Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

# Aussagenlogik

## × Aufgabe 1: Formalisieren von Aussagen

Bei welchen der folgenden Formulierungen handelt es sich um Aussagen, bei welchen nicht (und wenn nicht: warum?)? Formalisiere alle *Aussagen*. Verwende auch Symbole für Teilaussagen. Schreibe dazu, welches Symbol für welche (Teil-)Aussage steht.
*Beispiel:* „Rom liegt in Italien und in Europa.“ ist eine Aussage und lässt sich durch $I \wedge E$ formalisieren, wobei (I) für „Rom liegt in Italien“ und (E) für „Rom liegt in Europa“ steht.

1. Heute ist Sonntag, oder es scheint die Sonne.
2. In Italien ist es heute wärmer.
3. Studieren macht Spaß, Oldenburg ist schön und in China fällt ein Sack Reis um.
4. Eine Maus ist ein kleines, graues Tier.
5. Wenn wir nichts anderes vorhaben, oder uns jemand einlädt, dann gehen wir in den Zoo.
6. 8+7
7. Die Tutorin Linda ist dann und nur dann glücklich, wenn sie viele Fragen beantworten darf.

*Lösung:*

1. *Es handelt sich um eine Aussage.*
   *Wähle (T) Heute ist Sonntag. (S) Heute scheint die Sonne.*
   *Dann ist* $T \vee S$ *eine mögliche Formalisierung.*
2. *„In Italien ist es heute wärmer.“ ist keine Aussage, da der Vergleich nicht vollständig ist (wärmer als wo?) und somit keine eindeutige Wahrheitswertbelegung möglich ist.*
3. *Es handelt sich um eine Aussage.*
   *Wähle (S) Studieren macht Spaß (O) Oldenburg ist schön. (C) In China fällt ein Sack Reis um.*
   *Dann ist* $S \wedge O \wedge C$ *eine möglich Formalisierung.*
4. *Es handelt sich um eine Aussage.*
   *Wähle (K) Eine Maus ist klein. (G) Eine Maus ist grau. (T) Eine Maus ist ein Tier.*
   *Dann ist* $K \wedge G \wedge T$ *eine mögliche Formalisierung.*
5. *Es handelt sich um eine Aussage.*
   *Wähle (A) Wir haben etwas anderes vor. (E) Es lädt uns jemand ein. (Z) Wir gehen in den Zoo.*
   *Dann ist* $(\neg A \vee E) \Rightarrow Z$ *eine mögliche Formalisierung.*

*Alternativ: (N) Wir haben nichts anderes vor. (E) Es lädt uns jemand ein. (Z) Wir gehen in den Zoo.*
*Mit der Formalisierung* $(N \vee E) \Rightarrow Z$

6. *„8+7“ ist keine Aussage, da der Satz weder wahr, noch falsch sein kann.*

7. *Es handelt sich um eine Aussage.*
*Wähle (T) Die Tutorin Linda ist glücklich. (F) Linda darf viele Fragen beantworten.*
*Dann ist* $T \Leftrightarrow F$ *eine mögliche Formalisierung.*

## × Aufgabe 2: Schlüssigkeit

Zeige, dass folgendes Argument schlüssig ist: $A \vee B, \neg A$ Also: $B$
*Lösung:*

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ |

*Aus der zweiten und vierten Zeile ist ablesbar: Ist die Konklusion falsch, so ist bereits mindestens eine der Prämissen falsch. Also ist das Argument schlüssig.*

## Aufgabe 3: Negation

Negiere jeweils die Aussage in 1. und 3. aus Aufgabe 1, indem du sie zunächst in natürlicher Sprache negierst und anschließend formalisierst.
Findest du unterschiedliche Formulierungen (und Formalisierungen) der Verneinung? Kannst du Regelmäßigkeiten erkennen?
*Lösung:*

- *Negation 1: Es ist nicht der Fall, dass heute Sonntag ist oder die Sonne scheint.*
  *Formalisierung:* $\neg(T \vee S)$
  *Negation 2: Heute ist nicht Sonntag und heute scheint die Sonne nicht.*
  *Formalisierung:* $\neg T \wedge \neg S$

- *Negation 1: Es ist nicht der Fall, dass Studieren Spaß macht, Oldenburg schön ist und in China ein Sack Reis umfällt.*
  *Formalisierung:* $\neg(S \wedge O \wedge C)$
  *Negation 2: Studieren macht keinen Spaß oder Oldenburg ist nicht schön oder in China fällt kein Sack Reis um.*
  *Formalisierung:* $\neg S \vee \neg O \vee \neg C$

*Als Regelmäßigkeit kann man die Gesetze von de Morgan erkennen: Für zwei Aussagen A und B gilt*

- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

*Wenn gewünscht und die Zeit reicht, dann können die beiden Äquivalenzen noch mittels WWT bewiesen werden.*

## Aufgabe 4: Äquivalente Aussagen/ Beweisstrukturen

Zeige mit Hilfe der zugehörigen Wahrheitswerttafeln, dass folgende junktorenlogischen Verknüpfungen äquivalent zur Aussage $A \Rightarrow B$ sind.

1. $\neg B \Rightarrow \neg A$
2. $\neg(A \wedge \neg B)$

Finde zu jeder Verknüpfung ein sprachliches Beispiel.
*Anmerkung: Diese Aufgabe wird später noch sehr interessant werden, da sie grundlegend für die gängigsten Beweismethoden ist.*
*Lösung:*
$\neg B \Rightarrow \neg A$

| $A$ | $B$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |

*Sprachl. Beispiel: (A) Es regnet. (B) Die Straße ist nass.*
*Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.*
$\neg(A \wedge \neg B)$

| $A$ | $B$ | $\neg B$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg(A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $w$ |

*Sprachl. Beispiel:*
*Es ist nicht der Fall, dass es regnet und die Straße nicht nass ist.*

## Aufgabe 5: entweder ... oder

In der Mathematik ist der Junktor *oder* als *einschließendes oder* zu verstehen. Deswegen können Aussagen mit *ausschließendem oder* („entweder... oder...“) nicht einfach mit „$\vee$“ formalisiert werden.

a) Finde eine Formalisierung für folgende Aussage:

Entweder du studierst Mathe oder du studierst etwas Komisches.

b) *(Zusatzaufgabe)* Begründe mit Hilfe einer Wahrheitswerttafel, dass deine in a) gefundene Formalisierung wirklich äquivalent ist zum „ausschließenden oder“.
*Hinweis:* Die WWT für „entweder... oder“ sieht so aus:

| $A$ | $B$ | entweder $A$ oder $B$ |
|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $f$ |

*Lösung:*

*a) (M) Du studierst Mathe. (K) Du studierst etwas Komisches.*
*Formalisierung:* $(M \vee K) \wedge \neg(M \wedge K)$
*Alternativ:* $(M \wedge \neg K) \vee (\neg M \wedge K)$
*oder:* $\neg M \Leftrightarrow K$ *bzw.* $M \Leftrightarrow \neg K$

*b) Die letzte Spalte der beiden WWTs sehen genauso aus wie die letzte Spalte der WWT zu „entweder... oder“, also sind die gefundenen Formalisierungen tatsächlich äquivalent zum ausschließenden oder.*

| $M$ | $K$ | $M \wedge K$ | $M \vee K$ | $\neg(M \wedge K)$ | $(M \vee K) \wedge \neg(M \wedge K)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ |

| $M$ | $K$ | $\neg M$ | $\neg K$ | $M \wedge \neg K$ | $\neg M \wedge K$ | $(M \wedge \neg K) \vee (\neg M \wedge K)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |

## ! Aufgabe 6

Die Mensa hat die Zutaten für das nächste Mittagessen bestellt. Allerdings haben sich die Lieferanden Pasta-Paul, Fritten-Fuhrwerk und Gemüse-Gustav verkracht und deswegen gibt es einige Einschränkungen:

(i) Gemüse-Gustav und Pasta-Paul beliefern die Mensa nicht beide.

(ii) Wenn Pasta-Paul liefert, dann liefert auch Fritten-Fuhrwerk.

(iii) Wenn Pasta-Paul nicht liefert, dann liefert auch Gemüse-Gustav nicht.

(iv) Fritten-Fuhrwerk liefert nicht oder Gemüse-Gustav liefert.

Zeige, dass die Studenten hungern müssen: Die Mensa erhält keine Lieferung.
*(Zeige also: Das Argument mit (i)-(iv) als Prämissen und „Weder Pasta-Paul noch Fritten-Fuhrwerk noch Gemüse-Gustav beliefert die Mensa.“ als Konklusion ist schlüssig.)*
Zur besseren Vergleichbarkeit nutze folgende Reihenfolge in der WWT:
(P) Pasta-Paul beliefert die Mensa. (F) Fritten-Fuhrwerk beliefert die Mensa.
(G) Gemüse-Gustav beliefert die Mensa.

| $P$ | $F$ | $G$ | |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | |
| $w$ | $w$ | $f$ | |
| $w$ | $f$ | $w$ | |
| $w$ | $f$ | $f$ | |
| $f$ | $w$ | $w$ | |
| $f$ | $w$ | $f$ | |
| $f$ | $f$ | $w$ | |
| $f$ | $f$ | $f$ | |

*Hinweis:* Es kann hilfreich sein, zunächst Hilfsaussagen wie etwa $\neg P$ in die Tabelle einzutragen.
*Lösung:*

| *Aussagen* | | | *Hilfsaussagen* | | | | *Prämissen* | | | | *Konklusion* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $F$ | $G$ | $\neg P$ | $\neg G$ | $\neg F$ | $G \wedge P$ | $\neg(G \wedge P)$ | $P \Rightarrow F$ | $\neg P \Rightarrow \neg G$ | $\neg F \vee G$ | $\neg P \wedge \neg F \wedge \neg G$ |
| $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ |
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |