Analysis IIa

Dozent: Konstantin Pankrashkin

Inhaltsverzeichnis

Vorlesung 1

Definition 1. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine **Stammfunktion** von f ist eine differenzierbare Funktion $\Phi : I \to \mathbb{R}$ mit $\Phi'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Wir machen ein paar einfache aber wichtige Bemerkungen.

Bemerkung 2. Manchmal ist das Intervall I wichtig, in diesem Fall ist von *einer Stammfunktion auf* I die Rede. Ist Φ eine Stammfunktion von f auf einem Intervall I, so ist Φ auch eine Stammfunktion von f auf jedem Teilintervall von I.

Bemerkung 3. Ist Φ eine Stammfunktion von f, so hat jede Stammfunktion Ψ von f die Form $\Psi = \Phi + C$, wobei C eine Konstante ist. (Beweis: $(\Psi - \Phi)' = \Psi' - \Phi' = f - f = 0$, also ist $\Psi - \Phi$ konstant.) Umgekehrt, jede Funktion Ψ der Form $\Psi = \Phi + C$ mit einer Konstante C ist eine Stammfunktion von f, da $(\Phi + C)' = \Phi' = f$. Die ganze Familie der Stammfunktionen von f (falls sie existieren) bezeichnet man als

$$\int f$$

und das Zeichen $\int$ nennt sich **unbestimmtes Integral**.[1] Ist Φ eine konkrete Stammfunktion von f, so schreibt man auch

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C$$

(damit die Variable x sichtbar bleibt). Die Aufgabe, das unbestimmte Integral von f auszurechnen, ist also äquivalent zu der Aufgabe, eine Stammfunktion von f zu finden. Insbesondere haben wir für jede differenzierbare Funktion f die Gleichheit

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Die Schreibweise mit dx ist besonders nützlich, falls es irgenwelche Parameter im Spiel sind. Zum Beispiel,

$$\begin{aligned} &\int (x+2t) \underbrace{dx}_{!} = \frac{x^2}{2} + 2tx + C, &&\text{weil } \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2} + 2tx + C\Big) = x + 2t, \\ \text{aber } &\int (x+2t) \underbrace{dt}_{!} = tx + t^2 + C, &&\text{weil } \frac{d}{dt}\big(tx + t^2 + C\big) = x + 2t. \end{aligned}$$

[1]Später werden Sie auch andere Integrale lernen, z.B. $\int_a^b, \oint, \iint, \int^{\oplus}$ usw.

Die Operation $\int$ ist natürlich linear:

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \quad \int af = a \int f$$

(hier sind f und g Funktionen und a eine Konstante. Beweis: $(\int f + \int g)' = (\int f)' + (\int g)' = f + g$ usw.).

Bemerkung 4. Die Existenz einer Stammfunktion ist nicht automatisch. Das sieht man mit einem ganz einfachen Beispiel: *Die Funktion* $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \textit{für } x \geq 0, \\ -1, & \textit{für } x < 0, \end{cases}$ *besitzt keine Stammfunktion auf* $\mathbb{R}$.

Beweis. (Widerspruchsbeweis) Sei Φ eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$, dann ist Φ auch eine Stammfunktion von f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, +\infty)$. Für $x < 0$ hat man also $\Phi'(x) = -1$. Die Stammfunktionen von $x \mapsto -1$ haben die Form $x \mapsto -x + a$, wobei a eine Konstante ist. Also gibt es eine Konstante a mit $\Phi(x) = -x + a$ für alle $x < 0$. Mit derselben Logik zeigt man, dass es eine Konstante b gibt mit $\Phi(x) = x + b$ für alle $x > 0$. Da Φ eine Stammfunktion von f ist, ist sie differenziebar und damit auch stetig. Insbesondere hat man

$$\Phi(0) = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \Phi(x)}_{=a} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \Phi(x)}_{=b}.$$

Also gilt $b = a$ und $\Phi(0) = a$. Wir haben beweisen, dass für eine Konstante a gilt

$$\Phi(x) = \begin{cases} -x + a, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ x + a, & x > 0, \end{cases}$$

was sich auch als $\Phi(x) = |x| + a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Aber die Funktion $x \mapsto |x|$ ist nicht differenizerbar für $x = 0$ (Analysis 1), also kann auch Φ nicht differenzierbar sein, was mit der Definition einer Stammfunktion nicht vereinbar ist. $\square$

Wir werden in nächsten Vorlesungen sehen, dass stetige Funktionen immer Stammfunktionen besitzen.

Bemerkung 5. Beim Berechnen der Ableitungen sieht man schnell folgendes: ist f eine elementare Funktion (d.h. entsteht durch endlich viele Verkettungen und algebraische Operationen mit exp, log, sin, cos usw.), so ist auch f' eine elementare Funktion. Im Allgemeinen, sind Stammfunktionen von elementaren Funktion aber keine elementare Funktionen (Z.B. sind Stammfunktionen von $x \mapsto e^{-x^2}$ und $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ keine elementare Funktionen: das werden wir aber nicht beweisen.) Natürlich ist

$f(x)$	$\int f(x)dx$ (ohne Konstante C)
$x^a,\ a \neq -1$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$e^{ax},\ a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\, e^{ax}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

es interessant, für möglichst viele Funktionen ihre Stammfunktionen explizit ausrechnen zu können. Dafür kann man z.B. die aus der Analysis 1 bekannte Tabelle der Ableitungen "umkehren" anfangen, siehe Tabelle unten. Auch folgende Regeln können nützlich sein:

Proposition 6. *Sei Φ eine Stammfunktion von f, dann*

$$\int f(x+a)dx = \Phi(x+a) + C, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\,\Phi(ax), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beweis. Die erste Identität folgt aus $\dfrac{d}{dx}\big(\Phi(x+a)\big) = \Phi'(x+a) = f(x+a)$, und die zweite folgt aus $\dfrac{d}{dx}\big(\Phi(ax)\big) = a\Phi'(ax) = af(ax)$. □

Es gibt leider keine allgemeine Methode, Stammfunktionen zum Produkt fg und zur Verkettung $f\circ g$ zu finden, auch wenn man Stammfunktionen von f und g kennt. Daher ist das Integrieren *viel* komplexer als das Differenizeren. Wir werden aber zwei wichtige Methoden beschreiben, mit deren Hilfe man doch viele Stammfunktionen finden kann.

Satz 7 (Partielle Integration). *Für differenzierbare Funktionen f und g gilt*

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Beweis. Wir müssen einfach zeigen, dass die Ableitung der Funktion auf der linken Seite mit der Ableitung der Funktion auf der rechten Seite übereinstimmt. Auf der linken Seite haben wir: $(\int f'g)' = f'g$. Auf der rechten Seite nutzt man die Leibniz-Regel:

$$\Big(fg - \int fg'\Big)' = (fg)' - fg' = f'g + fg' - fg' = f'g. \qquad □$$

Die partielle Integration macht natürlich nur dann Sinn, wenn die neue Funktion fg' "einfacher" ist als $f'g$.

Beispiel 8. $\displaystyle\int xe^x dx$.

Hier steht unter dem Integral schon ein Produkt. Die beiden Funktionen x und e^x lassen sich einfach differenzieren und integrieren. Aber die Ableitung 1 von x ist "einfacher" als ihre Stammfunktionen $x^2/2+C$. Est ist also günstig, $f(x)=e^x$ und $g(x)=x$ zu nehmen. Mit Hilfe der partiellen Integration bekommt man also:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f'(x)} dx &= \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)} dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Wichtig: es ist relativ einfach zu prüfen, ob das Ergebnis richtig ist: man muss einfach das Ergebnis differenzieren, und die Ableitung muss mit der Funktion im Integral übereinstimmen. Hier hat man also $(xe^x - e^x + C) = (xe^x)' - (e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$: alles ist in Ordnung.

Beispiel 9. Manchmal steht im Integral kein explizites Produkt. Man kann aber immer mit dem Faktor 1 multiplizieren, dabei gilt natürlich $1 = f'(x)$ für $f(x) = x$. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)}\underbrace{\ln x}_{g(x)}\, dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx \\ &= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Beispiel 10. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ eine elementare Funktion ist[2].

Für $n=1$ hat man eine Funktion "aus der Tabelle", also $I_1(x) = \arctan x + C$. Für grössere n kann man versuchen, die Rechnung für I_n auf die Rechnung für I_{n-1}

[2] Statt $\displaystyle\int \frac{1}{\text{irgendwas}}\, dx$ schreibt man fast immer $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{irgendwas}}$.

zu reduzieren. Dabei hilft die partielle Integration mit $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{g(x)}\,dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\Big(-\frac{n\cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}}\Big)}_{g'(x)}\,dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Zur Zeit sieht man überhaupt nicht, warum diese Rechnung hilft: das Integral auf der rechten Seite sieht nicht einfacher aus als das usprüngliche Integral. Aber man kann die Identität $1-1=0$ richtig einsetzen:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx &= \int \frac{0+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{-1+(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\ &= \int \Big(-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{1}{(1+x^2)^n}\Big)\,dx = -I_{n+1}(x) + I_n(x). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der letzten Identität kann man (**??**) wie folgt umschreiben:

$$I_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\big(-I_{n+1}(x) + I_n(x)\big),$$

also $I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\,\dfrac{x}{(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}\,I_n(x)$. Ist I_n eine elementare Funktion, so ist auch I_{n+1} eine elementare Funktion. Da sich I_1 explizit ausrechnen lässt, sind alle I_n elementare Funktionen.

Jetzt kommt die zweite wichtige Methode:

Satz 11 (Substitution). *Seien φ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I, J ein Intervall mit $\varphi(I) \subset J$, $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\Phi : J \to \mathbb{R}$ ihre Stammfunktion. Dann gilt*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \Phi\big(\varphi(x)\big) + C.$$

Beweis. Mit unseren Voraussetzungen ist $x \mapsto \Phi\big(\varphi(x)\big)$ differenzierbar auf I, und die Ableitung davon ist (Kettenregel) $\Phi'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$. Das ist genau die Funktion unter dem Integral auf der linken Seite. □

Beim Rechnen nutzt man oft eine andere Schreibweise:

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi)\,d\varphi\Big|_{\varphi=\varphi(x)},$$

wobei die Substitution $\varphi = \varphi(x)$ ganz am Ende gemacht wird. Die Rechnungen werden übersichtlicher, falls man $\varphi'(x)dx$ als $d\varphi$ schreibt.

Beispiel 12. $\int xe^{x^2}\,dx$.

1. Lösung: man sieht, dass x "fast" die Ableitung von x^2 is (es fehlt nur ein konstanter Faktor). Man führt also $\varphi(x) = x^2$ ein und schreibt das Integral um:

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \varphi'(x)e^{\varphi(x)}\,dx \\ = \frac{1}{2}\int e^{\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}\,e^{\varphi} + C = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C.\end{aligned}$$

2. Lösung: am meisten stört uns (=den Dozenten) der Term x^2 in der Exponente. Wir können also $x = \sqrt{t}$ einführen um e^t statt e^{x^2} zu haben (da $t = x^2$), dann $dx = (\sqrt{t})'dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ und

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int \sqrt{t}e^t\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t + C = \frac{1}{2}\,e^t + C = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C.$$

Beispiel 13. Die Substitution nutzt man oft beim Integrieren von trigonometrischen Funktionen. Zum Beispiel $\int \cos^3 x\,dx$:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx.$$

Hier kann man $\varphi(x) = \sin x$ einführen, dann $\cos x\,dx = d\varphi$ und

$$\int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1 - \varphi^2)\,d\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Im letzten Beispiel sieht man, dass algebraische Identitäten sehr nutzlich sein können (hier $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Insbesondere kann man mit algebraischen Ideen eine grosse Klasse von Funktionen finden, deren Stammfunktionen elemntare Funktionen sind.

Definition 14. Eine **rationale Funktion** ist eine Funktion der Form $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen P und Q (mit reellen Koeffizienten).

Satz 15. *Jede rationale Funktion besitzt eine elementare Stammfunktion.*

Beweis. Unser Beweis wird auch eine Berechnungmethode liefern. Seien P und Q Polynome und $f = \dfrac{P}{Q}$. Wir wollen also $\int f$ ausrechnen.

Schritt 1. Ist Q konstant, dann ist f auch ein Polynom, und seine Stammfunktionen sind Polynome (und damit Elementarfunktionen). Man kann also annehmen, dass Q nichtkonstant ist.

Schritt 2. Wir können P wie folgt darstellen: $P(x) = p_1(x)Q(x) + p_0(x)$, wobei p_0 und p_1 Polynome sind mit $\operatorname{Grad} p_0 < \operatorname{Grad} Q$. Dann gilt $f = p_1 + \dfrac{p_0}{Q}$ und $\int f =$

$\int p_1 + \int \frac{p_0}{Q}$. Das Integral $\int p_1$ lässt sich explizit ausrechnen (das ist wieder ein Polynom), mann muss sich also nur um den zweiten Term kümmern.

Nach den Schritten 1 und 2 wird es klar, dass man vom Anfang an voraussetzen kann, dass Q nichtkonstant ist und dass $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$. Ab jetzt werden wir nur diesen Fall betrachten.

Schritt 3. Wir nutzen jetzt den Hauptsatz der Algebra: jedes nichtkonstantes komplexes Polynom besitzt (mindestens) eine komplexe Nullstelle. Seit a eine Nullstelle von Q, dann gilt $Q(x) = (x-a)Q_0(x)$, wobei Q_0 ein Polynom ist mit $\operatorname{Grad} Q_0 = \operatorname{Grad} Q - 1$. Man kann auf dieselbe Weise auch Q_0 zerlegen, am Ende landet man bei der Darstellung

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^{k} (x-a_j)^{m_k}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Hier sind a_j die Nullstellen von Q (und wir nehmen an, dass $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$) und m_j sind ihre Multiplizitäten: man hat $m_j \geq 1$ und $m_1 + \cdots + m_k = \operatorname{Grad} Q$. In unserem Fall ist Q ein Polynom mit rellen Koeffizienten, und das ist eine zusätzliche Eigenschaft, die man wie folgt nutzen kann: falls a eine nichtrelle Nullstelle von Q ist, dann ist auch $\overline{a}$ Nulstelle mit derselben Multiplizität. Ist m die zugehörige Multiplizität, so lässt sich das Produkt $(x-a)^m(x-\overline{a})^m$ als $(x^2+2bx+c)^m$ schreiben mir $b = -\operatorname{Re} a$ und $c = |a|^2$ (insbesondere gilt $c - b^2 = |\operatorname{Im} a|^2 > 0$). Durch solches Gruppieren der Faktoren kann man also Q wie folgt zerlegen:

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^{\ell} (x-a_j)^{m_j} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + 2b_j x + c_j)^{k_j}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ (immer noch $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$), $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ mit $c_j - b_j^2 > 0$, und $m_j, k_j \geq 1$ mit $m_1 + \cdots + m_\ell + 2k_1 + \ldots 2k_s = \operatorname{Grad} Q$.

Schritt 4. Man kann beweisen, dass es reelle Konstanten $A_{j,k}$, $B_{j,k}$, $C_{j,k}$ existieren[3] mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{k_j} \frac{B_{j,k}x + C_{j,k}}{(x^2 + 2b_j x + c_j)^k}. \tag{2}$$

Die Darstellung (**??**) nennt man die *Partialbruchzerlegung* von $f = P/Q$. Um unsere Behauptung zu beweisen, müssen wir lediglich zeigen, dass man eine elementare Stammfunktion zu jedem Term auf der rechten Seite von (**??**) finden kann. Es gibt aber nur Terme von zwei Typen, die wir jetzt einzeln betrachten. Für relle a hat man

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & m = 1, \\ -\dfrac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C, & m \geq 2, \end{cases}$$

[3] Wir verzichten auf Beweis, da dieser sehr algebraisch ist und ganz wenig mit der Analysis zu tun hat.

damit sind alle Terme in der ersten Summe schon gedeckt. Jetzt müssen wir nur $\int \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^m}\,dx$ mit $c-b^2>0$ ausrechnen. Wir nutzen die Substitution $x=\sqrt{c-b^2}t-b$, dann gilt $dx=\sqrt{c-b^2}$ und

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^m}dx$$
$$= B(c-b^2)^{1-m}\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m} + (C-Bb)(c-b^2)^{\frac{1}{2}-m}\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$

Das zweite Integral ist das im Beispiel **??** betrachtete I_m, und das ist also eine elementare Funktion. Im ersten Integral kann man $\varphi(t)=t^2$ einführen, dann ist

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{(1+\varphi)^m} = \frac{1}{2}\begin{cases} \ln(1+\varphi)+C, & m=1,\\ -\dfrac{1}{(m-1)(1+\varphi)^{m-1}}+C, & m\geq 2,\end{cases}$$

eine elementare Funktion. $\square$

Beispiel 16. $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

Die Nullstellen von x^2-1 sind ±1, und $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Es müssen also $A,B\in\mathbb{R}$ existieren mit

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Die genauen Werte von A and B findet man durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}.$$

Für alle x muss also $(A+B)x+(A-B)=1$ gelten, d.h. $A+B=0$ und $A-B=1$. Damit findet man $A=\frac{1}{2}$ und $B=-\frac{1}{2}$, und

$$\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{d}{x+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

Weitere (und kompliziertere) Beispiele werden in der Übung betrachtet.