Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 4

Aufgabe 1.

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und bestimmen Sie ihren Betrag:

i) $\frac{1-2i}{3+4i} - i^{-1}$

ii) $\sum_{n=1}^{7112019} i^n$

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 + 8 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Skizzieren Sie in $\mathbb{C}$ die folgenden Mengen:

a) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < |z + i|\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < 2 \text{ und } |z| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Gleichung $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

b) Beweisen Sie mithilfe von a) die Dreiecksungleichung:

$$|z + w| \leq |z| + |w| \text{ für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

Aufgabe 4. Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$, und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$. Verbinden Sie folgende Ausdrücke mit Vergleichszeichen $(=, <, \leq, >, \geq)$ und begründen Sie Ihre Antwort:

a) $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[n]{a+b}$

b) $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{a}$

Abgabe: Bis 15. November vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1		2		3		4		
	a	b	a	b	a	b	a	b	
Punkte	3	2	2	3	2	3	2	3	20

Präsenzaufgaben und Anregungen

1. a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Zahl $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$.

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -2 + 2i$.

2. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in $\mathbb{C}$:

a) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z-3| \leq 2 \text{ und } |z| < 1\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}\colon \left|\frac{z}{z+1}\right| = 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$

3. Beschreiben Sie die folgenden Mengen in $\mathbb{C}$ analytisch:

a) der erste Quadrant

b) der Streifen, der aus allen Punkten besteht, die von der imaginären Achse eine Entfernung von höchstens 1 haben

c) der Halbkreis mit Zentrum 0 und Radius $R > 0$, der links von der imaginären Achse liegt (ohne Rand)

4. Seien a und b je Summen zweier Quadratzahlen. Zeigen Sie, dass die Zahl ab auch eine solche Summe ist.

5. Formulieren Sie den Satz von Pythagoras mithilfe der komplexen Zahlen.

6. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, und es gelte $\inf A = \inf B$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich daraus folgern?

a) $\forall a \in A\ \exists b \in B:\ a \leq b$

b) $\forall a \in A\ \exists b \in B:\ b \leq a$

c) $\exists a \in A\ \forall b \in B:\ a \leq b$

d) $\exists a \in A\ \exists b \in B:\ a \leq b$

7. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man versteht unter dem arithmetischen Mittel der reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$ die Größe

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

und unter dem geometrischen Mittel der nichtnegativen reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$ den Ausdruck

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Zeigen Sie, dass für nichtnegative Zahlen $x_1, ..., x_n$ gilt:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$