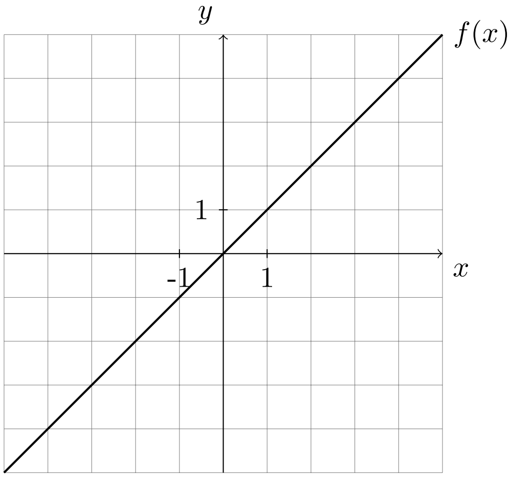
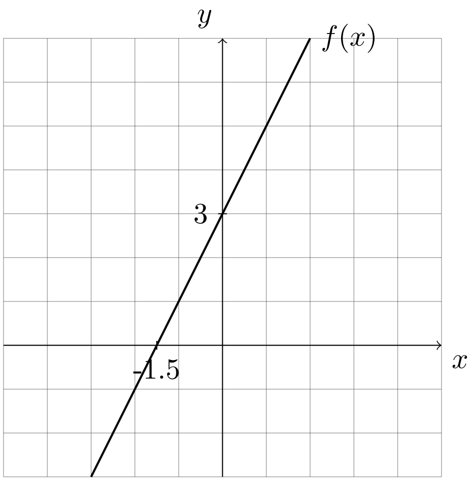
Lösungen der Fingerübungen

1. Skizzieren Sie den Graphen folgender Funktionen. Definitionsbereich ist jeweils $\mathbb{R}$.

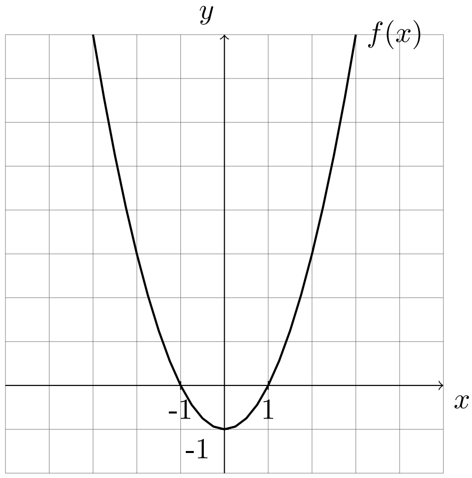
a) $f(x) = x$



b) $f(x) = 2x + 3$

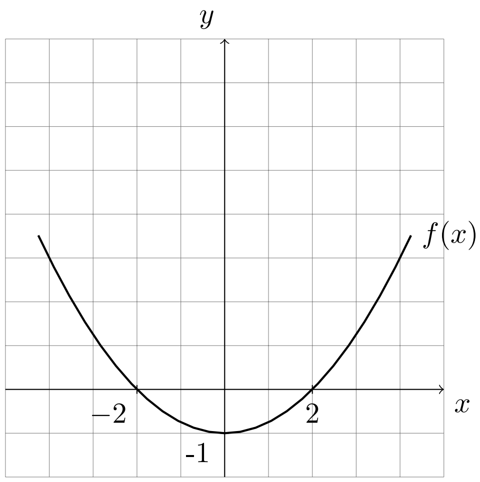


c) $f(x) = x^2 - 1$



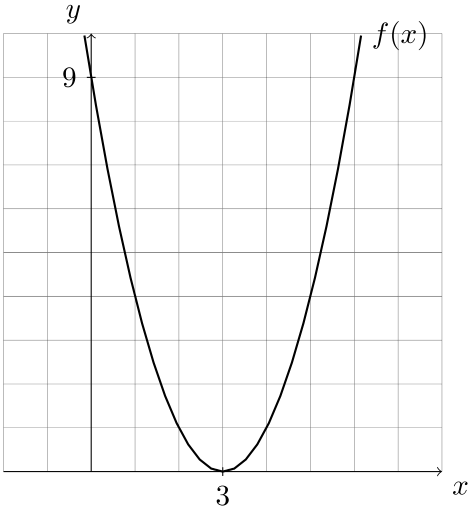
d) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$

Streckung von c) in x-Richtung um Faktor 2:



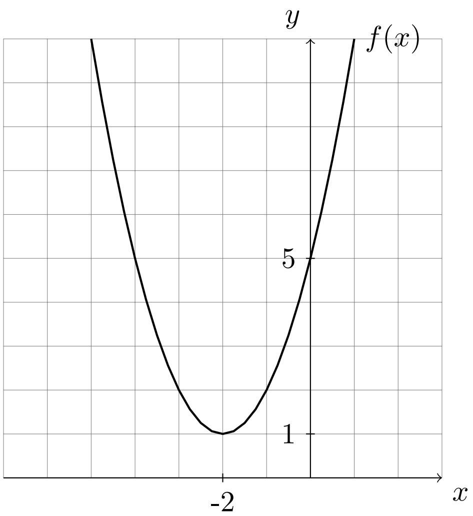
e) $f(x) = (x-3)^2$

Verschiebung der Standardparabel nach rechts um 3:



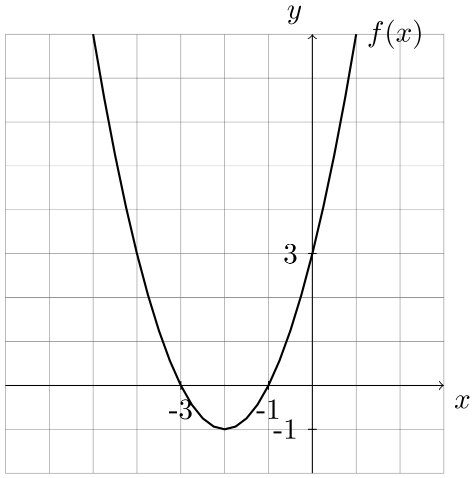
f) $f(x) = (x+2)^2 + 1$

Verschiebung der Standardparabel nach links um 2 und nach oben um 1:



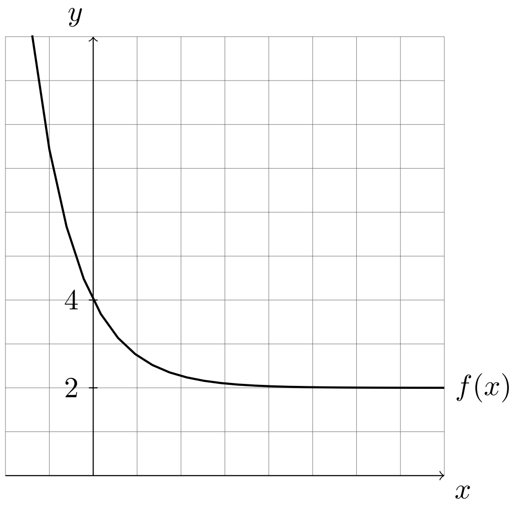
g) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Z.B. so: $f(x) = (x+2)^2 - 1$, also Verschiebung der Standardparabel nach links um 2 und nach unten um 1:



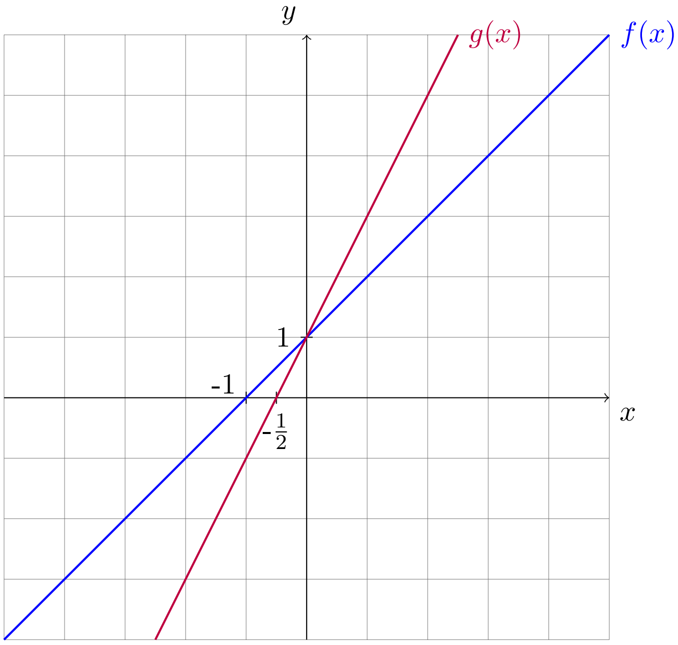
h) $f(x) = 2e^{-x} + 2$

Spiegele den Graphen von e^x an der y-Achse, strecke in y-Richtung um den Faktor 2 und verschiebe um 2 nach oben:



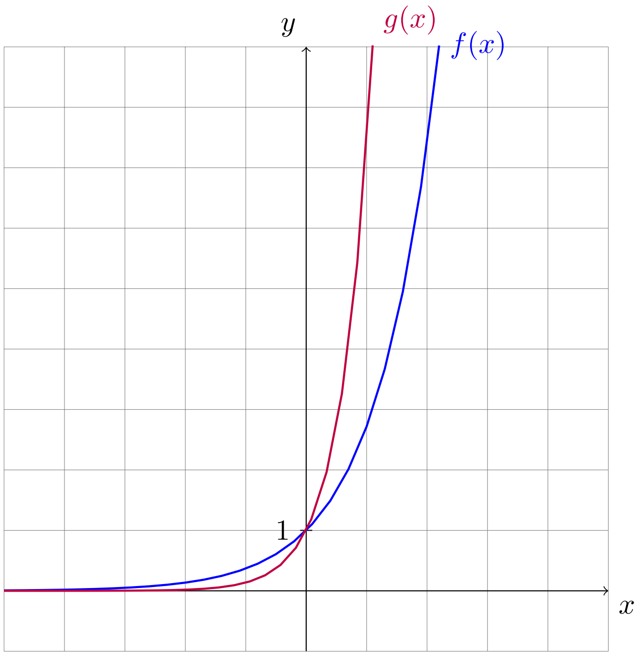
2. Skizzieren Sie die Graphen folgender Paare von Funktionen, jeweils im selben Koordinatensystem.

   a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 1$



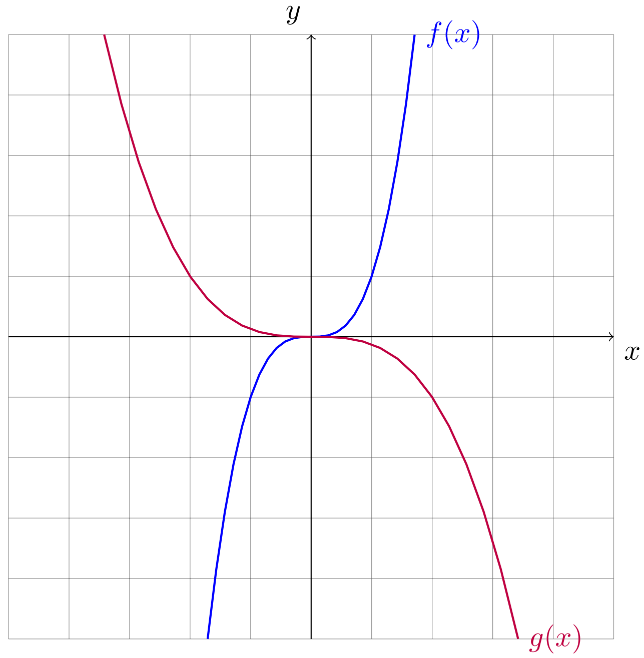
   b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$

   $g(x) = f(2x)$, also Stauchung in x-Richtung um Faktor 2:



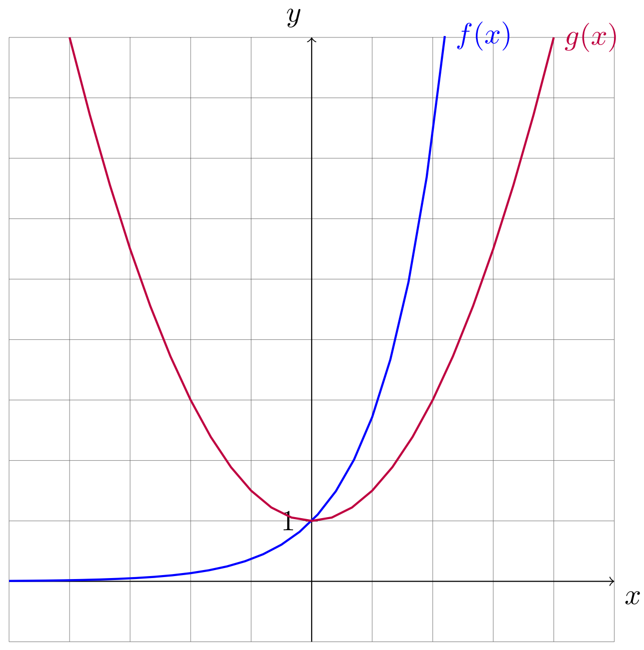
c) $f(x) = x^3$, $g(x) = \left(-\frac{x}{2}\right)^3$

$g(x) = f(-\frac{x}{2})$, also Spiegelung an y-Achse und Streckung in x-Richtung um Faktor 2:



d) $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

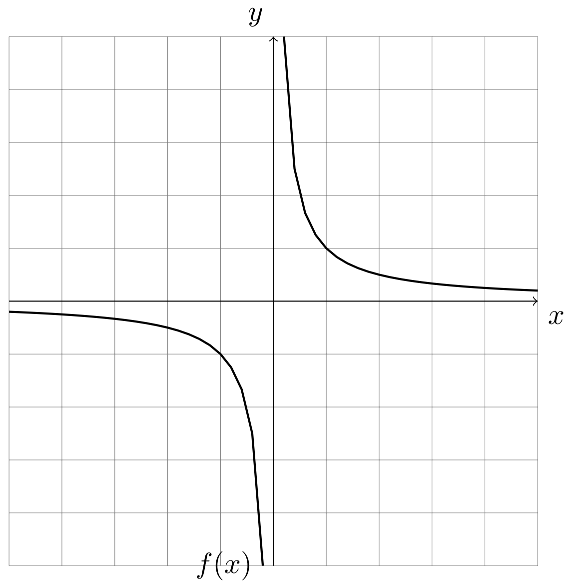
Wesentlich: Kein Schnittpunkt in $x > 0$, da $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots > g(x)$ für $x > 0$.



3. Skizzieren Sie den Graphen und bestimmen Sie den linksseitigen Grenzwert $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ und den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x \to x_0 +} f(x)$.

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$

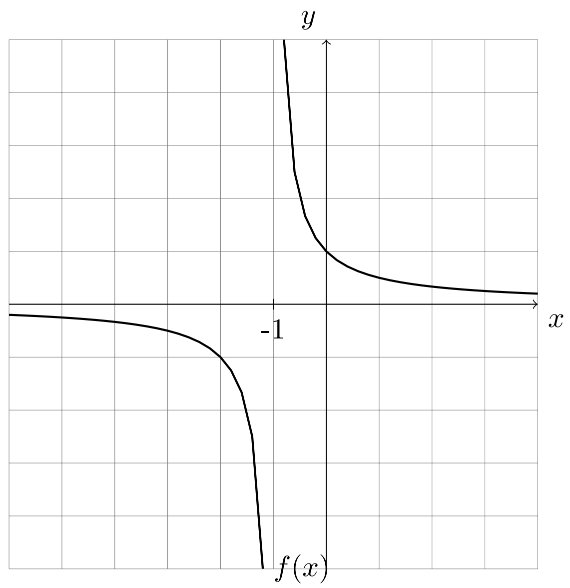
   Die Grenzwerte sind $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$.



   b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = -1$

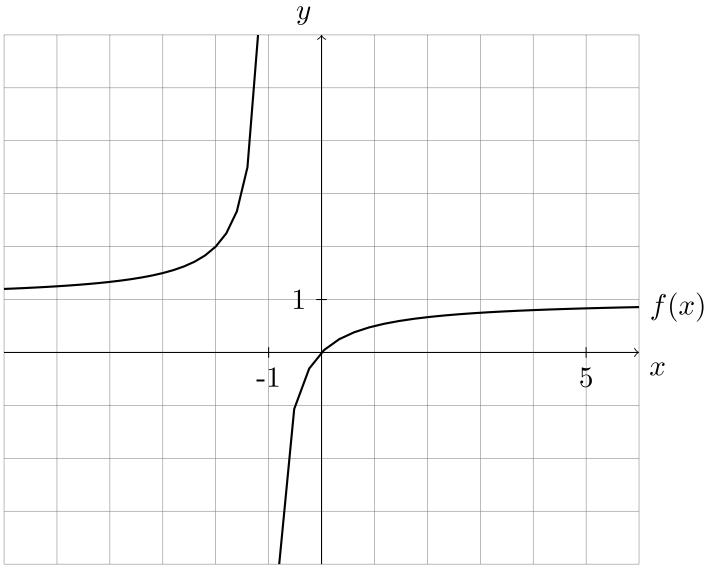
   Verschiebung von a) um 1 nach links.

   Die Grenzwerte sind $\lim_{x \to -1-} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to -1+} f(x) = \infty$, da diese Grenzwerte denen aus a) entsprechen.



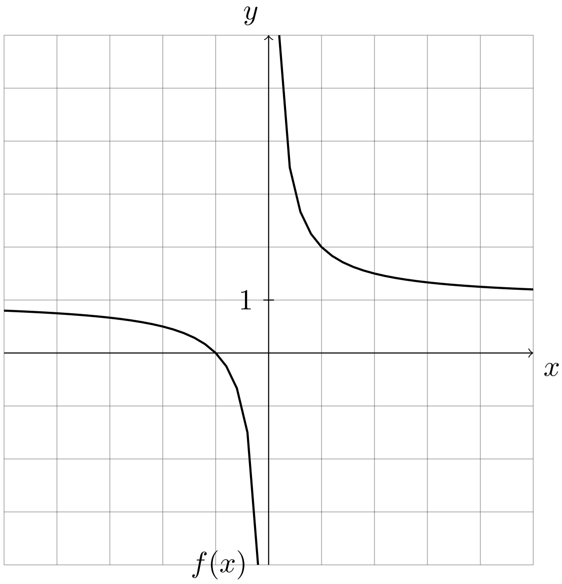
c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = 5$

Es gilt: $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$, also Spiegelung von b) an x-Achse, dann Verschiebung um 1 nach oben. f ist bei $x = 5$ stetig. Die gesuchten Grenzwerte sind also von beiden Seiten gleich und es gilt: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5+} f(x) = \dfrac{5}{6}$.



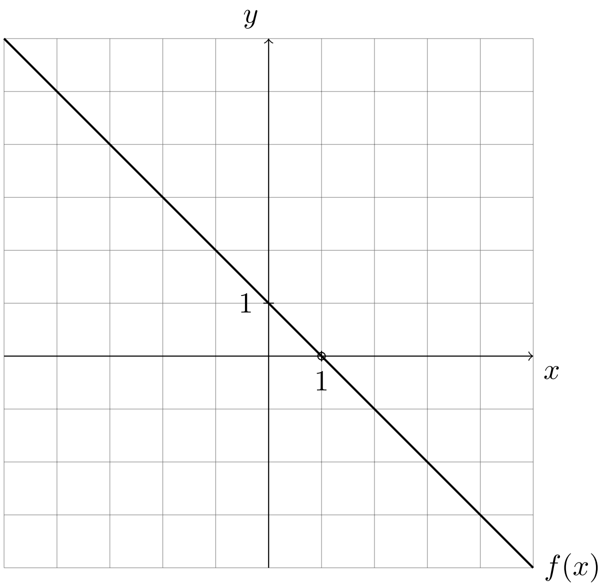
d) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2}$, $x_0 = 0$

Es gilt: $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Die Grenzwertbetrachtung kann also analog zu a) erfolgen und es sind $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1 - \infty = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 + \infty = \infty$

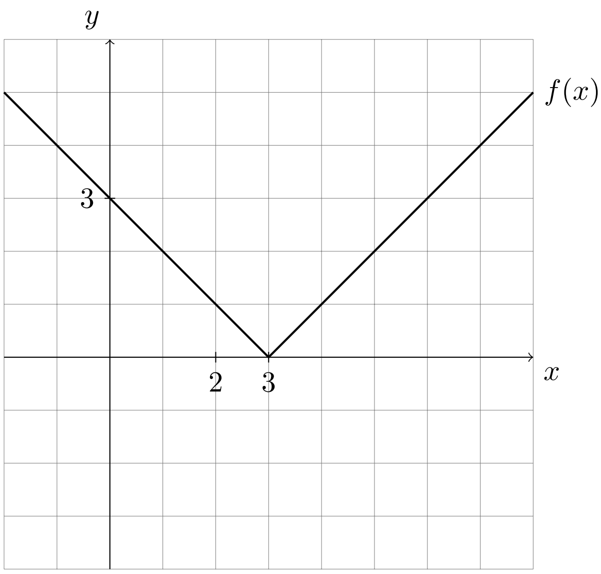


e) $f(x) = \dfrac{x - x^2}{x - 1} + 1$, $x_0 = 1$

Es gilt: $f(x) = \dfrac{-x(x-1)}{x-1} + 1 = 1 - x$. Die gesuchten Grenzwerte sind also von beiden Seiten gleich und es gilt: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1 - 1 = 0$.

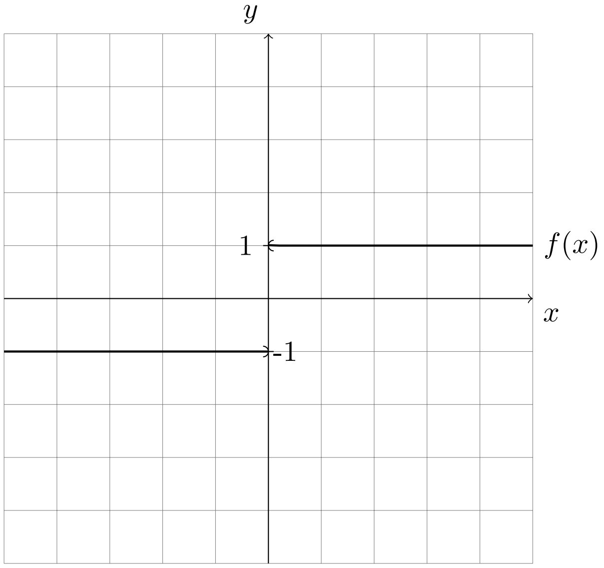


f) $f(x) = |x - 3|$, $x_0 = 2$. Verschiebung von $|x|$ um 3 nach rechts. Da f stetig ist, sind die gesuchten Grenzwerte von beiden Seiten gleich und es gilt: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = |2 - 3| = |-1| = 1$.



g) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x_0 = 0$

Für $x > 0$ ist diese Funktion konstant 1, für $x < 0$ ist sie konstant -1. Daher sind die Grenzwerte $\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$ und $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$.



4. Finden Sie Funktionsterme, die zu den gegebenen Graphen führen können.

a) Man kann von der Abbildung erkennen, dass die Gerade um 1 nach unten verschoben wurde, d.h. ihr Funktionswert wurde um -1 geändert, im Vergleich zu der gleichen Geraden durch den Ursprung. Außerdem ist ihre Steigung halb so stark wie die von x. Damit ist ein möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{x}{2} - 1$. Gegenprobe: Einsetzen von $x = 0$ und $x = 2$.

b) Die Abbildung zeigt eine an der x-Achse gespiegelte Parabel, die um 4 nach oben verschoben wurde. Dies ließe auf einen Funktionsterm der Art $-x^2 + 4$ schließen. Durch Einsetzen der Nullstellen -2 und 2 kann man erkennen, dass dies tatsächlich eine gültige Funktionsvorschrift für diese Abbildung ist. Also: $f(x) = -x^2 + 4$.

c) Die hier gezeigte Funktion erinnert an die Exponentialfunktion. Der einzige erkennbare Unterschied ist, dass der Schnittpunkt mit der y-Achse von e^x den Wert 1 hat und er in diesem Fall e ist. Er ist also der ursprüngliche Funktionswert multipliziert mit e. Damit ist ein möglicher Funktionsterm: $f(x) = e \cdot e^x = e^{x+1}$, was auch als Verschiebung der Exponentialfunktion um 1 nach links verstanden werden kann.

d) Die Funktion in der Abbildung erinnert an die Funktion $\frac{1}{x}$. Nur dass die hier gezeigte Funktion im Verhältnis dazu um 3 nach links und um 1 nach unten verschoben wurde. Dies ergibt den möglichen Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{x+3} - 1$.

e) Die Funktion erinnert an die Betragsfunktion, die um 4 nach unten verschoben wurde. Dies lässt vermuten, dass der Funktionsterm $|x| - 4$ sein könnte. Setzt man in diese Vorschrift jedoch die Nullstellen -2 und 2 ein, so erhält man $|-2| - 4 = -2 = |2| - 4$. Man sieht auch, dass die beiden Halbgeraden steiler sind als die von $|x|$. Es liegt also nahe, $c|x| - 4$

für ein geeignetes $c > 1$ zu betrachten. Den korrekten Wert $f(2) = 0$ erhält man, indem man $c = 2$ nimmt. Ein möglicher Funktionsterm ist also: $f(x) = 2|x| - 4$.

f) Die hier gezeigte Funktion erinnert wieder an $\frac{1}{x}$, jedoch an der x-Achse gespiegelt und um 2 nach rechts verschoben. Ein möglicher Funktionsterm ist also: $f(x) = -\frac{1}{x-2}$.