Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Quantorenlogik

× Aufgabe 1: Lesen

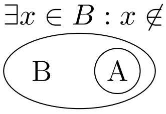
Übersetze folgende „Hieroglyphen“ in Sprache:

1. $m_o \in S \cap M$,
   wobei $S := \{x|x \text{ ist schlau}\}$, $M := \{x|x \text{ ist ein Mathematiker}\}$, $m_o :=$ Gauß.
2. $\forall t \in [0, \infty) : t^2 \geq 0$.
3. $\exists z \in \mathbb{R} : z \in \mathbb{Q}$.
4. $\forall x \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}$.
5. $\forall t \in T\ \exists d \in D : d$ passt auf t,
   wobei $T := \{x|x \text{ ist ein Topf}\}$, $D := \{x|x \text{ ist ein Deckel}\}$.

Aufgabe 2: Bilder malen

Zeichne jeweils ein Venn-Diagramm, das die folgenden Mengen beschreibt

Beispiel: Seien A und B Mengen und es gelten die Aussagen $\forall x \in A : x \in B$ und $\exists x \in B : x \notin A$. Dann ist als Skizze das typische Teilmengenbild gefordert:



1. Seien M und N Mengen. Es gelten folgende Aussagen:
   $\forall y \in M : y \notin N$.
   $\forall y \in N : y \notin M$.
2. Seien A und B Mengen. Es gelten folgende Aussagen:
   $\exists x \in A : x \notin B$.
   $\exists x \in B : x \notin A$.
   $A \cap B \neq \emptyset$.
3. Seien A,B und C Mengen. Es gelten folgende Aussagen:
   $\forall x \in C : x \in A \cap B$.
   $\exists x \in B : x \in A \wedge x \notin C$.
   $\exists x \in B : x \notin A$.
   $\exists x \in A : x \notin B \cup C$.

× Aufgabe 3: Formalisieren

Formalisiere die folgenden Aussagen im Sinne der Quantorenlogik, indem du Objekte mit bestimmten Eigenschaften Mengen zuordnest und entsprechend der Aussage logisch korrekt verknüpfst.
Beispiel: „Jeder Grashalm ist grün oder braun."
lässt sich formalisieren als $\forall g \in H: \; g \in G \vee g \in B$, wobei mit H die Menge aller Grashalme, mit G die Menge aller grünen Dinge und mit B die Menge aller braunen Dinge bezeichnet werden.
Versuche auch andere Möglichkeiten der Formalisierung (beispielsweise durch Mengenoperationen) zu finden (– Hierbei ist es hilfreich, sich die Situation zu skizzieren). Das Beispiel kann nämlich auch so formalisiert werden: $\forall g \in H: \; g \in G \cup B$ oder $H \subseteq (G \cup B)$.

1. Kein Mathestudent benötigt einen Taschenrechner.
2. Wohnt jemand in Oldenburg, so besitzt er immer ein Fahrrad.
3. Es gibt giftige Tiere.
4. x ist reell, jedoch nicht gleich der Null.

× Aufgabe 4: Negieren

Negiere die formalisierten Aussagen 1-4 aus der vorherigen Aufgabe sowohl sprachlich als auch formal. (Hinweis: Eventuell wird die Regel „$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$" aus dem Vortrag über Aussagenlogik benötigt.)

× Aufgabe 5: Mehrere Quantoren

Formalisiere die folgenden Aussagen:

1. Für jedes Kind gibt es eine Frau, die die Mutter des Kindes ist.
2. Es gibt eine ganze Zahl, die für alle quadrierten natürlichen Zahlen eine untere Schranke darstellt. (d.h. Alle quadrierten Zahlen sind nicht kleiner als diese Zahl)

! 3. Für eine beliebige Funktion f kann man für zwei beliebige, verschiedene Stellen x_1, x_2 in einem Intervall $[a, b]$, einen reellen Wert finden, der zwischen den Funktionswerten von f in diesen Stellen liegt. *(-Zwischen- kann hier auch bedeuten, dass der Wert den Funktionswerten entspricht)*

! Aufgabe 6: Alles gemischt

Hier findest du nochmal zu jedem Aufgabentyp schwierige Aufgaben, an denen du zeigen kannst, dass du diesen Themenblock verstanden hast.

1. **Lesen:** $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N: \; |a_n - a| < \varepsilon$, wobei a_n „n-tes Folgenglied einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$“ heißen soll.

   Bemerkung: Die Genaue Bedeutung dieser Aussage wirst du später im Votrag über Folgen noch kennen lernen.

2. **Bilder Malen:** Seien A,B,C und D Mengen. $\Omega := \{A, B, C, D\}$ sei die Menge, die die Mengen A, B, C, D als Menge zusammenfasst (– Eine Menge bestehend aus Mengen). Es gelten folgende Aussagen:
   $\forall M \in \Omega\; \exists N, P \in \Omega \backslash \{M\}, N \neq P: \; M \cap N \neq \emptyset \wedge M \cap P \neq \emptyset \wedge M \cap N \cap P = \emptyset$.
   $\forall M \in \Omega\; \exists! N \in \Omega \backslash \{M\}: \; M \cap N = \emptyset$.
   $\forall x \in A \cup D: \; [x \in A \wedge x \notin D] \vee [x \notin A \wedge x \in D]$.

3. **Formalisieren:** Es gibt Tiere, die entweder jeden Tag in der Sonne liegen oder nicht rosa gepunktet sind. (Tipp: Wie kann man „entweder... oder...“ formalisieren?)

4. **Negieren:** Negiere die Aussage zuvor. (Formal und sprachlich)

5. **Mehrere Quantoren:** Für jede Haustür eines Hauses gibt es einen Schlüssel, der nicht nur die Haustür, sondern auch alle Türen innerhalb <u>dieses</u> Hauses öffnen kann.