Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Mengenlehre

× Aufgabe 1: Mengen

Gib die folgenden Mengen in auflistender Schreibweise an.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 15 \text{ und } n \geq 5\}$

b) $B = \{\frac{z^2+z}{2} + 5 \mid -4 \leq z \leq 4,\ z \in \mathbb{Z}\}$

c) $C = \{M \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \ : \ 3 \in M\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } m \in B \text{ gilt } n < m.\}$

!e) $\tilde{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es existiert mindestens ein } m \in B, \text{ für das } n < m \text{ gilt.}\}$

Lösung:

a) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

b) $B = \{5, 6, 8, 11, 15\}$

c) $C = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

d) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

!e) $\tilde{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

× Aufgabe 2: Intervalle

In den reellen Zahlen arbeiten wir häufig mit „zusammenhängenden Bereichen“, den **Intervallen**.

Definition I

Seien $a,\ b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$, sodass $a < b$ gilt. Dann definieren wir die folgenden **Intervalle**:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \textbf{(abgeschlossenes Intervall)} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \textbf{(rechtsseitig halboffenes Intervall)} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \textbf{(linksseitig halboffenes Intervall)} \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \textbf{(offenes Intervall)}
\end{aligned}
$$

Bestimme die folgenden Mengen und mache zu jeder Menge eine Skizze:

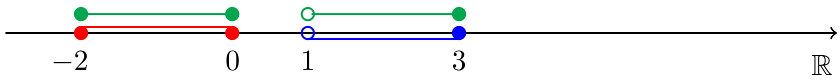
1. $[-2, 0] \cup (1, 3]$
2. $[1, 4) \cup (4, 7]$
3. $(0, 3) \cap [-1, 1)$

Bei Problemen kann der Umgang mit Intervallen an den nächsten Beispielen noch weiter geübt werden.

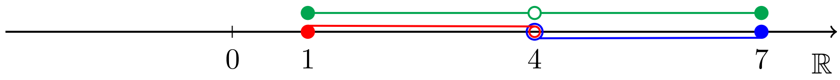
4. $(0, 4] \cup (1, 5]$
5. $(-2, 4] \cap [-1, 1]$
6. $(-2, 4] \cup [-1, 1]$

Lösung:

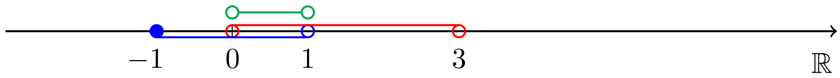
1. $[-2, 0] \cup (1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \quad \vee \quad 1 < x \leq 3\}$



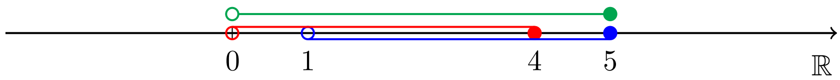
2. $[1, 4) \cup (4, 7] = [1, 7] \setminus \{4\}$



3. $(0, 3) \cap [-1, 1) = (0, 1)$



4. $(0, 4] \cup (1, 5] = (0, 5]$



5. $(-2, 4] \cap [-1, 1] = [-1, 1]$

6. $(-2, 4] \cup [-1, 1] = (-2, 4]$

× Aufgabe 3: Relationen

Seien $A, B, C, D, \tilde{D}$ wie in Aufgabe 1 und zusätzlich $E := \{2, 3, 4\}$.
Finde alle Relationen $\{\subseteq, \in\}$ zwischen den Mengen $A, B, C, D, \tilde{D}, E$.

Lösung:

$$B \subseteq A \qquad D \in C \qquad E \in C \qquad E \subseteq D \qquad D \subseteq \tilde{D} \qquad E \subseteq \tilde{D}$$

× Aufgabe 4: Operationen

Bestimme die folgenden Mengen.

a) $A \cap B \cap D$ mit A, B, D aus Aufgabe 1.

b) *i)* $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 8 teilbar}\}$

ii) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 6 teilbar}\}$

c) *i)* $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{1,4\}$

ii) $\{1,2,3\} \cap (\{2,3,4\} \cup \{1,4\})$

d) *i)* $(\{2,3,5,6\} \cup \{1,2,3,5,6,7\}) \cap \{2,4,6,8\}$

ii) $(\{2,3,5,6\} \cap \{2,4,6,8\}) \cup (\{1,2,3,5,6,7\} \cap \{2,4,6,8\})$

e) $\{1,4,7,8\} \times \{3,5,6\}$

f) $(\mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z}) \cap \{\big(a,(a+b),b\big) \ : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

Lösung:

a) $(A \cap B \cap D) = (\underbrace{\{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \cap \{5,6,8,11,15\}}_{=\{5,6,8,11,15\}} \cap \{1,2,3,4\}) = \emptyset$

b) i) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \textit{ ist durch } 4 \textit{ teilbar}\}$ *ii)* $\{n \in \mathbb{N} \mid n \textit{ ist durch } 12 \textit{ teilbar}\}$

c) i) $\underbrace{(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\})}_{=\{2,3\}} \cup \{1,4\} = \{1,2,3,4\}$

ii) $\{1,2,3\} \cap \underbrace{(\{2,3,4\} \cup \{1,4\})}_{=\{1,2,3,4\}} = \{1,2,3\}$

Für die Tutoren: Bemerkt ruhig nochmal, dass man auf Klammern achten und sie setzen sollte, wenn man sich nicht sicher ist. Ansonsten geht man meist von der Regel Schnitt vor Vereinigung aus...

d) i) $\underbrace{(\{2,3,5,6\} \cup \{1,2,3,5,6,7\})}_{=\{1,2,3,5,6,7\}} \cap \{2,4,6,8\} = \{2,6\}$

ii) $\underbrace{(\{2,3,5,6\} \cap \{2,4,6,8\})}_{=\{2,6\}} \cup \underbrace{(\{1,2,3,5,6,7\} \cap \{2,4,6,8\})}_{=\{2,6\}} = \{2,6\}$

Dieses Distributivgesetz wurde in dem Vortrag allgemein bewiesen; dieses kann also gerne verwendet werden, wenn es jemand merkt. Die Aufgabe ii) muss also nicht komplett von Hand gerechnet werden, sondern kann zunächst auch damit vereinfacht werden.

e) $\{(1,3),(1,5),(1,6),(4,3),(4,5),(4,6),(7,3),(7,5),(7,6),(8,3),(8,5),(8,6)\}$

f) $\{(a, 0, -a) : a \in \mathbb{Z}\}$
Man schneidet hier zwei Mengen von Dreier-Tupeln. Für alle Tupel im Schnitt ist die mittlere Koordinate offensichtlich 0. Also muss für a,b aus der zweiten Menge gelten: $a + b = 0$*, also* $a = -b$*. In anderen Worten: Die Elemente im Schnitt sind von der Form* $(a, 0, -a)$*.*

× Aufgabe 5: Formalisieren

Schreibe folgende Mengen formal auf:

a) Alle ganzen Zahlen, die in $\mathbb{Z}$ durch drei teilbar sind.

b) Alle Teilmengen von $\mathbb{R}$, die die Zahl 42 enthalten.

c) Alle reellen Lösungen der Gleichung $x^5 - \pi x^2 + 1 = 0$.
Hinweis: Nur formalisieren, nicht ausrechnen!

Lösung:

a) $\{3z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{z \in \mathbb{Z} \ : \ 3|z\}$

b) $\{M \subseteq \mathbb{R} \mid 42 \in M\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^5 - \pi x^2 + 1 = 0\}$

× Aufgabe 6: Venn-Diagramme

Mit *Venn-Diagrammen* lassen sich Mengen, die in irgendeiner Weise zueinander in Verbindung stehen, gut visualisieren. Das ein oder andere Diagramm habt ihr bestimmt schon einmal gesehen. Betrachten wir zum Beispiel zwei Mengen A und B, wobei $A \subseteq B$ gelte, so lässt sich dies durch folgendes Venn-Diagramm veranschaulichen:

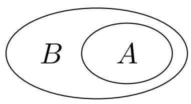


Abbildung 1: Beispiel eines Venn-Diagramms für die Relation $A \subseteq B$.

Achtung! Venn-Diagramme beschreiben eine Situation nie vollständig – sie dienen nur der Veranschaulichung. In obiger Situation könnte zum Beispiel sogar $A = B$ gelten. In diesem Fall ist das Venn-Diagramm eher irreführend.

a) Zeichne jeweils ein Venn-Diagramm, das die folgende Situation beschreibt:

i) Seien A, B zwei Mengen mit $A \neq B$ und $A \cap B \neq \emptyset$.

ii) Seien A, B, C drei Mengen mit $B \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ und $C \backslash A \neq \emptyset$.

iii) Seien A, B, C drei Mengen, wobei je zwei der Mengen einen nicht-leeren Schnitt haben, aber $A \cap B \cap C = \emptyset$ sei.

Mit Venn-Diagrammen lassen sich auch Verknüpfungen von Mengen visualisieren. Im Beispiel von oben lässt sich die Menge $B \backslash A$ wie folgt darstellen:

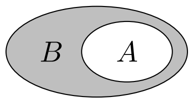


Abbildung 2: Visualisierung der Menge $B \backslash A$ (in grau) mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

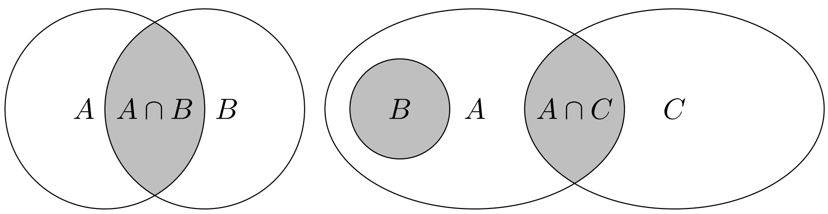
b) Veranschauliche jeweils in den Situationen aus a) die folgenden Mengen:

i) $A \cap B$.

ii) $(C \cap A) \cup B$.

iii) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Lösung: Jeweils gleich zu b):



(a) Lösung zu *i)* (b) Lösung zu *ii)* (c) Lösung zu *iii)*

! Aufgabe 7: Potenzmengen

a) Sei M eine nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche im Allgemeinen nicht? Begründe!

i) $M \subset \mathcal{P}(M)$,	*ii)* $\emptyset \subset \mathcal{P}(M)$,	*iii)* $M \in \mathcal{P}(M)$
iv) $\emptyset \in M$,	*v)* $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$,	*vi)* $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(M)$

b) Sei $M = \{0, 1\}$. Bestimme folgende Mengen:

$$i)\ \mathcal{P}(M)\,, \qquad ii)\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$$

!c) Bestimme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

Lösung:

a) *i) i.A. falsch,* *ii) wahr,* *iii) wahr,* *iv) i.A. falsch,* *v) wahr,* *vi) falsch*

b) $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ *und*
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\},$
$\{\{0\}, \{0,1\}\}, \{\{1\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\},$
$\{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\}$
Tipp: Die Menge hat 16 Elemente.

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Aufgabe 8: Anzahl von Elementen

Seien M, N zwei Mengen mit endlich vielen Elementen.

a) Stelle $|M \cup N|$ mit Hilfe von $|M|$, $|M \cap N|$ und $|N|$ dar.

b) Begründe, warum $|M \cup N| \leq |M| + |N|$ gilt.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Begründe, warum für n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ gilt:

$$|M_1 \cup \ldots \cup M_n| \leq |M_1| + \ldots + |M_n|$$

!d) Stelle $|\mathcal{P}(M)|$ mit Hilfe von $|M|$ dar.

Begründe deine Antwort jeweils so gut wie möglich.

Lösung:

a) $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$. *Die Elemente im Schnitt zählt man zunächst doppelt.*
Tipp: Erstelle zunächst ein Venn-Diagramm.

b) Mit Aufgabenteil a) folgt: $|M \cup N| = |M| + |N| - \underbrace{|M \cap N|}_{\geq 0} \leq |M| + |N|$.

c) *Mit Aufgabenteil b) können wir wegen der Assoziativität der Vereinigung induktiv folgern:*

$$\begin{aligned}
|M_1 \cup \ldots \cup M_n| = |M_1 \cup (M_2 \cup \ldots \cup M_n)| &\overset{b)}{\leq} |M_1| + |M_2 \cup \ldots \cup M_n| \\
&= |M_1| + |M_2 \cup (M_3 \cup \ldots \cup M_n)| \\
&\overset{b)}{\leq} |M_1| + |M_2| + |M_3 \cup \ldots \cup M_n| \\
&\leq \ldots \leq |M_1| + \ldots + |M_n|
\end{aligned}$$

! d) $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$. *In einer festen Teilmenge von M kann ein Element von M entweder darin sein oder nicht. Pro Element gibt es also zwei Möglichkeiten.*