Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 5

Abgabe: 19.11.2019, bis 12 Uhr

Aufgabe 5.1. Seien $\mu \in \mathbb{Q}$ und

$$A_\mu := \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & \frac{2\mu}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3,$$

(a). Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an, um zu bestimmen für welche Werte von $\mu \in \mathbb{Q}$ das Gleichungssystem, welches durch $A_\mu \vec{x} = \vec{b}$ bestimmt ist, mindestens eine Lösung hat.
Achten Sie dabei darauf, dass die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind!

(b). Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge von $A_\mu \vec{x} = \vec{b}$.

Aufgabe 5.2. Seien

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3\pi & 3\pi & 5\pi & 3\pi & 3\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \quad \text{und} \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem, welche durch $C\vec{x} = \vec{d}$ bestimmt ist. Bestimmen Sie die Lösungsmenge mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (Algorithmus redGaussNF aus der Vorlesung).
Achten Sie dabei darauf, dass die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind!

Aufgabe 5.3. Betrachten Sie die invertierbare Matrix

$$D := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a). Bestimmen Sie die Inverse Matrix D^{-1}.
Achten Sie dabei darauf, dass die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind!

(b). Überprüfen Sie, dass es sich bei der Matrix aus dem vorherigen Aufgabenteil tatsächlich um die inverse Matrix handelt, indem Sie $D \cdot D^{-1} = E_4$ nachrechnen.

Präsenzaufgabe 5.4. Betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 - 1. \end{array}$$

(a). Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift für $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b). Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift für $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c). Was sind $g(f(2))$ und $f(g(2))$?

Präsenzaufgabe 5.5. Zeigen Sie, dass die Menge $V := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ mit der üblichen Addition von skalaren Multiplikation für Matrizen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

Präsenzaufgabe 5.6. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.

(a). Warum ist die Menge $W := \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$ kein Untervektorraum von V?

(b). Ist die Menge $U := \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1 + x_2 = 0\}$ ein Untervektorraum von V?