Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Funktionen und Abbildungen I

× Aufgabe 1: Wohldefiniertheit und Abbildungseigenschaften

Untersuche, ob es sich bei den folgenden Vorschriften um Abbildungen handelt.
Falls ja, bestimme das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv und/oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind demnach bijektiv?

(a) $f_1 : \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\},\ f_1(x) = 2^x$.
Lösung: f_1 *ist eine Abbildung, da* $2^1 = 2,\ 2^4 = 16,\ 2^6 = 64$ *gilt. Das Bild von* f_1 *ist* $\{2, 16, 64\}$ *und somit ist* f_1 *surjektiv. Ferner ist* f_1 *injektiv und damit bijektiv.*

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 7x^2 + 3$.
Lösung: f_2 *ist eine Abbildung, Bild von* f_2 *sind alle reellen Zahlen größer oder gleich 3,* f_2 *ist weder injektiv noch surjektiv.*

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{x}$.
Lösung: f_3 *ist keine Abbildung, da* $f_3(0)$ *nicht definiert ist.*

(d) $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$.
Lösung: f_4 *ist eine Abbildung, das Bild von* f_4 *ist* $\left\{\frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\ n \text{ gerade}\right\}$*, denn:*

$$\frac{z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{2z+1}{2}} = \frac{2z}{2z+1}$$

f_4 *ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, da die 1 zum Beispiel nicht getroffen wird.* f_4 *ist aber injektiv, da für* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\frac{z_1}{z_1+\frac{1}{2}} = \frac{z_2}{z_2+\frac{1}{2}} \Rightarrow z_1(z_2+\frac{1}{2}) = z_2(z_1+\frac{1}{2}) \Rightarrow z_1z_2+\frac{1}{2}z_1 = z_2z_1+\frac{1}{2}z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

(e) $f_5 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$.
Lösung: f_5 *ist keine Abbildung, da* $f_5(1) \neq f_5(\frac{3}{3})$ *gilt.*

(f) $f_6 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q},\ f_6(\frac{a}{b}) = \frac{4b}{3a}$.
Lösung: f_6 *ist eine Abbildung, da zum einen* $f(x)$ *für alle* $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ *definiert und aus* $\mathbb{Q}$ *stammt und zum anderen* f *wohldefiniert ist, da* $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ *genau dann gleich sind, wenn es* $a, b, n \in \mathbb{Z}$ *gibt, sodass* $x_1 = \frac{a}{b}$ *und* $x_2 = \frac{na}{nb}$ *gilt (oder andersherum) – die Bildwerte dieser Elemente* x_1 *und* x_2 *sind dabei gleich. Eine andere mögliche Erklärung ist, dass gerade* $f_6(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x}$ *gilt und sowohl* $\frac{1}{x}$ *als auch* $\frac{4}{3}$ *(aufgefasst als konstante Abbildung) Abbildungen auf* $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ *sind. Das Bild von*

f_6 ist $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, sodass f_6 nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv ist. Ferner ist f injektiv, da für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = f\left(\frac{a_2}{b_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{4b_1}{3a_1} = \frac{4b_2}{3a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

(! g) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A \in \{0, \infty\}\} \to \mathbb{N}$, $f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

Lösung: f_7 ist eine Abbildung, denn da alle Elemente des Definitionsbereichs (Mengen!) endlich viele aber wenigstens eine natürliche Zahl als Element beinhalten, ist das Maximum dieser Mengen wohldefiniert. Die Abbildung ist surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\{x\}$ im Definitionsbereich von f_7 liegt und $f_7(x) = x$ für $x \in \mathbb{N}$ gilt. Die Abbildung ist aber nicht injektiv, da bspw. $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 3\}$ Elemente des Definitionsbereichs sind, diese aber auf den gleichen Funktionswert abgebildet werden: $f_7(\{1, 2, 3\}) = 3 = f_7(\{2, 3\})$. Wegen der Surjektivität ist das Bild von f_7 gerade $\mathbb{N}$.

× Aufgabe 2: Komposition

Seien die folgenden Abbildungen gegeben

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) &= x^2 + x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & g(x) &= x + 3 \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Berechne:

(a) $(f \circ g)(3)$

Lösung: $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3+3) = f(6) = 6^2 + 6 = 42$

(b) $(g \circ h \circ f)(2)$

Lösung: $(g \circ h \circ f)(2) = g(h(f(2))) = g(h(6)) = g(216) = 219$

(c) $(h \circ g)(3)$

Lösung: $(h \circ g)(3) = h(g(3)) = h(6) = 216$

(d) $(f \circ g)(x)$. Vereinfache soweit wie möglich!

Lösung:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) &= (x+3)^2 + x + 3 \\ &= x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3) \end{aligned}$$

× Aufgabe 3: Bild und Urbild

Beweise oder widerlege folgende Aussagen zum Bild und Urbild einer Funktion.

(a) Sei $f: M \to N$ eine Funktion. Dann gilt $f(f^{-1}(N)) = N$ und $f^{-1}(f(M)) = M$.

Lösung:

- $f(f^{-1}(N)) \neq N$ *für* $N = M = \mathbb{R}$ *und* $f(x) = x^2$
- $f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(\{f(x) \mid x \in M\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{f(m) : m \in M\}\}$, *also stimmt die Aussage tatsächlich, da für jedes* $x \in M$ *ein* $f(x) \in f(M)$ *existiert. Im Gegensatz dazu existiert im ersten Fall nicht zu jedem* $y \in N$ *ein (Urbild)* $x \in M$ *mit* $f(x) = y$*. Das ist hier der entscheidende Unterschied – diese zweite Aussage gilt also nur auf Grund der Wohldefiniertheit von Abbildungen.*

(b) Sei nun $A \subsetneq M$ und $B \subsetneq N$. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ und $f^{-1}(f(A)) = A$.

Lösung:

- *Die erste Aussage stimmt nicht, da die entsprechende Aussage in (a) bereits nicht stimmte. Wir könnten im gleichen Setting wie in der entsprechenden Teilaufgabe in (a) hier* $B := [-10, \infty)$ *setzen. Dann ist* $f(f^{-1}(B)) = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq B$.
- *Die zweite Aussage stimmt hier ebenfalls nicht. Betrachten wir die Abbildung* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, *die jeden Wert auf die 0 abbildet, so gilt beispielsweise mit* $A := [0, 1]$, *dass* $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \neq A$ *ist.*

(c) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ gegeben. Dann gilt $f^{-1}(\{x\}) = \{\sqrt{x}\}$.

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Es gilt z.B. $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ *und* $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$. *Allgemein gilt hier:*

$$f^{-1}(\{x\}) = \begin{cases} \{x, -x\}, & \textit{falls } x \geq 0 \\ \varnothing, & \textit{falls } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4: Wir bauen eine Abbildung

Falls möglich, finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f: M \to N$, sodass die jeweiligen Bedingungen gelten. Falls es nicht möglich ist, solche Mengen und eine solche Abbildung anzugeben, begründe warum.

(a) Das Bild $f(\{\text{Daniel}, \text{Ivan}, \text{Boris}\})$ ist $\{\text{Analysis}\}$, das Urbild $f^{-1}(\{\text{Analysis}\})$ ist ungleich $\{\text{Daniel}, \text{Ivan}, \text{Boris}\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{\text{Stochastik}\})$ ist $\{\text{Marcus}, \text{Angelika}, \text{Peter}\}$.

Lösung: Wir wählen zum Beispiel

$M := \{Daniel, Ivan, Boris, Hannes, Marcus, Angelika, Peter\}, \; N := \{Analysis, Stochastik\}$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= Analysis\,, \quad \text{für } x \in \{Daniel, Ivan, Boris, Hannes\}, \\ f(x) &= Stochastik\,, \quad \text{für } x \in \{Marcus, Angelika, Peter\}. \end{aligned}$$

(b) Die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.

Lösung: $M := \mathbb{R},\ N := \mathbb{R},\ f(x) = 0$

(! c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.

Lösung: Für $x \in \mathbb{Q}$ setzen wir $f(x) := [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ („Gaußklammer“ $\widehat{=}$ abrunden). Damit gilt $f(x) \in \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(n) = n$ und $n \in \mathbb{Q}$, also haben wir für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Urbild in $\mathbb{Q}$ gefunden – es gilt also $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.

(! d) Die Mächtigkeit des Definitionsbereichs von f ist überabzählbar unendlich, die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist abzählbar unendlich und f ist injektiv.

Lösung: Angenommen, es gibt eine solche Abbildung f. Sei M der Definitionsbereich und N der Wertebereich von f. Da N abzählbar ist, existiert eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to N$. Da bijektive Abbildungen eine Umkehrabbildung besitzen (welche auch wieder bijektiv ist), ist $g^{-1} : N \to \mathbb{N}$ bijektiv und somit insbesondere injektiv. Es gilt weiterhin, dass Kompositionen injektiver Abbildungen – also auch $g^{-1} \circ f$ – wieder injektiv sind, denn: Seien $x_1, x_2 \in M$ mit $(g^{-1} \circ f)(x_1) = (g^{-1} \circ f)(x_2)$, d. h.

$$g^{-1}(f(x_1)) = g^{-1}(f(x_2))\,. \tag{1}$$

Wir müssen zeigen, dass $x_1 = x_2$ gilt. Wegen (1) ist $f(x_1) = f(x_2)$, da g^{-1} injektiv ist und daraus folgt wiederum, dass $x_1 = x_2$ gilt, weil auch f injektiv ist. Also existiert mit $g^-1 \circ f$ eine injektive Abbildung von dem Definitionsbereich M von f nach $\mathbb{N}$. Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt dann, dass $\|M| \leq |\mathbb{N}|$ gilt und M damit höchstens abzählbar ist. Also kann es eine solche Abbildung f wie in der Aufgabenstellung nicht geben.

Aufgabe 5: Komposition, Injektivität und Surjektivität

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ zwei Abbildungen zwischen zwei Mengen M und N. Zeige: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist g injektiv. Gilt auch die Umkehrung? Liefere hierzu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.
(!) Zeige weiter: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist f auch surjektiv.

Lösung: Zeige zuerst: g injektiv. Seien dazu $y_1, y_2 \in N$ mit $g(y_1) = g(y_2)$. Es gilt aufgrund der Definition von $f \circ g$

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$$

und damit $y_1 = y_2$. Damit ist Injektivität von g bereits nach Definition nachgewiesen. Die Umkehrung gilt nicht, da wir z.B. $N = M = \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(x) = x$ sowie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 0$ wählen können. Dann ist g offensichtlich injektiv (sogar bijektiv), aber es gilt $(f \circ g)(x) = 0 \neq x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Zeige nun weiter, dass f surjektiv ist. Sei dazu $y \in N$ beliebig und setze $x := g(y) \in M$. Dann gilt, dass $f(x) = f(g(y)) = y$ ist. Demnach finden wir für jedes $y \in N$ ein $x \in M$, sodass f(x)=y ist.

Beide Teile zusammen zeigen die Aussage der Aufgabe.

Aufgabe 6: Mächtigkeit

Beweise das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Lemma I (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \geq \#N$

Lösung: Für $\#M = \infty$ ist das Lemma analog zum Beweis des bewiesenen Lemmas aus der Vorlesung – ist $\#M = \infty$, so ist es egal, welche Mächtigkeit N hat, da das die Aussage des Lemma in jedem Fall erfüllt ist. Falls $\#M < \infty$ ist, existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Elemente $a_1, ..., a_n \in M$, sodass $M = \{a_1, ..., a_n\}$ ist. Weiter gilt:

$$N \overset{f \text{ surjektiv}}{=} f(M) = f(\{a_1, ..., a_n\}) \overset{\text{Übung}}{=} f(\{a_1\}) \cup ... \cup f(\{a_n\})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \#N &= \#(f(\{a_1\}) \cup ... \cup f(\{a_n\})) \overset{(*)}{\leq} \#f(\{a_1\}) + ... + \#f(\{a_n\}) \\ &= \underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} = n = \#M \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma vollständig bewiesen. Die Ungleichung $(*)$ haben wir bereits auf dem Übungszettel zur Mengenlehre bewiesen.

! Aufgabe 7

Beweise für eine Abbildung $f : M \to N$ die folgenden Aussagen über das Urbild und das Bild von f:

(a) Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$$

(b) Seien $M_1, M_2 \subseteq N$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2)$$

Lösung:

(*a*): *Seien* $M_1, M_2 \subseteq M$ *nicht-leere Mengen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} f(M_1 \cup M_2) &= \{f(x) \mid x \in (M_1 \cup M_2)\} = \{f(x) \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2)\} \\ &= \{f(x) \mid x \in M_1\} \cup \{f(x) \mid x \in M_2\} = f(M_1) \cup f(M_2) \end{aligned}$$

Hinweis für die Tutoren: Gerne können hier auch beide Teilmengeninklusionen separat gezeigt werden. Dies ist (insbesondere am Anfang) etwas einfacher, strukturierter und vor allem weniger fehleranfällig.

(*b*): *Seien* $M_1, M_2 \subseteq N$ *nicht-leere Mengen, dann gilt:*

$$\begin{aligned} f^{-1}(M_1 \cup M_2) &= \{x \in M \mid f(x) \in M_1 \cup M_2\} = \{x \in M \mid f(x) \in M_1 \text{ oder } f(x) \in M_2\} \\ &= \{x \in M \mid f(x) \in M_1\} \cup \{x \in M \mid f(x) \in M_2\} = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2) \end{aligned}$$