Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger

Dr. Bernd Schober

Präsenzaufgabenblatt – Zusatztutorium 2

keine Abgabe!

Die Termine für den zweiten Block der klausurvorbereitenden Tutorien sind:

- Mittwoch 18.12.2019, von 18:00–20:00 Uhr, im Raum W03 1-156 und
- Freitag 20.12.2019, von 16:00–18:00 Uhr, im Raum W01 0-015

In diesem Zusatztutorium werden die folgenden **Themen** behandelt:

Rechnen mit Matrizen, Lösungsmengen bestimmen, Gauß-Algorithmus, Invertieren von Matrizen, Vektorräume, lineare Unabhängigkeit, Basis.

Präsenzaufgabe z.5. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe z.6. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme (über $\mathbb{R}$), welche durch folgenden erweiterte Matrizen gegeben sind:

(a). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

(b). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right)$

(c). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(d). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right)$

Präsenzaufgabe z.7. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & -5 & -6 & 8 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4},$$

wobei ein Eintrag $a \in \mathbb{Z}$ akürzend für die Restklasse $[a]_p \in K$ steht.

(a). Zeigen Sie, dass M genau dann invertierbar ist, wenn $p \notin \{2, 3\}$.

(b). Sei $p = 5$. Bestimmen Sie die inverse Matrix $M^{-1} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{4\times 4}$ zu M.

Präsenzaufgabe z.8. **(a).** Seien K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix. Sei $\lambda \in K$ und $\vec{v} \in K^n$ ein Vektor ungleich dem Nullvektor, $\vec{v} \neq \vec{0}$, mit der Eigenschaft

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{\vec{u} \in K^n \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}$ ein Untervektorraum des K^n ist.

(b). Sei $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens drei. Zeigen Sie, dass $(\, 1,\, 1+x,\, 1+x+x^2,\, 1+x+x^2+x^3\,)$ eine Basis von V bildet.

Präsenzaufgabe z.9. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Sei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

(a). Zeigen Sie, dass $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis des Spaltenraums von M ist.

(b). Geben Sie eine weitere Basis des Spaltenraums von M an, welche unabhängig von a, b, c ist.