Lösungen der Fingerübungen

1. Schreiben Sie um, wenn möglich.

   Es gibt zum Teil noch weitere Möglichkeiten des Umschreibens. Wenn Sie welche finden, fragen Sie Ihren Tutor, ob diese richtig sind.

   a) $\ln x^2 = 2\ln x$

   b) $\ln(x+y)$ kann nicht weiter sinnvoll umgeschrieben werden.

   c) $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$

   d) $\ln(2e^{3x}) = \ln 2 + \ln(e^{3x}) = 3x + \ln 2$

   e) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

   f) $e^{\ln x + 2\ln y} = e^{\ln x} e^{\ln(y^2)} = xy^2$

   g) $e^{(\ln x)^2} = (e^{\ln x})^{\ln x} = x^{\ln x}$

   h) $3^{n/\log_3 n}$, keine wirklich sinnvollen Umformungen möglich, außer vielleicht $= (3^{1/\log_3 n})^n$ oder $= 3^{n \log_n 3}$ (falls $n \neq 1$) wegen $\log_3 n = \frac{\ln n}{\ln 3} = \left(\frac{\ln 3}{\ln n}\right)^{-1} = (\log_n 3)^{-1}$

   i) $2^x 3^{x-1} 4^{-x} = 2^x 3^x 3^{-1} (4^{-1})^x = \frac{1}{3}(2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4})^x = \frac{1}{3}(\frac{3}{2})^x$

   j) $\frac{2^{100}}{\frac{4^8}{(-8)^{-7}}} = \frac{2^{100}(-8)^{-7}}{4^8} = \frac{2^{100}(-1)^{-7}(2^3)^{-7}}{(2^2)^8} = -\frac{2^{100}2^{-21}}{2^{16}} = -\frac{2^{79}}{2^{16}} = -2^{63}$

   k) $\ln \sqrt[5]{x^2} + \ln \sqrt{x^5} = \ln x^{\frac{2}{5}} + \ln x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\ln x + \frac{5}{2}\ln x = \frac{4}{10}\ln x + \frac{25}{10}\ln x = \frac{29}{10}\ln x$

   l) $\ln(c^2 - d^2) + \ln \frac{1}{c-d} = \ln((c-d)(c+d)) + \ln 1 - \ln(c-d) =$
   $\ln(c-d) + \ln(c+d) - \ln(c-d) = \ln(c+d)$

   m) $\sqrt{e^{3\ln 4}} = \sqrt{e^{\ln(4^3)}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{2^{2\cdot 3}} = 2^3 = 8$

   n) $\ln(2x) + \ln(2y) - \ln z - \ln 4 = \ln(2x \cdot 2y) - \ln 4z = \ln(\frac{4xy}{4z}) = \ln(\frac{xy}{z})$

   o) $\frac{1}{2}\log_2(4e^2) = \log_2((4e^2)^{\frac{1}{2}}) = \log_2(2e) = \log_2 2 + \log_2 e = 1 + \log_2 e = 1 + \frac{1}{\ln 2}$ (vgl. h)

   p) $\ln(x^2+y^2) - \ln(2xy) - \ln(x-y) = \ln(x^2+y^2) - (\ln 2 + \ln x + \ln y) - \ln(x-y) =$
   $\ln(x^2+y^2) - \ln 2 - \ln x - \ln y - \ln(x-y)$

   q) $\ln(x^{\frac{2}{3}}) - \ln \sqrt[3]{x^{-4}} = \frac{2}{3}\ln x - (-\frac{4}{3})\ln x = 2\ln x$

2. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

   a) $2^x = 16 \iff \log_2(2^x) = \log_2(2^4) \iff x = 4$ Also ist $x = 4$ die Lösung der Gleichung.

   b) $4^{-2x+3} = 8 \iff 4^{-2x} = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8} \iff \log_4(4^{-2x}) = \log_4(\frac{1}{8}) \iff -2x = -\log_4 8 \iff x = \frac{\log_4 8}{2}$. Wegen $8 = 4 \cdot 2 = 4 \cdot 4^{1/2} = 4^{3/2}$ ist $\log_4 8 = \frac{3}{2}$. Also ist die Lösung der Gleichung $x = \frac{3}{4}$.

   c) $\log_3 x = \frac{1}{3} \iff 3^{\log_3 x} = 3^{\frac{1}{3}} \iff x = \sqrt[3]{3}$ Also ist die Lösung der Gleichung $x = \sqrt[3]{3}$.

   d) $\log_2(3x+2) = 3 \iff 2^{\log_2(3x+2)} = 2^3 \iff 3x+2 = 8 \iff 3x = 6 \iff x = 2$ Also ist $x = 2$ die Lösung der Gleichung.

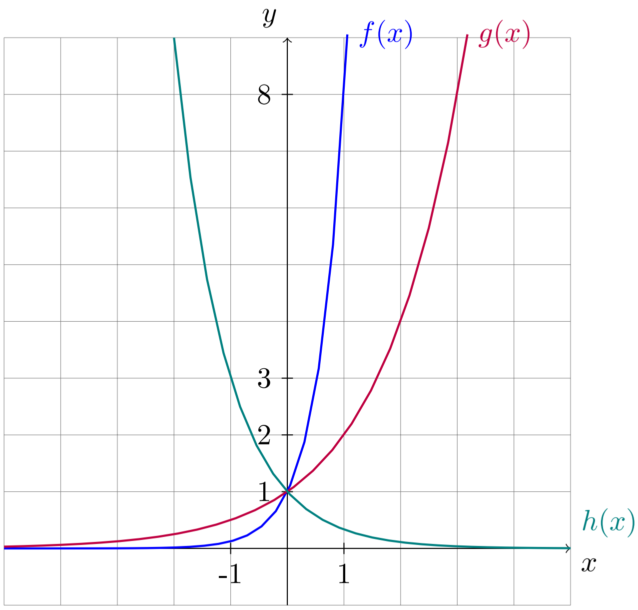
   e) $e^{x+5} = 3^x \iff e^{x+5} = e^{x\ln 3} \iff x + 5 = x\ln 3 \iff x\ln 3 - x = 5 \iff x = \frac{5}{\ln 3 - 1}$
   Also ist $x = \frac{5}{\ln 3 - 1}$ die Lösung der Gleichung.

f) $e^{2\ln x} - 3 = 9$ Zunächst kann man feststellen, dass $\ln x$ nur definiert ist für $x > 0$, also müssen mögliche Lösungen der Gleichung positiv sein. Es gilt: $e^{2\ln x} - 3 = 9 \iff e^{\ln(x^2)} = 12 \iff x^2 = 12$ Also ist die Lösung der Gleichung $x = \sqrt{12}$.

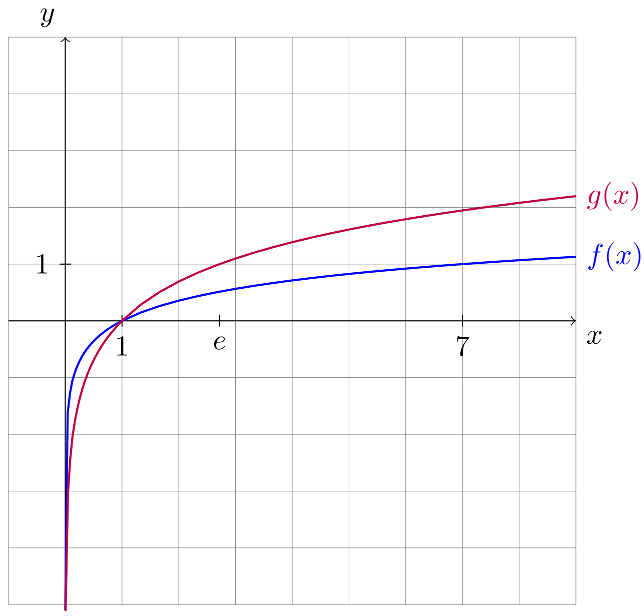
g) $e^{(\ln x)\cdot(\ln x)} = 2^4$ Auch hier gilt wegen $\ln x$, dass mögliche Lösungen positiv sein müssen. Es gilt: $e^{(\ln x)\cdot(\ln x)} = 2^4 \iff e^{(\ln x)^2} = e^{4\ln 2} \iff (\ln x)^2 = 4\ln 2 \iff ((\ln x = \sqrt{4\ln 2}) \vee (\ln x = -\sqrt{4\ln 2})) \iff ((e^{\ln x} = e^{2\sqrt{\ln 2}}) \vee (e^{\ln x} = e^{-2\sqrt{\ln 2}})) \iff ((x = e^{2\sqrt{\ln 2}}) \vee (x = e^{-2\sqrt{\ln 2}}))$ Also sind die Lösungen der Gleichung $x_1 = e^{2\sqrt{\ln 2}}$ und $x_2 = e^{-2\sqrt{\ln 2}}$.

3. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen (ggf. in einem Koordinatensystem). Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, wenn nicht anders erwähnt.

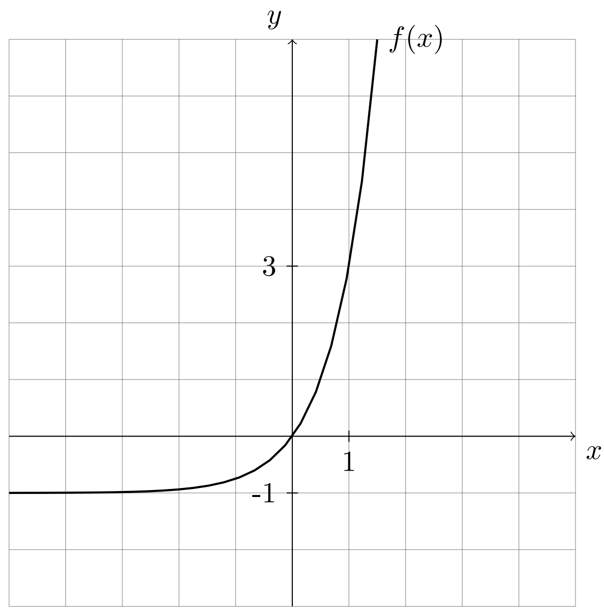
a) $f(x) = 8^x$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = (\frac{1}{3})^x$



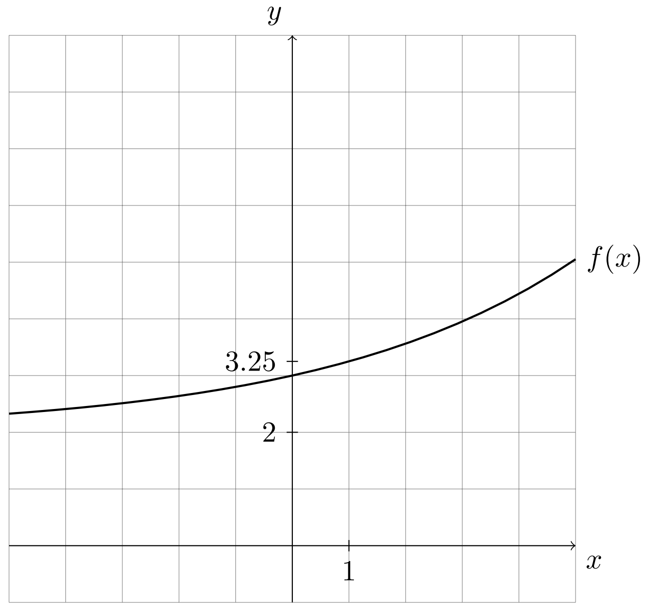
b) $f(x) = \log_7 x$, $g(x) = \ln x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$.



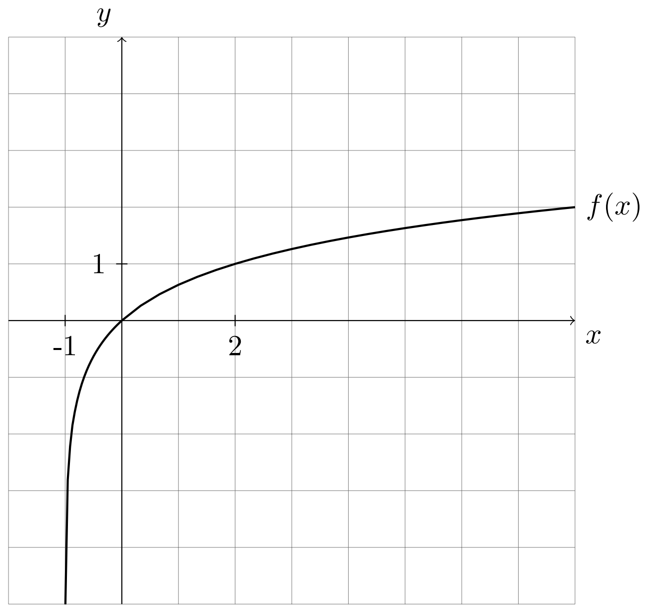
c) $f(x) = 4^x - 1$



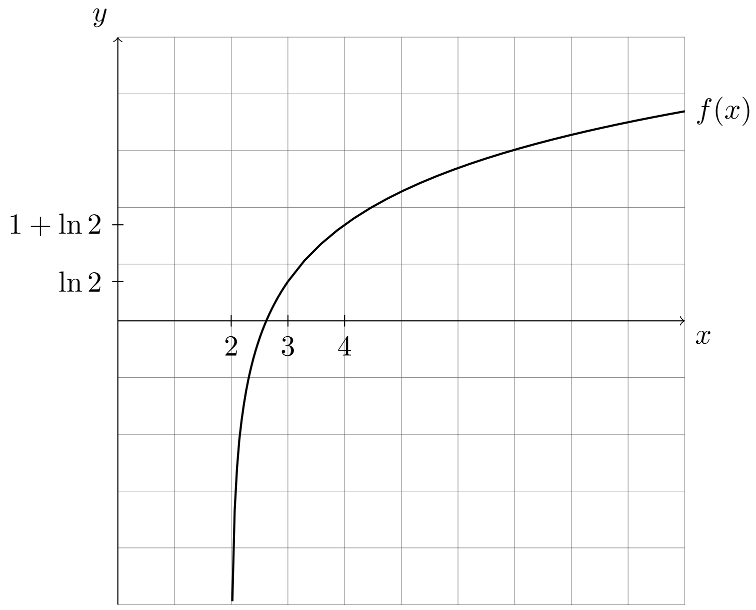
d) $f(x) = 5^x(\frac{1}{4})^x + 2$



e) $f(x) = \log_3(x+1)$ mit Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$.



f) $f(x) = \log_2(x-2) + \ln 2$ mit Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$.



g) $f(x) = e^x + e^{-x}$