CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 9 - Modul mat110

Keine Abgabe vorgesehen

Präsenzaufgabe 9.4. Finden Sie einen Körper K, welcher ein isomorphes Bild von k enthält und in dem f eine Nullstelle besitzt. Beschreiben Sie K, die Einbettung von k in K und das Bild dieser Einbettung explizit. Identifizieren Sie k mit seinem Bild in K. Finden Sie dann das Element $\alpha \in K$, sodass $f(\alpha) = 0$ und berechnen Sie die Darstellung von α^5 in K. Wieviele Elemente hat K?

(a). $f = t^3 + 3t^2 + t + 2 \in \mathbb{Z}_5[t]$, $k = \mathbb{Z}_5$.

(b). $f = 12t^4 + 9t^2 + 6t + 5 \in \mathbb{Q}[t]$, $k = \mathbb{Q}$.

Präsenzaufgabe 9.5. Bestimmen Sie für die folgenden Polynome $f_i \in \mathbb{Q}[t]$ jeweils eine algebraische Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{Q}$ in dem f_i zerfällt und den Körpererweiterungsgrad $[K : \mathbb{Q}]$:

(a) $f_1 = t^2 - 3$ (b) $f_2 = t^4 - 2t^2 - 2$ (c) $f_3 = t^6 + 1$ (d) $f_4 = t^5 - 1$

Präsenzaufgabe 9.6. Sei $f := t^8 + t \in \mathbb{Z}_2[t]$.

(a). Zerlegen Sie f in irreduzible Polynome aus $\mathbb{Z}_2[t]$.

(b). Zeigen Sie, dass es einen irreduziblen Faktor $h \in \mathbb{Z}_2[t]$ von f und eine Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{Z}_2$ gibt, sodass h eine Nullstelle $\alpha \in K$ hat mit $\alpha^3 = \alpha + 1$. Geben Sie eine Basis von K als $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum an und bestimmen Sie $[K : \mathbb{Z}_2]$.

(c). Stellen Sie $\alpha^k \in K$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ bezüglich der Basis aus (b) dar.

(d). Zeigen Sie, dass f über K zerfällt indem Sie f in $K[t]$ in Linearfaktoren zerlegen. Stellen Sie die Linearfaktoren mit Hilfe der Basis aus (b) dar.