$\boxed{A.1.}$ Nutzt man die Induktion nach $|Z|$, so sieht man sofort, dass es ausreicht, den Fall $|Z| = 1$ zu betrachten, d.h. $Z = \{x'\}$ mit $x' \in [a,b]$.

① Wir zeigen zuerst folgendes: falls $f \in T[a,b]$ ung $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,b] \setminus \{x'\}$, dann auch $g \in T[a,b]$ mit $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Sei also $f \in T[a,b]$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ~~mit~~ und $c_j \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c_j$ $\forall x \in (x_{j-1}, x_j)$ (und alle $j = 1, \dots, n$). Falls $x' = x_j$ für ein j, also ist g eine Treppenfunktion und $\int_a^b f = \int_a^b g$, da die Werte an x_j keine Rolle spielen. Falls $x' \neq x_j$ $\forall j$, also gibt es $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $x' \in (x_{k-1}, x_k)$. Wir betrachten also

$$y_j = \begin{cases} x_j, & j = 0, \dots, k-1, \\ x', & j = k, \\ x_{j-1}, & j = k+1, \dots, n+1, \end{cases}$$

dann gilt

$g(x) = \tilde{c}_j$ für $x \in (y_{j-1}, y_j)$

② Sei jetzt $f \in R[a,b]$, $Z = \{x'\} \subset [a,b]$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g = f$ auf $[a,b] \setminus Z$, d.h. $g = f$ für $x \neq x'$.

$f \in R[a,b] \Rightarrow \exists (f_n) \subset T[a,b]$

mit $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Wir definieren $g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \neq x' \\ g(x'), & x = x' \end{cases}$

(g_n sind Treppenfunktionen nach (c))

mit $\int_a^b g_n = \int_a^b f_n$

Dann: $\sup\limits_{x \in [a,b]} |g_n(x) - g(x)| =$

$= \sup\limits_{x \in [a,b] \setminus \{x'\}} |g_n(x) - g(x)| =$

$= \sup\limits_{x \in [a,b] \setminus \{x'\}} |f_n(x) - f(x)|$

$\leq \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow g = \text{glm-}\lim g_n$ mit $g_n \in T[a,b]$

$\Rightarrow g \in R[a,b]$ und

$\int_a^b g = \lim\limits_n \int_a^b g_n = \lim\limits_n \int_a^b f_n = \int_a^b f.$

mit $\tilde{c}_j = \begin{cases} c_j, & j = 1, \dots, k-1, \\ c_k, & j = k, \\ c_{j-1}, & j = k+1, \dots, n+1. \end{cases}$

$\Rightarrow \quad g \in T[a,b].$

Man hat nach Definition:

$$\int_a^b g = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{c}_j (y_j - y_{j+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{c}_j (y_j - y_{j-1}) + \tilde{c}_k (y_k - y_{k-1})$$

$$+ \tilde{c}_{k+1} (y_{k+1} - y_k) + \sum_{j=k+2}^{n+1} \tilde{c}_j (y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} c_j (x_j - x_{j-1}) + c_k (x' - x_{k-1})$$

$$+ c_k (x_k - x') + \sum_{j=k+2}^{n+1} c_{j-1} (x_{j-1} - x_{j-2})$$

$j \to (j+1)$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} c_j (x_j - x_{j-1}) + c_k (x_k - x_{k-1})$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

$$= \int_a^b f.$$

$\boxed{A.3}$ Wir werden zuerst folgendes zeigen:

Für $f \in T[a,b]$ und $[c,d]$ gilt $f \in T[c,d]$.

(f Treppenfunktion auf einem Intervall

$\Rightarrow$ auch auf jedem Teilintervall)

$f \in T[a,b] \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$

und $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und

A_j mit $f(x) = A_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$.

<u>Zwei Fälle</u>:

1). $x_k \notin (c,d)\ \forall k$

$\Rightarrow$ ist (c,d) in einem (x_{k-1}, x_k)

enthalten $\Rightarrow$ f konstant auf (c,d)

$\Rightarrow$ Treppenfunktion auf (c,d)

2). $\exists\, m \in \mathbb{N}$ und k mit

$c < x_k < \ldots < x_{k+m-1} < d$ und $x_m \geq d$.

Wir führen folgende y_j ein:

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m+1} = d$,

$y_j = x_{k+j-1}$ für $j = 1, \ldots, m$.

Dann gilt $f(x) = c_{k+j-1}$

für $x \in (y_{j-1}, y_j)$

$j = 1, \ldots, m+1$

$\Rightarrow f \in T(c,d)$.

*| Sei jetzt $f \in R[-a,a] \Rightarrow \exists f_n \in T[-a,a]$ mit $\sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)| \to 0$.

Da $f_n \in T[0,a]$ und

$$0 \le \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)-f(x)| \le \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)| \to 0,$$

gilt $f = \underset{[0,a]}{\mathrm{glm}} - \lim f_n \Rightarrow f \in R[0,a]$.

(Man hat überhaupt nicht genutzt, dass f eine gerade Funktion ist!).

Also $f \in R[-a,a] \Rightarrow f \in R[0,a]$.

*) Jetzt die andere Richtung.

Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in [-a,a]$, und $f \in R[0,a]$. Dann

$\exists (f_n) \subset T[0,a]$ mit $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)-f(x)| \longrightarrow 0$

Wir konstruieren $\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \ge 0 \\ f_n(-x), & x < 0 \end{cases}$

$x \in [-a,a]$.

Man kann ganz formell zeigen, dass $\tilde{f}_n$ eine Treppenfunktion auf $[-a, a]$ ist: Falls $N \in \mathbb{N}$ und

$$0 = x_0 < \ldots < x_N = a$$

mit $f_n = c_j$ auf (x_{j-1}, x_j), Dann konstruieren wir die entsprechende Zerlegung von $[-a, a]$:

$$-a = -x_N < x_{N-1} < \ldots < -x_1 < x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = a$$

d.h. $$y_j = \begin{cases} -x_{N-j}, & j = 0, \ldots, N \\ x_{j-N}, & j = N+1, \ldots, 2N, \end{cases}$$

dann gilt $\tilde{f}_n(x) = \tilde{c}_j$ für $j = 1, \ldots, 2N$

$$\text{mit } \tilde{c}_j = \begin{cases} c_{j-N}, \ j = N+1, N \quad x \in (y_{j-N-1}, y_{j-N}), \\ \cancel{c_{N-j}, \ x \in (y_j, y_{j+1})} \\ c_{N-j+1}, \ x \in (y_{j-1}, y_j). \\ \qquad j = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Man hat natürlich

$$\sup_{x \in [-a,a]} |\tilde{f}_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \lim_n \int_{-a}^{a} \tilde{f}_n(x)\,dx,$$

und

$$\int_{-a}^{a} \tilde{f}_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^{2N} \tilde{c}_j \left(y_j - y_{j-1}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \tilde{c}_j \left(y_j - y_{j-1}\right) + \sum_{j=N+1}^{2N} \tilde{c}_j \left(y_j - y_{j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_{N-j+1} \left(-x_{N-j} - (-x_{N-j+1})\right) +$$

$$+ \sum_{j=N+1}^{2N} c_{j-N} \left(y_{j-N} - y_{j-N-1}\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \text{1. Summe:} & j \to N+1-j \\ \text{2. Summe:} & j \to j-N \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_j \left(x_j - x_{j-1}\right) + \sum_{j=1}^{N} c_j \left(x_j - x_{j-1}\right)$$

$$= 2 \sum = 2 \int_0^a f_n(x)\,dx \,,$$

also $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \lim_n \int_{-a}^{a} \tilde{f}_n(x)\,dx$

$$= 2 \lim_n \int_0^a f_n(x)\,dx = 2 \int_0^a f(x)\,dx .$$