Übungsblatt 11 - Lösungsvorschläge

Thilo Köster

9. Juli 2020

Aufgabe 10.1

1.

Z.z. Es ex. ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) mit $R_1 y_1 = R_2 y_2 = 0$.

Da (u_1, u_2) ein Fundamentalsystem ist, gilt dass alle Lsg. der DGl. eine Linearkombination dieser beiden Elemente sind. Suche also y_1 von der Form:

$$y_1 = c_1 u_1 + c_2 u_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sodass $R_1 y_1 = 0$ gilt. Durch einsetzen erhält man:

$$R_1 y_1 = c_1 \cdot R_1 u_1 + c_2 \cdot R_1 u_2$$

Wähle nun $c_1 = R_1 u_2$ und $c_2 = -R_1 u_1$, somit gilt dann $R_1 y_1 = 0$ für $y_1 = (R_1 u_2) u_1 - (R_1 u_1) u_2$ und y_1 eine Lsg. der DGl.

Analog: Gilt für $y_2 = (R_2 u_2) u_1 - (R_2 u_1) u_2$ mit $R_2 y_2 = 0$ und y_2 Lsg. der DGl.

Nun ist z.z. dass y_1, y_2 linear unabhängig sind.

Seien $A, B \in \mathbb{R}$ mit $Ay_1 + By_2 = 0$. Durch einsetzen erhält man:

$$0 = A((R_1 u_2) u_1 - (R_1 u_1) u_2) + B((R_2 u_2) u_1 - (R_2 u_1) u_2) = (AR_1 u_2 + BR_2 u_2) u_1 - (AR_1 u_1 + BR_2 u_1) u_2$$

Mit der linearer Unabhängigkeit von (u_1, u_2) folgt somit:

$$\begin{cases} AR_1 u_1 + BR_2 u_1 = 0 \\ AR_1 u_2 + BR_2 u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_2 u_1 \\ R_1 u_2 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Vor. ist $\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_2 u_1 \\ R_1 u_2 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix}^T \neq 0$, also invertierbar. Daraus folgt direkt $A = B = 0$, somit y_1, y_2 linear unabhängig und somit auch ein Fundamentalsystem. *q.e.d.*

2.

Wir haben das Randwertproblem $y'' - 2y' + y = f$, $R_1 y := y'(0) - y(0) = 0$, $R_2 y := y(1) = 0$

(a) Aus dem obigen Randwertproblem folgt das Charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Dieses hat eine zweifache Nullstelle bei $\lambda = 1$, wir erhalten also folgendes Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:

$$u_1 = e^x,\ u_2 = xe^x \text{ und ihre Ableitungen: } u_1' = e^x,\ u_2' = (x+1)e^x$$

Nach Satz 159 hat das Randwertproblem nun genau dann eine eindeutige Lösung für jede Funktion $f \in C^0\big([0,1]\big)$, wenn die folgende Determinante ungleich null ist:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e & e \end{pmatrix} = -e \neq 0$$

Nach Satz 159 folgt die eindeutige Lösbarkeit.

(b) Wir müssen ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) bestimmen, sodass $R_1 y_1 = R_2 y_2 = 0$. Wir wenden dafür das Verfahren, das in 10.1 1. erarbeitet wurde, mit u_1, u_2 aus (a) an:

$$\begin{aligned} y_1 &= (R_1 u_2) u_1 - (R_1 u_1) u_2 = 1e^x - 0 = e^x \\ y_2 &= (R_2 u_2) u_1 - (R_2 u_1) u_2 = ee^x - exe^x = (x-1)e^{x+1} \end{aligned}$$

(y_1, y_2) ist nach Aufgabenteil 1 ein Fundamentalsystem der homogenen DGl. Die Greensche Funktion eines solchen Randwertproblems lässt sich mit einem solchen Fundamentalsystem für jedes $s \in (0,1)$ wie folgt darstellen:

$$x \mapsto G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x) y_2(s)}{W(s)}, & x < s \\ \dfrac{y_1(s) y_2(x)}{W(s)}, & x \geq s \end{cases}$$

Wobei W die Wronski-Determinate ist. Es gilt mit y_1, y_2 wie oben bestimmt:

$$W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = e^x x e^{x+1} - e^x (x-1) e^{x+1} = e^{2x+1}(x - x + 1) = e^{2x+1}$$

Es gilt also nach der obigen Darstellung der Greenschenfunktion:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x) y_2(s)}{W(s)} = \dfrac{e^x (s-1) e^{s+1}}{e^{2s+1}} = (s-1)e^{x-s}, & x < s \\ \dfrac{y_1(s) y_2(x)}{W(s)} = \dfrac{e^s (x-1) e^{x+1}}{e^{2s+1}} = (x-1)e^{x-s}, & x \geq s \end{cases}$$

Aufgabe 10.2

(a) Wir haben folgendes lineares System erster Ordnung $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3x - y, \end{cases}$ mit Anfangswerten $x(0) = 2$, $y(0) = -2$. Wir überführen das Systems in Matrizenform und erhalten:

$$Y' = AY, \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Anfangswert: } Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimme das Charakteristische Polynom wie folgt:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4$$

Das Charakteristische Polynom hat somit zwei Nullstellen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ und somit A diese Nullstellen als Eigenwerte. Da P zwei verschiedene Nullstellen hat gilt mit Satz 163 und Bemerkung 164, dass $\{e^{\lambda_j t} v_j | j \in \{1, 2\}$ und v_j Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j\}$ ein Fundamentalsystem für $Y' = AY$ ist.

Bestimme also Eigenvektoren zu den Eigenwerten.

Für $\lambda_1 = -2$:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3x = y$$

Also z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 2$:

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

Also z.B. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Folglich ist $Y = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine reellwertige Lösung des Systems.

Löse das AWP:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -3c_1 + c_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 1$$

Also löst $Y = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ das AWP.

(b) Wir haben folgendes lineares System erster Ordnung $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ mit Anfangswerten $x(0) = y(0) = 1$. Wir überführen das Systems in Matrizenform und erhalten:

$$Y' = AY, \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Anfangswert: } Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme das Charakteristische Polynom wie folgt:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4$$

Das Charakteristische Polynom hat somit zwei Nullstellen $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ und somit A diese Nullstellen als Eigenwerte. Da P zwei verschiedene Nullstellen hat gilt mit Satz 163 und Bemerkung 164, dass $\{e^{\lambda_j t} v_j | j \in \{1,2\}$ und v_j Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j\}$ ein Fundamentalsystem für $Y' = AY$ ist.

Bestimme also Eigenvektoren zu den Eigenwerten.

Für $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2iy$$

Also z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 1 - 2i$:

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2iy$$

Also z.B. $v_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Folglich ist $(e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix})$ ein komplexes Fundamentalsystem von $Y' = AY$. Ersetze für das reellwertige Fundamentalsystem das komplex konjugierte Paar $e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$, $e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ durch das Paar $Re(e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix})$, $Im(e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix})$. Berechne Realteil und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} &= e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -2\sin(2t) + 2i\cos(2t) \\ \cos(2t) + i\sin(2t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Re(e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}) &= e^t \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad Im(e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}) = e^t \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folglich ist $Y = c_1 e^t \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine reellwertige Lösung des Systems.

Löse das AWP:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Also löst $Y = e^t \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ das AWP.

Aufgabe 10.3

1. Wir haben das System: $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -y \end{cases}$

   Schreibe zuerst das System in Matrixform, das System ist äquivalent zu:

   $$Y' = AY, \text{ mit } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Prüfe nun ob A diagonalisierbar ist. Berechne dafür zunächst die Eigenwert als Nullstellen des Charakteristischen Polynom.

   $$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2$$

   Also ist $\lambda = -1$ der einzige Eigenwert. Um zu überprüfen ob die Matrix A diagonalisierbar ist, kann man nun nach Satz 163 testen ob die Eigenvektoren eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sind. Die Eigenvektoren von A bilden gerade den kern$(A - \lambda I)$, da λ der einzige Eigenwert von A ist. Es gilt:

   $$kern(A - \lambda I) = \{v \in \mathbb{R}^2 | (A - \lambda I)v = 0\},$$
   $$(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0$$

   Für alle Elemente des Kerns der Eigenvektoren ist die zweite Komponente gleich null. Somit ist die Dimension des Kerns eins und folglich die Eigenvektoren keine Basis von $\mathbb{R}^2$. Mit Satz 163 folgt dass A nicht diagonalisierbar ist.

2. Bestimme nun die allgemeine Lösung des Systems.

   Betrachte zunächst die Gleichung $y' = -y$. Die allgemeine Lösung dieser DGl. ist bekanntermaßen $y = ce^{-t}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

   Die erste Gleichung des Systems entspricht somit $x' + x = ce^{-t}$, dies ist eine lineare DGl. erster Ordnung und auf dem bekannten Weg lösbar.

   Homogene Lösung: Das Charakteristische Polynom der homogenen Lösung ist $P(\lambda) = \lambda + 1$ und hat die Nullstelle $\lambda = -1$. Das Fundamentalsystem ist also (e^{-t}).

   Spezielle Lösung: Nach Satz 151 ist die spezielle Lösung für diese DGl.: $x_{sp} = \frac{c}{P'(-1)} t^1 e^{-t} = cte^{-t}$

   Die allgemeine Lösung dieses Systems ist also

   $$\begin{cases} x = c'e^{-t} + cte^{-t}, \\ y = ce^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow c \begin{pmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c', c \in \mathbb{R}$$