Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Beweistechniken I

× Aufgabe 1: Quadrate ungerader Zahlen

Beweise folgenden Satz. Schreibe dabei zuerst Voraussetzung und Behauptung sauber auf.

Satz I
Das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl ist wieder ungerade.

Lösung: Voraussetzung: Sei $m \in \mathbb{Z}$ ungerade.
Behauptung: m^2 ist ungerade.
Beweis: Da m ungerade ist, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $m = 2k+1$. Damit ist $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$. Da $(2k^2+2k)$ wieder eine ganze Zahl ist, ist m^2 ungerade. $\square$

× Aufgabe 2

Beweise folgenden Satz. Schreibe dabei zuerst Voraussetzung und Behauptung sauber auf.

Satz II
Ist n eine ganze Zahl, so ist $n + n^2$ gerade.

Hinweis: Fallunterscheidung in n gerade und n ungerade.
Lösung: Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{Z}$.
Behauptung: $n + n^2$ ist gerade.
Beweis: Fall 1: n gerade. Dann ist nach Satz 7.5 auch n^2 gerade und damit nach Satz 7.1 $n + n^2$ gerade.
Fall 2: n ungerade. Dann ist nach Aufgabe 1 auch n^2 ungerade, und wieder nach Satz 7.1 $n + n^2$ gerade. $\square$

Aufgabe 3

Vervollständige den Beweis von Satz 7.5, also zeige, dass für Mengen A, B, C die Relation

$$(A \cup B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

gilt. Schreibe wieder vorher Voraussetzung und Behauptung auf.
Lösung: Voraussetzung: Seien A, B, C Mengen.
Behauptung: $(A \cup B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ Beweis: Sei $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Fall 1: $x \in A \setminus C$, *d.h.* $x \in A$ *und* $x \notin C$. *Wegen* $x \in A$ *ist auch* $x \in A \cup B$. *Da noch zusätzlich* $x \notin C$ *gilt, ist also* $x \in (A \cup B) \setminus C$.
Fall 2: $x \in B \setminus C$, *d.h.* $x \in B$ *und* $x \notin C$. *Wegen* $x \in B$ *ist auch* $x \in A \cup B$. *Da noch zusätzlich* $x \notin C$ *gilt, ist also* $x \in (A \cup B) \setminus C$. $\square$

! Aufgabe 4: Dreiecksungleichung

Es sei an die Definition des Betrages erinnert:

Definition III
Sei $x \in \mathbb{R}$. Der **Betrag** von x ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Beweise folgenden Satz. Schreibe dabei zuerst Voraussetzung und Behauptung sauber auf.

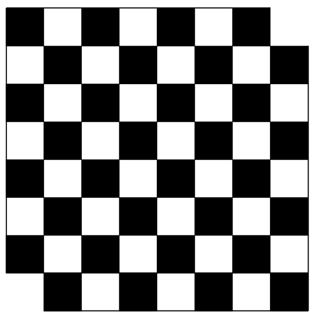
Satz IV
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Hinweis: Welche Relation gilt zwischen x *und* $|x|$, *welche zwischen* $-x$ *und* $|x|$? *Mache außerdem eine Fallunterscheidung für beide Fälle, die für* $x + y$ *auftreten können.*
Lösung: Voraussetzung: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.
Behauptung: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Beweis: Es gilt für $z \in \mathbb{R}$ *stets* $z \leq |z|$, *da* $z = |z|$ *falls* $z \geq 0$, *und* $z \leq 0 \leq |z|$ *falls* $z < 0$.
Außerdem ist $-z \leq |z|$, *da* $-z \leq 0 \leq z = |z|$, *falls* $z \geq 0$, *und* $-z = |z|$, *falls* $z < 0$.
Fall 1 *Sei* $x + y \geq 0$. *Es ist* $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, *also* $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Fall 2 *Sei* $x + y < 0$. *Es ist* $-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$, *also* $|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$.
$\square$

! Aufgabe 5: Domino

Eine Knobelaufgabe für Rätselfreunde (alle anderen können sie auslassen):

Stell dir vor, du hast ein Schachbrett mit 8×8 schwarzen und weißen Feldern. Nun entfernst du zwei gegenüberliegende Ecken dieses Schachbretts (siehe Bild). Ist es möglich, 31 Dominosteine (ohne Überdeckung) so auf das entstandene Brett zu legen, dass alle Felder bedeckt sind, wenn ein Dominostein genau 2 (senkrecht oder waagerecht) benachbarte Felder abdeckt? Beweise deine Antwort!



Lösung: Geht nicht. Jeder Dominostein verdeckt ein weißes und ein schwarzes Feld. Es gibt zwei weiße Felder weniger als schwarze.