Dr. Ivan Shestakov 31. Januar 2020

Analysis I: Themenübersicht

Hier ist eine stichwortartige Liste von Themen der Analysis I, die Sie kennen sollten.

Definitionen

Eine Definition zu kennen, heißt: 1. Eine Vorstellung von dem Begriff zu haben, 2. Eine exakte Definition hinschreiben zu können, 3. Ein paar typische Beispiele angeben zu können

- Was ist $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (nicht notwendigerweise die formale Definition)? Geometrische Bedeutung komplexer Zahlen
- Abbildungen: injektiv, surjektiv, bijektiv; Umkehrabbildung, Komposition
- Abzählbarkeit
- max, min, sup, inf, obere/untere Schranke, Beschränktheit von Mengen bzw. Folgen (soweit anwendbar)
- Häufungspunkt von Folgen und von Mengen, $\limsup, \liminf$
- Konvergenz für Folgen und Reihen, Konvergenzradius einer Potenzreihe
- Cauchy-Folge
- Monotonie von Folgen und Funktionen
- Stetigkeit, Grenzwerte von Funktionen, einseitige Grenzwerte
- gleichmäßige und punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen
- Differenzierbarkeit, Ableitung, höhere Ableitungen, lokale und globale Extrema
- e und π

Sätze

Einen Satz zu kennen heißt: 1. ihn ungefähr ('anschaulich') formulieren zu können; 2. ihn genau formulieren zu können; 3. zu verstehen, warum ggf. Annahmen gemacht werden (Gegenbeispiele bei Weglassen von Annahmen); im Idealfall 4. seine Bedeutung einordnen zu können (wofür? Typische Beispiele?); und für die, die in der Mathematik weiterkommen wollen 5. einen Beweis angeben zu können (zumindest eine Beweisidee)

- Kombinatorische Bedeutung von $n!$, $\binom{n}{k}$, 2^n
- Binomischer Lehrsatz
- Archimedisches Prinzip, Satz des Eudoxos
- Einschnürungssatz, Vergleichssatz
- Konvergenz monotoner beschränkter Folgen, Satz von Bolzano-Weierstraß, Cauchy-Folgen konvergieren
- Konvergenzkriterien für Reihen (Majorante, Minorante, Quotient, Wurzel, Leibniz, Verdichtung, Monotonie)
- ε-δ Charakterisierung von Funktionsgrenzwerten und Stetigkeit
- Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum und Minimum, Satz über die Inverse einer stetigen, strikt monotonen Funktion

- Stetigkeit des gleichmäßigen Grenzwertes stetiger Funktionen
- Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen
- Verwendung der Ableitung(en) bei Monotonie, Extrema, Sattelpunkten, Konvexität, Wendepunkten
- Regel von de l'Hospital
- Mittelwertsatz
- Satz von Taylor, und wie man ihn zur Approximation verwendet
- Identitätssatz für Potenzreihen
- Eulerformel, weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus
- Sätze über Stetigkeit und Ableitung einer Potenzreihe
- Eigenschaften und Definition der wichtigsten Funktionen (x^s für $s \in \mathbb{R}$, a^x für $a > 0$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, jeweils als Funktion von x):
  - Definitionsbereiche
  - Grenzwerte, etwa für $x \to \infty$, $x \to 0$
  - Graphen skizzieren können, wichtigste Funktionswerte und Nullstellen kennen
  - Taylorreihe (bei $\log x$ und x^s um den Punkt $x_0 = 1$)
  - ggf. Periodizität
  - Ableitung

Rechnen

Hier kann man nur sagen: Übung macht die Meisterin! (bzw. den Meister) Wichtig: Genau hinsehen, nach Mustern suchen, Spezialfälle betrachten, verschiedenes probieren,...

- Umformen von Ausdrücken, Gleichungen und Ungleichungen (auch unter Benutzung besonderer Tricks wie Erweitern, Logarithmieren usw.), Lösen quadrat. Gleichungen
- Umgehen mit Summenzeichen
- Rechenregeln für Brüche, Potenzen, Absolutbetrag, komplexe Zahlen, Logarithmus
- Eigenschaften von $\binom{n}{k}$ (Rekursionsformel, Relation zu 2^n)
- Regeln für Grenzwerte (auch $\pm\infty$) von Folgen, Reihen, Funktionen, für Stetigkeit
- Relative Größenordnungen von Funktionen kennen, z.B. $\log x << x^a << b^x$ für $x \to \infty$, falls $a > 0$, $b > 1$
- Beispiele für Reihen und deren Konvergenz/Divergenz: Geometrische Reihe, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$
- Formeln für den Konvergenzradius einer Potenzreihe
- Ableitungsregeln: Summe, Produkt, Quotient, Kettenregel, Umkehrfunktion

Allgemeines Verständnis, Beweistechniken

Dies sind 'allgemeine Kulturtechniken' der Mathematik. Sie sollten davon schon einiges mitbekommen haben, es zumindest teilweise beherrschen. Der Rest kommt nach und nach. Auch diese Dinge kann man nur durch Üben (und Selbstdisziplin) lernen.

- exakte Ausdrucksweise, genaues Umgehen mit logischen Aussagen und Schlüssen, mit 'für alle', 'es gibt', Aussagen korrekt verneinen können, korrekte Verwendung von $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- Bedeutung und grobe Struktur des Axiomensystems für $\mathbb{R}$
- Beweise durch vollständige Induktion, indirekter Beweis, Kontraposition
- Beweis- bzw. Lösungsideen, -techniken:
  - Sich fragen: Was ist das Ziel, was ist gegeben, wie bringe ich beides zusammen?
  - Kann ich vielleicht Zwischenziele formulieren?
  - Habe ich etwas ähnliches schon mal gesehen?
  - Skizzen anfertigen, Spezialfälle ansehen, herumprobieren
  - Extremalprinzip

Für den Moment zweitrangig

Dies sind Themen, von denen Sie gehört haben sollten (und haben, wenn Sie in der Vorlesung und den Übungen waren), die aber für den Moment weniger zentral sind (später aber zum Teil wieder aufgegriffen werden).

- Das Axiomensystem für $\mathbb{R}$ im Detail
- formale Definitionen von $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$
- Umordnungen von Reihen
- die Beweise der Sätze (siehe Bemerkung unter 'Sätze')
- gleichmäßige Stetigkeit
- verallgemeinerter Mittelwertsatz
- Details der Herleitung der Eigenschaften von sin, cos, exp, log
- weitere trigonometrische Funktionen (tan, cot, arcsin, arccos, arctan)