CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 7

Abgabe 09.06.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Die ♡-Aufgabe dient den besonders interessierten Teilnehmern zur Vertiefung und ist thematisch nicht prüfungsrelevant. Für diese Aufgabe ist keine Abgabe vorgesehen.

Aufgabe 7.1 (7 Punkte + 2 Extrapunkte)**.**

(a). Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der folgenden silmultanen Kongruenzen:

(i) $2X \equiv 1 \pmod 3$, $3X \equiv 2 \pmod 5$, $X \equiv 1 \pmod{11}$, $X \equiv -11 \pmod{14}$.

(ii) $X \equiv 2 \pmod 3$, $X \equiv 1 \pmod 5$, $X \equiv 5 \pmod{84}$,

(b). Berechnen Sie sämtliche Lösungen des folgenden Systems simultaner Kongruenzen in $\mathbb{Z}_3[t]$:

$$X \equiv 1 \pmod{(t+1)}, \quad X \equiv t+2 \pmod{(t^2+1)}, \quad X \equiv t^2+t \pmod{(t^3+t^2+2)} .$$

(c). (2 Extrapunkte) Es seien $R = \mathbb{Z}[i]$, $m_1 := 11 \in R$, $m_2 := 3 + 2i \in R$, $m_3 := 13 \in R$. Lösen Sie folgendes System simultanen Kongruenzen:

$$X \equiv 1 \pmod{m_1}, \quad X \equiv 2 \pmod{m_2}, \quad X \equiv 2 \pmod{m_3}.$$

Aufgabe 7.2 (6 Punkte)**.**

(a). Beweisen Sie, dass $f = t^4 - 2t^3 - 7t^2 - \frac{11}{3}t - \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}[t]$ eine rationale Nullstelle besitzt und bestimmen Sie die Faktorisierung von f in irreduzible Polynome aus $\mathbb{Q}[t]$.

(b). Es seien R ein Integritätsring, $f \in R[t]$ und $\varphi : R[t] \longrightarrow R[t]$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie: f ist genau dann irreduzibel, wenn $\varphi(f)$ irreduzibel ist.

(c). Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_n := t^4 + nt^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ in $\mathbb{Z}[t]$ reduzibel ist.

Aufgabe 7.3 (7 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibiltät in dem angebenen Polyomring $R[t]$. Ist das gegebene Polynom irreduzibel, so beweisen Sie die Aussage. Ist das Polynom reduzibel, so geben Sie mindestens einen irreduziblen Teiler an.

(**a**)**.** $f = t^3 + t^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[t]$ und $R[t] = \mathbb{Z}_5[t]$.

(**b**)**.** $f = 5t^{10} - 3t^6 + 18t^2 + 9t - 6 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Q}[t]$.

(**c**)**.** Sei $a \in \mathbb{Z}$, $f = t^3 \pm at^2 \pm (a+1)t \pm 1 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Q}[t]$.

(**d**)**.** $f = t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 5 \in \mathbb{Z}[t]$ und $R[t] = \mathbb{Q}[t]$.

♡-**Aufgabe** (Keine Abgabe)**.** Es seien R ein kommutativer Ring, $I \trianglelefteq R$ und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

(**a**)**.** Zeigen Sie, dass gilt: $S^{-1}I = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}R \mid a \in I \right\}$ ist ein Ideal in $S^{-1}R$.

(**b**)**.** Sei $J \trianglelefteq R$ ein weiteres Ideal von R. Zeigen Sie, dass

(a) $S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J$

(b) $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I) \cdot (S^{-1}J)$

(**c**)**.** Zeigen Sie, dass $S^{-1}I = S^{-1}R$ genau dann gilt, wenn $S \cap I \neq \emptyset$.