

Funktionen und Abbildungen I

× Aufgabe 1: Wohldefiniertheit und Abbildungseigenschaften

Untersuche, ob es sich bei den folgenden Vorschriften um Abbildungen handelt. Falls ja, bestimme das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv und/oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind demnach bijektiv?

(a) $f_1 : \{1, 4, 6\} \rightarrow \{2, 16, 64\}, f_1(x) = 2^x.$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 7x^2 + 3.$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{1}{x}.$

(d) $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}.$

(e) $f_5 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, f_5\left(\frac{a}{b}\right) = 2b - a.$

(f) $f_6 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}, f_6\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4b}{3a}.$

(!g) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A \in \{0, \infty\}\} \rightarrow \mathbb{N}, f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\},$ wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

× Aufgabe 2: Komposition

Seien die folgenden Abbildungen gegeben

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 3$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3$$

Berechne:

(a) $(f \circ g)(3)$

(b) $(g \circ h \circ f)(2)$

(c) $(h \circ g)(3)$

(d) $(f \circ g)(x).$ Vereinfache soweit wie möglich!

× Aufgabe 3: Bild und Urbild

Beweise oder widerlege folgende Aussagen zum Bild und Urbild einer Funktion.

- (a) Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion. Dann gilt $f(f^{-1}(N)) = N$ und $f^{-1}(f(M)) = M$.
- (b) Sei nun $A \subsetneq M$ und $B \subsetneq N$. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ und $f^{-1}(f(A)) = A$.
- (c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ gegeben. Dann gilt $f^{-1}(\{x\}) = \{\sqrt{x}\}$.

Aufgabe 4: Wir bauen eine Abbildung

Falls möglich, finde geeignete Mengen M und N , sowie eine Abbildung $f : M \rightarrow N$, sodass die jeweiligen Bedingungen gelten. Falls es nicht möglich ist, solche Mengen und eine solche Abbildung anzugeben, begründe warum.

- (a) Das Bild $f(\{\text{Daniel, Ivan, Boris}\})$ ist $\{\text{Analysis}\}$, das Urbild $f^{-1}(\{\text{Analysis}\})$ ist ungleich $\{\text{Daniel, Ivan, Boris}\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{\text{Stochastik}\})$ ist $\{\text{Marcus, Angelika, Peter}\}$.
- (b) Die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.
- (!c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.
- (!d) Die Mächtigkeit des Definitionsbereichs von f ist überabzählbar unendlich, die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist abzählbar unendlich und f ist injektiv.

Aufgabe 5: Komposition, Injektivität und Surjektivität

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow M$ zwei Abbildungen zwischen zwei Mengen M und N . Zeige: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist g injektiv. Gilt auch die Umkehrung? Liefere hierzu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(!) Zeige weiter: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist f auch surjektiv.

Aufgabe 6: Mächtigkeit

Beweise das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Lemma I (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)

Sei $f : M \rightarrow N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N .

Dann gilt: $\#M \geq \#N$

! Aufgabe 7

Beweise für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ die folgenden Aussagen über das Urbild und das Bild von f :

- (a) Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$$

- (b) Seien $M_1, M_2 \subseteq N$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2)$$