Vorkurs Mathematik 2019 | Lösungen zum Thema

Revisionsquiz

Frage 1 Zeile Grün (Teilen durch 0)

Frage 2 $\neg Y \Rightarrow \neg X$

Frage 3 Vektor und Vektor und Matrix und Matrix

Frage 4 Ja $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Frage 5 Spiegelung an der Winkelhalbierenden

Frage 6 wahr

Frage 7 $M = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Z}$

Frage 8 Kreisscheibe

Frage 9 Alles, was glänzt, ist Gold. Fomalisiert wäre „Es ist nicht alles Gold, was glänzt.“ zum Beispiel: $\exists x \in A : x \notin B$ mit $A = \{x | x \text{ glänzt}\}$ und $B = \{x | x \text{ ist Gold}\}$ (Weil „Es ist nicht alles Gold, was glänzt“ sprachlich „Es existiert etwas, das glänzt, aber nicht Gold ist“ entspricht.) Die Negation wäre dann $\forall x \in A : x \in B$, also „Alles, was glänzt, ist Gold.“

Frage 10 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Bildung eines Eintrags im Pascalschen Dreieck als Summe der beiden darüber liegenden Einträge)
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie im Pascalschen Dreieck)
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (nach Definition des Binomialkoeffizienten)

Frage 11 f hat genau eine Nullstelle. (Lösung lässt sich schnell mit Hilfe der pq-Formel herleiten)

Frage 12 $\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$

Frage 13 Nein. Ein Stein bedeckt entweder drei schwarze und ein weißes Feld oder drei weiße und ein schwarzes Feld, weshalb eine **gerade** Anzahl an Steinen benötigt wird, um das Feld vollständig zu bedecken. Auf der anderen Seite hat das Feld 60 Kacheln, wofür demnach $\frac{60}{4} = 15$ Steine benötigt werden – eine **ungerade** Anzahl.

Frage 14 65 536.
Es ist $|\emptyset| = 0$, weshalb $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = 2^1 = 2$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 2^2 = 4$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))| = 2^4 = 16$ und $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))| = 2^{16} = 65\,536$. Für eine anschauliche Überlegung, bedenke dass $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$

Frage 15 $(0, 4) \cup (5, 6)$

Frage 16 Die Aussage ist falsch, da $f(f^{-1}(B)) = B$ nicht für jede Menge $B \subseteq N$ gelten muss. Zum Beispiel für $M = N = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $B = [-10, \infty)$.

Frage 17 Nein, nur falls f injektiv ist. Sonst Gegenbeispiel mit $M_1 = \{x\}$, $M_2 = \{y\}$ mit $x, y \in M$, $x \neq y$. Falls f injektiv ist, gilt die Aussage allerdings, da

$$y \in f(M_1) \cap f(M_2) \Leftrightarrow y \in f(M_1) \text{ und } y \in f(M_2) \overset{f \text{inj.}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(\{y\}) \subseteq M_1 \text{ und } f^{-1}(\{y\}) \subseteq M_2$$

Frage 18 Ja. Wähle zum Beispiel jeweils eine geeignete einpunktige Menge (Wertevorrat gleich Bildmenge des einelementigen Definitionsbereichs).

Frage 19 Nein. Betrachte z.B. die durch $a_n = -n$ definierte Folge.

Frage 20 Nein. Für die Definition von Konvergenz sind alle $n \geq n_0$ nötig. Gegenbeispiel wäre die durch $a_n = n$ definierte Folge mit $a = 2$. Wähle dort $n_0 = 1$ und $n = 2$ für beliebiges ε.