Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Was ist Mathematik?

Aufgabe 1: Papierfalten

Gegeben sei ein länglicher Papierstreifen der Breite 1cm. Wieviele Faltkanten entstehen auf diesem, wenn er 15 mal immer wieder mittig gefaltet wird? Begründe deine Antowort so exakt wie möglich.

Das heißt, man halbiert den Streifen in seiner Länge durch den ersten Faltvorgang, halbiert diesen gefalteten Streifen dann erneut in der Länge durch den zweiten Faltvorgang und so weiter.

*Lösung: Die Lösung geht über das **Zwischenziel**, die Anzahl an Papierschichten nach einer bestimmten Anzahl von Faltungen zu bestimmen. Vor der ersten Faltung (also nach der nullten Faltung) gibt es eine Schicht, nach der ersten Faltung zwei Schichten, nach der dritten Faltung vier Schichten und so weiter. Wir erhalten die folgende Tabelle:*

Faltungen	0	1	2	3	4	5
Anzahl Papierschichten	1	2	4	8	16	32

Mit etwas Überlegen und scharfem Hinsehen stellen wir fest, dass sich bei jedem Faltvorgang die Anzahl an Papierschichten verdoppelt, da ja die jeweilige Anzahl an Schichten zweimal übereinander gelegt wird. Bei einer Anzahl von 15 Faltungen ergäben sich damit 2^{15} Papierschichten – bei einer beliebigen Zahl von n Faltungen entsprechend $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ mal}}$ Papierschichten.

Nach Auseinanderfalten des Streifens würden die Papierschichten Rechtecken entsprechen, welche durch die Faltkanten voneinander abgegrenzt sind. Dabei hat jedes Rechteck (ehemals Papierschicht) an seiner rechten Seite eine Faltkante – ausgenommen das ganz rechte Rechteck. Demnach gibt es stets eine Faltkante weniger, als es Papierschichten gibt. In der obigen Tabelle bedeutet dies:

Faltungen	0	1	2	3	4	5
Anzahl Papierschichten	1	2	4	8	16	32
Anzahl Faltkanten	0	1	3	7	15	31

Nach 15 Faltungen würden wir nach obiger Überlegung 2^{15} Papierschichten und damit $2^{15} - 1$ Faltkanten erhalten.
(Für die Tutoren: Bei einer beliebigen Anzahl von n Faltungen ergäben sich $2^n - 1$ Faltkanten.)

Aufgabe 2: Ich mag Züge

Am Oldenburger Hauptbahnhof werden Züge aus Wagons der Länge 1 und 2 zusammengehängt.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es einen Zug der Länge 1, 2, 3, 4 und 5 zusammenzuhängen? Mache eine Tabelle und begründe dein Ergebnis.

(b) Güterzüge und Züge im Fernverkehr sind länger als Regionalbahnen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Zug mit einer größeren Länge n zusammenzuhängen (also z.B. $n = 20$ oder $n = 87$)? Versuche dafür eine allgemeine Formel aufzustellen und diese zu begründen. Du musst keine konkreten Werte ausrechnen.

Lösung:

(a) Durch Ausprobieren erhalten wir

Zuglänge	1	2	3	4	5
Anzahl Möglichkeiten	1	2	3	5	8

(b) Aus der Tabelle in (a) können wir die Vermutung aufstellen, dass sich die Anzahl an möglichen Zug-Zusammensetzungen bei einer gewissen Zuglänge n aus der Summe der Anzahl an Möglichkeiten der beiden kleineren Zuglängen $n-1$ und $n-2$ ergibt. Um diese Vermutung im Aufgabenkontext zu begründen, betrachten wir einen Zug mit einer beliebigen Länge n. Wir können alle möglichen Wagon-Anordnungen in zwei Kategorien einteilen: In der ersten Kategorie sind alle Wagenreihungen, bei der der letzte Wagon die Länge 1 hat, in der zweiten Kategorie sind alle Wagenreihungen, bei der der letzte Wagon die Länge 2 besitzt. Jede mögliche Anordnung von Wagons der Länge 1 und 2 zu einem Zug der Länge n sind dann in genau einer dieser beiden Kategorien.

***Zwischenziel**: Wieviele Wagons sind in jeder der Kategorien? Da der letzte Wagon in jeder Kategorie immer die gleiche feste Länge besitzt, müssen wir uns nur die Möglichkeiten der Wagons davor anschauen.*

Kategorie 1 *Da der letzte Wagon Länge 1 besitzt, besitzen alle vorigen Wagons die Gesamtlänge $n-1$. Wieviele mögliche Anordnungen gibt es also, um mit einer Wagenreihung eine Gesamtlänge von $n-1$ zu erreichen? Genau so viele Möglichkeiten, wie einen Zug der Länge $n-1$ zusammenzustellen.*

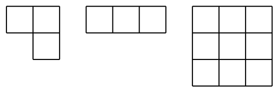
Kategorie 2 *Analog zur ersten Kategorie gibt es hier genau so viele Möglichkeiten, wie einen Zug der Länge $n-2$ zusammenzustellen.*

Führen wir die Notation a_n für die Anzahl an Möglichkeiten bei einer Zuglänge von n ein, so ergibt sich für eine Zuglänge von n die folgende Anzahl an möglichen Wagenreihungen:

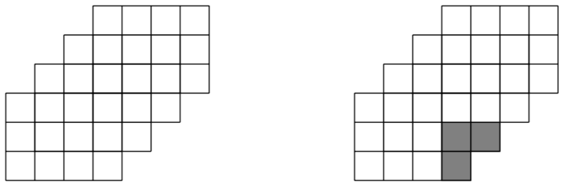
$$a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{\substack{\text{Möglichkeiten in}\\ \text{Kategorie 1}}} + \underbrace{a_{n-2}}_{\substack{\text{Möglichkeiten in}\\ \text{Kategorie 2}}}$$

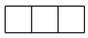
Aufgabe 3: Pflasterungen

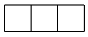
(a) Ist es möglich, ein Schachbrett (8×8) mit folgenden Steinen ohne Überdeckung auszulegen?



(b) Betrachte die folgenden beiden Spielfelder, wobei in dem rechten Spielfeld drei Felder entfernt wurden (schattiert).



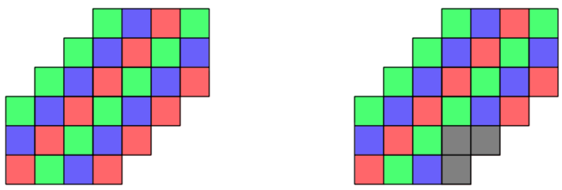
(i) Ist es möglich, das linke Spielfeld mit Steinen der Form  vollständig und ohne Überdeckung zu pflastern?

(ii) Ist es möglich, das rechte Spielfeld mit Steinen der Form  vollständig und ohne Überdeckung zu pflastern?

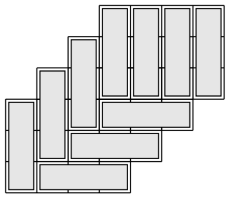
Lösung:

(a) Nein, denn alle Steine haben eine Feldanzahl, die durch 3 *teilbar ist. Wäre es möglich, dass Schachbrett (welches* 64 *Felder besitzt), mit diesen Steinen auszulegen, so müsste auch die Feldanzahl des Schachbrettes, also* 64*, durch* 3 *teilbar sein. Dies ist aber nicht der Fall.*

(b) Auch wenn wir für die Beantwortung von (i) lediglich ein Beispiel angeben müssen, machen wir eine allgemeine Überlegung, mit der wir gleich beide Teilaufgaben beantworten können. Wir betrachten eine Färbung der Pflasterung:



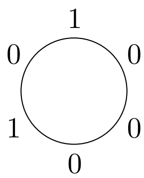
(i) Bei dem linken Spielfeld erkennen wir nun schnell, dass wir bei Hineinlegen unseres Spielsteins jede Farbe genau einmal belegen – egal wie wir den Stein platzieren. Wir können zum Beispiel folgende Pflasterung wählen:



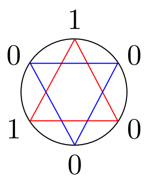
(ii) *Bei dem rechten Spielfeld sehen wir mit der gleichen Idee, dass es nicht möglich sein kann, das komplette Feld mit unseren Spielsteinen zu pflastern. Denn auch hier bedeckt der Stein in jeder Lage jede Farbe genau einmal. Nach Hineinlegen eines jeden Steins werden also genau gleich viele Steine von jeder Farbe bedeckt. Allerdings treten nicht alle Farben auf dem Spielbrett gleichhäufig auf: Grün* 10 *mal, blau* 9 *mal und rot* 8 *mal. Deshalb kann das rechte Feld mit unseren Steinen nicht gepflastert werden.*

Aufgabe 4: Nullen und Einsen

Es sei ein Kreis mit sechs Einträgen 1 und 0 wie in der folgenden Abbildung gegeben.



Ist es möglich, dass alle Einträge an dem Kreis gleich groß werden, wenn immer zwei benachbarte Einträge gleichzeitig um 1 erhöht werden?
Lösung: Nein. Um dies einzusehen, können wir die Einträge nach folgender Logik gruppieren (Gruppen gekennzeichnet durch die farbigen Dreiecke):



Zwischenziel*: Wie verändern sich die Einträge in den beiden Gruppen? Die Summe der Einträge der blauen Gruppe ist zu Beginn also* 0*, die der roten Gruppe ist* 2*. Werden nun zwei benachbarte Einträge um* 1 *erhöht, dann erhöht sich ebenso die Summe der Einträge* <u>*beider Gruppen*</u> *jeweils um* 1*. Also ist die Summe der Einträge innerhalb der beiden Gruppen niemals gleich groß.*

Wenn es möglich wäre, dass alle Einträge im Kreis irgendwann gleich groß wären, so müssten auch die Summen der Einträge in den beiden Gruppen gleich groß sein. Da *letzteres aber nicht möglich ist (wie wir eben eingesehen haben), können niemals alle Einträge im Kreis gleich groß sein.*

! Aufgabe 5: Seltsame Straßenführung

Wir betrachten das Straßennetz auf einer ostfriesischen Insel. Je zwei Städte auf dieser Insel sind durch genau eine Einbahnstraße miteinander verbunden. Begründe, ob es auf dieser Insel eine Stadt geben muss, welche man aus jeder anderen Stadt entweder direkt oder über höchstens eine andere Stadt erreicht? Wir setzen dabei natürlich voraus, dass sich alle Inselbewohner und -besucher an die Straßenverkehrsordnung halten.

Lösung: Auf unserer Insel gibt es eine Stadt, die man von einer maximalen Anzahl an Städten direkt erreichen kann (da es auf der Insel nur endlich viele Städte gibt). Diese Stadt nennen wir S. Angenommen es gibt eine Stadt, von der aus S weder direkt noch indirekt (über eine Zwischenstation) erreichbar ist. Diese Stadt nennen wir T. Da S von T aus nicht erreichbar ist, aber eine Einbahnstraße zwischen diesen beiden Städten existiert, verläuft diese Einbahnstraße von S nach T. Außerdem muss es von allen Städten, von denen aus S direkt erreichbar ist, Einbahnstraßen zu T geben. Denn andernfalls wäre S indirekt von T aus erreichbar. Damit hätte T mehr (direkt) eingehende Verbindungen als S, da zu allen Städten, die direkt Einbahnstraßen nach S besitzen (und damit auch nach T), die Stadt S hinzukommt, von welcher ebenfalls eine direkte Einbahnstraße nach T führt. Dies kann aber nicht sein, da S die Stadt ist, welche die meisten (direkt) eingehenden Verbindungen besitzt. Dies ist ein logischer Widerspruch, weshalb es nicht stimmen kann, dass es diese Stadt T gibt. Es muss daher eine solche Stadt wie in der Aufgabenstellung geben.

Anmerkung für die Tutoren: An dieser Stelle kann man gerne auf den Block „Beweistechniken II“ verweisen, da dort diese Argumentationslogik in Form des Widerspruchsbeweises noch einmal ausführlich behandelt wird.

! Aufgabe 6: Der arme Mathematiker

In Oldenburg gibt es eine ungerade Anzahl an MathematikerInnen, welche am π-Day (der 14. März, im Englischen „3/14“) gemeinsam eine große Party feiern. Mitten am Abend sagt der DJ an, dass alle MathematikerInnen genau dort stehen bleiben sollen, wo sie sich gerade befinden, und jeder seinem am nächsten stehenden Mathematiker-Kollegen (und nur diesem!) ein Bier ausgeben soll.

Begründe, warum es einen armen Mathematiker oder eine arme Mathematikerin geben muss, der oder die von keinem Kollegen ein Bier ausgegeben bekommt, falls alle vorkommenden Abstände zwischen zwei MathematikerInnen verschieden sind.

Lösung: Da keine zwei Mathematiker auf der Party den gleichen Abstand zueinander haben, gibt es zwei Mathematiker, welche den geringsten Abstand zueinander besitzen. Nennen wir diese A und B. Da sich A und B demnach jeweils am nächsten sind, geben sie sich gegenseitig ein Bier aus. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1 *Ein weiterer Mathematiker auf der Party gibt A oder B ein Bier aus, da einer von diesen ihm am nächsten steht. In diesem Fall erhält ein Mathematiker auf der Party schon einmal zwei Biere und es werden nicht mehr genügend Biere verteilt werden, damit jeder Mathematiker eines erhält – mindestens ein armer Mathematiker bleibt ohne Bier übrig.*

Fall 2 *Kein anderer Mathematiker auf der Party gibt A oder B ein Bier aus. In diesem Fall betrachten wir A und B nicht weiter, sondern schauen uns den Rest der Party an und wenden die gleiche Logik auf die beiden Mathematiker mit dem nächstkleinsten Abstand an.*

Landen wir zu einem Zeitpunkt in Fall 1*, so sind wir fertig. Falls wir immer wieder in* Fall 2 *landen, so sind wir irgendwann an dem Punkt, wo nur noch drei Mathematiker übrig sind (da immer zwei aus unserer Betrachtung wegfallen und eine ungerade Anzahl auf der Party ist). Von diesen müssen dann aber wieder zwei den kleinsten Abstand zueinander haben und sich in Folge dessen gegenseitig ein Bier ausgeben (wir sind nun automatisch in* Fall 1*). Der Dritte im Bunde erhält also von niemandem ein Bier und wir haben den armen Mathematiker gefunden.*