SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 11

Abgabefrist: bis zum 09.07.2020 um 23:59:59
als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (3+2+3 Punkte)

1. Seien $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Für $y \in C^1\big([a,b]\big)$ definiere
$$R_1 y = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a), \quad R_2 y = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b).$$
Sei (u_1, u_2) ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ mit stetigen a_0 und a_1 und nehme an, dass $\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0$.
Zeigen Sie, dass man für dieselbe Differentialgleichung ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) mit $R_1 y_1 = R_2 y_2 = 0$ konstruieren kann.

2. Betrachte das Randwertproblem $y'' - 2y' + y = f$, $y'(0) - y(0) = y(1) = 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem für jede Funktion $f \in C^0\big([0,1]\big)$ eindeutig lösbar ist.
   (b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion des Randwertproblems.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung des Systems sowie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3x - y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -2, \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

1. Schreiben Sie das System
$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -y \end{cases}$$
in der matriziellen Form $Y' = AY$. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

2. Finden Sie die allgemeine Lösung des Systems. Hinweis: Bestimmen Sie y zuerst.

Präsenzaufgaben

1. Betrachte das Randwertproblem $y'' + y' = f$, $y(0) = y'(1) = 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem für jede Funktion $f \in C^0([0,1])$ eindeutig lösbar ist.

   (b) Finden Sie ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) mit

   $$y_1(0) = 0, \quad y_2'(1) = 0$$

   und bestimmen Sie die Greensche Funktion des Randwertproblems.

2. Bestimmen Sie die Greensche Funktion des Randwertproblems

   $$y'' = f, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

3. Schreiben Sie die folgenden Systeme in der matriziellen Form $Y' = AY$ und prüfen Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Falls ja, bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung des Systems.

   $$\text{a)} \begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y, \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 5x + 2y, \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$$

4. Für $A = (a_{jk}) \in M_n(\mathbb{R})$ definiere

   $$|||A||| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ eine Norm auf $M_n(\mathbb{R})$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M_n(\mathbb{R})$ die Ungleichung $\|Ax\| \leq |||A|||\, \|x\|$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ die Ungleichung $|||AB||| \leq |||A|||\, |||B|||$ gilt.

   Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Vorlesung 6).