CvO Universität Oldenburg S2012
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Hannes Uecker

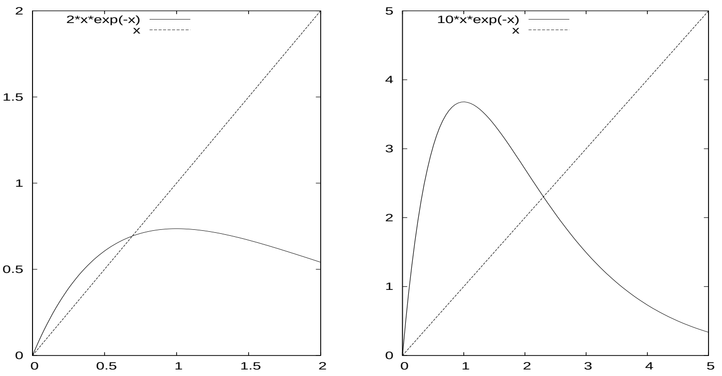
Klausur "Mathematische Modellierung", 26.7.2012

- **Bearbeitungszeit:** 110 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** eigene Notizen im Umfang von maximal 10 Seiten (=5 beidseitig beschriebene Blätter) **keine elektronischen Hilfsmittel** wie Mobiltelephone oder Taschenrechner.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 12 Punkte. Betrachte die 1D Iteration $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$ mit $f_\mu(x) = \mu x\mathrm{e}^{-x}$ für $x \geq 0$ mit Parameter $\mu > 0$.
a) In Abhängigkeit von μ bestimme man alle Fixpunkte. Insbesondere bestimme man μ_0, sodaß für $\mu < \mu_0$ genau ein Fixpunkt und für $\mu > \mu_0$ genau zwei Fixpunkte vorliegen.
b) Man bestimme die Stabilität aller Fixpunkte.
c) Man skizziere f_μ für $\mu = 2$ und für $\mu = 10$, und für beide μ und $x_0 = 1$ bestimme man das Verhalten von x_n für $n \to \infty$ mittels graphischer Iteration (cobwebbing).

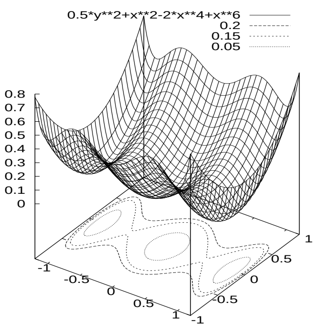
Hinweis. $\ln 10 > \ln(3^2) > \ln(\mathrm{e}^2) = 2$ (offensichtlich, aber vielleicht hilfreich).
Lösung zu 1 $f_\mu(x) = x \Leftrightarrow x(1-\mu\mathrm{e}^{-x}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = x_\mu = \ln(\mu)$ (für $\mu > 1$). $f_\mu'(x) = \mu(1-x)\mathrm{e}^{-x}$, also $x = 0$ stabil (instabil) für $0 < \mu < 1$ $(1 < \mu)$. Klar: $f_\mu'(x_\mu) = 1 - \ln\mu < 1$ für $\mu > 1$, und $f_\mu'(x_\mu) < -1$ für $\ln\mu > 2 \Leftrightarrow \mu > \mathrm{e}^2$.

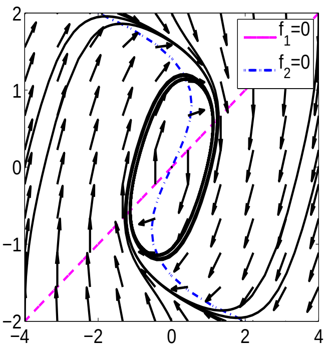


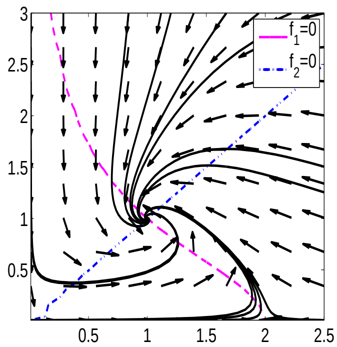
Aufgabe 2 8 Punkte. Man zeichne das Phasenporträt von

$$\ddot{x} = F'(x) \quad \text{mit} \quad F(x) = -x^2 + 2x^4 - x^6,$$

inklusive aller homo–bzw. heteroklinen Orbits und kennzeichne diese geeignet.
Hinweis: Man beginne mit einer 1D Skizze von $-F(x)$.
Lösung zu 2 Energie $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - F$, Phasenporträt ganz links.







Aufgabe 3 8 Punkte Für das System $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x + 2y - y^3$ bestimme man die Fixpunkte und deren Stabilität, und skizziere das Phasenporträt inklusive Nullklinen und einiger Direktorpfeile.
Bonus, 5 Punkte. Man zeige die Existenz eines periodischen Orbits.
Hinweis: Betrachte das Vektorfeld auf ∂R mit $R = [-2l, 2l] \times [-l, l]$ mit l hinreichend groß und verwende Poincaré-Bendixon.
Lösung zu 3 Nullklinen: $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2y$, $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow x = y - \frac{1}{2}y^3$, einziger Schnitt–und also Fixpunkt $(x, y) = (0, 0)$. $J_f((x, y)) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 - 3y^2 \end{pmatrix}$, $J_f((0, 0)) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{7}$, also instabiler Strudel. Phasenporträt oben Mitte.
Zu periodischen Orbits: Auf $x = 2l$ gilt $\dot{x} \le 0$ und $\dot{x} < 0$ für $|y| \le l$, und auf $y = l$ gilt $\dot{y} \le 6l - l^3 < 0$ für l hinreichend groß. Restliches ∂R durch Symmetrie. Existenz eines per. Orbits, da Ursprung einziger FP und instabil.

Aufgabe 4 12 Punkte. Gegeben ist das 2–Spezies–System

$$\dot{u} = u\left(\frac{2}{1+v^2} - u\right), \quad \dot{v} = v\,(u - v)\,, \qquad u, v > 0.$$

Man bestimme alle Fixpunkte (mit $u, v > 0$) und ihre Stabilität und skizziere das Phasenporträt (inklusive Nullklinen). Um welchen Kolmogorov Typ (PP), (C) oder (S) handelt es sich?
Lösung zu 4 (PP). Nullklinen $\dot{u} = 0 \Leftrightarrow u = \frac{2}{1+v^2}$, $\dot{v} = 0 \Leftrightarrow v = u$. Fixpunkt $(u, v)^* = (1, 1)$. $J_f(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+v^2} - 2u & \frac{-4uv}{(1+v^2)^2} \\ v & u - 2v \end{pmatrix}$, $J_f((1, 1)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, Eigenwerte $\lambda_\pm = -1 \pm \mathrm{i}$, stabiler Strudel. Phasenporträt oben rechts.