Prof. Dr. Ernst-Rüdiger Olderog
Christopher Bischopink, M.Sc.

Ausgabe: 20.12.2019
Abgabe: 10.01.2020 bis 14^{00} Uhr
in den Fächern im ARBI-Flur

10. Übung zu Grundlagen der Theoretischen Informatik

Hinweis: Alle Aufgaben ab 41 (auf diesem Zettel) müssen nicht abgegeben werden und werden auch nicht in der Veranstaltung besprochen, sie dienen lediglich als zusätzliche Übung.

Aufgabe 38: Quiz

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird einer abgezogen. Minimal können 0 Punkte erreicht werden.

Wahr	Falsch	
☐	☐	a) Jede Turing-akzeptierbare Sprache ist auch Turing-entscheidbar.
☐	☐	b) Jede Turing-entscheidbare Sprache ist auch Turing-akzeptierbar.
☐	☐	c) Es existieren Varianten von Turingmaschinen, deren Verhalten sich nicht durch eine 1-Band Turingmaschinen simulieren lässt.
☐	☐	d) Eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt Turing-entscheidbar, falls die charakteristische Funktion χ_L Turing-berechenbar ist.
☐	☐	e) Eine Simulation von τ durch τ' ist eine partiell definierte Funktion $sim : \mathcal{K}_\tau \xrightarrow{part} \mathcal{K}_{\tau'}$.

Aufgabe 39: Primzahlen **(6+1+1+1 Punkte)**

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{a^p \mid p \text{ ist keine Primzahl}\}$$

Zeigen Sie:

a) dass L Turing-akzeptierbar ist. Geben Sie hierfür eine *nichtdeterministische 2-Band-Turingmaschine* τ an, die L akzeptiert.

Hinweis: Denken Sie an die Beschreibung Ihrer Turingmaschine!
Erklären Sie außerdem, wie Sie

b) aus τ eine deterministische 2-Band Turing-Maschine τ_1,

c) aus τ_1 eine Turingmaschine τ_2, die L entscheidet, und

d) aus τ_2 eine 1-Band Turingmaschine, die L entscheidet,

konstruieren könnten.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass auf den zweiten Band ein potenzieller Teiler von p geraten wird. Überlegen Sie, wie Sie nun auf dem ersten Band prüfen können, ob diese Zahl p teilt. Verwenden Sie als Kantenbeschriftung dabei $(a, b)/(a', b'); (K, K')$ für ein a das auf dem ersten und ein b das auf dem zweiten Band gelesen und durch ein a' bzw. b' ersetzt wird, wobei der Kopf auf dem ersten Band die Bewegung K und der Kopf auf dem zweiten Band die Bewegung K' ausführt.

Aufgabe 40: Einordnung in Sprachklassen **(1+1+1+1+1+1 Punkte)**

Bestimmen Sie, ob die folgenden Sprachen regulär, kontextfrei oder Turing-entscheidbar sind. Geben Sie dabei immer die am stärksten einschränkende Sprachklasse an. D.h. „kontextfrei“ reicht als Antwort nicht aus falls die Sprache sogar regulär ist.

a) $L_1 = \{uw^R \mid u, w \in \{a,b\}^* \wedge \exists v_1, v_2 : u = v_1 a v_2 \wedge w = v_1 b v_2\}$

b) $L_2 = \{www \mid w \in \{a\}^*\}$

c) $L_3 = \{w^i \mid w \in \{a\}^i,\ i \in \mathbb{N}\}$

d) $L_4 = \{a^{n^3} \mid n \geq 3\}$

e) $L_5 = \{a^m b^n c^{m*n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

f) $L_6 = \{a^k b^k c^n a \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k b^n c^n b \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Hinweis: Um zu zeigen, dass eine Sprache eine dieser drei Eigenschaften besitzt, geben Sie bitte eine passende Grammatik oder die Idee eines Automaten entsprechenden Typs an. Um zu zeigen, dass eine Sprache eine Eigenschaft nicht besitzt, genügt es, eine inhaltliche Begründung anzugeben und die Methode zu nennen, mit der man dies nachweisen könnte. Die Implikationskette regulär $\Longrightarrow$ kontextfrei $\Longrightarrow$ Turing-entscheidbar und ihre Kontraposition darf ohne weitere Erwähnung vorausgesetzt werden (d.h. Sie müssen „nicht regulär" nicht begründen, wenn „nicht kontextfrei" bereits klar ist etc.).

Aufgabe 41: Weihnachten wird ausgelassen **(Selbstkontrolle)**

Schon gehört? Um die Jahresarbeitszeit zu erhöhen, will die Regierung WEIHNACHTEN auslassen. Damit das niemand merkt, soll es aber schleichend geschehen; die Buchstaben sollen nach und nach ausgelassen werden, bis nichts mehr übrig ist. Um das in den Medien besser vertreten zu können, werden Sie engagiert: Sie sollen zeigen, dass das Auslassen von WEIHNACHTEN völlig regulär ist.

Sie definieren sich dazu die Operation $A(\cdot)$ für ein Wort u über einem Alphabet Σ durch

$$A(u) := \{w \mid \exists k \in \mathbb{N}\, \exists v_0, w_0, \ldots, v_k, w_k, v_{k+1} \in \Sigma^* : (w = w_0 \ldots w_k \wedge u = v_0 w_0 \ldots v_k w_k v_{k+1})\} \ ,$$

die das Auslassen von beliebigen Teilwörtern realisiert. Da Politiker sich mit Wörtern bekanntlich nicht auskennen, beschließen Sie, ihren Auftraggebern als Nachweis der Regularität eine Zahl vorzulegen: den Index der Sprache A(WEIHNACHTEN) über dem Alphabet $\Sigma = \{$A,C,E,H,I,N,T,W$\}$. Als Beweis, dass Sie Ihr Honorar verdient haben, müssen Sie die Äquivalenzklassen der Relation $\equiv_{A(\text{WEIHNACHTEN})}$ einzeln angeben und begründen, warum jedes Wort in genau einer der Äquivalenzklassen liegt.

Aufgabe 42: NEA und DEA **(Selbstkontrolle)**

Gegeben ein endlicher Automat $B = (\{a,b,c\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \rightarrow, q_0, \{q_0, q_1\})$, mit

$$\rightarrow \ = \ \{(q_0,a,q_0), (q_0,b,q_1), (q_1,c,q_0), (q_1,a,q_2), (q_1,c,q_2), (q_2,a,q_2), (q_2,b,q_0), (q_2,b,q_1)\}.$$

Wir wollen einen Automaten konstruieren, der $\overline{L(B)}$ akzeptiert.

a) Zeichnen Sie B.

b) Erklären Sie kurz, warum B nichtdeterministisch ist.

c) Erklären Sie in Ihren eigenen Worten, warum es nicht ausreicht, die Endzustände von B zu invertieren (d.h. nur q_2 als akzeptierenden Zustand zu haben) um die Sprache $\overline{L(B)}$ zu akzeptieren.

d) Konstruieren Sie einen DEA A mit $L(A) = L(B)$ anhand der Potenzmengenkonstruktion.

e) Konstruieren Sie A^c, so dass $L(A^c) = \overline{L(A)}$.

f) Geben Sie zwei Wörter w, w' an, so dass $w \in L(A^c)$ und $w' \notin L(A^c)$.

Aufgabe 43: Sprache $\rightsquigarrow$ reg. Ausdruck **(Selbstkontrolle)**

Geben Sie zu den folgenden Sprachen L_i über $\{a, b, c\}^*$ reguläre Ausdrücke re_i an mit $L(re_i) = L_i$ für $1 \leq i \leq 4$.

a) $L_1 = \{avb^{2i}cw \mid v \in \{a, c\}^*, i \in \mathbb{N}, w \in \{a, b, c\}^*\}$

b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat eine gerade Länge}\}$

c) $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } a \text{ und ein } b\}$

d) $L_4 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{nach dem ersten } b \text{ in } w \text{ kommt kein } c \text{ mehr}\}$

Aufgabe 44: Kellerautomaten und Grammatiken **(Selbstkontrolle)**

a) Welche Eigenschaften müssen allgemein für einen Kellerautomaten erfüllt sein, damit dieser deterministisch ist?

Gegeben sei die folgende Sprache

$$L = \{wcw^R \mid w \in \{aa, bb\}^*\}.$$

b) Geben Sie eine Grammatik G an, so dass $L(G) = L$ gilt.

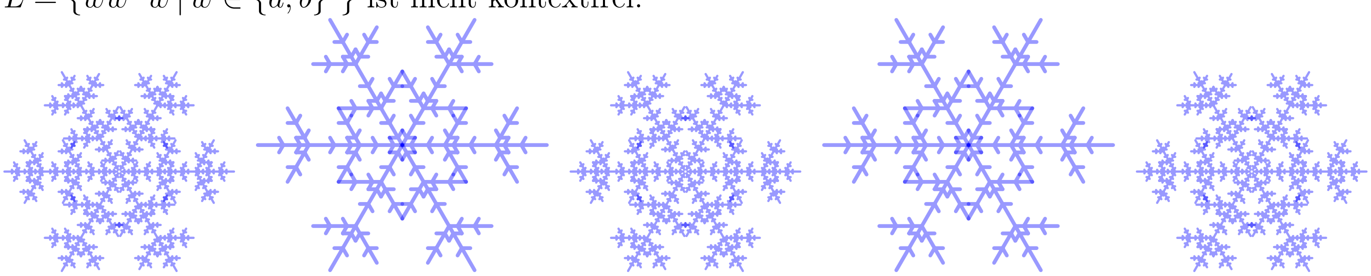
c) Geben Sie einen *deterministischen* Kellerautomaten K an, so dass $L(K) = L$ gilt.

d) Geben Sie einen *deterministischen* Kellerautomaten K' an, so dass $L_\varepsilon(K') = L$ gilt.

Hinweis: Es darf auch $K' = K$ gelten.

Aufgabe 45: Pumping-Lemma **(Selbstkontrolle)**

Zeigen Sie für die folgende Sprache unter Benutzung des passenden Pumping-Lemmas:
$L = \{ww^Rw \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht kontextfrei.



Wir wünschen euch einen guten Rutsch ins neue Jahr!