Präsenzaufgabenblatt – Zusatztutorium 5

keine Abgabe!

Die Termine für den Block der Zusatztutorien vor der zweiten Klausur, an dem die Aufgaben dieses Blattes besprochen werden, sind:

- **Dienstag 24.03.2020, von 10:00–12:00 Uhr, im Raum W01 0-015** und
- **Donnerstag 26.03.2020, von 11:00–13:00 Uhr, im Raum W01 0-015**.

Weiter gibt es zwei weitere Termine, an denen ausgewählte Aufgaben aus dem gesamten Zusatztutorium nochmal besprochen werden. Genauer sind die Termine:

- **Dienstag 24.03.2020, von 14:15–16:15 Uhr, im Raum W01 0-015** und
- **Donnerstag 26.03.2020, von 15:15–17:15 Uhr, im Raum W01 0-015**.

Drittens gibt es wieder eine allgemeine Fragestunde am

- **Mittwoch 01.04.2020, von 10:00–12:00 Uhr, im Raum W01 0-015**.

Präsenzaufgabe z.20. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

(a). Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist injektiv.

(b). Seien V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $v, w \in V$. Falls $v \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(w)$, so ist (v, w) linear abhängig.

(c). Sei $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist B enthalten in $\mathbb{C}^{3\times 3}$.

(d). Der $\mathbb{R}$-Untervektorraum $U := \ker(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\pi & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$ hat die Dimension 3.

(e). Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & i & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 1}$. Dann ist v ein Eigenvektor von A.

Präsenzaufgabe z.21. **(a).** Sei $a \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie

$$A_a := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie $\det(A_a)$. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist $\det(A_a) = 0$?

(b). Seien nun $a = 0$, $B := A_0$ und $d := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Bx = d$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe z.22. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^3 = 1$.

(a). Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren $(v_1, v_2, v_3) := (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix})$ linear abhängig sind.

(b). Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 1 & a^2 & 2a \\ 2a & 1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass v_1 und v_2 aus der vorherigen Teilaufgabe Eigenvektoren von A sind.

(c). Ist die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ diagonalisierbar?

Präsenzaufgabe z.23. Seien $n \in \mathbb{Z}_+$ und K ein Körper. Sei $f\colon K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$ ein Endomorphismus. Wir definieren

$$A := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f),$$

wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $K^{n\times 1}$ bezeichnet.
Beweisen Sie: Ist jeder Vektor $v \in K^{n\times 1}$, der verschieden vom Nullvektor ist, ein Eigenvektor von A, so ist $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_{K^{n\times 1}}$ für ein $\lambda \in K$.