SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 2

Abgabefrist: bis zum 07.05.2020 um 10 Uhr (als PDF-Datei an den zuständigen Tutor)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Seien $f, g \in T[a, b]$. Zeigen Sie, dass:

(1) $f + g \in T[a, b]$,

(2) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

(1) Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass auch $|f|$ Regelfunktion auf $[a, b]$ ist und dass $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(2) Seien f_n Regelfunktionen auf $[a, b]$, die gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergieren.

(2.1) Zeigen Sie, dass auch f Regelfunktion auf $[a, b]$ ist.

(2.2) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)

Wir definieren $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } x = \frac{m}{n} \text{ gekürzter Bruch mit } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion auf $[0, 1]$ ist,

(2) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 f$.

Hinweis: Sei $N \in \mathbb{N}$. Für wie viele x hat man $f(x) \geq \frac{1}{N}$?

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)

Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f = I$. Seien $A > 0$ und $B \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto f\Big(\dfrac{x - B}{A}\Big)$ eine Regelfunktion auf $[Aa + B, Ab + B]$ ist.

(2) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{Aa+B}^{Ab+B} F$.

Präsenzaufgaben

A:

1. Sei f eine Regelfunktion auf $[a,b]$. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: es existiert eine *endliche* Menge $Z \subset [a,b]$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b] \setminus Z$. Zeigen Sie, dass g Regelfunktion ist mit $\int_a^b f = \int_a^b g$.
2. Sei $a > 0$ und f eine Regelfunktion auf $[0,a]$. Zeigen Sie, dass auch $x \mapsto f(a-x)$ eine Regelfunktion auf $[0,a]$ ist und dass $\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.
3. Sei $a > 0$ und $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine *gerade* Funktion. Zeigen Sie: f ist eine Regelfunktion auf $[-a,a]$ dann und nur dann, wenn f auf $[0,a]$ Regelfunktion ist, und dass in diesem Fall
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

(4) Sei $a > 0$ und $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine *ungerade* Regelfunktion. Berechnen Sie $\int_{-a}^a f$.

B:

1. Sei f eine nichtnegative stetige Funktion auf $[a,b]$ aber keine Nullfunktion. Zeigen Sie, dass $\int_a^b f > 0$.
2. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
   (a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geq 0$.
   (b) Zeigen Sie die Ungleichung $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.
   (c) Nehme an, dass $\left(\int_a^b fg\right)^2 = \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$. Zeigen Sie, dass man eine Kostante c finden kann mit $f = cg$ oder $g = cf$.
3. Finden Sie alle stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\left(\int_0^1 f\right)^2 = \int_0^1 f^2$.

C: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Treppenunktionen $f_n : [0,1] \ni x \mapsto \begin{cases} n & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0 & \text{für alle anderen } x. \end{cases}$

1. Berechnen Sie $\int_0^1 f_n$.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \ni x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eine wohldefinierte Regelfunktion ist.
3. Hat man die Gleichheit $\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$?
4. Kann man eine Folge g_n von Regelfunktionen auf $[0,1]$ mit folgenden Eigenschaft konstruieren: Der Grenzwert $x \mapsto \lim_n g_n(x)$ existiert für jedes $x \in [0,1]$, aber $\int_0^1 g_n$ ist divergent?