Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Funktionen und Abbildungen II

× Aufgabe 1: Umkehrabbildungen

Bearbeite für die folgenden Abbildungen (1) bis (3) jeweils die folgenden Aufgaben:

(a) Prüfe, ob die Umkehrabbildung definiert ist.

(b) Wenn möglich, gib eine explizite Formel für die Umkehrabbildung an.

(c) Wenn die Umkehrabbildung existiert, bestimme ihre Funktionswerte an den angegebenen Stellen.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5x + 3$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(8)$ und $f^{-1}(-3)$.

Lösung:

(a) Laut Definition der Umkehrabbildung ist die einzige Voraussetzung für die Existenz der Umkehrabbildung, dass f bijektiv ist. Genau das prüfen wir also:

injektiv: *Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Elemente aus dem Definitionsbereich von f mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist*

$$5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \ \Rightarrow\ 5x_1 = 5x_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

Also ist f injektiv.

surjektiv: *Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Element aus dem Wertevorrat von f. Gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}$ (Element aus dem Definitionsbereich) mit $f(x) = 5x+3 = y$. Diese Gleichung können wir nach x auflösen und erhalten $x = \frac{y-3}{5}$. Tatsächlich ist damit $f(x) = f\left(\frac{y-3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{y-3}{5} + 3 = (y-3) + 3 = y$. Also ist f surjektiv.*

Also ist f bijektiv und besitzt damit eine Umkehrabbildung.

(b) Laut Definition gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(y) = \text{„}\textit{das } x \in \mathbb{R}\textit{, welches die Bedingung } f(x) = y \textit{ erfüllt}\text{“}$$

Wie wir zu gegebenem y ein solches x bestimmen, haben wir glücklicherweise schon bei der Überprüfung auf Surjektivität „nebenbei“ herausgefunden: $x = \underbrace{\frac{y-3}{5}}_{\text{Formel für die Umkehrabbildung}} = f^{-1}(y)$. *Es gilt also:* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$.

(c) Zuletzt dürfen wir noch zwei Funktionswerte der Umkehrabbildung bestimmen, was dank der Formel nicht besonders schwierig ist:

- $f^{-1}(8) = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

- $f^{-1}(-3) = \frac{-3-3}{5} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x^2 - x$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(15)$.

Lösung:

(a) Die erste Frage ist wieder, ob die Umkehrabbildung überhaupt definiert ist. Dazu wird f auf Bijektivität überprüft:

surjektiv: *Um f auf Surjektivität zu prüfen, stellen wir für ein festes $y \in \mathbb{R}$ die Gleichung*

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - x = y \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 0$$

auf und untersuchen, ob für jedes (beliebige aber feste) $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ gefunden werden kann, welches die Gleichung erfüllt (z.B. mit p-q-Formel bzgl. x).
Wenn man nun bereits die Vermutung hat, dass f nicht surjektiv ist, kann man direkt versuchen, ein Gegenbeispiel zur Surjektivität von f zu finden. Alternativ könnte man die p-q-Formel auch zunächst mit allgemeinem y lösen und dann schauen, ob die gefundene Lösung für x, in der ja y auftaucht, für jedes y aus dem Wertevorrat von f definiert ist. Ein Gegenbeispiel zur Surjektivität ist das folgende:
Sei $y = -1$ ein Element aus dem Wertevorrat. Angenommen, f wäre surjektiv, dann gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 - x = -1$, also $x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 0$. Mit Hilfe der p-q-Formel ergäbe sich als Lösung hierfür

$$x = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{64} - 1}_{<0}}\,,$$

was jedoch in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist, da die Wurzel in $\mathbb{R}$ nur aus nicht-negativen reellen Zahlen gezogen werden kann. Es gibt also für $y = -1$ kein Urbild unter f. Das betrachtete Beispiel ist also ein Gegenbeispiel zur Surjektivität von f.
(Hätte man diese Rechnung mit allgemeinem y gemacht, so hätten wir

$$x = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + y}$$

erhalten und hätten an dieser Stelle die Einschränkung $y \geq -\frac{1}{64}$ treffen müssen, damit der Ausdruck unter der Wurzel nicht-negativ und die rechte Seite der Gleichung definiert ist. Also wäre es uns nicht möglich, für alle y aus dem Wertevorrat $\mathbb{R}$ von f ein Urbild zu finden – genauer werden alle $y < -\frac{1}{64}$ von f nicht getroffen.)

(alternativ) injektiv: *Wir vermuten, dass f nicht injektiv ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, f sei injektiv, d.h. für alle y aus dem Wertevorrat* *gibt es höchstens ein x mit $f(x) = y$. Insbesondere gilt dies für $y = 0$. Sei also $f(x) = 0$, d.h. $4x^2 - x = 0$. Dies ist äquivalent zu $x(4x-1) = 0$, was jedoch sowohl für $x = 0$ als auch für $4x - 1 = 0$, also $x = \frac{1}{4}$ erfüllt ist. Daher ist f nicht injektiv.*

Damit sind wir fertig, denn ohne Surjektivität bzw. Injektivität keine Bijektivität und ohne Bijektivität keine Umkehrabbildung.

(b) –

(c) –

! (3) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x^2)$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(0)$.

Lösung:

(a) Wieder prüfen wir auf Bijektivität:

injektiv: *Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ zwei Elemente aus dem Definitionsbereich mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist*

$$\log\left({x_1}^2\right) = \log\left({x_2}^2\right) \;\Rightarrow\; \exp\left(\log\left({x_1}^2\right)\right) = \exp\left(\log\left({x_2}^2\right)\right) \;\Rightarrow\; {x_1}^2 = {x_2}^2$$

Da $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ sind, ist $x_1 = x_2$. Also ist f injektiv.

surjektiv: *Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Element aus dem Wertevorrat. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}_+$ (ein Element aus dem Definitionsbereich) mit $f(x) = \log\left(x^2\right) = y$. Diese Gleichung können wir nach x auflösen:*

$$\log\left(x^2\right) = y \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = \exp(y) \quad\overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow}\quad x = \sqrt{\exp(y)}$$

Wir erhalten also $x = \sqrt{\exp(y)}$. Tatsächlich gilt für dieses x:

$$f(x) = \log(x^2) = \log\left(\sqrt{\exp(y)}^2\right) = \log(\exp(y)) = y$$

Also ist f surjektiv.

f ist also bijektiv und die Umkehrabbildung ist definiert.

(b) Eine explizite Formel für f^{-1} finden wir wieder im Beweis der Surjektivität, nämlich $f^{-1}(y) = \sqrt{\exp(y)}$.

(c) Mit der expliziten Formel wird der geforderte Funktionswert von f^{-1} bestimmt:

- $f^{-1}(1) = \sqrt{\exp(1)} = \sqrt{e}$
- $f^{-1}(0) = \sqrt{\exp(0)} = \sqrt{1} = 1$

Aufgabe 2: Exponentialfunktion

Vereinfache so weit wie möglich:

1. $\exp(3) \cdot \exp(-6)$
2. $\left(\frac{1}{\exp_5(4)}\right)^8$
3. $\frac{\exp(2)^{-3}}{\exp(-4)}$
4. $\left(\frac{\exp(-2)}{\exp(-3)}\right)^2 \cdot \exp(\frac{8}{9})$
5. $\left(\exp(\frac{5}{2}) \cdot \exp(-\frac{1}{3}) \cdot \exp(\frac{1}{2})\right)^{-1}$

Lösung:

1. $\exp(3) \cdot \exp(-6) \overset{E2}{=} \exp(3 + (-6)) = \exp(-3)$

2. $\left(\frac{1}{\exp_5(4)}\right)^8 \overset{E4}{=} (\exp_5(-4))^8 \overset{E3}{=} \exp_5(-4 \cdot 8) = \exp_5(-32)$

3. $\frac{\exp(2)^{-3}}{\exp(-4)} \overset{E3}{=} \frac{\exp(2\cdot(-3))}{\exp(-4)} = \exp(-6) \cdot \frac{1}{\exp(-4)} \overset{E4}{=} \exp(-6) \cdot \exp(4)$
$\overset{E2}{=} \exp(-6 + 4) = \exp(-2)$

4. $\left(\frac{\exp(-2)}{\exp(-3)}\right)^2 \cdot \exp(\frac{8}{9}) \overset{E4}{=} (\exp(-2) \cdot \exp(3))^2 \cdot \exp(\frac{8}{9}) \overset{E2}{=} (\exp(1))^2 \cdot \exp(\frac{8}{9})$
$\overset{E3}{=} \exp(1 \cdot 2) \cdot \exp(\frac{8}{9}) \overset{E2}{=} \exp(2 + \frac{8}{9}) = \exp(\frac{26}{9})$

5. $\left(\exp(\frac{5}{2}) \cdot \exp(-\frac{1}{3}) \cdot \exp(\frac{1}{2})\right)^{-1} \overset{E2}{=} \left(\exp(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2})\right)^{-1} = \exp(\frac{8}{3})^{-1}$
$\overset{E3}{=} \exp(\frac{8}{3} \cdot (-1)) = \exp(-\frac{8}{3})$

Aufgabe 3: Logarithmus

Vereinfache so weit wie möglich:

1. $\ln(5) - \ln(4)$
2. $3\ln(2) + 2\ln(\frac{1}{4})$
3. $\ln(3) + \ln(5) - 2\ln(3) - \ln(\frac{5}{3})$
4. $4\ln(2\exp(\frac{1}{2})) - \ln(8)$
5. $\exp(\ln(7) - 3\ln(2))$

Lösung:

1. $\ln(5) - \ln(4) \overset{L4}{=} \ln(5) + \ln(\frac{1}{4}) \overset{L2}{=} \ln(5 \cdot \frac{1}{4}) = \ln(\frac{5}{4})$

2. $3\ln(2) + 2\ln(\frac{1}{4}) \overset{L3}{=} \ln(2^3) + \ln((\frac{1}{4})^2) = \ln(8) + \ln(\frac{1}{16})$
$\overset{L2}{=} \ln(8 \cdot \frac{1}{16}) = \ln(\frac{1}{2})$

3. $\ln(3) + \ln(5) - 2\ln(3) - \ln(\frac{5}{3}) = -\ln(3) + \ln(5) - \ln(\frac{5}{3})$
$\overset{L4}{=} \ln(\frac{1}{3}) + \ln(5) + \ln(\frac{3}{5}) \overset{L2}{=} \ln(\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}) = \ln(1) \overset{L1}{=} 0$

4. $4\ln(2\exp(\frac{1}{2})) - \ln(8) \overset{L3}{=} \ln((2\exp(\frac{1}{2}))^4) - \ln(8) \overset{L4}{=} \ln((2\exp(\frac{1}{2}))^4) + \ln(\frac{1}{8})$
$= \ln(16 \cdot \exp(\frac{1}{2})^4) + \ln(\frac{1}{8}) \overset{E3}{=} \ln(16 \cdot \exp(\frac{1}{2} \cdot 4)) + \ln(\frac{1}{8})$
$= \ln(16 \cdot \exp(2)) + \ln(\frac{1}{8}) \overset{L2}{=} \ln(16 \cdot \exp(2) \cdot \frac{1}{8}) = \ln(2 \cdot \exp(2))$
$\overset{L2}{=} \ln(2) + \ln(\exp(2)) = \ln(2) + 2$

5. $\exp(\ln(7) - 3\ln(2)) \overset{L3}{=} \exp(\ln(7) - \ln(8)) \overset{L4}{=} \exp(\ln(7) + \ln(\frac{1}{8}))$
$\overset{L2}{=} \exp(\ln(7 \cdot \frac{1}{8})) = 7 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

! Aufgabe 4: Beweis der Rechenregeln

1. Beweise die folgenden Rechenregeln für die Exponentialfunktion. Benutze dazu nur die Definition der Exponentialfunktion und die Rechenregeln für allgemeine Potenzen. Es sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

   E2: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

   E3: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp_a(x \cdot y) = (\exp_a(x))^y$

   E4: $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

   Lösung:

   E2 Seien $x, y \in \mathbb{R}$. *Dann:* $\exp(x + y) \overset{Def.}{=} e^{x+y} \overset{Pot.ges.}{=} e^x \cdot e^y \overset{Def.}{=} \exp(x) \cdot \exp(y)$

   E3 Seien $x, y \in \mathbb{R}$. *Dann:* $\exp_a(x \cdot y) \overset{Def.}{=} a^{x \cdot y} \overset{Pot.ges.}{=} (a^x)^y \overset{Def.}{=} \exp_a(x)^y$

   E4 Sei $x \in \mathbb{R}$. *Dann:* $\exp(-x) = \exp(x \cdot (-1)) \overset{E3}{=} \exp(x)^{-1} = \frac{1}{\exp(x)}$

2. Beweise die folgenden Rechenregeln für den Logarithmus. Benutze dazu nur die Rechenregeln für die Exponentialfunktion, die Definition des Logarithmus und Satz 12.2.

   L3: $\forall x \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R} : z \cdot \ln(x) = \ln(x^z)$

   L4: $\forall x \in \mathbb{R} : -\ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$

   Lösung:

   L3 Seien $x \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}$. *Dann:* $z \cdot \ln(x) = \mathrm{id}(z \cdot \ln(x)) = \ln(\exp(z \cdot \ln(x)))$
   $\overset{E3}{=} \ln(\exp(\ln(x))^z) = \ln(\mathrm{id}(x)^z) = \ln(x^z)$

   L4 Sei $x \in \mathbb{R}$. *Dann:* $-\ln(x) = (-1) \cdot \ln(x) \overset{L3}{=} \ln(x^{-1}) = \ln(\frac{1}{x})$

Aufgabe 5: Polynomfunktionen dritten Grades

Wir betrachten eine Polynomfunktion dritten Grades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

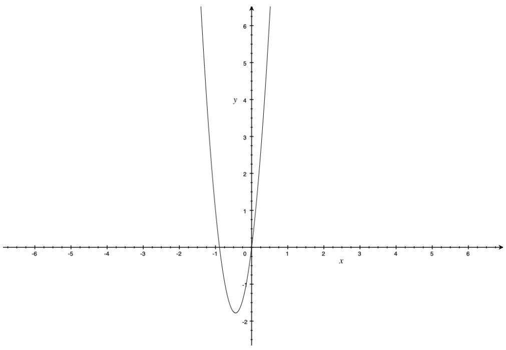
(a) Bestimme die Nullstellen von f, falls $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ und $d = -2$ ist.

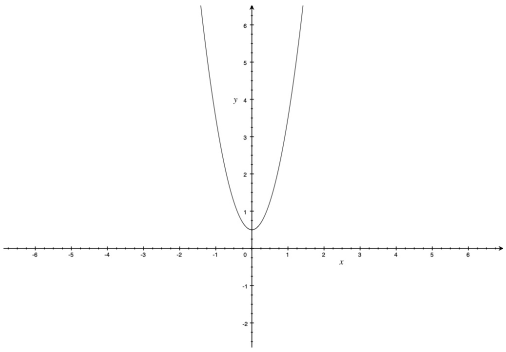
(b) Leite die Funktion ab und bringe die Ableitung in Scheitelpunktsform.

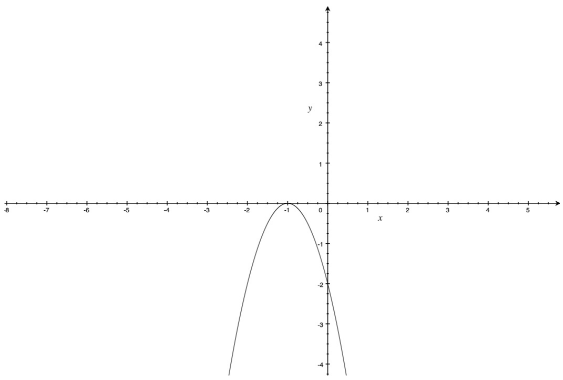
  (i) Was sagt das Vorzeichen von a über den Graphen der Funktion f aus?

  (ii) Falls $a > 0$ ist, wann wird die Ableitung der Funktion minimal? Falls $a < 0$ ist, wann wird die Ableitung der Funktion maximal?

(c) Gegeben seien die folgenden drei Funktionsgraphen von Ableitungen dreier Polynomfunktionen dritten Grades.







Zeichne in jede Skizze je eine mögliche Polynomfunktion, deren Ableitung der jeweils abgebildete Funktionsgraph sein könnte.

Lösung:

(a) *Mit Polynomdivision erhalten wir die Nullstellen* $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ *und* $x_3 = 1$.

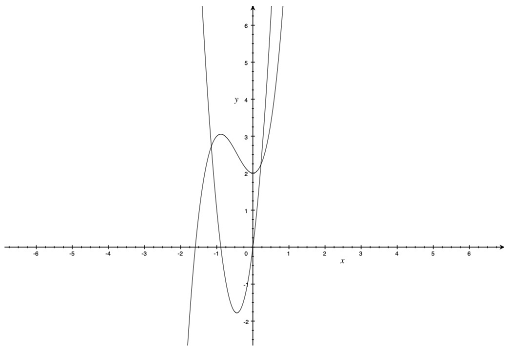
(b) *Als Ableitung von* f *erhalten wir* $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$. *Umstellen in Scheitelpunktsform mittels quadratischer Ergänzung liefert*

$$f'(x) = 3a \cdot \Big(x + \underbrace{\frac{b}{3a}}_{=:d_1}\Big)^2 + \underbrace{\frac{b^2}{3a} + c}_{=:d_2}$$

(i) *Das Vorzeichen von* a *sagt über die Ableitungsfunktion von* f *aus, ob diese nach oben oder unten geöffnet ist, wie wir in der Vorlesung gesehen haben. Als Folgerung bestimmt das Vorzeichen von* a*, ob die Funktion* f *„von* $-\infty$ *kommt und nach* $+\infty$ *geht“ oder ob sie „von* $+\infty$ *kommt und nach* $-\infty$ *geht“.*

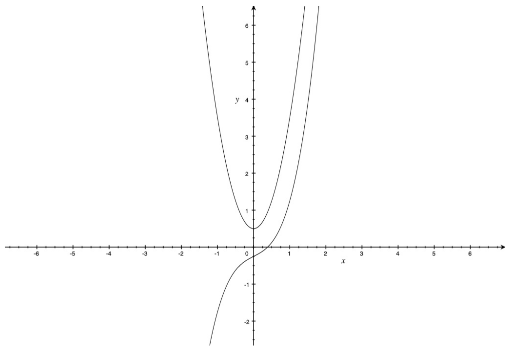
(ii) *In beiden Fällen wir die Ableitung minimal bzw. maximal bei* $d_1 = -\frac{b}{3a}$. *An dieser Stelle hat* f *die Steigung* $d_2 = \frac{b^2}{3a} + c$.

(c) *Wir erhalten beispielsweise folgende mögliche Polynomfunktionen* f*:*



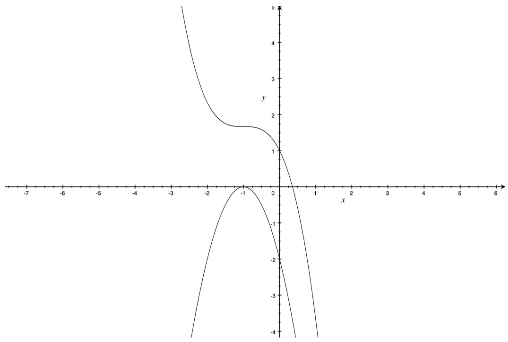
Hintergrundinformation zu f und f' (nicht Teil der Aufgabenbearbeitung!):

$$f'(x) = 9x^2 + 8x$$
$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2$$



Hintergrundinformation zu f und f' (nicht Teil der Aufgabenbearbeitung!):

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$$
$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$



Hintergrundinformation zu f und f'
(nicht Teil der Aufgabenbearbeitung!):

$$f'(x) = -2x^2 - 4x - 2\,, \qquad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

Bemerkung: *Da es nicht nur eine Stammfunktion gibt, sind diese Polynomfunktionen nicht eindeutig. Jede andere Funktion mit gleichem Graphen, der lediglich vertikal verschoben ist, ist ebenso korrekt.*

Aufgabe 6: Sinus und Kosinus

Wir wollen uns in dieser letzten Aufgabe noch mit zwei Funktionen beschäftigen, welche sich geometrisch sehr schön veranschaulichen lassen: der Sinus- und Kosinusfunktion.

Aus der Schule ist sicherlich noch bekannt, dass man einen Winkel in Grad (°) messen. So bezeichnen wir einen Winkel von 90° als rechten Winkel. Ein anderes verbreitetes Winkelmaß ist das Bogenmaß. Das Bogenmaß eines Winkels α beschreibt genau diejenige Strecke, die ein Zeiger auf einem Kreis mit Radius 1 zurücklegt, um den Winkel α zu überstreichen. Dieser Zusammenhang ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

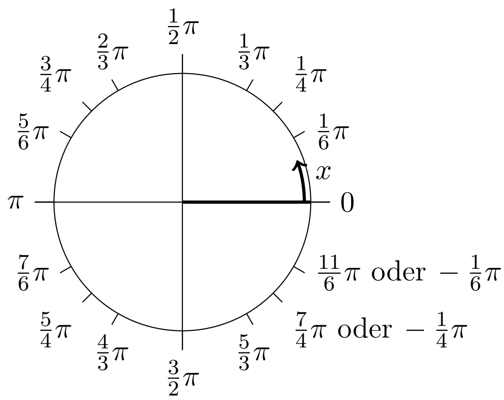


Abbildung 1: Einige Winkel im Bogenmaß (ausgehend von der positiven x-Achse)

So entspricht ein Winkel von 45° einem Bogenmaß von $\frac{1}{4}\pi$ – oder anders ausgedrückt: Die Winkel $\alpha = 45°$ und $\beta = \frac{1}{4}\pi$ sind gleich groß:

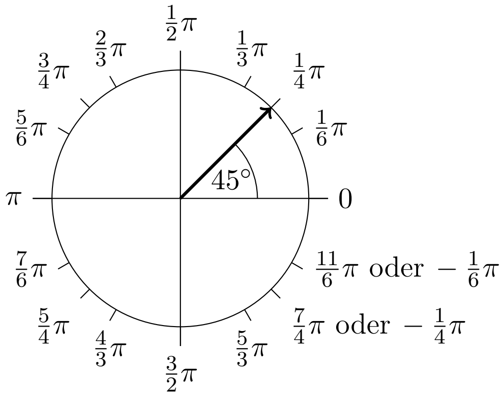


Abbildung 2: Einige Winkel im Bogenmaß (ausgehend von der positiven x-Achse)

Wie können wir allgemein wissen, wie groß ein gewisser Winkel im Bogenmaß in Grad ist? Dazu können wir ausnutzen, dass der Umfang eines Kreises mit Radius 1 genau 2π beträgt. Somit entspricht ein Winkel von 180° gerade π oder ein Winkel von $\frac{\pi}{3}$ (dies ist $\frac{1}{6}$ des Kreisumfangs 2π) gerade $\frac{1}{6}$ von 360°, also 60°. Mit diesen Überlegungen kann man die folgende Umrechnungsformel zwischen Gradzahl und Bogenmaß aufschreiben:

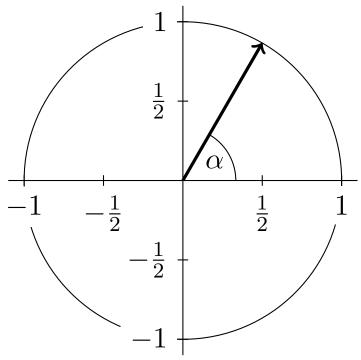
$$\frac{\alpha(\text{in Grad})}{360°} = \frac{\alpha(\text{in Bogenmaß})}{2\pi}$$

Wir werden im weiteren Verlauf hauptsächlich mit dem Bogenmaß arbeiten.

Erinnerung 1 (Sinus und Kosinus)
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck. Betrachten wir einen Winkel $\alpha \neq 90°$ (d.h. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) des Dreiecks, so gilt für diesen

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

(a) Betrachten wir die folgende Abbildung eines Kreises mit Radius 1. Der eingezeichnete Pfeil schließe mit der waagerechten Achse einen Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ein.



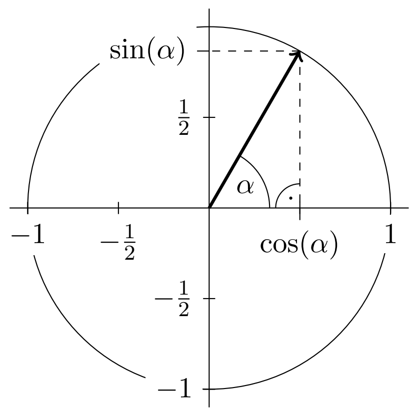
(i) Finde in obiger Abbildung ein rechtwinkliges Dreieck und zeichne in dieses Dreieck $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ ein.

(ii) Bestimme mittels deiner Skizze die ungefähren Werte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Wir betrachten Abbildung 1 und bezeichnen das Bogenmaß mit x. Wenn wir x variieren (dies entspricht dem Drehen der Zeigers), so erhalten wir für jedes Bogenmaß x einen Wert $\sin(x)$ und einen Wert $\cos(x)$. Zeichne mit Hilfe deiner Erkenntnisse aus Aufgabenteil (a) die beiden Funktion, welche $\sin(x)$ in Abhängigkeit von x und welche $\cos(x)$ in Abhängigkeit von x beschreibt. Dieses sind gerade die beiden *trigonometrischen Funktionen* Sinus und Kosinus.

Lösung:

(a) *(i) Wir zeichnen in die Abbildung* $\sin(\alpha)$ *und* $\cos(\alpha)$ *für* $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *ein:*



(ii) Die ungefähren Werte von $\sin(\alpha)$ *und* $\cos(\alpha)$ *für* $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *sind*

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}85 \quad \textit{und} \quad \cos(\alpha) \approx 0{,}5.$$

(Der Kosinus-Wert ist sogar exakt!)

(b) Wir erhalten die folgenden Funktionsgraphen für Sinus und Kosinus:

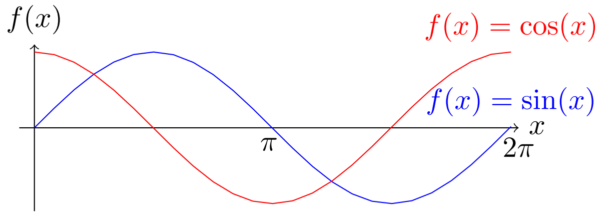


Abbildung 3: Funktionsgraphen von Sinus und Kosinus.