

# Mengenlehre

## × Aufgabe 1: Mengen

Gib die folgenden Mengen in auflistender Schreibweise an.

- a)  $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 15 \text{ und } n \geq 5\}$
- b)  $B = \{\frac{z^2+z}{2} + 5 \mid -4 \leq z \leq 4, z \in \mathbb{Z}\}$
- c)  $C = \{M \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : 3 \in M\}$
- d)  $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } m \in B \text{ gilt } n < m.\}$
- e)  $\tilde{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es existiert mindestens ein } m \in B, \text{ für das } n < m \text{ gilt.}\}$

*Lösung:*

- a)  $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- b)  $B = \{5, 6, 8, 11, 15\}$
- c)  $C = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- d)  $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- e)  $\tilde{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

## × Aufgabe 2: Intervalle

In den reellen Zahlen arbeiten wir häufig mit „zusammenhängenden Bereichen“, den **Intervallen**.

### Definition I

Seien  $a, b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$ , sodass  $a < b$  gilt. Dann definieren wir die folgenden **Intervalle**:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (**abgeschlossenes Intervall**)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  (**rechtsseitig halboffenes Intervall**)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  (**linksseitig halboffenes Intervall**)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  (**offenes Intervall**)

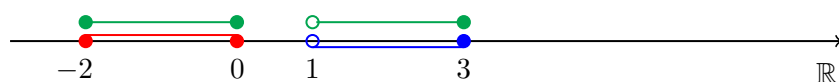
Bestimme die folgenden Mengen und mache zu jeder Menge eine Skizze:

- 1.  $[-2, 0] \cup (1, 3]$
- 2.  $[1, 4) \cup (4, 7]$
- 3.  $(0, 3) \cap [-1, 1]$
- 4.  $(0, 4] \cup (1, 5]$
- 5.  $(-2, 1] \cap [-1, 1]$
- 6.  $(-2, 1] \cup [-1, 1]$

# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

Lösung:

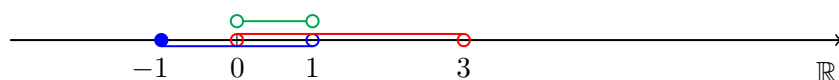
$$1. [-2, 0] \cup (1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \vee 1 < x \leq 3\}$$



$$2. [1, 4] \cup (4, 7] = [1, 7] \setminus \{4\}$$



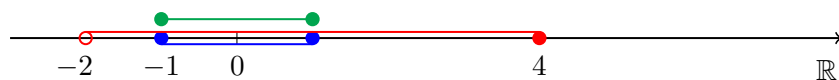
$$3. (0, 3) \cap [-1, 1) = (0, 1)$$



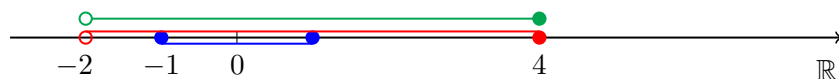
$$4. (0, 4] \cup (1, 5] = (0, 5]$$



$$5. (-2, 4] \cap [-1, 1] = [-1, 1]$$



$$6. (-2, 4] \cup [-1, 1] = (-2, 4]$$



## × Aufgabe 3: Relationen

Seien  $A, B, C, D, \tilde{D}$  wie in Aufgabe 1 und zusätzlich  $E := \{2, 3, 4\}$ .  
Finde alle Relationen  $\{\subseteq, \in\}$  zwischen den Mengen  $A, B, C, D, \tilde{D}, E$ .

Lösung:

$$B \subseteq A \quad D \in C \quad E \in C \quad E \subseteq D \quad D \subseteq \tilde{D}$$

## × Aufgabe 4: Operationen

Bestimme die folgenden Mengen.

- a)  $A \cap B \cap D$  mit  $A, B, D$  aus Aufgabe 1.
- b) i)  $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch } 8 \text{ teilbar}\}$   
 ii)  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}\}$
- c) i)  $(\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}) \cup \{1, 4\}$   
 ii)  $\{1, 2, 3\} \cap (\{2, 3, 4\} \cup \{1, 4\})$
- d) i)  $(\{2, 3, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}) \cap \{2, 4, 6, 8\}$   
 ii)  $(\{2, 3, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\}) \cup (\{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\})$
- e)  $\{1, 4, 7, 8\} \times \{3, 5, 6\}$
- f)  $(\mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z}) \cap \{(a, (a+b), b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$

*Lösung:*

$$a) (A \cap B \cap D) = \underbrace{(\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \cap \{5, 6, 8, 11, 15\})}_{=\{5, 6, 8, 11, 15\}} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset$$

$$b) i) \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\} \quad ii) \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch } 12 \text{ teilbar}\}$$

$$c) i) \underbrace{(\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\})}_{=\{2, 3\}} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$ii) \{1, 2, 3\} \cap \underbrace{(\{2, 3, 4\} \cup \{1, 4\})}_{=\{1, 2, 3, 4\}} = \{1, 2, 3\}$$

*Für die Tutoren: Bemerk ruhig nochmal, dass man auf Klammern achten und sie setzen sollte, wenn man sich nicht sicher ist. Ansonsten geht man meist von der Regel Schnitt vor Vereinigung aus...*

$$d) i) \underbrace{(\{2, 3, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 5, 6, 7\})}_{=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 6\}$$

$$ii) \underbrace{(\{2, 3, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\})}_{=\{2, 6\}} \cup \underbrace{(\{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\})}_{=\{2, 6\}} = \{2, 6\}$$

*Dieses Distributivgesetz wurde in dem Vortrag allgemein bewiesen; dieses kann also gerne verwendet werden, wenn es jemand merkt. Die Aufgabe ii) muss also nicht komplett von Hand gerechnet werden, sondern kann zunächst auch damit vereinfacht werden.*

$$e) \{(1, 3), (1, 5), (1, 6), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (7, 3), (7, 5), (7, 6), (8, 3), (8, 5), (8, 6)\}$$

f)  $\{(a, 0, -a) : a \in \mathbb{Z}\}$

*Man schneidet hier zwei Mengen von Dreier-Tupeln. Für alle Tupel im Schnitt ist die mittlere Koordinate offensichtlich 0. Also muss für  $a, b$  aus der zweiten Menge gelten:  $a + b = 0$ , also  $a = -b$ . In anderen Worten: Die Elemente im Schnitt sind von der Form  $(a, 0, -a)$ .*

## × Aufgabe 5: Formalisieren

Schreibe folgende Mengen formal auf:

- a) Alle ganzen Zahlen, die durch drei teilbar sind.
- b) Alle Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die die Zahl 42 enthalten.
- c) Alle reellen Lösungen der Gleichung  $x^5 - \pi x^2 + 1 = 0$ .  
*Hinweis: Nur formalisieren, nicht ausrechnen!*

*Lösung:*

- a)  $\{3z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{z \in \mathbb{Z} : 3 \mid z\}$
- b)  $\{M \subseteq \mathbb{R} \mid 42 \in M\}$
- c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^5 - \pi x^2 + 1 = 0\}$

## × Aufgabe 6: Venn-Diagramme

Mit *Venn-Diagrammen* lassen sich Mengen, die in irgendeiner Weise zueinander in Verbindung stehen, gut visualisieren. Das ein oder andere Diagramm habt ihr bestimmt schon einmal gesehen. Betrachten wir zum Beispiel zwei Mengen  $A$  und  $B$ , wobei  $A \subseteq B$  gelte, so lässt sich dies durch folgendes Venn-Diagramm veranschaulichen:



Abbildung 1: Beispiel eines Venn-Diagramms für die Relation  $A \subseteq B$ .

Achtung! Venn-Diagramme beschreiben eine Situation nie vollständig – sie dienen nur der Veranschaulichung. In obiger Situation könnte zum Beispiel sogar  $A = B$  gelten. In diesem Fall ist das Venn-Diagramm eher irreführend.

# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

- a) Zeichne jeweils ein Venn-Diagramm, das die folgende Situation beschreibt:
- i) Seien  $A, B$  zwei Mengen mit  $A \neq B$  und  $A \cap B \neq \emptyset$ .
  - ii) Seien  $A, B, C$  drei Mengen mit  $B \subseteq A$ ,  $B \cap C = \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$  und  $C \setminus A \neq \emptyset$ .
  - iii) Seien  $A, B, C$  drei Mengen, wobei je zwei der Mengen einen nicht-leeren Schnitt haben, aber  $A \cap B \cap C = \emptyset$  sei.

Mit Venn-Diagrammen lassen sich auch Verknüpfungen von Mengen visualisieren. Im Beispiel von oben lässt sich die Menge  $B \setminus A$  wie folgt darstellen:

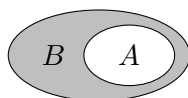
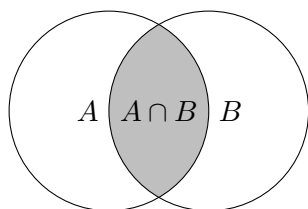


Abbildung 2: Visualisierung der Menge  $B \setminus A$  (in grau) mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

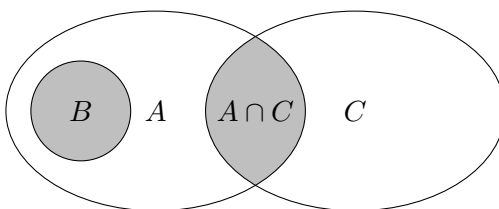
- b) Veranschauliche jeweils in den Situationen aus a) die folgenden Mengen:

- i)  $A \cap B$ .
- ii)  $(C \cap A) \cup B$ .
- iii)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .

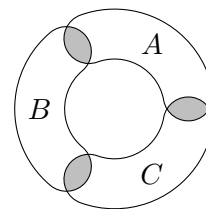
Lösung: Jeweils gleich zu b):



(a) Lösung zu i)



(b) Lösung zu ii)



(c) Lösung zu iii)

## ! Aufgabe 7: Potenzmengen

- a) Sei  $M$  eine nicht-leere Menge und  $\mathcal{P}(M)$  ihre Potenzmenge. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche im Allgemeinen nicht? Begründe!

- |                                 |  |   |
|---------------------------------|--|---|
| i) $M \subset \mathcal{P}(M)$ , | ii) $\emptyset \subset \mathcal{P}(M)$ , | iii) $M \in \mathcal{P}(M)$             |
| iv) $\emptyset \in M$ ,         | v) $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ ,      | vi) $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(M)$ |

# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

b) Sei  $M = \{0, 1\}$ . Bestimme folgende Mengen:

$$i) \mathcal{P}(M), \quad ii) \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$$

!c) Bestimme  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ .

*Lösung:*

a) i) i.A. falsch, ii) wahr, iii) wahr, iv) i.A. falsch, v) wahr, vi) falsch

b)  $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  und  
 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\},$   
 $\{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\},$   
 $\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}\}$   
*Tipp: Die Menge hat 16 Elemente.*

c)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

## Aufgabe 8: Anzahl von Elementen

Seien  $M, N$  zwei Mengen mit endlich vielen Elementen.

a) Stelle  $|M \cup N|$  mit Hilfe von  $|M|$ ,  $|M \cap N|$  und  $|N|$  dar.

b) Begründe, warum  $|M \cup N| \leq |M| + |N|$  gilt.

c) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Begründe, warum für  $n$  Mengen  $M_1, \dots, M_n$  gilt:

$$|M_1 \cup \dots \cup M_n| \leq |M_1| + \dots + |M_n|$$

!d) Stelle  $|\mathcal{P}(M)|$  mit Hilfe von  $|M|$  dar.

Begründe deine Antwort jeweils so gut wie möglich.

*Lösung:*

a)  $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$ . Die Elemente im Schnitt zählt man zunächst doppelt.

*Tipp: Erstelle zunächst ein Venn-Diagramm.*

b) Mit Aufgabenteil a) folgt:  $|M \cup N| = |M| + |N| - \underbrace{|M \cap N|}_{\geq 0} \leq |M| + |N|$ .

# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

c) Mit Aufgabenteil b) können wir wegen der Assoziativität der Vereinigung induktiv folgern:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup \dots \cup M_n| &= |M_1 \cup (M_2 \cup \dots \cup M_n)| \stackrel{b)}{\leq} |M_1| + |M_2 \cup \dots \cup M_n| \\ &= |M_1| + |M_2 \cup (M_3 \cup \dots \cup M_n)| \\ &\stackrel{b)}{\leq} |M_1| + |M_2| + |M_3 \cup \dots \cup M_n| \\ &\leq \dots \leq |M_1| + \dots + |M_n| \end{aligned}$$

! d)  $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ . In einer festen Teilmenge von  $M$  kann ein Element von  $M$  entweder darin sein oder nicht. Pro Element gibt es also zwei Möglichkeiten.