Vorlesung 6

Wir werden jetzt eine abstrakte Theorie entwickeln (oder, besser gesagt, eine abstrakte Sprache), mit deren Hilfe wir später beweisen, dass (vernünftige) Differentialgleichungen immer Lösungen haben. Die Theorie beinhaltet mehrere neue Begriffe und Ergebnisse (metrischer Raum, Fixpunktsatz usw.), die auch in anderen Lehrveranstaltungen genutzt werden.

Um die Existenz einer Funktion mit bestimmten Eigenschaften zu beweisen (z.B. einer Funktion, die eine vorgegeben Differentialgleichung erfüllt) ist es bequem, mit sogenannten Funktionalräumen zu arbeiten, d.h. mit Räumen, deren Elemente Funktionen sind. Auf solchen Räumen möchte man einige Konstruktionen erlauben, z.B. wird für uns die Abstandsmessung wichtig. Diese werden wir jetzt einführen.

Definition 75. Sei X eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

mit folgenden drei Eigenschaften:

- Definitheit: $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$, und $d(x, y) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = y$,
- Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$,
- Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), das aus einer Menge X und einer Metrik d auf X besteht.

Für $x, y \in X$ wird die Zahl $d(x, y)$ informell als der Abstand zwischen den Punkten x und y intepretiert.

Beispiel 76. 1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze $d(x, y) = |x - y|$. Wir zeigen jetzt, dass dies eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Wir wissen, dass $|-a| = |a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, und $|a| = 0$ nur für $a = 0$ gilt. Es folgt daraus, dass $d(x, y) = |x - y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y, x) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also wenn $x = y$. Für den absoluten Wert gilt $|a+b| \leq |a| + |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, also erhält man für $a = x - z$ und $b = y - z$

$$d(x, y) = |x - y| \leq |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(y, z).$$

Damit haben wir alle Eigenschaften einer Metrik bewiesen. Eigentlich sind die erforderlichen Eigenschaften einer Metrik von diesem Beispiel "kopiert".

2. Auf jeder Menge X kann man eine Metrik einführen, z.B.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist die sogenannte **diskrete Metrik** auf X (Übung).

3. Auf $\mathbb{R}^n$ definiert man die *euklidische Metrik* durch

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Wir werden etwa später beweisen, dass dies wirklich eine Metrik ist. (Für $n = 2$ ist diese Metrik eng mit dem Satz von Pythagoras verbunden: $d(x,y)$ ist genau die Länge der Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreiecks mit Kathetenlängen $|x_1 - y_1|$ und $|x_2 - y_2|$.)

Definition 77. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Die Abbildung $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ mit $d_Y(x,y) = d(x,y)$ für alle $x, y \in Y$ heisse die von d auf Y **induzierte Metrik**.

Man merkt, dass die oben definierte euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ weitere Bedingungen erfüllt, z.B. $d(x,y) = d(x-y, 0)$ und $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Hier wird genutzt, dass $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum ist (man kann die Elemente von $\mathbb{R}^n$ miteinander addieren oder mit Konstanten mutliplizieren). Dafür gibt es einen weiteren Begriff, der die Struktur einer Vektorraums berücksichtigt.

Definition 78. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ heisst **Norm**, falls sie den folgenden drei Eigenschaften genügt:

- Definitheit: $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$, und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$,
- Homogenität: $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$,
- Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Ein **normierter Raum** ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, das aus einem Vektorram V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V besteht.

Satz 79. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann ist $d : V \times V \to \mathbb{R}$ durch $d(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf V (man sagt, dass d* **durch die Norm erzeugt** *ist.)*

Beweis. Wir müssen prüfen, dass die Abbildung d die drei erforderlichen Eigenschaften einer Metrik besitzt.

Definitheit. Da die Norm immer nichtnegativ ist, gilt $d(x,y) \geq 0$ für alle x, y. Die Gleichheit $d(x,y) = 0$ ist äquivalent zu $\|x - y\| = 0$, und wegen der Definitheit der Norm ist das äquivalent zu $x - y = 0$, d.h. zu $x = y$.

Symmetrie. Wir nutzen die Homogenität der Norm: $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = d(y,x)$.

Dreiecksungleichung (Metrik). Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für die Norm:

$$\begin{aligned} d(x,y) = \|x-y\| &= \big\|(x-z)+(z-y)\big\| \\ &\le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z)+d(z,y). \end{aligned} \qquad \square$$

Es ist aber wichtig zu verstehen, dass nicht jede Metrik auf einem Vektorraum durch eine Norm erzeugt wird:

Proposition 80. *Die diskrete Metrik d auf $\mathbb{R}^n$ (Beispiel 76, Teil 2) ist durch keine Norm erzeugt.*

Beweis. Nehme an, es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $d(x,y) = \|x-y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Seien $x \neq y$, dann auch $2x \neq 2y$, und $d(2x,2y) = d(x,y) = 1$. Aber aus $\|x-y\| = d(x,y) = 1$ folgt $d(2x,2y) = \|2x-2y\| = \|2(x-y)\| = 2\|x-y\| = 2 \neq 1$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine zugehörige Norm existiert. $\square$

Wir werden jetzt zeigen, dass man auf $\mathbb{R}^n$ eine Norm einführen kann.

Satz 81. *Die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \in \mathbb{R}$$

ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ (die sogenannte **euklidische Norm***).*

Beweis. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiere das **Standardskalarprodukt**

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R},$$

dann gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Das Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle$ ist symmetrisch, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, linear bzgl. x und y, d.h.

$$\langle \alpha x + \alpha' x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \alpha'\langle x', y\rangle, \quad \langle x, \alpha y + \alpha' y'\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \alpha'\langle x, y'\rangle$$

für alle $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus gilt $\langle x, x\rangle \ge 0$, und $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Dadurch ist die Definitheit von $\|\cdot\|$ schon bewiesen. Die Homogenität beweist man wir folgt (man nutzt die Bi-Linearität des Skalarprodukts):

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha|\,\|x\|.$$

Jetzt muss man nur die Dreiecksungleichung beweisen. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, gann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

Nehme an, dass $y \neq 0$, und betrachte das Polynom $P(t) = at^2 + bt + c$,

$$a = \langle y, y \rangle = \|y\|^2, \quad b = 2\langle x, y \rangle, \quad c = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Wegen $P \geq 0$ haben wir $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, also $4\big(\langle x, y \rangle\big)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, oder

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \, \|y\|. \tag{11}$$

Wir haben die Ungleichung nur für $y \neq 0$ beweisen, aber sie gilt auch für $y = 0$ (da die beiden Seiten dann gleich Null sind). Damit ist (11) für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$; das ist die sogenannte **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**. Mit Hilfe von (11) haben wir für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2, \end{aligned}$$

woraus die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ folgt. □

Damit wird auch beweisen (Satz 79), dass die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ (Beispiel 76, Teil 3) wirklich eine Metrik ist. Falls $\mathbb{R}^n$ als normierter oder metrischer Raum gesehen wird, wird implizit die euklidische Norm/Metrik gemeint.

Der Begriff einer Metrik erlaubt es, einige geometrische und analytische Konstruktionen auf beliebige metrische Räume zu übertragen.

Definition 82. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $p \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heisst die Menge

$$K_r(p) = \big\{q \in X : \, d(q, p) < r\big\}$$

die **offene Kugel** um p mit Radius r.

Beispiel 83.

1. Für $X = \mathbb{R}^3$ (mit euklidischer Metrik) entspricht die obige Definition dem üblichen Begriff einer Kugel, wobei für $X = \mathbb{R}^2$ das Wort "Kreisscheibe" besser passt. Für $X = \mathbb{R}$ ist $K_r(p)$ das Intervall $(p - r, p + r)$.

2. Für die diskrete Metrik d auf X gilt:

   $$K_r(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{für } r < 1, \\ X & \text{für } r \geq 1. \end{cases}$$

   Insbesondere kann man im Allgemeinen $K_r(y) = K_\rho(x)$ auch für $x \neq y$ und $r \neq \rho$ haben.

Einige Aussagen, die in $\mathbb{R}^n$ als offensichtlich erscheinen, muss man strikt beweisen:

Lemma 84. *Seien $p_1, p_2 \in X$ und $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 + r_2 \leq d(p_1, p_2)$, dann gilt $K_{r_1}(p_1) \cap K_{r_2}(p_2) = \emptyset$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Nehmen an, es existiert ein $w \in K_{r_1}(p_1) \cap K_{r_2}(p_2)$. Nach der Definition gilt dann $d(p_1, w) < r_1$ und $d(p_2, w) < r_2$. Wegen der Dreiecksungleichung für die Metrik d gilt

$$d(p_1, p_2) \leq d(p_1, w) + d(p_2, w) < r_1 + r_2,$$

was der Annahme $r_1 + r_2 < d(p_1, p_2)$ widerspricht. □

Mit Hilfe einer Metrik kann man auch die Konvergenz definieren:

Definition 85. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(p_n) \subset X$ eine Folge und $p \in X$. Der Punkt p ist der **Grenzwert** der Folge (p_n), $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(p_n, p) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Für $\mathbb{R}$ erhalten wir die übliche Konvergenz, und man kann die obige Definition äquivalent umformulieren (Übung):

Proposition 86. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(p_n) \subset X$ eine Folge und $p \in X$. Es gilt $\lim p_n = p$ genau dann, wenn $\lim d(p_n, p) = 0$.*

Damit wird die Konvergenz in beliebigen metrischen Räumen auf die Konvergenz in $\mathbb{R}$ reduziert. Es ist einfach zu zeigen, dass der Grenzwert (falls existiert) eindeutig bestimmt ist: falls $p = \lim_n p_n$ und $q = \lim_n p_n$, also $0 \leq d(p, q) \leq d(p, p_n) + d(q, p_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $d(p, q) = 0$ und $p = q$.

Wir betrachten jetzt die Teilmengen metrischer Räume etaws genauer. Wir werden jetzt abstrakte Begriffe einführen, die einige Eigenschaften von offenen und abgeschlossenen Intervallen übernehmen.

Definition 87. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Wir definieren folgende von M abhängige Mengen:

- $\overline{M} = \big\{p \in X :$ es existiert eine Folge $(p_n) \subset M$ mit $p = \lim p_n\big\}$, **Abschluss** von M,
- $\mathring{M} = \{p \in M :$ es existiert ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M\big\}$, **Inneres** von M,
- $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$, **Rand** von M.

Punkte in $\mathring{M}$ heissen **innere Punkte** von M. Man hat immer $\mathring{M} \subset M \subset \overline{M}$, aber im Allgemeinen $\partial M \not\subset M$.

Beispiel 88. 1. Betrachte $X = \mathbb{R}$ (mit der euklidischer Metrik).

(a) Für $A = [0,1]$ gilt $\overline{A} = A = [0,1]$, $\mathring{A} = (0,1)$, $\partial A = \{0,1\}$.

Beweis. Wir berechnen zuerst den Abschluss $\overline{A}$. Wegen $A \subset \overline{A}$ haben wir $[0,1] \subset \overline{A}$. Seit $p \in \overline{A}$, dann gibt es eine Folge (p_n) mit $p_n \in A$ une $\lim_n p_n = p$. Die Bedingung $p_n \in A$ bedeutet $0 \leq p_n \langle 1$, also auch $0 \leq p = \lim p_n \leq 1$, also $\overline{A} \subset [0,1]$.

Jetzt bestimmen wir $\mathring{A}$. Sei $p \in (0,1)$ une $\varepsilon := \min\{p, 1-p\}$, dann gilt $K_\varepsilon(p) = (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset [0,1]$, also $p \in \mathring{A}$, und $(0,1) \in \mathring{A}$. Wir müssen jetzt zeigen, dass 0 und 1 keine inneren Punktevon M sind. Jede Kugel $K_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ verlässt $[0,1]$, also $0 \notin \mathring{A}$. Analog für 1.

(b) Für $B = (0,1)$ haben wir $\overline{B} = [0,1]$, $\mathring{B} = (0,1)$, $\partial B = \{0,1\}$.

(c) Für $C = [0,1)$ haben wir $\overline{C} = [0,1]$, $\mathring{C} = (0,1)$, $\partial C = \{0,1\}$.

(d) Für $M = \mathbb{Q}$ gilt $\overline{M} = \mathbb{R}$ (jede reele Zahl ist der Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen), $\mathring{M} = \emptyset$ (zwischen zwei rationalen Zahlen gibt es immer eine rationale Zahl, daher enthält M kein offenes Intervall), also $\partial M = \mathbb{R}$.

2. Betrachte $X = \mathbb{R}^2$ und $M = \{0\} \times [0,1]$. Es gilt dann $\overline{M} = M$ (jede konvergente Folge $(0, x_n)$ konvergiert gegen einen Punkt der Form $(0,a)$ mit $a \in [0,1]$. Man sieht auch, dass $\mathring{M} = \emptyset$, da jede offene Kugel um einen Punkt von M immer ein bisschen nach links und nach rechts erstreckt und nicht ganz in M liegt.) Also $\partial M = M$.

Definition 89. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

- $M \subset X$ heisst **abgeschlossen**, falls $\overline{M} = M$.
- $M \subset X$ heisst **offen**, falls $\mathring{M} = M$.

Beispiel 90.

- Der ganze Raum X ist gleichzeitig offen und abgeschlossen. Auch $\emptyset$ besitzt die beiden Eigenschaften.
- Jede Teilmenge $M \subset X$ ist auch ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik d_M. In diesem neuen metrischen Raum (M, d_M) ist M gleichzeitig offen und abgeschlossen, unabhängig davon ob sie die entsprechenden Eigenschaften in X hatte. Es ist also wichtig zu verstehen, in welchem "Universum" X man arbeitet. Daher sind Offenheit und Abgeschlossenheit *extrinsische* Begriffe, da sie nicht nur von der Menge selbst, sondern auch von dem umgebenden Raum abhängen.
- Das offene Interval $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ ist eine offene Menge. Das abgeschlossene Intevrall $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Menge. Wir haben oben gesehen, dass $(0,1]$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.
- Für $X = \mathbb{R}$ ist die Menge $[0, +\infty)$ abgeschlossen und die Menge $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen.

Proposition 91. *Jede offene Kugel ist eine offene Menge.*

Beweis. Seien $p \in X$, $r > 0$, $q \in K_r(p)$. Wegen $d(p,q) < r$ kann man ein $\varepsilon > 0$ finden mit $\varepsilon < r - d(p,q)$. Dann gilt für alle $x \in K_\varepsilon(q)$: $d(x,p) \le d(p,q) + d(x,q) < d(p,q) + \varepsilon < r$, also $x \in K_r(p)$. Damit haben wir zu jedem $q \in K_r(p)$ ein $\varepsilon > 0$ gefunden mit $K_\varepsilon(q) \subset K_r(p)$, d.h. q ist ein innerer Punkt von $K_r(p)$. Es folgt, dass $K_r(p)$ eine offene Menge ist. $\square$

Die folgende Proposition folgt aus den Definitionen und fasst alle Eigenschaften zusammen:

Proposition 92. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   - *M ist abgeschlossen,*
   - *$\partial M \subset M$,*
   - *jede konvergente Folge (p_n) mit $p_n \in M$ erfüllt $\lim p_n \in M$.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   - *M ist offen,*
   - *$\partial M \cap M = \emptyset$,*
   - *zu jedem $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(p) \subset M$.*

Es ist also wichtig, den Rand ∂M bestimmen zu können. Dafür wird oft folgende Methode genutzt:

Satz 93. *Sei (X,d) ein metrsicher Raum und $M \subset X$, dann gilt*

$$\partial M = \big\{p \in X : \quad K_r(p) \cap M \neq \emptyset \text{ und } K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset \text{ für alle } r > 0\big\}; \tag{12}$$

wir bezeichnen

$$M^c = X \setminus M.$$

Beweis. Wir bezeichnen $N := \big\{p \in X : K_r(p) \cap M \neq \text{ und } K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset\big\}$.

Zuerst zeigen wir die Inklusion $\partial M \subset N$. Sei $p \in \partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$. Wegen $p \in \overline{M}$ gibt es eine Folge $(p_n) \subset M$, die gegen p konvergiert. Daraus folgt, dass zu jedem $r > 0$ ein $p_n \in M$ existiert mit $d(p_n, p) < r$, also $K_r(p) \cap M \neq \emptyset$ für jedes $r > 0$. Nehme an, es existiert ein $r > 0$ mit $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$, dann $K_r(p) \subset M$, also $p \in \mathring{M}$, das widerspricht $p \in \partial M$. Also haben wir $K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset$ zu jedem $r > 0$. Damit haben wir die Injklusion $\partial M \subset N$ bewiesen.

Jetzt beweisen wir $N \subset \partial M$. Sei $p \in N$. Wir müssen zeigen, dass (a) $p \in \overline{M}$ und (b) $p \notin \mathring{M}$. Für (a): zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $K_{1/n}(p) \cap M$ nichtleer, wähle also einen Punkt p_n aus dieser Menge, dann gilt $d(p_n, p) \le \frac{1}{n}$ und $\lim p_n = p$. Wegen $p_n \in M$ gilt dann $p \in \overline{M}$. Für (b): Nehme an, dass $p \in \mathring{M}$, dann gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M$, also mit $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$: Widerspruch! $\square$

Da in der Bedingung (12) die Mengen M und M^c symmetrisch auftreten und $(M^c)^c = M$, hat man folgendes:

Korollar 94. *Für jede Menge M gilt $\partial M = \partial(M^c)$.*

Korollar 95. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann offen, wenn $M^c = X \setminus M$ abgeschlossen ist. Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn M^c offen ist.*

Beweis. Man hat die Äquivalenzen

$$M \text{ offen } \Leftrightarrow \partial M \cap M = \emptyset \Leftrightarrow \partial M \subset M^c \Leftrightarrow \partial(M^c) \subset M^c \Leftrightarrow \ M^c \text{ abgeschlossen},$$

damit ist die erste Aussage bewiesen. Die Menge $(M^c)^c$ ist genau dann abgeschlossen, wenn M^c offen ist. Da $(M^c)^c = M$, ist damit auch die zweite Aussage bewiesen. □

Der folgende Satz wird in der Übung besprochen:

Satz 96.

(1) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen (auch unendlich viele möglich) ist offen.*

(2) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist offen.*

Bei abgeschlossenen Mengen verhält es andersrum:

(1') *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen (auch unendlich viele möglich) ist abgeschlossen.*

(2') *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Menge ist abgeschlossen.*

Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen ist aber nicht unbedingt offen. Betrachte z.B. die folgenden offenen Mengen in $\mathbb{R}$:

$$M_n = \Big(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = [0, 1]$, die Menge $[0, 1]$ ist aber nicht offen.