

**Klausur Analysis 2a, S13**

**Bearbeitungszeit** 120 Minuten. **Erlaubte Hilfsmittel** maximal 2 Blätter eigener handschriftlicher Aufschrieb, **keine weiteren Unterlagen**, keine elektronischen Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Mobiltelefone.

**Aufgabe 1 6+6 Punkte.** a) Seien  $(M_1, d_1)$  und  $(M_2, d_2)$  metrische Räume. Ist  $d : M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$  ein metrischer Raum?

b) Sei  $I = [1, 2]$  und  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ . Kann man mittels dem BFPS zeigen, daß  $f(x) = x$  genau eine Lösung in  $I$  hat? Falls ja, wie lautet diese?

**Aufgabe 2 10 Punkte.** Man bestimme je eine Stammfunktion von

$$f_1(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - 2x^{-1/3} + 7/x, \quad f_2(x) = \frac{6}{1-3x}, \quad f_3(x) = xe^{3x}, \quad f_4(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}.$$

**Aufgabe 3 8 Punkte.** Konvergieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Falls ja, dann gebe man den Wert.

$$\int_1^\infty 2^{-x} dx, \quad \int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^{2013}}, \quad \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Aufgabe 4 8 Punkte.** Man löse das AWP  $y'(t) = y^3(t)$ ,  $y(0) = -1$ . Was ist das maximale Existenzintervall?

**Aufgabe 5 12 Punkte.** Man löse die Anfangswertaufgabe  $x' = Ax + g(t)$ , mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6 10 Punkte.** Man löse die Anfangswertaufgabe  $2x''(t) - 8x(t) = e^{2t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = \frac{33}{8}$ .