Abgabe Algebra I, Blatt 09

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 9.1

(a) Fehlt.

(b) (i) Sei $f_1 = t^4 - 5 \in \mathbb{Q}[t]$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f_1 &= t^4 - 5 \\ &= (t^2 + \sqrt{5})(t^2 - \sqrt{5}) \\ &= (t + \sqrt[4]{5}i)(t - \sqrt[4]{5}i)(t + \sqrt[4]{5})(t - \sqrt[4]{5}) \end{aligned}$$

Da $\pm\sqrt[4]{5}, \pm\sqrt[4]{5}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$, zerfällt f_q über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$.

Zu zeigen: $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})] = 2$.
Da $f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})} = t^2 + 1$, ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})] = \deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})}) = 2$.

Zu zeigen: $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = 4$.
Angenommen, $\deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) = 1$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}(\sqrt[4]{5}) &= \sqrt[4]{5} + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies\ & a_0 = -\sqrt[4]{5} \notin \mathbb{Q} \\ \implies\ & \deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) \neq 1. \end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) = 2$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}(\sqrt[4]{5}) &= \sqrt[4]{5}^2 + a_1\sqrt[4]{5} + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies\ & a_0 = -\sqrt{5} - a_1\sqrt[4]{5} \notin \mathbb{Q} \quad \forall a_1 \in \mathbb{Q} \\ \implies\ & \deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) \neq 2. \end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) = 3$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}(\sqrt[4]{5}) &= \sqrt[4]{5}^3 + a_2\sqrt[4]{5}^2 + a_1\sqrt[4]{5} + a_0 \\ &= \sqrt{5}\sqrt[4]{5} + a_2\sqrt{5} + a_1\sqrt[4]{5} + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies\ & a_0 = -\sqrt{5}\sqrt[4]{5} - a_2\sqrt{5} - a_1\sqrt[4]{5} \notin \mathbb{Q} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \\ \implies\ & \deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) \neq 3. \end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) = 4$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}(\sqrt[4]{5}) &= \sqrt[4]{5}^4 + a_3\sqrt[4]{5}^3 + a_2\sqrt[4]{5}^2 + a_1\sqrt[4]{5} + a_0 \\
&= 5 + a_3\sqrt{5}\sqrt[4]{5} + a_2\sqrt{5} + a_1\sqrt[4]{5} + a_0 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\implies a_0 = -5 - a_3\sqrt{5}\sqrt[4]{5} - a_2\sqrt{5} - a_1\sqrt[4]{5} \in \mathbb{Q} \text{ für } a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\
&\implies f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}} = t^4 - 5 \\
&\implies [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = \deg(f_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}) = 4.
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich:

$$
[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8.
$$

$\square$

(ii) Sei $f_2 = t^4 + 1$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f_2 &= t^4 + 1 \\
&= (t^2 + i)(t^2 - i) \\
&= (t + i\sqrt{i})(t - i\sqrt{i})(t + \sqrt{i})(t - \sqrt{i}).
\end{aligned}
$$

Da $\sqrt{i}, i\sqrt{i} \notin \mathbb{Q}$, zerfällt f_2 nicht über $\mathbb{Q}$, jedoch über $\mathbb{Q}(i, \sqrt{i})$, denn $\sqrt{i}, i\sqrt{i}$ sind die Nullstellen von f_2 in $\mathbb{Q}(i, \sqrt{i})$.

Zu zeigen: $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&f_{i,\mathbb{Q}} = t^2 + 1. \\
\implies &[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = \deg(f_{i,\mathbb{Q}}) = 2.
\end{aligned}
$$

Zu zeigen: $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{i}) : \mathbb{Q}(i)] = 2$.
Angenommen, $\deg(f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)}) = 1$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)}(\sqrt{i}) &= \sqrt{i} + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\
\implies &\ a_0 = -\sqrt{i} \notin \mathbb{Q}(i) \\
\implies &\ \deg(f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)}) \neq 1.
\end{aligned}
$$

Angenommen, $\deg(f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)}) = 2$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)}(\sqrt{i}) &= \sqrt{i}^2 + a_1\sqrt{i} + a_0 \\ &= i + a_1\sqrt{i} + a_0 \overset{!}{=} 0 \\ \implies a_0 &= -i - a_1\sqrt{i} \\ \implies (a_0 &\in \mathbb{Q}(i) \iff a_1 = 0) \\ \implies f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)} &= t^2 - i \\ \implies [\mathbb{Q}(i,\sqrt{i}) &: \mathbb{Q}(i)] = \deg(f_{\sqrt{i},\mathbb{Q}(i)}) = 2. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$[\mathbb{Q}(i,\sqrt{i}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i,\sqrt{i}) : \mathbb{Q}(i)] \cdot [\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

□

(c) (i) Sei $K := \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i) =: L$ Körpererweiterung, $f = t^2 + 1 \in K[t], n := \deg(f) = 2$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f &= t^2 + 1 \\ &= t^2 - i^2 \\ &= (t+i)(t-i). \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$t+i, t-i \in L[t] \implies f$ zerfällt über L, aber nicht über K, da $i \notin K$.

Zu zeigen: $[L : K] = 2$.
Da $i \notin \mathbb{Q}$ ist, muss der Grad des Minimalpolymoms von i größer als 1 sein. Da $i^2 + 1 = 0$, ist f das Minimalpolynom von i über $\mathbb{Q}$.
Es gilt:

$$[L : K] = \deg(f) = 2.$$

□

(ii) Fehlt.

(iii) Fehlt.

Aufgabe 9.2

(a) Sei $f := t^4 + t^3 + 2t^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[t]$.
Zu zeigen: $f = (t+1) \cdot (t^3 + 2t + 1)$ ist eine Zerlegung von f in irreduzible

Polynome über $\mathbb{Z}_3$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f &= t^4 + t^3 + 2t^2 + 1 \\ &= t^4 + t^3 + 2t^2 + 2t + t + 1 \\ &= (t+1)(t^3 + 2t + 1). \end{aligned}$$

Zu zeigen: $t+1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_3$.
Es gilt:

$$\mathbb{Z}_3 \text{ Körper und } \deg(t+1) = 1 \overset{5.1.2}{\Longrightarrow} t+1 \text{ irreduzibel über } \mathbb{Z}_3.$$

Zu zeigen: $h := t^3 + 2t + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_3$.
Angenommen, h sei reduzibel über $\mathbb{Z}_3$. Da $\mathbb{Z}_3$ Körper ist und $\deg(h) = 3$ hat h nach Beobachtung 5.1.6 eine Nullstelle in $\mathbb{Z}_3$. Es gilt:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0^3 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0, \\ h(1) &= 1^3 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0, \\ h(2) &= 2^3 + 2 \cdot 2 + 1 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu Beobachtung 5.1.6, weshalb h nicht reduzibel über $\mathbb{Z}_3$ sein kann.
Insgesamt ergibt sich, dass $f = (t+1) \cdot (t^3 + 2t + 1)$ eine Zerlegung von f in irreduzible Polynome über $\mathbb{Z}_3$ ist.

$\square$

(b) Fehlt.

(c) Fehlt.

Aufgabe 9.3

Sei $R := \mathbb{Z}_6$ und $M := R \times R$.
Zu zeigen: $X := ((2,4))$ linear unabhängig.
Es gilt:

$$\begin{aligned} & 0 \neq 3 \in R \\ \Longrightarrow\ & 3 \cdot (2,4) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 4) = (0,0) \\ \Longrightarrow\ & ((2,4)) \text{ ist eine linear abhängige Familie.} \end{aligned}$$

$\square$

korrigiert von am