Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 9

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die folgenden Mengen. Ermitteln Sie, welche der folgenden Mengen Mannigfaltigkeiten sind, und geben sie in diesem Fall ihre Dimension an.

a) Der Rand des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$ in $\mathbb{R}^2$.

b) $\{(1,1),(e^\pi,\pi^e)\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 2xy\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)\}$

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = z^2+a\}$ für $a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2. Sei $M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen, die mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert wird.

a) Zeigen Sie, dass die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \colon \det A = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ der Kodimension 1 ist.

b) Stellen Sie $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ nahe der Einheitsmatrix E als Graph dar.

c) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $T_E\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ der Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen mit der Spur 0 ist. Ist A eine Matrix mit der Spur 0, so definiert $\gamma(t) := e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, eine Kurve in $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ mit $\gamma(0) = E$ und $\dot\gamma(0) = A$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Formel $\det e^A = e^{\mathrm{Spur}\, A}$ benutzen.

Bemerkung: $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ist ein Beispiel für eine *Lie-Gruppe*, d.h. eine Gruppe, die zugleich eine Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3. Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ zwei Untermannigfaltigkeiten. Beweisen Sie, dass $M \times N$ eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ist und geben Sie die Dimension dieser Untermannigfaltigkeit an.

Abgabe: Bis 9. Juli um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1					2			3	
	a	b	c	d	e	a	b	c		
Punkte	1	1	1	2	2	3	3	4	3	20

Präsenzaufgaben

1. Entscheiden Sie, ob die angegebene Menge M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist. Skizzieren Sie M und stellen Sie ggf. M in verschiedenen Formen dar.

a) $M = \{(t^3, t^6) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}\}$

b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^3 + x^2\}$

c) $M = \{(\cos t, \sin t, t) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in \mathbb{R}\}$

d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$

2. Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und $M \subset U$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $\Phi(M) \subset V$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

3. Sei $M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen, die mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert wird.

a) Zeigen Sie, dass die *orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \colon A^T A = E\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $T_E\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen ist.

4. Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in (a, b),\ x^2 + y^2 = \big(f(z)\big)^2\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Rotationsfläche M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie ihre Dimension.

b) Finden Sie einen Atlas für M.

c) Bestimmen sie den Tangential- und Normalenraum am Punkt $\big(f(\frac{a+b}{2}), 0, \frac{a+b}{2}\big) \in M$.