Stetigkeit

Def Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. f heißt *stetig in* x_0, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

$$\text{(Andere Schreibwese: } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0))$$

f heißt *stetig auf* D, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Def Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man definiert die Funktionen

$$\begin{aligned}
f + g\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x)\\
f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)\\
\lambda f\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)\\
\frac{f}{g}\colon D' \to \mathbb{R}, &\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D',\\
\text{wobei } D' := \{x \in D\colon g(x) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Satz 4.4 Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen in x_0. Dann gilt:

1) Die Funktionen $f + g$ und fg sind stetig in x_0.

2) Ist $g(x_0) \neq 0$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}\colon D' \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Dabei ist $D' := \{x \in D\colon g(x) \neq 0\}$.

Satz 4.5 Seien $D, D' \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D'$. Sei $x_0 \in D$. Dann gilt: Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Satz 4.6 Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

1) Wenn x_0 Häufungspunkt von D ist, gilt: f ist genau dann stetig in x_0, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Wenn x_0 nicht Häufungspunkt von D ist (d.h. x_0 ist ein isolierter Punkt von D), so ist f stetig in x_0.

Satz 4.7 (Äquivalente Definition der Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann gilt:

f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$