Vorlesung 7

Eine der wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ist das Vollständigkeitsaxiom (bzw. das Supremumaxiom: jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt das Supremum). Diese Eigenschaft wurde mehrmals in wichtigen Sätzen verwendet, z.B. beim Ziehen von Wurzeln, für den Zwischenwertsatz, beim Summieren von Reihen, und bei der Untersuchung der Konvergenz (jede Cauchy-Folge ist konvergent: wurde auch für die Definition des Integrals genutzt). In dieser Vorlesung möchten wir eine abstrakte Verallgemeinerung dieser Eigenschaft für metrische Räume besprechen. Eine direkte Übertragung ist nicht möglich: das Supremumaxiom nutzt die Anordnung von $\mathbb{R}$, und allgemeine metrische Räume sind nicht angeordnet. Allerdings kann man den Begriff einer Cauchy-Folge ziemlich direkt übertragen:

Definition 97. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heisst **Cauchy-Folge**, falls man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden kann mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Proposition 98. *Jede in (X, d) konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $x = \lim x_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n \geq N$ gilt dann (mit Hilfe der Dreiecksungleichung):

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, ist (x_n) eine Cauchy-Folge. □

Allerdings gilt die Umkehrung nicht. Betrachte $X = (0, +\infty)$ mit der euklidischen Metrik und die Folge $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Das ist eine Cauchy-Folge: für $m, n \geq N$ gilt $d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \leq \frac{2}{N}$, also $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für $m, n \geq N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2/\varepsilon$. Allerdings gibt es kein $x \in X$ mit $x = \lim x_n$ (die Folge x_n konvergiert natürlich gegen 0 im grösseren Raum $\mathbb{R}$, aber $0 \notin X$).

Definition 99. Ein metrischer Raum (X, d) heisst **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element aus X konvergiert. (Oft sagt man auch, dass X bezüglich d vollständig ist).

Ein metrischer Raum ist also genau dann vollständig, wenn es in diesem Raum die Umkehrung von Proposition 98 gilt: Diese Definition wird direkt auf normierte Räumen übertragen:

Definition 100. Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heisst vollständig, falls X bzgl. der durch die Norm induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist.

Beispiel 101. 1. $\mathbb{R}$ ist vollständig. Man kann eigentlich zeigen, dass das Supermumaxiom aus der Vollständigkeit (im Sinne der Definition 97) hergeleitet werden kann: die beiden Axiomen sind äquivalent (falls alle anderen Axiomen der reellen Zahlen gelten).

2. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig: es gibt Cauchy-Folgen von rationalen Zahen, deren Grenzwerte irrational sind.

3. $[0,1]$ ist vollständig. Beweis: Sei $(x_n) \subset [0,1]$ eine Cauchy-Folge, dann ist das auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Wegen $0 \le x_n \le 1$ gilt $0 \le x \le 1$, also $x \in [0,1]$.

Das letzte Beispiel kann man wie folgt verallgemeinern (Übung), dadurch gewinnt man eine grosse Familie von vollständigen metrischen Räumen:

Satz 102. *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $Y \subset X$ und d_Y die induzierte Metrik auf Y. Der metrische Raum (Y, d_Y) ist genau dann vollständig, wenn die Menge Y in X abgeschlossen ist.*

Satz 103. $\mathbb{R}^n$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge. Wir schreiben $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$ mit $x_k^{(j)} \in \mathbb{R}$. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|a_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = \|a\|,$$

insbesondere $|x_m^{(j)} - x_n^{(j)}| \le \|x_m - x_n\|$. Es folgt, dass jede der reellen Folge $(x_n^{(j)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert $(x_n^{(j)})$ in $\mathbb{R}$ gegen ein $x^{(j)} \in \mathbb{R}$, und dann konvergiert auch (x_k) in $\mathbb{R}^n$ gegen $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ (Blatt 6, Präsenzaufgaben: die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ ist zu der komponentweisen Konvergenz äquivalent). □

Weitere Beispiele vollständiger metrischer Räume (insbesondere Funktionalräume) betrachtet wir etwa später in dieser Vorlesung.

Wie schon vorher erwähnt, ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ für das Lösen von bestimmten Gleichung extrem wichtig. Wir werden jetzt eine neue Familie von Gleichungen einführen, die in jedem metrischen Raum Sinn machen.

Definition 104. Sei X eine Menge und $T : X \mapsto X$ eine Abbildung. Ein Punkt $p \in X$ heisst **Fixpunkt** von T, falls $T(p) = p$. Anders gesagt, sind die Fixpunkte von T genau die Lösungen der **Fixpunktgleichung** $T(x) = x$.

Man stellt sich die Frage, unter welchen Bedingung eine Abbildung einen Fixpunkt hat. Das ist genau das Thema des Banachschen Fixpunktsatzes, der in vielen Gebieten zahlreiche Anwendungen findet. Wir werden zuerst einige neue Begriffe einführen:

Definition 105. Sei (X, d) eine metrischer Raum. Eine Abbildung $T : X \mapsto X$ heisst **Kontraktion**, falls es ein $0 \leq L < 1$ existiert, so dass $d\big(T(x), T(y)\big) \leq Ld(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Die Zahl L wird Kontraktionskonstante von T genannt.

Definition 106. Sei X eine Menge, $T : X \mapsto X$ eine Abbildung und $n \in \mathbb{N}$. Die n-te iterierte Abbildung $T^n : X \mapsto X$ wird induktiv definiert durch

$$T^1(x) = T(x), \quad T^{n+1}(x) = T\big(T^n(x)\big), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X.$$

Anders gesagt, $T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ Mal}}$.

In der mathematischen Theorie von dynamischen Systemen untersucht man u.a. das Verhalten von Folgen $x_n = T^n(x_0)$ für grosse n, das ist eines der aktivsten Gebieten der modernen Mathematik.[7] Zum Glück ist die Antwort ganz einfach, falls T eine Kontraktion ist:

Satz 107 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein* <u>vollständiger</u> *metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante L, dann gilt folgendes:*

1. *T hat genau einen Fixpunkt p. Anders gesagt, besitzt die Gleichung $T(x) = x$ eine eindeutig bestimmte Lösung.*

2. *Sei $x_0 \in X$ beliebeig. Definiere $(x_n) \subset X$ durch $x_n = T(x_{n-1})$, d.h. $x_n = T^n(x_0)$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $p = \lim_{n\to\infty} x_n$ und*

$$d(x_n, p) \leq \frac{L^n}{1 - L}\, d(x_0, x_1). \tag{13}$$

Beweis. Nach der Definition einer Kontraktion gilt natürlich $L \in [0, 1)$.

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit des Fixpunktes (falls dieser überhaupt existiert). Seien p, q Fixpunkte von T, dann $T(p) = p$ und $T(q) = q$, und $d(p, q) =$

[7] Definiere $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt: $T(x) = x/2$ falls x gerade, $T(x) = 3x + 1$ falls x ungerade. Nehme $x_0 \in \mathbb{N}$ und definiere die Folge (x_n) durch $x_n = T(x_{n-1}) \equiv T^n(x_0)$. Für $x_0 = 1$ bekommt man $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, dann wird dieser Zyklus (4, 2, 1) unendlich wiederholt. In 1930er Jahren hat der deutsche Mathematiker Lothar Collatz das folgende Problem gestellt (jetzt Collatz-Problem genannt): beweise, dass zu jedem Anfangspunkt $x_0 \in \mathbb{N}$ die oben konstruierte Folge (x_n) in den Zyklus 4, 2, 1 mündet. Das Problem bleibt bis heute ungelöst, und es wurde von vielen berühmten Mathematikern als "hoffnungslos" bewertet.

$d\big(T(p), T(q)\big) \leq Ld(p,q)$, also $(1-L)d(p,q) \leq 0$. Aus $1-L > 0$ und $d(p,q) \geq 0$ folgt $d(p,q) = 0$ und $p = q$ (Definitheit der Metrik).

Jetzt zeigen wir die Existenz eines Fixpunktes. Dafür nutzen wir die iterierte Folge x_n. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gilt (Kontraktion):

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) \leq Ld(x_{n-1}, x_n),$$

also $d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n d(x_0, x_1)$ durch Iteration. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt dann, dank der Dreiecksungleichung,

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdot + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq (L^n + L^{n+1} + \cdot + L^{n+k-1}) d(x_0, x_1)$$

Man nutzt jetzt

$$L^n + L^{n+1} + \cdot + L^{n+k-1} = L^n(1 + L + \cdots + L^{k-1}) \leq L^n \sum_{j=0}^{\infty} L^j = L^n \cdot \frac{1}{1-L},$$

also

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(x_0, x_1). \tag{14}$$

Wegen $0 \leq L < 1$ konvergiert der Ausdruck auf der rechten Seite von (14) gegen Null für $n \to \infty$, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{L^n}{1-L}\, d(x_0, x_1) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und dann auch

$$d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge in (X, d). Da der metrische Raum (X, d) vollständig ist, existiert ein $p \in X$ mit $p = \lim x_n$.

Wir müssen prüfen, ob dieser Grenzwert p wirklich ein Fixpunkt von T ist. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned} d\big(p, T(p)\big) &\leq d(p, x_n) + d\big(x_n, T(p)\big) \\ &= d(p, x_n) + d\big(T(x_{n-1}), T(p)\big) \leq d(p, x_n) + Ld(x_{n-1}, p). \end{aligned} \tag{15}$$

Aus $p = \lim x_n$ folgt $\lim d(x_n, p) = 0$, also konvergieren für $n \to \infty$ die beiden Summanden auf der rechten Seite von (15) gegen Null, und dann $d\big(p, T(p)\big) \leq 0$. Aus der Definitheit der Metrik d folgt $d\big(p, T(p)\big) = 0$ und $p = T(p)$, also ist der gefundene p wirklich ein Fixpunkt von T. Um die letzte Abschätzung (13) zu beweisen merkt man zuerst, dass

$$\text{für } y = \lim y_n \text{ und } a \in X \text{ gilt } \lim d(a, y_n) = d(a, y). \tag{16}$$

Der Beweis von (16) folgt aus der Dreiecksungleichung, $|d(a, y_n) - d(a, y)| \leq d(y_n, y)$. Mit Hilfe von (16) erhält man (13), indem man in (14) den Parameter k gegen ∞ schickt. $\square$

Eine grosse Familie von Kontraktionen in Teilmengen von $\mathbb{R}$ erhält man mit Hilfe des folgenden Satzes:

Satz 108. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L \geq 0$. Dann sind folgende zwei Bedingungen äquivalent:*

(a) Für alle $x, y \in I$ gilt $\big|f(x) - f(y)\big| \leq L|x - y|$,

(b) Für alle $x \in I$ gilt $\big|f'(x)\big| \leq L$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Implikation (b)⇒(a). Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen x und y mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, also

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \big|f'(\xi)(x - y)\big| \leq L|x - y|.$$

Die Implikation (a)⇒(b) beweisen wir indirekt. Wäre $\big|f'(y)\big| > L$ für ein $y \in I$, so folgte aus der Definition der Ableitung, dass $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| > L$ für x in der Nähe von y, also $\big|f(x) - f(y)\big| > L|x - y|$ im Widerspruch zur Annahme (a). □

Korollar 109. *Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ differenzierbar mit $\sup_{x\in[a,b]} \big|f'(x)\big| < 1$, dann ist f eine Kontraktion auf $[a, b]$.*

Beispiel 110. Betrachte $f : [0, +\infty) \to [0 + \infty)$, $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x + 2} \equiv 1 - \dfrac{1}{2x + 2}$. Es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{2(x + 1)^2}$ und $\big|f'(x)\big| \leq L := \frac{1}{2}$, also ist f eine Kontraktion. Die Menge $[0, +\infty)$ ist in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und daher ein vollständiger metrischer Raum. Die Gleichung $x = f(x)$ besitzt also eine eindeutig bestimmte Lösung in $[0, +\infty)$. In diesem konkreten Fall können wir diese Lösung explizit finden: $p = 1/\sqrt{2}$. Den numerischen Wert von p kann man durch die iterierte Folge $x_n = f(x_{n-1})$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz approximieren: wähle z.B. $x_0 = 1$, dann $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_3 = \frac{17}{24}$, und wir haben die garantierte Fehlerabschätzung

$$|\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{17}{24}| = |p - x_3| \leq \tfrac{L^3}{1-L}|x_0 - x_1| = \tfrac{1}{16} = 0,0625. \tag{17}$$

In der Realität $x_3 = \frac{17}{24} = 0.708333\ldots$ und $p = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106\ldots$, $|p - x_3| = 0,0012\ldots$.

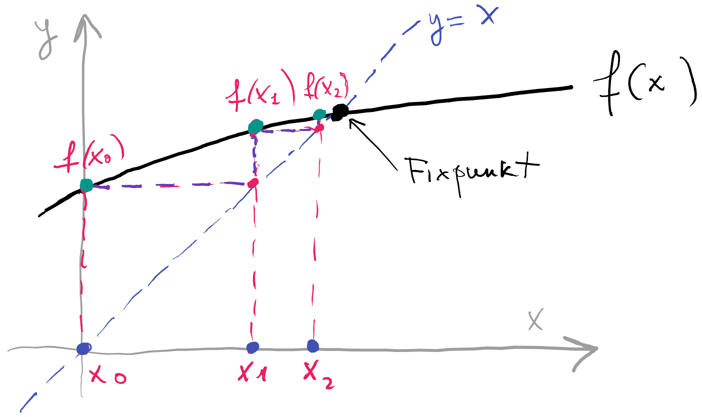
Die garantierte Fehlerabschätzung kann man aber verbessern, falls man merkt, dass der gesuchte Fixpunkt grosser als $\frac{1}{2}$ ist (f ist steigend mit $f(0) = \frac{1}{2}$). Dann kann man f auch als eine Kontraktion von $[\frac{1}{2}, \infty)$ bertachten und die entsprechende Kontraktionskonstante L besser abschätzen:

$$L := \sup_{x\in[\frac{1}{2},\infty)} \big|f'(x)\big| = \frac{2}{9}.$$

Damit erhält man

$$|\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{17}{24}| = |p - x_3| \leq \tfrac{L^3}{1-L}|x_0 - x_1| = \frac{(\frac{2}{9})^3}{1-\frac{2}{9}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{567} = 0.003527\ldots,$$

was viel besser als (17) ist. Die Konstruktion der Punkte x_k kann man mit einem Bild illustrieren:



Wie schon vorher angekündigt, entwickeln wir die gesamte abstrakte Theorie um Differentialgleichungen behaldeln zu können (Existenz/Eindeutigkeit von Lösungen). Dafür werden wir bestimmte Funktionalräume brauchen.

Definition 111. Sei M eine nichtleere Menge. Wir bezeichnen

$$\mathcal{B}(M,\mathbb{R}) = \big\{f : M \mapsto \mathbb{R} : \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| < \infty\big\}.$$

Satz 112. *Die Menge $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ mit den Operationen*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda\, f(x),$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Durch

$$\|f\| = \sup_{x\in M} \big|f(x)\big|$$

wird eine Norm auf $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ definiert (die Supremumnorm*), und $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ ist bzgl. dieser Norm vollständig.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{F}(M,\mathbb{R}) := \big\{$alle Funktionen $f : M \mapsto \mathbb{R}\big\}$ mit denselben Operationen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $\mathcal{B}(M,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(M,\mathbb{R})$. Es ist ausreichend zu zeigen, dass für $f, g \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: (a) $f + g \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ und (b) $\lambda f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$.

Für (a): Zu jedem $x \in M$ gilt $\big|(f+g)(x)\big| = \big|f(x) + g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|$,

$$\sup_{x\in M} \big|(f+g)(x)\big| \leq \sup_{x\in M} \big(\big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|\big) \leq \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| + \sup_{x\in M} \big|g(x)\big| < \infty.$$

Daraus folgt auch $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Für (b):

$$\sup_{x\in M} \big|(\lambda f)(x)\big| = \sup_{x\in M} \big|\lambda f(x)\big| = \sup_{x\in M} |\lambda|\big|f(x)\big| = |\lambda| \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| < \infty,$$

insbesondere $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$ ist und daher ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist, müssen wir jetzt nur die Definitheit prüfen (da die Homogenität und die Dreiecksungleichung schon oben bewiesen worden sind). Sei $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$. Wegen $|f(x)| \geq 0$ gilt offenbar $\|f\| \geq 0$. Darüber hinaus haben wir

$$\begin{aligned}\|f\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = 0\,\forall x \in M \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist die Nullfunktion}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist der Nullvektor in } \mathcal{B}(M,\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|$ wirklich eine Norm.

Sei $(f_n) \subset \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ eine Folge von Funktionen, die bzgl. der Norm eine Cauchy-Folge ist,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| < \varepsilon\ \forall n \geq N, k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Für jedes $x \in M$ gilt $\big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| < \sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big|$, und daher ist $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gibt es ein $f(x) \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Dadurch haben wir eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ definiert. Wir müssen jetzt zwei Sachen prüfen: dass $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ und dass $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$, N wie in (18) und $x \in M$, dann

$$\big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| = \big|f_n(x) - f(x)\big|$ gilt $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Da ε unabhängig von x ist, gilt auch $\sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$. Wir haben also gezeigt, dass

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon\ \forall n \geq N. \tag{19}$$

Nehme jetzt ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und finde ein passendes N, dann

$$\begin{aligned}\sup_{x\in M} \big|f(x)\big| &\leq \sup_{x\in M} \Big(\big|f(x) - f_N(x)\big| + \big|f_N(x)\big|\Big)\\ &\leq \sup_{x\in M} \big|f(x) - f_N(x)\big| + \sup_{x\in M} \big|f_N(x)\big| \leq \varepsilon + \|f_N\| < \infty,\end{aligned}$$

also $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$. Dann kann man (19) wie folgt umschreiben:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \|f_n - f\| < \varepsilon\ \forall n \geq N,$$

also konvergiert f_n gegen f bzgl. $\|\cdot\|$. Da (f_n) eine beliebige Cauchy-Folge war, ist $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ ein vollständiger normierter Raum. □

Satz 113. *$C^0\big([a,b]\big)$ mit der Supremumnorm ist vollständig.*

Beweis. Da $C^0([a,b])$ ein Untervektorraum von $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ ist, ist die Supremumnorm wohldefiniert. Sei nun $(f_n) \subset C^0([a,b])$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumnorm. Dann ist (f_n) eine Cauchy-Folge auch in $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Da $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ vollständig ist, existiert eine Funktion $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, gegen die (f_n) in der Supremumnorm konvergiert. Also ist f der gleichmässige Grenzwert von f_n. Der gleichmässige Grenzwert einer Folge stetiger Funktion ist aber immer stetig (Analysis I), daher $f \in C^0([a,b])$. □

Mit Hilfe dieser Funktionalräumen kann man schon eine erste Idee bekommen, wie man die Lösung von Differentialgleichungen angehen kann.

Beispiel 114. Sei $a \in (0,1)$. Betrachte die Integralgleichung

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt, \quad x \in [0,a]. \tag{20}$$

Wir wollen zeigen, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung in $C^0\big([0,a]\big)$ existiert.

Betrachte die Abbildung[8]

$$T : C^0\big([0,a]\big) \to C^0\big([0,a]\big), \quad \big(T(y)\big)(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt, \quad x \in [0,a],$$

die Gleichung (20) ist dann die Fixpunktgleichung für T. Für $y_1, y_2 \in C^0\big([0,a]\big)$ und $x \in [0,a]$ gilt

$$\begin{aligned}\big|\big(T(y_1)\big)(x) - \big(T(y_2)\big)(x)\big| &= \Big|\int_0^x \big(y_1(t) - y_2(t)\big)\,dt\Big| \le \int_0^x \big|y_1(t) - y_2(t)\big|\,dt\\ &\le x \sup_{t\in[0,a]} \big|y_1(t) - y_2(t)\big| \le a\|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

also $\|T(y_1) - T(y_2)\| \le a\|y_1 - y_2\|$. Wegen $a \in (0,1)$ ist T eine Kontraktion auf $C^0\big([0,a]\big)$, daher besitzt (20) eine einzige Lösung. Wir versuchen, die entsprechende interierte Folge $y_{n+1} = T(y_n)$ mit z.B. $y_0 = 0$ zu konstruiren:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x 0\,dt = 1,\\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x,\\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)\,dx = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2,\\ y_4(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t\frac{1}{2}\,t^2)\,dt = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3, \end{aligned}$$

[8]Eine Abbildung zwischen zwei Funktionalräumen wird fast immer *Operator* genannt. Wir betrachten nur ganz einfache Fälle, die allgemeinere Theorie wird später in der VL Funktionanalysis entwickelt.

und durch Iteration erhält man $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge (y_n) in $C^0\big([0,a]\big)$konvergiert gegen $y(x) = e^x$: die Konvergenz ist gleichmässig (d.h. in der Supremumnorm), da die Potenzreihen innerhalb des Konvergenzintervalls gleichmässig konvergieren. Also ist $y(x) = e^x$ die einzige Lösung von (20).

Man merkt aber, dass y die Gleichung (20) genau dann erfüllt, wenn y das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)$ mit $y(0) = 1$ löst (Übung).