

Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Integralrechnung

× Aufgabe 1: Integrale berechnen I

Berechne folgende Integrale.

i)

$$\int_{-3}^3 x^3 dx$$

ii)

$$\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$$

iii)

$$\int_0^1 e^{2x} dx$$

iv)

$$\int_{-2}^4 2x^3 - 3x + 1 dx$$

Berechne folgende Integrale. Mache zuerst eine Skizze und gebe (ohne Rechnung) an, welches Vorzeichen das Integral hat.

i)

$$\int_{-1}^2 x^2 dx$$

ii)

$$\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx$$

Hinweis: Benutze $x^3 - x^2 - 2x = (x - 2) \cdot x \cdot (x + 1)$ für die Skizze

iii)

$$\int_0^\pi \sin(x) dx$$

iv)

$$\int_{-2}^{-1} 2^x dx$$

Berechne folgende Integrale:

i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x} dx$$

Hinweis: Mehrfache partielle Integration

iii)

$$\int_1^2 \ln(x) dx$$

Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$

! iv)

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$$

Hinweis: Verwende $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx,$$

und vervollständige damit den Beweis des Satzes zur Linearität von Integralen.

! Aufgabe 2: Integration durch Substitution

i) Zeigen folgenden Satz über Integration:

Satz I (Integration durch Substitution)

Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $s : [a, b] \rightarrow I$ stetig differenzierbar.

Dann gilt:

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x) dx = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x) dx$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel. Falls F eine Stammfunktion von f ist, wie könnte man das rechte Integral schreiben?

ii) Berechne

$$\int_0^2 2xe^{x^2} dx$$

! Aufgabe 3

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- i) Zeige, dass durch $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(y) dy$ eine Stammfunktion von f gegeben wird.
- ii) Zeige mit partieller Integration, dass

$$\int_a^b \int_a^x f(y) dy dx = \int_a^b (b-x) f(x) dx$$