Übungsblatt 5 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

25. Mai 2020

Aufgabe 5.1

Seien $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ für das AWP

$$\begin{cases} y'(x) & = & ay(x) + b \\ y(0) & = & y_0 \end{cases} \quad .$$

(a) Die allgemeine Lösung wird mithilfe der Methode der Variation der Konstanten gesucht. Dazu löse man erst die homogene gDGL. Diese hat die Stammfunktion

$$\int a \, \mathrm{d}x = ax + c \quad ;$$

wir wählen $c = 0$, da wir nur eine Stammfunktion brauchen (dies wird auch im Folgenden implizit gemacht). Damit ist die homogene Lösung $y_h(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ nach Satz 68 mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}$. Durch die Variation $C \to C(x)$ hat man den speziellen Lösungsansatz $y_S(x) = C(x)\mathrm{e}^{ax}$. Einsetzen in die gDGL führt zu einer gDGL für die Konstanten:

$$C'(x)\mathrm{e}^{ax} + C(x)a\mathrm{e}^{ax} = aC(x)\mathrm{e}^{ax} + b \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = b\mathrm{e}^{-ax} \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-ax} \, .$$

Damit ist die gesamte allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad .$$

(b) Um die Anfangsbedingung zu berücksichtigen, setze man $x = 0$ und löse nach C:

$$y_0 = C - \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad C = y_0 + \frac{b}{a} \quad ,$$

womit sich als Lösung des AWP

$$y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

ergibt.

Die Analyse des Grenzwertes ist abhängig von a und y_0. Für $a < 0$ ist die Exponentialfunktion für $x \to +\infty$ konvergent, womit

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\frac{b}{a} \quad \forall\, y_0 \, .$$

Für $a > 0$ divergiert die Exponentialfunktion, aber für $y_0 = -\frac{b}{a}$ folgt auch für positives a

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\frac{b}{a} = y_0 \quad .$$

Aufgabe 5.2

(a) Hier verwende man wieder die Methode der Variation der Konstanten. Für die homogene Lösung finde man zunächst eine Stammfunktionen von $3/x$: $3\log(x)$ - beachte $x \in (0, +\infty)$. Die homogene Lösung ist somit für ein $C \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_h(x) = C\mathrm{e}^{\log(x^3)} = Cx^3 \quad .$$

Durch Variation wähle man den speziellen Ansatz $y_s(x) = C(x)x^3$ und setze diese in die gDGL ein:

$$C'(x)x^4 + 3x^3C(x) = 3C(x)x^3 + 2x^4 \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = 2x \quad .$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = Cx^3 + 2x^4 \quad .$$

Diese ist auf $(0, -\infty)$ für alle C definiert.

(b) Man verfährt analog wie in (a). Für die homogene Lösung finde man eine Stammfunktion von $x \mapsto -\tan(x)$:

$$\int -\tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\cos(x)) \quad .$$

Die homogene Lösung ist damit

$$y_h(x) = C\mathrm{e}^{\log(\cos(x))} = C\cos(x) \quad .$$

Variation der Konstanten motiviert den speziellen Lösungsansatz $y_s(x) = C(x)\cos(x)$. Einsetzen in die gDGL liefert

$$C'(x)\cos(x) - C(x)\sin(x) + C(x)\cos(x)\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x} \quad .$$

Sodann ist eine spezielle Lösung $y_s(x) = \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = C\cos(x) + \sin(x) \quad .$$

Diese Lösung ist auf $(0, \pi/2)$ für alle C definiert.

Aufgabe 5.3

(a) Eine homogene Lösung folgt durch Bestimmung einer Stammfunktionen von $x \mapsto 2/\sin(2x)$: Mit der Doppelwinkelformel $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)} &= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos(x)\sin(x)} = \int \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \log(\sin(x)) - \log(\cos(x)) = \log\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \log(\tan(x)) \quad . \end{aligned}$$

Damit ist die homogene Lösung durch Exponentierung und Multiplikation mit $C \in \mathbb{R}$

$$y_h(x) = C\tan(x) \quad .$$

Variation der Konstanten motiviert die spezielle Lösung $y_s(x) = C(x)\tan(x)$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion $C(x)$. Diese erhält man Einsetzen in die gDGL:

$$\begin{aligned} C'(x)\tan(x)\sin(2x) + C(x)\frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)} &= 2C'(x)\sin^2(x) + 2C(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2C(x)\tan(x) + 2\cos(x) \\ &\Leftrightarrow \; C'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \,. \end{aligned}$$

Durch Identifizierung mit der Kettenregel erhält man somit als spezielle Lösung

$$y_s(x) = -\frac{1}{\sin(x)}\tan(x) = -\frac{1}{\cos(x)}$$

und als Gesamtlösung

$$y(x) = C\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} = \frac{C\sin(x) - 1}{\cos(x)} \quad ,$$

Diese ist auf $(0, \pi/2)$ für alle C definiert.

(b) Für $x \to \pi/2^-$ und $C = 1$ hat man den Quotienten $0/0$, sodass man mit L'Hospital

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = -\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$$

erhält. Andernfalls divergiert die Lösung für $C \neq 1$.

Aufgabe 5.4

Seien für ein Intervall I zwei Funktionen $a, b \in C(I)$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ gegeben; die *Bernoulli-DGL* ist

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x) \quad .$$

(a)

Behauptung. Ist y genau dann eine positive Lösung der Bernoulli-DGL, wenn $z = y^{1-\alpha}$ auf demselben Intervall eine positive Lösung von $z'(x) = (1-\alpha)(a(x)z(x) + b(x))$ ist.

Beweis: Sei y eine positive Lösung der Bernoulli-DGl, so folgt für die Ableitung von $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ (für alle erlaubten α wohldefiniert, da y positiv) der Ausdruck

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{\mathrm{d}y^{1-\alpha}(x)}{\mathrm{d}x} = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)\left[a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x)\right] \\ &= (1-\alpha)\left[a(x)y^{1-\alpha} + b(x)\right] = (1-\alpha)(a(x)z(x) + b(x)) \end{aligned}$$

und damit der Beweis der Implikation von links nach rechts. Die andere Implikation folgt durch Einsetzen von $y^{1-\alpha}(x)$ in die umskalierte Gleichung für z und damit durch Rückwärtsrechnen des oberen Beweises.

(b) Hier wie auch in (c) verwende man die umskalierte DGL und löst diese konkret. Hier sind $\alpha = \frac{1}{2}$, $a(x) = 4/x$ und $b(x) = 2x$ stetige Funktionen. Die umskalierte DGL für die Bernoulli-DGL lautet

$$z'(x) = \frac{2}{x}z(x) + x \quad \text{für} \quad z(x) = \sqrt{y(x)} \quad .$$

Die homogenen Lösungen dieser Gleichung ist durch die Stammfunktionen $\log(x^2)$ für $2/x$ bestimmt:

$$z_h(x) = C\mathrm{e}^{\log(x^2)} = Cx^2 \quad .$$

Durch Variation der Konstanten hat man für die spezielle Lösung den Ansatz $z_s(x) = C(x)x^2$ und damit

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) = 2xC(x) + x \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \log(x) \quad .$$

Damit hat die umskalierte DGL die Lösung

$$z(x) = Cx^2 + \log(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left(Cx^2 + \log(x)\right)^2 \quad .$$

Die Lösung ist für alle C und $x > 0$ definiert und positiv.

(c) Hier sind $\alpha = 2$, damit $y(x) = z^{-1}$, sowie $a(x) = -\frac{1}{x}$ und $b(x) = -1$ für alle x. Die umskalierte DGl ist damit

$$z'(x) = \frac{z(x)}{x} + 1 \quad \text{für} \quad z(x) = \frac{1}{y(x)} \quad .$$

Mit der Stammfunktion $\log(x)$ ist eine homogene Lösung gegeben durch $z_h(x) = Cx$. Variation der Konstanten C erlaubt deren Bestimmung:

$$C'(x)x + C(x) = C(x) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \log(x) \quad .$$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$z(x) = Cx + \log(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{Cx + \log(x)} \quad .$$

Hier ist zu beachten, dass der Nenner strikt positiv ist, sodass das Spektrum der erlaubten Konstanten C entsprechend eingeschränkt werden muss.

Aufgabe 5.5

(a) Variablenseparation: $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = (2 + \sin(y))^{-1}$ sind stetig und damit Regelfunktionen. Die Stammfunktionen sind

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + C_1 \\ &\text{und} \\ \int g(y)\,\mathrm{d}y &= \int \frac{\mathrm{d}y}{2+\sin(y)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(y/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2\end{aligned}$$

mithilfe von Aufgabe 4 Übungsblatt 1; C_1 und C_2 sind Integrationskonstanten. Sodann

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{y'(x)}{2+\sin(y)} \\ \Leftrightarrow \int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{y'(x)}{2+\sin(y)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{2+\sin(y)}\Big|_{y=y(x)} \\ \Leftrightarrow -\cos(x) + C &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(y(x)/2)+1}{\sqrt{3}}\right) \\ \Leftrightarrow \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(C - \cos(x))\right] &= \frac{2\tan(y(x)/2)+1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow y(x) &= 2\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(C-\cos(x))\right] - \frac{1}{2}\right) + 2\pi n\,, n \in \mathbb{Z} \quad .\end{aligned}$$

Zur Wohldefiniertheit beachte, dass der Tangens nur für Argumente in $(-\pi/2, \pi/2)$ definiert ist; damit muss die Integrationskonstante eingeschränkt werden, sodass

$$|C - \cos(x)| < \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad .$$

(b) Zunächst bestimme man die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}(x)$ zu $\sinh(x)$. Für einen konkreten Ausdruck $\tilde{g}(y)$ des *Area Sinus hyperbolicus* betrachte man die Bestimmungsgleichung

$$y = \sinh(\tilde{g}(y)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\tilde{g}(y)} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\tilde{g}(y)}}\right) \quad .$$

Man mache zur Vereinfachung den Ansatz $\tilde{g}(y) = \log(g(y))$:

$$\begin{aligned}y &= \sinh(\tilde{g}(y)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\log(g(y))} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\log(g(y))}}\right) = \frac{1}{2}\left(g(y) - \frac{1}{g(y)}\right) \\ \Leftrightarrow 2y &= \frac{g^2(y)-1}{g(y)} \\ \Leftrightarrow 0 &= g^2(y) - 2yg(y) - 1 \\ \Leftrightarrow g(y) &= y \pm \sqrt{y^2+1} \quad .\end{aligned}$$

Es ist $y \pm \sqrt{y^2+1} > 0$ zu fordern und ist weniger restriktiv für den positiven Zweig. Somit ist die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arsinh}(y) = \tilde{g}(y) = \log(g(y)) = \log(y + \sqrt{y^2+1}) \quad .$$

Unter Zuhilfenahme der Präsenzübung 1 Aufgabe 1 folgt mit Variablenseparation

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{y'(x)}{\sqrt{y^2(x)+1}} \\ \Leftrightarrow \int 2x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{y'(x)}{\sqrt{y^2(x)+1}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}} \Bigg|_{y=y(x)} \\ \Leftrightarrow x^2 + C &= \log(y + \sqrt{y^2(x)+1}) = \operatorname{arsinh}(y(x)) \\ \Leftrightarrow y(x) &= \sinh(x^2 + C) \quad . \end{aligned}$$

Die Lösung ist für alle C definiert.

(c) Hier vollziehe man zunächst gemäß dem Hinweis eine Substitution, um die gDGL auf die gewöhnliche Form zu bringen. Mit $y'(x) = z'(x) - 3$ ist die umformulierte DGL

$$z'(x) = \cos(z(x)) + 3 \quad .$$

Diese kann nun mithilfe einer Variablenseparation gelöst: Die Funktion $z \mapsto (\cos(z) + 3)^{-1}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und damit Regelintegrierbar. Die Berechnung erfolgt mithife einer Weierstraß-Substitution:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}z}{3+\cos(z)} &= \int \frac{2}{1+t^2} \left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{-1} \mathrm{d}t \Bigg|_{t=\tan(z/2)} = 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{3+3t^2+1-t^2} \Bigg|_{t=\tan(z/2)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} \Bigg|_{t=\tan(z/2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\tau^2+1} \Bigg|_{\tau=\frac{\tan(z/2)}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\tau)|_{\tau=\frac{\tan(z/2)}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan(z/2)}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{z'(x)}{\cos(z(x))+3} &= 1 \\ \Leftrightarrow \int \frac{z'(x)}{\cos(z(x))+3} &= \int \frac{\mathrm{d}z}{\cos(z)+3} \Bigg|_{z=z(x)} = \int \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan(z(x)/2)}{\sqrt{2}}\right) &= x + C \\ \Leftrightarrow \frac{\tan(z(x)/2)}{\sqrt{2}} &= \tan(\sqrt{2}(x+C)) \\ \Leftrightarrow z(x) &= 2\arctan\left(\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}(x+C))\right) + 2\pi n \,, n \in \mathbb{Z} \quad . \end{aligned}$$

Sodann folgt durch Umkehrung der Translation

$$y(x) = z(x) - 3x = 2\arctan\left(\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}(x+C))\right) - 3x + 2\pi n \,, n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Diese Lösung ist definiert, wenn die Integrationskonstante so gewählt wird, dass $|x + C| < \frac{\pi}{\sqrt{8}}$.

(d) Hier vollziehe man denselben Trick wie in (c): Wähle $z(x) = y(x) + x$ mit $y'(x) = z'(x) - 1$, sodass

$$z'(x) = z^2(x) + 1$$

zu lösen ist. Durch Variablenseparation unter nochmaliger Zuhilfenahme eines Standardintegrals aus der ersten Präsenzübung folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{z'(x)}{z^2(x) - 1} \\
\Leftrightarrow \int \mathrm{d}x &= \int \frac{z'(x)}{z^2(x) - 1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 1}\bigg|_{z=z(x)} \\
\Leftrightarrow x + C &= \arctan(z(x)) \\
\Leftrightarrow z(x) &= \tan(x + C) + \pi n \,, n \in \mathbb{Z} \quad .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$y(x) = z(x) - x = \tan(x + C) - x + 2\pi n \,, n \in \mathbb{Z} \,,$$

Lösung der gDGL. Alle C, welche $|x + C| < \frac{\pi}{2}$ erfüllen, kommen als Integrationskonstanten für die wohldefiniertheit in Frage.

Zusatz

Lemma. Sei I ein reelles geschlossenes oder nach oben halboffenes Intervall für $a, b \in C(I, \mathbb{R})$ und $x_0 \in I$;

(a) Erfüllt $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$y'(x) \leq a(x)y(x) + b(x) \quad , \tag{1}$$

so folgt für $x \in I$ die Ungleichung

$$y(x) \leq y(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{2}$$

(b) Erfüllt $y \in C(I, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$y(x) \leq b(x) + \int_{x_0}^{x} a(t)y(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

und sei zudem $a(x) \geq 0$, so folgt für $x \in I$ die Ungleichung

$$y(x) \leq b(x) + \int_{x_0}^{x} a(t)b(t)\mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{4}$$

Zeigen Sie dieses Lemma! (Hinweis: Für (a) multiplizieren Sie die Ungleichung mit $\mathrm{e}^{f(x)}$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion $f(x)$ so, dass Teile der Ungleichung als Ableitung zusammengefasst werden können (s.g. *Euler-Multiplikator*); für (b) nutze man (a))