Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Zusatzblatt

Aufgabe 1. Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte A, B, die auf einer Seite von g liegen. Man bestimme einen Punkt C, für den die Summe der Abstände $\ell(\overline{AC}) + \ell(\overline{CB})$ minimal wird, wenn a, b, d durch die Voraussetzung gegebene positive Zahlen sind, siehe Abbildung 1. Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung. Machen Sie sich dabei Gedanken über die Winkel α und β.

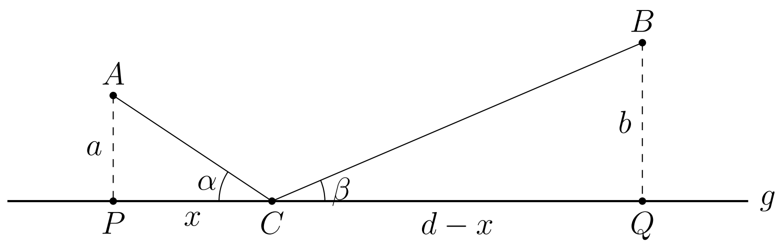

Abbildung 1: Das Problem der kürzesten Strecke mit Umweg über g

Hinweis: Sie haben schon im Kurs „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ eine geometrische Lösung des Problems kennengelernt. Lösen Sie nun die Aufgabe mithilfe der Differentialrechnung.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

a) Die Funktion sin ist auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ stetig und streng monoton wachsend. Sie bildet das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ auf das Intervall $[-1, 1]$ bijektiv ab. Folglich besitzt sie die Umkehrfunktion

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

die wir Arcussinus nennen. Die Funktion arcsin ist stetig und streng monoton wachsend. Skizzieren Sie den Graphen von arcsin und berechnen Sie die Ableitung.

b) Die Funktion cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ stetig und streng monoton fallend. Sie bildet das Intervall $[0, \pi]$ auf das Intervall $[-1, 1]$ bijektiv ab. Folglich besitzt sie die Umkehrfunktion

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi],$$

die wir Arcuskosinus nennen. Die Funktion arccos ist stetig und streng monoton fallend. Skizzieren Sie den Graphen von arccos und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 3. Sei $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f, berechnen Sie f', finden Sie die lokalen Extrema von f und die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt. Wie verhält sich die Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs? Untersuchen Sie, wo f konkav bzw. konvex ist, ermitteln Sie die Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 4. Berechnen Sie im Falle der Existenz die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

Aufgabe 5.

a) Schreiben Sie die Taylorformel für $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorformel:

    a) die Eulersche Zahl e mit einem Fehler nicht größer als 10^{-3}
    b) $\sqrt[3]{30}$ mit Genauigkeit 10^{-3}

   Berechnen Sie nun diese Zahlen mithilfe des Taschenrechners und vergleichen die Ergebnisse.

Achtung! Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert. Nichtsdestoweniger wird es empfohlen, es zu bearbeiten. Bei großem Interesse können einige Aufgaben im letzten Tutorium besprochen werden.