Übungsblatt 2 - Lösungsvorschläge

7. Mai 2020

Aufgabe 2.1

Seien $f, g \in T([a, b])$.

(1)

Behauptung. $f + g \in T([a, b])$

Beweis: Seien die Treppenfunktionen von f und g wie folgt gegeben: Es existieren $n, m \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, ..., x_n, y_0, y_1, ..., y_m \in [a, b]$, sodass

- $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und
- $f = c_j$ konstant auf jedem Intervall (x_j, x_{j+1}), $j \in \{0, 1, .., n-1\}$,

für f und

- $a = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$ und
- $g = d_j$ konstant auf jedem Intervall (y_j, y_{j+1}), $j \in \{0, 1, .., m-1\}$,

für g gelten. Für den Fall $n = m$ und $x_j = y_j$ für alle $j \in \{0, 1, .., m-1\}$ existiert für die Summe von Treppenfunktionen $f + g$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$, sodass $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und $f + g = c_j + d_j$ konstant auf jedem Intervall (x_j, x_{j+1}), $j \in \{0, 1, .., n-1\}$ ist. Damit ist die Summe ebenso eine Treppenfunktion. Der allgemeine Fall kann durch *Verfeinerung der Zerlegung* auf diesen Fall zurückgeführt werden: Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $n, m \leq N$. Wähle $(N + 1)$ Punkte $z_0, z_1, ..., z_N \in \{x_0, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$, entsprechend geordnet, oder feiner, sodass $a = z_0 < z_1 < ... < z_N = b$ gelte. Auf den neuen Teilabschnitten (z_l, z_{l+1}), $l \in \{0, ..., N-1\}$, haben f und g die konstanten Werte c'_l und d'_l, wobei $c'_l \in \{c_0, ..., c_{n-1}\}$ und $d'_l \in \{d_0, ..., d_{m-1}\}$.

Mit dieser verfeinerten Zerlegung des Intervalls existiert für die Summe der Treppenfunktionen wieder ein $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $z_0, z_1, ..., z_N \in [a, b]$, sodass $f + g = c'_l + d'_l$ konstant auf jedem Teilintervall (z_l, z_{l+1}), $l \in \{0, 1, .., N-1\}$, ist. Somit sind nach dieser Rückführung auf den speziellen Fall alle Summen von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktionen, q.e.d.!

(2)

Behauptung. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Beweis: Mit der Notation aus (1) sind die Integrale der Treppenfunktionen f, g und $f + g$ nach Definition 18 gegeben durch

$$\int_a^b f = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x_{j+1} - x_j) \quad , \int_a^b g = \sum_{k=0}^{m-1} d_k (y_{k+1} - y_k) \quad \text{und} \quad \int_a^b (f + g) = \sum_{l=0}^{N-1} (c'_l + d'_l)(z_{l+1} - z_l)\,.$$

Nach Lemma 21 ist das Integral unabhängig von der Wahl der zerlegenden Punkte, sodass

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x_{j+1}-x_j) = \sum_{l=0}^{N-1} c'_l(z_{l+1}-z_l) \\ &\text{und} \\ \int_a^b g &= \sum_{k=0}^{m-1} d_k(y_{k+1}-y_k) = \sum_{l=0}^{N-1} d'_l(z_{l+1}-z_l) \quad .\end{aligned}$$

Damit ist die Summe der Integrale gleich dem Integral der Summe der Treppenfunktionen:

$$\begin{aligned}\int_a^b f + \int_a^b g &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x_{j+1}-x_j) + \sum_{k=0}^{m-1} d_k(y_{k+1}-y_k) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} c'_l(z_{l+1}-z_l) + \sum_{l=0}^{N-1} d'_l(z_{l+1}-z_l) = \sum_{l=0}^{N-1} (c'_l+d'_l)(z_{l+1}-z_l) \\ &= \int_a^b (f+g) \quad ,\end{aligned}$$

q.e.d.!

Aufgabe 2.2

(1) Sei $f \in R([a,b])$.

(1.1)

Behauptung. $|f| \in R([a,b])$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gegen $|f|$ gleichmäßig konvergiert. Hierzu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Treppenfunktionen, die gegen f gleichmäßig konvergiert. Eine passende Folge ist gegeben durch die induzierte Folge $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$: Für f_n Treppenfunktion für jedes n ist auch der Betrag $|f_n|$ eine Treppenfunktion auf derselben Zerlegung von $[a,b]$ mit $|f_n| = |a_{n,j}|$ für $f_n = a_{n,j}$ auf dem Teilintervall $(x_j, x_{j+1}) \subset [a,b]$: $|f_n| \in T([a,b]) \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$: Es gilt die Ungleichung

$$0 \le \big||f_n(x)| - |f(x)|\big| \le |f_n(x) - f(x)| \quad ;$$

die rechte Ungleichung folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung. Supremum und Limes sind ordnungserhaltend:

$$0 = \lim_n \sup_{x\in[a,b]} 0 \le \lim_n \sup_{x\in[a,b]} \big||f_n(x)| - |f(x)|\big| \le \lim_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \quad .$$

Die rechte Ungleichungsseite ist 0 aufgrund der glm. Konvergenz $f_n \to f$. Nach dem Einschnürungslemma für Folgen erhält man schlussendlich

$$\lim_n \sup_{x\in[a,b]} \big||f_n(x)| - |f(x)|\big| = 0$$

und mit $|f_n|$ Treppenfunktionen für alle n die Behauptung, q.e.d.!

(1.2)

Behauptung. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Beweis: Seien $f_n, |f_n|$ die Treppenfunktionen aus (1.1); ihre Integrale seien bzgl. derselben Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ gegeben durch

$$\int_a^b f_n = \sum_{j=0}^{N(n)} c_{n,j}(x_{j+1} - x_j) \quad \text{und} \quad \int_a^b |f_n| = \sum_{j=0}^{N(n)} |c_{n,j}|(x_{j+1} - x_j)$$

und über sukzessives Anwenden der Dreiecksungleichungen miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n\right| &= \left|\sum_{j=0}^{N(n)} c_{n,j}(x_{j+1} - x_j)\right| \leq \sum_{j=0}^{N(n)} |c_{n,j}(x_{j+1} - x_j)| \\ &= \sum_{j=0}^{N(n)} |c_{n,j}||(x_{j+1} - x_j)| = \sum_{j=0}^{N(n)} |c_{n,j}|(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b |f_n| \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ folgt

$$\lim_n \left|\int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b f\right|$$

als reelle Folge und nach obiger Abschätzung, welche für alle n gilt, ist

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \lim_n \int_a^b |f_n| = \int_a^b |f|$$

aus der Konvergenz $\int_a^b |f_n| \to \int_a^b |f|$ und somit die Behauptung; q.e.d.!

(2) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a, b]$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ so, dass $f_n \to f$ unter gleichmäßiger Konvergenz.

(2.1)

Behauptung. $f \in R([a, b])$

Beweis: Da $T([a, b]) \subset R([a, b])$ folgt die Behauptung n.V. für jene $f_n \in R([a, b])$ sofort, die bereits für alle n Treppenfunktionen sind. Seien also die $f_n \in R([a, b]) \setminus T([a, b])$ für alle n, also jene Regelfunktionen, die nicht bereits Treppenfunktionen sind. Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die gleichmäßige Konvergenz der Regelfunktionen zu f sei beschrieben durch

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n > N \quad ;$$

die gleichmäßige Konvergenz einer Treppenfunktionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Regelfunktion f_n sei dagegen beschrieben durch

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - T_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n > N \quad .$$

Sodann folgt aus diesen beiden Voraussetzungen durch Einschieben von f_n

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - T_n(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - T_n(x)| < \epsilon$$

und damit die geforderte gleichmäßige Konvergenz von Treppenfunktionen gegen f, was die Behauptung beweist, q.e.d.!

(2.2)

Behauptung. $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b fn$

Beweis: Für jedes f_n und f wie vorausgesetzt ist auch die Differenz $f - f_n$ eine Regelfunktion. Somit folgt für die Integralfolge $\int_a^b f_n$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)|(b-a) \quad ,$$

wobei für die letzte Ungleichung Satz 27 (c) ausgenutzt wurde. Grenzwertbildung über n liefert die gewünschte Behauptung, q.e.d.!

Aufgabe 2.3

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \text{ irrational} \\ \frac{1}{n} & \quad x = \frac{m}{n} \text{ gekürzter Bruch mit } m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1)

Behauptung. f ist Regelfunktion auf $[0,1]$.

Beweis: Für ein vorgegebenes $x = \frac{m}{n} \neq 0$, n, m teilerfremd folgt aus

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{N} \quad \Leftrightarrow \quad N \leq n$$

für ein vorgegebenes $N \in \mathbb{N}$, dass nur maximal n natürliche Zahlen für den Nenner beitragen, sodass $f(x) \geq 1/N$ gilt. Da $x \in [0,1]$ ist, folgt zudem $N \leq n$ und somit n mögliche Werte für den Zähler, die für $f(x) \geq 1/N$ betragen. Für $f(x) \geq \frac{1}{N}$ mit $N \leq n$ sind somit höchstens n^2 rationale x-Werte im Intervall. Zwischen diesen Werten ist $f(x) = 0$. Motiviert durch diese Beobachtung definiert man eine geeignete Treppenfunktionfolge wie folgt: Seien $x_0, x_1, ..., x_N \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ jene Punkte, für die $f \geq 1/N$ erfüllt ist, so betrachte man

$$f_N(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in \{x_0, x_1, ..., x_N\} \\ 0 & \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1 \quad .$$

Sodann hat man

$$|f_N(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \{x_0, x_1, ..., x_N\} \\ |f(x)| \leq \frac{1}{N} & \quad \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Supremum und Grenzwert liefern somit $f_N \to f$ gleichmäßig konvergent. Damit existiert eine gleichmäßig konvergierende Folge von Treppenfunktionen, sodass f Regelfunktion ist, q.e.d.!

(2) Zunächst berechne man die durch die Treppenfunktionfolge induzierte Integralfolge, welche bereits für alle N ist, da zwischen den Werten in $\{x_0, x_1, ..., x_N\}$ die Funktion bereits 0 nach Konstruktion ist

$$I_N := \int_0^1 f_N = \sum_{j=0}^{N} 0(x_{j+1} - x_j) = 0 \quad \forall N \, .$$

Damit ist das Integral von f der Grenzwert der Integralfolge:

$$\int_0^1 f = \lim_n I_n = 0 \quad .$$

Aufgabe 2.4

Seien $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A > 0$ und $f \in R([a,b])$.

(1)

Behauptung. Sei $F : x \to f\left(\frac{x-B}{A}\right)$, dann $F \in R([Aa+B, Ab+B])$.

Beweis: Notiere mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig zu f auf $[a,b]$ konvergieren. Für jedes Treppenfunktionsfolgenglied gibt es ein $N = N(n) \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, ..., x_N \in [a,b]$, welche das Intervall partitionieren:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b \quad .$$

Auf jedem Teilintervall (x_j, x_{j+1}) habe f_n den konstanten Wert c_j für $j \in \{0,1,...,N(n)-1\}$. Zur Konstruktion einer Treppenfunktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für F bedarf es einer Partition des Intervalls $[Aa+B, Ab+b]$. Dieses erhält man aus der Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ durch Skalieren der Stützstellen x_j um A und einer Translation um B. Die Partition ist somit gegeben durch

$$Aa + B = y_0 < y_1 < ... < y_N = Ab + B$$

mit $y_j = Ax_j + B$ für alle $j \in \{0,1,...,N\}$. Somit ist $F_n(x) = f_n\left(\frac{x-B}{A}\right)$ für alle n eine wohlgewählte Treppenfunktionfolge mit demselben konstanten Wert c_j auf dem Subintervallen (y_j, y_{j+1}). Die gleichmäßige Konvergenz $F_n \to F$ folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von $f_n \to f$:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[Aa+B,Ab+B]} |F_n(x) - F(x)| &= \sup_{x\in[Aa+B,Ab+B]} |f_n\left(\frac{x-B}{A}\right) - f\left(\frac{x-B}{A}\right)| \\ &= \sup_{y\in[a,b]} |f_n(y) - f(y)| \\ \Rightarrow \lim_n \sup_{x\in[Aa+B,Ab+B]} |F_n(x) - F(x)| &= \lim_n \sup_{y\in[a,b]} |f_n(y) - f(y)| = 0 \quad \text{n.V.}\,. \end{aligned}$$

Damit ist auch F eine Regelfunktion, q.e.d.!

(2) Zur Berechnung des angegebenen Integrals bestimme man zunächst die Integralfolge:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &= \int_{Aa+B}^{Ab+B} F_n = \sum_{j=0}^{N(n)-1} c_j(y_{j+1} - y_j) = \sum_{j=0}^{N(n)-1} c_j(Ax_{j+1} + B - Ax_j - B) \\ &= A \sum_{j=0}^{N(n)-1} c_j(x_{j+1} - x_j) = A \underbrace{\int_a^b f_n}_{=I_n} = AI_n \quad . \end{aligned}$$

Die Integralfolge I_n konvergiert gegen das Integral von f über $[a,b]$. Hieraus folgt das Integral von F über $[Aa+B, Ab+B]$:

$$\int_{Aa+B}^{Ab+B} F = \lim_n \mathcal{I}_n = A \lim_n I_n = A \int_a^b f \quad .$$