Trigonometrische Funktionen

Def (zur Erinnerung) Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{1}$$

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \tag{2}$$

Satz 5.20 (Eulersche Formel) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{3}$$

Satz 5.21 (Additionstheoreme) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{4}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{5}$$

Lemma Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \tag{6}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \tag{7}$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x, \tag{8}$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x. \tag{9}$$

Lemma Die Funktion cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Def $\frac{\pi}{2}$ ist die Nullstelle der Funktion cos im Intervall $[0,2]$.

Satz 5.22 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

Folgerung 1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Folgerung 2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x, \tag{10}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x, \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x, \tag{11}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x. \tag{12}$$

Folgerung 3

1) $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$