Beispielaufgabe für das Lösen linearer Gleichungssysteme

Beispiel-Aufgabe *Voraussetzung:* Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{llllll} \frac{1}{5}x_1 & +\frac{1}{10}x_2 & & +\frac{2}{5}x_4 & & =\frac{4}{5} \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +3x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & -x_5 & =2 \\ -3x_1 & -\frac{3}{2}x_2 & +9x_3 & +2x_4 & -3x_5 & =-5 \end{array}\right\} (*)$$

Behauptung: Die Lösungsmenge von $(*)$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ \frac{95}{9} \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu_2, \mu_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Beweis. Zunächst bestimmen wir die Matrix A und den Vektor $\vec{b}$ so, dass $(*)$ äquivalent ist zu $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. Aus $(*)$ liest man ab, dass

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & -\frac{3}{2} & 9 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

diese Bedingung erfüllen.
Wir wollen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \vec{b})$ auf Zeilenstufenform bringen. Um ein wenig schönere Einträge zu haben, multiplizieren wir die Zeilen mit geeigneten Faktoren, um ganzzahlige Einträge zu bekommen:

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{3} & -1 & 2 \\ -3 & -\frac{3}{2} & 9 & 2 & -3 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1 \cdot 10 \\ Z_2 \cdot 6 \\ Z_3 \cdot 2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ -6 & -3 & 18 & 2 & -6 & 12 \\ -6 & -3 & 18 & 4 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

(1) Wir bestimmen die erste Spalte, in der ein Eintrag ungleich Null steht. Wir erhalten $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

(2) Wir wählen einen Eintrag dieser Spalte, der ungleich Null ist und eliminieren alle anderen Einträge ungleich Null: Hier wählen wir die 2 und bekommen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ -6 & -3 & 18 & 2 & -6 & 12 \\ -6 & -3 & 18 & 4 & -6 & -10 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2 + 3Z_1 \\ Z_3 + 3Z_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 18 & 14 & -6 & 36 \\ 0 & 0 & 18 & 16 & -6 & 14 \end{array}\right)$$

Damit haben wir die erste Stufe erzeugt.

(3) Als Nächstes wiederholen wir das vorherige für $B := \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 18 & 14 & -6 & 36 \\ 0 & 0 & 18 & 16 & -6 & 14 \end{array}\right)$.

(1') Die erste Spalte ungleich Null ist $\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}$.

(2') Wir wählen den ersten Eintrag der Spalte und ziehen von der letzten Zeile einmal die vorletzte Zeile ab. Der Übersicht wegen, wenden wir dies für die gesamte Matrix an und nicht nur B:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 18 & 14 & -6 & 36 \\ 0 & 0 & 18 & 16 & -6 & 14 \end{array}\right) \overset{Z_3 - Z_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 14 & -6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -22 \end{array}\right)$$

(3') Wir beobachten, dass die Matrix schon Zeilenstufenform hat. Die Pivotelemente sind mit einem Kasten markiert.
Wir erkennen aus der Zeilenstufenform, dass das Gleichungssystem $(*)$ unendlich viele Lösungen hat.

Wir gehen weiter und wollen die reduzierte Gaussche Normalform bestimmen: Hierfür müssen wir elementare Zeilenoperationen durchführen, sodass in den Spalten, welche ein Pivotelement enthalten, der einzige Eintrag ungleich Null das Pivotelement ist.
In unserem gegeben Fall müssen wir also die 4. Spalte noch verändern:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 14 & -6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{Z_1 - 2Z_3 \\ Z_2 - 7Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 0 & -6 & 190 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -22 \end{array}\right)$$

Weiter müssen wir die Zeilen mit einem geeigneten Skalar multiplizieren, damit die Pivotelement gleich 1 werden.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 0 & -6 & 190 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{Z_1 \cdot \frac{1}{2} \\ Z_2 \cdot \frac{1}{18} \\ Z_3 \cdot \frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{95}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -11 \end{array}\right)$$

Als Nächstes müssen wir die Lösung des homogenen Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ bestimmen. Daher betrachten wir

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da die zweite und die fünfte Spalt kein Pivotelement enthalten, gilt

$$\text{Lös}(A \mid \vec{0}) = \{\lambda_2 \vec{y}_2 + \lambda_5 \vec{y}_5 \mid \lambda_2, \lambda_5 \in \mathbb{R}\},$$

für Vektoren $\vec{y}_2 =: \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}, \vec{y}_5 =: \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$, die wie folgt bestimmt sind:

- $u_2 := 1$, da $\vec{u}$ der 2. Spalte zugeordnet wird.
- $u_5 := 0$, da $\vec{u}$ der 2. Spalte zugeordnet wird und die 5. Spalte ebenfalls kein Pivotelement enthält.
- Die restlichen Einträge werden durch die 2. Spalte bestimmt:

$$\begin{aligned} u_1 &:= -\tfrac{1}{2} = (-1) \cdot (1.\text{ Eintrag der 2. Spalte}) \\ u_3 &:= 0 = (-1) \cdot (2.\text{ Eintrag der 2. Spalte}) \\ u_4 &:= 0 = (-1) \cdot (3.\text{ Eintrag der 2. Spalte}) \end{aligned}$$

Beachten Sie hierbei, dass: in der 1. Spalte das 1. Pivotelement steht,
in der 3. Spalte das 2. Pivotelement steht,
und in der 4. Spalte das 3. Pivotelement steht.

Insgesamt erhalten wir:

$$\vec{y}_2 = \vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und analog: } \vec{y}_5 = \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man rechnet leicht nach, dass $A\vec{y}_2 = \vec{0} = A\vec{y}_5$. Also ist

$$\text{Lös}(A \mid \vec{0}) = \left\{ \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_2, \lambda_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu_2, \mu_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schließlich benötigen wir noch eine spezielle Lösung $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$ mit $A\vec{z} = \vec{b}$. Jene erhalten wir wie folgt:

Erinnerung, wir hatten aus der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid \vec{b})$ folgende Matrix erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{95}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -11 \end{array} \right)$$

Wir definieren nun

- $z_2 := z_5 := 0$ (da die 2. und die 5. Spalte kein Privotelement enthalten).
- $z_1 := 26$ (da in der 1. Spalte das 1. Pivotelement auftaucht und 26 der Eintrag der 1. Zeile des angehängten Vektors ist).
- $z_3 := \frac{95}{9}$ (da in der 3. Spalte das 2. Pivotelement auftaucht und $\frac{95}{9}$ der Eintrag der 2. Zeile des angehängten Vektors ist).
- $z_4 := -11$ (da in der 4. Spalte das 3. Pivotelement auftaucht und -11 der Eintrag der 3. Zeile des angehängten Vektors ist).

Man rechnet nach, dass für $\vec{z} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ \frac{95}{9} \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Gleichung $A\vec{z} = \vec{b}$ erfüllt ist.

Folglich ist

$$\text{Lös}(A \mid \vec{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ \frac{95}{9} \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu_2, \mu_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

□