

Zahlbereiche

× Aufgabe 1

Berechne für $x = 2i$, $y = 1 + i$ und $z = 2 - 3i$ folgende Ausdrücke:

1. $y \cdot z$
2. $\overline{y \cdot (x - z)}$
3. $|x + z|$
4. $\operatorname{Re}(x \cdot y \cdot z)$
5. $\operatorname{Im}(x + yz)$

Aufgabe 2

Bestimme Real- und Imaginärteil sowie Betrag der komplexen Zahl

$$z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - i} \right)^2.$$

× Aufgabe 3

Für $z \in \mathbb{C}$ zeige man

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ und } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Aufgabe 4

Beweise folgende Rechenregeln:

1. $\overline{\bar{x}} = x$
2. $\operatorname{Re}(x + y) = \operatorname{Re}(x) + \operatorname{Re}(y)$

Mithilfe von 2. zeige:

3. $\operatorname{Im}(x + y) = \operatorname{Im}(x) + \operatorname{Im}(y)$

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \operatorname{Re}(z)}{i}$. Wieso?

× Aufgabe 5

- Man zeichne die folgenden komplexen Zahlen in die Gauß'sche Zahlenebene ein:
 - $3 - i$
 - $2i$
 - $-1 + 3i$
 - z mit $\operatorname{Re}(z) = 2$ und $\operatorname{Im}(z) = 1$
- Man zeichne eine Gauß'sche Zahlenebene und markiere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:
 - $\operatorname{Im}(z) = 1$
 - $\operatorname{Re}(z) \leq 2$
 - $|\operatorname{Re}(z)| = 2$
 - $|\operatorname{Im}(z)| < 3$
 - $|\operatorname{Re}(z)| \leq 2$ und $|\operatorname{Im}(z)| > 2$
 - $z = \bar{z}$

Aufgabe 6

Begründe oder widerlege (z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels):

- Multipliziert man eine komplexe Zahl mit $(-i)$, so werden Real- und Imaginärteil getauscht.
- Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.
- Es ist möglich, als Summe komplexer Zahlen, deren Realteil jeweils 0 ist, 1 zu erhalten.
- Im Allgemeinen gilt: $\operatorname{Re}(x \cdot y) = \operatorname{Re}(x) \cdot \operatorname{Re}(y)$, für $x, y \in \mathbb{C}$.
- Ist $\operatorname{Re}(\operatorname{Im}(z)) = 0$, dann ist $z \in \mathbb{R}$.

! Aufgabe 7

Bringe die komplexen Zahlen in ihre kartesische Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

- $z_1 = z + \frac{1}{\bar{z}}$
- $z_2 = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

! Aufgabe 8

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$?