# Körperaxiome

Auf $\mathbb{R}$ sind die Operationen $+$ und $\cdot$ erklärt, die je zwei reellen Zahlen $x$, $y$ eine reelle Zahl $x+y$ bzw. $x \cdot y$ zuordnen. Für alle $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$ gilt:

- (A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (Assoziativität der Addition)
- (A2) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit $x+0=x$ für alle $x$ (Neutralelement der Addition)
- (A3) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x+(-x)=0$ (Inverses Element der Addition)
- (A4) $x+y=y+x$ (Kommutativität der Addition)
- (M1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität der Multiplikation)
- (M2) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$ mit $x \cdot 1 = x$ (Neutralelement der Multiplikation)
- (M3) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein Element $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$ (Inverses Element der Multiplikation)
- (M4) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität der Multiplikation)
- (D) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (Distributivgesetz)

**Def** Eine Menge zusammen mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$, die diese Axiome erfüllen, heißt *Körper*.

**Lemma 1**

1) Die Elemente 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.
2) Die inversen Elemente für $+$ und $\cdot$ sind eindeutig bestimmt.

**Def** Für $x, y \in \mathbb{R}$ wird zur Abkürzung folgende Schreibweise benutzt:

$$\begin{aligned} x - y &:= x + (-y) \\ \frac{x}{y} &:= x \cdot y^{-1}, \text{ falls } y \neq 0 \end{aligned}$$

**Lemma 2 (Folgerungen aus den Körperaxiomen)**

1) $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$
2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$

# Anordnungsaxiome

Auf $\mathbb{R}$ ist eine Relation „größer als“ mit folgenden Eigenschaften erklärt:

- (O1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0, \qquad x = 0, \qquad -x > 0 \qquad (\mathit{Trichotomie})$$

- (O2) $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$
  *(Abgeschlossenheit gegenüber Addition)*
- (O3) $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
  *(Abgeschlossenheit gegenüber Multiplikation)*

**Def** Ein Körper $K$ mit Axiomen (O1), (O2), (O3) heißt *angeordneter Körper*.

Zusätzliche Bezeichnungen:
$x > y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y > 0$
$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad y > x$
$x \geq y \quad :\Leftrightarrow \quad x > y$ oder $x = y$
$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y$ oder $x = y$

**Lemma 3 (Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen)**
Für alle $x, y, z, a \in \mathbb{R}$ gilt:

1) entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.
2) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (*Transitivität*)
3) $x < y \Rightarrow x + a < y + a$ (*Verträglichkeit mit* $+$)
4) $x \cdot x > 0$, falls $x \neq 0$
5) $1 > 0$

# Der Absolutbetrag

**Def** Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den *(Absolut-)Betrag* von $x$ durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

**Satz 1.3** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $|xy| = |x||y|$
3) $|x - y| = |y - x|$
4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)
5) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (*Umgekehrte Dreiecksungleichung*)
6) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$