SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 10

Abgabefrist: bis zum 02.07.2020 um 23:59:59
als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung für die folgenden Differentialgleichungen:

1. $y'' + y = \sin x + e^x$,
2. $y'' - 4y = e^x \cos x$,
3. $y'' - 6y' + 9y = xe^x$.

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \frac{e^x}{\sin x}.$$

1. Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem (y_1, y_2) für die entsprechende homogene Gleichung.
2. Bestimmen Sie die Wronski-Determinante für das gefundene Fundamentalsystem.
3. Finden Sie eine spezielle Lösung der Gleichung.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)
Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - \frac{2x+1}{x}\, y'(x) + \frac{x+1}{x}\, y(x) = xe^x, \quad x > 0. \tag{1}$$

(a) Finden Sie eine Lösung y_1 der Form $y_1(x) = e^{ax}$ für die zugehörige homogenene Gleichung.

(b) Finden Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung mit Hilfe der Liouvillschen Formel für die Wronski-Determinante.

(c) Finden Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

Präsenzaufgaben

1. Bestimmen Sie mindestens eine Lösung für jede der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten:

   (a) $y'' + 4y' + 4y = e^x$,

   (b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$,

   (c) $y'' - 5y' + 4y = \sin x$,

   (d) $y'' - y = xe^x$.

2. Finden Sie mindestens eine Lösung für jede der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Man kann z.B. die Variation der Konstanten nutzen.

   (a) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$,

   (b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3. Eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2}{x^2(x+1)}y(x) = 0, \quad x > 0,$$

   ist schon bekannt: $y_1(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Finden Sie ein Fundamentalsystem mit Hilfe der Liouvilleschen Formel.

4. Betrachte die Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' - xy' + y = x(x-1)^2, \quad x > 1. \tag{2}$$

   (a) Finden Sie eine Lösung $y_1(x) = ax + b$ der entsprechenden homogenen Gleichung.

   (b) Finden Sie ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung z.B. mit Hilfe der Liouvilleschen Formel.

   (c) Finden Sie eine spezielle Lösung von (2) und schreiben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung.

   (Vergessen Sie nicht, die Gleichung in die Standardform zu bringen.)

5. Seien $d \geq 0$ und $k > 0$. Betrachte die Differenialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$y''(t) = -2dy'(t) - ky(t) + f(t).$$

   (Interpretation: Ein Gewicht hängt an einer Feder, die Funktion $t \mapsto y(t)$ beschreibt die vertikale Auslenkung der Feder, $y = 0$ entspricht der Gleichgewichtslage, $y'(t)$=Geschwindigkeit und $y''(t)$=Beschleunigung zur Zeit t. Der Term $-ky$ entspricht der Rückstellungskraft, der Term $-2dy'$ beschreibt die Reibung, f ist die externe Erregung.)

   (a) Bespreche die Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung für $d^2 > k$, $d^2 = k$, $d^2 < k$.

   (b) Sei $d = 0$ und $f(t) = \cos(\omega t)$ mit $\omega > 0$. Für welche ω sind alle Lösungen beschränkt?