Vorlesung 11

Randwertprobleme

In Anfangswertproblemen wird das Verhalten der Lösung an einem einzigen Punkt vorgeschrieben: dadurch wird die Lösung eindeutig bestimmt. In bestimmten Situationen muss man aber die Werte der Lösung an mehreren Punkten vorgeben, was einige Besonderheiten mit sich bringt. Wir betrachten eine Klasse solcher Problemstellungen für lineare Gleichungen zweiter Ordnung,

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \tag{49}$$

mit $a_0, a_1, f \in C^0\big([a,b]\big)$. Gesucht werden Lösungen, die die folgenden **Randbedingungen** an den Randunkten a und b erfüllen:

$$R_1 y := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad R_2 y := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \tag{50}$$

wobei $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ vorgegebene Konstanten sind. Das Problem (49)–(50) bezeichnet man als ein **Randwertproblem**. Die Lösbarkeit solcher Probleme wird durch die vorherigen Existenz-/Eindeutigkeitssätze nicht garantiert, und man kann Randwertprobleme konstruieren, die keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzen.

Beispiel 158. Das Problem $y'' = 0$ auf $[0,1]$ mit den Randbedingungen $y'(0) = y'(1) = 0$ besitzt unendliche viele Lösungen: jede konstante Funktion ist Lösung! Das Problem $y'' = 1$ mit denselben Randbedingungen besitzt aber keine Lösungen: das werden wir jetzt beweisen. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2$ besitzt die zweifache Nullstelle 0, also bilden $y_1(x) = 1$ und $y_2(x) = x$ ein Fundamentalsystem. Eine spezielle Lösung finden wir mit dem Zugang aus der letzten Vorlesung: die Inhomogenität ist $e^{\mu x}$, $\mu = 0$ ist zweifache Nullstelle von P ist, also haben wir eine Lösung $y_s(x) = \frac{x^2}{P''(\mu)} e^{\mu x} = \frac{1}{2}\,x^2$, und jede Lösung der Differentialgleichung hat die Form

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_s(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}\,x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dann $y'(x) = c_2 + 2x$, und die Randbedingungen $y'(0) = c_2 = 0$, $y'(1) = c_2 + 2 = 0$ können nicht gleichzeitig erfüllt werden. □

Also braucht man zusätzliche Bedingungen, um die eindeutige Lösbarkeit von (49)–(50) sicherzustellen.

Satz 159. *Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem für $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

(A) Für jede Vorgabe $f \in C^0\big([a,b]\big)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ *besitzt das Randwertproblem* (49)–(50) *eine eindeutig bestimmte Lösung,*

(B) Es gilt $\det \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$

Beweis. Sei y_s irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung (49), dann hat jede Lösung y von (49) die Form $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_s$, wobei die Abbildung

$$\text{Lösungsraum von (49)} \ni y \mapsto (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

bijektiv ist. Die Aussage (A) ist also genau dann erfüllt, wenn für jede Vorgabe $f \in C^0\big([a,b]\big)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, die Konstanten c_1, c_2 durch die Randbedingungen $R_1 y = \gamma_1$ und $R_2 y = \gamma_2$ eindeutig bestimmt sind. Die Randbedingungen ergeben das foldende Gleichungssystem für die Konstanten c_1 und c_2:

$$\begin{cases} c_1 R_1 y_1 + c_2 R_1 y_2 + R_1 y_s = \gamma_1, \\ c_1 R_2 y_1 + c_2 R_2 y_2 + R_2 y_s = \gamma_2, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - R_1 y_s \\ \gamma_2 - R_2 y_s \end{pmatrix}.$$

Da γ_1 und γ_2 beliebig gewählt werden können, kann der Vektor $\begin{pmatrix} \gamma_1 - R_1 y_s \\ \gamma_2 - R_2 y_s \end{pmatrix}$ beliebige Werte in $\mathbb{R}^2$ annehmen. Es folgt also aus den Ergebnissen der linearen Algebra, dass eine Lösung (c_1, c_2) genau dann existiert und eindeutig bestimmt ist, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix}$ intertierbar ist, d.h. wenn die Bedingung (B) erfüllt ist. □

Jetzt nehmen wir an, dass die Voraussetzungen des Satzes 159 für die eindeutige Lösbarkeit erfüllt sind: in diesem Fall gilt $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$ (sonst hätte man $R_1 y_1 = R_1 y_2 = 0$ und $\det = 0$) und $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$ (sonst würde $R_2 y_1 = R_2 y_2 = 0$ und $\det = 0$ gelten). Jetzt möchten wir eine Formel für die gesuchte Lösung finden. Zuerst werden wir die Problemstellung ein bisschen vereinfachen. Nämlich, man kann eine C^2-Funktion w finden, die die Randbedingungen $R_1 w = \gamma_1$ und $R_2 w = 0$ erfüllt (die Funktion w soll aber nicht unbedingt eine Lösung der Differentialgleichung sein!). Wir schreiben die gesuchte Lösung y von (49)–(50) als $y = z + w$, dann muss die neue unbekannte Funktion z die sogenannten homogenen Randbedingungen

$$R_1 z = R_2 z = 0 \tag{51}$$

sowie die neue Differentialgleichung

$$z''(x) + a_1(x) z'(x) + a_0(x) z(x) = g(x), \quad g := f - (w'' + a_1 w' + a_0 w), \tag{52}$$

erfüllen. Es reicht also aus, das neue Problem (51)–(52) mit homogenen Randbedingungen lösen zu können. Da es sich um eine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung handelt, nutzen wir zuerst denselben Ansatz als in der Methode der

Variation der Konstanten, aber mit einem *geeigneten* Fundamentalsystem (y_1, y_2), in dem y_1 bzw. y_2 die erste bzw. die zweite Randbedingung erfüllt: $R_1 y_1 = R_2 y_2 = 0$ (das ist immer möglich: Übung!). Dann gilt $R_2 y_1 \neq 0$ und $R_1 y_2 \neq 0$ (sonst wäre die Determinante im Satz 159(B) gleich Null). Für die Lösung z von (51)–(52) nutzen wir nun den Ansatz $z(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$: wir wissen schon, dass für

$$c_1 = -\int \frac{gy_2}{W}, \quad c_2 = \int \frac{gy_1}{W}, \quad W := \text{Wronski-Determinante von } y_1 \text{ und } y_2,$$

die Funktion z der Differentialgleichung genügt. Allerdings müssen noch die Randbedingungen erfüllt werden! Laut der Methode der Variation der Konstanten haben wir $z'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$, und

$$R_1 z = c_1(a)\underbrace{R_1 y_1}_{=0} + c_2(a) R_1 y_2 = c_2(a) R_1 y_2,$$
$$R_2 z = c_1(b) R_2 y_1 + c_2(b)\underbrace{R_2 y_2}_{=0} = c_1(b) R_2 y_1.$$

Wegen $R_2 y_1 \neq 0$ und $R_1 y_2 \neq 0$ gilt $R_1 z = R_2 z = 0$ genau dann, wenn $c_2(a) = c_1(b) = 0$, und daraus folgt die genaue Wahl der Funktionen c_1 und c_2:

$$c_1(x) = \int_x^b \frac{gy_2}{W}, \quad c_2(x) = \int_a^x \frac{gy_1}{W},$$

und man kann die gefundene Lösung z von (51)–(52) wie folgt umschreiben:

$$z(x) = y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(s)g(s)}{W(s)}\,ds + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(s)g(s)}{W(s)}\,ds = \int_a^b G(x,s)g(s)\,ds,$$
$$\text{wobei } G(x,s) := \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{W(s)}, & \text{für } x < s, \\ \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)}, & \text{für } s \leq x, \end{cases}$$

die sogenannte **Greensche Funktion des Randwertproblems** ist. Für jedes $s \in (a,b)$ ist $x \mapsto G(x,s)$ offenbar Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $[a,b] \setminus \{s\}$. Darüber hinaus ist diese Funktion stetig auf $[a,b]$ und erfüllt die Randbedingungen. Allerdings ist sie *nichtglatt* (das ist eine Besonderheit von Randwertproblemen in Vergleich zu den Anfangswertproblemen, die später auch für mehrdimensionale Problemen wichtig wird!):

$$\frac{\partial G}{\partial x}(s^+, s) - \frac{\partial G}{\partial x}(s^-, s) = \frac{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}{W(s)} = 1.$$

Beispiel 160. Wir möchten die Greensche Funktion des folgenden Randwertproblems auf $[0,1]$ bestimmen: $y'' + y = f$ mit $y(0) = y(1) = 0$. Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ hat einfache Nullstellen $\pm i$, also ist $(z_1, z_2) = (\cos x, \sin x)$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung. Wir prüfen zuerst, ob die Greensche Funktion überhaupt existiert: wir betrachten die Matrix

$$(R_j z_k) = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix},$$

ihre Determinante ist $\sin 1 \neq 0$, also ist das Randwertproblem für alle f eindeutig lösbar. Wir brauchen jetzt ein Fundamentalsystem (y_1, y_2) mit $y_1(0) = y_2(1) = 0$. Die beiden y_j müssen lineare Kombinationen von $(\cos x, \sin x)$ sein, also kann man z.B. $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \sin(1-x)$ wählen. Ihre Wronski-Determinante W ist

$$\begin{aligned} W(x) &= \sin(x)\big(-\cos(1-x)\big) - \cos(x)\sin(1-x) \\ &= -\big(\sin(x)\cos(1-x) + \cos(x)\sin(1-x)\big) = -\sin(1), \end{aligned}$$

und die gesuchte Greensche Funktion ist $G(x,s) = \begin{cases} -\frac{\sin(x)\sin(1-s)}{\sin(1)}, & \text{für } x < s, \\ -\frac{\sin(1-x)\sin(s)}{\sin(1)}, & \text{für } s \leq x. \end{cases}$.

Lineare Systeme erster Ordnung

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen für lineare Differentialgleichungen höheren Ordnung haben wir durch die Reduktion auf Systeme erster Ordnung bewiesen: diese Systeme hatten aber eine ziemlich spezielle Struktur (siehe Satz 138). Jetzt möchten wir allgemeine Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung untersuchen. Wir werden wieder die Bezeichnung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ verwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Durch $M_n(\mathbb{K})$ bezeichnen wir die Menge aller Matrizen $n \times n$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Das ist offenbar ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, falls man die Summe von zwei Matrizen udn die Multiplikation mit Konstanten auf natürliche Weise definiert:

$$\text{für } \lambda \in \mathbb{K}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Durch $\|A\| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2}$ wird eine Norm auf $M_n(\mathbb{K})$ definiert (Übung!).

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein $\mathbb{K}$-wertiges **lineares System erster Ordnung** auf I ist eine Gleichung der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \tag{53}$$

wobei $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen sind. Gesucht wird eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{K}^n$, die die Gleichung (53) erfüllt. Ein Anfangswertproblem für (53) besteht darin, Lösungen y zu finden, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllen, wobei $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben sind.

Die Abbildungen

$$I \ni t \mapsto A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \quad I \ni t \mapsto b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

sind offenbar genau dann stetig, wenn alle Funktionen $a_{jk}, b_j : I \to \mathbb{K}$ stetig sind, und man kann (53) auch in detallierter Form darstellen:

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ \qquad \dots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

wobei n unbekannte differenzierbare Funktionen $y_1, \dots, y_n$ zu bestimmen sind.

Satz 161. *Für alle* $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ *besitzt das Anfangswertproblem* $y(t_0) = y_0$ *für* (53) *eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz* I *definiert ist.*

Beweis. Wir haben die Gleichung $y'(t) = F\big(t, y(t)\big)$ mit $F(t, y) = A(t)y + b(t)$, und

$$\|F(t,y) - F(t,z)\| = \big\|A(t)y + b(t) - A(t)z - b(t)\big\| = \big\|A(t)(y-z)\big\| \le \|A(t)\|\|y-z\|$$

(Übung!). Da die Funktion $t \mapsto A(t)$ stetig ist, ist sie auf jedem kompakten (=endlichen und abgeschlossenen) Teilintervall $J \subset I$ beschränkt: es existiert $C_J > 0$ mit $\|A(t)\| \le C_J$ für alle $t \in I$ (Satz 125). Sei J ein kompaktes Teilintervall mit $t_0 \in J$, dann ist F Lipschitzsch bzgl. y auf $J \times \mathbb{K}^n$, und nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung auf J. Durch Ausschöpfung von I durch kompakte Intervalle wird dann gezeigt, dass die Lösung auch auf I definiert und eindeutig bestimmt ist. □

Falls man jetzt die Sprache der linearen Algebra nutzt, kann man viele Aussagen über lineare Differentialgiechungen auf lineare Systeme erster Ordnung direkt übertragen. Betrachte die lineare Abbildung

$$L : C^1(I, \mathbb{K}^n) \to C^0(I, \mathbb{K}^n), \quad (Ly)(t) = y'(t) - A(t)y(t),$$

dann lässt sich das System (53) in $Ly = b$ umformen. Daraus folgt (Satz 140) die Struktur der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} &\text{Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung } Ly = b \ (y' = Ay + b) \\ &\qquad = \text{irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung} \\ &\qquad + \ \text{allgemeine Lösung der homogenen Gleichung } Ly = 0 \ (y' = Ay). \end{aligned}$$

Satz 162. *Die Lösungsmenge von* $y' = Ay$ *ist ein* n*-dimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

Beweis. Der Lösungsraum V ist der Nullraum der obigen linearen Abbildung L und damit ein Vektorraum. Wähle $t_0 \in I$ und betrachte die lineare Abbildung $\Phi : V \ni y \mapsto y(t_0) \in \mathbb{K}^n$. Sie ist injektiv: die einzige Lösung y mit $\Phi(y) = 0$ ist die Nullfunktion (Eindeutigkeit!), und auch surjektiv: nach dem Satz 161 gibt es zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung y mit $\Phi(y) = y_0$. Aus der Existenz einer bijektiven linearen Abbildung $\Phi : V \to \mathbb{K}^n$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. □

Ein **Fundamentalsystem** für das System (53) ist eine Basis im Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems $y' = Ay$; nach dem Satz 162 besteht ein Fundamentalsystem aus n linear unabhängigen **Vektor**funktionen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$. Falls man ein Fundamentalsystem $(y_1, \dots, y_n)$ und irgendeine Lösung y_s der inhomogenen Systems (53) findet, dann kann man die Lösungen y von (53) als

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) + y_s(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K},$$

schreiben, wobei die Konstanten c_j durch die Lösung c_j eindeutig bestimmt sind.

Homogene lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es wurde schon oben erwähnt, dass es für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung kein allgemeines Lösungsverfahren existiert. Da solche Gleichungen nur ein spezieller Fall von linearen Systemen sind, gibt auch auch für lineare Systeme keine unverselle Lösungsmethode. Daher werden wir uns (heute und auch nächste Woche) auf Systemen mit konstanten Koeffizienten konzentrieren: solche Probleme kann man auf gewisse Fragestellungen der linearen Algebra reduzieren.

Sei also A eine $n \times n$ Matrix, $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$, $a_{jk} \in \mathbb{K}$. Wir wollen für das homogene System $y'(t) = Ay(t)$ ein Fundamentalsystem bestimmen. Wir versuchen zuerst mit dem schon bekannten Ansatz $y(t) = e^{\lambda t} v$, wobei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ (also ist v ein Vektor!). Wegen $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$ und $Ay(t) = e^{\lambda t} Av$ ist die Vektorfunktion y genau dann Lösung von $y' = Ay$ ist, wenn $Av = \lambda v$. Uns interessiert natürlich der Fall $v \neq 0$ (für $v = 0$ erhalten wir die triviale Lösung $y \equiv 0$), daher muss v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ sein. Dieser ziemlich naiver Zugang liefert für *einige (aber nicht alle!)* Matrizen A vollständige Lösung von $y' = Ay$:

Satz 163. *Nehme an, es existiert eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Dann bilden die Vektorfunktionen $y_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, $j = 1, \dots, n$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.*

Beweis. Wir haben schon oben gezeigt, dass alle y_j Lösungen sind. Die Vektoren $y_j(0) = v_j$ sind linear unabhängig (da v_j eine Basis bilden), daher sind auch die n Vektorfunktionen y_j linear unabhängig. □

Bemerkung 164 (Reellwertiges Fundamentalsystem). Falls die Matrix A nur relle Einträge hat, dann ist es sinvoll, ein reellwertiges Fundamentalsystem zu konstruieren. Falls alle λ_j reell sind, kann man auch $v_j \in \mathbb{R}^n$ wählen, damit sint y_j schon reellwertig. Ist λ nichtreeller Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor v, so ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{v}$. Man erhält ein neues reellwertiges Fundamentalsystem, indem man jedes solche Paar $(e^{\lambda t}v, e^{\overline{\lambda} t}\overline{v})$ durch $\big(\mathrm{Re}(e^{\lambda t}v), \mathrm{Im}(e^{\lambda t}v)\big)$ ersetzt.

Aus der linearen Algebra ist es bekannt, dass λ genau dann Eigenwert von A ist, wenn $P(\lambda) = 0$ gilt, wobei

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad I = \text{Einheitsmatrix},$$

das charakteristische Polynom von A ist. Eine Matrix A erfüllt die Annahme des Satzes 163 genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix U und eine diagonale Matrix D existieren mit $U^{-1}AU = D$ (solche Matrizen A heissen *diagonalisierbar*). Falls P genau n verschiedene Nullstellen hat, dann ist A diagonalisierbar. Im Allgemeinen kann man aber vom charakterischen Polynom *nicht* ablesen, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

Beispiel 165. (A) Betrachte das System $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$ oder (in der Matrixform) $Y' = AY$ mit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakterische Polynom P von A ist

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Die Nullstellen von P sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$: das ist gerade der "einfache" Fall. Wir brauchen jetzt eine Basis in jedem $\ker(A - \lambda_j I)$, d.h. im Lösungsraum des Systems $\begin{cases} (1-\lambda_j)x + 2y = 0, \\ 2x + (1-\lambda_j)y = 0. \end{cases}$ Für λ_1 erhält man das System $\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$ der Lösungsraum ist eindimensional: wähle z.B. $v_1 = (1, -1)$ als Basisvektor. Für λ_2 ist $\begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ zu lösen, der Lösungsraum ist wieder eindimensional, wir nehmen $v_2 = (1, 1)$ als Basisvektor. Dadurch entsteht das Fundamentalsystem

$$Y_1(t) = e^{\lambda_1 t}v_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{\lambda_2 t}v_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung Y hat die Form $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \\ -c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(B) Betrachte $Y' = AY$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1\cdot(-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

die Nullstellen sind $1 \pm i$. Für $\lambda = 1+i$ finden wir den Eigenvektor $v = (1, i)$, automatisch ist $\overline{v} = (1, -i)$ Eigenvektor für $1-i$ (da die Matrix A reell ist). Daraus entsteht ein komplexwertiges Fundamentalsystem $e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie eine reellwertigs Fundamentalsystem (y_1, y_2), $y_1 = \operatorname{Re}\left[e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $y_2 = \operatorname{Im}\left[e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Dank

$$e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\, e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

haben wir $y_1 = e^t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $y_2 = e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Alle reellwertigen Lösungen haben die Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(C) Betrachte das System $Y' = AY$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 4\cdot(-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

hat die zweifache Nullstelle 1, aber $\ker(A - I)$ ist eindimensional! Man kann also keine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus den Eigenvektoren von A bilden, da die Eigenvektoren von A nur einen eindimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ erzeugen. Daher ist A nicht diagonalisierbar und der Satz 162 nicht anwendbar. Systeme $Y' = AY$ mit nichtdiagonalisierbaren Matrizen A werden wir in der nächsten Vorlesung genauer betrachten.