Übungsblatt 9 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

21. Juni 2020

Aufgabe 9.1

Zu zeigen ist, ob für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

gilt.

(a) Nach Euler folgt aus

$$f_3(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) = f_2(x) + \mathrm{i} f_1(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die $\mathbb{C}-$lineare Abhängigkeit des Systems.

Betrachte nun $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Die Aussage solle für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Man wähle zuerst $x = 0$, dann

$$a_2 + a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -a_2$$

und dies gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da dies Konstanten sind. Unter Zuhilfenahme der Euler-Relation hat man nun

$$(a_1 - \mathrm{i}a_2)\cos(x) + a_2(1-\mathrm{i})\sin(x) = 0 \quad \forall\, x \quad .$$

Man wähle nun $x = \pi$, um $a_1 - \mathrm{i}a_2 = 0$ zu erhalten. Da $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, diese Gleichung aber nur für Werte in $\mathbb{C}$ nicht-triviale Lösungen hat, folgt $a_1 = a_2 = 0$ und damit auch $a_3 = 0$. Sodann ist das System $\mathbb{R}$-lineare unabhängig.

(b) Für $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = x\cos(x)$ betrachte man zunächst $x = 0$ und erhält $a_1 = 0$. Dies gilt dann auch für alle x. Wählt man nun $x = \pi$, so folgt

$$a_2\pi - a_3\pi = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = a_3 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad .$$

Sodann ist aber $a_2 x(1 + \cos(x)) = 0$ für keine spezielle Wahl von x erfüllt, wenn $a_2 = 0$ ist und damit auch $a_3 = 0$. Da die Argumentation unabhängig vom Charakter der Konstanten war, ist das System $\mathbb{C}$-linear unabhängig und mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auch $\mathbb{R}$-linear unabhängig.

Aufgabe 9.2

Behauptung. $f_1, f_2, ..., f_n$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig, dann ist $\frac{f_1+f_2}{2}, \frac{f_1-f_2}{2\mathrm{i}}, f_3, ..., f_n$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad a_j = 0 \quad \forall\, j \in \{1, .., n\} \quad . \tag{1}$$

Für die $\mathbb{C}$-lineare Unabhängigkeit nehme man $b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$ und betrachte die Voraussetzung

$$b_1 \frac{f_1 + f_2}{2} + b_2 \frac{f_1 - f_2}{2\mathrm{i}} + \sum_{i=3}^{n} b_i f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad .$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad c_1 = \frac{b_1 - \mathrm{i}b_2}{2}, c_2 = \frac{b_1 + \mathrm{i}b_2}{2}, c_j = b_j \,\forall\, j \in \{3, .., n\} \quad .$$

Mit $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ und der Voraussetzung (1) folgt $c_j = 0$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ und sodann $b_j = 0$ für alle $j \in \{3, ..., n\}$. Aus $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ hat man die Lösung $a_1 = 0 = a_2$ und schließlich die Behauptung, q.e.d.!

Aufgabe 9.3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und ein linearer Operator $L \in \mathcal{L}(C^l(\mathbb{R}), C^{l-1}(\mathbb{R}))$ für $l \in \mathbb{N}$ gegeben. Die k-te Potenz für $k \in \{0, 1, ..., n\}$ von L sei definiert durch $L^k : C^n(\mathbb{R}) \to C^{n-k}(\mathbb{R})$ gemäß

$$(L^k y) := \begin{cases} y & \\ & \text{für} \\ L(L^{k-1}y) & \end{cases} \begin{matrix} k = 0 \\ \\ 1 \leq k \leq n \end{matrix} \quad .$$

Zuzüglich sei $P : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ ein Polynom der Art, dass

$$P(L) := \sum_{k=0} p_k L^k \quad .$$

(a)

Behauptung. Seien P, Q Polynome mit Graden $m_p := \mathsf{Grad}(P)$ und $m_q := \mathsf{Grad}(Q)$ so, dass $m_p + m_q \leq n$ sei; dann gilt $(P \circ Q)(L) = P(L) \cdot Q(L)$.

Beweis: Man zeige zunächst, dass auch $L^k \in \mathcal{L}(C^n(\mathbb{R}), C^{n-k}(\mathbb{R}))$, wenn L linear ist. Dies zeigt man mit Induktion: Der Fall $k = 0$ ist trivial, da die Identität linear ist. Der Fall $k = 1$ entspricht der Voraussetzung und ist somit auch erfüllt. Für den Induktionsschritt sei L^N für ein $N \geq 1$ ein linearer Operator. Dann ist

$$L^{N+1}(y_1 + y_2) = L \circ L^N(y_1 + y_2) = L\left(L^N(y_1) + L^N(y_2)\right) = L^{N+1}(y_1) + L^{N+1}(y_2)$$

für $y_1, y_2 \in C^{N+1}(\mathbb{R})$ erfüllt. Also folgt aus der Linearität des Opertors L auch die Linearität seiner Potenzen.

Rekapituliere die diskrete Konvolutionsformel (Cauchy-Produkt für endliche Summen): Seien P, Q Polynome wie in der Behauptung gegeben, dann ist

$$(PQ)(\lambda) := P(\lambda) \cdot Q(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{m_p} p_k \lambda^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m_q} q_j \lambda^j\right) = \sum_{k=0}^{m_q+m_p} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} p_i q_j \lambda^k = \sum_{k=0}^{m_q+m_p} \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} \lambda^k \quad . \tag{2}$$

Damit ist für $\lambda = L$

$$(PQ)(L) = \sum_{k=0}^{m_q+m_p} \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} L^k \quad .$$

Im Vergleich ist die Komposition der zwei Polynome des linearen Operators

$$\begin{aligned} P(L) \circ Q(L) \quad &= \quad \left(\sum_{k=0}^{m_p} p_k L^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m_q} q_j L^j\right) = \sum_{k=0}^{m_p} p_k L^k \left(\sum_{j=0}^{m_q} q_j L^j\right) \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{m_p} \sum_{j=0}^{m_q} p_k L^k (q_j L^j) \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{m_p} \sum_{j=0}^{m_q} p_k q_j L^k \circ L^j = \sum_{k=0}^{m_p} \sum_{j=0}^{m_q} p_k q_j L^{k+j} = \sum_{i=0}^{m_p+m_q} \sum_{\substack{k,j \\ j+k=i}} p_k q_j L^i \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{m_q+m_p} \sum_{j=0}^{k} p_j q_{i-j} L^i \quad , \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ ausgenutzt wurde, dass L wie auch seine Potenzen nach obigen Zwischenergebnis linear sind, und in $(**)$, dass L und seine Potenzen Ableitungsoperatoren sind und die

Potenz von Ableitungen gleich der mehrfachen Ableitung entspricht. Damit bewirkt L keinen Effekt auf die Konstanten. Implizit wurde ebenso Kommutativität angenommen. Jeder Operator kommutiert mit sich selbst und damit auch mit jeder natürlichen Potenz, sofern das Bild des Operators in seinem Definitionsbereich liegt ($C^n \subset C^{n-1} \subset \cdots \subset C^0$) - für zwei verschiedene Operatoren gilt dies im Allgemeinen nicht. *Jedoch: Wenn zwei Operatoren L, M kommutieren, also $L \circ M = M \circ L$ mit passenden Bild und Definitionsbereich, so kommutieren auch L und M mit natürlichen Potenzen des jeweils anderen Operators.* Schließlich hat man somit die Relation

$$(PQ)(L) = P(L) \circ Q(L) \quad \text{, q.e.d.!}$$

(b) Seien $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$ sowie P Polynom vom Grad $m \leq n$.
Behauptung. $P(D)(\mathrm{e}^{ax} f(x)) = \mathrm{e}^{ax} P(D+a) f(x)$.

Beweis: Man zeige zunächst durch Induktion, dass

$$D^k(\mathrm{e}^{ax} f(x)) = \mathrm{e}^{ax}(D+a)^k f(x)$$

für alle $a \in \mathbb{C}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ ist. Für $k = 0$ ist die Aussage klar. Für $k = 1$ ist nach Produktregel

$$D(\mathrm{e}^{ax} f(x)) = a\mathrm{e}^{ax} f(x) + \mathrm{e}^{ax} Df(x) = \mathrm{e}^{ax}(D+a) f(x)$$

und damit die Aussage gezeigt. Für den Induktionsschritt sei die Aussage für ein $N \in \{0, 1, ..., n\}$ mit $N \geq 1$ korrekt, dann ist mit Produktregel

$$\begin{aligned}
D^{N+1}(\mathrm{e}^{ax} f(x)) &= (D \circ D^N)(\mathrm{e}^{ax} f(x)) = D\left(D^N(\mathrm{e}^{ax} f(x))\right) = D(\mathrm{e}^{ax}(D+a)^N f(x)) \\
&= a\mathrm{e}^{ax}(D+a)^N f(x) + \mathrm{e}^{ax} D(D+a)^N f(x) = \mathrm{e}^{ax}(D+a)(D+a)^N f(x) \\
&= \mathrm{e}^{ax}(D+a)^{N+1} f(x)
\end{aligned}$$

und somit die Induktion vollendet. Somit folgt für ein Polynom wie in der Behauptung

$$\begin{aligned}
P(D)(\mathrm{e}^{ax} f(x)) &= \sum_{k=0}^{m} p_k D^k(\mathrm{e}^{ax} f(x)) = \sum_{k=0}^{m} p_k \mathrm{e}^{ax}(D+a)^k f(x) = \mathrm{e}^{ax} \sum_{k=0}^{m} p_k (D+a)^k f(x) \\
&= \mathrm{e}^{ax} P(D+a) f(x) \quad ,
\end{aligned}$$

q.e.d.!

Aufgabe 9.4

Alle DGl sind homogen mit konstanten Koeffizienten. Man nutze also hier Satz 147 oder Satz 148 aus, wobei die konkrete Aufgabe darin besteht, das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen zu bestimmen:

(a) $y'' - 5y' + 4y = 0$: Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$; die Nullstellen können mit der $p-q$-Formel bestimmt werden:

$$P(\lambda_\pm) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}}\right) = \frac{5}{2}\left(1 \pm \frac{3}{5}\right)$$

und damit $\lambda_+ = 4$ sowie $\lambda_- = 1$. Beide Nullstellen sind reell und jeweils einfach. Damit ist nach Satz 148

$$\left(\mathrm{e}^{4x}, \mathrm{e}^{x}\right)$$

ein $\mathbb{R}$-FS.

(b) $y'' + 2y' + 10y$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$; die Nullstellen sind

$$P(\lambda_\pm) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{1 - 10} = -1(1 \pm \sqrt{-9}) = -1\,(1 \pm \mathrm{i}3)$$

und damit jeweils komplex und einfach. Nach Satz 147 ist

$$\left(\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}3)x}, \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}3)x}\right)$$

ein $\mathbb{C}$-FS. Da die komplexen Nullstellen zueinander komplex konjugiert sind und dennoch einfach bleiben, folgt nach Satz 148, dass auch

$$\left(\mathrm{e}^{-x}\cos(3x), \mathrm{e}^{-x}\sin(3x)\right)$$

ein $\mathbb{R}$-FS ist.

(c) $y^{(4)} + y'' = 0$: $P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1) = \lambda^2(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i})$; aus dieser Linearfaktorzerlegung erkennt man die Nullstellen

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_\pm = \pm\mathrm{i} \quad .$$

λ_1 ist eine Nullstelle zweifacher Multiplizität; $\lambda_\pm$ sind imaginär und zueinander komplex konjugiert. Nach Satz 147 ist

$$\left(1, x, \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}}\right)$$

ein $\mathbb{C}$-FS bzw. nach Satz 148

$$(1, x, \cos(x), \sin(x))$$

ein $\mathbb{R}$-FS.

(d) $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0 : P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$; man erkennt, dass $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle ist. Man führe eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{rl}
(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) & : \quad (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \\
-\underline{(\lambda^3 - \lambda^2)} & \\
-2\lambda^2 + 3\lambda - 1 & \\
-\underline{(-2\lambda^2 + 2\lambda)} & \\
\lambda - 1 & \\
-\underline{(\lambda - 1)} & \\
0 & \quad .
\end{array}$$

Alle Nullstellen sind also 1 und somit reell mit dreifacher Multiplizität. Nach Satz 148 ist damit

$$\left(e^x, xe^x, x^2e^x\right)$$

ein $\mathbb{R}$-FS und ebenso $\mathbb{C}$-FS.

(e) $y^{(4)} + 4y'' + 3 = 0$: $P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 3$ ist char. Polynom. Da es ein biquadratisches Polynom ist, löse man zuerst nach $\tau = \lambda^2$ und erhält

$$\tau_\pm = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_+ = -1 \quad \text{und} \quad \tau_- = -3 \quad .$$

Weiters Wurzelziehen liefert $\lambda_{\pm,\mp} = \mp\sqrt{\tau_\pm}$ und somit

$$\lambda_{+,\pm} = \pm\mathrm{i} \quad \text{und} \quad \lambda_{-,\pm} = \pm\mathrm{i}\sqrt{3} \quad .$$

Alle Nullstellen sind komplex mit jeweils einfacher Multiplizität, sodass

$$\left(e^{\pm\mathrm{i}x}, e^{\pm\mathrm{i}\sqrt{3}x}\right)$$

das $\mathbb{C}$-FS nach Satz 147 ist. Man erkennt zudem, dass die Nullstellen zueinander komplex konjugiert sind, sodass nach Satz 148

$$\left(\cos(x), \sin(x), \cos(\sqrt{3}x), \sin(\sqrt{3}x)\right)$$

ein $\mathbb{R}$-FS ist.

Aufgabe 9.5

Man betrachte zuerst die allgemeinen Lösungen. Für $E = 0$ kann die Lösung durch zweifaches Integrieren ermittelt werden: Mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$y_{E=0}(x) = ax + b \quad ;$$

für $E \neq 0$ ist das char. Polynom $P_E(\lambda) = \lambda^2 - E$ für die homogene DGl zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Nullstellen sind $\lambda_\pm = \pm\sqrt{E}$, welche je nach Wahl von E reell oder imaginär sind. Im letzten Fall nutze man die komplexe Konjugierheit der Nullstellen aus, sodass auch reelle Lösungen folgen. Die allgemeinen Lösungen sind

$$y_E(x) = \begin{cases} c_1 \cosh(\sqrt{E}x) + c_2 \sinh(\sqrt{E}x) & \\ ax + b & \text{für} \quad E = 0 \\ d_1 \cos(\sqrt{-E}x) + d_2 \sin(\sqrt{-E}x) & \end{cases} \qquad \begin{matrix} E > 0 \\ \\ E < 0 \end{matrix}$$

Für die AB $y(0) = y(\pi) = 0$ sind die Lösungen

$$y_E(x) = \begin{cases} d \sin(\sqrt{-E}x) & E = -n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ & \text{für} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $d \in \mathbb{R}$. Da die AB für $E = -n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, die Konstante d nicht genau bestimmt haben, hat die DGL für diese Parameter unendlich viele Lösungen.

Für die AB $y'(0) = y(\pi) = 0$ sind die Lösungen dagegen

$$y_E(x) = \begin{cases} c \sin(\sqrt{-E}x) & E = -\frac{(2n+1)^2}{4} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ & \text{für} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $c \in \mathbb{R}$. Also hat die DGL für $E = -\frac{(2n+1)^2}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, unendliche viele Lösungen.

Aufgabe 9.6

Seien für $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$; für $x > 0$ definiere man als *Eulersche DGL* die homogene DGL

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad .$$

(a) Seien $k \in \mathbb{N}$, $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und $y \in C^k(\mathbb{R})$. Definiere $z : t \to y(\mathrm{e}^t)$.

Behauptung. $D^{[k]}z(t) = \mathrm{e}^{kt}y^{(k)}(\mathrm{e}^t)$ für alle k mit $D^{[k]} = D \circ (D-1) \circ \cdots \circ (D-k+1)$.

Beweis: Man vollziehe für den Beweis eine vollständige Induktion über k. Der Induktionsbeginn $k = 1$ folgt mit der Kettenregel:

$$D^{[1]}z(t) = Dy(\mathrm{e}^t) = y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{1\cdot t}y^{(1)}(\mathrm{e}^t) \quad .$$

Sei die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ wahr, so folgt für den Induktionsschluss durch Anwendung von D auf die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned} DD^{[k]}z(t) &= D(\mathrm{e}^{kt}y^{(k)}(\mathrm{e}^t)) = k\mathrm{e}^{kt}y^{(k)}(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{kt}Dy^{(k)}(\mathrm{e}^t) = k\mathrm{e}^{kt}y^{(k)}(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{(k+1)t}y^{(k+1)}(\mathrm{e}^t) \\ &= kD^{[k]}z(t) + \mathrm{e}^{(k+1)t}y^{(k+1)}(\mathrm{e}^t) \\ &\Leftrightarrow \\ (D-k)D^{[k]}z(t) &= \mathrm{e}^{(k+1)t}y^{(k+1)}(\mathrm{e}^t) \quad . \end{aligned}$$

Betrachte die Polynome $P_k(\lambda) = (\lambda - k)$ und $Q_k(\lambda) = \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda - j)$; dann lässt sich die letzte Gleichung umschreiben zu

$$P_k(D) \circ Q_k(D)z(t) = \mathrm{e}^{(k+1)t}y^{(k+1)}(\mathrm{e}^t) \quad .$$

Nach Teilaufgabe 1 der dritte PA ist die linke Seite gleich $(P_k \cdot Q_k)(D)$ und da die Multiplikation zweier Polynome kommutativ ist, folgt sogar $(Q_k \cdot P_k)(D)$. Nochmalige Anwendung von Präsenzaufgabe 3 (a) gibt

$$\mathrm{e}^{(k+1)t}y^{(k+1)}(\mathrm{e}^t) = (P_k \cdot Q_k)(D) = (Q_k \cdot P_k)(D) = Q_k(D) \circ P_k(D)z(t) = D^{[k]}(D-k)z(t) = D^{[k+1]}z(t) \quad ,$$

q.e.d.!

(b)

Behauptung. Sei $y \in C^n(\mathbb{R})$; y ist genau dann Lösung der Eulerschen DGL, wenn $z : t \to y(\mathrm{e}^t)$ Lösung der homogenen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$D^{[n]}z(t) + a_{n-1}D^{[n-1]}z(t) + \cdots + a_1 Dz(t) + a_0 = 0$$

ist.

Beweis: Man betrachte die beiden Implikationen getrennt:
$\Rightarrow$: Sei y Lösung der Eulerschen DGL. Man werte diese Gleichung bei $x = \mathrm{e}^t$ aus und nutzt Teilaufgabe (a):

$$\begin{aligned} 0 &= x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) \\ &= \mathrm{e}^{nt}y^{(n)}(\mathrm{e}^t) + a_{n-1}\mathrm{e}^{(n-1)t}y^{(n-1)}(\mathrm{e}^t) + \cdots + a_1\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + a_0 y(\mathrm{e}^t) \\ &\overset{(a)}{=} D^{[n]}z(t) + a_{n-1}D^{[n-1]}z(t) + \cdots + a_1 Dz(t) + a_0 z(t) \end{aligned}$$

und damit ist die erste Implikation gezeigt.
$\Leftarrow$: Sei z Lösung der DGl, welche in der Behauptung gegeben ist. Durch Einsetzen der Relation

aus (a) und Setzen von $x = \mathrm{e}^t$ folgt durch Umkehrung der Rechenschritte oben die andere Implikation und damit die Äquivalenz; q.e.d.!

Das charakteristische Polynom folgt durch Ersetzung von $D \to \lambda$; es ist

$$D^{[k]} \quad \to \quad \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda - j)$$

und damit

$$P(\lambda) = \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - j) + a_{n-1}\prod_{j=0}^{n-2}(\lambda - j) + \cdots + a_1\lambda + a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda - j) + a_0$$

mit $a_n = 1$ das charakteristische Polynom.

(c)i. Die zu $x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$ äquivalente DGL nach Aufgabenteil (b) ist

$$D^{[2]}z(t) + Dz(t) + z(t) = 0 \quad \text{mit} \quad z(t) = y(\mathrm{e}^t) \quad .$$

Das charakteristische Polynom ist damit

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = \lambda^2 + 1 \quad ,$$

welches die zwei imaginären, zueinander komplex konjugierten Nullstellen $\pm\mathrm{i}$ mit je einfacher Multiplizität hat. Nach Satz 147 kann man ein $\mathbb{R}$-FS für z bestimmen:

$$(\cos(t), \sin(t)) \quad .$$

Das dazugehörige $\mathbb{R}$-FS für y folgt mit $y(x) = z(\log(x))$, also Auswertung an $t = \log(x)$:

$$(\cos(\log(x)), \sin(\log(x))) \quad .$$

(c)ii. Die zu $x^3 y^{(3)}(x) + 3x^2 y^{(2)}(x) + xy'(x) = 0$ äquivalente DGL nach Aufgabenteil (b) ist

$$D^{[3]}z(t) + 3D^{[2]}z(t) + Dz(t) = 0 \quad \text{mit} \quad z(t) = y(\mathrm{e}^t) \quad .$$

Das charakteristische Polynom ist damit

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 3\lambda(\lambda - 1) + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + 3\lambda^2 - 2\lambda = \lambda^3 \quad ,$$

welches eine dreifache reelle Nullstelle bei $\lambda = 0$ hat. Nach Satz 147 kann man ein $\mathbb{R}$-FS für z bestimmen:

$$\big(1, t, t^2\big) \quad .$$

Auswertung an $t = \log(x)$ ergibt das dazugehörige $\mathbb{R}$-FS für y:

$$\big(1, \log(x), \log^2(x)\big) \quad .$$