SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 1

Abgabefrist: bis zum 30.04.2020 um 10 Uhr (als PDF-Datei an den zuständigen Tutor)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int (x-1)^2 e^{-x}\,dx, \quad \text{(b)} \int \sqrt{x^2-9}\,dx, \quad \text{(c)} \int (x+1)^2 \cos(2x)\,dx.$$

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte)

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx, \quad \text{(b)} \int \frac{\sin \ln x}{x}\,dx, \quad \text{(c)} \int \frac{dx}{e^x + 4e^{-x}}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+8}\,dx.$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}.$

Präsenzaufgaben

A. Sei $a > 0$. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

$$x \mapsto \arctan\frac{x}{a}, \quad x \mapsto \arcsin\frac{x}{a}, \quad x \mapsto \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \quad x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right).$$

und leiten Sie folgende unbestimmte Integrale her:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}.$$

B. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

1. $\int (x+1)(x-2)\,dx$,
2. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$,
3. $\int x^2 \cos x\,dx$,
4. $\int x^2 e^{-3x}\,dx$,
5. $\int x^3 \ln x\,dx$,
6. $\int x \arctan x\,dx$,
7. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$,
8. $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$,
9. $\int e^x \sin x\,dx$,
10. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$,
11. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$,
12. $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx$,
13. $\int \frac{1}{x^3-1}$,
14. $\int \frac{x}{x^4-1}$,
15. $\int \frac{dx}{(e^x+1)^2}$,
16. $\int \sin^2 x\,dx$,
17. $\int \cos^4(2x)\,dx$,
18. $\int x \sin^2 x\,dx$.

C. Seien P, Q Polynome von zwei Variablen und $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$. Wir möchten zeigen, dass $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ immer eine elementare Funktion ist. Dafür werden wir die Substitution $x = 2\arctan t$ nutzen.

1. Beweisen Sie die Identitäten $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.
2. Leiten Sie her, dass es eine rationale Funktion $t \mapsto r(t)$ existiert mit
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int r(t)\,dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$
3. Leiten Sie her, dass $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ eine elementare Funktion ist.
4. Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$.