Abgabe Algebra 1, Blatt 06

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 6.1

(a) Zu zeigen: $\left(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right)/\left(6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z} \text{ Ring, } 18\mathbb{Z},\ 6\mathbb{Z} \text{ Ideale in } R\\
\overset{\text{2. Isom.}}{\Longrightarrow}\ &\varphi : \left(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right)/\left(6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right) \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \text{ Ringisomorphismus}\\
\Longrightarrow\ &\left(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right)/\left(6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\square$

(b) Fehlt.

(c) Sei $S = \mathbb{Z}[t], I = t\mathbb{R}[t], R = \mathbb{Z}$.
Zu zeigen: $(\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{R}[t])/t\mathbb{R}[t] \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[t]/t\mathbb{Z}[t] \cong \mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])$.

(1) Zu zeigen: $(\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{R}[t])/t\mathbb{R}[t] \cong \mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])$.
Es gilt:

$$\mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t]) \overset{\text{2. Isom.}}{\cong} (\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{R}[t])/t\mathbb{R}[t].$$

(2) Zu zeigen: $\mathbb{Z}[t]/t\mathbb{Z}[t] \cong \mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t])$ Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{Z}[t] &= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\} \cap \left\{ t\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}_0)} \right\}\\
&= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\} \cap \left\{ t\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\}\\
&= \left\{ t\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mid (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)} \right\}\\
&= t\mathbb{Z}[t].
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{Z}[t]/t\mathbb{Z}[t] \cong \mathbb{Z}[t]/(\mathbb{Z}[t] \cap t\mathbb{R}[t]).$$

(3) Zu zeigen: $\mathbb{Z} \cong {}^{\mathbb{Z}[t]}\!/\!_{t\mathbb{Z}[t]}$.
Es gilt:

$$t\mathbb{Z}[t] \text{ Ideal } \implies \exists \varphi : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z} \text{ Ringhomomorphismus mit } \ker(\varphi) = t\mathbb{Z}[t].$$
$$\overset{\text{Homom.-Satz}}{\implies} \psi : {}^{\mathbb{Z}[t]}\!/\!_{t\mathbb{Z}[t]} \to \mathrm{Im}(\varphi), [a] \mapsto \varphi(a) \text{ Ringisomorphismus}$$
$$\overset{\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{Z}}{\implies} {}^{\mathbb{Z}[t]}\!/\!_{t\mathbb{Z}[t]} \cong \mathbb{Z}.$$

□

Aufgabe 6.2

Sei R Hauptidealring, $g \in R$.
Zu zeigen: $a + gR = [a]_g \in \left({}^{R}\!/\!_{gR}\right)^* \iff 1$ ist ein ggT von a und g.
Beweis fehlt.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}, f := t^3 - 3t^2 + 2t, g := t^2 - 1$.
Es gilt:

$$\mathrm{ggT}(t^3 - 3t^2 + 2t, t^2 - 1) \overset{\text{EA}}{=} 3t - 3 \implies [f]_g \notin \left({}^{R}\!/\!_{gR}\right)^*.$$

(b) Fehlt.

Aufgabe 6.3

(a) Zu zeigen: $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{3\mathbb{Z}},\ (a, b) \mapsto b + 3\mathbb{Z}$ Ringepimorphismus.

(1) Zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \psi(a + b) =& \psi((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \\ =& a_2 + b_2 + 3\mathbb{Z} \\ =& a_2 + b_2 + 3\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \\ =& a_2 + 3\mathbb{Z} + b_2 + 3\mathbb{Z} \\ =& \psi(a) + \psi(b). \end{aligned}$$

(2) Zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \psi(a \cdot b) = \psi(a) \cdot \psi(b)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi(a \cdot b) =& \psi((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \\ =& \psi((a_1 b_1, a_2 b_2)) \\ =& a_2 b_2 + 3\mathbb{Z} \\ =& a_2 b_2 + a_1 \cdot 3\mathbb{Z} + b_1 \cdot 3\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z} \\ =& (a_2 + 3\mathbb{Z}) \cdot (b_2 + 3\mathbb{Z}) \\ =& \psi((a_1, a_2)) \cdot \psi((b_1, b_2)) \\ =& \psi(a) \cdot \psi(b).\end{aligned}$$

(3) Zu zeigen: $\psi((1,1)) = 1 + 3\mathbb{Z}$.
Es gilt:

$$\psi((1,1)) = 1 + 3\mathbb{Z}.$$

$\Longrightarrow$ ψ Ringhomomorphismus.

Weiter ist zu zeigen, dass ψ surjektiv ist, d. h. $\forall b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \exists a \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \psi(a) = b$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi((a,b)) &= b + 3\mathbb{Z} \\ &\overset{b \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \psi \text{ surjektiv.}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ ψ ist Ringepimorphismus.

$\square$

(b) Fehlt.

Aufgabe 6.4

Sei K Körper, $R = K[t]$.
Seien $\langle 5 \rangle$ und $\langle 7 \rangle$ Ideale in R. Seien 1 und 5 aus R.
Nach dem Chinesischen Restsatz existiert ein $b \in R$, dass die simultanen Kongruenzen

$$b \equiv 1 \mod \langle 5 \rangle$$
$$b \equiv 5 \mod \langle 7 \rangle$$

erfüllt. Die Lösung ist eindeutig modulo $\langle 5 \rangle \cdot \langle 7 \rangle = \langle 35 \rangle$.

In diesem Fall ist $b = 26$ eine Lösung der Kongruenzen, denn es gilt:

$$26 = 1 + 4 \cdot 5 \equiv 1 \mod \langle 5 \rangle \quad \text{und} \quad 26 = 5 + 3 \cdot 7 \equiv 5 \mod \langle 7 \rangle.$$

Alle Lösungen sind in diesem Fall also $26 + \langle 35 \rangle$.

korrigiert von am