SS 2020 • Analysis IIa

Verschiedene Übungsaufgaben als Klausurvorbereitung (II)

Für diese Aufgaben sind keine offiziellen Musterlösungen geplant. Sie können in den Zusatztutorien besprochen werden:
am 24.09.2020, 10:00–12:00 (Zusatztutorium mit Frau Sina Held)
am 28.09.2020, 14:00–16:00 (Zusatztutorium mit Herrn Paul Hafemann)
(alle Sitzungen finden als Stud.Ip–Meetings statt)

Aufgabe 1
Beweisen Sie oder widerlegen folgende Aussagen:

1. Falls A und B disjunkte Mengen sind, dann sind auch ihre Abschlüsse disjunkt.
2. Jede Menge ist in ihrem Abschluss enthalten.
3. Für jede Menge A in jedem metrischen Raum gilt $A \subset \overline{\mathring{A}}$.
4. Für jede Menge A in jedem metrischen Raum gilt $A \subset \mathring{\overline{A}}$.
5. Auf $\mathbb{R}^n$ kann man unendlich viele Normen einführen.
6. Es gibt metrische Räume, in denen alle offenen Mengen abgeschlossen sind.
7. Es gibt Mengen A mit $A \subset \partial A$.
8. Falls zwei Normen dieselbe Metrik erzeugen, dann sind diese Normen gleich.
9. Für jeden unendlichen metrischen Raum (X, d) gibt es eine nichtkonstante stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$.
10. Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzsch ist, dann ist $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch Lipschitzsch.
11. Falls $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ Lipschitzsch ist, dann ist $f^2 : (0, 1) \to \mathbb{R}$ auch Lipschitzsch.
12. Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \displaystyle\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f$ existiert und endlich ist, dann ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f$ konvergent.
13. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Falls f^2 auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist, dann ist auch f auf $\mathbb{R}$ integrierbar.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int x^2 e^{-2x}\, dx, \quad \text{(b)} \int \frac{x+4}{x^2+4}\, dx, \quad \text{(c)} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx, \quad \text{(d)} \int \frac{\sin^2(\ln x)}{x}\, dx.$$

2. Bestimmen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int_1^2 \sqrt{x+3}\, dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)^2}\, dx, \quad \text{(c)} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

3. Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf die Konvergenz:

$$\text{(a)} \int_0^\infty \sqrt{\frac{1+x^2\sin^2 x}{1+x^5}}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^\infty \sin(x^3)\,dx.$$

Aufgabe 3
Bestimmen Sie allgemeine Lösungen sowie Lösungen des Anfangswertproblems $y(1) = 0$ für folgende Differentialgleichungen:

$$\text{(a) } y'(x) = -y(x) + x^2, \quad \text{(b) } y'(x) = \frac{3}{x}\,y(x) + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Aufgabe 4

1. Bestimmen Sie allgemeine reellwertige Lösungen folgender Differentialgleichungen:

$$\text{(a) } y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = e^x, \quad \text{(b) } y'''(x) + y'(x) = \sin x, \quad \text{(c) } y''(x) - 4y(x) = 1.$$

2. Geben Sie konkrete Werte $a, b \in \mathbb{R}$ an, für die die Gleichung $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 1$ folgende Eigenschaft hat:
   (a) Alle Lösungen sind beschränkt.
   (b) Alle Lösungen sind unbeschränkt.
   (c) Es gibt eine einzige beschränkte Lösung.
   (d) Es gibt eine einzige unbeschränkte Lösung.

   Die Antworten müssen begründet sein!

Aufgabe 5
Finden Sie allgemeine reellwertige Lösungen für folgende Systeme:

$$\text{(a) } \begin{cases} x' = x - 2y + 5, \\ y' = 2x + y. \end{cases} \quad \text{(b) } \begin{cases} x' = 2x + 9y + e^{-t}, \\ y' = x + 2y - e^{-t}. \end{cases}$$