Präsenzaufgabe 0.3 *Voraussetzung:* A, B, C Aussagen.

(a). *Voraussetzung:* Betrachte die Aussagen

$$(\neg B \Longrightarrow \neg A) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} (A \Longrightarrow B) \overset{(2)}{\Longrightarrow} (B \Longrightarrow A).$$

Behauptung: (2) ist falsch.

Beweis. Angenommen (2) wäre wahr für alle möglichen Aussagen A und B.
Gegenbeispiel: Es seien

A die Aussage "Der Tutor isst zu viel Eis" und
B die Aussage "Der Tutor hat Bauchweh".

Es gilt, dass $A \Rightarrow B$ eine wahre Aussage ist. Wäre (2) wahr, so wäre $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $B \Rightarrow A$. Allerdings gilt: Nur weil der Tutor Bauchweh hat, hat er nicht notwendiger Weise zu viel Eis gegessen. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. D.h. (2) ist falsch. □

Bemerkung: (1) ist wahr nach Präsenzaufgabe 0.2.(a).

(a). *Voraussetzung:* Betrachte die Aussagen

$$A \overset{(3)}{\Longrightarrow} (A \wedge \neg A) \overset{(4)}{\Longrightarrow} B \overset{(5)}{\Longrightarrow} \neg(A \wedge B) \overset{(6)}{\Longleftrightarrow} \neg A \vee \neg B.$$

Behauptung: (3) und (5) sind falsch.

Beweis. Angenommen (3) wäre wahr für alle möglichen Aussagen A.

Zunächst beobachten wir, dass $A \wedge \neg A$ stets eine falsche Aussage ist.

Gegenbeispiel: Seien $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $A(n)$ die Aussage "n is gerade". Somit ist $A(8)$ eine wahre Aussage und wäre (3) korrekt, würde dies implizieren, dass $A(2) \wedge \neg A(2)$ wahr ist. Dies kann nicht der Fall sein. Das haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme. D.h. (3) ist falsch.

Angenommen (5) wäre wahr für alle möglichen Aussagen A und B.

Zunächst beobachten wir, dass (5) äquivalent ist zu $A \wedge B \Rightarrow \neg B$ nach Präsenzaufgabe 0.2(a).

Gegenbeispiel: Seien $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $A(n)$ die Aussage "n is gerade". Sei weiter $B(n)$ die Aussage "$n \geq 7$".
Betrachte $n = 8$. Es gilt: $A(8) \wedge B(8)$ ist wahr, allerdings ist $\neg B(n)$ (d.h. die Aussage "$n < 7$") falsch. Aus etwas richtigem kann nicht etwas falsches folgen (siehe Wahrheitstabelle in der Angabe). Daher liegt ein Widerspruch vor, d.h. unsere Annahme war falsch: (5) ist falsch. □

Bemerkung: (4) ist wahr da $A \wedge \neg A$ stets falsch ist und verwende die Spalte $A \Rightarrow B$ der Wahrheitstabelle aus der Angabe.
(6) ist ebenso wahr. Um die Äquivalenz zu zeigen, kann man z.B. eine geeignete Wahrheitstabelle erstellen.