Unendliche Reihen

Def Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Bilden wir eine neue Folge nach der Vorschrift $s_n := a_1 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &... \\ s_n &= a_1 + ... + a_n, \\ &... \end{aligned}$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird in dem Fall als *Reihe* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Man schreibt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Glieder s_n dieser Folge heißen *Partialsummen* (oder *Teilsummen*). Konvergiert die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen gegen s, sagt man „die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert gegen s“.
Schreibweise: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$.
s heißt die *Summe* der Reihe. Eine nichtkonvergente Reihe wird *divergent* genannt.

Satz 3.1 (Rechenregeln für Reihen) Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k)$, wobei c eine Konstante ist, und es gilt

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k) = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.