26.11.19

Zusatztutorium #1

Z.1

Beh: $\forall n \in \mathbb{N}: 5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar.

Beweis: per vollständiger Induktion

Induktionsanfang: $(n=1)$ $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ ist durch 8 teilbar.

Induktionsschritt $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvor.: Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Z: 8 teilt $5^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)}$

Es gilt: $5^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)} = 5^{2n} \cdot 5^2 - 3^{2n} \cdot 3^2$

$= 5^{2n} \cdot 5^2 \underbrace{- 3^{2n} \cdot 5^2 + 3^{2n} \cdot 5^2}_{=0} - 3^{2n} \cdot 3^2$

$= 5^2 \cdot (\underbrace{5^{2n} - 3^{2n}}) + 3^{2n}(\underbrace{5^2 - 3^2})$

durch 8 teilbar nach I.V.

$\Rightarrow 5^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)}$ ist durch 8 teilbar. ∎

Z.2

a) Vor: $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \binom{x}{y} \mapsto \binom{x}{x+y}$

Beh: f_1 ist bijektiv

Beweis: 1) f_1 ist injektiv (direkter Beweis)

Seien $\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ mit $\binom{x_1}{y_1} \neq \binom{x_2}{y_2}$

Z: $f_1\binom{x_1}{y_1} \neq f_1\binom{x_2}{y_2}$

Da $\binom{x_1}{y_1} \neq \binom{x_2}{y_2}$ gilt entweder $x_1 \neq x_2$ oder $x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$

Es ist $f_1\binom{x_1}{y_1} = \binom{x_1}{x_1+y_1}$

$f_1\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_2}{x_2+y_2}$

Falls $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \binom{x_1}{\ldots} \neq \binom{x_2}{\ldots}$ also $f_1\binom{x_1}{y_1} \neq f_1\binom{x_2}{y_2}$

Falls $x_1 = x_2$ und $y_1 \neq y_2 \Rightarrow (x_1+y_1) = (x_2+y_1) \neq (x_2+y_2)$

$\Rightarrow f_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \neq f_1\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

d.h. f_1 ist <u>injektiv</u>

Alternative Möglichkeit zu zeigen f_1 ist injektiv
(indirekter Beweis) nur 1. Variante zeigen

Seien $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $f_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = f_1\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ * um nicht alles wieder aufschreiben zu müssen.

z.z.: $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

$* \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_1+y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\x_2+y_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}x_1 = x_2\\x_1+y_1 = x_2+y_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}a=c\\b=d\end{matrix}\right\} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_1$ ist <u>injektiv</u>

2) f_1 ist <u>surjektiv</u>:

Sei $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Gesucht $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Es soll gelten: $\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Also soll gelten:

$x = a$

$x+y = b \Rightarrow y = b - x = b - a$

D.h. für $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a\\b-a\end{pmatrix}$ gilt: $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+(b-a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_1$ ist <u>surjektiv</u>

f_1 ist surjektiv + injektiv $\Rightarrow f_1$ ist bijektiv $\boxed{z}$

<u>b)</u> <u>Vor:</u> $f_2: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $f_2(x+iy) := x^2+y^2$ $x, y \in \mathbb{R}$ Quadrate meist nicht inj. oder sur.

<u>Beh:</u> f_2 ist weder injektiv noch surjektiv.

<u>Beweis:</u> <u>Annahme:</u> f_2 ist injektiv.

<u>Gegenbeispiel:</u> Für $a := 1+0 \cdot i = 1$, $b := 0+1i = i$

gilt $a \neq b$, aber $f_2(1) = 1 = f_2(i) \Rightarrow f_2$ ist nicht injektiv ↯

Weiter ist f_2 nicht surjektiv, da $-1 \in \mathbb{R}$
und $x^2+y^2 \geq 0$
$x^2+y^2 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
d.h. es gibt kein $x+iy \in \mathbb{C}$ mit $f_2(x+iy) = -1$
$\Rightarrow f_2$ ist nicht surjektiv $\blacksquare$

Für welche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist
$$f_2: \mathbb{C} \to M, \; x+iy \mapsto x^2+y^2$$
surjektiv?
$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$$

c)

Vor: ($f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, beide injektiv)

Beh: $g \circ f: X \to Z$ ist injektiv. Kontraposition

$g \circ f$ inj $\Rightarrow g \circ f$ inj

Beweis: (per Kontraposition)

Zeige: ($g \circ f$ ist nicht injektiv
$\Rightarrow f$ ist nicht inj. oder g nicht inj.)

Da $g \circ f$ nicht injektiv $\Rightarrow$ $\boxed{\exists x_1, x_2 \in X \text{ mit } x_1 \neq x_2 \text{ \& } (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)}$

Falls $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ ist nicht injektiv.
Andererseits: Sei $f(x_1) \neq f(x_2)$
Setze: $y_1 := f(x_1)$, $y_2 := f(x_2)$
und es gilt: $y_1 \neq y_2$ nach Wahl von x_1, x_2
$$g(y_1) = g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2)$$

$\Rightarrow g$ ist nicht injektiv.
↳ wegen Kontraposition
$\Rightarrow$ Behauptung $\blacksquare$

d) Vor: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ beide surjektiv

Beh: $g \circ f: X \to Z$ ist surjektiv

Beweis: (direkter Beweis)

Sei $c \in Z$ beliebig.

Da g surjektiv $\Rightarrow \exists b \in Y: g(b) = c$

Da f surjektiv $\Rightarrow \exists a \in X: f(a) = b$

$\Rightarrow (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

$\Rightarrow$ Behauptung $\blacksquare$

Z.3

a)

Vor: $G := \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x) = ax+b \\ \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \\ \text{und } a \neq 0 \end{array} \right\}$

$$\circ: G \times G \to G$$
$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

Beh: $(G, \circ)$ ist eine Gruppe, die nicht abelsch ist.

Beweis:

1) G ist abgeschlossen bzgl. $\circ$:

Seien $f, g \in G$ mit $f(x) = ax+b$

$g(x) = cx+d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ & $a \cdot c \neq 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$)

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(cx+d) = a(cx+d)+b$

$= ac \cdot x + (ad+b)$

$= \underbrace{ac}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} x + \underbrace{(ad+b)}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow f \circ g \in G.$

2) Assoziativgesetz:

Seien $f, g, h \in G$ mit $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$,

$h(x) = ex+k$, $a \cdot c \cdot e \neq 0$

z.z. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Wissen: $(f \circ g)(x) = acx + (ad+b)$

Analog: $(g \circ h)(x) = cex + (ck+d)$

$\Rightarrow ((f\circ g)\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = (f\circ g)(ex+k) =$

$= a\cdot c\,(ex+k)+ad+b$

$= ace\cdot x + ack + ad + b$

$(f\circ(g\circ h))(x) = \ldots$ analog

$\ldots = ace\cdot x + ack + ad + b$

$\Rightarrow$ $\circ$ ist assoziativ.

3) Neutrales Element:

Für $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ gilt: $id_{\mathbb{R}} \in G$. &

für alle $f \in G$: $f\circ id_{\mathbb{R}} = f = id_{\mathbb{R}}\circ f$

(nachrechnen!)

4) Inverses Element:

Sei $f \in G$ mit $f(x) = ax+b$ und $a \neq 0$.

Gesucht ist $g \in G$ mit $\boxed{g(x) = cx+d}$, $c \neq 0$ $\Rightarrow$ *

und $f\circ g = id_{\mathbb{R}} = g\circ f$

$\Rightarrow (f\circ g)(x) = acx + ad + b \overset{!}{=} x = id_{\mathbb{R}}(x)$

und

$(g\circ f)(x) = acx + bc + d \overset{!}{=} x = id_{\mathbb{R}}(x)$

$\Rightarrow$ Es soll gelten: $a\cdot c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \neq 0$

$ad + b = 0 \Rightarrow d = \frac{-b}{a}$

$bc + d = 0$

In $bc + d$ eingesetzt

$b\frac{1}{a} - \frac{b}{a} = 0$

* $\Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}}$ $\in G$ ist das Inverse zu f.

5) $(G,\circ)$ ist nicht abelsch / Kommutativität

Für $f,g \in G$ mit $f(x) = x+1$ $g(x) = 2x$ gilt

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x+1 \quad \text{und}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2x+2$$

$\Rightarrow (f\circ g) \neq (g\circ f)$

d.h. $(G,\circ)$ ist nicht abelsch. $\boxtimes$

b)

Vor: $H := \{ f \in G \mid f(x) = ax \}$

Beh: $(H,\circ)$ ist eine Untergruppe die abelsch ist.

Beweis: Wende Untergruppenkriterium an:

(U0) $id_{\mathbb{R}} \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$.

(U1) Sei $f,g \in H$, $f(x) = ax$
$g(x) = cx$

für $a \cdot c \neq 0$

$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{c} \cdot x$

z: $f\circ g^{-1} \in H$ gilt, da $(f\circ g)^{-1}(x) = \underbrace{\frac{a}{c}}_{\neq 0} x \in H$

$(H,\circ)$ ist abelsch.

Seien $f,g \in H$, $f(x) = ax$
$g(x) = cx$

$\Rightarrow (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(c\cdot x) = a\cdot c\cdot x = a\cdot c\cdot x = \ldots =$
$(g\circ f)(x)$

$\Rightarrow$ Behauptung $\boxtimes$

c) folgt online

Z4

Vor: $(R, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins mit mind. zwei Elementen

$a \in R$ heißt nilpotent wenn $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$b \in R$ heißt m-te Einheitswurzel, falls $b^m = 1$

a)

Beh: $a \in R \setminus \{0\}$ nilpotent

$\Rightarrow a$ ist Nullteiler

Beweis:

Wähle $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $a^n = 0$

$\Rightarrow a^{n-1} \neq 0$

$\Rightarrow b := a^{n-1} \in R \setminus \{0\}$ &

$a \cdot b = a \cdot a^{n-1} = a^n = 0$

d.h. a ist Nullteiler ∎

b) ist analog (online)

c) Beh: Es gibt kein Element in $R \setminus \{0\}$ das gleichzeitig nilpotent und m-te Einheitswurzel ist.

Beweis: Annahme: $a \in R \setminus \{0\}$ & m-te Einheitsw.

$\Rightarrow \quad a^m = 1 \; , \; a^n = 0 \quad$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 = 0^m (a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n = 1^n = 1$

↯ zu $0 \neq 1$ da R mehr als 1 Element hat ∎