Prof. Dr. Ernst-Rüdiger Olderog
Christopher Bischopink, M.Sc.

Ausgabe: 15.11.2019
Abgabe: 22.11.2019 bis 14^{00} Uhr
in den Fächern im ARBI-Flur

5. Übung zu Grundlagen der Theoretischen Informatik

Aufgabe 18: Quiz **(5 Punkte)**

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird einer abgezogen. Minimal können 0 Punkte erreicht werden.

Wahr Falsch

☐ ☐ a) Für eine Sprache L besagt die NERODE-Rechtskongruenz, dass wenn zwei Worte $u, v \in \Sigma^*$ in Relation stehen, diese beliebig von rechts erweitert werden können, so dass die resultierenden Worte in L sind.

☐ ☐ b) Es gibt mindestens eine kontextfreie Sprache L, für die es keine Grammatik G gibt, so dass $L = L(G)$.

☐ ☐ c) Einem gegebenen Ableitungsbaum von A nach w entsprechen im Allgemeinen mehrere Linksableitungen von A nach w.

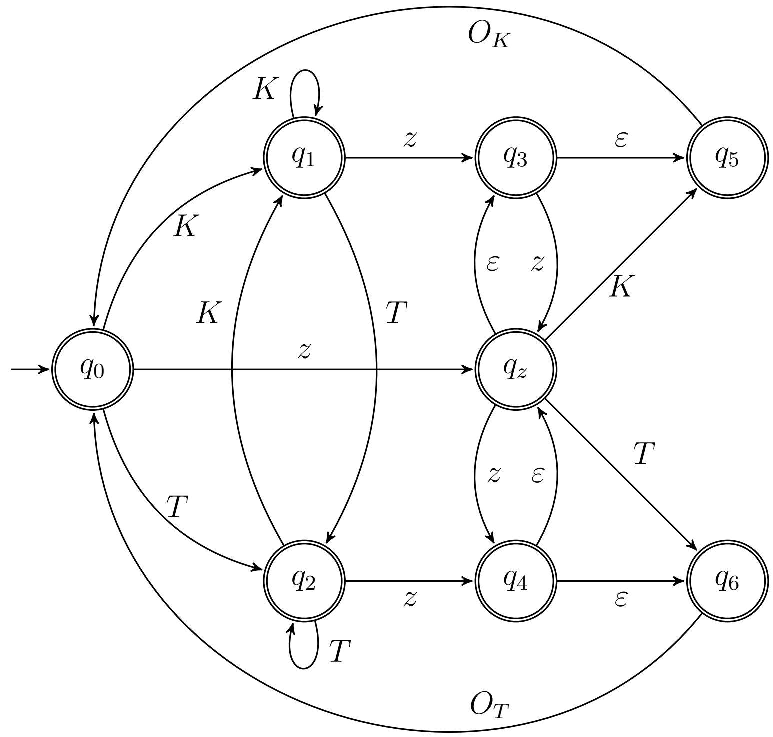
☐ ☐ d) Für die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow AB, A \rightarrow bcB \mid cB, B \rightarrow cBa \mid \varepsilon\}, S)$ gilt $L(G) = \{b^i c^j a^k \mid j, k \in \mathbb{N} \wedge i \in \{0, 1\} \wedge j = k + 1\}$.

☐ ☐ e) Für eine Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit der Ableitung $S \vdash_G aABc \vdash_G aAc \vdash_G \cdots \vdash_G ac$ muss immer $A \rightarrow \varepsilon \in P$ gelten.

Aufgabe 19: Model Checking **(1+2+3+1 Punkte)**

Wir möchten einen Getränkeautomaten modellieren, der zwei Knöpfe besitzt, um Kaffee oder Tee zu ordern, sowie einen Schlitz um Münzen aufzunehmen. Zum Einen soll der Automat in der Lage sein, zuerst die Auswahl, ob Kaffee oder Tee gewünscht wird, aufzunehmen und anschließend nach dem Geldeinwurf die letzte Wahl als Getränk auszugeben. Zum Anderen soll der Automat alternativ zuerst die Münzen aufnehmen können, danach die Auswahl des Getränkes erwarten und dann schlussendlich das passende Getränk ausgeben. Um ein Getränk zu bekommen, muss mindestens eine Münze eingeworfen werden, es können aber auch beliebig viele Münzen gespendet werden.

Betrachtet die folgende Modellierung des Getränkeautomaten $\mathcal{A}$:

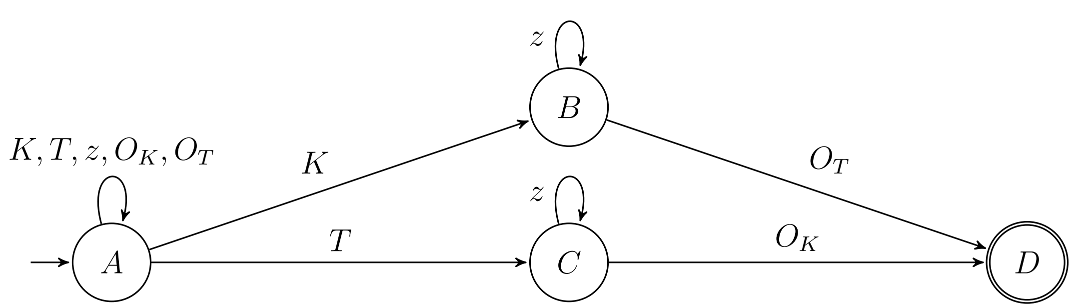


Dabei steht K für die Eingabe, dass der Knopf für *Kaffee* gedrückt wurde und T, dass der Knopf für *Tee* gedrückt wurde. Der Buchstabe z steht für den Einwurf einer *Münze* und O_K, bzw. O_T, steht dafür, dass der Automat Kaffee respektive Tee ausgegeben hat.

a) Erklären Sie kurz, wie der Automat funktioniert und welcher Zustand wofür zuständig ist.

b) Ein unerwünschtes Verhalten des Automaten wäre, wenn Kaffee gewählt, aber Tee geliefert wurde oder Tee gewählt und Kaffee geliefert wurde. Spezifizieren Sie *alle* diese unerwünschten Läufe als regulären Ausdruck.

c) Betrachten Sie den folgenden endlichen Automaten $\mathcal{B}$, der unerwünschtes Verhalten durch akzeptierende Läufe darstellt:



Der finale Zustand D ist also ein schlechter Zustand, der nicht erreichbar sein soll.

Berechnen Sie $\mathcal{A} \mid\mid \mathcal{B}$.

Hinweis: Es reichen die erreichbaren Zustände.

d) Erklären Sie, ob $\mathcal{A}$ das mit $\mathcal{B}$ beschriebene schlechte Verhalten zulässt.

Aufgabe 20: Sprache $\rightsquigarrow$ Grammatik **(2+2 Punkte)**

Geben Sie zu jeder der folgenden kontextfreien Sprachen L_i $(1 \leq i \leq 2)$ eine kontextfreie Grammatik G_i mit $L_i = L(G_i)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ an. Zeichnen Sie außerdem zu jeder Grammatik einen Ableitungsbaum für das Wort *aaaabbcc*.

a) $L_1 = \{a^i b^k c^l \mid i, k, l \in \mathbb{N} \wedge (i = 2k \vee i = 3k \vee i = 5k)\}$

b) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w)\}$

Wichtig: Erläutern Sie jeweils die Funktionsweise der Grammatik.
Hinweis: Grammatiken sind 4-Tupel!

Aufgabe 21: Grammatik $\rightsquigarrow$ Sprache **(2+2 Punkte)**

Bestimmen Sie von den untenstehenden kontextfreien Grammatiken G_i $(1 \leq i \leq 2)$ jeweils die erzeugte kontextfreie Sprache L_i mit $L_i = L(G_i)$. Untersuchen sie außerdem die Grammatiken auf Mehrdeutigkeit. Geben Sie dazu, falls die Grammatik *mehrdeutig* ist, zwei Linksableitungen für ein Wort an, andernfalls erklären Sie, warum die Grammatik eindeutig ist.

a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_1, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_1 = \{ \quad & S \to aA \mid \varepsilon, \\ & A \to Sb \mid B, \\ & B \to Sa\} \end{aligned}$$

b) $G_2 = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P_2, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_2 = \{ \quad & S \to Xa \mid Yb \mid Zbab, \\ & X \to aZ \mid Zb \mid ZZ, \\ & Y \to aZb \mid bZa \mid Xa \mid \varepsilon, \\ & Z \to ba\} \end{aligned}$$

Wichtig: Begründen Sie, warum $L_i = L(G_i)$ gilt.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, die Grammatiken zunächst zu vereinfachen.

Aufgabe 22: Kontextfrei? **(Selbstkontrolle)**

Untersuchen Sie die folgenden Sprachen auf Kontextfreiheit. Zeigen Sie dazu entweder mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache nicht kontextfrei ist, oder geben Sie eine Grammatik an, die die jeweilige Sprache akzeptiert und begründen Sie warum diese die gewünschte Sprache erzeugt.

a) $L_1 = \{a^{2n} w \mid \exists u \in \{b, c\}^n : w = uu^R, n \in \mathbb{N}\}$

b) $L_2 = \{a^{2n} w \mid \exists u \in \{b, c\}^* : w = uu^R, n \in \mathbb{N}\}$