Offene und abgeschlossene Mengen

Def Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$. U heißt *offen in* X, falls

$$\forall x \in U \, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U.$$

U heißt *abgeschlossen in* X, falls sein Komplement $U^c := X \setminus U$ offen ist, d.h.

$$\forall x \in X \setminus U \, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus U.$$

Satz 1.4 Für Teilmengen eines metrischen Raums gilt:

1) Sind $U_i, i \in I$ offen, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ offen.

2) Sind $U_1, ..., U_n$ offen, so ist $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ offen.

3) Sind $U_i, i \in I$ abgeschlossen, so ist $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ abgeschlossen.

4) Sind $U_1, ..., U_n$ abgeschlossen, so ist $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$ abgeschlossen.

Def Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$.

Die Menge $\overline{U} := \{x \in X : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U \text{ mit } x_n \to x\}$ heißt der *Abschluss* (oder die *abgeschlossene Hülle*) von U.

Die Menge $\overset{\circ}{U} := \{x \in U : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset U\}$ heißt das *Innere* (oder der *offene Kern*) von U.

$\partial U := \overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}$ heißt der *Rand* von U.

Def Sei (X, d) ein metrischer Raum. $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Menge $U \subset X$, falls es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{x\}$ mit $x_n \to x$ gibt. Ein Punkt $x \in U$, der kein Häufungspunkt von U ist, heißt *isolierter Punkt* von U.

Satz 1.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) U ist abgeschlossen.

ii) $U = \overline{U}$

iii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $x_n \to x$ gilt $x \in U$.

iv) $\partial U \subset U$

v) U enthält alle ihre Häufungspunkte.

Satz 1.6 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$. Dann ist $x \in \partial U$ genau dann, wenn jede Kugel um x sowohl einen Punkt aus U als auch aus $X \setminus U$ enthält.

Lemma Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$. Es gilt:

$$\mathring{U} = U \setminus \partial U, \quad \overline{U} = U \cup \partial U.$$

Satz 1.7 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) U ist offen.

ii) $U \cap \partial U = \emptyset$

iii) $U = \mathring{U}$

Def Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M \subset X$ heißt *dicht* in X, falls $\overline{M} = X$.

Stetigkeit in metrischen Räumen

Def Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *stetig* in $a \in X$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Satz 1.8 (ε-$\delta-$Charakterisierung der Stetigkeit)
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f \colon X \to Y$, $a \in X$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) f ist stetig in a.

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \colon d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

iii) Für jede Kugel $B(f(a)) \subset Y$ um $f(a)$ gibt es eine Kugel $B'(a) \subset X$ um a mit $B' \subset f^{-1}(B)$.

Satz 1.9 (Topologische Charakterisierung der Stetigkeit)
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f \colon X \to Y$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) f ist stetig auf X.

ii) $f^{-1}(O)$ ist offen für jedes offene $O \subset Y$.

iii) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $A \subset Y$.