Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 5

Keine Abgabe vorgesehen

Präsenzaufgabe 5.4. Es seien R ein faktorieller Ring und $P \subseteq R$ ein Vertretersystem der Assoziiertenklassen aller Primelemente von R. Beweisen Sie für alle $a, b \in R \setminus \{0\}$:

(a). $a \in R^* \quad \Leftrightarrow \quad v_p(a) = 0$ für alle $p \in P$.

(b). $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ für alle $p \in P$.

Präsenzaufgabe 5.5. Wir nennen einen kommutativen Ring R **noethersch**, falls jedes Ideal I von R endlich erzeugt ist. Beweisen Sie: Ein kommutativer Ring R ist genau dann noethersch, wenn jede aufsteigene Kette $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ von Idealen in R stationär wird.

Präsenzaufgabe 5.6. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a). Sei $a \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann ist $a^2 \equiv 1 \pmod 8$.

(b). Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $n \equiv 3 \pmod 4$. Dann hat die diophantische Gleichung $X^2 + Y^2 = n$ keine ganzzahlige Lösung.

(c). Wir wissen, dass für jede natürliche Zahl n eine Dezimaldarstellung existiert, also eine eindeutige Darstellung der Form $n = \sum_{j=0}^{k} d_j 10^j$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $d_j \in \{0, \ldots, 9\}$ für $0 \leq j \leq k$ und $d_k \neq 0$ gibt. Entwickeln Sie eine Teilbarkeitsregel für simultanes Testen auf Teilbarkeit einer beliebigen natürlichen Zahl n durch 7, 11 und 13. Testen Sie Ihre Regel an den Zahlen 60197214 und 9197214. *Hinweis:* $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

(d). Ein Astronom weiß, dass die Erdumlaufbahn eines bestimmten Satelliten ein genaues Vielfaches einer Stunde und weniger als ein Tag ist. Der Astronom weiß auch, dass der Satellit 11 Erdumläufe um genau 17 Uhr abgeschlossen hat, wenn er um genau 0 Uhr gestartet ist und wir eine 24-Stundenuhr zugrunde legen. Wie lange ist die Umlaufperiode des Satelliten?

Präsenzaufgabe 5.7. Erstellen Sie eine Übersicht aller bisher aus der Vorlesung bekannten Ringtypen inklusive der Aussagen und den Beispielen, die deren Verbindungen beschreiben.