Lösungen der Fingerübungen

Beachten Sie: Es gibt oft verschiedene Wege, um zur richtigen Lösung zu kommen (z.B. durch Benutzung verschiedener Konvergenzkriterien). Die hier angegebenen Wege sollen besonders Ihre Intuition schärfen und nicht die 'kochrezeptartige' Anwendung der Kriterien trainieren.

1. Konvergiert die Reihe?

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/3}$. Nein, da $n^{-1/3} \geq n^{-1}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ divergiert.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1/3}$. Ja nach dem Leibniz-Kriterium, da die Reihe alterniert und $n^{-1/3} \to 0$ und die Folge $n^{-1/3}$ monoton fällt.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2^n}}$.

   Vermutung: Hauptterm ist $\frac{1}{\sqrt{2^n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, daher konvergent.

   Lösung: $\frac{1}{\sqrt{1+2^n}} < \frac{1}{\sqrt{2^n}}$, daher Konvergenz nach dem Majorantenkriterium, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ konvergiert.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n5^n}}$.

   Vermutung: Hauptterm ist $\frac{2^n}{\sqrt[3]{5^n}} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)^n$, dessen Reihe wegen $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} > 1$ (denn $2^3 = 8 > 5$) divergiert. Also divergent.

   Lösung: Man kann das n im Nenner nicht einfach weglassen, da $\frac{2^n}{\sqrt[3]{n5^n}} \leq \frac{2^n}{\sqrt[3]{5^n}}$, aber zum Nachweis der Divergenz brauchen wir die umgekehrte Ungleichung. Was tun?

   Um $\frac{2^n}{\sqrt[3]{n5^n}}$ nach *unten* abzuschätzen, sollten wir n nach *oben* abschätzen, durch einen Term, der das Divergenzargument in der Vermutung nicht zerstört. Z.B. so: Aus $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1,5)^n} = 0$ folgt, dass es ein n_0 gibt, so dass $n < (1,5)^n$ für alle $n \geq n_0$ ist. Dann folgt

   $$\frac{2^n}{\sqrt[3]{n5^n}} > \frac{2^n}{\sqrt[3]{1,5^n 5^n}} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{1,5\cdot 5}}\right)^n,$$

   und wegen $1,5 \cdot 5 = 7,5 < 8$ ist der Ausdruck in der Klammer größer als 1. Also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{1,5^n 5^n}}$ und daher nach dem Majorantenkriterium auch die ursprüngliche Reihe.

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}}$. Divergent, da $\frac{1}{2^{-n}} = 2^n$ keine Nullfolge ist.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$.

Vermutung: $\frac{1}{n}$ dominiert, daher divergent.

Lösung: Für $n \geq 2$ ist $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2n}$, also $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ divergiert, folgt die Divergenz der ursprünglichen Reihe mit dem Minorantenkriterium.

Andere Lösung: Wäre die Reihe konvergent, so wäre wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ konvergent. Dies ist falsch, daher ist die ursprüngliche Reihe divergent.

g) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n^3-1} - 3n\cdot 2^{-n}\right)$

Vermutung: konvergent, da beide Reihen separat konvergieren (erste Reihe: Vergleich mit $\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$, zweite Reihe exponentiell)

Lösung: Für $n \geq 2$ ist $n^3-1 > n^3-\frac{1}{2}n^3 = \frac{1}{2}n^3$, also $\frac{n}{n^3-1} \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^3} = \frac{2}{n^2}$. Da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^3-1}$ nach dem Majorantenkriterium.

Aus $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1,5)^n}=0$ folgt, dass es ein n_0 gibt, so dass $n < 1,5^n$ für alle $n \geq n_0$ ist. Dann folgt $3n\cdot 2^{-n} < 3\left(\frac{1,5}{2}\right)^n$, und wegen $\frac{1,5}{2}<1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}3\left(\frac{1,5}{2}\right)^n$, nach dem Majorantenkriterium also auch $\sum_{n=2}^{\infty}3n\cdot 2^{-n}$.

Da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^3-1}$ und $\sum_{n=2}^{\infty}3n\cdot 2^{-n}$ konvergieren, konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

2. Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen. (Hier geht es darum, mit Hilfe der Potenz- und anderer Rechengesetze die Verbindung zu Ihnen bekannten Reihen, z.B. der standard geometrischen Reihe, herzustellen.)

a) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^3\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m = \left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{8}{9}$

(Indexverschiebung $m=n-3$)

b) $\sum_{n=-1}^{\infty}5^{-n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{1-5^{-1}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{4}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 1$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-1/2})^n = \frac{1}{1-2^{-1/2}}$

e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^m = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

f) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=4}^{\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) == \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots = \frac{1}{3}$ (Teleskopreihe)