SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 9

Abgabefrist: bis zum 25.06.2020 um 23:59:59
als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Familien von Funktionen auf $\mathbb{R}$-lineare Unabhängigkeit in $C^0(\mathbb{R})$:

1. $y_1(x) = \sin(x)$, $y_2(x) = x\sin(x)$, $y_3(x) = x^2$,
2. $y_1(x) = x^2 - 1$, $y_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $y_3(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)
Bestimmen Sie $\mathbb{R}$-Fundamentalsysteme für folgende Differentialgleichungen:

1. $y^{(5)} + 8y''' + 16y = 0$,
2. $y''' - 8y = 0$.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie Lösungen folgender Anfangswertprobleme:

1. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
2. $y'' - 2y' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$. Hinweis: raten Sie eine spezielle Lösung.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

1. Betrachte die Differentialgleichung $y^{(n)}(x) = \sin(x) + \cos\big(y(x)\big)$ mit Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$. Wieviele Lösungen gibt es für $n = 1$? $n = 2$? $n = 3$?
2. Für welche Polynome Q sind die beiden Funktionen

$$y_1 : x \mapsto \sin x, \quad y_2 : x \mapsto x\cos x$$

Lösungen der Differentialgleichung $y''(x) = Q\big(y(x)\big)$?

Präsenzaufgaben

1. Sind folgende Familien von Funktionen $\mathbb{R}$-linear unabhängig / $\mathbb{C}$-linear unabhängig?
   (a) $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x,\ f_3(x) = e^{ix}$?
   (b) $f_1(x) = x\cos x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \cos x$?

2. Zeigen Sie: sind $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig, so sind auch $\frac{f_1+f_2}{2}, \frac{f_1-f_2}{2i}, f_3, \ldots, f_n$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig.

3. Sei $L : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ eine lineare Abbildung und $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ definiere $L^n : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ durch
$$L^0(y) = y, \quad L^k(y) = \underbrace{L \circ \ldots \circ L}_{k-mal}(y) \text{ für } k \geq 1.$$
   Für ein Polynom $P(\lambda) = \sum_{k=0} p_k \lambda^k$ definiere $P(L) : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ durch
$$P(L) = \sum_{k=0} p_k L^k.$$
   (a) Seien P, Q Polynome mit $\operatorname{Grad} P + \operatorname{Grad} Q \leq n$. Zeigen Sie die Gleichheit $(PQ)(L) = P(L) \circ Q(L)$.
   (b) Sei jetzt $L = D = d/dx$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$, P ein Polynom mit $\operatorname{Grad} P \leq n$. Zeigen Sie: $P(D)(e^{ax}f) = e^{ax}P(D+a)(f)$.

4. Bestimmen Sie $\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}$-Fundamentalsysteme für folgende Differentialgleichungen:
   (a) $y'' - 5y' + 4y = 0$,
   (b) $y'' + 2y' + 10y = 0$,
   (c) $y^{(4)} + y'' = 0$,
   (d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,
   (e) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$.

5. Für welche $E \in \mathbb{R}$ besitzt das Problem $y''(x) = Ey(x)$ *mehrere* Lösungen y mit $y(0) = y(\pi) = 0$? Dieselbe Frage für $y'(0) = y(\pi) = 0$.

6. Seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Betrachte die Eulersche Differentialgleichung
$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad x > 0. \tag{1}$$
   (a) Sei y k-mal differenizerbar und betrachte Funktion $z : t \mapsto y(e^t)$. Zeige die Gleichheit:
$$e^{kt}y^{(k)}(e^t) = \underbrace{D(D-1)\ldots(D-k+1)}_{=:D^{[k]}} z(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad D = \frac{d}{dt}.$$
   (b) Zeige: y ist genau dann Lösung von (1), wenn $z : t \mapsto y(e^t)$ Lösung von
$$(D^{[n]} + a_{n-1}D^{[n-1]} + \cdots + a_1 D + a_0)z = 0$$
   ist. Finden Sie das charakterische Polynom für diese neue Differentialgleichung.
   (c) Bestimmen Sie ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für folgende Differentialgleichungen:
      i. $x^2y'' + xy' + y = 0$,
      ii. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' = 0$.