Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Def Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n, f\colon D \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen f, falls für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\forall x \in D\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Eine Funktionenfolge nennt man *gleichmäßig konvergent* auf D, falls sie gegen eine Grenzfunktion auf D gleichmäßig konvergiert.

Satz 4.12 Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n, f\colon D \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn alle f_n stetig sind und f_n gleichmäßig auf D gegen f konvergiert, dann ist f stetig auf D.

Def Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konvergiert *gleichmäßig auf* $D \subset \mathbb{R}$, falls die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x) =: f(x)$ für jedes $x \in D$ konvergiert und die Folge der Partialsummen $f_n = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 4.13 (Weierstraß -Kriterium) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $g_k\colon D \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wenn es eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|g_k(x)| \leq a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und für alle } x \in D$$

und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ gleichmäßig auf D.
Insbesondere ist die Summe $f := \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ stetig, falls alle g_k stetig sind.

Satz 4.14 Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$.

Wenn $0 < r < R$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ gleichmäßig auf $\{x : |x| \leq r\}$. Außerdem ist die Funktion $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ stetig für $|x| < R$.