

ÜBUNGSBLATT 5

Abgabe 26.05.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Nützliche LaTeX-Befehle

LaTeX-Befehl	Output
$\backslash \bmod I$	$\bmod I$

Aufgabe 5.1 (6 Punkte). Es seien R ein faktorieller Ring und $P \subseteq R$ ein Vertretersystem der Assoziiertenklassen aller Primelemente von R . Beweisen Sie für alle $a, b \in R \setminus \{0\}$:

(a). $b \mid a \Leftrightarrow v_p(b) \leq v_p(a)$ für alle $p \in P$.

(b). Wir setzen

$$d := \prod_{p \in P} p^{\min\{v_p(a), v_p(b)\}} \quad \text{und} \quad k := \prod_{p \in P} p^{\max\{v_p(a), v_p(b)\}}.$$

Dann ist d ein ggT von a und b sowie k ein kgV von a und b . Schließen Sie daraus, dass $kd \sim ab$.

Aufgabe 5.2 (6 Punkte).

(a). Sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 2$, und sei $R := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. In $R[t]$ seien die beiden Polynome $g := [3]_n t^3 + [6]_n t^2 + [33]_n t + [15]_n$ und $f := t^2 + [2]_n t + [1]_n$ gegeben. Für welche Werte von n ist f ein Teiler von g ?

(b). Zeigen Sie, dass $x := 2154878968 \in \mathbb{Z}$ keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 5.3 (8 Punkte).

(a). Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gelte $d := \text{ggT}(a, b) \mid c$. Weiter sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine partikuläre Lösung der linearen diophantischen Gleichung $aX + bY = c$. Zeigen Sie, dass sämtliche Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dieser linearen diophantischen Gleichung durch $\{(x_0 + k\frac{b}{d}, y_0 - k\frac{a}{d}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben sind.

(b). Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der folgenden linearen diophantischen Gleichung $105X + 429Y = 21$.