Obere und untere Schranken, Supremumsaxiom

Def Sei $M \subset \mathbb{R}$. Die Menge M heißt *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*, falls ein $C \in \mathbb{R}$ bzw. $D \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$x \leq C \quad \forall x \in M \qquad \text{bzw.} \qquad x \geq D \quad \forall x \in M.$$

M heißt *beschränkt*, falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist. Die Zahlen C und D nennt man *obere* bzw. *untere Schranken.*

Def Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von M, falls C die kleinste obere Schranke ist, d.h.

1) $x \leq C \quad \forall x \in M$

2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x > C - \varepsilon$.

Def Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $D \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* von M, falls D die größte untere Schranke ist, d.h.

1) $x \geq D \quad \forall x \in M$

2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x < D + \varepsilon$.

Man schreibt $\sup M = C$, $\inf M = D$.

Ist C Supremum von M und $C \in M$, so heißt C *Maximum* von M. Ist D Infimum von M und $D \in M$, so heißt D *Minimum* von M.

Supremumsaxiom *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.*

Satz 1.11 (Archimedisches Prinzip)

Für jede reelle Zahl x existiert eine natürliche Zahl n mit $n > x$.

Satz 1.12 (Satz des Eudoxos)

Für jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.