CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 12

Abgabe: 21.01.2020, bis 12 Uhr

Aufgabe 12.1. Gegeben sei $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a). Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und berechnen Sie jeweils die algebraische Vielfachheit.

(b). Berechnen Sie den Eigenraum zu jedem Eigenwert. Geben Sie jeweils eine Basis des Eigenraums an und bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit.

Aufgabe 12.2. Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung aus Aufgabe 10.2, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(a). Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von G sind.

(b). Ist G diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 12.3. Gegeben sei die folgende lineare Abbildung:

$$\begin{array}{rccl} F\colon & \mathbb{R}[t]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \\ & f & \mapsto & f(1) + (t+1)f' \end{array}.$$

Erinnerung: Für $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ (mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) ist die Ableitung nach t gegeben durch $f' = a_1 + 2a_2 t$.

(a). Bestimmen Sie alle Eigenwerte von F und berechnen Sie jeweils die algebraische Vielfachheit.

(b). Berechnen Sie den Eigenraum zu jedem Eigenwert. Geben Sie jeweils eine Basis des Eigenraums an und bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit.

Aufgabe 12.4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $F \in \mathrm{End}_K(V)$. Für ein Polynom $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$, $p \neq 0$, definieren wir den Endomorphismus $p(F) \in \mathrm{End}_K(V)$ durch $p(F) := \sum_{i=0}^{n} a_i F^i$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(F)$.

Bonusaufgabe (*bis zu 4 Extrapunkte*). **(a).** Bestimmen Sie zu $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die Adjunkte $\mathrm{adj}(M)$ sowie die Determinante.

(b). Sei $K := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Lösen Sie für $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in K^3$ das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Präsenzaufgabe 12.5. Sei $\langle\, ,\, \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle := 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$$

Bestimmen Sie, ob $\langle\, ,\, \rangle$ ein reelles Skalarprodukt ist. Falls ja, bestimmen Sie die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ und bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$.

Die folgende Aufgabe muss nicht abgegeben werden und wird nicht im Tutorium besprochen. Sie dient für motivierte Studierende, die anspruchsvollere Aufgaben sehen wollen. Falls jemand Fragen dazu hat oder die Lösung sehen möchte, bitte in die Sprechstunde von Bernd Schober kommen.

♡-Aufgabe. Seien $c \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Angenommen für jede Spalte von A gilt, dass die Summe der Einträge in der Spalte gleich c ist. Zeigen sie, dass c ein Eigenwert von A ist.