CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 4

Abgabe 19.05.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Nützliche LaTeX-Befehle

LaTeX-Befehl	Output
`\vert x \vert`	$\vert x \vert$
`\bar{\alpha}`	$\bar{\alpha}$
`\pm`	$\pm$

Aufgabe 4.1 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a). Jeder euklidische Ring R ist ein Hauptidealring.

(b). Sei R ein euklidischer Ring und seien $a, b \in R$ mit $b \neq 0$. Sei $d \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. Dann ist $\langle a, b\rangle = \langle d \rangle$.

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a). Sei R ein Hauptidealring und seien $a, b \in R$ mit $b \neq 0$. Seien $d \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler und $k \in R$ ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b. Dann ist $\langle a \cdot b\rangle = \langle k \cdot d\rangle$.

(b). Sei nun $R = \mathbb{Z}$ und seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Folgern Sie aus (a), dass gilt: $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = |a \cdot b|$.

Aufgabe 4.3 (8 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}] = \{a + b\,i\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, ein Unterring von $\mathbb{C}$, wobei $i^2 = -1$. Wir definieren

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[i\sqrt{n}] &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ \alpha := a + b\,i\sqrt{n} &\longmapsto N(\alpha) = \alpha\,\overline{\alpha} = a^2 + n\,b^2 . \end{aligned}$$

(a). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ gilt: $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta)$.

(ii) $N(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}]^*$. Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]^* = \{\pm 1\}$ für $n \geq 2$.

(b). Beweisen Sie, dass $1 + 2\,i\sqrt{5}$, $1 - 2\,i\sqrt{5}$, 3 und 7 irreduzible Elemente aber keine Primelemente von $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ sind. Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ kein Hauptidealring ist.
Hinweis: $3 \cdot 7 = (1 + 2\,i\sqrt{5})\,(1 - 2\,i\sqrt{5})$ *und verwenden Sie* $N(.)$.

Aufgabe 4.4 (Keine Abgabe vorgesehen)**.** Berechnen Sie jeweils mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus eine Bézout-Darstellung eines größten gemeinsamen Teilers von $a \in R$ und $b \in R$ für

(a). $R = \mathbb{Z}$, $a = 1428$ und $b = 105$.

(b). $S = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $R = S[t]$, $a = t^4 + [2]_5 t^3 + t + [1]_5$ und $b = t^3$.