11 Schulmathematik II

Eines der zentralsten Themen, wenn nicht sogar das zentralste Thema der Schulanalysis ist die Differenzialrechung. Ihre typischen Anwendungsgebiete sind die Berechnungen von Änderungsraten, Approximationen oder von Extremstellen.
Eine ausführliche Definition und Diskussion kann nur die Analysis-Vorlesung leisten, denn zur adäquaten und formal korrekten Auseinandersetzung fehlen uns leider noch einige Werkzeuge. In der Vorlesung bleibt dann aber für das Einüben von Rechenroutinen und die Auseinandersetzung mit verschiedenen Bedeutungen (z.B. von Ableitungen) nur wenig Zeit. Ziel dieses Kapitels sind deshalb die Auseinandersetzung mit den zentralen Interpretationen der Ableitung auf anschaulicher Ebene, sowie die Wiederholung und Übung der Rechentechniken.

11.1 Ableitungen - anschaulich

Als erstes geben wir eine Arbeitsdefinition, die für unsere Zwecke vorerst ausreicht:

Definition 11.1
Die Ableitung f' zu einer Funktion f ist diejenige Funktion, die an jeder Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich von f die Steigung (oder auch momentane Änderungsrate) der Funktion an der Stelle x_0 angibt. Wir sagen, dass $f'(x_0)$ die Steigung der Funktion f in x_0 ist.

Diesen Aspekt der Steigung bzw. der Änderungsrate aus der Definition wollen wir uns nun erst einmal geometrisch vor Augen führen:

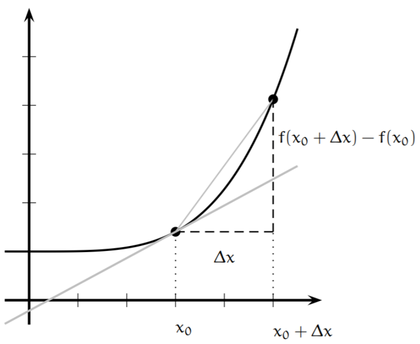

Abbildung 11.1: Geometrische Interpretation der Ableitung

Die Suche nach der Steigung einer Funktion an einer Stelle x_0 führt uns unweigerlich über Sekantensteigungen in einer gewissen Umgebung um die Stelle x_0.

Analytisch beschreibt der Quotient

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0,\ f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$, wie auch auf der obigen Abbildung (11.1) zu sehen ist. Der Quotient spiegelt nichts anderes wieder als ein Steigungsdreieck, wie es z.B. bei den linearen Funktionen zur Bestimmung der Steigung eingesetzt wird.
Anschaulich berechnen wir die Steigung an der Stelle x_0 dadurch, dass wir Δx immer kleiner werden lassen und sich die Sekanten dadurch immer mehr der Tangente an f an der Stelle x_0 annähern.

In der Schule wird der Ableitungsbegriff vermehrt auch mit der lokalen Änderungsrate oder der Momentangeschwindigkeit in Verbindung gebracht. Die lokale Änderungsrate ist nichts anderes als eine Modellgröße, die zur Beschreibung des Änderungsverhaltens einer Funktion eingesetzt wird (und das eben oftmals am Beispiel der Geschwindigkeit, wie auch in folgender Tabelle).

$f(x_0)$	Zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt x_0
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	Zurückgelegter Weg in der Zeit von x_0 bis $x_0 + \Delta x$
$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$
$f'(x_0)$	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0

Zur Bestimmung der Momentangeschwindigkeit berechnen wir dementsprechend die passenden Durchschnittsgeschwindigkeiten in immer kleiner werdenden Zeitintervallen. Das entspricht anschaulich wiederum genau dem bereits eben beschriebenen Übergang von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung.

11.2 Ableitungsregeln

Zurück zu den Ableitungen als solche. Im Folgenden geht es jetzt vermehrt um die Einübung von Rechenroutinen und auch um das Verständnis der Ableitungsregeln. Die folgende Tabelle beinhaltet die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen, auf die wir im Vortrag und auch in der Übung einige Male zurückgreifen werden.

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^a	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Die Liste erhebt natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit (und insbesondere die letzten 4 Funktionen werden an späterer Stelle noch ausführlich behandelt), genügt aber für unsere Zwecke. Denn mithilfe der folgenden Ableitungsregeln ist es uns möglich auch die Ableitungen komplizierter Funktionen aus den Ableitungen der elementaren Funktionen zu berechnen.

Satz 11.2 (Ableitungsregeln)
Seien f, g zwei (differenzierbare) Funktionen und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ Summenregel
2. $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ Faktorregel
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Produktregel
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, Quotientenregel
   falls $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich

Auch wenn wir hier keinen Beweis führen, so werden wir die Produkt- und Quotientenregel später im Kapitel und in der Übung noch nachweisen.

Beispiele: Mithilfe der elementaren Ableitungen und den Ableitungsregen können wir uns nun ein paar schwierigeren Beispielen widmen.

1. Es gilt:
$$(3x^5 + 2x + \cos x)' = (3x^5)' + (2x)' + (\cos x)' = 15x^4 + 2 - \sin x$$

2. Es gilt:
$$\begin{aligned}((5x^3 - 2x)(2x))' &= (5x^3 - 2x)' \cdot 2x + (5x^3 - 2x) \cdot (2x)' \\ &= (15x^2 - 2) \cdot 2x + (5x^3 - 2x) \cdot 2 \\ &= 30x^3 - 4x + 10x^3 - 4x \\ &= 40x^3 - 8x\end{aligned}$$

3. Es gilt:

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

4. Es gilt:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

   Mithilfe des trigonometrischen Pythagoras, der besagt, dass $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir als Ableitung des Tangens auch noch den alternativen Ausdruck

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Neben den bereits besprochenen Verknüpfungen behandeln wir nun noch eine weitere Art: die Verkettung. Auch wenn wir bereits im Kapitel „Von Funktionen und Abbildungen I“über Verkettungen gesprochen haben, hier zur Erinnerung noch einmal eine kurze Definition und ein paar Beispiele.

Definition 11.3 (Verkettung)
Das Einsetzen einer Funktion f in eine Funktion g heißt Verkettung:
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ („g Kringel f“)

Beispiele:

1. Seien $f(x) = x^3$ und $g(x) = \cos(x)$. Dann ist

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(x^3)$$

2. Seien $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1)$. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Auch für diesen Typ von Funktionen steht eine Ableitungsregel zur Verfügung. Wir werden sehen, dass diese Regel sehr mächtig ist.

Satz 11.4 (Kettenregel)
Für die Verkettung zweier Funktionen f und g gilt:

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Auf den Beweis der Kettenregel verzichten wir an dieser Stelle, geben aber auch hier ein Beispiel:

Beispiel: Seien $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$.
Wir berechnen die Ableitung von $g \circ f = \sin(x^2)$. Es ist

$$(\sin(x^2))' = (g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x\,.$$

Wie bereits erwähnt ist die Kettenregel sehr mächtig. So lässen sich zum Beispiel sowohl die Produkt- als auch die Quotientenregel mithilfe der Kettenregel (elegant) herleiten. Während wir die Herleitung für die Produktregel bis zum Schluss durchführen, leisten wir für die Quotientenregel nur etwas Vorarbeit und verschieben den Rest in die Übungsaufgaben.

Herleitung der Produktregel
Gesucht ist $(f \cdot g)'$, also die Ableitung eines Produktes von Funktionen. Wie bereits in einem früheren Kapitel stellen wir uns wieder die Frage: „Können wir das Problem auf etwas Bekanntes zurückführen?“ Da wir ja bereits angekündigt haben, dass wir die Kettenregel für die Herleitung verwenden werden, suchen wir also eine verkettete Funktion, die wir ableiten können, die gleichzeitig aber auch ein Produkt von Funktionen enthält.
Bei dieser Suche werden wir bei den binomischen Formeln fündig. Betrachten wir die verkettete Funktion $(f + g)^2$:

$$(f + g)^2 = f^2 + 2(f \cdot g) + g^2$$

Leiten wir nun beide Seiten der Gleichung mit der Kettenregel (und der Summen- bzw. Faktorregel) ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& 2(f+g)\cdot(f'+g') = 2f\cdot f' + 2(f\cdot g)' + 2g\cdot g' \\
\Rightarrow\quad & (f+g)(f'+g') = f\cdot f' + (f\cdot g)' + g\cdot g' \\
\Rightarrow\quad & f\cdot f' + f\cdot g' + g\cdot f' + g\cdot g' = f\cdot f' + (f\cdot g)' + g\cdot g' \\
\Rightarrow\quad & f\cdot g' + g'\cdot f = (f\cdot g)'
\end{aligned}$$

Herleitung der Quotientenregel
Zur Vorbereitung zeigen wir den Spezialfall der Quotientenregel, nämlich

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Mit $f(x) = \frac{1}{x}$ können wir $\frac{1}{g(x)}$ schreiben als

$$\frac{1}{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)\,.$$

Die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ist hierbei

$$f'(x) = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (f \circ g)' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x) \\ &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

Abschließend noch ein Beispiel, wie sich Funktionen zum Teil sehr elegant mit der Kettenregel ableiten lassen. Es kann also sehr zeitsparend sein die Kettenregel anzuwenden, bevor man „blind" Klammern auflöst.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Die Ableitung des Nenners ist nach Kettenregel $((1+x^2)^2)' = 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x$. Wenden wir nun die Quotientenregel auf die Ausgangsfunktion an, können wir kürzen:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1 \cdot (1+x^2)^2 - x \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{[(1+x^2)^2]^2} \\ &= \frac{(1+x^2) \cdot ((1+x^2) - 4x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\end{aligned}$$

11.3 Exkurs zum Binomialkoeffizienten

Es folgt ein kleiner Exkurs. An der ein oder anderen Stelle in diesem Kapitel hat die binomische Formel eine Rolle gespielt. Sei es nur um den Ausdruck $(x+1)^2$ erst auszumultiplizieren oder auch um die Produktregel herzuleiten. Im Falle von $(x+1)^2$ ist das Auflösen der Klammer noch einfach. Andere Funktionen mit höherem Exponenten von der Form $(x+1)^3, (x+1)^4, \ldots$ erfordern bereits einiges mehr an

Fleißarbeit beim Ausmultiplizieren. Nimmt man diese Fleißarbeit jedoch auf sich, offenbart sich eine sehr schöne Gesetzmäßigkeit (hier am Beispiel des Terms $(a+b)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{gathered} 1 \\ a+b \\ a^2+2ab+b^2 \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \end{gathered}$$

Betrachten wir nur die Koeffizienten, die in diesem Schema vorkommen, bekommen wir folgendes Muster:

$$\begin{gathered} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{gathered}$$

Dieses Dreieck nennen wir Pascalsches Dreieck. Möglicherweise ist einem das Bildungsgesetzt für das Dreieck bereits ins Auge gesprungen, sonst weisen wir nun darauf hin:
Man beginnt mit einem Dreieck aus drei Einsen. Die folgenden Zeilen beginnen und enden ebenfalls mit einer Eins. Dazwischen liegen Zahlen, die sich jeweils als Summe der beiden darüber liegenden Zahlen ergeben. So ist das Dreieck beliebig weit fortsetzbar.

Das Pascalsche Dreieck taucht in der Mathematik an vielen Stellen auf und beinhaltet einige interessante (und auch hübsche!) Muster.
Wir interessieren uns für die einzelnen Einträge. Diese heißen Binomialkoeffizienten und werden üblicherweise mithilfe einer abkürzenden Schreibweise angegeben:
Der k–te Eintrag in der n–ten Reihe heißt $\binom{n}{k}$ (sprich: n über k).

Achtung: Man startet beim Zählen der Reihen und Einträge des Dreiecks immer mit 0. Die erste Zeile im Dreieck ist somit die Reihe 0 und ihr einziger Eintrag (1) ist dabei der nullte Eintrag!

Insbesondere in der Stochastik bzw. Kombinatorik spielt der Binomialkoeffizient eine wichtige Rolle. Mit ihm lassen sich die sogenannten Grundaufgaben der Kombinatorik lösen. Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wieviele verschiedene Arten man k bestimmte Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann

(ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Anders gesagt: Der $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ($\binom{49}{6}$ gibt z.B. die Anzahl der mögliche Ziehungen beim Lotto an.)
Auf Grundlage dieser Eigenschaft lässt sich der Binomialkoeffizient auch abseits vom Pascalschen Dreieck definieren. Wählt man k Elemente aus einer n elementigen Menge aus, so gibt es für das erste Element n Auswahlmöglichkeit, für das zweite noch $n-1$ Möglichkeiten bis hin zum k-ten Element mit $n-k+1$ Auswahlmöglichkeiten – insgesamt also $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ Möglichkeiten. Da wir beim Zusammenstellen der Menge jedoch die Reihenfolge unberücksichtigt lassen, müssen wir noch durch die Anordnungsmöglichkeiten dieser k Elemente teilen, also durch $k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1$. Wir erhalten für den Binomialkoeffiezenten also den Ausdruck

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

Für diese spezielle Form von Produkten existiert eine weitere verkürzende Schreibweise, die Fakultät:

Definition 11.5 (Fakultät)
Für alle natürlichen Zahlen n ist

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \qquad \text{(gesprochen: } n \text{ Fakultät)}$$

Und damit lässt sich der Binomialkoeffizent abschließend besonders elegant aufschreiben:

Definition 11.6 (Binomialkoeffizient)
Seien $n, k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Autoren dieses Kapitels:
2019: Kira Rohlmann