Differentialrechnung für vektorwertige Abbildungen

Def Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. f heißt *(total) differenzierbar* in $x_0 \in U$, falls es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

In diesem Fall nennt man A das *Differential* von f in x_0. Bezeichnung: $Df_{|x_0} := A$.

Satz 3.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ habe die Komponentenfunktionen $f_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$. Dann gilt:

1) f ist in x_0 genau dann total differenzierbar, wenn $f_1, ...f_m$ in x_0 total differenzierbar sind.

2) Ist f total differenzierbar in $x_0 \in U$, so ist

$$Df_{|x_0}h = \begin{pmatrix} Df_{1|x_0}h \\ \vdots \\ Df_{m|x_0}h \end{pmatrix}$$

und $Df_{|x_0}$ ist bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ durch die Matrix

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese $m \times n$-Matrix heißt *Jacobi-Matrix* von f.
Schreibweise: $J_f(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

Satz 3.2(Kettenregel) Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $g\colon V \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subset V$. Ist f in $a \in U$ differenzierbar und g in $f(a)$ differenzierbar, dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar und es gilt:

$$D(g \circ f)_{|a} = Dg_{|f(a)} Df_{|a} \qquad \big(J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a)\big)$$

Satz 3.3 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. Sei $a \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Strecke $\{a + th\colon 0 \le t \le 1\}$ in U liegt. Dann gilt:

$$\|f(a+h) - f(a)\| \le \sup_{t \in [0,1]} \|Df_{|a+th}\| \|h\|.$$