Konvergenz von Folgen

Def Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert (strebt) gegen* a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. In diesem Fall heißt a der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Kurz zusammengefasst:

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a :\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

Eine Folge heißt *konvergent*, falls sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sonst heißt sie *divergent*.
Eine Folge mit Grenzwert $a = 0$ nennt man auch *Nullfolge*.

Satz 2.1 Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt: Konvergiert eine Folge gegen a und b, so ist $a = b$.

Def Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt*, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (\text{bzw. } a_n \geq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}).$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|a_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 2.2 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 2.3 (Rechenregeln für konvergente Folgen) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann konvergieren auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$) und es gilt

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$.

Satz 2.4 (Verträglichkeit der Konvergenz mit Ungleichungen) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Satz 2.5 (Einschnürungssatz) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$