CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Algebra - SS 20

Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 8

Abgabe 16.06.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Aufgabe 8.1 (9 Punkte)**.**

(a). Betrachten Sie zu einem faktoriellen Ring R mit $\mathrm{Char}(R) \neq 2$ den Polynomring $R[t_1, t_2] = (R[t_1])[t_2]$ in zwei Variablen. Zeigen Sie, dass $f = t_1^2 + t_2^2 + 1 \in R[t_1, t_2]$ irreduzibel in $R[t_1, t_2]$ ist. Begründen Sie präzise. *Hinweis: Verwenden Sie das Eisensteinkriterium.*

(b). Seien $r \in \mathbb{N}$ und $m := p_1 \cdots p_r \in \mathbb{N}$, wobei die $p_i's$ paarweise verschiedene Primzahlen sind. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ die Zahl $\sqrt[n]{m}$ irrational ist.

(c). Sei R ein Integritätsring und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j t^j \in R[t]$. Dann definieren wir das transformierte Polynom $h := f(g) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \left(\sum\limits_{j=0}^{m} b_j t^j \right)^i \in R[t]$. Zeigen Sie: Ist $f \in R[t]$ reduzibel und $g \in R[t]$ mit $\deg(g) \geq 1$, so ist $h \in R[t]$ reduzibel. Folgern Sie daraus wieder das Transformations-Kriterium.

Aufgabe 8.2 (5 Punkte)**.**

(a). Sei $\alpha := \frac{1-\sqrt[3]{6}}{2} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$, sowie $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

(b). Sei $\alpha := \sqrt{5} + i \in \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$, den Körpererweiterungsgrad von K über $\mathbb{Q}$, sowie eine Basis von K über $\mathbb{Q}$. Ist K eine einfache Erweiterung von $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 8.3 (6 Punkte)**.** Beschreiben Sie im Folgenden detailliert Ihr Vorgehen. Sie dürfen Ihre Rechnung hingegen verkürzt darstellen.

(a). Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\alpha := \sqrt{p + \sqrt{p}} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von α über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie eine Basis von $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und den Grad der Körpererweiterung $[K : \mathbb{Q}]$. Stellen Sie anschließend für $p = 7$ die Werte α^{-1} und α^5 bezüglich der Basis dar.

(b). Sei $f = t^3 + 9t + 6 \in \mathbb{Q}[t]$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und stellen Sie $(1 - \alpha)^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$ - Linearkombination der Basis $(1, \alpha, \alpha^2)$ dar.