3 Schulmathematik I

In diesem ersten Kapitel zur Schulmathematik geht es vor allem darum, algebraische Grundkenntnisse aus der Schule zu wiederholen. Insgesamt werden wir es mit ganz verschiedenen Schwierigkeitsniveaus zu tun haben. Dabei bleibt es nicht bei reiner Wiederholung, sondern wir blicken auf viele der bereits bekannten Themen mit einem etwas strengeren mathematischen Blick als noch zu Schulzeiten. Der Anspruch des Vortrags reicht dabei von sehr elementaren Überlegungen und Feststellungen bis hin zu Ausflügen in das kommende Studium.

3.1 Terme

Starten wir in dieses Kapitel mit einer sehr grundlegenden Definition, über die man sich in der Schule nur wenige Gedanken macht:

Definition 3.1 (Term)

(1) Jede Zahl ist ein Term. Jede Variable ist ein Term.

(2) Jede Verknüpfung von zwei Termen durch eine Rechenoperation (z.B. Addition, Division, Potenzierung, ...) ist wieder ein Term.

Beispiele: Dazu einige einfache Beispiele. Terme sind:

$$4, \quad y, \quad 4y, \quad \frac{3765x + (4y)^n}{1001}$$

Dabei sind Terme, wie das letzte Beispiel bereits andeutet, in ihrer Länge und Komplexität nicht begrenzt. Um bei sehr langen Termen den Überblick zu behalten, helfen sogenannte verkürzende Operatoren.

Definition 3.2 (Summenzeichen)

Sei n eine natürliche Zahl und seien $a_1, \ldots, a_n$ Terme. Wir definieren das **Summenzeichen**:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots + a_n$$

Das Summensymbol wird zur verkürzten Schreibweise von Summen gleichartiger Terme verwendet. Unter dem Summensymbol steht die Laufvariable und ihr Startwert, oberhalb wird der Endwert für die Laufvariable notiert.

Beispiele: Der Umgang mit dem Summenzeichen (und seinen Feinheiten) ist am Anfang nicht ganz leicht und erfordert etwas Übung, deswegen ein paar Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cdot k = -1 + 2 - 3 + 4 = 2$$

Oftmals ist es hilfreich, einen lange Summe mithilfe des Summenzeichens umzuschreiben. Nehmen wir einmal die Summe der Zweierpotenzen bis zur 63. Potenz

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}.$$

Umgeschrieben erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{63} 2^k$$

als Ausdruck für die Summe. Diese Schreibweise ist aber keineswegs eindeutig. Genauso gut hätten wir die Summe wie folgt umschreiben können:

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1}.$$

Einmal haben wir die Summation beim Wert 0 beginnen lassen und das andere mal war 1 unser Startwert. Dieses Vorgehen nennen wir auch **Indexverschiebung**. Die Indexverschiebung ist ein hilfreiches Werkzeug bei der Umformung von Summen, wie das nächste Beispiel verdeutlichen soll:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k-2}$$

Dabei ist ganz wichtig, dass alle Verschiebungen des Laufindexes in den Summengrenzen im eigentlichen Term „ausgeglichen“ werden müssen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k-2} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4-4}^{(n+2)-4} \frac{1}{(k+4)-2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Es hat sich also herausgestellt, dass der anfängliche Ausdruck nur aus 4 einzelnen Summanden besteht.

Analoge Vereinbarungen wie für die Summen gibt es auch für Produkte. Wir belassen es hierfür bei einer Definition und verschieben die Beispiele in die Übung.

Definition 3.3 (Produktzeichen)
Sei n eine natürliche Zahl und seien $a_1, \ldots, a_n$ Terme. Wir definieren das **Produktzeichen**:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

3.2 Gleichungen

Jeder hat eine Vorstellung davon, was eine Gleichung ist. Ganz komprimiert zusammengefasst verbinden wir mit dem Begriff erstmal ein Gleichheitszeichen in der Mitte und links und rechts davon zwei Ausdrücke. Mit den vorherigen Überlegungen lassen sich Gleichungen auch ganz präzise definieren.

Definition 3.4 (Gleichung)
Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen in Beziehung gesetzt werden.

Beispiele: Werfen wir einen kurzen Blick zurück, fällt auf, dass wir bei unseren Überlegungen zu den verkürzenden Operatoren bereits ganz selbstverständlich mit Gleichungen hantiert haben. Trotzdem ein paar elementare Beispiele:

$$\begin{aligned} 4x &= 7 \\ 3 &= 2 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \sqrt[5]{x^{101}y} &= z^6 \end{aligned}$$

Achtung: Über den Wahrheitswert der Gleichung haben wir in der Definition noch nicht gesprochen!

Gleichungen können eine Aussage sein. So ist z.B. $3 = 2$ eine falsche Aussage, 3=3 eine wahre Aussage. Beides sind jedoch Gleichungen!
Sie können aber auch eine Aussageform sein. Dies ist der Fall, wenn mindestens einer der Terme Variablen beinhaltet. Der Wahrheitswert ist dann abhängig von der eingesetzten Zahl. Die Zahlen (bzw. Zahlenkombinationen), für die die Aussage wahr ist, nennen wir Lösung einer Gleichung. Für Gleichungen in einer Variablen ergibt sich somit als Definition:

Definition 3.5 (Lösung einer Gleichung)
Eine **Lösung einer Gleichung in einer Variablen** ist eine Zahl, die, wenn man sie in die Gleichung an Stelle der Variablen einsetzt, die Gleichung zu einer wahren Aussage macht.

Beispiele: Nehmen wir die Gleichung:

$$5x^2 = 20$$

Die 2 ist eine Lösung der Gleichung, da $5 \cdot 2^2 = 20$ eine wahre Aussage ist.
Auch -2 ist eine Lösung.

Betrachten wir Gleichungen in mehreren Variablen:

$$3x + 4y = 18$$

Mit $x = 2$ und $y = 3$ erhalten wir $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 18$ und das ist eine wahre Aussage. Eine weitere mögliche Lösung erhalten wir für $x = 1$ und $y = \frac{15}{4}$.

Wichtig: Feste Kombinationen von Einsetzungen der beiden Variablen bilden die Lösungen der Gleichung.

Definition 3.6 (Lösung einer Gleichung (allgemein))
Sei n eine natürliche Zahl. Eine **Lösung für eine Gleichung in n Variablen** $x_1, \ldots, x_n$ ist eine feste Kombination aus n Zahlen $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, für die gilt: Setzt man a_1 für x_1, a_2 für x_2, $\ldots$, a_n für x_n ein, so ergibt die Gleichung eine wahre Aussage.

Zentrale Fragen, die sich Mathematiker zum Lösen von Gleichungen stellen sind unter anderem:

- Hat die Gleichung eine Lösung?
- Wie viele Lösungen hat die Gleichung?
- Wie finde ich die Lösungen systematisch?

Unser Ziel ist es nun diese Lösungen zu bestimmen. Damit uns das gelingt, benötigen wir Umformungen, die die Lösungsmenge im besten Fall nicht verändern. Diese, aus der Schule bekannten Umformungen, nennen wir Äquivalenzumformungen.

Definition 3.7 (Äquivalenzumformung)
Eine **Äquivalenzumformung** ist die Umformung einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Gleichungen sind **äquivalent**, wenn alle Lösungen der einen Gleichung auch genau die Lösungen der anderen sind, also beide Gleichungen für dieselbe Variablenbelegung eine wahre Aussage ergeben.

Seien T_1, T_2, T_3, T_4 Terme, wobei $T_4 \neq 0$. Mögliche Äquivalenzumformungen sind beispielsweise:

$T_1 = T_2$	$\Leftrightarrow$	$T_1 + T_3 = T_2 + T_3$	Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten Gleiches gilt auch für die Subtraktion
$T_1 = T_2$	$\Leftrightarrow$	$T_1 \cdot T_4 = T_2 \cdot T_4$	Multiplikation beider Terme mit einem Term $\neq 0$ (!) Gleiches gilt auch für die Divison (nicht durch 0 teilen!)

Beispiele: Zur Verdeutlichung ein paar Zahlenbeispiele:

a)
$$\begin{aligned} & 3x + 5 = 3,5x && \mid -3x \\ \Leftrightarrow\quad & 5 = 0,5x && \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow\quad & 10 = x \end{aligned}$$

b)
$$(x-1)(x+2) = 0$$

An dieser Stelle erwähnen wir einen zentralen Satz für das Lösen von Gleichungen, den wir für das Lösen von Beispiel b) verwenden können. Etwas später werden wir noch einmal auf ihn zurückgreifen:

Satz 3.8 (Satz vom Nullprodukt)
Für zwei reelle Zahlen a und b gilt: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0)$ oder $(b = 0)$

Bemerkung: Die Implikation $(a = 0)$ oder $(b = 0) \Rightarrow a \cdot b = 0$ zu zeigen ist einfach. Die andere in der Äquivalenz enthaltene Implikation $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0)$ oder $(b = 0)$ nutzt eine der wichtigsten Eigenschaften der reellen Zahlen aus!

Beispiele (Fortsetzung):

b) Alle Lösungen unserer Ursprungsgleichung sind 1 und -2, da für diese Werte jeweils einer der beiden Faktoren verschwindet.

Dividiert man einfach beide Seiten der Ausgangsgleichung durch $(x - 2)$ erhalten wir
$$x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Bei diesem Vorgehen ist die Lösung -2 verlorengegangen. Deswegen ist es wichtig eine Gleichung nur durch einen Term zu dividieren, der nicht 0 ist (bzw. bei entsprechendem x den Wert 0 annimmt). Andernfalls liegt gegebenenfalls keine Äquivalenzumformung vor und Lösungen bleiben auf der Strecke. Wir dürfen im Beispiel also nur durch $x - 2$ teilen, solange wir annehmen, dass $x \neq 2$ und diesen Fall dann anschließend extra betrachten.

c)

$$\begin{aligned} x &= 2 \qquad |(\ldots)^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Die Rückrichtung gilt offensichtlich nicht, da auch $x = -2$ eine Lösung der Gleichung ist. Quadrieren ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung, da bei dieser Operation Lösungen hinzukommen können. Es ist unerlässlich in diesem Fall eine Probe der möglichen Lösung durchzuführen.

In der Algebra sucht man häufig nach systematischen Lösungen für verschiedene Gleichungen derselben Art. Deshalb wurden Gleichungen schon sehr früh nach bestimmten Eigenschaften in Gruppen zusammengefasst.
Wir haben beispielsweise die linearen Gleichungen:

Definition 3.9 (Lineare Gleichung)
Eine Gleichung mit einer Unbekannten wird **linear** genannt, wenn die Variable nur in der ersten Potenz vorkommt.
Sei n eine natürliche Zahl. Eine Gleichung mit n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt **linear**, wenn jede Variable nur in der ersten Potenz vorkommt <u>und</u> kein Produkt von zwei Variablen auftaucht.

Die Gleichungen heißen linear, weil sie graphisch dargestellt (zumindest in einer Variable) eine Linie ergeben.

Beispiel: $1001x + 357 = 0, \qquad x + y = 1, \qquad \frac{2}{7}x + 4 = 10$

Der nächsteinfache Typ sind die quadratischen Gleichungen. Auch diese lassen sich völlig analog in mehreren Variablen definieren, für den Vortrag belassen wir die folgenden Überlegungen jedoch in einer Variable.

Definition 3.10 (quadratische Gleichung mit einer Unbekannten)
Eine Gleichung in einer Unbekannten wird **quadratisch** genannt, wenn die Unbekannte mit 2 als höchster Potenz vorkommt.

Beispiel: $x^2 + 5 + 7x = 0$

Beim Lösen quadratischer Gleichungen gibt es bereits mehrere Dinge zu entdecken, deshalb hier einige wichtige Beispiele:

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \sqrt{4} \qquad \text{oder} \quad x = -\sqrt{4} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 2 \qquad \text{oder} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Diese Äquivalenz gilt, weil $x^2 = 4$ für genau die gleichen Zahlen erfüllt ist, wie die Aussage $x = 2$ oder $x = -2$, nämlich für 2 und -2.

2.
$$x^2 + x = 0$$

Anders als noch bei Beispiel 1 gelangen wir mit Wurzelziehen nicht ans Ziel. Wir müssen den Faktor x ausklammern. Damit erhalten wir dann den neuen Ausdruck

$$(x + 1)x = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt (3.8) können wir diese Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} & (x+1)x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1 \quad \text{oder} \quad x = 0 \end{aligned}$$

3.
$$x^2 - 6x = -9$$

Mit einer Äquivalenzumformung erkennen wir auf der linken Seite eine binomische Formel wieder:

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x = -9 && \mid +9 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2 = 0 && \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad & x - 3 = \sqrt{0} = 0 && \mid +3 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 3 \end{aligned}$$

4.
$$x^2 + 10x + 9 = 0$$

Auch wenn wir dieses Beispiel nicht direkt in eine binomische Formel überführen können, so hilft uns trotzdem dieselbe Idee, die wir bereits im vorherigen Beispiel verwendet haben. Um den Ausdruck also zur binomischen Formel zu machen, ignorieren wir zunächst den letzten Teil des Terms ohne x. Der mittlere Term in der Gleichung

$$x^2 + \underline{10x} + 9 = 0$$

bestimmt also den zweiten Summanden in der binomischen Formel und um die Lösungsmenge der Gleichung nicht zu verändern, gleichen wir das durch geschicktes Addieren bzw. Subtrahieren wieder aus:

$$\begin{aligned} & x^2 + 10x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 10x + 25 - 25 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+5)^2 - 25 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+5)^2 = 16 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 5 = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -1 \quad \text{oder} \quad x = -9 \end{aligned}$$

Damit lässt sich jede quadratische Gleichungen der Form $x^2 + bx + c = 0$ lösen (sofern es eine Lösung gibt!) und gleichzeitig lassen sich alle anderen quadratischen Gleichungen in diese Form bringen. Das Verfahren wird **quadratische Ergänzung** genannt und geht ursprünglich auf ein geometrisches Lösungsverfahren zurück (dieses wird in der Übung besprochen). An dieser Stelle sollten wir jedoch nochmal einmal festhalten, dass es bei vielen Gleichungen schneller gehen kann, sie mit geschicktem Vorgehen und scharfem Hinsehen schneller zu lösen, als eine quadratische Ergänzung durchzuführen.

Die Suche nach Lösungen von Gleichungen höheren Grades (z.B. dritten und vierten Grades) ist bereits für sich genommen ein aufregendes Stück Mathematikgeschichte. In Europa gab es im 15. und 16. Jahrhundert regelrechte Wettbewerbe, bei denen selbsternannte Rechenmeister beweisen wollten über Lösungsformeln für kubische und quartische Gleichungen zu verfügen. 1535 gewann der Italiener Nicolo von Brescia einen solchen Wettbewerb mit einer Lösungsformel für einen bestimmten Typ kubischer Gleichungen. Im Anschluss verriet er seine Formel an Girolamo Cardano, welcher den Ansatz auf alle Typen kubischer Gleichungen verallgemeinerte und 10 Jahre später veröffentlichte, obwohl er sich Nicolo von Brescia auf Geheimhaltung verständigt hatte. Immerhin ein Anlass für einen handfesten Rechtsstreit!
Mittlerweile gibt es auch Lösungsformeln für allgemeine quartische Gleichungen, diese sind freundlich ausgedrückt „unübersichtlich“. Ausgewählte Typen lassen sich jedoch auch sehr elegant Lösen, wie wir uns an folgendem Beispiel anschauen:

$$x^4 + 10x^2 - 9 = 0$$

Eine Problemlösestrategie, die sehr oft zum Erfolg führt, basiert auf der Frage: „Habe ich so etwas schon einmal gesehen?“. Gibt es also eine Möglichkeit die quadratische Ergänzung auf dieses Beispiel anzuwenden? Die Antwort auf diese Frage ist ja! Wir müssen die Gleichung ein bisschen genauer unter die Lupe nehmen. Dafür setzen wir zur Verdeutlichung ein paar Klammern:

$$(x^2)^2 + 10(x^2) - 9 = 0$$

Wenn wir x^2 als eigenständige Variable auffassen, dann steht dort nichts anderes als eine quadratische Gleichung. Wir ersetzen (substituieren) x^2 deswegen durch eine neuen Variable, z.B. z. Wir erhalten die Gleichung:

$$z^2 + 10z - 9 = 0$$

Diesen Gleichungstyp können wir bereits lösen, die Lösungen lauten $z = 3$ und $z = 4$ (Die quadratische Ergänzung kann zu Übungszwecken noch einmal für diese Gleichung durchgeführt werden). Daraus können wir nun auch leicht die Lösungen unserer Ausgangsgleichung bestimmen, indem wir zurücksubstituieren. Wenn $z = 3$ gilt, ist $x^2 = 3$ und somit $x = \pm\sqrt{3}$ und analog erhalten wir mit $z = 4$ die Lösungen $x = \pm 2$. Insgesamt hat unsere Gleichung also 4 Lösungen und zwar $-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ und 2.

Diesen Typ Gleichung nennen wir **biquadratisch** und das Lösungsverfahren nennen wir **Substitution**. Diesem Verfahren (bzw. allgemeiner dieser Idee) werden wir im Studium noch einige Male über den Weg laufen.

Es existiert ein weiteres Vorgehen, um spezielle Gleichungen höheren Grades zu lösen, welches das Problem ebenfalls auf ein Problem kleineren Grades zurückführt. Dafür müssen wir allerdings bereits eine Lösung der Gleichung kennen, die wir in der Regel geschickt raten. Hierfür benötigen wir den Begriff des Polynoms:

Definition 3.11

Sei n eine natürliche Zahl. Wir definieren ein **Polynom** als Ausdruck der Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Die a_i sind reelle Zahlen und heißen Koeffizienten des Polynoms.

Die Gleichungen, bei denen wir das Verfahren anwenden können heißen **Polynomgleichungen** und sind der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit reellen Koeffizienten a_i.
Über die Eigenschaften und Strukturen von Polynomen lassen sich ganze Vorlesungen füllen, wir beschränken uns hier auf den Aspekt der **Polynomdivision** zur Lösung von Gleichungen.

Satz 3.12 (Polynomdivision mit Linearfaktoren)

Sei k eine Lösung der Polynomgleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Dann gibt es ein Polynom $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ mit

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) \cdot (x - k).$$

$(x-k)$ nennen wir **Linearfaktor** des Polynoms.

Bemerkung: Auf den Beweis verzichten wir an dieser Stelle. Er wird im Studium nachgeholt.

Für das folgende Beispiel beschränken wir uns zusätzlich auf ganzzahlige Koeffizienten. Hierbei ist besonders angenehmen, dass man zum Raten der Lösungen alle (positiven wie negativen) Teiler des konstanten Terms testen kann (Wieso dies funktioniert, wird in der linearen Algebra besprochen).
Hinweis: Es ist sinnvoll, die Gleichung vorher zu *normieren*, d.h. so mit einer Zahl zu multiplizieren, dass der Koeffizient, der vor der höchsten Potenz steht, 1 wird. (Dies hat keine Auswirkung auf die Lösungen!)

Beispiel: Betrachten wir die Gleichung $2x^3 + 12x^2 + 10x - 24 = 0$. Wir normieren zunächst, indem wir alle Koeffizienten durch 2 teilen und erhalten $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$. Um eine erste Lösung zu erhalten, können wir probeweise die Teiler von 12 einsetzen, also $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Wir haben Glück, denn $1^3+6\cdot1^2+5\cdot1-12 = 0$, also ist 1 eine erste Lösung. "Teile" daher durch $(x-1)$. Aus der Schule könnte dafür die folgende Notation bekannt sein:

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 + 6x^2 + 5x - 12) : (x-1) = x^2 + 7x + 12 \\
\underline{-(x^3 - \ \ x^2)} \\
\qquad\quad 7x^2 + 5x - 12 \\
\qquad \underline{-(7x^2 - 7x)} \\
\qquad\qquad\quad 12x - 12 \\
\qquad\qquad \underline{-(12x - 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Bemerkung: Diese intuitive Notation ist mathematisch **nicht sauber**. Die korrekte Notation (die später im Studium gefordert ist!) lautet: $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x-1)\cdot(x^2 + 7x + 12) + 0$. Diese Notation wollen wir nun auch verwenden.

Wir suchen nun Lösungen von $x^2 + 7x + 12 = 0$. Zum Lösen dieser Gleichung steht uns bereits die quadratische Ergänzung zur Verfügung. An dieser Stelle nutzen wir zu Demonstrationszwecken nochmal die Polynomdivision. Durch geschicktes Testen finden wir die Lösung $x = -3$. Wir „teilen“ nun $x^2 + 7x + 12$ durch $x + 3$:

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^2 + 7x + 12) = (x+3)\cdot(x+4) \\
\underline{-(x^2 + 3x)} \\
\qquad\quad 4x + 12 \\
\qquad \underline{-(4x + 12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also ist $2x^3+12x^2+10x-24 = 2(x-1)(x+3)(x+4)$ und die Lösungen der Gleichung $2x^3 + 12x^2 + 10x - 24 = 0$ sind 1, -3 und -4.

3.3 Lineare Gleichungssysteme

Abschließend behandeln wir lineare Gleichungssysteme. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass mehrere Gleichungen gleichzeitig (!) erfüllt sein müssen. Auch dafür gibt es einiges zu beachten und verschiedene Lösungsmethoden auszuprobieren. Zunächst wieder eine Definition:

Definition 3.13 (Lineares Gleichungssystem)
Ein **lineares Gleichungssystem** aus n Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ setzt sich wie folgt aus linearen Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Die a_{ij} und b_i sind dabei Zahlen. Der Index ij gibt an, zu welcher Variable in welcher Gleichung der Koeffizient gehört. a_{ij} gehört zur j-ten Variable (x_j) in der i-ten Gleichung.

Eine Kombination aus Zahlen $(y_1, \ldots, y_n)$ löst das Gleichungssystem, wenn bei Einsetzung der Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ für die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ jede Gleichung zu einer wahren Aussage wird.

Das Credo aller Ansätze zum Lösen von linearen Gleichungssystemen ist dasselbe: Vereinfache das Gleichungssystem schrittweise. Manche Verfahren werden bereits aus der Schule bekannt sein, insbesondere das Einsetzungsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren und das Additionsverfahren.
Im Rahmen dieses Kapitels werden wir diese nur kurz formulieren ohne sie alle explizit mit einem Beispiel zu versehen. Eine kleine Ausnahme bildet das Additionsverfahren. Zum einen ist es das „schwierigste“ Verfahren, da es mit einigen Vorüberlegungen verbunden ist, um ein gegebenes Gleichungssystem auf ein kleineres System zu reduzieren. Außerdem steht ihm eine Sonderrolle im sogenannten Gauß-Verfahren zu, weshalb wir zu diesem Verfahren ein paar Zeilen mehr verlieren werden.

Verfahren 1 (Einsetzungsverfahren)
Man löst eine der Gleichungen nach einer Variablen auf und setzt diese in die anderen Gleichungen ein. So erhält man ein Gleichungssystem, das eine Unbekannte und eine Gleichung weniger hat.

Verfahren 2 (Gleichsetzungsverfahren)
Man löst alle Gleichungen nach einer Variablen (oder einem Vielfachen dieser Variablen) und setzt die erhaltenen Gleichungen gleich. Man erhält ein Gleichungssystem, das eine Unbekannte und eine Gleichung weniger hat.

Verfahren 3 (Additionsverfahren)
Man multipliziert eine Gleichung mit einer Zahl so, dass bei Addition (oder Subtraktion) mit einer anderen Gleichung einer Variable wegfällt.

Beispiel: Um es übersichtlich zu halten nehmen wir ein relativ kleines Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen, welches wir mit dem Additionsverfahren lösen:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

Erst einmal multiplizieren wir die erste und die dritte Gleichung jeweils mit 4 und erhalten:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && 4x + 4y - 4z = 4 \\ &\text{(II)} && 2x + 3y + 4z = 5 \\ &\text{(III)} && 4x + 8y + 4z = 8 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt addieren wir die ersten beiden Gleichungen und subtrahieren gleichzeitig die zweite Gleichung von der dritten Gleichung, da wir so die dritte Variable z eliminieren und das Gleichungssystem verkleinern können:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} + \text{(II)} && 6x + 7y = 9 \\ &\text{(III)} - \text{(II)} && 2x + 5y = 3 \end{aligned}$$

Das Problem haben wir also bereits auf ein noch kleineres Gleichungssystem reduziert. Nun multiplizieren wir die untere Gleichung mit 3 und ziehen diese von der oberen ab und erhalten:

$$-8y = 0$$

und folgern daraus $y = 0$. Durch rückwärtiges Einsetzen kommen wir auf die Lösungen für die anderen Variablen $x = \frac{3}{2}$ und $z = \frac{1}{2}$

Noch ein paar abschließende Worte zum Gauß-Algorithmus, welchen manche als Schüler in der Oberstufe bereits kennengelernt haben (alle anderen lernen ihn dann in der Vorlesung zur linearen Algebra kennen). Grob zusammengefasst ist der Algorithmus die systematische und schemenhafte Ausführung des Additionsverfahrens, in dem aus dem Gleichungssystem schrittweise Gleichungen eliminiert werden. Der Algorithmus ist sehr mächtig und so gewissermaßen Fluch und Segen zugleich. Auf der einen Seite liefert er (bei korrekter Ausführung) immer ein korrektes Ergebnis und das nach einer endlichen Anzahl an Schritten. Auf der anderen Seite geht der Algorithmus (wie bei Algorithmen nunmal üblich) kopflos vor. Abkürzungen und geschickte Umformungen bleiben so oftmals auf der Strecke.
Das Anwendungsgebiet linearer Gleichungssysteme ist riesig. Hinter zahlreichen Optimierungsproblemen und wirtschaftlichen Anwendungen verbergen sich solche Systeme.

Autoren dieses Kapitels:
2019: Kira Rohlmann