Klausur zu Analysis III
am 27.02.2015

WS 2014/2015 Shestakov

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die entsprechende Seite und dort auf die Nummer der Aufgabe.* Beschriften Sie sofort jedes Blatt mit Ihrem Namen. Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 180 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). *Einziges Hilfsmittel:* Ein einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Tutor(in):

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							
Korr.							

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, so ist M keine Lebesgue-Nullmenge.

b) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar, $|f_n| \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf X und $f_n \to f$ punktweise, so ist f integrierbar über X.

c) Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f = g$ fü, so ist $f = g$ auf $\mathbb{R}$.

d) $f_n \to f$ punktweise auf $\mathbb{R} \Longrightarrow f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge und $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty)$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 2, & \text{falls } 13 \in A, \\ 0, & \text{sonst }. \end{cases}$$

Ist $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra? Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist und berechnen Sie $\int_{\mathbb{N}} x^2 \, d\mu$.

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass f über $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ integrierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Kugelkoordinaten

3. Aufgabe (8 Punkte)

a) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Fouriertransformation und der Ableitung? (d.h. vervollständigen Sie die Gleichungen $\mathcal{F}(f') =$ ... und $(\mathcal{F}f)' =$ ...) Was ist eine typische Anwendung der Fouriertransformation beim Lösen partieller Differentialgleichungen? Erklären sie die entsprechende Idee.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{falls } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{falls } |x| > \pi. \end{cases}$$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $F = \begin{pmatrix} e^{x-y}(1 + x + y) + x \\ e^{x-y}(1 - x - y) + y \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Stellen Sie fest, ob F eine Stammfunktion u besitzt (bzw. ein Gradientenfeld ist), und finden Sie ggf. u.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F$, wobei γ ein Stück der Sinus-Kurve zwischen $(0,0)$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ist.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq b^2, x^2+y^2+z^2 \geq a^2, \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$, wobei $0 < a < b$.

a) Beschreiben Sie M in Worten und skizzieren Sie M. Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

b) Berechnen Sie das Volumen von M.

Hinweis: Kugelkoordinaten

c) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix}$ durch die Außenseite des Randes ∂M.

6. Aufgabe (9 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Außenseite des Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, $z < 1$, und

$$F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie das Einheitsnormalenfeld auf S, das die Orientierung von S definiert.

b) Berechnen Sie direkt oder mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluss von F durch S, d.h. das Integral $\int_S \langle F, \mathrm{n} \rangle dS$.