Vorlesung 4

Bisher haben wir das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ unter der Voraussetzung definiert, dass f auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Regelfunktion ist (daraus folgt, dass f in jedem Punkt definiert ist und dass f beschränkt ist: siehe unten). In vielen Fällen ist es aber wichtig, auch allgemeinere Intevralle und Funktionen zu betrachten, z.B. $b - a = \infty$ und/oder f nur auf (a, b) definiert ist (und daher kann f unbeschränkt sein). Die entsprechende Konstruktion nennt man *uneigentliches Integral.*

In dieser Vorlesung werden wir folgende Abkürzung nutzen: Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$, dann ist eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *auf* (a, b) *lokal integrierbar*, falls f auf jedem endlichen abgeschlossenen Teilinterval von (a, b) Regelfunktion ist. (Dann ist das Integral $\displaystyle\int_c^d f$ für alle $[c, d] \subset (a, b)$ wohldefiniert.)

Definition 47. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (also $-\infty \le a < b \le +\infty$) und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\displaystyle\int_a^b f$ wird durch folgende Regeln definiert:

1. Ist f in a definiert und auf jedem Teilinterval $[a, \beta]$ mit $\beta \in (a, b)$ Regelfunktion ist, sei $\displaystyle\int_a^b f := \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f,$
2. Ist f in b definiert und auf jedem Teilinterval $[\alpha, b]$ mit $\alpha \in (a, b)$ Regelfunktion ist, sei $\displaystyle\int_a^b f := \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f,$
3. Im Allgemeinen: wähle $c \in (a, b)$ und definiere $\displaystyle\int_a^b = \underbrace{\int_a^c f}_{\text{definiert in 2}} + \underbrace{\int_c^b f}_{\text{definiert in 1}}.$

Falls die obigen Grenzwerte existieren und endlich sind, sagt man, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f$ *konvergiert* und das die Funktion f auf (a, b) *integrierbar* ist, sonst heisst das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ divergiert. Wir definieren auch $\displaystyle\int_a^a f := 0$ und $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ für $a > b$. $\square$

Als einfache freiwillige Übung kann man zeigen, dass das Ergebnis von der Wahl vom c im Punkt 3 der Definition unabhängig ist. Die folgende Proposition zeigt, dass das uneigentliche Integral eine Verallgemeinerung des üblichen ("eigentlichen") Integrals ist, daher ist das Benutzen vom selben Zeichen $\displaystyle\int_a^b$ begründet.

Proposition 48. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, dann gilt*

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f = \int_a^b f = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Gleichheit (die zweite beweist man analog). Wir werden zuerst zeigen, dass f beschränkt ist. Sei f_n eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmässig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert. Dann findet man ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\big|f_N(x) - f(x)\big| \le 1$ für alle $x \in [a,b]$. Jede Treppenfunktion ist beschränkt, also existiert ein $C > 0$ mit $|f_N(x)| \le C$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$:

$$\big|f(x)\big| = \big|f(x) - f_N(x) + f_N(x)\big| \le \big|f(x) - f_N(x)\big| + \big|f_N(x)\big| \le 1 + C,$$

also ist f beschränkt. Damit haben wir, zu jedem $\beta \in (a,b)$,

$$\Big|\int_a^b f - \int_a^\beta f\Big| = \Big|\int_\beta^b f\Big| \le \int_\beta^b |f| \le (1+C)(b-\beta) \xrightarrow{\beta \to b^-} 0. \qquad \square$$

Einige Beispiele kann man ganz direkt ausrechnen.

Beispiel 49 (Sehr wichtig, wird später mehrmals verwendet). Wir untersuchen zuerst die Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ mit $s \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist auf jedem Teilintevral $[1,b]$ stetig (also Regelfunktion), daher

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b \to +\infty} F\big|_1^b = F(+\infty) - F(1),$$

wobei F eine beliebeige Stammfunktion von $x \mapsto x^{-s}$ ist.

- Für $s = 1$ kann man $F(x) = \ln x$ wählen, man hat also $F(+\infty) = +\infty$, und das Integral divergiert in diesem Fall.
- Für $s \neq 1$ nimmt man $F(x) = \dfrac{x^{1-s}}{1-s}$, dann gilt $F(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & s < 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases}$

Das Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert also dann und nur dann, wenn $s > 1$.

Analog betrachtet man das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^s}\,dx = F(1) - F(0+)$$

mit derselben Stammfuntion F. In diesem Fall gilt aber $F(0+) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $s < 1$: Das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert also dann und nur dann, wenn $s < 1$.

Man sieht sofort, dass das Integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ für alle $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

Es gibt viele Analogien zwischen uneigentlichen Integralen und Reihen. Man fängt mit dem uneigentlichen Integrieren von nichtnegativen Funktionen an:

Proposition 50. *Sei $f \geq 0$ lokal integrierbar auf (a,b). Das Integral $\int_a^b f$ konvergiert dann und nur dann, wenn*

$$\sup_{[\alpha,\beta]\in(a,b)} \int_\alpha^\beta f < \infty.$$

Beweis. Wähle $c \in (a,b)$ und bezeichne $F(\alpha) = \int_\alpha^c f$ und $G(\beta) := \int_c^\beta f$. Die Funktion F ist auf (a,b) fallend: für $\alpha \leq \alpha'$ gilt

$$F(\alpha) = F(\alpha') + \int_\alpha^{\alpha'} f \geq F(\alpha'),$$

und die Existenz des Grenzwerts $\lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha)$ ist äquivalent zu $\sup_{\alpha\in(a,b)} F(\alpha) < \infty$. Analog zeigt man, dass G auf (a,b) steigend ist, also existiert $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)$ genau dann, wenn $\sup_{\beta\in(a,b)} G(\beta) < \infty$. Die Existenz der beiden Grenzwerten ist also äquivalent zu $\sup_{\alpha,\beta\in(a,b)} \big(F(\alpha)+G(\beta)\big) < \infty$, was man als

$$\sup_{\alpha,\beta\in(a,b)} \int_a^b f < \infty$$

umschreiben kann. Wegen $\int_a^b f \leq 0$ für $a > b$ kann man $\sup_{\alpha,\beta\in(a,b)}$ durch $\sup_{[\alpha,\beta]\in(a,b)}$ ersetzen. □

In der Praxis kann man das folgende Kriterium nutzen, das man mit denselben Ideen beweisen kann:

Proposition 51. *Seien $\alpha_n \in (a,b)$ eine gegen a konvergierende Folge und $(\beta_n) \subset (a,b)$ eine gegen b konvergierende Folge. Sei $f \geq 0$, dann ist $\int_a^b f$ genau dann konvergent, wenn* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f < \infty$.

Auch für Integrale gibt es das Majoratenkriterium für die Konvergenz:

Satz 52 (Majoratenkriterium für uneigentliche Integrale). *Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und f, g auf (a,b) lokal integrierbare Funktionen mit $g \geq 0$.*

1. *Falls $\big|f(x)\big| \leq g(x)$ für alle $x \in (a,b)$ gilt und $\int_a^b g$ konvergiert, dann konvergiert auch $\int_a^b f$, dabei gilt $\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b g$. In diesem Fall sagt man, dass g* integrierbare Majorante *ist.*

2. Falls $f(x) \geq g(x)$ *für alle* $x \in (a,b)$ *gilt und* $\displaystyle\int_a^b g$ *divergiert, dann divergiert auch* $\displaystyle\int_a^b f$*. In diesem Fall sagt man, dass* g nichtintegrierbare Minorante *ist.*

Insbesondere gilt: falls $\displaystyle\int_a^b |f|$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\displaystyle\int_a^b f$*. In diesem Fall heisst das Integral* absolut konvergent *und die Funktion* f *auf* (a,b) absolut integrierbar*.*

Beweis. (1) Wir betrachten nur den Fall, dass f und g auf $[a,\beta)$ für alle $\beta \in (a,b)$ Regelfunktionen sind (die anderen Fälle beweist man analog). Für $\beta \in (a,b)$ definiere

$$I(\beta) = \int_a^\beta f, \quad J(\beta) = \int_a^\beta g$$

und sei $(\beta_n) \subset (a,b)$ eine Folge, die gegen b konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|J(\beta_m) - J(\beta_n)\big| \equiv \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} g\Big| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$. Dann gilt auch

$$\big|I(\beta_m) - I(\beta_n)\big| = \Big|\int_a^{\beta_m} f - \int_a^{\beta_n} f\Big| = \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} f\Big| \leq \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} |f|\Big| \leq \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} g\Big| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass $I(\beta_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, dadurch konvergiert sie. Wir müssen aber noch zeigen, dass der Grenzwert von der Wahl der Folge (β_n) unabhängig ist. Sei also $(\beta'_n) \subset (a,b)$ eine weitere Folge, die gegen b konvergiert. Wir haben $\lim_n J(\beta_n) = \lim_n J(\beta'_n) = \displaystyle\int_a^b g$, also $\lim_n \big|J(\beta_n) - J(\beta'_n)\big| = \lim_n \Big|\displaystyle\int_{\beta'_n}^{\beta_n} g\Big| = 0$. Aus der Abschätzung

$$\big|I(\beta_n) - I(\beta'_n)\big| = \Big|\int_{\beta'_n}^{\beta_n} f\Big| \leq \Big|\int_{\beta'_n}^{\beta_n} |f|\Big| \leq \Big|\int_{\beta'_n}^{\beta_n} g\Big|$$

folgt, dass $\lim_n \big|I(\beta_n) - I(\beta'_n)\big| = 0$, d.h. $\lim_n I(\beta_n) = \lim_n I(\beta'_n)$, und

$$\Big|\int_a^b f\Big| = \Big|\Big|\lim_n \int_a^{\beta_n} f\Big| \leq \lim_n \int_a^{\beta_n} |f| \leq \lim_n \int_a^{\beta_n} g.$$

(2) Wir haben $f \geq g \geq 0$. Nehme an, dass das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ konvergiert, dann hat man (Proposition 50) $\sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \displaystyle\int_\alpha^\beta f < +\infty$, und dann auch $\sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \displaystyle\int_\alpha^\beta g < +\infty$, was der Divergenz von $\displaystyle\int_a^b g$ widerspricht. $\square$

Beispiel 53. Wir werden zeigen, dass das *Dirichlet-Integral* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert, aber nicht absolut. Im Punkt 0 gibt es keine Schwierigkeiten (die Funktion lässt sich stetig in 0 fortsetzen), wir müssen uns also nur um $\lim_{\beta\to+\infty} \int_a^\beta$ mit beliebigem $a \geq 0$ kümmern.

Wir beweisen zuerst, dass das Integral nicht absolut konvergent ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \left|\frac{\sin x}{\pi k}\right| dx \\
&\overset{x=\pi(k-1)+y}{=} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left|\frac{\sin\big(\pi(k-1)+y\big)}{\pi k}\right| dy \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left|\frac{\sin y}{\pi k}\right| dy = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe $\sum_n 1/n$ divergiert, gilt

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty,$$

also ist das Integral divergent.

Jetzt zeigen wir, dass das Integral (nicht absolut) konvergent ist. Das Majorantenkriteriul hilft leider nicht: man kann zwar $|\sin x/x| \leq 1/x$ abschätzen, aber die Majorante $1/x$ ist nicht integrierbar. Wir können aber partiell integrieren:

$$\int_1^R \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \underbrace{\frac{\cos R}{R}}_{\to 0 \text{ für } R\to+\infty} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Die Konvergenz des Dirichlet-Integrals ist damit auf die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ reduziert. Dieses neue Integral kann man mit dem Majorantenkriterium untersuchen: $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ ist auf $[1,+\infty)$ integrierbar. Also ist das Dirichlet-Integral konvergent.

Die vorherigen Aussagen kann man kombinieren, um nutzliche Konvergenzekriterien herzuleiten:

Proposition 54. *Sei $a > 0$.*

1. *Sei f auf $(0,a)$ lokal integrierbare Funktion.*

   (a) *Falls es $M > 0$ und $s < 1$ existieren mit $|f(x)| \leq M/x^s$ für alle $x \in (0,a)$, dann konvergiert $\int_0^a f$ absolut.*

(b) *Falls es* $M > 0$ *und* $s \geq 1$ *existieren mit* $f(x) > M/x^s$ *für alle* $x \in (0, a)$, *dann divergiert* $\int_0^a f$.

2. *Sei* f *auf* $(a, +\infty)$ *lokal integrierbare Funktion.*

   (a) *Falls es* $M > 0$ *und* $s > 1$ *existieren mit* $|f(x)| \leq M/x^s$ *für alle* $x \in (a, +\infty)$, *dann konvergiert* $\int_a^{+\infty} f$ *absolut.*

   (b) *Falls es* $M > 0$ *und* $s < 1$ *existieren mit* $f(x) > M/x^s$ *für alle* $x \in (a, +\infty)$, *dann divergiert* $\int_a^{+\infty} f$.

Beweis. (1a) Das Integral $\int_0^a M/x^s\,dx = M\int_0^1 1/x^s\,dx + M\int_1^a 1/x^s\,dx$ konvergiert für $s < 1$ (Bespiel 49), also folgt die Konvergenz von $\int_0^a |f|$ mit Hilfe des Majorantenkriteriums. (1b) Für $s \geq 1$ ist das Integral $\int_0^a M/x^s\,dx = M\int_0^1 1/x^s\,dx + M\int_1^a 1/x^s\,dx$ divergent (Bespiel 49), also folgt die Divergenz von $\int_0^a f$ aus dem Majorantenkriterium. Die Aussagen (2a) und (2b) beweist man analog. □

Beispiel 55. Die Analogie zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen hat aber auch gewisse Grenzen. Zum Beispiel, wissen wir, dass für konvergente Reihe $\sum_n a_n$ immer $\lim_n a_n = 0$ gilt. Aus der Konvergenz von $\int_a^b f$ kann man aber nicht schliessen, dass $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0$ (bzw. ob die Grenzwerte überhaupt existieren): zum Beispiel liefert die Funktion $x \mapsto x^{-1/2}$ auf $(0, 1)$ ein Gegenbeispiel für beschränkte Intevralle (a, b). Auch für unbeschränkte (a, b) kann man ein ähnliches Beispiel konstruieren. Betrachte z.B. $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[n, n + \dfrac{1}{n^3}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, dann ist f auf $[2, N]$ Regelfunktion (sogar Treppenfunktion), und

$$\int_2^N f = \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} f = \sum_{n=1}^{N-1} \Big(\int_n^{n+1/n^3} \underbrace{f(x)}_{=n}\,dx + \int_{n+1/n^3}^{n+1} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx \Big)$$
$$= \sum_{n=2}^{N-1} n \cdot \frac{1}{n^3} = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n^2}.$$

Wir wissen, dass die Reihe $\sum_n 1/n^2$ konvergeirt, daher gilt $\sup_{N\geq 2} \displaystyle\int_2^N f < \infty$, und das Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ ist konvergent. Dabei ist f im Unendlichen unbeschränkt: zu jedem $C > 0$ und jedem $N > 0$ gibt es ein $x > N$ mit $f(x) > C$. □

Im vorherigen Beispiel haben wir die Konvergenz eines Integrals mit Hilfe der Konvergenz einer Reiehe bewiesen. Man kann auch die Konvergenz von Reihen mit Hilfe von Integralen untersuchen, und das ist eine sehr wichtige Beweismethode:

Satz 56 (Integralkriterium für Reihen). *Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, nichtnegativ, Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[1, R]$, $R > 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}$ genau dann, wenn das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f$ konvergiert.*

Beweis. Für $x \in [n, n + 1]$ gilt $f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$, also

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Ist das Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f$ konvergent, so gilt zu jedem $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f = \int_1^{N+1} f \leq \int_1^{\infty} f < \infty,$$

also ist $\sum_{n=1}^{\infty} f(n + 1) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ konvergent.

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent, so gilt zu jedem $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^N f = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty,$$

also ist auch das Integral konvergent. □

Mit ähnlichen Konstruktionen kann man auch den folgenden Satz beweisen (Übung):

Satz 57. *Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, nichtnegativ, Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[1, R]$, $R > 0$, dann konvergiert die Folge*

$$a_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

(Dabei können die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ und das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f$ divergieren.)

Beispiel 58. Sei $s > 1$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ konvergiert genau dann, wenn das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^x}$ konvergiert, d.h. genau dann, wenn $s > 1$ (Beispiel 49).

Die Funktion $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ heisst *Riemannsche Zetafunktion.* Die kann man auf eine bestimmte kanonische Weise auch für bestimmte komplese s definieren, und die (komplexen) Nullstellen dieser Funktion sind von grosser Bedeutung in vielen Bereichen der Mathematik, und sie sind das Thema der berühmten Riemannschen Vermutung.[4]

Mit Hilfe des Satzen 57 sieht man auch, dass die Folge

$$b_n = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

konvergiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n \to +\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{1}{n} - b_n \Big),$$

den man als *Euler-Mascheroni-Konstante* bezeichnet: das ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten. Man hat $\gamma \simeq 0,577\ldots$.

Das da uneigentliche Integral als Grenzwzert von "eigentlichen" Integral definert wird, kann man die meisten Berechnungsmethoden auf den uneigentlichen Fall übertragen. Wir werden nur die entsprechnden Formulierungen angeben, da die Beweise aus den entsprechnden Formeln für bestimmte Integrale und Grenzübergängen folgen:

Proposition 59 (Partielle Integration für uneigentliche Integrale). *Seien f, g auf (a, b) stetig differenzierbar. Nehme an, dass die beiden Grenzwerte $(fg)(a+)$ und $(fg)(b-)$ existieren. Dann konvergiert $\displaystyle\int_a^b f'g$ genau dann, wenn $\displaystyle\int_a^b fg'$ konvergiert, und im Falle der Konvergenz hat man*

$$\int_a^b f'g = (fg)(b-) - (fg)(a+) - \int_a^b fg'.$$

Die Differenz $(fg)(b-) - (fg)(a+)$ bezeichnet man oft immer noch als $fg|_a^b$.

[4] Die Riemannsche-Vermutung ist ein der ältesten ungelösten Probleme der Mathemaik, und sie gehört zu den sieben Millenium-Problemen der Mathematik, die vom Clay-Institut (USA) im Jahr 2000 formuliert wurden. Für die Lösung jedes Millenium-Problems gibt es ein Preisgeld von einer Million US-Dollar. Bisher wurde nur ein Millenium-Problem gelöst: Im Jahr 2002 hat Grigori Perelman die Poincaré-Vermutung bewiesen (das Preisgeld und weitere Ehrungen hat er aber abgelehnt).

Proposition 60 (Substitution für uneigentliche Integrale). *Seien g auf (a,b) stetig differenzierbar und* streng monoton *und f auf $g\big((a,b)\big)$ lokal integrierbar, dann gilt*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a+)}^{g(b-)} f\,dx.$$

(D.h. beide Integrale konvergieren oder divergieren gleichzeitig. Falls sie konvergieren, haben sie denselben numerischen Wert.)

In Proposition 60, garantiert die Monotonie von g, dass das Bild $g\big((a,b)\big)$ auch ein offenes Intervall ist.

Beispiel 61. Das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx$ konvergiert: mit Hilfe der Substitution $x = \ln t$ hat man die Gleichheit

$$\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

und das Integral auf der rechten Seite ist konvergent (schon gesehen im Beispiel 53).

Beispiel 62. Es gilt $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\,dx$. Für den Beweis nutzen wir zuerst die Substitution $x = 2y$ und danach die partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{\sin(2y)}{2y}\,2dy = \int_0^\infty \frac{2\sin(y)\cos(y)}{y}\,dy\\ &= \int_0^\infty \frac{(\sin^2 y)'}{y}\,dy = \underbrace{\frac{\sin^2 y}{y}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \Big(\frac{\sin y}{y}\Big)^2\,dy.\end{aligned}$$