Rationale Potenzen

Satz 1.13 (Existenz der n-ten Wurzel) Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, mit $x^n = a$.
x wird die *n-te Wurzel* aus a genannt und mit $x = \sqrt[n]{a}$ oder $x = a^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet. Im Fall $n = 2$ schreibt man $x = \sqrt{a}$.

Def (rationale Potenzen) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n-\text{mal}}, \qquad a^0 := 1$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}, \text{ falls } a \neq 0.$$

Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Außerdem setzen wir $0^r := 0$ für $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

Satz 1.14 (Potenzregeln)
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

1) $a^r a^s = a^{r+s}$
2) $(ab)^r = a^r b^r$
3) $(a^r)^s = a^{rs}$
4) $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$, falls $r > 0$
   $a < b \Leftrightarrow a^r > b^r$, falls $r < 0$