Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Integralrechnung

× Aufgabe 1: Integrale berechnen I

Berechne folgende Integrale.

i)

$$\int_{-3}^{3} x^3\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-3}^{3} x^3\,dx = 0$$

ii)

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Lösung:

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{4}{5}$$

iii)

$$\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx$$

Lösung:

$$\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

iv)

$$\int_{-2}^{4} 2x^3 - 3x + 1\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-2}^{4} 2x^3 - 3x + 1\,dx = 108$$

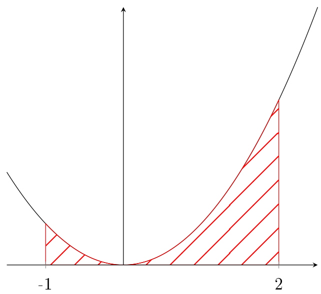
× Aufgabe 2: Integrale berechnen II

Berechne folgende Integrale. Mache zuerst eine Skizze und gebe (ohne Rechnung) an, welches Vorzeichen das Integral hat.

i)

$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$$

Lösung:



Am Bild ist zu sehen, dass $\int_{-1}^{2} x^2 \, dx > 0$.

Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = x^2$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ *gegeben. Damit ist*

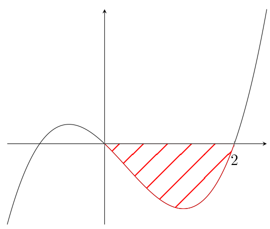
$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

ii)

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x) \, dx$$

Hinweis: Benutze $x^3 - x^2 - 2x = (x-2) \cdot x \cdot (x+1)$ *für die Skizze*

Lösung:



Am Bild ist zu sehen, dass $\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x) \, dx < 0$.
Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ *gegebenen Funktion ist*

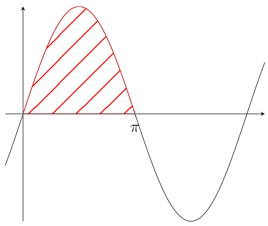
durch $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ *gegeben. Damit ist*

$$\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} - 0^2\right) = -\frac{8}{3}.$$

iii)

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx$$

Lösung:



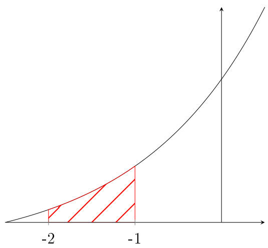
Am Bild ist zu sehen, dass $\int_0^\pi \sin(x)\,dx > 0$.
Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = \sin(x)$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = -\cos(x)$ *gegeben. Damit ist*

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

iv)

$$\int_{-2}^{-1} 2^x\,dx$$

Lösung:



Am Bild ist zu sehen, dass $\int_{-2}^{-1} 2^x\,dx > 0$
Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = 2^x = e^{ln(2)x}$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = \frac{1}{\ln(2)} e^{ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} 2^x$ *gegeben. Damit ist*

$$\int_{-2}^{-1} 2^x\,dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^{-1} - \frac{1}{\ln(2)} 2^{-2} = \frac{1}{4\ln(2)}$$

Aufgabe 3: Partielle Integration

Berechne folgende Integrale:

i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,dx &\overset{PI}{=} \underbrace{\pi\cdot(-\cos(\pi)) - (-\pi)\cdot(-\cos(-\pi))}_{=2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\,dx \\ &\overset{HS}{=} 2\pi + \sin(\pi) - \sin(-\pi) \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\,dx$$

Hinweis: Mehrfache partielle Integration

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\,dx &= \int_0^1 x^2e^{-x}\,dx \\ &\overset{PI}{=} \underbrace{1^2(-e^{-1}) - 0^2(-e^0)}_{=-e^{-1}} + \int_0^1 2xe^{-x}\,dx \\ &\overset{PI}{=} \underbrace{-e^{-1} + (2\cdot 1(-e^{-1}) - 2\cdot 0(-e^0))}_{=-3e^{-1}} + \int_0^1 2e^{-x} \\ &\overset{HS}{=} -3e^{-1} + (2(-e^{-1})) - 2(-e^0)) \\ &= 2 - 5e^{-1}\end{aligned}$$

iii)

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx$$

Hinweis: $\ln(x) = 1\cdot\ln(x)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(x)\,dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln(x)\,dx \\
&\overset{PI}{=} 2\ln(2) - 1\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx \\
&= 2\ln(2) - \int_1^2 1\,dx \\
&\overset{HS}{=} 2\ln(2) - 1
\end{aligned}$$

! iv)

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

Hinweis: Verwende $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)\,dx \\
&\overset{PI}{=} -\cos(\pi)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + \cos(0)\underbrace{\sin(0)}_{=0} + \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx \\
&= \int_0^\pi (1 - \sin^2(x))\,dx \\
&= \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx \\
&= \pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx \\
\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \pi \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Linearität

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$$

und vervollständige damit den Bewies des Satzes zur Linearität von Integralen.

Lösung: Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Nach der Faktorregel ist $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$, also ist λF eine Stammfunktion von λf. Damit gilt nun:

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx \overset{HS}{=} \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) \overset{HS}{=} \lambda \int_a^b f(x)\,dx,$$

was zu zeigen war. □

! Aufgabe 5: Integration durch Substitution

i) Zeigen folgenden Satz über Integration:

Satz I (Integration durch Substitution)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $s : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\,dx = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x)\,dx$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel. Fall F eine Stammfunktion von f ist, wie könnte man das rechte Integral schreiben?

ii) Berechne

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx$$

Lösung:

i) Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach der Kettenregel $(F \circ s)'(x) = (f \circ s)(x) \cdot s'(x)$.
Damit haben wir

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\,dx = \int_a^b (F \circ s)'(x) \overset{HS}{=} F(s(b)) - F(s(a)) \overset{HS}{=} \int_{s(a)}^{s(b)} f(x)\,dx.$$

□

ii) Benutze Integration durch Substitution mit $s(x) = x^2$. Damit ist

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx \overset{Subst}{=} \int_0^4 e^x\,dxe^4 - 1 \overset{HS}{=} e^4 - 1$$

! Aufgabe 6

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

i) Zeige, dass durch $F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(y)dy$ eine Stammfunktion von f gegeben wird.

ii) Zeige mit partieller Integration, dass

$$\int_a^b \int_a^x f(y)dy\,dx = \int_a^b (b-x)f(x)\,dx$$

Lösung:

i) Sei G eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach dem Hauptsatz:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy \overset{HS}{G}(x) - G(a).$$

Ableiten ergibt

$$F'(x) = G'(x) - \underbrace{(G(a))'}_{=0} = G'(x) = f(x).$$

Also ist F eine Stammfunktion von f.

ii) Es ist (mit F aus i)):

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^x f(y)dy\,dx &= \int_a^b 1 \cdot F(x)\,dx \\
&\overset{PI}{=} bF(b) - a \underbrace{F(a)}_{=\int_a^a f(y)dy=0} - \int_a^b x \underbrace{F'(x)}_{=f(x)} dy \\
&= b\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b xf(x)\,dx \\
&= \int_a^b (b-x)f(x)\,dx
\end{aligned}$$