Vorlesung 2

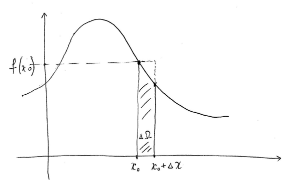
In der ersten Vorlesung haben wir gesehen, dass man für bestimmte Funktionen f ihre Stammfunktionen explizit ausrechnen kann. Uns fehlt aber die Theorie: wir wissen noch nicht, unter welchen Bedingungen eine Stammfunktion überhaupt existiert (wir haben ja gesehen, dass manche Funktionen keine Stammfuktionen besitzen). Diese Frage wird jetzt besprochen.

Die Grundidee kann man zuerst sehr informell beschreiben. Betrachten wir eine positive und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist Φ eine Stammfunktion von f auf (a, b) und $x_0 \in (a, b)$, so gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

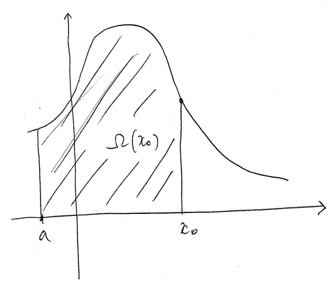
Dass bedeutet, dass für kleine Δx die Differenz $\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)$ durch $f(x_0)\Delta x$ “gut approximiert” werden kann. Die Zahl $f(x_0)\Delta x$ ist aber genau der Flächeninhalt eines Recktecks mit Seitenlängen $f(x_0)$ und Δx. Betrachten wir also das Gebiet

$$\Delta\Omega := \big\{(x, y) : x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,\ 0 \le y \le f(x)\big\},$$



dann kann man in gewissem Sinne $\Delta\Omega$ durch das Rechteck $(x_0, x_0 + \Delta x) \times \big(0, f(x)\big)$ approximieren, also approximiert man auch $\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) \simeq |\Delta\Omega|$, wobei $|\cdot|$ für den Flächeninhalt steht, und $\Phi(x_0 + \Delta x) = \Phi(x_0) + |\Delta\Omega|$. Mann könnte also versuchen, die folgende Funktion Φ zu definieren:

$$\begin{aligned} &\Phi(x_0) = \text{Flächeninhalt der Figur } \Omega(x_0),\\ &\Omega(x_0) = \big\{(x, y) : a \le x \le x_0,\ 0 \le y \le f(x)\big\}, \end{aligned}$$



und kann mann hoffen, dass $\Phi'(s) = f(x)$. Es entstehen aber gleich mehrere mathematische Fragen, insbesondere: in welchem Sinne gelten die obigen Approximationen? was ist überhaupt der Flächeninhalt einer Figur und warum ist dieser wohldefiniert?

Wir werden uns zuerst mit der zweiten Frage beschäftigen (Flächeninhalt). Wir wissen nicht, wie man den Flächeninhalt definiert, können aber einige Eigeschaften erwarten. Zum Beispiel muss für den Flächeninhalt $|A|$ einer Figur immer $|A| \geq 0$. Ist A ein Rechteck mit Seitenlängen a und b, so gilt $|A| = ab$. Für $A \subset B$ würde man $|A| \leq |B|$ erwarten, und für $A \cap B = \emptyset$ wäre $|A \cup B| = |A| + |B|$ eine vernünftige Eigenschaft. Mit diesen Eigenschaften berechnet man Flächeninhalten von Figuren, die man als endliche Vereinigungen von disjunkten Rechtecken darstellen kann. Dann kann man versuchen, komplexe Figuren durch endliche Familien von Rechecken zu approximieren, und dadurch landet man bei Begriff eines bestimmen Integrals. Nach dieser informellen Diskussion kommen wir zurück in die mathematische Welt.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 17. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **Treppenfunktion**, falls man ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ finden kann, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
- f ist konstant auf jedem der Intervalle (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$. (Die Werte von f an den Punkten x_j haben keine Bedeutung und können beliebig sein.)

Die Menge aller solchen Funktionen werden wir als $T[a, b]$ bezeichnen.

Definition 18. Seit f als in Definition 17 und $f(x) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Wir definieren

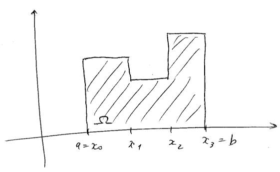
$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Diese Zahl nennt man **das (bestimmte) Integral von f von a bis b (oder zwischen a und b)**. Oft nutzt man auch die detallierte Schreibweise $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Bemerkung 19. Falls man die oben genanten Eigenschaften der Flächeninhalte berücksichtigt, kann man die Zahl $I = \displaystyle\int_a^b f$ wie folgt interpretieren:

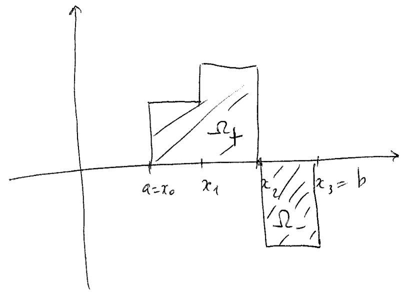
- Für $f \geq 0$ gilt $I = |\Omega|$ mit

$$\Omega := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



- Für beliebige f gilt $I = |\Omega_+| - |\Omega_-|$ mit

$$\begin{aligned}\Omega_+ &:= \{(x,y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},\\ \Omega_- &:= \{(x,y) : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\},\end{aligned}$$



Beispiel 20. Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, \frac{1}{3}],\\ 2, & x \in (\frac{1}{3}, 1].\end{cases}$$

Das ist eine Treppenfunktion: man kann z.B. $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ nehmen, und

$$\int_0^1 f = -1(\tfrac{1}{3} - 0) + 2(1 - \tfrac{1}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 1.$$

Es gibt aber ein kleines Problem: die Definition des Integrals nutzt die Zerlegung von $[a,b]$ in Teilintervalle (x_{j-1}, x_j), und diese Zerlegung ist nicht eindeutig: z.B. kann man diese Zerlegung "verfeinern", indem man ein Intervall (x_{j-1}, x_j) "künstlich" in zwei Teilintervalle zerlegt: auf jedem dieser Intervalle ist die Funktion immer noch konstant. Deswegen muss man zuerst prüfen, ob die oben definierte Zahl von der Wahl der x_j unabhängig ist. Das wird im folgenden Lemma geklärt:

Lemma 21. $\displaystyle\int_a^b f$ *ist unabhängig von der Wahl der* x_j.

Beweis. Sei f als in der Definition 17. Wir wählen ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und ein $x' \in (x_{k-1}, x_k)$, damit erhalten wir eine neue Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x' < x_k < \dots < x_n = b$. Dann gilt immer noch $f(c) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$ mit $j \ne k$ und $f(x) = c_k$ für $x \in (x_{k-1}, x')$ und $x \in (x', x_k)$. Der zugehörige Wert des Integrals ist

$$\begin{aligned}\sum_{j\ne k} c_j(x_j - x_{j-1}) + c_k(x' - x_{k-1}) + c_k(x_k - x') &= \sum_{j \ne k} c_j(x_j - x_{j-1}) + c_k(x_k - x_{k-1})\\ &= \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}),\end{aligned}$$

d.h. man bekommt denselben Wert als für die usprüngliche Zerlegung (x_j). Durch Induktion ist dann klar, dass man auch nach dem Verfeinern durch endlich neue viele Punkte denselben Wert der Summe bekommt.

Seien jetzt $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $a = y_0 < \cdots < y_m = b$ zwei beliebige Zerlegungen zu f. Wir betrachten die Menge $Z = \{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\}$. Sei N die Anzahlt der Elemente in Z, die wir als $a = z_0 < \cdots < z_N = b$. Diese Zerlegung ist eine Verfeinerung von (x_j) und (y_j), und die Summen für (x_j) und (y_j) sind gleich der Summe für (z_j), daher sind sie gleich. $\square$

Lemma 22. *Die Abbildung*

$$T[a,b] \ni f \mapsto \int_a^b f \in \mathbb{R},$$

erfüllt folgende Eigenschaften:

(a) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in T[a,b]$ gilt $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$,

(b) für alle $f, g \in T[a,b]$ gilt $f + g \in T[a,b]$ und $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$,

(c) für alle $f \in T[a,b]$ gilt $\displaystyle\Big|\int_a^b f\Big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|(b-a)$,

(d) für alle $f \in T[a,b]$ mit $f \ge 0$ gilt $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$. Insbesondere gilt für alle $f, g \in T[a,b]$ mit $f \le g$ die Ungleichung $\displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Beweis. Die Eigenschaft (a) folgt direct aus der Definition. Die Eigenschaft (b) wird im Übungsblatt beweisen. Für (c) merken wir zuerst, dass falls f auf einem Teilintevrall konstant ist, dann ist auch $|f|$ auf diesem Teilintervall konstant. Daher $|f| \in T[a,b]$. Mit Bezeichnungen der Definition 18 haben wir $\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \ge \max_j |c_j|$ (man hat nur $\ge$ und nicht $=$, weil auch die Werte $f(x_j)$ in sup berücksichtigt werden) und

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f\Big| = \Big|\sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1})\Big| &\le \sum_{j=1}^n |c_j|(x_j - x_{j-1})\Big| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|(b-a).\end{aligned}$$

Für (d) sehen wir zuerst, dass für $f \ge 0$ alle Terme in der Summe für das Integral nichtnegativ sind, also $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$. Für $f \le g$ hat man $g - f \ge 0$ und

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \ge 0, \text{ also } \int_a^b f \le \int_a^b g. \qquad \square$$

Jetzt möchten wir $\int_a^b f$ für eine grössere Klasse von Funktionen f definieren. Zur Erinnerung, eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmässig* gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_n \sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| = 0,$$

und in diesem Fall schreiben wir $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$.

Definition 23. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Regelfunktion**, falls es eine Folge $(f_n) \subset T[a,b]$ gibt mit $f = \text{glm-lim}\, f_n$. Die Menge aller Regelfunktionen auf $[a,b]$ wird als $R[a,b]$ bezeichnet.

Insbesondere ist jede Treppenfunktion auch Regelfunktion.

Definition 24. Für $f \in R[a,b]$ mit $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$ für $(f_n) \subset T[a,b]$ definieren wir

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Damit diese Definition überhaupt Sinn macht, braucht man noch zwei wichtige Schritte, die im folgenden Lemma gemacht werden:

Lemma 25. *In Definition 24, der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ *existiert und ist von der Wahl der* f_n *unabhängig.*

Beweis. Zuerst zeigen wir die Existenz des Grenzwerts. Für $x \in [a,b]$ und $m,n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr| = \bigl|f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)\bigr| \le \bigl|f_m(x) - f(x)\bigr| + \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|,$$

und dann

$$\sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr| \le \sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_m(x) - f(x)\bigr| + \sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dank $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit $\sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Es folgt daraus, dass für alle $m,n \ge N$ gilt

$$\sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr| \le 2\varepsilon.$$

Sei $I_n := \int_a^b f_n$, dann hat man für alle $m,n \ge N$:

$$|I_m - I_n| = \Bigl|\int_a^b (f_m - f_n)\Bigr| \le \sup_{x\in[a,b]} \bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr|(b-a) \le 2\varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt es, dass (I_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, und damit ist sie konvergent (da $\mathbb{R}$ vollständig ist).

Sei jetzt $(g_n) \subset T[a,b]$ eine beliebiege Folge mit $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} g_n$. Für $J_n := \displaystyle\int_a^b g_n$ müssen wir zeigen, dass $\lim J_n = \lim I_n$. Für $x \in [a,b]$ und $m,n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\big|f_n(x) - g_n(x)\big| = \big|f_n(x) - f(x) + f(x) - g_n(x)\big| \le \big|f_n(x) - f(x)\big| + \big|g_n(x) - f(x)\big|,$$

und dann

$$\sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - g_n(x)\big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| + \sup_{x\in[a,b]} \big|g_n(x) - f(x)\big|.$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \le \varepsilon$ und $\sup_{x\in[a,b]} \big|g_n(x) - f(x)\big| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$, und dann auch

$$|I_n - J_n| = \Big|\int_a^b (f_n - g_n)\Big| \le \sup_{x\in[a,b]} \big|g_n(x) - f(x)\big|(b-a) \text{ für alle } n \ge \mathbb{N},$$

also $\lim_{n\to\infty}(I_n - J_n) = 0$. Daher

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} I_n + \lim_{n\to\infty}(I_n - J_n) = \lim_{n\to\infty} I_n. \qquad \square$$

Beispiel 26. Wir betrachten jetzt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Wir wollen zeigen, dass dies eine Regelfuntion ist, danach berechnen wir das Integral $\displaystyle\int_0^1 f$.

Da f sehr explizit ist, werden auch sehr explizite approximierende Treppenfunktionen konstruieren. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Treppenfunktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{j}{n}, & x \in \big(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big], \quad j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

dann

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{j}{n} - x, & x \in \big(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big], \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Für $x \in \big(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big]$ gilt $0 \le \frac{j}{n} - x \le \frac{1}{n}$, daher

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \le \frac{1}{n},$$

und $f = \text{glm-lim}_{n\to\infty} f_n$. Das zeigt, dass f eine Regelfuntion ist.

Wir weren jetzt $\displaystyle\int_0^1 f$ berechnen. Für die Treppenfunktionen f_n hat man:

$$\int_0^1 f_n = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n}\Big(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\Big) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n = \frac{1}{n^2}\,n(n+1),$$

und

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\, n(n+1) = \frac{1}{2}.$$

Satz 27. *Stetige Funktionen sind Regelfunktionen.*

Beweis. Seit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. In der VL Analysis 1 wurde es gezeigt, dass f auch gleichmässig stetig ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man ein $\delta > 0$ finden sodass $\big|f(x) - f(y)\big| \le \varepsilon$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$.

Sei also $\varepsilon > 0$, dann können wir ein $n \in \mathbb{N}$ finden mit $\big|f(x) - f(y)\big| \le \varepsilon$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \frac{b-a}{n}$. Wir setzen $x_j := a + \dfrac{j}{n}\,(b-a)$ für $j = 0, 1, \dots, n$ und definieren ein Treppenfunktion f_n durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x_j), & x = x_j, \quad j = 0, \dots, n, \\ f(\xi_j), & x \in (x_{j-1}, x_j), \quad j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

wobei ξ_j ein beliebiger Punkt aus $[x_{j-1}, x_j]$ ist. Für $x \in (x_{j-1}, x_j]$ hat man $|\xi_j - x| \le \dfrac{b-a}{n}$, daher $\big|f_n(x) - f(x)\big| = \big|f(x_j) - f(x)\big| \le \varepsilon$. Also $\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x_j) - f(x)\big| \le \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $f = \text{glm-}\lim_{n\to\infty} f_n$, damit ist f eine Regelfunktion, und

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}). \qquad \square$$

Die Konstruktion des Beweises kann man ein bisschen verallgemeinern:

Definition 28. Eine Funktion $f \in [a,b]$ ist **stückweise stetig**, falls es $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
- f ist stetig auf jedem der Intervalle (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \dots, n$,
- Es existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_j^+} f(x)$, $j = 0, \dots, n-1$ und $\lim_{x\to x_j^-} f(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Mit ein bisschen mehr Arbeit (=Gleichmässige Approximation von f durch Treppenfunktionen auf jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j), diese Treppenfunktionen werden dann zu Treppenfunktion auf dem ganzen Interval $[a,b]$ zusammengeklebt, die f auf $[a,b]$ gleichmässig approximiert) kann man den Satz 27 auf diese neue Klasse von Funktionen erweitern:

Korollar 29. *Stückweise stetige Funktionen sind Regelfunktionen.*

Durch einfache Anwendung der Grenwertregeln kann man auch folgendes zeigen (wird teilweise im Übungsblatt behandelt):

Satz 30. *Alle Aussagen vom Lemma 22 gelten für $R[a,b]$ statt $T[a,b]$.*

Daraus folgt (Übungsblatt!):

Korollar 31. *Seien f_n Regelfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren, dann ist auch f Regelfunktion mit $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f_n$.*

Man kann sich fragen, ob es überhaupt Funktionen existieren, die keine Regelfunktionen sind. Das wird im nächsten Beispiel erledigt:

Beispiel 32. Die Dirichlet-Funktion f,

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für irrationale } x, \\ 1, & \text{für rationale } x, \end{cases}$$

ist keine Regelfunktion.

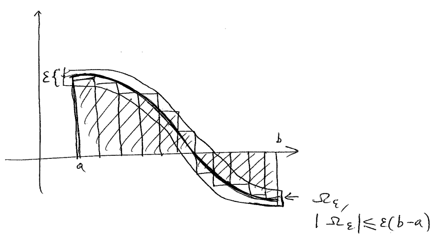
Sei g eine Treppenfunktion und $(c,d) \subset [0,1]$ ein Interval, auf dem g konstant ist, z.B. $g(x) = A$ für $x \in (c,d)$. Es existieren also ein irrationales $y \in (c,d)$ und ein rationales $z \in (c,d)$, und wir haben $f(y) = 0$ und $f(z) = 1$. Mann hat also die Ungleichungen

$$\sup_{x\in[a,b]} \big[f(x) - g(x)\big| \geq \max\Big\{\big[f(y) - g(y)\big|, \big[f(z) - g(z)\big|\Big\} = \max\{|A|, |1-A|\} \geq \frac{1}{2}.$$

Also gilt für *jede* Treppenfunktion g: $\sup_{x\in[a,b]} \big[f(x) - g(x)\big| \geq \frac{1}{2}$, deswegen kann keine Folge von Treppenfunktionen gegen f konvergieren.

Es folgt, dass das Integral $\int_a^b f$ für diese f mit den vorhandenen Mitteln nicht definiert ist. Wir werden später sehen (Analysis III), dass man die Konstruktion des Integrals erweitern kann, um dieses Integral von f doch zu definieren.

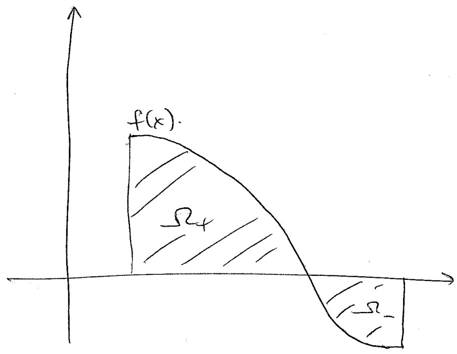
Bemerkung 33. Wir jetzt nochmals die geometrische Bedeutung des Integrals $\int_a^b f$ angehen. Falls f eine Regelfunktion ist, dann kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion f_ε finden mit $\big|f_\varepsilon(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$. Es folgt daraus, dass man den Graphen von f durch den Graphen von f_ε approximieren kann:



,

und auch können die Mengen

$$\Omega_+ := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\},$$
$$\Omega_- := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\, f(x) \leq y \leq 0\},$$



durch passende Treppenfiguren approximiert werden.

Falls man sich an jetzt an die geometrische Bedeutung des Integrals für Treppenfunktionen erinnert (Bemerkung 19) sieht man, dass

$$\int_a^b f = |\Omega_+| - |\Omega_-|.$$