6 Zahlbereiche

Nachdem wir im Kapitel zur Mengenlehre bereits verschiedene Zahlbereiche kennengelernt haben, geht es nun genauer um die Beziehung zwischen genau diesen. Zahlen bzw. Zahlbereiche haben sich historisch aus den (natürlichen) Vorstellungen zu Größen und Anzahlen entwickelt, die im Laufe der Geschichte immer wieder an neue Probleme angepasst werden mussten.

6.1 Motivation und Geschichte

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten sich den Zahlbereichen zu nähern. Zum einen über den geschichtlichen Zugang und zum anderen über einen axiomatischen Zugang, der die verschiedenen Zahlbereiche definiert. In diesem Fall führt der streng mathematische Zugang bereits tief in die Algebra, ohne uns viele interessante Erkenntnisse zu liefern, weswegen wir uns hier auf die geschichtliche Entwicklung beschränken.

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“

– Leopold Kronecker (1823-1891)

Auch wenn es das Zitat nicht vermuten lässt, die Geschichte der negativen Zahlen ist viel jünger als man eventuell denken mag. So verwendeten viele mathematische Hochkulturen positive Bruchzahlen bereits viel früher als die negativen Zahlen. Dies geht vor allem darauf zurück, dass die inhaltliche Interpretation als Größe bei positiven Zahlen generell anschaulicher ist.
Eine inhaltliche Interpretation, die uns noch heute geläufig und in der Geschichte häufig als Begründung der negativen Zahlen angeführt wurde, sind Schulden. Euler beschreibt dies in einem seiner Lehrbücher wie folgt:

„Wenn also jemand 100 Taler hat, dabei aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen $100-50$ oder, was dasselbe ist, $+100-50$ also 50 Taler betragen. Da nun die negativen Zahlen als Schulden betrachtet werden können, insofern als die positiven Zahlen den wirklichen Besitz angeben, kann man sagen, dass die negativen Zahlen weniger sind als nichts [...]“

– Leonard Euler (1707-1783)

Etwas formaler betrachtet ist der Auslöser für eine Zahlbereichserweiterung immer der Gleiche. Ein bislang nicht lösbares Problem, eine nicht lösbare Gleichung soll gelöst werden. Im Fall der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist die z.B. $x + n = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, die auch im Fall $n > m$ mit $x = m - n$ eine Lösung erhalten sollte. Oder anders ausgedrückt: Mit der Hinzunahme der negativen Zahlen können wir „nach Herzenslust" addieren und vor allem subtrahieren, ohne auf Probleme zu treffen. Man spricht davon, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abgeschlossen bezüglich der Subtraktion ist, d.h., dass die Subtraktion zweier beliebiger ganzer Zahlen wiederrum eine ganze Zahl ergibt.

6.2 Division und rationale Zahlen

Bezüglich einer Grundrechenart, der Division, sind weder die natürlichen Zahlen noch die ganzen Zahlen abgeschlossen. Bereits einfache Aufgaben wie 7 geteilt durch 3 sind aus diesem Zahlenvorrat nicht lösbar. Aufgaben wie diese führen direkt zur Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen, also zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Im Vergleich zu den ganzen Zahlen gibt es nun für jede rationale Zahl a (ungleich 0!) eine neue „Gegenzahl" (korrekt multiplikatives Inverses genannt) $\frac{1}{a}$, sodass $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ gilt. Da gleichzeitig auch das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen wiederum rational sein soll, erhält man so weitere rationale Zahlen der Form $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, die sogenannten Brüche.

Der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ ist somit bezüglich aller Grundrechenarten abgeschlossen. Was das für weitere Folgen auf seine Struktur hat, verschieben wir in die Vorlesungen des ersten Semesters.

6.3 Entdeckung der Irrationalität

Die bisher angesprochenen Zahlbereiche bilden eine aufsteigende Kette

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Doch obwohl wir nun alle Grundrechenarten durchführen können, stoßen wir dennoch auf geometrische Probleme, die sich mit den rationalen Zahlen nicht lösen lassen. Betrachten wir die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 oder den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1.

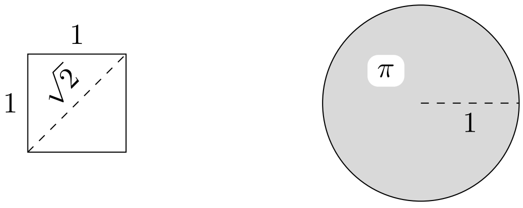

Abbildung 6.1: Quadrat der Seitenlänge 1 und Kreis mit Radius 1.

Im Falle des Quadrats ist es uns nicht möglich, die Länge der Diagonalen mit einer rationalen Zahl auszudrücken. Anders formuliert heißt dies, dass die Gleichung $d^2 = 2$ (hier hilft der Satz des Pythagoras) in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar ist, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Einen Beweis dafür werden wir in einem späteren Kapitel noch selbst führen!).

Ähnlich verhält es sich beim Flächeninhalt des Einheitskreises. Es ist unmöglich, den Flächeninhalt exakt in einem Bruch anzugeben. Diese Fläche wurde später als sogenannte Kreiszahl π festgelegt. Die Zahl π fasziniert uns bis heute. Im Verlauf der Geschichte hat sich ein regelrechter Sport entwickelt immer mehr Nachkommastellen von π zu berechnen und die Zahl somit immer genauer anzunähern.

Die Entdeckung der Irrationalität, die dem Griechen Pythagoras zugeschrieben wird, stürzte wohl eine ganze Schule griechischer Mathematiker in eine Tiefe Krise, da sich die Irrationalität nicht mit ihrem Weltbild vereinen lies. Legenden zufolge bezahlten manche Anhänger Pythagoras' mit ihrem Leben, wenn sie sich mit der Irrationalität befassten. Dennoch gelang die Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ um die irrationalen Zahlen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die irrationalen Zahlen haben dabei, obwohl es immerhin unendlich viele davon gibt, kein eigenes Symbol. Spricht man von dieser Menge stellt man sie in der Regel als $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dar.
Doch auch in den reellen Zahlen gibt es Gleichungen, die nicht lösbar sind, beispielsweise

$$x^2 + 1 = 0 \text{ oder äquivalent } x^2 = -1. \tag{6.1}$$

Um auch solche Gleichungen zu lösen, wurden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert. Die komplexen Zahlen sind heute ein wichtiges Hilfsmittel in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik. Da dieser Zahlenbereich in der Schule (normalerweise) nicht behandelt wird, widmen wir ihm ein größeres Kapitel.

6.4 Komplexe Zahlen

Im folgenden Teil werden wir uns nun genauer mit den komplexen Zahlen und deren Eigenschaften befassen. Starten wir erst einmal mit einer Definition:

Definition 6.1
Wir definieren die **imaginäre Zahl *i*** als formale Lösung der Gleichung (6.1), d.h. $i^2 = -1$. Damit definieren wir

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

als **Menge der komplexen Zahlen**. Für eine komplexe Zahl $z = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ nennen wir a den **Realteil** von z ($\mathrm{Re}(z)$) und b den **Imaginärteil** von z ($\mathrm{Im}(z)$). Dabei sind $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$.
Die Schreibweise einer komplexen Zahl z als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man auch die **kartesische Form**, beziehungsweise man sagt, die Zahl z ist in **kartesischen Koordinaten** (gegeben).

Bemerkung:

- *Formal* in dieser Definition heißt, dass wir i als Lösung definieren, ohne i zu kennen.
- Mit i ist natürlich auch $-i$ die zweite (und letzte) Lösung von $x^2 = -1$.

Beispiel: Mit der obigen Vorschrift sind bspw. $2 + 2i$ (mit $a = 2$ und $b = 2$), aber auch $2i$ (mit $a = 0$ und $b = 2$) und 2 (mit $a = 2$ und $b = 0$) komplexe Zahlen.

Dass die komplexen Zahlen tatsächlich eine *Erweiterung* der reellen Zahlen sind, deutet bereits das letzte Beispiel an. Genauer betrachtet kann jede reelle Zahl x als eine komplexe Zahl aufgefasst werden, nämlich in der Form $x + i \cdot 0$.

6.4.1 Rechenoperationen in den komplexen Zahlen

In den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ebenso wie in den reellen Zahlen die Rechenoperationen *Addition* und *Multiplikation* definiert. Summe und Produkt komplexer Zahlen sind mit folgenden Regeln wieder komplex.

Definition 6.2
Für zwei komplexe Zahlen $a+ib$ und $c+id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die **Summe** definiert als

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

und das **Produkt** als

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Auf den ersten Blick mag die Definition der Multiplikation ungewöhnlich wirken. Sie ist jedoch sinnvoll!
Behandeln wir i wie eine Unbekannte, stimmt die Definition mit den bereits aus den reellen Zahlen bekannten Rechenregeln überein:

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot (c + id) &= ac + aid + ibc + i^2bd \\ &= (ac + i^2bd) + i(ad + bc) \\ &\overset{i^2=-1}{=} (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Beispiel: Es gelten die folgenden Gleichungen:

- $(2 + 2i) + (1 + 3i) = (2 + 1) + (2 + 3)i = 3 + 5i$
- $(2 + i) \cdot (3 + 4i) = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 4) + (2 \cdot 4 + 1 \cdot 3)i = 2 + 11i$

Bemerkung: Natürlich gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ immer $a + bi = a + ib$. Analog zur Subtraktion in den reellen Zahlen gilt auch für die komplexen Zahlen

$$(a + ib) - (c + id) := (a - c) + i(b - d).$$

Bei der komplexen Division gibt es einiges zu beachten. Die dafür notwendigen Mittel lernen wir im fogenden Kapitel kennen.

6.4.2 Komplexe Konjugation

Das **komplex Konjugierte** ist eine wichtige, einer komplexen Zahl zugeordnete Größe. Dies wird wie folgt definiert:

Definition 6.3
Zu einer komplexen Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$\overline{z} = \overline{a + ib} := a - ib$$

das **komplex Konjugierte** zu z.

Bemerkung: Die reellen Zahlen sind gerade diejenigen komplexen Zahlen z, für die $z = \overline{z}$ gilt. Das heißt

$$\mathbb{R} = \{a + i0 \mid a \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}.$$

Satz 6.4
Das komplex Konjugierte genügt folgenden Eigenschaften:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

wobei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Beweis: [1] Seien $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}$ und $z_2 = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + ib) + (x + iy)} \\
&= \overline{(a + x) + i(b + y)} \\
&= (a + x) - i(b + y) \\
&= (a - ib) + (x - iy) \\
&= \overline{a + ib} + \overline{x + iy} \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

[1] Mathematisches Beweisen werden wir im späteren Verlauf des Vorkurses noch kennenlernen. Das hier stattfindende Nachrechnen stellt tatsächlich einen vollständigen Beweis dar.

b) Und genauso:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a+ib)\cdot(x+iy)}\\ &= \overline{(ax-by)+i(ay+bx)}\\ &= ax-by-iay-ibx\\ &= ax-iay-by-ibx\\ &= ax-iay+i^2by-ibx\\ &= a(x-iy)-ib(-iy+x)\\ &= (a-ib)\cdot(x-iy)\\ &= \overline{(a+ib)}\cdot\overline{(x+iy)}\\ &= \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\end{aligned}$$

□

6.4.3 Die komplexe Division

Man kann komplexe Zahlen nicht nur addieren, subtrahieren und multiplizieren, sondern auch dividieren. Bei der Definition des Quotienten bedienen wir uns trickreich bei der dritten binomischen Formel:

$$(a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2$$

Damit gilt für den Quotienten zweier komplexer Zahlen (mit $a+ib \neq 0$)

$$\frac{(x+iy)}{(a+ib)} = \frac{(x+iy)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{(xa+yb)+i(ya-xb)}{a^2+b^2} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + i\frac{ya-xb}{a^2+b^2}$$

Wenn wir uns das Vorgehen genauer anschauen, sehen wir, dass wir mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert haben, damit wir im Nenner eine reelle Zahl erhalten. Dieses Vorgehen lässt sich stets anwenden, um den Real- und Imaginärteil eines solchen Bruchs zu bestimmen.

Beispiel: Den Quotienten der komplexen Zahlen $4+2i$ sowie $1+2i$ bestimmen wir wie folgt:

$$\frac{4+2i}{1+2i} = \frac{(4+2i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{(4+4)+(-8+2)i}{1+4} = \frac{8-6i}{5} = \frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$$

6.4.4 Darstellung komplexer Zahlen

Wie kann man sich die komplexen Zahlen vorstellen? Die Zahlengerade reicht nicht mehr aus. Die reellen Zahlen werden zu einer Ebene, der *Gauß'schen Zahlenebene*, erweitert. Eine komplexe Zahl kann man sich als Punkt in der Ebene mit den Koordinaten $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ vorstellen. Die waagerechte Achse wird reelle, die senkrechte imaginäre Achse genannt. Vergleiche dazu die folgende Abbildung:

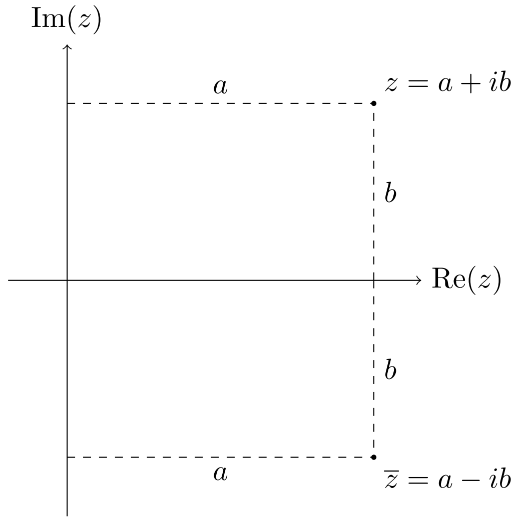

Abbildung 6.2: Die komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a, b > 0$ als Punkt in der Ebene.

Wir erinnern uns, dass für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ der Betrag gerade den Abstand zur 0 bezeichnet. Für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definieren wir den Betrag analog:

Definition 6.5
Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ sei

$$|z| = |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

der **Betrag** von z.

Bemerkung: Diese Anschauung ergibt geometrisch Sinn, wenn man sich den Satz des Pythagoras in Erinnerung ruft (siehe Abbildung 5.3).

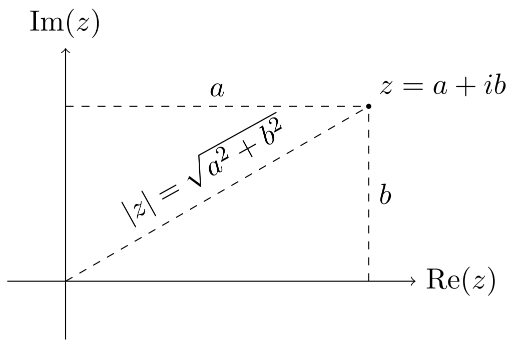

Abbildung 6.3: Darstellung des Betrags von z

Bemerkung: Mit der obig definierten Multiplikation lässt sich zur Berechnung des Betrags auch wieder das komplex Konjugierte einer Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$ nutzen. Es gilt nämlich

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 (= |z|^2).$$

Der Betrag ist genau das, was bei der komplexen Division durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten im Nenner entsteht. Das heißt zum einen, dass $z \cdot \overline{z}$ stets eine nicht negative reelle Zahl ist (für $z \neq 0$ ist diese Zahl sogar wirklich positiv), und zum anderen, dass $\sqrt{z \cdot \overline{z}} = |z|$.

Man beachte, dass wir die ersten Eigenschaften ($z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ und $z \cdot \overline{z} \geq 0$) benötigen, damit wir die Wurzel betrachten dürfen. Es ist zwar prinzipiell möglich, Wurzeln komplexer Zahlen zu betrachten, jedoch erfordert dies weitere Theorie.

Autoren dieses Kapitels:

2019: Kira Rohlmann
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2013: Lisa Mai Onkes
2012: Stefanie Arend