Vorlesung 13

Vektorfelder und ihre Integralkurven

In dieser (letzten) Vorlesung besprechen wir einige geometriche Aspekte der Theorie der Differentialgleichungen.

Definition 175. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Funktion $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heisst **parametrisierte Kurve** in $\mathbb{R}^n$. Das Bild $\gamma(I)$ heisst **Orbit von** γ.

Eine parametrisierte Kurve ist also eine Abbildung, wobei ihr Orbit ein geometriches Objekt ist. Falls man $t \in I$ als Zeitpunkte betrachtet, dann beschriebt $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ den Weg eines Objekts im Zeitintervall I, dabei kennt man auch Position $\gamma(t)$ des Objektes für jedes $t \in I$ (also kennt man den "Fahrplan"). Der Orbit von γ beschreibt den Weg, aber "ohne Fahrplan". Verschiedene parametrisierte Kurven können denselben Orbit haben (man kann denselben Weg mit verschiedenen Fahrplänen ablegen). Z.B. haben $\gamma_1 : [0,1] \ni t \mapsto (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : [0, \pi/2] \ni t \mapsto (\sin t, \sin^2 t) \in \mathbb{R}^2$ dasselbe Bild.

Sei jetzt $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Für $t_0, t_1 \in I$ mit $t_0 \neq t_1$ heisst der Vektor

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** zwischen t_0 und t_1. Falls der Grenzwert

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

existiert, dann heisst γ differenzierbar in t_0, und der Vektor $\gamma'(t_0)$ heisst **Momentangeschwindigkeit** (oder einfach **Ableitung**) von γ in t_0. Es ist einfach zu zeigen, dass $\gamma : t \mapsto \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ genau dann differenzierbar ist, wenn jede Komponente x_j eine differenzierbare Funktion ist, und $\gamma'(t) = \big(x_1'(t), \dots, x_n'(t)\big)$.

Definition 176. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein **Vektorfeld** auf U ist eine Abbildung $V : U \to \mathbb{R}^n$.

Man kann Vektorfelder wie folgt vorstellen: an jedem Punkt $p \in U$ ist ein Vektor (Pfeil) $V(p)$ angeklebt. Vektorfelder treten bei der Beschreibung von strömenden Flüssigkeiten auf: $V(p)$ ist der Geschwindigkeitsvektor von Teilchen am Ort p. Falls $V(p)$ für alle p von der Zeit unabhängig bleibt, spricht man von einer stationären Strömung. Falls sich die Strömung mit der Zeit ändert, spricht man auch von einem zeitabhängigen Vektorfeld: mathematisch handelt es sich dann um eine Abbildung $V : I \times U \to \mathbb{R}^n$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Wir werden aber nur den stationären Fall betrachten.

Definition 177. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heisst **Integralkurve** des Vektorfeldes $V : U \to \mathbb{R}^n$, falls für jedes $t \in I$ gilt $\gamma(t) \in U$ und $\gamma'(t) = V\big(\gamma(t)\big)$.

Eine parametrisierte Kurve γ ist also genau dann Integralkurve von V, wenn sie die Differentialgleichung $x'(t) = V\big(x(t)\big)$ erfüllt. Das ist eine sogenannte **autonome** Differentialgleichung: die Variable t kommt nur innerhalb von x vor. Allerdings kann man jede Differentialgleichung in eine autonome Differentialgleichung umformen: statt $x'(t) = F\big(t, x(t)\big)$ betrachtet man $\Gamma' = V(\Gamma)$ mit $\Gamma(t) = \big(t, x(t)\big)$ und $V(t,x) = \big(1, F(t,x)\big)$. Anders gesagt, wird die Variable t als eine neue unbekannte Funktion gesehen, die $t' = 1$ erfüllt. Daher betrachtet wir ab jetzt nur autonome Systeme

$$y' = V(y),\ V \text{ lokal lipschitzsch.}$$

Sie besitzen eine spezielle Eigenschaft, die im folgenden Lemma beschrieben wird:

Lemma 178 (Zeitverschiebung). *Sei $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Integralkurve des Vektorfeldes $V : U \to \mathbb{R}^n$, dann gilt:*

(a) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $y_c(t) = y(t-c)$, definiert auf $\{t : t-c \in I\}$, auch maximale Integralkurve.

(b) Ist $z : J \to U$ eine weitere maximale Integralkurve und gibt es $r, s \in \mathbb{R}$ mit $y(r) = z(s)$, so folgt $z = y_{s-r}$, also gilt $z(t) = y(t-s+r)$ für alle $t \in J$.

Der Punkt (2) kann man auch wie folgt umformulieren: falls sich die Orbits von zwei maximalen Integralkurven schneiden, so müssen diese Integralkurven bis auf eine "Zeitveschiebung" gleich sein, und die entsprechnden Orbits sind gleich.

Beweis. (a) Direkte Rechnung: $y_c(t) = y'(t-c) = V\big(y(t-c)\big) = V\big(y_c(t)\big)$. (b) Wegen $z(s) = y_{s-r}(s)$ sind z und y_{s-r} Lösungen desselben Anfangswertproblems, daher sind sie gleich (da maximale Lösungen eindeutig bestimmt sind). □

Definition 179. Sei V ein Vektorfeld. Ein **Orbit** von V ist der Orbit einer maximalen Integralkurve von V. Das **Phasenporträt** von V ist die Menge der Orbits von V.

Mit dieser neuen Sprache kann man die schon bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze umformulieren:

Satz 180. *Sei V ein lokal lipschitzsches Vektorfeld auf U, dann bilden die Orbits von V eine Zerlegung von U, d.h.:*

(a) Die Vereinigung aller Orbits ist U,

(b) Je zwei verschiedene Orbits sind disjunkt.

Beweis. (a) Zu jedem $y_0 \in U$ gibt es eine Integralkurve, deren Orbit y_0 enthält (=Existenz der Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$). (b) Zwei Orbits, die sich schneiden, sind gleich: das ist genau Lemma 178(b). □

Satz 181. *Jeder Orbit O von V hat einen der drei folgenden Typen:*

(a) Er besteht nur aus einem Punkt p: dann ist $V(p) = 0$ (man sagt, dass p ein stationärer Punkt von V ist) und die zugehörigen Integralkurven sind konstant, $y(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Er besteht aus einer geschlossenen Kurve (die nicht ein Punkt ist). D.h. für jede Integralkurve y von V mit diesem Orbit gilt folgendes: y ist auf $\mathbb{R}$ definiert und es existiert ein $T > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $y(t+T) = y(t)$, aber $y(s) \neq y(t)$ für $0 < |s-t| < T$.

(c) Er ist der Orbit einer injektiven Integralkurve y, d.h. $y(t) \neq y(s)$ für alle $t \neq s$.

Beweis. Sei y eine Integralkurve von V. Wir betrachtet zwei Fälle:

(1) Es existiert ein t_0 mit $y'(t_0) = 0$. Setze $p := y(t_0)$, dann folgt $V(p) = V(y(t_0)) = y'(t_0) = 0$. Man hat dann die Integralkurve $z(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da sich die Orbits von y und z im Punkt p scheiden, sind diese Orbits gleich (Lemma 178), daher besteht der Orbit von y nur aus dem Punkt p: das ist der Typ (a).

(2) Nehme an, dass $y'(t) \neq 0$ für alle t. Auch hier unterscheidet man weiter:

(2.1) y ist nicht injektiv, d.h. es existieren t_0 und s_0 mit $s_0 \neq t_0$ und $y(s_0) = y(t_0)$. Nach Lemma 178 gilt $y(t) = y(t+C)$ für alle t (mit $C := s_0 - t_0$), d.h. y ist periodisch. Man kann beweisen, dass die Menge

$$\{c > 0 : y(t+c) = y(t) \text{ für alle } t\}$$

ein kleinstes Element T besitzt, dann landen wir beim Typ (b).

(2.2) y ist injektiv: das ist der Typ (c). □

Die Orbits von Typ (c) kann man weiter untersuchen. Den folgenden Satz geben wir aus Zeitgründen ohne Beweis:

Satz 182. *Sei V ein lokal lipschitzsches Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und sei $y : (\alpha, \beta) \to U$ eine injektive maximale Integralkurve von V, dann gilt:*

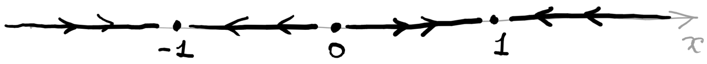
(a) Falls $\beta < \infty$, dann verlässt $y(t)$ jede kompakte (=beschränkte und abgeschlossene) Teilmenge von U für $t \to \beta^-$. Genauer: für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ und für jedes $\gamma < \beta$ existiert ein $t \in (\gamma, \beta)$ mit $y(t) \notin K$

(b) Falls der Grenzwert $p := \lim_{t \to \beta^-} y(t)$ existiert und in U liegt, so folgt $\beta = \infty$ und $V(p) = 0$.

Analoges gilt für α.

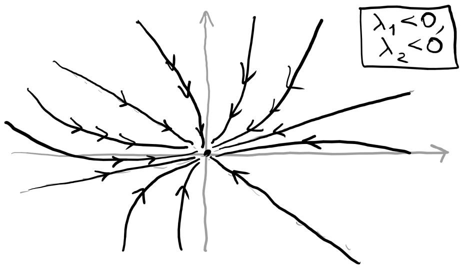
Beispiel 183. (1) Betrachte den Fall $n = 1$ und $U = \mathbb{R}$. Das Phasenporträt von $y = V(y)$ hat eine ziemlich einfache Struktur: Man betrachtet die Menge der stationären Punkten $P = \{p \in \mathbb{R} : V(p) = 0\}$, dann ist jeder Punkt $p \in P$ ein Orbit, darüber hinaus ist jedes maximale Interval $I \subset \mathbb{R} \setminus P$ ein Orbit.

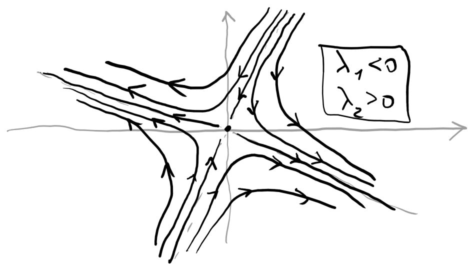
Z.B. hat man für das Vektorfeld $V(x) = x - x^3$ das folgende Phasenporträt:

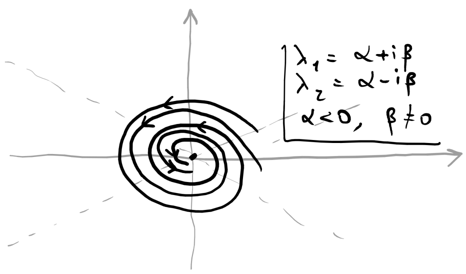


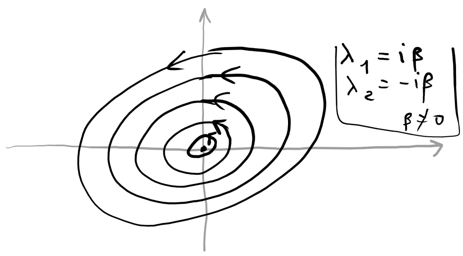
Es gibt drei stationäre Punkte $-1, 0, 1$. Z.B. ist jede maximale Lösung x mit $x(t_0) \in (0,1)$ auf $\mathbb{R}$ definiert, steigend, mit $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$ und $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Jede maximale Lösung x mit $x(t_0) \in (1,+\infty)$ ist auf $(\alpha,+\infty)$ definiert mit $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ und $\lim_{t\to\alpha^+} x(t) = +\infty$. Man braucht aber eine detalliertere (analytische) Untersuchung um zu verstehen ob $\alpha = -\infty$ oder $\alpha > -\infty$.

(2) Für $n = 2$ sind sehr komplizierte Phasenporträts möglich. Für lineare Systeme $y' = Ay$ mit 2×2 Matrizen A sind Phasenporträts von der Matrix A stark abhängig, einige Beispiele sind unten angebeben (λ_1 und λ_2 sind die Eigenwerte von A).









Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Für die Anwendungen kann es wichtig sein, zu wissen, wie sich die Lösung einer Differentialgleichung ändert, wenn man den Anfangswert oder die Gleichung selbst ändert.

Beispiel 184. Betrachte das Anfangswertproblem $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist bekannt, $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Für jedes *festes* t ist $y(t)$ eine stetige Funktion von y_0 und von λ.

Wir werden diese Fragestellung für autonome Systeme $y' = V(y)$ mit einem lokal lipschitzschen Vektorfeld V besprechen: wie schon oben erwähnt, können auch nichtautonome Systeme auf diesen Fall reduziert werden.

Satz 185 (Banachscher Fixpunktsatz mit Parametern). *Seien X, Y metrische Räume und X vollständig. Zudem sei $T : X \times Y \to X$, und zu $y \in Y$ definiere $T_y : X \ni x \mapsto T(x, y) \in X$. Angenommen es gilt*

1. *Es existiert ein $L < 1$ mit $d(T_y x, T_y x') \leq L d(x, x')$ für alle $(x, x', y) \in X \times X \times Y$ (d.h. alle T_y sind Kontraktionen mit derselben Kontraktionskonstante),*
2. *Für jedes $x \in X$ ist $Y \ni y \mapsto T(x, y) \in X$ stetig.*

Für jedes $y \in Y$ sei p_y der eindeutige (nach dem Banachschen Fixpunktsatz) Fixpunkt von T_y, dann ist die Abbildung

$$Y \ni y \mapsto p_y \in X$$

stetig.

Beweis. Seien $y, z \in Y$ und bezeichne $p := p_y$ und $q := p_z$, dann $p = T_y p$ und $q = T_z q$. Wir haben

$$d(p, q) = d(T_y, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + d(T_z p, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + L d(p, q),$$

daraus folgt $(1 - L) d(p, q) \leq d(T_y p, T_z p)$ und

$$d(p_y, p_z) \leq \frac{1}{1 - L}\, d(T_y p, T_z p).$$

Seien $z_n \in Y$ mit $z_n \to y$, dann $T_{z_n} p = T(p, z_n) \to T(p, y) = T_y p$ (hier haben wir die Bedingung (2) genutzt), also $d(T_y p, T_{z_n} p) \to 0$ und $d(p_y, p_{z_n}) \to 0$. □

Definition 186. Zu $y_0 \in U$ sei $\gamma_{y_0} : I_{y_0} \to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = V(y)$ mit $y(0) = y_0$. Der **Fluss** von V ist die Abbildung

$$\Phi(t, y_0) = \gamma_{y_0}(t)$$

definiert auf $\Omega = \big\{(t, y_0) : t \in I_{y_0}, y_0 \in U\big\}$, also $\Phi : \Omega \to U$.

Falls alle Lösungen auf $\mathbb{R}$ definiert sind, ist $\Phi : \mathbb{R} \times U \to U$. Falls man V als Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung betrachtet, so beschreibt Φ das Fliessverhalten: ist $K \subset U$ ein Farbtropfen zur Zeit $t = 0$, so zeigt die Menge $\Phi(t, K) := \{\Phi(t, y) : y \in K\big\}$ die Form des Tropfens nach der Zeit t an. Für lineare Systeme $y' = Ay$ hat man die explizite Formel $\Phi(t, y_0) = e^{tA} y_0$.

Satz 187 (Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten). *Seien Ω und Φ wie in Definition 186, dann: (1) Ω ist eine offene Menge, (2) Φ ist eine stetige Abbildung.*

Beweis. Wie beweisen zuerst folgende **Behauptung (A)**: Sei $p \in U$, dann gibt es $\delta > 0$ und $r > 0$, so dass für jedes $y_0 \in K_r(p)$ die Lösung γ_{y_0} auf dem Zeitintervall $(-\delta, \delta)$ definiert ist, und $\Phi : (-\delta, \delta) \times K_r(p) \to U$ ist stetig.

Wie im Satz von Picard-Lindelöf kann man die Lösung y mit $y(0) = y_0$ als Fixpunkt einer Kontraktion betrachten,

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V\big(y(s)\big) ds =: T(y, y_0)(t),$$

aber diesmal werden wir auch y_0 als Parameter von T auffassen. Jetzt wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern (Satz 185) anwenden, und dafür braucht man passende Räume X ud Y. Wie früher, muss X eine Menge von Funktionen $y : (-\delta, \delta) \to U$ sein, und der Raum Y sollte eine Menge der Anfangsbedingungen y_0 in der Nähe von p sein. Diese Idee werden wir jetzt formalisieren.

Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset U$. Da V lokal lipschitzsch ist, kann man r so wählen, dass V auf $K_{4r}(p) \subset U$ lipschitzsch ist, und sei L die zugehörige Lipschitz-Konstante. Da V eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{K_{2r}(p)}$ ist, ist sie auf dieser Menge beschränkt, d.h. es existiert ein $M \geq 0$ mit $\|V(y)\| \leq M$ für alle $y \in \overline{K_{2r}(y)}$. Jetzt wähle ein kleines $\delta > 0$ mit $\delta M < r$ und $\delta L < 1$ und setze

$$\begin{aligned}
&X = C^0\big((-\delta, \delta)\overline{K_{2r}(p)}\big) \text{ mit der Supremumnorm versehen,}\\
&Y = K_r(p) \text{mit der euklidischen Norm,}
\end{aligned}$$

dann ist X vollständig. Für $y \in X$, $y_0 \in Y$, $t \in (-\delta, \delta)$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|T(y, y_0)(t) - p\big| &\leq \big|T(y, y_0)(t) - y_0\big| + |y_0 - p|\\
&\leq \Big|\int_0^t V\big(y(s)\big) ds\Big| + r \leq \delta M + r < 2r,
\end{aligned}$$

also $T : X \times Y \to X$. Darüber hinaus ist $y_0 \mapsto T(y, y_0)$ offenbar stetig und

$$\begin{aligned}
\big\|T(y, y_0) - T(z, y_0)\big\| &= \sup_{t \in (-\delta, \delta)} \Big\| \int_0^t \big(V(y(s)) - V(z(s))\big)\, ds\Big\|\\
&\leq \int_0^\delta \big\|V(y(s)) - V(z(s))\big\|\, ds\\
&\leq \int_0^\delta L\big\|y(s) - z(s)\big\|\, ds \leq \delta L\|y - z\|.
\end{aligned}$$

Also können wir den Satz 185 anwenden: es folgt, dass es zu jedem $y_0 \in Y = K_r(p)$ eine auf $(-\delta, \delta)$ definierte Lösung γ_{y_0} mit Anfangswert y_0 gibt, und dass die Abbildung $Y \ni y_0 \mapsto \gamma_{y_0} \in X$ stetig ist.

Seien $t, t_0 \in (-\delta, \delta)$ und $y, y_0 \in K_r(p)$, dann

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi(t, y) - \Phi(t_0, y_0)\big\| &= \big\|\gamma_y(t) - \gamma_{y_0}(t_0)\big\|\\
&\leq \big\|\gamma_y(t) - \gamma_y(t_0)\big\| + \big\|\gamma_y(t_0) - \gamma_{y_0}(t_0)\big\|\\
&\leq M|t - t_0| + \big\|\gamma_y(t_0) - \gamma_{y_0}(t_0)\big\|.
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_1 > 0$ mit $\delta_1 M < \frac{\varepsilon}{2}$ und mit $\big\|\gamma_y(t) - \gamma_{y_0}(t)\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $\|y - y_0\| < \delta_1$ und $t \in (-\delta, \delta)$, dann gilt

$$\big\|\Phi(t, y) - \Phi(t_0, y_0)\big\| < \varepsilon \text{ für } |t - t_0| < \delta_1 \text{ und } \|y - y_0\| < \delta_1.$$

Damit ist ist die Behauptung (A) bewiesen.

Als Übung zeigt man (mit Hilfe der Zeitverschiebung), dass daraus die Offenheit von Ω und die Stetigkeit von Φ auf ganz Ω folgen. $\square$

Falls V von einem Parameter a abhängt, d.h. falls man das System $y'(t) = V\big(a, y(t)\big)$ betrachtet, kann man dieses auf den obigen Fall reduzieren: man betrachtet a als eine neue unbekannte Funktion mit $a' = 0$.

In vielen Problemen der Modellierung untersucht man auch die Abbildung $y_0 \mapsto \lim_{t\to+\infty} \gamma_{y_0}(t)$, hier gibt es aber keine einfache Aussage über die Stetigkeit: solche Fragestellungen behandelt man in der mathematischen Stabilitätstheorie.