4 Mengenlehre

Die Mengenlehre ist eines der grundlegendsten Themen der Mathematik, welches in der Schule jedoch häufig kaum bis gar nicht behandelt wird. Für das Studium der Mathematik ist ein gutes Verständnis von Mengen und dem Umgang mit diesen jedoch essenziell, da sämtliche Inhalte in irgendeiner Weise auf diesen aufbauen. Wir wollen im Folgenden Grundlagen der Mengenlehre betrachten, die im Mathematikstudium immer wieder benötigt werden.

4.1 Was ist eine Menge?

Als Einstieg wollen wir uns an einige Mengen erinnern, welche bereits in der Schule vorgekommen sind.

Beispiele:

- Die *natürlichen Zahlen*:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$
Wir sehen die 0 nicht als natürliche Zahl an. Falls wir die natürlichen Zahlen zusammen mit der 0 betrachten möchten, so schreiben wir $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Manchmal wird die 0 bereits in die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit eingeschlossen, an unserer Uni ist dies in der Mathematik aber eher unüblich.

- Die *ganzen Zahlen*:
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- Die *rationalen Zahlen* (alle Brüche aus einer ganzen Zahl und einer natürlichen Zahl):
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

- Die *reellen Zahlen* (alle Dezimalzahlen mit beliebig vielen Stellen hinter dem Komma):
$$\mathbb{R} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\}$$
.

- Die *komplexen Zahlen* (mit diesen sowie mit den vorigen Zahlbereichen werden wir uns in einem gesonderten Kapitel beschäftigen):
$$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung: Wie die letzten drei Mengen zu lesen sind, werden wir gleich lernen.

Beispiele: Hier noch ein paar Beispiele sehr viel einfacherer Mengen.

- Mit Zahlen: $\{1, 2, 3\}$
- Mit Farben: {Rot, Blau, Grün}
- Und eine besonders wichtige Menge, nämlich die *leere Menge*: $\emptyset := \{ \}$.
  Es ist wichtig zu verstehen, dass diese Menge mehr ist als *NICHTS*, auch wenn sie kein einziges Element enthält. Sie ist immer noch eine Menge! Eine Einkaufstüte bleibt ja schließlich auch eine Einkaufstüte, selbst wenn sie völlig leer ist.

  Dabei ist wichtig, dass sowohl $\emptyset$ als auch $\{\}$ die leere Menge bezeichnet, jedoch stellt $\{\emptyset\}$ die Menge dar, die die leere Menge enthält – diese Schreibweise also besser nicht verwechseln!

In den letzten Beispielen haben wir an ein gewisses intuitives Verständnis von Mengen und deren Aufschrieb appelliert. Eine Grundlage der Mathematik ist jedoch eine strukturierte und einheitliche Notation und Begriffsbildung. Daher wollen wir uns nun in einem ersten Schritt darauf verständigen, was eine Menge für uns ist und in einem zweiten Schritt die allgemeine Notation einer Menge festlegen. Anschließend werden wir einige konkretere Schreibweisen von Mengen betrachten.

Definition 4.1 (Menge – nach Georg Cantor)
Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Diese Objekte m nennen wir **Elemente** von M und schreiben kurz: $m \in M$ (in Worten: „m ist ein Element von M“ oder „m ist in M“). Ist ein Objekt m nicht in der Menge M enthalten, so schreiben wir $m \notin M$ (in Worten: „m ist kein Element von M“ oder „m ist nicht in M“).

Ob diese Definition alles abdeckt, was wir unter einer Menge verstehen, sei den Philosophen überlassen. Aufgrund von gewissen, teilweise philosophischen Problemen, wurde eine (moderne) axiomatisierte Mengenlehre (u.a. durch Zermelo, Fraenkel aber auch Neumann, Bernays und Gödel) begründet, die wir hier nicht weiter vertiefen wollen. Wichtig für uns ist an dieser Stelle, dass eine Menge eine Zusammenfassung von verschiedenen Elementen darstellt, wie eine Einkaufstüte, welche die verschiedenen eingekauften Produkte enthält. Die leere Menge wäre bei dieser Vorstellung einfach nur die Einkaufstüte, ohne dass eingekaufte Produkte (Elemente) in ihr enthalten wären.

Nachdem wir nun definiert haben, was eine Menge sein soll, müssen wir eine allgemeine Schreibweise einführen. Im Allgemeinen notieren wir eine Menge durch eine sich öffnende und wieder schließende geschweifte Klammer (die „Einkaufstüte“), zwischen welchen die Elemente der Menge (die „eingekauften Produkte“) stehen, also etwa so:

$$\text{Menge} = \{\text{Elemente}\}\ .$$

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, die Elemente zwischen den geschweiften Klammern einer Menge zu notieren, von denen wir in unseren anfänglichen Beispielen auch schon einige Notationsweisen verwendet haben. Die einfachste Schreibweise ist wohl die *auflistende Schreibweise.* Wie der Name schon sagt, listet man dabei alle Elemente der Menge nacheinander auf. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle, allerdings ordnet man die Elemente häufig der Größe nach an, wenn dies möglich ist.

Die **auflistende Schreibweise**:

$$M = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$$

Wir können uns an dieser Stelle aber bereits gut vorstellen, dass diese Schreibweise schnell an ihre Grenzen stößt. Die Elemente der obigen Menge M sind die Quadrate der Zahlen 1 bis 7. Wollten wir nun auf diese Weise die Menge der Quadrate der Zahlen 1 bis 1000 aufschreiben, so wären wir zum einen sehr lange beschäftigt und zum anderen würde unser Aufschrieb sehr unübersichtlich und lang werden. Die Menge der natürlichen Zahlen zum Beispiel könnten wir so schon gar nicht mehr notieren, da unendlich viele natürliche Zahlen existieren.
Wenn das „Muster“ oder auch „Bildungsgesetz“ der ersten notierten Elemente klar ist und man so auf die restlichen Elemente der Menge schließen kann, so können wir die *elliptische Schreibweise* verwenden. In unserem obigen Beispiel sähe diese wie folgt aus:

Die **elliptische Schreibweise**:

$$M = \{1, 4, 9, \dots, 49\}$$

Eine Menge mit unendlich vielen Elementen, wie die natürlichen Zahlen, können wir auf diese Weise so notieren: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Der Nachteil dieser elliptischen Schreibweise gegenüber der auflistenden Schreibweise ist der Verlust an Exaktheit, denn man muss aus den ersten notierten Elementen auf die restlichen schließen. Theoretisch könnte es dabei natürlich auch mehrere mögliche Fortsetzungen geben.
Wie können wir nun die Exaktheit der auflistenden Schreibweise mit der Kürze der elliptischen Schreibweise verbinden? Dies geschieht über eine dritte Schreibweise, die wir „Eigenschaftsschreibweise“ nennen. Bei dieser notieren wir ein Element der Menge zunächst abstrakt und weisen diesem dann gewisse Eigenschaften zu. Unser voriges Beispiel hätten wir auf diese Weise wie folgt schreiben können:

Die **Eigenschaftsschreibweise**:

$$M = \{n \,|\, n \text{ ist eine natürliche Zahl kleiner 50 und eine Quadratzahl}\}\ .$$

Gelesen heißt das:

„M ist die Menge aller n, für die gilt:
n ist eine natürliche Zahl kleiner als 50 und eine Quadratzahl.“

Im Allgemeinen liest man eine auf diese Weise notierte Menge so:

$$M = \{\text{Objekte } m \underbrace{\quad | \quad}_{\text{für die gilt}} m \text{ erfüllt eine logische Aussage}\}. \qquad (*)$$

Bemerkung: Häufig variiert man diese allgemeine Form wie in $(*)$ noch etwas, indem man vor dem *vertikalen Strich* bereits einfache Angaben zu den Objekten macht. Beispielsweise, dass das Objekt n aus einer bestimmten Menge stammt, etwa

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ein Quadrat kleiner als } 50\} \ .$$

Oder man gibt statt eines alleinstehenden Objekts eine Formel bzgl. des Objektes an, etwa

$$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n < \sqrt{50}\} \ .$$

Häufig wird statt dem vertikalen Strich „|“ auch ein Doppelpunkt „:“ verwendet.

Wir haben nun gesehen, wie wir Mengen eindeutig und trotzdem kurz und übersichtlich notieren können. Als nächstes wollen uns zwei der ersten Eigenschaften von Mengen an einem Beispiel klarmachen.

Beispiel: Es gelten die folgenden Gleichheiten:

- $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4, 3, 2\}$.
- $\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$.

Diese Beobachtung fassen wir in den beiden folgenden Sätzen zusammen:

Satz 4.2
Die Reihenfolge, in der die Elemente einer Menge aufgeschrieben werden, spielt keine Rolle.

Satz 4.3
Das mehrfache Notieren von Elementen einer Menge ändert die Menge nicht.

Bemerkung: Diese, wie auch die meisten folgenden Sätze, werden wir hier nicht beweisen, da die Technik des formalen Beweisens bisher noch nicht eingeführt wurde, auch wenn wir dies mit unseren bisherigen Mitteln durchaus könnten.

Abschließend zur allgemeinen Charakterisierung von Mengen möchten wir an dieser Stelle noch eine Notation für die *Anzahl der Elemente einer Menge* einführen.

Definition 4.4
Sei M eine endliche Menge. Die **Anzahl der Elemente** (oder auch **Mächtigkeit**) dieser Menge ist definiert als:

$$\#M := |M| := \text{Anzahl der Elemente von } M\ .$$

Beispiele: Man beachte insbesondere den Satz 4.3!

- $\#\{1,3,5,7\} = |\{1,3,5,7\}| = 4$
- $\#\{1,1,3,5,5,5,7,7\} = |\{1,1,3,5,5,5,7,7\}| = 4$

4.2 Relationen zwischen Mengen

Wir wollen uns nun damit beschäftigen, wie zwei Mengen zueinander im Verhältnis stehen können. Im vorigen Abschnitt haben wir einige Male die Relation (die Beziehung) „=“ benutzt. Doch bevor wir dieses Zeichen richtig verstehen können, müssen wir zunächst lernen, was es für eine Menge heißt, ein Teil einer anderen Menge zu sein.

Beispiel: Die beiden Mengen $M := \{2,4,6\}$ und $N := \{1,2,3,4,5,6,7\}$ sind sicher nicht gleich, da es in der Menge N Objekte gibt, welche in M nicht existieren. Dennoch würden wir wohl sagen:

> „Die Menge M ist ein Teil der Menge N, da alle Zahlen aus M – also 2, 4 und 6 – auch in N enthalten sind.“

Definition 4.5 (Teilmenge)
Seien M, N zwei Mengen. Wir nennen M eine **Teilmenge** von N, wenn jedes Element der Menge M auch ein Element der Menge N ist.
Schreibe: $M \subseteq N$

Bemerkung: Oft wird das Teilmengenzeichen auch andersherum verwendet, etwa $M \supseteq N$. Dies heißt dann natürlich, dass N eine Teilmenge von M ist. Es ist ebenfalls üblich zu sagen, dass M eine *Obermenge* von N ist.

Von reellen Zahlen x, y kennen wir die Tatsache:

$$\text{Wenn } x \leq y \text{ und } x \geq y\ , \text{ so gilt } x = y\ .$$

Analog definieren wir die Gleichheit von Mengen:

Definition 4.6 (Gleichheit von Mengen)
Seien M, N zwei Mengen. Wir nennen die Mengen M und N **gleich**, wenn sowohl M eine Teilmenge von N als auch N eine Teilmenge von M ist.
Schreibe: $M = N \quad :\Leftrightarrow \quad M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M$

Bemerkung: So wie das „<“ zum „≤“ definiert ist, ist analog das Zeichen $\subset$ definiert und bezeichnet eine Teilmengenbeziehung, bei der jedoch keine Mengengleichheit herrscht. Die kleiner Menge ist also *echt* in der größeren enthalten. Allerdings wird $\subset$ oft auch synonym zum $\subseteq$ verwendet, so dass man eine explizite Ungleichheit einer Teilmengenbeziehung besser durch das Zeichen $\subsetneq$ ausdrückt, also „Teilmenge, aber nicht gleich“.

Es ist unglaublich wichtig, den Unterschied dazwischen zu verstehen, was es bedeutet, ein Element oder eine Teilmenge einer Menge zu sein. Wir wollen dies an den folgenden Beispielen verdeutlichen.

Beispiele:

- Für die Menge $M := \{1, 2, 3\}$ gilt $2 \in M$ und $\{2\} \subseteq M$ aber <u>nicht</u> $\{2\} \in M$ und <u>nicht</u> $2 \subseteq M$.
  Denn in M befindet sich als Element nur die <u>Zahl</u> 2, nicht jedoch die Menge mit der Zahl 2, also $\{2\}$. Geanauso ist die Zahl 2 eben eine Zahl und <u>keine</u> Menge, weshalb sie auch <u>keine</u> Teilmenge von M sein kann.

- Eine Menge für die $\{2\} \in M$ richtig wäre, wäre zum Beispiel $M := \{1, \{2\}, 3\}$.
  Hier gilt aber nun <u>nicht mehr</u> $2 \in M$ und auch <u>nicht mehr</u> $\{2\} \subseteq M$.
  Es würde hier aber $\big\{\{2\}\big\} \subseteq M$ gelten.

- Es geht auch alles zusammen, etwa mit der Menge $M := \{1, 2, \{2\}, 3\}$. Hier gelten sowohl $\{2\} \subseteq M$ als auch $\{2\} \in M$, $2 \in M$ und $\big\{\{2\}\big\} \subseteq M$.

Es gilt außerdem eine schöne Eigenschaft, die sogenannte *Transitivität* der Teilmengenbeziehung:

Lemma 4.7 (Transitivität für Teilmengen)
Seien A, B, C drei Mengen und gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$.
Dann gilt $A \subseteq C$.

4.3 Operationen auf Mengen

Nachdem wir wissen, wie Mengen zueinander in Beziehung stehen können, wollen wir nun mit Mengen „rechnen“, uns also mit Operationen auf Mengen beschäftigen. Diese unterscheiden sich von den bekannten Operationen auf Zahlen, wie Addition, Subtraktion, Division oder Multiplikation, da Mengen nunmal eine ganz andere Struktur als Zahlen besitzen. Jedoch können wir teilweise bei genauem Hinsehen gewisse Analogien zu diesen bekannten Operationen auf Zahlen entdecken.
Die drei wichtigsten Operationen auf Mengen sind die *Vereinigung*, der *Schnitt* und die *Differenz*.

Definition 4.8 (Vereinigung)
Seien M, N zwei Mengen. Die **Vereinigung** $M \cup N$ (gesprochen: „M vereinigt N") ist diejenige Menge, welche genau alle Elemente der Mengen M und N enthält.
Schreibe:

$$M \cup N := \{m \mid m \in M \text{ \underline{oder} } m \in N\} .$$

Bemerkung: Man beachte, dass man hier zwar sprachlich die Menge mit einem *oder* zusammenfügt, dies aber in der formalisierten Schreibweise einem *einschließenden oder* (also keinem „entweder oder") entspricht! Das bedeutet, dass sich ein Element m in $M \cup N$ befindet, wenn dieses nur in M, nur in N oder auch in M und N gleichzeitig enthalten ist.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\} = \mathbb{N}$

Definition 4.9 (Schnitt)
Seien M, N zwei Mengen. Der **Schnitt** $M \cap N$ (gesprochen: „M geschnitten N") ist diejenige Menge, welche aus genau den Elementen besteht, welche sowohl in M als auch in N enthalten sind.
Schreibe:

$$M \cap N := \{m \mid m \in M \text{ \underline{und} } m \in N\} .$$

Beispiele:

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3\} = \{2, 3\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} \cap \{n \in \mathbb{N} | n \text{ ist ungerade}\} = \emptyset$

Definition 4.10 (Differenz)
Seien M, N zwei Mengen. Die **Differenz** $M \setminus N$ (gesprochen: „M ohne N"), ist diejenige Menge, welche genau die Elemente von M enthält, die nicht in der Menge N sind.
Schreibe:

$$M \setminus N := \{m \mid m \in M \text{ und } m \notin N\} .$$

Bemerkung: Die Menge N muss nicht zwingend eine Teilmenge von M sein. Zur Bildung von $M \setminus N$ streichen wir nur alle Elemente aus M heraus, welche auch in N enthalten sind – welche Elemente sich sonst noch so in N befinden, interessiert uns dafür gar nicht.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 3\} = \{1, 4, 5\}$
- $\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$
- $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
- $\{1, 5\} \setminus \{3, 7\} = \{1, 5\}$

Möchte man mehrere (gleiche oder auch verschiedene) Operationen zusammen angeben, so sollte man Klammern benutzen, um anzuzeigen, in welcher Reihenfolge die Operationen durchzuführen sind. Beachte die folgenden Beispiele.

Beispiele:

- $(\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}) \cup \{1, 5\} = \{1, 3, 5\} \neq \{1, 3\} = \{1, 2, 3\} \cap (\{3, 4, 5\} \cup \{1, 5\})$
- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6\}) \setminus \{3, 4, 5\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus (\{2, 4, 6\} \setminus \{3, 4, 5\})$

Bemerkung: Ähnlich wie beim Rechnen mit „Plus“ und „Mal“ einigt man sich hier darauf, dass der Schnitt stärker bindet, also stets zuerst berechnet wird, wenn die Reihenfolge unklar ist. Eine weitere übliche Regel ist, dass man den Ausdruck von links nach rechts abarbeitet. Es ist aber sehr dazu zu raten, sich nicht immer hierauf zu verlassen, sondern besser ein paar Klammern mehr zu machen!

Im folgenden Lemma stehen einige (leicht zu zeigende) erste Eigenschaften, die wir hier aber nicht beweisen werden.

Lemma 4.11 (Erste Eigenschaften von Mengenoperationen)
Seien L, M und N drei Mengen. Dann gilt:

- $M \setminus N \subseteq M$
- $M \subseteq (M \cup N) \quad \text{und} \quad N \subseteq (M \cup N)$
- $(M \cap N) \subseteq M \quad \text{und} \quad (M \cap N) \subseteq N$
- $M \cup N = N \cup M \quad \text{und} \quad M \cap N = N \cap M$
- $(M \cup N) \cup L = M \cup (N \cup L) \quad \text{und} \quad (M \cap N) \cap L = M \cap (N \cap L)$

Schon etwas aufwendiger zu zeigen ist die nächste „Rechenregel“, die erneut an eine gewisse Analogie von Schnitt und Vereinigung zu Multiplikation und Addition erinnert:

Satz 4.12 (Distributivität)
Seien A, B, C drei Mengen. Dann gelten:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &\text{b)} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Auch wenn wir formal noch keine Beweise eingeführt haben, werden wir den Beweis zu diesem Satz führen, um genau zu sehen, was bei einer Mengengleichheit zu prüfen ist. Allgemein läuft ein Beweis so ab, dass man versucht, mit logisch schlüssigen Argumenten von einem bekannten Ausgangspunkt (von Dingen, die man weiß) zu der Aussage des Satzes zu gelangen.

Bei dem Beweis einer Mengengleichheit gehen wir in der Regel so vor, dass wir den Beweis in zwei Teile unterteilen. Anstatt also direkt die Gleichheit der beiden Mengen zu zeigen, beweisen wir im ersten Schritt, dass die linke Menge eine Teilmenge der rechten Menge ist und im zweiten Schritt, dass die rechte Menge eine Teilmenge der linken Menge ist. Wenn wir dies beides gezeigt haben, ist (gemäß Definition 4.6) auch die Gleichheit der Mengen bewiesen.

Beweis: Wir zeigen an dieser Stelle nur Gleichung a), Aussage b) folgt analog.

Teil 1
Es ist zu zeigen: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dazu müssen wir für jedes beliebige Element $x \in A \cap (B \cup C)$ zeigen, dass dieses x auch ein Element der Menge $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ist.
Sei also $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann gilt nach Definition des Schnittes, dass sowohl $x \in A$ als auch $x \in (B \cup C)$ gilt.
Aus $x \in (B \cup C)$ folgt mit der Definition der Vereinigung, dass x ein Element der Menge B oder C sein muss.

- Falls nun $x \in B$ ist, so ist wiederum nach der Definition des Schnittes x auch ein Element der Menge $A \cap B$, da x ja auch aus A ist. Dies ändert sich auch nicht, wenn wir weitere Elemente, etwa die Menge $A \cap C$, hinzufügen. Somit gilt
$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
- Falls $x \in C$ ist, können wir mit analoger Argumentation feststellen, dass $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Da x aus der Menge $A \cap (B \cup C)$ beliebig gewählt war, gilt diese Aussage für jedes beliebige Element aus $A \cap (B \cup C)$ und damit folgt

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \,.$$

Teil 2
Es ist zu zeigen: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Die zweite Hälfte läuft analog zur ersten. Wir schreiben sie daher weniger ausführlich auf und überlassen es als Übung, die einzelnen Schritte zu begründen!

Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Sei $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$ und damit insbesondere auch $x \in B \cup C$, da $B \subseteq B \cup C$ gilt. Analog erhalten wir $x \in B \cup C$, falls $x \in A \cap C$ ist. Damit ist

$$x \in A \cap (B \cup C) .$$

Es folgt somit insgesamt

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) .$$

Da wir nun beide Teilmengeninklusionen gezeigt haben, folgt auch die Gleichheit und damit der behauptete Satz. $\square$

Dieses Kästchen heißt, dass
wir mit dem Beweis fertig sind.

Als kleinen Exkurs wollen wir kurz auf das Komplement einer Menge eingehen. Es wird stets bezüglich einer „übergeordneten Menge“ Ω, welche meist aus dem Kontext heraus bekannt oder sonst explizit angegeben ist, gebildet.

Definition 4.13 (Komplement)
Sei M eine Teilmenge einer Menge Ω. Das **Komplement** M^c der Menge M (bezüglich Ω) besteht aus allen Elementen in Ω, die nicht in M enthalten sind.
Schreibe: $M^c := \Omega \setminus M$.

Damit gelten dann die Analoga der bereits von der Logik bekannten *De Morgan'schen Gesetze*:

Satz 4.14 (De Morgan'sche Gesetze)
Seien M, N zwei Teilmengen einer Menge Ω. Dann gilt

$$(M \cup N)^c = M^c \cap N^c \text{ und } (M \cap N)^c = M^c \cup N^c .$$

4.4 Potenzmengen

An dieser Stelle betrachten wir noch ein sehr prominentes Beispiel einer Menge, welche ausschließlich Mengen enthält und insbesondere in der Stochastik (als Menge von möglichen Ereignissen bei einem Zufallsexperiment) eine zentrale Rolle spielt:

Definition 4.15 (Potenzmenge)
Sei M eine Menge. Die **Potenzmenge** der Menge M ist diejenige Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau alle Teilmengen der Menge M sind.
Schreibe:

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\} .$$

Beispiel: Für die Mengen $M_2 := \{1,2\}$ und $M_3 := \{1,2,3\}$ sind die Potenzmengen

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, M_2\},$$

$$\mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M_3\} .$$

Bemerkung: In diesem Beispiel können wir drei Dinge beobachten:

- Die Anzahl der Elemente der Potenzmenge ist hier immer eine Zweierpotenz, einmal 2^2 und einmal 2^3, wobei der Exponent jeweils der Anzahl der Elemente in der ursprünglichen Menge entspricht.
- Sowohl die leere Menge als auch die ursprüngliche Menge sind Elemente der Potenzmenge.
- Um alle Teilmengen von M zu erhalten, müssen wir alle möglichen Kombinationen der Elemente von M bilden (wobei wir dies wegen der Sätze 4.2 und 4.3 ohne Wiederholungen und ohne Beachtung der Reihenfolge tun).

Beim Verstehen der Potenzmenge ist eine ganz entscheidende Erkenntnis, dass sich die Eigenschaft, eine Teilmenge der Menge M zu sein, beim „Hochheben" zur Potenzmenge in die Eigenschaft ändert, ein Element zu sein – kurz: „aus Teilmengen werden Elemente" oder konkreter:

$$\text{Für } N \subseteq M \text{ gilt } N \in \mathcal{P}(M) .$$

Insbesondere gelten die folgenden Aussagen:

Lemma 4.16
Sei M eine Menge. Dann gilt:

- $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$
- $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$

Ist zusätzlich die Menge M endlich, so ist auch $\mathcal{P}(M)$ endlich. Die Anzahl der Elemente der Potenzmenge ist dann eine Zweierpotenz.

Bemerkung: Die *Anzahl der Elemente* einer Potenzmenge einer endlichen Menge M ist $\#\mathcal{P}(M) = 2^{|M|}$. Dies zu zeigen ist eine Aufgabe auf dem Übungsblatt.

4.5 Kartesisches Produkt

Zuletzt betrachten wir noch das *kartesische Produkt*. Dazu erinnern wir uns an das gewöhnliche zweidimensionale Koordinatensystem. Jeden Punkt darin können wir eindeutig durch seinen „x“- und „y“-Wert identifizieren und reden dann meist vom Punkt $P = (x, y)$.

Statt dieses Objekt (x, y) nun „Punkt“ zu nennen, wollen wir allgemeiner von einem *(2-)Tupel* reden. Analog wäre damit das Objekt (x, y, z) ein (3-)Tupel oder

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ein } (n\text{-}) \text{ Tupel.}$$

Oft lassen wir die Länge, also das n, auch weg und reden im Allgemeinen von *Tupeln*. Stellen wir uns diese Objekte noch einmal als Punkte vor, so fällt sofort auf, dass hier auf die Reihenfolge der Einträge geachtet werden muss. Schließlich ist im Koordinatensystem der Punkt $(1, 2)$ an einer anderen Stelle als der Punkt $(2, 1)$!
Tupel erhalten wir nun gerade als die Elemente des so genannten kartesischen Produktes von zwei oder mehreren Mengen.

Definition 4.17 (Kartesisches Produkt)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, \ldots, M_n$ Mengen. Das **kartesische Produkt** dieser Mengen ist diejenige Menge, welche genau die Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ enthält, deren k-ter Eintrag x_k für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ aus der Menge M_k stammt.
Schreibe:

$$M_1 \times \ldots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \text{Für jedes } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } x_k \in M_k\} \,.$$

Beispiele:

- $\{1, 3, 5\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
- $\{1, 2\} \times \{3, 4\} \times \{5, 6\} = \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), \ldots, (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)\}$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ entspricht einem sogenannten Punktgitter im zweidimensionalen Raum.

Autoren dieses Kapitels:
2019: Nils Näthke
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2013: Malte Behr
2012: Stefan Hellbusch