Lösungen der Fingerübungen

1. Schreiben Sie die Betragsungleichung als Ungleichung ohne Beträge und mittels Intervallen auf.

   a) $|x-3| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x-3 < \varepsilon \iff 3-\varepsilon < x < 3+\varepsilon \iff x \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$

   b) $|x+10| \leq 30 \iff -30 \leq x+10 \leq 30 \iff -40 \leq x \leq 20 \iff x \in [-40, 20]$

   c) $|x-a| \geq \varepsilon \iff (x-a \geq \varepsilon) \vee (-(x-a) \geq \varepsilon) \iff (x \geq a+\varepsilon) \vee (x-a \leq -\varepsilon) \iff (x \geq a+\varepsilon) \vee (x \leq a-\varepsilon) \iff x \in (-\infty, a-\varepsilon] \cup [a+\varepsilon, \infty)$

   d) $||x|-5| < 1 \iff -1 < |x|-5 < 1 \iff 4 < |x| < 6 \iff (4 < x < 6) \vee (4 < -x < 6) \iff (4 < x < 6) \vee (-6 < x < -4) \iff x \in (-6,-4) \cup (4,6)$

   e) $||x+1|+3| > 2$ kann man vereinfachen, indem man die linke Seite der Ungleichung genauer betrachtet: $|x+1|+3$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv und größer oder gleich 3, da zu der Zahl 3 die nicht negative Zahl $|x+1|$ addiert wird. Also gilt $||x+1|+3| > 3 > 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit: $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Setzen Sie alle gültigen Implikationspfeile zwischen den beiden Aussagen[1] über $x \in \mathbb{R}$.

   a) $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Denn durch Multiplikation von $x > 0$ mit x folgt $x^2 > x \cdot 0 = 0$.

      Aber: $x > 0 \not\Leftarrow x^2 > 0$. Gegenbeispiel: $x = -1$ (Jede beliebige negative Zahl könnte hier als Gegenbeispiel benützt werden).

   b) $-3 \leq x < 4 \Rightarrow |x| \leq 4$. Denn beide Seiten können umgeformt werden zu $-3 \leq x < 4 \iff x \in [-3, 4)$ und $|x| \leq 4 \iff -4 \leq x \leq 4 \iff x \in [-4, 4]$. Die Implikation gilt, da $[-3, 4) \subset [-4, 4]$.

      Alternativ: $-3 \leq x < 4$ und $-4 < -3 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \iff |x| \leq 4$.

      Aber: $-3 \leq x < 4 \not\Leftarrow |x| \leq 4$. Gegenbeispiel: $x = 4$.

   c) $x < \varepsilon \Leftarrow x < \varepsilon^2$ (hierbei sei $\varepsilon < 1$). Aus $\varepsilon < 1$ folgt (Multiplikation mit ε) $\varepsilon^2 < \varepsilon$ und damit: $x < \varepsilon^2 < \varepsilon$.

      Aber: $x < \varepsilon \not\Rightarrow x < \varepsilon^2$. Gegenbeispiel: $x = \varepsilon^2$.

   d) $x > a-1$? $(x-a)^2 > 1$ kann man besser überblicken, indem man beide Seiten umformt zu $x > a-1 \iff x-a > -1$ und
      $(x-a)^2 > 1 \iff |x-a| > 1 \iff (x-a > 1) \vee (x-a < -1)$.

      Nun kann man sehen, dass $x > a-1 \not\Rightarrow (x-a)^2 > 1$. Gegenbeispiel: $x = a$.

      Außerdem gilt $x > a-1 \not\Leftarrow (x-a)^2 > 1$. Gegenbeispiel: $x = a-2$.

   e) $||x|-|y|| < \varepsilon \Leftarrow |x-y| < \varepsilon$ Denn nach Vorlesung (umgestellte Dreiecksungleichung) ist $|x-y| \geq |x|-|y|$ und $|x-y| = |-(x-y)| = |y-x| \geq |y|-|x| = -(|x|-|y|)$, was zusammen gerade bedeutet: $|x-y| \geq ||x|-|y||$. Damit gilt also $\varepsilon > |x-y| \geq ||x|-|y||$.

      Aber: $||x|-|y|| < \varepsilon \not\Rightarrow |x-y| < \varepsilon$. Gegenbeispiel: $x = \varepsilon$ und $y = -\frac{\varepsilon}{2}$.

   f) $(|x-1| < \varepsilon) \wedge (|x+1| < \varepsilon) \Rightarrow |x| < \varepsilon$. Denn $2|x| = |2x| = |(x-1)+(x+1)| \leq |x-1|+|x+1| < 2\varepsilon$, also $2|x| < 2\varepsilon$, also $|x| < \varepsilon$.

[1] Genauer Aussageformen. Im Beispiel ist also zu prüfen, ob die Aussagen $\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow x < 3$ bzw. $\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Leftarrow x < 3$ wahr sind.

Aber: $(|x-1|<\varepsilon) \wedge (|x+1|<\varepsilon) \not\Leftarrow |x|<\varepsilon$. Gegenbeispiele: Für $\varepsilon \leq 1$: $x=0$ und für $\varepsilon > 1$: $x = \varepsilon - 1$.

3. Ermitteln Sie eine Konstante (falls existiert), sodass folgende Ungleichungen wahr sind. Beweisen Sie auch ihre Nichtexistenz!
   a) $C=2$, denn
   $$\frac{1}{n-1} \leq \frac{2}{n} \Leftrightarrow n \leq 2(n-1) \Leftrightarrow 0 \leq n-2 \Leftrightarrow n \geq 2.$$
   b) $C=4$, denn
   $$\frac{n+3}{n^2} \leq \frac{n+3n}{n^2} \leq \frac{4}{n}.$$
   c) offensichtlich gilt die Ungleichung für jedes $C<2$.
   d) Für alle $C < \frac{1}{\sqrt{2}}$, denn
   $$\sqrt{n-1} > C\sqrt{n} \Leftrightarrow n-1 > C^2 n \Leftrightarrow n(1-C^2) > 1.$$
   e) nicht möglich! Angenommen, es gäbe so ein $C>0$. Dann für alle $n \geq 2$:
   $$n! < n^2 C \Leftrightarrow \frac{n-1}{n}(n-2)! < C.$$
   Die linke Seite wird beliebig groß für $n \to \infty$, daher Widerspruch!
   f) Nein, denn
   $$n < C\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} < C \Leftrightarrow n < C^2.$$
   Es gibt kein $C>0$, so dass die letzte Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
   g) $C = \frac{1}{2}$, denn $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, also $2ab \geq a^2 + b^2$.
   h) Wahr z.B für $C < \frac{1}{2}$, denn
   $$\sqrt[n]{n-1} > C\sqrt[n]{n} \Leftrightarrow n-1 > nC^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} > C^n.$$

4. Finden Sie alle reellen Lösungen der Ungleichungen:
   a)
   $$\begin{aligned} & x+4 \leq 2-3x && \mid +3x-4 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x \leq -2 && \mid :4 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$
   Also ist die Lösungsmenge der Ungleichung $L = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{2}\}$.
   b) Betrachte die Ungleichung: $\dfrac{x+1}{x+2} \geq \dfrac{1}{2}$. Zunächst ist klar, dass der Bruch $\dfrac{x+1}{x+2}$ nicht definiert ist für $x=-2$. Um die Ungleichung nun nach x aufzulösen, muss der Bruch entfernt werden. Das bedeutet hier die Multiplikation mit $x+2$. Dieser Term wird aber für alle $x < -2$ negativ. In diesem Fall würde eine Multiplikation mit $x+2$ dazu führen, dass

sich das Ungleichungszeichen umdreht, wie in der Vorlesung als Folgerung aus den Anordnungsaxiomen gelernt wurde. Deshalb muss man hier eine Fallunterscheidung machen:
i) $x > -2$:

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x+2} \geq \frac{1}{2} && \mid \cdot (x+2) \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 \geq \frac{x}{2}+1 && \mid -\frac{x}{2}-1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x}{2} \geq 0 && \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

ii) $x < -2$:

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x+2} \geq \frac{1}{2} && \mid \cdot (x+2) \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 \leq \frac{x}{2}+1 && \mid -\frac{x}{2}-1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x}{2} \leq 0 && \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Umformungen von ii) ist schwächer als die Voraussetzung $x < -2$. Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung $L = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 0) \vee (x < -2)\}$.

c) Die Ungleichung $x^2 < 10$ ist äquivalent zur Ungleichung $x^2 - 10 < 0$. Um diese Ungleichung zu lösen, kann man zunächst die Gleichung $x^2 - 10 = 0$ betrachten. Die Gleichung wird gelöst von $x_1 = \sqrt{10}$ und $x_2 = -\sqrt{10}$. Also kann die Ungleichung umformuliert werden zu $x^2 - 10 = (x + \sqrt{10})(x - \sqrt{10}) < 0$. Dieses Produkt wird genau dann negativ, wenn einer der Faktoren negativ und der andere positiv ist. Hierzu betrachten wir zunächst die beiden Faktoren separat:
i) $x + \sqrt{10} > 0$ für $x > -\sqrt{10}$ und $x + \sqrt{10} < 0$ für $x < -\sqrt{10}$
ii) $x - \sqrt{10} > 0$ für $x > \sqrt{10}$ und $x - \sqrt{10} < 0$ für $x < \sqrt{10}$
Beide Faktoren haben also unterschiedliches Vorzeichen für alle $x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$. Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung $L = (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$.

d)

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 \leq 4x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 4x + 4 \leq 4x && \mid -4x-4 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \leq -4 \end{aligned}$$

Um die Ungleichung $x^2 \leq -4$ zu lösen, müsste man alle $x \in \mathbb{R}$ finden, deren Quadrat kleiner einer negativen Zahl ist. Dies ist für reelle Zahlen nicht möglich, wie aus der Vorlesung bekannt ist. Daher löst kein $x \in \mathbb{R}$ diese Ungleichung und die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\}$.

e)

$$\begin{aligned} & x^4 \geq 2x^2 - 4 \qquad | - 2x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^4 - 2x^2 + 1 \geq -3 \\ \Leftrightarrow \quad & (x^2 - 1)^2 \geq -3 \end{aligned}$$

Um die Ungleichung $(x^2 - 1)^2 \geq -3$ zu lösen, kann man zunächst nur die linke Seite $(x^2 - 1)^2$ betrachten. Diese ist das Quadrat der reellen Zahl $x^2 - 1$. Wie aus der Vorlesung bekannt, ist dies für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht negativ. Damit muss $(x^2 - 1)^2$ also erst recht größer als -3 sein. Also lösen alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung und für die Lösungsmenge gilt $L = \mathbb{R}$.

f)

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x + 2 > 0 \qquad | + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 > \tfrac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & (x + \tfrac{3}{2})^2 > \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \quad (x + \frac{3}{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Wie zuvor in c) kann man die Lösungsmenge dieser Ungleichung gewinnen, indem man zunächst die Gleichung $(x + \frac{3}{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ betrachtet. Sie wird gelöst von
$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ und $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$. Also kann die Ungleichung umgeschrieben werden zu $(x + \frac{3}{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (x + 1)(x + 2) > 0$.[2] Ähnlich zu c) muss man also die x finden, für die beide Faktoren positiv oder beide negativ sind. Wir betrachten wieder beide Faktoren separat:

i) $x + 1 > 0$ für $x > -1$ und $x + 1 < 0$ für $x < -1$

ii) $x + 2 > 0$ für $x > -2$ und $x + 2 < 0$ für $x < -2$

Also sind beide Faktoren positiv für $x > -1 > -2$ und negativ für $x < -2 < -1$. Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung $L = \{x \in \mathbb{R} : (x > -1) \vee (x < -2)\}$.

[2]Mit etwas Übung kann man die Faktorisierung $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$ auch direkt raten.