Vorlesung 3

In dieser Vorlesung möchten wir besser verstehen, wie $\displaystyle\int_a^b f$ von a und b abhängt. Dadurch wird auch eine Berechnungsmethode für bestimmte Integrale entstehen.

Bislang haben wir $\displaystyle\int_a^b$ nur für $a < b$ definiert. In vielen Situationen ist es bequem, auch den Fall $a \geq b$ einzuschliessen:

- für $a = b$ setzen wir $\displaystyle\int_a^b f := 0$,
- für $a > b$, falls f Regelfunktion auf $[b, a]$, setzen wir $\displaystyle\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Dieses orientierte Integral behält die wichtigsten Eigenschaften des Integrals, z.B. gelten alle Identitäten und Abschätzungen vom Lemma 22. Insbesondere

$$\text{für } |f| \leq c \text{ gilt } \Big|\int_a^b f\Big| \leq c|b-a|.$$

Satz 34 (Additivität des Integrals). *Seien f Regelfunktion auf einem Intervall I und $a, b, c \in I$, dann gilt*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f. \tag{3}$$

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fall $a < b < c$.

Wir beweisen die Aussage zuerst für Treppenfunktion. Sei $f \in T[a, c]$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ mit $f(x) = A_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Wir können voraussetzen, dass $x_k = b$ für ein k gilt. (Sonst finden wir ein k mit $x_k < b < x_{k+1}$ und betrachen die Verfeinerung $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} < y_{k+2} < \cdots < y_{n+1} = b$ mit

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{falls } j \leq k, \\ b, & \text{falls } j = k+1, \\ x_{j-1}, & \text{falls } j \geq k+2, \end{cases}$$

diese neue Zerlegung erfüllt die Bedingung.) Dann hat man eine Zerlegung von $[a, b]$, $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ mit $f(x) = A_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, k$, und eine Zerlegung von $[b, c]$, $b = x_k < \cdots < x_n = c$ mit $f(x) = A_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = k+1, \ldots, n$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_b^c f &= \sum_{j=1}^{k} A_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} A_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_j(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f. \end{aligned}$$

Dadurch ist (3) für die Treppenfunktionen bewiesen.

Sei jetzt $f \in R[a,c]$, dann gibt es eine Folge $(f_n) \subset T[a,c]$ mit $\lim_n \sup_{x\in[a,c]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Es folgt, dass $\lim_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ und $\lim_n \sup_{x\in[b,c]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Das bedeutet, dass

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n, \quad \int_b^c f = \lim_n \int_b^c f_n, \quad \int_a^c f = \lim_n \int_a^c f_n.$$

Da f_n Treppenfunktionen sind, haben wir $\displaystyle\int_a^b f_n + \int_b^c f_n = \int_a^c f_n$ für alle n. Also

$$\begin{aligned}\int_a^c f &= \lim_n \int_a^c f_n = \lim_n \Big(\int_a^b f_n + \int_b^c f_n\Big)\\ &= \lim_n \int_a^b f_n + \lim_n \int_b^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz für $a < b < c$ bewiesen.

Alle anderen Fälle muss man jetzt einzeln betrachten und auf den vorherigen Fall reduzieren. Zum Beispiel, für $a = b$ gilt $\displaystyle\int_a^b f = 0$, und die Aussage (3) is trivial. Für $b < a < c$ beginnt man mit

$$\int_b^a f + \int_a^c f = \int_b^c f \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^c f = \int_b^c f - \int_b^a f,$$

und man muss nur die Definition $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ einsetzen. Analog beweist man die restlichen Fälle. □

Der Satz wird oft in der äquivalenten Form $\displaystyle\int_a^c f - \int_a^b f = \int_b^c f$ genutzt.

Jetzt kommen wir zur Berechnung der bestimmten Integralen. Am Anfang wollten wir Stammfunktionen ausrechnen können, und dieser Zusammenhang wird im folgenden Satz begründet. Das ist einer der wichstigsten Sätze der Analysis (und der ganzen Mathematik).

Satz 35 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei f Regelfunktion auf einem Intervall I und $a \in I$. Betrachte die Funktion*

$$\Phi : I \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Sei $x_0 \in I$ und f stetig *in x_0, dann ist Φ in x_0 differenzierbar mit $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Sei $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, dann gilt

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt,$$

und

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0).$$

Mit Hilfe von

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

kann man es wie folgt umschreiben:

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\big|f(t)-f(x_0)\big| < \varepsilon$ für $|t-x_0| < \delta$. Für $|h| \le \delta$ und alle t zwischen x_0 und x_0+h hat man dann $\big|f(t)-f(x_0)\big| < \varepsilon$,

$$\Big|\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\Big| \le \varepsilon h, \quad 0 < |h| \le \delta.$$

Es folgt, dass

$$\left|\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \varepsilon \text{ für alle } h \text{ mit } 0 < |h| < \delta,$$

und damit ist der Satz bewiesen. □

Der Satz hat einige unmittelmare Korollare:

Korollar 36. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion, dann ist $I \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.*

Beweis. Wähle $a \in I$ und setze $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Nach dem Satz 35 hat man $\Phi'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, da f in x stetig ist. □

Korollar 37 (Newton-Leibniz-Formel). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f (existiert nach Korollar 36). Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Da wir schon eine Stammfunktion $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ haben, gibt es eine Konstante C mit $F(x) = \Phi(x) + C$ für alle $x \in I$. Also

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + C - \Big(\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C\Big) = \int_a^b f(t)\,dt.$$ □

Bemerkung 38. Die Differenz $F(b) - F(a)$ bezeichnet man oft $F|_a^b$ oder $F(x)|_a^b$ oder, ganz ausführlich, $F(x)|_{x=a}^{x=b}$.

Die Methoden für die Berechnung von Stammfunktionen (Vorlesung 1) kann man jetzt auf die Berechnung der bestimmten Integrale direkt übertragen. Damit wir dabei keine Konstanten verlieren, werden wir die Konsequenzen als einzelne Sätze formulieren.

Satz 39 (Partielle Integration für bestimmte Integrale). *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $a, b \in I$, dann*

$$\int_a^b f'g = fg|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Beweis. Betrachte die Funktion

$$\Phi(x) = f(x)g(x) - \int_a^x fg',$$

dann

$$\Phi'(x) = (fg)'(x) - \Big(\int_a^x fg'\Big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x).$$

Also ist Φ eine Stammfunktion von $f'g$, und (Korollar 37):

$$\int_a^b f'g = \Phi(b) - \Phi(a) = f(b)g(b) - \int_a^b fg' - \Big(f(a)g(a) - \underbrace{\int_a^a fg'}_{=0}\Big)$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b fg'. \qquad \square$$

Satz 40 (Substitution für bestimmte Integrale). *Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Beweis. Sei $c \in \varphi(I)$. Betrachte die Funktion

$$F : \varphi(I) \ni x \mapsto \int_c^x f \in \mathbb{R}.$$

Nach den obigen Konstruktionen ist F Stammfunktion von f, und nach der Kettenregel ist $\Phi := F \circ \varphi$ Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\,\varphi'$. Daher gilt

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \Phi(a) - \Phi(b) = \int_c^{\varphi(b)} f - \int_c^{\varphi(a)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f. \qquad \square$$

Mit diesen Mitteln kann man viele Integrale berechnen.

Beispiel 41. Berechne $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Wir möchten jetzt die Substitution $x = \varphi(t) = \sin t$ nutzen. Wir haben also $dx = \varphi'(t)\,dt = \cos t\,dt$, der Wert $x = 0$ entspricht $t = 0$ und der Wert $x = 1$ entspricht $t = \frac{\pi}{2}$. Für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, also

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/2)} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \Big(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Bei Rechnungen mit trigonometrischen Funktionen muss man aufpassen. Zum Beispiel merkt man, dass auch $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\varphi(2\pi) = 0$, also

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\varphi(2\pi)}^{\varphi(\pi/2)} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{2\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt$$

aber

$$\int_{2\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \neq \int_{2\pi}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt,$$

da die Identität $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ nur für $\cos t \geq 0$ gilt (z.B. $\sqrt{1-\sin^2 t} = -\cos t$ für $t \in [\pi/2, \pi]$).

Wie schon vorher erwähnt, ist die Definition des bestimmten Integrals durch die Berechnung von Flächeninhalten motiviert. Diesen Zusammenhang können wir noch einmal wie folgt zusammenfassen:

Satz 42. *Seien f, g Regelfunktionen auf $[a,b]$ mit $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt für den Flächeninhalt $|\Omega|$ der Figur*

$$\Omega = \big\{(x,y) : \quad a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\big\},$$

die Formel $|\Omega| = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$ gegeben.

Da wir jetzt einige Berechnungsmethoden für bestimmte Integrale haben, können wir damit Flächeninhalte von einigen geometrischen Figuren ausrechnen.

Beispiel 43. Sei $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$. Die Figur

$$\Omega = \big\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\big\}$$

ist die Kreisscheibe mit Radius R und Mittelpunkt A: nach dem Satz von Pythagoras ist der Abstand zwischen den Punkten $B = (x,y)$ und $A = (x_0, y_0)$ durch $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ gegeben, deswegen

$$\Omega = \big\{B \in \mathbb{R}^2 : \text{ Abstand zwischen } B \text{ und } A \text{ ist } \leq R\big\}.$$

Wir möchten jetzen den Flächeninhalt von Ω ausrechnen. Die obige Definition von Ω kann man auch wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}\Omega = \big\{(x,y) : \quad & x_0 - R \leq x \leq x_0 + R, \\ & y_0 - \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2} \leq y_0 + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\big\},\end{aligned}$$

und damit sind wir im Rahmen des Satzes 42:

$$|\Omega| = 2\int_{x_0-R}^{x_0+R} \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\, dx.$$

Wir substituieren $x = x_0 + Rt$, dann entsprechen die Werte $x = x_0 \pm R$ den Werten $t = \pm 1$ und $dx = R\, dt$. Also

$$|\Omega| = 2\int_{x_0-R}^{x_0+R} \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\, dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{R^2 - R^2 t^2}\, R\, dt = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Da wir eine gerade Funktion auf einem symmetrischen Intevrall integieren, gilt (Übungblatt 2)

$$|\Omega| = 4R^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \pi R^2.$$

(Das letzte Integral wurde schon im Beispiel 41 ausgerechnet.)

Mit Hilfe des Integrals kann man einige bekannte Formeln anders umschreiben.

Satz 44 (Taylorformel mit Integralrestglied). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x, x_0 \in I$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{4}$$

Beweis. Den Term R_0 kann man direkt ausrechnen:

$$R_0(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0),$$

damit ist die Formel für $n = 0$ bewiesen. Für $n \geq 1$ kann man partiell integrieren:

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{c} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!}\Big((x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x}$$
$$- \int_{x_0}^{x} \big(-n(x-t)^{n-1}\big) f^{(n)}(t)\Big).$$

Mit Hilfe von

$$(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = -(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)$$

bekommt man die Identität $R_n(x,x_0) + (x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) = R_{n-1}(x,x_0)$, und durch Induktion

$$R_n(x,x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = R_0(x,x_0) = f(x) - f(x_0). \qquad \square$$

Die "neue" Taylorsche Formel kann mit der "alten" (Analysis I) verglichen werden,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

wobei ξ zwischen x und x_0 liegt: die beiden Restglieder müssen natürlich übereinstimmen,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

Diese Darstellung kann man aber auch direkt aus allgemeinen Eigenschaften des Integrals herleiten. Dafür beweisen wir einen anderen wichtigen Satz:

Satz 45 (Mittelwertsatz für Integrale). *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $g \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g. \tag{5}$$

Beweis. Falls $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, so sind die beiden Integrale in (5) gleich Null, und die Identität ist richtig für alle $\xi \in [a,b]$. Wir können also annehmen, dass g keine Nullfunktion ist, also $\displaystyle\int_a^b g > 0$ (Übungsblatt 2). Wir bezeichnen

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

dann $mg(x) \leq f(x) \leq Mg(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g, \quad m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} = f(\xi). \qquad \square$$

Korollar 46. *Sei f wie in (4), dann gilt für ein ξ zwischen x_0 und x:*

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Für $x = x_0$ ist die Aussage trivial. Wir betrachten jetzt $x > x_0$, dann ist $(x-x_0)^n \geq 0$, und nach dem Mittelwertsatz 45 gibt es ein $\xi \in [x_0, x]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x,x_0) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^x (x-t)^n\,dt \\ &= \frac{1}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\Big(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Für $x < x_0$ gilt $R_n(x,x_0) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_x^{x_0}(t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$. Jetzt hat man $(t-x)^n \geq 0$ für $t \in [x, x_0]$, und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in [x, x_0]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x,x_0) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\int_x^{x_0}(t-x)^n\,dt \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x}^{t=x_0} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x_0-x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad \square \end{aligned}$$

Die Taylorformel aus der Analysis I ist also ein Korollar der neuen Taylorformel mit Integralrestglied.