# Wiederholungsklausur Modul Algebra I: Ringe und Moduln (mat200)

Prof. Dr. Andreas Stein

09:00 - 11:00+ Uhr, 04. Oktober 2017

Die erlaubte Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**. Zusätzlich erhalten Sie **20 Minuten** Zeit, um die Klausur zu lesen und das Deckblatt **leserlich und in Druckbuchstaben** auszufüllen und zu unterschreiben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.

Hilfsmittel sind keine erlaubt. Insbesondere werden Taschenrechner nicht zugelassen. Jegliche Hilfe während der Klausur ist verboten. Da es Teilpunkte geben wird, ist es in Ihrem Interesse, **detaillierte Begründungen** anzugeben und **alle Beweisschritte** schlüssig aufzuschreiben.

Bitte beantworten Sie alle Fragen in den zur Verfügung gestellten Freiräumen. Sollten Sie mehr Platz benötigen, können Sie auch die Rückseiten verwenden oder **auf Seite 12 fortfahren.**

Es müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Die Klausur geht zu **100 %** in die Modulnote ein. Um die Klausur und damit das Modul zu bestehen, benötigen Sie insgesamt **35 Klausurpunkte.** Sie können nach bestandener Klausur bis zu **15 %** Bonuspunkte aus den Hausaufgaben einbringen.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr: ______________

Studiengang: ______________ Fach/Fächer: ______________________

Zur Kenntnis genommen: ______________________
(Unterschrift)

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **5*** | |
| **Summe** | |

 Name, Vorname:________________________________

**1. Aufgabe** (15 Punkte)

**a.** (4 Punkte) Geben Sie präzise Definitionen für die folgenden Begriffe an und erklären Sie alle auftretenden Größen. (**Keine Kurzform, nur ausformulierte Sätze!**)

(i) Sei $R$ ein Integritätsring. Das Element $p \in R$ ist ein **Primelement** von $R$.

(ii) Sei $R$ ein kommutativer Ring. Die Menge $P$ ist ein **Primideal** von $R$.

**b.** (3 Punkte) Formulieren Sie präzise den **Homomorphiesatz** für Ringe.

**c.** (8 Punkte) Bestimmen Sie mit Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Wenn eine Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) Es seien $R$ ein faktorieller Ring, $p \in R$ ein Primelement und $f \in R[t]$ ein primitives Polynom vom Grad $\geq 1$, dessen höchster Koeffizient nicht von $p$ geteilt wird. Falls $f$ in $R[t]$ irreduzibel ist, so ist auch die Reduktion $\bar{\pi}_p(f) \in \left(R/_{pR}\right)[t]$ von $f$ modulo $p$ in $\left(R/_{pR}\right)[t]$ irreduzibel.

(ii) Jede algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist endlich.

**2. Aufgabe** (15 Punkte)

a. (10 Punkte) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des Kongruenzsystems

$$\begin{aligned} X &\equiv 4 \pmod 7 , \\ X &\equiv 7 \pmod{11} , \\ X &\equiv 4 \pmod{21} , \\ X-7 &\equiv 0 \pmod{33} . \end{aligned}$$

b. (5 Punkte) Sei $R$ ein faktorieller Ring mit der folgenden Eigenschaft: Zu je zwei nichtassoziierten Primelementen $p_1$ und $p_2$ von $R$ existieren $x_1, x_2 \in R$ mit $x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1$. Zeigen Sie, dass jedes Primideal $P \neq \{0\}$ von $R$ ein Hauptideal ist.
*Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass ein Primideal $P \neq \{0\}$ von $R$ mindestens ein Primelement $p$ enthalten muss. Zeigen Sie dann, dass $P = (p) = pR$.*

**3. Aufgabe** (20 Punkte)

a. (10 Punkte) Für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Q}$ sei $f_{k,\ell} := t^4 + (12k+9)t^3 + 5t^2 + 6\ell t + 7 \in \mathbb{Q}[t]$. Zerlegen Sie $f_{k,\ell}$ modulo 2 und modulo 3 in irreduzible Faktoren, d.h. faktorisieren Sie $\tilde{\pi}_2(f_{k,\ell})$ in $\mathbb{F}_2[t]$ und $\tilde{\pi}_3(f_{k,\ell})$ in $\mathbb{F}_3[t]$ in irreduzible Faktoren. Schließen Sie, dass $f_{k,\ell}$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[t]$ irreduzibel ist.

b. (10 Punkte) Sei $f = t^8 + \overline{2}t^6 + \overline{3}t^4 + \overline{4}t^2 + \overline{2} = (t+\overline{2})^2(t+\overline{3})^2(t^4+\overline{2}) \in \mathbb{F}_5[t]$. Ermitteln Sie eine echte Körpererweiterung $K \supsetneq \mathbb{F}_5$ und ein Element $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$. Identifizieren Sie dabei $\mathbb{F}_5$ mit einem geeigneten isomorphen Bild in $K$. Beschreiben Sie $K$, die Einbettung von $\mathbb{F}_5$ in $K$ und das Bild dieser Einbettung explizit. Wieviele Elemente hat $K$?

**4. Aufgabe** (20 Punkte) Sei $\beta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $t^5 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$.

a. (7 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes $\gamma \in \mathbb{Q}(\beta) \setminus \mathbb{Q}$ das Minimalpolynom $f_{\gamma,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[t]$ den Grad 5 besitzt.

b. (7 Punkte) Geben Sie eine Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\beta) \supseteq \mathbb{Q}$ an und stellen Sie das Körperelement $\beta^9 + 2\beta^7 + 2\beta^{-5} + 2\beta^{-4} + 2\beta^{-3} + 2\beta^{-2} + 2\beta^{-1}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination bezüglich dieser Basis dar.

c. (6 Punkte) Ermitteln Sie mit vollständiger Begründung für jedes $c \in \mathbb{Q}$ das Minimalpolynom $f_{\beta+c,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[t]$ von $\beta + c$ über $\mathbb{Q}$.

11 Name, Vorname:________________________________________________

**5*. Aufgabe.** (6 Extrapunkte) *Extrapunkte werden strikt bewertet.*

**a.** (4 Extrapunkte) Seien $p$, $q$ verschiedene Primzahlen und sei $\alpha := \sqrt{p}\,\sqrt[3]{q}$. Bestimmen Sie explizit $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ und ermitteln Sie damit das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$.

**b.** (2 Extrapunkte) Sei $f = t^6 - 6t^2 + 9 \in \mathbb{Q}[t]$. Zerlegen Sie $f$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ in irreduzible Faktoren.