Variationsrechnung

Motivierende Beispiele

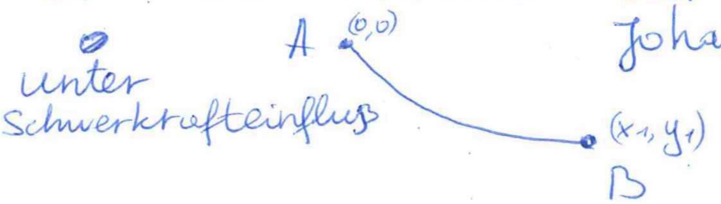
1. Was ist die kürzeste Verbindungskur[ve] zwischen zwei Punkten?

$$\int_a^b \sqrt{y'^2+1}\,dx \to \min \qquad \int_a^b \|\dot{\gamma}\|\,dt$$

$$y(a) = A \;,\; y(b) = B.$$

2. Das isoperimetrische Problem der Dido
Welche geschlossene Kurve gegebener Länge schließt den größten Fl. in. ein.
Die phönizische Prinzessin Dido bekam zur Gründung des Karthago so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen konnte.

3. Das Problem der Brachistochrone
Johann Bernoulli 1696.



Zykloide
$t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$

Euler – Lagrange um 1755

Beispiel von Weierstraß 1860.

$$\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}\,dx \to \min \qquad \begin{matrix} y(0)=0 \\ y(x_1)=y_1 \end{matrix}$$

$C^1[a,b]$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|u\|_{C^1[a,b]} = \|u\|_{C[a,b]} + \|u'\|_{C[a,b]}.$$

Allgemeiner: $C^k[a,b]$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|u\|_{C^k[a,b]} := \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |u^{(j)}(x)|$$

$C^k[a,b]$ mit so eingeführten Normen ~~sind~~ sind Banachräume.

<u>Def</u> Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$), $M \subset X$. Ein Funktional F ist eine Abbildung $F: M \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

<u>Bsp</u> $F: C[0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_0^1 y(x)\,dx \quad \text{ein Funktional}$$

Wir betrachten Funktionale der Form

$$J(y) := \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

auf (Teilmengen von) $C^1[a,b]$.

Das ist ein stetiges Funktional, wenn $F \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Die Haupt~~frage~~problem der Variationsrechnung: Finde Extrema von J auf $M \subset C^1[a,b]$

<u>Def</u> Sei $M \subset C^1[a,b]$. Eine Funktion $\tilde{y} \in D$ heißt (schwacher) lokaler Minimierer des Funktionals $J: M \to \mathbb{R}$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $y \in D$ mit $\|y - \tilde{y}\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$ gilt: $J(\tilde{y}) \le J(y)$.

O.E. kann man nur Minimierungsprobleme betrachten, weil Maximierer für J Minimierer für $-J$ sind.

Bei der Untersuchung von Funktionen auf Extrema spielen die Ableitungen eine wichtige Rolle. Wir führen nun einen ähnlichen Begriff für Funktionale, und zwar den der Variation.

Setze $C_0^1[a,b] := \{y \in C^1[a,b] : y(a) = y(b) = 0\}$

Def Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$, $h \in X$, $y \in M$ und $y + th \in M$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $J : M \to \mathbb{R}$ ein Funktional.

$$\delta J(y,h) := \lim_{t \to 0} \frac{J(y+th) - J(y)}{t} = \frac{d}{dt} J(y+th)\Big|_{t=0}$$

heißt die <u>erste Variation</u> von J an der Stelle y in Richtung h.

Satz 5.3 ~~Sei X~~ Unter den Voraussetzungen der obigen Def. gilt: Ist $\tilde{y} \in M$ ein lokaler Minimierer von J, so gilt $\delta J(\tilde{y}, h) = 0$ für alle h, für die die Variation existiert.

Bew Setze

$$g(t) := J(\tilde{y} + th).$$

Dann hat g ein lokales Minimum in $t = 0$, d.h. $\delta J(\tilde{y}, h) = g'(0) = 0$. □

Bevor wir ~~die~~ notwendige Bedingungen für ~~die~~ die Existenz eines Minimierers im Fall $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ formulieren, beweisen wir ein Lemma.

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $f \in C[a,b]$ und es gelte

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\,dx = 0$$

für alle $\eta \in C_c^\infty[a,b]$. Dann ist $f \equiv 0$ auf $[a,b]$.

<u>Bew</u> Angenommen, es gibt ein $x_0 \in (a,b)$, sodass $f(x_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $[x_0-2\varepsilon, x_0+2\varepsilon] \subset [a,b]$ und $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ für alle $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

Definiere

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2-(x-x_0)^2}} & , |x-x_0| < \varepsilon \\ 0 & , [a,b] \setminus \{|x-x_0|<\varepsilon\} \end{cases}.$$

Dann ist $\eta \in C_c^\infty[a,b]$ (Analysis I).

Nach dem MWS der Integralrechnung gilt

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)\,dx = f(\xi)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\eta(x)\,dx \qquad \xi \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon].$$

$$\geq \frac{1}{2} f(x_0) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)\,dx > 0 \qquad \square$$

Wir betrachten zunächst Pr mit festen Endpunkten

<u>Satz 5.4</u> (Euler-Lagrange-Gleichungen)

Sei $M := \{y \in C^2[a,b] : y(a) = A,\ y(b) = B\} \subset C^1$, $J(y) := \int_a^b F(x,y,y')\,dx$.

$F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

Ist $\tilde{y} \in M$ ein lokaler Minimierer für J auf M, so gilt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,\tilde{y},\tilde{y}') - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}') = 0.$$

Bew Sei $\eta \in C_0^2[a,b] := \{y \in C^2[a,b] : y(a) = y(b) = 0\}$
Es gilt dann $\tilde{y}(x) + t\eta(x) \in M$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
und

$$\delta(\tilde{y}, \eta) = \frac{d}{dt}\int_a^b F(x, \tilde{y} + t\eta(x), \tilde{y}' + t\eta')\, dx \Big|_{t=0}$$

$$\overset{\text{Satz 5.2}}{=} \int_a^b \left(F_y'(x, \tilde{y}, y') \cdot \eta + F_{y'}'(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta'\right) dx$$

$$= \int_a^b \left(F_y'(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta(x) - \frac{d}{dx} F_{y'}'(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta(x)\right) dx$$

$$+ \left[F_{y'}'(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta(x)\right]\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{F_y'(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \frac{d}{dx} F_{y'}'(x, \tilde{y}, \tilde{y}')}_{\in C[a,b]}\Big)\eta(x)\, dx \overset{\text{Satz 5.3}}{=} 0$$

Wegen $C_0^2[a,b] \supset C_c^\infty[a,b]$ gilt laut dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$F_y'(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \frac{d}{dx} F_{y'}'(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = 0.$$

$\square$

Bemerkungen

1) Unter den Voraussetzungen des Satzes ~~hat~~ hat die Euler-Lagrange-Gleichung die Form

$$F_y'(x, y, y') - F_{y'x}''(x, y, y') - F_{y'y}''(x, y, y')y' - F_{y'y'}''(x, y, y')y'' = 0$$

2) Man kann die Euler-Lagrange-Gl. unter den Voraussetzungen $\tilde{y} \in C^1[a,b]$, F stetig bzgl. x und C^1 bzgl. y, y' beweisen. Dafür benötigt man das sogenannte Lemma von Du Bois-Reymond. In dem Fall darf man aber die ELG wie in 1) nicht ausschreiben.

3) Sei $F \in C^2$. Ist $\tilde{y} \in C^1[a,b]$ ein lokales Minimierer von J und gilt $F''_{y'y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \neq 0$, dann ~~gilt~~ folgt $\tilde{y} \in C^2[a,b]$

4) Die ganze Theorie funktioniert auch, wenn man mit stückweise stetigen bzw. st. diff'baren Funktionen arbeitet.

Bsp Welche Kurve liefert den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten?

(a, A) $\quad (b, B)$

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$M = \{ y \in C^1[a,b] : y(a) = A,\ y(b) = B \}.$$

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} \qquad F \in C^2$$

Die Euler - Lagrange - Gl

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

$$F'_y = 0 \qquad F'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

$$y'^2 = C^2(1 + y'^2)$$

$$y'^2(1 - C^2) = C^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{C^2}{1 - C^2} \qquad C \neq 1$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}} \qquad y(x) = \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}}\, x + d$$

$$\begin{cases} y(a) = \alpha a + \beta = A, \\ y(b) = \alpha b + \beta = B. \end{cases} \qquad \alpha = \frac{B - A}{b - a}$$

$$\beta = A - a\frac{B - A}{b - a} = \frac{bA - aB}{b - a}$$

$$\tilde{y}(x) = \frac{B - A}{b - a} x + \frac{bA - aB}{b - a}$$

Es gilt $J(\tilde{y} + \varepsilon\eta) - J(\tilde{y}) = \int_a^b \left(\sqrt{1 + \left(\left(\frac{B - A}{b - a}\right) + \varepsilon\eta'\right)^2}\right) dx - \int_a^b \sqrt{1 + \tilde{y}'^2}\, dx$

$$= \int_a^b \left(\sqrt{1 + \left(\frac{B - A}{b - a} + \varepsilon\eta'\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{B - A}{b - a}\right)^2} \right) dx$$ funktioniert nicht.

Allgemein lässt sich die ELG explizit nicht lösen. Wir betrachten nun einige Spezialfälle, wann sich die ELG vereinfacht.

1. $F = F(x,y)$
Dann ist $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ und die ELG reduziert sich auf $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$
Das ist keine Differentialgleichung mehr! Es ist ehe selten, dass diese Funktion die Randbedingungen erfüllt.

2. $F = F(x,y') \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
ELG: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y') = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(x,y') = C$

3. $F = F(y,y')$
ELG: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$.
Multiplizieren wir sie mit y', so bekommen wir

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y'^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y' y'' = 0$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{dF}{dx}(y,y') - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

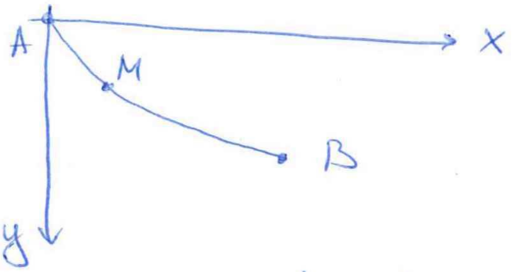
$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C.$$

<u>Bsp</u> Das Problem der Brachistochrone des Johann Bernoulli:

„Wenn in einer vertikalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen ~~eigenen~~ Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt" (1696)

Solche Kurve nennt man Brachistochrone („kürzeste Zeit)

O.B.d.A. wähle das Koordinatensystem so, dass $A=(0,0)$, $B=(b, y_b)$



Wir parametrisieren die gesuchte Kurve nach der Zeit $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,T]$

Die Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + y'(x)^2)$$

Die potentielle Energie

$$E_{pot} = -mgy(x)$$, g Schwerebeschleunigung

Nach der Energieerhaltungsformel gilt

$$mgy(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + y'(x)^2)$$

$$\frac{1}{\dot{x}} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$$

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx \qquad T = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx$$

Mathematische Fragestellung:

Minimiere

$$J(y) := \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}\,dx$$

auf $M := \{y \in C^1[a,b] : y(0)=0,\ y(b)=y_b\}$.

$F(y,y') = \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}$ ist unabhängig von x.

$$F(y,y') - y' F'_{y'}(y,y') = c$$

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c$$

$$\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2 - y'^2 = c\sqrt{y(1+y'^2)} \Leftrightarrow y(1+y'^2) = c_1 > 0.$$

<u>Trick</u>: Führe einen Parameter τ ein

$$y' = \operatorname{ctg} \tau/2$$

$$y = \frac{c_1}{1+y'^2} = \frac{c_1}{1+\frac{\cos^2\tau/2}{\sin^2\tau/2}} = c_1 \sin^2 \tau/2 = \frac{1}{2}c_1(1-\cos\tau)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \sin\tau/2 \cos\tau/2\, d\tau}{\frac{\cos\tau/2}{\sin\tau/2}} = c_1 \sin^2\tau/2\, d\tau = \frac{1}{2}c_1(1-\cos\tau)\,d\tau$$

$$x = \frac{1}{2}c_1(\tau - \sin\tau) + c_2$$

$$y = \frac{1}{2}c_1(1-\cos\tau)$$

$x(0) = y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$

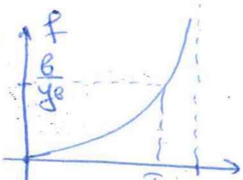
$$x(\tau_b) = \frac{1}{2}c_1(\tau_b - \sin\tau_b) = b$$

$$y(\tau_b) = \frac{1}{2}c_1(1-\cos\tau_b) = y_b$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y_b} = \frac{\tau_b - \sin\tau_b}{1-\cos\tau_b} =: f(\tau_b)$$

$\lim_{\tau_b \to 2\pi} f(\tau_b) = +\infty$

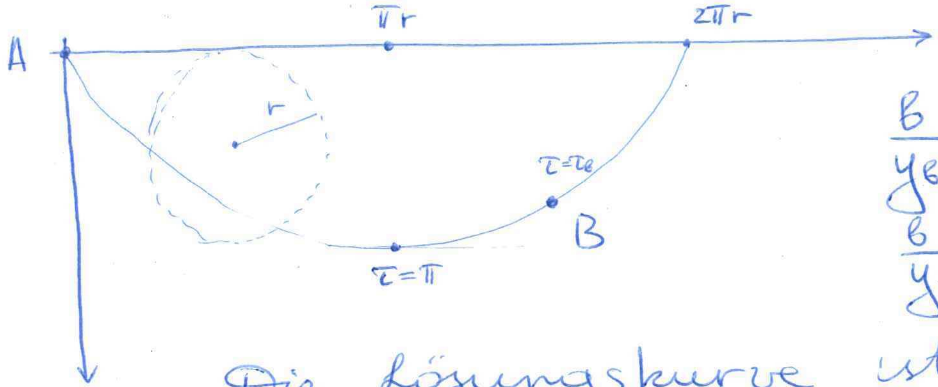
$\lim_{\tau_b \to 0} f(\tau_b) = 0$



Es gibt genau ein τ_b mit $f(\tau_b) = \frac{b}{y_b} > 0$.

$r := \frac{1}{2}c_1$

$$r = \frac{y_b}{1-\cos\tau_b}$$



$\frac{b}{y_B} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_B \in [0, \pi]$

$\frac{b}{y_B} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_B \in (\pi, 2\pi)$

Die Lösungskurve ist eine Zykloide.

$$x(\tau) = r(\tau - \sin\tau) \qquad , \tau \in [0, \tau_B]$$
$$y(\tau) = r(1 - \cos\tau)$$

Berechnen wir T.

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{1+y'(x(\tau))^2}{2g\, y(x(\tau))}}\, x'(\tau)\, d\tau$$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{\tau_B} \sqrt{\frac{1+\cot^2 \tau/2}{2gr(1-\cos\tau)}}\, r(1-\cos\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^{\tau_B} \frac{\sqrt{1-\cos\tau}\,\sqrt{r}}{\sqrt{2g\sin^2 \tau/2}}\, d\tau = \int_0^{\tau_B} \frac{\sqrt{r\, 2\sin^2 \tau/2}}{\sqrt{2g\sin^2 \tau/2}}\, d\tau = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\tau_B .$$

$$y(1+y'^2) = C$$

$$(x, y(x)) = (\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)) \qquad x \in [0,b] \quad \tau \in [\tau_0, \tau_b].$$

$$\hat{y}(\tau) = y(\hat{x}(\tau)) = \cancel{\operatorname{cotan} \tfrac{\tau}{2}}$$

$$\hat{y}'(\tau) = y'(\hat{x}(\tau)) \cdot \hat{x}'(\tau) = \cancel{\operatorname{cotan} \tfrac{\tau}{2}}.$$

$$y'(\hat{x}(\tau)) = \operatorname{cotan} \frac{\tau}{2}.$$

$$\hat{x}'(\tau) = \frac{\hat{y}'(\tau)}{y'(\hat{x}(\tau))}$$

$$\cancel{y(\hat{x}(\tau))\left(1+\left(\frac{\hat{y}'(\tau)}{\hat{x}'(\tau)}\right)^2\right)}$$

Ansatz $\quad \hat{y}(\tau) = y(\hat{x}(\tau)) = \dfrac{C}{1+y'(\hat{x}(\tau))}$

$$\hat{y}(\tau) = \qquad = \frac{C}{1+\frac{\cos^2\frac{\tau}{2}}{\sin^2\frac{\tau}{2}}} = C\sin^2\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}C(1-\cos\tau)$$

$$\hat{x}'(\tau) = \frac{\frac{1}{2}C\sin\tau}{\frac{\cos\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}} = \frac{1}{2}C \sin^2\frac{\tau}{2}.$$

$$\hat{x}(\tau) = \frac{1}{2}C(\tau - \sin\tau) + C_2.$$

$$\hat{y}(\tau) = \frac{1}{2}C(1-\cos\tau)$$

Satz 5.6 Sei $M := \{y \in C^2[a,b] : y(a) = A,\ y(b) = B\}$, $F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ konvex bzgl. der letzten beiden Variablen,

$$J(y) := \int_a^b F(x, y, y')\,dx.$$

Dann ist jede Lösung $\tilde{y} \in M$ der Euler-Lagrange-Gleichung ein globaler Minimierer für J.

Bew Nach dem Satz 5.5 gilt f.a. $y \in M$.

$$F(x,y,y') \geq F(x,\tilde{y},\tilde{y}') + F'_y(x,\tilde{y},\tilde{y}')(y-\tilde{y}) + F'_{y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')(y'-\tilde{y}')$$

$y - \tilde{y} =: \eta \in C_0^2[a,b]$

$$F(x, \tilde{y}+\eta, \tilde{y}'+\eta) \geq F(x,\tilde{y},\tilde{y}') + F'_y(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta + F'_{y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta'.$$

Für alle $y \in M$ gilt dann

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx = \int_a^b F(x, \tilde{y}+\eta, \tilde{y}'+\eta')\,dx$$

$$\geq \int_a^b F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx + \underbrace{\int_a^b \left(F'_y(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta + F'_{y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta'\right)dx}_{=0 \text{ weil } \tilde{y} \text{ die ELG erfüllt}}$$

$$= \int_a^b F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx = J(\tilde{y}).$$

$\square$.

Bsp $J(y) = \int_a^b (y^2 + y'^2)\,dx$

$M := \{y \in C^2[a,b] : y(a) = A,\ y(b) = B\}$.

ELG $\quad F = F(y,y') \Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$.

$$y^2 + y'^2 - 2y'^2 = y^2 - y'^2 = C.$$

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y - 2y'' = 0 \Rightarrow y = y''.$$

$$y(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x.$$

Isoperimetrisches Problem

Wir betrachten nun eine verallgemeinerung des Variationsproblems mit festen Endpunkten und zwar, ein Problem mit zusätzlichen Nebenbedingungen.
Z.B. wenn in einem Problem die Länge der Kurve konstant bleiben soll ~~taucht eine~~ NB ~~$\int_a^b G(x,y,y'$~~ auf.

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

Satz 5.6

Bew

$\exists \eta_0 \in C_0^2[a,b] : \delta K(\tilde{y}, \eta_0) \neq 0$

~~Setze~~ Wir definieren für beliebiges $\eta \in C_0^2[a,b]$

$$u = \varphi(\alpha,\beta) = J(\tilde{y} + \alpha\eta + \beta\eta_0) \qquad ,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

$$v = \psi(\alpha,\beta) = K(\tilde{y} + \alpha\eta + \beta\eta_0)$$

Nach den Satz 5.2 gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0,0) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b F(x,\tilde{y}+\alpha\eta+\beta\eta_0, \tilde{y}'+\alpha\eta'+\beta\eta_0')\,dx \Big|_{(0,0)}$$

$$= \int_a^b (F_y' \cdot \eta + F_{y'}' \eta')\,dx \Big| = \delta J(\tilde{y}, \eta)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(0,0) = \delta J(\tilde{y}, \eta_0)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0,0) = \delta K(\tilde{y}, \eta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(0,0) = \delta K(\tilde{y}, \eta_0)$$

Außerdem

$\tilde{y}$ ist ein lokaler Minimierer für φ unter der NB $\psi(\alpha,\beta) = c$.

grad $\psi(0,0) \neq 0$. wegen $\delta K(\tilde{y},\eta_0) \neq 0$.

Nach dem Satz ist

$$\text{grad}\, \varphi(0,0) = \lambda\, \text{grad}\, \psi(0,0) \quad \text{für ein } \lambda,$$

d.h.

$$\delta J(\tilde{y},\eta) = \lambda\, \delta K(\tilde{y},\eta)$$

$$\delta J(\tilde{y},\eta_0) = \lambda\, \delta K(\tilde{y},\eta_0)$$

$$\lambda := \frac{\delta J(\tilde{y},\eta_0)}{\delta K(\tilde{y},\eta_0)} \quad \text{unabhängig von } \eta\,!$$

$\Rightarrow$ Für alle $\eta \in C_0^2[a,b]$ gilt

$$\delta J(\tilde{y},\eta) = \lambda\, \delta K(\tilde{y},\eta), \text{ d.h.}$$

$$\int_a^b \Big[\underbrace{\Big(\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y'}\Big)}_{L} \cdot \eta(x) + \underbrace{\Big(\frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y'}\Big)}_{L} \eta'(x) \Big] dx = 0.$$

Die partielle Integration liefert die Behauptung.

$\square$.