Der Satz von Taylor

Satz von Taylor(eindimensional) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal differenzierbare Funktion und $x \in I$. Dann gibt es eine Zahl ξ zwischen x und x_0, sodass

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{k} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \end{aligned}$$

Satz 2.6 (Satz von Taylor) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $f \in C^{k+1}(U)$, $a \in U$. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor derart, dass die Strecke $\{a + th\colon 0 \leq t \leq 1\}$ in U liegt. Dann gilt:

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(h)$$

mit dem Restglied $R_{k+1}(h) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(a+\xi h)}{\alpha!} h^\alpha$ für ein $\xi \in (0,1)$.

Lemma Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $f \in C^k(U)$, $a \in U$. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor derart, dass die Strecke $\{a + th\colon 0 \leq t \leq 1\}$ in U liegt. Definiert man

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a+th),$$

so ist g k-mal stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{g^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(a+th)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Def Sei Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f im Punkt a.