Abgabe Algebra 1, Blatt 02

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 2.1

(a) Sei R kommutativer Ring mit $\mathrm{char}(R) = p$ prim. Es gilt:

$$\begin{aligned}(a+b)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \\ &= \binom{p}{0} a^p b^0 + \binom{p}{p-1} a^0 b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \\ &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k.\end{aligned}$$

Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} a^{p-k} b^k \\ &= p \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} a^{p-k} b^k \overset{p=\mathrm{char}(R)}{=} 0.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned}(a+b)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \\ &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \\ &= a^p + b^p.\end{aligned}$$

$\square$

(b) Sei R kommutativer Ring mit $\mathrm{char}(R) = p$ prim und sei $\varphi : R \to R, x \mapsto x^p$ der sogenannte Frobeniusendomorphismus.
Zu zeigen: φ ist Ringendomorphismus, d.h.

a) $\forall a, b \in R : \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

b) $\forall a, b \in R : \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

c) $\varphi(1) = 1$.

ad a): Seien $a, b \in R$ beliebig. Es gilt:

$$\varphi(a+b) = (a+b)^p \overset{(a)}{=} a^p + b^p = \varphi(a) + \varphi(b).$$

ad b): Seien $a, b \in R$ beliebig. Es gilt:

$$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

ad c): Es gilt:

$$\varphi(1) = 1^p = 1.$$

$\Longrightarrow$ φ ist Ringhomomorphismus
$\overset{\varphi:R\to R}{\Longrightarrow}$ φ ist Ringendomorphismus.

$\square$

Aufgabe 2.2

(a) Sei R kommutativer Ring.
Zu zeigen: R Integritätsring $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in R, c \neq 0 : ca = cb \Rightarrow a = b$.

"$\Longrightarrow$": Sei R Integritätsring. Es gilt:

$$\begin{aligned} & R \text{ Integritätsring} \\ \Longrightarrow\ & R \text{ nullteilerfreier, kommutativer Ring mit } 1 \neq 0 \\ \Longrightarrow\ & (R, \cdot) \text{ abelsche Gruppe} \\ \Longrightarrow\ & \forall c \in R \exists c^{-1} \in R : c \cdot c^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} & ca = cb \\ \Longrightarrow\ & c^{-1}ca = c^{-1}cb \\ \Longrightarrow\ & 1 \cdot a = 1 \cdot b \\ \Longrightarrow\ & a = b. \end{aligned}$$

"$Longrightarrow$": Gelte $\forall a, b, c \in R, c \neq 0 : ca = cb \Rightarrow a = b$.
Zu zeigen: R Integritätsring, d. h. R nullteilerfreier Ring mit 1.

Sei $d \in R$ Nullteiler von R. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \exists a \in R : da = 0 \\ \implies & 2da = 2 \cdot 0 = 0 \\ \implies & da = 2da \\ \implies & d \cdot a = d \cdot 2a \\ \implies & a = 2a. \quad \text{Widerspruch (zu } d \text{ Nullteiler, da } a = 0). \end{aligned}$$

$\square$

(b) Fehlt.

Aufgabe 2.3

(a) Fehlt.

(b) Sei R kommutativer Ring, $a \in R \setminus \{0\}$ nilpotent.
Zu zeigen:

(1) a Nullteiler von R

(2) $\forall b \in R : a \cdot b = 0$.

ad (1): Es gilt:

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0 \text{ und } a^{n-1} \neq 0 \\ \implies & \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot a^{n-1} = 0 \\ \overset{d:=a^{n-1}}{\implies} & a \cdot d = 0 \\ \implies & a \text{ Nullteiler von } R. \end{aligned}$$

ad (2): Sei $b \in R$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} & a \text{ nilpotent} \\ \implies & \exists n \in \mathbb{N} : a^n b^n = 0 \\ \implies & \exists n \in \mathbb{N} : (ab)^n = 0 \\ \implies & ab \text{ nilpotent.} \end{aligned}$$

$\square$

(c) Sei R kommutativer Ring, $a \in R$ nilpotent.
Zu zeigen:

(1) a keine Einheit von R

(2) $1 + a$ Einheit von R

(3) $\forall b \in R^* : a + b \in R^*$.

ad (1): Annahme: a Einheit von R, d. h. $\exists b \in R : ab = 1 = ba$. Sei n die kleinste natürliche Zahl, für die $a^n = 0$ gilt.
Es gilt:

$$\begin{aligned} & ab = 1 \\ \Longrightarrow\ & (ab)^n = 1 \\ \Longrightarrow\ & a^n b^n = 1 \\ \Longrightarrow\ & 0 \cdot b^n = 1 \\ \Longrightarrow\ & 0 = 1. \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

Aufgrund dieses Widerspruchs kann a nicht invertierbar sein.

ad (2): Es gilt:

$$\begin{aligned} (1+a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a^{k-i} \right) &= \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a^{k-i} \right) + a \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a^{k-i} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a^{k-i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a^{k-i+1} \right) \\ &= \left(a^{k-1} - a^{k-2} + \cdots - a^3 + a^2 - a + 1 \right) \\ &\quad + \left(a^k - a^{k-1} + a^{k-2} - \cdots + a^3 - a^2 + a \right) \\ &= a^k + 1. \end{aligned}$$

Da a nilpotent ist, gibt es ein solches k, für das $a^k = 0$ gilt. Für dieses k ist $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a^{k-i}$ das Inverse zu $1 + a$.

ad (3): Sei $a \in R$ nilpotent. Sei $b \in R^*$ beliebig. Es gilt:

$$a + b = b \cdot (1 + b^{-1} a).$$

Da a nilpotent ist, ist auch $b^{-1}a$ nilpotent, wie in (b) gezeigt wurde. Außerdem wurde oben auch gezeigt, dass $1 + b^{-1}a$ eine Einheit ist. Da die Menge der Einheiten eine Gruppe ist, ist auch die Verknüpfung $b \cdot (1 + b^{-1}a)$ eine Einheit. Daraus folgt, dass $a + b = b \cdot (1 + b^{-1}a)$ eine Einheit ist.

$\square$

korrigiert von am