

# 第一章 静电场

## 1、库仑定律

【0101A01】

真空中有两个静止的点电荷  $A$  和  $B$ ，当另一个点电荷  $C$  靠近这两个点电荷时， $A$ 、 $B$  之间的作用力

(A) 大小不变，方向不变

(B) 大小不变，方向改变

(C) 大小改变，方向不变

(D) 大小改变，方向改变

答案

A

解析

两个点电荷之间的相互作用只与两个点电荷所带的电量、两个点电荷的位置有关，与其他电荷没有关系

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

【0101B01】

电子的质量为  $m$ ，带电量为  $-e$ ，绕静止的氢原子核（即质子）作半径为  $R$  的匀速率圆周运动，则电子的速率为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m R}}$$

解析

电子与质子之间的静电力提供电子绕质心作圆周运动的向心力，所以有

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R}$$

$$v = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m R}}$$

## 2、电场强度

### 2.1 电场强度的定义

【0102A01】

下列说法中正确的是

- (A) 电场中某点电场强度的方向就是将试探电荷放在该点所受电场力的方向
- (B) 在以点电荷为中心的球面上，由该点电荷所产生的电场强度处处相同
- (C) 电场强度可由  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  定义，其中  $q$  为试探电荷的带电量， $\vec{F}$  为试探电荷所受的电场力
- (D) 在两个等量同号点电荷的连线的中垂面上，电场强度处处为零

答案

C

解析

- (A)，如果点电荷所带电荷为正，则电场力方向即为该处电场强度的方向；如果点电荷所带电荷为负，则电场力方向与该处电场强度的方向相反。
- (B)，电场强度是一个矢量，在点电荷所在位置为球心的球面上，各处电场强度的大小相等，但方向各不相同，所以电场强度不同。
- (C)，电场强度可以由  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  计算得到，但不能说电场强度与试探电荷所反比，与所受电场力成正比。

【0102A02】

关于电场强度定义式  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ，下列说法中正确的是

- (A) 电场强度的大小与试探电荷的带电量成反比
- (B) 对场中某点，试探电荷所受电场力与试探电荷带电量的比值不因试探电荷带电量而变
- (C) 试探电荷所受电场力的方向就是电场强度的方向
- (D) 若场中某点不放试探电荷，则电场力为零，从而电场强度为零

答案

B

## 解析

电场强度的大小和方向可以由

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

来计算得到，但电场与试探电荷并没有关系，不管试探电荷是否存在，不管试探电荷带正电还是负电，电场都不会发生变化，因此不能说电场强度的大小与试探电荷的带电量成反比，如果试探电荷带正电，那么它所受到的电场力的方向与该处电场强度的方向相同，如果试探电荷带负电，那么它所受到的电场力的方向与该处电场强度的方向相反。

## 【0102A03】

设源电荷为  $Q$ ，试探电荷为  $q$ ，则电场强度定义式  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  对源电荷和试探电荷的要求是

- (A) 源电荷和试探电荷必须都是点电荷
- (B) 源电荷可以是任意电荷，试探电荷必须是正电荷
- (C) 源电荷可以是任意电荷，试探电荷必须是单位正电荷
- (D) 源电荷可以是任意电荷，试探电荷必须是点电荷，且可正可负

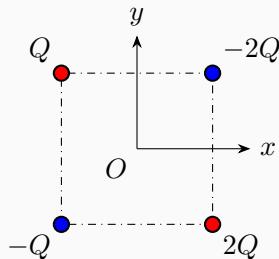
## 答案

D

## 2.2 电场叠加原理

## 【0102A04】

正方形的四个顶点上分别放置如图所示的点电荷，则正方形中心  $O$  处电场强度的方向



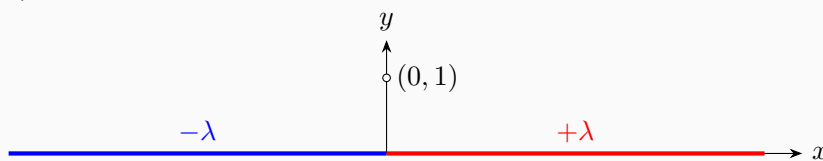
- (A) 沿  $x$  轴正向
- (B) 沿  $x$  轴负向
- (C) 沿  $y$  轴正向
- (D) 沿  $y$  轴负向

## 答案

C

## 【0102A05】

如图所示为一沿  $x$  轴放置的无限长分段均匀带电直线，线电荷密度分别为  $+\lambda(x > 0)$  和  $-\lambda(x < 0)$ ，则  $xy$  平面上  $(0, 1)$  点处的电场强度的方向为



- (A) 沿  $x$  轴正方向      (B) 沿  $x$  轴负方向      (C) 沿  $y$  轴正方向      (D) 沿  $y$  轴负方向

## 答案

B

## 【0102B01】

由一根绝缘细线围成的边长为  $L$  的正方形线框，使它均匀带电，其电荷线密度为  $\lambda$ ，则在正方形中心处的电场强度的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

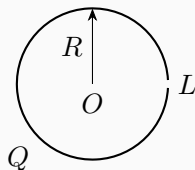
0

## 解析

由于对称性，很容易得到中心处的电场强度为零。

## 【0102B02】

如图所示，将一均匀带正电  $Q$  的细塑料棒弯成半径为  $R$  的圆弧，圆弧的缺口长度为  $L$  ( $R \gg L$ )，则圆心  $O$  处的电场强度大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{QL}{8\pi^2\epsilon_0 R^3}$$

## 2.3 电偶极子

## 【0102A06】

一个电偶极子放在均匀电场中, 当电偶极矩的方向与电场强度的方向不在同一直线时, 其所受的合力和合力矩分别为

- (A) 合力为零, 合力矩为零 (B) 合力为零, 合力矩不为零  
(C) 合力不为零, 合力矩为零 (D) 合力不为零, 合力矩不为零

## 答案

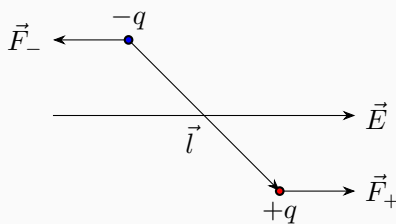
B

## 解析

如图, 当电偶极子放在均匀电场中, 正、负电荷所受到的电场力的大小相等, 方向相反, 所以合力为零 (不管电偶极矩方向与电场强度方向是否在同一直线)。而合力矩

$$\vec{M} = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = \vec{r}_- \times (-\vec{F}_+) + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_+ = \vec{l} \times \vec{F}_+ = q\vec{l} \times \vec{E}$$

所以当电偶极矩方向与电场强度方向不在同一直线时,  $\theta \neq 0$  且  $\theta \neq \pi$ ,  $\vec{l} \times \vec{E} \neq \vec{0}$ , 所以  $\vec{M} \neq \vec{0}$ ; 当电偶极矩方向与电场强度方向在同一直线时,  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi$ ,  $\vec{l} \times \vec{E} = \vec{0}$ , 所以  $\vec{M} = \vec{0}$ 。



## 【0102B03】

电偶极矩为  $\vec{p}$  的电偶极子放在电场强度为  $\vec{E}$  的均匀电场中,  $\vec{p}$  与  $\vec{E}$  之间的夹角为  $\theta$ , 则电偶极子所受的力矩的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

 $pE \sin \theta$ 

## 解析

电偶极子是一对相距为  $l$ 、带电量分别为  $+q$  和  $-q$  的点电荷对, 其电矩定义为  $\vec{p} = q\vec{l}$ , 其中  $\vec{l}$  的方向从  $-q$  指向  $+q$ 。因此在匀强电场中, 两个点电荷所受到的电场力大小相等, 方向相反 (一个沿电场强度的方向, 一个逆着电场强度的方向), 但不一定在同一条直线上。所以当电偶极子的电矩与电场强度之间有一定的夹角时, 电偶极子受到的是一对力偶。所以这里说的电偶极子所受的电场力, 应该是指这

对力偶的“合力”，所以为零。而力偶对于任意一点的力矩是常量，其大小为

$$M = Fl \sin \theta = qEl \sin \theta = pE \sin \theta$$

### 3、高斯定理

#### 3.1 电通量的定义和简单计算

【0103B01】

一面积为  $S$  的平面，放在电场强度为  $\vec{E}$  的均匀电场中，已知  $\vec{E}$  与平面间的夹角为  $\theta (\theta < \frac{\pi}{2})$ ，则通过该平面的电场强度的通量为\_\_\_\_\_。

答案

$$ES \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = ES \sin \theta$$

解析

电场强度的通量

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

其中面的方向定义为面的法线方向，所以在这里就是  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ，所以

$$\Phi = ES \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = ES \sin \theta$$

#### 3.2 高斯定理的理解

【0103A01】

高斯定理  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

- (A) 适用于任何静电场
- (B) 只适用于匀强电场
- (C) 只适用于真空中的静电场
- (D) 只适用于具有球对称性、柱对称性和平面对称性的静电场

答案

A

## 解析

高斯定理本身适用于任何静电场。只是对于真空中的静电场，右边的电荷只包括自由电荷，因为真空中并不存在束缚电荷，而对于介质，电荷包含了自由电荷和束缚电荷。关于对称性，定理本身并不要求一定要具有什么对称性，但在具体的计算过程中，只有某些特殊对称性的电场，才可以取比较适当的高斯面，可以求出通过高斯面的电通量。

## 【0103A02】

- 关于高斯定理有以下几种理解，其中正确的是
- (A) 如果高斯面上电场强度处处为零，则该面内必无电荷
  - (B) 如果高斯面内无电荷，则高斯面上电场强度处处为零
  - (C) 如果高斯面上电场强度处处不为零，则高斯面内必有电荷
  - (D) 如果高斯面内有净电荷，则通过高斯面的电场强度通量必不为零

## 答案

D

## 解析

高斯定理是指电场在高斯面上的通量与高斯面所包围的全部净电荷之间的关系。

如果高斯面上各点的电场都为零，那么通过高斯面的通量也一定为零，所以高斯面内的净电荷为零，但可以有等量的异号电荷存在，比如高斯面选为空腔导体球内的任一曲面，但空腔内存在有等量异号的电荷。

如果高斯面内无电荷，则净电荷为零，但高斯面上的电场是所有电荷的电场之和，不仅与面内的电荷有关，还与面外的电荷也有关系，如一匀强电场。对于匀强电场，处处电场强度不为零，但任意一个高斯面内都没有电荷。

## 【0103A03】

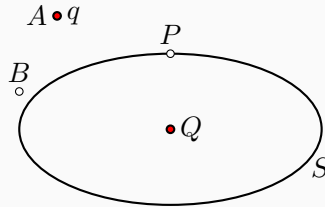
- 已知一高斯面所包围的体积内电荷代数和为零，则以下说法正确的是
- (A) 高斯面上各点电场强度均为零
  - (B) 通过高斯面上每一面元的电场强度的通量均为零
  - (C) 通过整个高斯面的电场强度的通量为零
  - (D) 以上说法都不对

## 答案

C

## 【0103A04】

如图所示，闭合曲面  $S$  内有一点电荷  $Q$ ， $P$  为  $S$  上一点，在  $S$  外  $A$  点有一点电荷  $q$ ，若将  $q$  移至  $B$  点，则



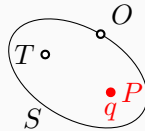
- (A) 通过  $S$  的电场强度的通量不变， $P$  点的电场强度不变
- (B) 通过  $S$  的电场强度的通量不变， $P$  点的电场强度改变
- (C) 通过  $S$  的电场强度的通量改变， $P$  点的电场强度不变
- (D) 通过  $S$  的电场强度的通量改变， $P$  点的电场强度改变

## 答案

B

## 【0103A05】

如图所示，任意闭合曲面  $S$  内有一点电荷  $q$ ， $O$  为  $S$  上任一点，若将  $q$  由  $S$  内的  $P$  点移到  $T$  点，且  $OP = OT$ ，那么



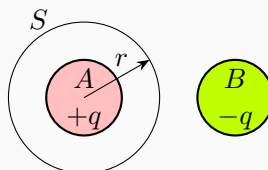
- (A) 通过  $S$  的电场强度的通量不变， $O$  点的电场强度不变
- (B) 通过  $S$  的电场强度的通量不变， $O$  点的电场强度改变
- (C) 通过  $S$  的电场强度的通量改变， $O$  点的电场强度不变
- (D) 通过  $S$  的电场强度的通量改变， $O$  点的电场强度改变

## 答案

B

## 【0103A06】

$A$  和  $B$  为两个均匀带电球体， $A$  带正电  $+q$ ， $B$  带负电  $-q$ ，作一与  $A$  同心的球面  $S$  为高斯面，如图所示，则





- (A) 通过  $S$  的电场强度的通量为零,  $S$  上各点的电场强度均为零  
 (B) 通过  $S$  的电场强度的通量为  $\frac{q}{\varepsilon_0}$ ,  $S$  上各点的电场强度均为  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$   
 (C) 通过  $S$  的电场强度的通量为  $-\frac{q}{\varepsilon_0}$ ,  $S$  上各点的电场强度均为  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$   
 (D) 通过  $S$  的电场强度的通量为  $\frac{q}{\varepsilon_0}$ , 但  $S$  上各点的电场强度不能直接由高斯定理求出

## 答案

D

## 解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

中, 高斯面上各点的电场强度是整个空间所有电荷在该处产生的电场的矢量和, 而通过整个高斯面上的电通量之和仅仅与高斯面内所包含的电荷有关, 与高斯面外的电荷无关。

## 【0103A07】

点电荷  $Q$  被曲面  $S$  所包围, 从无穷远处引入另一点电荷  $q$  至曲面外一点, 则引入  $q$  前后

- (A) 通过  $S$  的电场强度的通量不变,  $S$  上各点的电场强度不变  
 (B) 通过  $S$  的电场强度的通量不变,  $S$  上各点的电场强度改变  
 (C) 通过  $S$  的电场强度的通量改变,  $S$  上各点的电场强度不变  
 (D) 通过  $S$  的电场强度的通量改变,  $S$  上各点的电场强度改变

## 答案

B

## 解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

中, 式子右边的电荷量是高斯面所包围的电荷, 与高斯面外的电荷无关, 所以, 引入  $q$  前后, 高斯面内的电荷量没有发生变化, 因此通过同一曲面的电场强度的通量也没有变化, 但任意一点的电场强度是由两个点电荷各自产生的电场的叠加, 因此曲面上各点的电场强度发生了变化。

## 3.3 利用高斯定理求电通量

## 【0103B02】

一个带电量为  $q$  的点电荷位于一边长为  $a$  的立方体的中心，以此立方体的表面为高斯面，则通过此高斯面的电场强度的通量为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{q}{\varepsilon_0}$$

## 【0103B03】

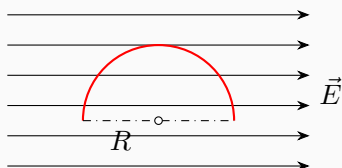
一个带电量为  $q$  的点电荷位于一边长为  $a$  的立方体的中心，则通过该立方体任一面的电场强度的通量是\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

## 【0103B04】

若匀强电场的电场强度的大小为  $E$ ，方向水平向右，半径为  $R$  的半球面如图放置，则通过此半球面的电场强度的通量为\_\_\_\_\_。



答案

0

## 【0103B05】

某直角坐标系中，坐标  $(-1, 0, 0)$  处有一带电量为  $-q$  的点电荷，坐标  $(1, 0, 0)$  处有一带电量为  $+q$  的点电荷，则通过球心在坐标原点、半径为 2 的球面的电通量为\_\_\_\_\_。

答案

0

## 3.4 利用高斯定理求电场强度

【0103B06】

半径为  $R$  的均匀带电球面，电荷面密度为  $\sigma$ ，则在距离球心  $2R$  处的电场强度大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

解析

取半径为  $r = 2R$  的球面为高斯面，由高斯定理，得

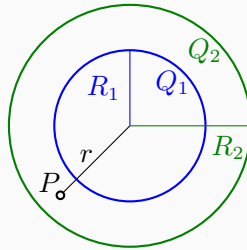
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = E \cdot 4\pi (2R)^2 = 16\pi R^2 E = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

【0103B07】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为  $R_1$ 、带电量为  $Q_1$ ，外球面半径为  $R_2$ 、带电量为  $Q_2$ ，则在两球面之间、距离球心为  $r$  处的  $P$  点的电场强度的大小为\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，所以在与球面同心的任意一个球面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电球面同心的球面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，对于  $R_1 < r < R_2$  的球面，所包围的电荷为  $Q_1$ ，所以由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

【0103B08】

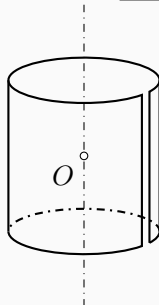
一根无限长细棒均匀带正电，电荷线密度为  $\lambda$ 。A 点与细棒相距  $r$ ，则 A 点的电场强度大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

【0103B09】

一均匀带电的细而长圆柱面，电荷面密度为  $\sigma$ ，柱面上有一平行于轴线的窄缝，窄缝的宽度  $L$  远小于圆柱面半径  $R$ ，则轴线中心  $O$  点处的电场强度大小为\_\_\_\_\_。



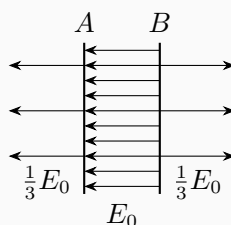
答案

$$\frac{\sigma L}{2\pi\epsilon_0 R}$$

### 3.5 利用高斯定理求电荷

【0103B10】

A、B 为真空中两个平行的无限大均匀带电平面，已知两平面间电场强度的大小为  $E_0$ ，两平面外侧电场强度的大小都为  $\frac{1}{3}E_0$ ，方向如图，则 A 平面上的电荷面密度为\_\_\_\_\_。



## 答案

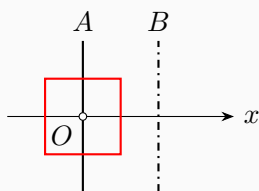
$$-\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0$$

## 解析

【解法一】先假定两面的电荷面密度，再用高斯定理分别求两个面所激发的电场，再用电场叠加原理求得三个区域的电场，联立求解。

假定两平面的电荷面密度分别为  $\sigma_A$  和  $\sigma_B$ 。以  $A$  面所在位置为坐标原点，向右为  $x$  轴正方向。

先计算只有  $A$  面带电时的电场分布。如图取一圆柱面为高斯面  $S_1$ ，圆柱底面与  $A$  面平行且与  $A$  面等距，面积为  $S$ ，侧面与  $A$  面垂直，



则由高斯定理可得

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_A(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + E_A(\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) = \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0}$$

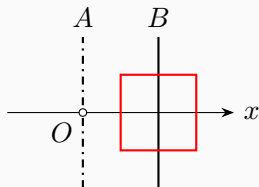
$$2E_A S = \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0}$$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}$$

所以只有  $A$  面带电时的电场分布为

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} -E_A \vec{e}_x & x < 0 \\ E_A \vec{e}_x & x > 0 \end{cases}$$

再计算只有  $B$  面带电时的电场分布，假定  $B$  面所在位置为  $x = a$ 。如图取一圆柱面为高斯面  $S_2$ ，圆柱底面与  $B$  面平行且与  $B$  面等距，面积为  $S$ ，侧面与  $B$  面垂直，



则由高斯定理可得

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_B(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + E_B(\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$2E_B S = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$E_B = \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}$$

所以只有  $B$  面带电时的电场分布为

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -E_B \vec{e}_x & x < a \\ E_B \vec{e}_x & x > a \end{cases}$$

所以，当  $A$ 、 $B$  同时带电时，总的电场分布为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} -(E_A + E_B) \vec{e}_x & x < 0 \\ (E_A - E_B) \vec{e}_x & 0 < x < a \\ (E_A + E_B) \vec{e}_x & x > a \end{cases}$$

依题意

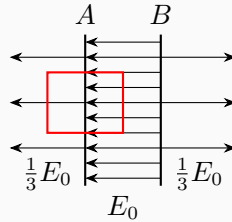
$$\begin{aligned} E_A + E_B &= \frac{1}{3}E_0 = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2\varepsilon_0} \\ E_B - E_A &= E_0 = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{4}{3}\varepsilon_0 E_0 \\ \sigma_A &= -\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0 \end{aligned}$$

【解法二】既然电场分布已知，直接用高斯定理就可以求得两个面的电荷面密度。

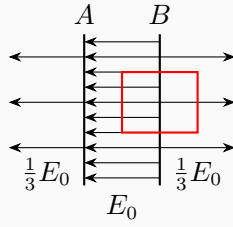
如图选取一圆柱面为高斯面  $S_1$ ，圆柱底面与  $A$  面平行，面积为  $S$ ，侧面与  $A$  面垂直，



以水平向右为  $x$  轴正方向，则由高斯定理可得

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_1}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{3}E_0(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + E_0(-\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) &= \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{3}E_0 S - E_0 S &= \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0} \\ \sigma_A &= -\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0 \end{aligned}$$

如图选取另一圆柱面为高斯面  $S_2$ ，圆柱底面与  $B$  面平行，面积为  $S$ ，侧面与  $B$  面垂直，



以水平向右为  $x$  轴正方向，则由高斯定理可得

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_0(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + \frac{1}{3}E_0(\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$E_0 S + \frac{1}{3}E_0 S = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_B = \frac{4}{3}\varepsilon_0 E_0$$

## 4、电势

### 4.1 静电场的保守性

【0104A01】

在以下公式中， $\vec{E}$  是电场强度，可以说明静电场保守性的是

- (A)  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$       (B)  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\varepsilon_0}$       (C)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$       (D)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

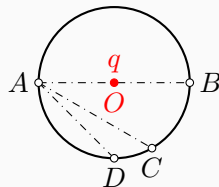
答案

A

### 4.2 电场力做功

【0104A02】

如图所示，点电荷  $q$  位于圆心  $O$  处， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为同一圆周上的四点。现将一试探电荷从  $A$  点分别移动到  $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点，则



(A) 从  $A$  到  $B$ , 电场力作功最大  
(C) 从  $A$  到  $D$ , 电场力作功最大

(B) 从  $A$  到  $C$ , 电场力作功最大  
(D) 从  $A$  到各点, 电场力作功相等

**答案**

D

**解析**

以无穷远为电势零点, 点电荷  $q$  所激发的电场在同一球面上各点的电势相等。所以图中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点的电势相等。

而电场力做功就等于电荷的电势能的改变量, 电场力做正功, 电势能减小, 电场力做负功, 电势能增加。因为四点电势相等, 所以试探电荷在四点的电势能也相等, 所以试探电荷从  $A$  点分别移动到  $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点的过程中, 电场力所做的功相等, 均为零。

**【0104B01】**

试探电荷  $q$ , 在点电荷  $Q$  产生的电场中, 从与  $Q$  距离  $R$  的某点移动到无穷远处的过程中, 电场力所做的功为\_\_\_\_\_。

**答案**

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

**解析**

当以无穷远为电势零点时, 点电荷  $Q$  的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以点电荷  $q$  在该处的电势能为

$$W = qV = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当点电荷从该点运动到无穷远的过程中, 电场力做功, 电势能减少, 所以

$$W = qV = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

**【0104B02】**

在某点电荷激发的电场中, 带电量为  $q$  的点电荷从无穷远处移动到距离场源电荷  $r$  的过程中克服电场力做功  $W$ , 则该场源电荷的电量为\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{4\pi\epsilon_0 r W}{q}$$

## 4.3 电势能

【0104A03】

$A$ 、 $B$  为静电场中邻近两点，电场强度由  $A$  指向  $B$ ，带负电的试探电荷在  $A$ 、 $B$  两点的电势能  $W_A$ 、 $W_B$  之间的关系

(A)  $W_A > W_B$ (B)  $W_A = W_B$ (C)  $W_A < W_B$ 

(D) 无法确定二者的大小关系

答案

C

【0104B03】

一细棒弯成半径为  $R$  的半圆形，其上均匀分布有电荷  $Q$ 。若有一带电量为  $q$  的点电荷置放在半圆的圆心处，取无穷远为电势能零点，则点电荷与半圆形带电细棒的电势能为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

【0104B04】

在真空中有两个同心的均匀带电球面，半径为  $R$  的球面带电量为  $+Q$ ，半径为  $2R$  的球面带电量为  $-3Q$ 。今将一带电量为  $+q$  的试探电荷从内球面处由静止释放，则该点电荷到达外球面时的动能为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 R}$$

解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，带电量为  $Q$ 、半径为  $R$  的带电球面所激发的电场的电势为

$$V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以两个带电球面在外球面的电势分别为

$$V_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(2R)}, V_{22} = \frac{-3Q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

两个带电球面在内球面的电势分别为

$$V_{11} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R)}, V_{21} = \frac{-3Q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

所以两个球面处的电势分别为

$$V_1 = V_{11} + V_{21} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R)} + \frac{-3Q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

$$V_2 = V_{12} + V_{22} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(2R)} + \frac{-3Q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

所以电荷  $+q$  在两个球面处的电势能分别为

$$W_1 = qV_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

$$W_2 = qV_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

在这个过程中电场力所做的功为

$$W = W_1 - W_2 = \left[ \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} \right] - \left[ \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} \right] = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R}$$

根据动能定理, 电场力对电荷所做的功就等于电荷动能的增加量, 电荷从静止开始释放, 所以电荷末态的动能就是

$$E_k = W = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R}$$

#### 4.4 电势差

【0104A04】

在已知静电场分布的条件下, 任意两点  $A$  和  $B$  之间的电势差决定于

- (A)  $A$  和  $B$  两点的位置 (B)  $A$  和  $B$  两点处的电场强度的大小和方向  
(C) 试探电荷所带电量的正负 (D) 试探电荷所带电量的大小

答案

A

## 解析

静电场是保守场，电场中任意两点之间的电势差只与该两个位置有关，而与试探电荷无关。当然，在计算两点之间的电势差时，要用到电场的分布，因此电势差与两点之间的电场强度分布有关，而不是与两点外的电场强度有关。

## 4.5 电势

## 【0104A05】

静电场中某点电势的数值等于

- (A) 试探电荷置于该点时具有的电势能
- (B) 把试探电荷从该点移到电势零点的过程中外力所做的功
- (C) 单位正电荷置于该点时具有的电势能
- (D) 把单位正电荷从该点移到电势零点的过程中外力所做的功

## 答案

C

## 解析

带电量为  $q$  的点电荷置于电场中电势为  $V$  处所具有的电势能为  $W$ ，则有

$$W = qV$$

$$V = \frac{W}{q}$$

所以，电势在数值上等于单位正电荷在该处时的电势能。

而电场力做功，电势能减少，所以某处的电势能等于电荷从该处移到电势能零点时电场力所做的功。

## 【0104A06】

关于静电场中某点电势值的正负，下列说法中正确的是

- (A) 电势值的正负取决于置于该点的试探电荷带电量的正负
- (B) 电势值的正负取决于电场力对试探电荷做功的正负
- (C) 电势值的正负取决于电势零点的选取
- (D) 电势值的正负取决于产生电场的带电体带电量的正负

## 答案

C

## 解析

电势和电势能零点的选取。

## 【0104A07】

$A$ 、 $B$  为静电场中邻近两点，电场强度由  $A$  指向  $B$ ，则  $A$ 、 $B$  两点的电势  $U_A$ 、 $U_B$  之间的关系

(A)  $U_A > U_B$

(B)  $U_A = U_B$

(C)  $U_A < U_B$

(D) 无法确定二者的大小关系

## 答案

A

## 【0104B05】

在点电荷  $q$  的电场中，选取以  $q$  为中心、 $R$  为半径的球面为电势零点，则与点电荷  $q$  距离为  $r$  处的电势为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

## 【0104B06】

边长为  $a$  的正方形的四个顶点上分别放置一个带电量为  $q$  的点电荷，若以无穷远为电势零点，则正方形中心处的电势为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 a}$$

## 【0104B07】

半径为  $R$  的球面均匀带电  $Q$ ，球心处有一带电量为  $q$  的点电荷，取无穷远处为电势零点，则在球内离球心  $r$  处的电势为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right)$$

## 解析

由高斯定理很容易得到电场强度的分布为

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\text{当 } r < R \text{ 时})$$

$$E_2 = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\text{当 } r > R \text{ 时})$$

当以无穷远处为电势的零点时,  $r$  处的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty E \, dr = \int_r^R E_1 \, dr + \int_R^\infty E_2 \, dr = \left[ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_r^R + \left[ -\frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_R^\infty \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

## 【0104B08】

半径为  $R$  的无限长直均匀带电圆柱体, 体电荷密度为  $\rho$ 。以圆柱表面为电势零点, 则圆柱外与圆柱轴线距离  $r (r > R)$  处的电势为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

## 【0104B09】

电荷  $-Q$  均匀分布在半径为  $R$ 、长为  $L$  的圆弧上, 圆弧的两端有一小空隙, 空隙长为  $\Delta L (\Delta L \ll R)$ , 取无穷远处为电势零点, 则圆弧圆心处的电势为\_\_\_\_\_。

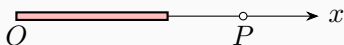
## 答案

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 4.6 电势叠加原理求电势

## 【0104C01】

一均匀带正电细杆, 长为  $L$ , 线电荷密度为  $\lambda$ , 以杆的左端为坐标原点, 沿杆建立  $x$  轴, 如图所示,  $P$  点为细杆延长线上的任意一个位置。(1) 求  $P$  点的电场强度, 并指明其方向; (2) 以无穷远为电势零点, 求  $P$  点的电势; (3) 若有一带电量为  $q$  的点电荷从  $P$  点运动到无穷远处, 电势能改变了多少?



## 解答

(1) 设  $P$  点坐标为  $x_0$ , 细杆上任意取  $x \rightarrow x + dx$  段为点电荷, 则其带电量为  $dq = \lambda dx$ , 它到  $P$  点的距离  $r = x_0 - x$ , 因此它在  $P$  点激发的电场强度的方向沿  $x$  轴正方向, 大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - x)^2}$$

所以整根细杆在  $P$  点的电场强度的方向沿  $x$  轴正方向, 大小为

$$E = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x_0 - L} - \frac{1}{x_0} \right) = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x_0 (x_0 - L)}$$

(2) 以无穷远处为电势零点, 则  $x \rightarrow x + dx$  段点电荷在  $P$  点的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - x)}$$

所以整根细杆在  $P$  点的电势为

$$U = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - x)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_0}{x_0 - L}$$

(3)  $q$  在  $P$  点时电势能为  $W_1 = qU$ ,  $q$  在无穷远处时电势能为  $W_2 = 0$ , 所以电势能改变了

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -qU = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_0}{x_0 - L}$$

## 评分标准

【注意】 $P$  点坐标  $x_0$  与点电荷坐标  $x$  可以用不同符号, 但不能用同一个符号。

1. 取点电荷 (1 分), 点电荷的带电量  $dq$  (1 分), 点电荷到  $P$  点的距离  $r$  (1 分)

2. 计算电场强度 (7 分)

(a) 点电荷在  $P$  点的电场强度的方向 (1 分), 大小 (2 分)

(b) 整根细杆在  $P$  点的电场强度的方向 (1 分), 大小【积分表达式 (2 分), 结果 (1 分)】

3. 计算电势 (5 分)

(a) 点电荷在  $P$  点的电势 (2 分)

(b) 整根细杆在  $P$  点的电势【积分表达式 (2 分), 结果 (1 分)】

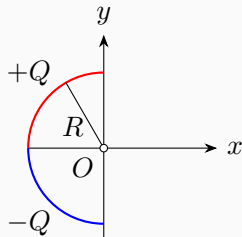
4. 计算电势能改变量 (5 分)

(a)  $q$  在  $P$  点时电势能  $W_1$  (1 分),  $q$  在无穷远处时电势能  $W_2$  (1 分)

(b) 电势能改变量 (3 分, 差个负号得 2 分)

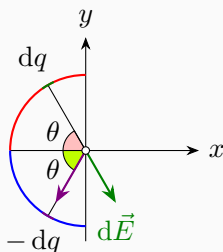
## 【0104C02】

在如图所示坐标系中，一个细玻璃棒被弯成半径为  $R$  的半圆形，沿其上半部分均匀分布有正电荷  $+Q$ ，沿其下半部分均匀分布有负电荷  $-Q$ 。(1) 求圆心  $O$  处的电场强度，并指明其方向；(2) 试分析  $x$  轴正半轴上任意一点的电场强度的方向；(3) 以无穷远处为电势零点，求圆心  $O$  处的电势。



## 解答

(1) 如图，与  $x$  轴负方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  取两个对称的电荷元视为点电荷，



它们的带电量分别为  $\pm dq$ ，其中

$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{\frac{1}{2}\pi R} \times R d\theta = \frac{2Q}{\pi} d\theta$$

则它们在圆心  $O$  处产生的电场强度的方向关于  $y$  轴对称，如图所示，大小相等，均为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} d\theta$$

所以两个对称电荷元在  $O$  点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向，大小为

$$2 \times dE \times \sin \theta = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta$$

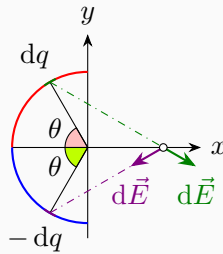
所以整个带电体在  $O$  点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向，大小为

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

即

$$\vec{E} = -\frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \vec{e}_y$$

(2) 同上取两个对称电荷元  $\pm dq$ ，则它们到  $x$  轴正半轴上任意一点的距离相同，因此它们在该位置的电场强度的大小相等，方向如图所示 (关于  $y$  轴对称)，



所以两个对称电荷元在该点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向，所以整个带电体在该点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向。

(3) 以无穷远处为电势零点，则半圆形上带电量为  $dq$  的电荷元在  $O$  处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

因此整个带电体在  $O$  处的电势为

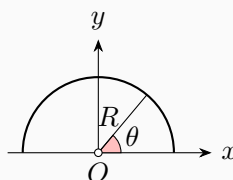
$$U = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_q dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} [Q + (-Q)] = 0$$

### 评分标准

1. 取点电荷 (1 分)，点电荷的带电量  $dq$  (1 分)
2. 计算电场强度 (8 分)
  - (a) 点电荷的电场强度的大小 (2 分)，分量 (2 分)，方向 (1 分)
  - (b) 整个带电体的电场强度的方向 (1 分)，大小 (2 分)
3. 判断电场强度的方向 (4 分)
4. 计算电势 (6 分)
  - (a) 点电荷的电势 (3 分)
  - (b) 整个带电体的电势 (3 分)

### 【0104C03】

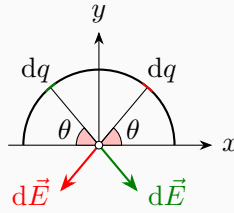
在如图所示坐标系中，带电细线弯成半径为  $R$  的半圆形，电荷线密度为  $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$ ，式中  $\lambda_0$  为一常数， $\theta$  为半径  $R$  与  $x$  轴正方向的夹角。(1) 求圆心  $O$  处的电场强度，并指明其方向；(2) 试分析  $y$  轴负半轴上任意一点的电场强度的方向；(3) 以无穷远处为电势零点，求圆心  $O$  处的电势。





## 解答

(1) 由于  $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$ , 所以带电体的电荷分布关于  $y$  轴对称。如图, 在  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  和  $\pi - \theta \rightarrow \pi - \theta - d\theta$  取两个对称的电荷元视为点电荷,



它们的带电量都为

$$dq = \lambda dl = (\lambda_0 \sin \theta) \times (R d\theta) = R\lambda_0 \sin \theta d\theta$$

则它们在圆心  $O$  处产生的电场强度的方向关于  $y$  轴对称, 如图所示, 大小相等, 均为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \theta d\theta$$

所以两个对称电荷元在  $O$  点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向, 大小为

$$2 \times dE \times \sin \theta = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \sin^2 \theta d\theta$$

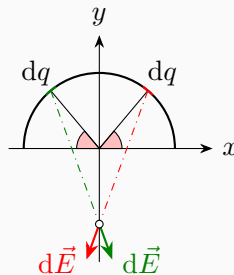
所以整个带电体在  $O$  点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向, 大小为

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)] d\theta \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

即

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R} \vec{e}_y$$

(2) 同上取两个对称电荷元  $dq$ , 则它们到  $y$  轴负半轴上任意一点的距离相同, 因此它们在该位置的电场强度的大小相等, 方向如图所示 (关于  $y$  轴对称),



所以两个对称电荷元在该点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向, 所以整个带电体在该点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向。

(3) 以无穷远处为电势零点, 则半圆形上带电量为  $dq$  的电荷元在  $O$  处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{R\lambda_0 \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta$$

因此整个带电体在  $O$  处的电势为

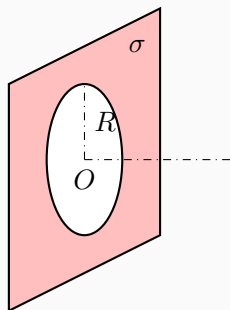
$$U = \int_0^\pi \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [-\cos\theta]_0^\pi = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [ -(-1) - (-1) ] \\ = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}$$

### 评分标准

1. 取点电荷 (1 分), 点电荷的带电量  $dq$  (1 分)
2. 计算电场强度 (8 分)
  - (a) 点电荷的电场强度的大小 (2 分), 分量 (2 分), 方向 (1 分)
  - (b) 整个带电体的电场强度的方向 (1 分), 大小 (2 分)
3. 判断电场强度的方向 (4 分)
4. 计算电势 (6 分)
  - (a) 点电荷的电势 (3 分)
  - (b) 整个带电体的电势 (3 分)

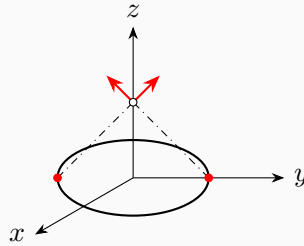
### 【0104C04】

(1) 带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的均匀带电圆环, 试求通过圆环中心垂直圆环所在平面的直线上距离圆心  $a$  处的电场强度的大小; (2) 如图所示, 一“无限大”平面, 中部有一半半径为  $R$  的圆孔, 设平面均匀带电, 面电荷密度为  $\sigma$ , 试求通过圆孔中心并与平面垂直的直线上距离圆心  $a$  处的电场强度的大小和电势 (取  $O$  点为电势零点)。



### 解答

(1) 如图, 以圆环中心为坐标原点, 圆环所在平面为  $xy$  平面, 对称取两个点电荷, 电量均为  $dq$ , 场点坐标设为  $(0, 0, a)$ ,



则两个点电荷在场点的电场强度的方向关于  $z$  轴对称，大小均为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)}$$

所以两个点电荷在场点的总的电场强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$2 \times \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)} \times \frac{a}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{2\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dq$$

所以整个圆环在场点的总的电场强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$E = \int_{\frac{q}{2}} \frac{a}{2\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dq = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) 同样以圆孔中心为坐标原点，带电平面为  $xy$  平面，场点坐标设为  $(0, 0, a)$ 。将题目所给平面看成由一个个圆环所组成，则对于半径  $r \rightarrow r + dr$  部分的圆环，其带电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma \times (2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$$

所以这个圆环在场点的电场强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$dE = \frac{(dq)a}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \times 2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

所以整个带电平面在该处的电场强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$E = \int_R^\infty \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_R^\infty = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

取  $O$  点为电势零点，则该处的电势为

$$U = \int_a^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^0 \frac{z\sigma}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} \right]_a^0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ R - \sqrt{R^2 + a^2} \right]$$

### 评分标准

1. 计算圆环的电场强度 (8 分)
  - (a) 点电荷的电场强度的大小 (3 分)，分量 (3 分)
  - (b) 整个圆环的电场强度的大小 (2 分)
2. 计算平面的电场强度 (8 分)

- (a) 取圆环，带电量 (2 分)  
 (b) 圆环的电场强度的大小 (3 分)  
 (c) 整个平面的电场强度的大小 (3 分)

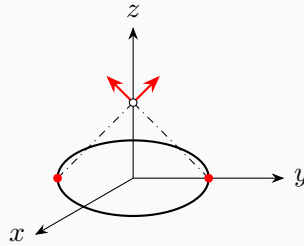
3. 计算电势 (4 分)

### 【0104C06】

(1) 带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的均匀带电圆环，(a) 试求通过圆环中心垂直圆环所在平面的直线上距离圆心  $a$  处的电场强度的大小；(b) 取无穷远处为电势零点，求上述场点的电势；(2) 一半径为  $R$  的均匀带电半球面，面电荷密度为  $\sigma$ ，取无穷远处为电势零点，求球心处的电势。

### 解答

(1) 如图，以圆环中心为坐标原点，圆环所在平面为  $xy$  平面，对称取两个点电荷，电量均为  $dq$ ，场点坐标设为  $(0, 0, a)$ ，



(a) 则两个点电荷在场点的电场强度的方向关于  $z$  轴对称，大小均为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)}$$

所以两个点电荷在场点的总的电场强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$2 \times \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)} \times \frac{a}{(R^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{a}{2\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{3/2}} dq$$

所以整个圆环在场点的总的电场强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$E = \int_{q/2} \frac{a}{2\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{3/2}} dq = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

(b) 取无穷远处为电势零点， $dq$  在场点的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

所以整个圆环在场点的电势为

$$U = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

(2) 取无穷远处为电势零点，在球面上取一个点电荷，其带电量  $dq = \sigma dS$ ，它在球心处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以整个半球面在球心处的电势为

$$U = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \times \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

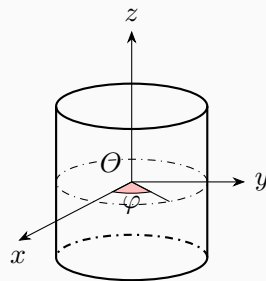
### 评分标准

1. 计算圆环的电场强度 (8 分)
  - (a) 点电荷的电场强度的大小 (3 分), 分量 (3 分)
  - (b) 整个圆环的电场强度的大小 (2 分)
2. 计算圆环的电势 (6 分)
  - (a) 点电荷的电势 (3 分)
  - (b) 整个圆环的电势 (3 分)
3. 计算半球面电势 (6 分)
  - (a) 点电荷的电势 (3 分)
  - (b) 整个半球面的电势 (3 分)

## 4.7 已知电场求电势

### 【0104C05】

如图所示坐标系, 一“无限长”圆柱面, 其电荷面密度为  $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$ , 式中  $\varphi$  为半径  $R$  与  $x$  轴所夹的角, (1) 试求坐标原点处的电场强度的大小, 并指明其方向; (2) 试分析  $y$  轴上各点电场强度的方向; (3) 取坐标原点为电势零点, 根据第 (2) 问的结果, 分析  $y$  轴上各点电势分布的特点。



### 解答

(1) 线电荷密度为  $\lambda$  的无限长均匀带电直线的电场强度的大小为

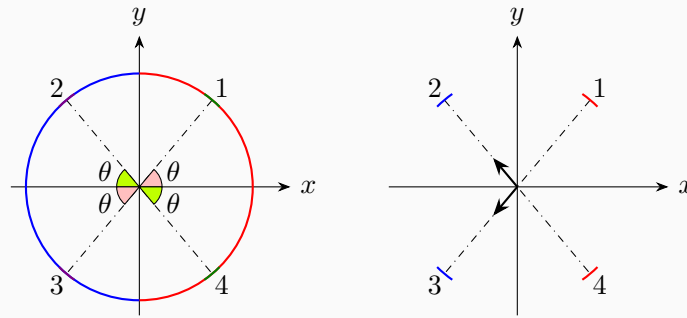
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$\lambda > 0$  时, 电场强度的方向垂直于带电直线从直线指向场点;  $\lambda < 0$  时, 电场强度的方向垂直于带电直

线从场点指向直线。

由于  $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta) = -\cos(\pi + \theta) = \cos(2\pi - \theta)$ , 在四个象限分别取  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 、 $\pi - \theta \rightarrow \pi - \theta - d\theta$ 、 $\pi + \theta \rightarrow \pi + \theta + d\theta$ 、 $2\pi - \theta \rightarrow 2\pi - \theta - d\theta$  四条窄带, 视为四根无限长均匀带电直线, 它们的线电荷密度分别为  $\lambda_1 = d\lambda$ 、 $\lambda_2 = -d\lambda$ 、 $\lambda_3 = -d\lambda$ 、 $\lambda_4 = d\lambda$ , 其中

$$d\lambda = \sigma R d\theta = R\sigma_0 \cos \theta d\theta$$



它们在坐标原点的电场强度的方向如图所示,  $\lambda_1$  和  $\lambda_3$  的电场的方向一致, 都是从 1 指向 3,  $\lambda_2$  和  $\lambda_4$  的电场的方向也一致, 都是从 4 指向 2, 两组电场的方向关于  $x$  轴对称, 电场强度的大小相等, 都等于

$$dE = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta d\theta$$

所以四条窄带在坐标原点的总的电场强度方向沿  $x$  轴负方向, 大小为

$$4 \times dE \times \cos \theta = \frac{2\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta d\theta$$

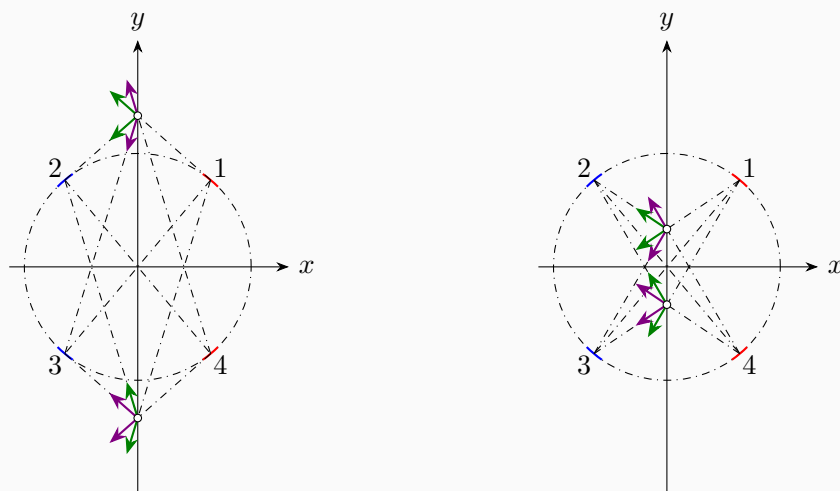
所以整个圆柱面在坐标原点的总的电场强度方向沿  $x$  轴负方向, 大小为

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2\theta)] d\theta = \frac{\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

即

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$$

(2) 对于  $y$  轴上的场点,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  产生的电场强度的大小相等, 方向关于  $x$  轴对称,  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$  产生的电场强度的大小相等, 方向关于  $x$  轴对称, 所以四条窄带在场点的总的电场强度方向沿  $x$  轴负方向, 所以整个圆柱面在场点的总的电场强度方向沿  $x$  轴负方向。



(3) 取坐标原点为电势零点, 根据第 (2) 问的结果,  $y$  轴上场点的电场强度的方向永远沿  $x$  轴负方向, 即可以表示为  $\vec{E} = E(-\vec{e}_x)$ , 因此如果选择沿  $y$  轴积分, 即  $d\vec{r} = dy\vec{e}_y$ , 则有

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E(-\vec{e}_x) \cdot dy\vec{e}_y = 0$$

所以  $y$  轴上场点的电势

$$U_y = \int_y^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

即  $y$  轴上各点的电势均为零。

### 评分标准

1. 无限长均匀带电直线的电场强度 (2 分)
2. 取窄带, 线电荷密度 (2 分)
3. 计算坐标原点处的电场强度 (8 分)
  - (a) 一根窄带的电场强度的大小 (2 分)
  - (b) 四根窄带的电场强度的大小 (2 分), 方向 (1 分)
  - (c) 整个圆柱面的电场强度的方向 (1 分), 大小 (2 分)
4. 判断电场强度的方向 (4 分)
5. 计算电势 (4 分)

### 【0104C07】

均匀带电的无限长圆柱筒, 内半径为  $R_1$ , 外半径为  $R_2$ , 体电荷密度为  $\rho$ 。求: (1) 电场强度的空间分布; (2) 圆柱筒内外表面的电势差。

## 解答

(1) 电荷分布具有柱对称性, 可以用高斯定理求电场, 选择与带电体同轴的、半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱面为高斯面

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times (2\pi r h) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r h}$$

$r < R_1$ , 筒内空腔,

$$q_1 = 0$$

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$ , 圆柱筒内,

$$q_2 = \rho \times \pi(r^2 - R_1^2)h$$

$$E_2 = \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

$r > R_2$ , 圆柱筒外,

$$q_3 = \rho \times \pi(R_2^2 - R_1^2)h$$

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

(2) 圆柱筒内外表面的电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

## 评分标准

1. 求电场强度 (14 分)

(a) 高斯定理求电场 (5 分)

(b) 每个区间的电场强度 (各 3 分共 9 分)

2. 求电势差 (6 分)

(a) 积分表达式 (4 分)

(b) 结果 (2 分)



## 【0104C08】

半径为  $R$  的无限长带电圆柱，体电荷密度为  $\rho = \rho_0 r (r \leq R)$ ， $\rho_0$  为常数， $r$  是圆柱内任意一点到圆柱轴线的距离。试求：(1) 空间电场强度的分布；(2) 取圆柱表面 ( $r = R$ ) 为电势零点，求空间电势分布。

## 解答

(1) 电荷分布具有柱对称性，可以用高斯定理求电场，选择与带电体同轴的、半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱面为高斯面

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times (2\pi r h) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 r h}$$

$r < R$ ，圆柱内，

$$q_1 = \int_0^r \rho_0 r (2\pi r h) dr = \frac{2}{3} \pi \rho_0 h r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0}$$

$r > R$ ，圆柱外，

$$q_2 = \int_0^R \rho_0 r (2\pi r h) dr = \frac{2}{3} \pi \rho_0 h R^3$$

$$E_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

(2) 取圆柱表面 ( $r = R$ ) 为电势零点， $r < R$ ，圆柱内，

$$U_1 = \int_r^R E_1 dr = \int_r^R \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho_0}{9\varepsilon_0} (R^3 - r^3)$$

$r > R$ ，圆柱外，

$$U_2 = \int_r^R E_2 dr = \int_r^R \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

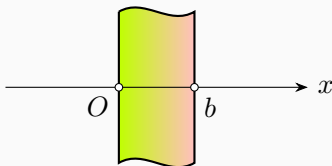
## 评分标准

1. 求电场强度 (12 分)
  - (a) 高斯定理求电场 (6 分)
  - (b) 每个区间的电场强度 (各 3 分共 6 分)
2. 求每个区间的电势 (各 4 分共 8 分)
  - (a) 积分表达式 (3 分)

(b) 结果 (1 分)

## 【0104C09】

如图所示，一厚为  $b$  的无穷大不均匀带电平板，其体电荷密度为  $\rho = kx$ ，式中  $k$  为一正值常数。(1) 求空间各点电场强度的大小和方向；(2) 取  $x = 0$  处为电势零点，求  $x = b$  处的电势。



## 解答

(1) 先由高斯定理求出无穷大均匀带电平面的电场

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (2\Delta S) = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

由于体电荷密度只与  $x$  有关，所以可以将题目所给不均匀带电平板看成由一块块均匀带电平面所构成，对于  $x \rightarrow x + dx$  部分，其带电量为  $dq = \rho dV = kx \times (\Delta S) dx = (\Delta S)kx dx$ ，所以其面电荷密度为  $d\sigma = \frac{dq}{(\Delta S)} = kx dx$ ，因此它所激发的电场强度的大小为

$$dE = \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{kx dx}{2\varepsilon_0}$$

注意其方向，在平面左侧，电场强度的方向向左；在平面右侧，电场强度的方向向右。

$x < 0$ ，平板左侧区域，所有平面的电场强度方向均向左，所以总的电场强度的方向向左，大小为

$$E_1 = \int_0^b \frac{kx dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

$x > b$ ，平板右侧区域，所有平面的电场强度方向均向右，所以总的电场强度的方向向右，大小为

$$E_3 = \int_0^b \frac{kx dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

$0 < x < b$ ，平板内部区域，这时  $0 \rightarrow x$  之间的平面在该处产生的电场强度的方向向右，大小为

$$E_{21} = \int_0^x \frac{kx dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kx^2}{4\varepsilon_0}$$

$x \rightarrow b$  之间的平面在该处产生的电场强度的方向向左，大小为

$$E_{22} = \int_x^b \frac{kx dx}{2\varepsilon_0} = \frac{k(b^2 - x^2)}{4\varepsilon_0}$$

以向右为正，则  $x$  处的总电场为

$$E_2 = E_{21} - E_{22} = \frac{kx^2}{4\varepsilon_0} - \frac{k(b^2 - x^2)}{4\varepsilon_0} = \frac{k}{4\varepsilon_0}(2x^2 - b^2)$$

(2) 取  $x = 0$  处为电势零点，则  $x = b$  处的电势为

$$U = \int_b^0 E_2 dx = \int_b^0 \frac{k}{4\varepsilon_0}(2x^2 - b^2) dx = \frac{k}{4\varepsilon_0} \left[ \frac{2}{3}x^3 - b^2x \right] \Big|_b^0 = \frac{kb^3}{12\varepsilon_0}$$

### 评分标准

1. 求电场强度 (15 分)

- (a) 高斯定理求电场 (4 分)
- (b) 取平面，求其电场 (2 分)
- (c) 两侧区域的电场强度 (各 2 分共 4 分)
- (d) 板内区域的电场强度 (5 分)

2. 求电势 (5 分)

- (a) 积分表达式 (4 分)
- (b) 结果 (1 分)

### 【0104C10】

均匀带电的球层，内表面半径为  $R_1$ ，外表面半径为  $R_2$ ，体电荷密度为  $\rho$ 。求：(1) 电场强度的空间分布；(2) 以无穷远处为电势零点，球层内、外表面的电势分别为多少？

### 解答

(1) 电荷分布具有球对称性，可以用高斯定理求电场，选择与带电体同心的、半径为  $r$  的球面为高斯面

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r < R_1$ ，球内空腔，

$$q_0 = 0$$

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$ , 球层内,

$$q_2 = \rho \times \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$

$$E_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$r > R_2$ , 球外,

$$q_3 = \rho \times \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 以无穷远处为电势零点, 球层内表面的电势

$$U_1 = \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1^3}{R_2} - R_1^2 \right] + \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2}$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

球层外表面的电势

$$U_2 = \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2}$$

### 评分标准

1. 求电场强度 (14 分)
  - (a) 高斯定理求电场 (5 分)
  - (b) 每个区间的电场强度 (各 3 分共 9 分)
2. 求电势 (各 3 分共 6 分)
  - (a) 积分表达式 (2 分)
  - (b) 结果 (1 分)

### 【0104C11】

一个不均匀带电的球体, 半径为  $R$ , 体电荷密度为  $\rho = \rho_0 r$ , 其中  $\rho_0$  为常数,  $r$  为球内任意点到球心的距离。(1) 试求球内、外各点的电场强度; (2) 取无限远处为电势零点, 试求球内、外各点的电势。

## 解答

(1) 电荷分布具有球对称性, 可以用高斯定理求电场, 选择与带电体同心的、半径为  $r$  的球面为高斯面

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r < R$ , 球内区域,

$$q_1 = \int_0^r \rho_0 r \times 4\pi r^2 dr = \rho_0 \pi r^4$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}$$

$r > R$ , 球外区域,

$$q_2 = \int_0^R \rho_0 r \times 4\pi r^2 dr = \rho_0 \pi R^4$$

$$E_2 = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 取无穷远处为电势零点,  $r > R$ , 球外区域,

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r}$$

$r < R$ , 球内区域,

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr$$

$$= \int_r^R \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\rho_0 (R^3 - r^3)}{12\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_0 (4R^3 - r^3)}{12\varepsilon_0}$$

## 评分标准

1. 求电场强度 (12 分)
  - (a) 高斯定理求电场 (6 分)
  - (b) 每个区间的电场强度 (各 3 分共 6 分)
2. 求电势 (各 4 分共 8 分)

(a) 积分表达式 (3 分)

(b) 结果 (1 分)

#### 4.8 已知电势求电场

##### 【0104A08】

下列关于电场强度和电势的关系的说法中，正确的是

- (A) 已知某点的电场强度，就可以确定该点电势
- (B) 已知某点的电势，就可以确定该点电场强度
- (C) 在某空间内的电场强度不变，则电势也一定不变
- (D) 在某空间内的电势不变，则电场强度处处相等

答案

D

##### 【0104A09】

关于电场强度与电势的关系，下列说法正确的是

- (A) 电场强度为零的点，电势也一定为零
- (B) 电势为零的点，电场强度也一定为零
- (C) 在电势不变的空间，电场强度处处为零
- (D) 在电场强度不变的空间，电势处处相等

答案

C

#### 4.9 其他

##### 【0104A10】

相距为  $r_1$  的两个电子，在重力可忽略的情况下由静止开始运动到相距为  $r_2$ ，从相距  $r_1$  到相距  $r_2$  期间，两电子系统的下列哪一个量是不变的？

- (A) 动能总和
- (B) 电势能总和
- (C) 动量总和
- (D) 电相互作用力

答案

C

## 解析

两个电荷之间的静电力是一对作用力与反作用力。在重力可以忽略的情况下，由两个电子所组成的系统只受到这对静电力的作用，所以系统的动量守恒。

运动过程中，二者之间的距离发生变化，静电力也发生变化，静电力做功，电势能变化，动能变化。

## 5、静电场中的导体

## 5.1 静电平衡时导体电荷的分布

【0105A04】

在一个孤立的导体球壳内，若在偏离球心的某点放一个点电荷，则在球壳内、外表面上将出现感应电荷，其分布将是

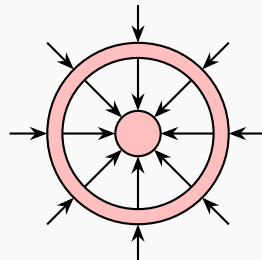
- (A) 内表面均匀，外表面均匀 (B) 内表面均匀，外表面不均匀  
(C) 内表面不均匀，外表面均匀 (D) 内表面不均匀，外表面不均匀

## 答案

C

【0105A05】

同心导体球与导体球壳周围的电场线分布如图所示，由此可知，球壳所带电量  $q$



- (A)  $q > 0$  (B)  $q = 0$  (C)  $q < 0$  (D) 无法确定

## 答案

B

【0105A09】

在一个带正电荷的金属球附近，已知某点的电场强度的大小为  $E$ ，现在该位置放置一个带正电的点电荷  $q$  (不能视为试探电荷)，测得  $q$  所受的电场力大小为  $F$ ，则

- (A)  $F > qE$  (B)  $F = qE$   
(C)  $F < qE$  (D) 无法判断  $F$  与  $qE$  之间的大小关系

答案

C

解析

当正电荷  $q$  靠近金属球时，金属球上的正电荷发生重新分布，靠近点电荷的球面上的部分电荷转移到远离点电荷的球面上，所以金属球上的电荷在点电荷所在位置所激发的电场大小变小。

【0105B01】

一带电量为  $Q$  金属球壳的内半径为  $R_1$ ，外半径为  $R_2$ ，在球心处有一带电量为  $q$  的点电荷，则球壳内表面上的面电荷密度为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{-q}{4\pi R_1^2}$$

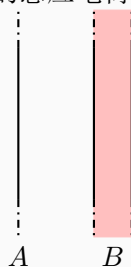
解析

静电平衡时，导体内电场为零，所以球壳内表面所带的电荷为  $-q$ ，外表面所带的电荷为  $Q + q$ ，因此球壳内表面的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi R_1^2}$$

【0105B02】

如图所示，一无限大均匀带电平面  $A$ ，面电荷密度为  $\sigma$ ，其附近放一与它平行的、不带电的、有一定厚度的、无限大平面导体板  $B$ ，则  $B$  的左表面的感应电荷面密度为\_\_\_\_\_。



答案

$$-\frac{1}{2}\sigma$$



## 解析

静电平衡时, 导体板内的电场为零, 即  $B$  中任意一点的电场强度为零, 而  $B$  中电场强度可视为三个无限大带电平面所激发的电场的矢量和。

另由于  $B$  原来不带电, 所以两个表面的感应电荷必定等量异号, 因此有  $\sigma_1 = -\sigma_2$ 。

而无限大带电平面的电场很容易由高斯定理求得, 取一底面与带电平面平行, 侧面与带电平面垂直的柱面为高斯面, 并设底面积为  $S$ , 则有

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2S) &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\end{aligned}$$

所以  $B$  内任意一点的电场强度为

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} &= 0 \\ \sigma + \sigma_1 - \sigma_2 = 0 &= \sigma + \sigma_1 + \sigma_1 = \sigma + 2\sigma_1 \\ \sigma_1 &= -\frac{\sigma}{2}, \sigma_2 = -\sigma_1 = \frac{\sigma}{2}\end{aligned}$$

## 5.2 静电平衡时导体电场的分布

## 【0105A07】

将一正电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近, 则导体内的电场强度的大小将

- (A) 变大 (B) 不变 (C) 变小 (D) 无法确定如何变化

## 答案

B

## 解析

静电平衡时, 导体内电场为零, 所以电荷在移动过程中, 导体内的电场保持为零, 不变。

## 【0105B03】

一任意形状的带电导体, 其面电荷密度为  $\sigma(x, y, z)$ , 则在导体表面外附近任意点处的电场强度的大小  $E(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

## 解析

静电平衡时，导体内电场为零，导体是个等势体，导体外电场的方向一定是垂直该处的表面。选择一个微小的圆柱面为高斯面，圆柱面的底面平行于导体表面，一个面在导体内，一个面在导体外，侧面垂直于导体表面，由高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E\Delta S &= \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

## 【0105B04】

选无穷远处为电势零点，半径为  $R$  的导体球带电后，其电势为  $U$ ，则球外离球心距离为  $r$  处的电场强度的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{RU}{r^2}$$

## 解析

设导体球的带电量为  $Q$ ，则由高斯定理很容易求得球外空间的电场分布。选择半径为  $r$  的同心球面为高斯面，则有

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (4\pi r^2) &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

以无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$V = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以导体球的电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由此可得

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = UR$$

所以球外空间的电场强度的大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{UR}{r^2}$$

## 5.3 静电平衡时导体电势的分布

## 【0105A01】

当一个带电导体处于静电平衡时，

- (A) 表面上电荷密度较大处电势较高
- (B) 表面曲率较大处电势较高
- (C) 导体内部的电势比导体表面的电势高
- (D) 导体内任一点与其表面上任一点的电势差等于零

## 答案

D

## 解析

静电平衡时，导体内部电场为零，导体是个等势体，导体内任意一点的电势均相等。

## 【0105A02】

一个带负电荷的金属球，外面同心地放置一个不带电的金属球壳，则球壳中任意一点的电场强度大小和电势 (设无穷远处为电势零点) 分别为

- (A)  $E = 0, U > 0$
- (B)  $E = 0, U < 0$
- (C)  $E = 0, U = 0$
- (D)  $E > 0, U < 0$

## 答案

B

## 解析

假定金属球带电  $-q$ ，则静电平衡时，球壳内表面带正电  $+q$ ，外表面带等量负电  $-q$ ，而导体内部电场为零，所以  $P$  处场强的大小  $E = 0$ 。但球壳外电场

$$E = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

方向从无穷远指向球心。所以当以无穷远处为电势零点时，球壳外的电势小于零，所以球壳的电势也小于零。

## 【0105A03】

两个球形导体，球 1 的直径是球 2 的 2 倍。若球 1 原来带电  $q$ ，球 2 不带电，当用导线把两球连接，下列说法正确的是

- (A) 两球所带电量相等
- (B) 两球电势相等
- (C) 两球的电荷面密度相等
- (D) 球 2 的电势是球 1 的 2 倍

答案

B

【0105A06】

将一负电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近，则

- (A) 导体内的电场强度的大小减小，导体的电势减小  
 (B) 导体内的电场强度的大小减小，导体的电势不变  
 (C) 导体内的电场强度的大小不变，导体的电势减小  
 (D) 导体内的电场强度的大小不变，导体的电势不变

答案

C

【0105A08】

将一正电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近，则导体的电势将

- (A) 变大 (B) 不变 (C) 变小 (D) 无法确定如何变化

答案

A

解析

以无穷远处为电势零点时，点电荷的电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以越靠近正电荷，电势越高，因此正电荷靠近导体时，导体的电势变大。

【0105B05】

半径为  $R_1$  的金属球带电  $q$ ，外部同心放置一中性金属球壳，其内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$ 。现用细导线将金属球和球壳连接起来，静电平衡后，金属球的电势为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

【0105B06】

将一个带电量为  $q$  的点电荷放在一个半径为  $R$  的不带电的导体球附近, 点电荷与导体球球心相距  $d(d > R)$ 。取无穷远处为电势零点, 则导体球上感应电荷在球心处的电势为\_\_\_\_\_。

答案

0

【0105C01】

半径为  $R_1$  的导体球, 带电量为  $q$ 。导体球外有一同心导体球壳, 内半径为  $R_2$ , 外半径为  $R_3$ , 导体球壳带电量为  $Q$ 。(1) 求静电平衡时电荷的分布;(2) 取无穷远处为电势零点, 求导体球的电势  $U_1$  和导体球壳的电势  $U_2$ ;(3) 用导线连接两导体, 再次平衡后电荷的分布及两导体的电势。

解答

(1) 导体处于静电平衡时电荷只分布在导体表面, 导体内电场为零, 由此可得, 在  $r = R_1$  球面上均匀分布电荷  $q_1 = q$ , 在  $r = R_2$  球面上均匀分布电荷  $q_2 = -q$ , 在  $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = Q + q$ 。  
(2) 根据均匀带电球面的电势分布

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \end{cases}$$

及电势叠加原理, 可得导体球的电势

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

导体球壳的电势

$$U_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

(3) 若以导线将球与球壳联接在一起, 则两者形成一个新的导体, 静电平衡时电荷只分布在导体的表面上, 这时, 在  $r = R_1$  球面上的电荷  $q_1 = 0$ , 在  $r = R_2$  球面上的电荷  $q_2 = 0$ , 在  $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = Q + q$ 。因此导体球的电势

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

导体球壳的电势

$$U_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

## 评分标准

1. 根据静电平衡导体的性质得到电荷的分布 ( $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $q_3 = Q + q$ ) 各得 2 分共 6 分
2. 均匀带电球面的电势分布得 2 分, 电势叠加原理得 1 分
3.  $U_1$ 、 $U_2$  各得 3 分共 6 分
4. 导线连接后电荷分布 ( $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = Q + q$ ) 各得 1 分共 3 分,  $U_1$ 、 $U_2$  各得 1 分共 2 分

## 【0105C02】

半径为  $R_1$  的金属球, 带电量为  $q$ 。另有一同心金属球壳, 内半径为  $R_2$ , 外半径为  $R_3$ , 带电量也为  $q$ 。  
(1) 静电平衡时, 两导体上的电荷如何分布? (2) 求各个区域的电场强度; (3) 以无穷远处为电势零点, 求球心的电势。

## 解答

(1) 导体处于静电平衡时电荷只分布在导体表面, 导体内电场为零, 由此可得, 在  $r = R_1$  球面上均匀分布电荷  $q_1 = q$ , 在  $r = R_2$  球面上均匀分布电荷  $q_2 = -q$ , 在  $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = 2q$ 。  
(2) 静电平衡时导体内部电场为零, 所以  $r < R_1$  区域,  $E_1 = 0$ ;  $R_2 < r < R_3$  区域,  $E_3 = 0$ ; 由于电荷分布具有球对称性, 其他区域的电场可以由高斯定理求得, 取半径为  $r$  的、与带电体同心的球面为高斯面, 则有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$R_1 < r < R_2$  区域,

$$Q_2 = q$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r > R_3$  区域,

$$Q_4 = q + (-q) + 2q = 2q$$

$$E_4 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(3) 以无穷远处为电势零点, 根据均匀带电球面的电势分布

$$U = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r < R \end{cases}$$

及电势叠加原理, 可得球心的电势

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_3} \right)$$

## 评分标准

1. 根据静电平衡导体的性质得到电荷的分布 ( $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $q_3 = 2q$ ) 各得 2 分共 6 分
2. 根据静电平衡导体的电场分布特点得  $E_1 = 0$ 、 $E_3 = 0$  各得 2 分共 4 分
3. 高斯定理得 2 分,  $E_2$ 、 $E_4$  各 2 分共 4 分
4. 均匀带电球面的电势分布得 2 分, 电势叠加原理得 1 分, 计算球心电势得 1 分

## 【0105C03】

一内半径为  $a$ 、外半径为  $b$  的金属球壳, 带电量为  $Q$ 。在球壳空腔内距离球心  $r$  处有一点电荷, 带电量为  $q$ 。取无穷远处为电势零点, 试求: (1) 球壳内、外表面上的电荷量。(2) 球心处, 由球壳内表面上的电荷所产生的电势。(3) 球心处的总电势。

## 解答

(1) 静电平衡时, 导体内部电场为零, 所以很容易得到, 球壳内表面的带电量为  $-q$ , 所以外表面的带电量为  $Q + q$ 。【注意, 此时, 由于  $q$  不在球心, 所以球壳内表面的电荷不是均匀分布的, 而是在距离  $q$  近的地方, 电荷密度较大, 距离  $q$  远的地方, 电荷密度较小。但球壳外表面仍然是均匀分布的。】

(2) 取无穷远处为电势零点, 点电荷的电势为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

根据电势叠加原理, 将球壳内表面看成一个个点电荷, 则这些点电荷到球心的距离都是  $a$ , 因此虽然电荷不是均匀分布, 它们在球心的电势仍然可以求得

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$U_a = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \int_q dq = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

(3) 同理, 球壳外表面的电荷在球心处的电势为

$$U_b = \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

而点电荷  $q$  在球心处的电势为

$$U_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以球心处的总电势为

$$U = U_a + U_b + U_q = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-q}{a} + \frac{Q + q}{b} + \frac{q}{r} \right]$$

## 评分标准

1. 球壳内、外表面的电荷量各 3 分共 6 分，这题无需回答是否均匀。
2. 点电荷的电势 2 分，电势叠加原理 1 分，积分求电势 5 分，必须有积分，直接写结果只得 1 分。
3. 外表面电荷的电势 3 分，点电荷的电势 2 分，总电势 1 分。

## 【0105C04】

真空中，长为  $L$ 、内半径为  $R_1$ 、外半径为  $R_2$ 、总带电量为  $q_1$  的空心圆柱形导体，在其轴线上有一根长为  $L$ 、带电量为  $q_2$  的均匀带电直导线。假定  $L \gg R_2$ ，即可将圆柱体和导线视为无限长。求：(1) 圆柱体内、外表面的面电荷密度 (单位面积的带电量)；(2) 各区域的电场分布；(3) 取圆柱体内表面  $r = R_1$  处为电势零点，求各区域的电势分布。

## 解答

(1)  $R_1$  表面上均匀分布电荷  $-q_2$ ，因此面电荷密度

$$\sigma_1 = \frac{-q_2}{2\pi R_1 L}$$

$R_2$  表面上均匀分布电荷  $q_1 + q_2$ ，因此面电荷密度

$$\sigma_2 = \frac{q_1 + q_2}{2\pi R_2 L}$$

(2) 电荷分布具有柱对称性，可以用高斯定理求电场，取半径为  $r$ 、高为  $h$  的同轴圆柱面为高斯面，则有

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E \times (2\pi r h) &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r h}\end{aligned}$$

$r < R_1$ ，空腔内，

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{q_2}{L} h \\ E_1 &= \frac{q_2}{2\pi \varepsilon_0 L r}\end{aligned}$$

$R_1 < r < R_2$ ，导体内，静电平衡， $E_2 = 0$

$r > R_2$ ，导体外，

$$\begin{aligned}Q_3 &= \frac{q_2}{L} h + \frac{-q_2}{L} h + \frac{q_1 + q_2}{L} h = \frac{q_1 + q_2}{L} h \\ E_3 &= \frac{q_1 + q_2}{2\pi \varepsilon_0 L r}\end{aligned}$$

(3)  $r < R_1$ ，空腔内，

$$U_1 = \int_r^{R_1} E_1 dr$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_r^{R_1} \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0 L r} dr \\
 &= \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_1}{r}
 \end{aligned}$$

$R_1 < r < R_2$ , 导体内, 静电平衡时导体是个等势体, 电势处处相等, 都等于圆柱体内表面的电势, 因此

$$U_2 = 0$$

$r > R_2$ , 导体外,

$$\begin{aligned}
 U_3 &= \int_r^{R_2} E_3 dr + \int_{R_2}^{R_1} E_2 dr \\
 &= \int_r^{R_2} \frac{q_1 + q_2}{2\pi\epsilon_0 L r} dr + 0 \\
 &= \frac{q_1 + q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{r}
 \end{aligned}$$

### 评分标准

1. 电荷面密度各 2 分共 4 分
2. 高斯定理 4 分
3. 各区域电场各 2 分共 6 分
4. 各区域电势各 2 分共 6 分

## 5.4 接地

### 【0105A10】

将带负电的点电荷从左边靠近一个不带电的导体球, 在导体球的左端感应出正电荷, 右端感应出负电荷。现将导体球的左端接地, 则

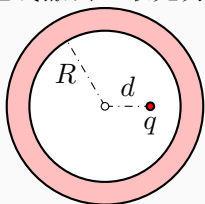
- (A) 导体球上的负电荷入地 (B) 导体球上的正电荷入地  
(C) 导体球上的所有感应电荷入地 (D) 导体球上没有感应电荷入地

### 答案

A

## 【0105B07】

如图所示，一个不带电的空腔导体球壳，内半径为  $R$ 。在腔内与球心的距离为  $d$  处固定一个带电量  $q$  的点电荷。用导线把球壳接地后，再把接地线撤去。取无穷远处为电势零点，则球心的电势为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$$

## 解析

依题意，静电平衡后，接地前，球壳内表面带电  $-q$ ，外表面带电  $q$ 。接地后，球壳内表面带电  $-q$ ，外表面带电  $0$ 。所以球心处的电势为点电荷  $+q$  的电势与内表面的电势的叠加。当选择无穷远处为电势零点时，点电荷  $+q$  在  $O$  点的电势为

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

内表面所带电荷  $-q$  在  $O$  点的电势为

$$V_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以  $O$  点的总电势为

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$$

## 【0105B08】

一长直导线横截面半径为  $r$ ，导线外同轴地套一半径为  $R$  的导体薄圆筒，两者互相绝缘，外筒接地。设导线单位长度的带电量为  $\lambda$ ，则两导体的电势差为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

## 【0105B09】

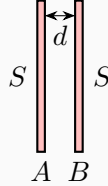
把一块原来不带电的金属板  $B$ ，移近一块带有正电荷  $Q$  的金属板  $A$ ，平行放置。设两板面积都是  $S$ ，板间距离是  $d$ ，忽略边缘效应。当  $B$  板接地时，两板间电势差为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

## 解析

静电平衡时，设从左到右四个面的电荷面密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$ ，



由静电平衡时导体内电场为零可得

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} &= 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} &= 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 + \sigma_3 &= 0, \sigma_1 - \sigma_4 = 0\end{aligned}$$

又因为  $A$  板总的带电量为  $Q$ ， $B$  板不带电，所以有

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 &= \frac{Q}{S}, \sigma_3 = -\sigma_4 \\ \sigma_4 &= \frac{Q}{2S} = \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3\end{aligned}$$

所以极板间的电场强度为

$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

所以极板间电势差为

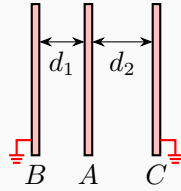
$$U_{AB} = Ed = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

当  $B$  板接地时，有

$$\begin{aligned}\sigma'_2 + \sigma'_3 &= 0, \sigma'_1 - \sigma'_4 = 0 \\ \sigma'_1 + \sigma'_2 &= \frac{Q}{S}, \sigma'_4 = 0 \\ \sigma'_1 = \sigma'_4 &= 0, \sigma'_2 = \frac{Q}{S} = -\sigma'_3 \\ E' &= \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 - \sigma'_3 - \sigma'_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \\ U'_{AB} &= E'd = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}\end{aligned}$$

## 【0105C05】

三块平行放置的金属板  $A$ 、 $B$  和  $C$ ，面积都是  $S$ ， $A$ 、 $B$  相距  $d_1$ ， $A$ 、 $C$  相距  $d_2$ ， $B$ 、 $C$  两板都接地。已知  $A$  板带正电  $q_0$ ，边缘效应可忽略，(1) 求  $B$  板和  $C$  板上感应电荷的电量。(2) 以地为电势零点，求  $A$  板的电势。



## 解答

假定从左到右六个面的带电量分别为  $q_{B1}$ 、 $q_{B2}$ 、 $q_{A1}$ 、 $q_{A2}$ 、 $q_{C1}$ 、 $q_{C2}$ ，依题意， $B$ 、 $C$  接地， $A$  带电量为  $q_0$ ，有  $q_{B1} = 0$ ， $q_{C2} = 0$ ， $q_{A1} + q_{A2} = q_0$ 。

静电平衡时，导体内部电场为零，所以分别在  $A$ 、 $B$  和  $A$ 、 $C$  之间取一圆柱面为高斯面，底面分别在两个导体内且平行于导体表面，侧面与导体表面垂直，由电场的高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$0 = \frac{\sigma_{B2}S_0 + \sigma_{A1}S_0}{\epsilon_0}$$

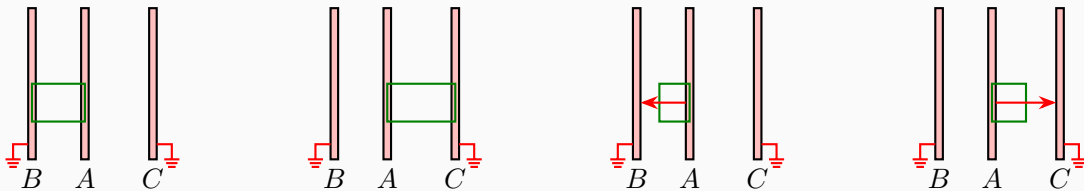
$$\sigma_{B2} = -\sigma_{A1}$$

$$q_{B2} = -q_{A1}$$

$$0 = \frac{\sigma_{A2}S_0 + \sigma_{C1}S_0}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_{A2} = -\sigma_{C1}$$

$$q_{A2} = -q_{C1}$$



忽略边缘效应，导体之间为均匀电场，由高斯定理可求得  $A$ 、 $B$  之间的电场强度  $\vec{E}_1$  和  $A$ 、 $C$  之间的电场强度  $\vec{E}_2$

$$E_1 S_0 = \frac{\sigma_{A1} S_0}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_{A1}}{\epsilon_0} = \frac{q_{A1}}{\epsilon_0 S}$$

$$E_2 S_0 = \frac{\sigma_{A2} S_0}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_{A2}}{\epsilon_0} = \frac{q_{A2}}{\epsilon_0 S}$$

$\vec{E}_1$  方向由  $A$  指向  $B$ ， $\vec{E}_2$  方向由  $A$  指向  $C$ 。

$B$ 、 $C$  均接地,

$$U_B = U_C = 0$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = U_A, U_{AC} = U_A - U_C = U_A$$

$$U_A = E_1 d_1 = E_2 d_2$$

$$\frac{q_{A1}}{\varepsilon_0 S} d_1 = \frac{q_{A2}}{\varepsilon_0 S} d_2$$

$$q_{A1} d_1 = q_{A2} d_2$$

联立以上各式解得

$$q_{A1} = \frac{d_2}{d_1 + d_2} q_0$$

$$q_{A2} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} q_0$$

所以  $B$  板的感应电荷为

$$q_B = q_{B1} + q_{B2} = 0 + (-q_{A1}) = -\frac{d_2}{d_1 + d_2} q_0$$

$C$  板的感应电荷为

$$q_C = q_{C1} + q_{C2} = (-q_{A2}) + 0 = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} q_0$$

$A$  板的电势

$$U_A = E_1 d_1 = \frac{q_{A1}}{\varepsilon_0 S} d_1 = \frac{d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} q_0$$

或

$$U_A = E_2 d_2 = \frac{q_{A2}}{\varepsilon_0 S} d_2 = \frac{d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} q_0$$

### 评分标准

1. 接地得  $q_{B1} = 0$ 、 $q_{C2} = 0$  各得 1 分共 2 分
2.  $q_{A1} + q_{A2} = q_0$  得 1 分
3. 高斯定理得 2 分
4. 高斯定理得  $q_{B2} = -q_{A1}$ 、 $q_{C1} = -q_{A2}$  各得 2 分共 4 分
5. 高斯定理得  $E_1$ 、 $E_2$  各得 2 分共 4 分
6.  $U_A = E_1 d_1 = E_2 d_2$  得 2 分
7. 联立求得  $q_{A1}$ 、 $q_{A2}$  各得 1 分共 2 分

8. 三个结论 ( $B$  板的感应电荷、 $C$  板的感应电荷、 $A$  板的电势) 各得 1 分共 3 分

## 7、电容器

### 7.1 电容器的电容

#### 【0107A01】

一平行板电容器充电后切断电源, 若使二极板间距离增加, 则二极板间电场强度的大小将

- (A) 变大 (B) 不变 (C) 变小 (D) 无法判断如何变化

#### 答案

B

#### 解析

电容器充电后切断电源, 极板上所带电量  $Q$  保持不变, 拉大两板之间距离  $d$  时, 板间电场强度  $E$  保持不变, 所以板间电压  $U = Ed$  增大, 所以电容  $C = \frac{Q}{U}$  减小。当然也可以直接从平行板电容器的电容公式求得

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$d$  增大,  $C$  减小。

#### 【0107A02】

一平行板电容器充电后保持与电源接通, 若使二极板间距离增加, 则电容器的电容将

- (A) 变大 (B) 不变 (C) 变小 (D) 无法判断如何变化

#### 答案

C

#### 【0107A03】

两个半径相同的金属球, 一个为空心, 一个为实心, 对两者各自孤立时的电容值进行比较, 则

- (A) 两球电容值相等 (B) 实心球电容值大 (C) 空心球电容值大 (D) 两者无法比较

答案

A

【0107B01】

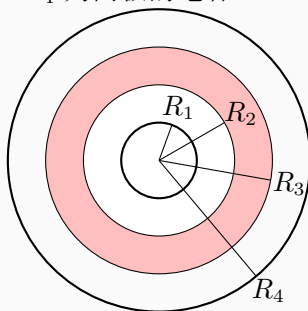
真空中半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两个导体球相距很远, 均可视为孤立导体球, 则两球的电容之比  $\frac{C_1}{C_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$\frac{R_1}{R_2}$$

【0107C02】

一球形电容器内、外两球壳的半径分别为  $R_1$  和  $R_4$ , 今在两球壳之间放入一个内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的同心导体球壳。(1) 给电容器充电, 使内壳 ( $R_1$ ) 带电量为  $Q$ , 外壳 ( $R_4$ ) 带电量为  $-Q$ , 求  $R_1$  和  $R_4$  两壳之间的电势差; (2) 求以  $R_1$  和  $R_4$  为两极的电容。



解答

(1) 导体处于静电平衡时电荷只分布在导体表面, 导体内部电场为零。所以,  $r = R_1$  球面上均匀分布电荷  $q_1 = Q$ ,  $r = R_2$  球面上均匀分布电荷  $q_2 = -Q$ ,  $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = Q$ ,  $r = R_4$  球面上均匀分布电荷  $q_4 = -Q$ 。

根据均匀带电球面的电势分布

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \end{cases}$$

及电势叠加原理, 可得  $r = R_1$  球面的电势

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \end{aligned}$$

$r = R_4$  球面的电势

$$\begin{aligned} U_4 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以二者的电势差

$$\Delta U = U_1 - U_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

(2) 根据电容的定义可得, 以  $R_1$  和  $R_4$  为两极的电容器的电容

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}$$

### 评分标准

1. 根据静电平衡导体的性质得到电荷的分布 ( $q_1 = Q$ ,  $q_2 = -Q$ ,  $q_3 = Q$ ,  $q_4 = -Q$ ) 各得 2 分共 8 分
2. 均匀带电球面的电势分布得 2 分
3. 电势叠加原理得 1 分
4.  $U_1$ 、 $U_4$ 、 $\Delta U$  各得 2 分共 6 分
5. 计算电容得 3 分

## 7.2 电容器的联接

### 【0107A04】

如果在空气平行板电容器的两极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板, 则由于金属板的插入及其相对极板所放位置的不同, 对电容器电容的影响为

- (A) 使电容减小, 但与金属板相对极板的位置无关
- (B) 使电容减小, 且与金属板相对极板的位置有关
- (C) 使电容增大, 但与金属板相对极板的位置无关
- (D) 使电容增大, 且与金属板相对极板的位置有关

### 答案

C



## 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

当极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板, 可以认为两个极板间的距离变小, 所以电容器的电容增大。其实插入金属板, 是将一个电容变成两个电容并进行串联, 两个新电容器的极板面积不变, 间距分别为  $d_1$  和  $d_2$ , 所以两个电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon S}{d_2}$$

而由电容器串联的公式

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon S} + \frac{d_2}{\varepsilon S} = \frac{d_1 + d_2}{\varepsilon S}$$

$$C_{12} = \frac{\varepsilon S}{d_1 + d_2}$$

而显然  $d_1 + d_2 = d - d_0 < d$ , 其中  $d_0$  为金属板的厚度, 所以  $C_{12} > C$ , 且与金属板的位置无关。

对于空气电容器, 以上  $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。

问题: 如果金属板不是平行插入, 结果将怎么样?

## 【0107B02】

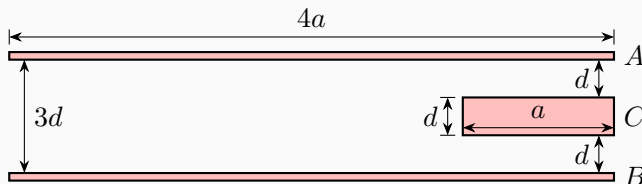
真空中半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两个导体球相距很远, 当用细导线将两球相连后, 则系统的电容  $C =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)$$

## 【0107B03】

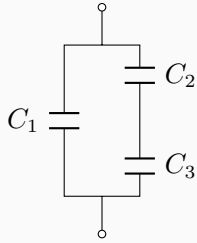
$A$ 、 $B$  是两块完全相同的、长为  $4a$ 、宽为  $b$ 、厚度可忽略不计的金属板, 二者相距  $3d$ , 平行放置构成平行板电容器 (这里  $d \ll a$ ,  $d \ll b$ ), 金属板  $C$  长为  $a$ 、宽为  $b$ 、厚为  $d$ 。  $A$ 、 $B$  接入电压为  $U$  的电路进行充电, 之后断开电源, 再将  $C$  插入图示位置, 则  $A$ 、 $B$  之间的总电容为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}$$

## 解析



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0(3a)b}{3d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}$$

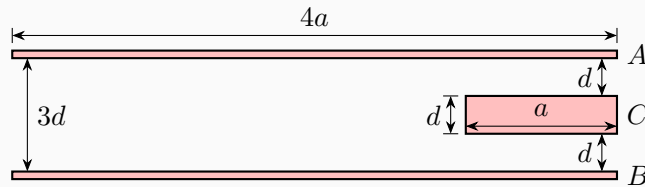
$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{2d}{\varepsilon_0 ab}$$

$$C_{23} = \frac{\varepsilon_0 ab}{2d}$$

$$C_{123} = C_1 + C_{23} = \frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}$$

## 【0107B04】

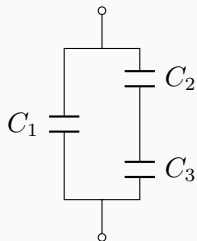
$A$ 、 $B$  是两块完全相同的、长为  $4a$ 、宽为  $b$ 、厚度可忽略不计的金属板，二者相距  $3d$ ，平行放置构成平行板电容器 (这里  $d \ll a$ ,  $d \ll b$ )，金属板  $C$  长为  $a$ 、宽为  $b$ 、厚为  $d$ 。 $A$ 、 $B$  接入电压为  $U$  的电路进行充电，之后不断开电源，再将  $C$  插入图示位置，则  $A$ 、 $B$  之间的总电容为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}$$

## 解析



$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\varepsilon_0(3a)b}{3d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 C_2 &= \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 C_3 &= \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 \frac{1}{C_{23}} &= \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{2d}{\varepsilon_0 ab} \\
 C_{23} &= \frac{\varepsilon_0 ab}{2d} \\
 C_{123} &= C_1 + C_{23} = \frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}
 \end{aligned}$$

## 【0107B05】

一空气平行板电容器，两极板间距为  $d$ ，充电后板间电压为  $U$ 。然后将电源断开，在两极板间平行地插入一厚度为  $\frac{d}{3}$  的金属板，则板间电压变成  $U' =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{2}{3}U$$

## 解析

电容器充电电源断开后，极板上的带电量保持不变。根据平行板电容器的电容公式及其与电压和电量之间的关系，有

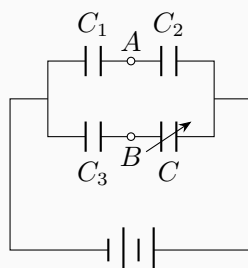
$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U} \\
 U &= \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}
 \end{aligned}$$

插入金属板之后，等效电容的板间距  $d' = d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}$ ，所以板间电压

$$U' = \frac{Qd'}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3} \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3}U$$

## 【0107B06】

如图所示，电容  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  已知，电容  $C$  可调，当调节到  $A$ 、 $B$  两点电势相等时，电容  $C =$ \_\_\_\_\_。

**答案**

$$\frac{C_2 C_3}{C_1}$$

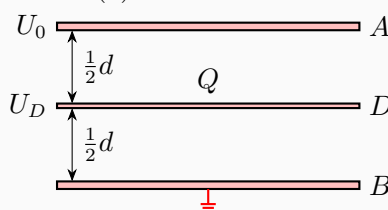
**解析**

依题意， $A$ 、 $B$  两点电势相等，则说明  $C_1$  和  $C_3$  的电压相同， $C_2$  和  $C$  的电压相同，而  $C_1$  和  $C_2$  串联， $C_3$  和  $C$  串联，则说明  $C_1$  和  $C_2$  的带电量相等， $C_3$  和  $C$  的带电量相等，即有

$$\begin{aligned} U_1 &= U_3, U_2 = U, Q_1 = Q_2, Q_3 = Q \\ C_1 U_1 &= C_2 U_2, C_3 U_3 = C U \\ C &= \frac{U_3}{U} C_3 = \frac{U_1}{U_2} C_3 = \frac{C_2}{C_1} C_3 = \frac{C_2 C_3}{C_1} \end{aligned}$$

**【0107C01】**

一平行板电容器，极板面积为  $S$ ，相距为  $d$ 。 $B$  板接地，以地为电势零点，保持  $A$  板的电势  $U_A = U_0$  不变。如图，把一块面积同为  $S$ 、带电量为  $Q$  的导体薄板  $D$  平行地插入两极板正中间，求：(1) 稳定后导体薄板  $D$  上、下两个表面的带电量；(2) 导体薄板  $D$  的电势  $U_D$ 。

**解答**

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

电容、电压和电量之间的关系

$$C = \frac{Q}{U}$$

所以  $A$ 、 $D$  之间的电容

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$

$D$ 、 $B$  之间的电容

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$

假定稳定后导体薄板  $D$  上、下两个表面的带电量分别为  $q_1$  和  $q_2$ ，则有

$$q_1 + q_2 = Q$$

$A$ 、 $D$  之间的电压

$$U_1 = U_D - U_A = \frac{q_1}{C_1}$$

$D$ 、 $B$  之间的电压

$$U_2 = U_D - U_B = \frac{q_2}{C_2}$$

依题意

$$U_A = U_0, U_B = 0$$

联立以上各式，解得

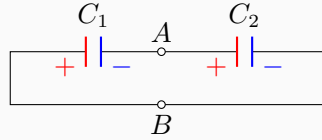
$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{Q}{2} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 \\ q_2 &= \frac{Q}{2} + \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 \\ U_D &= \frac{U_0}{2} + \frac{Qd}{4\varepsilon_0 S} \end{aligned}$$

### 评分标准

1. 平行板电容器的电容公式得 2 分
2. 电容、电压和电量之间的关系得 2 分
3.  $q_1 + q_2 = Q$  得 2 分
4.  $U_1 = U_D - U_A = \frac{q_1}{C_1}$  得 4 分
5.  $U_2 = U_D - U_B = \frac{q_2}{C_2}$  得 4 分
6. 联立解得  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $U_D$  各 2 分共 6 分

## 【0107C03】

两个电容分别为  $C_1 = 2C$  和  $C_2 = C$  的电容器，带电量分别为  $Q_1 = Q$  和  $Q_2 = 2Q$ ，如图连接 ( $C_1$  的正极板与  $C_2$  的负极板连接， $C_1$  的负极板与  $C_2$  的正极板连接)，问 (1) 最终各极板上的带电量各是多少？(2)  $A$ 、 $B$  之间的电压是多少？



## 解答

(1) 依题意，连接前从左到右四个板的带电量分别为  $+Q$ 、 $-Q$ 、 $+2Q$ 、 $-2Q$ ，假定连接后从左到右四个板的带电量分别为  $-q_1$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $-q_2$ ，连接前后中间两板上带电量的总和保持不变，即

$$q_1 + q_2 = -Q + 2Q = Q$$

$A$ 、 $B$  之间的电压即两个电容器此时的电压

$$U = U_A - U_B = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

联立解得

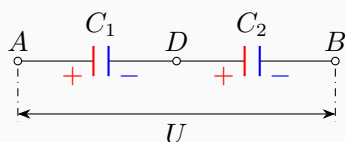
$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{C_1 Q}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3}Q \\ q_2 &= \frac{C_2 Q}{C_1 + C_2} = \frac{1}{3}Q \\ U &= \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{Q}{3C} \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 假设四板带电量各 1 分共 4 分
2. 电荷关系 5 分
3. 电压关系 5 分
4. 联立解得  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $U$  各 2 分共 6 分

## 【0107C04】

两个电容分别为  $C_1 = 2C$  和  $C_2 = C$  的电容器，带电量分别为  $Q_1 = Q$  和  $Q_2 = 2Q$ ，如图连接 ( $C_1$  的负极板与  $C_2$  的正极板连接， $C_1$  的正极板、 $C_2$  的负极板分别接入电压为  $U$  的电路中，假定外电路中左端电势比较高，即  $U_A - U_B = U$ )，问 (1) 最终各极板上的带电量各是多少？(2)  $U_1 = U_A - U_D$ 、 $U_2 = U_D - U_B$  各是多少？



## 解答

依题意，连接前从左到右四个板的带电量分别为  $+Q$ 、 $-Q$ 、 $+2Q$ 、 $-2Q$ ，假定连接后从左到右四个板的带电量分别为  $q_1$ 、 $-q_1$ 、 $q_2$ 、 $-q_2$ ，连接前后中间两板上带电量的总和保持不变，即

$$-q_1 + q_2 = -Q + 2Q = Q$$

假定  $C_1$  左极板带电量为  $q_1$ ，右极板带电量为  $-q_1$ ，则有

$$U_1 = U_A - U_D = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_1}{2C}$$

假定  $C_2$  左极板带电量为  $q_2$ ，右极板带电量为  $-q_2$ ，则有

$$U_2 = U_D - U_B = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_2}{C}$$

外电路电压为  $U$ ，则有

$$U = U_A - U_B = (U_A - U_D) + (U_D - U_B) = \frac{q_1}{2C} + \frac{q_2}{C}$$

联立解得

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2(CU - Q)}{3} \\ q_2 &= \frac{Q + 2CU}{3} \\ U_1 &= \frac{CU - Q}{3C} \\ U_2 &= \frac{Q + 2CU}{3C} \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 假设四板带电量各 1 分共 4 分
2. 电荷关系 3 分
3. 电压关系 5 分
4. 联立解得  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $U_1$ 、 $U_2$  各 2 分共 8 分

## 7.3 电容器的储能

【0107A05】

将一空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，断开电源，再将一块与极板面积相同的金属板平行地插入两极板之间，则由于金属板的插入及其相对极板所放位置的不同，对电容器储能的影响为

- (A) 储能减少，但与金属板相对极板的位置无关 (B) 储能减少，且与金属板相对极板的位置有关  
(C) 储能增加，但与金属板相对极板的位置无关 (D) 储能增加，且与金属板相对极板的位置有关

答案

A

解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

充电后与电源断开，极板上所带电量  $Q$  保持不变，插入金属板， $d$  减小，所以电容  $C$  增大，电压  $U$  减小。但电量不变，由高斯定理可得，电场  $E$  不变。而电场能量密度为

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

所以电场能量密度不变，但电场存在的区域变小，所以电场能量减小。

也可以由电场能量

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2C}Q^2$$

电量保持不变，电容增大，所以电场能量减小。

【0107A06】

将一个空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，在保持与电源连接的情况下，再将一块与极板面积相同的金属板平行地插入两极板之间，则由于金属板的插入及其相对极板所放位置的不同，对电容器储能的影响为

- (A) 储能增加，与金属板相对极板的位置无关 (B) 储能增加，与金属板相对极板的位置有关  
(C) 储能减小，与金属板相对极板的位置无关 (D) 储能减小，与金属板相对极板的位置有关

答案

A



## 【0107B07】

一个电容为  $C_1$  的电容器，充电后两极电压为  $U$ ，然后断开电源，与另一未充电的、电容为  $C_2$  的电容器相连接。若  $C_2 = 2C_1$ ，则  $C_1$  能量损失为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{4}{9}C_1U^2$$

## 解析

$$\begin{aligned} Q &= C_1U = C_1U_1 + C_2U_1 = (C_1 + C_2)U_1 \\ U_1 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2}U = \frac{1}{3}U \\ E_0 &= \frac{1}{2}C_1U^2 \\ E_1 &= \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{9}E_0 \\ \Delta E &= E_0 - E_1 = \frac{8}{9}E_0 = \frac{8}{9} \times \frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{4}{9}C_1U^2 \end{aligned}$$

## 7.4 其他

## 【0107B08】

已知一平行板电容器，极板面积为  $S$ ，两板间距为  $d$ ，板间充满空气。当两极板上加电压  $U$  时，忽略边缘效应，两极板间相互作用力的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$$

## 解析

根据平行板电容器的电容公式及其与电压和电量之间的关系，有

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U}$$

所以极板上的带电量为

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d}U$$

其中一个极板（记为  $A$ ）带  $+Q$ ，另一个极板（记为  $B$ ）带  $-Q$ 。所以  $A$  极板所受到的电场力是  $B$  极板上的电荷在  $A$  极板处所产生的电场作用在  $A$  极板的电荷上。忽略边缘效应，极板可视为无限大带电平

面，所以其电场可由高斯定理求得

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2S) &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2d}\end{aligned}$$

因此，注意，这里  $A$  极板在  $B$  极板处所产生的电场强度的大小仅仅是平行板电容器之间匀强电场的一半。所以极板上的电荷所受到的电场力的大小为

$$F = QE = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U \times \frac{U}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$$

## 第二章 稳恒磁场

### 2、毕奥——萨伐尔定律

#### 2.1 电流元的磁场

【0202A01】

一个电流元  $I d\vec{l}$  位于直角坐标系的坐标原点，电流沿  $z$  轴正方向，则空间点  $(0, 0, 1)$  的磁感应强度  $\vec{B}_1$  和  $(1, 0, 0)$  的磁感应强度  $\vec{B}_2$  分别为

(A)  $\vec{B}_1 = \vec{0}$ 、 $\vec{B}_2 = \vec{0}$

(B)  $\vec{B}_1 = \vec{0}$ 、 $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \vec{e}_y$

(C)  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \vec{e}_y$ 、 $\vec{B}_2 = \vec{0}$

(D)  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \vec{e}_y$ 、 $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \vec{e}_y$

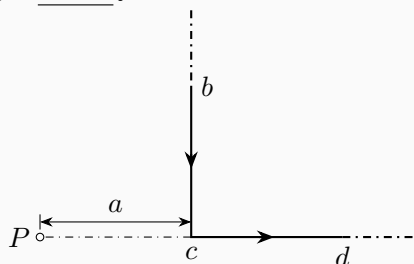
答案

B

#### 2.2 磁场的叠加原理

【0202B01】

一条无限长载流导线折成如图所示形状，导线上通有电流  $I$ ， $P$  点在  $cd$  的延长线上，它到折点的距离  $a$ ，则  $P$  点的磁感应强度的大小  $B =$ \_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

## 解析

电流元的磁场公式

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{r}$  为从电流元所在位置指向所求位置的矢量。由此也可见，如果  $d\vec{l} \parallel \vec{r}$ ，那么  $d\vec{l} \times \vec{r} = \vec{0}$ ，该电流元在场点所激发的磁场为零。所以  $cd$  段在  $P$  点的磁场为零。

而  $ab$  段上的电流元在  $P$  点的磁场的方向都是垂直纸面向里，大小可以通过积分得到，也可以通过对称性分析得出它是  $ab$  所在直线的无限长通电直线的磁场的一半，而无限长通电直线的磁场可以通过安培环路定理求得：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以所求磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

下面根据磁场叠加原理直接通过积分来求磁场

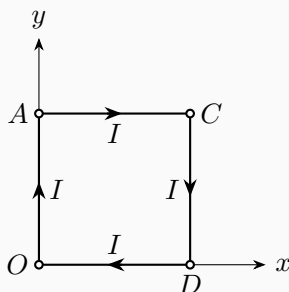
$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I (-dz) \sin \theta}{4\pi(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 I a dz}{4\pi(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\mu_0 I \sin \theta d(a/\tan \theta)}{4\pi(a/\sin \theta)^2} = -\frac{\mu_0 I \sin^3 \theta a (-\sin^{-2} \theta d\theta)}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi a} \\ B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \end{aligned}$$

## 【0202C01】

在如图所示直角坐标系中，有一通有电流  $I$ 、边长为  $L$  的正方形线圈。(1) 请写出毕奥——萨伐尔定律的矢量表达式；(2) 分别计算每条边上的电流在  $O$  点的磁感应强度的大小和方向。

可能用到的积分公式

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

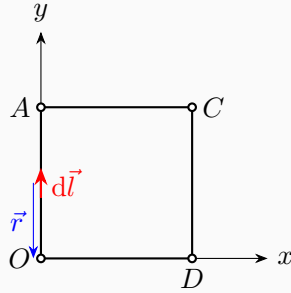


## 解答

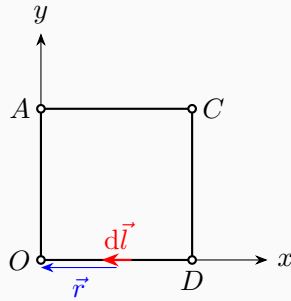
(1) 毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

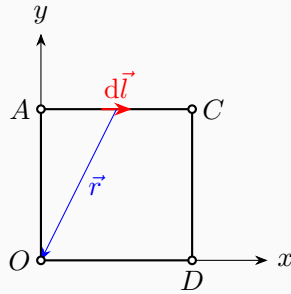
(2)  $OA$  段, 取  $y \rightarrow y + dy$  为电流元, 则  $d\vec{l} = dy \vec{e}_y$ ,  $\vec{r} = y(-\vec{e}_y)$ , 所以  $d\vec{l} \times \vec{r} = \vec{0}$ , 因此  $d\vec{B}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{B}_1 = \vec{0}$ 。



$DO$  段, 取  $x \rightarrow x + dx$  为电流元, 则  $d\vec{l} = |dx|(-\vec{e}_x)$ ,  $\vec{r} = x(-\vec{e}_x)$ , 所以  $d\vec{l} \times \vec{r} = \vec{0}$ , 因此  $d\vec{B}_4 = \vec{0}$ ,  $\vec{B}_4 = \vec{0}$ 。



$AC$  段, 取  $x \rightarrow x + dx$  为电流元, 则  $d\vec{l} = |dx| \vec{e}_x$ ,  $\vec{r} = -x \vec{e}_x - L \vec{e}_y$ ,



所以电流元产生的磁场为

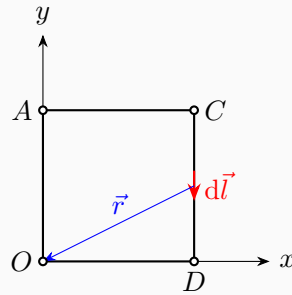
$$\begin{aligned} d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |dx| \vec{e}_x \times (-x \vec{e}_x - L \vec{e}_y)}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 IL}{4\pi} \frac{|dx| (-\vec{e}_z)}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

所以  $AC$  段在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴负方向, 大小为

$$B_2 = \int_0^L \frac{\mu_0 IL}{4\pi} \frac{|dx|}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \frac{dx}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \left[ \frac{x}{L^2(x^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_0^L \\
&= \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \left[ \frac{L}{L^2(L^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} - 0 \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi L}
\end{aligned}$$

$CD$  段, 取  $y \rightarrow y + dy$  为电流元, 则  $d\vec{l} = |dy|(-\vec{e}_y)$ ,  $\vec{r} = -L\vec{e}_x - y\vec{e}_y$ ,



所以电流元产生的磁场为

$$\begin{aligned}
d\vec{B}_3 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |dy|(-\vec{e}_y) \times (-L\vec{e}_x - y\vec{e}_y)}{(L^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \frac{|dy|(-\vec{e}_z)}{(L^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

所以  $CD$  段在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴负方向, 大小为

$$\begin{aligned}
B_3 &= \int_L^0 \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \frac{|dy|}{(L^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \int_L^0 \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \frac{-dy}{(L^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\mu_0 I L}{4\pi} \left[ \frac{y}{L^2(L^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_L^0 \\
&= -\frac{\mu_0 I L}{4\pi} \left[ 0 - \frac{L}{L^2(L^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi L}
\end{aligned}$$

### 评分标准

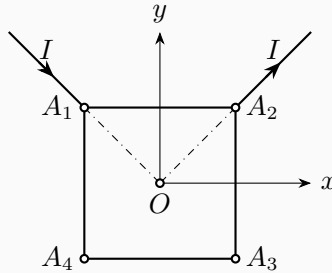
1. 毕奥——萨伐尔定律 4 分
2. 每条边的磁场各 4 分 ( $d\vec{l}$ 、 $\vec{r}$ 、 $d\vec{B}$ 、 $B$ ) 共 16 分

## 【0202C02】

如图所示直角坐标系中有一个由电阻均匀的导线构成的、边长为  $L$  的正方形线框，电流  $I$  由长直导线从  $A_1$  流入，再由  $A_2$  流出经长直导线返回电源。(1) 请写出毕奥——萨伐尔定律的矢量表达式；(2) 通过正方形边框每条边的电流；(3) 分别计算正方形边框每条边上的电流在  $O$  点的磁感应强度的大小和方向。

可能用到的积分公式

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$



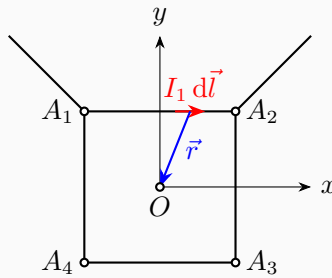
## 解答

(1) 毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

(2) 由于电阻均匀，每条边长度相同，因此每条边的电阻相同，设为  $R$ ，则  $A_1A_2$  支路的电阻为  $R$ ， $A_2A_3A_4A_1$  支路的电阻为  $3R$ ，两条支路并联，通过的电流与电阻成反比，而干路总电流为  $I$ ，因此  $A_1A_2$  支路的电流为  $\frac{3}{4}I$ ， $A_1A_4A_3A_2$  支路的电流为  $\frac{1}{4}I$ 。

(3)  $A_1A_2$  段，电流  $I_1 = \frac{3}{4}I$ ，取  $x \rightarrow x + dx$  为电流元，则  $d\vec{l} = |dx|(\vec{e}_x)$ ， $\vec{r} = -x\vec{e}_x - \frac{L}{2}\vec{e}_y$ ，



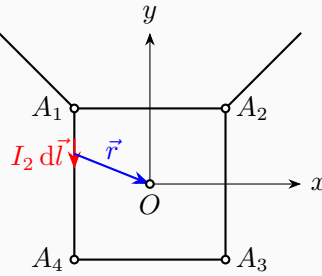
所以电流元产生的磁场为

$$\begin{aligned} d\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 |dx| \vec{e}_x \times (-x\vec{e}_x - \frac{L}{2}\vec{e}_y)}{(x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3\mu_0 IL}{32\pi} \frac{|dx|(-\vec{e}_z)}{(x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

所以  $A_1A_2$  段在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴负方向, 大小为

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{3\mu_0 IL}{32\pi} \frac{|dx|}{\left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{3\mu_0 IL}{32\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{3\mu_0 IL}{32\pi} \left[ \frac{x}{\frac{L^2}{4} \left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
 &= \frac{3\mu_0 I}{8\pi L} \left[ \frac{\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \\
 &= \frac{3\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi L}
 \end{aligned}$$

$A_1A_4$  段, 电流  $I_2 = \frac{1}{4}I$ , 取  $y \rightarrow y + dy$  为电流元, 则  $d\vec{l} = |dy|(-\vec{e}_y)$ ,  $\vec{r} = \frac{L}{2}\vec{e}_x - y\vec{e}_y$ ,



所以电流元产生的磁场为

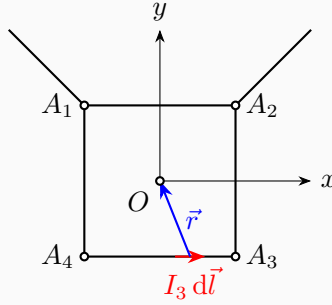
$$\begin{aligned}
 d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 |dy|(-\vec{e}_y) \times \left(\frac{L}{2}\vec{e}_x - y\vec{e}_y\right)}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \frac{|dy|(\vec{e}_z)}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

所以  $A_1A_4$  段在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \frac{|dy|}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \frac{-dy}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{\mu_0 IL}{32\pi} \left[ \frac{y}{\frac{L^2}{4} \left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \Bigg|_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{8\pi L} \left[ \frac{-\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi L}
 \end{aligned}$$



$A_4A_3$  段, 电流  $I_3 = \frac{1}{4}I$ , 取  $x \rightarrow x + dx$  为电流元, 则  $d\vec{l} = |dx|(\vec{e}_x)$ ,  $\vec{r} = -x\vec{e}_x + \frac{L}{2}\vec{e}_y$ ,



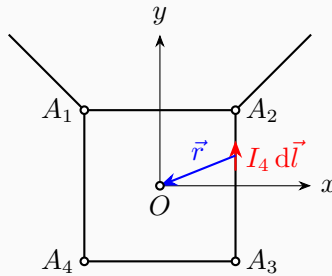
所以电流元产生的磁场为

$$\begin{aligned} d\vec{B}_3 &= \frac{\mu_0 I_3 |dx| (\vec{e}_x) \times (-x\vec{e}_x + \frac{L}{2}\vec{e}_y)}{4\pi (x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \frac{|dx|(\vec{e}_z)}{(x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

所以  $A_4A_3$  段在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$\begin{aligned} B_3 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \frac{|dx|}{(x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 IL}{32\pi} \left[ \frac{x}{\frac{L^2}{4} (x^2 + \frac{L^2}{4})^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi L} \left[ \frac{\frac{L}{2}}{(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4})^{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{L}{2}}{(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4})^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi L} \end{aligned}$$

$A_3A_2$  段, 电流  $I_4 = \frac{1}{4}I$ , 取  $y \rightarrow y + dy$  为电流元, 则  $d\vec{l} = |dy|(\vec{e}_y)$ ,  $\vec{r} = -\frac{L}{2}\vec{e}_x - y\vec{e}_y$ ,



所以电流元产生的磁场为

$$d\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I_4 |dy| (\vec{e}_y) \times (-\frac{L}{2}\vec{e}_x - y\vec{e}_y)}{4\pi (\frac{L^2}{4} + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 I L}{32\pi} \frac{|dy|(\vec{e}_z)}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

所以  $A_3A_2$  段在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

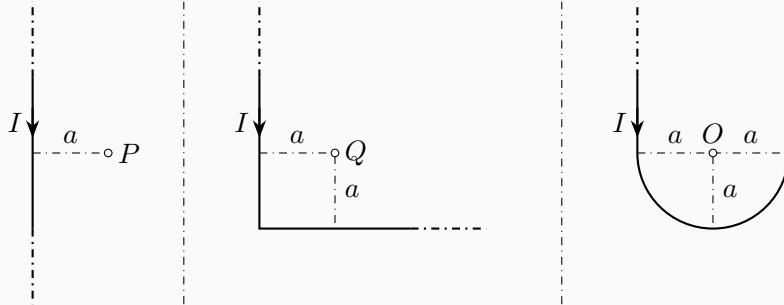
$$\begin{aligned} B_4 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 I L}{32\pi} \frac{|dy|}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I L}{32\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I L}{32\pi} \left[ \frac{y}{\frac{L^2}{4} \left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi L} \left[ \frac{\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi L} \end{aligned}$$

### 评分标准

1. 毕奥——萨伐尔定律 4 分
2. 两条支路的电流各 2 分共 4 分
3. 每条边的磁场各 3 分 ( $d\vec{l}$ 、 $\vec{r}$ 、 $d\vec{B}$ 、 $B$ ) 共 12 分

### 【0202A02】

通有电流  $I$  的无限长导线有如图三种形状, 则  $P$ ,  $Q$ ,  $O$  各点磁感应强度的大小  $B_P$ ,  $B_Q$ ,  $B_O$  间的关系为



- (A)  $B_P > B_Q > B_O$       (B)  $B_Q > B_P > B_O$       (C)  $B_Q > B_O > B_P$       (D)  $B_O > B_Q > B_P$

## 答案

D

## 解析

毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

第一种情况可以用安培环路定理求磁场

$$B_P \cdot (2\pi a) = \mu_0 I$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

第二种情况是用直线电流的磁场来计算

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dl) r \sin \theta}{r^3}$$

$$l = -r \cos \theta, a = r \sin \theta \Rightarrow \frac{l}{a} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow l = -a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow dl = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^3 \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$$

$$B_Q = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin \theta d\theta \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} + (-\cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

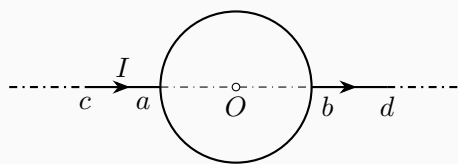
第三种情况分成两个半无限长直线和一个半圆弧来计算

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta d\theta \right] + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \times 2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \times \pi a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \right]$$

所以显然有  $B_O > B_Q > B_P$ 。其实，后两种情况中的两个半无限长部分所产生的磁场，就是第一种情况，所以剩下的就是比较多余那部分的磁场了，而第三种情况中，每一个电流元的磁场都比第二种的大，而且第三种的电流元还更长，所以答案其实是显然的。

## 【0202A03】

如图所示，电流从  $a$  点分两路通过对称的圆环形分路，汇合于  $b$  点。若  $ca$ 、 $bd$  都沿环的径向，则在环形分路的环心处的磁感应强度



- (A) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸内  
(B) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸外  
(C) 方向在环形分路所在平面内，且指向  $b$   
(D) 为零

## 答案

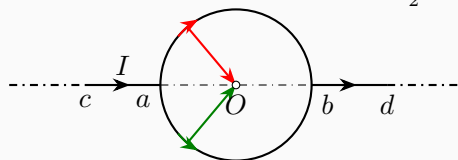
D

## 解析

毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

圆环形分路是对称的，所以上下两个分路的电流是相等的，均为  $\frac{I}{2}$ 。



任意一个电流元  $d\vec{l}$  与相应的  $\vec{r}$  都成  $90^\circ$ ，所以

$$\frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{dl}{R^2}$$

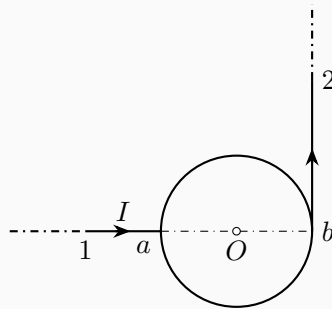
上分路产生的磁场的方向垂直纸面向里，下分路产生的磁场的方向垂直纸面向外，大小相等，均为

$$B = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{2R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{2R^2} \int_l dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{2R^2} \times \pi R = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

所以总磁感应强度为 0。

## 【0202A04】

电流由长直导线 1 沿半径方向经  $a$  点流入一电阻均匀的圆环，再由  $b$  点沿切向从圆环流出，经长导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上电流强度为  $I$ ，圆环的半径为  $R$ ，且  $a$ 、 $b$  与圆心  $O$  三点在同一直线上。设直电流 1、2 及圆环电流在  $O$  点产生的磁感应强度分别为  $\vec{B}_1$ 、 $\vec{B}_2$  及  $\vec{B}_3$ ， $O$  点总的磁感应强度为  $\vec{B}$ ，则



- (A)  $B = 0$ , 因为  $B_1 = B_2 = B_3 = 0$  (B)  $B = 0$ , 因为  $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$ ,  $B_3 = 0$   
 (C)  $B \neq 0$ , 因为虽然  $B_1 = B_3 = 0$ , 但  $B_2 \neq 0$  (D)  $B \neq 0$ , 因为虽然  $B_1 = B_2 = 0$ , 但  $B_3 \neq 0$

## 答案

C

## 解析

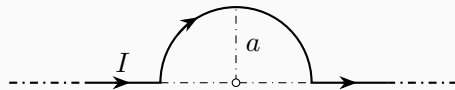
毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

因为直导线 1 通过  $O$  点, 所以  $B_1 = 0$ 。而圆环电阻均匀, 所以通过两条支路的电流相等, 所以两条支路在  $O$  点激发的磁场大小相等, 方向相反, 左边支路产生的磁场垂直纸面向外, 右边支路产生的磁场垂直纸面向里, 所以  $B_3 = 0$ 。而对于直导线 2, 每一个电流元在  $O$  点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向外, 所以  $B_2 \neq 0$ 。

## 【0202B02】

在真空中, 将一根无限长载流导线在一平面内弯成如图所示的形状, 并通有电流  $I$ , 则圆心处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4a}$$

## 解析

电流元的磁场公式

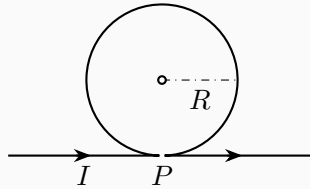
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算半圆产生的磁场叠加即可。  
半圆产生的磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_L dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \cdot \pi a = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

## 【0202B03】

一根无限长直导线通有电流  $I$ ，在  $P$  点处被弯成了一个半径为  $R$  的圆，且  $P$  点处无交叉和接触，则圆心处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I(\pi - 1)}{2\pi R}$$

## 解析

整个电流分成三段，两个半无限长直导线等效于一根无限长直导线，再加一个圆形导线。  
无限长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\begin{aligned} \oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B_1 \cdot (2\pi R) &= \mu_0 I \\ B_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \end{aligned}$$

其方向垂直纸面向外。圆形电流的磁场可以用电流元的磁场直接积分得到，方向垂直纸面向里，大小为

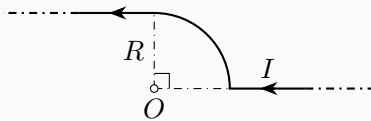
$$B_2 = \oint_{L_2} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I(2\pi R)}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向里，大小

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I(\pi - 1)}{2\pi R}$$

## 【0202B04】

无限长直导线通有电流  $I$ ，现将它弯成如图所示的形状，则  $O$  点处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

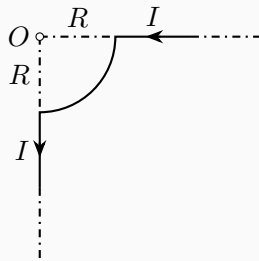


答案

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{8R}$$

【0202B05】

如图，一根无限长的载流导线中部弯成四分之一圆周，圆心为  $O$ ，半径为  $R$ ，与圆周两端点相连的直导线相互垂直，且在同一平面内，则  $O$  点处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

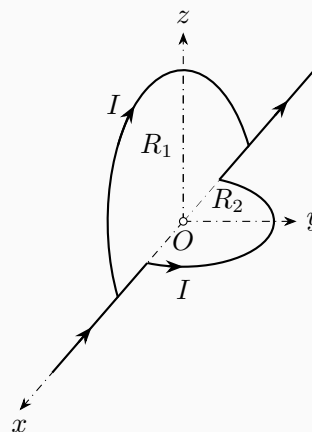
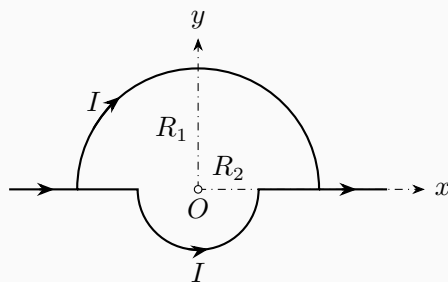


答案

$$\frac{\mu_0 I}{8R}$$

【0202C03】

真空中稳恒电流  $I$  流过两个半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  的同心半圆形导线，两半圆导线间由沿直径的直导线连接，电流沿直导线流入。(1) 请写出毕奥——萨伐尔定律的矢量表达式；(2) 如果两个半圆共面，如下左图建立直角坐标系，求圆心  $O$  点的磁感应强度的大小和方向。(3) 如果两个半圆面正交，如下右图建立直角坐标系，求圆心  $O$  点的磁感应强度的大小和方向。



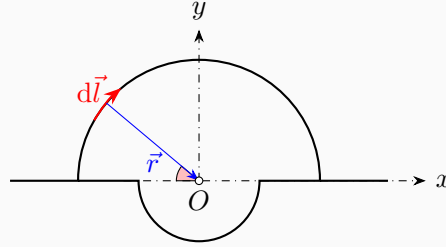
## 解答

(1) 毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

(2) 两段沿直径的电流，由于  $d\vec{l} \times \vec{r} = \vec{0}$ ，所以  $d\vec{B} = \vec{0}$ ，所以  $\vec{B} = \vec{0}$ 。

上半圆，取与  $x$  轴负方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  为电流元，则  $d\vec{l} = R_1 |d\theta| (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$ ， $\vec{r} = R_1 (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$



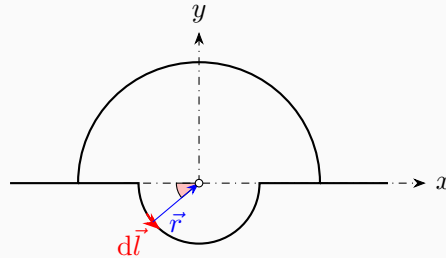
所以电流元产生的磁场为

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR_1 |d\theta| (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \times R_1 (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)}{R_1^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} |d\theta| (-\vec{e}_z)$$

所以整个半圆在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴负方向，大小为

$$B_1 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} |d\theta| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} \times \pi = \frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

下半圆，取与  $x$  轴负方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  为电流元，则  $d\vec{l} = R_2 |d\theta| (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$ ， $\vec{r} = R_2 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$



所以电流元产生的磁场为

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR_2 |d\theta| (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) \times R_2 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)}{R_2^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} |d\theta| (\vec{e}_z)$$

所以整个半圆在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$B_2 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} |d\theta| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} \times \pi = \frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

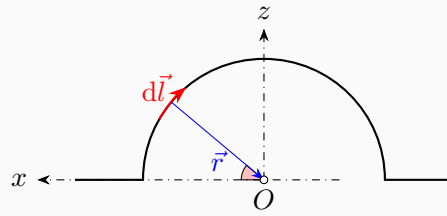
所以  $O$  点总的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

(3) 两段沿直径的电流，由于  $d\vec{l} \times \vec{r} = \vec{0}$ ，所以  $d\vec{B} = \vec{0}$ ，所以  $\vec{B} = \vec{0}$ 。

$xz$  平面上的半圆，取与  $x$  轴正方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  为电流元，则  $d\vec{l} = R_1 |d\theta| (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z)$ ， $\vec{r} = R_1 (-\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z)$





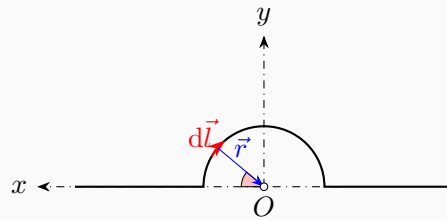
所以电流元产生的磁场为

$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I R_1 |d\theta| (-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_z) \times R_1 (-\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_z)}{R_1^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} |d\theta| (-\vec{e}_y)$$

所以整个半圆在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $y$  轴负方向，大小为

$$B_3 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} |d\theta| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} \times \pi = \frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

$xy$  平面上的半圆，取与  $x$  轴正方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  为电流元，则  $d\vec{l} = R_2 |d\theta| (-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)$ ， $\vec{r} = R_2 (-\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y)$



所以电流元产生的磁场为

$$d\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I R_2 |d\theta| (-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y) \times R_2 (-\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y)}{R_2^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} |d\theta| (\vec{e}_z)$$

所以整个半圆在  $O$  的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$B_4 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} |d\theta| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} \times \pi = \frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以  $O$  的总的磁感应强度为

$$\vec{B} = -B_3 \vec{e}_y + B_4 \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{4R_1} \vec{e}_y + \frac{\mu_0 I}{4R_2} \vec{e}_z$$

大小为

$$B = \sqrt{(-B_3)^2 + B_4^2} = \frac{\mu_0 I}{4} \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}$$

方向在  $yz$  平面内与  $y$  轴负方向的夹角为  $\varphi$ ，与  $z$  轴正方向的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ，其中

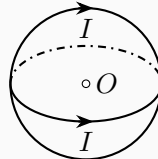
$$\varphi = \arctan \frac{B_4}{B_3} = \arctan \frac{R_1}{R_2}$$

## 评分标准

1. 毕奥——萨伐尔定律 4 分
2. 沿直径电流的磁场为零各 1 分共 2 分
3. 每个半圆的磁场各 3 分 ( $d\vec{l}$ 、 $\vec{r}$ 、 $d\vec{B}$ 、 $B$ ) 共 12 分
4. 总的磁场各 1 分共 2 分

## 【0202A05】

如图所示，两个完全相同的圆形线圈，通过的电流均为  $I$ 、半径均为  $R$ ，一个水平放置，另一个处于竖直位置，两圆心重合，则圆心  $O$  处的磁感应强度大小为



- (A) 0                      (B)  $\frac{\mu_0 I}{2R}$                       (C)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2R}$                       (D)  $\frac{\mu_0 I}{R}$

## 答案

C

## 3、安培环路定理和磁场的“高斯定理”

## 3.1 安培环路定理的理解

## 【0203A01】

关于磁场的安培环路定理的理解，下列说法正确的是

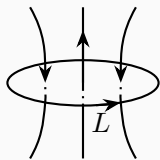
- (A) 闭合回路上各点磁感应强度都为零时，回路内一定没有电流穿过  
 (B) 闭合回路上各点磁感应强度都为零时，回路内穿过的电流的代数和必定为零  
 (C) 磁感应强度沿闭合回路的积分为零时，回路上各点的磁感应强度必为零  
 (D) 磁感应强度沿闭合回路的积分不为零时，回路上任一点的磁感应强度都不可能为零

## 答案

B

## 【0203A02】

如图所示，三根载流导线穿过一闭合回路  $L$  所围成的面。若改变三根导线的位置，但均不越出闭合回路，则



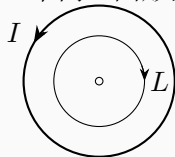
- (A)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  不变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值不变  
 (B)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  不变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值改变  
 (C)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  改变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值改变  
 (D)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  改变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值不变

## 答案

D

## 【0203A03】

如图，在一圆形电流  $I$  所在的平面内，选取一个同心圆形闭合回路  $L$ ，则由安培环路定理可知



- (A)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , 且环路上任意一点  $B = 0$       (B)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , 且环路上任意一点  $B \neq 0$   
 (C)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ , 且环路上任意一点  $B \neq 0$       (D)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ , 且环路上任意一点  $B = \text{常量}$

## 答案

B

## 解析

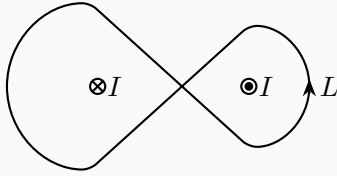
安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

此题中，没有电流与回路  $L$  链接，所以上式右边的  $I = 0$ ，因此磁场沿回路  $L$  的环流为零，但回路上任意一点的磁感应强度都不为零，只是因为各点的  $\vec{B}$  的方向都是垂直纸面向上，与回路垂直，所以环流为零。

## 【0203B01】

如图所示，两根长直导线通有电流  $I$ ，图示环路  $L$  上  $\vec{B}$  的环流为  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

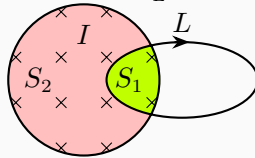


## 答案

$$2\mu_0 I$$

## 【0203B02】

圆柱体上载有电流  $I$ ，电流在其横截面上均匀分布，一回路  $L$  通过圆柱体内部将圆柱体横截面分为两部分，其面积大小分别为  $S_1$  和  $S_2$ ，如图所示，则  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



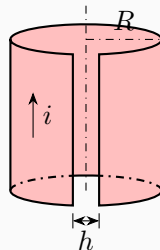
## 答案

$$\frac{\mu_0 I S_1}{S_1 + S_2}$$

## 3.2 安培环路定理求磁场

## 【0203B03】

将半径为  $R$  的无限长圆柱形导体薄壁管 (厚度忽略) 沿轴向割去一条宽度为  $h$  ( $h \ll R$ ) 的无限长狭缝后，再沿轴向流有在管壁上均匀分布的电流，其面电流的线密度 (垂直于电流方向的单位长度截线上的电流) 为  $i$ ，如图所示，则管轴线处的磁感应强度的大小是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{\mu_0 i h}{2\pi R}$$

## 解析

将管壁电流沿轴向切割成一系列的无限长直线电流。由于对称性的关系，关于管轴对称的两个同样大小的无限长直线电流在管轴线上产生的磁场刚好互相抵消。所以最后只剩下与被裁掉的狭缝对称的那个无限长直线电流。根据面电流的线密度的定义，该无限长直线中通过的电流为  $I = ih$ ，所以由安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

可得

$$B \cdot (2\pi R) = \mu_0 i h$$

$$B = \frac{\mu_0 i h}{2\pi R}$$

## 【0203A04】

一个密绕环形螺线管 (螺绕环)，管的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，通有电流  $I$ ，管内的磁场分布为

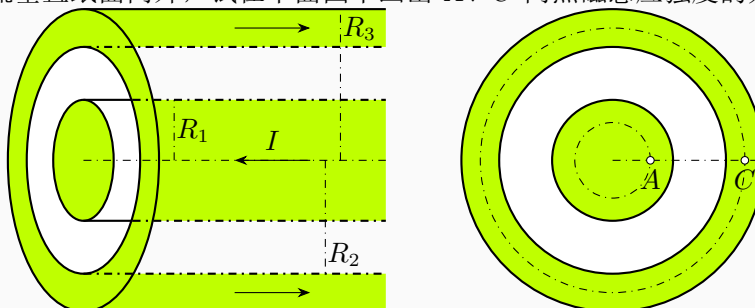
- (A) 匀强磁场 (B) 越靠近内侧 (半径为  $R_1$  处) 磁场越强  
(C) 越靠近外侧 (半径为  $R_2$  处) 磁场越强 (D) 各点磁场大小相等但方向不同

## 答案

B

## 【0203C03】

有一同轴电缆，其尺寸如图所示。两导体中的电流均为  $I$ ，但电流的流向相反。假定电流在导体内均匀分布，且不考虑导体的磁性，电缆长度远大于半径，可视为无穷长。试求各区域的磁感应强度的大小。假定里面导体的电流垂直纸面向外，试在下面图中画出 A、C 两点磁感应强度的方向。



## 解答

电流分布具有柱对称性，所以磁场分布也具有柱对称性，可以用安培环路定理求磁场。在与导体轴线垂直的平面内，取以轴线为圆心、以  $r$  为半径的圆为安培环路，则由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r < R_1,$$

$$I_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \times \pi r^2 = \frac{I r^2}{R_1^2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2,$$

$$I_2 = I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_2 < r < R_3,$$

$$I_3 = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \times \pi(r^2 - R_2^2) = \frac{(R_3^2 - r^2)I}{R_3^2 - R_2^2}$$

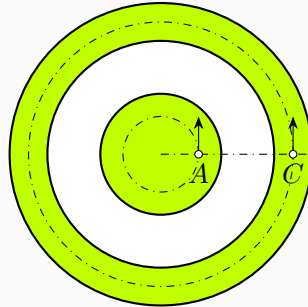
$$B_3 = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - r^2)}{2\pi (R_3^2 - R_2^2) r}$$

$$r > R_3,$$

$$I_4 = I - I = 0$$

$$B_4 = 0$$

A、C 两点磁感应强度的方向如下图所示



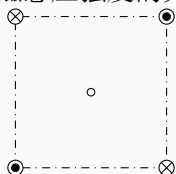
## 评分标准

1. 安培环路定理 2 分
2. 每个区域的磁感应强度各 4 分共 16 分
3. 每个点的磁感应强度方向各 1 分共 2 分

## 3.3 安培环路定理与磁场叠加原理联合求磁场

## 【0203B04】

四根相互平行的长直导线均垂直于边长为  $L$  的正方形平面，且过正方形顶点。若每根长直导线均载有电流  $I$ ，方向如图所示，则正方形中心处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

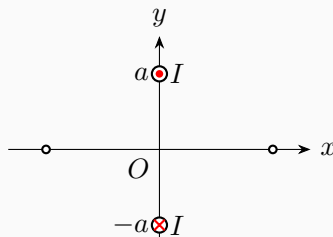
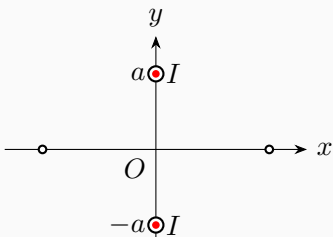


## 答案

0

## 【0203C04】

如图所示为两根穿过  $y$  轴且垂直于  $xy$  平面的平行长直导线的正视图，两条导线皆通有电流  $I$ ，它们到  $x$  轴的距离皆为  $a$ 。(1) 如果两根导线的电流方向相同，试求  $x$  轴上任意一个位置的磁感应强度的大小和方向；(2) 如果两根导线的电流方向相反，试求  $x$  轴上任意一个位置的磁感应强度的大小和方向。



## 解答

无限长通电直导线的磁场可以用安培环路定理求得，在垂直于电流的平面内，以通电直线所在位置为圆心，以任意  $r$  为半径，做一圆周选做安培环路，则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

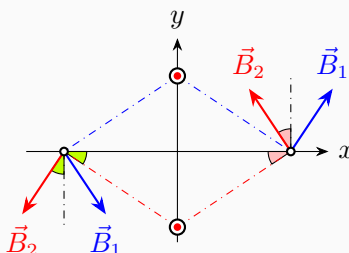
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁感应强度的方向与电流方向成右手螺旋关系。

(1) 如果两根导线的电流方向相同，场点坐标一般地设为  $(x, 0)$ ，则两根导线在场点的磁感应强度的大小相等，均为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}}$$

方向如图所示，关于  $y$  轴对称。



所以场点总的磁感应强度的大小为

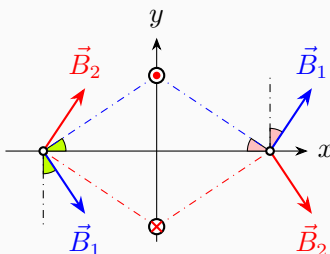
$$B = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \times \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I |x|}{\pi(x^2 + a^2)}$$

当  $x < 0$  时，总的磁感应强度的方向沿  $y$  轴负方向；当  $x > 0$  时，总的磁感应强度的方向沿  $y$  轴正方向。

(2) 如果两根导线的电流方向相同，场点坐标一般地设为  $(x, 0)$ ，则两根导线在场点的磁感应强度的大小相等，均为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}}$$

方向如图所示，关于  $x$  轴对称。



所以场点总的磁感应强度的大小为

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \times \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

方向沿  $x$  轴正方向。

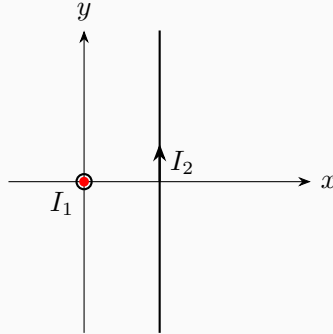
### 评分标准

1. 安培环路定理求无限长直载流导线的磁场 4 分
2. 两种情况求磁场的大小 6 分方向 2 分各 8 分共 16 分



## 【0203C05】

如图所示直角坐标系中,  $z$  轴处有一通有电流  $I_1$  的无限长直导线, 电流沿  $z$  轴正方向;  $xy$  平面上  $x = d$  处有一通有电流  $I_2$  的无限长直导线, 电流沿  $y$  轴正方向。求  $x$  轴上除  $x = 0$  和  $x = d$  外各点的磁感应强度, 用矢量表示。



## 解答

无限长通电直导线的磁场可以用安培环路定理求得, 在垂直于电流的平面内, 以通电直线所在位置为圆心, 以任意  $r$  为半径, 做一圆周选做安培环路, 则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁感应强度的方向与电流方向成右手螺旋关系。

一般地设场点坐标为  $(x, 0)$ 。

对于  $I_1$ , 它在场点产生的磁感应强度的大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi |x|}$$

当  $x < 0$  时, 方向沿  $y$  轴负方向; 当  $x > 0$  时, 方向沿  $y$  轴正方向。

对于  $I_2$ , 它在场点产生的磁感应强度的大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi |x - d|}$$

当  $x < d$  时, 方向沿  $z$  轴正方向; 当  $x > d$  时, 方向沿  $z$  轴负方向。

所以对于  $x < 0$  的场点, 总的磁感应强度为

$$\vec{B} = B_1(-\vec{e}_y) + B_2\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi |x|}(-\vec{e}_y) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi |x - d|}\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_y + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d - x)}\vec{e}_z$$

对于  $0 < x < d$  的场点, 总的磁感应强度为

$$\vec{B} = B_1\vec{e}_y + B_2\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi |x|}\vec{e}_y + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi |x - d|}\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_y + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d - x)}\vec{e}_z$$

对于  $x > d$  的场点, 总的磁感应强度为

$$\vec{B} = B_1\vec{e}_y + B_2(-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi |x|}\vec{e}_y + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi |x - d|}(-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_y + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d - x)}\vec{e}_z$$

所以,  $x$  轴上除  $x = 0$  和  $x = d$  外各点的磁感应强度都可以表示为

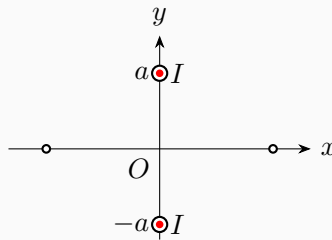
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e}_y + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)} \vec{e}_z$$

### 评分标准

1. 安培环路定理求无限长直载流导线的磁场 4 分
2.  $I_1$ 、 $I_2$  各自磁场的大小各 2 分共 4 分, 方向各 2 分共 4 分
3. 三个区域磁场的矢量表达式各 2 分共 6 分
4. 统一表达式 2 分

### 【0203C06】

(1) 如图所示为两根穿过  $y$  轴且垂直于  $xy$  平面的平行长直导线的正视图, 两条导线皆通有同向的电流  $I$ , 它们到  $x$  轴的距离皆为  $a$ , 试求  $x$  轴上任意一个位置的磁感应强度的大小和方向;



(2) 设整个  $yz$  平面上通有沿  $z$  轴正方向的均匀电流, 面电流的线密度 (垂直于电流的单位长度上的电流) 记为  $i$ , 试分析任意位置的场点  $(x, y, z)$  处磁感应强度的方向并求其大小。

### 解答

(1) 无限长通电直导线的磁场可以用安培环路定理求得, 在垂直于电流的平面内, 以通电直线所在位置为圆心, 以任意  $r$  为半径, 做一圆周选做安培环路, 则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

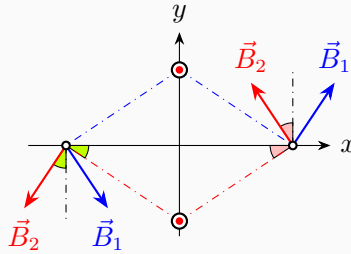
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁感应强度的方向与电流方向成右手螺旋关系。

两根导线的电流方向相同, 场点坐标一般地设为  $(x, 0)$ , 则两根导线在场点的磁感应强度的大小相等, 均为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}}$$

方向如图所示, 关于  $y$  轴对称。

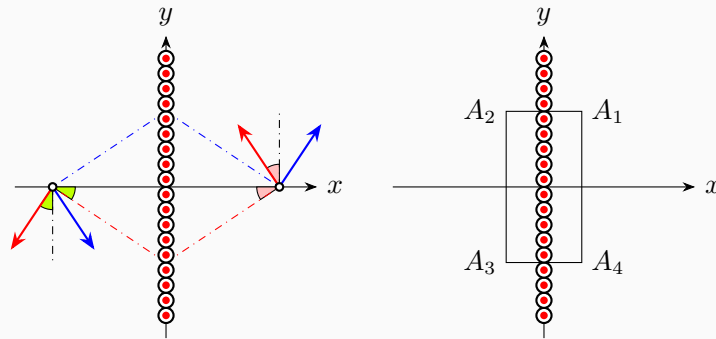


所以场点总的磁感应强度的大小为

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \times \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I |x|}{\pi(x^2 + a^2)}$$

当  $x < 0$  时，总的磁感应强度的方向沿  $y$  轴负方向；当  $x > 0$  时，总的磁感应强度的方向沿  $y$  轴正方向。

(2) 把  $yz$  平面看成很多长直电流导线所组成，由第一问的结果可知，对于  $x < 0$  的场点，磁感应强度的方向沿  $y$  轴负方向；对于  $x > 0$  的场点，磁感应强度的方向沿  $y$  轴正方向。而且离载流平面等距离的所有点的磁感应强度的大小相等，即  $B(x, y, z) = B(x)$ ，且  $B(x) = B(-x)$ 。



如图取矩形  $A_1A_2A_3A_4$  为安培环路，其中各顶点坐标分别为  $A_1(x, y, z)$ ， $A_2(-x, y, z)$ ， $A_3(-x, -y, z)$ ， $A_4(x, -y, z)$ 。

在  $A_1A_2$  段， $\vec{B} = B\vec{e}_y$ ， $d\vec{l} = |dx|(-\vec{e}_x)$ ，因此

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A_1}^{A_2} B\vec{e}_y \cdot |dx|(-\vec{e}_x) = 0$$

在  $A_2A_3$  段， $\vec{B} = B(x)(-\vec{e}_y)$ ， $d\vec{l} = |dy|(-\vec{e}_y)$ ，因此

$$\int_{A_2}^{A_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A_2}^{A_3} B(x)(-\vec{e}_y) \cdot |dy|(-\vec{e}_y) = \int_{A_2}^{A_3} B(x)|dy| = B(x) \times (2y)$$

在  $A_3A_4$  段， $\vec{B} = B\vec{e}_y$ ， $d\vec{l} = |dx|\vec{e}_x$ ，因此

$$\int_{A_3}^{A_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A_3}^{A_4} B\vec{e}_y \cdot |dx|\vec{e}_x = 0$$

在  $A_4A_1$  段， $\vec{B} = B(x)\vec{e}_y$ ， $d\vec{l} = |dy|\vec{e}_y$ ，因此

$$\int_{A_4}^{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A_4}^{A_1} B(x)\vec{e}_y \cdot |dy|\vec{e}_y = \int_{A_4}^{A_1} B(x)|dy| = B(x) \times (2y)$$

因此对于整个安培环路

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(x) \times (4y)$$

而穿过回路所围面积的电流  $I = i \times 2y$ ，所以由安培环路定理有

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B(x) \times (4y) &= \mu_0 \times i \times 2y \\ B(x) &= \frac{1}{2} \mu_0 i \end{aligned}$$

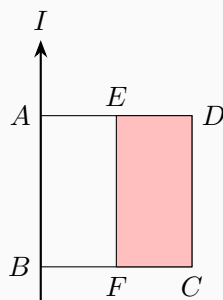
### 评分标准

1. 安培环路定理求无限长直载流导线的磁场 4 分
2. 求总磁场的大小 4 分方向 2 分共 6 分
3. 分析任意磁场的方向 2 分
4. 取安培环路 2 分
5. 安培环路定理求磁场 6 分

## 3.4 磁通量

### 【0203B05】

如图，一根通有电流  $I$  的无限长直导线与边长为  $L$  的正方形的一条边重合， $E$  和  $F$  分别是  $AD$  和  $BC$  的中点，则通过  $CDEF$  的磁通量的大小为\_\_\_\_\_。

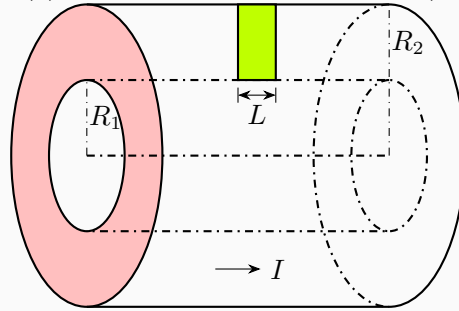


### 答案

$$\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln 2$$

## 【0203C01】

如图, 无限长空心圆柱形导体的内半径为  $R_1$ 、外半径为  $R_2$ , 电流  $I$  沿轴向流动, 电流在导体的横截面上均匀分布。(1) 求磁场的分布; (2) 求通过长度为  $L$  的一段截面 (图中阴影部分) 的磁通量。



## 解答

(1) 电流分布具有柱对称性, 所以磁场分布也具有柱对称性, 可以用安培环路定理求磁场。在与导体轴线垂直的平面内, 取以轴线为圆心、以  $r$  为半径的圆为安培环路, 则由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r < R_1$$

$$I_1 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$I_2 = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2) = \frac{(r^2 - R_1^2)I}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0(r^2 - R_1^2)I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)r}$$

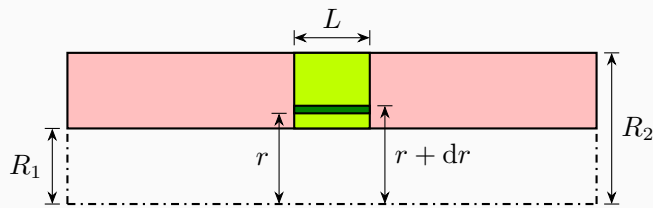
$$r > R_2$$

$$I_3 = I$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(2) 电流向右流动, 因此图示截面处的磁感应强度的方向垂直纸面向外, 且离轴线相同距离处磁感应强度的大小相同, 取垂直纸面向外为图中阴影区域面积的法向方向, 取与轴线距离为  $r \rightarrow r + dr$  部分为  $dS$ , 则通过  $dS$  的磁通量

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0(r^2 - R_1^2)I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)r} \times L dr = \frac{\mu_0 IL}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) dr$$



所以通过整个截面的磁通量为

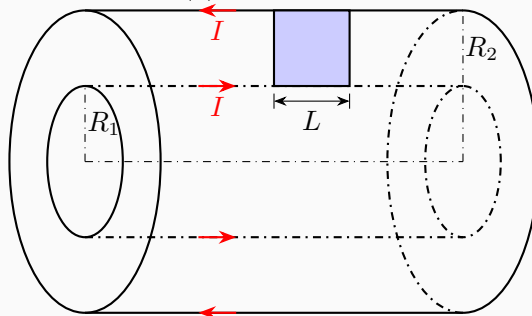
$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I L}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) dr \\
 &= \frac{\mu_0 I L}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[ \frac{1}{2} r^2 - R_1^2 \ln r \right] \Big|_{R_1}^{R_2} \\
 &= \frac{\mu_0 I L}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[ \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 I L}{4\pi} - \frac{\mu_0 I L R_1^2}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \ln \frac{R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

### 评分标准

1. 安培环路定理 3 分
2. 每个区域的磁感应强度各 4 分共 12 分
3. 小矩形磁通量 2 分，积分 2 分，结果 1 分共 5 分

### 【0203C02】

如图，一对同轴无穷长直的空心导体圆筒，内半径为  $R_1$ 、外半径为  $R_2$  (筒壁厚度可以忽略)。电流  $I$  沿内筒流去，沿外筒流回，(1) 求磁场的分布；(2) 求通过长度为  $L$  的一段截面 (图中阴影部分) 的磁通量。



### 解答

(1) 电流分布具有柱对称性，所以磁场分布也具有柱对称性，可以用安培环路定理求磁场。在与导体轴

线垂直的平面内，取以轴线为圆心、以  $r$  为半径的圆为安培环路，则由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r < R_1$$

$$I_1 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$I_2 = I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

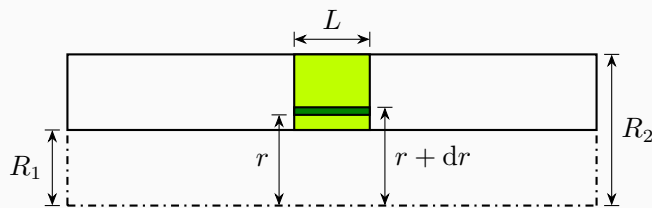
$$r > R_2$$

$$I_3 = I - I = 0$$

$$B_3 = 0$$

(2) 图示截面处的磁感应强度的方向垂直纸面向外，且离轴线相同距离处磁感应强度的大小相同，取垂直纸面向外为图中阴影区域面积的法向方向，取与轴线距离为  $r \rightarrow r + dr$  部分为  $dS$ ，则通过  $dS$  的磁通量

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times L dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r} dr$$



所以通过阴影部分的磁通量

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I L}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

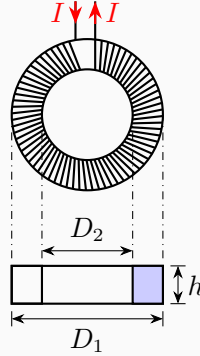
### 评分标准

1. 安培环路定理 3 分
2. 每个区域的磁感应强度各 4 分共 12 分

3. 小矩形磁通量 2 分, 积分 2 分, 结果 1 分共 5 分

【0203C07】

矩形截面的螺绕环, 总匝数为  $N$ , 通过的电流为  $I$ , 尺寸如图, (1) 求环内磁感应强度的分布; (2) 求通过螺绕环截面 (图中阴影区) 的磁通量。



解答

(1) 以螺绕环中心为圆心, 以  $r$  为半径作一圆取为安培环路, 由安培环路定理可求得磁场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

方向沿圆周的切线方向。

(2) 取  $r \rightarrow r + dr$  部分为  $dS$ , 以磁场的方向为其法向方向, 则通过  $dS$  的磁通量

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot h dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi r} dr$$

所以通过图中阴影区域的磁通量

$$\Phi = \int_{\frac{1}{2}D_2}^{\frac{1}{2}D_1} \frac{\mu_0 NIh}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

评分标准

1. 安培环路定理 5 分
2. 磁感应强度大小 4 分, 方向 1 分
3. 面的法向方向 (磁通量的正方向) 1 分
4. 通过  $dS$  的磁通量 5 分



5. 积分 3 分结果 1 分

### 3.5 其他

【0203A05】

关于磁场和磁感线的描述，正确的说法是

- (A) 电流元在磁场中某点不受磁场力的作用，则该点的磁感应强度一定为零
- (B) 穿过线圈的磁通量为零的地方，磁感应强度一定为零
- (C) 磁感线总是从磁铁的北极出发，到南极终止
- (D) 磁感线可以形象地表示磁场的方向

答案

D

## 4、磁场对载流导线的作用

### 4.1 磁场对载流导线的作用力

【0204A01】

在同一平面上依次有  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三根等距离平行放置的长直导线，通有同方向的电流依次为 1 A、2 A、3 A，它们所受力的大小依次为  $F_a$ 、 $F_b$ 、 $F_c$ ，则

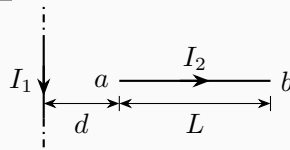
- (A)  $F_b : F_c = 4 : 9$
- (B)  $F_b : F_c = 8 : 15$
- (C)  $F_b : F_c = 8 : 9$
- (D)  $F_b : F_c = 1$

答案

B

【0204B01】

如图所示，长直导线中流有电流  $I_1$ ，载流直导线  $ab$  段长  $L$ ，通有电流  $I_2$ ， $a$  点与长直导线相距为  $d$ ，则  $ab$  段受到的安培力的大小等于\_\_\_\_\_。

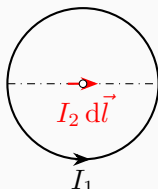


## 答案

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{L+d}{d}$$

## 【0204B02】

如图所示, 半径为  $R$  的圆形导线通有电流  $I_1$ , 圆心处放置一个水平方向上的电流元  $I_2 d\vec{l}$ , 则此电流元受到的安培力的大小等于\_\_\_\_\_。

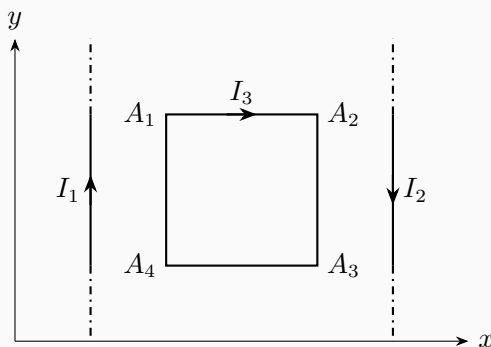


## 答案

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2R}$$

## 【0204C01】

如图所示, 在某直角坐标系的  $xy$  平面上, 在  $x = a$  处有一根无限长载流直导线, 其中通有电流  $I_1$ , 方向沿  $y$  轴正方向; 在  $x = 5a$  处有一根无限长载流直导线, 其中通有电流  $I_2$ , 方向沿  $y$  轴负方向。(1) 求  $x$  轴上,  $a < x < 5a$  区域任意一点的磁感应强度的大小和方向; (2)  $xy$  平面内有一边长为  $2a$  的正方形线圈通有如图所示的电流  $I_3$ , 正方形的  $A_1A_4$  边位于  $x = 2a$  处,  $A_2A_3$  边位于  $x = 4a$  处, 分别求  $A_1A_4$  和  $A_1A_2$  两条边所受安培力的大小和方向。



## 解答

(1) 无限长直电流的磁场可以由安培环路定理求得, 其大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向沿圆周切线并与电流成右手螺旋关系。

$x$  轴上,  $a < x < 5a$  区域任意一点,  $I_1$  在该处的磁感应强度方向垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向), 大小

为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x-a)}$$

$I_2$  在该处的磁感应强度方向也是垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向), 大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(5a-x)}$$

因此该处总的磁感应强度方向也是垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向), 大小为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1}{x-a} + \frac{I_2}{5a-x} \right)$$

即

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1}{x-a} + \frac{I_2}{5a-x} \right) (-\vec{e}_z)$$

(2) 安培力公式

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$A_1A_4$  边上每点的磁感应强度相同, 均为

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{3a} \right) (-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0(3I_1 + I_2)}{6\pi a} (-\vec{e}_z)$$

$A_1A_4$  边上的电流元为  $I_3 d\vec{l} = I_3 |dy| \vec{e}_y$ , 它所受到的安培力为

$$d\vec{F}_1 = I_3 d\vec{l} \times \vec{B}_1 = I_3 |dy| \vec{e}_y \times \frac{\mu_0(3I_1 + I_2)}{6\pi a} (-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0(3I_1 + I_2)I_3 |dy|}{6\pi a} (-\vec{e}_x)$$

所以整条  $A_1A_4$  边所受到的安培力方向沿  $x$  轴负方向, 大小为

$$F_1 = \int_{A_4}^{A_1} \frac{\mu_0(3I_1 + I_2)I_3 |dy|}{6\pi a} = \frac{\mu_0(3I_1 + I_2)I_3}{3\pi}$$

$A_1A_2$  边上任一点的磁感应强度为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1}{x-a} + \frac{I_2}{5a-x} \right) (-\vec{e}_z)$$

$A_1A_2$  边上的电流元为  $I_3 d\vec{l} = I_3 |dx| (\vec{e}_x)$ , 它所受到的安培力为

$$d\vec{F}_2 = I_3 d\vec{l} \times \vec{B} = I_3 |dx| (\vec{e}_x) \times \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1}{x-a} + \frac{I_2}{5a-x} \right) (-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi} \left( \frac{I_1}{x-a} + \frac{I_2}{5a-x} \right) |dx| (\vec{e}_y)$$

所以整条  $A_1A_2$  边所受到的安培力方向沿  $y$  轴正方向, 大小为

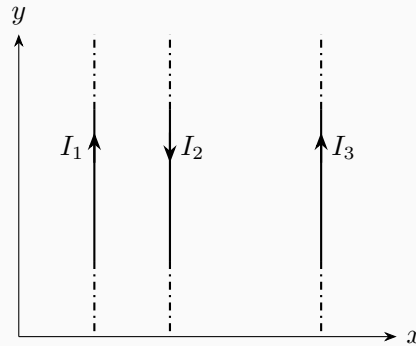
$$F_2 = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0 I_3}{2\pi} \left( \frac{I_1}{x-a} + \frac{I_2}{5a-x} \right) |dx| = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi} (I_1 \ln 3 + I_2 \ln 3) = \frac{\mu_0 I_3 (I_1 + I_2)}{2\pi} \ln 3$$

## 评分标准

1. 长直电流的磁场 2 分
2.  $I_1$  的磁场方向 1 分大小 2 分共 3 分
3.  $I_2$  的磁场方向 1 分大小 2 分共 3 分
4. 总的磁场方向 1 分大小 1 分共 2 分
5. 安培力公式 2 分
6.  $A_1A_4$  受力方向 1 分大小 3 分共 4 分
7.  $A_1A_2$  受力方向 1 分大小 3 分共 4 分

## 【0204C03】

如图所示,在某直角坐标系的  $xy$  平面上,在  $x = a$  处有一根无限长载流直导线,其中通有电流  $I_1 = I$ ,方向沿  $y$  轴正方向;在  $x = 2a$  处有一根无限长载流直导线,其中通有电流  $I_2 = I$ ,方向沿  $y$  轴负方向;在  $x = 4a$  处有一根无限长载流直导线,其中通有电流  $I_3 = 2I$ ,方向沿  $y$  轴正方向。(1) 求  $x$  轴上,  $2a < x < 4a$  区域任意一点的磁感应强度的大小和方向;(2)  $I_3$  上单位长度所受到的安培力的大小和方向。



## 解答

(1) 无限长直电流的磁场可以由安培环路定理求得,其大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向沿圆周切线并与电流成右手螺旋关系。

$x$  轴上,  $2a < x < 4a$  区域任意一点,  $I_1$  在该处的磁感应强度方向垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向), 大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x-a)}$$

$I_2$  在该处的磁感应强度方向垂直纸面向外 (沿  $z$  轴正方向), 大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(x-2a)}$$

$I_3$  在该处的磁感应强度方向垂直纸面向外 (沿  $z$  轴正方向), 大小为

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(4a - x)}$$

因此该处总的磁感应强度方向垂直纸面向外 (沿  $z$  轴正方向), 大小为

$$B = -B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( -\frac{I_1}{x - a} + \frac{I_2}{x - 2a} + \frac{I_3}{4a - x} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} + \frac{2}{4a - x} \right)$$

即

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} + \frac{2}{4a - x} \right) (\vec{e}_z)$$

(2) 安培力公式

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$I_1$  在  $I_3$  处的磁感应强度方向垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向), 大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(4a - a)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi a}$$

$I_2$  在  $I_3$  处的磁感应强度方向垂直纸面向外 (沿  $z$  轴正方向), 大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(4a - 2a)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

因此  $I_3$  处总的磁感应强度方向垂直纸面向外 (沿  $z$  轴正方向), 大小为

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} - \frac{\mu_0 I}{6\pi a} = \frac{\mu_0 I}{12\pi a}$$

即

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{12\pi a} \vec{e}_z$$

$I_3$  上取电流元, 则  $d\vec{l} = |dy| \vec{e}_y$ , 它所受到的安培力

$$d\vec{F} = I_3 d\vec{l} \times \vec{B} = 2I |dy| \vec{e}_y \times \frac{\mu_0 I}{12\pi a} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I^2}{6\pi a} |dy| \vec{e}_x$$

所以  $I_3$  上单位长度所受到的安培力

$$\frac{d\vec{F}}{|dy|} = \frac{\mu_0 I^2}{6\pi a} \vec{e}_x$$

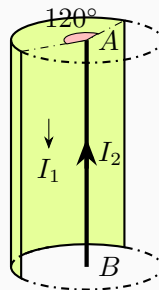
即大小为  $\frac{\mu_0 I^2}{6\pi a}$ , 方向沿  $x$  轴正方向。

## 评分标准

1. 长直电流的磁场 2 分
2.  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  的磁场方向各 1 分大小各 1 分共 6 分
3. 总的磁场方向 1 分大小 1 分共 2 分
4. 安培力公式 2 分
5.  $I_3$  处的磁场方向 1 分大小 3 分共 4 分
6. 受力方向 1 分大小 3 分共 4 分

## 【0204C04】

将一无限长导体平面弯曲，使其成为半径为  $R$  的无限长圆柱侧面的一部分，所张圆心角为  $120^\circ$ ，如图所示。现沿着与轴线平行的方向通有向下流动的恒定电流  $I_1$ ，(1) 求轴线  $CD$  上各点的磁感应强度的大小；(2) 若无限长直导线沿着轴线  $CD$  放置，并通有向上的电流  $I_2$ ，求这根长直导线单位长度所受安培力大小。



## 解答

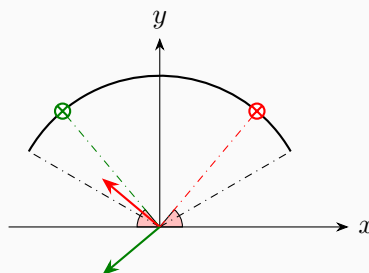
(1) 无限长直电流的磁场可以由安培环路定理求得，其大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向沿圆周切线并与电流成右手螺旋关系。

无限长圆柱面电流可以看成一个个无限长直电流所组成。如图建立坐标系，对称地取  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  和  $\pi - \theta \rightarrow \pi - \theta - d\theta$  这两部分，视为两根无限长直电流，则通过它们的电流均为

$$dI = \frac{I_1}{\frac{2}{3}\pi R} \times (R d\theta) = \frac{3I_1}{2\pi} d\theta$$



这两根电流在轴线  $CD$  上产生的磁场方向关于  $x$  轴对称, 大小均为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi R} \times \frac{3I_1}{2\pi} d\theta = \frac{3\mu_0 I_1}{4\pi^2 R} d\theta$$

所以这两根电流在轴线  $CD$  上产生的总磁场方向沿  $x$  轴负方向, 大小为

$$2 \times dB \times \sin \theta = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta$$

因此整个曲面电流在轴线  $CD$  上产生的总磁场方向沿  $x$  轴负方向, 大小为

$$B = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi^2 R} [-\cos \theta]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi^2 R} \left[ \left(-\cos \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I_1}{4\pi^2 R}$$

(2) 安培力公式

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$CD$  上磁场的方向 (沿  $x$  轴负方向) 与电流的方向 (沿  $z$  轴正方向) 垂直, 所以安培力的大小为

$$dF = BI_2 dl$$

因此单位长度所受安培力大小为

$$\frac{dF}{dl} = BI_2 = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I_1 I_2}{4\pi^2 R}$$

### 评分标准

1. 长直电流的磁场 2 分
2. 建立坐标系, 取两根电流 2 分, 计算  $dI$  2 分
3. 两根电流的磁场 2 分、总磁场 2 分
4. 整个曲面电流的总磁场 2 分
5. 安培力公式, 矢量式 3 分, 大小 3 分
6. 单位长度所受安培力大小 2 分

### 【0204B05】

在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中, 有一半半径为  $R$ 、通有电流  $I$  的圆形线圈, 线圈磁矩与磁感应强度同向平行。在外力作用下, 圆线圈绕某个直径缓慢旋转  $180^\circ$ , 使其磁矩与磁感应强度反向平行, 且转动过程中电流  $I$  保持不变, 则外力所做的功为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$2I\pi R^2 B$$

## 解析

磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n = I\pi R^2\vec{e}_n$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

磁力矩的功

$$dW = -M d\theta = -I\pi R^2 B \sin\theta d\theta$$

这里  $\theta$  表示  $\vec{m}$  与  $\vec{B}$  的夹角。当  $\theta$  增大时,  $d\theta > 0$ , 磁力矩的方向与磁矩转动的方向相反, 所以上式有个负号。

所以在转动过程中, 磁力矩总的功

$$W = \int_0^\pi -I\pi R^2 B \sin\theta d\theta = I\pi R^2 B [\cos\theta]_0^\pi = -2I\pi R^2 B$$

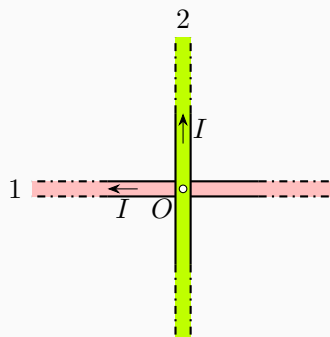
所以外力的功

$$A = -W = 2I\pi R^2 B$$

## 4.2 磁场对平面载流线圈的力矩

## 【0204A02】

两根长直导线, 1 固定, 2 与之绝缘且垂直, 如图所示, 2 可绕点  $O$  在纸面内转动也可以平动。当两根导线各通有电流  $I$ , 则 2 将



- (A) 顺时针方向转动      (B) 逆时针方向转动      (C) 向上或向下平动      (D) 静止不动



答案

B

【0204A03】

一个任意形状的载流线圈在均匀磁场中,若线圈的平面法线与磁场间的夹角为  $\theta (0 < \theta < \pi)$ ,则线圈受到磁场的合力和合力矩为

(A) 合力为零,合力矩为零

(B) 合力为零,合力矩不为零

(C) 合力不为零,合力矩为零

(D) 合力不为零,合力矩不为零

答案

B

【0204A04】

有两个平面线圈,其面积  $S_1 = 2S_2$ ,通有电流  $I_1 = 2I_2$ ,它们的磁矩大小之比  $m_1 : m_2$  等于

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 1 : 4

答案

C

【0204A05】

在同一个匀强磁场中有两个平面线圈,其面积  $S_1 = 2S_2$ ,通有电流  $I_1 = 2I_2$ ,它们所受的最大磁力矩之比  $M_1 : M_2$  等于

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 1 : 4

答案

C

解析

磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

所以

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{m_1 B}{m_2 B} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{I_1 S_1}{I_2 S_2} = 4$$

### 【0204B03】

通有电流  $I$ 、边长为  $L$  的正方形线圈，处在均匀磁场  $\vec{B}$  中，线圈平面的法线与磁感应线成  $\theta$  角，线圈所受磁力矩的大小是\_\_\_\_\_。

答案

$$BIL^2 \sin \theta$$

### 【0204B04】

一平面试验线圈的磁矩大小为  $m$ ，把它放入待测磁场中的  $A$  处，试验线圈很小，可以认为它所占据的空间内磁场是均匀的。当线圈的  $\vec{m} = m\vec{e}_z$  时，所受磁力矩为  $\vec{M} = M(-\vec{e}_x)$ ；当线圈的  $\vec{m} = m\vec{e}_y$  时，所受磁力矩为  $\vec{M} = \vec{0}$ 。则空间  $A$  点处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{M}{m}$$

解析

磁矩  $\vec{m}$  在磁场  $\vec{B}$  中的磁力矩为

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

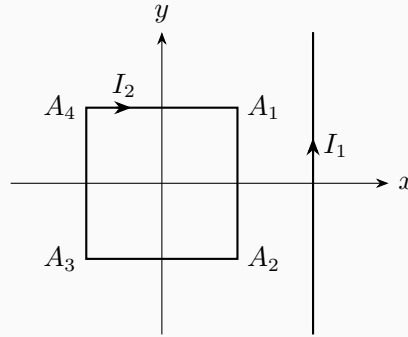
依题意【当此线圈的  $\vec{m} = m\vec{e}_y$  时，所受磁力矩为  $\vec{M} = \vec{0}$ 】，磁场的方向与  $y$  轴平行，假设为  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ 。又由题意【当此线圈的  $\vec{m} = m\vec{e}_z$  时，所受磁力矩为  $\vec{M} = M(-\vec{e}_x)$ 】可得

$$M = mB$$

$$B = \frac{M}{m}$$

### 【0204C02】

如图所示，在某直角坐标系的  $xy$  平面上，在  $x = 2a$  处有一根无限长载流直导线，其中通有电流  $I_1$ ，方向沿  $y$  轴正方向。中心在坐标原点、边长为  $2a$ 、通有电流  $I_2$  的正方形线圈位于  $xy$  平面。(1) 求线圈中  $A_1A_2$  和  $A_2A_3$  两条边所受的安培力的大小和方向；(2) 求线圈中  $A_1A_2$  和  $A_2A_3$  两条边所受的安培力对坐标原点的力矩的大小和方向。



## 解答

(1) 无限长直电流的磁场可以由安培环路定理求得，其大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向沿圆周切线并与电流成右手螺旋关系。

线圈所在位置， $x < 2a$ ， $I_1$  在此处的磁感应强度的方向垂直纸面向外 (沿  $z$  轴正方向)，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2a - x)}$$

即

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2a - x)} \vec{e}_z$$

电流元在磁场中所受到的安培力为

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$A_1A_2$  边，从  $A_1$  往  $A_2$  方向在  $y \rightarrow y + dy$  取电流元，则  $d\vec{l} = |dy|(-\vec{e}_y) = -dy(-\vec{e}_y) = dy\vec{e}_y$ ，该电流元受到的安培力为

$$d\vec{F}_1 = I_2 d\vec{l} \times \vec{B} = I_2 dy \vec{e}_y \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2a - a)} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dy \vec{e}_x$$

整个  $A_1A_2$  边受到的安培力为

$$\vec{F}_1 = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dy \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (-a - a) \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} (-\vec{e}_x)$$

$A_2A_3$  边，从  $A_2$  往  $A_3$  方向在  $x \rightarrow x + dx$  取电流元，则  $d\vec{l} = |dx|(-\vec{e}_x) = -dx(-\vec{e}_x) = dx\vec{e}_x$ ，该电流元受到的安培力为

$$d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l} \times \vec{B} = I_2 dx \vec{e}_x \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2a - x)} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(2a - x)} dx (-\vec{e}_y)$$

整个  $A_2A_3$  边受到的安培力为

$$\vec{F}_2 = \int_{A_2}^{A_3} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(2a - x)} dx (-\vec{e}_y) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[ -\ln \frac{2a - a}{2a - (-a)} \right] (-\vec{e}_y) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 3 (\vec{e}_y)$$

(2) 力对参考点的力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$A_1A_2$  边, 从  $A_1$  往  $A_2$  方向在  $y \rightarrow y + dy$  取电流元, 该电流元受到的安培力为  $d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dy \vec{e}_x$ , 它对坐标原点的  $\vec{r} = a\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ , 因此它对坐标原点的力矩为

$$d\vec{M}_1 = \vec{r} \times d\vec{F}_1 = (a\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \times \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dy \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} y dy (-\vec{e}_z)$$

整个  $A_1A_2$  边受到的安培力对坐标原点的力矩为

$$\vec{M}_1 = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} y dy (-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \left[ \frac{1}{2}(-a)^2 - \frac{1}{2}a^2 \right] (-\vec{e}_z) = \vec{0}$$

$A_2A_3$  边, 从  $A_2$  往  $A_3$  方向在  $x \rightarrow x + dx$  取电流元, 该电流元受到的安培力为  $d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(2a-x)} dx (-\vec{e}_y)$ , 它对坐标原点的  $\vec{r} = x\vec{e}_x - a\vec{e}_y$ , 因此它对坐标原点的力矩为

$$d\vec{M}_2 = \vec{r} \times d\vec{F}_2 = (x\vec{e}_x - a\vec{e}_y) \times \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(2a-x)} dx (-\vec{e}_y) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(2a-x)} x dx (-\vec{e}_z)$$

整个  $A_2A_3$  边受到的安培力对坐标原点的力矩为

$$\begin{aligned} \vec{M}_2 &= \int_{A_2}^{A_3} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(2a-x)} x dx (-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^{-a} \frac{x}{2a-x} dx (-\vec{e}_z) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} [-2a \ln(2a-x) - x] \Big|_a^{-a} (-\vec{e}_z) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi} (\ln 3 - 1) (\vec{e}_z) \end{aligned}$$

### 评分标准

1. 长直电流的磁场 2 分
2. 线圈所在位置的磁场方向 1 分大小 1 分共 2 分
3. 安培力公式 2 分
4.  $A_1A_2$  受力 3 分
5.  $A_2A_3$  受力 3 分
6. 力矩公式 2 分
7.  $A_1A_2$  受力的力矩 3 分
8.  $A_2A_3$  受力的力矩 3 分

## 5、带电粒子在磁场中的运动

## 5.1 洛伦兹力

## 【0205A01】

一个质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的点电荷，以一定的速度  $\vec{v}$  进入均匀磁场  $\vec{B}$  中，如果  $\vec{v} \perp \vec{B}$ ，则其

- (A) 动能改变，动量不变 (B) 动能改变，动量改变  
(C) 动能不变，动量改变 (D) 动能不变，动量不变

## 答案

C

## 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

运动电荷在均匀磁场中将受到洛伦兹力的作用，洛伦兹力的方向一定是垂直于运动方向，所以电荷的运动速度的大小保持不变，方向发生变化，因此电荷的动能保持不变，动量发生变化。

当然，如果电荷的运动速度的方向与磁场的方向平行，那么电荷所受到的力为零，动能和动量都不发生变化，电荷做匀速直线运动穿过磁场。

## 【0205A02】

一个质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的点电荷，以一定的速度  $\vec{v}$  进入均匀磁场  $\vec{B}$  中，如果  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ，则其

- (A) 动能改变，动量不变 (B) 动能改变，动量改变  
(C) 动能不变，动量改变 (D) 动能不变，动量不变

## 答案

D

## 【0205B01】

真空中同时存在着竖直向上的匀强电场和垂直纸面向里的匀强磁场，三个质量不同但带电量均为  $+q$  的油滴  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在场中由静止释放后将做不同的运动，其中  $a$  静止， $b$  向右偏转， $c$  向左偏转，则三个油滴中质量最大的是\_\_\_\_\_。本题中油滴所受重力不可忽略。

## 答案

b

## 【0205B02】

在非均匀磁场中，有一个带电量为  $+q$  的运动电荷。当电荷运动至某点时，其速率为  $v$ ，运动方向与磁场方向间的夹角为  $\theta$ ，此时测出它所受的洛伦兹力的大小为  $F$ ，则该运动电荷所在处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{F}{qv \sin \theta}$$

## 解析

运动电荷在磁场中所受到的洛伦兹力公式

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

所以其大小为

$$F = qvB \sin \theta$$

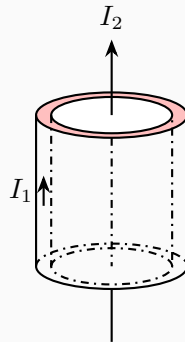
所以有

$$B = \frac{F}{qv \sin \theta} = \frac{F}{qv \sin \theta}$$

根据矢量叉乘的运算法则， $\vec{F}$  的方向就是  $\vec{v} \times \vec{B}$  的方向，因此一定是与  $\vec{v}$  和  $\vec{B}$  所在的平面垂直。

## 【0205C01】

无限长空心圆柱形导体的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，导体内载有电流  $I_1$ ，设电流均匀分布在导体的横截面上。(1) 有一带正电的点电荷  $q$  以初速  $v_0$  沿轴向进入导体空心，若不计重力，则该点电荷以后将如何运动？请分析。(2) 若将一根无限长直导线置于导体的轴线上，如图所示，并让直导线通有与  $I_1$  同向的电流  $I_2$ ，求空间中各点的磁感应强度的大小。



## 解答

(1) 均匀载流的空心圆柱形导体, 电流分布具有柱对称性, 磁场分布也具有柱对称性, 可以用安培环路定理求磁场分布, 在与电流垂直的平面内, 以圆柱轴线所在位置为圆心, 任意  $r$  为半径, 做一个圆取为安培环路, 则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁场的方向与电流的流向成右手螺旋关系。因此空心部分 ( $r < R_1$ ),  $I = 0$ ,  $B = 0$ , 即圆柱体空心部分的磁场为零。因此点电荷以一定的速度进入空心部分, 若不计重力, 点电荷不受力, 将做匀速直线运动。

(2)  $r < R_1$

$$I = I_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

$R_1 < r < R_2$

$$I = I_2 + \frac{I_1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \pi(r^2 - R_1^2) = I_2 + \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} I_1$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left[ I_2 + \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} I_1 \right]$$

$r > R_2$

$$I = I_1 + I_2$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2\pi r}$$

## 评分标准

1. 安培环路定理求磁场 4 分
2. 空心部分磁场为零 2 分, 做匀速直线运动 2 分
3. 三个区域的磁场各 4 分共 12 分

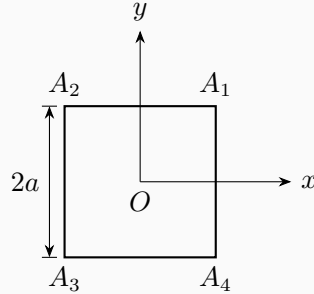
## 5.2 运动电荷的磁场

## 【0205C02】

如图所示直角坐标系中, 一边长为  $2a$ 、线电荷密度为  $\lambda$  的带电正方形闭合线框绕过其中心并垂直于其平面的轴以角速度  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  匀速旋转, 试分别求  $A_1 A_2$ 、 $A_2 A_3$  两条边在正方形中心处所激发的磁感应强度的大小和方向。

可能用到的积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$



### 解答

运动电荷的磁场

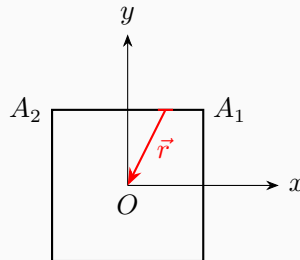
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$A_1A_2$  边上, 从  $A_1$  往  $A_2$  取  $x \rightarrow x + dx$  为点电荷, 则其带电量为  $dq = \lambda|dx|$ , 其速度

$$\vec{v} = \omega \vec{e}_z \times (x \vec{e}_x + a \vec{e}_y) = \omega x \vec{e}_y - \omega a \vec{e}_x$$

从  $dq$  指向坐标原点的  $\vec{r} = -x \vec{e}_x - a \vec{e}_y$ , 所以  $dq$  在坐标原点所激发的磁感应强度为

$$\begin{aligned} d\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda|dx|(\omega x \vec{e}_y - \omega a \vec{e}_x) \times (-x \vec{e}_x - a \vec{e}_y)}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda\omega|dx|(x^2 + a^2) \vec{e}_z}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \frac{|dx|}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{e}_z \end{aligned}$$



所以整个  $A_1A_2$  边在坐标原点激发的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \frac{|dx|}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \int_a^{-a} \frac{-dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$



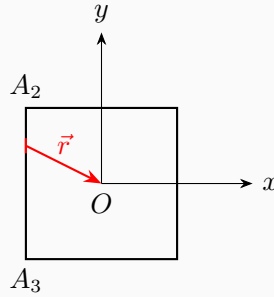
$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \left[ -\ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right] \Big|_a^{-a} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \left[ -\ln \frac{-a + \sqrt{(-a)^2 + a^2}}{a + \sqrt{a^2 + a^2}} \right] \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \ln(\sqrt{2} + 1)
\end{aligned}$$

$A_2A_3$  边上, 从  $A_2$  往  $A_3$  取  $y \rightarrow y + dy$  为点电荷, 则其带电量为  $dq = \lambda|dy|$ , 其速度

$$\vec{v} = \omega \vec{e}_z \times (-a \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = -\omega a \vec{e}_y - \omega y \vec{e}_x$$

从  $dq$  指向坐标原点的  $\vec{r} = a \vec{e}_x - y \vec{e}_y$ , 所以  $dq$  在坐标原点所激发的磁感应强度为

$$\begin{aligned}
d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda|dy|(-\omega a \vec{e}_y - \omega y \vec{e}_x) \times (a \vec{e}_x - y \vec{e}_y)}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda\omega|dy|(a^2 + y^2) \vec{e}_z}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{|dy|}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{e}_z
\end{aligned}$$



所以整个  $A_2A_3$  边在坐标原点激发的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$\begin{aligned}
B_2 &= \int_{A_2}^{A_3} \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{|dy|}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \int_a^{-a} \frac{-dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \left[ -\ln \left( y + \sqrt{a^2 + y^2} \right) \right] \Big|_a^{-a} \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \left[ -\ln \frac{-a + \sqrt{a^2 + (-a)^2}}{a + \sqrt{a^2 + a^2}} \right] \\
&= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}
\end{aligned}$$

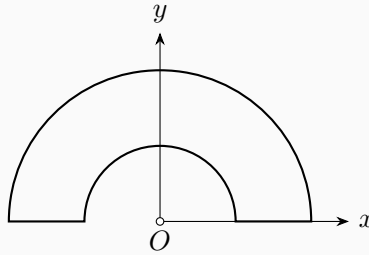
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\
 &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \ln(\sqrt{2}+1)
 \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 运动电荷的磁场公式 4 分
2.  $A_1 A_2$ 、 $A_2 A_3$  的磁场 ( $\vec{v}$ 、 $\vec{r}$ 、 $d\vec{B}$ 、 $\vec{B}$  各 2 分共 8 分) 共 16 分

## 【0205C03】

如图所示直角坐标系中，有一闭合回路由半径为  $R$  和  $2R$  的两个同心共面半圆连接而成，其上均匀分布正电荷，线电荷密度为  $\lambda$ ，当回路以匀角速度  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  绕过  $O$  点垂直于回路平面的轴转动时，求圆心  $O$  点处的磁感应强度的大小和方向。



## 解答

运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

半径为  $R$  的半圆部分，取与  $x$  轴正方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分为点电荷，则其带电量为  $dq = \lambda |R d\theta|$ ，其速度

$$\vec{v} = \omega \vec{e}_z \times (R \cos \theta \vec{e}_x + R \sin \theta \vec{e}_y) = \omega R (\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x)$$

从  $dq$  指向坐标原点的  $\vec{r} = -(R \cos \theta \vec{e}_x + R \sin \theta \vec{e}_y)$ ，所以  $dq$  在坐标原点所激发的磁感应强度为

$$\begin{aligned}
 d\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq) \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda R |d\theta| \omega R (\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x) \times [-(R \cos \theta \vec{e}_x + R \sin \theta \vec{e}_y)]}{R^3} \\
 &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} |d\theta| \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

所以整个半径为  $R$  的半圆部分在坐标原点所激发的磁感应强度方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$B_1 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} |d\theta| = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \times \pi = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4}$$

半径为  $2R$  的半圆部分, 取与  $x$  轴正方向成  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分为点电荷, 则其带电量为  $dq = \lambda|(2R) d\theta|$ , 其速度

$$\vec{v} = \omega \vec{e}_z \times (2R \cos \theta \vec{e}_x + 2R \sin \theta \vec{e}_y) = \omega(2R)(\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x)$$

从  $dq$  指向坐标原点的  $\vec{r} = -(2R \cos \theta \vec{e}_x + 2R \sin \theta \vec{e}_y)$ , 所以  $dq$  在坐标原点所激发的磁感应强度为

$$\begin{aligned} d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda(2R)|d\theta|\omega(2R)(\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x) \times [-(2R \cos \theta \vec{e}_x + 2R \sin \theta \vec{e}_y)]}{(2R)^3} \\ &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} |d\theta| \vec{e}_z \end{aligned}$$

所以整个半径为  $2R$  的半圆部分在坐标原点所激发的磁感应强度方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$B_2 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} |d\theta| = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \times \pi = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4}$$

直线段部分, 从左到右取  $x \rightarrow x + dx$  部分为点电荷, 则其带电量为  $dq = \lambda|dx|$ , 其速度

$$\vec{v} = \omega \vec{e}_z \times (x \vec{e}_x) = \omega x \vec{e}_y$$

从  $dq$  指向坐标原点的  $\vec{r} = -x \vec{e}_x$ , 所以  $dq$  在坐标原点所激发的磁感应强度为

$$\begin{aligned} d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda|dx|\omega x \vec{e}_y \times (-x \vec{e}_x)}{|x|^3} \\ &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{|dx|}{|x|} \vec{e}_z \end{aligned}$$

所以整个直线段部分在坐标原点所激发的磁感应强度方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$\begin{aligned} B_3 &= \int_{-2R}^{-R} \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{|dx|}{|x|} + \int_R^{2R} \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{|dx|}{|x|} \\ &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \int_{-2R}^{-R} \frac{dx}{-x} + \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \int_R^{2R} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \left\{ [-\ln|x|]_{-2R}^{-R} + [\ln x]_R^{2R} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \ln 2 \end{aligned}$$

所以整个闭合回路在坐标原点所激发的总的磁感应强度方向沿  $z$  轴正方向, 大小为

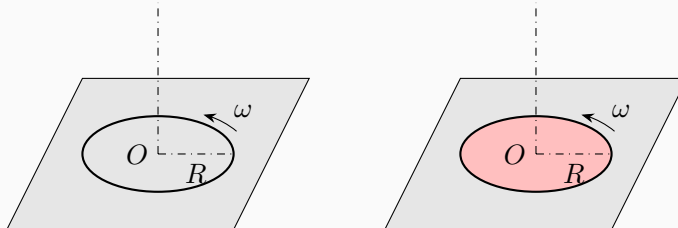
$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4} + \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4} + \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \ln 2 = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} (\pi + \ln 2)$$

## 评分标准

1. 运动电荷的磁场公式 4 分
2. 半圆部分的磁场 7 分
3. 直线段部分的磁场 7 分
4. 总磁场方向 1 分大小 1 分共 2 分

## 【0205C04】

(1) 半径为  $R$  的细圆环带电量  $Q$ ，放在绝缘的一水平面上，当它以角速度  $\omega$  绕竖直中心轴转动时，求圆环中心处的磁感应强度的大小；(2) 若将此圆环换成一半径为  $R$  的薄圆盘，面电荷密度为  $\sigma$ ，它以角速度  $\omega$  绕竖直中心轴转动时，求圆盘中心处的磁感应强度的大小。



## 解答

(1) 运动点电荷的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

取  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分为点电荷，则取带电量为

$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{2\pi R} \times R d\theta = \frac{Q}{2\pi} d\theta$$

从该点电荷所在位置指向圆心的矢量为  $\vec{r}$ ，该点电荷运动的速度大小  $v = \omega R$ ，方向与  $\vec{r}$  垂直，因此该点电荷在圆心处产生的磁感应强度方向垂直圆面，大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi} d\theta\right) \times (\omega R) \times R}{R^3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{8\pi^2 R} d\theta$$

所有点电荷在圆心处产生的磁感应强度方向一致，都是垂直圆面，对  $\theta$  积分，得到整个圆环在圆心处产生的磁感应强度的大小

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \omega Q}{8\pi^2 R} d\theta = \frac{\mu_0 \omega Q}{8\pi^2 R} \times 2\pi = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi R}$$

(2) 将圆盘看成一个个细圆环所组成的，取  $r \rightarrow r + dr$  部分看成一个细圆环，其带电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma \times (2\pi r dr) = 2\pi \sigma r dr$$

利用上面的结论可得这部分细圆环在圆心的磁感应强度方向垂直圆面，大小为

$$dB = \frac{\mu_0 \omega (dq)}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \omega (2\pi \sigma r dr)}{4\pi r} = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma dr$$

所有细圆环在圆心处产生的磁感应强度方向一致，都是垂直圆面，对  $r$  积分，得到整个圆盘在圆心处产生的磁感应强度的大小

$$B = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma dr = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma R$$

### 评分标准

1. 运动电荷的磁场 2 分
2. 取点电荷，带电量 2 分、速度 2 分、磁场 3 分
3. 对  $\theta$  积分 3 分
4. 取细圆环，带电量 2 分、磁场 3 分
5. 对  $r$  积分 3 分

### 【0205C05】

面电荷密度  $\sigma$ 、半径为  $R$  的均匀带电圆盘以角速度  $\omega$  绕过圆心  $O$  点、垂直于圆盘平面的轴线匀速转动，求：(1) 圆盘中心处的磁感应强度大小；(2) 旋转的带电圆盘的磁矩；(3) 旋转圆盘置放在一均匀外磁场  $\vec{B}$  中，圆盘的法线方向与  $\vec{B}$  的夹角为  $\theta$ ，圆盘所受外磁场的磁力矩的大小。

### 解答

(1) 运动点电荷的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

取  $r \rightarrow r + dr$ 、 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分为点电荷，则取带电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma \times (dr \times r d\theta) = \sigma r dr d\theta$$

从该点电荷所在位置指向圆心的矢量为  $\vec{r}$ ，该点电荷运动的速度大小  $v = \omega r$ ，方向与  $\vec{r}$  垂直，因此该点电荷在圆心处产生的磁场方向垂直圆面，大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\sigma r dr d\theta) \times (\omega r) \times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \omega dr d\theta$$

所有点电荷在圆心处产生的磁场方向一致，都是垂直圆面，先对  $\theta$  积分，得到  $r \rightarrow r + dr$  部分细圆环在圆心处产生的磁场的大小

$$dB_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \omega dr d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \omega dr \times 2\pi = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr$$

再对  $r$  积分，得到整个圆盘在圆心处产生的磁场的大小

$$B = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R$$

(2) 将圆盘看成一个个细圆环所组成的, 取  $r \rightarrow r + dr$  部分看成是一个细圆环, 其带电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma \times (2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$$

当圆环旋转时, 其等效电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{2\pi\sigma r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \sigma\omega r dr$$

因此其磁矩方向垂直圆环平面, 大小为

$$dm = (dI)S = \sigma\omega r dr(\pi r^2) = \sigma\omega\pi r^3 dr$$

所以整个圆盘总的磁矩方向垂直圆环平面, 大小为

$$m = \int_0^R \sigma\omega\pi r^3 dr = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi R^4$$

(3)  $\vec{m}$  与  $\vec{B}$  的夹角为  $\theta$ , 所以

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{m} \times \vec{B} \\ M &= mB \sin \theta = \frac{1}{4}B\sigma\omega\pi R^4 \sin \theta\end{aligned}$$

#### 评分标准

1. 运动电荷的磁场 2 分
2. 取点电荷, 带电量、速度、磁场各 1 分共 3 分
3. 对  $\theta$  积分 3 分, 对  $r$  积分 3 分
4. 取细圆环, 带电量、等效电流、磁矩各 1 分共 3 分
5. 对  $r$  积分得总磁矩 3 分
6. 磁力矩 3 分

#### 【0205C06】

非均匀带电平面圆环的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 其电荷面密度为  $\sigma = kr$  (其中  $k$  为常数,  $r$  为圆环上的点到圆心的距离), 绕通过圆心、垂直于圆环平面的轴线以角速度  $\omega$  匀速旋转, 求: (1) 圆环中心的磁感应强度的大小; (2) 旋转的带电圆环的磁矩; (3) 若将这旋转的带电圆环放置在磁感应强度方向与圆环平面平行、大小为  $B$  的均匀磁场中, 它所受外磁场的磁力矩的大小等于多少?

## 解答

## (1) 运动点电荷的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

取  $r \rightarrow r + dr$ 、 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分为点电荷，则取带电量为

$$dq = \sigma dS = kr \times (dr \times r d\theta) = kr^2 dr d\theta$$

从该点电荷所在位置指向圆心的矢量为  $\vec{r}$ ，该点电荷运动的速度大小  $v = \omega r$ ，方向与  $\vec{r}$  垂直，因此该点电荷在圆心处产生的磁场方向垂直圆面，大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(kr^2 dr d\theta) \times (\omega r) \times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} k\omega r dr d\theta$$

所有点电荷在圆心处产生的磁场方向一致，都是垂直圆面，先对  $\theta$  积分，得到  $r \rightarrow r + dr$  部分细圆环在圆心处产生的磁场的大小

$$dB_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} k\omega r dr d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} k\omega r dr \times 2\pi = \frac{1}{2} \mu_0 k\omega r dr$$

再对  $r$  积分，得到整个圆环在圆心处产生的磁场的大小

$$B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \mu_0 k\omega r dr = \frac{1}{4} \mu_0 k\omega (R_2^2 - R_1^2)$$

(2) 将圆环看成一个个细圆环所组成的，取  $r \rightarrow r + dr$  部分看成一个细圆环，其带电量为

$$dq = \sigma dS = kr \times (2\pi r dr) = 2\pi kr^2 dr$$

当圆环旋转时，其等效电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{2\pi kr^2 dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega kr^2 dr$$

因此其磁矩方向垂直圆环平面，大小为

$$dm = (dI)S = \omega kr^2 dr (\pi r^2) = \omega \pi kr^4 dr$$

所以整个圆环总的磁矩方向垂直圆环平面，大小为

$$m = \int_{R_1}^{R_2} \omega \pi kr^4 dr = \frac{1}{5} \omega \pi k (R_2^5 - R_1^5)$$

(3)  $\vec{m} \perp \vec{B}$ ，所以

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{m} \times \vec{B} \\ M &= mB = \frac{1}{5} \omega \pi B k (R_2^5 - R_1^5) \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 运动电荷的磁场 2 分
2. 取点电荷，带电量、速度、磁场各 1 分共 3 分
3. 对  $\theta$  积分 3 分，对  $r$  积分 3 分
4. 取细圆环，带电量、等效电流、磁矩各 1 分共 3 分
5. 对  $r$  积分得总磁矩 3 分
6. 磁力矩 3 分

## 5.3 运动电荷在均匀磁场中的回旋运动

## 【0205A03】

一带电量为  $q$  的粒子在均匀磁场中运动，下列哪种说法是正确的？

- (A) 只要速度大小相同，粒子所受的洛伦兹力就相同  
 (B) 在速度不变的前提下，若电荷  $q$  变为  $-q$ ，则粒子受力反向，大小不变  
 (C) 粒子进入磁场后，其动能和动量都不变  
 (D) 洛伦兹力与速度方向垂直，所以带电粒子运动的轨迹必定是圆

## 答案

B

## 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

力是一个矢量，速度大小相同，但方向不同时，洛伦兹力的大小和方向都会发生变化。洛伦兹力一定垂直于速度，因此产生的加速度一定是垂直于速度方向，所以速度的大小不会发生变化，但速度的方向一直在改变，因此粒子的动能不会变化，但动量一直在变化。如果粒子的初始速度是垂直磁场的，那么粒子的运动轨迹是一个圆，但如果初始速度的方向并不是垂直磁场，那么粒子的运动轨迹是一个螺旋线，在垂直磁场方向是圆周运动，沿磁场方向是匀速直线运动。在速度不变的前提下，如果带电量变为负号，那么洛伦兹力的大小不变，方向相反。

## 【0205A04】

$A$ 、 $B$  两个电子都垂直于磁场方向射入同一均匀磁场而做圆周运动， $A$  电子的速率是  $B$  电子速率的两倍。两个电子的轨道半径分别记为  $R_A$  和  $R_B$ ，周期分别记为  $T_A$  和  $T_B$ ，则



(A)  $R_A : R_B = 2, T_A : T_B = 2$

(B)  $R_A : R_B = 1 : 2, T_A : T_B = 1$

(C)  $R_A : R_B = 1, T_A : T_B = 1 : 2$

(D)  $R_A : R_B = 2, T_A : T_B = 1$

答案

D

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

依题意,  $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$ , 所以洛伦兹力的大小为  $F = qvB$ , 它提供给电子做圆周运动的向心力, 所以

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

所以

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{mv_A}{qB}}{\frac{mv_B}{qB}} = \frac{v_A}{v_B} = 2 : 1$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2\pi m}{qB}}{\frac{2\pi m}{qB}} = 1$$

【0205A05】

$\alpha$  粒子与质子以同一速率垂直于磁场方向入射到同一均匀磁场中, 它们各自做圆周运动的半径分别记为  $R_\alpha$  和  $R_p$ , 周期分别记为  $T_\alpha$  和  $T_p$ , 则

(A)  $R_\alpha : R_p = 1, T_\alpha : T_p = 2$

(B)  $R_\alpha : R_p = 1, T_\alpha : T_p = 1$

(C)  $R_\alpha : R_p = 2, T_\alpha : T_p = 2$

(D)  $R_\alpha : R_p = 2, T_\alpha : T_p = 1$

答案

C

## 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\alpha$  粒子即为氦原子核，由两个质子和两个中子所构成，质量约为质子的四倍，带电量为质子的两倍。依题意， $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$ ，所以洛伦兹力的大小为  $F = qvB$ ，它提供给粒子做圆周运动的向心力，所以

$$\begin{aligned} qvB &= m \frac{v^2}{R} \\ R &= \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB} \\ T &= \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{R_\alpha}{R_p} &= \frac{\frac{m_\alpha v_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{m_p v_p}{q_p B}} = \frac{\frac{4m_p v_p}{2q_p}}{\frac{m_p v_p}{q_p}} = 2 \\ \frac{T_\alpha}{T_p} &= \frac{\frac{2\pi m_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{2\pi m_p}{q_p B}} = \frac{\frac{m_\alpha}{q_\alpha}}{\frac{m_p}{q_p}} = \frac{\frac{4m_p}{2q_p}}{\frac{m_p}{q_p}} = 2 \end{aligned}$$

## 【0205B03】

一个带电量为  $q$  的粒子，以速率  $v$  在半径为  $R$  的圆周上做匀速圆周运动，该带电粒子轨道运动的磁矩的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{2}qvR$$

## 解析

磁矩

$$\vec{m} = IS \vec{e}_n$$

所以磁矩的大小为

$$m = IS = I\pi R^2 = \frac{q}{T}\pi R^2 = \frac{q}{2\pi R/v}\pi R^2 = \frac{1}{2}qvR$$

## 【0205B04】

电子的质量为  $m$ ，带电量为  $-e$ ，以速率  $v$  在垂直于均匀磁场的平面内做半径为  $R$  的匀速圆周运动，则通过此圆周轨道的磁通量等于\_\_\_\_\_。

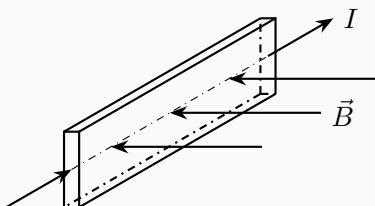
答案

$$\frac{\pi m v R}{e}$$

## 5.4 霍尔效应

【0205B05】

如图所示，长方形直金属条中通有电流  $I$ ，金属条放在匀强磁场  $\vec{B}$  中， $\vec{B}$  的方向垂直于金属条的左右侧面，则金属条的上侧面将积累\_\_\_\_(填“正”或“负”)电荷。



答案

负

## 第三章 电磁感应

### 1、电磁感应定律

#### 1.1 电磁感应现象

【0301A01】

一导体圆线圈在均匀磁场中运动，能使其产生感应电流的是

- (A) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向平行 (B) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向垂直  
(C) 线圈平面垂直于磁场并沿垂直磁场方向平移 (D) 线圈平面平行于磁场并沿垂直磁场方向平移

答案

B

解析

产生感应电流的根本原因在于通过线圈平面的磁通量发生变化。

如果磁场平行于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量恒为零，转动过程也一直保持为零，所以不会产生感应电流。

如果磁场垂直于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量就是磁感应强度与线圈面积的乘积，转动过程中，线圈平面的法线方向与磁场之间的夹角发生变化，所以通过线圈的磁通量发生变化，所以线圈中有感应电流。

如果线圈平面垂直磁场并沿垂直磁场的方向平移，那么通过线圈的磁通量并没有发生变化，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

如果线圈平面平行于磁场，则通过线圈的磁通量为零，移动过程磁通量也一直保持为零，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

#### 1.2 电磁感应定律

【0301A02】

大小、形状均相同的铁环和铜环所包围的面积中，通以相同变化率的磁通量，则环中

- (A) 感应电动势相同，感应电流相同 (B) 感应电动势相同，感应电流不同  
(C) 感应电动势不同，感应电流相同 (D) 感应电动势不同，感应电流不同

答案

B

【0301B01】

桌子上水平放置一个半径  $r = 10 \text{ cm}$  的金属圆环，其电阻  $R = 1 \Omega$ 。若地球磁场磁感强度的竖直分量为  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$ 。那么将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电荷  $q = \underline{\hspace{1cm}} \text{ C}$ 。

答案

 $3.14 \times 10^{-6}$ 

解析

思路：求感应电动势，求感应电流，求电荷。

法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{dq}{dt}$$

所以通过的电荷为

$$\begin{aligned} q &= \int dq = \int I dt = \int \frac{\mathcal{E}}{R} dt = \int \frac{d\Phi}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2BS}{R} = \frac{2B\pi r^2}{R} \\ &= \frac{2 \times 5 \times 10^{-5} \pi \times (0.1)^2}{1} = 3.14 \times 10^{-6} \text{ C} \end{aligned}$$

### 1.3 楞次定律

【0301A03】

一块铜板垂直于磁场方向放在磁感强度正在增大的磁场中时，铜板中出现的涡流（感应电流）将

- (A) 加速铜板中磁场的增加                      (B) 减缓铜板中磁场的增加  
(C) 对磁场不起作用                              (D) 使铜板中磁场反向

答案

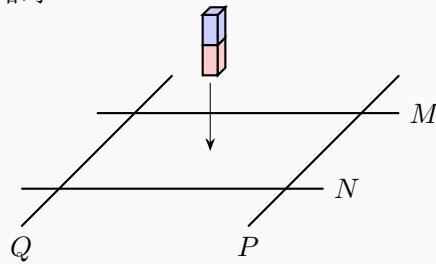
B

解析

感应电流会阻止磁场的增大，但只是减缓其增大的速度（程度），无法改变其增大的事实。

## 【0301A04】

如图所示，光滑固定导轨  $M$ 、 $N$  水平放置，两根导体棒  $P$  和  $Q$  平行放在导轨上，形成一个闭合回路，当一条形磁铁从高处下落接近回路时



- (A)  $P$  和  $Q$  均向右运动  
(B)  $P$  和  $Q$  均向左运动  
(C)  $P$  和  $Q$  将互相远离  
(D)  $P$  和  $Q$  将互相靠近

## 答案

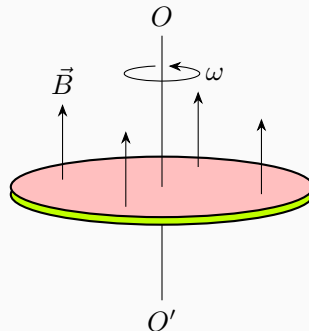
D

## 2、动生电动势和感生电动势

## 2.1 动生电动势

## 【0302A01】

圆铜盘水平放置在均匀磁场中，磁场的方向垂直盘面向上。当铜盘绕通过中心垂直于盘面的轴沿图示方向转动时，



- (A) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的相反方向流动  
(B) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的方向流动  
(C) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘边缘处电势最高  
(D) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘中心处电势最高

## 答案

C

## 解析

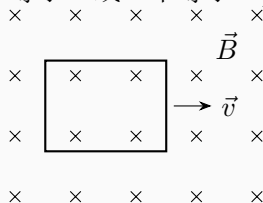
将圆盘看成一根根线段绕盘心转动。根据动生电动势

$$\mathcal{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

可以判定铜盘边缘处电势比中心电势高。

## 【0302B01】

如图所示，垂直于纸面向里的均匀磁场中有一个矩形导体线框，当线框以速度  $\vec{v}$  垂直于磁场水平向右运动时，线框中感应电流\_\_\_\_\_零（填“等于”或“不等于”）。

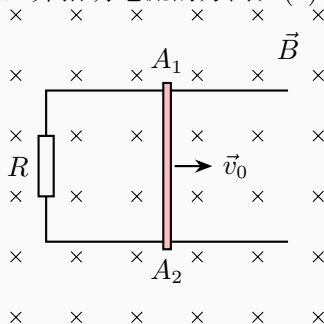


## 答案

等于

## 【0302C01】

如图所示，水平放置的导体矩形框的平面与磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场垂直，在此矩形框上有一质量为  $m$ ，长为  $L$  的可移动细导体棒  $A_1A_2$ ，矩形框还接一个电阻  $R$ ，电阻的阻值比矩形框的电阻值大很多以至于可以忽略矩形框的电阻。开始时 ( $t = 0$ )，细导体棒以速度  $\vec{v}_0$  沿图示方向在矩形框上运动，忽略导体棒与导体矩形框之间的摩擦力。求 (1) 任意  $t$  时刻导体棒上的感应电动势，并指明哪端电势比较高；(2) 任意  $t$  时刻通过导体棒的电流，并指明电流的方向；(3) 任意  $t$  时刻导体棒的速率。



## 解答

(1) 以磁场的方向（垂直纸面向里）为磁通量的正方向，则顺时针为回路的绕行正方向。设  $t$  时刻导体棒的速率为  $v$ ， $A_1A_2$  与  $R$  之间的距离为  $x$ ，则通过回路的磁通量

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = BLx$$

因此回路的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

负号表示感应电动势的方向与回路绕行正方向相反，即逆时针。导体框静止不动，因此感应电动势只在导体棒上，因此  $A_1$  电势较高。

(2) 因此回路的感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{BLv}{R}$$

同样负号表示感应电流的方向与回路绕行正方向相反，即逆时针，所以电流从  $A_2$  流向  $A_1$ 。

(3) 由安培力公式

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

可知  $A_1A_2$  受到的安培力方向向左 (与速度方向相反)，大小

$$F = |BIL| = \frac{B^2L^2v}{R}$$

以速度方向为正，由牛顿第二定律可得

$$\begin{aligned} -\frac{B^2L^2v}{R} &= ma \\ a &= -\frac{B^2L^2v}{mR} = \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR} dt \\ \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= \int_0^t -\frac{B^2L^2}{mR} dt \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{B^2L^2}{mR} t \\ v &= v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR} t} \end{aligned}$$

因此任意  $t$  时刻，导体棒上的感应电动势

$$\mathcal{E} = -BLv_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR} t}$$

通过导体棒的电流

$$I = -\frac{BLv_0}{R} e^{-\frac{B^2L^2}{mR} t}$$

### 评分标准

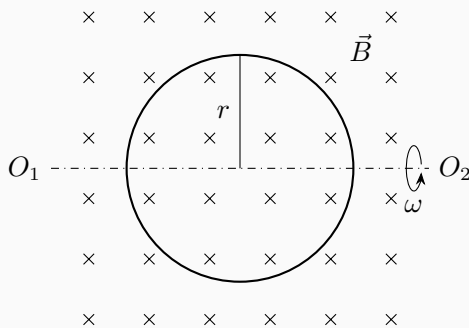
1. 磁通量得 2 分
2. 法拉第电磁感应定律得 2 分



3. 感应电动势得 1 分,  $A_1$  电势较高得 1 分
4. 感应电流得 2 分, 电流流向得 1 分
5. 安培力公式 2 分, 大小 1 分, 方向 1 分, 共 4 分
6. 牛顿第二定律得 2 分
7. 分离变量法得 1 分, 积分得 1 分, 结果得 1 分, 共 3 分
8. 任意  $t$  时刻的感应电动势得 1 分, 电流得 1 分

## 【0302C02】

如图所示, 一个半径为  $r$ 、匝数为  $N$  的圆形导体线圈, 置于均匀磁场  $\vec{B}$  中。圆形线圈可绕通过圆心的轴  $O_1O_2$  转动, 转动的角速度为  $\omega$ 。初始时刻圆线圈处在图示位置 (磁场垂直通过圆线圈平面), 求: (1) 任意  $t$  时刻通过线圈的磁链  $\Psi(t)$ ; (2) 任意  $t$  时刻线圈中的感应电动势; (3) 当转过角度  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 线圈中的瞬时电流值 (线圈的电阻为  $R$ , 不计自感); (4) 当转过角度  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 圆心处的总的磁感应强度的大小。



## 解答

(1) 以磁感应强度的方向为初始时刻线圈平面的法向方向, 即垂直向里为正, 则线圈中顺时针方向为回路绕行的正方向, 任意  $t$  时刻通过线圈的磁链为

$$\Psi = N\Phi = N\vec{B} \cdot \vec{S} = NB\pi r^2 \cos(\omega t)$$

(2) 由法拉第电磁感应定律可得, 任意  $t$  时刻线圈中的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = NB\pi r^2 \omega \sin(\omega t)$$

(3) 因此, 任意  $t$  时刻线圈中电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NB\pi r^2 \omega}{R} \sin(\omega t)$$

当转过角度  $\theta = \omega t = \frac{\pi}{2}$  时,

$$I = \frac{NB\pi r^2 \omega}{R}$$

(4) 根据毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

可得，一匝线圈电流在圆心的磁场的大小

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

方向垂直线圈平面，且与电流成右手螺旋关系，当转过角度  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时， $\vec{B}_1$  的方向与  $\vec{B}$  的方向垂直，所以  $N$  匝线圈在圆心的总磁场为  $NB_1$ ，所以圆心处总的磁感应强度的大小为

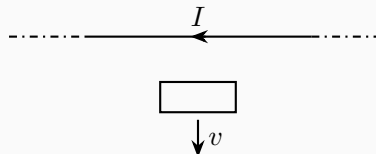
$$\sqrt{B^2 + (NB_1)^2} = B \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_0 N^2 \pi r \omega}{2R} \right)^2}$$

### 评分标准

1. 计算磁链 4 分
2. 法拉第电磁感应定律 3 分，感应电动势 1 分
3. 任意  $t$  时刻线圈中电流 2 分，转过角度  $\theta = \omega t = \frac{\pi}{2}$  时的电流 2 分
4. 毕奥——萨伐尔定律 3 分
5. 圆电流在圆心的磁场大小 2 分，方向 1 分
6. 总磁场 2 分

### 【0302A02】

一根无限长水平直导线载有电流  $I$ ，一个与导线共面的矩形导体线圈沿垂直于导线方向以恒定速率运动，如图所示，则



- (A) 线圈中无感应电流 (B) 线圈中感应电流为顺时针方向  
(C) 线圈中感应电流为逆时针方向 (D) 线圈中感应电流的方向无法确定

### 答案

C

## 【0302B02】

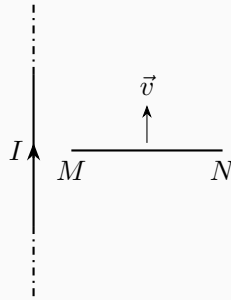
在竖直放置的一根无限长载流直导线右侧有一个与其共面的任意形状的平面导体线圈。直导线中的电流由下向上，以顺时针方向为感应电动势的正方向，当线圈以垂直于导线的速度靠近导线时，线圈中的感应电动势\_\_\_\_\_零。(填“大于”、“等于”或“小于”)

## 答案

小于

## 【0302B03】

金属杆  $MN$  以一定的速度平行于长直载流导线运动，金属杆与导线共面且相互垂直，如图所示。已知导线中通有电流  $I$ ，则此金属杆中电势较高的一端为\_\_\_\_\_端。(填“ $M$ ”或“ $N$ ”)

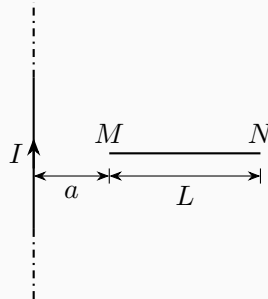


## 答案

$M$

## 【0302B04】

如图所示，一段长度为  $L$  的直导线  $MN$ ，水平放置在通有电流  $I$  的竖直长导线旁与竖直导线共面，并由图示位置从静止自由下落，则  $t$  秒末导线两端的电势差  $U_M - U_N =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I g t}{2\pi} \ln \frac{a}{a+L}$$

## 解析

自由落体运动  $t$  秒末的速率为

$$v = gt$$

方向竖直向下。长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧磁场的方向垂直纸面向里。动生电动势

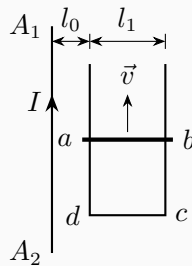
$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Bv dr = \frac{\mu_0 Igt}{2\pi r} dr$$

所以感应电动势的方向由  $M$  点指向  $N$  点，所以

$$U_M - U_N = \int_N^M \frac{\mu_0 Igt}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Igt}{2\pi} [\ln r]_{a+L}^a = \frac{\mu_0 Igt}{2\pi} \ln \frac{a}{a+L}$$

## 【0302C03】

如图所示，无限长直导线中稳恒电流为  $I$ ，静止的矩形导线框  $abcd$  与长直导线共面，且  $ad \parallel A_1A_2$ ， $cd$  边固定， $ab$  边沿  $da$  及  $cb$  以速度  $\vec{v}$  无摩擦地匀速平动，线框自感忽略不计， $t=0$  时， $ab$  边与  $cd$  边重合。(1) 线框所在区域任意位置的磁感应强度的大小和方向；(2) 任意  $t$  时刻线框包围面积上的磁通量；(3) 任意  $t$  时刻  $ab$  上的动生电动势，并判断方向。



## 解答

(1) 无限长直载流导线的磁场可以由安培环路定理求得，选择与载流导线垂直，以载流导线为圆心，任意  $r$  为半径的圆为安培环路，则有

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r$  为场点到载流导线的距离，线框所在区域任意位置的磁感应强度的方向垂直纸面向里。

(2) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向, 任意  $t$  时刻,  $ab$  边与  $cd$  边之间的距离为  $l_2 = vt$ , 取离载流导线  $r \rightarrow r + dr$  部分矩形, 通过它的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bl_2 dr = \frac{\mu_0 I v t}{2\pi r} dr$$

因此通过线框包围面积上的磁通量为

$$\Phi = \int_{l_0}^{l_0+l_1} \frac{\mu_0 I v t}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I v t}{2\pi} \ln \frac{l_0 + l_1}{l_0}$$

(3) 以顺时针为感应电动势的正方向, 由法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

可得, 任意  $t$  时刻线框回路的感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{l_0 + l_1}{l_0}$$

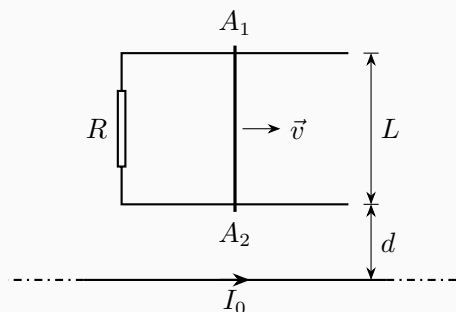
负号表示电动势的方向为逆时针方向。由于线框静止, 所以电动势只在导体棒部分, 因此电动势的方向由  $b$  指向  $a$ 。

### 评分标准

1. 安培环路定理 5 分, 磁感应强度大小 1 分, 方向 1 分, 共 7 分
2. 磁通量矢量点乘 2 分, 小矩形磁通量 2 分, 积分算总磁通量 2 分, 共 6 分
3. 法拉第电磁感应定律 4 分, 电动势 2 分, 方向 1 分, 共 7 分

### 【0302C04】

如图所示, 一根无限长载流直导线中通过的电流为  $I_0$ , 导体线框的宽度为  $L$ , 线框总电阻近似不变, 以图中  $R$  表示。  $A_1A_2$  段可以无摩擦地在线框上滑动, 线框与载流导线之间的距离为  $d$ 。现有一外力  $\vec{F}$  作用在  $A_1A_2$  上, 使之以速度  $\vec{v}$  向右作匀速直线运动。试求: (1) 线框所在区域任意位置的磁感应强度的大小和方向; (2)  $A_1A_2$  上感应电动势的大小和方向; (3) 通过  $A_1A_2$  的电流大小和方向; (4) 作用在  $A_1A_2$  上的外力的大小和方向。



## 解答

(1) 无限长直载流导线的磁场可以由安培环路定理求得, 选择与载流导线垂直, 以载流导线为圆心, 任意  $r$  为半径的圆为安培环路, 则有

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

$r$  为场点到载流导线的距离, 线框所在区域任意位置的磁感应强度的方向垂直纸面向外。

(2) 运动导体在磁场中的动生电动势

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$A_1 A_2$  上从  $A_2$  往  $A_1$  方向取离载流导线  $r \rightarrow r + dr$  段导体元, 则它上面的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = -vB dr = -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi r} dr$$

因此  $A_1 A_2$  上感应电动势

$$\mathcal{E} = \int_{A_2}^{A_1} -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \int_d^{d+L} \frac{1}{r} dr = -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

感应电动势的方向从  $A_1$  指向  $A_2$ 。

(3) 通过  $A_1 A_2$  的电流的方向从  $A_1$  指向  $A_2$ , 大小

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \frac{d+L}{d}$$

(4) 安培力公式

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$A_1 A_2$  上从  $A_2$  往  $A_1$  方向取离载流导线  $r \rightarrow r + dr$  段导体元, 则它受到的安培力方向向左, 大小为

$$dF = BI dr = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cdot \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \frac{d+L}{d} \cdot dr = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \ln \frac{d+L}{d} \frac{dr}{r}$$

所以  $A_1 A_2$  受到总的安培力方向向左, 大小为

$$F = \int_{A_2}^{A_1} \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \ln \frac{d+L}{d} \frac{dr}{r} = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \ln \frac{d+L}{d} \int_d^{d+L} \frac{dr}{r} = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d} \right)^2 \frac{v}{R}$$

$A_1 A_2$  做匀速直线运动, 所受合力为零, 因此所受外力方向与安培力相反 (安培力向左, 外力向右), 大小相等, 为

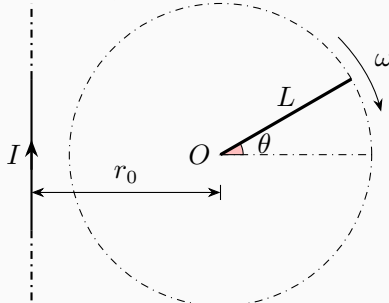
$$F = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d} \right)^2 \frac{v}{R}$$

## 评分标准

1. 安培环路定理 2 分, 磁感应强度大小 1 分, 方向 1 分, 共 4 分
2. 动生电动势公式 2 分, 导体元电动势 1, 积分 1 分, 结果大小 1 分方向 1 分共 6 分
3. 电流公式 1 分大小 1 分方向 1 分共 3 分
4. 安培力公式 2 分, 导体元安培力 1 分, 积分 1 分, 结果大小 1 分方向 1 分共 6 分
5. 外力方向 1 分

## 【0302C05】

一根无限长竖直导线上通有稳定电流  $I$ , 电流方向向上。导线旁有一与导线共面、长度为  $L$  的金属棒, 绕其一端  $O$  在该平面内顺时针匀速转动, 转动角速度为  $\omega$ ,  $O$  点到导线的距离为  $r_0$  ( $r_0 > L$ )。试求金属棒转到与水平面成  $\theta$  角时, 棒内感应电动势的大小和方向。



## 解答

无限长直载流导线的磁场可以由安培环路定理求得, 选择与载流导线垂直, 以载流导线为圆心, 任意  $r$  为半径的圆为安培环路, 则有

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r$  为场点到载流导线的距离, 金属棒所在区域任意位置的磁感应强度的方向垂直纸面向里。

运动导体在磁场中的动生电动势

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

金属棒上从  $O$  向另一端取离  $O$  点  $l \rightarrow l + dl$  段为研究对象, 则其运动速度的大小  $v = \omega l$ , 方向与棒垂直。当金属棒与水平面成  $\theta$  角时, 它与长直电流之间的距离  $r = r_0 + l \cos \theta$ 。所以研究对象上的感应电动势 (动生电动势) 的方向从  $O$  沿杆指向末端, 大小

$$d\mathcal{E} = (\omega l) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l \cos \theta)} \cdot dl = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \cdot \frac{l dl}{r_0 + l \cos \theta}$$

所以整根金属棒的感应电动势

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_0^L \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \cdot \frac{l \, dl}{r_0 + l \cos \theta} \\
 &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \int_0^L \frac{l}{r_0 + l \cos \theta} \, dl \\
 &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi \cos \theta} \int_0^L \left[ 1 - \frac{r_0}{r_0 + l \cos \theta} \right] \, dl \\
 &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi \cos \theta} \left[ l - \frac{r_0}{\cos \theta} \ln(r_0 + l \cos \theta) \right] \Big|_0^L \\
 &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi \cos \theta} \left[ L - \frac{r_0}{\cos \theta} \ln \frac{r_0 + L \cos \theta}{r_0} \right]
 \end{aligned}$$

方向从  $O$  沿杆指向末端。

### 评分标准

1. 安培环路定理 4 分，磁感应强度大小 1 分，方向 1 分，共 6 分
2. 动生电动势公式 4 分
3. 导体元 1 分，速度大小 1 分方向 1 分，到载流直线距离 1 分，电动势方向 1 分大小 1 分，共 6 分
4. 整根金属棒电动势，积分 2 分，结果 1 分，方向 1 分，共 4 分

### 【0302A03】

交流发电机是根据下列哪个原理制成的？

- (A) 电磁感应 (B) 通电线圈在磁场中受力转动  
(C) 奥斯特实验 (D) 磁极之间的相互作用

### 答案

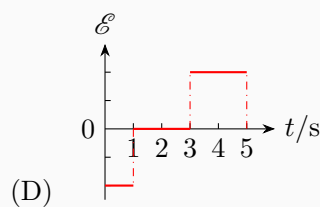
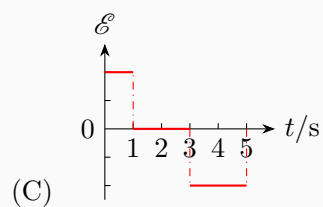
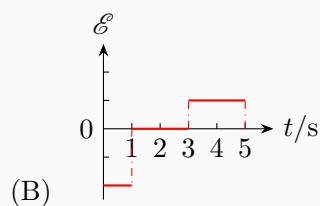
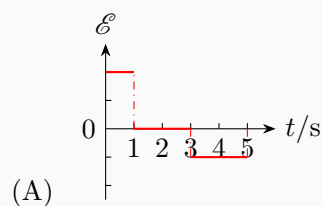
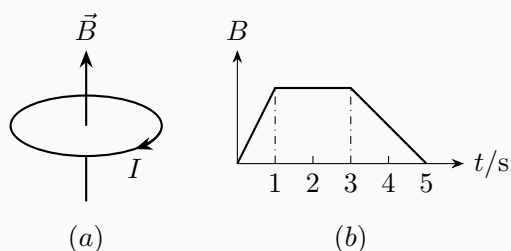
A

## 2.2 感生电动势

### 【0302A04】

在竖直向上的匀强磁场中，水平放置一个不变形的金属圆线圈，规定线圈中感应电流的正方向如下图 (a) 所示，当磁场的磁感应强度的大小随时间如下图 (b) 变化时，正确表示线圈中感应电动势  $\mathcal{E}$  变化的是





答案

A

【0302B05】

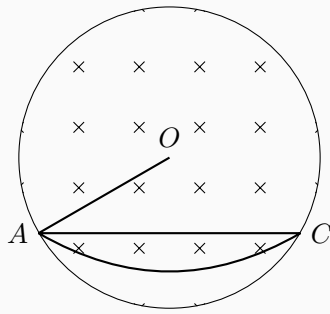
长为  $4a$  的导线组成一正方形回路，总电阻为  $R$ ，现有均匀变化的匀强磁场垂直穿过该回路包围的平面，测得回路中感应电流为  $I$ ，则  $\left| \frac{dB}{dt} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$\frac{IR}{a^2}$$

【0302A05】

圆柱形空间内有一匀强磁场，与磁场垂直的平面内放置着直导线  $\overline{AC}$ 、 $\overline{OA}$  和弯曲导线  $\widehat{AC}$ ，如图所示，其中  $O$  为圆心。若磁场的磁感应强度的大小以速率  $\frac{dB}{dt}$  发生变化，则



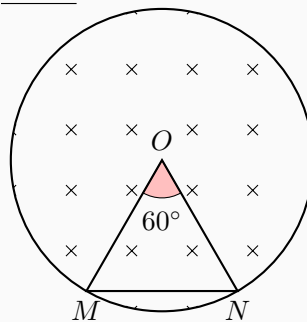
- (A) 电动势只有在直导线  $\overline{AC}$  中产生  
 (B) 电动势只有在弯曲导线  $\widehat{AC}$  中产生  
 (C) 电动势在直导线  $\overline{AC}$  和  $\overline{OA}$  中都产生  
 (D) 电动势在直导线  $\overline{AC}$  和弯曲导线  $\widehat{AC}$  中都产生

答案

D

【0302B06】

如图所示, 半径为  $R$  的圆柱形空间 (横截面) 内分布着均匀的磁场, 磁感应强度的大小随时间的变化式为  $B = kt$  (其中  $k$  为正值常数), 与磁场垂直的平面内有一边长为  $R$  的等边三角形  $OMN$  导体, 则导体  $OM$  的中点的感生电场的大小等于\_\_\_\_\_。

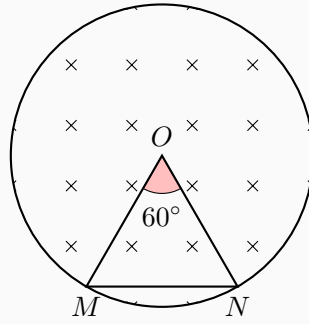


答案

$$\frac{1}{4}kR$$

【0302B07】

如图所示, 半径为  $R$  的圆柱形空间 (横截面) 内分布着均匀的磁场, 磁感应强度的大小随时间的变化式为  $B = kt$  (其中  $k$  为正值常数), 与磁场垂直的平面内有一边长为  $R$  的等边三角形  $OMN$  导体, 则导体  $ON$  中的感应电动势等于\_\_\_\_\_。

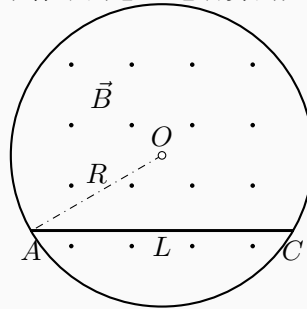


答案

0

【0302C06】

在半径为  $R$  的圆柱形空间内，充满磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场，磁感应强度的大小随时间的变化关系为  $B = -kt$ ，其中  $k$  为正值常量，磁感应强度的方向垂直纸面向外。(1) 求感生电场的分布；(2) 有一长为  $L$  的金属棒  $AC$  置放在磁场中，求棒中的感生电动势的大小和方向。



解答

(1) 圆柱形磁场变化时所激发的感生电场在与圆柱同轴的圆周上各点的大小相等，方向沿圆周的切线方向。以下用  $E$  表示感生电场。

$r < R$ ，圆柱内，

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ E_1 \cdot (2\pi r) &= k \cdot (\pi r^2) \\ E_1 &= \frac{1}{2}kr\end{aligned}$$

$r > R$ ，圆柱外，

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ E_2 \cdot (2\pi r) &= k \cdot (\pi R^2)\end{aligned}$$

$$E_2 = \frac{kR^2}{2r}$$

以上选择垂直纸面向外为磁通量的正方向，因此逆时针为回路绕行正方向，感生电场为正，说明感生电场的方向沿逆时针方向。

(2) 由于感生电场沿圆周切向方向，所以沿任意半径方向摆放的导体中感生电动势均为零。因此，添加  $OA$ 、 $OC$ ，与  $AC$  构成闭合回路，则回路的感应电动势 (感生电动势) 就是  $AC$  上的感生电动势。取垂直纸面向外为磁通量的正方向，则逆时针为回路绕行的正方向。假定  $t$  时刻磁场的大小为  $B$ ，则通过回路的磁通量

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = B \cdot \frac{1}{2}L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{1}{2}BL\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

由法拉第电磁感应定律可得回路的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{2}L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot (-k) = \frac{1}{2}kL\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

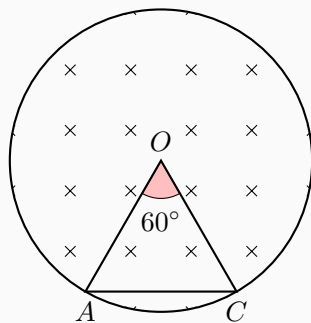
电动势为正，说明方向就是回路绕行的正方向，即逆时针方向，因此棒中感生电动势的方向是从  $A$  指向  $C$ 。

#### 评分标准

1. 两个区域的感生电场的大小各 4 分，方向得 1 分，共 9 分
2. 沿半径方向感生电动势为零得 1 分，构造回路得 1 分，指定正方向得 1 分，共 3 分
3. 磁通量矢量式得 2 分，结果得 1 分，共 3 分
4. 法拉第电磁感应定律得 3 分，计算感应电动势得 1 分，共 4 分
5. 感生电动势方向得 1 分

#### 【0302C07】

在半径为  $R$  的圆柱形空间内，充满磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场，磁感应强度的大小随时间的变化关系为  $B = B_0 \cos(\omega t)$ ，其中  $B_0$  和  $\omega$  均为正值常量，磁感应强度的方向垂直纸面向里。(1) 求感生电场的分布；(2) 边长为  $R$  的等边三角形  $OAC$  导体置放与磁场中垂直的平面内，求  $AC$  段中的感应电动势的大小和方向。



## 解答

(1) 圆柱形磁场变化时所激发的感生电场在与圆柱同轴的圆周上各点的大小相等，方向沿圆周的切线方向。以下用  $E$  表示感生电场。

$r < R$ ，圆柱内，

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_1 \cdot (2\pi r) = [B_0 \omega \sin(\omega t)] \cdot (\pi r^2)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} B_0 r \omega \sin(\omega t)$$

$r > R$ ，圆柱外，

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_2 \cdot (2\pi r) = [B_0 \omega \sin(\omega t)] \cdot (\pi R^2)$$

$$E_2 = \frac{B_0 R^2 \omega}{2r} \sin(\omega t)$$

以上选择垂直纸面向里为磁通量的正方向，因此顺时针为回路绕行正方向，因此感生电场为正时，说明感生电场的方向沿顺时针方向；感生电场为负时，说明感生电场的方向沿逆时针方向。

(2) 由于感生电场沿圆周切向方向，所以沿任意半径方向摆放的导体中感生电动势均为零，因此  $OA$ 、 $OC$  的感生电动势均为零，所以  $AC$  段中的感生电动势就等于整个等边三角形回路的感生电动势，取垂直纸面向里为磁通量的正方向，则顺时针为回路绕行的正方向。假定  $t$  时刻磁场的大小为  $B$ ，则通过回路的磁通量

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = B \times \frac{1}{2} \times R \times \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B$$

由法拉第电磁感应定律可得回路的感应电动势

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \cdot \frac{dB}{dt} = - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \cdot [-B_0 \omega \sin(\omega t)] = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$$

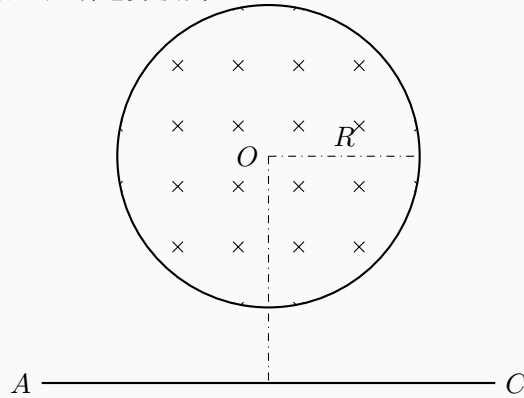
因此感生电动势为正时，说明感生电动势的方向沿顺时针方向，即棒中感生电动势的方向是从  $C$  指向  $A$ ，即  $A$  端电势较高；感生电动势为负时，说明感生电动势的方向沿逆时针方向，即棒中感生电动势的方向是从  $A$  指向  $C$ ，即  $C$  端电势较高。

## 评分标准

1. 两个区域的感生电场的大小各 4 分，方向得 1 分，共 9 分
2. 沿半径方向感生电动势为零得 1 分，构造回路得 1 分，指定正方向得 1 分，共 3 分
3. 磁通量矢量式得 2 分，结果得 1 分，共 3 分
4. 法拉第电磁感应定律得 3 分，计算感应电动势得 1 分，共 4 分
5. 感生电动势方向得 1 分

## 【0302C08】

在半径为  $R$  的圆柱形空间内，充满磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场，磁感应强度的大小随时间的变化关系为  $B = kt$ ，其中  $k$  为正值常量，磁感应强度的方向垂直纸面向里。(1) 求感生电场的分布；(2) 在圆柱形空间外与磁场垂直的一平面内有一根长  $2L$  的导体棒  $AC$ ，与圆柱轴线相距  $L$ ， $O$  在  $AC$  中垂面上，求  $AC$  上的感应电动势，并指出哪端电势较高。



## 解答

(1) 圆柱形磁场变化时所激发的感生电场在与圆柱同轴的圆周上各点的大小相等，方向沿圆周的切线方向。以下用  $E$  表示感生电场。

$r < R$ ，圆柱内，

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ E_1 \cdot (2\pi r) &= -k \cdot (\pi r^2) \\ E_1 &= -\frac{1}{2}kr\end{aligned}$$

$r > R$ ，圆柱外，

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ E_2 \cdot (2\pi r) &= -k \cdot (\pi R^2)\end{aligned}$$

$$E_2 = -\frac{kR^2}{2r}$$

以上选择垂直纸面向里为磁通量的正方向，因此顺时针为回路绕行正方向，感生电场为负，说明感生电场的方向沿逆时针方向。

(2) 由于感生电场沿圆周切向方向，所以沿任意半径方向摆放的导体中感生电动势均为零。因此，添加  $OA$ 、 $OC$ ，与  $AC$  构成闭合回路，则回路的感应电动势 (感生电动势) 就是  $AC$  上的感生电动势。取垂直纸面向里为磁通量的正方向，则顺时针为回路绕行的正方向。假定  $t$  时刻磁场的大小为  $B$ ，则通过回路的磁通量

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = B \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi R^2 B$$

由法拉第电磁感应定律可得回路的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{4}\pi R^2 \cdot k = -\frac{1}{4}\pi R^2 k$$

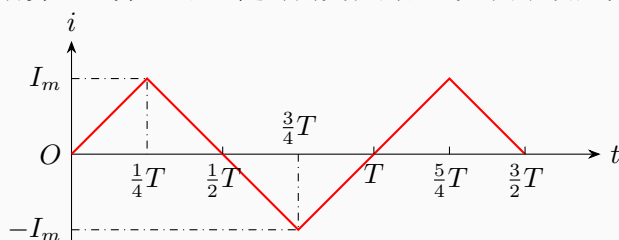
电动势为负，说明方向与回路绕行正方向相反，即逆时针方向，因此棒中感生电动势的方向是从  $A$  指向  $C$ ，即  $C$  端电势较高。

### 评分标准

1. 两个区域的感生电场的大小各 4 分，方向得 1 分，共 9 分
2. 沿半径方向感生电动势为零得 1 分，构造回路得 1 分，指定正方向得 1 分，共 3 分
3. 磁通量矢量式得 2 分，结果得 1 分，共 3 分
4. 法拉第电磁感应定律得 3 分，计算感应电动势得 1 分，共 4 分
5. 感生电动势方向得 1 分

### 【0302C09】

半径为  $R$  的长直密绕螺线管单位长度的线圈匝数为  $n$ 。在管外有一个包围着螺线管、面积为  $S$  的圆形平面线圈，线圈所在平面垂直于螺线管的轴线。螺线管中的电流  $i$  随时间做周期为  $T$  的变化，如图所示。求圆线圈中的感生电动势  $\mathcal{E}$ ，并画出  $\mathcal{E}$  随时间变化的曲线，图中须注明时间坐标。



## 解答

长直密绕螺线管的磁场可以由安培环路定理求得，取一矩形做为安培环路，矩形的一对边与螺线管轴线平行，其中一条边在螺线管内部，一条边在螺线管外部，这对边长为  $L$ ；另一对边与螺线管轴线垂直，则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot L = \mu_0 \cdot nLi$$

$$B = \mu_0 ni$$

长直密绕螺线管的磁场只分布在管内，而且管内磁场可以近似认为是匀强磁场，选择磁场方向为磁通量的正方向，则通过线圈的磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 ni \cdot \pi R^2 = \mu_0 n \pi R^2 i$$

根据法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

可得，任意  $t$  时刻线圈中的感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \frac{di}{dt}$$

当  $0 < t < \frac{T}{4}$  时， $\frac{di}{dt} = \frac{I_m}{T/4} = \frac{4I_m}{T}$ ，感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T} = -\mathcal{E}_0$$

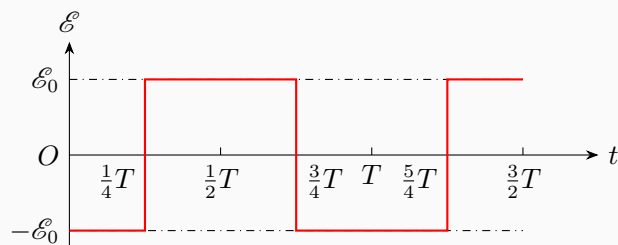
当  $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$  时， $\frac{di}{dt} = \frac{-2I_m}{T/2} = -\frac{4I_m}{T}$ ，感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \left(-\frac{4I_m}{T}\right) = \frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T} = \mathcal{E}_0$$

当  $\frac{3T}{4} < t < T$  时， $\frac{di}{dt} = \frac{I_m}{T/4} = \frac{4I_m}{T}$ ，感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T} = -\mathcal{E}_0$$

所以  $\mathcal{E}$  随时间变化的曲线如下图所示：



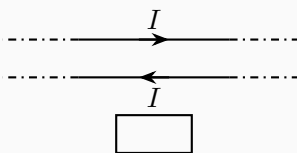


## 评分标准

1. 安培环路定理 4 分，磁感应强度 1 分，共 5 分
2. 磁通量矢量表达式 2 分，结果 1 分，共 3 分
3. 法拉第电磁感应定律 4 分，感应电动势 1 分，共 5 分
4. 分区域计算并画图 7 分，无计算只画图最多 3 分

## 【0302A06】

两根无限长平行直导线通有大小相等方向相反的电流  $I$ ，并各以  $\frac{dI}{dt}$  的变化率增长，一矩形导体线圈静止位于导线平面内 (如图)，则



- (A) 线圈中无感应电流  
(B) 线圈中感应电流为顺时针方向  
(C) 线圈中感应电流为逆时针方向  
(D) 线圈中感应电流方向不确定

## 答案

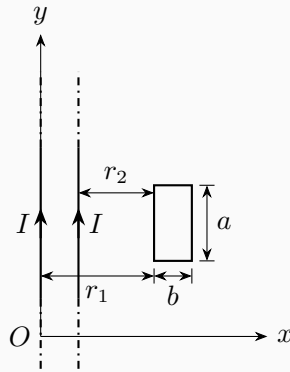
B

## 解析

在矩形线圈所在处，下导线比上导线所产生的磁场大，而下导线产生的磁场的方向垂直纸面向外，上导线产生的磁场的方向垂直纸面向内，所以合磁场的方向垂直纸面向外。当电流变化时，磁场大小也跟着发生变化，所以磁通量也发生变化，电流增大，磁通量增大，根据楞次定律，感应电流的所产生的磁场要试图阻止磁通量的增加，所以感应电流的方向应该为顺时针方向。

## 【0302C10】

如图所示直角坐标系的  $xy$  平面内，有两根平行长直导线和一个矩形导线框，它们的位置和尺寸如图中所标示。已知两导线中的电流都为  $I = I_0 \sin(\omega t)$ ，其中  $I_0$  和  $\omega$  为常数。求 (1) 任意  $t$  时刻线框所在区域任意位置的磁感应强度的大小和方向；(2) 任意  $t$  时刻穿过线框所围面积的磁通量；(3) 任意  $t$  时刻导线框中的感应电动势。



## 解答

(1) 无限长直载流导线的磁场可以由安培环路定理求得，选择与载流导线垂直，以载流导线为圆心，任意  $r$  为半径的圆为安培环路，则有

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r$  为场点到载流导线的距离，两根载流导线在矩形框所在区域任意位置的磁感应强度的方向都垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向)。一般地设场点坐标为  $(x, y)$ ，左边载流导线在场点的磁感应强度的大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x}$$

右边载流导线在场点的磁感应强度的大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi(x - r_1 + r_2)}$$

所以总的磁场方向垂直纸面向里 (沿  $z$  轴负方向)，大小为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x - r_1 + r_2} \right]$$

(2) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。取  $x \rightarrow x + dx$  部分矩形，通过它的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = Ba dx = \frac{\mu_0 I_0 a \sin(\omega t)}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x - r_1 + r_2} \right] dx$$

所以通过整个线框所围面积的磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{\mu_0 I_0 a \sin(\omega t)}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x - r_1 + r_2} \right] dx \\ &= \frac{\mu_0 I_0 a \sin(\omega t)}{2\pi} [\ln x + \ln(x - r_1 + r_2)] \Big|_{r_1}^{r_1+b} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 a \sin(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{(r_1 + b)(r_2 + b)}{r_1 r_2}$$

(3) 根据法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

可得, 任意  $t$  时刻导线框中的感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I_0 \omega a \cos(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{(r_1 + b)(r_2 + b)}{r_1 r_2}$$

### 评分标准

1. 安培环路定理 4 分,  $B_1$ 、 $B_2$  各 2 分,  $B = B_1 + B_2$  得 1 分, 共 9 分
2. 磁通量矢量式 2 分, 小矩形的磁通量 2 分, 总的磁通量 2 分, 共 6 分
3. 法拉第电磁感应定律 3 分, 电动势 2 分, 共 5 分

### 【0302A07】

$\oint_L \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ , 式中  $\vec{E}_K$  为感生电场的电场强度, 此式表明

- (A) 闭合曲线  $L$  上感生电场的电场强度处处相等
- (B) 感生电场是保守力场
- (C) 感生电场的电场强度线不是闭合曲线
- (D) 在感生电场中不能像对静电场那样引入电势的概念

### 答案

D

### 解析

感生电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

感生电场  $\vec{E}_K$  沿任意一个闭合曲线的环流等于通过该闭合曲线所围面积的磁通量随时间的变化率的负数, 等于沿该闭合曲线的感生电动势。这里并没有要求闭合曲线上各点的感生电场相等。而从上式也可以看出一般情况下感生电场沿任意闭合曲线的积分并不等于零, 因此感生电场不是保守场, 不能定义势能。从这里, 看不出感生电场的电场线是不是闭合曲线。

## 【0302A08】

下列有关静电场和感生电场说法正确的是

- (A) 静电场和感生电场都是非保守场 (B) 静电场和感生电场都是保守场  
(C) 静电场是保守场，感生电场是非保守场 (D) 静电场是非保守场，感生电场是保守场

## 答案

C

## 3、互感和自感

## 3.1 互感

## 【0303A01】

两个相距不太远的平面圆线圈，其中一个线圈的轴线恰好通过另一个线圈的圆心，下面哪种情况互感系数近似为零？

- (A) 两线圈的轴线互相平行放置 (B) 两线圈并联  
(C) 两线圈的轴线互相垂直放置 (D) 两线圈串联

## 答案

C

## 解析

计算互感的基本方法是假定一个线圈中通过电流  $I$ ，计算通过另一线圈的磁通量  $\Phi$  (磁链  $\Psi$ )，二者的比值即为互感

$$M = \frac{\Phi}{I}$$

如果互感近似为零，则说明通过另一线圈的磁通量近似为零，所以磁场线与线圈平面平行。所以，两线圈的轴线互相垂直放置时，互感近似为零。

## 【0303A02】

在真空中一个通有电流的线圈  $a$  所产生的磁场内有另一个线圈  $b$ ， $a$  和  $b$  相对位置固定。若线圈  $b$  中电流为零 (断路)，则线圈  $b$  与  $a$  间的互感系数

- (A) 一定为零 (B) 一定不为零  
(C) 可为零也可不为零，与线圈  $b$  中电流无关 (D) 是不可能确定的

答案

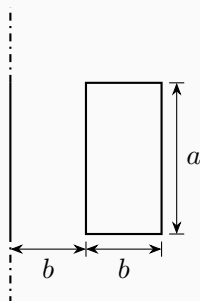
C

解析

互感与两个线圈的形状、位置等有关，与线圈中是否通电无关。计算互感的基本思路是假定一个线圈中通以电流，计算另一线圈中的磁通量或磁链，二者相除即为互感。

【0303B01】

长直导线旁有一个与其共面的矩形线圈，线圈匝数为  $N$ ，尺寸和位置如图所示，则它们之间的互感系数为\_\_\_\_\_。

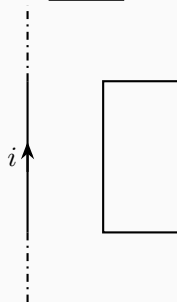


答案

$$\frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln 2$$

【0303B02】

如图所示，矩形线圈和长直导线之间的互感系数为  $M$ ，长直导线通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ 。当长直导线中电流  $i = 0$  的瞬间，通过矩形线圈的磁通量为\_\_\_\_\_。

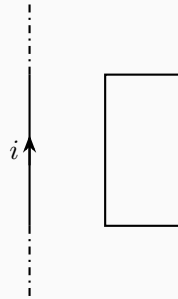


答案

0

## 【0303B03】

如图所示，矩形线圈和长直导线之间的互感系数为  $M$ ，长直导线通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ 。当长直导线中电流  $i = 0$  的瞬间，矩形线圈中的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

 $MI_0\omega$ 

## 3.2 自感

## 【0303A03】

当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变，且无铁磁性物质时，若线圈中的电流强度变小，则线圈的自感系数

- (A) 变大，与电流成反比关系 (B) 变小  
(C) 变大，但与电流不成反比关系 (D) 不变

## 答案

D

## 【0303A04】

自感为  $0.25 \text{ H}$  的线圈，当电流在  $4 \text{ s}$  内由  $2 \text{ A}$  均匀减小到零时，线圈中自感电动势的大小为

- (A)  $0.125 \text{ V}$  (B)  $3.5 \text{ V}$  (C)  $0.031 \text{ V}$  (D)  $0.0078 \text{ V}$

## 答案

A

## 【0303B04】

一自感线圈中，电流强度在  $0.002 \text{ s}$  内均匀地由  $10 \text{ A}$  增加到  $12 \text{ A}$ ，此过程中线圈内自感电动势为  $400 \text{ V}$ ，则线圈的自感系数为\_\_\_\_\_  $\text{H}$ 。

答案

0.4

解析

根据自感电动势的定义，有

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \left| \frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}} \right| = \left| \frac{\mathcal{E} \Delta t}{\Delta I} \right| = \frac{400 \times 0.002}{12 - 10} = 0.4 \text{ H}$$

【0303B05】

半径为  $a$  的无限长密绕直螺线管，单位长度上的匝数为  $n$ ，则单位长度上的自感系数等于\_\_\_\_\_。

答案

 $\mu_0 n^2 \pi a^2$ 

【0303B06】

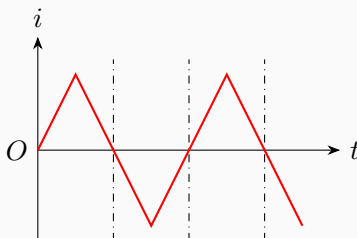
单位长度上的匝数为  $n$  的无限长密绕直螺线管，单位长度上的自感系数为  $L$ ，螺线管中通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ ，其中  $I_0$ 、 $\omega$  为常数。当螺线管中电流  $i = 0$  的瞬间，单位长度的螺线管上的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。

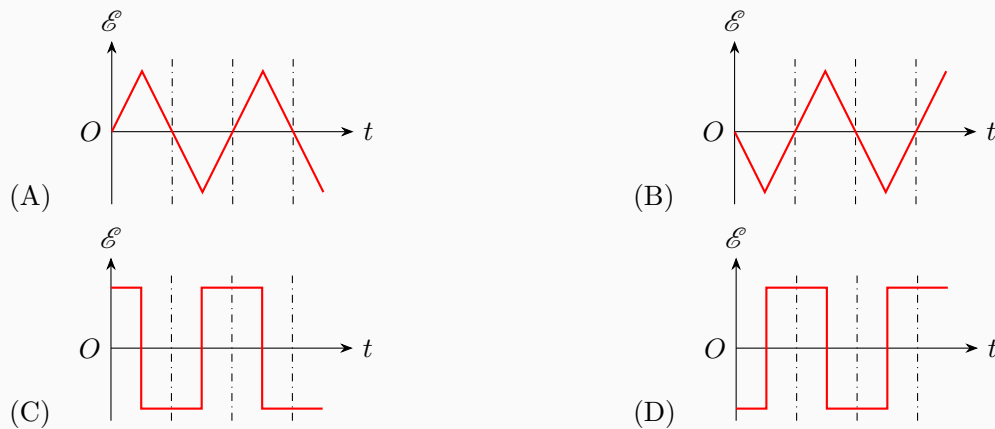
答案

 $LI_0\omega$ 

【0303A05】

在一自感线圈中通过的电流  $i$  随时间  $t$  的变化规律如图所示，若以  $i$  的正流向作为  $\mathcal{E}$  的正方向，则代表线圈内自感电动势  $\mathcal{E}$  随时间  $t$  变化规律的曲线应为





答案

D

解析

法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

自感电动势

$$\mathcal{E} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \propto -\frac{di}{dt}$$

第一小段, 电流线性增大,  $\frac{di}{dt} > 0$ , 自感电动势为一个负的不变的值。第二小段, 电流线性减小,  $\frac{di}{dt} < 0$ , 自感电动势为一个正的不变的值。

### 3.3 串联线圈的自感

【0303A06】

已知一螺绕环的自感系数为  $L$ 。若将该螺绕环锯成两个半环式的螺线管, 则两个半环螺线管的自感系数

- (A) 都等于  $\frac{1}{2}L$  (B) 有一个大于  $\frac{1}{2}L$ , 另一个小于  $\frac{1}{2}L$   
 (C) 都大于  $\frac{1}{2}L$  (D) 都小于  $\frac{1}{2}L$

答案

D



## 解析

两个自感分别为  $L_1$ 、 $L_2$ ，互感为  $M$  的线圈顺接串联时等效于一个自感线圈，其自感为

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

当  $L_1 = L_2$  时，显然有

$$L_1 = L_2 = \frac{L}{2} - M$$

其中  $M$  为正数，所以两个半环螺线管的自感系数均小于  $\frac{1}{2}L$ 。

## 3.4 自感磁能

## 【0303A07】

一无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为  $n$ ，横截面面积为  $S$ ，管内外均为真空。当该螺线管通有恒定电流  $I$  时

- (A) 电流恒定，则单位长度上自感为 0                      (B) 单位长度上自感为  $\mu_0 n^2 S$ ，与电流无关  
(C) 单位长度上自感为  $\mu_0 n S$ ，与电流无关                      (D) 单位长度上储能与电流  $I$  成正比

## 答案

B

## 【0303B07】

真空中一长直密绕螺线管通有电流  $I$ ，螺线管面积为  $S$ ，长度为  $L$ ，单位长度的匝数为  $n$ ，该螺线管储存的磁能为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{2} \mu_0 n^2 L S I^2$$

## 【0303B08】

长直密绕螺线管的半径为  $R$ ，单位长度上的匝数为  $n$ ，管内外均为真空。当该螺线管通有电流  $I$  时，单位长度的螺线管储存的磁能为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 I^2$$

## 【0303B09】

一环内外半径差别不大、平均半径为  $R$ 、截面积为  $S$  的环形螺线管 (螺绕环)，其上密绕有  $N$  匝线圈，管内为真空。当线圈中通有电流强度为  $I$  的电流时，管内存储的磁能为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\mu_0 N^2 S I^2}{4\pi R}$$

## 【0303B10】

自感为  $0.25 \text{ H}$  的线圈中，当电流在  $1 \text{ s}$  内由  $2 \text{ A}$  均匀减小到  $0$  时，自感磁能变化了\_\_\_\_\_J。

## 答案

$$0.5$$

## 【0303B11】

有两个长直密绕螺线管，管内均为真空，长度及总匝数都相等，半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ 。设  $R_1 : R_2 = 1 : 2$ ，将这两个螺线管串联在电路中，二者之间的互感可忽略不计，当通电稳定后，两螺线管内的磁能之比  $W_{m1} : W_{m2} =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$1 : 4$$

## 【0303B12】

真空中两只长直密绕螺线管 1 和 2，长度相等，总匝数相同，直径之比  $d_1 : d_2 = 1 : 4$ 。当它们通以相同电流时，两螺线管储存的磁能之比  $W_{m1} : W_{m2} =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$1 : 16$$

## 解析

假定螺线管中的电流为  $I$ ，长度为  $L$ ，匝数为  $N$ ，直径为  $d$ ，忽略边缘效应，即可视为无限长直螺线管，则管内磁场可由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot L = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

所以通过螺线管的磁链为

$$\Phi = NBS = N \times \frac{\mu_0 N I}{L} \times \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\mu_0 N^2 I \pi d^2}{4L}$$

所以自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4L}$$

所以磁场能量为

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

所以两螺线管的磁能之比为

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{16}$$

### 【0303A08】

两个线圈 1 和 2 并联地接到一电动势恒定的电源上，线圈 1 的自感和电阻分别是线圈 2 的两倍，两个线圈之间的互感可忽略不计，当达到稳定状态后，线圈 1 的磁场能量与 2 的磁场能量的比值是

- (A) 1 : 2                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 4

### 答案

A

## 第四章 电磁介质

### 1、电介质

#### 1.1 电介质对电场和电容的影响

【0401A01】

一空气平行板电容器充电后与电源断开，然后在两极板间充满某种各向同性、均匀电介质，则与充入介质前相比较，

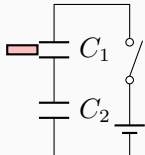
- (A) 电容增大，两极板间电压增大 (B) 电容增大，两极板间电压减小  
(C) 电容减小，两极板间电压增大 (D) 电容减小，两极板间电压减小

答案

B

【0401A02】

两空气电容器  $C_1$  和  $C_2$  串联起来接上电源充电，然后将电源断开，再把一块电介质板插入  $C_1$  中，则



- (A)  $C_1$  上电势差减小， $C_2$  上电势差增大 (B)  $C_1$  上电势差减小， $C_2$  上电势差不变  
(C)  $C_1$  上电势差增大， $C_2$  上电势差减小 (D)  $C_1$  上电势差增大， $C_2$  上电势差不变

答案

B

解析

电容器充电后与电源断开，极板上所带电荷量不会发生变化。电容器的电容

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

当电容器中插入介质，电容器的电容增大，所以电容器极板间的电势差减小。

所以，对于  $C_1$ ，电容增大，电荷不变，电势差减小；对于  $C_2$ ，电容不变，电荷不变，电势差不变。

## 【0401B01】

平行板电容器的极板面积为  $S$ ，两极板间距为  $d$ 。在两极板之间平行地插入相对介电常数为  $\epsilon_r$ 、面积为  $S$ 、厚度为  $\frac{1}{3}d$  的电介质，此时电容器的电容值为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{3\epsilon_0\epsilon_r S}{(2\epsilon_r+1)d}$$

## 【0401B02】

两极板间距为  $d$  的真空平行板电容器的电容为  $C_0$ ，在两极板之间平行地插入相对介电常数为  $\epsilon_r$ 、面积与极板相同、厚度为  $\frac{2}{3}d$  的电介质，此时电容器的电容值为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2}C_0$$

## 【0401B03】

平行板真空电容器的电容为  $C_0$ ，充电后两极板间的电场强度的大小为  $E_0$ 。断开电源，并在两极板间充满绝对介电常数为  $\epsilon$  的均匀电介质，此时两极板间的电场强度的大小为  $E$ ，则  $E : E_0 =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\epsilon_0 : \epsilon$$

## 【0401B04】

平行板真空电容器的电容为  $C_0$ ，充电后断开电源，并在两极板间充满绝对介电常数为  $\epsilon$  的均匀电介质，此时的电容为  $C$ ，则  $C : C_0 =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\epsilon : \epsilon_0$$

## 【0401A03】

有一个带正电的导体球壳。当球壳内充满电介质、球壳外是真空时，球壳外某一点的电场强度的大小记为  $E_1$ ，电势记为  $U_1$  (取无穷远处为电势零点)；当球壳内、外均为真空时，球壳外同一点的电场强度的大小记为  $E_2$ ，电势记为  $U_2$  (取无穷远处为电势零点)，则有

- (A)  $E_1 = E_2, U_1 = U_2$  (B)  $E_1 = E_2, U_1 > U_2$  (C)  $E_1 > E_2, U_1 > U_2$  (D)  $E_1 < E_2, U_1 < U_2$

## 答案

A

## 解析

电位移矢量的高斯定理

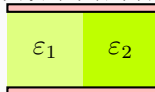
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

导体球壳，当壳内空腔不带电时，电荷只分布在外表面，不管腔内是介质还是真空，腔内均无电场，而壳外空间的电场和电势均相当于球壳所带电荷全部集中在球心时的情况。题目所给两种情况，壳外空间均为真空，所以壳外空间的电场强度没有发生变化，当都以无穷远处为电势零点，或者选择任意同一个位置为电势零点，壳外同一位置的电势保持不变。

## 1.2 电位移矢量

## 【0401A04】

平行板电容器充电后，左、右分别充满介电常数不同的各向同性均匀电介质，则两种电介质内



- (A) 电场强度相等，电位移矢量相等 (B) 电场强度相等，电位移矢量不等  
(C) 电场强度不等，电位移矢量相等 (D) 电场强度不等，电位移矢量不等

## 答案

B

## 【0401A05】

平行板电容器始终与端电压一定的电源相连。当电容器两极板间为真空时，极板间的电场强度为  $\vec{E}_0$ ，电位移矢量为  $\vec{D}_0$ ；当两极板间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质时，极板间的电场强度为  $\vec{E}$ ，电位移矢量为  $\vec{D}$ ，则

- (A)  $\vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{E}$ ,  $\vec{D} = \vec{D}_0$   
 (C)  $\vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{E}$ ,  $\vec{D}_0 = \varepsilon_r \vec{D}$

- (B)  $\vec{E} = \vec{E}_0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_r \vec{D}_0$   
 (D)  $\vec{E} = \vec{E}_0$ ,  $\vec{D} = \vec{D}_0$

**答案**

B

**解析**

当电容器的极板始终与电源相联, 则极板两端的电压保持不变。而极板间距保持不变, 所以板间的电场强度保持不变,  $\vec{E} = \vec{E}_0$ 。平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

介质不同, 电容不同, 极板上所带电量不同。由电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

板间的电位移矢量不同。

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{D}_0$$

**【0401A06】**

在各向同性的电介质中, 当外电场不是很强时, 电极化强度矢量  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , 式中  $\vec{E}$  是

- (A) 自由电荷产生的电场强度 (B) 束缚电荷产生的电场强度  
 (C) 自由电荷和束缚电荷共同产生的电场强度 (D) 所求场点的分子电偶极子产生的电场强度

**答案**

C

**1.3 电位移矢量的高斯定理****【0401A07】**

关于电位移矢量的高斯定理, 下列说法中正确的是

- (A) 高斯面内不包围自由电荷, 则高斯面上各点电位移矢量为零  
 (B) 高斯面上处处电位移矢量为零, 则高斯面内必不存在自由电荷  
 (C) 高斯面的电位移矢量的通量仅与高斯面内的自由电荷有关  
 (D) 以上说法都不正确

答案

C

解析

通过任意一个封闭曲面的电位移矢量的通量，等于高斯面所包围体积中自由电荷的代数和。

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

但是高斯面上各点的电场强度以及电位移矢量是由所有电荷所激发产生的，不仅仅包括面内的电荷，也包括面外的电荷，不仅仅包括自由电荷，也包括束缚电荷。如果高斯面上处处  $\vec{D}$  为零，只能说明高斯面内所含的自由电荷的代数和为零，可能包含等量的正电荷和负电荷。

【0401A08】

在静电场中，做闭合曲面  $S$ ，若有  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$  (式中  $\vec{D}$  为电位移矢量)，则  $S$  面内必定

- (A) 既无自由电荷，也无束缚电荷 (B) 没有自由电荷  
(C) 自由电荷和束缚电荷的代数和为零 (D) 自由电荷的代数和为零

答案

D

解析

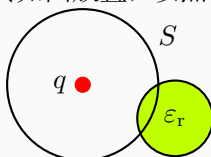
电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

公式右边为高斯面  $S$  所包围体积中所有自由电荷的代数和。

【0401A09】

在一点电荷  $q$  产生的静电场中，一块电介质如图放置，以点电荷所在处为球心做一球面  $S$ ，则对此球面



- (A) 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强  
(B) 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强  
(C) 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立  
(D) 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立



答案

B

解析

电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

高斯定理对于任意电场中的任意封闭曲面均成立。但要用它来求电场时，通常要求电荷分布具有某种对称性，并根据对称性选择适当的高斯面，目的在于能够把上式左边的电位移通量积分出来，所以要求所选择的高斯面至少是分成若干区域，在每个区域上电位移通量可以表示成电位移矢量的大小与面积的乘积。

【0401A10】

在空气平行板电容器中，平行地插入一块各向同性均匀电介质板。当电容器充电后，若忽略边缘效应，则电介质中的电场强度  $\vec{E}_1$  与空气中的电场强度  $\vec{E}_0$  相比较，应有

$$\vec{E}_0$$

$$\vec{E}_1$$

(A)  $E_1 > E_0$ ，两者方向相同(B)  $E_1 = E_0$ ，两者方向相同(C)  $E_1 < E_0$ ，两者方向相同(D)  $E_1 < E_0$ ，两者方向相反

答案

C

解析

电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

充电之后，极板上所带电荷保持不变，选择两个不同的高斯柱面，柱面的底面与极板平行，一个底面在极板内，另一个底面分别在介质中和空气中，侧面与极板垂直，很容易求得介质和空气中的电位移矢量相等，即  $\vec{D} = \vec{D}_0$ 。所以

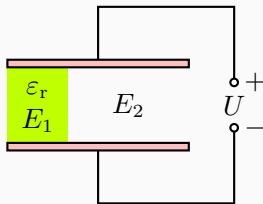
$$\varepsilon \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

所以二者方向相同，大小满足

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_r} < 1$$

## 【0401B05】

已知平行板电容器的极板面积为  $S$ ，板间距离为  $d$ ，两极板间充有一部分电介质，如图所示。将该电容器接在电压为  $U$  的电源上，设介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ ，则电介质内、外的电场强度的大小之比  $E_1 : E_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

1 : 1

## 【0401B06】

一个半径为  $R$  的薄金属球壳，带有电荷  $q$ ，壳内真空，壳外是无限大的相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质。取无穷远处为电势零点，则球壳的电势  $U = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

## 解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，由高斯定理很容易求得球外空间的电场强度。

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ D \cdot (4\pi r^2) &= q \\ D &= \frac{q}{4\pi r^2} \\ E &= \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}\end{aligned}$$

所以，以无穷远处为电势零点，球壳的电势为

$$V = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \int_R^\infty \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} dr = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R}$$

## 【0401B07】

一个带电量为  $q$ 、内半径为  $R_1$ 、外半径为  $R_2$  的金属球壳，壳内 ( $r < R_1$ ) 是真空，壳外 ( $r > R_2$ ) 是相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的无限大各向同性均匀电介质，则球壳内距球心为  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) 处的电场强度的

大小为\_\_\_\_\_。

**答案**

0

**【0401B08】**

半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的两个同轴金属圆筒，其间充满着相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质。设两筒上单位长度带有的电荷分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ ，则电介质中到轴线的距离为  $r(R_1 < r < R_2)$  处的电位移矢量的大小为\_\_\_\_\_。

**答案**

$\frac{\lambda}{2\pi r}$

**解析**

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，所以可以使用高斯定理来计算电场。选择与圆筒同轴的、半径为  $r$ 、高度为  $h$  的圆柱面为高斯面，根据电位移矢量的高斯定理，有

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ D \cdot (2\pi r h) &= \lambda h \\ D &= \frac{\lambda}{2\pi r} \\ E &= \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}\end{aligned}$$

## 1.4 极化电荷

**【0401B09】**

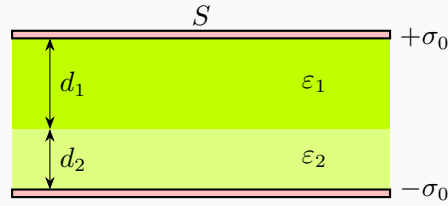
导体球外充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质，若测得电介质内靠近导体表面附近的电场强度的大小为  $E$ ，则与导体球面相邻的电介质表面处，极化电荷的面密度为\_\_\_\_\_。

**答案**

$\epsilon_0(1 - \epsilon_r)E$

## 【0401B10】

一个平行板电容器，极板面积为  $S$ ，极板间距为  $d$ ，极板之间有两层各向同性的电介质层，其厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$  ( $d_1 + d_2 = d$ )，介电常数分别为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ 。当极板上自由电荷的面密度为  $\pm\sigma_0$  时，介电常数为  $\varepsilon_1$  的电介质与极板相邻的表面的极化电荷面密度为\_\_\_\_\_。

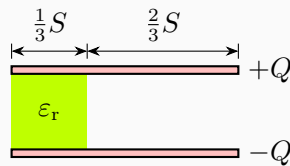


## 答案

$$-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_0$$

## 【0401C01】

一个平行板电容器的极板面积为  $S$ ，板间距离为  $d$ ，充满电后极板上带电量为  $\pm Q$ 。现将电容器与电源断开，然后在两极板间插入相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性的均匀电介质，如图所示。求插入电介质后，(1) 正极板上两个区域各自的自由电荷面密度；(2) 电介质内的电位移矢量的大小和电场强度的大小；(3) 与正极板相邻的电介质表面处极化电荷面密度。



## 解答

(1) 设两个区域的自由电荷面密度分别为  $\sigma_{01}$  和  $\sigma_{02}$ 。分别在左右两个区域取两个圆柱面，圆柱的底面与极板表面平行，面积为  $\Delta S$ ，一个底面在极板内部，另一个底面在两极板之间的电介质内部或空气中，圆柱侧面与极板表面垂直，则根据电位移矢量的高斯定理，有

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D\Delta S &= \sigma_0 \Delta S \\ D &= \sigma_0 \\ E &= \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \\ E_1 &= \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, E_2 = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

左右两个区域，两个极板之间的电压相同，

$$E_1 d = E_2 d$$

极板的带电量为  $Q$ ,

$$\sigma_{01} \times \frac{1}{3}S + \sigma_{02} \times \frac{2}{3}S = Q$$

联立解得

$$\begin{aligned}\sigma_{01} &= \frac{3\varepsilon_r Q}{(2 + \varepsilon_r)S} \\ \sigma_{02} &= \frac{3Q}{(2 + \varepsilon_r)S}\end{aligned}$$

(2) 电介质内的电位移矢量的大小

$$D_1 = \sigma_{01} = \frac{3\varepsilon_r Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

电场强度的大小

$$E_1 = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{3Q}{(2 + \varepsilon_r)\varepsilon_0 S}$$

(3) 在左侧, 同前取圆柱面为高斯面, 由电场强度的高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0} \\ E_1 \Delta S &= \frac{\sigma_{01} \Delta S + \sigma' \Delta S}{\varepsilon_0} \\ \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} &= \frac{\sigma_{01} + \sigma'}{\varepsilon_0} \\ \sigma' = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_r} - \sigma_{01} &= \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \sigma_{01} = \frac{3(1 - \varepsilon_r)Q}{(2 + \varepsilon_r)S}\end{aligned}$$

### 评分标准

1. 求自由电荷面密度 13 分
  - (a) 电位移矢量的高斯定理 4 分
  - (b) 电位移矢量与电场强度之间的关系 1 分
  - (c) 两个电场强度各 1 分共 2 分
  - (d) 电压相同 2 分
  - (e) 总带电量 2 分
  - (f) 解得两个自由电荷面密度各 1 分共 2 分
2. 电位移矢量 1 分, 电场强度 1 分
3. 极化电荷面密度 5 分
  - (a) 电场强度的高斯定理 4 分

(b) 解得极化电荷面密度 1 分

### 【0401C02】

半径为  $R_1$  的金属球被一层外半径为  $R_2$  的均匀电介质球壳包裹着，电介质的相对介电常数为  $\epsilon_r$ ，金属球带正电荷  $Q$ ，求：(1) 电介质内部的电位移矢量的大小和电场强度的大小；(2) 金属球和电介质外表面之间的电势差；(3) 介质内表面 ( $r = R_1$ ) 处的极化电荷面密度。

### 解答

(1) 电荷分布具有球对称性，可以用高斯定理求电场。在电介质内取一个与金属球同心、半径为  $r$  的球面做为高斯面，由电位移矢量的高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D \cdot (4\pi r^2) &= Q \\ D &= \frac{Q}{4\pi r^2} \\ E &= \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}\end{aligned}$$

(2) 金属球和电介质外表面之间的电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(3) 取前面同一个球面为高斯面，由电场强度的高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_0 + q'}{\epsilon_0} \\ E \cdot (4\pi r^2) &= \frac{Q + q'}{\epsilon_0} \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \cdot (4\pi r^2) &= \frac{Q + q'}{\epsilon_0} \\ \frac{Q}{\epsilon_r} &= Q + q' \\ q' &= \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} Q \\ \sigma' &= \frac{q'}{4\pi R_1^2} = \frac{(1 - \epsilon_r)Q}{4\pi \epsilon_r R_1^2}\end{aligned}$$

### 评分标准

1. 电位移矢量的高斯定理 4 分
2. 电位移矢量与电场强度之间的关系 2 分，

3. 电位移 1 分, 电场强度 1 分
4. 电势差矢量表达式 2, 积分 2 分, 结果 2 分, 共 6 分
5. 电场强度的高斯定理 4 分, 极化电荷面密度 2 分

## 【0401C03】

一被均匀极化的介质球, 半径为  $R$ , 电极化强度矢量为  $\vec{P}$ 。试求: (1) 球表面的极化电荷面密度; (2) 总极化电荷; (3) 极化电荷在球心处产生的电场强度。

## 解答

(1) 以球心为球坐标原点, 以极化强度矢量  $\vec{P}$  的方向为  $z$  轴正方向, 介质球表面上任意一点的球坐标为  $(R, \theta, \varphi)$ , 该处球面面元的法向方向  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 与  $z$  轴的夹角为  $\theta$ , 根据极化电荷与电极化强度矢量之间的关系可得该处极化电荷面密度

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P \cos \theta$$

(2) 所以同一个  $\theta$  处极化电荷是均匀分布的, 取  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分视为一个均匀带电圆环, 其半径为  $r = R \sin \theta$ , 其带电量

$$dq' = \sigma' dS = (P \cos \theta) \cdot (2\pi R \sin \theta) \cdot (R d\theta) = 2\pi R^2 P \sin \theta \cos \theta d\theta$$

所以整个球面总的极化电荷

$$q' = \int_0^\pi 2\pi R^2 P \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 P \int_0^\pi \sin \theta (\cos \theta d\theta) = 2\pi R^2 P \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi = 0$$

(3) 点电荷的电场强度

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

由于对称性, 以上所取均匀带电圆环在球心处的电场强度的方向沿  $z$  轴负方向 (与  $\vec{P}$  反向), 大小

$$dE' = \int_0^\pi 2 \times \frac{\sigma' \cdot (R d\theta) \cdot (R \sin \theta d\varphi)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \cos \theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

所以整个球面上的极化电荷在球心处的总电场强度的方向沿  $z$  轴负方向 (与  $\vec{P}$  反向), 大小

$$\begin{aligned} E' &= \int_0^\pi \frac{P}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta (\sin \theta d\theta) \\ &= \frac{P}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{P}{3\epsilon_0} \\ \vec{E}' &= -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 极化电荷面密度得 5 分
  - (a) 建立球坐标系得 2 分
  - (b) 极化电荷面密度得 3 分
2. 总极化电荷得 5 分
  - (a) 取圆环，半径得 1 分，带电量得 2 分
  - (b) 积分求总极化电荷，上下限得 1 分，积分结果得 1 分
3. 计算电场强度得 10 分
  - (a) 点电荷的电场公式得 3 分
  - (b) 电场强度方向得 1 分
  - (c) 对称性、叠加原理求圆环的电场强度得 3 分
  - (d) 积分求总电场强度，上下限得 1 分，积分结果得 1 分
  - (e)  $\vec{E}'$  矢量式得 1 分

## 【0401C04】

一个半径为  $R_1$  的带电长圆柱体导体，单位长度带电量为  $+\lambda$ ，其外部被一层外半径为  $R_2$  的同轴圆柱筒均匀电介质包裹着，电介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ ，(1) 求空间各区域的电场强度大小；(2) 取圆柱轴线为电势零点，求电介质外表面的电势；(3) 求电介质内、外表面处的极化电荷面密度。

## 解答

(1) 静电平衡时，自由电荷均匀分布在圆柱体的表面上。电荷分布具有柱对称性，因此电场分布也具有柱对称性，可以用高斯定理求电场。取与圆柱体同轴、半径为  $r$ 、高度为  $h$  的圆柱面为高斯面，由电位移矢量的高斯定理，有

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \cdot (2\pi r h) = q_0$$

$$D = \frac{q_0}{2\pi r h}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q_0}{2\pi \varepsilon r h}$$

$r < R_1$ ，导体内，静电平衡，

$$q_1 = 0$$

$$D_1 = 0$$

$$E_1 = 0$$



$R_1 < r < R_2$ , 电介质内部,

$$\begin{aligned} q_2 &= \lambda h \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \\ D_2 &= \frac{\lambda}{2\pi r} \\ E_2 &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} \end{aligned}$$

$r > R_2$ , 介质外空气中,

$$\begin{aligned} q_3 &= \lambda h \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_0 \\ D_3 &= \frac{\lambda}{2\pi r} \\ E_3 &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

(2) 取圆柱轴线为电势零点, 则电介质外表面的电势

$$U = \int_{R_2}^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^0 E dr = \int_{R_2}^{R_1} E_2 dr + \int_{R_0}^0 E_1 dr = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

(3) 同前取圆柱面为高斯面, 由电场强度的高斯定理可得

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2\pi r h) &= \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$R_1 < r < R_2$ , 电介质内部,

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} \\ q_2 &= \lambda h \\ \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} \cdot (2\pi r h) &= \frac{\lambda h + q'_2}{\varepsilon_0} \\ \frac{\lambda h}{\varepsilon_r} &= \lambda h + q'_2 \\ q'_2 &= \frac{\lambda h}{\varepsilon_r} - \lambda h = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \lambda h \\ \sigma'_2 &= \frac{q'_2}{2\pi R_1 h} = \frac{(1 - \varepsilon_r)\lambda}{2\pi \varepsilon_r R_1} \end{aligned}$$

$r > R_2$ , 介质外空气中,

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \\ q_3 &= \lambda h \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot (2\pi r h) = \frac{\lambda h + q'_2 + q'_3}{\epsilon_0}$$

$$q'_3 = -q'_2$$

$$\sigma'_3 = \frac{q'_3}{2\pi R_2 h} = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r R_2}$$

## 评分标准

1. 电场分布 9 分
  - (a) 电位移矢量的高斯定理 4 分
  - (b) 电位移矢量与电场强度之间的关系 2 分
  - (c) 三个区域的电场各 1 分共 3 分
2. 电势 5 分
  - (a) 矢量表达式 2 分
  - (b) 分段积分 2 分
  - (c) 结果 1 分
3. 极化电荷 6 分
  - (a) 电场强度的高斯定理 4 分
  - (b) 两个表面极化电荷面密度各 1 分共 2 分

## 1.5 电介质的击穿

## 【0401C05】

两共轴的长导体圆筒组成的电容器，内筒半径为  $R_1$ ，外筒半径为  $R_2$ ，两筒之间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的电介质，已知电介质的击穿场强为  $E_M$ 。求：(1) 当电压升高时，哪个地方的电介质先被击穿？(2) 内筒上单位长度的最大带电量；(3) 两筒间能加的最大电压。

## 解答

(1) 平衡时电荷分布具有柱对称性，电场分布也具有柱对称性，电场强度可以由高斯定理求得，取与圆筒同轴、半径为  $r$ 、高度为  $h$  的圆柱面为高斯面，由电位移矢量的高斯定理，有

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \cdot (2\pi r h) = q_0$$

$$D = \frac{q_0}{2\pi r h}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q_0}{2\pi\varepsilon rh}$$

假定内筒单位长度的带电量为  $\lambda$ ，则  $R_1 < r < R_2$ ，介质内，

$$\begin{aligned} q_0 &= \lambda h \\ D &= \frac{\lambda}{2\pi r} \\ E &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \end{aligned}$$

所以  $r$  越小， $E$  越大，内筒附近的电介质先被击穿。

(2) 当内筒附近的电介质刚被击穿时

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} &= E_M \\ \lambda_M &= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_M \end{aligned}$$

(3) 当内筒附近的电介质刚被击穿时，电介质内部任意位置的电场强度

$$E = \frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} = \frac{R_1}{r} E_M$$

这时两筒之间的电压为

$$U_M = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_1 E_M}{r} dr = R_1 E_M \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### 评分标准

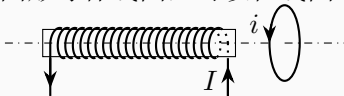
1. 电位移矢量的高斯定理 4 分
2. 电位移矢量与电场强度之间的关系 2 分
3. 计算电介质内部任意位置的电场强度 2 分
4. 得到内筒先被击穿 2 分
5. 内筒上单位长度的最大带电量 3 分
6. 计算电压 7 分
  - (a) 矢量表达式 3 分
  - (b) 积分 2 分
  - (c) 结果 2 分

## 2、磁介质

### 2.1 磁介质对磁场的影响

【0402A01】

如图所示，一载流螺线管的旁边有一圆形导体线圈，可以在线圈中产生图示方向的感应电流  $i$  的是



- (A) 载流螺线管向线圈靠近  
(B) 载流螺线管离开线圈  
(C) 载流螺线管中电流增大  
(D) 载流螺线管中插入铁芯

答案

B

解析

载流螺线管在线圈所在处产生的磁场是从左到右的，而且靠近螺线管处的磁场大小较大，远离螺线管处的磁场大小较小。

所以螺线管靠近线圈，相当于线圈靠近螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，而且磁通量大小增大，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量减小，感应电流的方向与图示方向应该相反。

如果螺线管离开线圈，相当于线圈离开螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，但磁通量大小变小，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量增大，感应电流的方向与图示方向相同。

如果载流螺线管中的电流增大，那么产生的磁场也增大，通过线圈的磁通量也增大，感应电流应该与图示方向相反。

当通过的电流不变而在螺线管中插入铁芯时，磁场变大，通过线圈的磁通量变大，因此线圈中会产生感应电流的方向与图示相反。

根据磁场强度的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

电流不变，所以螺线管内的  $H$  不变，但有没有磁介质，改变的是磁导率，从而改变磁场强度  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。

### 2.2 磁化电流

【0402C01】

- 一被均匀磁化的介质球，半径为  $R$ ，磁化强度矢量为  $\vec{M}$ 。试求：(1) 沿球面流动的磁化电流线密度  $i'$ ；(2) 总磁化电流  $I'$ ；(3) 磁化电流在球心处产生的磁感应强度  $\vec{B}'$ 。

## 解答

(1) 以球心为球坐标原点, 以磁化强度矢量  $\vec{M}$  的方向为  $z$  轴正方向, 介质球表面上任意一点的球坐标为  $(R, \theta, \varphi)$ , 该处球面面元的法向方向  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 与  $z$  轴的夹角为  $\theta$ , 根据磁化电流线密度与磁化强度矢量之间的关系可得该处磁化电流线密度

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

(2) 所以球面上  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分可视为一个载流细圆环, 其中流动的磁化电流为

$$dI' = i' dl = (M \sin \theta) \cdot (R d\theta) = MR \sin \theta d\theta$$

圆环半径为  $r = R \sin \theta$ 。所以整个球面上总的磁化电流

$$I' = \int_0^\pi MR \sin \theta d\theta = MR [-\cos \theta]_0^\pi = 2MR$$

(3) 电流元的磁场公式

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

由于对称性, 以上所取载流圆环在球心处的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向 (与  $\vec{M}$  同向), 大小

$$dB' = \int_0^\pi 2 \times \frac{\mu_0 (dI') \cdot (R \sin \theta d\varphi)}{4\pi R^2} \times \sin \theta = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta$$

所以整个球面上的磁化电流在球心处的总磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向 (与  $\vec{M}$  同向), 大小

$$\begin{aligned} B' &= \int_0^\pi \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 M}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta (\sin \theta d\theta) \\ &= \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right] \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 M \\ \vec{B}' &= \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 磁化电流线密度得 5 分

(a) 建立球坐标系得 2 分

(b) 磁化电流线密度得 3 分

2. 总磁化电流得 5 分

(a) 取圆环, 半径得 1 分, 电流得 2 分

(b) 积分求总磁化电流，上下限得 1 分，积分结果得 1 分

3. 计算磁感应强度得 10 分

(a) 电流元的磁场公式得 3 分

(b) 磁感应强度方向得 1 分

(c) 对称性、叠加原理求圆环的磁感应强度得 3 分

(d) 积分求总磁感应强度，上下限得 1 分，积分结果得 1 分

(e)  $\vec{B}'$  矢量式得 1 分

## 2.3 磁场强度的安培环路定理

### 【0402B01】

长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流  $I$  通过，其间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质。介质中离中心轴距离为  $r$  的某点处的磁场强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{I}{2\pi r}$$

### 【0402B02】

长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流  $I$  通过，其间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质。介质中离中心轴距离为  $r$  的某点处的磁感强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\mu I}{2\pi r}$$

解析

选择以中心轴为圆心，半径为  $r$  的圆周为回路，由磁场强度的安培环路定理可得

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I \\ H \cdot (2\pi r) &= I \\ H &= \frac{I}{2\pi r}\end{aligned}$$

所以磁感应强度为

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

## 【0402A02】

关于稳恒电流磁场的磁场强度，下列说法中正确的是

- (A) 磁场强度仅与传导电流有关
- (B) 若闭合曲线内没有包围传导电流，则曲线上各点的磁场强度必为零
- (C) 若闭合曲线上各点磁场强度均为零，则该曲线所包围传导电流的代数和为零
- (D) 以闭合曲线为边缘的任意曲面的磁场强度的通量均相等

## 答案

C

## 解析

磁场强度的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

上式右边仅仅是传导电流，但左边的  $\vec{H}$  是由传导电流和分子电流共同激发的磁场。

如果闭合曲线内没有包围传导电流，只能说明  $\vec{H}$  沿闭合曲线的环流为零，并不能说明闭合曲线上各点的  $\vec{H}$  一定为零。

磁场中的高斯定理为

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

由此可得，以闭合曲线  $L$  为边缘的任意曲面的  $\vec{B}$  通量均相等。而不同区域， $\vec{B}$  和  $\vec{H}$  的比例系数不一定相同，所以以闭合曲线  $L$  为边缘的任意曲面的  $\vec{H}$  通量不一定相等。

## 5、电磁场能

## 5.1 电容器的储能

## 【0405A01】

平行板介质电容器充满电后仍与电源保持连接，通过外力作用将其中的电介质板完全抽出，使其成为真空电容器，则抽出前后，以下描述错误的是

- (A) 极板上的电荷减少
- (B) 极板间的电场强度减少
- (C) 电容器的储能减少
- (D) 外力所做的功等于电容器储能的改变量

## 答案

B

## 【0405A02】

将一个空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后,在保持与电源连接的情况下,把一块与极板面积相同的各向同性均匀电介质板平行地插入两极板之间。介质板的插入及其所处位置的不同,对电容器储存电能的影响为

- (A) 储能减少,但与介质板相对极板的位置无关 (B) 储能减少,且与介质板相对极板的位置有关  
(C) 储能增加,但与介质板相对极板的位置无关 (D) 储能增加,且与介质板相对极板的位置有关

## 答案

C

## 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

在保持与电源连接的情况下,极板间的电压  $U$  保持不变,插入介质板,把一个电容器变成三个串联的电容器,三个电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon S}{d_2}, C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_3}$$

根据电容的串联公式

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon S} + \frac{d_3}{\varepsilon_0 S} = \frac{d_1 + d_2/\varepsilon_r + d_3}{\varepsilon_0 S}$$

$$C_{123} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2/\varepsilon_r + d_3}$$

而显然  $d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_r} + d_3 < d_1 + d_2 + d_3 = d$ , 所以

$$C_{123} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2/\varepsilon_r + d_3} > \frac{\varepsilon_0 S}{d} = C$$

即电容增大。

而由电容器的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2C} Q^2$$

电压保持不变,电容增大,所以电场能量增大。

## 【0405A03】

一个空气平行板电容器,充电后把电源断开,这时电容器中储存的能量为  $W_0$ ,然后在两极板间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质,则该电容器中储存的能量为

- (A)  $\frac{1}{\varepsilon_r} W_0$  (B)  $\varepsilon_r W_0$  (C)  $(1 + \varepsilon_r) W_0$  (D)  $W_0$



答案

A

【0405A04】

一个空气平行板电容器，接电源充电后电容器中储存的能量为  $W_0$ 。在保持恒压电源接通的条件下，在两极板间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质，则电容器中储存的能量为

- (A)  $\frac{1}{\epsilon_r} W_0$                       (B)  $\epsilon_r W_0$                       (C)  $(1 + \epsilon_r) W_0$                       (D)  $W_0$

答案

B

【0405B01】

一个空气电容器充电后切断电源，电容器储能  $W_0$ ，若此时在两极板间灌入相对介电常量为  $\epsilon_r$  的煤油，则电容器储能变为\_\_\_\_\_。

答案

 $\frac{1}{\epsilon_r} W_0$ 

解析

电容器充电后切断电源，极板上所带电量  $Q$  保持不变，极板间灌入介质时，改变了电容器的电容，从而改变了电场能量。

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$C' = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \epsilon_r C$$

$$W' = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2\epsilon_r C} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{\epsilon_r} W_0$$

【0405B02】

一个空气电容器充电后一直与电源相连接，电容器储能  $W_0$ ，若此时在两极板间灌入相对介电常量为  $\epsilon_r$  的煤油，则电容器储能变为\_\_\_\_\_。

答案

$$\varepsilon_r W_0$$

解析

若电容器一直与电源相连接, 则极板间电压  $U$  保持不变, 极板间灌入介质时, 改变了电容器的电容, 从而改变了电场能量。

$$\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0 S}{d} \\ C' &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C \\ W' &= \frac{1}{2} C' U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C U^2 = \varepsilon_r \frac{1}{2} C U^2 = \varepsilon_r W_0 \end{aligned}$$

【0405B03】

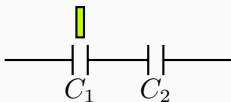
两极板间距为  $d$  的平行板电容器电容量为  $C_0$ , 充电  $Q$  后与电源断开。在两极板之间平行地插入与极板面积相同且厚度为  $\frac{2}{3}d$  的电介质板, 已知该电介质的相对介电常数  $\varepsilon_r = 3$ , 此时电容器的储能为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{5Q^2}{18C_0}$$

【0405A05】

如图所示, 两个完全相同的电容器  $C_1$  和  $C_2$ , 串联后与电源连接。现将一各向同性均匀电介质板插入  $C_1$  中, 则



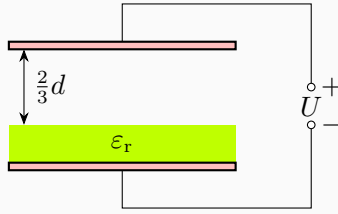
- (A) 电容器组总电容减小 (B)  $C_1$  上的电量大于  $C_2$  上的电量  
(C)  $C_1$  上的电压高于  $C_2$  上的电压 (D) 电容器组贮存的总能量增大

答案

D

【0405C01】

如图, 忽略边缘效应的平行板电容器, 极板面积为  $S$ , 板间距离为  $d$ , 接在电压为  $U$  的电源上, 电介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ 。求: (1) 等效电容; (2) 自由电荷面密度; (3) 电介质下表面处极化电荷的面密度; (4) 电容器中储存的静电能。



## 解答

(1) 平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

整个电容器可以看成两个电容器的串联，两个电容器的电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{2}{3}d} = \frac{3\varepsilon_0 S}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\frac{1}{3}d} = \frac{3\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

串联电容器组的等效电容

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{(1 + 2\varepsilon_r)d}$$

(2) 电容器电容、电压和电量之间的关系

$$Q = CU$$

所以极板上自由电荷的面密度为

$$\sigma_0 = \frac{Q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{3\varepsilon_0 \varepsilon_r}{(1 + 2\varepsilon_r)d} U$$

(3) 取一个圆柱面，两个底面与极板表面平行，面积为  $\Delta S$ ，一个底面在电容器负极板的内部，一个底面在电介质中，圆柱的侧面与极板表面垂直，取这个圆柱面为高斯面，由电位移矢量的高斯定理，可得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

$$D = \sigma_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

在同一个圆柱面上应用电场强度的高斯定理，可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$-E\Delta S = \frac{-\sigma_0\Delta S + \sigma'\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \sigma_0 - \varepsilon_0 E = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{(1 + 2\varepsilon_r)d}U$$

(4) 根据电容器的储能公式

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

所以电容器中储存的静电能为

$$W = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r S}{2(1 + 2\varepsilon_r)d}U^2$$

### 评分标准

1. 平行板电容器电容公式 2 分
2. 串联电容器组等效电容公式 2 分
3.  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C$  各 1 分共 3 分
4. 电容器电容、电压和电量之间的关系 2 分
5. 自由电荷面密度 2 分
6. 电位移矢量的高斯定理 2 分
7. 电场强度的高斯定理 2 分
8. 极化电荷面密度 2 分
9. 电容器的储能公式 2 分，结果 1 分共 3 分

## 5.2 电场能量

### 【0405A06】

一个平行板电容器，充电后与电源断开，当用绝缘手柄将电容器两极板间距离拉大，则两极板间的电势差  $U$ 、电场强度的大小  $E$ 、电场能量  $W$  将发生如下变化

- (A)  $U$  减小， $E$  减小， $W$  减小 (B)  $U$  增大， $E$  增大， $W$  增大  
(C)  $U$  增大， $E$  不变， $W$  增大 (D)  $U$  减小， $E$  不变， $W$  不变

### 答案

C

## 解析

电容器充电后与电源断开，极板上所带电荷量不会发生变化。电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

当极板间距离  $d$  增大，电容器的电容  $C$  减小， $Q$  不变，所以极板间的电势差  $U$  增大。而由高斯定理，极板上电荷量不变，板间电场强度不变，距离拉大，板间电势差也必然增大。

而电场强度不变，所以板间的电场能量密度

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

不变，但距离拉大时，板间电场分布的区域的体积增大，所以总的电场能量增大。

## 【0405A07】

一个空气平行板电容器充电后与电源断开，然后在两极板间充满某种各向同性、均匀电介质，则电场强度的大小  $E$ 、电容  $C$ 、电压  $U$ 、电场能量  $W$  四个量各自与充入介质前相比较，增大或减小的情形为

- (A)  $E$  增大， $C$  增大， $U$  增大， $W$  增大      (B)  $E$  减小， $C$  增大， $U$  减小， $W$  减小  
(C)  $E$  减小， $C$  减小， $U$  增大， $W$  减小      (D)  $E$  增大， $C$  减小， $U$  减小， $W$  增大

## 答案

B

## 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

充电后与电源断开，极板上所带电量  $Q$  保持不变，插入介质， $\varepsilon$  增大，所以电容  $C$  增大，电压  $U$  减小，极板间距不变，所以电场强度  $E$  减小。

当然也可以由电位移矢量的高斯定理可得，电量不变，电位移矢量不变，介电常数增大，所以电场强度减小，间距不变，所以电压减小。

而电场能量密度为

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

所以电位移矢量不变，电场强度减小，所以电场能量密度减小，电场能量减小。

也可以由电场能量

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2C}Q^2$$

电量保持不变，电容增大，所以电场能量减小。

## 【0405A08】

一个空气平行板电容器在充电后充入石蜡，石蜡注入时电容器仍与电源相接，那么注入石蜡后，场强  $E$ 、电容  $C$  和电场能量密度  $w$  的变化为

- (A)  $E$  不变,  $C$  减小,  $w$  增大 (B)  $E$  不变,  $C$  增大,  $w$  增大  
(C)  $E$  增大,  $C$  减小,  $w$  增大 (D)  $E$  减小,  $C$  减小,  $w$  减小

## 答案

B

## 【0405B04】

一个平行板电容器，充电后切断电源，然后使两极板间充满相对介电常量为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质，此时两极板间的电场能量是原来的\_\_\_\_\_倍。

## 答案

 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 

## 解析

平行板电容器充电后切断电源，则极板上所带的电荷保持不变。因此由电位移矢量的高斯定理可知，插入介质前后，极板间的电位移矢量保持不变，所以电场强度发生变化。

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 E \\ D' &= \epsilon_0 \epsilon_r E' \\ D &= D' \\ E' &= \frac{E}{\epsilon_r} \\ U' &= E' d = \frac{E}{\epsilon_r} d = \frac{U}{\epsilon_r} \\ W'_e &= \frac{1}{2} Q' U' = \frac{1}{2} Q \frac{U}{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} \left( \frac{1}{2} Q U \right) = \frac{1}{\epsilon_r} W_e \end{aligned}$$

## 【0405B05】

一个平行板电容器，两极板间电压为  $U$ ，极板面积为  $S$ ，两极板之间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质，电介质厚度为  $d$ ，则电介质中的电场能量密度为\_\_\_\_\_。

## 答案

 $\frac{\epsilon_0 \epsilon_r U^2}{2d^2}$

## 【0405B06】

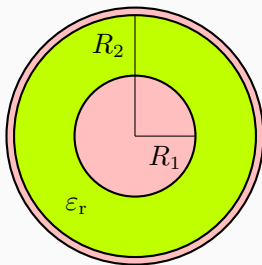
如果某带电体的体电荷密度增大为原来的 2 倍, 则其电场的能量变为原来的\_\_\_\_\_ 倍。

## 答案

4

## 【0405C02】

球形电容器由半径为  $R_1$  的金属球和与它同心的金属球壳组成, 球壳内半径为  $R_2$ , 其间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质。当内球带正电  $Q$  时, 求: (1) 电介质层内的电场强度的大小; (2) 电介质内表面的极化电荷面密度; (3) 电介质层内任意一点的电场能量密度; (4) 电介质层内所存储的总的电场能量。



## 解答

(1) 由于电荷分布具有球对称性, 可用高斯定理求电场分布。在电介质层内取一个与金属球同心的、半径为  $r$  的球面为高斯面, 由电位移矢量的高斯定理可得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \cdot (4\pi r^2) = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}$$

方向沿半径方向指向外 (球坐标系中的  $\vec{e}_r$ )。同样可以求得, 电介质层外区域 ( $r < R_1$ 、 $r > R_2$ ) 电场为零, 即电场只分布在电介质层内。

(2) 在同一个高斯面上应用电场强度的高斯定理, 可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\epsilon_0}$$

$$\frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q + q'}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q = Q + q'$$

$$q' = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon} Q$$

$$\sigma' = \frac{q'}{4\pi R_1^2} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

(3) 电介质层内的电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon r^4}$$

(4) 所以  $r \rightarrow r + dr$  部分的电场能量

$$dW_e = w_e dV = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr$$

所以电介质层内所存储的总的电场能量

$$W_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

### 评分标准

1. 介质层内的电场 7 分
  - (a) 电位移矢量的高斯定理 4 分
  - (b) 得到电位移矢量 1 分
  - (c) 电位移与电场强度之间的关系 1 分
  - (d) 得到电场强度大小 1 分
2. 极化电荷 6 分
  - (a) 电场强度的高斯定理 4 分
  - (b) 得到极化电荷分布 2 分
3. 电场的能量密度, 公式 2 分, 结果 1 分, 共 3 分
4. 总的电场能量 4 分
  - (a) 球层的电场能量 2 分
  - (b) 积分 1 分
  - (c) 结果 1 分

### 【0405C03】

半径为  $R_1$  的导体圆柱单位长度带电  $\lambda_1$ , 内半径为  $R_2$ 、外半径为  $R_3$  的导体圆柱筒单位长度带电  $\lambda_2$ , 二者同轴放置 ( $R_1 < R_2 < R_3$ ), 二者之间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性电介质, 忽略边缘效应, 求: (1) 电介质内部的电场强度的大小; (2) 导体圆柱与导体圆柱筒的电势差; (3) 电介质层内任意一点的电场能量密度; (4) 单位长度电介质层内的电场能量。



## 解答

(1) 电荷分布具有柱对称性，可以用高斯定理求电场。在电介质内部取一个与圆柱同轴、半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱面为高斯面，由电位移矢量的高斯定理可得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \cdot (2\pi r h) = \lambda_1 h$$

$$D = \frac{\lambda_1}{2\pi r}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\lambda_1}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}$$

(2) 导体圆柱与导体圆柱筒的电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\lambda_1}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3) 电介质层内的电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{\lambda_1^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

(4) 取  $r \rightarrow r + dr$ 、高度为单位长度的圆柱筒薄层，其中的电场能量

$$dW_e = w_e dV = \frac{\lambda_1^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \times (2\pi r \times 1 \times dr) = \frac{\lambda_1^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} dr$$

所以单位长度电介质层内的电场能量

$$W_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} dr = \frac{\lambda_1^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

## 评分标准

1. 计算电场 7 分

- (a) 电位移矢量的高斯定理 4 分
- (b) 得到电位移矢量 1 分
- (c) 电位移与电场强度之间的关系 1 分
- (d) 得到电场强度大小 1 分

2. 计算电势差 6 分

- (a) 积分公式 4 分
- (b) 结果 2 分

3. 电场的能量密度，公式 2 分，结果 1 分，共 3 分

4. 总的电场能量 4 分

- (a) 圆柱筒薄层的电场能量 2 分  
 (b) 积分 1 分  
 (c) 结果 1 分

### 5.3 磁场能量

#### 【0405B07】

无限长密绕直螺线管通有电流  $I$ ，管内、外均为真空，管上单位长度绕有  $n$  匝导线，则螺线管内部的磁能密度为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

#### 【0405B08】

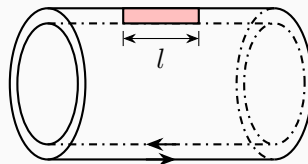
无限长密绕直螺线管通有电流  $I$ ，内部充满均匀的各向同性的磁介质，绝对磁导率为  $\mu$ ，管上单位长度绕有  $n$  匝导线，则螺线管内部的磁能密度为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{2}\mu n^2 I^2$$

#### 【0405C04】

一个同轴空心长直圆筒电缆，内筒半径为  $R_1$ 、外筒半径为  $R_2$ ，筒壁厚度可以忽略 (即两筒看做两个圆柱面)，电流  $I$  沿内筒流出去，沿外筒流回。求：(1) 两圆筒间的磁感应强度的大小；(2) 通过长度为  $l$  的一段截面 (图中的阴影部分) 的磁通量；(3) 单位长度圆筒电缆的自感系数；(4) 单位长度电缆中贮存的磁能。



解答

(1) 电流分布具有柱对称性，因此磁场分布也具有柱对称性，可以用安培环路定理求磁场。在两筒之间取一个与电缆轴线垂直的、半径为  $r$  的圆做为安培环路，可得

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向与电流成右手螺旋关系，即在图中阴影区域，磁感应强度的方向垂直纸面向里。

(2) 以垂直纸面向里为阴影部分面积的法向方向，取  $r \rightarrow r + dr$  部分矩形，通过它的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = Bl dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi r} dr$$

所以通过阴影部分的总的磁通量为

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 Il}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3) 根据自感系数的定义可得，长度为  $l$  的圆筒电缆的自感系数

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因此单位长度圆筒电缆的自感系数

$$L_1 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(4) 自感磁能的公式

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

因此单位长度电缆中贮存的磁能

$$W_{m,1} = \frac{1}{2} L_1 I^2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### 评分标准

1. 磁感应强度 5 分

(a) 安培环路定理 4 分

(b) 得到磁感应强度大小 1 分

2. 磁通量 5 分

(a) 磁通量的定义式 (矢量点乘) 2 分

(b) 通过小矩形的磁通量 1 分

(c) 总的磁通量，积分 1 分，结果 1 分，共 2 分

3. 自感系数 5 分

(a) 自感系数的定义式 3 分

(b) 长度为  $l$  的圆筒电缆的自感系数 1 分

(c) 单位长度圆筒电缆的自感系数 1 分

4. 磁能 5 分

(a) 自感磁能的表达式 3 分

(b) 单位长度电缆中贮存的磁能 2 分