Konvergenz und Vollständigkeit

Def Eine *Teilfolge* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Gestalt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ...)$, wobei $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ natürliche Zahlen sind.

Satz 2.8 Jede Teilfolge einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wieder eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Def Eine Zahl a heißt *Häufungspunkt* (oder auch *Häufungswert*) einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen, falls es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Satz 2.9 (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Def Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Man definiere:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \text{ der größte Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \text{ der kleinste Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Def Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen heißt *Cauchy-Folge (oder Fundamental-Folge)*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt.

Satz 2.10 (Cauchy-Kriterium für Folgen)
Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.