Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Def Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale C^1- *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, falls es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ sowie $n-k$ C^1-Funktionen $f_1, ..., f_{n-k} \colon U \to \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

i) $M \cap U = \{x \in U \colon f_1(x) = ... = f_{n-k}(x) = 0\}$

ii) $\mathrm{Rang}\frac{\partial(f_1,...,f_{n-k})}{\partial(x_1,...,x_n)}(a) = n-k$

Def Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi \colon T \to \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion*, wenn Rang $D\varphi(t) = k$ fur alle $t \in T$.

Def Seien X, Y metrische Räume. Die Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls:

1) f ist stetig

2) f ist bijektiv

3) f^{-1} ist stetig

Satz 4.1 Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) M ist eine k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

ii) M ist lokal als Graph einer Funktion von k Variablen darstellbar, d.h.: Für jedes $a = (a_1, ..., a_n) \in M$ gibt es nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, ..., a_k)$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, ..., a_n)$ sowie eine C^1-Abbildung $g \colon U' \to U''$, sodass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \colon x'' = g(x')\},$$

wobei $x' = (x_1, ..., x_k)$ und $x'' = (x_{k+1}, ...x_n)$ gesetzt ist.

iii) M kann durch lokale Karten überdeckt werden, d.h.: Zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi \colon T \to \mathbb{R}^n$, sodass φ die Menge T homöomorph auf $\varphi(T) = M \cap U$ abbildet.

iv) Zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi \colon U \to V$, so dass $\Phi(M \cap U) = \mathbb{R}^k_0 \cap V$, wobei $\mathbb{R}^k_0 := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_{k+1} = ... = x_n = 0\}$.

Def Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M in a, wenn es eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, gibt mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an M in a wird *Tangentialraum* genannt und werde mit T_aM bezeichnet.

Satz 4.2 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Dann gilt:

a) T_aM ist ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

b) Wenn $\varphi\colon V \to M$ eine Karte von M in der Umgebung von a mit $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi(c) = a, c \in V$ ist, dann bilden die Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(c), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(c)$$

eine Basis von T_aM.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und die Funktionen $f_1, ..., f_{n-k} \in C^1(U, \mathbb{R})$ wie in der Definition einer Mannigfaltigkeit gewählt, d.h. $M \cap U = \{x \in U\colon f_1(x) = ... = f_{n-k}(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, ... f_{n-k})}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a) = n - k$. Dann ist

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^n\colon \langle \operatorname{grad} f_j(a), v\rangle = 0, j = 1, ..., n-k\} = \operatorname{Ker} Df_{|a}.$$

Def Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* an M in a, wenn v auf T_aM senkrecht steht, d.h. $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $w \in T_aM$. Die Gesamtheit aller Normalenvektoren an M in a wird *Normalenraum* genannt und mit N_aM bezeichnet.

Satz 4.3 Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 gilt:

a) N_aM ist ein $(n-k)$-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

b) $N_aM = \{v \in \mathbb{R}^n\colon \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(c), v\rangle = 0, i = 1, ..., k\} = (T_aM)^\perp$.

c) Die Vektoren $\operatorname{grad} f_1(a), ..., \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$ bilden eine Basis von N_aM.