CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 4

Abgabe: 12.11.2019, bis 12 Uhr

Aufgabe 4.1. Seien $t = 2$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} t & 2t & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & t^2+t \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

Berechnen Sie $A^2 \cdot B$ und $A^t + 2A^T - C$.

Aufgabe 4.2. Sei K ein Körper. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}$$

mit unbestimmten Einträgen.

(a). Sei $\lambda \in K$. Bestimmen Sie die Matrix A_λ, welche Sie aus A durch Addieren des λ-fachen der ersten Zeile zur dritten Zeile erhalten.

(b). Sei B die Matrix, die Sie bekommen, wenn Sie die elementare Zeilenoperation aus (a) für die Einheitsmatrix E_4 anwenden. Berechnen Sie die Matrizenprodukte $B \cdot A$ und $A \cdot B^T$.

(c). Bestimmen Sie die Matrix $\widetilde{A}$, welche Sie durch Vertauschen der zweiten und dritten Zeile aus A erhalten.

(d). Sei $\widetilde{B}$ die Matrix, die Sie bekommen, wenn Sie die elementare Zeilenoperation aus (c) für die Einheitsmatrix E_4 anwenden. Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\widetilde{B} \cdot A$ und $A \cdot \widetilde{B}^T$.

Aufgabe 4.3. Seien K ein Körper und

$$A := (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

eine Matrix der Größe $m \times n$ mit unbestimmten Einträgen.
Wir sagen A *hat eine Nullzeile*, falls gilt: $\exists\, i_0 \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{i_0,j} = 0,$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.
Analog, sagen wir A *hat eine Nullspalte*, falls gilt: $\exists\, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_{i,j_0} = 0,$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a). Falls A eine Nullzeile hat, so hat auch $A \cdot B$ eine Nullzeile, für jede Matrix $B \in K^{n\times p}$.

(b). Falls A eine Nullspalte hat, so hat auch $C \cdot A$ eine Nullspalte, für jede Matrix $C \in K^{q\times m}$.

(c). Angenommen $m = n$. Falls A eine Nullzeile oder eine Nullspalte hat, ist A nicht invertierbar.

Aufgabe 4.4. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem bestimmt durch $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sind.}$$

(a). Verwenden Sie elementare Zeilenoperationen, um in der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid \vec{b})$ die ersten Einträge der zweiten und dritten Zeile zu eliminieren. Was ist das resultierende lineare Gleichungssystem?

(b). Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, das Sie in (a) berechnet haben. Ist dies auch eine Lösung für $A\vec{x} = \vec{b}$?

(c). Betrachten Sie erneut die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \vec{b})$. Eliminieren Sie für $i \in \{2, 3, 4\}$ den ersten Eintrage der i-ten Spalte, indem Sie die erste von der i-ten Spalte subtrahieren. Was ist das resultierende lineare Gleichungssystem?

(d). Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, das Sie in (c) berechnet haben. Ist dies auch eine Lösung für $A\vec{x} = \vec{b}$?

Präsenzaufgabe 4.5. Seien

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -225 & 13 & \frac{1}{99} & -4 \\ 0 & 0 & -5 & \frac{37}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{57} & \frac{37}{7} & -1 \\ 0 & 0 & -537 & \frac{3}{91} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(a). Was können Sie über die Anzahl der Lösungen für das Gleichungssystem, welches durch

$$\textbf{(i)}\ A\vec{x} = \vec{b}, \qquad \textbf{(ii)}\ B\vec{x} = \vec{b}, \qquad \textbf{(iii)}\ C\vec{x} = \vec{b}$$

gegeben ist, aussagen?

(b). Bestimmen Sie die inverse Matrix zu A und überprüfen Sie das Ergebnis auf Korrektheit.