Abschlussklausur Modul Mathematisches Problemlösen und Beweisen

Prof. Dr. Andreas Stein

09:00 bis 11:00 Uhr, 21. Februar 2014

Die erlaubte Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**. Zusätzlich erhalten Sie **20 Minuten** Zeit, um die Klausur zu lesen und das Deckblatt **leserlich und in Druckbuchstaben** auszufüllen und zu unterschreiben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.

Hilfsmittel sind keine erlaubt. Insbesondere werden Taschenrechner nicht zugelassen. Jegliche Hilfe während der Klausur ist verboten. Da es Teilpunkte geben wird, ist es in Ihrem Interesse, **detaillierte Begründungen** anzugeben und **alle Beweisschritte** schlüssig aufzuschreiben.

Bitte beantworten Sie alle Fragen in den zur Verfügung gestellten Freiräumen. Sollten Sie mehr Platz benötigen, können Sie auch die Rückseiten verwenden oder **auf Seite 12 fortfahren**.

Die Klausur geht zu **100 %** in die Modulnote ein. Sie können bis zu **20 %** Bonusübungspunkte einbringen. Um die Klausur und damit das Modul zu bestehen, benötigen Sie insgesamt **50 Punkte**.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ____________________ Matr.-Nr: ____________

Studiengang: ____________ Fach/Fächer: ____________________

Zur Kenntnis genommen: ____________

(Unterschrift)

1	
2	
3	
4	
5	
6*	
Summe	

 Name, Vorname:

1. Aufgabe (15 Punkte)

a. (5 Punkte) Erklären Sie die Beweismethoden „Direkter Beweis" und „Widerspruchsbeweis". Geben Sie das logische Fundament beider Methoden an und zeigen Sie die Äquivalenz dieser Beweismethoden anhand einer Tautologie.

---

b. (10 Punkte) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $4^n + 15n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist. Folgen Sie präzise dem formalen Beweiskonzept.

---

2. Aufgabe (20 Punkte)

a. (15 Punkte) Finden Sie alle durch 13 teilbaren ganzen Zahlen, die kongruent zu 2 modulo 3 und kongruent zu 3 modulo 5 sind. Finden Sie unter diesen die kleinste Zahl größer als 999.

---

b. (5 Punkte) Bestimmen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist. Wenn sie falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Wenn sie wahr ist, begründen Sie Ihre Entscheidung: Seien m_1, m_2 verschiedene natürliche Zahlen. Dann hat das folgende System linearer Kongruenzen in der Variablen X

$$X \equiv 1 \pmod{m_1} \quad , \quad X \equiv 2 \pmod{m_2} \; .$$

mindestens eine ganzzahlige Lösung im Intervall $[0, m_1]$.

---

3. Aufgabe (25 Punkte)

a. (15 Punkte) An einem Seminar im Wintersemester 2013/2014 an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg nahmen 20 Studierende teil. Es gab insgesamt n Vorträge von jeweils fünf Studierenden. Nach dem letzten Vortrag stellten die Studierenden fest, dass je drei Studierende genau einmal einen Vortrag gemeinsam gehalten haben. Bestimmen Sie, wie viele Vorträge es insgesamt gegeben hat, d.h. welchen Wert n besitzt?

Hinweis: Zählen Sie die Gesamtanzahl von je drei Studierenden, die in allen Vorträgen gemeinsam einen Vortrag gehalten haben.

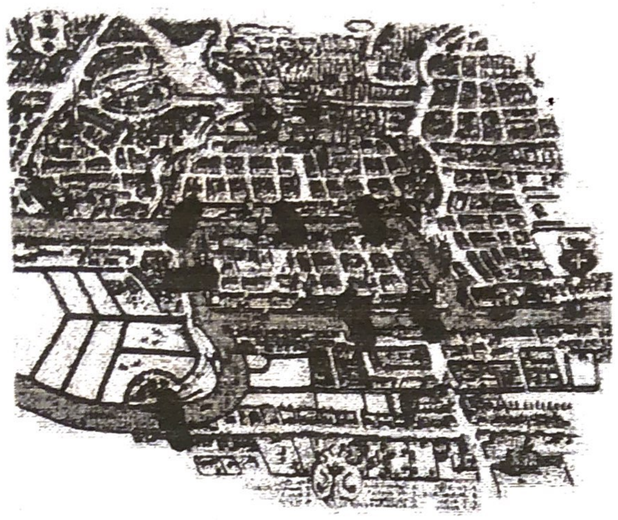
---

b. (10 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Beweisen Sie mit der **Counting two ways**-Methode, dass $n^3 = 6 \cdot \binom{n}{3} + 6 \cdot \binom{n}{2} + n$, indem Sie die Menge aller geordneten Tripel mit Elementen aus $\{1, \ldots, n\}$ auf zwei Arten und Weisen zählen.

Hinweis: Betrachten Sie die Positionierung abhängig von der Anzahl verschiedener Elemente.

4. Aufgabe (20 Punkte)

a. (12 Punkte) Gegeben sei der folgende Stadtplan einer bekannten Stadt, in dem die Stadtteile, ein Fluss sowie Brücken zwischen den Stadtteilen eingezeichnet sind.



Ermitteln Sie, ob es möglich ist, an einer Stadtrundfahrt durch sämtliche Stadtteile teilzunehmen, bei der jede Brücke genau einmal überquert wird. Wenn ja, ermitteln Sie, ob es sogar möglich ist, dass diese im selben Stadtteil endet, in dem die Stadtrundfahrt begonnen wurde. Formulieren Sie dabei das Problem zuerst in graphentheoretischen Begriffen mit Ecken, Kanten und Gebieten. Zeichnen Sie eine entsprechende Skizze und argumentieren Sie mit Graphentheorie.

b. (8 Punkte) Ermitteln Sie nun, ob sich Ihre Aussagen im Aufgabenteil **a.** ändern, falls man von den drei zuoberst eingezeichneten Brücken die am weitesten rechts liegende auslässt. Modifizieren Sie dazu Ihren Graph und zeichnen Sie eine entsprechende Skizze.

5. Aufgabe (20 Punkte)

Eine Studentin der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg bereitet sich 11 Wochen lang auf eine wichtige Klausur vor. Sie möchte jeden Tag mindestens eine Aufgabe bearbeiten, aber insgesamt höchstens 132 Aufgaben. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass es auf jeden Fall einen zusammenhängenden Zeitraum von (ganzen) Tagen geben muss, in dem die Studentin genau 21 Aufgaben bearbeiten wird.

Hinweis: Betrachten Sie für $i = 1, \dots, 77$ *die Anzahl* a_i *der bearbeiteten Aufgaben bis zum Tag* i *und dann auch die 77 Zahlen* $b_j := a_j + 21$ *für* $j = 1, \dots, 77$. *Wie viele Zahlen* a_i *und* b_j *sind das insgesamt und in welchem Intervall liegen diese? Wieso sind die* a_i *alle verschieden? Wieso sind die* b_j *alle verschieden? Was bedeutet eine Kollision zwischen den* a_i *und den* b_j*?*

6*. Aufgabe. (6 Bonuspunkte) *Bonusaufgaben werden immer strikt bewertet.*

Auf einer Geraden seien zwei Punkte P und Q mit Abstand 400 gegeben. Auf dem Streckenabschnitt zwischen P und Q seien 10 verschiedene Streckenabschnitte der Länge 100 markiert. Beweisen Sie, dass es einen Punkt auf dem Streckenabschnitt zwischen P und Q geben muss, der zu mindestens vier verschiedenen, markierten Streckenabschnitten der Länge 100 gehört.