Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Schulmathematik I

Aufgabe 1: Verkürzende Operatoren

a) Berechne für die Zahlen in der Tabelle

k	1	2	3	4	5	6
a_k	1	0	6	2	2	3
b_k	2	5	1	7	2	9

die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{k=1}^{6} a_k, \qquad \prod_{k=1}^{6}(a_k+b_k), \qquad \sum_{k=1}^{6} a_k \cdot b_k, \qquad \left(\sum_{k=1}^{6} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{6} b_k\right)$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne folgende Summe:

$$\sum_{m=-1}^{8} (n+1)^3.$$

c) Verschiebe die Indizes der folgenden Summe so, dass sie mit nur einem Summenzeichen geschrieben werden kann. Vereinfache diese dann so weit wie möglich.

$$\sum_{k=2}^{23}(k-1)^2 + \sum_{l=-2}^{19} 2(l+3) + \sum_{m=10}^{31} 1$$

× Aufgabe 2: Quadratische Ergänzung

Berechne die rellen Lösungen der Gleichung mithilfe der quadratischen Ergänzung.

i) $x^2 + x - 2 = 0$

ii) $2x^2 + 8x - 10 = 0$

iii) $x^2 + 35x - 3 = 11x - 147$

Aufgabe 3: Quadratische Gleichungen

Neben der quadratischen Ergänzung steht uns zum Lösen quadratischer Gleichungen auch die *pq-Formel* zur Verfügung. Diese soll hier zunächst erklärt werden.

Satz I (*pq*-Formel)
Gegeben sei die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Zahlen p und q. Dann löst

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

die Gleichung.
(Genauer: Man erhält sogar alle Lösungen. Falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ ist, gibt es keine reelle Lösung. Falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ gilt, ist die Lösung eindeutig.)

Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen mit der pq-Formel.

a) $18x^2 - 9x + 1 = 0$

b) $x^2 + 35x - 3 = 11x - 147$

! Aufgabe 4: Herleitung der pq-Formel

Leite die *pq*-Formel her, indem du auf die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die quadratische Ergänzung anwendest.

× Aufgabe 5: Polynomgleichungen höherer Ordnung

Bestimme die rellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

i) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

ii) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

iii) $-3x^3 - 33x^2 - 117x = 135$

! Aufgabe 6: Satz von Vieta

Satz II (Satz von Vieta)
Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Zahlen p, q die Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ mit ebenfalls reellen Zahlen a, b, dann ist $-p = a + b$ und $q = ab$.

a) Bestimme mit dem Satz von Vieta Kandidaten für Lösungen der folgenden Gleichungen. Überprüfe diese dann durch Einsetzen in die Gleichungen.

   i) $x^2 + 8x - 20 = 0$

   ii) $x^2 - 6x - 16 = 0$

b) Leite den Satz von Vieta her.

Aufgabe 7: Lineare Gleichungssysteme

a) Löse die folgenden Gleichungssysteme.

   i)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 9x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

   ii)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ -2x - 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

b) Ergänze die Gleichung $3x - 2y = 5$ zu je einem Gleichungssystem aus zwei Gleichungen, das

   i) unlösbar ist.

   ii) genau eine relle Lösung hat.

   iii) unendlich viele Lösungen hat.