Klausur zu Analysis I
am 12.02.2016

WS 2015/2016 Langenbruch/Shestakov

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die entsprechende Seite und dort auf die Nummer der Aufgabe.* Beschriften Sie sofort jedes Blatt mit Ihrem Namen. Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Tutor(in):

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							
Korr.							

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}. \qquad (4)$$

b) Sei $z = 2 + 3i$. Berechnen Sie $|z|$, $\overline{z}$, $\frac{1}{z}$, $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})$ und $\mathrm{Im}(\frac{1}{z})$.
Zeichnen Sie z und $\overline{z}$ in die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ ein. (3)

2. Aufgabe.

a) Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Jede konvergente Folge ist monoton. (3)

ii) Jede Teilfolge einer Cauchy-Folge ist konvergent. (3)

b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls er existiert, für

i) $a_n = \frac{(2n^2+1)^2}{n^2-13}$ (3)

ii) $a_n = \frac{e^n+ie^{2n}}{(e^n)^2}$ (3)

3. Aufgabe.

a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(\sqrt{n})}{n^2}$ (3)

ii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ (4)

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)^{2n}}{n(i-1)^n}(z-i)^n.$$

Skizzieren Sie den Konvergenzkreis dieser Reihe in $\mathbb{C}$. (4)

c) Beweisen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i+1}\right)^n = 1+\frac{1}{i}.$$ (3)

3a) i) Majorantenkrit abs 1 | bei Leibniz 0,5

$\leq \frac{1}{n^2}$ 1

$\Rightarrow$ konv 1

(ii) Leibniz ~~[illegible]~~ $a_{n+1} < a_n$ 0,5

Nullfolge 0,5

konv ~~[illegible]~~ 1

nicht absolut 2 / Mono 1 oder Vergl.

$\Rightarrow$ 1 nicht abs

b) Rechnung 3

Bild 1

c) 3

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x-1} + 1, & \text{wenn } x \le 0, \\ \ln(x+\alpha), & \text{wenn } x > 0, \end{cases}$$

$e = \cancel{?}\ \alpha$

stetig ist. Begründen Sie die Stetigkeit der von Ihnen angegebenen Funktion detailliert. (4)

b) Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so hat f kein lokales Extremum. Wahr (3)

ii) Nimmt die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, so ist f stetig. falsch (3)

a) je 1 für $x \le 0$, $x > 0$

2 für ~~da~~ $x = 0$ 0,5 je links/rechts

1 für α

b) je 1 richtige Beh

je 2 für Arg

5. Aufgabe.

a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (3)

b) Sei

$$f(x) = \frac{\sin(\ln(x))}{x}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von f. Begründen Sie ausführlich, in welchen $x \in D$ die Funktion f differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die Ableitung. (3)

6. Aufgabe.

a) Geben Sie die Definition des lokalen Maximums einer Funktion an. (2)

b) Sei $f(x) = x^2 e^{-x}$.

i) Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt, und bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f. (5)

ii) Untersuchen Sie, ob f nach oben bzw. nach unten beschränkt ist. (2)

iii) Skizzieren Sie den Graphen von f. (2)