Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 12

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitung von f dort, wo sie existiert (bzw. in x_0), wenn:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

b) $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x} + \frac{\tan x}{e^x - e}$

c) $xf(x) + \ln f(x) = 1$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = x^x$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung aus der Definition der allgemeinen Potenz.

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

definiert. Bestimmen Sie f', finden Sie die lokalen Extrema von f und die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt. Wie verhält sich die Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs? Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 3. Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Beweisen oder widerlegen Sie:

a) ? Ist f monoton auf (a,b), so ist f' monoton auf (a,b). ?

b) ? Ist $f(a) = g(a)$ und $0 \leq f'(x) < g'(x)$ auf (a,b), so gilt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b]$. ?

Aufgabe 4.

a) Beweisen Sie die Ungleichung $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Abgabe: Bis 24. Januar vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1				2	3		4		
	a	b	c	d		a	b	a	b	
Punkte	2	2	2	2	6	2	2	2	1	21

Präsenzaufgaben und Anregungen

1. Berechnen Sie die Ableitung von f, wo es möglich ist, und geben Sie ihren Definitionsbereich an, wenn:

a) $f(x) = x^3 \sqrt[3]{x^2} - x^7 \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{e^{\sin \sqrt{x}}}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin x}{\ln(x-1)}$

d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

2. Finden Sie die Ableitung der Funktion $y = y(x)$, die implizit durch die Gleichung $y^5 + y^3 + y + x = 0$ definiert ist und berechnen Sie $y'(0)$.

3. Sei f durch

a) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

definiert. Welchen Definitionsbereich hat f? Bestimmen Sie f', finden Sie die lokalen Extrema von f und die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt. Wie verhält sich die Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs. Skizzieren Sie den Graphen von f.

4. Zeigen Sie: Zwischen zwei reellen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten gibt es eine reelle Nullstelle seiner Ableitung.

5. Beweisen Sie die Ungleichung $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$ für $0 < y < x$ und $p > 1$.

6. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) ? Sind $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f < g$ auf (a,b), so ist $f' \leq g'$ auf (a,b). ?

b) ? Es gibt eine differenzierbare Funktion $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, sodass $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ gilt und $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nicht existiert. ?

c) ? Sei f eine differenzierbare Funktion. Ist f gerade, so ist f' ungerade. ?

7. Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes $\lim_{n\to\infty} n(1 - \cos \frac{1}{n})$.