

## Fingerübungen

**Thema: Potenzreihen und trigonometrische Funktionen.** Auf diesem Übungsblatt können Sie den Umgang mit Potenzreihen und trigonometrischen Funktionen trainieren.

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Bestimmen Sie in a) und b) auch den Konvergenzbereich.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^2 + 1} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x - 1)^n, \quad x \in \mathbb{R},$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 2) z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$

2. Erinnern Sie sich an die Definition von Sinus und Kosinus. Zeigen Sie für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\sin(z) \cos(z) = \frac{1}{2} \sin(2z).$$

3. In dieser Aufgabe können Sie den Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus kennenlernen. Beispielsweise beschreibt der Graph des Kosinus Hyperbolicus den Verlauf eines an zwei Punkten aufgehängten Seils. Sie sind für  $z \in \mathbb{C}$  definiert als

$$\sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

- a) Zeigen Sie für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\sinh(z) + \cosh(z) = \exp(z).$$

In diesem Sinne ist  $\sinh$  der ungerade Anteil und  $\cosh$  der gerade Anteil der Exponentialfunktion.

- b) Zeigen Sie für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1.$$