Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Lineare Algebra

Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Berechne:

a)

$$i)\quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\qquad ii)\quad 2\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i)\quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-1\end{pmatrix},\qquad ii)\quad 2\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$$

b)

$$i)\quad \begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix},\qquad ii)\quad \begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i)\quad \begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix},$$

$$ii)\quad \begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}2&-4\\0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix}2&-4\\0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

d)

$$i)\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ii)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hast du eine geometrische Erklärung für das Ergebnis?

Lösung:

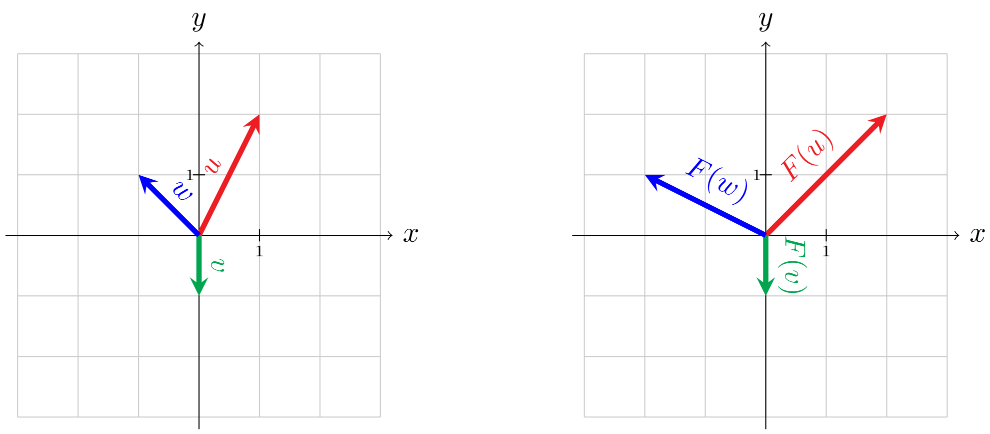
$$i)\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch korrespondiert, wie bereits gesehen, die erste Matrix zur Drehung Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn, die zweite zur Drehung um 90° im Uhrzeigersinn. Die Rechnung sagt nun, dass, wenn man erst gegen und dann im Uhrzeigersinn (oder andersherum) dreht, nicht passiert. Das ist aber klar.

× Aufgabe 2

a) Gegeben sind im Folgenden die Wirkung von linearen Abbildungen F auf gewisse Vektoren. Was bewirken die lineare Abbildungen anschaulich? Gib außerdem die darstellende Matrix an.

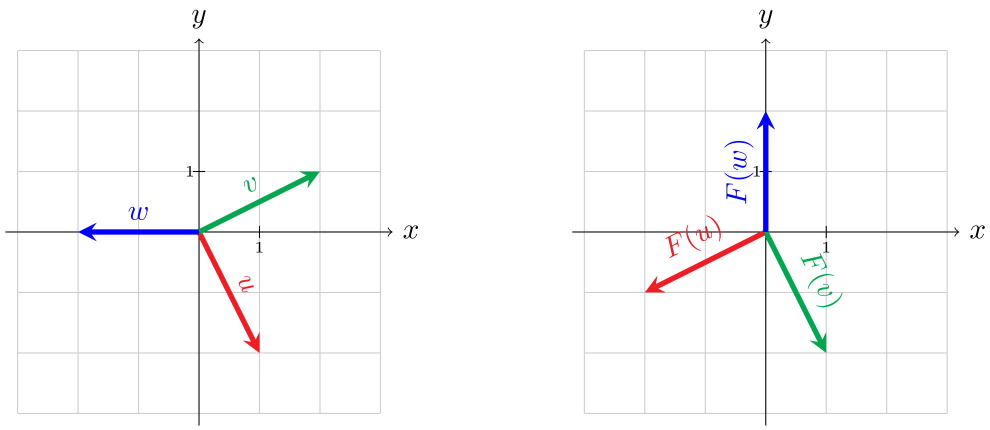
i)



Lösung: F streckt Vektoren in x-Richtung um den Faktor 2. Entweder sieht man dies direkt, oder man argumentiert folgendermaßen: Es ist $e_1 = u - 2 \cdot v$, also $e_1 = F(u) - 2 \cdot f(v) = 2e_2$, und $e_2 = -v$, also $F(e_2) = -F(v) = e_2$. Dann kann man die darstellende Matrix aufstellen, und sieht, dass die x-Komponente mit 2 multipliziert wird, und die y-Komponente fest gelassen wird.

Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii)



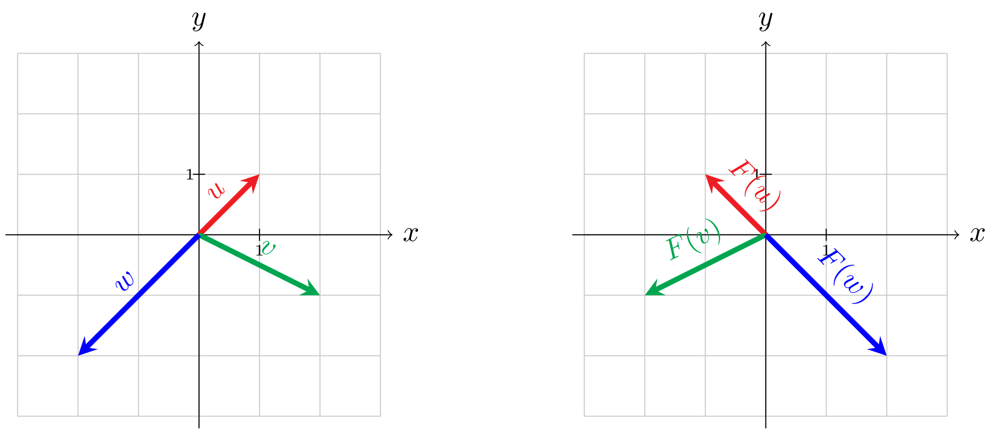
Lösung: F dreht Vektoren um $90°$ *im Uhrzeigersinn um den Ursprung. Entweder sieht man dies direkt, oder man argumentiert folgendermaßen: Es ist* $e_1 = -\frac{1}{2}w$*, also* $F(e_1) = -\frac{1}{2}F(w) = -e_2$*. Außerdem ist* $e_2 = v + w$*, also* $F(e_2) = F(v) + F(w) = e_1$*. Dies liefert die darstellende Matrix, und die Einheitsvektoren, also alle Vektoren, werden um* $90°$ *um Uhrzeigersinn um den Ursprung gedreht.*

Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Mache zu folgenden linearen Abbildungen eine Skizze und stelle die darstellende Matrix auf.

i) Spiegelung an der y-Achse.

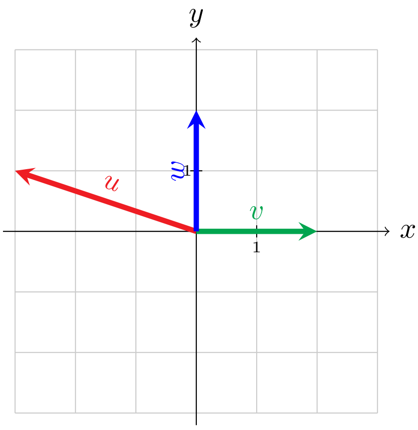
Lösung: Die darstellende Matrix ist $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

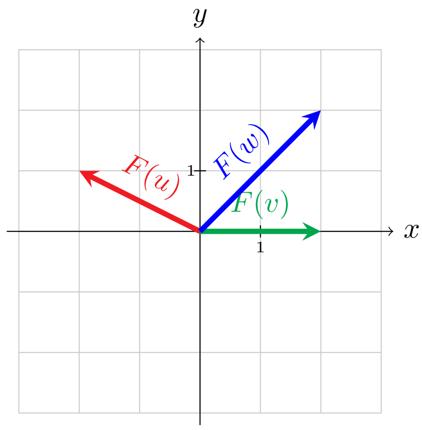


ii)

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung: *Die darstellende Matrix ist* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



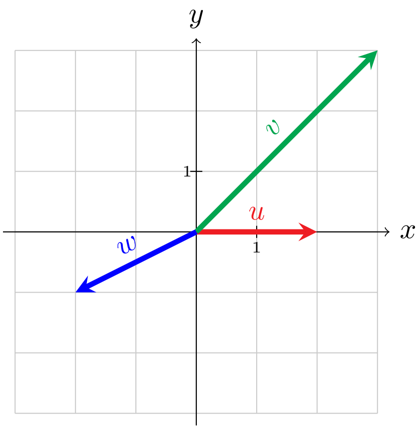


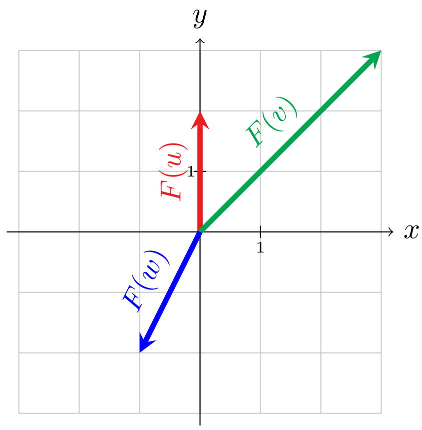
c) Mache zu den zu folgenden Matrizen gehörenden linearen Abbildungen eine Skizze und beschreibe, was die Abbildungen bewirken.

i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die zugehörige lineare Abbildung spiegelt an der Winkelhalbierenden.

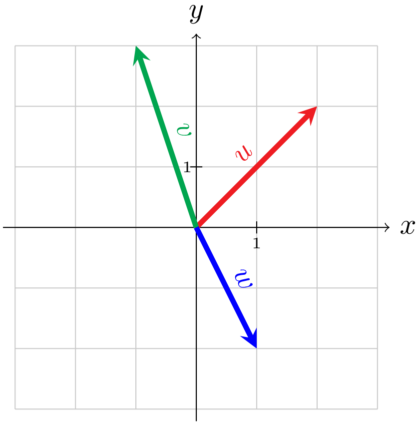


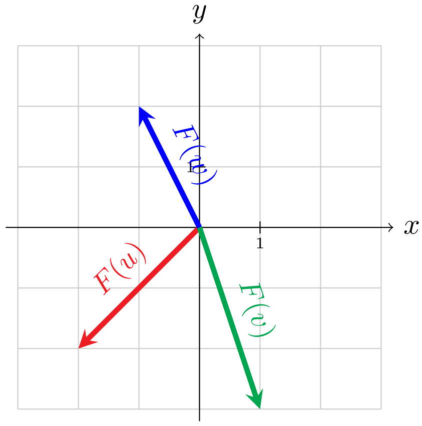


ii)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die zugehörige lineare Abbildung bewirkt eine Punktspiegelung im Ursprung bzw. eine Drehung um 180° um den Ursprung.





Aufgabe 3

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix. Zeige, dass

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ v &\mapsto A \cdot v \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung ist. Benutze dabei nicht Satz 13.9.

Lösung: Beweis: Seien $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *sowie* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$F(v_1 + v_2) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F(v_1) + F(v_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & by_1 \\ cx_1 & dy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 & by_2 \\ cx_2 & dy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$.
Außerdem gilt

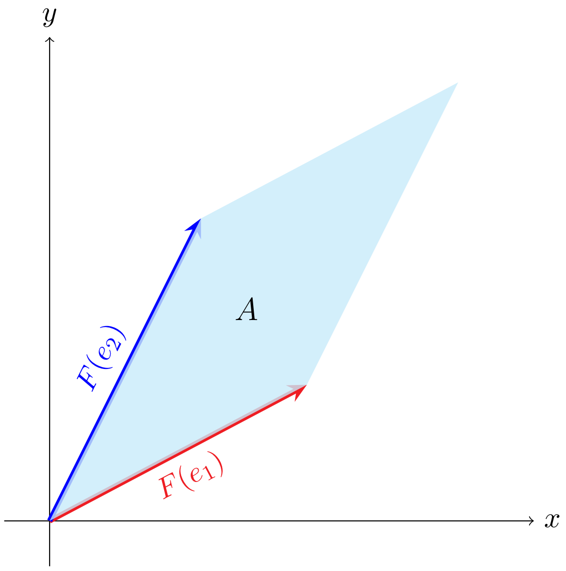
$$F(\lambda \cdot v_1) = F\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a x_1 + \lambda b y_1 \\ \lambda c x_1 + \lambda d y_1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda F(v_1) = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a x_1 + b y_1 \\ c x_1 + d y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a x_1 + \lambda b y_1 \\ \lambda c x_1 + \lambda d y_1 \end{pmatrix},$$

also $F(\lambda \cdot v_1) = \lambda F(v_1)$.
Damit ist F eine lineare Abbildung. □

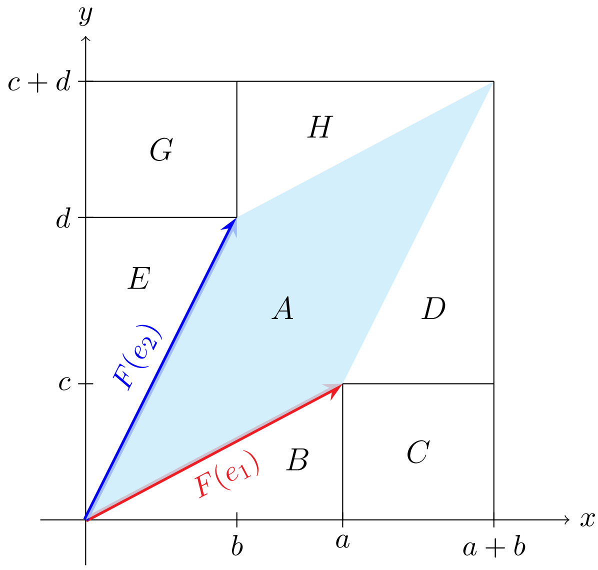
! Aufgabe 4

a) Gegeben sei eine lineare Abbildung F mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die beide Einheitsvektoren in den rechten, oberen Quadranten abbildet und die Orientierung erhält, d.h. $F(e_2)$ „links“ von $F(e_1)$ lässt (sieht Skizze). Zeige, dass der Flächeninhalt A des von $F(e_1)$ und $F(e_2)$ aufgespannten Parallelogramms gleich $ad - bc$ ist.



Hinweis: Verschreibe das Parallelogramm einem Rechteck ein und berechne die Fläche des Rechtecks sowie die Fläche, die nicht von Parallelogramm eingenommen wird.

Lösung: Wir verschreiben das Parallelogramm einem Rechteck mit den Seitenlängen $a+b$ und $c+d$ ein. Die Fläche, die nicht von A eingenommen wird, teilen wir wie in *der Skizze in Teilflächen ein. Diese sind alle Rechtecke bzw. Dreiecke mit bekannter Breite und Höhe, deren Fläche sind leicht berechnen lässt.*



Die Fläche des großen Rechtecks ist gleich $(a+b)(c+d)$. Außerdem gilt:

$$B = \frac{1}{2}ab, \quad C = bc, \quad D = \frac{1}{2}bd, \quad E = \frac{1}{2}bd, \quad G = bc, \quad B = \frac{1}{2}ab.$$

(Alternativ lässt es sich auch mit Symmetrie erkennen, dass $B = H, G = C, D = E$ gilt.)
Damit gilt nun:

$$A = (a+b)(c+d) - (2bc + ac + bd) = ad - bc.$$

Bemerkung: Die Formel gilt auch im allgemeinen Fall, wenn man den Flächeninhalt des Parallelogramms als negativ deklariert, wenn $F(e_2)$ „rechts" von $F(e_1)$ ist. Dies kann im Folgenden verwendet werden.

b) Zeige, dass F nicht surjektiv ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.

Lösung: $ad-bc = 0$ bedeutet, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms 0 ist. Dies kann aber nur passieren, wenn $F(e_1)$ und $F(e_2)$ auf einer Geraden liegen (oder min. einer der Vektoren gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist). Dann liegt aber $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xF(e_1) + yF(e_2)$ für jeden Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf ebendieser Geraden. Dann bildet aber F nur auf diese Gerade ab, trifft also nicht ganz $\mathbb{R}^2$, ist also nicht surjektiv.

c) Zeige, dass F nicht injektiv ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.

Lösung: Wie in b) liegen $F(e_1)$ *und* $F(e_2)$ *auf einer Geraden. Wir unterscheiden zwei Fälle:*
Fall 1: $F(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Da auch $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gilt, ist hier* F *nicht injektiv.*
Fall 2: $F(e_1) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die Gerade, auf der $F(e_1)$ *liegt, sind genau die Vektoren der Form* $\lambda F(e_1)$ *mit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Da* $F(e_2)$ *auf dieser Gerade liegt, gibt es ein* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $\lambda F(e_1) = F(e_2)$. *Wegen der Linearität gilt nun* $F(\lambda e_1) = F(e_2)$. *Wegen* $\lambda e_1 \neq e_2$ *ist* F *nicht injektiv.*