15 Folgen und Grenzwerte

Folgen sind eines der zentralen Objekte in der Analysis und eines der ersten großen Themen in der Analysis I Vorlesung. Intuitiv kann man sich eine Folge als eine nicht endende Abfolge von Zahlen vorstellen, z.B. $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, mathematisch verbirgt sich hinter einer Folge eine Abbildung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge M – dazu aber gleich mehr. Die Betrachtung vom Verhalten von Folgen im Unendlichen ist in diesem Zusammenhang einer der wichtigsten Untersuchungspunkte. Genauer fragt man sich, ob eine Folge sich „im Unendlichen“ einem Wert annähert. Folgen genauer zu verstehen, sowie diesen Begriff des Grenzwerts exakter zu fassen, sind im Folgenden unsere Hauptziele.

15.1 Folgen

Wir werden als erstes den intuitiven Begriff einer Folge als „nicht endende Abfolge von Objekten“ formal und exakt definieren. Dabei werden wir dies zunächst ganz allgemein tun, was also nicht nur Folgen von Zahlen einschließt, sondern auch Folgen von allgemeineren Objekten, wie z.B. Farben:

$$(\text{rot, grün, gelb, rot, grün, gelb, } \dots)$$

Wir können uns aber zunächst ruhig immer $M = \mathbb{R}$ denken.

Definition 15.1 (Folge)
Sei M eine Menge. Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M, die jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Folgenglied a_n aus M zuordnet, das heißt

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to M \tag{15.1}$$

$$n \mapsto a_n \tag{15.2}$$

Man nennt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Das Folgenglied an der n-ten Stelle der Folge, also a_n, heißt ***n*-tes Folgenglied**. Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$ und anstatt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben wir auch einfach nur $(a_n)_n$ oder (a_n).

Im Folgenden sei nun immer $M = \mathbb{R}$. Man sollte nur stets im Hinterkopf behalten, dass das Konzept einer Folge noch allgemeiner ist und auch andere Objekte als (reelle) Zahlen als Folgenglieder auftreten können. Soweit wir nicht explizit etwas anderes schreiben, ist außerdem $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele:

1. Die Folge (a_n), definiert durch $a_n = 2n$, ist die Folge der geraden natürlichen Zahlen, d.h. $(a_n) = (2, 4, 6, 8, ...)$.
2. Durch die Abbildungsvorschrift $b_n = \frac{1}{n}$ wird die Folge $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$ definiert.
3. Durch die Rekursion $c_1 = 1,\ c_n = c_{n-1} + 1$ erhalten wir die Folge der natürlichen Zahlen: $(c_n) = (1, 2, 3, 4, ...)$.
4. (d_n) mit $d_n = \sum_{k=0}^{n} k, n \in \mathbb{N}_0$, sieht wie folgt aus: $(d_n) = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...)$

Bemerkung (Unterschied von „(a_n)" und „a_n"): Wenn wir die obigen Beispiele noch einmal ganz genau betrachten, dann sehen wir, dass an manchen Stellen „(a_n)" und an anderen Stellen „a_n" steht (für „(b_n)" und „b_n" etc. gilt dies natürlich analog). Das ist aber in keinster Weise eine inkonsistente Notation von uns, sondern es handelt sich bei diesen beiden Ausdrücken um <u>ganz verschiedene Objekte</u>! Während (a_n) eine andere Schreibweise für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>als Ganzes</u> ist, bezeichnet a_n nur <u>ein Folgenglied</u>, nämlich das n-te! So können wir wie im ersten Beispiel die <u>ganze</u> Folge (a_n) angeben, indem wir definieren, wie jedes Folgenglied a_n mit $n \in \mathbb{N}$ aussehen soll. So soll das n-te Folgenglied gerade $a_n = 2n$ sein.
Gerade am Anfang ist es unglaublich wichtig, sich diesen Unterschied klar zu machen, um diese beiden Objekte (mit sehr ähnlicher Schreibweise) nicht durcheinanderzubringen.

Genauso wie Zahlen können wir auch Folgen miteinander verknüpfen – man könnte auch sagen, mit ihnen rechnen:

Definition 15.2 (Verknüpfung von Folgen)
Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen. Die **Addition, Subtraktion, Multiplikation** und **Division** sind gliedweise definiert durch:

1. $(a_n) \pm (b_n) := (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, ...)$
2. $(a_n) \cdot (b_n) := (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, ...)$
3. $\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, ...\right)$, falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Wir weisen an dieser Stelle kurz daraufhin, dass dies mit allgemeineren Folgen nicht unbedingt möglich ist. Das Verknüpfen von Folgen setzt voraus, dass in der Menge, aus der die Folgenglieder stammen, bereits eine Verknüpfung existiert. Farben kann man zum Beispiel nicht addieren oder multiplizieren. Hier könnte man als Verknüpfung aber z.B. das Mischen von zwei Farben verwenden, aber das ist ein anderes Thema.

15.2 Eigenschaften von Folgen

Folgen können viele Eigenschaften besitzen, durch die sie charakterisiert werden und sich in ihrer grundsätzlichen Erscheinung voneinander unterscheiden. Folgend seien die wichtigsten genannt.

Definition 15.3 (Monotonie und Beschränktheit)
Sei (a_n) eine Folge. Wir sagen:

1. (a_n) ist **monoton wachsend** $:\Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
   „Die Folgenglieder werden echt größer oder bleiben gleich."

2. (a_n) ist **monoton fallend** $:\Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
   „Die Folgenglieder werden echt kleiner oder bleiben gleich."

3. (a_n) ist **nach oben beschränkt** $:\Leftrightarrow \ \exists S \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S$
   „Kein Folgenglied wird größer als eine feste Zahl $S \in \mathbb{R}$."

4. (a_n) ist **nach unten beschränkt** $:\Leftrightarrow \ \exists s \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq s$
   „Kein Folgenglied wird kleiner als eine feste Zahl $s \in \mathbb{R}$."

5. (a_n) ist **beschränkt** $:\Leftrightarrow \ \exists B \in \mathbb{R}_{\geq 0} \, \forall n \in \mathbb{N} : -B \leq a_n \leq B$
   „Alle Folgenglied liegen zwischen $-B$ und B für eine feste Zahl $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$."

Bemerkung: In obiger Definition heißt S **obere Schranke**, s **untere Schranke** und B **Schranke** von (a_n). Folgen, die nicht beschränkt sind, nennt man **unbeschränkt**.

Beispiele:

1. Die Folge (b_n) mit $b_n = (-1)^n$ ist
   - nicht monoton wachsend: $b_2 = 1 \not\leq b_3 = -1$
   - nicht monoton fallend: $b_1 = -1 \not\geq b_2 = 1$
   - beschränkt: $B := \max\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\} = 1$ ist die kleinste Schranke von (b_n)

   Bemerkung: Jedes $B \in [1, \infty)$ ist eine Schranke von (b_n).

2. Die Folge (d_n) mit dem Bildungsgesetz $d_n = \sum_{k=0}^{n} k, \ n \in \mathbb{N}_0$, ist
   - streng monoton wachsend:

$$d_n < d_{n+1} \ \Leftrightarrow \ \sum_{k=0}^{n} k < \sum_{k=0}^{n+1} k \ \Leftrightarrow \ 0 < \sum_{k=0}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k \ \Leftrightarrow \ 0 < n+1$$

- nach oben unbeschränkt:

$$\begin{aligned} &\forall S \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}_0 : n > S \\ \Rightarrow\ &\forall S \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} k > S \\ \Rightarrow\ &\forall S \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}_0 : d_n > S \\ \Rightarrow\ &\nexists S \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : d_n \leq S \end{aligned}$$

- nach unten beschränkt – die größte untere Schranke ist $s = 0$, denn:
  $s = 0$ ist offensichtlich eine untere Schranke.
  Angenommen, es existiert eine größere untere Schranke $\tilde{s} > s = 0$.
  Dann würde für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

  $$d_n \geq \tilde{s} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k \geq \tilde{s} > 0 \quad ↯ \text{ Nicht erfüllt für } n = 0$$

  Bemerkung: Jedes $s \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist aber eine untere Schranke von (d_n).

15.3 Konvergenz von Folgen

Eine sehr wichtige Eigenschaft von Folgen ist die Konvergenz. Man nennt eine Folge konvergent, wenn sie sich mit wachsendem Index immer genauer (d.h. beliebig genau) einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ annähert. Nehmen wir die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ und setzen in Gedanken immer größere Werte für $n \in \mathbb{N}$ in die Abbildungsvorschrift ein, so sehen wir, dass schon ab dem ersten Folgenglied alle Nachfolger immer kleiner werden und gegen 0 streben (auch wenn kein Folgenglied dieser Folge tatsächlich gleich 0 ist!). Wir sagen „(a_n) konvergiert gegen 0 für n gegen unendlich“ und schreiben

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Wir nennen 0 in diesem Fall den **Grenzwert** der Folge (a_n). Dies ist ein erstes Beispiel einer konvergenten Folge, wobei wir den Begriff der Konvergenz im Folgenden noch exakt definieren müssen. Denn indem man ein paar Werte einsetzt und feststellt, dass diese sich vom Gefühl her immer mehr einem festen Wert annähern, weiß man noch lange nicht, wie es sich für die anderen, nicht betrachteten Folgenglieder verhält. Wenn wir zum Beispiel bei der Folge $(b_n)_n = \big((-1)^n\big)_n$ aus dem Beispiel auf Seite 3 immer nur gerade Werte für n ausprobiert hätten, so hätten wir dort stets $a_n = 1$ erhalten. Daraus allerdings zu schließen, dass (b_n) für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, wäre fatal, da man leicht sieht, dass für ungerade n stets $b_n = -1$ gilt und sich die Folgenglieder daher nie einem festen Wert annähern werden, sondern für immer zwischen 1 und -1 „hin- und herspringen“. Dies wäre ein Beispiel für eine nicht konvergente Folge.

Wir wollen uns die formale und damit exakte Definition der Folgenkonvergenz gemeinsam aus der Anschauung heraus herleiten. Wenn man die Definition von Konvergenz das erste Mal sieht, ist diese häufig etwas erschlagend. Wenn man jedoch weiß, was sich dahinter verbirgt, weil man sich diese Definition selbst hergeleitet hat, dann ist diese schon etwas einfacher zu verstehen.

Bemerkung: Genau dies ist übrigens „Mathematik“, oder noch genauer, „wie Mathematik entsteht“. In den Vorlesungen im Studium wird man häufig mit „fertigen“ Sätzen und Definitionen konfrontiert (was insbesondere der großen Menge an Stoff in weniger Zeit verschuldet ist), die andere sehr schlaue Menschen vor vielen Jahren entwickelt haben. Man versucht dann diese Definitionen und Sätze sowie die bereits vorhandenen Beweise dieser Aussagen zu verstehen und baut sich so nach und nach seine „Mathematik-Welt“ immer weiter aus. Man darf dabei allerdings nie vergessen, dass die Definitionen und Sätze nicht vom Himmel fallen, sondern aus bestimmten Bedürfnissen heraus entwickelt wurden.

So fiel es zum Beispiel bei der Erforschung von natürlichen Zahlen einst auf, dass sich diese in zwei Gruppen unterteilen lassen – in die Zahlen, die durch zwei teilbar sind und in diejenigen, die nicht durch zwei teilbar sind. Um über diese Gruppen, die jeweils eine ganz bestimmte Eigenschaft haben, in einfacher Weise sprechen zu können, hat man sie daraufhin als „gerade“ und „ungerade“ Zahlen definiert. Genauso wollen wir es hier mit der Konvergenz machen. Wir haben uns anschaulich überlegt, dass manche Folgen die Eigenschaft besitzen, sich immer mehr einer festen Zahl anzunähern. Unser Ziel ist es im Folgenden diese Anschauung zu konkretisieren und uns aus dieser eine stichhaltige Definition herzuleiten.

15.3.1 „Herleitung“ der Definition der Folgenkonvergenz

Wie am Ende der vorigen Bemerkung erwähnt, wollen wir nun versuchen, uns aus unserer intuitiven Anschauung von Konvergenz die formale Definition der Folgenkonvergenz „herzuleiten“. Betrachten wir dazu als erstes die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$:

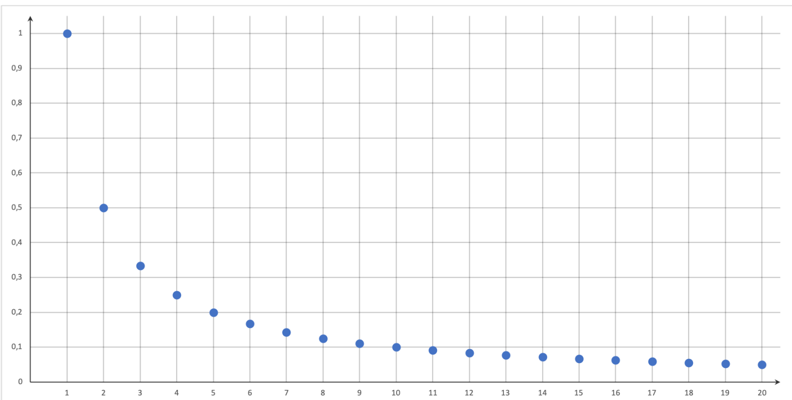

Abbildung 15.1: Die ersten Folgenglieder von $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$.

Wie könnten wir in dieser Skizze nun charakterisieren, dass sich die Folge (a_n) *immer genauer der* 0 *annähert*? Dass also die Abstände der Folgenglieder a_n zur 0 immer kleiner werden? (Achtung: damit meinen wir nicht, dass a_n monoton fallend sein muss!)
Eine Idee ist, dass wir uns eine Barriere bei einer positiven Zahl $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ziehen und diese dann nach und nach immer kleiner machen, also näher an 0 heranlegen. Wenn unsere Folge (a_n) dann bei jeder noch so kleinen Barriere ab irgendeinem Folgenglied unter der Barriere liegt, so bedeutet das gerade, dass sich (a_n) immer mehr der 0 annähert. In einer Skizze sähe das für $c = 0{,}3$ und $c = 0{,}15$ so aus:

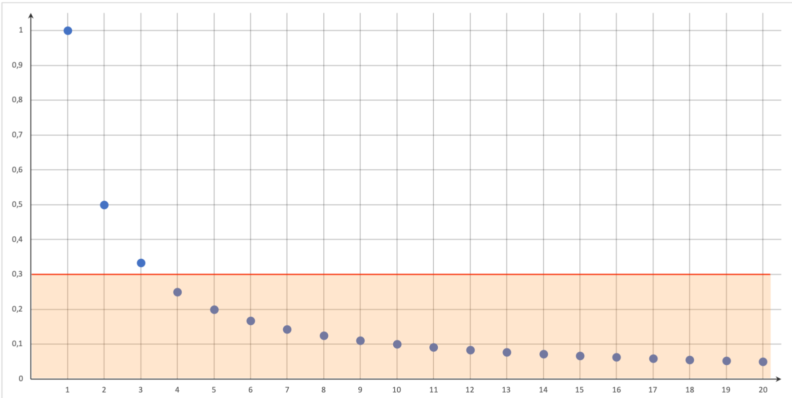

Abbildung 15.2: Die ersten Folgenglieder von $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ mit einer Barriere bei $c = 0{,}3$.

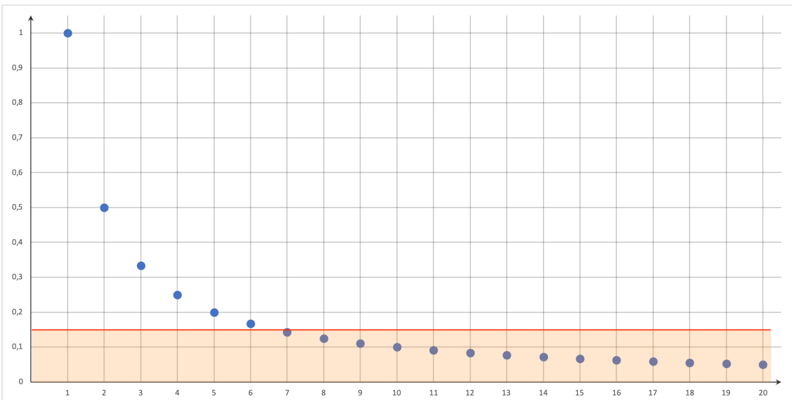

Abbildung 15.3: Die ersten Folgenglieder von $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ mit einer Barriere bei $c = 0{,}15$.

Wir können uns das also so vorstellen, dass wie unsere Folge ab einem bestimmten Index in einem beliebig kleinen Bereich zwischen 0 und unserer Barriere einkesseln können (je kleiner der Bereich ist, desto größer ist in der Regel der minimale Index, ab dem die Folge in dem Bereich liegt). In den oberen beiden Beispiel-Skizzen konnten wir bei $c = 0{,}3$ den Index, ab dem alle Folgenglieder in dem Bereich zwischen 0 und der Barriere c liegen, bei $n_0 = 4$ wählen. Betrachten wir allerdings die kleinere Barriere $c = 0{,}15$, so würde $a_4 = \frac{1}{4}$ schon nicht mehr in dem markierten Bereich liegen und wir müssten mindestens den Index $n_0 = 7$ wählen, um mit allen weiteren Folgengliedern in dem Bereich zu landen.

Für diese Folge scheint dies also ein guter Ansatz zu sein. Doch wie sieht es mit anderen Folgen aus? Betrachten wir eine so genannte alternierende Folge. Eine solche ist beispielsweise (b_n), mit $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Wir können diese Folge zur Anschauung skizzieren und stellen dabei fest, dass es im Wesentlichen unsere Folge (a_n) von eben ist, nur dass die Folgenglieder von (b_n) abwechselnd (alternierend) ein positives und negatives Vorzeichen haben:

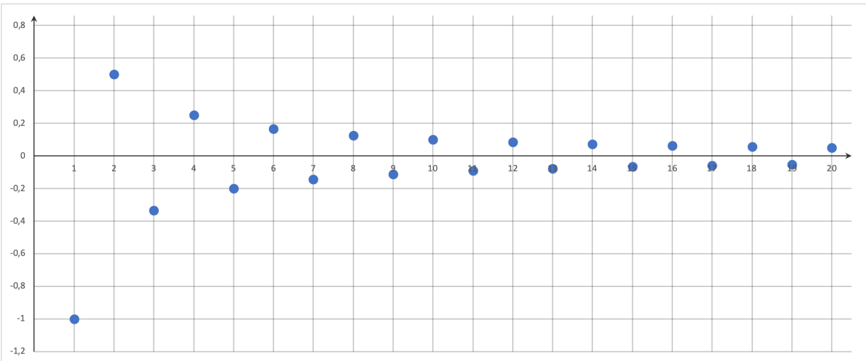

Abbildung 15.4: Die ersten Folgenglieder von (b_n) mit $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Zeichnen wir nun auch hier wieder eine Barriere bei $c = 0{,}3$ ein, so sehen wir, dass unser zuvor erarbeitetes Konzept in diesem Fall noch nicht ganz unserer Vorstellung von Konvergenz entspricht. Denn bei (b_n) gibt es nun auch Folgenglieder, die unterhalb des Grenzwertes 0 liegen.

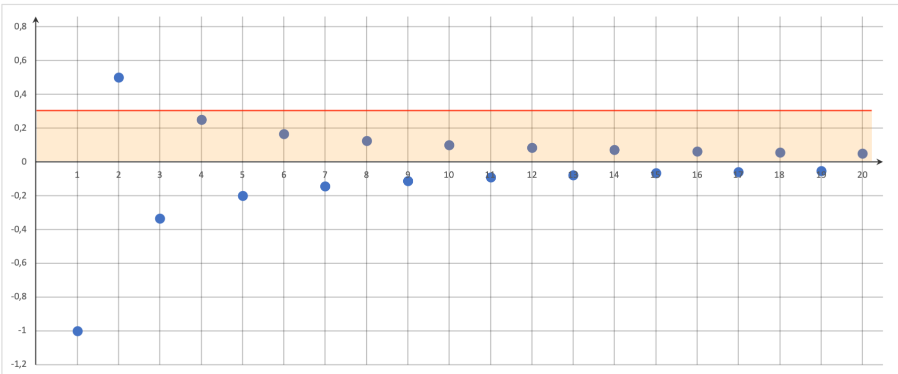

Abbildung 15.5: Die ersten Folgenglieder von (b_n) mit $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ mit einer Barriere bei $c = 0{,}3$

Auch wenn diese Folge genau wie die Folge (a_n) von unserer Vorstellung her gegen 0 konvergieren sollte, wird kein negatives Folgenglied durch eine Barriere eingekesselt. Können wir also unseren bisher erarbeiteten Ansatz abwandeln oder ausbauen, sodass auch Folgen berücksichtigt werden, bei denen Folgenglieder kleiner als der Grenzwert sind? Die Antwort lautet „ja“ und ist simpler als vielleicht gedacht: Anstatt nur Barrieren oberhalb unseres Grenzwertes 0 anzuschauen, betrachten wir gleichzeitig eine Barriere oberhalb und eine unterhalb des Grenzwertes, jeweils in gleichem Abstand zu dem Grenzwert. Wenn wir unsere Skizze von zuvor entsprechend ergänzen, erhalten wir nun einen Bereich zwischen unseren beiden Barrieren, der im Falle einer (intuitiv) konvergenten Folge die Folgenglieder ab einem Index einkesselt.

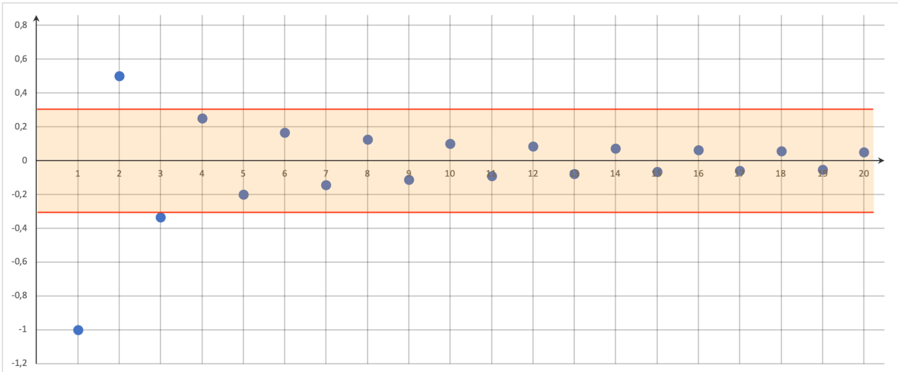

Abbildung 15.6: Die ersten Folgenglieder von (b_n) mit $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ mit einer Barriere bei $c = 0{,}3$ und einer bei $-c = -0{,}3$

Der einkesselnde Bereiche ist nun also nicht mehr zwischen einer Barriere und dem Grenzwert, sondern zwischen zwei Barrieren, die symmetrisch um den Grenzwert herumliegen. Dies scheint jetzt bereits ein ziemlich guter Ansatz zu sein. Wenn wir uns irgendeine Folge vorstellen, die sich der 0 immer mehr annähert, und uns einen noch so kleinen einkesselnden Bereich um die 0 herum erdenken, so würden wir trotzdem immer irgendein Folgenglied finden können, ab dem alle weiteren Folgenglieder in dem Bereich bleiben, da sich die Folge ja immer mehr der 0 annähert.
Soweit so gut. Was passiert nun, wenn wir eine Folge betrachten, die nach unserem intuitiven Verständnis gegen einen Wert ungleich 0 konvergiert? Ist unser Ansatz für solche Folgen auch anwendbar? Ja, wir müssen unsere Barrieren in diesem Fall bloß nicht mehr symmetrisch um 0 legen, sondern symmetrisch um den neuen Grenzwert der Folge. Wir können uns dies anschaulich an der Folge (c_n), mit $c_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ überlegen. Diese Folge ist nichts anderes als ein Verschub der Folge (b_n) um 2 (anschaulich in Abbildung 15.6 wird sie nach oben verschoben). Sie sollte also inbesondere immer noch konvergieren, nun allerdings gegen 2 und nicht mehr gegen 0. Wir können unsere obige Skizze 15.6 recht einfach auf diesen Fall übertragen:

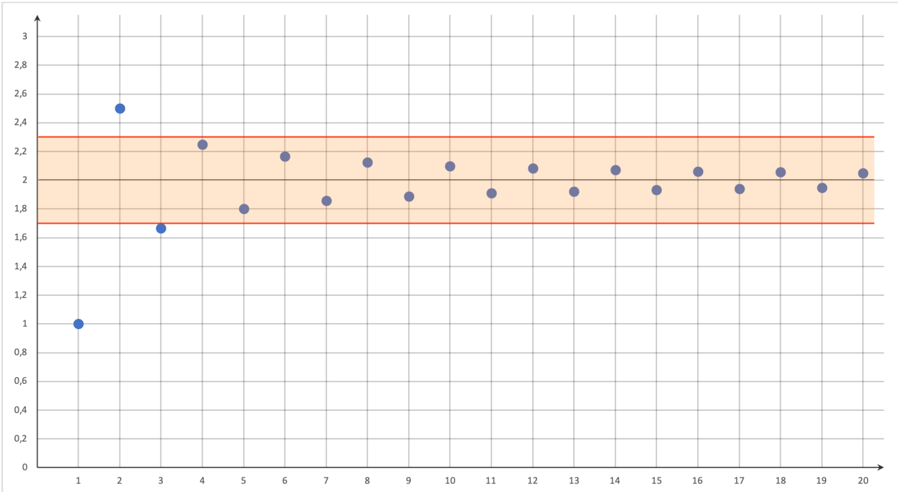

Abbildung 15.7: Die ersten Folgenglieder von (c_n) mit $c_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ mit einer Barriere bei $c = 2{,}3$ und einer bei $-c = 1{,}7$

Bis jetzt sieht unser Ansatz also sehr vielversprechend aus. Eine letzte Sache bleibt noch zu prüfen: Bei Folgen, die nach unserer intuitiven Anschauung nicht konvergieren, sollte auch unser Ansatz eine „Nicht-Konvergenz“ liefern.

Bemerkung: Eine nicht konvergente Folge nennt man **divergent** und das Gegenteil der Konvergenz ist entsprechend die **Divergenz**.

Was bedeutet es für uns intuitiv, dass eine Folge nicht konvergiert, also nicht einem Wert immer näher kommt? Wenn eine Folge sich an keinen Wert annähert, bedeutet dies, dass wir keinen Wert finden können, um den wir unsere beliebig kleinen Barrieren legen können und mit diesen noch so kleinen Barrieren alle Folgenglieder ab irgendeinem Index einkesseln können. Sobald wir unsere Barrieren ausreichend klein gewählt haben, heißt das also, dass wir immer wieder Folgenglieder finden werden, die außerhalb dieser Barrieren liegen – egal wie weit wir in der Folge fortschreiten. Dies veranschaulicht folgende Skizze der divergenten Folge (d_n), welche definiert sei durch $d_n = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$.

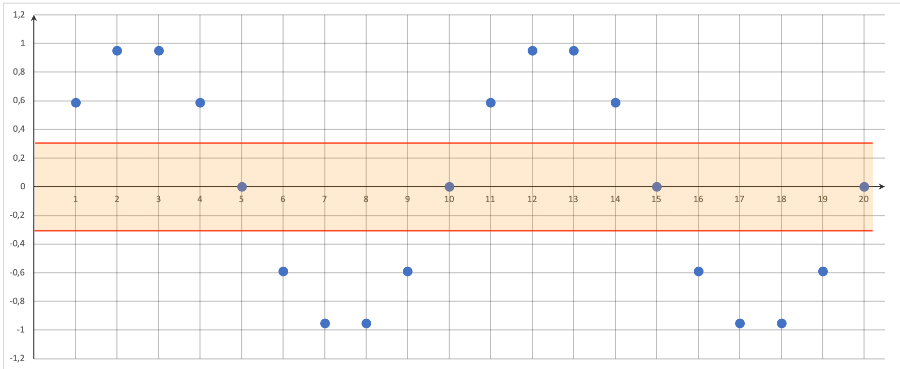

Abbildung 15.8: Die ersten Folgenglieder von (d_n) mit $d_n = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ mit einer Barriere bei $c = 0{,}3$ und einer bei $-c = -0{,}3$

Ein anderes Beispiel sind alternierende Folgen, wie (e_n), mit $e_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (siehe Abb. 15.9). Diese Folge ist nach unserem Verständnis divergent, da es keinen Wert gibt, dem sie sich immer mehr annähert. Einige Folgenglieder streben gegen 1, andere gegen -1 (man spricht dabei auch von sogenannten „Teilfolgen“, das wird aber in Analysis I noch genauer behandelt). Es gibt aber keinen Wert, weder 1, noch 0 oder -1, dem sich die gesamte Folge für größer werdenden Index immer mehr annähert.

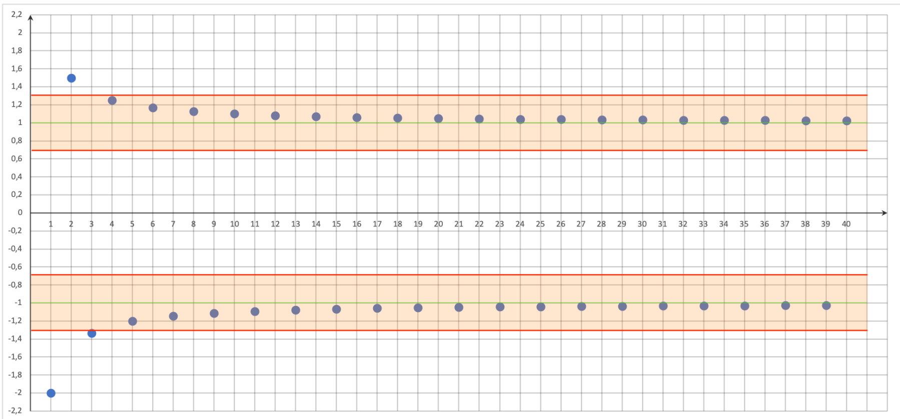

Abbildung 15.9: Die ersten Folgenglieder von (e_n) mit $d_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ mit Barrieren um 1, und um -1.

Es scheint damit so, dass der von uns entwickelte Ansatz unsere intuitive Vorstellung von Konvergenz widerspiegelt. Dies liefert eine erste intuitive Definition:

Intuitive Definition (Folgenkonvergenz)
Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ heißt konvergent, wenn gilt:

Zu jedem noch so kleinen Barrierenpaar gibt es ein Folgenglied, ab dem alle weiteren Folgenglieder von den Barrieren eingekesselt werden.

Nun geht es darum, diesen anschaulichen Ansatz formal sauber aufzuschreiben. Dazu stellen wir uns die folgende Frage: Wie haben wir in unserem anschaulichen Ansatz mit den Barrieren die Konvergenz charakterisiert?

In unserem Ansatz haben wir gesagt, dass eine Folge (a_n) gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, falls wir für jedes Barrierenpaar mit noch so kleinem Abstand ε zu a einen Index n_0 finden können, sodass alle Folgenglieder ab a_{n_0} zwischen unseren Barrieren liegen (vgl. Abb. 15.10). Dies können wir nun wie folgt umformulieren:

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$, falls wir
für jeden noch so kleinen Wert $\varepsilon > 0$ ($\widehat{=}$ Barrierenabstand zu a)
einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ finden können,
sodass für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ gilt:
der Abstand von a_n zu a ist kleiner als ε.

In der Skizze übersetzt sich dann der Bereiche zwischen den Barrieren in zwei übereinander liegende „ε-Streifen“, einer über und einer unter dem Grenzwert a.
Damit können wir unsere soeben in Worten formulierte (aber bereits exakte) Definition der Konvergenz in eine formale Definition übersetzen:

Definition 15.4 (Folgenkonvergenz)
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.
Wir definieren:

$$(a_n) \textbf{ konvergiert} \text{ gegen } a \in \mathbb{R} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Die eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Folge (a_n).

Folgen ohne Grenzwert heißen **divergent**.

Bemerkung: Der in unserer obigen sprachlich ausformulierten Definition auftauchende Abstand entspricht in dieser formalen Definition dem Betrag der Differenz von a_n und a, also $|a_n - a|$.

Definition 15.5 (Nullfolge)
Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 nennt man **Nullfolge**.

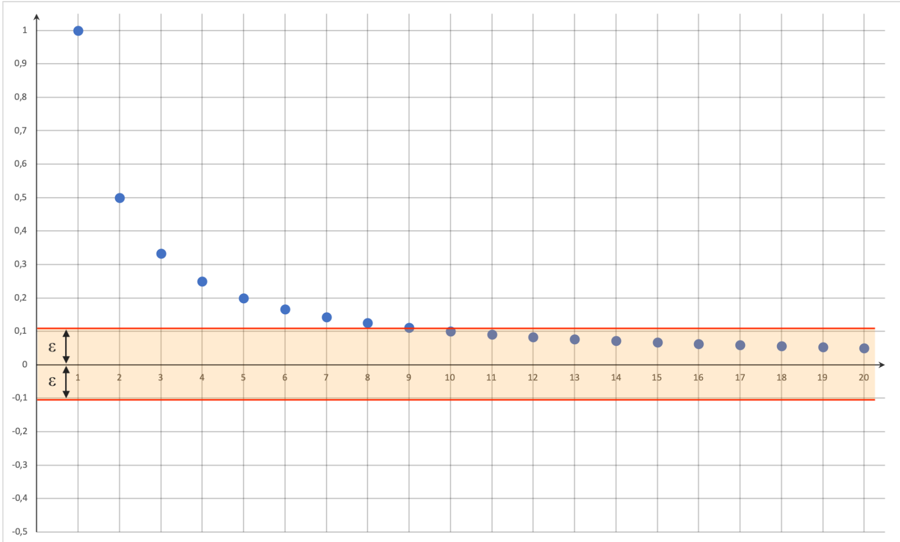

Abbildung 15.10: Die ersten Folgenglieder von (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ mit einem ε-Streifen der Breite $\varepsilon = 0{,}11$ um $a = 0$.

Bei der Untersuchung von Folgenkonvergenz ist folgendes Axiom oft hilfreich:

Axiom 15.6 (Archimedisches Axiom)
Zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > a$.

Dies ist intuitiv total klar: egal, welche natürliche Zahl ich betrachte, ich kann diese beispielsweise aufrunden und 1 hinzuaddieren und erhalte so eine natürliche Zahl, die größer ist als meine gewählte reelle Zahl.

Wir wollen nun zwei Beispiele zur Folgenkonvergenz betrachten, und mittels unserer aufgestellten Definition der Konvergenz die Konvergenz formal nachweisen.

Beispiele:

1. **Behauptung:** Die uns mittlerweile gut bekannte Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. (Achtung: ε wird hier zwar beliebig aus $\mathbb{R}_{>0}$ gewählt, ab diesem Moment ist es aber fest!). Wir müssen als erstes zumindest ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, für das $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ gilt, also $\left|\frac{1}{n_0} - 0\right| = \frac{1}{n_0} \overset{!}{<} \varepsilon$
   Umstellen dieser Ungleichung ergibt:

$$\frac{1}{n_0} \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n_0$$

Da $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ ist, gibt es nach dem Archimedischen Axiom eine natürliche Zahl n_0, sodass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ also so, dass es diese Ungleichung erfüllt. Wir müssen nun zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ebenfalls $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ gilt.

> Achtung: Sollte sich herausstellen, dass dies nicht gilt, heißt das <u>noch nicht</u>, dass die Folge nicht konvergiert! Vielleicht ist n_0 auch einfach noch zu klein gewählt und mit einem größeren n_0 würde obige Gleichung für alle größeren n gelten.

Sei also $n \geq n_0$. Dann gilt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n_0} \overset{(**)}{<} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \tag{15.3}$$

(∗) Da $n \geq n_0$.

(∗∗) Da $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Damit haben wir gezeigt, dass die Folge (a_n) konvergiert. □

Bemerkung: In der Praxis macht man es bei einem Konvergenzbeweis häufig so, dass man das n_0 gar nicht am Anfang bestimmt. Vielmehr stellt man sich zu Beginn vor, dass man dieses n_0 bereits gewählt hat, und findet bei der Rechnung (15.3) heraus, was für das n_0 gelten muss. In unserem Fall hätten wir zum Beispiel an der Stelle von (∗∗) herausgefunden, dass $\frac{1}{n_0}$ kleiner sein muss, als ε bzw. dass n_0 größer sein muss als $\frac{1}{\varepsilon}$. Unser n_0 hätten wir uns dann an dieser Stelle erst wirklich gesetzt. Man kann bei diesem Vorgehen aber gerne am Anfang (da, wo wir im Beweis das n_0 bestimmt haben) einen Platzhalter notieren, z.B. „Setze $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 >$." oder „Setze $n_0 =$ ". An die freie Stelle trägt man dann am Ende die Bedingung an n_0 ein, die man im Laufe seines Beweises herausgefunden hat und tut im Anschluss so, als ob man diese Bedingung schon von Anfang an wusste. Dadurch erspart man sich beim Erarbeiten des Beweises doppelte Arbeit und erreicht am Ende trotzdem eine logisch schlüssige Struktur für seinen Beweis.

Bemerkung: Es ist so gut wie immer das Ziel, den Ausdruck $|a_n - a|$ in einen Ausdruck zurückzuführen, in dem nur noch (das feste) n_0 und nicht mehr (das variable) n auftritt.

Was grundsätzlich bei Beweisen im Zusammenhang mit Folgenkonvergenz häufig hilft, ist sich eine Skizze der Folge zu machen und bei (vermuteter) Konvergenz den ε-Streifen einzuzeichnen (vgl. Abb. 15.10).

In Abbildung 15.10 sind die ersten 20 Folgenglieder von (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ eingezeichnet. Ein Abstandsstreifen um den Grenzwert 0 mit $\varepsilon = 0,11$ ist farblich markiert. Bezeichne wieder mit n_0 den Index desjenigen Folgengliedes, ab dem neben ihm auch alle Nachfolger zum Grenzwert 0 einen Abstand kleiner ε aufweisen. Es lässt sich leicht ablesen:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 2 &\rightsquigarrow n_0 \geq 1 \\ \varepsilon = 1 &\rightsquigarrow n_0 \geq 2 \\ \varepsilon = 0.3 &\rightsquigarrow n_0 \geq 4 \\ \varepsilon = 0.1 &\rightsquigarrow n_0 \geq 11 \end{aligned}$$

2. **Behauptung:** Die Folge (b_n) mit $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n} - \dfrac{\pi}{3}$ konvergiert gegen den Grenzwert $b = -\dfrac{\pi}{3}$.
Auch diese Folge schauen wir uns zunächst in einer Skizze an:

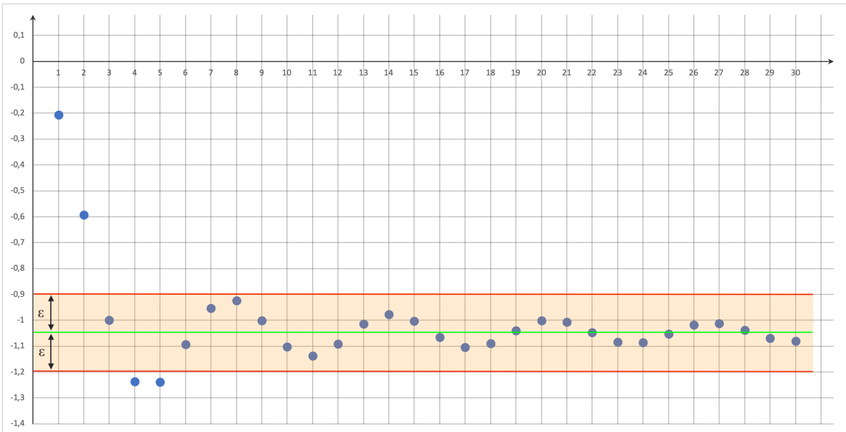

Abbildung 15.11: Die ersten Folgenglieder von (b_n)
mit ε-Streifen ($\varepsilon = 0.15, n_0 = 6$)

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (das rote würden wir an dieser Stelle noch leer lassen, uns vorstellen, wir wüssten schon, wie wir n_0 gesetzt haben, und diese Stelle erst im weiteren Beweisverlauf ergänzen).
Für alle $n \geq n_0$ folgt:

$$|b_n - b| = \left| \frac{\sin(n)}{n} - \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right| = \frac{|\sin(n)|}{|n|} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n} \overset{(**)}{\leq} \frac{1}{n_0} \overset{(***)}{<} \varepsilon$$

(∗) Da $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(∗∗) Da $n \geq n_0$.

(∗ ∗ ∗) An dieser Stelle finden wir heraus, dass wir $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ setzen müssen, um unser Ziel zu erreichen, also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Das ergänzen wir nun am Anfang.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

15.4 Grenzwerte

Den Begriff *Grenzwert* kennen wir nun schon von der *Folgenkonvergenz* als den Wert, gegen den eine konvergente Folge strebt. Es ist allerdings nicht immer offensichtlich, ob eine Folge konvergiert, und wenn man lediglich weiß, dass eine Folge konvergiert aber nicht gegen welchen Wert, so kann man der Folge ihren Grenzwert oftmals nicht einfach ansehen. Es wäre allerdings sehr mühselig, immer nur einen Grenzwert a zu raten und anhand der Definition zu überprüfen, ob a tatsächlich der eindeutige Grenzwert ist (falls er überhaupt existiert!). Es wäre viel einfacher und zielführender, wenn man die Darstellung eines (allgemeinen) Folgengliedes a_n so umformen könnte, dass man diesem dann den Grenzwert ansehen kann. Was wir damit meinen, werden wir im folgenden Beispiel sehen.

Beispiele: Wir wollen den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{7n^2-3}{n^2}$ bestimmen, sofern dieser existiert. Zunächst können wir der Folge nicht so einfach ansehen, ob sie konvergiert (mit ein bisschen Übung kann man das bei dieser Folge später sogar, aber das braucht etwas Zeit). Wir können aber versuchen, den Ausdruck für a_n umzuformen, sodass wir (hoffentlich) den Grenzwert leichter ablesen können (oder erkennen, dass die Folge nicht konvergiert):

$$a_n = \frac{7n^2-3}{n^2} = \frac{n^2\left(7-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2} = 7 - \frac{3}{n^2} = 7 - 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

An dieser Stelle haben wir den Ausdruck für a_n auf einen Ausdruck zurückgeführt, in dem wir die Konvergenz von dessen Komponenten (d.h. 7, 3 und $\frac{1}{n}$ beurteilen können und deren einzelne Grenzwerte kennen. Wenn wir jetzt diese einzelnen Grenzwerte bilden und entsprechend zusammenrechnen dürften, um den Grenzwert der gesamten Folge a_n zu erhalten, wären wir fertig. Die Frage ist also, ob folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(7 - 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}(7) - \lim_{n\to\infty}(3) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 7 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = 7$$

Die Antwort, dass genau dies geht (und wir daher soeben richtig hergeleitet haben, dass (a_n) gegen 7 konvergiert), gibt uns der folgende Satz.

Satz 15.7
Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Folgen $(a_n + b_n)$ und $a_n \cdot b_n)$ ebenfalls konvergent und es gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

Falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $b \neq 0$ gilt, so konvergiert auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ und es gilt:

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

Bemerkung: Obiger Satz ist auch mit der Situation $a, b \in \{\pm\infty\}$ verträglich.

Wir sagen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es zu jeder noch so großen Zahl $c \in \mathbb{R}$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass ab diesem Index (also für alle $n \geq n_0$) gilt, dass $a_n \geq c$ ist. Analog für $-\infty$.

Aber Achtung: $\infty \cdot 0$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist nicht definiert – allgemein sollte man bei Rechnung mit ∞ immer sehr vorsichtig sein und ∞ sollte ausgeschrieben auch immer nur als Grenzwert auftauchen (jedenfalls zur Zeit noch)! Es gilt aber zum Beispiel die Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$ (vergleiche beispielsweise $\frac{1}{\infty} = 0$ als Grenzwert der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$).

Der Grenzwert von Folgen, deren Abbildungsvorschrift als Bruch gegeben ist und Potenzen von n enthält, lässt sich meist einfach ausrechnen. Gehe dazu wie folgt vor:

- Klammere n^p im Zähler aus, wobei p die größte Potenz von n im Zähler sei.
- Klammere n^q im Nenner aus, wobei q die größte Potenz von n im Nenner sei.
- Kürze und bilde den Grenzwert mit Satz 15.7

Vergleiche hierzu auch nochmals das bereits oben betrachtet Beispiel, welches wir im Folgenden noch einmal komplett in „Limes-Notation“ aufgeschrieben haben.

Bemerkung (Limes-Notation): Die Limes-Notation sollte man nur dann verwenden, **wenn man schon weiß, dass die Folge konvergiert**. Dies wird leider auch von vielen „fortgeschrittenen“ Studierenden nicht konsequent gemacht. Die einzige Ausnahme ist, wenn die Folge gegen ∞ divergiert. In diesem Fall ist die Limes-Notation auch in Ordnung – man sagt für die Konvergenz gegen ∞ auch, dass die Folge **bestimmt divergent** ist.

Beispiele:

1. Wir wollen erneut den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{7n^2-3}{n^2}$ (mit obigen Rechenregeln) bestimmen. Da wir ja bereits wissen, dass die Folge konvergiert, können wir sofort die Limes-Schreibweise verwenden:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(7-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{3}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 7 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 7 - \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty}(n)\cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n)}\\ &= 7 - \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 7 - 3\cdot 0\cdot 0 = 7\end{aligned}$$

2. Existiert der Grenzwert der Folge (b_n) mit $b_n = \frac{9n^3-\cos(n)}{99\pi n^2+500n}$?
Hier sollten wir zunächst nicht mit dem Limes arbeiten, da wir noch nicht wissen ob die Folge konvergiert (oder bestimmt divergiert).
$$\begin{aligned}b_n &= \frac{9n^3-\cos(n)}{99\pi n^2+500n} = \frac{n^3\left(9-\frac{\cos(n)}{n^3}\right)}{n^2\left(99\pi+\frac{500}{n}\right)} = \frac{n^3}{n^2}\cdot\frac{9-\frac{\cos(n)}{n^3}}{99\pi+\frac{500}{n}}\\ &= n\cdot\frac{9-\frac{\cos(n)}{n^3}}{99\pi+\frac{500}{n}} \overset{(*)}{\approx} n\cdot\frac{9}{99\pi}\end{aligned}$$
Hier erkennen wir jetzt, dass $n\cdot\frac{9}{99\pi}$ für $n\to\infty$ gegen ∞ strebt. Es gilt also:
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{9}{99\pi} = \infty$$
Die Folge (b_n) ist somit (bestimmt) divergent.
Zu $(*)$: $\dfrac{\cos(n)}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, da $\cos(n)\in[-1,1]$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\dfrac{1}{n^3}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. Von der Folge (c_n), definiert durch $c_n = (-1)^n$, wissen wir schon, dass sie divergiert. Hier kann es keinen eindeutigen Grenzwert geben, da
$$c_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \textsf{falls } n \textsf{ gerade}\\ -1, & \textsf{falls } n \textsf{ ungerade}\end{cases}$$

Zum Abschluss eine Warnung: Bitte den Limes nur dort „auseinanderziehen“, wo es gemäß Satz 15.7 erlaubt ist! Zum Beispiel gilt:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n}$$

Autoren dieses Kapitels:

2019: Nils Näthke