Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 10 - Modul mat110

Abgabe 07.07.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Aufgabe 10.1 (6 Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Wir definieren

$$\mathrm{Hom}_R(R,\, M) = \{\phi : R \to M \mid \phi \text{ ist ein } R\text{-Modulhomomorphismus}\}.$$

(a). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_R(R,\, M)$ mit den folgenden Operationen einen R-Modul bildet: Zu $a,\, r \in R$ und $\phi,\, \psi \in \mathrm{Hom}_R(R,\, M)$ definieren wir $(\,\phi\, +\, \psi\,)\,(a) \,:=\, \phi\,(a) \,+\, \psi\,(a)$ und $(\,r \,\cdot\, \phi\,)\,(a) \,:=\, r \,\cdot\, \phi\,(a)$.

(b). Beweisen Sie, dass $M \,\cong\, \mathrm{Hom}_R(R,\, M)$. *Hinweis: Ein Element $m \in M$ induziert einen R-Modulhomomorphismus: Für ein $a \in R$ setze $a \mapsto a\, m$.*

Aufgabe 10.2 (8 Punkte)**.** Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_K(\,V\,)$.

(a). Zeigen Sie: Mit der Skalarmultiplikation $\cdot_F : K[\,t\,] \times V \to V$, $(\,p\,,\, v\,) \mapsto p \,\cdot_F\, v \,:=\, (\,p(\,F\,)\,)\,(\,v\,)$ wird V zu einem $K[\,t\,]$-Modul. *Kommentar: Dieses Skalarmultiplikation ist später in der Vorlesung noch von besonderer Bedeutung.*

(b). Zeigen Sie: Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V als K-Vektorraum, so ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem des $K[\,t\,]$-Moduls V unter der Skalarmultiplikation in (a).

(c). Sei nun $F : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ durch $(\,x\,,\,y\,)^T \mapsto (\,x\,,\, x+y\,)^T$ gegeben und sei $\mathcal{B} = \big((\,1\,,\,0\,)^T\,,\,(\,0\,,\,1\,)^T\big)$. Bildet $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}[\,t\,]$-Moduls $\mathbb{R}^{2\times 1}$?

Aufgabe 10.3 (6 Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring und $\mathcal{B} \,=\, (\,v_1\,,\,\ldots\,,\,v_n\,)$ ein Basis des R-Moduls $R^{n\,\times\,1}$. Seien nun $b_1\,,\,\ldots\,,\,b_n \,\in\, R$ und $M \,:=\, \mathrm{Spann}_R\,(\,b_1\,v_1\,,\,\ldots\,,\,b_n\,v_n\,) \,\subseteq\, R^{n\,\times\,1}$. Zeigen Sie, dass

$$R^{n\,\times\,1}\!\big/ M \,\cong\, R\big/\langle b_1\rangle \,\times\, \cdots \,\times\, R\big/\langle b_n\rangle.$$

Folgern Sie für den Fall, dass R ein Integritätsring, jedoch kein Körper ist, dass es ein System $(\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n\,)$ von Elementen des R-Moduls $R^{n\,\times\,1}$ gibt, welches zwar linear unabhängig ist, allerdings keine Basis von $R^{n\,\times\,1}$ bildet.