Klausur zu Analysis I
am 23.02.2018

WS 2017/2018 Grieser

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die entsprechende Seite und dort auf die Nummer der Aufgabe.* Beschriften Sie sofort jedes Blatt mit Ihrem Namen. Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Tutor(in):

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							
Korr.							

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe (6=3+3 Punkte)

a) Sei $z_1 = 2+3i, z_2 = -1+2i$. Berechnen Sie $\overline{z_1}, |z_1|, \frac{z_1}{z_2}$ und den Abstand zwischen z_1 und z_2.

b) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| \leq 1\}$ in der komplexen Ebene.

2. Aufgabe (14=2+6+6 Punkte)

a) Geben Sie die Definition einer Cauchy-Folge an.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen aus diesen Voraussetzungen folgen. Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel:

i) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

ii) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls er existiert, für

i) $a_n = \dfrac{n^2+3n-2}{1+2+\ldots+n}$

ii) $a_n = \sqrt[n]{n^2+13^n+\log n}$

3. Aufgabe (7=2+3+2 Punkte)

Seien $z_1, z_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{10^n} \qquad (*)$$

Wir schreiben dann $x = 0, z_1 z_2 \dots$ und nennen dies eine Dezimaldarstellung von x.

a) Begründen Sie die Konvergenz der Reihe $(*)$.

b) Zeigen Sie: Falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $z_n = 0$ für alle $n \geq n_0$, dann ist x rational.
Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$0,\overline{9} \geq 1$$

Begründen Sie Ihre Antwort detailliert.

4. Aufgabe (11=3+3+5 Punkte)

a) Geben Sie die Definition der Stetigkeit einer Funktion f in einem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs an. (Wenn Sie mehrere Definitionen kennen, geben Sie eine an.)

b) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\log x + e^x - 3 = 0$$

genau eine Lösung in $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$ hat.

5. Aufgabe (9=3+3+3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel:

a) ?„Ist die Menge A überabzählbar und die Menge B abzählbar, dann ist $A \setminus B$ überabzählbar.“?

b) ? „Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar und ist T die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$, so schneidet T diesen Graphen nur im Punkt $(a, f(a))$.“?

c) ? „Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Funktionen. Falls die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und alle f_n differenzierbar sind, so ist auch f differenzierbar.“?

6. Aufgabe (13=5+3+2+3 Punkte)

Sei $f \colon \mathbb{R} \setminus \{1, -4\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+4}$.

a) Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt, und alle lokalen Extrema von f.

b) Wie verhält sich die Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs, d.h. für $x \to 1$ oder $x \to -4$, jeweils von links oder rechts, und für $x \to \infty$, $x \to -\infty$?

c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

d) Entscheiden und begründen Sie anhand des Graphen, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.