Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Integralrechnung

× Aufgabe 1: Integrale berechnen I

Berechne folgende Integrale.

i)
$$\int_{-3}^{3} x^3 \, dx$$

ii)
$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x^2} \, dx$$

iii)
$$\int_{0}^{1} e^{2x} \, dx$$

iv)
$$\int_{-2}^{4} 2x^3 - 3x + 1 \, dx$$

× Aufgabe 2: Integrale berechnen II

Berechne folgende Integrale. Mache zuerst eine Skizze und gebe (ohne Rechnung) an, welches Vorzeichen das Integral hat.

i)
$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$$

ii)
$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x) \, dx$$

Hinweis: Benutze $x^3 - x^2 - 2x = (x-2) \cdot x \cdot (x+1)$ *für die Skizze*

iii)
$$\int_{0}^{\pi} \sin(x) \, dx$$

iv)
$$\int_{-2}^{-1} 2^x \, dx$$

Aufgabe 3: Partielle Integration

Berechne folgende Integrale:

i)
$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\, dx$$

ii)
$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{e^x}\, dx$$

Hinweis: Mehrfache partielle Integration

iii)
$$\int_{1}^{2} \ln(x)\, dx$$

Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$

! iv)
$$\int_{0}^{\pi} \sin^2(x)\, dx$$

Hinweis: Verwende $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Aufgabe 4: Linearität

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx,$$

und vervollständige damit den Bewies des Satzes zur Linearität von Integralen.

! Aufgabe 5: Integration durch Substitution

i) Zeigen folgenden Satz über Integration:

Satz I (Integration durch Substitution)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $s : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\, dx = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x)\, dx$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel. Fall F eine Stammfunktion von f ist, wie könnte man das rechte Integral schreiben?

ii) Berechne

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx$$

! Aufgabe 6

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

i) Zeige, dass durch $F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(y)dy$ eine Stammfunktion von f gegeben wird.

ii) Zeige mit partieller Integration, dass

$$\int_a^b \int_a^x f(y)dy\,dx = \int_a^b (b-x)f(x)\,dx$$