SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 4

Abgabefrist: bis zum 22.05.2020 (Freitag!) um 10 Uhr
als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (1+1+2+2 Punkte). Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (a,b)$.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in (a,b)$ betrachte das $n$te Integralrestglied in der Taylorformel,

$$R_n(x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Zeigen Sie die Gleichheit $R_n(x_0,x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}\big(x_0 + s(x-x_0)\big) ds.$

2. Sei $\varepsilon > 0$ mit $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $R_n(x_0, x_0+\varepsilon) \leq f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)$, (b) $|R_n(x_0,x)| \leq \Big(\dfrac{|x-x_0|}{\varepsilon}\Big)^{n+1} R_n(x_0, x_0+\varepsilon)$.

3. Zeigen Sie, dass zu jedem $x_0 \in (a,b)$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \text{ für alle } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, nichtnegativ, Regelfunktion auf jedem Intervall $[1, R]$ mit $R > 1$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \int_1^{n+1} f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

konvergiert. Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton und beschränkt ist.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte). Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf die Konvergenz. (Das Grenzwertkriterium aus der Präsenzaufgaben kann bei Bedarf genutzt werden.)

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + e^x - 1}, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2}\, dx.$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte). Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

Präsenzaufgaben

1. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie die Identität
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n(x-x_0)^n\,dx \text{ für alle } a, b \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

2. (Grenzwertkriterium) Seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ strikt positiv und stetig. Nehme an, dass der Grenzwert $C := \lim_{x \to b^-} f(x)/g(x)$ existiert und positiv ist ($0 < C < \infty$). Zeigen Sie, dass die uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_a^b f$ und $\displaystyle\int_a^b g$ dasselbe Konvergenzverhalten haben.

3. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Integrale:
$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^1 (\ln x)^3\,dx, \quad \text{(d)} \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx,$$
$$\text{(e)} \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx, \quad \text{(f)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$$

4. Berechnen Sie $\lim_{a \to 1^-} \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$. Ist $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-1}\,dx$ konvergent?

5. Wir betrachten $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$ mit $s \in \mathbb{R}$.
   (a) Finden Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die das Integral $\Gamma(s)$ konvergiert. Betrachten Sie separat $\displaystyle\int_0^1$ und $\displaystyle\int_1^{\infty}$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für alle zulässigen s.
   (c) Berechnen Sie $\Gamma(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6. Wir wollen das uneigentliche Integral $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln \sin x\,dx$ ausrechnen. Zeigen Sie folgende Gleichheiten:
$$\text{(a) } I = 2\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx, \quad \text{(b) } I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(2x)\,dx, \quad \text{(c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\,dx.$$
und leiten Sie her, dass $I = -\pi \ln 2$. (Für die Frage (a) kann man die Substition $x = \pi - y$ nutzen.)

7. Zeigen Sie, dass die Integrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ und $J = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ konvergieren und dass $I + J = 0$.

8. Auf $[0, +\infty)$ betrachte die Funktionen $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n} e^{-x/n}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Zeigen Sie, dass f_n gleichmässig auf $[0, \infty)$ gegen eine Funktion f konvergieren (als $n \to \infty$).
   (b) Hat man die Gleichheit $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\infty} f_n$?