# LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZU DEN ABGABEAUFGABEN, BLATT 7

**Aufgabe 1:** "$\Leftarrow$" Sei $Y$ abgeschlossen und $(x_n) \subset Y$ eine Cauchy-folge bzgl. der induzierten Metrik $d_Y$, d.h $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d_Y(x_n, x_{n+k}) < \epsilon \forall n \geq N, k \in \mathbb{N}$.
Da $d_y(x_n, x_{n+k}) = d(x_n, x_{n+k})$, ist $(x_n)$ ebenfalls eine Cauchy-Folge in $X$. Da $X$ vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $d(x, x_n) \to 0$.
Da $Y$ abgeschlossen ist, ist $x \in Y$ und $d_Y(x, x_n) \to 0$. Also konvergiert $(x_n)$ gegen $x$ in $Y$ bzgl. $d_Y$. $\Rightarrow (Y, d_Y)$ ist vollständig.
"$\Rightarrow$" Sei $(Y, d_Y)$ vollständig und $(x_n) \subset Y$ eine Folge, die in $(X, d)$ gegen ein $x \in X$ konvergiert. Dann ist $(x_n)$ eine Cauchy-Folge in $(X, d)$ und damit auch in $(Y, d_Y)$. Wegen der Vollständigkeit von $(Y, d_Y)$ exisitiert ein $y \in Y$ mit $d_Y(x_n, y) \to 0$. Wir haben aber schon $d_Y(x_n, y) = d(x_n, y)$ und $d(x_n, x \to 0$, also $x = y \in Y$. Also ist $Y$ abgeschlossen.

**Aufgabe 2.1:**
- **wohldefiniert**:
  $f \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow \exists p_1 \in Y,\ r_1 > 0$ mit $d(f(x), p_1) < r_1\ \forall x \in X$ (d. h. $f(X) \subset K_{r_1}(p_1)$.
  $g \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow \exists p_2 \in Y,\ r_2 > 0$ mit $d(g(x), p_2) < r_2\ \forall x \in X$.
  $\forall x \in X$ gilt die $\Delta$-Ungleichung:
  $$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) \leq & d(f(x), p_1) + d(p_1, p_2) + d(p_2, g(x)) \\ \leq & r_1 + d(p_1, p_2) + r_2 \end{aligned}$$
  $\Rightarrow D(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x)) < \infty$
  D ist wohldefiniert.
- **Definitheit:** $D \geq 0$: klar, da $d(f(x), g(x)) \geq 0$
  $D = 0 \Leftrightarrow f = g$: klar, da $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.
- **Symmetrie:** $D(f, g) = D(g, f)$ klar, da $d(f, g) = d(g, f)$.
- **$\Delta$-Ungleichung:**
  $$\begin{aligned} D(f, g) &= \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)) \\ &\overset{\Delta-\text{Ungl. für} d}{\leq} \sup_x (d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x))) \\ &\leq \sup_x d(f(x), h(x)) + \sup_x d(h(x), g(x)) \\ &= D(f, h) + D(h, g) \end{aligned}$$
  $\Rightarrow D$ ist eine Metrik

**Aufgabe 2.2:** Sei $(f_n) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ eine Cauchy-Folge, also $\forall \epsilon > 0 \exists N \in: \sup\limits_x d(f_(x), f_{n+k}(x)) < \epsilon\ \forall n \geq N,\ k \in \mathbb{N}$ (*)

Dann ist auch $d(f_n(x), f_{n+k}(x)) < \epsilon\ \forall x \Rightarrow \forall x$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $Y$. Da $Y$ vollständig ist, $\exists f(x) \in Y$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$. $x \mapsto f(x)$ ist eine Funktion.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ mit $D(f_n, f) \to 0$.

Dafür betrachte $k \to +\infty$ in (*): $\forall \epsilon > 0 \exists N in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_x d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.(**)

Sei $\epsilon > 0$ und $N$ wie oben. $\exists p \in Y$, $r > 0$ mit $f_N(x) \in K_r(p)\ \forall x \in X$. Also

$$d(f(x), p) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), p) \leq \epsilon + r$$

$\Rightarrow f(x) \in K_{\epsilon+r}(p) \forall x \in X$

$\Rightarrow f \in \mathcal{B}(X,Y)$ Dann kann man (**) als $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $D(f_n, f) \leq \epsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ umschreiben. $\Rightarrow f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ in $\mathcal{B}(X,Y)$.

**Aufgabe 3.1:** Betrachte $T(x) = \frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$.

$T'(x) = \frac{1}{(x+3)^2} \Rightarrow |T'| \leq \frac{1}{9} =: L$ für $x \in [0,\infty)$ und $T(x) > 0$ für $x \in [0,\infty)$

$\Rightarrow T$ ist eine Kontraktion auf $[0,\infty)$.

Außerdem ist $[0,\infty)$ als abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{R}$ vollständig.

$\Rightarrow x = T(x)$ besitzt eine eindeutige Lösung nach dem Banachschen Fixpunktsatz.

**Aufgabe 3.2:** Iterationen $x_n = T(x_{n-1})$, z. B. mit $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$;

$$\begin{aligned} |x_n - p| &\leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \\ &= \frac{1}{9^n} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12 \cdot 9^{n-1}} \end{aligned}$$

Also $|x_n - p| \leq 0,002$ für $n = 3$.

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{\frac{2}{3}+2}{\frac{2}{3}+3} = \frac{8}{11}$; $x_3 = \frac{\frac{8}{11}+2}{\frac{8}{11}+3} = \frac{30}{41}$. Also $|p - \frac{30}{41}| \leq 0,002$

Vergleiche $\frac{30}{41} = 0,7317073...$ mit der expliziten Lösung $p = \sqrt{3} - 1 = 0,7320508...$

**Aufgabe 4.1:** "$\Rightarrow$" Sei $y$ stetig differenzierbar mit $y(0) = 0$ und $y'(x) = y(x) + 1\ \forall x \in (-a,a)$.

Wir integrieren beide Seiten zwischen 0 und $x \in (-a,a)$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^x y'(t)\mathrm{d}t}_{=y(x)-y(0)=y(x)} &= \int_0^x y(t) + 1\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow y(x) &= \int_0^x (y(t)+1)\mathrm{d}t\ \forall x \in (-a,a) \end{aligned}$$

Betrachte nun $x \to a^- : y(x) \to y(a)$, da $y$ stetig. Und $\int_0^x \to \int_0^a$, da

$$\left| \int_0^a (y(t)+1) - \int_0^x (y(t)+1) \right| \leq \int_x^a |y(t)+1| \mathrm{d}t$$
$$\leq \|y+1\|_\infty (a-x) \overset{x \longrightarrow a^-}{\to} 0$$

Also $y(x) = \int_0^x (y(t)+1)\mathrm{d}t$ auch für $x = a$. Analog für $x = -a$.
$\Rightarrow y(x) = \int_0^x (y(t)+1)\mathrm{d}t \ \forall x \in [-a,a]$.
$\Leftarrow$ : Sei $y$ Lösung von $y(x) = \int_0^x (y(t)+1)\mathrm{d}t$, $x \in [-a,a]$, dann ist $y(0) = \int_0^0 (y(t)+1)\mathrm{d}t = 0$ und

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x (y(t)+1)\mathrm{d}t\right) \\ &= \underbrace{y(x)+1}_{stetig} \ \forall x \in (-a,a) \end{aligned}$$

Und damit $y$ stetig differenzierbar.

**Aufgabe 4.2:** Wie in der VL:

$$\begin{aligned} &|(T(y_1))(x) - (T(y_2))(x)| \\ =&\left| \int_0^x (y_1(t)+1)\mathrm{d}t - \int_0^x (y_2(t)+1)\mathrm{d}t \right| \\ =&\left| \int_0^x (y_(t) - y_2(t))\mathrm{d}t \right| \\ \leq&|x| \sup_{t \in [-a,a]} |y_1(t) - y_2(t)| \\ \leq&a\|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm in $C^0$ ist.
$\Rightarrow \sup_{x \in [-a,a]} |T(y_1) - T(y_2)| \leq a\|y_1 - y_2\|$
$\Rightarrow \|T(y_1) - T(y_2)\| \leq a\|y_1 - y_2\|$ mit $a < 1 \Rightarrow$ Kontraktion.

**Aufgabe 4.3:**

$$\begin{aligned}
&y_0 \equiv 0\\
&y_1(x) = \int_0^x (0+1)\mathrm{d}t = x\\
&y_2(x) = \int_0^x (t+1)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + x\\
&y_3(x) = \int_0^x (\frac{t^2}{2} + t + 1)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x\\
&\vdots\\
&y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $y_n(x)$ konvergiert gleichmäßig (d. h. in der Supremumsnorm) gegen $y : x \mapsto e^x - 1$.