Test 2 zur Selbstkontrolle „Analysis I“

Vorbemerkung: Dieser Test enthält Aufgaben zu folgenden Themenbereichen: Konvergenz von Folgen, unendliche Reihen, Stetigkeit. Er dient zur Selbstkontrolle und wird nicht benotet. Nehmen Sie sich bitte Zeit und bearbeiten diese Aufgaben ohne Hilfsmittel. Dann lassen Sie bitte Ihren Test vom Übungspartner korrigieren. Dafür werden Musterlösungen in StudIP zur Verfügung gestellt. Nehmen Sie bitte diese Gelegenheit der Wiederholung ernst, auch als Klausurvorbereitung.
Bearbeitungszeit: 70 Minuten

Aufgabe 1.

a) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

   i) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$
   ii) $a_n = \frac{3n^2+n}{\ln(3^{n^2})}$

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

   i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere und es gelte $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   ii) Hat eine monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Teilfolge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Aufgabe 2.

a) Formulieren Sie das Leibniz-Kriterium. Geben Sie ein Beispiel für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^n)}{n^4}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 3.

a) Geben Sie die Definition der Stetigkeit einer Funktion f im Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs an:

   - mittels Folgen
   - ε-δ-Definition

b) Entscheiden Sie, ob es Zahlen a und b gibt, so dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x \leq 1, \\ x^2+ax+b, & \text{falls } 1 < x < 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{5}{2}, & \text{falls } x \geq 2, \end{cases}$$
stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

   i) Jede stetige beschränkte Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Supremum an.
   ii) Nimmt eine stetige Funktion die Werte 1 und 3 an, so nimmt sie auch den Wert 2 an.

d) Definieren Sie $3^{\sqrt{2}}$.