Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 9 - Modul mat110

Abgabe 30.06.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte)**.**

(a). Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $F_p := \sum_{i=0}^{p-1} t^i \in \mathbb{Q}[t]$ das Minimalpolynom von $\zeta_p := e^{\frac{2\pi i}{p}}$ über $\mathbb{Q}$ ist und geben Sie den Körpererweiterungsgrad $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}]$, sowie eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ an. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ bereits alle Nullstellen von F_p liegen.

(b). Konstruieren Sie zu den folgenden Polynomen einen Körper $K \subsetneq \mathbb{C}$ über dem f_i zerfällt und bestimmen Sie jeweils den Körpererweiterungsgrad $[K : \mathbb{Q}]$:

$$\text{(i)}\ f_1 = t^4 - 5 \in \mathbb{Q}[t], \quad \text{(ii)}\ f_2 = t^4 + 1 \in \mathbb{Q}[t].$$

(c). Geben Sie jeweils einen Körper K, ein Polynom $f \in K[t]$ vom Grad $n \geq 2$ und einen Körper $L \supsetneq K$ über dem f erfällt an, sodass

$$\text{(i)}\ [L : K] = n, \qquad \text{(ii)}\ [L : K] = n!, \qquad \text{(iii)}\ n < [L : K] < n!.$$

Aufgabe 9.2 (8 Punkte)**.** Sei $f := t^4 + t^3 + 2t^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[t]$.

(a). Zerlegen Sie f in irreduzible Polynome aus $\mathbb{Z}_3[t]$.

(b). Zeigen Sie, dass es einen irreduziblen Faktor $h \in \mathbb{Z}_3[t]$ von f vom Grad > 2 und eine Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{Z}_3$ gibt, sodass h eine Nullstelle $\alpha \in K$ hat. Geben Sie eine Basis von K als $\mathbb{Z}_3$-Vektorraum an und bestimmen Sie $[K : \mathbb{Z}_3]$.

(c). Zeigen Sie, dass f über K sogar zerfällt, indem Sie f in $K[t]$ in Linearfaktoren zerlegen. Stellen Sie die Linearfaktoren mit Hilfe der Basis aus (b) dar.
Hinweis: Betrachten Sie $\alpha + 1$ *und* $\alpha + 2$.

Aufgabe 9.3 (2 Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{Z}_6$ und $M := R \times R$. Überprüfen Sie die Familie $X := ((2,4))$ auf lineare Unabhängigkeit über R.