Anne Frühbis-Krüger
Modul 5.01.111 (mat110)

SS 2020
PROBEKLAUSUR

Algebra 1 – mat110 (Aufg. 1-9) und mat200 (Aufg. 1-6)

Probeklausur

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Raum: ______________________

Bitte beachten Sie die unten und auf der Vorderseite des nächsten Blattes angegebenen Hinweise. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie deren Kenntnisnahme.

Unterschrift: ______________________

Für Aufgabe 1 sind kurze, nachvollziehbare Begründungen nötig. Diese sollen an der dafür vorgesehenen Stelle eingetragen werden. Notizen auf der Folgeseite sind für Ihre Überlegungen und gehen nicht in die Bewertung ein.

Für Aufgaben 2 bis 9 sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf den Folgeseiten fort. Das Vorhandensein einer Folgeseite bedeutet nicht zwingend, dass eine solche ausgefüllt werden muss. Am Ende des Klausurbogens befinden sich weitere Blankoseiten.

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
$\sum$	90	

Art der Punkte	optimal	erreicht
Klausursumme	90	
Bonus	9	
Gesamt	99	
Note	1.0	

Hinweise zur Durchführung der Klausur:

- Die Klausur untersteht den Richtlinien der Niedersächsischen Verordnung zur Bekämpfung der Corona-Pandemie und den darauf fußenden Handreichungen zur Durchführung von Klausuren während der Corona-Pandemie. Sollte einer der folgenden Punkte, zu einer solchen übergeordneten Regelung im Widerspruch zu stehen scheinen, so ist diese Aussage nichtig und stattdessen gilt die entsprechende allgemeine Regelung – die anderen Punkte bleiben im dem Fall davon unberührt.
- Von 07:40 bis 07:50 Uhr erhalten Sie Zeit, um die Corona-spezifischen Formulare auszufüllen, von 07:50-08:00 um die Klausur zu lesen und das Deckblatt und die Kopfzeilen leserlich auszufüllen. Um 08:00 Uhr beginnt die Bearbeitungszeit der Klausur von 120 Minuten (mat200) bzw. 180 Minuten (mat110).
- Tragen Sie bitte auf jedes bearbeitete Blatt Ihren Namen in Blockbuchstaben sowie Ihre Matrikelnummer ein. Blätter ohne Namen können nicht in die Wertung der Klausur eingehen und werden daher auch *nicht* korrigiert.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben auf 9 durchnummerierten Blättern und einem unnummerierten Deckblatt. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars und melden Sie sich unverzüglich im Falle fehlender Seiten oder offensichtlicher Fehldrucke.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis sowie einen amtlichen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass, Führerschein, Aufenthaltstitel oder Duldung) bereits beim Betreten des Gebäudes/Klausurraumes in der Hand und legen Sie ihn während der Klausur mindestens einen Platz neben sich auf Ihrem Tisch bereit, damit wir die Anwesenheitskontrolle reibungslos durchführen können.
- Bitte schalten Sie Mobilfunkgeräte vor Beginn der Klausur aus und verstauen Sie diese in Ihren Taschen.
- Es darf nur mit einem blauen oder schwarzen dokumentenechten Stift geschrieben werden (auf keinen Fall mit rot, grün oder Bleistift). Es darf kein Tipp-Ex benutzt werden.
- Erlaubte Hilfsmittel (vollständige Liste): 1 DIN A4 Blatt in eigener Handschrift, dokumentenechte Stifte in blau oder schwarz, analoge Zifferblattuhr, Snack, Getränk, Händedesinfektionsmittel und Maske.
- Die Heftklammern der Klausur dürfen nicht gelöst werden.
- Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur.
- Sollte der unterhalb des Aufgabentextes zur Verfügung stehende Platz (inklusive eventuell zur Bearbeitung der Aufgabe vorgesehene Folgeseiten) nicht zu Bearbeitung ausreichen, verwenden Sie bitte die Blankoseiten am Ende der Klausur und machen Sie bitte einen Vermerk über die Fortsetzung der Aufgabe. Sollte das zur Verfügung gestellte Papier danach nicht ausreichen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden.
- Bei manchen Rechenaufgaben bietet es sich an, eine Probe zu machen.
- Wenn Sie während der Bearbeitungszeit auf Toilette müssen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Die Aufsicht wird dann den Toilettengang begegnungsfrei organisieren, was vermutlich nicht ohne Störung anderer Teilnehmer (z.B. Aufsetzen von Mund-Nase-Schutz durch andere Teilnehmer auf dem Weg, Aufstehen zum Passieren lassen) möglich sein wird. Es darf stets nur eine Person gleichzeitig die Toilette aufsuchen. Die Klausur verbleibt in der Zeit zugeblättert am Platz.

- Während der Klausur herrscht Stille. Sollte doch Kommunikation mit einer Aufsicht unumgänglich sein, so setzen Sie bitte Ihren Mund-Nase-Schutz auf und geben bitte Handzeichen, Eine Aufsichtsperson wird sich so leise wie unter den Abstandsregelungen möglich Ihrer Frage annehmen.

- Sie dürfen die Bearbeitung Ihrer Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit zwar beenden, aber den Hörsaal aus Hygieneregelungen **nicht** vorzeitig verlassen.

- Bitte legen Sie bei Klausurrende Ihre Klausur sowie den unterschriebenen Belehrungsbogen zu Verhaltensrichtlinien und den ausgefüllten Datenerfassungsbogen auf getrennte Stapel auf Ihren Tisch, so dass sie von weitem sichtbar sind. Dann packen Sie zusammen und verlassen gemäß Ansage der Aufsichten zügig Klausurraum und Gebäude.

- Bitte entsorgen Sie nach der Klausur den eigenen Müll in eine eigene mitgebrachte Tüte.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (5 × 2P). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung (kein formaler Beweis gefordert).

(a). $\langle x^2-9, x^2+3x\rangle_{\mathbb{Q}[x]} \neq \mathbb{Q}[x]$

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(b). Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Die Menge $U := \{x^4 \mid x \in R\}$ ist ein Ideal in R.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(c). $\mathbb{Z}[x]/\langle x-2, 6\rangle$ ist nullteilerfrei.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(d). Die Relation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow |a| = |b|$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$, wobei $|.|$ den Betrag einer komplexen Zahl bezeichnet.

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(e). Sei α eine Nullstelle eines Polynoms vom Grad 4 in $\mathbb{R}[t]$. Dann gilt $[\mathbb{R}(\alpha) : \mathbb{R}] \leq 4$

Die Aussage ist ________________.

Begründung:

(Raum für Notizen zu Aufgabe 1)

Aufgabe 2 (4P + 3P + 3P).

(a). Stellen Sie mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus $x^3 + 2x$ als $\mathbb{Q}[x]$-Linearkombination von $x^4 - 4$ und $x^5 + 2x^3 + x^2 + 2$ dar.

(b). Exisitieren $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit

$$a \cdot 768 + b \cdot 243 + c \cdot 375 = 36?$$

(Die Bestimmung von a, b, c ist nicht gefordert!)

(c). Sei R ein euklidischer Ring, seien $a, b \in R \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \cdot b \rangle \iff \langle a, b \rangle = R$$

(Fortsetzung von Aufgabe 2)

Aufgabe 3 (3P + 3P + 4P).

(a). Entscheiden Sie, ob es sich bei $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1 \in \mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 1\rangle$ um einen Nullteiler in dem angegebenen Faktorring handelt.

(b). Entscheiden Sie, ob $n = 5$ Quadrat eines Elements in $\mathbb{Z}/\langle 11\rangle$ ist.

(c). Wieviele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}/\langle 34\rangle$?

Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

(Fortsetzung von Aufgabe 3)

Aufgabe 4 (7P + 3P). **(a).** Bestimmen Sie alle Lösungen für folgendes System von simultanen Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \bmod 5 \\ x &\equiv 5 \bmod 7 \\ x &\equiv 2 \bmod 11. \end{aligned}$$

(b). Sei R ein Integritätsring und seien I_1, I_2 teilerfremde Ideale in R.
Zeigen Sie, dass für jedes $a \in R$ gilt:

$$[a]_{I_1 I_2} \in (R/(I_1 I_2)) \text{ ist Nullteiler} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists j \in \{1,2\},\ \exists [b]_{I_j} \in (R/I_j) : [a]_{I_j}[b]_{I_j} = [0]_{I_j}$$

(Fortsetzung von Aufgabe 4)

Aufgabe 5 (6P + 4P). **(a).** Entscheiden Sie die Reduzibilität/Irreduzibilität der folgenden Polynome :

$$f_1 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x], \quad f_2 = x^4 + 15x + 5 \in \mathbb{Q}[x], \quad f_3 = 2x^3 + 12x^2 - 4 \in \mathbb{Z}[x]$$

(b). Entscheiden Sie, welche der folgenden Körpererweiterungen endlichen Grad haben:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{128}\right) : \mathbb{Q}\right] \quad \text{und } [(\mathbb{Q}[x]/\langle x - \pi \rangle) : \mathbb{Q}]$$

Wichtig: Ihre Behauptungen sind durch Rechnung oder Argumentation zu beweisen!

(Fortsetzung von Aufgabe 5)

Aufgabe 6 (6P + 4P). **(a).** Sei $\alpha = \sqrt{12} + \sqrt{11} \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie ein Minimalpolynom $f_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von α über $\mathbb{Q}$ sowie eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Bestimmen sie außerdem $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{12}, \sqrt{11}\right) : \mathbb{Q}(\alpha)\right]$! Handelt es sich bei $\mathbb{Q}\left(\sqrt{12}, \sqrt{11}\right) : \mathbb{Q}$ um eine einfache Körpererweiterung ?

(b). Sei $L : K$ eine Körpererweiterung, sei $x, y \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie:

$$x + y \text{ ist algebraisch über } K.$$

(Fortsetzung von Aufgabe 6)

Aufgabe 7 (5P + 5P). **(a).** *Rang freier Moduln an Beispielen*

(b). *Smith-Normalform an gegebenem Beispiel*

(Fortsetzung von Aufgabe 7)

Aufgabe 8 (10P). *Frobenius-Normalform in Beispiel ausrechnen und ggf. Ergebnis interpretieren.*

(Fortsetzung von Aufgabe 8)

Aufgabe 9 (6P + 4P). **(a).** *Jordan-Normalform in konkretem Beispiel.*

(b). *theoretischere Aufgabe zu Jordan-Normalform.*

(Fortsetzung von Aufgabe 9)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)