(1) Aus der Analysis I ist es bekannt, dass die Reihe auf jedem $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$ gleichmäßig konvergiert:

falls

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n (x-x_0)^n,$$

also $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |s_m(x) - f(x)| = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \underbrace{s_m(x)}_{\text{endliche summe}}\,dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_a^b c_n (x-x_0)^n\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n (x-x_0)^n\,dx$$

5 (a) $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$.

*) $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$; $\frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{e}x^{s-1} \le x^{s-1}e^{-x} \le x^{s-1}$

$\int_0^1 x^{s-1}\,dx$ konvergiert $\Rightarrow \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$
(Maj- Krit).

$\int_0^1 x^{s-1}\,dx$ divergiert $\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{e}x^{s-1}\,dx$ divergiert

$\Rightarrow \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ divergiert (Maj- Krit)

$\Rightarrow \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ konvergiert

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^{s-1}\,dx$ konvergiert

$\Leftrightarrow s-1 > -1 \Leftrightarrow s > 0$.

*) $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$. Wir wissen, dass $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert $\forall \alpha > 1$, und unsere Funktion geht gegen 0 "schneller" als $\frac{1}{x^\alpha}$ für $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+s-1}e^{-x} = 0$$

$(\forall \alpha, s)$

z. B. $\exists\, a>1$: $\underbrace{x^{s-1}e^{-x}}_{=|x^{s-1}e^{-x}|} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x>a$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int_1^a x^{s-1}e^{-x}dx}_{\text{übliches Integral}} + \int_a^{+\infty} \underbrace{x^{s-1}e^{-x}}_{\leq \frac{1}{x^2}} dx$$

konvergiert nach dem Maj.-krit.

$(\forall s>0\,!!)$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \boxed{s>0}$$

(b) Sei $s>0$.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{s}}_{g} \underbrace{e^{-x}}_{f'} dx \overset{PI}{=} \left(-x^s e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty} +$$

$$- \int_0^{+\infty} s x^{s-1}(-e^{-x})dx = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} x^s e^{-x} = 0, \\ \lim_{x\to +\infty} x^s e^{-x} = +\infty \end{array} \right\}$$

$$= s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = s\,\Gamma(s).$$

(c) Sei $n\in\mathbb{N}$, also

$$\Gamma(n) \overset{(b)}{=} (n-1)\,\Gamma(n-1) = \ldots = (n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1) =$$
$$= (n-1)!\,\Gamma(1).$$

~~und~~

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1 = 0! \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(17) Betrachte z.B. $J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

Beachte, dass die Funktion ≥ 0 ist.

Für $x \to +\infty$, steigt $\ln x$ gegen $+\infty$, aber sehr langsam: $\forall \alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} =$

$= \{ \text{L'Hôpital} \} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

Also $\exists\ a \geq 1$ ($a = a_\alpha$!), dass

~~$\ln x \leq \ldots x^\alpha$~~ $\left|\frac{\ln x}{x^\alpha}\right| \leq 1 \quad \forall x \geq a$

(dann auch $|\ln x| \leq x^\alpha \quad \forall x \geq a$).

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_1^{a} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx}_{\substack{\text{stetig auf } [1,a] \\ \Rightarrow \text{ konvergiert}}} + \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,$$

Auf $(a, +\infty)$: $\left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| \leq \frac{x^\alpha}{1+x^2} \leq \frac{x^\alpha}{x^2}$

$\leq \frac{1}{x^{2-\alpha}}$.

($\alpha > 0$, beliebig.) z.B. $\alpha = \frac{1}{2}$;

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ konvergiert

$\Rightarrow$ Konvergiert auch $\int_a^{+\infty} \left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| dx$ (Maj-Krit.)

$\Rightarrow J$ Konvergiert.

Wir beweisen jetzt $J = -I$.

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = \frac{1}{t}; & x = 1,\ t = 1 \\ & x = +\infty,\ t = 0^+ \\ dx = -\frac{1}{t^2}\,dt & \end{array} \right\} =$$

$$= \int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \left\{ \ln\frac{1}{t} = -\ln t \right\} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = -I$$

(und dann ist I automatisch konvergent).