Algebra - SS 20
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
M.Sc. Marco Melles

Übungsblatt 3

Abgabe 12.05.2020 0:00 Uhr

Sie können dieses Übungsblatt als Einzelperson oder als Gruppe von zwei Personen abgeben, sofern beide in der gleichen Übungsgruppe eingeteilt sind. In beiden Fällen fließen alle Aufgaben in die Bewertung ein.

Zur Abgabe des Übungsblattes nutzen Sie bitte den Abgabeordner in der StudIP-Veranstaltung 5.01.112-Tn Ihres Tutoriums. Verwenden Sie bei der Abgabe bitte "BlattXX-Nachname(n).tex" als Dateinamen.

Nützliche LaTeX-Befehle

LaTeX-Befehl	Output
`\sqrt{I}`	$\sqrt{I}$
`\trianglelefteq`	$\trianglelefteq$
`\not=`	$\not=$
`\infty`	∞

Sie können mit einem "equation array" eine vom restlichen Text abgesetzte Formelgruppe erzeugen. Intern wird eine Tabelle angelegt, wobei `&` die Einträge trennt und `\\` die nächste Zeile erzeugt. Eine von vielen Verwendungsmöglichkeiten: mit `\begin{eqnarray*} \varphi\,:\,R& \longrightarrow & R \\ r & \longmapsto & r\,+\,1 \end{eqnarray*}` erzeugen Sie:

$$\begin{array}{rcl} \varphi\,:\,R & \longrightarrow & R \\ r & \longmapsto & r\,+\,1 \end{array}$$

Um Faktorstrukturen zu verwenden, fügen Sie unter den verwendeten LaTeX-Paketen in Ihrer Vorlage `\usepackage{faktor}` hinzu. Anschließend können Sie mit `\faktor{A}{B}` einen Ausdruck der Form A/B erzeugen.

Aufgabe 3.1 (8 Punkte)**.** Erinnern Sie sich an die Definitionen des Radikals und Annullators aus Präsenzaufgabe 3.5. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a). Sei R ein Ring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal von R. Dann ist der Annulator ann(I) von I ebenfalls ein Ideal von R.

(b). Seien $I, J \trianglelefteq R$ Ideale eines kommutativen Ringes R. Dann gilt für die entsprechenden Radikale:

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

Aufgabe 3.2 (6 Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring und seien $I, J \trianglelefteq R$ Ideale von R.

(a). Finden Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass im Allgemeinen $I \cup J$ kein Ideal von R ist.

(b). I und J heißen **teilerfremde Ideale** von R, falls $R = I + J$. Zeigen Sie, dass für solche Ideale gilt: $IJ = I \cap J$.

(c). Finden Sie einen Ring R und Ideale I, J von R, sodass $IJ \neq I \cap J$.

Aufgabe 3.3 (6 Punkte)**.**

(a). Sei R ein Integritätsring, welcher kein Körper ist. Zeigen Sie, dass der Polynomring $R[t]$ über R kein Hauptidealring ist.

(b). Sei $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und seien $f = t^2 + [2]_3\, t + [1]_3 \in R[t]$ und $g = t^2 + t + [2]_3 \in R[t]$. Zeigen sind Sie, dass keinen Ringisomorphismus zwischen $R[t]/\langle f \rangle$ und $R[t]/\langle g \rangle$ gibt.

Aufgabe 3.4 (Kein Abgabe erforderlich)**.** Seien $R \leq S$ Integritätsringe, $f \in R[t]$ und $\alpha \in S$ in f einsetzbar. Zeigen Sie, dass α genau dann eine mehrfache Nullstelle von f ist, wenn $f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$, wobei f' die formale Ableitung von f bezeichnet.