

Update

Brueckenkurs SoSe24 Uebungen

SoSe 2023

Prof. Dr. J. Harz / S. Weber

Aufgabenkatalog - März, 2024

Die Aufgaben sind unterteilt in

○ Verständnisaufgaben, □ Vertiefungsaufgaben, * schwierige Aufgaben

Aufgabe 1: ○ *Übungen zur Injektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $g(x) = e^x$

c) $h(x) = \sin(x)$

d) $k(x) = \sqrt{x}$

e) $m(x) = x^3$

f) $n(x) = \frac{1}{x}$

g) $p(x) = |x|$

h) $q(x) = x^2 + 2x + 1$

i) $r(x) = e^{x^2}$

j) $s(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Aufgabe 2: ○ *Übungen zur Surjektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen surjektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $h(x) = x^2$

d) $k(x) = \sin(x)$

e) $m(x) = e^x$

f) $n(x) = |x|$

g) $p(x) = \operatorname{sgn}(x)$

- h) $q(x) = x^3$
- i) $r(x) = e^{x^2}$
- j) $s(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Aufgabe 3: ◦ *Übungen zur Bijektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen bijektiv sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- a) $f(x) = 2x + 3$
- b) $g(x) = x^3$
- c) $h(x) = e^x$
- d) $k(x) = \sin(x)$
- e) $m(x) = \frac{1}{x}$
- f) $n(x) = x^2$
- g) $p(x) = \sqrt{x}$
- h) $q(x) = |x|$
- i) $r(x) = x$
- j) $s(x) = -x + 1$

Aufgabe 4: ◦ *Übungen zu Umkehrfunktionen*

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen, falls diese existieren.

- a) $f(x) = 3x + 4$
- b) $g(x) = \frac{1}{x}$
- c) $h(x) = x^2 + 5$
- d) $k(x) = \sin(x)$
- e) $m(x) = e^x$
- f) $n(x) = x^3$
- g) $p(x) = \sqrt{x}$
- h) $q(x) = |x|$
- i) $r(x) = x + 2$
- j) $s(x) = \frac{x}{2}$

Aufgabe 5: ◦ *Unterschied Umkehrfunktion und inverse Funktion*

Finden Sie eine inverse Funktion für die folgenden Funktionen. Sind diese auch Umkehrfunktionen?

- a) $f(x) = 3x + 4$

- b) $g(x) = \frac{1}{x}$
- c) $h(x) = x^2 + 5$
- d) $k(x) = \sin(x)$
- e) $m(x) = e^x$
- f) $n(x) = x^3$
- g) $p(x) = \sqrt{x}$
- h) $q(x) = |x|$
- i) $r(x) = x + 2$
- j) $s(x) = \frac{x}{2}$

Aufgabe 6: \circ *Funktionengraphen*
 Zeichnen Sie folgende Funktionen

- a) $f(x) = 3x + 4$
- b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$
- c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$
- d) $f(x) = 2ex - 3$
- e) $f(x) = 3 \log(x - 1) + 4$
- f) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
- g) $f(x) = (x^5 - 2)$
- h) $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 2)$

Aufgabe 7: \circ *Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis*
 Zeichnen Sie in einen Einheitskreis ein Dreieck mit einem Punkt auf dem Kreis, einer Seite auf der x-Achse und dem unten angegebenen Winkel. Zeichnen Sie Sinus, Kosinus und Tangens ein. Was sind deren Werte?

- a) $\alpha = 45^\circ$
- b) $\alpha = 90^\circ$
- c) $\alpha = 135^\circ$
- d) $\alpha = 180^\circ$
- e) $\alpha = 225^\circ$

Aufgabe 8: \circ *Graphen trigonometrischer Funktionen*
 Zeichnen Sie folgende Trigonometrische Funktionen

- a) $\sin(x)$
- b) $\cos(x)$

- c) $\tan(x)$
- d) $\sin(x + 2\pi)$
- e) $2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$
- f) $\cos(5x)$
- g) $\tan(x + \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 9: ◦ *Umformungen von trigonometrischen Funktionen*
 Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

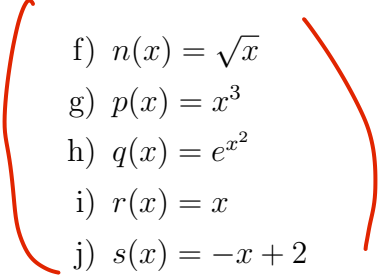
- a) $\tan(x) \cos(x)$
- b) $\csc(x) \sin(x)$
- c) $\sec(x) \sin(x)$
- d) $\cot(x) \sin(x)$
- e) $\frac{\tan(x)}{\sec(x)}$

Aufgabe 10: ◦ *Übungen zur Verkettung von Funktionen*
 Berechnen Sie die Verkettung $r = f \circ g$ und $s = g \circ f$ der folgenden Funktionen.

- a) $f(x) = 2x + 3, g(x) = x^2$
- b) $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$
- c) $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$
- d) $f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$
- e) $f(x) = 3x, g(x) = \frac{1}{x}$
- f) $f(x) = |x|, g(x) = x^2$
- g) $f(x) = x + 2, g(x) = \frac{1}{x}$
- h) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x}$
- i) $f(x) = \frac{x}{2}, g(x) = \cos(x)$
- j) $f(x) = x^2 - 3, g(x) = x^3$

Aufgabe 11: ◦ *Übungen zur Spiegelsymmetrie*
 Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen spiegelsymmetrisch zur y-Achse sind. Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- a) $f(x) = x^2$
- b) $g(x) = \sin(x)$
- c) $h(x) = \frac{1}{x}$
- d) $k(x) = e^x$
- e) $m(x) = |x|$



f) $n(x) = \sqrt{x}$

g) $p(x) = x^3$

h) $q(x) = e^{x^2}$

i) $r(x) = x$

j) $s(x) = -x + 2$

Aufgabe 12: ◦ *Übungen zur Monotonie*

Untersuchen Sie die Monotonie der folgenden Funktionen und bestimmen Sie, ob sie monoton steigend, monoton fallend oder weder noch sind.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \sin(x)$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$

d) $k(x) = e^x$

e) $m(x) = |x|$

f) $n(x) = \sqrt{x}$

g) $p(x) = x^3$

h) $q(x) = e^{x^2}$

i) $r(x) = x$

j) $s(x) = -x + 2$

Aufgabe 13: ◦ *Übungen zur Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Beschränktheit der folgenden Funktionen und bestimmen Sie, ob sie beschränkt, unbeschränkt nach oben oder unbeschränkt nach unten sind.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \sin(x)$

c) $h(x) = e^x$

d) $k(x) = \sqrt{x}$

e) $m(x) = x^3$

f) $n(x) = \ln(x)$

g) $p(x) = e^{x^2}$

h) $q(x) = x^2 - 1$

i) $r(x) = \frac{x}{2}$

j) $s(x) = 2^x$

Aufgabe 14: ◦ *Übungen zu Grenzwerten*

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Funktionen.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$

h) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1} - 2$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x - 5}$

j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Aufgabe 15: ○ *Übungen zur Stetigkeit*

Untersuchen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, bei $x = 1$

b) $g(x) = \sin(x)$, bei $x = \pi$

c) $h(x) = e^x$, bei $x = 0$

d) $k(x) = \sqrt{x}$, bei $x = 0$

e) $m(x) = x^3$, bei $x = 2$

f) $n(x) = \ln(x)$, bei $x = 1$

g) $p(x) = 2^x$, bei $x = 0$

h) $q(x) = x^2 - 1$, bei $x = 1$

i) $r(x) = \frac{x}{2}$, bei $x = 3$

j) $s(x) = \frac{1}{x}$, bei $x = 0$

Diese Aufgaben sind schwieriger
+ schön, aber entsprechen von der
Überschrift vorherigen Aufgaben. Bitte
↓ merken.

Aufgabe 16: □ *Definitions- und Wertebereich*

Was sind die (maximal möglichen) Definitions- und dazugehörigen Wertebereiche der folgenden Funktionen

a)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

b)

$$f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$$

c)

$$f(x) = e^{5x+3}$$

d)

$$f(x) = \sqrt{1 - e^x}$$

Aufgabe 17: ☐ *Definitionsbereich*

Was sind die (maximal möglichen) Definitionsbereiche der folgenden Funktionen:

a)

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + x - 6}$$

b)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 5}$$

c)

$$f(x) = \log(x^2 - x)$$

Aufgabe 18: ☐ *Funktionen*

Bestimmen Sie die Nullstellen und Pole folgender Funktionen und fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

a)

$$y = 3x - 4$$

b)

$$y = x^3 - 2$$

c)

$$y = x^2 - 2x - 3$$

d)

$$y = -\frac{1}{x}$$

e)

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

f)

$$y = \frac{1}{x} + x$$

Aufgabe 19: ☐ *Trigonometrische Funktionen*

Zeichnen Sie die folgenden Funktionen und bestimmen Sie Nullstellen und Periode.

a)

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

b)

$$f(x) = \sin\left(3x + \frac{1}{4}\right)$$

c)

$$f(x) = \cos(4\pi x)$$

Aufgabe 20: ☐ *Umkehrfunktion*

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender Funktionen und geben Sie deren Definitions- und Wertebereiche an:

a)

$$f(x) = 3x - 5$$

b)

$$f(x) = \ln(2x)$$

c)

$$f(x) = 2x^3 + 2$$

d)

$$f(x) = \sin x - 2$$

Aufgabe 21: ☐ *Mehr Grenzwerte*

Bestimmen Sie

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 3x^4}{e^x - 1}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 3x}{x}$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 5x}$$

g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x - \sqrt{(1 + 2x)^3}}{x \sin x}$$