SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 6

Abgabefrist: bis zum 04.06.2020 um 23:59:59

als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (4 Punkte + 2 Punkte)

1. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiere
$$\|x\|_\infty := \max\big\{|x_1|, \dots, |x_n|\big\}, \quad \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|.$$
Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.

2. Sei $n = 2$. Betrachte die durch $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ induzierten Metriken d_∞ und d_1 auf $\mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die offenen Kugeln $K_1(0)$ für diese Metriken.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere $d' : X \times X \to \mathbb{R}$,
$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$
Ist d' eine Metrik auf X?

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)
Bestimme den Abschluss, das Innere und den Rand der folgenden Mengen M in X (der Raum X ist mit der euklidischen Metrik versehen):

1. $X = \mathbb{R}$, $M = \big\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\big\}$,

2. $X = \mathbb{Q}$, $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)
Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge, $(M_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine Familie offener Mengen in X.

1. Zeigen Sie, dass die Menge $M' := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ offen ist (unabhängig davon, ob $\mathcal{A}$ endlich oder unendlich ist).

2. Nehme an, dass $\mathcal{A}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass die Menge $M'' := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ offen ist.

3. Sei $(N_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine Familie abgeschlossener Mengen in X. Was kann man über die Abgeschlossenheit von $N' := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} N_\alpha$ und $N'' := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} N_\alpha$ sagen? Hinweis: Betrachten Sie $(N')^c$ und $(N'')^c$.

Präsenzaufgaben

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$. Definiere $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d'(x, y) = d(x, a) + d(y, a)$. Ist d' auch eine Metrik auf X?.

2. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Betrachte

$$d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}, \quad d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\big\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big\}.$$

   Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ ist.

3. Sei X eine nichtleere Menge und d die diskrete Metrik, $d(x, y) = 0$ für $x = y$ und $d(x, y) = 1$ sonst.
   (a) Zeigen Sie, dass d wirklich eine Metrik auf X ist.
   (b) Wie kann man alle konvergenten Folgen in (X, d) charakterisieren?
   (c) Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von X bzgl. d gleichzeitig offen und abgeschlossen ist.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine *endliche* Menge. Zeigen Sie, dass M^c offen ist und dass M abgeschlossen ist.

5. Sei (p_k) eine Folge in $\mathbb{R}^n$, $p_k = (p_k^{(1)}, \ldots, p_k^{(n)})$ mit $p_k^{(j)} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass (p_k) genau dann in $\mathbb{R}^n$ konvergiert (bzgl. der euklidischen Norm), wenn jede der Folgen $(p_k^{(j)})$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

6. Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen. Ist $M \times N$ in $\mathbb{R}^{m+n}$ abgeschlossen? (Alle Räume sind mit der euklidischen Metrik versehen.)

7. Bestimmen Sie den Abschluss, das Innere und den Rand der folgenden Mengen M in X (alle Räume sind mit der euklidischen Metrik versehen.):
   (a) $X = \mathbb{R}$, $M = (0, 1] \cup [2, 3)$.
   (b) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
   (c) $X = \mathbb{R}^2$, $M = (0, +\infty) \times \{0\}$,

8. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.
   (a) Sei A eine abgeschlossene Menge mit $M \subset A$. Zeigen Sie, dass $\overline{M} \subset A$ (also ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält).
   (b) Sei B eine offene Menge mit $B \subset M$. Zeigen Sie, dass $B \subset \mathring{M}$ (also ist $\mathring{M}$ die grösste offene Menge, die in M enthalten ist).