7 Beweistechniken I

Der Beweis ist eines der wichtigsten Konzepte der Mathematik. Mit einem Beweis werden (mathematische) Aussagen bewiesen, d.h. ihre Richtigkeit ohne jeden Zweifel nachgewiesen. Im Alltag begegnen wir selten etwas Vergleichbarem. Nicht einmal in anderen Wissenschaften wird das Konzept des Beweises derart streng gehandhabt wie in der Mathematik. In der Biologie, Chemie oder Physik schließen Forscherinnen und Forscher aus wiederholten Beobachtungen auf die zugrundeliegenden Gesetze. Dies ist ein **induktives** Vorgehen: ein Schluss vom Speziellen auf das Allgemeine.
Mathematiker dagegen argumentieren immer **deduktiv**. Das bedeutet, dass Aussagen nur dann anerkannt werden, wenn sie streng den Regeln der Logik folgend aus bereits als wahr erkannten Aussagen geschlussfolgert werden können. Eine derartige Begründung, warum etwas gültig ist, nennen wir einen **(mathematischen) Beweis**.
Eine Aussage, die einmal bewiesen wurde, ist ohne Zweifel für alle Ewigkeit wahr, denn die Existenz eines Beweises sichert sie gegen das Auftauchen widersprüchlicher Entdeckungen ab. Hieraus folgt auch die Langlebigkeit der bewiesenen mathematischen Aussagen: Auch eine vor 2000 Jahren bewiesene Aussage (wie z.B. der Satz des Pythagoras) ist heute noch immer genauso war wie damals. Das selbe lässt sich nicht für Aussagen in anderen (wissenschaftlichen) Gebieten sagen, die durch neue Erkenntnisse, welche z.B. durch genauere Messmethoden gewonnen werden, widerlegt werden können.
Eine bewiesene mathematische Aussage wird i.A. als Satz bezeichnet oder je nach Mächtigkeit der Aussage als Lemma (Hilfsatz), Korollar (leichte Folgerung aus einem Satz), Proposition (in etwa das gleiche wie ein Satz), Theorem (besonders wichtiger Satz). Ein Satz wiederum kann in die Beweise weiterer Aussagen eingebaut werden, sodass neue, auf dem ersten Satz aufbauende Sätze entstehen usw. Als Grundlage aller dieser Überlegungen dienen den Mathematikern einige **Axiome**, auf die sich die Mathematik im Laufe der Zeit geeinigt hat. Axiome bilden quasi das allererste Glied in der Kette aufeinander folgender Sätze. Diese müssen nicht bewiesen werden, sondern werden als „von Natur aus wahr“ angesehen.
Um Fehler in dieser Kette von Sätzen und Beweisen zu vermeiden, müssen mathematische Aussagen und Beweise so formuliert sein, dass jeglicher Zweifel und Deutungsspielraum ausgeräumt wird. Ein einziger logischer Fehler könnte die Beweiskette abreißen lassen und alle Sätze, die weiter hinten in der Kette stehen, zu Fall bringen. Mathematikerinnen und Mathematiker arbeiten daher mit größtmöglicher Exaktheit, wobei ihnen die formale Logik behilflich ist.
Dieses Konzept zu verstehen und zu verinnerlichen ist das Fundament einer ernsthaften Beschäftigung mit der Mathematik. In diesem Kapitel werden wir uns daher mit dem Aufbau mathematischer Sätze und Beweise beschäftigen.

Bemerkung: Aus der Schulmathematik sind wir meist weniger mit Sätzen und Beweisen als mit Rechenaufgaben vertraut. Aber auch diese lassen sich als Sätze auffassen, denn eine schlüssige Rechnung ist eigentlich nichts anderes als ein Beweis für die Korrektheit des Rechenergebnisses – wenngleich ein einfaches Rechenergebnis als Satz zu bezeichnen wohl doch etwas künstlich aufgeblasen wirkt.
Im Mathematikstudium steht jetzt aber sowieso nicht mehr das Rechnen im Vordergrund, sondern das Finden von Beweisen.

7.1 Sätze und Definitionen in der Mathematik

Ein Satz ist im Grunde die Niederschrift einer beweisbar wahren mathematischen Erkenntnis. Es gibt beispielsweise Sätze, die grundlegende Eigenschaften von Zahlen festhalten. Diese Sätze sind keine isolierten Wissensbrocken. Vielmehr arbeiten Mathematikerinnen und Mathematiker mit ihnen und verwenden sie, um weitere Eigenschaften von Zahlen herauszufinden und zu beweisen.
Im Folgenden ein Beispiel für einen einfachen Satz.

Satz 7.1
Die Summe zweier ganzer Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade sind, ist immer gerade.

Um mit diesem Satz arbeiten zu können, müssen wir herausfinden, wie er zusammengesetzt ist, für welche Objekte er angewendet werden kann und was er uns über sie mitteilt. Dazu müssen alle Begriffe geklärt werden, die in diesem Satz vorkommen. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kennen wir bereits aus Kapitel 5 zur Mengenlehre. Also bleibt nur noch zu klären, was gerade und ungerade bedeutet. Eine Festlegung, die ein neues Objekt – hier gerade und ungerade Zahlen – einführt und erklärt, heißt in der Mathematik eine **Definition**.

Definition 7.2
Sei z eine ganze Zahl.

(a) Wir nennen z eine gerade Zahl, falls gilt: $\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k$.

(b) Wir nennen z eine ungerade Zahl, falls gilt: $\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k + 1$.

Beispiel: Gerade Zahlen sind zum Beispiel:

$$0 = 2 \cdot 0, \qquad 2 = 2 \cdot 1, \qquad 8 = 2 \cdot 4, \qquad -26 = 2 \cdot (-13), \qquad 1034 = 2 \cdot 517.$$

Ungerade Zahlen sind zum Beispiel:

$$1 = 2 \cdot 0 + 1, \qquad 39 = 2 \cdot 19 + 1, \qquad 13 = 2 \cdot 6 + 1$$

Wir sehen uns nun einige Beispiele zu dem obigen Satz an:

Beispiele:

1. Betrachte die Zahlen 20 und -48. Mit ein wenig Kopfrechnen stellen wir fest, dass $20 + (-48) = -28$ ist. Die Zahl $-28 = 2 \cdot (-14)$ ist eine gerade Zahl, denn $-14 \in \mathbb{Z}$. Dies passt zu unserem Satz: $20 = 2 \cdot 10$ und $-48 = 2 \cdot (-24)$ sind gerade Zahlen und wir haben verifziert, dass die Summe gerade ist.

2. Wir betrachten die Zahlen 674219 und 628753487. Anders als eben ist es bei dieser Zahl aufgrund ihrer Größe nicht so einfach, im Kopf die Summe zu berechnen und somit zu entscheiden, ob diese gerade oder ungerade ist. Doch 674219 und 628753487 sind ebenfalls ganze Zahlen und offensichtlich ungerade, daher versichert uns Satz[1] 7.1, dass die Summe eine gerade Zahl ist.

3. Gegeben seien die Zahlen 65 und 42. Diese Zahlen sind weder beide gerade noch beide ungerade. Unser Satz ist daher nicht anwendbar und gibt uns keine Information über die Summe dieser Zahl.

Wir wollen festhalten, was wir in den Beispielen unternommen haben. Mehrmals haben wir zwei ganze Zahlen gewählt und wir haben uns gefragt, ob diese Zahlen jeweils beide gerade bzw. beide ungerade sind oder nicht. Wir sagen dazu, dass wir die **Voraussetzungen** des Satzes **überprüft** haben. Für die ersten beiden Zahlenpaare waren die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, für das letzte nicht (da dort eine Zahl gerade und die andere ungerade war). Die Voraussetzung teilt uns mit, für welche Objekte der Satz überhaupt eine Aussage trifft. Für jedes Objekt, das alle Voraussetzungen eines Satzes nachweislich erfüllt, kann der Satz angewendet werden, um neue Erkenntnisse über dieses Objekt zu gewinnen. In unserem Beispiel haben wir so herausgefunden, dass die Summen der Zahlen 20 und -48 sowie 674219 und 628753487 jeweils gerade sind. Die Aussage eines Satzes nennen wir auch seine **Behauptung**. Diese Bezeichnung erinnert uns daran, dass ein mathematischer Satz nichts wert ist, solange wir keinen Beweis für seine Behauptung haben.
Grundsätzlich und bei genauem Hinsehen lässt sich (fast) jeder mathematische Satz in drei Teile aufteilen:

1. die **Voraussetzung**, die man als „Wenn … erfüllt ist“ lesen kann;

2. die **Behauptung**, die man als „Dann gilt …“ verstehen kann;

3. den **Beweis**.

Diesen formalen Aufbau zu verstehen und ihn in den Sätzen, mit denen wir zu tun haben, immer wieder aufs Neue zu erkennen, ist grundlegend für das Verständnis mathematischer Sätze. Voraussetzung und Behauptung zu trennen ist oft unerwartet schwer, weil Sätze selten als „Wenn-Dann“-Aussagen formuliert sind – wie auch in unserem Beispielsatz 7.1. Außerdem ist die Trennung von Voraussetzung und Behauptung leider auch nicht immer eindeutig. Den Satz in seine Einzelteile zu zerlegen

[1] Den wir aber noch nicht bewiesen haben...

und formal zu gliedern, ist dann schon ein großer Schritt. Wenn wir uns mit einem Satz beschäftigen, sollten wir die Struktur

Voraussetzung–Behauptung–Beweis

so weit wie möglich einhalten. Damit machen wir uns und anderen, die unseren Satz lesen, das Leben leichter. Denn erst wenn wir herausgefunden haben, welche Voraussetzungen ein Satz hat und welche Behauptung er trifft, können wir überhaupt anfangen, uns Gedanken über den Beweis des Satzes zu machen.
Die ersten Schritte in Richtung eines mathematischen Beweises sind also immer die folgenden Fragen:

1. Was genau wird vorausgesetzt?

2. Was genau wird behauptet?

Wir können dieses Konzept eines mathematischen Satzes mithilfe der Symbole der Aussagenlogik, wie sie in Kapitel 2 vorgestellt wurden, darstellen. Ein aus Voraussetzung und Behauptung aufgebauter Satz ist in der Sprache der Logik eine Aussage der Form

$$V \Rightarrow B,$$

gesprochen „V impliziert B“ oder „Aus V folgt B“. Dabei ist die Aussage V die Voraussetzung und die Aussage B die Behauptung des Satzes. Die logische Begründung für die Implikation ($\Rightarrow$) wäre der Beweis dieses Satzes.
Neben der „Wenn-Dann“-Aussage gibt es noch andere Formen, in denen mathematische Sätze aufzutauchen pflegen. Manche Sätze sind **Existenzsätze** („Es gibt ein Element, das die Bedingung ... erfüllt“) oder **Eindeutigkeitssätze** („Ein Element, das die Bedingung ... erfüllt, ist eindeutig bestimmt“).
Wir haben bereits im Beispiel gemerkt, dass unser Satz 7.1 die Form Voraussetzung–Behauptung(–Beweis) besitzt. Wir notieren ihn noch einmal leicht verändert, um diese Struktur deutlich zu machen.

Satz 7.3
Voraussetzung: Seien m, n ganze Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade seien.
Behauptung: $m + n$ ist gerade.

Wir können auch noch einen Schritt weiter gehen und denselben Satz mithilfe von mathematischen Symbolen schreiben.[2] Wir definieren dazu die Menge der geraden Zahlen als

$$2\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade}\}.$$

[2] Mathematikerinnen und Mathematiker machen dies gern, weil viele Sätze mithilfe von Symbolen besonders kurz und unmissverständlich ausgedrückt werden können. In der Fachliteratur ist eine solche Formulierung von Sätzen, in der fast nur Symbole auftauchen, jedoch eher unüblich.

Satz 7.4
$\underbrace{\forall m, n \in \mathbb{Z} \text{ beide gerade oder beide ungerade}}_{\textit{Voraussetzung}} : \underbrace{m + n \in 2\mathbb{Z}.}_{\textit{Behauptung}}$

Wie beweist man nun Sätze? Ein Beweis ist ein fundamentaler Bestandteil jedes mathematischen Satzes, egal ob es sich um einen „Wenn-Dann“-Satz, einen Existenzsatz oder einen Eindeutigkeitssatz handelt. Wir erinnern uns, dass ein Beweis aus logischen Schlussfolgerungen aufgebaut wird.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie eine derartige Schlussfolgerung konkret aussehen kann. Wir können uns auf ein Axiom oder eine Definition berufen und Eigenschaften von darin beschriebenen Objekten (wie $\mathbb{N}$ oder $2\mathbb{Z}$) verwenden. Eine andere Möglichkeit ist, sich auf einen bereits bewiesenen Satz zu beziehen und mithilfe dieses Satzes eine Implikation zu begründen. Tatsächlich werden beide Möglichkeiten in der Mathematik ständig verwendet.
Um einen Satz zu beweisen, brauchen wir meistens nicht nur ein Argument, sondern mehrere und eine ganze Reihe von Implikationen. Je nachdem, wie diese Reihe von logischen Folgerungen aufgebaut wird, ergibt sich eine andere Beweisstruktur. Es existieren im Wesentlichen vier Möglichkeiten, einen Beweis anzugehen:

1. den direkten Beweis,
2. den Beweis durch Kontraposition,
3. den Beweis durch Widerspruch,
4. den Beweis durch vollständige Induktion.

Der Rest dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Beweisart 1. Die anderen Beweisarten werden in den Kapiteln „Beweistechniken II“ und „Vollständige Induktion“ gesondert behandelt.

7.2 Der direkte Beweis

Ein **direkter Beweis** ist vom logischen Aufbau her die geradlinigste Art, einen Beweis zu führen. Bei einem direkten Beweis gehen wir von der Voraussetzung V aus und landen nach einer oder mehreren logischen Schlussfolgerungen bei der Behauptung B. Mit dieser Methode beweisen wir zuerst folgenden Satz:

Satz 7.5
Sei $m \in \mathbb{Z}$ eine gerade Zahl. Dann ist m^2 gerade.

Wir schreiben den Satz im Schema Voraussetzung-Behauptung-Beweis auf:

Voraussetzung: Sei $m \in \mathbb{Z}$ gerade.

Behauptung: m^2 ist gerade.

Beweis: Da m gerade ist, gibt es nach Definition 7.2 ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2k$. Nun ist nach den gelernten Rechenregeln $m^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2$. Da $2k^2$ eine ganze Zahl ist, ist m^2 wieder nach Definition 7.2 gerade. □

An das Ende eines Beweises setzen wir das Zeichen „□“ oder das Kürzel „**qed**“, die beide nichts anderes bedeuten als: „Hier ist der Beweis zu Ende.“[3] Bei komplizierten Beweisen hilft ein solches Zeichen bei der Orientierung, weil man diese oft nicht auf Anhieb versteht und dann das Ende des Beweises leicht überliest. (Manchmal will man den Beweis auch erstmal überspringen, dann ist dieses Zeichen auch hilfreich.)

7.3 Die Fallunterscheidung

Bei Beweisen merkt man manchmal, dass es sinnvoll ist, gewisse Eigenschaften der Objekte, über die der Satz eine Aussage treffen soll, in Kategorien aufzuteilen[4], und die Aussage für jede dieser Kategorie einzeln zu zeigen. Manchmal (wie im nachfolgenden Beispiel) ist dies durch die Struktur der Aussage vorgegeben. In anderen Fällen ist die Aussage zwar nicht entsprechend strukturiert, allerding führt eine eigene Kategorieneinteilung im Beweis dazu, dass man die Aussage einfacher beweisen kann. Z.B. kann es leichter sein, eine Aussage über eine natürliche Zahl n getrennt für n ungerade und n gerade zu zeigen, auch wenn der Satz hier keine Unterscheidung macht. (Ein Beispiel sehen wir in den Übungsaufgaben.)
Beispielhaft beschäftigen wir uns dafür mit Satz 7.1. Der Satz lautete (in Voraussetzung–Behauptung-Struktur umformuliert, vgl. dazu S. 4.) folgendermaßen:

Satz 7.1’
Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Wenn m, n beide gerade oder beide ungerade sind, so ist $m + n$ gerade.

Beweis: 1. Fall: Seien zuerst sowohl m als auch n gerade ganze Zahlen. Dann existieren nach Definition der geraden Zahlen zwei ganze Zahlen r und s, sodass wir schreiben können:

$$m = 2r,\ n = 2s.$$

Wir wollen die Summe $m + n$ berechnen, setzen ein und klammern aus:

$$m + n = 2r + 2s = 2 \cdot (r + s)$$

[3] Die Abkürzung qed bedeutet „quod erat demonstrandum“ – was zu zeigen war (lat.).

[4] Hierbei ist es nicht wichtig, dass diese Aufteilung disjunkt ist, also dass eine Eigenschaft nur in eine Kategorie fällt. Die Eigenschaft muss nur in *mindestens* eine Kategorie fallen. So ist es z.B. in Ordnung, für $x \in \mathbb{R}$ die Fallunterscheidung $x \leq 0$ und $x \geq 0$ zu machen (dann wird $x = 0$ in beiden Fällen betrachtet), die Fallunterscheidung $x < 0$ und $x > 0$ ist wiederum nicht in Ordnung, da $x = 0$ nicht betrachtet wird.

Dabei ist $r + s$ eine ganze Zahl, nach Definition 7.2 ist also $m + n$ eine gerade Zahl.

2. Fall: Seien nun m und n beide ungerade ganze Zahlen. Dann gibt es ganze Zahlen r und s, sodass wir schreiben können:

$$m = 2r + 1, \ n = 2s + 1.$$

So ähnlich wie eben errechnen wir[5]:

$$m + n = (2r + 1) + (2s + 1) = 2r + 2s + 2 = 2(r + s + 1)$$

Wieder sehen wir, dass $r + s + 1$ eine ganze Zahl und daher $m + n$ eine gerade Zahl ist. □

7.4 Gleichheit von Mengen

Oftmals möchte man der Mathematik zeigen, dass zwei Mengen M und N gleich sind. Wir erinnern uns an Kapitel 5, wo wir gesehen haben, dass $M = N$ äquivalent zu $M \subset N$ und $N \subset M$ ist. Will man also $M = N$ zeigen, so geht man oft[6] so vor, dass man $M \subset N$ und $N \subset M$ beweist. Um $M \subset N$ nachzuweisen, nimmt man sich ein beliebiges $x \in M$, und zeigt, dass dieses auch in N ist. $N \subset M$ geht analog.
Ein Beispiel:

Satz 7.6
Sind A, B, C Mengen, so gilt $A \setminus (B \setminus C) = (A \cap C) \cup (A \setminus B)$

Voraussetzung: Seien A, B, C Mengen

Behauptung: Es gilt $A \setminus (B \setminus C) = (A \cap C) \cup (A \setminus B)$

Beweis: Teil 1: Zu zeigen ist hier:

$$A \setminus (B \setminus C) \overset{!}{\subset} (A \cap C) \cup (A \setminus B)$$

Sei dazu $x \in A \setminus (B \setminus C)$ beliebig. Dies bedeutet, dass x in A ist, aber nicht in $B \setminus C$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

[5] Die Korrektheit dieser Gleichungskette folgt aus dem Assoziativ-, dem Kommutativ- sowie dem Distibutivgesetz. Diese Axiome setzen wir für ganze Zahlen als wahr voraus.
[6] aber nicht immer...

Fall 1: $x \in C$ Dann ist x in A und in C, also in $A \cap C$, also auch in $(A \cap C) \cup (A \setminus B)$.

Fall 2: $x \notin C$ Da x nicht in $B \setminus C$ liegt, kann x in diesem Fall auch nicht in B liegen. Also gilt (wegen $x \in A$), dass x in $(A \setminus B)$ liegt. Damit liegt x auch in $(A \cap C) \cup (A \setminus B)$.

Teil 2: Hier ist zu zeigen:

$$A \setminus (B \setminus C) \overset{!}{\supset} (A \cap C) \cup (A \setminus B)$$

Dies ist eine Übungsaufgabe.

□

Autoren dieses Kapitels:
2019: Konstantin Meiwald
2017: Nils Näthke, Nick Würdemann
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2015: Malte Fecht
2014: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2012 - 2013: Ute Valeska Spreckels