Übungsblatt 8 - Lösungsvorschläge der Präsenzaufgaben

Orville Damaschke

16. Juni 2020

Aufgabe 8.1

Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $N \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $C^0(M,N)$ die Menge stetiger Funktionen von M zu N.

Behauptung. $(C^0(M,N),d)$ mit $d(f,g) = \sup_{x\in M} \|f(x)-g(x)\|$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Man nutze Blatt 7 Aufgabe 2: Aus der ersten Teilaufgabe folgt, dass $d(f,g)$ wohldefinierte Metrik ist und

$$\mathcal{B}(M,N) = \{f \,:\, M \,\to\, N \,|\, \exists\, K \subset N \,\text{offen} \,:\, f(x) \in N \,\forall\, x \in M\}$$

ist dann bezüglich d ein vollständiger metrischer Raum, da N abgeschlossen und somit bezüglich der (induzierten) Norm in $\mathbb{R}^n$ (vollständig) ebenso vollständig ist (Teilaufgabe 2). Die Vollständigkeit von $C^0(M,N)$ folgt dann aus der Vollständigkeit von $\mathcal{B}(M,N)$: Da $C^0(M,N) \subset \mathcal{B}(M,N)$ ist, hat jede Folge $(f_k)_k \subset C^0(M,N)$ zunächst einen Grenzwert $f \in \mathcal{B}(M,N)$. Wähle $p \in M$. Aus der Kompaktheit von M und der Beschränktheit von $f_k(x) - f(x)$ für alle $x \in M$ (Satz 125) und $k \in \mathbb{N}$ folgt zunächst nach *weiser Voraussicht*

$$\forall\, \epsilon > 0 \exists\, K \in \mathbb{N} \,:\, \|f_k(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3} \,\forall\, x \in M \,\text{und}\, k \geq K \,.$$

Aus der Stetigkeit der Folgenglieder existiert ein $\delta > 0$:

$$\|f_k(p) - f_k(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3} \,\forall\, k \in \mathbb{N} \,\text{und}\, x \in M \,:\, \|x-p\|_{\mathbb{R}^m} < \delta \quad .$$

Zusammenfassend: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(p)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f(p)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(p) + f_k(p) - f(p)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|f(x) - f_k(x)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f_k(x) - f_k(p)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f_k(p) - f(p)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon
\end{aligned}$$

für $x \in M$, sodass $\|x-p\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$. Damit ist auch $f \in C^0(M,N)$. Da die Wahl der Folge unspezifisch war, konvergiert jede Folge stetiger Funktionen in $C^0(M,N)$, womit $C^0(M,N)$ abgeschlossen ist. Als abgeschlossener metrischer Teilraum des vollständigen Raumes $\mathcal{B}(M,N)$ ist $C^0(M,N)$ somit selbst vollständig, q.e.d.!

Aufgabe 8.2

(Globale Eindeutigkeit lok. Lösungen) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $F(t, y)$ gegeben mit $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Seien $y, \tilde{y}$ Lösungen auf dem Intervall I des AWP

$$y'(t) = F(t, y) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$$

für $t_0 \in I$.

a)

Behauptung. $t_1 := \sup\{t \in I \,:\, y(t) = \tilde{y}(t)\} \notin \mathring{I}$.

Beweis: Sei entgegen der Aussage $t_1 \in \mathring{I}$. Sowohl y als auch $\tilde{y}$ sind stetig (differenzierbar) und für $t_1 \in I$ existieren die Grenzwerte

$$y_1 := y(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} y(t) = \lim_{t \to t_1^-} \tilde{y}(t) = \tilde{y}(t_1) =: \tilde{y}_1 \quad ;$$

Die Gleichheit der Grenzwerte folgt aus der Defintion von t_1. Nach dem Lokalen Existenzsatz von Picard-Lindelöf existiert also ein $\delta > 0$, sodass Lösungen des AWP

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad y_1 = y(t_1)$$

auf $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ eindeutig sind. Demnach folgt für ein $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ die Gleichheit von y und $\tilde{y}$. Somit existieren $t > t_1$, sodass $y(t) = \tilde{y}(t)$ ist. t_1 wäre damit nicht das Supremum gemäß seiner Definition, q.a.e.!

b)

Behauptung. $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis: Man definiere $t_2 := \inf\{t \in I \,:\, y(t) = \tilde{y}(t)\}$. Mit einer analogen Beweisführung zeigt man, dass $t_2 \notin \mathring{I}$ ist: Aus der Definition von t_2 wie auch der Stetigkeit der Lösungen folgen $y_2 = y(t_2) = \tilde{y}(t_2) = \tilde{y}_2$ und die Existenz eines $\delta > 0$, sodass Lösungen des AWP

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad y_2 = y(t_2)$$

auf $[t_2 - \delta, t_2 + \delta]$ eindeutig sind. Demnach folgt für ein $t \in [t_2 - \delta, t_2]$ die Gleichheit von y und $\tilde{y}$. Somit existieren $t < t_2$, sodass $y(t) = \tilde{y}(t)$ ist. t_2 wäre damit nicht das Infimum gemäß seiner Definition ! Also sind t_1 und t_2 nicht im Inneren des Intervalls.

Sind $t_1, t_2 \notin I$, so folgt mit dem lokalen Satz von Picard-Lindelöf, dass das AWP eine eindeutige Lösung hat und damit $y(t) = \tilde{y}(t)$ auf I. Ist $t_2 \in I$, so ist dieser ein Randpunkt von I. Es ist dann $y(t) = \tilde{y}(t)$ auf I mit $y_2 = \tilde{y}_2$ nach obiger Beweisführung. Analog folgt dies für $t_1 \in I$ mit $y_1 = \tilde{y}_1$. Also $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle $t \in I$, auch mit $t_1, t_2 \in I$, q.e.d.!

Aufgabe 8.3

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y.

a) Sei t_1 ein Randpunkt.

a)i. $\exists\, \delta > 0$ und eine Lösung z von $y'(t) = F(t, y(t))$ auf $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$, sodass $z(t) = y(t)$ für alle $t \in (t_1 - \delta, t_1]$: Es ist $(t_1, y(t_1)) \in \Omega$; da alle Voraussetzungen erfüllt sind, folgt nach dem Lokalen Existenzsatz, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass $z(t)$ eindeutige Lösung des AWP

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad z(t_1) = y(t_1)$$

auf $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ ist. Es folgt $y(t) = z(t)$ aus der Eindeutigkeit für $t \in I \cap [t_1 - \delta, t_1 + \delta] = [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$. Dies gilt speziell auch auf $(t_1 - \delta, t_1]$, falls t_1 rechter Randpunkt ist und auf $[t_1, t_1 + \delta)$ für t_1 als linken Randpunkt des Intervalls.

a)ii. y ist nicht maximal: Man nehme an, dass y maximale Lösung auf I sei. Für t_1 rechter Randpunkt sei eine stetige Fortsetzung gegeben durch

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{für } t \in I \\ z(t) & \text{für } t \in (t_1, t_1 + \delta) \end{cases} \quad ;$$

für t_1 linken Randpunkt wähle man stattdessen

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{für } t \in I \\ z(t) & \text{für } t \in (t_1 - \delta, t_1) \end{cases} \quad .$$

Für beide Fälle ist $y(t) = \tilde{y}(t)$ auf I erfüllt und die Fortsetzungen sind Lösung auf $J = I \cup (t_1, t_1 + \delta) \supsetneq I$ bzw. $J = I \cup (t_1 - \delta, t_1) \supsetneq I$. Damit kann also y nicht maximale Lösung des AWP sein, da hierzu zumindest $J = I$ erforderlich wäre.

a)iii. I ist offen: Da y Lösung auf I ist, aber durch z auf $(t_1 - \delta, t_1)$ bzw. $(t_1, t_1 + \delta)$ fortgesetzt wird, ist $t_1 \notin I$. Beide möglichen Randpunkte von I liegen nicht in I selbst: $\partial I \cap I = \emptyset$. Dies ist mit der Offenheit von I äquivalent.

b) Seien $A := \{I' : I' \text{ offenes Intervall mit } t_0 \in I' \text{ und } \exists\, y_{I'} \text{ Lösung des AWP auf } I'\}$ und $I = \bigcup_{I' \in A} I'$; für $t \in I$ sei $y(t) = y_{I'}(t)$ für $t \in I'$.

b)i. Seien $I', I'' \in A$ und $t \in I' \cap I''$, dann $y_{I'}(t) = y_{I''}(t)$: Aus $I', I'' \in A$ folgt, dass sowohl I' wie auch I'' offene Intervalle sind. Damit ist auch $I' \cap I''$ offenes Intervall. Da t_0 in jedem offenen Intervall in A ist, ist auch $t_0 \in I' \cap I''$. Mit $t \in I' \cap I''$ ist somit $[t_0, t] \subset I' \cap I''$ für $t \geq t_0$.

Da $t_0 \in I' \cap I''$, ist nach Konstruktion $y_{I'}(t_0) = y(t_0) = y_{I''}(t_0)$. Mit $y_{I'}$ Lösung des AWP auf I' und $y_{I''}$ Lösung des AWP auf I'', folgt nach Präsenzaufgabe 2 die globale Eindeutigkeit $y_{I'}(t) = y_{I''}(t)$ für alle $t \in I' \cap I''$.

b)ii. y ist Lösung des AWP auf I: Da $t \in I$ ist, gibt es ein $I' \in A$, sodass $t \in I'$. Dies gilt auch für $t = t_0$. Damit ist $y(t) = y_{I'}(t)$ und damit Lösung des AWP auf I'. Da dies unabhängig von der speziellen Wahl eines $t \in I$ ist, ist $y(t)$ Lösung des AWP $y'(t) = F(t, y(t))$ auf ganz I mit der Initialbedingung $y(t_0) = y_0$, da

$$y(t_0) = y_{I'}(t_0) = y_0 \quad \forall\, I' \in A \quad .$$

b)iii. Da I Vereinigung offener Mengen ist, ist diese ebenso offen. Da y die Fortsetzung von $y_{I'}$ für jedes $I' \in A$ ist, ist damit y maximal.

Aufgabe 8.4

Sei $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = b \lessgtr 0$.

Behauptung. $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$ für $b > 0$ und $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \mp\infty$ für $b < 0$.

Beweis: Aus $\lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = b > 0$ folgt die Existenz eines $T \in (a, +\infty)$, sodass

$$y'(t) \geq \frac{b}{2} > 0 \quad \forall\, t \geq T \quad .$$

Da $y'(t)$ Regelfunktion auf jedem Teilintervall von $\mathbb{R}$ ist, folgt nach Satz 30 d) und dem Hauptsatz auf $[T, t] \subset \mathbb{R}$ sodann

$$y(t) = y(T) + \int_T^t y'(s)\,\mathrm{d}s \geq y(T) + \frac{b}{2}(t - T) \overset{b>0}{\to} \pm\infty$$

für $t \to \pm\infty$ und damit $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$. Für $b < 0$ folgt die Existenz eines $T \in \mathbb{R}$, sodass

$$y'(t) \leq \frac{b}{2} < 0 \quad \forall\, t \geq T \quad .$$

Wie im positiven Fall folgt

$$y(t) = y(T) + \int_T^t y'(s)\,\mathrm{d}s \leq y(T) + \frac{b}{2}(t - T) \overset{b<0}{\to} \mp\infty$$

für $t \to \pm\infty$ und damit $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \mp\infty$

Aufgabe 8.5

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und das AWP $y'(t) = f(y(t))$ mit $\mathbb{R} \ni y_0 = y(0)$ gegeben.

a)

Behauptung. Es existiert eine eindeutig maximale Lösung.

Beweis: Man prüfe alle Voraussetzungen der Präsenzaufgabe 3 nach: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist offen; da f stetig differenzierbar ist, ist $F(t, y(t)) := f(y(t))$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ und (lokal) Lipschitz-stetig: y ist n.V. des AWP stetig bzgl. t und f n.V. bzgl. y, womit $f \circ y$ nach Satz 121 stetig bzgl. t ist, sodass $F(t, y)$ stetig bzgl. t und y ist. Durch (partielles) Ableiten nach y folgt

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = f'(y) \quad ;$$

Man wähle eine offene Kugel K in $\mathbb{R}^2$, dann ist $\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}\Big|_{\overline{K}} = f'(y)|_{\overline{K}}$ ebenso stetig und nach Aufgabe 7.2 beschränkt auf dem Anschluss und damit auch im Inneren. Dies gilt unabhängig von der Wahl der Kugel: $\exists\, M_K \,:\, |f'(y(t))| \leq M_K$ für alle $(t, y(t)) \in K \cap \mathbb{R}^2$. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt dann die zu zeigende Lipschitzstetigkeit auf jeder offenen Kugel: Für $\mathring{y} \in \mathbb{R}$ folgt für ein fixes t

$$|F(t,y) - F(t,\tilde{y})| = |f(y(t)) - f(\tilde{y}(t))| = |f'(\mathring{y}(t))||y(t) - \tilde{y}(t)| \leq M_K |y(t) - \tilde{y}(t)|$$

für alle $(t, y), (t, \tilde{y}) \in K \cap \mathbb{R}^2$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 134 erfüllt und es existiert für alle AB eine eindeutige maximale Lösung, q.e.d.!

b)

Behauptung. Sei $f(y_0) = 0$, dann ist y konstant.

Beweis: Die Funktion $z(t) = y_0$ für alle t ist eine Lösung, denn

$$0 = z'(t) = f(z(t)) = f(y_0)$$

erfüllt die genannte Voraussetzung. Nach Picard-Lindelöf ist die Lösung des AWP aber eindeutig, sodass $y(t) = z(t) = y_0$ für alle t und damit konstant ist, q.e.d.!

c) Seien für $a < b$ $f(a) = f(b) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ wie auch $y_0 \in (a, b)$.

Behauptung. Die Lösung ist y auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und $\lim_{t \to -\infty} y(t) = a$ sowie $\lim_{t \to +\infty} y(t) = b$.

Beweis: Man zeige zunächst $y(t) \in (a, b)$ für alle t. Gäbe es Anfangswerte für t_1, t_2, sodass

$$y(t_1) = a \quad \text{und} \quad y(t_2) = b$$

gelten, so würde y entweder das AWP

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_1) = a$$

oder das AWP

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_2) = b$$

lösen. Da $f(a) = f(b) = 0$ sind, sind auch $f(y(t_1)) = f(y(t_2)) = 0$ und nach b) somit die einzigen Lösungen $y(t) = a$ bzw. $y(t) = b$ für alle t. Dies kann nicht sein, da $y_0 \in (a, b)$ liegt. y ist stetig (differenzierbar), somit $y(t) \in (a, b)$ für alle $t \in (a, b)$. Aus $y'(t) = f(y(t)) > 0$ folgt, dass y streng monoton steigend ist.

Betrachte nun y auf einem Intervall (t_-, t_+) und es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \to t_+^+} y(t) = A \geq a \quad \text{und} \quad \lim_{t \to t_+^-} y(t) = B \leq b$$

mit $A < b$ und $B > a$ (also $A, B \in (a, b)$). Man zeige, dass $t_\pm = \pm\infty$ und $A = a$ wie auch $B = b$ gelten. Da die Grenzwerte existieren, kann man die stetigen Fortsetzung

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} A & t = t_- \\ y(t) \quad \text{für} & (t_-, t_+) \\ B & t = t_+ \end{cases}$$

definieren, sodass y als Lösung auf $[t_-, t_+]$ fortgesetzt werden kann. Nach a) ist aber bereits y eindeutig maximale Lösung! Also sind $t_\pm = \pm\infty$. Aus der Stetigkeit von f folgen

$$\lim_{t \to \pm\infty} y'(t) = \lim_{t \to \pm\infty} f(y(t)) = \begin{cases} f(B) & t \to +\infty \\ & \text{für} \\ f(A) & t \to -\infty \end{cases}$$

und somit nach Präsenzübung 4 mit $f(A) > 0$ und $f(B) > 0$

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty\,;$$

dies ist ein Widerspruch zu $y(t) \in (a, b)$ für alle t. Also ist $A = a$ und $B = b$ zu wählen. Zusammenfassend ist also die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = a \quad \text{und} \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = b \quad .$$

d) Sei $y_0 > a$ mit $f(a) = 0$ und $f(x) < 0$ für $x > a$. Wie in c) zeigt, man, dass $y_0 > a$ aufgrund der Eindeutigkeit $y(t) > a$ für alle t impliziert. Da $f(x) < 0$ für alle $x > a$ ist, ist y streng monoton fallend. Sei die Lösung auf (t_-, t_+) definiert. Man folgert analog $t_+ = +\infty$ und $\lim_{t \to +\infty} y(t) = a$. Sei

$$A := \lim_{t \to t_-^+} y(t) \quad ;$$

es ist $A > a$, da y monoton fallend ist und den Wert a für $t \to +\infty$ annimmt. Für $A \in \mathbb{R}$ und $t_- > -\infty$ betrachte man die Fortsetzung

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} A & t = t_- \\ y(t) \quad \text{für} & (t_-, +\infty) \end{cases},$$

womit entgegen a) y nicht maximal wäre. Damit wäre die Kombination unmöglich. Man betrachte also $t_- = -\infty$:

$$\lim_{t \to -\infty} y'(t) = \lim_{t \to -\infty} f(y(t)) = f(A) < 0$$

für $A \in \mathbb{R}$. Nach Präsenzaufgabe 4 wäre damit $\lim_{t \to -\infty} y(t) = +\infty$. Damit ist also $A = \infty$.

Aufgabe 8.6

$f(t,y) = \sqrt{1+\mathrm{e}^t y^2(t)}\sin^3(y(t))$ ist bezüglich t und y auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Nach Satz 134 gibt es für jede Wahl von Anfangsbedingungen eine eindeutige maximale Lösung.

a) Sei $y(t) = C$ für alle t, dann

$$\begin{aligned} 0 &= y'(t) = \underbrace{\sqrt{1+\mathrm{e}^t C^2}}_{>0\,\forall\, t,C}\sin^3(C) \\ &\Leftrightarrow \\ 0 &= \sin(C) \\ C &= n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad . \end{aligned}$$

b) Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und y maximale Lösung dieses AWP mit $y(0) = y_0$.

Für bereits $y_0 = n\pi$ folgt aus der Eindeutigkeit $y(t) = n\pi$ für alle ganzen Zahlen n und $t \in \mathbb{R}$. Damit ist auch

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = n\pi \quad .$$

Sei nun $y_0 \in (n\pi, (n+1)\pi)$. Man betrachte zwei Fälle:

$$\begin{array}{ccc} \sin(y) & < & 0 \\ & \text{für} & y \in (n\pi,(n+1)\pi) \quad . \\ \sin(y) & > & 0 \end{array}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit gibt es keine t_1 und t_2, sodass $y(t_1) = n\pi$ und $y(t_2) = (n+1)\pi$, womit

$$n\pi < y(t) < (n+1)\pi \quad \forall t \quad ,$$

und wegen $\sqrt{1+\mathrm{e}^t y^2} > 0$ für alle t ist y monoton fallend für den ersten Fall und monoton steigend für den zweiten Fall.

Für den zweiten Fall betrachte $y(t)$ auf (t_1, t_2) mit den Grenzwerten

$$\begin{aligned} (n+1)\pi &\geq B = \lim_{t\to t_2^-} y(t) \\ n\pi &\leq A = \lim_{t\to t_1^+} y(t) \quad . \end{aligned}$$

Für $t_1 > -\infty$ oder $t_2 < \infty$ ließe sich dann die Lösung stetig fortsetzen, womit y aber nicht maximal wäre! Also $t_1 = -\infty$ und $t_2 = +\infty$. Für $A > n\pi$ ist $\sin(A) > 0$ und $y'(t) > \frac{1}{2}\sin^3(A) > 0$, sodass auch $\lim_{t\to-\infty} y'(t) > 0$. Unter Anwendung der Präsenzübung 4 ist also $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ und damit ein Widerspruch zu $n\pi < y(t) < (n+1)\pi \quad \forall t$. Also $A = n\pi$. Analog folgert man $B = (n+1)\pi$ für $t_2 \to +\infty$. Zusammenfassend: Für $\sin(y) > 0$ ist für die AB $y_0 \in (n\pi,(n+1)\pi)$ die Lösung monoton steigend, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und

$$\begin{aligned} (n+1)\pi &= \lim_{t\to+\infty} y(t) \\ n\pi &= \lim_{t\to-\infty} y(t) \quad . \end{aligned}$$

Mit analogen Rechenschritten folgt für $\sin(y) < 0$ mit der AB $y_0 \in (n\pi, (n+1)\pi)$, dass die Lösung monoton fallend wie auch auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und

$$\begin{aligned} (n+1)\pi &= \lim_{t\to-\infty} y(t) \\ n\pi &= \lim_{t\to+\infty} y(t) \quad . \end{aligned}$$