

Mengenlehre

× Aufgabe 1: Mengen

Gib die folgenden Mengen in auflistender Schreibweise an.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 15 \text{ und } n \geq 5\}$

b) $B = \{\frac{z^2+z}{2} + 5 \mid -4 \leq z \leq 4, z \in \mathbb{Z}\}$

c) $C = \{M \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : 3 \in M\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } m \in B \text{ gilt } n < m.\}$

!e) $\tilde{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es existiert mindestens ein } m \in B, \text{ für das } n < m \text{ gilt.}\}$

× Aufgabe 2: Intervalle

In den reellen Zahlen arbeiten wir häufig mit „zusammenhängenden Bereichen“, den **Intervallen**.

Definition I

Seien $a, b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$, sodass $a < b$ gilt. Dann definieren wir die folgenden **Intervalle**:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{abgeschlossenes Intervall})$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{rechtsseitig halboffenes Intervall})$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{linksseitig halboffenes Intervall})$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{offenes Intervall})$$

Bestimme die folgenden Mengen und mache zu jeder Menge eine Skizze:

1. $[-2, 0] \cup (1, 3]$

2. $[1, 4) \cup (4, 7]$

3. $(0, 3) \cap [-1, 1]$

Bei Problemen kann der Umgang mit Intervallen an den nächsten Beispielen noch weiter geübt werden.

4. $(0, 4] \cup (1, 5]$

5. $(-2, 4] \cap [-1, 1]$

6. $(-2, 4] \cup [-1, 1]$

× Aufgabe 3: Relationen

Seien A, B, C, D, \tilde{D} wie in Aufgabe 1 und zusätzlich $E := \{2, 3, 4\}$.

Finde alle Relationen $\{\subseteq, \in\}$ zwischen den Mengen A, B, C, D, \tilde{D}, E .

× Aufgabe 4: Operationen

Bestimme die folgenden Mengen.

- a) $A \cap B \cap D$ mit A, B, D aus Aufgabe 1.
- b) i) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 8 teilbar}\}$
ii) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 6 teilbar}\}$
- c) i) $(\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}) \cup \{1, 4\}$
ii) $\{1, 2, 3\} \cap (\{2, 3, 4\} \cup \{1, 4\})$
- d) i) $(\{2, 3, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}) \cap \{2, 4, 6, 8\}$
ii) $(\{2, 3, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\}) \cup (\{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\})$
- e) $\{1, 4, 7, 8\} \times \{3, 5, 6\}$
- f) $(\mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z}) \cap \{(a, (a+b), b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$

× Aufgabe 5: Formalisieren

Schreibe folgende Mengen formal auf:

- a) Alle ganzen Zahlen, die in \mathbb{Z} durch drei teilbar sind.
- b) Alle Teilmengen von \mathbb{R} , die die Zahl 42 enthalten.
- c) Alle reellen Lösungen der Gleichung $x^5 - \pi x^2 + 1 = 0$.
Hinweis: Nur formalisieren, nicht ausrechnen!

× Aufgabe 6: Venn-Diagramme

Mit *Venn-Diagrammen* lassen sich Mengen, die in irgendeiner Weise zueinander in Verbindung stehen, gut visualisieren. Das ein oder andere Diagramm habt ihr bestimmt schon einmal gesehen. Betrachten wir zum Beispiel zwei Mengen A und B , wobei $A \subseteq B$ gelte, so lässt sich dies durch folgendes Venn-Diagramm veranschaulichen:



Abbildung 1: Beispiel eines Venn-Diagramms für die Relation $A \subseteq B$.

Achtung! Venn-Diagramme beschreiben eine Situation nie vollständig – sie dienen nur der Veranschaulichung. In obiger Situation könnte zum Beispiel sogar $A = B$ gelten. In diesem Fall ist das Venn-Diagramm eher irreführend.

- a) Zeichne jeweils ein Venn-Diagramm, das die folgende Situation beschreibt:
- i) Seien A, B zwei Mengen mit $A \neq B$ und $A \cap B \neq \emptyset$.
 - ii) Seien A, B, C drei Mengen mit $B \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ und $C \setminus A \neq \emptyset$.
 - iii) Seien A, B, C drei Mengen, wobei je zwei der Mengen einen nicht-leeren Schnitt haben, aber $A \cap B \cap C = \emptyset$ sei.

Mit Venn-Diagrammen lassen sich auch Verknüpfungen von Mengen visualisieren. Im Beispiel von oben lässt sich die Menge $B \setminus A$ wie folgt darstellen:

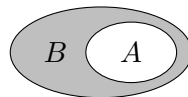


Abbildung 2: Visualisierung der Menge $B \setminus A$ (in grau) mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

- b) Veranschauliche jeweils in den Situationen aus a) die folgenden Mengen:
- i) $A \cap B$.
 - ii) $(C \cap A) \cup B$.
 - iii) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

! Aufgabe 7: Potenzmengen

- a) Sei M eine nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche im Allgemeinen nicht? Begründe!

- | | | |
|---------------------------------|--|---|
| i) $M \subset \mathcal{P}(M)$, | ii) $\emptyset \subset \mathcal{P}(M)$, | iii) $M \in \mathcal{P}(M)$ |
| iv) $\emptyset \in M$, | v) $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, | vi) $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(M)$ |

- b) Sei $M = \{0, 1\}$. Bestimme folgende Mengen:

- i) $\mathcal{P}(M)$, ii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$

- !c) Bestimme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

Aufgabe 8: Anzahl von Elementen

Seien M, N zwei Mengen mit endlich vielen Elementen.

- a) Stelle $|M \cup N|$ mit Hilfe von $|M|$, $|M \cap N|$ und $|N|$ dar.
- b) Begründe, warum $|M \cup N| \leq |M| + |N|$ gilt.
- c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Begründe, warum für n Mengen M_1, \dots, M_n gilt:

$$|M_1 \cup \dots \cup M_n| \leq |M_1| + \dots + |M_n|$$

- d) Stelle $|M \times N|$ mit Hilfe von $|M|$ und $|N|$ dar.
- !e) Stelle $|\mathcal{P}(M)|$ mit Hilfe von $|M|$ dar.

Begründe deine Antwort jeweils so gut wie möglich.