Kapitel 3

Teilbarkeit

Nachdem der vorige Abschnitt bereits die Teilbarkeitstheorie aus Kapitel 1 erfolgreich verallgemeinern konnte, wenden wir uns nun dem Ziel einer Verallgemeinerung einer Primfaktorzerlegung zu. Dazu werden wir zuerst den Begriff einer Primzahl geeignet verallgemeinern, ehe wir dann auch eine Zerlegung in Primelemente bzw. irreduzible Elemente suchen.

3.1 Primelemente und irreduzible Elemente

In den ganzen Zahlen konnten wir eine Primzahl wahlweise dadurch charakterisieren, dass sie keine echten Teiler hat, oder dadurch, dass sie stets auch einen der Faktoren teilen muss, wenn sie ein Produkt teilt. In allgemeineren Ringen sind dies zwei verschiedene Eigenschaften, die zwar verwandt, aber nicht identisch sind.

Definition 3.1.1 *Sei R ein Integritätsring.*

a) *Seien $a, b \in R$ mit $b \mid a$. Dann heißt b ein* **echter** *(oder* **nicht-trivialer***)* **Teiler** *von a, falls*

   - $b \notin R^*$
   - $b \neq 0$
   - $b \not\sim a$

   Ist $b \neq 0$, aber kein nicht-trivialer Teiler, so heißt er **trivialer** *Teiler von a.*

b) Ein Element $c \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$ heißt **irreduzibel**, *wenn es keine nicht-trivialen Teiler besitzt, d.h.*

$$\forall a, b \in R \text{ mit } c = a \cdot b : (a \in R^* \text{ oder } b \in R^*)$$

c) Ein Element $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ heißt **prim** *(oder* **Primelement**_),_ *wenn*

$$\forall a, b \in R \text{ mit } p \mid a \cdot b : (p \mid a \text{ oder } p \mid b).$$

Bemerkung 3.1.2 *Ein Körper besitzt außer der 0 nur Einheiten, weswegen er weder Primelemente noch irreduzible Elemente enthalten kann.*

Satz 3.1.3 *Jedes Primelement eines Integritätsrings ist irreduzibel.*

Beweis: Sei $p \in R$ ein Primelement und sei $a \in R$ ein echter Teiler von p mit

$$p = a \cdot b$$

für ein geeignetes $b \in R$. Da p prim ist, muss damit p einen der Faktoren teilen. Teilt dabei p seinen Teiler a, so sind p und a zueinander assoziiert und a kein *echter* Teiler von p. Teilt p andererseits seinen Teiler a nicht, so gilt $p \mid b$, d.h. es gibt ein $c \in R$ mit $b = c \cdot p$ und

$$p = a \cdot c \cdot p,$$

weswegen dann a eine Einheit sein muss. Damit kann p keine nicht-trivialen Teiler besitzen und ist damit irreduzibel.

□

Von dem obigen Satz und der Intuition aus $\mathbb{Z}$ darf man sich aber nicht verleiten lassen, die Eigenschaften prim und irreduzibel gleichzusetzen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Example 3.1.4 *Betrachte $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ und darin*

$$3 \cdot 7 = (1 + 2i\sqrt{5})(1 - 2i\sqrt{5}).$$

Dann ist z.B. 3 irreduzibel, aber nicht prim, wie Sie in einer Übungsaufgabe auf Blatt 4 nachrechnen werden.

Lemma 3.1.5 *Sei R ein Hauptidealring, seien $a, b \in R$, so dass a irreduzibel und kein Teiler von b ist. Dann sind a und b teilerfremd.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass

$$\langle a, b\rangle = \langle 1_R\rangle.$$

Da R Hauptidealring ist, wissen wir, dass es ein $c \in R$ gibt mit

$$\langle a, b\rangle = \langle c\rangle.$$

Damit enthält $\langle c\rangle$ insbesondere a und ist damit ein Teiler von a. Wegen der Irreduzibilität von a, kann c aber kein echter Teiler von a sein. Würde gelten $c \sim a$, so wäre b ein Vielfaches von a, was nach Voraussetzung ausgeschlossen war. Damit muss c eine Einheit sein, weswegen $\langle c\rangle = \langle 1_R\rangle$.

$\square$

Satz 3.1.6 *Jedes irreduzible Element in einem Hauptidealring ist prim.*

Beweis: Sei R ein Hauptidealring und sei $a \in R$ irreduzibel. Seien ferner $b, c \in R$, so dass $a \mid bc$ und $a \nmid b$. Dann gilt nach dem vorstehenden Lemma, dass es $x, y \in R$ gibt mit $xa + yb = 1_R$ und damit folgt $xac + ybc = c \in \langle a, bc\rangle = \langle a\rangle$. Daher muss a Teiler von c sein. Somit ist a Primelement in R.

$\square$

Der vorige Satz läßt sich auch formulieren als: In einem Hauptidealring stimmen die Begriffe *prim* und *irreduzibel* überein.

3.2 Faktorielle Ringe

Schon in der Schule wurden ganze Zahlen in Primfaktoren zerlegt. Der Fundamentalsatz der Arithmetik in Kapitel 1.2 lieferte dann die theoretische Basis dafür nach, nämlich die Existenz und die Eindeutigkeit einer Zerlegung (bis auf Reihenfolge) für ganze Zahlen ≥ 2. Damit existiert natürlich für jede ganze Zahl, die weder Null noch Einheit ist, eine solche Zerlegung in irreduzible Faktoren, die bis auf Reihenfolge und Vorzeichen der Faktoren eindeutig ist. Geht so etwas auch in anderen Ringen? Die Antwort darauf ist ja, wenn der Ring hinreichend gute Eigenschaften hat, die wir in diesem Abschnitt untersuchen werden.

Beginnen wir zuerst mit einer Aussage über eine Zerlegung in Primfaktoren:

Satz 3.2.1 *Sei R ein Integritätsring und sei $a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$, so dass eine Zerlegung*

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i$$

für ein geeignetes $r \in \mathbb{N}$ und geeignete Primelemente $p_1, \ldots, p_r \in R$ existiert. Dann ist diese eindeutig bis auf Reihefolge der Faktoren und Multiplikation der Faktoren mit Einheiten.

Für a hatten wir einige Ringelemente im Satz nicht zugelassen. Deshalb sollten wir kurz innehalten und überlegen, ob uns das später Probleme machen kann. Dass wir hier die Null nicht zulassen, strt nicht, da diese bzgl. der Multiplikation ohnehin besondere Eigenschaften hat. Für Einheiten kann man eine Zerlegung niederschreiben, indem man die Einheit selbst mit dem leeren Produkt multipliziert. Somit deckt der obige Satz alle relevanten Fälle ab.

Bemerkung 3.2.2 *Die Aussage des Satzes läßt sich wie folgt konkretisieren: Sind*

$$\prod_{i=1}^{r} p_i = a = \prod_{i=1}^{s} q_i$$

zwei solche Zerlegungen, so gilt

- $r = s$

- *Es gibt eine Permutation* $\pi : \{1, \ldots, r\} \longrightarrow \{1, \ldots, r\}$*, so dass*
$$p_i \sim q_{\pi(i)} \quad \forall 1 \leq i \leq r$$

Das Vorgehen zum Beweis von 3.2.1 ist exakt analog zu dem in Kapitel 1 im Beweis von 1.2.12. Da wir aber in wesentlich allgemeinerem Kontext sind, führen wir es hier nochmals explizit aus.
Beweis: (3.2.1) Seien also
$$\prod_{i=1}^{r} p_i = a = \prod_{i=1}^{s} q_i$$
zwei Zerlegungen von a in Primfaktoren. Wir werden durch Induktion nach r die beiden in der vorigen Bemerkung genannten Eigenschaften zeigen.
Induktionsanfang: $r = 1$
In diesem Fall ist a selbst Primelement und muss daher einen der Faktoren $q_1, \ldots, q_s$ teilen, sagen wir o.B.d.A. q_s. Da a als Primelement in einem Integritätsring auch irreduzibel ist, sind alle anderen Faktoren $q_1, \ldots, q_{s-1}$ Einheiten und die Behauptung ist erfüllt.
Induktionsvoraussetzung: r
Die beiden Bedingungen aus der vorigen Bemerkung sind für Zerlegungen, bei denen mindestens eines der Produkte höchstens r Faktoren enthält.
Induktionsschritt: $r \longrightarrow r + 1$
Betrachte
$$\prod_{i=1}^{r+1} p_i = a = \prod_{i=1}^{s+1} q_i$$
Da p_{r+1} prim ist, teilt es einen der Faktoren $q_1, \ldots, q_{s+1}$, sagen wir (ggf. nach Permutation der Indizes) q_{s+1}. Da q_{s+1} selbst ebenfalls irreduzibel ist, muss gelten:
$$p_{r+1} \sim q_{s+1}.$$
Die Primfaktorzerlegungen von $\frac{a}{p_{r+1}}$ sind dann:
$$\prod_{i=1}^{r} p_i = \frac{a}{p_{r+1}} = \underbrace{\frac{q_{s+1}}{p_{r+1}}}_{\in R^*} \cdot \prod_{i=1}^{s} q_i.$$
Dies ist aber eine Primfaktorzerlegung mit r Faktoren, so dass die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist und daher $r = s$ sowie die Eindeutigkeit der

Faktoren bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit von Primelemente für diese erfüllt ist. Da diese Bedingungen auch für den auf beiden Seiten letzten verbleibenden Faktor der ursprünglichen Zerlegungen erfüllt waren, gilt damit auch $r+1 = s+1$ sowie die gesuchte Eindeutigkeitsaussage für die Faktoren.[1]

$\square$

Damit wissen wir, dass die Zerlegung in Integritätsringen eindeutig ist, sofern sie existiert. Allerdings wissen wir noch nicht, ob bzw. unter welchen Bedingungen solch eine Zerlegung exisitert. Für die Beantwortung dieser Frage definieren wir zuerst einen Begriff, der die gewünschten Eigenschaften genau charakterisiert: faktorielle Ringe. In diesen gilt bereits nach Definition der verallgemeinerte Fundamentalsatz der Arithmetik.

Definition 3.2.3 *Sei R ein Integritätsring. R heißt* **faktorieller Ring** *(oder* **ZPE-Ring**[2] *oder englisch* **UFD**[3]*), falls*

$$\forall a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*) \;\; \exists r \in \mathbb{N} \;\; \exists c_1, \ldots, c_r \in R \text{ prim:} \quad a = \prod_{i=1}^{r} c_i$$

Satz 3.2.4 *In einem faktoriellen Ring ist jedes irreduzible Element prim.*

Beweis: Sei R ein faktorieller Ring und sei $a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$ irreduzibel. Dann besitzt a eine Zerlegung in ein Produkt aus Primelementen, das aber wegen der Irreduzibilität von a aus genau einem Faktor besteht. Damit ist a selbst prim.

$\square$

Satz 3.2.5 *Sei R ein Integritätsring. Dann sind äquivalent:*

a) R ist faktoriell

b) In R gilt:

[1]Beachten Sie, dass wir nur für eine der beiden Zerlegungen, diejenige mit den p_i tatsächlich die Eigenschaft, prim zu sein, verwendet haben. Für die andere Seite reichte uns Irreduzibilität aus.

[2]**Z**erlegung in **P**rim-**E**lemente

[3]**U**nique **F**actorization **D**omain

(i) $\forall a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)\ \ \exists r \in \mathbb{N}\ \ \exists c_1, \ldots, c_r \in R$ *irreduzibel:* $a = \prod_{i=1}^{r} c_i$

(ii) *Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit.*

c) *In R gilt:*

(i) $\forall a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)\ \ \exists r \in \mathbb{N}\ \ \exists c_1, \ldots, c_r \in R$ *irreduzibel:* $a = \prod_{i=1}^{r} c_i$

(ii) *Jedes irreduzible Element von R ist prim.*

Beweis: Wir zeigen: a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ a)

"a) $\Longrightarrow$ b)": Da jedes Primelement in R auch irreduzibel ist, erfüllt eine Zerlegung aus a) auch die Bedingung b)(i). Sie ist darüberhinaus eindeutig, da für eine Zerlegung in Primelemente und eine weitere irreduzible Zerlegung die Eindeutigkeit der Zerlegung aus Satz 3.2.1 mit Hilfe der dortigen Funote zum Beweis folgt, womit auch b)(ii) erfüllt ist.

"b) $\Longrightarrow$ c)":
Die Eigenschaften b)(i) und c)(i) sind wörtlich identisch. So bleibt zu zeigen, dass unter Voraussetzung der Eigenschaft b) auch jedes irreduzible Element von R prim ist. Sei also $u \in R$ irreduzibel und seien $a, b \in R$, so dass $u \mid ab$. Dann existiert ein $c \in R$, so dass $uc = ab$. Wir zerlegen nun a,b und c jedes für sich in irreduzible Faktoren mittels b) und bilden dann die entsprechenden Produkte als Zerlegung von $uc = ab$. Dann taucht u (bis auf Assoziiertheit) wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung unter den irreduziblen Faktoren von ab auf. Diese setzen sich aber gerade aus den irreduziblen Faktoren von a und b zusammen. Damit ist u ein Faktor von a oder von b. Also ist u prim.

" c) $\Longrightarrow$ a)"
Da jedes irreduzible Element prim ist, ist auch jede Zerlegung in irreduzible Elemente eine Zerlegung in Primelemente.

□

Damit haben wir präzisiert, woran wir interessiert sind, aber noch haben wir keine Fortschritte dahingehend gemacht, dass uns bekannte Ringe diese Eigenschaft auch haben. Das ist unser nächstes Ziel: Die Faktorialität von Hauptidealringen. Auf dem Weg dahin begegnen wir noch einer weiteren Eigenschaft: der Teilerkettenbedingung. Zusammen mit der für Hauptidealringe bereits gezeigten Eigenschaft, dass jedes irreduzible Element auch prim ist, wird die Teilerkettenbedingung eine weitere Charakterisierung der Faktorialität liefern.

Definition 3.2.6 *Sei R ein Integritätsring. Da genügt R der* **Teilerkettenbedingung**, *falls jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_{n+1} \mid a_n$* **stationär** *wird, d.h.*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \sim a_{n_0} \forall n \geq n_0$$

Teilbarkeit kann natürlich auch durch Enthaltensein von Idealen ausgedrückt werden, so dass man eine äquivalente Formulierung erhält:

Bemerkung 3.2.7 *Ein Integritätsring R erfüllt die Teilerkettenbedingung, falls für jede aufsteigende Kette*

$$\langle a_0 \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \subseteq \cdots \subseteq \langle a_n \rangle \subseteq \langle a_{n+1} \rangle \subseteq \ldots$$

von Hauptidealen in R ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$\langle a_n \rangle = \langle a_{n_0} \rangle \forall n \geq n_0.$$

Lemma 3.2.8 *Jeder Hauptidalring R erfüllt die Teilerkettenbedingung.*

Beweis: Sei $(\langle a_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in einem Hauptidealring R. Betrachte nun die Menge

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle.$$

Offensichtlich ist $0 \in I$. Sind $a, b \in I$, so gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $a \in \langle a_{n_1} \rangle$ und $b \in \langle a_{n_2} \rangle$. Damit gilt wegen der Inklusionen in der aufsteigenden Kette $a, b \in \langle a_{\max\{n_1,n_2\}} \rangle$, weswegen auch jede R-Linearkombination von a und b in $\langle a_{\max\{n_1,n_2\}} \subseteq I$ liegt. Daher ist I ein Ideal in R.
Da R ein Hauptidealring ist, gibt es ein $d \in R$ mit $I = \langle d \rangle$. Für dieses d gibt es nach Konstruktion von I ein $n_3 \in \mathbb{N}_0$, so dass $d \in \langle a_{n_3} \rangle$. Damit gilt

$$I = \langle d \rangle \subseteq \langle a_{n_3} \rangle \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle = I.$$

Daher ist $I = \langle a_{n_3} \rangle$ und die aufsteigende Kette wird stationär.

□

Satz 3.2.9 *Ein Integritätsring, der die Teilerkettenbedingung erfüllt und in dem jedes irreduzible Elemente prim ist, ist faktoriell.*

Beweis: Sei M die Menge aller Elemente, die keine Zerlegung als Produkt endlich vieler Primelemente zulassen. Wir werden durch Widerspruchsbeweis zeigen, dass M leer ist. Nehmen wir dazu an, dass $M \neq \emptyset$. Dann existiert ein $a \in M$, das selbst nicht prim sein kann, da es sonst seine eigene Zerlegung wäre und damit $a \notin M$. Da in R nicht prim auch nicht irreduzibel impliziert, besitzt a also eine Zerlegung in $a = r \cdot s$ mit $r, s \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$. Mindestens eines der beiden Elemente r und s, sagen wir r, muss wieder in M liegen, da sonst auch a nicht in M läge. Daher ist $\langle a \rangle \subsetneq \langle r \rangle$.
Durch Iteration dieses Arguments erhalten wir eine strikt aufsteigende Kette von von Hauptidealen in R, was im Widerspruch zur Erfüllung der Teilerkettenbedingung in R steht. Somit war die Annahme $M \neq \emptyset$ falsch und wir haben bewiesen, dass R faktoriell ist.

□

Bemerkung 3.2.10 *Wir hatten bereits gesehen, dass in einem faktoriellen Ring die Begriffe irreduzible und prim sich gegenseitig implizieren. Weiterhin muss in jedem faktoriellen Ring auch die Teilerkettenbedingung gelten, da in solch einer Kette a_0 nur endlich viele bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit eindeutig bestimmte prime Faktoren besitzt und damit in der aufsteigenden Kette von Idealen nur endlich viele Inklusionen strikt sein können. Somit stellen die beiden Bedingungen des vorigen Satzes noch eine weitere Charakterisierung von faktoriellen Ringen dar.*

Korollar 3.2.11 *Jeder Hauptidealring ist faktoriell.*

Beweis: Jedes irreduzible Elemente in einem Hauptidealring ist nach 3.1.6 prim. Nach Lemma 3.2.8 genügt jeder Hauptidealring der Teilerkettenbedingung. Damit ist jeder Hauptidealring nach Satz 3.2 ein faktorieller Ring.

□

Bemerkung 3.2.12 *Nicht jeder faktorielle Ring ist Hauptidealring. So ist etwa jeder Polynomring über einem faktoriellen Ring wieder faktoriell, wie*

wir nach Aufbau weiterer theoretischer Grundlagen in Kapitel 5 werden beweisen können.
Als Beispiele für faktorielle Ringe, die keine Hauptidealringe sind, können hier $K[x_1, \ldots, x_n]$ *und* $\mathbb{Z}[x]$ *genannt werden, die wir bereits kennengelernt haben.*

Ringe, Ringe, Ringe – wo ist der Überblick?

In dieser Vorlesung gingen wir bisher von den ganzen Zahlen und ihren Eigenschaften aus und fragten uns, welche Eigenschaften auch in anderen Objekten gelten und wie verschiedene dieser Eigenschaften zusammenhängen oder einander bedingen. Das führte uns zu einer Vielzahl von Eigenschaften nicht nur von Elementen, sondern auch von Ringen. Beim Nacharbeiten wird es daher leicht etwas verwirrend durch die vielen Begrifflichkeiten.

Informell gesprochen, war das Vorgehen bei vielen Eigenschaften so, dass wir eine Eigenschaft, die wir einmal bei $\mathbb{Z}$ gesehen hatten, herausgegriffen haben. Dann haben wir die Eigenschaft formalisiert durch Formulieren unter möglichst schwachen Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Ring und schließlich die Menge aller Ringe mit dieser Eigenschaft benannt. Zusätzlich haben wir dann noch weitere Beispiele in dieser Menge zumindest angesprochen, um zu zeigen, dass die Eigenschaft tatsächlich für mehr Ringe als nur für die ganzen Zahlen erfüllt ist.

Wichtig für das Nacharbeiten der Inhalte ist es, eine Struktur in diese Begriffe hineinzubekommen. In diesem Sinne soll dieser Abschnitt Ihnen eine Hilfestellung bieten, wie Sie dabei vorgehen können, und Ihnen auch wichtige Beispiele an die Hand geben. Dabei führen wir diese Gedanken in der ersten Inklusionskette ausführlicher aus, während Ihnen Details in den weiteren Inhalten selbst überlassen werden.
Hier nun eine Übersicht über wichtige bisher behandelte Strukturen:

$$\text{Ringe } \supsetneq \text{ Ringe mit } 1 \supsetneq \text{ Schiefkörper} \supsetneq \text{ Körper}$$

Wir erinnern uns:
Ringe tragen die Struktur einer additiven Gruppe und einer multiplikativen Halbgruppe und genügen den distributiven Gesetzen. Ringe mit 1 besitzen zusätzlich ein neutrales Elemente bzgl. der Multiplikation, sind also multiplikative Monoide. Jeder Ring mit 1 ist auch ein Ring (durch vergessen der Bedingung der Existenz der 1), aber nicht jeder Ring ist ein Ring mit 1, so ist z.B. $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ein (kommutativer) Ring, aber kein Ring mit 1. Ein nicht kommutatives Beispiel für einen Ring ohne 1 ist die Menge der rechten oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonale Null in $Mat(3; K)$.
Existiert in einem Ring mit 1 zu jedem nicht-null Element ein multiplikatives Invererses, so ist dieser Ring ein Schiefkörper. Natürlich ist jeder Schiefkörper auch ein Ring mit 1, aber nicht umgekehrt. Beispiele für Ringe mit 1, die

keine Schiefkörper sind, sind z.B. der kommutative Ring mit 1 $\mathbb{Z}$ sowie der nicht-kommutative Ring mit 1 $Mat(2, K)$.
Gilt in einem Schiefkörper auch noch das Kommutativgesetz der Multiplikation, so handelt es sich um einen Körper. Natürlich ist jeder Körper damit Schiefkörper, aber nicht umgekehrt. Die Hamiltonschen Quaternionen aus der Übungsaufgabe 2.6 sind ein Beispiel eines Schiefkörpers, der kein Körper ist.

Ähnlich können wir auch weitere Inklusionsketten betrachten. Schauen wir uns z.B. folgende Inklusionskette an:

$$\text{Ringe} \supsetneq \text{kommutative Ringe} \supsetneq \text{komm. Ringe mit } 1 \supsetneq \text{Körper}$$

Ein Beispiel eines nicht-kommutativen Ringes ohne 1 sind die oben schon genannten Dreiecksmatrizen mit Diagonale Null. Ein Beispiel eines kommutativen Rings ohne 1 ist $2\mathbb{Z}$. Ein Ring mit 1, der kein Körper ist, ist $\mathbb{Z}$.
Werfen wir nun einen genaueren Blick auf die Strukturen, die wir am Ende von Kapitel 2 und in diesem Kapitel kennengelernt haben:

$$\begin{array}{lcl} \text{euklid. Ringe} & \subsetneq & \text{Hauptidealringe} \subsetneq \text{faktorielle Ringe} \\ & \subsetneq & \text{Integritätsringe} \subsetneq \text{komm. Ringe mit } 1 \end{array}$$

Auch hier werfen wir einen Blick auf die abgrenzenden Beispiele: Leider sind Beispiele für Hauptidealringe, die nicht euklidisch sind, relativ aufwendig, so dass wir hier kein explizites Beispiel angeben. Beispiele faktorieller Ringe, die keine Hauptidealringe sind, sind $\mathbb{Z}[t]$ und $K[x_1, \ldots, x_n]$. Ein Beispiel eines Integritätsrings, der kein faktorieller Ring ist, ist $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, den wir bereits in einer Übungsaufgabe betrachtet haben. Ein anderes Beispiel eines Integritätsringes, der nicht faktoriell ist, ist $\mathbb{Q}[x, y]/\langle x^2 - y^3 \rangle$, wo x^2 die Faktorisierungen $x \cdot x$ und $y^2 \cdot y$ besitzt. Solche Ringe werden wir in Kapitel 4 genauer kennenlernen; die Irreduzibilität von $x^2 - y^3$ werden wir nach Behandlung von Kapitel 5 formal nachweisen können, im Moment ahnt man aber auch schon, dass y^3 in $\mathbb{Q}[x, y]$ keine Quadratwurzel besitzen kann. Ein Beispiel eines kommutativen Rings mit 1, der nicht nullteilerfrei ist, ist $\mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$.