Übungsblatt 4 - Lösungsvorschläge

Orville Damaschke

14. Mai 2020

Aufgabe 4.1

Sei $f \in C^\infty((a,b))$ mit $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (a,b)$.

1. *Behauptung.* Für $x_0 \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ kann das Integralrestglied aus Satz 44 umgeschrieben werden zu

$$R_n(x_0,x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n (f^{n+1})(x_0+s(x-x_0))\,\mathrm{d}s \quad .$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Anwendung der Substitution $t = x_0 + s(x-x_0)$:

$$\begin{aligned}
R_n(x_0,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n (f^{(n+1)})(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1 (x-x_0-s(x-x_0))^n (f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))(x-x_0)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1 (x-x_0)((x-x_0)(1-s))^n (f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n (f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))\,\mathrm{d}s\,, \quad \text{q.e.d.!}
\end{aligned}$$

2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ so, dass $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \subset (a,b)$.

   (a) *Behauptung.* $R_n(x_0, x_0+\epsilon) \leq f(x_0+\epsilon) - f(x_0)$

   Beweis: Die Taylorformel mit Integralrestglied (Satz 44) für $f(x_0+\epsilon)$ gibt

$$\begin{aligned}
f(x_0+\epsilon) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n(x_0,x_0+\epsilon) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n(x_0,x_0+\epsilon) \\
&\overset{(*)}{\geq} f(x_0) + R_n(x_0,x_0+\epsilon) \\
&\Leftrightarrow \\
R_n(x_0,x_0+\epsilon) &\leq f(x_0+\epsilon) - f(x_0) \quad \text{, q.e.d.!}
\end{aligned}$$

   In (*) wurde dabei die Nicht-Negativität aller Ableitungen in jedem Summanden ausgenutzt.

(b)

Behauptung. $|R_n(x_0,x)| \le \left(\frac{|x-x_0|}{\epsilon}\right)^{n+1} R_n(x_0,x_0+\epsilon)$

Beweis: Da alle Ableitungen auf (a,b) positiv definit sind, ist die nächstgeringe Ableitung eine monoton steigende Funktion:

$$f^{(n+2)}(x) \ge 0\ \forall\, x \in (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad f^{(n+1)}(x) \le f^{(n+1)}(y)\ x,y \in (a,b) \text{ mit } x \le y$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für ein $x \in [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]$ schließt man mit $x \le x_0+\epsilon$, dass

$$f^{(n+1)}(x_0+s(x-x_0)) \le f^{(n+1)}(x_0+s\epsilon) \quad \text{für} \quad s \in [0,1] \quad , \tag{1}$$

und sodann mit der Betragsabschätzung und Ordnungsrelation für Regelintegrale (Blatt 2 Aufgabe 2 (1))

$$\begin{aligned}
|R_n(x_0,x)| &= \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n (f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))\,\mathrm{d}s\right| \\
&= \frac{(|x-x_0|)^{n+1}}{n!}\left|\int_0^1 (1-s)^n (f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{(|x-x_0|)^{n+1}}{n!}\int_0^1 |\underbrace{(1-s)^n}_{\ge 0\,\forall n,s}\underbrace{(f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))}_{\ge 0\,\text{n.V.}}|\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{(|x-x_0|)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n (f^{(n+1)})(x_0+s(x-x_0))\,\mathrm{d}s \\
&\overset{(1)}{\le} \frac{(|x-x_0|)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n (f^{(n+1)})(x_0+s\epsilon)\,\mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{|x-x_0|}{\epsilon}\right)^{n+1} R_n(x_0,x_0+\epsilon) \quad \text{, q.e.d.!}
\end{aligned}$$

3.

Behauptung. Sei $x_0 \in (a,b)$, so existiert zu jedem x_0 ein $\delta > 0$, sodass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ .$$

Beweis: Es ist ein $\delta > 0$ so zu wählen, dass

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

für entsprechende x. Motiviert durch Teil 2 (b), folgt mit der Taylorformel mit Integralrestglied (Satz 44) und Teil 1 für alle $x \in [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]$: :

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| &= |R_N(x,x_0)| \overset{2.(b)}{\le} \left(\frac{|x-x_0|}{\epsilon}\right)^{N+1} R_N(x_0,x_0+\epsilon) \\
&\overset{2.(a)}{\le} \left(\frac{|x-x_0|}{\epsilon}\right)^{N+1} (f(x_0+\epsilon)-f(x_0)) \quad .
\end{aligned}$$

Wählt man $\delta = r\epsilon$ mit $r \in (0,1)$, so sind $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ und damit

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| \leq \left(\frac{|r\epsilon|}{\epsilon} \right)^{N+1} (f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)) = r^{N+1} (f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)) ,$$

was für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit existiert mindestens ein $\delta > 0$, sodass die Taylorreihe um x_0 für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ konvergiert, q.e.d.!

Aufgabe 4.2

Satz 1. *Sei $f \in R_{\mathsf{lok}}([1,+\infty),\mathbb{R}_{\geq 0})$ monoton fallend, dann konvergiert die Folge*

$$a_n = \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad .$$

Beweis: Da f n.V. lokal (Regel-)integrierbar ist, ist $f \in R([1,s],\mathbb{R}_{\geq 0})$ für alle $s > 1$. Demnach ist das Integral in dem Folgengliedausdruck für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert.
Gemäß Hinweis wird die Konvergenz der Folge durch ein Monotoniekriterium gezeigt: Betrachte das Folgenglied a_{n+1}: Unter Ausnutzung der Linearität von Integral und Summe schließt man

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_1^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n+1) \\ &= a_n + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n+1) \quad ; \end{aligned}$$

Da f monoton fallend ist, folgt für $x \in [n+1, n+2]$ $f(x) \leq f(n+1)$ und nach Regelintegraleigenschaft somit

$$f(n+2) = \int_{n+1}^{n+2} f(n+2)\,\mathrm{d}x \leq \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{n+1}^{n+2} f(n+1)\,\mathrm{d}x = f(n+1) \ . \tag{2}$$

Daraus erschließt man, dass die Folge monoton fallend ist:

$$a_{n+1} \leq a_n + f(n+1) - f(n+1) = a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n \geq a_{n+1} \ .$$

Um ein Monotoniekriterium nun anzuwenden, muss gezeigt werden, dass die Folge nach unten beschränkt ist. Hierzu nutzt man die Additivität des Regelintegrals aus:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(k) \overset{(2)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} f(k+1) - \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n+1) - f(1) \\ &\geq -f(1) \end{aligned}$$

mit der Nicht-Negativität von f. Damit ist a_n eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, welche nach dem Monotoniekriterium konvergent ist, q.e.d.!

Aufgabe 4.3

In dieser Aufgabe wird das Konvergenzverhalten mithilfe des Majoranten-und Minorantenkriterium (Satz 52) untersucht.

(a) $f(x) = (\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 1)^{-1}$ auf $(0, +\infty)$: f ist bei 0 irregulär. Um damit auch das uneigentliche Integral für $x \to \infty$ zu behandeln, zerlege man das Intervall in $(0, 1]$ und $[1, +\infty)$ und untersuche die Konvergenz gemäß Definition 47 (3).
Eine Majorante auf $(0, 1]$ ist gegeben durch $g(x) = 1/\sqrt{x}$, denn mit $0 \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq \sqrt{x}$ folgt

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \left|\left(1 + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ;$$

das Integral der Majoranten über $(0, 1]$ ist gemäß dem Hauptbeispiel 49 im Skript konvergent, sodass nach dem Majorantenkriterium auch $\int_0^1 f$ konvergiert.

Auf dem Intervall $[1, +\infty)$ dominiert die Exponentialfunktion im Nenner gegenüber $\sqrt{x} - 1$, sodass eine passende Majorante gegeben ist durch

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 1}\right| = \mathrm{e}^{-x} \left|\left(1 + \frac{\sqrt{x} - 1}{\mathrm{e}^x}\right)^{-1}\right| \leq \mathrm{e}^{-x} = g(x) \geq 0 \quad .$$

Da e^{-x} auf $[1, +\infty)$ integrierbar ist,

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to +\infty} \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-\omega}\right) = \mathrm{e}\,,$$

folgt die Konvergenz von $\int_1^{+\infty} f$ nach dem Majorantenkriterium. Schlussendlich folgt damit die Konvergenz des zu betrachtenden Gesamtintegrals.

(b) $f(x) = \frac{\log(x)}{(1-x)^2}$ auf $(0, 1)$: Sowohl $x = 0$ und $x = 1$ sind irreguläre Punkte des Integranden. Man zerlege das zu untersuchende Integral in

$$\int_0^1 f = \int_0^{\frac{1}{2}} f + \int_{\frac{1}{2}}^1 f$$

und betrachte die Konvergenz auf den Teilstücken.
Auf $(0, 0.5]$ ist der Nenner nahe 1 und der Logarithmus dominant, weshalb dieser auf dem Intervall als Majorante dient:

$$\left|\frac{\log(x)}{(1-x)^2}\right| \leq \max_{x \in (0, 0.5]} \{\frac{1}{(1-x)^2}\} 4|\log(x)| = -4\log(x) = g(x) \quad .$$

Zur Konvergenz untersuche man dessen Integrierbarkeit: Via partieller Integration uneigentlicher Integrale folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} g(x)\,\mathrm{d}x &= -4\int_0^{0.5} \log(x)\,\mathrm{d}x = -4\log(x)x|_0^{0.5} + 4\int_0^{0.5} x\frac{\mathrm{d}x}{x} = -4\log(x)x|_0^{0.5} + 4\int_0^{0.5} \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{2}(1 + \log(2)) + 4\lim_{a \to 0^+} a\log(a) = 2(1 + \log(2)) \end{aligned}$$

und damit die Integrierbarkeit der Majoranten. Der Randterm bei $x = 0$ verschwindet, da das Monom in x schneller gegen 0 konvergiert als der Logarithmus divergiert. Die integrierbare

Majorante garantiert nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\int_0^{0.5} f$.

Auf $[0.5, 1)$ ist der Logarithmus nahe 0 und der Nenner dominant. Aus der Logarithmus-abschätzung für $x > -1$,

$$\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x) \leq x \quad , \tag{3}$$

lässt sich eine Majorante bestimmen:

$$\frac{\log(x)}{(1-x)^2} = \frac{\log(1+(x-1))}{(1-x)^2} \leq \frac{x-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)| \leq \frac{1}{x-1} = g(x)\,.$$

Diese ist aber nicht integrierbar und divergiert logarithmisch:

$$\int_{0.5}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \log(|x-1|)|_{0.5}^{1} = \lim_{a\to 1^-} \log(|a-1|) + \log(2) \;\to\; -\infty\,.$$

Um die Divergenz des Integrals konkret zu zeigen, konstruiere man eine Minorante. Die Abschätzung (3) suggeriert

$$\frac{\log(x)}{(1-x)^2} = \frac{\log(1+(x-1))}{(1-x)^2} \geq \frac{x-1}{(x-1+1)(1-x)^2} = \frac{1}{x(x-1)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \geq \frac{1}{x(x-1)} = \tilde{g}(x)\,.$$

Eine Partialbruchzerlegung führt zu einer einfacheren Darstellung: Die Polstellen sind bei 0 und 1 und haben je einfache Multiplizität, sodass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)} \qquad \Rightarrow \qquad A = -1 \quad \text{und} \quad B = 1 \\
&\Rightarrow \\
\frac{1}{x(x-1)} &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \quad .
\end{aligned}$$

$\frac{1}{x}$ ist auf $[0.5, 1)$ integrierbar, aber der zweite Term ist nach selber obiger Rechnung wieder divergent. Damit ist $\tilde{g}(x)$ eine nicht-integrierbare Minorante, womit das Integral divergiert.

Nota bene: Die untere Abschätzung in (3) kann aus der bekannten Abschätzung nach oben bestimmt werden: Mit $(1+x)^{-1} - 1 > -1$ für $x > -1$ folgt

$$\begin{aligned}
-\log(1+x) &= \log\left(\frac{1}{1+x}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{1+x} - 1\right)\right) \leq \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \\
&\Leftrightarrow \\
\log(1+x) &\geq \frac{x}{1+x} \quad .
\end{aligned}$$

Als Erinnerung der Beweis der oberen Abschätzung: Betrachte die Funktion $f(x) = x - \log(1+x)$ für $x > -1$. Die Ableitung ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$, welche positiv für $x > 0$ ist und negativ für $x \in (-1, 0]$. Nach Monotoniekriterien ist f damit monoton steigend für $x > 0$ und fallend für $x \in (-1, 0)$. Da für $x = 0$ die Ableitung verschwindet, liegt ein Minimum vor. Damit ist $0 \leq x - \log(1+x)$ und somit $x \geq \log(1+x)$ für alle $x > -1$.

Aufgabe 4.4

(a) Hier nutze man die Substitution uneigentlicher Integrale aus. Wähle $u = \mathrm{e}^x$ mit $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ mit $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^x = 0$ für den Minusfall, sonst $+\infty$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \overset{(*)}{=} \lim_{b\to+\infty} (\arctan(a) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

In (*) wurde dabei das Standardintegral aus der ersten Präsenzübung benutzt. Zur Rechtfertigung der Substitutionsregel merke man an, dass e^x stetig differenzierbar und streng monoton wachsend ist. Die Funktion $u \mapsto 1/(u^2+1)$ ist Regel-integrierbar auf allen abgeschlossenen Teilintervallen von $[0, +\infty) = u((-\infty, +\infty))$ und somit darauf lokal integrierbar.

(b) Hier verwendet man wieder die Substitution uneigentlicher Integrale auf $[0, 1)$. Hier wähle man $u^2 = 1 - x$ mit $\mathrm{d}x = -2u\,\mathrm{d}u$. u ist stetig differenzierbar auf $[0, 1)$ und streng monoton fallend. Das Bild von $[0, 1)$ unter u ist $[0, 1]$. Die Funktion $u \mapsto 1/(u^2+1)$ ist auf $[0, 1]$ stetig und damit eine Regelfunktion, ergo ebenso lokal integrierbar. Somit hat man mit demselben Standardintegral wie in (a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+(1-x))\sqrt{1-x}} = -2\int_1^0 \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)u} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= 2(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2}\quad.\end{aligned}$$