SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 12

Abgabefrist: bis zum 16.07.2020 um 23:59:59
als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Systeme:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x + 2y - 5e^t \sin t, \\ y' = 2x + y. \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = -2x + y + e^t. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)
Betrachte das inhomogene lineare System

$$\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie ein reellwertiges Fundamentalsystem für das zugehörige homogene System.
2. Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems und die Matrix e^A für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Finden Sie eine Lösung des inhomogenen Systems, z.B. mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)

1. Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie N^k für alle $k \in \mathbb{N}$.
2. Bestimmen Sie e^{tN} für $t \in \mathbb{R}$.
3. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie e^{tB} für $t \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgaben

1. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(A - \lambda I) \neq 0$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass das System $y' = Ay + e^{\lambda t} b$ eine Lösung der Form $y(t) = e^{\lambda t} f$ mit $f \in \mathbb{C}^n$ besitzt.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen linearen Systemen erster Ordnung:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = x + 2y + e^t, \\ y' = -2x + 5y - e^t, \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 6x + 2y, \\ y' = -8x - 2y - 2e^{-t}, \end{cases}$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$\begin{cases} x' = y + \tan^2 t - 1, \\ y' = -x + \tan t \end{cases}$$

   mit Hilfe der Variation der Konstanten.

4. (a) Seien $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ und $B : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ differenzierbar. Zeigen Sie die Gleichheit $(AB)' = A'B + AB'$.
   (b) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie die Gleichheit $e^{A+B} = e^A e^B$.
   (c) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definiere $F : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ durch $F(t) = e^{tA}$. Zeigen Sie, dass $F(s + t) = F(s)F(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
   (d) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Matrix e^A invertierbar ist.

5. Gilt $e^{A+B} = e^A e^B$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?