IfM
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Lösungen der Fingerübungen

1. Berechnen Sie die folgenden Potenz- und Wurzelterme ohne Verwendung des Taschenrechners:

   a) $\sqrt[4]{0,0001} = \sqrt[4]{0,1^4} = 0,1$

   b) $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

   c) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{2^3})^2 = 2^2 = 4$

   d) $8^{-\frac{2}{10}} : (\sqrt[5]{0,25})^{-1} = \dfrac{8^{-\frac{1}{5}}}{0,25^{-\frac{1}{5}}} = (\dfrac{8}{0,25})^{-\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{32})^{-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

   e) $(\sqrt{u+v} + \sqrt{u-v}) \cdot (\sqrt{u-v} - \sqrt{v+u}) = (\sqrt{u-v})^2 - (\sqrt{u+v})^2 = u - v - u - v = -2v$

   f) $\sqrt[3]{80x^4} - 2x\sqrt[6]{100x^2} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot 10x} - 2x(10^2x^2)^{\frac{1}{6}} = 2x\sqrt[3]{10x} - 2x((10^2x^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} =$
   $2x\sqrt[3]{10x} - 2x\sqrt[3]{10x} = 0$

2. Vereinfachen Sie, wenn möglich, für positive reelle Zahlen a, b, r, s, t, x und y.

   a) $\sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}} = (t(t(t)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (t(t^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{2}} = (tt^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}} = t^{\frac{7}{8}}$

   b) $\sqrt{a^2(b+4) + b^2(a+4)}$ kann nicht weiter vereinfacht werden, da die Summe nicht faktorisiert werden kann und man aus Summen keine teilweisen Wurzeln ziehen kann.

   c) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}} = (x^3(x^2x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (x^3x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}} = (x^3x^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}x^{\frac{5}{24}} = x^{\frac{23}{24}}$

   d) $\sqrt{xy^3} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{y^2}} - 2\sqrt{x} = \sqrt{4 \cdot 2xy} - 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{2y} - 1)$

   e) $\dfrac{\sqrt{(x^2-1)(x-1)}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{(x+1)(x-1)(x-1)}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} x-1 \text{ für } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ für } x < 1 \end{cases}$
   $= |x-1|$

   f) $\dfrac{\sqrt[4]{r^2(r^2+s) + s^2 + r^2s}}{\sqrt{4s+4r^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{(r^2+s)^2}}{\sqrt{4(r^2+s)}} = \dfrac{\sqrt{r^2+s}}{2\sqrt{r^2+s}} = \dfrac{1}{2}$

3. Entfernen Sie die Wurzelterme aus dem Nenner und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

   a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$

   b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}^2}{\sqrt[3]{2}^3} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

   c) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}^2} = \dfrac{\sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}}{xy} = \dfrac{x\sqrt{y}}{xy} - \dfrac{\sqrt{x}y}{xy} = \dfrac{\sqrt{y}}{y} - \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

   d) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

   e) $-\dfrac{1-x}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{x-1} = \sqrt{x} + 1$

4. Bestimmen Sie die maximalen Definitionsmengen der folgenden Ausdrücke und bedenken Sie hierbei die Definition der Definition der rationalen Potenzen aus der Vorlesung.

   Vorüberlegung: Es ist aus der Vorlesung bekannt, dass Brüche definiert sind, solange ihr Nenner nicht Null wird. Das heißt für einen Bruch $\frac{a}{b}$ gibt es eine Definitionslücke bei $b = 0$ und er ist damit definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rationale Potenzen $a^{\frac{p}{q}}$ sind laut Vorlesung definiert für $a > 0$ und zusätzlich für $a = 0$, wenn $\frac{p}{q} > 0$.

   a) $\dfrac{x}{3-x}$ hat eine Definitionslücke bei $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Also ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

   b) $(x+1)^{\frac{3}{4}}$ ist definiert, wenn $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, da $\frac{3}{4} > 0$. Damit ist die Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$.

   c) $\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x}+2}$ ist definiert, wenn $\sqrt[3]{x}$ definiert und ungleich -2 ist. Da Wurzeln nur für nichtnegative Zahlen definiert sind, ist der Definitionsbereich somit $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

   d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{(1-2x)^2}}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, da $(1-2x)^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau bei $x = \frac{1}{2}$.

   e) $(\sqrt[p]{-x})^2 = (-x)^{\frac{2}{p}}$ hat den Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ für $p > 0$ und $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ für $p < 0$, nach der Definition ratinaler Potenzen. Für $p = 0$ ist der Ausdruck gar nicht definiert. Für $p = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ lässt sich der Definitionsbereich durch die Definition für ganzzahlige Potenzen auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ für $p < 0$ bzw. $\mathbb{R}$ für $p > 0$ erweitern.

   f) $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{x+3}}$ hat eine Definitionslücke bei $2 - \sqrt[3]{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = 5$ und die Wurzel ist nur für $x \geq -3$ definiert. Somit ergibt sich der Definitionsbereich zu $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3 \wedge x \neq 5\}$.