SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 3

Abgabefrist: bis zum 14.05.2020 um 10 Uhr (als PDF-Datei an den zuständigen Tutor)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^1 x\sqrt{1-x}, \quad \text{(b)} \int_0^3 |1-x^2|\, dx.$$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)
Berechnen Sie die Flächeninhalte folgender Figuren Ω:

1. $\Omega = \big\{(x,y) : \quad x^2 \le y \le 2+x\big\}$,
2. $\Omega = \big\{(x,y) : \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\big\}$ wobei $a > 0$ und $b > 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und monoton steigend. Beweisen Sie, dass ein $\xi \in [a,b]$ existiert mit

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f.$$

Hinweis: Nutze den Mittelwertsatz für $\displaystyle\int_a^b Fg'$ mit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$.

Aufgabe 4 (3+2+1 Punkte)
Sei $T > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und T-periodisch: $f(x+T) = f(x)$ für alle x.

1. Beweisen Sie, dass $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
2. Sei $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$. Beweisen Sie, dass es eine Konstante $A \in \mathbb{R}$ existiert, für die die Funktion $x \mapsto F(x) - Ax$ T-periodisch ist.
3. Ist die Funktion $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^{12345}(t)\, dt$ 2π-periodisch?

Präsenzaufgaben

1. (a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

   (b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}.$$

2. Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\, dx, \quad \int_1^e (x \ln x)^2\, dx.$$

3. (a) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie die Identität

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx.$$

   Hinweis: nutze die Substituion $y = \pi - x$.

   (b) Berechnen Sie

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

4. Berechnen Sie die Flächeninhalte folgender Figuren Ω (eine Zeichnung kann hilfreich sein!):

   (a) $\Omega = \big\{(x,y) : x^2 \le y \le \sqrt{x}\big\}$,

   (b) $\Omega = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 2\pi,\ \sin x \le y \le \cos x\big\}$.

5. Bezeichne $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Zeigen Sie (ohne viel Rechnung), dass (I_n) eine monotone Folge ist.

   (b) Berechnen Sie I_0 und I_1.

   (c) Für $n \ge 2$ zeigen Sie die Rekursionsformel $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ und dann berechnen Sie I_n für alle n.

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$