

LV Analysis IIa kann unter dem folgenden Link evaluiert werden:

<https://www.survey.uni-oldenburg.de/index.php?r=survey/index&sid=824398&lang=de>

## Vorlesung 12

### Nichtdiagonalisierbare Matrizen in zwei Dimensionen

Bevor wir allgemeine Systeme  $y' = Ay$  behandeln, betrachten wir den wichtigen Fall, wenn  $n = 2$  und  $A \in M_2(\mathbb{K})$  *nicht diagonalisierbar* ist (dieser Fall kommt ziemlich oft vor, insbesondere in Übungsaufgaben und Klausuren): das bedeutet, dass  $A$  nur einen Eigenwert  $\lambda_0$  besitzt und dass  $\ker(A - \lambda_0 I)$  eindimensional ist. Wähle ein  $v \in \ker(A - \lambda_0 I)$  mit  $v \neq 0$ , dann haben wir schon eine Lösung  $y_1(t) = e^{\lambda_0 t} v$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  hat die Form  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$ , und aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass  $P(A) = 0$ , d.h.  $(A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I) = 0$ .

Wir suchen jetzt nach einer weiteren Lösung  $y(t) = e^{\lambda_0 t} f(t)$  mit unbekannter Vektorfunktion  $f$ . Das Einsetzen ins System ergibt

$$\underbrace{\lambda_0 e^{\lambda_0 t} f(t) + e^{\lambda_0 t} f'(t)}_{=y'(t)} = \underbrace{e^{\lambda_0 t} A f(t)}_{Ay(t)} \Leftrightarrow f'(t) = (A - \lambda_0 I)f(t), \quad (54)$$

und daraus folgt

$$(A - \lambda_0 I)f'(t) = \underbrace{(A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I)}_{=P(A)=0} f(t) = 0, \text{ d.h. } f'(t) \in \ker(A - \lambda_0 I).$$

Da  $\ker(A - \lambda_0 I)$  durch  $v$  erzeugt wird, kann man mit  $f'(t) = v$  versuchen, d.h.  $f(t) = vt + u$ , wobei die Vektorkonstante  $u \in \mathbb{K}^2$  noch zu bestimmen ist. Dafür nutzt man wieder (54):

$$\begin{aligned} v = f'(t) &= (A - \lambda_0 I)f(t) = (A - \lambda_0 I)(vt + u) \\ &= t \underbrace{(A - \lambda_0 I)v}_{=0} + (A - \lambda_0 I)u = (A - \lambda_0 I)u. \end{aligned}$$

**Satz 166.** Sei  $A \in M_2(\mathbb{K})$  nichtdiagonalisierbar und sei  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda_0$ , dann existiert ein Vektor  $u$  mit  $(A - \lambda_0 I)u = v$ . Die Vektorfunktionen  $y_1(t) = e^{\lambda_0 t} v$  und  $y_2(t) = e^{\lambda_0 t}(vt + u)$  bilden ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$ .

*Beweis.* Wie beweisen zuerst die Existenz von  $u$ . Wegen  $(A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I) = 0$  gilt für alle  $x \in \mathbb{K}^2$ :  $(A - \lambda_0 I)x \in \ker(A - \lambda_0 I)$ . Falls  $(A - \lambda_0 I)x = 0$  für alle  $x \in \mathbb{K}^2$ , dann wäre  $A = \lambda_0 I$  diagonalisierbar: diesen Fall haben wir vom Anfang an ausgeschlossen. Also  $\dim \operatorname{ran}(A - \lambda_0 I) = 1$ , daher  $\operatorname{ran}(A - \lambda_0 I) = \ker(A - \lambda_0 I)$ , insbesondere gibt es ein  $u$  mit  $(A - \lambda_0 I)u = v$ . Wir haben schon oben gezeigt, dass die angegebene Vektorfunktion  $y_2$  eine Lösung von  $y' = Ay$  ist. Die Vektoren  $v = y_1(0)$  und  $u = y_2(0)$  sind offenbar linear unabhängig (aus  $u = cv$  würde  $(A - \lambda_0 I)u = c(A - \lambda_0 I)v = 0 \neq v$  folgen), daher sind auch die Vektorfunktionen  $y_1$  und  $y_2$  linear unabhängig.  $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, Fundamentalsysteme für  $y' = Ay$  mit beliebigen  $2 \times 2$  Matrizen  $A$  zu bestimmen.

**Beispiel 167.** Am Ende der letzten Vorlesung (Beispiel 165) konnten wir das System  $y' = Ay$  mit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  nicht lösen, da die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar ist. Jetzt können wir es! Der einzige Eigenwert ist  $\lambda_0 = 1$  und  $\ker(A - I)$  ist eindimensional und durch  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  erzeugt. Wir suchen jetzt nach einem  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  mit  $(A - I)u = v$ :  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Das System hat unendlich viele Lösungen aber wir brauchen nur eine davon: in diesem Fall passt  $x = 1$  und  $y = 0$ , also  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Damit haben wir ein Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^t \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t \end{pmatrix}. \quad \square$$

## Variation der Konstanten für inhomogene Systeme

Analog zu inhomogenen Gleichungen können Lösungen von inhomogenen Systemen  $y' = Ay + B$  mit Hilfe der Variation der Konstanten gefunden werden. Sei  $y_1, \dots, y_n$  ein Fundamentalsystem von  $y' = Ay$  und betrachte die  $n \times n$  Matrix  $Y$ , deren  $k$ -te Spalte  $y_k$  ist:

$$\text{falls } y_k(t) = \begin{pmatrix} y_{1k}(t) \\ \vdots \\ y_{nk}(t) \end{pmatrix}, \text{ dann } Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Da jede Spalte  $y_k$  Lösung von  $y' = Ay$  ist, erfüllt auch die ganze Matrix  $Y$  die matrizielle Differentialgleichung  $Y' = AY$ : die  $k$ -te Spalte von  $Y'$  ist  $y'_k$ , und die  $k$ -te Spalte von  $AY$  ist  $Ay_k$ . Darüber hinaus ist  $\det Y \neq 0$ , da die Spalten linear unabhängig sind (da  $y_j$  ein Fundamentalsystem bilden). Umgekehrt, falls man eine  $n \times n$  Matrix  $Y$  mit  $Y' = AY$  findet, die auch  $\det Y \neq 0$  erfüllt, dann bilden die Spalten  $y_k$  von  $Y$  ein Fundamentalsystem von  $y' = Ay$ , und die allgemeine Lösung  $y = \sum_{j=1}^n c_j y_j$  des homogenen Systems lässt sich als

$$y(t) = Y(t)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

schreiben. Für Lösungen des inhomogenen Systems  $y' = Ay + B$  nutzen wir den Ansatz  $y(t) = Y(t)C(t)$ , wobei die Vektorfunktion  $C$  zu bestimmen ist. Man setzt diesen Ansatz ins System ein:  $y' = Y'C + YC'$  (Übung!), also gilt  $y' = Ay + B$  genau dann, wenn  $Y'C + YC' = AY C + B$ . Wegen  $Y' = AY$  gilt  $Y'C = AY C$ ,

also  $YC' = B$  und  $C' = Y^{-1}B$ . Diese Formel ist also sehr ähnlich zu dem, was wir für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung gesehen haben (VL 10). Das Ergebnis fassen wir wie folgt zusammen:

**Satz 168 (Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten).** *Sei  $(y_1, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$  und sei  $Y$  die  $n \times n$  Matrix mit Spalten  $y_1, \dots, y_n$ . Dann ist*

$$y = Y \int Y^{-1}B$$

*eine Lösung des inhomogenen Systems  $y' = Ay + B$ .*

**Beispiel 169.**  $y' = Ay + B$  mit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$ . Ein Fundamentalsystem  $(y_1, y_2)$  haben wir schon im Beispiel 167 gefunden, daraus entsteht die zugehörige Matrix  $Y$ :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, & y_2 &= e^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t \end{pmatrix}, \\ Y(t) &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}, & Y(t)^{-1} &= e^{-t} \begin{pmatrix} -t & -2t-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ C(t) &= \int e^{-t} \begin{pmatrix} -t & -2t-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also erhalten wir eine spezielle Lösung

$$y(t) = Y(t)C(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^t \\ -te^t \end{pmatrix}. \quad \square$$

## Fundamentalmatrix

Die obige Matrix  $Y$  kann man auch zum Lösen der Anfangswertprobleme für  $y' = Ay$  nutzen. Wie schon oben erwähnt, sind alle Lösungen der Form  $y(t) = Y(t)C$  mit  $C \in \mathbb{K}^n$ . Falls man nach einer Lösung sucht, die die Anfangsbedingung  $y(0) = y_0$  erfüllt, dann muss man  $y_0 = Y(0)C$  haben, woraus  $C = Y^{-1}(0)y_0$  und  $y(t) = \Phi(t)y_0$  folgt, wobei  $\Phi(t) = Y(t)Y(0)^{-1}$ . Diese neue Matrixfunktion  $\Phi$  erfüllt immer noch  $\Phi' = A\Phi$  und  $\Phi(0) = I$ , und mit Hilfe von  $\Phi$  lässt sich die Lösung des Anfangswertproblems sehr kompakt schreiben, daher hat diese Matrix  $\Phi$  einen speziellen Namen:

**Definition 170.** Sei  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Die **Fundamentalmatrix** des Systems  $y' = Ay$  ist die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ , die die Bedingungen  $\Phi' = A\Phi$  und  $\Phi(0) = I$  erfüllt.

Wie haben schon oben gezeigt, dass die Fundamentalmatrix existiert, wir müssen aber noch zeigen, dass sie eindeutig bestimmt ist. Sei  $\Psi$  eine weitere Matrixfunktion mit  $\Psi' = A\Psi$  und  $\Psi(0) = I$ , dann sind für jedes  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  die Vektorfunktionen

$y = \Phi(t)y_0$  und  $z(t) = \Psi(t)y_0$  Lösungen von  $y' = Ay$  mit  $y(0) = y_0$ . Da die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt ist, gilt  $\Phi(t)y_0 = \Psi(t)y_0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , woraus  $\Phi(t) = \Psi(t)$  für alle  $t$  folgt.

**Beispiel 171.** Wir wollen die Fundamentalmatrix des Systems

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow z' = Az, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

- Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 1 \cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

hat zwei Nullstellen  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 5$ : das sind Eigenwerte von  $A$ , und die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar (da es zwei verschiedene Eigenwerte gibt). Um ein Fundamentalsystem zu bestimmen, brauchen wir zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

- Für  $\lambda_1 = 1$  haben wir das System  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , also kann man z.B.  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  als Eigenvektor nehmen.
- Für  $\lambda_1 = 5$  ist das System  $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  zu lösen. Nehme z.B.  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  als Eigenvektor.

Damit haben wir ein Fundamentalsystem konstruiert:  $y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$  und  $y_2(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$ . Die entsprechende Matrix  $Y$  ist  $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$  mit  $Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , und die gesuchte Fundamentalmatrix ist

$$\Phi(t) = Y(t)Y(0)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -e^t + e^{5t} \\ -3e^t + 3e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Damit kann man Anfangswertprobleme direkt lösen. Z.B. erhält man für die Anfangsbedingung  $z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  die Lösung

$$z(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -e^t + e^{5t} \\ -3e^t + 3e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5e^t + 7e^{5t} \\ -5e^t + 21e^{5t} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Jetzt werden wir versuchen, die Fundamentalmatrix für  $y' = Ay$  für beliebige Matrizen  $A$  zu bestimmen, indem wir das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

mit Hilfe des iterativen Verfahrens aus dem Satz von Picard-Lindelöf approximieren. Wir betrachten die Folge der Vektorfunktionen

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t Ay_{n-1}(s) ds$$

wobei  $y_0(t) \equiv y_0$  konstant ist. Man erhält:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_0^t Ay_0 ds = y_0 + tAy_0, \\ y_2(t) &= y_0 + \int_0^t (A + sA^2)y_0 ds = y_0 + tAy_0 + \frac{t^2}{2} A^2y_0, \\ &\dots \\ y_n(t) &= \Phi_n(t)y_0, \quad \Phi_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!}, \quad (tA)^0 := I. \end{aligned}$$

Wir haben im Satz von Picard-Lindelöf gesehen, dass die Folge  $y_n$  mindestens auf einem kleinen Intervall um 0 gleichmäßig konvergiert, und man kann den Grenzwert formal als

$$y(t) = \Phi(t)y_0 \text{ mit } \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

schreiben. Dann wäre  $\Phi(t)$  (falls sie überhaupt auf  $\mathbb{R}$  definiert ist) die gesuchte Fundamentalmatrix. Diesen Zugang werden wir jetzt begründen.

**Satz 172.** Für jede Matrix  $B \in M_n(\mathbb{K})$  konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$  in  $M_n(\mathbb{K})$ .

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte  $C_n := \sum_{j=0}^n \frac{B^j}{j!}$ . Wir müssen zeigen, dass die Folge  $(C_n)$  konvergiert.

In der letzten Vorlesung haben wir schon die Norm  $\|A\| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n |a_{j,k}|^2}$  auf  $M_n(\mathbb{K})$  erwähnt. Betrachte die bijektive Abbildung  $F : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{n^2}$ ,

$$\text{falls } A = (a_{j,k}), \quad F(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}),$$

dann gilt  $\|A\| = \underbrace{\|F(A)\|}_{\text{eukl. Norm in } \mathbb{K}^{n^2}}$ , also sind die Räume  $M_n(\mathbb{K})$  und  $\mathbb{K}^{n^2}$  isometrisch

(Blatt 7, PA 3), und aus der Vollständigkeit von  $\mathbb{K}^{n^2}$  folgt die Vollständigkeit von  $M_n(\mathbb{K})$ . Im Blatt 11, PA 4, wurde es bewiesen, dass für beliebige  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  die Ungleichung  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  gilt. Durch die Induktion folgt  $\|B^j\| \leq \|B\|^j$ ,

$$\|C_{n+k} - C_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{B^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{\|B\|^j}{j!} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|B\|^j}{j!}.$$

Da die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|B\|^j}{j!}$  konvergiert, kann man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  finden mit  $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|B\|^j}{j!} < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ , und dann hat man für alle  $n \geq N$  und  $k \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $\|C_{n+k} - C_k\| < \varepsilon$ . Also ist  $C_k$  eine Cauchy-Folge, und sie konvergiert, da  $M_n(\mathbb{K})$  vollständig ist.  $\square$

Damit haben wir die folgende Definition begründet:

**Definition 173 (Exponential einer Matrix).** Für jede Matrix  $B \in M_n(\mathbb{K})$  ist die Matrix  $e^B \in M_n(\mathbb{K})$  durch

$$e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$$

definiert. Man schreibt auch  $\exp(B)$  statt  $e^B$ .

**Satz 174.** Die Fundamentalmatrix von  $y' = Ay$  ist durch  $\Phi(t) = e^{tA}$  gegeben.

*Beweis.* Die Gleichheit  $e^{0 \cdot A} = I$  ist klar. Wir zeigen jetzt, dass  $t \mapsto e^{tA}$  stetig ist. Definiere  $\Phi_n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{(tA)^j}{j!}$  und nehme ein  $T > 0$ , dann gilt für alle  $t \in [-T, T]$ :

$$\|e^{tA} - \Phi_n(t)\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|tA^j\|}{j!} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(T\|A\|)^j}{j!}.$$

Da die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(T\|A\|)^j}{j!}$  konvergiert, folgt es, dass man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  finden kann mit  $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(T\|A\|)^j}{j!} < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ , und dann  $\|e^{tA} - \Phi_n(t)\| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  und alle  $t \in [-T, T]$ . Also konvergiert  $\Phi_n$  gegen  $e^{tA}$  gleichmässig auf  $[-T, T]$ , d.h. jeder Eintrag von  $\Phi_n$  konvergiert gleichmässig gegen den entsprechenden Eintrag von  $e^{tA}$ . Da alle  $\Phi_n$  stetig sind (Polynome von  $t!$ ), ist auch  $t \mapsto e^{tA}$  stetig.

Dann konvergiert auch  $A\Phi_n$  gleichmässig gegen  $Ae^{tA}$ , die Funktion  $t \mapsto Ae^{tA}$  ist stetig, und für  $|t| \leq T$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t Ae^{sA} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t A\Phi_n(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{j=0}^n \frac{s^j}{j!} A^{j+1} ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} A^{j+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{t^j}{j!} A^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = e^{tA} - I. \end{aligned}$$

Also  $e^{tA} = I + \int_0^t Ae^{sA} ds$ , und es folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (den man auf jeden Eintrag von  $e^{tA}$  und  $Ae^{tA}$  anwendet), dass  $(e^{tA})' = Ae^{tA}$  für alle  $|t| < T$ . Da  $T$  beliebig ist, folgt die Behauptung.  $\square$

## Berechnung der Exponentialen der Matrizen

Da die Spalten der Fundamentalmatrix ein Fundamentalsystem bilden, kann man für Systeme  $y' = Ay$  mit beliebigen Matrizen  $A$  Fundamentalsysteme konstruieren, falls man es schafft,  $e^{tA}$  auszurechnen.

(a) Falls  $L$  eine Diagonalmatrix ist, dann lässt sich  $e^L$  ganz einfach ausrechnen:

$$\text{für } L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ gilt } L^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^j \end{pmatrix} \text{ für alle } j \in \mathbb{N},$$

$$e^L = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j}{j!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^j}{j!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^j}{j!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

(b) Falls zwei Matrizen  $A$  und  $B$  kommutieren, d.h. falls  $AB = BA$ , dann gilt  $e^{A+B} = e^A e^B$  (Übung).

(c) Falls eine Matrix  $N$  die Bedingung  $N^m = 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  erfüllt (solche Matrizen heissen *nilpotent*), so wird aus der Reihe eine endliche Summe,

$$e^N = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{N^j}{j!}$$

(d) Falls  $U$  eine invertierbare Matrix ist und  $A = U^{-1}BU$ , so gilt  $e^A = U^{-1}e^B U$ : man merkt, dass  $A^2 = A \cdot A = U^{-1}BUU^{-1}BU = U^{-1}B^2U$ , und durch Induktion  $A^j = U^{-1}B^jU$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , also

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U^{-1}B^jU}{j!} = U^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} U = U^{-1}e^B U.$$

(e) Mit Hilfe von (a)+(d) ergibt sich eine Methode,  $e^A$  für diagonalisierbare  $A$  zu bestimmen: nach der Definition gibt es eine invertierbare Matrix  $U$  und eine Diagonalmatrix  $L$  mit  $A = U^{-1}LU$ , dann gilt  $e^A = U^{-1}e^L U$ , und  $e^L$  kann man wie in (a) berechnen. Eigentlich haben wir dieses Verfahren implizit in der Berechnung der Fundamentalmatrix von  $y' = Ay$  mit diagonalisierbaren  $A$  genutzt.

(f) Falls  $A$  nicht diagonalisierbar ist, dann nutzt man eines der wichtigsten Ergebnisse der linearen Algebra: die Jordansche Normalform. Es ist bekannt, dass man  $A = D + N$  darstellen kann, wobei die Matrix  $D$  diagonalisierbar ist, die Matrix  $N$  nilpotent ist, und  $D$  und  $N$  kommutieren. Dann gilt  $e^A = e^D e^N$ : man berechnet  $e^D$  wie in (e) und  $e^N$  wie in (d). Insbesondere  $e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$  und

$$e^{tN} = 1 + tN + \dots + \frac{t^m N^{m-1}}{(m-1)!}$$

also ist jeder Eintrag von  $e^{tN}$  ein Polynom, wobei die Einträge von  $e^{tD}$  lineare Kombinationen von  $e^{\lambda t}$  sind. Dadurch erhält man in den Lösungen lineare Kombinationen von  $t^k e^{\lambda t}$  (das haben wir am Anfang der Vorlesung für  $2 \times 2$  Matrizen gesehen).

(g) Man kann sogar einen Schritt weiter gehen: es existiert eine invertierbare Matrix  $U$ , sodass  $UAU^{-1}$  eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken  $B$  der Form

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

ist. Man kann  $e^B$  für solche  $B$  explizit ausrechnen (Übung), dann ist  $Z = e^{UAU^{-1}}$  eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken  $e^B$  und  $A = U^{-1}ZU$ . Solche Rechnungen für grosse Matrizen werden aber meist mit numerischen Software durchgeführt.

**Die letzte Vorlesung (VL 13) wird am 14.07.2020 am Abend erscheinen.**