Aufgabe 1

$d'(x,y) = d(x,a) + d(y,a)$ ist natürlich keine Metrik, da für $x = y$ aber $x \neq a$ gilt $d'(x,y) > 0$. (Ausser wenn X aus einem einzigen Punkt besteht.)

Man kann die Definition von d' ein bisschen "verbessern":

$$d'(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ d(x,a) + d(y,a), & x \neq y. \end{cases}$$

Dann wird d' zu einer Metrik:

Definitheit: $x = y \Rightarrow d'(x,y) = 0$.

$x \neq y$, dann gilt $x \neq a$ oder $y \neq a$

$\Rightarrow \quad d(x,a) > 0$ oder $d(y,a) > 0$

$\Rightarrow \quad d(x,a) + d(y,a) > 0$

(da $d \geq 0$) und $d'(x,y) > 0$.

Also $\quad d'(x,y) \geq 0 \ \forall x, y$

$\quad d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Symmetrie: klar, da

$$d'(x,y) = d(x,a) + d(y,a) = d(y,a) + d(x,a) = d'(y,x).$$

Dreiecksungleichung: (DEU)

Seien $x, y, z \in X$.

*) Falls $x = z$:

$$d'(x,y) = \underbrace{d'(x,z)}_{=0} + \underbrace{d'(y,z)}_{d(x,y)}.$$

$\Rightarrow$ DEU is erfüllt.

*) Falls $y = z$:

$$d'(x,y) = \underbrace{d'(x,z)}_{d(x,y)} + \underbrace{d'(y,z)}_{=0}$$

$\Rightarrow$ DEU ist erfüllt.

*) $x \neq z$ und $y \neq z$:

$$d'(x,z) = d(x,a) + d(z,a)$$

$$d'(y,z) = d(y,a) + d(z,a).$$

und $d'(x,y) \left(= \begin{cases} 0, & x = y, \\ d(x,a) + d(y,a) \end{cases} \right)$

$$\leq d(x,a) + d(y,a)$$

Also

$d'(x,y) \le d(x,a) + d(y,a)$,

$d'(x,z) + d(y,z) = d(x,a) + d(z,a) +$

$+ d(y,a) + d(z,a) =$

$= d(x,a) + d(y,a) + 2\underbrace{d(z,a)}_{\geq 0}$

$\geq d(x,a) + d(y,a) \geq d'(x,y)$

$\Rightarrow$ DEU ist auch in diesem Fall erfüllt.

Also ist diese "korrigierte" d' eine Metrik.

Aufgabe 2

Definitheit • $d_1(x_1,y_1) \geq 0$, (Da d_1, d_2
$d_2(x_2,y_2) \geq 0$ Metriken sind)

$\Rightarrow \max(\ldots) \geq 0 \Rightarrow$
$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \geq 0$.

• $(x_1, x_2) = (y_1,y_2) \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$
$\Rightarrow d_1(x_1,y_1) = d_2(x_2,y_2) = 0$
$\Rightarrow d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{0,0\} = 0$

• Sei $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0$,
dann $d_1(x_1,y_1) = d_2(x_2,y_2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = y_1, \; x_2 = y_2 \Rightarrow$
$(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$.

Definitheit ist erfüllt.

Symmetrie: $d'((x_1,x_2),(y_1,y_2))$
$= \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)) = \{d_j \text{ symmetrisch}\}$
$= \max(d_1(y_1,x_1), d_2(y_2,x_2)) =$
$= d'((y_1,y_2),(x_1,x_2))$. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ok}}$

Dreiecksungleichung

$\forall\, x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ z=(z_1,z_2) \in X_1 \times X_2$

gilt
$$d_1(x_1,y_1) \leq d_1(x_1,z_1) + d_1(y_1,z_1)$$
$$d_2(x_2,y_2) \leq d_2(x_2,z_2) + d_2(y_2,z_2)$$

(DEU für die Metriken d_1, d_2)

$$\Rightarrow d'(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$
$$\leq \max\{d_1(x_1,z_1)+d_1(y_1,z_1),\ d_2(x_2,z_2)+d_2(y_2,z_2)\}$$
$$\leq \max\{d_1(x_1,z_1), d_2(x_2,z_2)\} + \max\{d_1(y_1,z_1), d_2(y_2,z_2)\}$$
$$= d'(x,z) + d'(y,z).$$

$\Rightarrow$ d' erfüllt die DEU

$\Rightarrow$ d' ist eine Metrik auf $X_1 \times X_2$.

Aufgabe 3

Diskrete Metrik

① **Definitheit** $d(x,y) \in \{1,0\}$, also $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y$. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
$\Rightarrow$ erfüllt.

Symmetrie: $x=y$: $d(x,y) = d(y,x) = 0$
$x \neq y$: $d(x,y) = d(y,x) = 1$
$\Rightarrow$ erfüllt.

Dreiecksungleichung: Sei $x = y$,

dann $\underbrace{d(x,y)}_{=0} \leq \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(y,z)}_{\geq 0}$

Sei $x \neq y$, dann gilt $\forall z \in X$:
$z \neq x$ oder $z \neq y$, also
$d(z,x) = 1$, oder $d(z,y) = 1$,
dann $d(z,x) + d(z,y) \geq 1$
und $d(x,y) = 1$ $\Rightarrow$
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$
$\Rightarrow$ erfüllt.

(2) Konvergente Folgen

Sei (x_n) eine Folge, die gegen x bzgl. der diskreten Metrik konvergiert: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N$.

aber $d(x_n, x) \in \{0, 1\}$, also $d(x_n, x) < \frac{1}{2} \Rightarrow d(x_n, x) = 0$
$\Rightarrow x_n = x \quad \forall n \geq N$.

$$\boxed{\text{Also } x_n \to x \text{ impliziert } \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = x \quad \forall n \geq N.}$$

Umgekehrt, jede Folge mit dieser Eigenschaft ist offenbar konvergent.

③ Sei $M \subset X$.

*) Sei $p \in M$. Es gilt $K_{\frac{1}{2}}(p) = \{p\}$, also $K_{\frac{1}{2}}(p) \subset M$.
Daraus folgt, dass M offen ist.

*) Sei $(p_n) \subset M$ konvergente Folge, $p = \lim p_n$. Nach ②
gilt: $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $p_n = p \; \forall n \geq N$.
Also gilt $p \in M$.
Daraus folgt, dass M abgeschlossen ist.

Aufgabe 4

*) Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$.
Sei $p \in M^c = X \setminus M$, dann $d(p, m_j) > 0$ $\forall j$ (da $p \neq m_j$) $\Rightarrow r := \min_j d(p, m_j) > 0$.
Dann $d(p, m_j) > r$ $\forall j$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow m_j \notin K_r(p)$ $\forall j$ $\Rightarrow$
$M \cap K_r(p) = \emptyset \Rightarrow K_r(p) \subset M^c$.
Also $\forall p \in M^c$ $\exists r > 0$ mit
$K_r(p) \subset M^c \Rightarrow M^c$ offen.

*) M^c offen $\Rightarrow M = (M^c)^c$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 5

Sei $p_k = (p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(n)})$,

$\Rightarrow$ (p_k) konvergent in $\mathbb{R}^n$ gegen $(p^{(1)}, \dots, p^{(n)})$ $\Rightarrow$

$$\sqrt{(p_k^{(1)} - p^{(1)})^2 + \dots + (p_k^{(n)} - p^{(n)})^2} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Aber $\sqrt{(\dots)} \geq |p_k^{(j)} - p^{(j)}| \; \forall j$

$$\Rightarrow |p_k^{(j)} - p^{(j)}| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\Rightarrow$ $p_k^{(j)}$ konvergiert gegen $p^{(j)}$ in $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ Seien alle $p_k^{(j)}$ konvergent in $\mathbb{R}$

$p^{(j)} = \lim_k p_k^{(j)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |p_k^{(j)} - p^{(j)}| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Dann auch

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (p_k^{(j)} - p^{(j)})^2} \leq \sum_{j=1}^n |p_k^{(j)} - p^{(j)}| \xrightarrow[k]{} 0$$

$\Rightarrow$ $(p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(n)})$ konvergiert in $\mathbb{R}^n$ gegen $(p^{(1)}, \dots, p^{(n)})$.

Aufgabe 6 Ja, $M \times N$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{m+n}$

$\boxed{\text{Beweis}}$ Sei $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(m+n)})$ eine konvergente Folge mit $x_k \in M \times N$. Laut Aufgabe 5 konvergiert dann jede Folge $x_k^{(j)}$ in $\mathbb{R}$ gegen ein $x^{(j)}$, $j = 1, \dots, m+n$.

Wir müssen lediglich zeigen, dass $(x^{(1)}, \dots, x^{(m+n)}) \in M \times N$.

Aus $x_k \in M \times N$ folgt, dass

$y_k := (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(m)}) \in M$,

$z_k := (x_k^{(m+1)}, \dots, x_k^{(m+n)}) \in N$.

Da alle $x_k^{(j)}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren, konvergiert y_k in $\mathbb{R}^m$ gegen

$y = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$

und konvergiert z_k in $\mathbb{R}^n$ gegen

$z = (x^{(m+1)}, \dots, x^{(m+n)})$.

$y_k \in M$, M abgeschlossen $\Rightarrow y \in M$

$z_k \in N$, N abgeschlossen $\Rightarrow z \in N$,

und $(y, z) = (x^{(1)}, \dots, x^{(m+n)}) \in M \times N$.

Aufgabe 7

(a) $M = (0,1] \cup [2,3)$

Die Punkte $0, 1, 2, 3$ sind Randpunkte ($\in \partial M$), da zu jedem $\varepsilon > 0$ die Kugel von Radius ε M sowohl auch M^c trifft. Alle Punkte aus $(0,1)$ und $(2,3)$ sind Innere Punkte. z.B. sei $x \in (0,1)$, $r = \min(x, 1-x)$, dann gilt $K_r(x) = (x-r, x+r) \subset (0,1) \subset M$ $\Rightarrow x \in \mathring{M}$.

Damit haben wir alle Punkte von M untersucht: $\underline{\mathring{M} = (0,1) \cup (2,3)}$

und $\{0,1,2,3\} \subset \partial M$.

Jetzt müssen wir die restlichen Punkten von $\mathbb{R}$ untersuchen, also $(-\infty, 1)$, $(1,2)$, $(3, +\infty)$.

$x \in (-\infty, 1)$, $r := |1-x| > 0$ $\Rightarrow$ $|x-m| \geq r \; \forall \, m \in M \Rightarrow x \notin \overline{M}$.

Analog für die anderen 2 Mengen.

Also $\partial M = \{1,2,3,4\}$, $\overline{M} = [0,1] \cup [2,3]$.

Aufgabe 7

(b) M ist die Menge aller irrationalen Zahlen.

*) Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer Folge irrationalen Zahlen

$\Rightarrow \quad \mathbb{R} = \overline{M}$.

*) M enthält kein offenes Intervall (da jedes offene Intervall auch rationale Zahlen enthält), also zu keinem $p \in M$ kann man ein $r > 0$ finden mit $K_r(p) \subset M$

$\Rightarrow \quad \mathring{M} = \emptyset$.

*) $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M} = \mathbb{R}$.

(c) Sei $(p_n) \subset M$ eine Folge, die in $\mathbb{R}^2$ konvergiert und $p = \lim p_n$. Schreibe $p = (p^{(1)}, p^{(2)})$, $p_n = (p_n^{(1)}, p_n^{(2)})$.

Aufgabe 5: $p_n \xrightarrow{\mathbb{R}^2} p \iff p_n^{(1)} \xrightarrow{\mathbb{R}} p^{(1)}$.

$p_n \in M \iff p_n^{(1)} > 0$ und $p_n^{(2)} = 0$, also unbedingt $p^{(1)} \geq 0$ und $p^{(2)} = 0$.

Also $p \in \overline{M} \Rightarrow p = (p^{(1)}, p^{(2)})$ mit $p^{(1)} \geq 0$ und $p^{(2)} = 0$

$\Rightarrow \overline{M} \subset [0, +\infty) \times \{0\}$.

Wir haben immer $M \subset \overline{M}$, und $\overline{M} \setminus M = (0,0)$.

Hat man $(0,0) \overset{?}{\in} \overline{M}$?

Ja, da z.B. $\underbrace{\left(\frac{1}{n}, 0\right)}_{\in M} \xrightarrow[\mathbb{R}^2]{n \to \infty} (0,0)$.

Also $\overline{M} = [0, +\infty) \times \{0\}$.

$\mathring{M}$ Sei $p = (x, 0) \in M$. (also $x > 0$).

Sei $r > 0$. Betrachte $q = (x, \frac{r}{2})$,

Dann $d(p, q) = \frac{r}{2} < r$

$\Rightarrow$ $q \in K_r(p)$. Aber $q \notin M$.

Also $K_r(p) \not\subset M$ $\forall p \in M$ $\forall r > 0$

$\Rightarrow$ $\mathring{M} = \emptyset$.

$$\partial M = \overline{M} \setminus \partial M = [0, +\infty) \times \{0\}.$$

Aufgabe 8.

(1) Sei $M \subset X$, $M \subset A$, A abgeschlossen.
Sei $p \in \overline{M}$, dann $\exists$ Folge $(p_n) \subset M$, die gegen p konvergiert.
Wegen $M \subset A$ gilt auch $(p_n) \subset A$.
Da A abgeschlossen ist, gilt auch $p = \lim p_n \in A$, also $p \in A$. Damit haben wir gezeigt, dass $\overline{M} \subset A$.

(2) Sei $M \subset X$, $B \subset M$, B offen.
Sei $p \in B$. Da B offen ist, $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(p) \subset B$.
Aus $B \subset M$ folgt, dass auch $K_\varepsilon(p) \subset M$, d.h. p ist ein innerer Punkt von M, $p \in \mathring{M}$.

Also $B \subset \mathring{M}$.