Aufgabe 1

1) <u>Falsch</u>. z.B. $X = \mathbb{R}$, Menge $A = \{0\}$.
A nicht leer aber enthält keine nicht leere offene Menge

2) <u>Falsch</u>. z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = |x|$.
Lipschitzsch: $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$
aber nicht differenzierbar im 0.

3) <u>Falsch</u>. z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 0$.
$$|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - y|$$
f Kontraktion aber nicht injektiv.

4) <u>Falsch</u> z.B. $X = \mathbb{R}$,
$A = (0, 2)$, $B = (1, 3)$.
$\partial A = \{0, 2\}$, $\partial B = \{1, 3\}$, $\partial A \cup \partial B = \{0, 1, 2, 3\}$,
$A \cup B = (0, 3)$, $\partial(A \cup B) = \{0, 3\} \neq$

Aufgabe 2

1) $$\int x^2 e^{-x}\,dx \overset{PI}{=} -x^2 e^{-x} - \int 2x(-e^{-x})\,dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} \overset{PI}{=}$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx\right)$$

$$= -x^2 - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx$$

$$= -x^2 - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c.$$

2) $$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \overset{PI}{=} x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi} -$$

$$- \int_0^{\pi} 1\cdot(-\cos x)\,dx =$$

$$= \pi + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + (\sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

3) $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x^2+1 \\ dy = 2x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y}\right)_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, $f(n) = \frac{1}{(n+1)\left(\ln(n+1)\right)^2}$

$f(n)$ monoton fallend, $f(n) \geq 0$

$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \right.$

$\left. \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f \text{ konvergiert} \right).$

$$\int_1^{\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} \, dx =$$

$$= \left\{ x+1 = y \right\} = \int_2^{+\infty} \frac{dy}{y(\ln y)^2} = \left\{ y = e^t \right\}$$

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \text{konvergiert.} \left\{ \right.$$

$\Rightarrow$ die Reihe konvergiert.

Aufgabe 3

(1) $y' = e^{-y} \iff e^{y} y' = 1$

$\iff (e^{y})' = 1$

$\iff e^{y} = x + C$

$\iff y(x) = \ln(x + C).$

$y(0) = 0 \iff \ln(0 + C) = 0$

$\iff \ln C = 0 \iff C = 1$

$y(x) = \ln(x+1).$

Definiert auf $(-1, +\infty)$

keine Fortsetzung in (-1) möglich

wegen $\lim_{x \to -1^+} y(x) = -\infty$..

② $y' = 2xy + xe^{x^2}$

(a) $y' = 2xy$

$y = Ce^{\int 2x\,dx} = Ce^{x^2}.$

(b) Variation der Konstanten:

$y = Ce^{x^2}$

$y' = C'e^{x^2} + \cancel{2xCe^{x^2}} = \cancel{2xCe^{x^2}} + xe^{x^2}$

$\Leftrightarrow C'e^{x^2} = xe^{x^2}$

$\Leftrightarrow C' = x, \quad C = \frac{x^2}{2}.$

$\Rightarrow$ Lösung $y_s = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}.$

(c) $y(x) = Ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{x^2}, \; C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 4

(1) $y'' - 6y' + 8y = \sin x.$

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0.$

Konstante Koeffizienten

charakteristisches Polynom:

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$

$P(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$\iff (\lambda - 3)^2 - 1 = 0$

$\iff (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

Nullstellen $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ (beide einfach)

FS: $y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = e^{4x}.$

(b) $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}.$

Löse $z'' - 6z' + 8z = e^{ix}$

und nehme $y = \operatorname{Im} z.$

Für z: spezielle inhomogenität $\cdot\, e^{\mu x}$

$P(\mu) = i^2 - 6i + 8 = 7 - 6i \neq 0$

$\Rightarrow$ Spezielle Lösung $\left(7^2+6^2=49+36 \atop =85\right)$

$$z = \frac{1}{P(\mu)} e^{\mu x} =$$

$$= \frac{1}{7-6i} e^{ix} = \frac{7+6i}{7^2+6^2} e^{ix}$$

$$= \frac{7+6i}{85} e^{ix} = \frac{7+6i}{85}(\cos x + i\sin x).$$

$$y_s = \operatorname{Im} z = \underline{\frac{6}{85}\cos x + \frac{7}{85}\sin x.}$$

(c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$

$$+ \frac{6}{85}\cos x + \frac{7}{85}\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{2}$ $y'' + ay' + y = \cos x$

Charakt. Polynom:

$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 1$

$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$. spezielle Inhomogenität.

Falls $P(i) \neq 0$, gibt es eine Lösung

$$\operatorname{Re} \frac{e^{ix}}{P(i)} \text{ : beschränkt.}$$

Also muss $P(i) = 0$ gelten:

$$i^2 + ai + 1 = 0 \iff a = 0.$$

Also $y'' + y = \cos x$

Die einzige Möglichkeit:

$FS \quad y_1(x) = \cos x, \; y_2(x) = \sin x.$

spez. Lösung

$$y = \operatorname{Re} \frac{x e^{ix}}{P'(i)} \quad \text{unbeschränkt}$$

$\Rightarrow$ alle Lösungen

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\operatorname{Re} x e^{ix}}{P'(i)}$$

sind unbeschränkt.

Aufgabe 5

1) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A.} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

2) Eigenwerte von A:

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 + 2\lambda$$

$$= \lambda(\lambda + 2)$$

Einfache Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$.

$\Rightarrow$ A diagonalisierbar.

Eigenvektoren.

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, z. B. $x = y = 1$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ z. B. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} v_2 = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3) Spezielle Inhomogenität

$e^{1\cdot t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; 1 ist kein EW von A.

$\Rightarrow$ Ansatz. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = e^t u$.

$$e^t u = e^t\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}u + e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}u = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};$$

$$u = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung. $x \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{x}$.

4) $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2x} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{x}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}\\ c_1 - c_2 e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{x}\end{pmatrix},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.