Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 11

Aufgabe 1.

a) Seien $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi \leq \psi$. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

Beweisen Sie, dass g differenzierbar ist und es gilt:

$$g'(y) = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Kettenregel.

b) Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und F eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(f(x-at) + f(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\xi)\,d\xi$$

das Anfangswertproblem für die Wellengleichung (die Gleichung der schwingenden Saite)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0 \\ u(0,x) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = F(x). \end{cases}$$

erfüllt.

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie das Integral $I(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)\,d\varphi$, $\alpha > 1$, indem sie es nach dem Parameter ableiten.

b) Berechnen Sie $I'(0)$, wenn $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln(x^2 + \alpha^2)\,dx$.

Hinweis: Achtung! Für $\alpha > 0$ können Probleme auftreten.

Aufgabe 3. Sei $M = \{y \in C^2[0,1] \colon y(0) = 0, y(1) = 1\} \subset C^1[0,1]$ und

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(x + x^2 + y^2 + ay'^2\right) dx.$$

Finden Sie alle Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung.

Aufgabe 4. Unter allen C^2-Kurven, die zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) in der oberen Halbebene verbinden, finden Sie diejenige, die bei der Rotation um die x-Achse die Rotationsfläche mit kleinstmöglichem Flächeninhalt erzeugt.

Hinweis: Bei der Rotation des Graphen einer positiven C^1-Abbildung $x \mapsto y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, um der x-Achse entsteht eine Rotationsfläche mit dem Flächeninhalt

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Bemerkung: Die obige Rotationsminimalfläche kann man bekommen, wenn man einen Seifenfilm zwischen zwei Drahtringen aufspannt.