Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 6

Aufgabe 1. Finden Sie das maximale Volumen des Quaders im $\mathbb{R}^3$,

a) dessen Oberflächeninhalt gleich S ist.

b) der in einen geraden Kegel mit Radius r und Höhe H einbeschrieben ist.

Aufgabe 2. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xyz \\ yx^2 - y^2 z \end{pmatrix}, \qquad g(x,y,z) := \begin{pmatrix} xe^{-y} \\ z \\ x^3 z \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob $f \circ g$ in $(1,0,2)$ differenzierbar ist und berechnen Sie dort die Jacobi-Matrix.

Aufgabe 3. Sei $f\colon [2,3] \times [2,3] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + 2 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f eine strikte Kontraktion auf der Menge $[2,3] \times [2,3]$ ist. Das heißt, es gibt ein $L < 1$ sodass für alle $a, b \in [2,3] \times [2,3]$ gilt $\|f(a) - f(b)\| \le L \cdot \|a - b\|$.

Bemerkung. Sie prüfen damit eine der Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz, welcher eine wichtige Rolle in der Mathematik spielt und Sie demnächst in der Vorlesung Analysis IIa kennenlernen werden.

Aufgabe 4. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

wobei $u = u(x,y)$ gesucht wird.

a) Schreiben Sie die Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ) mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r \sin\varphi$.

b) Lösen Sie die erhaltene Gleichung in Polarkoordinaten. Finden Sie dann die Lösung der ursprünglichen Gleichung, indem Sie zu den alten Koordinaten übergehen.

Abgabe: Bis 18. Juni um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1		2	3	4		
	a	b			a	b	
Punkte	3	3	4	4	3	3	20

Präsenzaufgaben

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Leiten Sie eine „einfache“ Formel für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_k}$$

her.

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f auf jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{B_r(0)}$ Lipschitzstetig ist.

3. Sei $p\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die durch $(r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ definierte Abbildung. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $U := u \circ p$. Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten die Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

hat.

4. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf ihrem Definitionsbereich U differenzierbar sind und berechnen Sie dort ihre Ableitung Df, Dg bzw. Dh.

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x + \sqrt{y} \\ \sqrt{x} + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \in U := \mathbb{R}^2_{>0}\,.$$

$$g(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad x \in U := \mathbb{R}\,.$$

$$h(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 + \ln x \\ x\sqrt{y} + \sqrt{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \in U := \mathbb{R}^3_{>0}\,.$$

5. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige C^1-Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(x,y,z) := f\left(\frac{x-y}{xy}, (x-y)e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$ die Gleichung

$$x^2 z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

erfüllt.

6. Zeigen Sie, dass die Kettenregel für partiell differenzierbare Funktionen im Allgemeinen nicht gilt, indem Sie ein Beispiel für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ finden, so dass alle partiellen Ableitungen von f im Ursprung existieren und gleich Null sind, $g(0) = (0,0)$, $g'(0) = (0,0)$, aber die Komposition $f \circ g$ in 0 nicht differenzierbar ist.