Beispielaufgabe für lineare Unabhängigkeit

Beispiel-Aufgabe. Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren.

(a) Sind die folgenden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

$$\vec{a} := \vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z}, \quad \vec{b} := \vec{x} + 2\vec{y} + 5\vec{z}, \quad \vec{c} := 5\vec{x} + 3\vec{y} + 4\vec{z} \,?$$

(b) Sind die folgenden Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig

$$\vec{u} := \vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{v} := \vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{w} := \vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} \,?$$

(c) Angenommen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (aus (b)) und schreiben Sie $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ als linear Kombination der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Voraussetzung: Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren.

(a). *Voraussetzung:* Seien $\vec{a} := \vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z}, \quad \vec{b} := \vec{x} + 2\vec{y} + 5\vec{z}, \quad \vec{c} := 5\vec{x} + 3\vec{y} + 4\vec{z}$

Behauptung: Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

Beweis. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}.$$

Zu zeigen: Es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht all gleich null, sodass obige Gleichheit gilt.

Aus der Definition von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{0} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \rho \vec{c} &= \lambda_1(\vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z}) + \lambda_2(\vec{x} + 2\vec{y} + 5\vec{z}) + \rho(5\vec{x} + 3\vec{y} + 4\vec{z}) = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3)\vec{x} + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)\vec{y} + (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3)\vec{z} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängig sind, muss gelten

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 & & (i) \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 & & (ii) \\ 2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 & & (iii) \end{array}$$

Dies ist äquivalent zur Matrix Gleichung $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten die erweiterte Matrix $(A \mid \vec{0})$:

$$(A \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - 2Z_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1 - Z_2 \\ Z_3 - 3Z_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das zugehörige Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Insbesondere also auch mindestens eine Lösung ungleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eine dieser Lösungen ist zum Beispiel: $\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$.

Man prüft leicht nach, dass für diese Werte $(i), (ii), (iii)$ gelten. Somit gilt also auch:

$$(-7) \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

D.h., die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig. □

(b). *Voraussetzung:* Seien $\vec{u} := \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{v} := \vec{x} - \vec{y}$, $\vec{w} := \vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}$.
Behauptung: Die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear unabhängig.

Beweis. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gegeben mit $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$.
Zu zeigen: Es muss $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ gelten.
Aus der Definition von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ folgt

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \lambda_1(\vec{x} + \vec{y}) + \lambda_2(\vec{x} - \vec{y}) + \lambda_3(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{x} + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\vec{y} + \lambda_3\vec{z}.$$

Da nach Voraussetzung $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängig sind, muss gelten

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & & (I) \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 & & (II) \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 & & (III) \end{array}$$

Aus (III) erhalten wir $\lambda_3 = 0$. Die beiden anderen Gleichungen werden dadurch zu

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \quad (I') \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & \quad (II') \end{array}$$

Hieraus folgert man leicht, dass auch $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, wie gewünscht. Somit sind die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig. $\square$

(c). *Voraussetzung:* Seien nun $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Behauptung: Die Vektoren aus (b) sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es gelten:

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, \quad \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}, \quad \vec{z} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} + \vec{w}$$

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ die angegebenen Vektoren sind.
Wir definieren B als die Matrix, welche als Spalten $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ hat, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w}$. Oder äquivalent: Wir suchen eine Lösung für das lineare Gleichungsystem gegeben durch $B\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \vec{x}$.
Weiter wollen wir die linearen Gleichungssysteme gegeben durch $B\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $B\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \vec{z}$ lösen, wobei $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$.
Wir können natürlich die drei Gleichungssytem lösen und so die behaupteten Lösungen finden. Alternativ wissen wir aber aus Teil (b), dass die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig sind. Daher wissen wir, dass die Matrix B invertierbar ist. Daraus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = B^{-1}\vec{x} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = B^{-1}\vec{y} \quad \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = B^{-1}\vec{z},$$

wobei B^{-1} die zu B inverse Matrix ist. Bestimmen wir also die zu B inverse Matrix:

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow (\textit{selbst}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_3 \mid B^{-1})$$

Wie eben beschrieben, erhalten wir hieraus: $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, und $\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, und $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} + \vec{w}$. $\square$