IfM
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Lösungen der Fingerübungen

Beachten Sie: Es gibt oft mehrere Lösungen, da es häufig die Möglichkeit zur Umindizierung und Indexverschiebung gibt. Die hier angegebene Lösung ist eine mögliche. Wenn Sie eine andere haben, sollten Sie aber nachprüfen, ob das Endergebnis in das hier angegebene umgeformt werden kann.

1. Finden Sie alle reellen Lösungen der Gleichungen:

   a)

$$\begin{aligned} & x+3=2-2x && \mid +2x-3 \\ \Leftrightarrow\ & 3x=-1 && \mid :3 \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{1}{3} && \text{ist die Lösung der Gleichung.} \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} & \frac{x}{3}-1=1-\frac{x}{2} && \mid +\frac{x}{2}+1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{3}+\frac{x}{2}=2 && NR: \tfrac{x}{3}+\tfrac{x}{2}=(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2})x=\tfrac{5}{6}x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5}{6}x=2 && \mid \cdot\frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{12}{5} && \text{ist die Lösung der Gleichung.} \end{aligned}$$

   c) $\frac{x+1}{x+2}=5$. Zunächst muss $x \neq -2$ sein, damit der Nenner ungleich Null ist. Genaueres kann man herausfinden durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x+2}=5 && \mid \cdot(x+2) \\ \Leftrightarrow\ & x+1=5x+10 && \mid -x-10 \\ \Leftrightarrow\ & 4x=-9 && \mid :4 \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{9}{4} && \text{ist die (einzige) Lösung der Gleichung.} \end{aligned}$$

   d) $x^2=4$ kann man lösen durch Ziehen der zweiten Wurzel. Hierbei ist wichtig zu beachten, dass sowohl ein positives, als auch ein negatives x quadriert eine positive Zahl ergeben. Es gibt also zwei Lösungen: $x_1=\sqrt{4}=2$ und $x_2=-\sqrt{4}=-2$ lösen beide die Gleichung.

   e) Mit Hilfe der binomischen Formel kann man die Gleichung $x^2+4x+4=0$ folgendermaßen umformen: $(x+2)^2=0$. $(x+2)^2$ kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist. Hier sind beide Faktoren gleich $x+2$, also: $x+2=0$. Durch Subtraktion von 2 erhält man dann die einzige Lösung $x=-2$.

f)

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - x && \mid + x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Man kann die Gleichung wieder durch Wurzelziehen weiter umformen und beachten, dass man analog zu d) zwei Lösungen x_1, x_2 erhält. Mit $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} x_{1/2} + \frac{1}{2} &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2} && \mid - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x_{1/2} &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also lösen $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ die Gleichung.

2. Schreiben Sie diese Summen, bzw. Produkte, mit Hilfe des in der Vorlesung eingeführten Summen-, bzw. Produktzeichens, auf:

   a) $4 + 5 + 6 + 7 + ... + n = \sum\limits_{i=4}^{n} i$

   b) $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 = \prod\limits_{k=1}^{7} 3k$

   c) $6n + 8n + 10n + 12n = \sum\limits_{r=3}^{6} 2nr$

   d) $(-3) \cdot 7 \cdot 101 = \prod\limits_{n \in \{-3,7,101\}} n$

   e) $3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot ... \cdot \frac{19}{9} = \prod\limits_{k=1}^{9} \frac{2k+1}{k}$

   f) $1 + 3 + 7 + 15 + 31 = \sum\limits_{n=1}^{5} (2^n - 1)$

3. Führen Sie bei den folgenden Summen und Produkten eine Umindizierung durch, so dass der Index n ist und bei 0 beginnt. Beispiel: $\sum_{i=3}^{5} i = \sum_{n=0}^{2}(n+3)$

   a) $\sum\limits_{k=4}^{10} 3k = \sum\limits_{n=0}^{6} 3(n+4)$ (mit $n = k - 4$, also $k = n + 4$)

   b) $\prod\limits_{t=-2}^{0} (4 - t) = \prod\limits_{n=0}^{2} (4 + n)$ (mit $n = -t$) oder $= \prod_{n=0}^{2}(6 - n)$ (mit $n = t + 2$)

   c) $\sum\limits_{p=5}^{10} t = \sum\limits_{n=0}^{5} t$

   d) $\prod\limits_{r=3}^{7} 4^{r-2} = \prod\limits_{n=0}^{4} 4^{n+1}$

e) $\sum\limits_{\alpha=2}^{8} (\alpha-2)(2\alpha+3) = \sum\limits_{n=0}^{6} n \cdot (2(n+2)+3) = \sum\limits_{n=0}^{6} n \cdot (2n+7)$

f) $\prod\limits_{i \in \{1,3,5,7\}} a_i = \prod\limits_{n=0}^{3} a_{2n+1}$

4. Fassen Sie zu einer Summe, bzw. einem Produkt, zusammen, wenn möglich:

a) $\prod\limits_{k=3}^{5} k \cdot \prod\limits_{t=7}^{9} (t-1) = \prod\limits_{k=3}^{5} k \cdot \prod\limits_{k=6}^{8} k = \prod\limits_{k=3}^{8} k$

oder $= \prod\limits_{k=3}^{5} k \cdot \prod\limits_{k=3}^{5} (k+3) = \prod\limits_{k=3}^{5} (k \cdot (k+3)) = \prod\limits_{k=3}^{5} (k^2+3k)$

b) $\sum\limits_{n=2}^{5} a_n - \sum\limits_{r=1}^{4} b_r = \sum\limits_{r=1}^{4} a_{r+1} - \sum\limits_{r=1}^{4} b_r = \sum\limits_{r=1}^{4} (a_{r+1} - b_r)$

c) $\sum\limits_{i=3}^{7} i + \sum\limits_{i=3}^{10} 3i = \sum\limits_{i=3}^{7} (i+3i) + \sum\limits_{i=8}^{10} 3i$ kann nicht zu einer Summe zusammen gefasst werden, da beide Summen unterschiedliche Summanden haben und über verschieden große Indexmengen summieren.

d) $\sum\limits_{t=4}^{8} 2^t + \sum\limits_{n=1}^{5} 2n = \sum\limits_{n=1}^{5} 2^{n+3} + \sum\limits_{n=1}^{5} 2n = \sum\limits_{n=1}^{5} (2^{n+3} + 2n) = 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{5} (2^{n+2} + n)$

e) $\prod\limits_{r=0}^{4} \kappa \cdot \prod\limits_{\kappa=5}^{15} \kappa$ kann nicht zu einem Produkt zusammen gefasst werden, da beide Produkte unterschiedliche Faktoren haben und über verschieden große Indexmengen laufen. Umformungen wie $= \prod\limits_{r=0}^{4} \kappa \cdot \prod\limits_{\kappa=0}^{10} (\kappa+5) = \prod\limits_{r=0}^{4} (\kappa \cdot (r+5)) \cdot \prod\limits_{r=5}^{10} (r+5)$ sind möglich, führen aber zu nichts.

f) $(\sum\limits_{i=0}^{2} c_i) \cdot (\sum\limits_{j=0}^{4} d_j) = \sum\limits_{i=0}^{2} \sum\limits_{j=0}^{4} c_i d_j$. Diese Doppelsumme kann nicht weiter vereinfacht werden, da bei einem Produkt von Summen beide Indizes erhalten bleiben müssen.