SS 2020 • Analysis IIa

Probeklausur

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es sind ausser Ihrem Verstand und einem Stift **keine Hilfsmittel erlaubt.**

Die Probeklausur wird nicht korrigiert. Musterlösungen werden am 24.07.2020 veröffentlicht.

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen:

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist jede stetige Abbildung $X \to X$ lipschitzsch.
2. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ stetige Abbildung, $O \subset X$ offene Menge, dann ist $f(O)$ offen in Y.
3. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem Vektorraum V. Dann gibt es eine Metrik d auf V und einen Vektor $v \in V$ mit $\|x\| = d(x, v)$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie $\displaystyle\int x(\ln x)^2 \, dx$.
2. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$.
3. Ist $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x^4+1}} \, dx$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist die Reihe $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{1}{n \ln n}$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Bestimmen Sie $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{n+\sin^2 x} \, dx$

Aufgabe 3

1. Bestimmen Sie die maximale Lösung (inkl. Definitionsbereich) des Anfangswertproblems
$$y'(x) = 2xy(x)^2, \quad y(0) = 1.$$
2. Finden Sie die allgemeine Lösung der Diferentialgleichung
$$y'(x) = \frac{2}{x}\, y(x) + x, \quad x > 0.$$

Aufgabe 4

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'''(x) - 4y''(x) + 4y'(x) = 0.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'''(x) - 4y''(x) + 4y'(x) = e^{2x}.$$

Aufgabe 5
Betrachte das inhomogene lineare System erster Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t), \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 9. \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie eine Matrix A und eine Vektorfunktion B, so dass sich das obige System als $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ schreiben lässt.
2. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das homogene System $z' = Az$.
3. Finden Sie irgendeine Lösung des inhomogenen Systems.
4. Schreiben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.
5. Bestimmen Sie die Matrix e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$.