10 Funktionen und Abbildungen I

Funktionen tauchten bereits in der Schule an allen möglichen Stellen auf. Egal, ob es darum ging, bestimmte Zusammmenhänge durch eine Funktion zu beschreiben, oder gegebene Funktionen abzuleiten oder zu integrieren. Man könnte daher fast meinen, dass Funktionen eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik spielen – und genauso ist es auch!

Funktionen und *Abbildungen* sind zwei der fundamentalen Objekte in der Mathematik und sie sind daher auch in den meisten ihrer Teilgebiete anzutreffen. Wir haben bereits in der Schule Funktionen kennengelernt. Den Begriff einer Funktion wollen wir in diesem Kapitel noch etwas formalisieren und daraus einen allgemeineren Begriff, nämlich den der Abbildung entwickeln. Letzterer ist noch einmal sehr viel weitreichender und im Laufe dieses Vortrages werden wir erkennen, dass die bereits aus der Schule bekannten Funktionen tatsächlich Spezialfälle von allgemeinen Abbildungen darstellen. Wie wichtig Funktionen und Abbildungen sind, sieht man ebenfalls daran, dass sie an gewissen Stellen innerhalb der Mathematik als das zentrale zu untersuchende Objekt selbst vorkommen und in anderen Kontexten darüberhinaus als Hilfsmittel auftauchen, um das eigentlich interessierende Objekt zu studieren. Insbesondere in der Analysis stehen die Funktionen und Abbildungen als solche im Mittelpunkt und wir versuchen, möglichst viele Informationen über diese zu erlangen, wohingegen sie in der Algebra vorwiegend als Hilfsobjekte auftauchen.

10.1 Was sind Funktionen?

Auch wenn Funktionen bereits irgendwie bekannt sein dürften, wollen wir hier zunächst eine exakte Definition dafür angeben, was wir unter Funktionen verstehen wollen.

Definition 10.1 (Funktion)
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle oder zwei Vereinigungen von endlich vielen Intervallen.
Wir bezeichnen eine Vorschrift f, die jedem $x \in I$ genau ein $y \in J$ zuordnet, als **Funktion von I nach J**.
Wir schreiben: $f : I \to J$.

Insbesondere können I und/oder J natürlich auch ganz $\mathbb{R}$ sein. Die Funktionen, die wir aus der Schule bereits kennen, fallen allesamt unter diese formale Definition einer Funktion. Denn dort wird jedem „x-Wert" aus dem Definitionsbereich genau

ein „y-Wert“ aus dem Wertevorrat zugeordnet (zum Beispiel durch die Vorschrift $f(x) = x^2$). Gleichzeitig stellt sie aber genaue Ansprüche daran, was Vorschriften erfüllen müssen, um eine Funktion zu sein, weshalb nicht jede willkürlich aufgestellte Vorschrift automatisch eine Funktion ist (ein Beispiel folgt auf Seite 3).
Wir werden die in der Definition aufgestellte Bedingung an eine Funktion gleich in Abschnitt 10.2 noch etwas genauer betrachten.

Bemerkung: Diese Definition einer Funktion lässt sich noch weiter verallgemeinern. Wenn wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in der obigen Definition 10.1 durch die komlexen Zahlen $\mathbb{C}$ ersetzen wollen, spricht man noch immer von Funktionen (manchmal auch von „komplexwertigen Funktionen“). An dieser Stelle wollen wir dies aber nicht weiter vertiefen und verbleiben bei der hier gegebenen Definition.

Definition 10.2 (Definitionsbereich und Wertevorrat)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 10.1 und $f : I \to J$ eine Funktion. Dann nennen wir

- I den **Definitionsbereich** (auch **Definitionsmenge**) und
- J den **Wertevorrat** (auch **Wertebereich** oder **Wertemenge**)

von f.

Bemerkung: Es gibt zwei geläufige Schreibweisen für die Funktionsvorschrift von Funktionen:

1. $f : I \to J,\ f(x) =$ „*Ausdruck in x*“, wie es in der Schule oft üblich ist.
   Beispiel:
   $$f : (-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$
2. $f : I \to J,\ x \mapsto$ „*Ausdruck in x*“ ist eine weitere verbreitete Schreibweise.
   Beispiel:
   $$f : (-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$
   Häufig schreibt man diese auch untereinander:
   $$\begin{aligned} f : (-1, 3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Studium werden wir auch Funktionen begegnen, von denen wir zwar zeigen können, dass sie tatsächlich Funktionen sind (vgl. dazu auch den Abschnitt 10.2), wir aber keine konkrete Funktionsvorschrift hinschreiben können, wie z.B. $f(x) = x^2$.

Bemerkung (Unterschied von $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{f(x)}$): An dieser Stelle weisen wir nachdrücklich darauf hin, dass $f(x)$ immer nur einen **Funktionswert**, also eine einzelne reelle Zahl beschreibt, während f die **Funktion** selbst (als ganzes) bezeichnet.
Man sagt also: „Die Funktion f nimmt in x den Funktionswert $f(x)$ an.“

10.2 Wohldefiniertheit und Graph einer Funktion

Wie bereits erwähnt stellt schon die Definition einer „Funktion“ gewisse Anforderungen an mögliche Vorschriften für Funktionen. Diese Anforderungen werden jedoch schnell vergessen, was insofern fatal ist, als dass nicht jede Vorschrift zwischen zwei Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ automatisch eine Funktion ist, sondern nur dann, wenn gilt:

Jedem Element aus der Definitionsmenge wird genau ein Element aus dem Wertevorrat zugewiesen.

Um zu vermeiden, dass man diese versteckte, aber zentrale Eigenschaft von Funktionen übersieht, betonen wir diese Forderung aus der Definition, indem wir zwischen Vorschriften und Funktionen unterscheiden (zur Verdeutlichung sagen wir auch manchmal „wohldefinierte Funktion“ statt nur „Funktion“ – auch wenn eine der Begriff „Funktion“ per Definition die Wohldefiniertheit bereits voraussetzt).

Definition 10.3

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 10.1. Eine Vorschrift $f : I \to J$ heißt **wohldefiniert**, falls jedem Element aus der Definitionsmenge genau ein Element aus dem Wertevorrat zugewiesen wird.

In diesem Fall nennen wir die durch die Vorschrift definierte Funktion zur Verdeutlichung auch **wohldefinierte Funktion**.

Wenn man also eine Vorschrift aufgestellt und somit eine vermeintliche Funktion gefunden hat (oder eine vermeintliche Funktion gegeben bekommt), wäre genau genommen der erste Schritt, diese auf Wohldefiniertheit zu prüfen, um festzustellen, ob es ich bei der Vorschrift um eine Funktion handelt oder nicht.

Beispiel:

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ aus Kapitel 10.1 ist wohldefiniert, denn
   - wir können jedes $x \in \mathbb{R}$ mit sich selbst multiplizieren und erhalten wieder eine reelle Zahl, d. h. jedem x aus dem Definitionsbereich wird durch die Vorschrift $f(x) = x^2$ ein Element aus dem Wertevorrat zugeordnet.
   - es kann nicht passieren, dass einem x aus dem Definitionsbereich durch die Vorschrift verschiedene Funktionswerte $f(x)$ zugeordnet werden, da die Multiplikation in $\mathbb{R}$ eindeutig ist – es wird also jedem x genau ein Funktionswert zugeordnet.

2. Die Vorschrift $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2$ falls $x \leq 1$ und $f(x) = 1$ falls $x \geq -1$ ist nicht wohldefiniert und damit keine Funktion, da für alle $x \in [-1,\ 1]$ gilt

$$f(x) = 2 \neq 1 = f(x)$$

   gilt. Es sind also bestimmten Wert aus der Definitionsmenge mehrere Werte aus dem Wertevorrat zugeordnet.

3. Die Vorschrift $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ f(x) = 5x$ ist nicht wohldefiniert und damit keine Funktion, da für $x \leq 0$ gilt, dass $f(x) \leq 0$ ist und damit nicht mehr in dem Wertevorrat liegen würde.

An dem letzten Beispiel erkennen wir aber bereits, dass man sich hier schon ein bisschen anstrengen muss, um eine nicht wohldefinierte Funktion zu finden.
Als „anschauliche Regel gilt bei Vorschriften $f : I \to J$ mit zwei Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$, dass f wohldefiniert (also eine Funktion) ist, wenn der Graph von f (siehe Definition 10.4) nirgends „übereinander liegt“ (für ein Beispiel siehe Abbildung 10.1).

Definition 10.4 (Graph)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 10.1 und $f : I \to J$ eine Funktion (oder eine Vorschrift). Der **Graph** von f ist die Menge

$$\{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subseteq I \times J \ .$$

Bemerkung: Der Graph einer Funktion ist umgangssprachlich also genau das, was wir sehen, wenn wir die Funktion zeichnen.

Wenn wir den Graph der Vorschrift aus Beispiel 2 von oben zeichnen, so sehen wir, dass dieser auf $[-1,\ 1]$ „übereinander“ liegt und daher keine Funktion ist:

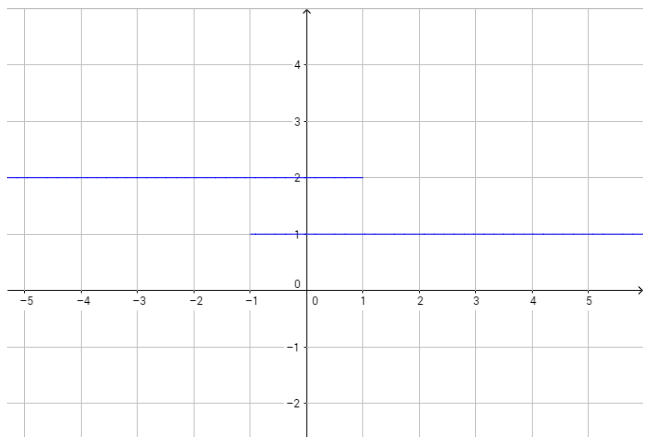

Abbildung 10.1: Graph der Vorschrift aus Beispiel 2 – KEINE FUNKTION!

Die Funktionen, die wir aus der Schule bereits kennen, sind alle wohldefiniert – trotzdem sollte man hier immer vorsichtig sein und zumindest kurz über die Wohldefiniertheit nachdenken. Im Folgenden werden wir uns nämlich allgemeineren Abbildungen zuwenden, bei denen es deutlich schneller passieren kann, dass vermeintliche Abbildungen nicht mehr wohldefiniert sind!

10.3 Von Funktionen zu Abbildungen

Wir haben nun bereits eine ziemlich gute Vorstellung und vor allem exakte Definition, was Funktionen sind. In einem nächsten Schritt wollen wir den Begriff einer Funktion jetzt verallgemeinern auf den Begriff der Abbildung.

Definition 10.5 (Abbildung)
Seien M und N zwei nicht-leere Mengen.
Wir bezeichnen eine Vorschrift f, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet als **Abbildung von M nach N**.
Schreibe: $f : M \to N$.

Insbesondere sind die bereits diskutierten Funktionen wie $f : (-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ganz spezielle Abbildungen, bei denen die Mengen M und N zwei Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Eine Funktion ist also ein Spezialfall einer Abbildung – der Unterschied zwischen diesen Objekten besteht lediglich darin, dass Abbildungen nicht nur zwischen Intervallen in $\mathbb{R}$, sondern zwischen beliebigen Mengen definiert und daher allgemeiner sind.

Für Abbildungen verwenden wir die gleichen Schreibweisen, wie auch schon für Funktionen, also

$$f : M \to N, \quad f(x) = \text{„}\textit{Ausdruck in } x\text{“}$$

oder

$$f : M \to N, \quad x \mapsto \text{„}\textit{Ausdruck in } x\text{“}\,.$$

Der Unterschied zwischen f und $f(x)$ gilt bei allgemeinen Abbildungen genau so wie schon bei Funktionen. Während $f(x)$ einen konkreten Wert (den Funktionswert der Abbildung f in x) bezeichnet, beschreibt f die Funktion als Ganzes! Man nennt $f(x)$ übrigens auch bei allgemeinen Abbildungen häufig „Funktionswert“.

Abschließend erwähnen wir noch einmal, dass auch für allgemeine Vorschriften, das heißt vermeintliche Abbildungen, die Forderung der Wohldefiniertheit gilt, da Abbildungen analog zu Funktionen definiert sind und an sie daher die gleichen Forderungen wie an Funktionen gestellt werden. In diesem Zusammenhang schauen wir uns kurz einige Beispiele zu Abbildungen und nicht wohldefinierten Vorschriften an.

Beispiele:

1. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{x}{x+1}$ ist wohldefiniert, denn
   - wir können zu jedem $x \in \mathbb{N}$ eine 1 addieren und erhalten eine natürliche Zahl (insbesondere also nicht Null), weshalb wir durch diese Zahl teilen dürfen. Dividieren wir x durch $x+1$, erhalten wir eine rationale Zahl, d. h. <u>jedem</u> x aus dem Definitionsbereich wird durch die Vorschrift $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (mindestens) ein Element <u>aus dem Wertevorrat</u> zugeordnet.
   - es kann nicht passieren, dass einem x aus dem Definitionsbereich durch die Vorschrift mehrere Funktionswerte $f(x)$ zugeordnet werden, da die Addition und Division in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}$ eindeutig ist – es wird also jedem x <u>genau</u> ein Funktionswert zugeordnet.

2. Die Vorschrift $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(\frac{a}{b}) = a$ ist nicht wohldefiniert und damit keine Abbildung, da
$$f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = 1 \neq 2 = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(1)$$
   gilt. Es sind also einem Wert aus der Definitionsmenge (der Zahl $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$) mehrere Werte aus dem Wertevorrat zugeordnet. An solchen Stellen, an denen eine Abbildung sich auf eine konkrete Darstellung der Elemente bezieht, ist stets besondere Vorsicht bei der Wohldefiniertheit geboten! Denn wie wir gesehen haben, können Elemente oft auf verschiedene Weisen dargestellt werden, was jedoch keinen Unterschied für den jeweiligen Funktionswert machen darf.

3. Die Vorschrift
$$f : \{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\} \to \{\text{Auto}, \text{Motorrad}\}$$
   definiert durch
$$\begin{aligned} f(\text{rot}) &= \text{Auto}, \\ f(\text{grün}) &= \text{Auto}, \\ f(\text{blau}) &= \text{Motorrad} \end{aligned}$$
   ist wohldefiniert, also eine Abbildung, da jedem Element aus der Definitionsmenge $\{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\}$ genau ein Wert aus dem Wertevorrat $\{\text{Auto}, \text{Motorrad}\}$ zugeordnet wird.

4. Die Vorschrift $f : \{1, 2, 3\} \to \{7, 8\},\ f(1) = 8,\ f(2) = 7$ ist nicht wohldefiniert, also keine Abbildung, da für das Element 3 der Definitionsmenge $\{1, 2, 3\}$ kein Wert im Wertevorrat definiert ist.

Nachdem wir eine Vorschrift auf Wohldefiniertheit geprüft und damit sichergestellt haben, dass es sich bei dieser tatsächlich um eine Abbildung (bzw. Funktion) handelt, charakterisieren wir im Folgenden einige grundlegende Eigenschaften von Abbildungen.

Wie bereits bei Funktionen nennen wir für eine Abbildung $f : M \to N$ in analoger Weise M den Definitionsbereich und N den Wertevorrat von f.

- Der Definitionsbereich einer Abbildung f ist also die Menge der Elemente x, für die ein Funktionswert $f(x)$ definiert ist.
- Der Wertevorrat ist eine Menge, die <u>mindestens</u> alle Funktionswerte $f(x)$ enthält – sie kann aber auch größer sein. Insbesondere heißt dies, dass der Wertevorrat von f noch keine genauen Informationen liefert, welche Werte die Funktion f tatsächlich annimmt.

Daher wird in diesem Zusammenhang von zwei weiteren Begriffen Gebrauch gemacht: dem *Bild* einer Abbildung und dem *Urbild* von Teilmengen ihres Wertevorrats.

Bemerkung: Da Funktionen nichts anderes als spezielle Abbildungen sind, gelten die folgenden Definitionen natürlich genau so für Funktionen. Gleiches gilt für alle weiteren Eigenschaften, die wir in den folgenden Unterkapiteln behandeln werden. In den Beispielen (im Skript und in den Übungsaufgaben) werden daher auch sowohl allgemeine Abbildungen als auch Funktionen im Speziellen vorkommen. Wir werden aber im weiteren Verlauf nur noch von Abbildung reden, was so zu verstehen ist, dass Funktionen darin mit eingeschlossen sind.

Definition 10.6 (Bild und Urbild)
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.

(1) Für $S \subseteq M$ nennen wir die Menge

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

das **Bild** von S unter f.
Für das Bild von M unter f spricht man auch kurz nur vom „Bild von f“.

(2) Für $L \subseteq N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(L) := \{x \mid f(x) \in L\}$$

das **Urbild** von L unter f.

Bemerkung:

- Für den Begriff des Bildes ist auch der Begriff **Bildbereich** geläufig. Stellenweise werden noch andere Begriffe genutzt, sodass man sich beim Lesen von Texten immer genau verdeutlichen sollte, was mit gewissen Begriffen gemeint ist.

- Insbesondere ist beim Urbild zu beachten, dass f^{-1} im Allgemeinen nicht etwa $\frac{1}{f}$ bedeutet, sondern als eigenständiges Symbol für ein eigenständiges Objekt zu verstehen ist!

Beispiele:

1. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
   - Der Definitionsbereich von f sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, genau wie der Wertevorrat. Das Bild $f(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$ unter f sind aber nur alle nicht-negativen reellen Zahlen, da x^2 für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht-negativ ist, wie aus der Schule bekannt ist.
   - Das Bild des Intervalls $[-2, 3)$ ist $f([-2, 3)) = [0, 9]$, wie man sich (zur Zeit noch) mit etwas Anschauung und Schulwissen überlegen kann.
   - Das Bild der einelementigen Menge $\{2\}$ ist $f(\{2\}) = \{4\}$ – nicht zu verwechseln mit dem Funktionswert $f(2) = 4$ des <u>Elements</u> 2.
   - Das Urbild von $\{1\}$ ist $f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$, da <u>nur</u> für $x = 1$ oder $x = -1$ gilt, dass $f(x) = 1$ ist.
   - Das Urbild von $\{0\}$ ist $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, da $f(x) = 0$ <u>nur</u> für $x = 0$ gilt.
   - Das Urbild von $\{-1\}$ ist $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.
2. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}^{(*)}$.
   - Das Bild von dem Intervall $[0,\ 4)$ unter f ist $f([0,\ 4)) = \{0, 1, 2, 3\}$.
   - Das Bild von $\mathbb{Q}$ unter f ist $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.
   - Das Urbild der Menge $\mathbb{N}$ unter f ist $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}_{\geq 1} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}$.
   - Das Urbild der Menge $\{0\}$ unter f ist $f^{-1}(\{0\}) = [0,\ 1)$.

   $(*)$ „max“ bezeichnet das Maximum der Menge, vor der es steht. Diese Abbildungsvorschrift rundet demnach die Zahl $x \in \mathbb{Q}$ auf die nächst kleinere ganze Zahl ab. Wir überlassen es dem Leser als Übung, sich zu überlegen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist.

10.4 Komposition von Abbildungen

Eine wichtige Operation im Zusammenhang mit Abbildungen ist die **Komposition** von Abbildungen. Diese kann man nutzen, um neue Abbildungen zu konstruieren und die Konstruktion in Teilschritte zu unterteilen.

Definition 10.7 (Komposition)

Seien S, R, M und N vier Mengen. Es seien $g : S \to R$ und $f : M \to N$ zwei Abbildungen, wobei $g(S) \subseteq M$ gelte.

Die **Komposition** $f \circ g$ von f und g ist wieder eine Abbildung, die definiert ist durch

$$f \circ g : S \to N, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)), \text{ für alle } x \in S.$$

Achtung! Es können nicht *beliebige* Abbildungen miteinander kombiniert werden. Die Definition erfordert, dass das Bild der Abbildung g im Definitionsbereich der Abbildung f liegt.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 3$ gilt:

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Eine Beschreibung zur Erstellung dieser Abbildung $f \circ g$ könnte lauten: „Addiere zu jeder Zahl 3 und quadriere anschließend das Ergebnis“. Diese Erklärung ist offenbar viel einfacher als „Quadriere jede Zahl, addiere dann ihr Sechsfaches dazu und addiere zu diesem Ergebnis noch einmal 9.“ Ein vermeintlicher Umweg ist hier also praktikabler.

Besonders ist darauf zu achten, dass anders als bei üblichen Verknüpfungen die Komposition **von rechts nach links** angewendet wird. Möchte man $(f \circ g)(x)$ berechnen, wendet man auf x zuerst die Definition von g und danach auf $g(x)$ die Definition von f an. Man kann sich das so vorstellen, dass das Objekt „$(f \circ g)$“ von links auf x „zufährt“ und x dabei natürlich zuerst von g „eingesammelt“ wird, da g ja zuerst bei x ist. Wenn f dann x erreicht, so sitzt x bereits in g, weshalb f also $g(x)$ einsammeln muss.

10.5 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

In diesem Unterkapitel möchten wir drei elementare Eigenschaften von Abbildungen einführen: die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Diese drei Eigenschaften sind sehr abstrakt, weshalb alle Abbildungen auf diese untersucht werden können. Wichtig sind sie darüberhinaus, da sie etwa als Kriterium für die Existenz einer Umkehrabbildung auftauchen (vgl. Kapitel „Von Funktionen und Abbildungen II“) oder da mit diesen Eigenschaften Mengen miteinander verglichen werden können (vgl. Kapitel 10.6). Darüberhinaus tauchen diese Begriffe in vielen weiteren Situationen auf, welche in diesem Skript aber nicht alle behandelt werden können.

Definition 10.8 (Injektivität)
Seien M und N zwei Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2\ .$$

Bemerkung: Eine äquivalente Formulierung der Definition der Injetivität lautet:
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

Jedes Element des Wertevorrats von f wird also höchstens einmal angenommen.

Gewissermaßen das Gegenstück zur Injektivität ist die Surjektivität. Wir betonen an dieser Stelle aber, dass eine Funktion nicht entweder injektiv oder surjektiv sein muss! Es gibt Funktionen, die weder injektiv noch surjektiv sind, während andere beide Eigenschaften besitzen und wieder andere genau eine von beiden Eigenschaften erfüllen.

Definition 10.9 (Surjektivität)
Seien M und N zwei Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, falls gilt:

$$f(M) = N$$

Bemerkung: Eine äquivalente Formulierung der Definition der Surjektivität lautet:
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt surjektiv, falls für alle $y \in N$ mindestens ein $x \in M$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt.
In kurz: $f : M \to N$ surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in N \; \exists x \in M : f(x) = y$.
Jedes Element des Wertevorrats von f wird also *mindestens einmal* angenommen – oder wie in der Definition formuliert: Das Bild $f(M)$ von f und der Wertevorrat N von f müssen übereinstimmen.

Falls eine Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv ist, nennt man diese „bijektiv“:

Definition 10.10 (Bijektivität)
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung: Eine Abbildung f heißt also bijektiv, wenn es zu <u>jedem</u> Element y aus dem Wertevorrat <u>genau ein</u> Element x aus dem Definitionsbereich gibt, sodass $f(x) = y$ gilt.

Beispiel: Wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = 2x$ bijektiv ist.

Eine Funktion ist per Definition bijektiv, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektivität Zu zeigen ist: Falls für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x) = f(y)$ ist, so folgt $x = y$.

Es gelte also $f(x) = f(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Nach Definition von f ist dies äquivalent dazu, dass $2x = 2y$ gilt, woraus $x = y$ folgt (mittels Division beider Seiten der Gleichung durch 2).

Surjektivität Zu zeigen ist: Für jedes $y \in \mathbb{R}$ (hier ist $\mathbb{R}$ der Wertevorrat von f) existiert ein $x \in \mathbb{R}$ (hier ist $\mathbb{R}$ der Definitionsbereich von f), sodass $f(x) = y$ gilt.

Es sei dazu $y \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun zeigen, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt. Dazu setzen wir die Abbildungsvorschrift ein und formen um:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

Also erfüllt $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$, die zu zeigende Gleichung $f(x) = y$ – da $y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, ist die Surjektivität von f gezeigt.

10.6 Vergleich der Mächtigkeiten von Bild- und Urbildmengen

Wie bereits angedeutet lassen sich mit Hilfe der Injektivität und Surjektivität Vergleiche zwischen Mächtigkeiten von Mengen herstellen – genauer zwischen Definitionsbereich und Wertevorrat einer Abbildung. Mit Hilfe der Injektivität lässt sich folgendes Lemma formulieren:

Lemma 10.11 (Mächtigkeitenvererbung bei injektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine injektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \leq \#N$

Beweis: Für $\#N = \infty$ ist das Lemma trivial, da jede Zahl und auch unendlich selbst kleiner oder gleich unendlich ist.
Sei nun $\#N < \infty$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Elemente $a_1, ..., a_n \in N$, sodass gilt: $N = \{a_1, ..., a_n\}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & M &&= f^{-1}(N) = f^{-1}(\{a_1, ..., a_n\}) \overset{\text{Übung}}{=} f^{-1}(\{a_1\}) \cup ... \cup f^{-1}(\{a_n\}) \\ \Rightarrow\ & \#M &&= \#(f^{-1}(\{a_1\}) \cup ... \cup f^{-1}(\{a_n\})) \overset{(*)}{\leq} \#f^{-1}(\{a_1\}) + ... + \#f^{-1}(\{a_n\}) \\ & &&\overset{\text{f injektiv}}{\leq} \underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} = n = \#N \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma vollständig gezeigt. Die Ungleichung $(*)$ haben wir bereits auf dem Übungszettel zur Mengenlehre bewiesen. □

Über die Injektivität von Abbildungen kann also die Mächtigkeit des Wertebereichs nach unten bzw. des Definitionsbereiches nach oben abgeschätzt werden. Die andere Richtung liefert die Surjektivität.

Lemma 10.12 (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \geq \#N$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Bemerkung: Für eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ ergibt sich damit $\#M = \#N$.

10.7 Ausblick - Messen von Unendlichkeit

Aus der Definition einer bijektiven Abbildung kann direkt ein großer Nutzen für die differenziertere Betrachtung des Unendlichen hergeleitet werden. Hier stellt man sich die Frage: „Ist wirklich jedes Unendlich gleich groß?“ Beispielsweise haben die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ zwar beide unendlich viele Elemente, aber trotzdem scheint $\mathbb{R}$ viel größer.

Definition 10.13 (Abzählbarkeit von Mengen)
Eine Menge M heißt

- **höchstens abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.
- **abzählbar** oder **abzählbar unendlich**, wenn sogar eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ existiert – in diesem Fall gilt $\#M = \infty$.
- **überabzählbar**, wenn es keine injektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt – in diesem Fall gilt ebenfalls $\#M = \infty$.

Bemerkung: Die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar und die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind überabzählbar. Insbesondere sind mit diesem Verständnis der Mächtigkeit die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig – auch wenn es beispielsweise in $\mathbb{Q}$ natürlich deutlich mehr Elemente gibt als in $\mathbb{N}$ (mathematisch geschrieben gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q}$).

Bemerkung (Anmerkung des Autors): Auch im Laufe des Mathematik-Studiums und gerne auch noch danach sollte man immer mal wieder über den Begriff der Unendlichkeit nachdenken. Dieser ist auch nach vielen Jahren Studium in meinen Augen noch immer faszinierend. Je öfter man darüber nachdenkt, auf umso mehr Kuriositäten stößt man rund um diesen Begriff …

Autoren dieses Kapitels:
2019: Nils Näthke