Lösungen der Fingerübungen

1. Schreiben Sie als einen Bruch und fassen Sie ggf. zusammen. ($n \in \mathbb{N}$)

   a) $\dfrac{n}{n+3} + \dfrac{1}{n-3} = \dfrac{n(n-3)+n+3}{(n+3)(n-3)} = \dfrac{n^2-2n+3}{n^2-9} = \dfrac{(n-1)^2+2}{n^2-9}$ für $n > 3$.

   b) $\dfrac{2-n}{n^2} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{(2-n)(2+n)-n^2}{n^2(n+2)} = \dfrac{4-n^2-n^2}{n^3+2n^2} = \dfrac{4-2n^2}{n^3+2n^2}$

   c) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} + \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} = \dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)+\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)} = \dfrac{n-\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n-1} = \dfrac{n}{n-1}$ für $n > 1$.

   d) $\dfrac{1-n}{n^3} + \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{n-3}{n^2-4} = \dfrac{(1-n)(n^2-4)+n^4-2n^3-(n-3)n^3}{n^3(n+2)(n-2)} =$
   $\dfrac{n^2-4-n^3+4n+n^4-2n^3-n^4+3n^3}{n^5-4n^3} = \dfrac{n^2+4n-4}{n^5-4n^3}$ für $n > 2$.

   e) $4n+1+\dfrac{4-n}{n}+\dfrac{n^5}{n^2} = \dfrac{(4n+1)n+4-n+n^4}{n} = \dfrac{4n^2+n+4-n+n^4}{n} = \dfrac{(n^2+2)^2}{n}$

   f) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(\dfrac{1-m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}+\dfrac{1-n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n^2-1+(1-n)n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} =$
   $\left(\dfrac{n^2-1+n-n^2}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n-1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Kürzen Sie, wenn möglich. ($n \in \mathbb{N}$)

   a) $\dfrac{1-n^2}{n-1} = -\dfrac{n^2-1}{n-1} = -\dfrac{(n+1)(n-1)}{n-1} = -n-1$ für $n > 1$.

   b) $\dfrac{n^2+n}{n^2+3n+2} = \dfrac{n(n+1)}{n^2+n+2n+2} = \dfrac{n(n+1)}{n(n+1)+2(n+1)} = \dfrac{n}{n+2}$

   c) $\dfrac{n-3}{n^2+6n+9} = \dfrac{n-3}{(n+3)^2}$ kann nicht gekürzt werden.

   d) $\dfrac{21n^2+28n}{14n^4} = \dfrac{7n(3n+4)}{7n\cdot 2n^3} = \dfrac{3n+4}{2n^3}$

   e) $\dfrac{24n^2-3n^4-48}{-3n^2-12\cdot(n+1)} = \dfrac{-3\cdot(n^4-8n^2+16)}{-3\cdot(n^2+4n+4)} = \dfrac{(n^2-4)^2}{(n+2)^2} = \dfrac{((n+2)(n-2))^2}{(n+2)^2} =$
   $\dfrac{(n+2)^2(n-2)^2}{(n+2)^2} = (n-2)^2$

   f) $\dfrac{3n\sqrt{n}+6n+\sqrt{n}+2}{3n^2-11n-4} = \dfrac{\sqrt{n}(3n+1)+2(3n+1)}{3n^2+n-12n-4} = \dfrac{(\sqrt{n}+2)(3n+1)}{n(3n+1)-4(3n+1)} = \dfrac{\sqrt{n}+2}{n-4} =$
   $\dfrac{\sqrt{n}+2}{(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}-2)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}-2}$ für $n > 4$.

3. Schätzen Sie die folgenden Terme nach oben oder unten gegen n oder $\frac{1}{n}$ ab für $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie n für die ersten drei Aufgaben und $\frac{1}{n}$ für die letzten drei Aufgaben. Beispiel: $\frac{1-n}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

   a) $\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n} = \dfrac{(n-1)^2}{(n-1)n} = \dfrac{n-1}{n} \overset{n\geq 1}{\leq} n-1 < n$

   b) $\dfrac{n^2+2n+1}{n} < \dfrac{n^2}{n} = n$

   c) $\dfrac{n^3+6n^2+4}{n} > \dfrac{n^3+6n^2}{n} = n^2+6n = n(n+6) \overset{n\geq 1}{\geq} n+6 > n$

   d) $\dfrac{n-3}{n^2-3} \overset{n>3}{\leq} \dfrac{n-3}{n^2-3-6} = \dfrac{n-3}{(n-3)(n+3)} = \dfrac{1}{n+3} < \dfrac{1}{n}$

   e) $\dfrac{3n+2}{3n^2-3n} > \dfrac{3n}{3n^2-3n} = \dfrac{3n}{3n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} > \dfrac{1}{n}$

   f) $\dfrac{n^2+n}{n^3+3n^2+4n+2} < \dfrac{n^2+n+n+1}{n^3+3n^2+4n+2} < \dfrac{(n+1)^2}{n^3+3n^2+4n+2-n-1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^3} = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

4. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

   a) $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n+1}$.

   Vermutung: Die 1 in b_n fällt im Verhältnis zu n für große n kaum ins Gewicht, daher sollte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ sein.

   Lösung: $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n(1+\frac{1}{n})}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+0}} = 1.$

   (Oder: $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = \sqrt{1-\dfrac{1}{n+1}}$ etc.)

   b) $a_n = 3^{-n}$, $b_n = 2^{-n}$

   Vermutung: 3^{-n} geht schneller gegen Null als 2^{-n}, daher $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

   Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{-n}}{2^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$, da $\frac{2}{3} < 1$.

   c) $a_n = 1+3^{-n}$, $b_n = 2^{-n}$

   Lösung: $a_n \to 1$ wegen $3^{-n} \to 0$, und $b_n = 2^{-n} \to 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

   d) $a_n = n^{1/n}$, $b_n = \sqrt{n}$

   Lösung: $a_n \to 1$ nach VL, $b_n \to \infty$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt[4]{2+n^2}}$

Vermutung: Die Summanden 1 bzw. 2 fallen nicht ins Gewicht und $\frac{1/\sqrt{2n}}{1/\sqrt[4]{n^2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösung: $\frac{1/\sqrt{1+2n}}{1/\sqrt[4]{2+n^2}} = \frac{\sqrt[4]{n^2(\frac{2}{n^2}+1)}}{\sqrt{2n(\frac{1}{2n}+1)}} = \frac{\sqrt[4]{n^2}}{\sqrt{2n}} \frac{\sqrt[4]{\frac{2}{n^2}+1}}{\sqrt{\frac{1}{2n}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[4]{\frac{2}{n^2}+1}}{\sqrt{\frac{1}{2n}+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$.

f) $a_n = (2n)!$, $b_n = (n!)^2$

Vermutung: Sowohl in a_n als auch in b_n gibt es $2n$ Faktoren, aber die 'oberen' n Faktoren in a_n sind viel größer als die zweite Hälfte der Faktoren in b_n, damit sollte $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ sein.

Lösung: $\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n(n-1)\dots 1} = \frac{2n}{n}\frac{2n-1}{n-1}\dots\frac{n+2}{2}\frac{n+1}{1} \geq 2^n$, denn $\frac{2n-j}{n-j} = 2 + \frac{j}{n-j} \geq 2$ für $j = 0, \dots, n-1$. Also $\frac{(2n)!}{n!n!} \to \infty$.

g) $a_n = 0,999^n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

Vermutung: Beides geht gegen Null, und exponentiell schlägt polynomiell, daher sollte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ sein.

Lösung: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(0,999)^n}{1/n^2} = \left(\frac{(\sqrt{0,999})^n}{1/n}\right)^2 = \left(\frac{n}{(\frac{1}{\sqrt{0,999}})^n}\right)^2 = [\alpha := \frac{1}{\sqrt{0,999}} > 1] = \left(\frac{n}{\alpha^n}\right)^2 = \left(\frac{n}{(1+(\alpha-1))^n}\right)^2 \overset{\text{Binomischer Lehrsatz}}{\leq} \left(\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(\alpha-1)^2}\right)^2 = \frac{4}{(n-1)^2(\alpha-1)^4} \to 0.$