Lösungen zum ersten Test zur Selbstkontrolle „Analysis I“

Hier sind Musterlösungen. Wie immer gibt es meistens mehrere Möglichkeiten, eine Aufgabe zu lösen. Wenn Sie unsicher sind, ob ihre Lösung richtig ist, fragen Sie bitte Ihren Tutor.

Aufgabe 1.

a) Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$. Definieren Sie, was es bedeutet, dass f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist. Erklären Sie die Verbindung der Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität von f mit der Lösbarkeit der Gleichung $f(x) = y$.

Lösung:
f ist injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
f ist surjektiv, falls $f(X) = Y$ ist.
f ist bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
Weitere Möglichkeiten:
f ist injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *oder*
f ist injektiv, wenn es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
f heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Die Verbindung der obigen Begriffe mit der Lösbarkeit der Gleichung $f(x) = y$ ist wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ ist injektiv} & \Leftrightarrow & \text{die Gl. } f(x) = y \text{ hat für jedes } y \in Y \text{ höchstens eine Lösung} \\ f \text{ ist surjektiv} & \Leftrightarrow & \text{die Gl. } f(x) = y \text{ hat für jedes } y \in Y \text{ mindestens eine Lösung} \\ f \text{ ist bijektiv} & \Leftrightarrow & \text{die Gl. } f(x) = y \text{ hat für jedes } y \in Y \text{ genau eine Lösung} \end{array}$$

b) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildung injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist:

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Lösung:
g ist injektiv, aber nicht surjektiv.
Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} = y \\ &\overset{x \neq -1}{\Leftrightarrow} \quad x - 1 = (x+1)y \\ &\Leftrightarrow \quad x - xy = 1 + y \\ &\overset{y \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{1+y}{1-y} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung für alle $y \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung hat (und zwar für $y \neq 1$ eine und für $y = 1$ keine Lösung). Also ist g injektiv.

g ist nicht surjektiv, denn die Gleichung $g(x) = y$ hat keine Lösung für $y = 1$, wie die obere Äquivalenzkette zeigt.
Tatsächlich bekommt man $\frac{x-1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = x + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$, wenn man versucht die Gleichung für $y = 1$ zu lösen.
g ist nicht bijektiv, da g nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2.

a) Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

Lösung: Siehe Folie.

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \binom{n+1}{2}$$

Lösung: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: $\sum\limits_{k=1}^{1} (-1)^{1-k} k^2 = 1 = \binom{2}{2}$
Induktionsschritt: Angenommen, für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \binom{n+1}{2}.$$

Dann gilt:
$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} k^2 + (n+1)^2 = (-1) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{=} -\binom{n+1}{2} + (n+1)^2 = -\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + (n+1)^2 = (n+1)\left((n+1) - \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)!}{2!n!} = \binom{n+2}{2}$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.

a) Was versteht man unter dem Infimum bzw. Supremum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$? Hat jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum? ein Maximum?

Lösung: Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M, falls C die kleinste obere Schranke ist, d.h.
1) $x \leq C \quad \forall x \in M$
2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x > C - \varepsilon$.
Eine Zahl $D \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M, falls D die größte untere Schranke ist, d.h.
1) $x \geq D \quad \forall x \in M$
2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x < D + \varepsilon$.
Nicht jede Teilmenge des $\mathbb{R}$ hat ein Supremum, geschweige denn ein Maximum. Z.B. $\mathbb{R}$ hat weder Supremum noch Maximum.

b) Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Menge

$$\left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Sei $M = \left\{\frac{(-1)^n-1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$.
$\inf M = -2$, denn:
1) $\frac{(-1)^n-1}{n} \geq \frac{-2}{n} \geq -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2) $\forall \varepsilon > 0$ gibt es $x = -2 \in M$ mit $x < -2 + \varepsilon$
$\sup M = 0$, denn:
1) $\frac{(-1)^n-1}{n} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2) $\forall \varepsilon > 0$ gibt es $x = 0 \in M$ mit $x > 0 - \varepsilon$ ($\Leftrightarrow 0 \geq -\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \geq 0$)

c) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Beweisen oder widerlegen Sie:

Ist das Supremum von A positiv, so enthält A ein positives Element.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Da A nichtleer und beschränkt ist, besitzt A nach dem Supremumsaxiom ein Supremum. Sei $\alpha := \sup A$. Nach der Voraussetzung ist $\alpha > 0$. Nach der Definition des Supremums gibt es zu $\varepsilon := \alpha/2 > 0$ ein $a \in A$ mit $a > \alpha - \alpha/2 = \alpha/2$. Somit ist $a > \alpha/2 > 0$ ein positives Element von A.

Aufgabe 4.

a) Seien $z_1 = 1+2i$ und $z_2 = 1-i$. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und zeichnen Sie sie und z_1, z_2 in die komplexe Ebene ein:

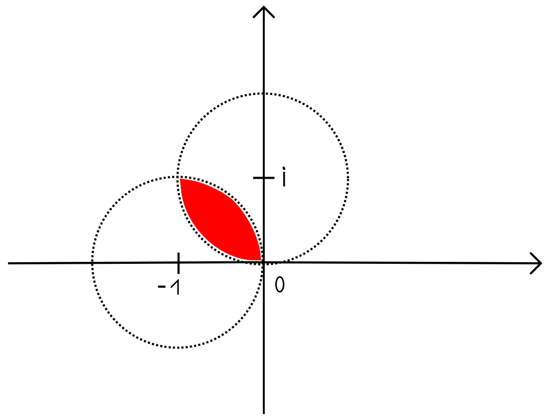
$$\overline{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, z_1^2, |z_2|, z_1 - z_2$$

Lösung: $\overline{z_1} = 1 - 2i$
$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i+2i^2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$
$z_1^2 = (1+2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$
$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$z_1 - z_2 = 1 - 1 + i(2 - (-1)) = 3i$
+ Skizze mit diesen Zahlen in der komplexen Ebene

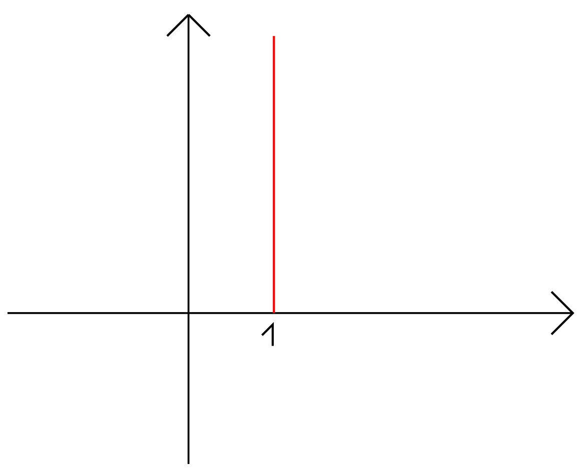
b) Skizzieren Sie in $\mathbb{C}$ die folgenden Mengen:

i) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < 1 \text{ und } |z + 1| < 1\}$
ii) $\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im} z = |z - 1|\}$

Lösung:



i
-1
0



1