Lineare Algebra

Einzelfolien aus Vorlesung/Übung
Handreichung für Tutoren – kein Ersatz für Mitschrift

Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger

Institut für Mathematik
Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg

17. Januar 2020

vollständige Induktion

Ausgangssituation:

- $n_0 \in \mathbb{N}$
- $P(n)$ Aussageform

Behauptung: $P(n) \;\; \forall n \geq n_0$

Induktionsbeweis in zwei Etappen:

1. Induktionsanfang: Zeige $P(n_0)$
2. Induktionsschritt: Zeige $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$

Relation – Äquivalenzrelation

Relation auf Menge X:
Teilmenge $\rho \subseteq X \times X$

Äquivalenzrelation:
Relation auf Menge X mit Eigenschaften:

1. reflexiv
   $\forall x \in X : x \sim x$
2. symmetrisch
   $\forall x, y \in X : (x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x)$
3. transitiv
   $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z) \Longleftrightarrow x \sim z$

Abbildungen

Abbildung von Menge A in Menge B:
Vorschrift

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

so daß

$$\forall a \in A \;\; \exists! b \in B : f(a) = b.$$

Eigenschaften von Abbildungen

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung.

- f injektiv $:\Longleftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A :$
  $$(a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$
- f surjektiv $:\Longleftrightarrow (\forall b \in B \;\; \exists a \in A : b = f(a))$
- f bijektiv $:\Longleftrightarrow f$ injektiv und surjektiv

Gruppen

G nicht leere Menge
$* : G \times G \longrightarrow G$ Verknüpfung

$(G, *)$ heißt **Gruppe**, falls

(AG) $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

(NE) $\exists e \in G \;\; \forall a \in G : a * e = a = e * a$

(IE) $\forall a \in G \;\; \exists b \in G : a * b = e = b * a$

Gruppe $(G, *)$ heißt **abelsch** (oder kommutativ), falls

(KG) $\forall a, b \in G : a * b = b * a$

Untergruppenkriterium

$(U, *)$ ist eine **Untergruppe** von $(G, *)$ genau dann, wenn

(U0) $U \neq \emptyset$

(U1) $\forall a, b \in U : a * b^{-1} \in U$

Ringe

R nicht-leere Menge

$+ : R \times R \longrightarrow R$ und

$\cdot : R \times R \longrightarrow R$ Verknüpfungen

$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring**, falls

$(R, +)$ abelsche Gruppe

$(R, \cdot)$ Halbgruppe

(DG) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \;\; \forall a, b, c \in R$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \;\; \forall a, b, c \in R$

Ring $(R, +, \cdot)$ heißt kommutativ, falls $(R, \cdot)$ abelsch.

Ring $(R, +, \cdot)$ heißt Ring mit 1, falls $(R, \cdot)$ Monoid.

Restklassen von $\mathbb{Z}$ bzgl. m

Untergruppe: $m\mathbb{Z} := \{m \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

Äquivalenzrelation: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \sim_m y :\Longleftrightarrow (x - y) \in m\mathbb{Z}$

Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim_m$: $[x]_m := \{y \in \mathbb{Z} \mid x \sim_m y\}$

Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_m$: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Verknüpfung $+$: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a]_m + [b]_m := [a + b]_m$

Verknüpfung $\cdot$: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m$

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

Einheiten und Nullteiler

$(R, +, \cdot)$ Ring mit 1

$$a \in R \ \textbf{Nullteiler} \iff \begin{array}{l}(\exists b \in R \setminus \{0\} : ab = 0) \text{ oder} \\ (\exists c \in R \setminus \{0\} : ca = 0)\end{array}$$

$(R, +, \cdot)$ heisst **nullteilerfrei**, falls darin keine Nullteiler existieren.

$$a \in R \ \textbf{Einheit} \iff (\exists b \in R : ab = 1 = ba)$$

Körper

K nicht-leere Menge
$+ : K \times K \longrightarrow K$ und
$\cdot : K \times K \longrightarrow K$ Verknüpfungen

$(K, +, \cdot)$ heißt **Körper**, falls

$(K, +)$ abelsche Gruppe
$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe
(DG) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \ \ \forall a, b, c \in R$

Körper sind nullteilerfrei.

Lineare Gleichungssysteme

Sei K ein Körper, seien $n, m \in \mathbb{N}$.
Seien $a_{ij}, b_i \in K \;\; \forall 1 \leq i \leq m, \;\; \forall 1 \leq j \leq n$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

heisst **Lineares Gleichungssystem** (kurz: LGS)

$(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ heißt Lösung des LGS, falls alle m Gleichungen erfüllt sind.

LGS in Matrixschreibweise

Sei K ein Körper, seien $n, m \in \mathbb{N}$.
Seien $a_{ij}, b_i \in K \ \ \forall 1 \leq i \leq m, \ \ \forall 1 \leq j \leq n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

homogenes LGS: $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$
(sonst **inhomogenes** LGS)

Addition von Matrizen

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mm} \end{pmatrix}$$

$(K^{m\times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Skalarmultiplikation von Matrizen

Für $\lambda \in K$ und $A \in K^{m \times n}$:

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Multiplikation von $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times s}$:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \dots & b_{ij} & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,j} & \dots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \dots & c_{ij} & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{m,j} & \dots & c_{ms} \end{pmatrix} = C \in K^{m\times s}$$

wobei

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

d.h. i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B.

Rechenregeln für Matrixmultiplikation

Für alle Matrizen A, B, C mit jeweils passenden Größen gilt:

- (AG) $A(BC) = (AB)C$.
- (NE) $AE_n = E_mA = A$.
- (DG1) $A(B + C) = AB + AC$.
- (DG2) $(A + B)C = AC + BC$.

Warnung:

- Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.
- Nicht jede Matrix besitzt eine Inverse.

Transposition von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Für Matrizen jeweils passender Größe gilt:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- A^T ist invertierbar genau dann, wenn A invertierbar ist. Dann gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Zeilenstufenform (ZSF)

Ziel von Vereinfachung mittels elementarer Zeilenoperationen:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$\bullet$: von Null verschiedener Eintrag

$*$: Eintrag mit beliebigem Wert

elementare Zeilenoperationen

1. Vertauschung von Zeilen i und j in Matrix A:

$$P_{ij} \cdot A$$

2. Addition von μ-fachem von Zeile ℓ zu Zeile k:

$$Q_{k\ell}(\mu) \cdot A$$

3. Multiplikation von Zeile k mit Konstante $\lambda \neq 0$:

$$S_k(\lambda) \cdot A$$

Algorithmus ZSF

Input: $A \in K^{m \times n}$
Output: $Q \cdot A = \tilde{A} \in K^{m \times n}$ in ZSF
mit Q Produkt elem. Zeilenoperationen

1. IF($A == O_{mn}$) THEN RETURN (A)
2. $j = \min \{k \in \{1, \dots, n\} | \exists i \in \{1, \dots, m\} : a_{ik} \neq 0\}$
3. wähle $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{ij} \neq 0$
4. $A = P_{1i} \cdot A$
5. FOR $k = 2$ TO m DO $A = Q_{k1}(-\frac{a_{kj}}{a_{1j}}) \cdot A$
6. $A_1 = (a_{11} \dots a_{1n})$, $B = (a_{(i+1)j})_{1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n}$
7. RETURN $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline \\ ZSF(B) \end{array} \right)$

reduzierte Gaußsche Normalform

Ziel von Vereinfachung mittels elementarer Zeilenoperationen:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$*$: Eintrag mit beliebigem Wert

WICHTIG: Vergleichen Sie mit ZSF!

Algorithmus redGaussNF

Input: $A \in K^{m \times n}$
Output: $Q \cdot A = \tilde{A} \in K^{m \times n}$ in red. Gaußscher Normalform
mit Q Produkt elem. Zeilenoperationen

1. $A = ZSF(A)$
2. FOR $i = 1$ TO m DO
   2.1 IF($(a_{i1} \dots a_{in}) == 0_{1n}$) THEN RETURN (A)
   2.2 $j =$min$\{k \in \{1, \dots, n\} | a_{ik} \neq 0\}$ // Pivot!
   2.3 $A = S_i(\frac{1}{a_{ij}}) \cdot A$
3. RETURN(A)

Ablesen der Lösung I

$(A|0) \in K^{m\times(n+1)}$ in reduzierter Gaußscher Normalform
mit Pivotelementen in Positionen $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$

Setze $I = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset I$.

Definiere $y_k \in K^{n\times 1}$ für jedes $k \in I \setminus J$ eintragsweise:

- $(y_k)_k = 1$
  (Idee: "setze frei wählbare Variable x_k auf Wert 1")
- $(y_k)_\ell = 0$ für $\ell \notin J \cup \{k\}$
  (Idee: "setze die anderen frei wählbaren Var. auf 0")
- $(y_k)_\ell = -a_{ik}$ für $\ell = j_i \in J$
  (Idee: "dann muss $x_{j_i} = -a_{ik}$ sein, damit Zeile i erfüllt")

Dann gilt:

$$\mathrm{Lös}(A|0) = \{\sum_{k\in I\setminus J} \lambda_k y_k \mid \lambda_k \in K\}$$

Ablesen der Lösung II

$(A|b) \in K^{m\times(n+1)}$ in reduzierter Gaußscher Normalform
mit Pivotelementen in Positionen $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$
mit $j_r < n+1$

Setze $I = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset I$.

Definiere $z \in K^{m\times 1}$ eintragsweise:

- $z_\ell = b_i$ für $\ell = j_i \in J$
- $z_\ell = 0$ für $\ell \notin J$

Dann gilt:

$$z \in \mathrm{Lös}(A|b)$$

$$\mathrm{Lös}(A|b) = \{y + z \mid y \in \mathrm{Lös}(A|0)\}$$

Invertieren einer Matrix

Input: $A \in K^{n \times n}$
Output: A^{-1}, falls A invertierbar, und "Fehler" sonst

1. $C = (A|E_n)$
2. $C = redGaussNF(C)$
3. IF $((c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \ != E_n)$ THEN RETURN("Fehler")
4. RETURN($(c_{i(j+n)})_{1 \leq i,j \leq n}$)

Eindeutige Lösbarkeit

Satz Seien $A \in K^{n \times n}$ und $b \in K^{n \times 1}$. Dann sind äquivalent:

a) $A \in Gl(n; K)$

b) $redGaussNF(A) = E_n$

c) $\text{Lös}(A|0) = \{0_{n1}\}$

d) $\text{Lös}(A|b) = \{A^{-1}b\}$

e) A ist Produkt von Elementarmatrizen der Typen P,Q und S

K-Vektorraum

K Körper, V nicht-leere Menge

$+ : V \times V \longrightarrow V$ innere Verknüpfung
Vektoraddition

$\cdot : K \times V \longrightarrow V$ äußere Verknüpfung
Skalarmultiplikation

$(V, +, \cdot)$ heißt **Vektorraum**, falls

$(V, +)$ abelsche Gruppe

(S1) $\forall v \in V : \; 1 \cdot v = v$

(S2) $\forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in K : \; \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

(S3) $\forall v, w \in V, \forall \lambda \in K : \; \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(S4) $\forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in K : \; (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Vektor: Element von V
Skalar: Element von K

Untervektorraumkriterium

Sei K Körper und V K-Vektorraum.

$U \subseteq V$ Untervektorraum von V genau dann, wenn

(U0) $U \neq \emptyset$

(U1) $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in K : \ \lambda v + \mu w \in U$

Linearkombination und Spann

Sei K Körper, V K-Vektorraum.

Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V mit Indexmenge I:
Abbildung $f : I \longrightarrow V$ mit $f(i) = v_i$ für jedes $i \in I$.

Linearkombination einer Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \quad \text{mit } \lambda_i \in K \text{ und } \lambda_i = 0 \ \underbrace{\text{für fast alle}}_{= \text{für alle bis auf endlich viele}} \ i \in I$$

Spann von $(v_i)_{i \in I}$:

$$span(v_i)_{i \in I} := \{\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \text{ Linearkombination der } (v_i)_{i \in I}\}$$

Spann und Erzeugendensystem

Sei K Körper, V K-Vektorraum und $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren in V.

Satz
$span(v_i)_{i \in I}$ ist der kleinste Untervektorraum $U \subset V$, so daß $v_i \in U$ für alle $i \in I$.

Erzeugendensystem von V:

$$(v_i)_{i \in I} \text{ mit } V = span(v_i)_{i \in I}$$

V heißt **endlich erzeugt**, falls

$$\exists n \in \mathbb{N}_0, \exists v_1, \dots, v_n \in V : V = span(v_1, \dots, v_n)$$

Lineare Unabhängigkeit: Definition

Sei K Körper und V K-Vektorraum.

$(v_1, \dots, v_n) \subset V$ heißt **linear unabhängig**, falls die folgende Implikation wahr ist:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

$(v_i)_{i \in I} \subset V$ heißt **linear unabhängig**, falls jede endliche Teilfamilie davon linear unabhängig ist.

Speziell in $V = K^{m \times 1}$ gilt folgende Interpretation:

$(v_1, \dots, v_n)$ lin. unabh. $\iff \text{Lös}(v_1 \dots v_n | 0) = \{0\}$

Lineare Unabhängigkeit: Bedeutung

Sei K Körper, V K-Vektorraum und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V.

Es sind äquivalent:

- $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig
- $\forall v \in span(v_i)_{i \in I} \;\; \exists!(\lambda_i)_{i \in I} \subset K : v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, wobei nur endlich viele $\lambda_i \neq 0$

Die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Vektoren eines linear unabhängigen Erzeugendensystems ist also *eindeutig*.

Basis

Sei K Körper, V K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ Familie in V.

$\mathcal{B}$ ist **Basis** von V, falls

- $V = span(\mathcal{B})$ und
- $\mathcal{B}$ linear unabhängig

Äquivalente Charakterisierungen einer Basis:

- minimales Erzeugendensystem
- maximale linear unabhängige Menge

Sätze über Basen

Basisauswahlsatz

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Erzeugendensystem eines K-Vektorraumes V. Dann gibt es eine Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$, so dass $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_s})$ Basis von V ist.

Steinitzscher Austauschsatz

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis eines K-Vektorraums V und sei $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m) \subset V$ linear unabhängig. Dann existieren $n - m$ Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{(n-m)}} \in \mathcal{B}$, so dass

$$(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{(n-m)}}, w_1, \ldots, w_m)$$

eine Basis von V ist.

Basis und Dimension

Je zwei Basen eines Vektorraumes V haben gleiche Mächtigkeit.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis eines Vektorraumes V, so heißt n die **Dimension** von V.

Jede linear unabhängige Menge mit n Elementen eines n-dimensionalen Vektorraumes ist eines Basis davon.

Ist $U \subseteq V$ Untervektorraum eines Vektorraumes V, so ist

$$dim(U) \leq dim(V).$$

Kern und Rang einer Matrix I

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m \times n}$.

$ker(A) :=$ Lös$(A|0)$ heißt der **Kern** von A.

$ZR(A) :=$span(Zeilen von $A) \subset K^{1 \times n}$ heißt der **Zeilenraum** von A.

$SR(A) :=$span(Spalten von $A) \subset K^{m \times 1}$ heißt der **Spaltenraum** von A.

$rang(A) := dim_K(ZR(A)) = dim_K(SR(A))$ heißt der **Rang** von A.

Kern und Rang einer Matrix II

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m \times n}$.

Satz

$ZR(A) = ZR(QA) \ \ \forall Q \in Gl(m, K)$

Insbesondere $ZR(A) = ZR(redGaussNF(A))$

Satz

Sei $B \in K^{m \times n}$ aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgegangen. Dann gilt:

- Spalten von A lin unabh. $\iff$ Spalten von B lin unabh.
- $dim_K(SR(A)) = dim_K(SR(B))$

Warnung: Elementare Zeilenoperationen ändern $SR(A)$!!!

Kern und Rang einer Matrix III

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m \times n}$.

Satz

- $rang(A) = rang(A^T)$
- $\forall Q \in Gl(m, K) : rang(QA) = rang(A)$
- $\forall P \in Gl(n, K) : rang(AP) = rang(A)$
- $rang(A) + dim_K ker(A) = n$

Satz Sei $b \in K^{m \times 1}$. Dann sind äquivalent:

1. $Ax = b$ ist lösbar
2. $b \in SR(A)$
3. $rang(A|b) = rang(A)$

Hauptsatz über invertierbare Matrizen

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$.

Satz

Es sind äquivalent:

a) $A \in Gl(n; K)$
b) $redGaussNF(A) = E_n$
c) $\text{Lös}(A|0) = \{0_{n1}\}$
d) $\text{Lös}(A|b) = \{A^{-1}b\}$
e) A ist Produkt von Elementarmatrizen
f) $rang(A) = n$
g) A besitzt n lin. unabh. Zeilen
h) A besitzt n lin. unabh. Spalten

Lineare Abbildungen

Sei K Körper, V, W K-Vektorräume.

Eine Abbildung $F : V \longrightarrow W$ heißt **lineare Abbildung** (oder **Vektorraum-Homomorphismus**), falls

$$\forall \lambda, \mu \in K, \;\; \forall u, v \in V : F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$$

Wichtiges Beispiel:
Sei $A \in K^{m \times n}$.

$$\begin{aligned} F_A : K^{n\times 1} &\longrightarrow K^{m\times 1} \\ v &\longmapsto A \cdot v \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung (Rechenregeln für Matrizen!!).

Kern und Bild eines Homomorphismus I

Sei K Körper, V, W K-Vektorräume und $F : V \longrightarrow W$ ein K-Vektorraum-Homomorphismus.

$$ker(F) := \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

heißt der **Kern** von F.

$$Im(F) := \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\}$$

heißt das **Bild** von F.

Satz
$ker(F)$ ist K-Untervektorraum von V.
$Im(F)$ ist K-Untervektorraum von W.

Kern und Bild eines Homomorphismus II

Sei K Körper, V, W K-Vektorräume und $F : V \longrightarrow W$ ein K-Vektorraum-Homomorphismus.

Satz

- F Monomorphismus $\Longleftrightarrow ker(F) = \{0_V\}$
- F Epimorphismus $\Longleftrightarrow Im(F) = W$
- F Isomorphismus $\Longleftrightarrow ker(F) = \{0_V\}$ und $Im(F) = W$

Isomorphismus $V \cong K^{n\times 1}$

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension n und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathcal{B}}: & K^{n\times 1} & \longrightarrow & V \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \end{array}$$

ist Vektorraumisosmorphismus mit Inversem

$$\begin{array}{rccc} I_{\mathcal{B}}: & V & \longrightarrow & K^{n\times 1} \\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Dimensionsformel und Rang

Sei K Körper, V, W K-Vektorräume und $F : V \longrightarrow W$ ein K-Vektorraum-Homomorphismus.

Satz (Dimensionsformel)

$$dim_K(V) = dim_K(ker(F)) + dim_K(Im(F))$$

$rang(F) := dim_K(Im(F))$ heißt der **Rang** von F.

Lemma
Sei $A \in K^{m\times n}$ und $F_A : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$ wie auf der Folie 'Lineare Abbildungen'. Dann gilt:

$$rang(F_A) = rang(A)$$

Lineare Abbildungen und Basen

Satz
Sei V K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, sei W K-Vektorraum und seien $w_1, \ldots, w_n \in W$ *beliebig*. Dann existiert **genau ein** K-Vektorraumhomomorphismus $F : V \longrightarrow W$ mit

$$F(v_i) = w_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Satz
Sei $F : V \longrightarrow W$ K-Vektorraumhomomorphismus, sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V und sei $F(v_i) = w_i \in W$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt:

- F Monomorphismus
  $\iff (w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig
- F Epimorphismus $\iff W = span(w_1, \ldots, w_n)$
- F Isomorphismus $\iff (w_1, \ldots, w_n)$ Basis von W

Wichtige Isomorphismen

Satz (Fundamentalsatz über endl.-dim. Vektorräume)
Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

$$V \cong W \Longleftrightarrow dim_k V = dim_k W$$

Korollar
Sei V K-Vektorraum, $dim_k(V) = n$. Dann gilt:

$$V \cong K^{n \times 1}.$$

$Hom_k(V, W)$ bezeichnet den K-Vektorraum der K-Vektorraum-Homomorphismen.

Homomorphismen, Koordinaten, Matrizen I

V K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$,
W K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$
$F : V \longrightarrow W$ K-Vektorraum-Homomorphismus

Die $m \times n$ Matrix

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = (I_{\mathcal{C}} \circ F(v_1), \ldots, I_{\mathcal{C}} \circ F(v_n))$$

heisst die **darstellende Matrix von F bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$**.

Ist $V = W$ und $F = id_V$, so heisst

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_V) =: T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

die **Transformationsmatrix der Koordinaten von V bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$**.

Homomorphismen, Koordinaten, Matrize II

V K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$,
W K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$
$F : V \longrightarrow W$ K-Vektorraum-Homomorphismus
mit $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = A$

Satz

$$I_{\mathcal{C}} \circ F = F_A \circ I_{\mathcal{B}}$$

Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ I_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow I_{\mathcal{C}} \\ K^{n\times 1} & \xrightarrow{F_A} & K^{m\times 1} \end{array}$$

K-Vektorraum-Homomorphismen

Satz (Hauptsatz über lineare Abbildungen)
V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : Hom_k(V, W) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & K^{m \times n} \\ F & \longmapsto & M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \end{array}$$

Korollar

$$dim_K(Hom_K(V, W)) = dim_K(V) \cdot dim_K(W)$$

Komposition von Homomorphismen

Satz

Seine U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit jeweiligen Basen $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$. Seien $F : U \longrightarrow V$ und $G : V \longrightarrow W$ K-Vektorraum-Homomorphismen.
Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_1}(G \circ F) = M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}(G) \cdot M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(F)$$

Endomorphsimen und Automorphismen

V K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Definition

$$\begin{array}{rcl} End_K(V) & := & Hom_k(V,V) \\ Aut_K(V) & := & \{F \in End_K(V) \mid F \text{ invertierbar}\} \end{array}$$

Es gilt (als K-Vektorraum- und als Ringisomorphismen):

$$\begin{array}{rcl} \Phi : End_K(V) & \xrightarrow{\cong} & K^{n \times n} \\ F & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi|_{Aut_K(V)} : Aut_K(V) & \xrightarrow{\cong} & Gl(n,K) \\ F & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \end{array}$$

Basiswechsel

Satz
Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$, sei W endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ und sei $F : V \longrightarrow W$ K-Vektorraum-Homomorphismus. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2}(F) = M_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1}(id_W) \cdot M_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}_1}(F) \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(id_V)$$

Satz Seien V, W K-Vektorräume mit $dim_K(V) = n$ und $dim_K(W) = m$. Sei $F : V \longrightarrow W$ K-Vektorraum-Homomorphismus mit $rang(F) = r$. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W mit

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Vorbemerkung zu Determinanten: Kurznotation

Kurznotation für die folgende Folie:

Für eine $A \in K^{n \times n}$ schreiben wir

$$\mathbf{a}^i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \text{ und } \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Dann können wir A in Kurzform schreiben als:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{pmatrix} \text{ bzw. } A = (\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n).$$

Axiomatische Definition

Eine Abbildung $\det : K^{n\times n} \longrightarrow K$ heißt **Determinante**, falls Sie die folgenden Axiome $(D1)$, $(D2)$ und $(D3)$ erfüllt:

(D1) det ist **multilinear** ,d.h. linear in jeder Zeile, d.h. es gelten für $\lambda, \mu \in K, b \in K^{n\times 1}$, und $j = 1, \ldots, n$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \lambda \mathbf{a}^j + \mu b \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{pmatrix}$$

(D2) det ist **alternierend**, d.h. für $j \neq k$

$$\det P_{jk} A = -\det A.$$

(D3) $\det E_n = 1$

Konsequenzen aus Axiomen

Insbesondere gilt

$$\det(S_k(\lambda)A) = \lambda \det A \text{ und } \det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Sind die Zeilen von A linear abhängig, so gilt $\det A = 0$.

$\det Q_{jk}(\mu)A = \det A$

Satz

$\det A^T = \det A$

Determinantenmultiplikationssatz

Satz

Seien $A, B \in K^{n \times n}$.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Korollar

A invertierbar $\iff \det A \neq 0$. In diesem Fall gilt:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Determinanten und LGS I

wissen:

- $\det P_{jk}A = -\det A$
- $\det Q_{jk}(\mu)A = \det A$
- $\det(S_k(\lambda)A) = \lambda \det A$

Daher:

$$\det(A) = (-1)^p \det ZSF(A)$$

mit $p =$ Anzahl der Zeilenvertauschungen in ZSF.

Warnung: Für redGaußNF(A) müssen Faktoren aus den $S_k(\lambda)$ berücksichtigt werden!

Determinanten und LGS II

Satz
Sei $A \in K^{n \times n}$ und $b \in K^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung x.
2. Es gilt $\operatorname{rang}(A) = n$.
3. A ist invertierbar, d.h. A^{-1} existiert.
4. $\det A \neq 0$.

Determinanten: Leibnizformel

Satz

det : $K^{n\times n} \longrightarrow K$ ist eindeutig für festes $n \in \mathbb{N}$

Leibnizformel:

Sei $A = (a_i j) \in K^{n\times n}$ und bezeichne S_n die Gruppe der Permutationen auf n Elementen.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\end{aligned}$$

Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Notation:
Für $A \in K^{n\times n}$ bezeichne (ad hoc) mit $A_{i,j} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die durch Streichen von Zeile i und Spalte j in A entsteht.
$M_{i,j} := \det A_{i,j}$ heißt **Minor** von A zum Indexpaar (i,j).

Satz(Entwicklungssatz nach Laplace)
$A \in K^{n\times n}$, $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{i,k}.$$

Bemerkung: Die Determinante ist unabhängig davon nach welcher Zeile oder Spalte wir entwickeln.

Adjunkte

Die **Adjunkte** von $A \in K^{n\times n}$ ist die Matrix

$$\operatorname{adj}(A) = ((-1)^{i+j} M_{ji}) \in K^{n\times n}$$

Satz
Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n = \operatorname{adj}(A) \cdot A$$

Ist A invertierbar, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in K^{n \times n}$.

$\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von A, falls es ein $x \in K^{n \times 1} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

Jedes solche x heißt **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ.

Hinweis:
Die Bedingung $x \neq 0$ an einen Eigenvektor ist wichtig, da immer gilt $A0 = 0 = \lambda 0$.

Charakteristische Gleichung

Sei $A \in K^{n\times n}$.

Die Gleichung $\det(A - \lambda E_n) = 0$ heißt **charakteristische Gleichung** von A.

Das Polynom $p_A = \det(A - \lambda E_n)$ heißt **charakteristisches Polynom** von A. Es ist vom Grad n in λ.

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von p_A.

Eigenräume

Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$ Eigenwert von A.

Der **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ ist definiert als

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = \lambda x\}$$

Die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ von A ist

$$dim_k(\mathrm{Eig}(A, \lambda))$$

Exkurs: Nullstellen von Polynomen I

Sei $f = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_0 \in K[t]$ ein Polynom.

$\alpha \in K$ heißt **Nullstelle** von f, falls

$$f(\alpha) = \alpha^d + a_{d-1}\alpha^{d-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Ist α Nullstelle von f, so gibt es ein Polynom g vom Grad $d-1$ mit

$$f = (t-\alpha) \cdot g$$

.

Exkurs: Nullstellen von Polynomen II

Sei $f = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_0 \in K[t]$ ein Polynom.

Jedes Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen.

α heißt k-fache Nullstelle von f, falls

- $(t-\alpha)^k$ teilt f
- $(t-\alpha)^{k+1}$ teilt f nicht

Vielfachheit von Eigenwerten

Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$ Eigenwert von A.

λ hat die **algebraische Vielfachheit** k, wenn λ k-fache Nullstelle von p_A ist.

λ hat die **geometrische Vielfachheit** ℓ, wenn $\ell = dim_K(\text{Eig}(A, \lambda))$.

Es gilt:

$$1 \leq dim_k \text{Eig}(A, \lambda) \leq \text{alg. Vielfachheit von } \lambda \leq n$$

Eigenwerte von Endomorphismen

Sei $F \in End_K(V)$.

$\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von F, falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit

$$F(v) = \lambda v$$

Jedes solche v heißt **Eigenvektor** von F zum Eigenwert λ.

$$Eig(F, \lambda) := \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$$

heißt der **Eigenraum** von F zum Eigenwert λ.

Hinweis:
Die Definition ist exakt analog zu der für Eigenwerte und Eigenräume für Matrizen. Mittels derselben Analogie heißt $\dim_K(Eig(F, \lambda)$ die geometrische Vielfachheit von λ.

Endomorphismen und Matrizen

Sei V n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$.
Sei $F \in End_K(V)$.

Satz

$$Eig(F, \lambda) = I_{\mathcal{B}}^{-1}(Eig(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F), \lambda))$$

Satz

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von F mit Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_m$, so ist $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig.

Das Charakteristische Polynom

Sei V n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$.
Sei $F \in End_K(V)$.

Das **charakteristische Polynom** von F ist definiert als

$$p_F := det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - tE_n),$$

wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

p_F ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$

Diagonalisierung

$A \in K^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, falls

$$\exists P \in GL(n, K), \exists D \in K^{n \times n} \text{ diagonal } : P^{-1}AP = D.$$

$F \in End_K(V)$ heißt diagonalisierbar, falls seine darstellende Matrix diagonalisierbar ist.

Satz Sei V n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in End_K(V)$. Dann sind äquivalent:

- F ist diagonalisiserbar
- V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren zu F
- p_F zerfällt in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

Reelle Skalarprodukte

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Ein **reelles Skalarprodukt** in V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- Bilinearität:
  $\forall u, v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
  $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$ und
  $\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle$
- Symmetrie:
  $\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
- positive Definitheit:
  $\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v, v\rangle > 0$

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ heißt ein euklidischer Vektorraum.

Darstellende Matrix von $\langle\ ,\ \rangle$

Sei V n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.
Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

heißt **darstellende Matrix** $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\langle\ ,\ \rangle)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

Satz
Eine darstellende Matrix eines reellen Skalarprodukts ist symmetrisch.

Transformationsformel (reeller Fall)

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\langle\ ,\ \rangle) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)^T M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\langle\ ,\ \rangle) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)$$

Warnung:
Hier ist der Ausdruck von der Gestalt

$$A' = P^T A P$$

im Gegensatz zum vorigen Kapitel, wo wir es mit Ausdrücken der Gestalt

$$A' = P^{-1} A P$$

zu tun hatten!