SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 7

Abgabefrist: bis zum 11.06.2020 um 23:59:59
als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $Y \subset X$ nichtleer und d_Y die induzierte Metrik auf Y. Zeigen Sie: der metrische Raum (Y, d_Y) ist genau dann vollständig, wenn die Menge Y in X bzgl. d abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)
Sei X eine nichtleere Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Betrachte

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(X,Y) := \big\{ f : X \to Y : &\text{ es existiert eine offene Kugel } K \text{ in } Y, \\ &\text{so dass } f(x) \in K \text{ für alle } x \in X \big\}.\end{aligned}$$

1. Für $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$ definiere $D(f,g) = \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big)$. Zeigen Sie, dass D wohldefiniert und eine Metrik auf $\mathcal{B}(X,Y)$ ist.
2. Nehme an, dass der metrische Raum (Y, d) vollständig ist. Zeigen Sie, dass $\big(\mathcal{B}(X,Y), D\big)$ auch ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)
Betrachte die Gleichung $\dfrac{x+2}{x+3} = x$ auf $[0, +\infty)$.

1. Zeigen Sie, dass man den Banachschen Fixpunktsatz anwenden kann und dass es genau eine Lösung gibt.
2. Finden Sie diese Lösung mit der Genauigkeit 0,002. (Eine strikt bewiesene Fehlerabschätzung ist notwendig!)

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)
Sei $a \in (0, 1)$.

1. Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $y : [-a, a] \to \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) y ist stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x) + 1$, $x \in (-a, a)$, mit $y(0) = 0$,
   (b) y erfüllt die Integralgleichung $y(x) = \displaystyle\int_0^x \big(y(t) + 1\big)\, dt$, $x \in [-a, a]$.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$T : C^0\big([-a, a]\big) \to C^0\big([-a, a]\big), \quad \big(T(y)\big)(x) = \int_0^x \big(y(t) + 1\big)\, dt,$$
   eine Kontraktion bzgl. der Supremumnorm ist.
3. Berechnen Sie die Iterationen $y_n = T(y_{n-1})$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz für $y_0 \equiv 0$ und bestimmen Sie die genaue Lösung des Anfangswertproblems.

Präsenzaufgaben

1. Betrachte $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.
   (a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ unvollständig ist. Hinweis: betrachten Sie eine Folge, die gegen $+\infty$ divergiert.

2. Betrachte $C^0\big([a, b]\big) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und
$$C^0_{\text{stw}}\Big([a,b]\Big) := \Big\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stückweise stetig mit } f(a) = 0 \text{ und } \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(x - \varepsilon) = f(x)\, \forall x \in (a, b]\Big\},$$
   (a) Zeigen Sie, dass $d(f, g) = \displaystyle\int_a^b |f - g|$ eine Metrik auf $C^0_{\text{stw}}\Big([a, b]\Big)$ ist.
   Damit wird auch $C^0\big([a, b]\big)$ zu einem metrischen Raum mit der indizierten Metrik.
   (b) Wähle $c \in (a, b)$ und definiere $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie folgt: $f_n(x) = 0$ für $x \le c - \frac{c-a}{n}$, $f_n(x) = n\big(x - c + \frac{c-a}{n}\big)$ für $x \in (c - \frac{c-a}{n}, c)$, $f_n(x) = c - a$ für $x \ge c$. Zeigen Sie, dass f_n in $C^0_{\text{stw}}\big([a, b]\big)$ konvergiert.
   (c) Leiten Sie her, dass $C^0([a, b])$ mit der obigen Metrik unvollständig ist.[1]

3. Zwei metrische Räume (X_1, d_1) und (X_2, d_2) heissen *isometrisch*, falls es eine bijektive Abbildung $F : X_1 \to X_2$ existiert mit $d_2\big(F(x), F(y)\big) = d_1(x, y)$ für alle $x, y \in X_1$. Zeigen Sie: (X_1, d_1) ist genau dann vollständig, wenn (X_2, d_2) vollständig ist. (Daher ist die Vollständigkeit eine *intrinsische* Eigenschaft: sie ist unabhängig davon, ob und wie der metrische Raum in einem grösseren metrischen Raum enthalten ist.)

4. Wir wollen zeigen, dass alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes wesentlich sind.
   (a) Betrachte $T : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ für alle $x \neq y$ und dass T keine Kontraktion ist. Was kann man über Fixpunkte von T sagen?
   (b) Betrachte den metrischen Raum $(0, 1)$ und die Abbildung $T : x \mapsto \dfrac{x}{2}$. Ist T eine Kontraktion? Was kann man über Fixpunkte von T sagen?

5. Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F(a) < 0$ und $F(b) > 0$. Nehme an, dass es strikt positive M_1, M_2 existieren mit $M_1 < F'(x) < M_2$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass man ein $\lambda \neq 0$ finden kann, so dass $f : x \mapsto x - \lambda F(x)$ zu einer Kontraktion von $[a, b]$ wird. (Daher kann man die Gleichung $F(x) = 0$ durch die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ ersetzen.)

6. Finden Sie den numerischen Wert von $\sqrt{3}$ mit Genauigkeit 0,005, indem sie die Gleichung $x^2 - 3 = 0$ in eine Fixpunktgleichung umformen und diese mit Hilfe der Iterationen aus dem Banachschen Fixpunktsatz numerisch lösen. Hinweis: nutzen Sie die Präsenzaufgabe 5 auf dem Intervall $[1, 2]$.

7. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 + x - 1 = 0$ genau eine Lösung hat und finden Sie diese Lösung mit Genauigkeit 0,1. Hinweis: betrachten Sie die Einschränkung auf $[0, 1]$.

[1] Auch $C^0_{\text{stw}}\big([a, b]\big)$ ist mit dieser Metrik unvollständig, aber das ist viel komplizierter zu beweisen und wird in der VL Analysis III besprochen.