SS 2020 • Analysis IIa • Klausur vom 30.07.2020 (8 Uhr)

Hinweise:

(a) **Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben. Nutzen Sie für die Bearbeitung die folgenden Blätter an der jeweiligen Aufgabe.** Am Ende sind drei weitere Blätter angeheftet. Wenn nötig, können Sie von den Mitarbeitern weiteres Papier erhalten. Verweisen Sie bei der Nutzung zusätzlicher Blätter auf die entsprechende Seite und die Nummer der Aufgabe.

(b) **Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in der angegebenen Fußzeile.** Bitte lösen Sie die Heftklammern nicht. Schreiben Sie deutlich und markieren Sie Ihre Hauptlösung sowie auch Nebenrechnungen oder missglückte Versuche. Argumentieren Sie logisch korrekt und vollständig. Geben Sie Lösungsideen oder Teillösungen an, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht vollständig bearbeiten.

(c) **Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten.** Es können nur Lösungen bewertet werden, die mit einem dokumentenechten Stift verfasst wurden (Kugelschreiber, Füllfederhalter, kein Tintenlöscher, kein Bleistift). Es sind außer Ihrem Verstand und einem Stift **keine Hilfsmittel erlaubt**.

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Unterschrift:

Bewertung (wird von den Tutoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Erreichte Punkte						
Bonuspunkte						
Gesamtpunktzahl						
Note						

Aufgabe 1 (3+3+3+3 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. In jedem metrischen Raum enthält jede nichtleere Menge eine nichtleere offene Teilmenge.
2. Jede lipschitzsche Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
3. Jede Kontraktion ist eine injektive Abbildung.
4. Für beliebige metrische Räume (X, d) und beliebige Teilmengen $A, B \subset X$ gilt $\partial A \cup \partial B = \partial(A \cup B)$.

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2 (3+3+3+3 Punkte)

1. Bestimmen Sie $\int x^2 e^{-x}\,dx$.
2. Berechnen Sie $\int_0^\pi x \sin x\,dx$.
3. Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.
4. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\big(\ln(n+1)\big)^2}$ auf dessen Konvergenz.

Aufgabe 3 (4+3+3+1 Punkte)

1. Bestimmen Sie die maximale Lösung (inkl. Definitionsbereich) des Anfangswertproblems
$$y'(x) = e^{-y(x)} \quad , \quad y(0) = 0.$$

2. Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung erster Ordnung
$$y'(x) = 2xy(x) + xe^{x^2} \quad . \tag{1}$$

   (a) Finden Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

   (b) Bestimmen Sie irgendeine Lösung von (1) (z.B. mittels der Variation der Konstanten).

   (c) Geben Sie die allgemeine Lösung von (1) an.

Aufgabe 4 (4+4+1+4 Punkte)

1. Betrachten Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = \sin x \quad . \tag{2}$$

   (a) Bestimmen Sie ein reellwertiges Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung.

   (b) Finden Sie irgendeine Lösung von (2).

   (c) Geben Sie die allgemeine Lösung von (2) an.

2. Finden Sie eine Differentialgleichung der Form $y''(x)+ay'(x)+y(x) = \cos x$ (mit konkretem Wert von a), sodass *alle* Lösungen *unbeschränkt* sind. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (1+5+4+2 Punkte)
Betrachten Sie das inhomogene lineare System erster Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = x(t) - y(t) + e^t \end{cases} . \tag{3}$$

1. Bestimmen Sie eine Matrix A und eine Vektorfunktion B, sodass sich das obige System als $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ schreiben lässt.
2. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene System $z' = Az$.
3. Finden Sie irgendeine Lösung von (3).
4. Geben Sie die allgemeine Lösung von (3) an.

zusätzliche Blätter / Schmierzettel