Vorlesung 8

Stetige Abbildungen

Wir werden jetzt kurz das Konzept der Stetigkeit in metrischen Räumen besprechen.

Definition 115. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $p \in X$. Die Abbildung f heisst **stetig** im Punkt p, falls für jede Folge $(x_n) \subset X$ mit $p = \lim x_n$ gilt $f(p) = \lim f(x_n)$. Man nennt f stetig, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

Man kann die Definition äquivalent umformulieren (indem man die Definition von lim ausführlich aufschreibt):

Proposition 116. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $p \in X$. Die Abbildung f ist genau dann stetig im Punkt p, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d_Y\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon \text{ für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, p) < \delta.$$

Daraus folgt auch die Charakterisierung durch offene und abgeschlossene Mengen (Übung):

Proposition 117. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist stetig,*
2. *für jede offene Menge $O \subset Y$ ist $f^{-1}(O)$ offen in X,*
3. *für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.*

Eine wichtige Klasse von stetigen Abbildungen liefern die sogenannten Lipschitzschen Abbildungen:

Proposition 118. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$. Nehme an, dass ein $L > 0$ existiert, so dass*

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq d_X(x, x') \text{ für alle } x, x' \in X$$

(solche Abbildungen heissen **Lipschitzsch** *mit Lipschitz-Konstante L), dann ist f stetig.*

Lipschitzsche Abbildungen werden daher oft auch Lipschitz-stetig genannt. Insbesondere sind die Kontraktionen Lipschitzsch (mit Lipschitz-Konstante 1) und daher stetig.

Beweis. Wähle $\delta = \varepsilon/L$ in Proposition 116. $\square$

Proposition 119. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $a \in X$. Definiere $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = d(a,x)$, dann ist f Lipschitzsch mit Lipschitz-Konstante 1 (und damit stetig).*

Beweis. Für alle $x, y \in X$ gilt (Dreiecksungleichung):

$$d(a,x) \le d(a,y) + d(y,x), \quad d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y),$$

also $|f(x) - f(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \le d(x,y)$. $\square$

Proposition 120. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$, dann ist die Funktion $\mathbb{R}^n \ni (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j \in \mathbb{R}$ Lipschitzsch mit Lipschitz-Konstante 1 (und daher stetig).*

Beweis. Für $x = (x_1,\dots,x_n)$ und $x' = (x'_1,\dots,x'_n)$ gilt

$$\|f(x) - f(x')\| = |x_j - x'_j| = \sqrt{(x_j - x'_j)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2} = \|x - x'\|. \quad \square$$

Viele Satze aus der VL Analysis I werden mit entsprechenden Änderungen auf allgemeine metrische Räume übertragen, z.B.:

Satz 121. *Seien (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Seit $x \in X$ und $(x_n) \subset X$ mit $x = \lim x_n$. Da f stetig ist, gilt $\lim f(x_n) = f(x)$. Da g stetig ist, gilt $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \lim g\big(f(x_n)\big) = \lim (g \circ f)(x_n)$. $\square$

Für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ sind auch übliche Operationen möglich (bewiesen genau wie in der Analysis I):

Satz 122. *Sei (X,d) metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ stetig.*

Beispiel 123. Betrachte die Funktion $\mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = \sin(x_1 + x_2^2) \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $x \mapsto x_1$ und $x \mapsto x_2$ sind stetig (Proposition 120), dann ist $x \mapsto x_2^2 \equiv x_2 \cdot x_2$ stetig (Satz 122 für das Produkt) und dann auch $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto h(x) = x_1 + x_2^2 \in \mathbb{R}$ (Satz 122 für die Summe). Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (Analysis I), daher ist auch $f = \sin \circ h$ stetig (Satz 121).

Mit ähnlichen Konstruktionen zeigt man, dass z.B. alle Polynome auf $\mathbb{R}^n$ stetig sind. $\square$

Für uns werden Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ besonders wichtig. Da die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ zur komponentenweisen Konvergenz äquivalent ist, hat man die folgende Charakterisierung:

Satz 124. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,n$. Definiere $f : X \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = \big(f_1(x),\dots,f_n(x)\big)$, dann ist f genau dann stetig, wenn alle f_j stetig sind.*

Es wurde in Analysis I gezegt, dass stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen immer beschränkt sind. Eine ähnliche Aussage gilt auch in $\mathbb{R}^n$:

Satz 125. *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt[9], d.h. es existiert ein $A > 0$ mit $\|x\| \le A$ für alle $x \in M$, $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist f beschränkt, d.h. es existiert $B > 0$, so dass $\|f(x)\| \le B$ für alle $x \in M$.*

Beweis. Nehme an, dass f unbeschränkt ist, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M$ mit $\|f(x_k)\| \ge k$. Schreibe $x_k = (x_k^{(1)},\dots,x_k^{(m)})$, dann sind alle Folgen $(x_k^{(j)})$ beschränkt: $|x_k^{(j)}| \le \|x_k\| \le A$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i}^{(1)})$. Dann besitzt $(x_{k_i}^{(2)})$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{i_l}}^{(2)})$, dabei ist $(x_{k_{i_l}}^{(1)})$ immer nocht konvergent. Wir betrachten dann $(x_{k_{i_l}}^{(3)})$ usw. Am Ende finden wir k_i, so dass alle Teilfolgen $(x_{k_i}^{(j)})$ konvergieren. Dann konvergiert auch die Teilfolge (x_{k_i}) in $\mathbb{R}^m$, sei also $a := \lim x_{k_i}$. Da M abgeschlossen ist und $(x_{k_i}) \subset M$, gilt $a \in M$. Da f stetig ist, gilt also $f(a) = \lim f(x_{k_i})$, daher $\lim \|f(x_{k_i})\| = \|f(a)\|$. Aber aus $\|f(x_{k_i})\| \ge k_i$ folgt $\lim \|f(x_{k_i})\| = \infty$. Dieser Widerspruch zeigt, dass f beschränkt ist. □

Systeme von Differentialgleichungen

Wir werden jetzt (endlich) die Existenz von Lösungen für Differentialgleichungen besprechen. Da wir eine ziemlich allgemeine Methode nutzen werden, lohnt es sich, nicht nur eine Differentialgleichung sondern auch Systeme von Differentialgleichungen zu betrachten (allerdings sind alle Aussagen auch für $n = 1$ neu).

Nämlich, sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$. Seien $f_j : \Omega \ni (t, y_1,\dots,y_n) \to f_j(t, y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $j = 1,\dots,n$. Ein **System von n Differentialgleichungen erster Ordnung** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t),\dots,y_n(t)\big), \\ \qquad \dots \\ y_n'(t) = f_n\big(t, y_1(t),\dots,y_n(t)\big), \end{cases} \qquad (t, y_1,\dots,y_n) \in \Omega. \tag{21}$$

Gesucht werden also n Funktionen $y_1,\dots,y_n$ (für $n = 1$ erhält man eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung: einige davon haben wir schon gelöst). Es ist viel bequemer, diese n Funktionen als eine einzige Funktion aufzufassen,

$$t \mapsto y(t) = \big(y_1(t),\dots,y_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n.$$

[9]Eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heisst **kompakt**. Die Kompaktheit ist ein wichtiger topologischer Begriff.

Diese Funktion y nennen wir differenzierbar/integrierbar, falls alle y_j differenzierbar/integrierbar sind, und nach Definition

$$y'(t) = \big(y_1'(t), \dots, y_n'(t)\big), \qquad \int_a^b y = \Big(\int_a^b y_1, \dots, \int_a^b y_n\Big).$$

Das Integral erfüllt die folgende "kontinuierliche Dreiecksungleichung" (Übung!):

$$\Big\| \int_a^b y \Big\| \le \int_a^b \|y\|, \quad a \le b, \tag{22}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ ist.

Ähnlich "gruppiert" man alle Funktionen f_j in eine stetige Abbildung

$$\Omega \ni (t,y) \to F(t,y) = \big(f_1(t,y_1,\dots,y_n),\dots,f_n(t,y_1,\dots,y_n)\big) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1,\dots,y_n),$$

dann lässt sich das System (21) sehr kompakt schreiben:

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad (t,y) \in \Omega. \tag{23}$$

Gesucht wird also eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und zu jedem t die Bedingung $\big(t, y(t)\big) \in \Omega$ und die Gleichung (23) erfüllt. Das Anfangswertproblem für (21) besteht darin, zu gegebenen $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine Lösung von (23) zu finden, die die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt.

Satz 126 (Globaler Satz von Picard-Lindelöf). [10] *Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intevrall und $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zusätzlich nehme an, dass F bzgl. der zweiten Variablen Lipschitzsch ist: es existiert ein $L > 0$, so dass*

$$\big\|F(t,y) - F(t,z)\big\| \le L\|y - z\| \text{ für alle } y, z \in \Omega \text{ und } t \in I.$$

Seien $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, dann **gibt es genau eine Lösung** *des Anfangswertproblems*

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad t \in I, \quad y(t_0) = y_0. \tag{24}$$

Der Satz heisst global, da die Lösungen für alle t definiert ist, für die F definiert ist. Falls die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt ist, kann die Lösung nur auf kleineren Intervallen definiert sein oder nicht eindeutig sein: die entsprechnden Beispiele haben wir schon erwähnt (und sehen diese nochmals später).

Der Satz 126 möchten wir in mehreren Schritten beweisen. Die allgemeine Idee ist, das Anfangswertproblem auf eine Fixpunktgleichung für eine Kontraktion zu reduzieren und dann den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Der erste Schritt ist ziemlich direkt:

[10] Auch Satz von Cauchy-Lipschitz bekannt

Lemma 127. *Eine stetige Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung vom Anfangswertproblem* (24)*, wenn*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(t, y(s)\big)\, ds \text{ für alle } t \in I. \tag{25}$$

Beweis. Sei y Lösung von (24) und $t \in I$. Man integriert die beiden Seiten der Differentialgleichung zwischen t_0 und t und nutzt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds = \int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = y(t) - y(t_0),$$

und mit Hilfe der Anfangsbedingung erhält man

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds.$$

Umgekehrt, sei y Lösung von (25). Da y stetig ist, ist auch $s \mapsto F\big(t, y(s)\big)\, ds$ stetig, und damit ist $t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} F\big(t, y(s)\big)\, ds$ stetig differenzierbar. Also ist auch y stetig differenzierbar, und mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhält man $y'(t) = F\big(t, y(t)\big)$, also ist y Lösung der Differentialgleichung. Darüber hinaus gilt

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} (\dots) = y_0,$$

also genügt y auch der Anfangsbedingung. $\square$

Beweis vom Satz 126. Zuerst nehme an, dass I ein endliches abgeschlossenes Intevrall ist und betrachte die Menge

$$X = C^0(I, \mathbb{R}^n) = \big\{ y : I \to \mathbb{R}^n \text{ stetig } \big\}.$$

Man prüft, das X ein $\mathbb{R}$-Vektorraumm mit üblichen Operationen ist, und dass

$$X \ni y \mapsto \|y\|_\infty = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$$

eine Norm ist. Dadurch wird X zu einem vollständigen metrischen Raum (Übung!) mit der Metrik

$$d(y, z) = \|y - z\|_\infty = \sup_{t \in I} \|y(t) - z(t)\|.$$

Wir betrachten jetzt die folgende Abbildung $T : X \to X$:

$$\big(T(y)\big)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds;$$

der Ausdruck auf der rechten Seite ist stetig bzgl. t (sogar differenzierbar), also ist wirklich $T(y) \in X$ für $y \in X$. Lemma 127 besagt, dass $y \in X$ genau dann das Anfangswertproblem (24) löst, wenn $T(y) = y$, d.h. genau dann, wenn y Fixpunkt von T ist. Falls wir zeigen können, dass T eine Kontraktion ist, dann folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für alle $y, z \in X$ haben wir:

$$\big(T(y)\big)(t) - \big(T(z)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(F\big(s, y(s)\big) - F\big(s, z(s)\big)\Big)\, ds.$$

Dank der kontinuierlichen Dreiecksungleichung (22) und der Lipschitz-Bedingung für F gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\big(T(y)\big)(t) - \big(T(z)\big)(t)\Big\| &\le \Big| \int_{t_0}^{t} \Big\|F\big(s, y(s)\big) - F\big(s, z(s)\big)\Big\|\, ds\Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} L\big\|y(s) - z(s)\big\|\, ds\Big| \le L|t - t_0| \sup_{s \in I} \big\|y(s) - z(s)\big\| \le L|I| d(y, z),\end{aligned}$$

wobei $|I|$ die Länge von I ist. Mit $M := L|I|$ gilt also

$$d\big(T(y), T(z)\big) \le M d(y, z).$$

Für $M < 1$, d.h. für $|I| < 1/L$, ist T eine Kontraktion, und wir sind fertig.

Gilt $I \ge 1/L$ (oder überhaupt $|I| = \infty$), dann braucht man zusätzliche Konstruktionen, da der Fixpunktsatz nicht direkt anwendbar ist. Zuerst zerlegt man I in endliche Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ mit $|t_j - t_{j-1}| < 1/L$ und findet eine (eindeutig bestimmte!) Lösung zum Anfangswertproblem auf $[t_0, t_1]$ und $[t_{-1}, t_0]$ (auf diesen Intervallen ist der Fixpunktsatz anwendbar!). Dadurch erhalten wir die Werte $y_1 = y(t_1)$ und $y_{-1} = y(t_{-1})$. Dann löst man das Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(t_1) = y_1$ auf $[t_1, t_2]$ (der Fixpunktsatz ist wieder anwendbar!) und das Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(t_{-1}) = y_{-1}$ auf $[t_{-2}, t_{-1}]$ usw. Die damit konstruierte Funktion y auf I ist stetig, und auf jedem $[t_{j-1}, t_j]$ ist y Lösung der Differentialgleichung. An den Stellen t_j ist sie links- und rechtsseitig differenzierbar und beide Ableitungen sing gleich $F\big(t_j, y(t_j)\big)$, also ist y eine auf I definierte Lösung der Differentialgleichung. Damit haben wir die Existenz gezeigt. Die Eindeutigkeit zeigt man auch iterativ: durch den Fixpunktsatz ist die Lösung auf $[t_0, t_1]$ und $[t_{-1}, t_0]$ eindeutig bestimmt, damit auch die Werte $y(t_{\pm 1})$. Dann ist y auch auf $[t_1, t_2]$ und $[t_{-2}, t_{-1}]$ eindeutig bestimmt usw. □

Aus dem Beweis folgt auch ein Verfahren, mit dem man die Lösung mindestens auf einem kleinen Interval um t_0 approximieren kann: man wählt ein endliches Interval $I' \subset I$ mit $t_0 \in I'$ und $|I'| < 1/L$, dann ist y auf I' der gleichmässige Grenzwert der Folge der Funktionen (y_j): $y_1 \in X$ beliebig (z.B. $y_1(t) \equiv 0$) und $y_{n+1} = T(y_n)$.

Die Lipschitz-Bedingung für F kann in vielen Fällen durch folgendes Lemma geprüft werden.

Lemma 128. *Sei $n = 1$ und $F(t, y)$ für jedes t bzgl. y differenzierbar; diese Ableitung bzgl. y wird $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ bezeichnet. F ist bzgl. y Lipschitzsch mit Lipschitz-Konstante L dann und nur dann, wenn $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(t, y)\right| \le L$ für alle (t, y) gilt.*

Beweis. Wie im Satz 108 (VL7). □

Beispiel 129. (A) $n = 1$, $y' = y$. Hier ist $F(t, y) = y$ (definiert für alle $(t, y) \in \mathbb{R}^2$) und $\dfrac{\partial F}{\partial y}(t, y) = 1$. Also ist F Lipschitzsch bzgl. y, und die Lösungen sind für alle t definiert. Diese Lösungen können wir explizit finden, da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, $y(t) = y(0)e^t$.

(B) $n = 1$, $y' = y^2$. Hier ist $F(t, y) = y^2$ (definiert für alle $(t, y) \in \mathbb{R}^2$), und $\dfrac{\partial F}{\partial y}(t, y) = 2y$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}^2$, daher ist F *nicht* Lipschitzsch bzgl. y; der globale Satz von Picard-Lindelöf ist nicht anwendbar. Aber es handelt sich um eine Differentialgleichung, die man mit Hilfe der Separation der Variablen lösen kann: die einzige Lösung mit der Anfangsbedinung $y(0) = y_0$ ist $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ (Beispiel 73). Für $y_0 > 0$ ist diese Lösung nur auf $(-\infty, 1/y_0)$ definiert.

(C) $n = 2$, $\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ oder $y' = F(t, y)$ für $y = (y_1, y_2)$ und $F(t, y) = (-y_2, y_1)$. Die Funktion F ist für alle $(t, y) \in \mathbb{R}^3$ definiert, und $\|F(t, y) - F(t, z)\| = \big\|(-y_2 + z_2, y_1 - z_1)\big\| = \|y - z\|$, also ist F Lipschitzsch bzgl. y. Daher sind alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ (=für alle t) definiert. Das ist ein System von linearen Differentialgleichungen: solche Systeme werden wir später ausführlich untersuchen (dafür werden viele Begriffe aus der linearen Algebra benötigt). Z.B. ist $y(t) = (\cos t, \sin t)$ Lösung mit $y(0) = (1, 0)$. Nach dem bewiesenen Satz gibt es keine weiteren Lösungen, die diese Anfangsbedingung erfüllen.

(D) Die Funktion $F(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ ist nicht Lipschitzsch (Probleme um 0). Das Anfangswertproblem $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, hat auf $[0, +\infty)$ *mehrere* Lösungen, z.B. $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = t^2$. Also spielt die Lipschitz-Bedingung wirklich eine wichtige Rolle.

Im Beispiel (B) sieht man also, dass es sehr schöne Funktionen F gibt, für die der obige globale Satz nicht anwendbar ist. Allerdings merkt man, dass man das Problem teilweiese beheben kann, indem man auf kleineren Definitionsbereichen arbeitet. Dadurch entsteht die Idee der lokalen Existenz.

Definition 130. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$. Eine **Umgebung** von p ist eine Teilmenge von X, die eine offene Kugel um p enthält. (Insbesondere ist jede offene Menge, die p enthält, eine Umgebung von p.)

Definition 131. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst **lokal Lipschitzsch** bzgl. y, falls es zu jedem $p \in \Omega$ eine Umgebung U von p existiert, so dass $F : U \cap \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzsch bzgl. y ist.

Satz 132 (Lokaler Satz von Picard-Lindelöf). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitzsch bzgl. y. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in \Omega$ ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad t \in (t_0 - \delta, t + \delta), \quad y(t_0) = y_0, \tag{26}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. Da F lokal Lipschitzsch bzgl. y ist, kann man ein $r > 0$ und ein $L > 0$ finden mit folgenden Eigenschaften: $K_r(t_0, y_0) \subset \Omega$ und F ist Lipschitzsch bzgl. y mit Lipschitz-Konstante L auf $K_r(t_0, y_0)$. Sei $\rho > 0$ und $(t, y) \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{K_\rho(y_0)}$, dann gilt $\|(t, y) - (t_0, y_0)\| = \sqrt{(t - t_0)^2 + \|y - y_0\|^2} \le \sqrt{\rho^2 + \rho^2} = \sqrt{2}\,\rho$. Wähle $0 < \rho < r/\sqrt{2}$, dann

$$Q_\rho := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{K_\rho(y_0)} \subset K_r(t_0, y_0).$$

Die Menge Q_ρ ist beschränkt und abgeschlossen und F ist stetig, daher (Satz 125) gibt es ein $M > 0$ mit $\sup_{(t,y)\in Q_\rho} \|F(t, y)\| \le M$. Darüber hinaus gilt immer noch

$$\big\|F(t, y) - F(t, z)\big\| \le L\|y - z\| \text{ für alle } t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho], \quad y, z \in \overline{K_\rho(y_0)}.$$

Wir wählen jetzt ein $\delta > 0$ mit $\delta < \min\big\{\rho, \frac{\rho}{M}, \frac{1}{L}\big\}$. Wir möchten nun wie im globalen Satz von Picard-Lindelöf verfahren. Betrachte

$$X = \big\{y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \overline{K_\rho(y_0)} \text{ stetig}\big\}$$

mit der Metrik $d(y, z) = \sup_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]} \|y(t) - z(t)\|$, dann ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum (Übung!). Jetzt definieren wir

$$T : X \to X, \quad \big(T(y)\big)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds :$$

wie in Lemma 127 sieht man, dass die Lösungen von (26) genau die Fixpunkte von T sind. Man muss allerdings zeigen, dass T wirklich X in sich abbildet: Sei $y \in X$ und $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, dann

$$\big\|\big(T(y)\big)(t) - y_0\big\| = \Big\|\int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds\Big\| \le \Big|\int_{t_0}^{t} \big\|F\big(s, y(s)\big)\big\|\, ds\Big| \le \delta M < \rho,$$

also wirklich $\big(T(y)\big)(t) \in \overline{K_\rho(y_0)}$, und die Stetigkeit von $T(y)$ ist auch klar. Schliesslich zeigt man (genau wie im globalen Satz), dass T Kontraktion ist:

$$\begin{aligned}\Big\|\big(T(y)\big)(t) - \big(T(z)\big)(t)\Big\| &\le \Big|\int_{t_0}^{t} \Big\|F\big(s, y(s)\big) - F\big(s, z(s)\big)\Big\|\, ds\Big| \\ &\le \Big|\int_{t_0}^{t} L\big\|y(s) - z(s)\big\|\, ds\Big| \le L|t - t_0| \sup_{s\in I} \big\|y(s) - z(s)\big\| \le L\delta d(y, z),\end{aligned}$$

und die Wahl von δ garantiert, dass $L\delta < 1$. Also folgt die Behauptung aus dem Fixpunktsatz. $\square$

Definition 133. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ ist eine **maximale Lösung** von $y' = F(t, y)$, falls gilt: wenn J ein Intervall ist mit $I \subset J$ und $z : J \to \mathbb{R}^n$ Lösung derselben Differentialgleichung mit $z = y$ auf I, so folgt $J = I$.

Anders gesagt, ist der Definitionsbereich einer maximalen Lösung maximal: man kann sie nicht in eine Lösung auf einem grösseren Interval fortsetzen. Z.B. ist $y(t) = y_0/(1-y_0 t)$ mit $y_0 > 0$ und dem Definitionsbereich $(-\infty, 1/y_0)$ eine maximale Lösung von $y = y^2$, da es offenbar keine stetige Fortsetzung in $1/y_0$ möglich ist.

Mit Hilfe des lokalen Satzes wird in der Übung folgendes Ergebnis bewiesen:

Satz 134. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitzsch bzgl. y. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine einzige maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad y(t_0) = y_0.$$

Diese maximale Lösung ist auf einem offenen Intervall definert.

Mit Hilfe der Sätze dieser Vorlesung kann man viele Differentialgleichungen "qualitativ" untersuchen, d.h. einige Eigenschaften der Lösungen feststellen, ohne die Gleichung explizit zu lösen (nur für wenige Differentialgleichungen gibt es Formel für Lösungen).

Beispiel 135. Betrachte wieder die maximalen Lösungen von

$$y'(t) = y(t)^2, \quad y(0) = y_0.$$

Für $y_0 = 0$ hat man die maximale Lösung $y(t) \equiv 0$, die auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Wegen der Eindeutigkeit kann keine weitere maximale Lösung den Wert 0 annehmen (also sind alle anderen Lösungen strikt positiv oder strikt negativ).

Sei z.B. $y_0 > 0$, dann gilt für die entsprechende maximale Lösung y: $y(t) > 0$, also $y'(t) = y(t)^2 > 0$, also ist y auf dem ganzen Definitionsbereich streng steigend. Laut Satz 134 ist y auf einem offenen Intevrall (a, b) definiert, wobei $a < 0$ und $b > 0$. Wir bezeichnen

$$A := \lim_{t \to a^+} y(t) \geq 0, \quad B := \lim_{t \to b^-} y(t) > 0.$$

Nehme an, dass $a > -\infty$. Nach dem lokalen Satz 132 gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung z vom Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(a) = A$, auf $(a-\delta, a+\delta)$. Dann gilt $y = z$ auf $(a, a+\delta)$ und man kann y in eine Lösung auf $(a-\delta, b)$ fortsetzen, indem man $y(t) = z(t)$ für $t \in (a-\delta, a]$ setzt, d.h. y war nicht maximal: Widerspruch! Also gilt $a = -\infty$. Nehme an, dass $A > 0$, dann $\lim_{t \to -\infty} y'(t) = \lim_{t \to -\infty} y(t)^2 = A^2 > 0$, und daraus würde $\lim_{t \to -\infty} y(t) \to -\infty$ folgen (Übung!). Daher gilt $A = 0$. Also $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$. Analog zeigt man, dass $B = +\infty$. Alle diesen Behauptungen haben wir bewiesen, ohne die Differentialgleichung zu lösen! Allerdings kann man mit diesem Zugang nicht entscheiden, ob b endlich oder unendlich ist: das wird nur durch die explizite Formel für Lösungen erledigt ($b = 1/y_0$ ist endlich).