Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Folgen und Grenzwerte

× Aufgabe 1

Notiere jeweils die ersten fünf Folgenglieder der durch a_n definierten Folge (a_n). Falls nichts anderes angegeben ist, gilt $n \in \mathbb{N}$.

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2k$
2. $a_n = \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+5}$
4. $a_n = c^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. $a_n = \log_4(2^n)$

Lösung:

1. $a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 12, \quad a_4 = 20, \quad a_5 = 30$
2. $a_0 = -1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{5}, \quad a_4 = \frac{1}{7}$
3. $a_1 = -\frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{7}, \quad a_3 = -\frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{9}, \quad a_5 = -\frac{1}{10}$
4. $a_1 = 1, \quad a_2 = c, \quad a_3 = c^2, \quad a_4 = c^3, \quad a_5 = c^4$
5. $a_n = \frac{n}{2}$, *daher:* $\quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, a_3 = \frac{3}{2}, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = \frac{5}{2}$

× Aufgabe 2

(a) Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie, mit

1. $a_n = -\frac{5}{n}$
2. $a_n = \lambda^n, \quad 0 < \lambda < 1$
3. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

(b) Bestimme bei den drei in (a) definierten Folgen die größte untere Schranke, die kleinste obere Schranke sowie die kleinste Schranke.

Lösung:

(a) 1. (a_n) *ist <u>monoton wachsend</u>, denn:*

$$a_n \overset{!}{<} a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-5}{n} < \frac{-5}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad n{+}1 > n \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$$

2. (a_n) *ist <u>monoton fallend</u>, denn:*

$$a_n \overset{!}{>} a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^n > \lambda^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^n > \lambda^n \cdot \lambda \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \lambda$$

3. (a_n) ist <u>nicht monoton fallend</u>, denn dann müsste gelten:

$$\begin{aligned}
a_n \overset{!}{\geq} a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad (-1)^{n+1} \cdot n \geq (-1)^{n+2} \cdot (n+1) \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^{n+1} \geq (-1)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} -1 \geq \frac{n+1}{n}, & n \text{ gerade } \lightning \\ -1 \leq \frac{n+1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

(a_n) ist auch <u>nicht monoton wachsend</u>, denn dann müsste gelten:

$$\begin{aligned}
a_n \overset{!}{\leq} a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad (-1)^{n+1} \cdot n \leq (-1)^{n+2} \cdot (n+1) \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^{n+1} \leq (-1)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} -1 \leq \frac{n+1}{n}, & n \text{ gerade} \\ -1 \geq \frac{n+1}{n}, & n \text{ ungerade } \lightning \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) 1.
- <u>größte untere Schranke $s = -5$ finden:</u>
  (a_n) ist streng monoton wachsend, also ist die größte untere Schranke $s = a_1 = -5$
- <u>kleinste obere Schranke $S = 0$ finden:</u>
  Eine obere Schranke ist offensichtlich $S = 0$.
  Angenommen es existiert eine kleinere obere Schranke $\tilde{S} < S$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\tilde{S} < -\varepsilon < 0$. Dann würde für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned}
a_n \leq \tilde{S} \quad &\Leftrightarrow \quad a_n \leq 0 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-5}{n} \leq -\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{n} \geq \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{\varepsilon} \geq n \qquad \lightning \text{ Gilt nicht für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Also ist (a_n) mit $B = \max\{|s|, |S|\} = 5$ beschränkt.

2.
- <u>größte untere Schranke $s = 0$ finden:</u>
  Eine untere Schranke ist offensichtlich $s = 0$.
  Angenommen, es existiert eine größere untere Schranke $\tilde{s} > s$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\tilde{s} = s + \varepsilon$ gilt und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\begin{aligned}
a_n \geq \tilde{s} \quad &\Leftrightarrow \quad a_n \geq s + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^n > \varepsilon \quad \underset{\substack{\log \\ \text{mon. st.}}}{\overset{\lambda^n, \varepsilon > 0}{\Longleftrightarrow}} \quad \log(\lambda^n) > \log(\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad n \cdot \log(\lambda) > \log(\varepsilon) \quad \overset{\log(\lambda) < 0}{\Longleftrightarrow} \quad n < \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\lambda)} \qquad \lightning \text{ Gilt nicht für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

- *kleinste obere Schranke $S = \lambda$ finden:*
  (a_n) ist monoton fallend, also ist die kleinste obere Schranke $a_1 = \lambda$.
- *Also (a_n) mit $B = \max\{|s|, |S|\} = \lambda$ beschränkt.*

3.
- *(a_n) nicht nach oben unbeschränkt:*
  Angenommen, es existiert $S \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq S$. Dann:

$$a_n \leq S \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^{n+1} \cdot n \leq S \Rightarrow \begin{cases} n \leq S, & \textit{n ungerade} \ \lightning \text{ Nur für } S = \infty \notin \mathbb{R}^+ \text{ erfüllt} \\ n \geq -S, & \textit{n gerade} \end{cases}$$

  Existiert in $\mathbb{R}^+$ keine obere Schranke, dann auch nicht in $\mathbb{R}$.
- *(a_n) ist nicht nach unten unbeschränkt:*
  Angenommen, es existiert $s \in \mathbb{R}^-$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq s$. Dann:

$$a_n \geq s \Leftrightarrow (-1)^{n+1} \cdot n \geq s \Rightarrow \begin{cases} n \geq s, & \textit{n ungerade} \\ n \leq -s, & \textit{n gerade} \ \lightning \text{ Nur für } s = -\infty \notin \mathbb{R}^- \text{ erfüllt.} \end{cases}$$

  Existiert in $\mathbb{R}^-$ keine untere Schranke, dann auch nicht in $\mathbb{R}$ und somit ist die Folge auch nicht beschränkt..
- *Die Folge ist nicht beschränkt, da sie nicht nach oben und unten beschränkt ist.*

× Aufgabe 3

(a) Welche der Folgen aus Aufgabe 1 konvergieren? Gegen welchen Grenzwert konvergieren diese?

(b) Beweise deine Aussage bei der ersten konvergenten Folge.

Lösung:

(a) Es konvergieren die Folge aus 2. und die Folge aus 3. jeweils gegen 0 sowie die Folge aus 4. gegen 0, falls $c \in (-1, 1)$, und gegen 1, falls $c = 1$. Falls $c \leq -1$ divergiert die Folge aus 4., falls $c > 1$, so divergiert sie (gegen ∞).

(b) Beweis der Konvergenz der Folge aus 2.:

<u>Zeige</u>: (a_n) konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0.

Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{2n-1}\right| = \frac{1}{2n-1}$$

An dieser Stelle erkennen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = \infty$ (nach dem Satz über Grenzwerte aus der VL). Also gilt nach dem Satz über Grenzwerte aus der VL, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$.

Aufgabe 4

1. Betrachte die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{15n-5n^2+3n^3}{n^3-10n}$.
   a) Konvergiert (a_n)? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?
   b) Ist (a_n) beschränkt?
   Hinweis: Ein Blick auf Aufgabe 8 kann helfen. ☺
2. Beweise, dass konstante Folgen konvergieren.
3. Zeige mittels ε-Beweis, dass (a_n) mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

Lösung:

1. a) *Wir formen a_n um:*

$$a_n = \frac{15n-5n^2+3n^3}{n^3-10n} = \frac{n^3\left(\frac{15}{n^2} - \frac{5}{n} + 3\right)}{n^3\left(1 - \frac{10}{n^2}\right)} = \frac{\left(\frac{15}{n^2} - \frac{5}{n} + 3\right)}{\left(1 - \frac{10}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{1} = 3$$

Wir sehen also: (a_n) konvergiert und hat den Grenzwert $a = 3$.

   b) *Mit Satz I aus Aufgabe 8 und Aufgabenteil a) folgt die Beschränktheit.*

2. *(a_n) konstant $\Leftrightarrow$ $a_n = c$, mit $c \in \mathbb{R}$. Vermutung: Der Grenzwert von (a_n) ist c. Sei $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ kann beliebig gewählt werden. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:*

$$|a_n - a| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

3. *Vermutung: $a = 0$. Also:*
   Sei $\varepsilon > 0$, wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Aufgabe 5

Sei (a_n) eine Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = 44 - \dfrac{3 \cdot (-1)^n}{2n}$.

1. Skizziere die ersten fünf Folgenglieder in einem Koordinatensystem.
2. Konvergiert die Folge (a_n)? Falls ja, welchen Grenzwert a hat die Folge? Zeichne ihn und einen ε-Streifen mit $\varepsilon = 1$ gegebenenfalls mit in das Koordinatensystem.
3. Bestimme jeweils zum gegebenen ε das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

$a)\ \varepsilon = 1$ $\qquad$ $b)\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $c)\ \varepsilon = \dfrac{1}{10}$

Lösung:

1. *Die ersten fünf Folgenglieder lauten:*

$a_1 = 45 + \dfrac{1}{2} = 45{,}5$ $\qquad$ $a_2 = 44 - \dfrac{3}{4} = 43{,}25$ $\qquad$ $a_3 = 44 + \dfrac{1}{2} = 44{,}5$

$a_4 = 44 - \dfrac{3}{8} = 43{,}625$ $\qquad$ $a_5 = 44 + \dfrac{3}{10} = 44{,}3$

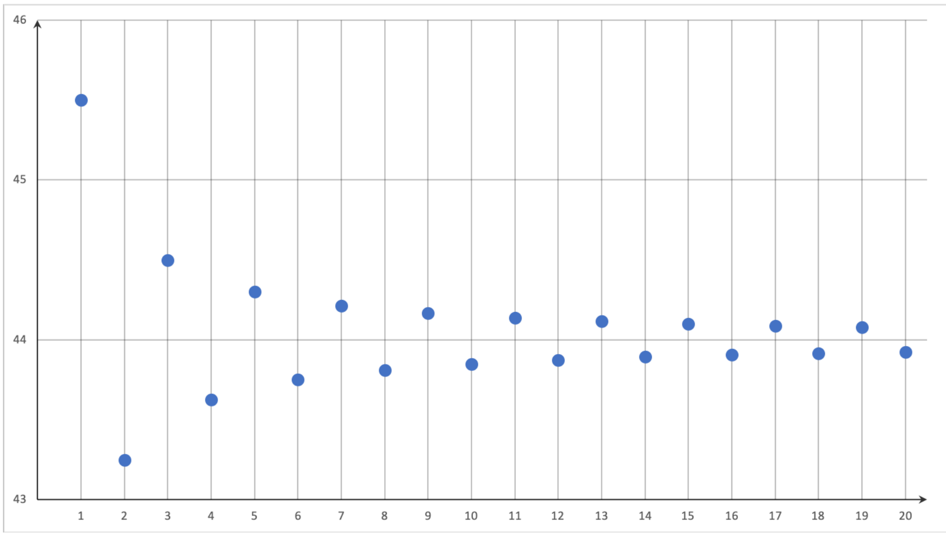

Abbildung 1: Die ersten 20 Folgenglieder der Folge (a_n) mit $a_n = 44 - \dfrac{3 \cdot (-1)^n}{2n}$.

2. *Wir formen a_n um:*

$$a_n = 44 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 44 - \frac{3}{2} \cdot 0 = 44$$

Achtung: Die Konvergenz von $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ haben wir in Aufgabe 4, 3.), bewiesen, dies wäre sonst erstmal nicht trivial, da $((-1)^n)$ nicht konvergiert!

3. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|44 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} - 44\right| = \left|-\frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n}\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| \cdot |(-1)^n| \cdot \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{3}{2n} \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2\,\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Somit:

a) $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} < n_0 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 2$

b) $\varepsilon = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 3 < n_0 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 4$

c) $\varepsilon = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{2} < n_0 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 8$

d) $\varepsilon = 0.1 \quad \Rightarrow \quad 15 < n_0 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 16$

× Aufgabe 6

Zeige, dass die Folge (c_n) mit $c_n = (-1)^n$ divergiert.

Hinweis: Erinnere dich an das Negieren von Aussagen aus dem Quantorenlogik-Vortrag und negiere die ε-Definition

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

der Konvergenz mit Grenzwert a (diesen Grenzwert gibt es ja nicht, wenn die Folge divergiert – warum ergibt dann der Quantor vor dem a in der negierten Aussage Sinn?). Dann weißt du, was du zeigen musst, um Divergenz nachzuweisen.
Eine Skizze kann anschließend auch immer gute Denkanstöße liefern.

Lösung: Es ist zu zeigen: $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0\ : |c_n - c| \geq \varepsilon$ *zeigen.*

Beweis: Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachte $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (jede andere Zahl aus $(0, 1]$ ginge auch) und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig.

- Falls $c \geq 0$, betrachte $n = 2n_0 + 1 > n_0$. Dann:

$$|c_n - c| = |-1 - c| = |(-1) \cdot (1 + c)| = |-1| \cdot |1 + c| \geq 1 > \frac{1}{10} = \varepsilon$$

- Falls $c < 0$, wähle $n = 2n_0$. Dann:
$$|c_n - c| = |1 - c| > 1 > \frac{1}{10} = \varepsilon$$

Egal welches $c \in \mathbb{R}$ wir also betrachten, wir finden immer ein $\varepsilon > 0$, sodass wir zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ finden, sodass $|c_n - c| \geq \varepsilon$. $\square$

Aufgabe 7

Finde und korrigiere den Fehler:

Behauptung: (b_n) mit $b_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1} + 5$ konvergiert nicht gegen 5.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $n_0 = 56$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:
$$|b_n - b| = \left|\frac{\cos(n)}{n+1} + 5 - 5\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n+1}\right| = \frac{|\cos(n)|}{|n+1|} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < 1 \not< \varepsilon$$

Lösung: (b_n) *konvergiert gegen 5. Die Fehler im Beweis sind:*

1.) n_0 *muss hier abhängig von* ε *gewählt werden, genauer ist* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ *notwendig.*

2.) Am Ende vom Beweis wurde zu grob abgeschätzt.

Richtig ist: $\quad \ldots \dfrac{1}{n_0} < \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$

! Aufgabe 8

Beweise den folgenden Satz:

> **Satz I**
> Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Hinweis: Mache vielleicht zunächst eine Skizze, um dir die Aussage bildlich klar zu machen.

Lösung:

Beweis: Sei (a_n) eine Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Wir wollen zuerst zeigen, dass (a_n) ab einem gewissen Folgenglied (dem n_0-ten mit $n_0 \in \mathbb{N}$) beschränkt ist.
Wir wissen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, also:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ : |a_n - a| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < 1 \qquad \text{(wenn es f. a. } \varepsilon \text{ gilt, insbeondere auch für } \varepsilon = 1) \\
&\Rightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|
\end{aligned}$$

Zeige, dass auch $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_0})$ beschränkt ist:
Sei $b := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_{n_0}|\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist b nach Definition eine Schranke von $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_0}\}$.
Mit $B := \max\{1 + |a|, b\} \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $-B \leq a_n \leq B$. Also ist (a_n) beschränkt (durch B). □

! Aufgabe 9

Findest du heraus, ob (a_n) mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert? Falls ja, wogegen?

Hinweis: Führe die Substitution $k = n - 1$ durch. Es darf außerdem verwendet werden, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ gilt.

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{e}$

Aus dem Hinweis ergibt sich schon die Lösung (Bemerkung: Die Limes-Schreibweise benutzen wir erst einmal und müssen am Ende rechtfertigen, dass wir diese verwenden durften, da wir herausbekommen werden, dass die Folge konvergiert):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n-1\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-1+1}\right)^{n-1+1} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)\right] = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{k}}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k}}\right] \overset{*}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Zu $*$: Beide Grenzwerte existieren, daher darf Satz 10.2.1. angewendet werden.