Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 8

Aufgabe 1. Gegeben sei die Gleichung $x^2 = y^2$.

a) Wie viele Funktionen $x \mapsto y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, erfüllen die Gleichung?

b) Wie viele stetige Funktionen $x \mapsto y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, erfüllen die Gleichung?

c) Wie viele differenzierbare Funktionen $x \mapsto y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, erfüllen die Gleichung?

d) Wie viele stetige Funktionen $x \mapsto y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit

   i) $y(1) = 1$

   ii) $y(0) = 0$

   erfüllen die Gleichung?

e) Wie viele stetige Funktionen $x \mapsto y(x)$, $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ (δ klein genug), mit $y(1) = 1$ erfüllen die Gleichung?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Gleichung $y^2 + xy + z^2 - e^{xz} = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(0, -1, 1)$ eine Funktion $z = z(x, y)$ impliziert definiert, und bestimmen Sie ihre Taylor-Entwicklung um den Punkt $(0, -1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung.

Aufgabe 3. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2, \quad x + y + z = 2.$$

a) Untersuchen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, in welchen Punkten das Gleichungssystem lokal eine Abbildung $z \mapsto \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$ definiert.

b) Berechnen Sie die ersten und die zweiten Ableitungen von $x(z)$ und $y(z)$ im Punkt $(1, -1, 2)$.

c) Welche Menge im $\mathbb{R}^3$ wird durch das Gleichungssystem definiert? Machen Sie eine Skizze. Wie kann man das Ergebnis aus a) geometrisch ablesen?

Abgabe: Bis 2. Juli um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1					2	3			
	a	b	c	d	e		a	b	c	
Punkte	1	1	1	2	1	5	2	4	3	20

Präsenzaufgaben

1. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Wann ist $y \equiv 0$ die einzige stetige Lösung der Gleichung $yf(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$?

2. Betrachten Sie die gute alte quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ unter dem Blickwinkel des Satzes über implizite Funktionen. Wann kann man Lösungen x als Funktion von p und q darstellen?

3. In welchem Fall wird nach dem Satz über implizite Funktionen durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ lokal eine Funktion $z = z(x,y)$ implizit definiert? Finden sie die partiellen Ableitungen dieser Funktion (als Funktion von x, y, z), wenn:

a) $f(x,y,z) = z^3 + 3x^2 + 3y^2 - 3(x+y+z)$

b) $f(x,y,z) = x + \arctan \frac{y}{z-x} - z$

4. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 5, \quad xy = 1.$$

a) Untersuchen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, in welchen Punkten das Gleichungssystem lokal eine Abbildung $z \mapsto \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$ definiert.

b) Welche Menge im $\mathbb{R}^3$ wird durch das Gleichungssystem definiert? Machen Sie eine Skizze. Wie kann man das Ergebnis aus a) geometrisch ablesen?

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $a \in U$. Zeigen Sie: Hat die Matrix $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$ den Rang m, so gibt es eine Umgebung von $f(a)$, die ganz in $f(U)$ liegt.