Anne Frühbis-Krüger
Modul 5.01.051

WS 2019/20
29.01.2020

Lineare Algebra

— Probeklausur —

Name: ____

Matrikelnummer: ____

Raum: ____

Bitte beachten Sie die unten und auf der Vorderseite des nächsten Blattes angegebenen Hinweise. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie deren Kenntnisnahme.

Unterschrift: ____

Für Aufgabe 1 sind kurze, nachvollziehbare Begründungen nötig. Diese sollen an der dafür vorgesehenen Stelle eingetragen werden. Notizen auf der Folgeseite sind für Ihre Überlegungen und gehen nicht in die Bewertung ein.

Für Aufgaben 2 bis 6 sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite und den Folgeseiten fort. Das Vorhandensein einer Folgeseite bedeutet nicht zwingend, dass eine solche ausgefüllt werden muss. Am Ende des Klausurbogens befinden sich weitere Blankoseiten.

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	10	
2	16	
3	16	
4	12	
5	15	
6	6	
$\sum$	75	
Bonus	10,5	
Gesamt	75	
Note	1.0	

Hinweise zur Durchführung der Klausur:

- Von 09:40 bis 09:50 Uhr erhalten Sie Zeit, um die Klausur zu lesen und das Deckblatt und die Kopfzeilen leserlich auszufüllen. Um 09:50 Uhr beginnt die Bearbeitungszeit der Klausur von 120 Minuten.
- Tragen Sie bitte auf jedes bearbeitete Blatt Ihren Namen in Blockbuchstaben sowie Ihre Matrikelnummer ein. Blätter ohne Namen können nicht in die Wertung der Klausur eingehen und werden daher auch *nicht* korrigiert.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben auf 9 durchnummerierten Blättern und einem unnummerierten Deckblatt. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars und melden Sie sich unverzüglich im Falle fehlender Seiten oder offensichtlicher Fehldrucke.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis sowie einen amtlichen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass, Führerschein, Aufenthaltstitel oder Duldung) auf Ihrem Tisch bereit, damit wir die Anwesenheitskontrolle reibungslos durchführen können.
- Bitte schalten Sie Mobilfunkgeräte vor Beginn der Klausur aus und verstauen Sie diese in Ihren Taschen.
- Es darf nur mit einem blauen oder schwarzen dokumentenechten Stift geschrieben werden (auf keinen Fall mit rot, grün oder Bleistift). Es darf kein Tipp-Ex benutzt werden.
- Erlaubte Hilfsmittel (vollständige Liste): 2 DIN A4 Blätter in eigener Handschrift, dokumentenechte Stifte in blau oder schwarz, analoge Zifferblattuhr, Snack und Getränk.
- Die Heftklammern der Klausur dürfen nicht gelöst werden.
- Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur.
- Sollte der unterhalb des Aufgabentextes zur Verfügung stehende Platz (inklusive eventuell zur Bearbeitung der Aufgabe vorgesehene Folgeseiten) nicht zu Bearbeitung ausreichen, verwenden Sie bitte die Blankoseiten am Ende der Klausur und machen Sie bitte einen Vermerk über die Fortsetzung der Aufgabe. Sollte das zur Verfügung gestellte Papier danach nicht ausreichen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden.
- Bei manchen Rechenaufgaben bietet es sich an, eine Probe zu machen.
- Wenn Sie während der Bearbeitungszeit auf Toilette müssen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Kommen Sie bitte erst nach Aufforderung mit Ihrer Klausur und Ihrem Ausweis zu den Aufsichtspersonen. Es darf stets nur eine Person gleichzeitig die Toilette aufsuchen.
- Während der Klausur herrscht Stille. Sollte doch Kommunikation mit einer Aufsicht unumgänglich sein, so hat diese leise zu erfolgen. Bei Unklarheiten geben Sie bitte Handzeichen, eine Aufsichtsperson kommt dann an Ihren Platz.
- Sie dürfen die Bearbeitung Ihrer Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit beenden und den Hörsaal vorzeitig verlassen – mit folgenden Einschränkungen: Bleiben Sie bitte zum einen mindestens 15 Minuten. Zum anderen sollten Sie 15 Minuten vor Ablauf der Bearbeitungszeit bitte bis zum Ende bleiben, um Unruhe zu vermeiden.
- Bitte bleiben Sie auch nach Einsammeln Ihres eigenen Klausurbogens an Ihrem Platz, halten Sie noch Stille ein und holen Sie Ihre Taschen noch nicht hervor, ehe die Aufsicht das Einsammeln (nach Zählung der Abgaben!) für beendet erklärt hat.
- Bitte entsorgen Sie nach der Klausur den eigenen Müll.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (5 × 2P). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

(a). Es gibt Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, die nicht surjektiv sind.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(b). Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Addition $\oplus$ und der Skalarenmultiplikation $\odot$, welche gegeben sind durch

$$x \oplus y := x + y + 1 \quad \text{und} \quad \lambda \odot x := \lambda \cdot x \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(c). Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Sei $(v_1, \dots, v_s)$ linear unabhängig in V mit $s < n$. Dann gibt es $w_1, \dots, w_t \in V$ mit der Eigenschaft, dass $(v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$ eine Basis von V ist.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(d). Seien K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ ist linear, wenn $f(0) = 0$ gilt.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(e). Es gibt keine Matrix in $\mathbb{C}^{3\times 3}$, welche nur reelle Eigenwerte hat und deren charakteristisches Polynom keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(Raum für Notizen zu Aufgabe 1)

Aufgabe 2 (8P + 8P). Sei $a \in \mathbb{Q}$. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & ax_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(a). Für welche Werte $a \in \mathbb{Q}$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar?

(b). Betrachten Sie den Fall $a = 1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des entsprechenden Gleichungssystems.

(Fortsetzung von Aufgabe 2)

Aufgabe 3 (12P + 4P). Sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a). Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix Q und eine Diagonalmatrix D mit der Eigenschaft, dass $M = QDQ^{-1}$ gilt.

(b). Berechnen Sie M^{200}.

(Fortsetzung von Aufgabe 3)

Aufgabe 4 (4 × 3P). Es seien $A, B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$ in $\mathbb{Q}^{2\times 1}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad \mathcal{S} := (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Seien $F_A \colon \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}, x \mapsto Ax$ und $F_B \colon \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}, x \mapsto Bx$ die linearen Abbildungen definiert durch A bzw. B.

(a). Rechnen Sie nach, dass $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^{2\times 1}$ ist.

(b). Bestimmen Sie $M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}(F_A)$.

(c). Berechnen Sie $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}(F_B)$.

(d). Berechnen Sie $M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}}(F_B \circ F_A)$.

(Fortsetzung von Aufgabe 4)

(Fortsetzung von Aufgabe 4)

(Fortsetzung von Aufgabe 4)

Aufgabe 5 (12P + 3P). Sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ die Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

(a). Verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ zu bestimmen, wobei wir $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit dem zugehörigen Standardskalarprodukt versehen.

(b). Geben Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{C}$ an.

(Fortsetzung von Aufgabe 5)

Aufgabe 6 (4P + 2P). **(a).** Seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Für $c \in K$ definieren wir die Matrix $B_c := A - cE_n$. Beweisen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $-c$ kein Eigenwert von B_c ist.

(b). Es sei $\langle\,,\,\rangle\colon \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Zeigen Sie: sind $v, w \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ und gilt $\langle v, w\rangle = 0$, dann sind v und w linear unabhängig.

(Fortsetzung von Aufgabe 6)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)