

Abgabe Analysis IIa, Blatt 01

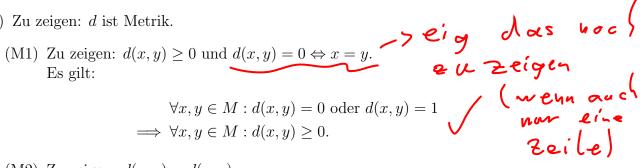
Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 1

Sei $M \neq \emptyset$ und $d: M \times M \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

- (i) Zu zeigen: d ist Metrik.



(M2) Zu zeigen: d(x,y) = d(y,x). Es gilt:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } y \neq x, \\ 0, & \text{falls } y = x. \end{cases}$$
$$= d(y,x).$$

(M3) Zu zeigen: $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Sei oBdA $x \neq z$ (ansonsten gilt d(x, z) = 0 und nach (M1) gilt d(x, y) + $d(y,z) \geq 0$). Es gilt:

$$d(x,z) = 1 \le \frac{1 + d(y,z)}{d(x,y) + 1} = d(x,y) + d(y,z).$$

Da (M1), (M2) und (M3) erfüllt sind, ist d eine Metrik.

(ii) Sei $x_0 \in M$. Es gilt:

$$B_{\frac{1}{3}} = \{x_0\}$$
 da $\forall x \in M, x \neq x_0 : d(x_0, x) = 1.$
 $B_{13} = M$, da $\forall x \in M : d(x_0, x) < 1.$

(iii) Damit eine Folge in (M,d) konvergent gegen a ist, muss $d(a,x_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d. h. $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Da $d(x,y) = 1 \forall x,y \in M, x \neq y$, müssen alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index N gleich dem Mittelpunkt a sein, d. h.:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n = a$$

$$\implies \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(a, x_n) = 0$$

$$\implies \forall \varepsilon \geq 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, a) \leq \varepsilon.$$

(iv) Sei $U \subset X, i \in U$ beliebig. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es gilt:

$$B_{\varepsilon}(x) = \{ a \in X : d(x, a) < \varepsilon \}$$

$$= \{ a \in X : d(x, a) < \frac{1}{2} \}$$

$$= \{ x \}, \quad (\operatorname{da} d(x, a) < 1 \Leftrightarrow x = a)$$

$$\subset U.$$

Daraus folgt:

$$\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 : B_{\varepsilon} \subset U.$$

=) Alle TM sind offer abgesohl.?

Aufgabe 2

- (a) Fehlt.
- (b) Fehlt.

Aufgabe 3

- (a) Fehlt.
- (b) Fehlt.

Aufgabe 4

Fehlt.

