$\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$

(Gemeinsamkeiten und Unterschiede)

Erinnerung:

HA 4.3 : $(n \in \mathbb{N})$

Norm $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{n}] \longrightarrow \mathbb{N}_0$

$a + i\sqrt{n}\,b \longmapsto a^2 + \sqrt{n}\,b^2$

Es gilt:

a) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}] : N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$

b) Für $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ gilt:

$N(\alpha) = 1 \iff \alpha \in (\mathbb{Z}[i\sqrt{n}])^*$

In HA 4.3 b) haben wir außerdem gesehen: prim $\neq$ irred in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ist nicht faktoriell

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ist nicht euklidisch

In der Vorlesung wurde erwähnt:

$\mathbb{Z}[i]$ ist euklidischer Ring, mit der oben erwähnten Norm als Bewertungsfkt.

Wie ist das möglich?

Betrachte ein Element $a+i\sqrt{n}\,b \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ sowie alle Vielfachen davon in der komplexen Ebene.

So bilden z. B.

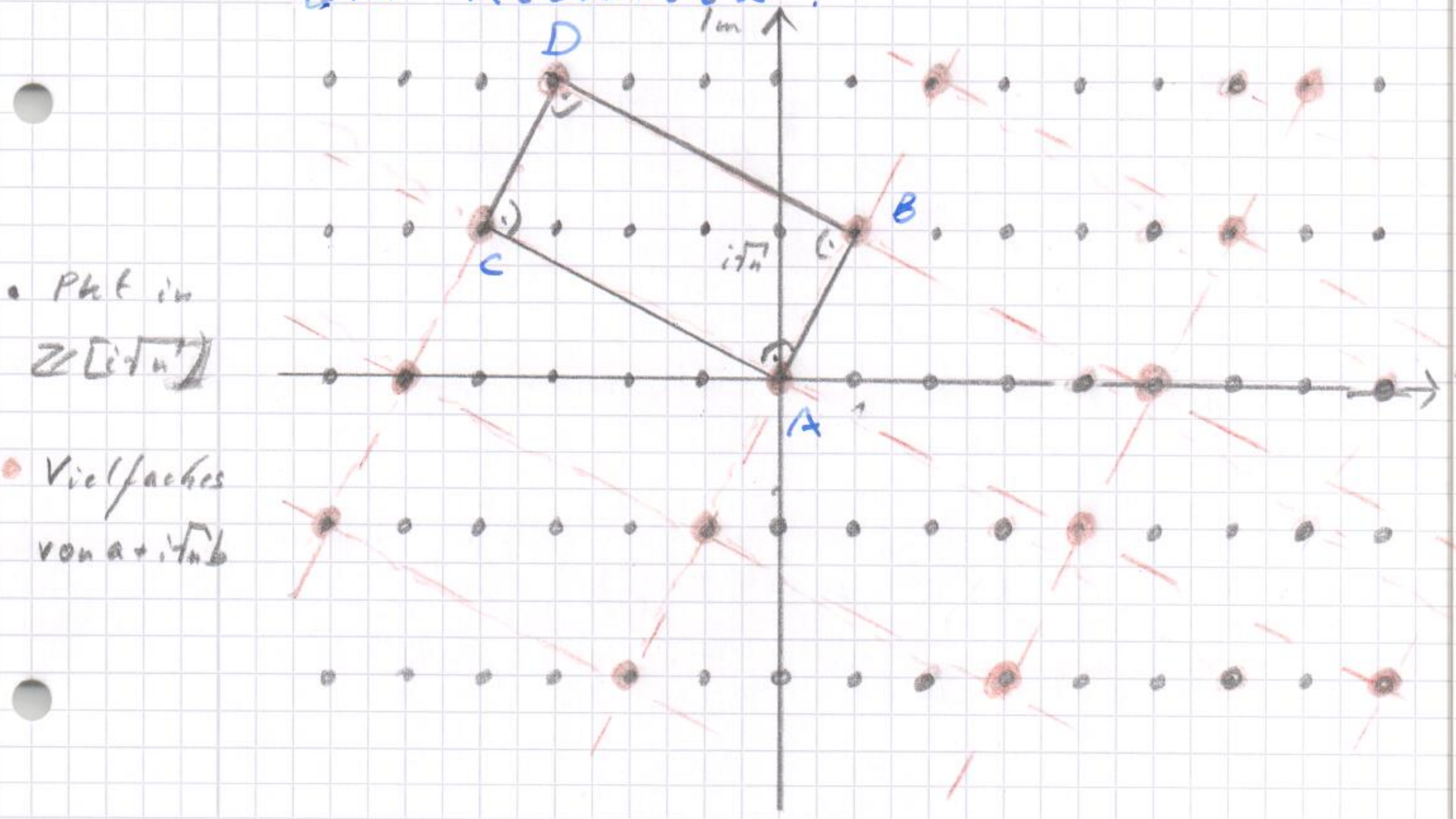
A $\quad 0 \cdot (a+i\sqrt{n}\,b)$

B $\quad 1 \cdot (a+i\sqrt{n}\,b)$

C $\quad i\sqrt{n} \cdot (a+i\sqrt{n}\,b) = -nb + i\sqrt{n}\,a$

D $\quad (1+i\sqrt{n})(a+i\sqrt{n}\,b) = (a-nb) + i\sqrt{n}(a+b)$

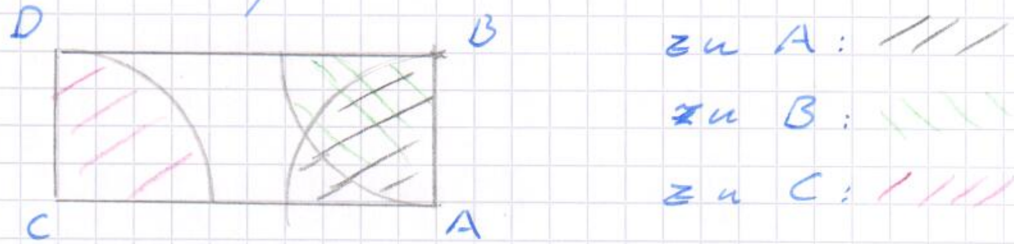
ein Rechteck:



(Multiplikation mit rein imaginärer Zahl = Drehung um 90° und Änderung der Länge entsprechend Betrag)

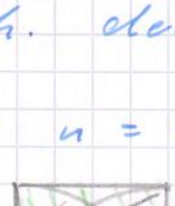
Die Punkte der Vielfachen von $a+i\sqrt{n}\,b$ bilden ein Gitter in der komplexen Ebene

Da $N(a+i\sqrt{n}b) = \|a+i\sqrt{n}b\|^2$ (Betrag als komplexe Zahl), können wir in diesem Rechteck auch die Punkte einzeichnen, deren Abstand zu einer Ecke $< \|a+i\sqrt{n}b\|$ ist und für die damit
$N(\text{Punkt} - \text{Ecke}) < N(a+i\sqrt{n}b)$
gelten muß.



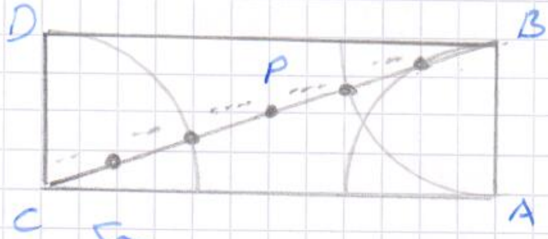
Werden alle Punkte von $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ in unserem Rechteck durch den überdeckten Bereich getroffen, so ex. zu jedem ein Punkt im Gitter der Vielfachen von $a+i\sqrt{n}b$, so daß die Norm der Differenz $< N(a+i\sqrt{n}b)$ ist. In diesem Fall haben wir Division mit Rest, d. h. der Ring ist euklidisch.

Für $n = 1$: Länge$(\overline{AB})$ = Länge$(\overline{AC})$



schon die Viertelkreise um B und C reichen zur Überdeckung aus.

Für $n = 5$,



$a + i\sqrt{5}\,b = 1 + i\sqrt{5}$

$(i\sqrt{5})\cdot(1+i\sqrt{5}) = 5 + i\sqrt{5}$

$(1+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{5}) = 4 + i\sqrt{5}\cdot 2$

$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{2}\cdot(1+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{5}) = 2 + i\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$

und $N(P-A) = 9 > N(a+i\sqrt{5}b) = 6$

$N(P-B) = N(P-C) = N(P-D) =$

$= N(P-A) = 9$

(Schnittpkt. der Diagonalen hat selben Abstand zu allen Ecken eines Rechtecks)

"$\Rightarrow$" $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ kann kein euklid. Ring sein bzgl. Norm N.