Komplexe Zahlen

Satz und Def Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller geordneten Paare reeller Zahlen bildet bezüglich der Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

einen Körper. Das Nullelement ist $(0, 0)$, das Einselement ist $(1, 0)$. Dieser Körper heißt *Körper der komplexen Zahlen* und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Def Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. $\overline{z} = x - iy$ heißt die zu z *konjugiert komplexe Zahl.* $\operatorname{Re} z := x$ und $\operatorname{Im} z := y$ heißen *Realteil* und *Imaginärteil* von z.

Satz 1.15 Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1) $\overline{(\overline{z})} = z$
2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
4) $(\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}, z \neq 0$
5) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Def Der *Betrag* von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ wird definiert durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Satz 1.16 (Eigenschaften des Betrags)
Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3) $|z| = |\overline{z}|$, $z\overline{z} = |z|^2$
4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung)*

Satz 1.17 Seien $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ zwei komplexe Zahlen. Dann gilt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Satz 1.18 (Moivresche Formel) Sei $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$