9 Vollständige Induktion

Wie so oft wollen wir eine bestimmte Aussage formal beweisen. Bei der Induktion geht ist immer um Aussagen, die von einer natürlichen Zahl abhängen. Ein Beispiel für eine solche Aussage ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1 \ .$$

Um diese Aussage zu beweisen, können wir probieren, einfach auszumultiplizieren:

$$\begin{aligned}(n+1)(n-1) &= (n+1)\cdot n + (n+1)\cdot(-1) \\ &= n^2 + n + (-n) - 1 = n^2 - 1\end{aligned}$$

Tatsächlich konnten wir unsere Behauptung so beweisen. Warum also Induktion? Um dies zu verstehen, betrachten wir das folgende Gedankenexperiment. Ein Hase sitzt einen Meter vor einer Möhre. Um zu der Möhre zu gelangen, springt der Hase immer wieder in Richtung Möhre und legt dabei jedes Mal die Hälfte der Strecke zurück, die er noch von der Möhre entfernt ist. Wir wollen nun wissen, wie weit der Hase nach nach dem ersten, zweiten, ... und n-ten Sprung gekommen ist.

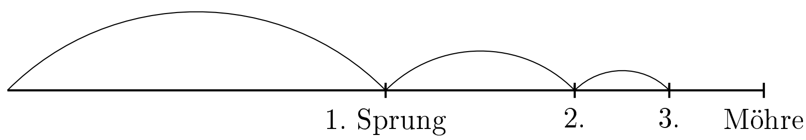

Abbildung 9.1: Die Position des Hasen.

Wir stellen eine Tabelle aus, um nach den ersten Sprüngen zu sehen, wie weit der Hase gekommen ist:

Sprung	0	1	2	3
Position	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

Allgemein stellen wir fest: Der Hase hat nach dem n-ten Sprung

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$$

Meter zurückgelegt. Durch scharfes Hinsehen stellen wir folgende Vermutung auf:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Mit jedem Sprung halbiert der Hase die Strecke, die er noch vor sich hat. Aber wie können wir unsere Vermutung nun beweisen? Es sieht zumindest nicht danach aus, als könnte man die Gleichung wieder direkt nachrechnen. Wie vielleicht schon vermutet, lässt sich unsere Behauptung aber mit vollständiger Induktion zeigen. Folgendes stellen wir jetzt schon fest: Wenn wir wissen, wo der Hase nach dem n-ten Sprung steht, können wir leicht sagen, wo er nach dem $(n+1)$-ten Sprung sein wird. Dies gibt schon einen ersten Hinweis darauf, was bei einer Induktion passiert. Diese führen wir nun formal ein und beweisen im Anschluss unsere Vermutung über den Hasen.

9.1 Das Schema

Im Induktionsbeweis geht man stets nach folgendem Schema vor:

Satz 9.1
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Falls gilt:

1. $A(n)$ ist wahr für $n = 1$ (**Induktionsanfang** genannt) und
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus der Gültigkeit von $A(n)$ folgt auch die Gültigkeit von $A(n+1)$ (**Induktionsschritt** genannt),

dann ist $A(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen n.

Dass dies tatsächlich der Fall ist, beweisen wir nun formal durch einen Widerspruchsbeweis:

Beweis: Angenommen, $A(n)$ wäre falsch für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$.
Sei dann $\tilde{n}$ die kleinste natürliche Zahl, für die $A(\tilde{n})$ falsch ist. Nach (1) ist $\tilde{n} \neq 1$, da $A(1)$ wahr ist. Folglich ist $\tilde{n} - 1$ ebenfalls eine natürliche Zahl und $A(\tilde{n} - 1)$ ist wahr, da ja $\tilde{n}$ die kleinste Zahl ist, für die A falsch ist. Nach (2) ist damit jedoch auch $A(\tilde{n} - 1 + 1) = A(\tilde{n})$ wahr, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Man kann sich die Gültigkeit des Induktionsschemas aber auch anschaulich klar machen: Wir betrachten dazu eine unendliche Reihe korrekt aufgestellter Dominosteine. Es existiert ein erster Stein, der angestoßen werden muss. Sobald der erste Stein umfällt, stößt er den zweiten Stein um, der dann seinerseits den dritten Stein umwirft, usw.
Der erste Stein verdeutlicht unseren Induktionsanfang. Wenn es keinen ersten Stein gibt, dann existieren gar keine Steine. Es muss ihn also geben und er muss sich umstoßen lassen.
Desweiteren müsste die Regel gelten, dass ein umgefallener Stein den nächsten mit sich zieht. Im Induktionsschritt (manchmal auch „Induktionsschluss“) müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass diese Regel auch wirklich gilt. (Der Teil innerhalb des

Induktionsschrittes, in dem dies direkt nachgewiesen wird, wird oft auch Induktionsbeweis genannt.)
Wenn wir also nachweisen können, dass alle Steine korrekt aufgestellt sind, haben wir gezeigt, dass die komplette (unendliche) Dominoreihe umfällt, wenn man den ersten Stein umstößt.

9.2 So läuft der Hase

Der folgende Satz gibt uns Aufschluss über die zurückgelegte Strecke des Hasen nach n Sprüngen.

Satz 9.2
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \ .$$

Beweis: *(durch vollst. Induktion)*

Induktionsanfang (IA): $(n = 1)$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1} \ .$$

Induktionsschritt (IS): $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):

Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \ .$$

Zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \ .$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} \overset{\mathsf{IV}}{=} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Bei einer Induktion macht man leicht Fehler, wenn man die Induktion nicht ordentlich aufschreibt! Deshalb ist es (vor allem anfangs) sehr wichtig, dass man sich euch an das obige Schema (oder an das des Dozenten) hält, wenn man selbst eine Induktion durchführt.

Wir wollen nun noch eine zweite Aussage mit Hilfe eines Induktionsbeweises zeigen.

9.3 Beweis der Gaußschen Summenformel durch vollständige Induktion

Satz 9.3 (Gaußsche Summenformel)
Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$$

Beweis: *(durch vollst. Induktion)*

Induktionsanfang (IA): $(n = 1)$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1^2+1}{2}$$

Induktionsschritt (IS): $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):

Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} \quad .$$

Zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} \quad .$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)$$

Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung, in der wir angenommen haben, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$$

Durch Einsetzen erhalten wir demnach

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) &\overset{\mathsf{IV}}{=} \frac{n^2+n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{(n^2+2n+1)+(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Mit logischen Umformungen haben wir also gezeigt, dass das Einsetzen von $n+1$ auf der linken Seite der Gleichung dazu führt, dass auch auf der rechten Seite die Formel mit eingesetztem $n+1$ steht. Und da wir bei den Umformungen die Induktionsvoraussetzung verwendet haben, ist damit bewiesen, dass aus der Gültigkeit der Aussage für n die Gültigkeit für $n+1$ folgt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

9.4 Abschließende Bemerkungen

Zum Abschluss tragen wir nun die wichtigsten Bemerkungen zur vollständigen Induktion zusammen. Zunächst ist diese Beweistechnik (gerade anfangs) fehleranfällig, wobei Fehler mit einer sorgfältig eingehaltenen Notation oftmals verhindert werden können. Mehr noch kann man die Induktion in den meisten Fällen mittels „Schema F“ durchführen und kommt manchmal viel eher zum Ziel als bei anderen Beweisarten. **Achtung:** Jeder Dozent hat eine eigene Art, die vollständige Induktion aufzuschreiben, die Grundstruktur ist aber immer dieselbe. Wundert euch also nicht, wenn in euren ersten Vorlesungen das Schema etwas anders aufgeschrieben wird.

Bevor man eine vollständige Induktion durchführen kann, braucht man natürlich eine Vermutung (Gleichung/ Ungleichung/ Teilbarkeit etc.), die gezeigt werden soll.

Wie ihr auf dem Übungszettel feststellen werdet, muss die Induktion in ihrem Induktionsanfang nicht zwangsläufig mit $n = 1$ beginnen. Auch eine (unendliche) Dominosteinkette kann mit einem späteren Stein als mit dem ersten angestoßen werden... Nebenbei bemerkt muss die Variable nicht immer n heißen, auch wenn dies die bei

Induktionen meistverwendete Bezeichnung ist.

Induktionen kommen neben der vollständigen auch in anderen Formen vor, denen ihr im Laufe eures Studiums noch sicher begegnen werdet. So gibt es beispielsweise eine Form, bei der man die zu zeigende Aussage für 1 bis n voraussetzt und dann auf die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ schließt. Was jedoch alle Induktionsarten gemein haben, ist die Tatsache, dass im Induktionsschritt stets die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.

Außerdem ist noch zu bemerken, dass die vollständige Induktion oft als etwas unschön angesehen wird. Dies hat den Grund, dass die sie zwar oft dabei hilft, eine Aussage zu beweisen, aber sie hilft weder, die zu zeigende Aussage zu finden, noch wirklich zu verstehen, warum eine Aussage gilt. Zum Beispiel konnten wir die gaußsche Summenformel gut mit Induktion beweisen, da uns die Formel gegeben wurde. Es war hierfür aber notwendig, dass wir die Formel, die wir beweisen wollten, schon wussten. Außerdem konnten wir so zwar verifizieren, dass die Formel gilt, haben aber keine Anschauung, warum diese gilt (die es bei anderen Beweisen dieser Formel gibt). Wenn man sie so beweist, wird man sich die Formel abgesehen von reinem Auswendiglernen nicht merken können, was bei anschaulichen Beweisen nicht der Fall ist.

Autoren dieses Kapitels:

2019: Konstantin Meiwald, Nils Näthke
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2013: Michael Oltmanns, Alexander Bontjes van Beek