SS 2020 Shestakov

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n$. Definiere

$$d_p\colon M \to \mathbb{R}, \qquad d_p(x) = \|p - x\|.$$

a) Zeigen Sie: Hat d_p ein Extremum im Punkt q, so steht der Vektor $p - q$ senkrecht auf M in q.

b) Unter welchen Bedingungen an M nimmt d_p sein globales Minimum an?

Aufgabe 2. Sei $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

a) Finden Sie auf γ die Punkte, die dem Punkt $(0, 3, 3)$ am nächsten liegen bzw. am weitesten von ihm entfernt sind.

b) Finden Sie den Tangential- und Normalenraum an γ in diesen Punkten. Machen Sie eine Skizze.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die extremalen Werte von $f(x, y, z) = x + y + z$ auf $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Aufgabe 4. Seien $x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_n$ beliebige positive Zahlen und $p_1, ..., p_n$ positive Zahlen mit $p_1 + ... + p_n = 1$.

a) Untersuchen Sie $f(x_1, ..., x_n) = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$ auf Extrema auf der Menge

$$M = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\colon p_1x_1 + ... + p_nx_n = 1, x_j > 0, j = 1, ..., n\}.$$

b) Leiten Sie mit Hilfe von a) die Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und dem gewichteten geometrischen Mittel her:

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1a_1 + ... + p_na_n$$

Abgabe: Bis 16. Juli um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1		2		3	4		
	a	b	a	b		a	b	
Punkte	3	2	3	3	3	3	3	20

Präsenzaufgaben

1. Finden Sie die Tangentialebenen an die Fläche $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ in den Schnittpunkten mit der Geraden $x = y = 2$. Machen Sie eine Skizze.

2. Bestimmen Sie die Tangential- und die Normalenräume an Untermannigfaltigkeiten aus der 1. Präsenzaufgabe vom letzten Übungszettel.

3. Finden Sie den Quader mit dem größten Volumen, der in die Halbkugel mit Radius R einbeschrieben ist.

4. Finden Sie auf der Ebene $x+y-2z = 0$ einen Punkt derart, dass die Summe der Quadrate der Abstände von diesem Punkt zu den Ebenen $x + 3z - 6 = 0$ und $y + 3z - 2 = 0$ minimal ist.

5. Bestimmen Sie die extremalen Werte von $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$ auf $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3\}$.

6. Seien $x_1, x_2, ..., x_n$ positive reelle Zahlen mit $x_1 x_2 \cdots x_n = q^n$, $q > 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq (1 + q)^n,$$

wobei die Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n = q$ gilt.