LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZU DEN ABGABEAUFGABEN, BLATT 6

Aufgabe 1.1: Klar ist $\|x\|_\infty \geq 0$, sowie $\|x\|_1 \geq 0$. Da $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ and $|x_j| \leq \|x\|_1$, so sehen wir, dass $\|x\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, und $\|x\|_1 = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Weiter ist

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda x_j| = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda||x_j| = |\lambda| \max_{1\leq j\leq n} |x_j| = |\lambda|\|x\|_\infty,$$

sowie

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = |\lambda|\|x\|_1.$$

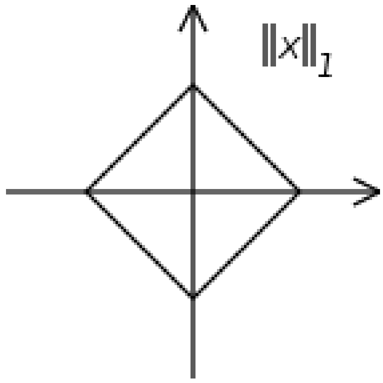
Da die Dreiecksungleichung bereits für den Betrag $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$ gilt, so folgt außerdem

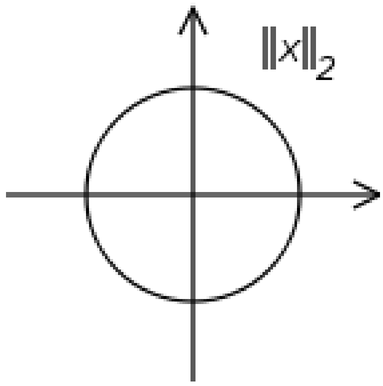
$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max_{1\leq j\leq n} |x_j + y_j| \leq \max_{1\leq j\leq n} |x_j| + |y_j| \\ &\leq \max_{1\leq j\leq n} |x_j| + \max_{1\leq j\leq n} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,\end{aligned}$$

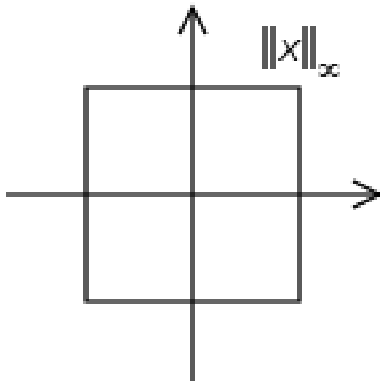
und

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + |y_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.1: Die offenen Einheitskugeln (d.h. ohne 'Rand') der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ und (was nicht gefordert war) $\|\cdot\|_2$ für $n = 2$ sehen wie folgt aus:







Aufgabe 2: Ist $d'(x,y) = 0$, so ist $d(x,y) = 0$, und damit $x = y$. Wenn $x = y$, dann $d'(x,y) = 0$, da schon $d(x,y) = 0$, weil d eine Metrik ist. Die Symmetry von d' folgt unmittelbar aus der Symmetry von d. Zur Dreiecksungleichung bemerke, dass die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x}$$

monoton steigend ist. Gilt also $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, so auch

$$d'(x,y) = f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y)).$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
f(d(x,z)+d(z,y)) &= \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \\
&= d'(x,y) + d'(z,y),
\end{aligned}
$$

und die Dreiecksungleichung für d' ist gezeigt.

Aufgabe 3.1: Für jedes $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ ist $M^c \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Daher ist $M^\circ = \emptyset$. Da $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ gegen 1 konvergiert für $n \to \infty$, so ist $1 \in \overline{M}$, also $M \cup \{1\} \subset \overline{M}$. Wegen $0 \le \frac{n-1}{n} \le 1$ gilt $\overline{M} \subset [0,1]$. Sei nun $a \in [0,1) \setminus M$. Sei $\delta := \frac{1-a}{2} > 0$. Dann gibt es nur endlich viele Elemente von M in $[0, a+\delta]$. Daher existiert ein $r > 0$, sodass $|a - x| \ge r$ für alle $x \in M \cap [0, a+\delta]$. Also $|a - x| \ge \min\{r, \delta\} > 0$ für alle $x \in M$. Damit kann keine Folge (x_n) aus M gegen a konvergieren. Folglich $\overline{M} = M \cup \{1\}$ und somit $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \overline{M}$.

Aufgabe 3.2: Eigentlich $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \le x < \sqrt{2}\}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Die Kugel $K_\varepsilon(0)$ enthält für jedes $\varepsilon > 0$ Punkte aus M und M^c. Daher $0 \in \partial M$. Sei nun $0 \neq x \in M$. Dann ist $0 < x < \sqrt{2}$ and es existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass $x - \varepsilon > 0$ und $x + \varepsilon < \sqrt{2}$. Also ist $K_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \subset M$, d.h $x \in M^\circ$. Das zeigt $M^\circ = M \setminus \{0\}$. Wir berechnen nun $\overline{M}$. Wegen $0 \le x \le \sqrt{2}$ für alle $x \in M$, so ist $\overline{M} \subset [0, \sqrt{2}]$. Also

$$\overline{M} \subset \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}] = M.$$

Da per Definition $M \subset \overline{M}$, erhalten wir $M = \overline{M}$, d.h M ist abgeschlossen in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Aufgabe 4.1: Ist $p \in M'$, so ist $p \in M_\alpha$ für ein α. Da M_α offen ist, so existiert ein $r > 0$, sodass $K_r(p) \subset M_\alpha$. Da $M_\alpha \subset M'$, so ist $K_r(p) \subset M'$ und damit M' offen.

Aufgabe 4.2: Ist $p \in M''$, so ist $p \in M_\alpha$ für alle (endlich vielen!) $\alpha \in A$. Da M_α offen ist, so existiert ein $r_\alpha > 0$ so dass

$$K_{r_\alpha}(p) \subset M_\alpha.$$

Mit

$$r := \min_{\alpha \in A} r_\alpha$$

erhalten wir für all $\alpha \in A$

$$K_r(p) \subset M_\alpha,$$

und somit

$$K_r(p) \subset M''.$$

Aufgabe 4.3: Es gilt

$$(N')^c = \bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha^c \text{ und } (N'')^c = \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha^c.$$

Nach Aufgabe 4.1 ist also N'' abgeschlossen, da alle N_α^c offen sind. Falls A endlich ist, so ist nach Aufgabe 4.2 die Menge N' abgeschlossen.