SS 2020 • Analysis IIa • Übungsaufgaben

Blatt 5

Abgabefrist (NEU!): bis zum 28.05.2020 um 23:59:59

als PDF-Datei an den zuständigen Tutor

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Bestimmen Sie allgemeine Lösungen folgender Differentialgleichungen :

1. $y'(x) = \big(y(x)^2 + 1\big)(x^2 + 1)$,
2. $y'(x) = e^{y(x)} \cos x$.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)
Betrachte das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)^2 \sin x, \quad y(0) = y_0$.

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem.
2. Für welche y_0 sind die Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

1. $y'(x) = -y(x) + \sin x, \quad y(0) = 0$,
2. $y'(x) = \dfrac{2}{x}\, y(x) + x^2 \cos x \quad (x > 0), \quad y(\pi) = 0$.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)

1. Betrachte die Differentialgleichung $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, wobei $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind und die uneigentlichen Integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, dx \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} b(x)\, dx$$
absolut konvergieren. Zeigen Sie, dass jede Lösung dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
2. Hat die Differentialgleichung
$$y'(x) = \frac{x \sin x}{x^4 + 1}\, y(x) + \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$
unbeschränkte Lösungen auf $\mathbb{R}$?

Präsenzaufgaben

1. Seien $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Betrachte die Differentialgleichung $y'(x) = ay(x) + b$.
   (a) Finden Sie die allgemeine Lösung.
   (b) Sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle Lösungen, die die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ erfüllen, und berechne $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ für diese Lösungen.

2. Finden Sie allgemeine Lösungen folgender Differentialgleichungen:
   (a) $xy'(x) = 3y(x) + 2x^4$ auf $(0, +\infty)$,
   (b) $y'(x) + y(x)\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$,

3. Betrachte die Differentialgleichung $y'(x)\sin(2x) = 2\big(y(x) + \cos x\big)$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$.
   (a) Finden Sie die allgemeine Lösung.
   (b) Finden Sie alle Lösungen, für die der Grenzwert $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} y(x)$ existiert und endlich ist.

4. Unter der Bernoullischen Gleichung versteht man eine Differentialgleichung der Form $y' = ay + by^\alpha$, wobei a, b stetige relle Funktionen auf einem Intervall I sind und α eine reelle Zahl ist, $\alpha \notin \{0, 1\}$.
   (a) Sei $z := y^{1-\alpha}$. Zeigen Sie: y ist genau dann eine positive Lösung der Bernoullischen Gleichung auf einem Intervall, wenn z auf demselben Intervall eine positive Lösung von $z' = (1-\alpha)(az + b)$ ist.
   (b) Finden Sie alle positiven Lösungen von $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $(x > 0)$,
   (c) Finden Sie alle positiven Lösungen von $x(y' + y^2) + y = 0$ $(x > 0)$.

5. Finden Sie allgemeine Lösungen folgender Differentialgleichungen. (Beschreiben Sie auch die Definitionsbereiche der Lösungen.)
   (a) $y'(x) = \big(2 + \sin y(x)\big)\sin x$,
   (b) $y'(x) = 2x\sqrt{y(x)^2 + 1}$. Hinweis: um die Lösungen in kompakter Form zu schreiben, bestimmen Sie zuerst die inverse Funktion zu $x \mapsto \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.
   (c) $y'(x) = \cos\big(y(x) + 3x\big)$. Hinweis: nutzen Sie die Substituion $z(x) = y(x) + 3x$.
   (d) $y'(x) = \big(x + y(x)\big)^2$.