Übungsblatt 10 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

29. Juni 2020

Aufgabe 10.1

Hier nutze man Satz 150 und wegen der auftretenden konstanten Koeffizienten und der speziellen Form der Inhomogenität Satz 151.

(a) $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^x$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ charakteristisches Polynom mit zweifacher Nullstelle $\lambda^* = -2$. Das $\mathbb{R}$-FS ist

$$\left(\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}\right) \quad .$$

Die Inhomogenität ist $b(x) = \mathrm{e}^x$ mit $\mu = 1$, welches keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Somit ist eine spezielle Lösung $y_s(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{P(1)} = \frac{\mathrm{e}^x}{9}$. Die allgemeine Lösung ist damit

$$y(x) = (C_1 + xC_2)\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\mathrm{e}^x}{9} \quad .$$

(b) Wie in (a), nur ist nun die Inhomogenität $b(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, sodann $\mu = -2$. Diese ist jedoch eine Nullstelle des char. Polynoms. Dasselbe gilt auch für dessen erste Ableitung: $P'(\mu) = 2(\mu+2) = 0$. Es ist aber $P''(x) = 2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also ist die Multiplizität 2 und die spezielle Lösung $y_s(x) = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = (C_1 + xC_2)\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x} \quad .$$

(c) $y'' - 5y' + 4y = \sin(x)$: Das char. Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ und die Inhomogenität $b(x) = \sin(x) = \mathfrak{Im}\{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\}$. $\mu = \mathbf{i}$ ist keine Nullstelle des char. Polynoms, sodass

$$y_s(x) = \mathfrak{Im}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}}{3 - 5\mathbf{i}}\right\} = \mathfrak{Im}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}}{34}(3 + 5\mathbf{i})\right\} = \frac{5}{34}\cos(x) + \frac{3}{34}\sin(x)\,.$$

Für die homogenen Lösungen bestimme man die Nullstellen:

$$\lambda_\pm = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_+ = 4\,, \lambda_- = 1.$$

mit je einfacher Multiplizität. Damit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{4x} + \frac{5}{34}\cos(x) + \frac{3}{34}\sin(x) \quad .$$

(d) $y'' - y = xe^x$: Das char. Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ mit einfachen Nullstellen $\lambda_\pm = \pm 1$. Das $\mathbb{R}$-FS ist

$$\left(e^{\pm x}\right) \quad .$$

Die Inhomogenität ist $b(x) = xe^x$ mit $\mu = 1$, welches also selber Nullstelle ist. Die erste Ableitung liefert $P'(1) = 2 \neq 0$. Dies liefert $k = 1$ in Satz 151. Nach Bemerkung 152 ist für eine Inhomogenität dieser Art die spezielle Lösung gegeben durch $xR(x)e^x$ mit einem Polynom $R(x) = ax + b$. Diesen Ansatz setzt man in die gDGL ein, um a und b zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= x(ax+b)e^x = (ax^2 + bx)e^x \\
y'(x) &= \left(ax^2 + bx + 2ax + b\right) e^x = \left(ax^2 + (2a+b)x + b\right) e^x \\
y''(x) &= \left(ax^2 + (2a+b)x + b + 2ax + (2a+b)\right) e^x = \left(ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b)\right) e^x \quad ;
\end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
xe^x &= y''(x) - y(x) \\
&= \left(ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b) - ax^2 - bx\right) e^x = (4ax + 2(a+b))\, e^x \\
&\Leftrightarrow \\
x &= 4ax + 2(a+b) \quad ,
\end{aligned}$$

woraus durch Koeffizientenvergleich $a = \frac{1}{4}$ und $b = -a = -\frac{1}{4}$ folgen. Damit ist die gesamte Lösung

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{4}(x-1)e^x \quad .$$

Aufgabe 10.2

(a) Hier würde es nach Bestimmung des Fundamentalsystems ausreichen, die Wronski-Determinante und die spezielle Lösung gemäß Formel (46) auszurechnen. Zur Rekapitulation rechnet man diese Aufgabe aber zu Fuß nach: Für $y'' + y = \cos^{-1}(x)$ ist das char. Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$, welches die einfachen Nullstellen $\pm\mathbf{i}$ hat. Damit sind das $\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}$-FS

$$\left(\mathrm{e}^{\pm\mathbf{i}x}\right) \quad \text{bzw.} \quad (\cos(x), \sin(x)) \quad .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also $y_h(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Für eine spezielle Lösung variiere man die Konstanten: $A \to A(x)$ und $B \to B(x)$. Die Ableitungen dieses Ansatzes sind

$$\begin{aligned}
y(x) &= A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x) \\
y'(x) &= \underbrace{A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x)}_{\overset{!}{=}0} - A(x)\sin(x) + B(x)\cos(x) = -A(x)\sin(x) + B(x)\cos(x) \\
y''(x) &= -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) - A(x)\cos(x) - B(x)\sin(x) \\
&\Rightarrow \\
\frac{1}{\cos(x)} &= y''(x) + y(x) = -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

wobei die eine Nullforderung dazu dient, höhere Ableitungen als die Erste der variierten Konstanten in der höchsten Ableitung von y zu vermeiden. Diese und die letzte Gleichung ergeben ein LGS, welches in folgender Matrixschreibweise wie folgt ausschaut:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin'(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} \quad .$$

Zur Überprüfung der Invertierbarkeit berechne man die (Wronski-)Determinante:

$$\mathcal{W}(x) := \det \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

und damit Invertierbarkeit für alle x. Die inverse Matrix folgt mit der Standardformel für 2x2-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{W}(x)} \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}^T \quad ;$$

(die Matrix ist also speziell orthogonal). Sodann ergibt sich ein System von homogenen gewöhnlichen DGl erster Ordnung zur Bestimmung von $A(x)$ und $B(x)$:

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Zwei Stammfunktionen sind

$$A(x) = \log(\cos(x)) \quad \text{und} \quad B(x) = x \quad .$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \log(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x) \quad .$$

(b) Hier nutze man direkt die fertige Formel zur Bestimmung der speziellen Lösung: Die homogene Lösung von $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ folgt durch Analyse des char. Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, welches eine zweifache Nullstelle bei 1 hat. Das $\mathbb{R}$-FS ist

$$(\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x) \quad .$$

Die Wronski-Determinante ist

$$\mathcal{W}(x) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (1+x)\mathrm{e}^x \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & (1+x) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \quad ,$$

womit nach Formel (46)

$$\begin{aligned}
-c_1(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^{2x}} x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x \\
c_2(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^{2x}} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| \\
&\Rightarrow \\
y_s(x) &= -x\mathrm{e}^x + x\log|x|\mathrm{e}^x = (\log|x| - 1)x\mathrm{e}^x \\
y(x) &= [C_1 + C_2 x]\,\mathrm{e}^x + (\log|x| - 1)x\mathrm{e}^x \quad .
\end{aligned}$$

Dabei sind C_1 und C_2 Konstanten für die homogenen Lösungen.

Aufgabe 10.3

Die Vorgehensweise ist wie jene in Bemerkung 156 und Beispiel 157. Die hier zu betrachtende DGL hat keinen Term mit erster Ableitung ($a_1 = 0$):

$$y''(x) + \frac{2}{x^2(x+1)} y(x) = y''(x) + 0 \cdot y'(x) + \frac{2}{x^2(x+1)} y(x) = 0 \quad ;$$

sodann ist nach der Liouvilleschen Formel die Wronski-Determinante gegeben durch

$$\mathcal{W}(x) = C\mathrm{e}^{-\int a_1} = C \quad ,$$

wobei C die Wronski-Determinante zu einem bestimmten x-Wert ist. Es ist zudem

$$C = \mathcal{W}(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \quad ,$$

und nach Integration folgt

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{C}{y_1^2(x)} \,\mathrm{d}x = C y_1(x) \int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = C y_1(x) \int \frac{(s-1)^2 \,\mathrm{d}s}{s^2} \bigg|_{s=x+1} \\ &= C y_1(x) \int 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \,\mathrm{d}s \bigg|_{s=x+1} = C y_1(x) \left(s - 2\log|s| - \frac{1}{s}\right)\bigg|_{s=x+1} \\ &= \frac{C(x+1)}{x} \left(x + 1 - 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{C}{x} \left[(x+1)^2 - 1 - 2(x+1)\log|x+1|\right] \end{aligned}$$

Aufgabe 10.4

(a) Man setze den Ansatz $y_1(x) = ax + b$ in die DGL

$$y''(x) - \frac{y'(x)}{x-1} + \frac{y(x)}{x(x-1)} = f(x)$$

für $f(x) = 0$ ein und bestimme a und b durch Koeffizientenvergleich:

$$-ax + ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad ;$$

die Konstante a bleibt dabei unbestimmt, gibt aber für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Lösung der homogenen Gleichung her. Um die triviale Lösung auszuschließen, wähle man $a \neq 0$ und der Einfachheit $a = 1$.

(b) Mithilfe der Liouvilleschen Formel folgt zunächst

$$\mathcal{W}(x) = C\mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}} = C\mathrm{e}^{\log|x-1|} = C(x-1) \quad (x > 1)$$

mit C als Wronski-Determinante zu einem fixen x-Wert ist. Wir wählen diesen so, dass $C = 1$ ist. Wie in Aufgabe 3 schließt man nun auf eine zweite Fundamentallösung:

$$\begin{aligned}
(x-1) &= y_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \\
&\Leftrightarrow \\
y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{s-1}{y_1^2(s)}\,\mathrm{d}s = x \int \frac{s-1}{s^2}\,\mathrm{d}s = x \int \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= x\left(\log(x) + \frac{1}{x}\right) = (x\log(x) + 1) \quad .
\end{aligned}$$

Ein $\mathbb{R}$-FS ist somit

$$(x, x\log(x) + 1) \quad .$$

(c) Nach Überführung in die Standardform ist die Inhomogenität $f(x) = x - 1 = \frac{x(x-1)^2}{x(x-1)}$. Die Wronski-Determinante ist in (b) bereits bestimmt worden. Mithilfe der Variation der Konstanten können die Koeffizientenfunktionen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
-c_1(x) &= \int \frac{x-1}{\mathcal{W}(x)}(x\log(x) + 1)\,\mathrm{d}x = \int x\log(x) + 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2x}\,\mathrm{d}x\right) = \left(x + \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\right) \\
c_2(x) &= \int \frac{x-1}{\mathcal{W}(x)} ax\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \quad .
\end{aligned}$$

Sodann ist eine spezielle Lösung:

$$y_s(x) = -x\left(x + \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2}(x\log(x) + 1) \quad .$$

Aufgabe 10.5

Man betrachte hier die inhomogene DGL

$$y''(t) + 2dy'(t) + ky(t) = f(t)$$

mit $k, d > 0$.

(a) Sei $f(t) = 0$; das charakteristische Polynom ist $P(\lambda; d, k) = \lambda^2 + 2d\lambda + k$. Die Nullstellen nach der p, q-Formel sind

$$\lambda_\pm(d,k) = -d \pm \sqrt{d^2 - k} \quad .$$

Je nach Diskriminante gibt es entsprechende Multiplizitäten und Wertigkeiten und damit Fundamentalsysteme:

$$\begin{array}{llll}
d^2 > k: & \lambda_\pm(d,k) = -d \pm \sqrt{d^2-k} \in \mathbb{R}, & \text{einfach}, & \left(\mathrm{e}^{-dt+\sqrt{d^2-k}t}, \mathrm{e}^{-dt-\sqrt{d^2-k}t}\right) \\
: & , & , & \left(\mathrm{e}^{-dt}\cosh(\sqrt{d^2-k}t), \mathrm{e}^{-dt}\sinh(\sqrt{d^2-k}t)\right) \\
d^2 = k: & \lambda_\pm(d,k) = -d, & \text{zweifach}, & \left(\mathrm{e}^{-dt}, t\mathrm{e}^{-dt}\right) \\
d^2 < k: & \lambda_\pm(d,k) = -d \pm \mathbf{i}\sqrt{k-d^2}, & \text{einfach}, & \left(\mathrm{e}^{-dt}\cos(\sqrt{k-d^2}t), \mathrm{e}^{-dt}\sin(\sqrt{k-d^2}t)\right)
\end{array}$$

(b) Für $d = 0$ und $k > 0$ gibt es nur ein Fundamentalsystem

$$\left(\cos(\sqrt{k}t), \sin(\sqrt{k}t)\right) \quad .$$

Es ist $f(t) = \cos(\omega t) = \Re\mathfrak{e}\{\mathrm{e}^{\pm\mathbf{i}\omega t}\}$ - man wähle den Plusfall. Das reduzierte char. Polynom ist $Q(\lambda) = \lambda^2 + k$ mit den einfachen Nullstellen $\pm\mathbf{i}\sqrt{k}$. Für $\omega = \sqrt{k}$ ist damit auch $\mathbf{i}\omega$ eine Nullstelle des char. Polynoms (s.g. *Resonanzfall*), andernfalls $Q(\mathbf{i}\omega) = k - \omega^2 \neq 0$. Im Resonanzfall ist jedoch $Q'(\mathbf{i}\omega) = \mathbf{i}2\omega = \mathbf{i}2\sqrt{k}$. Die allgemeinen Lösungen sind somit

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\cos(\sqrt{k}t) + B\sin(\sqrt{k}t) + \frac{1}{Q(\mathbf{i}\omega)}\cos(\omega t) \\
&= A\cos(\sqrt{k}t) + B\sin(\sqrt{k}t) + \frac{1}{k-\omega^2}\cos(\omega t) \quad \text{für} \quad \omega \neq \sqrt{k} \\
&\text{und} \\
y(t) &= A\cos(\sqrt{k}t) + B\sin(\sqrt{k}t) - \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{\mathbf{i}t}{2\omega}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega t}\right\} \\
&= A\cos(\sqrt{k}t) + B\sin(\sqrt{k}t) + \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t) \quad \text{für} \quad \omega = \sqrt{k}
\end{aligned}$$

Im Resonanzfall sind die Lösungen unbeschränkt!