Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 12 - Modul mat110

Keine Abgabe vorgesehen

Auch dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit klausurrelevanten Inhalten. Beschäftigen Sie sich ausführlich mit den Aufgaben, auch wenn es keine Bonuspunkte mehr zu erwirtschaften gibt. Die Aufgaben werden im letzten Tutorium besprochen.

Präsenzaufgabe 12.1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times3}$. Außerdem bezeichne $H = t\,E_3 - A \in \mathbb{Z}_3[\,t\,]^{3\times3}$ die charakteristische Matrix von A. Bestimmen Sie eine zu H äquivalente Matrix S in Smith-Normalform sowie invertierbare Matrizen Q, $P \in \mathrm{GL}(\,3\,,\,\mathbb{Z}_3[\,t\,]\,)$, sodass $P\,H\,Q = S$. Bestimmen Sie auch Basen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{Z}$ von $(\,\mathbb{Z}_3[\,t\,]\,)^{3\times1}$, so dass $M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{W}}(\,\Phi_H\,) = S$ und ermitteln Sie eine zu A äquivalente Matrix $A_{\mathcal{F}}$ in Frobenius-Normalform.

Präsenzaufgabe 12.2. Sei $F : \mathbb{Q}^{4\times1} \longrightarrow \mathbb{Q}^{4\times1} : (\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,)^T \longmapsto (\,2\,a + b\,,\,2\,b\,,\,2\,c\,,\,5\,d\,)^T$. Bestimmen Sie die normierten Elementarteiler der charakteristischen Matrix von F bzgl. der Standardbasis von $V = \mathbb{Q}^{4\times1}$. Bestimmen Sie auch eine Matrix $A_{\mathcal{F}}$ in Frobenius-Normalform sowie eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\,F\,) = A_{\mathcal{F}}$ gilt.

Präsenzaufgabe 12.3.

(a). Sei $A \in \mathbb{Q}^{8\times8}$ und seien $g_1 = (t-2)^3$, $g_2 = (\,t-2\,)^5 \in \mathbb{Q}[\,t\,]$ die nichttrivialen normierten Elementarteiler der charakteristischen Matrix von A. Bestimmen Sie eine zu A äquivalente Matrix $A_{\mathcal{F}}$ in Frobenius-Normalform.

(b). Sei $B \in \mathbb{C}^{8\times8}$ und seien die nichttrivialen Elementarteiler der charakteristischen Matrix von B gegeben durch $g_1 = t-3$, $g_2 = t^3 - 3\,t^2 + t - 3$, $g_3 = t^4 - 6\,t^3 + 10\,t^2 - 6\,t + 9 \in \mathbb{C}[\,t\,]$. Bestimmen Sie eine zu B äquivalente Matrix $B_{\mathcal{F}}$ in Frobenius-Normalform.

Präsenzaufgabe 12.4. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times4}$ und F_A die Standardinterpretation von A. Bestimmen Sie Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ von $\mathbb{Q}^{4\times1}$, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ in Frobenius-Normalform, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F_A)$ in Weierstraß-Normalform und $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(F_A)$ in Jordan-Normalform ist.

Präsenzaufgabe 12.5. Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_K(\,V\,)$. Zeigen Sie: Ist das charakteristische Polynom h_F quadratfrei, so gilt für die normierten Elementarteiler $s_1, \ldots, s_\ell$ der charakteristischen Matrix von F $\;s_1 = \cdots = s_{\ell-1} = 1\;$ und $\;s_\ell = h_F$.