Abgabe Algebra I, Blatt 10

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 10.1

(a) Seien R kommutativer Ring und M ein R-Modul. Definiere $Hom_R(R, M) = \{\phi : R \to M \mid \phi \text{ ist ein } R\text{-Modulhomomorphismus}\}$.
Zu zeigen: $Hom_R(R, M)$ ist R-Modul mit den gegeben Operationen.

(A) Zu zeigen: $(Hom_R(R, M), +)$ abelsche Gruppe.
Seien $\varphi_1\varphi_2, \varphi_3 \in Hom_R(R, M)$. Sei $a \in R$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
((\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3)(a) &= (\varphi_1 + \varphi_2)(a) + \varphi_3(a) \\
&= (\varphi_1(a) + \varphi_2(a)) + \varphi_3(a) \\
&\overset{\varphi_{1,2,3} \in M}{=} \varphi_1(a) + (\varphi_2(a) + \varphi_3(a)) \\
&= \varphi_1(a) + (\varphi_2 + \varphi_3)(a) \\
&= (\varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3))(a). \\
\implies &(Hom_R(R, M), +) \text{ Halbgruppe.}
\end{aligned}$$

Sei $\varphi : R \to M, a \mapsto 0$. Sei $\phi \in Hom_R(R, M)$ beliebig. Sei $a \in R$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\phi + \varphi)(a) &= \phi(a) + \varphi(a) \\
&= \phi(a) + 0 \\
&= \phi(a) \\
&= 0 + \phi(a) \\
&= \varphi(a) + \phi(a) \\
&= (\varphi + \phi)(a). \\
\implies &(Hom_R(R, M), +) \text{ Monoid.}
\end{aligned}$$

Sei $\phi \in Hom_R(R, M)$ beliebig. Definiere $\varphi^{-1} : R \to M, a \mapsto -\varphi(a)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\varphi + \varphi^{-1})(a) &= \varphi(a) + \varphi^{-1}(a) \\
&= \varphi(a) + (-\varphi(a)) \\
&= 0 \\
&= \varphi^{-1}(a) + \varphi(a) \\
&= (\varphi^{-1} + \varphi)(a). \\
\implies &(Hom_R(R, M), +) \text{ Gruppe.}
\end{aligned}$$

Seien $\varphi, \phi \in Hom_R(R, M)$. Sei $a \in R$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi + \phi)(a) &= \varphi(a) + \phi(a) \\ &\overset{M \text{ Modul}}{=} (\phi + \varphi)(a) \\ &= (\phi + \varphi)(a). \\ \Longrightarrow\ &(Hom_R(R, M), +) \text{ abelsche Gruppe.}\end{aligned}$$

(S1) Zu zeigen: $\forall \varphi \in Hom_R(R, M) : 1 \cdot \varphi = \varphi$.
Sei $\varphi \in Hom_R(R, M)$, sei $a \in R$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}(1 \cdot \varphi)(a) &= 1 \cdot \varphi(a) \\ &= \varphi(a). \\ \Longrightarrow\ &(S1).\end{aligned}$$

(S2) Zu zeigen: $\forall \lambda, \mu \in R \forall \varphi \in Hom_R(R, M) : \lambda \cdot (\mu \cdot \varphi) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi$.
Seien $\lambda, \mu \in R$. Sei $\varphi \in Hom_R(R, M)$, sei $a \in R$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot (\mu \cdot \varphi))(a) &= \lambda \cdot (\mu \cdot \varphi)(a) \\ &= \lambda \cdot \mu \cdot (\varphi(a)) \\ &= (\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi(a) \\ &= ((\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi)(a). \\ \Longrightarrow\ &(S2).\end{aligned}$$

(S3) Zu zeigen: $\forall \lambda \in R \forall \varphi, \phi \in Hom_R(R, M) : \lambda \cdot (\varphi + \phi) = \lambda\varphi + \lambda\phi$.
Sei $\lambda \in R$. Seien $\varphi, \phi \in Hom_R(R, M)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot (\varphi + \phi))(a) &= \lambda \cdot (\varphi + \phi)(a) \\ &= \lambda \cdot (\varphi(a) + \phi(a)) \\ &= \lambda \cdot \varphi(a) + \lambda \cdot \phi(a) \\ &= (\lambda \cdot \varphi)(a) + (\lambda \cdot \phi)(a) \\ &= (\lambda \cdot \varphi + \lambda \cdot \phi)(a). \\ \Longrightarrow\ &(S3).\end{aligned}$$

(S4) Zu zeigen: $\forall \lambda, \mu \in R \forall \varphi \in Hom_R(R, M) : (\lambda + \mu) \cdot \varphi = \lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \varphi$.
Seien $\lambda, \mu \in R$. Sei $\varphi \in Hom_R(R, M)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}((\lambda + \mu) \cdot \varphi)(a) &= (\lambda + \mu) \cdot \varphi(a) \\ &= \lambda \cdot \varphi(a) + \mu \cdot \varphi(a) \\ &= (\lambda \cdot \varphi)(a) + (\mu \cdot \varphi)(a) \\ &= (\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \varphi)(a). \\ \implies &\ (S4).\end{aligned}$$

$$\implies \quad Hom_R(R, M) \text{ ist ein } R\text{-Modul.}$$

$\square$

(b) Fehlt.

Aufgabe 10.2

(a) Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_K(V)$.
Zu zeigen: V ist mit der gegebenen Skalarmultiplikation ein $K[t]$-Modul.

(A) Zu zeigen: $(V, +)$ abelsche Gruppe.
Es gilt:

$$V \text{ ist } K\text{-Vektorraum} \implies (V, +) \text{ abelsche Gruppe.}$$

(S1) Zu zeigen: $\forall v \in V : 1 \cdot_F v = v$.
Es gilt:

$$1 \cdot_F v = 1 \cdot F^0(v) = F^0(v) = v \implies (S1).$$

(S2) Zu zeigen: $\forall p, q \in K[t] \forall v \in V : p \cdot_F (q \cdot_F v) = (p \cdot q) \cdot_F v$.
Seien $p, q \in K[t], v \in V$.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
p \cdot_F (q \cdot_F v) &= p \cdot_F \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right) \cdot_F v \right) \\
&= p \cdot_F \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i F^i \right) (v) \right) \\
&= p \cdot_F \left(\sum_{i=0}^{n} a_i F^i(v) \right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^j \right) \cdot_F \left(\sum_{i=0}^{n} a_i F^i(v) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} b_j F^j (\sum_{i=0}^{n} a_i F^i(v)) \\
&= \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot (\sum_{i=0}^{n} a_i) \cdot F^j(F^i(v)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j \cdot F^{i+j}(v) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j \cdot t^{i+j} \right) \cdot_F v \\
&= \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^j \right) \right) \cdot_F v \\
&= (p \cdot q) \cdot_F v.
\end{aligned}
$$

$\implies (S2)$.

(S3) Zu zeigen: $\forall p \in K[t] \forall v, w \in V : p \cdot_F (v + w) = p \cdot_F v + p \cdot_F w$.
Sei $p \in K[t]$. Seien $v, w \in V$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} p \cdot_F (v+w) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) \cdot_F (v+w) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i F^i(v+w) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i F^i(v) + \sum_{i=0}^{n} a_i F^i(w) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) \cdot_f v + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) \cdot_f w \\ &= p \cdot_F v + p \cdot_F w. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (S3)$.

(S4) Zu zeigen: $\forall p, q \in K[t] \forall v \in V : (p+q) \cdot_F v = p \cdot_F v + q \cdot_F v$.
Seien $p, q \in K[t]$. Falls $\deg(p) \neq \deg(q)$ hat das Polynom, welches geringeren Grad hat, bis zum Grad $\max(n, m)$ Null als Koeffizienten.
Sei $v \in V$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} (p+q) \cdot_F v &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i + \sum_{j=0}^{m} b_j t^j\right) \cdot_F v \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) t^i\right) \cdot_F v \\ &= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) F^i(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i F^i(v) + \sum_{j=0}^{m} b_j F^j(v) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) \cdot_F v + \left(\sum_{j=0}^{m} b_i t^i\right) \cdot_F v \\ &= p \cdot_F v + q \cdot_F v. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (S4)$.

$\Longrightarrow V$ ist $K[t]$-Modul.

$\square$

(b) Fehlt.

(c) Sei $F : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$. Sei $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Zu zeigen: $\mathcal{B}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}[t]$-Moduls $\mathbb{R}^{2\times 1}$.
Seien $p, q \in \mathbb{R}[t], p := t-1, q := -1$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
p \cdot_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot_F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= (t-1) \cdot_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot_F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (t - 1 \cdot t^0) \cdot_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1 \cdot t^0) \cdot_F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) - 1 \cdot F^0(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \right) + \left(-1 \cdot F^0(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\implies B$ linear abhängig über $\mathbb{R}[t]$
$\implies B$ keine Basis des $\mathbb{R}[t]$-Moduls $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

$\square$

Aufgabe 10.3

Fehlt.

korrigiert von am