Algebra II SoSe 2010 (Stein)

 Name, Vorname:____

1. (10 Punkte)

a. (7 Punkte) **Multiple Choice.** Geben Sie ohne Begründung an, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. Für richtige Antworten gibt es jeweils +1 Punkt, für falsche Antworten −1 Punkt. Keine Angabe zählt 0 Punkte. Die Gesamtsumme kann nicht negativ sein.

i. Jede endliche zyklische Gruppe hat einen eindeutigen Erzeuger.

ii. Sei N ein Normalteiler von G. Dann gilt: $an = na$ für alle $a \in G$, $n \in N$.

iii. Ist K ein endlicher Körper und G eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe K^*, dann ist G zyklisch.

iv. Die symmetrische Gruppe S_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch.

v. Sei n eine natürliche Zahl. Dann lässt sich jedes $\sigma \in S_n$ als Produkt von Zyklen schreiben, wobei die Darstellung bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt ist.

vi. Jede Gruppe der Ordnung 360 ist nicht einfach.

vii. Für die Menge $\mathrm{Aut}(Q(\sqrt[3]{2});\mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-Isomorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ gilt: $|\mathrm{Aut}(Q(\sqrt[3]{2});\mathbb{Q})| = 3$.

b. (3 Punkte) Formulieren Sie präzise

i. den Bahn-Stabilisator-Satz.

ii. die Bahnengleichung.

iii. den Satz von Cauchy.

2. (7 Punkte)

a. (3 Punkte) Die Gruppe $G := A_5 = \langle (1\,2\,3\,4\,5), (3\,4\,5) \rangle$ operiert auf $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mittels $\sigma \cdot i := \sigma(i)$ für alle $i \in X$ und $\sigma \in A_5$. Es bezeichne $U := G_1$ den Stabilisator von 1 in G und U_2 den Stabilisator von 2 in U. Berechne $|G_1|$ und $|U_2|$.

b. (4 Punkte) Bestimmen Sie mit Begründung, welche der folgenden Aussagen wahr sind. Wenn eine Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Wenn sie wahr ist, begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i) (2 Punkte) Für eine endliche Gruppe G bezeichne $Z(G)$ das Zentrum von G und G' die Kommutator-Untergruppe. Dann gilt: $|Z(G)| < |G| \Leftrightarrow |G'| > 1$.

(ii) (2 Punkte) Zu gegebenem Körperturm $K \supseteq L \supseteq k$ gilt:

$$K \supseteq L \quad \text{transzendent} \quad \text{und} \quad L \supseteq k \quad \text{transzendent} \quad \Leftrightarrow \quad K \supseteq k \quad \text{transzendent}\ .$$

3. (15 Punkte)

a. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass keine Gruppe der Ordnung $77077 = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13$ einfach sein kann.

b. (5 Punkte) Untersuchen Sie, ob eine Gruppe der Ordnung 351 einfach sein kann.

c. (5 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = pm$, wobei $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$ und $1 < m < p$. Beweisen Sie, dass G einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

4. (8 Punkte) Betrachten Sie das Polynom

$$f := t^6 - 2t^3 - 2t^2 + 4 = (t^2 - 2)(t^3 - 2) \quad \in \mathbb{Q}[t]\ .$$

a. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Polynome $t^2 - 2$ und $t^3 - 2$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ irreduzibel sind.

b. (5 Punkte) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper K von f über $\mathbb{Q}$ und berechnen Sie den Körpergrad $[K : \mathbb{Q}]$.

Name, Vorname:____

5. (10 Punkte) Es seien k ein endlicher Körper mit q Elementen, $K \supseteq k$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in K$ eine Nullstelle von $f := t^q - t - a \in k[t]$.

a. (5 Punkte) Beweisen Sie, dass die Nullstellenmenge von f gleich $X := \{\alpha + \beta \mid \beta \in k\}$ ist. Folgern Sie daraus, dass f separabel ist.

---

b. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $k(\alpha) \supseteq k$ galoissch ist.

---

6. (10 Punkte) Es seien $\alpha := \sqrt{1+2i}$, $\beta := \sqrt{1-2i} \in \mathbb{C}$ und $K := \mathbb{Q}(i, \alpha, \beta)$.

a. (5 Punkte) Beweisen Sie, dass die Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{Q}$ galoissch ist.
[Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $f := t^4 - 2t^2 + 5$. Was sind $\mathbb{Q}(\alpha^2)$ und $\mathbb{Q}(\beta^2)$?]

---

b. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(K\,;\mathbb{Q})$ und beschreiben Sie die Elemente von G durch ihre Wirkung auf i, α, β.

7*. (6 Bonuspunkte) *Bonusaufgaben werden strikt bewertet.*

a. (4 Punkte) Wieviele p-Sylowgruppen besitzt die symmetrische Gruppe S_p, wobei p eine Primzahl ist?

---

b. (2 Punkte) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper K von $f := t^6 + t^4 + t^2 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$ über $\mathbb{Q}$ und bestimmen Sie die Galoisgruppe von K über $\mathbb{Q}$.