Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 11 - Modul mat110

Abgabe 14.07.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Aufgabe 11.1 (8 Punkte)**.** Gegeben sei die folgende Abbildung:

$$\Phi \,:\, \mathbb{Z}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Z}^{1\times 3}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a+d\,,\, b+c\,,\, a+b+c+d).$$

(a). Vergewissern Sie sich, dass Φ linear ist. Zeigen Sie, dass es sich im Folgenden bei $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ tatsächlich um Basen von $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ bzw. $\mathbb{Z}^{1\times 3}$ handelt und bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ zu

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right).$$

(b). Bestimmen Sie auch Basen $\mathcal{W}$ von $\mathbb{Z}^{4\times 1}$ und $\mathcal{Z}$ von $\mathbb{Z}^{3\times 1}$, sodass $M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{W}}(\Phi)$ in Smith-Normalform ist.

Aufgabe 11.2 (6 Punkte)**.** Gegeben seien die Matrix $H := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ und dessen Standardinterpretation $\Phi_H \,:\, \mathbb{Z}^{4\times 1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{4\times 1}$, $v \longmapsto H\,v$. Überführen Sie H in Smith-Normalform und bestimmen Sie die Elementarteiler von Φ_H. Ermitteln Sie anschließend Basen von $\text{Kern}(\Phi_H)$ und $\text{Bild}(\Phi_H)$.

Aufgabe 11.3 (6 Punkte)**.** Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem beliebigen Körper K und sei $F \in \text{End}_K(V)$. Wir wissen, dass V auch ein $K[t]$-Modul bzgl. F ist. Wir nennen einen Untervektorraum $U \subseteq V$ F**-zyklisch**, wenn es einen Vektor $v \in U$ gibt, so dass

$$U = \text{Spann}_K\left(v\,,\, F(v)\,,\, F^2(v)\,,\, \ldots\right) = \text{Spann}_K\left(F^i(v) \mid \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0\right) \;.$$

Beweisen Sie explizit folgende Aussagen:

(a). Ist $U \subseteq V$ ein F-zyklischer Untervektorraum von V, so ist U auch ein zyklischer $K[\,t\,]$-Untermodul von V, d.h. U ist ein $K[\,t\,]$-Untermodul von V von der Form $U = K[\,t\,] \cdot_F v$ mit einem $v \in U$.

(b). Umgekehrt: Ist $U \subseteq V$ ein zyklischer $K[\,t\,]$-Untermodul von V, so ist U auch ein F-zyklischer Untervektorraum von V.