Aufgabe 1.

1) Die Aussage ist falsch.

z. B. Nehme (X, d) mit $X \neq \emptyset$ und $d =$ diskrete Metrik.

$a \in X$, $K_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\}$

besteht nur aus einem Punkt

$\Rightarrow$ Kann nicht unendlich viele disjunkte offene Kugeln enthalten.

2) Falsch.

z.B. $A = (0,1)$, $B = (1,2)$ in $\mathbb{R}$

$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$,

$\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [1,2]$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$,

Also $\overline{A} \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

3) <u>Falsch.</u> z.B $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^3$. injektiv.

$f \in C^1$ also (f lipschitzsch

$\Leftrightarrow f'$ beschränkt),

aber $f' = 3x^2$ unbeschränkt.

4). <u>Falsch.</u>

z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$.

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x-y|$$

$\Rightarrow f$ Kontraktion,

aber f ist unbeschränkt.

Aufgabe 2

1) $$\int x^2 (\ln x)^2 \, dx \overset{PI}{=} \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2 \ln x}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx \right)$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{9} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^2 \ln x + \frac{2}{27} x^3 .$$

2) $$\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution} \\ u = x^2 + 1 \\ x \, dx = \frac{1}{2} du \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 2 \end{array} \right\}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{u=1}^{u=2}$$

$$= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{2} - 1 \right).$$

3). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^3}}\, dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

$(0,1)$:

$\displaystyle\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x+x^3}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konvergiert

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}$ konvergiert.

$(1,+\infty)$

$\displaystyle\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x+x^3}}\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right| = \frac{1}{x^{3/2}}$;

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ konvergiert

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^3}}\, dx$ konvergiert

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^3}}\, dx$ konvergiert.

4) $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$

$$f_n(x) = \frac{n}{n+e^{x^2}}.$$

$\forall x \in (-1,1)$:

$$f_n(x) \longrightarrow 1,$$

$$|f_n(x)-1| = \left|\frac{n}{n+e^{x^2}} - 1\right| =$$

$$= \left|\frac{n-(n+e^{x^2})}{n+e^{x^2}}\right| = \left|\frac{e^{x^2}}{n+e^{x^2}}\right|$$

$$\leq \frac{e}{n}.$$

$\Rightarrow$ $1 =$ glm-lim f_n

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f_n \longrightarrow \int_{-1}^{1} 1 = \boxed{2.}$$

Aufgabe 3

1] (a) $y' = -\cos x \; y$,

$$y = C\, e^{\int(-\cos x)\,dx}$$

$$= C\, e^{-\sin x}$$

(b) Variation der Konstanten:

$$y = C\, e^{-\sin x}$$

$$y' = C'\, e^{-\sin x} - \cancel{C \cos x\, e^{-\sin x}}$$

$$= -\cos x\, \cancel{C\, e^{-\sin x}} + \cos x$$

$$\Leftrightarrow C' = e^{\sin x} \cos x$$

$$C = \int e^{\sin x} \cos x \, dx = \{u = \sin x\} = \int e^u \, du = e^u = e^{\sin x}$$

$$\Rightarrow y = e^{\sin x} \cdot e^{-\sin x} = 1.$$

(c) $y = C e^{-\sin x} + 1; \quad C \in \mathbb{R}.$

2)

$$y' = 3x^2y^2$$

Separation der Variablen:

$$\frac{y'}{y^2} = 3x^2$$

$$\int \frac{y'}{y^2} = \int 3x^2; \quad -\frac{1}{y} = x^3 + c$$

$$y = -\frac{1}{x^3 + C}$$

$$y(0) = -1 \iff -\frac{1}{0^3 + C} = -1$$

$$\iff C = 1.$$

$$y(x) = -\frac{1}{x^3 + 1}$$

definiert für $x^3 > -1 \iff x > -1$

$\iff$ auf $(-1, +\infty)$.

$\lim_{x \to -1^+} y(x) = -\infty \Rightarrow$ keine Fortsetzung möglich.

2) z. B. $a = 0$, $b = 1$,

$y'' + y = 1$;

Charakt. Polynom

$\lambda^2 + 1 = 0$, Nullstellen $\pm i$

Fundamentalsystem $y_1 = \cos x$,
$y_2 = \sin x$.

spezielle Lösung $y_s = 1$.

Allgemeine Lösung:

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1$

ist periodisch $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

1) $y'' - 2y' + 2y = e^x$.

(a) $y'' - 2y' + 2y = 0$

charakt. Polynom:

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$.

Nullstellen $\lambda = 1 \pm i$ (einfach)

$\Rightarrow$ FS $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$.

(b) Spezielle Inhomogenität $e^{1 \cdot x}$

$P(1) = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ Lösung $y_s(x) = \frac{1}{P(1)} e^{1 \cdot x} = e^x$.

(c) $y(x) = c_1 e^x \cos x$

$+ c_2 e^x \sin x + e^x$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$

2) Eigenwerte von A:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3$$

$$= -1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 4.$$

$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -2.$

A diagonalisierbar.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2$:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z.B. $x = 3$, $y = 1$. $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2$

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z.B. $x = 1$, $y = -1$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y_2(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3) Spezielle Inhomogenität:

$$e^{0\cdot x}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \quad 0 \text{ kein EW von } A.$$

$\Rightarrow$ Ansatz

$$y(x) = e^{0\cdot x} f = f.$$

$$0 = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -1\end{pmatrix} f + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$f = -\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Lösung $y(x) = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$

4) $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 1\\ c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2y} - 1\end{pmatrix}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$