Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Zahlbereiche

× Aufgabe 1

Berechne für $x = 2i, y = 1 + i$ und $z = 2 - 3i$ folgende Ausdrücke:

1. $y \cdot z$
2. $\overline{y \cdot (x - z)}$
3. $|x + z|$
4. $\mathrm{Re}(x \cdot y \cdot z)$
5. $\mathrm{Im}(x + yz)$

Aufgabe 2

Bestimme Real- und Imaginärteil sowie Betrag der komplexen Zahl

$$z = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-i}\right)^2.$$

× Aufgabe 3

Für $z \in \mathbb{C}$ zeige man

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ und } \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Aufgabe 4

Beweise folgende Rechenregeln:

1. $\overline{\overline{x}} = x$
2. $\mathrm{Re}(x + y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)$

Mithilfe von 2. zeige:

3. $\mathrm{Im}(x + y) = \mathrm{Im}(x) + \mathrm{Im}(y)$

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \mathrm{Re}(z)}{i}$. Wieso?

× Aufgabe 5

1. Man zeichne die folgenden komplexen Zahlen in die Gauß'sche Zahlenebene ein:

   a) $3 - i$ b) $2i$

   c) $-1 + 3i$ d) z mit $\operatorname{Re}(z) = 2$ und $\operatorname{Im}(z) = 1$

2. Man zeichne eine Gaußsche Zahlenebene und markiere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

   a) $\operatorname{Im}(z) = 1$

   b) $\operatorname{Re}(z) \leq 2$

   c) $|\operatorname{Re}(z)| = 2$

   d) $|\operatorname{Im}(z)| < 3$

   e) $|\operatorname{Re}(z)| \leq 2$ und $|\operatorname{Im}(z)| > 2$

   f) $z = \overline{z}$

Aufgabe 6

Begründe oder widerlege (z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels):

1. Multipliziert man eine komplexe Zahl mit $(-i)$, so werden Real- und Imaginärteil getauscht.
2. Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.
3. Es ist möglich, als Summe komplexer Zahlen, deren Realteil jeweils 0 ist, 1 zu erhalten.
4. Im Allgemeinen gilt: $\operatorname{Re}(x \cdot y) = \operatorname{Re}(x) \cdot \operatorname{Re}(y)$, für $x, y \in \mathbb{C}$.
5. Ist $\operatorname{Re}(\operatorname{Im}(z)) = 0$, dann ist $z \in \mathbb{R}$.

! Aufgabe 7

Sei $z \in \mathbb{C}$. Bringe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in ihre kartesische Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $z_1 = z + \frac{1}{z}$
2. $z_2 = \overline{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

! Aufgabe 8

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$?