Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analysis I“

Blatt 1

Aufgabe 1. Seien A, B und C Aussagen. Beweisen Sie folgende Tautologien:

a) $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$

b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \wedge B) \Rightarrow C$

c) $(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$

Aufgabe 2. Sei M die Menge aller Primzahlen, die kleiner als 20 sind, und $N = \{7, 9, 15\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Geben Sie eine kurze Begründung.

a) $N \setminus \{9, 15\} \subset M$
b) $M \subset N$
c) $M \cap N = \{7\}$
d) $M \setminus N = \{9, 15\}$
e) $M \cup N$ hat 10 Elemente
f) die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ besteht aus 256 Elementen
g) $\{\emptyset, 13\} \in M \setminus N$
h) $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$
i) $M \cup N = M \cup \{9, 15\}$
j) $\{7, \{9, 15\}\} \subset N$

Aufgabe 3. Seien L, M und N Mengen. Beweisen Sie:

a) $L \setminus (L \cap M) = L \setminus M$

b) $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$

Aufgabe 4. Seien X, Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \subset X$

b) f ist genau dann injektiv, wenn es ein $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt.

c) f ist genau dann surjektiv, wenn es ein $h\colon Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ gibt.

Abgabe: Bis 25. Oktober vor Vorlesungsbeginn in das Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe	1			2	3		4			
	a	b	c	0,5 × 10	a	b	a	b	c	
Punkte	1	1	1	5	2	2	2	3	3	20

Präsenzaufgaben

1. Seien A, B und C Aussagen. Man beweise, dass die Aussagen $A \wedge B \Rightarrow C$ und $(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B$ äquivalent sind.

2. Seien A, B und C Aussagen. Vereinfachen Sie:

a) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

b) $A \wedge (\neg A \vee (B \wedge \neg C))$

3. Durch Lösen von Übungsaufgaben können Sie Bonuspunkte erwerben, die beim Bestehen der Klausur Ihre Note positiv beeinflussen können. Sie können höchstens 6 Bonuspunkte erreichen und die Zahl der Bonuspunkte steigt entsprechend dem erreichten Prozentsatz der maximalen Bonuspunktzahl zwischen 40% und 80% linear an (mit 40% erwerben Sie null und mit 80% sechs Bonuspunkte). Finden Sie eine Formel, mit der Sie die erreichten Bonuspunkte anhand der in den Übungen erzielten Lösungspunkte L und der maximal möglichen Punktezahl $M = 240$ berechnen können. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, die den erzielten Lösungspunkten die erreichten Bonuspunkte zuordnet.

4. Sei M eine Menge von reellen Zahlen und die Aussage A laute „alle Elemente in M genügen der Bedingung $x > 0$“. Beschreiben Sie A und $\neg A$ mit Hilfe der Quantoren.

5. Seien L, M und N Mengen. Beweisen Sie:

a) $(M \setminus N) \cup (N \setminus M) = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$

b) $L \setminus (M \setminus N) = (L \setminus M) \cup (L \cap N)$

6. Beweisen oder widerlegen Sie:
? Für alle Mengen L, M und N gilt $(L \setminus M) \setminus N = L \setminus (M \setminus N)$. ?

7. Seien X, Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subset X$

b) f ist genau dann injektiv, wenn für alle $A, B \subset X$ mit $B \subset A$ gilt

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Hinweis: Vielleicht helfen Ihnen bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben auch die aktuellen *Videoreihen* (QR-Codes unten) zu den Themen:

Mengenlehre: **Abbildungen:**