Klausur zu Analysis IIb
am 12.07.2019

SS 2019 Shestakov

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die entsprechende Seite und dort auf die Nummer der Aufgabe.* Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							
Korr.							

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe. (6+16 Punkte)

a) Geben Sie die Definition einer offenen, einer abgeschlossenen, einer kompakten und einer konvexen Menge an.

b) Seien X, Y metrische Räume, $M \subset X$ und $f\colon X \to Y$ stetig. Beweisen oder widerlegen Sie:

   i) Ist M offen in X, so ist $f(M)$ offen in Y.

   ii) Ist M abgeschlossen in X, so ist $f(M)$ abgeschlossen in Y.

   iii) Ist M beschränkt, so ist $f(M)$ beschränkt.

   iv) Jede stetige reellwertige Funktion auf der Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4\}$$

   ist beschränkt.

   v) Die Intervalle $(0, 1)$ und $(2, 4)$ im $\mathbb{R}$ sind diffeomorph (d.h. es gibt einen Diffeomorphismus $f\colon (0, 1) \to (2, 4)$).

   vi) Sind M_j, $j = 1, 2, ...$, Teilmengen von X, so gilt:

$$\partial(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \partial M_j$$

2. Aufgabe. (2+6 Punkte)

a) Formulieren Sie die Kettenregel für vektorwertige Abbildungen.

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (u, v, w) \mapsto f(u, v, w)$, eine C^1-Funktion. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von

$$g(x, y, z) := f\left(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\right),$$

wobei $u(x, y, z) = xy - z$, $v(x, y, z) = \cos(e^{x+y})$ und $w(x, y, z) = \frac{z^2}{y}$ ist.

3. Aufgabe. (6+2 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ auf Extrema.

b) Was versteht man unter einem Homöomorphismus?

4. Aufgabe. (3+9 Punkte)

a) Formulieren Sie den Umkehrsatz im $\mathbb{R}^n$.

b) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

i) Untersuchen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, in welchen Punkten das Gleichungssystem lokal eine Abbildung $x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ definiert.

ii) Berechnen Sie die ersten Ableitungen von $y(x)$ und $z(x)$ im Punkt $(1, 1, 1)$.

iii) Skizzieren Sie die durch das Gleichungssystem definierte Menge im $\mathbb{R}^3$ und interpretieren Sie das Ergebnis aus i) geometrisch.

5. Aufgabe. (2+3 Punkte)

Sei $M := \{(t^3, t^6) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.

a) Begründen Sie, ob M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie den Tangential- und den Normalenraum an M im Punkt $(1, 1)$.

6. Aufgabe. (7 Punkte)

Sei a eine positive reelle Zahl. Stellen Sie a als Summe von drei Summanden dar, so dass die Summe der Quadrate dieser Summanden minimal ist. Benutzen Sie dabei die Lagrange-Methode.

Konzeptpapier

Konzeptpapier