Musterlösung zum Übungsblatt 5 zur Vorlesung „Analysis I“

Aufgabe 1. Beweisen Sie mittels der $\varepsilon - N$-Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$. Geben Sie in diesem Fall zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein $N \in \mathbb{N}$ wie in der Definition einer konvergenten Folge an.
Lösung: Laut der Definition einer konvergenten Folge müssen wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. In unserem Fall ist $a_n = \frac{2-n}{2+n}$ und $a = -1$. Es gilt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{2-n}{2+n} + 1\right| = \left|\frac{2-n+2+n}{2+n}\right| = \left|\frac{4}{2+n}\right| = \frac{4}{2+n} < \frac{4}{n}.$$

(Die letzte Ungleichung hätte man auch weglassen können, sie vereinfacht aber die folgenden Rechnungen ein klein wenig.) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist

$$\frac{4}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}.$$

Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{4}{\varepsilon}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$|a_n - a| < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{N} < \varepsilon$$

und somit ist per Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$.
Zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ kann man ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{4}{\varepsilon} = 40$ wählen, z.B $N = 41$. Wir betonen, dass N nicht unbedingt optimal gewählt werden muss. Zum Beispiel würde $N = 1000$ auch passen.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

a) $a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}-n)}$

Lösung: Wir lösen die im Nenner vorkommende Unbestimmtheit „$+\infty - (+\infty)$“auf, indem wir den Bruch mit $\sqrt{n^2+1} + n$ erweitern.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}-n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n(n^2+1-n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right) = 2$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$$

und somit ist nach dem Einschnürungssatz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$.
Bemerkung: Später werden wir beweisen, dass die Wurzelfunktion stetig ist. Dies bedeutet, dass man den Limes unter das Wurzelzeichen ziehen kann, also statt des letzten Arguments einfacher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \sqrt{1+0} = 1$$

rechnen kann.

b) $a_n = \frac{n^3}{n^2+3} - \frac{2n^2}{2n+1}$

Lösung: Wir dürfen die Terme nicht auseinanderziehen, weil sie beide divergent sind. Es liegt eine Unbestimmtheit der Form „$+\infty - (+\infty)$“ vor. Wir wollen diese Unbestimmheit „auflösen“, indem wir die Terme auf den gleichen Nenner bringen. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+3} - \frac{2n^2}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(2n+1)-2n^2(n^2+3)}{(n^2+3)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^3-2n^4-6n^2}{(n^2+3)(2n+1)} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-6n^2}{(n^2+3)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{6}{n}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)} \overset{\text{Rechenregeln}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$

c) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 13^n - 1}$

Lösung: Zunächst identifiziert man den ‚Hauptterm‘ unter der Wurzel. Für große n ist offenbar 13^n viel größer als n^2-1. Man erwartet also, dass n^2-1 für die Limes-Berechnung unwesentlich ist. Um das schlüssig zu zeigen, kann man a_n nach unten und nach oben abschätzen und dann den Einschnürungssatz anwenden. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Abschätzungen:

$$\sqrt[n]{n^2 + 13^n - 1} \geq \sqrt[n]{13^n} = 13$$

$$\sqrt[n]{n^2 + 13^n - 1} \leq \sqrt[n]{n^2 + 13^n} \leq \sqrt[n]{n^2 13^n + 13^n n^2} = \sqrt[n]{2n^2 13^n} = 13\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2$$

Zusammenfassend ist

$$13 \longleftarrow 13 \leq \sqrt[n]{n^2 + 13^n - 1} \leq 13\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow{\text{VL}} 13$$

und damit ist $\sqrt[n]{n^2 + 13^n - 1} \to 13$ nach dem Einschnürungssatz.

d) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

Lösung:
1. Möglichkeit
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar:

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{2}\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{n}{2} = \frac{n}{4},$$

weil man Faktoren ≥ 1 weglässt. Weiter gibt es nach dem Archimedischen Prinzip zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 4K$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\frac{n!}{2^n} \geq \frac{n}{4} \geq \frac{N}{4} > K$$

Folglich ist (a_n) unbeschränkt und somit nach Satz 2.2 divergent.
2. Möglichkeit Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{2}\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{n}{2} = \frac{n}{4},$$

weil man Faktoren ≥ 1 weglässt. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n!}{2^n} \geq \frac{n}{4} \to +\infty$$

Also divergiert $\frac{n!}{2^n}$ und zwar bestimmt gegen $+\infty$.
Die Aufgabe zeigt insbesondere, dass das Wachstum der Fakultät schneller als exponentielles Wachstum ist.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie jeweils, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (Beweis oder Gegenbeispiel), wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

a) $|a_n| < \frac{1}{\varepsilon}$

Lösung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
Beweis: Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$. Dann gilt nach der Voraussetzung mit $\varepsilon = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} > 0$ für alle $n \geq N$ stets $|a_n| < \frac{1}{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) $|a_n| < n\varepsilon$

Lösung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.
Gegenbeispiel: $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$

c) $|a_{n+1}| < \varepsilon|a_n|$

Lösung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
Beweis: Für alle $n \geq N$ gilt nach der Voraussetzung:

$$|a_n| < \varepsilon|a_{n-1}| < \varepsilon^2|a_{n-2}| < ... < \varepsilon^{n-N}|a_N|.$$

Setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, so gilt für alle $n \geq N$ die Ungleichung $0 \leq |a_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^N|a_N|$. Da $2^N|a_N|$ eine konstante Zahl ist, strebt die rechte Seite nach VL gegen 0. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Einschnürungssatz eine Nullfolge.