# Metrische und normierte Räume, Prähilberträume

**Def** Sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf $X$, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(M1) $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

$X$ zusammen mit einer Metrik heißt *metrischer Raum* und wird mit $(X, d)$ bezeichnet.

**Def** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(N1) $\|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

$V$ zusammen mit einer Norm heißt *normierter Raum* und wird mit $(V, \|\cdot\|)$ bezeichnet.

**Satz 1.1** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $(V, d)$ mit

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

ein metrischer Raum.

**Def** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *Skalarprodukt*, falls für alle $x, y, z \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (Linearität im ersten Argument)

(S2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ bzw. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (Symmetrie bzw. Hermitizität)

(S3) $\langle x, x \rangle \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positive Definitheit)

$V$ zusammen mit einem Skalarprodukt heißt *Prähilbertraum.* (Oft benutzt man in dem Fall auch die Bezeichnung *euklidischer Raum* bzw. *unitärer Raum.*)

**Satz 1.2 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)** Sei $V$ ein Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ und $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Dann gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

**Satz 1.3** Sei $V$ ein Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$. Dann wird durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf $V$ definiert und somit ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

**Def** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Unter der *offenen Kugel* mit Mittelpunkt $a \in X$ und Radius $r > 0$ versteht man die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

**Def** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $a \in X$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(a) \subset U$. $B_\varepsilon(a)$ heißt auch $\varepsilon$-Umgebung von $a$.

**Def** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$ und $a \in X$. Die Folge $(x_k)$ heißt *konvergent* gegen den Punkt $a$, wenn $d(x_k, a) \to 0$ für $k \to \infty$ gilt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : d(x_k, a) < \varepsilon$$

In diesem Fall heißt $a$ *Grenzwert* und man schreibt dafür $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ oder $x_k \to a$.