Abgabe Algebra I, Blatt 08

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 8.1

(a) Sei R faktorieller Ring mit $\mathrm{char}(R) \neq 2$. Sei $R[t_1, t_2] = (R[t_1])[t_2]$ Polynomring in zwei Variablen.
Zu zeigen: $f = t_1^2 + t_2^2 + 1 \in R[t_1, t_2]$ ist irreduzibel in $R[t_1, t_2]$.
Sei $a_0 := t_1^2 + 1 \in R[t_1]$. Es gilt:

$$f = t_2^2 + t_1^2 + 1 = t_2^2 + a_0 \in R[t_1, t_2].$$

Da R faktorieller Ring ist, sind nach dem Lemma von Gauß auch $R[t_1]$ und $R[t_1, t_2]$ faktorielle Ringe.
Das Polynom f ist primitiv, denn $f = t_2^2 + (t_1^2 + 1) = 1 \cdot t_2^2 + a_0 \cdot t_2^0,\ a_0 \in R[t_1]$ und somit ist $\mathrm{ggT}(1, 0, a_0) = \mathrm{ggT}(1, \mathrm{ggT}(0, a_0)) = \mathrm{ggT}(1, a_0) = 1$. Dies gilt, da $f \in (R[t_1])[t_2]$ Koeffizienten aus dem Ring $R[t_1]$ besitzt. Der Grad von f ist $\deg(f) = 2$.
Da $a_0 = t_1^2 + 1$ irreduzibel ist, ist $a := a_0 = t_1^2 + 1$ prim in $R[t_1]$.
Es gelten die Voraussetzungen:

(i) $a = t_1^2 + 1 \nmid q = a_2$,

(ii) $a = t_1^2 + 1 \mid 0 = a_1,\ a = t_1^2 + 1 \mid t_1^2 + 1 = a_0$,

(iii) $a^2 = (t_1^2 + 1)^2 = t_1^4 + 2t_1^2 + 1 \nmid t_1^2 + 1 = a_0$.

Daraus folgt nach dem Kriterium von Eisenstein, dass f irreduzibel in $R[t_1, t_2]$ ist.

$\square$

(b) Fehlt.

(c) Fehlt.

Aufgabe 8.2

(a) Sei $\alpha := \frac{1 - \sqrt[3]{6}}{2} \in \mathbb{R}$.
Zu zeigen: $f_{\alpha,\mathbb{Q}} =$ ist Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & f_{\alpha,\mathbb{Q}} = \alpha + a_0 \overset{!}{=} 0 \\ \implies & a_0 = -\alpha \notin \mathbb{Q} \\ \implies & \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) \neq 1. \end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\mathbb{Q}} = \alpha^2 + a_1\alpha + a_0 &= \left(\frac{1-\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \frac{\sqrt[3]{6}^2}{4} + a_1\alpha + a_0 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \frac{\sqrt[3]{6}^2}{4} + a_1\frac{1}{2} + a_1\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + a_0 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\implies a_0 = -\frac{1}{4} - \frac{a_2}{2} - (a_1 - 1)\frac{\sqrt[3]{6}}{2} - \frac{\sqrt[3]{6}^2}{4} \notin \mathbb{Q}$$

$$\implies \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) \neq 2.$$

Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\mathbb{Q}} &= \alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \left(\frac{1-\sqrt[3]{6}}{2}\right)^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + 3\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^3 \\
&\quad + a_2\alpha^2 + a_1\left(\frac{1-\sqrt[3]{6}}{2}\right) + a_0 \\
&= \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 - \frac{6}{8} + a_2\alpha^2 + \frac{a_1}{2} - a_1\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + a_0 \\
&= \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{a_1}{2} + a_0 + \left(-a_1 - \frac{3}{4}\right)\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 + a_2\alpha^2 \\
&= -\frac{5}{8} + \frac{a_1}{2} + a_0 + \left(-a_1 - \frac{3}{4}\right)\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{1-\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{5}{8} + \frac{a_1}{2} + a_0 + \left(-a_1 - \frac{3}{4}\right)\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 \\
&\quad + a_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{5}{8} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_1}{2} + a_0 + \left(-a_1 - \frac{3}{4} - a_2\right)\frac{\sqrt[3]{6}}{2} + \left(\frac{3}{2} + a_2\right)\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies a_2 = -\frac{3}{2}, a_1 = \frac{3}{4}, a_0 = \frac{5}{8}$$

$$\implies f_{\alpha,\mathbb{Q}} = t^3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \text{ ist Minimalpolynom von } \alpha \text{ über } \mathbb{Q}.$$

Da $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 3$ gilt, folgt

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 3.$$

$\square$

(b) Sei $\alpha := \sqrt{5} + i \in \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$.
Zu zeigen: $f_{\alpha,\mathbb{Q}} = t^4 - 8t^2 + 36$ ist Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
Es gilt:

$$\left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\right] \cdot \left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}\right]$$

Bestimme zunächst $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\right]$.
Angenommen, $\deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(i) = i + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies &a_0 = -i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \\ \implies &\deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) \neq 1. \end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) = 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(i) = i^2 + a_1 i + a_0 = a_1 i + a_0 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies &\left(a_0 = 1 - a_1 i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \iff a_1 = 0\right) \\ \implies &f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = t^2 + 1,\ \deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) = 2. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ein Körper ist, gilt $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\right] = \deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) = 2$.
Bestimme nun $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}\right]$.
Angenommen, $\deg(f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}) = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}(\sqrt{5}) = \sqrt{5} + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies &a_0 = -\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \\ \implies &\deg(f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}) \neq 1. \end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}) = 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}(\sqrt{5}) = \sqrt{5}^2 + a_1\sqrt{5} + a_0 = a_1\sqrt{5} + a_0 + 5 \overset{!}{=} 0 \\
\implies &\Big(a_0 = -a_1\sqrt{5} - 5 \in \mathbb{Q} \iff a_1 = 0\Big) \\
\implies &f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}} = t^2 - 5,\ \deg(f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}) = 2.
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, gilt $\big[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}\big] = \deg(f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}) = 2$.
Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\Big[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}\Big] = \Big[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\Big] \cdot \Big[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}\Big] \\
&= \deg(f_{i,\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) \cdot \deg(f_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}) \\
&= 2 \cdot 2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Minimalpolynom $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$ einen Grad von $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = \big[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) : \mathbb{Q}\big] = 4$ besitzt.
Daher existieren a_0, a_1, a_2, a_3 so, dass $f_{\alpha,\mathbb{Q}} = \alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$ gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{5} + i, \\
\alpha^2 &= (\sqrt{5} + i)^2 \\
&= \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5}i + i^2 \\
&= 4 + 2\sqrt{5}i, \\
\alpha^3 &= (\sqrt{5} + i)^3 \\
&= \sqrt{5}^3 + 3\sqrt{5}^2 i + 3\sqrt{5}i^2 + i^3 \\
&= 5\sqrt{5} + 15i - 3\sqrt{5} - i \\
&= 2\sqrt{5} + 14i, \\
\alpha^4 &= (\sqrt{5} + i)^4 \\
&= \sqrt{5}^4 + 4\sqrt{5}^3 i + 6\sqrt{5}^2 i^2 + 4\sqrt{5}i^3 + i^4 \\
&= 25 + 20\sqrt{5}i - 30 - 4\sqrt{5}i + 1 \\
&= -4 + 16\sqrt{5}i.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha,\mathbb{Q}} &= \alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= -4 + 16\sqrt{5}i + a_3(2\sqrt{5} + 14i) + a_2(4 + 2\sqrt{5}i) + a_1(\sqrt{5} + i) + a_0 \\
&= -4 + 4a_2 + a_0 + 2a_3\sqrt{5} + a_1\sqrt{5} + 16\sqrt{5}i + 14a_3 i + 2a_2\sqrt{5}i + a_1 i \\
&= -4 + 4a_2 + a_0 + (2a_3 + a_1)\sqrt{5} + (16\sqrt{5} + 14a_3 + 2a_2\sqrt{5} + a_1)i \\
&= -4 + 4a_2 + a_0 + (2a_3 + a_1)\sqrt{5} + (14a_3 + a_1 + (16 + 2a_2)\sqrt{5})i \\
&\overset{!}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Damit $f_{\alpha,\mathbb{Q}} = 0$ gilt, müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

(I) $-4 + 4a_2 + a_0 = 0.$

(II) $2a_3 + a_1 = 0.$

(III) $14a_3 + a_1 = 0.$

(IV) $16 + 2a_2 = 0.$

ad (IV): $16 + 2a_2 = 0 \iff a_2 = -8.$

ad (I): $-4 + 4a_2 + a_0 = -4 + 4 \cdot (-8) + a_0 = 0 \iff a_0 = 36.$

ad (II),(III): (II) und (III) $\iff a_1 = a_3 = 0.$

Daraus folgt, dass $f_{\alpha,\mathbb{Q}} = t^4 - 8t^2 + 36 \in \mathbb{Q}[t]$ gelten muss.

Zu zeigen: $(1, \sqrt{5}, i, \sqrt{5}i)$ ist Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& (1, \sqrt{5}) \text{ ist Basis von } \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \text{ bezüglich } \mathbb{Q} \\
& \text{ und } (1, i) \text{ ist Basis von } \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) \text{ bezüglich } \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \\
\implies & \forall a \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \exists x, y \in \mathbb{Q} : x \cdot 1 + y \cdot \sqrt{5} = a \\
& \text{ und } \forall b \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) \exists x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) : x \cdot 1 + y \cdot i = b \\
\implies & \forall c \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) \exists w, x, y, z \in \mathbb{Q} : (w \cdot 1 + x \cdot \sqrt{5}) \cdot 1 + (y \cdot 1 + z \cdot \sqrt{5}) \cdot i = c \\
\implies & \forall c \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) \exists w, x, y, z \in \mathbb{Q} : w + x \cdot \sqrt{5} + y \cdot i + z \cdot \sqrt{5}i = c \\
\implies & (1, \sqrt{5}, i, \sqrt{5}i) \text{ ist Basis von } \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i).
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 8.3

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\alpha := \sqrt{p + \sqrt{p}} \in \mathbb{R}$.
Zu zeigen: $f_{\alpha,\mathbb{Q}} = t^4 - 2pt^2 + p^2 - p$ ist Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

Prüfe nun, welchen Grad $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$ besitzt, indem überprüft wird, ob $\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i$ rational ist. Der Grad des Minimalpolynoms ist das niedrigste $n \in \mathbb{N}$, für das $\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i$ rational ist.

Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 1$. Es gilt:

$$f_{\alpha,\mathbb{Q}} = \alpha + a_0 \overset{!}{=} 0 \overset{\alpha\notin\mathbb{Q}}{\implies} \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) \neq 1.$$

Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\mathbb{Q}} &= \alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \sqrt{p+\sqrt{p}}^{\,2} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
&= p + \sqrt{p} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
\overset{\sqrt{p}+a_1\alpha\notin\mathbb{Q}}{\implies} & \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) \neq 2.
\end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\mathbb{Q}} &= \alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \sqrt{p+\sqrt{p}}^{\,3} + a_2\sqrt{p+\sqrt{p}}^{\,2} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
&= (p+\sqrt{p})\cdot\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_2(p+\sqrt{p}) + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
&= p\cdot\sqrt{p+\sqrt{p}} + \sqrt{p}\cdot\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_2p + a_2\sqrt{p} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
\overset{(p+\sqrt{p})\alpha\notin\mathbb{Q}}{\implies} & \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) \neq 3.
\end{aligned}$$

Angenommen, $\deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\mathbb{Q}} &= \alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= \sqrt{p+\sqrt{p}}^{\,4} + a_3\sqrt{p+\sqrt{p}}^{\,3} + a_2\sqrt{p+\sqrt{p}}^{\,2} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
&= (p+\sqrt{p})^2 + a_3(p+\sqrt{p})\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_2(p+\sqrt{p}) + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
&= p^2 + 2p\sqrt{p} + \sqrt{p}^{\,2} + a_3(p+\sqrt{p})\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_2p + a_2\sqrt{p} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_0 \\
&= p^2 + p + a_2p + a_0 + 2p\sqrt{p} + a_2\sqrt{p} + a_3(p+\sqrt{p})\sqrt{p+\sqrt{p}} + a_1\sqrt{p+\sqrt{p}} \\
&= p^2 + p + a_2p + a_0 + (2p+a_2)\sqrt{p} + (a_3(p+\sqrt{p}) + a_1)\sqrt{p+\sqrt{p}} \\
&\overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Um diese Gleichung zu lösen, kann man ein lineares Gleichungssystem verwenden:

$$\begin{aligned} \text{(I)}\quad & p^2 + p + a_2 p + a_0 = 0, \\ \text{(II)}\quad & 2p + a_2 = 0, \\ \text{(III)}\quad & a_3(p + \sqrt{p}) + a_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad (II):}\quad & 2p + a_2 = 0 \iff a_2 = -2p. \\ \text{ad (I):}\quad & p^2 + p + a_2 p + a_0 = p^2 + p + (-2p)p + a_0 = 0 \iff a_0 = p^2 - p. \\ \text{ad (III):}\quad & a_3(p + p\sqrt{p}) + a_1 = 0 \overset{\sqrt{p}\notin\mathbb{Q}}{\iff} a_1 = a_3 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun die berechneten Werte von a_0, a_1, a_2, a_3 in die Gleichung $f_{\alpha,\mathbb{Q}} = \alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$ ein und ersetzt α durch die Variable t, so erhält man das Minimalpolynom

$$f_{\alpha,\mathbb{Q}} = t^4 - 2pt^2 + p^2 - p.$$

Zu zeigen: $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$.
Es gilt:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \overset{\alpha \text{ alg. über } \mathbb{Q}}{=} [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = \deg(f_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 4.$$

Zu zeigen: $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$ ist Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$.
Da α algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$ vom Grad 4 ist, gilt nach Korollar 6.2.9, dass $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$ Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.

Zu zeigen: α^{-1}.
Fehlt.

Zu zeigen: $\alpha^5 = 14\alpha^3 - 42\alpha$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{7 + \sqrt{7}}, \\ \alpha^2 &= \sqrt{7 + \sqrt{7}}^2 \\ &= 7 + \sqrt{7}, \\ \alpha^3 &= \sqrt{7 + \sqrt{7}}^3 \\ &= \sqrt{7 + \sqrt{7}}^2 \cdot \alpha \\ &= (7 + \sqrt{7}) \cdot \alpha \\ &= 7\alpha + \sqrt{7}\alpha. \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha^5 &= \alpha^2\alpha^2\alpha \\
&= (7+\sqrt{7})\cdot(7+\sqrt{7})\cdot\alpha \\
&= (49+14\sqrt{7}+\sqrt{7}^2)\cdot\alpha \\
&= 56\alpha+14\sqrt{7}\alpha \\
&= 56\alpha-14\cdot 7\alpha+14\cdot 7\alpha+14\sqrt{7}\alpha \\
&= (56-98)\cdot\alpha+14\alpha^3 \\
&= 14\alpha^3-42\alpha.
\end{aligned}$$

"$\square$"

(b) Fehlt.

korrigiert von am