Lösungen zum zweiten Test zur Selbstkontrolle „Analysis I“

Wie immer gibt es meistens mehrere Möglichkeiten, eine Aufgabe zu lösen. Wenn Sie unsicher sind, ob ihre Lösung richtig ist, fragen Sie bitte Ihren Tutor.

Aufgabe 1.

a) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

i) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$

ii) $a_n = \frac{3n^2+n}{\ln(3^{n^2})}$

Lösung:

i) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3})^2-(\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = 0\end{aligned}$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{\ln(3^{n^2})} \overset{\text{Eigenschaften von}\ln}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{n^2\ln 3} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\ln 3}+\frac{1}{n\ln 3}\right) = \frac{3}{\ln 3}+0 = \frac{3}{\ln 3}\end{aligned}$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{\ln 3}$.

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere und es gelte $|a_n| \le b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Hat eine monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Teilfolge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Lösung:

i) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$, $b_n = 1$. Offensichtlich ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $|a_n| = 1 \le 1 = b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, aber die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

ii) Die Aussage ist wahr. Wir beweisen zuerst die Aussage für monoton wachsende Folgen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge. Nach der Voraussetzung besitzt

sie eine beschränkte Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es gibt eine Konstante M, so dass $|a_{n_k}| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_K > n$. Wegen der Monotonie gilt dann $a_1 \leq a_n \leq a_{n_K} \leq M$. Damit ist $a_1 \leq a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so ist $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und man kann auf sie das oben Bewiesene anwenden.

Aufgabe 2.

a) Formulieren Sie das Leibniz-Kriterium. Geben Sie ein Beispiel für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe.

Lösung:
Leibniz-Kriterium Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ divergiert.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n^n)}{n^4}$ auf Konvergenz.

Lösung: Wir formen zunächst die Reihenglieder um: $a_n = \frac{\log(n^n)}{n^4} = \frac{n\log(n)}{n^4} = \frac{\log(n)}{n^3}$. Da der Logarithmus $\log n$ langsamer als n wächst, können wir a_n durch $1/n^2$ abschätzen und dann das Majorantenkriterium anwenden. Es gilt: $|a_n| = \frac{\log(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei folgt die Abschätzung $\log n \leq n$ aus der Ungleichung $n < e^n$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ wegen $2 > 1$ konvergiert, konvergiert die ursprüngliche Reihe nach dem Majorantenkriteium.

Aufgabe 3.

a) Geben Sie die Definition der Stetigkeit einer Funktion f im Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs an:

- mittels Folgen
- ε-δ-Definition

Lösung: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.
Folgenstetigkeit: f heißt *stetig in* x_0, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

$$\text{(Andere Schreibweise: } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0))$$

ε-δ-Definition:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

b) Entscheiden Sie, ob es Zahlen a und b gibt, so dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

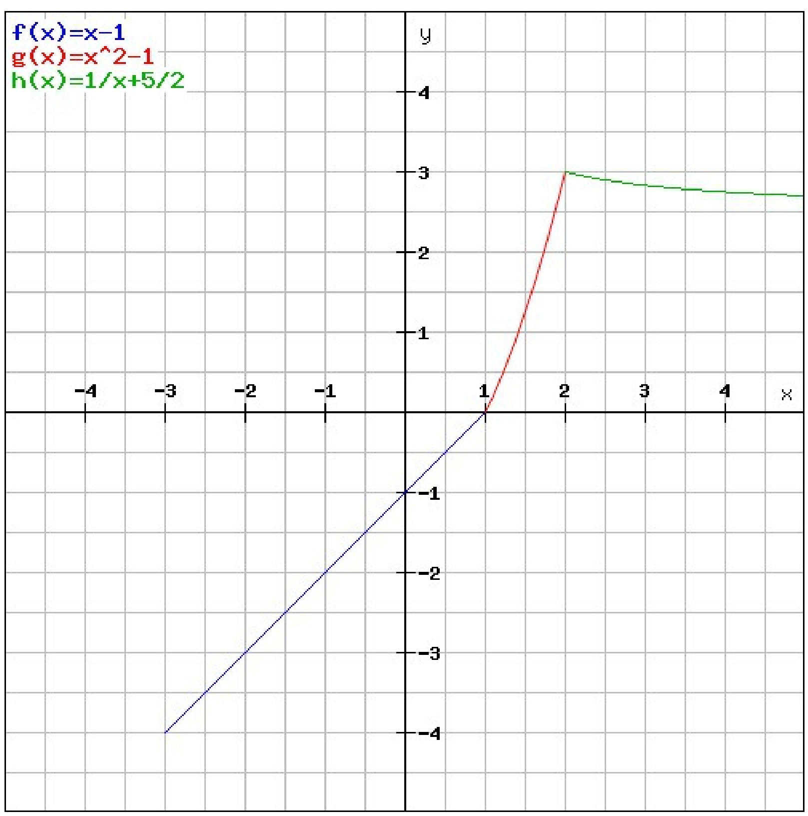
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x \le 1, \\ x^2+ax+b, & \text{falls } 1 < x < 2, \\ \frac{1}{x}+\frac{5}{2}, & \text{falls } x \ge 2, \end{cases}$$

stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung: Die Funktion f ist stetig auf $(-\infty, 1)\cup(1,2)$ als Polynom und auf $(2, +\infty)$, weil Konstanten und $x \mapsto x$ stetig sind, die Summe stetiger Funktionen stetig ist und der Quotient stetiger Funktion stetig ist, wenn der Nenner nicht verschwindet ($x \neq 0$ auf $(2, +\infty)$).
Ferner ist f genau dann in 1 stetig, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte von f für $x \to 1-$ und für $x \to 1+$ existieren, übereinstimmen und gleich $f(1) = 0$ sind.
$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (x-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} (x^2+ax+b) = 1+a+b$.
Für die Stetigkeit in 1 muss also $1+a+b=0$ erfüllt sein.
Analog ist f genau dann in 2 stetig, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte von f für $x \to 2-$ und für $x \to 2+$ existieren, übereinstimmen und gleich $f(2) = 3$ sind.
$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} (x^2+ax+b) = 4+2a+b$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \frac{1}{x}+\frac{5}{2} = 3$.
Für die Stetigkeit in 2 muss also $4+2a+b=3$ erfüllt sein.
Es ist leicht zu sehen, dass das System

$$\begin{cases} 1+a+b=0, \\ 4+2a+b=3, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $a=0, b=-1$ hat.
Wenn wir also $a=0, b=-1$ setzen, ist f in 1 und 2 und somit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.



c) Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

   i) Jede stetige beschränkte Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Supremum an.

   ii) Nimmt eine stetige Funktion die Werte 1 und 3 an, so nimmt sie auch den Wert 2 an.

Lösung:
i) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ist stetig und beschränkt, nimmt aber ihr Supremum 1 nicht an.
ii) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$f\colon [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 3, & \text{falls } x \in [2,3]. \end{cases}$$

f ist offensichtlich stetig, nimmt die Werte 1 und 3, aber nicht den Wert 2 an.
Bemerkung: Auf den ersten Blick scheint es, dass die Aussage nach dem ZWS wahr ist. In der Aufgabe steht aber nirgendwo, dass der Definitionsbereich von f ein Intervall ist. Das ist genau die Idee des oberen Gegenbeispiels!

d) Definieren Sie $3^{\sqrt{2}}$.

Lösung: $3^{\sqrt{2}} := e^{\sqrt{2}\ln 3} = \exp(\sqrt{2}\ln 3)$, wobei $\exp x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.