Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Alexey Chernov
M.Sc. Nick Wulbusch
Wintersemester 2017/2018

Klausur zur Vorlesung “Einführung in die Numerik”
Montag, 05.02.2018, 10:00 Uhr

- **6 KP**: nur **Aufgaben 1.a-d** und **2–4**, 120 Minuten, bestanden ab **32 Punkten**
- **9 KP**: **alle Aufgaben**, 180 Minuten, bestanden ab **48 Punkten**
- Die erreichten **Bonuspunkte** aus der Übung werden **bei Bestehen der Klausur** zur Bestimmung der Note **addiert**.
- Erlaubte **Hilfsmittel** sind **2 handbeschriebene DIN A4-Blätter**.
- Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten!

Name:	
Vorname:	
(bitte ankreuzen)	6 KP ◯ 9 KP ◯
Matrikelnummer:	
Unterschrift:	

Aufgabe	1.a-d	1.e	2	3	4	5	6	Summe	Bonus	Note
max. Punkte	24	7	15	24	27	18	20	90/135	9/13	
err. Punkte										

Aufgabe 1.(a)–(d): (3+7+7+7=24 Punkte)

Die Aufgabe

$$\boxed{\text{„Für ein vorgegebenes } a > 0 \text{ finde } x = \frac{1}{\sqrt{a}}\text{“}} \tag{1}$$

soll näherungsweise mittels arithmetischer Operationen “$+, -, \cdot, /$” gelöst werden.

(a) Formulieren Sie die Aufgabe (1) als eine nichtlineare Gleichung der Form $f(x) = 0$ ohne Wurzelausdrücke.

(b) Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichung aus (a) auf. Lässt sich das Newton-Verfahren als die Fixpunktiteration

$$x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)}), \quad \text{wobei} \quad \Phi(x) = \frac{x}{2} \cdot (3 - ax^2) \tag{2}$$

interpretieren?

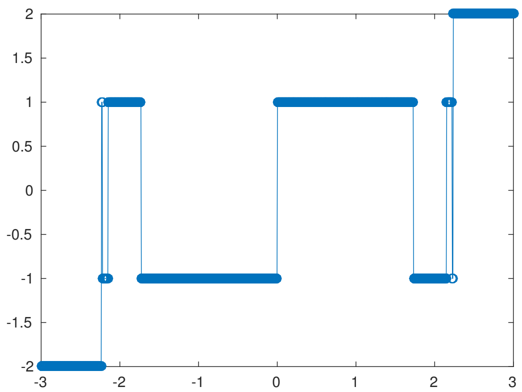
(c) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von Φ sowie die lokale Konvergenzordnungen zu jedem der Fixpunkte.

(d) Betrachten Sie das untenstehende Matlab-Programm und erklären Sie in 2-3 Sätzen, was das Programm macht. Das Bild unten rechts ist die Ausgabe des Programms. Erklären Sie das Bild.

```
Phi = @(x,a) x/2.*(3-a*x.^2);
x0 = linspace(-3,3,1000);
x = x0;

for k=1:100
    x = Phi(x,1);
end

plot(x0,max(min(x,2),-2),'o-');
```



Aufgabe 1.(e): (7 Punkte, nur 9KP-ler)

(e) Beweisen Sie, dass die Fixpunktiteration (2) gegen $x_* = \frac{1}{\sqrt{a}}$ für alle $x^{(0)} \in (0, \frac{3}{2\sqrt{a}})$ konvergiert[1].

[1] Die Identität $t^3 - 3t + 2 = (t+2)(t-1)^2$ könnte dabei behilflich sein.

Aufgabe 2: (7+8=15 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist die Cholesky-Zerlegung für die Matrix A durchführbar? Begründen Sie Ihre Antwort ohne die Cholesky-Zerlegung zu berechnen.

(b) Wenn die Cholesky-Zerlegung für die Matrix A durchführbar ist, berechnen Sie diese, wenn nicht, berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A.

Aufgabe 3: (3+8+6+7=24 Punkte)

Die Werte $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ sind durchs Abtasten eines periodischen Signals

$$f(x) = x \cdot (L - x)$$

mit der Periode $L = 2\pi$ an den $N = 4$ Stellen $x_\ell = \frac{\pi}{2}\ell$ mit $\ell = 0, \ldots, N-1$ erhalten worden.

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle

ℓ	0	1	2	3
x_ℓ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
f_ℓ				

(b) Bestimmen Sie zu $\mathbf{f}$ den Vektor $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$ der diskreten Fourier-Transformation.

(c) Bestimmen Sie mithilfe von (b) das zugehörige reelle trigonometrische Interpolationspolynom $T_N(x)$.

(d) Skizzieren Sie $f(x)$ und $T_N(x)$ für $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten von $f(x)$ und $T_N(x)$ in der Umgebung von $x = 0$.

Aufgabe 4: (3+8+8+8=27 Punkte)

Betrachtet wird die Approximation des Integrals

$$\int_0^1 f(x)dx$$

durch Drei-Punkte-Quadraturregeln der Art

$$Q(f) := w_0 f(0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(1) \tag{3}$$

mit den Stützstellen $(0, x_1, 1)$ und den zugehörigen Gewichten (w_0, w_1, w_2).

(a) Definieren Sie den Begriff „Genauigkeitsgrad einer Quadraturregel".

(b) Bestimmen Sie den höchstmöglichen Genauigkeitsgrad, den die Quadraturregel (3) haben kann, und geben Sie die entsprechende Stützstelle x_1 und die Gewichte (w_0, w_1, w_2) an.

(c) Finden Sie mindestens eine Quadraturregel der Art (3) mit positiven Gewichten, die den Genauigkeitsgrad $r = 2$ (und nicht höher) hat. Geben Sie die Stützstellen und die Gewichte dieser Quadraturregel explizit an.

(d) Gibt es Zwei-Punkte-Quadraturregeln, die den Genauigkeitsgrad $r = 2$ (und nicht höher) haben? Wenn nein, erklären Sie warum. Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 5: (6+6+6=18 Punkte, nur 9KP-ler)

Zu den Messdaten

$$(t_i, y_i), \qquad i = 1, \dots, m \tag{4}$$

wird ein funktionaler Zusammenhang der Form $y(t) = a + b \cdot t$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ vermutet.

(a) Formulieren Sie die Fehlerquadratmethode (das lineare Ausgleichsproblem) zur Bestimmung von a und b für die Messdaten in allgemeiner Form (4). Geben Sie die entsprechende Matrix A explizit an.

(b) Stellen Sie die Normalgleichung zur Bestimmung von a und b auf. Vereinfachen Sie die Normalgleichung für die Messdaten in allgemeiner Form (4) soweit möglich.

(c) Betrachten Sie nun die Messdaten

t_i	-2	-1	1	2
y_i	-1	0	1	1

und lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem ohne QR-Zerlegung zu verwenden.

Aufgabe 6: (8+8+4=20 Punkte, nur 9KP-ler)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Formulieren Sie das QR-Verfahren zur Approximation der Eigenwerte der Matrix A und schreiben Sie es als einen Pseudocode nieder. Erklären Sie, welche Größe gegen die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A konvergiert, und wo sich die Startnäherungen $\lambda_1^{(0)}$ und $\lambda_2^{(0)}$ an die Eigenwerte λ_1 und λ_2 aus der Matrix A ablesen lassen.

(b) Führen Sie einen Schritt der QR-Iteration durch und berechnen Sie die ersten Näherungen $\lambda_1^{(1)}$ und $\lambda_2^{(1)}$ an die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A .

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A und die relativen Fehler

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}|}{|\lambda_1|} \quad \text{und} \quad \frac{|\lambda_2 - \lambda_2^{(k)}|}{|\lambda_2|} \quad \text{für} \quad k = 0, 1.$$

Für welchen der beiden Eigenwerte konvergiert der relative Fehler schneller zu Null?