Lineare Algebra

Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Berechne:

a)

$$i)\quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \qquad ii)\quad 2\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

b)

$$i)\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \qquad ii)\quad \begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}2 & -4\\0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

d)

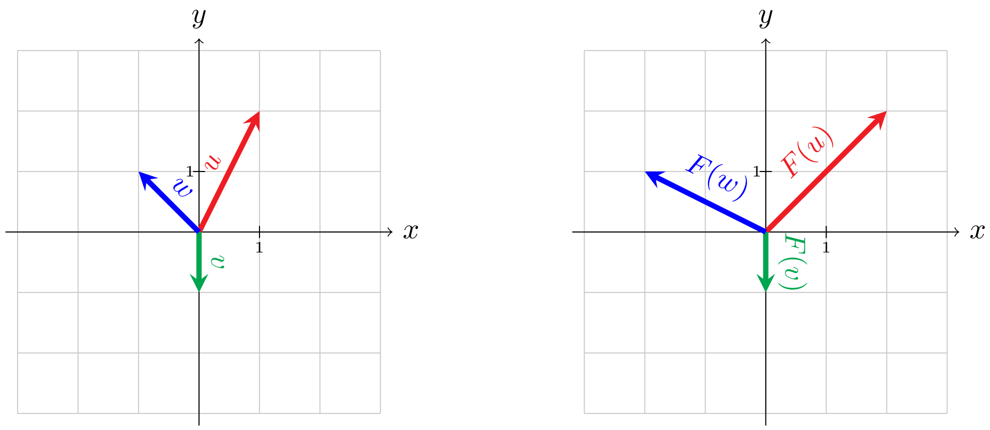
$$i)\quad \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \qquad ii)\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Hast du eine geometrische Erklärung für das Ergebnis?

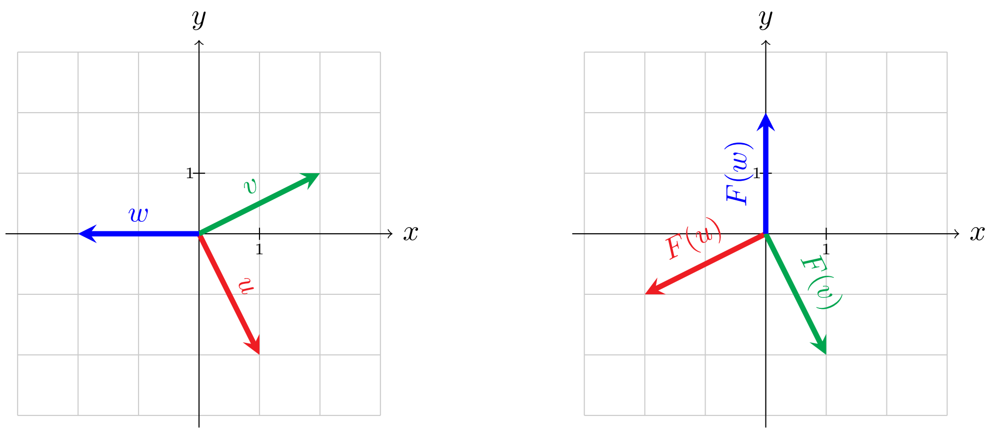
× Aufgabe 2

a) Gegeben sind im Folgenden die Wirkung von linearen Abbildungen F auf gewisse Vektoren. Was bewirken die lineare Abbildungen anschaulich? Gib außerdem die darstellende Matrix an.

i)



ii)



b) Mache zu folgenden linearen Abbildungen eine Skizze und stelle die darstellende Matrix auf.

i) Spiegelung an der y-Achse.

ii)

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

c) Mache zu den zu folgenden Matrizen gehörenden linearen Abbildungen eine Skizze und beschreibe, was die Abbildungen bewirken.

i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

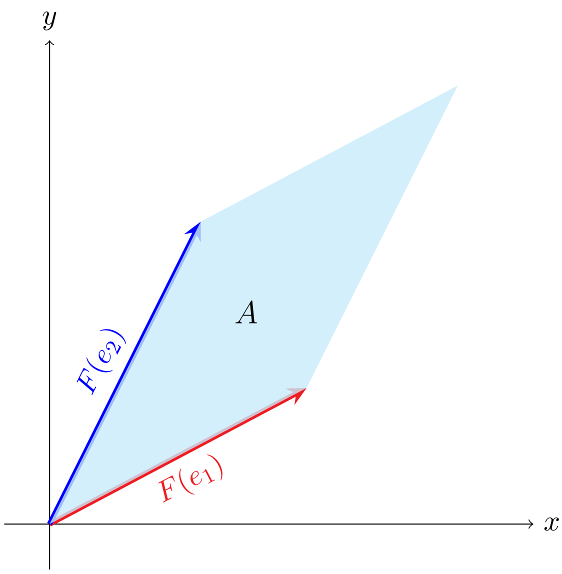
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix. Zeige, dass

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$v \mapsto A \cdot v$$

eine lineare Abbildung ist. Benutze dabei nicht Satz 13.9.

! Aufgabe 4

a) Gegeben sei eine lineare Abbildung F mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die beide Einheitsvektoren in den rechten, oberen Quadranten abbildet und die Orientierung erhält, d.h. $F(e_2)$ „links“ von $F(e_1)$ lässt (sieht Skizze). Zeige, dass der Flächeninhalt A des von $F(e_1)$ und $F(e_2)$ aufgespannten Parallelogramms gleich $ad - bc$ ist.



Hinweis: Verschreibe das Parallelogramm einem Rechteck ein und berechne die Fläche des Rechtecks sowie die Fläche, die nicht von Parallelogramm eingenommen wird.

Bemerkung: Die Formel gilt auch im allgemeinen Fall, wenn man den Flächeninhalt des Parallelogramms als negativ deklariert, wenn $F(e_2)$ „rechts“ von $F(e_1)$ ist. Dies kann im Folgenden verwendet werden.

b) Zeige, dass F nicht surjektiv ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.

c) Zeige, dass F nicht injektiv ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.