Übungsblatt 2

Abgabe: 29.10.2019, bis 12 Uhr

Hinweis: Achten Sie auf eine saubere Form unter Verwendung von Voraussetzung/Behauptung/Beweis!

Aufgabe 2.1. Bestimmen Sie, ob folgende Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(a). $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$.

(b). $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$.

(c). $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x \mapsto \frac{2x+5}{x+3}$.

(d). $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + 5x_2,\ x_1 + 3x_2)$.

Aufgabe 2.2. Seien A, B, C Mengen und seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a). Falls $g \circ f$ injektiv ist, so ist f injektiv.

(b). Falls $g \circ f$ surjektiv ist, so ist g surjektiv.

(c). f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $h : B \to A$ gibt mit der Eigenschaft $h \circ f = id_A$.

(d). f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $q : B \to A$ gibt mit der Eigenschaft $f \circ q = id_B$.

(e). Angenommen A und B sind endliche Mengen, welche gleich viele Element enthalten. Zeigen Sie, dass folgende Äquivalenzen gelten:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist bijektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Aufgabe 2.3. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}.$$

(a). Zeigen Sie, dass S_n mit der Verknüpfung

$$\begin{array}{rcll} S_n \times S_n & \to & S_n & \\ (\sigma, \tau) & \mapsto & \sigma \circ \tau & \text{(Komposition von Abbildungen)} \end{array}$$

eine Gruppe bildet.

(b). Ist S_3 kommutativ?

(c). Ist S_n kommutativ für $n \geq 4$?
Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i \text{ für } i \geq 4\}$.

Man nennt S_n die *symmetrische Gruppe vom Grad* n und die Elemente σ heißen *Permutationen* (Vertauschungen) der Zahlen $1, \dots, n$.

Aufgabe 2.4. Beweisen Sie:

(a). Sei $m \in \mathbb{Z}$. Die Menge $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

(b). Für alle Untergruppen $H \subseteq \mathbb{Z}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $H = m\mathbb{Z}$.
Hinweis: Wählen Sie m dafür als kleinstes positives Element in H.

Präsenzaufgabe 2.5. Seien $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen. Weiter sei $f : A \to B$ die Abbildung gegeben durch $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(a). Finden Sie ein Beispiel für A und B so, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b). Gibt es ein Beispiel für A und B mit $f : A \to B$ bijektiv?

Präsenzaufgabe 2.6. Gegeben sei die Menge $R = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ mit den Verknüpfungen $\Box : R \times R \to R$ und $\angle : R \times R \to R$ definiert durch folgende Tabellen

$\angle$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$

$\Box$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$

(a). Ist R mit diesen beiden Verknüpfungen ein Ring? Falls ja, bestimmen Sie das Null- und das Eins-Element.

(b). Warum kann es sich bei dem betrachteten Objekt nicht um $\mathbb{Z}/4$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation) handeln?

(c). Ist $(R, \Box, \angle)$ ein Körper?