CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 10 - Modul mat110

Keine Abgabe vorgesehen

Präsenzaufgabe 10.4.

(a). Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Ist N ein Untermodul von M, so ist die Faktorgruppe ${}^{M}\!/\!_{N} := \{ [a]_N = a + N \mid a \in M \}$ ein R-Modul unter der Skalarmultiplikation $r \cdot [a]_N := [r\, a]_N$. *Hinweis: Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation nicht vergessen.*

(b). Seien R, S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ist M ein S-Modul unter der Skalarmultiplikation $\cdot_S$, so ist M auch ein R-Modul unter der Skalarmultiplikation

$$r \cdot_R a := \varphi(r) \cdot_S a \ .$$

Präsenzaufgabe 10.5. Sei R ein Integritätsring und M ein R-Modul. Ein $a \in M$ heißt **Torsionselement** von M, wenn ein $r \in R \setminus \{0\}$ existiert, sodass $r \cdot a = 0$. Wir bezeichnen die Menge aller Torsionselemente von M mit $T(M) := \{ a \in M \mid a \text{ Torsionselement von } M \}$. M heißt **torsionsfrei**, falls $T(M) = \{0\}$.

(a). Beweisen Sie, dass $T(M)$ ein Untermodul von M ist. Zeigen Sie auch, dass die Aussage falsch sein kann, wenn R kein Integritätsring, sondern nur ein kommutativer Ring, ist.

(b). Es bezeichne ${}^{M}\!/\!_{T(M)}$ den Faktormodul von M modulo $T(M)$ und $[0]_{T(M)}$ das neutrale Element dieses R-Moduls. Beweisen Sie, dass ${}^{M}\!/\!_{T(M)}$ torsionsfrei ist.

Präsenzaufgabe 10.6. Seien $n, r \in \mathbb{N}$, R ein Integritätsring und K dessen Quotientenkörper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a). Eine Familie $(x_1, \ldots, x_r)$ von Elementen des R-Moduls $R^{n\times 1}$ ist genau dann linear unabhängig über R, wenn sie im K-Vektorraum $K^{n\times 1}$ linear unabhängig über K ist.

(b). Ist $I \neq 0$ ein Hauptideal von R, so sind R und I als R-Moduln isomorph.

(c). $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ hat eine Basis als $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum, aber nicht als $\mathbb{Z}$-Modul.