Klausur zu Analysis I, 10.2.2020 Shestakov

1. Aufgabe (8=4+4 Punkte)

   a) Geben Sie die Definition der Zahlen e, π, 2 und $3^{\sqrt{3}}$ an.

   b) Sei $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - i$. Berechnen Sie $\overline{z_1}, |z_1|, \frac{z_1}{z_2}$ und den Abstand zwischen z_1 und z_2. Skizzieren Sie z_1, z_2 und $z_1 + z_2$ in der komplexen Ebene.

2. Aufgabe (13=2+5+6 Punkte)

   a) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

   b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie:

      i) Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

      ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

   c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls er existiert, für

      i) $a_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{n^2 + 13}$

      ii) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n + \sin n}$

3. Aufgabe (9 = 4+3+2 Punkte)

   a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

   b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\,(n^2+1)}{\pi^n} z^n$.

      Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\,(n^2+1)}{\pi^n} 2^n$ konvergent?

   c) Stellen Sie die Zahl $0,0\overline{15} := 0,0151515...$ als Bruch dar, d.h. finden Sie $p, q \in \mathbb{N}$ derart, dass $0,0\overline{15} = \frac{p}{q}$.

4. Aufgabe (9 = 3+3+3 Punkte)

   a) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

   b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\log x = e^{-x}$ mindestens eine Lösung in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ hat.

   c) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1+x)}{1 - \cos x}$$

5. Aufgabe (9 = 3+3+3 Punkte)

a) Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit und der Ableitung einer Funktion f in einem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs an.

b) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung der Ableitung $f'(x_0)$. Erklären Sie auch, inwiefern die Definition aus a) diese Bedeutung erfasst. Machen Sie eine Skizze.

c) Beweisen oder widerlegen Sie:

Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist auch $f \cdot g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

6. Aufgabe (13 = 5+2+2+3+1 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

a) Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt, und alle lokalen Extrema von f.

b) Wie verhält sich die Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs?

c) Untersuchen Sie, wo f konkav bzw. konvex ist.

d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

e) Entscheiden und begründen Sie anhand des Graphen, ob f injektiv ist.