Basiswechsel

Folie 62

Seien V ein K-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$
W ein K-VR mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$
$F: V \to W$ ein K-VR-Homomor.

Def.
$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) := \left((I_{\mathcal{C}} \circ F)(v_1) \; \cdots \; (I_{\mathcal{C}} \circ F)(v_n) \right) \in K^{m \times n}$$
darstellende Matrix von F bzgl $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

D.h. für $u = v_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ berechne
$$F(u) \in W$$
und schreibe dies als
$$F(u) = a_1 \cdot w_1 + \dots + a_m \cdot w_m \qquad (*)$$
$$\Rightarrow \quad I_{\mathcal{C}}(F(u)) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$$

Erinnerung: Folie 58
$$I_{\mathcal{C}} : W \longrightarrow K^{m \times 1}$$
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $I_{\mathcal{C}}(F(v_i)) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$
$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}.$$

Diagramm Folie 63

Bem: (*) kann leicht sein, wenn wir eine schöne Basis $\mathcal{C}$ haben

zB: 1) $W = K^{m\times 1}$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow$ Falls $F(u) =: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in W = K^{m\times 1}$, dann

ist $F(u) = x_1 \cdot w_1 + \dots + x_m \cdot w_m$

und somit $I_{\mathcal{C}}(F(u)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

2) $W = K[t]_{\leq 3}$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_4) = (1, t, t^2, t^3)$.

Schreibe $F(u) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

$\Rightarrow I_{\mathcal{C}}(F(u)) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ denn

$F(u) = a_0 \cdot w_1 + a_1 \cdot w_2 + a_2 \cdot w_3 + a_3 \cdot w_4$.

3) $W = K^{2\times 2}$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

$F(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot w_1 + b w_2 + c w_3 + d \cdot w_4$

$\Rightarrow I_{\mathcal{C}}(F(u)) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in K^{4\times 1}$.

4) Angenommen: $V = W$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$

mit $F(v_i) = \lambda_i v_i$ für $\lambda_i \in K$

$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

<u>Bsp</u>: Seien $V = K^{n\times 1}$, $F = id_V : K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ irgendeine Basis.

Es gilt: $id_V(v_1) = v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

$$\Rightarrow I_{\mathcal{B}}(id_V(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{analog für } v_2, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots \; 0 & 1 \end{pmatrix} = E_n.$$

Sei nun $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis.

Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$ gilt:

$$id_V(u) = u = u_1 \cdot e_1 + \dots + u_n e_n$$

$$\Rightarrow I_{\mathcal{E}}(id_V(u)) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u \quad \text{für alle } u \in K^{n\times 1}$$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_V) = (v_1 \;\; v_2 \; \cdots \; v_n) \in K^{n\times n}.$$

Was ist $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V)$?

$id_V(e_i) = e_i$. $\boxed{\underline{\text{Ziel}}: \text{ Löse } x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = e_i \quad (**)}$

Dann ist $I_{\mathcal{B}}(id_V(e_i)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$.

Setze: $A := (v_1 \;\; v_2 \cdots v_n) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_V)$.

Beachten Sie:

1) (∗∗) ist äquivalent zu $\boxed{Ax = e_i}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

2) Da $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis ist, ist die Matrix $A = (v_1 \cdots v_n) \in K^{n \times n}$ invertierbar.
(Ist Ihnen klar, warum das gilt?)

3) Aus 1) und 2) folgt: $x = A^{-1} \cdot e_i$
Weiter gilt, falls $A^{-1} = (s_1 \cdots s_n)$ mit Spaltenvekt. $s_1, \dots, s_n \in K^{n \times 1}$, so ist $\boxed{A^{-1} e_i = s_i}$.

Fazit: $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V) = (A^{-1}e_1 \ A^{-1}e_2 \ \cdots \ A^{-1}e_n) =$
$= (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n) = A^{-1}$.

(Alternativ: $(A^{-1}e_1 \cdots A^{-1}e_n) = A^{-1} \cdot (e_1 \cdots e_n) = A^{-1}$).

d.h.: $$\boxed{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_V)\right)^{-1}}$$

Dies gilt nicht nur für $V = K^{n \times 1}$ und $\mathcal{C} = \mathcal{E}$.

Folie 65 Für $G = F = id_V$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_2 = \mathcal{C}$ erhält man:

$$\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V)}_{= E_n} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \Longrightarrow \boxed{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V)\right)^{-1}}$$

Was, wenn F nicht id_V ist?

Folie 67

Sei $F: K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ ein K-VR Homomor.

Seien $\mathcal{B}_1 := \mathcal{E}^{(n)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis von $K^{n\times 1}$

$\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}$ eine weitere Basis von $K^{n\times 1}$

$\mathcal{C}_1 := \mathcal{E}^{(m)}$ die Standardbasis von $K^{m\times 1}$

$\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}$ eine weitere Basis von $K^{m\times 1}$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = \underbrace{M^{\mathcal{E}^{(m)}}_{\mathcal{C}}(id_{K^{m\times 1}})}_{\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^{(m)}}(id_{K^{m\times 1}})\right)^{-1}} \cdot M^{\mathcal{E}^{(n)}}_{\mathcal{E}^{(m)}}(F) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}^{(n)}}(id_{K^{n\times 1}})$$

Alle Faktoren auf der rechten Seite sind leicht zu berechnen!