Abgabe Algebra 1, Blatt 06

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 6.1

(a) Zu zeigen: $\left(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right)/\left(6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Es gilt:

$\mathbb{Z}$ Ring, $18\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z}$ Ideale in R

Es fehlt für das Anwenden des Homomorphiesatzes noch $18\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$. -1 P

$$\overset{\text{2. Isom.}}{\Longrightarrow} \varphi : \left(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right)/\left(6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right) \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \text{ Ringisomorphismus}$$

$$\Longrightarrow \left(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right)/\left(6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

$\square$

Punkte Teil a): 1/2

(b) Fehlt.
Punkte Teil b): 0/2

(c) Sei $S = \mathbb{Z}[t], I = t\mathbb{R}[t], R = \mathbb{Z}$.
Zu zeigen: $(\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{R}[t])/t\mathbb{R}[t] \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[t]/t\mathbb{Z}[t] \cong \mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])$.

(1) Zu zeigen: $(\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{R}[t])/t\mathbb{R}[t] \cong \mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])$.
Es gilt:

$$\mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t]) \overset{\text{2. Isom.}}{\cong} (\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{R}[t])/t\mathbb{R}[t].$$

Das folgt nicht aus dem 2. Isomorphiesatz. -1 P.

(2) Zu zeigen: $\mathbb{Z}[t]/_{t\mathbb{Z}[t]} \cong \mathbb{Z}[t]/_{(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])}$ Es gilt:

$$\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{Z}[t] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\} \cap \left\{ t \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}_0)} \right\}$$

Die rechte Menge entspricht nicht der Definition von $t\mathbb{Z}[t]$. Vermutlich meintest Du $t\mathbb{R}[t]$.

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\} \cap \left\{ t \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\}$$

Warum gilt obige Gleichheit? Es ist doch $t\mathbb{Z}[t] \neq t\mathbb{R}[t]$.

$$= \left\{ t \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\}$$

$$= t\mathbb{Z}[t].$$

$$\Longrightarrow \mathbb{Z}[t]/_{t\mathbb{Z}[t]} \cong \mathbb{Z}[t]/_{(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])}.$$

Das folgt aus $\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t] = t\mathbb{Z}[t]$. $-0,5$ P

(3) Zu zeigen: $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[t]/_{t\mathbb{Z}[t]}$.
Es gilt:

$t\mathbb{Z}[t]$ Ideal $\Longrightarrow$
$\exists \varphi : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}$ Ringhomomorphismus mit $\ker(\varphi) = t\mathbb{Z}[t]$.
Warum gibt es so eine Abbildung φ? Warum bildet sie nach $\mathbb{Z}$ ab? $-0,5$ P.

$$\overset{\text{Homom.-Satz}}{\Longrightarrow} \psi : \mathbb{Z}[t]/_{t\mathbb{Z}[t]} \to \mathrm{Im}(\varphi), [a] \mapsto \varphi(a) \text{ Ringisomorphismus}$$

$$\overset{\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \mathbb{Z}[t]/_{t\mathbb{Z}[t]} \cong \mathbb{Z}.$$

Warum soll $Im(\varphi) = \mathbb{Z}$ gelten? $-0,5$ P.

□

Punkte Teil c): $0,5/3$

$1,5/7$ P

Aufgabe 6.2

Sei R Hauptidealring, $g \in R$.
Zu zeigen: $a + gR = [a]_g \in \left(R/_{gR}\right)^* \iff 1$ ist ein ggT von a und g.
Beweis fehlt.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$, $f := t^3 - 3t^2 + 2t$, $g := t^2 - 1$.
Es gilt:

$$\mathrm{ggT}(t^3 - 3t^2 + 2t, t^2 - 1) \overset{\text{EA}}{=} 3t - 3 \implies [f]_g \notin \left({}^{R}\!/\!_{gR}\right)^* .$$

Es wurde nur gezeigt, dass $3t - 3$ ein ggT ist, nicht, dass 1 kein ggT ist. -1 P.
Den euklidischen Algorithmus so anwenden, dass ich ihn nachlesen kann.
Punkte Teil a): 1/2

(b) Fehlt.

1/7 P

Aufgabe 6.3

(a) Zu zeigen: $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{3\mathbb{Z}}$, $(a, b) \mapsto b + 3\mathbb{Z}$ Ringepimorphismus.

(1) Zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi(a+b) =& \psi((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \\ =& a_2 + b_2 + 3\mathbb{Z} \\ =& a_2 + b_2 + 3\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \\ =& a_2 + 3\mathbb{Z} + b_2 + 3\mathbb{Z} \\ =& \psi(a) + \psi(b).\end{aligned}$$

(2) Zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \psi(a \cdot b) = \psi(a) \cdot \psi(b)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi(a \cdot b) =& \psi((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \\ =& \psi((a_1 b_1, a_2 b_2)) \\ =& a_2 b_2 + 3\mathbb{Z} \\ (\ =& a_2 b_2 + a_1 \cdot 3\mathbb{Z} + b_1 \cdot 3\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}) \\ =& (a_2 + 3\mathbb{Z}) \cdot (b_2 + 3\mathbb{Z}) \\ =& \psi((a_1, a_2)) \cdot \psi((b_1, b_2)) \\ =& \psi(a) \cdot \psi(b).\end{aligned}$$

Multiplikation in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist so definiert, dass $(a+n\mathbb{Z}) \cdot (b+n\mathbb{Z}) = a \cdot b + n\mathbb{Z}$ ist. Das ist eine formale Definition. Es werden keine Distributivgesetze auf Multiplikation mit Mengen angewendet. $-0,5$ P

(3) Zu zeigen: $\psi((1,1)) = 1 + 3\mathbb{Z}$.
Es gilt:
$$\psi((1,1)) = 1 + 3\mathbb{Z}.$$

$\implies \psi$ Ringhomomorphismus.

Weiter ist zu zeigen, dass ψ surjektiv ist, d. h. $\forall b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \exists a \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \psi(a) = b$.
Es gilt:
$$\psi((a,b)) = b + 3\mathbb{Z}$$
$$\overset{b\in\mathbb{Z}}{\implies} \psi \text{ surjektiv.}$$

$\implies \psi$ ist Ringepimorphismus.

$\square$

Es ist noch zu zeigen, dass $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal ist. -1 P
Punkte Teil a): $0,5/2$

(b) Fehlt.

$0,5/4$ P

Aufgabe 6.4

Sei K Körper, $R = K[t]$.
Seien $\langle 5\rangle$ und $\langle 7\rangle$ Ideale in R. Seien 1 und 5 aus R.
Nach dem Chinesischen Restsatz existiert ein $b \in R$, dass die simultanen Kongruenzen
$$b \equiv 1 \mod \langle 5\rangle$$
$$b \equiv 5 \mod \langle 7\rangle$$
erfüllt. Die Lösung ist eindeutig modulo $\langle 5\rangle \cdot \langle 7\rangle = \langle 35\rangle$.

In diesem Fall ist $b = 26$ eine Lösung der Kongruenzen, denn es gilt:
$$26 = 1 + 4 \cdot 5 \equiv 1 \mod \langle 5\rangle \quad \text{und} \quad 26 = 5 + 3 \cdot 7 \equiv 5 \mod \langle 7\rangle.$$

Alle Lösungen sind in diesem Fall also $26 + \langle 35\rangle$.
Es sollte nicht der Restsatz anhand eines Beispiels durchgeführt werden, sondern der Restsatz für Polynome formuliert werden.
$0,5/2$ P

Insgesamt $3,5/20$ Punkten.

korrigiert von Tom Engels am 04.06.2020