2 Aussagenlogik

„Das ist doch logisch!“ - Diesen Satz hört man häufig, aber wann ist etwas logisch? Im Alltag machen wir täglich Annahmen, die wir (ohne weiter darüber nachzudenken) als wahr ansehen. Beispielsweise wird niemand den Sätzen „Wasser ist nass.“ oder „13 ist eine Primzahl.“ widersprechen.
Auf diesen Annahmen beruhend entscheiden wir (mehr oder weniger intuitiv), ob etwas wahr ist. Wir können schnell sagen, ob der Satz „Wenn man schwimmt, wird man nass.“ stimmt.
Diese Disziplin, die Lehre vom folgerichtigen Denken bzw. dem schlüssigen Argumentieren heißt Logik.
In der Mathematik ist es elementar, eine Aussage nicht einfach nur in den Raum zu werfen, sondern auch nachweisen zu können, dass es stimmt. Ein Beweis ist dabei nichts anderes als eine schlüssige Argumentation, die auf Prinzipien der Logik beruht. Deswegen gehört logisches Schließen zum Handwerkszeug jedes Mathematikers.
Es gibt verschiedene Teilgebiete der Logik, die sich für unterschiedliche Problemstellungen anbieten. Wir werden uns zunächst mit der Aussagenlogik beschäftigen.

2.1 Einführung

Die Begriffe „Aussage“ und „Argument“ wurden bereits mehrfach genannt, ohne dass wir bislang geklärt haben, was wir im Detail darunter verstehen wollen. Dies werden wir nun innerhalb der nächsten Definitionen nachholen:

Definition 2.1 (Aussage)
Eine **Aussage** ist eine Formulierung, mit der entweder ein Sachverhalt, eine Vermutung oder eine These ausgedrückt wird. Jeder Aussage muss sich ein eindeutiger Wahrheitswert (*wahr* oder *falsch*) zuordnen lassen.

Beispiele: Folgende Formulierungen sind Aussagen:

- „Annika schwimmt im Wasser.“
- „13 ist eine Primzahl und der Himmel ist blau.“
- „Die Kuh ist schwarz oder lila.“
- „Es gibt rosa Elefanten.“

Folgende Formulierungen sind keine Aussagen:

- „Schwimmt Annika im Wasser?“
  Eine Frage (**nicht** die Antwort auf die Frage!) kann nicht wahr oder falsch sein.
- „Bleib stehen.“
  Eine Aufforderung kann auch nicht eindeutig wahr oder falsch sein.
- „Raucher sterben früher.“
  Früher als wer? Ohne passenden Vergleich kann diesem Satz kein Wahrheitswert zugeordnet werden.

Ob der Wahrheitswert einer Aussage bekannt ist oder nicht, ist erst einmal unwichtig. Wichtig ist nur, dass der Aussage theoretisch ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Wir werden in Abschnitt 2.2 noch einmal genauer auf dieses Thema eingehen. Mehrere Aussagen zusammen können ein Argument ergeben:

Definition 2.2 (Argument)
Ein **Argument** ist eine Schlussfolgerung, die dazu dient einen Sachverhalt logisch zu begründen. Ein Argument besteht aus einer oder mehreren *Prämissen* und genau einer *Konklusion*.

- Die **Konklusion** ist diejenige Aussage, deren Wahrheit durch das Argument begründet werden soll.
- Die **Prämissen** sind diejenigen Aussagen, die die Wahrheit der Konklusion begründen sollen.
- Der Standardseperator „Also“ trennt Prämissen und Konklusion und trennt den Teil des Arguments, der als Begründung dient von dem Teil der begründet werden soll.

Beispiele:

1. „$\underbrace{\text{Annika schwimmt im Wasser.}}_{\text{Prämisse 1}}$ $\underbrace{\text{Wenn Annika im Wasser schwimmt, wird sie nass.}}_{\text{Prämisse 2}}$ Also $\underbrace{\text{wird Annika nass.}}_{\text{Konklusion}}$“
2. „$\underbrace{\text{13 ist eine Primzahl}}_{\text{Prämisse 1}}$ und $\underbrace{\text{der Himmel ist blau.}}_{\text{Prämisse 2}}$ Also $\underbrace{\text{ist der Himmel blau.}}_{\text{Konklusion}}$“
3. „$\underbrace{\text{Die Kuh ist schwarz oder lila.}}_{\text{Prämisse}}$ Also $\underbrace{\text{ist die Kuh lila.}}_{\text{Konklusion}}$“
4. „$\underbrace{\text{Es gibt rosa Elefanten.}}_{\text{Prämisse}}$ Also $\underbrace{\text{liegt Oldenburg in Niedersachsen.}}_{\text{Konklusion}}$“

Die letzten beiden Argumente scheinen erst einmal merkwürdig zu sein. Können solche Argumente unserer Vorstellung der Logik als Lehre des folgerichtigen Denkens genügen? Damit landen wir automatisch bei der Frage nach der *Schlüssigkeit* von Argumenten.

2.2 Schlüssigkeit

An dieser Stelle beschäftigen wir uns mit dem Wahrheitswert einer Aussage, insbesondere interessiert es uns, wann eine Aussage im mathematischen Sinne *falsch* ist.

Definition 2.3
Eine Aussage heißt genau dann (im mathematischen Sinne) **falsch**, wenn sie „unter keinen Umständen" wahr ist. Ansonsten nennen wir sie **wahr**.

Beispiele: Die Aussage...

- „Friedrich ist ein verheirateter Junggeselle."
  ... ist unter keinen Umständen wahr, da die Definition von „Junggeselle" ausschließt, dass ein solcher verheiratet ist. Somit ist diese Aussage (im mathematischen Sinne) falsch.

- „Man kann hundert mal hintereinander im Lotto gewinnen."
  ... ist im mathematischen Sinne wahr. Dass das wirklich passiert ist zwar sehr unwahrscheinlich, theoretisch aber denkbar.

Manchen Aussagen kommt eine besondere Rolle zu, den sogenannten Axiomen.

Definition 2.4 (Axiom)
Ein **Axiom** ist eine Aussage, die (auf Grund bestimmter Überzeugungen oder auch willkürlicher Festlegungen) als wahr angesehen wird.

Für den Rest dieses Vortrags sollen folgende Axiome gelten:

(I) Wenn Annika im Wasser schwimmt, wird sie nass.

(II) Es gibt keine rosa Elefanten.

Diese Axiome erlauben uns nun festzustellen, ob bestimmte Argumente wirklich schlüssig (also sinnvoll) sind.

Definition 2.5 (Schlüssigkeit)
Ein Argument heißt genau dann **schlüssig**, wenn es unmöglich ist, dass alle seine Prämissen wahr sind und gleichzeitig die Konklusion falsch ist.

Zum besseren Verständnis überprüfen wir die Beispiele von gerade auf ihre Schlüssigkeit.

Beispiele:

1. „Annika schwimmt im Wasser. Wenn Annika im Wasser schwimmt, wird sie nass. Also wird Annika nass.“

   Der zweite Satz ist nach Axiom (I) wahr. Ob der erste Satz auch wahr ist, wissen wir nicht, aber überraschenderweise macht das nichts. Wir überprüfen einfach beide Fälle:

   - Wenn Annika tatsächlich im Wasser schwimmt (also die Prämisse wahr ist), dann wissen wir nach Axiom (I), dass dann auch die Konklusion wahr ist.
   - Angenommen, die Prämisse „Annika schwimmt im Wasser“ ist falsch. Der Fall „*Alle* Prämissen sind wahr, während die Konklusion falsch ist“ kann also gar nicht mehr eintreten.

   Es ist also egal, ob Annika wirklich im Wasser schwimmt oder nicht - *„Prämissen wahr und Konklusion falsch“* tritt nicht ein, also ist das Argument schlüssig.

2. „13 ist eine Primzahl und der Himmel ist blau. Also ist 13 eine Primzahl.“

   Hier ist die Konklusion schon in den Prämissen enthalten. Wir überzeugen uns von der Schlüssigkeit des Arguments, indem wir den Wahrheitswert der Konklusion betrachten, wenn beide Prämissen wahr sind: Ist 13 tatsächlich eine Primzahl und ist der Himmel wirklich blau, dann wissen wir bereits, dass 13 eine Primzahl ist. Wenn beide Prämissen wahr sind, dann muss also zwangsläufig auch die Konklusion wahr sein. Das Argument ist demnach schlüssig. Allerdings bringen solche Argumente keine neuen Erkenntnisse.

3. „Die Kuh ist schwarz oder lila. Also ist die Kuh lila.“

   Angenommen, die Kuh ist schwarz. Dann ist die Prämisse *„Die Kuh ist schwarz oder lila.“* wahr, die Konklusion *„Die Kuh ist lila.“* jedoch falsch. Hier kann also der Fall *„Prämissen wahr und Konklusion falsch“* eintreten. Damit ist das Argument nicht schlüssig.

4. „Es gibt rosa Elefanten. Also liegt Oldenburg in Niedersachsen.“

   Dieses Argument ist schlüssig, auch wenn es zunächst einmal überraschend scheint. Aber schauen wir uns einmal die möglichen Wahrheitswerte der Prämisse *„Es gibt rosa Elefanten.“* an: Nach Axiom (II) ist die Prämisse falsch. Also kann der Fall *„Prämissen wahr und Konklusion falsch“* nicht eintreten, das Argument ist folglich schlüssig.

Achtung: Wir haben damit nicht bewiesen, dass Oldenburg in Niedersachsen liegt!

Das letzte Beispiel zeigt eine Eigenschaft von Schlüssigkeit auf, die wir in folgendem Satz festhalten wollen:

Satz 2.6
Jedes Argument, das mindestens eine falsche Prämisse hat, ist schlüssig.

Durch ähnliche Überlegungen ergibt sich auch folgender Satz:

Satz 2.7
Jedes Argument, dessen Konklusion wahr ist, ist schlüssig.

2.3 Formalisierung

Was passiert eigentlich, wenn man im ersten Argument „Annika“ durch „Melanie“ ersetzt? Der Inhalt ändert sich natürlich, aber hat dies einen Einfluss auf die Schlüssigkeit? Offensichtlich nicht.
Und wenn man „nass“ durch „grün“ ersetzt (und das Axiom entsprechend ändert)? Offensichtlich ändert dies auch nichts an der Schlüssigkeit des Arguments.
Man spricht hier davon, dass die Argumente „Annika schwimmt im Wasser. Wenn Annika im Wasser schwimmt, wird sie nass. Also wird Annika nass.“ und „Melanie schwimmt im Wasser. Wenn Melanie im Wasser schwimmt, wird sie grün. Also wird Melanie grün.“ die selbe *Form* haben. Wir könnten uns eine ganze Menge an Arbeit sparen, wenn wir (anstatt wie grade jedes Argument einzeln auf Schlüssigkeit zu prüfen) alle Argumente einer bestimmten Form „in einem Rutsch“ auf Schlüssigkeit überprüfen könnten. Um dies tun zu können, führen wir zunächst eine Formalisierung ein.

Definition 2.8 (Formalisierung)
Jede Aussage wird durch einen Großbuchstaben (A, B, ...) ersetzt. Ein Satz, der mehrere Aussagen enthält, wird durch mehrere Großbuchstaben ersetzt, die mittels so genannter *Junktoren* verbunden werden:

Junktor	Zeichen
$\textit{nicht}\ldots$	$\neg$
$\ldots\textit{und}\ldots$	$\wedge$
$\ldots\textit{oder}\ldots$	$\vee$
$\textit{wenn}\ldots, \textit{dann}\ldots$	$\Rightarrow$
$\ldots\textit{genau dann, wenn}\ldots$	$\Leftrightarrow$

Um diese Formalisierung vornehmen zu können, ist es manchmal notwendig, Aussagen aufzuteilen. Die Aussage „Gauß war ein schlauer Mathematiker.“ könnte man zwar durch den Buchstaben A formalisieren, aber bei genauerem Hinschauen fällt auf, dass sich hier eigentlich zwei Aussagen ergeben: „Gauß war schlau und Gauß war Mathematiker.“ Also trifft man das Ganze mit Sicherheit besser, wenn man die Formalisierung $A \wedge B$ wählt. Aussagen, die sich nicht weiter aufteilen lassen nennen wir auch *atomare Aussagen.*

Beispiele: Im Folgenden formalisieren wir die bereits bekannten Aussagen:

1. (W) Annika schwimmt im Wasser. (N) Annika wird nass.
   Man erhält folgende Formalisierung:
   Formalisierung: $W, W \Rightarrow N$ Also: N

2. (P) 13 ist eine Primzahl. (B) Der Himmel ist blau.
   Formalisierung: $P \wedge B$ Also: P

3. (S) Die Kuh ist schwarz. (L) Die Kuh ist lila.
   Formalisierung: $S \vee L$ Also: L

4. (R) Es gibt rosa Elefanten. (O) Oldenburg liegt in Niedersachsen.
   Formalisierung: R Also: O

2.4 Wahrheitswerttafeln

Wie können wir nun von einem formalisierten Argument prüfen, ob es schlüssig ist? Immerhin wissen wir bei einem Argument der Form *„$P \wedge B$ Also: P“* im Gegensatz zur ausformulierten Variante nichts über die Wahrheitswerte der einzelnen Prämissen und der Konklusion.
Die Lösung ist ganz einfach: Wir prüfen jede mögliche Wahrheitswertbelegung der Prämissen und der Konklusion durch. Um zwischen all den Möglichkeiten nicht den Überblick zu verlieren, bietet sich die Verwendung von so genannten **Wahrheitswerttafeln** (WWT) an. In den folgenden WWT wird w stets für *wahr* und f für *falsch* stehen.
Eine relativ einfache WWT kann zum Beispiel so aussehen:

Wahrheitswerttafel für „nicht“ und „nicht nicht“

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
w	f	w
f	w	f

Sie verrät uns, wie sich der Wahrheitswert von $\neg A$ und von $\neg\neg A$ verhält, falls die Aussage A wahr oder falsch ist.

Interessant dabei ist vor allem, dass „nicht nicht A“ offenbar die gleichen Wahrheitswerte hat wie „A“. Man spricht hier davon, dass die beiden Aussagen äquivalent sind.

Definition 2.9 (Äquivalenz)
Zwei Aussagen sind genau dann **äquivalent**, wenn sie die gleichen Wahrheitswerte haben, also etwa: Aussage C ist wahr *genau dann, wenn* Aussage D wahr ist.

Ähnliche Tabellen wie für „nicht“ lassen sich auch für Aussagen aufstellen, die mit anderen Junktoren verknüpft sind.

Das geschieht nach folgendem Prinzip:
In die ersten Spalten schreiben wir alle Buchstaben (also Aussagen), die überhaupt vorkommen (im Folgenden: A, B). In die folgenden Spalten kommen alle Verknüpfungen der Buchstaben, die wir betrachten wollen. (Falls man ganze Argumente betrachtet, werden erst die Verknüpfungen der Prämissen und dann die der Konklusion aufgeführt.)
In die Spalten der einzelnen Aussagen kommen nun alle möglichen Wahrheitswertkombinationen dieser Aussagen (wie gesagt: die tatsächlichen Wahrheitswerte der ursprünglichen Aussagen interessieren an dieser Stelle nicht). Dabei ist es unerlässlich alle Fälle, die möglicherweise auftreten können, zu betrachten.

Bei n unterschiedlichen Buchstaben ergeben sich also 2^n verschiedene Kombinationen. Damit man nicht durcheinander kommt (und leichter mit anderen vergleichen kann), sollte man beim Auflisten der Kombinationsmöglichkeiten zweier Buchstaben am besten die Reihenfolge der folgenden Beipiele einhalten:

Wahrheitswerttafel für „und“ und „oder“

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Die Aussage $A \wedge B$ ist natürlich nur dann wahr, wenn sowohl Aussage A als auch Aussage B stimmen. Hier reicht es also, dass eine der beiden Aussagen nicht stimmt, damit die Gesamtaussage falsch ist.
Anders verhält es sich mit Aussagen der Form $A \vee B$. Hier genügt es, dass eine der beiden Aussagen wahr ist, damit die Gesamtaussage wahr wird. Die Aussage $A \vee B$ stimmt aber auch, wenn beide Teilaussagen wahr ist. (Man sagt, in der Mathematik ist „oder“ einschließend.)

Für die Mathematik besonders interessant ist die Wahrheitswerttabelle zweier Aussagen, die mit dem Junktor „wenn…, dann …“ verknüpft sind:

Wahrheitswerttafel für „wenn, dann“

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Leider ist diese auch die am schwersten einzusehende, denn warum sollte $A \Rightarrow B$ wahr sein, wenn A falsch ist? Auf den ersten Blick ist dies tatsächlich nicht einleuchtend. Es gibt mehrere Erklärungen für diese Festlegung. Eine davon wird an folgendem Beispiel ersichtlich:

Beispiel: Sei (A) „Du räumst dein Zimmer *nicht* auf.“ und (B) „Es gibt Ärger.“
($A \Rightarrow B$) bedeutet „Wenn du dein Zimmer nicht aufräumst, dann gibt es Ärger.“
Wenn man nun sein Zimmer aufräumt (also $\neg A$ gilt), aber etwas anderes Schlimmes tut (z.B. eine Vase kaputt macht), so bekommt man trotzdem Ärger (also B ist wahr).
Eine andere Überlegung überführt unsere Aussage in eine andere Aussage:
Diese Aussage von oben ist gleichbedeutend (d.h. äquivalent) zu „Du räumst dein Zimmer auf, oder es gibt Ärger.“, was mit $\neg A \vee B$ zu formalisieren wäre.

Für letztere Aussage aus dem Beispiel erhalten wir nach den obigen Überlegungen folgende WWT:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Wir haben hier nur die Wahrheitswerte von „nicht“ und „oder“ benutzt, aber da die beiden betrachteten Aussagen (sprachlich) äquivalent sind, haben sie auch die gleichen Wahrheitswerte. Auf diese Weise leuchtet obige Festlegung nun vielleicht schon eher ein.

Nun fehlt uns noch die WWT für den Junktor „genau dann, wenn“. Um das ganze zu veranschaulichen, betrachen wir folgendes Beispiel: „Silverster fällt auf einen

Samstag genau dann, wenn Heilig Abend auf einen Samstag fällt.". Anhand dieses Beispieles sollte recht schnell klar sein, warum die Wahrheitswertbelegung für die „genau dann,wenn" Verknüpfung wie folgt aussehen muss:

Wahrheitswerttafel für „genau dann,wenn"

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Wir können aber noch auf andere Art und Weise zeigen, dass diese Wahrheitswertbelegung stimmen muss. Dazu zerlegen wir die „genau dann, wenn"-Verknüpfung in Verknüpfungen, über die wir bereits die Wahrheitswertbelegung kennen. Wir erhalten: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Sprachlich bedeutet das für unser Beispiel: „Wenn Silvester auf einen Samstag fällt, dann fällt Heilig Abend auf einen Samstag und wenn Heilig Abend auf einen Samstag fällt, dann fällt Silverster auf einen Samstag." Damit können wir folgende WWT erstellen:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Durch das Herleiten der Wahrheitswertbelegung von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ aus Bekanntem und dadurch, dass diese Aussage gerade der Aussage $A \Leftrightarrow B$ entspricht, ist gewähleistet, dass die WWT für „genau dann, wenn" tatsächlich diese Wahrheitswertbelegung haben muss. Dieses Zeichen entspricht auch gerade der obigen Definition von Äquivalenz.

2.5 WWT und Schlüssigkeit

Mit Hilfe von Wahrheitswerttafeln ist es nun kein Problem mehr, ein formalisiertes Argument auf Schlüssigkeit zu untersuchen. Bislang haben wir überprüft, ob der Fall *„Prämissen wahr und Konklusion falsch"* eintreten kann. Und genau das machen wir nun wieder - allerdings reicht uns nun ein Blick in einige Zeilen der WWT! Steht in einer der Konklusions-Zeilen ein „f", in der gleichen Zeile der Prämissen aber nur „w", so ist das Argument nicht schlüssig. In allen anderen Fällen ist es schlüssig. Schauen wir uns dieses Vorgehen wieder an einigen Beispielen an:

Beispiele:

1. (W) Annika schwimmt im Wasser. (N) Annika wird nass.
   $W, W \Rightarrow N$ Also: N

Aussagen		Prämissen		Konklusion
W	N	W	$W \Rightarrow N$	N
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

   Es reicht nun, die zweite und vierte Zeile der WWT zu betrachten (da genau in diesen Zeilen die Konklusion falsch ist). In beiden Zeilen ist aber auch mindestens eine der Prämissen falsch - also ist das Argument schlüssig. Das konnten wir übrigens zeigen ohne Axiom I überhaupt zu verwenden.)

2. (P) 13 ist eine Primzahl. (B) Der Himmel ist blau.
   $P \wedge B$ Also: P

Aussagen		Prämissen	Konklusion
P	B	$P \wedge B$	B
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	w
f	f	f	f

   Auch hier sieht man sofort: Ist die Konklusion falsch, so ist auch schon die Prämisse falsch. Das Argument und jedes Argument der gleichen Form ist also schlüssig.

3. (S) Die Kuh ist schwarz. (L) Die Kuh ist lila.
   $S \vee L$ Also: L

Aussagen		Prämissen	Konklusion
S	L	$S \vee L$	L
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	w
f	f	f	f

   In diesem Fall verrät uns die zweite Zeile der Tabelle, dass nicht nur unser spezielles Argument nicht schlüssig ist, sondern, dass alle Argumente dieser Form die Definition nicht erfüllen.

4. (R) Es gibt rosa Elefanten. (O) Oldenburg liegt in Niedersachsen.
   R Also: O

Aussagen		Prämissen	Konklusion
R	O	R	O
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	f	w
f	f	f	f

Obwohl wir oben festgestellt haben, dass unser Argument schlüssig ist, erkennt man nun anhand der Tabelle, dass Argumente dieser Form *im Allgemeinen* nicht schlüssig sind. Das Argument war nur auf Grund der uns bekannten Wahrheitswertbelegung schlüssig. (Wir wussten, dass R falsch ist.) Falls die erste Aussage R auch den Wert wahr annehmen könnte, wäre dies nicht mehr der Fall.

Gegenüber der sprachlogischen Überlegung aus Abschnitt 2.2 bietet die Überprüfung der Schlüssigkeit durch WWT zwei wichtige Vorteile:

- Es sorgt für (mehr) Übersichtlichkeit.
- Man prüft nicht nur die Schlüssigkeit eines einzelnen Arguments, sondern gleichzeitig auch die Schlüssigkeit jedes Arguments, dass die gleiche Form hat!

Autoren dieses Kapitels:

2019: Kira Rohlmann, Nils Näthke
2018: Mai Bui, Bettina Steckhan, Konstantin Meiwald
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2013: Linda Feeken
2012: Marlies Händchen