Übungen zu Analysis IIa - Integralrechnung und Differentialgleichungen

Übungsblatt 8 - Lösungsvorschläge

Kilian Bruns

19. Juni 2020

Aufgabe 1.1

(a)⇒(b): Zu zeigen: $\forall p \in f^{-1}(O) \exists \delta > 0 : K_\delta(p) \subset f^{-1}(O)$.

Seien f stetig, $O \subset Y$ offen und $p \in f^{-1}(O)$.

Es gilt $f(p) \in O$. Da O offen ist existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(f(p)) \subset O$, d.h. alle y mit $d(y, f(p)) < \varepsilon$ liegen in O. Da f stetig ist, $\exists \delta > 0$ sodass $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, p) < \delta$. Aber aus $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ folgt $f(x) \in O$ und gleichzeitig $x \in f^{-1}(O)$.
Somit liegen alle $x \in X$ mit $d(x, p) < \delta$ in $f^{-1}(O)$, d.h. $K_\delta(p) \subset f^{-1}(O)$.
$\implies$ $f^{-1}(O)$ ist offen.

(b)⇒(a):

Seien $f^{-1}(O)$ offen für alle offenen O, $p \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Da $K_\varepsilon(f(p))$ offen ist, ist $f^{-1}(K_\varepsilon(f(p)))$ offen.

Da $p \in f^{-1}(K_\varepsilon(f(p))) \implies \exists \delta > 0 : K_\delta(p) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(f(p)))$

D.h. alle $x \in X$ mit $d(x, p) < \delta$ erfüllen

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(K_\varepsilon(f(p))) &\iff f(x) \in K_\varepsilon(f(p)) \\ &\iff d(f(x), f(p)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt f ist stetig.

Aufgabe 1.2

Sei A eine abgeschlossene Menge. Es gilt: $\forall M \subset Y : f^{-1}(M^C) = f^{-1}(M)^C$. Damit ergeben sich folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \forall A \text{ abgeschl. gilt } f^{-1}(A) \text{ ist abgeschl.} &\iff \forall A \text{ mit } A^C \text{ offen gilt } f^{-1}(A) \text{ ist abgeschl.} \\ &\iff \forall A \text{ mit } A^C \text{ offen gilt } f^{-1}(A^C)^C \text{ ist abgeschl.} \\ &\iff \forall A \text{ mit } A^C \text{ offen gilt } f^{-1}(A^C) \text{ ist offen.} \end{aligned}$$

Setze nun $O := A^C$ und man erhält die Behauptung: $\forall O$ offen gilt $f^{-1}(O)$ ist offen.

Aufgabe 2

Betrachte zunächst zwei konstante Lösungen:

$\underline{y_0 = 0}$ liefert die maximale Lösung $y(t) \equiv 0$, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

$\underline{y_0 = K}$ liefert die maximale Lösung $y(t) \equiv K$, welche ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Alle weiteren Lösungen $y(t)$ dürfen also die Werte 0 und K nicht annehmen. Es muss also für alle weiteren Lösungen gelten:

$$\begin{array}{cccc} y_0 < 0 & \Longrightarrow & y(t) < 0 & \text{für alle } t, \\ 0 < y_0 < K & \Longrightarrow & 0 < y(t) < K & \text{für alle } t, \\ K < y_0 & \Longrightarrow & K < y(t) & \text{für alle } t \end{array}$$

Die gegebene Differentialgleichung kann mit Separation der Variablen gelöst werden.

$$\underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{dz}{z(K-z)}}_{=:I} = \underbrace{\int_0^t ds}_{=t} \tag{1}$$

Löse im Folgenden I:

$$\begin{aligned} I = \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{z(K-z)} &\overset{*}{=} \frac{1}{K} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{z} + \frac{1}{(K-z)} dz \\ &= \frac{1}{K} \Big[\ln|z| - \ln|K-z| \Big]_{y_0}^{y} \\ &= \frac{1}{K} \left[\ln\left| \frac{z}{K-z} \right| \right]_{y_0}^{y} \\ &= \frac{1}{K} \ln\left| \frac{y}{K-y} \right| - \frac{1}{K} \ln\left| \frac{y_0}{K-y_0} \right| \end{aligned}$$

* z.B. mittels Partialbruchzerlegung
Setze dies nun in (1) ein:

$$\begin{aligned} & & \frac{1}{K} \ln\left| \frac{y}{K-y} \right| - \frac{1}{K} \ln\left| \frac{y_0}{K-y_0} \right| &= t \\ &\Longleftrightarrow & \ln\left| \frac{y}{K-y} \right| &= \ln\left| \frac{y_0}{K-y_0} \right| + Kt \\ &\Longleftrightarrow & \left| \frac{y}{K-y} \right| &= \left| \frac{y_0}{K-y_0} \right| e^{Kt} \\ &\overset{**}{\Longleftrightarrow} & \frac{y}{K-y} &= \frac{y_0}{K-y_0} e^{Kt} \\ &\Longleftrightarrow & \frac{K-y}{y} &= \frac{K-y_0}{y_0} e^{-Kt} \\ &\Longleftrightarrow & \frac{K}{y} - 1 &= \left(\frac{K}{y_0} - 1 \right) e^{-Kt} \\ &\Longleftrightarrow & \frac{K}{y} &= 1 - \left(1 - \frac{K}{y_0} \right) e^{-Kt} \\ &\Longleftrightarrow & \frac{K}{y} &= \frac{y_0 - (y_0 - K)\, e^{-Kt}}{y_0} \\ &\Longleftrightarrow & y(t) &= \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - K)\, e^{-Kt}} \end{aligned}$$

** Betrag entfällt hier, da $\frac{y}{K-y}$ und $\frac{y_0}{K-y_0}$ dasselbe Vorzeichen haben.
Betrachte nun, abhängig von y_0, wo die gefundene Lösung definiert ist:

1. $\underline{0 < y_0 < K}$:
$\implies y_0 - (y_0 - K)e^{-Kt} = y_0 + (K - y_0)e^{-Kt} > 0$
$\implies y$ ist überall definiert.

2. Sonst ist y für $y_0 - (y_0 - K)e^{-Kt} = 0$ nicht definiert, d.h. für $t = t_0 = -\frac{1}{K} \ln \frac{y_0}{y_0 - K}$. Je nachdem, ob $t_0 < 0$ oder $t_0 > 0$ ist, gibt es verschiedene Ergebnisse. Deshalb müssen folgende Fälle betrachtet werden:

   $\underline{K < y_0}$:
   y ist definiert auf $\left(\underbrace{-\frac{1}{K} \ln \frac{y_0}{y_0 - K}}_{=t_0}, +\infty\right)$ und $\lim_{t \to t_0}(y(t)) = +\infty$
   $\implies$ Keine Fortsetzung möglich.

   $\underline{y_0 < 0}$:
   y ist definiert auf $\left(-\infty, \underbrace{-\frac{1}{K} \ln \frac{y_0}{y_0 - K}}_{=t_0}\right)$

Aufgabe 3.1

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{y}{1 + e^{-t^2} + y^2} = F(t, y)$$

Bemerke, dass $F(t, y)$ stetig ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| &= \left|-\frac{1}{1 + e^{-t^2} + y^2} + \frac{2y^2}{(1 + e^{-t^2} + y^2)^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{1 + e^{-t^2} + y^2}\right| + 2\left|\frac{y^2}{(1 + e^{-t^2} + y^2)^2}\right| \\ &\leq 1 + 2 = 3, \text{ also konstant} \end{aligned}$$

Damit ist F Lipschitz-stetig bezüglich y. An dieser Stelle folgt dann die Behauptung mit dem globalen Satz von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 3.2

Sei y konstante Lösung.

$$y(t) = z,\ \forall t \qquad \implies y'(t) = F(t, z) = 0,\ \forall t \qquad \implies z = 0$$

Also ist die einzige konstante Lösung $y(t) \equiv 0$.

Aufgabe 3.3

(a) $y(t_0) = y_0 > 0 \implies y(t) > 0$ für alle t.
(Anmerkung: $y(t') = 0$ ist an dieser Stelle aufgrund der Eindeutigkeit nicht möglich. Es folgt nämlich $y(t) \equiv 0$ für alle t, was ein Widerspruch zu $y_0 > 0$ ist.)

$\Rightarrow$ $F(t, y(t)) < 0$ für alle t

$\Rightarrow$ $y'(t) = F(t, y(t)) < 0$ für alle t

$\Rightarrow$ y ist streng monoton fallend.

Also existiert ein $A = \lim_{t\to+\infty}(y(t)) \geq 0$. Annahme: $A > 0$:

$$\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty}(y'(t)) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{y(t)}{1+e^{-t^2}+y(t)^2}\right) = -\frac{A}{1+A^2} < 0$$

Laut PA4 gilt in diesem Fall: $y(t) \longrightarrow -\infty$ für $t \to +\infty$, was der Annahme widerspricht.

$\Rightarrow$ $A = 0$

$\Longrightarrow$ $\lim_{t\to+\infty}(y(t)) = 0$

(b) y ist streng monoton fallend. Also existiert ein $B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, sodass $\lim_{t\to-\infty}(y(t)) = B$. Annahme: $B \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \lim_{t\to-\infty}(y'(t)) = \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{y(t)}{1+e^{-t^2}+y(t)^2}\right) = -\frac{B}{1+B^2} < 0$$

Auch hier gilt nun nach PA4: $y(t) \longrightarrow +\infty$ für $t \to +\infty$, was der Annahme widerspricht.

$\Rightarrow$ $B = +\infty$

$\Longrightarrow$ $\lim_{t\to-\infty}(y(t)) = +\infty$

Aufgabe 3.4

Überprüfe, ob $z(t) = -y(t)$ ebenfalls die Differentialgleichung löst:

$$\begin{aligned} z'(t) &= -y'(t) \\ &= -\left(-\frac{y(t)}{1+e^{-t^2}+y(t)^2}\right) \\ &= -\frac{-y(t)}{1+e^{-t^2}+y(t)^2} \\ &= -\frac{z(t)}{1+e^{-t^2}+z(t)^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Sei y maximale Lösung mit $y_0 < 0$. Daraus folgt: z ist Lösung auf $\mathbb{R}$ mit $z(t_0) = z_0 = y_0 > 0$. z ist monoton fallend ($\Leftrightarrow$ y ist monoton wachsend). Damit verhält sich y folgendermaßen:

$\underline{t \to +\infty:}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}(z(t)) = 0 &\Longleftrightarrow \lim_{t\to+\infty}(-y(t)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lim_{t\to+\infty}(y(t)) = 0 \end{aligned}$$

$\underline{t \to -\infty:}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty}(z(t)) = +\infty &\Longleftrightarrow \lim_{t\to-\infty}(-y(t)) = +\infty \\ &\Longleftrightarrow \lim_{t\to-\infty}(y(t)) = -\infty \end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

Betrachte die Ableitung von $f(y) = y\ln(y)$. $f'(y) = \ln(y) + 1$ ist unbeschränkt auf $(0, +\infty)$. Somit folgt direkt, dass f nicht Lipschitz-stetig sein kann.

Aufgabe 4.2

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(t) = y(t)\ln(y(t))$ mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} y(t) > 0 \implies & u(t) = \ln(y(t)) \text{ wohldefiniert} \\ \iff & y(t) = e^{u(t)} \\ \implies & y'(t) = u'(t)e^{u(t)}. \end{aligned}$$

Setze nun y und y' in die DGL ein:

$$\begin{aligned} y' = y\ln(y) &\iff u'e^u = e^u u \\ &\iff u' = u \end{aligned}$$

y ist also genau dann eine Lösung des gegebenen AWPs, wenn $u = \ln(y)$ Lösung von

$$u' = u,\ u(t_0) = \ln(y_0)$$

ist. Das ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung u ist eindeutig bestimmt und auf $\mathbb{R}$ definiert. Somit ist auch y eindeutig bestimmt und auf $\mathbb{R}$ definiert.