Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 9

Abgabe: 17.12.2019, bis 12 Uhr

Aufgabe 9.1. Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen K-linear sind und berechnen Sie deren Kern, eine Basis des Kerns und die Dimension des Bildes:

(a). $K = \mathbb{C}$ und $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$

(b). $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $G\colon K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}$, $M \mapsto A^T M A$, für $A := \begin{pmatrix} [1]_3 & [5]_3 \\ [6]_3 & [-1]_3 \end{pmatrix}$.

(c). $K = \mathbb{R}$ und $H\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4) \to \mathbb{R}^4$, $f \mapsto f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

(d). Entscheiden Sie, jeweils, ob F, G, H ein Epimorphismus, ein Monomorphismus, ein Isomorphismus, oder nichts davon ist.

Aufgabe 9.2. Sei $V \subset \mathbb{R}^4$ der $\mathbb{R}$-Untervektorraum aufgespannt von

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a). Bestimmen Sie eine Basis von V.
Hinweis: Aufgabe 7.3 (b) könnte nützlich sein.

(b). Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to V$ und bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, für die gilt $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$, für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(c). Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, für die gilt $\varphi^{-1}(\vec{v}) = B\vec{v}$ für $\vec{v} \in V$.

Aufgabe 9.3. Sei $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Der Einfachheit wegen schreiben wir $a \in \mathbb{Z}$, wenn wir implizit die Restklasse $[a]_7 \in K$ meinen. Seien $g := 1 + 2x + x^2 \in K[x]$ und $\psi\colon K[x]_{\leq 3} \to K[x]_{\leq 5}$ sei die Abbildung gegeben durch $\psi(f) := g \cdot f$ (Multiplikation von Polynomen).

(a). Berechnen Sie $\psi(1 + 5x + 8x^3)$ und beweisen Sie, dass die Abbildung ψ wohldefiniert ist (d.h., begründen Sie, warum $\psi(f) \in K[x]_{\leq 5}$ für alle $f \in K[x]_{\leq 3}$).

(b). Konstruieren Sie Isomorphismen $\alpha\colon K^4 \to K[x]_{\leq 3}$ und $\beta\colon K[x]_{\leq 5} \to K^6$ und begründen Sie, warum die von Ihnen gegebenen Abbildungen Isomorphismen sind.

(c). Bestimmen Sie die Matrix $C \in K^{6\times 4}$ mit der Eigenschaft $(\beta \circ \psi \circ \alpha)(\vec{v}) = C\vec{v}$ für $\vec{v} \in K^4$.

(d). Berechenn Sie $\operatorname{Ker}(C)$ und $\operatorname{Im}(C) := \operatorname{SR}(C)$.

(e). Bestimmen Sie mit Hilfe der vorherigen Teilaufgabe $\operatorname{Ker}(\psi)$ und $\operatorname{Im}(\psi)$.

Aufgabe 9.4. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-Vektorräume

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b-a \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad W := \{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^3 \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x].$$

(a). Zeigen Sie $\dim(V) = \dim(W)$.

(b). Bestimmen Sie eine Basis von V und eine Basis für W.

(c). Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\gamma\colon V \to W$ und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt.

Präsenzaufgabe 9.5. Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Wenn eine Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Wenn sie wahr ist, begründen Sie Ihre Entscheidung. Seien V und W jeweils K-Vektorräume über einem Körper K und $F\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

(a). Ist $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ K-linear abhängig, so gilt dies auch für $(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n))$

(b). Ist $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ K-linear unabhängig, so gilt dies auch für $(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n))$

(c). Ist $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ K-linear unabhängig und K injektiv, so ist $(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n))$ K-linear unabhängig.

(d). Es gilt: $\dim_K(\mathrm{Ker}(F)) \geq \mathrm{rg}(F)$.

Präsenzaufgabe 9.6. Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir betrachten drei verschiedene Basen,

$$\mathcal{B}_0 := (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}), \quad \mathcal{B}_1 := (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}), \quad \mathcal{B}_2 := (\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}).$$

(a). Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_V)$.

(b). Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id}_V)$.

(c). Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_V)$ mit Hilfe der beiden vorherigen Teilaufgaben.

Die folgende Aufgabe muss nicht abgegeben werden und wird nicht im Tutorium besprochen. Sie dient für motivierte Studierende, die anspruchsvollere Aufgaben sehen wollen. Falls jemand Fragen dazu hat oder die Lösung sehen möchte, in die Sprechstunde von Bernd Schober kommen.

♡-Aufgabe. Sei K ein Körper. Seien U, V, W drei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Weiter gelte $\dim(V) \geq \dim(U)$. Wir definieren $M := \mathrm{Hom}_K(U,V) \times \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

(a). Zeigen Sie, dass M versehen mit der komponentenweisen Addition und komponentenweisen Skalarmultiplikation, ein K-Vektorraum ist.

(b). Berechnen Sie $\dim_K(\mathrm{Hom}_K(U,W))$ und $\dim(M)$.

(c). Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$. Konstruieren Sie K-lineare Abbildungen $\alpha_f\colon U \to V$ und $\beta_f\colon V \to W$ mit $\beta_f \circ \alpha_f = f$. Beweisen Sie die Linearität.

(d). Konstruieren Sie unter Verwendung der vorherigen Teilaufgabe eine K-lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_K(U,W) \to \mathrm{Hom}_K(U,V) \times \mathrm{Hom}_K(V,W).$$

Beweisen Sie die Linearität. Unter welchen Bedingungen ist φ ein Monomorphismus, bzw. eine Epimorphismus, bzw. ein Isomorphismus.

(e). Seien $\ell := \dim_K(U), m := \dim_K(V), n := \dim_K(W)$ und $q := \dim_K(\mathrm{Hom}_K(U,W))$. Finden Sie eine injektive K-lineare Abbildung

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_K(U,V) \times \mathrm{Hom}_K(V,W) \to K^{(\ell+m)\times(m+n)}$$

und eine bijektive K-lineare Abbildung $\rho\colon K^q \to \mathrm{Hom}_K(U,W)$ und beweisen Sie die Eigeschaften.

(f). Bestimmen Sie die Matrix A, für welche gilt: $(\psi \circ \varphi \circ \rho)(\vec{v}) = A\vec{v}$.