Dr. Sunke Schlüters
sunke.schlueters@uni-oldenburg.de

Klausur zum Modul
„Mathematisches Problemlösen und Beweisen“

12. Februar 2018

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, tragen Sie oben *leserlich in Druckbuchstaben* Namen und Matrikelnummer ein und lesen die nachfolgenden Hinweise.

Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 81 erreichbaren Punkten. Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung.

Nach jeder Aufgabe haben Sie Platz Ihre Lösung zu formulieren. Am Ende der Klausur finden Sie weitere freie Seiten. Machen Sie deutlich, welche Ihrer Ausführungen zu welchem Aufgabenteil gehört und *verweisen Sie auf die entsprechende Seite*, wenn Sie eine Aufgabe nicht auf den dafür vorgesehenen Seiten bearbeiten!

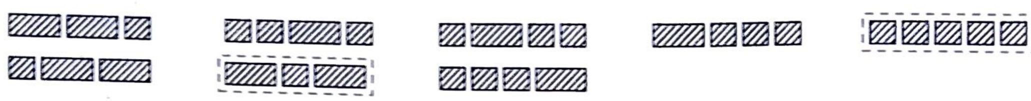
Schreiben Sie deutlich und markieren Sie, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind. Geben Sie auch Lösungsideen oder Teillösungen an, wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten. Wenn Sie mehr als eine Lösung zu einer Aufgabe formulieren, wird die zu bewertende zufällig ausgewählt.

Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (Kugelschreiber oder Füllfederhalter). Mit Bleistift oder Tintenlöscher geschriebene Lösungen können nicht bewertet werden. Lösen sie nicht die Heftklammer!

Es sind, außer einem Stift und Ihrem Gehirn, *keine Hilfsmittel* zugelassen. Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur und können weitere Konsequenzen nach sich ziehen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/13	/15	/12	/13	/15	/13	/81
Korrektor							

Aufgabe 1. Ein Zug besteht aus Wagons der Länge eins oder der Länge zwei. Nachfolgend sind beispielsweise alle Züge der Länge fünf aufgezählt:



Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne a_n die Anzahl aller Züge der Länge n. s_n bezeichne entsprechend die Anzahl der symmetrischen Züge (von den aufgelisteten Zügen sind genau die umrahmten symmetrisch).

(a) Bestimmen Sie a_n und s_n für $n = 1, 2, 3, 4$ indem Sie alle möglichen Züge aufzählen.

(b) Stellen Sie eine Rekursion für die Größe a_n auf und beweisen Sie deren Korrektheit.

(c) Bestimmen Sie, mit Begründung, für ungerades $n \in \mathbb{N}$ die Größe s_n in Abhängigkeit von a_k für geeignete k.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Resultate a_7 und s_7. Geben Sie Ihren Rechenweg an.

$4 + 4 + 3 + 2 = 13$ Punkte ($\sim 16\%$)

MATHEMATISCHES PROBLEMLÖSEN UND BEWEISEN
KLAUSUR – WINTERSEMESTER 2017/2018

Aufgabe 2.

(a) Geben Sie die wichtigen drei Formeln aus der Vorlesung über Graphen an. Geben Sie jeweils die Bedingungen an den Graphen an, unter denen die Formel gilt, und definieren Sie die von Ihnen verwendeten Symbole.

(b) Prüfen Sie jeweils, ob es einen einfachen (das heißt, der Graph enthält keine Schleifen oder doppelte Kanten) zusammenhängenden Graphen G mit genau fünf Ecken gibt, in dem die Ecken die Grade

(1) $1, 2, 3, 4, 5$,

(2) $2, 2, 2, 3, 3$, bzw.

(3) $2, 2, 4, 4, 4$

haben. Beweisen Sie Ihre Antwort.

$3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ Punkte ($\sim 19\%$)

Aufgabe 3. Sei a eine natürliche Zahl. Untersuchen Sie, welche der drei unten stehenden Aussagen (a), (b) und (c) die Aussage

$$a \equiv 1 \pmod 6 \tag{$*$}$$

implizieren oder von ihr impliziert werden.

(a) a ist ungerade.
(b) $a \equiv 1 \pmod{12}$
(c) $5a \equiv 5 \pmod 6$

Geben Sie also, jeweils begründet durch einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel, für jede der sechs Implikationen $(*) \Rightarrow$ (a), (a) $\Rightarrow (*)$, usw. an, ob diese gilt oder nicht gilt.

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12$ Punkte ($\sim 15\%$)

Aufgabe 4.

(a) Nennen Sie drei allgemeine Problemlösestrategien.
(b) Nennen Sie drei spezielle Problemlösestrategien. Geben Sie für jede der Strategien an, ob sie sich für Existenzbeweise und/oder Unmöglichkeitsbeweise eignen.
(c) Geben Sie schematisch oder anhand eines Beispiels an, wie man mithilfe des Extremalprinzips die Existenz eines Objektes (in einer gewissen Grundmenge) mit einer bestimmten Eigenschaft beweisen kann.

$3 + 6 + 4 = 13$ Punkte ($\sim 16\%$)

Aufgabe 5.

(a) Bestimmen Sie, welche Reste modulo 5 die vierte Potenz einer Zahl $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ lassen kann. Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle:

a	$a^2 \pmod 5$	$a^4 \pmod 5$
0		
1		
2		
3	4	
4	1	

(b) Begründen Sie kurz, warum diese Tabelle ausreicht, um die Reste modulo 5 der vierten Potenz *aller Zahlen* $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu bestimmen.
(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$5 \cdot (a^4 + b^4) = c^4$$

keine Lösung $a, b, c \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ besitzt.
(d) Untersuchen Sie, ob die Gleichung

$$5 \cdot (a^2 + b^2) = c^2$$

eine Lösung $a, b, c \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort!

$4 + 2 + 6 + 3 = 15$ Punkte ($\sim 19\%$)

Aufgabe 6.

(a) Formulieren Sie das Schubfachprinzip in seiner erweiterten Form.

(b) Zeigen Sie: Unter beliebigen sechs Personen gibt es stets drei, die sich alle gegenseitig kennen, oder es drei gibt, die sich alle nicht kennen. Die Relation „sich kennen" soll hier symmetrisch sein.

Bearbeiten Sie dazu:

(1) Modellieren Sie zwei beispielhafte Gruppen von sechs Personen (eine in der sich drei Personen kennen und eine in der sich drei Personen nicht kennen) jeweils mithilfe eines Graphen. Geben Sie an, was Ecken und Kanten symbolisieren und markieren Sie jeweils, welche drei Personen die geforderte Eigenschaft erfüllen.

(2) Zeigen Sie, dass es für jede Person A einer beliebigen Sechsergruppe drei andere Personen B, C und D in der Gruppe gibt, die A alle kennt oder A alle nicht kennt.

(3) Betrachten Sie für eine fixierte Person A diese Teilgruppe (B, C und D) und beweisen Sie die fragliche Aussage.

$3 + (3 + 3 + 4) = 13$ Punkte ($\sim 16\%$)