Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Folgen und Grenzwerte

× Aufgabe 1

Notiere jeweils die ersten fünf Folgenglieder der durch a_n definierten Folge (a_n). Falls nichts anderes angegeben ist, gilt $n \in \mathbb{N}$.

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2k$
2. $a_n = \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+5}$
4. $a_n = c^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. $a_n = \log_4(2^n)$

× Aufgabe 2

(a) Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie, mit

1. $a_n = -\frac{5}{n}$
2. $a_n = \lambda^n, \quad 0 < \lambda < 1$
3. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

(b) Bestimme bei den drei in (a) definierten Folgen die größte untere Schranke, die kleinste obere Schranke sowie die kleinste Schranke.

× Aufgabe 3

(a) Welche der Folgen aus Aufgabe 1 konvergieren? Gegen welchen Grenzwert konvergieren diese?

(b) Beweise deine Aussage bei der ersten konvergenten Folge.

Aufgabe 4

1. Betrachte die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{15n-5n^2+3n^3}{n^3-10n}$.
   a) Konvergiert (a_n)? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?
   b) Ist (a_n) beschränkt?
   Hinweis: Ein Blick auf Aufgabe 8 kann helfen. ☺
2. Beweise, dass konstante Folgen konvergieren.
3. Zeige mittels ε-Beweis, dass (a_n) mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

Aufgabe 5

Sei (a_n) eine Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = 44 - \dfrac{3 \cdot (-1)^n}{2n}$.

1. Skizziere die ersten fünf Folgenglieder in einem Koordinatensystem.
2. Konvergiert die Folge (a_n)? Falls ja, welchen Grenzwert a hat die Folge?
   Zeichne ihn und einen ε-Streifen mit $\varepsilon = 1$ gegebenenfalls mit in das Koordinatensystem.
3. Bestimme jeweils zum gegebenen ε das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

   a) $\varepsilon = 1$ *b)* $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ *c)* $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$

× Aufgabe 6

Zeige, dass die Folge (c_n) mit $c_n = (-1)^n$ divergiert.

Hinweis: Erinnere dich an das Negieren von Aussagen aus dem Quantorenlogik-Vortrag und negiere die ε-Definition

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

der Konvergenz mit Grenzwert a (diesen Grenzwert gibt es ja nicht, wenn die Folge divergiert – warum ergibt dann der Quantor vor dem a in der negierten Aussage Sinn?). Dann weißt du, was du zeigen musst, um Divergenz nachzuweisen.
Eine Skizze kann anschließend auch immer gute Denkanstöße liefern.

Aufgabe 7

Finde und korrigiere den Fehler:

Behauptung: (b_n) mit $b_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1} + 5$ konvergiert nicht gegen 5.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $n_0 = 56$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|b_n - b| = \left|\frac{\cos(n)}{n+1} + 5 - 5\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n+1}\right| = \frac{|\cos(n)|}{|n+1|} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < 1 \not< \varepsilon$$

! Aufgabe 8

Beweise den folgenden Satz:

Satz I
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Hinweis: Mache vielleicht zunächst eine Skizze, um dir die Aussage bildlich klar zu machen.

! Aufgabe 9

Findest du heraus, ob (a_n) mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert? Falls ja, wogegen?

Hinweis: Führe die Substitution $k = n - 1$ *durch. Es darf außerdem verwendet werden, dass* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ *gilt.*