Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Schulmathematik II

× Aufgabe 1: Ableitungsregeln (1)

Leite die folgenden Funktionen ab.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$, wobei $x \neq 0$

c) $f(z) = a \cdot z^4 + \frac{b}{z^3}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $f(t) = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

× Aufgabe 2: Ableitungsregeln (2)

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit der Produkt- bzw. Quotientenregel.

a) $f(t) = t^2 \cdot \sin(t)$

b) $f(a) = (a^2 - 1) \cdot (1 + a^2)$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, wobei $x^2 + x + 1 \neq 0$

d) $f(s) = -\frac{s^2 + 4s + 5}{s^3}$, wobei $s \neq 0$

Aufgabe 3: Kettenregel

Nutze die Kettenregel zur Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = (2t + 1)^3$

b) $f(x) = \sin(ax + b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Herleitung der Quotientenregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen und sei $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Beweise die Quotientenregel $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$.
Hinweis: Die Produktregel und die Kettenregel dürfen vorausgesetzt werden.

! Aufgabe 5

Gegeben seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Entwickle eine eigene Ableitungsregel für Funktionen der Form $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)^n}\right)$ mithilfe der Quotientenregel und geschicktem Ausklammern.

× Aufgabe 6: Binomialkoeffizient

Berechne mit Hilfe der Definition folgende Binomialkoeffizienten:

a)

$$\binom{5}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \binom{10}{0}, \quad \binom{8}{6}$$

b)

$$\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{j} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-j}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt aus der Stochastik. Die einzelnen Summanden beschreiben dort die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Treffern, z. B. beim Würfelwurf.

c) Für ein Elfmeterschießen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei der Bestimmung der Kandidaten? Wie viele Möglichkeiten hat erdann noch zur Bestimmung der Reihenfolge der Schützen?

Aufgabe 7: Beweise im Pascal'schen Dreieck

a) Beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks 2^n beträgt. (Die erste Zeile des Pascalschen Dreiecks wird dabei als 0. Zeile bezeichnet.)

b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} i = \binom{n+1}{2}$. Wo findet sich diese Identität im Pascal'schen Dreieck?