Lösungen der Fingerübungen

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Bestimmen Sie in $a)$ and $b)$ auch den Konvergenzbereich.
   a) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} x^n,\ x \in \mathbb{R}$ ist $R = 1$ und $KB =]-1, 1[$, denn $\sqrt[n]{3n^2} \to 1$ und
   $$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^2+1} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n} \to 1,$$
   also $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} = 1$. Damit ist $R = 1$. Insbesondere ist für $x = -1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^2+1}(-1)^n$ divergent, da $\frac{3n^2}{n^2+1}(-1)^n$ keine Nullfolge ist und für $x = 1$ gilt das analoge Argument.

   b) Für $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}$ ist $R = 1$ und $KB =]0, 2[$ wegen der geometrischen Reihe.

   c) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n,\ z \in \mathbb{C}$ ist $R = 2$, denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$ und damit $R = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$.

   d) Für $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 2) z^n,\ z \in \mathbb{C}$ ist $R = 1$, denn
   $$1 \leftarrow 1 \leq \sqrt[n]{|(-1)^n + 2)|} \leq \sqrt[n]{3} \to 1,$$
   also $R = 1$.

2. Erinnern Sie sich an die Definition von Sinus und Cosinus. Es folgt
$$\begin{aligned}
2\sin(z)\cos(z) &= 2\left(\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\right)\left(\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))(\exp(iz) + \exp(-iz)) \\
&= \frac{1}{2i}(\exp(2iz) - \exp(-2iz)) = \sin(2z).
\end{aligned}$$

3. In dieser Aufgabe können Sie den Sinus Hyperbolicus and Kosinus Hyperbolicus kennenlernen. Beispielsweise beschreibt der Graph des Kosinus Hyperbolicus den Verlauf eines an zwei Punkten aufgehängten Seils. Sie sind für $z \in \mathbb{C}$ definiert als
$$\sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \text{ und } \cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

   a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist
   $$\sinh(z) + \cosh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} + \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \frac{2\exp(z)}{2} = \exp(z).$$

   b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 &= \left(\frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\exp(2z) + 2 + \exp(-2z) - (\exp(2z) - 2 + \exp(-2z))}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}
$$