Klausur zur Funktionalanalysis
am 22.2.~~2015~~ 2017

WS 2016/17 Defant

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von der Klausuraufsicht weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die Nummer der Aufgabe.* Beschriften Sie sofort jedes Blatt mit Ihrem Namen. Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Mathematik Vorname: Fachschaft

Matrikel-Nr.: 1234567

Unterschrift: Nick

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
Korr.	N	N	N	N	N	N	N

Bonuspunkte:	10

Gesamtpunktzahl:	70

1. Aufgabe

Sei $C^1[a,b]$ der Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$.

(1) Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\| := \left(\|f\|_\infty^2 + \|f'\|_\infty^2\right)^{1/2}$$

auf $C^1[a,b]$ eine Norm definiert wird.

(2) Beweisen Sie, dass $(C^1[a,b], \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

(1)

- $\|\lambda f\| = \left(\|\lambda f\|_\infty^2 + \|(\lambda f)'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  $= \left(|\lambda|^2 \left(\|f\|_\infty^2 + \|f'\|_\infty^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
  $= |\lambda| \left(\|f\|_\infty^2 + \|f'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|f\|$

- $\|f\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ klar, da $\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, da $f \in C^1[a,b]$

- $\|f\| = 0 \Rightarrow \left(\|f\|_\infty^2 + \|f'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$
  $\Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \wedge \|f'\|_\infty = 0$
  $\overset{\|\cdot\|_\infty \text{ Norm}}{\Rightarrow} f = 0$

- $\|f+g\| = \left(\|f+g\|_\infty^2 + \|f'+g'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  $\leq \left(\left(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\right)^2 + \left(\|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  $= \left\| \left(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty\right) \right\|_2$
  $= \left\| \left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) + \left(\|g\|_\infty, \|g'\|\right) \right\|_2$
  $\leq \left\| \left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \right\|_2 + \left\| \left(\|g\|_\infty, \|g'\|_\infty\right) \right\|_2$
  $= \left(\|f\|_\infty^2 + \|f'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\|g\|_\infty^2 + \|g'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  $= \|f\| + \|g\|$

(2) Wissen, dass $(C^1[a,b], |||\cdot|||)$ mit

$|||f||| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ein BR ist.

Zeige $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$:

$$\|f\| = \left(\|f\|_\infty^2 + \|f'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geq \left(\|f\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_\infty .$$

Analog $\|f\| \geq \|f'\|_\infty$

$\curvearrowright$ $\underline{|||f|||} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq \underline{2\|f\|.}$

UND

$$\underline{\|f\|} \leq \left(\|f\|_\infty^2 + 2\|f\|_\infty\|f'\|_\infty + \|f'\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left((\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{|||f|||}$$

$\|f\| \leq |||f||| \leq 2\|f\|$ $\curvearrowright$ $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$

$\curvearrowright (C^1[a,b]; \|\cdot\|)$ BR //

Alternativ kann man hier über

$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ im $\mathbb{R}^2$

argumentieren, und so die Normäquivalenz bekommen

2. Aufgabe

Sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie:

(1) Zeigen Sie, dass der Diagonaloperator $D_\xi : \ell_p \to \ell_q$, $x \mapsto (x_k\xi_k)_k$ für alle $\xi \in \ell_\infty$ definiert, linear und stetig ist, sowie

$$\|D_\xi\| = \|\xi\|_\infty.$$

(2) Seien $1 \leq q < p \leq \infty$. Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in (1) dann falsch ist.

(1) $\|D_\xi x\|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \xi_k|^q\right)^{1/q} \leq \|\xi\|_\infty \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{1/q}}_{=\|x\|_q} \leq \|\xi\|_\infty \|x\|_p < \infty$

$\rightsquigarrow$ $D_\xi x \in \ell_q$ für $x \in \ell_p$ $\rightsquigarrow$ D_ξ definiert

Außerdem liefert $\|D_\xi x\|_q \leq \|\xi\|_\infty \|x\|_p \quad \forall x \in \ell_p$

die Stetigkeit von D_ξ, sobald Linearität gezeigt ist,

und $\|D_\xi\| \leq \|\xi\|_\infty$ in diesem Fall.

Linearität: klar.

Noch zu zeigen: $\|D_\xi\| \geq \|\xi\|_\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\|D_\xi\| = \sup_{\|x\|_p = 1} \|D_\xi x\|_q \geq \|D_\xi e_n\|_q = |\xi_n|$

$\rightsquigarrow$ $\|D_\xi\| \geq \|\xi\|_\infty$

//

(2) Wähle $\xi = \mathbb{1} = (1, 1, 1, \dots)$. Dann ist $D_\xi = \mathrm{id}$. Dies kann nicht definiert sein, da sonst $\ell_p \subset \ell_q$ für $p > q$ gelten würde ↯

//

3. Aufgabe

(1) Sei (x_n) eine Folge in einem Hilbertraum H und $x \in H$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (a) $x_n \to x$ in H

  (b) $\|x_n\| \to \|x\|$ und $(x_n|y) \to (x|y)$ für alle $y \in H$

(2) Zeigen Sie:

  (a) $H := \left\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} < \infty\right\}$ ist ein Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen, und $\ell_2 \subsetneq H$.

  (b) $\left(\cdot\middle|\cdot\right)_H : H \times H \to \mathbb{C}$, $\overset{(x;y)}{\cancel{x}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \overline{y_n}}{n}$ definiert ein Skalarprodukt auf H, dass diesen Vektorraum zu einem Hilbertraum macht.

(1) (a) $\curvearrowright$ (b): Sei $x_n \to x$

- $\|x_n\| \to \|x\|$, da die Norm stetig
- $(x_n|y) \to (x|y)$, da $(\cdot|y) \in H'$ stetig $\forall y \in H$

(b) $\curvearrowright$ (a) Sei $\|x_n\| \to \|x\|$ und $(x_n|y) \to (x|y)$ $\forall y \in H$.

Dann
$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x | x_n - x)$$
$$= (x_n|x_n) - (x_n|x) - (x|x_n) + (x|x)$$
$$= \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to \|x\|^2} - \underbrace{(x_n|x)}_{\to (x|x) = \|x\|^2} - \underbrace{\overline{(x_n|x)}}_{\to \overline{(x|x)} = \|x\|^2} + \|x\|^2$$
$$\longrightarrow \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$

also $\|x_n - x\| \to 0$, also $x_n \to x$.

//

(2) (a) $H \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ klar.

- $0 \in H \rightsquigarrow H \neq \emptyset$
- $x, y \in H$, ~~x~~ $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n + \lambda y_n|^2}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|x_n| + |\lambda y_n|)^2}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2 + 2|x_n||\lambda y_n| + |\lambda y_n|^2}{n}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}}_{<\infty} + 2|\lambda| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n||y_n|}{n}} + |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^2}{n}}_{<\infty} < \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n||y_n|}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\max(|x_n|^2, |y_n|^2)}{n} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^2}{n}}_{<\infty}$$

$\rightsquigarrow x + \lambda y \in H$.

$\rightsquigarrow H$ Teilraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. //

$\ell_2 \subset H$: Sei $x \in \ell_2$. Dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \quad \rightsquigarrow x \in H$$

$\ell_2 \neq H$: $x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n \in H$, aber $x \notin \ell_2$ //

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(b) $\cdot\ x, y \in H,\ \lambda \in \mathbb{C}\ ,\ z \in H$

$$(x+\lambda y \mid z)_H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n + \lambda y_n)\overline{z_n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \overline{z_n}}{n} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \overline{z_n}}{n}$$

$$= (x \mid z)_H + \lambda (y \mid z)_H$$

$\leadsto$ linear in 1. Komp.

- $(x \mid x)_H > 0$ für $x \neq 0$, da $x_n \overline{x_n} = |x_n|^2$.
- $(x \mid y)_H = \overline{(y, x)}$ klar.

$\leadsto (\cdot \mid \cdot)_H$ Skalarprodukt.

~~Sei (x_n) CF in $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot \mid \cdot)}$,~~
~~also $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - x_m|^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\ \forall m, n > n_0$~~

Sei $(x^n)_n$ CF in H, d.h.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k^n - x_k^m|^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0$$

$$\leadsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k^n}{\sqrt{k}} - \frac{x_k^m}{\sqrt{k}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0$$

$$\leadsto \left(\left(\frac{x_k^n}{\sqrt{k}}\right)_k\right)_n \text{ CF in } \ell_2 \leadsto \exists \underset{\substack{\parallel \\ (y_k)_k}}{y} \in \ell_2 : \left(\left(\frac{x_k^n}{\sqrt{k}}\right)_k\right)_n \xrightarrow{\ell_2} y$$

$$\leadsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k^n}{\sqrt{k}} - y_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall n > N_0$$

$$\leadsto \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k^n - \sqrt{k}\, y_k|^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}_{= \|x - (\sqrt{k}\, y_k)_k\|_H} < \varepsilon \quad \forall n > N_0$$

$$\leadsto x \xrightarrow{H} (\sqrt{k}\, y_k)_k .$$

//

LÖSUNGSSKIZZE - KEINE GEWÄHR AUF RICHTIGKEIT

4. Aufgabe

(1) Wann wird ein topologischer Raum X als Bairesch bezeichnet?

(2) Nennen Sie den Satz von Baire.

(3) Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum von abzählbarer Dimension.

Zeigen Sie, dass alle $T \in \mathcal{L}(E, F)$ endlich dimensionale Operatoren sind.

(1) Wenn er eine dieser (äquivalenten) vier Bedingungen erfüllt:

- $O_n \subset X$ offen, dicht $\curvearrowright \bigcap_n O_n$ dicht
- $A_n \subset X$ abg., $\mathring{A}_n = \emptyset \curvearrowright \cancel{\nexists}\ \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_n A_n}} = \emptyset$
- $\emptyset \neq O \subset X$ offen $\curvearrowright O$ von 2. Kat in X
- $A \subset X$ von 1. Kat. in $X \curvearrowright CA$ dicht

(2) Jeder vollständige metrische Raum ist Bairesch

(3) F hat abzählbare Basis $(x_n)_n$.

Also $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{span}(x_1, \dots, x_n)}_{=:\, F_n}$

Sei $T : E \longrightarrow F$ linear und stetig, also $T \in \mathcal{L}(E,F)$

Dann $E = T^{-1}(F) = T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(F_n)$

F_n abg., T stetig $\curvearrowright T^{-1}(F_n)$ abg f.a. $n \in \mathbb{N}$

$\curvearrowright \exists\, x_0 \in E,\ \varepsilon > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}: \ x_0 + \varepsilon B_E \subset \cancel{\nexists}\, T^{-1}(F_{n_0})$

$\curvearrowright T(x_0 + \varepsilon B_E) \subset F_{n_0} \ \underset{F_{n_0}\ VR}{\overset{T \text{ linear}}{\curvearrowright}} \ T(E) \subset F_{n_0}$ (aufblähen der Kugel)

$\curvearrowright \dim(T(E)) < \dim F_{n_0} \leq n_0 \curvearrowright T$ endl. dim.

5. Aufgabe

(1) Nennen Sie die ~~reelle~~ stetige Fortsetzungsversion des Satzes von Hahn-Banach.

(2) Sei E ein reeller normierter Raum, U ein Teilraum von E, $n \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathcal{L}(U, \ell_\infty^n)$. Zeigen Sie:

Es existiert ein $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty^n)$ mit $\widetilde{T}_{|U} = T$ und $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

(1) E NR, $\mathcal{U}$ (abg) $\mathcal{U}$-Raum, $\varphi \in \mathcal{U}'$.

Dann $\exists\, \Phi \in E'$ mit $\Phi|_\mathcal{U} = \varphi$ und $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.

(2) Sei $T_k : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (Tx)_k$ (k-ter Eintrag) $\forall k = 1, \dots, n$

Dann ist $T_k \in \mathcal{U}'$ offensichtlich $\forall k = 1, \dots, n$

$\overset{H-B}{\leadsto} \exists\, \widetilde{T}_k \in E'$ mit $\widetilde{T}_k|_\mathcal{U} = T_k$, $\|\widetilde{T}_k\| = \|T_k\|$

Setze $\widetilde{T}x = (\widetilde{T}_1(x), \dots, \widetilde{T}_n(x))$.

Dann ist offensichtlich $\widetilde{T}|_\mathcal{U} = T$

und $\widetilde{T}$ stetig und linear

und $\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathcal{U}}} |\underset{\widetilde{T}x}{\underset{\|}{Tx}}| \le \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} |\widetilde{T}x| = \|\widetilde{T}\|$

$\|\widetilde{T}x\| = \sup_{k=1,\dots,n} |\widetilde{T}_k x| \le \sup_{k=1,\dots,n} \|\widetilde{T}_k\| \|x\| = \sup_{k=1,\dots,n} \|T_k\| \|x\|$

$\le \|T\| \|x\| \leadsto \|\widetilde{T}\| \le \|T\|$

<u>Alternativ</u> Normgleichheit:

$\|\widetilde{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\widetilde{T}x\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \sup_{k=1,\dots,n} |\widetilde{T}_k x| = \sup_{k=1,\dots,n} \sup_{\|x\|=1} |\widetilde{T}_k x|$

$= \sup_{k=1,\dots,n} \|\widetilde{T}_k\| = \sup_{k=1,\dots,n} \|T_k\| = \sup_{k=1,\dots,n} \sup_{\|x\|=1} |T_k x|$

$= \sup_{\|x\|=1} \sup_{k=1,\dots,n} |T_k x| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_\infty = \|T\|$

6. Aufgabe

(1) Nennen Sie den Satz von der offenen Abbildung.

(2) Nennen Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen.

(3) Skizzieren Sie, wie man mittels des Satzes von der offenen Abbildung den Satz vom abgeschlossenen Graphen beweist.

(1) $BR \xrightarrow[\substack{\text{surj.} \\ \text{lin.} \\ \text{stetig}}]{T} BR \quad \Big| \curvearrowright T$ offen

(2) $BR \xrightarrow[\text{graphenabg.}]{T} BR \quad \Big| \curvearrowright T$ stetig

(3) $T: E \to F$ graphenabg.

$$\begin{tikzcd}
(x, Tx) \arrow[d, mapsto] & & E \times F \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "Q"] & & (x, Tx) \arrow[d, mapsto] \\
x & E \arrow[rr, "T"] & & F & Tx
\end{tikzcd}$$

P stetig
surj
lin
bij

Q lin
stetig

P offen $\overset{\text{S.v. Inversen Op}}{\curvearrowright}$ P^{-1} stetig

$\curvearrowright \quad T = \underbrace{Q}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{P^{-1}}_{\text{stetig}}$ stetig.