Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

# Mengenlehre

## × Aufgabe 1: Mengen

Gib die folgenden Mengen in auflistender Schreibweise an.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 15 \text{ und } n \geq 5\}$

b) $B = \{\frac{z^2+z}{2} + 5 \mid -4 \leq z \leq 4,\ z \in \mathbb{Z}\}$

c) $C = \{M \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \ :\ 3 \in M\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } m \in B \text{ gilt } n < m.\}$

e) $\tilde{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es existiert mindestens ein } m \in B, \text{ für das } n < m \text{ gilt.}\}$

## × Aufgabe 2: Intervalle

In den reellen Zahlen arbeiten wir häufig mit „zusammenhängenden Bereichen“, den **Intervallen**.

**Definition I**
Seien $a$, $b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$, sodass $a < b$ gilt. Dann definieren wir die folgenden **Intervalle**:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && (\textbf{abgeschlossenes Intervall})\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && (\textbf{rechtsseitig halboffenes Intervall})\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && (\textbf{linksseitig halboffenes Intervall})\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && (\textbf{offenes Intervall})
\end{aligned}$$

Bestimme die folgenden Mengen und mache zu jeder Menge eine Skizze:

1. $[-2,0] \cup (1,3]$
2. $[1,4) \cup (4,7]$
3. $(0,3) \cap [-1,1)$
4. $(0,4] \cup (1,5]$
5. $(-2,1] \cap [-1,1]$
6. $(-2,1] \cup [-1,1]$

## × Aufgabe 3: Relationen

Seien $A, B, C, D, \tilde{D}$ wie in Aufgabe 1 und zusätzlich $E := \{2,3,4\}$.
Finde alle Relationen $\{\subseteq, \in\}$ zwischen den Mengen $A, B, C, D, \tilde{D}, E$.

## × Aufgabe 4: Operationen

Bestimme die folgenden Mengen.

a) $A \cap B \cap D$ mit $A, B, D$ aus Aufgabe 1.

b) *i)* $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 8 teilbar}\}$

   *ii)* $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 6 teilbar}\}$

c) *i)* $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{1,4\}$

   *ii)* $\{1,2,3\} \cap (\{2,3,4\} \cup \{1,4\})$

d) *i)* $(\{2,3,5,6\} \cup \{1,2,3,5,6,7\}) \cap \{2,4,6,8\}$

   *ii)* $(\{2,3,5,6\} \cap \{2,4,6,8\}) \cup (\{1,2,3,5,6,7\} \cap \{2,4,6,8\})$

e) $\{1,4,7,8\} \times \{3,5,6\}$

f) $(\mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z}) \cap \{\big(a, (a+b), b\big) \ : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

## × Aufgabe 5: Formalisieren

Schreibe folgende Mengen formal auf:

a) Alle ganzen Zahlen, die durch drei teilbar sind.

b) Alle Teilmengen von $\mathbb{R}$, die die Zahl 42 enthalten.

c) Alle reellen Lösungen der Gleichung $x^5 - \pi x^2 + 1 = 0$.
*Hinweis: Nur formalisieren, nicht ausrechnen!*

## × Aufgabe 6: Venn-Diagramme

Mit *Venn-Diagrammen* lassen sich Mengen, die in irgendeiner Weise zueinander in Verbindung stehen, gut visualisieren. Das ein oder andere Diagramm habt ihr bestimmt schon einmal gesehen. Betrachten wir zum Beispiel zwei Mengen $A$ und $B$, wobei $A \subseteq B$ gelte, so lässt sich dies durch folgendes Venn-Diagramm veranschaulichen:

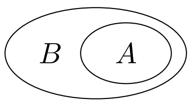


Abbildung 1: Beispiel eines Venn-Diagramms für die Relation $A \subseteq B$.

Achtung! Venn-Diagramme beschreiben eine Situation nie vollständig – sie dienen nur der Veranschaulichung. In obiger Situation könnte zum Beispiel sogar $A = B$ gelten. In diesem Fall ist das Venn-Diagramm eher irreführend.

a) Zeichne jeweils ein Venn-Diagramm, das die folgende Situation beschreibt:

*i)* Seien $A, B$ zwei Mengen mit $A \neq B$ und $A \cap B \neq \emptyset$.

*ii)* Seien $A, B, C$ drei Mengen mit $B \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ und $C \backslash A \neq \emptyset$.

*iii)* Seien $A, B, C$ drei Mengen, wobei je zwei der Mengen einen nicht-leeren Schnitt haben, aber $A \cap B \cap C = \emptyset$ sei.

Mit Venn-Diagrammen lassen sich auch Verknüpfungen von Mengen visualisieren. Im Beispiel von oben lässt sich die Menge $B \backslash A$ wie folgt darstellen:

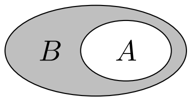


Abbildung 2: Visualisierung der Menge $B \backslash A$ (in grau) mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

b) Veranschauliche jeweils in den Situationen aus a) die folgenden Mengen:

*i)* $A \cap B$.

*ii)* $(C \cap A) \cup B$.

*iii)* $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

## ! Aufgabe 7: Potenzmengen

a) Sei $M$ eine nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche im Allgemeinen nicht? Begründe!

| | | |
|---|---|---|
| *i)* $M \subset \mathcal{P}(M)$, | *ii)* $\emptyset \subset \mathcal{P}(M)$, | *iii)* $M \in \mathcal{P}(M)$ |
| *iv)* $\emptyset \in M$, | *v)* $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, | *vi)* $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(M)$ |

b) Sei $M = \{0, 1\}$. Bestimme folgende Mengen:

*i)* $\mathcal{P}(M)$ , *ii)* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$

!c) Bestimme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

## Aufgabe 8: Anzahl von Elementen

Seien $M, N$ zwei Mengen mit endlich vielen Elementen.

a) Stelle $|M \cup N|$ mit Hilfe von $|M|,\ |M \cap N|$ und $|N|$ dar.

b) Begründe, warum $|M \cup N| \leq |M| + |N|$ gilt.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Begründe, warum für $n$ Mengen $M_1, \ldots, M_n$ gilt:

$$|M_1 \cup \ldots \cup M_n| \leq |M_1| + \ldots + |M_n|$$

d) Stelle $|M \times N|$ mit Hilfe von $|M|$ und $|N|$ dar.

! e) Stelle $|\mathcal{P}(M)|$ mit Hilfe von $|M|$ dar.

Begründe deine Antwort jeweils so gut wie möglich.