Übungsblatt 9 - Lösungsvorschläge

Paul Hafemann

26. Juni 2020

Aufgabe 9.1

1.

$$y_1(x) = \sin(x), y_2(x) = x\sin(x), y_3(x) = x^2$$

Wir vermuten, dass die y_i linear unabhängig sind, da sich auf den ersten Blick keine der Funktionen als Linearkombination der anderen schreiben lässt, also

Behauptung. Die Familie von Funktionen (y_1, y_2, y_3) ist $\mathbb{R}$-linear unabhängig.
Beweis: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i = 0. \tag{1}$$

Das bedeutet

$$f(x) := \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 x \sin(x) + \alpha_3 x^2 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es muss gelten

$$\alpha_3 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2},$$

denn beim Dividieren durch x^2 bleibt das α_3 stehen und aus der Analysis I wissen wir, dass $\frac{\sin x}{x}$ für $x \to \infty$ verschwindet. Da aber nach Annahme schon $f(x) \equiv 0$, gilt das auch für den Grenzwert und somit $\alpha_3 = 0$. Alternativ kann man π einsetzen und kommt zum selben Ergebnis.
Weiter setzen wir $\frac{\pi}{2}$ in die verbleibende Linearkombination ein.

$$\alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}\alpha_2 \tag{2}$$

Also erhalten wir

$$\alpha_2 x \sin(x) - \frac{\pi}{2}\alpha_2 \sin(x) = \alpha_2 \sin(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Setzen wir nun noch $\frac{\pi}{4}$ ein, erhalten wir

$$\alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0 \quad (2) \Rightarrow \alpha_3 = 0,$$

denn die Nullstellen des Sinus beschränken sich auf ganzzahlige Vielfache von π. Aus (1) erhalten wir also $\alpha_i = 0 \; \forall i = 1, 2, 3$. q.e.d.

2.

Wir vermuten, dass die y_i linear abhängig sind, weil die Polynomkoeffizienten linear abhängig sind (siehe Bemerkung).

Behauptung. Die Familie von Funktionen (y_1, y_2, y_3) ist $\mathbb{R}$-linear abhängig
Beweis: Es müssen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ passend, nicht alle gleich Null gewählt werden, sodass $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i = 0$ gilt. Wir haben also

$$\alpha_1(x^2 - 1) + \alpha_2(x^2 + 2x + 1) + \alpha_3(3x^2 + 4x + 1) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jetzt wollen wir die lineare Unabhängigkeit der Monome $(1, x, x^2)$ ausnutzen. Wir multiplizieren die Klammern aus und fassen neu zusammen:

$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (2\alpha_2 + 4\alpha_3)x + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Interpretiert man diese Form als Linearkombination der Monome mit den Klammern als Linearfaktoren, folgt wegen ihrer linearen Unabhängigkeit, dass alle Linearfaktoren (also die Klammern) Null sein müssen. Wir erhalten also ein homogenes Gleichungssystem, mithilfe dessen wir die passenden α_i bestimmen können:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der 2. Zeile folgt direkt $\alpha_2 = -2\alpha_3 = 0$, damit bekommen Zeile 1 und 3 jeweils die Form $\alpha_1 = -\alpha_3$. Wir sehen also, dass die Klammern linear abhängig waren und können daher die α_i so wählen, dass alle Klammern verschwinden. Zum Beispiel

$$\alpha_1 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_2 = 2.$$

q.e.d.

Bemerkung 1. *Polynome sind genau dann linear (un)abhängig, wenn ihre Koeffizienten als Vektoren geschrieben linear (un)abhängig sind. Der Grund dafür kann in der eben bearbeiteten Aufgabe nachvollzogen werden (Reduktion auf ein Gleichungssystem der α_i). Mit diesem Wissen kann man auch direkt eine Matrix aus den Polynomkoeffizienten bilden und mit bekannten Methoden aus der linearen Algebra prüfen, ob die Spalten linear unabhängig sind.

Aufgabe 9.2

1

$$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$$

Wir bestimmten zuerst das charakteristische Polynom und faktorisieren es, um seine Nullstellen zu finden.

$$P(\lambda) = \lambda^5+8\lambda^3+16\lambda = \lambda(\lambda^4+8\lambda^2+16) = \lambda(\lambda^2+4)^2 = \lambda\left((\lambda-2i)(\lambda+2i)\right)^2 = \lambda(\lambda-2i)^2(\lambda+2i)^2$$

Die Nullstellen und ihre Vielfachheiten sind also

$$\lambda_1 = 0,\ m_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2i,\ m_2 = 2$$
$$\lambda_3 = -2i,\ m_3 = 2$$

Somit erhalten wir ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem:

$$\left(1, e^{2ix}, xe^{2ix}, e^{-2ix}, xe^{-2ix}\right).$$

Mit

$$\left(e^{2ix}, e^{-2ix}\right) \to (\cos 2x, \sin 2x)$$
$$\left(xe^{2ix}, xe^{-2ix}\right) \to (x\cos 2x, x\sin 2x)$$

lässt sich ein $\mathbb{R}$- Fundamentalsystem bilden.

$$(1, \cos 2x, x\cos 2x, \sin 2x, x\sin 2x)$$

2

$$y''' - 8y = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 8$$

Eine offensichtliche Nullstelle ist $\lambda_1 = 2$, durch Polynomdivision mit $\lambda - 2$ erhält man

$$P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4) = (\lambda-2)\left((\lambda+1)^2+3\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \vee$$
$$(\lambda+1)^2 = -3$$
$$\Leftrightarrow \lambda + 1 = \pm i\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Nullstellen:

$$\lambda_1 = 2,\ m_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -1 + i\sqrt{3},\ m_2 = 1$$
$$\lambda_3 = -1 - i\sqrt{3},\ m_3 = 1$$

$\mathbb{C}$-FS:

$$\left(e^{2x}, e^{-1+i\sqrt{3}x}, e^{-1-i\sqrt{3}x}\right) = \left(e^{2x}, e^{-x}e^{i\sqrt{3}x}, e^{-x}e^{-i\sqrt{3}x}\right)$$

$\mathbb{R}$-FS:

$$\left(e^{2x}, e^{-x}\cos(\sqrt{3}x), e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)\right)$$

Aufgabe 9.3

1.

Anfangswertproblem:

$$y''' - y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$$

Nach Satz 138 aus der Vorlesung besitzt das AWP eine eindeutig bestimmte Lösung.
Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0,\ m_1 = 1\\
\lambda_2 &= 1,\ m_2 = 1\\
\lambda_3 &= -1,\ m_3 = 1
\end{aligned}$$

Da die Nullstellen alle reell sind, ist das Fundamentalsystem auch schon reell: $\mathbb{R}$-FS

$$\left(1, e^x, e^{-x}\right).$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung lassen sich also als Linearkombination dieser Basis schreiben:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 \cdot 1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}\\
\Rightarrow y'(x) &= c_2 e^x - c_3 e^{-x}\\
\Rightarrow y''(x) &= c_2 e^x + c_3 e^{-x}
\end{aligned}$$

Jetzt können wir die Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 = 3\\
y'(0) &= c_2 - c_3 = -1\\
y''(0) &= c_2 + c_3 = 1
\end{aligned}$$

Durch Addieren der unteren beiden Zeilen erhalten wir $c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = 1$. In die erste Zeile eingesetzt ergibt das $c_1 = 2$.
Mit den gerade ermittelten Linearfaktoren können wir jetzt die Konkrete Lösung des AWP angeben, indem wir sie in die allgemeine Linearkombination einsetzen, also

$$y(x) = 2 + e^{-x}.$$

2.

AWP:

$$y'' - 2y' + y = 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$

Wir sehen, dass $y_s \equiv 1$ diese inhomogene DGL löst, damit haben wir also schon eine spezielle Lösung. Homogene DGL:

$$y'' - 2y' + 1 = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Also ist die einzige Nullstelle $\lambda = 1$ und kommt zweifach vor.
$\mathbb{R}$-FS:

$$(e^x, xe^x)$$

Also lässt sich jede homogene Lösung schreiben als

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Nach Satz 140 aus der Vorlesung können wir nun jede allgemeine Lösung schreiben als

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_s = c_1 e^x + c_2 x e^x + 1 \\ \Rightarrow y'(x) &= c_1 e^x + c_2 (x e^x + e^x) \end{aligned}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + 1 = 2 \\ y'(0) &= c_1 + c_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = -2 \\ &\Rightarrow y(x) = e^x - 2xe^x + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.4

1

$$y^{(n)}(x) = \sin x + \cos(y(x)), \; y(0) = y'(0) = 0 \tag{3}$$

Behauptung. Das Anfangswertproblem (3) hat für $n = 1$ keine Lösung.
Beweis: $x = 0$ in (3) eingesetzt ergibt unter Berücksichtigung der Anfangswerte

$$0 = y'(0) = 0^3 + \cos(y(0)) = \cos 0 = 1.$$

Widerspruch, q.e.d.

Behauptung. Das Anfangswertproblem (3) hat für $n = 2$ eine eindeutig bestimmte Lösung.
Da die Funktion $(x, y) \mapsto \sin x + \cos y$ lipschitzstetig bezüglich y ist (die Ableitung des Kosinus ist beschränkt), liefert Satz 136 mit dem Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer eindeutigen Lösung des klassischen AWP n-ter Ordnung in (3). q.e.d.

Behauptung. Das Anfangswertproblem (3) hat für $n = 3$ unendlich viele Lösungen.
Beweis: Nach Satz 136 und Picard-Lindelöf existiert für jedes $a \in \mathbb{R}$ für das AWP der DGL in (3) mit

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = a$$

eine Lösung y_a. Diese kann für verschiedene a natürlich nicht gleich sein. Somit erhalten wir unendlich viele Lösungen. q.e.d.

2

$$y_1 : x \mapsto \sin x, \; y_2 : x \mapsto x \cos x \tag{4}$$

$$y''(x) = Q(y(x)) \tag{5}$$

Behauptung. Es gibt kein Polynom Q, für welches die beiden Funktionen y_1, y_2 die DGL in (5) lösen.

Beweis: Angenommen es existiert so ein Polynom Q, dann sind y_1, y_2 Lösungen des AWP

$$y''(x) = Q(y(x)), \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

denn es gilt

$$y_1(0) = \sin 0 = 0, ; y_2(0) = 0 \cdot \cos 0 = 0,$$
$$y_1'(0) = \cos 0 = 1, \; y_2'(0) = \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 = 1$$

(Produktregel in der letzten Zeile). Mit der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 136 und Picard-Lindelöf folgt, dass die beiden Lösungen in einer Umgebung des Anfangswertes gleich sein müssen. Also folgt $\sin x = x \cos x$ in einer Umgebung von 0, was offensichtlich nicht der Fall ist. Widerspruch, q.e.d.