Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 3

Aufgabe 1. Zwei Normen $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ auf einem Vektorraum V heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit

$$C_1\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C_2\|x\|' \quad \text{für alle } x \in V.$$

Zeigen Sie: *Zwei beliebige Normen auf* $\mathbb{R}^n$ *sind äquivalent.*
Dafür bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Stellen Sie fest, dass die Behauptung aus der Äquivalenz einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ folgt.

b) Beweisen Sie, dass es eine Konstante $C_1 > 0$ mit $\|x\| \leq C_1\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.

   Hinweis: Stellen Sie x mithilfe der kanonischen Basis dar.

c) Zeigen Sie:

   i) $\|\cdot\|\colon (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R}$ ist stetig.
   ii) $S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 = 1\}$ ist kompakt.
   iii) Es gibt eine Konstante $C_2 > 0$ mit $C_2\|x\|_2 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
   Hinweis: Benutzen Sie i), ii) und den Satz vom Maximum und Minimum.

Nun liefern a), b) und c)iii) die Behauptung!

Aufgabe 2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|\sin x$, dort, wo sie existieren, und untersuchen Sie, ob f im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *(positiv) homogen* vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$ gilt. Zeigen Sie:

a) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und positiv homogen vom Grad α, so sind die partiellen Ableitungen von f positiv homogen vom Grad $\alpha - 1$.

b) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und positiv homogen vom Grad α, so gilt die *Eulersche Identität*:

$$\langle \nabla f, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)x_j = \alpha f(x)$$

   Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Eulersche Identität positiv homogene Funktionen charakterisiert, d.h. eine differenzierbare Funktion ist genau dann positiv homogen, wenn sie die Eulersche Identität erfüllt.

Abgabe: Bis 28. Mai um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1			2	3		
	a	b	c		a	b	
Punkte	3	3	5	3	3	3	20

Präsenzaufgaben

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Verbinden Sie folgende Aussagen mit Implikationen und entscheiden Sie, ob die Umkehrungen dieser Implikationen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten. Verweisen Sie dabei ggf. auf entsprechende Sätze aus der Vorlesung.

i) f ist total differenzierbar in 0.

ii) Alle partiellen Ableitungen von f existieren in 0.

iii) Alle partiellen Ableitungen von f existieren in einer Umgebung von 0 und sind stetig in 0.

iv) Alle Richtungsableitungen von f existieren in 0.

v) f ist stetig in 0.

2. Bearbeiten Sie für die Funktionen

$$\begin{array}{llll} f(x,y) := x+y, & (x,y) \in U := \mathbb{R}^2\,, & p=(1,1)\,, & v=(1,1)\,. \\ g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2, & (x,y,z) \in U := \mathbb{R}^3\,, & p=(1,1,0)\,, & v=(1,2,3)\,. \\ h(x,y) := x^2-xy+y^2 & (x,y) \in U := \mathbb{R}^2\,, & p=(1,1)\,, & v=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\,. \end{array}$$

die folgenden Teilaufgaben.

a) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf ihren Definitionsbereichen U partiell differenzierbar sind und berechnen dort den Gradienten.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung im Punkt p in Richtung v.

c) Untersuchen Sie, in welche Richtungen die Richtungsableitung im Punkt p (i) maximal wird, (ii) minimal wird, oder (iii) verschwindet.

d) Skizzieren Sie die Niveaumengen der Funktion.

3. Zeigen Sie, dass die Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ zu der komponentenweisen Konvergenz äquivalent ist.

4. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dort, wo sie existieren, und untersuchen Sie, ob f im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist, wenn:

a) $f(x,y) = |x^2-y^2|$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+2y^2}, & \text{falls } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass auf U

$$\Delta(fg) = f \cdot (\Delta g) + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + (\Delta f) \cdot g$$

gilt, wobei für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $u : U \to \mathbb{R}$

$$\Delta u := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

den *Laplace-Operator* bezeichne.