SS 2020 • Analysis IIa

Verschiedene Übungsaufgaben als Klausurvorbereitung

Für diese Aufgaben sind keine offiziellen Musterlösungen geplant. Sie können in den Zusatztutorien/Fragestunden besprochen werden:

am 22.07.2020, 10:00–12:00 (Zusatztutorium mit Herrn Naderi)
am 27.07.2020, 10:00–12:00 (Zusatztutorium mit Herrn Naderi)
am 29.07.2020, 10:00–12:00 (letzte Fragestunde mit Herrn Prof. Dr. Pankrashkin)

(alle Sitzungen finden als Stud.Ip–Meetings statt)

Aufgabe 1
Beweisen Sie oder widerlegen folgende Aussagen:

1. Auf jeder nichtleeren Menge kann man eine Metrik einführen.
2. Jede Metrik auf einem Vektorraum wird durch eine Norm erzeugt.
3. Seien d_1, d_2 Metriken auf X. Dann ist auch $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ Metrik auf X.
4. Für jeden metrischen Raum (X,d) gibt es eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$.
5. Jede stetige Abbildung ist eine Kontraktion.
6. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \|x\| = \dfrac{|x|}{1+|x|}$ ist eine Norm.
7. Sei (X,d) ein metrischer Raum, dann ist jede Cauchy-Folge in X konvergent.
8. Es gibt offene Mengen, die abgeschlossen sind.
9. Jede nichtleere Menge enthält eine nichtleere abgeschlossene Menge.
10. Falls das Innere einer Menge A den Rand von A enthält, dann ist A offen.
11. Die Menge aller Kontraktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $C^0(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int \cos\sqrt{x}\,dx, \quad \text{(b)} \int \frac{x\,dx}{x^2-6x+13}, \quad \text{(c)} \int \frac{1}{e^x+2}\,dx,$$
$$\text{(d)} \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx, \quad \text{(e)} \int \sqrt{x}\ln x\,dx, \quad \text{(f)} \int \frac{1}{\cos x}dx.$$

2. Bestimmen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^\pi \sin^2 x\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx, \quad \text{(c)} \int_1^e x^2\ln x\,dx.$$

3. Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf die Konvergenz:

$$\text{(a)} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\,dx. \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, dx,$$

4. Sei $f : [a, +\infty)$ eine stetige Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Falls das Integral $\displaystyle\int_a^\infty f$ konvergiert, dann gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) Falls das Integral $\displaystyle\int_a^\infty f$ konvergiert und g eine beschränkte Funktion ist, dann konvergiert auch $\displaystyle\int_a^\infty fg$.

5. Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit folgenden Eigenschaften: (a) die Folge der Ableitungen (f_n') konvergiert gleichmässig, (b) für ein $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Folge $\big(f_n(x_0)\big)$. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) gleichmässig gegen eine stetig differenzierbare Funktion f konvergiert und dass $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung $f_n(x) = f_n(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt$.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie allgemeine Lösungen folgender Differentialgleichungen:

$$\text{(a) } y'(x) = \frac{2}{2x+1}\,y(x) + 4x, \quad x > -\frac{1}{2}, \quad \text{(b) } x^2 y'(x) + xy(x) + 1 = 0, \quad x > 0.$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie allgemeine reellwertige Lösungen folgender Differentialgleichungen:

$$\text{(a) } y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x, \quad \text{(b) } y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = \sin x, \quad \text{(c) } y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Aufgabe 5

1. Finden Sie allgemeine reellwertige Lösungen für folgende Systeme:

$$\text{(a) } \begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y + 2. \end{cases} \qquad \text{(b) } \begin{cases} x' = x + 2y + 4e^t, \\ y' = -2x - 3y. \end{cases}$$

2. Geben Sie (mit Begründung) konkrete 2×2 Matrizen A, für die das System $z' = Az$ folgende Eigenschaft hat:

   (a) Alle Lösungen sind beschränkt,

   (b) Es gibt eine einzige beschränkte Lösung,

   (c) Es gibt unendlich viele beschränkte Lösungen und unendlich viele unbeschränkte Lösungen.

   (d) Jede Lösung erfüllt $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$.