Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 9

Aufgabe 1. Berechnen Sie im Existenzfall die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{\sqrt{x+3}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^k-1}{x^l-1}$, $k, l \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert.

b) Stimmen zwei stetige Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ in allen rationalen Punkten überein, so ist $f = g$ auf $[a,b]$.

Aufgabe 3.

a) Beweisen Sie mit Hilfe der „$\varepsilon - \delta$“-Argumente die Stetigkeit von $f(x) = \sqrt{x}$ auf seinem Definitionsbereich.

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $x_0 = 0$ gesondert.

b) Man beweise, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nur im Punkt $x = 0$ stetig ist.

Aufgabe 4. Sei die Funktion f stetig im Punkt x_0 und $f(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $C > 0$ und eine Umgebung von x_0 gibt, so dass für alle x aus dieser Umgebung $|f(x)| \geq C$ gilt.

Abgabe: Bis 20. Dezember vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1			2		3		4	
	a	b	c	a	b	a	b		
Punkte	2	3	2	2	2	3	3	3	20

Präsenzaufgaben und Anregungen

1. Bestimmen Sie die Häufungspunkte folgender Mengen:

a) $\{n!\colon n \in \mathbb{N}_0\}$

b) $(0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: x_0 ist genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ existiert.

3. Berechnen Sie im Existenzfall die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$

c) $\lim\limits_{x\to-1-} \frac{1}{x-[x]}$

d) $\lim\limits_{x\to-1+} \frac{1}{x-[x]}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-7x+6}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

4. Formulieren Sie folgende Aussagen mithilfe von Ungleichungen und führen Sie entsprechende Beispiele an:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

5. Sei die Funktion f in einer Umgebung U von x_0 definiert. Ist die Funktion f stetig im Punkt x_0, wenn

$$\forall\delta > 0\,\exists\varepsilon > 0\,\forall x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta?$$

6. Zeigen Sie mithilfe der „$\varepsilon - \delta$“-Definition, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, stetig ist.

7. Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit auf dem Definitionsbereich und zeichnen Sie ihren Graphen, wenn:

a) $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{falls } x < 0, \\ 5x - x^2, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = x - [x]$