CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 2

Keine Abgabe vorgesehen

Präsenzaufgabe 2.4.

(a). Zeigen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus von einem Körper K in einen Ring R injektiv ist.

(b). Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ gibt.

Präsenzaufgabe 2.5. In einem Ring R heißt ein Element $a \in R$ **nilpotent**, falls $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a). Sei R ein kommutativer Ring und seien $a, b \in R$ nilpotent. Zeigen Sie, dass $a + b$, sowie ab ebenfalls nilpotent sind und entscheiden Sie, ob $S = \{ a \in R \mid a \text{ ist nilpotent} \} \subseteq R$ ein Unterring von R ist.

(b). Bestimmen Sie alle nilpotenten Elemente von $R_1 = \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ und $R_2 = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

(c). Sei $m \in \mathbb{N}$. Charakterisieren Sie alle nilpotenten Elemente von $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von m.

Präsenzaufgabe 2.6. Es sei die Menge der **Quaternionen** definiert als

$$\mathbb{H} := \{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \}.$$

Zeigen Sie:

(a). Es ist $ij = k$.

(b). Die folgende Konjugationsabbildung $\bar{\cdot}$ ist ein Automorphismus auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{H}, +)$ und es gilt f.a. $x \in \mathbb{H}$, dass $\overline{\overline{x}} = x$:

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ a + bi + cj + dk &\longmapsto a - (bi + cj + dk). \end{aligned}$$

(c). Es ist $\mathbb{H}$ ein nicht kommutativer Schiefkörper.
Hinweis: Gegeben $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Berechnen Sie zunächst $x\bar{x}$ um einen geeigneten Kandidaten für ein zu x inverses Element zu erhalten.