Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 10

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x = 2e^{-x}$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt. Veranschaulichen Sie es geometrisch.

Aufgabe 2.

a) Sei f eine stetige Selbstabbildung des Intervalls $[a, b]$, d.h. die Funktion $f\colon [a, b] \to [a, b]$ ist stetig. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt, so dass $f(\xi) = \xi$ gilt. ξ heißt *Fixpunkt* von f.

   Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf $g(x) = f(x) - x$ an.

b) Gilt die Behauptung in a) für nicht abgeschlossene Intervalle?

Aufgabe 3. Seien $f, g\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ stetig. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) ? Es gibt ein $\mu > 0$ derart, dass $\frac{1}{f(x)} \geq \mu$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. ?

b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist $-f$ monoton fallend.?

Aufgabe 4. Sei a eine positive reelle Zahl, $a \neq 1$, und $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

b) Die Funktion f ist stetig.

c) Die Funktion f ist bijektiv. Argumentieren Sie die Existenz der Umkehrfunktion f^{-1} und bestimmen Sie eine Formel für diese, indem Sie die Gleichung $y = a^x$ nach x auflösen. Die Umkehrfunktion wird mit $\log_a x$ bezeichnet und *Logarithmus zur Basis a* genannt.

d) $\log_a(x^y) = y \log_a x$ für $x > 0, y \in \mathbb{R}$.

e) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ für $x, y > 0$.

Abgabe: Bis 10. Januar vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1	2		3		4					
		a	b	a	b	a	b	c	d	e	
Punkte	3	3	2	3	2	1,5	1,5	2	1,5	1,5	21

Präsenzaufgaben

1. Zwei Studenten haben vor, ein unregelmäßig mit Schinken belegtes kreisförmiges Brot zu verspeisen. Zeigen Sie, dass es sich gerecht teilen lässt.

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit auf ihren Definitionsbereichen:

a)$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ b)$f(x) = \dfrac{\sin(\ln(\sqrt{x} - 1))}{x - 3}$ c)$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

3. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.

4. Bestimmen Sie $\ln\frac{1}{e}, \log_3 27, \log_{\sqrt{4}} 4$.

5. Seien a, b positive reelle Zahlen, $a, b \neq 1$. Zeigen Sie:

a) Für alle $x, y > 0$ gilt $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

b) Es gilt folgende Umrechnungsformel für Logarithmen zu verschiedenen Basen: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $x > 0$.

6. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) ? Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(0) = 0$ und ist f unstetig in 0 und ist g stetig in 0, so ist die Komposition $f \circ g$ unstetig in 0. ?

b) ? Gilt $\exists L > 0\ \forall x, y \in D(f) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, so ist f stetig auf seinem Definitionsbereich $D(f)$. ?

c) ? ? Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, so ist $f + g$ monoton wachsend.?

d) ? Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$, so nimmt f sein Minimum an. ?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!