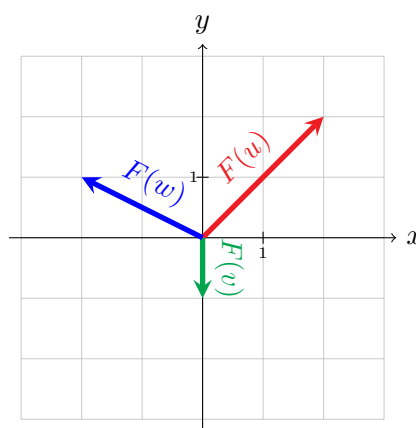
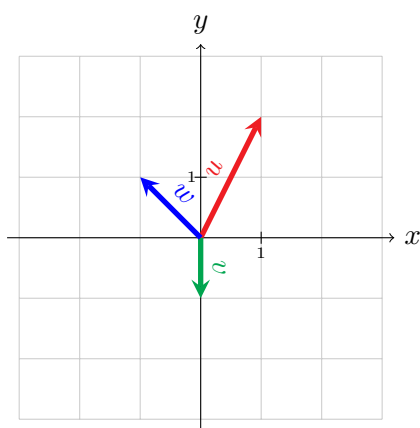


Lineare Algebra

Aufgabe 1

- a) Gegeben sind im Folgenden die Wirkung von linearen Abbildungen F auf gewisse Vektoren. Was bewirken die lineare Abbildungen anschaulich? Gib außerdem die darstellende Matrix an.

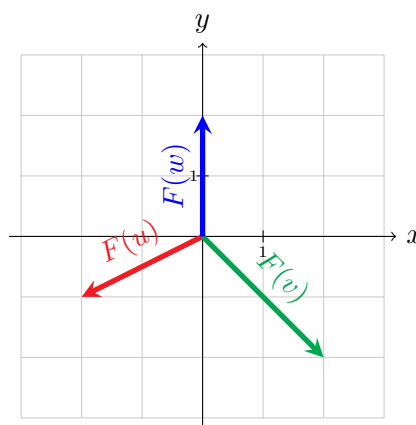
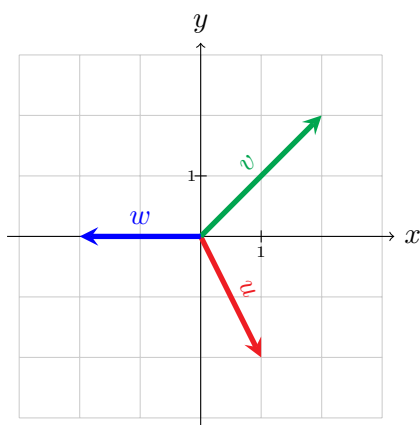
i)



Lösung: F streckt Vektoren in x -Richtung um den Faktor 2.

Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii)



Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

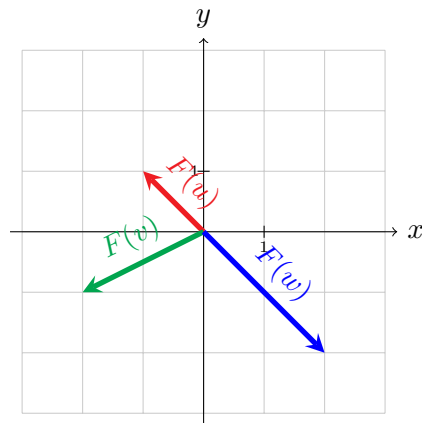
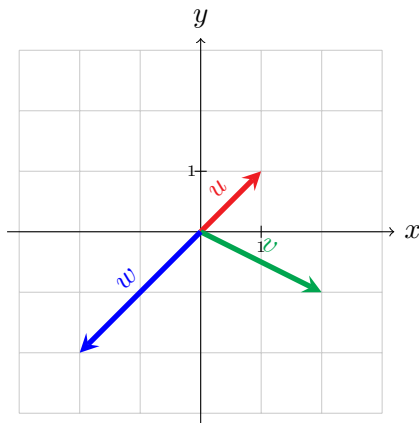
Lösung: F dreht Vektoren um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung.

Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) Mache zu folgenden linearen Abbildungen eine Skizze und stelle die darstellende Matrix auf.

- i) Spiegelung an der y -Achse.

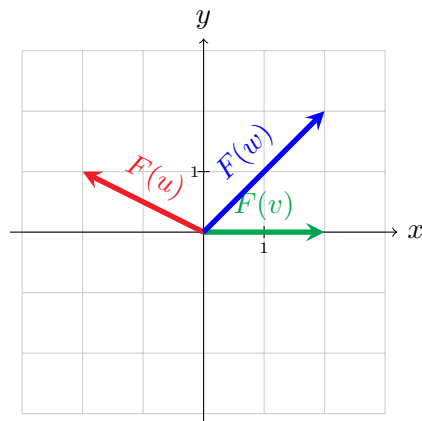
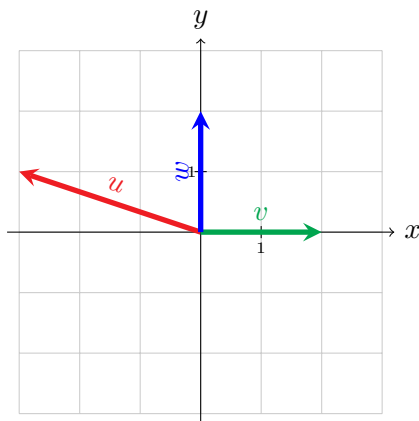
Lösung: Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



- ii)

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung: Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



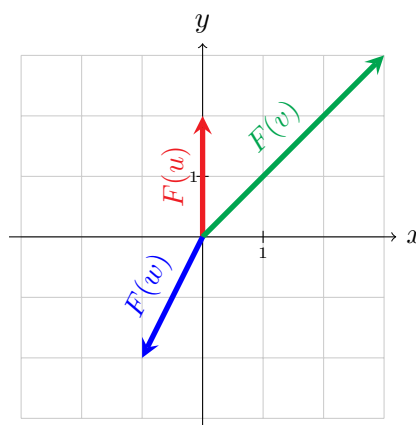
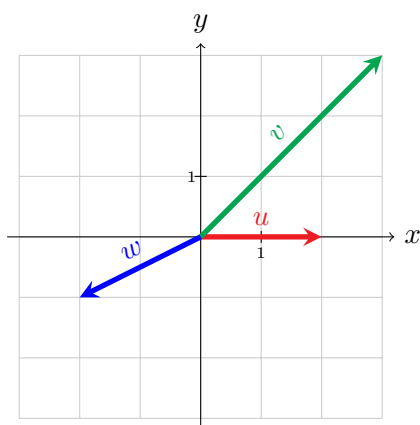
Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

- c) Mache zu den zu folgenden Matrizen gehörenden linearen Abbildungen eine Skizze und beschreibe, was die Abbildungen bewirken.

i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

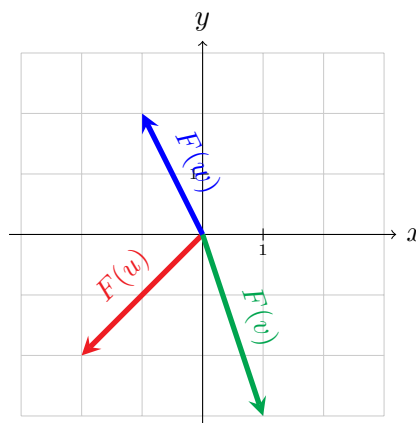
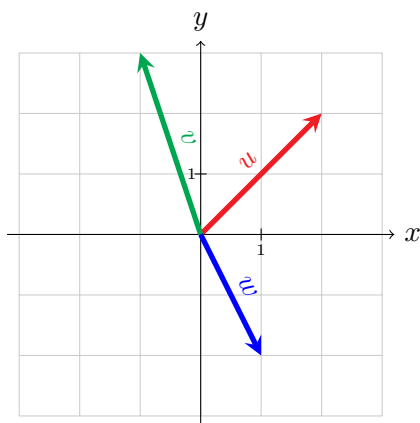
Lösung: Die zugehörige lineare Abbildung spiegelt an der Winkelhalbierenden.



ii)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die zugehörige lineare Abbildung bewirkt eine Punktspiegelung im Ursprung bzw. eine Drehung um 180° um den Ursprung.



Aufgabe 2: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Berechne:

a)

$$i) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ii) \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

d)

$$i) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hast du eine geometrische Erklärung für das Ergebnis?

Lösung:

$$i) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch korrespondiert, wie bereits gesehen, die erste Matrix zur Drehung Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn, die zweite zur Drehung um 90° im Uhrzeigersinn. Die Rechnung sagt nun, dass, wenn man erst gegen und dann im Uhrzeigersinn (oder andersherum) dreht, nicht passiert. Das ist aber klar.

Aufgabe 3

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix. Zeige, dass

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ v \mapsto A \cdot v$$

eine lineare Abbildung ist. Benutze dabei nicht Satz 13.9.

Lösung: Beweis: Seien $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$F(v_1 + v_2) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F(v_1) + F(v_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & by_1 \\ cx_1 & dy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 & by_2 \\ cx_2 & dy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$.

Außerdem gilt

$$F(\lambda \cdot v_1) = F\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda ax_1 + \lambda by_1 \\ \lambda cx_1 + \lambda dy_1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda F(v_1) = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda ax_1 + \lambda by_1 \\ \lambda cx_1 + \lambda dy_1 \end{pmatrix},$$

also $F(\lambda \cdot v_1) = \lambda F(v_1)$.

Damit ist F eine lineare Abbildung.

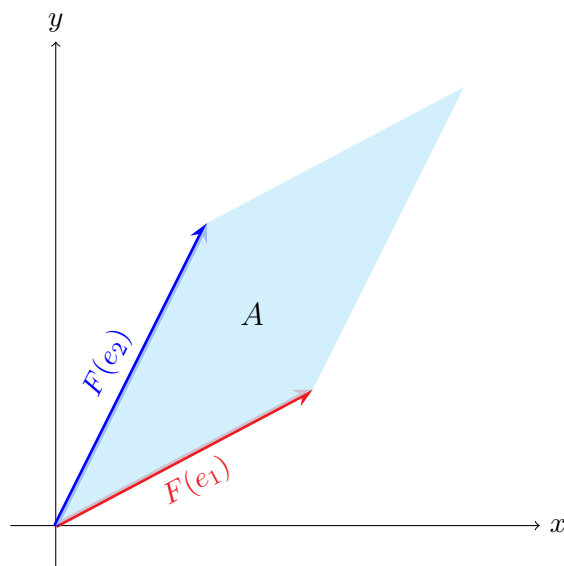
□

! Aufgabe 4

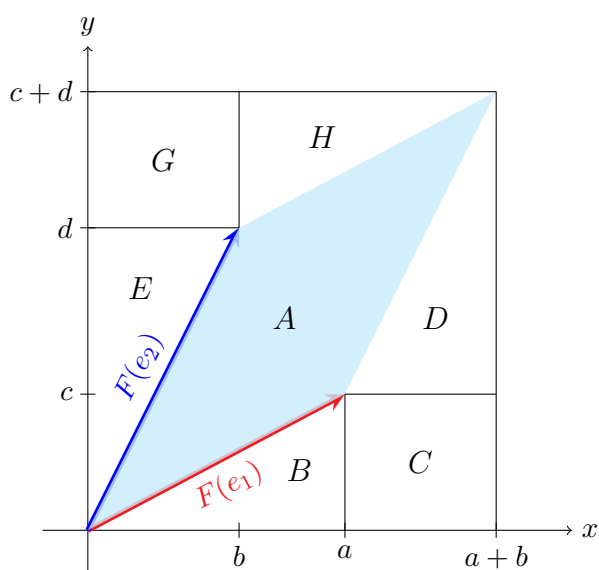
- a) Gegeben sei eine lineare Abbildung F mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die beide Einheitsvektoren in den rechten, oberen Quadranten abbildet und die Orientierung erhält, d.h. $F(e_2)$ „links“ von $F(e_1)$ lässt (sieht Skizze). Zeige, dass der Flächeninhalt A des von $F(e_1)$ und $F(e_2)$ aufgespannten Parallelogramms gleich $ad - bc$ ist.

Hinweis: Verschreibe das Parallelogramm einem Rechteck ein und berechne die Fläche des Rechtecks sowie die Fläche, die nicht von Parallelogramm eingenommen wird.

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen



Lösung: Wir verschreiben das Parallelogramm einem Rechteck mit den Seitenlängen $a+b$ und $c+d$ ein. Die Fläche, die nicht von A eingenommen wird, teilen wir wie in der Skizze in Teilflächen ein. Diese sind alle Rechtecke bzw. Dreiecke mit bekannter Breite und Höhe, deren Fläche sich leicht berechnen lässt.



Die Fläche des großen Rechtecks ist gleich $(a+b)(c+d)$. Außerdem gilt:

$$B = \frac{1}{2}ab, \quad C = bc, \quad D = \frac{1}{2}bd, \quad E = \frac{1}{2}bd, \quad G = bc, \quad H = \frac{1}{2}ab.$$

(Alternativ lässt es sich auch mit Symmetrie erkennen, dass $B = H, G = C, D = E$ gilt.)

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

Damit gilt nun:

$$A = (a + b)(c + d) - (2bc + ac + bd) = ad - bc.$$

Bemerkung: Die Formel gilt auch im allgemeinen Fall, wenn man den Flächeninhalt des Parallelogramms als negativ deklariert, wenn $F(e_2)$ „rechts“ von $F(e_1)$ ist. Dies kann im Folgenden verwendet werden.

- b) Zeige, dass F nicht surjektiv ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.

Lösung: $ad - bc = 0$ bedeutet, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms 0 ist. Dies kann aber nur passieren, wenn $F(e_1)$ und $F(e_2)$ auf einer Geraden liegen (oder min. einer der Vektoren gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist). Dann liegt aber $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xF(e_1) + yF(e_2)$ für jeden Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf ebendieser Geraden. Dann bildet aber F nur auf diese Gerade ab, trifft also nicht ganz \mathbb{R}^2 , ist also nicht surjektiv.

- c) Zeige, dass F nicht injektiv ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.

Lösung: Wie in b) liegen $F(e_1)$ und $F(e_2)$ auf einer Geraden. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $F(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da auch $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist hier F nicht injektiv.

Fall 2: $F(e_1) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Gerade, auf der $F(e_1)$ liegt, sind genau die Vektoren der Form $\lambda F(e_1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Da $F(e_2)$ auf dieser Gerade liegt, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda F(e_1) = F(e_2)$. Wegen der Linearität gilt nun $F(\lambda e_1) = F(e_2)$. Wegen $\lambda e_1 \neq e_2$ ist F nicht injektiv.