Universität Oldenburg — WiSe 2019/2020
Marco Melles — 6. Dezember 2019

Übungsaufgaben zu linearen Abbildungen

Aufgabe 7.1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es sich im folgenden bei F um K-lineare Abbildungen handelt. Bestimmen Sie anschließend jeweils den Kern der linearen Abbildungen, eine Basis des Kerns und seine Dimension. Entscheiden Sie, ob es sich bei den Abbildungen um einen Monomorphismus, Epimorphismus oder Isomorphismus handelt.

(a) $K = \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1\times 2}, (x_1, x_2, x_3)^T \longmapsto (3x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

(b) $K = \mathbb{Q}$, $F : \mathbb{Q}[t] \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$, $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \longmapsto f' := \sum\limits_{i=1}^{n} i\, a_i t^{i-1}$, die formale Ableitung.

(c) $K = \mathbb{C}$ und $F : \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C}, f \longmapsto f(0)$.

(d) $K = \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n\times 1}, \mathbb{R}), x \longmapsto T_x$, wobei $T_x : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto x^T y$.

(e) $K = \mathbb{Z}_5$ und für $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$ sei $F : \mathbb{Z}_5^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Z}_5^{2\times 2}, A \longmapsto AM - MA$.

(f) $K = \mathbb{Z}_7$ und $F : \mathbb{Z}_7^{2\times 3} \longrightarrow \mathbb{Z}_7^{1\times 3}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \longmapsto (a_1 + 5a_6, 3a_2 + 4a_5, a_3 + 2a_2 + 5a_1)$.

(g) K Körper, V ein n-dimensionaler Verktorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $F : K^{n\times 1} \longrightarrow V, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Aufgabe 7.2. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um K-lineare Abbildungen handelt. Wenn ja, so bestimmen Sie jeweils den Kern der linearen Abbildungen, eine Basis des Kerns und seine Dimension. Entscheiden Sie auch, ob es sich bei den Abbildungen um einen Monomorphismus, Epimorphismus oder Isomorphismus handelt.

(a) $K = \mathbb{C}$, $F : \mathbb{C}^{4\times 1} \longrightarrow \mathbb{C}^{3\times 1}, (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \longmapsto (i\,x_1 - x_3, x_2 + 3\,i\,x_2 + x_4, 2x_2 - x_3 + 1)^T$,

(b) $K = \mathbb{Z}_5$ und $F : \mathbb{Z}_5^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{Z}_5^{3\times 1}, (x_1, x_2)^T \longmapsto (x_1 + x_2, 2x_1, x_1 + 2x_2)^T$,

(c) $K = \mathbb{C}$ und $F : \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C}, f \longmapsto f(0)$,

(d) $K = \mathbb{Z}_2$ und $F : \mathbb{Z}_2^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{2\times 1}, (x_1, x_2)^T \longmapsto (x_2^2, x_1^2)^T$.

(e) $K = \mathbb{R}$ und $V = \{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M \text{ ist symmetrisch} \}$. Sei $A \in V$ und $F : V \longrightarrow V, M \longmapsto A^T M A$,

(f) $K = \mathbb{R}$ und für $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sei $T_x : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto x^T y$,

(g) $K = \mathbb{Z}_3$ und $F : \mathbb{Z}_3[t]_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_3[t]_3, a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \longmapsto (a_1 + a_2)t^3 + (a_1 + a_0)t^2 + (a_0 + a_2)t + (a_0 + a_1 + a_2)$,