Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 13

Abgabe: 28.01.2020, bis 12 Uhr

Aufgabe 13.1. **(a).** Bestimmen Sie, für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalisierbar ist.

(b). Es seien $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des $K^{n\times 1}$ und $A, B \in K^{n\times n}$. Beweisen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren sowohl von A als auch B, so folgt $AB = BA$.

Aufgabe 13.2. Sei $(V, \langle\, , \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit reellem Skalarprodukt. Beweisen Sie für alle $v, w \in V$

(a). die Parallelogrammgleichung: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$

(b). die Polarisationsgleichung: $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$

(c). den Satz des Pythagoras: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle$

Folgern Sie, dass $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$, wenn $v, w \in V$ orthogonal sind.

Aufgabe 13.3. Bestimmen Sie, ob die Abbildung $\langle\, , \rangle \colon \mathbb{C}^{3\times 1} \times \mathbb{C}^{3\times 1} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Skalarprodukt ist:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle := 5\, x_1\, \overline{y_1} + 3\, x_2\, \overline{y_2} + x_3\, \overline{y_3} - i\, x_1\, \overline{y_3} + i\, x_3\, \overline{y_1}$$

Falls ja, geben Sie die darstellende Matrix des Skalarproduktes bezüglich der Standardbasis an.

Aufgabe 13.4. Verwenden Sie das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren, um die Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ des von S aufgespannten Untervektorraums des jeweiligen K-Vektorraums von V mit zugehörigen Standardskalarprodukt zu bestimmen. Geben Sie dann den Vektor $v \in V$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ an:

(a). $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{1\times 4}$, $v = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ und

$$S = \Big(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

(b). $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[\,t\,]_{\leq 2}$ und $S = (2,\, 1-t,\, 1+t+t^2)$ und $v = 2t - 15t^2$.

Die folgende Aufgabe muss nicht abgegeben werden und wird nicht im Tutorium besprochen. Sie dient für motivierte Studierende, die anspruchsvollere Aufgaben sehen wollen. Falls jemand Fragen dazu hat oder die Lösung sehen möchte, bitte in die Sprechstunde von Bernd Schober kommen.

♡-Aufgabe. Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$. Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *selbstadjungiert* bezüglich des Skalarprodukts $\langle\, , \rangle$, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle$.

(a). Seien $F, G \in \mathrm{End}_K(V)$ zwei selbstadjungierte Endomorphismen. Beweisen Sie, dass $F \circ G$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $F \circ G = G \circ F$ gilt.

(b). Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$. Beweisen Sie, dass F genau dann selbstadjungiert ist, wenn $A^T = \overline{A}$, wobei $\overline{A}$ die Matrix ist, welche man erhält, wenn jeden Eintrag von A durch dessen komplex konjungiertes Element ersetzt.