Lösungen der Fingerübungen

1. Vereinfachen Sie diese Terme so weit wie möglich für ganze Zahlen k, m, n und r und nehmen Sie dabei die aus der Schule bekannten Potenzgesetze zu Hilfe:

   a) $x^{n+1} \cdot x^{n-1} = x^{(n+1)+(n-1)} = x^{2n}$

   b) $ab^k a^{2n} b^{k-3} = a^{1+2n} b^{k+(k-3)} = a^{2n+1} b^{2k-3}$

   c) $(x^4 y^{-2})^{-4} = (x^4)^{-4}(y^{-2})^{-4} = x^{4\cdot(-4)} y^{(-2)\cdot(-4)} = x^{-16} y^8$

   d) $(x-5)^{1-r}(x-5)^r = (x-5)^{(1-r)+r} = x-5$

   e) $90\cdot 3^{m-2} - 3^m = 3^2 \cdot 10 \cdot 3^{m-2} - 3^m = 10 \cdot 3^{2+(m-2)} - 3^m = 10\cdot 3^m - 3^m = 9\cdot 3^m = 3^2 \cdot 3^m = 3^{m+2}$

   f) $(a-b)^n + (b-a)^n = (a-b)^n + ((-1)(a-b))^n = (a-b)^n + (-1)^n (a-b)^n$. Nun kann man weiter vereinfachen mit Hilfe einer Fallunterscheidung:

      i. **n gerade:** Dann ist $(-1)^n = 1$ und es gilt:
      $(a-b)^n + (b-a)^n = (a-b)^n + (-1)^n(a-b)^n = (a-b)^n + (a-b)^n = 2\cdot(a-b)^n$.

      ii. **n ungerade:** Dann ist $(-1)^n = -1$ und es gilt:
      $(a-b)^n + (b-a)^n = (a-b)^n + (-1)^n(a-b)^n = (a-b)^n - (a-b)^n = 0$.

2. Kürzen Sie, wenn möglich.

   a) $\dfrac{z^{n+1}}{z^{n-1}} = \dfrac{zz^n}{z^{-1}z^n} = \dfrac{z}{z^{-1}} = z^{1-(-1)} = z^2$

   b) $\dfrac{a^4 b^{n+5} a^{-3} c^n}{b^3 a c^{-2}} = \dfrac{ab^3 b^{n+2} c^{-2} c^{n+2}}{ab^3 c^{-2}} = b^{n+2}c^{n+2} = (bc)^{n+2}$

   c) $\dfrac{(5x+4y)^{2k}}{(15x+12y)^k} = \dfrac{(5x+4y)^{2k}}{(3\cdot(5x+4y))^k} = \dfrac{(5x+4y)^k(5x+4y)^k}{3^k\cdot(5x+4y)^k} = \dfrac{(5x+4y)^k}{3^k}$

   d) $\dfrac{a^2-b^5}{(ab)^2}$ kann nicht gekürzt werden.

   e) $\dfrac{(3a-1)^{2k-1}}{(1-3a)^{2k+1}} = \dfrac{(3a-1)^{2k}(3a-1)^{-1}}{(-1\cdot(3a-1))^{2k+1}} = \dfrac{(3a-1)^{2k}(3a-1)^{-1}}{(-1)^{2k+1}\cdot(3a-1)^{2k}\cdot(3a-1)} =$
   $\dfrac{(3a-1)^{-1}}{(-1)^{2k+1}\cdot(3a-1)} = (-1)^{2k+1}\dfrac{1}{(3a-1)(3a-1)} = (-1)^{2k+1}\dfrac{1}{(3a-1)^2}$.

   Wenn $k \in \mathbb{Z}$, muss $2k+1$ ungerade sein und damit $(-1)^{2k+1} = -1$. In diesem Fall kann man weiter vereinfachen zu: $\dfrac{(3a-1)^{2k-1}}{(1-3a)^{2k+1}} = -\dfrac{1}{(3a-1)^2}$.

f) $\dfrac{(x-3z)^{n+2}}{(x-3z)^{n^2-4}} = \dfrac{(x-3z)^{n+2}}{(x-3z)^{(n+2)(n-2)}} = \dfrac{(x-3z)^{n+2}}{((x-3z)^{n+2})^{n-2}} =$
$\dfrac{(x-3z)^{n+2}}{(x-3z)^{n+2}((x-3z)^{n+2})^{n-3}} = \dfrac{1}{((x-3z)^{n+2})^{n-3}}$

3. Berechnen Sie und fassen Sie ggf. zusammen:

a) $\dfrac{1}{z^3}\cdot z - \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z^2} = 0$

b) $\dfrac{x^5+1}{x^{m+2}} - \dfrac{2x^2-2}{x^m} + \dfrac{2-x}{x^{m-2}} = \dfrac{x^{-2}\cdot(x^5+1)}{x^{-2}x^{m+2}} - \dfrac{2x^2-2}{x^m} + \dfrac{x^2\cdot(2-x)}{x^2x^{m-2}} =$
$\dfrac{x^3+x^{-2}}{x^m} - \dfrac{2x^2-2}{x^m} + \dfrac{2x^2-x^3}{x^m} = \dfrac{x^3+x^{-2}-(2x^2-2)+2x^2-x^3}{x^m} = \dfrac{x^{-2}+2}{x^m}$

c) $\left(\dfrac{u}{v}\right)^n \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{3n+4} \cdot \left(\dfrac{u}{-v}\right)^{2n+1} = \left(\left(\dfrac{v}{u}\right)^{-1}\right)^n \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{3n+4} \cdot \left((-1)\left(\dfrac{v}{u}\right)^{-1}\right)^{2n+1} = \left(\dfrac{v}{u}\right)^{-n} \cdot$
$\left(\dfrac{v}{u}\right)^{3n+4} \cdot (-1)^{2n+1} \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{-(2n+1)} = (-1)^{2n+1} \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{-n+3n+4-2n-1} = (-1)^{2n+1} \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^3$.

Wenn $n \in \mathbb{Z}$, muss $2n+1$ ungerade sein und damit $(-1)^{2n+1} = -1$. In diesem Fall kann man weiter vereinfachen zu: $\left(\dfrac{u}{v}\right)^n \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{3n+4} \cdot \left(\dfrac{u}{-v}\right)^{2n+1} = -\left(\dfrac{v}{u}\right)^3$.

d) $\left(\dfrac{a-b}{c}\right)^{2k+2} \cdot \left(\dfrac{c}{b-a}\right)^{2k} = \left(\dfrac{a-b}{c}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{a-b}{c}\right)^{2k} \cdot \left(\dfrac{c}{(-1)\cdot(a-b)}\right)^{2k} =$
$\left(\dfrac{a-b}{c}\right)^2 \cdot \left((-1)\cdot\dfrac{a-b}{c}\cdot\dfrac{c}{a-b}\right)^{2k} = \left(\dfrac{a-b}{c}\right)^2 \cdot (-1)^{2k}$.

Wenn $k \in \mathbb{Z}$, muss $2k$ gerade sein und damit $(-1)^{2k} = 1$. In diesem Fall kann man weiter vereinfachen zu: $\left(\dfrac{a-b}{c}\right)^{2k+2} \cdot \left(\dfrac{c}{b-a}\right)^{2k} = \left(\dfrac{a-b}{c}\right)^2$.

e) $$\frac{\frac{x^{2a+5}}{(-y^3)^{2b+5}\cdot((-z)^4)^{3b+3}}}{\frac{x^{2a}}{(yz)^{6b+10}\cdot((-z)^3)^{2b-1}}} = \frac{x^{2a+5}}{(-y^3)^{2b+5}\cdot((-z)^4)^{3b+3}} \cdot \frac{(yz)^{6b+10}\cdot((-z)^3)^{2b-1}}{x^{2a}} =$$

$$\frac{x^{2a}x^5y^{6b+10}z^{6b+10}(-z)^{6b-3}}{x^{2a}(-1)^{2b+5}y^{6b+15}(-z)^{12b+12}} = \frac{(-1)^{6b-3}x^5y^{6b+10}z^{6b+10}z^{6b-3}}{(-1)^{2b+5}(-1)^{12b+12}y^{6b+15}z^{12b+12}} =$$
$$(-1)^{6b-3-2b-5-12b-12}\frac{x^5z^{12b+7}}{y^5z^{12b+12}} = (-1)^{-8b-20}\frac{x^5}{y^5z^5} = (-1)^{2\cdot(-4b-10)}\left(\frac{x}{yz}\right)^5.$$

Wenn $b \in \mathbb{Z}$, muss auch $k := -4b - 10 \in \mathbb{Z}$. Damit muss $2\cdot(-4b-10) = 2k$ gerade sein und damit $(-1)^{2\cdot(-4b-10)} = 1$. In diesem Fall kann man weiter vereinfachen zu:
$$\frac{\frac{x^{2a+5}}{(-y^3)^{2b+5}\cdot((-z)^4)^{3b+3}}}{\frac{x^{2a}}{(yz)^{6b+10}\cdot((-z)^3)^{2b-1}}} = \left(\frac{x}{yz}\right)^5.$$

4. Vereinfachen Sie die Summendarstellungen, wenn möglich, schreiben Sie dann die Summen aus und berechnen Sie sie:

a) $\displaystyle\sum_{i=10}^{15} i = \sum_{i=0}^{5}(10+i) = \sum_{i=0}^{5} 10 + \sum_{i=0}^{5} i = 60+1+2+3+4+5 = 75.$

b) $\displaystyle\sum_{\kappa=2}^{5}(\kappa n) = n\sum_{\kappa=2}^{5}\kappa = n(2+3+4+5) = 14n.$

c) $\displaystyle\sum_{r=1}^{5}(r+2) = \sum_{r=1}^{5} r + \sum_{r=1}^{5} 2 = (1+2+3+4+5)+(5\cdot 2) = 25.$

d) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{4} n = \sum_{n=3}^{4} n = 3+4 = 7.$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{3} 1 = 1+1 = 2.$

f) $\displaystyle\sum_{i\in\{-1,0,1\}} a_i = a_{-1}+a_0+a_1.$

g) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{2}\sum_{p=23}^{23} n\cdot p = \sum_{n=-2}^{2} n \sum_{p=23}^{23} p = 23\sum_{n=-2}^{2} n = 0.$