Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 10

Abgabe: 07.01.2020, bis 12 Uhr

Aufgabe 10.1. **(a).** Sei $V := \mathbb{Q}^3$. Wir betrachten die beiden Basen von V

$$\mathcal{B}_0 := (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) \text{ und } \mathcal{B}_1 := (\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}).$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_V)$ und $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id}_V)$.

(b). Sei $W := \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$. Wir betrachten die beiden Basen von W

$$\mathcal{C}_0 := (\,1,\, x,\, x^2) \text{ und } \mathcal{C}_1 := (\,1+2x,\, x-2x^2,\, 1+2x+3x^2\,).$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M^{\mathcal{C}_0}_{\mathcal{C}_1}(\mathrm{id}_W)$ und $M^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{C}_0}(\mathrm{id}_W)$.

Aufgabe 10.2. Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2x_2 - x_3\\2x_1 + x_3\\-x_1 + x_2 - 3x_3\end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} := (\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$$

Berechnen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(G)$, $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(G)$ und $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(G)$.

Aufgabe 10.3. **(a).** Sei $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Endomorphismus gegeben durch

$$\phi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) := \begin{pmatrix}x_2 + x_3\\x_3\\0\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\phi^2(\vec{x}) = (\phi \circ \phi)(\vec{x}), \phi^3(\vec{x}) = (\phi \circ \phi^2)(\vec{x})$ und folgern Sie daraus $\phi^m(\vec{x})$ für $m \geq 4$.

(b). Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F^n = 0$ als Abbildung und $F^{n-1} \neq 0$. (Beachten Sie, dass $F^0 := id_V$).

(i) Seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$ mit $F^a(\vec{w}) = F^{a+1}(\vec{v})$, für ein $a \in \{0, \ldots, n-2\}$. Zeigen Sie, dass $F^{n-1}(\vec{w}) = \vec{0}$. *Hinweis:* Für das Verständnis könnte es hilfreich sein, zunächst den Fall $a = 0$ zu betrachten.

(ii) Sei $\vec{v} \in V$ mit $F^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Zeigen Sie, dass

$$\big(\,\vec{v}\,,\, F(\vec{v})\,,\, F^2(\vec{v})\,,\, \ldots\,,\, F^{n-1}(\vec{v})\,\big) \;=\; \big(\,F^k(\vec{v}) \mid 0 \leq k \leq n-1\,\big)$$

linear unabhängig ist.

(c). Finden Sie in **(a)** einen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft: $(\,\vec{u},\, \phi(\vec{u}),\, \phi^2(\vec{u})\,)$ ist linear unabhängig.

Präsenzaufgabe 10.4. Sei K ein Körper und seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit gegebenen Basen $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von V und $\mathcal{C} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m)$ von W.

(a). Beweisen Sie, dass das System $(F_{k\ell} \mid 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq n)$ der sogenannten *Elementarabbildungen* eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ bildet. Dabei ist $F_{k\ell} \colon V \to W$ definiert durch

$$F_{k\ell}(v_i) := \begin{cases} w_k, & \text{für } i = \ell, \\ 0, & \text{für } i \neq \ell, \end{cases} \qquad \text{wobei } 1 \leq k \leq m \text{ und } 1 \leq \ell \leq n \text{ sind.}$$

(b). Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ heisst der zu V *duale Raum*. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, K)$.

(c). Sei $0 \neq F \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$. Beweisen Sie, dass $\dim_K(\mathrm{Kern}(F)) = n - 1$.

Präsenzaufgabe 10.5. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und

$$M_\alpha := \begin{pmatrix} i & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

(a). Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $\det(M_\alpha) = 0$?

(b). Was können Sie über die Spaltenvektoren aussagen, wenn $\det(M_\alpha) = 0$?

(c). Was können Sie über die Zeilenvektoren aussagen, wenn $\det(M_\alpha) \neq 0$?

Die folgende Aufgabe muss nicht abgegeben werden und wird nicht im Tutorium besprochen. Sie dient für motivierte Studierende, die anspruchsvollere Aufgaben sehen wollen. Falls jemand Fragen dazu hat oder die Lösung sehen möchte, bitte in die Sprechstunde von Bernd Schober kommen.

♡-Aufgabe. Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $\lambda \in K$ ein Skalar. Betrachten Sie die Menge $V_\lambda := \{\vec{v} \in K^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$

(a). Zeigen Sie, dass V_λ ein Vektorraum ist.

(b). Geben Sie drei weitere Beschreibungen von V_λ und beweisen Sie die Äquivalenz dieser.

(c). Beweisen Sie, dass für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt: $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$.

(d). Zeigen Sie, dass $\#\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \dim_{\mathbb{R}}(V_\lambda) > 0\} < \infty$ ist.

(e). Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ die paarweise verschiedenen Element, für welche gilt

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \dim_{\mathbb{R}}(V_\lambda) > 0\}.$$

Für $i \in \{1, \ldots, s\}$ sei $\mathcal{B}_i$ eine beliebige Basis von V_{λ_i}. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{B} := \{\vec{b} \mid \vec{b} \in \mathcal{B}_i \text{ für eine } i \in \{1, \ldots, s\}\}$$

eine Menge K-linear unabhängier Vektoren ist.

(f). Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Überprüfen Sie, ob $\mathcal{B}$ aus dem vorherigen Aufgabenteil in dem Fall des konkret gegebene A auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.