Test 1 zur Selbstkontrolle „Analysis I“

Vorbemerkung: Dieser Test enthält Aufgaben zum in den ersten vier Wochen behandelten Stoff (bis einschließlich komplexe Zahlen). Er dient zur Selbstkontrolle und wird nicht benotet. Nehmen Sie sich bitte Zeit und bearbeiten diese Aufgaben ohne Hilfsmittel. Dann lassen Sie bitte Ihren Test vom Übungspartner korrigieren. Dafür werden Musterlösungen in StudIP zur Verfügung gestellt. Nehmen Sie bitte diese Gelegenheit der Wiederholung ernst, auch als Klausurvorbereitung.
Bearbeitungszeit: 70 Minuten

Aufgabe 1.

a) Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$. Definieren Sie, was es bedeutet, dass f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist. Erklären Sie die Verbindung der Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität von f mit der Lösbarkeit der Gleichung $f(x) = y$.

b) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildung injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist:
$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Aufgabe 2.

a) Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \binom{n+1}{2}$$

Aufgabe 3.

a) Was versteht man unter dem Infimum bzw. Supremum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$? Hat jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum? ein Maximum?

b) Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Menge
$$\left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Beweisen oder widerlegen Sie:
Ist das Supremum von A positiv, so enthält A ein positives Element.

Aufgabe 4.

a) Seien $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 1 - i$. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und zeichnen Sie sie und z_1, z_2 in die komplexe Ebene ein:
$$\overline{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, z_1^2, |z_2|, z_1 - z_2$$

b) Skizzieren Sie in $\mathbb{C}$ die folgenden Mengen:

i) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < 1 \text{ und } |z + 1| < 1\}$
ii) $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z = |z - 1|\}$