Übungsblatt 7 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

8. Juni 2020

Aufgabe 7.1

Gegeben $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

(a) Man prüfe die Metrikaxiome nach:

positive Definitheit: Da d durch den Absolutbetrag definiert ist, ist die Positivität klar. Zur Definitheit: Ist $x = y$, so folgt $\arctan(x) = \arctan(y)$ und aus der Definitheit des Absolutbetrages als Metrik damit auch $d(x, y) = 0$. Für die andere Implikation folgt aus $d(x, y) = 0$ mit der Definitheit des Absolutbetrages $\arctan(x) = \arctan(y)$. Da der Arcustangens injektiv ist, ist somit $x = y$ und die Äquivalenz gezeigt.

Symmetrie: Klar, da der Absolutbetrag symmetrisch in $\arctan(x)$ bzw. $\arctan(y)$ ist.

Dreiecksungleichung: Folgt aus der Dreiecksungleichung für die Differenz unter dem Absolutbetrag: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\ &\leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)| = d(x,z) + d(z,y) \quad , \end{aligned}$$

womit alle Axiome gezeigt worden sind.

(b) Die Unvollständigkeit von $(\mathbb{R}, d)$ ist äquivalent mit der Bedingung, dass eine Cauchy-Folge existiert, welche **nicht** gegen ein Element des Raumes, also hier $\mathbb{R}$, konvergiert. Gemäß Hinweis betrachte man zunächst eine divergente Folge $x_n \to +\infty$. Da das Bild von $\mathbb{R}$ unter dem Arcustangens beschränkt ist, folgt:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, N \in \mathbb{N} : \arctan(x_n) \in \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2}\right) \;\forall\, n \geq N \quad .$$

Wir zeigen zunächst, dass die divergente Folge eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik d bzw. die induzierte Folge $\arctan(x_n)$ eine Cauchy-Folge bzgl. des Absolutbetrages ist:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= |\arctan(x_n) - \arctan(x_m)| = \left|\arctan(x_n) - \frac{\pi}{2} - \left(\arctan(x_m) - \frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &\leq \left|\arctan(x_n) - \frac{\pi}{2}\right| + \left|\arctan(x_m) - \frac{\pi}{2}\right| < 2\epsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N$. Damit ist/induziert die divergente Folge eine Cauchy-Folge bzgl. d.

Nun wird gezeigt, dass es keinen Grenzwert in $\mathbb{R}$ gibt: Im Gegensatz zur Behauptung nehme man an, dass ein Grenzwert $\mathbb{R} \ni x = \lim_n x_n$ existiert. Dies ist äquivalent zu

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\arctan(x_n) - \arctan(x)| \to 0 \quad .$$

Mit $\arctan(x_n) \to \frac{\pi}{2}$ folgt somit

$$\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right| = 0$$

und nach Definitheit somit $\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Damit ist aber entgegen der Annahme $x \notin \mathbb{R}$, da $|\arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Somit liegt ein Widerspruch vor, womit indirekt die Unvollständigkeit von $\mathbb{R}$ bzgl. d gezeigt wurde.

Aufgabe 7.2

Definiere den Raum stückweiser stetiger Funktionen auf $[a,b]$ durch

$$C^0_{\text{stw}}([a,b]) := \left\{ f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}\,\text{stückweise stetig mit}\,f(a)=0\,\text{und}\,\lim_{\epsilon\to 0^+} f(x-\epsilon) = f(x)\,\forall\, x \in (a,b] \right\}$$

und den Unterraum stetiger Funktion durch $C^0([a,b]) \subset C^0_{\text{stw}}([a,b])$. Zuzüglich sei folgende Abbildung gegeben:

$$\begin{aligned} d \quad : \quad C^0_{\text{stw}}([a,b]) \times C^0_{\text{stw}}([a,b]) &\to \mathbb{R} \\ f,g &\mapsto d(f,g) = \int_a^b |f-g| \quad . \end{aligned}$$

(a)

Behauptung. d ist eine Metrik auf $C^0_{\text{stw}}([a,b])$.

Beweis: Man prüfe die Metrikaxiome nach:

pos. Definitheit: Mit $f,g \in C^0_{\text{stw}}([a,b])$ sind $f,g,f-g$ wie auch damit $|f-g|$ (siehe Übungsblatt 2) Regelfunktionen auf $[a,b]$. Nach Satz 30 (d) ist $d(f,g) \geq 0$ und damit positiv. Sei $f=g$, so ist der Integrand 0 und ebenso Regelfunktion auf $[a,b]$ mit Wert 0 und damit $d(f,g)=0$. Sei nun stattdessen $d(f,g)=0$. Für f,g stetig, ist $|f-g|$ ebenso stetig auf $[a,b]$ und Regelfunktion. Sodann ist

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow |f-g| = 0 \Leftrightarrow f = g$$

aus der Definitheit des Absolutbetrages. Für stetige Funktionen ist somit die Äquivalenz zur Definitheit gezeigt.

Für den allgemeineren Fall definiere man $h = f-g$, welches als Differenz stückweiser stetiger Funktionen ebenso in $C^0_{\text{stw}}([a,b])$ ist: f und g sind stückweise stetig und damit auch h,

$$\begin{aligned} h(a) \quad &= \quad f(a) - g(a) = 0 - 0 = 0 \\ &\qquad \text{und} \\ \lim_{\epsilon\to 0^+} f(x-\epsilon) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{\epsilon\to 0^+} h(x-\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} (f(x-\epsilon) - g(x-\epsilon)) = f(x) - g(x) = h(x) \\ \lim_{\epsilon\to 0^+} g(x-\epsilon) = g(x) \quad &\qquad \forall\, x \in (a,b] \\ \forall\, x \in (a,b] \quad &\qquad . \end{aligned}$$

Zur Auswertung des Integrals betrachte man eine (gemeinsame/verfeinerte) Zerlegung von f und g und damit für h: Es existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und die Zerlegung $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ so, dass

$$h(x) \in C^0((x_j, x_j+1)) \quad \forall\, j \in \{0,1,..,n-1\} \quad .$$

Außerhalb einer Stützstelle ist h stetig oberhalb und unterhalb von der Stützstelle, also existiert der Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0^+} h(x_j \pm \epsilon) =: H_j$. Definiere man die stetige Fortsetzung durch

$$h_j(x) = \begin{cases} h(x) & \qquad x \in (x_j, x_{j+1}) \quad \forall\, j \in \{0,1,..,n-1\} \\ & \text{für} \\ H_j & \qquad x = x_j \quad \forall\, j \in \{0,1,..,n\} \end{cases} \quad .$$

Damit ist $h_j \in C^0([x_j, x_{j+1}])$ für alle $j \in \{0, 1, .., n-1\}$. Die Integration stückweiser stetiger Funktionen ist dann aufgrund der Addition des Regelintegrals definiert durch

$$\int_a^b |h| = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h| = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_j| \quad .$$

Sodann folgt wie im stetigen Fall für jedes h_j

$$\begin{aligned} 0 &= d(f,g) = \int_a^b |h| = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_j| \\ \Leftrightarrow 0 &= |h_j| \quad \forall\, j \in \{0, 1, .., n-1\} \\ \Leftrightarrow 0 &= h_j(x) \quad \forall\, x \in (x_j, x_{j+1})\,,\; j \in \{0, 1, .., n-1\}\,. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit jedes h_j ist jedes $H_j = h(x_j) = 0$ wie auch $h(x) = 0$ auf jedem Teilintervall (x_j, x_{j+1}). Also ist $h(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ und damit $f(x) = g(x)$ für alle entsprechenden Abzissenwerte. Damit ist die Äquivalenz für stückweise stetige Funktionen gezeigt.

Symmetrie: Folgt aus der Symmetrie des Absolutbetrages unter dem Integral.

Dreiecksungleichung: Hierzu nutze man die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag und diverse Eigenschaften für Regelfunktionen: Seien $f, g, h \in C^0_{\text{stw}}([a, b])$, dann

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_a^b |f-g| = \int_a^b |f-h-(g-h)| \leq \int_a^b |f-h| + |g-h| \\ &= \int_a^b |f-h| + \int_a^b |g-h| = d(f,h) + d(g,h) = d(f,h) + d(h,g) \quad . \end{aligned}$$

Damit sind alle Axiome erfüllt und d eine Metrik auf $C^0_{\text{stw}}([a, b])$ (auch auf $C^0([a, b])$ für die induzierte Metrik $d_{C^0([a,b])}(f, g) = d(f, g)$ für $f, g \in C^0([a, b])$), q.e.d.!

(b) Für ein $c \in (a, b)$ definiere

$$\begin{aligned} f_n \,:\, [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) \end{aligned}$$

gemäß

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c - \frac{c-a}{n} \\ n(x-c) + c - a \quad \text{für} & x \in \left(c - \frac{c-a}{n}, c\right) \\ c - a & x \geq c \end{cases} \quad .$$

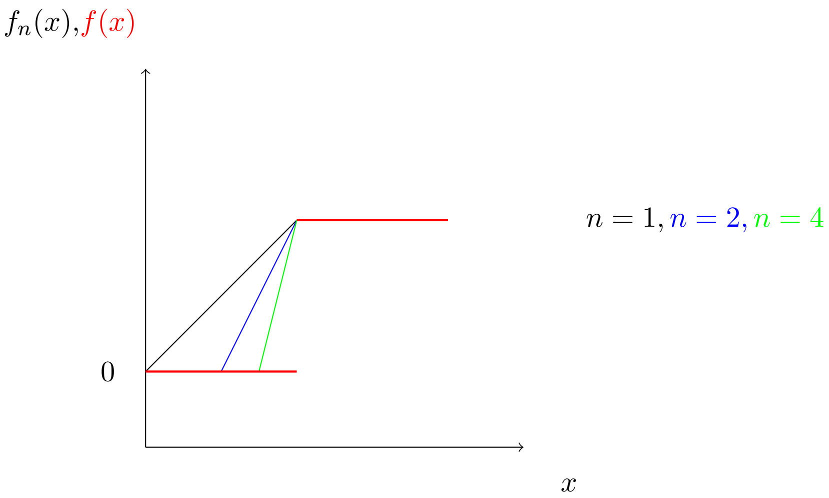
Dies ist eine Folge stetiger Funktionen: Zunächst ist $f_n(x)$ für alle n auf jedem Teilintervall stetig, da entweder konstant oder linear. An den beiden inneren Randpunkten sind der links- wie auch rechtsseitige Grenzwert jeweils gleich: Es sind

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow c - \frac{c-a}{n}} f_n(x) &= \lim_{x \nearrow c - \frac{c-a}{n}} 0 = 0 \\ \lim_{x \searrow c - \frac{c-a}{n}} f_n(x) &= \lim_{x \searrow c - \frac{c-a}{n}} n(x-c) + c - a = n(c - \frac{c-a}{n} - c) + c - a = 0 \;\forall\, n \\ \Leftrightarrow \lim_{x \searrow c - \frac{c-a}{n}} f_n(x) &= 0 = \lim_{x \nearrow c - \frac{c-a}{n}} f_n(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow c} f_n(x) &= \lim_{x\searrow c} n(x-c)+c-a = n(c-c)+c-a = c-a\ \forall n \\
\lim_{x\nearrow c} f_n(x) &= \lim_{x\nearrow c} c-a = c-a \\
\Leftrightarrow \lim_{x\searrow c} f_n(x) &= c-a = \lim_{x\nearrow c} f_n(x)
\end{aligned}$$

und damit $f_n(x)$ an $x=c$ wie auch $x = c - \frac{c-a}{n}$ stetig für alle n, woraus die Stetigkeit von $f_n(x)$ für alle n auf ganz $[a,b]$ folgt: $(f_n(x))_n \subset C^0([a,b])$.



$(a=0, b=2, c=1)$

Man zeige, dass diese Folge bezüglich der oberen Metrik gegen den Grenzwert

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le c \\ c-a & x > c \end{cases}$$

konvergieren: Auf den Teilstück $\left(c - \frac{c-a}{n}, c\right)$ ist die Differenz

$$f_n(x) - f(x) = n\underbrace{(x-c)}_{\le 0} + (c-a) \le (c-a) \quad ,$$

womit

$$\begin{aligned}
d(f_n, f) &= \int_a^b |f_n - f| \\
&= \int_a^{c-\frac{c-a}{n}} |f_n - f| + \int_{c-\frac{c-a}{n}}^{c} |f_n - f| + \int_c^b |f_n - f| \\
&= 0 + \int_{c-\frac{c-a}{n}}^{c} |f - f_n| + 0 \le \int_{c-\frac{c-a}{n}}^{c} (c-a) = \frac{(c-a)^2}{n} \quad ,
\end{aligned}$$

welches für $n \to +\infty$ gegen 0 in $\mathbb{R}$ konvergiert und damit f Grenzwert ist.

(c)

Behauptung. $(C^0([a,b]), d)$ ist unvollständig bezüglich der induzierten Metrik.

Beweis: Wieder bestimme man eine Cauchy-Folge, welche nicht in $C^0([a,b])$ konvergiert. Die Folge in (b) ist eine Folge stetiger Funktionen: $(f_n)_n \subset C^0([a,b])$. Da diese Folge konvergent ist, ist diese damit auch eine Cauchy-Folge (Proposition 98). Dessen Grenzwert bezüglich der induzierten Metrik ist aber lediglich stückweise stetig. Damit existiert eine Cauchy-Folge in $C^0([a,b])$ mit einer in Allgemeinen nicht stetigen Grenzfunktion auf $[a,b]$. Die Konsequenz ist die Unvollständigkeit von $C^0([a,b])$ bezüglich der induzierten Metrik, q.e.d.!

Aufgabe 7.3

Gegeben seien zwei zueinander isometrische metrische Räume (X_1, d_1) und (X_2, d_2) bzgl. der Bijektion $F : X_1 \to X_2$.

Behauptung. (X_1, d_1) ist genau dann vollständig, wenn (X_2, d_2) vollständig ist.

Beweis: Sei (X_1, d_1) vollständig: Jede Folge $(x_n)_n \subset X_1$, welche

$$\forall \epsilon > 0 \,\exists\, N \in \mathbb{N} : d_1(x_n, x_{n+k}) < \epsilon \,\forall\, n \geq N,\, k \in \mathbb{N}$$

(Cauchy-Folge) erfüllt, konvergiert in X_1. Betrachte eine Cauchy-Folge $(y_n)_n \in X_2$. Aus der Bijektivität von F existiert für jedes Element $y \in X_2$ ein $x \in X_1$, sodass $y = F(x)$. Ein Folgenglied aus $(y_n)_n$ kann als Bild eines Folgengliedes in $(x_n)_n \in X_1$ unter dieser Bijektion: $y_n = F(x_n) \,\forall\, n$ aufgefasst werden. Aus der Isometrie beider metrischen Räume folgt, dass die induzierende Folge $(x_n)_n$ ebenso eine Cauchy-Folge in X_1 ist, denn mit

$$d_2(y_n, y_{n+k}) = d_2(F(x_n), F(x_{n+k})) = d_1(x_n, x_{n+k})$$

folgt:

$$\forall \epsilon > 0 \,\exists\, N \in \mathbb{N} : d_1(x_n, x_{n+k}) = d_2(y_n, y_{n+k}) < \epsilon \,\forall\, n \geq N,\, k \in \mathbb{N} \quad .$$

Zur Konvergenz: Sei $x \in X_1$ Grenzwert der Cauchy-Folge $(x_n)_n$; die Bijektion suggeriert die Existenz eines Elements $y \in X_2$, sodass $y = F(x)$. Damit folgt aus der Isometrie

$$d_2(y_n, y) = d_2(F(x_n), F(x)) = d_1(x_n, x) \quad \to \quad 0$$

für $n \to \infty$ n.V.; somit konvergiert auch die Cauchy-Folge in X_2 gegen einen Grenzwert in X_2. Da dies durch jede Cauchy-Folge in X_1 induziert wird, konvergiert auch jede Cauchy-Folge in X_2 gegen einen Grenzwert in X_2. Somit ist auch (X_2, d_2) vollständig.

Sei nun (X_2, d_2) vollständig. Da F bijektiv ist existiert $F^{-1} : X_2 \to X_1$ und die Isometrie beider metrischer Räume kann umgeschrieben werden zu

$$d_1(x_1, x_2) = d_1(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y_2)) = d_2((F \circ F^{-1})(y_1), (F \circ F^{-1})(y_2)) = d_2(y_1, y_2)$$

und damit $d_2(y_1, y_2) = d_1(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y_2))$. Der Beweis folgt analog wie oben durch Vertauschen der Folgen und Räume. Damit ist die Vollständigkeit von (X_1, d_1) äquivalent zur Vollständigkeit von (X_2, d_2), wenn beide Räume zueinandern isometrisch, q.e.d.!

Aufgabe 7.4

(a) Sei $T\,:\,x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ auf $\mathbb{R}$; unter der Ausnutzung der dritten binomischen Formel ist für $x \neq y$

$$\begin{aligned}
|T(x)-T(y)| &= \left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{x^2+1}^2-\sqrt{y^2+1}^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right| = \left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right| \\
&= \left|\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right|\cdot|x-y| \\
&= \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\cdot|x-y| \quad .
\end{aligned}$$

Mit

$$x^2 < x^2+1 \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2+1} \quad , \tag{1}$$

Analoges für y und

$$|x+y| \le |x|+|y| < \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$$

folgt schließlich

$$|T(x)-T(y)| \le \underbrace{\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}}_{<1}\cdot|x-y| < |x-y|\,;$$

ein solches T heißt *kontraktiv* oder *schwach kontrahierend*. Dies suggeriert zwar die Existenz einer Lipschitzkonstante, aber T ist keine Kontraktion (auch *strikt kontraktiv* oder *kontrahierend* genannt) in $\mathbb{R}$: T bildet $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ab und ist damit Selbstabbildung. Die Ableitung von T ist $T'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Das Bild von $\mathbb{R}$ unter der stetigen Ableitung ist $T'(\mathbb{R}) = (-1,1)$ und an den Rändern nimmt die Ableitung die Werte

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \pm\lim_{|x|\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} = \pm\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{-1}\sqrt{x^2+1}} = \pm\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|^{-2}+1}} = \pm 1$$

an. Damit ist $\sup_{x\in\mathbb{R}}|T'(x)| = 1$ und nach dem Mittelwertsatz folgt für ein $\xi \in \mathbb{R}$

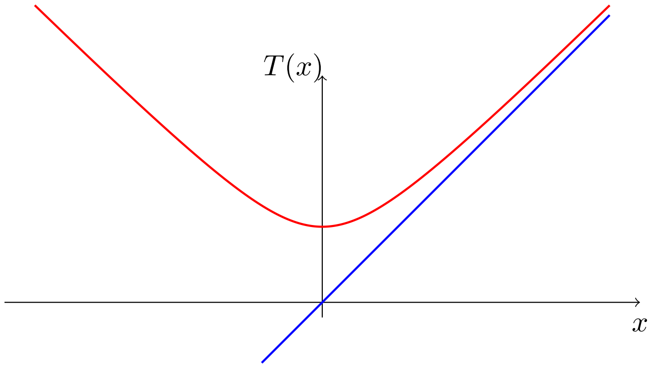
$$|T(x)-T(y)| = |T'(\xi)||x-y| \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|T'(x)|||x-y| = |x-y| \quad .$$

Es existiert demnach keine Lipschitzkonstante $L < 1$, da man auf $\mathbb{R}$ keinen kleineren Wert für diese Abschätzung findet: Gäbe es entgegen dieser Behauptung ein $L \in [0,1)$, sodass

$$|T(x)-T(y)| = L||x-y| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R} \quad ,$$

so wäre dies äquivalent zu $|T'(x)| \le L$ bzw. $\sup_{x\in\mathbb{R}}|T'(x)| \le L < 1$. Aber es ist $\sup_{x\in\mathbb{R}}|T'(x)| = 1$, womit L auch den Wert 1 annehmen müsste, q.a.e.!

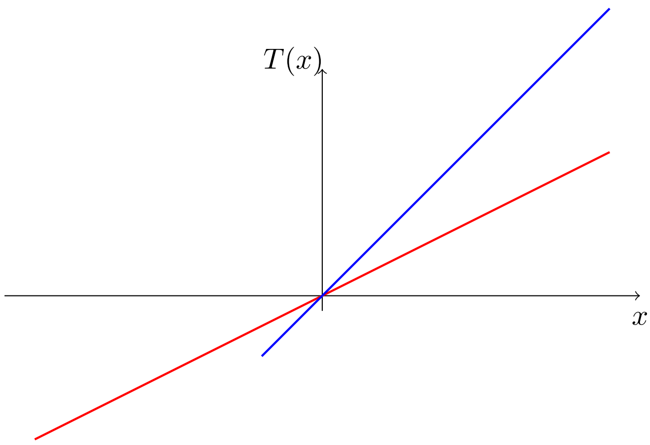
Die Fixpunktgleichung $T(x) = x$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, da nach (1) die linke Seite der Gleichung strikt größer als die rechte Seite im Betrag ist. Im Bezug auf den Banachschen Fixpunktsatz ist zwar die Vollständigkeit gegeben ($(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist vollständig), aber nicht die Kontraktionseigenschaft.



(b) Betrachte $T : x \mapsto x/2$ auf dem metrischen Raum $((0,1), |\cdot|)$ bezüglich der aus $\mathbb{R}$ induzierten Metrik. Mit Satz 108 folgt zunächst, dass T eine Kontraktion ist: T ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, so auch auf $(0,1)$ mit Ableitung $T'(x) = \frac{1}{2} > 0$. Die Funktion ist dahingehend auch monoton steigend, worau aus der Stetigkeit die Selbsabbildungs-Eigenschaft

$$f((0,1)) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset (0,1)$$

folgt. Es ist somit T Kontraktion mit $L = \frac{1}{2}$ als Kontraktions-/Lipschitzkonstante. Die Fixpunktgleichung $T(x) = x$ hat die Lösung $x = 0$, aber diese ist nicht in $(0,1)$. Damit hat T keine Fixpunkte in $(0,1)$. Mit Bezugnahme zum Banachschen Fixpunktsatz ist hier die Kondition der Vollständigkeit verletzt: $\mathbb{R}$ ist bezüglich des Absolutwertes als Metrik ein vollständig metrischer Raum und nach Satz 102 ist jedes abgeschlossene Intervall ebenso vollständig bzgl. der induzierten Metrik. Aber $(0,1)$ ist nicht abgeschlossen und somit nicht vollständig.



Aufgabe 7.5

Sei $F \in C^1([a,b])$ mit $F(a) < 0$ und $F(b) > 0$ und es existieren $M_1, M_2 > 0$, sodass $M_1 \le F'(x) \le M_2$ für alle $x \in [a,b]$. Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere $f : x \mapsto x - \lambda F(x)$.

Behauptung. Es existiert ein $\lambda \neq 0$, sodass f eine Kontraktion auf $[a,b]$ ist.

Beweis: f als lineare Kombination von zwei differenzierbaren Funktionen ist ebenfalls differenzierbar. Zur Konstruktion eines $\lambda \neq 0$ betrachte man die Ableitung:

$$f'(x) = 1 - \lambda F'(x) \quad .$$

Um die Kontraktionseigenschaft nachzuweisen, nutze man Korollar 109 aus und zeigt $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$ sowie $f([a,b]) \subset [a,b]$ (also *selbstabbildend*), sodass $f(x) : [a,b] \to [a.b]$. Man beschränke sich auf $\lambda > 0$. Dann:

$$1 - \underbrace{\lambda M_2}_{>0} \le 1 - \lambda F'(x) = 1 + \lambda(-F'(x)) \le 1 - \underbrace{\lambda M_1}_{>0} \tag{2}$$

und mit der Wahl $\lambda \in \left(0, \frac{1}{M_2}\right]$ folgt $|f'(x)| < 1$ (beachte $\frac{M_1}{M_2} < 1$). Damit folgt nach Konstruktion die Existenz eines $\lambda \in \left(0, \frac{1}{M_2}\right]$, sodass

$$\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$$

erfüllt ist. Für dieses λ ist f monoton steigend, denn auf der linken Seite von (2) ist $1 - \lambda M_2 \ge 1 - \frac{M_2}{M_2} = 0$ und damit $f'(x) \ge 0$. Für $a < b$ und

$$\begin{array}{ccc} F(a) < 0 & \Rightarrow & a - \lambda F(a) > a \\ & \text{folgt} & \\ F(b) > 0 & \Rightarrow & b - \lambda F(b) < b \end{array}$$

folgt aus dieser Monotonie

$$a < a - \lambda F(a) \le x - \lambda F(x) \le b - \lambda F(b) < b \quad .$$

Aus der stetigen Differenzierbarkeit folgt, dass f Intervalle in Intervalle abbildet, womit schlussendlich $f([a,b]) \subset [a,b]$ ist. Zusammenfassend existiert ein $\lambda \neq 0$ (speziell $\lambda \in \left(0, \frac{1}{M_2}\right]$), sodass

$$\begin{array}{ccc} \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| & < & 1 \\ & \text{und} & \\ f(x) & : & [a,b] \to [a,b] \end{array}$$

und damit f Kontraktion,q.e.d.!
Nota bene: In der Praxis hat man als Kontraktionskonstante die Abschätzung $L \le 1 - \lambda M_1$, wobei Gleichheit für $\lambda = \frac{1}{M_2}$ vorliegt:

$$L = 1 - \frac{M_1}{M_2} \quad .$$

Aufgabe 7.6

Man überprüfe zunächst die Voraussetzungen zur Anwendung von Präsenzaufgabe 5: $F(x) = x^2 - 3$ ist als Polynom differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und damit auch auf $[1, 2]$. Es ist $F(1) = 1 - 3 = -2 < 0$ und $F(2) = 4 - 3 = 1 > 0$ und es ist

$$2 \leq 2x \leq 4 \quad ;$$

also $M_1 = 2$ und $M_2 = 4$. Man wähle also $\lambda = \frac{1}{4}$ und betrachte $f(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$, was nach Aufgabe 5 eine Kontraktion von $[1, 2]$ mit der Kontraktionskonstante $L = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ist.

Da $[1, 2]$ ein abgeschlossenes Intervall und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ein vollständig metrischer Raum ist, ist auch $([1, 2], |\cdot|)$ vollständig und nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat man die a-priori Fehlerabschätzung

$$|x_n - x| \leq \frac{L^n}{1 - L}|x_1 - x_0| = \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0| \quad .$$

Als Startwert wählen wir die Intervallmitte: $x_0 = \frac{3}{2}$. Nach der Iterationsvorschrift folgt

$$x_1 = f(x_0) = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} + \frac{3}{4} = \frac{27}{16}$$

und $x_1 - x_0 = \frac{3}{16}$. Die a-priori-Abschätzung für die Iteration $x_n = f(x_n) = x_n - \frac{1}{4}F(x_n)$ ist damit

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \frac{3}{2^4} = \frac{3}{2^{n+3}} \quad .$$

Um die geforderte Genauigkeit von $0,005 = \frac{5}{1000}$ zu erreichen, bestimme man die Anzahl der Iterationen n aus

$$\frac{3}{2^{n+3}} < \frac{5}{1000} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1000}{5} = 60 \leq 2^{n+3} \Leftrightarrow 5.9 < \log_2(60) \leq n + 3 \Leftrightarrow n > 2.9 \quad ;$$

also $n \geq 3$.

Für den Initialwert $X_0 = 1$ und $X_1 = f(X_0) = \frac{3}{2}$ hat man die a-priori-Abschätzung

$$|X_N - X| \leq \frac{1}{2^{N-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^N}$$

und somit bedarf es

$$\frac{1}{2^N} < \frac{5}{1000} \Leftrightarrow \frac{1000}{5} = 200 \leq 2^N \Leftrightarrow 7.6 < \log_2(200) \leq N \Leftrightarrow N \geq 8 \quad .$$

Die jeweiligen ersten Iterationen und die jeweilige Differenz vom numerischen Wert von $\sqrt{3}$ wurden mit einem Python-Programm bestimmt.

```
import numpy as np
import sys

x0=1.5
n=3
x=np.empty(n+1)

X0=1
N=8
X=np.empty(N+1)

for ii in range(n+1):
        if ii==0:
                x[ii]=x0
        else:
                x[ii]=x[ii-1]-0.25*x[ii-1]**2+0.75

for j in range(N+1):
        if j==0:
                X[j]=X0
        else:
                X[j]=X[j-1]-0.25*X[j-1]**2+0.75

diffn=abs(3**(0.5)-x[n])
diffN=abs(3**(0.5)-X[N])

sys.stdout = open("auf76.txt", "w")

print("x=[x0,x1,x2,x3]=\n",x)
print("diffn=\n",diffn)

print("X=[X0,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8]=\n",X)
print("diffN=\n",diffN)

sys.stdout.close()
```

Die Werte sind:

```
x=[x0,x1,x2,x3]=
 [ 1.5         1.6875      1.72558594  1.73117423]
diffn=
 0.000876576993316
X=[X0,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8]=
 [ 1.          1.5         1.6875      1.72558594  1.73117423  1.73193318
  1.73203504  1.7320487   1.73205052]
diffN=
 2.829433563e-07
```

Aufgabe 7.7

Man prüfe nach, dass die Fixpunktgleichung $F(x) = 0$ mit $F(x) = x^5 + x - 1$ auf $[0,1]$ eine Lösung hat. Hierzu verwende man den Banachschen Fixpunktsatz: $[0,1]$ ist bzgl. der Metrik $|\cdot|$ ein vollständiger metrischer Raum. Es bleibt noch zu zeigen, dass F eine Kontraktion ist. Hierzu nutze man Aufgabe 5: Als Polynom ist $F(x)$ differenzierbar, $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 1 > 0$ sowie

$$1 \leq 5x^4 + 1 \leq 6 \quad ,$$

also $M_1 = 1$ und $M_2 = 6$.Sodann ist $x - \frac{1}{6}F(x)$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $L = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Das Problem $F(x) = 0$ hat nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt in $[0,1]$. Eine a-priori-Fehlerabschätzung für die Iterationsvorschrift $x_n = x_n - \frac{1}{6}F(x)$ ist gegeben durch

$$|x_n - x| \leq \frac{5^n}{6^{n-1}} |x_1 - x_0| \quad .$$

Man wähle als Initialwert $x_0 = 1$ und $x_1 = 1 - \frac{1}{6}F(1) = \frac{5}{6}$, sodass

$$|x_n - x| \leq \frac{5^n}{6^{n-1}} \frac{1}{6} = \frac{5^n}{6^n} \quad .$$

Für die geforderte Genauigkeit von 0,1 bestimme man die Anzahl der nötigen Iterationen:

$$n \log_{10}\left(\frac{5}{6}\right) < \log_{10}(10^{-1}) = -1 \Leftrightarrow n > (\log_{10}(6) - \log_{10}(5))^{-1} > 12,62$$

und damit etwa $n \geq 13$ Iterationen. Diese wurden im folgenden Python-Skript bestimmt.

```python
import numpy as np
import sys

x0=1
n=13
x=np.empty(n+1)

for ii in range(n+1):
        if ii==0:
                x[ii]=x0
        else:
                x[ii]=x[ii-1]-(1/6)*(x[ii-1]**5+x[ii-1]-1)

diff=abs(x[n]**5+x[n]-1)

sys.stdout = open("auf77.txt", "w")
print("x=[x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13]=\n",x)
print("diff=\n",diff)
sys.stdout.close()
```

Die Werte sind:

```
x=[x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13]=
 [ 1.          0.83333333  0.79413152  0.77580353  0.76633062  0.76122717
  0.7584216   0.75686292  0.755992    0.75550385  0.75522976  0.75507571
  0.75498909  0.75494036]
diff=
 0.000164492511836
```