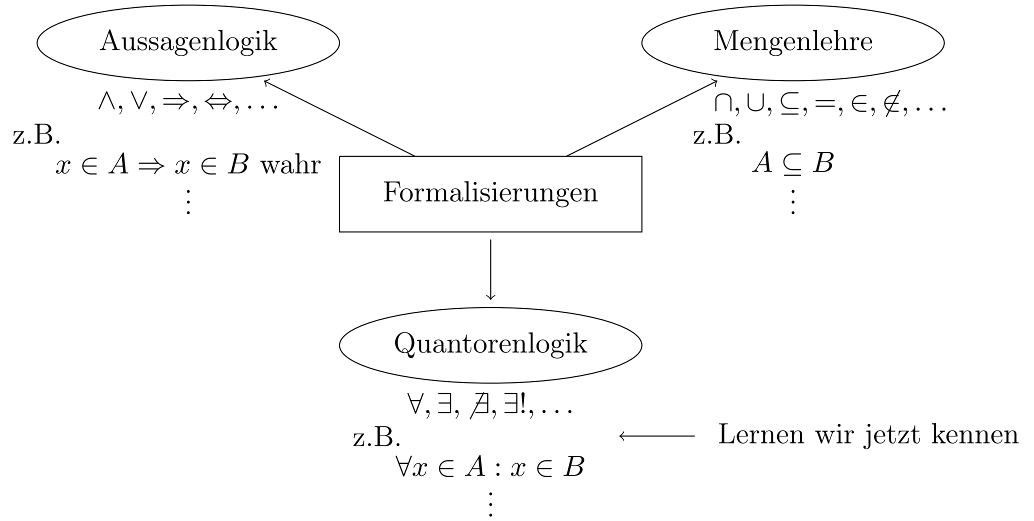
5 Quantorenlogik

Die Quantorenlogik erweitert die Aussagenlogik, indem sie nicht mehr nur Aussagen als Ganzes analysiert, sondern auch deren innere Struktur betrachtet. Sie ermöglicht es uns, in Aussagen *quantitative* Zusammenhänge zu verdeutlichen. Gleichzeitig steht sie in enger Verbindung zur Mengenlehre, da sie eine andere - teilweise einfachere - Formalisierung der Mengenlehre darstellt. Man kann also von beiden Formalisierungsarten in die jeweils andere übersetzen.



5.1 Der Allquantor

Um Aussagen wie „Für alle natürlich Zahlen gilt ...“ oder „Jede ganze Zahl besitzt bestimmte Eigenschaft(en)“ formalisieren zu können, führen wir den

Allquantor $\forall$

ein*(gesprochen: „Für alle …“ oder „Jede(s/r) …“).*
In der Mathematik achtet man penibel auf die Syntax von Aussagen. So stehen Quantoren stets zu Beginn einer Aussage; auch wenn diese im umgangssprachlichen Wortlaut an anderer Stelle auftauchen.
Sei M eine beliebige Menge. Dann könnten wir zum Beispiel schreiben:

Syntax: $\underbrace{\forall x \in M :}_{\text{Für alle Objekte } x \text{ in } M \text{ gilt}}$ x besitzt bestimmte Eigenschaft(en).

Beispiele (Formalisieren von Aussagen):

(i) Für alle natürlichen Zahlen gilt, dass sie größer als Null sind.
Formal: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

(ii) Alle Mathematiker sind schlau.
Formal: $\forall x \in M : x \in S$,
wobei $M := \{m|m \text{ ist ein Mathematiker}\}$, $S := \{s|s \text{ ist schlau}\}$

(iii) Das Quadrat ist immer kleiner als 1 für alle reellen Zahlen zwischen -1 und 1.
Formal: $\forall x \in \,]-1, 1[\, : x^2 < 1$

(iv) Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl.
Formal: $\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z}$

Bemerkung: Die Aussage in (iv) beschreibt ja gerade, dass jedes Element aus den natürlichen Zahlen als Element in den ganzen Zahlen enthalten ist. Das heißt nichts anderes als: $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.
Allgemein bedeutet das: $A \subset B :\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$, was auch die typische Definition der Teilmengen-Beziehung darstellt. Das ist nur ein Beispiel für den direkten Zusammenhang von Quantorenlogik und Mengenlehre.
Andererseits kann man eben „$\forall x \in A : x \in B$" so verstehen, dass die Folgerung „$x \in A \Rightarrow x \in B$" immer wahr sein muss, so dass wir wieder bei der Aussagenlogik angekommen sind. Alle drei „Schreibweisen" beschreiben und meinen das Gleiche.

5.2 Der Existenzquantor

Über einige Eigenschaften wissen wir, dass sie nicht notwendigerweise von allen Elementen einer gegebenen Menge geteilt werden. Zum Beispiel wissen wir mit dem Axiom „Jeder Mathematiker ist schlau.", dass *jedes* Element aus der Menge der Mathematiker die Eigenschaft *„ist schlau"* besitzt. ABER: Nicht jeder schlaue Mensch auf Erden ist notwendigerweise ein Mathematiker.

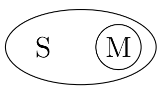


Abbildung 5.1: Alle Mathematiker sind schlau.

Wir definieren nun den

Existenzquantor $\exists$

(gesprochen: „Es existiert …“ oder „Es gibt …“), um auch solche Gegebenheiten erfassen zu können, bei denen eben nicht alle Objekte eine bestimmte Eigenschaft besitzen. *Zur Erinnerung:* Quantoren gehören nach vorne, also ist hier die Syntax:

$$\underbrace{\exists x \in M :}_{\text{Es gibt Objekte } x \text{ in } M\text{, für die gilt}} x \text{ besitzt bestimmte Eigenschaft(en)}$$

Beispiel: (Formalisieren von Aussagen)

(i) Es existieren schlaue Elefanten.
Formal: $\exists x \in E : x \in S$, wobei S wie eben, E die Menge der Elefanten.

(ii) Es gibt einen Mathematiker, der grün leuchtet.
Formal: $\exists x \in M : x \in G$, wobei M wie eben, $G := \{g | g \text{ leuchtet grün}\}$.

(iii) Nicht-reelle Zahlen existieren.
Formal: $\exists z \in Z : z \notin \mathbb{R}$, wobei Z die Menge der Zahlen ist.

(iv) Es gibt reelle Zahlen, die irrational sind.
Formal: $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Der Existenzquantor macht keinerlei Aussage darüber, wie viele Objekte eine bestimmte Eigenschaft erfüllen, sondern nur, dass es ein solches Objekt gibt.
Manchmal ist es auch interessant zu wissen, ob es genau ein Objekt gibt, welches etwas bestimmtes erfüllt - beispielsweise beim Untersuchen, ob die Lösung eines Problems eindeutig ist. Dafür benutzt man dann $\exists!$ oder $\exists^1$ als Symbol.
Die Aussage: „Es gibt genau eine rationale Zahl, die durch einen Vorzeichenwechsel wieder die gleiche ist“ kann so formalisiert werden:

$$\exists! r \in \mathbb{Q} : r = -r$$

Außerdem wird das Symbol $\nexists$ verwendet, um auszudrücken, dass es kein Element mit einer bestimmten Eigenschaft gibt, beispielsweise:

$$\nexists x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade und } x \text{ ist ungerade}$$

Beim Vergleich zwischen der Existenzaussage „$\exists x \in M$: ...“ und der All-Aussage „$\forall x \in M$: ...“ fällt auf, dass Letzteres (abgesehen von wenigen Ausnahmen) eine „stärkere“ Aussage als die erste ist, dass wenn man beide nach ihrer Bedeutung für die Menge bewertet. Denn wolle man eine Existenzaussage zeigen, so reicht es eben aus, ein Element in M zu finden, das Bestimmtes erfüllt. Für die All-Aussage müsste man das dann aber für alle Elemente in M allgemein zeigen.

(Es ist nämlich ein großer Unterschied [auch vom Aufwand her], zu zeigen, dass ein Problem lösbar ist oder, dass alle Lösungen des Problems gefunden worden sind.)

Um bei unserem Beispiel der schlauen Mathematiker die Aussage „$\exists x \in M : x \in S$“ zu zeigen, reicht es, einen Mathematiker (z.B. Gauß) als schlau zu identifizieren. Um jedoch „$\forall x \in M : x \in S$“ zu zeigen, müsste man jeden Mathematiker darauf untersuchen, ob er schlau ist.

Beispiel: Für zwei Mengen H und P kann man aus der „starken“ All-Aussage $\forall y \in H : y \in P$ sofort auf die „schwächere“ Existenz-Aussage $\exists y \in H : y \in P$ schließen (sofern $H \neq \emptyset$), was wir nochmal verdeutlichen wollen:
Wir wissen: Gauß war ein Mathematiker. Es gelte das Axiom „Jeder Mathematiker ist schlau". Dann gilt die logische Folgerung: „Gauß war schlau“.
Verschiedene Erklärungen:

Anschaulich: Das Axiom: „Jeder Mathematiker ist schlau“ veranschaulicht, dass jedes Element, das ein Mathematiker ist, schon schlau sein muss, weil die Menge M in der Menge S enthalten ist. Da Gauß ein Mathematiker ist/war, muss Gauß deswegen automatisch zu der Menge S gehören, also auch schlau (gewesen) sein!

Formal: Definiere $x_0 :=$ Gauß. Sei $x_0 \in M$ und gelte das Axiom (A):

$$\forall y \in M : y \in S \tag{A}$$

Dann folgt nach (A): $x_0 \in S$.

Begründung: Axiom (A) heißt ja gerade: Für alle y ist die Aussage

$$„y \in M \Rightarrow y \in S“$$

immer wahr und somit ist auch die Folgerung „$x_0 \in M \Rightarrow x_0 \in S$“ wahr. Also gilt: $x_0 \in S$.

Hier muss man bei dem Axiom verstehen, dass y nur ein beliebiger Platzhalter für ein Element aus M ist. Das Axiom sagt uns also, dass jedes beliebige Element aus M auch ein Element aus S ist. Da wir hier $x_0 \in M$ haben, können wir x_0 einfach in die Aussage einsetzen: $x_0 \in M \Rightarrow x_0 \in S$, weil dies für alle Elemente aus M gilt. (Wichtig: Man schreibt hier jetzt nicht, dass diese Aussage für alle x_0 gilt, weil wir hier ein bestimmtes x_0 einsetzen und dieses kein Repräsentant aller Elemente aus M ist.)

5.3 Kleiner Ausflug in die Philosophie "hinter" der Logik

Das Grundprinzip bzw. Axiom bei dem sich die Logik bedient, ist das Prinzip des ausgeschlossenen Drittens (PAD). Es besagt, dass für eine beliebige Aussage mindestens die Aussage selbst oder ihr Gegenteil gelten muss. Eine dritte Möglichkeit, also dass lediglich etwas Mittleres gilt, das weder die Aussage ist, noch ihr Gegenteil, sondern irgendwo dazwischen „existieren“ soll, kann es nicht geben.

Dieses Prinizip ist für uns bei der Negation von Aussagen elementar. Es besagt, dass eine Aussage so verneint werden muss, dass sie oder ihr Gegenteil wahr ist. Die Aussage „Nadine ist Studentin und Ben ist Student“ lässt sich demnach nicht zu „Nadine ist keine Studentin und Ben ist kein Student“ negieren, denn falls etwa Nadine Studentin ist, Ben aber kein Student, wäre keine der Aussagen wahr. Die (mathematisch) korrekte Negation kann also der Intuition widersprechen und bedarf großer Vorsicht!

5.4 Negation

Beim Negieren von Aussagen muss man aufpassen! Auch wenn umgangssprachlich oft missverstanden, ist das Gegenteil von „Für alle x gilt...“ <u>nicht</u> „Für kein x gilt...“. So ist es richtig:

$$\begin{aligned} \neg[\forall x : x \text{ hat best. Eigenschaft(en)}] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x : x \text{ hat nicht diese Eigenschaft(en)} \\ \neg[\exists x : x \text{ hat best. Eigenschaft(en)}] \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x : x \text{ hat nicht diese Eigenschaft(en)} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\forall \xrightarrow{\text{negieren}} \exists$$

$$\exists \xrightarrow{\text{negieren}} \forall$$

$$\text{„... hat bestimmte Eigenschaft(en)“} \xrightarrow{\text{negieren}} \text{„... hat nicht diese Eigenschaft(en)“}$$

Beispiel: (Negieren von Aussagen)

(i) Alle Kühe haben schwarze Flecken.
<u>Formal</u>: $\forall k \in K : k \in F$, wobei K, F sinnvoll definiert werden.
$\xrightarrow{\text{negieren}} \exists k \in K : k \notin F$
Übersetzt: Es gibt (mindestens) eine Kuh, die keine schwarzen Flecken hat.

(ii) Keine komplexe Zahl existiert (d.h. alle komplexen Zahlen sind nicht existent).
<u>Formal</u>: $\nexists z \in \mathbb{C}$ (oder $\forall z \in \mathbb{C} : z \in \{\}$).
$\xrightarrow{\text{negieren}} \exists z \in \mathbb{C}$
Übersetzt: Es existiert (mindestens) eine komplexe Zahl.

(iii) Manchmal sind Probleme unlösbar.
<u>Formal</u>: $\exists p \in P : p \notin L$, wobei P die Menge aller Probleme und L die Menge aller lösbaren Dinge darstellt.
$\xrightarrow{\text{negieren}} \forall p \in P : p \in L$
Übersetzt: Alle Probleme sind lösbar.

(iv) Faule Studenten sind erfolglos.

Formal: $\forall x \in S \cap F : x \notin E$, wobei S, F, E sinnvoll definiert werden.

$\xrightarrow{\text{negieren}} \exists x \in S \cap F : x \in E$

Übersetzt: Es gibt (mindestens) einen faulen Studenten, der erfolgreich ist.

Bemerkung: Es ist vielleicht aufgefallen, dass „$\forall x : x$ hat nicht diese Eigenschaft(en)" gleichbedeutend ist mit „Kein x hat diese Eigenschaft(en)". Somit ist das Gegenteil von „(mindestens) einer" eben „keiner", während das Gegenteil von „alle" eben „(mindestens) einer nicht" ist.
Warum will man eigentlich negieren? Eine Antwort:

> Um eine Aussage (A) zu widerlegen, muss man zeigen, dass das Gegenteil (bzw. die Negation) der Aussage (also $\neg$ A) stimmt. Denn so hat man nach dem PAD gezeigt, dass die Aussage A falsch ist, weil (A) und ($\neg$ A) nicht gleichzeitig wahr sein können.

Beispiel: Die Aussage „Alle Elefanten sind rosa" kann widerlegt werden, indem man zeigt, dass es einen grauen Elefanten gibt.

Formal: $\underbrace{\forall x \in E : x \text{ ist rosa}}_{(\mathrm{A})}$, wobei $E := \{y \mid y \text{ ist ein Elefant}\}$

Da wir im Zoo gewesen sind und dort einen Elefanten gesehen haben, der grau ist, gibt es also (mindestens) einen Elefanten der nicht rosa ist.

Formal: $\exists x \in E : x \text{ ist grau} \Rightarrow \underbrace{\exists x \in E : x \text{ ist nicht rosa}}_{(\neg\,\mathrm{A})}$

Wir haben also ein Gegenbeispiel gefunden und somit ist Aussage (A) widerlegt.

(In der Mathematik verlassen wir uns natürlich nicht auf empirische Tatsachen, wie z.B. das Sehen eines grauen Elefantens im Zoo. Das soll hier nur zur Anschaulichkeit dienen.)

5.5 Verwendung von mehreren Quantoren

Bis jetzt haben haben wir uns mit recht simpler Syntax auseinandergesetzt. Deswegen wollen wir nun Aussagen betrachten, die mehrere Quantoren enthalten und darauf eingehen, warum die Reihenfolge dieser eine wichtige Rolle für die Bedeutung einer Aussage spielt.
Hierfür wollen wir zunächst anhand eines Beispiels verdeutlichen, warum $\forall x\ \exists y$ etwas anderes meint als $\exists y\ \forall x$.

Beispiel: Sei $H := \{h | h \text{ ist ein Haus}\}$ und $S := \{s | s \text{ ist ein Schlüssel}\}$.
Wir betrachten nun die Aussagen:

(A1) $\forall x \in H \; \exists y \in S : y$ öffnet x.

(A2) $\exists y \in S \; \forall x \in H : y$ öffnet x.

Wenn man diese Aussagen jetzt ausformuliert, erkennt man sofort, warum das zwei ganz unterschiedliche Aussagen sind:

(A1) Für alle Häuser existiert ein Schlüssel, so dass dieser Schlüssel das Haus öffnet *(bzw. Jedes Haus hat einen [eigenen] [Haustür-]Schlüssel).*

(A2) Es existiert ein Schlüssel für aller Häuser, so dass dieser Schlüssel die Häuser öffnet *(bzw. Es gibt einen [Universal-]Schlüssel für alle Häuser].*

Hier sieht man schon, dass (A2) eine wesentlich stärkere Aussage als (A1) ist. In (A1) kann das y noch von x „abhängen“, denn es gibt für jedes Haus einen Schlüssel und dieser muss nicht automatisch auch in andere Haustüren passen. So gesehen hängt der Schlüssel y in (A1) vom jeweiligen Haustürschloss (somit von dem Haus x) ab, man schreibt deswegen auch manchmal $y(x)$ für y. Mit (A2) haben die Einbrecher ein leichtes Spiel, da ihr Universalschlüssel y nicht mehr von x abhängt, sondern alle Häuser x einfach öffnen kann.
Also: Die Eigenschaften werden von links nach rechts festgelegt.

Beispiel: Jetzt mit Zahlen:

(i) Für jede reelle Zahl $x \geq 1$ gibt es eine natürliche Zahl k, so dass dessen Differenz $x - k$ kleiner als 1 und größer oder gleich 0 ist.
Formal: $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \exists k \in \mathbb{N} : 0 \leq x - k < 1$

(ii) Es gibt eine reelle Zahl $x \geq 1$ für alle natürlichen Zahlen k, so dass dessen Differenz $x - k$ kleiner als 1 ist und größer gleich 0 ist.
Formal: $\exists x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq x - k < 1$

Bis jetzt haben wir uns noch nicht damit beschäftigt, ob diese Aussagen wahr sind, was wir in diesem Rahmen auch nicht machen werden. Das Zeigen oder Widerlegen solcher Aussagen wird uns im Studium noch oft genug begegnen und würde jetzt hier zu weit führen.

Aber vielleicht sagt ja dem einen oder anderen die Intuition (ein wichtige Eigenschaft des Mathematikers, um nicht standardisierte Probleme zu lösen), dass (i) wahr und (ii) falsch ist.

Autoren dieses Kapitels:
2019: Kira Rohlmann, Nils Näthke
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2012-2013: Alexander Bontjes van Beek