Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Funktionen und Abbildungen I

× Aufgabe 1: Wohldefiniertheit und Abbildungseigenschaften

Untersuche, ob es sich bei den folgenden Vorschriften um Abbildungen handelt.
Falls ja, bestimme das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv und/oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind demnach bijektiv?

(a) $f_1 : \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\},\ f_1(x) = 2^x$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 7x^2 + 3$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{x}$.

(d) $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$.

(e) $f_5 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$.

(f) $f_6 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q},\ f_6(\frac{a}{b}) = \frac{4b}{3a}$.

(!g) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A \in \{0, \infty\}\} \to \mathbb{N},\ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

× Aufgabe 2: Komposition

Seien die folgenden Abbildungen gegeben

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) &= x^2 + x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & g(x) &= x + 3 \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Berechne:

(a) $(f \circ g)(3)$

(b) $(g \circ h \circ f)(2)$

(c) $(h \circ g)(3)$

(d) $(f \circ g)(x)$. Vereinfache soweit wie möglich!

$\times$ Aufgabe 3: Bild und Urbild

Beweise oder widerlege folgende Aussagen zum Bild und Urbild einer Funktion.

(a) Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Dann gilt $f(f^{-1}(N)) = N$ und $f^{-1}(f(M)) = M$.

(b) Sei nun $A \subsetneq M$ und $B \subsetneq N$. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ und $f^{-1}(f(A)) = A$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ gegeben. Dann gilt $f^{-1}(\{x\}) = \{\sqrt{x}\}$.

Aufgabe 4: Wir bauen eine Abbildung

Falls möglich, finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f : M \to N$, sodass die jeweiligen Bedingungen gelten. Falls es nicht möglich ist, solche Mengen und eine solche Abbildung anzugeben, begründe warum.

(a) Das Bild $f(\{\text{Daniel}, \text{Ivan}, \text{Boris}\})$ ist $\{\text{Analysis}\}$, das Urbild $f^{-1}(\{\text{Analysis}\})$ ist ungleich $\{\text{Daniel}, \text{Ivan}, \text{Boris}\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{\text{Stochastik}\})$ ist $\{\text{Marcus}, \text{Angelika}, \text{Peter}\}$.

(b) Die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.

(! c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.

(! d) Die Mächtigkeit des Definitionsbereichs von f ist überabzählbar unendlich, die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist abzählbar unendlich und f ist injektiv.

Aufgabe 5: Komposition, Injektivität und Surjektivität

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ zwei Abbildungen zwischen zwei Mengen M und N. Zeige: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist g injektiv. Gilt auch die Umkehrung? Liefere hierzu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(!) Zeige weiter: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist f auch surjektiv.

Aufgabe 6: Mächtigkeit

Beweise das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Lemma I (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \geq \#N$

! Aufgabe 7

Beweise für eine Abbildung $f : M \to N$ die folgenden Aussagen über das Urbild und das Bild von f:

(a) Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$$

(b) Seien $M_1, M_2 \subseteq N$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2)$$