Sommersemester 2014
Prof. Dr. Florian Heß // Stefan Hellbusch
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Klausur zum Modul
ALGEBRA I (9KP)

Name: .... Matr.-Nr: ....

Studiengang: .... TutorIn: ....

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben, bei denen insgesamt 75 Punkte erreicht werden können. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars (es sind insgesamt 20 Seiten). Am Ende finden Sie noch einige Seiten Konzeptpapier.
- Es sind **keine Hilfsmittel** – insbesondere keine Taschenrechner oder persönliche Notizen – erlaubt. Bitte legen Sie Ihr Mobiltelefon oder sonstige Geräte, falls vorhanden, ausgeschaltet in ihre Tasche.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den ausgeteilten Blättern (inklusive Rückseiten) gewertet. Falls eine Bearbeitung nicht direkt unter der Aufgabenstellung berücksichtigt werden soll, **muss** darauf verwiesen werden!
- Das Entfernen der Heftklammern ist **nicht** erlaubt. Bewertungsrelevante Bearbeitung erfolgt ausschließlich mit dokumentenechten Stiften (Kugelschreiber, Füller, o.ä., **kein** Bleistift oder Tipp-Ex).
- Alle Schritte müssen begründet werden. Für nicht nachvollziehbare Rechnungen oder Folgerungen werden Punkte abgezogen. Vorherige Aufgabenteile dürfen verwendet werden.
- **Erklärung: Mir ist bekannt, dass Täuschungsversuche zum Nichtbestehen der Klausur führen!**

Zur Kenntnis genommen: ....
(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	K	B	M
Punkte										
Korrektur										
Note:	(Prof. Dr. F. Heß)									

1. Aufgabe: Chinesischer Restsatz (10P=5P+5P)

a) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$ mit Grad $\deg(f) \leq 4$, welches das folgende System simultaner Kongruenzen löst:

$$\begin{aligned} f &\equiv t^2 \mod t^3 - t, \\ f &\equiv 1 \mod t^2 - 2. \end{aligned}$$

(5P)

b) Stellen Sie ein System simultaner Kongruenzen in $\mathbb{Q}[t]$ auf, dessen Lösung ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$ liefert, so dass

$$f(1) = f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(\sqrt{2}) = 1 \quad \text{und} \quad f(2) = 3 \qquad (*)$$

gilt. Begründen Sie die Lösbarkeit Ihres Systems und warum es die geforderten Eigenschaften von f impliziert. Ist eine Lösung mit $\deg(f) = 6$ möglich? **(5P)**

Hinweis: Überprüfen Sie die Gleichungen $(*)$ für Lösungen f aus Teil a). Sie brauchen Ihr System simultaner Kongruenzen nicht explizit zu lösen.

2. Aufgabe: Homomorphismen (10P=4P+6P)

a) Wie lautet der Homomorphiesatz für Ringe aus der Vorlesung? **(4P)**

b) Sei $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ und

$$\phi : \mathbb{Z} \to R$$

ein Ringepimorphismus mit $\ker(\phi) \supseteq n\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle möglichen Ringe R, die hier auftreten können. **(6P)**

3. Aufgabe: Maximale Ideale (11P=6P+5P)

a) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale des Rings $R := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. **(6P)**

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jedes Ideal von R der Form $I \times J$ mit Idealen I von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und J von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist.

b) Sei R ein Ring und M ein maximales Ideal von R. Gelte für jedes $a \in M$, dass $1+a$ ein invertierbares Element von R ist. Zeigen Sie, dass M das einzige maximale Ideal von R ist. **(5P)**

Hinweis: Wegen M maximales Ideal von R ist R/M ein Körper und es gibt zu $x \in R \setminus M$ ein $x' \in R$ mit $xx' + M = 1 + M$. Führen Sie damit die Annahme, es gebe ein weiteres maximales Ideal N, zu einem Widerspruch.

4. Aufgabe: Irreduzible Polynome (13P=5P+2.5P+5.5P)

Entscheiden Sie für die unten genannten Ringe R, ob das Polynom

$$f := 40t^4 - 28t^3 - 140t^2 - 196t - 28 \in R[t]$$

irreduzibel ist. Ist es nicht irreduzibel, bestimmen Sie eine Zerlegung von f in irreduzible Faktoren.

a) $R = \mathbb{F}_3$. **(5P)**

b) $R = \mathbb{Q}$. **(2.5P)**

c) $R = \mathbb{Z}$. **(5.5P)**

5. Aufgabe: Moduln (10P=5P+5P)

Seien

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 10 \\ 2 & 8 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die untere Spalten Hermite Normalform von A und B. **(5P)**

b) Seien M_A und M_B die von den Spalten von A beziehungsweise B erzeugten $\mathbb{Z}$-Untermoduln von $\mathbb{Z}^3$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen

$$M_A = M_A \cap M_B, \quad M_B = M_A \cap M_B, \quad M_A \subseteq M_B \quad \text{oder} \quad M_B \subseteq M_A$$

gelten. **(5P)**

Hinweis: Sie brauchen keine Basis von $M_A \cap M_B$ anzugeben.

6. Aufgabe: Normalformen (12P=7P+5P)

a) Sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\phi : V \to V, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ in Weierstraß Normalform, sowie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{Q}^3$, so dass

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = W$$

gilt. **(7P)**

Hinweis: Die Berechnung einer Smith Normalform mit Transformationsmatrizen kann umgangen werden.

b) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ mit

$$A^7 = I_5,$$

wobei I_5 die Einheitsmatrix in $\mathbb{Q}^{5\times 5}$ bezeichnet. **(5P)**

Hinweis: Für einen großen Teil der Punkte ist eine Begründung, dass Sie alle Lösungen angegeben haben, erforderlich.

7. Aufgabe (9P=9 ·1P)

Kreuzen Sie an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Für falsche Angaben gibt es Punktabzüge, die Gesamtpunktzahl kann nicht negativ werden.

Uneindeutige Markierungen werden als falsch gewertet!

Mit R wird ein kommutativer Ring und mit K ein Körper bezeichnet.

		richtig	falsch
a)	Für jedes Ideal $I \neq \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ gibt es ein Ideal J von $\mathbb{Z}$, so dass $I + J$ maximal ist.	☐	☐
b)	Faktorringe von euklidischen Ringen sind euklidisch.	☐	☐
c)	Für $a \in R$ regulär ist $1 - a$ ebenfalls regulär in R.	☐	☐
d)	Jedes Primideal von $\mathbb{Q}[x, y]$ ist ein maximales Ideal von $\mathbb{Q}[x, y]$.	☐	☐
e)	Für $a, b \in R$ ist $aR + bR = (a + b)R$.	☐	☐
f)	Für jeden Ring R ist $R[t]$ faktoriell, wenn R Hauptidealring ist.	☐	☐
g)	Es gibt Moduln M, N vom Rang 2, welche sich nicht einander enthalten und deren Schnitt $M \cap N$ ebenfalls vom Rang 2 ist.	☐	☐
h)	Zerfällt das Minimalpolynom einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ über K in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so ist A diagonalisierbar.	☐	☐
i)	Die Frobenius Normalform einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist stets ähnlich zu der Begleitmatrix des charakteristischen Polynoms von A.	☐	☐