14 Integralrechnung

Die Integralrechnung ist eins der wichtigsten Werkzeuge der Mathematik, insbesondere der Analysis. Sie wird aber auch in vielen anderen Wissenschaften, z.B. der Physik, verwendet. Sie beschäftige sich mit dem Problem der Berechnung von Flächen unter einem Graphen. In einem gewissen Sinne ist das Integrieren das Inverse des Ableitens.

14.1 Worum geht es?

Unser Ziel bei der Integration ist es, den orientierten Flächeninhalt, der von dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse zwischen zwei x-Werten a und b, eingeschlossen wird, zu bestimmen. „Orientiert“ heißt hierbei, dass Fläche unterhalb der x-Achse als negativ, und Fläche oberhalb der x-Achse als positiv gezählt wird.
Für diesen orientierten Flächeninhalt schreiben wir

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Diese Notation wird später begründet.)

Beispiel 14.1

1) Als erstes betrachten wir die durch $f(x) = 2$ gegebene Funktion und wollen den orientierten Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen bestimmen, die von den Grenzen $a = 1$ und $b = 5$ beschränkt wird.

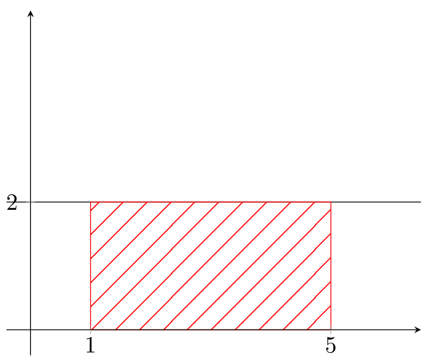

Abbildung 14.1: Skizze der zu berechnenden Fläche

Diese Fläche ist ein Rechteck, der Flächeninhalt beträgt also:

$$\int_1^5 2\,dx = \underbrace{4}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Höhe}} = 8$$

2) Als nächstes betrachten wir $f(x) = x$ und die Grenzen $a = -1$ und $b = 2$.

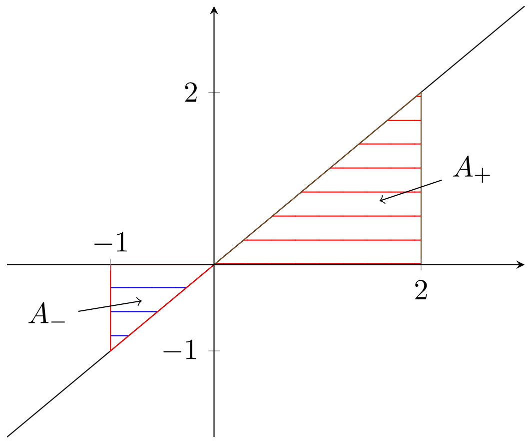

Abbildung 14.2: Skizze der hier zu berechnenden Fläche

Die Fläche A_- unter der x-Achse ist ein Dreieck von Breite und Höhe jeweils 1, also ist $A_- = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Die Fläche A_+ über der x-Achse ist ein Dreieck von Breite und Höhe jeweils 2, also ist $A_- = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Insgesamt erhalten wir also für den orientierten Flächeninhalt

$$\int_{-1}^2 x\,dx = A_+ - A_- = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Leider gehören diese beiden Funktionen zu den ganz wenigen, bei denen sich die Integrale mit elementargeometrischen Methoden ausrechnen lassen. Schon bei $f(x) = x^2$ kommen wir mit solchen Überlegungen nicht weiter. Glücklicherweise gibt es eine schöne Theorie, mit der sich auch einige schwierigere Integrale ausrechnen lassen.

14.2 Integrale von (fast) beliebigen Funktionen

Vorbemerkung:

1) Für den Rest dieses Kapitels sollen $a < b$ feste reelle Zahlen sein.

2) Im Folgenden wollen wir nur **stetige** Funktionen betrachten. Stetigkeit ist mit unseren Mitteln etwas schwierig zu definieren, daher beschränken wir uns auf die anschauliche Definition, dass der „Graph der Funktion keine Sprünge haben soll“. Die meisten Funktionen, die wir bis jetzt kennen, sind stetig. Wir nehmen

ab jetzt immer an, dass alle auftretenden Funktionen stetig sind.
Außerdem werden wir noch andere Bedingungen an unsere Funktionen stellen, z.B. Differenzierbarkeit. (Eine Funktion ist Differenzierbar, falls die Ableitung überall existiert. Stetigkeit folgt hieraus, muss also manchmal nicht extra vorausgesetzt werden.) Diese können für die Zwecke dieses Vorkurses ignoriert werden und werden in der Analysis genauer betrachtet. Sie werden hier aber angegeben, damit die Aussagen korrekt sind. Diese Bedingungen sind die Ursache für das „fast“ in der Überschrift.

Wie oben schon angedeutet, ist Integration in einem gewissen Sinne das Gegenteil der Ableitung. Daher erst einmal folgende Definition:

Definition 14.2
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Beispiel 14.3
Wir betrachten die durch $f(x) = x^2$ gegebene Funktion. Durch geschicktes Hinsehen kann man erkennen, dass durch $F(x) = \frac{x^3}{3}$ eine Stammfunktion gegeben wird, denn nach den gelernten Rechenregeln ist $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Eine weitere Stammfunktion ist beispielsweise durch $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ gegeben, da die 1 beim Ableiten wegfällt.
Wir sehen hier, dass die Stammfunktion einer Funktion f nicht eindeutig seien muss. Man kann aber zeigen, dass sich zwei Stammfunktionen F und G nur um eine Konstante unterscheiden, d.h. es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $F(x) = G(x) + c$ für alle x gilt.
Im Vortrag „Schulmathematik II“ hatten wir folgende Ableitungstabelle gesehen:

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^a	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Diese können wir leicht zu einer Stammfunktionstabelle umfunktionieren, indem wir f durch F und f' durch f ersetzen:

$F(x)$	$f(x)$
1	0
x	1
$\frac{x^2}{2}$	x
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	x^a (für $a \neq -1$)
$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$-\cos x$	$\sin x$

(Hier wurden die Funktionen teilweise mit Konstanten multipliziert, damit die Funktionen auf der rechten Seite normiert sind.)

Für stetige Funktionen gibt es folgenden wichtigen Satz (ohne Beweis):

Satz 14.4
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat f eine Stammfunktion.

Bemerkung: Der Satz garantiert nur, dass es eine Stammfunktion gibt, liefert aber keinen Weg, eine zu bestimmen. Tatsächlich gibt es, im Gegensatz zu Ableitungen, keinen allgemeinen Weg, eine Stammfunktion zu einer mit elementaren Funktionen gegebenen Funktion zu bestimmen, sondern muss meistens „geschicktes Raten“ zurückfallen.

Wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, wie sich Integrale explizit ausrechnen lassen. Sei dazu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Die wesentliche Idee ist, die Fläche unter dem Graphen durch Rechtecke, deren Fläche sich leichter ausrechnen lässt, anzunähern.

Sei hierzu $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Dann nähern wir die orientierte Fläche unter dem Graphen wie im Bild durch Rechtecke an:

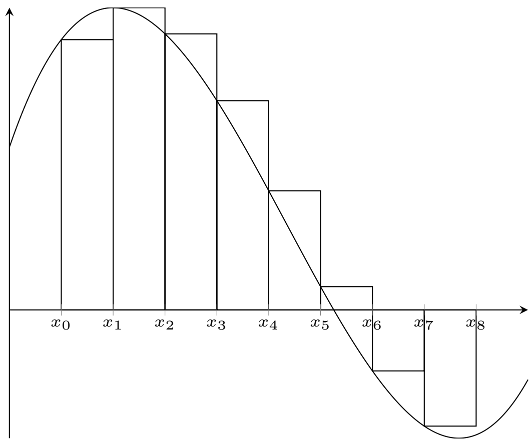

Abbildung 14.3: Skizze einer Funktion mit Annäherung durch Rechtecke

Das i-te Rechteck hat hierbei eine Höhe von $|f(x_i)|$ und eine Breite von $x_{i+1} - x_i$, also eine Fläche von $|f(x_i)|(x_{i+1} - x_i)$ (hierbei fangen wir bei 0 an zu zählen). Da wir die Fläche unter der x-Achse negativ zählen, ist die orientierte Fläche des i-ten Rechtecks gleich $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Damit ergibt sich folgende Näherung für das zu berechnende Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + ... + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \qquad (14.1)$$

Diese Näherung wird immer besser, je kleine die Abstände zwischen den x_i sind.
Als nächstes bringen wir die Stammfunktion F ins Spiel. Wir erinnern uns daran, dass $F'(x) = f(x)$ für alle x war. $F'(x)$ war die Steigung der Tangente an F an der Stelle x. Diese können wir durch die Steigung einer Sekanten durch x und einer Stelle nahe x annähern. Dies bedeutet (wenn wir die Stelle $x = x_i$ betrachten und als Stelle nach x_i die Stelle x_{i+1} wählen):

$$f(x_i) = F'(x_i) \approx \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Auch diese Näherungen werden immer besser, je kleiner die Abstände zwischen den x_i sind. Setzen wir dies in Gleichung 14.1 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + ... + \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + ... + (F(x_n) + F(x_{n-1})) \\ &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a),\end{aligned}$$

wobei auch diese Näherung immer besser wird, je kleiner die Abstände zwischen den x_i werden. Aber die letzte Zeile hängt nicht mehr von der gewählten Unterteilung ab! Da wir die x_i so wählen können, dass die Abstände beliebig klein sind, nähert $F(b)-F(a)$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ beliebig gut an. Die einzige Zahl, die dies erfüllen sollte, ist $\int_a^b f(x)\,dx$ selber.
Darum ist der folgende Satz jetzt nicht mehr überraschend[1].

Satz 14.5 (Hauptsatz (HS))
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung: Mit den Überlegungen vor dem Satz können wir jetzt auch die Schreibweise für Integrale besser verstehen.
Wir können uns vorstellen, dass der Abstand $x_{i+1} - x_i$ für alle i gleich ist. Dann schreiben wir $\Delta x := x_{i+1} - x_i$. Damit und mit dem großen Summenzeichen wird nun Gleichung 14.1 zu

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

Wenn wir Δx immer kleiner machen, wird die Näherung immer besser. Wir stellen uns vor, dass wir Δx „unendlich klein“ machen (und dann über alle $x \in [a,b]$ summieren), wodurch die Näherung „genau“ wird. Ein „unendlich kleines“ Δx schreiben wir als dx und für die „Summe über alle $x \in [a,b]$“ biegen wir das Summenzeichen zum Integralzeichen auf.

Mit dem Hauptsatz können wir jetzt erste Beispiele ausrechnen.

Beispiel 14.6

1) Als erstes überprüfen wir, dass die Formel für die durch $f(x) = x$ gegebene Funktion, welche wir bereits in Beispiel 14.1 betrachtet hatten, das richtige Ergebnis liefert. Dort hatten wir $\int_{-1}^2 x\,dx = \frac{3}{2}$ ausgerechnet. Eine Stammfunktion von f ist nach Beispiel 14.3 durch $F(x) = \frac{x^2}{2}$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (Satz 14.5) gilt nun:
$$\int_{-1}^2 x\,dx = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$
Also ergibt unser Satz das richtige Ergebnis.

[1] Die bisherigen Überlegungen sind aber kein Beweis des Satzes. Bei genauem Hinsehen haben wir bei der Überlegung auch etwas geschummelt. Es ist nämlich eigentlich nicht klar, dass der Fehler in der letzten Näherung immer kleiner werden muss. Es wird zwar der Fehler in jeder einzelnen Näherung kleiner, wir benutzen aber auch immer mehr Näherungen, die einen Fehler enthalten. Das folgende Satz stimmt aber trotzdem.

2) Als nächstes wollen wir das Integral $\int_1^5 e^x\,dx$ ausrechnen. Wenn wir $f(x) = e^x$ setzen, wird nach Beispiel 14.3 durch $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f gegeben. Nach dem Hauptsatz (Satz 14.5) gilt nun:

$$\int_1^5 e^x\,dx = e^5 - e^1.$$

14.3 Rechenregeln

14.3.1 Linearität

Integrale sind im folgendem Sinne **linear**[2]:

Satz 14.7 (Linearität)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

ii) $$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis:

i) Sei F eine Stammfunktion von f, G eine Stammfunktion von g. Dann ist nach der Summenregel für Ableitungen $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, d.h. $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$. Nach dem Hauptsatz (Satz 14.5) gilt damit:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dies zeigt den ersten Teil.

ii) Dies geht ähnlich und ist eine Übungsaufgabe. □

[2]Was dies mit den lineare Abbildungen aus der Linearen Algebra zu tun hat, sieht man besser mit folgender Notation: Sei $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Dann können wir die Integration I als Abbildung $I : C([a,b]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ auffassen. Satz 14.7 sagt dann einfach $I(f+g) = I(f) + I(g)$ und $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$, was genau der Definition aus der linearen Algebra entspricht (bis auf die Tatsache, dass I nicht von $\mathbb{R}^2$ in sich selbst abbildet).

Beispiel 14.8
Wir wollen das Integral $\int_1^5 (2+3e^x)\,dx$ berechnen, indem wir es mittels Linearität auf bereits bestimmte Integrale zurückführen. Es ist:

$$\int_1^5 (2+3e^x)\,dx \overset{i)}{=} \underbrace{\int_1^5 2\,dx}_{=8} + \int_1^5 3e^x\,dx \overset{ii)}{=} 8 + 3\underbrace{\int_1^5 e^x\,dx}_{=e^5-e^1} = 8 + 3e^5 - 3e^1$$

14.3.2 Partielle Integration

Eine Rechenregel für Integrale, die leider nicht gilt, ist

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Beispiel 14.9
Wir betrachten $f(x) = x,\ g(x) = x,\ a = 0,\ b = 2$. Eine Stammfunktion für f und g wird durch $F(x) = \frac{x^2}{2}$ gegeben, und eine Stammfunktion für $f \cdot g$ wird durch $H(x) = \frac{x^3}{3}$ gegeben (siehe Beispiel 14.3). Mit dem Hauptsatz (Satz 14.5) können wir nun rechnen:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

sowie

$$\left(\int_0^2 x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^2 x\,dx\right) = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Also ist

$$\int_0^2 x^2\,dx \neq \left(\int_0^2 x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^2 x\,dx\right).$$

Einen gewissen Ersatz liefert folgender Satz:

Satz 14.10 (Partielle Integration)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit g stetig differenzierbar[3], und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = F(b)\cdot g(b) - F(a)\cdot g(a) - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

[3] D.h. g differenzierbar mit g' stetig

Beweis: Nach der Produktregel gilt

$$(F \cdot g)'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) \overset{F'=f}{=} f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x).$$

Durch Abziehen von $F(x) \cdot g'(x)$ erhalten wir daraus

$$f(x) \cdot g(x) = (F \cdot g)'(x) - F(x) \cdot g'(x)$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx &= \int_a^b \big((F \cdot g)'(x) - F(x) \cdot g'(x)\big)\, dx \\ &\overset{14.7}{=} \int_a^b (F \cdot g)'(x)\, dx - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx.\end{aligned}$$

Nach Definition ist $F \cdot g$ eine Stammfunktion von $(F \cdot g)'$. Daher gilt nach dem Hauptsatz (Satz 14.5):

$$\int_a^b (F \cdot g)'(x)\, dx = F(b)g(b) - F(a)g(a)$$

Setzen wir dies in die Gleichung davor ein, so erhalten wir

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx,$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 14.11

Wir betrachten das Integral $\int_0^1 xe^x\, dx$. Dies hat genau eine Produktform. Wir wollen das Integral mit partieller Integration ausrechnen. Sei dazu $f(x) = x$ und $g(x) = e^x$. Damit ist $\int_0^1 xe^x = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$. Durch $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von f gegeben, wie wir bereits in Beispiel 14.6,2) gesehen haben. Außerdem ist $g'(x) = e^x$. Damit erhalten wir durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x &= \frac{1^2}{2} e^1 - \frac{0^2}{2} e^0 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^x \\ &= \frac{e^1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^x\end{aligned}$$

Dies ist zwar richtig, bringt uns aber nicht weiter, da das letzte Integral nicht leichter auszurechnen ist als das ursprüngliche Integral. Wir versuchen es also nochmal und vertauschen dabei die Rollen von e^x und x:

Sei $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$. Dann wird durch $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f gegeben. Außerdem ist $g'(x) = 1$ für alle x. Damit erhalten wir durch partielle Integration:

$$\int_0^1 xe^x = e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - (e^1 - e^0) = e^0 = 1$$

Es ist bei der partiellen Integration also wichtig, welchen Term wir ableiten und von welchem wir die Stammfunktion bilden. Welches Vorgehen zum Ziel führt, bekommen wir leider oft nur durch Ausprobieren heraus. Als Faustregel kann man sich aber merken, das Polynome sowie der natürlich Logarithmus einfacher werden, wenn man sie ableitet, und die Exponentialfunktion sowie Sinus und Kosinus nicht komplizierter werden, wenn man von ihnen die Stammfunktion bildet.

Autoren dieses Kapitels:
2019: Konstantin Meiwald