Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 11

Abgabe: 14.01.2020, bis 12 Uhr

Aufgabe 11.1. Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung:

$$\begin{array}{cccc} F\colon & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 & \mapsto & \begin{pmatrix} a_0 - 2\,a_2 + 2\,a_3 & -a_0 - 2\,a_1 + 2\,a_2 + 3\,a_3 \\ 3\,a_0 - 2\,a_1 + a_2 + 2\,a_3 & -2\,a_0 + 3\,a_1 + 2\,a_2 + 2\,a_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a). Es bezeichnen $\mathcal{S} := (1, t, t^2, t^3)$ und $\mathcal{S}' := \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ die Standardbasen von $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ bzw. $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie $M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}'}(F)$.

(b). Seien $\mathcal{B}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ und $\mathcal{C}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$M^{\mathcal{S}'}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$.

Aufgabe 11.2. Seien

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3i & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3+2i & 0 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -1 \\ 0 & -3i & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3+2i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie $\det(M)$, $\det(N)$ und $\det((M^{-1})^7 N^7)$.
Hinweis: Für die letzte Determinante ist ein geschicktes Ausnutzen der Rechenregeln für Determinanten und ein vorheriger Vergleich von $\det(M)$ und $\det(N)$ sehr nützlich!

Aufgabe 11.3. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ -\alpha^2 & \alpha^2 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a). Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\det(B_\alpha) = 0$ ist.

(b). Betrachten Sie den Fall $\alpha = 1$. Berechnen Sie $\mathrm{rang}(B_1)$ und eine Basis von $\mathrm{SR}(B_1)$.

(c). Betrachten Sie den Fall $\alpha = -1$. Berechnen Sie $\mathrm{rang}(B_{-1})$ und eine Basis von $\mathrm{SR}(B_{-1})$.

(d). Geben Sie Werte $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ an, sodass die Spaltenvektoren von B_{α_1} linear unabhängig sind und die Spaltenvektoren von B_{α_2} linear abhängig sind. Begründen Sie Ihre Wahl ohne Rechnung.

Aufgabe 11.4. Sei K ein Körper und $A \in K^{q\times q}$ eine Matrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei $A_1 \in K^{n\times n}, A_2 \in K^{m\times m}, C \in K^{n\times m}$ und $n + m = q$. Beweisen Sie, dass gilt

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2).$$

Hinweis: Eine vollständige Induktion könnte hilfreich sein.

Präsenzaufgabe 11.5. Seien

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a). Zeigen Sie, dass $\det(B) \neq 0$ ist.

(b). Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $B\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

(c). Bestimmen Sie B^{-1} mit Hilfe der Adjunkten.

Präsenzaufgabe 11.6. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von M, sowie die zugehörigen Eigenräume.

Die folgende Aufgabe muss nicht abgegeben werden und wird nicht im Tutorium besprochen. Sie dient für motivierte Studierende, die anspruchsvollere Aufgaben sehen wollen. Falls jemand Fragen dazu hat oder die Lösung sehen möchte, bitte in die Sprechstunde von Bernd Schober kommen.

♡-Aufgabe. Beweisen Sie die Cramersche Regel.