Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Zahlbereiche

× Aufgabe 1

Berechne für $x = 2i, y = 1 + i$ und $z = 2 - 3i$ folgende Ausdrücke:

1. $y \cdot z$
2. $\overline{y \cdot (x - z)}$
3. $|x + z|$
4. $\mathrm{Re}(x \cdot y \cdot z)$
5. $\mathrm{Im}(x + yz)$

Lösung:

1. $y \cdot z = (1+i) \cdot (2-3i) = (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)) + i(1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2) = (2+3) + i(-3+2) = 5 - i$
2. $\overline{y \cdot (x - z)} = \overline{(1 + i) \cdot (-2 + 5i)} = \overline{(1 \cdot (-2) - 1 \cdot 5) + i(1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2))} = \overline{-7 + 3i} = -7 - 3i$
3. $|x + z| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
4. $\mathrm{Re}(x \cdot y \cdot z) = \mathrm{Re}((0 + 2 \cdot i) \cdot (5 - i)) = (0 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 2$
5. $\mathrm{Im}(x + yz) = \mathrm{Im}(2i + 5 - i) = \mathrm{Im}(5 + i) = 1$

Aufgabe 2

Bestimme Real- und Imaginärteil sowie Betrag der komplexen Zahl

$$z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - i}\right)^2.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-i}\right)^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-i}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-i}\right) = \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{-2i}\right) \cdot \left(\frac{2i}{2i}\right) \\
&= \left(\frac{8i + 4\sqrt{3}i}{-4i^2}\right) = \left(\frac{(8+4\sqrt{3})i}{4}\right) = 0 + (2 + \sqrt{3})i
\end{aligned}$$

Damit gilt: $\mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) = 2 + \sqrt{3}$, *sowie* $|z| = \sqrt{0^2 + (2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$.

× Aufgabe 3

Für $z \in \mathbb{C}$ zeige man
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \text{ und } \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Lösung:
Wähle: $z = a + ib$, d.h. $\overline{z} = a - ib$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z) \\ \frac{z-\overline{z}}{2i} &= \frac{a+ib-a+ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \mathrm{Im}(z). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Beweise folgende Rechenregeln:

1. $\overline{\overline{x}} = x$
2. $\mathrm{Re}(x+y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)$

Mithilfe von 2. zeige:

3. $\mathrm{Im}(x+y) = \mathrm{Im}(x) + \mathrm{Im}(y)$

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\mathrm{Re}(z)}{i}$. Wieso?

Lösung: Für $x, y \in \mathbb{C}$, mit $x = a+ib, y = c+id$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib = x$
2. $\mathrm{Re}(x+y) = \mathrm{Re}(a+ib+c+id) = a+c = \mathrm{Re}(a+ib) + \mathrm{Re}(c+id) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)$
3. $\mathrm{Im}(x+y) = \frac{(x+y)-\mathrm{Re}(x+y)}{i} = \frac{x-\mathrm{Re}(x)}{i} + \frac{y-\mathrm{Re}(y)}{i} = \mathrm{Im}(x) + \mathrm{Im}(y)$

× Aufgabe 5

1. Man zeichne die folgenden komplexen Zahlen in die Gauß'sche Zahlenebene ein:

   a) $3 - i$ b) $2i$

   c) $-1 + 3i$ d) z mit $\mathrm{Re}(z) = 2$ und $\mathrm{Im}(z) = 1$

2. Man zeichne eine Gaußsche Zahlenebene und markiere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

   a) $\mathrm{Im}(z) = 1$

   b) $\mathrm{Re}(z) \leq 2$

   c) $|\mathrm{Re}(z)| = 2$

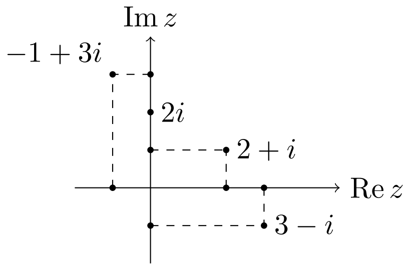
   d) $|\mathrm{Im}(z)| < 3$

   e) $|\mathrm{Re}(z)| \leq 2$ und $|\mathrm{Im}(z)| > 2$

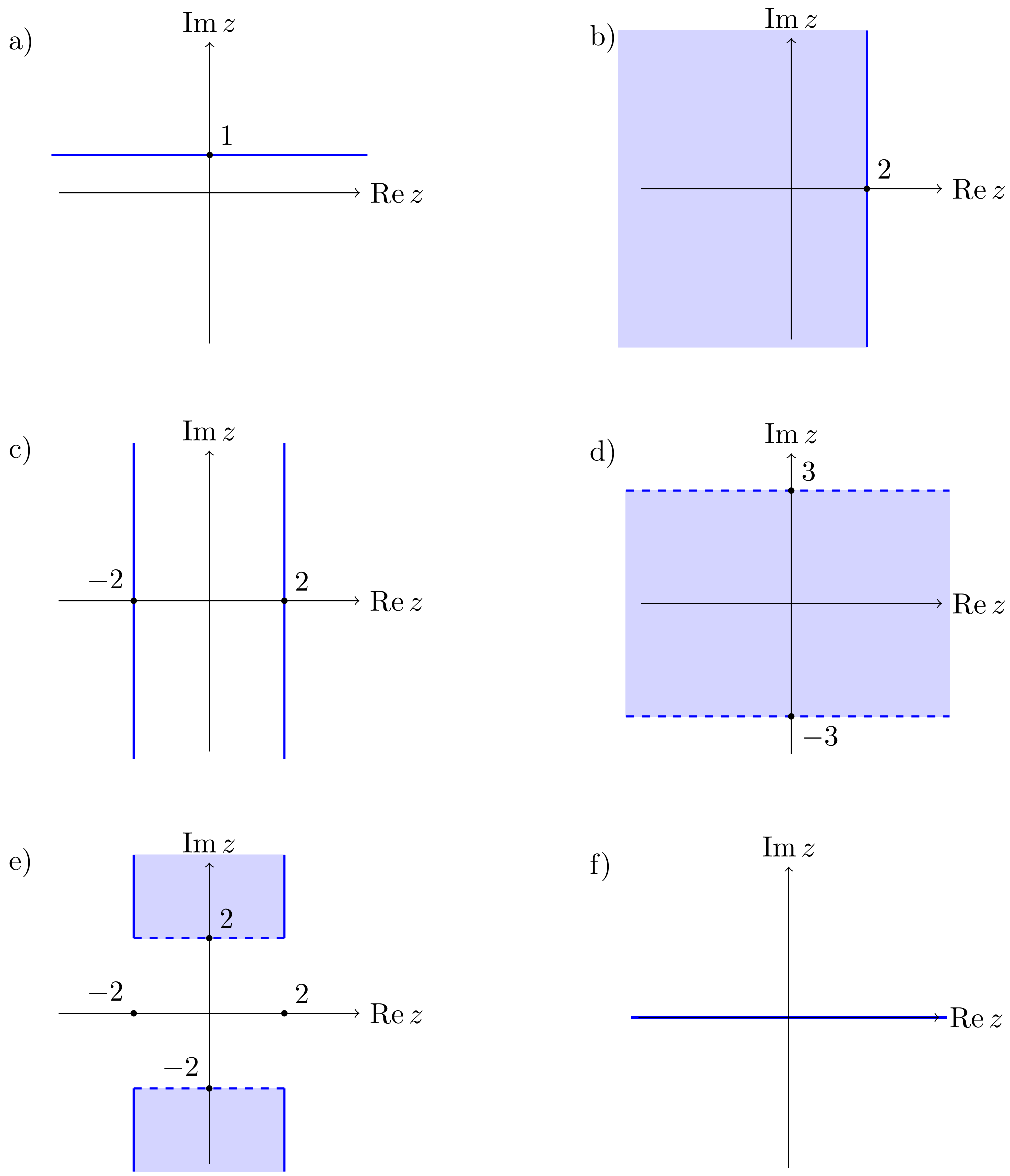
   f) $z = \overline{z}$

Lösung:

1. *Hier die Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:*



2. Hier die Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:



Aufgabe 6

Begründe oder widerlege (z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels):

1. Multipliziert man eine komplexe Zahl mit $(-i)$, so werden Real- und Imaginärteil getauscht.
2. Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.

3. Es ist möglich, als Summe komplexer Zahlen, deren Realteil jeweils 0 ist, 1 zu erhalten.

4. Im Allgemeinen gilt: $\mathrm{Re}(x \cdot y) = \mathrm{Re}(x) \cdot \mathrm{Re}(y)$, für $x, y \in \mathbb{C}$.

5. Ist $\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(z)) = 0$, dann ist $z \in \mathbb{R}$.

Lösung:

1. *Falsch, denn sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt mit $z = a + ib$:* $(a + ib) \cdot (-i) = -ia - i^2 b = b - ia$.

2. *Falsch, denn es gilt i. A. nur $z = \mathrm{Re}\, z + i\,\mathrm{Im}\, z$. Die Aussage wäre wahr für $\mathrm{Im}\, z = 0$, d. h. für die reellen Zahlen.*

3. *Falsch, da zwei rein imaginäre Zahlen stets einen Realteil von Null haben. Für $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x = ib_1$ und $y = ib_2$ gilt: $x + y = i(b_1 + b_2)$.*

4. *Falsch, für $x = a + ib, y = c + id$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt nach Rechenregel $\mathrm{Re}(x \cdot y) = ac - bd$. Dies ist i. A. ungleich $\mathrm{Re}(x) \cdot \mathrm{Re}(y) = ac$.*

5. *Wahr, denn für $z = a + ib$ gilt: $\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(z)) = \mathrm{Re}(b) = b$, also nach Voraussetzung $b = 0$. D.h. gerade, dass $z = a + i0 = a$ reell ist.*

! Aufgabe 7

Bringe die komplexen Zahlen in ihre kartesische Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $z_1 = z + \frac{1}{z}$

2. $z_2 = \overline{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

Lösung: Mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $z_1 = z + \frac{1}{z} = (x + iy) + \frac{1}{x - iy} = (x + iy) + \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \underbrace{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}_{a} + i \underbrace{\left(y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)}_{b}$

2. $z_2 = \overline{z}^2 + \frac{1}{z^2} = \overline{z}^2 + \frac{\overline{z}^2}{z^2 \cdot \overline{z}^2} = \overline{z}^2 + \frac{\overline{z}^2}{|z|^4} = \overline{z}^2 (1 + \frac{1}{|z|^4}) = \underbrace{(x^2 - y^2)\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)}_{a} + i \cdot \underbrace{\left(-2xy\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)\right)}_{b}$

! Aufgabe 8

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$?

Lösung: Wieder $z = a + ib$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Per Definition von i sind die einzigen möglichen Lösungen der Gleichheit $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$ durch $\frac{1+z}{1-z} = \pm i$ gegeben. Wir machen

also eine Fallunterscheidung:
1.) Angenommen $\frac{1+z}{1-z} = +i$
Es folgt

$$1 + z = i(1 - z) \Leftrightarrow 1 + a + ib = i - ia + b$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} 1 + a &= b \\ 1 - a &= b, \end{aligned}$$

also $a = 0$, $b = 1$. *Dies ist tatsächlich eine Lösung.*
2.) Angenommen $\frac{1+z}{1-z} = -i$
Es folgt

$$1 + z = -i(1 - z) \Leftrightarrow 1 + a + ib = -i + ia - b$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} 1 + a &= -b \\ -1 + a &= b, \end{aligned}$$

also $a = 0$, $b = -1$. *Dies ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung.*
Anmerkung: Bei dieser Aufgabe sind selbstverständlich verschiedenste Lösungswege möglich und auch richtig!