SS 2020 Shestakov

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei M eine nichtleere Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist. Sie heißt *diskrete Metrik*.

ii) Sei $x_0 \in M$. Wie sehen die Kugeln $B_{\frac{1}{3}}(x_0)$ und $B_{13}(x_0)$ aus?

iii) Beschreiben Sie die konvergenten Folgen in (M, d).

iv) Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von M zugleich offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen M sind offen, abgeschlossen, weder offen noch abgeschlossen in X, wobei X mit der euklidischen Metrik versehen ist. Bestimmen Sie den Abschluss, das Innere und den Rand dieser Mengen.

a) $X = \mathbb{R}$, $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$

b) $X = \mathbb{Q}$, $M = \{x \in \mathbb{Q}\colon \sqrt{3} \leq x < 13\}$

Aufgabe 3. Sei X ein metrischer Raum und $M_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$.

a) Beweisen Sie:

i) $\overline{\bigcup_{i=1}^{m} M_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{M_i}$

ii) $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{M_i}$

b) Konstruieren Sie ein Beispiel für die echte Inklusion in ii).

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung abzählbar vieler offener Kugeln ist.

Abgabe: Bis 14. Mai um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1	2		3		4	
	a	a	b	a	b		
Punkte	5	2	2	5	2	4	20

Präsenzaufgaben

1. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Metriken auf X definieren:

a) $X = \{x = (x_1, x_2, ...) \colon x_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}), k = 1, 2, ...\}$, $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|}$, $x = (x_1, ..., x_k, ...), y = (y_1, ..., y_k, ...)$

b) $X = \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \text{falls } x, y, P \text{ auf einer Geraden liegen,} \\ \|x - P\| + \|y - P\|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $P \in \mathbb{R}^2$ ein fester Punkt und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm ist. Für welche französische Stadt könnte P stehen, wenn wir das Eisenbahnnetz in Frankreich betrachten?

2. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, dass die Operatornorm

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup\big\{\|Ax\| \colon x \in \mathbb{K}^n, \|x\| < 1\big\}, \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

eine Norm ist.

3. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) ? Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und B die offene Einheitskugel um 0 in X. Dann ist $\overline{B} = \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\}$. ?

b) ? Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und B die offene Einheitskugel um a in X. Dann ist $\overline{B} = \{x \in X \colon d(x, a) \leq 1\}$. ?

c) ? Der Durchschnitt der Inneren zweier Teilmengen eines metrischen Raums ist das Innere ihres Durchschnitts. ?

d) ? Die Vereinigung der Inneren zweier Teilmengen eines metrischen Raums ist das Innere ihrer Vereinigung. ?

4. Welche der folgenden Mengen M sind offen, abgeschlossen, weder offen noch abgeschlossen in X, wobei X mit der euklidischen Metrik versehen ist. Bestimmen Sie den Abschluss, das Innere und den Rand dieser Mengen.

a) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$

b) $X = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{Q} \cup \{i\}$

c) $X = \mathbb{R}^3$, $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 > 0\} \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Skizzieren Sie M.