IfM
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Fingerübungen

Thema: Ungleichungen. Alle Variablen sind beliebige reelle Zahlen und stets $\varepsilon > 0$.

1. Schreiben Sie die Betragsungleichung als Ungleichung ohne Beträge und mittels Intervallen auf.
   Beispiel: $|x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$.

   a) $|x - 3| < \varepsilon$
   b) $|x + 10| \leq 30$
   c) $|x - a| \geq \varepsilon$
   d) $||x| - 5| < 1$
   e) $||x + 1| + 3| > 2$

2. Setzen Sie alle gültigen Implikationspfeile zwischen den beiden Aussagen[1] über $x \in \mathbb{R}$.
   Beispiel: $x < 2$? $x < 3$. Es gilt $x < 2 \Rightarrow x < 3$, da $2 < 3$, aber $x < 2 \not\Leftarrow x < 3$: Gegenbeispiel $x = 2,5$.

   a) $x > 0 \quad ? \quad x^2 > 0$
   b) $-3 \leq x < 4 \quad ? \quad |x| \leq 4$
   c) $x < \varepsilon \quad ? \quad x < \varepsilon^2$ (hierbei sei $\varepsilon < 1$)
   d) $x > a - 1 \quad ? \quad (x - a)^2 > 1$
   e) $||x| - |y|| < \varepsilon \quad ? \quad |x - y| < \varepsilon$
   f) $(|x - 1| < \varepsilon) \wedge (|x + 1| < \varepsilon) \quad ? \quad |x| < \varepsilon$

3. Ermitteln Sie eine Konstante $C > 0$ (falls existiert), sodass folgende Ungleichungen wahr sind. Beweisen Sie auch gegebenenfalls ihre Nichtexistenz!

   a) $\frac{1}{n-1} \leq C \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
   b) $\frac{n+3}{n^2} \leq C \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   c) $\frac{1}{2^{n-1}} > C \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   d) $\sqrt{n-1} > C\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
   e) $n! < Cn^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   f) $n < C\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   g) $ab \leq C(a^2 + b^2)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$.
   h) $\sqrt[n]{n-1} > C\sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Finden Sie alle reellen Lösungen der Ungleichungen:

   a) $x + 4 \leq 2 - 3x$
   b) $\dfrac{x+1}{x+2} \geq \dfrac{1}{2}$
   c) $x^2 < 10$
   d) $(x + 2)^2 \leq 4x$
   e) $x^4 \geq 2x^2 - 4$
   f) $x^2 + 3x + 2 > 0$

   Anleitung für quadratische Ungleichungen, d.h. solche, die sich in die Form $x^2 + px + q > 0$ (oder < 0 etc.) bringen lassen: Bestimme erst die Lösungen x_1, x_2 der Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Dann ist $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Dies ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide negativ sind, usw.

[1] Genauer Aussageformen. Im Beispiel ist also zu prüfen, ob die Aussagen $\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow x < 3$ bzw. $\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Leftarrow x < 3$ wahr sind.