Dr. Ivan Shestakov 14. Juli 2020

# Analysis IIb: Themenübersicht

Hier ist eine stichwortartige Liste von Themen der Analysis IIb, die Sie kennen sollten.

## Definitionen

Eine Definition zu kennen, heißt: 1. Eine Vorstellung von dem Begriff zu haben, 2. Eine exakte Definition hinschreiben zu können, 3. Ein paar typische Beispiele angeben zu können

- metrische, normierte und euklidische Räume; Konvergenz, Cauchy-Folgen, offene, abgeschlossene, kompakte Mengen, Abschluss, Inneres und Rand einer Menge, stetige Funktionen in diesen Räumen
- (totale) Differenzierbarkeit einer Funktion mehrerer Variablen bzw. einer Abbildung nach $\mathbb{R}^m$, Richtungsableitungen (insbesondere partielle Ableitungen) einer Funktion mehrerer Variablen
- Gradient, Hesse-Matrix, Jacobi-Matrix
- lokale bzw. globale Extrema
- konvexe Mengen und konvexe bzw. konkave Funktionen
- Diffeomorphismus, Homöomorphismus
- Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, Immersion
- Tangential- und Normalenraum einer Mannigfaltigkeit
- schwacher lokaler Minimierer eines Funktionals, erste Variation eines Funktionals

## Sätze

Einen Satz zu kennen heißt: 1. ihn ungefähr („anschaulich“) formulieren zu können, 2. ihn genau formulieren zu können, 3. zu verstehen, warum ggf. Annahmen gemacht werden (Gegenbeispiele bei Weglassen von Annahmen), im Idealfall 4. seine Bedeutung einordnen zu können (Wofür? Typische Beispiele?), und für die, die in der Mathematik weiterkommen wollen 5. einen Beweis angeben zu können (zumindest eine Beweisidee)

- Cauchy-Schwarz Ungleichung
- Satz über endliche bzw. unendliche Vereinigungen und Durchschnitte offener bzw. abgeschlossener Mengen
- topologische Charakterisierung stetiger Funktionen
- Satz von Heine-Borel
- Satz vom Minimum und Maximum für stetige Funktionen in metrischen Räumen
- Stetigkeit partieller Ableitungen liefert (totale) Differenzierbarkeit
- Zusammenhang zwischen dem Gradienten und der Richtung des stärksten Anstiegs einer Funktion
- Satz von Schwarz
- Satz von Taylor im $\mathbb{R}^n$
- notwendige Bedingung für ein lokales Extremum, hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum (entsprechend auch unter Nebenbedingungen)

- Charakterisierung der Konvexität durch die Hesse-Matrix
- Schrankensatz
- Umkehrsatz, Satz von der offenen Abbildung, Satz über implizite Funktionen
- Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ als Graph (lokal) bzw. durch lokale Karten, Charakterisierung des Tangential- und Normalenraums
- Fundamentallemma der Variationsrechnung und Euler-Lagrange-Gleichung

## Rechnen

Hier kann man nur sagen: Übung macht die Meisterin! (bzw. den Meister) Wichtig: Genau hinsehen, nach Mustern suchen, Spezialfälle betrachten, verschiedenes probieren,...

- Untersuchen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf Offenheit bzw. Abgeschlossenheit bzw. Kompaktheit
- Untersuchen von Funktionen mehrerer Variablen auf Stetigkeit, partielle bzw. totale Differenzierbarkeit
- Anwenden der Kettenregel (z.B. bei Koordinatentransformationen)
- Bestimmen von lokalen Extrema (auch unter Nebenbedingungen)
- Nachprüfen der Voraussetzungen des Umkehrsatzes und des SIF, Berechnung von Ableitungen einer implizit definierten Funktion
- untersuchen, ob eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, Finden des Tangential- bzw. Normalenraums
- Aufstellen und Lösen der Euler-Lagrange-Gleichung für ein Variationsproblem

## Verständnis von Zusammenhängen

Oft helfen intuitive Vorstellungen und das Verständnis einiger wichtiger Zusammenhänge.

- Zusammenhänge zwischen Stetigkeit, partieller und totaler Differenzierbarkeit
- intuitive Vorstellung, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ offen, abgeschlossen, kompakt, Untermannigfaltigkeiten sind
- geometrische Bedeutung der Konvexität
- geometrische Interpretation des Umkehrsatzes und des SIF
- geometrische Interpretation der Lagrange-Methode für Extrema unter Nebenbedingungen

## Für den Moment zweitrangig

Dies sind Themen, von denen Sie gehört haben sollten (und haben, wenn Sie in der Vorlesung und den Übungen waren), die aber für den Moment weniger zentral sind (später aber zum Teil wieder aufgegriffen werden).

- allgemeine Definition einer kompakten Menge durch Überdeckungen
- klassische Probleme der Variationsrechnung (kürzeste Verbindung, Brachistochrone)
- die Beweise der Sätze (siehe Bemerkung unter „Sätze")