Vorkurs Mathematik 2019 | Aufgaben zum Thema

Vollständige Induktion

× Aufgabe 1: Explizite Formeln

Zeige die folgenden Identitäten mit vollständiger Induktion.
Tipp für (b): Im Induktionsbeweis von vorne und von hinten arbeiten

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

! (c)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Aufgabe 2: Teilbarkeit

Zeige die folgenden Teilbarkeiten mit vollständiger Induktion

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ teilt } n^2 + n \text{ (schreibe: } 2 \mid n^2 + n)$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid (5^n + 7)$$

× = Wichtige Aufgabe

2019 VORKURS Fachschaft Mathematik + Elementar− mathematik C.v.O. Universität Oldenburg

! = Schwierige Aufgabe

× Aufgabe 3: Stimmt das?

Gegeben sei folgender Induktionsbeweis:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n^2$$

Beweis: (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Für $n = 1$ gilt:

$$2^1 = 2 > 1 = 1^2$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$2^n > n^2$$

Zu zeigen:

$$2^{n+1} > (n + 1)^2$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{>}_{I.V} n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

(a) Rechne die Formel für $n = 2, \ldots, 6$ nach. Was fällt auf?

(b) Finde den Fehler im Induktionsbeweis.

(c) Überlege, wie man Aussage und Beweis verändern kann, um das Problem zu vermeiden.

! Aufgabe 4

Zeige folgende Behauptung:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1}\ \forall n \geq 2 : \ (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$