Übungsblatt 12 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

13. Juli 2020

Aufgabe 12.1

Behauptung. Seien $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $\det(A - \lambda \mathbf{1}_n) \neq 0$, und $b \in \mathbb{C}^n$; das System $y'(t) = Ay(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} b$ hat eine Lösung der Form $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} f$ mit $f \in \mathbb{C}^n$.

Beweis: Um zu zeigen, dass die angegebene Funktion $y(t)$ eine Lösung ist, setze man diesen als Ansatz in das DGL-System ein:

$$
\begin{aligned}
& y'(t) = \left(\mathrm{e}^{\lambda t}\right)' f = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} f = \lambda y(t) \\
\curvearrowright \quad & \\
& \lambda y(t) = y'(t) = Ay(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} b \\
\Leftrightarrow \quad & (A - \lambda \mathbf{1}_n) y(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} b = \mathrm{e}^{\lambda t} \left((A - \lambda \mathbf{1}_n) f + b\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (A - \lambda \mathbf{1}_n) f = -b \quad .
\end{aligned}
$$

Da nach Voraussetzung λ kein Eigenwert von A, ist die Matrix $(A - \lambda \mathbf{1}_n)$ nicht singulär und somit invertierbar:

$$f = (\lambda \mathbf{1}_n - A)^{-1} b \in \mathbb{C}^n \quad .$$

Es lässt sich also aus den gegebenen Daten ein $f \in \mathbb{C}^n$ bestimmen, sodass der Ansatz das DGL-System löst, q.e.d.!

Aufgabe 12.2

Zur Berechnung ziehe man i.A. Satz 168 heran. Man bestimme dann also aus der Matrix A die homogene Lösung gemäß der Methoden der letzten Vorlesung und berechnet die Lösung mithilfe des Integralausdruckes im entsprechenden Satz. Da die Inhomogenität von spezieller Form wie in PA1 ist, überprüfe man, ob die Faktoren in der Inhomogenität keine Eigenwerte von A sind. Dies ist das Analogon für DGLn höherer Ordnungen mit spezieller Inhomogenität, dessen Faktoren keine Nullstellen des char. Polynoms sind.

(a) Hier sind zur Anwendung des Satzes/Ergebnisses

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = 4\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Man bestimme zunächst die Matrix der Fundamentallösungen sowie ihre Inverse: Die Eigenwerte folgen als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\overset{!}{=} \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \quad (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \overset{1}{=} (\lambda-4)(\lambda-1) \end{aligned}$$

Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ mit je einfacher algebraischer Multiplizität. Der Exponentialfaktor ist 5, also kein Eigenwert von A. Sodann kann man PA1 mit $b = (4 \quad 0)^T$ und

$$-(A - 5\mathbf{1}_2) = \begin{pmatrix} 5-3 & -2 \\ -1 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

verwenden: Zum Invertieren nutze man das Gauß-Jordan-Verfahren:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1/2\cdot I}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II+I}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \\ \overset{1/2\cdot II}{\Longleftrightarrow} \quad &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right) \overset{I+II}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow (5\mathbf{1}_2 - A)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Sodann ist eine spezielle Lösung

$$y_s(t) = \mathrm{e}^{5t}(5\mathbf{1}_2 - A)^{-1}b = \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Für diese Berechnung war die Diagonalisierbarkeit der Matrix unerheblich, spielt aber bei der Bestimmung der homogenen Lösung eine Rolle: Der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 folgt aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Rang 1 und dem Eigenraum

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_1}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \quad .$$

Die geometrische Multiplizität entspricht der algebraischen Multiplizität. Analog folgt für λ_2 aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1]Nutze der Einfachheit $(\lambda \pm a)(\lambda \pm b) = \lambda^2 \pm (a+b)\lambda + ab$ und $(\lambda \pm a)(\lambda \mp b) = \lambda^2 \pm (a-b)\lambda - ab$ für $a, b \geq 0$ und bestimme durch Koeffizientenvergleich a und b.

Rang 1 und der eindimensionale Eigenraum

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_2}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Sodann ist die allgemeine Lösung

$$\boxed{y(t) = c_1 \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

(b) Hier sind Matrix und Inhomogenität

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t b$$

und damit wieder von der speziellen Form, was die Nutzung von PA1 motiviert. Bestimme hierzu zunächst die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\overset{!}{=} \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \quad (1-\lambda)(5-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \quad , \end{aligned}$$

womit $\lambda^* = 3$ eine zweifache Nullstelle ist. Da 1 kein Eigenwert ist, kann man PA1 anwenden, um eine spezielle Lösung zu finden: Zunächst invertiere man die entsprechende Matrix

$$\mathbf{1}_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow II}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{1/2\cdot}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-2II}{\Longleftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (\mathbf{1}_2 - A)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Sodann ist eine spezielle Lösung

$$y_s(t) = \mathrm{e}^t (\mathbf{1}_2 - A)^{-1} b = \frac{\mathrm{e}^t}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{e}^t}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Zur Konstruktion der homogenen Lösung untersuche man zunächst die geometrische Multiplizität:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $\mathsf{Rang}(A - 3\mathbf{1}_2) = 1$ mit Eigenraum

$$\mathsf{Eig}_{\lambda^*}(A) = \mathsf{Kern}(A - 3\mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Die Matrix ist somit **nicht** diagonalisierbar. Man suche also nun einen *Hauptvektor* u, welcher $(A - 3\mathbf{1}_2)u = (1 \quad 1)^T$ erfüllt. Ein inhomogenes LGS muss also gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

was z.B durch den Vektor $u = (-1/2 \quad 0)^T$ gelöst werden kann. Nach Satz 166 ist die homogene Lösung damit

$$y_h(t) = c_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{3t} \left[\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

und somit die allgemeine Lösung

$$\boxed{y(t) = c_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \frac{\mathrm{e}^t}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

(c) Die hier zu betrachtenden matriziellen Daten sind

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = -2\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Wieder kann nach konkreter Überprüfung PA1 verwendet werden. Zunächst die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -8 & -(2+\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (2+\lambda)(\lambda-6) + 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 12 + 16 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \quad . \end{aligned}$$

Der einzige Eigenwert ist $\lambda_* = 2$ mit algebraischer Multiplizität 2. Der Faktor -1 in der Exponentialfunktion ist damit kein singulärer Wert, sodass $A + \mathbf{1}_2$ invertierbar ist. PA1 kann somit verwendet werden. Wir untersuchen zunächst, wie die geometrische Multiplizität ist: Die Eigenvektoren folgen aus

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

man erkennt $\mathsf{Rang}(A - 2\mathbf{1}_2) = 1$ und der Eigenraum wird durch einen Vektor aufgespannt:

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_*}(A) = \mathsf{Kern}(A - 2\mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, aber man kann einen Hauptvektor finden:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ;$$

wird z.B. durch den Vektor $(0 \quad 1/2)^T$ gelöst. Nach Satz 166 sind die homogenen Lösungen darstellbar als

$$y_h(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right] \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad .$$

Mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens bestimme man nun eine spezielle Lösung:

$$-\mathbf{1}_2 - A = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{I+2\cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{I:9} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xLeftrightarrow{II-8\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & -8/9 & -7/9 \end{array}\right) \Rightarrow (-\mathbf{1}_2 - A)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} \quad .$$

Sodann folgt als spezielle Lösung

$$y_s(t) = \mathrm{e}^{-t}(-\mathbf{1}_2 - A)^{-1} b = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix} \quad .$$

Schlussendlich folgt die allgemeine Lösung als Summe der homogenen und der einen speziellen Lösung:

$$\boxed{y(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right] + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

(d) (*Zusatz*) Man betrachte nun dasselbe Problem wie in (b), aber mit einer Inhomogenität der Form

$$B(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

zwar ist diese von derselben Form wie in PA1 vorgegeben, aber diesmal ist der Exponentialfaktor $\mu = 3$ ein Eigenwert und die Voraussetzung zur Anwendung von PA1 somit nicht erfüllt. Aber den Satz 168 kann man weiterhin anwenden. Die Fundamentallösungen wurden bereits in (b) bestimmt und die dazugehörige Matrix ist

$$Y(t) = (y_1(t) \quad y_2(t)) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t - \frac{1}{2} \\ 1 & t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t} X(t) \quad .$$

Man bestimme die Inverse: Aus $\det(X(t)) = \frac{1}{2}$ folgt die Existenz einer Inversen $Y^{-1}(t) = \mathrm{e}^{-3t} X^{-1}(t)$ mit

$$X^{-1}(t) = 2 \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2} - t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Inversenformel für reguläre 2×2-Matrizen. Sodann ist eine spezielle Lösung wie folgt bestimmbar:

$$\begin{aligned} Y^{-1}(t) B(t) &= 2 \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2} - t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (1, -1) = \begin{pmatrix} 4t - 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \left(\int Y^{-1} B \right)(t) &= \begin{pmatrix} 2t^2 - t \\ -4t \end{pmatrix} \\ y_s(t) &= Y(t) \left(\int Y^{-1} B \right)(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} t - 2t^2 \\ -2t^2 - t \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\boxed{y(t) = c_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 2t^2 - t \\ 2t^2 + t \end{pmatrix} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

Aufgabe 12.3

Man gehe zunächst so vor wie in PA2: Die matrizielle Form des linearen DGL-Systems ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \tan^2(t) - 1 \\ \tan(t) \end{pmatrix} \quad .$$

PA 1 kann aufgrund der allgemeineren Form der Inhomogenität nicht angewendet werden. Deshalb folge man dem Hinweis und nutzt Satz 168. Zunächst muss die Matrix des Fundamentalsystems konstruiert werden. Hierzu bedarf es der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 = (\lambda + \mathbf{i})(\lambda - \mathbf{i}) \quad . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm\mathbf{i}$ tragen jeweils die algebraische Multiplizität 1 und sind zueinander komplex konjugiert. Die Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten folgen aus

$$\begin{pmatrix} \mp\mathbf{i} & 1 \\ -1 & \mp\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei in beiden Fällen $\mathsf{Rang}(A - \lambda_\pm \mathbf{1}_2) = 1$ zu erkennen ist und die jeweiligen Eigenräume aufgespannt werden durch

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_\pm}(A) = \mathsf{Kern}(A - \lambda_\pm \mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mathbf{i} \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Die algebraische Multiplizität ist somit jeweils auch 1 und entspricht der algebraischen Multiplizität. Die Matrix ist also diagonalisierbar! Die Fundamentallösungen werden in der folgenden Matrix zusammengefasst, wobei man den Real- und den Imaginärteil eines der beiden Vektoren nimmt (sie werden im Endresultat sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden):

$$Y(t) := (y_1(t) \quad y_2(t)) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}\{e^{\mathbf{i}t}\} & \mathfrak{Im}\{e^{\mathbf{i}t}\} \\ \mathfrak{Re}\{\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}\} & \mathfrak{Im}\{\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad .$$

Dies ist eine Rotationsmatrize, welche speziell orthogonal ist: $Y(t) \in \mathsf{SO}(2)$, also $Y^{-1}(t) = Y^T(t)$ und $\det(Y(t)) = 1$. Nach Satz 168 betrachtet man nun die Multiplikation der Inversen von links auf B und integriert das Ergebnis zeilenweise:

$$\begin{aligned} Y^{-1}(t)B(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan^2(t) - 1 \\ \tan(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tan^2(t) - 1)\cos(t) - \sin(t)\tan(t) \\ (\tan^2(t) - 1)\sin(t) + \cos(t)\tan(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} - \cos(t) - \sin(t)\tan(t) \\ \tan(t)\frac{1-\cos^2(t)}{\cos(t)} - \sin(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} - \sin(t) \end{pmatrix} \\ -\left(\int \cos\right)(t) &= -\sin(t) \\ \left(\int \frac{\sin}{\cos^2} - \sin\right)(t) &= \left(\int \frac{\sin}{\cos^2}\right)(t) - \left(\int \sin\right)(t) = \frac{1}{\cos(t)} + \cos(t) \\ &\Rightarrow \\ \left(\int Y^{-1}B\right)(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) + \frac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix} \\ Y(t)\left(\int Y^{-1}B\right)(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) + \frac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t) + \tan(t) \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(t) \\ 2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist eine spezielle Lösung. Die Summe mit allen homogenen Lösungen ergibt die allgemeine Lösung:

$$\boxed{y(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tan(t) \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

Aufgabe 12.4

(a)

Behauptung. Seien $A, B \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$, so gilt $(AB)' = A'B + AB'$.

Beweis: Da Differenzieren und Integrieren elementweise erfolgt, betrachtet man sich nur ein Element des Matrixproduktes und wendet die bekannte Kettenregel an: Seien $a_{ij}(t) = (A(t))_{ij}$ und $b_{jk}(t) = (B(t))_{jk}$ die Elementfunktionen der Matrizen für $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, so erhält man aus

$$\begin{aligned} ((AB)_{ik}(t))' &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) b_{jk}(t)\right)' = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(t) b_{jk}(t))' = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(t) b_{jk}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) b'_{jk}(t) \\ &= (A'B)_{ik}(t) + (AB')_{ik}(t) = (A'B + AB')_{ik}(t) \end{aligned}$$

und damit für alle Elemente simultan $(AB)' = A'B + AB'$, q.e.d.!

(b)

Behauptung. Seien $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ mit $AB = BA$, dann ist $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ gültig.

Beweis: Man erkennt zunächst, dass aus $AB = BA$ ebenso folgt, dass $A^j B^k = B^k A^j$ für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$ gilt: Für j oder k 0 oder $j = k = 1$ ist dies klar; sei j fix und $k = 1$, so folgt durch suksessives (j-faches) Anwenden von $AB = BA$ die Kommutativität $A^j B = BA^j$. Analog gilt dies für fixes k und $j = 1$ durch k-faches Anwendungen der Kommutativität: $AB^k = B^k A$. Die Aussage folgt nun unabhängig von der Wahl der Fixierung durch $(k \cdot j)$-faches Anwenden.

Zum Beweis der eigentlichen Relation rekapituliere die Cauchy-Produktformel: Seien $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ zwei absolut konvergente Reihen, so ist das Produkt ebenso eine absolut konvergente Reihe mit

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \quad .$$

Der Beweis kann wörtlich auf solche Matrizenfolgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (B_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ übertragen werden, für die die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |||A_n|||$ und $\sum_{m=1}^{\infty} |||B_m|||$ je absolut konvergieren. Die Exponentialreihe e^x konvergiert absolut und für alle Argumente x. Somit konvergieren auch e^A und e^B für alle $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ absolut, da $\mathrm{e}^{|||A|||}$ und $\mathrm{e}^{|||B|||}$ für alle $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (absolut) konvergieren. Für einige Details rekapituliere Satz 172 und der dazugehörige Beweis.
Die Relation wird von Rechts nach Links bewiesen:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{A^m}{m!} \frac{B^{l-m}}{(l-m)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \underbrace{\sum_{m=0}^{l} \frac{l!}{m!(l-m)!} A^m B^{l-m}}_{=(A+B)^l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A+B)^l = \mathrm{e}^{A+B} \quad \text{, q.e.d.!} \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt des Beweises wurde der binomische Lehrsatz für Matrizen angewendet, dessen Beweis wörtlich vom skalaren Fall übertragen werden kann, da die Matrizen und die Potenze wie skalare Werte kommutieren. Zudem folgt aus der Aussage, dass auch e^A und e^B kommutieren, da $A + B = B + A$.

(c)

Behauptung. Seien $A, F \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ so, dass $F(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Dann gilt $F(t+s) = F(t)F(s)$.

Beweis: Dies ist ein Korollar aus (b): Die Matrizen tA und sA kommutieren für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Sodann

$$F(t+s) = \mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA+sA} \overset{(b)}{=} \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA} = F(t)F(s) \quad \text{, q.e.d.!}$$

(d)

Behauptung. Sei $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, so, ist e^A invertierbar mit Inverse e^{-A}.

Beweis: Wir zeigen, dass es ein Element $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass diese als Links- als auch als Rechtsinverse auf e^A agiert. Ein Kandidat hierfür ist e^{-A}, denn mit (b) gemäß $(-A)A = -AA = A(-A)$ hat man

$$\mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{-A+A} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}_n} = \mathbf{1}_n \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{A-A} = \mathbf{1}_n \quad ,$$

womit die Regularität gezeigt wurde. Durch Anwenden von $(\mathrm{e}^A)^{-1}$ von rechts bzw. von links, folgt schließlich $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$, q.e.d.!

Beweisalternative: Zeige und nutze die Relation $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathsf{Spur}(A)}$, um auf $\det(\mathrm{e}^A) \neq 0$ zu schließen.

Aufgabe 10.5

Man muss lediglich prüfen, ob die Voraussetzungen von PA4 (b) erfüllt sind: $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, aber

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \\ BA &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B \\ &\Rightarrow \\ &AB \neq BA \quad . \end{aligned}$$

Um aber zu demonstrieren, wie man händisch solche Exponentialmatrizen ausrechnet, wiederhole man den Beweis zu Fuß. Hierzu müssen die Ausdrücke A^n, B^n und $(A+B)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ausgewertet werden.

A^n und e^A: Klar sind die Fälle $A^0 = \mathbf{1}_2$ und $A^1 = A$. Die Beispielrechnungen für $n = 2$ und $n = 3$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

suggerieren

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Wir erschließen uns dies nun induktiv: Der Induktionsanfang wurde gemacht, sodass, wenn diese Relation für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann auch für $N + 1$:

$$A^{N+1} = A^N A = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & N+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit der Induktionschluss. Die elementweise Auswertung der Reihe ergibt dann schließlich

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \quad .$$

B^n und e^B: Mit B als Diagonalmatrix ist diese einfach gegeben als Matrix, dessen Diagonalelemente durch Exponieren der Elemente aus B gegeben sind. Zum Demonstrieren der Methodik zeige man dies aber über die Reihe: Klar sind wieder die Fälle $B^0 = \mathbf{1}_2$ und $B^1 = B$. Die Beispielrechnungen für $n = 2$ und $n = 3$ ergeben hier

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -B \\ B^3 &= B^2 B = -B^2 = B \end{aligned}$$

und suggerieren

$$B^n = \begin{cases} \mathbf{1}_2 & n = 0 \\ -B \quad \text{für} & n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \\ B & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases} \quad .$$

Dies lässt sich auch wieder induktiv belegen. Damit folgt für die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{1}_2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} B \\
&= \mathbf{1}_2 - (\cosh(1) - 1)B + B \sinh(1) = \mathbf{1}_2 + (1 + \sinh(1) - \cosh(1))B = \mathbf{1}_2 + (1 - \mathrm{e}^{-1})B \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Dies entspricht demselben Ergebnis wie bei der Anwendung der Exponentialreihe auf Diagonalmatrizen.

$(A+B)^n$ und e^{A+B}: Es ist

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Null- und einfach Potenz sind wie bei den anderen Matrizen. Man betrachte zur Idee die Beispiele für $n = 2$ und $n = 3$:

$$\begin{aligned}
C^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C \\
C^3 &= C^2 C = C^2 = C
\end{aligned}$$

und somit $C^n = C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Exponentialreihe von $A + B$

$$\mathrm{e}^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \mathbf{1}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \mathbf{1}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C = \mathbf{1}_2 + (\mathrm{e} - 1)C = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} - 1 \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \quad .$$

Die Matrixmultiplikation von e^A und e^B zeigt

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \neq \mathrm{e}^{A+B} \quad .$$