(1)

Direkte Berechnung der Jordan-Normalform nach Satz 8.2.20 (ohne Frobenius-Normalform)

geg.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat(4,4;\mathbb{Q})$

ges.: JNF von A
(entsprechende Basis nicht gefragt)

<u>Schritt 1:</u> char. Polynom von A

$$\det(tE_4 - A) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & t-2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach Zeile 2}}{=} (t-2) \cdot \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ -1 & t-2 & 1 \\ 1 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach Spalte 2}}{=} (t-2)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$= (t-2)^2 \cdot (t^2 - 4t + 4) = (t-2)^4$$

Damit ist $t=2$ Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 4. Es gibt keine weiteren Eigenwerte

(2)

<u>Schritt 2:</u> Eigenräume bestimmen

$t=2$:

$$2\cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist der Eigenraum zu $t=2$ von Dimension 2, d.h. die geom. Vielfachheit von $t=2$ ist 2.

$\Longrightarrow$ Es gibt 2 Jordan-Blöcke zum Eigenwert 2, deren Größen sich zu 4 addieren (Möglichkeiten: 3+1 und 2+2)

also $\begin{pmatrix} 2&1&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&2&1 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2&1&0&0 \\ 0&2&1&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$

③

Schritt 3: $\ker (2E_4 - A)^k = ?$

$$(2E_4 - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ker (2E_4 - A) = \mathbb{Q}^4$

Damit wissen wir, daß es 2 Jordan-Blöcke der Größe 2 sein müssen, also

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Im Fall eine Blocks der Größe 3 und eines der Größe 1, hätten wir erhalten:

$\dim_{\mathbb{Q}} \ker (2E_4 - A)^2 = 3$

$\dim_{\mathbb{Q}} \ker (2E_4 - A)^3 = 4$

Da keine Basen anzugeben waren, reichte die Dimensionsbetrachtung