Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 7

Abgabe: 03.12.2019, bis 12 Uhr

Aufgabe 7.1. **(a).** Sei K ein Körper und $d \in \mathbb{N}$. Sei $V := K[x]_{\leq d}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens d. Geben Sie eine Basis von V an.

(b). Betrachten Sie die Polynome $p(x) = x^2 + 2x - 3$, $q(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $r(x) = ax^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$, für $a \in \mathbb{R}[x]$. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ sind $p(x), q(x), r(x)$ linear abhängig?

Aufgabe 7.2. Sei K ein Körper.

(a). Seien $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in K^3$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren $\vec{w}_1 := \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{w}_2 := \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{w}_3 := \vec{u}_3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ linear unabhängig sind.

(b). Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$. Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in K^n$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren

$$\vec{z}_1 := \vec{v}_1 + \vec{v}_m,\ \vec{z}_2 := \vec{v}_2 + \vec{v}_m,\ \ldots,\ \vec{z}_{m-1} := \vec{v}_{m-1} + \vec{v}_m,\ \vec{z}_m := \vec{v}_m.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_m$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7.3. Seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a). Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathbb{R}^3$.

(b). Bestimmen Sie eine Teilmenge von $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, welche eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 7.4. Seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$ eine Matrix. Seien $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_m \in K^n$ die Spaltenvektoren von A.

(a). Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A genau dann linear unabhängig sind, wenn $A\vec{x} = \vec{0}$ als einzige Lösung den Nullvektor $\vec{x} = \vec{0} \in K^m$ hat.

(b). Beweisen Sie: Ist $n = m$ und A invertierbar, so sind die Spaltenvektoren von A eine Basis von K^n.

Präsenzaufgabe 7.5. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

(a). Bestimmen Sie den Spaltenrang von A und finden Sie eine Basis für den Spaltenraum.

(b). Bestimmen Sie den Zeilenrang von A und finden Sie eine Basis für den Zeilenraum.