Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Präsenzaufgaben 11 - Modul mat110

Keine Abgabe vorgesehen

Präsenzaufgabe 11.4. Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen H über dem Ring R jeweils eine zu H äquivalente Matrix S in Smith-Normalform, sowie unimodulare Matrizen P, Q mit $P\,H\,Q = S$:

$$\text{(a)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix},\ R = \mathbb{Z} \quad ; \quad \text{(b)} \quad H = \begin{pmatrix} t^2 + t & t^4 + 2\,t^3 + 2\,t^2 + t \\ t + 1 & t^3 + 2\,t^2 + t \end{pmatrix},\ R = \mathbb{Z}_3\,[\,t\,].$$

Präsenzaufgabe 11.5. Gegeben sei die folgende Abbildung:

$$\Phi \,:\, \mathbb{Z}^{4\times 1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{3\times 1}, \quad (\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,)^T \longmapsto (\,a - 2\,d\,,\,2\,a - b + d\,,\,a + 3\,b + c\,)^T.$$

(a). Erläutern Sie, warum Φ linear ist und bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\,(\,\Phi\,)$ zu den Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(b). Bestimmen Sie Basen $\mathcal{W}$ von $\mathbb{Z}^{4\times 1}$ und $\mathcal{Z}$ von $\mathbb{Z}^{3\times 1}$, sodass $M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{W}}\,(\,\Phi\,)$ in Smith-Normalform ist. Stellen Sie Ihre Überlegungen in einem geeigneten Diagramm dar.

Präsenzaufgabe 11.6. Gegeben seien die Matrix $H := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 3 \\ -2 & 6 & 5 & -2 & -6 \\ -1 & 9 & 7 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 5}$ und dessen Standardinterpretation $\Phi_H \,:\, \mathbb{Z}^{5\times 1} \to \mathbb{Z}^{3\times 1}$, $v \mapsto H\,v$.

(a). Bestimmen Sie die Elementarteiler von Φ_H mittels i-Minoren.

(b). Überführen Sie H in Smith-Normalform und bestimmen Sie hiermit Elementarteiler von Φ_H.

(c). Ermitteln Sie Basen von $\mathrm{Kern}\,(\Phi_H)$ und $\mathrm{Bild}\,(\Phi_H)$.