Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Schulmathematik II

× Aufgabe 1: Ableitungsregeln (1)

Leite die folgenden Funktionen ab.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Lösung: $f'(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$, wobei $x \neq 0$

Lösung: $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{x^4}$

c) $f(z) = a \cdot z^4 + \frac{b}{z^3}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(z) = 4az^3 - \frac{3b}{z^4}$

d) $f(t) = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(t) = x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t)$

× Aufgabe 2: Ableitungsregeln (2)

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit der Produkt- bzw. Quotientenregel.

a) $f(t) = t^2 \cdot \sin t$

Lösung: $f'(t) = t(2\sin(t) + t\cos(t))$

b) $f(a) = (a^2 - 1) \cdot (1 + a^2)$

Lösung: $f'(a) = 4a^3$ *(vorheriges Ausmultiplizieren vereinfacht die Aufgabe enorm)*

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, wobei $x^2 + x + 1 \neq 0$

Lösung: $f'(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

d) $f(s) = \dfrac{s^2+4s+5}{s^3}$, wobei $s \neq 0$

Lösung: $f'(s) = \dfrac{s^2+8s+15}{s^4}$

Aufgabe 3: Kettenregel

Nutze die Kettenregel zur Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = (2t+1)^3$

Lösung: $f'(t) = 6(2t+1)^2$

b) $f(x) = \sin(ax+b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(x) = a\cos(ax+b)$

Aufgabe 4: Herleitung der Quotientenregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen und sei $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Beweise die Quotientenregel $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$.

Hinweis: Die Produktregel und die Kettenregel dürfen vorausgesetzt werden.
Lösung: Zunächst ziehen wir den Bruch auseinander

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die Produktregel an. Den zweiten Ausdruck können wir mit der Kettenregel ableiten
(Dies wurde auch als Spezialfall der Quotientenregel im Vortrag behandelt.)

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot(-1)\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \ .$$

! Aufgabe 5

Gegeben seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Entwickle eine eigene Ableitungsregel für Funktionen der Form $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)^n}\right)$ mithilfe der

Quotientenregel und geschicktem Ausklammern.
Lösung:

$$\left(\frac{f}{g^n}\right)' = \frac{f' \cdot g^n - f \cdot (g^n)'}{(g^n)^2} = \frac{f' \cdot g^n - f \cdot n \cdot g^{n-1} \cdot g'}{g^{2n}}$$

Nun im Zähler g^{n-1} ausklammern und mit dem Nenner kürzen:

$$\left(\frac{f}{g^n}\right)' = \frac{g^{n-1} \cdot (f' \cdot g - n \cdot f \cdot g')}{g^{2n}} = \frac{f' \cdot g - n \cdot f \cdot g'}{g^{n+1}}$$

Aufgabe 6: Binomialkoeffizient

Berechne mit Hilfe der Definition folgende Binomialkoeffizienten:

a)

$$\binom{5}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \binom{10}{0}, \quad \binom{8}{6}$$

b)

$$\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-j}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt aus der Stochastik. Die einzelnen Summanden beschreiben dort die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Treffern, z. B. beim Würfelwurf. Der Binomialkoeffizient findet in der Stochastik viele Anwendungen.

c) Für ein Elfmeterschießen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei der Bestimmung der Kandidaten? Wie viele Möglichkeiten hat er nach Festlegung der Kandidaten zur Bestimmung der Reihenfolge der Schützen?

Lösung:

a)

$$10, \quad 20, \quad 1, \quad 28$$

b)

$$1$$

c)

$$\binom{11}{5} = 462, \qquad 5! = 120$$

Aufgabe 7: Beweise im Pascal'schen Dreieck

a) Beweise mit vollständiger Induktion, dass die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks 2^n beträgt.
Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \frac{1!}{1! \cdot 1!} + \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 2 = 2^1.$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

(a) *Induktionsvoraussetzung (IV):*
Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

(b) *Zu zeigen:*

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}.$$

(c) *Induktionsbeweis: Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \binom{n}{-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} i = \binom{n+1}{2}$. Wo findet sich diese Identität im Pascal'schen Dreieck?
Lösung: Die sogenannten Dreieckszahlen verlaufen entlang der $k = 2$ Spalte.
Induktion in Kurszform (nur Induktionsschritt):

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=0}^{n} i = (n+1) + \binom{n+1}{2} = n+1+\frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} \\ &= (n+1)(n+1)\frac{n!}{2(n-1)!} = (n+1)\left(\frac{n!}{2(n-1)!}+1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{n!}{2(n-1)!}+\frac{2(n-1)!}{2(n-1)!}\right) = (n+1)\left(\frac{n(n-1)!+2(n-1)!}{2(n-1)!}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{(n+2)(n-1)!}{2(n-1)!}\right) = \ldots = \binom{n+2}{2}\end{aligned}$$