Analysis IIa - Integralrechnung einer Variablen und Differentialgleichungen
Klausur – Sommersemester 2017

Prof. Dr. Boris Vertman
boris.vertman@uni-oldenburg.de

Malte Behr
malte.behr@uni-oldenburg.de

Klausur zum Modul
„Analysis IIa“

15. Juli 2017

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, tragen Sie oben *leserlich in Druckbuchstaben* Namen und Matrikelnummer ein und lesen die nachfolgenden Hinweise.

Die Klausur besteht aus sieben Aufgaben mit insgesamt 70 erreichbaren Punkten. Zur Bearbeitung stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.

Nach jeder Aufgabe haben Sie Platz Ihre Lösung zu formulieren. Am Ende der Klausur finden Sie weitere freie Seiten. Machen Sie deutlich, welche Ihrer Ausführungen zu welchem Aufgabenteil gehört, indem Sie oben rechts die entsprechende Aufgabennummer eintragen.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind. Geben Sie auch Lösungsideen oder Teillösungen an, wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten. Wenn Sie mehr als eine Lösung zu einer Aufgabe formulieren, wird die zu bewertende zufällig ausgewählt.

Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (Kugelschreiber oder Füllfederhalter). Mit Bleistift oder Tintenlöscher geschriebene Lösungen können nicht bewertet werden. Lösen sie nicht die Heftklammer!

Es sind, neben einem Stift und Ihrem Gehirn, *ein beidseitig handgeschriebenes DIN A4 Blatt* als Hilfsmittel zugelassen. *Keinerlei weitere Hilfsmittel sind zugelassen.* Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur und können weitere Konsequenzen nach sich ziehen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte								
Korrektor								

Aufgabe 1. Kreuzen Sie jeweils an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen keine Begründungen liefern. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Sie können sich auch dafür entscheiden keine Wahl zu treffen. In diesem Fall erhalten Sie keine Punkte.

Aussage	Wahr	Falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion, so dass $\lvert f'(x)\rvert < 1$ für alle x. Dann gibt es ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = x^*$.	□	□
Sei $V = C^1[a,b]$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Dann definiert $\langle f,g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$ ein Skalarprodukt auf V.	□	□
Eine Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ mit Konvergenzradius $R > 0$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\lvert x\rvert \leq R$.	□	□
Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und stetig differenzierbar in der zweiten Komponente. Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ sodass das AWP $y' = F(x,y),\ y(x_0) = y_0$ eine lokale eindeutige Lösung auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ hat.	□	□
Für jedes $a \in \mathbb{N}$ konvergiert das Integral $\int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx$.	□	□

10 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Sei $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x/2)$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt $x^* \in [0,\pi]$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie ein n, so dass für einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in [0,\pi]$ die n-te Iteration $x_n := f^{(n)}(x_0)$ die Ungleichung $\lvert x^* - x_n\rvert \leq 1/2$ erfüllt.

10 Punkte

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie eine Stammfunktion von $e^{-x}(x^2 + x + 2)$ an.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

10 Punkte

Aufgabe 4. Man bestimme den Konvergenzradius von

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3(n!)}$$

und berechne eine Stammfunktion von f. Geben Sie die Stammfunktion auch explizit (also nicht nur als Potenzreihe) an.

10 Punkte

Aufgabe 5. Finden Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' e^{y-x^3} = x^2, \; y(1) = 0 \; .$$

10 Punkte

Aufgabe 6.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \; .$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des AWP

$$y'' - 4y' + 3y = x \; , \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$$

Hinweis: Verwenden Sie als Ansatz für eine spezielle Lösung ein Polynom.

10 Punkte

Aufgabe 7. Sei $(V, \|\cdot\|)$ der Banachraum der beschränkten Folgen

$$V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C\}$$

zusammen mit der Supremumsnorm $\|(a_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Beweisen Sie, dass der Unterraum

$$W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$$

abgeschlossen ist. Sie brauchen nicht zu zeigen, dass W ein Vektorraum ist.

10 Punkte