Bemerkung 6.2.15 *Durch Iteration des vorigen Korollars gilt die analoge Aussage auch für endlich viele algebraische Elemente von K.*

Satz 6.2.16 *Seien $k \subseteq L \subseteq K$ Körpererweiterungen. Dann gilt:*

$$K \supseteq k \text{ algebraisch } \Longleftrightarrow K \supseteq L \text{ und } L \supseteq k \text{ algebraisch.}$$

Beweis: Die Implikation "$\Longrightarrow$" ist offensichtlich, denn damit ist jedes Element von K bereits algebraisch über k und unter Verwendung derselben Gleichung auch über dem Zwischenkörper L. Ausserdem ist jedes Element des Zwischenkörpers algebraisch über k, da es als Element von K eine polynomiale Gleichung mit Koeffizienten in k erfüllt.
Ist umgekehrt für die Implikation "$\Longleftarrow$" ein $\alpha \in K$ gegeben, so erfüllt α als algebraisches Element über k eine polynomiale Gleichung mit Koeffizienten in L. Diese Gleichung besitzt nur endlich viele Koeffizienten, sagen wir $\beta_1, \ldots, \beta_s$, die alle algebraisch über k sind. Damit ist nach den vorangegangenen Sätzen

$$\begin{array}{rcl} \dim_k(k[\alpha]) & \leq & \dim_k(k[\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s]) \\ & \overset{Gradformel}{=} & \dim_{k[\beta_1,\ldots,\beta_s]}(k[\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s]) \cdot \dim_k(k[\beta_1, \ldots, \beta_s]) \\ & < & \infty. \end{array}$$

Nach den äquivalenten Beschreibungen für die Eigenschaft algebraisch, ist damit α algebraisch über k.

□

Ende des Stoffs für das Modul mat200

6.3 Nullstellenadjunktion

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass zu einem algebraischen Element $\alpha \in K$ einer Körpererweiterung $k \subseteq K$ ein Minimalpolynom existiert. Insbesondere arbeiteten wir mit einem fest gewählten Erweiterungskörper K, indem das Polynom $f_{\alpha,k} \in k[t] \setminus k$ dadurch charakterisiert wurde, dass es das Ideal aller Polynome in $k[t]$ erzeugt, die eine Nullstelle α besitzen. In diesem Abschnitt wechseln wir nun die Perspektive, geben uns ein Polynom $f \in k[t] \setminus k$ vor und fragen nach einem Zwischenkörper $k \subseteq L \subseteq K$, in dem f Nullstellen besitzt bzw. komplett in Linearfaktoren zerfällt. Diese Überlegungen können im Rahmen der Algebra I aber nicht vollständig abgeschlossen werden, wir werden sie hier lediglich anreißen. Sie werden dann in der Algebra II erneut aufgegriffen, sobald eine breitere theoretische Basis und stärkere Methoden zur Verfügung gestellt wurden.

Definition 6.3.1 *Sei $K \supseteq k$ eine Körpererweiterung und sei $f \in k[t] \setminus k$ vom Grad n. f* **zerfällt über** *K, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ und $a \in k^*$ existieren, so dass*

$$f = a \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i).$$

Definition 6.3.2 *Sei $K \supseteq k$ eine Körpererweiterung und $f \in k[t] \setminus k$ ein Polynom, das in K zerfällt. Der kleinste* [1] *Zwischenkörper $K \supseteq L \supseteq k$, über dem f zerfällt, heißt der* **Zerfällungköper** *von f.*

Bitte beachten Sie, dass wir an dieser Stelle zwar den Begriff des Zerfällungskörpers einführen können, aber zum gegenwärtigen Zeitpunkt weder die Methoden haben, ihn zu einem gegebenen Polynom f zu konstruieren, noch über seine Eindeutigkeit Aussagen zu treffen.
In diesem Abschnitt werden wir lediglich durch Nullstellenadjunktion einen Körper konstruieren, in dem das gegebene Polynom zerfällt, aber nicht zeigen, dass dies der kleinste solche Körper ist.

Konstruktion 6.3.3 *(Nullstellenadjunktion) Sei k ein beliebiger Körper und sei $f \in k[t]$ ein irreduzibles, normiertes Polynom vom Grad $\deg(f) = n \geq 1$. Dann ist*

$$K := k[t]/\langle f \rangle$$

[1]'kleinste' bedeutet hier, dass es keinen echten Zwischenkörper von $k \subseteq L$ gibt, über dem f zerfällt.

wegen der Irreduzibilität von f ein Körper. Da wegen $\deg(f) > 0$ *für $a, b \in k$ genau dann $[a]_f = [b]_f$ gilt, wenn $a = b$ ist, ist die Einschränkung der Restklassenabbildung $\pi : k[t] \longrightarrow k[t]/\langle f \rangle = K$ auf k injektiv. Mittels des Homomorphiesatzes (angewandt auf die Einschränkung $\pi \mid_k$) ist daher k isomorph zu dem Teilkörper k' von K, der gerade die Elemente der Form $[a]_f$ enthält mit $a \in k$. Diesen benennen wir wegen der Isomorphie zu k wieder mit k. Wir haben eine Körpererweiterung $k \subseteq K$ konstruiert.*
Da nach Konstruktion $[f]_f = [0]_f$ gilt, ist $[t]_f$ eine Nullstelle von f in K, während f natürlich über dem Teilkörper k von K weiterhin irreduzibel ist. Wegen der Normiertheit von f ist f damit sogar das Minimalpolynom von $[t]_f \in K$ über k und

$$[K : k] = \deg(f) = n.$$

Korollar 6.3.4 *Sei k ein Körper und sei $f \in k[t]$ von positivem Grad* $\deg(f) = n$. *Dann existiert ein Erweiterungskörper $K \supseteq k$ sowie ein $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$.*
Insbesondere liefert auch die einfache Körpererweiterung $k(\alpha) \supseteq k$ solch einen Erweiterungskörper mit $[k(\alpha) : k] \leq n$.

Beweis: Ist f irreduzibel, so liefert die Konstruktion 6.3.3 genau die gewünschte Aussage. Ist f reduzibel, so gibt es wegen der Faktorialität von $k[t]$ ein $s \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq s \leq n$, eine Einheit $a \in K^*$ und irreduzible Polynome $f_1, \ldots, f_s \in k[t]$ mit einer Zerlegung

$$f = a \prod_{i=1}^{s} f_i.$$

Ist einer der Faktoren f_i vom Grad 1, so besitzt f_i eine Nullstelle α in k und $k(\alpha) = k$, weswegen in diesem Fall alle Aussagen des Korollars in trivialer Weise erfüllt sind. Besitzt andererseits f keine Nullstelle in k, so wissen wir, dass $\deg(f_i) > 1$ für alle $1 \leq i \leq s$. Wir können daher die Konstruktion 6.3.3 für einen beliebig ausgewählten, festen Faktor f_{i_0} durchführen und erhalten damit die gesuchten Aussagen.

□

Satz 6.3.5 *(Kronecker) Sei k ein Körper und sei $f \in k[t]$ von positivem Grad* $\deg(f) = n$. *Dann existiert ein Erweiterungskörper K von k mit*

$$[K : k] \leq n! \ ,$$

über dem f zerfällt.

Beweis: Nach den Überlegungen im Beweis zu Korollar 6.3.4 können wir lineare Faktoren vor Durchführung der Konstruktion 6.3.3 bereits abspalten. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f keine Nullstelle in k hat.
Nach Korollar 6.3.4 existiert dann ein Erweiterungskörper K_1, in dem es ein $\alpha_1 \in K_1$ gibt, das Nullstelle von f ist. Damit können wir in K_1 mindestens den linearen Faktor $t - \alpha_1$, aber ggf. noch weitere lineare Faktoren, abspalten. Wir haben damit eine Körpererweiterung $K_1 \supseteq k$ vom Grad höchstens n und erhalten ein neues Polynom f_1 ohne Nullstellen in K_1 mit $\deg(f_1) \leq n-1$.
Iterieren wir diese Anwendung des Korollars 6.3.4, so erhalten wir nach spätestens $n-1$ Durchläufen einen Turm von Körpererweiterungen

$$k \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq ... \subseteq K_s,$$

wobei $s \leq n-1$. Da die zuerst adjungierten Nullstellen von f natürlich auch Nullstellen von f in den danach konstruierten Erweiterungskörpern sind, hat f am Ende n Nullstellen in K_s, d.h. f zerfällt in K_s.
Zur Abschätzung des Grades der Körpererweiterung bemerken wir zuerst, dass für jedes $1 \leq i \leq s-1$ gilt:

$$\deg(f_i) \leq n - i \quad \text{und } [K_{i+1} : K_i] = \deg(f_i).$$

Außerdem ist $s \leq n-1$, so dass wir im maximalen Fall ($s = n-1$ und $\deg(f_i) = n - i \ \forall 1 \leq i \leq n-1$) als Grad der Körpererweiterung berechnen:

$$[K_{n-1} : k] = \prod_{j=1}^{n-1} [K_j : K_{j-1}] = \prod_{j=1}^{n-1} \deg(f_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} (n - (j-1)) = \prod_{i=2}^{n} i = n!$$

wobei $K_0 := k$ und $f_0 := f$ zur Vereinfachung der Bezeichnungen eingeführt wurden.

□

Bemerkung 6.3.6 *Mit dem vorigen Satz gibt es einen Erweiterungskörper K eines gegebenen Grundkörpers k über dem ein gegebenes Polynom f vollständig in lineare Faktoren zerfällt. Ob es sich dabei um den gesuchten Zerfällungskörper handelt oder dieser ggf. kleiner ist, werden wir hier nicht diskutieren, sondern aufschieben in die Algebra II. Dort werden wir uns dann auch Gedanken um die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie, die k festhält) des Zerfällungkörpers machen.*