Abgabe Analysis IIa, Blatt 01

Studierende(r): Weerts, Steffen, steffen.weerts@uni-oldenburg.de

Aufgabe 1

Sei $M \neq \emptyset$ und $d : M \times M \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

(i) Zu zeigen: d ist Metrik.

(M1) Zu zeigen: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in M : d(x,y) = 0 \text{ oder } d(x,y) = 1 \\ \Longrightarrow\ & \forall x, y \in M : d(x,y) \geq 0. \end{aligned}$$

(M2) Zu zeigen: $d(x,y) = d(y,x)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } y \neq x, \\ 0, & \text{falls } y = x. \end{cases} \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

(M3) Zu zeigen: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Sei oBdA $x \neq z$ (ansonsten gilt $d(x,z) = 0$ und nach (M1) gilt $d(x,y) + d(y,z) \geq 0$). Es gilt:

$$d(x,z) = 1 \leq \begin{matrix} 1 + d(y,z) \\ d(x,y) + 1 \end{matrix} = d(x,y) + d(y,z).$$

Da (M1), (M2) und (M3) erfüllt sind, ist d eine Metrik.

$\square$

(ii) Sei $x_0 \in M$. Es gilt:

$$B_{\frac{1}{3}} = x_0, \text{ da } \forall x \in M, x \neq x_0 : d(x_0, x) = 1.$$

$$B_{13} = M, \text{ da } \forall x \in M : d(x_0, x) \leq 1.$$

$\square$

(iii) Damit eine Folge in (M, d) konvergent gegen a ist, muss $d(a, x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d. h. $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Da $d(x, y) = 1 \forall x, y \in M, x \neq y$, müssen alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index N gleich dem Mittelpunkt a sein, d. h.:

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n = a \\ \Longrightarrow \ & \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(a, x_n) = 0 \\ \Longrightarrow \ & \forall \varepsilon \geq 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, a) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

(iv) Sei $U \subset X, i \in U$ beliebig.
Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) = & \{a \in X : d(x, a) < \varepsilon\} \\ = & \{a \in X : d(x, a) < \frac{1}{2}\} \\ = & \{x\}, \qquad (\text{da } d(x, a) < 1 \Leftrightarrow x = a) \\ \subset & U. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon \subset U.$$

$\square$

Aufgabe 2

(a) Fehlt.

(b) Fehlt.

Aufgabe 3

(a) Fehlt.

(b) Fehlt.

Aufgabe 4

Fehlt.