Übungsblatt 3 - Lösungsvorschläge

Orville Damaschke

9. Mai 2020

Aufgabe 3.1

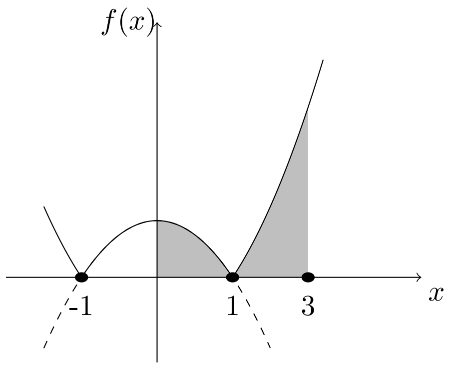
In dieser Aufgabe wird die Newton-Leibniz-Formel (Korollar 37) verwendet.

(a) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ ist auf $[0,1]$ stetig und somit Regelfunktion auf $[0,1]$. Eine Stammfunktion F existiert nach Korollar 36, welche mit Substitution $y = 1-x$ bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int (1-y)\sqrt{y}(-1)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=1-x} = \int y^{\frac{3}{2}} - \sqrt{y}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=1-x} \\ &= \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=1-x} + C = \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C \quad ; \end{aligned}$$

sodann folgt mit der Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = C - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - C = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15} \quad .$$



(b) $f(x) = |1-x^2|$ ist eine stückweise stetige Funktion. $1-x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum bei $(0,1)$ und Nullstellen $x_\pm = \pm 1$. Innerhalb des betrachteten Intervalls $[0,3]$ ist $1-x^2$ positiv auf $[0, x_+)$ und negativ auf $(x_+, 3)$. Sodann ist

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 1-x^2 & x \in [0,1) \\ & \text{und} \\ f_2(x) = x^2 - 1 & x \in (1,3] \end{cases} \quad .$$

Die Funktionen f_1 und f_2 sind je stetig auf ihren Teilstücken und somit Regelfunktionen. Ihre Stammfunktionen sind

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 - x^2\,\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3} + C_1 \\ &\text{und} \\ F_2(x) &= \int f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2 - 1\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + C_2 \quad , \end{aligned}$$

sodass nach Newton-Leibniz auf den Teilstücken die Beiträge

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x &= F_1(1) - F_1(0) = 1 - \frac{1}{3} + C_1 - C_1 = \frac{2}{3} \\ &\text{und} \\ \int_1^3 f_2(x)\,\mathrm{d}x &= F_2(3) - F_2(1) = \frac{3^3}{3} - 3 + C_2 - \frac{1}{3} + 1 - C_2 = 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

sind. Nach der Additivität des Integrals folgt schlussendlich

$$\int_0^3 |1 - x^2|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3} \quad .$$

Aufgabe 2.2

In dieser Aufgabe werden konkrete Beispiele für die Flächenberechnung nach Satz 42 berechnet.

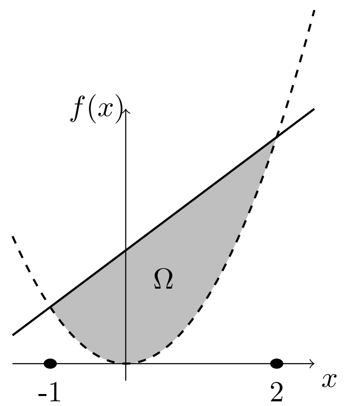
(1) Hier sind $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2$ beides stetige Funktionen und damit Regelfunktionen. Zunächst suche man den Intervallbereich $[a, b]$, sodass $x^2 \leq x + 2\ \forall\, x \in [a, b]$. Dieser ist durch die Schnittpunkte von f und g gegeben:

$$x^2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2}\,.$$

Sodann können wir die angegebene Figur als Standardbereich angeben:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -1 \leq x \leq 2 \quad , \quad x^2 \leq y \leq x + 2\right\} \quad .$$

Nach der Formel in Satz 42 folgt somit

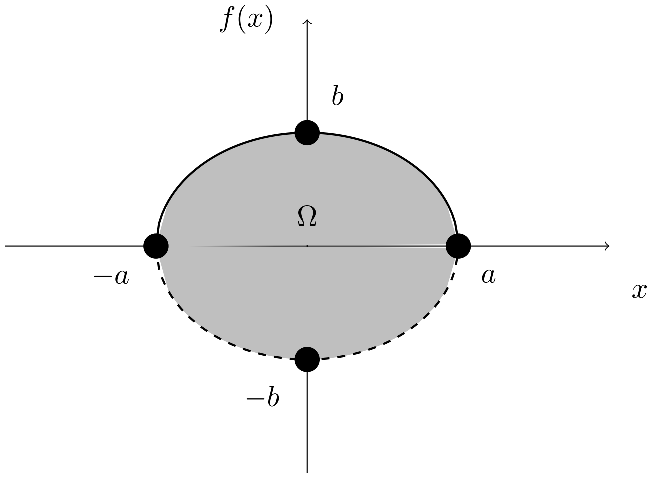


$$|\Omega| = \int_{-1}^2 x + 2 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\,.$$

(2) Hierbei handelt es sich um eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Wir wählen die y-Koordinate in Abhängigkeit von x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_\pm(x) = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Sodann können wir die angegebene Figur als Standardbereich auffassen:



$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -a \leq x \leq a \quad , \quad y_-(x) \leq y \leq y_+(x)\right\} \quad .$$

$y_\pm$ sind jeweils stetige Funktionen auf $[-a,a]$ und somit Regelfunktionen auf demselben Bereich. Zudem gilt $y_-(x) \leq y_+(x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Der Satz zur Berechnung des Flächeninhaltes ist damit anwendbar: Substitution mit $x = a\sin(y)$ mit $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\mathrm{d}x = a\cos(y)\,\mathrm{d}y$ bestimmt

$$\begin{aligned}
|\Omega| \quad &= \quad \int_{-a}^{a} y_+(x) - y_-(x)\,\mathrm{d}x = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(y)}\cos(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \quad 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(y)|\cos(y)\,\mathrm{d}y \overset{(*)}{=} 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Satz 39}}{=} \quad 2ab\,\cos(y)\sin(y)\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \quad 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(y)\,\mathrm{d}y = 2ab\pi - 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)\,\mathrm{d}y = 2ab\pi - |\Omega| \\
&\Leftrightarrow \\
|\Omega| \quad &= \quad ab\pi \quad .
\end{aligned}$$

In (*) wurde ausgenutzt, dass der Cosinus auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ positiv ist.

Aufgabe 2.3

Behauptung. Seien $f \in C([a,b])$ und $g \in C^1([a,b])$ monoton steigend, so existiert ein $\xi \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f \quad .$$

Beweis: Gemäß Hinweis wende man den Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 45) auf die Stammfunktion F und g' an. Hierzu prüfe man zunächst die Bedingungen: Da g stetig differenzierbar ist und monoton steigend, sind g' stetig und $g'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erfüllt. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 35) ist die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f$ für f stetig sogar stetig differenzierbar. Somit folgt, dass ein $\xi \in [a,b]$ existiert mit

$$\int_a^b Fg' = F(\xi) \int_a^b g' \quad .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, angewendet auf g', existiert eine Stammfunktion G, sodass $G' = g'$ ist. Damit ist $G = g + C$ mit irgendeiner Konstante C. Sodann

$$\int_a^b Fg' = F(\xi) \int_a^b g' = F(\xi)(g(b) - g(a)) \quad .$$

Durch bestimmte partielle Integration der linken Seite hat man zudem

$$Fg|_a^b - \int_a^b F'g = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b fg = F(b)g(b) - \int_a^b fg \quad ,$$

wobei $F(a) = 0$ angewendet wurde. Mit entsprechenden Umstellungen folgt schlussendlich

$$\begin{aligned}
\int_a^b fg &= F(b)g(b) - F(\xi)(g(b) - g(a)) = (F(b) - F(\xi))g(b) + g(a)F(\xi) \\
&= g(a)F(\xi) + g(b)\left(\int_a^b f - \int_a^\xi f\right) \overset{(\text{Satz } 34)}{=} g(a)F(\xi) + g(b)\int_\xi^b f \\
&= g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f \quad \text{, q.e.d.!}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4

Seien $T > 0$ und $f \in C(\mathbb{R})$ T-periodisch.

(1)

Behauptung. $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis: Definiere hierzu $F(x) = \int_0^x f$ und zerlege $\int_a^{a+T} f$ nach der Additivität des Integrals:

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^{a+T} f - \int_0^a f = F(a+T) - F(a) \quad .$$

Die zu zeigende Aussage besagt, dass das Integral nicht von a abhängt, genauer $\int_a^{a+T} f$ ist eine Konstante. Dies überprüfe man durch Ableiten nach a und Anwendung des Hauptsatzes 35:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_a^{a+T} f = F'(a+T) - F'(a) \overset{\text{HS}}{=} f(a+T) - f(a) = 0$$

nach der T-Periodizität des Integranden. Damit ist $\int_a^{a+T} f$ unabhängig von a und man wähle $a = 0$:

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f \quad \text{, q.e.d.!}$$

(2)

Behauptung. Sei $F : x \mapsto \int_0^x f$; es existiert eine reelle Konstante A, sodass $x \mapsto F(x) - Ax$ eine T-periodische Funktion ist.

Beweis: Notiere $\mathcal{F}(x) = F(x) - Ax$ und zeige, dass aus $\mathcal{F}(x+T) = \mathcal{F}(x)$ auf die Existenz einer solchen Konstanten geschlossen werden kann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x) &\overset{!}{=} \mathcal{F}(x+T) \\
&\Leftrightarrow \\
0 &= \mathcal{F}(x+T) - \mathcal{F}(x) = F(x+T) - F(x) + A(x - x - T) = \int_0^{x+T} f - \int_0^x f - AT \\
&= \int_x^{x+T} f - AT \overset{(1)}{=} \int_0^T f - AT \\
&\Leftrightarrow \\
A &= \frac{1}{T}\int_0^T f \quad .
\end{aligned}$$

Es folgt also durch Wahl der Konstanten A gemäß der letzten Äquivalenz die T-Periodizität von $\mathcal{F}$ und damit die Existenz einer solchen Konstante nach Konstruktion, q.e.d.!

(3) Ja, die Funktion ist 2π-periodisch: Unter Ausnutzung der Behauptung (2) mit $f(t) = \sin^{12345}(t)$ müsste dann $A = 0$ sein. Da A konkret berechnet werden kann, überprüfe man, ob das Integral von 0 bis 2π über f verschwindet. Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, sind ungerade Potenzen des Sinus ebenso ungerade. Unter der zusätzlichen Ausnutzung der Behauptung in (1) mit $a = \pi$ ist somit

$$2\pi A = \int_0^{2\pi} \sin^{12345}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi+\pi}^{\pi+\pi} \sin^{12345}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{12345}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

und damit die Voraussetzung überprüft.