Vorlesung 10

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit *inhomogenen* linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung,

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \quad \Leftrightarrow \quad Py = b,$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ und $b : I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen sind ($I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall). Die Struktur der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung haben wir in der letzten Vorlesung besprochen, jetzt brauchen wir einige Methoden, mit deren Hilfe man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen kann. Die Funktion b bezeichnet man oft als die *Inhomogenität* der Gleichung. Wir machen zuerst einige elementare Bemerkungen.

Satz 150. *(a) Seien $y_j(x)$ Lösungen von $Py = b_j$ und $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, dann ist $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m$ Lösung von $Py = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m$.*

(b) Sei z eine komplexwertige Lösung von $Py = b$, dann ist $\overline{z}$ Lösung von $Py = \overline{b}$, $\operatorname{Re} z$ Lösung von $Py = \operatorname{Re} b$, $\operatorname{Im} z$ Lösung von $Py = \operatorname{Im} b$.

Beweis. (a) Da P eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist, gilt

$$P(\alpha_1 y_1 + \cdot + \alpha_m y_m) = \alpha_1 P y_1 + \cdots + \alpha_m P y_m = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m.$$

(b) Hier nutzt man zusätzlich, dass die Koeffizienten a_j reellwertig sind:

$$\begin{aligned} P(D)\overline{z} &= (\overline{z})^{(n)} + a_{n-1}(\overline{z})^{(n-1)} + \cdots + a_1(\overline{z})' + a_0\overline{z} \\ &= \overline{z^{(n)}(x) + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z' + a_0 z} = \overline{b}. \end{aligned}$$

Die Aussagen über $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ beweist man analog. □

Konstante Koeffizienten und spezielle Inhomogenitäten

Wir betrachten zuerst den “einfachen” Fall,

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x) \tag{39}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und speziellen Funktionen b.

Sei $b(x) = e^{\mu x}$ mit $\mu \in \mathbb{C}$. Suche nach einer Lösung der Form $y(x) = ce^{\mu x}$. Das Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung ergibt $y^{(k)}(x) = c\mu^k e^{\mu x}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = cP(\mu)e^{\mu x},$$

wobei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ das charakteristische Polynom ist. Also ist $y(x) = ce^{\mu x}$ genau dann Lösung, wenn $cP(\mu)e^{\mu x} = e^{\mu x}$ für alle x. Falls $P(\mu) \neq 0$, nimmt man $c = \frac{1}{P(\mu)}$, und $y(x) = \frac{1}{P(\mu)}\, e^{\mu x}$ ist die gesuchte spezielle Lösung, sonst (für $P(\mu) = 0$) gibt es keine Lösung der Form $x \mapsto ce^{\mu x}$.

Falls $P(\mu) = 0$, braucht man einen anderen Zugang: dafür nutzt man wieder die Operatorschreibweise. Sei μ eine Nullstelle von P mit der Multiplizität k, dann lässt sich P als $P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \mu)^k$ zerlegen, wobei Q ein Polynom ist mit $Q(\mu) \neq 0$, und man kann die Gleichung (39), d.h. $P(D)y(x) = e^{\mu x}$, als

$$Q(D)(D - \mu)^k y(x) = e^{\mu x}, \quad D = \frac{d}{dx},$$

umschreiben. Also können wir versuchen, zuerst eine Lösung z von $Q(D)z(x) = e^{\mu x}$ zu finden und danach eine Lösung von $(D - \mu)^k y(x) = z(x)$ zu bestimmen.

Die Gleichung $Q(D)z(x) = e^{\mu x}$ besitzt eine Lösung $z(x) = \frac{1}{Q(\mu)} e^{\mu x}$ (das haben wir oben schon besprochen). Betrachte jetzt $(D - \mu)^k y(x) = z(x) = \frac{1}{Q(\mu)} e^{\mu x}$ und nutze den Ansatz $y(x) = s(x)e^{\mu x}$ und die Gleichheit (37) aus der letzten Vorlesung:

$$(D - \mu)^k y(x) = (D - \mu)^k \big(s(x)e^{\mu x}\big) = e^{\mu x} D^k s(x) = e^{\mu x} s^{(k)}(x) = \tfrac{1}{Q(\mu)} e^{\mu x},$$

d.h. $s^{(k)}(x) = \frac{1}{Q(\mu)}$. Die Gleichung $u^{(k)} = 1$ hat Lösung $u(x) = \frac{x^k}{k!}$, also kann man $s(x) = \frac{x^k}{k!Q(\mu)}$ nehmen, und damit erhält man die Lösung $y(x) = \frac{x^k}{k!Q(\mu)}\, e^{\mu x}$ von (39). Diesen Asudruck wollen wir aber weiter vereinfachen: aus der Darstellung

$$P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \mu)^k = Q(\mu)(\lambda - \mu)^k + O(|\lambda - \mu|^{k+1}), \quad \lambda \to \mu,$$

(Taylor-Formel!) folgt $Q(\mu) = \frac{P^{(k)}(\mu)}{k!}$ (das kann man auch durch die Induktion zeigen), also $y(x) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)}\, x^k e^{\mu x}$. Daraus entsteht auch eine Methode, die Multiplizität k zu bestimmen, ohne das Polynom P zerlegen zu müssen:

$$k = \min\big\{ j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ mit } P^{(j)}(\mu) \neq 0 \big\}. \tag{40}$$

Alle obigen Kostruktionen können wir wie folgt zusammenfassen:

Satz 151 (Spezielle Lösung für spezielle Inhomogenität). *Sei $\mu \in \mathbb{C}$, $b(x) = e^{\mu x}$, P das charakterische Polynom der Differentialgleichung* (39) *mit konstanten Koeffizienten. Sei k wie in* (40)*, dann ist $y(x) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)}\, x^k e^{\mu x}$ Lösung von* (39).

Bemerkung 152. Analog kann man zeigen, dass die Gleichung (39) mit Inhomogenitäten $b(x) = x^m e^{\mu x}$ Lösungen der Form $y(x) = x^k R(x) e^{\mu x}$ besitzt, wobei R ein Polynom mit $\operatorname{Grad} R = m$ ist (k ist immer noch wie in (40)). In den Übungen kann man auch diesen Ansatz ohne Beweis nutzen.

Beispiel 153. (a) $y'' + 3y' + 2y = e^x$. Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, die Inhomogenität hat die spezielle Form $e^{\mu x}$ mit $\mu = 1$, wobei $P(\mu) = P(1) = 6 \neq 0$, also hat man eine spezielle Lösung $y(x) = \frac{1}{6}\, e^x$.

(b) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. In diesem Fall ist $\mu = -1$ Nullstelle von P: $P(-1) = 0$ aber $P'(-1) = (2\lambda + 3)|_{\lambda=-1} = 1 \neq 0$, also ist die Multiplizität 1, und wir haben Lösung $y(x) = xe^{-x}$. Falls man nicht sicher ist, kann man die gefundene Funktion in die Gleichung einsetzen um nochmals zu prüfen, ob alles stimmt:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x}, \quad y'' = -2e^{-x} + xe^{-x},$$
$$y'' + 3y' + 2y = -2e^{-x} + xe^{-x} + 3e^{-x} - 3xe^{-x} + 2xe^{-x} = e^{-x}.$$

(c) $y'' + 3y' + 2y = xe^{x}$. Da 1 keine Nullstelle von P ist, suchen wir nach einer Lösung den form $y(x) = (ax + b)e^{x}$ (der Term $ax + b$ hat denselben Grad als der polynomiale Faktor in der Inhomogenität). Dieser Ansatz wird in die Gleichung eingesetzt: wir haben $y' = ae^{x} + (ax+b)e^{x} = (ax+a+b)e^{x}$ und $y'' = (ax+2a+b)e^{x}$,

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= (ax + 2a + b)e^{x} + 3(ax + a + b)e^{x} + 2(ax + b)e^{x} \\ &= \big(6ax + (5a + 6b)\big)e^{x}. \end{aligned}$$

Um $y'' + 3y' + 2y = xe^{x} = (1 \cdot x + 0)e^{x}$ zu erfüllen, muss man also a und b mit $6a = 1$ und $5a + 6b = 0$ nehmen: also $a = \frac{1}{6}$ und $b = -\frac{5}{36}$, und die spezielle Lösung ist

$$y(x) = \big(\tfrac{1}{6}\, x - \tfrac{5}{36}\big)e^{x}.$$

(d) Um eine spezielle Lösung z von $y'' + y = 2e^{x} + e^{-3x}$ zu finden, betrachten wir $y'' + y = e^{x}$ (mit spezieller Lösung $y_1 = \frac{1}{2}\, e^{x}$) und $y'' + y = e^{-3x}$ (mit spezieller Lösung $y_2(x) = \frac{1}{10}e^{-3x}$), dann ist $y = 2y_1 + y_2 = e^{x} + \frac{1}{10}\, e^{-3x}$ spezielle Lösung der usprünglichen inhomogenen Differentialgleichung.

(e) $y'' + y' - y = \sin x$. Man merkt, dass $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Wir können also ein z finden mit $z'' + z' - z = e^{ix}$ und dann nehmen wir $y = \operatorname{Im} z$. Aber für z haben wir die spezielle Inhomogenität $e^{\mu x}$, wobei $\mu = i$ keine Nullstelle vom charakterischen Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1$ ist: $P(i) = -2 + i$. Also

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{1}{P(i)}e^{ix} = -\tfrac{1}{2-i}\, e^{ix} = -\tfrac{2+i}{5}(\cos x + i \sin x) \\ &= \big(-\tfrac{2}{5}\, \cos x + \tfrac{1}{5} \sin x\big) + i\big(-\tfrac{1}{5} \cos x - \tfrac{2}{5} \sin x\big), \end{aligned}$$

und $y(x) = \operatorname{Im} z = -\frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$.

Variation der Konstanten

Falls b keine spezielle Inhomogenität ist (d.h. keine lineare Kombination von Produkten von Polynomen, trigonometrischen und Exponentialfunktionen), und/oder falls die Koeffizienten a_j nichtkonstant sind, kann man das Problem der speziellen Lösung auf das Berechnen von Integralen reduzieren. Diese Methode nennt man Variation der Konstanten (analog zu linearen Differentialgleichungen erster Ordnung).

Betrachte die allgemeine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \tag{41}$$

und sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung. Zur Erinnerung, die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung schreibt sich als $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, wobei c_j beliebige Konstanten sind. Für eine spezielle Lösung y von (41) nutzen wir den ähnlichen Ansatz

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x),$$

d.h. die "ehemaligen Konstanten" c_j werden zu Funktionen (daraus stammt der Name der Methode). Wir haben

$$y' = (c_1y_1' + \cdots + c_ny_n') + (c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n).$$

Falls wir jetzt y'' berechnen, erhalten wir Summanden mit c_j''. Um das zu vermeiden, verlangen wir schon im ersten Schritt, dass $c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n = 0$, dann gilt

$$y'' = (c_1y_1'' + \cdots + c_ny_n'') + (c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n'),$$

und wir verlangen $c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n' = 0$ usw. Auf diese Weise erhalten wir $(n-1)$ lineare Differentialgleichungen für c_j,

$$c_1'y_1^{(k)} + \cdots + c_n'y_n^{(k)} = 0, \quad k = 0, \ldots n-2, \tag{42}$$

sowie die Darstellungen

$$\begin{aligned}
y^{(k)} &= c_1y_1^{(k)} + \cdots + c_ny_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n-1,\\
y^{(n)} &= (c_1y_1^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)})\\
&= \sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

mit deren Hilfe die Differentialgleichung (41) die folgende Form annimmt:

$$\sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^{n} c_jy_j^{(k)} = b,$$

$$\text{oder } \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\Big(y_j^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_ky_j^{(k)} \Big)}_{=Py_j=0} + \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j^{(n-1)} = b,$$

oder einfach $c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = b$. Zusammen mit (42) erhalten wir also n lineare Differentialgleichungen für die n Funktionen c_j, die man sehr kompakt als eine einzige Matrixgleichung $\Phi(x)C'(x) = B(x)$ auffassen kann, wobei

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{pmatrix}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die Matrix $\Phi(x)$ für alle x invertierbar ist, daher $C' = \Phi^{-1}B$ und $C = \int \Phi^{-1}B$. Man muss also n Integrale berechnen um alle n Funktionen c_j zu bestimmen.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Für allgemeine n ist die Methode der Variation der Konstanten ziemlich anspruchsvoll: auch für den "einfachen" Fall mit konstanten Koeffizienten a_j können beim Invertieren der Matrix Φ sehr komplizierte analytische Ausdrucke entstehen, die man danach noch integrieren muss. Für variable Koeffizienten a_j können auch die Lösungen y_j selbst sehr kompliziert aussehen (falls man es überhaupt schafft, ein Fundamentalsystem zu bestimmen). Allerdings ist die Situation mit $n = 2$ ein bisschen einfacher, da die Matrizen noch ziemlich klein sind.

Betrachte also eine inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \tag{43}$$

und sei (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{44}$$

Die zugehörige Matrix Φ aus der Methode der Variation der Konstanten ist dann $\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$, und ihre Determinante $W(x) = \det \Phi(x) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)(x)$ heisst **Wronski-Determinante**[11] von y_1 und y_2.

Satz 154. *Seien y_1, y_2 beliebige Lösungen von* (44) *auf einem Intervall I. Ihre Wronski-Determinante ist genau dann Null, wenn y_1 und y_2 linear abhängig sind. Darüber hinaus gilt für alle $x, x_0 \in I$ die* **Liouvillesche Formel**[12]

$$W(x) = W(x_0) \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt \Big). \tag{45}$$

[11] Josef Hoëné-Wronski (1776–1853) war ein polnischer Mathematiker
[12] Joseph Liouville (1809–1882) war ein französischer Mathematiker

Beweis. Sei $x \in I$. In der letzten Vorlesung (Beweis vom Satz 143) haben wir gesehen, dass die lineare Abbildung

$$\text{Lösungsraum der homogenen DGL} \ni y \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$$

bijektiv ist. Also sind y_1 und y_2 genau dann linear abhängig, wenn ihre Bilder, d.h. die Vektoren $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$, linear abhängig sind. Diese Vektoren sind aber die zwei Spalten der Wronski-Determinante $W(x)$, und aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass eine Determinante genau dann Null ist, wenn ihre Spalten linear abhängig sind. Die erste Aussage ist damit bewiesen. Um (45) zu beweisen, berechnen wir W':

$$\begin{aligned} W' &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2 \\ &= y_1(-a_1y_2' - a_0y_2) - (-a_1y_1' - a_0y_1)y_2 = -a_1(y_1y_2' - y_1'y_2) = -a_1W. \end{aligned}$$

Also genügt W der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung $W' = -a_1W$, und (45) ist die schon bekannte Formel für die Lösungen. □

Falls (y_1, y_2) eine Fundamentalsystem ist, dass sind y_1 und y_2 linear unabhängig, daher $W(x) = \det \Phi(x) \neq 0$ für alle x, die Matrix Φ ist invertierbar, und man kann das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

bezüglich c_1', c_2' mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen:

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{1}{\det \Phi} \det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ b & y_2' \end{pmatrix} = -\frac{by_2}{W}, & c_2' &= \frac{1}{\det \Phi} \det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b \end{pmatrix} = \frac{by_1}{W}, \\ c_1 &= -\int \frac{by_2}{W}, & c_2 &= \int \frac{by_1}{W}. \end{aligned}$$

Daraus entsteht eine Formel für die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (43):

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = -y_1 \int \frac{by_2}{W} + y_2 \int \frac{by_1}{W}. \tag{46}$$

Um eine bestimmte Funktion zu erhalten, kann man statt $\int$ das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x}$ nutzen, daraus folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} y(x) &= -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt + y_2 \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} G(x,t)b(t)\,dt, \quad G(x,t) = \frac{-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)}{W(t)}. \end{aligned}$$

Die Funktion $G(x,t)$ nennt man oft die **Greensche Funktion**[13] der Gleichung.

[13] George Green (1793–1841) war ein britischer Mathematiker

Satz 155. *Die Funktion* $y(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} G(x,t)b(t)\,dt$ *ist die Lösung der inhomogenen Gleichung* (43) *mit* $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Beweis. Wir haben schon bewiesen, dass y Lösung ist, und die Anfangsbedingungen prüft man direkt (Übung). $\square$

Bemerkung 156. Es ist für die Variation der Konstanten also wichtig, ein Fundamentalsystem zu haben. Es kann aber passieren, dass man zunächst nur eine Lösung $y_1 \not\equiv 0$ der homogenen Gleichung $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ findet. Dann kann man aber die noch fehlende Lösung y_2 mit Hilfe der Wronski-Determinante finden. Man kann zuerst die Liouvillesche Formel (45) wie folgt umschreiben (man nehme z.B. $W(x_0) = 1$):

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}, \quad W(x) = \exp\Big(- \int a_1(x)\,dx \Big),$$

und auf der linken Seite erkennt man $(\frac{y_2}{y_1})'$. Daher

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W}{y_1^2}, \qquad y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2}, \tag{47}$$

und aus $W \neq 0$ folgt, dass das Integral nichtkonstant ist und dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind. $\square$

Beispiel 157. Wir möchten die Gleichung

$$y''(x) - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2}{x^2+1}\, y = 1. \tag{48}$$

lösen, wobei eine Lösung $y_1(x) = x$ der zugehörigen homogenen Gleichung schon bekannt ist. Betrachte die Liouvillesche Formel für die Wronski-Determinante,

$$W(x) = \exp\Big[- \int \Big(- \frac{2x}{x^2+1} \Big)\,dx \Big] = \exp \ln(x^2+1) = x^2 + 1,$$

dann erhält man eine weitere Lösung der homogenen Gleichung durch

$$y_2(x) = x \int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = x \int \Big(1 + \frac{1}{x^2} \Big)\,dx = x\big(x - \frac{1}{x}\big) = x^2 - 1.$$

Die Wronski-Determinante von y_1 und y_2 ist schon bekannt, $W(x) = x^2 + 1$, also findet man eine spezielle Lösung von (48) mit der Formel (46):

$$y(x) = -x \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx + (x^2-1) \int \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Man bestimmt die Integrale:

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \Big(1 - \frac{2}{x^2+1} \Big)\,dx = x - 2\arctan x, \qquad \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1),$$

also ist $y(x) = -x^2 + 2x \arctan x + \frac{x^2-1}{2} \ln(x^2+1)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung von (48) ist

$$y(x) = c_1 x + c_2(x^2-1) - x^2 + 2x\arctan x + \frac{x^2-1}{2}\ln(x^2+1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$