CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

**Algebra - SS 20**
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

# Präsenzaufgaben 3

**Keine Abgabe vorgesehen**

**Präsenzaufgabe 3.5.** Zeigen Sie:

**(a).** Zu einem Ideal $I$ eines Ringes $R$ definieren wir den **Annullator** von $I$ als

$$\operatorname{ann}(\mathrm{I}) := \{\, r \in R \mid r\,a \;=\; a\,r \;=\; 0 \;\text{ für alle }\; a \in I \,\}.$$

Bestimmen Sie ann(I) für

(a) $R = \mathbb{Z}$ und $I = \langle 3 \rangle$.

(b) $R = \mathbb{Z}/_{6\,\mathbb{Z}}$ und $I = \langle [3]_6 \rangle$.

**(b).** Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal eines kommutativen Ringes $R$. Dann ist das **Radikal** $\sqrt{I}$ von $I$ ebenfalls ein Ideal von $R$, welches $I$ enthält:

$$\sqrt{I} \;:=\; \{\, r \in R \mid r^n \in I \;\text{ für ein }\; n \in \mathbb{N} \,\}.$$

**(c).** Sei $R = \mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}}$. Bestimmen Sie $\sqrt{\{[0]_{18}\}}$. Verdeutlichen Sie sich, dass das Radikal des Nullideals eines Ringes genau die nilpotenten Elemente eines Ringes beschreibt.

**(d).** Seien $R, S$ kommutative Ringe und $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist

$$\sqrt{\varphi^{-1}(I)} \;=\; \varphi^{-1}(\sqrt{I}\,).$$

**Präsenzaufgabe 3.6.** Sei $R$ ein kommutativer Ring und seien $I, J \trianglelefteq R$ zwei Ideale von $R$.

**(a).** Zeigen Sie, dass das **Idealprodukt** $IJ$ von $I$ und $J$ ebenfalls ein Ideal von R ist:

$$I\,J \;:=\; \left\{\, \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \mid n \,\in\, \mathbb{N}\,,\, a_i \,\in\, I\,,\, b_i \,\in\, J \;\text{ für alle }\; i \,=\, 1\,,\,\dots\,,\, n \,\right\}.$$

**(b).** Seien $A \;=\; \{\, a_1\,,\,\dots\,,\, a_m \,\} \subseteq R$ und $B \;=\; \{\, b_1\,,\,\dots\,,\, b_n \,\} \subseteq R$ Erzeugersysteme von $I$ bzw. $J$. Bestimmen Sie jeweils ein Erzeugersystem $\mathcal{E} \neq R$ von $I \,+\, J$ und $I\,J$.

**Präsenzaufgabe 3.7.**

**(a).** Sei $R$ ein kommutativer Ring und $f \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, t^i \;\in\; R[\,t\,]$. Zeigen Sie: Falls $f$ ein Nullteiler in $R[\,t\,]$ ist, so existiert ein $b \,\in\, R \setminus \{\,0\,\}$ mit $b\,a_i \;=\; 0$ für alle $i \,\in\, \{\,0\,,\,\dots\,,\, n\,\}$.

**(b).** Sei $K$ ein Körper und $f \;=\; \sum\limits_{i\,=\,0}^{n} a_i\, t^i \;\in\; K[\,t\,]$ . Beweisen Sie: Falls $a \,\in\, K^*$ eine Nullstelle von $f$ ist, so ist $a^{-1}$ eine Nullstelle des Polynoms $g \;=\; \sum\limits_{i\,=\,0}^{n} a_{n-i}\, t^i$ .

**Präsenzaufgabe 3.8.**

**(a).** Sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie, dass alle Ideale im Ring der formalen Potenzreihen $K[[\,t\,]]$ über $K$ die von den Monomen erzeugten Hauptideale sind.

**(b).** Sei $R = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $f = t^n \in R[t]$. Beschreiben Sie die Elemente von $\tilde{R} = {}^{R[t]}\!/_{\langle f \rangle}$ und entscheiden Sie, ob $\tilde{R}$ ein Körper ist?