Wintersemester 2014/15
Prof. Dr. Florian Heß // Dietrich Kuhn
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Klausur zum Modul
Einführung in die Zahlentheorie und Computeralgebra

Name: .... Matr.-Nr: ....

Studiengang: .... Tutor: Dietrich Kuhn ....

- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, bei denen insgesamt 50 Punkte erreicht werden können. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars (es sind insgesamt 22 Seiten). Am Ende finden Sie noch einige Seiten Konzeptpapier.
- Es sind **keine Hilfsmittel** – insbesondere keine Taschenrechner oder persönliche Notizen – erlaubt. Bitte legen Sie Ihr Mobiltelefon oder sonstige Geräte, falls vorhanden, ausgeschaltet in ihre Tasche.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den ausgeteilten Blättern (inklusive Rückseiten) gewertet. Falls eine Bearbeitung nicht direkt unter der Aufgabenstellung berücksichtigt werden soll, **muss** darauf verwiesen werden!
- Das Entfernen der Heftklammern ist **nicht** erlaubt. Bewertungsrelevante Bearbeitung erfolgt ausschließlich mit dokumentenechten Stiften (Kugelschreiber, Füller, o.ä., **kein** Bleistift oder Tipp-Ex).
- Alle Schritte müssen begründet werden. Für nicht nachvollziehbare Rechnungen oder Folgerungen werden Punkte abgezogen. Vorherige Aufgabenteile dürfen verwendet werden.
- **Erklärung: Mir ist bekannt, dass Täuschungsversuche zum Nichtbestehen der Klausur führen!**

Zur Kenntnis genommen: ....
(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	5	K	B	M
Punkte								
Korrektur								

Note:	(Prof. Dr. F. Heß)

1. Aufgabe: p-adische Zahlen (9P=2P+2P+2P+3P)

a) Für welche p konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^i$ in $\mathbb{Q}_p$? Was ist dann der Grenzwert?

b) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{p^n+1}=0$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^n+1}=1$ in $\mathbb{Q}_p$, wobei p eine Primzahl ist. Wie sieht es mit der Konvergenz bezüglich des archimedischen Betrags von $\mathbb{Q}$ aus?

c) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Geben Sie eine konkrete Folge an, welche bezüglich eines nicht-archimedischen Betrags von $\mathbb{Q}$ gegen a und bezüglich des archimedischen Betrags von $\mathbb{Q}$ gegen b konvergiert.

d) Zeigen Sie: Für $p, n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ mit p Primzahl und $p \equiv 1 \bmod n$ gibt es mindestens ein Element $x \in \mathbb{Z}_p$ mit $x^n = 1$ und $x^m \neq 1$ für alle $m \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ mit $m < n$.

2. Aufgabe: Ganzheit und Primideale (14P=2P+3P+2P+4P+3P)

Sei $K = \mathbb{Q}[\rho]$ mit Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_K$, wobei ρ eine Nullstelle des Polynoms $f = x^3 + x^2 - 2x + 8$ ist, welches über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. Zeigen Sie:

a) Die Diskriminante der Gleichungsordnung $\mathbb{Z}[\rho]$ ist betraglich gleich $4 \cdot 503$.

b) Die Elemente ω_1, ω_2, ω_3 mit $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \rho$ und $\omega_3 = (\rho^2+\rho)/2$ bilden eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{o}_K$.

c) Die Diskriminante von $\mathfrak{o}_K$ ist betraglich gleich 503.

d) Bestimmen Sie die Restklassengrade und Verzweigungsindizes der Primideale von $\mathfrak{o}_K$ über 3 und 5.

e) Bestimmen Sie die Restklassengrade und Verzweigungsindizes der Primideale von $\mathfrak{o}_K$ über 2.

Tipp: Zeigen Sie unter Benutzung der Minimalpolynome von ω_2 und ω_3 folgende Aussage: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_K$ über 2, so gilt $\omega_2, \omega_3 \in \mathbb{Z} + \mathfrak{p}$. Leiten Sie daraus den Wert des Restklassengrads von $\mathfrak{p}$ ab. Für diesen Aufgabenteil dürfen Sie ohne Beweis benutzen, daß das Minimalpolynom von ω_3 gleich $x^3 - 2x^2 + 3x - 10$ ist.

Hinweis: Sie können verwenden, daß 503 eine Primzahl ist.

3. Aufgabe: Klassen- und Einheitengruppe (11P=5P+2P+2P+2P)

Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ und $\mathfrak{o}_K$ der Ring der ganzen Zahlen von K.

a) Zeigen Sie, daß 2 in K verzweigt und 3 in K träge ist.

b) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Pic}(\mathfrak{o}_K)$ von der Klasse des über der 2 liegenden Primideals von $\mathfrak{o}_K$ erzeugt wird.

c) Zeigen Sie $\mathrm{Pic}(\mathfrak{o}_K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Zeigen Sie $\mathfrak{o}_K^\times = \{-1, 1\}$.

Hinweis: Es gilt $\frac{2!}{2^2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{4 \cdot 13} \leq 4.6$.

4. Aufgabe: Eigenschaften von Dededindringen (9P=2P+3P+2P+2P)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{o}_K$ der Ring der ganzen Zahlen von K. Falls es nur endlich viele Primzahlen gibt, so besitzt $\mathfrak{o}_K$ nur endlich viele Primideale.

b) Ein semilokaler Dedekindring ist ein Hauptidealring.

c) Es gibt einen algebraischen Zahlkörper K, so daß sein Ring $\mathfrak{o}_K$ der ganzen Zahlen kein Hauptidealring ist.

Kombinieren Sie diese Aussagen zu einem Widerspruchsbeweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen.

---

5. Aufgabe (7P = 7 ·1P)

Kreuzen Sie an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Für falsche Angaben gibt es Punktabzüge, die Gesamtpunktzahl kann nicht negativ werden.

Uneindeutige Markierungen werden als falsch gewertet!

Mit K wird ein algebraischer Zahlkörper und mit $\mathfrak{o}_K$ sein Ring der ganzen Zahlen bezeichnet.

		richtig	falsch
a)	$\mathfrak{o}_K$ besitzt als $\mathbb{Z}$-Modul immer eine Basis.	☐	☐
b)	Eine Primzahl p ist genau dann in K verzweigt, wenn p die Diskriminante von $\mathfrak{o}_K$ teilt.	☐	☐
c)	Es gibt Ideale von $\mathfrak{o}_K$, die nicht durch zwei Elemente von $\mathfrak{o}_K$ erzeugt werden können.	☐	☐
d)	Ein $x \in \mathfrak{o}_K$ ist genau dann eine Einheit von $\mathfrak{o}_K$, wenn $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$ eine Einheit in $\mathbb{Z}$ ist.	☐	☐
e)	$\mathfrak{o}_K$ besitzt ein Primideal, welches kein maximales Ideal ist.	☐	☐
f)	Die Klassengruppe von $\mathfrak{o}_K$ ist stets endlich.	☐	☐
g)	Die Einheitengruppe von $\mathfrak{o}_K$ ist stets endlich.	☐	☐