

# Funktionen und Abbildungen II

### × Aufgabe 1: Umkehrabbildungen

Bearbeite für die folgenden Abbildungen (1) bis (3) jeweils die folgenden Aufgaben:

- (a) Prüfe, ob die Umkehrabbildung definiert ist.
  - (b) Wenn möglich, gib eine explizite Formel für die Umkehrabbildung an.
  - (c) Wenn die Umkehrabbildung existiert, bestimme ihre Funktionswerte an den angegebenen Stellen.
- (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 5x + 3$  – Falls  $f^{-1}$  existiert, bestimme  $f^{-1}(8)$  und  $f^{-1}(-3)$ .

*Lösung:*

- (a) Laut Definition der Umkehrabbildung ist die einzige Voraussetzung für die Existenz der Umkehrabbildung, dass  $f$  bijektiv ist. Genau das prüfen wir also:

**injektiv:** Seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  Elemente aus dem Definitionsbereich von  $f$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$ . Dann ist

$$5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Also ist  $f$  injektiv.

**surjektiv:** Sei  $y \in \mathbb{R}$  ein Element aus dem Wertevorrat von  $f$ . Gesucht ist ein  $x \in \mathbb{R}$  (Element aus dem Definitionsbereich) mit  $f(x) = 5x + 3 = y$ . Diese Gleichung können wir nach  $x$  auflösen und erhalten  $x = \frac{y-3}{5}$ . Tatsächlich ist damit  $f(x) = f\left(\frac{y-3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{y-3}{5} + 3 = (y-3) + 3 = y$ . Also ist  $f$  surjektiv.

Also ist  $f$  bijektiv und besitzt damit eine Umkehrabbildung.

- (b) Laut Definition gilt für alle  $y \in \mathbb{R}$ :

$$f^{-1}(y) = \text{„das } x \in \mathbb{R}, \text{ welches die Bedingung } f(x) = y \text{ erfüllt“}$$

Wie wir zu gegebenem  $y$  ein solches  $x$  bestimmen, haben wir glücklicherweise schon bei der Überprüfung auf Surjektivität „nebenbei“ herausgefunden:

$$x = \frac{y-3}{5} = f^{-1}(y). \text{ Es gilt also: } f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}.$$

*Formel für die Umkehrabbildung*

- (c) Zuletzt dürfen wir noch zwei Funktionswerte der Umkehrabbildung bestimmen, was dank der Formel nicht besonders schwierig ist:

$$\circ f^{-1}(8) = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

$$\circ f^{-1}(-3) = \frac{-3-3}{5} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$$

(2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 4x^2 - x$  – Falls  $f^{-1}$  existiert, bestimme  $f^{-1}(1)$  und  $f^{-1}(15)$ .

*Lösung:*

(a) Die erste Frage ist wieder, ob die Umkehrabbildung überhaupt definiert ist. Dazu wird  $f$  auf Bijektivität überprüft:

**surjektiv:** Um  $f$  auf Surjektivität zu prüfen, stellen wir für ein festes  $y \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$f(x) = y \Leftrightarrow 4x^2 - x = y \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 0$$

auf und untersuchen, ob für jedes (beliebige aber feste)  $y \in \mathbb{R}$  ein  $x \in \mathbb{R}$  gefunden werden kann, welches die Gleichung erfüllt (z.B. mit p-q-Formel bzgl.  $x$ ).

Wenn man nun bereits die Vermutung hat, dass  $f$  nicht surjektiv ist, kann man direkt versuchen, ein Gegenbeispiel zur Surjektivität von  $f$  zu finden. Alternativ könnte man die p-q-Formel auch zunächst mit allgemeinem  $y$  lösen und dann schauen, ob die gefundene Lösung für  $x$ , in der ja  $y$  auftaucht, für jedes  $y$  aus dem Wertevorrat von  $f$  definiert ist. Ein Gegenbeispiel zur Surjektivität ist das folgende:

Sei  $y = -1$  ein Element aus dem Wertevorrat. Angenommen,  $f$  wäre surjektiv, dann gäbe es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 4x^2 - x = -1$ , also  $x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 0$ . Mit Hilfe der p-q-Formel ergäbe sich als Lösung hierfür

$$x = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{64} - 1}_{<0}},$$

was jedoch in  $\mathbb{R}$  nicht definiert ist, da die Wurzel in  $\mathbb{R}$  nur aus nicht-negativen reellen Zahlen gezogen werden kann. Es gibt also für  $y = -1$  kein Urbild unter  $f$ . Das betrachtete Beispiel ist also ein Gegenbeispiel zur Surjektivität von  $f$ .

(Hätte man diese Rechnung mit allgemeinem  $y$  gemacht, so hätten wir

$$x = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + y}$$

erhalten und hätten an dieser Stelle die Einschränkung  $y \geq -\frac{1}{64}$  treffen müssen, damit der Ausdruck unter der Wurzel nicht-negativ und die rechte Seite der Gleichung definiert ist. Also wäre es uns nicht möglich, für alle  $y$  aus dem Wertevorrat  $\mathbb{R}$  von  $f$  ein Urbild zu finden – genauer werden alle  $y < -\frac{1}{64}$  von  $f$  nicht getroffen.)

**(alternativ) injektiv:** Wir vermuten, dass  $f$  nicht injektiv ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir an,  $f$  sei injektiv, d.h. für alle  $y$  aus dem Wertevorrat

# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

*gibt es höchstens ein  $x$  mit  $f(x) = y$ . Insbesondere gilt dies für  $y = 0$ . Sei also  $f(x) = 0$ , d.h.  $4x^2 - x = 0$ . Dies ist äquivalent zu  $x(4x - 1) = 0$ , was jedoch sowohl für  $x = 0$  als auch für  $4x - 1 = 0$ , also  $x = \frac{1}{4}$  erfüllt ist. Daher ist  $f$  nicht injektiv.*

*Damit sind wir fertig, denn ohne Surjektivität bzw. Injektivität keine Bijektivität und ohne Bijektivität keine Umkehrabbildung.*

(b) –

(c) –

! (3)  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x^2)$  – Falls  $f^{-1}$  existiert, bestimme  $f^{-1}(1)$  und  $f^{-1}(0)$ .

*Lösung:*

(a) *Wieder prüfen wir auf Bijektivität:*

**injektiv:** Seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$  zwei Elemente aus dem Definitionsbereich mit  $f(x_1) = f(x_2)$ . Dann ist

$$\ln(x_1^2) = \ln(x_2^2) \Rightarrow \exp(\ln(x_1^2)) = \exp(\ln(x_2^2)) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

*Da  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$  sind, ist  $x_1 = x_2$ . Also ist  $f$  injektiv.*

**surjektiv:** Sei  $y \in \mathbb{R}$  ein Element aus dem Wertevorrat. Gesucht ist  $x \in \mathbb{R}_+$  (ein Element aus dem Definitionsbereich) mit  $f(x) = \ln(x^2) = y$ . Diese Gleichung können wir nach  $x$  auflösen:

$$\ln(x^2) = y \Leftrightarrow x^2 = \exp(y) \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\exp(y)}$$

*Wir erhalten also  $x = \sqrt{\exp(y)}$ . Tatsächlich gilt für dieses  $x$ :*

$$f(x) = \ln(x^2) = \ln\left(\sqrt{\exp(y)}^2\right) = \ln(\exp(y)) = y$$

*Also ist  $f$  surjektiv.*

*$f$  ist also bijektiv und die Umkehrabbildung ist definiert.*

(b) *Eine explizite Formel für  $f^{-1}$  finden wir wieder im Beweis der Surjektivität, nämlich  $f^{-1}(y) = \sqrt{\exp(y)}$ .*

(c) *Mit der expliziten Formel wird der geforderte Funktionswert von  $f^{-1}$  bestimmt:*

- $f^{-1}(1) = \sqrt{\exp(1)} = \sqrt{e}$
- $f^{-1}(0) = \sqrt{\exp(0)} = \sqrt{1} = 1$

## Aufgabe 2: Exponentialfunktion

Vereinfache so weit wie möglich:

1.  $\exp(3) \cdot \exp(-6)$

4.  $\left(\frac{\exp(-2)}{\exp(-3)}\right)^2 \cdot \exp\left(\frac{8}{9}\right)$

2.  $\left(\frac{1}{\exp_5(4)}\right)^8$

5.  $\left(\exp\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$

3.  $\frac{\exp(2)^{-3}}{\exp(-4)}$

*Lösung:*

1.  $\exp(3) \cdot \exp(-6) \stackrel{E2}{=} \exp(3 + (-6)) = \exp(-3)$

2.  $\left(\frac{1}{\exp_5(4)}\right)^8 \stackrel{E4}{=} (\exp_5(-4))^8 \stackrel{E3}{=} \exp_5(-4 \cdot 8) = \exp_5(-32)$

3.  $\frac{\exp(2)^{-3}}{\exp(-4)} \stackrel{E3}{=} \frac{\exp(2 \cdot (-3))}{\exp(-4)} = \exp(-6) \cdot \frac{1}{\exp(-4)} \stackrel{E4}{=} \exp(-6) \cdot \exp(4) \stackrel{E2}{=} \exp(-6 + 4) = \exp(-2)$

4.  $\left(\frac{\exp(-2)}{\exp(-3)}\right)^2 \cdot \exp\left(\frac{8}{9}\right) \stackrel{E4}{=} (\exp(-2) \cdot \exp(3))^2 \cdot \exp\left(\frac{8}{9}\right) \stackrel{E2}{=} (\exp(1))^2 \cdot \exp\left(\frac{8}{9}\right) \stackrel{E3}{=} \exp(1 \cdot 2) \cdot \exp\left(\frac{8}{9}\right) \stackrel{E2}{=} \exp\left(2 + \frac{8}{9}\right) = \exp\left(\frac{26}{9}\right)$

5.  $\left(\exp\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} \stackrel{E2}{=} \left(\exp\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = \exp\left(\frac{8}{3}\right)^{-1} \stackrel{E3}{=} \exp\left(\frac{8}{3} \cdot (-1)\right) = \exp\left(-\frac{8}{3}\right)$

## Aufgabe 3: Logarithmus

Vereinfache so weit wie möglich:

1.  $\ln(5) - \ln(4)$

4.  $4 \ln(2 \exp(\frac{1}{2})) - \ln(8)$

2.  $3 \ln(2) + 2 \ln(\frac{1}{4})$

5.  $\exp(\ln(7) - 3 \ln(2))$

3.  $\ln(3) + \ln(5) - 2 \ln(3) - \ln(\frac{5}{3})$

*Lösung:*

1.  $\ln(5) - \ln(4) \stackrel{L4}{=} \ln(5) + \ln(\frac{1}{4}) \stackrel{L2}{=} \ln(5 \cdot \frac{1}{4}) = \ln(\frac{5}{4})$

2.  $3 \ln(2) + 2 \ln(\frac{1}{4}) \stackrel{L3}{=} \ln(2^3) + \ln((\frac{1}{4})^2) = \ln(8) + \ln(\frac{1}{16}) \stackrel{L2}{=} \ln(8 \cdot \frac{1}{16}) = \ln(\frac{1}{2})$

3.  $\ln(3) + \ln(5) - 2 \ln(3) - \ln(\frac{5}{3}) = -\ln(3) + \ln(5) - \ln(\frac{5}{3}) \stackrel{L4}{=} \ln(\frac{1}{3}) + \ln(5) + \ln(\frac{3}{5}) \stackrel{L2}{=} \ln(\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}) = \ln(1) \stackrel{L1}{=} 0$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 4 \ln(2 \exp(\tfrac{1}{2})) - \ln(8) \stackrel{L3}{=} \ln((2 \exp(\tfrac{1}{2}))^4) - \ln(8) \stackrel{L4}{=} \ln((2 \exp(\tfrac{1}{2}))^4) + \ln(\tfrac{1}{8}) \\
 & = \ln(16 \cdot \exp(\tfrac{1}{2})^4) + \ln(\tfrac{1}{8}) \stackrel{E3}{=} \ln(16 \cdot \exp(\tfrac{1}{2} \cdot 4)) + \ln(\tfrac{1}{8}) \\
 & = \ln(16 \cdot \exp(2)) + \ln(\tfrac{1}{8}) \stackrel{L2}{=} \ln(16 \cdot \exp(2) \cdot \tfrac{1}{8}) = \ln(2 \cdot \exp(2)) \\
 & \stackrel{L2}{=} \ln(2) + \ln(\exp(2)) = \ln(2) + 2 \\
 5. \quad & \exp(\ln(7) - 3 \ln(2)) \stackrel{L3}{=} \exp(\ln(7) - \ln(8)) \stackrel{L4}{=} \exp(\ln(7) + \ln(\tfrac{1}{8})) \\
 & \stackrel{L2}{=} \exp(\ln(7 \cdot \tfrac{1}{8})) = 7 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}
 \end{aligned}$$

## ! Aufgabe 4: Beweis der Rechenregeln

1. Beweise die folgenden Rechenregeln für die Exponentialfunktion. Benutze dazu nur die Definition der Exponentialfunktion und die Rechenregeln für allgemeine Potenzen. Es sei  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**E2:**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

**E3:**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp_a(x \cdot y) = (\exp_a(x))^y$

**E4:**  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

*Lösung:*

*E2* Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann:  $\exp(x + y) \stackrel{\text{Def.}}{=} e^{x+y} \stackrel{\text{Pot.ges.}}{=} e^x \cdot e^y \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(x) \cdot \exp(y)$

*E3* Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann:  $\exp_a(x \cdot y) \stackrel{\text{Def.}}{=} a^{x \cdot y} \stackrel{\text{Pot.ges.}}{=} (a^x)^y \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp_a(x)^y$

*E4* Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann:  $\exp(-x) = \exp(x \cdot (-1)) \stackrel{E3}{=} \exp(x)^{-1} = \frac{1}{\exp(x)}$

2. Beweise die folgenden Rechenregeln für den Logarithmus. Benutze dazu nur die Rechenregeln für die Exponentialfunktion, die Definition des Logarithmus und Satz 12.2.

**L3:**  $\forall x \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R} : z \cdot \ln(x) = \ln(x^z)$

**L4:**  $\forall x \in \mathbb{R} : -\ln(x) = \ln(\tfrac{1}{x})$

*Lösung:*

*L3* Seien  $x \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}$ . Dann:  $z \cdot \ln(x) = \text{id}(z \cdot \ln(x)) = \ln(\exp(z \cdot \ln(x)))$

$\stackrel{E3}{=} \ln(\exp(\ln(x))^z) = \ln(\text{id}(x)^z) = \ln(x^z)$

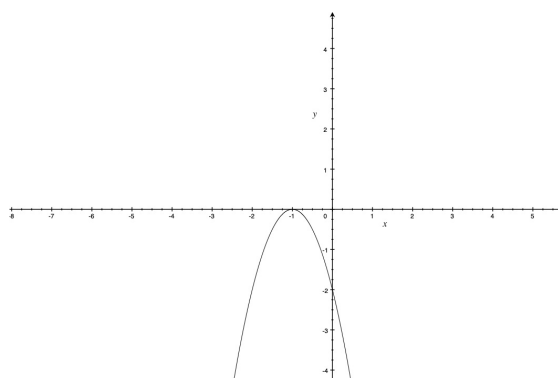
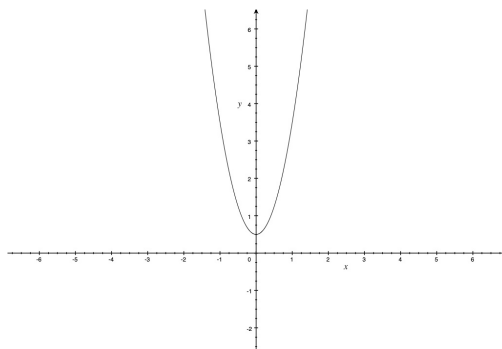
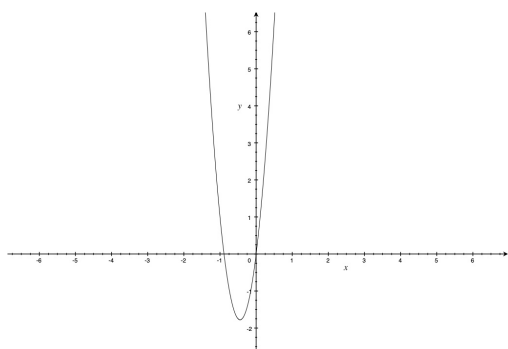
*L4* Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann:  $-\ln(x) = (-1) \cdot \ln(x) \stackrel{L3}{=} \ln(x^{-1}) = \ln(\tfrac{1}{x})$

## Aufgabe 5: Polynomfunktionen dritten Grades

Wir betrachten eine Polynomfunktion dritten Grades  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

- (a) Bestimme die Nullstellen von  $f$ , falls  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -1$  und  $d = -2$  ist.
- (b) Leite die Funktion ab und bringe die Ableitung in Scheitelpunktsform.
  - (i) Was sagt das Vorzeichen von  $a$  über den Graphen der Funktion  $f$  aus?
  - (ii) Falls  $a > 0$  ist, wann wird die Ableitung der Funktion minimal? Falls  $a < 0$  ist, wann wird die Ableitung der Funktion maximal?
- (c) Gegeben seien die folgenden drei Funktionsgraphen von Ableitungen dreier Polynomfunktionen dritten Grades.



Zeichne in jede Skizze je eine mögliche Polynomfunktion, deren Ableitung der jeweils abgebildete Funktionsgraph sein könnte.

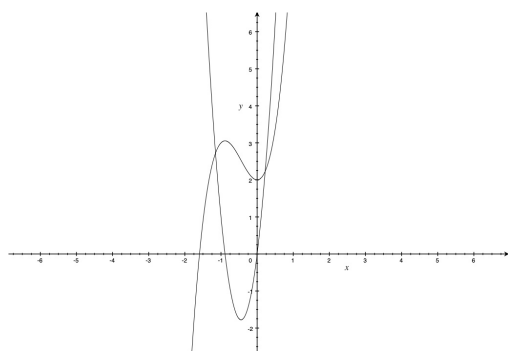
# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

*Lösung:*

- (a) Mit Polynomdivision erhalten wir die Nullstellen  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$  und  $x_3 = 1$ .
- (b) Als Ableitung von  $f$  erhalten wir  $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ . Umstellen in Scheitelpunktsform mittels quadratischer Ergänzung liefert

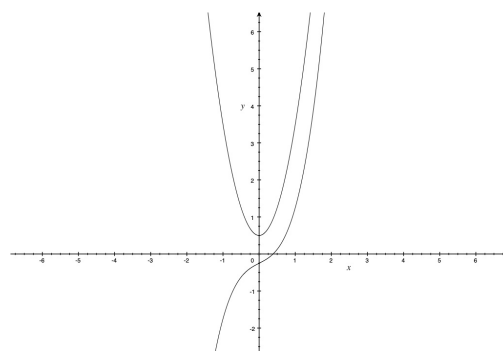
$$f'(x) = 3a \cdot \left( x + \underbrace{\frac{b}{3a}}_{=:d_1} \right)^2 + \underbrace{\frac{b^2}{3a} + c}_{=:d_2}$$

- (i) Das Vorzeichen von  $a$  sagt über die Ableitungsfunktion von  $f$  aus, ob diese nach oben oder unten geöffnet ist, wie wir in der Vorlesung gesehen haben. Als Folgerung bestimmt das Vorzeichen von  $a$ , ob die Funktion  $f$  „von  $-\infty$  kommt und nach  $+\infty$  geht“ oder ob sie „von  $+\infty$  kommt und nach  $-\infty$  geht“.
- (ii) In beiden Fällen wird die Ableitung minimal bzw. maximal bei  $d_1 = -\frac{b}{3a}$ . An dieser Stelle hat  $f$  die Steigung  $d_2 = \frac{b^2}{3a} + c$ .
- (c) Wir erhalten beispielsweise folgende mögliche Polynomfunktionen  $f$ :



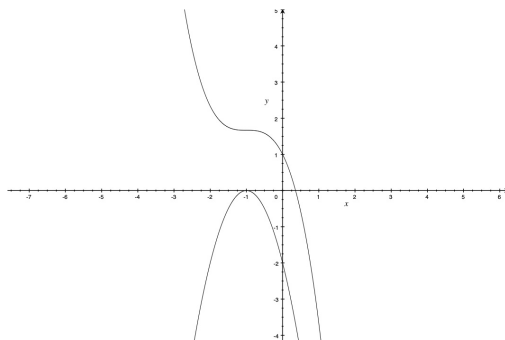
Hintergrundinformation zu  $f$  und  $f'$   
(nicht Teil der Aufgabenbearbeitung!):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 + 8x \\ f(x) &= 3x^3 + 4x^2 + 2 \end{aligned}$$



Hintergrundinformation zu  $f$  und  $f'$   
(nicht Teil der Aufgabenbearbeitung!):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + \frac{1}{2} \\ f(x) &= x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Hintergrundinformation zu  $f$  und  $f'$   
(nicht Teil der Aufgabenbearbeitung!):

$$f'(x) = -2x^2 - 4x - 2, \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

**Bemerkung:** Da es nicht nur eine Stammfunktion gibt, sind diese Polynomfunktionen nicht eindeutig. Jede andere Funktion mit gleichem Graphen, der lediglich vertikal verschoben ist, ist ebenso korrekt.

## Aufgabe 6: Sinus und Kosinus

Wir wollen uns in dieser letzten Aufgabe noch mit zwei Funktionen beschäftigen, welche sich geometrisch sehr schön veranschaulichen lassen: der Sinus- und Kosinusfunktion.

Aus der Schule ist sicherlich noch bekannt, dass man einen Winkel in Grad ( $^\circ$ ) messen. So bezeichnen wir einen Winkel von  $90^\circ$  als rechten Winkel. Ein anderes verbreitetes Winkelmaß ist das Bogenmaß. Das Bogenmaß eines Winkels  $\alpha$  beschreibt genau diejenige Strecke, die ein Zeiger auf einem Kreis mit Radius 1 zurücklegt, um den Winkel  $\alpha$  zu überstreichen. Dieser Zusammenhang ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

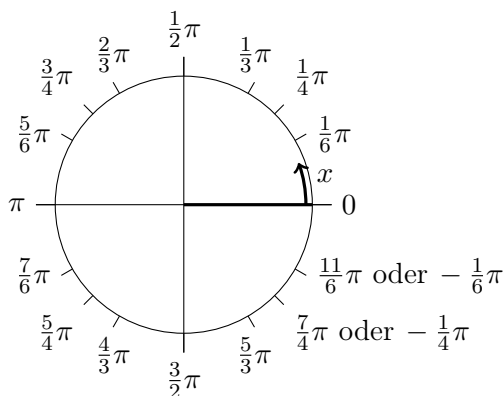


Abbildung 1: Einige Winkel im Bogenmaß (ausgehend von der positiven  $x$ -Achse)



# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen

So entspricht ein Winkel von  $45^\circ$  einem Bogenmaß von  $\frac{1}{4}\pi$  – oder anders ausgedrückt: Die Winkel  $\alpha = 45^\circ$  und  $\beta = \frac{1}{4}\pi$  sind gleich groß:

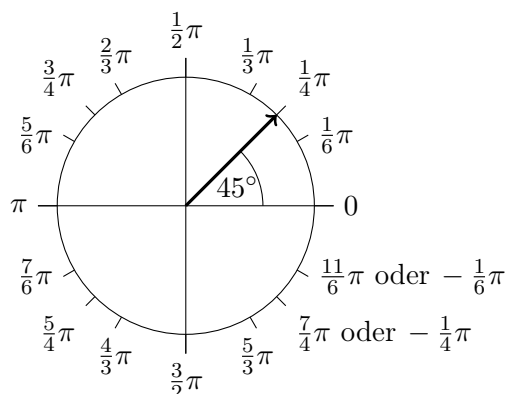


Abbildung 2: Einige Winkel im Bogenmaß (ausgehend von der positiven  $x$ -Achse)

Wie können wir allgemein wissen, wie groß ein gewisser Winkel im Bogenmaß in Grad ist? Dazu können wir ausnutzen, dass der Umfang eines Kreises mit Radius 1 genau  $2\pi$  beträgt. Somit entspricht ein Winkel von  $180^\circ$  gerade  $\pi$  oder ein Winkel von  $\frac{\pi}{3}$  (dies ist  $\frac{1}{6}$  des Kreisumfangs  $2\pi$ ) gerade  $\frac{1}{6}$  von  $360^\circ$ , also  $60^\circ$ . Mit diesen Überlegungen kann man die folgende Umrechnungsformel zwischen Gradzahl und Bogenmaß aufschreiben:

$$\frac{\alpha(\text{in Grad})}{360^\circ} = \frac{\alpha(\text{in Bogenmaß})}{2\pi}$$

Wir werden im weiteren Verlauf hauptsächlich mit dem Bogenmaß arbeiten.

## Erinnerung 1 (Sinus und Kosinus)

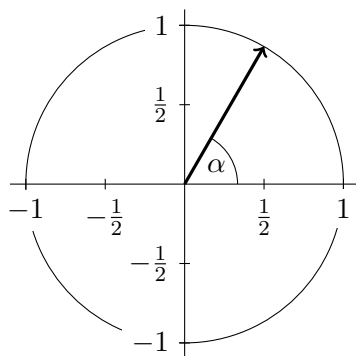
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck. Betrachten wir einen Winkel  $\alpha \neq 90^\circ$  (d.h.  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ) des Dreiecks, so gilt für diesen

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

- (a) Betrachten wir die folgende Abbildung eines Kreises mit Radius 1. Der eingezeichnete Pfeil schließt mit der waagerechten Achse einen Winkel von  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ein.

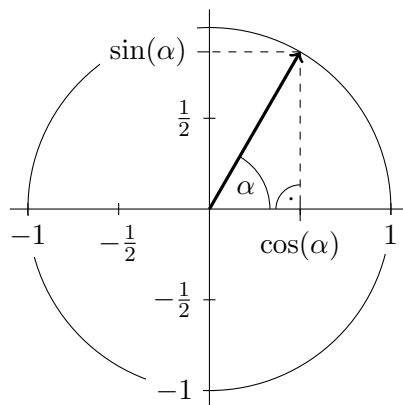
# Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen – Lösungen



- (i) Finde in obiger Abbildung ein rechtwinkliges Dreieck und zeichne in dieses Dreieck  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$  ein.
  - (ii) Bestimme mittels deiner Skizze die ungefähren Werte von  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$  für  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .
- (b) Wir betrachten Abbildung 1 und bezeichnen das Bogenmaß mit  $x$ . Wenn wir  $x$  variieren (dies entspricht dem Drehen der Zeigers), so erhalten wir für jedes Bogenmaß  $x$  einen Wert  $\sin(x)$  und einen Wert  $\cos(x)$ . Zeichne mit Hilfe deiner Erkenntnisse aus Aufgabenteil (a) die beiden Funktionen, welche  $\sin(x)$  in Abhängigkeit von  $x$  und welche  $\cos(x)$  in Abhängigkeit von  $x$  beschreibt. Dieses sind gerade die beiden *trigonometrischen Funktionen* Sinus und Kosinus.

*Lösung:*

- (a) (i) Wir zeichnen in die Abbildung  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$  für  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ein:



- (ii) Die ungefähren Werte von  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$  für  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  sind

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,85 \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) \approx 0,5.$$

(Der Kosinus-Wert ist sogar exakt!)

- (b) Wir erhalten die folgenden Funktionsgraphen für Sinus und Kosinus:

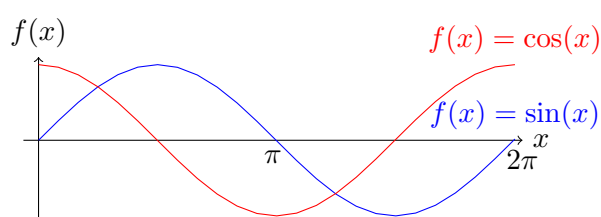


Abbildung 3: Funktionsgraphen von Sinus und Kosinus.