CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

**Algebra - SS 20**
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

# Übungsblatt 1

**Abgabe 28.04.2020 0:00 Uhr**

Bitte verwenden Sie bei der Abgabe "BlattXX-Nachname.tex" als Dateinamen und "Abgabe Algebra 1 BlattXX Nachname" als Betreff der E-Mail an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor.

**Nützliche LaTeX-Befehle**

| LaTeX-Befehl | Output |
|---|---|
| `\frac{a}{b}` | $\frac{a}{b}$ |
| `\mid` | $\mid$ |
| `\{ \}` | $\{\}$ |
| `\langle` | $\langle$ |
| `\rangle` | $\rangle$ |
| `\subseteq` | $\subseteq$ |
| `\subsetneq` | $\subsetneq$ |

Um Aufzählungen zu verwenden können Sie die Umgebung enumerate nutzen. Hier ein einfaches Beispiel:

```
\begin{enumerate}
\item Erster Punkt der Aufzählung $1+1=2$
\item[(2).] Zweiter Punkt der Aufzählung mit veränderter Nummerierung
\end{enumerate}
```

So erhalten wir:

**(a).** Erster Punkt der Aufzählung $1+1=2$

(2). Zweiter Punkt der Aufzählung mit veränderter Nummerierung

**Aufgabe 1.1** (6 Punkte)**.** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

**(a).** Falls $d = \mathrm{ggT}(a, b)$, so ist $\mathrm{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

**(b).** Falls $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, $c \mid a$ und $d \mid b$, so gilt $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$.

**(c).** Falls $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, c) = 1$, so folgt $\mathrm{ggT}(a, bc) = 1$.

**Aufgabe 1.2** (7 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ nicht alle gleich 0. Zeigen Sie, dass

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle \mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_n) \rangle.$$

Zeigen Sie weiter, dass damit $\mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ die kleinste positive Zahl ist, welche als ganzzahlige Linearkombination von $a_1, \dots, a_n$ dargestellt werden kann.
*Hinweis: Verwenden Sie Induktion über $n$.*

**Aufgabe 1.3** (7 Punkte)**.** Zeigen Sie:

**(a).** Ist $(M, *)$ ein Monoid, so bildet die Menge der invertierbaren Elemente $M^*$ von $M$ zusammen mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe. Folgern Sie, dass die Menge der Einheiten eines Ringes $R$ mit Einselement eine Gruppe bildet. Gilt das auch, wenn $R$ kein Einselement besitzt?

**(b).** Sei $R$ ein kommutativer Ring mit 1. Jedes Ideal $I$ von $R$ enthält das Nullelement. Außerdem ist $I$ ein Unterring von $R$, welcher genau dann das Einselement enthält, wenn $I = R$.