

Schulmathematik II

× Aufgabe 1: Ableitungsregeln (1)

Leite die folgenden Funktionen ab.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$, wobei $x \neq 0$

c) $f(z) = a \cdot z^4 + \frac{b}{z^3}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $f(t) = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

× Aufgabe 2: Ableitungsregeln (2)

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit der Produkt- bzw. Quotientenregel.

a) $f(t) = t^2 \cdot \sin t$

b) $f(a) = (a^2 - 1) \cdot (1 + a^2)$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, wobei $x^2 + x + 1 \neq 0$

d) $f(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3}$, wobei $s \neq 0$

Aufgabe 3: Kettenregel

Nutze die Kettenregel zur Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = (2t + 1)^3$

b) $f(x) = \sin(ax + b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Herleitung der Quotientenregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen und sei $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Beweise die Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$.

Hinweis: Die Produktregel und die Kettenregel dürfen vorausgesetzt werden.

! Aufgabe 5

Gegeben seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Entwickle eine eigene Ableitungsregel für Funktionen der Form $\left(\frac{f(x)}{g(x)^n}\right)$ mithilfe der Quotientenregel und geschicktem Ausklammern.

Aufgabe 6: Binomialkoeffizient

Berechne mit Hilfe der Definition folgende Binomialkoeffizienten:

a)

$$\binom{5}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \binom{10}{0}, \quad \binom{8}{6}$$

b)

$$\sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-j}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt aus der Stochastik. Die einzelnen Summanden beschreiben dort die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Treffern, z. B. beim Würfelwurf.

c) Für ein Elfmeterschießen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei der Bestimmung der Kandidaten? Wie viele Möglichkeiten hat er dann noch zur Bestimmung der Reihenfolge der Schützen?

Aufgabe 7: Beweise im Pascal'schen Dreieck

- a) Beweise mit vollständiger Induktion, dass die Summe aller Zahlen in der n -ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks 2^n beträgt.
- b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$. Wo findet sich diese Identität im Pascal'schen Dreieck?