Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Revisionsquiz

Frage 1 Zeile Grün (Teilen durch 0)

Frage 2 $\neg Y \Rightarrow \neg X$

Frage 3 Vektor und Vektor und Matrix und Matrix

Frage 4 Ja $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Frage 5 Spiegelung an der Winkelhalbierenden

Frage 6 wahr

Frage 7 $M = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Z}$

Frage 8 Kreisscheibe

Frage 9 Alles, was glänzt, ist Gold. Fomalisiert wäre „Es ist nicht alles Gold, was glänzt.“ zum Beispiel: $\exists x \in A : x \notin B$ mit $A = \{x | x \text{ glänzt}\}$ und $B = \{x | x \text{ ist Gold}\}$ (Weil „Es ist nicht alles Gold, was glänzt“ sprachlich „Es existiert etwas, das glänzt, aber nicht Gold ist“ entspricht.) Die Negation wäre dann $\forall x \in A : x \in B$, also „Alles, was glänzt, ist Gold.“

Frage 10 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Bildung eines Eintrags im Pascalschen Dreieck als Summe der beiden darüber liegenden Einträge)
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie im Pascalschen Dreieck)
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (nach Definition des Binomialkoeffizienten)

Frage 11 f hat genau eine Nullstelle. (Lösung lässt sich schnell mit Hilfe der pq-Formel herleiten)

Frage 12 $\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$

Frage 13 Nein. Ein Stein bedeckt entweder drei schwarze und ein weißes Feld oder drei weiße und ein schwarzes Feld, weshalb eine **gerade** Anzahl an Steinen benötigt wird, um das Feld vollständig zu bedecken. Auf der anderen Seite hat das Feld 60 Kacheln, wofür demnach $\frac{60}{4} = 15$ Steine benötigt werden – eine **ungerade** Anzahl.

Frage 14 65 536.
Es ist $|\emptyset| = 0$, weshalb $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = 2^1 = 2$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 2^2 = 4$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))| = 2^4 = 16$ und $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))| = 2^{16} = 65\,536$. Für eine anschauliche Überlegung, bedenke dass $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ...

Frage 15 $(0, 4) \cup (5, 6)$

Frage 16 Die Aussage ist falsch, da $f(f^{-1}(B)) = B$ nicht für jede Menge $B \subseteq N$ gelten muss. Zum Beispiel für $M = N = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $B = [-10, \infty)$.

Frage 17 Nein. Aber sobald f injektiv ist, gilt die Aussage. Wenn f nicht injektiv, dann Gegenbeispiel mit $M_1 = \{x\}$, $M_2 = \{y\}$ mit $x, y \in M$, $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Falls f injektiv ist, gilt die Aussage allerdings, da

$$
\begin{aligned}
& y \in f(M_1) \cap f(M_2) \Leftrightarrow y \in f(M_1) \text{ und } y \in f(M_2) \\
\overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow}\ & \exists^1 x \in M : \{x\} = f^{-1}(\{y\}) \subseteq M_1 \text{ und } \{x\} = f^{-1}(\{y\}) \subseteq M_2 \\
\Longrightarrow\ & \exists^1 x \in M : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2 \text{ und } f(x) = y \ \Rightarrow\ \exists^1 x \in M : x \in M_1 \cap M_2 \text{ und } f(x) = y \\
\Longrightarrow\ & y = f(x) \in f(M_1 \cap M_2)
\end{aligned}
$$

(Die Rückrichtung ist trivial und gilt für jede Abbildung.)

Frage 18 Ja. Wähle zum Beispiel jeweils eine geeignete einpunktige Menge (Wertevorrat gleich Bildmenge des einelementigen Definitionsbereichs).

Frage 19 Nein. Betrachte z.B. die durch $a_n = -n$ definierte Folge.

Frage 20 Nein. Für die Definition von Konvergenz sind alle $n \geq n_0$ nötig. Gegenbeispiel wäre die durch $a_n = n$ definierte Folge mit $a = 2$. Wähle dort $n_0 = 1$ und $n = 2$ für beliebiges ε.

Entscheidungsfrage Symbol Blau. Die Symbole sind die an einer vertikalen Achse gespiegelten Zahlen 1 bis 4. Das blaue Symbol ist dabei die Zahl 5. Insbesondere ist die Fortsetzung der Reihe durch Symbol Braun nicht plausibel, auch wenn über eine analoge Entwicklung von Symbol 1 zu Symbol 4 und von Symbol 2 zu Symbol Braun argumentiert wird, da in diesem Fall Symbol 3 nicht beachtet wird.