ÜBERBLICK: GRUNDLAGEN DER ANSCHAULICHEN VEKTORGEOMETRIE

Inhalt

Abschnitt

Dieses Kapitel (ohne Trainings- und Quizaufgaben) als pdf-Dokument herunterladen. (> 6MB)

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Kapitels schon beherrschen, können Sie direkt zur Schlussprüfung gelangen.

Lernziele

- Sie können Vektoren als Pfeilklassen interpretieren (Abschnitt 1).
- Sie können Vektoren durch Komponenten darstellen (Abschnitt 2).
- Sie können Punktmengen im Raum mittels Vektoren untersuchen (Abschnitt 3).
- Sie können zwei Vektoren addieren und einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren (Abschnitt 4).
- Sie können Geraden und Ebenen im Raum mit Hilfe von Vektoren darstellen (Abschnitt 5 , 6).

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel werden Vektoren in der Ebene und im Raum behandelt. Sie werden lernen, wie Sie mit Vektoren rechnen können. Einfache geometrische Objekte wie rechtwinklige Dreiecke bzw. Rechtecke, aber auch Geraden und Ebenen im Raum lassen sich dann sehr gut durch Vektoren beschreiben und untersuchen. Außerdem werden Sie die möglichen Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen im Raum sowohl kennen als auch berechnen lernen.

Dazu sind Kenntnisse zu Dreiecken und Vierecken wie im Kapitel V. Geometrie vorteilhaft. Der sichere Umgang mit Geraden im zweidimensionalen Koordinatensystem wie in Kapitel IX. Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem ist ebenfalls nötig. Bei den Lagebeziehungen wird es nötig sein, die Lösung von linearen Gleichungssystemen, wie in Kapitel IV. Lineare Gleichungssysteme vorgestellt, zu ermitteln.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

1. VEKTOREN ALS PFEILKLASSEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

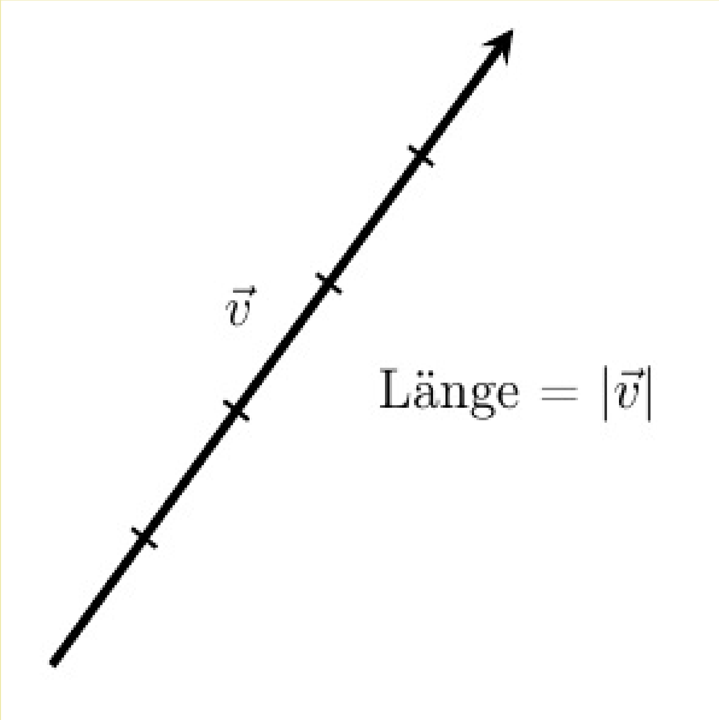
- Sie können gerichtete Größen durch Vektoren beschreiben.
- Sie können Vektoren als Pfeilklassen interpretieren.

1.1 Vektoren

Viele physikalische Größen sind nicht nur durch eine Maßzahl festgelegt, sondern auch durch ihre Richtung im Raum. In diesem Kapitel wollen wir uns solchen gerichteten Größen, sogenannten Vektoren, widmen.

1.1 DEFINITION

Ein *Vektor* $\vec{v}$ ist eine Größe, die durch eine Länge und eine Richtung gekennzeichnet ist. Dabei bezeichnen wir mit $\left|\vec{v}\right|$ die *Länge* (auch *Betrag* genannt) von $\vec{v}$.



Ein Vektor der Länge Null heißt *Nullvektor*. Wir werden hier ausschließlich Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$ behandeln. Das Konzept eines Vektors lässt sich aber stark verallgemeinern.

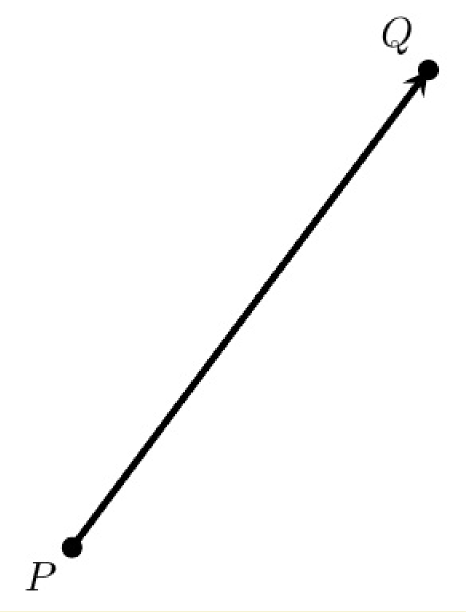
Ist $\vec{v}$ ein Vektor, so bezeichnen wir mit $-\vec{v}$ denjenigen Vektor, der dieselbe Länge wie $\vec{v}$ besitzt, jedoch genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Der Vektor $-\vec{v}$ heißt *Gegenvektor* zum Vektor $\vec{v}$.

1.2 Pfeilklassen

Wir wollen Vektoren als Ansammlung von Pfeilen interpretieren, damit wir sie uns auch (wie oben schon geschehen) graphisch vorstellen können. Pfeile und Pfeilklassen dienen uns hier also nur der Veranschaulichung von Vektoren.

1.2 DEFINITION

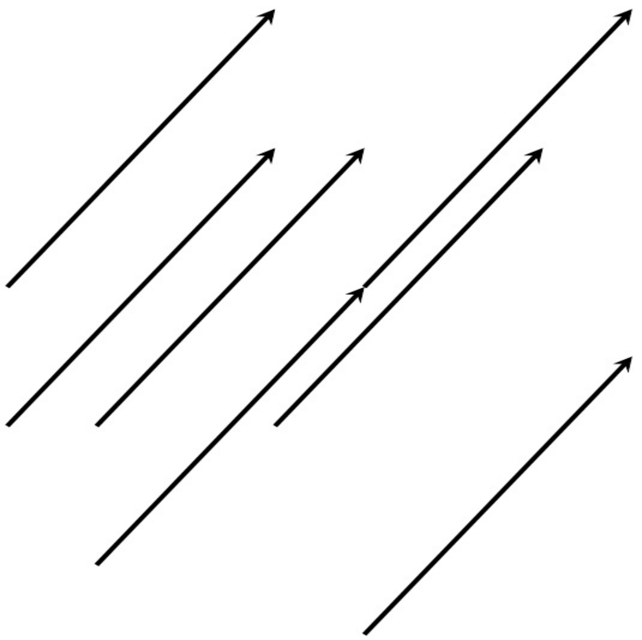
Ein *Pfeil* ist definiert durch seinen Anfangspunkt, seine Richtung und seine Länge (oder gleichwertig durch seinen Anfangs- und Endpunkt).



Vektoren lassen sich als sogenannte Pfeilklassen interpretieren.

1.3 DEFINITION

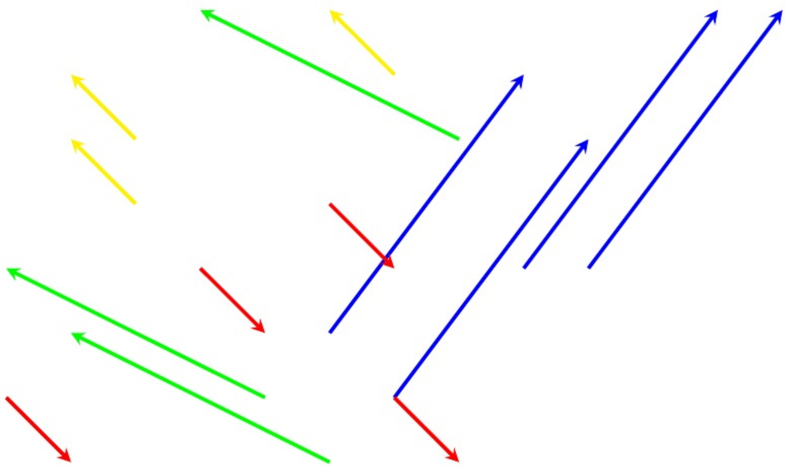
Die Menge aller Pfeile mit gleicher Richtung und gleicher Länge heißt *Pfeilklasse*.



Anders gesagt: alle Pfeile einer Pfeilklasse sind also durch Parallelverschiebung ineinander überführbar. Somit ist eine Pfeilklasse also durch eine Richtung und eine Länge festgelegt.

1.4 BEISPIEL

Die Abbildung zeigt 14 Pfeile, aber nur vier Pfeilklassen, die durch unterschiedliche Farben gekennzeichnet sind.



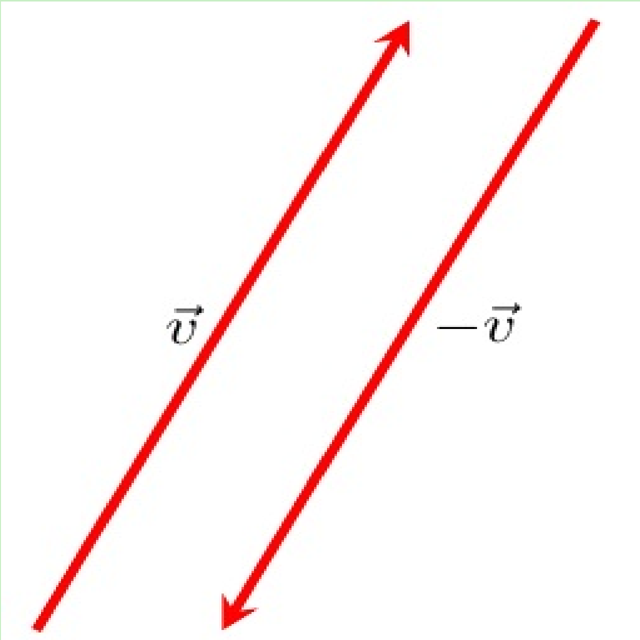
Nun können wir Vektoren als Pfeilklassen auffassen, indem wir jeweils die Richtungen und Längen einander zuordnen.

WARNUNG

Vektoren sind also nicht durch ihren Anfangspunkt festgelegt, sondern nur durch Richtung und Länge. Deswegen benötigen wir formal auch Pfeilklassen.

1.5 BEMERKUNG

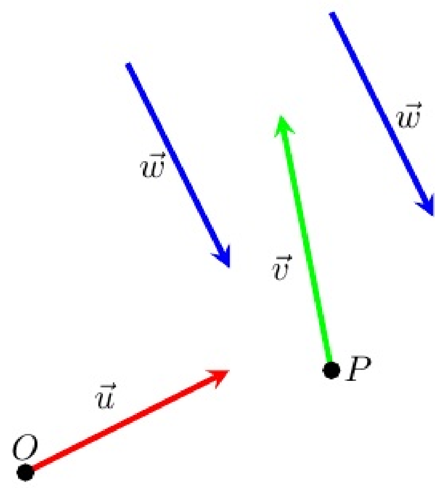
Ist ein Vektor $\overrightarrow{v}$ durch einen Pfeil (genauer: einer Pfeilklasse) beschrieben, so wird der Gegenvektor $-\overrightarrow{v}$ durch den in die Gegenrichtung orientierten Pfeil beschrieben.



Manche gerichtete Größen sollen an einem ganz konkreten Punkt angreifen (also einen speziellen Anfangspunkt haben). Dazu dient folgende Sprechweise. Vektoren, die an keinem festen Anfangspunkt angeknüpft sind, heißen *freie Vektoren*. Vektoren, die an einem bestimmten Anfangspunkt angeknüpft sind, heißen *gebundene Vektoren*. Gebundene Vektoren, die am Koordinatenursprung O beginnen, heißen *Ortsvektoren*.

1.6 BEISPIEL

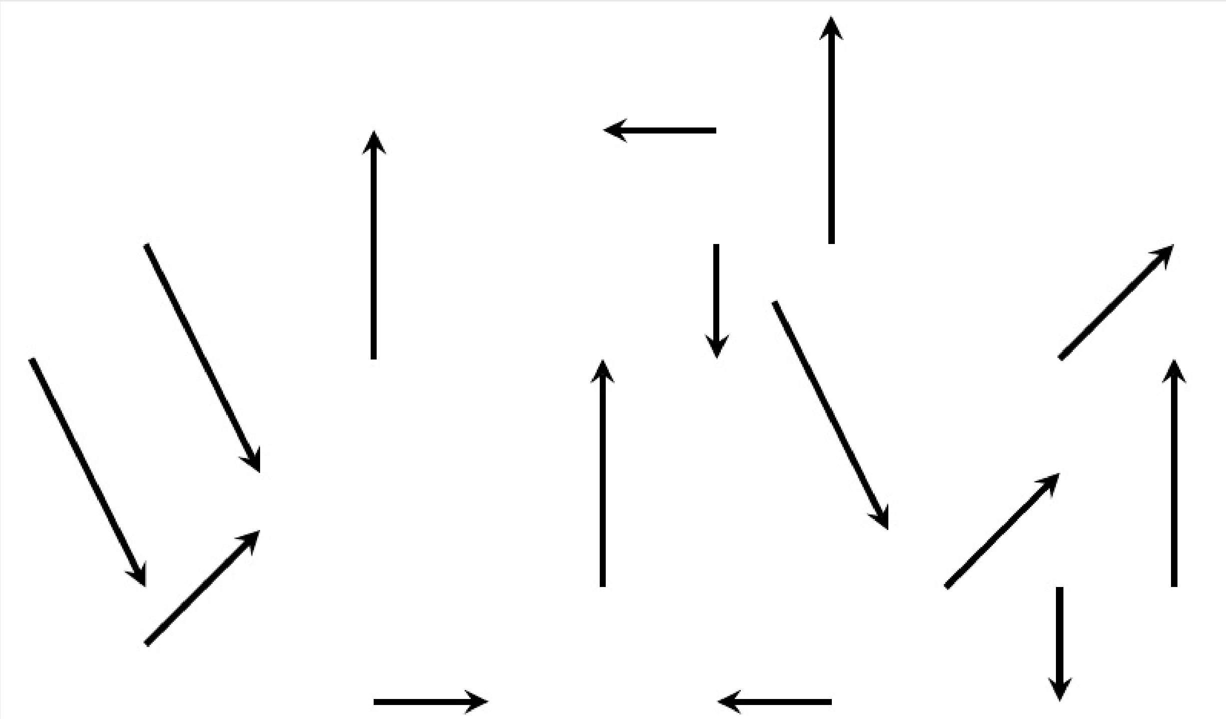
In der Abbildung ist $\overrightarrow{u}$ ein Ortsvektor, $\overrightarrow{v}$ ein gebundener Vektor mit Anfangspunkt P und $\overrightarrow{w}$ ein freier Vektor.



Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

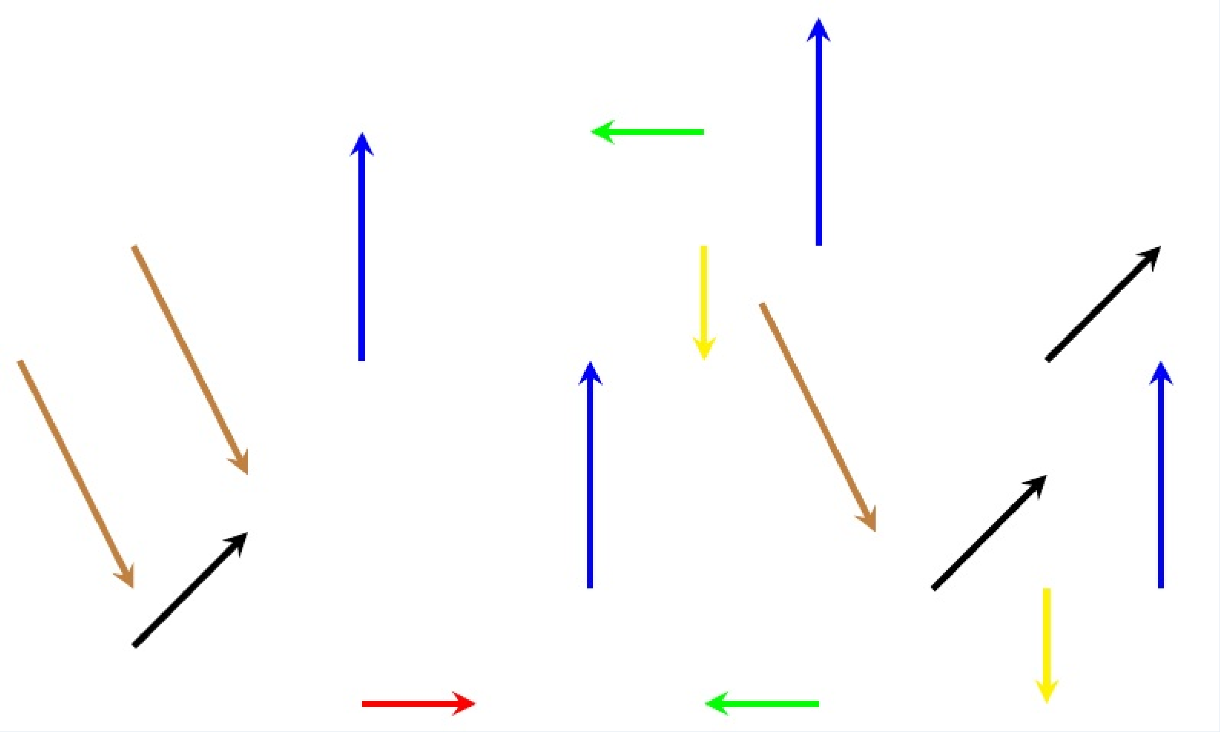
ÜBUNG 1

Welche der folgenden Pfeile gehören zur gleichen Pfeilklasse?
Wie viele verschiedene Vektoren sind abgebildet?



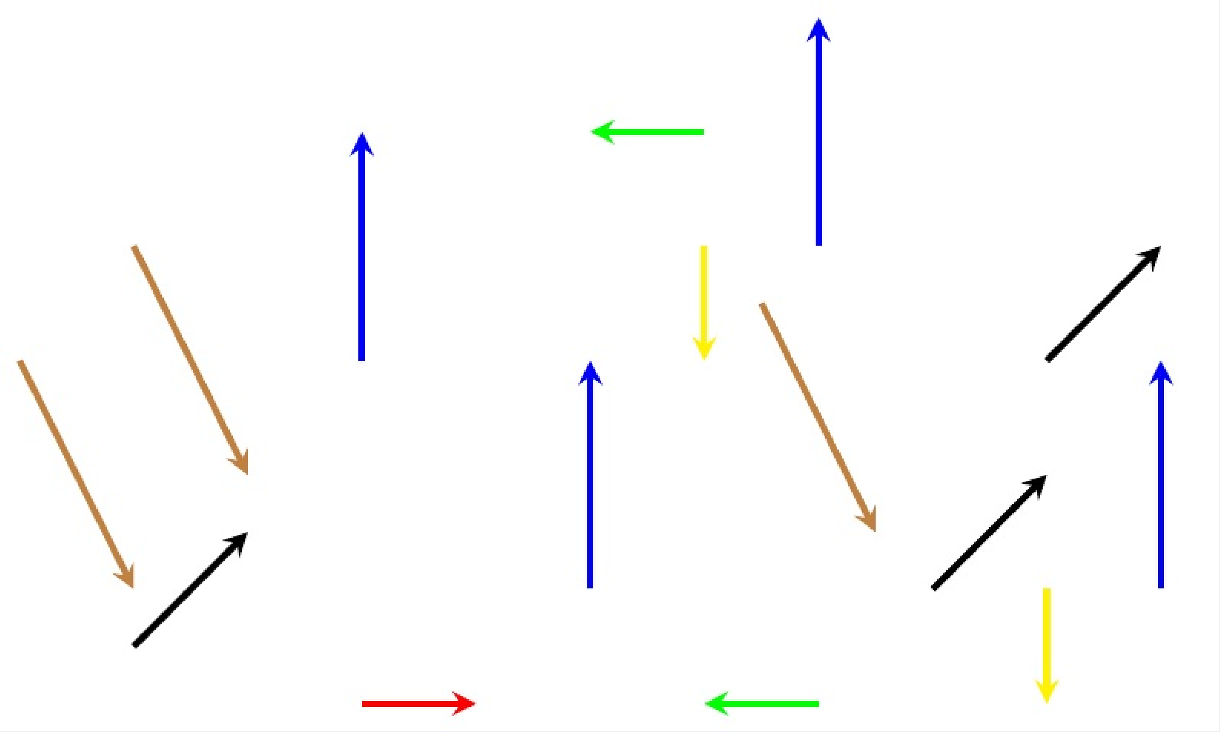
Klasseneinteilung

Zwei Pfeile gehören zur gleichen Pfeilklasse, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander überführbar sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen und die gleiche Länge besitzen. Damit erhalten wir folgende Klasseneinteilung:



Anzahl der Vektoren

Anhand der Einteilung in Pfeilklassen sind also sechs verschiedene Vektoren abgebildet.



ÜBUNG 2

[online-only]

ÜBUNG 3

[online-only]

ÜBUNG 4

[online-only]

2. KOMPONENTENDARSTELLUNG VON VEKTOREN

Inhalt

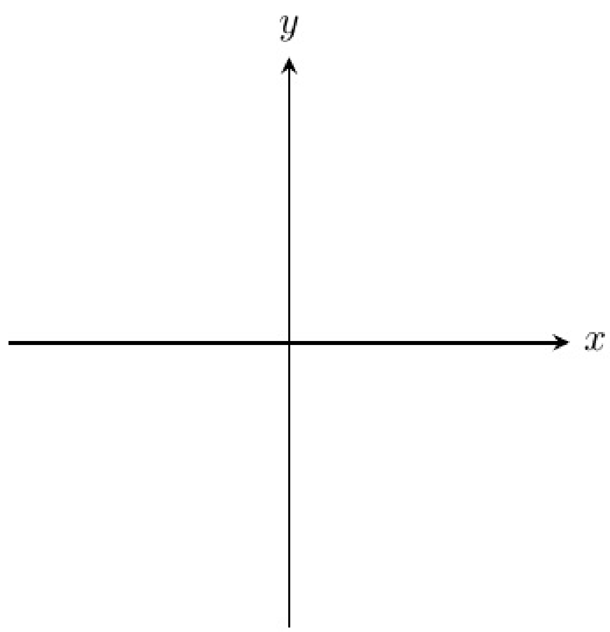
Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

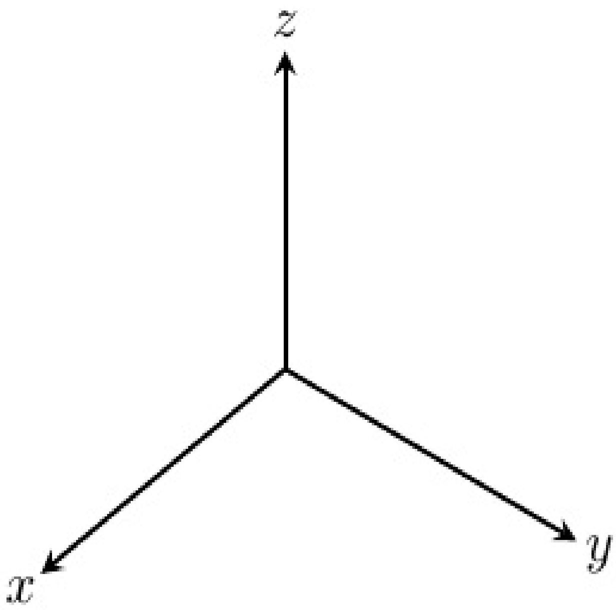
Lernziele

- Sie können Vektoren durch Komponenten darstellen.

2.1 Komponentendarstellung von Vektoren

Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. im Raum $\mathbb{R}^3$ lassen sich bezüglich der Koordinatenachsen in Komponenten zerlegen. Dazu benötigen wir zunächst die rechtwinkligen Koordinatensysteme:



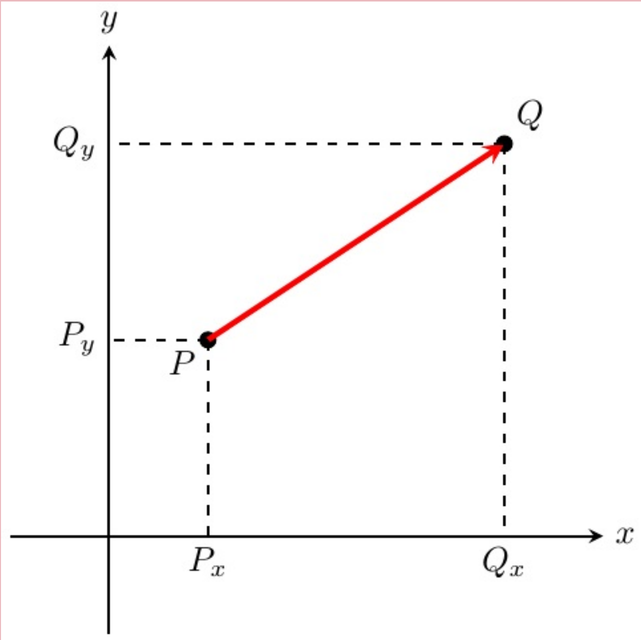


Ein Vektor $\overrightarrow{v}$ in $\mathbb{R}^2$ lässt sich damit als Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ beschreiben. Analog ist ein Vektor $\overrightarrow{v}$ in $\mathbb{R}^3$ als Tripel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ beschreibbar. Vektoren werden zur Unterscheidung von Punkten spaltenweise (als sogenannte *Spaltenvektoren*) geschrieben.

2.1 REGEL

Seien P und Q Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $P = (P_x; P_y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $Q = (Q_x; Q_y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist der Vektor $\overrightarrow{PQ}$, der vom Punkt P zum Punkt Q zeigt, gegeben durch

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{pmatrix}.$$

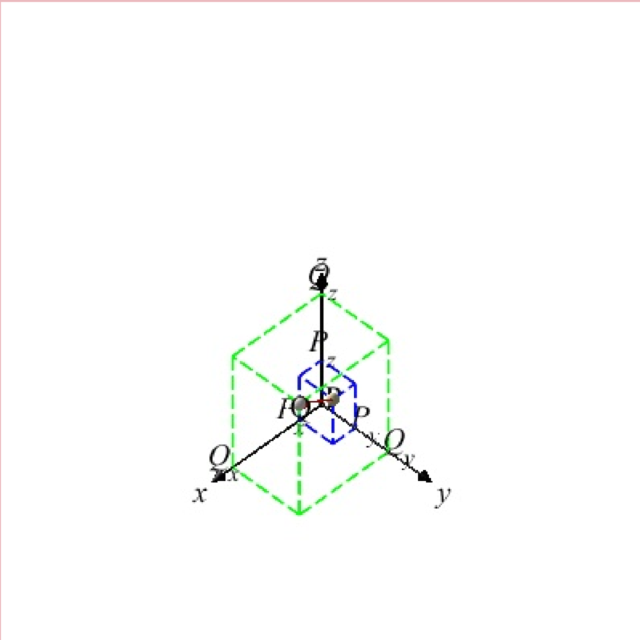


Ganz ähnlich lässt sich der Vektor zwischen zwei Punkten im Raum berechnen.

2.2 REGEL

Sind P und Q Punkte in $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten $P = (P_x; P_y; P_z) \in \mathbb{R}^3$ bzw. $Q = (Q_x; Q_y; Q_z) \in \mathbb{R}^3$, so ist der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ vom Punkt P zum Punkt Q gegeben durch

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix}.$$



Man kann sich also folgende Merkregel einprägen:

2.3 REGEL

$$\text{Vektor zwischen zwei Punkten} = \text{Endpunkt minus Anfangspunkt.}$$

2.4 BEISPIEL

Zu den beiden Punkten $P = (1; 2; 3)$ und $Q = (3; 2; 1)$ im Raum ist der Vektor $\overrightarrow{PQ}$, der in P startet und in Q endet, gegeben durch

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mit O bezeichnen wir den *Koordinatenursprung* mit den Koordinaten $O = (0;0)$ bzw. $O = (0;0;0)$. Der *Ortsvektor* zu einem Punkt P ist der Vektor vom Koordinatenursprung zum Punkt P, also $\overrightarrow{OP}$. Hat der Punkt P im Raum die Koordinaten $P = (P_x; P_y; P_z) \in \mathbb{R}^3$, so ist der Ortsvektor gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor eines Punktes hat exakt dieselben Koordinaten wie der Punkt selbst. Der einzige Unterschied ist der, dass wir die Koordinaten eines Punktes in eine Zeile schreiben und die Komponenten des Ortsvektors in eine Spalte.

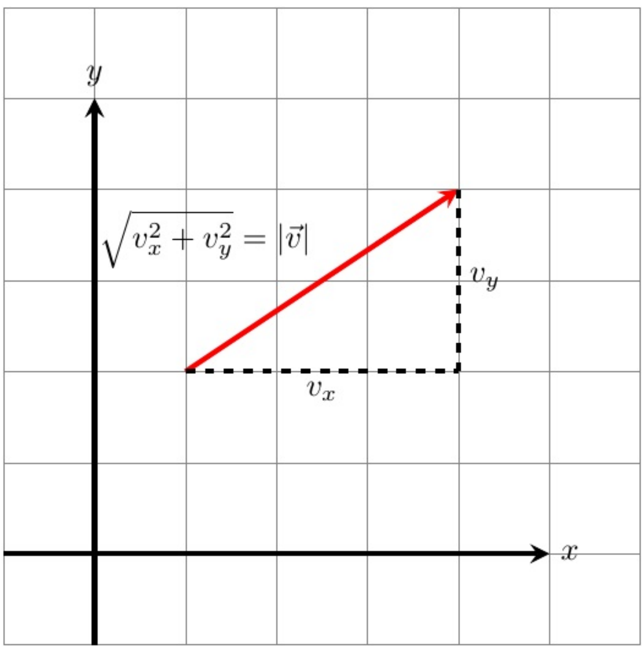
2.5 BEMERKUNG

Der Nullvektor in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras können wir die Länge von Vektoren in der Ebene und im Raum bestimmen. Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^2$, so ist dessen Länge gegeben durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$



Analog ist die Länge eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

2.6 BEISPIEL

Der Nullvektor

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ hat die Länge

$$\left|\vec{o}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0.$$

2.7 BEISPIEL

Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ hat die Länge

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3,74.$$

Die Komponenten des Gegenvektors zu einem gegebenen Vektor lassen sich nun sehr schnell ermitteln.

2.8 REGEL

Zu einem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ in der Ebene ist der Gegenvektor $-\overrightarrow{v}$ gegeben durch

$$-\overrightarrow{v} = -\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \end{pmatrix}.$$

Analog gilt für einen Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ im Raum

$$-\overrightarrow{v} = -\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix}.$$

2.9 BEMERKUNG

Sind P und Q Punkte im Raum, so ist der Gegenvektor $-\overrightarrow{PQ}$ zu $\overrightarrow{PQ}$ gegeben durch $\overrightarrow{QP}$, also $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie zu den Punkten $A = (1; 4; -2)$, $B = (2; 1; 1)$ und $C = (-1; -1; 2)$ die Vektoren

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC} \quad und \quad \overrightarrow{BC}.$$

$\vec{AB}$

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist gegeben durch

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-4 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{AC}$

Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist gegeben durch

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-4 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\vec{BC}$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist gegeben durch

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie die Längen der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$

Die Länge $\left|\vec{a}\right|$ des Vektors $\vec{a}$ ist gegeben durch

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

$\vec{b}$

Die Länge $\left|\vec{b}\right|$ des Vektors $\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}.$$

$\vec{c}$

Die Länge $\left|\vec{c}\right|$ des Vektors $\vec{c}$ ist gegeben durch

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

ÜBUNG 3

[online-only]

ÜBUNG 4

Welcher der Vektoren a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschreibt den Vektor vom Punkt $P = (2; 3; 1)$ zu dem Punkt $Q = (1; 1; -2)$?

Lösung

Der in b) gegebene Vektor ist gleich dem Vektor $\overrightarrow{PQ}$.

Erklärung

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ lässt sich berechnen durch

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 1 - 3 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Also ist b) die richtige Lösung.

3. PUNKTMENGEN IM ANSCHAUUNGSRAUM

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziel

- Sie können Punktmengen im Raum mittels Vektoren untersuchen.

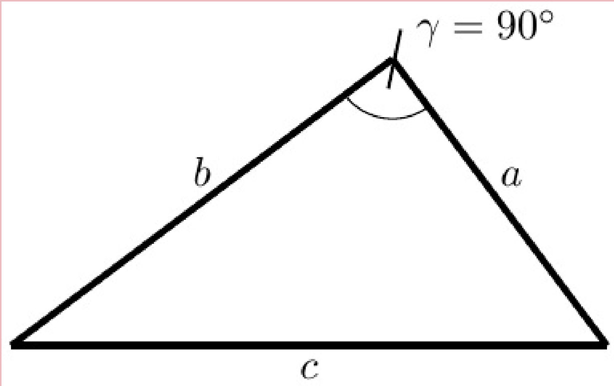
3.1 Punktmengen im Anschauungsraum

Mit Hilfe von Vektoren lassen sich nun Objekte im Raum (und natürlich auch in der Ebene) untersuchen. Dazu werden wir Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken im Raum anhand der Koordinaten ihrer Eckpunkte ermitteln. Aus den Eckpunkten ergeben sich auch die Vektoren, die die Seiten des jeweiligen Dreiecks oder Vierecks beschreiben. Informationen zu Dreiecken und Vierecken finden sich auch in Abschnitt V.2 vom Kapitel V. Geometrie.

3.1 REGEL

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Umgekehrt gilt aber auch: Erfüllt ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

so ist dieses Dreieck rechtwinklig mit Hypotenuse c.

Begründung

Aus Kapitel V. Geometrie ist der Satz des Pythagoras und auch der Kongruenzsatz SSS bekannt. Mit diesen beiden Sätzen lässt sich die Umkehrung begründen. Ist ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gegeben, welche die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

erfüllen, so konstruieren wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a und b und rechtem Winkel zwischen diesen beiden Seiten (also am Eckpunkt C). Nach dem Satz des Pythagoras hat dessen Hypotenuse nun Länge c, und nach dem Kongruenzsatz SSS sind die beiden Dreieck somit kongruent. Damit ist auch das ursprünglich gegebene Dreieck rechtwinklig.

3.2 BEISPIEL

Die drei Punkte $A = (1; 0; 1)$, $B = (4; 0; 1)$ und $C = (4; 0; 5)$ bilden die Eckpunkte eines Dreiecks im Raum. Die Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

beschreiben die Seiten des Dreiecks. Wegen

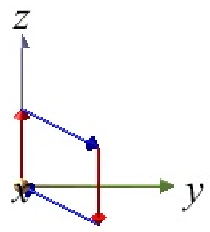
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = 4, \quad \left|\overrightarrow{CA}\right| = 5$$

und $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist dieses Dreieck sogar rechtwinklig mit Hypotenuse CA.

Wie wir im Beispiel schon gesehen haben, ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zwischen den Punkten A und B natürlich genauso groß wie die Länge der Strecke $\overline{AB}$ zwischen den beiden Punkten.

3.3 BEISPIEL

Wir untersuchen die Lage der vier Punkte $A = (1; 0; 2)$, $B = (3; 2; 1)$, $C = (2; 2; -1)$ und $D = (0; 0; 0)$.



Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$$

und

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$$

bilden diese vier Punkte ein ebenes Viereck $ABCD$. Dieses Viereck ist sogar ein Parallelogramm, da die gegenüber liegenden Seiten parallel und gleich lang sind (sie sind ja durch dieselben Vektoren beschrieben). Wegen

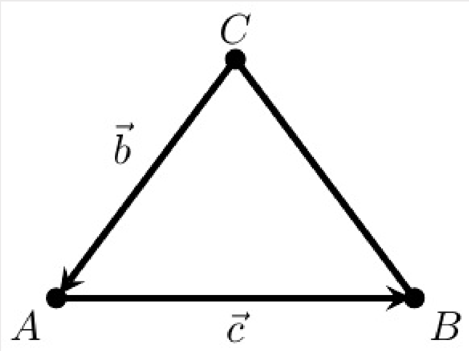
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$$

und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5}$ bilden die Punkte ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Also ist das Parallelogramm sogar ein Rechteck, jedoch kein Quadrat.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Wir betrachten das Dreieck ABC mit $A = (1;3;4)$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B und C des Dreiecks.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Ist dieses Dreieck rechtwinklig?

Antwort

a) Es sind $B = (2;4;5)$ und $C = (-1;2;7)$.

b) Die Seitenlängen betragen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{17}$ und $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{14}$.

c) Das Dreieck ist rechtwinklig mit rechtem Winkel im Eckpunkt A.

Lösung a)

Anhand der Skizze erhalten wir

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c}\,.$$

Analog gilt

$$\overrightarrow{CA} = \vec{b}\,.$$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x - 1 \\ B_y - 3 \\ B_z - 4 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} B_x - 1 \\ B_y - 3 \\ B_z - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $B_x - 1 = 1$, $B_y - 3 = 1$ und $B_z - 4 = 1$. Wir erhalten daraus $B_x = 2$, $B_y = 4$ und $B_z = 5$. Also ist $B = (2; 4; 5)$.

Wegen $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} A_x - C_x \\ A_y - C_y \\ A_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C_x \\ 3 - C_y \\ 4 - C_z \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 - C_x \\ 3 - C_y \\ 4 - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also $1 - C_x = 2$, $3 - C_y = 1$ und $4 - C_z = -3$. Wir erhalten daraus $C_x = -1$, $C_y = 2$ und $C_z = 7$. Also ist $C = (-1; 2; 7)$.

Lösung b)

Wir rechnen die Längen der Seiten des Dreiecks aus. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \left|\vec{c}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \\ \left|\overrightarrow{AC}\right| &= \left|-\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ergibt sich aus

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-4 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Länge der dritten Seite gegeben durch

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}.$$

Lösung c)

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse immer die längste Seite. Bei uns ist das die Seite BC. Da ein Dreieck genau dann rechtwinklig ist, wenn der Satz des Pythagoras gilt, prüfen wir genau diesen nach.

Da

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 17 = 14 + 3 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2,$$

ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel am Eckpunkt A.

ÜBUNG 2

Ist das Viereck gegeben durch $A = (1; 2; -1)$, $B = (3; 4; -2)$, $C = (2; 6; 0)$ und $D = (0; 4; 1)$ ein Quadrat? Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

a) Beschreiben Sie die Seiten mittels Vektoren.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen.

c) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen.

d) Prüfen Sie, ob es sich um ein Quadrat handelt.

Antwort

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.

a) Es gelten

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{DA} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Alle Seiten des Vierecks besitzen die Länge 3.

c) Die Länge beider Diagonalen beträgt $\sqrt{18}$.

d) Das Viereck ist ein Quadrat.

Lösung a)

Die Seiten des Vierecks lassen sich durch die Vektoren

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} C_x - B_x \\ C_y - B_y \\ C_z - B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 6-4 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} D_x - C_x \\ D_y - C_y \\ D_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-6 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{DA} &= \begin{pmatrix} A_x - D_x \\ A_y - D_y \\ A_z - D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

beschreiben.

Lösung b)

Die Seitenlängen des Vierecks sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3, \\
\left|\overrightarrow{BC}\right| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \\
\left|\overrightarrow{CD}\right| &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \\
\left|\overrightarrow{DA}\right| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3.
\end{aligned}
$$

Lösung c)

Die Diagonalen des Vierecks sind gegeben durch die Vektoren

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} C_x - A_x \\ C_y - A_y \\ C_z - A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{BD} &= \begin{pmatrix} D_x - B_x \\ D_y - B_y \\ D_z - B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die Längen der Diagonalen sind demnach

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AC}\right| &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}, \\
\left|\overrightarrow{BD}\right| &= \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}.
\end{aligned}
$$

Lösung d)

Da alle Seiten des Vierecks gleich lang sind und auch die Diagonalen des Vierecks gleich lang sind, ist das Viereck $ABCD$ ein Quadrat.

ÜBUNG 3

Bilden die vier Punkte $A = (2; 3; 1)$, $B = (-2; 2; 3)$, $C = (1; -1; 2)$ und $D = (5; 0; 0)$ ein Parallelogramm?

Antwort

Die vier Punkte bilden ein Parallelogramm $ABCD$.

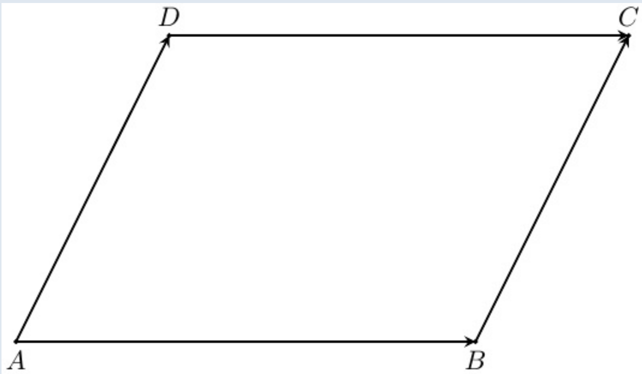
Erklärung

Damit die vier Punkte die Eckpunkte eines Parallelogramms sind, müssen jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten durch die gleichen Vektoren beschrieben werden.

Die Seiten werden durch die folgenden Vektoren beschrieben:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 2-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} C_x - B_x \\ C_y - B_y \\ C_z - B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} D_x - C_x \\ D_y - C_y \\ D_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-(-1) \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{DA} &= \begin{pmatrix} A_x - D_x \\ A_y - D_y \\ A_z - D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 3-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$ gelten, bilden die vier Punkte $ABCD$ ein



Parallelogramm.

ÜBUNG 4

Ist das Dreieck ABC mit $A = (-2; 1; -3)$, $B = (1; 2; 3)$ und $C = (2; 5; 9)$ gleichseitig?

Antwort

Das Dreieck ABC ist nicht gleichseitig.

Erklärung

Damit das Dreieck ABC gleichseitig ist, müssen alle drei Seiten gleich lang sein.

Die Seitenlängen lassen sich als Längen $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ der die Seiten beschreibenden Vektoren ermitteln.

Es gelten

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-1 \\ 3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} C_x - A_x \\ C_y - A_y \\ C_z - A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 5-1 \\ 9-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} C_x - B_x \\ C_y - B_y \\ C_z - B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für die Seitenlängen gilt damit

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{3^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{46}, \\
\left|\overrightarrow{AC}\right| &= \sqrt{4^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{176}, \\
\left|\overrightarrow{BC}\right| &= \sqrt{1^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{46}.
\end{aligned}$$

Damit ist das Dreieck ABC nicht gleichseitig, jedoch ist es gleichschenklig mit Basis AC.

4. ADDITION VON VEKTOREN, MULTIPLIKATION VON VEKTOREN MIT SKALAREN

Inhalt

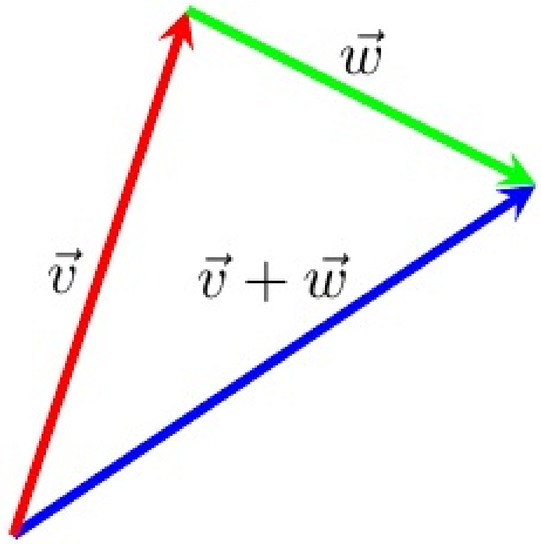
Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können zwei Vektoren addieren.
- Sie können einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren.
- Sie können diese Vektoroperationen geometrisch interpretieren.

4.1 Addition zweier Vektoren

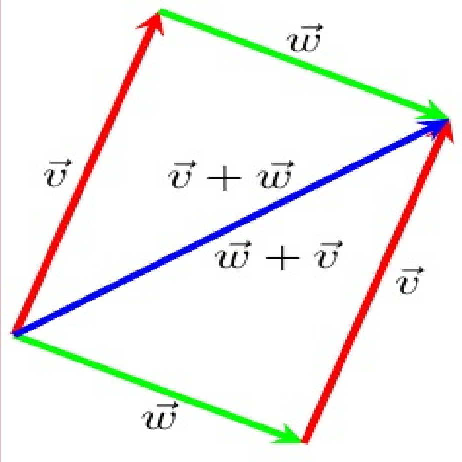
Zu zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ können wir die *Summe* $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ wie folgt bilden: wir folgen zunächst dem Pfeil beschrieben durch $\overrightarrow{v}$ und hängen dann daran den Pfeil beschrieben durch $\overrightarrow{w}$. Dies entspricht also dem Aneinanderanfügen der beiden Pfeile.



Anhand der folgenden Skizze erkennt man auch, dass $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$ gilt; die Addition zweier Vektoren ist also *kommutativ*, d.h. es kommt beim Addieren nicht auf die Reihenfolge an. (Daran sieht man auch sehr schön, dass dies nur funktioniert, weil Vektoren Pfeilklassen sind - und nicht einzelne Pfeile.)

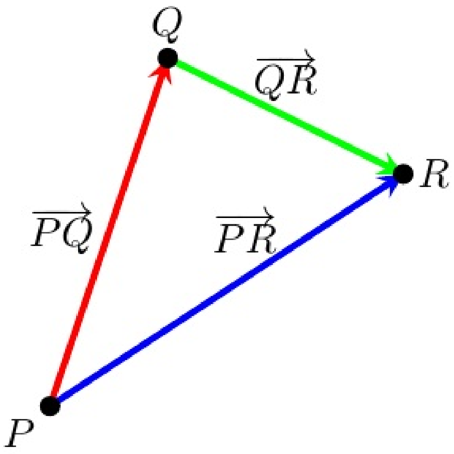
4.1 REGEL

Die Summe $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ ergibt sich mit Hilfe der sogenannten *Parallelogramm-Regel* als derjenige Vektor, der die Diagonale des durch $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ aufgespannten Parallelogramms beschreibt.



4.2 BEISPIEL

Seien P, Q und R Punkte in der Ebene bzw. im Raum. Dann ist die Summe der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ gegeben durch $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.



Für die Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ im Raum lässt sich die Summe leicht ausrechnen. Sie ist gegeben durch

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}.$$

Selbstverständlich lässt sich auch die Summe zweier Vektoren in der Ebene ganz analog berechnen.

4.3 REGEL

Die Summe zweier Spaltenvektoren im Raum ist gegeben durch den Vektor der Summe der Komponenten (*komponentenweise* Addition):

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}.$$

Für zwei Vektoren in der Ebene gilt ganz analog

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}.$$

4.4 BEISPIEL

Im folgenden interaktiven Beispiel können Sie sich die Addition zweier Vektoren in der Ebene veranschaulichen. Sie können die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sowohl in der Grafik verändern, als auch die Komponenten dieser beiden Vektoren darunter eingeben. Es werden dann der entsprechende Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ eingezeichnet und dessen Komponenten berechnet.

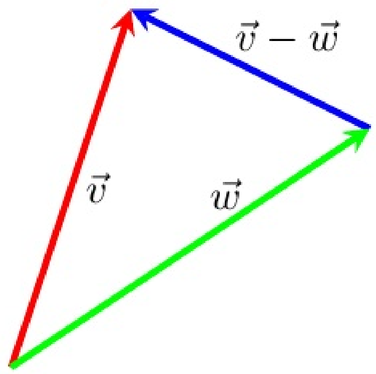
[online-only]

4.5 BEISPIEL

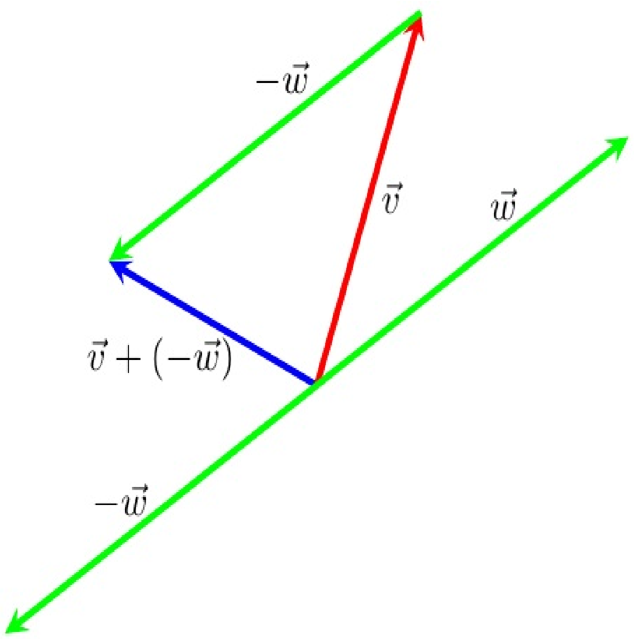
Für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+1 \\ 1+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Gegenvektors können wir auch Differenzen von Vektoren bilden: Sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ Vektoren, so ist $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ der Vektor gegeben durch $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{w})$, wobei $-\overrightarrow{w}$ der Gegenvektor zu $\overrightarrow{w}$ ist.



In Kürze lässt sich das auch so skizzieren:



4.6 BEMERKUNG

Für jeden Vektor $\overrightarrow{v}$ gilt $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{o}$.

4.7 BEISPIEL

Die Differenz der beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir können auch mehr als zwei Vektoren addieren, indem wir schrittweise immer zwei Vektoren addieren. Sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ drei Vektoren, so gilt

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$$

d.h. die Addition von Vektoren ist *assoziativ*. Beim Bilden der Summe mehrerer Vektoren benötigen wir also keine Klammern und können uns die Reihenfolge der Summation aussuchen.

4.8 BEISPIEL

Wir berechnen die Summe der drei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei wir zuerst $\vec{u} + \vec{v}$ berechnet haben. Wenn wir zuerst $\vec{v} + \vec{w}$ ermitteln, dann sieht die Rechnung so aus:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

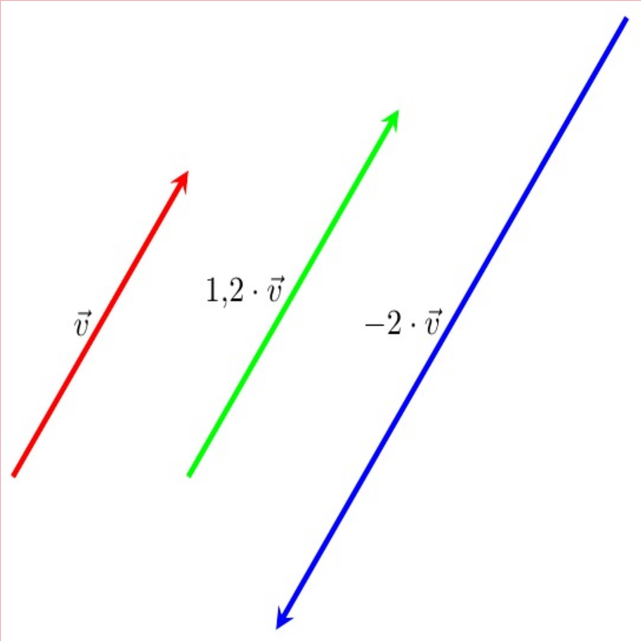
Das Ergebnis ist natürlich in beiden Fällen dasselbe.

4.2 Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

Oftmals möchte man nur die Länge eines Vektors anpassen, ohne dessen Richtung zu verändern. Man möchte also einen Vektor *skalieren*. Wir nennen dies *Multiplikation mit Skalaren*, wenn man einen Vektor mit einer reellen Zahl multipliziert.

4.9 REGEL

Zu einem Vektor $\overrightarrow{v}$ und einer reellen Zahl $\lambda \geq 0$ ist $\lambda \cdot \overrightarrow{v}$ derjenige Vektor, der in dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{v}$ zeigt und dessen Länge gerade $\lambda \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$ ist. Für $\lambda < 0$ ist $\lambda \cdot \overrightarrow{v}$ derjenige Vektor, der in Richtung $-\overrightarrow{v}$ zeigt und dessen Länge gerade $|\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$ ist.



griechisches Alphabet

α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ϵ, ε	epsilon
ζ	zeta
η	eta
θ, ϑ	theta
ι	iota
$\kappa, \varkappa$	kappa
λ	lambda
μ	my
ν	ny
ξ	xi
o	omikron
π, ϖ	pi
ρ, ϱ	rho
σ, ς	sigma
τ	tau
υ	ypsilon
φ, ϕ	phi
χ	chi
ψ	psi
ω	omega

WARNUNG

Es gibt auch ein *Skalarprodukt* zwischen zwei Vektoren. Die Multiplikation mit Skalaren (auch als *skalare Multiplikation* bezeichnet) darf nicht mit dem Skalarprodukt verwechselt werden.

4.10 REGEL

Für den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ im Raum und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\lambda \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \\ \lambda v_z \end{pmatrix}.$$

Die skalare Multiplikation lässt sich also komponentenweise ausrechnen.

4.11 BEISPIEL

Wir berechnen zwei Skalierungen des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Es ist

$$2 \cdot \overrightarrow{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$-3 \cdot \overrightarrow{v} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der skalaren Multiplikation können wir nun untersuchen ob zwei Vektoren parallel zueinander sind.

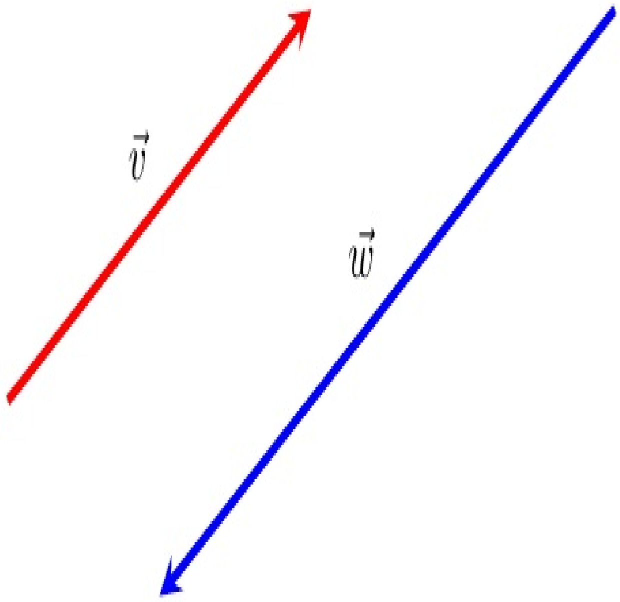
4.12 DEFINITION

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ heißen *parallel*, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lambda \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$$

gilt.

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind also genau dann parallel, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist.



4.13 BEISPIEL

Gegeben seien die drei Vektoren $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Es sind $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ parallel, denn es gilt

$$(-2) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

Aber $\overrightarrow{u}$ ist nicht parallel zu $\overrightarrow{w}$, denn $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$ würde bedeuten

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

d.h. die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda &= 4 \\ -1\lambda &= -1 \\ 3\lambda &= 5 \end{aligned}$$

müssten alle von demselben λ erfüllt sein. Die erste Gleichung liefert jedoch $\lambda = 2$, die zweite Gleichung $\lambda = 1$ und die dritte Gleichung $\lambda = \frac{5}{3}$.

Die Addition und die skalare Multiplikation von Vektoren lassen sich auch kombinieren.

4.14 REGEL

Für zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ und eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \lambda \cdot \overrightarrow{w}.$$

Es spielt also keine Rolle, ob zunächst zwei Vektoren addiert und die Summe dann skaliert wird, oder ob zunächst beide Summanden skaliert und die skalierten Vektoren dann addiert werden.

4.15 REGEL

Für einen Vektor $\overrightarrow{v}$ und zwei reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten die Regeln

$$(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{v}$$

und

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{v}).$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie folgende Summen von Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung a)

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) \\ -1+(-2) \\ 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung b)

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 2+2 \\ -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung c)

Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+1 \\ -1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung d)

Wir rechnen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+(-2) \\ 2+2 \\ 4+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie folgende Vielfache von Vektoren:

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $-5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung a)

Es ist

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung b)

Es gilt

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Lösung c)

Es ist

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 \\ -5 \cdot 1 \\ -5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung d)

Man rechnet

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNG 3

Vereinfachen Sie die folgenden Terme (dabei seien P, Q, R und S Punkte im Anschauungsraum):

a) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$

b) $\overrightarrow{PR} - (\overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) + \overrightarrow{SP}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $-2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Lösung a)

Es gilt

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Lösung b)

Zunächst ist

$$\overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{SR}.$$

Damit ergibt sich

$$\overrightarrow{PR} - (\overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PP} = \vec{o},$$

der Nullvektor.

Lösung c)

Man rechnet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+3 \\ 4-(-1)+(-3) \\ -1-3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung d)

Man rechnet zunächst

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und

$$4 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNG 4

Welche der folgenden Vektoren sind parallel zueinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$

Wir machen den Ansatz $\lambda \vec{a} = \vec{b}$, also

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda &= -4 \\ -\lambda &= 2 \\ -\lambda &= 2 \end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen werden durch $\lambda = -2$ gelöst. Also sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel.

$\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{c}$

Der Ansatz $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$ liefert

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda &= 2 \\ -\lambda &= 1 \\ -\lambda &= 1 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird durch $\lambda = 1$ gelöst, die anderen beiden durch $\lambda = -1$. Also finden wir kein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$ gilt. Die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{c}$ sind damit nicht parallel.

$\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$

Mit dem Ansatz $\lambda\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ erhalten wir

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -4\lambda &= 2 \\ 2\lambda &= 1 \\ 2\lambda &= 1 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird durch $\lambda = -\frac{1}{2}$ gelöst, die anderen beiden durch $\lambda = \frac{1}{2}$. Damit sind $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ nicht parallel.

5. DARSTELLUNG VON GERADEN UND EBENEN IM RAUM

Inhalt

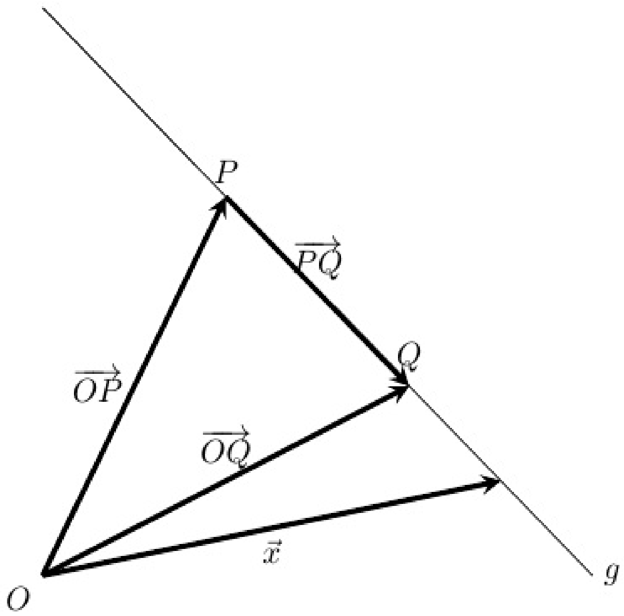
Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Geraden im Raum beschreiben.
- Sie können Ebenen im Raum beschreiben.

5.1 Geraden

Zwei verschiedene Punkte P und Q im Raum definieren eindeutig eine Gerade, die durch diese beiden Punkte verläuft.



5.1 REGEL (ZWEI-PUNKTE-DARSTELLUNG EINER GERADEN)

Die Gerade g durch zwei verschiedene Punkte P und Q im Raum ist gegeben durch die Menge aller Punkte, deren Ortsvektoren von der Form

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)$$

sind, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ die reellen Zahlen durchläuft. Wegen $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$ lässt sich die Gerade auch schreiben als

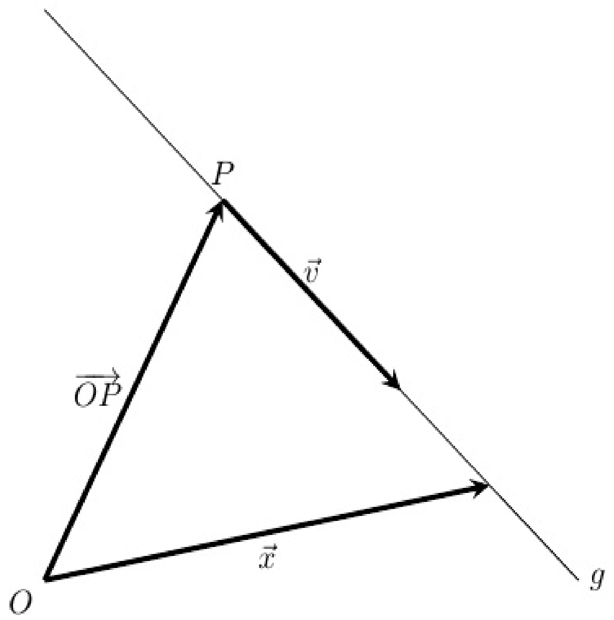
$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Die Gerade g ist die durch diese Gleichung beschriebene Menge, d. h.

$$g = \left\{\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

vgl. Definition 1.1 in Kapitel IX, Abschnitt 1.)

Alternativ dazu lässt sich eine Gerade im Raum auch mittels eines Punktes und einer vom Nullvektor verschiedenen Richtung beschreiben.



5.2 REGEL (PUNKT-RICHTUNGS-DARSTELLUNG EINER GERADEN)

Die Gerade g durch den Punkt P mit der Richtung beschrieben durch den vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\overrightarrow{v}$ ist gegeben durch

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ die reellen Zahlen durchläuft. Dabei heißt dann $\overrightarrow{OP}$ *Stützvektor* und $\overrightarrow{v}$ *Richtungsvektor* der Geraden. (Die Gerade g ist die durch diese Gleichung beschriebene Menge, d. h.

$$g = \left\{ \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

vgl. Definition 1.1 in Kapitel IX, Abschnitt 1.)

Selbstverständlich lassen sich beide Darstellungen ineinander überführen. Im einen Fall ist $\overrightarrow{PQ}$ ein Richtungsvektor der Geraden, im anderen Fall ist $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{v}$ der Ortsvektor eines zweiten Punktes auf der Geraden.

5.3 BEISPIEL

Zu den Punkten $P = (1; 1; 1)$ und $Q = (2; 2; 3)$ im Raum und der Richtung gegeben durch $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ bestimmen wir zwei Geraden durch P. Die Gerade g_1 durch P und Q ist gegeben durch

$$g_1 : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

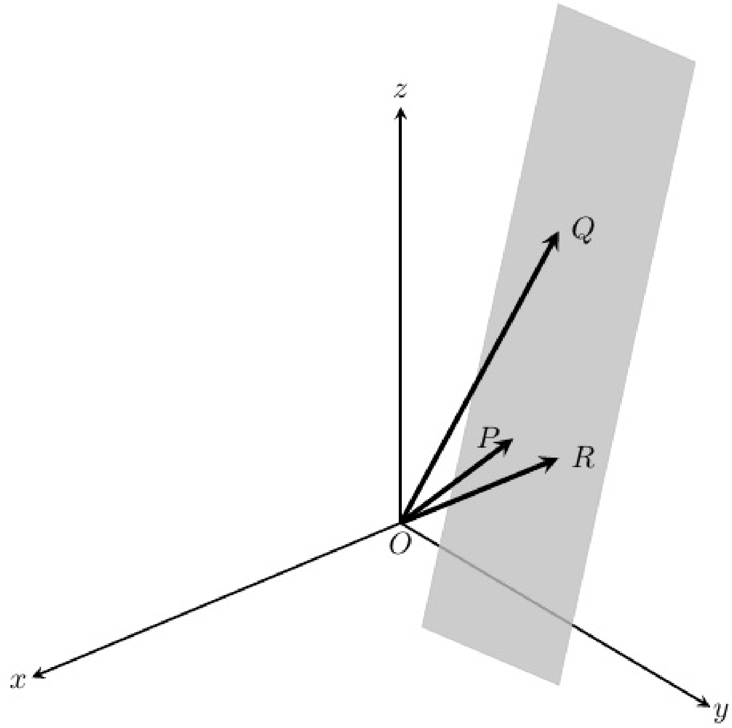
denn $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Gerade g_2 durch P mit der Richtung $\overrightarrow{v}$ ist gegeben durch

$$g_2 : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zur Darstellung von Geraden in der Ebene finden Sie auch Regeln und Beispiele im Abschnitt 1. Geraden des Kapitels IX. Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem .

5.2 Ebenen

Drei paarweise verschiedene Punkte P, Q und R im Raum, die nicht auf einer Geraden liegen, definieren eindeutig eine Ebene, die durch diese drei Punkte verläuft.



5.4 REGEL (DREI-PUNKTE-DARSTELLUNG EINER EBENE)

Sind P, Q und R drei paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf einer (einzigen) Geraden liegen, so ist die Ebene E durch diese drei Punkte gegeben durch die Menge aller Punkte, deren Ortsvektor sich schreiben lässt als

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) + \mu \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PR}$ lässt sich die Ebene auch schreiben als

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(Die Ebene E ist die durch diese Gleichung beschriebene Menge, d. h.

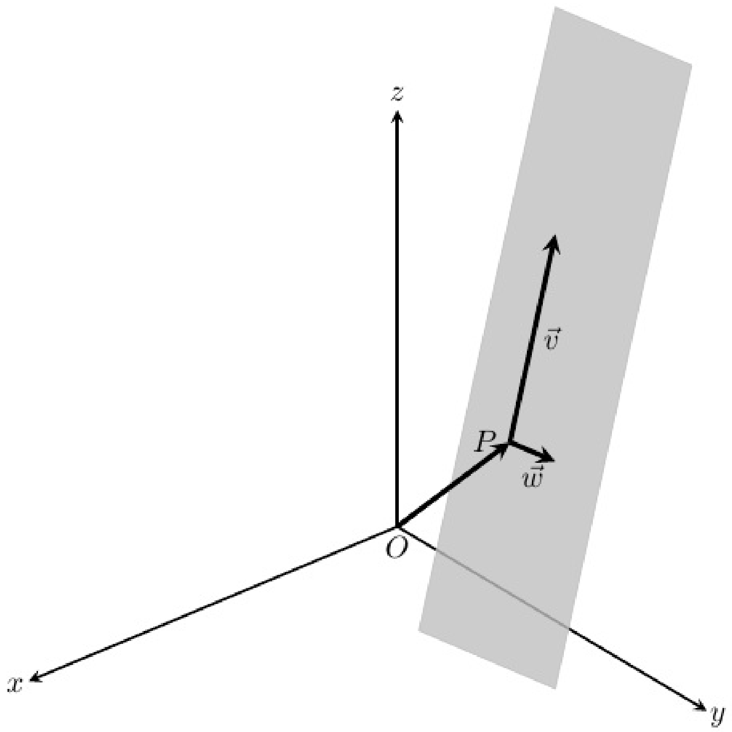
$$E = \left\{ \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

vgl. Definition 1.1 in Kapitel IX, Abschnitt 1.)

Die Tatsache, dass P, Q und R nicht auf einer Geraden liegen dürfen, entspricht genau der Tatsache, dass

$\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ nicht parallel sind.

Alternativ dazu lässt sich eine Ebene im Raum auch mittels eines Punktes und zwei vom Nullvektor verschiedener nichtparalleler Richtungen beschreiben.



5.5 REGEL (PUNKT-RICHTUNGS-DARSTELLUNG EINER EBENE)

Zu einem Punkt P in $\mathbb{R}^3$ und zwei vom Nullvektor verschiedenen nichtparallelen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene E durch den Punkt P mit den Richtungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ beschrieben durch

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dabei heißt dann $\overrightarrow{OP}$ *Stützvektor* und die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ *Richtungsvektoren* der Ebene.

5.6 BEISPIEL

Wir bestimmen die Ebene durch die Punkte $P = (1; 1; 1)$, $Q = (2; 3; 3)$ und $R = (3; 1; -1)$. Wegen $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ nicht parallel. Die Ebene durch P, Q und R ist damit gegeben durch

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie die Gerade durch die beiden Punkte $P = (5; 3; -1)$ und $Q = (2; 1; 0)$.

Antwort

Die Gerade g ist gegeben durch

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ansatz

Die Gerade g durch die Punkte P und Q besitzt in Zwei-Punkt-Form die Darstellung

$$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OP}$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$.

Geradengleichung

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P ist gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ berechnet sich aus

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Gerade g gegeben durch

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ÜBUNG 2

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden durch den Punkt $P = (1; 2; 1)$ mit Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Antwort

Die Gerade g ist gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ansatz

Die Gerade g durch den Punkte P mit Richtungsvektor $\vec{v}$ besitzt in Punkt-Richtungs-Form die Darstellung

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Geradengleichung

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P ist gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Gerade g gegeben durch

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie die Ebene durch die drei Punkte $P = (1;1;1)$, $Q = (2;3;1)$ und $R = (-1;-1;2)$.

Antwort

Die Ebene E ist gegeben durch

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ansatz

Die Ebene E durch diese drei Punkte lässt sich in Drei-Punkte-Darstellung schreiben als

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ebenengleichung

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P ist gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ berechnet sich aus

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist E gegeben durch

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

ÜBUNG 4

Beschreiben Sie die Ebene E durch den Punkt $P = (-1; -1; 4)$ mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Antwort

Die Ebene E ist gegeben durch

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ansatz

Die Ebene E durch den Punkt P mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ besitzt in Punkt-Richtungs-Form die Darstellung

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ebenengleichung

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P ist gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene E ist damit gegeben durch

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6. LAGEBEZIEHUNGEN ZWISCHEN PUNKTEN, GERADEN UND EBENEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziel

- Sie können die Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen ermitteln.

6.1 Allgemeine Lagebeziehungen

Wir untersuchen nun die Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen. Es können folgende Fälle auftreten:

	Punkt	Gerade	Ebene
Punkt	Punkte sind identisch oder verschieden	Punkt liegt auf Gerade oder nicht	Punkt liegt in Ebene oder nicht
Gerade		Geraden sind identisch, liegen parallel, schneiden sich in einem Punkt oder liegen windschief	Gerade liegt in Ebene, parallel zu Ebene oder durchstößt Ebene
Ebene			Ebenen sind identisch, liegen parallel oder schneiden sich in einer Geraden

6.2 Punkt - Punkt

Zwei Punkte P und Q können entweder gleich oder verschieden sein.

6.1 REGEL

Zwei Punkte $P = (P_x; P_y; P_z)$ und $Q = (Q_x; Q_y; Q_z)$ in $\mathbb{R}^3$ sind genau dann gleich, wenn sie in jeder Koordinate übereinstimmen, d. h. wenn

$$P_x = Q_x, \quad P_y = Q_y, \quad \text{und} \quad P_z = Q_z$$

gelten. Ansonsten sind die Punkte verschieden.

6.3 Punkt - Gerade

Ein Punkt P kann entweder auf einer Geraden g liegen oder nicht.

6.2 REGEL

Ein Punkt P liegt genau dann auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

durch Q mit Richtungsvektor $\vec{v}$, wenn es eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \vec{v}$ gilt, d. h. wenn der Vektor $\overrightarrow{OP}$ zu den Vektoren $\vec{x}$ gehört, die die Gerade beschreiben.

6.3 BEISPIEL

Wir prüfen, ob der Punkt $P = (1; 2; 3)$ auf der Geraden g liegt, die durch den Punkt $Q = (-1; 2; 0)$ und den Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben ist, also

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$$

liefert

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ 2 \\ 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= -1 + 2\lambda \\ 2 &= 2 \\ 3 &= 3\lambda \end{aligned}$$

und der Unbekannten λ. Dieses Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung $\lambda = 1$. Also liegt der Punkt P auf der Geraden g.

6.4 Punkt - Ebene

Ein Punkt P kann entweder in einer Ebene E liegen oder nicht.

6.4 REGEL

Ein Punkt P liegt genau dann in der Ebene

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

durch Q mit Richtungsvektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$, wenn es zwei reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}$ gilt, d. h. wenn der Vektor $\overrightarrow{OP}$ zu den Vektoren $\overrightarrow{x}$ gehört, die die Ebene beschreiben.

6.5 BEISPIEL

Wir prüfen, ob der Punkt $P = (3; 2; 1)$ in der Ebene E liegt, die durch den Punkt $Q = (1; 2; 0)$ und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben ist, also

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}$$

liefert

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + \mu \\ 2 + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + \lambda + \mu \\ 2 &= 2 + \mu \\ 1 &= \lambda - \mu \end{aligned}$$

und den zwei Unbekannten λ und μ. Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, weil die zweite Gleichung $\mu = 0$ und damit die erste Gleichung $\lambda = 2$ ergibt. Die dritte Gleichung liefert dann den Widerspruch $1 = 2$. Also liegt der Punkt P nicht in der Ebene E.

6.5 Gerade - Gerade

Zwei Geraden g und h können entweder identisch sein, oder parallel (aber nicht identisch) sein, oder sich in genau einem Punkt schneiden, oder windschief sein.

6.6 REGEL

Die zwei Geraden $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v},\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $h: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \overrightarrow{w},\ \mu \in \mathbb{R}$ mit Stützpunkten P bzw. Q und Richtungsvektoren $\overrightarrow{v}$ bzw. $\overrightarrow{w}$

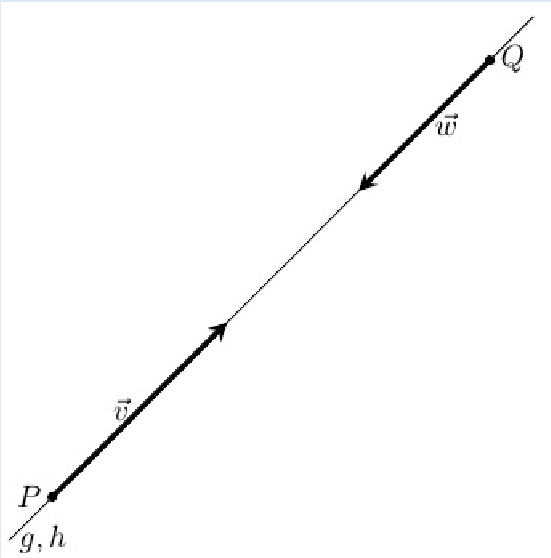
- sind identisch, wenn $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ parallel sind und P auf der Geraden h liegt.
- sind parallel (aber nicht identisch), wenn $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ parallel sind und P nicht auf der Geraden h liegt.
- schneiden sich in genau einem Punkt, wenn $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ nicht parallel sind und es zwei reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \overrightarrow{w}$$

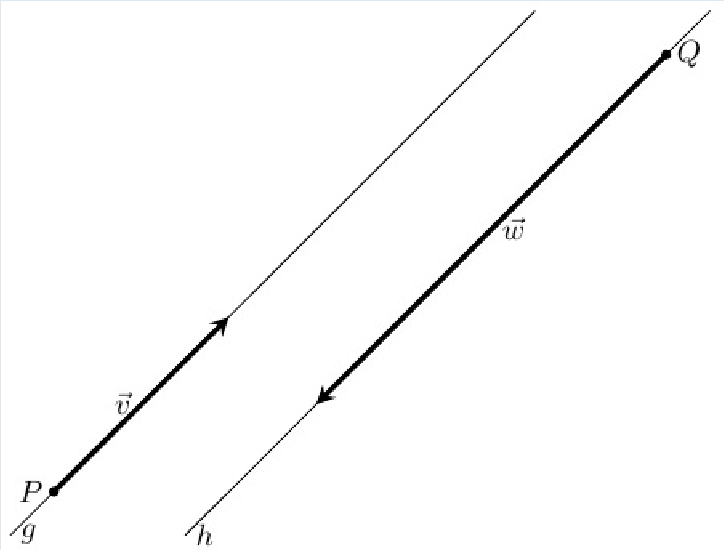
  gilt. Der zu diesem Vektor gehörende Punkt ist dann der gesuchte Schnittpunkt.
- liegen windschief zueinander, wenn $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ nicht parallel sind und sich die Geraden in keinem Punkt schneiden, es also keine solche Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt.

Die ersten drei Fälle können in der Ebene und im Raum auftreten, windschiefe Geraden gibt es nur im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ (und in höheren Dimensionen).

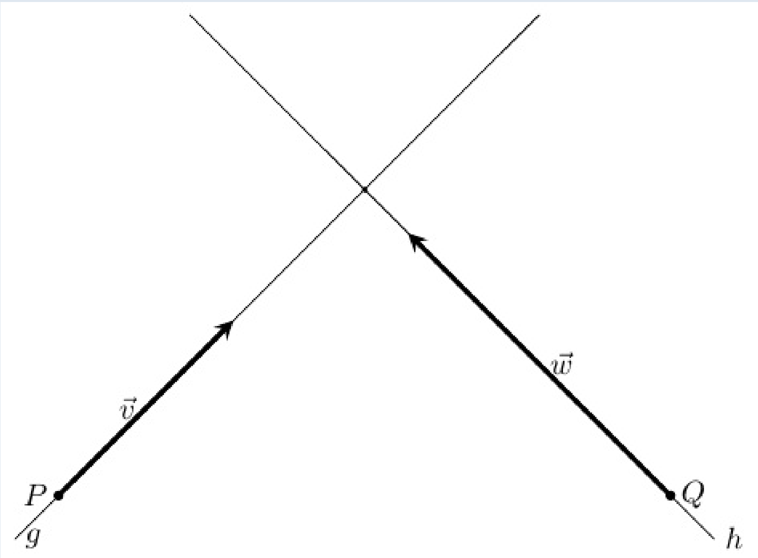
Identische Geraden



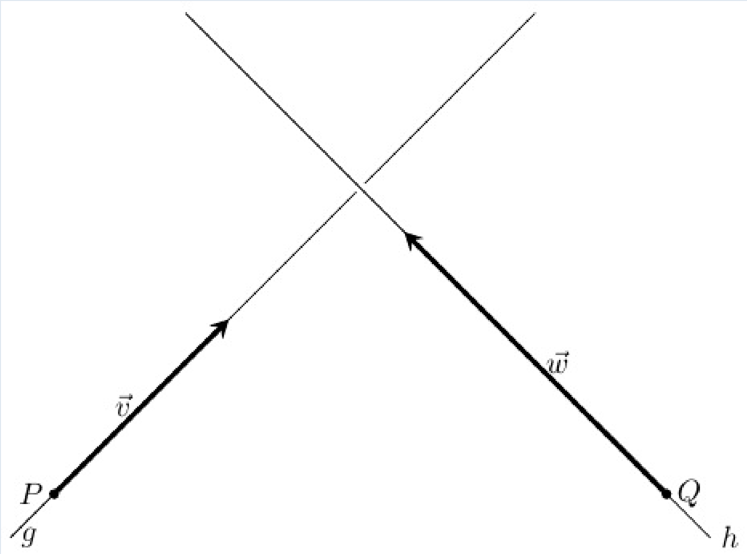
Parallele Geraden



Sich schneidende Geraden



Windschiefe Geraden



6.7 BEISPIEL

Wir untersuchen die Lagebeziehung der beiden Geraden g und h gegeben durch

$$\begin{aligned} g: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ h: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht parallel sind, können sich g und h entweder nur in genau einem Punkt schneiden, oder windschief zueinander sein. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 1 + \mu \\ 2\lambda &= 1 + \mu \\ 1 + 3\lambda &= 3 + \mu, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= 0 \\ 2\lambda - \mu &= 1 \\ 3\lambda - \mu &= 2. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $\lambda = 1, \mu = 1$. Daher schneiden sich die Geraden in genau einem Punkt, der sich durch Einsetzen dieser Werte in die Geraden g bzw. h ergibt. Mit $\lambda = 1$ in der Geradengleichung von g ergibt sich der Punkt S mit dem Ortsvektor

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derselbe Punkt ergibt sich natürlich auch durch Einsetzen von $\mu = 1$ in die Geradengleichung von h:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Also ist $S = (2; 2; 4)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden.

6.6 Gerade - Ebene

Eine Gerade g kann entweder in einer Ebene E liegen, parallel zu E liegen, oder die Ebene E in genau einem Punkt durchstoßen (also schneiden).

6.8 REGEL

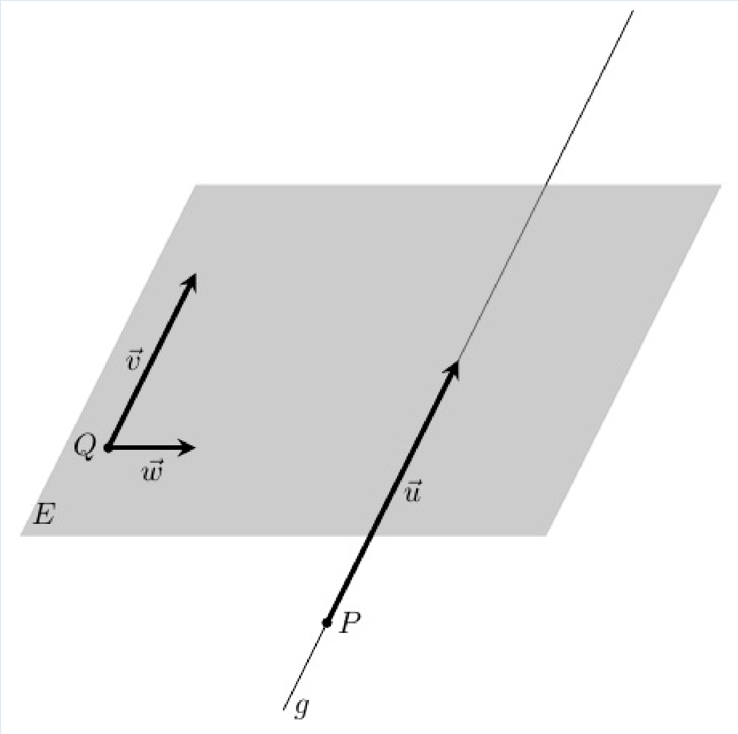
Gegeben seien eine Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}$ mit Stützpunkt P und Richtungsvektor $\vec{u}$ und eine Ebene $E: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \vec{v} + \sigma \cdot \vec{w},\ \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit Stützpunkt Q und Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Besitzt das Gleichungssystem gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \vec{v} + \sigma \cdot \vec{w}$$

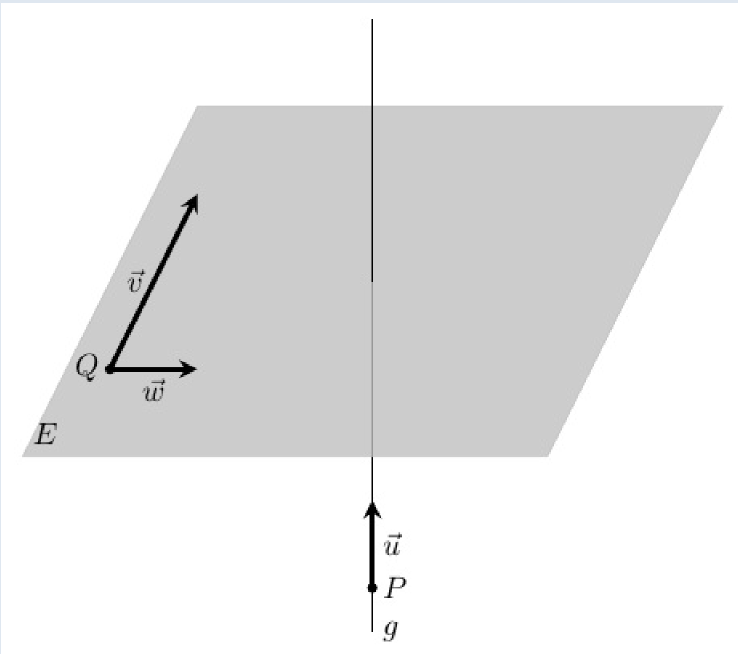
für die reellen Zahlen λ, μ und σ

- unendlich viele Lösungen $(\lambda; \mu; \sigma)$, so liegt g in der Ebene E,
- genau eine Lösung $(\lambda; \mu; \sigma)$, so durchstößt g die Ebene E in dem durch genau diese Parameter festgelegten Punkt,
- keine Lösung, so liegt g parallel zur Ebene E.

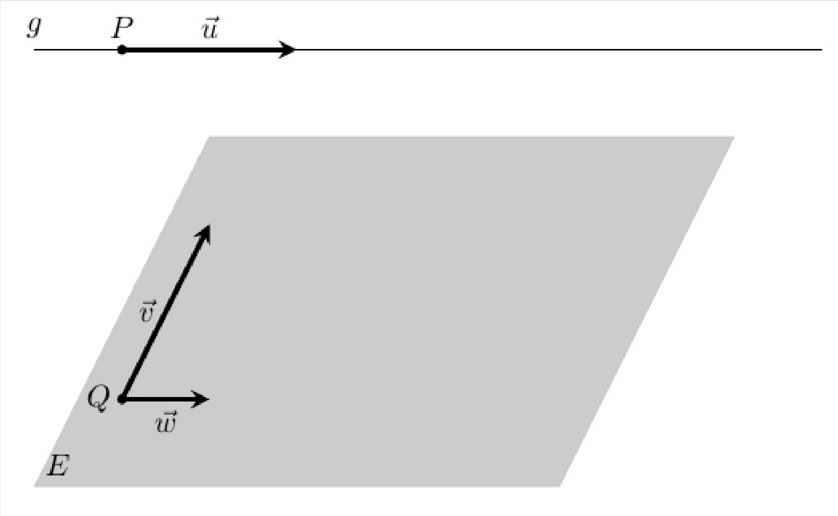
Gerade in Ebene



Gerade durchstößt Ebene



Gerade parallel zu Ebene



6.9 BEISPIEL

Wir untersuchen die Lagebeziehung der Geraden g gegeben durch

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

und der Ebene E gegeben durch

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= -1 + \mu \\ 1 - \lambda &= -1 - 2\mu + 3\sigma \\ 1 - 2\lambda &= -1 + \sigma, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -\lambda - \mu &= -2 \\ -\lambda + 2\mu - 3\sigma &= -2 \\ -2\lambda - \sigma &= -2. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $\lambda = 0$, $\mu = 2$, $\sigma = 2$. Einsetzen von $\lambda = 0$ in die Gleichung der Gerade g liefert den Durchstoßpunkt $S = (1; 1; 1)$. Alternativ hätten wir auch $\mu = 2$ und $\sigma = 2$ in die Darstellung für E einsetzen können, und hätten ebenfalls den Punkt $S = (1; 1; 1)$ als Durchstoßpunkt erhalten.

6.7 Ebene - Ebene

Zwei Ebenen können entweder identisch sein, oder parallel (aber nicht identisch sein), oder sich in einer Geraden schneiden.

6.10 REGEL

Gegeben seien die zwei Ebenen

$$\begin{aligned} E: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{v}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ F: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OQ} + \rho \cdot \overrightarrow{w} + \sigma \cdot \overrightarrow{y}, \ \rho, \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit den Stützpunkten P bzw. Q und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ bzw. $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{y}$. Besitzt das Gleichungssystem gegeben durch

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} + \rho \cdot \overrightarrow{w} + \sigma \cdot \overrightarrow{y}$$

für die vier reellen Zahlen λ, μ, ρ und σ

- unendlich viele Lösungen $(\lambda; \mu; \rho; \sigma)$, wobei die Lösungsmenge durch zwei reelle Parameter beschrieben wird, so sind die Ebenen E und F identisch,
- unendlich viele Lösungen $(\lambda; \mu; \rho; \sigma)$, wobei die Lösungsmenge durch einen reellen Parameter beschrieben wird, so besitzen die Ebenen E und F eine Schnittgerade, die durch Einsetzen ermittelt werden kann,
- keine Lösung, so liegen E und F parallel zueinander.

6.11 BEISPIEL

Wir untersuchen die Lagebeziehung der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} E: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ F: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \rho, \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -1+\lambda+\mu &= 1+2\rho \\ -1+\lambda &= -\rho+\sigma \\ -1+2\lambda+\mu &= 2-\sigma, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \lambda+\mu-2\rho &= 2 \\ \lambda+\rho-\sigma &= 1 \\ 2\lambda+\mu+\sigma &= 3. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem mit drei Gleichungen für vier Unbekannte besitzt die parameterabhängige Lösung

$$\begin{aligned} \lambda &= 1+3t \\ \mu &= 1-7t \\ \rho &= -2t \\ \sigma &= t \end{aligned}$$

mit $t \in \mathbb{R}$. Einsetzen von λ und μ in die Ebenengleichung für E bzw. von ρ und σ in die Ebenengleichung für F ergibt in beiden Fällen die Gerade

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

a) Liegt der Punkt $P = (-3; -2; 1)$ auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}?$$

b) Wie liegen die beiden Geraden

$$g_1 : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g_2 : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

zueinander?

Antwort

a) Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g. b) Die Geraden g_1 und g_2 liegen windschief zueinander.

Lösung a)

Wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

das heißt wir setzen an, dass sich der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P als ein Vektor $\vec{x}$ der Geraden g schreiben lässt.

Der Ansatz liefert die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -3 &= 1 + 2\lambda \\ -2 &= 2 + \lambda \\ 1 &= 3 + 2\lambda. \end{aligned}$$

Ein wenig umgeschrieben erhalten wir damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda &= 4 \\ -\lambda &= 4 \\ -2\lambda &= 2 \end{aligned}$$

mit drei Gleichungen für die eine Unbekannte λ.

Da es nur eine Unbekannte gibt, können wir die drei Gleichungen jeweils einzeln lösen. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\lambda = -2$, aus der zweiten $\lambda = -4$ und aus der dritten $\lambda = -1$. Somit gibt es kein $\lambda \in \mathbb{R}$, das alle drei Gleichungen gleichzeitig löst. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also leer.

Da es keine Lösung für das Gleichungssystem gibt, liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g.

Lösung b)

Offenbar sind die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Geraden g_1 bzw. g_2 nicht parallel. Damit können sich die beiden Geraden entweder in genau einem Punkt schneiden, oder windschief zueinander sein. Wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

suchen also all jene Punkt, die sowohl zur Geraden g_1 als auch zur Geraden g_2 gehören.

Der Ansatz liefert die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 1-\lambda &= 2+\mu \\ 5+4\lambda &= 2+2\mu \\ -2+\lambda &= 1-2\mu. \end{aligned}$$

Ein wenig umgeschrieben erhalten wir damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\lambda-\mu &= 1 \\ 4\lambda-2\mu &= -3 \\ \lambda+2\mu &= 3 \end{aligned}$$

mit drei Gleichungen für die zwei Unbekannten λ und μ.

Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\lambda-\mu &= 1 \\ 4\lambda-2\mu &= -3 \\ \lambda+2\mu &= 3 \end{aligned}$$

mit dem Gauß-Algorithmus. Addition des Vierfachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile und Addition der ersten Zeile zur dritten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} -\lambda-\mu &= 1 \\ -6\mu &= 1 \\ \mu &= 4. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ergibt $\mu = -\frac{1}{6}$, im Widerspruch zu $\mu = 4$ der dritten Zeile. Somit besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

Da es keine Lösung des Gleichungssystems gibt und die Richtungsvektoren der Geraden nicht parallel sind, liegen die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander.

ÜBUNG 2

Ermitteln Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ h: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Antwort

Der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist $S = (1;1;1)$.

Lösung

Wir setzen die beiden Geradendarstellungen gleich, also

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

damit wir den Schnittpunkt ausrechnen können.

Der Ansatz liefert die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -3 + 2\lambda &= 7 + 3\mu \\ -1 + \lambda &= 3 + \mu \\ -3 + 2\lambda &= -1 - \mu. \end{aligned}$$

Umschreiben der drei Gleichungen liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda - 3\mu &= 10 \\ \lambda - \mu &= 4 \\ 2\lambda + \mu &= 2. \end{aligned}$$

Abziehen der Hälfte der ersten Gleichung von der zweiten, und der ersten Gleichung von der dritten, ergibt

$$\begin{aligned} 2\lambda - 3\mu &= 10 \\ \tfrac{1}{2}\mu &= -1 \\ 4\mu &= -8. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert nun $\mu = -2$, was ebenso die zweite Gleichung erfüllt. Aus der ersten Gleichung ergibt sich damit $\lambda = 2$. Damit gibt es also einen Schnittpunkt der beiden Geraden (so wie das die Aufgabe fordert).

Einsetzen von $\lambda = 2$ bzw. $\mu = -2$ in g bzw. h ergibt

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt S besitzt also die Koordinaten $S = (1; 1; 1)$.

ÜBUNG 3

a) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass $P = (1; t; 3)$ in der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

liegt.

b) Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen

$$E_1 : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$E_2 : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \rho, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Antwort

a) Damit P in der Ebene E liegt, muss $t = 5$ gelten. b) Die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{27}{5} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung a)

Wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= 2 + \lambda - 2\mu \\ t &= 1 + \lambda + 3\mu \\ 3 &= 3 - \lambda + \mu \end{aligned}$$

mit drei Gleichungen für die drei Unbekannten λ, μ und t. Umgeschrieben lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda - 2\mu &= -1 \\ \lambda + 3\mu - t &= -1 \\ -\lambda + \mu &= 0. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung erhalten wir $\lambda = \mu$ und damit aus der ersten Gleichung $-\mu = -1$, also $\lambda = \mu = 1$. Damit liefert die zweite Gleichung

$$1 + 3 - t = -1,$$

also $t = 5$.

Lösung b)

Wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dieser Ansatz führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + \lambda - \mu &= 3 - 2\rho + 4\sigma \\ 2 + 2\lambda - 2\mu &= \rho + \sigma \\ -1 + 3\mu &= 1 + \rho + 4\sigma \end{aligned}$$

mit drei Gleichungen für vier Unbekannte. Umgeschrieben lautet es

$$\begin{aligned}\lambda - \mu + 2\rho - 4\sigma &= 2\\ 2\lambda - 2\mu - \rho - \sigma &= -2\\ 3\mu - \rho - 4\sigma &= 2.\end{aligned}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus formen wir diese Gleichungssystem schrittweise um, indem wir zunächst das Zweifache der ersten Zeile von der zweiten abziehen und dann die zweite und dritte Gleichung tauschen:

$$\begin{aligned}\lambda - \mu + 2\rho - 4\sigma &= 2\\ 3\mu - \rho - 4\sigma &= 2\\ -5\rho + 7\sigma &= -6.\end{aligned}$$

Mit $\sigma = t$ erhalten wir nun $\rho = \frac{6}{5} + \frac{7}{5}t$ aus der dritten Gleichung. Die mittlere Gleichung liefert dann

$$\mu = \frac{16}{15} + \frac{9}{5}t.$$

Die erste Gleichung ergibt dann schließlich

$$\lambda = \frac{2}{3} + 3t.$$

Einsetzen dieser Werte für ρ und σ in E_2 ergibt die Geradengleichung der Schnittgeraden g:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{6}{5} + \frac{7}{5}t\right) \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{6}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{12}{5}\\\frac{27}{5}\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Die gleiche Gerade erhalten wir natürlich, indem wir λ und μ in E_1 einsetzen:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3} + 3t\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \left(\frac{16}{15} + \frac{9}{5}t\right) \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{6}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{12}{5}\\\frac{27}{5}\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ÜBUNG 4

Wie liegen die beiden Ebenen

$$\begin{aligned} E: \quad \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ F: \quad \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \rho, \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

zueinander?

Antwort

Die Ebenen E und F liegen parallel, sind aber nicht identisch.

Lösung

Wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 + \lambda + \mu &= 2 - 2\rho + \sigma \\ 3 + \lambda &= -1 - \rho + 3\sigma \\ 1 + \lambda - \mu &= -1 + 5\sigma \end{aligned}$$

mit drei Gleichungen für die vier Unbekannten λ, μ, ρ und σ. Umgeschrieben lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + 2\rho - \sigma &= 0 \\ \lambda + \rho - 3\sigma &= -4 \\ \lambda - \mu - 5\sigma &= -2. \end{aligned}$$

Abziehen der ersten Gleichung von der zweiten bzw. dritten Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + 2\rho - \sigma &= 0 \\ -\mu - \rho - 2\sigma &= -4 \\ -2\mu - 2\rho - 4\sigma &= -2. \end{aligned}$$

Abziehen des zweifachen der mittleren Gleichung von der letzten Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + 2\rho - \sigma &= 0 \\ -\mu - \rho - 2\sigma &= -4 \\ 0 &= 6. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert den Widerspruch $0 = 6$. Damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Somit haben die Ebenen E und F keinen gemeinsamen Punkt, liegen also parallel.