Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 9 - Modul mat200

Freiwillige Abgabe 30.06.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Bitte beachten Sie, dass Sie mit der Abgabe dieses Übungsblattes keine Bonuspunkte mehr erwirtschaften können. Die Aufgaben dienen der Wiederholung des Inhalts und der Vorbereitung auf die Prüfung.

Aufgabe 9.1. Es sei $n \geq 2$ und $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Lösung des Kongruenzensystems:

$$X^2 \equiv Y^2 \pmod{n} \quad \wedge \quad X \not\equiv \pm Y \pmod{n}.$$

Zeigen Sie, dass $d := \operatorname{ggT}(x - y, n)$ ein echter Teiler von n ist (insbesondere gilt: $d \notin \{1, n\}$).

Aufgabe 9.2. Sei R ein kommutativer Ring.

(a). Beweisen Sie: Die Ideale $\langle t - 1 \rangle$ und $\langle t + 1 \rangle$ von $R[t]$ sind genau dann teilerfremd, wenn $2 := 1 + 1$ eine Einheit von R ist.

(b). Beweisen Sie: Falls $2 \in R^*$, so ist $R[t]/\langle t^2 - 1 \rangle \cong R \times R$.

Aufgabe 9.3.

(a). Sei $K \supseteq k$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in K$, sodass $\alpha\beta \neq 0$. Zeigen Sie: Falls es teilerfremde Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\alpha^n \in k$ und $\beta^m \in k$, so gilt $k(\alpha, \beta) = k(\alpha\beta)$. Geben Sie außerdem ein Beispiel an, welches verdeutlicht, dass auf die Teilerfremdheit im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann. *Hinweis: Verwenden Sie die Bézout-Darstellung.*

(b). Finden Sie einen Körper $K \supseteq \mathbb{Q}$, sodass $\pi \in \mathbb{R}$ algebraisch über K und $[K(\pi) : K] = 3$ ist. *Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass π transzendent über $\mathbb{Q}$ ist.*