Klausur zu Analysis I
am 25.02.2019

WS 2018/2019 — Shestakov

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die entsprechende Seite und dort auf die Nummer der Aufgabe.* Beschriften Sie sofort jedes Blatt mit Ihrem Namen. Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 150 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Tutor(in):

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							
Korr.							

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe (5=3+2 Punkte)

a) Sei $z_1 = 3 + i, z_2 = 2 - 4i$. Berechnen Sie $\overline{z_1}, |z_1|, \frac{z_1}{z_2}$ und den Abstand zwischen z_1 und z_2.

b) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \colon \left|\frac{z-i}{z-1}\right| = 1\}$ in der komplexen Ebene.

2. Aufgabe (14=2+6+6 Punkte)

a) Geben Sie die Definition einer Cauchy-Folge an.

b) Beweisen oder widerlegen Sie:

   i) Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

   ii) Jede monoton wachsende Folge reeller Zahlen hat höchstens einen Häufungswert.

c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls er existiert, für

   i) $a_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

   ii) $a_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1} + \dfrac{\log n}{n^2}$

3. Aufgabe (10 = 5+3+2 Punkte)

a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\binom{m}{k}}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ fest ist

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n+e}{2} z^n$. Ist die Reihe im Punkt $z = \frac{1}{2}$ konvergent?

c) Verwandeln Sie den Dezimalbruch $0,\overline{13} := 0,131313...$ in eine rationale Zahl.

4. Aufgabe (11 = 3+4+4 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz vom Maximum und Minimum.

b) Beweisen oder widerlegen Sie:

   i) Jede differenzierbare Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum an.

   ii) Jede monoton fallende Funktion $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 2$ und $f(2) = -2$ hat eine Nullstelle $\xi \in [0,2]$.

c) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & \text{falls } x > 0 \\ e^{-x} - 1, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

5. Aufgabe (8 = 3 + 5 Punkte)

a) Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs an.

b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f, g zwei n-mal differenzierbare Funktionen auf I. Beweisen Sie induktiv die folgende Formel für die n-te Ableitung eines Produktes:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Hinweis: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

6. Aufgabe (13 = 5+2+2+3+1 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f wächst oder fällt, und alle lokalen Extrema von f.

b) Wie verhält sich die Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs?

c) Untersuchen Sie, wo f konkav bzw. konvex ist.

d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

e) Entscheiden und begründen Sie anhand des Graphen, ob f surjektiv ist.

Konzeptpapier

Konzeptpapier