Klausur zu Analysis I
am 16.02.2015

WS 2014/2015 Defant

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von der Klausuraufsicht weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die Nummer der Aufgabe.* Beschriften Sie sofort jedes Blatt mit Ihrem Namen. Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Tutor(in):

Unterschrift:

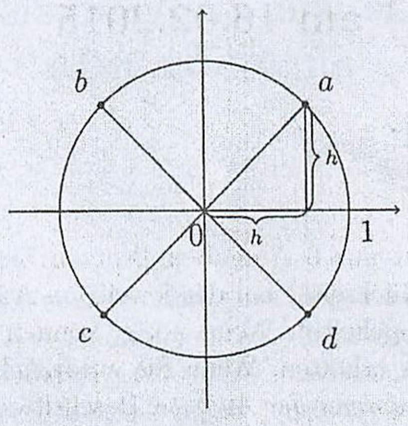
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							
Korr.							

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe (Punkte: (a)1, (b)2, (c)1, (d)1, (e)2, (f)2)

Betrachten Sie die folgenden vier komplexen Zahlen a, b, c, d in der komplexen Ebene:



(a) Beweisen Sie, dass $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Nennen Sie den Real- und Imaginärteil von a, b, c, d.

(c) Bestimmen Sie, die zu c konjugiert komplexe Zahl.

(d) Begründen Sie, dass $d = -b$.

(e) Zeigen Sie, dass $a^2 = i$.

(f) Berechnen Sie den Abstand zwischen c und 1.

---

2. Aufgabe (Punkte: 5)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}$$

---

3. Aufgabe (Punkte: (1)2, (2a)2,(2b)2,(2c)2,(3)3)

(1) Nennen Sie die Definition der Konvergenz einer Folge (a_n) komplexer Zahlen gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{C}$.

(2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren, und wenn ja, so bestimmen Sie ihre Grenzwerte:

(a) $a_n = \frac{2+\binom{n}{2}+6n^4}{n+3n^2+3n^4}$

(b) $a_n = 2 - \frac{1}{2}(-1)^n$

(c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3^k}$

(3) Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ derart, dass $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} > 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

4. Aufgabe (Punkte: (1a)2, (1b)3, (2)5)

(1) Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht:

(a) $\sum \left(\frac{4k}{(\ln(k+3))^k}\right)_{k=1}^{\infty}$

(b) $\sum \left(\frac{3}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

(2) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum \frac{n(i+3)^n}{\sqrt[n]{2}} z^n,$$

und geben Sie weiter zwei konkrete Punkte an, in denen die Reihe konvergiert, und zwei konkrete Punkte, in denen die Reihe divergiert.

5. Aufgabe (Punkte: (1)2, (2)6, (3)2)

(1) Nennen Sie die Definition der Stetigkeit einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in [a, b]$.

(2) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgende Funktion f stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ ax + b & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{x+1} - 1 & x < -1 \end{cases}$$

Begründen Sie die Stetigkeit der von Ihnen angegebenen Funktion detailliert, und machen Sie eine grobe Skizze ihres Graphen.

(3) Nennen Sie eine konkrete Funktion $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften vereint:

(a) f ist beschränkt

(b) f ist stetig

(c) f nimmt auf $]0, 1]$ ihr Infimum aber nicht ihr Supremum an.

6. Aufgabe (Punkte: (1)4, (2)8, (3)3)

(1) Bestimmen Sie, wo die folgende Funktion f definiert ist, wo sie differenzierbar ist, und berechnen Sie dort ihre Ableitung:

$$f(x) = \frac{\sin(e^x)}{\ln(x-1)}.$$

(2) Sei $f : [\frac{1}{4}, 1] \to [\frac{9}{16}, 2]$ definiert durch

$$f(x) := x^2 + \sqrt{x}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv und surjektiv.

(b) f^{-1} ist differenzierbar auf $[\frac{9}{16}, 2]$.

Berechnen Sie darüberhinaus $(f^{-1})'\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(3) Sei $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f(x) := x^2 g(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$. Beweisen Sie, dass dann f in 0 differenzierbar ist und $f'(0) = 0$.