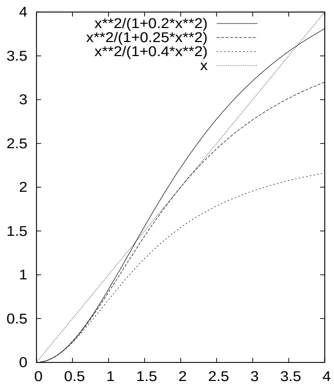
CvO Universität Oldenburg S2012
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Hannes Uecker

Nachklausur "Mathematische Modellierung", 26.7.2012

- **Bearbeitungszeit:** 110 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** eigene Notizen im Umfang von maximal 10 Seiten (=5 beidseitig beschriebene Blätter) **keine elektronischen Hilfsmittel** wie Mobiltelephone oder Taschenrechner.

Aufgabe 1 10 Punkte. Betrachte die 1D Iteration $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$ mit $f_\mu(x) = \dfrac{x^2}{1+\mu x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit Parameter $\mu > 0$.
a) In Abhängigkeit von $0 < \mu < 1$ bestimme man alle Fixpunkte. Insbesondere bestimme man μ_0, sodaß für $\mu > \mu_0$ genau ein Fixpunkt und für $\mu < \mu_0$ genau drei Fixpunkte vorliegen. Welche Bifurkation findet bei μ_0 statt?
b) Man bestimme die Stabilität aller Fixpunkte (am besten ohne Berechnung von f'_μ an den nichttrivialen Fixpunkten sondern durch Argumentation mit dem Verhalten von $f_\mu(x)$ für $x \to 0$ bzw $x \to \infty$).
c) Für $\mu = 1/4$ und $x_0 = 1$ bzw $x_0 = 3$ bestimme man das Verhalten von x_n für $n \to \infty$ mittels graphischer Iteration (cobwebbing).

Lösung zu 1 a) $f_\mu(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = x_\pm = \dfrac{1}{2\mu} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4\mu^2} - \dfrac{1}{\mu}}$, also 3 FP für $0 < \mu < 1/4$, 2 FP für $\mu = 1/4$, 1 FP ($x = 0$) für $\mu > 1/4$. Sattel–Knoten Bif. bei $\mu = 1/4$.

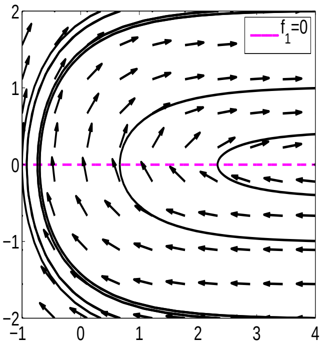


b) $f'_\mu(0) = 0$, also $x = 0$ stets stabil. Für $\mu = 1/4$ ist $x = 2$ instabil, für $0 < \mu < 1/4$ ist x_- instabil und x_+ stabil. (Keine Rechnung mit f'_μ nötig, da notwendig $f'_\mu(x_-) > 1$ und $0 < f'_\mu(x_+) < 1$.
c) klar.

Aufgabe 2 8 Punkte. Man zeichne das Phasenporträt von

$$\ddot{x} = F'(x) \quad \text{mit} \quad F(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

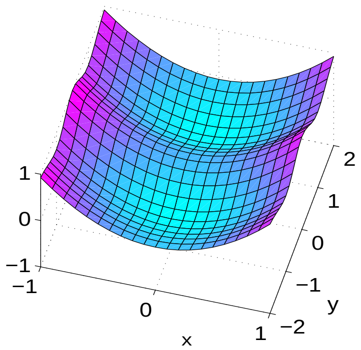
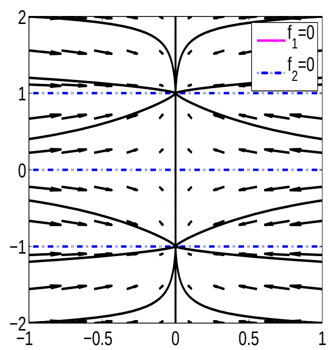
Lösung zu 2 Energie $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{-x}$ (keine Extrema!)



Aufgabe 3 8 Punkte. Man skizziere $f(x,y) = x^2 - y^2 \mathrm{e}^{-y^2}$, bestimme alle Fixpunkte inklusive ihres Typs für das Gradientensystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\nabla f(x,y),$$

und skizziere das Phasenporträt.
Lösung zu 3 Links das Potential, rechts das Phasenporträt.

Aufgabe 4 14 Punkte. Betrachte

$$\dot{u} = u(v - u - u^2),\ \ \dot{v} = v\,(\alpha u - v)\,, \quad u, v \geq 0$$

mit Parameter $\alpha > 0$. Um welchen (groben) Kolmogorov Typ (PP), (C) oder (S) handelt es sich? Man skizziere die Phasenporträts (mit Nullklinen) für $\alpha = 1/2$ und für $\alpha = 2$.
Bonus, 4 Punkte. Wenn das System auf $\mathbb{R}^2$ betrachtet, welche Bifurkation findet dann bei $\alpha = 1$ statt? Man zeichne das Bifurkationsdiagramm. (z.B. u–Komponente der Fixpunkte über α).
Lösung zu 4 (S). Nichttriviale Nullklinen $v = u + u^2$ und $v = \alpha u$, nichttrivialer Schnittpunkt nur für $\alpha > 1$, dann klassische Symbiose mit stab. nichttr. FP.
Bonus. Stets 2 Fixpunkte $(u,v) = (0,0)$, stabil für $\alpha < 1$, und $(u,v) = (\alpha - 1, \alpha(\alpha-1))$, stabil für $\alpha > 1$, also transkritische Bifurkation.