8 Beweistechniken II

8.1 Der Beweis durch Kontraposition

Wie wir im Kapitel 7 gesehen haben, lassen sich Sätze als Implikation $V \Rightarrow B$ aus Voraussetzung V und Behauptung B auffassen. Für den Fall, dass die Behauptung B selbst eine Implikation darstellt $(X \Rightarrow Y)$, kann man unter Umständen einen Beweis durch Kontraposition führen[1]. Die Idee der Kontraposition ist, die folgende Äquivalenzaussage aus der Aussagenlogik (siehe Übungsaufgaben zur Aussagenlogik) zu verwenden:

$$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$$

Das bedeutet, dass die Implikation $X \Rightarrow Y$ genau dann wahr ist, wenn die Implikation $\neg Y \Rightarrow \neg X$ gilt. Statt unter der Voraussetzung V also direkt „X impliziert Y" zu zeigen, können wir zusätzlich zu unserer Voraussetzung V auch $\neg Y$ voraussetzen und daraus dann $\neg X$ folgern, um die Implikation $X \Rightarrow Y$ unter der Voraussetzung V des Satzes zu beweisen.
Wir zeigen nun einen Satz, der Satz 7.1.1 auf den ersten Blick sehr ähnlich sieht.

Satz 8.1
$\underbrace{\text{Seien } m, n \in \mathbb{Z}.}_{\text{Voraussetzung } V}$
Wenn $\underbrace{m + n \text{ gerade ist}}_{X}$, dann $\underbrace{\text{sind } m \text{ und } n \text{ beide gerade oder beide ungerade.}}_{Y}$

Da wir das Kontrapositionsprinzip anwenden wollen, formulieren wir Satz 8.1 mit der oben erwähnten Äquivalenz aus der Aussagenlogik noch einmal neu, um zu sehen, was wir nun zeigen müssen:

Satz 8.1'
$\underbrace{\text{Seien } m, n \in \mathbb{Z}.}_{\text{Voraussetzung } V}$
Wenn $\underbrace{\text{von den beiden Zahlen } m \text{ und } n \text{ eine gerade und eine ungerade ist}}_{\neg Y}$, dann $\underbrace{\text{ist die Summe } m + n \text{ ungerade.}}_{\neg X}$

[1] Achtung: Andere Beweistechniken gehen eventuell aber auch!

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[2] sei m gerade und n ungerade. Dann existieren zwei ganze Zahlen r und s, sodass gilt:

$$m = 2r,\ n = 2s + 1.$$

Wir berechnen berechnen die Summe:

$$m + n = 2r + (2s + 1) = 2(r + s) + 1.$$

Also ist die Summe $m + n$ eine ungerade Zahl nach Definition, da $r + s$ eine ganze Zahl ist. □

Wir setzen nun zwei der bereits bewiesenen Sätze zu einem großen Satz zusammen.

Satz 8.2
Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Die Summe von m und n ist genau dann gerade, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade sind.

Dieser Satz ist eine **Äquivalenzaussage** – das bedeutet, dass in der Behauptung eine Äquivalenz von Aussagen steht (aussagenlogisch ausgedrückt: $X \Leftrightarrow Y$). Der Satz als ganzes hat also die Struktur $V \Rightarrow [X \Leftrightarrow Y]$, wobei V die Voraussetzung des Satzes ist (hier: „Seien $m, n \in \mathbb{Z}$“). Solche Aussagen bestehen eigentlich aus zwei Teilen, $X \Rightarrow Y$ und $Y \Rightarrow X$, die in der Regel auch getrennt bewiesen werden[3]. Wichtig ist, dass die Voraussetzung des Satzes („Seien $m, n \in \mathbb{Z}$“) dabei für beide Richtungen gilt. Zur Verdeutlichung formulieren wir den Aufbau dieses Satzes inklusive Beweis noch einmal im Schema *Voraussetzung-Behauptung-Beweis*:

Voraussetzung : Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.

Behauptung : Es gilt:

$$m + n \text{ ist gerade } \Leftrightarrow\ m \text{ und } n \text{ sind beide gerade oder beide ungerade}$$

Beweis :

1. (Hin-Richtung):
   Zeige: $m+n$ ist gerade $\Rightarrow$ m und n sind beide gerade oder beide ungerade.

   (Per Kontraposition) Seien o.B.d.A. m gerade und n ungerade. Dann $\cdots$

[2] Abgekürzt o. B. d. A. (oder o. E. für „ohne Einschränkung“), wird verwendet, wenn in einem Beweis zwei oder mehr völlig analoge Fälle auftreten. In unserem Fall ist es wegen des Kommutativgesetzes für die Argumentation egal, ob der erste oder der zweite Summand gerade ist – die Rechnung verläuft in beiden Fällen völlig identisch.

[3] Mathematiker sprechen hier – nur leicht ironisch – gerne von **Hin-Richtung** und **Rück-Richtung**.

2. (Rück-Richtung):
   Zeige: m und n sind beide gerade oder beide ungerade $\Rightarrow m+n$ ist gerade.
   1. Fall: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und m, n gerade. Dann ...
   2. Fall: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und m, n ungerade. Dann ...

Uns fällt auf, dass die Aussagen der Hin- und Rück-Richtung genau Satz 8.1 und Satz 7.1.1 entsprechen, welche wir schon bewiesen haben. Somit müssen wir die Beweise hier nicht noch einmal führen und Satz 8.2 ist bereits bewiesen.
Wir betrachten noch ein Beispiel:

Satz 8.3
$\underbrace{\text{Seien } n, m \in \mathbb{Z}}_{\text{Voraussetzung } V}$.
$\underbrace{\text{Ist } n \cdot m \text{ ungerade}}_{X}$, so ist $\underbrace{n \text{ ungerade und } m \text{ ungerade}}_{Y}$.

Wir formulieren den Satz wieder mit der Äquivalenz $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ um[4]:

Satz 8.3'
$\underbrace{\text{Seien } n, m \in \mathbb{Z}}_{\text{Voraussetzung } V}$.
$\underbrace{\text{Ist } n \text{ gerade oder } m \text{ gerade}}_{\neg Y}$, so ist $\underbrace{nm \text{ gerade}}_{\neg X}$.

Beweis: Sei o.B.d.A n gerade. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2r$, und es folgt, dass $n \cdot m = (2r) \cdot m = 2 \cdot (rm)$ gerade ist. □

Hier ist schön zu sehen, dass der Beweis, wenn man ihn mit Kontraposition führt, einfach ist. Es ist also sehr hilfreich, das „richtige“ Beweisprinzip anzuwenden. Welches in einem konkreten Fall das „richtige“ ist, weiß man aber leider oft nicht. Ein Teil des Findens von Beweisen besteht daher oft im Ausprobieren, welche Beweistechniken zum Erfolg führen.

8.2 Der Widerspruchsbeweis

Der Widerspruchsbeweis basiert auf der Tatsache aus der Aussagenlogik, dass eine Aussage B äquivalent zur Aussage $\neg(\neg B)$ ist. Wenn B die Behauptung ist, so ist es manchmal einfacher, $\neg(\neg B)$ statt B zu zeigen. Dies geschieht, indem wir annehmen, dass $\neg B$ wahr ist, und dies zu einem Widerspruch führen. Dann kann $\neg B$ nicht wahr sein, womit $\neg(\neg B)$, also B, wahr ist.

[4]Irgendwann lässt man dieses Schritt aus, hier aber zur Verdeutlichung nochmal.

Wir werden nun beispielhaft zwei Sätze mit Hilfe des Widerspruchsbeweises zeigen.

Satz 8.4
$\underbrace{\text{Seien } A \text{ und } B \text{ Mengen}}_{\text{Voraussetzung}}$. $\underbrace{\text{Dann ist } A \cap (B \setminus A) = \emptyset}_{\text{Behauptung}}$.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nehmen also das Gegenteil der Behauptung an.
Annahme: $A \cap (B \setminus A) \neq \emptyset$.

Dann gibt es insbesondere ein $x \in A \cap (B \setminus A)$. Nach den Definitionen aus der Mengenlehre bedeutet dies, dass $x \in A$ und $x \in B \setminus A$ gilt. $x \in B \setminus A$ bedeutet aber, dass $x \in B$ und $x \notin A$ gilt. Also muss sowohl $x \in A$ als auch $x \notin A$ gelten – ein Widerspruch. Also war die Annahme falsch, und damit die Behauptung war. □

Satz 8.5
Es gibt keine größte reelle Zahl.

Dies bedeutet, dass es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, dass $y \leq x$ ist.

Beweis: Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis.
Annahme: Es gibt eine größte reelle Zahl x.

Dann gilt $y \leq x$ für alle reellen Zahlen y. Also gilt insbesondere $y = x + 1 \leq x$, da $x + 1$ sicherlich eine reelle Zahl ist. Subtrahieren wir nun von beiden Seiten der Ungleichung x, so erhalten wir $1 < 0$ was sicherlich falsch ist[5]. Wir haben somit Widerspruch hergeleitet, weshalb die Annahme falsch und damit die Behauptung wahr gewesen sein muss. □

Bemerkung: Beim Widerspruchsbeweis ist es wichtig, dass in der Behauptung trotzdem immer noch die wahre Aussage, die gezeigt werden soll, steht. Das Gegenteil wird erst im Beweis angenommen und zum Widerspruch geführt.

Nun betrachten wir noch einen speziellen Fall beim Beweis durch Widerspruch, nämlich den Fall, dass die Behauptung wieder eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist. Hier wird die Aussage aus der Aussagenlogik benutzt, dass $(A \Rightarrow B)$ äquivalent zu $\neg(A \land \neg B)$ ist. Um „A impliziert B" zu zeigen, beweisen wir, dass nicht sowohl A als auch $\neg B$ gelten können, indem wir A und $\neg B$ annehmen und zum Widerspruch führen.
Dazu dient der folgende Satz als Beispiel:

Satz 8.6
Sei x eine rationale Zahl und y eine irrationale Zahl. Ist $x \neq 0$, so ist $x \cdot y$ irrational.

[5] Der genaue Umgang mit Ungleichungen wird in der Analysis I geübt, hier werden diese Rechenregeln als aus der Schule bekannt vorausgesetzt

Es sei daran erinnert, dass x eine rationale Zahl ist, wenn es $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x = \frac{a}{b}$ ist, und dass y eine irrationale Zahl ist, wenn y eine reelle Zahl ist, die sich nicht als ein solcher Bruch schreiben lässt.
Wir schreiben diesen Satz wieder im Schema *Voraussetzung-Behauptung-Beweis* auf.

Voraussetzung: Sei x eine rationale Zahl und y eine irrationale Zahl.

Behauptung: $x \neq 0 \;\Rightarrow\; xy$ ist irrational

Beweis: Angenommen, es wären $x \neq 0$ und xy eine rationale Zahl. Da dann $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist, gibt es $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{N}$, sodass $x = \frac{a}{b}$ gilt. Weil wir annehmen, dass xy rational ist, gibt es $c \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{N}$ mit $xy = \frac{c}{d}$.

Damit gilt nun $\frac{a}{b} \cdot y = \frac{c}{d}$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{b}{a}$ (dies können wir wegen $a \neq 0$), so erhalten wir $y = \frac{bc}{ad}$. Dies heißt aber[6], dass y rational ist, was einen Widerspruch zu den Voraussetzungen darstellt.
Somit kann die getroffene Annahme nicht wahr sein, und ihr Gegenteil muss stimmen. □

Autoren dieses Kapitels:

2019: Konstantin Meiwald
2017: Nils Näthke, Nick Würdemann
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2015: Malte Fecht
2014: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2012 - 2013: Ute Valeska Spreckels

[6] Für ganz spitzfindige (und man sollte in der Mathematik spitzfindig sein): Um die Definition von y rational zu überprüfen, bräuchte man eigentlich noch, dass $ad \in \mathbb{N}$ ist, wir wissen aber nur, dass $ad \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist. Ist $ad < 0$, so kann man aber auch $y = \frac{-bc}{-ad}$ schreiben, dann ist $-ad \in \mathbb{N}$ und y ist rational. Auf die gleiche Weise kann man sich auch überlegen, dass jede Zahl der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine rationale Zahl ist.