionen.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$
8. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1} - 2$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x - 5}$
10. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

15. Übungen zur Stetigkeit

Untersuchen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, bei $x = 1$
2. $g(x) = \sin(x)$, bei $x = \pi$
3. $h(x) = e^x$, bei $x = 0$
4. $k(x) = \sqrt{x}$, bei $x = 0$
5. $m(x) = x^3$, bei $x = 2$
6. $n(x) = \ln(x)$, bei $x = 1$
7. $p(x) = 2^x$, bei $x = 0$
8. $q(x) = x^2 - 1$, bei $x = 1$
9. $r(x) = \frac{x}{2}$, bei $x = 3$
10. $s(x) = \frac{1}{x}$, bei $x = 0$

16. Definitions- und Wertebereich

Was sind die (maximal möglichen) Definitions- und dazugehörigen Wertebereiche der folgenden Funktionen

1.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

2.

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

3.

$$f(x) = e^{5x+3}$$

4.

$$f(x) = \sqrt{1 - e^x}$$

17. Definitionsbereich

Was sind die (maximal möglichen) Definitionsbereiche der folgenden Funktionen:

1.

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x-6}$$


2.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+5}$$

3.

$$f(x) = \log(x^2 - x)$$

18. Funktionen

Bestimmen Sie Nullstellen, Pole und Asymptoten folgender Funktionen und fertigen Sie jeweils eine Skizze an. 

1.

$$y = 3x - 4$$

2.

$$y = x^3 - 2$$

3.

$$y = x^2 - 2x - 3$$

4.

$$y = -\frac{1}{x}$$

5.

$$y = \frac{1}{x^2+x+1}$$

6.

$$y = \frac{1}{x} + x$$

19. Trigonometrische Funktionen

Zeichnen Sie die folgenden Funktionen und bestimmen Sie Nullstellen und Periode.

1.

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

2.

$$f(x) = \sin\left(3x + \frac{1}{4}\right)$$

3.

$$f(x) = \cos(4\pi x)$$

20. Mehr Trigonometrische Funktionen

Vervollständigen Sie die Tabelle mit Hilfe der trigonometrischen Formeln und den Werten $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. **3. TODO**

21. Hyperbolische Funktionen

Beweisen Sie die folgende Relation für die Hyperbelfunktionen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

22. Umkehrfunktion

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender Funktionen und geben Sie deren Definitionsbereich und Wertebereiche an:

1.

$$f(x) = 3x - 5$$

2.

$$f(x) = \ln(2x)$$

3.

$$f(x) = 2x^3 + 2$$

4.

$$f(x) = \sin x - 2$$

23. Mehr Grenzwerte

Bestimmen Sie

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 3x^4}{e^x - 1}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 3x}{x}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 5x}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x - \sqrt{(1 + 2x)^3}}{x \sin x}$$