Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Quantorenlogik

× Aufgabe 1: Lesen

Übersetze folgende „Hieroglyphen“ in Sprache:

1. $m_o \in S \cap M$,
   wobei $S := \{x|x \text{ ist schlau}\}$, $M := \{x|x \text{ ist ein Mathematiker}\}$, $m_o :=$ Gauß.

   Lösung: Gauß ist ein schlauer Mathematiker.

2. $\forall t \in [0, \infty) : t^2 \geq 0$.

   Lösung: Jede nicht negative reelle Zahl ist quadriert auch nicht negativ.

3. $\exists z \in \mathbb{R} : z \in \mathbb{Q}$.

   Lösung: Es gibt (mindestens) eine reelle Zahl, die rational ist.

4. $\forall x \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}$.

   Lösung: Alle rationalen Zahlen sind auch reelle Zahlen. Oder: $\mathbb{Q}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

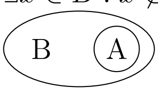
5. $\forall t \in T \; \exists d \in D : d$ passt auf t,
   wobei $T := \{x|x \text{ ist ein Topf}\}$, $D := \{x|x \text{ ist ein Deckel}\}$.

   Lösung: Für jeden Topf gibt es auch einen Deckel, der auf den Topf passt.

Aufgabe 2: Bilder malen

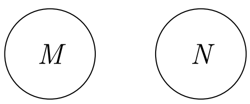
Zeichne jeweils ein Venn-Diagramm, das die folgenden Mengen beschreibt

Beispiel: Seien A und B Mengen und es gelten die Aussagen $\forall x \in A : x \in B$ und $\exists x \in B : x \notin A$. Dann ist als Skizze das typische Teilmengenbild gefordert:

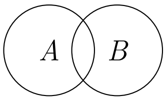


1. Seien M und N Mengen. Es gelten folgende Aussagen:
   $\forall y \in M : y \notin N$.
   $\forall y \in N : y \notin M$.

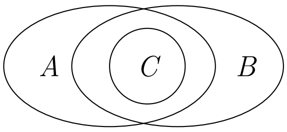
   Lösung:



2. Seien A und B Mengen. Es gelten folgende Aussagen:
   $\exists x \in A : x \notin B$.
   $\exists x \in B : x \notin A$.
   $A \cap B \neq \emptyset$.

   Lösung: 

3. Seien A,B und C Mengen. Es gelten folgende Aussagen:
   $\forall x \in C : x \in A \cap B$.
   $\exists x \in B : x \in A \wedge x \notin C$.
   $\exists x \in B : x \notin A$.
   $\exists x \in A : x \notin B \cup C$.

   Lösung: 

× Aufgabe 3: Formalisieren

Formalisiere die folgenden Aussagen im Sinne der Quantorenlogik, indem du Objekte mit bestimmten Eigenschaften Mengen zuordnest und entsprechend der Aussage logisch korrekt verknüpfst.
Beispiel: „Jeder Grashalm ist grün oder braun."
lässt sich formalisieren als $\forall g \in H : \; g \in G \vee g \in B$, wobei mit H die Menge aller Grashalme, mit G die Menge aller grünen Dinge und mit B die Menge aller braunen Dinge bezeichnet werden.
Versuche auch andere Möglichkeiten der Formalisierung (beispielsweise durch Mengenoperationen) zu finden (– Hierbei ist es hilfreich, sich die Situation zu skizzieren). Das Beispiel kann nämlich auch so formalisiert werden: $\forall g \in H : \; g \in G \cup B$ oder $H \subseteq (G \cup B)$.

1. Kein Mathestudent benötigt einen Taschenrechner.

   Lösung: Ab hier bei Lösungen stets beachten, dass nicht nur die angegebenen Lösungen richtig sind. Gebt unter Umständen trotzdem diese Lösungen an, damit das Negieren einfacher ist.
   $\forall x \in M : x \notin T$ *mit* $M := \{x : x \text{ ist Mathematikstudent}\}$ *und* $T := \{x : x \text{ benötigt einen Taschenrechn}$
   Alternative: $M \cap T = \emptyset$ *oder* $\nexists x \in M : \; x \in T$

2. Wohnt jemand in Oldenburg, so besitzt er immer ein Fahrrad.

   Lösung: $\forall x \in O : x \in F$ *mit* $O := \{x : x \text{ wohnt in Oldenburg}\}$ *und* $F := \{x : x \text{ besitzt ein Fahrrad}\}$
   Alternative: $x \in O \Rightarrow x \in F$ *immer wahr* *oder* $O \subseteq F$.

3. Es gibt giftige Tiere.

Lösung: $\exists x \in T \ : \ x \in G$ *mit* $T := \{x \mid x \text{ ist ein Tier }\}$ *und* $G := \{x \mid x \text{ ist giftig}\}$
oder: $T \cap G \neq \emptyset$.

4. x ist reell, jedoch nicht gleich der Null.

   Lösung: $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$ *oder* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

× Aufgabe 4: Negieren

Negiere die formalisierten Aussagen 1-4 aus der vorherigen Aufgabe sowohl sprachlich als auch formal. (Hinweis: Eventuell wird die Regel „$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$“ aus dem Vortrag über Aussagenlogik benötigt.)
Lösung:

1. *x ist nicht reell oder x ist gleich der Null.*
   $x \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *oder* $x \notin \mathbb{R} \vee x = 0$

2. *Es gibt (mindestens) einen Mathestudenten, der einen Taschenrechner benötigt.*
   $\exists x \in M : x \in T$ *mit* $M := \{x : x \text{ ist Mathematikstudent}\}$ *und* $T := \{x : x \text{ benötigt einen Taschenrechn}$
   Alternative: $M \cap T \neq \emptyset$

3. *Es gibt (mindestens) einen Oldenburger, der kein Fahrrad besitzt.*
   $\exists x \in O : x \notin F$ *mit* $O := \{x : x \text{ wohnt in Oldenburg}\}$ *und* $F := \{x : x \text{ besitzt ein Fahrrad }\}$
   Alternative: $x \in O \not\Rightarrow x \in F$.

4. *Kein Tier ist giftig oder: Alle Tiere sind nicht giftig.*
   $\nexists x \in T : x \in G$ *oder* $\forall x \in T : x \notin G$.

× Aufgabe 5: Mehrere Quantoren

Formalisiere die folgenden Aussagen:

1. Für jedes Kind gibt es eine Frau, die die Mutter des Kindes ist.

   Lösung: $\forall k \in K \ \exists f \in F : f$ *ist die Mutter von* k *(K und F passend gewählt).*

2. Es gibt eine ganze Zahl, die für alle quadrierten natürlichen Zahlen eine untere Schranke darstellt. (d.h. Alle quadrierten Zahlen sind nicht kleiner als diese Zahl)

   Lösung: $\exists x \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq x$

! 3. Für eine beliebige Funktion f kann man für zwei beliebige, verschiedene Stellen x_1, x_2 in einem Intervall $[a, b]$, einen reellen Wert finden, der zwischen den Funktionswerten von f in diesen Stellen liegt. *(-Zwischen- kann hier auch bedeuten, dass der Wert den Funktionswerten entspricht)*

   Lösung: $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2 \ \exists z \in \mathbb{R} : f(x_1) \leq z \leq f(x_2) \vee f(x_1) \geq z \geq f(x_2)$.

! Aufgabe 6: Alles gemischt

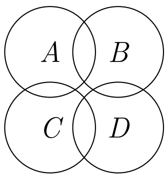
Hier findest du nochmal zu jedem Aufgabentyp schwierige Aufgaben, an denen du zeigen kannst, dass du diesen Themenblock verstanden hast.

1. **Lesen:** $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : \ |a_n - a| < \varepsilon$, wobei a_n „n-tes Folgenglied einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$“ heißen soll.

   Bemerkung: Die Genaue Bedeutung dieser Aussage wirst du später im Votrag über Folgen noch kennen lernen.

   Lösung: Es gibt eine reellen Wert a, so dass für alle positiven, reellen Epsilon eine natürliche Zahl N existiert, so dass ab dem N-ten Folgenglied einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folgenglieder einen kleineren Abstand als Epsilon zum Wert a besitzen. Oder kurz nach Definition: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gegen a konvergent. Wenn du gelernt hast mit Quantoren sicher umzugehen, fällt es dir wesentlich leichter Definitionen (wie diese) zu verstehen!

2. **Bilder Malen:** Seien A,B,C und D Mengen. $\Omega := \{A, B, C, D\}$ sei die Menge, die die Mengen A, B, C, D als Menge zusammenfasst (– Eine Menge bestehend aus Mengen). Es gelten folgende Aussagen:
   $\forall M \in \Omega\ \exists N, P \in \Omega \backslash \{M\}, N \neq P : \ M \cap N \neq \emptyset \wedge M \cap P \neq \emptyset \wedge M \cap N \cap P = \emptyset.$
   $\forall M \in \Omega\ \exists! N \in \Omega \backslash \{M\} : \ M \cap N = \emptyset.$
   $\forall x \in A \cup D : \ [x \in A \wedge x \notin D] \vee [x \notin A \wedge x \in D].$

   Lösung:
   

3. **Formalisieren:** Es gibt Tiere, die entweder jeden Tag in der Sonne liegen oder nicht rosa gepunktet sind. (Tipp: Wie kann man „entweder... oder...“ formalisieren?)

   Lösung: $\exists x \in T : (x \in S \wedge \underbrace{\neg[\neg(x \in R)]}_{x\in R}) \vee (\neg[x \in S] \wedge \neg[x \in R])$
   $S := \{x : x \textit{ liegt den ganzen Tag in der Sonne}\}$ *und* $R := \{x : x \textit{ ist rosa gepunktet}\}$
   oder: $\exists x \in T : x \in (S \cap R) \cup (S^c \cap R^c)$

4. **Negieren:** Negiere die Aussage zuvor. (Formal und sprachlich)

   Lösung: $\forall x \in T : \underbrace{\neg[(x \in S \wedge x \in R) \vee (\neg[x \in S] \wedge \neg[x \in R])]}_{\neg(x\in S \wedge x \in R) \wedge \neg(\neg[x\in S] \wedge \neg[x \in R])}$
   $= \ (\neg[x \in S] \vee \neg[x \in R]) \wedge (x \in S \vee x \in R) \ = \ (x \notin S \vee x \notin R) \wedge x \in S \cup R$
   $= \ (x \notin S \wedge x \in S \cup R) \vee (x \notin R \wedge x \in S \cup R) \ = \ x \in R \backslash S \vee x \in S \backslash R$
   Jedes Tier ist rosa gepunktet ohne den ganzen Tag in der Sonne zu liegen oder den ganzen Tag in der Sonne liegend ohne rosa gepunktet zu sein.

5. **Mehrere Quantoren:** Für jede Haustür eines Hauses gibt es einen Schlüssel, der nicht nur die Haustür, sondern auch alle Türen innerhalb dieses Hauses öffnen kann.

   Lösung: $\forall h \in H\ \exists s \in S\ \forall t \in T_h: \ s \text{ öffnet } h \wedge s \text{ öffnet } t$,
   wobei $H := \{h | h \text{ ist eine Haustür eines Hauses }\}$,$S := \{s | s \text{ ist ein Schlüssel }\}$,
   $T_h := \{t | t \text{ ist eine Tür innerhalb eines Hauses mit der Haustür } h\}$.