Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 10 - Modul mat200

Freiwillige Abgabe 07.07.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Bitte beachten Sie, dass Sie mit der Abgabe dieses Übungsblattes keine Bonuspunkte mehr erwirtschaften können. Die Aufgaben dienen der Wiederholung des Inhalts und der Vorbereitung auf die Prüfung.

Aufgabe 10.1. Seien $f := t^3 + 4t^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[t]$ und $g := t^2 + t + 4 \in \mathbb{Z}_5[t]$.

(a). Faktorisieren Sie f und g über $\mathbb{Z}_5$ und beweisen Sie, dass die beiden Polynome teilerfremd sind.

(b). Geben Sie alle Lösungen $h \in \mathbb{Z}_5[t]$ des folgenden Kongruenzensystems an:

$$X \equiv t^2 \pmod f \quad \wedge \quad X \equiv t \pmod g.$$

Aufgabe 10.2. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a). Ist R ein faktorieller Ring, so ist auch $R[t]$ ein faktorieller Ring.

(b). Jedes irreduzible Element eines Hauptidealringes ist ein Primelement.

(c). Ist $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring und sind $f, g \in R[t]$, so ist $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

(d). Seien $R \subseteq R'$ faktorielle Ringe und $f \in R[t]$. Falls f reduzibel über R ist, ist f auch reduzibel über R'.

Aufgabe 10.3. Sei $\alpha = \sqrt{2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$, den Grad der Körpererweiterung $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, sowie eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und drücken Sie α^{-1}, α^6 und α^{-5} bezüglich dieser Basis aus.