Das Prinzip der vollständigen Induktion

Def Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, falls gilt:

1) $1 \in M$.
2) $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

Def Die *Menge der natürlichen Zahlen* wird definiert durch

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subset \mathbb{R} \\ M \text{ induktiv}}} M := \{x \in \mathbb{R} \colon \text{Für jede induktive Menge } M \subset \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\}.$$

Wir setzen außerdem $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lemma
1) $\mathbb{N}$ ist induktiv.
2) Falls $M \subset \mathbb{N}$ und M induktiv ist, so ist $M = \mathbb{N}$.

Satz 1.4 (Das Prinzip der vollständigen Induktion)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Es gelte:

1) $A(n)$ ist wahr für $n = 1$. *(Induktionsanfang)*
2) Aus der Gültigkeit von $A(n)$ *(Induktionsannahme)* folgt die Gültigkeit von $A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *(Induktionsschritt)*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen.

Def Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ wird x^n induktiv definiert durch:

1) $x^1 := x$
2) $x^{n+1} := x^n \cdot x$

Def Die *Menge der ganzen Zahlen* wird definiert durch

$$\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} \colon x \in \mathbb{N} \text{ oder } x = 0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \colon p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \text{ ist die } \textit{Menge der rationalen Zahlen.}$$

Notation Seien $n, j \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Die *Summe der* x_k von $k = j$ bis n definieren wir durch

$$\sum_{k=j}^{n} x_k := x_j + x_{j+1} + ... + x_n \text{ für } j \leq n.$$

Für $j > n$ setzen wir $\sum_{k=j}^{n} x_k := 0$ (die *leere Summe*).

Analog definieren wir das *Produktzeichen* $\prod_{k=j}^{n} x_k := x_j x_{j+1} \cdots x_n$, falls $j \leq n$, und $\prod_{k=j}^{n} x_k := 1$, falls $j > n$ (das *leere Produkt*).