Prof. Dr. Andreas Defant
andreas.defant@uni-oldenburg.de

Dr. Sunke Schlüters
sunke.schlueters@uni-oldenburg.de

Klausur zum Modul

„Mathematisches Problemlösen und Beweisen"

19. Februar 2016

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Anzahl aller Folgen der Länge $n \in \mathbb{N}$ aus den Ziffern $\{1, 2, 3\}$, bei denen sich zwei aufeinanderfolgende Ziffern höchstens um 1 unterscheiden. $(1, 2, 3, 3, 2, 3)$ oder $(2, 1, 2, 3, 3, 2)$ sind solche Folgen der Länge 6. $(1, 3, 2, 1, 1, 2)$ hingegen nicht.

Wir bezeichnen die gesuchte Anzahl mit a_n. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie a_1 und a_2, indem Sie alle möglichen Folgen aufzählen.

(b) Bezeichne $a_{1,n}$, $a_{2,n}$, bzw. $a_{3,n}$ die Anzahl solcher Folgen, die auf 1, 2, bzw. 3 enden. Schreiben Sie a_n als Ausdruck dieser Größen und begründen Sie die Korrektheit (Werden alle Folgen gezählt? Werden keine Folgen doppelt gezählt?).

(c) Bestimmen Sie Rekursionen für $a_{1,n}$, $a_{2,n}$ und $a_{3,n}$ und begründen Sie ihre Korrektheit.

(d) Folgern Sie eine Rekursion für a_n.
Achtung! In dieser soll weder $a_{1,n}$, $a_{2,n}$ noch $a_{3,n}$ auftreten.

(e) Bestimmen Sie a_5 mit Hilfe der hergeleiteten Rekursion.

11 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Beschreiben Sie das Vorgehen in einem *direktem Beweis*, in einem *indirektem Beweis* und in einem *Widerspruchsbeweis*.

(b) Gegeben sei eine Färbung der natürlichen Zahlen in den Farben rot und blau, d.h. eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$, sodass folgende Aussage wahr ist:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, n < m \leq 2n : f(m) = \text{rot}$$

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

(1) Negieren Sie die Aussage.

(2) Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden Aussagen impliziert werden:

  (i) Es gibt eine blau gefärbte Zahl.

  (ii) $\exists n \in \mathbb{N} : f(n) = \text{rot}$

  (iii) Es gibt unendlich viele rot gefärbte Zahlen.

11 Punkte

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe soll bestimmt werden, in wie viele Länder die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage geteilt wird. n Geraden sind in allgemeiner Lage, wenn keine zwei parallel sind und keine drei sich in einem Punkt schneiden.

Arbeiten Sie dazu an folgendem Ansatz:

(a) Begründen Sie, warum es möglich ist, die Ebene so zu drehen, dass keine der Geraden horizontal verläuft.

(b) Fertigen Sie eine Skizze für $n \geq 4$ an. Markieren Sie die Länder die keinen südlichsten Punkt haben und markieren Sie die südlichsten Punkte der nach Süden beschränkten Länder.

(c) Bestimmen Sie für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Länder, die keinen südlichsten Punkt haben.

(d) Begründen Sie:

  (1) Jedes nach Süden beschränkte Land hat genau einen südlichsten Punkt.

  (2) Jeder Punkt in der Ebene kann der südlichste Punkt höchstens eines Landes sein.

(e) Jedem nach Süden beschränkten Land wird nun sein südlichster Punkt zugeordnet. Zählen Sie die Anzahl der südlichsten Punkte ab.

Hinweis. Betrachten Sie Ihre Skizze aus dem vorhergehenden Aufgabenteil.

(f) Fassen Sie Ihre Ergebnisse aus den vorhergehenden Aufgabenteilen zusammen und bestimmen Sie somit die Gesamtzahl der Länder, in die die Ebene durch $n \in \mathbb{N}$ Geraden in allgemeiner Lage geteilt wird.

14 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie, welche Reste modulo 5 die vierte Potenz einer Zahl $a \in \mathbb{N}$ lassen kann. Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle:

a	$a^2 \pmod 5$	$a^4 \pmod 5$
0		
1		
2		
3		
4	1	

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$5 \cdot (a^4 + b^4) = c^4$$

keine Lösung $a, b, c \in \mathbb{N}$ besitzt.

(c) Untersuchen Sie, ob die Gleichung

$$5 \cdot (a^2 + b^2) = c^2$$

eine Lösung $a, b, c \in \mathbb{N}$ besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort!

13 Punkte

Aufgabe 5. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es unter beliebigen sechs Personen immer drei gibt, die sich gegenseitig kennen, oder es drei gibt, die sich nicht kennen.

(a) Modellieren Sie eine beispielhafte Gruppe von sechs Personen mithilfe eines Graphen.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede Person A einer beliebigen Gruppe drei andere Personen B, C und D in der Gruppe gibt, die A alle kennt oder A alle nicht kennt.

(c) Betrachten Sie für eine fixierte Person A diese Teilgruppe (B, C und D) und beweisen Sie die fragliche Aussage.

Hinweis. Diese Gruppe muss nicht aus den gesuchten drei Personen bestehen; es könnte z.B. folgende Situation auftreten: B kennt C und C kennt D, aber B kennt nicht D.

11 Punkte