Prof. Dr. Ernst-Rüdiger Olderog
Christopher Bischopink, M.Sc.

Ausgabe: 24.01.2020
Abgabe: Unbewertet!
in den Fächern im ARBI-Flur

13. Übung zu Grundlagen der Theoretischen Informatik

Dieser Übungszettel ist unbewertet und wird daher nicht durch die Tutoren korrigiert. Die Aufgaben bis einschließlich 56 behandeln dabei neuen, bisher noch nicht auf Übungszetteln thematisierten Inhalt. Die verbleibende Aufgabe dieses Übungszettels sollten Ihnen helfen sich einen Überblick über die behandelten Themen der Vorlesung zu verschaffen.

Aufgabe 55: Postsches Korrespondenzproblem **(Selbstkontrolle)**

Beantworten Sie jeweils die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten:

a) Hat das PCP für die Eingabe $\{(aaab, a), (a, baaa)\}$ eine Lösung?

b) Hat das PCP für die Eingabe $\{(ba, ab), (ab, abac), (acb, bb)\}$ eine Lösung?

c) Hat das PCP für die Eingabe $\{(b, babab), (aba, ab), (ba, a)\}$ eine Lösung?

d) Hat das PCP für die Eingabe $\{(aba, a), (ba, babab)\}$ eine Lösung?

Geben Sie hierzu eine Indexfolge an oder begründen Sie, warum keine Indexfolge existieren kann.

Aufgabe 56: Laufzeitkomplexität **(Selbstkontrolle)**

Sei die Sprache

$$L := \{wwa^n \mid w \in \Sigma^* \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ gegeben.

a) Geben Sie einen Algorithmus für eine nichtdeterministische Turingmaschine an, die L akzeptiert.

b) Geben Sie einen Algorithmus für eine deterministische Turingmaschine an, die L akzeptiert.

c) Berechnet für die jeweiligen Algorithmen möglichst genau, wieviele Schritte die Maschinen bei Akzeptanz im schlimmsten Fall benötigen.

Für a) erhalten Sie nur Punkte, wenn die Zeitkomplexität in O-Notation besser ist, als die des Algorithmus aus b).
Hinweis: Es reicht die Turingmaschinen zu skizzieren. Außerdem sind Mehrband-Turingmaschinen hilfreich.

Aufgabe 57: Multiple Choice **(Selbstkontrolle)**

Im Folgenden werden 71 Aussagen gemacht. Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Aussagen und geben Sie jeweils durch ein Kreuz an, ob die Aussage *wahr* oder *falsch* ist.

Wahr	Falsch	
☐	☐	a) Über $\Sigma = \{a, b\}$ gibt es 32 Wörter der Länge ≤ 4.
☐	☐	b) Über $\Sigma = \{a, b\}$ gibt es 32 Wörter der Länge 4.
☐	☐	c) Es gibt Sprachen L, für die $L \cdot L = L$ gilt.

☐ ☐ d) Es gibt zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, für die gilt: $L_1 \cap L_2$ ist unendlich groß.

☐ ☐ e) Für alle unendlichen Sprachen mit $L_1, L_2 \subseteq \{a\}^*$ gilt: $L_1 \cap L_2$ ist unendlich.

☐ ☐ f) Jede Sprache enthält mindestens das leere Wort ε.

☐ ☐ g) Wenn L_r und L_k zwei Sprachen sind, so dass L_r regulär und L_k kontextfrei ist, dann ist $L_r \cap L_k$ regulär.

☐ ☐ h) Wenn L_r und L_k zwei Sprachen sind, so dass L_r regulär und L_k kontextfrei ist, dann ist $L_r \cap L_k$ kontextfrei.

☐ ☐ i) Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist entscheidbar.

☐ ☐ j) Die von einer Grammatik G erzeugten Wörter in $L(G)$ können auch Nichtterminale enthalten.

☐ ☐ k) Die Sprache einer Grammatik mit nur einer einzigen Produktion ist endlich.

☐ ☐ l) Jede kontextfreie Produktion ist kontextsensitiv.

☐ ☐ m) Jede kontextfreie Sprache ist kontextsensitiv.

☐ ☐ n) Jede monotone Produktion ist kontextsensitiv.

☐ ☐ o) Jede Sprache L besitzt eine reguläre Teilsprache $K \subseteq L$.

☐ ☐ p) Die Sprache $\{a, b, c\}^* \setminus L(a^*b^*c^*)$ ist Chomsky-3.

☐ ☐ q) Für das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ gibt es eine linkslineare Grammatik, die die Sprache $\{abbaw \mid w \in \{a, b\}^*\}$ generiert.

☐ ☐ r) Wenn eine Sprache durch eine linkslineare Grammatik erzeugt werden kann, dann kann sie auch durch einen regulären Ausdruck generiert werden.

☐ ☐ s) Wenn eine Sprache nicht durch eine kontextfreie Grammatik erzeugt werden kann, dann kann sie auch nicht durch einen regulären Ausdruck generiert werden.

☐ ☐ t) Die Sprache $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$ über dem Alphabet $\{a, b\}$ ist regulär.

☐ ☐ u) Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht regulär ist.

☐ ☐ v) Es gibt nur abzählbar viele Chomsky-0-Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

☐ ☐ w) Wenn L keine Chomsky-0-Sprache ist, dann gibt es keine Grammatik, die L erzeugt.

☐ ☐ x) In einer kontextfreien Grammatik über Σ mit Startsymbol S kann es zu einem Wort $w \in L(G)$ mehrere verschiedene Linksableitungen von S nach w geben.

☐ ☐ y) Es gibt eine kontextfreie Grammatik, die die Sprache $L = \{a^i b^k \mid i, k \in \mathbb{N} \wedge (i = 2k \vee i = 3k \vee i = 5k)\}$ erzeugt.

☐ ☐ z) Es gibt kontextfreie Sprachen L, die eine mehrdeutige und eine eindeutige (d.h.: nicht-mehrdeutige) erzeugende Grammatik haben.

☐ ☐ A) Es gibt kontextfreie Sprachen L, die keine eindeutige (d.h.: nicht-mehrdeutige) erzeugende Grammatik haben.

☐ ☐ B) Die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to aA \mid \varepsilon, A \to Sb \mid B, B \to Sa\}, S)$ ist eindeutig.

☐ ☐ C) Die Sprache $\overline{L} = \{a, b, c\}^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist deterministisch kontextfrei.

☐ ☐ D) Die Sprache $L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge m = n^2\}$ kann von einem PDA akzeptiert werden.

☐ ☐ E) Es gilt $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{in } w \text{ steht direkt vor jedem } c \text{ ein } a \text{ oder ein } c\} = L((a \cdot c^* \cup b)^*)$

☐ ☐ F) Es gilt $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid$ direkt vor jedem c stehen <u>genau</u> zwei a's (niemals mehr!)$\} = L((a^* \cdot b \cup a \cdot a \cdot c)^* \cdot a^*)$.

☐ ☐ G) Der endliche Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$ mit
$\delta = \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_1), (q_2, a, q_3), (q_2, b, q_1), (q_2, b, q_3), (q_3, a, q_3), (q_3, b, q_3)$
ist deterministisch.

☐ ☐ H) Die Sprache $\{uuw \mid u \in \{a\}^*, w \in \{a, b\}^*\}$ ist regulär.

☐ ☐ I) Jede nicht-reguläre Sprache über einem Alphabet Σ enthält mehr als $2^{|\Sigma|}$ Wörter.

☐ ☐ J) Es gibt eine nicht-reguläre Sprache über einem Alphabet Σ mit weniger als $2^{2^{|\Sigma|}}$ Wörtern.

☐ ☐ K) Es gibt Kellerautomaten, die unendlich lange rechnen, ohne eine (nicht-leere) Eingabe vollständig zu lesen.

☐ ☐ L) Für das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ gibt es einen DFA mit zwei Zuständen, der die Sprache $\Sigma^* \setminus \varepsilon$ akzeptiert.

☐ ☐ M) Sei $G = (\{S, R, T, A\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit $P = \{S \to aS \mid bR, R \to bT, T \to cA \mid c, A \to dS\}$. Der nach dem Verfahren aus der Vorlesung aus G konstruierte sprachäquivalente endliche Automat hat 5 Zustände.

☐ ☐ N) Sei $G = (\{S, R, T, A\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit $P = \{S \to aS \mid bR, R \to bT, T \to cA \mid c, A \to dS\}$. Der nach dem Verfahren aus der Vorlesung aus G konstruierte sprachäquivalente endliche Automat ist deterministisch.

☐ ☐ O) Der Äquivalenzklassenautomat einer regulären Sprache L ist deterministisch.

☐ ☐ P) Der Index der Nerode-Rechtskongruenz $\equiv_L$ einer regulären Sprache L und die Anzahl der Zustände des Äquivalenzklassenautomaten von L sind gleich.

☐ ☐ Q) Zu jeder kontextsensitiven Grammatik G kann ein Kellerautomat K mit $L(G) = L(K)$ konstruiert werden.

☐ ☐ R) Die Sprache $L = \{a^n b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid n \geq 0\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

☐ ☐ S) Das Problem *„Gegeben drei DFAs A_1, A_2 und A_3 über Σ; gibt es ein Wort $w \in \Sigma^*$, das von keinem der drei Automaten akzeptiert wird?“* ist entscheidbar.

☐ ☐ T) Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer kontextfreien Grammatik G und eines Wortes w entscheidet, ob $w \in L(G)$ gilt.

- ☐ ☐ U) Im Konfigurationsbaum einer deterministischen Turingmaschine kann es einen Knoten mit unendlich vielen Nachfolgern geben.
- ☐ ☐ V) Wenn eine Sprache Chomsky-0 ist, dann gibt es eine deterministische Turingmaschine, die sie akzeptiert.
- ☐ ☐ W) Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine deterministische Turingmaschine, die L akzeptiert.
- ☐ ☐ X) Für jede Chomsky-0 Sprache L gilt: die charakteristische Funktion χ_L ist berechenbar.
- ☐ ☐ Y) Für jede Sprache L gilt: wenn χ_L berechenbar ist, dann ist L entscheidbar.
- ☐ ☐ Z) Für jede Sprache L gilt: wenn χ_L berechenbar ist, dann sind L und $\overline{L}$ beide rekursiv aufzählbar .
- ☐ ☐ 0) Wenn $\overline{L}$ entscheidbar ist, dann auch L.
- ☐ ☐ 1) Wenn die charakteristische Funktion einer Sprache Turing-berechenbar ist, dann ist die Sprache Turing-akzeptierbar.
- ☐ ☐ 2) Es gibt nur abzählbar viele Turing-akzeptierbare Sprachen.
- ☐ ☐ 3) H ist semi-entscheidbar.
- ☐ ☐ 4) H ist Chomsky-0.
- ☐ ☐ 5) H ist rekursiv aufzählbar.
- ☐ ☐ 6) H_0 ist entscheidbar.
- ☐ ☐ 7) Die Reduktionsrelation $\leq$ zwischen Sprachen ist transitiv und symmetrisch.
- ☐ ☐ 8) Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 ist semi-entscheidbar, dann ist auch L_1 semi-entscheidbar.
- ☐ ☐ 9) Falls $L_1 \leq_p L_2$ und $L_1 \in \mathtt{P}$, dann gilt auch $L_2 \in \mathtt{P}$.
- ☐ ☐ aa) Falls $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \in \mathtt{NP}$, dann gilt auch $L_1 \in \mathtt{NP}$.
- ☐ ☐ ab) Für zwei $\mathtt{NP}$-vollständige Probleme L_1, L_2 gilt sowohl $L_1 \leq_p L_2$ als auch $L_2 \leq_p L_1$.
- ☐ ☐ ac) Für zwei $\mathtt{NP}$-harte Probleme L_1, L_2 gilt sowohl $L_1 \leq_p L_2$ als auch $L_2 \leq_p L_1$.
- ☐ ☐ ad) Jede Sprache in DTIME(f) ist auch in NSPACE(f).
- ☐ ☐ ae) Es gilt $n^2 \in O(2 \cdot n^2 + 100 \cdot \sqrt{n})$.
- ☐ ☐ af) Falls **3SAT** $\in \mathtt{P}$, dann $\mathtt{P} = \mathtt{NP}$.
- ☐ ☐ ag) Es gibt eine deterministische Turingmaschine mit 3 Zuständen, die die Sprache $L = \{c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert.
- ☐ ☐ ah) Für jede Sprache L gilt: wenn χ_L berechenbar ist, dann sind L und $\overline{L}$ beide rekursiv aufzählbar .
- ☐ ☐ ai) Die Sprache $\{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist Chomsky-0.