Klausur zu Analysis IIb
am 3.08.2016

SS 2016 Shestakov

Hinweise:

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Nutzen Sie zur Bearbeitung die Blätter (Vorder- und Rückseite) bei der jeweiligen Aufgabe. Am Ende sind zwei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weitere Blätter erhalten. Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, *verweisen Sie auf die entsprechende Seite und dort auf die Nummer der Aufgabe.* Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht.

Schreiben Sie deutlich und markieren Sie möglichst, was Nebenrechnungen oder missglückte Versuche sind und was Ihre Hauptlösung ist. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

Zur Bearbeitung stehen Ihnen 180 Minuten zur Verfügung. Es können nur Lösungen (auch Zeichnungen!) bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, *kein Tintenlöscher*). Es sind – außer Ihrem Verstand und einem Stift – *keine Hilfsmittel* erlaubt.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korr.						

Bonuspunkte:	

Gesamtpunktzahl:	

1. Aufgabe. (5+12 Punkte)

a) Geben Sie die Definition des Abschlusses, des Inneren und des Randes einer Menge an.

b) Seien X, Y metrische Räume, $M \subset X$, $N \subset Y$ und $f\colon X \to Y$. Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Ist f ein Homöomorphismus und ist M offen, so ist $f(M)$ offen.

ii) Ist f stetig und N kompakt, so ist $f^{-1}(N)$ kompakt.

iii) Sind $K_j \subset X, j = 1, 2, ...$, kompakt, so ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ kompakt.

iv) Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$ ist abgeschlossen im $\mathbb{R}^3$.

2. Aufgabe. (3+2+3+2+3 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Berechnen Sie im Falle der Existenz die Richtungsableitungen von f im Punkt $(0, 0)$.

c) Ermitteln Sie, wo f total differenzierbar ist.

d) Stellen Sie fest, ob die beiden partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig sind.

e) Verbinden Sie die in a)-d) vorkommenden Eigenschaften (Stetigkeit, Existenz der Richtungsableitungen, totale Differenzierbarkeit, Stetigkeit der partiellen Ableitungen) mit Implikationen und notieren Sie (ohne Gegenbeispiele), ob die Umkehrungen dieser Implikationen wahr sind.

3. Aufgabe. (5+2 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ auf Extrema.

b) Was versteht man unter einem Diffeomorphismus?

4. Aufgabe. (3+5+2 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Taylor im $\mathbb{R}^n$.

b) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $e^u - xyu - 2 = 0$ in einer Umgebung von $(x, y, u) = (1, 0, \ln(2))$ eine Funktion $u(x, y)$ implizit definiert wird. Bestimmen Sie explizit die Taylorformel für u um den Punkt $(1, 0)$ bis einschließlich den Gliedern 1. Ordnung.

c) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional

$$J(y) := \int_{-1}^{2} ((y')^2 + 2yy')\, dx$$

auf $M := \{y \in C^2[-1, 2] \colon y(-1) = 1, y(2) = 0\}$ auf.

5. Aufgabe. (4+4+5+3 Punkte)

Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, x = y\}$

a) Untersuchen Sie, ob M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie ggf. die Dimension von M an.

b) Nehmen Sie einen Punkt aus M und bestimmen Sie den Tangential- und den Normalenraum an M in diesem Punkt.

c) Untersuchen Sie die Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y$ auf Extrema.

d) Skizzieren Sie M und interpretieren Sie das Ergebnis aus c) geometrisch.