Lösungshinweise für Blatt 1 Aufgabe 1.5

(a). *Geben Sie ein Beispiel einer Relation, die reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv ist.*

Vorüberlegeung: Wir wollen erreichen, dass Elemente a, b, c existieren, für die aus $a \sim b$ und $b \sim c$ nicht folgt, dass $a \sim c$ ist.

Versuchen wir uns an einem Beispiel aus der wahren Welt: Eine Idee wäre deine maximalen Abstand von zwei Dingen zu verwenden, denn nur weil Oldenburg von Hannover weniger als 200km entfernt ist und Hannover von Magdeburg weniger als 200km entfernt ist, ist Oldenburg nicht automatisch weniger als 200km von Magdeburg entfernt.
Beachten Sie, dass wir dabei "weniger als 200km voneinander entfernt" (und nicht "ist 200km entfernt") nehmen, damit wir die Reflexivität wahren. Die Symmetrie ist bei einem Abstand meist gegeben.

Hieraus ergibt sich das Beispiel: Sei M die Menge der Städte in der Welt, die einen Hauptbahnhof besitzen. Stadt A aus M soll in Relation zu Stadt B aus M stehen, wenn der Hauptbahnhof von Stadt A weniger als 200km vom Hauptbahnhof von Stadt B entfernt ist.
Wie Sie nachprüfen können, ist die Relation reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv.

Hier noch ein weiteres Beispiel:

Vorraussetzung: Sei $M = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Wir definieren die Relation $\diamondsuit$ auf M durch: für $a, b \in M$ gilt

$$a \diamondsuit b \;:\Leftrightarrow:\; |a - b| \leq 5.$$

Behauptung: $\diamondsuit$ ist reflexiv, symmetisch, aber nicht transitiv.

Beweis. Selbst. (oder ggf. in der Sprechstunde von Dr. Schober nachfragen). □

(b). *Geben Sie ein Beispiel einer Relation, die symmetrisch, transitiv, aber nicht reflexiv ist.*

Vorüberlegeung: Wir suchen eine Menge M und eine Relation $\bigstar$ auf M, sodass es ein $a \in M$ gibt, dass nicht in relation zu sich selbst steht.

Ein erster Ansatz wäre $M = \mathbb{Z}$ zu wählen und zu sagen $a \bigstar b$ genau dann, wenn $a \neq b$ ist. Diese Relation ist symmetrisch, und sie ist sicherlich nicht reflexiv. Allerdings ist $\bigstar$ nicht notwendigerweise transitiv.
Andererseits: Für die Gleichheit = auf $M = \mathbb{Z}$ gilt, dass sie symmetrisch, transitiv und reflexiv ist.
Aber wir erinnern uns: Damit eine Relation nicht reflexiv ist, muss es nur *ein* Element geben, dass nicht in Relation zu sich selbst. Wie können wir die obigen Beispiel Abwandeln, um das zu erreichen?

Vorraussetzung: Sei $M = \mathbb{Z}$. Wir definieren die Relation $\bigstar$ auf M durch: für $a, b \in M$ gilt

$$a \bigstar b \;:\Leftrightarrow:\; a = b \neq 5.$$

Behauptung:
$\bigstar$ ist transitiv, symmetisch, aber nicht reflexiv:

Beweis. Selbst. (oder ggf. in der Sprechstunde von Dr. Schober nachfragen). □