Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Vollständige Induktion

× Aufgabe 1: Explizite Formeln

Zeige die folgenden Identitäten mit vollständiger Induktion.
Tipp für (b): Im Induktionsbeweis von vorne und von hinten arbeiten

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 3 = 4 - 1 = 2^{1+1} - 1.$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1.$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) + 2^{n+1} \\ &\overset{IV}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Induktionsbeweis: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

! (c)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = x + 1 = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^{1+1}-1}{x-1}$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Zu zeigen:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

Induktionsbeweis: *Sei $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} \\
&\overset{IV}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+(x-1)x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1+1}-x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2: Teilbarkeit

Zeige die folgenden Teilbarkeiten mit vollständiger Induktion

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ teilt } n^2 + n \text{ (schreibe: } 2 \mid n^2 + n)$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$2 \mid (1^2 + 1)$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$2 \mid n^2 + n$$

Zu zeigen:

$$2 \mid (n + 1)^2 + (n + 1)$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+1) &= (n^2 + 2n + 1) + (n + 1) \\ &= n^2 + 3n + 2 \\ &= (n^2 + n) + (2n + 2) \\ &= (n^2 + n) + 2(n + 1) \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $n^2 + n$ durch 2 teilbar. $2(n + 1)$ ist offensichtlich ebenfalls durch 2 teilbar. Damit ist auch die Summe beider, also $n^2 + n + 2(n + 1)$, durch 2 teilbar und so gilt nach der obigen Gleichungskette auch

$$2 \mid (n + 1)^2 + (n + 1),$$

was zu zeigen war.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid (5^n + 7)$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt wegen $5^1 + 7 = 12$*:*

$$4 \mid (5^1 + 7)$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$*, d.h.*

$$4 \mid (5^n + 7)$$

Zu zeigen:

$$4 \mid (5^{(n+1)} + 7)$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}(5^{n+1} + 7) &= (5^{n+1} + 7 + \underbrace{28 - 28}_{=0}) \\ &= (5 \cdot 5^n + 35 - 28) \\ &= (5 \cdot (5^n + 7) - 28)\end{aligned}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist 5^n+7 *durch* 4 *teilbar.* 28 *ist offensichtlich ebenfalls durch 4 teilbar. Daher liefert die obige Gleichungskette, dass*

$$4 \mid (5^{n+1} + 7)$$

gilt, womit der Induktionsschritt vollendet ist.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

× Aufgabe 3: Stimmt das?

Gegeben sei folgender Induktionsbeweis:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n^2$$

Beweis: (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Für $n = 1$ gilt:

$$2^1 = 2 > 1 = 1^2$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$2^n > n^2$$

Zu zeigen:

$$2^{n+1} > (n + 1)^2$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{>}_{I.V} n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

(a) Rechne die Formel für $n = 2, \ldots , 6$ nach. Was fällt auf?

Lösung:

$n = 2 : 2^2 = 4 > 4 = 2^2$ *ist falsch*
$n = 3 : 2^3 = 8 > 9 = 3^2$ *ist falsch*
$n = 4 : 2^4 = 16 > 16 = 4^2$ *ist falsch*
$n = 5 : 2^5 = 32 > 25 = 5^2$ *ist richtig*
$n = 6 : 2^6 = 64 > 36 = 2^2$ *ist richtig*
usw.

(b) Finde den Fehler im Induktionsbeweis.

Lösung: $n^2 > 2n+1$ gilt nicht für $n < 3$. Da der Induktionsanfang dann erst wieder für $n = 5$ gilt, gilt die Aussage sogar (mindestens) nicht für $n < 5$.

(c) Überlege, wie man Aussage und Beweis verändern kann, um das Problem zu vermeiden.

Lösung: Zum einen müsste man zeigen, dass $n^2 > 2n + 1$ *(Dieses ist auch durch Vollständige Induktion möglich). Zum anderen muss die Behauptung wie folgt geändert werden:*

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5} : 2^n > n^2$$

und beginne im Induktionsanfang mit $n = 5$.

! Aufgabe 4

Zeige folgende Behauptung:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1}\ \forall n \geq 2 :\ (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Lösung: ***Induktionsanfang:*** $(n = 2)$

Für $n = 2$ *gilt:*

$$(1 + x)^2 \underbrace{=}_{Bin.\ Formel} 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \geq 2$*, d.h.*

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1} :\ (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Zu zeigen:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1} :\ (1 + x)^{(n+1)} \geq 1 + (n + 1)x.$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n (1 + x) \\ &\underbrace{\geq}_{I.V.} (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \\ &= 1 + (1 + n)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \geq 2$ *gilt.*