Abgabe Analysis IIa, Blatt 04

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 1

1. Fehlt.
2. Fehlt.
3. Fehlt.

Aufgabe 2

Fehlt.

Aufgabe 3

(a) Untersuchen Sie $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$ auf Konvergenz.
Beh.: $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$ konvergiert absolut.
Es gilt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}.$$

Betrachte zunächst $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$. Es gilt für alle $x \in (0,1)$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}+e^x-1}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+e^x-1} \overset{e^x-1\geq 0}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Daraus folgt nach Proposition 54, dass $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$ absolut konvergiert.
Betrachte nun $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$. Es gilt für alle $x \in (1,\infty)$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}+e^x-1}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+e^x-1} \overset{\sqrt{x}-1\geq 0}{\leq} \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Daraus folgt nach Proposition 54, dass $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$ absolut konvergiert.
Insgesamt ergibt sich, dass $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1}$ absolut konvergent ist.

$\square$

(b) Untersuchen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}dx$ auf Konvergenz.
Beh.: $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}dx$ divergiert.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}dx \overset{PI}{=} & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}dx \\
= & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-1}{x^2-x}dx \\
= & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1-x}{x\cdot(x-1)}dx \\
= & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x-1}{x\cdot(x-1)} - \frac{x}{x\cdot(x-1)}\right)dx \\
= & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{x\cdot(x-1)}dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{x\cdot(x-1)}dx\right) \\
= & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x-1}dx \\
= & \left.\frac{\ln(x)}{1-x}\right|_{\frac{1}{2}}^1 - \ln(x)|_{\frac{1}{2}}^1 + \ln(x-1)|_{\frac{1}{2}}^1 \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1)}{1-k} - \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} - \ln(1) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{m\to 0}\ln(m) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{0}{1-k} - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 0 - \ln(2) + \lim_{m\to 0}\ln(m) + \ln(2) \\
= & 0 + 2\ln(2) + \lim_{m\to 0}\ln(m) \\
= & 2\ln(2) + \lim_{m\to 0}\ln(m)
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$2\ln(2) + \lim_{m\to 0}\ln(m) \longrightarrow 2\ln(2) + \infty = \infty.$$

Insgesamt ergibt sich, dass $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}dx$ divergiert.

$\square$

Aufgabe 4

(a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
Beh.: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \\
&\overset{x=\ln(t)}{=} 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{e^{\ln(t)} + e^{-\ln(t)}} \cdot \frac{1}{t} dt \\
&= 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt \\
&= 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt \\
&= 2 \cdot \arctan(t)\Big|_1^{\infty} \\
&= 2 \cdot \left(\lim_{k \to \infty} \arctan(k) - \arctan(1) \right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

(b) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx$.
Beh.: $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx = \frac{\pi}{2}$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx &\overset{t:=\sqrt{1-x}}{=} \int_1^0 \frac{-2t}{(2-(-t^2+1)) \cdot t} dt \\
&= 2 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} \\
&= 2 \cdot \left(\arctan(t)\Big|_0^1 \right) \\
&= 2 \cdot (\arctan(1) - \arctan(0)) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

korrigiert von am