Übungsblatt 1 - Lösungsvorschläge

Orville Damaschke

30. April 2020

Aufgabe 1.1

a) Berechnung mittels zweifacher partieller Integration:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \underbrace{(x-1)^2}_{=g} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{=f'} \,\mathrm{d}x = -(x-1)^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int \underbrace{(x-1)}_{=g} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{=f'} \,\mathrm{d}x \\ &= -(x-1)^2\mathrm{e}^{-x} - 2(x-1)\mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\left((x-1)^2 + 2(x-1) + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + C \\ \Rightarrow & \\ I(x) &= -\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x} + C \quad . \end{aligned}$$

b) Implizites Integrieren: Lösung des Integrals durch algebraische Gleichung, hergeleitet durch Umformung - hier ist die Umformung durch die partielle Integration gegeben.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{=f'} \underbrace{\sqrt{x^2-9}}_{=g}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2-9} - \int \frac{x2x}{2\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-9} - \int \frac{x^2+(9-9)}{\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2-9} - \int \frac{x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-9} - \int \sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2-9}}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2-9} - I(x) - 9\int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2-9}}}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \\ 2I(x) &= x\sqrt{x^2-9} - 9\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x \quad . \end{aligned}$$

Das letzte Integral folgt aus einer bekannten Ableitung aus der Präsenzübung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log(x+\sqrt{x^2-9})\right] = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}{x+\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}+1}{x+\sqrt{x^2-9}}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$$

und somit

$$I(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\log(x+\sqrt{x^2-9}) + C \quad .$$

c) Partielle Integration und $2\cos(2x) = (\sin(2x))'$:

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \underbrace{(x+1)^2}_{=g}\underbrace{\cos(2x)}_{=f'}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^2}{2}\sin(2x) - \int \underbrace{(x+1)}_{=g}\underbrace{\sin(2x)}_{=f'}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(x+1)^2}{2}\sin(2x) + \frac{(x+1)}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(x+1)^2}{2}\sin(2x) + \frac{(x+1)}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C \\
&\Leftrightarrow \\
I(x) &= \frac{1}{2}\left((x+1)^2\sin(2x) + (x+1)\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.2

a) Substitution $x = y^2$ und partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \sqrt{x}\sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int y\sin(y)2y\,\mathrm{d}y = 2\int \underbrace{y^2}_{=g}\underbrace{\sin(y)}_{=f'}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\left(-y^2\cos(y) + 2\int \underbrace{y}_{=g}\underbrace{\cos(y)}_{=f'}\,\mathrm{d}y\right) = 2\left(-y^2\cos(y) + 2y\sin(y) - 2\int \sin(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 2\left(-y^2\cos(y) + 2y\sin(y) + 2\cos(y)\right) + C \\
&\Leftrightarrow \\
I(x) &= -2x\cos(\sqrt{x}) + 4\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 4\cos(\sqrt{x}) + C\quad .
\end{aligned}
$$

b) Substitution mit $x = \mathrm{e}^y$ oder genau hinschauen und Integrand mit Ableitung identifizieren (Kettenregel):

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{\sin(\log(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\log(x)}{\mathrm{d}x}\sin(\log(x))\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos(\log(x))}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(\log(x)) + C\quad .
\end{aligned}
$$

c) Substitution $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ nach geschickter Umformung:

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2y}{4y^2+4}\frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\quad .
\end{aligned}
$$

Das letzte Integral kann mithilfe einer Ableitung aus den Präsenzübungen bestimmt werden: Mithilfe der Umkehrregel für Ableitungen folgt mit $\tan' = \cos^{-2}$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\arctan(y)\right] = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \cos^2\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}\quad ,
$$

wobei

$$
\cos^2(z) = \frac{\sin^2(z)}{\tan^2(z)} = \frac{1-\cos^2(z)}{\tan^2(z)} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{\tan^2(z)}+1\right)\cos^2(z) = \frac{1}{\tan^2(z)} \;\Leftrightarrow\; \cos^2(z) = \frac{1}{1+\tan^2(z)}
$$

genutzt wurde. Somit ist das Integral nach Resubstitution

$$
I(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^x}{2}\right) + C\quad .
$$

Aufgabe 1.3

Vor der Ausführung der Integration wird eine Partialbruchzerlegung ausgeführt: Der Nenner hat eine Nullstelle bei $x_0 = -2$; die anderen beiden sind imaginär. Zur Vereinfachung vollziehe man zunächst eine Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rcl}
(x^3+8) & : & (x+2) = x^2 - 2x + 4 \\
\underline{-(x^3+2x^2)} & & \\
-2x^2+8 & & \\
\underline{-(-2x^2-4x)} & & \\
4x+8 & & \\
\underline{-(4x+8)} & & \\
0 & &
\end{array}
$$

$$x^3 + 8 \quad = \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) \quad .$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet somit

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^3+8} &= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \\
&= \frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{(A+B)x^2+(2(-A+B)+C)x+2(2A+C)}{x^3+8} \\
&\Leftrightarrow \\
I. &\quad A+B=0 \leftrightarrow B=-A \to II. \\
II. &\quad 2(B-A)+C=1 \\
III. &\quad 2A+C=0 \leftrightarrow C=-2A \to II.
\end{aligned}
$$

und somit $A = -\frac{1}{6}$, woraus $B = \frac{1}{6}$ und $C = \frac{1}{3}$ folgen. Damit folgt für die Integration

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{x}{x^3+8}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int \frac{x+2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\int \frac{2x+6-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\log(\left|x^2-2x+4\right|) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\log(\left|x^2-2x+4\right|) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+3} \\
&\overset{(*)}{=} -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\log(\left|x^2-2x+4\right|) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{3y^2+3}\sqrt{3}\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\log(\left|x^2-2x+4\right|) + \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{6}\log(|x+2|) + \frac{1}{12}\log(\left|x^2-2x+4\right|) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad .
\end{aligned}
$$

Bei (*) wurde die Substitution $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$ verwendet und am Ende resubstituiert. Das letzte Integral wurde in Aufgabe 1.2 c) bereits ausgerechnet.

Aufgabe 1.4

Diese Aufgabe ist eine weitere praktische Anwendung der Weierstraß-Substitution (also $x = 2\arctan(t)$) mit $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$ und $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$. Damit

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)} = \int \frac{2}{(t^2+1)(2+\frac{2t}{1+t^2})}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(**)}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad .
\end{aligned}$$

Bei (**) wurde die Substitution $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$ verwendet und am Ende resubstituiert. Das letzte Integral wurde in Aufgabe 1.2 c) bereits ausgerechnet.