Übungsblatt 10 - Lösungsvorschläge

30. Juni 2020

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung für die folgenden Differentialgleichungen:

1. $y'' + y = \sin x + e^x$,
2. $y'' - 4y = e^x \cos x$,
3. $y'' - 6y' + 9y = xe^x$.

1. Zunächst wird die homogene Gleichung gelöst:
   $y'' + y = 0$ hat das dazugehörigen charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$. P hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i$, also ergibt sich das reellwertige Fundamentalsystem $(\cos x, \sin x)$.
   Nun zum inhomogenen Teil:
   Wir betrachten die beiden Gleichungen $y'' + y = \sin x$ und $y'' + y = e^x$ getrennt.
   $y'' + y = e^x$: $b(x) = e^x$ liefert uns $\mu = 1$. Mit $P(\mu) = P(1) = 2 \neq 0$ haben wir also $k = 0$ und die spezielle Lösung der Form:
   $$y_{s1}(x) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)} x^k e^{\mu x} = \frac{e^x}{2}.$$
   $y'' + y = \sin x$: Wir halten zunächst fest: $\mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin x$. Daher lösen wir zuerst die LDG $z'' + z = e^{ix}$. $b(x) = e^{ix}$ liefert uns $\mu = i$. Mit $P(i) = 0$ und $P'(i) = 2i \neq 0$ haben wir also $k = 1$ und die spezielle Lösung der Form:
   $$z_s(x) = \frac{xe^{ix}}{2i} = \frac{x(\cos x + i \sin x) \cdot (-i/2)}{2i \cdot (-i/2)} = -\frac{x \cos x}{2} i + \frac{x \sin x}{2}.$$
   Eine spezielle Lösung für unsere Gleichung ist dann:
   $$y_{s2}(x) = \mathrm{Im}(z_s(x)) = -\frac{x \cos x}{2}.$$
   Für die allgemeine Lösung gilt dann:
   $$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2} - \frac{x \cos x}{2}.$$
2. Zunächst zur homogenen Gleichung:
   $y'' - 4y = 0$ liefert uns $P(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2)$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Ein Fundamentalsystem ist dann (e^{2x}, e^{-2x}).
   Für die inhomogene Gleichung bemerken wir zunächst: $e^x \cos x = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$. Wir lösen also zuerst die inhomogene LDG $z'' - 4z = e^{(1+i)x}$. $b(x) = e^{(1+i)x}$ liefert uns $\mu = 1 + i$. Mit $P(1 + i) = -4 + 2i \neq 0$ haben wir also $k = 0$ und die spezielle Lösung der Form:
   $$\begin{aligned} z_s(x) = \frac{(e^{(1+i)x}) \cdot (-4 - 2i)}{(-4 + 2i) \cdot (-4 - 2i)} &= \frac{(\cos x + i \sin x)(-4 - 2i)}{4^2 + 2^2} e^x \\ &= \frac{-4 \cos x + 2 \sin x + (-4 \sin x - 2 \cos x)i}{20} e^x. \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung für unsere Gleichung ist dann:

$$y_s(x) = \mathrm{Re}(z_s(x)) = \frac{-4\cos x + 2\sin x}{20} e^x = -\frac{2\cos x - \sin x}{10} e^x.$$

Für die allgemeine Lösung gilt dann:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{2\cos x - \sin x}{10} e^x.$$

3. Zunächst zur homogenen Gleichung:
   $y'' - 6y' + 9y = 0$ liefert uns $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = 3$. Ein Fundamentalsystem ist dann (e^{3x}, xe^{3x}).
   Für den inhomogenen Teil bemerken wir, dass dieser von der Form $b(x) = x^m e^{\mu x}$ ist, mit $m = 1$ und $\mu = 1$. Da 1 keine Nullstelle von P ist, gilt $k = 0$ und unser Ansatz ist: $y_s(x) = (ax + b)e^x$. Setzen wir diesen Ansatz in die LDG ein, bekommen wir:

$$y_s'(x) = (ax + a + b)e^x \qquad\qquad y_s''(x) = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_s'' - 6y_s' + 9y_s &= ((ax + 2a + b) - 6(ax + a + b) + 9(ax + b))e^x \\ &= (4ax - 4a + 4b)e^x \overset{!}{=} xe^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 4a = 1, \\ 4b - 4a = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array} \Rightarrow y_s(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})e^x = \frac{x+1}{4} e^x.$$

Für die allgemeine Lösung gilt dann:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{x+1}{4} e^x.$$

Aufgabe 2

Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \frac{e^x}{\sin x}.$$

1. Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem (y_1, y_2) für die entsprechende homogene Gleichung.

2. Bestimmen Sie die Wronski-Determinante für das gefundene Fundamentalsystem.

3. Finden Sie eine spezielle Lösung der Gleichung.

1. Die entsprechende homogene Gleichung liefert uns das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem $(y_1,\ y_2) = (e^x \cos x,\ e^x \sin x)$.

2. Die Wronski-Determinante lässt sich für Gleichungen zweiter Ordnung berechnen durch:

$$\begin{aligned} W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) &= e^x \cos x \cdot (\sin x + \cos x)e^x - (\cos x - \sin x)e^x \cdot e^x \sin x \\ &= (\cos\sin + \cos^2 - \cos\sin + \sin^2)e^{2x} = e^{2x}. \end{aligned}$$

3. Mit Hilfe der Variation der Konstanten lässt sich eine spezielle Lösung durch die Gleichung

$$y_s(x) = -y_1 \int \frac{by_2}{W} + y_2 \int \frac{by_1}{W} = -e^x \cos x \int \frac{e^x \cdot e^x \sin x}{\sin x \cdot e^{2x}} dx + e^x \sin x \int \frac{e^x \cdot e^x \cos x}{\sin x e^{2x}} dx$$

finden. Zunächst zum ersten Integral, indem sich alle Faktoren im Bruch wegkürzen: Es bleibt nur $\int 1 dx = x$. Für das zweite Integral rechnen wir:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \overset{\sin x = t}{=} \ln |t| = \ln |\sin x|.$$

Unsere spezielle Lösung ist also

$$y_s(x) = (-x \cos x + \sin x \ln |\sin x|) e^x$$

Aufgabe 3

Betrachte die inhomogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - \frac{2x+1}{x} y'(x) + \frac{x+1}{x} y(x) = xe^x, \ x > 0. \tag{1}$$

(a) Finden Sie eine Lösung y_1 der Form $y_1(x) = e^{ax}$ für die zugehörige homogene Gleichung.

(b) Finden Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung mit Hilfe der Liouvillschen Formel für die Wronski-Determinante.

(c) Finden Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

(a) Wir setzen den Ansatz $y_1(x) = e^{ax}$ in die entsprechende homogene Gleichung ein und erhalten

$$y_1(x) = e^{ax} \qquad y_1'(x) = ae^{ax} \qquad y_1''(x) = a^2 e^{ax}$$

$$\begin{aligned}
(a^2 - \frac{2x+1}{x} a + \frac{x+1}{x}) e^{ax} &= (\frac{a^2 x - 2ax - a + x + 1}{x}) e^{ax} \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \ a^2 x - 2ax - a + x + 1 &= (a^2 - 2a + 1)x - (a-1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{matrix} & \quad \Leftrightarrow a = 1.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also eine erste Lösung für die homogene Gleichung: $y_1(x) = e^x$.

(b) Um das Fundamentalsystem zu vervollständigen benutzen wir die Liouvillsche Formel. Zunächst muss dafür die zugehörige Wronski-Determinante bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \exp(-\int a_1(x) dx) = \exp(-\int -\frac{2x+1}{x} dx) \\
&= \exp(\int 2dx + \int \frac{1}{x} dx) \overset{x \geq 0}{=} \exp(2x + \ln x) \\
&= e^{2x} x.
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt lässt sich dann direkt $y_2(x)$ berechnen:

$$y_2(x) \overset{\text{Liouville}}{=} y_1 \int \frac{W}{y_1^2} = e^x \int \frac{xe^{2x}}{e^{2x}} dx = \frac{x^2}{2} e^x$$

Ein Fundamentalsystem ist also $(e^x, \frac{x^2}{2} e^x)$.

(c) Um abschließend eine spezielle Lösung zu finden, benutzen wir wie oben die Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} y_s(x) = -y_1 \int \frac{by_2}{W} + y_2 \int \frac{by_1}{W} &= -e^x \int \frac{xe^x \cdot x^2 e^x}{2 \cdot xe^{2x}} dx + \frac{x^2}{2} e^x \int \frac{xe^x \cdot e^x}{xe^{2x}} dx \\ &= -e^x \int \frac{x^2}{2} dx + \frac{x^2}{2} e^x \int 1 dx \\ &= -e^x \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} e^x = \frac{1}{3} x^3 e^x. \end{aligned}$$