12 Von Funktionen und Abbildungen II

Nachdem wir im Kapitel „Von Funktionen und Abbildungen I“ bereits verstanden haben, was Abbildungen und Funktionen allgemein sind, und uns wichtige Eigenschaften dieser Objekte angesehen haben, wollen wir in diesem zweiten Teil den Fokus mehr auf konkrete Funktionen legen. Wir wollen uns wichtige Funktionen in der Mathematik anschauen, welche im Studium immer wieder auftauchen und zu einem Großteil sogar schon aus der Schule bekannt sind. Der Fokus soll im Folgenden insbesondere darauf liegen, den Zusammenhang zwischen der jeweiligen Funktionsvorschrift und dem Graph der entsprechenden Funktion zu verstehen und herzuleiten, welchen Einfluss bestimmte Parameter aus der Funktionsvorschrift auf die konkrete Gestalt des Funktionsgraphen haben.

In den Kapiteln „Von Funktionen und Abbildungen I“ und „Schulmathematik II“ haben wir bereits wichtige Grundlagen für die Analyse von Funktionen kennengelernt. So können wir Nullstellen und Extrema von (differenzierbaren) Funktionen bestimmen und die momentane Steigung dieser berechnen. Mit diesen Hilfsmitteln können wir uns auf Grundlage einer Funktionsvorschrift bereits ein recht gutes Bild von dem zugehörigen Graphen machen. Für bestimmte Untersuchungen werden wir allerdings noch einen weiteren Begriff benötigen: den der Umkehrabbildung.

12.1 Die Umkehrabbildung

In der Mathematik sucht man oft inverse Objekte zu bekannten Objekten, weil man damit durchgeführte Rechenschritte oder Operationen einfach rückgängig machen kann. Zum Beispiel kann man einen Term A mit einem Term B multiplizieren, um einen neuen Term AB zu erhalten, der sich möglicherweise leicht vereinfachen lässt. Später möchte man vielleicht den Term A zurück haben (oder etwas gleichwertiges) und braucht dann nur durch B zu teilen (natürlich nur, wenn B nicht 0 ist...).
Im Gegensatz zum Teilen in den reellen Zahlen gibt es für Abbildungen das Konzept der „Umkehrabbildung“. Die Umkehrabbildung zu einer Abbildung macht gewissermaßen das rückgängig, was die Abbildung zuvor gemacht hat. Bildet eine Abbildung beispielsweise das Elemente a auf das Elemente b ab, so bildet die dazugehörige Umkehrabbildung b auf a ab (siehe auch Seite 2).

Erinnerung 1 (Bijektivität)
Eine Abbildung f heißt bijektiv, wenn es zu jedem Element y aus dem Wertevorrat genau ein Element x aus dem Definitionsbereich gibt, sodass $f(x) = y$ gilt.

Definition 12.1 (Umkehrabbildung)
Gegeben sei eine *bijektive* Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N. Die **Umkehrabbildung zu f** ist dann die Abbildung

$$\begin{aligned} f^{-1} : N &\to M \\ y &\mapsto \text{„das } x \in M\text{, welches die Bedingung } f(x) = y \text{ erfüllt“} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Die Umkehrabbildung ist in der Definition wohldefiniert, da die Abbildung f bijektiv ist. Somit gibt es zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$, welches $f(x) = y$ erfüllt – dieses x ist also gerade $f^{-1}(y)$.

- Beim Begriff „Urbild“ taucht ebenfalls das Symbol f^{-1} auf. Dort hat es aber eine andere Bedeutung: Sehen wir den Ausdruck $f^{-1}(B)$ und ist B eine Teilmenge des Wertevorrats N von f, so müssen wir $f^{-1}(B)$ als das Urbild der Menge B verstehen (also als Menge). Betrachten wir hingegen $f^{-1}(b)$, wobei $b \in N$ ein Element des Wertevorrats von f ist, so müssen wir f^{-1} als Umkehrabbildung und damit $f^{-1}(b)$ als Funktionswert einer Umkehrabbildung auffassen. Steht f^{-1} alleine, ist damit meistens die Umkehrabbildung gemeint – aber wir sollten in diesem Fall immer sehr vorsichtig sein.

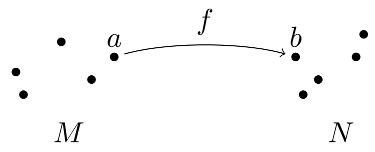
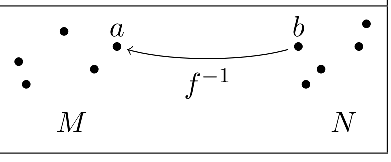
- Die Umkehrabbildung f^{-1} ist im Allgemeinen **nicht** die Abbildung $\frac{1}{f}$, sondern diejenige Abbildung, die die Wirkung von f wieder rückgängig macht.

- Genauso,wie f^{-1} die Wirkung von f rückgängig macht, macht f die Wirkung von f^{-1} wieder rückgängig. Es gilt also

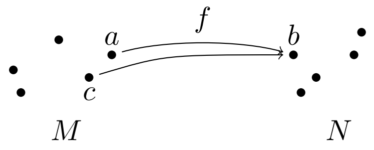
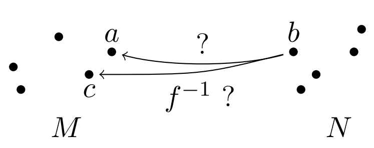
  $$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f\,.$$

  Genau dieses „Rückgängigmachen“ aus diesem und dem vorigen Punkt ist die Aussage des gleich noch folgenden Satzes 12.2.

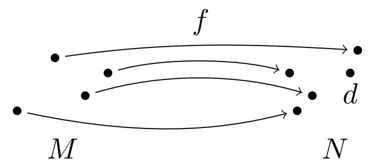
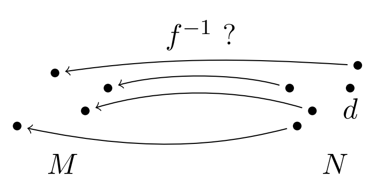
Wir wollen zuerst die Definition der Umkehrabbildung nachvollziehen:

Es sei eine bijektive Abbildung f gegeben, welche a auf b abbildet, d. h. es gilt $f(a) = b$.	
f^{-1} bildet b auf ein $x \in M$ ab, für das $f(x) = b$ gilt. Diese Bedingung wird (nur) von $x = a$ erfüllt.	

Dabei weisen wir darauf hin, dass es im Allgemeinen alles andere als einfach ist, dieses spezielle $x \in M$ zu einem $y \in N$ zu finden. Glücklicherweise wissen wir immerhin, <u>dass</u> es (genau) ein solches x geben muss, da in der Definition der Umkehrabbildung vorausgesetzt wird, dass f bijektiv ist. Die Surjektivität liefert uns gerade, dass es zu <u>jedem</u> $y \in N$ mindestens ein $x \in M$ gibt, sodass $f(x) = y$ gilt, also auch für unser $y = b$. Die Injektivität wiederum stellt sicher, dass es zu jedem $y \in N$ auch wirklich nur <u>genau ein</u> $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$.
Die Wichtigkeit der Injektivität von f schauen wir uns an folgendem Szenario noch einmal genauer an:

Angenommen, f wäre nicht injektiv und es gebe neben $a \in M$ noch ein $c \in M$ mit $c \neq a$, welches auf b abgebildet werden würde.	
Dann wird die Bedingung $f(x) = b$ von $x = a$ erfüllt. Gleichzeitig würde diese Bedingung ebenfalls von $x = c$ erfüllt werden.	

Da eine Abbildung (also auch f^{-1}) jedem Element (hier y) nur maximal ein Element (hier x) zuordnen darf, kann f^{-1} keine Abbildung sein, da man sich „zwischen a und c entscheiden" müsste.

Angenommen, f wäre nicht surjektiv. Dann gäbe es ein Element $d \in N$, auf das kein Element aus M abgebildet werden würde.	
Da es kein Element in N gibt, welches von f auf d abgebildet wird, ist für die vermeintliche Umkehrabbildung kein Funktionswert für d definiert.	

Da eine Abbildung (also auch f^{-1}) jedem Element im Definitionsbereich (hier N) ein Element aus dem Wertevorrat (hier M) zuordnen darf, kann f^{-1} keine Abbildung sein, da sie dem Element $d \in N$ keinen Wert aus M zuordnet.

Ein weiterer Nutzen aus der Forderung nach Bijektivität ist das Folgende:

Satz 12.2
Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt für alle $x \in M$ und $y \in N$:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Beweis:

- Sei $a \in M$. Dann haben wir $b := f(a) \in N$ und

  $$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = \text{„das Element } x \in M\text{, für welches gilt: } f(x) = b\text{“.}$$

  Da f injektiv ist, erfüllt $x = a$ als *einziges* Element aus M die Bedingung $f(x) = b$, womit $f^{-1}(f(a)) = a$ ist.

- Sei $b \in N$. Dann existiert dank der Surjektivität von f ein $a \in M$ mit $f(a) = b$ (dank der Injektivität von f gibt es nur eines) und gemäß Definition 12.1 gilt $f^{-1}(b) = a$. Schließlich ist

  $$f(f^{-1}(b)) = f(a) = b. \qquad \square$$

Bemerkung:

- Auch wenn wir in dem Vortrag „Von Funktionen und Abbildungen I“ bereits verstanden haben, dass Funktionen nichts anderes als Abbildungen zwischen speziellen Mengen sind, stellen wir an dieser Stelle noch einmal heraus, dass sich Umkehrabbildungen für Funktionen komplett analog definieren lassen. In diesem Zusammenhang spricht man dann häufig auch von **Umkehrfunktionen**.

- Ist der Graph einer bijektiven Funktion $f : I \to J$ zwischen zwei Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, so erhalten wir den Graph ihrer Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

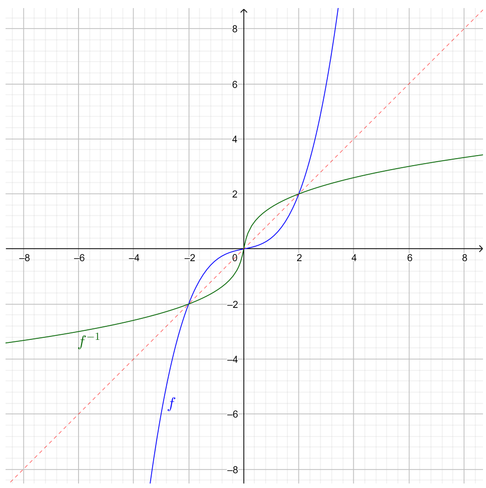


Abbildung 12.1: Graph einer bijektiven Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (blau) samt Spiegelachse (rot gestrichelt) sowie Graph ihrer Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (grün).

Beispiel: Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5$. Gesucht ist, falls existent, eine Umkehrabbildung von f. Dazu müssen wir zuerst überprüfen, ob eine Umkehrabbildung existiert, also ob f bijektiv ist:

Injektivität: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Falls f injektiv ist, müssen wir folgern können, dass in diesem Fall stets $x_1 = x_2$ gilt. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1^3 - 5 = x_2^3 - 5$ und daraus $x_1^3 = x_2^3$. Es ergibt sich hieraus durch Ziehen der dritten Wurzel, dass $x_1 = x_2$ gelten muss. Damit ist f injektiv.

Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Element aus dem Wertevorrat. Dann ist nun ein x aus dem Definitionsbereich gesucht mit $f(x) = y$. Gehe dabei wie folgt vor:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 5 = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = y + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+5} \tag{12.1}$$

Wir stellen insbesondere fest, dass das gefundene x eine reelle Zahl ist, also im Definitionsbereich von f liegt. Also ist f surjektiv.

Bijektivität: Da f injektiv und surjektiv ist, ist f bijektiv.

Nun wissen wir, dass f^{-1} existiert. Auch eine explizite Darstellung haben wir eben in (12.1) schon indirekt ausgerechnet. Dazu überlegen wir Folgendes: Die gesuchte Umkehrabbildung f^{-1} von f muss die Bedingung erfüllen, dass für alle y aus dem Wertebereich von f gilt: $f(f^{-1}(y)) = y$. Also muss f^{-1} so definiert sein, dass $f^{-1}(y)$ gerade der Wert x ist, der in f eingesetzt wieder y ergibt – wir suchen also für jedes y ein x mit $f(x) = y$. Die Berechnung dazu haben wir im obigen Beweis der Surjektivität von f in (12.1) bereits durchgeführt.
Diese hat ergeben, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(\sqrt[3]{y+5}) = y$. Daraus ergibt sich für alle $y \in \mathbb{R}$, dass $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+5}$ ist.

Bemerkung: Es kommt manchmal vor, dass wir für eine Abbildung gerne eine Umkehrfunktion hätten, die Abbildung aber nicht bijektiv ist.

- Falls die Abbildung nicht injektiv ist, so können wir den Definitionsbereich derart einschränken, dass die Abbildung auf dem kleineren Definitionsbereich injektiv ist.
- Ist die Abbildung (auch) nicht surjektiv, so können wir genauso den Wertevorrat derart einschränken, dass die Abbildung auf dem kleineren Wertevorrat surjektiv ist. Genauer müssen wir den Wertevorrat auf das Bild des eingeschränkten Definitionsbereichs beschränken.

Durch diese Einschränkungen des Definitions- und Wertebereichs erhalten wir also auf diesen kleineren Mengen eine bijektive Abbildung, zu der wir dann auf ebendiesen Mengen eine Umkehrabbildung definieren können.

Beispiel: Als Beispiel können wir uns die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

ansehen, welche, wie wir wissen, weder injektiv noch surjektiv ist. Schränken wir allerdings den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ein ($\mathbb{R}_{\leq 0}$ würde z. B. genauso gehen), so erhalten wir eine Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2$$

schon einmal *injektiv*. Beschränken wir anschließend auch noch den Wertevorrat auf das Bild $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die *bijektive* Abbildung

$$f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_2(x) = x^2 \, .$$

Die Umkehrfunktion dieser (nun bijektiven) Funktion ist

$$f_2^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_2^{-1}(x) = \sqrt{x} \, .$$

12.2 Wichtige Funktionen im Fokus

Nun widmen wir uns konkreten Funktionen. Viele der folgenden Funktionen werden schon aus der Schule bekannt sein. An dieser Stelle wird es insbesondere darum gehen, zu verstehen, warum die Graphen dieser Funktionen so aussehen, wie sie aussehen. Wir werden im Folgenden außerdem stets als Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ betrachten, sofern wir nicht explizit etwas anderes sagen – wir können diesen aber natürlich auf beliebige Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ einschränken.

12.2.1 Geraden

Einige der einfachsten Funktionen sind die Geraden. Ein Gerade besitzt die Form

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = m \cdot x + b \, ,$$

wobei $m \in \mathbb{R}$ die **Steigung** und $b \in \mathbb{R}$ den ***y*-Achsenabschnitt** der Geraden g bezeichnet. Wie können wir dies erkennen?

- Fokussieren wir uns zunächst auf $m \in \mathbb{R}$, was ja angeblich die Steigung von g beschreiben soll. Unter der „Steigung“ einer Geraden verstehen wir die Längeneinheiten, um die der Funktionswert größer wird, wenn wir auf der x-Achse eine Längeneinheit nach rechts gehen. Eine negative Steigung würde demnach bedeuten, dass der Funktionswert kleiner wird. Wir vergleichen also die Funktionswerte an zwei Stellen x_1 und x_2 miteinander, wobei x_2 eine Längeneinheit weiter rechts als x_1 liegen soll, d. h. $x_2 = x_1 + 1$. Es folgt:

  $$g(x_2) - g(x_1) = g(x_1 + 1) - g(x_2) = m \cdot (x_1 + 1) + b - m \cdot x_1 + b = m$$

  Anscheinend beschreibt m also wirklich unser intuitives Verständnis der Steigung einer Geraden.

  Alternativ können wir die Steigung einer Geraden auch als das Verhältnis der

Änderung der Funktionswerten zur Änderung der x-Werte auffassen, womit sich die Steigung allgemein auch als

$$m = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

für $x_1 \neq x_2$ aus dem Definitionsbereich charakterisieren lässt.

- Um nachzuweisen, dass b tatsächlich der y-Achsenabschnitt der Gerade g ist, müssen wir zeigen, dass $g(0) = b$ gilt. Dies ist aber nach einsetzen von $x = 0$ sofort klar.

Zusammenfassend können wir also mit dem Parameter $m \in \mathbb{R}$ die Steigung und mit dem Parameter $b \in \mathbb{R}$ die (vertikale) Lage der Gerade g festlegen.

Bemerkung (Identitätsabbildung): Die Gerade mit Steigung 1 und y-Achsenabschnitt 0 nennen wir die **Identität** oder **Identitätsabbildung** und notieren sie als id. Sie verdankt ihren Namen der Tatsache, dass sie jedes Element des Definitionsbereichs wieder auf sich selbst abbildet, also identisch lässt:

$$\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}(x) = x$$

Die Identitätsabbildung kann man auch auf allgemeine Mengen betrachten, sofern Definitionsbereich und Wertevorrat passend sind.

12.2.2 Parabeln

Wenden wir uns als nächstes einer etwas schwierigeren Klasse von Funktionen zu: den **Parabeln**. Der Prototyp einer Parabel ist die Funktion $f(x) = x^2$ und sollte bereits gut aus der Schule bekannt sein. Wir wollen uns daher direkt einer allgemeinen Parabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zuwenden, welche definiert ist durch:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\ ,$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ gelten soll (sonst wäre f nämlich eine Gerade).

Man nennt so definierte Funktionen auch **Polynomfunktionen zweiten Grades** und wir werden sehen, dass diese Funktionen tatsächlich immernoch unserer Vorstellung von Parabeln entsprechen. Um zu verstehen, wie die Graphen solcher Funktionen abhängig von a, b und c aussehen, könnten wir natürlich eine Kurvendiskussion durchführen, die momentane Steigung, Nullstellen sowie Extrema und eventuell Sattelpunkte dieser Funktion bestimmen und vielleich sogar noch Funktionswerte an einigen konkreten Stellen ausrechnen. Wir wollen hier jedoch eine andere Taktik anwenden. Um zu verstehen, wie diese Parabeln aussehen, formen wir die Funktionsvorschrift um, sodass sich Eigenschaften wie Extrema und Steigung sehr schnell ablesen lassen. Wir wollen dazu die so genannte **Scheitelpunktsform** herleiten (das geübte Auge wird bemerken, dass wir dabei die quadratische Ergänzung benutzen):

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a \cdot \left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{=:d_1}\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{=:d_2} \\
&= a \cdot (x + d_1)^2 + d_2
\end{aligned}$$

Wir können also jede beliebige Parabel der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ auf die so genannte **Scheitelpunktsform** $f(x) = a \cdot (x + d_1)^2 + d_2$ zurückführen mit d_1 und d_2 wie oben definiert. Der Vorteil der Scheitelpunktsform liegt darin, dass wir nun Eigenschaften der Parabel sehr einfach direkt ablesen können:

- Da x als Variable jetzt nur noch an einer Stelle in der Funktionsvorschrift auftaucht, erkennen wir, dass für $x = -d_1 = -\frac{b}{2a}$ der Funktionswert $f(x)$ minimal (falls $a > 0$) bzw. maximal ist (falls $a < 0$).
  Also gibt $x = -d_1$ die **Extremstelle** von f an.
- Das Maximum bzw. Minimum von f ist somit $f(-d_1) = d_2$.
- Nullstellen erhalten wir durch Umstellen der Funktion als $x_{1|2} = -d_1 \pm \sqrt{-\frac{d_2}{a}}$. Falls dies nicht definiert, also der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, so hat f keine Nullstellen.
- Die Ableitung ergibt sich mittels Kettenregel als

  $$f'(x) = a \cdot 2(x + d_1)\,.$$

  Da d_1 nur bestimmt, an welcher Stelle das Extremum der Parabel liegt, also den Verschub der Parabel in horizontaler Richtung angibt, ist a für die Stärke des Anstiegs bzw. Abfalls der Funktion zuständig. Je größer $|a|$, desto stärker steigt bzw. fällt die Funktion also.
- Das **Vorzeichen von** a entscheidet darüber, ob die Parabel nach oben geöffnet ($a > 0$) oder nach unten geöffnet ist ($a < 0$) und damit auch, ob in $x = -d_1$ ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. Dies wird deutlich, wenn wir eine Stelle x betrachten, welche größer als $-d_1$ ist. Dann ist der Faktor nach a nämlich positiv und wir erkennen, dass das Vorzeichen von a gleich dem Vorzeichen

der Steigung von f „rechts“ von der Extremstelle $-d_1$ ist (entsprechend ist das Vorzeichen der Steigung „links“ von $-d_1$ dann entgegengesetzt). Insbesondere sehen wir, dass jede Parabel genau ein Extremum besitzt.

In der Übung werden dann noch Polynomfunktionen höheren Grades behandelt.

12.2.3 Die Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen sind in der Analysis und Stochastik von großer Bedeutung. Im weiteren Studium werden wir feststellen, dass diese immer wieder in allen möglichen Zusammenhängen auftauchen. Wir definieren zunächst die allgemeine Exponentialfunktion zur „Basis“ $a \in \mathbb{R}_{>0}$:

Definition 12.3
Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren die **Exponentialfunktion zur Basis $\boldsymbol{a}$** als die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad \exp_a(x) = a^x .$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass wir verifizieren sollten, dass a^x tatsächlich für alle $x \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ liegt. Für natürliche sowie rationale Zahlen x ist diese Aussage klar, da wir aus dem Vortrag „Schulmathematik I“ bereits wissen, wie wir diese Ausdrücke zu verstehen haben: Zum Beispiel gilt

$$a^2 = a \cdot a$$

und

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} .$$

Jedoch haben wir bisher keine genaue Vorstellung davon, was genau a^x für ein irrationales x ist. Aufgrund fehlender Theorie können wir hier leider keine genauere Antwort geben. Für den Moment begnügen wir uns mit der Annahme, dass für alle rationalen Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 < x < x_2$ gilt, dass a^x zwischen a^{x_1} und a^{x_2} liegt. Damit können wir dann auch begründen, dass $a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, da dies für alle $x \in \mathbb{Q}$ der Fall ist.
Wir wollen zunächst einige Rechenregeln festhalten, die für die Exponentialfunktion gelten. Diese leiten sich direkt aus den Rechenregeln für Potenzen ab, weshalb wir diese hier auch nicht beweisen werden.

Satz 12.4 (Rechenregeln für die Exponentialfunktion)
Seien $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt (analog zu den Rechenregeln von Potenzen):

E1: $\exp_a(0) = 1$ und $\exp_a(1) = a$

E2: $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$

E3: $\exp_a(x \cdot y) = (\exp_a(x))^y$

E4: $\exp_a(-x) = \exp_a(x)^{-1} = \frac{1}{\exp_a(x)}$

Wenn wir uns nun für das Aussehen des Funktionsgraphen von $\exp_a$ interessieren, so können wir einige Eigenschaften mit wenig Aufwand erkennen:

- Der ***y*-Achsenabschnitt** ist $\exp_a(0) = a^0 = 1$.
  Dies gilt wohlgemerkt für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$!
- Auch besitzt $\exp_a$ **keine Nullstellen**, denn wir haben uns weiter oben schon überlegt, dass $a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

  Alternative Begründung: Wir wissen bereits, dass $\exp_a(0) = a^0 = 1$ gilt – also ist $x = 0$ schon einmal keine Nullstelle der Funktion. Angenommen es gäbe eine andere reelle Zahl $x \neq 0$, für die $\exp_a(x) = 0$ gilt.
  Dann folgt:

  $$a^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^x)^{\frac{1}{x}} = 0^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad ↯\, a > 0$$

Die momentane Steigung von $\exp_a$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ können wir allerdings nicht ganz so einfach bestimmen und verschieben dies auf etwas später. Die Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}$ hat aber noch eine weitere schöne Eigenschaft:

Satz 12.5
Die Exponentialfunktion $\exp_a$ ist für alle $a \in (\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\})$ bijektiv.

Beweis (unvollständig): Sei $a \in (\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\})$. Für den Nachweis der Bijektivität müssen wir zeigen, dass $\exp_a$ sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektivität Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $a^{x_1} = a^{x_2}$. Zu zeigen ist, dass in diesem Fall $x_1 = x_2$ gilt.
Aus $a^{x_1} = a^{x_2}$ folgt wegen $a^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = 1$ gilt. Dies ist wegen der Rechenregeln für Potenzen äquivalent zu $a^{x_1 - x_2} = 1$.
Nehmen wir nun an, dass $x_1 \neq x_2$ ist. Potenzieren wir beide Seiten der Gleichung mit $\frac{1}{x_1 - x_2}$ (beachte, dass dies nur geht, da wir $x_1 - x_2 \neq 0$ annehmen), so erhalten wir

$$a = 1^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = 1\,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $a \neq 1$. Also war unsere Annahme, dass $x_1 \neq x_2$ gilt, falsch und es muss $x_1 = x_2$ gelten.

Surjektivität An dieser Stelle müssen wir leider etwas schummeln und die Surjektivität als gegeben voraussetzen, da uns für einen formalen Beweis leider noch die nötige Theorie fehlt. Im Studium wird dies alles aber natürlich exakt und zufriedenstellend durchgeführt. □

Das Ableiten der Exponentialfunktion $\exp_a$ ist spontan gar nicht so einfach. Schauen wir uns daher zunächst den Differenzenquotienten von $\exp_a$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ an:

$$f'(x) \approx \frac{a^{x+h} - a^x}{h}\,, \quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In diesem Ausdruck können wir nun a^x ausklammern und erhalten näherungsweise

$$f'(x) \approx \frac{a^h - a^0}{h} \cdot a^x = \frac{a^h - 1}{h} \cdot a^x\,.$$

Wir sehen, dass der Vorfaktor nur noch von h, allerdings nicht mehr von x abhängt. Die Frage ist nun, ob sich der Vorfaktor $\frac{a^h-1}{h}$ für immer kleiner werdendes h immer genauer einer bestimmten Zahl annähert. Dies können wir an dieser Stelle nicht genauer untersuchen, da uns dazu noch der Begriff des Grenzwertes fehlt, welchen wir erst in einem späteren Kapitel kennenlernen. Daher nehmen wir hier als gegeben hin, dass dies für jedes $a \in \mathbb{R}_{>0}$ der Fall ist, sodass wir für die Ableitung von $\exp_a$ die Formel

$$\exp_a'(x) = k_a \cdot a^x \tag{12.2}$$

mit einem gewissen Vorfaktor $k_a \in \mathbb{R}$ erhalten. Dann wäre die nächste Frage, wie dieser Vorfaktor konkret aussieht. Für $a = 1$ ist dieser 0, denn

$$\exp_1'(x) = (1^x)' = 1' = 0\,.$$

Wir können ferner vermuten, dass dieser für größer werdendes $a > 1$ auch immer größer wird. Denn es gilt für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$, dass $\exp_a(0) = 1$ ist, aber

- für $a = 2$ ist $\exp_a(1) = \exp_2(1) = 2$ und
- für $a = 3$ ist $\exp_a(1) = \exp_3(1) = 3$.

Somit liegt die Vermutung nahe, dass $\exp_a$ für größeres $a > 1$ immer stärker steigt. Dies stimmt auch tatsächlich – im Studium werden wir sehen, dass es sogar zu jeder reellen Zahl k einen Wert $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass $k_a = k$ gilt. Insbesondere gilt dies dann auch für $k = 1$, was uns zur Definition der e-Funktion führt, die uns später auch bei der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion zur Basis a helfen wird:

Definition 12.6

Es sei $e \in \mathbb{R}$ diejenige Zahl, für die gilt, dass die Ableitung der Funktion $\exp_e$ wieder die Funktion $\exp_e$ ist, d. h.

$$\exp_e'(x) = (e^x)' = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen $\exp_e$ die ***e*-Funktion** oder auch ***die* Exponentialfunktion** und schreiben statt $\exp_e$ auch einfach nur exp.

Für die e-Funktion gelten natürlich die gleichen Aussagen und Rechenregeln wie für die (allgemeinen) Exponentialfunktionen $\exp_a$.

Bemerkung: Es gilt, dass $e \approx 2,71828\ldots$ (eine irrationale Zahl) ist.

Da wir von der e-Funktion per Definition bereits die momentane Steigung an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ kennen ($\exp'(x) = \exp(x) = e^x$) und für diese spezielle Exponentialfunktion ebenfalls $\exp(0) = 1$ gilt, können wir den Graph der e-Funktion bereits zeichnen:

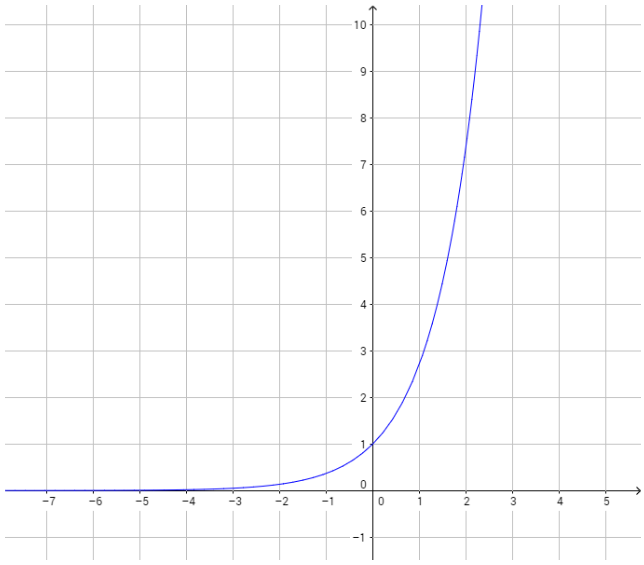


Abbildung 12.2: Graph der e-Funktion.

12.2.4 Der natürliche Logarithmus

Der natürliche Logarithmus sollte genau wie die Exponentialfunktion bereits aus der Schule bekannt sein. Er ist die Umkehrfunktion der e-Funktion, also diejenige Funktion, welche die Wirkung der e-Funktion „rückgängig“ macht. Wie wir vom Anfang diese Kapitels wissen, ist dies möglich, da die e-Funktion bijektiv ist.

Definition 12.7
Wir definieren den **natürlichen Logarithmus**

$$\begin{aligned} \ln := \exp^{-1} : \ \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

als die Umkehrfunktion der e-Funktion.

Bemerkung (Allgemeine Logarithmusfunktion):

- Genau wie zur e-Funktion lässt sich eine Logarithmusfunktion zur Basis a mit $a \in (\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\})$ als die Umkehrfunktion zur allgemeinen Exponentialfunktion $\exp_a$ definieren. Man notiert diese dann als $\log_a$ – somit ist ln die gleiche Funktion wie $\log_e$. Die Logarithmusfunktion zur Basis a ist vermutlich bereits in der Schule behandelt worden, hier wollen wir auf diese jedoch nicht weiter eingehen. Die gleich folgenden Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus gelten aber genau so auch für die (allgmeine) Logarithmusfunktion zur Basis a.

- Manchmal wird auch log als Notation für den natürlichen Logarithums ln verwendet. Genauso verbreitet ist allerdings, mit log den Logarithmus zur Basis 10 zu bezeichnen, also $\log = \log_{10}$. Um dieser Verwirrung zu entgehen, schreiben wir für den natürlichen Logarithmus ln. Allgemein sollten wir aber immer prüfen, was mit log im konkreten Fall gemeint ist.

Der natürliche Logarithmus ist also gerade diejenige Funktion, für die

$$\ln\big(\exp(x)\big) = \ln(e^x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \qquad \text{und}$$

$$\exp\big(\ln(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}$$

gilt.

Satz 12.8 (Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus)
Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

L1: $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$

L2: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

L3: $\ln(x^z) = z \cdot \ln(x)$

L4: $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

Beweis: (unvollständig) Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Rechenregeln für die Exponentialfunktion (siehe Satz 12.4 für $a = e$):

L1 Es gilt

$$\ln(1) \overset{\text{E1}}{=} \ln(\exp(0)) \overset{\text{Def. 12.7}}{=} \exp^{-1}(\exp(0)) \overset{\text{Satz 12.2}}{=} 0$$

und

$$\ln(e) \overset{\text{E1}}{=} \ln(\exp(1)) \overset{\text{Def. 12.7}}{=} \exp^{-1}(\exp(1)) \overset{\text{Satz 12.2}}{=} 1$$

L2 Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir führen der Übersichtlichkeit halber die folgenden Abkürzungen ein:

$$s := \ln(x)$$
$$t := \ln(y)$$

Dann gilt wegen der Definition von ln als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion exp:

$$\begin{aligned}\ln(x) + \ln(y) &= s + t = \exp^{-1}(\exp(s+t)) = \ln(\exp(s+t)) \\ &\overset{\text{E2}}{=} \ln\big(\exp(s) \cdot \exp(t)\big) = \ln\big(\exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y))\big) \\ &= \ln(x \cdot y)\end{aligned}$$

L3 ,L4 Übung $\square$

Abschließend wollen wir auch den Graph der Logarithmusfunktion noch zeichnen. Da wir bereits wissen, dass der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der e-Funktion ist, erhalten wir den Graph des natürlichen Logarithmus gemäß der Bemerkung auf Seite 4 als Spiegelung des Graphen der e-Funktion an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten:

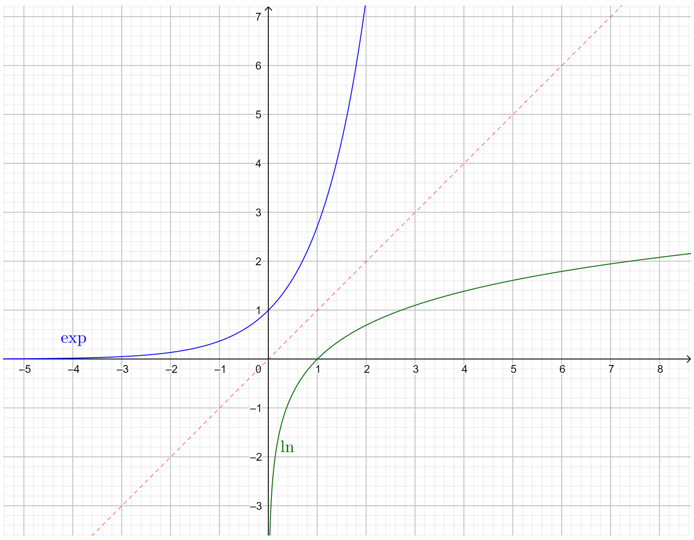


Abbildung 12.3: Graph des natürlichen Logarithmus (grün) als Spiegelung der e-Funktion (blau) an der Winkelhalbierenden (rot gestrichelt).

12.2.5 Die Exponentialfunktion – Teil 2

Nachdem wir nun den natürlichen Logarithmus kennengelernt haben, können wir die Steigung der Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und damit ihr Aussehen weiter untersuchen. Um den Vorfaktor k_a in der Darstellung der Ableitung $\exp'_a(x)$ in (12.2) zu ermitteln, bedienen wir uns eines kleinen Tricks. Wir können $\exp_a$ darstellen als

$$\exp_a(x) = a^x = \exp\big(\ln(a^x)\big) \overset{\text{L3}}{=} \exp\big(x \cdot \ln(a)\big)\,. \tag{12.3}$$

Da per Definition der e-Funktion $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt durch Differenzieren der Gleichung (12.3) mit der Kettenregel

$$\exp'_a(x) = \big[\exp\big(x \cdot \ln(a)\big)\big]' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{\exp\big(x \cdot \ln(a)\big)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{[x \cdot \ln(a^x)]'}_{\textit{innere Ableitung}}$$
$$= \underbrace{\exp\big(x \cdot \ln(a)\big)}_{=a^x} \cdot \ln(a) = \underbrace{\ln(a)}_{=k_a} \cdot a^x$$

Also gilt für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$, dass $k_a = \ln(a)$ gilt. Mit Hilfe des Graphen des natürlichen Logarithmus (vgl. Abbildung 12.3) sehen wir, dass $k_a < 0$ für $0 < a < 1$, $k_a > 0$ für $a > 1$ und im Speziellen $k_1 = 0$ gilt. Außerdem wird die Steigung immer größer, je größer a wird und immer negativer, je näher $a < 1$ der 0 kommt. Wir erhalten somit beispielhaft die folgenden Graphen der Exponentialfunktionen zu den Basen $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = \frac{1}{3}$ und $a_4 = \frac{4}{7}$.

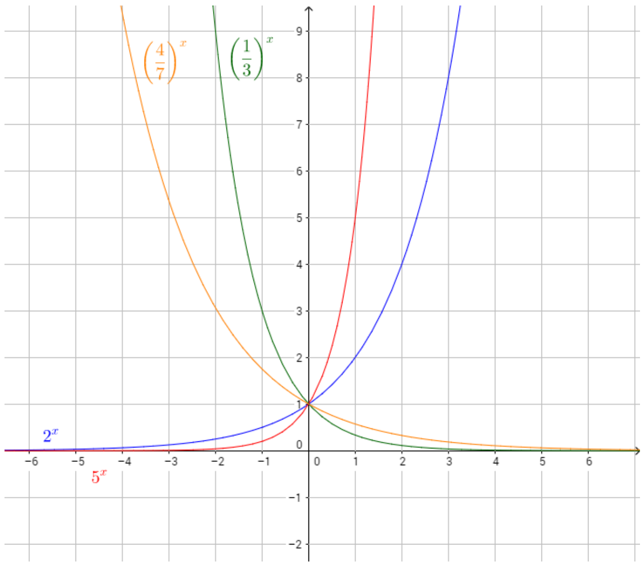


Abbildung 12.4: Graphen der Exponentialfunktionen zu den Basen $a_1 = 2$ (blau), $a_2 = 5$ (rot), $a_3 = \frac{1}{3}$ (grün) und $a_4 = \frac{4}{7}$ (orange).

In der Übung werden wir dann noch zwei weitere wichtige Funktionen behandeln, nämlich die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus.

Autoren dieses Kapitels:

2019: Nils Näthke