WS 2019/2020

Musterlösung zum Übungsblatt 2

Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Addition bzw. Multiplikation (A1 und A4 bzw. M1 und M4) erlauben in reinen Additionen/Multiplikationen das beliebige Umklammern und Vertauschen von Elementen. Um langwierige Lösungen zu vermeiden, werde daher durch (A1),(A4) bzw. (M1),(M4) beliebige solcher Prozesse abgekürzt. Das Notieren mehrerer Additionen/Multiplikationen ohne Klammersetzung ist als Abkürzung für beliebige Klammersetzungen zu verstehen.

Aufgabe 1. Seien a, b, c, d Elemente eines Körpers. Beweisen Sie:

a) $(-a) + (-b) = -(a + b)$

Lösung: Die zu beweisende Gleichung drückt aus, dass $(-a) + (-b)$ das inverse Element der Addition für $a+b$ ist, d.h. es reicht zu zeigen: $(a+b)+((-a)+(-b)) = 0$.

$$\begin{aligned}(a + b) + ((-a) + (-b)) &\overset{(A1),(A4)}{=} a + (-a) + b + (-b)\\ &\overset{(A1)}{=} \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big)\\ &\overset{(A3)}{=} 0 + 0\\ &\overset{(A2)}{=} 0\end{aligned}$$

b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$

Lösung:

1. Möglichkeit Die zu beweisende Gleichung drückt aus, dass $b^{-1} \cdot a^{-1}$ das inverse Element der Multiplikation für $a \cdot b$ ist, d.h. es reicht zu zeigen: $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = 1$. Es gilt:

$$(a \cdot b) \cdot \left(b^{-1} \cdot a^{-1}\right) \overset{(M1),(M4)}{=} \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot \left(b \cdot b^{-1}\right) \overset{(M3)}{=} 1 \cdot 1 \overset{(M2)}{=} 1$$

2. Möglichkeit Idee: Die beiden Seiten der Gleichung mit $a \cdot b$ multiplizieren und dann zu einer wahren Aussage umformen.

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad a \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot a^{-1}\\ &\overset{(M3),(M1)}{\Leftrightarrow} 1 = a \cdot \left(b \cdot b^{-1}\right) \cdot a^{-1}\\ &\overset{(M3)}{\Leftrightarrow} 1 = a \cdot 1 \cdot a^{-1}\\ &\overset{(M4)}{\Leftrightarrow} 1 = a \cdot a^{-1} \cdot 1\\ &\overset{(M3)}{\Leftrightarrow} 1 = 1 \cdot 1\\ &\overset{(M2)}{\Leftrightarrow} 1 = 1\end{aligned}$$

Da wir überall Äquivalenzpfeile haben und die letzte Identität wahr ist, schließen wir durch Rückwärtsarbeiten die Gültigkeit der zu beweisenden Gleichung.

3. Möglichkeit Idee: a^{-1} und b^{-1} „erzeugen“, indem man Multiplikation mit 1 hinzufügt.

$(a \cdot b)^{-1} \overset{(M2)}{=} (a \cdot b)^{-1} \cdot 1 \cdot 1 \overset{(M4)}{=} 1 \cdot 1 \cdot (a \cdot b)^{-1} \overset{(M3)}{=} \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot \left(b \cdot b^{-1}\right) \cdot (a \cdot b)^{-1} \overset{(M1),(M4)}{=}$
$b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \left((a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1}\right) \overset{(M3)}{=} b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot 1 \overset{(M2)}{=} b^{-1} \cdot a^{-1}$

c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
Lösung:
Idee: Die Präsenzaufgabe 1b) zweimal anwenden.

$$(-a) \cdot (-b) \overset{\text{PA 1b)}}{=} -(a \cdot (-b)) \overset{\text{(M4)}}{=} -((-b) \cdot a) \overset{\text{PA 1b)}}{=} -(-(b \cdot a)) \overset{\text{PA 1a)}}{=} b \cdot a \overset{\text{(M4)}}{=} a \cdot b$$

d) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$, falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$
Łösung:
1. Möglichkeit Idee: Man multipliziert die ganze Gleichung mit $b \cdot d$, um die Komplexität zu reduzieren.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad &\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} \\
&\overset{\cdot b \cdot d}{\Leftrightarrow} \quad b \cdot d \cdot (a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}) = b \cdot d \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} \\
&\overset{\text{(D)}}{\Leftrightarrow} \quad b \cdot d \cdot a \cdot b^{-1} + b \cdot d \cdot c \cdot d^{-1} = b \cdot d \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} \\
&\overset{\text{(M1),(M4)}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot d \cdot b \cdot b^{-1} + b \cdot c \cdot d \cdot d^{-1} = b \cdot d \cdot (b \cdot d)^{-1} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \\
&\overset{\text{(M1)}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot d \cdot (b \cdot b^{-1}) + b \cdot c \cdot (d \cdot d^{-1}) = (b \cdot d) \cdot (b \cdot d)^{-1} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \\
&\overset{\text{(M3)}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot d \cdot 1 + b \cdot c \cdot 1 = 1 \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \\
&\overset{\text{(M4),(M2)}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot d + b \cdot c = a \cdot d + b \cdot c
\end{aligned}$$

Da wir überall Äquivalenzpfeile haben und die letzte Identität wahr ist, schließen wir durch Rückwärtsarbeiten die Gültigkeit der zu beweisenden Gleichung.
2. Möglichkeit

$$\begin{aligned}
\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} &\overset{\text{Def}}{=} (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} \\
&\overset{\text{(M4)}}{=} (b \cdot d)^{-1} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \\
&\overset{\text{(D)}}{=} (b \cdot d)^{-1} \cdot (a \cdot d) + (b \cdot d)^{-1} \cdot (b \cdot c) \\
&\overset{\text{HA 1b)}}{=} d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot (a \cdot d) + d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot (b \cdot c) \\
&\overset{\text{(M1),(M4)}}{=} a \cdot b^{-1} \cdot (d \cdot d^{-1}) + c \cdot d^{-1} \cdot (b \cdot b^{-1}) \\
&\overset{\text{(M3)}}{=} a \cdot b^{-1} \cdot 1 + c \cdot d^{-1} \cdot 1 \\
&\overset{\text{(M2)}}{=} a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{a}{b} + \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Seien a, b, c und d Elemente von $\mathbb{R}$. Man beweise:

a) $a < b,\ c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Lösung: Wir wollen (O3) anwenden. Dafür formen wir zuerst die gegebenen Ungleichungen um:

$$a < b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} b - a > 0$$

$$c < 0 \overset{\text{PA 2b)}}{\Leftrightarrow} -c > 0$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\begin{smallmatrix} b-a>0 \\ -c>0 \end{smallmatrix}\right\} &\overset{\text{(O3)}}{\Rightarrow} && (-c)\cdot(b-a) > 0 \\
&\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} && (-c)\cdot(b+(-a)) > 0 \\
&\overset{\text{(D)}}{\Rightarrow} && (-c)\cdot b + (-c)\cdot(-a) > 0 \\
&\overset{\text{PA 1b), HA 1c)}}{\Rightarrow} && -(c\cdot b) + c\cdot a > 0 \\
&\overset{\text{Def,(A4)}}{\Rightarrow} && c\cdot a > c\cdot b \\
&\overset{\text{(M4)}}{\Rightarrow} && a\cdot c > b\cdot c
\end{aligned}$$

b) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

Lösung:

1. Möglichkeit: direkter Beweis

Wegen $a > 0$ ist $a^{-1} \neq 0$ und nach VL gilt $a^{-1} \cdot a^{-1} > 0$. Dann gilt:

$$\left.\begin{smallmatrix} a>0 \\ a^{-1}\cdot a^{-1}>0 \end{smallmatrix}\right\} \overset{\text{(O3)}}{\Rightarrow} a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} > 0 \overset{\text{(M3)}}{\Rightarrow} 1 \cdot a^{-1} > 0 \overset{\text{(M4),(M2)}}{\Rightarrow} a^{-1} > 0$$

2. Möglichkeit: indirekter Beweis

Angenommen, $a^{-1} < 0$. Dann gälte

$$\left.\begin{smallmatrix} 0<a \\ a^{-1}<0 \end{smallmatrix}\right\} \overset{\text{HA 2a)}}{\Rightarrow} 0 \cdot a^{-1} > a \cdot a^{-1} \overset{\text{(M3)}}{\Rightarrow} 0 \cdot a^{-1} > 1 \overset{\text{VL}}{\Rightarrow} 0 > 1$$

Widerspruch zur Aussage $1 > 0$ aus der VL.

c) Falls $a, b > 0$ ist, gilt $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

Lösung: Es gilt:

$a > 0, a < b \overset{\text{PA 2a)}}{\Rightarrow} a^2 < b \cdot a \overset{\text{(M4)}}{\Rightarrow} a^2 < a \cdot b$

$b > 0, a < b \overset{\text{PA 2a)}}{\Rightarrow} a \cdot b < b^2$

Die Ungleichung $a^2 < b^2$ folgt nun aus der Transitivität (siehe VL).

d) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Lösung: Wie würden Sie diese Aussage „ohne Axiome“ beweisen? Richtig! Die Ungleichung $a < b$ durch ab teilen, d.h. mit $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ multiplizieren (Zum Glück sind a und b nach der Voraussetzung nicht 0 und sogar positiv). Genau diese Idee realisieren wir. Wegen b) folgt zuerst $a^{-1} > 0$, $b^{-1} > 0$ und nach (O3) ist damit

$a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$. Dann gilt:

$$\left.\begin{smallmatrix} a<b \\ a^{-1}\cdot b^{-1}>0 \end{smallmatrix}\right\} \overset{\text{PA 2a)}}{\Rightarrow} a \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} < b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$$
$$\overset{\text{(M1),(M4)}}{\Rightarrow} b^{-1} \cdot (a \cdot a^{-1}) < a^{-1} \cdot (b \cdot b^{-1})$$
$$\overset{\text{(M3)}}{\Rightarrow} b^{-1} \cdot 1 < a^{-1} \cdot 1$$
$$\overset{\text{(M2)}}{\Rightarrow} b^{-1} < a^{-1}$$
$$\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

e) $a < b$, $c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$

Lösung: Laut VL bedeutet $c \leq d$, dass entweder $c < d$ oder $c = d$. Wir betrachten zunächst den Fall $c = d$:

$$a < b \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} b - a > 0$$
$$\overset{\text{(A2),(A3)}}{\Rightarrow} b - a + (c - c) > 0$$
$$\overset{\text{(A1),(A4)}}{\Rightarrow} b + c - a - c > 0$$
$$\overset{\text{Def,HA 1a)}}{\Rightarrow} b + c - (a + c) > 0$$
$$\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} b + d = b + c > a + c.$$

Also gilt die Behauptung für $c = d$. Als Nächstes betrachten wir den Fall $c < d$:

$$\left.\begin{smallmatrix} a<b \\ c<d \end{smallmatrix}\right\} \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \left.\begin{smallmatrix} b-a>0 \\ d-c>0 \end{smallmatrix}\right\}$$
$$\overset{\text{(O2)}}{\Rightarrow} (b - a) + (d - c) > 0$$
$$\overset{\text{(A1),(A4),Def}}{\Rightarrow} b + d + (-a) + (-c) > 0$$
$$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} b + d + (-a) + (-c) + a + c > 0 + a + c \quad \text{auf beiden Seiten } a + c \text{ addieren}$$
$$\overset{\text{(A1),(A4)}}{\Rightarrow} (b + d) + \big(a + (-a)\big) + \big(c + (-c)\big) > a + c + 0$$
$$\overset{\text{(A3)}}{\Rightarrow} (b + d) + 0 + 0 > a + c + 0$$
$$\overset{\text{(A2)}}{\Rightarrow} b + d > a + c$$
$$\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} a + c < b + d$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\big||x - 5| - 3\big| \leq 4$ in $\mathbb{R}$.

Lösung:

1. Möglichkeit. Die Lösungsmenge findet man, indem man die Eigenschaft des Absolutbetrages $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ aus der VL benutzt. Es gilt dann:

$$\big||x - 5| - 3\big| \leq 4 \overset{VL}{\Leftrightarrow} -4 \leq |x - 5| - 3 \leq 4$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq |x - 5| \leq 7 \quad \text{Addition von 3 zu den Ungl. ist möglich nach 2) aus den Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen}$$
$$\Leftrightarrow |x - 5| \leq 7 \quad \text{Man kann die linke Ungl. weglassen, da sie immer erfüllt ist}$$
$$\overset{VL}{\Leftrightarrow} -7 \leq x - 5 \leq 7$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 12 \quad \text{Addition von 5 zu den Ungleichungen}$$

Also besteht die Lösungsmenge der Ungleichung aus allen $x \in \mathbb{R}$ mit $-2 \leq x \leq 12$.
Andere Schreibweise: die Lösungsmenge ist $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 12\}$.

2. Möglichkeit. Man kann die Aufgabe auch mithilfe von Fallunterscheidungen lösen. Nach Definition des Betrags gilt:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, \text{ falls } x-5 \geq 0 \\ -(x-5), \text{ falls } x-5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-5, \text{ falls } x \geq 5 \\ -x+5, \text{ falls } x < 5 \end{cases}$$

Damit folgt:

Falls $x \geq 5 : |x-5-3| = |x-8| = \begin{cases} x-8, \text{ falls } x-8 \geq 0 \\ -(x-8), \text{ falls } x-8 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-8, \text{ falls } x \geq 8 \\ -x+8, \text{ falls } x < 8 \end{cases}$

Falls $x < 5 : |-x+5-3| = |-x+2| = \begin{cases} -x+2, \text{ falls } -x+2 \geq 0 \\ -(-x+2), \text{ falls } -x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+2, \text{ falls } x \leq 2 \\ x-2, \text{ falls } x > 2 \end{cases}$

Nun kann man die Ungleichung mittels dieser Fallunterscheidungen näher betrachten.
Für $x \geq 8$ lautet die Ungleichung:

$$x - 8 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 12$$

also muss $8 \leq x \leq 12$ gelten.
Für $5 \leq x < 8$ lautet die Ungleichung:

$$-x + 8 \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 4$$

also ändert sich nichts an der Voraussetzung und es muss $5 \leq x < 8$ gelten.
Für $x \leq 2$ lautet die Ungleichung:

$$-x + 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -2$$

also muss $-2 \leq x \leq 2$ gelten.
Für $2 < x < 5$ lautet die Ungleichung:

$$x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 6$$

also ändert sich nichts an der Voraussetzung und es muss $2 < x < 5$ gelten.
Zusammen ergeben diese vier Fälle, dass $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung löst, wenn $-2 \leq x \leq 2$ oder $2 < x < 5$ oder $5 \leq x < 8$ oder $8 \leq x \leq 12$, also kürzer, wenn

$$-2 \leq x \leq 12.$$

Aufgabe 4.

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$$

Lösung:

Es geht hier um eine Aussage $A(n)$ über jede natürliche Zahl. Es ist also naheliegend, das Prinzip der vollständigen Induktion einzusetzen.
Induktionsanfang ($n = 1$): Die Behauptung für $n = 1$ lautet $1^3 = 1^2$ und sie ist offensichtlich wahr.
Bevor wir mit dem Induktionsschritt anfangen, ist es sinnvoll die ursprüngliche Aussage umzuschreiben, indem wir die in der VL bewiesene Gleichung $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ benutzen. Eine äquivalente Aussage ist dann $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$):

- Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Gleichung $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ gilt für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

- Induktionsschluss:

  Zu zeigen: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

  Es gilt:

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + ... + n^3) + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \qquad (n+1)^2 \text{ ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \qquad \text{1. binomische Formel} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$, gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Wir greifen wieder auf das Prinzip der vollständigen Induktion zurück.
Induktionsanfang ($n = 1$): $(1 + x)^1 \geq 1 + x$ ist offenbar wahr.
Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$):

- Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

- Induktionsschluss:

  Zu zeigen: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$, $x \geq -1$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n \geq 1+nx \quad &\overset{\text{PA 2a)},\, x+1\geq 0}{\Rightarrow} \quad (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\
&\Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\
&\Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\overset{nx^2\geq 0}{\Rightarrow} \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es ist leicht zu verstehen, dass die Forderung $x \geq -1$ nicht weggelassen werden kann. Zum Beispiel liefert die Ungleichung für $x = -4$ und $n = 3$ die Beziehung $-27 \geq -11$, was offenbar falsch ist.
Die bewiesene Ungleichung heißt Bernoullische Ungleichung. Sie wird oft bei Abschätzungen verwendet, was Sie später sehen werden.