Abgabe Algebra 1, Blatt 03

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 3.1

(a) Sei R Ring und $I \trianglelefteq R$ Ideal von R.
Zu zeigen: $\operatorname{ann}(I) \trianglelefteq R$. Es gilt:

(1) Zu zeigen: $\operatorname{ann}(I) \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} &\forall a \in I : 0 \cdot a = 0 = 0 \cdot a \\ \implies &0 \in \operatorname{ann}(I) \\ \implies &\operatorname{ann}(I) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

(2) Zu zeigen: $\forall a, b \in \operatorname{ann}(I) : a + b \in \operatorname{ann}(I)$.
Seien $a, b \in \operatorname{ann}(I)$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in I : ax = xa = 0 = bx = xb \\ \implies &(a+b)x = ax + bx = 0 = xa + xb = x(a+b) \\ \implies &a + b \in \operatorname{ann}(I). \end{aligned}$$

(3) Zu zeigen: $\forall a \in \operatorname{ann}(I) \forall r \in R : ar \in \operatorname{ann}(I)$.
Seien $a \in \operatorname{ann}(I)$ beliebig, $r \in R$ beliebig und $x \in I$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} &(ar)x = a(rx) \overset{rx \in I}{=} 0 \\ \implies &ar \in \operatorname{ann}(I). \end{aligned}$$

□

(b) Sei R kommutativer Ring und seien $I, J \trianglelefteq R$ Ideale von R.
Zu zeigen: $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &IJ \subseteq I \cap J \\ \implies &\sqrt{IJ} = \{r \in R : r^n \in IJ \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \\ &\subseteq \{r \in R : r^n \in I \cap J \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \sqrt{I \cap J} \\ &\subseteq \{r \in R : r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \cap \{r \in R : r^n \in J \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}. \end{aligned}$$

Sei $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\exists n, m \in \mathbb{N} : a^n \in I \text{ und } a^m \in J \\ \implies &\exists n, m \in \mathbb{N} : a^{n+m} = a^n a^m \in IJ \\ \implies &a \in \sqrt{IJ} \\ \implies &\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}. \end{aligned}$$

Mit $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ und $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$ ergibt sich:

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

$\square$

Aufgabe 3.2

(a) Sei R kommutativer Ring, seien $I, J \trianglelefteq R$ beliebig.
Zu zeigen: $I \cup J$ ist im Allgemeinen kein Ideal von R.
Seien $I = \langle 2 \rangle, J = \langle 3 \rangle$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle =& \{2x : x \in R\} \cup \{3x : x \in R\} \\ =& \{x \in R : 2 \mid x \text{ oder } 3 \mid x\} \\ =& \{\cdots, -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, \cdots\} \end{aligned}$$

Aber für $3 \in \langle 3 \rangle$ und $2 \in \langle 2 \rangle$ gilt:

$$1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 1 \notin \langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle.$$

Daher ist die Vereinigung zweier Ideale im Allgemeinen kein Ideal.

$\square$

(b) Sei R kommutativer Ring, seien $I, J \trianglelefteq R$ teilerfremde Ideale von R.
Zu zeigen: $IJ = I \cap J$.

"$\subseteq$" Sei $a \in IJ$, $b \in I$, $c \in J$, $a = bc$.
Zu zeigen: $a \in I \cap J$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & a = bc \\ \Longrightarrow\ & \exists d_1, d_2 \in R : a = b \cdot d_1 \text{ und } a = d_2 \cdot c \\ \overset{d_1 \in I, c \in J}{\Longrightarrow}\ & a \in I \text{ und } a \in J \\ \Longrightarrow\ & a \in (I \cap J). \end{aligned}$$

"$\supseteq$" Sei $0 \neq a \in I \cap J$.
Zu zeigen: $i \in I$ und sei $j \in J$, sodass $a + b = 1$. Es gilt für alle $c \in I \cap J$:

$$c = c \cdot 1 = c \cdot (i + j) = ci + cj \in JI + IJ \overset{\text{R kommutativ}}{=} IJ + IJ = IJ.$$

$\square$

(c) Vor.: Sei $R = \mathbb{Z}$ Ring. Seien $I = \langle 2 \rangle$ und $J = \langle 4 \rangle$ Ideale von R.

Beh.: $IJ \neq I \cap J$.

Bew.:

$$IJ = \langle 2 \rangle \cdot \langle 4 \rangle = \langle 8 \rangle \neq \langle 2 \rangle \overset{J \subseteq I}{=} \langle 2 \rangle \cap \langle 4 \rangle = I \cap J.$$

$\square$

Aufgabe 3.3

(a) Sei R Integritätsring, aber R kein Körper.
Zu zeigen: $R[t]$ über R ist kein Hauptidealring, d.h. $\exists I \trianglelefteq R[t] \forall a \in R[t] : I \neq \langle a \rangle$.
Sei $I = \langle 1, t \rangle$. Annahme: I Hauptideal, d.h. $\exists a \in R[t] : I = \langle a \rangle$.
Es gilt:

$$I = \langle 1, t \rangle \implies 1 \in I \implies \deg(a) = 0.$$

Aber:

$$t \in I \implies \deg(a) = 1.$$

Da nun der Widerspruch $\deg(a) = 0 \neq 1 \deg(a)$ auftritt, muss die Annahme falsch sein. Es gilt folglich $I = \langle 1, t \rangle$ ist kein Hauptideal von $R[t]$.
Daraus folgt, dass $R[t]$ über R kein Hauptidealring ist.

$\square$

(b) Fehlt.

korrigiert von am