Übungsblatt 12 - Lösungsvorschläge

Orville Damaschke

12. Juli 2020

Aufgabe 12.1

Beide DGL-Systeme lassen sich mit konstanten Matrizen A beschreiben und tragen spezielle Inhomogenitäten $b(t)$ in Form von Exponentialfunktionen $\mathrm{e}^{\mu t}$ mit $\mu \in \mathbb{C}$. Da diese in der Form $b(t) = \mathrm{e}^{\mu t} b$ mit $b \in \mathbb{C}^2$ auftreten, kann genau dann PA1 angewendet werden, wenn μ kein Eigenwert von A ist.

a)

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) - 5\sin(t)\mathrm{e}^t \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mu = 1 - \mathbf{i} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Man bestimme zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren für die homogene Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 1 - 2\lambda - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &\Rightarrow \lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - (-3)} = 1 \pm 2 \quad . \end{aligned}$$

Beide Nullstellen sind einfach und reell, womit die Eigenwerte je algebraische Multipliziät 1 haben. Für zweidimensionale Probleme ist das gleichbedeutend mit der Diagonalisierbarkeit der Matrix A. Man erwartet also je eindimensionale Eigenräume, welche von den Eigenvektoren aufgespannt werden. Für $\lambda_+ = 3$ wird das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch Vektoren $v = (v_1 \quad v_2)^T$ aus dem Eigenraum

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_+}(A) = \mathsf{Kern}(A - \lambda_+ \mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gelöst. Für $\lambda_- = -1$ wird das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch Vektoren $v = (v_1 \quad v_2)^T$ aus dem Eigenraum

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_-}(A) = \mathsf{Kern}(A - \lambda_- \mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gelöst. Beide Räume sind eindimensional und die jeweiligen geometrischen Multiplizitäten entsprechen den algebraischen Multiplizitäten. Beide Vektoren sind linear unabhängig und nach Satz 163 ist ein Fundamentalsystem gegeben durch die direkte Summe der Eigenräume. Eine allgemeine homogene, reelle Lösung ist somit von der Form

$$Y_h(t) = \begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung merke man zunächst an, dass μ kein Eigenwert von A ist. PA1 ist also anwendbar und man sucht zunächst eine komplexwertige Lösung. Invertiere hierzu die Matrix $(\mu \mathbf{1}_2 - A)$ und multiplziere an b: Mit dem Gauß-Jordan Algorithmus oder schneller noch mit der Inversionsformel für 2×2-Matrizen ist

$$\begin{aligned}
(\mu \mathbf{1}_2 - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & -2 \\ -2 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 2 \\ 2 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & -2 \\ -2 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \\
(\mu \mathbf{1}_2 - A)^{-1} b &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & -2 \\ -2 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ -2 \end{pmatrix} \\
Z_s(t) &= \mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})t} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ -2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \; Y_s(t) = \Im\mathfrak{m}(Z_s(t)) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\boxed{Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

(b)

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + \mathrm{e}^t \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; \mu = 1 \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Das Prozedere für die homogenen Lösunge verläuft analog: Aus

$$\begin{aligned}
0 &= P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} -(3+\lambda) & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda+3)(\lambda-1) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \\
&\Rightarrow \; \lambda_* = -1 \quad .
\end{aligned}$$

folgt ein Eigenwert mit algebraischer Multiplizität 2. Der Eigenraum wird aufgespannt von jenen $v \in \mathbb{R}^2$, welche das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Rang von $A - \lambda_* \mathbf{1}_2$ ist 1, aber auch der Defekt/die Dimension des Kerns:

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_*}(A) = \mathsf{Kern}(A - \lambda_* \mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

Die geometrische Multiplizität ist also lediglich 1; die Matrix ist also nicht diagonalisierbar. Es lässt sich aber ein Hauptvektor $u \in \mathbb{R}^2$ bestimmen, der

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Dies erfüllt beispielsweise $u = \frac{1}{2}(0 \quad 1)^T$. Das Fundamentalsystem wird aufgespannt durch

$$\left\{ \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right] \right\}$$

und jede homogene Lösung ist von der Form

$$Y_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ t + 1/2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$\mu = 1$ ist kein Eigenwert, sodass PA1 genutzt werden kann. Sodann hat man

$$\begin{aligned} (\mu \mathbf{1}_2 - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ (\mu \mathbf{1}_2 - A)^{-1} b &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad Y_s(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und erhält als allgemeine reellwertige Lösung

$$\boxed{Y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} t \\ t + 1/2 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad .$$

Aufgabe 12.2

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - y(t) + \frac{1}{\cos(t)} \\ y'(t) &= 2x(t) - y(t) + \frac{1}{\cos(t)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \frac{1}{\cos(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Aus den Eigenwerten und -vektoren folgert man ein Fundamentalsystem nach Satz 163 bzw. 166, falls die Matrix nicht diagonalisierbar sein sollte:

$$\begin{aligned} 0 &= P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1) + 2 = \lambda^2 + 1 = \lambda(\lambda + \mathbf{i})(\lambda - \mathbf{i}) \\ &\Rightarrow \lambda_\pm = \pm \mathbf{i} \quad ; \end{aligned}$$

die Eigenwerte sind zueinander komplex konjugiert und tragen je algebraische Multiplizität 1. Die Eigenräume werden durch Vektoren aufgespannt, welche das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 1 \mp \mathbf{i} & -1 \\ 2 & -(1 \pm \mathbf{i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Sodann erhält man

$$\mathsf{Eig}_{\lambda_\pm}(A) = \mathsf{Kern}(A - \lambda_\pm \mathbf{1}_2) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \mp \mathbf{i} \end{pmatrix} \right\} \quad ,$$

welches je eindimensionale Vektorräume sind, welche durch Vektoren aufgespannt werden, die zueinander komplex konjugiert sind. Nach Bemerkung 164 kann einer dieser beiden Vektoren aus dem $\mathbb{C}$-FS gewählt werden, dessen Real- und Imaginärteil ein $\mathbb{R}$-FS bildet:

$$\{y_1(t), y_2(t)\} = \left\{ \mathfrak{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathbf{i} \end{pmatrix} \right], \mathfrak{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathbf{i} \end{pmatrix} \right] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

(b) Die Fundamentalmatrix bestimmt man wie in der Vorbemerkung zur Definition 170. Das Fundamentalsystem sammelt man in der folgenden Matrix:

$$\mathbf{Y}(t) = (y_1(t) \quad y_2(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) & \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{1}_2 \quad .$$

Sodann folgt die Fundamentalmatrix durch Rechtsmultiplikation mit der Inversen von $\mathbf{Y}(0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(0)^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{Y}(0))} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}(0) \\ \Phi(t) &= \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(0)^{-1} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) & \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) & -\sin(t) \\ 2\sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Die Exponentialmatrix von A kann mithilfe des Satzes 174 durch die Fundamentalmatrix ausgedrückt werden: Es ist $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$, sodass

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{tA} = \Phi(1) = \begin{pmatrix} \cos(1) + \sin(1) & -\sin(1) \\ 2\sin(1) & \cos(1) - \sin(1) \end{pmatrix} \quad .$$

(c) Für die allgemeine Lösung nutze man Satz 168, um eine spezielle Lösung zu finden. Hierzu kalkuliere man zunächst die Inverse von $\mathbf{Y}$ und integriert dessen Linksmultiplikation auf $B(t)$:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{Y}(t)) &= \det\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \cos(t)+\sin(t) & \sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix} \\
&= \sin(t)\cos(t) - \cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) - \sin^2(t) = -1 \neq 0 \\
\mathbf{Y}(t)^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{Y}(t))}\begin{pmatrix} \sin(t)-\cos(t) & -\sin(t) \\ -\cos(t)-\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)-\sin(t) & \sin(t) \\ \cos(t)+\sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \\
\mathbf{Y}(t)^{-1}B(t) &= \frac{1}{\cos(t)}\begin{pmatrix} \cos(t)-\sin(t) & \sin(t) \\ \cos(t)+\sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\cos(t)}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(t) \end{pmatrix} \\
\left(\int \tan\right)(t) &= -\log|\cos(t)| \\
&\Rightarrow \\
\left(\int \mathbf{Y}^{-1}B\right)(t) &= \begin{pmatrix} t \\ -\log|\cos(t)| \end{pmatrix} \\
Y_s(t) &= Y(t)\left(\int \mathbf{Y}^{-1}B\right)(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \cos(t)+\sin(t) & \sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -\log|\cos(t)| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t\cos(t) - \sin(t)\log|\cos(t)| \\ t(\cos(t)+\sin(t)) + (\cos(t)-\sin(t))\log|\cos(t)| \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL-Systems ist hiermit

$$
\boxed{\begin{aligned} Y(t) = c_1 &\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} t\cos(t) - \sin(t)\log|\cos(t)| \\ t(\cos(t)+\sin(t)) + (\cos(t)-\sin(t))\log|\cos(t)| \end{pmatrix} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}} \quad .
$$

Aufgabe 12.3

Für eine systematische Herangehensweise führe man das *Kronecker-Symbol* ein:

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\} \quad .$$

Diese lassen sich als Elemente der Einheitsmatrix charakterisieren, da nur entlang der Diagonalen der Wert 1 angenommen wird: $(\mathbf{1}_n)_{ij} = \delta_{ij}$. Für Matrizen, die entlang der k-ten oberen bzw. unteren Nebendiagonalen die Einträge 1 hat ($k \in \{0, 1, ..., n-1\}$), hat man $\delta_{i-k,j}$ für die unteren Nebendiagonalen und $\delta_{i,j-k}$ für die oberen Nebendiagonalen. So ist $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ gegeben durch die Einträge $N_{ij} = \delta_{i,j-1}$. Man definiere die Matrizen $N(k) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ durch $N_{ij}(k) = \delta_{i,j-k}$. Damit sind $N(0) = \mathbf{1}_n$ and $N(1) = N$. Für $k \geq n$ setze man $N(k) = \mathbf{0}_n$.

(a) Man zeige zunächst folgende Aussage:

Behauptung. Für $k, l \in \{0, 1, ..., n-1\}$ so, dass $k + l \leq n - 1$ gilt, ist $N(k)N(l) = N(k+l)$, sonst $N(k)N(l) = \mathbf{0}_n$.

Beweis: Zum Beweis betrachte man das Matrizenprodukt elementweise:

$$(N(k)N(l))_{ij} = \sum_{m=1}^{n} N_{im}(k)N_{mj}(l) = \sum_{m=1}^{n} \delta_{i,m-k}\delta_{m,j-l} = \delta_{i,j-(l+k)} \quad ,$$

was für $k + l \leq n - 1$ dem Matrixelement $N_{ij}(l+k)$ entspricht und 0 sonst, q.e.d.!

Mit diesem Hilfmittel kann man die eigentliche Aussage beweisen:

Behauptung.

$$N^k = \begin{cases} N(k) & \text{für } k \in \{0, 1, ..., n-1\} \\ \mathbf{0}_n & \phantom{\text{für }} k \geq n \end{cases} \quad .$$

Beweis: Für $k = 0$ und $k = 1$ (Induktionsbeginn) ist die Aussage klar. Sei die Aussage für ein $K \in \{0, 1, ..., n-2\}$ wahr, so folgt mit der oben gezeigten Behauptung

$$N^{K+1} = N^K N = N(K)N(1) = N(K+1) \neq \mathbf{0}_n \quad ;$$

für $K = n - 1$ folgt aus derselben Rechnung $N^{K+1} = N(n) = \mathbf{0}_n$ und damit die Behauptung, q.e.d.!

(b) Zur Bestimmung der Exponentialmatrix folge man der Definition 173 mithilfe der Reihe und nutze aus, dass die Matrix nach (a) nilopotent ist:

$$\mathrm{e}^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N(k) = \mathbf{1}_n + tN + \frac{t^2}{2} N(2) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N(n-1) \quad .$$

Die Exponentialmatrix hat also entlang jeder k-ten Nebendiagonalen statt des Wertes 1 den Eintrag $t^k/k!$ für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$:

$$\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ kann die Matrix B in Matrizen $N(0)$ und N zerlegt werden:

$$B = \lambda N(0) + N = \lambda \mathbf{1}_n + N \quad .$$

Die Matrizen $t\lambda\mathbf{1}_n$ und tN kommutieren für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$. Unter Anwendung von Präsenzübung 4 (b) ist

$$\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t\lambda\mathbf{1}_n + tN} = \mathrm{e}^{t\lambda\mathbf{1}_n}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{1}_n\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{t\lambda}\mathrm{e}^{tN}$$

und unter Zuhilfenahme von Aufgabenteil (a) und der Diagonalgestalt der Einheitsmatrix erhält man ausgeschrieben

$$\mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\mathrm{e}^{t\lambda} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathrm{e}^{t\lambda} \end{pmatrix} \quad .$$

Dies sind die Exponentialmatrizen von Jordan-Blockmatrizen.