

Folgen und Grenzwerte

× Aufgabe 1

Notiere jeweils die ersten fünf Folgenglieder der durch a_n definierten Folge (a_n) . Falls nichts anderes angegeben ist, gilt $n \in \mathbb{N}$.

$$1. a_n = \sum_{k=1}^n 2k$$

$$2. a_n = \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$3. a_n = \frac{(-1)^n}{n+5}$$

$$4. a_n = c^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$5. a_n = \log_4(2^n)$$

Lösung:

$$1. a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 12, \quad a_4 = 20, \quad a_5 = 30$$

$$2. a_0 = -1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{5}, \quad a_4 = \frac{1}{7}$$

$$3. a_1 = -\frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{7}, \quad a_3 = -\frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{9}, \quad a_5 = -\frac{1}{10}$$

$$4. a_0 = 1, \quad a_1 = c, \quad a_2 = c^2, \quad a_3 = c^3, \quad a_4 = c^4$$

$$5. a_n = \frac{n}{2}, \text{ daher: } a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{3}{2}, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = \frac{5}{2}$$

× Aufgabe 2

(a) Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie, mit

$$1. a_n = -\frac{5}{n}$$

$$2. a_n = \lambda^n, \quad 0 < \lambda < 1$$

$$3. a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

(b) Bestimme bei den drei in (a) definierten Folgen die größte untere Schranke, die kleinste obere Schranke sowie die kleinste Schranke.

Lösung:

(a) 1. (a_n) ist monoton wachsend, denn:

$$a_n \stackrel{!}{<} a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{-5}{n} < \frac{-5}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n+1 > n \Leftrightarrow 1 > 0$$

2. (a_n) ist monoton fallend, denn:

$$a_n \stackrel{!}{>} a_{n+1} \Leftrightarrow \lambda^n > \lambda^{n+1} \Leftrightarrow \lambda^n > \lambda^n \cdot \lambda \Leftrightarrow 1 > \lambda$$

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

3. (a_n) ist nicht monoton fallend, denn dann müsste gelten:

$$\begin{aligned} a_n \stackrel{!}{\geq} a_{n+1} &\Leftrightarrow (-1)^{n+1} \cdot n \geq (-1)^{n+2} \cdot (n+1) \\ &\Leftrightarrow (-1)^{n+1} \geq (-1)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -1 \geq \frac{n+1}{n}, & n \text{ gerade} \quad \nexists \\ -1 \leq \frac{n+1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

(a_n) ist auch nicht monoton wachsend, denn dann müsste gelten:

$$\begin{aligned} a_n \stackrel{!}{\leq} a_{n+1} &\Leftrightarrow (-1)^{n+1} \cdot n \leq (-1)^{n+2} \cdot (n+1) \\ &\Leftrightarrow (-1)^{n+1} \leq (-1)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -1 < \frac{n+1}{n}, & n \text{ gerade} \\ -1 \geq \frac{n+1}{n}, & n \text{ ungerade} \quad \nexists \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) 1. \circ größte untere Schranke $s = -5$ finden:
 (a_n) ist streng monoton wachsend, also ist die größte untere Schranke $s = a_1 = -5$
- \circ kleinste obere Schranke $S = 0$ finden:
 Eine obere Schranke ist offensichtlich $S = 0$.
 Angenommen es existiert eine kleinere obere Schranke $\tilde{S} < S$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\tilde{S} < -\varepsilon < 0$. Dann würde für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} a_n \leq \tilde{S} &\Leftrightarrow a_n \leq 0 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{-5}{n} \leq -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n} \geq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} \geq n \quad \nexists \text{ Gilt nicht für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- \circ Also ist (a_n) mit $B = \max\{|s|, |S|\} = 5$ beschränkt.

2. \circ größte untere Schranke $s = 0$ finden:
 Eine untere Schranke ist offensichtlich $s = 0$.
 Angenommen, es existiert eine größere untere Schranke $\tilde{s} > s$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\tilde{s} = s + \varepsilon$ gilt und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\begin{aligned} a_n \geq \tilde{s} &\Leftrightarrow a_n \geq s + \varepsilon \Leftrightarrow \lambda^n > \varepsilon \xLeftrightarrow[\log]{\substack{\lambda^n, \varepsilon > 0 \\ \text{mon. st.}}} \log(\lambda^n) > \log(\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow n \cdot \log(\lambda) > \log(\varepsilon) \xLeftrightarrow[\log(\lambda) < 0] n < \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\lambda)} \quad \nexists \text{ Gilt nicht für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

- kleinste obere Schranke $S = \lambda$ finden:
 (a_n) ist monoton fallend, also ist die kleinste obere Schranke $a_1 = \lambda$.
 - Also (a_n) mit $B = \max \{|s|, |S|\} = \lambda$ beschränkt.
3. ◦ (a_n) nicht nach oben unbeschränkt:
 Angenommen, es existiert $S \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq S$.
 Dann:
- $$a_n \leq S \Leftrightarrow (-1)^{n+1} \cdot n \leq S \Rightarrow \begin{cases} n \leq S, & n \text{ ungerade} \\ n \geq -S, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nrightarrow \text{Nur für} \\ S = \infty \notin \mathbb{R}^+ \\ \text{erfüllt} \end{array}$$
- Existiert in \mathbb{R}^+ keine obere Schranke, dann auch nicht in \mathbb{R} .
- (a_n) ist nicht nach unten unbeschränkt:
 Angenommen, es existiert $s \in \mathbb{R}^-$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq s$.
 Dann:
- $$a_n \geq s \Leftrightarrow (-1)^{n+1} \cdot n \geq s \Rightarrow \begin{cases} n \geq s, & n \text{ ungerade} \\ n \leq -s, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nrightarrow \text{Nur für} \\ s = -\infty \notin \mathbb{R}^- \\ \text{erfüllt.} \end{array}$$
- Existiert in \mathbb{R}^- keine untere Schranke, dann auch nicht in \mathbb{R} und somit ist die Folge auch nicht beschränkt..
- Die Folge ist nicht beschränkt, da sie nicht nach oben und unten beschränkt ist.

× Aufgabe 3

- (a) Welche der Folgen aus Aufgabe 1 konvergieren? Gegen welchen Grenzwert konvergieren diese?
- (b) Beweise deine Aussage bei der ersten konvergenten Folge.

Lösung:

- (a) Es konvergieren die Folge aus 2. und die Folge aus 3. jeweils gegen 0 sowie die Folge aus 4. gegen 0, falls $c \in (-1, 1)$, und gegen 1, falls $c = 1$. Falls $c \leq -1$ divergiert die Folge aus 4., falls $c > 1$, so divergiert sie (gegen ∞).
- (b) Beweis der Konvergenz der Folge aus 2.:
Zeige: (a_n) konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.
 Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{2n-1}$$

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

An dieser Stelle erkennen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty$ (nach dem Satz über Grenzwerte aus der VL). Also gilt nach dem Satz über Grenzwerte aus der VL, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n - 1} = 0$.

Aufgabe 4

1. Betrachte die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{15n - 5n^2 + 3n^3}{n^3 - 10n}$.
 - a) Konvergiert (a_n) ? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?
 - b) Ist (a_n) beschränkt?
Hinweis: Ein Blick auf Aufgabe 8 kann helfen. ☺
2. Beweise, dass konstante Folgen konvergieren.
3. Zeige mittels ε -Beweis, dass (a_n) mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

Lösung:

1. a) Wir formen a_n um:

$$a_n = \frac{15n - 5n^2 + 3n^3}{n^3 - 10n} = \frac{n^3 \left(\frac{15}{n^2} - \frac{5}{n} + 3 \right)}{n^3 \left(1 - \frac{10}{n^2} \right)} = \frac{\left(\frac{15}{n^2} - \frac{5}{n} + 3 \right)}{\left(1 - \frac{10}{n^2} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3$$

Wir sehen also: (a_n) konvergiert und hat den Grenzwert $a = 3$.

- b) Mit Satz I aus Aufgabe 8 und Aufgabenteil a) folgt die Beschränktheit.
2. (a_n) konstant $\Leftrightarrow a_n = c$, mit $c \in \mathbb{R}$. Vermutung: Der Grenzwert von (a_n) ist c .
Sei $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ kann beliebig gewählt werden. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

3. Vermutung: $a = 0$. Also:

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Aufgabe 5

Sei (a_n) eine Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = 44 - \frac{3 \cdot (-1)^n}{2n}$.

1. Skizziere die ersten fünf Folgenglieder in einem Koordinatensystem.

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

- Konvergiert die Folge (a_n) ? Falls ja, welchen Grenzwert a hat die Folge?
Zeichne ihn und einen ε -Streifen mit $\varepsilon = 1$ gegebenenfalls mit in das Koordinatensystem.
- Bestimme jeweils zum gegebenen ε das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:
 $|a_n - a| < \varepsilon$.

a) $\varepsilon = 1$

b) $\varepsilon = \frac{1}{2}$

c) $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Lösung:

- Die ersten fünf Folgenglieder lauten:

$$a_1 = 45 + \frac{1}{2} = 45,5$$

$$a_2 = 44 - \frac{3}{4} = 43,25$$

$$a_3 = 44 + \frac{1}{2} = 44,5$$

$$a_4 = 44 - \frac{3}{8} = 43,625$$

$$a_5 = 44 + \frac{3}{10} = 44,3$$

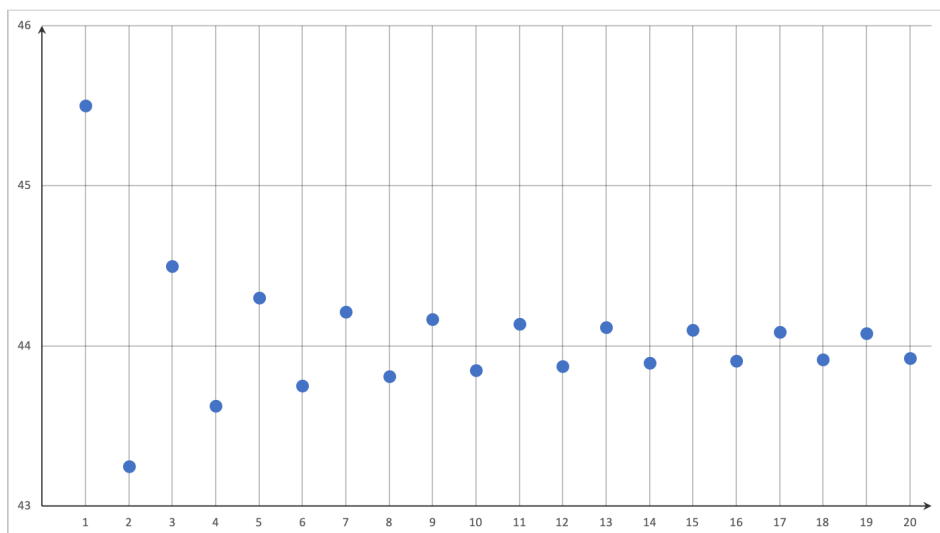


Abbildung 1: Die ersten 20 Folgenglieder der Folge (a_n) mit $a_n = 44 - \frac{3 \cdot (-1)^n}{2n}$.

- Wir formen a_n um:

$$a_n = 44 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 44 - \frac{3}{2} \cdot 0 = 44$$

Achtung: Die Konvergenz von $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ haben wir in Aufgabe 4, 3.), bewiesen, dies wäre sonst erstmal nicht trivial, da $((-1)^n)$ nicht konvergiert!

3. Es gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| 44 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} - 44 \right| = \left| -\frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \right| = \left| -\frac{3}{2} \right| \cdot |(-1)^n| \cdot \left| \frac{1}{n} \right| \\ &= \frac{3}{2n} \stackrel{!}{<} \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned} a) \quad \varepsilon = 1 &\Rightarrow \frac{3}{2} < n_0 \Rightarrow n_0 = 2 & b) \quad \varepsilon = 0.5 &\Rightarrow 3 < n_0 \Rightarrow n_0 = 4 \\ c) \quad \varepsilon = 0.2 &\Rightarrow \frac{15}{2} < n_0 \Rightarrow n_0 = 8 & d) \quad \varepsilon = 0.1 &\Rightarrow 15 < n_0 \Rightarrow n_0 = 16 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Zeige, dass die Folge (c_n) mit $c_n = (-1)^n$ divergiert.

Hinweis: Erinnere dich an das Negieren von Aussagen aus dem Quantorenlogik-Vortrag und negiere die ε -Definition

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

der Konvergenz mit Grenzwert a (diesen Grenzwert gibt es ja nicht, wenn die Folge divergiert – warum ergibt dann der Quantor vor dem a in der negierten Aussage Sinn?). Dann weißt du, was du zeigen musst, um Divergenz nachzuweisen. Eine Skizze kann anschließend auch immer gute Denkanstöße liefern.

Lösung: Es ist zu zeigen: $\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 : |c_n - c| \geq \varepsilon$ zeigen.

Beweis: Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachte $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (jede andere Zahl aus $(0, 1]$ ginge auch) und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig.

- Falls $c \geq 0$, betrachte $n = 2n_0 + 1 > n_0$. Dann:

$$|c_n - c| = |-1 - c| = |(-1) \cdot (1 + c)| = |-1| \cdot |1 + c| \geq 1 > \frac{1}{10} = \varepsilon$$

- Falls $c < 0$, wähle $n = 2n_0$. Dann:

$$|c_n - c| = |1 - c| > 1 > \frac{1}{10} = \varepsilon$$

Egal welches $c \in \mathbb{R}$ wir also betrachten, wir finden immer ein $\varepsilon > 0$, sodass wir zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ finden, sodass $|c_n - c| \geq \varepsilon$. □

Aufgabe 7

Finde und korrigiere den Fehler:

Behauptung: (b_n) mit $b_n = \frac{\cos(n)}{n+1} + 5$ konvergiert nicht gegen 5.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $n_0 = 56$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|b_n - b| = \left| \frac{\cos(n)}{n+1} + 5 - 5 \right| = \left| \frac{\cos(n)}{n+1} \right| = \frac{|\cos(n)|}{|n+1|} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < 1 \not< \varepsilon$$

Lösung: (b_n) konvergiert gegen 5. Die Fehler im Beweis sind:

- 1.) n_0 muss hier abhängig von ε gewählt werden, genauer ist $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ notwendig.
- 2.) Am Ende vom Beweis wurde zu grob abgeschätzt.

Richtig ist: $\dots \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

! Aufgabe 8

Beweise den folgenden Satz:

Satz I

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Hinweis: Mache vielleicht zunächst eine Skizze, um dir die Aussage bildlich klar zu machen.

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

Lösung:

Beweis: Sei (a_n) eine Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Wir wollen zuerst zeigen, dass (a_n) ab einem gewissen Folgenglied (dem n_0 -ten mit $n_0 \in \mathbb{N}$) beschränkt ist.

Wir wissen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, also:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1 \quad (\text{wenn es f. a. } \varepsilon \text{ gilt,} \\ &\quad \text{insbesondere auch für } \varepsilon = 1) \\ &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|\end{aligned}$$

Zeige, dass auch $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0})$ beschränkt ist:

Sei $b := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0}|\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist b nach Definition eine Schranke von $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0}\}$.

Mit $B := \max\{1 + |a|, b\} \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $-B \leq a_n \leq B$. Also ist (a_n) beschränkt (durch B). \square

! Aufgabe 9

Findest du heraus, ob (a_n) mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert? Falls ja, wogegen?

Hinweis: Führe die Substitution $k = n - 1$ durch. Es darf außerdem verwendet werden, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ gilt.

Lösung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$

Aus dem Hinweis ergibt sich schon die Lösung (Bemerkung: Die Limes-Schreibweise benutzen wir erst einmal und müssen am Ende rechtfertigen, dass wir diese verwenden durften, da wir herausbekommen werden, dass die Folge konvergiert):

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n-1 \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-1+1}\right)^{n-1+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right) \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \right] \stackrel{*}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Zu *: Beide Grenzwerte existieren, daher darf Satz 10.2.1. angewendet werden.