CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Lineare Algebra - WS 19/20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Dr. Bernd Schober

Übungsblatt 6

Abgabe: 26.11.2019, bis 12 Uhr

Aufgabe 6.1. **(a).** Sei K ein beliebiger Körper. Seien $f\colon K \to K, x \mapsto p(x)$ und $g\colon K \to K, x \mapsto q(x)$ zwei polynomiale Abbildungen, wobei $p(x) := \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, $q(x) := \sum_{i=0}^{e} b_i x^i \in K[x]$ Polynome in der Variable x und mit Koeffizienten $a_i, b_i \in K$ sind ($d, e \in \mathbb{N}_0$). Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $f \circ g$ wieder eine polynomiale Abbildung ist.

(b). Seien nun $K := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $p(x) := [1]_3 \cdot x^2 + [1]_3 \cdot x + [1]_3$ und $q(x) := [2]_3 \cdot x^2 + [1]_3$. Für welches Polynom $r(x) \in K[x]$ gilt, dass $f \circ g$ gegeben ist durch $f \circ g\colon K \to K, x \mapsto r(x)$? Für welche $x \in K$ gilt $(f \circ g)(x) = 0$?

Aufgabe 6.2. **(a).** Sei $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}\}$. Wir versehen V mit der Addition $\oplus$ definiert durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der skalaren Multiplikation $\odot$ gegeben durch $\lambda \odot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(V, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b). Betrachten Sie $\mathbb{Q}^2$ versehen mit der Addition $\oplus$ und der skalaren Multiplikation $\odot$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$$

Handelt es sich bei $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$ um einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 6.3. Sei K ein Körper und $d \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Menge $K[x]_{\leq d} := \{f \in K[x] \mid \deg(f) \leq d\}$ der Polynome vom Grad höchstens d. Beweisen Sie, dass $K[x]_{\leq d}$ ein Untervektorraum von $K[x]$ ist.

Aufgabe 6.4. **(a).** Schreiben Sie den Vektor $\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Linearkombination der Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b). Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Familien von Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \ \mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Präsenzaufgabe 6.5. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

(a). Bilden die Spaltenvektoren von A eine Basis des von Ihnen erzeugten $\mathbb{R}$-Untervektorraums?

(b). Wir können die Spaltenvektoren als Vektoren mit Einträgen in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ betrachte, indem wir eine ganze Zahl a durch ihre Klasse $[a]_2$ ersetzen (z.B., ersetzen wir -3 durch $[-3]_2$; beachten Sie, dass gilt $[-3]_2 = [1]_2$). Sind die resultierende Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(c). Warum wissen wir ohne Rechnung, dass die Zeilenvektoren linear abhängig sein müssen?