

# Vollständige Induktion

## × Aufgabe 1: Explizite Formeln

Zeige die folgenden Identitäten mit vollständiger Induktion.

*Tipp für (b): Im Induktionsbeweis von vorne und von hinten arbeiten*

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

! (c)

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

## Aufgabe 2: Teilbarkeit

Zeige die folgenden Teilbarkeiten mit vollständiger Induktion

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ teilt } n^2 + n \text{ (schreibe: } 2 \mid n^2 + n \text{)}$$

! (b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid (5^n + 7)$$

Dabei bedeutet  $4 \mid l$  für ein  $l \in \mathbb{Z}$ , dass es ein  $k \in \mathbb{Z}$  gibt, sodass  $l = 4k$ .

### × Aufgabe 3: Stimmt das?

Gegeben sei folgender Induktionsbeweis:

**Behauptung:**

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n^2$$

**Beweis:** (durch vollständige Induktion)

**Induktionsanfang:** ( $n = 1$ )

Für  $n = 1$  gilt:

$$2^1 = 2 > 1 = 1^2$$

**Induktionsschritt:** ( $n \rightsquigarrow n + 1$ )

Induktionsvoraussetzung (IV):

Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.

$$2^n > n^2$$

Zu zeigen:

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + \underbrace{2^n}_{I.V.} > n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.  $\square$

- (a) Rechne die Formel für  $n = 2, \dots, 6$  nach. Was fällt auf?
- (b) Finde den Fehler im Induktionsbeweis.
- (c) Überlege, wie man Aussage und Beweis verändern kann, um das Problem zu vermeiden.

### ! Aufgabe 4

Zeige folgende Behauptung:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1} \quad \forall n \geq 2 : (1+x)^n \geq 1+nx.$$