Abbildungen

Gegeben seien nichtleere Mengen X und Y. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von X nach Y ($f\colon X \to Y$) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet. X heißt *Definitionsbereich (Definitionsmenge)* von f und Y heißt *Wertevorrat* von f.
Der *Graph* von $f\colon X \to Y$ ist die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Für $M \subset X$ heißt die Menge

$$f(M) = \{f(x) : x \in M\}$$

Bild von M unter f.
Für $N \subset Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(N) = \{x : f(x) \in N\}$$

Urbild von N unter f.

Def Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.
f heißt *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$(\text{ Äquivalent:} \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

f heißt *surjektiv*, falls für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. wenn $f(X) = Y$ gilt.
f heißt *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Def Ist $f\colon X \to Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem Element $y \in Y$ genau ein Urbild $x \in X$ mit $f(x) = y$. Man nennt die Abbildung $f^{-1}\colon Y \to X$, die jedem $y \in Y$ sein Urbild $x \in X$ zuordnet, die *inverse Abbildung* (auch *Umkehrabbildung* oder *Umkehrfunktion*).
Kurz: $f^{-1}(y) := x$, wobei $f(x) = y$.

Def Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen.
Wir definieren die *Komposition*

$$g \circ f\colon X \to Z$$

durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$