Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 5

Aufgabe 1. Beweisen Sie mittels der $\varepsilon - N$-Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$. Geben Sie in diesem Fall zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein $N \in \mathbb{N}$ wie in der Definition einer konvergenten Folge an.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

a) $a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}-n)}$

b) $a_n = \frac{n^3}{n^2+3} - \frac{2n^2}{2n+1}$

c) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 13^n - 1}$

d) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

Aufgabe 3. Sei $P(x) := a_l x^l + ... + a_1 x + a_0$, $a_l \neq 0$, ein Polynom vom Grad l und $Q(x) := b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$, ein Polynom vom Grad m. Zeigen Sie:

a) $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : Q(n) \neq 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_l}{b_m}, & \text{falls} \quad l = m, \\ 0, & \text{falls} \quad l < m, \\ \pm\infty, & \text{falls} \quad l > m \end{cases}$

Aufgabe 4. Untersuchen Sie jeweils, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (Beweis oder Gegenbeispiel), wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

a) $|a_n| < \frac{1}{\varepsilon}$

b) $|a_n| < n\varepsilon$

c) $|a_{n+1}| < \varepsilon |a_n|$

Abgabe: Bis 22. November vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1	2				3		4			
		a	b	c	d	a	b	a	b	c	
Punkte	2	2	2	2	2	2	3	1	2	2	20

Präsenzaufgaben

1. Beweisen Sie mittels der $\varepsilon - N$-Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0$.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Welche Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden durch folgende Bedingungen charakterisiert? Formulieren Sie die charakterisierende Eigenschaft möglichst einfach.

   a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n : |a_n - a| < \varepsilon$

   b) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

   c) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

   d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| \leq \varepsilon$

   e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| \leq \varepsilon$

   f) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $a_n \to a$. Dann ist $a \geq 0$ und es gilt $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

4. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, falls:

   a) $x_n = \sqrt{n^2 - 1} - n - 1$

   b) $x_n = \left(\frac{2019}{n}\right)^n$

   c) $x_n = \sqrt[n]{n^3 - 3n + 13}$

   d) $x_n = \frac{n^3}{\binom{2n}{n}}$

   e) $x_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

   f) $x_n = \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}$

5. Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) ? Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge. Dann divergiert die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ?

   b) ? Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge. Dann divergiert die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ?

   c) ? Wenn die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.?

   d) ? Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$. ?

   e) ? Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Folge $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. ?