

Zahlbereiche

× Aufgabe 1

Berechne für $x = 2i$, $y = 1 + i$ und $z = 2 - 3i$ folgende Ausdrücke:

1. $y \cdot z$
2. $\overline{y \cdot (x - z)}$
3. $|x + z|$
4. $\operatorname{Re}(x \cdot y \cdot z)$
5. $\operatorname{Im}(x + yz)$

Lösung:

1. $y \cdot z = (1 + i) \cdot (2 - 3i) = (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)) + i(1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2) = (2 + 3) + i(-3 + 2) = 5 - i$
2. $\overline{y \cdot (x - z)} = \overline{(1 + i) \cdot (-2 + 5i)} = \overline{(1 \cdot (-2) - 1 \cdot 5) + i(1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2))} = \overline{-7 + 3i} = -7 - 3i$
3. $|x + z| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
4. $\operatorname{Re}(x \cdot y \cdot z) = \operatorname{Re}((0 + 2 \cdot i) \cdot (5 - i)) = 0 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 2$
5. $\operatorname{Im}(x + yz) = \operatorname{Im}(2i + 5 - i) = \operatorname{Im}(5 + i) = 1$

Aufgabe 2

Bestimme Real- und Imaginärteil sowie Betrag der komplexen Zahl

$$z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - i} \right)^2.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - i} \right)^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - i} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - i} \right) = \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2i} \right) \cdot \left(\frac{2i}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{8i + 4\sqrt{3}i}{-4i^2} \right) = \left(\frac{(8 + 4\sqrt{3})i}{4} \right) = 0 + (2 + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

Damit gilt: $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = 2 + \sqrt{3}$, sowie $|z| = \sqrt{0^2 + (2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$.

× Aufgabe 3

Für $z \in \mathbb{C}$ zeige man

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ und } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Lösung:

Wähle: $z = a + ib$, d.h. $\bar{z} = a - ib$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re}(z) \\ \frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{a + ib - a + ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \operatorname{Im}(z). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Beweise folgende Rechenregeln:

1. $\overline{\bar{x}} = x$
2. $\operatorname{Re}(x + y) = \operatorname{Re}(x) + \operatorname{Re}(y)$

Mithilfe von 2. zeige:

3. $\operatorname{Im}(x + y) = \operatorname{Im}(x) + \operatorname{Im}(y)$

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \operatorname{Re}(z)}{i}$. Wieso?

Lösung: Für $x, y \in \mathbb{C}$, mit $x = a + ib, y = c + id$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\overline{\bar{x}} = \overline{a + ib} = \overline{a - ib} = a + ib = x$
2. $\operatorname{Re}(x + y) = \operatorname{Re}(a + ib + c + id) = a + c = \operatorname{Re}(a + ib) + \operatorname{Re}(c + id) = \operatorname{Re}(x) + \operatorname{Re}(y)$
3. $\operatorname{Im}(x + y) = \frac{(x+y) - \operatorname{Re}(x+y)}{i} = \frac{x - \operatorname{Re}(x)}{i} + \frac{y - \operatorname{Re}(y)}{i} = \operatorname{Im}(x) + \operatorname{Im}(y)$

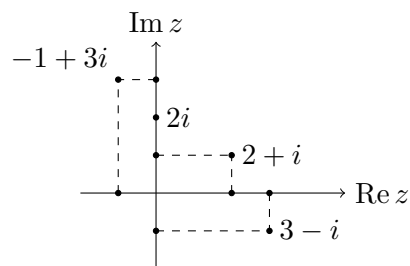
Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

× Aufgabe 5

- Man zeichne die folgenden komplexen Zahlen in die Gauß'sche Zahlenebene ein:
 - $3 - i$
 - $2i$
 - $-1 + 3i$
 - z mit $\operatorname{Re}(z) = 2$ und $\operatorname{Im}(z) = 1$
- Man zeichne eine Gauß'sche Zahlenebene und markiere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:
 - $\operatorname{Im}(z) = 1$
 - $\operatorname{Re}(z) \leq 2$
 - $|\operatorname{Re}(z)| = 2$
 - $|\operatorname{Im}(z)| < 3$
 - $|\operatorname{Re}(z)| \leq 2$ und $|\operatorname{Im}(z)| > 2$
 - $z = \bar{z}$

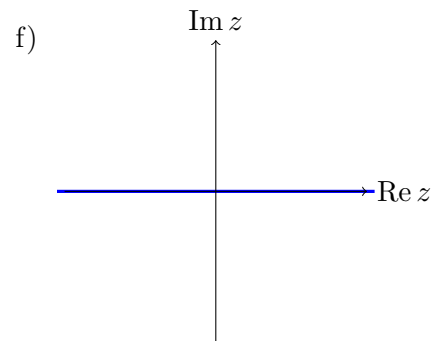
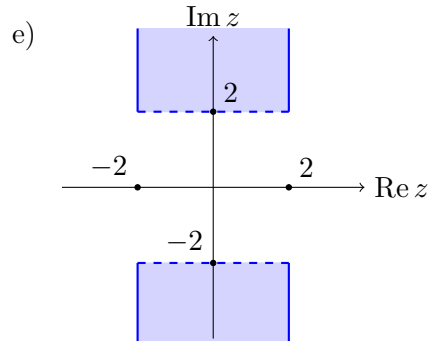
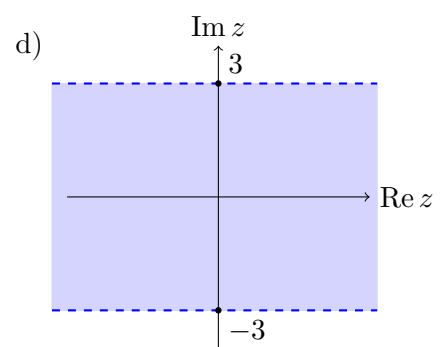
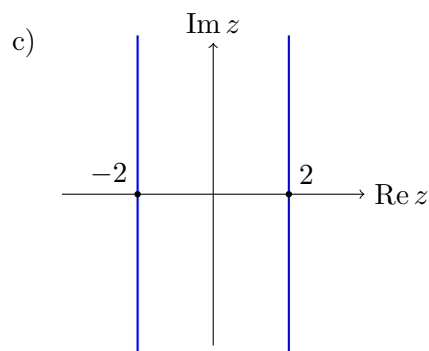
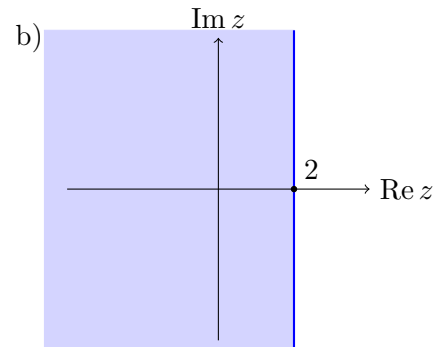
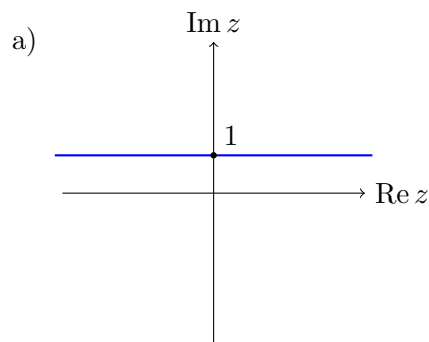
Lösung:

- Hier die Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:



Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

2. Hier die Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:



Aufgabe 6

Begründe oder widerlege (z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels):

1. Multipliziert man eine komplexe Zahl mit $(-i)$, so werden Real- und Imaginärteil getauscht.
2. Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = \text{Re } z + \text{Im } z$.

Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

3. Es ist möglich, als Summe komplexer Zahlen, deren Realteil jeweils 0 ist, 1 zu erhalten.
4. Im Allgemeinen gilt: $\operatorname{Re}(x \cdot y) = \operatorname{Re}(x) \cdot \operatorname{Re}(y)$, für $x, y \in \mathbb{C}$.
5. Ist $\operatorname{Re}(\operatorname{Im}(z)) = 0$, dann ist $z \in \mathbb{R}$.

Lösung:

1. Falsch, denn sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt mit $z = a + ib$:
 $(a + ib) \cdot (-i) = -ia - i^2b = b - ia$.
2. Falsch, denn es gilt i. A. nur $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Die Aussage wäre wahr für $\operatorname{Im} z = 0$, d. h. für die reellen Zahlen.
3. Falsch, da zwei rein imaginäre Zahlen stets einen Realteil von Null haben. Für $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x = ib_1$ und $y = ib_2$ gilt: $x + y = i(b_1 + b_2)$.
4. Falsch, für $x = a + ib, y = c + id$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt nach Rechenregel $\operatorname{Re}(x \cdot y) = ac - bd$. Dies ist i. A. ungleich $\operatorname{Re}(x) \cdot \operatorname{Re}(y) = ac$.
5. Wahr, denn für $z = a + ib$ gilt: $\operatorname{Re}(\operatorname{Im}(z)) = \operatorname{Re}(b) = b$, also nach Voraussetzung $b = 0$. D.h. gerade, dass $z = a + i0 = a$ reell ist.

! Aufgabe 7

Sei $z \in \mathbb{C}$. Bringe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in ihre kartesische Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $z_1 = z + \frac{1}{\bar{z}}$
2. $z_2 = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

Lösung: Mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $z_1 = z + \frac{1}{\bar{z}} = (x + iy) + \frac{1}{x - iy} = (x + iy) + \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}_a + i \underbrace{\left(y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)}_b$
2. $z_2 = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2} = \bar{z}^2 + \frac{\bar{z}^2}{z^2 \bar{z}^2} = \bar{z}^2 + \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \bar{z}^2 \left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right) = \underbrace{(x^2 - y^2) \left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)}_a + i \cdot \underbrace{\left(-2xy \left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)\right)}_b$

! Aufgabe 8

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$?

Lösung: Wieder $z = a + ib$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Per Definition von i sind die einzigen möglichen Lösungen der Gleichheit $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$ durch $\frac{1+z}{1-z} = \pm i$ gegeben. Wir machen also eine Fallunterscheidung:

1.) Angenommen $\frac{1+z}{1-z} = +i$

Es folgt

$$1 + z = i(1 - z) \Leftrightarrow 1 + a + ib = i - ia + b$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$1 + a = b$$

$$1 - a = b,$$

also $a = 0$, $b = 1$. Dies ist tatsächlich eine Lösung.

2.) Angenommen $\frac{1+z}{1-z} = -i$

Es folgt

$$1 + z = -i(1 - z) \Leftrightarrow 1 + a + ib = -i + ia - b$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$1 + a = -b$$

$$-1 + a = b,$$

also $a = 0$, $b = -1$. Dies ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung.

Anmerkung: Bei dieser Aufgabe sind selbstverständlich verschiedenste Lösungswege möglich und auch richtig!