Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 2

Abgabe 05.05.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind.

Einzelabgabe: Bearbeiten Sie die Aufgaben 1+2 komplett. In der Aufgabe 3 genügen 2/3 Aufgabenteile. Sie können hier frei wählen, welche Aufgabenteile Sie abgeben möchten.
Partnerabgabe: Alle Aufgabenteile fließen in die Bewertung ein.

Bitte beachten Sie: Diese Möglichkeit soll den Aufwand des Aufschreibens reduzieren. Das Auseinandersetzen mit der Thematik wird dennoch ausdrücklich empfohlen.

Bitte verwenden Sie bei der Abgabe "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen und "Abgabe Algebra 1 BlattXX Nachname(n)" als Betreff der E-Mail an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor.

Nützliche LaTeX-Befehle

LaTeX-Befehl	Output
`\varphi`	φ
`\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}`	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sie können mit den Befehlen `\left` vor einer linken Klammer und `\right` vor der zugehörigen rechten Klammer eine dynamische Größenanpassung der Klammern an deren Inhalt erzeugen. Das funktioniert mit verschiedenen Arten von Klammern. Ein Beispiel:

LaTeX-Befehl	Output
`(\sum\limits_{k=1}^n k)`	$(\sum\limits_{k=1}^n k)$
`\left(\sum\limits_{k=1}^n k\right)`	$\left(\sum\limits_{k=1}^n k\right)$

Aufgabe 2.1 (6 Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit $\mathrm{Char}\,(R) = p$, wobei p prim.

(a). Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in R$ gilt: $(a + b)^p = a^p + b^p$.

(b). Zeigen Sie, dass der sogenannte **Frobeniusendomorphismus** $\varphi : R \longrightarrow R\,,\ \ x \longmapsto x^p$ ein Ringendomorphismus ist.

Aufgabe 2.2 (7 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a). Ein kommutativer Ring R ist genau dann ein Integritätsring, wenn folgende Kürzungsregel für alle $a, b, c \in R$ mit $c \neq 0$ erfüllt ist: $ca = cb \Rightarrow a = b$.

(b). Seien R, S Ringe und $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist für jeden Unterring R_1 von R das Bild $\phi(R_1)$ ein Unterring von S.

Aufgabe 2.3 (7 Punkte)**.** In einem Ring R heißt ein Element $a \in R$ **nilpotent**, falls $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a). Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass R genau dann kein von Null verschiedenes nilpotentes Element besitzt, wenn für alle $a \in R$ aus $a^2 = 0$ folgt, dass $a = 0$.

(b). Sei R ein kommutativer Ring und $a \in R \setminus \{0\}$ nilpotent. Zeigen Sie, dass a ein Nullteiler von R ist und für alle $b \in R$ gilt, dass ab nilpotent ist.

(c). Sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$ nilpotent. Zeigen Sie, dass a nicht invertierbar ist, aber $1 + a$ schon. Schließen Sie, dass für jedes $b \in R^*$ gilt, dass $a + b \in R^*$.
Hinweis: Was ist $(1+a)\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}a^{k-i}\right)$*?*