13 Lineare Algebra

Die lineare Algebra ist ein grundlegendes Gebiet in der Mathematik und steht aus gutem Grund am Anfang des Mathematikstudiums. Hier werden Strukturen wie Vektorräume, lineare Abbildungen zwischen ihnen, Matrizen und lineare Gleichungssysteme behandelt und untersucht, wie alle diese Objekte zusammenhängt.
An dieser Stelle werden wird uns auf die Betrachtung im $\mathbb{R}^2$ beschränken, und die lineare Algebra aus einer geometrischen Perspektive erkunden.

13.1 Vektoren

Wir beginnen damit, unseren grundlegenden Raum zu definieren:

Definition 13.1
Wir definieren die Menge:

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ nennen wir Vektoren des $\mathbb{R}^2$.

Wie können wir uns Vektoren vorstellen? Die Vorstellung, die wir heute meistens benutzen werden, ist, dass wir uns Vektoren als Pfeile in der Ebene vorstellen. Dabei gibt die erste Komponente an, wie lang der Pfeil in x-Richtung ist, und die zweite, wie lang der Pfeil in y-Richtung ist. Fast immer werden wir annehmen, dass der Anfang des Pfeils im Ursprung ist.

Beispiel:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

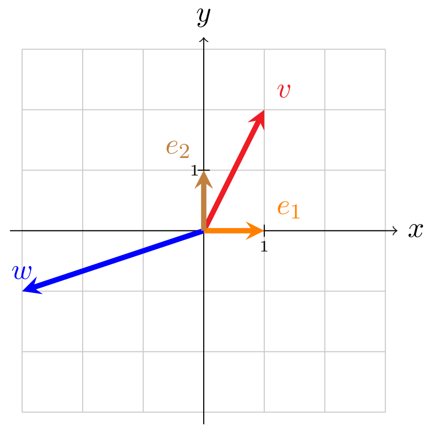

Abbildung 13.1: Beispiel für Vektoren als Pfeile in der Ebene.

Bemerkung: Vielleicht ist aus der Schule bereits die Menge der **Punkte** in der Ebene bekannt, also $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Dies ist nicht das Gleiche wie die Menge der Vektoren in der Ebene, denn **Vektoren sind keine Punkte.** Allerdings gibt es eine sehr enge Beziehung zwischen Vektoren und Punkten:
Jedem Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ können wir einen Punkt p zuordnen, nämlich denjenigen, der an der Spitze des Pfeils liegt, wenn wir dessen Anfang in den Ursprung legen. Dieser Punkt p ist dann $p = (x, y)$. Andererseits können wir jedem Punkt $p = (x, y)$ in der Ebene einen Vektor zuordnen, genauer den Ortsvektor. Dies ist derjenige Vektor v, der vom Ursprung aus auf diesen Punkt zeigt. Für den Ortsvektor gilt dann wieder $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Die Menge der Punkte wird leider auch als $\mathbb{R}^2$ geschrieben; bei uns steht im Folgenden $\mathbb{R}^2$ aber für die Menge der Vektoren! (Die Ebene der Punkte ist übrigens auch die Ebene, in der wir uns die Vektoren immer vorstellen.)

Was kann man mit Vektoren machen? Eine einfache Operation auf einem Vektor ist es, ihn zu **skalieren**, d.h. seine Länge zu ändern, ohne die Richtung zu ändern.
Dies erreichen wir, indem wir beide Einträge des Vektors mit einer reellen Zahl multiplizieren, einem sogenannte **Skalar**. Diese Multiplikation nennen wir **Skalarmultiplikation**.
Wenn zwei Vektoren gegeben sind, so können wir sie auch **addieren**. Geometrisch machen wir dies, indem wir den Anfang des zweiten Vektors an das Ende des ersten Vektors setzen, und der neue Vektor vom Anfang des ersten Vektors zum Ende des zweiten Vektors geht.
Algebraisch machen wir dies, indem wir die Einträge komponentenweise addieren.

Beide Operationen halten wir in folgender Definition fest:

Definition 13.2

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Dann definieren wir

$$v_1 + v_2 := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot v_1 := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Diese Operationen führen wir jetzt mit den Vektoren von oben durch.

$$2 \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad -1 \cdot v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v + w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 + 2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

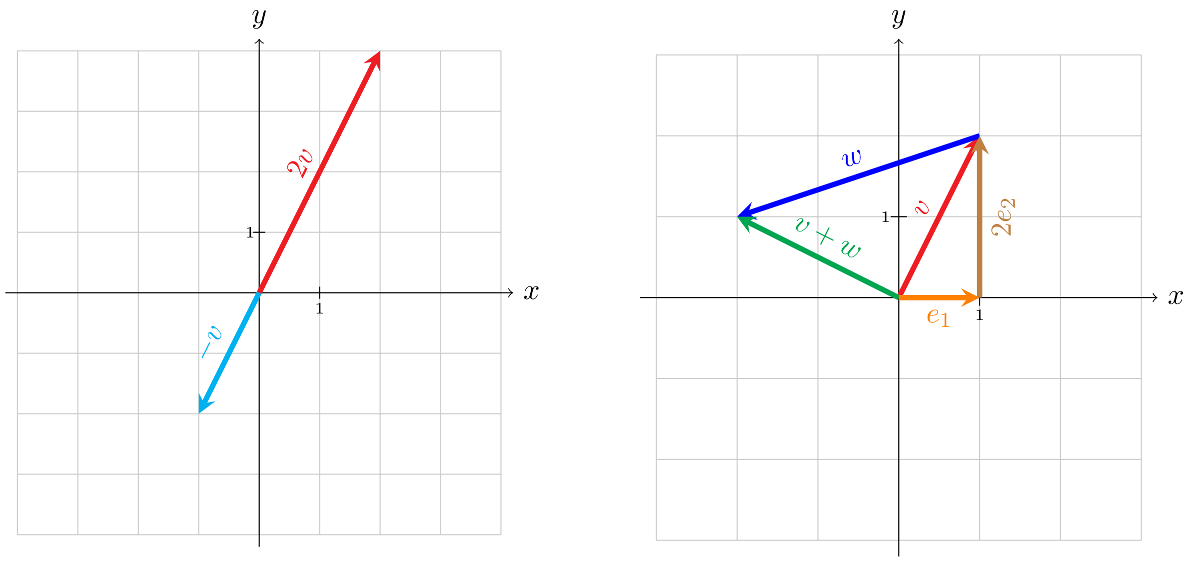

Abbildung 13.2: Beispiele für Skalarmultiplikation und Vektoraddition

Man erkennt, dass ein Vektor in die entgegengesetzte Richtung zeigt, wenn man ihn mit einer negativen Zahl multipliziert.

Wir haben im letzten Beispiel gesehen, dass wir v in der Form

$$v = \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ schreiben konnten. Wir sagen dazu, dass wir v als **Linearkombination** von e_1 und e_2 geschrieben haben.

Dies kann man für jeden Vektor machen, denn es ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 + 0 \\ 0 + y \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \cdot 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

Es ist klar, dass diese Darstellung für jeden Vektor eindeutig ist.

13.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

Im Folgenden wollen wir Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^2$ untersuchen. Dazu schauen wir uns zunächst zwei Beispiele an.

Beispiele:

1. Wir betrachten die Linksdrehung L (gegen den Uhrzeigersinn) um 90° um den Ursprung.

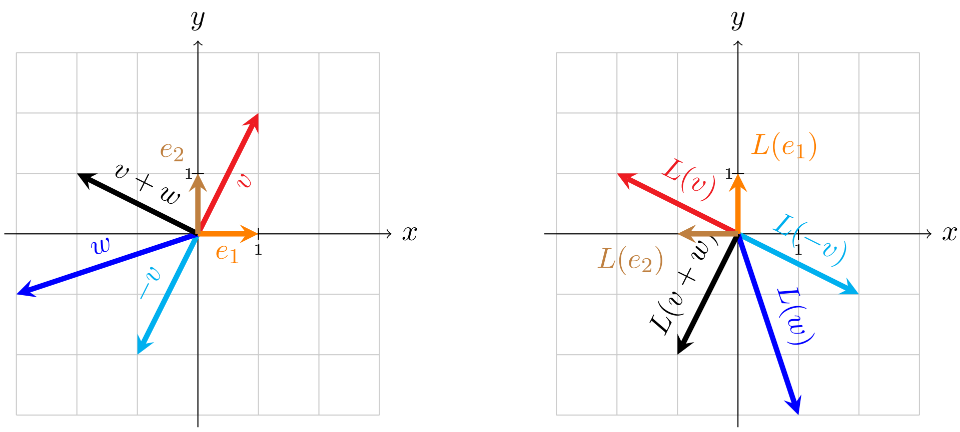

Abbildung 13.3: Darstellung der Linksdrehung L anhand einiger Beispiele

2. Als nächstes Beispiel betrachten wir die Projektion P auf die x-Achse.

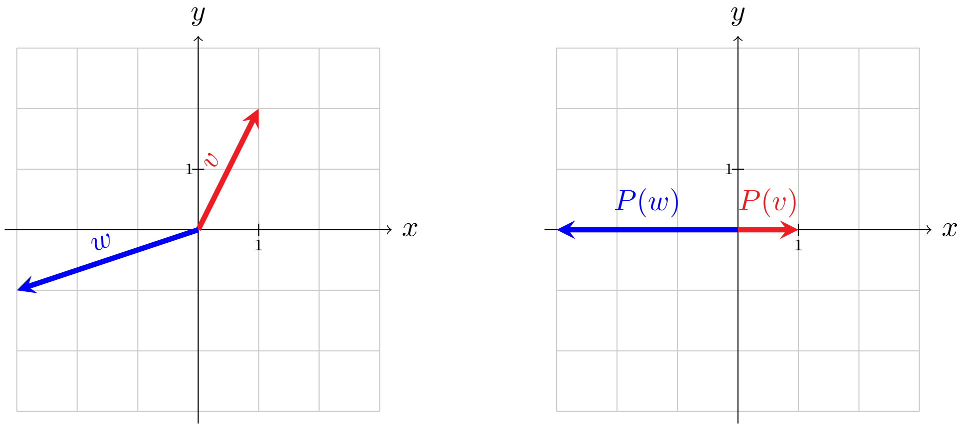

Abbildung 13.4: Darstellung der Projektion P anhand einiger Beispiele

Man kann bei beiden Beispielen sehen, dass es egal ist, ob man Vektoren zuerst addiert und dann dreht bzw. projiziert, oder zuerst dreht bzw. projiziert und dann addiert. Selbiges gilt für die Skalarmultiplikation anstatt der Addition. Abbildungen, die diese Eigenschaften erfüllen, wollen wir **linear** nennen.

Definition 13.3
Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nennen wir **linear**, wenn für $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(v + w) = F(v) + F(w), \qquad F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$$

Eine wichtige Erkenntnis ist die Folgende: Wenn wir wissen, dass eine Abbildung F linear ist, so ist sie eindeutig durch zwei Vektoren, nämlich den Bildern von e_1 und e_2, festgelegt. Denn einen beliebigen Vektor v konnten wir ja schreiben als $v = \lambda e_1 + \mu e_2$, und dann gilt:

$$F(v) = F(\lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2) = F(\lambda \cdot e_1) + F(\mu \cdot e_2) = \lambda \cdot F(e_1) + \mu \cdot F(e_2) \qquad (13.1)$$

Beispiel: Wir betrachten wieder die Linksdrehung L. Wie in Abbildung 13.3 zu sehen, ist $L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ und $L(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$. Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ beispielsweise können wir nun wie in Gleichung 13.1 rechnen:

$$L(v) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = L(1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2) = 1 \cdot L(e_1) + 2 \cdot L(e_2) = 2e_2 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist auch in Abbildung 13.3 zu sehen. Wir erkennen auch in diesem Beispiel, dass wir nur die beiden Vektoren $L(e_1)$ und $L(e_2)$ kennen müssen, um das Bild von v zu bestimmen.

Wir sehen also, dass die gesamte Information über eine lineare Abbildung F in den Bildern von e_1 und e_2 steckt. Diese Bilder, also $F(e_1)$ und $F(e_2)$ schreiben wir jetzt nebeneinander in eine sogenannte **Matrix**, um die Informationen über die lineare Abbildung möglichst kompakt darzustellen.

Definition 13.4
Wird definieren die Menge

$$\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nennen wir **Matrizen** (Einzahl: **Matrix**).

Ist

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ und } F(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

so nennen wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die F **darstellende Matrix** oder die **Darstellungsmatrix von** F. Da wir bereits gesehen haben, dass F durch $F(e_1)$ und $F(e_1)$ eindeutig festgelegt wird, ist dies eine kompakte Methode, eine lineare Abbildung aufzuschreiben.

Beispiele:

1. Für die Linksdrehung L gilt $L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $L(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   L hat also darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Für die Projektion auf die x-Achse P gilt $P(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   P hat also darstellende Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten jetzt wieder eine allgemeine lineare Abbildung F mit darstellender Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wie haben bereits festgestellt, dass die Matrix A die Abbildung F eindeutig charakterisiert. Wir wollen uns jetzt überlegen, wie man aus der Matrix möglichst explizit die Abbildungsvorschrift zurückgewinnt. Dazu stellen wir uns die Frage, worauf F einen Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abbildet?

Wir können mit der Darstellung von v in e_1 und e_2 rechnen:

$$F(v) = F(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = x \cdot F(e_1) + y \cdot F(e_2) = x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dies motiviert folgende Definition:

Definition 13.5
Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann definieren wir

$$A \cdot v := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

als das **Produkt** von A mit v.

Wir haben also die Multiplikation von Matrix und Vektor so definiert, dass das Bild unter einer linearen Abbildung F eines Vektors v das Gleiche ist wie das Produkt von der darstellenden Matrix von F mit v.
Die Vorschrift der Multiplikation kann man sich mit dem Satz „Zeile mal Spalte“ merken.

Beispiel: Mit den Bezeichnungen von oben gilt:

$$L(v) = A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies stimmt mit den gezeichneten Bildern und dem Ergebnis aus dem Beispiel auf Seite 5 überein.

Wir haben also einen Mechanismus gefunden, der jeder linearen Abbildung eine eindeutige Matrix zuordnet. Es geht aber auch andersherum:

Satz 13.6
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto A \cdot v \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

Beweis: Übungsaufgabe □

Lineare Abbildungen und Matrizen beschreiben also im Wesentlichen das Gleiche!

13.3 Komposition von lineare Abbildungen

Als nächstes wollen wir den Fall untersuchen, dass wir zwei lineare Abbildungen F und G haben, mit darstellenden Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Kompositum $F \circ G$. Durch welche Matrix wird diese Abbildung dargestellt[1]?

Dazu müssen wir untersuchen, wie $F \circ G$ die beiden Vektoren e_1 und e_2 abbildet, und die beiden erhaltenen Vektoren nebeneinander in eine Matrix schreiben.
Es ist

$$(F \circ G)(e_1) = F(G(e_1)) = A \cdot (B \cdot e_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg \\ ce + dg \end{pmatrix}$$

und

$$(F \circ G)(e_2) = F(G(e_2)) = A \cdot (B \cdot e_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af + bh \\ cf + dh \end{pmatrix}$$

Die darstellende Matrix von $F \circ G$ ist also $\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

Darum definieren wir die Matrizenmultiplikation wie folgt:

Definition 13.7
Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ zwei Matrizen.
Dann definieren wir das **Produkt** von A und B als

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Auch bei der Matrizenmultiplikation rechnen wir wieder „Zeile mal Spalte“.
Die darstellende Matrix von einem Kompositum linearer Abbildungen ist also das Produkt der darstellenden Matrizen der einzelnen Abbildungen. Dies bedeutet auch, einen Vektor v erst mit B und dann dieses Produkt mit A zu multiplizieren ist das Gleiche, wie ihn direkt mit dem Produkt $A \cdot B$ zu multiplizieren.

Beispiel: Mit den Bezeichnungen von oben gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als nächstes betrachten wir noch die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto v$. Die darstellende Matrix[2] von id hat als erste Spalte $\mathrm{id}(e_1) = e_1$ und als zweite Spalte $\mathrm{id}(e_2) = e_2$, ist

[1] Genau genommen müsste man sich, bevor man diese Frage stellen kann, noch davon überzeugen, dass auch das Kompositum $F \circ G$ eine lineare Abbildung ist. Dies ist aber der Fall, wie man leicht nachrechnen kann.

[2] Auch hier müsste man sich genau genommen zuerst davon überzeugen, dass id eine lineare Abbildung ist.

also gleich $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix E heißt die **Einheitsmatrix**.
Die Identität erfüllt, dass für jede (lineare) Abbildung F gilt, dass $\mathrm{id} \circ F = F = F \circ \mathrm{id}$ ist. In Matrizenschreibweise bedeutet dies, dass $E \cdot A = A = A \cdot E$ für jede Matrix A ist. Die Einheitsmatrix E erfüllt also die gleiche Rolle in den Matrizen wie die 1 in den reellen Zahlen.

13.4 Addition und Rechenregeln

An dieser Stelle wollen wir noch die Summe von Matrizen definieren, sowie die Skalarmultiplikation auf Matrizen ausdehnen.

Definition 13.8
Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ zwei Matrizen sowie $\lambda \in \mathbb{R}$.
Wir definieren die **Summe** von A und B bzw. **Skalarmultiplikation** von λ mit A als

$$A + B := \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Beispiel: Mit unseren Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von oben gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für das Rechnen mit Matrizen und Vektoren gelten folgende Rechenregeln.

Satz 13.9
Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i)	$A + B = B + A$	$v + w = w + v$
ii)	$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$	$\lambda \cdot (A \cdot v) = (\lambda \cdot A) \cdot v = A \cdot (\lambda \cdot v)$
iii)	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$(A \cdot B) \cdot v = A \cdot (B \cdot v)$
iv)	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	$(A + B) \cdot v = A \cdot v + B \cdot v$
v)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w$

Diese Regeln lassen sich leicht über die Definitionen nachrechnen. Dass sollte man, um das Rechnen mit Matrizen und Vektoren zu üben, einmal selbst durchführen.

Mit Matrizen und Vektoren lässt es sich also fast so rechnen wie mit reellen Zahlen, mit einer wichtigen Ausnahme:

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**,
d.h. es gilt im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Wie lässt sich das geometrisch interpretieren?

Beispiel: Betrachten wir wieder die Linksdrehung L von Seite 4 mit darstellender Matrix A und die Projektion auf die x-Achse P mit darstellender Matrix B.

- Das Produkt $A \cdot B$ ist die darstellende Matrix der Abbildung, die zuerst auf die x-Achse projiziert und dann eine Linksdrehung macht. Wenn wir auf die x-Achse projizieren, befindet sich das Ergebnis natürlich auf der x-Achse, wenn wir dann noch eine Linksdrehung um 90° machen, befindet sich das Ergebnis immer auf der y-Achse.

- Wenn wir andererseits zuerst eine Drehung machen, und dann auf die x-Achse projizieren, befindet sich das Ergebnis immer auf der x-Achse.

Damit können die zu $A \cdot B$ und $B \cdot A$ gehörenden Abbildungen (und damit auch $A \cdot B$ und $B \cdot A$ selbst) nicht gleich sein. Dies zeigt ohne Rechnen, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Wir können es aber auch direkt nachrechnen. Die Rechnung

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hatten wir bereits gesehen. Andererseits ist

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot B,$$

wie erwartet.

13.5 Ausblick

Was wird jetzt in der Vorlesung „Lineare Algebra“ behandelt?
Zunächst einmal wird alles wesentlich allgemeiner aufgebaut. Der Begriff der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird zum Begriff der **Körpern** erweitert. Aus dem Konzept des $\mathbb{R}^2$ mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation wird der allgemeine Begriff des **Vektorraums**; die linearen Abbildungen werden dann auf diese verallgemeinert. Zum Beispiel werden auch $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, ...,$ oder auch K^n für einen allgemeinen Körper K und

ganz abstrakte Vektorräume auftauchen. Die darstellenden Matrizen für lineare Abbildungen zwischen diesen Räumen werden dann auch größer. Die beiden Vektoren e_1 und e_2, mit denen sich jeder Vektor eindeutig darstellen ließ, werden zum Begriff der **Basis** verallgemeinert.
Ein weiteres großes Thema ist die **Invertierung von Matrizen** (sieht nächstes Kapitel). Außerdem wird behandelt, wie sich die lineare Algebra auf **lineare Gleichungssysteme** anwenden lässt. Dazu sei hier nur bemerkt, dass sich ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= s \\ cx + dy &= t \end{aligned}$$

kompakt als $Av = w$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

schreiben lässt. Diese Form lässt sich meistens einfacher untersuchen, z.B. mit der Theorie der Invertierung von Matrizen, oder allgemeiner mit dem **Gauß-Algorithmus**. Für ein Beispiel siehe Kapitel 13.7.

13.6 Zusatzkapitel: Invertierung von Matrizen

Bemerkung: Dieses Kapitel wird nicht im Vortrag behandelt, kann aber bei weiterem Interesse gelesen werden, und wird sonst im ersten Semester behandelt.

Im Vortrag zu Abbildungen hatten wir schon diskutiert, dass manche Abbildungen invertierbar sind. Dies war genau dann der Fall, wenn die Abbildung bijektiv war. Wir wollen untersuchen, wie dies im Fall der lineare Abbildungen aussieht.
Sei also eine lineare Abbildung F mit Darstellungsmatrix A gegeben. Es ist nun die Frage, wann es eine inverse Abbildung G gibt, die die Wirkung von F rückgängig macht, d.h. die $F \circ G = id = G \circ F$ erfüllt. In Matrixschreibweise übersetzt sich dies zu der Frage, wann es eine Matrix B gibt, sodass $A \cdot B = E = B \cdot A$ ist[3].

Beispiel: Wir betrachten wieder mal die Linksdrehung L. Anschaulich ist die Operation, die die Linksdrehung rückgängig macht, gerade die Rechtsdrehung R. Diese bildet e_1 auf $-e_2$ und e_2 auf e_1 ab. Also hat R die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
In der Tat können wir nun die darstellenden Matrizen miteinander multiplizieren, und erhalten wie erwartet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

[3] Genau genommen müsste man sich eigentlich wieder zuerst davon überzeugen, dass die zu einer linearen Abbildung Inverse Abbildung wieder eine lineare Abbildung ist.

Betrachten wir andererseits die Projektion auf die x-Achse P, so sehen wir, dass diese Abbildung nicht surjektiv ist, denn es wird ja nur die x-Achse, nicht ganz $\mathbb{R}^2$ getroffen. (Man kann auch sehen, dass die Abbildung nicht injektiv ist.) Also ist P nicht bijektiv, also nicht invertierbar.

Es gibt also nicht für jede Matrix A eine Matrix B, sodass $A \cdot B = E = B \cdot A$ gilt. Für Matrizen, für die so etwas geht, führen wir einen speziellen Namen ein:

Definition 13.10
Eine Matrix A heißt **invertierbar**, falls es eine Matrix B gibt, sodass

$$A \cdot B = E = B \cdot A$$

ist. Die Matrix B nennen wir in diesem Fall die Inverse[4] von A und schreiben $B = A^{-1}$.

Wie kann mal also feststellen, ob eine Matrix invertierbar ist? In unserem Fall wird diese Frage durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 13.11
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$.
In diesem Fall ist $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ die Inverse.

Beweis: Wir definieren uns zuerst $\tilde{B} := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und rechnen:

$$A \cdot \tilde{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -bc + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{B} \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun beide Richtungen zeigen.

Hinrichtung (direkt):
Ist nun $ad - bc \neq 0$, so können wir dadurch teilen und es ist

$$A \cdot B = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

und analog $B \cdot A = E$.

[4] Man kann zeigen, dass die Inverse eindeutig ist, wenn sie existiert.

Rückrichtung (mit Widerspruch):
Wir nehmen an, dass A invertierbar ist und $ad - bc = 0$. Dann haben wir

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \tilde{B} = \tilde{B} \cdot E = \tilde{B} \cdot A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann muss aber $a = b = c = d = 0$ gelten. In diesem Fall würde aber offenbar $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ folgen, im Widerspruch zu $AA^{-1} = E$. □

Beispiel: Wir betrachten wieder die Linksdrehung L mit darstellender Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hier ist $ad - bc = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0$. A ist also invertierbar, und die Inverse ist $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dies hatten wir schon oben gesehen.
Für die Projektion P mit darstellender Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben wir

$$ad - bc = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Wie schon gesehen ist also B nicht invertierbar.

13.7 Zusatzkapitel: Lineare Gleichungssysteme

Eine andere Anwendung der linearen Algebra ist es, damit lineare Gleichungssysteme zu lösen. Ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir nun äquivalent als $A \cdot v = b$ schreiben mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist v der Vektor, der die beiden gesuchten Größen enthält. Ist nun A invertierbar, so können wir die Gleichung einfach mit A^{-1} multiplizieren und erhalten $v = A^{-1} \cdot b$, wo wir die Lösung einfach ablesen können.
In dem gegebenen Beispiel haben wir

$$ad - bc = 8 - 9 = -1 \neq 0.$$

Also ist A invertierbar, und es ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Autoren dieses Kapitels:
2019: Konstantin Meiwald