Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 7

Keine Abgabe vorgesehen

Präsenzaufgabe 7.5.

(a). Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der folgenden silmultanen Kongruenzen:

(a) $X \equiv 1 \pmod 5$, $X \equiv 4 \pmod 7$, $X \equiv 2 \pmod{11}$.

(b) $X \equiv 2 \pmod 3$, $X \equiv 3 \pmod 5$, $X \equiv 2 \pmod{15}$.

(b). In einem Korb befindet sich eine unbekannte Anzahl von Eiern. Beginnt man nun den Korb zu leeren, indem man immer zwei Eier auf einmal entfernt, so verbleibt am Ende ein einzelnes Ei im Korb. Wenn man stattdessen nun immer drei Eier auf einmal entnimmt, so bleiben am Ende zwei Eier übrig. Entsprechend ergibt sich bei vier Eiern ein Rest von drei, bei fünf Eiern ein Rest von vier und bei sechs Eiern ein Rest von fünf. Entfernt man jedoch immer sieben Eier auf einmal, so bleibt kein Rest, das heißt der Korb ist am Ende leer. Wie viele Eier befinden sich mindestens im Korb?

(c). Seien $f := t^3 - 3t^2 + 2t \in \mathbb{Q}[t]$ und $g := t^2 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$ gegeben. Beweisen Sie, dass f und g teilerfremd sind. Bestimmen Sie anschließend alle Lösungen des Kongruenzensystems: $X \equiv t + 1 \pmod g$, $X \equiv t^2 - 1 \pmod f$.

Präsenzaufgabe 7.6.

(a). Beweisen Sie, dass $f = t^4 - 2t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[t]$ eine rationale Nullstelle α besitzt und dass $\frac{f}{(t-\alpha)}$ in $\mathbb{Q}[t]$ irreduzibel ist.

(b). Beweisen Sie, dass $f_n = t^4 - nt - 1 \in \mathbb{Z}[t]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}[t]$ irreduzibel ist.

(c). Bestimmen Sie alle normierten irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{Z}_2[t]$ mit $\deg(f) = 4$ und beweisen Sie die Irreduzibilität dieser Polynome.

Präsenzaufgabe 7.7. Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibiltät in dem angebenen Polyomring $R[t]$. Ist das gegebene Polynom irreduzibel, so beweisen Sie die Aussage. Ist das Polynom reduzibel, so geben Sie mindestens einen irreduziblen Teiler an und zeigen Sie detailliert, wie Sie diesen erhalten haben.

(a). $f = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t + 4 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Z}[t]$.

(b). $f = 4t^4 - 3t^3 - 17t + 8 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Q}[t]$.

(c). $f = 3t^5 + 4t^3 - 6t^2 + 16t - 10 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Q}[t]$.

(d). $f = t^4 - 7t^3 + 19t^2 - 23t + 11 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Q}[t]$.