Übungsblatt 5 - Lösungsvorschläge

Orville Damaschke

2. Juni 2020

Aufgabe 5.1

Hier wird die Methode der Variablenseparation verwendet. Hierzu nutze man Satz 72 und identifiziert die unten gegebenen Differentialgleichungen mit der allg. Form (10), S.40.

1. $f(x) = 1 + x^2$ und $g(y) = (1 + y^2)^{-1}$: Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Stammfunktionen sind

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x + C_1$$

und

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan(y) + C_2$$

mithilfe des Standardintegrals aus der ersten Präsenzübung; C_1, C_2 sind Integrationskonstanten. Nach der Variablenseparation folgt

$$\begin{aligned} & f(x) = 1 + x^2 = \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = g(y(x))y'(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=y(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^3}{3} + x + C = \arctan(y(x)) \end{aligned}$$

mit C als Summe beider Integrationskonstanten. Hieraus folgt

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + x + C\right) + n\pi\,, n \in \mathbb{Z}.$$

als Lösung der gDGL nach Satz 72. Aufgrund der Polstellen des Tangens muss das Abzissenintervall und das Intervall der Integrationskonstanten derart eingeschränkt werden, dass

$$\left|\frac{x^3}{3} + x + C\right| < \frac{\pi}{2} \quad .$$

2. $f(x) = \cos(x)$ und $g(y) = \mathrm{e}^{-y}$: Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Stammfunktionen sind

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C_1$$

und

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = -\mathrm{e}^{-y} + C_2$$

mit C_1, C_2 als Integrationskonstanten. Nach der Variablenseparation folgt

$$\begin{aligned} & f(x) = \cos(x) = \mathrm{e}^{-y} y'(x) = g(y(x)) y'(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y(x)) y'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y \bigg|_{y=y(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & \sin(x) + C = -\mathrm{e}^{-y(x)} \end{aligned}$$

mit C als Summe beider Integrationskonstanten. Hieraus folgt

$$y(x) = -\log\left(-(\sin(x) + C)\right)$$

als Lösung der gDGL nach Satz 72. Aufgrund der Irregularität des Logarithmus bei $x = 0$ muss die Integrationskonstante derart eingeschränkt werden, dass $\sin(x) + C < 0$. Mit der oberen und unteren Schranke

$$-1 + C \leq \sin(x) + C \leq 1 + C$$

folgen $C < 1$ für die untere Schranke und $C < -1$ für die obere Schranke. Die zweite Bedingung ist in der ersten Ungleichung für C enthalten, sodass die Wahl $C < -1$ zu treffen ist.

Aufgabe 5.2

Das AWP lautet

$$\begin{cases} y'(x) &= & y^2(x)\sin(x) \\ y(0) &= & y_0 \end{cases} \quad .$$

1. Zunächst erkennt man, dass $y(x) = 0$ für alle x eine Lösung der gDGL ist. Als Lösung des AWP käme nur die Anfangswertbedingung $y_0 = 0$ in Frage. Nehme nun an, dass $y(x) \neq 0$ für alle x ist. Dann kann die Variablenseparation mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = y^{-2}$ angewendet werden. f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und g außerhalb der 0 ebenso sowie zudem positiv. Die Stammfunktionen können dann passend zu den Anfangswerten bestimmt werden:

   $$\int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x' \quad = \quad -\cos(x) + \cos(0) = 1 - \cos(x)$$

   und

   $$\int_{y_0}^y g(y')\,\mathrm{d}y' \quad = \quad \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} \quad .$$

   Somit ist $y_0 \neq 0$ vorausszusetzen. Die Variablenseparation ist damit

   $$\begin{aligned} & f(x) = \sin(x) = \frac{y'(x)}{y^2(x)} = g(y(x))y'(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x g(\tilde{y}(x'))\tilde{y}'(x)\,\mathrm{d}x' = \int_{y_0}^{y(x)} g(\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - \cos(x) = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & y(x) = \left(\frac{1}{y_0} + \cos(x) - 1\right)^{-1} = \frac{y_0}{1 + y_0(\cos(x) - 1)} \quad . \end{aligned}$$

   Zusammenfassend sind ist die Lösung des AWP:

   $$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad y_0 = 0 \\ \frac{y_0}{1+y_0(\cos(x)-1)} & \phantom{\text{für}} \quad y_0 \neq 0 \end{cases} \quad .$$

2. Die Nullfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, somit also auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung. Für $y_0 \neq 0$ betrachte man den Nenner der zweiten Lösung:

   $$1 + y_0(\cos(x) - 1) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos(x) = 1 - \frac{1}{y_0} \text{ hat keine Lösungen} \,.$$

   Aufgrund der Beschränkheit des Cosinus folgen zwei Bedingungen an y_0, damit die Gleichung oben keine Lösung hat:

   $$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{y_0} \quad &\notin \quad [-1, 1] \\ \Leftrightarrow 1 < 1 - \frac{1}{y_0} \quad &\text{und} \quad 1 - \frac{1}{y_0} < -1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y_0} < 0 \quad &\text{und} \quad 2 < \frac{1}{y_0} \\ \Leftrightarrow y_0 > 0 \quad &\text{und} \quad y_0 < \frac{1}{2} \quad ; \end{aligned}$$

   da die erste Bedingung restriktiver als die zweite ist, folgt, dass die Lösung für $y_0 \neq 0$ nur dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, sofern $y_0 < \frac{1}{2}$; für $y_0 = 0$ entsprechen beide Lösungen der Nullfunktion.

Aufgabe 5.3

Hier wird Satz 70 für das AWP der Form

$$\begin{cases} y'(x) &= a(x)y(x)+b(x) \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad .$$

mit $a, b \in C(I)$ genutzt, wobei I das Abzissenintervall ist. Die Lösung ist dann von der Form:

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{\int_{x_0}^x a(s)\,\mathrm{d}x} + \int_{x_0}^x b(t)\mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \quad .$$

1. $a(x) = -1$ für alle x und $b(x) = \sin(x)$ mit $x_0 = y_0 = 0$: Man berechne aufgrund der Anfangsbedingung nur folgende zwei Integrale

$$\begin{aligned}
\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s &= t - x \\
I &:= \int_0^x b(t)\mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sin(t)\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \sin(t)\mathrm{e}^t \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[\mathrm{e}^t\sin(t)\big|_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[\mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) + \mathrm{e}^0 - \int_0^x \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \sin(x) - \cos(x) + \mathrm{e}^{-x} - I \\
&\Leftrightarrow \\
I &= \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x) + \mathrm{e}^{-x}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Die gesamte Lösung ist damit

$$y(x) = \int_{x_0}^x b(t)\mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t = I = \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x) + \mathrm{e}^{-x}\right) \quad .$$

2. $a(x) = \frac{2}{x}$ und $b(x) = x^2\cos(x)$ mit $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$: Man berechne aufgrund der Anfangsbedingung nur folgende zwei Integrale

$$\begin{aligned}
\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s &= 2\int_t^x \frac{\mathrm{d}s}{s} = 2\log\left|\frac{x}{t}\right| = \log\left(\frac{x}{t}\right)^2 \\
\int_\pi^x b(t)\mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t &= \int_\pi^x t^2\cos(t)\mathrm{e}^{\log\left(\frac{x}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_\pi^x t^2\cos(t)\frac{x^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = x^2\int_\pi^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= x^2(\sin(x) - \sin(\pi)) = x^2\sin(x) \quad .
\end{aligned}$$

Somit

$$y(x) = x^2\sin(x) \quad .$$

Alternativ: Direkte Berechnung mithilfe der Variation der Konstanten. Hierzu suche man zunächst eine Lösung der homogenen Gleichung $y_h'(x) = \frac{2}{x}y_h(x)$, welche mithilfe der Variablenseparation gefunden werden kann. Die Anfangswerte werden dabei **nicht** eingesetzt! Eine Stammfunktion ist zunächst

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{x} = \frac{y_h'(x)}{y_h(x)} \\
\Leftrightarrow \quad & \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y_h'(x)}{y_h(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\log(y_h(x))}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \log(x^2) = \log(y_h(x)) \\
\Rightarrow \quad & y_h(x) = \mathcal{C}\mathrm{e}^{\log(x^2)} = \mathcal{C}x^2
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$. Durch Variation von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}(x)$ hat man einen Ansatz für eine spezielle Lösung: $y_s(x) = \mathcal{C}(x)x^2$. Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt eine Differentialgleichung für die variierten Konstanten:

$$\mathcal{C}'(x)x^2 + \mathcal{C}(x)2x = 2\frac{\mathcal{C}(x)x^2}{x} + x^2\cos(x) = \mathcal{C}(x)2x + x^2\cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}'(x) = \cos(x)\,.$$

Diese gDGL kann einfach integriert werden: $\mathcal{C}(x) = \sin(x)$ mit der Freiheit, die Integrationskonstante 0 zu wählen. Die gesamte Lösung ist somit eine Summe von homogener und spezieller Lösung, auf die die Anfangsbedingung angewendet wird:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_s(x) = \mathcal{C}x^2 + \sin(x)x^2 \\
0 &= y(\pi) = \mathcal{C}\pi^2 + \sin(\pi)\pi^2 = \mathcal{C}\pi^2 \\
&\rightarrow \mathcal{C} = 0 \\
&\Rightarrow \\
y(x) &= x^2\sin(x) \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.4

1.

Behauptung. Seien $a, b \in C(\mathbb{R})$ und absolut integrierbar auf ganz $\mathbb{R}$, dann sind die Lösungen von $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

Beweis: Nach Satz 70 ist die Lösung des AWP mit der in der Behauptung erwähnten gDGL und dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gegeben durch den Ausdruck

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}x} + \int_{x_0}^{x} b(t) \mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \quad .$$

Man betrachte den Betrag des Ausdrucks und wendet dabei die Dreiecksungleichung sowie die Betragsabschätzung für Integrale (Ü2) an:

$$\begin{aligned}
|y(x)| &= \left| y_0 \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}x} + \int_{x_0}^{x} b(t) \mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq |y_0| \left| \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}x} \right| + \left| \int_{x_0}^{x} b(t) \mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq |y_0| \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}x} + \int_{x_0}^{x} \left| b(t) \mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s} \right| \,\mathrm{d}t \quad .
\end{aligned}$$

Aus der absoluten Integrierbarkeit von $a(x)$ und $b(x)$ folgen mit Betragsabschätzung, Regelintegraladditivität und Monotonie der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leq \int_{x_0}^{x} |a(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|\,\mathrm{d}t := A < \infty \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}x} &\leq \mathrm{e}^{\left| \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}x \right|} \leq \mathrm{e}^{A} \\
\left| \int_{t}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s \right| &= \left| \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s - \int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s \right| + \left| \int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s \right| \leq 2A \\
\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \left| b(t) \mathrm{e}^{\int_t^x a(s)\,\mathrm{d}s} \right| \,\mathrm{d}t &\leq \int_{x_0}^{x} |b(t)| \mathrm{e}^{2A}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{2A} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |b(t)|\,\mathrm{d}t}_{=B<\infty} \\
&= B\mathrm{e}^{2A} < \infty \quad .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend hat man somit

$$|y(x)| \leq |y_0| A + B\mathrm{e}^{2A} \quad \forall\, x \quad , \text{ q.e.d.!}$$

2. Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Da der Sinus und der Cosinus global mit 1 nach oben beschränkt sind, folgen für die Absolutbeträge

$$|a(x)| \le \frac{|x|}{x^4+1} \quad \text{und} \quad |b(x)| \le \frac{1}{x^2+1} \quad .$$

Als stetige Funktionen sind a und b beide lokal integrierbar. Mit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2} \\ &\text{und} \\ \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} -\arctan(a) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

folgt die absolute Integrierbarkeit von $b(x)$, da die Majorante $x \mapsto (x^2+1)^{-1}$ auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbar ist:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi \quad .$$

Zur Untersuchung der Konvergenz des Integrals von $a(x)$ über ganz $\mathbb{R}$ zerlege man das Intervall um 0 und betrachtet die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} \quad \text{und} \quad -\int_{-\infty}^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{s\,\mathrm{d}s}{s^4+1} \quad .$$

Auf dem Intervallstück $[0,1]$ ist bereits $x \mapsto x\sin(x)(x^4+1)^{-1}$ eine ordentliche Regelfunktion, dessen Absolutbetragsabschätzung durch Partialbruchzerlegung konkret gelöst werden könnte. Man fokussiere sich also auf das Teilstück $[1,+\infty)$. Auf diesem Teilintervall kann wegen $x^4+1 \ge x^4$ die Abschätzung für $|a(x)|$ mit $x \mapsto x^{-3}$ weiter majorisiert werden. Diese ist integrierbar auf $[1,+\infty)$, womit also insgesamt das Integral konvergiert.

Sodann folgt aus der Stetigkeit und absoluten Integrierbarkeit von $a(x)$ und $b(x)$, dass alle Lösungen der gegebenen gDGL nach der Behauptung der ersten Teilaufgabe beschränkt sind, womit es keine unbeschränkten Lösungen gibt.