Lösungen der Fingerübungen

Bemerkung: In diesen Lösungen werden Sie keine Skizzen von Funktionen finden. Benutzen Sie dafür die üblichen Hilfsmitteln.

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

   a) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$, via L'Hospital oder $e^x \geq x^2$ für $x > 0$.

   b)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

   c) Da sin beschränkt ist durch 1, erhält man $\left|\frac{\sin(\cos(x^{19}))}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ für $x \to \infty$ und damit
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\cos(x^{19}))}{\sqrt{x}} = 0.$$

   d) Da $\sin(\cos(0)) = \sin(1) > 0$ ist, so ist der Zähler von $\frac{\sin(\cos(x^{19}))}{\sqrt{x}}$ nahe 0 ungleich Null und beschränkt. Da der Nenner beliebig klein wird, gilt mit Benutzung der Rechenregeln für Grenzwerte in $\overline{\mathbb{R}}$: $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(\cos(x^{19}))}{\sqrt{x}} = +\infty$.

   e) Das ist exakt der Differenzenquotient von cos in 0. Also
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = -\sin(0) = 0$$
   Alternative mit L'Hospital.

   f) Es gilt $x^3 - 125 = x^3 - 5^3 = (x-5)(x^2+5x+5^2)$ und damit
   $$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x-5} = \lim_{x\to 5} x^2+5x+5^2 = 75.$$
   Alternative mit L'Hospital.

2. Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und machen Sie eine Skizze:

   a) **Nullstellen:**
   $$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$
   Also hat p genau dann zwei reelle Nullstellen, falls $b^2 > 4ac$. p hat genau dann eine einzige reelle Nullstelle, wenn $b^2 = 4ac$.
   Monotonie: Es gilt $p'(x) = 2ax + b$. Also gibt es einen stationären Punkt bei $x_E := \frac{-b}{2a}$. Ist $a > 0$, so ist p fallend auf $]-\infty, x_E[$, wachsend auf $]x_E, +\infty[$. Ist $a < 0$, so ist p wachsend auf $]-\infty, x_E[$, fallend auf $]x_E, +\infty[$.
   Krümmungsverhalten und Extrema: Da $p''(x) = 2a$, so hat p in x_E ein Maximum, falls $a < 0$ und ein Minimum, falls $a > 0$. Weiter ist p konvex auf $\mathbb{R}$, falls $a > 0$ und

konkav, falls $a < 0$.
Verhalten bei $\pm\infty$: Ist $a > 0$, so ist $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$ und ist $a < 0$, so ist $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = -\infty$

b) Es gilt $q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$. q hat eine einzige reelle Nullstelle und zwar in 1 (folgt aus a)). Es gilt $q'(x) = 3x^2 - 6x + 6$, d.h $a = 3$, $b = -6$ und $c = 6$ in der Notation aus a). Wir haben $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 36 - 72 < 0$, also hat q keine stationären Punkte. q hat einen Wendepunkt in $\frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$. Da $a = 3$ positive ist, so ist q konkav auf $]-\infty, 1[$ und konvex auf $]1, \infty[$. Weiter ist $\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} q(x) = -\infty$.

3. Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen und führen Sie diese auf die Standardfunktionen $\frac{1}{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(x)$, $\exp(x)$, $mx + b$ zurück. Machen Sie eine Skizze:

   a) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$.

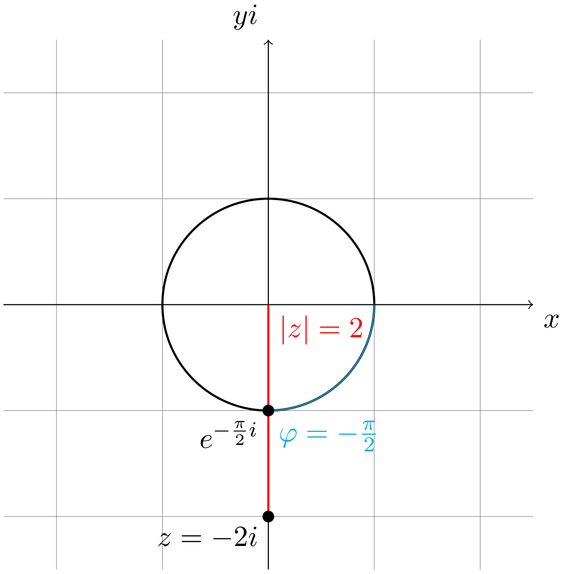
   b) $f(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) = \ln(\frac{x^2-1}{x-1}) = \ln(x + 1)$

   c) $f(x) = \ln(5e^{2x}) = \ln(5) + \ln(e^{2x}) = 2x + \ln(5)$.

   d) $f(x) = \sin(x) + \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = \sin(x) + 1$.

4. Formen Sie in eine andere Koordinatendarstellung um; also von kartesischen in Polarkoordinaten und von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten.

   a) $-2i$ soll in Polarkoordinaten, also in der Form $re^{\varphi i}$, dargestellt werden. Das kann in diesem Fall grafisch recht einfach gelöst werden, indem man den Winkel φ vom Einheitskreis abliest. Der Faktor r ist immer der Betrag der Zahl. Auch dieser ist in diesem Fall grafisch leicht zu erkennen. Das folgende Bild verdeutlicht dieses grafische Verfahren:



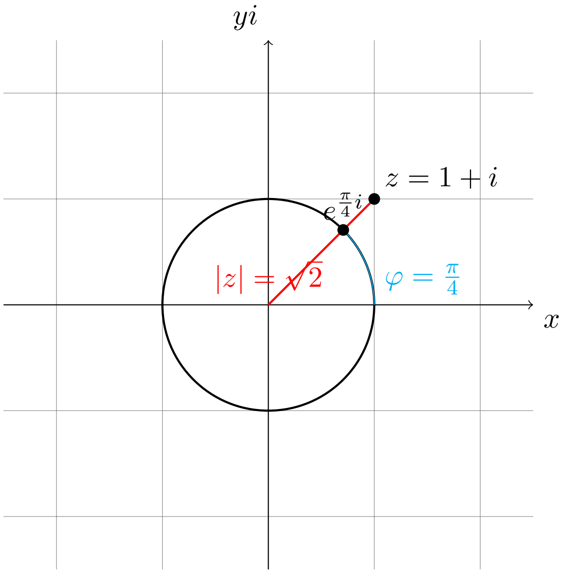
   Man kann diese Aufgabe aber auch rechnerisch lösen:
   Der Betrag ist $|-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$. Also kann man die Zahl umschreiben: $-2i = 2(0 - i)$. Gesucht ist nun ein Winkel φ, für den $\cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = -1$. Das ist bekanntermaßen

für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ der Fall. Also: $-2i = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

b) $\sqrt{2}e^{i\pi} = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{2}$ dargestellt in kartesischen Koordinaten.

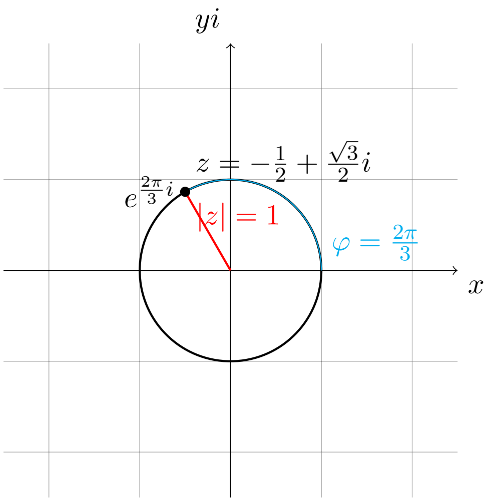
c) $3e^{5i\frac{\pi}{2}} = 3(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 3i$ dargestellt in kartesischen Koordinaten.

d) $1 + i$ soll in Polarkoordinaten dargestellt werden. Wie in a) kann man diese Aufgabe grafisch mit Hilfe des Einheitskreises lösen. Den Betrag der Zahl kann man hier aus der Abbildung mit dem Satz von Pythagoras gewinnen.



Man kann diese Aufgabe auch rechnerisch lösen:
Der Betrag lässt sich berechnen durch: $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Also ist: $1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$. Gesucht ist nun ein Winkel φ, für den $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dieser Winkel kann mit Hilfe des Tangens berechnet werden: $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Also: $\varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Damit ist: $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

e) $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ soll in Polarkoordinaten dargestellt werden. In diesem Fall können r und φ graphisch nicht direkt abgelesen werden.



Daher lösen wir diese Aufgabe rechnerisch:

Der Betrag ist $|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$. Gesucht ist also ein Winkel φ, für den $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ und $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ein Winkel φ', für den $\cos\varphi' = \frac{1}{2}$ ist, sollte bekannt sein: $\varphi' = \frac{\pi}{3}$. Am Graphen des Kosinus, oder an der Idenitität $\cos(-\varphi) = \cos\varphi = -\cos(\pi-\varphi)$, liest man ab, dass dann $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ für $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ oder $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$ gilt. Wegen $\sin\frac{2}{3}\pi > 0$, $\sin(-\frac{2}{3}\pi) < 0$ folgt $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Alternativ kann der Winkel mit Hilfe des Tangens berechnet werden: $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$. Also: $\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2}{3}\pi$, da der Tangens periodisch mit Periode π ist. Da der Sinus positiv und der Kosinus negativ sind, kommt nur die Lösung $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ in Frage.

Damit ist: $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

f) $5e^{\frac{3}{4}\pi i} = 5(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 5(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$ dargestellt in kartesischen Koordinaten.