Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 11

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz auf E_1 und E_2:

a) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+2n+x}$, $\quad E_1 = [0,1]$, $\quad E_2 = [1,+\infty)$

b) $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^2}{1+k^{\frac{3}{2}}x^2}$, $\quad E_1 = \mathbb{R}$. Ist die Grenzfunktion stetig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f ist auf jedem Intervall $[a,+\infty)$, $a > 0$, gleichmäßig stetig.

b) Die Funktion f ist auf jedem Intervall $(0,a]$, $a > 0$, nicht gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $\xi \in I$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine reelle Konstante K und eine punktierte δ-Umgebung $\dot{U} := \{x\colon 0 < |x-\xi| < \delta\}$ von ξ derart, dass für alle $x \in \dot{U} \cap I$ die Ungleichung
$$|f(x) - f(\xi)| < K|x-\xi|$$
gilt.

b) f ist stetig in ξ.

Aufgabe 4.

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Schreiben Sie die Gleichung der Tangente an f in Punkten $(1,1)$ und $(2,8)$ auf. Machen Sie eine Skizze.

b) Unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in \mathbb{R}$ stimmt eine Tangente an den Graphen von $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit der x-Achse überein?

Abgabe: Bis 17. Januar vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1		2		3		4		
	a	b	a	b	a	b	a	b	
Punkte	4	3	2	2	3	2	2	2	20

Präsenzaufgaben und Anregungen

1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f, f_n \colon D \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, so dass $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf D gegen f konvergieren.

2. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf gleichmäßige Konvergenz auf X,X_1 und X_2, wenn

   a) $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$, $X = [0, +\infty)$

   b) $f_n(x) = \frac{xn}{n+x^n}$, $X_1 = (0, 1)$, $X_2 = (1, +\infty)$

   c) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $X_1 = [0, 1]$, $X_2 = [1, +\infty)$

3. Untersuchen Sie die Funktion f auf gleichmäßige Stetigkeit auf X, falls:

   a) $f(x) = \ln x$, $X = (0, 1)$

   b) $f(x) = \sin x$, $X = \mathbb{R}$

   c) $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$

4. Man beweise oder widerlege:

   a) ? $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow fg$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$?

   b) ? Eine stetige Funktion bildet Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab. ?

   c) ? Jede beschränkte stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig. ?

   d) ? Wenn eine Funktion f in einem Punkt x_0 eine Ableitung besitzt, aber die Funktion g keine, hat die Funktion $f + g$ keine Ableitung in x_0. ?

   e) ? Wenn die Funktionen f und g in einem Punkt x_0 keine Ableitung besitzen, hat die Funktion $f + g$ keine Ableitung in x_0. ?

5. Finden Sie eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0)), x_0 \neq 0$, die x-Achse im Punkt $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$ schneidet, für alle $x_0 \neq 0$.

6. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}$ und finden Sie die Ableitungen, wo es möglich ist:

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ |x| - 1, & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$

   b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$