Aufgabe 1 (5 × 2P). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

(a). Es gibt Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, die nicht surjektiv sind.

Die Aussage ist wahr.

Begründung: zB ist $f: \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht surjektiv, denn $\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(b). Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Addition $\oplus$ und der Skalarenmultiplikation $\odot$, welche gegeben sind durch

$$x \oplus y := x + y + 1 \quad \text{und} \quad \lambda \odot x := \lambda \cdot x \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Die Aussage ist falsch.

Begründung: Distributivgesetz gilt nicht, zB:
$2 \odot (1 \oplus 1) = 2 \odot 3 = 6$, aber
$(2 \odot 1) \oplus (2 \odot 1) = 2 \oplus 2 = 5 \neq 6$.

(c). Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Sei $(v_1, \ldots, v_s)$ linear unabhängig in V mit $s < n$. Dann gibt es $w_1, \ldots, w_t \in V$ mit der Eigenschaft, dass $(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t)$ eine Basis von V ist.

Die Aussage ist wahr.

Begründung: Dies gilt nach dem Basisergänzungssatz.

(d). Seien K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ ist linear, wenn $f(0) = 0$ gilt.

Die Aussage ist falsch.

Begründung: zB. für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ gilt $f(0) = 0$, aber f ist nicht linear, denn $f(2x) = 4x^2 = 4 \cdot f(x) \neq 2 \cdot f(x)$.

(e). Es gibt keine Matrix in $\mathbb{C}^{3\times 3}$, welche nur reelle Eigenwerte hat und deren charakteristisches Polynom keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Die Aussage ist falsch.

Begründung: Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und $\chi_A(t) = (1-t)(-1-t)(-t)$.

Aufgabe 2 (8P + 8P). Sei $a \in \mathbb{Q}$. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & ax_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(a). Für welche Werte $a \in \mathbb{Q}$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar?

(b). Betrachten Sie den Fall $a = 1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des entsprechenden Gleichungssystems.

a) Betrachte erweiterte Matrix und bestimme ZSF:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \mapsto Z_1 - aZ_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-2a & 0 & 0 & 1-a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tausche Z_2 in 1. Zeile, Z_3 in 2. Zeile, Z_1 in 3. Zeile

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (1-2a) & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 - (1-2a)Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & 1-a \end{array}\right)$$

Das LGS ist lösbar $\iff (1-2a)\,x_3 = 1-a \quad (*)$ hat Lösung

$\iff a \neq \frac{1}{2}$.

Beachte: für $a = \frac{1}{2}$ ist $(*)$: $0 = \frac{1}{2}$ ↯.

$\Rightarrow$ Für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ist das LGS lösbar, für $a = \frac{1}{2}$ nicht.

b) $a = 1$ in ZSF aus a) und reduz. Gauß NF. bestimmen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Danach: } Z_3 \cdot (-1)]{Z_2 \mapsto Z_2 - Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \mapsto Z_1 - 2Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Pivotelemente sind in 1., 2., 4. Spalte und x_3 ist eine freie Variable.

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_3 \in \mathbb{Q} \right\}$

Aufgabe 3 (12P + 4P). Sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a). Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix Q und eine Diagonalmatrix D mit der Eigenschaft, dass $M = QDQ^{-1}$ gilt.

(b). Berechnen Sie $\cancel{B^{200}}$. M^{200}

a) Bestimme EW von M; $\chi_M(t) = \det(M - tE_3) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} -t & 2 & 3 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}\right) = (-t)\cdot(-1-t)(1-t)$$

$\Rightarrow \lambda_1 := 0,\ \lambda_2 := -1,\ \lambda_3 := 1$ sind die EW von M.

Bestimme Basis für $\mathbb{R}^{3\times 1}$ aus EV von M

$$\mathrm{Eig}(M,\lambda_1) = \ker(M) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{z_1 \mapsto z_1 + 2z_2 - 3z_3}{=}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\mathrm{Eig}(M,\lambda_2) = \ker(M + E_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{z_1 \to z_1 - 3z_3}{=} \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\mathrm{Eig}(M,\lambda_3) = \ker(M - E_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{z_1 \to z_1 + z_2}{=} \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\Rightarrow \mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist Basis aus EV von M für $\mathbb{R}^{3\times 1}$

und für $Q := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

gilt: $M = QDQ^{-1}$.

Matrikelnr.: 12345678 **Name:** Max Musterfrau Blatt 4

(Fortsetzung von Aufgabe 3)

b) Es gilt: $M^{200} = (QDQ^{-1})^{200} = QD^{200}Q^{-1}$.

Weiter ist:

$$D^{200} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 0^{200} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{200} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und Q^{-1} ist:

$$(Q|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + 2Z_2 - 3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{200} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}},$$

Aufgabe 4 (4 × 3P). Es seien $A, B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$ in $\mathbb{Q}^{2\times 1}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{S} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Seien $F_A : \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}, x \mapsto Ax$ und $F_B : \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}, x \mapsto Bx$ die linearen Abbildungen definiert durch A bzw. B.

(a). Rechnen Sie nach, dass $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^{2\times 1}$ ist.

(b). Bestimmen Sie $M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}(F_A)$.

(c). Berechnen Sie $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}(F_B)$.

(d). Berechnen Sie $M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}}(F_B \circ F_A)$.

a) Da $\det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1-2 = -3 \neq 0$ ist und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{2\times 1} = 2$, ist $S = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine max. lin. unabh. Teilmenge und somit eine Basis von $\mathbb{Q}^{2\times 1}$.

b) $F_A\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$F_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow M^S_{\mathcal{E}}(F_A) = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}.$

c) $F_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F_B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M^{\mathcal{E}}_S(F_B) = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$

d) $M^S_S(F_B \circ F_A) = M^{\mathcal{E}}_S(F_B) \cdot M^S_{\mathcal{E}}(F_A) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}}.$

Aufgabe 5 (12P + 3P). Sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ die Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben durch

$$\mathcal{B} := (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

(a). Verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ zu bestimmen, wobei wir $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit dem zugehörigen Standardskalarprodukt versehen.

(b). Geben Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{C}$ an.

a) Setze $v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\tilde{w}_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle \cdot w_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - (-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

und $w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{w}_3 := v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und $w_3 := \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ ist eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

b) Es gilt:
$\langle v, w_1 \rangle = 0$, $\langle v, w_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \sqrt{2}$

$\langle v, w_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot w_2 + \sqrt{2} \cdot w_3$.

Aufgabe 6 (4P + 2P). (a). Seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Für $c \in K$ definieren wir die Matrix $B_c := A - cE_n$. Beweisen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $-c$ kein Eigenwert von B_c ist.

(b). Es sei $\langle\, , \,\rangle\colon \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Zeigen Sie: sind $v, w \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ und gilt $\langle v, w\rangle = 0$, dann sind v und w linear unabhängig.

a) A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(\underbrace{A - cE_n}_{=B_c} + c\cdot E_n) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(B_c - (-c)\cdot E_n) \neq 0 \Leftrightarrow$ $-c$ ist kein EW von B_c. $\square$

b) Wir zeigen: (v,w) lin. abh. $\Rightarrow$ $\langle v,w\rangle \neq 0$.

Falls (v,w) lin. abh. $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ nicht beide Null mit $\lambda v + \mu w = 0$

Da $v, w \neq 0$ folgt $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$

Insbesondere: $v = -\frac{\mu}{\lambda} w$.

$\Rightarrow \langle v, w\rangle = \langle -\frac{\mu}{\lambda}\cdot w, w\rangle = \underbrace{\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\langle w, w\rangle}_{\neq 0 \text{ da } w \neq 0} \neq 0.$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$.