Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 11 - Modul mat200

Freiwillige Abgabe 14.07.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Bitte beachten Sie, dass Sie mit der Abgabe dieses Übungsblattes keine Bonuspunkte mehr erwirtschaften können. Die Aufgaben dienen der Wiederholung des Inhalts und der Vorbereitung auf die Prüfung.

Aufgabe 11.1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a). Ist R ein Ring, so ist die formale Ableitung $\phi : R[t] \longrightarrow R[t]$ ein Ringhomomorphismus.

(b). Ist K ein endlicher Körper und $f : K \longrightarrow K$ eine beliebige Funktion, so existiert ein Polynom $p \in K[t]$, sodass für die zugehörige Polynomfunktion gilt: $f(x) = p(x)$ für alle $x \in K$.

(c). Seien R, S Ringe und I ein Ideal von R. Ist $\phi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\phi(I)$ ein Ideal von S.

(d). Sei R ein Ring, $p \in R$ ein Primelement und $f \in R[t]$. Ist $[f]_p \in \left(R/\langle p \rangle \right)[t]$ reduzibel, so ist $f \in R[t]$ reduzibel.

Aufgabe 11.2. Seien $f = t^4 - 2t^3 - t + 2 \in \mathbb{Q}[t]$ und $g = t^6 - t^4 - 4t^3 - 3t^2 - 2t \in \mathbb{Q}[t]$. Stellen Sie $h := \mathrm{ggT}(f, g)$ als $\mathbb{Q}[t]$-Linearkombination von f und g dar. Zerlegen Sie anschließend $R = \mathbb{Q}[t]/\langle f, g \rangle$ in ein Produkt von Körpern.

Aufgabe 11.3.

(a). Bestimmen Sie alle Polynome $f \in \mathbb{Q}[t]$, sodass

$$f \equiv 0 \pmod{(t-1)}, \quad f \equiv t \pmod{(t^2 - 2t + 2)}, \quad \deg(f) \leq 2.$$

(b). Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring, $a \in R$ und $f \in R[t]$. Zeigen Sie, dass für das Ideal $I := f R[t] + (t - a) R[t]$ von $R[t]$ gilt:

$$I = R[t] \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \in R^*.$$