Florian Heß
Modul 5.01.051

WS 2017/18
15.02.2018

Lineare Algebra
Abschlussklausur

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Bitte beachten Sie die unten und auf der Rückseite dieses Blattes angegebenen Hinweise. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie deren Kenntnisnahme.

Unterschrift: ______________________

Für die Aufgaben 1 bis 5 sind keine Begründungen nötig. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte.

Bei den Aufgaben 6 bis 10 sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite und den Folgeseiten fort. Das Vorhandensein einer Folgeseite bedeutet nicht zwingend, dass eine solche ausgefüllt werden muß. Am Ende des Klausurbogens befinden sich weitere Blankoseiten.

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	4	
2	4	
3	3	
4	9	
5	5	
6	11	
7	13	
8	12	
9	8	
10	6	
Σ	75	
Bonus	520	
Gesamt	100	
Note	1.0	

Hinweise zur Durchführung der Klausur.

- Tragen Sie bitte auf jedes bearbeitete Blatt Ihren Namen in Blockbuchstaben sowie Ihre Matrikelnummer ein. Blätter ohne Namen können *nicht* korrigiert werden.
- Die Klausur besteht aus 10 Aufgaben auf 20 durchnummerierten Blättern und einem unnummerierten Deckblatt. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.
- Bitte halten Sie Ihren Studierenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Mobilfunkgeräte vor Beginn der Klausur aus und verstauen sie diese in Ihren Taschen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur ist 180 Minuten.
- Es darf nur mit einem blauen oder schwarzen Stift geschrieben werden (auf keinen Fall mit rot, grün oder Bleistift). Es darf kein Tipp-Ex benutzt werden.
- Zur Bearbeitung sind keine Hilfsmittel wie Skripte, Bücher, Notizen, Taschenrechner, etc. erlaubt.
- Die Heftklammern der Klausur dürfen nicht gelöst werden.
- Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur.
- Sollte der unterhalb eines Aufgabentextes zur Verfügung stehende Platz (inklusive Rückseiten) nicht zur Bearbeitung ausreichen, verwenden Sie bitte die Blankoseiten am Ende der Klausur und machen Sie bitte einen Vermerk über die Fortsetzung der Aufgabe. Sollte das zur Verfügung gestellte Papier danach nicht ausreichen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden.
- Bei manchen Rechenaufgaben bietet es sich an, eine Probe zu machen.
- Wenn Sie während der Bearbeitungszeit auf Toilette müssen, kommen Sie bitte mit Ihrer Klausur und Ihrem Ausweis zu den Aufsichtspersonen. Es darf stets nur eine Person gleichzeitig die Toilette aufsuchen.
- Bitte reden Sie während der Klausur nicht laut. Bei Unklarheiten geben Sie bitte Handzeichen, eine Aufsichtsperson kommt dann an Ihren Platz.
- Sie dürfen die Bearbeitung Ihrer Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit beenden und den Hörsaal vorzeitig verlassen – mit folgenden Einschränkungen: Bleiben Sie bitte zum einen mindestens 15 Minuten. Zum anderen sollten Sie 15 Minuten vor Ablauf der Bearbeitungszeit bitte bis zum Ende bleiben, um Unruhe zu vermeiden.
- Bitte entsorgen Sie nach der Klausur den eigenen Müll.

Matrikelnr.: ____________ Name: ______________________________ Blatt 1

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Sie müssen Ihre Entscheidungen nicht begründen.
Auswertung der Aufgaben 1 bis 3: Ein richtiges Kreuz ergibt 1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt −1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. Die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe ist mindestens 0.

1	Ist $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \operatorname{Rang}(A) < 3\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ isomorph zum $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\{f \in \mathbb{Q}[t]_5 \mid f(0) = f(1) = 0\}$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2\}$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum?	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es einen 3-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum und einen 3-dimensionalen $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum, welche isomorph sind?	☐ Ja ☐ Nein

Punkte: /4

2	Gibt es einen surjektiven $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus $f\colon \mathbb{Q}^{2014} \to \mathbb{Q}^{52}$?	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es einen $\mathbb{C}$-Vektorraumhomomorphismus $f\colon \mathbb{C}^{3\times 1} \to \mathbb{C}^{2\times 1}$ mit $f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-i\\i\end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$?	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es einen $\mathbb{Z}_3$-Vektorraumepimorphismus $f\colon \mathbb{Z}_3^5 \to \mathbb{Z}_3^4$ mit $\dim(\operatorname{Kern}(f)) = 2$?	☐ Ja ☐ Nein
	Kann $f \circ g$ ein Monomorphismus sein, wenn f ein Homomorphismus, aber kein Monomorphismus und g ein Epimorphismus ist?	☐ Ja ☐ Nein

Punkte: /4

3	Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, ein Körper K und ein $A \in K^{m\times n}$ gegeben. Sind die folgenden Aussagen stets wahr?	
	Wenn $m = n$ und $K = \mathbb{C}$ gilt, so ist A trigonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Der Rang von A und von $-A^T$ sind gleich.	☐ Ja ☐ Nein
	Für $n = m$, $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit ist $\det(A) > 0$.	☐ Ja ☐ Nein

Punkte: /3

(Raum für Notizen)

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte.

4 Es seien $A \in \mathbb{Z}_2^{3\times 4}$, $b \in \mathbb{Z}_2^{3\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $E \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, sofern sie existieren; andernfalls schreiben Sie „ex. nicht" ins Antwortfeld.

$\mathrm{Lös}(A, b) =$	Basis von $\mathrm{SRaum}(E)$:
$b^T A =$	$CD =$
$C^{-1} =$	$D^{-1} =$
$\det(A) =$	$\det(D) =$
$\mathrm{Rang}(A) =$	

Punkte: /9

(Raum für Notizen)

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte.

5 Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ seien gegeben durch

$$\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie bzgl. des Skalarprodukts $s_A(x, y) = x^T Ay$ eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$, indem Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ in der *durch die Indizes angegebenen Reihenfolge* anwenden.

$w_1 =$	$w_2 =$	$w_3 =$

Punkte: /5

6 Es seien $B, C, D, E \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 49 & -21 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -28 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien $U_1, U_2, U_3 \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$U_1 = \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid AB = DA^T\},$$
$$U_2 = \mathrm{Spann}_{\mathbb{Q}}(B, B + C),$$
$$U_3 = \mathrm{Spann}_{\mathbb{Q}}(D, E).$$

(a) Zeigen Sie, dass U_1 ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von U_1.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 \cap U_3$.

Punkte: /11

7 Es seien $A \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{Z}_3^{3\times 1}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Wie in der Vorlesung bezeichne $f_A \colon \mathbb{Z}_3^{3\times 1} \to \mathbb{Z}_3^{3\times 1}$, $x \mapsto Ax$ die Standardinterpretation von A.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_A)$ von f_A zur Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{Z}_3^{3\times 1}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{Z}_3^{3\times 1}$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_3^{3\times 1}})$.

(d) Berechnen Sie die Inverse von $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_3^{3\times 1}})$.

(e) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ von f_A zur Basis $\mathcal{B}$.

(f) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $I_{\mathcal{B}}(e_1) = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1)$ von e_1 bzgl. $\mathcal{B}$.

Punkte: /13

8	Für $c \in \mathbb{R}$ sei $A_c \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Blockmatrix gegeben durch $$A_c = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & c & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$ (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A_c für $c \in \mathbb{R}$ als Produkt von Linearfaktoren. (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_c für $c \in \mathbb{R}$. (c) Berechnen Sie Basen der Eigenräume von A_c für $c = 3$ zu den beiden größten Eigenwerten von A_c. (d) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist A_c invertierbar? Begründen Sie.

Punkte: /12

9	(a) Es seien ein Körper K, ein endlich dimensionaler K-Vektorraum V und ein K-Vektorraumendomorphismus $f\colon V \to V$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn 0 kein Eigenwert von f ist. (b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine normale Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A = X^4 - 3X^3 + 2X^2$ gegeben. Bestimmen Sie den Rang von A.

Punkte: /8

10	Es seien $n \in \mathbb{N}$, ein Körper K und ein $A \in K^{n\times n}$ gegeben. Weiter sei $f \in K[t]$ und λ als Eigenwert von A gegeben. Zeigen Sie, dass dann $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(A)$ ist.

Punkte: /6