D

Dr. P. Krug SS 2011

Klausur zu: Einführung in die Stochastik

am 18.7.2011

Unbedingt ausfüllen:

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang:	

Bewertungmodalitäten:
Es sind insgesamt 100 Punkte aus 5 Aufgaben erreichbar. Mit 50 Punkten (inklusive Bonuspunkte) und mehr ist die Klausur bestanden. Es wird nur bewertet, was auf den angehefteten Blättern geschrieben wurde (Bleistift wird nicht gewertet, Rotstift ist verboten). Sie haben 120 Minuten Zeit.

Erlaubte Hilfsmittel:
~~1 Blatt DIN A4 mit eigenen Aufzeichnungen.~~

Formelsammlung wird gestellt.

....
Unterschrift

Nicht ausfüllen:

Aufgabe	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	Bonus:	$\sum$	Note
Punkte								
Korrektur								

Aufgabe 1 (10 Punkte)
An einer Studie zum Auftreten von Farbenblindheit nimmt eine Gruppe von Personen teil, die sich zu 40% aus Männern (M) und zu 60% aus Frauen ($\overline{M}$) zusammensetzt. Man weiß, dass im allgemeinen 5% der Männer farbenblind (F) sind, aber nur 0,5% der Frauen. Erstellen Sie eine Kontingenztafel und bestimmen Sie:

a) $\mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{M})$

b) $\mathbb{P}(F)$

c) $\mathbb{P}(\overline{M}|F)$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $F_n : \mathbb{R} \to [0;1]$ mit

$$F_n(x) := 1_{[0;1[}(x) \cdot x^n + 1_{[1;\infty[}(x).$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$,

a) dass F_n Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X_n ist und bestimmen Sie

b) die Dichtefunktion f_n von X_n,

c) den Erwartungswert und die Varianz von X_n und

d) $\mathbb{P}(X_n \leq \frac{1}{2})$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)
X und Y seien zwei unabhängige Zufallsvariable mit $X \sim B(100; 0,2)$ und $Y \sim Poisson(50)$. Weiter sei $Z := Y - aX$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ und $var(Z)$.

b) Für welche Werte von a wird $\mathbb{E}(Z^2)$ und $var(Z)$ minimal?

c) Bestimmen Sie $cov(X; Z)$.

d) Für welches a sind X und Z unkorreliert?

Aufgabe 4 (25 Punkte)
X und Y seien zwei unabhängige Zufallsvariable, die beide $B(2; \frac{1}{2})$-verteilt sind, $Z_1 := max(X, Y)$ und $Z_2 := min(X, Y)$. Bestimmen Sie:

a) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{Z_1,Z_2}(i,k)$ von (Z_1, Z_2) in Tabellenform. Sind Z_1 und Z_2 unabhängig?

b) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Z_1 und Z_2.

c) Den Erwartungswert und die Varianz von Z_1 und Z_2.

d) Die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von Z_1 und Z_2.

Tipp: Sie sollten zunächst die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $(X; Y)$ bestimmen.

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Es sei $X := (X_1, ..., X_n)$ eine Zufallsstichprobe und die X_i seien stetig verteilt mit der Dichtefunktion

$$f(x) = 1_{[-1;+1]}(x) \cdot (\theta(x^3 - x) + \frac{1}{2}).$$

Dabei ist $\theta \in [-1; 1]$ ein unbekannter zu schätzender Parameter. Eine Schätzfunktion ist wie folgt definiert:

$$T = T(X_1, ..., X_n) := a \cdot \overline{X} + b$$

a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X_i.

b) Bestimmen Sie a und b so, dass T erwartungstreu wird.

c) Bestimmen sie das Risiko von T mit den Werten für a und b aus Teilaufgabe b).

d) Zeigen Sie die Konsistenz von T.