Vorlesung 5

Jetzt befassen wir uns mit Lösungen von Differentialgleichungen. Wir betrachten in dieser Vorlesung einige Klassen von Gleichungen, die mit Hilfe von Integralen explizit "gelöst" werden können. In folgenden Vorlesungen werden wir dann die allgemeine Theorie entwickeln.

Eine *(gewöhnliche) Differentialgleichung erster Ordnung* (DGl) ist eine Gleichung der Form

$$y'(x) = F\big(x, y(x)\big), \tag{6}$$

wobei F eine bekannte Funktion von zwei Variablen ist. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Funktion y, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und die Gleichung (6) für alle $x \in I$ erfüllt.

Beispiel 63. 1. Sei $F(x, y)$ unabhängig von y, d.h. es existiert eine Funktion f von x mit $F(x, y) = f(x)$ für alle x, y. Die entsprechende DGl (6) ist $y'(x) = f(x)$. Die Menge der Lösungen ist genau die Menge der Stammfunktionen von f.

2. Sei $F(x, y) = y$ für alle x, y. Die entsprechende DGl ist $y'(x) = y(x)$. Eine mögliche Lösung ist $y(x) = e^x$. Allerdings prüft man ganz einfach, dass alle Funktionen $y(x) = ce^x$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, Lösungen sind. Wir werden jetzt "zu Fuss" beweisen, dass es keine anderen Lösungen gibt. Wir verwandeln die DGl in eine äquivalente Form, indem wir die beiden Seiten durch e^{-x} multiplizieren: $e^{-x}y'(x) = e^{-x}y(x)$, oder $y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0$, oder $\big(y(x)e^{-x}\big)' = 0$. Also ist y eine Lösung genau dann, wenn die Funktion $x \mapsto y(x)e^{-x}$ konstant ist, d.h. $y(x)e^{-x} = c$ für alle x, oder $y(x) = ce^x$.

Für eine DGl kann man mehrere Problemstellungen betrachten:

- Finde alle Lösungen (man sagt oft "finde die allgemeine Lösung"). In den obigen Beispielen haben wir schon gesehen, dass eine Differentialgleichung unendlich viele Lösungen haben kann. Allerdings wissen wir noch nicht, ob alle DGl überhaupt Lösungen haben.[5]

- Finde eine Lösung, die eine zusätzliche Bedingung erfüllt. Wir betrachten vor allem die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, wobei x_0 und y_0 vorgegebene Zahlen sind. Diese Formulierung nennt man *Anfangswertproblem* (AWP). Natürlich muss man verstehen ob es eine solche Lösung existiert und, falls ja, ob so eine Lösung eindeutig bestimmt ist.

[5] Die berühmten Navier-Stokes-Gleichungen sind sehr wichtige (partielle) Differentialgleichungen der Strömungsmechanik, die seit langem in der Modellierung verwendet werden. Allerdings gibt es immer noch keinen strikten mathematischen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit von glatten Lösungen. Auch dieses Problem gehört zu den sieben Millenium-Problemen der Mathematik (mit einem Preisgeld von einer Million US-Dollar).

Um diese (und auch andere) Problemstellungen für allgemeine Differentialgleichungen zu behandeln, werden wir in kommenden Wochen neue abstrakte Begriffe einführen und eine ziemlich komplexe mathematische Theorie entwickeln müssen.

Beispiel 64. 1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die Differentialgleichung $y'(x) = f(x)$. Wie schon oben gemerkt, bilden die Stammfunktionen von f die Menge der Lösungen. Sei $x_0 \in I$ fest, dann hat die allgemeine Lösung die Form

$$y(x) = C + \int_{x_0}^{x} f,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Wir suchen jetzt nach einer Lösung y, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt. Es ist einfach zu prüfen, dass die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft durch $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f$ gegeben ist. Z.B. ist $y(x) = (x-1)^2$ die einzige Lösung der Gleichung $y'(x) = 2(x-1)$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$. Wichtig ist, dass jede Lösung auf dem ganzen Intervall I definiert ist.

2. Betrachte jetzt die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Wir haben oben gesehen, dass die allgemeine Lösung $y(x) = ce^x$ ist. Wir suchen jetzt nach einer Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt: man muss also $ce^{x_0} = y_0$ haben, d.h. $c = y_0 e^{-x_0}$, und die entsprechende (eindeutig bestimmte) Lösung ist $y(x) = y_0 e^{x-x_0}$. Z.B. ist $y(x) = -3e^{x-1}$ die einzige Lösung mit $y(1) = -3$. Die Lösungen sind auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definiert.

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wir werden zuerst eine Klasse von Differentialgleichungen betrachten, für die es eine ziemlich direkte Lösungsmethode existiert, und die die oben betrachtete Beispiele einschliesst.

Eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \tag{7}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Beispiel 65 (Populationsdynamik). Die DGl (7) wird oft in der Modellierung[6] von verschiedenen Wachstumsprozessen verwendet. Zum Beispiel, sei $y(t)$ die Grösse einer Population zum Zeitpunkt t und seien t_j und t_{j+1} zwei Zeipunkte. Wir nehmen an, dass

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \Delta G(t_j) - \Delta S(t_j) + \Delta M(t_j)$$

gilt, wobei

[6] Mehr dazu erfährt man in der Lehrveranstaltung "mat320 - Mathematische Modellierung"

- $\Delta G(t_j)$ = Anzahl der Geburten im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$,
- $\Delta S(t_j)$ = Anzahl der Sterbefälle im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$,
- $\Delta M(t_j)$ = Migration (Ab- und Zuwanderung) im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$, kann ≥ 0 oder ≤ 0 sein.

Bezeichnet man $\Delta t := t_{j+1} - t_j$, so erhält man die Relation

$$\frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{\Delta t} = \frac{\Delta G(t_j)}{\Delta t} - \frac{\Delta S(t_j)}{\Delta t} + \frac{\Delta M(t_j)}{\Delta t}.$$

Für $\Delta t \to 0$ erhält man also $y'(t) = g(t) - s(t) + m(t)$, wobei

$$g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}, \quad s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Oft betrachtet man folgende zusätzliche Hypothesen:

- $g(t)$ ("Anzahl der Geburte pro Zeiteinheit") ist linear proportional zum aktuellen Bestand der Population, $g(t) = \alpha(t)y(t)$,
- $s(t)$ ("Anzahl der Sterbefälle pro Zeiteinheit") ist linear proportional zum aktuellen Bestand der Population, $s(t) = \beta(t)y(t)$,
- $m(t)$ ("Anzahl der Migranten pro Zeiteinheit") ist unabhängig vom aktuellen Bestand der Population.

Dadurch erhält man die DGl $y'(t) = a(t)y(t) + m(t)$ mit $a(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Die Funktionen α, β und m bestimmt man typischeweise durch Analyse von statistischen Daten. $\square$

Falls $b \not\equiv 0$, wird die DGl (7) *inhomogen* genannt, dann betrachtet man zusätzlich die zugehörige *homogene* lineare Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x)y(x), \tag{8}$$

(d.h. ohne den Term b). Die Gleichungen sind eng miteinander verbunden:

Proposition 66. *Sei z eine Lösung der inhomogenen DGl (7) auf einem Intervall $J \subset I$. Eine Funktion y ist Lösung derselben inhomogenen DGl (7) auf J genau dann, wenn die Differenz $y_0 := y - z$ Lösung der homogenen Gleichung (8) auf J ist.*

Beweis. Wir haben $z' = az + b$ auf J.

Sei y_0 Lösung der homogenen DGl (8), d.h. $y_0' = ay_0$, dann gilt für $y := y_0 + z$:

$$y' = y_0' + z' = ay_0 + az + b = a(y_0 + z) + b = ay + b,$$

also ist y Lösung der inhomogenen DGl (7). Umgekehrt, sei y Lösung der inhomogenen DGl (7), d.h. $y' = ay + b$, dann gilt für $y_0 := y - z$:

$$y_0' = y' - z' = ay + b - (az + b) = a(y - z) = ay_0,$$

also ist y_0 Lösung der homogenen DGl (8). □

Diese Rechnungen kann man wie folgt zusammenfassen:

Korollar 67. *Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGl = die allgemeine Lösung der homogenen DGl + eine beliebige ("spezielle") Lösung der inhomogenen DGl.*

Das Problem (7) löst man also in zwei Schritten:

- Man findet die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung,
- Man findet irgendeine ("spezielle") Lösung y_s der inhomogenen Gleichung.

Diese Schritte werden wir jetzt einzeln betrachten:

Satz 68 (Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung). *Sei A eine Stammfunktion von a auf I. Die allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung* (8) *hat die Form $y_h(x) = Ce^{A(x)}$, wobei C beliebige Konstante ist.*

Beweis. Da $e^{-A(x)}$ nie gleich Null ist, kann man die beiden Seiten von (8) mit $e^{-A(x)}$ multiplizieren und dann alle Terme von der rechten auf die linke Seite bringen um eine äquivalente Differentialgleichung zu erhalten,

$$e^{-A(x)}y'(x) - a(x)y = 0.$$

Wegen $A' = a$ kann man diese Gleichung einfach als $(e^{-A}y)' = 0$ umschreiben. Eine Funktion y ist Lösung von (8) genau dann, wenn $e^{-A}y$ konstant ist, $e^{-A}y = C$, und dann $y = Ce^A$. □

In der Sprache der linearen Algebra, bilden die Lösungen der homogenen Gleichung (8) einen (eindimensionalen) Vektorraum, und die Lösungsmenge zu (7) ist ein affiner Raum. Diese Sprache werden wir aber erst später nutzen (bei der Untersuchung von Systemen linearer Differentialgleichungen)

Um *alle* Lösungen der inhomogenen Gleichung (7) zu finden, brauchen wir jetzt nur *eine* Lösung davon. Diese wird oft durch die sogenannte *Variation der Konstanten* gefunden. Nämlich, suchen wir nach einer Lösung der Form $y(x) = C(x)e^{A(x)}$, d.h. man nehme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und ersetze die Konstante C durch eine *Funktion* $C(x)$. Diese Funktion y setzt man in die DGl (7) ein:

$$(Ce^A)' = aCe^A + b, \text{ oder } C'e^A + CA'E^A = Cae^A + b, \text{ oder } C'e^A = b.$$

(Im letzen Schritt haben wir $A' = a$ wieder verwendet.) Es folgt, dass $y = Ce^A$ genau dann Lösung der inhomogenen Gleichung (7) ist, wenn die Funktion C die Gleichung $C' = be^{-A}$ erfüllt. Diese neue Gleichung für C lässt sich lösen: die Lösungen sind genau die Stammfunktionen von be^{-A}, also

$$C(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx. \tag{9}$$

Satz 69 (Allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung). *Die allgemeine Lösung y der inhomogenen Gleichung* (7) *hat die Form*

$$y = \Big(C + \int be^{-A}\Big)e^A, \quad C \in \mathbb{R},$$

wobei A eine beliebige Stammfunktion von a ist.

Man merkt auch, dass alle Lösungen auf dem ganzen Definitionsbereich I der Koeffizienten a und b definiert sind: das ist eine besondere Eigenschaft von linearen Differentialgleichungen.

Jetzt werden wir die Anfangsbedingung berücksichtigen:

Satz 70. *Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt die lineare inhomogene Gleichung* (7) *genau eine Lösung y zum AWP $y(x_0) = y_0$. Diese Lösung ist durch*

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big) + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\Big(\int_{t}^{x} a(s)\,ds\Big)dt$$

gegeben.

Beweis. Wir müssen die vorherigen Konstruktionen wiederholen, aber jetzt werden alle Konstanten wichtig. Als Stammfunktion von a wählen wir $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$. Auch für (9) wählen wir eine ganz bestimmte Lösung,

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt \equiv \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\Big(\int_{t}^{x_0} a(s)\,ds\Big)dt,$$

dadurch erhalten wir den folgenden Ausdruck für die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= c\exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big) + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\Big(\int_{t}^{x_0} a(s)\,ds\Big)dt\ \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big)\\ &= c\exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big) + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\Big(\int_{t}^{x} a(s)\,ds\Big)dt, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Um die Bedingung $y(x_0) = y_0$ zu erfüllen muss man lediglich $c = y_0$ nehmen. □

Beispiel 71. Differentialgleichung $y'(x) = 2xy(x) + x$ und AWP $y(0) = 0$.

Das ist eine lineare Differentialgleichung (7) mit $a(x) = 2x$ und $b(x) = x$. Als Stammfunktion von a nehmen wir $A(x) = x^2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also $y_h(x) = ce^{x^2}$. Darüber hinaus haben wir eine spezielle Lösung $y_s(x) = C(x)e^{x^2}$ mit $C = \displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$. Mit Hilfe der Substitution $\varphi(x) = x^2$ findet man $C(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}$, und die entsprechende spezielle Lösung ist $y_s(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = y_h(x) + y_s(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$.

Diese Funktion y erfüllt die Bedingung $y(0) = 0$ für $c = \frac{1}{2}$, also ist $y(x) = \frac{1}{2}\,e^{x^2} - \frac{1}{2}$ die gesuchte Lösung des AWPs.

Separation der Variablen

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g\big(y(x)\big)}, \tag{10}$$

wobei $g \neq 0$. Das ist eine weitere wichtige Klasse von Differentialgleichungen, deren Lösungen man mit Hilfe von Integralen schreiben kann.

Diese kann man zuerst als $g\big(y(x)\big)y'(x) = f(x)$ umschreiben. Ist G eine Stammfunktion von g und F eine Stammfunktion von f, so gilt $(G \circ y)' = F'$, also $G\big(y(x)\big) = F(x) + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Das wird meist in vereinfachter symmetrischer Form geschrieben,

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Kann man die Funktion G umkehren, so ist $y(x) = G^{-1}\big(F(x) + C\big)$ Lösung von (10).

Wir werden die obige Rechnung als Satz formulieren (die Existenz der Stammfunktionen wird durch die Stetigkeit der Funktionen f und g garantiert):

Satz 72. *Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Seien F ung G Stammfunktionen von f und g. Eine differenzierbare Funktion $y : I' \to J$, die auf einem Teilintervall $I' \subset I$ definiert ist, ist genau dann Lösung der Differentialgleichung* (10)*, wenn sie die Gleichung $G\big(y(x)\big) = F(x) + C$ mit einer Konstante C erfüllt.*

Die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ kann man auch berücksichtigen: sie ist zu $G(y_0) = F(x_0) + C$ äquivalent, d.h. $C = G(x_0) - F(x_0)$. Also ist eine Funktion y Lösung der Differentialgleichung mit $y(x_0) = y_0$ genau dann, wenn sie

$$G\big(y(x)\big) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

für alle x erfüllt. Nutzt man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, so erhält man die folgende Gleichung für y:

$$\int_{y_0}^{y(x)} g = \int_{x_0}^{x} f.$$

Im Einzelfall muss dann noch untersucht werden, auf welchem Intervall diese Lösung y definiert ist.

Beispiel 73. Differentialgleichung $y'(x) = y(x)^2$.

Ganz formell sind wir schon im Rahmen der Separation der Variablen: $y(x)^2 = f(x)/g\big(y(x)\big)$ mit $f(x) = 1$ und $g(y) = 1/y^2$.

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 1, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{y} = x + C, \quad y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Diese Konstruktion gilt aber nur im Bereich, in dem die Funktion g definiert ist und nicht verschwindet. In unserem Fall ist $g(y)$ für $y \neq 0$ definiert, für alle solchen y gilt $g(y) \neq 0$. Man muss also zusätzlich prüfen, ob es Lösungen y existieren, die verschwinden. Wir sehen also folgendes:

- Die konstante Funktion $y(x) \equiv 0$ ist bestimmt Lösung.
- Alle anderen Lösungen können nicht verschwinden: gilt $y(x) \neq 0$ für ein x, so ist y automatisch durch $y(x) = -1/(x + C)$ mit einer Konstante C gegeben.

Wir suchen jetzt nach den Lösungen, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllen.

- Für $y_0 = 0$ ist $y(x) = 0$ die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft. Diese Lösung ist auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definiert.
- Für $y_0 \neq 0$ muss die gesuchte Lösung y die Form $y(x) = -1/(x + C)$ haben. Für $x = x_0$ erhält man $y_0 = -1/(x_0 + C)$, dadurch findet man den Wert der Konstante C: $C = -1/y_0 - x_0$, also ist $y(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$ die Lösung des AWPs. Diese Lösungen sind aber nicht auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definiert: der Punkt $x = x_0 + 1/y_0$ ist nicht im Definitionsbereich, und wegen $\lim_{x \to x_0 + 1/y_0} y(x) = \infty$ ist keine stetige Fortsetung in diesen Punkt möglich.

Wir sehen hier eine wichtige Eigenschaft: der Definitionsbereich der Lösung ist im Allgemeinen von der Anfangsbedingung abhängig. Allerdings haben wir zu jeder Anfangsbedingung nur eine einzige Lösung.

Beispiel 74. Die Differentialgleichung $y'(x) = 2\sqrt{y(x)}$ ist nur für $y(x) \geq 0$ definiert. Wir haben wieder die konstante Lösung $y(x) = 0$. Die Lösungen mit $y(x) > 0$ findet man mit der Separation der Variablen:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx, \quad \sqrt{y} = x + C, \quad y(x) = (x + C)^2,$$

wobei $x + C > 0$ erfüllt sein muss. Diese Funktionen können aber verschwinden: $\lim_{x\to -C} y(x) = 0$, und man kann sie mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ "zusammenkleben" um eine auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definierte Lösung zu erhalten. Es folgt daraus, dass das AWP $y(0) = 0$ mehrere Lösungen hat, z.B. $y(x) \equiv 0$, oder $y(x) = x^2$, oder $y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ (x-c)^2, & x > c \end{cases}$ für beliebige $c > 0$. Also kann ein AWP mehrere Lösungen haben.