# Präsenzaufgaben 6

**Keine Abgabe vorgesehen**

**Präsenzaufgabe 6.5** (2. Isomorphiesatz)**.** Sei $R$ ein Ring und seien $I, J \trianglelefteq R$ Ideale mit $J \subseteq I$. Es bezeichne $I/J$ das Bild von $I$ unter der kanonischen Restklassenabbildung bzgl. $J$. Zeigen Sie, dass

$$\psi : \left(R/J\right)\Big/\left(I/J\right) \longrightarrow R/I$$
$$[([a]_J)]_{I/J} \longmapsto [a]_I$$

ein Ringisomorphismus ist.

**Präsenzaufgabe 6.6.** Gehen Sie davon aus, dass Aufgabe 6.2. bereits bewiesen ist.

**(a).** Sei $m \in \mathbb{N}$, $R = \mathbb{Z}_m$ und $a \in R$. Entscheiden Sie, ob $a$ in $R$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $a^{-1}$ für:

(i) $m := 16$ und $a := 13$.

(ii) $m := 105$ und $a := 14$.

**(b).** Es seien $f := t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t \in \mathbb{Z}_5[t]$ und $g := t^3 + 2t^2 + 2t + 1 \in \mathbb{Z}_5[t]$. Begründen Sie, dass die Restklasse $[f]_g$ in $\mathbb{Z}_5[t]/g\mathbb{Z}_5[t]$ eine Einheit ist und bestimmen Sie $([f]_g)^{-1}$ als Restklasse modulo $g\mathbb{Z}_5[t]$, dargestellt durch ein Polynom vom Grad $< \deg(g)$.

**Präsenzaufgabe 6.7.** Es seien $R := \mathbb{Z}[i]$ und $I$ das Hauptideal $I := (1 + 2i)\mathbb{Z}[i] \trianglelefteq R$.

**(a).** Beweisen Sie, dass folgende Kongruenzen in $R/I$ gelten: $2i \equiv -1 \mod I$, $i \equiv 2 \mod I$ und $5 \equiv 0 \mod I$. Folgern Sie, dass $5 \in \mathrm{Kern}(\pi) \cap \mathbb{Z}$, wobei $\pi : R \to R/I$, $x \mapsto \pi(a) = x + I$ der kanonischen Epimorphismus ist.

**(b).** Es bezeichne $\varphi : \mathbb{Z} \to R/I$, $x \mapsto x + I$ die Einschränkung von $\pi$ auf den Unterring $\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}[i]$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = 5\mathbb{Z}$ und wenden Sie den Homomorphiesatz an, um zu folgern, dass $R/I \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.