1 Was ist Mathematik?

Beim Lesen dieser ersten Überschrift könnte man sich fragen, ob der Autor eigentlich verrückt geworden ist. Schließlich waren wir ja alle in der Schule und haben ca. zwei Drittel unseres Lebens Mathematikunterricht genossen (oder wenigstens gehabt). Und nach Abschluss unseres Abiturs, bei dem wir eventuell sogar eine schriftliche oder mündliche Prüfung in Mathematik abgelegt hatten, haben wir alle auch noch die Entscheidung getroffen, uns weiterhin mit Mathematik beschäftigen zu wollen, weshalb wir nun mit dem Studium beginnen. Man könnte also vermuten, dass wir ziemlich sicher wissen sollten, was Mathematik genau ist.

Nur da geht es auch schon los: *Was ist Mathematik?* Oder um die Frage noch etwas mehr zu präzisieren:

> *Was ist Mathematik für Abiturienten, die gerade aus der Schule kommen?*

Wenn man Absolventen des Abiturs oder angehende Studierende fragt, was sie mit dem Begriff Mathematik verbinden, so erhält man typischerweise einige der folgenden Antworten:

- Rechnen
- Formeln
- Auswendiglernen
- Schlaue Menschen
- Nerds
- Schwierig
- Langweilig (wobei dies vermutlich in den meisten Fällen an den Lehrern liegt)
- Interessant (das klingt schon sehr viel besser)
- Ableiten, Integrieren, Geometrie, Stochastik oder andere Themengebiete

Wenn wir die persönlichen Gefühle wie Langeweile oder Interesse einmal beiseite lassen, erhalten wir ein ziemlich klares Bild: Nach dem Abitur scheint Mathematik für viele ehemalige Schüler in erster Linie aus Rechnen, Auswendiglernen von Formeln oder „Kochrezepten“ zu bestehen, wie Kurvendiskussionen oder die Bestimmung des Schnittpunktes von zwei nicht-parallelen Geraden in der Ebene.

Einmal ganz davon abgesehen, dass es äußerst schade ist, wenn Mathematik als langweilig bezeichnet wird, spiegeln Rechnen, Auswendiglernen von Formeln oder „Kochrezepte“ nicht wider, was die Wissenschaft Mathematik ausmacht und mit welchen Dingen wir uns an der Universität schwerpunktmäßig beschäftigen werden.

Was also verstehen Mathematikstudierende oder -dozenten unter Mathematik?

Auch wenn die Mathematik häufig zu den Naturwissenschaften gezählt wird, ist sie streng genommen eine Geisteswissenschaft. Das hat auch gute Gründe, denn in der Mathematik werden keine Naturphänomene erforscht, wie beispielsweise in Physik, Biologie oder Chemie. Vielmehr ist es so, dass die Mathematik ihre ganz eigene Welt hat, in der wir uns bewegen und die wir jeden Tag aufs Neue erforschen und näher kennenlernen. Diese ist allerdings keine physische, sondern eine abstrakte Welt, in der die Gesetze der Logik gelten – genau wie die Spielregeln der Natur in unserer richtigen Welt.

Zu Beginn des Studiums können wir uns unsere Mathematik-Welt als komplett unbebaut und „naturbelassen“ vorstellen – ohne Häuser oder sonstige Gegenstände. Wir befinden uns in dieser neuen Welt mit nichts anderem als einem fast leeren Werkzeugkoffer. Die einzigen Werkzeuge darin sind in einem kleinen separaten Fach und stammen noch aus der Schule, wie Grundrechenarten, Ableitungsregeln oder Dreisatz. Einige von diesen werden wir bei Gelegenheit wieder herausholen und verwenden, andere werden wir durch qualitativ bessere Varianten ersetzen.

Heute stehen wir also in dieser neuen Welt mit unserem Werkzeugkoffer und haben keine Ahnung, was wir tun sollen. Wir werden deshalb im Studium damit beginnen, die neue Mathe-Welt zu erkunden, und diese im Laufe der Zeit immer besser verstehen lernen. Wir werden dabei auf viele interessante Objekte stoßen, denen wir Namen geben werden, um uns über sie austauschen zu können. Genauso werden wir gewissen Eigenschaften von Objekten Namen geben, so wie wir auch alle wissen, was es bedeutet, wenn ein Stock gebogen oder gerade ist. Dies geschieht in unserer Mathe-Welt in Form von so genannten **Definitionen**. Dann werden wir feststellen, dass einige Objekte bestimmte Eigenschaften zu haben scheinen oder zu anderen Objekten bestimmte Beziehungen haben, so wie man aus Beton und Wasser bei der richtigen Mischung Zement erhält. Diese Eigenschaften werden wir erforschen und unsere Erkenntnisse in Form von **Sätzen** festhalten. Entscheidend ist dabei, dass wir diese Erkenntnisse logisch stichhaltig nachweisen können müssen – denn in unserer Mathe-Welt herrschen die Gesetze der Logik, nach deren Spielregeln sich alle Objekte verhalten. Diese stichhaltigen Nachweise werden wir in Form von **Beweisen** festhalten – und wenn wir dabei alles richtig gemacht haben, dann ist die nachgewiesene Eigenschaft für immer gültig. Denn die Gesetze der Logik werden bis in alle Ewigkeit bestehen bleiben und durch keine neuen Erkenntnisse wie die Relativitätstheorie revolutioniert werden.

Nach Erforschen einiger grundlegender Objekte wollen wir dann beginnen, Häuser zu bauen. Dafür legen wir ein Fundament und müssen herausfinden, wie wir Mauern errichten können. Dieses Problem versuchen wir zu lösen, indem wir auf unsere bisherigen bekannten Objekte zurückgreifen und uns Werkzeuge suchen und Techniken entwickeln, mit denen wir aus den Objekten eine Mauer errichten können. Haben wir erst einmal stichhaltig nachgewiesen, wie wir eine Mauer errichten können, so können wir dieses Wissen in einem „Satz“ und den Nachweis in einem „Beweis“ festhalten und bei allen zukünftigen Projekten auf dieses Wissen zurückgreifen. Genauso füllt sich unser Werkzeugkoffer mit den neuen Werkzeugen, die wir auch in Zukunft immer wieder verwenden und bei Gelegenheit vielleicht sogar verbessern können. Und so geht es immer weiter. Zum Beispiel stehen wir als nächstes vor dem Problem, eine Decke zu errichten, dann einen zweiten Stock, später einen Dachstuhl, einen Garten mit Gartenhäuschen oder sogar einen Swimmingpool. Bei all diesen Problemen können und müssen wir auf Wissen aus vorigen Projekten und Materialien von anderen Orten zurückgreifen, um sie zu lösen. Und manchmal müssen wir zuvor auch erst andere Teile unserer Welt erkunden, um die Objekte oder Werkzeuge zu finden oder die Fähigkeiten zu lernen, um unser konkretes Problem zu lösen. Auf diese Weise erkunden wir unserer Mathe-Welt immer mehr und bauen diese gleichzeitig stets weiter aus – wir bauen also die Welt, die wir im gleichen Moment auch erkunden.

Wie eventuell bereits zwischen den Zeilen herauszulesen war, geht es bei dem ganzen Erforschen der Mathe-Welt im Kern um eines:

das **Problemlösen** innerhalb der Gesetze der Logik.

Das Rechnen ist zwar nach wie vor <u>sehr wichtig</u>, da es uns die Werkzeuge für das Erforschen der Mathe-Welt liefert, aber es steht eben nicht als zu erkundendes Objekt selbst im Mittelpunkt! Wenn wir im Laufe unseres Studium bewusst darauf achten, wird es bei allem, was wir tun, um das Lösen von Problemstellungen gehen, denen wir mit unseren Werkzeugen aus dem immer voller werdenden Werkzeugkoffer begegnen werden. Dabei müssen wir uns stets nach den Gesetzen der Logik richten. Insofern könnte man Mathematiker eigentlich als die glücklichsten Menschen der Welt bezeichnen, da sie ihr Leben lang Rätsel lösen dürfen – und mal ehrlich: Wer knobelt denn nicht gerne?

Wir werden uns deshalb in diesem ersten Abschnitt mit einigen ersten Problemlöseaufgaben beschäftigen. In den Übungen können wir an weiteren solchen Aufgaben tüfteln. Dort werden wir außerdem die Möglichkeit haben, unseren Werkzeugkasten „auf Vordermann zu bringen“, indem wir sicherstellen, dass wir mit einigen grundlegenden Schulthemen sicher umgehen können. Falls es dabei an einigen Stellen noch etwas hakt, ist das aber überhaupt nicht schlimm, da es genügend Aufgaben zum Üben gibt.

1.1 Alles voller Geraden

Das folgende Problem wird auch in dem Buch *Mathematisches Problemlösen und Beweisen (Springer, 2013)* von Prof. Dr. Daniel Grieser, einem Analysis-Professor an unserer Universität, behandelt. Dieses Buch ist auch Grundlage des Moduls „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“, welches von Herrn Grieser entwickelt wurde und an dieser Universität für alle Zwei-Fächer-Bachelor Mathematik (gymnasiales Lehramt) ein Pflichtmodul im ersten Semester darstellt (Fach-Bachelor können dieses im Laufe ihres Studiums freiwillig belegen).

Wir betrachten das folgende Problem:

Problem 1

Gegeben seien 10 Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel seien und von denen keine drei durch einen Punkt gehen sollen.

In wieviele Teilgebiete zerlegen die Geraden die Ebene?

Bemerkung (Vorgehen beim Problemlösen): Die folgende Gliederung in verschiedene Schritte soll lediglich eine Orientierung bieten, und bei der Strukturierung des Problemlösens helfen. Sie muss in konkreten Fällen nicht auf diese Weise durchgeführt oder aufgeschrieben werden, bietet aber bei Bedarf einen guten roten Faden, an dem man sich orientieren kann. Grundsätzlich ist es sinnvoll sein Vorgehen beim Problemlösen zumindest gedanklich in die folgenden Bereiche zu gliedern, die man nacheinander abarbeitet:

- Aufgabe verstehen und Gefühl für die Problemstellung bekommen ($\rightarrow$ Beispiele ausprobieren).
- Muster in Beispielen erkennen und versuchen, diese zu verallgemeinern.
- Eine finale, strukturierte und allgemeine Lösung des Problems aufstellen.

Wir gehen bei der Lösung des obigen Problems in sechs Schritten vor:

Schritt 1: Aufgabe verstehen Bevor wir mit dem Lösen dieses Problems beginnen können, müssen wir zunächst sicherstellen, dass wir die *Aufgabe* und die darin aufgestellten *Voraussetzungen* richtig verstehen. Es sind also 10 Geraden gegeben. Dabei ist die Lagebeziehung dieser Geraden zueinander eingeschränkt, denn es soll gelten, dass

(a) **zwei** Geraden **nie parallel** zueinander sind und

(b) **drei** Geraden **nie durch einen Punkt** gehen.

Diese beiden Forderungen veranschaulichen wir uns zunächst in einer **Skizze**. Dabei zeichnen wir der Übersicht halber nur so wenige Geraden, dass wir die jeweilige Eigenschaft gut erkennen können – wir denken also „lokal“.

Die Lagen in der folgenden Abbildung sind nach den Forderungen (a) und (b) beispielsweise zugelassen:

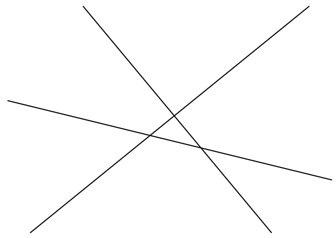

Abbildung 1.1: Nach den Forderungen (a) und (b) erlaubte Lagebeziehungen.

Forderung (a) schließt die Lagen in der nächsten Abbildung hingegen aus:

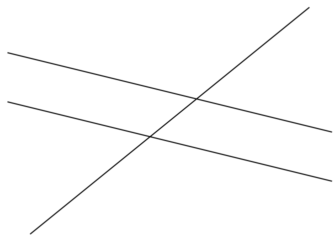

Abbildung 1.2: Nach Forderung (a) nicht erlaubte Lagebeziehungen.

Forderung (b) schließt die Lagebeziehungen in der folgenden Abbildung aus:

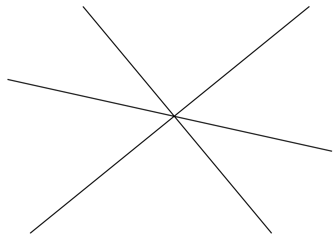

Abbildung 1.3: Nach Forderung (b) nicht erlaubte Lagebeziehungen.

Abschließend stellen wir noch sicher, dass wir die Problemstellung verstanden haben: Die Ebene wird durch die zehn Geraden in verschiedene Bereiche geteilt (vgl. Abbildung 1.4 am Beispiel mit drei Geraden).

Die Aufgabe besteht nun darin, die Anzahl dieser Bereiche zu bestimmen. Dabei wird außerdem implizit behauptet, dass die Anzahl dieser Bereiche nicht von der konkreten Lage der Geraden abhängt, solange diese die beiden Forderungen (a) und (b) erfüllt. Dies ist erst einmal nicht selbstverständlich und es ist für die Lösung des Problems entscheidend, dass unsere Argumentation für jede zugelassene Lage funktioniert. Deshalb können wir auch nicht einfach zehn Geraden in erlaubter Lage zeichnen und die so entstehenden Teilgebiete zählen. Woher wüssten wir dann, dass es bei einer anderen Lage (bei jeder möglichen anderen Lage!) die gleiche Anzahl von Teilgebieten wäre?

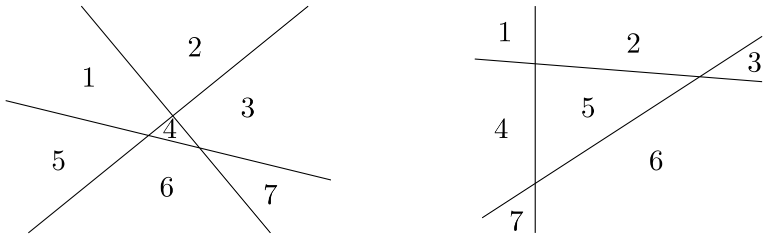

Abbildung 1.4: Verschiedene Teilgebiete, in die eine Ebene durch drei beispielhafte Geraden zerlegt wird.

Schritt 2: Ausprobieren Nachdem wir nun einen ersten Eindruck dafür bekommen haben, in welchen Lagebeziehungen sich die Gerade befinden dürfen, wollen wir den erlaubten Lagen etwas näher auf den Grund gehen, um ein besseres Gefühl für die Aufgabe und deren Lösung zu erhalten. Wir wollen uns dazu einige Beispiele von möglichen Lagebeziehungen anschauen, indem wir diese skizzieren. Wie bereits erwähnt ist es ratsam, sich zunächst auf wenige Geraden zu beschränken, um die ganze Situation etwas übersichtlicher zu gestalten. Wir können dadurch trotzdem ein gutes Gefühl für die Situation erlangen und hoffentlich auch gewisse Muster erkennen (vgl. Schritt 3).

In der folgenden Abbildung 1.5 sind einige beispielhafte Lagebeziehungen von einer, zwei, drei und vier Geraden skizziert:

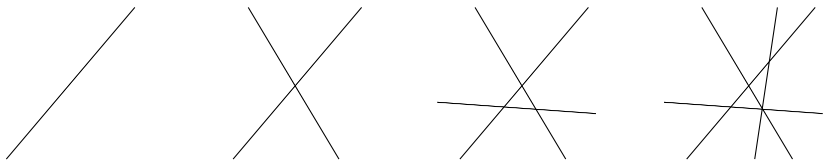

Abbildung 1.5: Mögliche Lagebeziehungen von einer, zwei, drei und vier Geraden.

Wir erkennen schnell, dass eine Gerade die Ebene stets in zwei Bereiche teilt, egal wie diese Gerade in der Ebene liegt. Auch bei zwei Geraden können wir sehen, dass diese die Ebene unabhängig ihrer Lage in vier Bereiche aufteilen werden. Hierbei wird allerdings Forderung (a) essenziell, da wir nur dann vier Bereiche erhalten, wenn sich die beiden Geraden schneiden! Wären sie parallel oder gar identisch würden sie die Ebene nur in drei bzw. zwei Bereiche aufteilen. Schauen wir uns die Lage von drei Geraden genauer an. Wir zählen in unserer Beispielskizze aus der obigen Abbildung 1.5 sieben Teilgebiete, in die die Ebene durch die drei Geraden zerlegt wird. Natürlich ist auch hier wie im Fall mit zwei Geraden Forderung (a) entscheidend, darüberhinaus wird ab drei Geraden aber auch Forderung (b) notwendig. Denn würden wir in der obigen Skizze eine der drei Geraden derart verschieben, dass sie durch den Schnittpunkt der anderen beiden ginge, so würde der dreieckige Bereich in der Mitte der Skizze wegfallen und wir hätten nur noch sechs Teilgebiete.

Um ein noch besseres Gefühl für die Zusammenhänge zu erhaten, können wir im Kopf die Lage von einzelnen Geraden in Abbildung 1.5 verändern, ohne die Forderungen (a) und (b) zu verletzen. Bleiben es dabei stets sieben Teilgebiete, in die die Ebene zerlegt wird?

DENKPAUSE

Für eine klarere Übersicht über die Anzahl der Bereiche in unseren Beispielskizzen zählen wir in Abbildung 1.5 jeweils die Anzahlen der Teilgebiete und halten diese in einer **Tabelle** fest.

Anzahl Geraden	1	2	3	4
Anzahl Teilgebiete	2	4	7	11

Tabelle 1.1: Zusammenhang zwischen Anzahl der Geraden und Anzahl der Teilgebiete der Ebene gemäß Abbildung 1.4.

Wir zeichnen noch ein paar weitere erlaubte Anordnungen mit vier Geraden.

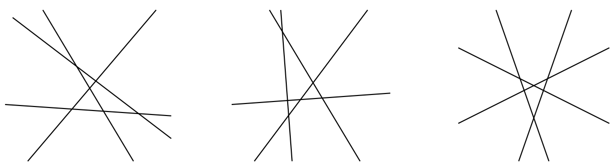

Abbildung 1.6: Weitere erlaubte Anordnungen mit vier Geraden.

Auch bei diesen Varianten erhalten wir jedes Mal elf Teilgebiete. Ob das für jede mögliche Lage der Fall ist, müssen wir am Ende beantworten.

Schritt 3: Muster erkennen Nun haben wir für einige kleinere Anzahlen von Geraden bereits Vermutungen angestellt, in wieviele Teilgebiete sie die Ebene zerlegen. Um auch für die gewünschte größere Anzahl von zehn Geraden (und dann vielleicht sogar für 100 oder 1000 Geraden) eine Vermutung über die Zahl der Teilgebiete anzustellen, versuchen wir in den vier Beziehungen aus Tabelle 1.1 ein Muster zu erkennen. Solch ein Muster muss keineswegs eindeutig sein, oftmals gibt es viele verscheidene Muster, die man erkennen kann.

DENKPAUSE

In unserem Fall können wir mit scharfem Hinsehen zum Beispiel die folgenden Muster ausmachen:

- Die Anzahl der Teilgebiete ergibt sich jeweils als Summe der links von ihr und der über ihr stehenden Zahl (wobei wir die erste Spalte nach obigen Überlegungen als wahr anerkennen).
- Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Anzahlen an Teilgebieten nimmt von einer Zahl zur nächsten um eins zu.
- Die Anzahl an Teilgebieten ergibt sich als Summe aller Zahlen in der ersten Zeile von Tabelle 1.1 bis zur Zahl über der betrachteten Anzahl an Teilgebieten, plus eins. Also z.B. die Anzahl der Teilgebiete bei drei Geraden: $(1 + 2 + 3) + 1 = 7$.

Alle diese Muster sind für sich genommen erst einmal richtig und es kann durchaus noch weitere richtige Muster geben. Die nächste Aufgabe besteht für uns darin diese Muster in Zusammenhang mit der Aufgabe zu setzen, um eines zu finden, welches im Aufgabenkontext sinnvoll ist und mit dem wir entsprechend weiterarbeiten können. Es kann dabei auch mehrere für die Aufgabe sinnvolle Muster geben; genauso kann es aber auch sein, dass einige Muster nur zufällig bei diesen ersten vier Zahlen das gleiche Resultat wie die anderen liefern. Beim Weiterführen der Zahlenreihen würden bei letzteren aber womöglich falsche Werte in unserem Aufgabenkontext herauskommen.

Wir nehmen uns also eines der obigen Muster, beispielsweise das erste, und versuchen es in unserem Aufgabenkontext mit Sinn zu füllen.

Schritt 4: Zwischenziel setzen Beim Lösen von Problemstellungen ist es sehr häufig hilfreich, sich **Zwischenziele** zu formulieren. Schließlich baut man bei einem Haus ja auch nicht schon das Dach, wenn man gleichzeitig erst bei der ersten Wand beginnt, sondern stellt zuerst das Erdgeschoss fertig (Zwischenziel 1), dann den nächsten Stock (Zwischenziel 2) und das Dach (Zwischenziel 3) – danach ist das Haus fertig (Ziel). Oftmals ist es eine gute Taktik, sich Zwischenziele aus erkannten Mustern (Schritt 3) abzuleiten.

Wie bereits angedeutet, soll unser Zwischenziel also lauten: Erkenne einen Grund, warum das erste Muster von oben (im Aufgabenkontext) für eine, zwei, drei und vier Geraden gilt. Achtung: Sollte uns das nicht gelingen, so sind wir keineswegs gescheitert, sondern probieren ein anderes Muster!

Es ist dabei eine gute Taktik, wieder bei wenigen Geraden anzufangen und zu versuchen, dieses Muster für diese kleinere Geradenanzahl zu erklären. Danach können wir schauen, ob wir diese Überlegung auf die nächsthöhere Anzahl übertragen können.

<u>Eine Gerade</u>: Diesen Fall hatten wir bereits besprochen. Legt man eine Gerade in die Ebene (in welcher Lage auch immer), so teilt sie die Ebene in genau zwei Teilgebiete. Der Fall mit einer Gerade bildet gewissermaßen den „Grundstein“ für unsere Überlegung.

Zwei Geraden: Dieser Fall ist interessanter. Gehen wir von unserem „Grundstein“ aus, in dem eine Gerade bereits in der Ebene liegt. Legen wir nun eine weitere Gerade in die Ebene. Da die zweite Gerade nach Forderung (a) nicht parallel zur ersten Gerade sein darf, muss die zweite Gerade die erste schneiden. In Folge dessen muss die zweite Gerade beide bereits bestehenden Teilgebiete noch einmal teilen. Dadurch entstehen vier Bereiche.

Drei Geraden: Wie sieht es aus, wenn wir zu den beiden in der Ebene liegenden Geraden eine dritte hinzulegen?

DENKPAUSE

Offenbar darf auch in diesem Fall die dritte Gerade weder parallel zu ersten Gerade, noch parallel zur zweiten Gerade sein (Forderung (a)), weshalb sie die ersten beiden Geraden schneiden muss! Darf sie diese in beliebigen Punkten schneiden? Nein, denn wegen Forderung (b) darf die dritte Gerade nicht durch den Schnittpunkt der ersten Geraden laufen – anders gesagt unterteilen die beiden bereits vorhandenen Geraden die dritte Gerade in drei Teile (vgl. Abbildung 1.7).

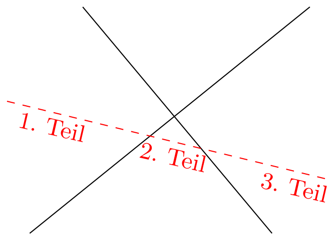

Abbildung 1.7: Hinzufügen einer dritten Geraden (rot gestrichelt, in drei Teile geteilt) zu zwei bereits vorhandenen Geraden.

Wie entstehen durch Hinzufügen der dritten Geraden nun neue Gebiete?

DENKPAUSE

Es entstehen neue Teilgebiete, indem die dritte Gerade bereits vorhandene Teilgebiete erneut durchtrennt. Jeder Teil der dritten Gerade durchtrennt ein bereits bestehendes Teilgebiet (vgl. Abbildung 1.7). Da wir uns eben überlegt haben, dass die dritte Gerade in drei Teile zerteilt wird, entstehen drei neue Bereiche.

Vier Geraden: Die Überlegung von drei Geraden können wir auf vier Geraden übertragen: Wegen der Forderungen (a) und (b) muss die zusätzliche vierte Gerade so zu den vorhandenen drei Geraden gelegt werden, dass sie

- zu keiner parallel ist (also mit jeder der drei Geraden einen Schnittpunkt hat) und
- nicht durch einen bereits vorhandenen Schnittpunkt geht.

Die vierte Gerade wird also durch die drei bereits vorhandenen Geraden in vier Teile zerlegt. Jeder dieser vier Teile zertrennt ein bereits vorhandenes Teilgebiet, weshalb insgesamt vier weitere Bereiche entstehen (aus vier Teilgebieten werden acht).

Diese Interpretation der Art und Weise, wie sich die Anzahl der Teilgebiete mit jeder neu hinzugefügten Gerade erhöht, ist genau der Zusammenhang, den wir in unserem Zwischenziel erklären wollten.

Schritt 5: Erkenntnis übertragen Dieser Erkenntnis können wir genauso auf höhere Anzahlen übertragen: Liegen zum Beispiel bereits neun Geraden in der Ebene und legen wir eine zehnte auf korrekte Weise hinzu, so muss diese wegen Forderung (a) jede der neun vorhandenen Geraden schneiden und wegen Forderung (b) geht sie durch keinen bereits vorhandenen Schnittpunkt. Daher wird die zehnte Gerade durch die neun Schnittpunkte mit den neun bereits vorhandenen Geraden in zehn Teile unterteilt. Jeder dieser Teile zertrennt ein bereits vorhandenes Teilgebiet. Es werden also aus zehn bereits vorhandenen Teilgebieten nun 20 Teilgebiete – zehn Teilgebiete mehr als zuvor.

Diese Überlegung lässt sich sogar genauso auf beliebige andere Zahlen übertragen – z.B. 100 statt zehn (und entsprechend 99 statt neun).

Schritt 6: Lösung formalisieren Wir haben nun also erkannt, wie unsere Anzahl zustande kommt. Wir bauen sukzessiv immer mehr Geraden in die Ebene ein. Bei jeder zusätzlichen Gerade kommen zu den bereits vorhandenen Teilgebieten eine bestimmte Anzahl an neuen Teilgebieten hinzu – und zwar für jedes Teilgebiet, durch das die neue Gerade verläuft, genau ein weiterer Bereich. Wegen der Forderungen (a) und (b) aus der Problemstellung läuft die zehnte Gerade durch zehn, die 100. Gerade durch 100 und die 894. Gerade durch 894 Teilgebiete. Dies entspricht jeweils der hinzukommenden Anzahl an Teilgebieten. Wir können für unser anfängliches Problem daher den folgenden Zusammenhang aufstellen:

Zehn Geraden, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch den gleichen Punkt gehen, zerteilen die Ebene in die folgende Anzahl an Teilgebieten:

$$\begin{aligned}&\text{Anzahl an Teilgebieten mit 10 Geraden}\\ =&\text{Anzahl an Teilgebieten mit 9 Geraden } + 10\end{aligned} \tag{1.1}$$

Um dies etwas handlicher aufzuschreiben, bezeichnen wir die „Anzahl an Teilgebieten mit 10 Geraden“ mit A_{10}, die entsprechende Anzahl mit neun Geraden mit A_9 und so weiter. Geichung (1.1) können wir dann schreiben als

$$A_{10} = A_9 + 10 \tag{1.2}$$

Diese Logik können wir weiter verfolgen, indem wir die Anzahl an Teilgebieten mit 9 Geraden (also A_9) ebenfalls aufgeschlüsselt hinschreiben:

$$A_{10} = \underbrace{A_8 + 9}_{=A_9} + 10$$

Wenn wir die gleiche Logik so weiterführen erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_{10} &= \underbrace{A_7 + 8}_{=A_8} + 9 + 10 \\ &\vdots \\ &= A_1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Die Antwort unserer Problemstellung 1 lautet also, dass zehn entsprechend angeordnete Geraden die Ebene in 56 Teilgebiete zerlegen.

Bemerkung:

- Eine Darstellung wie in (1.2) nennt man auch **rekursive Darstellung**, weil man einen neuen Wert aus dem jeweils vorherigen erhält. Man muss am Ende nur den ersten Wert wissen (was passiert bei einer Geraden?) und die Regel wie man jeweils zum nächsten Wert gelangt.

- Genauso, wie bei der Überlegung im letzten Schritt hätten wir auch für eine größere Anzahl von Geraden wie 100 oder 1000 vorgehen können. Wir hätten per Hand wohl etwas mehr Zeit gebraucht, wären aber sicher zum Ziel gekommen, sofern wir uns nicht verrechnen. Man kann die Summe der Zahlen von 1 bis 10 (oder von bis zu jeder anderen beliebigen Zahl, wie 100 oder 1000) auch mit einer sehr kurzen, handlichen Formel ausdrücken. Man nennt diese die Gaußsche Summenformel und wir werden diese in einem späteren Kapitel noch kennenlernen.

- Aufgrund unserer stichhaltigen Argumentation, welche abgesehen von der Einhaltung der Forderungen (a) und (b) **unabhängig von der Lage der Geraden** war, gilt unser Ergebnis tatsächlich für jede erlaubte Lagebeziehung!

Rückschau zu Problem 1

Wir sind bei der Bearbeitung der Aufgabe wie folgt vorgegangen:

- Problemstellung und geforderte Voraussetzungen verstehen
- Gefühl für das Problem bekommen
  - Skizzen machen: Beispiele erlaubter und nicht-erlaubter Lagebeziehungen
  - Tabelle erstellen: Zusammenhang zwischen Geradenanzahl und Zahl der Teilgebiete
- Muster erkennen und Zwischenziel setzen, das Muster im Kontext zu erklären
- Erkenntnis der Muster auf höhere (oder gar beliebige) Geradenanzahlen übertragen
- Lösung formalisieren
  - Schlüssige Argumentation
  - Notation einführen für übersichtlichen Aufschrieb (vgl. Gleichung (1.2))
  - Problemstellung allgemein lösen

1.2 Dreieck oder Viereck?

Problem 2

Gegeben sei ein quadratisches Stück Papier. Wenn wir dieses derart falten, dass die untere rechte Ecke auf das Papier gelegt wird, so hängt die geometrische Form des umgefalteten Teils des Blattes offenbar von der Position der Blattecke auf dem Papier ab, wie in Abbildung 1.8 zu erkennen ist. In einer Position besitzt der umgefaltete Teil die Form eines Dreiecks, in einer anderen die Form eines Vierecks.

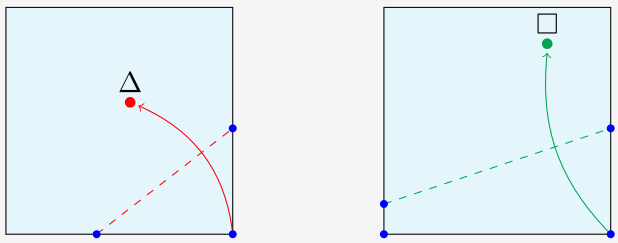

Abbildung 1.8: Zwei mögliche Faltweisen eines quadratischen Papierblattes. Wir erhalten für den umgefalteten Teil links die Form eines Dreiecks und rechts die eines Vierecks.

Wann besitzt der umgefaltete Teil des Papierblattes (ausgehend von der unteren rechten Ecke) die Form eines Dreiecks, wann die eines Vierecks?

[*Anschlussfrage: Sind noch andere Formen möglich?*]

Wir gehen bei der Lösung des obigen Problems wieder in sechs Schritten vor:

Schritt 1: Aufgabe verstehen Bevor wir damit beginnen können, das Problem zu lösen, müssen wir erst einmal sicherstellen, dass wir die Aufgabe und alle darin getroffenen Voraussetzungen verstehen. Dazu nehmen wir uns als erstes am besten ein quadratisches Blatt Papier zur Hand und versuchen die Formen aus Abbildung 1.8 ungefähr nachzufalten. Wir können uns außerdem an die Stelle, an der die rechte untere Ecke nach dem Umfalten jeweils liegt, einen Punkt machen und an diesen ein kleines Drei- bzw. Viereck zeichnen.

Nachdem wir die in der Aufgabe vorgestellten Faltungen nachvollzogen haben, schauen wir uns als nächstes die Aufgabenstellung noch einmal ganz genau an, um zu verstehen, welche Einschränkungen oder Forderungen darin gestellt werden. So sehen wir beispielsweise, dass das Blatt stets von der unteren rechten Ecke aus gefaltet werden soll und sich diese Ecke nach dem Faltvorgang auf dem Blatt Papier befinden soll (also nicht irgendwo daneben!).

PROBIERPAUSE

Als letztes stellen wir noch sicher, dass wir die Problemstellung richtig verstanden haben: Wir sollen nicht nur ein paar Punkte herausfinden, wo der umgefaltete Teil ein Dreieck und wo ein Viereck ist, sondern alle diese Punkte! Dies ist eine typische Aufgabenstellung in der Mathematik. Auch wenn wir soeben bereits jeweils eine Faltweise gefunden haben, bei der ein Dreieck bzw. ein Viereck entsteht, so haben wir die Aufgabe, alle solche Punkte zu finden.

Schritt 2: Ausprobieren Der erste Schritt hin zur Lösung dieses Problems ist wieder, ein Gefühl für dieses zu bekommen. Dies geht am besten durch munteres ausprobieren verschiedener Faltweisen.

PROBIERPAUSE

Wir können entweder unterschiedliche Faltungen testen, oder die untere Ecke sogar auf dem Blatt Papier „umherfahren“ und schauen, wie sich die Form des umgefalteten Teils verändert. Natürlich kann man auch alles mögliche Andere beim Herumprobieren machen und so nach und nach ein immer besseres Gefühl für das Verhalten des umgefalteten Stücks entwickeln.

Schritt 3: Muster erkennen Nach einiger Zeit des Ausprobierens stellen wir uns die Frage, ob wir ein Muster erkennen können. Bei diesem Problem gibt es sehr viele Muster, auf die man stoßen kann. Mit der „Diagonale“ meinen wir im Folgenden immer die Diagonale zwischen der unteren rechten und der oberen linken Ecke. Einige erkennbare Muster sind beispielsweise:

- Legen wir die untere rechte Ecke auf die Diagonale, so ist der gefaltete Teil stets ein Dreieck.

PROBIERPAUSE

- Legen wir die untere rechte Ecke auf die obere linke Ecke, so erhalten wir das Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt – die Ecken diese Dreiecks sind die obere rechte, untere linke und die untere rechte Blattecke (welche umgefaltet auf der oberen linken liegt).

PROBIERPAUSE

- Legen wir die untere rechte Ecke irgendwo auf eine Kante des Papierstücks, so erhalten wir als umgefalteten Teil stets ein Viereck (außer in der oberen linken Ecke).

PROBIERPAUSE

- Haben wir die untere rechte Ecke an einen Punkt gelegt, an dem der umgefaltete Teil ein Dreieck bildet, so bleibt der umgefaltete Teil ein Dreieck, wenn wir die Ecke auf kürzestem Wege auf die Diagonale hinzubewegen.

PROBIERPAUSE

- Haben wir die untere rechte Ecke an einen Punkt gelegt, an dem der umgefaltete Teil ein Viereck bildet, so bleibt der umgefaltete Teil ein Viereck, wenn wir die Ecke auf kürzestem Wege zu einer Kante bewegen.

PROBIERPAUSE

- Legen wir die untere rechte Ecke irgendwo auf die Diagonale, so ist der umgefaltete Teil wie bereits gesehen ein Dreieck. Halten wir nun die Dreieck-Ecke, die auf der rechten Blattkante liegt, fest und bewegen die umgefaltete Ecke nach schräg oben rechts, so bewegt sich die nicht festgehaltene Dreieck-Ecke auf die untere linke Blatt-Ecke zu. In dem Moment, wo diese Dreieck-Ecke die untere linke Blatt-Ecke überschreitet, wird aus dem umgefalteten Dreieck ein Viereck. Hätten wir die Dreieck-Ecke auf der unteren Blattkante festgehalten und die Dreieck-Ecke auf der rechten Blattkante bewegt, hätten wir ein analoges Ergebnis erhalten.

PROBIERPAUSE

Dies sind, wie schon gesagt, nur einige Muster, die man beim Falten erkennen könnte. Es gibt sicherlich noch sehr viele mehr, entscheidend ist aber, dass wir durch solche Muster ein immer besseres Gefühl für das Problem und das Verhalten der beteiligten Objekte erhalten.

Schritt 4: Zwischenziel setzen Wir könnten uns nach den obigen Mustern zum Beispiel die Frage stellen, wann sich beim „Herumfahren" der unteren rechten Ecke auf dem Papier die Form des umgefalteten Teils von einem Dreieck zu einem Viereck ändert. Dies zu verstehen soll nun unser Zwischenziel sein.

Im letzten Punkt in Schritt 3 haben wir bereits verstanden, dass aus einem Dreieck ein Viereck wird, wenn eine der Dreieck-Ecken, die auf einer Blattkante liegen, eine der Blatt-Ecken links unten oder rechts oben überschreitet.

Dabei hatten wir die andere Dreieck-Ecke, die sich auf einer Blattkante befindet, festgehalten. Angenommen wir halten die Dreieck-Ecke auf der rechten Blattkante fest und bringen die andere Dreieck-Ecke auf der unteren Kante in ihre „maximale Dreieck-Position", legen sie also auf die linke untere Blattecke. Halten wir diese nun fest, so sehen, wir dass wir die umgefaltete Ecke auf dem Blatt hin und her bewegen können, wie wir wollen, und wir immer ein Dreieck erhalten.

PROBIERPAUSE

Analog funktioniert es, wenn wir die Dreieck-Ecke auf der rechten Kante in ihrer „maximale Dreieck-Position" (also der oberen rechten Blattecke) festhalten. Überschreiten wir hingegen mit einer der beiden Dreieck-Ecken auf den Kanten eine ihrer „maximale Dreieck-Positionen", so erhalten wir sofort ein Viereck – egal, wohin wir die umgefaltete Ecke auf dem Blatt bewegen.

PROBIERPAUSE

Schritt 5: Erkenntnis übertragen Unser Zwischenziel liefert uns also, dass der Übergang von Dreieck zu Viereck genau dann passiert, wenn eine der beiden Dreieck-Ecken, die auf den Blattkanten liegen, eine der Blattecken unten links oder oben rechts überschreitet. Wenn wir nacheinander jeweils die Dreieck-Ecken in der entsprechenden Blattecke fixieren, sodass wir gerade noch ein Dreieck erhalten und mit der umgefalteten Ecke auf dem Papier entlangfahren, erhalten wir die folgenden Bahnen:

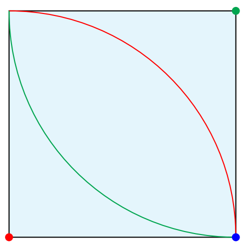

Abbildung 1.9: Bahnen (rot und grün) der umgefalteten Blattecke (blau), bei fixieren von jeweils einer der anderen beiden Dreieck-Ecken in einer Blattecke (rot bzw. grün).

PROBIERPAUSE

Sobald wir die Grenze zum Viereck (also die untere linke oder obere rechte Blattecke) überschreiten, erkennen wir, dass sich in diesem Fall die umgefaltete Blattecke von der Bahn in Abbildung 1.9 nach außen hin weg in Richtung Blattrand bewegt.

PROBIERPAUSE

Andersherum sehen wir aber auch Folgendes: Wenn wir mit der umgefalteten Ecke irgendwo auf der Bahn in Abbildung 1.9 stoppen und in dieser Position die festgehaltene Dreieck-Ecke entlang der unteren Kante von der Blattecke weg bewegen, so bleibt der umgefaltete Teil noch immer ein Dreieck und die umgefaltete Blattecke verschiebt sich ins Innere der beiden Bahnen.

PROBIERPAUSE

In diesem Sinne sehen wir, dass die Bahnen in Abbildung 1.9 eine Grenze darstellen: Liegt die umgefaltete Blattecke auf den Bahnen oder zwischen diesen, so ist der umgefaltete Teil des Blattes ein Dreieck, liegt sie außerhalb dieser Bahnen, so ist der Teil ein Viereck.

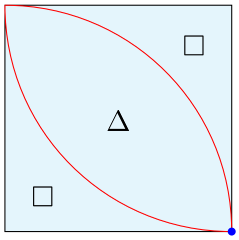

Abbildung 1.10: Bahnen als Grenzen zwischen Gebieten, durch die ein Dreieck entsteht und Gebieten, durch die ein Viereck entsteht.

Schritt 6: Lösung formalisieren Wie können wir unsere erarbeitete Erkenntnis nun formalisieren und „logisch stichhaltig“ aufschreiben?

Beim Falten entsteht genau eine Faltkante. Diese Faltkante „schneidet“ in jedem Fall genau zwei Blattkanten, wodurch zumindest zwei Ecken für den umgefalteten Blattteil entstehen. Eine weitere Ecke des gefalteten Stücks ist die untere rechte Ecke, welche umgefaltet wird. Wir erhalten somit genau dann ein Dreieck, wenn keine zusätzliche Ecke auf den umgefalteten Kanten existiert, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn die Faltkante durch die untere und die rechte Blattkante verläuft. Immer wenn dies der Fall ist, erhalten wir ein Dreieck, in allen anderen Fällen erhalten wir ein Viereck, da eine der Blattecken als zusätzliche Ecke auf dem umgefalteten Blattteil liegt.

DENKPAUSE

Systematisch können wir nun so vorgehen: Wir schieben die rechte untere Ecke langsam entlang der Diagonalen in Richtung der oberen linken Blattecke. Gedanklich stoppen wir „an jeder Stelle“ auf der Diagonalen (dies ist in Wirklichkeit natürlich nicht möglich) und bewegen uns dort soweit es geht mit der umgefalteten Ecke in senkrechter Richtung von der Diagonalen weg, soweit wie wir noch ein Dreieck behalten. Dies tun wir an jeder Stelle auf der Diagonalen in beide Richtungen. Auf diese Weise erhalten wir die folgende Form:

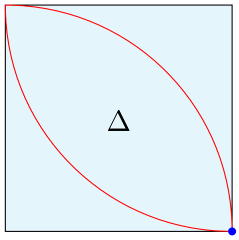

Abbildung 1.11: Fläche, durch die Dreiecke entstehen. Außerhalb dieser entstehen Vierecke.

Bewegen wir uns außerhalb dieser Form, so erhalten wir im Umkehrschluss ein Viereck, da die Faltkante in diesen Fällen durch die linke und rechte oder die obere und untere Blattkante verläuft. Als Folge liegt entweder die obere rechte oder die untere linke Blattecke als weitere (vierte) Ecke in dem umgefalteten Teil des Blattes.

DENKPAUSE

Zur Anschlussaufgabe: Der Grund dafür, dass wir maximal ein Viereck erhalten, liegt darin, dass die Problemstellung fordert, mit der unteren rechten Blattecke auf dem Papier zu bleiben. Dürften wir darüber hinaus gehen, wäre nach gleicher Logik auch Fünf- oder Sechsecke denkbar. Zu bestimmen, welche geometrischen Formen dann noch möglich wären und wann man welche erhält, ist aber eine gesonderte (weiterführende) Aufgabe, mit der wir uns an dieser Stelle nicht weiter beschäftigen wollen. Diese überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Rückschau zu Problem 2

Wir sind bei der Bearbeitung der Aufgabe wie folgt vorgegangen:

- Problemstellung und geforderte Voraussetzungen verstehen
- Gefühl für das Problem bekommen
  - Faltungen ausprobieren: Beispiele von Faltungen, bei denen ein Dreieck oder ein Viereck entsteht
- Muster erkennen und Zwischenziel setzen
- Erkenntnis der Muster auf allgemeine Vermutung übertragen
- Lösung formalisieren
  - Schlüssige Argumentation
  - Problemstellung allgemein lösen

Autoren dieses Kapitels:

2019: Nils Näthke