Aufgabe 1.

$\boxed{1}$ Die Aussage ist falsch.

Betrachte $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik, $f(x) = x^2$.

f ist differenzierbar, und sie ist lipschitzsch $\Leftrightarrow$ f' beschränkt (Satz 108 InVL). Aber $f'(x) = 2x$ unbeschränkt $\Rightarrow$ f nicht lipschitzsch.

$\boxed{2}$ Die Aussage ist <u>falsch</u>.

Seien $X, Y = \mathbb{R}$ mit der eukl. Metrik,

$f(x) = x^2$; $O = (-1, 1)$

$\Rightarrow f(O) = [0, 1)$ nicht offen.

$\boxed{3}$ Die Aussage ist <u>wahr</u>.

Falls $\|\cdot\|$ eine Norm ist, dann ist $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik, und $\|x\| = \|x-0\| = d(x,0) = d(x,v)$ für $v = 0$.

Aufgabe 2

$\boxed{1}$ $$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{(\ln x)^2}_{g} \, dx \overset{\text{Partielle Integration}}{=}$$

$$= \left(f g - \int f g'\right) = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \, 2 \frac{\ln x}{\cancel{x}} \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \overset{PI}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$\boxed{2}$ $$\int_0^1 x \sqrt{1-x} \, dx = \left\{ 1-x = t, \ x = 1-t \right\} =$$

$$= \int_1^0 (1-t)\sqrt{t} \cdot (-1) \, dt = \int_0^1 (1-t)\sqrt{t} \, dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{3/2}\right) dt = \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

$\boxed{3}$ $$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \underbrace{\frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x^4+1}}}_{\text{stetig}}\,dx}_{\text{„eigentliches Integral“}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

Auf $(1,+\infty)$: $\left|\frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x^4+1}}\right| \le \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^{3/2}}$,

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ konvergiert $\Rightarrow$

auch $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ konvergiert.

$\Rightarrow$ das Integral konvergiert.

$\boxed{4}$ $\frac{1}{n \ln n} = f(n)$ mit $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

f monoton,

$\sum_{2}^{+\infty} f(n)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$

konvergiert.

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx =$$

$$= \left(\ln \ln x\right)\Big|_{2}^{+\infty} = +\infty :$$

divergent $\Rightarrow$ auch die Reihe ist divergent.

$\boxed{5}$ Sei $f_n(x) = \frac{nx}{n+\sin^2 x}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,x}{n+\sin^2 x} = x =: f(x).$$

Falls $f = \text{glm} \lim f_n$, dann

$$\lim \int f_n = \int f = \int_0^1 x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Man prüft: $f = \text{glm} \lim f_n$.

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{n\,x}{n+\sin^2 x} - x\right| = \left|\frac{n}{n+\sin^2 x} - 1\right| \cdot |x|$$

$$= \left|\frac{\sin^2 x}{n+\sin^2 x}\right| \cdot |x| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für } x \in [0,1]$$

$\Rightarrow f = \text{glm-}\lim f_n$.

Aufgabe 3

$\boxed{1}$ $y'(x) = 2x\, y(x)^2, \quad y(0) = 1.$

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 2x.$$

Separation der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x \, dx$$

$$-\frac{1}{y} + C = x^2 \quad ;$$

$$y = \frac{1}{C - x^2}.$$

$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{C - 0^2} \quad \Leftrightarrow \quad C = 1$

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

definiert auf $(-1, 1)$.

Keine Fortsetzung möglich,

da $\lim\limits_{x \to \pm 1} y(x) = \infty.$

$\boxed{2}$ $y'(x) = \frac{2}{x} y(x) + x$

Lineare DGl 1er Ordnung.

1) homogene DGl:

$y' = \frac{2}{x} y;$

$y = C e^{\int \frac{2}{x} dx} = C e^{2 \ln x} =$

$= C x^2.$

2) Variation der Konstanten für eine spezielle Lösung:

$y = C(x)\, x^2$

$y' = C' x^2 + \cancel{2xC} =$

$= \cancel{\frac{2}{x} x^2 C} + x;$

$C' = \frac{1}{x}; \quad C = \ln x$

$\Rightarrow y_s(x) = x^2 \ln x.$

Allgemeine Lösung:

$y(x) = C x^2 + x^2 \ln x, \quad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 4

1) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$

charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

Einfache Nullstelle $\lambda_1 = 0$,

2fache Nullstelle $\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{2x}, \quad y_3(x) = x e^{2x}$$

Allg. Lösung:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$

$$c_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2) Spezielle Inhomogenität:

$e^{\mu x}$ mit $P(\mu) = 0$. $(\mu = 2)$

$$p'(\mu) = 3\mu^2 - 8\mu + 4 = 0$$

$$p''(\mu) = 6\mu - 8 = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $y_s(x) = \frac{x^2}{4} e^{2x}$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + \frac{x^2}{4} e^{2x}.$$

Aufgabe 5

1) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi \\ 9 \end{pmatrix}}_{B}$$

2). $z' = Az$.

Bestimme zuerst die Eigenwerte von A:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2 =$$
$$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 =$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

A diagonalisierbar: $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3)$

Eigenvektor für $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ z.B. } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

für $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ z.B. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{pmatrix}}_{Y(t)} C.$$

3) Variation der Konstanten:

$$z = Y \cdot C$$

mit $C = \int Y^{-1} B$.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = -\frac{1}{3e^{3t}} \begin{pmatrix} -e^{3t} & -e^{3t} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

$$C = \frac{1}{3} \int \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int \begin{pmatrix} 3 \\ -3e^{-3t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-3t} \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 6t-1 \end{pmatrix}$$

4) Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 6t-1 \end{pmatrix},$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5) $e^{tA} = Y(t)\,Y(0)^{-1}$,

$$Y(0)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2e^{3t} & 1-e^{3t} \\ 2-2e^{3t} & 2+e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$