Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 8

Abgabe: 10.12.2019, bis 12 Uhr

Aufgabe 8.1. Seien K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $A \in K^{m \times n}$ eine $m \times n$ Matrix. Seien $\mu \in K$ und $k, \ell \in \{1, \ldots, m\}$. Zeigen Sie, dass der Zeilenraum von A invariant unter der elementaren Zeilenoperation ist, welche das μ-fache der ℓ-ten Zeile zur k-ten Zeile addiert. D.h., zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(\, Q_{k\ell}(\mu) \cdot A\,).$$

Aufgabe 8.2. Sei K ein Körper. Seien V und W zwei K-Vektorräume und $F \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a). Ist $U_1 \subseteq W$ ein Untervektorraum von W, so ist $F^{-1}(U_1) := \{v \in V \mid F(v) \in U_1\}$ ein Untervektorraum von V.

(b). Ist $U_2 \subseteq V$ ein Untervektorraum von V, so ist $F(U_2) := \{F(v) \mid v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von W.

Aufgabe 8.3. Sei $K = \mathbb{R}$. Sei $V = \mathbb{R}^4$. Betrachten Sie die Abbildung $F \colon V \to V$ gegeben durch

$$F(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} -v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 \\ v_3 + 2v_4 \\ 2v_3 - v_4 \end{pmatrix}$$

(a). Zeigen Sie, dass F ein K-Vektorraum Homomorphismus ist.

(b). Seien $\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Matrix

$$A := \Big(F(\vec{e}_1)\ F(\vec{e}_2)\ F(\vec{e}_3)\ F(\vec{e}_4) \Big),$$

dessen i-te Spalte durch $F(\vec{e}_i)$ gegeben ist, wobei $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Berechnen Sie ferner $A\vec{v}$, für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$. Was fällt Ihnen auf?

(c). Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(A)$ und finden Sie eine Basis für $\mathrm{Ker}(A)$.

(d). Zeigen Sie, dass gilt $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Ker}(A)$ und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(F))$.
Hinweis: Welches lineare Gleichungssystem müssen Sie lösen, um $\mathrm{Ker}(F)$ zu bestimmen?
Weiter könnte für den zweiten Teil die Dimensionsformel aus der Vorlesung nützlich sein.

(e). Bestimmen Sie den Rang von A und eine Basis des Spaltenraums $\mathrm{SR}(A)$ von A. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{SR}(A)$.

Präsenzaufgabe 8.4. Seien K ein Körper. Betrachten Sie die K-Vektorräume

$$V := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K\} \quad \text{und} \quad W := K[x]_{\leq 2} := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in K\}.$$

(Versehen mit der jeweils üblichen Addition und skalaren Multiplikation). Sei $F\colon V \to W$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$F(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}) := (a - b - c) + (b + c)x^2$$

Wir wählen die Basis $\mathcal{B} := (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ für V und die Basis $\mathcal{B}' := (1, x, x^2)$ für W. Seien $\phi_{\mathcal{B}}\colon K^3 \to V$ und $I_{\mathcal{B}'}\colon W \to K^3$ die Abbildungen aus Lemma 5.2.9 aus der Vorlesung.

(a). Bestimmen Sie die Matrix $A = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in K^{3\times 3}$, sodass die durch A definierte lineare Abbildung $F_A : K^3 \to K^3, \vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}$ die folgende Eigenschaft hat:

$$F_A = I_{\mathcal{B}'} \circ F \circ \phi_{\mathcal{B}}.$$

(b). Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(A)$ und $\mathrm{Im}(A)$.

(c). Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$ mit Hilfe von (b).

Präsenzaufgabe 8.5. Sei K ein Körper. Seien V, W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume und $F\colon V \to W$ ein K-Vektorraum Homomorphismus. Falls $\dim(V) = \dim(W)$ ist, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) F ist ein Monomorphisums.
(ii) F ist ein Epimorphismus.
(iii) F ist ein Isomorphismus.