Abgabe Analysis IIb, Blatt 02

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 1

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x.$
Zu zeigen: $M \subset \mathbb{R}^2$ offen $\implies$ $\mathrm{f}(M) \subset \mathbb{R}$ offen.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
& M \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen} \\
\implies & \forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset M \\
\implies & \forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon\right\} \\
\implies & \forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < \varepsilon\right\}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\varepsilon > \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} > \sqrt{(x_1-a_1)^2} = |x_1 - a_1|$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
& \forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : \left\{a \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| < \varepsilon\right\} \\
\implies & \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \exists \varepsilon > 0 : \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| < \varepsilon \right\} \\
\implies & \forall \mathrm{f}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \in \mathrm{f}(M) \exists \varepsilon > 0 : \left\{ \mathrm{f}(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R} : |x_1 - a_1| < \varepsilon \right\} \\
\implies & \forall \mathrm{f}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \in \mathrm{f}(M) \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon \left(\mathrm{f} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \right) < \varepsilon \\
\implies & \mathrm{f}(M) \text{ ist offen in } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\square$

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen.
Zu zeigen: $\mathrm{f}(M) \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
& M \subset \mathbb{R}^2 \text{ abgeschlossen} \\
\implies & \mathbb{R}^2 \setminus M \text{ offen} \\
\overset{(a)}{\implies} & \mathbb{R} \setminus \mathrm{f}(M) \text{ offen in } \mathbb{R} \\
\implies & \mathrm{f}(M) \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2

(a) Sei $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ für $i = 1, \cdots, n$.
Zu zeigen: f stetig.
Es gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{n_1} \\ \vdots \\ x_{n_n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$\implies x_{n_1} \to a_1, \cdots, x_{n_n} \to a_n$$
$$\implies f_i(x_n) \to f_i(a).$$

$\square$

(b) Fehlt.

Aufgabe 3

(a) Fehlt.

(b) Fehlt.

(c) Fehlt.

Aufgabe 4

(a) Fehlt.

(b) Fehlt.