Übungsblatt 11 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

6. Juli 2020

Aufgabe 11.1

Betrachte das Randwertproblem (RWP)

$$y''(x) + y'(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad f \in C^0([0,1]) \quad \text{und} \quad y(0) = y'(1) = 0 \quad .$$

(a)

Behauptung. Das RWP ist für jedes $f \in C^0([0,1])$ eindeutig lösbar.

Beweis: Nutze zum Beweis der Behauptung den Satz 159. Es bedarf dabei des $\mathbb{R}$-FS für das homogene Problem: Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$ und trägt die einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$. Sodann ist das FS für das homogene Problem

$$(z_1, z_2) = \left(1, \mathrm{e}^{-x}\right) \quad .$$

Die Randbedingungen auf dieses FS lässt sich in die gewünschte Form umschreiben:

$$R(0)z := R_1 z = 1 \cdot z(0) + 0 \cdot z'(0) = z(0) \quad \text{und} \quad R(1)z := R_2 z = 0 \cdot z(1) + 1 \cdot z'(1) = z'(1) \quad .$$

Hiermit ist

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1 z_1 & R_1 z_2 \\ R_2 z_1 & R_2 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}$$

und wegen $\det(\mathbf{R}) = -\mathrm{e}^{-1} \neq 0$ folgt die zu zeigende Aussage. Das RWP ist somit für alle Inhomogenitäten lösbar, q.e.d.!

(b) Wie in Beispiel 160 des Skriptes kombiniert man (z_1, z_2) so, dass das daraus resultierende FS (y_1, y_2) die RB in der Form $y_1(0) = y_2'(1) = 0$ erfüllt. $z_1 = 1$ erfüllt bereits $z_1'(x) = 0$ für alle x, sodann $y_2 = z_1 = 1$. Die andere Funktion des zu suchenden FS ist die Differenz von z_1 und z_2 mit $z_1(0) - z_2(0) = 1 - 1 = 0$: $y_1(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. Diese sind linear unabhängig: Aus der Forderung $a + b(1 - \mathrm{e}^{-x}) = 0$ für alle x, folgt für $x = 0$ zunächst $a = 0$ und $b(1 - \mathrm{e}^{-x}) = 0$ ist für alle weiteren x für $b = 0$ erfüllt.

Die Wronski-Determinante ist

$$\mathcal{W}(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -y_1' = -\mathrm{e}^{-x} \quad .$$

Die Greensche Funktion ist somit nach Formel

$$\mathcal{G}(x,s) = \left\{ \begin{matrix} \frac{y_1(x)y_2(s)}{\mathcal{W}(s)} & & x < s \\ & \text{für} & \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{\mathcal{W}(s)} & & x \geq s \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \mathrm{e}^s\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) & & x < s \\ & \text{für} & \\ 1 - \mathrm{e}^s & & x \geq s \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 11.2

Das $\mathbb{R}$-FS des homogenen Problems folgt aus dem char. Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2$. Dieses hat eine zweifache Nullstelle bei 0, womit

$$(z_1, z_2) = (1, x)$$

folgt. Die Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ für dieses $\mathbb{R}$-FS sind umformuliert

$$R(0)z := R_1 z = 1 \cdot z(0) + 0 \cdot z'(0) = z(0) \quad \text{und} \quad R(1)z := R_2 z = 1 \cdot z(1) + 0 \cdot z'(1) = z(1) \quad .$$

Damit wird die Eindeutigkeit nach Satz 159 überprüft:

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1 z_1 & R_1 z_2 \\ R_2 z_1 & R_2 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

impliziert $\det(\mathbf{R}) = 1 \neq 0$.

Ein zu den RBn passendes FS folgt durch Kombination von z_1 und z_2: $y_1(0) = 0$ kann durch die Wahl $y_1(x) = z_2(x) = x$ erfüllt werden; $y_2(1) = 0$ lässt sich durch $z_1(x) - z_2(x) = 1 - x$ realisieren: $y_2(x) = 1 - x$. Dieses System ist linear unabhängig: Aus der Forderung $a + b(1 - x) = 0$ für alle x, folgt für $x = 1$ zunächst $a = 0$ und $b(1 - x) = 0$ ist für alle weiteren x für $b = 0$ erfüllt.

Dies Wronski-Determinante dieses Systems ist

$$\mathcal{W}(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -y_1' = -x - (1 - x) = -1 \neq 0 \quad .$$

Die Greensche Funktion ist somit nach Formel

$$\mathcal{G}(x, s) = \left\{ \begin{matrix} \frac{y_1(x) y_2(s)}{\mathcal{W}(s)} & & x < s \\ & \text{für} & \\ \frac{y_1(s) y_2(x)}{\mathcal{W}(s)} & & x \geq s \end{matrix} \right\} = \begin{cases} x(s-1) & \quad x < s \\ \qquad\qquad \text{für} & \\ s(x-1) & \quad x \geq s \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 11.3

Alle Systeme sind homogen mit konstanten Koeffizienten. Damit sind die Matrizen konstant.

a)
$$\begin{cases} x' &= -x+8y \\ y' &= x+y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad .$$

Zur Überprüfung der Diagonalisierbarkeit bestimme man die Eigenwerte und ihre Multiplizitäten:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} P(\lambda) = \det(A-\lambda) = \det\begin{pmatrix} -(1+\lambda) & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1) - 8 = \lambda^2 - 9 = (\lambda-3)(\lambda+3) \\ &\Rightarrow \lambda_\pm = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \quad . \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind jeweils einfach, die algebraische Vielfachheit des Eigenwertproblems (EWP) also ebenso 1. Die Diagonalisierbarkeit der Matrix A folgt, wenn die geometrischen Vielfachheiten (also die Dimensionen der Eigenräume) der algebraischen Vielfachheiten entsprechen.

Die entsprechenden Eigenvektoren und Eigenräume werden durch die Eigenwertgleichung bestimmt: Für $\lambda = 3$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+3) & 8 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und aus der untersten Zeile folgt $x = 2y$ und löst die erste Zeile. Der Eigenraum wird also aufgespannt durch einen Vektor (geometrische Vielfachheit ist 1):

$$\mathsf{Eig}_{\lambda=3}(A) = \mathsf{Kern}(A-\lambda) = \mathsf{Kern}(A-3) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Für $\lambda = -3$ ist dagegen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-3) & 8 \\ 1 & 1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und aus der untersten Zeile folgt $x = -4y$ und löst die erste Zeile. Der Eigenraum wird also aufgespannt durch einen Vektor (geometrische Vielfachheit ist 1):

$$\mathsf{Eig}_{\lambda=-3}(A) = \mathsf{Kern}(A-\lambda) = \mathsf{Kern}(A+3) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Beiden Eigenräume haben die Dimension und somit geometrische Multiplizität 1, was der algebraischen Vielfachheit entspricht. Also ist A diagonalisierbar. Der gesamte Eigenraum von A ist die direkte Summe aller Eigenräume, wobei die aufspannenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$\mathsf{Eig}(A) = \bigoplus_{\lambda\in\{\pm 3\}} \mathsf{Eig}_\lambda(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Nach Satz 163 ist das $\mathbb{R}$-FS somit

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \quad \text{und} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t}$$

und jede Lösung Linearkombination dieser Fundamentallösungen.

b)

$$\begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= 4x - y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad .$$

Die Eigenwerte folgen aus

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} P(\lambda) = \det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \quad . \end{aligned}$$

Die Nullstelle trägt zweifache Multiplizität und damit ist die algebraische Vielfachheit 2. Um die Diagonalisierbarkeit zu prüfen, muss gezeigt werden, dass die geometrische Vilefachheit (entspricht der Dimension des Kerns von $A - \lambda$) der algebraischen Vielfachheit entspricht:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & -1 \\ 4 & -(1+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad .$$

Aus der obersten Zeile folgt $y = 2x$ und diese Wahl löst auch die letzte Zeile. Der Eigenraum zu $\lambda = 1$ ist damit

$$\mathsf{Eig}_{\lambda=1}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad ,$$

aber dieser ist lediglich eindimensional! Also ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Dennoch kann eine Lösung gefunden werden ! Hierzu leite man die erste Gleichung des Systems nochmal ab und setzt die zweite und erste Gleichung ein:

$$\begin{aligned} x''(t) &= 3x'(t) - y'(t) = 3x'(t) - 4x(t) + y(t) = 3x'(t) - 4x(t) + 3x(t) - x'(t) \\ &= 2x'(t) - x(t) \\ &\Leftrightarrow \\ 0 &= x''(t) - 2x'(t) + x(t) \quad . \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom ist dasselbe wie bei der Bestimmung der Eigenwerte. Ein $\mathbb{R}$-FS für $x(t)$ ist somit

$$\left(\mathrm{e}^t, t\mathrm{e}^t\right) \quad .$$

Setzt man eines der Fundamentallösungen in die zweite Gleichung ein bekommt man eine entsprechende Lösung $y(t)$ über inhomogene DGln:

$$y'(t) + y(t) = 4x_1(t) = 4\mathrm{e}^t \quad \text{bzw.} \quad y'(t) + y(t) = 4x_2(t) = 4t\mathrm{e}^t \quad ;$$

eine Fundamentallösung ist e^{-t}. Die Inhomogenitäten sind von spezieller Form mit $\mu = 1$, welches keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms für $y(t)$ ist: $P_y(1) = 2$. Die Vorfaktoren sind einmal ein Monom nullter Ordnung (4) und einmal ein Monom erster Ordnung ($4t$). Eine spezielle Lösung für den ersten Fall ist $2\mathrm{e}^t$ und mit dem Ansatz $y_s(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$ in

$$4t\mathrm{e}^t = (a + 2at + 2b)\mathrm{e}^t = ((2b + a) + 2at)\,\mathrm{e}^t \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \quad \text{und} \quad b = -\frac{a}{2} = -1 \quad .$$

Allgemeine Lösungen sind somit $y_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^t$ und $y_2(t) = C_2\mathrm{e}^{-t} + (2t - 1)\mathrm{e}^t$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Paare $(x_1(t), y_1(t))$ wie auch $(x_2(t), y_2(t))$ lösen das lineare DGL-System.

c)

$$\begin{cases} x' &= 4x - y \\ y' &= 5x + 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad .$$

Über das charakteristische Polynom lassen sich die Eigenwerte bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} P(\lambda) = \det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = (\lambda - 3)^2 + 4 \\ &\Rightarrow \lambda_\pm = 3 \pm \mathbf{i}2 \quad . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind von einfacher Multiplizität und zueinander komplex konjugiert. Für den Eigenwert $\lambda_\pm$ ist der Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \mp 2\mathbf{i} & -1 \\ 5 & 2-3 \mp 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \mp 2\mathbf{i} & -1 \\ 5 & -1 \mp 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ;$$

aus der ersten Zeile folgt $y = (1 \mp 2\mathbf{i})x$ und die zweite Zeile ist wegen

$$5x - (1 \pm 2\mathbf{i})(1 \mp 2\mathbf{i})x = 5x - (1+4)x = 0$$

ebenso erfüllt. Beide Dimensionen sind 1 und entsprechen den algebraischen Vielfachheiten: Die Matrix ist diagonalisierbar. Der Eigenraum zu $\lambda_\pm$ ist sodann

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_\pm}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \mp 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \right\}$$

und eine Eigenbasis zu A aus

$$\mathsf{Eig}(A) = \bigoplus_{\lambda \in \{\lambda_\pm\}} \mathsf{Eig}_\lambda(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2\mathbf{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Das $\mathbb{C}$-FS ist somit

$$Y_+(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(3+2\mathbf{i})t} \quad \text{und} \quad Y_-(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(3-2\mathbf{i})t} \quad ;$$

diese sind zueinander komplex konjugiert. Real- und Imaginärpart der jeweiligen Fundamentallösungen sind jeweils selber $\mathbb{R}$-FS:

$$\begin{aligned} Y_{+,r}(t) &= \mathfrak{Re}\{Y_+(t)\} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ Y_{+,i}(t) &= \mathfrak{Im}\{Y_+(t)\} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ Y_{-,r}(t) &= \mathfrak{Re}\{Y_-(t)\} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} = Y_{+,r} \\ Y_{-,i}(t) &= \mathfrak{Im}\{Y_-(t)\} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} = -Y_{+,i} \quad . \end{aligned}$$

Jede reelle Lösung ist Linearkombination von $Y_{+,r}$ und $Y_{+,i}$ bzw. $Y_{-,r}$ und $Y_{-,i}$.

d)

$$\begin{cases} x' &= y+z \\ y' &= x+z \\ z' &= x+y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad .$$

Die Auswertung des charakteristischen Polynoms mithilfe der Regel von Sarrus erlaubt es, die Eigenwerte zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} P(\lambda) = \det(A-\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -(\lambda^3 - 3\lambda - 2) \quad . \end{aligned}$$

Eine Nullstelle ist $\lambda_1 = 2$. Durch Polynomdivision erhält man das reduzierte Polynom für die anderen Nullstellen:

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 - 3\lambda - 2) \quad : \quad (\lambda - 2) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \\ \underline{-(\lambda^3 - 2\lambda^2)} \\ 2\lambda^2 - 3\lambda - 2 \\ \underline{-(2\lambda^2 - 4\lambda)} \\ \lambda - 2 \\ \underline{-(\lambda - 2)} \\ 0 \end{array}$$

und daraus folgt die zweifache Nullstelle $\lambda_{2,3} = -1$. Um die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten mit den geometrischen Vielfachheiten zu vergleichen, bestimme man den Kern von $A - \lambda_i$, $i \in \{1,2,3\}$, und dessen Dimension: Für λ_1 folgt aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren durch Addition der zweiten und dritten Zeile mit der ersten Zeile folgt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und durch Subtraktion der zweiten Zeile mit der Dritten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Aus der zweiten Zeile folgt zunächst $y = z$. Dies in die dritte Zeile eingesetzt liefert $x = -y + 2z = -y + 2y = y$. Der Eigenraum zum ersten Eigenwert trägt einen Eigenvektor und hat somit Dimension 1:

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_1}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Die algebraische Multiplizität entspricht also der geometrischen Vielfachheit. Für $\lambda_{2,3}$ löse man

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

durch Betrachten der Hyperebenengleichung $x+y+z=0$: Fixiert man $z=0$, so löst $x=-y$ die Gleichung; analog ist durch die Fixierung von $y=0$ die Gleichung durch $x=-z$ gelöst. Die zwei resultierenden Vektoren sind linear unabhängig. Um zu garantieren, dass diese zwei Lösungen den gesamten Kern aufspannen, betrachte man den Rang von $A-\lambda_{2,3}$, welcher wegen

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

nach Gaußschem-Eliminantionsverfahren den Wert 1 hat: $\mathsf{Rang}(A-\lambda_{2,3})=1$. Nach dem Rangsatz gilt

$$\begin{aligned} 3 &= \dim(\mathbb{R}^3) = \mathsf{Rang}(A-\lambda_{2,3}) + \mathsf{Def}(A-\lambda_{2,3}) = \mathsf{Rang}(A-\lambda_{2,3}) + \dim\left(\mathsf{Kern}(A-\lambda_{2,3})\right) \\ &= 1 + \dim\left(\mathsf{Kern}(A-\lambda_{2,3})\right) \quad , \end{aligned}$$

womit der Eigenraum zweidimensional ist und die geometrische Multiplizität entspricht der algebraischen Vielfachheit:

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_{2,3}}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Das Tripel

$$\mathsf{Eig}(A) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ist linear unabhängig und somit eine Eigenbasis in $\mathbb{R}^3$. Also ist A diagonalisierbar. Ein $\mathbb{R}$-FS ist

$$\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\right) \quad ,$$

woraus durch Linearkombinationen alle homogenen Lösungen des linearen DGL-Systems folgen.

Aufgabe 11.4

Zur Wiederholung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$: Seien $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\|b\| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n |b_j|^2} \quad . \tag{1}$$

Man definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} |||\cdot||| \quad : \quad \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A = (A_{ij}) &\mapsto |||A||| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2} \quad . \end{aligned}$$

a)

Behauptung. $|||\cdot|||$ ist eine Norm auf $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Beweis: Man überprüfe alle Normaxiome:

pos. Definitheit: Da die Abbildung als Summe positiver Elemente und die Wurzel daraus positiv sind, ist $|||A||| \geq 0$. Für $A = 0$ folgt $|||A||| = 0$. Die andere Implikation folgt daraus, dass die Wurzel nur dann 0 ist, wenn der Radikand 0 ist. Der Radikand ist jedoch Summe positiver Zahlen A_{ij}^2, die nur dann 0 ist, wenn jeder Summand verschwindet: $A_{ij} = 0$ für alle i, j. Die ist äquivalent mit $A = 0$ und damit die Äquivalenz für die Definitheit.

Homogenität: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$; die skalare Multiplikation λA ist ebenso in $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Sodann

$$|||\lambda A||| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |\lambda A_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |\lambda|^2 |A_{ij}|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2} = |\lambda| |||A||| \quad .$$

Dreiecksungleichung: Bevor der eigentliche Beweis angegangen wird, zeige man

$$\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}||B_{ij}| \leq |||A||| |||B||| \tag{2}$$

mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |A_{ij}||B_{ij}| &= \left|\sum_{j=1}^n |A_{ij}||B_{ij}|\right| \overset{(1)}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{l=1}^n |B_{il}|^2} \\ &\Rightarrow \\ \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}||B_{ij}| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}||B_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{l=1}^n |B_{il}|^2} \\ &\overset{(1)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n \sqrt{\sum_{l=1}^n |B_{kl}|^2}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |B_{kl}|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{k,l=1}^n |B_{kl}|^2} = |||A||| |||B||| \end{aligned}$$

und damit die Hilfsaussage (2).

Seien $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, so auch $A + B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag folgt die zu zeigende Aussage:

$$\begin{aligned} |||A+B|||^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij} + B_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(|A_{ij}|^2 + |B_{ij}|^2\right) + 2\sum_{i,j}^{n} |A_{ij}||B_{ij} \\ &\overset{(2)}{\leq} |||A|||^2 + |||B|||^2 + 2|||A||||||B||| = (|||A||| + |||B|||)^2 \\ &\Leftrightarrow \\ |||A+B||| &\leq |||A||| + |||B||| \quad . \end{aligned}$$

Damit ist $|||\cdot|||$ eine Norm, q.e.d.!

Beweisalternative: Man zeige, dass

$$A \circledast B = \sum_{i,j}^{n} A_{ij} B_{ij}$$

ein Skalarprodukt ist - formal handelt es sich um die Summe der Matrixeinträge des *Hadamard-Produkts* zweier Matrizen ($A \cdot_H B = (A_{ij}B_{ij})$). Diese induziert dann eine Norm gemäß $|||A||| = \sqrt{A \circledast A}$. Seien also $A, B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

pos. Definitheit: Es ist $A \circledast A = \sum_{ij}^{n} |A_{ij}|^2$ als Summe positiver Zahlen positiv und somit $A \circledast A \geq 0$. Für $A = 0$ folgt $A \circledast A = 0$. Die andere Implikation folgt wie im oberen Beweis begründet.

Symmetrie: Die skalare Multiplikation zweier Matrix-Elemente ist kommutativ: $A_{ij}B_{ij} = B_{ij}A_{ij}$. Diese Vertauschung hat keinen Einfluss auf die Summe, sodass $A \circledast B = B \circledast A$. (Direkter folgt diese Aussage durch die Kommutativität des Hadamard-Produktes: $A \cdot_H B = B \cdot_H A$.)

Bilinearität: Betrachte

$$A \circledast (B + \lambda C) = \sum_{ij}^{n} A_{ij}(B_{ij} + \lambda C_{ij}) = \sum_{ij}^{n} A_{ij}B_{ij} + \lambda \sum_{ij}^{n} A_{ij}C_{ij} = A \circledast B + \lambda A \circledast C$$

und durch Symmetrie folgt dies auf für den ersten Matrizeneintrag. Damit ist das Produkt bilinear.

Dieses skalare Produkt zwischen zwei Matrizen ist also ein Skalarprodukt, q.e.d.!

b)

Behauptung. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ gilt $\|Ax\| \leq |||A||| \|x\|$.

Beweis: Man nutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (1) mit $a_j = A_{ij}$ (Zeilenvektor bzgl. der i-ten Zeile) und $b_j = x_j$:

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right) \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = |||A|||^2 \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \\ \|Ax\| &\leq |||A||| \|x\| \quad \text{, q.e.d.!} \end{aligned}$$

c)

Behauptung. Für alle $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ gilt $|||AB||| \leq |||A||| |||B|||$.

Beweis: Man nutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den Zeilenvektor $a_j = A_{ij}$ und den Spaltenvektor $b_j = B_{ji}$:

$$\begin{aligned}
|||AB|||^2 &= \sum_{j,k=1}^{n} |(AB)_{jk}|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} A_{ji} B_{ik} \right|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ji}|^2 \sum_{l=1}^{n} |B_{lk}|^2 \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ji}|^2 \sum_{k,l=1}^{n} |B_{lk}|^2 = |||A|||^2 |||B|||^2 \\
&\Leftrightarrow \\
|||AB||| &\leq |||A||| |||B||| \quad \text{, q.e.d.!}
\end{aligned}$$