Differentialrechnung

Def Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. f heißt *differenzierbar im Punkt* x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Ist f in x_0 differenzierbar, so wird $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f an der Stelle x_0 genannt. Die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ heißt die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. f heißt *differenzierbar auf* I, falls f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Satz 5.1 Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann ist f stetig in x_0.

Satz 5.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Wenn die Funktionen f, g in x_0 differenzierbar sind, dann sind $f + g$, $cf (c \in \mathbb{R})$, fg in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Wenn außerdem $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Satz 5.3 (Kettenregel) Seien I, J Intervalle und $g\colon I \to J$, $h\colon J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei g differenzierbar in $x_0 \in I$ und h differenzierbar in $g(x_0)$. Dann ist $h \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(h \circ g)'(x_0) = h'(g(x_0))g'(x_0).$$

Satz 5.4 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion. Sei $I' := f(I)$ und $f^{-1}\colon I' \to I$ die Umkehrfunktion zu f. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Differentialrechnung (Fortsetzung)

Satz 5.5 (Ableitung einer Potenzreihe) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann darf diese Reihe für alle x mit $|x| < R$ gliedweise differenziert werden, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(c_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \text{ für alle } x \text{ mit } |x| < R.$$

Außerdem hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ auch den Konvergenzradius R.

Def Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.
f hat in x_0 ein *lokales Maximum*, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x mit $|x - x_0| < \varepsilon$.
f hat in x_0 ein *lokales Minimum*, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle x mit $|x - x_0| < \varepsilon$.
f hat in x_0 ein *globales Maximum*, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$.
f hat in x_0 ein *globales Minimum*, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$.
f hat in x_0 ein *lokales bzw. globales Extremum*, falls f in x_0 ein lokales bzw. globales Maximum oder Minimum besitzt.

Satz 5.6 (Notwendige Bedingung für lokales Extremum)
$f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum. Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Def Sei $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a, b)$ heißt *stationärer Punkt* von f, falls $f'(x_0) = 0$.

Satz 5.7 (Rolle) Sei $a < b$, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz 5.8 (Mittelwertsatz) Sei $a < b$, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 5.9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Sei $a < b$, $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Satz 5.10 (Monotonie) Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:
$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist konstant auf $[a,b]$
$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a,b]$
$f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[a,b]$
$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf $[a,b]$
$f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf $[a,b]$

Satz 5.11 Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Sei f differenzierbar in einer Umgebung $U \subset (a,b)$ von $x_0 \in (a,b)$ vielleicht mit Ausnahme des Punktes x_0 selbst.
f hat in x_0 ein lokales Minimum, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in U$ mit $x < x_0$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in U$ mit $x > x_0$.
f hat in x_0 ein lokales Maximum, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in U$ mit $x < x_0$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in U$ mit $x > x_0$.

Satz 5.12 (Hinreichende Bedingungen für lokales Extremum) Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und zweimal differenzierbar auf (a,b).
Sei $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$. Dann hat f in x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum.

Höhere Ableitungen

Def Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Dann ist $f'\colon I \to \mathbb{R}$ definiert. Ist f' auf I differenzierbar, so heißt f *zweimal differenzierbar* auf I und die *zweite Ableitung* wird definiert durch

$$f''(x) := (f')'(x), \quad x \in I.$$

Analog definiert man weitere Ableitungen. Man schreibt üblicherweise $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, ..., f^{(n)}, ...$ Außerdem setzt man $f^{(0)} := f$.
Wenn f an der Stelle $x_0 \in I$ bzw. auf I existiert, so heißt f *n-mal differenzierbar* in x_0 bzw. auf I. Ist die n-te Ableitung zusätzlich stetig auf I, so heißt f *n-mal stetig differenzierbar* auf I. Die Menge aller n-mal stetig differenzierbarer Funktionen auf I wird mit $C^n(I)$ bezeichnet.
f heißt *unendlich oft differenzierbar* auf I, falls alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ auf I existieren. Man schreibt in diesem Fall $f \in C^\infty(I)$.

Konvexität

Def Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall I.
f heißt *konvex* auf I, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x_0, x_1 \in I$ und für alle $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

Wenn die umgekehrte Ungleichung gilt, wird f *konkav* genannt. f heißt *streng konvex* bzw. *streng konkav*, falls wir echte Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$ betrachten.

Satz 5.13 (Zweite Ableitung und Konvexität) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf einem Intervall I. Dann gilt:
$f'' \geq 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist konvex auf I
$f'' \leq 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist konkav auf I
$f'' > 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng konvex auf I
$f'' < 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng konkav auf I

Def Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. $x_0 \in I$ heißt *Wendepunkt* von f, falls f in x_0 sein Konvexitätsverhalten wechselt, d.h. wenn es Intervalle (a, x_0) und (x_0, b) gibt derart, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
f ist konkav auf (a, x_0) und konvex auf (x_0, b) bzw.
f ist konvex auf (a, x_0) und konkav auf (x_0, b)