Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Präsenzaufgabenblatt – Zusatztutorium 4

keine Abgabe!

Die Termine für den **letzten Block der klausurvorbereitenden Tutorien**, an dem die Aufgaben dieses Blattes besprochen werden, sind:

- **Dienstag 11.02.2020, von 09:00–11:15 Uhr, im Raum W01 0-015** und
- **Mittwoch 12.02.2020, von 09:00–11:15 Uhr, im Raum W03 1-161**.

Die Tutorien beginnen um 09:00 Uhr (und nicht erst um 09:15 Uhr) und es wird eine Pause von 15 Minuten während der Veranstaltung geben.

Darüberhinaus gibt es zwei weitere Termine, an denen Sie **Fragen zu allen Aufgaben aus den Zusatztutorien** stellen können. Genauer sind die Termine:

- **Dienstag 11.02.2020, von 13:45–16:00 Uhr, im Raum W01 0-015** und
- **Mittwoch 12.02.2020, von 14:30–16:45 Uhr, im Raum W01 0-015**.

Auch hier gilt: Die Tutorien beginnen zur angegebenen Zeit und es wird eine 15-minütige Pause geben. Außerdem wird es eine **allgemeine Fragestunde** geben am

- **Donnerstag 13.02.2020, von 11:00–13:00 Uhr, im Raum W03 1-161**.

In diesem Zusatztutorium werden die folgenden **Themen** behandelt:

Basiswechsel, Determinante, Eigenwerte und Eigenräume, Diagonalisieren, Gram-Schmidt Vefahren.

Präsenzaufgabe z.16. Seien $K := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $F\colon K^{2\times 2} \to K[t]_{\leq 2}$ gegeben durch

$$F(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) := (a+b) + (b+c)t + (c+d)t^2.$$

Seien $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ die Basis von $K^{2\times 2}$ gegeben durch

$$\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

und $\mathcal{C} := (w_1, w_2, w_3) = (1, t, t^2)$ die Standardbasis von $K[t]_{\leq 2}$. Wie üblich, steht ein Eintrag $a \in \mathbb{Z}$ für die jeweilige Restklasse $[a]_3 \in K$.

(a). Bestimmen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$.

(b). Sei $\mathcal{S} := (p_1, p_2, p_3)$ gegeben durch $p_1 := 1 + t$, $p_2 := t + t^2$, $p_3 := t^2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ eine Basis von $K[t]_{\leq 2}$ ist.

(c). Sei $G\colon K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}$ der Endomorphismus geben durch

$$G(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) := a_0 + (a_0 + 2a_1)t + (2a_1 + a_2)t^2.$$

Bestimmen Sie $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{S}}(G)$.

(d). Berechnen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}(G \circ F)$.

Präsenzaufgabe z.17. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren die Matrizen $T \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ durch

$$T := \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & b & c & d \\ b & a & 0 & c & d \\ c & a & b & 0 & d \\ d & a & b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(T)$.

Präsenzaufgabe z.18. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a). Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{C}^{3\times 1}$, welche aus Eigenvektoren von A besteht.

(b). Sei Q die invertierbare Matrix, deren Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3 sind. Zeigen Sie, dass $D := Q^{-1}AQ$ eine Diagonalmatrix ist.

(c). Berechnen Sie A^{2021}.

Präsenzaufgabe z.19. Betrachten Sie $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle x, y\rangle := x^T A y \qquad \text{mit } A := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ die Untervektorraum mit Basis

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

(a). Verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von U zu bestimmen, wobei wir U mit obigen Skalarprodukt versehen.

(b). Geben Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \in U$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{C}$ an.