Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 6

Abgabe 02.06.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Nützliche LaTeX-Befehle

LaTeX-Befehl	Output
`\equiv`	$\equiv$

Aufgabe 6.1 (7 Punkte)**.** Verwenden Sie jeweils den Homomorphiesatz oder die Isomorphiesätze.

(a). Zeigen Sie, dass $\left(\mathbb{Z}/18\,\mathbb{Z}\right)\big/\left(6\,\mathbb{Z}/18\,\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/6\,\mathbb{Z}$.

(b). Sei $R := \mathbb{Z}[\,t\,]$. Bestimmen Sie ein Ideal $I \trianglelefteq R$, sodass $R/I \cong \mathbb{Z}_{11}$. Ist I ein maximales Ideal bzw. Primideal von R?

(c). Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}[t] + t\,\mathbb{R}[t])\big/t\,\mathbb{R}[t] \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[t]\big/t\mathbb{Z}[t] \cong \mathbb{Z}[t]\big/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])$.

Aufgabe 6.2 (7 Punkte)**.** Es seien R ein Hauptidealring und $g \in R$. Zeigen Sie, dass für alle $a \in R$ gilt:

$$a + g\,R = [a]_g \in \left(R/g\,R\right)^* \Leftrightarrow 1 \text{ ist ein ggT von } a \text{ und } g\,.$$

Entscheiden Sie nun für die folgenden Situationen, ob die Restklasse $[f]_g$ in $K[\,t\,]/g\,K[\,t\,]$ eine Einheit ist und bestimmen Sie gegebenfalls $([f]_g)^{-1}$ als Restklasse modulo $g\,K[\,t\,]$, dargestellt durch ein Polynom vom Grad $< \deg(\,g\,)$:

(a). $K = \mathbb{Q}$, $f := t^3 - 3\,t^2 + 2\,t$ und $g := t^2 - 1$.

(b). $K = \mathbb{Z}_3$, $f := t^3 + 2\,t$ und $g := t^4 + 1$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis voraussetzen, dass die elementare Version der Bézout-Identität (Satz 1.1.11 + Bemerkung 1.1.12) sich auf Hauptidealringe verallgemeinern lässt und diese Aussage hier verwenden.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)**.**

(a). Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, (a, b) \mapsto b + 3\mathbb{Z}$ ein Ringepimorphismus ist und folgern Sie, dass $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.

(b). Seien $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = 11\,\mathbb{Z}[i] \trianglelefteq R$ und $J = 13\,\mathbb{Z}[i] \trianglelefteq R$. Beweisen Sie, dass $R/_{I}$ ein Körper ist, aber $R/_{J}$ kein Körper ist.

Aufgabe 6.4 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper. Formulieren Sie aus dem Chinesischen Restsatz eine konkrete Version für den Anwendungsfall $R = K[t]$.