IfM INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Fingerübungen

Thema: Folgen. Ziel ist es diesmal, dass Sie Ihren Blick für Folgen schärfen und den Umgang mit ihnen trainieren.

1. Schreiben Sie als einen Bruch und fassen Sie ggf. zusammen. ($n \in \mathbb{N}$)

   a) $\dfrac{n}{n+3} + \dfrac{1}{n-3}$ für $n > 3$.

   b) $\dfrac{2-n}{n^2} - \dfrac{1}{n+2}$

   c) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} + \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ für $n > 1$.

   d) $\dfrac{1-n}{n^3} + \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{n-3}{n^2-4}$ für $n > 2$

   e) $4n + 1 + \dfrac{4-n}{n} + \dfrac{n^5}{n^2}$

   f) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(\dfrac{1-m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$

2. Kürzen Sie, wenn möglich. ($n \in \mathbb{N}$)

   a) $\dfrac{1-n^2}{n-1}$ für $n > 1$.

   b) $\dfrac{n^2+n}{n^2+3n+2}$

   c) $\dfrac{n-3}{n^2+6n+9}$

   d) $\dfrac{21n^2+28n}{14n^4}$

   e) $\dfrac{24n^2-3n^4-48}{-3n^2-12\cdot(n+1)}$

   f) $\dfrac{3n\sqrt{n}+6n+\sqrt{n}+2}{3n^2-11n-4}$

3. Schätzen Sie die folgenden Terme nach oben oder unten gegen n oder $\frac{1}{n}$ ab für $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie n für die ersten drei Aufgaben und $\frac{1}{n}$ für die letzten drei Aufgaben. Beispiel: $\frac{1-n}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

   a) $\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n}$

   b) $\dfrac{n^2+2n+1}{n}$

   c) $\dfrac{n^3+6n^2+4}{n}$

   d) $\dfrac{n-3}{n^2-3}$

   e) $\dfrac{3n+2}{3n^2-3n}$

   f) $\dfrac{n^2+n}{n^3+3n^2+4n+2}$

4. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

   Beispiel: $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Vermutung: Da b_n schneller gegen Null geht als a_n, sollte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ sein. Exakte Begründung: $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1/n}{1/n^2} = n$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

   a) $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n+1}$

   b) $a_n = 3^{-n}$, $b_n = 2^{-n}$

   c) $a_n = 1 + 3^{-n}$, $b_n = 2^{-n}$

   d) $a_n = n^{1/n}$, $b_n = \sqrt{n}$

   e) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2+n^2}}$

   f) $a_n = (2n)!$, $b_n = (n!)^2$

   g) $a_n = 0,999^n$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$