Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis IIb“

Blatt 7

Aufgabe 1.

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv und sei das Differential $Df_{|x}$ invertierbar für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass $f\colon U \to f(U)$ ein (globaler) Diffeomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage in $a)$ für $n \geq 2$ im Allgemeinen nicht mehr gilt, wenn man in den Voraussetzungen die Injektivität von f weglässt. Gilt die Aussage in $a)$ für eine Funktion f auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ohne die Voraussetzung der Injektivität?

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, eine stetig differenzierbare Abbildung, die die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

erfüllt und $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

a) Die Jacobi-Determinante $\det J_f(a)$ verschwindet genau dann, wenn das Differential $Df_{|a}$ gleich Null ist.

b) Wenn $Df_{|a} \neq 0$ ist, dann ist f in einer Umgebung von a invertierbar und die inverse Abbildung genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Bemerkung: Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen werden Ihnen noch begegnen. Sie spielen eine zentrale Rolle in der Funktionentheorie, weil sie komplex differenzierbare Funktionen

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y),$$

charakterisieren.

Aufgabe 3. Sei $R > 0$ und $T\colon [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$T(r,\varphi,\psi) := \begin{pmatrix} (R + r\cos\psi)\cos\varphi \\ (R + r\cos\psi)\sin\varphi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

a) Welche Flächen im $\mathbb{R}^3$ werden von T beschrieben, wenn eine der Variablen fest gehalten wird? Machen Sie eine Skizze.

b) Was ist die Bildmenge von T? Skizzieren Sie sie.

c) Zeigen Sie, dass T auf dem Inneren des Definitionsbereichs differenzierbar ist und die Jacobi-Determinante von T dort nicht verschwindet.

d) Sei $D := (0,R) \times (0,2\pi) \times (0,2\pi)$. Ist $T\colon D \to T(D)$ ein Diffeomorphismus? Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von T^{-1}.

Abgabe: Bis 25. Juni um 10 Uhr als PDF-Datei in StudIP in der Veranstaltung Übung Analysis IIb unter dem Reiter Dateien im dafür vorgesehenen Ordner.

Aufgabe	1		2		3				
	a	b	a	b	a	b	c	d	
Punkte	2	2	2	3	3	2	3	3	20

Präsenzaufgaben

1. Untersuchen Sie, ob $i\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $i(x) := \frac{x}{\|x\|^2}$ ein Diffeomorphismus ist.

2. Untersuchen Sie, wo folgende Abbildungen lokale oder ob sie sogar globale Diffeomorphismen sind:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := (x^2 + y^3, x^2 - y^3)$

b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) := \big(\cos(x^2+y^2), \sin(x^2+y^2)\big)$

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante von f.

c) Finden Sie die Inverse der Jacobi-Matrix dort, wo sie invertierbar ist.

d) Beweisen Sie, dass f surjektiv ist und dass jeder Punkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

e) Skizzieren Sie $f(D)$, wobei D ein Kreissektor in $\mathbb{R}^2$ ist.

f) Definieren Sie lokal eine komplexe Quadratwurzel von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. *Kugelkoordinaten.* Sei $f\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r,\varphi,\psi) := (r\cos\varphi\sin\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\psi).$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante von f. Wo ist sie ungleich Null?

c) Was ist das Bild von $[0,1] \times [0,2\pi) \times [0,\pi]$ unter f?

d) Ist f ein Diffeomorphismus?

5. Lösen Sie folgende *partielle Differentialgleichungen* mithilfe angegebener Koordinatentransformationen:

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$, $x > 0$, $u = y - x^2$, $v = y + x^2$

b) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, $xyz \neq 0$, $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$
Bemerkung: Die letzte Gleichung ist eine *lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.* Für solche Gleichungen gibt es eine Methode, wie man „richtige“ Koordinatentransformationen findet. Sie wird üblicherweise in der Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ behandelt.