Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 1

Abgabe: 22.10.2019, bis 12 Uhr

Hinweis: Achten Sie auf eine saubere Form unter Verwendung von Voraussetzung/Behauptung/Beweis!

Aufgabe 1.1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a). Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b). Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$.

(c). Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ positive reelle Zahlen mit $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$. Dann gilt $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.
Hinweis: Beispiel-Aufgabe 0.5 vom letzten Blatt könnte nützlich sein.

Aufgabe 1.2. Seien $A = B = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a). Betrachten Sie die Relation $\equiv_5$ auf $A \times B$ gegeben durch

$$a \equiv_5 b \quad :\Longleftrightarrow \quad a - b \text{ ist durch 5 teilbar.}$$

(b). Untersuchen Sie die Relation $\star$ auf $A \times B$ definiert via

$$a \star b \quad :\Longleftrightarrow \quad |a| \geq |b|.$$

Aufgabe 1.3. **(a).** Zeichnen Sie die Menge $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - \frac{3}{2} \wedge x \in [-1; 2] \}$.

(b). Bestimmen Sie die Menge der $y \in \mathbb{R}$, für die gilt $y = x^2 - \frac{3}{2}$ mit $x \in [-1; 2]$.

(c). Wie oft nimmt $x^2 - \frac{3}{2}$ den Wert 0 an, wenn $x \in [-1; 2]$? Wie oft den Wert $-\frac{97}{98}$?

Aufgabe 1.4. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & ay & = & 3 \\ 6x & - & y & = & 7. \end{array} \right.$$

(a). Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für den Fall, dass $a = 2$ ist.

(b). Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $(*)$ mindestens eine Lösung?

Präsenzaufgabe 1.5. **(a).** Geben Sie ein Beispiel einer Relation, die reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

(b). Geben Sie ein Beispiel einer Relation, die symmetrisch, transitiv, aber nicht reflexiv ist.

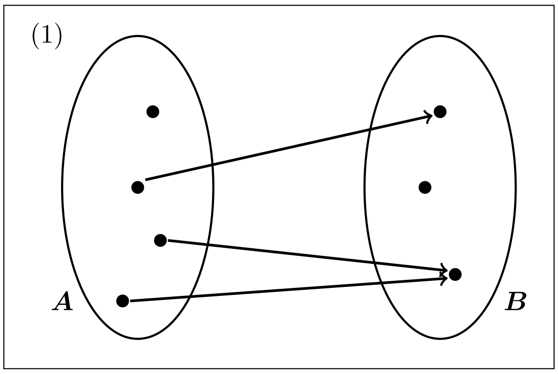
Präsenzaufgabe 1.6. Welches der folgenden Bilder

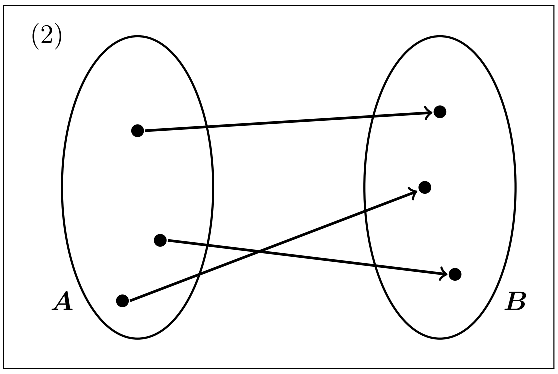
(a). stellt keine Abbildung $A \to B$ dar?

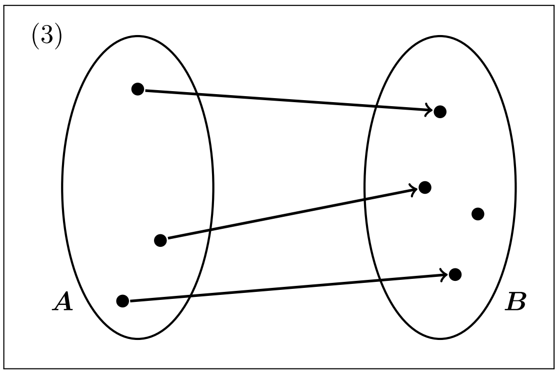
(b). ist eine injektive Abbildung $A \to B$, die nicht surjektiv ist?

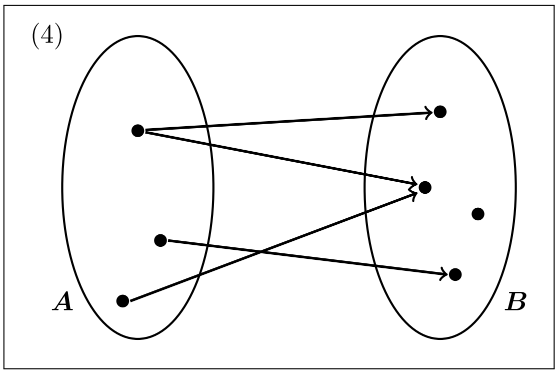
(c). ist eine surjektive Abbildung $A \to B$, die nicht injektiv ist?

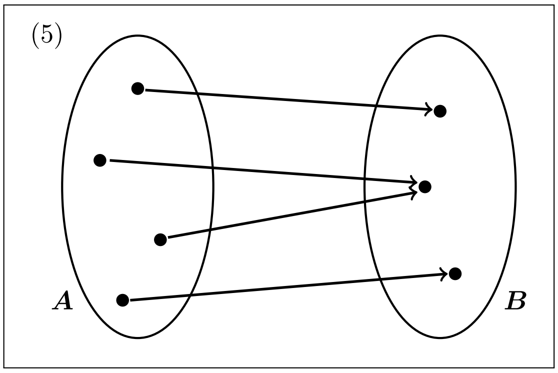
(d). ist eine bijektive Abbildung $A \to B$?

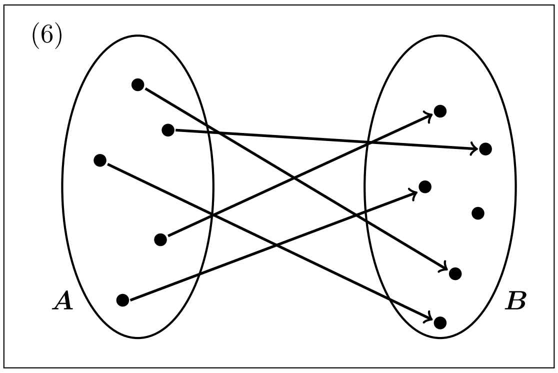

(1)
A
B


(2)
A
B


(3)
A
B


(4)
A
B


(5)
A
B


(6)
A
B