Abgabe Analysis IIb, Blatt 5

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 1

Fehlt.

Aufgabe 2

(a) Fehlt.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (y^2 - x) \cdot (y^2 - 2x)$.

Zu zeigen: f hat kein lokales Minimum in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$$f(x,y) = (y^2 - x) \cdot (y^2 - 2x) = y^4 - 2xy - xy^2 + 2x^2.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= -2y - y^2 + 4x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= 4y^3 - 2x - 2xy, \\ \implies \nabla f(a) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y^2 - 2y \\ 4y^3 - 2xy - 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 0^2 - 2 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu zeigen: $H_f(a)$ nicht positiv definit. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) &= 4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) &= 12y^2 - 2x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) &= -2y - 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a). \implies H_f(a) = \begin{pmatrix} 4 & -2y - 2 \\ -2y - 2 & 12y^2 - 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \cdot 0 - 2 \\ -2 \cdot 0 - 2 & 12 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt:

$\det(4) = 4,$
$\det(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}) = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2) = -4. \implies \quad H_f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ nicht positiv definit.

Da $H_f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ nicht positiv definit ist, besitzt f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein lokales Minimum.

$\square$

Aufgabe 3

Fehlt.

Aufgabe 4

(a) Fehlt.

(b) Fehlt.

Aufgabe 5

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
Zu zeigen: f hat ein lokales Maximum bei $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und ein lokales Minimum bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 6x^2 + y^2 + 10x.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2xy + 2y.$$
$$\implies \nabla f(a) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y^2 + 10x \\ 2xy + 2y \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt:

$$\nabla f(a) = 0 \iff \text{(I)}\, 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \text{ und } \text{(II)}\, 2xy + 2y = 0.$$

(II):

$$2xy + 2y = 0 \iff x = -1 \text{ oder } y = 0.$$

(I): $\underline{x = -1:}$
Es gilt:

$$\begin{aligned} & 6 \cdot (-1)^2 + y^2 + 10 \cdot (-1) = 0 \\ \iff & y^2 - 4 = 0 \\ \iff & y^2 = 4 \\ \iff & y = \pm 2. \end{aligned}$$

(I): $\underline{y = 0:}$
Es gilt:

$$\begin{aligned} & 6x^2 + 0^2 + 10x = 0 \\ \iff & x^2 + \frac{5}{3}x = 0 \\ \iff & x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0 \\ \iff & \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0 \\ \iff & \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ \iff & x + \frac{5}{6} = \pm\frac{5}{6} \\ \iff & x = 0 \text{ oder } x = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\implies \nabla f(a) = 0 \iff a = \begin{pmatrix} -1 \\ \pm 2 \end{pmatrix} \text{ oder } a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } a = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 12x + 10.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 2x + 2.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

$$\implies H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 12 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$$

Teste Kandidaten für Extrema:

$\underline{a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$: Es gilt:

$$\det(12 \cdot (-1) + 10) = -2,$$
$$\det(\begin{pmatrix} 12 \cdot (-1) + 10 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 2 \end{pmatrix}) = (-2) \cdot 0 - 4 \cdot 4 = -16.$$
$$\overset{\text{Sylvester-Krit.}}{\Longrightarrow} H_f(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) \text{ weder positiv noch negativ definit.}$$

$\underline{a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$: Es gilt:

$$\det(12 \cdot (-1) + 10) = -2,$$
$$\det(\begin{pmatrix} 12 \cdot (-1) + 10 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 2 \end{pmatrix}) = (-2) \cdot 0 - (-4) \cdot (-4) = -16.$$
$$\overset{\text{Sylvester-Krit.}}{\Longrightarrow} H_f(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}) \text{ weder positiv noch negativ definit.}$$

$\underline{a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$: Es gilt:

$$\det(12 \cdot (0) + 10) = 10,$$
$$\det(\begin{pmatrix} 12 \cdot 0 + 10 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \end{pmatrix}) = (10) \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 20.$$
$$\overset{\text{Sylvester-Krit.}}{\Longrightarrow} H_f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ positiv definit.}$$

$\underline{a = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}$: Es gilt:

$$\det(12 \cdot (-\frac{5}{3}) + 10) = -12,$$
$$\det(\begin{pmatrix} 12 \cdot (-\frac{5}{3}) + 10 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-\frac{5}{3}) + 2 \end{pmatrix}) = (-10) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0 = \frac{40}{3}.$$
$$\overset{\text{Sylvester-Krit.}}{\Longrightarrow} H_f(\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ negativ definit.}$$

Insgesamt ergibt sich nach Satz 2.10, dass f an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein lokales Minimum besitzt und an der Stelle $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ ein lokales Maximum besitzt. An den Stellen $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ besitzt f keine Extrema.

$\square$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.
Zu zeigen: Behauptung.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= 9x^2 + 6y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= 2y + 6x, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a) &= 2z - 2. \\ \implies \nabla f(a) &= \begin{pmatrix} 9x^2 + 6y \\ 2y + 6x \\ 2z - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\nabla f(a) = 0 \iff \begin{array}{rr} \text{(I)} & 9x^2 + 6y \\ \text{(II)} & 2y + 6x \\ \text{(III)} & 2z - 2y \end{array}$$

(III):

$$2z - 2 = 0 \iff z = 1.$$

(II):

$$2y + 6x = 0 \iff 3x + y = 0 \iff y = -3x.$$

(I):

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 6y = 0 \\ \overset{\text{(II)}}{\iff} & 9x^2 + 6 \cdot (-3x) = 0 \\ \iff & 9x^2 - 18x = 0 \\ \iff & x^2 - 2x = 0 \\ \iff & x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 = 0 \\ \iff & (x-1)^2 = 1^2 \\ \iff & x - 1 = \pm 1 \\ \iff & x = 0 \text{ oder } x = 2. \end{aligned}$$

$$\implies \nabla f(a) = 0 \iff a = \begin{pmatrix} 0 \\ (-3) \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } a = \begin{pmatrix} 2 \\ (-3) \cdot 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) &= 18x,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) &= 2,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) &= 6 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).\\ \implies \quad H_f(a) &= \begin{pmatrix} 18x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\underline{a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$: Es gilt:

$$\begin{aligned}&\det(18 \cdot 0) = 0,\\ &\det(\begin{pmatrix} 18 \cdot 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}) = 0 \cdot 2 - 36 = -36.\\ \implies H_f(&\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ negativ semidefinit.}\end{aligned}$$

$\underline{a = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}}$: Es gilt:

$$\begin{aligned}&\det(18 \cdot 2) = 36,\\ &\det(\begin{pmatrix} 18 \cdot 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}) = 36 \cdot 2 - 36 = 36.\\ \implies H_f(&\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ positiv definit.}\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kein Extremum von f ist. Das einzige lokale Minimum von f ist an der Stelle $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\square$