Vorlesung 9

Reduktion von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung

Bislang haben wir nur Differentialgleichungen bzw. Systeme erster Ordnung betrachtet. Allerdings kann man auch Differentialgleichungen höherer Ordnung betrachten (d.h. Differentialgleichungen, die höhere Ableitungen einer unbekannten Funktion enthalten: z.B. sind in der Physik gewisse Differentialgleichungen zweiter Ordnung besonders wichtig). Sei $n \in \mathbb{N}$ und f Funktion von $n+1$ Variablen, dann heisst die Gleichung

$$y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) \tag{27}$$

gewöhnliche Differentialgleichung $n$ter Ordnung. Wichtig ist, dass man diese auf ein *System* erster Ordnung reduzieren kann: dafür betrachtet man die Funktionen $z_j(t) = y^{(j)}(t)$, $j = 0, \dots, n-1$, dann

$$\begin{aligned}
z_0' &= y' = z_1,\\
z_1' &= (y')' = y'' = z_2\\
&\dots\\
z_{n-2}' &= (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = z_{n-1},\\
z_{n-1}' &= (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) = f(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}).
\end{aligned}$$

Definiere jetzt folgende Vektorfunktionen:

$$\begin{aligned}
z : t &\mapsto \big(z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)\big) \in \mathbb{R}^n,\\
F : (t,z) &\mapsto \big(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, f(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})\big) \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{28}$$

dann lässt sich das obige System für z_j als $z' = F(t,z)$ schreiben. Wir haben also folgendes bewiesen:

Satz 136. *Eine Funktion y ist genau dann Lösung von* (27)*, wenn die Vektorfunktion $z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ Lösung von $z' = F(t,z)$ mit F aus* (28) *ist.*

Analog betrachten man auch Systeme von mehreren Gleichungen der Form (27).

Beispiel 137. (a) Um die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = y^3 + 1$ zu untersuchen, betrachte $z = (z_0, z_1)$ mit $z_0 = y$ und $z_1 = y'$, dann

$$\begin{cases} z_0' = z_1,\\ z_1' = z_0^3 + 1.\end{cases}$$

Ist (z_0, z_1) Lösung des Systems, so ist z_0 Lösung der usprünglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(b) Das System

$$\begin{cases} y'' = y^2 + z, \\ z''' = yz. \end{cases} \tag{29}$$

besteht aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer Differentialgleichung dritter Ordnung. Hier kann man $u = (y, y', z, z', z'') \equiv (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ einführen und das System wie folgt äquivalent umschreiben:

$$\begin{cases} u_1' = y' = u_2, \\ u_2' = (y')' = y'' = y^2 + z = u_1^2 + u_3, \\ u_3' = z' = u_4, \\ u_4' = (z')' = z'' = u_5, \\ u_5' = (z'')' = z''' = yz = u_1 u_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_1^2 + u_3, \\ u_3' = u_4, \\ u_4' = u_5, \\ u_5' = u_1 u_3. \end{cases}$$

Ist eine Vektorfunktion $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ Lösung von diesem neuen System erster Ordnung, so ist (u_1, u_3) Lösung vom (29).

Die Reduktion auf ein System erster Ordnung erlaubt es, die Existenz- und Eindeutigkeitsätze auf diese neue Klasse von Differentialgleichungen zu übertragen. Ein Anfangswertproblem für die Gleichung $n$ter Ordnung (27) besteht darin, eine Lösung y zu finden, die die **Anfangsbedingung $n$ter Ordnung**

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

erfüllt, wobei $t_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ vorgegeben sind. Dieses Anfangsproblem hat genau dann eine (eindeutig bestimmte) Lösung, wenn das Anfangswertproblem für das zugehörige System $z' = F(t, z)$, $z(t_0) = (y_0, \dots, y_{n-1})$, eine (eindeutig bestimmte) Lösung besitzt (das gilt z.B. unter den Lipschitz-Bedingungen aus der vorherigen Vorlesung). Falls $n \geq 2$, dann ist die alleinige Angabe des Anfangswerts $y(t_0) = y_0$ *nicht ausreichend*, um die Lösung eindeutig zu bestimmen. Z.B. hat das Problem $y'' = y$, $y(0) = 0$, unendlich viele Lösungen $y(t) = C(e^t - e^{-t})$ mit $C \in \mathbb{R}$ (wir zeigen später, dass es keine weiteren Lösungen gibt!).

Die Reduktion einer Gleichung auf ein System ist nicht immer praktisch: zwar kann man einige theoretische Resultate direkt übertragen, aber muss man dann mit mehreren unbekannten Funktionen arbeiten. Zum Glück gibt es für einige wichtige Klassen von Differentialgleichungen ziemlich direkte Lösungsmethoden: eine dieser Klassen besteht aus linearen Differentialgleichungen.

Lineare Differentialgleichungen $n$ter Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$, und $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) y(x) = b(x), \quad x \in I, \tag{30}$$

nennt man *lineare Differentialgleichung nter Ordnung*. Analog zu linearen Differentialgleichungen erster Ordnung möchten wir jetzt die Struktur der Lösungsmenge verstehen. Zuerst klären wir die grundsätzliche Frage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen:

Satz 138. *Seien $t_0 \in I$ und $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

für die Gleichung (30) *eine eindeutig bestimmte Lösung $y \in C^n(I)$.*

Beweis. Das entsprechende Anfangswertproblem für das zugehörige System erster Ordnung ist

$$z' = F(t, z), \quad z(t_0) = Z, \tag{31}$$

$$z \equiv (z_0, \dots, z_{n-1}) := (y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad Z = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

$$F(t, z) = \big(z_1, \dots, z_{n-1}, b(t) - a_{n-1}(t) z_{n-1} - \dots - a_0(t) z_0\big).$$

Die Abbildung F ist offenbar Lipschitzsch bzgl. z_j, also besitzt (31) eine eindeutig bestimmte auf I definierte Lösung $z \in C^1(I)$ nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf (Satz 126). Da die beiden Anfangswertprobleme äquivalent sind, folgt die Behauptung über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Um zu zeigen, dass $y \in C^n(I)$, merken wir zuerst, dass $z_{n-1} \in C^1(I)$, also folgt aus $z'_{n-2} = z_{n-1}$ dass $z_{n-1} \in C^2(I)$ und durch Iteration $y = z_0 \in C^n(I)$. □

Bemerkung 139. Satz 138 gilt auch für komplexe Anfangswerte y_j, dann ist auch die (eindeutig bestimmte) Lösung komplexwertig. Das sieht man mit folgendem Trick: eine komplexwertige Funktion y ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ Lösungen sind (da alle Koeffizienten a_j reellwertig sind). Für $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ erhält man ein reellwertiges Anfangswertproblem wie im Satz 138, daher sind sie eindeutig bestimmt. □

Jetzt müssen wir gewisse Begriffe der linearen Algebra aktiv nutzen. Bezeichne

$$\mathbb{K} := \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

und betrachte die $\mathbb{K}$-Vektorräume

$$U = C^n(I) = \{y : I \to \mathbb{K} \; n \text{ mal stetig differenzierbar}\}, \qquad V = C^0(I)$$

und die lineare Abblidung (Operator) $P : U \to V$,

$$(Py)(x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x), \quad x \in I.$$

Die Gleichung (30) hat dann die Form $P(y) = b$. Wir sind also in einem ziemlich allgemeinen algebraischen Rahmen.

Satz 140. *Seien U, V Vektorräume, $P : U \to V$ lineare Abbildung, $b \in V$. Sei $y_s \in U$ mit $P(y_s) = b$, dann gilt $P^{-1}(b) = P^{-1}(0) + y_s$, d.h.*

$$\big\{y \in U : P(y) = b\big\} = \big\{y_H + y_s : y_H \in U \text{ mit } P(y_H) = 0\big\}.$$

Beweis. Sei $y \in U$ mit $P(y) = b$. Betrachte $y_H = y - y_s$, dann $y = y_H + y_s$ und $P(y_H) = P(y - y_s) = P(y) - P(y_s) = b - b = 0$. Umgekehrt, sei $y_H \in U$ mit $P(y_H) = 0$, dann $P(y_H + y_s) = P(y_H) + P(y_s) = 0 + b = b$. □

Die Menge $\big\{y \in U : P(y) = b\big\}$ ist offenbar die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung $P(y) = b$ (auch "allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung" genannt), wobei $\{y_h \in V : P(y_h) = 0\big\}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(y) = 0$ ist. Den Vektor y_s nennt man oft "spezielle Lösung" der inhomogenen Gleichung. Daher kommt man (wieder) zum folgenden allgemeinen Prinzip:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(y) = b$
= eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung
+ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(y) = 0$.

Die Aufgabe, alle Lösungen von (30) zu finden,zerlegt man also in zwei Schritte:

(a) Bestimme alle Lösungen der *homogenen* Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I, \tag{32}$$

(b) Bestimme *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (30).

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Schritt (a), und den Schritt (b) werden wir erst in der nächsten Vorelsung besprechen.

Die Gleichung (32) schreibt man kurz als $P(y) = 0$. Da P eine lineare Abbildung ist und die Nullfunktion das neutrale Element in V ist, ist die Lösungsmenge genau $\ker P$ = Kern/Nullraum von P. Aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass der Nullraum einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist (in unserem Fall bedeutet es, dass eine lineare Kombination von zwei Lösungen von (32) wieder eine Lösung davon ist). Falls man $\ker P$ (=die Lösungsmenge) beschreiben möchte, kann man ihre Dimension und eine Basis von angeben: wir werden jetzt die entsprechenden Definition wiederholen.

Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $y_1, \ldots, y_m \in U$. Die Familie $(y_1, \ldots, y_m)$ heisst $\mathbb{K}$-*linear unabhängig*, falls aus der Gleichheit $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m = 0$ mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$ folgt, dass alle Koeffizienten α_j Null sind (sonst heisst sie $\mathbb{K}$-linear abhängig). Sei L ein Untervektorraum von U, dann definiert man die **Dimension** von L durch

$$\dim L = \dim_{\mathbb{K}} L = \sup\big\{m : \text{ es existieren } m \text{ } \mathbb{K}\text{-linear unabhängige Vektoren in } L\big\}.$$

Gilt $m = \dim L < \infty$ und $(y_1, \dots, y_m) \subset L$ eine $\mathbb{K}$-linear unabhängige Familie, so ist $(y_1, \dots, y_m)$ eine **Basis** von L. Eine Familie $(y_1, \dots, y_m) \subset$ ist genau dann Basis, wenn sich jeder Vektor $y \in L$ *eindeutig* als lineare Kombination von y_j schreiben lässt. Sind L und M zwei Vektorräume und existiert eine *bijektive lineare* Abbildung $\Phi : L \to M$, so haben L und M dieselbe Dimension.

Für uns wird jetzt vor allem der Vektorram $C^0(I)$ und seine Untervektorräume wichtig (da alle Lösungen in diesem Raum liegen). Wichtig: Die Gleichheit $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ für Funktionen y_1, y_2 bedeutet, dass $\alpha y_1(x) + \beta y_1(x) = 0$ für *alle* $x \in I$ gilt (und *nicht nur für ein* x). Z.B. gilt für $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \sin(2x)$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ für $x = 0$, das bedeutet aber nicht, dass y_1 und y_2 linear abhängig sind! Eigentlich sind y_1 und y_2 linear unabhängig: falls $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ für alle x, dann erhält man für $x = \pi/2$ die Gleichheit $\alpha = 0$, also $\beta y_2(x) = 0$ für alle x. Setzt man jetzt $x = \pi/4$ ein, so erhält man $\beta = 0$.

Beispiel 141. (A) Sei $U = C^0(\mathbb{R})$ (gesehen als $\mathbb{R}$-Vektorraum). Betrachte $y_1(x) = \sin x$, $y_2(t) = \cos x$. Sind diese Funktionen linear abhängig?

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, d.h. $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $\alpha \sin x + \beta \cos x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze $x = 0$, dann $\beta = 0$, also $\alpha \sin x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze jetzt $x = \pi/2$ ein, dann auch $\alpha = 0$. Also sind y_1 und y_2 linear unabhängig. Betrachtet man zusätzlich $y_3(x) = \sin(x+1)$, so sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig: für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x+1) = \sin x \cos 1 + \cos x \sin 1$, also $(\cos 1) y_1(x) + (\sin 1) y_2(x) + (-1) y_3(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(B) Die Funktionen $f_k(x) = x^k$, $k = 0, \dots, n$, sind $\mathbb{K}$-linear unabhängig. Beweis: Seien $\alpha_k \in \mathbb{K}$ mit $P = \alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_n f_n = 0$, d.h.

$$P(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

dann $\alpha_n = \lim_{x \to +\infty} P(x)/x^n = 0$ und $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$. Analog $\alpha_{n-1} = 0$ usw., am Ende sind alle α_k gleich Null.

(C) Die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, e^{ix} sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig, aber $\mathbb{C}$-linear abhängig (Übung!).

Das Beispiel (B) kann man wie folgt verallgemeinern (diese Verallgemeinerung wird noch in der heutigen Vorlesung eine wichtige Rolle spielen).

Satz 142. *Seien $n, N \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, dann sind die Funktionen*

$$f_{j,k} : x \mapsto x^k e^{\lambda_j x} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots N,$$

$\mathbb{K}$-linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir beweisen zuerst folgende Hilfsaussage:

$$\text{Is } p \text{ ein Polynom und } \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ so gibt es ein Polynom } q \text{ mit } \operatorname{Grad} q = \operatorname{Grad} p \text{ und } \big(p(x) e^{\mu x}\big)' = q(x) e^{\mu x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Beweis von (33): es gilt $\big(p(x)e^{\mu x}\big)' = \big(p'(x) + \mu p(x)\big)e^{\mu x}$, und $q(x) = p'(x) + \mu p(x)$ ist ein Polynom. Wegen $\mu \neq 0$ und $\operatorname{Grad} p' < \operatorname{Grad} p$, gilt $\operatorname{Grad} q = \operatorname{Grad} p$.

Seien $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{N} \alpha_{jk} x^k e^{\lambda_j x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } p_j(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \alpha_{jk} x^k. \tag{34}$$

Multipliziere die beiden Seite mit $e^{-\lambda_n x}$:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n-1} p_j(x)e^{(\lambda_j - \lambda_n)x} + p_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{35}$$

Gilt $n = 1$, so erhält man schon $p_1(x) \equiv 0$, und aus dem Beispiel (B) folgt, dass alle α_{1k} Null sind. Sei $n \geq 2$ und dann $p_n^{(N+1)} = 0$. Leite die Gleichheit (35) $(N+1)$-mal ab, dann gilt laut (33):

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n-1} q_j(x)e^{(\lambda_j - \lambda_n)x} + p_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei q_j Polynome sind mit $\operatorname{Grad} q_j = \operatorname{Grad} p_j$. Da diese Summe jetzt $(n-1) < n$ Summanden vom selben Typ enthält, folgt durch die Induktion, dass alle Polynome q_j Null sind, und dann wegen $\deg p_j = \deg q_j$ auch $p_j \equiv 0$. As $p_j \equiv 0$ folgt $\alpha_{jk} = 0$ für $k = 0, \ldots, N$ (Beispiel B). $\square$

Satz 143. *Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (32) *ist n-dimensional.*

Beweis. Sei L der Lösungsraum. Wähle $t_0 \in I$ und definiere $\Phi : L \to \mathbb{K}^n$ durch

$$\Phi(y) = \big(y(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)\big).$$

Es ist klar, das Φ eine lineare Abbildung istn und sie ist injektiv: die einzige Lösung y mit $\Phi(y) = 0$ ist die Nullfunktion (Eindeutigkeit!). Sie ist auch surjektiv: nach dem Satz 138/Bemerkung 139 gibt es zu jedem $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung y mit $\Phi(y) = (y_0, \ldots, y_{n-1})$. Aus der Existenz einer bijektiven linearen Abbildung $\Phi : L \to \mathbb{K}^n$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} L = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. $\square$

Definition 144. Ein **$\mathbb{K}$-Fundamentalsystem** einer homogenen linearen Differentialgleichung ist eine Basis des Raumes der $\mathbb{K}$-wertigen Lösungen.

Sind $(y_1, \ldots, y_n)$ eine $\mathbb{K}$-Fundamentalsystem, so ist jede $\mathbb{K}$-wertige Lösung y_H derselben homogenen Gleichung der Form $y_H = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, wobei $c_j \in \mathbb{K}$ beliebig aber durch y_H eindeutig bestimmt sind: damit ist die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung vollständig beschrieben. Alle vorherigen Konstruktionen kann man wie folgt zusammenfassen.

Satz 145 (Lösungen der inhomogenen Gleichung). *Sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein $\mathbb{K}$-Fundamentalsystem der homogenen Gleichung* (32) *und y_s irgendeine $\mathbb{K}$-wertige Lösung der inhomogenen Gleichung* (30). *Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}$ ist genau dann Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn es (eindeutig bestimmte) Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ existieren mit*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_s(x) \textit{ für alle } x \in I.$$

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für $n \geq 2$ und allgemeine Funktionen a_j gibt es leider (noch) keine allgemeine Methode, ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichungen (32) explizit zu bestimmen. Zum Glück, gibt es für konstante Koeffizienten eine vollständige Theorie, die wir jetzt angehen. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ betrachte die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Für $n = 1$ hat man Lösungen $y(x) = ce^{-a_0 x}$. Wir prüfen zuerst, ob es auch für $n \geq 2$ Lösungen $y(x) = e^{\lambda x}$ existieren. Für solche y gilt $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} = \lambda^k y(x)$, also $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = P(\lambda)y$, wobei das Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

das charakteristische Polynom der Differentialgleichung heisst. Also ist die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung von (36), wenn $P(\lambda) = 0$, d.h. wenn λ Nullstelle vom charakterischen Polynom ist. Seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die *verschiedenen* (komplexen) Nullstellen von P: es gilt natürlich $k \leq n$. Wir betrachten jetzt zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: Einfache Nullstellen (*k*=*n*). Dann haben wir n (komplexe) Lösungen $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$, $j = 1, \ldots, n$. Diese n Lösungen sind linear unabhängig (Satz 142 mit $N = 0$) und bilden daher ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem. Alle Lösungen sind also lineare Kombinationen von y_j:

Beispiel 146. (A) $y'' + 2y - 3 = 0$. Das charakterischtische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$, die Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 1$ sind einfach, also bilden $y_1(x) = e^{-3x}$ und $y_2(x) = e^x$ ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem (und dann auch ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem, da die beiden Lösungen reellwertig sind).

(B) $y'' + y = 0$. Die Nullstellen von $\lambda^2 + 1 = 0$ sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$, also bilden $y_1(x) = e^{ix}$ und $y_2(x) = e^{-ix}$ ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem.

Möglichkeit 2: Mehrfache Nullstellen (*k*<*n*). Betrachte z.B. $y'' = 0$, d.h. $P(\lambda) = \lambda^2$, dann ist 0 die einzige (aber zweifache) Nullstelle. Die Differentialgleichung können wir aber lösen: aus $y'' = 0$ folgt $y' = a =$ Konstante, also $y(x) = ax + b$, wobei a, b beliebige Konstanten sind. Ein mögliches Fundamentalsystem ist also $(1, x)$.

Um den allgemeinen Fall zu betrachten nutzen wir die Operatorschreibweise. Sei $D := \dfrac{d}{dx}$, das ist eine lineare Abbildung (=Operator) z.B. von $C^1(\mathbb{R})$ nach $C^0(\mathbb{R})$. Auf $z \in C^k(\mathbb{R})$ kann man D sogar k-mal anwenden $\underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k\text{-mal}}(y) = y^{(k)}$. Wir kürzen ab, $D^k := \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k\text{-mal}}$, und schreiben lieber $D^k y$ statt $D^k(y)$, dann hat die Gleichung (36) die Form

$$D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = 0, \text{ oder } P(D)y = 0,$$

wobei P das charakteristische Polynom ist und

$$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

eine lineare Abbildung von $C^n(\mathbb{R})$ nach $C^0(\mathbb{R})$. Analog kann man $P(L)$ für andere lineare Abbildungen L definieren, und man kann prüfen (Übung), dass für beliebige Polynome P, Q die Identität $(PQ)(L) = P(L)Q(L)$ gilt. Z.B. sei $P(\lambda) = \lambda^2$ und $L = D + a$ mit $a \in \mathbb{C}$, d.h. $Lu = Du + au = u' + au$, dann

$$\begin{aligned} P(L)u = P(D+a) &= (D+a)^2 u = (D+a) \circ (D+a)u = (D+a)(Du+au) \\ &= D^2u + aDu + D(au) + a^2u = (D^2 + 2aD + a^2)u = u'' + 2au' + a^2u. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jede n-mal stetig differenzierbare Funktion f und $a \in \mathbb{C}$:

$$(D-a)\big(f(x)e^{ax}\big) = f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} - afe^{ax} = f'(x)e^{ax} = e^{ax}Df(x),$$

also durch die Induktion

$$(D-a)^n\big(f(x)e^{ax}\big) = e^{ax}D^n f(x) = e^{ax} f^{(n)}(x). \tag{37}$$

Satz 147. *Sei P das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung (36) und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Nullstellen von P mit Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_k$ (also $m_1 + \cdots + m_k = n$). Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ &e^{\lambda_2 x}, \quad xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ &\ldots \\ &e^{\lambda_k x}, \quad xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}, \end{aligned} \tag{38}$$

ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Beweis. Wir prüfen zuerst, dass diese Funktionen wirklich Lösungen von (36) sind. Betrachte die Funktion $y : x \mapsto x^m e^{\lambda_k x}$ mit $m \leq m_k - 1$. Nach (37) erfüllt diese Funktion $(D - \lambda_k)^{m_k} y(x) = e^{\lambda_k x}(x^m)^{(m_k)} = 0$. Schreibe das Polynom P als Produkt $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, dann $P(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k}$ und

$$P(D)y = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(D - \lambda_k)^{m_k} y}_{=0} = 0,$$

d.h. y ist Lösung von (36). Da λ_k eine beliebig gewählte Nullstelle von P war, sind alle Funktionen $y(x) = x^m e^{\lambda_j x}$ mit $m \leq m_j - 1$ Lösungen. Die n Funktionen (38) sind $\mathbb{C}$-linear unabhängig (Satz 142), daher bilden sie eine Basis des n-dimensionalen Lösungsraumes. $\square$

Da wir am Anfang eine relle Differentialgleichung hatten, wäre es sinnvoll, auch ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem konstruieren zu können. Falls alle λ_j reell sind, dann sind die Lösungen (38) reell, und sie sind (immer noch) $\mathbb{R}$-linear unabhängig, daher bilden sie auch ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem. Falls irgendwelche λ_j nichtreell sind, dann nutzt man folgende Idee: falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine Nullstelle von P ist, das ist auch $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$ Nullstelle mit derselben Multiplizität. Die zugehörigen Paare von komplexwertigen Lösungen sind

$$f_j(x) = x^j e^{(\mu+i\nu)x} = x^j e^{\mu x} e^{i\nu x}, \quad g_j(x) = x^j e^{(\mu-i\nu)x} = x^j e^{\mu x} e^{-i\nu x} = \overline{f_j(x)},$$

und diese ersetzt man durch neue Paare reellwertiger (!) Lösungen

$$\frac{f_j + g_j}{2} = \operatorname{Re} f_j = x^j e^{\mu x} \cos(\nu x), \quad \frac{f_j - g_j}{2i} = \operatorname{Im} f_j = x^j e^{\mu x} \sin(\nu x).$$

Die neue Familie ist immer noch $\mathbb{C}$-linear unabhängig (einfache Übung aus der linearen Algebra) und damit auch $\mathbb{R}$-linear unabhängig.

Satz 148. *Sei P das charakteristische Polynom P der Differentialgleichung* (36)*. Ferner seien Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen rellen Nullstellen von P mit Multiplizitäten $m_1, \dots, m_r$ und $\mu_1 \pm i\nu_1, \dots, \mu_s \pm i\nu_s$ die verschiedenen nichtreellen Nullstellen von P mit Multiplizitäten $m'_1, \dots, m'_s$ (also $m_1 + \dots + m_r + 2m'_1 + \dots + 2m'_s = n$). Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{aligned}
&x^\ell e^{\lambda_j x}, && \ell = 0, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, \dots, r,\\
&x^\ell e^{\mu_j x} \cos(\nu_j x), && \ell = 0, \dots, m'_j - 1, \quad j = 1, \dots, s,\\
&x^\ell e^{\mu_j x} \sin(\nu_j x), && \ell = 0, \dots, m'_j - 1, \quad j = 1, \dots, s,
\end{aligned}$$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung (36)*.*

Beispiel 149. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$. Das charakterische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$. Man findet eine Nullstelle (-1) und faktorisiert P wie folgt:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= (\lambda + 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2\\
&= (\lambda + 1)\big((\lambda - i)(\lambda + i)\big)^2 = (\lambda + 1)(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2.
\end{aligned}$$

Wir haben also eine einfache relle Nullstelle -1, und zweifache Nullstellen $\pm i$. Die Funktionen $e^{-x}, e^{\pm ix}, xe^{\pm ix}$ bilden also eine Basis im Raum der komplexwertigen Lösungen ($\mathbb{C}$-Fundamentalsystem). Die Funktionen $e^{-x}, \cos x, x\cos x, \sin x, x \sin x$ bilden eine Basis im Raum der reellwertigen Lösungen ($\mathbb{R}$-Fundamentalsystem): man nimmt $(\cos x, \sin x)$ statt (e^{ix}, e^{-ix}) und $(x\cos x, x\sin x)$ statt (xe^{ix}, xe^{-ix}).