Analysis IIa

Dozent: Konstantin Pankrashkin

Ordnung, Anfangswertprobleme höherer Ordnung, Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung : Struktur der Lösung, Fundamentalsysteme für homogene Gleichungen, Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten : charakteristisches Polynom, reell- und komplexwertige Fundamentalsysteme,

Die Themen der Vorlesung 13 und Randwertaufgaben/Greensche Funktionen kommen in der Klausur nicht vor.

Vorlesung 1

Definition 1. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine **Stammfunktion** von f ist eine differenzierbare Funktion $\Phi : I \to \mathbb{R}$ mit $\Phi'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Wir machen ein paar einfache aber wichtige Bemerkungen.

Bemerkung 2. Manchmal ist das Intervall I wichtig, in diesem Fall ist von *einer Stammfunktion auf* I die Rede. Ist Φ eine Stammfunktion von f auf einem Intervall I, so ist Φ auch eine Stammfunktion von f auf jedem Teilintervall von I.

Bemerkung 3. Ist Φ eine Stammfunktion von f, so hat jede Stammfunktion Ψ von f die Form $\Psi = \Phi + C$, wobei C eine Konstante ist. (Beweis: $(\Psi - \Phi)' = \Psi' - \Phi' = f - f = 0$, also ist $\Psi - \Phi$ konstant.) Umgekehrt, jede Funktion Ψ der Form $\Psi = \Phi + C$ mit einer Konstante C ist eine Stammfunktion von f, da $(\Phi + C)' = \Phi' = f$. Die ganze Familie der Stammfunktionen von f (falls sie existieren) bezeichnet man als

$$\int f$$

und das Zeichen $\int$ nennt sich **unbestimmtes Integral**.[1] Ist Φ eine konkrete Stammfunktion von f, so schreibt man auch

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C$$

(damit die Variable x sichtbar bleibt). Die Aufgabe, das unbestimmte Integral von f auszurechnen, ist also äquivalent zu der Aufgabe, eine Stammfunktion von f zu finden. Insbesondere haben wir für jede differenzierbare Funktion f die Gleichheit

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Die Schreibweise mit dx ist besonders nützlich, falls es irgenwelche Parameter im Spiel sind. Zum Beispiel,

$$\begin{aligned} &\int (x+2t) \underbrace{dx}_{!} = \frac{x^2}{2} + 2tx + C, \qquad &&\text{weil } \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2} + 2tx + C\Big) = x + 2t, \\ \text{aber } &\int (x+2t) \underbrace{dt}_{!} = tx + t^2 + C, &&\text{weil } \frac{d}{dt}\big(tx + t^2 + C\big) = x + 2t. \end{aligned}$$

---

[1]Später werden Sie auch andere Integrale lernen, z.B. $\int_a^b, \oint, \iint, \int^{\oplus}$ usw.

Die Operation $\int$ ist natürlich linear:

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \quad \int af = a \int f$$

(hier sind f und g Funktionen und a eine Konstante. Beweis: $(\int f + \int g)' = (\int f)' + (\int g)' = f + g$ usw.).

Bemerkung 4. Die Existenz einer Stammfunktion ist nicht automatisch. Das sieht man mit einem ganz einfachen Beispiel: *Die Funktion* $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$ *besitzt keine Stammfunktion auf* $\mathbb{R}$.

Beweis. (Widerspruchsbeweis) Sei Φ eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$, dann ist Φ auch eine Stammfunktion von f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, +\infty)$. Für $x < 0$ hat man also $\Phi'(x) = -1$. Die Stammfunktionen von $x \mapsto -1$ haben die Form $x \mapsto -x + a$, wobei a eine Konstante ist. Also gibt es eine Konstante a mit $\Phi(x) = -x + a$ für alle $x < 0$. Mit derselben Logik zeigt man, dass es eine Konstante b gibt mit $\Phi(x) = x + b$ für alle $x > 0$. Da Φ eine Stammfunktion von f ist, ist sie differenziebar und damit auch stetig. Insbesondere hat man

$$\Phi(0) = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \Phi(x)}_{=a} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \Phi(x)}_{=b}.$$

Also gilt $b = a$ und $\Phi(0) = a$. Wir haben beweisen, dass für eine Konstante a gilt

$$\Phi(x) = \begin{cases} -x + a, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ x + a, & x > 0, \end{cases}$$

was sich auch als $\Phi(x) = |x| + a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Aber die Funktion $x \mapsto |x|$ ist nicht differenizerbar für $x = 0$ (Analysis 1), also kann auch Φ nicht differenzierbar sein, was mit der Definition einer Stammfunktion nicht vereinbar ist. $\square$

Wir werden in nächsten Vorlesungen sehen, dass stetige Funktionen immer Stammfunktionen besitzen.

Bemerkung 5. Beim Berechnen der Ableitungen sieht man schnell folgendes: ist f eine elementare Funktion (d.h. entsteht durch endlich viele Verkettungen und algebraische Operationen mit exp, log, sin, cos usw.), so ist auch f' eine elementare Funktion. Im Allgemeinen, sind Stammfunktionen von elementaren Funktion aber keine elementare Funktionen (Z.B. sind Stammfunktionen von $x \mapsto e^{-x^2}$ und $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ keine elementare Funktionen: das werden wir aber nicht beweisen.) Natürlich ist

$f(x)$	$\int f(x)dx$ (ohne Konstante C)
x^a, $a \neq -1$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
e^{ax}, $a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\,e^{ax}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

es interessant, für möglichst viele Funktionen ihre Stammfunktionen explizit ausrechnen zu können. Dafür kann man z.B. die aus der Analysis 1 bekannte Tabelle der Ableitungen "umkehren" anfangen, siehe Tabelle unten. Auch folgende Regeln können nützlich sein:

Proposition 6. *Sei Φ eine Stammfunktion von f, dann*

$$\int f(x+a)dx = \Phi(x+a) + C, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\,\Phi(ax), \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Beweis. Die erste Identität folgt aus $\dfrac{d}{dx}\big(\Phi(x+a)\big) = \Phi'(x+a) = f(x+a)$, und die zweite folgt aus $\dfrac{d}{dx}\big(\Phi(ax)\big) = a\Phi'(ax) = af(ax)$. □

Es gibt leider keine allgemeine Methode, Stammfunktionen zum Produkt fg und zur Verkettung $f\circ g$ zu finden, auch wenn man Stammfunktionen von f und g kennt. Daher ist das Integrieren *viel* komplexer als das Differenizeren. Wir werden aber zwei wichtige Methoden beschreiben, mit deren Hilfe man doch viele Stammfunktionen finden kann.

Satz 7 (Partielle Integration). *Für differenzierbare Funktionen f und g gilt*

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Beweis. Wir müssen einfach zeigen, dass die Ableitung der Funktion auf der linken Seite mit der Ableitung der Funktion auf der rechten Seite übereinstimmt. Auf der linken Seite haben wir: $(\int f'g)' = f'g$. Auf der rechten Seite nutzt man die Leibniz-Regel:

$$\Big(fg - \int fg'\Big)' = (fg)' - fg' = f'g + fg' - fg' = f'g. \qquad \square$$

Die partielle Integration macht natürlich nur dann Sinn, wenn die neue Funktion fg' "einfacher" ist als $f'g$.

Beispiel 8. $\displaystyle\int xe^x dx.$

Hier steht unter dem Integral schon ein Produkt. Die beiden Funktionen x und e^x lassen sich einfach differenzieren und integrieren. Aber die Ableitung 1 von x ist "einfacher" als ihre Stammfunktionen $x^2/2 + C$. Est ist also günstig, $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$ zu nehmen. Mit Hilfe der partiellen Integration bekommt man also:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f'(x)} dx &= \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)} dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Wichtig: es ist relativ einfach zu prüfen, ob das Ergebnis richtig ist: man muss einfach das Ergebnis differenzieren, und die Ableitung muss mit der Funktion im Integral übereinstimmen. Hier hat man also $(xe^x - e^x + C) = (xe^x)' - (e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$: alles ist in Ordnung.

Beispiel 9. Manchmal steht im Integral kein explizites Produkt. Man kann aber immer mit dem Faktor 1 multiplizieren, dabei gilt natürlich $1 = f'(x)$ für $f(x) = x$. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)}\underbrace{\ln x}_{g(x)}\, dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx \\ &= x\ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

Beispiel 10. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ eine elementare Funktion ist[2].

Für $n = 1$ hat man eine Funktion "aus der Tabelle", also $I_1(x) = \arctan x + C$. Für grössere n kann man versuchen, die Rechnung für I_n auf die Rechnung für I_{n-1}

[2]Statt $\displaystyle\int \frac{1}{\text{irgendwas}}\, dx$ schreibt man fast immer $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{irgendwas}}$.

zu reduzieren. Dabei hilft die partielle Integration mit $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{g(x)} \, dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\Big(- \frac{n \cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}} \Big)}_{g'(x)} \, dx \qquad (1) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx. \end{aligned}$$

Zur Zeit sieht man überhaupt nicht, warum diese Rechnung hilft: das Integral auf der rechten Seite sieht nicht einfacher aus als das usprüngliche Integral. Aber man kann die Identität $1 - 1 = 0$ richtig einsetzen:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx &= \int \frac{0 + x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx = \int \frac{-1 + (1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \int \Big(- \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{1}{(1+x^2)^n} \Big) \, dx = -I_{n+1}(x) + I_n(x). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der letzten Identität kann man (1) wie folgt umschreiben:

$$I_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\big(- I_{n+1}(x) + I_n(x) \big),$$

also $I_{n+1} = \dfrac{1}{2n} \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(x)$. Ist I_n eine elementare Funktion, so ist auch I_{n+1} eine elementare Funktion. Da sich I_1 explizit ausrechnen lässt, sind alle I_n elementare Funktionen.

Jetzt kommt die zweite wichtige Methode:

Satz 11 (Substitution). *Seien φ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I, J ein Intervall mit $\varphi(I) \subset J$, $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\Phi : J \to \mathbb{R}$ ihre Stammfunktion. Dann gilt*

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \varphi'(x) \, dx = \Phi\big(\varphi(x)\big) + C.$$

Beweis. Mit unseren Voraussetzungen ist $x \mapsto \Phi\big(\varphi(x)\big)$ differenzierbar auf I, und die Ableitung davon ist (Kettenregel) $\Phi'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$. Das ist genau die Funktion unter dem Integral auf der linken Seite. $\square$

Beim Rechnen nutzt man oft eine andere Schreibweise:

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \varphi'(x) \, dx = \int f(\varphi) \, d\varphi \Big|_{\varphi = \varphi(x)},$$

wobei die Substitution $\varphi = \varphi(x)$ ganz am Ende gemacht wird. Die Rechnungen werden übersichtlicher, falls man $\varphi'(x)dx$ als $d\varphi$ schreibt.

Beispiel 12. $\int xe^{x^2}\,dx$.

1. Lösung: man sieht, dass x "fast" die Ableitung von x^2 is (es fehlt nur ein konstanter Faktor). Man führt also $\varphi(x) = x^2$ ein und schreibt das Integral um:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \varphi'(x)e^{\varphi(x)}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^{\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}e^{\varphi} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

2. Lösung: am meisten stört uns (=den Dozenten) der Term x^2 in der Exponente. Wir können also $x = \sqrt{t}$ einführen um e^t statt e^{x^2} zu haben (da $t = x^2$), dann $dx = (\sqrt{t})'dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ und

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int \sqrt{t}e^t\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t + C = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Beispiel 13. Die Substitution nutzt man oft beim Integrieren von trigonometrischen Funktionen. Zum Beispiel $\int \cos^3 x\,dx$:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx.$$

Hier kann man $\varphi(x) = \sin x$ einführen, dann $\cos x\,dx = d\varphi$ und

$$\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1-\varphi^2)\,d\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Im letzten Beispiel sieht man, dass algebraische Identitäten sehr nutzlich sein können (hier $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Insbesondere kann man mit algebraischen Ideen eine grosse Klasse von Funktionen finden, deren Stammfunktionen elemntare Funktionen sind.

Definition 14. Eine **rationale Funktion** ist eine Funktion der Form $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen P und Q (mit reellen Koeffizienten).

Satz 15. *Jede rationale Funktion besitzt eine elementare Stammfunktion.*

Beweis. Unser Beweis wird auch eine Berechnungmethode liefern. Seien P und Q Polynome und $f = \dfrac{P}{Q}$. Wir wollen also $\int f$ ausrechnen.

Schritt 1. Ist Q konstant, dann ist f auch ein Polynom, und seine Stammfunktionen sind Polynome (und damit Elementarfunktionen). Man kann also annehmen, dass Q nichtkonstant ist.

Schritt 2. Wir können P wie folgt darstellen: $P(x) = p_1(x)Q(x) + p_0(x)$, wobei p_0 und p_1 Polynome sind mit $\operatorname{Grad} p_0 < \operatorname{Grad} Q$. Dann gilt $f = p_1 + \dfrac{p_0}{Q}$ und $\int f =$

$\int p_1 + \int \frac{p_0}{Q}$. Das Integral $\int p_1$ lässt sich explizit ausrechnen (das ist wieder ein Polynom), mann muss sich also nur um den zweiten Term kümmern.

Nach den Schritten 1 und 2 wird es klar, dass man vom Anfang an voraussetzen kann, dass Q nichtkonstant ist und dass $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$. Ab jetzt werden wir nur diesen Fall betrachten.

Schritt 3. Wir nutzen jetzt den Hauptsatz der Algebra: jedes nichtkonstantes komplexes Polynom besitzt (mindestens) eine komplexe Nullstelle. Seit a eine Nullstelle von Q, dann gilt $Q(x) = (x-a)Q_0(x)$, wobei Q_0 ein Polynom ist mit $\operatorname{Grad} Q_0 = \operatorname{Grad} Q - 1$. Man kann auf dieselbe Weise auch Q_0 zerlegen, am Ende landet man bei der Darstellung

$$Q(x) = A\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_k}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Hier sind a_j die Nullstellen von Q (und wir nehmen an, dass $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$) und m_j sind ihre Multiplizitäten: man hat $m_j \geq 1$ und $m_1 + \cdots + m_k = \operatorname{Grad} Q$. In unserem Fall ist Q ein Polynom mit rellen Koeffizienten, und das ist eine zusätzliche Eigenschaft, die man wie folgt nutzen kann: falls a eine nichtrelle Nullstelle von Q ist, dann ist auch $\overline{a}$ Nulstelle mit derselben Multiplizität. Ist m die zugehörige Multiplizität, so lässt sich das Produkt $(x-a)^m(x-\overline{a})^m$ als $(x^2+2bx+c)^m$ schreiben mir $b = -\operatorname{Re} a$ und $c = |a|^2$ (insbesondere gilt $c - b^2 = |\operatorname{Im} a|^2 > 0$). Durch solches Gruppieren der Faktoren kann man also Q wie folgt zerlegen:

$$Q(x) = A\prod_{j=1}^{\ell}(x-a_j)^{m_j}\prod_{j=1}^{s}(x^2+2b_jx+c_j)^{k_j}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ (immer noch $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$), $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ mit $c_j - b_j^2 > 0$, und $m_j, k_j \geq 1$ mit $m_1 + \cdots + m_\ell + 2k_1 + \ldots 2k_s = \operatorname{Grad} Q$.

Schritt 4. Man kann beweisen, dass es reelle Konstanten $A_{j,k}$, $B_{j,k}$, $C_{j,k}$ existieren[3] mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{B_{j,k}x + C_{j,k}}{(x^2+2b_jx+c_j)^k}. \tag{2}$$

Die Darstellung (2) nennt man die *Partialbruchzerlegung* von $f = P/Q$. Um unsere Behauptung zu beweisen, müssen wir lediglich zeigen, dass man eine elementare Stammfunktion zu jedem Term auf der rechten Seite von (2) finden kann. Es gibt aber nur Terme von zwei Typen, die wir jetzt einzeln betrachten. Für relle a hat man

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & m = 1, \\ -\dfrac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C, & m \geq 2, \end{cases}$$

[3] Wir verzichten auf Beweis, da dieser sehr algebraisch ist und ganz wenig mit der Analysis zu tun hat.

damit sind alle Terme in der ersten Summe schon gedeckt. Jetzt müssen wir nur $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^m}\,dx$ mit $c-b^2>0$ ausrechnen. Wir nutzen die Substitution $x = \sqrt{c-b^2}t-b$, dann gilt $dx=\sqrt{c-b^2}$ und

$$\begin{aligned}
&\int \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^m}dx\\
&\qquad\qquad = B(c-b^2)^{1-m}\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m} + (C-Bb)(c-b^2)^{\frac{1}{2}-m}\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}.
\end{aligned}$$

Das zweite Integral ist das im Beispiel 10 betrachtete I_m, und das ist also eine elementare Funktion. Im ersten Integral kann man $\varphi(t)=t^2$ einführen, dann ist

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{(1+\varphi)^m} = \frac{1}{2}\begin{cases} \ln(1+\varphi)+C, & m=1,\\ -\dfrac{1}{(m-1)(1+\varphi)^{m-1}}+C, & m\geq 2, \end{cases}$$

eine elementare Funktion. $\square$

Beispiel 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$.

Die Nullstellen von x^2-1 sind ± 1, und $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Es müssen also $A, B\in\mathbb{R}$ existieren mit

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Die genauen Werte von A and B findet man durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}.$$

Für alle x muss also $(A+B)x+(A-B)=1$ gelten, d.h. $A+B=0$ und $A-B=1$. Damit findet man $A=\frac{1}{2}$ und $B=-\frac{1}{2}$, und

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Weitere (und kompliziertere) Beispiele werden in der Übung betrachtet.

Vorlesung 2

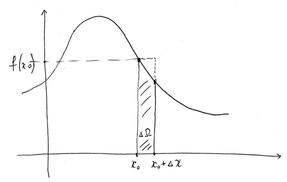
In der ersten Vorlesung haben wir gesehen, dass man für bestimmte Funktionen f ihre Stammfunktionen explizit ausrechnen kann. Uns fehlt aber die Theorie: wir wissen noch nicht, unter welchen Bedingungen eine Stammfunktion überhaupt existiert (wir haben ja gesehen, dass manche Funktionen keine Stammfuktionen besitzen). Diese Frage wird jetzt besprochen.

Die Grundidee kann man zuerst sehr informell beschreiben. Betrachten wir eine positive und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist Φ eine Stammfunktion von f auf (a, b) und $x_0 \in (a, b)$, so gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

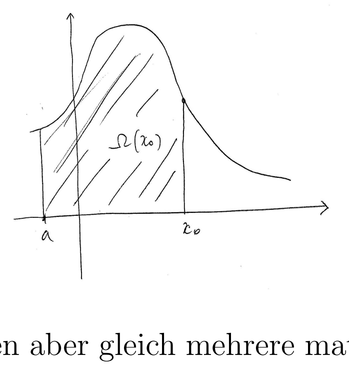
Dass bedeutet, dass für kleine Δx die Differenz $\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)$ durch $f(x_0)\Delta x$ "gut approximiert" werden kann. Die Zahl $f(x_0)\Delta x$ ist aber genau der Flächeninhalt eines Recktecks mit Seitenlängen $f(x_0)$ und Δx. Betrachten wir also das Gebiet

$$\Delta\Omega := \big\{(x, y) : x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,\ 0 \le y \le f(x)\big\},$$



dann kann man in gewissem Sinne $\Delta\Omega$ durch das Rechteck $(x_0, x_0 + \Delta x) \times \big(0, f(x)\big)$ approximieren, also approximiert man auch $\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) \simeq |\Delta\Omega|$, wobei $|\cdot|$ für den Flächeninhalt steht, und $\Phi(x_0 + \Delta x) = \Phi(x_0) + |\Delta\Omega|$. Mann könnte also versuchen, die folgende Funktion Φ zu definieren:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= \text{Flächeninhalt der Figur } \Omega(x_0), \\ \Omega(x_0) &= \big\{(x, y) : a \le x \le x_0,\ 0 \le y \le f(x)\big\}, \end{aligned}$$



und kann mann hoffen, dass $\Phi'(s) = f(x)$. Es entstehen aber gleich mehrere mathematische Fragen, insbesondere: in welchem Sinne gelten die obigen Approximationen? was ist überhaupt der Flächeninhalt einer Figur und warum ist dieser wohldefiniert?

Wir werden uns zuerst mit der zweiten Frage beschäftigen (Flächeninhalt). Wir wissen nicht, wie man den Flächeninhalt definiert, können aber einige Eigeschaften erwarten. Zum Beispiel muss für den Flächeninhalt $|A|$ einer Figur immer $|A| \geq 0$. Ist A ein Rechteck mit Seitenlängen a und b, so gilt $|A| = ab$. Für $A \subset B$ würde man $|A| \leq |B|$ erwarten, und für $A \cap B = \emptyset$ wäre $|A \cup B| = |A| + |B|$ eine vernünftige Eigenschaft. Mit diesen Eigenschaften berechnet man Flächeninhalten von Figuren, die man als endliche Vereinigungen von disjunkten Rechtecken darstellen kann. Dann kann man versuchen, komplexe Figuren durch endliche Familien von Rechecken zu approximieren, und dadurch landet man bei Begriff eines bestimmen Integrals. Nach dieser informellen Diskussion kommen wir zurück in die mathematische Welt.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 17. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **Treppenfunktion**, falls man ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ finden kann, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
- f ist konstant auf jedem der Intervalle (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$. (Die Werte von f an den Punkten x_j haben keine Bedeutung und können beliebig sein.)

Die Menge aller solchen Funktionen werden wir als $T[a, b]$ bezeichnen.

Definition 18. Seit f als in Definition 17 und $f(x) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Wir definieren

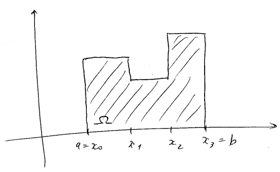
$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Diese Zahl nennt man **das (bestimmte) Integral von f von a bis b (oder zwischen a und b)**. Oft nutzt man auch die detallierte Schreibweise $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Bemerkung 19. Falls man die oben genanten Eigenschaften der Flächeninhalte berücksichtigt, kann man die Zahl $I = \displaystyle\int_a^b f$ wie folgt interpretieren:

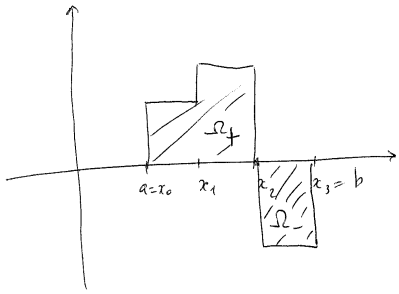
- Für $f \geq 0$ gilt $I = |\Omega|$ mit

$$\Omega := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



- Für beliebige f gilt $I = |\Omega_+| - |\Omega_-|$ mit

$$\Omega_+ := \{(x,y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},$$
$$\Omega_- := \{(x,y) : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\},$$



Beispiel 20. Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 2, & x \in (\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

Das ist eine Treppenfunktion: man kann z.B. $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ nehmen, und

$$\int_0^1 f = -1(\tfrac{1}{3} - 0) + 2(1 - \tfrac{1}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 1.$$

Es gibt aber ein kleines Problem: die Definition des Integrals nutzt die Zerlegung von $[a,b]$ in Teilintervalle (x_{j-1}, x_j), und diese Zerlegung ist nicht eindeutig: z.B. kann man diese Zerlegung "verfeinern", indem man ein Intervall (x_{j-1}, x_j) "künstlich" in zwei Teilintervalle zerlegt: auf jedem dieser Intervalle ist die Funktion immer noch konstant. Deswegen muss man zuerst prüfen, ob die oben definierte Zahl von der Wahl der x_j unabhängig ist. Das wird im folgenden Lemma geklärt:

Lemma 21. $\displaystyle\int_a^b f$ *ist unabhängig von der Wahl der* x_j.

Beweis. Sei f als in der Definition 17. Wir wählen ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und ein $x' \in (x_{k-1}, x_k)$, damit erhalten wir eine neue Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x' < x_k < \cdots < x_n = b$. Dann gilt immer noch $f(c) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$ mit $j \ne k$ und $f(x) = c_k$ für $x \in (x_{k-1}, x')$ und $x \in (x', x_k)$. Der zugehörige Wert des Integrals ist

$$\begin{aligned}\sum_{j\ne k} c_j(x_j - x_{j-1}) + c_k(x' - x_{k-1}) + c_k(x_k - x') &= \sum_{j\ne k} c_j(x_j - x_{j-1}) + c_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}),\end{aligned}$$

d.h. man bekommt denselben Wert als für die uspr üngliche Zerlegung (x_j). Durch Induktion ist dann klar, dass man auch nach dem Verfeinern durch endlich neue viele Punkte denselben Wert der Summe bekommt.

Seien jetzt $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $a = y_0 < \cdots < y_m = b$ zwei beliebige Zerlegungen zu f. Wir betrachten die Menge $Z = \{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\}$. Sei N die Anzahlt der Elemente in Z, die wir als $a = z_0 < \cdots < z_N = b$. Diese Zerlegung ist eine Verfeinerung von (x_j) und (y_j), und die Summen für (x_j) und (y_j) sind gleich der Summe für (z_j), daher sind sie gleich. $\square$

Lemma 22. *Die Abbildung*

$$T[a,b] \ni f \mapsto \int_a^b f \in \mathbb{R},$$

erfüllt folgende Eigenschaften:

(a) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in T[a,b]$ gilt $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$,

(b) für alle $f, g \in T[a,b]$ gilt $f + g \in T[a,b]$ und $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$,

(c) für alle $f \in T[a,b]$ gilt $\displaystyle\Big|\int_a^b f\Big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|(b-a)$,

(d) für alle $f \in T[a,b]$ mit $f \ge 0$ gilt $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$. Insbesondere gilt für alle $f, g \in T[a,b]$ mit $f \le g$ die Ungleichung $\displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Beweis. Die Eigenschaft (a) folgt direct aus der Definition. Die Eigenschaft (b) wird im Übungsblatt beweisen. Für (c) merken wir zuerst, dass falls f auf einem Teilintevrall konstant ist, dann ist auch $|f|$ auf diesem Teilintervall konstant. Daher $|f| \in T[a,b]$. Mit Bezeichnungen der Definition 18 haben wir $\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \ge \max_j |c_j|$ (man hat nur $\ge$ und nicht $=$, weil auch die Werte $f(x_j)$ in sup berücksichtigt werden) und

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f\Big| = \Big|\sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1})\Big| &\le \sum_{j=1}^n |c_j|(x_j - x_{j-1})\Big| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|(b-a).\end{aligned}$$

Für (d) sehen wir zuerst, dass für $f \ge 0$ alle Terme in der Summe für das Integral nichtnegativ sind, also $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$. Für $f \le g$ hat man $g - f \ge 0$ und

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \ge 0, \text{ also } \int_a^b f \le \int_a^b g. \qquad \square$$

Jetzt möchten wir $\int_a^b f$ für eine grössere Klasse von Funktionen f definieren. Zur Erinnerung, eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmässig* gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_n \sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| = 0,$$

und in diesem Fall schreiben wir $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$.

Definition 23. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Regelfunktion**, falls es eine Folge $(f_n) \subset T[a,b]$ gibt mit $f = \text{glm-lim}\, f_n$. Die Menge aller Regelfunktionen auf $[a,b]$ wird als $R[a,b]$ bezeichnet.

Insbesondere ist jede Treppenfunktion auch Regelfunktion.

Definition 24. Für $f \in R[a,b]$ mit $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$ für $(f_n) \subset T[a,b]$ definieren wir

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Damit diese Definition überhaupt Sinn macht, braucht man noch zwei wichtige Schritte, die im folgenden Lemma gemacht werden:

Lemma 25. *In Definition 24, der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ *existiert und ist von der Wahl der* f_n *unabhängig.*

Beweis. Zuerst zeigen wir die Existenz des Grenzwerts. Für $x \in [a,b]$ und $m,n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\big|f_m(x) - f_n(x)\big| = \big|f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)\big| \le \big|f_m(x) - f(x)\big| + \big|f_n(x) - f(x)\big|,$$

und dann

$$\sup_{x\in[a,b]} \big|f_m(x) - f_n(x)\big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|f_m(x) - f(x)\big| + \sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dank $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit $\sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Es folgt daraus, dass für alle $m,n \ge N$ gilt

$$\sup_{x\in[a,b]} \big|f_m(x) - f_n(x)\big| \le 2\varepsilon.$$

Sei $I_n := \int_a^b f_n$, dann hat man für alle $m,n \ge N$:

$$|I_m - I_n| = \Big|\int_a^b (f_m - f_n)\Big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|f_m(x) - f_n(x)\big|(b-a) \le 2\varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt es, dass (I_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, und damit ist sie konvergent (da $\mathbb{R}$ vollständig ist).

Sei jetzt $(g_n) \subset T[a,b]$ eine beliebiege Folge mit $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} g_n$. Für $J_n := \displaystyle\int_a^b g_n$ müssen wir zeigen, dass $\lim J_n = \lim I_n$. Für $x \in [a,b]$ und $m, n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\big|f_n(x) - g_n(x)\big| = \big|f_n(x) - f(x) + f(x) - g_n(x)\big| \le \big|f_n(x) - f(x)\big| + \big|g_n(x) - f(x)\big|,$$

und dann

$$\sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - g_n(x)\big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| + \sup_{x\in[a,b]} \big|g_n(x) - f(x)\big|.$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \le \varepsilon$ und $\sup_{x\in[a,b]} \big|g_n(x) - f(x)\big| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$, und dann auch

$$|I_n - J_n| = \Big|\int_a^b (f_n - g_n)\Big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|g_n(x) - f(x)\big|(b-a) \text{ für alle } n \ge \mathbb{N},$$

also $\lim_{n\to\infty}(I_n - J_n) = 0$. Daher

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} I_n + \lim_{n\to\infty}(I_n - J_n) = \lim_{n\to\infty} I_n. \qquad \square$$

Beispiel 26. Wir betrachten jetzt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Wir wollen zeigen, dass dies eine Regelfuntion ist, danach berechnen wir das Integral $\displaystyle\int_0^1 f$.

Da f sehr explizit ist, werden auch sehr explizite approximierende Treppenfunktionen konstruieren. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Treppenfunktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{j}{n}, & x \in \big(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big], \quad j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

dann

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{j}{n} - x, & x \in \big(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big], \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Für $x \in \big(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big]$ gilt $0 \le \frac{j}{n} - x \le \frac{1}{n}$, daher

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \le \frac{1}{n},$$

und $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$. Das zeigt, dass f eine Regelfuntion ist.

Wir weren jetzt $\displaystyle\int_0^1 f$ berechnen. Für die Treppenfunktionen f_n hat man:

$$\int_0^1 f_n = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n}\Big(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\Big) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n = \frac{1}{n^2}\, n(n+1),$$

und

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\, n(n+1) = \frac{1}{2}.$$

Satz 27. *Stetige Funktionen sind Regelfunktionen.*

Beweis. Seit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. In der VL Analysis 1 wurde es gezeigt, dass f auch gleichmässig stetig ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man ein $\delta > 0$ finden sodass $\big|f(x) - f(y)\big| \le \varepsilon$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$.

Sei also $\varepsilon > 0$, dann können wir ein $n \in \mathbb{N}$ finden mit $\big|f(x) - f(y)\big| \le \varepsilon$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \frac{b-a}{n}$. Wir setzen $x_j := a + \dfrac{j}{n}\,(b-a)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und definieren ein Treppenfunktion f_n durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x_j), & x = x_j, \quad j = 0, \ldots, n, \\ f(\xi_j), & x \in (x_{j-1}, x_j), \quad j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

wobei ξ_j ein beliebiger Punkt aus $[x_{j-1}, x_j]$ ist. Für $x \in (x_{j-1}, x_j]$ hat man $|\xi_j - x| \le \dfrac{b-a}{n}$, daher $\big|f_n(x) - f(x)\big| = \big|f(x_j) - f(x)\big| \le \varepsilon$. Also $\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x_j) - f(x)\big| \le \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $f = \text{glm-}\lim_{n\to\infty} f_n$, damit ist f eine Regelfunktion, und

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}). \qquad \square$$

Die Konstruktion des Beweises kann man ein bisschen verallgemeinern:

Definition 28. Eine Funktion $f \in [a,b]$ ist **stückweise stetig**, falls es $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
- f ist stetig auf jedem der Intervalle (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$,
- Es existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_j^+} f(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$ und $\lim_{x\to x_j^-} f(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Mit ein bisschen mehr Arbeit (=Gleichmässige Approximation von f durch Treppenfunktionen auf jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j), diese Treppenfunktionen werden dann zu Treppenfunktion auf dem ganzen Interval $[a,b]$ zusammengeklebt, die f auf $[a,b]$ gleichmässig approximiert) kann man den Satz 27 auf diese neue Klasse von Funktionen erweitern:

Korollar 29. *Stückweise stetige Funktionen sind Regelfunktionen.*

Durch einfache Anwendung der Grenwertregeln kann man auch folgendes zeigen (wird teilweise im Übungsblatt behandelt):

Satz 30. *Alle Aussagen vom Lemma 22 gelten für $R[a,b]$ statt $T[a,b]$.*

Daraus folgt (Übungsblatt!):

Korollar 31. *Seien f_n Regelfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren, dann ist auch f Regelfunktion mit $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f_n$.*

Man kann sich fragen, ob es überhaupt Funktionen existieren, die keine Regelfunktionen sind. Das wird im nächsten Beispiel erledigt:

Beispiel 32. Die Dirichlet-Funktion f,

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für irrationale } x, \\ 1, & \text{für rationale } x, \end{cases}$$

ist keine Regelfunktion.

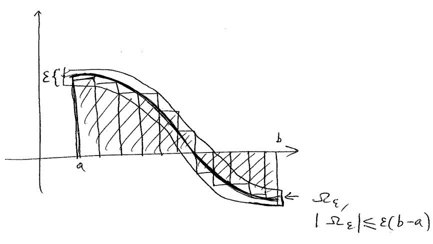
Sei g eine Treppenfunktion und $(c,d) \subset [0,1]$ ein Interval, auf dem g konstant ist, z.B. $g(x) = A$ für $x \in (c,d)$. Es existieren also ein irrationales $y \in (c,d)$ und ein rationales $z \in (c,d)$, und wir haben $f(y) = 0$ und $f(z) = 1$. Mann hat also die Ungleichungen

$$\sup_{x\in[a,b]} \big[f(x) - g(x)\big| \geq \max\big\{\big[f(y) - g(y)\big|, \big[f(z) - g(z)\big|\big\} = \max\{|A|, |1-A|\big\} \geq \frac{1}{2}.$$

Also gilt für *jede* Treppenfunktion g: $\sup_{x\in[a,b]} \big[f(x) - g(x)\big| \geq \frac{1}{2}$, deswegen kann keine Folge von Treppenfunktionen gegen f konvergieren.

Es folgt, dass das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ für diese f mit den vorhandenen Mitteln nicht definiert ist. Wir werden später sehen (Analysis III), dass man die Konstruktion des Integrals erweitern kann, um dieses Integral von f doch zu definieren.

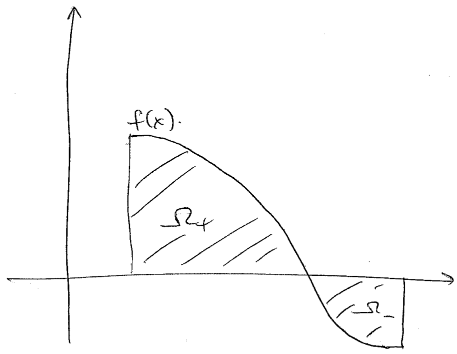
Bemerkung 33. Wir jetzt nochmals die geometrische Bedeutung des Integrals $\displaystyle\int_a^b f$ angehen. Falls f eine Regelfunktion ist, dann kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion f_ε finden mit $\big|f_\varepsilon(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$. Es folgt daraus, dass man den Graphen von f durch den Graphen von f_ε approximieren kann:



,

und auch können die Mengen

$$\Omega_+ := \{(x,y) : a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\},$$
$$\Omega_- := \{(x,y) : a \leq x \leq b,\, f(x) \leq y \leq 0\},$$



durch passende Treppenfiguren approximiert werden.

Falls man sich an jetzt an die geometrische Bedeutung des Integrals für Treppenfunktionen erinnert (Bemerkung 19) sieht man, dass

$$\int_a^b f = |\Omega_+| - |\Omega_-|.$$

Vorlesung 3

In dieser Vorlesung möchten wir besser verstehen, wie $\displaystyle\int_a^b f$ von a und b abhängt. Dadurch wird auch eine Berechnungsmethode für bestimmte Integrale entstehen.

Bislang haben wir $\displaystyle\int_a^b$ nur für $a < b$ definiert. In vielen Situationen ist es bequem, auch den Fall $a \geq b$ einzuschliessen:

- für $a = b$ setzen wir $\displaystyle\int_a^b f := 0$,
- für $a > b$, falls f Regelfunktion auf $[b, a]$, setzen wir $\displaystyle\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Dieses orientierte Integral behält die wichtigsten Eigenschaften des Integrals, z.B. gelten alle Identitäten und Abschätzungen vom Lemma 22. Insbesondere

$$\text{für } |f| \leq c \text{ gilt } \left|\int_a^b f\right| \leq c|b-a|.$$

Satz 34 (Additivität des Integrals). *Seien f Regelfunktion auf einem Intervall I und $a, b, c \in I$, dann gilt*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f. \tag{3}$$

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fall $a < b < c$.

Wir beweisen die Aussage zuerst für Treppenfunktion. Sei $f \in T[a, c]$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ mit $f(x) = A_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Wir können voraussetzen, dass $x_k = b$ für ein k gilt. (Sonst finden wir ein k mit $x_k < b < x_{k+1}$ und betrachen die Verfeinerung $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} < y_{k+2} < \cdots < y_{n+1} = b$ mit

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{falls } j \leq k, \\ b, & \text{falls } j = k+1, \\ x_{j-1}, & \text{falls } j \geq k+2, \end{cases}$$

diese neue Zerlegung erfüllt die Bedingung.) Dann hat man eine Zerlegung von $[a, b]$, $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ mit $f(x) = A_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, k$, und eine Zerlegung von $[b, c]$, $b = x_k < \cdots < x_n = c$ mit $f(x) = A_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = k+1, \ldots, n$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_b^c f &= \sum_{j=1}^{k} A_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} A_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_j(x_j - x_{j-1}) = \int_a^c f. \end{aligned}$$

Dadurch ist (3) für die Treppenfunktionen bewiesen.

Sei jetzt $f \in R[a,c]$, dann gibt es eine Folge $(f_n) \subset T[a,c]$ mit $\lim_n \sup_{x\in[a,c]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Es folgt, dass $\lim_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ und $\lim_n \sup_{x\in[b,c]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Das bedeutet, dass

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n, \quad \int_b^c f = \lim_n \int_b^c f_n, \quad \int_a^c f = \lim_n \int_a^c f_n.$$

Da f_n Treppenfunktionen sind, haben wir $\displaystyle\int_a^b f_n + \int_b^c f_n = \int_a^c f_n$ für alle n. Also

$$\begin{aligned}\int_a^c f = \lim_n \int_a^c f_n &= \lim_n \Big(\int_a^b f_n + \int_b^c f_n \Big) \\ &= \lim_n \int_a^b f_n + \lim_n \int_b^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz für $a < b < c$ bewiesen.

Alle anderen Fälle muss man jetzt einzeln betrachten und auf den vorherigen Fall reduzieren. Zum Beispiel, für $a = b$ gilt $\displaystyle\int_a^b f = 0$, und die Aussage (3) is trivial. Für $b < a < c$ beginnt man mit

$$\int_b^a f + \int_a^c f = \int_b^c f \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^c f = \int_b^c f - \int_b^a f,$$

und man muss nur die Definition $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ einsetzen. Analog beweist man die restlichen Fälle. □

Der Satz wird oft in der äquivalenten Form $\displaystyle\int_a^c f - \int_a^b f = \int_b^c f$ genutzt.

Jetzt kommen wir zur Berechnung der bestimmten Integralen. Am Anfang wollten wir Stammfunktionen ausrechnen können, und dieser Zusammenhang wird im folgenden Satz begründet. Das ist einer der wichstigsten Sätze der Analysis (und der ganzen Mathematik).

Satz 35 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei f Regelfunktion auf einem Intervall I und $a \in I$. Betrachte die Funktion*

$$\Phi : I \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt \in \mathbb{R}.$$

Sei $x_0 \in I$ und f stetig *in x_0, dann ist Φ in x_0 differenzierbar mit $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Sei $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, dann gilt

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt,$$

und

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0).$$

Mit Hilfe von

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

kann man es wie folgt umschreiben:

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\big|f(t)-f(x_0)\big| < \varepsilon$ für $|t-x_0| < \delta$. Für $|h| \le \delta$ und alle t zwischen x_0 und x_0+h hat man dann $\big|f(t)-f(x_0)\big| < \varepsilon$,

$$\Big|\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\Big| \le \varepsilon h, \quad 0 < |h| \le \delta.$$

Es folgt, dass

$$\left|\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \varepsilon \text{ für alle } h \text{ mit } 0 < |h| < \delta,$$

und damit ist der Satz bewiesen. □

Der Satz hat einige unmittelmare Korollare:

Korollar 36. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion, dann ist $I \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.*

Beweis. Wähle $a \in I$ und setze $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Nach dem Satz 35 hat man $\Phi'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, da f in x stetig ist. □

Korollar 37 (Newton-Leibniz-Formel). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f (existiert nach Korollar 36). Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Da wir schon eine Stammfunktion $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ haben, gibt es eine Konstante C mit $F(x) = \Phi(x) + C$ für alle $x \in I$. Also

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + C - \Big(\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C\Big) = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \square$$

Bemerkung 38. Die Differenz $F(b) - F(a)$ bezeichnet man oft $F|_a^b$ oder $F(x)|_a^b$ oder, ganz ausführlich, $F(x)|_{x=a}^{x=b}$.

Die Methoden für die Berechnung von Stammfunktionen (Vorlesung 1, S. 1) kann man jetzt auf die Berechnung der bestimmten Integrale direkt übertragen. Damit wir dabei keine Konstanten verlieren, werden wir die Konsequenzen als einzelne Sätze formulieren.

Satz 39 (Partielle Integration für bestimmte Integrale). *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $a, b \in I$, dann*

$$\int_a^b f'g = fg|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Beweis. Betrachte die Funktion

$$\Phi(x) = f(x)g(x) - \int_a^x fg',$$

dann

$$\Phi'(x) = (fg)'(x) - \Big(\int_a^x fg'\Big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x).$$

Also ist Φ eine Stammfunktion von $f'g$, und (Korollar 37):

$$\begin{aligned}\int_a^b f'g = \Phi(b) - \Phi(a) &= f(b)g(b) - \int_a^b fg' - \Big(f(a)g(a) - \underbrace{\int_a^a fg'}_{=0}\Big)\\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b fg'.\end{aligned}$$ □

Satz 40 (Substitution für bestimmte Integrale). *Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Beweis. Sei $c \in \varphi(I)$. Betrachte die Funktion

$$F : \varphi(I) \ni x \mapsto \int_c^x f \in \mathbb{R}.$$

Nach den obigen Konstruktionen ist F Stammfunktion von f, und nach der Kettenregel ist $\Phi := F \circ \varphi$ Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\,\varphi'$. Daher gilt

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \Phi(a) - \Phi(b) = \int_c^{\varphi(b)} f - \int_c^{\varphi(a)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$ □

Mit diesen Mitteln kann man viele Integrale berechnen.

Beispiel 41. Berechne $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Wir möchten jetzt die Substitution $x = \varphi(t) = \sin t$ nutzen. Wir haben also $dx = \varphi'(t)\,dt = \cos t\,dt$, der Wert $x = 0$ entspricht $t = 0$ und der Wert $x = 1$ entspricht $t = \frac{\pi}{2}$. Für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, also

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/2)} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \Big(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Bei Rechnungen mit trigonometrischen Funktionen muss man aufpassen. Zum Beispiel merkt man, dass auch $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\varphi(2\pi) = 0$, also

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\varphi(2\pi)}^{\varphi(\pi/2)} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{2\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt$$

aber

$$\int_{2\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \neq \int_{2\pi}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt,$$

da die Identität $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ nur für $\cos t \geq 0$ gilt (z.B. $\sqrt{1-\sin^2 t} = -\cos t$ für $t \in [\pi/2, \pi]$).

Wie schon vorher erwähnt, ist die Definition des bestimmten Integrals durch die Berechnung von Flächeninhalten motiviert. Diesen Zusammenhang können wir noch einmal wie folgt zusammenfassen:

Satz 42. *Seien f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$ mit $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt für den Flächeninhalt $|\Omega|$ der Figur*

$$\Omega = \big\{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\big\},$$

die Formel $|\Omega| = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$ gegeben.

Da wir jetzt einige Berechnungsmethoden für bestimmte Integrale haben, können wir damit Flächeninhalte von einigen geometrischen Figuren ausrechnen.

Beispiel 43. Sei $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$. Die Figur

$$\Omega = \big\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le R^2\big\}$$

ist die Kreisscheibe mit Radius R und Mittelpunkt A: nach dem Satz von Pythagoras ist der Abstand zwischen den Punkten $B = (x,y)$ und $A = (x_0, y_0)$ durch $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ gegeben, deswegen

$$\Omega = \big\{B \in \mathbb{R}^2 : \text{ Abstand zwischen } B \text{ und } A \text{ ist } \le R\big\}.$$

Wir möchten jetzen den Flächeninhalt von Ω ausrechnen. Die obige Definition von Ω kann man auch wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}\Omega = \big\{(x,y) : \quad & x_0 - R \le x \le x_0 + R,\\ & y_0 - \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2} \le y_0 + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\big\},\end{aligned}$$

und damit sind wir im Rahmen des Satzes 42:

$$|\Omega| = 2\int_{x_0-R}^{x_0+R} \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\,dx.$$

Wir substituieren $x = x_0 + Rt$, dann entsprechen die Werte $x = x_0 \pm R$ den Werten $t = \pm 1$ und $dx = R\,dt$. Also

$$|\Omega| = 2\int_{x_0-R}^{x_0+R} \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\,dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{R^2 - R^2t^2}\,R\,dt = 2R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Da wir eine gerade Funktion auf einem symmetrischen Intevrall integieren, gilt (Übungblatt 2)

$$|\Omega| = 4R^2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi R^2.$$

(Das letzte Integral wurde schon im Beispiel 41 ausgerechnet.)

Mit Hilfe des Integrals kann man einige bekannte Formeln anders umschreiben.

Satz 44 (Taylorformel mit Integralrestglied). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x, x_0 \in I$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \quad (4)$$

Beweis. Den Term R_0 kann man direkt ausrechnen:

$$R_0(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0),$$

damit ist die Formel für $n = 0$ bewiesen. Für $n \geq 1$ kann man partiell integrieren:

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{c} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{1}{n!} \Big((x-t)^n f^{(n)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} \big(-n(x-t)^{n-1} \big) f^{(n)}(t) \Big).$$

Mit Hilfe von

$$(x-t)^n f^{(n)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} = -(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)$$

bekommt man die Identität $R_n(x, x_0) + (x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) = R_{n-1}(x, x_0)$, und durch Induktion

$$R_n(x, x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = R_0(x, x_0) = f(x) - f(x_0). \qquad \square$$

Die "neue" Taylorsche Formel kann mit der "alten" (Analysis I) verglichen werden,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

wobei ξ zwischen x und x_0 liegt: die beiden Restglieder müssen natürlich übereinstimmen,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

Diese Darstellung kann man aber auch direkt aus allgemeinen Eigenschaften des Integrals herleiten. Dafür beweisen wir einen anderen wichtigen Satz:

Satz 45 (Mittelwertsatz für Integrale). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $g \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g. \tag{5}$$

Beweis. Falls $g(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, so sind die beiden Integrale in (5) gleich Null, und die Identität ist richtig für alle $\xi \in [a, b]$. Wir können also annehmen, dass g keine Nullfunktion ist, also $\displaystyle\int_a^b g > 0$ (Übungsblatt 2). Wir bezeichnen

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

dann $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ für alle $x \in [a, b]$, und

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g, \quad m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} = f(\xi). \qquad \square$$

Korollar 46. *Sei f wie in (4), dann gilt für ein ξ zwischen x_0 und x:*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Für $x = x_0$ ist die Aussage trivial. Wir betrachten jetzt $x > x_0$, dann ist $(x - x_0)^n \geq 0$, und nach dem Mittelwertsatz 45 gibt es ein $\xi \in [x_0, x]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x - t)^n\, dt \\ &= \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi)\Big(- \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Für $x < x_0$ gilt $R_n(x, x_0) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_x^{x_0} (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$. Jetzt hat man $(t-x)^n \geq 0$ für $t \in [x, x_0]$, und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in [x, x_0]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi) \int_x^{x_0} (t - x)^n\, dt \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi) \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x}^{t=x_0} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x_0 - x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad \square \end{aligned}$$

Die Taylorformel aus der Analysis I ist also ein Korollar der neuen Taylorformel mit Integralrestglied.

Vorlesung 4

Bisher haben wir das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ unter der Voraussetzung definiert, dass f auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ Regelfunktion ist (daraus folgt, dass f in jedem Punkt definiert ist und dass f beschränkt ist: siehe unten). In vielen Fällen ist es aber wichtig, auch allgemeinere Intevralle und Funktionen zu betrachten, z.B. $b-a=\infty$ und/oder f nur auf (a,b) definiert ist (und daher kann f unbeschränkt sein). Die entsprechende Konstruktion nennt man *uneigentliches Integral*.

In dieser Vorlesung werden wir folgende Abkürzung nutzen: Sei $(a,b)\subset\mathbb{R}$, dann ist eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *auf* (a,b) *lokal integrierbar*, falls f auf jedem endlichen abgeschlossenen Teilinterval von (a,b) Regelfunktion ist. (Dann ist das Integral $\displaystyle\int_c^d f$ für alle $[c,d]\subset(a,b)$ wohldefiniert.)

Definition 47. Seien $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ (also $-\infty\le a<b\le+\infty$) und sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\displaystyle\int_a^b f$ wird durch folgende Regeln definiert:

1. Ist f in a definiert und auf jedem Teilinterval $[a,\beta]$ mit $\beta\in(a,b)$ Regelfunktion ist, sei $\displaystyle\int_a^b f:=\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f$,
2. Ist f in b definiert und auf jedem Teilinterval $[\alpha,b]$ mit $\alpha\in(a,b)$ Regelfunktion ist, sei $\displaystyle\int_a^b f:=\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f$,
3. Im Allgemeinen: wähle $c\in(a,b)$ und definiere $\displaystyle\int_a^b=\underbrace{\int_a^c f}_{\text{definiert in 2}}+\underbrace{\int_c^b f}_{\text{definiert in 1}}$.

Falls die obigen Grenzwerte existieren und endlich sind, sagt man, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f$ *konvergiert* und das die Funktion f auf (a,b) *integrierbar* ist, sonst heisst das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ divergiert. Wir definieren auch $\displaystyle\int_a^a f:=0$ und $\displaystyle\int_a^b f=-\int_b^a f$ für $a>b$. □

Als einfache freiwillige Übung kann man zeigen, dass das Ergebnis von der Wahl vom c im Punkt 3 der Definition unabhängig ist. Die folgende Proposition zeigt, dass das uneigentliche Integral eine Verallgemeinerung des üblichen ("eigentlichen") Integrals ist, daher ist das Benutzen vom selben Zeichen $\displaystyle\int_a^b$ begründet.

Proposition 48. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, dann gilt*

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f = \int_a^b f = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Gleichheit (die zweite beweist man analog). Wir werden zuerst zeigen, dass f beschränkt ist. Sei f_n eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmässig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert. Dann findet man ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\big|f_N(x) - f(x)\big| \le 1$ für alle $x \in [a,b]$. Jede Treppenfunktion ist beschränkt, also existiert ein $C > 0$ mit $|f_N(x)| \le C$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$:

$$\big|f(x)\big| = \big|f(x) - f_N(x) + f_N(x)\big| \le \big|f(x) - f_N(x)\big| + \big|f_N(x)\big| \le 1 + C,$$

also ist f beschränkt. Damit haben wir, zu jedem $\beta \in (a,b)$,

$$\Big|\int_a^b f - \int_a^\beta f\Big| = \Big|\int_\beta^b f\Big| \le \int_\beta^b |f| \le (1+C)(b-\beta) \xrightarrow{\beta \to b^-} 0. \qquad \square$$

Einige Beispiele kann man ganz direkt ausrechnen.

Beispiel 49 (Sehr wichtig, wird später mehrmals verwendet). Wir untersuchen zuerst die Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ mit $s \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist auf jedem Teilintevral $[1,b]$ stetig (also Regelfunktion), daher

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b \to +\infty} F|_1^b = F(+\infty) - F(1),$$

wobei F eine beliebeige Stammfunktion von $x \mapsto x^{-s}$ ist.

- Für $s = 1$ kann man $F(x) = \ln x$ wählen, man hat also $F(+\infty) = +\infty$, und das Integral divergiert in diesem Fall.
- Für $s \ne 1$ nimmt man $F(x) = \dfrac{x^{1-s}}{1-s}$, dann gilt $F(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & s < 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases}$

Das Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert also dann und nur dann, wenn $s > 1$.

Analog betrachtet man das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^s}\,dx = F(1) - F(0+)$$

mit derselben Stammfuntion F. In diesem Fall gilt aber $F(0+) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $s < 1$: Das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert also dann und nur dann, wenn $s < 1$.

Man sieht sofort, dass das Integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ für alle $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

Es gibt viele Analogien zwischen uneigentlichen Integralen und Reihen. Man fängt mit dem uneigentlichen Integrieren von nichtnegativen Funktionen an:

Proposition 50. *Sei $f \geq 0$ lokal integrierbar auf (a, b). Das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ konvergiert dann und nur dann, wenn*

$$\sup_{[\alpha,\beta]\in(a,b)} \int_\alpha^\beta f < \infty.$$

Beweis. Wähle $c \in (a, b)$ und bezeichne $F(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^c f$ und $G(\beta) := \displaystyle\int_c^\beta f$. Die Funktion F ist auf (a, b) fallend: für $\alpha \leq \alpha'$ gilt

$$F(\alpha) = F(\alpha') + \int_\alpha^{\alpha'} f \geq F(\alpha'),$$

und die Existenz des Grenzwerts $\lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha)$ ist äquivalent zu $\sup_{\alpha\in(a,b)} F(\alpha) < \infty$. Analog zeigt man, dass G auf (a, b) steigend ist, also existiert $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)$ genau dann, wenn $\sup_{\beta\in(a,b)} G(\beta) < \infty$. Die Existenz der beiden Grenzwerten ist also äquivalent zu $\sup_{\alpha,\beta\in(a,b)} \big(F(\alpha) + G(\beta)\big) < \infty$, was man als

$$\sup_{\alpha,\beta\in(a,b)} \int_a^b f < \infty$$

umschreiben kann. Wegen $\displaystyle\int_a^b f \leq 0$ für $a > b$ kann man $\sup_{\alpha,\beta\in(a,b)}$ durch $\sup_{[\alpha,\beta]\in(a,b)}$ ersetzen. □

In der Praxis kann man das folgende Kriterium nutzen, das man mit denselben Ideen beweisen kann:

Proposition 51. *Seien $\alpha_n \in (a, b)$ eine gegen a konvergierende Folge und $(\beta_n) \subset (a, b)$ eine gegen b konvergierende Folge. Sei $f \geq 0$, dann ist $\displaystyle\int_a^b f$ genau dann konvergent, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}} \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f < \infty$.*

Auch für Integrale gibt es das Majoratenkriterium für die Konvergenz:

Satz 52 (Majoratenkriterium für uneigentliche Integrale). *Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und f, g auf (a, b) lokal integrierbare Funktionen mit $g \geq 0$.*

1. *Falls $\big|f(x)\big| \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$ gilt und $\displaystyle\int_a^b g$ konvergiert, dann konvergiert auch $\displaystyle\int_a^b f$, dabei gilt $\Big|\displaystyle\int_a^b f\Big| \leq \displaystyle\int_a^b g$. In diesem Fall sagt man, dass g* integrierbare Majorante *ist.*

2. *Falls* $f(x) \geq g(x)$ *für alle* $x \in (a,b)$ *gilt und* $\displaystyle\int_a^b g$ *divergiert, dann divergiert auch* $\displaystyle\int_a^b f$. *In diesem Fall sagt man, dass* g nichtintegrierbare Minorante *ist.*

Insbesondere gilt: falls $\displaystyle\int_a^b |f|$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\displaystyle\int_a^b f$. *In diesem Fall heisst das Integral* absolut konvergent *und die Funktion* f *auf* (a,b) absolut integrierbar.

Beweis. (1) Wir betrachten nur den Fall, dass f und g auf $[a,\beta)$ für alle $\beta \in (a,b)$ Regelfunktionen sind (die anderen Fälle beweist man analog). Für $\beta \in (a,b)$ definiere

$$I(\beta) = \int_a^\beta f, \quad J(\beta) = \int_a^\beta g$$

und sei $(\beta_n) \subset (a,b)$ eine Folge, die gegen b konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|J(\beta_m) - J(\beta_n)\big| \equiv \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} g\Big| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$. Dann gilt auch

$$\big|I(\beta_m) - I(\beta_n)\big| = \Big|\int_a^{\beta_m} f - \int_a^{\beta_n} f\Big| = \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} f\Big| \leq \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} |f|\Big| \leq \Big|\int_{\beta_n}^{\beta_m} g\Big| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass $I(\beta_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, dadurch konvergiert sie. Wir müssen aber noch zeigen, dass der Grenzwert von der Wahl der Folge (β_n) unabhängig ist. Sei also $(\beta'_n) \subset (a,b)$ eine weitere Folge, die gegen b konvergiert. Wir haben $\lim_n J(\beta_n) = \lim_n J(\beta'_n) = \displaystyle\int_a^b g$, also $\lim_n \big|J(\beta_n) - J(\beta'_n)\big| = \lim_n \Big|\displaystyle\int_{\beta'_n}^{\beta_n} g\Big| = 0$. Aus der Abschätzung

$$\big|I(\beta_n) - I(\beta'_n)\big| = \Big|\int_{\beta'_n}^{\beta_n} f\Big| \leq \Big|\int_{\beta'_n}^{\beta_n} |f|\Big| \leq \Big|\int_{\beta'_n}^{\beta_n} g\Big|$$

folgt, dass $\lim_n \big|I(\beta_n) - I(\beta'_n)\big| = 0$, d.h. $\lim_n I(\beta_n) = \lim_n I(\beta'_n)$, und

$$\Big|\int_a^b f\Big| = \Big|\Big|\lim_n \int_a^{\beta_n} f\Big| \leq \lim_n \int_a^{\beta_n} |f| \leq \lim_n \int_a^{\beta_n} g.$$

(2) Wir haben $f \geq g \geq 0$. Nehme an, dass das Integral $\displaystyle\int_a^b f$ konvergiert, dann hat man (Proposition 50) $\sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \displaystyle\int_\alpha^\beta f < +\infty$, und dann auch $\sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \displaystyle\int_\alpha^\beta g < +\infty$, was der Divergenz von $\displaystyle\int_a^b g$ widerspricht. $\square$

Beispiel 53. Wir werden zeigen, dass das *Dirichlet-Integral* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert, aber nicht absolut. Im Punkt 0 gibt es keine Schwierigkeiten (die Funktion lässt sich stetig in 0 fortsetzen), wir müssen uns also nur um $\lim_{\beta\to+\infty} \int_a^\beta$ mit beliebigem $a \geq 0$ kümmern.

Wir beweisen zuerst, dass das Integral nicht absolut konvergent ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \left|\frac{\sin x}{\pi k}\right| dx \\
&\overset{x=\pi(k-1)+y}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\big(\pi(k-1)+y\big)}{\pi k}\right| dy \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin y}{\pi k}\right| dy = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe $\sum_n 1/n$ divergiert, gilt

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

also ist das Integral divergent.

Jetzt zeigen wir, dass das Integral (nicht absolut) konvergent ist. Das Majorantenkriteriul hilft leider nicht: man kann zwar $|\sin x/x| \leq 1/x$ abschätzen, aber die Majorante $1/x$ ist nicht integrierbar. Wir können aber partiell integrieren:

$$\int_1^R \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \underbrace{\frac{\cos R}{R}}_{\to 0 \text{ für } R\to+\infty} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Die Konvergenz des Dirichlet-Integrals ist damit auf die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ reduziert. Dieses neue Integral kann man mit dem Majorantenkriterium untersuchen: $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ ist auf $[1,+\infty)$ integrierbar. Also ist das Dirichlet-Integral konvergent.

Die vorherigen Aussagen kann man kombinieren, um nutzliche Konvergenzekriterien herzuleiten:

Proposition 54. *Sei $a > 0$.*

1. *Sei f auf $(0,a)$ lokal integrierbare Funktion.*

   (a) *Falls es $M > 0$ und $s < 1$ existieren mit $|f(x)| \leq M/x^s$ für alle $x \in (0,a)$, dann konvergiert $\int_0^a f$ absolut.*

(b) *Falls es $M > 0$ und $s \geq 1$ existieren mit $f(x) > M/x^s$ für alle $x \in (0,a)$, dann divergiert* $\int_0^a f$.

2. *Sei f auf $(a,+\infty)$ lokal integrierbare Funktion.*

(a) *Falls es $M > 0$ und $s > 1$ existieren mit $|f(x)| \leq M/x^s$ für alle $x \in (a,+\infty)$, dann konvergiert* $\int_a^{+\infty} f$ *absolut.*

(b) *Falls es $M > 0$ und $s < 1$ existieren mit $f(x) > M/x^s$ für alle $x \in (a,+\infty)$, dann divergiert* $\int_a^{+\infty} f$.

Beweis. (1a) Das Integral $\int_0^a M/x^s\,dx = M\int_0^1 1/x^s\,dx + M\int_1^a 1/x^s\,dx$ konvergiert für $s < 1$ (Bespiel 49), also folgt die Konvergenz von $\int_0^a |f|$ mit Hilfe des Majorantenkriteriums. (1b) Für $s \geq 1$ ist das Integral $\int_0^a M/x^s\,dx = M\int_0^1 1/x^s\,dx + M\int_1^a 1/x^s\,dx$ divergent (Bespiel 49), also folgt die Divergenz von $\int_0^a f$ aus dem Majorantenkriterium. Die Aussagen (2a) und (2b) beweist man analog. □

Beispiel 55. Die Analogie zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen hat aber auch gewisse Grenzen. Zum Beispiel, wissen wir, dass für konvergente Reihe $\sum_n a_n$ immer $\lim_n a_n = 0$ gilt. Aus der Konvergenz von $\int_a^b f$ kann man aber nicht schliessen, dass $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0$ (bzw. ob die Grenzwerte überhaupt existieren): zum Beispiel liefert die Funktion $x \mapsto x^{-1/2}$ auf $(0,1)$ ein Gegenbeispiel für beschränkte Intevralle (a,b). Auch für unbeschränkte (a,b) kann man ein ähnliches Beispiel konstruieren. Betrachte z.B. $f : [2,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[n, n+\dfrac{1}{n^3}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, dann ist f auf $[2,N]$ Regelfunktion (sogar Treppenfunktion), und

$$\int_2^N f = \sum_{n=2}^{N-1}\int_n^{n+1} f = \sum_{n=1}^{N-1}\Big(\int_n^{n+1/n^3} \underbrace{f(x)}_{=n}\,dx + \int_{n+1/n^3}^{n+1} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx\Big)$$
$$= \sum_{n=2}^{N-1} n\cdot\frac{1}{n^3} = \sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{n^2}.$$

Wir wissen, dass die Reihe $\sum_n 1/n^2$ konvergeirt, daher gilt $\sup_{N\geq 2} \displaystyle\int_2^N f < \infty$, und das Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ ist konvergent. Dabei ist f im Unendlichen unbeschränkt: zu jedem $C > 0$ und jedem $N > 0$ gibt es ein $x > N$ mit $f(x) > C$. □

Im vorherigen Beispiel haben wir die Konvergenz eines Integrals mit Hilfe der Konvergenz einer Reiehe bewiesen. Man kann auch die Konvergenz von Reihen mit Hilfe von Integralen untersuchen, und das ist eine sehr wichtige Beweismethode:

Satz 56 (Integralkriterium für Reihen). *Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, nichtnegativ, Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[1, R]$, $R > 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty$ genau dann, wenn das Integral $\displaystyle\int_1^\infty f$ konvergiert.*

Beweis. Für $x \in [n, n+1]$ gilt $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, also

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Ist das Integral $\displaystyle\int_0^\infty f$ konvergent, so gilt zu jedem $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f = \int_1^{N+1} f \leq \int_1^\infty f < \infty,$$

also ist $\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \equiv \sum_{n=2}^\infty f(n)$ konvergent.

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergent, so gilt zu jedem $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^N f = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty,$$

also ist auch das Integral konvergent. □

Mit ähnlichen Konstruktionen kann man auch den folgenden Satz beweisen (Übung):

Satz 57. *Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, nichtnegativ, Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[1, R]$, $R > 0$, dann konvergiert die Folge*

$$a_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(k).$$

(Dabei können die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ und das Integral $\displaystyle\int_1^\infty f$ divergieren.)

Beispiel 58. Sei $s > 1$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ konvergiert genau dann, wenn das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^x}$ konvergiert, d.h. genau dann, wenn $s > 1$ (Beispiel 49).

Die Funktion $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ heisst *Riemannsche Zetafunktion*. Die kann man auf eine bestimmte kanonische Weise auch für bestimmte komplese s definieren, und die (komplexen) Nullstellen dieser Funktion sind von grosser Bedeutung in vielen Bereichen der Mathematik, und sie sind das Thema der berühmten Riemannschen Vermutung.[4]

Mit Hilfe des Satzen 57 sieht man auch, dass die Folge

$$b_n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

konvergiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n \to +\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{1}{n} - b_n \Big),$$

den man als *Euler-Mascheroni-Konstante* bezeichnet: das ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten. Man hat $\gamma \simeq 0,577\ldots$.

Das da uneigentliche Integral als Grenzwzert von "eigentlichen" Integral definert wird, kann man die meisten Berechnungsmethoden auf den uneigentlichen Fall übertragen. Wir werden nur die entsprechnden Formulierungen angeben, da die Beweise aus den entsprechnden Formeln für bestimmte Integrale und Grenzübergängen folgen:

Proposition 59 (Partielle Integration für uneigentliche Integrale). *Seien f, g auf (a, b) stetig differenzierbar. Nehme an, dass die beiden Grenzwerte $(fg)(a+)$ und $(fg)(b-)$ existieren. Dann konvergiert $\int_a^b f'g$ genau dann, wenn $\int_a^b fg'$ konvergiert, und im Falle der Konvergenz hat man*

$$\int_a^b f'g = (fg)(b-) - (fg)(a+) - \int_a^b fg'.$$

Die Differenz $(fg)(b-) - (fg)(a+)$ bezeichnet man oft immer noch als $fg|_a^b$.

[4]Die Riemannsche-Vermutung ist ein der ältesten ungelösten Probleme der Mathemaik, und sie gehört zu den sieben Millenium-Problemen der Mathematik, die vom Clay-Institut (USA) im Jahr 2000 formuliert wurden. Für die Lösung jedes Millenium-Problems gibt es ein Preisgeld von einer Million US-Dollar. Bisher wurde nur ein Millenium-Problem gelöst: Im Jahr 2002 hat Grigori Perelman die Poincaré-Vermutung bewiesen (das Preisgeld und weitere Ehrungen hat er aber abgelehnt).

Proposition 60 (Substitution für uneigentliche Integrale). *Seien g auf (a,b) stetig differenzierbar und* streng monoton *und f auf $g\big((a,b)\big)$ lokal integrierbar, dann gilt*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a+)}^{g(b-)} f\,dx.$$

(D.h. beide Integrale konvergieren oder divergieren gleichzeitig. Falls sie konvergieren, haben sie denselben numerischen Wert.)

In Proposition 60, garantiert die Monotonie von g, dass das Bild $g\big((a,b)\big)$ auch ein offenes Intervall ist.

Beispiel 61. Das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx$ konvergiert: mit Hilfe der Substitution $x = \ln t$ hat man die Gleichheit

$$\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

und das Integral auf der rechten Seite ist konvergent (schon gesehen im Beispiel 53).

Beispiel 62. Es gilt $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\,dx$. Für den Beweis nutzen wir zuerst die Substitution $x = 2y$ und danach die partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{\sin(2y)}{2y}\,2dy = \int_0^\infty \frac{2\sin(y)\cos(y)}{y}\,dy\\ &= \int_0^\infty \frac{(\sin^2 y)'}{y}\,dy = \underbrace{\frac{\sin^2 y}{y}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \Big(\frac{\sin y}{y}\Big)^2\,dy.\end{aligned}$$

Vorlesung 5

Jetzt befassen wir uns mit Lösungen von Differentialgleichungen. Wir betrachten in dieser Vorlesung einige Klassen von Gleichungen, die mit Hilfe von Integralen explizit "gelöst" werden können. In folgenden Vorlesungen werden wir dann die allgemeine Theorie entwickeln.

Eine *(gewöhnliche) Differentialgleichung erster Ordnung* (DGl) ist eine Gleichung der Form

$$y'(x) = F\big(x, y(x)\big), \tag{6}$$

wobei F eine bekannte Funktion von zwei Variablen ist. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Funktion y, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und die Gleichung (6) für alle $x \in I$ erfüllt.

Beispiel 63. 1. Sei $F(x, y)$ unabhängig von y, d.h. es existiert eine Funktion f von x mit $F(x, y) = f(x)$ für alle x, y. Die entsprechende DGl (6) ist $y'(x) = f(x)$. Die Menge der Lösungen ist genau die Menge der Stammfunktionen von f.

2. Sei $F(x, y) = y$ für alle x, y. Die entsprechende DGl ist $y'(x) = y(x)$. Eine mögliche Lösung ist $y(x) = e^x$. Allerdings prüft man ganz einfach, dass alle Funktionen $y(x) = ce^x$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, Lösungen sind. Wir werden jetzt "zu Fuss" beweisen, dass es keine anderen Lösungen gibt. Wir verwandeln die DGl in eine äquivalente Form, indem wir die beiden Seiten durch e^{-x} multiplizieren: $e^{-x}y'(x) = e^{-x}y(x)$, oder $y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0$, oder $\big(y(x)e^{-x}\big)' = 0$. Also ist y eine Lösung genau dann, wenn die Funktion $x \mapsto y(x)e^{-x}$ konstant ist, d.h. $y(x)e^{-x} = c$ für alle x, oder $y(x) = ce^x$.

Für eine DGl kann man mehrere Problemstellungen betrachten:

- Finde alle Lösungen (man sagt oft "finde die allgemeine Lösung"). In den obigen Beispielen haben wir schon gesehen, dass eine Differentialgleichung unendlich viele Lösungen haben kann. Allerdings wissen wir noch nicht, ob alle DGl überhaupt Lösungen haben.[5]

- Finde eine Lösung, die eine zusätzliche Bedingung erfüllt. Wir betrachten vor allem die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, wobei x_0 und y_0 vorgegebene Zahlen sind. Diese Formulierung nennt man *Anfangswertproblem* (AWP). Natürlich muss man verstehen ob es eine solche Lösung existiert und, falls ja, ob so eine Lösung eindeutig bestimmt ist.

[5] Die berühmten Navier-Stokes-Gleichungen sind sehr wichtige (partielle) Differentialgleichungen der Strömungsmechanik, die seit langem in der Modellierung verwendet werden. Allerdings gibt es immer noch keinen strikten mathematischen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit von glatten Lösungen. Auch dieses Problem gehört zu den sieben Millenium-Problemen der Mathematik (mit einem Preisgeld von einer Million US-Dollar).

Um diese (und auch andere) Problemstellungen für allgemeine Differentialgleichungen zu behandeln, werden wir in kommenden Wochen neue abstrakte Begriffe einführen und eine ziemlich komplexe mathematische Theorie entwickeln müssen.

Beispiel 64. 1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die Differentialgleichung $y'(x) = f(x)$. Wie schon oben gemerkt, bilden die Stammfunktionen von f die Menge der Lösungen. Sei $x_0 \in I$ fest, dann hat die allgemeine Lösung die Form

$$y(x) = C + \int_{x_0}^{x} f,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Wir suchen jetzt nach einer Lösung y, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt. Es ist einfach zu prüfen, dass die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft durch $y(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f$ gegeben ist. Z.B. ist $y(x) = (x-1)^2$ die einzige Lösung der Gleichung $y'(x) = 2(x-1)$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$. Wichtig ist, dass jede Lösung auf dem ganzen Intervall I definiert ist.

2. Betrachte jetzt die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Wir haben oben gesehen, dass die allgemeine Lösung $y(x) = ce^x$ ist. Wir suchen jetzt nach einer Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt: man muss also $ce^{x_0} = y_0$ haben, d.h. $c = y_0 e^{-x_0}$, und die entsprechende (eindeutig bestimmte) Lösung ist $y(x) = y_0 e^{x-x_0}$. Z.B. ist $y(x) = -3e^{x-1}$ die einzige Lösung mit $y(1) = -3$. Die Lösungen sind auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definiert.

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wir werden zuerst eine Klasse von Differentialgleichungen betrachten, für die es eine ziemlich direkte Lösungsmethode existiert, und die die oben betrachtete Beispiele einschliesst.

Eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \tag{7}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Beispiel 65 (Populationsdynamik). Die DGl (7) wird oft in der Modellierung[6] von verschiedenen Wachstumsprozessen verwendet. Zum Beispiel, sei $y(t)$ die Grösse einer Population zum Zeitpunkt t und seien t_j und t_{j+1} zwei Zeipunkte. Wir nehmen an, dass

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \Delta G(t_j) - \Delta S(t_j) + \Delta M(t_j)$$

gilt, wobei

[6] Mehr dazu erfährt man in der Lehrveranstaltung “mat320 - Mathematische Modellierung”

- $\Delta G(t_j)$ = Anzahl der Geburten im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$,
- $\Delta S(t_j)$ = Anzahl der Sterbefälle im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$,
- $\Delta M(t_j)$ = Migration (Ab- und Zuwanderung) im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$, kann ≥ 0 oder ≤ 0 sein.

Bezeichnet man $\Delta t := t_{j+1} - t_j$, so erhält man die Relation

$$\frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{\Delta t} = \frac{\Delta G(t_j)}{\Delta t} - \frac{\Delta S(t_j)}{\Delta t} + \frac{\Delta M(t_j)}{\Delta t}.$$

Für $\Delta t \to 0$ erhält man also $y'(t) = g(t) - s(t) + m(t)$, wobei

$$g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}, \quad s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Oft betrachtet man folgende zusätzliche Hypothesen:

- $g(t)$ ("Anzahl der Geburte pro Zeiteinheit") ist linear proportional zum aktuellen Bestand der Population, $g(t) = \alpha(t)y(t)$,
- $s(t)$ ("Anzahl der Sterbefälle pro Zeiteinheit") ist linear proportional zum aktuellen Bestand der Population, $s(t) = \beta(t)y(t)$,
- $m(t)$ ("Anzahl der Migranten pro Zeiteinheit") ist unabhängig vom aktuellen Bestand der Population.

Dadurch erhält man die DGl $y'(t) = a(t)y(t) + m(t)$ mit $a(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Die Funktionen α, β und m bestimmt man typischeweise durch Analyse von statistischen Daten. □

Falls $b \not\equiv 0$, wird die DGl (7) *inhomogen* genannt, dann betrachtet man zusätzlich die zugehörige *homogene* lineare Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x)y(x), \tag{8}$$

(d.h. ohne den Term b). Die Gleichungen sind eng miteinander verbunden:

Proposition 66. *Sei z eine Lösung der inhomogenen DGl* (7) *auf einem Intervall $J \subset I$. Eine Funktion y ist Lösung derselben inhomogenen DGl* (7) *auf J genau dann, wenn die Differenz $y_0 := y - z$ Lösung der homogenen Gleichung* (8) *auf J ist.*

Beweis. Wir haben $z' = az + b$ auf J.

Sei y_0 Lösung der homogenen DGl (8), d.h. $y_0' = ay_0$, dann gilt für $y := y_0 + z$:

$$y' = y_0' + z' = ay_0 + az + b = a(y_0 + z) + b = ay + b,$$

also ist y Lösung der inhomogenen DGl (7). Umgekehrt, sei y Lösung der inhomogenen DGl (7), d.h. $y' = ay + b$, dann gilt für $y_0 := y - z$:

$$y_0' = y' - z' = ay + b - (az + b) = a(y - z) = ay_0,$$

also ist y_0 Lösung der homogenen DGl (8). □

Diese Rechnungen kann man wie folgt zusammenfassen:

Korollar 67. *Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGl = die allgemeine Lösung der homogenen DGl + eine beliebige ("spezielle") Lösung der inhomogenen DGl.*

Das Problem (7) löst man also in zwei Schritten:

- Man findet die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung,
- Man findet irgendeine ("spezielle") Lösung y_s der inhomogenen Gleichung.

Diese Schritte werden wir jetzt einzeln betrachten:

Satz 68 (Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung). *Sei A eine Stammfunktion von a auf I. Die allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung* (8) *hat die Form $y_h(x) = Ce^{A(x)}$, wobei C beliebige Konstante ist.*

Beweis. Da $e^{-A(x)}$ nie gleich Null ist, kann man die beiden Seiten von (8) mit $e^{-A(x)}$ multiplizieren und dann alle Terme von der rechten auf die linke Seite bringen um eine äquivalente Differentialgleichung zu erhalten,

$$e^{-A(x)}y'(x) - a(x)e^{-A(x)}y(x) = 0.$$

Wegen $A' = a$ kann man diese Gleichung einfach als $(e^{-A}y)' = 0$ umschreiben. Eine Funktion y ist Lösung von (8) genau dann, wenn $e^{-A}y$ konstant ist, $e^{-A}y = C$, und dann $y = Ce^A$. □

In der Sprache der linearen Algebra, bilden die Lösungen der homogenen Gleichung (8) einen (eindimensionalen) Vektorraum, und die Lösungsmenge zu (7) ist ein affiner Raum. Diese Sprache werden wir aber erst später nutzen (bei der Untersuchung von Systemen linearer Differentialgleichungen)

Um *alle* Lösungen der inhomogenen Gleichung (7) zu finden, brauchen wir jetzt nur *eine* Lösung davon. Diese wird oft durch die sogenannte *Variation der Konstanten* gefunden. Nämlich, suchen wir nach einer Lösung der Form $y(x) = C(x)e^{A(x)}$, d.h. man nehme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und ersetze die Konstante C durch eine *Funktion* $C(x)$. Diese Funktion y setzt man in die DGl (7) ein:

$$(Ce^A)' = aCe^A + b, \text{ oder } C'e^A + CA'E^A = Cae^A + b, \text{ oder } C'e^A = b.$$

(Im letzen Schritt haben wir $A' = a$ wieder verwendet.) Es folgt, dass $y = Ce^A$ genau dann Lösung der inhomogenen Gleichung (7) ist, wenn die Funktion C die Gleichung $C' = be^{-A}$ erfüllt. Diese neue Gleichung für C lässt sich lösen: die Lösungen sind genau die Stammfunktionen von be^{-A}, also

$$C(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx. \tag{9}$$

Satz 69 (Allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung). *Die allgemeine Lösung y der inhomogenen Gleichung* (7) *hat die Form*

$$y = \Big(C + \int be^{-A}\Big)e^A, \quad C \in \mathbb{R},$$

wobei A eine beliebige Stammfunktion von a ist.

Man merkt auch, dass alle Lösungen auf dem ganzen Definitionsbereich I der Koeffizienten a und b definiert sind: das ist eine besondere Eigenschaft von linearen Differentialgleichungen.

Jetzt werden wir die Anfangsbedingung berücksichtigen:

Satz 70. *Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt die lineare inhomogene Gleichung* (7) *genau eine Lösung y zum AWP $y(x_0) = y_0$. Diese Lösung ist durch*

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^x a(s)\,ds\Big) + \int_{x_0}^x b(t)\exp\Big(\int_t^x a(s)\,ds\Big)dt$$

gegeben.

Beweis. Wir müssen die vorherigen Konstruktionen wiederholen, aber jetzt werden alle Konstanten wichtig. Als Stammfunktion von a wählen wir $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x a(t)\,dt$. Auch für (9) wählen wir eine ganz bestimmte Lösung,

$$C(x) = \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)}dt \equiv \int_{x_0}^x b(t)\exp\Big(\int_t^{x_0} a(s)\,ds\Big)dt,$$

dadurch erhalten wir den folgenden Ausdruck für die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= c\exp\Big(\int_{x_0}^x a(s)\,ds\Big) + \int_{x_0}^x b(t)\exp\Big(\int_t^{x_0} a(s)\,ds\Big)dt\,\exp\Big(\int_{x_0}^x a(s)\,ds\Big) \\ &= c\exp\Big(\int_{x_0}^x a(s)\,ds\Big) + \int_{x_0}^x b(t)\exp\Big(\int_t^x a(s)\,ds\Big)dt, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Um die Bedingung $y(x_0) = y_0$ zu erfüllen muss man lediglich $c = y_0$ nehmen. □

Beispiel 71. Differentialgleichung $y'(x) = 2xy(x) + x$ und AWP $y(0) = 0$.

Das ist eine lineare Differentialgleichung (7) mit $a(x) = 2x$ und $b(x) = x$. Als Stammfunktion von a nehmen wir $A(x) = x^2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also $y_h(x) = ce^{x^2}$. Darüber hinaus haben wir eine spezielle Lösung $y_s(x) = C(x)e^{x^2}$ mit $C = \int xe^{-x^2}\,dx$. Mit Hilfe der Substitution $\varphi(x) = x^2$ findet man $C(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}$, und die entsprechende spezielle Lösung ist $y_s(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = y_h(x)+y_s(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$.

Diese Funktion y erfüllt die Bedingung $y(0) = 0$ für $c = \frac{1}{2}$, also ist $y(x) = \frac{1}{2}\,e^{x^2} - \frac{1}{2}$ die gesuchte Lösung des AWPs.

Separation der Variablen

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g\big(y(x)\big)}, \tag{10}$$

wobei $g \neq 0$. Das ist eine weitere wichtige Klasse von Differentialgleichungen, deren Lösungen man mit Hilfe von Integralen schreiben kann.

Diese kann man zuerst als $g\big(y(x)\big)y'(x) = f(x)$ umschreiben. Ist G eine Stammfunktion von g und F eine Stammfunktion von f, so gilt $(G \circ y)' = F'$, also $G\big(y(x)\big) = F(x) + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Das wird meist in vereinfachter symmetrischer Form geschrieben,

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Kann man die Funktion G umkehren, so ist $y(x) = G^{-1}\big(F(x)+C\big)$ Lösung von (10).

Wir werden die obige Rechnung als Satz formulieren (die Existenz der Stammfunktionen wird durch die Stetigkeit der Funktionen f und g garantiert):

Satz 72. *Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Seien F ung G Stammfunktionen von f und g. Eine differenzierbare Funktion $y : I' \to J$, die auf einem Teilintervall $I' \subset I$ definiert ist, ist genau dann Lösung der Differentialgleichung* (10)*, wenn sie die Gleichung $G\big(y(x)\big) = F(x) + C$ mit einer Konstante C erfüllt.*

Die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ kann man auch berücksichtigen: sie ist zu $G(y_0) = F(x_0) + C$ äquivalent, d.h. $C = G(x_0) - F(x_0)$. Also ist eine Funktion y Lösung der Differentialgleichung mit $y(x_0) = y_0$ genau dann, wenn sie

$$G\big(y(x)\big) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

für alle x erfüllt. Nutzt man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, so erhält man die folgende Gleichung für y:

$$\int_{y_0}^{y(x)} g = \int_{x_0}^{x} f.$$

Im Einzelfall muss dann noch untersucht werden, auf welchem Intervall diese Lösung y definiert ist.

Beispiel 73. Differentialgleichung $y'(x) = y(x)^2$.

Ganz formell sind wir schon im Rahmen der Separation der Variablen: $y(x)^2 = f(x)/g\big(y(x)\big)$ mit $f(x) = 1$ und $g(y) = 1/y^2$.

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 1, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{y} = x + C, \quad y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Diese Konstruktion gilt aber nur im Bereich, in dem die Funktion g definiert ist und nicht verschwindet. In unserem Fall ist $g(y)$ für $y \neq 0$ definiert, für alle solchen y gilt $g(y) \neq 0$. Man muss also zusätzlich prüfen, ob es Lösungen y existieren, die verschwinden. Wir sehen also folgendes:

- Die konstante Funktion $y(x) \equiv 0$ ist bestimmt Lösung.
- Alle anderen Lösungen können nicht verschwinden: gilt $y(x) \neq 0$ für ein x, so ist y automatisch durch $y(x) = -1/(x + C)$ mit einer Konstante C gegeben.

Wir suchen jetzt nach den Lösungen, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllen.

- Für $y_0 = 0$ ist $y(x) = 0$ die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft. Diese Lösung ist auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definiert.
- Für $y_0 \neq 0$ muss die gesuchte Lösung y die Form $y(x) = -1/(x + C)$ haben. Für $x = x_0$ erhält man $y_0 = -1/(x_0 + C)$, dadurch findet man den Wert der Konstante C: $C = -1/y_0 - x_0$, also ist $y(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$ die Lösung des AWPs. Diese Lösungen sind aber nicht auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definiert: der Punkt $x = x_0 + 1/y_0$ ist nicht im Definitionsbereich, und wegen $\lim_{x \to x_0 + 1/y_0} y(x) = \infty$ ist keine stetige Fortsetung in diesen Punkt möglich.

Wir sehen hier eine wichtige Eigenschaft: der Definitionsbereich der Lösung ist im Allgemeinen von der Anfangsbedingung abhängig. Allerdings haben wir zu jeder Anfangsbedingung nur eine einzige Lösung.

Beispiel 74. Die Differentialgleichung $y'(x) = 2\sqrt{y(x)}$ ist nur für $y(x) \geq 0$ definiert. Wir haben wieder die konstante Lösung $y(x) = 0$. Die Lösungen mit $y(x) > 0$ findet man mit der Separation der Variablen:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx, \quad \sqrt{y} = x + C, \quad y(x) = (x + C)^2,$$

wobei $x + C > 0$ erfüllt sein muss. Diese Funktionen können aber verschwinden: $\lim_{x \to -C} y(x) = 0$, und man kann sie mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ "zusammenkleben" um eine auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definierte Lösung zu erhalten. Es folgt daraus, dass das AWP $y(0) = 0$ mehrere Lösungen hat, z.B. $y(x) \equiv 0$, oder $y(x) = x^2$, oder $y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ (x-c)^2, & x > c \end{cases}$ für beliebige $c > 0$. Also kann ein AWP mehrere Lösungen haben.

Vorlesung 6

Wir werden jetzt eine abstrakte Theorie entwickeln (oder, besser gesagt, eine abstrakte Sprache), mit deren Hilfe wir später beweisen, dass (vernünftige) Differentialgleichungen immer Lösungen haben. Die Theorie beinhaltet mehrere neue Begriffe und Ergebnisse (metrischer Raum, Fixpunktsatz usw.), die auch in anderen Lehrveranstaltungen genutzt werden.

Um die Existenz einer Funktion mit bestimmten Eigenschaften zu beweisen (z.B. einer Funktion, die eine vorgegeben Differentialgleichung erfüllt) ist es bequem, mit sogenannten Funktionalräumen zu arbeiten, d.h. mit Räumen, deren Elemente Funktionen sind. Auf solchen Räumen möchte man einige Konstruktionen erlauben, z.B. wird für uns die Abstandsmessung wichtig. Diese werden wir jetzt einführen.

Definition 75. Sei X eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

mit folgenden drei Eigenschaften:

- Definitheit: $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$, und $d(x, y) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = y$,
- Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$,
- Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), das aus einer Menge X und einer Metrik d auf X besteht.

Für $x, y \in X$ wird die Zahl $d(x, y)$ informell als der Abstand zwischen den Punkten x und y intepretiert.

Beispiel 76. 1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze $d(x, y) = |x - y|$. Wir zeigen jetzt, dass dies eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Wir wissen, dass $|-a| = |a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, und $|a| = 0$ nur für $a = 0$ gilt. Es folgt daraus, dass $d(x, y) = |x - y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y, x) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also wenn $x = y$. Für den absoluten Wert gilt $|a+b| \leq |a|+|b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, also erhält man für $a = x - z$ und $b = y - z$

$$d(x, y) = |x - y| \leq |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(y, z).$$

Damit haben wir alle Eigenschaften einer Metrik bewiesen. Eigentlich sind die erforderlichen Eigenschaften einer Metrik von diesem Beispiel “kopiert”.

2. Auf jeder Menge X kann man eine Metrik einführen, z.B.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist die sogenannte **diskrete Metrik** auf X (Übung).

3. Auf $\mathbb{R}^n$ definiert man die *euklidische Metrik* durch

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Wir werden etwa später beweisen, dass dies wirklich eine Metrik ist. (Für $n = 2$ ist diese Metrik eng mit dem Satz von Pythagoras verbunden: $d(x,y)$ ist genau die Länge der Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreiecks mit Kathetenlängen $|x_1 - y_1|$ und $|x_2 - y_2|$.)

Definition 77. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Die Abbildung $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ mit $d_Y(x,y) = d(x,y)$ für alle $x, y \in Y$ heisse die von d auf Y **induzierte Metrik**.

Man merkt, dass die oben definierte euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ weitere Bedingungen erfüllt, z.B. $d(x,y) = d(x-y, 0)$ und $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Hier wird genutzt, dass $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum ist (man kann die Elemente von $\mathbb{R}^n$ miteinander addieren oder mit Konstanten mutliplizieren). Dafür gibt es einen weiteren Begriff, der die Struktur einer Vektorraums berücksichtigt.

Definition 78. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ heisst **Norm**, falls sie den folgenden drei Eigenschaften genügt:

- Definitheit: $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$, und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$,
- Homogenität: $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$,
- Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Ein **normierter Raum** ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, das aus einem Vektorram V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V besteht.

Satz 79. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann ist $d : V \times V \to \mathbb{R}$ durch $d(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf V (man sagt, dass d* **durch die Norm erzeugt** *ist.)*

Beweis. Wir müssen prüfen, dass die Abbildung d die drei erforderlichen Eigenschaften einer Metrik besitzt.

Definitheit. Da die Norm immer nichtnegativ ist, gilt $d(x,y) \geq 0$ für alle x, y. Die Gleichheit $d(x,y) = 0$ ist äquivalent zu $\|x - y\| = 0$, und wegen der Definitheit der Norm ist das äquivalent zu $x - y = 0$, d.h. zu $x = y$.

Symmetrie. Wir nutzen die Homogenität der Norm: $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = d(y,x)$.

Dreiecksungleichung (Metrik). Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für die Norm:

$$\begin{aligned} d(x,y) = \|x-y\| &= \big\|(x-z)+(z-y)\big\| \\ &\le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned} \qquad \square$$

Es ist aber wichtig zu verstehen, dass nicht jede Metrik auf einem Vektorraum durch eine Norm erzeugt wird:

Proposition 80. *Die diskrete Metrik d auf $\mathbb{R}^n$ (Beispiel 76, Teil 2) ist durch keine Norm erzeugt.*

Beweis. Nehme an, es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $d(x,y) = \|x-y\|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$. Seien $x \neq y$, dann auch $2x \neq 2y$, und $d(2x,2y) = d(x,y) = 1$. Aber aus $\|x-y\| = d(x,y) = 1$ folgt $d(2x,2y) = \|2x-2y\| = \|2(x-y)\| = 2\|x-y\| = 2 \neq 1$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine zugehörige Norm existiert. $\square$

Wir werden jetzt zeigen, dass man auf $\mathbb{R}^n$ eine Norm einführen kann.

Satz 81. *Die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \in \mathbb{R}$$

ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ (die sogenannte **euklidische Norm***).*

Beweis. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiere das **Standardskalarprodukt**

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R},$$

dann gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Das Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle$ ist symmetrisch, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, linear bzgl. x und y, d.h.

$$\langle \alpha x + \alpha' x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \alpha'\langle x', y\rangle, \quad \langle x, \alpha y + \alpha' y'\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \alpha'\langle x, y'\rangle$$

für alle $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus gilt $\langle x, x\rangle \ge 0$, und $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Dadurch ist die Definitheit von $\|\cdot\|$ schon bewiesen. Die Homogenität beweist man wir folgt (man nutzt die Bi-Linearität des Skalarprodukts):

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha|\,\|x\|.$$

Jetzt muss man nur die Dreiecksungleichung beweisen. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, gann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

Nehme an, dass $y \neq 0$, und betrachte das Polynom $P(t) = at^2 + bt + c$,

$$a = \langle y, y \rangle = \|y\|^2, \quad b = 2\langle x, y \rangle, \quad c = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Wegen $P \geq 0$ haben wir $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, also $4\big(\langle x, y \rangle\big)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, oder

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \, \|y\|. \tag{11}$$

Wir haben die Ungleichung nur für $y \neq 0$ beweisen, aber sie gilt auch für $y = 0$ (da die beiden Seiten dann gleich Null sind). Damit ist (11) für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$; das ist die sogenannte **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**. Mit Hilfe von (11) haben wir für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2, \end{aligned}$$

woraus die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ folgt. $\square$

Damit wird auch beweisen (Satz 79), dass die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ (Beispiel 76, Teil 3) wirklich eine Metrik ist. Falls $\mathbb{R}^n$ als normierter oder metrischer Raum gesehen wird, wird implizit die euklidische Norm/Metrik gemeint.

Der Begriff einer Metrik erlaubt es, einige geometrische und analytische Konstruktionen auf beliebige metrische Räume zu übertragen.

Definition 82. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $p \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heisst die Menge

$$K_r(p) = \big\{ q \in X : \, d(q, p) < r \big\}$$

die **offene Kugel** um p mit Radius r.

Beispiel 83.

1. Für $X = \mathbb{R}^3$ (mit euklidischer Metrik) entspricht die obige Definition dem üblichen Begriff einer Kugel, wobei für $X = \mathbb{R}^2$ das Wort "Kreisscheibe" besser passt. Für $X = \mathbb{R}$ ist $K_r(p)$ das Intervall $(p - r, p + r)$.

2. Für die diskrete Metrik d auf X gilt:

$$K_r(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{für } r < 1, \\ X & \text{für } r \geq 1. \end{cases}$$

   Insbesondere kann man im Allgemeinen $K_r(y) = K_\rho(x)$ auch für $x \neq y$ und $r \neq \rho$ haben.

Einige Aussagen, die in $\mathbb{R}^n$ als offensichtlich erscheinen, muss man strikt beweisen:

Lemma 84. *Seien $p_1, p_2 \in X$ und $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 + r_2 \leq d(p_1, p_2)$, dann gilt $K_{r_1}(p_1) \cap K_{r_2}(p_2) = \emptyset$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Nehmen an, es existiert ein $w \in K_{r_1}(p_1) \cap K_{r_2}(p_2)$. Nach der Definition gilt dann $d(p_1, w) < r_1$ und $d(p_2, w) < r_2$. Wegen der Dreiecksungleichung für die Metrik d gilt

$$d(p_1, p_2) \leq d(p_1, w) + d(p_2, w) < r_1 + r_2,$$

was der Annahme $r_1 + r_2 < d(p_1, p_2)$ widerspricht. $\square$

Mit Hilfe einer Metrik kann man auch die Konvergenz definieren:

Definition 85. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(p_n) \subset X$ eine Folge und $p \in X$. Der Punkt p ist der **Grenzwert** der Folge (p_n), $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(p_n, p) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Für $\mathbb{R}$ erhalten wir die übliche Konvergenz, und man kann die obige Definition äquivalent umformulieren (Übung):

Proposition 86. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(p_n) \subset X$ eine Folge und $p \in X$. Es gilt $\lim p_n = p$ genau dann, wenn $\lim d(p_n, p) = 0$.*

Damit wird die Konvergenz in beliebigen metrischen Räumen auf die Konvergenz in $\mathbb{R}$ reduziert. Es ist einfach zu zeigen, dass der Grenzwert (falls existiert) eindeutig bestimmt ist: falls $p = \lim_n p_n$ und $q = \lim_n p_n$, also $0 \leq d(p, q) \leq d(p, p_n) + d(q, p_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $d(p, q) = 0$ und $p = q$.

Wir betrachten jetzt die Teilmengen metrischer Räume etaws genauer. Wir werden jetzt abstrakte Begriffe einführen, die einige Eigenschaften von offenen und abgeschlossenen Intervallen übernehmen.

Definition 87. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Wir definieren folgende von M abhängige Mengen:

- $\overline{M} = \big\{p \in X :$ es existiert eine Folge $(p_n) \subset M$ mit $p = \lim p_n\big\}$, **Abschluss** von M,
- $\mathring{M} = \{p \in M :$ es existiert ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M\big\}$, **Inneres** von M,
- $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$, **Rand** von M.

Punkte in $\mathring{M}$ heissen **innere Punkte** von M. Man hat immer $\mathring{M} \subset M \subset \overline{M}$, aber im Allgemeinen $\partial M \not\subset M$.

Beispiel 88. 1. Betrachte $X = \mathbb{R}$ (mit der euklidischer Metrik).

(a) Für $A = [0,1]$ gilt $\overline{A} = A = [0,1]$, $\mathring{A} = (0,1)$, $\partial A = \{0,1\}$.

Beweis. Wir berechnen zuerst den Abschluss $\overline{A}$. Wegen $A \subset \overline{A}$ haben wir $[0,1] \subset \overline{A}$. Seit $p \in \overline{A}$, dann gibt es eine Folge (p_n) mit $p_n \in A$ une $\lim_n p_n = p$. Die Bedingung $p_n \in A$ bedeutet $0 \leq p_n \langle 1$, also auch $0 \leq p = \lim p_n \leq 1$, also $\overline{A} \subset [0,1]$.

Jetzt bestimmen wir $\mathring{A}$. Sei $p \in (0,1)$ une $\varepsilon := \min\{p, 1-p\}$, dann gilt $K_\varepsilon(p) = (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset [0,1]$, also $p \in \mathring{A}$, und $(0,1) \in \mathring{A}$. Wir müssen jetzt zeigen, dass 0 und 1 keine inneren Punktevon M sind. Jede Kugel $K_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ verlässt $[0,1]$, also $0 \notin \mathring{A}$. Analog für 1.

(b) Für $B = (0,1)$ haben wir $\overline{B} = [0,1]$, $\mathring{B} = (0,1)$, $\partial B = \{0,1\}$.

(c) Für $C = [0,1)$ haben wir $\overline{C} = [0,1]$, $\mathring{C} = (0,1)$, $\partial C = \{0,1\}$.

(d) Für $M = \mathbb{Q}$ gilt $\overline{M} = \mathbb{R}$ (jede reele Zahl ist der Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen), $\mathring{M} = \emptyset$ (zwischen zwei rationalen Zahlen gibt es immer eine irrationale Zahl, daher enthält M kein offenes Intervall), also $\partial M = \mathbb{R}$.

2. Betrachte $X = \mathbb{R}^2$ und $M = \{0\} \times [0,1]$. Es gilt dann $\overline{M} = M$ (jede konvergente Folge $(0, x_n)$ konvergiert gegen einen Punkt der Form $(0,a)$ mit $a \in [0,1]$. Man sieht auch, dass $\mathring{M} = \emptyset$, da jede offene Kugel um einen Punkt von M immer ein bisschen nach links und nach rechts erstreckt und nicht ganz in M liegt.) Also $\partial M = M$.

Definition 89. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- $M \subset X$ heisst **abgeschlossen**, falls $\overline{M} = M$.
- $M \subset X$ heisst **offen**, falls $\mathring{M} = M$.

Beispiel 90.
- Der ganze Raum X ist gleichzeitig offen und abgeschlossen. Auch $\emptyset$ besitzt die beiden Eigenschaften.
- Jede Teilmenge $M \subset X$ ist auch ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik d_M. In diesem neuen metrischen Raum (M, d_M) ist M gleichzeitig offen und abgeschlossen, unabhängig davon ob sie die entsprechenden Eigenschaften in X hatte. Es ist also wichtig zu verstehen, in welchem "Universum" X man arbeitet. Daher sind Offenheit und Abgeschlossenheit *extrinsische* Begriffe, da sie nicht nur von der Menge selbst, sondern auch von dem umgebenden Raum abhängen.
- Das offene Interval $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ ist eine offene Menge. Das abgeschlossene Intevrall $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Menge. Wir haben oben gesehen, dass $(0,1]$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

- Für $X = \mathbb{R}$ ist die Menge $[0, +\infty)$ abgeschlossen und die Menge $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen.

Proposition 91. *Jede offene Kugel ist eine offene Menge.*

Beweis. Seien $p \in X$, $r > 0$, $q \in K_r(p)$. Wegen $d(p,q) < r$ kann man ein $\varepsilon > 0$ finden mit $\varepsilon < r - d(p,q)$. Dann gilt für alle $x \in K_\varepsilon(q)$: $d(x,p) \leq d(p,q) + d(x,q) < d(p,q) + \varepsilon < r$, also $x \in K_r(p)$. Damit haben wir zu jedem $q \in K_r(p)$ ein $\varepsilon > 0$ gefunden mit $K_\varepsilon(q) \subset K_r(p)$, d.h. q ist ein innerer Punkt von $K_r(p)$. Es folgt, dass $K_r(p)$ eine offene Menge ist. □

Die folgende Proposition folgt aus den Definitionen und fasst alle Eigenschaften zusammen:

Proposition 92. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   - *M ist abgeschlossen,*
   - *$\partial M \subset M$,*
   - *jede konvergente Folge (p_n) mit $p_n \in M$ erfüllt $\lim p_n \in M$.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   - *M ist offen,*
   - *$\partial M \cap M = \emptyset$,*
   - *zu jedem $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(p) \subset M$.*

Es ist also wichtig, den Rand ∂M bestimmen zu können. Dafür wird oft folgende Methode genutzt:

Satz 93. *Sei (X,d) ein metrsicher Raum und $M \subset X$, dann gilt*

$$\partial M = \big\{p \in X : \quad K_r(p) \cap M \neq \emptyset \text{ und } K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset \text{ für alle } r > 0\big\}; \tag{12}$$

wir bezeichnen

$$M^c = X \setminus M.$$

Beweis. Wir bezeichnen $N := \big\{p \in X : K_r(p) \cap M \neq \text{ und } K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset\big\}$.

Zuerst zeigen wir die Inklusion $\partial M \subset N$. Sei $p \in \partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$. Wegen $p \in \overline{M}$ gibt es eine Folge $(p_n) \subset M$, die gegen p konvergiert. Daraus folgt, dass zu jedem $r > 0$ ein $p_n \in M$ existiert mit $d(p_n, p) < r$, also $K_r(p) \cap M \neq \emptyset$ für jedes $r > 0$. Nehme an, es existiert ein $r > 0$ mit $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$, dann $K_r(p) \subset M$, also $p \in \mathring{M}$, das widerspricht $p \in \partial M$. Also haben wir $K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset$ zu jedem $r > 0$. Damit haben wir die Injklusion $\partial M \subset N$ bewiesen.

Jetzt beweisen wir $N \subset \partial M$. Sei $p \in N$. Wir müssen zeigen, dass (a) $p \in \overline{M}$ und (b) $p \notin \mathring{M}$. Für (a): zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $K_{1/n}(p) \cap M$ nichtleer, wähle also einen Punkt p_n aus dieser Menge, dann gilt $d(p_n, p) \leq \frac{1}{n}$ und $\lim p_n = p$. Wegen $p_n \in M$ gilt dann $p \in \overline{M}$. Für (b): Nehme an, dass $p \in \mathring{M}$, dann gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M$, also mit $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$: Widerspruch! □

Da in der Bedingung (12) die Mengen M und M^c symmetrisch auftreten und $(M^c)^c = M$, hat man folgendes:

Korollar 94. *Für jede Menge M gilt $\partial M = \partial(M^c)$.*

Korollar 95. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann offen, wenn $M^c = X \setminus M$ abgeschlossen ist. Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn M^c offen ist.*

Beweis. Man hat die Äquivalenzen

$$M \text{ offen } \Leftrightarrow \partial M \cap M = \emptyset \Leftrightarrow \partial M \subset M^c \Leftrightarrow \partial(M^c) \subset M^c \Leftrightarrow \; M^c \text{ abgeschlossen},$$

damit ist die erste Aussage bewiesen. Die Menge $(M^c)^c$ ist genau dann abgeschlossen, wenn M^c offen ist. Da $(M^c)^c = M$, ist damit auch die zweite Aussage bewiesen. □

Der folgende Satz wird in der Übung besprochen:

Satz 96.

(1) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen (auch unendlich viele möglich) ist offen.*

(2) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist offen.*

Bei abgeschlossenen Mengen verhält es andersrum:

(1') *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen (auch unendlich viele möglich) ist abgeschlossen.*

(2') *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Menge ist abgeschlossen.*

Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen ist aber nicht unbedingt offen. Betrachte z.B. die folgenden offenen Mengen in $\mathbb{R}$:

$$M_n = \Big(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = [0, 1]$, die Menge $[0, 1]$ ist aber nicht offen.

Vorlesung 7

Eine der wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ist das Vollständigkeitsaxiom (bzw. das Supremumaxiom: jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt das Supremum). Diese Eigenschaft wurde mehrmals in wichtigen Sätzen verwendet, z.B. beim Ziehen von Wurzeln, für den Zwischenwertsatz, beim Summieren von Reihen, und bei der Untersuchung der Konvergenz (jede Cauchy-Folge ist konvergent: wurde auch für die Definition des Integrals genutzt). In dieser Vorlesung möchten wir eine abstrakte Verallgemeinerung dieser Eigenschaft für metrische Räume besprechen. Eine direkte Übertragung ist nicht möglich: das Supremumaxiom nutzt die Anordnung von $\mathbb{R}$, und allgemeine metrische Räume sind nicht angeordnet. Allerdings kann man den Begriff einer Cauchy-Folge ziemlich direkt übertragen:

Definition 97. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heisst **Cauchy-Folge**, falls man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden kann mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Proposition 98. *Jede in (X, d) konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $x = \lim x_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n \geq N$ gilt dann (mit Hilfe der Dreiecksungleichung):

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, ist (x_n) eine Cauchy-Folge. $\square$

Allerdings gilt die Umkehrung nicht. Betrachte $X = (0, +\infty)$ mit der euklidischen Metrik und die Folge $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Das ist eine Cauchy-Folge: für $m, n \geq N$ gilt $d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \leq \frac{2}{N}$, also $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für $m, n \geq N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2/\varepsilon$. Allerdings gibt es kein $x \in X$ mit $x = \lim x_n$ (die Folge x_n konvergiert natürlich gegen 0 im grösseren Raum $\mathbb{R}$, aber $0 \notin X$).

Definition 99. Ein metrischer Raum (X, d) heisst **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element aus X konvergiert. (Oft sagt man auch, dass X bezüglich d vollständig ist).

Ein metrischer Raum ist also genau dann vollständig, wenn es in diesem Raum die Umkehrung von Proposition 98 gilt: Diese Definition wird direkt auf normierte Räumen übertragen:

Definition 100. Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heisst vollständig, falls X bzgl. der durch die Norm induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist.

Beispiel 101. 1. $\mathbb{R}$ ist vollständig. Man kann eigentlich zeigen, dass das Supermumaxiom aus der Vollständigkeit (im Sinne der Definition 97) hergeleitet werden kann: die beiden Axiomen sind äquivalent (falls alle anderen Axiomen der reellen Zahlen gelten).

2. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig: es gibt Cauchy-Folgen von rationalen Zahen, deren Grenzwerte irrational sind.

3. $[0, 1]$ ist vollständig. Beweis: Sei $(x_n) \subset [0, 1]$ eine Cauchy-Folge, dann ist das auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Wegen $0 \leq x_n \leq 1$ gilt $0 \leq x \leq 1$, also $x \in [0, 1]$.

Das letzte Beispiel kann man wie folgt verallgemeinern (Übung), dadurch gewinnt man eine grosse Familie von vollständigen metrischen Räumen:

Satz 102. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $Y \subset X$ und d_Y die induzierte Metrik auf Y. Der metrische Raum (Y, d_Y) ist genau dann vollständig, wenn die Menge Y in X abgeschlossen ist.*

Satz 103. $\mathbb{R}^n$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge. Wir schreiben $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$ mit $x_k^{(j)} \in \mathbb{R}$. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|a_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = \|a\|,$$

insbesondere $|x_m^{(j)} - x_n^{(j)}| \leq \|x_m - x_n\|$. Es folgt, dass jede der reellen Folge $(x_n^{(j)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert $(x_n^{(j)})$ in $\mathbb{R}$ gegen ein $x^{(j)} \in \mathbb{R}$, und dann konvergiert auch (x_k) in $\mathbb{R}^n$ gegen $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ (Blatt 6, Präsenzaufgaben: die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ ist zu der komponentweisen Konvergenz äquivalent). $\square$

Weitere Beispiele vollständiger metrischer Räume (insbesondere Funktionalräume) betrachtet wir etwa später in dieser Vorlesung.

Wie schon vorher erwähnt, ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ für das Lösen von bestimmten Gleichung extrem wichtig. Wir werden jetzt eine neue Familie von Gleichungen einführen, die in jedem metrischen Raum Sinn machen.

Definition 104. Sei X eine Menge und $T : X \mapsto X$ eine Abbildung. Ein Punkt $p \in X$ heisst **Fixpunkt** von T, falls $T(p) = p$. Anders gesagt, sind die Fixpunkte von T genau die Lösungen der **Fixpunktgleichung** $T(x) = x$.

Man stellt sich die Frage, unter welchen Bedingung eine Abbildung einen Fixpunkt hat. Das ist genau das Thema des Banachschen Fixpunktsatzes, der in vielen Gebieten zahlreiche Anwendungen findet. Wir werden zuerst einige neue Begriffe einführen:

Definition 105. Sei (X, d) eine metrischer Raum. Eine Abbildung $T : X \mapsto X$ heisst **Kontraktion**, falls es ein $0 \leq L < 1$ existiert, so dass $d\big(T(x), T(y)\big) \leq Ld(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Die Zahl L wird Kontraktionskonstante von T genannt.

Definition 106. Sei X eine Menge, $T : X \mapsto X$ eine Abbildung und $n \in \mathbb{N}$. Die n-te iterierte Abbildung $T^n : X \mapsto X$ wird induktiv definiert durch

$$T^1(x) = T(x), \quad T^{n+1}(x) = T\big(T^n(x)\big), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X.$$

Anders gesagt, $T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ Mal}}$.

In der mathematischen Theorie von dynamischen Systemen untersucht man u.a. das Verhalten von Folgen $x_n = T^n(x_0)$ für grosse n, das ist eines der aktivsten Gebieten der modernen Mathematik.[7] Zum Glück ist die Antwort ganz einfach, falls T eine Kontraktion ist:

Satz 107 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein* vollständiger *metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante L, dann gilt folgendes:*

1. *T hat genau einen Fixpunkt p. Anders gesagt, besitzt die Gleichung $T(x) = x$ eine eindeutig bestimmte Lösung.*
2. *Sei $x_0 \in X$ beliebeig. Definiere $(x_n) \subset X$ durch $x_n = T(x_{n-1})$, d.h. $x_n = T^n(x_0)$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $p = \lim_{n\to\infty} x_n$ und*

$$d(x_n, p) \leq \frac{L^n}{1 - L}\, d(x_0, x_1). \tag{13}$$

Beweis. Nach der Definition einer Kontraktion gilt natürlich $L \in [0, 1)$.

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit des Fixpunktes (falls dieser überhaupt existiert). Seien p, q Fixpunkte von T, dann $T(p) = p$ und $T(q) = q$, und $d(p, q) =$

[7]Definiere $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt: $T(x) = x/2$ falls x gerade, $T(x) = 3x + 1$ falls x ungerade. Nehme $x_0 \in \mathbb{N}$ und definiere die Folge (x_n) durch $x_n = T(x_{n-1}) \equiv T^n(x_0)$. Für $x_0 = 1$ bekommt man $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, dann wird dieser Zyklus (4, 2, 1) unendlich wiederholt. In 1930er Jahren hat der deutsche Mathematiker Lothar Collatz das folgende Problem gestellt (jetzt Collatz-Problem genannt): beweise, dass zu jedem Anfangspunkt $x_0 \in \mathbb{N}$ die oben konstruierte Folge (x_n) in den Zyklus 4, 2, 1 mündet. Das Problem bleibt bis heute ungelöst, und es wurde von vielen berühmten Mathematikern als "hoffnungslos" bewertet.

$d\big(T(p),T(q)\big) \leq Ld(p,q)$, also $(1-L)d(p,q) \leq 0$. Aus $1-L>0$ und $d(p,q) \geq 0$ folgt $d(p,q)=0$ und $p=q$ (Definitheit der Metrik).

Jetzt zeigen wir die Existenz eines Fixpunktes. Dafür nutzen wir die iterierte Folge x_n. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gilt (Kontraktion):

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) \leq Ld(x_{n-1}, x_n),$$

also $d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n d(x_0, x_1)$ durch Iteration. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt dann, dank der Dreiecksungleichung,

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdot + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq (L^n + L^{n+1} + \cdot + L^{n+k-1}) d(x_0, x_1)$$

Man nutzt jetzt

$$L^n + L^{n+1} + \cdot + L^{n+k-1} = L^n(1 + L + \cdots + L^{k-1}) \leq L^n \sum_{j=0}^{\infty} L^j = L^n \cdot \frac{1}{1-L},$$

also

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(x_0, x_1). \tag{14}$$

Wegen $0 \leq L < 1$ konvergiert der Ausdruck auf der rechten Seite von (14) gegen Null für $n \to \infty$, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{L^n}{1-L}\, d(x_0, x_1) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und dann auch

$$d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge in (X,d). Da der metrische Raum (X,d) vollständig ist, existiert ein $p \in X$ mit $p = \lim x_n$.

Wir müssen prüfen, ob dieser Grenzwert p wirklich ein Fixpunkt von T ist. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned} d\big(p, T(p)\big) &\leq d(p, x_n) + d\big(x_n, T(p)\big) \\ &= d(p, x_n) + d\big(T(x_{n-1}), T(p)\big) \leq d(p, x_n) + Ld(x_{n-1}, p). \end{aligned} \tag{15}$$

Aus $p = \lim x_n$ folgt $\lim d(x_n, p) = 0$, also konvergieren für $n \to \infty$ die beiden Summanden auf der rechten Seite von (15) gegen Null, und dann $d\big(p, T(p)\big) \leq 0$. Aus der Definitheit der Metrik d folgt $d\big(p, T(p)\big) = 0$ und $p = T(p)$, also ist der gefundene p wirklich ein Fixpunkt von T. Um die letzte Abschätzung (13) zu beweisen merkt man zuerst, dass

$$\text{für } y = \lim y_n \text{ und } a \in X \text{ gilt } \lim d(a, y_n) = d(a, y). \tag{16}$$

Der Beweis von (16) folgt aus der Dreiecksungleichung, $|d(a, y_n) - d(a, y)| \leq d(y_n, y)$. Mit Hilfe von (16) erhält man (13), indem man in (14) den Parameter k gegen ∞ schickt. $\square$

Eine grosse Familie von Kontraktionen in Teilmengen von $\mathbb{R}$ erhält man mit Hilfe des folgenden Satzes:

Satz 108. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L \geq 0$. Dann sind folgende zwei Bedingungen äquivalent:*

(a) Für alle $x, y \in I$ gilt $\big|f(x) - f(y)\big| \leq L|x - y|$,

(b) Für alle $x \in I$ gilt $\big|f'(x)\big| \leq L$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Implikation (b)$\Rightarrow$(a). Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen x und y mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, also

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \big|f'(\xi)(x - y)\big| \leq L|x - y|.$$

Die Implikation (a)$\Rightarrow$(b) beweisen wir indirekt. Wäre $\big|f'(y)\big| > L$ für ein $y \in I$, so folgte aus der Definition der Ableitung, dass $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| > L$ für x in der Nähe von y, also $\big|f(x) - f(y)\big| > L|x - y|$ im Widerspruch zur Annahme (a). □

Korollar 109. *Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ differenzierbar mit $\sup_{x\in[a,b]} \big|f'(x)\big| < 1$, dann ist f eine Kontraktion auf $[a, b]$.*

Beispiel 110. Betrachte $f : [0, +\infty) \to [0 + \infty)$, $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x + 2} \equiv 1 - \dfrac{1}{2x + 2}$. Es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{2(x + 1)^2}$ und $\big|f'(x)\big| \leq L := \frac{1}{2}$, also ist f eine Kontraktion. Die Menge $[0, +\infty)$ ist in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und daher ein vollständiger metrischer Raum. Die Gleichung $x = f(x)$ besitzt also eine eindeutig bestimmte Lösung in $[0, +\infty)$. In diesem konkreten Fall können wir diese Lösung explizit finden: $p = 1/\sqrt{2}$. Den numerischen Wert von p kann man durch die iterierte Folge $x_n = f(x_{n-1})$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz approximieren: wähle z.B. $x_0 = 1$, dann $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_3 = \frac{17}{24}$, und wir haben die garantierte Fehlerabschätzung

$$|\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{17}{24}| = |p - x_3| \leq \tfrac{L^3}{1-L}|x_0 - x_1| = \tfrac{1}{16} = 0,0625. \tag{17}$$

In der Realität $x_3 = \frac{17}{24} = 0.708333\ldots$ und $p = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106\ldots$, $|p - x_3| = 0,0012\ldots$.

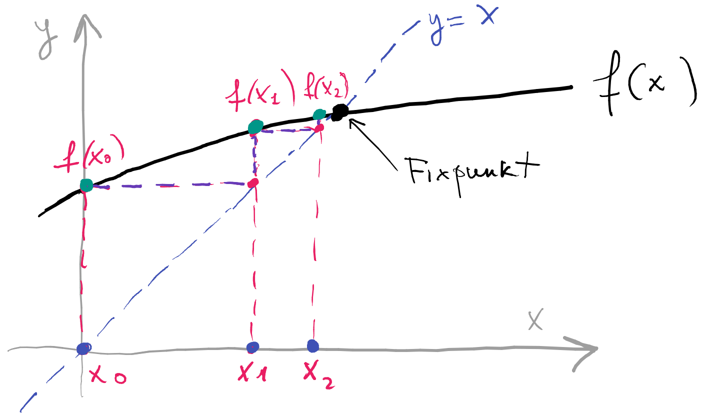
Die garantierte Fehlerabschätzung kann man aber verbessern, falls man merkt, dass der gesuchte Fixpunkt grosser als $\frac{1}{2}$ ist (f ist steigend mit $f(0) = \frac{1}{2}$). Dann kann man f auch als eine Kontraktion von $[\frac{1}{2}, \infty)$ bertachten und die entsprechende Kontraktionskonstante L besser abschätzen:

$$L := \sup_{x\in[\frac{1}{2},\infty)} \big|f'(x)\big| = \frac{2}{9}.$$

Damit erhält man

$$|\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{17}{24}| = |p - x_3| \leq \tfrac{L^3}{1-L}|x_0 - x_1| = \frac{(\frac{2}{9})^3}{1-\frac{2}{9}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{567} = 0.003527\ldots,$$

was viel besser als (17) ist. Die Konstruktion der Punkte x_k kann man mit einem Bild illustrieren:



Wie schon vorher angekündigt, entwickeln wir die gesamte abstrakte Theorie um Differentialgleichungen behaldeln zu können (Existenz/Eindeutigkeit von Lösungen). Dafür werden wir bestimmte Funktionalräume brauchen.

Definition 111. Sei M eine nichtleere Menge. Wir bezeichnen

$$\mathcal{B}(M,\mathbb{R}) = \big\{f : M \mapsto \mathbb{R} : \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| < \infty\big\}.$$

Satz 112. *Die Menge $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ mit den Operationen*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda\, f(x),$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Durch

$$\|f\| = \sup_{x\in M} \big|f(x)\big|$$

wird eine Norm auf $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ definiert (die Supremumnorm*), und $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ ist bzgl. dieser Norm vollständig.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{F}(M,\mathbb{R}) := \big\{\text{alle Funktionen } f : M \mapsto \mathbb{R}\big\}$ mit denselben Operationen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $\mathcal{B}(M,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(M,\mathbb{R})$. Es ist ausreichend zu zeigen, dass für $f, g \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: (a) $f + g \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ und (b) $\lambda f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$.

Für (a): Zu jedem $x \in M$ gilt $\big|(f+g)(x)\big| = \big|f(x) + g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|$,

$$\sup_{x\in M} \big|(f+g)(x)\big| \leq \sup_{x\in M} \big(\big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|\big) \leq \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| + \sup_{x\in M} \big|g(x)\big| < \infty.$$

Daraus folgt auch $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Für (b):

$$\sup_{x\in M} \big|(\lambda f)(x)\big| = \sup_{x\in M} \big|\lambda f(x)\big| = \sup_{x\in M} |\lambda|\big|f(x)\big| = |\lambda| \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| < \infty,$$

insbesondere $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$ ist und daher ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist, müssen wir jetzt nur die Definitheit prüfen (da die Homogenität und die Dreiecksungleichung schon oben bewiesen worden sind). Sei $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$. Wegen $|f(x)| \geq 0$ gilt offenbar $\|f\| \geq 0$. Darüber hinaus haben wir

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0\,\forall x \in M \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist die Nullfunktion} \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist der Nullvektor in } \mathcal{B}(M,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|$ wirklich eine Norm.

Sei $(f_n) \subset \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ eine Folge von Funktionen, die bzgl. der Norm eine Cauchy-Folge ist,

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| < \varepsilon \;\forall n \geq N, k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Für jedes $x \in M$ gilt $\big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| < \sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big|$, und daher ist $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gibt es ein $f(x) \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Dadurch haben wir eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ definiert. Wir müssen jetzt zwei Sachen prüfen: dass $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ und dass $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$, N wie in (18) und $x \in M$, dann

$$\big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \big|f_n(x) - f_{n+k}(x)\big| = \big|f_n(x) - f(x)\big|$ gilt $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Da ε unabhängig von x ist, gilt auch $\sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$. Wir haben also gezeigt, dass

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \sup_{x\in M} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon \;\forall n \geq N. \tag{19}$$

Nehme jetzt ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und finde ein passendes N, dann

$$\begin{aligned} \sup_{x\in M} \big|f(x)\big| &\leq \sup_{x\in M} \Big(\big|f(x) - f_N(x)\big| + \big|f_N(x)\big|\Big) \\ &\leq \sup_{x\in M} \big|f(x) - f_N(x)\big| + \sup_{x\in M} \big|f_N(x)\big| \leq \varepsilon + \|f_N\| < \infty, \end{aligned}$$

also $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$. Dann kann man (19) wie folgt umschreiben:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \|f_n - f\| < \varepsilon \;\forall n \geq N,$$

also konvergiert f_n gegen f bzgl. $\|\cdot\|$. Da (f_n) eine beliebige Cauchy-Folge war, ist $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ ein vollständiger normierter Raum. $\square$

Satz 113. *$C^0\big([a,b]\big)$ mit der Supremumnorm ist vollständig.*

Beweis. Da $C^0([a,b])$ ein Untervektorraum von $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ ist, ist die Supremumnorm wohldefiniert. Sei nun $(f_n) \subset C^0([a,b])$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumnorm. Dann ist (f_n) eine Cauchy-Folge auch in $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Da $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ vollständig ist, existiert eine Funktion $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, gegen die (f_n) in der Supremumnorm konvergiert. Also ist f der gleichmässige Grenzwert von f_n. Der gleichmässige Grenzwert einer Folge stetiger Funktion ist aber immer stetig (Analysis I), daher $f \in C^0([a,b])$. □

Mit Hilfe dieser Funktionalräumen kann man schon eine erste Idee bekommen, wie man die Lösung von Differentialgleichungen angehen kann.

Beispiel 114. Sei $a \in (0,1)$. Betrachte die Integralgleichung

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt, \quad x \in [0,a]. \tag{20}$$

Wir wollen zeigen, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung in $C^0\big([0,a]\big)$ existiert.

Betrachte die Abbildung[8]

$$T : C^0\big([0,a]\big) \to C^0\big([0,a]\big), \quad \big(T(y)\big)(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt, \quad x \in [0,a],$$

die Gleichung (20) ist dann die Fixpunktgleichung für T. Für $y_1, y_2 \in C^0\big([0,a]\big)$ und $x \in [0,a]$ gilt

$$\begin{aligned}\big|\big(T(y_1)\big)(x) - \big(T(y_2)\big)(x)\big| &= \Big|\int_0^x \big(y_1(t) - y_2(t)\big)\,dt\Big| \le \int_0^x \big|y_1(t) - y_2(t)\big|\,dt\\ &\le x \sup_{t\in[0,a]} \big|y_1(t) - y_2(t)\big| \le a\|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

also $\|T(y_1) - T(y_2)\| \le a\|y_1 - y_2\|$. Wegen $a \in (0,1)$ ist T eine Kontraktion auf $C^0\big([0,a]\big)$, daher besitzt (20) eine einzige Lösung. Wir versuchen, die entsprechende interierte Folge $y_{n+1} = T(y_n)$ mit z.B. $y_0 = 0$ zu konstruiren:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= 1 + \int_0^x 0\,dt = 1,\\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x,\\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2,\\ y_4(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}\,t^2)\,dt = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3,\end{aligned}$$

[8]Eine Abbildung zwischen zwei Funktionalräumen wird fast immer *Operator* genannt. Wir betrachten nur ganz einfache Fälle, die allgemeinere Theorie wird später in der VL Funktionanalysis entwickelt.

und durch Iteration erhält man $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge (y_n) in $C^0\big([0,a]\big)$konvergiert gegen $y(x) = e^x$: die Konvergenz ist gleichmässig (d.h. in der Supremumnorm), da die Potenzreihen innerhalb des Konvergenzintervalls gleichmässig konvergieren. Also ist $y(x) = e^x$ die einzige Lösung von (20).

Man merkt aber, dass y die Gleichung (20) genau dann erfüllt, wenn y das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)$ mit $y(0) = 1$ löst (Übung).

Vorlesung 8

Stetige Abbildungen

Wir werden jetzt kurz das Konzept der Stetigkeit in metrischen Räumen besprechen.

Definition 115. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $p \in X$. Die Abbildung f heisst **stetig** im Punkt p, falls für jede Folge $(x_n) \subset X$ mit $p = \lim x_n$ gilt $f(p) = \lim f(x_n)$. Man nennt f stetig, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

Man kann die Definition äquivalent umformulieren (indem man die Definition von lim ausführlich aufschreibt):

Proposition 116. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $p \in X$. Die Abbildung f ist genau dann stetig im Punkt p, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d_Y\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon \text{ für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, p) < \delta.$$

Daraus folgt auch die Charakterisierung durch offene und abgeschlossene Mengen (Übung):

Proposition 117. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist stetig,*
2. *für jede offene Menge $O \subset Y$ ist $f^{-1}(O)$ offen in X,*
3. *für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.*

Eine wichtige Klasse von stetigen Abbildungen liefern die sogenannten Lipschitzschen Abbildungen:

Proposition 118. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$. Nehme an, dass ein $L > 0$ existiert, so dass*

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq L d_X(x, x') \text{ für alle } x, x' \in X$$

(solche Abbildungen heissen **Lipschitzsch** *mit Lipschitz-Konstante L), dann ist f stetig.*

Lipschitzsche Abbildungen werden daher oft auch Lipschitz-stetig genannt. Insbesondere sind die Kontraktionen Lipschitzsch (mit Lipschitz-Konstante < 1) und daher stetig.

Beweis. Wähle $\delta = \varepsilon/L$ in Proposition 116. $\square$

Proposition 119. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $a \in X$. Definiere $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = d(a,x)$, dann ist f Lipschitzsch mit Lipschitz-Konstante 1 (und damit stetig).*

Beweis. Für alle $x, y \in X$ gilt (Dreiecksungleichung):

$$d(a,x) \le d(a,y) + d(y,x), \quad d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y),$$

also $|f(x) - f(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \le d(x,y)$. $\square$

Proposition 120. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$, dann ist die Funktion $\mathbb{R}^n \ni (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j \in \mathbb{R}$ Lipschitzsch mit Lipschitz-Konstante 1 (und daher stetig).*

Beweis. Für $x = (x_1,\dots,x_n)$ und $x' = (x'_1,\dots,x'_n)$ gilt

$$\|f(x) - f(x')\| = |x_j - x'_j| = \sqrt{(x_j - x'_j)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2} = \|x - x'\|. \quad \square$$

Viele Satze aus der VL Analysis I werden mit entsprechenden Änderungen auf allgemeine metrische Räume übertragen, z.B.:

Satz 121. *Seien (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Seit $x \in X$ und $(x_n) \subset X$ mit $x = \lim x_n$. Da f stetig ist, gilt $\lim f(x_n) = f(x)$. Da g stetig ist, gilt $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \lim g\big(f(x_n)\big) = \lim (g \circ f)(x_n)$. $\square$

Für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ sind auch übliche Operationen möglich (bewiesen genau wie in der Analysis I):

Satz 122. *Sei (X,d) metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ stetig.*

Beispiel 123. Betrachte die Funktion $\mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = \sin(x_1 + x_2^2) \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $x \mapsto x_1$ und $x \mapsto x_2$ sind stetig (Proposition 120), dann ist $x \mapsto x_2^2 \equiv x_2 \cdot x_2$ stetig (Satz 122 für das Produkt) und dann auch $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto h(x) = x_1 + x_2^2 \in \mathbb{R}$ (Satz 122 für die Summe). Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (Analysis I), daher ist auch $f = \sin \circ h$ stetig (Satz 121).

Mit ähnlichen Konstruktionen zeigt man, dass z.B. alle Polynome auf $\mathbb{R}^n$ stetig sind. $\square$

Für uns werden Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ besonders wichtig. Da die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ zur komponentenweisen Konvergenz äquivalent ist, hat man die folgende Charakterisierung:

Satz 124. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Definiere $f : X \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, dann ist f genau dann stetig, wenn alle f_j stetig sind.*

Es wurde in Analysis I gezegt, dass stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen immer beschränkt sind. Eine ähnliche Aussage gilt auch in $\mathbb{R}^n$:

Satz 125. *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt*[9]*, d.h. es existiert ein $A > 0$ mit $\|x\| \le A$ für alle $x \in M$, $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist f beschränkt, d.h. es existiert $B > 0$, so dass $\|f(x)\| \le B$ für alle $x \in M$.*

Beweis. Nehme an, dass f unbeschränkt ist, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M$ mit $\|f(x_k)\| \ge k$. Schreibe $x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(m)})$, dann sind alle Folgen $(x_k^{(j)})$ beschränkt: $|x_k^{(j)}| \le \|x_k\| \le A$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i}^{(1)})$. Dann besitzt $(x_{k_i}^{(2)})$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{i_l}}^{(2)})$, dabei ist $(x_{k_{i_l}}^{(1)})$ immer nocht konvergent. Wir betrachten dann $(x_{k_{i_l}}^{(3)})$ usw. Am Ende finden wir k_i, so dass alle Teilfolgen $(x_{k_i}^{(j)})$ konvergieren. Dann konvergiert auch die Teilfolge (x_{k_i}) in $\mathbb{R}^m$, sei also $a := \lim x_{k_i}$. Da M abgeschlossen ist und $(x_{k_i}) \subset M$, gilt $a \in M$. Da f stetig ist, gilt also $f(a) = \lim f(x_{k_i})$, daher $\lim \|f(x_{k_i})\| = \|f(a)\|$. Aber aus $\|f(x_{k_i})\| \ge k_i$ folgt $\lim \|f(x_{k_i})\| = \infty$. Dieser Widerspruch zeigt, dass f beschränkt ist. □

Systeme von Differentialgleichungen

Wir werden jetzt (endlich) die Existenz von Lösungen für Differentialgleichungen besprechen. Da wir eine ziemlich allgemeine Methode nutzen werden, lohnt es sich, nicht nur eine Differentialgleichung sondern auch Systeme von Differentialgleichungen zu betrachten (allerdings sind alle Aussagen auch für $n = 1$ neu).

Nämlich, sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$. Seien $f_j : \Omega \ni (t, y_1, \ldots, y_n) \to f_j(t, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $j = 1, \ldots, n$. Ein **System von n Differentialgleichungen erster Ordnung** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big), \\ \qquad \ldots \\ y_n'(t) = f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big), \end{cases} \qquad (t, y_1, \ldots, y_n) \in \Omega. \tag{21}$$

Gesucht werden also n Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ (für $n = 1$ erhält man eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung: einige davon haben wir schon gelöst). Es ist viel bequemer, diese n Funktionen als eine einzige Funktion aufzufassen,

$$t \mapsto y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n.$$

[9]Eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heisst **kompakt**. Die Kompaktheit ist ein wichtiger topologischer Begriff.

Diese Funktion y nennen wir differenzierbar/integrierbar, falls alle y_j differenzierbar/integrierbar sind, und nach Definition

$$y'(t) = \big(y_1'(t), \dots, y_n'(t)\big), \qquad \int_a^b y = \Big(\int_a^b y_1, \dots, \int_a^b y_n\Big).$$

Das Integral erfüllt die folgende "kontinuierliche Dreiecksungleichung" (Übung!):

$$\Big\| \int_a^b y \Big\| \le \int_a^b \|y\|, \quad a \le b, \tag{22}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ ist.

Ähnlich "gruppiert" man alle Funktionen f_j in eine stetige Abbildung

$$\Omega \ni (t,y) \to F(t,y) = \big(f_1(t,y_1,\dots,y_n),\dots,f_n(t,y_1,\dots,y_n)\big) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1,\dots,y_n),$$

dann lässt sich das System (21) sehr kompakt schreiben:

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad (t,y) \in \Omega. \tag{23}$$

Gesucht wird also eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und zu jedem t die Bedingung $\big(t, y(t)\big) \in \Omega$ und die Gleichung (23) erfüllt. Das Anfangswertproblem für (21) besteht darin, zu gegebenen $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine Lösung von (23) zu finden, die die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt.

Satz 126 (Globaler Satz von Picard-Lindelöf). [10] *Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zusätzlich nehme an, dass F bzgl. der zweiten Variablen Lipschitzsch ist: es existiert ein $L > 0$, so dass*

$$\big\|F(t,y) - F(t,z)\big\| \le L\|y - z\| \text{ für alle } y, z \in \Omega \text{ und } t \in I.$$

Seien $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, dann **gibt es genau eine Lösung** *des Anfangswertproblems*

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad t \in I, \quad y(t_0) = y_0. \tag{24}$$

Der Satz heisst global, da die Lösungen für alle t definiert ist, für die F definiert ist. Falls die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt ist, kann die Lösung nur auf kleineren Intervallen definiert sein oder nicht eindeutig sein: die entsprechnden Beispiele haben wir schon erwähnt (und sehen diese nochmals später).

Der Satz 126 möchten wir in mehreren Schritten beweisen. Die allgemeine Idee ist, das Anfangswertproblem auf eine Fixpunktgleichung für eine Kontraktion zu reduzieren und dann den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Der erste Schritt ist ziemlich direkt:

[10] Auch Satz von Cauchy-Lipschitz bekannt

Lemma 127. *Eine stetige Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung vom Anfangswertproblem* (24), *wenn*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(t, y(s)\big)\, ds \text{ für alle } t \in I. \tag{25}$$

Beweis. Sei y Lösung von (24) und $t \in I$. Man integriert die beiden Seiten der Differentialgleichung zwischen t_0 und t und nutzt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds = \int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = y(t) - y(t_0),$$

und mit Hilfe der Anfangsbedingung erhält man

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds.$$

Umgekehrt, sei y Lösung von (25). Da y stetig ist, ist auch $s \mapsto F\big(t, y(s)\big)\, ds$ stetig, und damit ist $t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} F\big(t, y(s)\big)\, ds$ stetig differenzierbar. Also ist auch y stetig differenzierbar, und mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhält man $y'(t) = F\big(t, y(t)\big)$, also ist y Lösung der Differentialgleichung. Darüber hinaus gilt

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} (\dots) = y_0,$$

also genügt y auch der Anfangsbedingung. □

Beweis vom Satz 126. Zuerst nehme an, dass I ein endliches abgeschlossenes Intevrall ist und betrachte die Menge

$$X = C^0(I, \mathbb{R}^n) = \big\{ y : I \to \mathbb{R}^n \text{ stetig } \big\}.$$

Man prüft, das X ein $\mathbb{R}$-Vektorraumm mit üblichen Operationen ist, und dass

$$X \ni y \mapsto \|y\|_\infty = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$$

eine Norm ist. Dadurch wird X zu einem vollständigen metrischen Raum (Übung!) mit der Metrik

$$d(y, z) = \|y - z\|_\infty = \sup_{t \in I} \|y(t) - z(t)\|.$$

Wir betrachten jetzt die folgende Abbildung $T : X \to X$:

$$\big(T(y)\big)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds;$$

der Ausdruck auf der rechten Seite ist stetig bzgl. t (sogar differenzierbar), also ist wirklich $T(y) \in X$ für $y \in X$. Lemma 127 besagt, dass $y \in X$ genau dann das Anfangswertproblem (24) löst, wenn $T(y) = y$, d.h. genau dann, wenn y Fixpunkt von T ist. Falls wir zeigen können, dass T eine Kontraktion ist, dann folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für alle $y, z \in X$ haben wir:

$$\big(T(y)\big)(t) - \big(T(z)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(F\big(s, y(s)\big) - F\big(s, z(s)\big)\Big)\, ds.$$

Dank der kontinuierlichen Dreiecksungleichung (22) und der Lipschitz-Bedingung für F gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\big(T(y)\big)(t) - \big(T(z)\big)(t)\Big\| &\leq \Big| \int_{t_0}^{t} \Big\|F\big(s, y(s)\big) - F\big(s, z(s)\big)\Big\|\, ds\Big| \\ &\leq \Big| \int_{t_0}^{t} L\big\|y(s) - z(s)\big\|\, ds\Big| \leq L|t - t_0| \sup_{s\in I} \big\|y(s) - z(s)\big\| \leq L|I| d(y, z),\end{aligned}$$

wobei $|I|$ die Länge von I ist. Mit $M := L|I|$ gilt also

$$d\big(T(y), T(z)\big) \leq M d(y, z).$$

Für $M < 1$, d.h. für $|I| < 1/L$, ist T eine Kontraktion, und wir sind fertig.

Gilt $I \geq 1/L$ (oder überhaupt $|I| = \infty$), dann braucht man zusätzliche Konstruktionen, da der Fixpunktsatz nicht direkt anwendbar ist. Zuerst zerlegt man I in endliche Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ mit $|t_j - t_{j-1}| < 1/L$ und findet eine (eindeutig bestimmte!) Lösung zum Anfangswertproblem auf $[t_0, t_1]$ und $[t_{-1}, t_0]$ (auf diesen Intervallen ist der Fixpunktsatz anwendbar!). Dadurch erhalten wir die Werte $y_1 = y(t_1)$ und $y_{-1} = y(t_{-1})$. Dann löst man das Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(t_1) = y_1$ auf $[t_1, t_2]$ (der Fixpunktsatz ist wieder anwendbar!) und das Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(t_{-1}) = y_{-1}$ auf $[t_{-2}, t_{-1}]$ usw. Die damit konstruierte Funktion y auf I ist stetig, und auf jedem $[t_{j-1}, t_j]$ ist y Lösung der Differentialgleichung. An den Stellen t_j ist sie links- und rechtsseitig differenzierbar und beide Ableitungen sing gleich $F\big(t_j, y(t_j)\big)$, also ist y eine auf I definierte Lösung der Differentialgleichung. Damit haben wir die Existenz gezeigt. Die Eindeutigkeit zeigt man auch iterativ: durch den Fixpunktsatz ist die Lösung auf $[t_0, t_1]$ und $[t_{-1}, t_0]$ eindeutig bestimmt, damit auch die Werte $y(t_{\pm 1})$. Dann ist y auch auf $[t_1, t_2]$ und $[t_{-2}, t_{-1}]$ eindeutig bestimmt usw. □

Aus dem Beweis folgt auch ein Verfahren, mit dem man die Lösung mindestens auf einem kleinen Interval um t_0 approximieren kann: man wählt ein endliches Interval $I' \subset I$ mit $t_0 \in I'$ und $|I'| < 1/L$, dann ist y auf I' der gleichmässige Grenzwert der Folge der Funktionen (y_j): $y_1 \in X$ beliebig (z.B. $y_1(t) \equiv 0$) und $y_{n+1} = T(y_n)$.

Die Lipschitz-Bedingung für F kann in vielen Fällen durch folgendes Lemma geprüft werden.

Lemma 128. *Sei $n = 1$ und $F(t,y)$ für jedes t bzgl. y differenzierbar; diese Ableitung bzgl. y wird $\frac{\partial F}{\partial y}$ bezeichnet. F ist bzgl. y Lipschitzsch mit Lipschitz-Konstante L dann und nur dann, wenn $\left|\frac{\partial F}{\partial y}(t,y)\right| \leq L$ für alle (t,y) gilt.*

Beweis. Wie im Satz 108 (VL7). $\square$

Beispiel 129. (A) $n = 1$, $y' = y$. Hier ist $F(t,y) = y$ (definiert für alle $(t,y) \in \mathbb{R}^2$) und $\frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = 1$. Also ist F Lipschitzsch bzgl. y, und die Lösungen sind für alle t definiert. Diese Lösungen können wir explizit finden, da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, $y(t) = y(0)e^t$.

(B) $n = 1$, $y' = y^2$. Hier ist $F(t,y) = y^2$ (definiert für alle $(t,y) \in \mathbb{R}^2$), und $\frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = 2y$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}^2$, daher ist F *nicht* Lipschitzsch bzgl. y; der globale Satz von Picard-Lindelöf ist nicht anwendbar. Aber es handelt sich um eine Differentialgleichung, die man mit Hilfe der Separation der Variablen lösen kann: die einzige Lösung mit der Anfangsbedinung $y(0) = y_0$ ist $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$ (Beispiel 73). Für $y_0 > 0$ ist diese Lösung nur auf $(-\infty, 1/y_0)$ definiert.

(C) $n = 2$, $\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ oder $y' = F(t,y)$ für $y = (y_1, y_2)$ und $F(t,y) = (-y_2, y_1)$. Die Funktion F ist für alle $(t,y) \in \mathbb{R}^3$ definiert, und $\|F(t,y) - F(t,z)\| = \big\|(-y_2 + z_2, y_1 - z_1)\big\| = \|y - z\|$, also ist F Lipschitzsch bzgl. y. Daher sind alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ (=für alle t) definiert. Das ist ein System von linearen Differentialgleichungen: solche Systeme werden wir später ausführlich untersuchen (dafür werden viele Begriffe aus der linearen Algebra benötigt). Z.B. ist $y(t) = (\cos t, \sin t)$ Lösung mit $y(0) = (1,0)$. Nach dem bewiesenen Satz gibt es keine weiteren Lösungen, die diese Anfangsbedingung erfüllen.

(D) Die Funktion $F(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ ist nicht Lipschitzsch (Probleme um 0). Das Anfangswertproblem $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, hat auf $[0, +\infty)$ *mehrere* Lösungen, z.B. $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = t^2$. Also spielt die Lipschitz-Bedingung wirklich eine wichtige Rolle.

Im Beispiel (B) sieht man also, dass es sehr schöne Funktionen F gibt, für die der obige globale Satz nicht anwendbar ist. Allerdings merkt man, dass man das Problem teilweiese beheben kann, indem man auf kleineren Definitionsbereichen arbeitet. Dadurch entsteht die Idee der lokalen Existenz.

Definition 130. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $p \in X$. Eine **Umgebung** von p ist eine Teilmenge von X, die eine offene Kugel um p enthält. (Insbesondere ist jede offene Menge, die p enthält, eine Umgebung von p.)

Definition 131. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst **lokal Lipschitzsch** bzgl. y, falls es zu jedem $p \in \Omega$ eine Umgebung U von p existiert, so dass $F : U \cap \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzsch bzgl. y ist.

Satz 132 (Lokaler Satz von Picard-Lindelöf). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitzsch bzgl. y. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in \Omega$ ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad t \in (t_0 - \delta, t + \delta), \quad y(t_0) = y_0, \tag{26}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. Da F lokal Lipschitzsch bzgl. y ist, kann man ein $r > 0$ und ein $L > 0$ finden mit folgenden Eigenschaften: $K_r(t_0, y_0) \subset \Omega$ und F ist Lipschitzsch bzgl. y mit Lipschitz-Konstante L auf $K_r(t_0, y_0)$. Sei $\rho > 0$ und $(t, y) \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{K_\rho(y_0)}$, dann gilt $\|(t, y) - (t_0, y_0)\| = \sqrt{(t - t_0)^2 + \|y - y_0\|^2} \le \sqrt{\rho^2 + \rho^2} = \sqrt{2}\,\rho$. Wähle $0 < \rho < r/\sqrt{2}$, dann

$$Q_\rho := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{K_\rho(y_0)} \subset K_r(t_0, y_0).$$

Die Menge Q_ρ ist beschränkt und abgeschlossen und F ist stetig, daher (Satz 125) gibt es ein $M > 0$ mit $\sup_{(t,y) \in Q_\rho} \|F(t, y)\| \le M$. Darüber hinaus gilt immer noch

$$\big\|F(t, y) - F(t, z)\big\| \le L\|y - z\| \text{ für alle } t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho], \quad y, z \in \overline{K_\rho(y_0)}.$$

Wir wählen jetzt ein $\delta > 0$ mit $\delta < \min\big\{\rho, \frac{\rho}{M}, \frac{1}{L}\big\}$. Wir möchten nun wie im globalen Satz von Picard-Lindelöf verfahren. Betrachte

$$X = \big\{y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \overline{K_\rho(y_0)} \text{ stetig}\big\}$$

mit der Metrik $d(y, z) = \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|y(t) - z(t)\|$, dann ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum (Übung!). Jetzt definieren wir

$$T : X \to X, \quad \big(T(y)\big)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds :$$

wie in Lemma 127 sieht man, dass die Lösungen von (26) genau die Fixpunkte von T sind. Man muss allerdings zeigen, dass T wirklich X in sich abbildet: Sei $y \in X$ und $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, dann

$$\big\|\big(T(y)\big)(t) - y_0\big\| = \Big\| \int_{t_0}^{t} F\big(s, y(s)\big)\, ds \Big\| \le \Big| \int_{t_0}^{t} \big\|F\big(s, y(s)\big)\big\|\, ds \Big| \le \delta M < \rho,$$

also wirklich $\big(T(y)\big)(t) \in \overline{K_\rho(y_0)}$, und die Stetigkeit von $T(y)$ ist auch klar. Schliesslich zeigt man (genau wie im globalen Satz), dass T Kontraktion ist:

$$\begin{aligned}\Big\|\big(T(y)\big)(t) - \big(T(z)\big)(t)\Big\| &\le \Big| \int_{t_0}^{t} \Big\|F\big(s, y(s)\big) - F\big(s, z(s)\big)\Big\|\, ds \Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} L\big\|y(s) - z(s)\big\|\, ds \Big| \le L|t - t_0| \sup_{s \in I} \big\|y(s) - z(s)\big\| \le L\delta d(y, z),\end{aligned}$$

und die Wahl von δ garantiert, dass $L\delta < 1$. Also folgt die Behauptung aus dem Fixpunktsatz. □

Definition 133. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ ist eine **maximale Lösung** von $y' = F(t, y)$, falls gilt: wenn J ein Intervall ist mit $I \subset J$ und $z : J \to \mathbb{R}^n$ Lösung derselben Differentialgleichung mit $z = y$ auf I, so folgt $J = I$.

Anders gesagt, ist der Definitionsbereich einer maximalen Lösung maximal: man kann sie nicht in eine Lösung auf einem grösseren Interval fortsetzen. Z.B. ist $y(t) = y_0/(1-y_0 t)$ mit $y_0 > 0$ und dem Definitionsbereich $(-\infty, 1/y_0)$ eine maximale Lösung von $y = y^2$, da es offenbar keine stetige Fortsetzung in $1/y_0$ möglich ist.

Mit Hilfe des lokalen Satzes wird in der Übung folgendes Ergebnis bewiesen:

Satz 134. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitzsch bzgl. y. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine einzige maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad y(t_0) = y_0.$$

Diese maximale Lösung ist auf einem offenen Intervall definert.

Mit Hilfe der Sätze dieser Vorlesung kann man viele Differentialgleichungen "qualitativ" untersuchen, d.h. einige Eigenschaften der Lösungen feststellen, ohne die Gleichung explizit zu lösen (nur für wenige Differentialgleichungen gibt es Formel für Lösungen).

Beispiel 135. Betrachte wieder die maximalen Lösungen von

$$y'(t) = y(t)^2, \quad y(0) = y_0.$$

Für $y_0 = 0$ hat man die maximale Lösung $y(t) \equiv 0$, die auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Wegen der Eindeutigkeit kann keine weitere maximale Lösung den Wert 0 annehmen (also sind alle anderen Lösungen strikt positiv oder strikt negativ).

Sei z.B. $y_0 > 0$, dann gilt für die entsprechende maximale Lösung y: $y(t) > 0$, also $y'(t) = y(t)^2 > 0$, also ist y auf dem ganzen Definitionsbereich streng steigend. Laut Satz 134 ist y auf einem offenen Intevrall (a, b) definiert, wobei $a < 0$ und $b > 0$. Wir bezeichnen

$$A := \lim_{t \to a^+} y(t) \geq 0, \quad B := \lim_{t \to b^-} y(t) > 0.$$

Nehme an, dass $a > -\infty$. Nach dem lokalen Satz 132 gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung z vom Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(a) = A$, auf $(a-\delta, a+\delta)$. Dann gilt $y = z$ auf $(a, a+\delta)$ und man kann y in eine Lösung auf $(a-\delta, b)$ fortsetzen, indem man $y(t) = z(t)$ für $t \in (a-\delta, a]$ setzt, d.h. y war nicht maximal: Widerspruch! Also gilt $a = -\infty$. Nehme an, dass $A > 0$, dann $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t)^2 = A^2 > 0$, und daraus würde $\lim_{t\to-\infty} y(t) \to -\infty$ folgen (Übung!). Daher gilt $A = 0$. Also $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$. Analog zeigt man, dass $B = +\infty$. Alle diesen Behauptungen haben wir bewiesen, ohne die Differentialgleichung zu lösen! Allerdings kann man mit diesem Zugang nicht entscheiden, ob b endlich oder unendlich ist: das wird nur durch die explizite Formel für Lösungen erledigt ($b = 1/y_0$ ist endlich).

Vorlesung 9

Reduktion von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung

Bislang haben wir nur Differentialgleichungen bzw. Systeme erster Ordnung betrachtet. Allerdings kann man auch Differentialgleichungen höherer Ordnung betrachten (d.h. Differentialgleichungen, die höhere Ableitungen einer unbekannten Funktion enthalten: z.B. sind in der Physik gewisse Differentialgleichungen zweiter Ordnung besonders wichtig). Sei $n \in \mathbb{N}$ und f Funktion von $n+1$ Variablen, dann heisst die Gleichung

$$y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) \tag{27}$$

gewöhnliche Differentialgleichung $n$ter Ordnung. Wichtig ist, dass man diese auf ein *System* erster Ordnung reduzieren kann: dafür betrachtet man die Funktionen $z_j(t) = y^{(j)}(t)$, $j = 0, \dots, n-1$, dann

$$\begin{aligned}
z_0' &= y' = z_1,\\
z_1' &= (y')' = y'' = z_2\\
&\dots\\
z_{n-2}' &= (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = z_{n-1},\\
z_{n-1}' &= (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) = f(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}).
\end{aligned}$$

Definiere jetzt folgende Vektorfunktionen:

$$\begin{aligned}
z : t &\mapsto \big(z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)\big) \in \mathbb{R}^n,\\
F : (t, z) &\mapsto \big(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, f(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})\big) \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{28}$$

dann lässt sich das obige System für z_j als $z' = F(t, z)$ schreiben. Wir haben also folgendes bewiesen:

Satz 136. *Eine Funktion y ist genau dann Lösung von (27), wenn die Vektorfunktion $z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ Lösung von $z' = F(t, z)$ mit F aus (28) ist.*

Analog betrachten man auch Systeme von mehreren Gleichungen der Form (27).

Beispiel 137. (a) Um die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = y^3 + 1$ zu untersuchen, betrachte $z = (z_0, z_1)$ mit $z_0 = y$ und $z_1 = y'$, dann

$$\begin{cases} z_0' = z_1,\\ z_1' = z_0^3 + 1. \end{cases}$$

Ist (z_0, z_1) Lösung des Systems, so ist z_0 Lösung der usprünglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(b) Das System

$$\begin{cases} y'' = y^2 + z, \\ z''' = yz. \end{cases} \tag{29}$$

besteht aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer Differentialgleichung dritter Ordnung. Hier kann man $u = (y, y', z, z', z'') \equiv (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ einführen und das System wie folgt äquivalent umschreiben:

$$\begin{cases} u_1' = y' = u_2, \\ u_2' = (y')' = y'' = y^2 + z = u_1^2 + u_3, \\ u_3' = z' = u_4, \\ u_4' = (z')' = z'' = u_5, \\ u_5' = (z'')' = z''' = yz = u_1 u_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_1^2 + u_3, \\ u_3' = u_4, \\ u_4' = u_5, \\ u_5' = u_1 u_3. \end{cases}$$

Ist eine Vektorfunktion $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ Lösung von diesem neuen System erster Ordnung, so ist (u_1, u_3) Lösung vom (29).

Die Reduktion auf ein System erster Ordnung erlaubt es, die Existenz- und Eindeutigkeitsätze auf diese neue Klasse von Differentialgleichungen zu übertragen. Ein Anfangswertproblem für die Gleichung $n$ter Ordnung (27) besteht darin, eine Lösung y zu finden, die die **Anfangsbedingung $n$ter Ordnung**

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

erfüllt, wobei $t_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ vorgegeben sind. Dieses Anfangsproblem hat genau dann eine (eindeutig bestimmte) Lösung, wenn das Anfangswertproblem für das zugehörige System $z' = F(t, z)$, $z(t_0) = (y_0, \dots, y_{n-1})$, eine (eindeutig bestimmte) Lösung besitzt (das gilt z.B. unter den Lipschitz-Bedingungen aus der vorherigen Vorlesung). Falls $n \geq 2$, dann ist die alleinige Angabe des Anfangswerts $y(t_0) = y_0$ *nicht ausreichend*, um die Lösung eindeutig zu bestimmen. Z.B. hat das Problem $y'' = y$, $y(0) = 0$, unendlich viele Lösungen $y(t) = C(e^t - e^{-t})$ mit $C \in \mathbb{R}$ (wir zeigen später, dass es keine weiteren Lösungen gibt!).

Die Reduktion einer Gleichung auf ein System ist nicht immer praktisch: zwar kann man einige theoretische Resultate direkt übertragen, aber muss man dann mit mehreren unbekannten Funktionen arbeiten. Zum Glück gibt es für einige wichtige Klassen von Differentialgleichungen ziemlich direkte Lösungsmethoden: eine dieser Klassen besteht aus linearen Differentialgleichungen.

Lineare Differentialgleichungen $n$ter Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$, und $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = b(x), \quad x \in I, \tag{30}$$

nennt man *lineare Differentialgleichung nter Ordnung*. Analog zu linearen Differentialgleichungen erster Ordnung möchten wir jetzt die Struktur der Lösungsmenge verstehen. Zuerst klären wir die grundsätzliche Frage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen:

Satz 138. *Seien $t_0 \in I$ und $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

für die Gleichung (30) *eine eindeutig bestimmte Lösung $y \in C^n(I)$.*

Beweis. Das entsprechende Anfangswertproblem für das zugehörige System erster Ordnung ist

$$\begin{gathered} z' = F(t,z), \quad z(t_0) = Z, \qquad (31)\\ z \equiv (z_0, \dots, z_{n-1}) := (y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad Z = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}),\\ F(t,z) = \big(z_1, \dots, z_{n-1}, b(t) - a_{n-1}(t)z_{n-1} - \dots - a_0(t)z_0\big). \end{gathered}$$

Die Abbildung F ist offenbar Lipschitzsch bzgl. z_j, also besitzt (31) eine eindeutig bestimmte auf I definierte Lösung $z \in C^1(I)$ nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf (Satz 126). Da die beiden Anfangswertprobleme äquivalent sind, folgt die Behauptung über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Um zu zeigen, dass $y \in C^n(I)$, merken wir zuerst, dass $z_{n-1} \in C^1(I)$, also folgt aus $z'_{n-2} = z_{n-1}$ dass $z_{n-1} \in C^2(I)$ und durch Iteration $y = z_0 \in C^n(I)$. □

Bemerkung 139. Satz 138 gilt auch für komplexe Anfangswerte y_j, dann ist auch die (eindeutig bestimmte) Lösung komplexwertig. Das sieht man mit folgendem Trick: eine komplexwertige Funktion y ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ Lösungen sind (da alle Koeffizienten a_j reellwertig sind). Für $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ erhält man ein reellwertiges Anfangswertproblem wie im Satz 138, daher sind sie eindeutig bestimmt. □

Jetzt müssen wir gewisse Begriffe der linearen Algebra aktiv nutzen. Bezeichne

$$\mathbb{K} := \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

und betrachte die $\mathbb{K}$-Vektorräume

$$U = C^n(I) = \{y : I \to \mathbb{K} \ n \text{ mal stetig differenzierbar}\}, \qquad V = C^0(I)$$

und die lineare Abblidung (Operator) $P : U \to V$,

$$(Py)(x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x), \quad x \in I.$$

Die Gleichung (30) hat dann die Form $P(y) = b$. Wir sind also in einem ziemlich allgemeinen algebraischen Rahmen.

Satz 140. *Seien U, V Vektorräume, $P : U \to V$ lineare Abbildung, $b \in V$. Sei $y_s \in U$ mit $P(y_s) = b$, dann gilt $P^{-1}(b) = P^{-1}(0) + y_s$, d.h.*

$$\big\{y \in U : P(y) = b\big\} = \big\{y_H + y_s : y_H \in U \text{ mit } P(y_H) = 0\big\}.$$

Beweis. Sei $y \in U$ mit $P(y) = b$. Betrachte $y_H = y - y_s$, dann $y = y_H + y_s$ und $P(y_H) = P(y - y_s) = P(y) - P(y_s) = b - b = 0$. Umgekehrt, sei $y_H \in U$ mit $P(y_H) = 0$, dann $P(y_H + y_s) = P(y_H) + P(y_s) = 0 + b = b$. □

Die Menge $\big\{y \in U : P(y) = b\big\}$ ist offenbar die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung $P(y) = b$ (auch "allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung" genannt), wobei $\{y_h \in V : P(y_h) = 0\big\}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(y) = 0$ ist. Den Vektor y_s nennt man oft "spezielle Lösung" der inhomogenen Gleichung. Daher kommt man (wieder) zum folgenden allgemeinen Prinzip:

$$\begin{aligned}&\text{Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung } P(y) = b\\ &\qquad = \text{eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung}\\ &\qquad\qquad + \text{ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung } P(y) = 0.\end{aligned}$$

Die Aufgabe, alle Lösungen von (30) zu finden,zerlegt man also in zwei Schritte:

(a) Bestimme alle Lösungen der *homogenen* Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I, \tag{32}$$

(b) Bestimme *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (30).

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Schritt (a), und den Schritt (b) werden wir erst in der nächsten Vorelsung besprechen.

Die Gleichung (32) schreibt man kurz als $P(y) = 0$. Da P eine lineare Abbildung ist und die Nullfunktion das neutrale Element in V ist, ist die Lösungsmenge genau $\ker P$ = Kern/Nullraum von P. Aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass der Nullraum einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist (in unserem Fall bedeutet es, dass eine lineare Kombination von zwei Lösungen von (32) wieder eine Lösung davon ist). Falls man $\ker P$ (=die Lösungsmenge) beschreiben möchte, kann man ihre Dimension und eine Basis von angeben: wir werden jetzt die entsprechenden Definition wiederholen.

Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $y_1, \ldots, y_m \in U$. Die Familie $(y_1, \ldots, y_m)$ heisst $\mathbb{K}$-*linear unabhängig*, falls aus der Gleichheit $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m = 0$ mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$ folgt, dass alle Koeffizienten α_j Null sind (sonst heisst sie $\mathbb{K}$-linear abhängig). Sei L ein Untervektorraum von U, dann definiert man die **Dimension** von L durch

$$\dim L = \dim_{\mathbb{K}} L = \sup\big\{m : \text{ es existieren } m\ \mathbb{K}\text{-linear unabhängige Vektoren in } L\big\}.$$

Gilt $m = \dim L < \infty$ und $(y_1, \dots, y_m) \subset L$ eine $\mathbb{K}$-linear unabhängige Familie, so ist $(y_1, \dots, y_m)$ eine **Basis** von L. Eine Familie $(y_1, \dots, y_m) \subset$ ist genau dann Basis, wenn sich jeder Vektor $y \in L$ *eindeutig* als lineare Kombination von y_j schreiben lässt. Sind L und M zwei Vektorräume und existiert eine *bijektive lineare* Abbildung $\Phi : L \to M$, so haben L und M dieselbe Dimension.

Für uns wird jetzt vor allem der Vektorram $C^0(I)$ und seine Untervektorräume wichtig (da alle Lösungen in diesem Raum liegen). Wichtig: Die Gleichheit $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ für Funktionen y_1, y_2 bedeutet, dass $\alpha y_1(x) + \beta y_1(x) = 0$ für *alle* $x \in I$ gilt (und *nicht nur für ein* x). Z.B. gilt für $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \sin(2x)$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ für $x = 0$, das bedeutet aber nicht, dass y_1 und y_2 linear abhängig sind! Eigentlich sind y_1 und y_2 linear unabhängig: falls $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ für alle x, dann erhält man für $x = \pi/2$ die Gleichheit $\alpha = 0$, also $\beta y_2(x) = 0$ für alle x. Setzt man jetzt $x = \pi/4$ ein, so erhält man $\beta = 0$.

Beispiel 141. (A) Sei $U = C^0(\mathbb{R})$ (gesehen als $\mathbb{R}$-Vektorraum). Betrachte $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$. Sind diese Funktionen linear abhängig?

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, d.h. $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $\alpha \sin x + \beta \cos x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze $x = 0$, dann $\beta = 0$, also $\alpha \sin x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze jetzt $x = \pi/2$ ein, dann auch $\alpha = 0$. Also sind y_1 und y_2 linear unabhängig. Betrachtet man zusätzlich $y_3(x) = \sin(x + 1)$, so sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig: für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + 1) = \sin x \cos 1 + \cos x \sin 1$, also $(\cos 1) y_1(x) + (\sin 1) y_2(x) + (-1) y_3(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(B) Die Funktionen $f_k(x) = x^k$, $k = 0, \dots, n$, sind $\mathbb{K}$-linear unabhängig. Beweis: Seien $\alpha_k \in \mathbb{K}$ mit $P = \alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_n f_n = 0$, d.h.

$$P(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

dann $\alpha_n = \lim_{x \to +\infty} P(x)/x^n = 0$ und $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$. Analog $\alpha_{n-1} = 0$ usw., am Ende sind alle α_k gleich Null.

(C) Die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, e^{ix} sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig, aber $\mathbb{C}$-linear abhängig (Übung!).

Das Beispiel (B) kann man wie folgt verallgemeinern (diese Verallgemeinerung wird noch in der heutigen Vorlesung eine wichtige Rolle spielen).

Satz 142. *Seien $n, N \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, dann sind die Funktionen*

$$f_{j,k} : x \mapsto x^k e^{\lambda_j x} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots N,$$

$\mathbb{K}$-linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir beweisen zuerst folgende Hilfsaussage:

$$\text{Is } p \text{ ein Polynom und } \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ so gibt es ein Polynom } q \text{ mit } \operatorname{Grad} q = \operatorname{Grad} p \text{ und } \big(p(x)e^{\mu x}\big)' = q(x)e^{\mu x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Beweis von (33): es gilt $\big(p(x)e^{\mu x}\big)' = \big(p'(x) + \mu p(x)\big)e^{\mu x}$, und $q(x) = p'(x) + \mu p(x)$ ist ein Polynom. Wegen $\mu \neq 0$ und $\operatorname{Grad} p' < \operatorname{Grad} p$, gilt $\operatorname{Grad} q = \operatorname{Grad} p$.

Seien $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{N} \alpha_{jk} x^k e^{\lambda_j x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } p_j(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \alpha_{jk} x^k. \tag{34}$$

Multipliziere die beiden Seite mit $e^{-\lambda_n x}$:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n-1} p_j(x)e^{(\lambda_j - \lambda_n)x} + p_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{35}$$

Gilt $n = 1$, so erhält man schon $p_1(x) \equiv 0$, und aus dem Beispiel (B) folgt, dass alle α_{1k} Null sind. Sei $n \geq 2$ und dann $p_n^{(N+1)} = 0$. Leite die Gleichheit (35) $(N+1)$-mal ab, dann gilt laut (33):

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n-1} q_j(x)e^{(\lambda_j - \lambda_n)x} + p_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei q_j Polynome sind mit $\operatorname{Grad} q_j = \operatorname{Grad} p_j$. Da diese Summe jetzt $(n-1) < n$ Summanden vom selben Typ enthält, folgt durch die Induktion, dass alle Polynome q_j Null sind, und dann wegen $\deg p_j = \deg q_j$ auch $p_j \equiv 0$. As $p_j \equiv 0$ folgt $\alpha_{jk} = 0$ für $k = 0, \ldots, N$ (Beispiel B). □

Satz 143. *Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (32) *ist n-dimensional.*

Beweis. Sei L der Lösungsraum. Wähle $t_0 \in I$ und definiere $\Phi : L \to \mathbb{K}^n$ durch

$$\Phi(y) = \big(y(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)\big).$$

Es ist klar, das Φ eine lineare Abbildung istn und sie ist injektiv: die einzige Lösung y mit $\Phi(y) = 0$ ist die Nullfunktion (Eindeutigkeit!). Sie ist auch surjektiv: nach dem Satz 138/Bemerkung 139 gibt es zu jedem $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung y mit $\Phi(y) = (y_0, \ldots, y_{n-1})$. Aus der Existenz einer bijektiven linearen Abbildung $\Phi : L \to \mathbb{K}^n$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} L = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. □

Definition 144. Ein **$\mathbb{K}$-Fundamentalsystem** einer homogenen linearen Differentialgleichung ist eine Basis des Raumes der $\mathbb{K}$-wertigen Lösungen.

Sind $(y_1, \ldots, y_n)$ eine $\mathbb{K}$-Fundamentalsystem, so ist jede $\mathbb{K}$-wertige Lösung y_H derselben homogenen Gleichung der Form $y_H = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, wobei $c_j \in \mathbb{K}$ beliebig aber durch y_H eindeutig bestimmt sind: damit ist die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung vollständig beschrieben. Alle vorherigen Konstruktionen kann man wie folgt zusammenfassen.

Satz 145 (Lösungen der inhomogenen Gleichung). *Sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein $\mathbb{K}$-Fundamentalsystem der homogenen Gleichung* (32) *und y_s irgendeine $\mathbb{K}$-wertige Lösung der inhomogenen Gleichung* (30)*. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}$ ist genau dann Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn es (eindeutig bestimmte) Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ existieren mit*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_s(x) \textit{ für alle } x \in I.$$

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für $n \geq 2$ und allgemeine Funktionen a_j gibt es leider (noch) keine allgemeine Methode, ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichungen (32) explizit zu bestimmen. Zum Glück, gibt es für konstante Koeffizienten eine vollständige Theorie, die wir jetzt angehen. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ betrachte die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Für $n = 1$ hat man Lösungen $y(x) = ce^{-a_0 x}$. Wir prüfen zuerst, ob es auch für $n \geq 2$ Lösungen $y(x) = e^{\lambda x}$ existieren. Für solche y gilt $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} = \lambda^k y(x)$, also $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = P(\lambda)y$, wobei das Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

das charakteristische Polynom der Differentialgleichung heisst. Also ist die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung von (36), wenn $P(\lambda) = 0$, d.h. wenn λ Nullstelle vom charakterischen Polynom ist. Seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die *verschiedenen* (komplexen) Nullstellen von P: es gilt natürlich $k \leq n$. Wir betrachten jetzt zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: Einfache Nullstellen (*k*=*n*). Dann haben wir n (komplexe) Lösungen $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$, $j = 1, \ldots, n$. Diese n Lösungen sind linear unabhängig (Satz 142 mit $N = 0$) und bilden daher ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem. Alle Lösungen sind also lineare Kombinationen von y_j:

Beispiel 146. (A) $y'' + 2y - 3 = 0$. Das charakterischtische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$, die Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 1$ sind einfach, also bilden $y_1(x) = e^{-3x}$ und $y_2(x) = e^x$ ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem (und dann auch ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem, da die beiden Lösungen reellwertig sind).

(B) $y'' + y = 0$. Die Nullstellen von $\lambda^2 + 1 = 0$ sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$, also bilden $y_1(x) = e^{ix}$ und $y_2(x) = e^{-ix}$ ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem.

Möglichkeit 2: Mehrfache Nullstellen (*k*<*n*). Betrachte z.B. $y'' = 0$, d.h. $P(\lambda) = \lambda^2$, dann ist 0 die einzige (aber zweifache) Nullstelle. Die Differentialgleichung können wir aber lösen: aus $y'' = 0$ folgt $y' = a =$ Konstante, also $y(x) = ax + b$, wobei a, b beliebige Konstanten sind. Ein mögliches Fundamentalsystem ist also $(1, x)$.

Um den allgemeinen Fall zu betrachten nutzen wir die Operatorschreibweise. Sei $D := \dfrac{d}{dx}$, das ist eine lineare Abbildung (=Operator) z.B. von $C^1(\mathbb{R})$ nach $C^0(\mathbb{R})$. Auf $z \in C^k(\mathbb{R})$ kann man D sogar k-mal anwenden $\underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k\text{-mal}}(y) = y^{(k)}$. Wir kürzen ab, $D^k := \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k\text{-mal}}$, und schreiben lieber $D^k y$ statt $D^k(y)$, dann hat die Gleichung (36) die Form

$$D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = 0, \text{ oder } P(D)y = 0,$$

wobei P das charakteristische Polynom ist und

$$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

eine lineare Abbildung von $C^n(\mathbb{R})$ nach $C^0(\mathbb{R})$. Analog kann man $P(L)$ für andere lineare Abbildungen L definieren, und man kann prüfen (Übung), dass für beliebige Polynome P, Q die Identität $(PQ)(L) = P(L)Q(L)$ gilt. Z.B. sei $P(\lambda) = \lambda^2$ und $L = D + a$ mit $a \in \mathbb{C}$, d.h. $Lu = Du + au = u' + au$, dann

$$\begin{aligned} P(L)u = P(D+a) &= (D+a)^2 u = (D+a) \circ (D+a)u = (D+a)(Du + au) \\ &= D^2 u + aDu + D(au) + a^2 u = (D^2 + 2aD + a^2)u = u'' + 2au' + a^2 u. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jede n-mal stetig differenzierbare Funktion f und $a \in \mathbb{C}$:

$$(D-a)\big(f(x)e^{ax}\big) = f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} - afe^{ax} = f'(x)e^{ax} = e^{ax} Df(x),$$

also durch die Induktion

$$(D-a)^n\big(f(x)e^{ax}\big) = e^{ax} D^n f(x) = e^{ax} f^{(n)}(x). \tag{37}$$

Satz 147. *Sei P das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung (36) und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Nullstellen von P mit Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_k$ (also $m_1 + \cdots + m_k = n$). Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{ll} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots & \\ e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k - 1} e^{\lambda_k x}, \end{array} \tag{38}$$

ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Beweis. Wir prüfen zuerst, dass diese Funktionen wirklich Lösungen von (36) sind. Betrachte die Funktion $y : x \mapsto x^m e^{\lambda_k x}$ mit $m \leq m_k - 1$. Nach (37) erfüllt diese Funktion $(D - \lambda_k)^{m_k} y(x) = e^{\lambda_k x} (x^m)^{(m_k)} = 0$. Schreibe das Polynom P als Produkt $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, dann $P(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k}$ und

$$P(D)y = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(D - \lambda_k)^{m_k} y}_{=0} = 0,$$

d.h. y ist Lösung von (36). Da λ_k eine beliebig gewählte Nullstelle von P war, sind alle Funktionen $y(x) = x^m e^{\lambda_j x}$ mit $m \leq m_j - 1$ Lösungen. Die n Funktionen (38) sind $\mathbb{C}$-linear unabhängig (Satz 142), daher bilden sie eine Basis des n-dimensionalen Lösungsraumes. $\square$

Da wir am Anfang eine relle Differentialgleichung hatten, wäre es sinnvoll, auch ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem konstruieren zu können. Falls alle λ_j reell sind, dann sind die Lösungen (38) reell, und sie sind (immer noch) $\mathbb{R}$-linear unabhängig, daher bilden sie auch ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem. Falls irgendwelche λ_j nichtreell sind, dann nutzt man folgende Idee: falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine Nullstelle von P ist, das ist auch $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$ Nullstelle mit derselben Multiplizität. Die zugehörigen Paare von komplexwertigen Lösungen sind

$$f_j(x) = x^j e^{(\mu+i\nu)x} = x^j e^{\mu x} e^{i\nu x}, \quad g_j(x) = x^j e^{(\mu-i\nu)x} = x^j e^{\mu x} e^{-i\nu x} = \overline{f_j(x)},$$

und diese ersetzt man durch neue Paare reellwertiger (!) Lösungen

$$\frac{f_j + g_j}{2} = \operatorname{Re} f_j = x^j e^{\mu x} \cos(\nu x), \quad \frac{f_j - g_j}{2i} = \operatorname{Im} f_j = x^j e^{\mu x} \sin(\nu x).$$

Die neue Familie ist immer noch $\mathbb{C}$-linear unabhängig (einfache Übung aus der linearen Algebra) und damit auch $\mathbb{R}$-linear unabhängig.

Satz 148. *Sei P das charakteristische Polynom P der Differentialgleichung* (36)*. Ferner seien Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen rellen Nullstellen von P mit Multiplizitäten $m_1, \dots, m_r$ und $\mu_1 \pm i\nu_1, \dots, \mu_s \pm i\nu_s$ die verschiedenen nichtreellen Nullstellen von P mit Multiplizitäten $m'_1, \dots, m'_s$ (also $m_1 + \dots + m_r + 2m'_1 + \dots + 2m'_s = n$). Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{aligned}
&x^\ell e^{\lambda_j x}, && \ell = 0, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, \dots, r,\\
&x^\ell e^{\mu_j x} \cos(\nu_j x), && \ell = 0, \dots, m'_j - 1, \quad j = 1, \dots, s,\\
&x^\ell e^{\mu_j x} \sin(\nu_j x), && \ell = 0, \dots, m'_j - 1, \quad j = 1, \dots, s,
\end{aligned}$$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung (36)*.*

Beispiel 149. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$. Das charakterische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$. Man findet eine Nullstelle (-1) und faktorisiert P wie folgt:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda+1)(\lambda^2+1)^2\\
&= (\lambda+1)\big((\lambda-i)(\lambda+i)\big)^2 = (\lambda+1)(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2.
\end{aligned}$$

Wir haben also eine einfache relle Nullstelle -1, und zweifache Nullstellen $\pm i$. Die Funktionen $e^{-x}, e^{\pm ix}, xe^{\pm ix}$ bilden also eine Basis im Raum der komplexwertigen Lösungen ($\mathbb{C}$-Fundamentalsystem). Die Funktionen $e^{-x}, \cos x, x\cos x, \sin x, x \sin x$ bilden eine Basis im Raum der reellwertigen Lösungen ($\mathbb{R}$-Fundamentalsystem): man nimmt $(\cos x, \sin x)$ statt (e^{ix}, e^{-ix}) und $(x\cos x, x\sin x)$ statt (xe^{ix}, xe^{-ix}).

Vorlesung 10

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit *inhomogenen* linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung,

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \quad \Leftrightarrow \quad Py = b,$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ und $b : I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen sind ($I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall). Die Struktur der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung haben wir in der letzten Vorlesung besprochen, jetzt brauchen wir einige Methoden, mit deren Hilfe man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen kann. Die Funktion b bezeichnet man oft als die *Inhomogenität* der Gleichung. Wir machen zuerst einige elementare Bemerkungen.

Satz 150. *(a) Seien $y_j(x)$ Lösungen von $Py = b_j$ und $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, dann ist $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m$ Lösung von $Py = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m$.*

(b) Sei z eine komplexwertige Lösung von $Py = b$, dann ist $\overline{z}$ Lösung von $Py = \overline{b}$, $\operatorname{Re} z$ Lösung von $Py = \operatorname{Re} b$, $\operatorname{Im} z$ Lösung von $Py = \operatorname{Im} b$.

Beweis. (a) Da P eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist, gilt

$$P(\alpha_1 y_1 + \cdot + \alpha_m y_m) = \alpha_1 P y_1 + \cdots + \alpha_m P y_m = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m.$$

(b) Hier nutzt man zusätzlich, dass die Koeffizienten a_j reellwertig sind:

$$\begin{aligned} P(D)\overline{z} &= (\overline{z})^{(n)} + a_{n-1}(\overline{z})^{(n-1)} + \cdots + a_1(\overline{z})' + a_0\overline{z} \\ &= \overline{z^{(n)}(x) + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z' + a_0 z} = \overline{b}. \end{aligned}$$

Die Aussagen über $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ beweist man analog. □

Konstante Koeffizienten und spezielle Inhomogenitäten

Wir betrachten zuerst den "einfachen" Fall,

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x) \tag{39}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und speziellen Funktionen b.

Sei $b(x) = e^{\mu x}$ mit $\mu \in \mathbb{C}$. Suche nach einer Lösung der Form $y(x) = ce^{\mu x}$. Das Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung ergibt $y^{(k)}(x) = c\mu^k e^{\mu x}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = cP(\mu)e^{\mu x},$$

wobei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ das charakteristische Polynom ist. Also ist $y(x) = ce^{\mu x}$ genau dann Lösung, wenn $cP(\mu)e^{\mu x} = e^{\mu x}$ für alle x. Falls $P(\mu) \neq 0$, nimmt man $c = \frac{1}{P(\mu)}$, und $y(x) = \frac{1}{P(\mu)}\, e^{\mu x}$ ist die gesuchte spezielle Lösung, sonst (für $P(\mu) = 0$) gibt es keine Lösung der Form $x \mapsto ce^{\mu x}$.

Falls $P(\mu) = 0$, braucht man einen anderen Zugang: dafür nutzt man wieder die Operatorschreibweise. Sei μ eine Nullstelle von P mit der Multiplizität k, dann lässt sich P als $P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \mu)^k$ zerlegen, wobei Q ein Polynom ist mit $Q(\mu) \neq 0$, und man kann die Gleichung (39), d.h. $P(D)y(x) = e^{\mu x}$, als

$$Q(D)(D-\mu)^k y(x) = e^{\mu x}, \quad D = \frac{d}{dx},$$

umschreiben. Also können wir versuchen, zuerst eine Lösung z von $Q(D)z(x) = e^{\mu x}$ zu finden und danach eine Lösung von $(D-\mu)^k y(x) = z(x)$ zu bestimmen.

Die Gleichung $Q(D)z(x) = e^{\mu x}$ besitzt eine Lösung $z(x) = \frac{1}{Q(\mu)} e^{\mu x}$ (das haben wir oben schon besprochen). Betrachte jetzt $(D-\mu)^k y(x) = z(x) = \frac{1}{Q(\mu)} e^{\mu x}$ und nutze den Ansatz $y(x) = s(x)e^{\mu x}$ und die Gleichheit (37) aus der letzten Vorlesung:

$$(D-\mu)^k y(x) = (D-\mu)^k \big(s(x)e^{\mu x}\big) = e^{\mu x} D^k s(x) = e^{\mu x} s^{(k)}(x) = \tfrac{1}{Q(\mu)} e^{\mu x},$$

d.h. $s^{(k)}(x) = \frac{1}{Q(\mu)}$. Die Gleichung $u^{(k)} = 1$ hat Lösung $u(x) = \frac{x^k}{k!}$, also kann man $s(x) = \frac{x^k}{k!Q(\mu)}$ nehmen, und damit erhält man die Lösung $y(x) = \frac{x^k}{k!Q(\mu)}\, e^{\mu x}$ von (39). Diesen Asudruck wollen wir aber weiter vereinfachen: aus der Darstellung

$$P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda-\mu)^k = Q(\mu)(\lambda-\mu)^k + O(|\lambda-\mu|^{k+1}), \quad \lambda \to \mu,$$

(Taylor-Formel!) folgt $Q(\mu) = \frac{P^{(k)}(\mu)}{k!}$ (das kann man auch durch die Induktion zeigen), also $y(x) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)}\, x^k e^{\mu x}$. Daraus entsteht auch eine Methode, die Multiplizität k zu bestimmen, ohne das Polynom P zerlegen zu müssen:

$$k = \min\big\{ j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ mit } P^{(j)}(\mu) \neq 0 \big\}. \tag{40}$$

Alle obigen Kostruktionen können wir wie folgt zusammenfassen:

Satz 151 (Spezielle Lösung für spezielle Inhomogenität). *Sei $\mu \in \mathbb{C}$, $b(x) = e^{\mu x}$, P das charakterische Polynom der Differentialgleichung* (39) *mit konstanten Koeffizienten. Sei k wie in* (40)*, dann ist $y(x) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)}\, x^k e^{\mu x}$ Lösung von* (39).

Bemerkung 152. Analog kann man zeigen, dass die Gleichung (39) mit Inhomogenitäten $b(x) = x^m e^{\mu x}$ Lösungen der Form $y(x) = x^k R(x) e^{\mu x}$ besitzt, wobei R ein Polynom mit $\operatorname{Grad} R = m$ ist (k ist immer noch wie in (40)). In den Übungen kann man auch diesen Ansatz ohne Beweis nutzen.

Beispiel 153. (a) $y'' + 3y' + 2y = e^x$. Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, die Inhomogenität hat die spezielle Form $e^{\mu x}$ mit $\mu = 1$, wobei $P(\mu) = P(1) = 6 \neq 0$, also hat man eine spezielle Lösung $y(x) = \frac{1}{6}\, e^x$.

(b) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. In diesem Fall ist $\mu = -1$ Nullstelle von P: $P(-1) = 0$ aber $P'(-1) = (2\lambda + 3)|_{\lambda=-1} = 1 \neq 0$, also ist die Multiplizität 1, und wir haben Lösung $y(x) = xe^{-x}$. Falls man nicht sicher ist, kann man die gefundene Funktion in die Gleichung einsetzen um nochmals zu prüfen, ob alles stimmt:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x}, \quad y'' = -2e^{-x} + xe^{-x},$$
$$y'' + 3y' + 2y = -2e^{-x} + xe^{-x} + 3e^{-x} - 3xe^{-x} + 2xe^{-x} = e^{-x}.$$

(c) $y'' + 3y' + 2y = xe^x$. Da 1 keine Nullstelle von P ist, suchen wir nach einer Lösung den form $y(x) = (ax + b)e^x$ (der Term $ax + b$ hat denselben Grad als der polynomiale Faktor in der Inhomogenität). Dieser Ansatz wird in die Gleichung eingesetzt: wir haben $y' = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$ und $y'' = (ax+2a+b)e^x$,

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= (ax + 2a + b)e^x + 3(ax + a + b)e^x + 2(ax + b)e^x \\ &= \big(6ax + (5a + 6b)\big)e^x. \end{aligned}$$

Um $y'' + 3y' + 2y = xe^x = (1 \cdot x + 0)e^x$ zu erfüllen, muss man also a und b mit $6a = 1$ und $5a + 6b = 0$ nehmen: also $a = \frac{1}{6}$ und $b = -\frac{5}{36}$, und die spezielle Lösung ist

$$y(x) = \big(\tfrac{1}{6}\,x - \tfrac{5}{36}\big)e^x.$$

(d) Um eine spezielle Lösung z von $y'' + y = 2e^x + e^{-3x}$ zu finden, betrachten wir $y'' + y = e^x$ (mit spezieller Lösung $y_1 = \frac{1}{2}\,e^x$) und $y'' + y = e^{-3x}$ (mit spezieller Lösung $y_2(x) = \frac{1}{10}e^{-3x}$), dann ist $y = 2y_1 + y_2 = e^x + \frac{1}{10}\,e^{-3x}$ spezielle Lösung der usprünglichen inhomogenen Differentialgleichung.

(e) $y'' + y' - y = \sin x$. Man merkt, dass $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Wir können also ein z finden mit $z'' + z' - z = e^{ix}$ und dann nehmen wir $y = \operatorname{Im} z$. Aber für z haben wir die spezielle Inhomogenität $e^{\mu x}$, wobei $\mu = i$ keine Nullstelle vom charakterischen Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1$ ist: $P(i) = -2 + i$. Also

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{1}{P(i)}e^{ix} = -\tfrac{1}{2-i}\,e^{ix} = -\tfrac{2+i}{5}(\cos x + i \sin x) \\ &= \big(-\tfrac{2}{5}\,\cos x + \tfrac{1}{5}\sin x\big) + i\big(-\tfrac{1}{5}\cos x - \tfrac{2}{5}\sin x\big), \end{aligned}$$

und $y(x) = \operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$.

Variation der Konstanten

Falls b keine spezielle Inhomogenität ist (d.h. keine lineare Kombination von Produkten von Polynomen, trigonometrischen und Exponentialfunktionen), und/oder falls die Koeffizienten a_j nichtkonstant sind, kann man das Problem der speziellen Lösung auf das Berechnen von Integralen reduzieren. Diese Methode nennt man Variation der Konstanten (analog zu linearen Differentialgleichungen erster Ordnung).

Betrachte die allgemeine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \tag{41}$$

und sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung. Zur Erinnerung, die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung schreibt sich als $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, wobei c_j beliebige Konstanten sind. Für eine spezielle Lösung y von (41) nutzen wir den ähnlichen Ansatz

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x),$$

d.h. die "ehemaligen Konstanten" c_j werden zu Funktionen (daraus stammt der Name der Methode). Wir haben

$$y' = (c_1y_1' + \cdots + c_ny_n') + (c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n).$$

Falls wir jetzt y'' berechnen, erhalten wir Summanden mit c_j''. Um das zu vermeiden, verlangen wir schon im ersten Schritt, dass $c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n = 0$, dann gilt

$$y'' = (c_1y_1'' + \cdots + c_ny_n'') + (c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n'),$$

und wir verlangen $c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n' = 0$ usw. Auf diese Weise erhalten wir $(n-1)$ lineare Differentialgleichungen für c_j,

$$c_1'y_1^{(k)} + \cdots + c_n'y_n^{(k)} = 0, \quad k = 0, \ldots n-2, \tag{42}$$

sowie die Darstellungen

$$\begin{aligned}
y^{(k)} &= c_1y_1^{(k)} + \cdots + c_ny_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n-1,\\
y^{(n)} &= (c_1y_1^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)})\\
&= \sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

mit deren Hilfe die Differentialgleichung (41) die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(k)} = b,\\
\text{oder } &\sum_{j=1}^{n} c_j\underbrace{\Big(y_j^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_ky_j^{(k)}\Big)}_{=Py_j=0} + \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j^{(n-1)} = b,
\end{aligned}$$

oder einfach $c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b$. Zusammen mit (42) erhalten wir also n lineare Differentialgleichungen für die n Funktionen c_j, die man sehr kompakt als eine einzige Matrixgleichung $\Phi(x)C'(x) = B(x)$ auffassen kann, wobei

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{pmatrix}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die Matrix $\Phi(x)$ für alle x invertierbar ist, daher $C' = \Phi^{-1}B$ und $C = \displaystyle\int \Phi^{-1}B$. Man muss also n Integrale berechnen um alle n Funktionen c_j zu bestimmen.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Für allgemeine n ist die Methode der Variation der Konstanten ziemlich anspruchsvoll: auch für den "einfachen" Fall mit konstanten Koeffizienten a_j können beim Invertieren der Matrix Φ sehr komplizierte analytische Ausdrucke entstehen, die man danach noch integrieren muss. Für variable Koeffizienten a_j können auch die Lösungen y_j selbst sehr kompliziert aussehen (falls man es überhaupt schafft, ein Fundamentalsystem zu bestimmen). Allerdings ist die Situation mit $n = 2$ ein bisschen einfacher, da die Matrizen noch ziemlich klein sind.

Betrachte also eine inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \tag{43}$$

und sei (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{44}$$

Die zugehörige Matrix Φ aus der Methode der Variation der Konstanten ist dann $\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$, und ihre Determinante $W(x) = \det\Phi(x) = (y_1y_2' - y_1'y_2)(x)$ heisst **Wronski-Determinante**[11] von y_1 und y_2.

Satz 154. *Seien y_1, y_2 beliebige Lösungen von* (44) *auf einem Intervall I. Ihre Wronski-Determinante ist genau dann Null, wenn y_1 und y_2 linear abhängig sind. Darüber hinaus gilt für alle $x, x_0 \in I$ die* **Liouvillesche Formel**[12]

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\Big). \tag{45}$$

[11] Josef Hoëné-Wronski (1776–1853) war ein polnischer Mathematiker

[12] Joseph Liouville (1809–1882) war ein französischer Mathematiker

Beweis. Sei $x \in I$. In der letzten Vorlesung (Beweis vom Satz 143) haben wir gesehen, dass die lineare Abbildung

$$\text{Lösungsraum der homogenen DGL} \ni y \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$$

bijektiv ist. Also sind y_1 und y_2 genau dann linear abhängig, wenn ihre Bilder, d.h. die Vektoren $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$, linear abhängig sind. Diese Vektoren sind aber die zwei Spalten der Wronski-Determinante $W(x)$, und aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass eine Determinante genau dann Null ist, wenn ihre Spalten linear abhängig sind. Die erste Aussage ist damit bewiesen. Um (45) zu beweisen, berechnen wir W':

$$\begin{aligned} W' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1(-a_1 y_2' - a_0 y_2) - (-a_1 y_1' - a_0 y_1) y_2 = -a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = -a_1 W. \end{aligned}$$

Also genügt W der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung $W' = -a_1 W$, und (45) ist die schon bekannte Formel für die Lösungen. □

Falls (y_1, y_2) eine Fundamentalsystem ist, dass sind y_1 und y_2 linear unabhängig, daher $W(x) = \det \Phi(x) \neq 0$ für alle x, die Matrix Φ ist invertierbar, und man kann das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

bezüglich c_1', c_2' mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen:

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{1}{\det \Phi} \det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ b & y_2' \end{pmatrix} = -\frac{b y_2}{W}, & c_2' &= \frac{1}{\det \Phi} \det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b \end{pmatrix} = \frac{b y_1}{W}, \\ c_1 &= -\int \frac{b y_2}{W}, & c_2 &= \int \frac{b y_1}{W}. \end{aligned}$$

Daraus entsteht eine Formel für die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (43):

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = -y_1 \int \frac{b y_2}{W} + y_2 \int \frac{b y_1}{W}. \tag{46}$$

Um eine bestimmte Funktion zu erhalten, kann man statt $\int$ das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x}$ nutzen, daraus folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} y(x) &= -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{b(t) y_2(t)}{W(t)}\, dt + y_2 \int_{x_0}^{x} \frac{b(t) y_1(t)}{W(t)}\, dt \\ &= \int_{x_0}^{x} G(x,t) b(t)\, dt, \quad G(x,t) = \frac{-y_1(x) y_2(t) + y_1(t) y_2(x)}{W(t)}. \end{aligned}$$

Die Funktion $G(x,t)$ nennt man oft die **Greensche Funktion**[13] der Gleichung.

[13] George Green (1793–1841) war ein britischer Mathematiker

Satz 155. *Die Funktion* $y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)b(t)\,dt$ *ist die Lösung der inhomogenen Gleichung* (43) *mit* $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Beweis. Wir haben schon bewiesen, dass y Lösung ist, und die Anfangsbedingungen prüft man direkt (Übung). $\square$

Bemerkung 156. Es ist für die Variation der Konstanten also wichtig, ein Fundamentalsystem zu haben. Es kann aber passieren, dass man zunächst nur eine Lösung $y_1 \not\equiv 0$ der homogenen Gleichung $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ findet. Dann kann man aber die noch fehlende Lösung y_2 mit Hilfe der Wronski-Determinante finden. Man kann zuerst die Liouvillesche Formel (45) wie folgt umschreiben (man nehme z.B. $W(x_0) = 1$):

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}, \quad W(x) = \exp\Big(- \int a_1(x)\,dx \Big),$$

und auf der linken Seite erkennt man $(\frac{y_2}{y_1})'$. Daher

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W}{y_1^2}, \qquad y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2}, \tag{47}$$

und aus $W \neq 0$ folgt, dass das Integral nichtkonstant ist und dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind. $\square$

Beispiel 157. Wir möchten die Gleichung

$$y''(x) - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2}{x^2+1}\, y = 1. \tag{48}$$

lösen, wobei eine Lösung $y_1(x) = x$ der zugehörigen homogenen Gleichung schon bekannt ist. Betrachte die Liouvillesche Formel für die Wronski-Determinante,

$$W(x) = \exp\Big[- \int \Big(- \frac{2x}{x^2+1} \Big)\,dx \Big] = \exp \ln(x^2+1) = x^2 + 1,$$

dann erhält man eine weitere Lösung der homogenen Gleichung durch

$$y_2(x) = x \int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = x \int \Big(1 + \frac{1}{x^2} \Big)\,dx = x\big(x - \frac{1}{x}\big) = x^2 - 1.$$

Die Wronski-Determinante von y_1 und y_2 ist schon bekannt, $W(x) = x^2 + 1$, also findet man eine spezielle Lösung von (48) mit der Formel (46):

$$y(x) = -x \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx + (x^2 - 1) \int \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Man bestimmt die Integrale:

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \Big(1 - \frac{2}{x^2+1} \Big)\,dx = x - 2\arctan x, \quad \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

also ist $y(x) = -x^2 + 2x \arctan x + \frac{x^2-1}{2} \ln(x^2+1)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung von (48) ist

$$y(x) = c_1 x + c_2(x^2-1) - x^2 + 2x\arctan x + \frac{x^2-1}{2}\ln(x^2+1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vorlesung 11

Randwertprobleme

In Anfangswertproblemen wird das Verhalten der Lösung an einem einzigen Punkt vorgeschrieben: dadurch wird die Lösung eindeutig bestimmt. In bestimmten Situationen muss man aber die Werte der Lösung an mehreren Punkten vorgeben, was einige Besonderheiten mit sich bringt. Wir betrachten eine Klasse solcher Problemstellungen für lineare Gleichungen zweiter Ordnung,

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \tag{49}$$

mit $a_0, a_1, f \in C^0\big([a,b]\big)$. Gesucht werden Lösungen, die die folgenden **Randbedingungen** an den Randunkten a und b erfüllen:

$$R_1 y := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad R_2 y := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \tag{50}$$

wobei $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ vorgegebene Konstanten sind. Das Problem (49)–(50) bezeichnet man als ein **Randwertproblem**. Die Lösbarkeit solcher Probleme wird durch die vorherigen Existenz-/Eindeutigkeitssätze nicht garantiert, und man kann Randwertprobleme konstruieren, die keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzen.

Beispiel 158. Das Problem $y'' = 0$ auf $[0,1]$ mit den Randbedingungen $y'(0) = y'(1) = 0$ besitzt unendliche viele Lösungen: jede konstante Funktion ist Lösung! Das Problem $y'' = 1$ mit denselben Randbedingungen besitzt aber keine Lösungen: das werden wir jetzt beweisen. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2$ besitzt die zweifache Nullstelle 0, also bilden $y_1(x) = 1$ und $y_2(x) = x$ ein Fundamentalsystem. Eine spezielle Lösung finden wir mit dem Zugang aus der letzten Vorlesung: die Inhomogenität ist $e^{\mu x}$, $\mu = 0$ ist zweifache Nullstelle von P ist, also haben wir eine Lösung $y_s(x) = \frac{x^2}{P''(\mu)} e^{\mu x} = \frac{1}{2}\, x^2$, und jede Lösung der Differentialgleichung hat die Form

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_s(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}\, x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dann $y'(x) = c_2 + 2x$, und die Randbedingungen $y'(0) = c_2 = 0$, $y'(1) = c_2 + 2 = 0$ können nicht gleichzeitig erfüllt werden. □

Also braucht man zusätzliche Bedingungen, um die eindeutige Lösbarkeit von (49)–(50) sicherzustellen.

Satz 159. *Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem für $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

(A) Für jede Vorgabe $f \in C^0\big([a,b]\big)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ besitzt das Randwertproblem (49)–(50) *eine eindeutig bestimmte Lösung,*

(B) Es gilt $\det \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$

Beweis. Sei y_s irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung (49), dann hat jede Lösung y von (49) die Form $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_s$, wobei die Abbildung

$$\text{Lösungsraum von (49)} \ni y \mapsto (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

bijektiv ist. Die Aussage (A) ist also genau dann erfüllt, wenn für jede Vorgabe $f \in C^0\big([a,b]\big)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, die Konstanten c_1, c_2 durch die Randbedingungen $R_1 y = \gamma_1$ und $R_2 y = \gamma_2$ eindeutig bestimmt sind. Die Randbedingungen ergeben das foldende Gleichungssystem für die Konstanten c_1 und c_2:

$$\begin{cases} c_1 R_1 y_1 + c_2 R_1 y_2 + R_1 y_s = \gamma_1, \\ c_1 R_2 y_1 + c_2 R_2 y_2 + R_2 y_s = \gamma_2, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - R_1 y_s \\ \gamma_2 - R_2 y_s \end{pmatrix}.$$

Da γ_1 und γ_2 beliebig gewählt werden können, kann der Vektor $\begin{pmatrix} \gamma_1 - R_1 y_s \\ \gamma_2 - R_2 y_s \end{pmatrix}$ beliebige Werte in $\mathbb{R}^2$ annehmen. Es folgt also aus den Ergebnissen der linearen Algebra, dass eine Lösung (c_1, c_2) genau dann existiert und eindeutig bestimmt ist, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix}$ intertierbar ist, d.h. wenn die Bedingung (B) erfüllt ist. □

Jetzt nehmen wir an, dass die Voraussetzungen des Satzes 159 für die eindeutige Lösbarkeit erfüllt sind: in diesem Fall gilt $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$ (sonst hätte man $R_1 y_1 = R_1 y_2 = 0$ und $\det = 0$) und $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$ (sonst würde $R_2 y_1 = R_2 y_2 = 0$ und $\det = 0$ gelten). Jetzt möchten wir eine Formel für die gesuchte Lösung finden. Zuerst werden wir die Problemstellung ein bisschen vereinfachen. Nämlich, man kann eine C^2-Funktion w finden, die die Randbedingungen $R_1 w = \gamma_1$ und $R_2 w = 0$ erfüllt (die Funktion w soll aber nicht unbedingt eine Lösung der Differentialgleichung sein!). Wir schreiben die gesuchte Lösung y von (49)–(50) als $y = z + w$, dann muss die neue unbekannte Funktion z die sogenannten homogenen Randbedingungen

$$R_1 z = R_2 z = 0 \tag{51}$$

sowie die neue Differentialgleichung

$$z''(x) + a_1(x) z'(x) + a_0(x) z(x) = g(x), \quad g := f - (w'' + a_1 w' + a_0 w), \tag{52}$$

erfüllen. Es reicht also aus, das neue Problem (51)–(52) mit homogenen Randbedingungen lösen zu können. Da es sich um eine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung handelt, nutzen wir zuerst denselben Ansatz als in der Methode der

Variation der Konstanten, aber mit einem *geeigneten* Fundamentalsystem (y_1, y_2), in dem y_1 bzw. y_2 die erste bzw. die zweite Randbedingung erfüllt: $R_1 y_1 = R_2 y_2 = 0$ (das ist immer möglich: Übung!). Dann gilt $R_2 y_1 \neq 0$ und $R_1 y_2 \neq 0$ (sonst wäre die Determinante im Satz 159(B) gleich Null). Für die Lösung z von (51)–(52) nutzen wir nun den Ansatz $z(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$: wir wissen schon, dass für

$$c_1 = -\int \frac{g y_2}{W}, \quad c_2 = \int \frac{g y_1}{W}, \quad W := \text{Wronski-Determinante von } y_1 \text{ und } y_2,$$

die Funktion z der Differentialgleichung genügt. Allerdings müssen noch die Randbedingungen erfüllt werden! Laut der Methode der Variation der Konstanten haben wir $z'(x) = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$, und

$$\begin{aligned} R_1 z &= c_1(a) \underbrace{R_1 y_1}_{=0} + c_2(a) R_1 y_2 = c_2(a) R_1 y_2, \\ R_2 z &= c_1(b) R_2 y_1 + c_2(b) \underbrace{R_2 y_2}_{=0} = c_1(b) R_2 y_1. \end{aligned}$$

Wegen $R_2 y_1 \neq 0$ und $R_1 y_2 \neq 0$ gilt $R_1 z = R_2 z = 0$ genau dann, wenn $c_2(a) = c_1(b) = 0$, und daraus folgt die genaue Wahl der Funktionen c_1 und c_2:

$$c_1(x) = \int_x^b \frac{g y_2}{W}, \quad c_2(x) = \int_a^x \frac{g y_1}{W},$$

und man kann die gefundene Lösung z von (51)–(52) wie folgt umschreiben:

$$z(x) = y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(s) g(s)}{W(s)}\, ds + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(s) g(s)}{W(s)}\, ds = \int_a^b G(x,s) g(s)\, ds,$$

$$\text{wobei } G(x,s) := \begin{cases} \dfrac{y_1(x) y_2(s)}{W(s)}, & \text{für } x < s, \\ \dfrac{y_1(s) y_2(x)}{W(s)}, & \text{für } s \leq x, \end{cases}$$

die sogenannte **Greensche Funktion des Randwertproblems** ist. Für jedes $s \in (a,b)$ ist $x \mapsto G(x,s)$ offenbar Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $[a,b] \setminus \{s\}$. Darüber hinaus ist diese Funktion stetig auf $[a,b]$ und erfüllt die Randbedingungen. Allerdings ist sie *nichtglatt* (das ist eine Besonderheit von Randwertproblemen in Vergleich zu den Anfangswertproblemen, die später auch für mehrdimensionale Problemen wichtig wird!):

$$\frac{\partial G}{\partial x}(s^+, s) - \frac{\partial G}{\partial x}(s^-, s) = \frac{y_1(s) y_2'(s) - y_1'(s) y_2(s)}{W(s)} = 1.$$

Beispiel 160. Wir möchten die Greensche Funktion des folgenden Randwertproblems auf $[0,1]$ bestimmen: $y'' + y = f$ mit $y(0) = y(1) = 0$. Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ hat einfache Nullstellen $\pm i$, also ist $(z_1, z_2) = (\cos x, \sin x)$ ein

$\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung. Wir prüfen zuerst, ob die Greensche Funktion überhaupt existiert: wir betrachten die Matrix

$$(R_j z_k) = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix},$$

ihre Determinante ist $\sin 1 \neq 0$, also ist das Randwertproblem für alle f eindeutig lösbar. Wir brauchen jetzt ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) mit $y_1(0) = y_2(1) = 0$. Die beiden y_j müssen lineare Kombinationen von $(\cos x, \sin x)$ sein, also kann man z.B. $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \sin(1-x)$ wählen. Ihre Wronski-Determinante W ist

$$\begin{aligned} W(x) &= \sin(x)\big(-\cos(1-x)\big) - \cos(x)\sin(1-x) \\ &= -\big(\sin(x)\cos(1-x) + \cos(x)\sin(1-x)\big) = -\sin(1), \end{aligned}$$

und die gesuchte Greensche Funktion ist $G(x,s) = \begin{cases} -\frac{\sin(x)\sin(1-s)}{\sin(1)}, & \text{für } x < s, \\ -\frac{\sin(1-x)\sin(s)}{\sin(1)}, & \text{für } s \leq x. \end{cases}$

Lineare Systeme erster Ordnung

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen für lineare Differentialgleichungen höheren Ordnung haben wir durch die Reduktion auf Systeme erster Ordnung bewiesen: diese Systeme hatten aber eine ziemlich spezielle Struktur (siehe Satz 138). Jetzt möchten wir allgemeine Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung untersuchen. Wir werden wieder die Bezeichnung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ verwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Durch $M_n(\mathbb{K})$ bezeichnen wir die Menge aller Matrizen $n \times n$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Das ist offenbar ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, falls man die Summe von zwei Matrizen udn die Multiplikation mit Konstanten auf natürliche Weise definiert:

$$\text{für } \lambda \in \mathbb{K}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Durch $\|A\| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2}$ wird eine Norm auf $M_n(\mathbb{K})$ definiert (Übung!).

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein $\mathbb{K}$-wertiges **lineares System erster Ordnung** auf I ist eine Gleichung der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \tag{53}$$

wobei $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen sind. Gesucht wird eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{K}^n$, die die Gleichung (53) erfüllt. Ein Anfangswertproblem für (53) besteht darin, Lösungen y zu finden, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllen, wobei $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben sind.

Die Abbildungen

$$I \ni t \mapsto A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \quad I \ni t \mapsto b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

sind offenbar genau dann stetig, wenn alle Funktionen $a_{jk}, b_j : I \to \mathbb{K}$ stetig sind, und man kann (53) auch in detallierter Form darstellen:

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ \qquad \dots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

wobei n unbekannte differenzierbare Funktionen $y_1, \dots, y_n$ zu bestimmen sind.

Satz 161. *Für alle $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ besitzt das Anfangswertproblem $y(t_0) = y_0$ für (53) eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz I definiert ist.*

Beweis. Wir haben die Gleichung $y'(t) = F\big(t, y(t)\big)$ mit $F(t, y) = A(t)y + b(t)$, und

$$\|F(t,y) - F(t,z)\| = \big\|A(t)y + b(t) - A(t)z - b(t)\big\| = \big\|A(t)(y-z)\big\| \le \|A(t)\|\|y-z\|$$

(Übung!). Da die Funktion $t \mapsto A(t)$ stetig ist, ist sie auf jedem kompakten (=endlichen und abgeschlossenen) Teilintervall $J \subset I$ beschränkt: es existiert $C_J > 0$ mit $\|A(t)\| \le C_J$ für alle $t \in I$ (Satz 125). Sei J ein kompaktes Teilintervall mit $t_0 \in J$, dann ist F Lipschitzsch bzgl. y auf $J \times \mathbb{K}^n$, und nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung auf J. Durch Ausschöpfung von I durch kompakte Intervalle wird dann gezeigt, dass die Lösung auch auf I definiert und eindeutig bestimmt ist. □

Falls man jetzt die Sprache der linearen Algebra nutzt, kann man viele Aussagen über lineare Differentialgiechungen auf lineare Systeme erster Ordnung direkt übertragen. Betrachte die lineare Abbildung

$$L : C^1(I, \mathbb{K}^n) \to C^0(I, \mathbb{K}^n), \quad (Ly)(t) = y'(t) - A(t)y(t),$$

dann lässt sich das System (53) in $Ly = b$ umformen. Daraus folgt (Satz 140) die Struktur der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} &\text{Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung } Ly = b \ (y' = Ay + b) \\ &\qquad = \text{irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung} \\ &\qquad + \ \text{allgemeine Lösung der homogenen Gleichung } Ly = 0 \ (y' = Ay). \end{aligned}$$

Satz 162. *Die Lösungsmenge von $y' = Ay$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Beweis. Der Lösungsraum V ist der Nullraum der obigen linearen Abbildung L und damit ein Vektorraum. Wähle $t_0 \in I$ und betrachte die lineare Abbildung $\Phi : V \ni y \mapsto y(t_0) \in \mathbb{K}^n$. Sie ist injektiv: die einzige Lösung y mit $\Phi(y) = 0$ ist die Nullfunktion (Eindeutigkeit!), und auch surjektiv: nach dem Satz 161 gibt es zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung y mit $\Phi(y) = y_0$. Aus der Existenz einer bijektiven linearen Abbildung $\Phi : V \to \mathbb{K}^n$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. □

Ein **Fundamentalsystem** für das System (53) ist eine Basis im Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems $y' = Ay$; nach dem Satz 162 besteht ein Fundamentalsystem aus n linear unabhängigen **Vektor**funktionen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$. Falls man ein Fundamentalsystem $(y_1, \dots, y_n)$ und irgendeine Lösung y_s der inhomogenen Systems (53) findet, dann kann man die Lösungen y von (53) als

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t) + y_s(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K},$$

schreiben, wobei die Konstanten c_j durch die Lösung c_j eindeutig bestimmt sind.

Homogene lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es wurde schon oben erwähnt, dass es für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung kein allgemeines Lösungsverfahren existiert. Da solche Gleichungen nur ein spezieller Fall von linearen Systemen sind, gibt auch auch für lineare Systeme keine unverselle Lösungsmethode. Daher werden wir uns (heute und auch nächste Woche) auf Systemen mit konstanten Koeffizienten konzentrieren: solche Probleme kann man auf gewisse Fragestellungen der linearen Algebra reduzieren.

Sei also A eine $n \times n$ Matrix, $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$, $a_{jk} \in \mathbb{K}$. Wir wollen für das homogene System $y'(t) = Ay(t)$ ein Fundamentalsystem bestimmen. Wir versuchen zuerst mit dem schon bekannten Ansatz $y(t) = e^{\lambda t} v$, wobei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ (also ist v ein Vektor!). Wegen $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$ und $Ay(t) = e^{\lambda t} Av$ ist die Vektorfunktion y genau dann Lösung von $y' = Ay$ ist, wenn $Av = \lambda v$. Uns interessiert natürlich der Fall $v \neq 0$ (für $v = 0$ erhalten wir die triviale Lösung $y \equiv 0$), daher muss v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ sein. Dieser ziemlich naiver Zugang liefert für *einige (aber nicht alle!)* Matrizen A vollständige Lösung von $y' = Ay$:

Satz 163. *Nehme an, es existiert eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Dann bilden die Vektorfunktionen $y_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, $j = 1, \dots, n$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.*

Beweis. Wir haben schon oben gezeigt, dass alle y_j Lösungen sind. Die Vektoren $y_j(0) = v_j$ sind linear unabhängig (da v_j eine Basis bilden), daher sind auch die n Vektorfunktionen y_j linear unabhängig. □

Bemerkung 164 (Reellwertiges Fundamentalsystem). Falls die Matrix A nur relle Einträge hat, dann ist es sinvoll, ein reellwertiges Fundamentalsystem zu konstruieren. Falls alle λ_j reell sind, kann man auch $v_j \in \mathbb{R}^n$ wählen, damit sint y_j schon reellwertig. Ist λ nichtreeller Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor v, so ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{v}$. Man erhält ein neues reellwertiges Fundamentalsystem, indem man jedes solche Paar $(e^{\lambda t}v, e^{\overline{\lambda} t}\overline{v})$ durch $\big(\mathrm{Re}(e^{\lambda t}v), \mathrm{Im}(e^{\lambda t}v)\big)$ ersetzt.

Aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass λ genau dann Eigenwert von A ist, wenn $P(\lambda) = 0$ gilt, wobei

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad I = \text{Einheitsmatrix},$$

das charakteristische Polynom von A ist. Eine Matrix A erfüllt die Annahme des Satzes 163 genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix U und eine diagonale Matrix D existieren mit $U^{-1}AU = D$ (solche Matrizen A heissen *diagonalisierbar*). Falls P genau n verschiedene Nullstellen hat, dann ist A diagonalisierbar. Im Allgemeinen kann man aber vom charakterischen Polynom *nicht* ablesen, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

Beispiel 165. (A) Betrachte das System $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$ oder (in der Matrixform) $Y' = AY$ mit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakterische Polynom P von A ist

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Die Nullstellen von P sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$: das ist gerade der "einfache" Fall. Wir brauchen jetzt eine Basis in jedem $\ker(A - \lambda_j I)$, d.h. im Lösungsraum des Systems $\begin{cases} (1-\lambda_j)x + 2y = 0, \\ 2x + (1-\lambda_j)y = 0. \end{cases}$ Für λ_1 erhält man das System $\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$ der Lösungsraum ist eindimensional: wähle z.B. $v_1 = (1, -1)$ als Basisvektor. Für λ_2 ist $\begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ zu lösen, der Lösungsraum ist wieder eindimensional, wir nehmen $v_2 = (1, 1)$ als Basisvektor. Dadurch entsteht das Fundamentalsystem

$$Y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung Y hat die Form $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(B) Betrachte $Y' = AY$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

die Nullstellen sind $1 \pm i$. Für $\lambda = 1+i$ finden wir den Eigenvektor $v = (1, i)$, automatisch ist $\overline{v} = (1, -i)$ Eigenvektor für $1-i$ (da die Matrix A reell ist). Daraus entsteht ein komplexwertiges Fundamentalsystem $e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie eine reellwertigs Fundamentalsystem (y_1, y_2), $y_1 = \operatorname{Re}\left[e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $y_2 = \operatorname{Im}\left[e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Dank

$$e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\, e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

haben wir $y_1 = e^t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $y_2 = e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Alle reellwertigen Lösungen haben die Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(C) Betrachte das System $Y' = AY$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 4 \cdot (-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

hat die zweifache Nullstelle 1, aber $\ker(A - I)$ ist eindimensional! Man kann also keine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus den Eigenvektoren von A bilden, da die Eigenvektoren von A nur einen eindimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ erzeugen. Daher ist A nicht diagonalisierbar und der Satz 162 nicht anwendbar. Systeme $Y' = AY$ mit nichtdiagonalisierbaren Matrizen A werden wir in der nächsten Vorlesung genauer betrachten.

LV Analysis IIa kann unter dem folgenden Link evaluiert werden:
`https://www.survey.uni-oldenburg.de/index.php?r=survey/index&sid=824398&lang=de`

Vorlesung 12

Nichtdiagonalisierbare Matrizen in zwei Dimensionen

Bevor wir allgemeine Systeme $y' = Ay$ behandeln, betrachtet wir den wichtigen Fall, wenn $n = 2$ und $A \in M_2(\mathbb{K})$ *nicht diagonalisierbar* ist (dieser Fall kommt ziemlich oft vor, insbesondere in Übungsaufgaben und Klausuren): das bedeutet, dass A nur einen Eigenwert λ_0 besitzt und dass $\ker(A - \lambda_0 I)$ eindimensional ist. Wähle ein $v \in \ker(A - \lambda_0 I)$ mit $v \neq 0$, dann haben wir schon eine Lösung $y_1(t) = e^{\lambda_0 t} v$. Das charakteristische Polynom von A hat die Form $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$, und aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass $P(A) = 0$, d.h. $(A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I) = 0$.

Wir suchen jetzt nach einer weiteren Lösung $y(t) = e^{\lambda_0 t} f(t)$ mit unbekannter Vektorfunktion f. Das Einsetzen ins System ergibt

$$\underbrace{\lambda_0 e^{\lambda_0 t} f(t) + e^{\lambda_0 t} f'(t)}_{=y'(t)} = \underbrace{e^{\lambda_0 t} A f(t)}_{Ay(t)} \quad \Leftrightarrow \quad f'(t) = (A - \lambda_0 I) f(t), \tag{54}$$

und daraus folgt

$$(A - \lambda_0 I) f'(t) = \underbrace{(A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I)}_{=P(A)=0} f(t) = 0, \text{ d.h. } f'(t) \in \ker(A - \lambda_0 I).$$

Da $\ker(A - \lambda_0 I)$ durch v erzeugt wird, kann man mit $f'(t) = v$ versuchen, d.h. $f(t) = vt + u$, wobei die Vektorkonstante $u \in \mathbb{K}^2$ nocht zu bestimmen ist. Dafür nutzt man wieder (54):

$$\begin{aligned} v = f'(t) &= (A - \lambda_0 I) f(t) = (A - \lambda_0 I)(vt + u) \\ &= t \underbrace{(A - \lambda_0 I) v}_{=0} + (A - \lambda_0 I) u = (A - \lambda_0 I) u. \end{aligned}$$

Satz 166. *Sei $A \in M_2(\mathbb{K})$ nichtdiagonalisierbar und sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ_0, dann existiert ein Vektor u mit $(A - \lambda_0 I) u = v$. Die Vektorfunktionen $y_1(t) = e^{\lambda_0 t} v$ und $y_2(t) = e^{\lambda_0 t}(vt + u)$ bilden ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.*

Beweis. Wie beweisen zuerst die Existenz von u. Wegen $(A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I) = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{K}^2$: $(A - \lambda_0 I)x \in \ker(A - \lambda_0 I)$. Falls $(A - \lambda_0 I)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^2$, dann wäre $A = \lambda_0 I$ diagonalisierbar: diesen Fall haben wir vom Anfang an ausgeschlossen. Also $\dim \operatorname{Bild}(A - \lambda_0 I) = 1$, daher $\operatorname{Bild}(A - \lambda_0 I) = \ker(A - \lambda_0 I)$, insbesondere gibt es ein u mit $(A - \lambda_0 I) u = v$. Wir haben schon oben gezeigt, dass die angegebene Vektorfunktion y_2 eine Lösung von $y' = Ay$ ist. Die Vektoren $v = y_1(0)$ und $u = y_2(0)$ sind offenbar linear unabhängig (aus $u = cv$ würde $(A - \lambda_0 I) u = c(A - \lambda_0 I) v = 0 \neq v$ folgen), daher sind auch die Vektorfunktionen y_1 und y_2 linear unabhängig. $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, Fundamentalsysteme für $y' = Ay$ mit beliebigen 2×2 Matrizen A zu bestimmen.

Beispiel 167. Am Ende der letzten Vorlesung (Beispiel 165) konnten wir das System $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ nicht lösen, da die Matrix A nicht diagonalisierbar ist. Jetzt können wir es! Der einzige Eigenwert ist $\lambda_0 = 1$ und $\ker(A-I)$ ist eindimensional und durch $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Wir suchen jetzt nach einem $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $(A - I)u = v$: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das System hat unendlich viele Lösungen aber wir brauchen nur eine davon: in diesem Fall passt $x = 1$ und $y = 0$, also $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit haben wir ein Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t \end{pmatrix}. \quad \square$$

Variation der Konstanten für inhomogenene Systeme

Analog zu inhomogenen Gleichungen können Lösungen von inhomogenen Systemen $y' = Ay + B$ mit Hilfe der Variation der Konstanten gefunden werden. Sei $y_1, \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ und betrachte die $n \times n$ Matrix Y, deren k-te Spalte y_k ist:

$$\text{falls } y_k(t) = \begin{pmatrix} y_{1k}(t) \\ \ldots \\ y_{nk(t)} \end{pmatrix}, \text{ dann } Y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Da jede Spalte y_k Lösung von $y' = Ay$ ist, erfüllt auch die ganze Matrix Y die matrizielle Differentialgleichung $Y' = AY$: die k-te Spalte von Y' ist y_k', und die k-te Spalte von AY ist Ay_k. Darüber hinaus ist $\det Y \neq 0$, da die Spalten linear unabhängig sind (da y_j ein Fundamentalsystem bilden). Umgekehrt, falls man eine $n \times n$ Matrix Y mit $Y' = AY$ findet, die auch $\det Y \neq 0$ erfüllt, dann bilden die Spalten y_k von Y ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$, und die allgemeine Lösung $y = \sum_{j=1}^n c_j y_j$ des homogenen Systems lässt sich als

$$y(t) = Y(t)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

schreiben. Für Lösungen des inhomogenen Systems $y' = Ay + B$ nutzen wir den Ansatz $y(t) = Y(t)C(t)$, wobei die Vektorfunktion C zu bestimmen ist. Man setzt diesen Ansatz ins System ein: $y' = Y'C + YC'$ (Übung!), also gilt $y' = Ay + B$ genau dann, wenn $Y'C + YC' = AYC + B$. Wegen $Y' = AY$ gilt $Y'C = AYC$, also $YC' = B$ und $C' = Y^{-1}B$. Diese Formel ist also sehr ähnlich zu dem, was wir für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung gesehen haben (VL 10). Das Ergebnis fassen wir wie folgt zusammen:

Satz 168 (Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten). *Sei $(y_1, \dots, y_n)$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$ und sei Y die $n \times n$ Matrix mit Spalten $y_1, \dots, y_n$. Dann ist*

$$y = Y \int Y^{-1}B$$

eine Lösung des inhomogenen Systems $y' = Ay + B$.

Beispiel 169. $y' = Ay + B$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$. Ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) haben wir schon im Beispiel 167 gefunden, daraus entsteht die zugehörige Matrix Y:

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = e^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t \end{pmatrix},$$

$$Y(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}, \quad Y(t)^{-1} = e^{-t} \begin{pmatrix} -t & -2t-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \int e^{-t} \begin{pmatrix} -t & -2t-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

also erhalten wir eine spezielle Lösung

$$y(t) = Y(t)C(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^t \\ -te^t \end{pmatrix}. \quad \square$$

Fundamentalmatrix

Die obige Matrix Y kann man auch zum Lösen der Anfangswertprobleme für $y' = Ay$ nutzen. Wie schon oben erwähnt, sind alle Lösungen der Form $y(t) = Y(t)C$ mit $C \in \mathbb{K}^n$. Falls man nach einer Lösung sucht, die die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ erfüllt, dann muss man $y_0 = Y(0)C$ haben, woraus $C = Y^{-1}(0)y_0$ und $y(t) = \Phi(t)y_0$ folgt, wobei $\Phi(t) = Y(t)Y(0)^{-1}$. Diese neue Matrixfunktion Φ erfüllt immer noch $\Phi' = A\Phi$ und $\Phi(0) = I$, und mit Hilfe von Φ lässt sich die Lösung des Anfangswertproblems sehr kompakt schreiben, daher hat diese Matrix Φ einen speziellen Namen:

Definition 170. Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Die **Fundamentalmatrix** des Systems $y' = Ay$ ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$, die die Bedingungen $\Phi' = A\Phi$ und $\Phi(0) = I$ erfüllt.

Wie haben schon oben gezeigt, dass die Fundamentalmatrix existiert, wir müssen aber noch zeigen, dass sie eindeutig bestimmt ist. Sei Ψ eine weitere Matrixfunktion mit $\Psi' = A\Psi$ und $\Psi(0) = I$, dann sind für jedes $y_0 \in \mathbb{K}^n$ die Vektorfunktionen

$y = \Phi(t)y_0$ und $z(t) = \Psi(t)y_0$ Lösungen von $y' = Ay$ mit $y(0) = y_0$. Da die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt ist, gilt $\Phi(t)y_0 = \Psi(t)y_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$, woraus $\Phi(t) = \Psi(t)$ für alle t folgt.

Beispiel 171. Wir wollen die Fundamentalmatrix des Systems

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z' = Az,\ z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

- Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

  hat zwei Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$: das sind Eigenwerte von A, und die Matrix A ist diagonalisierbar (da es zwei verschiedene Eigenwerte gibt). Um ein Fundamentalsystem zu bestimmen, brauchen wir zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

- Für $\lambda_1 = 1$ haben wir das System $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also kann man z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor nehmen.

- Für $\lambda_1 = 5$ ist das System $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu lösen. Nehme z.B. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor.

Damit haben wir ein Fundamentalsystem konstruiert: $y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$ und $y_2(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$. Die entsprechende Matrix Y ist $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$ mit $Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, und die gesuchte Fundamentalmatrix ist

$$\Phi(t) = Y(t)Y(0)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -e^t + e^{5t} \\ -3e^t + 3e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Damit kann man Anfangswerteprobleme direkt lösen. Z.B. erhält man für die Anfangsbedingung $z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Lösung

$$z(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -e^t + e^{5t} \\ -3e^t + 3e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5e^t + 7e^{5t} \\ -5e^t + 21e^{5t} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Jetzt werden wir versuchen, die Fundamentalmatrix für $y' = Ay$ für beliebiege Matrizen A zu bestimmen, indem wir das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

mit Hilfe des iterativen Verfahrens aus dem Satz von Picard-Lindelöf approximieren. Wir betrachten die Folge der Vektorfunktionen

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t Ay_{n-1}(s)\,ds$$

wobei $y_0(t) \equiv y_0$ konstant ist. Man erhält:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= y_0 + \int_0^t Ay_0\,ds = y_0 + tAy_0,\\
y_2(t) &= y_0 + \int_0^t (A + sA^2)y_0\,ds = y_0 + tAy_0 + \frac{t^2}{2}\,A^2y_0,\\
&\dots\\
y_n(t) &= \Phi_n(t)y_0, \quad \Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad (tA)^0 := I.
\end{aligned}$$

Wir haben im Satz von Picard-Lindelöf gesehen, dass die Folge y_n mindestens auf einem kleinen Interval um 0 gleichmässig konvergiert, und man kann den Grenzwert formal als

$$y(t) = \Phi(t)y_0 \text{ mit } \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k}$$

schreiben. Dann wäre $\Phi(t)$ (falls sie überhaupt auf $\mathbb{R}$ definiert ist) die gesuchte Fundamentalmatrix. Diesen Zugang werden wir jetzt begründen.

Satz 172. *Für jede Matrix $B \in M_n(\mathbb{K})$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$ in $M_n(\mathbb{K})$.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte $C_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!}$. Wir müssen zeigen, dass die Folge (C_n) konvergiert.

In der letzten Vorlesung haben wir schon die Norm $\|A\| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |a_{j,k}|^2}$ auf $M_n(\mathbb{K})$ erwähnt. Betrachte die bijektive Abbildung $F : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{n^2}$,

$$\text{falls } A = (a_{j,k}), \quad F(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}),$$

dann gilt $\|A\| = \underbrace{\|F(A)\|}_{\text{eukl. Norm in } \mathbb{K}^n}$, also sind die Räume $M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbb{K}^{n^2}$ isometrisch (Blatt 7, PA 3), und aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K}^{n^2}$ folgt die Vollständigkeit von $M_n(\mathbb{K})$. Im Blatt 11, PA 4, wurde es bewiesen, dass für beliebige $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ die Ungleichung $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ gilt. Durch die Induktion folgt $\|B^j\| \le \|B\|^j$,

$$\|C_{n+k} - C_n\| = \Big\| \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{B^j}{j!} \Big\| \le \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{\|B\|^j}{j!} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|B\|^j}{j!}.$$

Da die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|B\|^j}{j!}$ konvergiert, kann mann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|B\|^j}{j!} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und dann hat man für alle $n \geq N$ und $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\|C_{n+k} - C_k\| < \varepsilon$. Also ist C_k eine Cauchy-Folge, und sie konvergiert, da $M_n(\mathbb{K})$ vollständig ist. □

Damit haben wir die folgende Definition begründet:

Definition 173 (Exponential einer Matrix). Für jede Matrix $B \in M_n(\mathbb{K})$ ist die Matrix $e^B \in M_n(\mathbb{K})$ durch

$$e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$$

definiert. Man schreibt auch $\exp(B)$ statt e^B.

Satz 174. *Die Fundamentalmatrix von $y' = Ay$ ist durch $\Phi(t) = e^{tA}$ gegeben.*

Beweis. Die Gleichheit $e^{0\cdot A} = I$ ist klar. Wir zeigen jetzt, dass $t \mapsto e^{tA}$ stetig ist. Definiere $\Phi_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(tA)^j}{j!}$ und nehme ein $T > 0$, dann gilt für alle $t \in [-T, T]$:

$$\|e^{tA} - \Phi_n(t)\| = \Big\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!} \Big\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|(tA)^j\|}{j!} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(T\|A\|)^j}{j!}.$$

Da die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(T\|A\|)^j}{j!}$ konvergiert, folgt es, dass man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N finden kann mit $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(T\|A\|)^j}{j!} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und dann $\|e^{tA} - \Phi_n(t)\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $t \in [-T, T]$. Also konvergiert Φ_n gegen e^{tA} gleichmässig auf $[-T, T]$, d.h. jeder Eintrag von Φ_n konvergiert gleichmässig gegen den entsprechenden Eintrag von e^{tA}. Da alle Φ_n stetig sind (Polynome von t!), ist auch $t \mapsto e^{At}$ stetig.

Dann konvergiert auch $A\Phi_n$ gleichmässig gegen Ae^{tA}, die Funktion $t \mapsto Ae^{tA}$ ist stetig, und für $|t| \leq T$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t Ae^{sA}\,ds &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^t A\Phi_n(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sum_{j=0}^{n} \frac{s^j}{j!} A^{j+1}\,ds \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} A^{j+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{t^j}{j!} A^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = e^{tA} - I.\end{aligned}$$

Also $e^{tA} = I + \displaystyle\int_0^t Ae^{sA}\,ds$, und es folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (den man auf jeden Eintrag von e^{tA} und Ae^{tA} anwendet), dass $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ für alle $|t| < T$. Da T beliebig ist, folgt die Behauptung. □

Berechnung der Exponentialen der Matrizen

Da die Spalten der Fundamentalmatrix ein Fundamentalsystem bilden, kann man für Systeme $y' = Ay$ mit beliebigen Matrizen A Fundamentalsysteme konstruieren, falls man es schafft, e^{tA} auszurechnen.

(a) Falls L eine Diagonalmatrix ist, dann lässt sich e^L ganz einfach ausrechnen:

$$\text{für } L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ gilt } L^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^j \end{pmatrix} \text{ für alle } j \in \mathbb{N},$$

$$e^L = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j}{j!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_2^j}{j!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_n^j}{j!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

(b) Falls zwei Matrizen A und B kommutieren, d.h. falls $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B$ (Übung).

(c) Falls eine Matrix N die Bedingung $N^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ erfüllt (solche Matrizen heissen *nilpotent*), so wird aus der Reihe eine endliche Summe,

$$e^N = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{N^j}{j!}$$

(d) Falls U eine invertierbare Matrix ist und $A = U^{-1}BU$, so gilt $e^A = U^{-1}e^B U$: man merkt, dass $A^2 = A \cdot A = U^{-1}BUU^{-1}BU = U^{-1}B^2U$, und durch Induktion $A^j = U^{-1}B^jU$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also

$$e^A = \sum_{j=0}^\infty \frac{U^{-1}B^jU}{j!} = U^{-1}\sum_{j=0}^\infty \frac{B^j}{j!}\,U = U^{-1}e^BU.$$

(e) Mit Hilfe von (a)+(d) ergibt sich eine Methode, e^A für diagonalisierbare A zu bestimmen: nach der Definition gibt es eine invertierbare Matrix U und eine Diagonalmatrix L mit $A = U^{-1}LU$, dann gilt $e^A = U^{-1}e^LU$, und e^L kann man wie in (a) berechnen. Eigentlich haben wir dieses Verfahren implizit in der Berechnung der Fundamentalmatrix von $y' = Ay$ mit diagonalisierbaren A genutzt.

(f) Falls A nicht diagonalisierbar ist, dann nutzt man eines der wichtigsten Ergebnisse der linearen Algebra: die Jordansche Normalform. Es ist bekannt, dass man $A = D + N$ darstellen kann, wobei die Matrix D diagonalisierbar ist, die Matrix N nilpotent ist, und D und N kommutieren. Dann gilt $e^A = e^De^N$: man berechnet e^D wie in (e) und e^N wie in (d). Insbesondere $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$ und

$$e^{tN} = 1 + tN + \dots + \frac{t^m N^{m-1}}{(m-1)!}$$

also ist jeder Eintrag von e^{tN} ein Polynom, wobei die Einträge von e^{tD} lineare Kombinationen von $e^{\lambda t}$ sind. Dadurch erhält man in den Lösungen lineare Kombinationen von $t^k e^{\lambda t}$ (das haben wir am Anfang der Vorlesung für 2×2 Matrizen gesehen).

(g) Man kann sogar einen Schritt weiter gehen: es existiert eine invertierbare Matrix U, sodass UAU^{-1} eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken B der Form

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

ist. Man kann e^B für solche B explizit ausrechnen (Übung), dann ist $Z = e^{UAU^{-1}}$ eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken e^B und $A = U^{-1}ZU$. Solche Rechnungen für grosse Matrizen werden aber meist mit numerischen Software durchgeführt.

Vorlesung 13

Vektorfelder und ihre Integralkurven

In dieser (letzten) Vorlesung besprechen wir einige geometriche Aspekte der Theorie der Differentialgleichungen.

Definition 175. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Funktion $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heisst **parametrisierte Kurve** in $\mathbb{R}^n$. Das Bild $\gamma(I)$ heisst **Orbit von** γ.

Eine parametrisierte Kurve ist also eine Abbildung, wobei ihr Orbit ein geometriches Objekt ist. Falls man $t \in I$ als Zeitpunkte betrachtet, dann beschriebt $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ den Weg eines Objekts im Zeitintervall I, dabei kennt man auch Position $\gamma(t)$ des Objektes für jedes $t \in I$ (also kennt man den "Fahrplan"). Der Orbit von γ beschreibt den Weg, aber "ohne Fahrplan". Verschiedene parametrisierte Kurven können denselben Orbit haben (man kann denselben Weg mit verschiedenen Fahrplänen ablegen). Z.B. haben $\gamma_1 : [0,1] \ni t \mapsto (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : [0, \pi/2] \ni t \mapsto (\sin t, \sin^2 t) \in \mathbb{R}^2$ dasselbe Bild.

Sei jetzt $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Für $t_0, t_1 \in I$ mit $t_0 \neq t_1$ heisst der Vektor

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** zwischen t_0 und t_1. Falls der Grenzwert

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

existiert, dann heisst γ differenzierbar in t_0, und der Vektor $\gamma'(t_0)$ heisst **Momentangeschwindigkeit** (oder einfach **Ableitung**) von γ in t_0. Es ist einfach zu zeigen, dass $\gamma : t \mapsto \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ genau dann differenzierbar ist, wenn jede Komponente x_j eine differenzierbare Funktion ist, und $\gamma'(t) = \big(x_1'(t), \dots, x_n'(t)\big)$.

Definition 176. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein **Vektorfeld** auf U ist eine Abbildung $V : U \to \mathbb{R}^n$.

Man kann Vektorfelder wie folgt vorstellen: an jedem Punkt $p \in U$ ist ein Vektor (Pfeil) $V(p)$ angeklebt. Vektorfelder treten bei der Beschreibung von strömenden Flüssigkeiten auf: $V(p)$ ist der Geschwindigkeitsvektor von Teilchen am Ort p. Falls $V(p)$ für alle p von der Zeit unabhängig bleibt, spricht man von einer stationären Strömung. Falls sich die Strömung mit der Zeit ändert, spricht man auch von einem zeitabhängigen Vektorfeld: mathematisch handelt es sich dann um eine Abbildung $V : I \times U \to \mathbb{R}^n$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Wir werden aber nur den stationären Fall betrachten.

Definition 177. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heisst **Integralkurve** des Vektorfeldes $V : U \to \mathbb{R}^n$, falls für jedes $t \in I$ gilt $\gamma(t) \in U$ und $\gamma'(t) = V\big(\gamma(t)\big)$.

Eine parametrisierte Kurve γ ist also genau dann Integralkurve von V, wenn sie die Differentialgleichung $x'(t) = V\big(x(t)\big)$ erfüllt. Das ist eine sogenannte **autonome** Differentialgleichung: die Variable t kommt nur innerhalb von x vor. Allerdings kann man jede Differentialgleichung in eine autonome Differentialgleichung umformen: statt $x'(t) = F\big(t, x(t)\big)$ betrachtet man $\Gamma' = V(\Gamma)$ mit $\Gamma(t) = \big(t, x(t)\big)$ und $V(t,x) = \big(1, F(t,x)\big)$. Anders gesagt, wird die Variable t als eine neue unbekannte Funktion gesehen, die $t' = 1$ erfüllt. Daher betrachtet wir ab jetzt nur autonome Systeme

$$y' = V(y), \;\; V \text{ lokal lipschitzsch.}$$

Sie besitzen eine spezielle Eigenschaft, die im folgenden Lemma beschrieben wird:

Lemma 178 (Zeitverschiebung). *Sei $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Integralkurve des Vektorfeldes $V : U \to \mathbb{R}^n$, dann gilt:*

(a) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $y_c(t) = y(t-c)$, definiert auf $\{t : t-c \in I\}$, auch maximale Integralkurve.

(b) Ist $z : J \to U$ eine weitere maximale Integralkurve und gibt es $r, s \in \mathbb{R}$ mit $y(r) = z(s)$, so folgt $z = y_{s-r}$, also gilt $z(t) = y(t-s+r)$ für alle $t \in J$.

Der Punkt (2) kann man auch wie folgt umformulieren: falls sich die Orbits von zwei maximalen Integralkurven schneiden, so müssen diese Integralkurven bis auf eine “Zeitveschiebung” gleich sein, und die entsprechnden Orbits sind gleich.

Beweis. (a) Direkte Rechnung: $y_c(t) = y'(t-c) = V\big(y(t-c)\big) = V\big(y_c(t)\big)$. (b) Wegen $z(s) = y_{s-r}(s)$ sind z und y_{s-r} Lösungen desselben Anfangswertproblems, daher sind sie gleich (da maximale Lösungen eindeutig bestimmt sind). □

Definition 179. Sei V ein Vektorfeld. Ein **Orbit** von V ist der Orbit einer maximalen Integralkurve von V. Das **Phasenporträt** von V ist die Menge der Orbits von V.

Mit dieser neuen Sprache kann man die schon bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze umformulieren:

Satz 180. *Sei V ein lokal lipschitzsches Vektorfeld auf U, dann bilden die Orbits von V eine Zerlegung von U, d.h.:*

(a) Die Vereinigung aller Orbits ist U,

(b) Je zwei verschiedene Orbits sind disjunkt.

Beweis. (a) Zu jedem $y_0 \in U$ gibt es eine Integralkurve, deren Orbit y_0 enthält (=Existenz der Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$). (b) Zwei Orbits, die sich schneiden, sind gleich: das ist genau Lemma 178(b). □

Satz 181. *Jeder Orbit O von V hat einen der drei folgenden Typen:*

(a) Er besteht nur aus einem Punkt p: dann ist $V(p) = 0$ (man sagt, dass p ein stationärer Punkt von V ist) und die zugehörigen Integralkurven sind konstant, $y(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Er besteht aus einer geschlossenen Kurve (die nicht ein Punkt ist). D.h. für jede Integralkurve y von V mit diesem Orbit gilt folgendes: y ist auf $\mathbb{R}$ definiert und es existiert ein $T > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $y(t+T) = y(t)$, aber $y(s) \neq y(t)$ für $0 < |s-t| < T$.

(c) Er ist der Orbit einer injektiven Integralkurve y, d.h. $y(t) \neq y(s)$ für alle $t \neq s$.

Beweis. Sei y eine Integralkurve von V. Wir betrachtet zwei Fälle:

(1) Es existiert ein t_0 mit $y'(t_0) = 0$. Setze $p := y(t_0)$, dann folgt $V(p) = V(y(t_0)) = y'(t_0) = 0$. Man hat dann die Integralkurve $z(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da sich die Orbits von y und z im Punkt p scheiden, sind diese Orbits gleich (Lemma 178), daher besteht der Orbit von y nur aus dem Punkt p: das ist der Typ (a).

(2) Nehme an, dass $y'(t) \neq 0$ für alle t. Auch hier unterscheidet man weiter:

(2.1) y ist nicht injektiv, d.h. es existieren t_0 und s_0 mit $s_0 \neq t_0$ und $y(s_0) = y(t_0)$. Nach Lemma 178 gilt $y(t) = y(t+C)$ für alle t (mit $C := s_0 - t_0$), d.h. y ist periodisch. Man kann beweisen, dass die Menge

$$\{c > 0 : y(t+c) = y(t) \text{ für alle } t\}$$

ein kleinstes Element T besitzt, dann landen wir beim Typ (b).

(2.2) y ist injektiv: das ist der Typ (c). □

Die Orbits von Typ (c) kann man weiter untersuchen. Den folgenden Satz geben wir aus Zeitgründen ohne Beweis:

Satz 182. *Sei V ein lokal lipschitzsches Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und sei $y : (\alpha, \beta) \to U$ eine injektive maximale Integralkurve von V, dann gilt:*

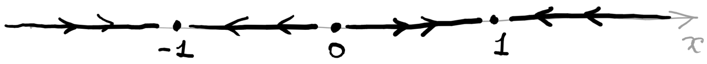
(a) Falls $\beta < \infty$, dann verlässt $y(t)$ jede kompakte (=beschränkte und abgeschlossene) Teilmenge von U für $t \to \beta^-$. Genauer: für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ und für jedes $\gamma < \beta$ existiert ein $t \in (\gamma, \beta)$ mit $y(t) \notin K$

(b) Falls der Grenzwert $p := \lim_{t \to \beta^-} y(t)$ existiert und in U liegt, so folgt $\beta = \infty$ und $V(p) = 0$.

Analoges gilt für α.

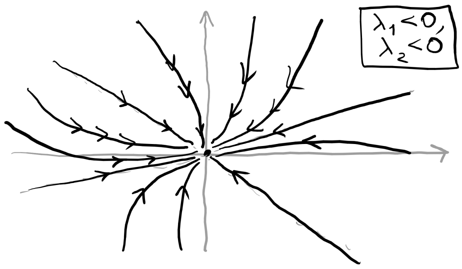
Beispiel 183. (1) Betrachte den Fall $n = 1$ und $U = \mathbb{R}$. Das Phasenporträt von $y = V(y)$ hat eine ziemlich einfache Struktur: Man betrachtet die Menge der stationären Punkten $P = \{p \in \mathbb{R} : V(p) = 0\}$, dann ist jeder Punkt $p \in P$ ein Orbit, darüber hinaus ist jedes maximale Interval $I \subset \mathbb{R} \setminus P$ ein Orbit.

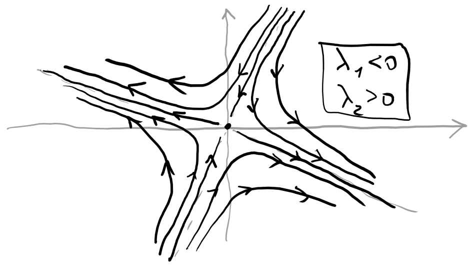
Z.B. hat man für das Vektorfeld $V(x) = x - x^3$ das folgende Phasenporträt:

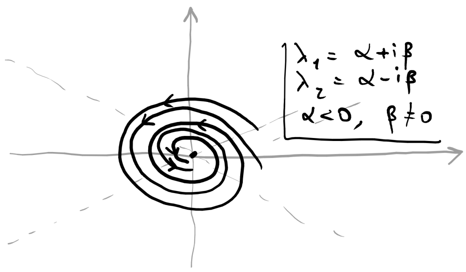


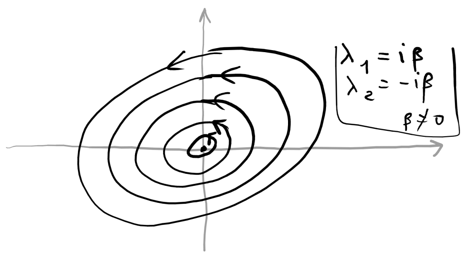
Es gibt drei stationäre Punkte $-1, 0, 1$. Z.B. ist jede maximale Lösung x mit $x(t_0) \in (0, 1)$ auf $\mathbb{R}$ definiert, steigend, mit $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$ und $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Jede maximale Lösung x mit $x(t_0) \in (1, +\infty)$ ist auf $(\alpha, +\infty)$ definiert mit $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ und $\lim_{t\to\alpha^+} x(t) = +\infty$. Man braucht aber eine detalliertere (analytische) Untersuchung um zu verstehen ob $\alpha = -\infty$ oder $\alpha > -\infty$.

(2) Für $n = 2$ sind sehr komplizierte Phasenporträts möglich. Für lineare Systeme $y' = Ay$ mit 2×2 Matrizen A sind Phasenporträts von der Matrix A stark abhängig, einige Beispiele sind unten angebeben (λ_1 und λ_2 sind die Eigenwerte von A).









Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Für die Anwendungen kann es wichtig sein, zu wissen, wie sich die Lösung einer Differentialgleichung ändert, wenn man den Anfangswert oder die Gleichung selbst ändert.

Beispiel 184. Betrachte das Anfangswertproblem $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist bekannt, $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Für jedes *festes* t ist $y(t)$ eine stetige Funktion von y_0 und von λ.

Wir werden diese Fragestellung für autonome Systeme $y' = V(y)$ mit einem lokal lipschitzschen Vektorfeld V besprechen: wie schon oben erwähnt, können auch nichtautonome Systeme auf diesen Fall reduziert werden.

Satz 185 (Banachscher Fixpunktsatz mit Parametern). *Seien X, Y metrische Räume und X vollständig. Zudem sei $T : X \times Y \to X$, und zu $y \in Y$ definiere $T_y : X \ni x \mapsto T(x, y) \in X$. Angenommen es gilt*

1. *Es existiert ein $L < 1$ mit $d(T_y x, T_y x') \leq L d(x, x')$ für alle $(x, x', y) \in X \times X \times Y$ (d.h. alle T_y sind Kontraktionen mit derselben Kontraktionskonstante),*
2. *Für jedes $x \in X$ ist $Y \ni y \mapsto T(x, y) \in X$ stetig.*

Für jedes $y \in Y$ sei p_y der eindeutige (nach dem Banachschen Fixpunktsatz) Fixpunkt von T_y, dann ist die Abbildung

$$Y \ni y \mapsto p_y \in X$$

stetig.

Beweis. Seien $y, z \in Y$ und bezeichne $p := p_y$ und $q := p_z$, dann $p = T_y p$ und $q = T_z q$. Wir haben

$$d(p, q) = d(T_y, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + d(T_z p, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + L d(p, q),$$

daraus folgt $(1 - L) d(p, q) \leq d(T_y p, T_z p)$ und

$$d(p_y, p_z) \leq \frac{1}{1 - L}\, d(T_y p, T_z p).$$

Seien $z_n \in Y$ mit $z_n \to y$, dann $T_{z_n} p = T(p, z_n) \to T(p, y) = T_y p$ (hier haben wir die Bedingung (2) genutzt), also $d(T_y p, T_{z_n} p) \to 0$ und $d(p_y, p_{z_n}) \to 0$. □

Definition 186. Zu $y_0 \in U$ sei $\gamma_{y_0} : I_{y_0} \to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = V(y)$ mit $y(0) = y_0$. Der **Fluss** von V ist die Abbildung

$$\Phi(t, y_0) = \gamma_{y_0}(t)$$

definiert auf $\Omega = \big\{(t, y_0) : t \in I_{y_0}, y_0 \in U\big\}$, also $\Phi : \Omega \to U$.

Falls alle Lösungen auf $\mathbb{R}$ definiert sind, ist $\Phi : \mathbb{R} \times U \to U$. Falls man V als Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung betrachtet, so beschreibt Φ das Fliessverhalten: ist $K \subset U$ ein Farbtropfen zur Zeit $t = 0$, so zeigt die Menge $\Phi(t, K) := \big\{\Phi(t, y) : y \in K\big\}$ die Form des Tropfens nach der Zeit t an. Für lineare Systeme $y' = Ay$ hat man die explizite Formel $\Phi(t, y_0) = e^{tA} y_0$.

Satz 187 (Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten). *Seien Ω und Φ wie in Definition 186, dann: (1) Ω ist eine offene Menge, (2) Φ ist eine stetige Abbildung.*

Beweis. Wie beweisen zuerst folgende **Behauptung (A)**: Sei $p \in U$, dann gibt es $\delta > 0$ und $r > 0$, so dass für jedes $y_0 \in K_r(p)$ die Lösung γ_{y_0} auf dem Zeitintervall $(-\delta, \delta)$ definiert ist, und $\Phi : (-\delta, \delta) \times K_r(p) \to U$ ist stetig.

Wie im Satz von Picard-Lindelöf kann man die Lösung y mit $y(0) = y_0$ als Fixpunkt einer Kontraktion betrachten,

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V\big(y(s)\big)ds =: T(y, y_0)(t),$$

aber diesmal werden wir auch y_0 als Parameter von T auffassen. Jetzt wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern (Satz 185) anwenden, und dafür braucht man passende Räume X ud Y. Wie früher, muss X eine Menge von Funktionen $y : (-\delta, \delta) \to U$ sein, und der Raum Y sollte eine Menge der Anfangsbedingungen y_0 in der Nähe von p sein. Diese Idee werden wir jetzt formalisieren.

Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset U$. Da V lokal lipschitzsch ist, kann man r so wählen, dass V auf $K_{4r}(p) \subset U$ lipschitzsch ist, und sei L die zugehörige Lipschitz-Konstante. Da V eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{K_{2r}(p)}$ ist, ist sie auf dieser Menge beschränkt, d.h. es existiert ein $M \geq 0$ mit $\|V(y)\| \leq M$ für alle $y \in \overline{K_{2r}(y)}$. Jetzt wähle ein kleines $\delta > 0$ mit $\delta M < r$ und $\delta L < 1$ und setze

$$\begin{aligned}
X &= C^0\big((-\delta, \delta)\overline{K_{2r}(p)}\big) \text{ mit der Supremumnorm versehen,}\\
Y &= K_r(p)\text{mit der euklidischen Norm,}
\end{aligned}$$

dann ist X vollständig. Für $y \in X$, $y_0 \in Y$, $t \in (-\delta, \delta)$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|T(y, y_0)(t) - p\big| &\leq \big|T(y, y_0)(t) - y_0\big| + |y_0 - p|\\
&\leq \Big|\int_0^t V\big(y(s)\big)ds\Big| + r \leq \delta M + r < 2r,
\end{aligned}$$

also $T : X \times Y \to X$. Darüber hinaus ist $y_0 \mapsto T(y, y_0)$ offenbar stetig und

$$\begin{aligned}
\big\|T(y, y_0) - T(z, y_0)\big\| &= \sup_{t\in(-\delta,\delta)} \Big\| \int_0^t \big(V(y(s)) - V(z(s))\big)\, ds\Big\|\\
&\leq \int_0^\delta \big\|V(y(s)) - V(z(s))\big\|\, ds\\
&\leq \int_0^\delta L\big\|y(s) - z(s)\big\|\, ds \leq \delta L\|y - z\|.
\end{aligned}$$

Also können wir den Satz 185 anwenden: es folgt, dass es zu jedem $y_0 \in Y = K_r(p)$ eine auf $(-\delta, \delta)$ definierte Lösung γ_{y_0} mit Anfangswert y_0 gibt, und dass die Abbildung $Y \ni y_0 \mapsto \gamma_{y_0} \in X$ stetig ist.

Seien $t, t_0 \in (-\delta, \delta)$ und $y, y_0 \in K_r(p)$, dann

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi(t, y) - \Phi(t_0, y_0)\big\| &= \big\|\gamma_y(t) - \gamma_{y_0}(t_0)\big\|\\
&\leq \big\|\gamma_y(t) - \gamma_y(t_0)\big\| + \big\|\gamma_y(t_0) - \gamma_{y_0}(t_0)\big\|\\
&\leq M|t - t_0| + \big\|\gamma_y(t_0) - \gamma_{y_0}(t_0)\big\|.
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_1 > 0$ mit $\delta_1 M < \frac{\varepsilon}{2}$ und mit $\big\|\gamma_y(t) - \gamma_{y_0}(t)\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $\|y - y_0\| < \delta_1$ und $t \in (-\delta, \delta)$, dann gilt

$$\big\|\Phi(t, y) - \Phi(t_0, y_0)\big\| < \varepsilon \text{ für } |t - t_0| < \delta_1 \text{ und } \|y - y_0\| < \delta_1.$$

Damit ist ist die Behauptung (A) bewiesen.

Als Übung zeigt man (mit Hilfe der Zeitverschiebung), dass daraus die Offenheit von Ω und die Stetigkeit von Φ auf ganz Ω folgen. □

Falls V von einem Parameter a abhängt, d.h. falls man das System $y'(t) = V\big(a, y(t)\big)$ betrachtet, kann man dieses auf den obigen Fall reduzieren: man betrachtet a als eine neue unbekannte Funktion mit $a' = 0$.

In vielen Problemen der Modellierung untersucht man auch die Abbildung $y_0 \mapsto \lim_{t\to+\infty} \gamma_{y_0}(t)$, hier gibt es aber keine einfache Aussage über die Stetigkeit: solche Fragestellungen behandelt man in der mathematischen Stabilitätstheorie.