

# 《电磁学》练习题

解答

ARGO

20220918

# 目录

第一章 静电场 恒定电流	7.3 电容器的储能..... 130	1.3 楞次定律..... 209
场..... 1	9、恒定电流场..... 132	2、动生电动势和感生电动势..... 211
1、库仑定律..... 1	第二章 恒磁场..... 135	2.1 动生电动势..... 211
1.1 库仑定律..... 1	2、毕奥——萨伐尔定律..... 135	2.2 感生电动势..... 239
1.2 电场力叠加原理..... 2	2.1 电流元的磁场..... 135	3、互感和自感..... 260
2、电场强度..... 4	2.2 磁场的叠加原理..... 135	3.1 互感..... 260
2.1 电场强度的定义..... 4	3、安培环路定理和磁场的“高斯定理”.. 149	3.2 自感..... 262
2.2 电场叠加原理..... 6	3.1 安培环路定理的求解..... 149	3.3 串联线圈的自感..... 264
2.3 电偶极子..... 13	3.2 安培环路定理求磁场..... 153	3.4 自感磁能..... 265
3、高斯定理..... 15	3.3 安培环路定理与磁场叠加原理联合求磁场..... 159	第四章 电磁介质..... 269
3.1 电通量的定义和简单计算..... 15	3.4 磁通量..... 163	1、电介质..... 269
3.2 高斯定理的理解..... 15	3.5 磁场的“高斯定理”..... 170	1.1 电介质对电场和电容的影响..... 269
3.3 利用高斯定理求电通量..... 20	4、磁场对载流导线的作用..... 172	1.2 电位移矢量..... 271
3.4 利用高斯定理求电场强度..... 26	4.1 磁场对载流导线的作用力..... 172	1.3 有电介质时的高斯定理..... 273
4、电势..... 45	4.2 磁场对平面载流线圈的力矩..... 178	1.4 极化电荷..... 281
4.1 电场力做功..... 45	5、带电粒子在磁场中的运动..... 185	1.5 电介质的击穿..... 292
4.2 电势能..... 51	5.1 洛伦兹力..... 185	2、磁介质..... 295
4.3 电势差..... 53	5.2 运动电荷的磁场..... 189	2.1 磁介质对磁场的影响..... 295
4.4 电势..... 53	5.3 运动电荷在均匀磁场中的回旋运动..... 198	2.2 磁化电流..... 296
4.5 已知电场求电势..... 58	5.4 霍耳效应..... 206	2.3 有磁介质时的安培环路定理..... 297
4.6 电势叠加原理求电势..... 72	第三章 电磁感应..... 208	5、电磁场能..... 301
4.7 已知电势求电场..... 88	1、电磁感应定律..... 208	5.1 电容器的储能..... 301
5、静电场中的导体..... 90	1.1 电磁感应现象..... 208	5.2 电场能量..... 307
5.1 静电平衡时导体电荷的分布..... 90	1.2 电磁感应定律..... 208	5.3 磁场能量..... 315
5.2 静电平衡时导体电场的分布..... 93		第六章 麦克斯韦电磁理论.. 319
5.3 接地..... 109		1、麦克斯韦电磁理论.. 319
6、静电能..... 119		1.1 位移电流..... 319
7、电容器..... 120		1.2 全电流安培环路定理..... 321
7.1 电容器的电容..... 120		1.3 麦克斯韦方程组..... 325
7.2 电容器的联接..... 123		

# 第一章 静电场 恒定电流场

## 1、库仑定律

### 1.1 库仑定律

库仑定律 (静电力)

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

【0101A01】

真空中有两个点电荷  $M$ 、 $N$ ，相互间作用力为  $\vec{F}$ ，当另一点电荷  $Q$  移近这两个点电荷时， $M$ 、 $N$  两点电荷之间的作用力

- (A) 大小不变，方向改变  
(C) 大小和方向都不变

- (B) 大小改变，方向不变  
(D) 大小和方向都改变

答案

C

解析

两个点电荷之间的相互作用只与两个点电荷所带的电量、两个点电荷的位置有关，与其他电荷没有关系

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

【0101A02】

电子的质量为  $m_e$ ，电荷为  $-e$ ，绕静止的氢原子核 (即质子) 作半径为  $r$  的匀速率圆周运动，则电子的速率为

- (A)  $e\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}$       (B)  $\frac{e}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m_e r}}$       (C)  $\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$       (D)  $\frac{e}{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m_e r}}$

答案

C

## 解析

电子与质子之间的静电力提供电子绕质心作圆周运动的向心力，所以有

$$\begin{aligned}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= \frac{m_e v^2}{r} \\ v^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \\ v &= e\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}\end{aligned}$$

## 1.2 电场力叠加原理

电场力叠加原理

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i \\ \vec{F} &= \int_q \frac{q_0 dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}\end{aligned}$$

## 【0101C01】

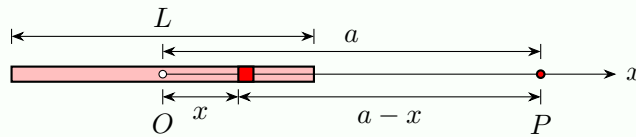
电荷  $Q(Q > 0)$  均匀分布在长为  $L$  的细棒上，在细棒的延长线上距细棒中心  $O$  距离为  $a$  的  $P$  点处放一电荷为  $q(q > 0)$  的点电荷，求带电细棒对该点电荷的静电力。

## 解答

根据库仑定律

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

和电场力叠加原理，将带电细杆分割成一个个元电荷。以细棒中心为坐标原点，沿棒方向建立  $x$  轴，如图，



则对于  $x \rightarrow x + dx$  段的元电荷，其带电量为  $dQ = \frac{Q}{L} dx$ ，它到  $P$  点的距离为  $r = a - x$ ，所以它与  $q$  之间的电场力为

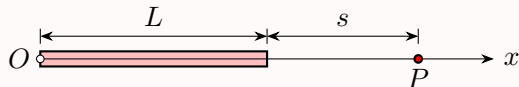
$$d\vec{F} = \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_x = \frac{qQ dx}{4\pi\epsilon_0 L(a - x)^2} \vec{e}_x$$

所以整根细棒与  $q$  之间的电场力为

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{qQ dx}{4\pi\epsilon_0 L(a - x)^2} \vec{e}_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L} \left[ \frac{1}{a - x} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{e}_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L} \left[ \frac{1}{a - \frac{L}{2}} - \frac{1}{a + \frac{L}{2}} \right] \vec{e}_x \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \left( a^2 - \frac{L^2}{4} \right)} \vec{e}_x = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 (4a^2 - L^2)} \vec{e}_x\end{aligned}$$

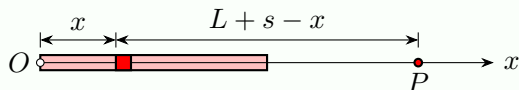
## 【0101C02】

如图所示，长为  $L$  的均匀带电细杆，电荷线密度为  $+\lambda$ 。在杆的延长线上，距杆右端距离为  $s$  的  $P$  点处，有一带电量为  $q$  的正点电荷。(1) 求该点电荷所受的电场力；(2) 当  $s \gg L$  时，求该电荷所受的电场力。



## 解答

(1) 如图取  $dQ$ ,



则

$$dF = \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (L + s - x)^2}$$

$$F = \int_0^L \frac{q\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (L + s - x)^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{L + s} \right) = \frac{q\lambda L}{4\pi\epsilon_0 s(L + s)}$$

(2) 当  $s \gg L$  时,  $L + s \approx s$ ,

$$F = \frac{q\lambda L}{4\pi\epsilon_0 s(L + s)} \approx \frac{q\lambda L}{4\pi\epsilon_0 s^2}$$

## 评分标准

1. 库仑定律 5 分
2. 积分求电场力 5 分
3. 极限近似 5 分

## 2、电场强度

### 2.1 电场强度的定义

电场强度的定义 (求电场的第零种方法)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

#### 【0102A01】

下列几个说法中哪一个是正确的？

- (A) 电场中某点场强的方向，就是将点电荷放在该点所受电场力的方向
- (B) 在以点电荷为中心的球面上，由该点电荷所产生的场强处处相同
- (C) 场强可由  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  定出，其中  $q$  为试验电荷， $q$  可正、可负， $\vec{F}$  为试验电荷所受的电场力
- (D) 在两个相同点电荷的连线的中垂线上，场强处处为 0

#### 答案

C

#### 解析

- (A)，如果点电荷所带电荷为正，则电场力方向即为该处电场强度的方向；如果点电荷所带电荷为负，则电场力方向与该处电场强度的方向相反。
- (B)，电场强度是一个矢量，在点电荷所在位置为球心的球面上，各处电场强度的大小相等，但方向各不相同，所以电场强度不同。
- (C)，电场强度可以由  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  计算得到，但不能说电场强度与检验电荷所反比，与所受电场力成正比。

#### 【0102A02】

关于电场强度定义式  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ ，下列说法中哪个是正确的？

- (A) 场强  $\vec{E}$  的大小与试探电荷  $q_0$  的大小成反比
- (B) 对场中某点，试探电荷受力  $\vec{F}$  与  $q_0$  的比值不因  $q_0$  而变
- (C) 试探电荷受力  $\vec{F}$  的方向就是场强  $\vec{E}$  的方向
- (D) 若场中某点不放试探电荷  $q_0$ ，则  $\vec{F} = 0$ ，从而  $\vec{E} = 0$

#### 答案

B

## 解析

电场强度的大小和方向可以由

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

来计算得到, 但电场与检验电荷并没有关系, 不管检验电荷存在不存在, 不管检验电荷带正电还是负电, 电场都不会发生变化, 因此不能说电场强度的大小与检验电荷的大小成反比, 如果检验电荷带正电, 那么它所受到的电场力的方向与该处电场强度的方向相同, 如果检验电荷带负电, 那么它所受到的电场力的方向与该处电场强度的方向相反。

## 【0102A03】

设源电荷为  $Q$ , 试探电荷为  $q_0$ , 则电场强度定义式  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$  对  $Q$  和  $q_0$  的要求是

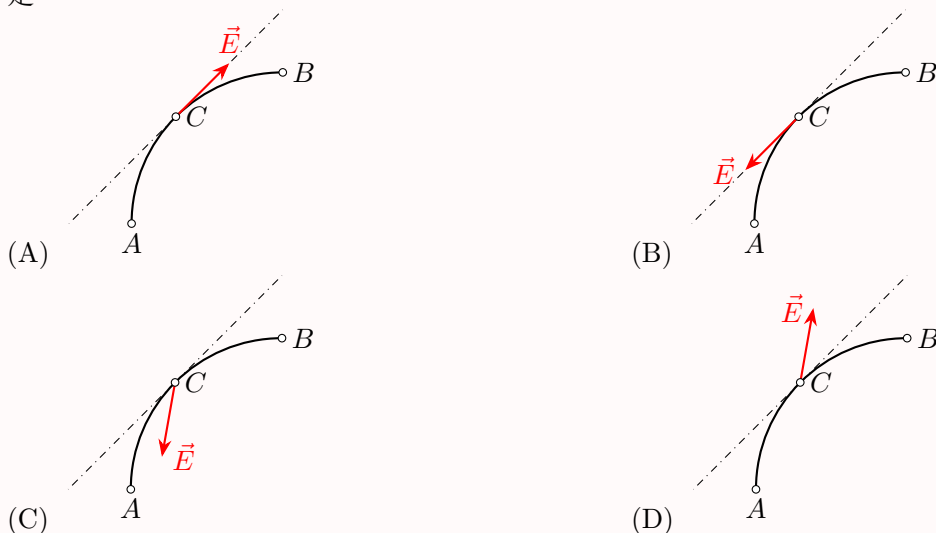
- (A) 二者必须是点电荷 (B)  $Q$  为任意电荷,  $q_0$  必须是正电荷  
(C)  $Q$  为任意电荷,  $q_0$  是点电荷, 且可正可负 (D)  $Q$  为任意电荷,  $q_0$  必须是单位正电荷

## 答案

C

## 【0102A04】

一个带负电荷的质点, 在电场力作用下从  $A$  点经  $C$  点运动到  $B$  点, 其运动轨迹如图所示, 图中虚线表示轨道在  $C$  点的切线。已知质点运动的速率是递减的, 下面关于  $C$  点场强方向的四个图示中正确的是



## 答案

D

## 解析

依题意，质点做曲线运动，速率递减，所以切向加速度与运动方向相反，而法向加速度一定指向凹侧，所以质点在  $C$  点的总的加速度沿  $C$  中箭头方向，所以质点所受到的力的方向与加速度的方向一致。又因为质点带负电荷，所以电场力的方向与电场强度的方向相反，因此图 D 正确。

## 2.2 电场叠加原理

点电荷的电场强度

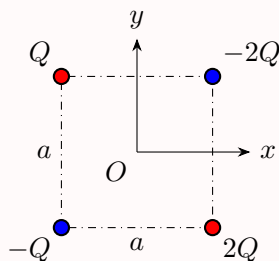
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

电场强度叠加原理 (求电场的第一种方法)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i \\ \vec{E} &= \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}\end{aligned}$$

## 【0102A05】

边长为  $a$  的正方形的四个顶点上放置如图所示的点电荷，则中心  $O$  处场强



(A) 大小为零

(C) 大小为  $\frac{\sqrt{2}Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$ ，方向沿  $y$  轴正向

(B) 大小为  $\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$ ，方向沿  $x$  轴正向

(D) 大小为  $\frac{\sqrt{2}Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$ ，方向沿  $y$  轴负向

## 答案

C

## 【0102B01】

如图所示，一均匀带电细杆，长为  $L$ ，电荷线密度为  $\lambda$ ，则其延长线上距左端点  $x$  远处的电场强度大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x(x-L)}$$



## 【0102B02】

由一根绝缘细线围成的边长为  $L$  的正方形线框，使它均匀带电，其电荷线密度为  $\lambda$ ，则在正方形中心处的电场强度的大小  $E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

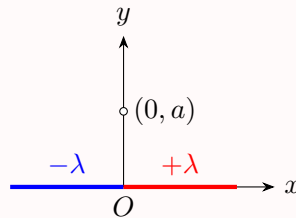
0

## 解析

由于对称性，很容易得到中心处的电场强度为零。

## 【0102A06】

如图所示为一沿  $x$  轴放置的“无限长”分段均匀带电直线，电荷线密度分别为  $+\lambda(x > 0)$  和  $-\lambda(x < 0)$ ，则  $xy$  平面上  $(0, a)$  点处的场强为



(A) 0

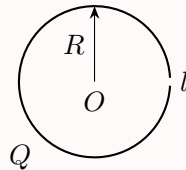
(B)  $-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{e}_x$ (C)  $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{e}_x$ (D)  $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{e}_y$ 

## 答案

B

## 【0102B03】

如图所示，将一均匀带正电为  $Q$  的细塑料棒弯成半径为  $R$  的圆弧，圆弧的缺口长度为  $l (R \gg l)$ ，则圆心  $O$  处的电场强度大小  $E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

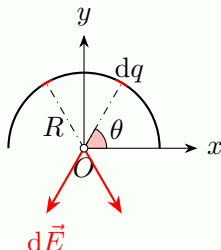
$$\frac{Ql}{8\pi^2\epsilon_0 R^3}$$

## 【0102C01】

用绝缘细线弯成的半圆环，半径为  $R$ ，其上均匀地带有正电荷  $Q$ ，试求圆心  $O$  点的电场强度。

## 解答

如图，选择两个对称的电荷元，



则它们在  $O$  点的合场强沿  $y$  轴负方向，即

$$dE_y = -2 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \sin\theta = -\frac{\lambda R \sin\theta d\theta}{2\pi\epsilon_0 R^2} = -\frac{\lambda \sin\theta d\theta}{2\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Q \sin\theta d\theta}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

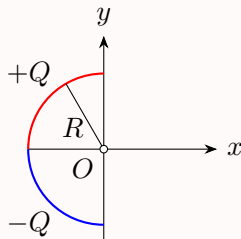
所以总场强为

$$E_y = \int_0^{\pi/2} -\frac{Q \sin\theta d\theta}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} = -\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} (-\cos\theta)_0^{\pi/2} = -\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E} = -\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \vec{e}_y$$

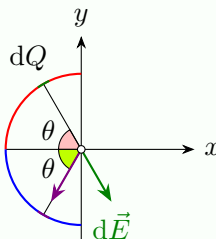
## 【0102C02】

一个细玻璃棒被弯成半径为  $R$  的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷  $+Q$ ，沿其下半部分均匀分布有电荷  $-Q$ ，如图所示。试求圆心  $O$  处的电场强度。



## 解答

如图，取两个对称的电荷元，



则它们在圆心  $O$  处产生的合场强的方向沿  $y$  轴负方向, 大小为

$$dE_y = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \sin\theta \times 2 = \frac{\frac{Q}{\pi/2} d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \sin\theta \times 2 = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin\theta d\theta$$

所以总的电场为

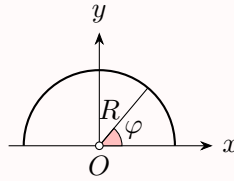
$$E_y = \int_0^{\pi/2} \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin\theta d\theta = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} (-\cos\theta)_0^{\pi/2} = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

所以

$$\vec{E} = -\frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \vec{e}_y$$

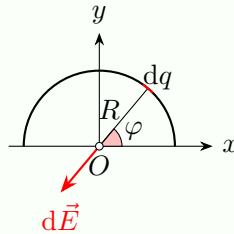
### 【0102C03】

带电细线弯成半径为  $R$  的半圆形, 电荷线密度为  $\lambda = \lambda_0 \sin\varphi$ , 式中  $\lambda_0$  为一常数,  $\varphi$  为半径  $R$  与  $x$  轴的夹角, 如图所示。试求圆心  $O$  处的电场强度。



### 解答

如图, 取电荷元  $dq = \lambda dl = \lambda_0 \sin\varphi R d\varphi = R\lambda_0 \sin\varphi d\varphi$ ,



则它在圆心  $O$  处产生电场强度为

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\cos\varphi \vec{e}_x - \sin\varphi \vec{e}_y) \\ &= -\frac{R\lambda_0 \sin\varphi d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y) \\ &= dE_x \vec{e}_x + dE_y \vec{e}_y \\ dE_x &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \\ dE_y &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \sin^2\varphi d\varphi \end{aligned}$$

所以总的电场为

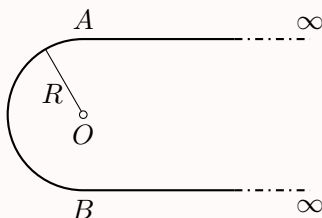
$$E_x = \int_0^\pi -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} \sin^2\varphi\right)_0^\pi = 0$$

$$E_y = \int_0^\pi -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \sin^2\varphi d\varphi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \frac{1}{2}[1 - \cos(2\varphi)] d\varphi = -\frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 R} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi)\right]_0^\pi = -\frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_y$$

#### 【0102C04】

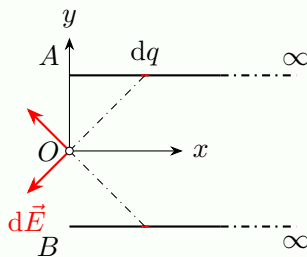
电荷线密度为  $\lambda$  的“无限长”均匀带电细线，弯成图示形状。若半圆弧  $\widehat{AB}$  的半径为  $R$ ，试求圆心  $O$  点的场强。



#### 解答

先分别求半无限长带电直线和半圆弧在圆心  $O$  点的场强。

先求上下两条半无限长带电直线产生的电场。



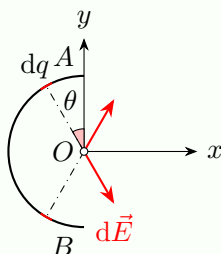
如图选择两个对称的电荷元，则它们在  $O$  点的合场强沿  $x$  轴负方向，即

$$dE_x = -2 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)} \times \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} = -\frac{\lambda x dx}{2\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

所以这一部分的总场强为

$$E_1 = \int_0^\infty -\frac{\lambda x dx}{2\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{x dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

再求半圆弧产生的电场。



如图选择两个对称的电荷元，则它们在  $O$  点的合场强沿  $x$  轴正方向，即

$$dE_x = 2 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \sin\theta = \frac{\lambda R \sin\theta d\theta}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda \sin\theta d\theta}{2\pi\epsilon_0 R}$$

所以这一部分的总场强为

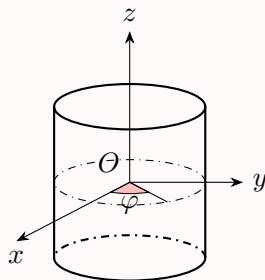
$$E_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \sin\theta d\theta}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} (-\cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

所以  $O$  点的总场强为

$$E = E_1 + E_2 = 0$$

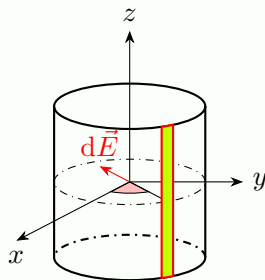
#### 【0102C05】

一“无限长”圆柱面，其电荷面密度为： $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$ ，式中  $\varphi$  为半径  $R$  与  $x$  轴所夹的角，试求圆柱轴线上一点的场强。



#### 解答

如图，取图中所示窄条电荷元，则其可视为无限长带电直线，



其电荷线密度为  $d\lambda = \sigma R d\varphi = R\sigma_0 \cos \varphi d\varphi$ , 则它在圆柱轴线上的电场可以由高斯定理求得

$$\oint_S (\vec{dE}) \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

$$(dE)(2\pi Rh) = \frac{(d\lambda)h}{\varepsilon_0}$$

$$dE = \frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$d\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} (-\cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y) = dE_x \vec{e}_x + dE_y \vec{e}_y$$

$$dE_x = -\frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \cos \varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$dE_y = -\frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \sin \varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

所以总的电场为

$$E_x = \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(2\varphi)] d\varphi = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

$$E_y = \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right)_0^{2\pi} = 0$$

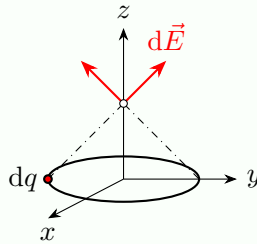
$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

### 【0102C06】

一半径为  $R$  的半球面, 均匀地带有电荷, 电荷面密度为  $\sigma$ , 求球心  $O$  处的电场强度。

### 解答

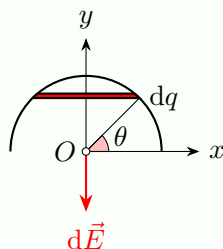
先求一个带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的带电圆环在其轴线上距离环心  $a$  处的电场,



如图, 则总的电场沿  $z$  轴正方向, 大小为

$$E = \int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + a^2)} \times \frac{a}{(R^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

将半球面分割成一个个圆环, 如图,



则角度在  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  的小圆环的半径为  $r = R \cos \theta$ , 带电量为  $dq = \sigma(2\pi r \times R d\theta) = 2\pi R^2 \sigma \cos \theta d\theta$ , 球心到圆环中心的距离为  $a = R \sin \theta$ , 所以这个小圆环在球心处产生的场强方向沿  $y$  轴负方向, 大小为

$$dE = \frac{(dq)a}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{(R \sin \theta)(2\pi R^2 \sigma \cos \theta d\theta)}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

所以总的电场强度的大小为

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

## 2.3 电偶极子

电偶极矩

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

电偶极子在均匀电场中受到的力矩

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

### 【0102A07】

一电偶极子原来与一均匀电场平行, 将它转到与电场反平行时, 外力做功 10 焦耳。当此电偶极子与电场强度成  $60^\circ$  时, 作用于它的力矩为

- (A)  $5 \text{ N} \cdot \text{m}$       (B)  $5\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}$       (C)  $\frac{5}{2} \text{ N} \cdot \text{m}$       (D)  $\frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ N} \cdot \text{m}$

答案

D

### 【0102A08】

一电偶极子放在均匀电场中, 当电偶极矩的方向与场强方向不一致时, 其所受的合力  $\vec{F}$  和合力矩  $\vec{M}$  为

- (A)  $\vec{F} = 0, \vec{M} = 0$       (B)  $\vec{F} = 0, \vec{M} \neq 0$       (C)  $\vec{F} \neq 0, \vec{M} = 0$       (D)  $\vec{F} \neq 0, \vec{M} \neq 0$

## 答案

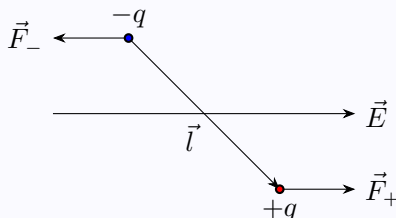
B

## 解析

如图, 当电偶极子放在均匀电场中, 正负电荷所受到的静电力的大小相等, 方向相反, 所以合力为零 (不管电偶极矩方向与场强方向是否一致)。而合力矩

$$\vec{M} = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = \vec{r}_- \times (-\vec{F}_+) + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_+ = \vec{l} \times \vec{F}_+ = q\vec{l} \times \vec{E}$$

所以当电偶极矩方向与场强方向不一致时,  $\vec{l} \times \vec{E} \neq 0$ , 所以  $\vec{M} \neq 0$ ; 当电偶极矩方向与场强方向一致时,  $\vec{l} \times \vec{E} = 0$ , 所以  $\vec{M} = 0$ 。



## 【0102B04】

一电矩为  $\vec{p}$  的电偶极子在场强为  $\vec{E}$  的均匀电场中,  $\vec{p}$  与  $\vec{E}$  间的夹角为  $\theta$ , 则它所受的力矩的大小  $M = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

## 答案

$$pE \sin \theta$$

## 解析

电偶极子是一对相距为  $l$ 、带电量分别为  $+q$  和  $-q$  的点电荷对, 其电矩定义为  $\vec{p} = q\vec{l}$ , 其中  $\vec{l}$  的方向从  $-q$  指向  $+q$ 。因此在匀强电场中, 两个点电荷所受到的电场力大小相等, 方向相反 (一个沿电场强度的方向, 一个逆着电场强度的方向), 但不一定在同一条直线上。所以当电偶极子的电矩与电场强度之间有一定的夹角时, 电偶极子受到的是一对力偶。所以这里说的电偶极子所受的电场力, 应该是指这对力偶的“合力”, 所以为零。而力偶对于任意一点的力矩是常量, 其大小为

$$M = Fl \sin \theta = qEl \sin \theta = pE \sin \theta$$



### 3、高斯定理

#### 3.1 电通量的定义和简单计算

电场强度的通量

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

【0103B01】

一面积为  $S$  的平面，放在场强为  $\vec{E}$  的均匀电场中，已知  $\vec{E}$  与平面间的夹角为  $\theta (\theta < \frac{\pi}{2})$ ，则通过该平面的电场强度通量的数值  $\Phi_E =$ \_\_\_\_\_。

答案

$$ES \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = ES \sin \theta$$

解析

电场强度的通量

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

其中面的方向定义为面的法线方向，所以在这里就是  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ，所以

$$\Phi_E = ES \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = ES \sin \theta$$

#### 3.2 高斯定理的理解

高斯定理

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

【0103A01】

高斯定理  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

- (A) 适用于任何静电场
- (B) 只适用于真空中的静电场
- (C) 只适用于具有球对称性、轴对称性和平面对称性的静电场
- (D) 只适用于匀强电场

## 答案

A

## 解析

高斯定理本身适用于任何静电场。只是对于真空中的静电场，右边的电荷只包括自由电荷，因为真空中并不存在束缚电荷，而对于介质，电荷包含了自由电荷和束缚电荷。关于对称性，定理本身并不要求一定要具有什么对称性，但在具体的计算过程中，只有某些特殊对称性的电场，才可以取比较适当的高斯面，可以求出通过高斯面的电通量。

## 【0103A02】

关于高斯定理的理解有下面几种说法，其中正确的是

- (A) 如果高斯面上  $\vec{E}$  处处为零，则该面内必无电荷
- (B) 如果高斯面内无电荷，则高斯面上  $\vec{E}$  处处为零
- (C) 如果高斯面上  $\vec{E}$  处处不为零，则高斯面内必有电荷
- (D) 如果高斯面内有净电荷，则通过高斯面的电场强度通量必不为零

## 答案

D

## 解析

高斯定理是指电场在高斯面上的通量与高斯面所包围的全部净电荷之间的关系。

如果高斯面上各点的电场都为零，那么通过高斯面的通量也一定为零，所以高斯面内的净电荷为零，但可以有等量的异号电荷存在，比如高斯面选为空腔导体球内的任一曲面，但空腔内存在有等量异号的电荷。

如果高斯面内无电荷，则净电荷为零，但高斯面上的电场是所有电荷的电场之和，不仅与面内的电荷有关，还与面外的电荷也有关系，如一匀强电场。对于匀强电场，处处电场强度不为零，但任意一个高斯面内都没有电荷。

## 【0103A03】

已知一高斯面所包围的体积内电荷代数和为零，则以下说法正确的是

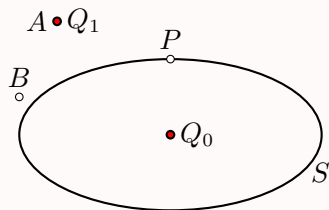
- (A) 高斯面上各点场强均为零
- (B) 穿过高斯面上每一面元的电通量均为零
- (C) 穿过整个高斯面的电通量为零
- (D) 以上说法都不对

## 答案

C

## 【0103A04】

如图所示, 闭合面  $S$  内有一点电荷  $Q_0$ ,  $P$  为  $S$  面上一点, 在  $S$  面外  $A$  点有一点电荷  $Q_1$ , 若将电荷  $Q_1$  移至  $B$  点, 则



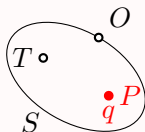
- (A)  $S$  面的总电通量改变,  $P$  点场强不变  
 (B)  $S$  面的总电通量不变,  $P$  点场强改变  
 (C)  $S$  面的总电通量和  $P$  点场强都不变  
 (D)  $S$  面的总电通量和  $P$  点场强都改变

## 答案

B

## 【0103A05】

如图所示, 任意闭合曲面  $S$  内有一点电荷  $q$ ,  $O$  为  $S$  面上任一点, 若将  $q$  由闭合曲面内的  $P$  点移到  $T$  点, 且  $OP = OT$ , 那么



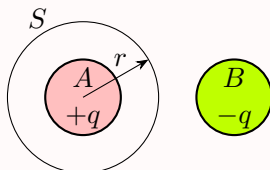
- (A) 穿过  $S$  面的电通量改变,  $O$  点的场强不变  
 (B) 穿过  $S$  面的电通量改变,  $O$  点的场强改变  
 (C) 穿过  $S$  面的电通量不变,  $O$  点的场强改变  
 (D) 穿过  $S$  面的电通量不变,  $O$  点的场强不变

## 答案

C

## 【0103A06】

$A$  和  $B$  为两个均匀带电球体,  $A$  带电荷  $+q$ ,  $B$  带电荷  $-q$ , 作一与  $A$  同心的球面  $S$  为高斯面, 如图所示. 则



- (A) 通过  $S$  面的电场强度通量为零,  $S$  面上各点的场强为零  
 (B) 通过  $S$  面的电场强度通量为  $\frac{q}{\epsilon_0}$ ,  $S$  面上各点的场强为  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$   
 (C) 通过  $S$  面的电场强度通量为  $-\frac{q}{\epsilon_0}$ ,  $S$  面上各点的场强为  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$   
 (D) 通过  $S$  面的电场强度通量为  $\frac{q}{\epsilon_0}$ , 但  $S$  面上各点的场强不能直接由高斯定理求出

## 答案

D

## 解析

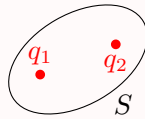
高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

中，高斯面上各点的电场强度是整个空间所有电荷在该处产生的电场的矢量和，而通过整个高斯面上的电通量之和仅仅与高斯面内所包含的电荷有关，与高斯面外的电荷无关。

## 【0103B02】

电荷分别为  $q_1$  和  $q_2$  的两个点电荷单独在空间各点产生的电场强度分别为  $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$ ，空间各点总场强为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。现在作一封闭曲面  $S$ ，如图所示，则  $\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

## 解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

如果只有  $q_1$  存在时，空间的电场分布为  $\vec{E}_1$ ，所以由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

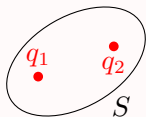
当  $q_1$  和  $q_2$  同时存在时，空间的电场分布为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ ，所以由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

注意，这里  $q_2$  处在高斯面之内，所以右边的  $q = q_1 + q_2$ ；如果  $q_2$  处在高斯面之外，右边的电荷仅仅是高斯面所包围的电荷的代数和，则  $q = q_1$ 。

## 【0103B03】

电荷分别为  $q_1$  和  $q_2$  的两个点电荷单独在空间各点产生的静电场强分别为  $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$ ，空间各点总场强为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。现在作一封闭曲面  $S$ ，如图所示，则  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

## 解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

如果只有  $q_1$  存在时，空间的电场分布为  $\vec{E}_1$ ，所以由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

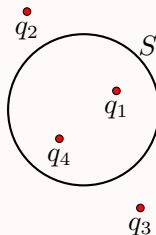
当  $q_1$  和  $q_2$  同时存在时，空间的电场分布为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ ，所以由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

注意，这里  $q_2$  处在高斯面之内，所以右边的  $q = q_1 + q_2$ ；如果  $q_2$  处在高斯面之外，右边的电荷仅仅是高斯面所包围的电荷的代数和，则  $q = q_1$ 。

## 【0103B04】

点电荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  和  $q_4$  在真空中的分布如图所示。图中  $S$  为闭合曲面，则通过该闭合曲面的电场强度通量  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{q_1 + q_4}{\epsilon_0}$$

## 3.3 利用高斯定理求电通量

【0103A07】

在边长为  $a$  的正立方体的一个顶点上有一电量为  $q$  的点电荷, 则通过该立方体表面的电场强度通量为

- (A)  $\frac{q}{\varepsilon_0}$  (B)  $\frac{q}{2\varepsilon_0}$  (C)  $\frac{q}{6\varepsilon_0}$  (D)  $\frac{q}{8\varepsilon_0}$

答案

D

【0103A08】

在边长为  $a$  的正立方体中心有一个电量为  $q$  的点电荷, 则通过该立方体任一面的电场强度通量为

- (A)  $\frac{q}{6\varepsilon_0}$  (B)  $\frac{q}{4\varepsilon_0}$  (C)  $\frac{q}{2\varepsilon_0}$  (D)  $\frac{q}{\varepsilon_0}$

答案

A

【0103B05】

一个点电荷  $q$  位于一边长为  $a$  的立方体的中心, 以此立方体的表面为高斯面, 则通过此高斯面的电场强度通量为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{q}{\varepsilon_0}$$

【0103B06】

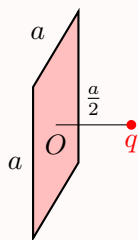
一个点电荷  $q$  位于一边长为  $a$  的立方体的中心, 则通过立方体一面的电场强度通量是\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

【0103A09】

有一边长为  $a$  的正方形平面, 在其中垂线上距中心  $O$  点  $\frac{a}{2}$  处, 有一电荷为  $q$  的正点电荷, 如图所示, 则通过该平面的电场强度通量为



(A)  $\frac{q}{3\epsilon_0}$

(B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$

(C)  $\frac{q}{3\pi\epsilon_0}$

(D)  $\frac{q}{6\epsilon_0}$

答案

D

解析

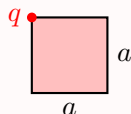
以点电荷为中心，选择一个边长为  $a$  的立方体表面为高斯面，图示正方形平面为立方体的一个面，根据对称性，通过六个面的电通量相等，而根据高斯定理有，通过整个立方体表面的电通量为

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

所以，通过一个面的电通量为  $\frac{q}{6\epsilon_0}$ 。

【0103A10】

有一个边长为  $a$  的正方形平面，在其一个顶点上有一带电量为  $q$  的正电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为



(A) 0

(B)  $\frac{q}{8\epsilon_0}$

(C)  $\frac{q}{6\epsilon_0}$

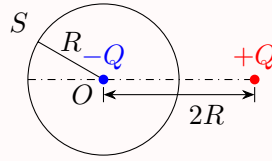
(D)  $\frac{q}{24\epsilon_0}$

答案

A

【0103B07】

如图所示，真空中有两个点电荷，带电量分别为  $Q$  和  $-Q$ ，相距  $2R$ 。若以负电荷所在处  $O$  点为中心，以  $R$  为半径作球形高斯面  $S$ ，则通过该球面  $S$  的电通量  $\Phi_E =$ \_\_\_\_\_。

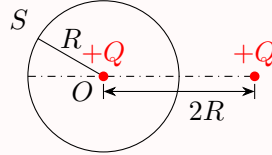


答案

$$-\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

【0103B08】

如图所示，真空中两个正点电荷  $Q$ ，相距  $2R$ 。若以其中一点电荷所在处  $O$  点为中心，以  $R$  为半径作高斯球面  $S$ ，则通过该球面的电通量  $\Phi_E =$  \_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

所以题目中所选高斯面内所包含的电荷  $q = Q$ ，所以高斯面上的电场强度通量为  $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ 。

所以很容易得到点电荷的电场强度分布

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

考虑到方向， $a$  点处两个点电荷所激发的电场大小相等，方向相反，所以总的电场为零。两个点电荷在  $b$  点处激发的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (3R)^2} = \frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2}$$

二者方向相同，所以  $b$  点的总的电场强度为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{10Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{5Q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$$



## 【0103B09】

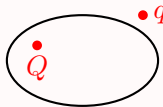
坐标  $(-a, 0, 0)$  处有一带电量为  $-q$  的点电荷, 坐标  $(a, 0, 0)$  处有一带电量为  $+q$  的点电荷, 则通过球心在坐标原点、半径为  $R (R > a)$  的球面的电通量为\_\_\_\_\_。

## 答案

0

## 【0103A11】

点电荷  $Q$  被曲面  $S$  所包围, 从无穷远处引入另一点电荷  $q$  至曲面外一点, 如图所示, 则引入前后



- (A) 曲面  $S$  的电场强度通量不变, 曲面上各点场强不变
- (B) 曲面  $S$  的电场强度通量变化, 曲面上各点场强不变
- (C) 曲面  $S$  的电场强度通量变化, 曲面上各点场强变化
- (D) 曲面  $S$  的电场强度通量不变, 曲面上各点场强变化

## 答案

D

## 解析

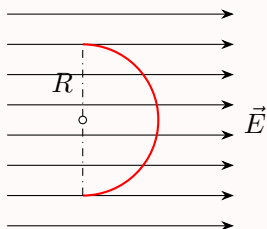
高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

中, 式子右边的电荷量是高斯面所包围的电荷, 与高斯面外的电荷无关, 所以, 引入前后, 高斯面内的电荷量没有发生变化, 因此通过同一曲面的电场强度的通量也没有变化, 但任意一点的电场强度是由两个点电荷各自产生的电场的叠加, 因此曲面上各点的电场强度发生了变化。

## 【0103A12】

若匀强电场的场强为  $\vec{E}$ , 其方向平行于半径为  $R$  的半球面的轴, 如图所示。则通过此半球面的电场强度通量  $\Phi_E$  为



- (A)  $\pi R^2 E$  (B)  $2\pi R^2 E$  (C)  $\frac{1}{2}\pi R^2 E$  (D)  $\sqrt{2}\pi R^2 E$

答案

A

解析

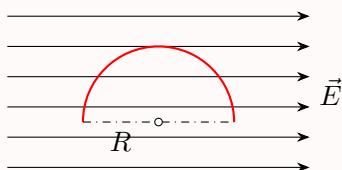
以半球面  $S_1$  与圆面  $S_2$  为高斯面，则高斯面所包围的空间中电荷为零，因此通过整个高斯面的通量为零，所以

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\epsilon_0} = 0 \\ \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= - \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -(-E \cdot \pi R^2) = \pi R^2 E\end{aligned}$$

即，本题将不容易积分的半球面上的电通量换成比较容易计算的圆面上的电通量，而对于圆面是各点，因为电场强度的方向与面元的法向方向刚好相反，所以有一负号。

【0103A13】

若匀强电场的场强大小为  $E$ ，方向水平向右，半径为  $R$  的半球面如图放置，则通过此半球面的电场强度的通量为



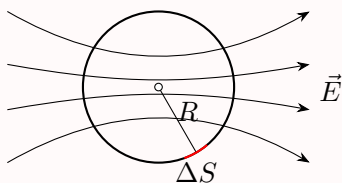
- (A)  $\pi R^2 E$  (B)  $\frac{1}{2}\pi R^2 E$  (C)  $2\pi R^2 E$  (D) 0

答案

D

【0103A14】

在空间有一非均匀电场，其电场线分布如图所示。在电场中作一半径为  $R$  的闭合球面  $S$ ，已知通过球面上某一面元  $\Delta S$  的电场强度通量为  $\Phi_E$ ，则通过该球面其余部分的电场强度通量为



(A)  $-\Phi_E$

(B)  $\frac{4\pi R^2}{\Delta S} \Phi_E$

(C)  $\frac{4\pi R^2 - \Delta S}{\Delta S} \Phi_E$

(D) 0

答案

A

解析

以球面  $S$  为高斯面，由于高斯面所包围的空间中电荷为零，因此通过整个高斯面的通量为零，所以

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$$

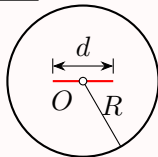
$$\int_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\Phi_E$$

即，本题通过高斯定理，将待求面上的电通量转换成整个高斯面上的电通量与已知曲面上的高斯面之差。

【0103B10】

一均匀带电直线段长为  $d$ ，电荷线密度为  $+\lambda$ ，以导线中点  $O$  为球心， $R$  为半径 ( $R > d$ ) 作一球面，如图所示，则通过该球面的电场强度通量为\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{\lambda d}{\epsilon_0}$$

解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

所以高斯面所包围的电荷  $q = \lambda d$ , 所以高斯面上的电通量为  $\frac{\lambda d}{\epsilon_0}$ 。

以球心为坐标原点, 水平向左为  $x$  轴正方向, 取  $x \rightarrow x + dx$  段为元电荷, 其电量  $dq = \lambda dx$ , 它到  $P$  点的距离为  $r = R - x$ , 它在  $P$  点产生的电场强度的方向沿水平向左, 所以由电场的叠加原理,  $P$  处的电场强度的方向沿水平向左, 大小为

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(R-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R-x} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R-\frac{d}{2}} - \frac{1}{R+\frac{d}{2}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{d}{R^2 - \frac{d^2}{4}} \right] = \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0(4R^2 - d^2)} \end{aligned}$$

### 3.4 利用高斯定理求电场强度

高斯定理求电场强度 (求电场的第二种方法)

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q \\ \Phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot (2\pi r h) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q \\ \Phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot (2S) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q \end{aligned}$$

#### 【0103A15】

下面列出的真空中静电场的场强公式, 其中哪个是正确的?

- (A) 点电荷  $q$  的电场:  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$  ( $r$  为点电荷到场点的距离)
- (B) “无限长”均匀带电直线 (电荷线密度  $\lambda$ ) 的电场:  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$  ( $\vec{r}$  为带电直线到场点的垂直于直线的矢量)
- (C) “无限大”均匀带电平面 (电荷面密度  $\sigma$ ) 的电场:  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- (D) 半径为  $R$  的均匀带电球面 (电荷面密度  $\sigma$ ) 外的电场:  $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^3} \vec{r}$  ( $\vec{r}$  为球心到场点的矢量)

#### 答案

D

#### 解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

关键在于根据带电体的对称性选择适当的高斯面, 使得在高斯面上的电通量能够方便地积分得到。

对于点电荷，通常以点电荷为球心，以任意  $r$  为半径，做一球面选做高斯面，则高斯面上各点的电场强度大小相等，方向都与该处的面元垂直，所以有

$$\begin{aligned} E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \end{aligned}$$

对于无限长均匀带电直导线，通常选择高斯面为一半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱面，以导线所在直线为圆柱面的中心轴线，底面与导线垂直，侧面与导线平行，则在两个底面处，电场强度的方向与底面平行，所以通量为零；而在侧面上，各点的电场强度大小相等，方向均与该处的面元垂直，所以有

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi r h &= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\ \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \end{aligned}$$

对于无限大均匀带电平面，通常选择高斯面为一底面积为  $S$ 、高为  $h$  的圆柱面，底面与平面平行，侧面与平面垂直，两底面分居平面两侧等距离处，则在侧面上，电场强度的方向与侧面平行，所以通量为零；而在两个底面上，各点的电场强度大小相等，方向均与该处的面元垂直，所以有

$$\begin{aligned} E \cdot 2S &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_r \end{aligned}$$

对于半径为  $R$  的均匀带电球面，通常选择高斯面为一半径为  $r$ 、与带面球面同心的球面，则在高斯面上，各点的电场强度大小相等，方向均与该处的面元垂直，所以有

$$\begin{aligned} E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \\ \vec{E} &= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \end{aligned}$$

### 【0103B11】

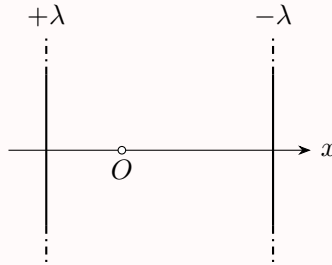
一根无限长细棒均匀带正电，线密度为  $\lambda$ 。A 点与细棒相距  $r$ ，则 A 点的电场强度大小  $E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

## 【0103B12】

两根无限长均匀带电细棒均垂直于  $x$  轴放置，与  $x$  轴的交点分别为  $x = -a$  和  $x = 2a$ ，如图所示，线密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ ，则图中坐标原点  $O$  的场强大小为\_\_\_\_\_。

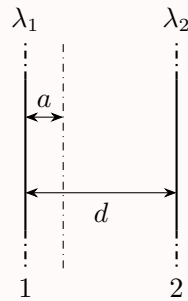


## 答案

$$\frac{3\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

## 【0103B13】

两根相互平行的“无限长”均匀带正电直线 1、2，相距为  $d$ ，其电荷线密度分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  如图所示，则场强等于零的点与直线 1 的距离  $a$  为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\lambda_1 d}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

## 解析

由于对称性，由高斯定理很容易求得无限长均匀带电直线的电场强度

$$E \cdot (2\pi r h) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

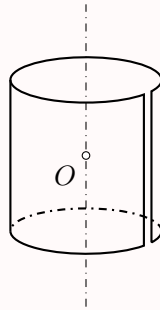
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

考虑到方向，则有

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 a} &= \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0(d-a)} \\ \lambda_1(d-a) &= \lambda_2 a \\ a &= \frac{\lambda_1 d}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

#### 【0103B14】

一均匀带电细而长的圆柱面，面电荷密度为  $\sigma$ ，在这柱面上有一平行于轴线的窄缝，窄缝的宽度  $l$  远小于圆柱面半径  $R$ ，则轴线中心  $O$  点处的电场强度大小  $E =$ \_\_\_\_\_。



#### 答案

$$\frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0 R}$$

#### 【0103B15】

一半径为  $R$  的“无限长”均匀带电圆柱面，其电荷面密度为  $\sigma$ 。该圆柱面内 ( $r < R$ ) 的电场强度矢量为 ( $\vec{r}$  表示在垂直于圆柱面的平面上，从轴线处引出的矢径)  $\vec{E}(\vec{r}) =$ \_\_\_\_\_。

#### 答案

0

#### 解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，各点的电场强度的方向一定是垂直于轴线的。所以选择与带电圆柱面同轴的半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱面为高斯面。则在圆柱面内， $r < R$ ，由高

斯定理得

$$E_1 \cdot (2\pi rh) = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = 0$$

### 【0103B16】

一半径为  $R$  的“无限长”均匀带电圆柱面，其电荷面密度为  $\sigma$ 。该圆柱面外 ( $r > R$ ) 的电场强度矢量为 ( $\vec{r}$  表示在垂直于圆柱面的平面上，从轴线处引出的矢径)  $\vec{E}(\vec{r}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r^2} \vec{r}$$

解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，各点的电场强度的方向一定是垂直于轴线的。所以选择与带电圆柱面同轴的半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆柱面为高斯面。则在圆柱面外， $r > R$ ，由高斯定理得

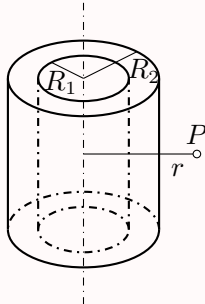
$$E_2 \cdot (2\pi rh) = \frac{\sigma \cdot (2\pi Rh)}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_r = E_2 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r^2} \vec{r}$$

### 【0103A16】

如图所示，两个“无限长”的、半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的共轴圆柱面，均匀带电，沿轴线方向单位长度上的所带电荷分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ，则在外圆柱面外面、距离轴线为  $r$  处的  $P$  点的电场强度大小  $E$  为





(A)  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r}$

(C)  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0(r-R_2)}$

(B)  $\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0(r-R_1)} + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0(r-R_2)}$

(D)  $\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 R_2}$

答案

A

解析

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，所以在与带电柱面同轴的任意一个柱面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电柱面同轴的、半径为  $r > R_2$ 、高为  $h$  的柱面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，

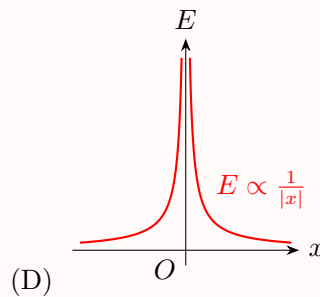
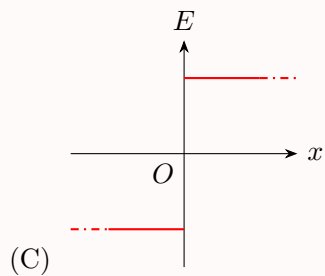
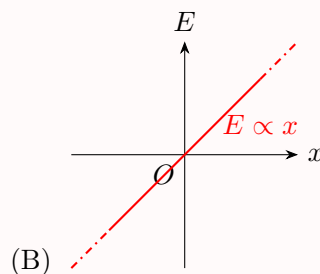
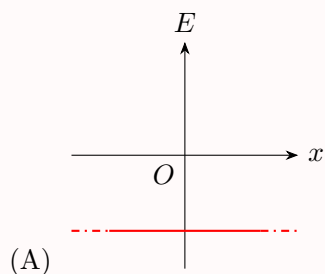
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r}$$

【0103A17】

设有一“无限大”均匀带正电荷的平面。取  $x$  轴垂直带电平面，坐标原点在带电平面上，则其周围空间各点的电场强度  $\vec{E}$  随距离平面的位置坐标  $x$  变化的关系曲线为 (规定场强方向沿  $x$  轴正向为正、反之为负)



## 答案

C

## 解析

设平面电荷面密度为  $\sigma$ ，高斯面取为一圆柱面，底面与平面平行，侧面与平面垂直，底面积为  $S$ ，高为  $h$ ，则在底面处，各点的电场强度相等，方向都是垂直底面向外，而在侧面，虽然各点的电场强度大小不等，但各点电场强度的方向都与侧面平行，所以通量为零，因此，由高斯定理可得

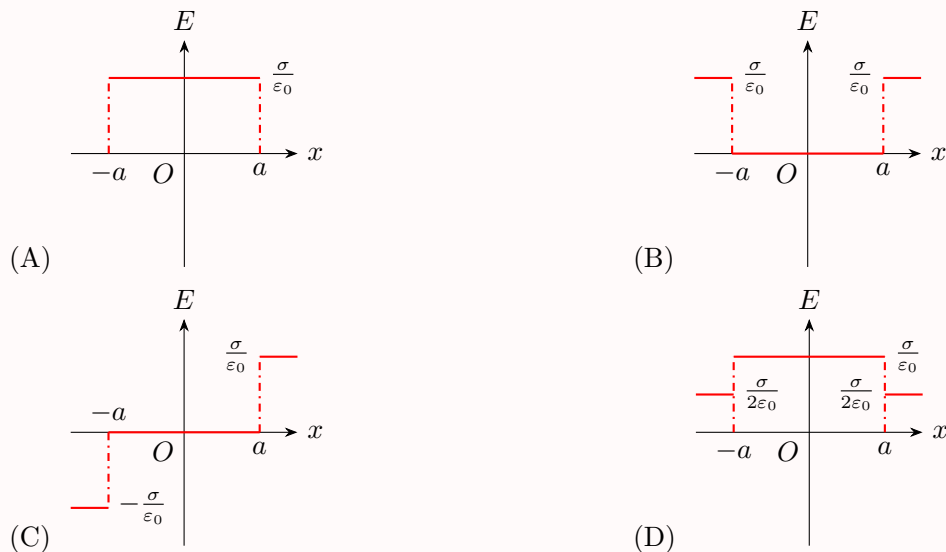
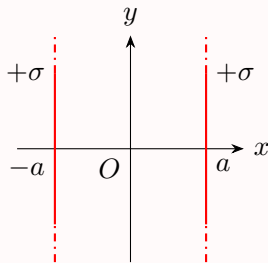
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

即在平面两侧都是一个匀强电场，场强的大小相等，但两侧场强的方向相反。

## 【0103A18】

电荷面密度均为  $+\sigma$  的两块“无限大”均匀带电平板平行放置，如图所示。设场强方向向右为正，则其周围空间各点电场强度  $\vec{E}$  随坐标  $x$  变化的关系曲线为

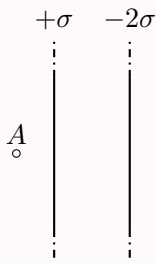


## 答案

C

## 【0103B17】

两块“无限大”的均匀带电平行平板，其电荷面密度分别为  $+\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 及  $-2\sigma$ ，如图所示，则图中  $A$  点电场强度的大小为\_\_\_\_\_。

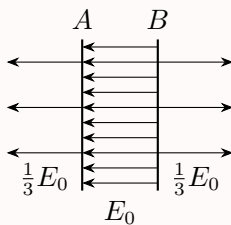


## 答案

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 【0103B18】

$A$ 、 $B$  为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小为  $E_0$ ，两平面外侧电场强度大小都为  $\frac{1}{3}E_0$ ，方向如图，则  $A$  平面上的电荷面密度  $\sigma_A =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

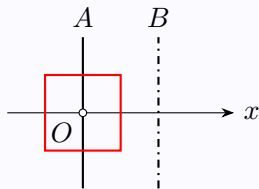
$$-\frac{2}{3}\epsilon_0 E_0$$

## 解析

【解法一】先假定两面的电荷面密度，再用高斯定理分别求两个面所激发的电场，再用电场叠加原理求得三个区域的电场，联立求解。

假定两平面的电荷面密度分别为  $\sigma_A$  和  $\sigma_B$ 。以  $A$  面所在位置为坐标原点，向右为  $x$  轴正方向。

先计算只有  $A$  面带电时的电场分布。如图取一圆柱面为高斯面  $S_1$ ，圆柱底面与  $A$  面平行且与  $A$  面等距，面积为  $S$ ，侧面与  $A$  面垂直，



则由高斯定理可得

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_A(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + E_A(\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) = \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0}$$

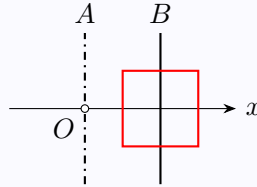
$$2E_A S = \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0}$$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}$$

所以只有  $A$  面带电时的电场分布为

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} -E_A \vec{e}_x & x < 0 \\ E_A \vec{e}_x & x > 0 \end{cases}$$

再计算只有  $B$  面带电时的电场分布，假定  $B$  面所在位置为  $x = a$ 。如图取一圆柱面为高斯面  $S_2$ ，圆柱底面与  $B$  面平行且与  $B$  面等距，面积为  $S$ ，侧面与  $B$  面垂直，



则由高斯定理可得

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_B(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + E_B(\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$2E_B S = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$E_B = \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}$$

所以只有  $B$  面带电时的电场分布为

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -E_B \vec{e}_x & x < a \\ E_B \vec{e}_x & x > a \end{cases}$$

所以，当  $A$ 、 $B$  同时带电时，总的电场分布为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} -(E_A + E_B) \vec{e}_x & x < 0 \\ (E_A - E_B) \vec{e}_x & 0 < x < a \\ (E_A + E_B) \vec{e}_x & x > a \end{cases}$$

依题意

$$E_A + E_B = \frac{1}{3} E_0 = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2\varepsilon_0}$$

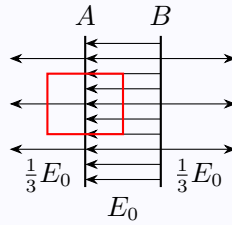
$$E_B - E_A = E_0 = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2\varepsilon_0}$$

解得

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{4}{3}\varepsilon_0 E_0 \\ \sigma_A &= -\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0\end{aligned}$$

【解法二】既然电场分布已知，直接用高斯定理就可以求得两个面的电荷面密度。

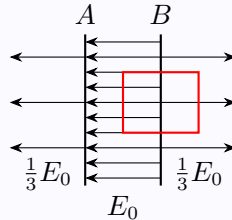
如图选取一圆柱面为高斯面  $S_1$ ，圆柱底面与  $A$  面平行，面积为  $S$ ，侧面与  $A$  面垂直，



以水平向右为  $x$  轴正方向，则由高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_1}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{3}E_0(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + E_0(-\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) &= \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{3}E_0 S - E_0 S &= \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0} \\ \sigma_A &= -\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0\end{aligned}$$

如图选取另一圆柱面为高斯面  $S_2$ ，圆柱底面与  $B$  面平行，面积为  $S$ ，侧面与  $B$  面垂直，

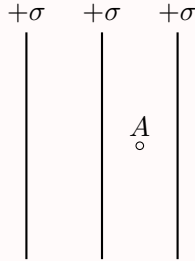


以水平向右为  $x$  轴正方向，则由高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_2}{\varepsilon_0} \\ E_0(-\vec{e}_x) \cdot S(-\vec{e}_x) + \frac{1}{3}E_0(\vec{e}_x) \cdot S(\vec{e}_x) &= \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0} \\ E_0 S + \frac{1}{3}E_0 S &= \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0} \\ \sigma_B &= \frac{4}{3}\varepsilon_0 E_0\end{aligned}$$

## 【0103B19】

三个相互平行的“无限大”均匀带电平面，其电荷面密度均是  $+\sigma$ ，则图中  $A$  点的电场强度大小为  $E_A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

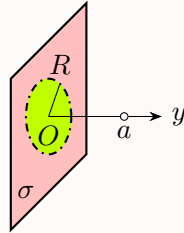


## 答案

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

## 【0103C01】

如图所示，一电荷面密度为  $\sigma$  的“无限大”平面，在距离平面  $a$  处的一点的场强大小的一半是由平面上的一个半径为  $R$  的圆面积范围内的电荷所产生的。试求该圆半径的大小。

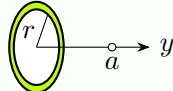


## 解答

先用高斯定理求无限大带电平面所激发的电场，根据对称性可知，电场强度的方向沿  $y$  轴。

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2S) &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\end{aligned}$$

再用电场叠加原理求一个半径为  $r \rightarrow r + dr$  的细圆环在该处所激发的电场，如图，



则有

$$dE_y = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(dr)(r d\theta)}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + a^2)} \times \frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}} r dr$$

所以半径为  $R$  的圆盘所激发的总电场为

$$E_y = \int_0^R \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}} r dr = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right]$$

依题意, 有

$$E_y = \frac{1}{2}E$$

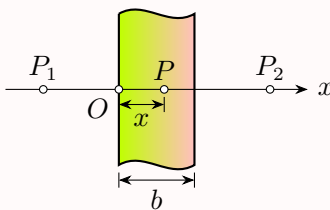
$$R = \sqrt{3}a$$

### 评分标准

1. 高斯定理求无限大均匀带电平面的电场 5 分
2. 叠加原理求有限大小均匀带电圆面的电场 5 分
3. 整理得到结果 5 分

### 【0103C02】

如图所示, 一厚为  $b$  的“无限大”带电平板, 其电荷体密度分布为:  $\rho = kx(0 \leq x \leq b)$ , 式中  $k$  为一正的常量。求: (1) 平板外两侧任一点  $P_1$  和  $P_2$  处的电场强度大小; (2) 平板内任一点  $P$  处的电场强度; (3) 场强为零的点在何处?



### 解答

先由高斯定理求出无限大带电平面的电场

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (2S) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

所以将带电平板切割成一块块带电平面, 考虑  $x \rightarrow x + dx$  处的平面, 其带电量为  $dq = \rho dV = kx \times S dx = Skx dx$ , 所以其电荷面密度为  $d\sigma = \frac{dq}{S} = kx dx$ , 因此它所激发的电场的大小为

$$dE = \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{kx dx}{2\varepsilon_0}$$

注意其方向, 在平面左侧, 电场强度的方向向左; 在平面右侧, 电场强度的方向向右。

所以  $P_1$  处的电场强度方向向左, 大小为

$$E_1 = \int_0^b \frac{kx \, dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

$P_2$  处的电场强度方向向右, 大小为

$$E_2 = \int_0^b \frac{kx \, dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

板内  $x$  处的电场强度为

$$E_3 = \int_0^x \frac{kx \, dx}{2\varepsilon_0} - \int_x^b \frac{kx \, dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kx^2}{4\varepsilon_0} - \frac{k(b^2 - x^2)}{4\varepsilon_0} = \frac{k(2x^2 - b^2)}{4\varepsilon_0}$$

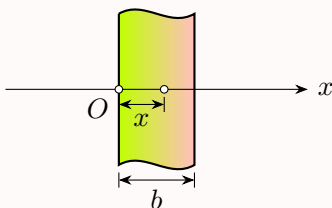
所以场强为零处

$$E_3 = 0 = \frac{k(2x^2 - b^2)}{4\varepsilon_0}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

### 【0103C03】

有一块厚度为  $b$  的无限大带电平板, 其电荷体密度  $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{b}\right)$ , 其中  $\rho_0 > 0$  为常数, 试求其电场分布。



### 解答

由于电荷体密度只与  $x$  有关, 因此可以将不均匀的无限大带电平板看成很多均匀带电平面, 取其中任意一小块  $x \rightarrow x + dx$  部分, 它所产生的电场可以由高斯定理求得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$(dE)(2S) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \rho_0 \left(1 + \frac{x}{b}\right) S \, dx$$

$$dE = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(1 + \frac{x}{b}\right) dx$$

特别注意电场的方向, 在  $x$  左侧, 电场方向为  $-\vec{e}_x$ ; 在  $x$  右侧, 电场方向为  $\vec{e}_x$ 。

在  $x < 0$  区域, 所有元电场的方向均沿  $-\vec{e}_x$ ,

$$E_1 = \int_0^b \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(1 + \frac{x}{b}\right) dx$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ x + \frac{x^2}{2b} \right]_0^b \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( b + \frac{b^2}{2b} \right) \\
&= \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} \\
\vec{E}_1 &= \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} (-\vec{e}_x)
\end{aligned}$$

在  $x > b$  区域, 所有元电场的方向均沿  $\vec{e}_x$ ,

$$\begin{aligned}
E_3 &= \int_0^b \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 + \frac{x}{b} \right) dx \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ x + \frac{x^2}{2b} \right]_0^b \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( b + \frac{b^2}{2b} \right) \\
&= \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} \\
\vec{E}_3 &= \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} \vec{e}_x
\end{aligned}$$

在  $0 < x < b$  区域,

$$\begin{aligned}
E_2 &= \int_0^x \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 + \frac{x}{b} \right) dx - \int_x^b \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 + \frac{x}{b} \right) dx \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ x + \frac{x^2}{2b} \right]_0^x - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ x + \frac{x^2}{2b} \right]_x^b \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( x + \frac{x^2}{2b} \right) - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ \left( b + \frac{b^2}{2b} \right) - \left( x + \frac{x^2}{2b} \right) \right] \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) \\
\vec{E}_2 &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) \vec{e}_x
\end{aligned}$$

所以电场分布为

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_1 = -\frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} \vec{e}_x, & x < 0 \\ \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) \vec{e}_x, & 0 \leq x \leq b \\ \vec{E}_3 = \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} \vec{e}_x, & x > b \end{cases}$$

## 评分标准

1. 高斯定理 3 分
2. 三个区域各 4 分

## 【0103A19】

半径为  $R$  的均匀带电球面，若其电荷面密度为  $\sigma$ ，则在距离球心  $2R$  处的电场强度大小为

- (A)  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  (B)  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  (C)  $\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$  (D)  $\frac{\sigma}{8\varepsilon_0}$

## 答案

C

## 解析

【原来题目中“距离球面  $R$  处”个人认为表述上不太严谨，一则没有说明球内还是球外，二则到一个曲面的距离要怎么定义？这里理解成半径为  $2R$  的球面。所以题目改为距离球心  $2R$ 】

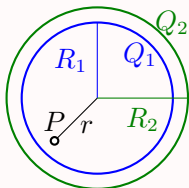
取半径为  $r = 2R$  的球面为高斯面，由高斯定理，得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = E \cdot 4\pi (2R)^2 = 16\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

## 【0103A20】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为  $R_1$ 、带有电荷  $Q_1$ ，外球面半径为  $R_2$ 、带有电荷  $Q_2$ ，则在内球面里面、距离球心为  $r$  处的  $P$  点的场强大小  $E$  为



- (A)  $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$  (B)  $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$  (C)  $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$  (D) 0

## 答案

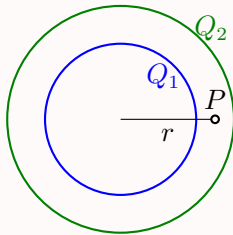
D

## 解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，所以在与球面同心的任意一个球面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电球面同心的球面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，对于  $r < R_1$  的球面，所包围的电荷为零，所以球面上的电场强度为零。

## 【0103A21】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面带电荷  $Q_1$ ，外球面带电荷  $Q_2$ ，则在两球面之间、距离球心为  $r$  处的  $P$  点的场强大小  $E$  为



(A)  $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(B)  $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(C)  $\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(D)  $\frac{Q_2-Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

## 答案

A

## 解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，所以在与球面同心的任意一个球面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电球面同心的球面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，对于  $R_1 < r < R_2$  的球面，所包围的电荷为  $Q_1$ ，所以由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

## 【0103C04】

一半径为  $R$  的带电球体，其电荷体密度分布为： $\rho = Ar (r \leq R)$ ， $\rho = 0 (r > R)$ ， $A$  为一常量。试求球体内外的场强分布。

## 解答

虽然电荷不是均匀分布，但电荷体密度只与半径有关，所以仍然具有球对称性，所以可以使用高斯定理求解电场。选择半径为  $r$  的同心球面为高斯面，则在同一个高斯面上各点的电场强度的大小相等，方

向都沿径向，所以由高斯定理可得：当  $r < R$  时，

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r Ar(4\pi r^2 dr) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times 4\pi A \times \frac{1}{4} r^4 = \frac{\pi Ar^4}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\pi Ar^4}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}$$

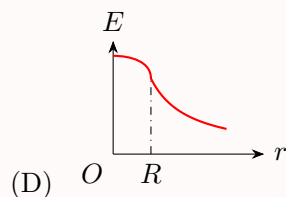
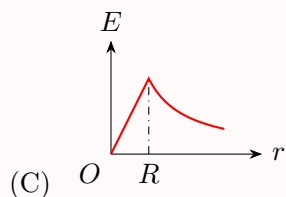
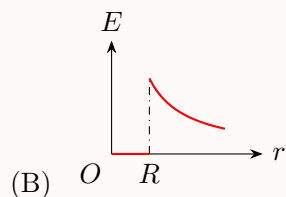
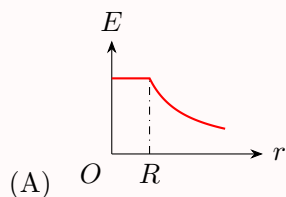
当  $r > R$  时，

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R Ar(4\pi r^2 dr) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times 4\pi A \times \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi AR^4}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\pi AR^4}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

### 【0103A22】

半径为  $R$  的均匀带电球体的静电场中各点的电场强度的大小  $E$  与距球心的距离  $r$  之间的关系曲线为

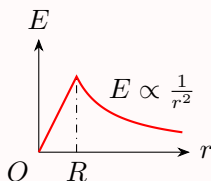


### 答案

C

### 【0103A23】

图示为一具有球对称性分布的静电场的  $E-r$  关系曲线。请指出该静电场是由下列哪种带电体产生的



- (A) 半径为  $R$  的均匀带电球面  
 (B) 半径为  $R$  的均匀带电球体  
 (C) 半径为  $R$  的、电荷体密度为  $\rho = Ar$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体  
 (D) 半径为  $R$  的、电荷体密度为  $\rho = \frac{A}{r}$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体

## 答案

B

## 解析

不管是哪种情况的带电体, 电荷分布都具有球对称性, 所以都可以选择球面为高斯面。在球体外部空间, 都可以把带电体看成电荷集中在球心的点电荷, 因此球外空间的电场强度的大小均为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

而对于球内部空间, 四种情况产生的电场各不相同。

对于均匀带电球面, 球内没有电荷分布, 因此电通量为零, 电场强度为零, 即球内无电场分布。

对于均匀带电球体, 由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \propto r$$

对于半径为  $R$  的、电荷体密度为  $\rho = Ar$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体, 由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \int_0^r r^3 dr = \frac{\pi A r^4}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{A r^2}{4\epsilon_0} \propto r^2$$

对于半径为  $R$  的、电荷体密度为  $\rho = \frac{A}{r}$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体, 由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \int_0^r r dr = \frac{2\pi A r^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{A}{2\epsilon_0} = C$$

## 【0103B20】

半径为  $R$  的无限长均匀带电圆柱面, 沿轴线方向单位长度带电量为  $+\lambda$ , 则在  $r < R$  的区域内场强大小为\_\_\_\_\_。

答案

0

【0103B21】

半径为  $R$  的无限长均匀带电圆柱面，沿轴线方向单位长度带电量为  $+\lambda$ ，则在  $r > R$  的区域内场强大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

## 4、电势

## 4.1 电场力做功

电场力做功

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = W_A - W_B$$

【0104A01】

在以下公式中， $\vec{E}$  是电场强度，可以说明静电场保守性的是

(A)  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$       (B)  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\varepsilon_0}$       (C)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$       (D)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

答案

A

【0104B01】

静电场的环路定理的数学表示式为：\_\_\_\_\_。

答案

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

【0104B02】

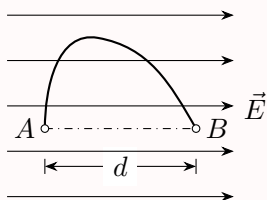
静电场的环路定理表明，静电场是\_\_\_\_\_场。

答案

保守

【0104B03】

如图所示，在场强为  $\vec{E}$  的均匀电场中，A、B 两点间距离为  $d$ 。AB 连线方向与  $\vec{E}$  方向一致。从 A 点经任意路径到 B 点的场强线积分  $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



答案

$Ed$

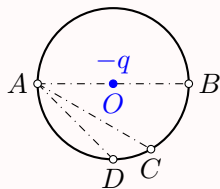
解析

对于匀强电场， $\vec{E}$  是个常矢量，所以可以直接提取到积分号外，即

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{AB} = Ed$$

【0104A02】

点电荷  $-q$  位于圆心  $O$  处， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为同一圆周上的四点，如图所示。现将一试验电荷从  $A$  点分别移动到  $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点，则



- (A) 从  $A$  到  $B$ ，电场力作功最大  
(C) 从  $A$  到  $D$ ，电场力作功最大

- (B) 从  $A$  到  $C$ ，电场力作功最大  
(D) 从  $A$  到各点，电场力作功相等

答案

D

解析

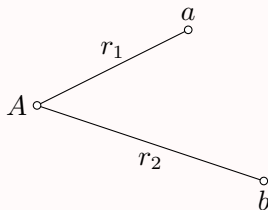
以无穷远为电势零点，点电荷  $-q$  所激发的电场在同一球面上各点的电势相等。所以图中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点的电势相等。

而电场力做功就等于电荷的电势能的改变量，电场力做正功，电势能减小，电场力做负功，电势能增加。因为四点电势相等，所以检验电荷在四点的电势能也相等，所以检验电荷从  $A$  点分别移动到  $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点的过程中，电场力所做的功相等，均为零。



## 【0104A03】

在电荷为  $-Q$  的点电荷  $A$  的静电场中，将另一电荷为  $q$  的点电荷  $B$  从  $a$  点移到  $b$  点。 $a$ 、 $b$  两点距离点电荷  $A$  的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ ，如图所示。则移动过程中电场力做的功为



- (A)  $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$     (B)  $\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$     (C)  $-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$     (D)  $-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(r_2-r_1)}$

## 答案

C

## 解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，点电荷所激发的电场的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以电荷为  $-Q$  的点电荷  $A$  在  $a$ 、 $b$  两点的电势分别为

$$V_a = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

$$V_b = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

所以电荷为  $q$  的点电荷  $B$  在  $a$ 、 $b$  两点的电势能分别为

$$W_a = qV_a = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

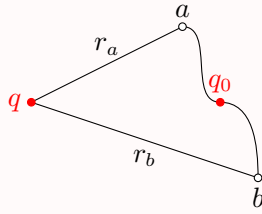
$$W_b = qV_b = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

所以移动过程中电场力所做的功为

$$A = W_a - W_b = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

## 【0104B04】

如图所示，在电荷为  $q$  的点电荷的静电场中，将一电荷为  $q_0$  的试验电荷从  $a$  点经任意路径移动到  $b$  点，电场力所作的功  $W =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

## 解析

电场力是保守力，电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。所以求过程的功，可以通过始末位置的电势能来计算。

当以无穷远为电势零点时，点电荷  $Q$  的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以  $a$  点的电势为

$$V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a}$$

$b$  点的总电势为

$$V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

所以试验电荷  $q_0$  在  $a$  点和  $b$  点的电势能分别为

$$W_a = q_0 V_a$$

$$W_b = q_0 V_b$$

所以在从  $a$  点移动到  $b$  点的过程中，电势能的变化量为

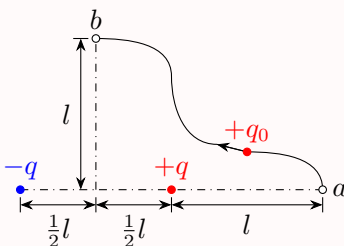
$$\Delta W = W_b - W_a = q_0(V_b - V_a) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

所以电场力做功为

$$W = -\Delta W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

## 【0104B05】

如图所示，在点电荷  $+q$  和  $-q$  产生的电场中，将一点电荷  $+q_0$  沿箭头所示路径由  $a$  点移至  $b$  点，则外力做功  $W = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$-\frac{qq_0}{8\pi\epsilon_0 l}$$

## 解析

根据点电荷的电势公式和电势叠加原理，当以无穷远处为电势零点时， $a$ 、 $b$  处的电势分别为

$$V_a = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (2l)} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l}$$

$$V_b = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{5}}{2}l} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{5}}{2}l} = 0$$

注意本题求的是外力做的功，所以等于点电荷电势能的增加量，即

$$A = W_b - W_a = q_0(V_b - V_a) = -\frac{qq_0}{8\pi\epsilon_0 l}$$

## 【0104B06】

在点电荷  $q$  的电场中，把一个  $-1.0 \times 10^{-9} \text{ C}$  的电荷，从无限远处 (设无限远处电势为零) 移到离该点电荷距离  $0.1 \text{ m}$  处，克服电场力做功  $1.8 \times 10^{-5} \text{ J}$ ，则该点电荷  $q = \underline{\hspace{2cm}} \text{ C}$ 。

## 答案

$$-2 \times 10^{-7}$$

## 解析

当以无穷远为电势零点时，点电荷  $Q$  的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以点电荷  $q$  在该处的电势能为

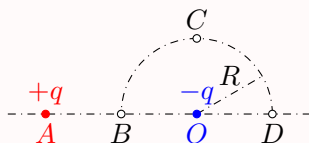
$$W = qV = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

依题意，在电荷移动过程中，克服电场力做功，所以具有电势能，因此有

$$q = \frac{W}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r W}{Q} = \frac{4\pi\epsilon_0 \times 0.1 \times 1.8 \times 10^{-5}}{-1.0 \times 10^{-9}} = -4 \times 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12} \times 1.8 \times 10^3 = -2 \times 10^{-7} \text{ C}$$

### 【0104B07】

图示  $BCD$  是以  $O$  点为圆心，以  $R$  为半径的半圆弧，在  $A$  点有一电荷为  $+q$  的点电荷， $O$  点有一电荷为  $-q$  的点电荷。线段  $BA = R$ 。现将一单位正电荷从  $B$  点沿半圆弧轨道  $BCD$  移到  $D$  点，则电场力所作的功为\_\_\_\_\_。



### 答案

$$\frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

### 解析

电场力是保守力，电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。所以求过程的功，可以通过始末位置的电势能来计算。另外，由于电场的叠加原理，总的电场力为各个点电荷所激发的电场的矢量和，总的功为各个点电荷所做功之和。

当以无穷远为电势零点时，点电荷  $Q$  的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以  $B$  点的总电势为

$$V_B = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} = 0$$

$D$  点的总电势为

$$V_D = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 (3R)} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

对于单位正电荷， $q_0 = 1$ ，它在  $B$  点和  $D$  点的电势能分别为

$$W_B = q_0 V_B = 0$$

$$W_D = q_0 V_D = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

所以在从  $B$  点移动到  $D$  点的过程中，电势能的变化量为

$$\Delta W = W_D - W_B = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

所以电场力做功为

$$W = -\Delta W = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

## 4.2 电势能

电势能和电势能零点

$$W_A = W_B + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_B + q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

【0104B08】

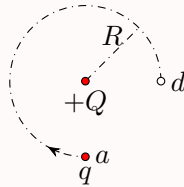
$M$ 、 $N$  为静电场中邻近两点，场强由  $M$  指向  $N$ ，负检验电荷在  $M$  点的电势能\_\_\_\_(填入“高于”、“低于”或“等于”) 在  $N$  点的电势能。

答案

低于

【0104B09】

如图所示。试验电荷  $q$ ，在点电荷  $+Q$  产生的电场中，沿半径为  $R$  的整个圆弧的  $\frac{3}{4}$  圆弧轨道由  $a$  点移到  $d$  点的过程中电场力作功为\_\_\_\_\_。

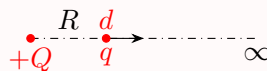


答案

0

【0104B10】

如图所示。试验电荷  $q$ ，在点电荷  $Q$  产生的电场中，从与  $Q$  距离  $R$  的  $d$  点移到无穷远处的过程中，电场力作功为\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 解析

当以无穷远为电势零点时，点电荷  $Q$  的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以点电荷  $q$  在该处的电势能为

$$W = qV = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

依题意，点电荷在  $a$  点和  $d$  点的电势均为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以在从  $a$  点移动到  $d$  点的过程中，电场力做功为零【当试验电荷沿圆形轨道运动时，电场力沿径向方向，元位移沿轨道切线方向，二者一直垂直，所以做功为零】。当点电荷从  $d$  点运动到无穷远的过程中，电场力做功，电势能减少，所以

$$W = qV = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104B11】

在某点电荷激发的电场中，有另一点电荷  $q$  从电势为零的无限远处移动到距离场源电荷为  $r$  的  $P$  点，这个过程中克服电场力做功  $W$ ，则  $q$  在  $P$  点的电势能为\_\_\_\_\_。

## 答案

$W$

## 【0104B12】

在某点电荷激发的电场中，有另一点电荷  $q$  从电势为零的无限远处移动到距离场源电荷为  $r$  的  $P$  点，这个过程中克服电场力做功  $W$ ，则该场源电荷的电量  $Q =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{4\pi\epsilon_0 r W}{q}$$

## 【0104A04】

在真空中，半径分别为  $R$  和  $2R$  的两个无限长同轴圆柱面均匀带电，单位长度上的电量分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ 。今将一电量为  $+Q$  的带电粒子从内圆柱面由静止释放，则该粒子到达外圆柱面时的动能为

(A)  $\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2$

(B)  $\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0}$

(C)  $\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$

(D)  $\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}$

答案

A

## 4.3 电势差

电势差

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_A - U_B$$

【0104A05】

在已知静电场分布的条件下, 任意两点  $P_1$  和  $P_2$  之间的电势差决定于

- (A)  $P_1$  和  $P_2$  两点的位置 (B)  $P_1$  和  $P_2$  两点处的电场强度的大小和方向  
(C) 试验电荷所带电荷的正负 (D) 试验电荷的电荷大小

答案

A

解析

静电场是保守场, 电场中任意两点之间的电势差只与该两个位置有关, 而与检验电荷无关。当然, 在计算两点之间的电势差时, 要用到电场的分布, 因此电势差与两点之间的电场强度分布有关, 而不是与该两点外的电场强度有关。

## 4.4 电势

电势和电势零点 (求电势的第一种方法: 已知电场求电势)

$$U_A = \frac{W_A}{q} = \frac{W_B}{q} + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_B + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

点电荷的电势 (选择无穷远处为电势零点)

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

【0104A06】

静电场中某点电势的数值等于

- (A) 试验电荷  $q_0$  置于该点时具有的电势能  
(B) 把试验电荷  $q_0$  从该点移到电势零点外力所作的功  
(C) 单位正电荷置于该点时具有的电势能  
(D) 把单位正电荷从该点移到电势零点外力所作的功

答案

C

解析

带电量为  $q$  的点电荷置于电场中电势为  $V$  处所具有的电势能为  $W$ ，则有

$$W = qV$$
$$V = \frac{W}{q}$$

所以，电势在数值上等于单位正电荷在该处时的电势能。

而电场力做功，电势能减少，所以某处的电势能等于电荷从该处移到电势能零点时电场力所做的功。

【0104A07】

关于静电场中某点电势值的正负，下列说法中正确的是

- (A) 电势值的正负取决于置于该点的试验电荷的正负
- (B) 电势值的正负取决于电场力对试验电荷做功的正负
- (C) 电势值的正负取决于电势零点的选取
- (D) 电势值的正负取决于产生电场的电荷的正负

答案

C

解析

电势和电势能零点的选取。

【0104B13】

$M$ 、 $N$  为静电场中邻近两点，场强由  $M$  指向  $N$ ，则  $M$  点的电势\_\_\_\_(填入“高于”、“低于”或“等于”)  $N$  点的电势。

答案

高于

【0104B14】

一质量为  $m$ ，电荷为  $q$  的粒子，从电势为  $U_A$  的  $A$  点，在电场力作用下运动到电势为  $U_B$  的  $B$  点。若粒子到达  $B$  点时的速率为  $v_B$ ，则它在  $A$  点时的速率  $v_A =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\sqrt{\frac{2q(U_B - U_A)}{m}} + v_B^2$$

## 解析

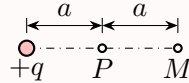
题目中没有涉及高度，所以不考虑重力势能的变化。所以粒子的能量就只算电势能和动能。所以有

$$qU_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = qU_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2q(U_B - U_A)}{m}} + v_B$$

## 【0104A08】

在点电荷  $+q$  的电场中，若取图中  $P$  点处电势为零点，则  $M$  点的电势为



(A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$

(B)  $\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}$

(C)  $\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$

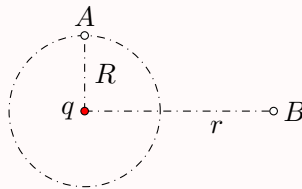
(D)  $\frac{-q}{8\pi\epsilon_0 a}$

## 答案

D

## 【0104A09】

如图，在点电荷  $q$  的电场中，选取以  $q$  为中心、 $R$  为半径的球面上一点  $A$  处为电势零点，则与点电荷  $q$  距离为  $r$  的  $B$  点的电势为



(A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

(B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$

(C)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r-R)}$

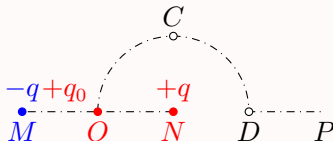
(D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

## 答案

B

## 【0104A10】

如图所示，直线  $MN$  长为  $2l$ ，弧  $OCD$  是以  $N$  点为中心、 $l$  为半径的半圆弧， $N$  点有正电荷  $+q$ ， $M$  点有负电荷  $-q$ 。今将一试验电荷  $+q_0$  从  $O$  点出发沿路径  $OCDP$  移到无穷远处，设无穷远处电势为零，则电场力作功



(A)  $A < 0$ ，且为有限常量

(B)  $A > 0$ ，且为有限常量

(C)  $A = \infty$

(D)  $A = 0$

## 答案

D

## 解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，点电荷所激发的电场的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以  $N$  点正电荷  $+q$  在  $O$  点的电势为

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l}$$

$M$  点负电荷  $-q$  在  $O$  点的电势为

$$V_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l}$$

所以  $O$  点的总电势为

$$V_O = V_1 + V_2 = 0$$

所以检验电荷在  $O$  点的电势能等于零。因此检验电荷从  $O$  点移动到无穷远处时，电场力所做的功为零。

## 【0104A11】

相距为  $r_1$  的两个电子，在重力可忽略的情况下由静止开始运动到相距为  $r_2$ ，从相距  $r_1$  到相距  $r_2$  期间，两电子系统的下列哪一个量是不变的？

(A) 动能总和

(B) 电势能总和

(C) 动量总和

(D) 电相互作用力

## 答案

C

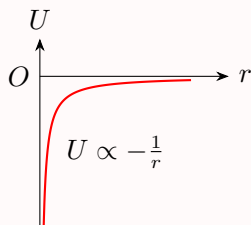
## 解析

两个电荷之间的静电力是一对作用力与反作用力。在重力可以忽略的情况下，由两个电子所组成的系统只受到这对静电力的作用，所以系统的动量守恒。

运动过程中，二者之间的距离发生变化，静电力也发生变化，静电力做功，电势能变化，动能变化。

## 【0104A12】

图中所示为一球对称性静电场的电势分布曲线， $r$  表示离对称中心的距离。请指出该电场是由下列哪一种带电体产生的。



(A) 半径为  $R$  的均匀带负电球面

(B) 半径为  $R$  的均匀带负电球体

(C) 正点电荷

(D) 负点电荷

## 答案

D

## 解析

由于点电荷，电场强度为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

当以无穷远处为电势的零点时，电势为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

对于均匀带电球面，电场强度为

$$E_1 = 0 (\text{当 } r < R \text{ 时})$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma \times 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} (\text{当 } r > R \text{ 时})$$

当以无穷远处为电势的零点时，电势为

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} (\text{当 } r > R \text{ 时})$$

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} (\text{当 } r < R \text{ 时})$$

对于均匀带电球体, 电场强度为

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} (\text{当 } r < R \text{ 时})$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} (\text{当 } r > R \text{ 时})$$

当以无穷远处为电势的零点时, 电势为

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} (\text{当 } r > R \text{ 时})$$

$$U_1 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} (\text{当 } r < R \text{ 时})$$

#### 4.5 已知电场求电势

【0104C01】

已知某电场

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_1 = -\frac{3\rho_0 b}{4\epsilon_0} \vec{e}_x, & x < 0 \\ \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) \vec{e}_x, & 0 \leq x \leq b \\ \vec{E}_3 = \frac{3\rho_0 b}{4\epsilon_0} \vec{e}_x, & x > b \end{cases}$$

其中  $\rho_0 > 0$ ,  $b > 0$ , 二者均为常数。若以  $x = 0$  处为电势零点, 试求其电势分布。

解答

$x < 0$  区域

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_x^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_x^0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} \\ &= \int_x^0 -\frac{3\rho_0 b}{4\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x \\ &= \int_x^0 -\frac{3\rho_0 b}{4\epsilon_0} dx \\ &= \frac{3\rho_0 b}{4\epsilon_0} x \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq b$  区域

$$U_2 = \int_x^0 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^0 \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \\
&= \int_x^0 \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x \\
&= \int_x^0 \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) dx \\
&= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^3}{3b} + x^2 - \frac{3b}{2}x \right)
\end{aligned}$$

$x > b$  区域

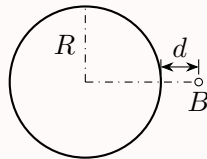
$$\begin{aligned}
U_3 &= \int_x^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
&= \int_x^b \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} + \int_b^0 \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \\
&= \int_x^b \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x + \int_b^0 \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x \\
&= \int_x^b \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} dx + \int_b^0 \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x^2}{b} + 2x - \frac{3b}{2} \right) dx \\
&= \frac{3\rho_0 b}{4\varepsilon_0} (b - x) - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{b^3}{3b} + b^2 - \frac{3b}{2}b \right) \\
&= \frac{\rho_0 b}{12\varepsilon_0} (10b - 9x)
\end{aligned}$$

### 评分标准

1. 三个区域各 5 分

### 【0104B15】

如图所示，带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的均匀带电球面，图中  $d = \frac{R}{2}$ ，取无穷远处为电势零点，则  $B$  点的电势为\_\_\_\_\_。

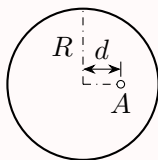


### 答案

$$\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

## 【0104B16】

如图所示，带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的均匀带电球面，图中  $d = \frac{R}{2}$ ，取无穷远处为电势零点，则  $A$  点的电势为\_\_\_\_\_。

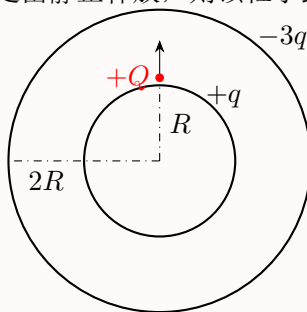


## 答案

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104A13】

如图所示，在真空中半径分别为  $R$  和  $2R$  的两个同心球面，其上分别均匀地带有电荷  $+q$  和  $-3q$ 。今将一电荷为  $+Q$  的带电粒子从内球面处由静止释放，则该粒子到达外球面时的动能为



(A)  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$

(B)  $\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 R}$

(C)  $\frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 R}$

(D)  $\frac{3Qq}{8\pi\epsilon_0 R}$

## 答案

C

## 解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，带电量为  $Q$ 、半径为  $R$  的带电球面所激发的电场的电势为

$$V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以两个带电球面在外球面的电势分别为

$$V_{12} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2R)}, V_{22} = \frac{-3q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

两个带电球面在内球面的电势分别为

$$V_{11} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R)}, V_{21} = \frac{-3q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

所以两个球面处的电势分别为

$$V_1 = V_{11} + V_{21} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R)} + \frac{-3q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

$$V_2 = V_{12} + V_{22} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2R)} + \frac{-3q}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

所以电荷  $+Q$  在两个球面处的电势能分别为

$$W_1 = QV_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

$$W_2 = QV_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)}$$

在这个过程中电场力所做的功为

$$A = W_1 - W_2 = \left[ \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} \right] - \left[ \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0(2R)} \right] = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R}$$

根据动能定理，电场力对电荷所做的功就等于电荷动能的增加量，电荷从静止开始释放，所以电荷末态的动能就是

$$E_k = A = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R}$$

### 【0104B17】

一半径为  $R$  的均匀带电球面，其电荷面密度为  $\sigma$ 。若规定无穷远处为电势零点，则该球面上的电势  $U = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 答案

$$\frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

### 解析

由于均匀带电球面的电荷分布具有球对称性，所以可以用高斯定理很容易求得电场的分布，在球外空间，电场沿径向方向，大小为

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \times (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \times (4\pi R^2)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

所以，当选择无穷远处为电势零点时，球面上的电势为

$$V = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \left. \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \right|_R^\infty = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

### 【0104B18】

带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的均匀带电球面。若取无穷远处为电势零点，则球面处的电势为\_\_\_\_\_。

### 答案

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

### 【0104B19】

带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的均匀带电球面。若取球心为电势零点，则球面处的电势为\_\_\_\_\_。

### 答案

0

### 【0104B20】

一半径为  $R$  的均匀带电球面，带有电荷  $Q$ 。若设该球面上电势为零，则球面内各点电势为\_\_\_\_\_。

### 答案

0

### 解析

根据均匀带电球面的电场分布的特点，在球内电场为零，所以球内任意一点到球面上任意一点之间的电势差为零。所以若设球面上电势为零，则球面内任意一点的电势也为零。

### 【0104A14】

一半径为  $R$  的均匀带电球面，带有电荷  $Q$ 。若规定该球面上的电势值为零，则无限远处的电势将等于

- (A)  $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$       (B) 0      (C)  $-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$       (D)  $\infty$



## 答案

C

## 解析

对于均匀带电球面，电场强度为

$$E_1 = 0 (\text{当 } r < R \text{ 时})$$

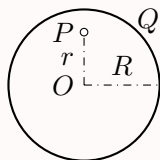
$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma \times 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} (\text{当 } r > R \text{ 时})$$

当以球面处为电势的零点时，无限远处的电势为

$$U_\infty = \int_\infty^R E \, dr = \int_\infty^R E_2 \, dr = \left[ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_\infty^R = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104A15】

如图所示，半径为  $R$  的均匀带电球面，总电荷为  $Q$ ，设无穷远处的电势为零，则球内距离球心为  $r$  的  $P$  点处的电场强度的大小和电势为



(A)  $E = 0, U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

(B)  $E = 0, U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

(C)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

(D)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

## 答案

B

## 解析

由高斯定理很容易求得均匀带电球面的电场分布：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0, E_1 = 0, r < R$$

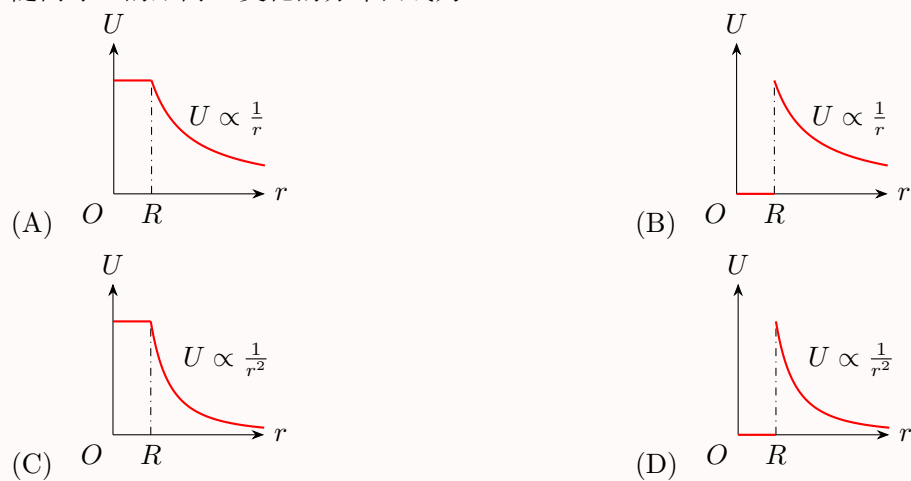
$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, r > R$$

所以球内的电势分布为

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 \, dr + \int_R^\infty E_2 \, dr = 0 + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr = -\left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104A16】

半径为  $R$  的均匀带电球面，总电荷为  $Q$ 。设无穷远处电势为零，则该带电体所产生的电场的电势  $U$ ，随离球心的距离  $r$  变化的分布曲线为



## 答案

A

## 解析

由高斯定理很容易求得均匀带电球面的电场分布：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0, E_1 = 0, r < R$$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r > R$$

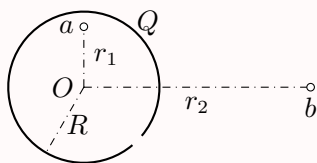
所以电势分布为

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = 0 + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = - \left[ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = - \left[ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

## 【0104B21】

如图所示，在半径为  $R$  的球壳上均匀带有电荷  $Q$ ，将一个点电荷  $q (q \ll Q)$  从球内  $a$  点经球壳上一个孔移到球外  $b$  点。则此过程中电场力作功  $W =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_2} \right)$$

## 解析

根据均匀带电球壳的电场分布特点，在球内电场为零，所以球内的电势等于球面上的电势，而球外的电势相当于所有电荷集中在球心时的电势，即

$$V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

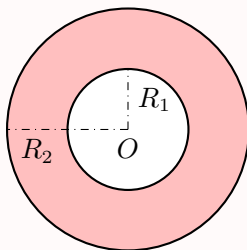
$$V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

这里一般地选择无穷远处为电势的零点。所以点电荷  $q$  从球内  $a$  点移到球外  $b$  点时电场力所做的功为

$$W = qV_a - qV_b = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_2} \right)$$

## 【0104C02】

图示为一个均匀带电的球层，其电荷体密度为  $\rho$ ，球层内表面半径为  $R_1$ ，外表面半径为  $R_2$ 。设无穷远处为电势零点，求空腔内任一点的电势。



## 解答

## 【法一】

由于电荷分布具有球对称性，所以可以用高斯定理求电场分布。高斯面选择为同心球面。对于空腔内区域， $r < R_1$ ，

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot (4\pi r^2) = 0$$

$$E_1 = 0$$

对于球层内区域,  $R_1 < r < R_2$ ,

$$\begin{aligned} E_2 \cdot (4\pi r^2) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \times \rho \times \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3) \\ E_2 &= \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

对于球外区域,  $r > R_2$ ,

$$\begin{aligned} E_3 \cdot (4\pi r^2) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \times \rho \times \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) \\ E_3 &= \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

选择无穷远处为电势零点时, 空腔内的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr \\ &= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^\infty \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}r^2 + \frac{R_1^3}{r} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_2}^\infty \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1^3}{R_2} - R_1^2 \right] + \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 + R_2^2 \right] = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned}$$

### 【法二】

本题也可以使用电势叠加原理求解。运用电势叠加原理求解时, 要应用到空腔部分电场为零, 所以腔内各点电势相等, 通过求球心处的电势来求腔内任意一点的电势。将球层分割成一个个球壳, 对于  $r \rightarrow r + dr$  之间的球壳, 在球心处的电势为

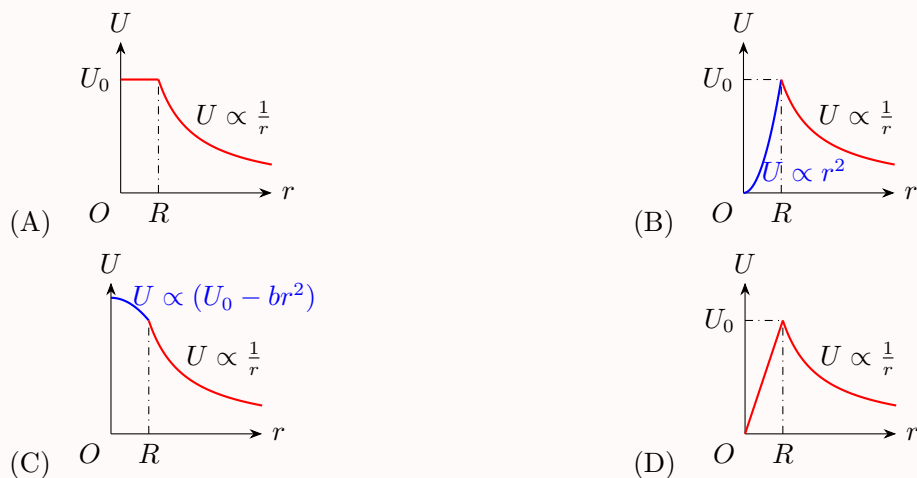
$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi\rho r^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r dr}{\varepsilon_0}$$

所以总的电势为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho r dr}{\varepsilon_0} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}$$

### 【0104A17】

设无穷远处电势为零, 则半径为  $R$  的均匀带电球体产生的电场的电势分布规律为 (图中的  $U_0$  和  $b$  皆为常量)



答案

C

解析

由于电荷分布的球对称性，很容易由高斯定理求出电场分布（设电荷体密度为  $\rho$ ）

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \text{ (当 } r < R \text{ 时)}$$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \text{ (当 } r > R \text{ 时)}$$

选择无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \left[ -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \right]_r^\infty = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \text{ (当 } r > R \text{ 时)}$$

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \left[ \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \right]_r^R + \left[ -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \right]_R^\infty$$

$$= \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \text{ (当 } r < R \text{ 时)}$$

其实从电场分布就可以直接判断出来答案是 (C)， $r$  越大，电势越低。

【0104C03】

半径为  $R$  的球体均匀带电，电荷体密度为  $\rho > 0$ 。若以无穷远处为电势零点，求电场强度和电势的分布。

## 解答

(1) 电荷分布具有球对称性，可以由高斯定理求电场分布。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$r < R$ ，球内区域，

$$E_1(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$r > R$ ，球外区域，

$$E_2(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 以无穷远处为电势零点， $r < R$ ，球内区域，

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

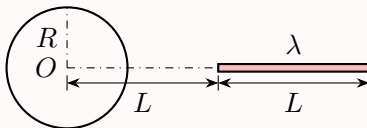
$$= \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0}$$

$r > R$ ，球外区域，

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

## 【0104C04】

有一半径为  $R$ 、电荷量为  $Q$  的均匀带电球体处于真空中。(1) 求各区域的电场强度分布；(2) 以无穷远为电势零点，求球外 ( $r > R$ ) 的电势分布；(3) 在球体外沿直径方向上放置电荷线密度为  $\lambda$ 、长度为  $L$  ( $L > R$ ) 的均匀带电细线，细线近端与球心  $O$  相距  $L$ ，如图所示。假设球和细线上的电荷分布固定，求细线在电场中的电势能。



## 解答

(1) 电荷分布具有球对称性，可以由高斯定理求电场分布。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$r < R$ , 球内区域,

$$E_1(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$r > R$ , 球外区域,

$$E_2(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 以无穷远处为电势零点,  $r > R$ , 球外区域,

$$U = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(3)

$$W = \int_L^{2L} (\lambda dr) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln 2$$

### 【0104C05】

一半径为  $R$  的带电球体, 其电荷体密度分布为:  $\rho = \frac{qr}{\pi R^4} (r \leq R)$  ( $q$  为一正的常量),  $\rho = 0 (r > R)$ 。试求: (1) 带电球体的总电荷; (2) 球内、外各点的电场强度; (3) 球内、外各点的电势。

### 解答

(1) 带电球体的总电荷为

$$Q = \int \rho dV = \int_0^R \frac{qr}{\pi R^4} (4\pi r^2 dr) = \frac{4q}{R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{4q}{R^4} \times \frac{1}{4} R^4 = q$$

(2) 虽然电荷不是均匀分布, 但电荷体密度只与半径有关, 所以仍然具有球对称性, 所以可以使用高斯定理求解电场。选择半径为  $r$  的同心球面为高斯面, 则在同一个高斯面上各点的电场强度的大小相等, 方向都沿径向, 所以由高斯定理可得: 当  $r < R$  时,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \frac{qr}{\pi R^4} (4\pi r^2 dr) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{4q}{R^4} \int_0^r r^3 dr = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{4q}{R^4} \times \frac{1}{4} r^4 = \frac{qr^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

$$E_1 = \frac{qr^4}{4\pi\varepsilon_0 R^4 r^2} = \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}$$

当  $r > R$  时

$$E_2 \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(3) 因为电荷分布在有限区域, 所以通常选择无穷远处为电势零点, 所以在球外空间的电势为

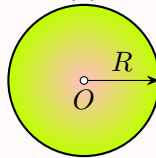
$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在球内空间的电势为

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \int_r^R \frac{qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} dr + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{q(R^3 - r^3)}{12\pi\epsilon_0 R^4} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{3\pi\epsilon_0 R} - \frac{qr^3}{12\pi\epsilon_0 R^4} \end{aligned}$$

### 【0104C06】

如图所示, 带电球的半径为  $R$ , 其电荷体密度  $\rho = \rho_0 r$ , 其中  $\rho_0$  为常数,  $r$  指球内任意点到球心的距离。(1) 试用高斯定理求出电场强度的空间分布; (2) 以无限远处为电势零点, 求出球内任意点的电势。



### 解答

(1) 电荷分布具有球对称性, 可以由高斯定理求电场分布。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

$r < R$ , 球内区域,

$$\begin{aligned} E_1(4\pi r^2) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_0 r \times 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\epsilon_0} \\ E_1 &= \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

$r > R$ , 球外区域,

$$\begin{aligned} E_2(4\pi r^2) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho_0 r \times 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 \pi R^4}{\epsilon_0} \\ E_2 &= \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

(2) 以无穷远处为电势零点,  $r < R$ , 球内区域,

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \int_r^R \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho_0(R^3 - r^3)}{12\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0} = \frac{\rho_0(4R^3 - r^3)}{12\epsilon_0} \end{aligned}$$



## 【0104A18】

半径为  $R$  的无限长直棒均匀带电，电荷体密度为  $\rho$ 。取棒的表面为零电势，则棒外 ( $r > R$ ) 的场强大小和电势分别为

(A)  $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ 、 $U = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

(B)  $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ 、 $U = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$

(C)  $E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ 、 $U = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0}$

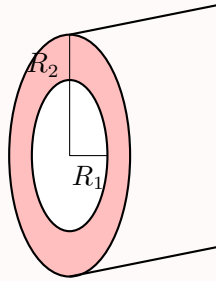
(D)  $E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ 、 $U = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R^2 - r^2)$

## 答案

B

## 【0104C07】

如图所示，无限长圆柱筒的内、外半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ ，现让其均匀带电，且体密度为  $\rho$ 。求：(1) 电场强度的空间分布；(2) 圆柱筒内外表面的电势差。



## 解答

(1) 电荷分布具有柱对称性，可以用高斯定理求电场

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$r < R_1$ ，筒内空腔，

$$E_1(2\pi r h) = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$ ，圆柱筒内，

$$E_2(2\pi r h) = \frac{\rho \times \pi(r^2 - R_1^2)h}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

$r > R_2$ ，圆柱筒外，

$$E_3(2\pi r h) = \frac{\rho \times \pi(R_2^2 - R_1^2)h}{\varepsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

(2)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

#### 4.6 电势叠加原理求电势

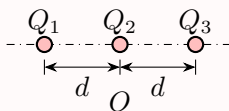
电势叠加原理 (求电势的第二种方法)

$$U = \sum_i U_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$U = \int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

【0104B22】

如图所示,有三个点电荷沿一条直线等间距分布。已知其中任一点电荷所受合力均为0,且  $Q_1 = Q_3 = Q$ 。若  $Q_1$  和  $Q_3$  的位置固定,则将  $Q_2$  从  $O$  点推到无穷远处外力做功\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

解析

$Q_1 = Q_3 = Q$ , 不管  $Q_2$  等于多少, 它所受的合力都等于零, 但对于  $Q_1$  来说,  $Q_3$  对它的力必为斥力, 所以  $Q_2$  对它的力必须是引力

$$\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 0$$

$$Q_2 = -\frac{Q}{4}$$

$Q_1$ 、 $Q_3$  在  $O$  点的总电势 (以无穷远处为电势零点)

$$U_O = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

所以  $Q_2$  在  $O$  点的电势能

$$W_O = Q_2 U_O = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

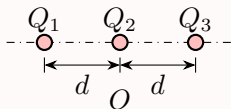
所以过程中电势能的改变量

$$\Delta W = W_\infty - W_O = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

而电势能之所以发生变化, 就是外力做它做了功, 因此过程中外力做功  $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$ 。

## 【0104B23】

如图所示,有三个点电荷沿一条直线等间距分布。已知其中任一点电荷所受合力均为0,且  $Q_1 = Q_3 = Q$ 。若  $Q_1$  和  $Q_3$  的位置固定,则将  $Q_2$  从  $O$  点推到无穷远处,其电势能改变了\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

## 解析

$Q_1 = Q_3 = Q$ , 不管  $Q_2$  等于多少, 它所受的合力都等于零, 但对于  $Q_1$  来说,  $Q_3$  对它的力必为斥力, 所以  $Q_2$  对它的力必须是引力

$$\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 0$$

$$Q_2 = -\frac{Q}{4}$$

$Q_1$ 、 $Q_3$  在  $O$  点的总电势 (以无穷远处为电势零点)

$$U_O = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 d}$$

所以  $Q_2$  在  $O$  点的电势能

$$W_O = Q_2 U_O = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

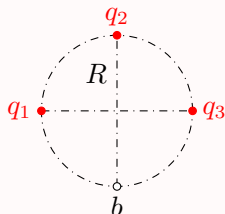
所以过程中电势能的改变量

$$\Delta W = W_\infty - W_O = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

而电势能之所以发生变化, 就是外力做它做了功, 因此过程中外力做功  $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$ 。

## 【0104B24】

电荷分别为  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  的三个点电荷分别位于同一圆周的三个点上, 如图所示。设无穷远处为电势零点, 圆半径为  $R$ , 则  $b$  点处的电势  $U =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\sqrt{2}(q_1+q_3)+q_2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

## 解析

选择电势零点为无穷远处，带电量为  $Q$  的点电荷在离它  $r$  处的电势为

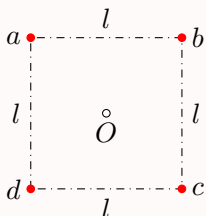
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

依题意，三个点电荷到  $b$  点的距离分别为  $r_1 = \sqrt{2}R = r_3$ ， $r_2 = 2R$ ，所以  $b$  点处的总电势为

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}(q_1 + q_3) + q_2}{2R} = \frac{\sqrt{2}(q_1 + q_3) + q_2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104A19】

如图所示，边长为  $l$  的正方形，在其四个顶点上各放有等量的点电荷。若正方形中心  $O$  处的场强值和电势值都等于零，则



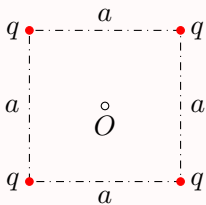
- (A) 顶点  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  处都是正电荷  
 (B) 顶点  $a$ 、 $b$  处是正电荷， $c$ 、 $d$  处是负电荷  
 (C) 顶点  $a$ 、 $c$  处是正电荷， $b$ 、 $d$  处是负电荷  
 (D) 顶点  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  处都是负电荷

## 答案

C

## 【0104B25】

如图所示，边长为  $a$  的正方形的四个顶点上分别放置带电量同为  $q$  的点电荷，若以无穷远为电势零点，则  $O$  点处的电势为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 a}$$

## 【0104A20】

一个边长为  $a$  的正立方体的八个顶点上均放置一个带电量为  $Q$  的点电荷，若以无穷远处为电势零点，则正立方体几何中心上的电势为

- (A) 0 (B)  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$  (C)  $\frac{Q}{2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a}$  (D)  $\frac{4Q}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a}$

## 答案

D

## 【0104B26】

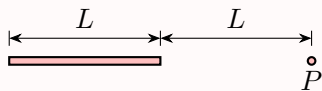
均匀带电细棒，长为  $L$ ，带电量为  $Q$ ，取棒的左端点为坐标原点，现将一带电量为  $q$  的点电荷置放在棒右端延长线距离原点为  $x$  的位置上，取无穷远为电势零点，则点电荷  $q$  的电势能为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{x}{x-L}$$

## 【0104C08】

如图所示，一均匀带电细杆，长为  $L$ ，线电荷密度为  $\lambda$ ，求：(1) 细杆延长线上与杆的一端相距为  $L$  的  $P$  点的电场强度与电势 (以无穷远为电势零点)；(2) 若将一带电量为  $q$  (与  $\lambda$  同性) 的点电荷放置在  $P$  点，此电荷所受的电场力是多少？(3) 若有一带电量为  $q$  (与  $\lambda$  同性) 的点电荷从  $P$  点运动到无限远处，电势能改变了多少？



## 解答

(1) 电场

$$E = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (2L-x)^2} = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}$$

电势

$$U = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (2L-x)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$$

(2)

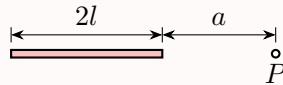
$$F = qE = \frac{q\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}$$

(3)

$$\Delta W = q\Delta U = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$$

## 【0104C09】

电荷  $q$  均匀分布在长为  $2l$  的细杆上, 求在杆外延长线上与杆端距离为  $a$  的  $P$  点的电势 (设无穷远处为电势零点)。



## 解答

根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

和电势叠加原理, 将带电细杆分割成一个个元电荷, 则对于  $x \rightarrow x + dx$  段的元电荷, 其带电量为  $dq = \frac{q}{2l} dx$ , 它到  $P$  点的距离为  $r = l + a - x$ , 所以它在  $P$  处的电势为

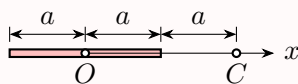
$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q dx}{8\pi\epsilon_0 l(l + a - x)}$$

所以  $P$  处的总电势为

$$U = \int_{-l}^l \frac{q dx}{8\pi\epsilon_0 l(l + a - x)} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l} [-\ln(l + a - x)]_{-l}^l = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2l + a}{a}$$

## 【0104C10】

真空中一均匀带电细直杆, 长度为  $2a$ , 总电荷为  $+Q$ , 沿  $Ox$  轴固定放置 (如图)。一运动粒子质量为  $m$ 、带有电荷  $+q$ , 在经过  $x$  轴上的  $C$  点时, 速率为  $v$ 。试求: (1) 粒子在经过  $C$  点时, 它与带电杆之间的相互作用电势能 (设无穷远处为电势零点); (2) 粒子在电场力作用下运动到无穷远处的速率  $v_\infty$  (设  $v_\infty$  远小于光速, 重力势能可忽略)。



## 解答

(1) 根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

和电势叠加原理, 将带电细杆分割成一个个元电荷, 则对于  $x \rightarrow x + dx$  段的元电荷, 其带电量为  $dq = \frac{Q}{2a} dx$ , 它到  $C$  点的距离为  $r = 2a - x$ , 所以它在  $C$  处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q dx}{8\pi\epsilon_0 a(2a - x)}$$

所以  $C$  处的总电势为

$$U = \int_{-a}^a \frac{Q dx}{8\pi\epsilon_0 a(2a - x)} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} [-\ln(2a - x)]_{-a}^a = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln 3$$

所以  $q$  在  $C$  处时的电势能为

$$W = qU = \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 a} \ln 3$$

(2) 在粒子从  $C$  点运动到无穷远的过程中, 只有电场力做功, 所以由能量守恒定律可得【这里不考虑重力势能的变化】

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + qU &= \frac{1}{2}mv_\infty^2 \\ v_\infty &= \sqrt{v^2 + \frac{2qV}{m}} = \sqrt{v^2 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 am} \ln 3} \end{aligned}$$

## 【0104B27】

真空中, 有一均匀带电细圆环, 电荷线密度为  $\lambda$ , 取无穷远为电势零点, 则其圆心处的电势  $U_0 =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\lambda}{2\epsilon_0}$$

## 解析

由于对称性, 圆环上关于圆心对称的两个点电荷在圆心处产生的合场强为零, 所以整个圆环在圆心处产生的总的电场强度为零。

而电势是标量, 以无穷远处为电势零点, 圆环上任意一个元电荷  $dq$  在圆心处的电势为

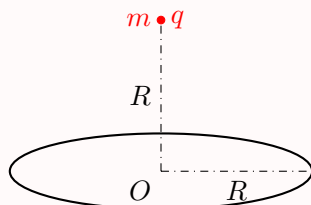
$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

设圆环的半径为  $R$ , 则整个圆环在圆心处的电势为

$$U = \oint \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot (2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$$

## 【0104B28】

一半径为  $R$  的均匀带电细圆环，带有电荷  $Q$ ，水平放置。在圆环轴线的上方离圆心  $R$  处，有一质量为  $m$ 、带电荷为  $q$  的小球。当小球从静止下落到圆心位置时，它的速度为  $v = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\sqrt{2gR - \frac{Qq(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}m\pi\epsilon_0 R}}$$

## 解析

根据点电荷的电势公式和电势叠加原理，当以无穷远处为电势零点时，起点和圆心处的电势分别为

$$V_1 = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}R)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}R)}$$

$$V_O = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以根据动能定理或能量守恒定律，可得

$$qV_1 + mgR = qV_O + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = q(V_1 - V_O) + mgR$$

$$v = \sqrt{\frac{2q(V_1 - V_O)}{m} + 2gR} = \sqrt{2gR - \frac{Qq(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}m\pi\epsilon_0 R}}$$

## 【0104B29】

一细棒弯成半径为  $R$  的半圆形，其上均匀分布有电荷  $q$ 。若有一带电量为  $Q$  的点电荷置放在半圆中心  $O$  处，取无穷远为电势能零点，则点电荷  $Q$  与半圆形带电细棒的电势能为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

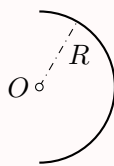
## 答案

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104B30】

如图，一半径为  $R$  的半圆细环电荷均匀分布，单位长度上的带电量为  $+\lambda$ ，取无穷远为电势零点，则环心 ( $O$  点) 处的电势为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



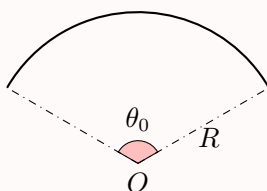


答案

$$\frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

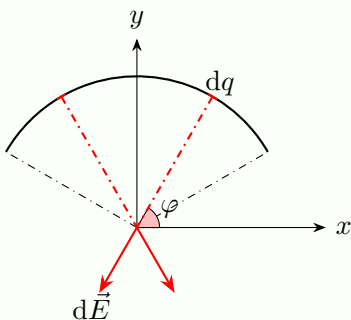
【0104C11】

如图所示，一段半径为  $R$  的细圆弧对圆心  $O$  的张角为  $\theta_0$ ，其上均匀分布着正电荷  $q$ ，求：(1) 圆心处的电场强度；(2) 圆心处的电势 (以无穷远处为电势零点)。



解答

(1) 如图建立坐标系，取两个对称的点电荷  $dq = \frac{q}{\theta_0} d\varphi$ ，



则这两个点电荷在  $O$  点的总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向，大小

$$2 dE_y = 2 \times \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \theta_0 R^2} \sin \varphi d\varphi$$

所以  $O$  点总的电场强度方向沿  $y$  轴负方向，大小

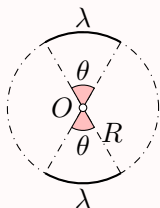
$$E = \int_{\frac{1}{2}(\pi-\theta_0)}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \theta_0 R^2} \sin \varphi d\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \theta_0 R^2} \left[ -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \left( \frac{\pi - \theta_0}{2} \right) \right] = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \theta_0 R^2} \sin \frac{\theta_0}{2}$$

(2) 以无穷远处为电势零点，圆心处的电势

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

## 【0104B31】

两段形状相同的圆弧如图所示对称放置，圆弧半径为  $R$ ，圆心角为  $\theta$ ，均匀带电，线密度均为  $\lambda$ ，以无穷远处为电势零点，则圆心  $O$  点的电势等于\_\_\_\_\_。

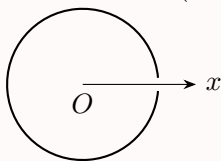


## 答案

$$\frac{\lambda\theta}{2\pi\epsilon_0}$$

## 【0104A21】

如图所示，电荷  $-Q$  均匀分布在半径为  $R$ 、长为  $L$  的圆弧上，圆弧的两端有一小空隙，空隙长为  $\Delta L$  ( $\Delta L \ll R$ )，则圆弧对应的圆心处的电场强度和电势 (以无穷远处为电势零点) 分别为



(A)  $-\frac{Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{e}_x$  和  $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

(B)  $-\frac{Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{e}_x$  和  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

(C)  $\frac{Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{e}_x$  和  $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

(D)  $\frac{Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{e}_x$  和  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

## 答案

A

## 【0104B32】

一半径为  $R$  的均匀带电圆盘，电荷面密度为  $\sigma$ ，设无穷远处为电势零点，则圆盘中心  $O$  点的电势  $U =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

## 解析

选择电势零点为无穷远处，带电量为  $Q$  的点电荷在离它  $r$  处的电势为

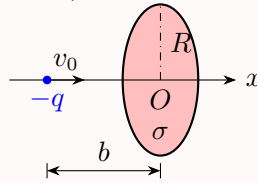
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以圆盘中心的电势为

$$V = \int dV = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{\sigma(dr)(r d\theta)}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

### 【0104C12】

如图所示，一个半径为  $R$  的均匀带电圆板，其电荷面密度为  $\sigma(>0)$ ，今有一质量为  $m$ ，电荷为  $-q$  的粒子 ( $q>0$ ) 沿圆板轴线 ( $x$  轴) 方向向圆板运动，已知在距圆心  $O$  (也是  $x$  轴原点) 为  $b$  的位置上时，粒子的速度为  $v_0$ ，求粒子击中圆板时的速度 (设圆板带电的均匀性始终不变)。



### 解答

根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

和电势叠加原理，将带电圆板分割成一个个元电荷。在圆板上  $r \rightarrow r + dr$ 、 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  区域的元电荷，其带电量为  $dq = \sigma dS = \sigma(dr)(r d\theta) = \sigma r dr d\theta$ ，它到  $P$  点的距离为  $R = \sqrt{r^2 + b^2}$ ，所以它在  $P$  处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + b^2}}$$

所以  $P$  处的总电势为

$$U_P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + b^2}} = \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + b^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{r^2 + b^2} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + b^2} - b \right]$$

圆心处的电势为

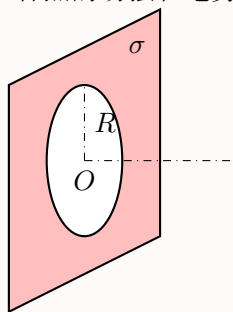
$$U_O = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$$

带电粒子从  $P$  处到  $O$  处运动的过程中，能量守恒，所以有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_P^2 + (-q)U_P &= \frac{1}{2}mv_O^2 + (-q)U_O \\ v_O &= \sqrt{v_P^2 + \frac{2(-q)(U_P - U_O)}{m}} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2q \left[ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + b^2} - b) \right]}{m}} = \sqrt{v_0^2 + \frac{q\sigma (R + b - \sqrt{R^2 + b^2})}{\epsilon_0 m}} \end{aligned}$$

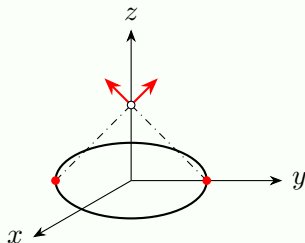
## 【0104C13】

一“无限大”平面，中部有一半半径为  $R$  的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为  $\sigma$ 。如图所示，试求通过小孔中心  $O$  并与平面垂直的直线上各点的场强和电势 (选  $O$  点的电势为零)。



## 解答

先求一个带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的带电圆环在其轴线上距离环心  $a$  处的电场，如图，



则总的电场沿  $z$  轴正方向，大小为

$$E = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)} \times \frac{a}{(R^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

所以将题目所给平面切割成一个个圆环，则对于半径  $r \rightarrow r + dr$  部分的圆环，其带电量为  $dq = \sigma dS = \sigma \times (2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$ ，所以这个圆环在距离环心 (即小孔中心) 距离  $a$  处的电场强度为

$$dE = \frac{(dq)a}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a \times 2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

所以整个平面在该处的电场强度为

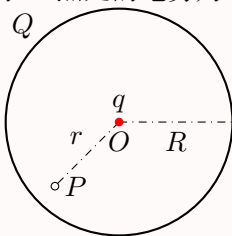
$$E = \int_R^\infty \frac{a\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \right]_R^\infty = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

这里，由于在无穷远处有电荷分布，所以不能选择无穷远处为电势零点，依题意，选择  $O$  点为电势零点，则该处的电势为

$$U = \int_a^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^0 \frac{x\sigma}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + x^2} \right]_a^0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ R - \sqrt{R^2 + a^2} \right]$$

## 【0104A22】

真空中一半径为  $R$  的球面均匀带电  $Q$ ，在球心  $O$  处有一电荷为  $q$  的点电荷，如图所示。设无穷远处为电势零点，则在球内离球心  $O$  距离为  $r$  的  $P$  点处的电势为



- (A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  (B)  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right)$  (C)  $\frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  (D)  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{Q-R}{R} \right)$

## 答案

B

## 解析

由高斯定理很容易得到电场强度的分布为

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ (当 } r < R \text{ 时)}$$

$$E_2 = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ (当 } r > R \text{ 时)}$$

当以无穷远处为电势的零点时， $P$  点处的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty E \, dr = \int_r^R E_1 \, dr + \int_R^\infty E_2 \, dr = \left[ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_r^R + \left[ -\frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_R^\infty \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

## 【0104B33】

两同心带电球面，内球面半径为  $R_1$ ，带电荷  $Q_1$ ；外球面半径为  $R_2 = 4R_1$ ，带电荷  $Q_2 = -2Q_1$ ，设无穷远处电势为零，则空间另一电势为零的球面半径  $R = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

 $2R_1$ 

## 解析

分别计算两个球面的电势分布，再利用电势叠加原理求出总的电势分布。

设均匀带电球面半径为  $R$ ，带电量为  $Q$ ，则由高斯定理很容易求得电场分布：在球内，电场为零，即  $\vec{E}(r < R) = \vec{E}_1 = 0$ ，在球外，电场为

$$\vec{E}(r > R) = \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

再根据电势的定义，当带电体分布在有限区域，通常选择电势零点为无穷远处，所以

$$\begin{aligned} V &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E dr \\ V(r > R) &= V_2 = \int_r^\infty E_2 dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V(r < R) &= V_1 = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = V_2(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

所以，内球面半径  $R = R_1$ ，带电量  $Q = Q_1$ ，它在空间中所激发的电场的电势分布为

$$\begin{aligned} V_A(r < R_1) &= V_{A1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \\ V_A(r > R_1) &= V_{A2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

外球面半径  $R = R_2$ ，带电量  $Q = Q_2$ ，它在空间中所激发的电场的电势分布为

$$\begin{aligned} V_B(r < R_2) &= V_{B1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ V_B(r > R_2) &= V_{B2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

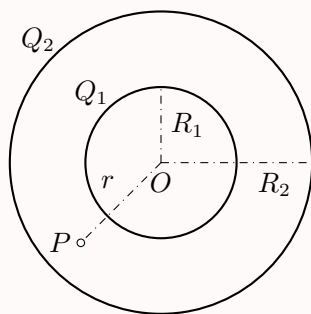
因此，整个空间总的电势分布为

$$\begin{aligned} V(r < R_1) &= V_A(r < R_1) + V_B(r < R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \\ V(R_1 < r < R_2) &= V_A(r > R_1) + V_B(r < R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \\ V(r > R_2) &= V_A(r > R_1) + V_B(r > R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{r} \right) \end{aligned}$$

代入题目所给的条件，可得，当  $r = 2R_1$  时，电势为零。

### 【0104A23】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为  $R_1$ 、带电荷  $Q_1$ ，外球面半径为  $R_2$ 、带电荷  $Q_2$ 。设无穷远处为电势零点，则在两个球面之间、距离球心为  $r$  处的  $P$  点的电势  $U$  为



- (A)  $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$  (B)  $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$  (C)  $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$  (D)  $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$

答案

C

解析

由于电荷分布的球对称性，很容易由高斯定理求出电场分布

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_1 = 0 (\text{当 } r < R_1 \text{ 时})$$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\text{当 } R_1 < r < R_2 \text{ 时})$$

$$E_3 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\text{当 } r > R_2 \text{ 时})$$

选择无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr = \left[ -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_r^{R_2} + \left[ -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{R_2}^\infty \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} (\text{当 } R_1 < r < R_2 \text{ 时}) \end{aligned}$$

【0104A24】

半径为  $r$  的均匀带电球面 1，带电量为  $q$ ，其外有一个同心的半径为  $R$  的均匀带电球面 2，带电量为  $Q$ ，两球面间的电势差为

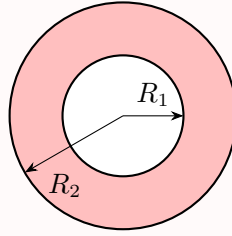
- (A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$  (B)  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$  (C)  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} - \frac{Q}{R} \right)$  (D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

答案

A

## 【0104C14】

如图所示，一均匀带电的球层，其电荷体密度为  $\rho$ ，球层内表面半径为  $R_1$ ，外表面半径为  $R_2$ 。求：(1) 电场分布；(2) 以无穷远处为电势零点，球层内外表面的电势分别为多少？



## 解答

(1)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$r < R_1$ ，球内空腔，

$$q_0 = 0$$

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$ ，球层内，

$$E_2(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \times \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$$

$$E_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$r > R_2$ ，球外，

$$E_3(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \times \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$$

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 以无穷远处为电势零点，球层内表面的电势

$$U_1 = \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1^3}{R_2} - R_1^2 \right] + \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

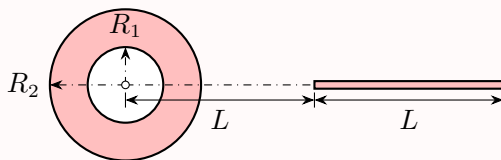
球层外表面的电势

$$U_2 = \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2}$$



## 【0104C15】

真空中，一个内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的球壳均匀带电，体密度为  $\rho$ 。(1) 求球壳外任一点 ( $r > R_2$ ) 的电场强度和电势 (以无穷远处为电势零点)；(2) 球壳外一根长为  $L$  的均匀带电细棒沿直径方向放置，其左端与球心相距  $L$ ，如图所示，细棒的电荷线密度为  $\lambda$ ，假设二者之间的电荷分布相互不影响，求细棒受到的电场力。



## 解答

(1)  $r > R_2$ ，球外，

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \times \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$$

$$E = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

以无穷远处为电势零点，

$$U = \int_r^\infty E dr = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r}$$

(2)

$$F = \int_L^{2L} (\lambda dr) \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda \rho(R_2^3 - R_1^3)}{6\epsilon_0 L}$$

## 【0104C16】

半径为  $R$  的无限长带电圆柱，体电荷密度为  $\rho = \rho_0 r (r \leq R)$ ， $\rho_0$  为常数， $r$  是圆柱内任意一点到圆柱轴线的距离。试求：(1) 空间电场强度的分布；(2) 取圆柱表面 ( $r = R$ ) 为电势零点，求空间电势分布。

## 解答

(1)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

$r < R$ ，圆柱内，

$$E_1(2\pi rh) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_0 r (2\pi rh) dr = \frac{2\pi \rho_0 h r^3}{3\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0}$$

$r > R$ , 圆柱外,

$$E_2(2\pi rh) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R \rho_0 r (2\pi rh) dr = \frac{2\pi \rho_0 h R^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

(2) 取圆柱表面 ( $r = R$ ) 为电势零点,  $r < R$ , 圆柱内,

$$U_1 = \int_r^R E_1 dr = \int_r^R \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho_0 (R^3 - r^3)}{9\varepsilon_0}$$

$r > R$ , 圆柱外,

$$U_2 = \int_r^R E_2 dr = \int_r^R \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

#### 评分标准

1. 高斯定理 3 分
2. 圆柱内外电场各 3 分共 6 分
3. 圆柱内外电势各 3 分共 6 分

## 4.7 已知电势求电场

已知电势求电场 (求电场的第三种方法)

$$\vec{E} = -\nabla U$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

#### 【0104A25】

下列关于电场强度和电势的关系的说法中, 正确的是

- (A) 已知某点的电场强度, 就可以确定该点电势
- (B) 已知某点的电势, 就可以确定该点电场强度
- (C) 在某空间内的电场强度不变, 则电势也一定不变
- (D) 在某空间内的电势不变, 则电场强度处处相等

**答案**

D

**【0104A26】**

关于电场强度与电势的关系，下列说法正确的是

- (A) 电场强度为零的点，电势也一定为零      (B) 电势为零的点，电场强度也一定为零  
(C) 在电势不变的空间，电场强度处处为零      (D) 在电场强度不变的空间，电势处处相等

**答案**

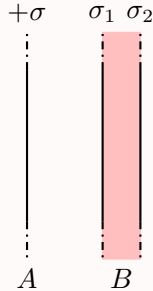
C

## 5、静电场中的导体

## 5.1 静电平衡时导体电荷的分布

【0105A01】

一“无限大”均匀带电平面  $A$ ，其附近放一与它平行的有一定厚度的“无限大”平面导体板  $B$ ，如图所示。已知  $A$  上的电荷面密度为  $+\sigma$ ，则在导体板  $B$  的两个表面 1 和 2 上的感应电荷面密度为



(A)  $\sigma_1 = -\sigma, \sigma_2 = +\sigma$

(B)  $\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma, \sigma_2 = +\frac{1}{2}\sigma$

(C)  $\sigma_1 = +\frac{1}{2}\sigma, \sigma_2 = -\frac{1}{2}\sigma$

(D)  $\sigma_1 = -\sigma, \sigma_2 = 0$

答案

B

解析

静电平衡时，导体板内的电场为零，即  $B$  中任意一点的电场强度为零，而  $B$  中电场强度可视为三个无限大带电平面所激发的电场的矢量和。

另由于  $B$  原来不带电，所以两个表面的感应电荷必定等量异号，因此有  $\sigma_1 = -\sigma_2$ 。

而无限大带电平面的电场很容易由高斯定理求得，取一底面与带电平面平行，侧面与带电平面垂直的柱面为高斯面，并设底面积为  $S$ ，则有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (2S) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

所以  $B$  内任意一点的电场强度为

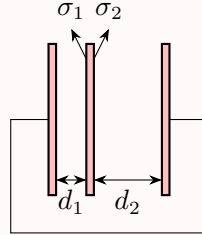
$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0$$

$$\sigma + \sigma_1 - \sigma_2 = 0 = \sigma + \sigma_1 + \sigma_1 = \sigma + 2\sigma_1$$

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2}, \sigma_2 = -\sigma_1 = \frac{\sigma}{2}$$

## 【0105A02】

三块互相平行的导体板，中间导体板带电，外面两个导体板不带电。导体板之间的距离  $d_1$  和  $d_2$  比板面积线度小得多，外面二板用导线连接，如图所示。设中间导体板左右两面上电荷面密度分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ，则比值  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  为



(A)  $\frac{d_1}{d_2}$

(B)  $\frac{d_2}{d_1}$

(C) 1

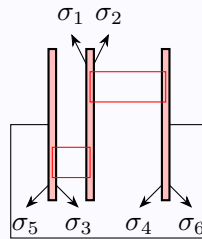
(D)  $\frac{d_2^2}{d_1^2}$

## 答案

B

## 解析

两板用导线连接，整个导体是等势体，所以左右两个导体板电势相等，因此两板与中间板之间的电势差相等。另静电平衡时，导体内电场为零，所以由图两个高斯面很容易求得  $\sigma_3 = -\sigma_1$ ， $\sigma_4 = -\sigma_2$ ，因此还可得  $\sigma_5 = \sigma_6$ 。



所以中间板两侧的电场分别为

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

方向分别为从中间板指向左右两板，所以左右两板与中间板之间的电势差分别为

$$U_1 = E_1 d_1, U_2 = E_2 d_2$$

$$U_1 = U_2$$

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_2$$

$$\sigma_1 d_1 = \sigma_2 d_2$$

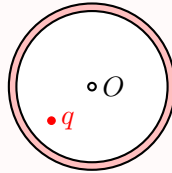
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

而外面两个导体板原来不带电, 可得

$$\begin{aligned}\sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 &= 0 \\ \sigma_5 = \sigma_6 &= -\frac{\sigma_3 + \sigma_4}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\end{aligned}$$

## 【0105A03】

在一个孤立的导体球壳内, 若在偏离球心  $O$  的某点放一个点电荷  $q$ , 如图所示, 则在球壳内、外表面上将出现感应电荷, 其分布将是



- (A) 内表面均匀, 外表面也均匀  
(C) 内表面不均匀, 外表面均匀

- (B) 内表面均匀, 外表面不均匀  
(D) 内外表面都不均匀

## 答案

C

## 【0105B01】

一金属球壳的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 带电荷为  $Q$ 。在球心处有一电荷为  $q$  的点电荷, 则球壳内表面上 ( $R_1$ ) 的电荷面密度  $\sigma =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{-q}{4\pi R_1^2}$$

## 解析

静电平衡时, 导体内电场为零, 所以球壳内表面所带的电荷为  $-q$ , 外表面所带的电荷为  $Q + q$ , 因此球壳内表面的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi R_1^2}$$

## 【0105B02】

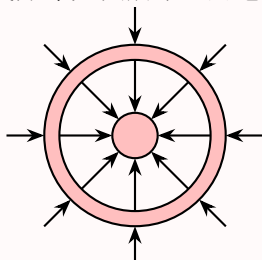
两同心导体球壳, 内球带电荷  $+q$ , 外球壳带电荷  $-2q$ 。静电平衡时, 外球壳的外表面的带电量为\_\_\_\_\_。

答案

 $-q$ 

【0105A04】

同心导体球与导体球壳周围电场的电场线分布如图所示, 由电场线分布情况可知球壳上所带总电荷量  $q$

(A)  $q > 0$ (B)  $q = 0$ (C)  $q < 0$ 

(D) 无法确定

答案

B

## 5.2 静电平衡时导体电场的分布

【0105A05】

当一个带电导体达到静电平衡时,

(A) 表面上电荷密度较大处电势较高

(B) 表面曲率较大处电势较高

(C) 导体内部的电势比导体表面的电势高

(D) 导体内任一点与其表面上任一点的电势差等于零

答案

D

解析

静电平衡时, 导体内部电场为零, 导体是个等势体, 导体内任意一点的电势均相等。

【0105A06】

将一负电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近, 则

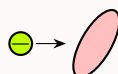
- (A) 导体内的电场强度的大小减小，导体的电势减小  
 (B) 导体内的电场强度的大小减小，导体的电势不变  
 (C) 导体内的电场强度的大小不变，导体的电势减小  
 (D) 导体内的电场强度的大小不变，导体的电势不变

答案

C

【0105B03】

如图所示，将一负电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近，则导体内的电场强度\_\_\_\_\_。(填“增大”、“不变”、“减小”)



答案

不变

解析

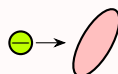
静电平衡时，导体内电场为零，所以电荷在移动过程中，导体内的电场保持为零，不变。  
 而以无穷远处为电势零点时，点电荷的电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以负电荷的电势分布为空间电势为负，且越靠近负电荷，电势越低，因此负电荷靠近导体时，导体的电势减小。

【0105B04】

如图所示，将一负电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近，则导体的电势\_\_\_\_\_。(填“增大”、“不变”、“减小”)



答案

减小



## 解析

静电平衡时，导体内电场为零，所以电荷在移动过程中，导体内的电场保持为零，不变。  
而以无穷远处为电势零点时，点电荷的电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以负电荷的电势分布为空间电势为负，且越靠近负电荷，电势越低，因此负电荷靠近导体时，导体的电势减小。

## 【0105B05】

一任意形状的带电导体，其电荷面密度分布为  $\sigma(x, y, z)$ ，则在导体表面外附近任意点处的电场强度的大小  $E(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

## 解析

静电平衡时，导体内电场为零，导体是个等势体，导体外电场的方向一定是垂直该处的表面。选择一个微小的圆柱面为高斯面，圆柱面的底面平行于导体表面，一个面在导体内，一个面在导体外，侧面垂直于导体表面，由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

## 【0105A07】

已知厚度为  $d$  的无限大带电导体平板，两表面上电荷均匀分布，电荷面密度均为  $\sigma$ ，则板内电场强度的大小为

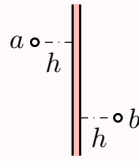
- (A)  $\frac{2\sigma}{\epsilon_0}$                       (B)  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$                       (C)  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$                       (D) 0

## 答案

D

## 【0105A08】

如图所示，一厚度为  $d$  的无限大均匀带电导体板，电荷面密度为  $\sigma$ ，则板的两侧离板面距离为  $h$  的两点  $a$ 、 $b$  之间的电势差为



(A) 0

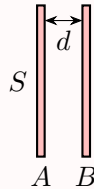
(B)  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (C)  $\frac{\sigma h}{\varepsilon_0}$ (D)  $\frac{2\sigma h}{\varepsilon_0}$ 

答案

A

【0105B06】

如图所示， $A$ 、 $B$  为靠得很近的两块平行的金属平板，两板的面积均为  $S$ ，板间的距离为  $d$ 。今使  $A$  板带电荷  $q_A$ ， $B$  板带电荷  $q_B$ ，且  $q_A > q_B$ 。则  $A$  板的靠近  $B$  的一侧所带电荷为\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{q_A - q_B}{2}$$

解析

根据静电平衡时，导体内部电场为零，以及无限大带电平面的电场公式，假定从左到右四个面的电荷面密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$ ，很容易得到

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0, \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4, \sigma_2 = -\sigma_3$$

又根据两块金属板的带电量，有

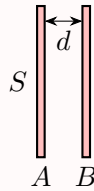
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q_A}{S}, \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{q_B}{S} = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\sigma_2 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$

$$Q_2 = \sigma_2 S = \frac{q_A - q_B}{2}$$

## 【0105B07】

如图所示,  $A$ 、 $B$  为靠得很近的两块平行的大金属平板, 两板的面积均为  $S$ , 板间的距离为  $d$ 。今使  $A$  板带电荷  $q_A$ ,  $B$  板带电荷  $q_B$ , 且  $q_A > q_B$ , 则两板间电势差  $U =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{(q_A - q_B)d}{2\varepsilon_0 S}$$

## 解析

根据静电平衡时, 导体内部电场为零, 以及无限大带电平面的电场公式, 假定从左到右四个面的电荷面密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$ , 很容易得到

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0, \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4, \sigma_2 = -\sigma_3$$

又根据两块金属板的带电量, 有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q_A}{S}, \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{q_B}{S} = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\sigma_2 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$

$$Q_2 = \sigma_2 S = \frac{q_A - q_B}{2}$$

所以极板间的电场强度为

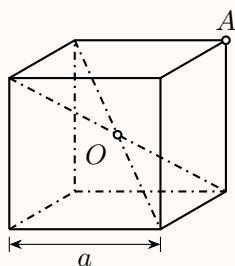
$$E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{q_A - q_B}{2\varepsilon_0 S}$$

因此两板间的电势差为

$$U = Ed = \frac{(q_A - q_B)d}{2\varepsilon_0 S}$$

## 【0105B08】

静电场中有一立方体均匀导体, 边长为  $a$ 。已知立方导体中心  $O$  处的电势为  $U_0$ , 则立方体顶点  $A$  的电势为\_\_\_\_\_。



答案

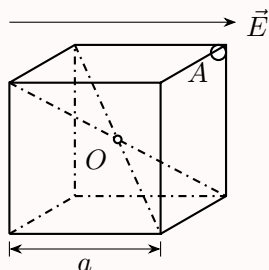
$$U_0$$

解析

静电平衡时，导体是个等势体，导体上所有点的电势相等。

【0105B09】

电场强度大小为  $E$ 、方向水平向右的静电场中放入一边长为  $a$  的立方体均匀导体。已知立方体导体中心  $O$  处的电势为  $U_0$ ，则导体内部靠近立方体顶点  $A$  处的电场强度的大小为\_\_\_\_\_。

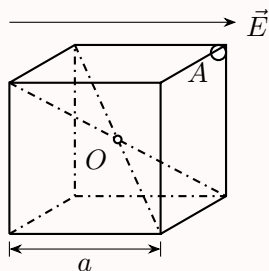


答案

$$0$$

【0105B10】

电场强度大小为  $E$ 、方向水平向右的静电场中放入一边长为  $a$  的立方体均匀导体。已知立方体导体中心  $O$  处的电势为  $U_0$ ，则导体内部靠近立方体顶点  $A$  处的电势为\_\_\_\_\_。



答案

$U_0$

【0105A09】

一半径为  $R$  的薄金属球壳, 带电荷  $-Q$ 。设无穷远处电势为零, 则球壳内各点的电势  $U$  可表示为

- (A)  $U < -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$       (B)  $U = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$       (C)  $U > -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$       (D)  $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} < U < 0$

答案

B

解析

薄金属球壳, 就是金属球面吧。球面内电场为零, 球外电场相当于所有电荷集中在球心的情形, 即

$$E(r > R) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E(r < R) = 0$$

因此, 球面内电势就等于球面上的电势, 球外电势为

$$U = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

球面上电势为

$$U = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

【0105A10】

选无穷远处为电势零点, 半径为  $R$  的导体球带电后, 其电势为  $U_0$ , 则球外离球心距离为  $r$  处的电场强度的大小为

(A)  $\frac{R^2 U_0}{r^3}$

(B)  $\frac{U_0}{R}$

(C)  $\frac{RU_0}{r^2}$

(D)  $\frac{U_0}{r}$

答案

C

解析

设导体球的带电量为  $Q$ ，则由高斯定理很容易求得球外空间的电场分布。选择半径为  $r$  的同心球面为高斯面，则有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

以无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$V = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以导体球的电势为

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由此可得

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = U_0 R$$

所以球外空间的电场强度的大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{U_0 R}{r^2}$$

【0105B11】

在一个带正电荷的金属球附近，放一个带正电的点电荷  $q_0$ ，测得  $q_0$  所受的力为  $F$ ，则  $\frac{F}{q_0}$  的值一定\_\_\_\_\_于不放  $q_0$  时该点原有的场强大小。(填“大”、“等”、“小”)

答案

小

## 解析

当正电荷  $q_0$  靠近金属球时, 金属球上的正电荷发生重新分布, 靠近点电荷的球面上的部分电荷转移到远离点电荷的球面上, 所以金属球上的电荷在点电荷所在位置所激发的电场大小变小。

## 【0105A11】

将一个电荷量为  $q$  的点电荷放在一个半径为  $R$  的不带电的导体球附近, 点电荷与导体球球心相距  $d(d > R)$ 。设无穷远处为电势零点, 则导体球上感应电荷在球心处激发的场强大小  $E$  和电势  $U$  分别为

(A)  $E = 0, U = 0$

(B)  $E = 0, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

(C)  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

(D)  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, U = 0$

## 答案

D

## 【0105B12】

一内半径为  $R$  薄金属球壳, 带有电量  $Q$ , 在球内距离球心  $a$  处有一点电荷  $q$ , 设无限远处为电势零点, 则球外表面上所带的电荷量为\_\_\_\_\_。

## 答案

$Q + q$

## 【0105B13】

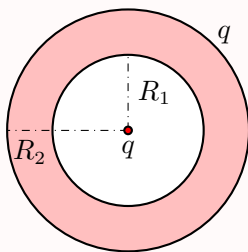
一内半径为  $R$  薄金属球壳, 带有电量  $Q$ , 在球内距离球心  $a$  处有一点电荷  $q$ , 设无限远处为电势零点, 则球心处的电势为\_\_\_\_\_。

## 答案

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

## 【0105A12】

一空心导体球壳, 其内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 带电荷  $q$ , 如图所示。当球壳中心处再放一电荷为  $q$  的点电荷时, 则导体球壳的电势 (设无穷远处为电势零点) 为



(A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$

(B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

(C)  $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 R_1}$

(D)  $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 R_2}$

## 答案

D

## 解析

依题意，静电平衡后，球壳内表面带电  $-q$ ，外表面带电  $2q$ 。由于带电的球对称性，很容易由高斯定理求得空间各处的电场分布

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, r < R_1$$

$$E_2 = 0, R_1 < r < R_2$$

$$E_3 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}, r > R_2$$

设无穷远处为电势零点，则导体球壳的电势为

$$V = \int_{R_2}^{\infty} E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R_2}$$

## 【0105C01】

一内半径为  $a$ 、外半径为  $b$  的金属球壳，带有电荷  $Q$ ，在球壳空腔内距离球心  $r$  处有一点电荷  $q$ 。取无穷远处为电势零点，试求：(1) 球壳内外表面上的电荷。(2) 球心  $O$  点处，由球壳内表面上电荷产生的电势。(3) 球心  $O$  点处的总电势。

## 解答

(1) 静电平衡时，导体内部电场为零，所以很容易得到，球壳内表面的带电量为  $-q$ ，所以外表面的带电量为  $Q + q$ 。注意，此时，由于  $q$  不在球心，所以球壳内表面的电荷不是均匀分布的，而是在距离  $q$  近的地方，电荷密度较大，距离  $q$  远的地方，电荷密度较小。但球壳外表面仍然是均匀分布的。

(2) 根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



和电势叠加原理，将球壳内表面分割成一个个元电荷。注意，任意一个元电荷到球心的距离都是  $a$ ，所以虽然电荷不是均匀分布，计算电势时没有影响，

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$U_a = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \int_q dq = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

(3) 同理，球壳外表面的电荷在球心处的电势为

$$U_b = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

而点电荷  $q$  在球心处的电势为

$$U_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

所以球心处的总电势为

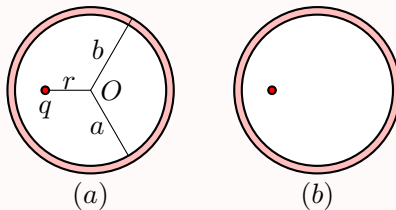
$$U = U_a + U_b + U_q = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-q}{a} + \frac{Q+q}{b} + \frac{q}{r} \right]$$

#### 评分标准

1. 内外电荷量各 2 分，无需回答是否均匀。
2. 电势 5 分，必须有积分，直接写结果只得 2 分。
3. 外表面电荷的电势 3 分，点电荷的电势 2 分，总电势 1 分。

#### 【0105C02】

如图 (a) 所示，一内半径为  $a$ 、外半径为  $b$  的金属球壳，带有电荷  $+Q$ ，在球壳空腔内距离球心  $r$  处有一点电荷  $+q$ 。设无穷远处为电势零点，(1) 求球壳内、外表面上的电荷量，并判断电荷是否均匀分布？(2) 求球心处的电势  $U_O$ ；(3) 能否应用高斯定理来求解空腔内的电场分布？请在图 (b) 中画出电场线在全空间中的大致分布。



## 解答

(1) 球壳内表面带电量为  $q_2 = -q$ ，不均匀分布；球壳外表面带电量为  $q_3 = Q + q$ ，均匀分布。

(2) 以无穷远处为电势零点，点电荷  $q$  在球心处的电势

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

球壳内表面的电荷  $q_2$  在球心处的电势

$$U_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

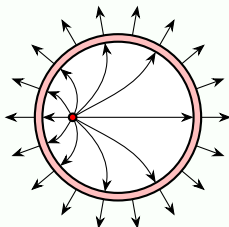
球壳外表面的电荷  $q_3$  在球心处的电势

$$U_3 = \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

所以球心处的总电势

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

(3) 由于点电荷不在球心，内表面电荷不均匀分布，整个带电体的电荷分布没有特殊的对称性，不能用高斯定理求空腔内的电场。电场线的大致分布如图所示（球外与点电荷相似，球内左侧较密，右侧较疏，靠近导体表面处与表面垂直）



## 【0105A13】

半径为  $R_1$  的金属球带电  $q$ ，外部同心放置一中性金属球壳，其内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$ 。现用细导线将金属球和球壳连接起来，静电平衡后，金属球的电势为

(A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$

(B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

(C)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$

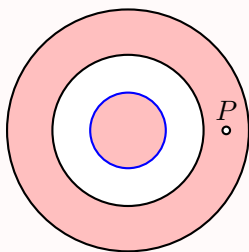
(D)  $\frac{q(R_3 - R_2)}{4\pi\epsilon_0 R_2 R_3}$

## 答案

C

## 【0105A14】

如图所示，一带负电荷的金属球，外面同心地罩一不带电的金属球壳，则在球壳中一点  $P$  处的场强大小与电势（设无穷远处为电势零点）分别为



- (A)  $E = 0, U > 0$       (B)  $E = 0, U < 0$       (C)  $E = 0, U = 0$       (D)  $E > 0, U < 0$

### 答案

B

### 解析

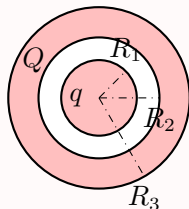
假定金属球带电  $-q$ ，则静电平衡时，球壳内表面带正电  $+q$ ，外表面带等量负电  $-q$ ，而导体内部电场为零，所以  $P$  处场强的大小  $E = 0$ 。但球壳外电场

$$E = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

方向从无穷远指向球心。所以当以无穷远处为电势零点时，球壳外的电势小于零，所以球壳的电势也小于零。

### 【0105C03】

半径为  $R_1$  的导体球带有电荷  $q$ ，球外有一内外半径为  $R_2$  和  $R_3$  的同心导体球壳，壳上带有电荷  $Q$ 。(1) 求两球的电势  $U_1$  和  $U_2$ ；(2) 求两球的电势差  $\Delta U$ ；(3) 以导线把球和球壳联接在一起后， $U_1$ 、 $U_2$  和  $\Delta U$  分别是多少？



### 解答

导体处于静电平衡时电荷只分布在导体表面，导体内电场为零，由此可得，在  $r = R_1$  球面上均匀分布电荷  $q_1 = q$ ，在  $r = R_2$  球面上均匀分布电荷  $q_2 = -q$ ，在  $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = Q + q$ 。

根据均匀带电球面的电势分布

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \end{cases}$$

及电势叠加原理, 可得导体球的电势

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

导体球壳的电势

$$U_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

所以两球的电势差

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

若以导线将球与球壳联接在一起, 则两者形成一个新的导体, 静电平衡时电荷只分布在导体的表面上, 这时, 在  $r = R_1$  球面上的电荷  $q_1 = 0$ , 在  $r = R_2$  球面上的电荷  $q_2 = 0$ , 在  $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = Q + q$ 。因此导体球的电势

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

导体球壳的电势

$$U_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

所以两球的电势差

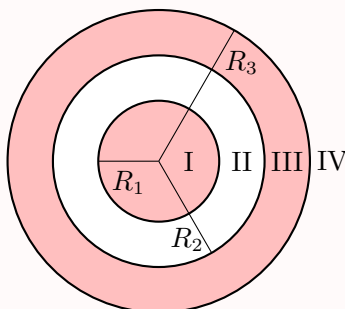
$$\Delta U = U_1 - U_2 = 0$$

#### 评分标准

1. 根据静电平衡导体的性质得到电荷的分布 ( $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $q_3 = Q + q$ ) 各得 1 分
2. 均匀带电球面的电势分布得 2 分
3. 电势叠加原理得 1 分
4.  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $\Delta U$  各得 1 分
5. 导线连接后电荷分布 ( $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = Q + q$ ) 各得 1 分,  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $\Delta U$  各得 1 分

## 【0105C04】

有一内外半径分别为  $R_2$ 、 $R_3$  的金属球壳，在壳中放一半径为  $R_1$  的同心金属球 (如图)，若使球壳和球均带有  $q$  的正值净电荷，以无穷远处为电势零点，(1) 两球体上的电荷如何分布？(2) 求 I、II、III、IV 各个区域的电场；(3) 球心的电势。



## 解答

(1)  $r = R_1$  表面上均匀分布  $q_1 = q$ ； $r = R_2$  表面上均匀分布  $q_2 = -q$ ； $r = R_3$  表面上均匀分布  $q_3 = 2q$ 。  
 (2) 静电平衡时导体内部电场为零，所以 I 区 ( $r < R_1$ )， $E_1 = 0$ ；III 区 ( $R_2 < r < R_3$ )， $E_3 = 0$ ；II 区和 IV 区由高斯定理求得

$$\begin{aligned} E_2(4\pi r^2) &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E_2 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_4(4\pi r^2) &= \frac{2q}{\varepsilon_0} \\ E_4 &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

(3) 以无穷远处为电势零点，球心的电势

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_3}$$

## 评分标准

1. 每个表面电荷分布各 1 分共 3 分
2. 每个区域电场各 2 分共 8 分
3. 电势 4 分

## 【0105A15】

两个球形导体，球 1 的直径是球 2 的 2 倍。若球 1 原来带电  $+q$ ，则用导线把两球连接，正确的结论是

- (A) 球 1 和球 2 有相等的电量  
(C) 球 1 和球 2 有相等的电荷面密度

- (B) 球 1 和球 2 有相等的电势  
(D) 球 2 的电势是球 1 的 2 倍

## 答案

B

## 【0105C05】

真空中，长为  $L$ 、内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的空心圆柱形导体，在其轴线上有一根长为  $L$ 、带电量为  $q$  的均匀带电直导线。假定  $L \gg R$ ，即可将圆柱体和导线视为无限长。求：(1) 圆柱体内、外表面的电荷面密度 (单位面积的带电量)；(2) 各区域的电场分布；(3) 取离带电导线  $r = R_0 < R_1$  处为电势零点时各区域的电势分布。

## 解答

- (1)  $R_1$  表面上均匀分布电荷  $q_1 = -q$ ，因此电荷面密度

$$\sigma_1 = \frac{-q}{2\pi R_1 L}$$

- $R_2$  表面上均匀分布电荷  $q_2 = q$ ，因此电荷面密度

$$\sigma_2 = \frac{q}{2\pi R_2 L}$$

- (2) 电荷分布具有柱对称性，可以用高斯定理求电场

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

- $r < R_1$ ，空腔内，

$$\begin{aligned} E_1(2\pi r h) &= \frac{qh}{\varepsilon_0 L} \\ E_1 &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r} \end{aligned}$$

- $R_1 < r < R_2$ ，导体内，静电平衡， $E_2 = 0$

- $r > R_2$ ，导体外，

$$\begin{aligned} E_3(2\pi r h) &= \frac{qh}{\varepsilon_0 L} \\ E_3 &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r} \end{aligned}$$

- (3)  $r < R_1$ ，空腔内，

$$U_1 = \int_r^{R_0} E_1 dr = \int_r^{R_0} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_0}{r}$$

$R_1 < r < R_2$ , 导体内,

$$U_2 = \int_r^{R_1} E_2 dr + \int_{R_1}^{R_0} E_1 dr = \int_{R_1}^{R_0} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_0}{R_1}$$

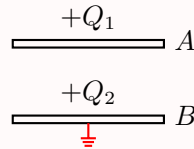
$r > R_2$ , 导体外,

$$\begin{aligned} U_3 &= \int_r^{R_2} E_3 dr + \int_{R_2}^{R_1} E_2 dr + \int_{R_1}^{R_0} E_1 dr = \int_r^{R_2} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr + \int_{R_1}^{R_0} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_0}{R_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_0 R_2}{R_1 r} \end{aligned}$$

### 5.3 接地

【0105A16】

$A$ 、 $B$  为两导体大平板, 面积均为  $S$ , 平行放置, 如图所示。 $A$  板带电荷  $+Q_1$ ,  $B$  板带电荷  $+Q_2$ , 如果使  $B$  板接地, 则  $AB$  间电场强度的大小  $E$  为



(A)  $\frac{Q_1}{2\epsilon_0 S}$

(B)  $\frac{Q_1 - Q_2}{2\epsilon_0 S}$

(C)  $\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}$

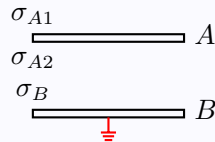
(D)  $\frac{Q_1 + Q_2}{2\epsilon_0 S}$

答案

C

解析

依题意, 静电平衡且  $B$  板接地后, 设两个板四个面的电荷面密度分别为  $\sigma_{A1}$ 、 $\sigma_{A2}$ 、 $\sigma_B$  和 0, 如图。



由于  $A$  板带电量  $Q_1$  不变, 所以有

$$(\sigma_{A1} + \sigma_{A2})S = Q_1$$

根据无限大带电平面的电场分布

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

且静电平衡时导体内部电场为零, 很容易得到,  $A$  板内电场为零, 有

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_{A2}}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} = 0$$

$$\sigma_{A1} - \sigma_{A2} - \sigma_B = 0$$

$B$  板内电场为零, 有

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_{A1} + \sigma_{A2} + \sigma_B = 0$$

综合以上三式, 可得

$$\sigma_{A1} + \sigma_{A2} = \frac{Q_1}{S}$$

$$\sigma_{A1} - \sigma_{A2} - \sigma_B = 0$$

$$\sigma_{A1} + \sigma_{A2} + \sigma_B = 0$$

$$\sigma_{A1} = 0, \sigma_{A2} = -\sigma_B = \frac{Q_1}{S}$$

所以  $AB$  间的电场强度为

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{A1} + \sigma_{A2} - \sigma_B}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$$

#### 【0105B14】

$A$ 、 $B$  为两导体大平板, 面积均为  $S$ , 平行放置, 如图所示。 $A$  板带电荷  $+Q_1$ ,  $B$  板带电荷  $+Q_2$ , 如果使  $B$  板接地, 则  $AB$  间电场强度的大小  $E$  为\_\_\_\_\_。

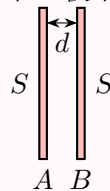


#### 答案

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$$

#### 【0105B15】

如图所示, 把一块原来不带电的金属板  $B$ , 移近一块已带有正电荷  $Q$  的金属板  $A$ , 平行放置。设两板面积都是  $S$ , 板间距离是  $d$ , 忽略边缘效应。当  $B$  板不接地时, 两板间电势差  $U_{AB}$  =\_\_\_\_\_。





## 答案

$$\frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

## 解析

静电平衡时，设从左到右四个面的电荷面密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$ ，由静电平衡时导体内电场为零可得

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} &= 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} &= 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 + \sigma_3 &= 0, \sigma_1 - \sigma_4 = 0\end{aligned}$$

又因为  $A$  板总的带电量为  $Q$ ， $B$  板不带电，所以有

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 &= \frac{Q}{S}, \sigma_3 = -\sigma_4 \\ \sigma_4 &= \frac{Q}{2S} = \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3\end{aligned}$$

所以极板间的电场强度为

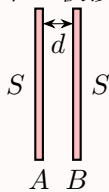
$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

所以极板间电势差为

$$U_{AB} = Ed = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

## 【0105B16】

如图所示，把一块原来不带电的金属板  $B$ ，移近一块已带有正电荷  $Q$  的金属板  $A$ ，平行放置。设两板面积都是  $S$ ，板间距离是  $d$ ，忽略边缘效应。当  $B$  板接地时，两板间电势差  $U_{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

## 解析

静电平衡时，设从左到右四个面的电荷面密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$ ，由静电平衡时导体内电场为零可得

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} &= 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} &= 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 + \sigma_3 &= 0, \sigma_1 - \sigma_4 = 0\end{aligned}$$

又因为  $A$  板总的带电量为  $Q$ ， $B$  板不带电，所以有

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 &= \frac{Q}{S}, \sigma_3 = -\sigma_4 \\ \sigma_4 &= \frac{Q}{2S} = \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3\end{aligned}$$

所以极板间的电场强度为

$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

所以极板间电势差为

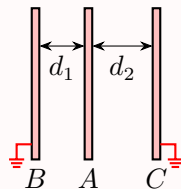
$$U_{AB} = Ed = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

当  $B$  板接地时，有

$$\begin{aligned}\sigma'_2 + \sigma'_3 &= 0, \sigma'_1 - \sigma'_4 = 0 \\ \sigma'_1 + \sigma'_2 &= \frac{Q}{S}, \sigma'_4 = 0 \\ \sigma'_1 = \sigma'_4 &= 0, \sigma'_2 = \frac{Q}{S} = -\sigma'_3 \\ E' &= \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 - \sigma'_3 - \sigma'_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \\ U'_{AB} &= E'd = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}\end{aligned}$$

## 【0105C06】

三平行金属板  $A$ 、 $B$  和  $C$ ，面积都是  $S$ ， $A$ 、 $B$  相距  $d_1$ ， $A$ 、 $C$  相距  $d_2$ ， $B$ 、 $C$  两板都接地。如果使  $A$  板带正电  $q_0$ ，在略去边缘效应时，问  $B$  板和  $C$  板上感应电荷各是多少？以地的电势为零，问  $A$  板的电势是多少？



## 解答

假定从左到右六个面的带电量分别为  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_4$ 、 $q_5$ 、 $q_6$ ，依题意， $B$ 、 $C$  接地， $A$  带电量为  $q_0$ ，有

$$q_1 = 0$$

$$q_6 = 0$$

$$q_3 + q_4 = q_0$$

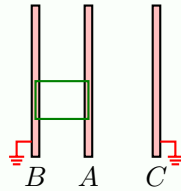
静电平衡时，导体内部电场为零，所以  $A$ 、 $B$  之间取一圆柱面为高斯面，底面分别在两个导体内且平行于导体表面，侧面与导体表面垂直，由电场的高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{\sigma_2 \Delta S + \sigma_3 \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3$$

$$q_2 = -q_3$$



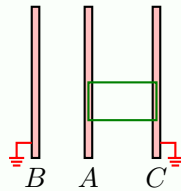
同样在  $A$ 、 $C$  之间取圆柱面为高斯面，由电场的高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{\sigma_4 \Delta S + \sigma_5 \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_4 = -\sigma_5$$

$$q_4 = -q_5$$



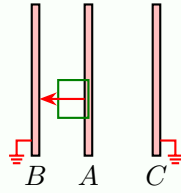
忽略边缘效应，导体之间为均匀电场，由高斯定理可求得  $A$ 、 $B$  之间的电场强度

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \Delta S = \frac{\sigma_3 \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = \frac{q_3}{\varepsilon_0 S}$$

方向由  $A$  指向  $B$ 。



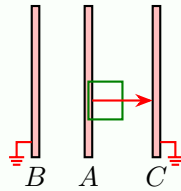
同样，由高斯定理可求得  $A$ 、 $C$  之间的电场强度

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 \Delta S = \frac{\sigma_4 \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} = \frac{q_4}{\varepsilon_0 S}$$

方向由  $A$  指向  $C$ 。



$B$ 、 $C$  均接地，

$$U_B = U_C = 0$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = U_A, U_{AC} = U_A - U_C = U_A$$

$$U_A = E_1 d_1 = E_2 d_2$$

$$\frac{q_3}{\varepsilon_0 S} d_1 = \frac{q_4}{\varepsilon_0 S} d_2$$

$$q_3 d_1 = q_4 d_2$$

联立以上各式解得

$$q_3 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} q_0$$

$$q_4 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} q_0$$

所以  $B$  板的感应电荷  $q_2 = -q_3 = -\frac{d_2}{d_1 + d_2} q_0$ ， $C$  板的感应电荷  $q_5 = -q_4 = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} q_0$ 。 $A$  板的电势

$$U_A = E_1 d_1 = \frac{q_3}{\varepsilon_0 S} d_1 = \frac{d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} q_0$$

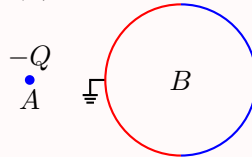
#### 评分标准

1. 高斯定理得 2 分
2. 接地得  $q_1 = 0$ 、 $q_6 = 0$  各得 1 分

3.  $q_3 + q_4 = q_0$  得 1 分
4. 高斯定理得  $q_2 = -q_3$ 、 $q_4 = -q_5$  各得 1 分
5. 高斯定理得  $E_1$ 、 $E_2$  各得 1 分
6.  $U_A = E_1 d_1 = E_2 d_2$  得 1 分
7. 联立求得  $q_3$ 、 $q_4$  各得 1 分
8. 三个结论 ( $B$  板的感应电荷  $q_5$ 、 $C$  板的感应电荷  $q_2$ 、 $A$  板的电势  $U_A$ ) 各得 1 分

## 【0105A17】

将带电量为  $-Q$  的点电荷  $A$  靠近一个不带电的导体球  $B$ ，在导体球  $B$  的左端感应出正电荷，右端感应出负电荷。现将导体球  $B$  的左端接地，则



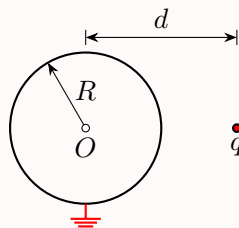
- (A) 导体球  $B$  的负电荷入地  
 (B) 导体球  $B$  的正电荷入地  
 (C) 导体球  $B$  的所有感应电荷入地  
 (D) 导体球  $B$  上没有感应电荷入地

## 答案

A

## 【0105A18】

半径为  $R$  的金属球与地连接，在与球心  $O$  相距  $d = 2R$  处有一电荷为  $q$  的点电荷，如图所示。设地的电势为零，则球上的感应电荷  $q'$  为



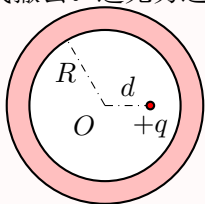
- (A) 0                      (B)  $\frac{q}{2}$                       (C)  $-\frac{q}{2}$                       (D)  $q$

## 答案

C

## 【0105A19】

一个未带电的空腔导体球壳，内半径为  $R$ 。在腔内离球心的距离为  $d$  处 ( $d < R$ )，固定一点电荷  $+q$ ，如图所示。用导线把球壳接地后，再把地线撤去。选无穷远处为电势零点，则球心  $O$  处的电势为



- (A) 0                      (B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$                       (C)  $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$                       (D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$

## 答案

D

## 解析

依题意，静电平衡后，接地前，球壳内表面带电  $-q$ ，外表面带电  $q$ 。接地后，球壳内表面带电  $-q$ ，外表面带电 0。所以球心处的电势为点电荷  $+q$  的电势与内表面的电势的叠加。当选择无穷远处为电势零点时，点电荷  $+q$  在  $O$  点的电势为

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

内表面所带电荷  $-q$  在  $O$  点的电势为

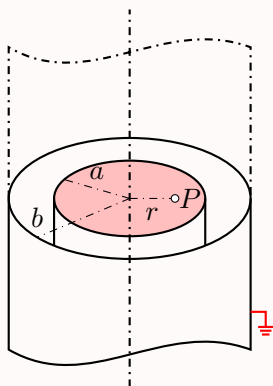
$$V_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以  $O$  点的总电势为

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$$

## 【0105A20】

如图所示，一半径为  $a$  的“无限长”圆柱面上均匀带电，其电荷线密度为  $\lambda$ 。在它外面同轴地套一半径为  $b$  的薄金属圆筒，圆筒原先不带电，但与地连接。设地的电势为零，则在内圆柱面里面、距离轴线为  $r$  的  $P$  点的场强大小和电势分别为



(A)  $E = 0, U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$

(B)  $E = 0, U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

(C)  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{r}$

(D)  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

### 答案

B

### 解析

由于静电平衡，金属圆筒上带上也与圆柱面等量异号的电荷。

由于电荷分布的轴对称性，很容易由高斯定理求出电场分布

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 2\pi r h = 0 \Rightarrow E_1 = 0 (\text{当 } r < a \text{ 时})$$

$$E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} (\text{当 } a < r < b \text{ 时})$$

$$E_3 \cdot 2\pi r h = 0 \Rightarrow E_3 = 0 (\text{当 } r > b \text{ 时})$$

选择无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^a E_1 dr + \int_a^b E_2 dr + \int_b^\infty E_3 dr = \left[ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \right]_a^b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} (\text{当 } r < a \text{ 时})$$

### 【0105B17】

一长直导线横截面半径为  $a$ ，导线外同轴地套一半径为  $b$  的导体薄圆筒 ( $b > a$ )，两者互相绝缘，外筒接地。设导线单位长度的带电量为  $+\lambda$ ，则与导线轴线相距为  $r$  ( $b > r > a$ ) 的  $P$  点的场强大小为\_\_\_\_\_。

### 答案

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

## 【0105B18】

一长直导线横截面半径为  $a$ ，导线外同轴地套一半径为  $b$  的导体薄圆筒 ( $b > a$ )，两者互相绝缘，外筒接地。设导线单位长度的带电量为  $+\lambda$ ，则两导体的电势差为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$



## 6、静电能

多点电荷系统的静电能

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i$$

$$U_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ji}}$$

连续带电体的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \int_q (\mathrm{d}q) U$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_e U \mathrm{d}V$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma_e U \mathrm{d}S$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_L \eta_e U \mathrm{d}l$$

【0106A01】

真空中有“孤立”的均匀带电球体和均匀带电球面，如果它们的半径和所带的电荷都相等，则它们的静电能之间的关系是

- (A) 球体的静电能等于球面的静电能                      (B) 球体的静电能大于球面的静电能  
(C) 球体的静电能小于球面的静电能                      (D) 球体内的静电能小于球面内的静电能

答案

B

## 7、电容器

### 7.1 电容器的电容

电容的定义

$$C = \frac{q}{U}$$

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

球形电容器的电容 (不建议背, 建议自己推导)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

柱形电容器的电容 (不建议背, 建议自己推导)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

孤立导体球电容器的电容 (球形电容器中  $R_2 \rightarrow \infty$ )

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

#### 【0107B01】

一平行板电容器充电后切断电源, 若使二极板间距离增加, 则二极板间场强\_\_\_\_。(填“增大”或“减小”或“不变”)

#### 答案

不变

#### 解析

电容器充电后切断电源, 极板上所带电量  $Q$  保持不变, 拉大两板之间距离  $d$  时, 板间电场强度  $E$  保持不变, 所以板间电压  $U = Ed$  增大, 所以电容  $C = \frac{Q}{U}$  减小。当然也可以直接从平行板电容器的电容公式求得

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$d$  增大,  $C$  减小。

#### 【0107B02】

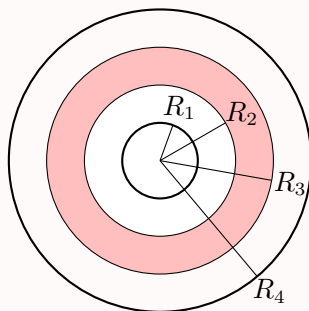
一平行板电容器充电后切断电源, 若使二极板间距离增加, 则电容器的电容\_\_\_\_。(填“增大”或“减小”或“不变”)

## 答案

减小

## 【0107C01】

一球形电容器内外两壳的半径分别为  $R_1$  和  $R_4$ ，今在两壳之间放一个内外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的同心导体球壳。(1) 给内壳 ( $R_1$ ) 以电量  $Q$ ，求  $R_1$  和  $R_4$  两壳的电势差；(2) 求以  $R_1$  和  $R_4$  为两极的电容。



## 解答

导体处于静电平衡时电荷只分布在导体表面，导体内部电场为零。所以可知， $r = R_1$  球面上均匀分布电荷  $q_1 = Q$ ， $r = R_2$  球面上均匀分布电荷  $q_2 = -Q$ ， $r = R_3$  球面上均匀分布电荷  $q_3 = Q$ ， $r = R_4$  球面上均匀分布电荷  $q_4 = -Q$ 。

根据均匀带电球面的电势分布

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \end{cases}$$

及电势叠加原理，可得  $r = R_1$  球面的电势

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \end{aligned}$$

$r = R_4$  球面的电势

$$\begin{aligned} U_4 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以二者的电势差

$$\Delta U = U_1 - U_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

根据电容的定义可得, 以  $R_1$  和  $R_4$  为两极的电容器的电容

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}$$

### 评分标准

1. 根据静电平衡导体的性质得到电荷的分布 ( $q_1 = Q$ ,  $q_2 = -Q$ ,  $q_3 = Q$ ,  $q_4 = -Q$ ) 各得 1 分
2. 均匀带电球面的电势分布得 2 分
3. 电势叠加原理得 1 分
4.  $U_1$ 、 $U_4$ 、 $\Delta U$  各得 1 分
5. 计算电容得 5 分

### 【0107A01】

两个半径相同的金属球, 一个为空心, 一个为实心, 对两者各自孤立时的电容值进行比较, 则  
(A) 两球电容值相等 (B) 实心球电容值大 (C) 空心球电容值大 (D) 两者无法比较

### 答案

A

### 【0107B03】

已知一平行板电容器, 极板面积为  $S$ , 两板间隔为  $d$ , 其中充满空气。当两极板上加电压  $U$  时, 忽略边缘效应, 两极板间的相互作用力  $F = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 答案

$$\frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2}$$

### 解析

根据平行板电容器的电容公式及其与电压和电量之间的关系, 有

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U}$$

所以极板上的带电量为

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

其中一个极板 (记为  $A$ ) 带  $+Q$ , 另一个极板 (记为  $B$ ) 带  $-Q$ 。所以  $A$  极板所受到的电场力是  $B$  极板上的电荷在  $A$  极板处所产生的电场作用在  $A$  极板的电荷上。忽略边缘效应, 极板可视为无限大带电平面, 所以其电场可由高斯定理求得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot (2S) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2d}$$

因此, 注意, 这里  $A$  极板在  $B$  极板处所产生的电场强度的大小仅仅是平行板电容器之间匀强电场的一半。所以极板上的电荷所受到的电场力的大小为

$$F = QE = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U \times \frac{U}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$$

## 7.2 电容器的联接

并联电容器组的等效电容

$$C = \sum_i C_i$$

串联电容器组的等效电容

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

### 【0107A02】

如果在空气平行板电容器的两极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板, 则由于金属板的插入及其相对极板所放位置的不同, 对电容器电容的影响为

- (A) 使电容减小, 但与金属板相对极板的位置无关
- (B) 使电容减小, 且与金属板相对极板的位置有关
- (C) 使电容增大, 但与金属板相对极板的位置无关
- (D) 使电容增大, 且与金属板相对极板的位置有关

### 答案

C

### 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

当极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板, 可以认为两个极板间的距离变小, 所以电容器的电容增大。其实插入金属板, 是将一个电容变成两个电容并进行串联, 两个新电容器的极板面积不变, 间

距分别为  $d_1$  和  $d_2$ ，所以两个电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon S}{d_2}$$

而由电容器串联的公式

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon S} + \frac{d_2}{\varepsilon S} = \frac{d_1 + d_2}{\varepsilon S}$$

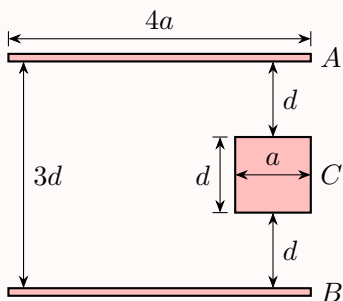
$$C_{12} = \frac{\varepsilon S}{d_1 + d_2}$$

而显然  $d_1 + d_2 = d - d_0 < d$ ，其中  $d_0$  为金属板的厚度，所以  $C_{12} > C$ ，且与金属板的位置无关。对于空气电容器，以上  $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。

问题：如果金属板不是平行插入，结果将怎么样？

#### 【0107B04】

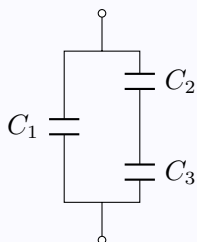
$A$ 、 $B$  是两块完全相同的长为  $4a$ 、宽为  $b$ ，厚度可忽略不计的金属板，二者相距  $3d$  平行放置构成平行板电容器 (这里  $d \gg a$ )，金属板  $C$  长为  $a$ 、宽为  $b$ 、厚为  $d$ 。 $A$ 、 $B$  接入电压为  $U$  的电路进行充电，之后断开电源，再将  $C$  插入图示位置，则  $A$ 、 $B$  之间的总电容为\_\_\_\_\_。



#### 答案

$$\frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}$$

#### 解析

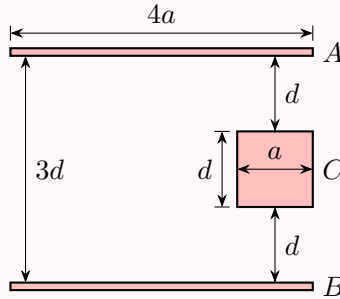


$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 (3a)b}{3d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 C_3 &= \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 \frac{1}{C_{23}} &= \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{2d}{\varepsilon_0 ab} \\
 C_{23} &= \frac{\varepsilon_0 ab}{2d} \\
 C_{123} &= C_1 + C_{23} = \frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}
 \end{aligned}$$

## 【0107B05】

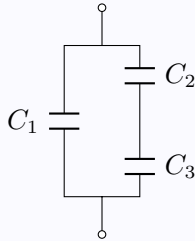
A、B 是两块完全相同的长为  $4a$ 、宽为  $b$ ，厚度可忽略不计的金属板，二者相距  $3d$  平行放置构成平行板电容器 (这里  $d \gg a$ )，金属板 C 长为  $a$ 、宽为  $b$ 、厚为  $d$ 。A、B 接入电压为  $U$  的电路进行充电，之后不断开电源，再将 C 插入图示位置，则 A、B 之间的总电容为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}$$

## 解析



$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\varepsilon_0 (3a)b}{3d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 C_2 &= \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \\
 C_3 &= \frac{\varepsilon_0 ab}{d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{23}} &= \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{2d}{\varepsilon_0 ab} \\ C_{23} &= \frac{\varepsilon_0 ab}{2d} \\ C_{123} &= C_1 + C_{23} = \frac{3\varepsilon_0 ab}{2d}\end{aligned}$$

## 【0107B06】

一空气平行板电容器，两极板间距为  $d$ ，充电后板间电压为  $U$ 。然后将电源断开，在两板间平行地插入一厚度为  $\frac{d}{3}$  的金属板，则板间电压变成  $U' = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$\frac{2}{3}U$$

## 解析

电容器充电电源断开后，极板上的带电量保持不变。根据平行板电容器的电容公式及其与电压和电量之间的关系，有

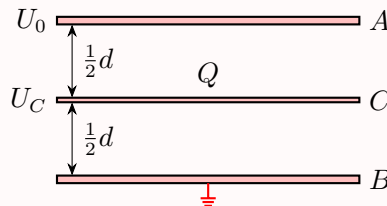
$$\begin{aligned}C &= \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U} \\ U &= \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}\end{aligned}$$

插入金属板之后，等效电容的板间距  $d' = d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}$ ，所以板间电压

$$U' = \frac{Qd'}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3} \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3}U$$

## 【0107B07】

一平行板电容器，极板面积为  $S$ ，相距为  $d$ 。若  $B$  板接地，且保持  $A$  板的电势  $U_A = U_0$  不变。如图，把一块面积相同的带有电荷为  $Q$  的导体薄板  $C$  平行地插入两板中间，则导体薄板  $C$  的电势  $U_C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{U_0}{2} + \frac{Qd}{4\varepsilon_0 S}$$



## 解析

平行板电容器的电容及其与电压和电量之间的关系

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U}$$

所以，依题意，上下两个电容器的电容相等，且均为

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$

假设两个电容器上的电压和电量分别为  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ ，则有

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} = C_2 = \frac{Q_2}{U_2}$$

这里要特别注意各个极板带电量的正负和各个极板电势的高低。假定由上到下电势依次降低，则中间导体薄板的上下两个面的带电量分别为  $-Q_1$  和  $Q_2$ ，所以有

$$U_1 + U_2 = U_0$$

$$Q_2 - Q_1 = Q$$

所以，综合以上各式，有

$$C_2 U_2 - C_1 U_1 = Q$$

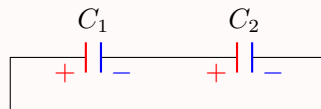
$$C_1 U_1 + C_1 U_2 = C_1 U_0$$

$$(C_1 + C_2) U_2 = C_1 U_0 + Q$$

$$U_2 = \frac{C_1 U_0 + Q}{C_1 + C_2} = \frac{U_0}{2} + \frac{Q}{2 \times \frac{2\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{U_0}{2} + \frac{Qd}{4\varepsilon_0 S}$$

## 【0107C02】

两个电容分别为  $C_1$  和  $C_2$  的电容器，带电量分别为  $Q_1$  和  $Q_2$ ，如图连接 ( $C_1$  的正极板与  $C_2$  的负极板连接， $C_1$  的负极板与  $C_2$  的正极板连接)，问最终各极板上的带电量各是多少？



## 解答

假定连接前从左到右四个板的带电量分别为  $+Q_1$ 、 $-Q_1$ 、 $+Q_2$ 、 $-Q_2$ ，连接后从左到右四个板的带电量分别为  $-q_1$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $-q_2$ ，则有

$$q_1 + q_2 = Q_2 - Q_1$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

解得

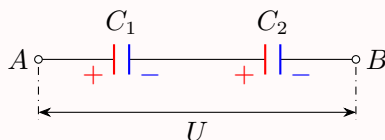
$$q_1 = \frac{C_1(Q_2 - Q_1)}{C_1 + C_2}$$

$$q_2 = \frac{C_2(Q_2 - Q_1)}{C_1 + C_2}$$

所以, 如果  $Q_2 > Q_1$ , 则中间两板带正电, 边上两板带负电; 如果  $Q_2 < Q_1$ , 则中间两板带负电, 边上两板带正电; 如果  $Q_2 = Q_1$ , 则四板带电量均为零。

### 【0107C03】

两个电容分别为  $C_1$  和  $C_2$  的电容器, 带电量分别为  $Q_1$  和  $Q_2$ , 如图连接 ( $C_1$  的负极板与  $C_2$  的正极板连接,  $C_1$  的正极板、 $C_2$  的负极板分别接入电压为  $U$  的电路中), 问最终各极板上的带电量各是多少?



### 解答

假定连接前从左到右四个板的带电量分别为  $+Q_1$ 、 $-Q_1$ 、 $+Q_2$ 、 $-Q_2$ , 连接后从左到右四个板的带电量分别为  $q_1$ 、 $-q_1$ 、 $q_2$ 、 $-q_2$ , 则有 (假定外电路中左端电势比较高, 即  $U_A - U_B = U$ )

$$-q_1 + q_2 = -Q_1 + Q_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U$$

解得

$$q_1 = \frac{C_1 C_2 U - C_1(Q_2 - Q_1)}{C_1 + C_2}$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2 U + C_2(Q_2 - Q_1)}{C_1 + C_2}$$

以上结果与  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $U$  的具体值有关, 且与两端电势谁高谁低也有关。

### 评分标准

1. 电荷关系 5 分
2. 电压关系 5 分
3. 联立求解 5 分

## 【0107B08】

真空中半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两个导体球相距很远, 均可视为孤立导体球, 则两球的电容之比  $\frac{C_1}{C_2} =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{R_1}{R_2}$$

## 【0107B09】

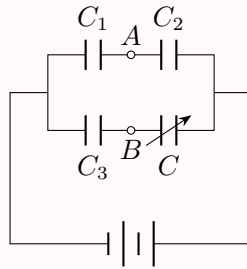
真空中半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两个导体球相距很远, 当用细导线将两球相连后, 则系统的电容  $C =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)$$

## 【0107B10】

如图所示, 电容  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  已知, 电容  $C$  可调, 当调节到  $A$ 、 $B$  两点电势相等时, 电容  $C =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{C_2 C_3}{C_1}$$

## 解析

依题意,  $A$ 、 $B$  两点电势相等, 则说明  $C_1$  和  $C_3$  的电压相同,  $C_2$  和  $C$  的电压相同, 而  $C_1$  和  $C_2$  串联,  $C_3$  和  $C$  串联, 则说明  $C_1$  和  $C_2$  的带电量相等,  $C_3$  和  $C$  的带电量相等, 即有

$$\begin{aligned} U_1 &= U_3, U_2 = U, Q_1 = Q_2, Q_3 = Q \\ C_1 U_1 &= C_2 U_2, C_3 U_3 = C U \\ C &= \frac{U_3}{U} C_3 = \frac{U_1}{U_2} C_3 = \frac{C_2}{C_1} C_3 = \frac{C_2 C_3}{C_1} \end{aligned}$$

## 7.3 电容器的储能

电容器的储能

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

## 【0107A03】

将一空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，断开电源。再将一块与极板面积相同的金属板平行地插入两极板之间，如图所示，则由于金属板的插入及其所放位置的不同，对电容器储能的影响为



金属板

- (A) 储能减少，但与金属板相对极板的位置无关    (B) 储能减少，且与金属板相对极板的位置有关  
(C) 储能增加，但与金属板相对极板的位置无关    (D) 储能增加，且与金属板相对极板的位置有关

## 答案

A

## 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

充电后与电源断开，极板上所带电量  $Q$  保持不变，插入金属板， $d$  减小，所以电容  $C$  增大，电压  $U$  减小。但电量不变，由高斯定理可得，电场  $E$  不变。而电场能量密度为

$$w = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

所以电场能量密度不变，但电场存在的区域变小，所以电场能量减小。

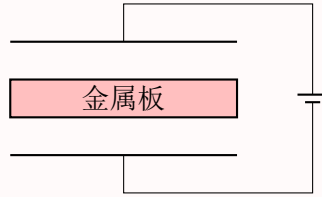
也可以由电场能量

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2C}Q^2$$

电量保持不变，电容增大，所以电场能量减小。

## 【0107A04】

将一个空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，在保持与电源连接的情况下，再将一块与极板面积相同的金属板平行地插入两极板之间，如图所示。金属板的插入及其所在位置的不同，对电容器储存电能的影响为



- (A) 储能增加, 与金属板相对极板的位置无关      (B) 储能增加, 与金属板相对极板的位置有关  
(C) 储能减小, 与金属板相对极板的位置无关      (D) 储能减小, 与金属板相对极板的位置有关

## 答案

A

## 【0107B11】

一个电容为  $C_1$  的电容器, 充电后两极电压为  $U$ , 然后离开电源, 与另一未充电、电容为  $C_2$  的电容器相连接。若  $C_2 = 2C_1$ , 则  $C_1$  能量损失为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{4}{9}C_1U^2$$

## 解析

$$\begin{aligned} Q &= C_1U = C_1U_1 + C_2U_1 = (C_1 + C_2)U_1 \\ U_1 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2}U = \frac{1}{3}U \\ E_0 &= \frac{1}{2}C_1U^2 \\ E_1 &= \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{9}E_0 \\ \Delta E &= E_0 - E_1 = \frac{8}{9}E_0 = \frac{8}{9} \times \frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{4}{9}C_1U^2 \end{aligned}$$

## 9、恒定电流场

电流和电流密度矢量

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

欧姆定律

$$I = \frac{U}{R}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

电阻定律

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\sigma S}$$

电阻的串并联

$$R_{\text{串}} = \sum_i R_i$$

$$\frac{1}{R_{\text{并}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

电流的连续性方程

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

电流的恒定条件

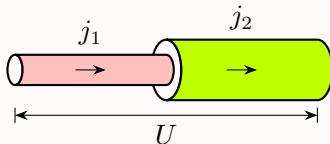
$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

电源电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

【0109A01】

截面半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) 的两根圆柱形铜棒串接在一起, 长度均为  $L$ , 如图所示。若两端加上电压  $U$ , 则下列说法正确的是



- (A) 通过两棒的电流密度相等  
 (B) 通过两铜棒的电流密度不等, 且  $j_1 : j_2 = r_1 : r_2$   
 (C) 两棒内的电场强度大小相等  
 (D) 两铜棒内的电场强度大小不等, 且  $E_1 : E_2 = r_2^2 : r_1^2$

答案

D

解析

$$\begin{aligned} j_1 S_1 &= j_2 S_2 \\ j_1 \times \pi r_1^2 &= j_2 \times \pi r_2^2 \\ \frac{j_1}{j_2} &= \frac{r_2^2}{r_1^2} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \frac{E_1}{E_2} &= \frac{j_1}{j_2} \end{aligned}$$

【0109B01】

半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的两个同轴金属圆筒长  $L$ , 两筒间充满电阻率为  $\rho$  的均匀材料, 当内外两筒之间加上电压  $U$  之后, 电流沿径向由内筒流向外筒, 则内外筒间材料的总电阻  $R =$ \_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

解析

$$\begin{aligned} dR &= \rho \frac{dr}{2\pi r L} \\ R &= \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

【0109B02】

半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的两个同轴金属圆筒长  $L$ , 两筒间充满电阻率为  $\rho$  的均匀材料。当内外两筒之间加上电压  $U$  之后, 电流沿径向由内筒流向外筒, 则电流强度  $I =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{2\pi LU}{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

## 解析

$$\begin{aligned} dR &= \rho \frac{dr}{2\pi r L} \\ R &= \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$



## 第二章 恒磁场

### 2、毕奥——萨伐尔定律

#### 2.1 电流元的磁场

电流元的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$  为由电流元所在位置指向场点所在位置的矢量。

【0202A01】

一个电流元  $I d\vec{l}$  位于直角坐标系原点，电流沿  $z$  轴正方向，则空间点  $a(0, 0, 1)$  和  $b(1, 0, 0)$  的磁感应强度  $\vec{B}_1$ 、 $\vec{B}_2$  分别为

(A)  $\vec{B}_1 = 0$ 、 $\vec{B}_2 = 0$

(B)  $\vec{B}_1 = 0$ 、 $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \vec{e}_y$

(C)  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \vec{e}_y$ 、 $\vec{B}_2 = 0$

(D)  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \vec{e}_y$ 、 $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \vec{e}_y$

答案

B

#### 2.2 磁场的叠加原理

整个闭合载流回路的磁场 (磁场的叠加原理，求磁感应强度的第一种方法)

$$\vec{B} = \oint_L \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

载流直导线的磁场 (掌握计算方法，不要背结论)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \frac{z_2}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \right]$$

无限长载流直导线的磁场 (这个结论可以由下一讲的安培环路定理得到)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

载流圆线圈轴线上的磁场 (掌握计算方法，不要背结论)

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

螺线管轴线上的磁场 (掌握计算方法, 不要背结论)

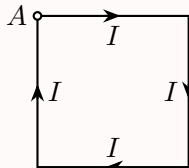
$$B = \frac{N\mu_0 I}{2L} \left[ \frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right]$$

无限长螺线管轴线上的磁场 (这个结论可以由下一讲的安培环路定理得到)

$$B = \mu_0 n I$$

【0202A02】

边长为  $l$  的正方形线圈中通有电流  $I$ , 此线圈在  $A$  点 (见图) 产生的磁感应强度大小为



(A)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$

(B)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$

(C)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$

(D) 以上均不对

答案

A

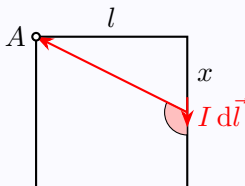
解析

毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

所以,  $AB$  段, 由于  $d\vec{l}$  与  $\vec{r}$  成  $180^\circ$ ,  $DA$  段,  $d\vec{l}$  与  $\vec{r}$  成  $0^\circ$ , 所以这两段在  $A$  点产生的磁场均为零。对于  $BC$  段上任意一个电流元  $I d\vec{l}$ , 它在  $A$  点产生的磁场的方向都是垂直纸面向里, 大小为

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(dx)r \sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(dx) \sin^3 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(dx) \sin^3 \theta}{l^2}$$



而

$$x = -\frac{l \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$dx = -l \frac{-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta$$

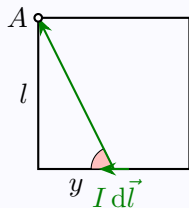
所以

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \times \frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta \times \sin^3 \theta}{l^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta d\theta}{l}$$

$$B_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta \, d\theta}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (-\cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi l} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi l}$$

同理，可以求得  $CD$  段在  $A$  点产生的磁场，方向也是垂直纸面向里，大小为

$$\begin{aligned} dB_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(-dy) \sin^3 \theta}{l^2} \\ y &= \frac{l \cos \theta}{\sin \theta} \\ dy &= l \frac{-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = -\frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta \\ dB_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \times \frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta \times \sin^3 \theta}{l^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta \, d\theta}{l} \\ B_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta \, d\theta}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (-\cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi l} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi l} \end{aligned}$$



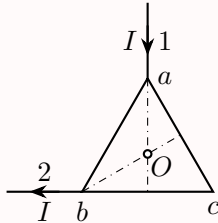
所以  $A$  点的总磁感应强度为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$$

方向垂直纸面向里。

### 【0202A03】

电流  $I$  由长直导线 1 沿垂直  $bc$  边方向经  $a$  点流入由电阻均匀的导线构成的正三角形线框，再由  $b$  点流出，经长直导线 2 沿  $cb$  延长线方向返回电源 (如图)。若载流直导线 1、2 和三角形框中的电流在框中心  $O$  点产生的磁感应强度分别用  $\vec{B}_1$ 、 $\vec{B}_2$  和  $\vec{B}_3$  表示，则  $O$  点的磁感应强度大小



- (A)  $B = 0$ ，因为  $B_1 = B_2 = B_3 = 0$
- (B)  $B = 0$ ，因为虽然  $B_1 \neq 0$ 、 $B_2 \neq 0$ ，但  $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$ ， $B_3 = 0$
- (C)  $B \neq 0$ ，因为虽然  $B_3 = 0$ 、 $B_1 = 0$ ，但  $B_2 \neq 0$
- (D)  $B \neq 0$ ，因为虽然  $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 \neq 0$ ，但  $B_3 \neq 0$

## 答案

C

## 解析

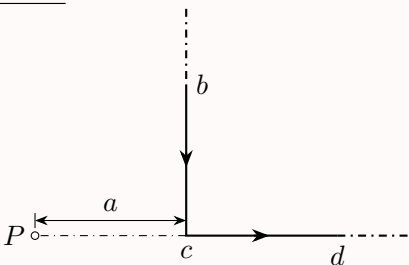
毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

因为直导线 1 通过  $O$  点, 所以  $B_1 = 0$ 。而正三角形线框电阻均匀, 所以  $R_{acb} = 2R_{ab}$ , 所以通过两条支路的电流  $I_{ab} = 2I_{acb}$ 。  $ac$  段和  $cb$  段在  $O$  点产生的磁场大小相等, 方向都是垂直纸面向里, 而  $ab$  段在  $O$  点产生的磁场的方向垂直纸面向外, 大小为  $ac$  段的两倍 (因为电流是两倍关系), 所以三角形线框在  $O$  点产生的总磁场  $B_3 = 0$ 。而对于直导线 2, 每一个电流元在  $O$  点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向里, 所以  $B_2 \neq 0$ 。

## 【0202B01】

一条无限长载流导线折成如图示形状, 导线上通有电流  $I$ 。  $P$  点在  $cd$  的延长线上, 它到折点的距离  $a$ , 则  $P$  点的磁感应强度的大小  $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

## 解析

电流元的磁场公式

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$  为从电流元所在位置指向所求位置的矢量。由此也可见, 如果  $d\vec{l} \parallel \vec{r}$ , 那么  $d\vec{l} \times \vec{r} = 0$ , 该电流元在场点所激发的磁场为零。所以  $cd$  段在  $P$  点的磁场为零。

而  $ab$  段上的电流元在  $P$  点的磁场的方向都是垂直纸面向里, 大小可以通过积分得到, 也可以通过对称性分析得出它是  $ab$  所在直线的无限长通电直线的磁场的一半, 而无限长通电直线的磁场可以通过安培环路定理求得:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以所求磁场为

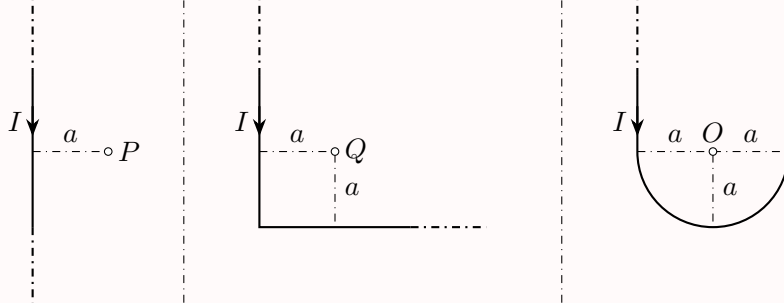
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

下面根据磁场叠加原理直接通过积分来求磁场

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I (-dz) \sin \theta}{4\pi(z^2 + a^2)} = -\frac{\mu_0 I a dz}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 I \sin \theta d(a/\tan \theta)}{4\pi(a/\sin \theta)^2} = -\frac{\mu_0 I \sin^3 \theta a (-\sin^{-2} \theta d\theta)}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi a} \\ B &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (-\cos \theta)_0^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \end{aligned}$$

#### 【0202A04】

通有电流  $I$  的无限长直导线有如图三种形状，则  $P$ ， $Q$ ， $O$  各点磁感应强度的大小  $B_P$ ， $B_Q$ ， $B_O$  间的关系为



- (A)  $B_P > B_Q > B_O$       (B)  $B_Q > B_P > B_O$       (C)  $B_Q > B_O > B_P$       (D)  $B_O > B_Q > B_P$

#### 答案

D

#### 解析

毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

第一种情况可以用安培环路定理求磁场

$$B_P \cdot (2\pi a) = \mu_0 I$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

第二种情况是用直线电流的磁场来计算

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dl) r \sin \theta}{r^3}$$

$$l = -r \cos \theta, a = r \sin \theta \Rightarrow \frac{l}{a} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow l = -a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow dl = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^3 \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$$

$$B_Q = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin \theta d\theta \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ (-\cos \theta)_0^{\frac{3\pi}{4}} + (-\cos \theta)_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

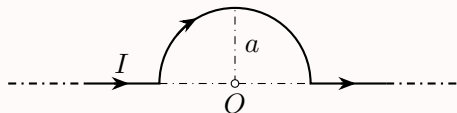
第三种情况分成两个半无限长直线和一个半圆弧来计算

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta d\theta \right] + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \times 2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \times \pi a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \right]$$

所以显然有  $B_O > B_Q > B_P$ 。其实，后两种情况中的两个半无限长部分所产生的磁场，就是第一种情况，所以剩下的就是比较多余那部分的磁场了，而第三种情况中，每一个电流元的磁场都比第二种的大，而且第三种的电流元还更长，所以答案其实是显然的。

### 【0202B02】

在真空中，将一根无限长载流导线在一平面内弯成如图所示的形状，并通以电流  $I$ ，则圆心  $O$  点的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。



### 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4a}$$

### 解析

电流元的磁场公式

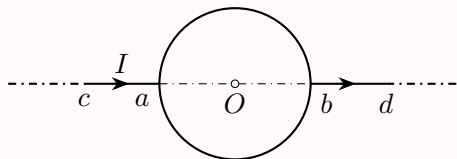
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算半圆产生的磁场叠加即可。  
半圆产生的磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_L dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \cdot \pi a = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

## 【0202A05】

如图所示，电流从  $a$  点分两路通过对称的圆环形分路，汇合于  $b$  点。若  $ca$ 、 $bd$  都沿环的径向，则在环形分路的环心处的磁感应强度



- (A) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸内  
(B) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸外  
(C) 方向在环形分路所在平面内，且指向  $b$   
(D) 为零

## 答案

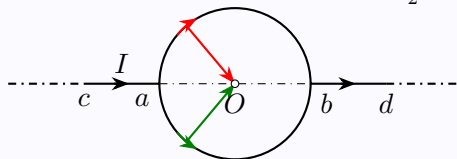
D

## 解析

毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

圆环形分路是对称的，所以上下两个分路的电流是相等的，均为  $\frac{I}{2}$ 。



任意一个电流元  $d\vec{l}$  与相应的  $\vec{r}$  都成  $90^\circ$ ，所以

$$\frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{dl}{R^2}$$

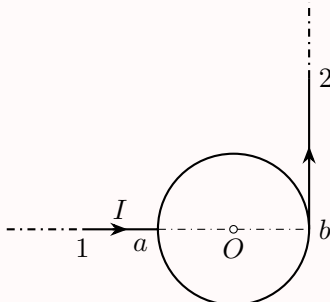
上分路产生的磁场的方向垂直纸面向里，下分路产生的磁场的方向垂直纸面向外，大小相等，均为

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{2R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{2R^2} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{2R^2} \times \pi R = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

所以总磁感应强度为 0。

## 【0202A06】

电流由长直导线 1 沿半径方向经  $a$  点流入一电阻均匀的圆环, 再由  $b$  点沿切向从圆环流出, 经长导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上电流强度为  $I$ , 圆环的半径为  $R$ , 且  $a$ 、 $b$  与圆心  $O$  三点在同一直线上。设直电流 1、2 及圆环电流在  $O$  点产生的磁感应强度分别为  $\vec{B}_1$ 、 $\vec{B}_2$  及  $\vec{B}_3$ , 则  $O$  点的磁感应强度的大小



- (A)  $B = 0$ , 因为  $B_1 = B_2 = B_3 = 0$  (B)  $B = 0$ , 因为  $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$ ,  $B_3 = 0$   
 (C)  $B \neq 0$ , 因为虽然  $B_1 = B_3 = 0$ , 但  $B_2 \neq 0$  (D)  $B \neq 0$ , 因为虽然  $B_1 = B_2 = 0$ , 但  $B_3 \neq 0$

## 答案

C

## 解析

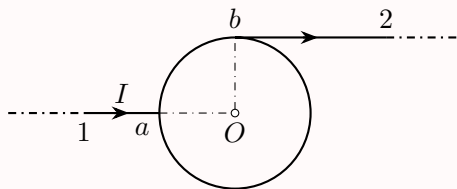
毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

因为直导线 1 通过  $O$  点, 所以  $B_1 = 0$ 。而圆环电阻均匀, 所以通过两条支路的电流相等, 所以两条支路在  $O$  点激发的磁场大小相等, 方向相反, 左边支路产生的磁场垂直纸面向外, 右边支路产生的磁场垂直纸面向里, 所以  $B_3 = 0$ 。而对于直导线 2, 每一个电流元在  $O$  点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向外, 所以  $B_2 \neq 0$ 。

## 【0202B03】

在真空中, 电流由长直导线 1 沿半径方向经  $a$  点流入一由电阻均匀的导线构成的圆环, 再由  $b$  点沿切向流出, 经长导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上的电流强度为  $I$ , 圆环半径为  $R$ ,  $\angle aOb = 90^\circ$ 。则圆心  $O$  点处的磁感应强度的大小  $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。





## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

## 解析

电流可以分成四段，长直导线 1 的电流指向  $O$  点，所以产生的磁场为零，即  $B_1 = 0$ 。直导线 2 产生的磁场是无限长直导线的一半，即

$$B_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

这个磁场的方向垂直纸面向里。电流进入圆环后分成两个部分，由于电阻均匀，所以电流与电阻成反比，流经四分之三圆的电流为  $I_3 = \frac{1}{4}I$ ，流经四分之一圆的电流为  $I_4 = \frac{3}{4}I$ ，两个电流的磁场方向相反， $I_3$  的磁场垂直纸面向外，大小为

$$B_3 = \frac{\mu_0 \frac{1}{4}I}{4\pi R^2} \cdot \frac{3}{4}(2\pi R) = \frac{3\mu_0 I}{32R}$$

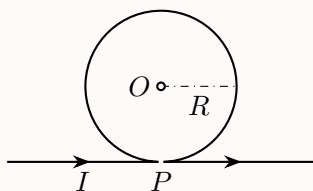
$I_4$  的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_4 = \frac{\mu_0 \frac{3}{4}I}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{4}(2\pi R) = \frac{3\mu_0 I}{32R}$$

所以总的磁场垂直纸面向里，大小  $B = B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ 。

## 【0202B04】

一根无限长直导线通有电流  $I$ ，在  $P$  点处被弯成了一个半径为  $R$  的圆，且  $P$  点处无交叉和接触，则圆心  $O$  处的磁感应强度大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I(\pi-1)}{2\pi R}$$

## 解析

整个电流分成三段，两个半无限长直导线等效于一根无限长直导线，再加一个圆形导线。无限长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1 \cdot (2\pi R) = \mu_0 I$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

其方向垂直纸面向外。圆形电流的磁场可以用电流元的磁场直接积分得到，方向垂直纸面向里，大小为

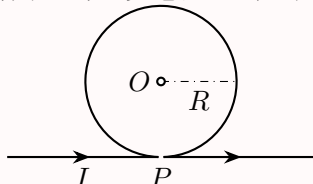
$$B_2 = \oint_{L_2} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I (2\pi R)}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向里，大小

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I (\pi - 1)}{2\pi R}$$

### 【0202A07】

无限长直导线在  $P$  处弯成半径为  $R$  的圆，当通以电流  $I$  时，则在圆心  $O$  点的磁感应强度大小等于



(A)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

(B)  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

(C)  $\frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$

(D)  $\frac{\mu_0 I}{4R} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$

### 答案

C

### 解析

题目要求的圆心的磁场可以看成一根无限长直导线和一个圆形线圈分别产生的磁场之和。无限长直导线的磁场可以通过安培环路定理求得【大小设为  $B_1$ ，方向垂直纸面向外】，圆形线圈的磁场可以利用磁场叠加原理求得【大小设为  $B_2$ ，方向垂直纸面向里】。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1 (2\pi R) = \mu_0 I$$

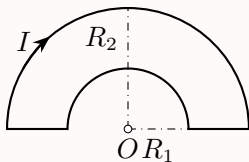
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B_2 = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \times (2\pi R) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

## 【0202B05】

半径为  $R_1$ 、 $R_2$  的两半圆构成一闭合载流回路，载有电流  $I$ ，如图所示。公共圆心  $O$  处的磁感应强度大小等于\_\_\_\_\_。

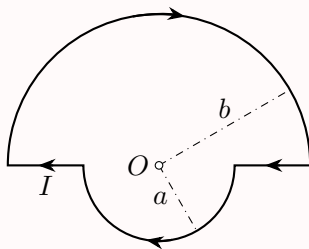


## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

## 【0202B06】

如图所示的回路中，两共面半圆的半径分别为  $a$  和  $b$ ，且有公共圆心  $O$ ，当回路中通有电流  $I$  时，圆心  $O$  处的磁感应强度大小为\_\_\_\_\_。

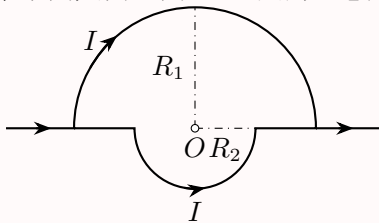


## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4a} + \frac{\mu_0 I}{4b}$$

## 【0202B07】

真空中稳恒电流  $I$  流过两个半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  的同心半圆形导线，两半圆导线间由沿直径的直导线连接，电流沿直导线流入。如果两个半圆共面，圆心  $O$  点的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

## 解析

电流元的磁场公式

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算两个半圆产生的磁场叠加即可。

上半圆，磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} \int_{L_1} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} \cdot \pi R_1 = \frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

半圆，磁场的方向垂直纸面向外，大小为

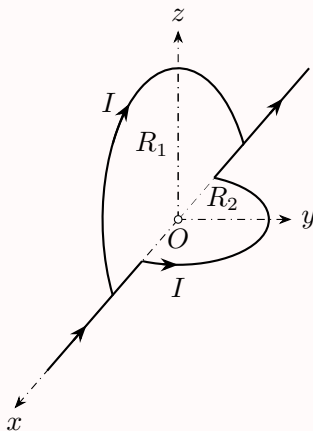
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2} \int_{L_2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2} \cdot \pi R_2 = \frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向外，大小为

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

## 【0202B08】

真空中稳恒电流  $I$  流过两个半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  的同心半圆形导线，两半圆导线间由沿直径的直导线连接，电流沿直导线流入。如果两个半圆面正交，则圆心  $O$  点的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I}{4} \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}$$

## 解析

电流元的磁场公式

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算两个半圆产生的磁场叠加即可。

$xz$  平面上的半圆，产生的磁场的方向沿  $y$  轴负方向，大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

$xy$  平面上的半圆，产生的磁场的方向沿  $z$  轴正方向，大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以总的磁场为

$$\vec{B} = -B_1 \vec{e}_y + B_2 \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{4R_1} \vec{e}_y + \frac{\mu_0 I}{4R_2} \vec{e}_z$$

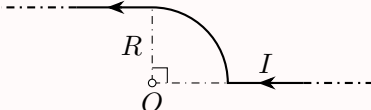
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0 I}{4} \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}$$

与  $y$  轴正方向的夹角为  $\varphi$

$$\varphi = \pi - \arctan \frac{B_2}{B_1} = \pi - \arctan \frac{R_1}{R_2}$$

#### 【0202A08】

无限长直导线通有电流  $I$ ，现将它弯成如图所示的形状，则  $O$  点处的磁感应强度的大小为



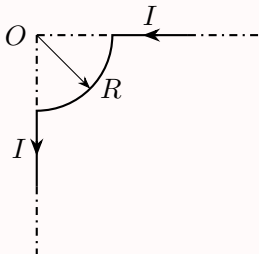
- (A)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$       (B)  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{8R}$       (C)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{8R}$       (D)  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$

#### 答案

B

#### 【0202A09】

如图，一根无限长的载流导线中部弯成四分之一圆周，圆心为  $O$ ，半径为  $R$ ，与圆周两端点相连的直导线相互垂直，且在同一平面内，则圆周圆心处磁感应强度的大小为



(A)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

(B)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

(C)  $\frac{\mu_0 I}{8\pi R}$

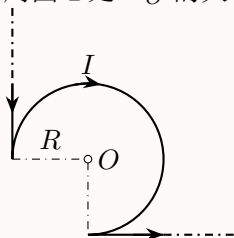
(D)  $\frac{\mu_0 I}{8R}$

答案

D

【0202A10】

如图所示，一根无限长的载流导线中部弯成四分之三圆周，圆心为  $O$ ，半径为  $R$ ，与圆周两端点相连的直导线相互垂直，且在同一平面内，则圆周圆心处  $\vec{B}_O$  的大小与方向分别为



(A)  $\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\right)$ ，方向垂直纸面向里

(B)  $\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\right)$ ，方向垂直纸面向外

(C)  $\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{3}{4}\right)$ ，方向垂直纸面向外

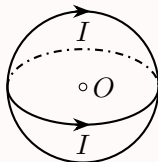
(D)  $\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{3}{4}\right)$ ，方向垂直纸面向里

答案

A

【0202A11】

如图所示，两个载有相等电流  $I$ 、半径为  $R$  的圆形线圈，一个水平放置，另一个处于竖直位置，两圆心重合，则圆心  $O$  处的磁感应强度大小为



(A) 0

(B)  $\frac{\mu_0 I}{2R}$

(C)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2R}$

(D)  $\frac{\mu_0 I}{R}$

答案

C

### 3、安培环路定理和磁场的“高斯定理”

#### 3.1 安培环路定理的理解

安培环路定理 (求磁感应强度的第二种方法)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

【0203A01】

下列说法正确的是

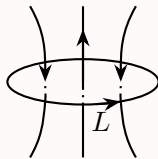
- (A) 闭合回路上各点磁感应强度都为零时, 回路内一定没有电流穿过
- (B) 闭合回路上各点磁感应强度都为零时, 回路内穿过的电流的代数和必定为零
- (C) 磁感应强度沿闭合回路的积分为零时, 回路上各点的磁感应强度必为零
- (D) 磁感应强度沿闭合回路的积分不为零时, 回路上任一点的磁感应强度都不可能为零

答案

B

【0203A02】

如图所示, 三根载流导线穿过一闭合回路  $L$  所围成的面。若改变三根导线之间的相互间隔, 但均不越出积分回路, 则



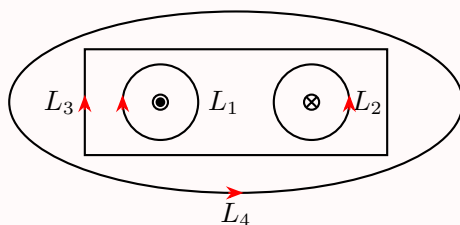
- (A)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  不变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值不变
- (B)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  不变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值改变
- (C)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  改变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值改变
- (D)  $L$  上各点的  $\vec{B}$  改变,  $\vec{B}$  沿回路  $L$  的环流值不变

答案

D

【0203A03】

如图所示, 两根长直导线平行放置, 流出纸面的电流为  $2I$ , 流进纸面的电流为  $I$ , 则下述式中正确的是



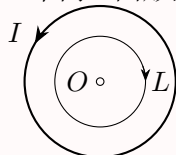
- (A)  $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\mu_0 I$     (B)  $\oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$     (C)  $\oint_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$     (D)  $\oint_{L_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$

答案

C

【0203A04】

如图，在一圆形电流  $I$  所在的平面内，选取一个同心圆形闭合回路  $L$ ，则由安培环路定理可知



- (A)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ ，且环路上任意一点  $B = 0$     (B)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ ，且环路上任意一点  $B \neq 0$   
 (C)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ ，且环路上任意一点  $B \neq 0$     (D)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ ，且环路上任意一点  $B = \text{常量}$

答案

B

解析

安培环路定理

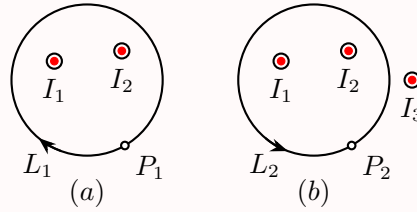
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

此题中，没有电流与回路  $L$  链接，所以上式右边的  $I = 0$ ，因此磁场沿回路  $L$  的环流为零，但回路上任意一点的磁感应强度都不为零，只是因为各点的  $\vec{B}$  的方向都是垂直纸面向上，与回路垂直，所以环流为零。

【0203A05】

在图 (a) 和 (b) 中各有一半半径相同的圆形回路  $L_1$  和  $L_2$ ，圆周内有电流  $I_1$  和  $I_2$ ，其分布相同，且均在真空中，但在 (b) 图中  $L_2$  回路外有电流  $I_3$ ， $P_1$ 、 $P_2$  为两圆形回路上的对应点，则





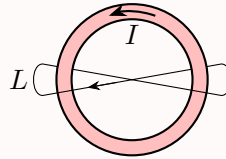
- (A)  $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , 且  $B_{P_1} = B_{P_2}$
- (B)  $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , 且  $B_{P_1} \neq B_{P_2}$
- (C)  $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , 且  $B_{P_1} \neq B_{P_2}$
- (D)  $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , 且  $B_{P_1} = B_{P_2}$

答案

B

【0203A06】

如图所示，一环形回路载有电流  $I$ ，所激发的磁场沿闭合路径  $L$  的积分  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$  应等于



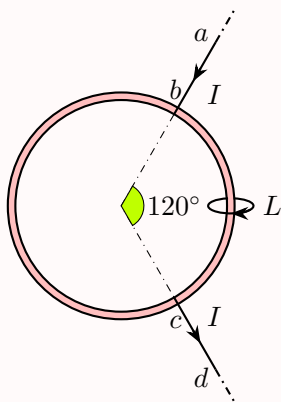
- (A) 0
- (B)  $2I$
- (C)  $-2\mu_0 I$
- (D)  $2\mu_0 I$

答案

D

【0203A07】

如图，两根直导线  $ab$  和  $cd$  沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流  $I$  从  $a$  端流入而从  $d$  端流出，则磁感应强度  $\vec{B}$  沿图中闭合路径  $L$  的积分  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$  等于

(A)  $\mu_0 I$ (B)  $\frac{1}{3}\mu_0 I$ (C)  $\frac{1}{4}\mu_0 I$ (D)  $\frac{2}{3}\mu_0 I$ 

答案

D

解析

安培环路定理

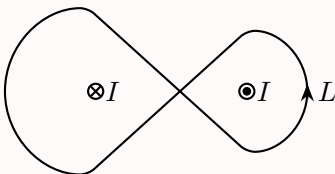
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

而铁环截面处处相等，所以电阻与长度成正比，左边支路的长度是右边支路的两倍，所以左边支路的电阻是右边支路的两倍，两个电阻并联，所以通过左边支路的电流是通过右边支路电流的一半，总的电流为  $I$ ，所以通过左边支路的电流是  $\frac{1}{3}I$ ，通过右边支路的电流是  $\frac{2}{3}I$ 。所以，由安培环路定理，有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{2I}{3} = \frac{2\mu_0 I}{3}$$

【0203B01】

如图所示，两根长直导线通有电流  $I$ ，对图示环路  $L$  上  $\vec{B}$  的环流为  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

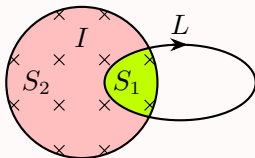


答案

 $2\mu_0 I$

## 【0203B02】

半径为  $R$  的圆柱体上载有电流  $I$ ，电流在其横截面上均匀分布，一回路  $L$  通过圆柱体内部将圆柱体横截面分为两部分，其面积大小分别为  $S_1$ 、 $S_2$ ，如图所示，则  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



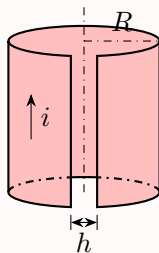
## 答案

$$\frac{\mu_0 I S_1}{\pi R^2}$$

## 3.2 安培环路定理求磁场

## 【0203B03】

将半径为  $R$  的无限长导体薄壁管 (厚度忽略) 沿轴向割去一宽度为  $h$  ( $h \ll R$ ) 的无限长狭缝后，再沿轴向流有在管壁上均匀分布的电流，其面电流密度 (垂直于电流的单位长度截线上的电流) 为  $i$  (如图)，则管轴线磁感应强度的大小是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



## 答案

$$\frac{\mu_0 i h}{2\pi R}$$

## 解析

将管壁电流沿轴向切割成一系列的无限长直线电流。由于对称性的关系，关于管轴对称的两个同样大小的无限长直线电流在管轴线上产生的磁场刚好互相抵消。所以最后只剩下与被裁掉的狭缝对称的那个无限长直线电流。根据面电流密度的定义，该无限长直线中通过的电流为  $I = ih$ ，所以由安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

可得

$$B \cdot (2\pi R) = \mu_0 i h$$

$$B = \frac{\mu_0 i h}{2\pi R}$$

## 【0203B04】

半径为  $R$  的无限长直实心圆柱形导体上, 电流  $I$  沿轴线方向均匀流动, 则圆柱导体内距离轴线为  $r$  的任一点 ( $r < R$ ) 的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

## 【0203B05】

半径为  $R$  的无限长直实心圆柱形导体上, 电流  $I$  沿轴线方向均匀流动, 则圆柱导体外距离轴线为  $r$  的任一点 ( $r > R$ ) 的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

## 【0203B06】

一根无限长的圆柱形导体, 半径为  $R$ , 沿轴向有均匀分布的电流  $I$ , 则导体内离轴为  $\frac{R}{2}$  处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

## 【0203B07】

一根无限长的圆柱形导体, 半径为  $R$ , 沿轴向有均匀分布的电流  $I$ , 则导体外离轴为  $\frac{3}{2}R$  处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\mu_0 I}{3\pi R}$$

## 【0203A08】

无限长直圆柱体, 半径为  $R$ , 沿轴向均匀流有电流。设圆柱体内 ( $r < R$ ) 的磁感应强度为  $B_1$ , 圆柱体外 ( $r > R$ ) 的磁感应强度为  $B_2$ , 则有

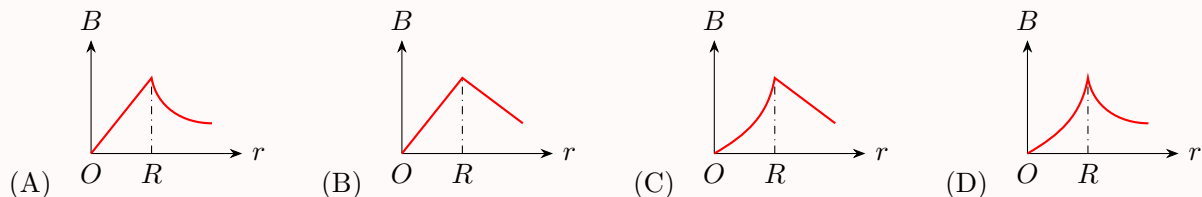
- (A)  $B_1$ 、 $B_2$  均与  $r$  成正比 (B)  $B_1$ 、 $B_2$  均与  $r$  成反比  
(C)  $B_1$  与  $r$  成正比,  $B_2$  与  $r$  成反比 (D)  $B_1$  与  $r$  成反比,  $B_2$  与  $r$  成正比

## 答案

C

## 【0203A09】

无限长的载流圆柱导体的半径为  $R$ ，电流在导体截面上均匀分布，则下图中正确表示空间各处的  $\vec{B}$  的大小与场点到圆柱中心轴线的距离  $r$  的关系的是

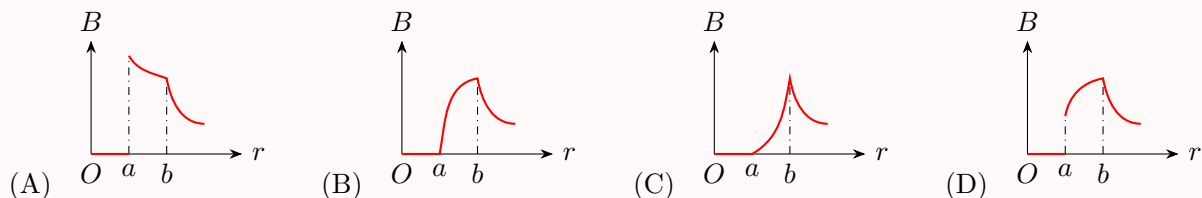


## 答案

A

## 【0203A10】

无限长载流空心圆柱导体的内外半径分别为  $a$ 、 $b$ ，电流在导体截面上均匀分布，则空间各处的  $\vec{B}$  的大小与场点到圆柱中心轴线的距离  $r$  的关系定性如图示。正确的图是



## 答案

B

## 解析

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

由于电流分布具有轴对称性，所以磁场分布也具有轴对称性，可以使用安培环路定理求磁场。选择安培环路为以圆柱轴线为圆心、与圆柱垂直、半径为  $r$  的圆周。则在该圆周上各点的磁场的大小相等，方向均沿圆周的切线方向，所以安培环路定理中左边的积分（环流）为

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot (2\pi r)$$

在不同区域，安培环路定理中右边的电流不同。

当  $r < a$  时, 空心区域, 没有电流,  $I = 0$ , 所以  $B = 0$ ;

当  $a < r < b$  时, 导体内部区域, 电流为  $I = j \cdot S = j \cdot \pi(r^2 - a^2) = j\pi(r^2 - a^2)$ , 所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j \pi(r^2 - a^2)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j(r^2 - a^2)}{2r} = \frac{\mu_0 j}{2} \left( r - \frac{a^2}{r} \right)$$

当  $r = a$  时,  $B = 0$ , 当  $r = b$  时,  $B = \frac{\mu_0 j(b^2 - a^2)}{2b}$ 。

当  $r > b$  时, 导体外区域, 电流为  $I = j\pi(b^2 - a^2)$ , 所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j \pi(b^2 - a^2)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j(b^2 - a^2)}{2r}$$

在这个区域,  $B \propto \frac{1}{r}$ , 当  $r = b$  时,  $B = \frac{\mu_0 j(b^2 - a^2)}{2b}$ 。

四个选项的区别在  $a < r < b$  区域, 由以上讨论很容易排除选项 A 和 D, 但 B 和 C 要如何判断?

如前讨论可知,  $r = a$  时,  $B = 0$ ;  $r = b$  时,  $B = \frac{\mu_0 j(b^2 - a^2)}{2b}$ 。由此二点确定的直线上任意  $r$  时的  $B$  为

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 j(b^2 - a^2)}{2b} \times \frac{r - a}{b - a} = \frac{\mu_0 j(b + a)(r - a)}{2b} \\ &= \frac{\mu_0 j}{2} \frac{(b + a)(r - a)}{b} = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{br - ab + ar - a^2}{b} = \frac{\mu_0 j}{2} \left[ r - \frac{a(b - r) + a^2}{b} \right] \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{a(b - r) + a^2}{b} - \frac{a^2}{r} &= \frac{[a(b - r) + a^2]r - a^2b}{br} = \frac{abr - ar^2 + a^2r - a^2b}{br} = \frac{ab(r - a) - ar(r - a)}{br} \\ &= \frac{a(b - r) + a^2}{b} - \frac{a^2}{r} = \frac{a(b - r)(r - a)}{br} \\ a < r < b &\Rightarrow (b - r) > 0, (r - a) > 0 \Rightarrow \frac{a(b - r)(r - a)}{br} > 0 \Rightarrow \frac{a(b - r) + a^2}{b} - \frac{a^2}{r} > 0 \\ \frac{a(b - r) + a^2}{b} &> \frac{a^2}{r} \\ r - \frac{a(b - r) + a^2}{b} &< r - \frac{a^2}{r} \\ \frac{\mu_0 j}{2} \left[ r - \frac{a(b - r) + a^2}{b} \right] &< \frac{\mu_0 j}{2} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \end{aligned}$$

所以  $a < r < b$  区域中任意一个  $r$  处的  $B$  应该比  $a$ 、 $b$  两点之间的直线所对应的  $B$  来得大, 所以曲线应该是向上凸的, 因此此题答案选 B。

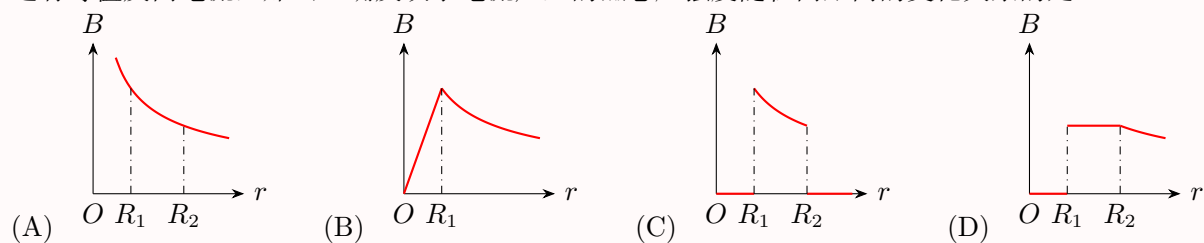
有老师提出, 作为选择题, 无须严格证明函数的曲线, 只要通过比较  $r = a$  和  $r = b$  两点的斜率关系, 就可以判断到底是选项 B 还是选项 C。

$$\begin{aligned} f &= r - \frac{a^2}{r} \\ \frac{df}{dr} &= 1 + \frac{a^2}{r^2} \\ \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=a} &= 1 + \frac{a^2}{a^2} = 2 \\ \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=b} &= 1 + \frac{a^2}{b^2} < 2 \end{aligned}$$

所以选项应该为 B。

## 【0203A11】

一根很长的电缆线由两个同轴的圆柱面导体组成，若这两个圆柱面的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ )，通有等值反向电流，那么正确反映了电流产生的磁感应强度随径向距离的变化关系的是

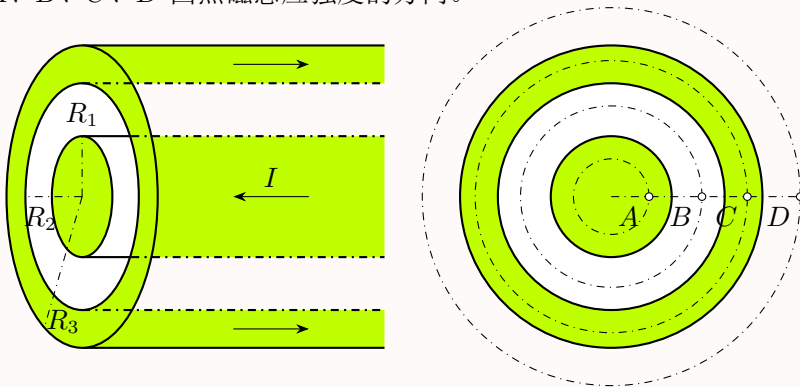


## 答案

C

## 【0203C01】

有一同轴电缆，其尺寸如图所示。两导体中的电流均为  $I$ ，但电流的流向相反。假定电流在导体内均匀分布，且不考虑导体的磁性，电缆长度远大于半径，可视为无穷长。试计算以下各处的磁感应强度的大小：(1)  $r < R_1$ ；(2)  $R_1 < r < R_2$ ；(3)  $R_2 < r < R_3$ ；(4)  $r < R_3$ 。假定里面导体的电流垂直纸面向外，试在下面图中画出  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点磁感应强度的方向。



## 解答

电流分布具有柱对称性，磁场分布也具有柱对称性，可以用安培环路定理求磁场，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

(1)  $r < R_1$ ,

$$B_1(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

(2)  $R_1 < r < R_2$ ,

$$B_2(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(3)  $R_2 < r < R_3$ ,

$$B_3(2\pi r) = \mu_0 \left[ I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \pi(r^2 - R_2^2) \right]$$

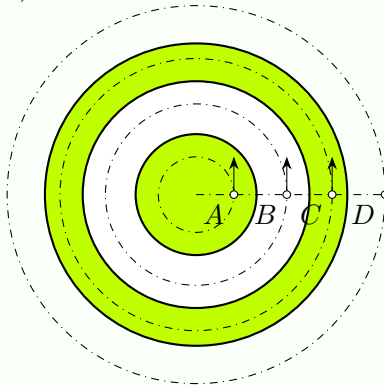
$$B_3 = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - r^2)}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)r}$$

(4)  $r > R_3$ ,

$$B_4(2\pi r) = \mu_0(I - I)$$

$$B_4 = 0$$

各点磁感应强度的方向 ( $D$  点无磁场)



#### 评分标准

1. 安培环路定理 3 分
2. 每个区域的磁感应强度各 2 分，共 8 分
3. 每个点的磁感应强度方向各 1 分、 $D$  点无磁场 1 分，共 4 分

#### 【0203A12】

一载有电流  $I$  的细导线分别均匀密绕在半径为  $R$  和  $r$  的长直圆筒上形成两个螺线管，两螺线管单位长度上的匝数相等。设  $R = 2r$ ，则两螺线管中的磁感应强度大小  $B_R$  和  $B_r$  应满足

- (A)  $B_R = 2B_r$       (B)  $B_R = B_r$       (C)  $2B_R = B_r$       (D)  $B_R = 4B_r$

#### 答案

B



## 解析

密绕长直螺线管的磁场, 认为螺线管内部是一个均匀的磁场, 螺线管外靠近螺线管的地方, 磁场近似为零。这个作为默认的已知条件。

所以, 螺线管内部的磁场可以用安培环路定理来求

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$BL = \mu_0 LnI$$

$$B = \mu_0 nI$$

这里  $n$  为单位长度的匝数。由此可见, 螺线管内部的磁场与螺线管的半径无关。因此有  $B_R = B_r$ 。

## 【0203A13】

一个密绕有  $N$  匝的环形螺线管 (螺绕环), 管内外半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ , 通有电流  $I$ , 管内的磁场分布为

- (A) 匀强磁场 (B) 越靠近内侧 (半径为  $R_1$  处) 磁场越强  
(C) 越靠近外侧 (半径为  $R_2$  处) 磁场越强 (D) 不能确定

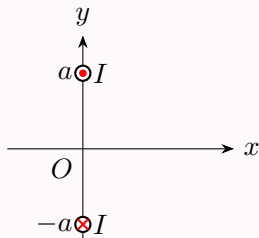
## 答案

B

## 3.3 安培环路定理与磁场叠加原理联合求磁场

## 【0203A14】

如图所示, 两根平行无限长直导线都垂直于  $xy$  平面, 分别穿过  $y$  轴, 与原点距离均为  $a$ , 若它们载有大小相等、方向相反的电流  $I$ , 则



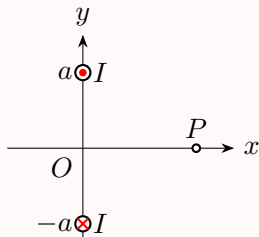
- (A) 在  $x$  轴上各点的磁感应强度的数值相等  
(B) 在  $x$  轴上, 原点右侧各点的磁感应强度的方向指向  $x$  轴负方向  
(C)  $x$  轴上各点的磁感应强度的方向垂直  $x$  轴指向  $y$  轴正方向  
(D) 在  $x$  轴上各点, 以原点处的磁感应强度的数值最大

## 答案

D

## 【0203C02】

图所示为两条穿过  $y$  轴且垂直于  $x - y$  平面的平行长直导线的正视图，两条导线皆通有电流  $I$ ，但方向相反，它们到  $x$  轴的距离皆为  $a$ 。(1) 推导出  $x$  轴上  $P$  点处的磁感应强度  $\vec{B}(x)$  的表达式；(2) 求  $P$  点在  $x$  轴上何处时，该点的  $B$  取得最大值。



## 解答

无限长通电直导线的磁场可以通过安培环路定理求得：

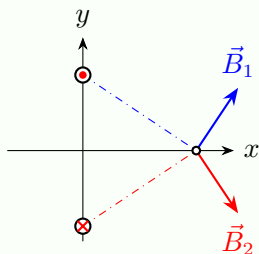
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，两根电流产生的磁场方向如图所示，大小相等，均为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}}$$



所以， $P$  点处的磁感应强度为

$$\vec{B} = 2B_1 \sin \theta \vec{e}_x = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}} \times \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \vec{e}_x$$

由于  $x^2 + a^2 \geq a^2$ ，所以当  $x = 0$  时， $x^2 + a^2 = a^2$  取得最小值，相应的磁场取得最大值。

当然数学上当

$$\frac{dB}{dx} = 0, \frac{d^2B}{dx^2} < 0$$

时，函数取得极大值，所以

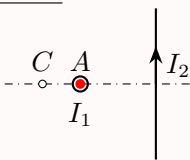
$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= -\frac{\mu_0 I a (2x)}{\pi(x^2 + a^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\infty \\ \frac{d^2B}{dx^2} &= -\frac{\mu_0 I a [2 \times (x^2 + a^2)^2 - (2x) \times (2x)]}{\pi(x^2 + a^2)^4} = -\frac{2\mu_0 I a [(x^2 + a^2)^2 - 2x^2]}{\pi(x^2 + a^2)^4} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^2 B}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{2\mu_0 I a [(a^2)^2]}{\pi (a^2)^4} < 0$$

$$\left. \frac{d^2 B}{dx^2} \right|_{x=\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{2\mu_0 I a [(x^2)^2 - 2x^2]}{\pi (x^2)^4} = 0$$

## 【0203B08】

相距  $2d$  的两根无限长直导线相互垂直地放置在两正交平面内，分别通有电流  $I_1$  和  $I_2$ ，如图所示，图中  $AC = d$ 。则  $C$  处的磁感应强度大小为\_\_\_\_\_。

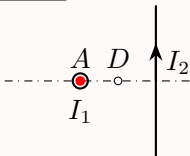


## 答案

$$\frac{\mu_0}{2\pi a} \sqrt{I_1^2 + \frac{I_2^2}{9}}$$

## 【0203B09】

相距  $2d$  的两根无限长直导线相互垂直地放置在两正交平面内，分别通有电流  $I_1$  和  $I_2$ ，如图所示，图中  $AD = d$ 。则  $D$  处的磁感应强度大小为\_\_\_\_\_。

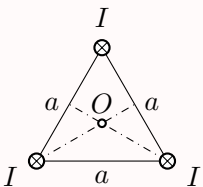


## 答案

$$\frac{\mu_0}{2\pi a} \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$$

## 【0203A15】

如图所示，三条平行的无限长直导线，垂直通过边长为  $a$  的正三角形顶点，每条导线中的电流都是  $I$ ，这三条导线在正三角形中心  $O$  点产生的磁感应强度为



(A) 0

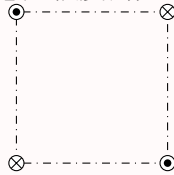
(B)  $\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi a}$ (C)  $\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi a}$ (D)  $\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{3\pi a}$

答案

A

【0203A16】

四根相互平行的长直导线均垂直于边长为  $2a$  的正方形平面，且过正方形顶点。若每根长直导线均载有电流  $I$ ，方向如图所示，则正方形中心的磁感应强度的大小为



(A)  $\frac{2\mu_0}{\pi a} I$

(B)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0}{\pi a} I$

(C)  $\frac{\mu_0}{\pi a} I$

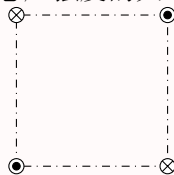
(D) 0

答案

D

【0203B10】

四根相互平行的长直导线均垂直于边长为  $L$  的正方形平面，且过正方形顶点。若每根长直导线均载有电流  $I$ ，方向如图所示，则正方形中心的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

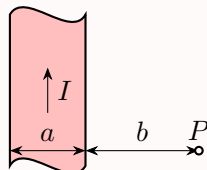


答案

0

【0203A17】

有一无限长通电流的扁平铜片，宽度为  $a$ ，厚度不计，电流  $I$  在铜片上均匀分布，在铜片外与铜片共面，离铜片右边缘为  $b$  处的  $P$  点 (如图) 的磁感应强度的大小为



- (A)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$       (B)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$       (C)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{b}$       (D)  $\frac{\mu_0 I}{\pi(a+2b)}$

## 答案

B

## 解析

将通电铜片看成一根根细直导线，利用无限长直导线的磁场公式，积分得到所求磁场。

无限长通电直导线的磁场可以用安培环路定理来求

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

以铜片左侧为坐标原点，水平向右为  $x$  轴正方向，任取  $x \rightarrow x+dx$  为所研究的细直导线，则通过它的电流为

$$dI = \frac{I}{a} dx$$

它到  $P$  点的距离为  $r = a + b - x$ ，所以它在  $P$  点产生的磁场方向垂直纸面向里，大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a+b-x)}$$

所以，总的磁场为

$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} [-\ln(a+b-x)]_0^a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$$

## 3.4 磁通量

磁通量

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

## 【0203A18】

关于磁场和磁感线的描述，正确的说法是

- (A) 电流元在磁场中某点不受磁场力的作用，则该点的磁感应强度一定为零  
 (B) 穿过线圈的磁通量为零的地方，磁感应强度一定为零  
 (C) 磁感线总是从磁铁的北极出发，到南极终止  
 (D) 磁感线可以形象地表现磁场的方向

答案

D

【0203B11】

一个密绕的细长螺线管，每厘米长度上绕有 10 匝细导线，螺线管的横截面积为  $10 \text{ cm}^2$ 。当在螺线管中通入 10 A 的电流时，它的横截面上的磁通量为\_\_\_\_Wb。( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )

答案

 $1.256 \times 10^{-5}$ 

解析

螺线管内的磁场视为匀强磁场，螺线管外的磁场视为零，可以由安培环路定理求螺线管内的磁场

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$BL = \mu_0 nLI$$

$$B = \mu_0 nI$$

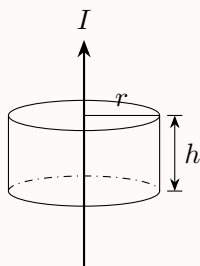
所以磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \mu_0 nIS = 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 1000 \times 10 \times 10 \times 10^{-4} = 1.256 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

注意，题目中给的是每厘米长度上绕有 10 匝，计算时要换算成每米 1000 匝，即  $n$  要用 1000 代。

【0203B12】

一根通有电流  $I$  的无限长直导线，如图取一个半径为  $r$ 、高度为  $h$  的圆柱面，则通过圆柱面侧面的磁通量的大小为\_\_\_\_\_。

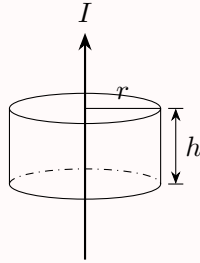


答案

0

## 【0203B13】

一根通有电流  $I$  的无限长直导线，如图取一个半径为  $r$ 、高度为  $h$  的圆柱面，则通过圆柱面上底面的磁通量的大小为\_\_\_\_\_。

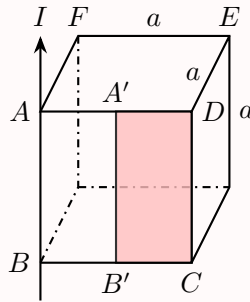


## 答案

0

## 【0203B14】

如图，一根通有电流  $I$  的无限长直导线与边长为  $a$  的立方体的一条边重合。 $A'$  和  $B'$  分别是  $AD$  和  $BC$  的中点，则通过  $A'B'CD$  的磁通量的大小为\_\_\_\_\_。

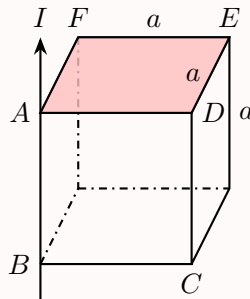


## 答案

$$\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

## 【0203B15】

如图，一根通有电流  $I$  的无限长直导线与边长为  $a$  的立方体的一条边重合，则通过  $ADEF$  的磁通量的大小为\_\_\_\_\_。

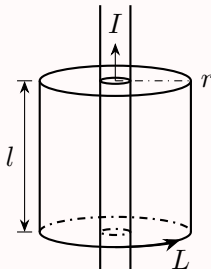


答案

0

【0203B16】

如图所示, 半径为  $R$  的无限长直圆柱形导体上, 沿轴线方向均匀地流着电流  $I$ 。作一半径为  $r$ 、长  $l$  且与电流同轴的圆柱形闭合曲面  $S$ , 则磁感应强度沿着该曲面的积分值等于\_\_\_\_\_。

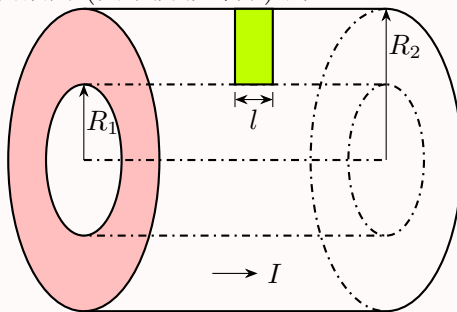


答案

0

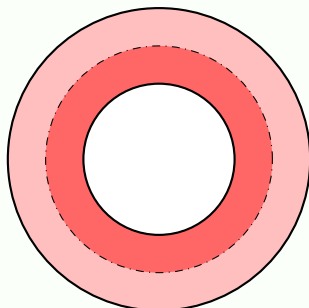
【0203C03】

无限长空心圆柱形导体的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 电流  $I$  沿轴向流动, 如图, 设电流均匀分布在导体的横截面上。求: (1) 导体内部 ( $R_1 < r < R_2$ ) 各点的磁感应强度, 其中  $r$  是任一点到圆柱轴线的距离; (2) 求通过长度为  $l$  的一段截面 (图中阴影部分) 的磁通量。



解答

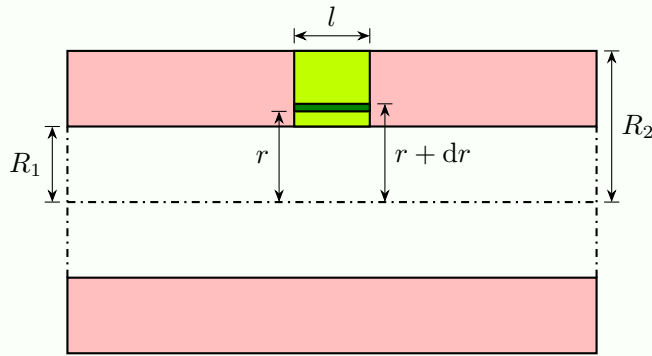
(1)





$$\begin{aligned}
 \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \sum I \\
 \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B \times (2\pi r) \\
 \sum I &= \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2) \\
 B \times (2\pi r) &= \mu_0 \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2) \\
 B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right)
 \end{aligned}$$

(2)



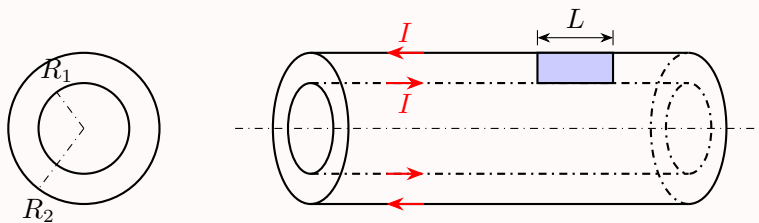
$$\begin{aligned}
 d\Phi_B &= B dS \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) (l dr) \\
 \Phi_B &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) dr \\
 &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left( \frac{1}{2} r^2 - R_1^2 \ln r \right)_{R_1}^{R_2} \\
 &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[ \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 Il}{4\pi} - \frac{\mu_0 Il R_1^2}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \ln \frac{R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 安培环路定理 4 分
2. 计算电流 4 分
3. 求得磁感应强度表达式 2 分
4. 计算磁通量 5 分

## 【0203C04】

一对同轴无穷长直的空心导体圆筒，内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  (筒壁厚度可以忽略)。电流  $I$  沿内筒流去，沿外筒流回 (见图)，(1) 求磁场分布；(2) 通过长度为  $L$  的一段截面 (图中阴影区) 的磁通量  $\Phi_B$ 。



## 解答

(1) 电流分布具有柱对称性，所以磁场分布也具有柱对称性，可以用安培环路定理求磁场。在与导体轴线垂直的平面内，取以轴线为圆心、以  $r$  为半径的圆为安培环路，则由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_0$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

当  $r < R_1$  时， $I_0 = 0$ ，所以  $B_1 = 0$ 。

当  $R_1 < r < R_2$  时， $I_0 = I$ ，所以  $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，方向沿圆周的切线方向且与电流流向成右手螺旋关系。

当  $r > R_2$  时， $I_0 = I - I = 0$ ，所以  $B_3 = 0$ 。

(2) 取垂直纸面向外为图中阴影区域面积的法向方向，取与轴线距离为  $r \rightarrow r + dr$  部分为  $dS$ ，则通过  $dS$  的磁通量

$$d\Phi_B = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot L dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r} dr$$

所以通过阴影部分的磁通量

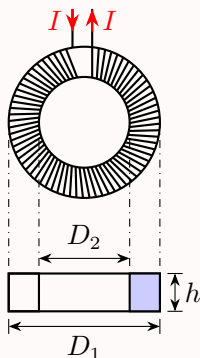
$$\Phi_B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I L}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

## 评分标准

1. 安培环路定理 5 分
2. 三个区域的磁感应强度各 1 分，方向 1 分
3. 面的法向方向 (磁通量的正方向) 1 分
4. 通过  $dS$  的磁通量 4 分
5. 积分 1 分

## 【0203C05】

矩形截面的螺绕环，总匝数为  $N$ ，通过的电流为  $I$ ，尺寸如图，(1) 求环内磁感应强度的分布；(2) 求通过螺绕环截面 (图中阴影区) 的磁通量。



## 解答

(1) 以螺绕环中心为圆心，以  $r$  为半径作一圆取为安培环路，由安培环路定理可求得磁场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

方向沿圆周的切线方向。

(2) 取  $r \rightarrow r + dr$  部分为  $dS$ ，以磁场的方向为其法向方向，则通过  $dS$  的磁通量

$$d\Phi_B = B dS = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot h dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi r} dr$$

所以通过图中阴影区域的磁通量

$$\Phi_B = \int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} \frac{\mu_0 NI h}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

## 评分标准

1. 安培环路定理 6 分
2. 磁感应强度大小 1 分，方向 1 分
3. 面的法向方向 (磁通量的正方向) 1 分
4. 通过  $dS$  的磁通量 5 分
5. 积分 1 分

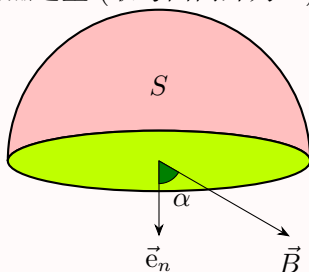
## 3.5 磁场的“高斯定理”

磁场的“高斯定理”

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

【0203A19】

在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中作一半径为  $r$  的半球面  $S$ ,  $S$  边线所在平面的法线方向单位矢量  $\vec{e}_n$  与  $\vec{B}$  的夹角为  $\alpha$ , 则通过半球面  $S$  的磁通量 (取弯面向外为正) 为



- (A)  $\pi r^2 B$       (B)  $2\pi r^2 B$       (C)  $-\pi r^2 B \sin \alpha$       (D)  $-\pi r^2 B \cos \alpha$

答案

D

解析

磁场中的高斯定理

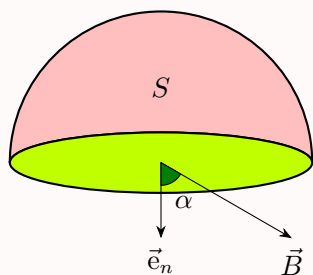
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

因为磁场线一定是封闭曲线, 所以通过任意一个封闭曲面的磁通量一定恒为零。所以, 以半球面和边线所在的平面的圆面【记为  $S'$ 】组成的封闭曲面为高斯面, 运用磁场的高斯定理, 得

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= - \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\vec{B} \cdot \int_{S'} d\vec{S} = -\vec{B} \cdot \vec{S}' = -BS \cos \alpha = -B\pi r^2 \cos \alpha \end{aligned}$$

【0203B17】

在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中作一半径为  $r$  的半球面  $S$ ,  $S$  边线所在平面的法线方向单位矢量  $\vec{e}_n$  与  $\vec{B}$  的夹角为  $\alpha$ , 则通过半球面  $S$  的磁通量为\_\_\_\_\_。取弯面向外为正。

**答案**

$$-\pi r^2 B \cos \alpha$$

## 4、磁场对载流导线的作用

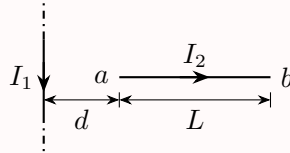
### 4.1 磁场对载流导线的作用力

磁场对电流元的作用力 (安培力)

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

【0204B01】

如图所示, 载流直导线  $ab$  段长  $L$ , 通有电流  $I_2$ ,  $a$  点与长直导线相距为  $d$ , 长直导线中流有电流  $I_1$ , 则  $ab$  段受到的力大小等于\_\_\_\_\_。

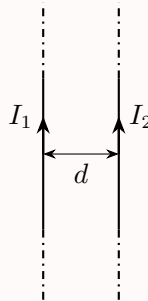


答案

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{L+d}{d}$$

【0204B02】

两根无限长直导线平行放置, 如图所示, 二者分别通有同向的恒定电流  $I_1$  和  $I_2$ , 右侧导线单位长度上所受的力的大小等于\_\_\_\_\_。

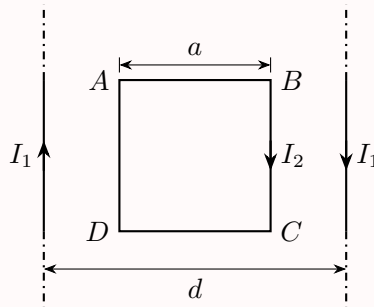


答案

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

【0204C01】

有两根相距为  $d$  的无限长平行直导线, 它们通以大小相等流向相反的电流  $I_1$ , 在两直导线的正中, 另有一边长为  $a = \frac{1}{2}d$  的正方形线圈与两导线处于同一平面内, 并通有电流  $I_2$ , 如图所示。求: (1) 线圈中  $AD$  边所受安培力大小和方向; (2) 线圈中  $AB$  边所受安培力大小和方向; (3) 整个线圈所受合力。



## 解答

(1) 左边  $I_1$  在  $AD$  处的磁场方向垂直纸面向里，大小

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{4}} = \frac{2\mu_0 I_1}{\pi d}$$

右边  $I_1$  在  $AD$  处的磁场方向垂直纸面向里，大小

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{3d}{4}} = \frac{2\mu_0 I_1}{3\pi d}$$

所以  $AD$  处总的磁场方向垂直纸面向里，大小

$$B = B_1 + B_2 = \frac{8\mu_0 I_1}{3\pi d}$$

$AD$  处电流方向向上，所以它所受的力方向向左，大小

$$F_1 = BI_2 a = \frac{4\mu_0 I_1 I_2}{3\pi}$$

(2)  $AB$  上任一位置的磁场方向垂直纸面向里，大小

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

电流方向向右，所以力的方向向上，大小

$$dF = BI_2 dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$

所以  $AB$  整条边所受的力的大小

$$F_2 = \int_{\frac{1}{4}d}^{\frac{3}{4}d} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln 3$$

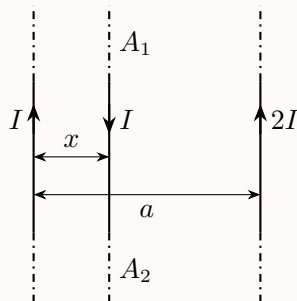
(3) 由于  $BC$  边所在位置的磁场和  $AD$  边的磁场相同，通过  $BC$  的电流与通过  $AD$  的电流方向相反，因此两条边所受力的大小相等，方向相反；而  $AB$  边和  $CD$  边相应位置的磁场相同，电流方向相反，因此所受的力也是大小相等，方向相反。因此整个线圈所受的合力为零。

## 评分标准

1.  $AD$  受力 5 分
2.  $AB$  受力 5 分
3. 整个线圈受力 5 分

## 【0204B03】

如图所示，平行放置在同一平面内的三条载流长直导线，电流依次是  $I$ 、 $I$ 、 $2I$ ，要使导线  $A_1A_2$  所受的安培力等于零，则  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

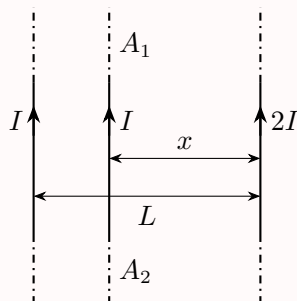


## 答案

$$\frac{a}{3}$$

## 【0204B04】

如图所示，平行放置在同一平面内的三条载流长直导线，电流依次是  $I$ 、 $I$ 、 $2I$ ，要使导线  $A_1A_2$  所受的安培力等于零，则  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



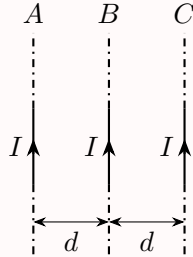
## 答案

$$\frac{2}{3}L$$



## 【0204B05】

如图,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为三根共面的长直导线, 各通有  $10\text{ A}$  的同方向电流, 导线间距  $d = 10\text{ cm}$ , 那么  $A$  导线每厘米所受的力的大小  $\frac{dF_A}{dl} = \underline{\hspace{1cm}}\text{ N/cm}$ 。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N/A}^2$ )

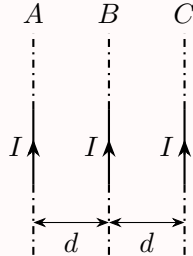


## 答案

$$3 \times 10^{-6}$$

## 【0204B06】

如图,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为三根共面的长直导线, 各通有  $10\text{ A}$  的同方向电流, 导线间距  $d = 10\text{ cm}$ , 那么  $B$  导线每厘米所受的力的大小  $\frac{dF_B}{dl} = \underline{\hspace{1cm}}\text{ N/cm}$ 。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N/A}^2$ )

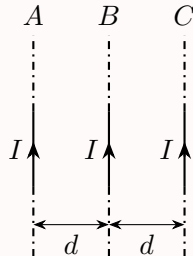


## 答案

$$0$$

## 【0204B07】

如图,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为三根共面的长直导线, 各通有  $10\text{ A}$  的同方向电流, 导线间距  $d = 10\text{ cm}$ , 那么  $C$  导线每厘米所受的力的大小  $\frac{dF_C}{dl} = \underline{\hspace{1cm}}\text{ N/cm}$ 。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N/A}^2$ )



答案

$$3 \times 10^{-6}$$

【0204A01】

在同一平面上依次有  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三根等距离平行放置的长直导线，通有同方向的电流依次为 1 A、2 A、3 A，它们所受力的大小依次为  $F_a$ 、 $F_b$ 、 $F_c$ ，则  $\frac{F_b}{F_c}$  为

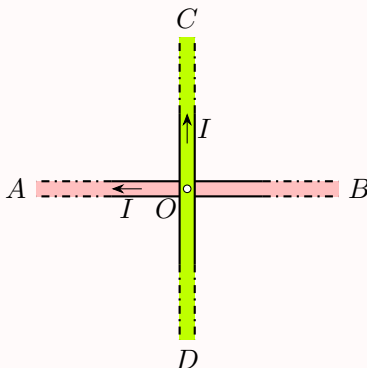
- (A)  $\frac{4}{9}$                       (B)  $\frac{8}{15}$                       (C)  $\frac{8}{9}$                       (D) 1

答案

B

【0204A02】

两根长直导线， $AB$  固定， $CD$  与之绝缘且垂直，如图所示， $CD$  可绕点  $O$  在纸面内转动也可以平动。当两根导线各通有电流  $I$ ，则  $CD$  将



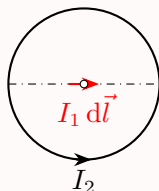
- (A) 顺时针方向转动      (B) 逆时针方向转动      (C) 向上或向下平动      (D) 静止不动

答案

B

【0204B08】

水平方向上的电流元  $I_1 d\vec{l}$  位于半径为  $R$  的圆形导线中心，如图所示。若圆形导线通有电流  $I_2$ ，则此电流元受到的安培力大小等于\_\_\_\_\_。



答案

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2R}$$

【0204B09】

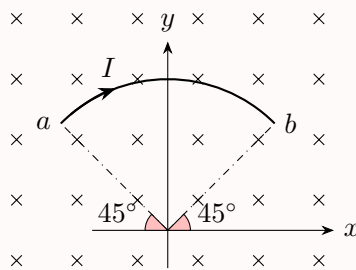
一根载流  $I$  的导线被弯成半径为  $R$  的  $\frac{1}{4}$  圆弧, 将此导线放在磁感应强度大小为  $B$  的均匀磁场中, 且磁场方向垂直于线圈和圆心组成的平面, 圆弧所受磁场的作用力的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\sqrt{2}BIR$$

【0204B10】

如图所示, 一根载流导线  $ab$  被弯成半径为  $R$  的  $\frac{1}{4}$  圆弧, 放在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中, 则该导线所受磁场作用力的方向为\_\_\_\_\_。

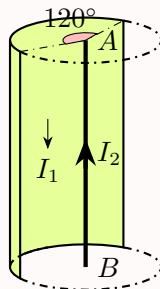


答案

沿  $y$  轴正方向

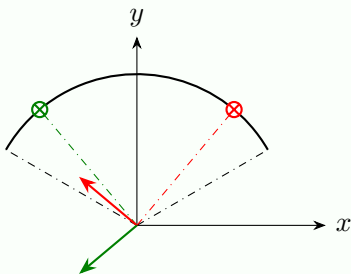
【0204C02】

将一无限长导体平面弯曲, 使其成为半径为  $R$  的无限长圆柱侧面的一部分, 所张圆心角为  $120^\circ$ , 如图所示。现沿着与轴线平行的方向通有向下流动的恒定电流  $I_1$ , (1) 求轴线  $AB$  上各点的磁感应强度的大小; (2) 若无限长直导线沿着轴线  $AB$  放置, 并通有向上的电流  $I_2$ , 求这根长直导线单位长度所受安培力大小。



## 解答

(1) 如图建立坐标系, 并取两个对称的电流  $dI$ ,



则它们在轴线  $AB$  上产生的磁场方向沿  $-\vec{e}_x$ , 大小

$$dB = 2 \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \sin \theta = \frac{\mu_0 \frac{I_1}{\frac{2}{3}\pi R} R \sin \theta d\theta}{\pi R} = \frac{3\mu_0 I_1 \sin \theta d\theta}{2\pi^2 R}$$

所以  $AB$  上总的磁场大小

$$B = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{3\mu_0 I_1 \sin \theta d\theta}{2\pi^2 R} = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I_1}{4\pi^2 R}$$

(2)  $AB$  上磁场的方向与电流的方向垂直, 所以单位长度所受安培力大小

$$\frac{dF}{dl} = BI_2 = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I_1 I_2}{4\pi^2 R}$$

## 评分标准

1.  $dI$  的磁场 6 分
2. 总磁场 4 分
3. 安培力 5 分

## 4.2 磁场对平面载流线圈的力矩

平面载流线圈的磁矩

$$\vec{m} = IS \vec{e}_n$$

磁场对平面载流线圈的力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

## 【0204A03】

在匀强磁场中, 有两个平面线圈, 其面积  $S_1 = 2S_2$ , 通有电流  $I_1 = 2I_2$ , 它们的磁矩大小之比  $\frac{m_1}{m_2}$  等于

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 4                      (D)  $\frac{1}{4}$

答案

C

【0204B11】

半径为  $R$  的单匝平面圆线圈，通以电流  $I$ 。若将该导线弯成匝数  $N = 3$  的平面圆形线圈，导线长度不变，并通以同样的电流，则线圈磁矩的是原来的\_\_\_\_\_倍。

答案

 $\frac{1}{3}$ 

【0204A04】

一个任意形状的载流线圈在均匀磁场中，若线圈的平面法线与磁场间的夹角为  $\theta$  ( $\theta$  不为零)，则线圈受到磁场的合力和合力矩为

- (A) 合力与合力矩都为零 (B) 合力为零，合力矩不为零  
(C) 合力不为零，合力矩为零 (D) 不能确定

答案

B

【0204A05】

在匀强磁场中，有两个平面线圈，其面积  $S_1 = 2S_2$ ，通有电流  $I_1 = 2I_2$ ，它们所受的最大磁力矩之比  $\frac{M_1}{M_2}$  等于

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D)  $\frac{1}{4}$

答案

C

解析

磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

所以

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{m_1 B}{m_2 B} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{I_1 S_1}{I_2 S_2} = 4$$

### 【0204B12】

在磁场中某点放一很小的试验线圈。若线圈的面积增大一倍，且其中电流也增大一倍，该线圈所受的最大磁力矩将是原来的\_\_\_\_\_倍。

### 答案

4

### 解析

分子电流磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n$$

它在磁场中受到的磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

所以，若线圈的面积增大一倍，且其中电流也增大一倍，则磁矩增加为四倍，最大磁力矩将是原来的四倍。

### 【0204B13】

通有电流  $I$ 、边长为  $a$  的正方形线圈，处在均匀磁场  $\vec{B}$  中，线圈平面的法线与磁感应线成  $\theta$  角。线圈所受磁力矩的大小是\_\_\_\_\_。

### 答案

$$BIa^2 \sin \theta$$

### 【0204A06】

边长为  $a$  的正三角形线圈通电流为  $I$ ，放在均匀磁场  $\vec{B}$  中，线圈平面与磁场平行，它所受磁力矩等于

- (A)  $\frac{BIa^2}{2}$                       (B)  $\frac{\sqrt{3}BIa^2}{4}$                       (C)  $BIa^2$                       (D) 0

答案

B

【0204B14】

已知面积相等的载流圆线圈与载流正方形线圈的磁矩之比为  $2:1$ ，圆线圈在其中心处产生的磁感强度为  $B_0$ ，那么正方形线圈 (边长为  $a$ ) 在磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀外磁场中所受最大磁力矩为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{B_0 B a^3}{\mu_0 \sqrt{\pi}}$$

解析

圆线圈在其中心处的磁感应强度

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot (2\pi R) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

依题意，有

$$S = \pi R^2 = a^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

所以其磁矩

$$m_0 = IS = \frac{2B_0 R}{\mu_0} a^2 = \frac{2B_0 a^3}{\mu_0 \sqrt{\pi}}$$

所以正方形线圈的磁矩为

$$m = \frac{1}{2} m_0 = \frac{B_0 a^3}{\mu_0 \sqrt{\pi}}$$

它在磁场中受到的最大磁力矩为

$$M = mB = \frac{B_0 B a^3}{\mu_0 \sqrt{\pi}}$$

【0204B15】

一平面试验线圈的磁矩大小  $m = 1 \times 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ，把它放入待测磁场中的  $A$  处，试验线圈如此之小，以致可以认为它所占据的空间内场是均匀的。当此线圈的  $\vec{m} = m \vec{e}_z$  时，所受磁力矩为  $\vec{M} = 5 \times 10^{-9} (-\vec{e}_x) \text{ N} \cdot \text{m}$ ；当此线圈的  $\vec{m} = m \vec{e}_y$  时，所受磁力矩为  $\vec{M} = 0$ 。则空间  $A$  点处的磁感强度的大小为\_\_\_\_\_T。

答案

0.5

## 解析

磁矩  $\vec{m}$  在磁场  $\vec{B}$  中的磁力矩为

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

依题意【当此线圈的  $\vec{m} = m\vec{e}_y$  时, 所受磁力矩为  $\vec{M} = 0$ 】, 磁场的方向与  $y$  轴平行, 假设为  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ 。  
又由题意【当此线圈的  $\vec{m} = m\vec{e}_z$  时, 所受磁力矩为  $\vec{M} = 5 \times 10^{-9}(-\vec{e}_x) \text{ N} \cdot \text{m}$ 】可得

$$M = mB$$

$$B = \frac{M}{m} = \frac{5 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-8}} = 0.5 \text{ T}$$

## 【0204B16】

在磁感强度  $B = 0.02 \text{ T}$  的匀强磁场中, 有一半径为  $10 \text{ cm}$  圆线圈, 线圈磁矩与磁感线同向平行, 回路中通有  $I = 1 \text{ A}$  的电流。若圆线圈绕某个直径旋转  $180^\circ$ , 使其磁矩与磁感线反向平行, 且线圈转动过程中电流  $I$  保持不变, 则外力的功  $W = \underline{\hspace{1cm}} \text{ J}$ 。

## 答案

$$1.256 \times 10^{-3}$$

## 解析

磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n = I\pi R^2\vec{e}_n$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

磁力矩的功

$$dW = -M d\theta = -I\pi R^2 B \sin \theta d\theta$$

这里  $\theta$  表示  $\vec{m}$  与  $\vec{B}$  的夹角。当  $\theta$  增大时,  $d\theta > 0$ , 磁力矩的方向与磁矩转动的方向相反, 所以上式有个负号。

所以在转动过程中, 磁力矩总的功

$$W = \int_0^\pi -I\pi R^2 B \sin \theta d\theta = I\pi R^2 B (\cos \theta)_0^\pi = -2I\pi R^2 B$$

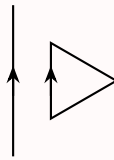
所以外力的功

$$A = -W = 2I\pi R^2 B = 2 \times 1 \times \pi \times 0.1^2 \times 0.02 = 1.256 \times 10^{-3} \text{ J}$$



## 【0204A07】

如图，无限长直载流导线与正三角形载流线圈在同一平面内，若长直导线固定不动，则载流三角形线圈将



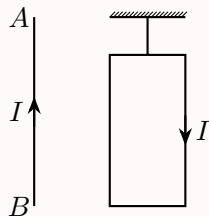
- (A) 向着长直导线平移 (B) 离开长直导线平移 (C) 转动 (D) 不动

## 答案

A

## 【0204A08】

把轻的正方形线圈用细线挂在载流直导线  $AB$  的附近，两者在同一平面内，直导线  $AB$  固定，线圈可以活动。当正方形线圈通以如图所示的电流时，线圈将



- (A) 发生转动，同时靠近导线  $AB$  (B) 发生转动，同时离开导线  $AB$   
(C) 靠近导线  $AB$  (D) 离开导线  $AB$

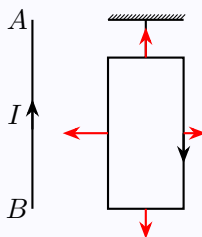
## 答案

C

## 解析

电流元在磁场中所受到的安培力为

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

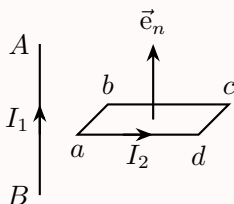


在图示位置， $I$  在线圈所在位置产生的磁场的方向垂直纸面向里，靠近电流的位置磁场较强，远离电流

的位置磁场较弱。所以可以得到，线圈四条边所受到的力如图所示，四个力的方向都在纸面上，所以不会绕垂直纸面的轴线转动，但会绕悬挂点转动。而四个力当中，上下两条边，对应电流元所受到的力刚好大小相等方向相反，所以上下两边的合力为零【只在图示瞬间】，而左右两条边，由于左边的磁场较强，所以力较大，因此整个线圈所到向左的力，线圈将绕悬挂点靠近直线。

## 【0204A09】

在无限长直导线  $AB$  的一侧，放着一可以自由运动的矩形导线框，导线框的法向  $\vec{e}_n$  和  $AB$  平行，而且  $a$ 、 $b$  两点到导线  $AB$  的距离相等，如图所示。若同时给直导线和导线框通上图中所示电流，则导线框将开始



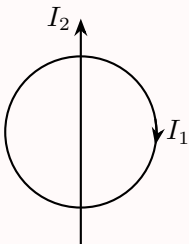
- (A) 以  $ab$  和  $cd$  中点的连线为轴转动， $bc$  边向上， $ad$  边向下
- (B) 以  $ab$  和  $cd$  中点的连线为轴转动， $ad$  边向上， $bc$  边向下
- (C) 向  $AB$  靠近，平动
- (D) 离开  $AB$ ，平动

## 答案

B

## 【0204A10】

长直电流  $I_2$  与圆形电流  $I_1$  共面，并与其直径相重合（但二者绝缘），如图所示。设长直导线不动，则圆形电流将



- (A) 向右运动
- (B) 向左运动
- (C) 绕  $I_2$  旋转
- (D) 不动

## 答案

A

## 5、带电粒子在磁场中的运动

### 5.1 洛伦兹力

磁场对运动电荷的作用力 (洛伦兹力)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

#### 【0205A01】

一个质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的点电荷，以一定的速度  $\vec{v}$  进入均匀磁场  $\vec{B}$  中，如果  $\vec{v} \perp \vec{B}$ ，则

- (A) 其动能改变，动量不变 (B) 其动能和动量都改变  
(C) 其动能不变，动量改变 (D) 其动能和动量都不变

#### 答案

C

#### 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

运动电荷在均匀磁场中将受到洛伦兹力的作用，洛伦兹力的方向一定是垂直于运动方向，所以电荷的运动速度的大小保持不变，方向发生变化，因此电子的动能保持不变，动量发生变化。

当然，如果电荷的运动速度的方向与磁场的方向平行，那么电荷所受到的力为零，动能和动量都不发生变化，电荷做匀速直线运动穿过磁场。

#### 【0205A02】

一个质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的点电荷，以一定的速度  $\vec{v}$  进入均匀磁场  $\vec{B}$  中，如果  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ，则

- (A) 其动能改变，动量不变 (B) 其动能和动量都改变  
(C) 其动能不变，动量改变 (D) 其动能和动量都不变

#### 答案

D

#### 【0205A03】

一带电量为  $q$  的粒子在均匀磁场中运动，下列哪种说法是正确的？

- (A) 只要速度大小相同, 粒子所受的洛伦兹力就相同  
 (B) 在速度不变的前提下, 若电荷  $q$  变为  $-q$ , 则粒子受力反向, 大小不变  
 (C) 粒子进入磁场后, 其动能和动量都不变  
 (D) 洛伦兹力与速度方向垂直, 所以带电粒子运动的轨迹必定是圆

答案

B

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

力是一个矢量, 速度大小相同, 但方向不同时, 洛伦兹力的大小和方向都会发生变化。洛伦兹力一定垂直于速度, 因此产生的加速度一定是垂直于速度方向, 所以速度的大小不会发生变化, 但速度的方向一直在改变, 因此粒子的动能不会变化, 但动量一直在变化。如果粒子的初始速度是垂直磁场的, 那么粒子的运动轨迹是一个圆, 但如果初始速度的方向并不是垂直磁场, 那么粒子的运动轨迹是一个螺旋线, 在垂直磁场方向是圆周运动, 沿磁场方向是匀速直线运动。在速度不变的前提下, 如果带电量变为负号, 那么洛伦兹力的大小不变, 方向相反。

【0205B01】

真空中同时存在着竖直向上的匀强电场和垂直纸面向里的匀强磁场, 三个质量不同但均带有电荷  $+q$  的油滴  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在场中由静止释放后将做不同的运动, 其中  $a$  静止,  $b$  向右偏转,  $c$  向左偏转, 则三油滴中质量最大的是\_\_\_\_\_。

答案

$b$

【0205B02】

真空中同时存在着竖直向上的匀强电场和垂直纸面向里的匀强磁场, 三个质量不同但均带有电荷  $+q$  的油滴  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在场中由静止释放后将做不同的运动, 其中  $a$  静止,  $b$  向右偏转,  $c$  向左偏转, 则三油滴中质量最小的是\_\_\_\_\_。本题中油滴所受重力不可忽略。

答案

$c$

## 【0205B03】

在非均匀磁场中，有一带电量为  $q$  的运动电荷。当电荷运动至某点时，其速率为  $v$ ，运动方向与磁场方向间的夹角为  $\alpha$ ，此时测出它所受的磁力大小为  $f_m$ ，则该运动电荷所在处的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{f_m}{qv \sin \alpha}$$

## 解析

运动电荷在磁场中所受到的洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

所以其大小为

$$F_m = qvB \sin \alpha$$

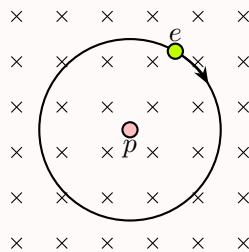
所以有

$$B = \frac{F_m}{qv \sin \alpha} = \frac{f_m}{qv \sin \alpha}$$

根据矢量叉乘的运算法则， $\vec{F}_m$  的方向就是  $\vec{v} \times \vec{B}$  的方向，因此一定是与  $\vec{v}$  和  $\vec{B}$  所在的平面垂直。

## 【0205A04】

按玻尔的氢原子理论，电子在以质子为中心、半径为  $r$  的圆形轨道上运动。如果把这样一个原子放在均匀的外磁场中，使电子轨道平面与  $\vec{B}$  垂直，如图所示，则在  $r$  不变的情况下，电子轨道运动的角速度将



- (A) 增加                      (B) 减小                      (C) 不变                      (D) 改变方向

## 答案

A

## 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

库仑力

$$\vec{F}_e = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

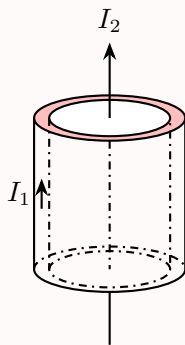
对电子进行受力分析，原来只受到质子的吸引力，提供电子做圆周运动的向心力。放入磁场后，电子还受到洛伦兹力，因为电子带负电，所以洛伦兹力的方向指向圆心，与质子的库仑力同方向，因此合力增大，在轨道半径不变的情况下，

$$F = m\omega^2 r$$

圆周运动的角速度将增大。

## 【0205C01】

无限长空心圆柱形导体的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，导体内载有电流  $I_1$ ，设电流均匀分布在导体的横截面上。(1) 有一带正电的点电荷  $q$  以初速  $v_0$  沿轴向进入导体空心，若不计重力，则该点电荷以后将如何运动？请分析。(2) 若将一根无限长直导线置于导体的轴线上，如图所示，并让直导线通有与  $I_1$  同向的电流  $I_2$ ，求空间中各点的磁感应强度的大小。



## 解答

(1) 均匀载流的空心圆柱形导体，电流分布具有柱对称性，磁场分布也具有柱对称性，可以用安培环路定理求磁场分布，可得空心部分 ( $r < R_1$ ) 的磁场为零。因此点电荷以一定的速度进入空心部分，若不计重力，点电荷不受力，将做匀速直线运动。

(2)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$r < R_1$$

$$B_1(2\pi r) = \mu_0 I_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$B_2(2\pi r) = \mu_0 \left[ I_2 + \frac{I_1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \pi(r^2 - R_1^2) \right]$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left[ I_2 + \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} I_1 \right]$$

$$r > R_2$$

$$B_3(2\pi r) = \mu_0(I_1 + I_2)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0(I_1 + I_2)}{2\pi r}$$

## 5.2 运动电荷的磁场

运动的电荷在周围空间中所激发的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

### 【0205B04】

若把氢原子的基态电子轨道看作是圆轨道，已知电子轨道半径为  $R$ ，绕核运动速度大小为  $v$ ，则氢原子基态电子在原子核处产生的磁感应强度的大小为\_\_\_\_\_。

### 答案

$$\frac{\mu_0 e v}{4\pi R^2}$$

### 解析

运动电荷的磁场公式

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

圆周运动， $\vec{v} \perp \vec{r}$ ，所以其大小为

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} = \frac{10^{-7} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 2.18 \times 10^6}{(0.53 \times 10^{-10})^2} \approx 12.4 \text{ T}$$

### 【0205B05】

一质点带有电荷  $q = 8 \times 10^{-10} \text{ C}$ ，以速度  $v = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$  在半径为  $R = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$  的圆周上作匀速圆周运动。该带电质点在轨道中心所产生的磁感应强度大小为\_\_\_\_\_T。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )

## 答案

$$\frac{2}{3} \times 10^{-6}$$

## 解析

运动电荷的磁场公式

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$  为从电荷所在位置指向所求位置的矢量。做圆周运动时,  $\vec{v}$  一定垂直  $\vec{r}$ , 所以所求磁场的方向一定是垂直于运动平面, 大小为

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} = \frac{10^{-7} \times 8 \times 10^{-10} \times 3 \times 10^5}{(6 \times 10^{-3})^2} = \frac{2}{3} \times 10^{-6} \text{ T}$$

## 【0205B06】

一质点带有电荷  $q$ , 以速率  $v$  在半径为  $R$  的圆周上作匀速圆周运动。该带电质点轨道运动的磁矩大小为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{2} q v R$$

## 解析

磁矩

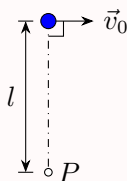
$$\vec{m} = I S \vec{e}_n$$

所以磁矩的大小为

$$m = I S = I \pi R^2 = \frac{q}{T} \pi R^2 = \frac{q}{2\pi R/v} \pi R^2 = \frac{1}{2} q v R$$

## 【0205B07】

如图所示, 一电子以速率  $v_0 = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$  在纸平面内水平向右运动, 则与电子相距为  $l = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$  的  $P$  点处磁感应强度大小为\_\_\_\_\_T。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )





## 答案

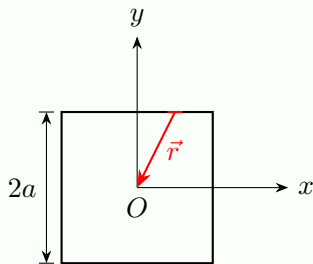
0.32

## 【0205C02】

一线电荷密度为  $\lambda$  的带电正方形闭合线框绕过其中心并垂直于其平面的轴以角速度  $\omega$  旋转，试求正方形中心处的磁感应强度的大小。【积分公式  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ 】

## 解答

如图，建立直角坐标系。



设正方形边长为  $2a$ ，由于四条边的等效性，总的磁场为一条边磁场的四倍，所以只需要计算一条边的磁场即可。下面以  $y = a$  的边进行计算。取  $x \rightarrow x + dx$  为元电荷，则其带电量为  $dq = \lambda dx$ ，它到线框中心的距离为  $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ ，它的运动速率为  $v = \omega r$ 。则该运动元电荷的元磁场为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

由于做定轴转动，所以必有  $\vec{v} \perp \vec{r}$ ，所以元磁场的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega \lambda dx}{r} = \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

方向垂直纸面，如果是顺时针转动，则磁场方向垂直纸面向里；如果是逆时针转动，则磁场方向垂直纸面向外。所以总的磁场可以由上式直接积分得到

$$B_1 = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

由积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

得

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right]_{-a}^a = \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \left[ \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + a^2}}{-a + \sqrt{(-a)^2 + a^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right] = \frac{\mu_0 \omega \lambda}{4\pi} \left[ \ln(\sqrt{2} + 1)^2 \right] = \frac{\mu_0 \omega \lambda}{2\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

所以整个线框在中心处产生的总的磁场为

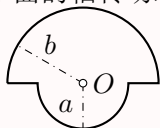
$$B = 4B_1 = \frac{2\mu_0 \omega \lambda}{\pi} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

## 评分标准

1. 运动电荷的磁场公式 6 分
2. 单边磁场的计算 6 分
3. 总磁场 3 分

## 【0205C03】

有一闭合回路由半径为  $a$  和  $b$  的两个同心共面半圆连接而成, 如图。其上均匀分布线密度为  $\lambda$  的电荷, 当回路以匀角速度  $\omega$  绕过  $O$  点垂直于回路平面的轴转动时, 求圆心  $O$  点处的磁感应强度的大小。



## 解答

运动元电荷的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

假设回路做顺时针转动, 则  $v = \omega r$ , 每个运动元电荷在  $O$  处产生的磁场的方向都是垂直纸面向里, 所以直接对大小进行积分。第一个计算大半圆的磁场

$$B_1 = \int_{L_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\lambda dl)(\omega b)b}{b^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda\omega(\pi b)}{b} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

再计算小半圆的磁场

$$B_2 = \int_{L_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\lambda dl)(\omega a)a}{a^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda\omega(\pi a)}{a} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

两个直线段部分的磁场相同, 计算一个后直接乘 2 即可

$$B_3 = B_4 = \int_a^b \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\lambda dr)(\omega r)r}{r^3} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

所以总的磁场的大小为

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4} + \frac{\mu_0\lambda\omega}{4} + \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \times 2 = \frac{\mu_0\lambda\omega}{2} + \frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi} \left( \pi + \ln \frac{b}{a} \right)$$

本题也可以使用圆电流的磁场来计算。圆电流在中心的磁场大小

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot (2\pi R)}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

大半圆的等效电流、半径、激发的磁场分别为

$$I_1 = \frac{q_1}{T} = \frac{q_1}{2\pi/\omega} = \frac{\lambda\pi b}{2\pi/\omega} = \frac{\lambda\omega b}{2}, R_1 = b, B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} = \frac{\mu_0}{2b} \frac{\lambda\omega b}{2} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

小半圆的等效电流、半径、激发的磁场分别为

$$I_2 = \frac{q_2}{T} = \frac{q_2}{2\pi/\omega} = \frac{\lambda\pi a}{2\pi/\omega} = \frac{\lambda\omega a}{2}, R_2 = a, B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} = \frac{\mu_0}{2a} \frac{\lambda\omega a}{2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4}$$

直线段上任意一个元电荷的等效电流、半径、激发的元磁场分别为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\lambda dr}{2\pi/\omega} = \frac{\lambda\omega dr}{2\pi}, R = r, dB = \frac{\mu_0 dI}{2R} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{\lambda\omega dr}{2\pi} = \frac{\mu_0 \lambda \omega dr}{4\pi r}$$

### 【0205A05】

设半径为  $R$  的带电薄圆盘的电荷面密度为  $\sigma$ ，以角速率  $\omega$  绕通过盘心垂直盘面的轴转动，则圆盘中心处的磁感应强度大小为

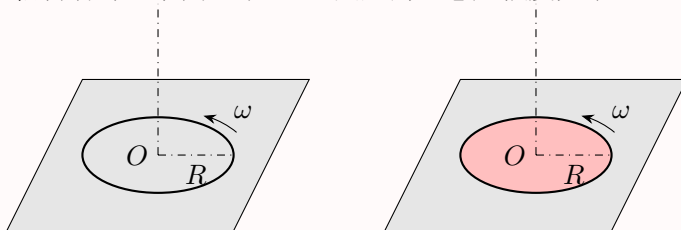
- (A)  $\frac{1}{3}\mu_0\sigma\omega R$  (B)  $\mu_0\sigma\omega R$  (C)  $\frac{1}{4}\mu_0\sigma\omega R$  (D)  $\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R$

### 答案

D

### 【0205C04】

(1) 半径为  $R$  的细圆环带电量  $Q$ ，放在绝缘的一水平面上，当它以角速度  $\omega$  绕竖直中心轴转动时，求圆环中心  $O$  点处的磁感应强度大小；(2) 若将此圆环换成一半径为  $R$  的薄圆盘，电荷面密度为  $\sigma$ ，它以角速度  $\omega$  绕竖直中心轴转动时，求圆盘中心  $O$  点处的磁感应强度大小。



### 解答

均匀带电细圆环单位长度带电量

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

取  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分为电荷元，带电量

$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{2\pi R} R d\theta = \frac{Q}{2\pi} d\theta$$

其速度大小

$$v = \omega R$$

它在圆环中心处的磁感应强度大小

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)v}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{Q}{2\pi} d\theta \cdot \omega R}{R^2} = \frac{\mu_0 Q \omega}{8\pi^2 R} d\theta$$

所以整个圆环所产生的总的磁感应强度

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 Q \omega}{8\pi^2 R} d\theta = \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi R}$$

均匀带电圆盘的电荷面密度为  $\sigma$ ，取  $r \rightarrow r + dr$  部分视为均匀带电圆环，其半径为  $r$ ，带电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr)$$

利用上面的结论可得这部分圆环在圆环中心的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0 (dq) \omega}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma (2\pi r dr) \omega}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$$

所以整个圆盘在圆盘中心的磁感应强度

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R$$

#### 评分标准

##### 1. 带电圆环的磁场 9 分

- (a) 电荷元带电量 2 分，速度大小 2 分
- (b) 运动电荷的磁场 4 分
- (c) 积分 1 分

##### 2. 带电圆盘的磁场 6 分

- (a) 圆环带电量得 2 分，半径得 1 分
- (b) 圆环磁场得 2 分
- (c) 积分 1 分

#### 【0205B08】

电荷面密度  $\sigma$ 、半径为  $R$  的带电圆盘以角速度  $\omega$  绕过圆心  $O$  点、垂直于圆盘平面的轴线转动时，它在盘心处产生的磁感应强度大小为\_\_\_\_\_。

#### 答案

$$\frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R$$

解析

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\sigma \times 2\pi r dr)(\omega r)}{r^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R$$

【0205B09】

电荷面密度  $\sigma$ 、半径为  $R$  的带电圆盘以角速度  $\omega$  绕过圆心  $O$  点、垂直于圆盘平面的轴线转动时，圆盘磁矩的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{4} \sigma \omega \pi R^4$$

解析

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma \times 2\pi r dr}{2\pi/\omega} = \sigma \omega r dr$$

$$dm = (dI)S = (\sigma \omega r dr) \times (\pi r^2) = \sigma \omega \pi r^3 dr$$

$$m = \int_0^R \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{1}{4} \sigma \omega \pi R^4$$

【0205B10】

电荷面密度  $\sigma$ 、半径为  $R$  的带电圆盘以角速度  $\omega$  绕过圆心  $O$  点、垂直于圆盘平面的轴线转动，旋转圆盘置放在一均匀外磁场  $\vec{B}$  中，圆盘的法线方向与  $\vec{B}$  的夹角为  $\theta$ ，则圆盘所受外磁场的磁力矩的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{4} B \sigma \omega \pi R^4 \sin \theta$$

解析

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma \times 2\pi r dr}{2\pi/\omega} = \sigma \omega r dr$$

$$dm = (dI)S = (\sigma \omega r dr) \times (\pi r^2) = \sigma \omega \pi r^3 dr$$

$$m = \int_0^R \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{1}{4} \sigma \omega \pi R^4$$

$$M = mB \sin \theta = \frac{1}{4} B \sigma \omega \pi R^4 \sin \theta$$

## 【0205A06】

一个半径为  $R$  的均匀带电细圆环放在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中,  $\vec{B}$  的方向与圆环面垂直, 细圆环的线电荷密度为  $\lambda$ , 若该环以角速度  $\omega$  绕通过圆心且垂直圆面的轴转动, 则作用在圆环上的磁力矩为

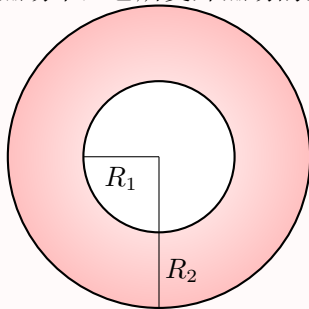
- (A)  $\frac{1}{4} B \lambda \omega \pi R^4$       (B)  $\frac{1}{3} B \lambda \omega \pi R^3$       (C)  $B \lambda \omega \pi R^3$       (D) 0

## 答案

D

## 【0205C05】

内外半径分别为  $R_1, R_2$ , 面电荷密度为  $\sigma = kr$  的均匀带电非导体平面圆环 (其中  $k$  为常数,  $r$  为圆环上的点到圆心的距离), 绕通过圆心、垂直于圆环平面的轴线以匀角速度  $\omega$  旋转时 (如图), 求: (1) 圆环中心的磁感应强度大小; (2) 旋转的带电圆环的磁矩; (3) 若将这旋转的带电环置放在磁感应强度方向与圆环平面平行、大小为  $B$  的均匀磁场中, 它所受外磁场的磁力矩的大小等于多少?



## 解答

(1) 先看  $r \rightarrow r + dr$  部分产生的磁场

$$dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\sigma dr r d\theta)(\omega r)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega k r dr \times 2\pi = \frac{1}{2} \mu_0 k \omega r dr$$

所以整个圆环总的磁场

$$B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \mu_0 k \omega r dr = \frac{1}{4} \mu_0 k \omega (R_2^2 - R_1^2)$$

(2) 先看  $r \rightarrow r + dr$  部分产生的磁矩

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{kr(2\pi r dr)}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega k r^2 dr$$

$$dm = (dI)S = \omega k r^2 dr (\pi r^2) = \omega \pi k r^4 dr$$

所以整个圆环总的磁矩

$$m = \int_{R_1}^{R_2} \omega \pi k r^4 dr = \frac{1}{5} \omega \pi k (R_2^5 - R_1^5)$$

方向垂直圆环平面。

(3)  $\vec{m} \perp \vec{B}$ , 所以

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$M = mB = \frac{1}{5} \omega \pi B k (R_2^5 - R_1^5)$$

### 【0205C06】

半径为  $R$  的薄圆盘均匀带电, 总电荷为  $q$ 。令此盘绕通过盘心且垂直盘面的轴线匀速转动, 角速度为  $\omega$ , 求轴线上距盘心  $x$  处的磁感应强度的大小。【积分公式  $\int \frac{x^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{x^2 + 2a^2}{(a^2 + x^2)^{1/2}} + C$ 】

### 解答

以圆盘中心为坐标原点, 转轴为  $x$ , 盘面所在平面为  $yz$  平面, 建立直角坐标系。假定  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_x$ , 待求场点坐标为  $(x, 0, 0)$ , 在盘面上  $r \rightarrow r + dr$ 、 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  处的元电荷带电量为

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} (dr)(r d\theta)$$

它到场点的矢量为

$$\vec{r} = (x, 0, 0) - (0, r \cos \theta, r \sin \theta) = x \vec{e}_x - r \cos \theta \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z$$

它的速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (0, r \cos \theta, r \sin \theta) = -\omega r \sin \theta \vec{e}_y + \omega r \cos \theta \vec{e}_z = \omega r (-\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z)$$

所以该元电荷在场点的元磁场为

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{q}{\pi R^2} (dr)(r d\theta) [\omega r (-\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z)] \times (x \vec{e}_x - r \cos \theta \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z)}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi^2 R^2} \frac{[\vec{e}_x (r \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta) + \vec{e}_y (x \cos \theta) + \vec{e}_z (x \sin \theta)]}{(x^2 + r^2)^{3/2}} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi^2 R^2} \frac{[\vec{e}_x (r) + \vec{e}_y (x \cos \theta) + \vec{e}_z (x \sin \theta)]}{(x^2 + r^2)^{3/2}} r^2 dr d\theta \end{aligned}$$

对  $\theta$  从 0 到  $2\pi$  进行积分, 则得圆盘上  $r \rightarrow r + dr$  一个小圆环的电荷转动时在场点产生的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi^2 R^2} \frac{\vec{e}_x (r)}{(x^2 + r^2)^{3/2}} r^2 dr \times 2\pi = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} \frac{r^3 dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

对  $r$  从 0 到  $R$  进行积分, 则得整个圆盘在场点产生的磁场, 这里利用题目所给积分公式

$$\int \frac{x^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{x^2 + 2a^2}{(a^2 + x^2)^{1/2}} + C$$

所以所求磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_x = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} \left[ \frac{r^2 + 2x^2}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R \vec{e}_x = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} \left[ \frac{R^2 + 2x^2}{(x^2 + R^2)^{1/2}} - 2x \right] \vec{e}_x$$

以上用运动电荷的磁场计算得到了结果, 下面用圆电流磁场的方法重新计算一遍。

$r \rightarrow r + dr$  处的带电圆环转动起来时的等效圆电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\frac{q}{\pi R^2} \times 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega r dr}{\pi R^2}$$

在这个圆电流上取  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  段电流元, 则

$$d\vec{l} = r d\theta \vec{e}_\theta = r d\theta (-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)$$

它到场点的矢量为

$$\vec{r} = (x, 0, 0) - (0, r \cos\theta, r \sin\theta) = x \vec{e}_x - r \cos\theta \vec{e}_y - r \sin\theta \vec{e}_z$$

所以该电流元在场点的元磁场为

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dI) d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\omega r dr}{\pi R^2} \frac{[r d\theta (-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)] \times [x \vec{e}_x - r \cos\theta \vec{e}_y - r \sin\theta \vec{e}_z]}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi^2 R^2} \frac{[(-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)] \times [x \vec{e}_x - r \cos\theta \vec{e}_y - r \sin\theta \vec{e}_z]}{(x^2 + r^2)^{3/2}} r^2 dr d\theta \end{aligned}$$

剩下的计算和前面相同, 对角度积分, 得到一个圆电流在场点的磁场, 对半径积分, 得到整个圆盘在场点的磁场。

### 评分标准

1.  $d\vec{B}$  表达式 10 分
2. 积分 5 分

## 5.3 运动电荷在均匀磁场中的回旋运动

运动电荷在均匀磁场中的回旋运动

$$\begin{aligned} F &= qvB \sin\theta = qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R} \\ R &= \frac{mv_\perp}{qB} \end{aligned}$$



$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

## 【0205A07】

$A$ 、 $B$  两个电子都垂直于磁场方向射入一均匀磁场而作圆周运动， $A$  电子的速率是  $B$  电子速率的两倍。两个电子的轨道半径分别记为  $R_A$  和  $R_B$ ，周期分别记为  $T_A$  和  $T_B$ ，则

- (A)  $R_A : R_B = 2$ ,  $T_A : T_B = 2$  (B)  $R_A : R_B = \frac{1}{2}$ ,  $T_A : T_B = 1$   
 (C)  $R_A : R_B = 1$ ,  $T_A : T_B = \frac{1}{2}$  (D)  $R_A : R_B = 2$ ,  $T_A : T_B = 1$

## 答案

D

## 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

依题意， $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$ ，所以洛伦兹力的大小为  $F = qvB$ ，它提供给电子做圆周运动的向心力，所以

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

所以

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{mv_A}{qB}}{\frac{mv_B}{qB}} = \frac{v_A}{v_B} = 2 : 1$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2\pi m}{qB}}{\frac{2\pi m}{qB}} = 1$$

## 【0205A08】

$\alpha$  粒子与质子以同一速率垂直于磁场方向入射到均匀磁场中，它们各自作圆周运动的半径比  $\frac{R_{\alpha}}{R_p}$  和周期比  $\frac{T_{\alpha}}{T_p}$  分别为

- (A) 1 和 2 (B) 1 和 1 (C) 2 和 2 (D) 2 和 1

## 答案

C

## 解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\alpha$  粒子即为氦原子核，由两个质子和两个中子所构成，质量约为质子的四倍，带电量为质子的两倍。依题意， $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$ ，所以洛伦兹力的大小为  $F = qvB$ ，它提供给粒子做圆周运动的向心力，所以

$$\begin{aligned} qvB &= m \frac{v^2}{R} \\ R &= \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB} \\ T &= \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{R_\alpha}{R_p} &= \frac{\frac{m_\alpha v_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{m_p v_p}{q_p B}} = \frac{\frac{4m_p v_p}{2q_p}}{\frac{m_p v_p}{q_p}} = 2 \\ \frac{T_\alpha}{T_p} &= \frac{\frac{2\pi m_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{2\pi m_p}{q_p B}} = \frac{\frac{m_\alpha}{q_\alpha}}{\frac{m_p}{q_p}} = \frac{\frac{4m_p}{2q_p}}{\frac{m_p}{q_p}} = 2 \end{aligned}$$

## 【0205B11】

两个带电粒子，以相同的速度垂直磁感线飞入匀强磁场，它们的质量之比是 1 : 4，电荷之比是 1 : 2，它们所受的磁场力之比是\_\_\_\_\_。

## 答案

1 : 2

## 解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

这个力一定与运动电荷的速度垂直，所以提供它作圆周运动的向心力。依题意， $\vec{v} \perp \vec{B}$ ，所以力的大小为

$$F_m = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

所以有

$$\frac{F_{m1}}{F_{m2}} = \frac{q_1 v_1 B_1}{q_2 v_2 B_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$$

### 【0205B12】

两个带电粒子，以相同的速度垂直磁感线飞入匀强磁场，它们的质量之比是 1 : 4，电荷之比是 1 : 2，它们运动轨迹半径之比是\_\_\_\_\_。

### 答案

1 : 2

### 解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

这个力一定与运动电荷的速度垂直，所以提供它作圆周运动的向心力。依题意， $\vec{v} \perp \vec{B}$ ，所以力的大小为

$$F_m = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

所以有

$$\frac{F_{m1}}{F_{m2}} = \frac{q_1 v_1 B_1}{q_2 v_2 B_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{m_1 v_1}{q_1 B_1}}{\frac{m_2 v_2}{q_2 B_2}} = \frac{m_1 q_2}{m_2 q_1} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

### 【0205B13】

电子在磁感应强度  $B = 0.1 \text{ T}$  的匀强磁场中沿圆周运动，电子运动形成的等效圆电流强度  $I = \underline{\hspace{1cm}} \text{ A}$ 。  
(电子电荷  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，电子质量  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ )

### 答案

$4.47 \times 10^{-10}$

## 解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电子做圆周运动, 所以  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , 洛伦兹力提供粒子做圆周运动的向心力, 所以有

$$\begin{aligned} qvB &= \frac{mv^2}{r} \\ r &= \frac{mv}{qB} \\ T &= \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \\ I &= \frac{q}{T} = \frac{q^2 B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2 \times 0.1}{2\pi \times 9.11 \times 10^{-31}} \approx 4.47 \times 10^{-10} \text{ A} \end{aligned}$$

## 【0205B14】

带电粒子穿过过饱和蒸汽时, 在它走过的路径上, 过饱和蒸汽便凝结成小液滴, 从而显示出粒子的运动轨迹。这就是云室的原理。今在云室中有磁感应强度大小为  $B = 1 \text{ T}$  的均匀磁场, 观测到一个质子的径迹是半径  $r = 20 \text{ cm}$  的圆弧。已知质子的电荷为  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 质子的质量  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 则该质子的动能为\_\_\_\_J。

## 答案

$$3.07 \times 10^{-13}$$

## 解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

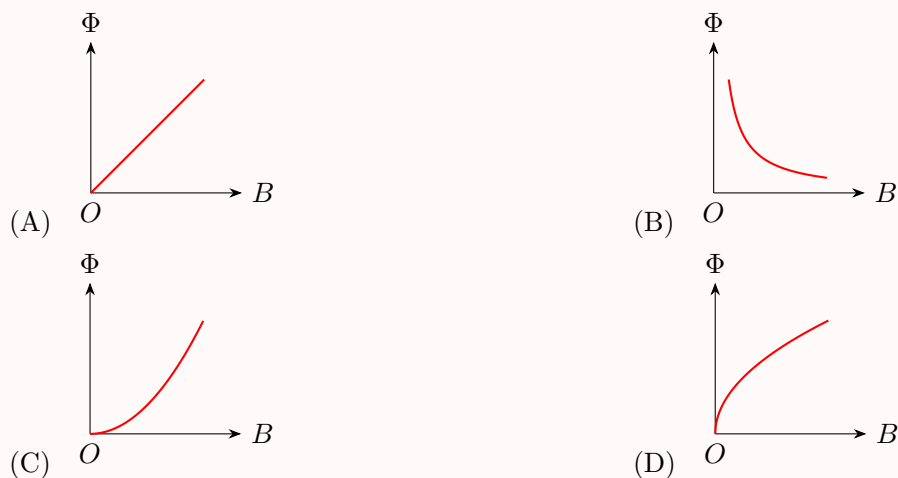
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

质子做圆周运动, 所以  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , 洛伦兹力提供粒子做圆周运动的向心力, 所以有

$$\begin{aligned} qvB &= \frac{mv^2}{r} \\ v &= \frac{qBr}{m} \\ E_k &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qBr)^2}{2m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \times 1 \times 0.2)^2}{2 \times 1.67 \times 10^{-27}} \approx 3.07 \times 10^{-13} \text{ J} \end{aligned}$$

## 【0205A09】

一质量为  $m$ 、电量为  $q$  的粒子, 以速度  $\vec{v}$  垂直射入均匀磁场  $\vec{B}$  中, 则粒子运动轨道所包围范围的磁通量与磁场磁感应强度大小的关系曲线是



答案

B

【0205B15】

质量为  $m_e$  的电子带电  $e$ ，以速率  $v$  在垂直于均匀磁场的平面内作圆周运动，半径为  $R$ ，则此圆周所包围的磁通量等于\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\pi m_e v R}{e}$$

【0205B16】

质量为  $m_e$  的电子带电  $e$ ，以速率  $v$  在垂直于均匀磁场的平面内作圆周运动，半径为  $R$ 。若运动速率不变，而要使圆周半径变为  $\frac{1}{2}R$ ，则磁感应强度的大小应变为原来的\_\_\_\_\_倍。

答案

2

【0205B17】

磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场垂直于电场强度为  $\vec{E}$  均匀电场，一束电子以速度  $\vec{v}$  进入该电磁场， $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$  和  $\vec{E}$ 。当两种场同时作用时，要使电子束不偏转，电子的速度大小应等于\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{E}{B}$$

【0205B18】

磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场垂直于电场强度为  $\vec{E}$  均匀电场，一束电子以速度  $\vec{v}$  进入该电磁场， $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$  和  $\vec{E}$ 。若只有磁场存在时，电子的轨道半径  $R = \underline{\hspace{2cm}}$ 。已知电子的质量为  $m_e$ ，带电量为  $e$ 。

答案

$$\frac{m_e v}{eB}$$

【0205B19】

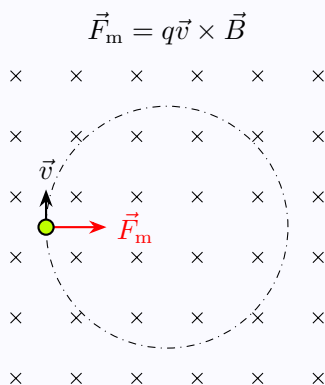
一电子以速率  $v = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$  垂直磁力线射入磁感应强度  $B = 2.36 \text{ T}$  的均匀磁场，则该电子的轨道磁矩为  $\underline{\hspace{2cm}} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 。(电子电荷  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，电子质量  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ )

答案

$$9.34 \times 10^{-19}$$

解析

洛伦兹力公式



当  $\vec{v} \perp \vec{B}$  时，洛伦兹力的大小为

$$F_m = qvB$$

它提供给粒子做圆周运动的向心力

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

所以轨道半径

$$r = \frac{mv}{qB}$$

等效电流

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi r/v} = \frac{qv}{2\pi r} = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

分子电流磁矩

$$\vec{p}_m = IS \vec{e}_n$$

其大小为

$$p_m = IS = \frac{q^2 B}{2\pi m} \times \pi \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} = \frac{mv^2}{2B} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (2.20 \times 10^6)^2}{2 \times 2.36} \approx 9.34 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

如上图, 假定磁场垂直纸面向里, 电子竖直向上运动, 则所受洛伦兹力向右, 电子顺时针转动, 等效电流逆时针, 所以磁矩是垂直纸面向外, 其方向与磁场方向相反。这里注意电子带负电, 洛伦兹力与  $\vec{v} \times \vec{B}$  方向相反, 电流的方向与电子的运动方向相反。

### 【0205B20】

氢原子中电子质量  $m_e$ , 电荷  $e$ , 它沿某一圆轨道绕原子核运动, 其等效圆电流的磁矩大小  $p_m$  与电子轨道运动的角动量大小  $L$  之比  $\frac{p_m}{L} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 答案

$$\frac{e}{2m_e}$$

### 解析

磁矩

$$\vec{p}_m = IS \vec{e}_n = I\pi R^2 \vec{e}_n$$

其大小

$$p_m = I\pi R^2 = \frac{q}{T}\pi R^2 = \frac{e}{2\pi R/v}\pi R^2 = \frac{evR}{2}$$

动量矩

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

圆周运动,  $\vec{r} \perp \vec{v}$ , 所以动量矩大小

$$L = mRv$$

所以

$$\frac{p_m}{L} = \frac{evR}{2mRv} = \frac{e}{2m}$$

## 【0205C07】

假设把氢原子看成是一个电子绕核作匀速圆周运动的带电系统。已知平面轨道的半径为  $r$ ，电子的电荷为  $e$ ，质量为  $m_e$ 。将此系统置于磁感应强度为  $\vec{B}_0$  的均匀外磁场中，设  $\vec{B}_0$  的方向与轨道平面平行，求此系统所受的力矩  $\vec{M}$ 。

## 解答

磁矩

$$\begin{aligned}\vec{p}_m &= IS \vec{e}_n \\ S &= \pi r^2 \\ I &= \frac{q}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{ev}{2\pi r} \\ p_m &= \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}\end{aligned}$$

提供电子绕核做圆周运动的向心力的力是电子与原子核之间的库仑力

$$\begin{aligned}m_e \frac{v^2}{r} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ v^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \\ v &= \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r}} \\ p_m &= \frac{er}{2} \times \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r}} = \frac{e^2 r}{4\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r}}\end{aligned}$$

磁矩在磁场中受到的磁力矩为

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

如果以轨道平面为  $xy$  平面，电子绕核顺时针转动，则电流逆时针， $\vec{e}_n = \vec{e}_z$ ，设  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ ，则

$$\vec{M} = p_m \vec{e}_z \times B_0 \vec{e}_x = p_m B_0 \vec{e}_y = \frac{B_0 e^2 r}{4\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_y = \frac{B_0 e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi\epsilon_0 m_e}} \vec{e}_y$$

## 5.4 霍耳效应

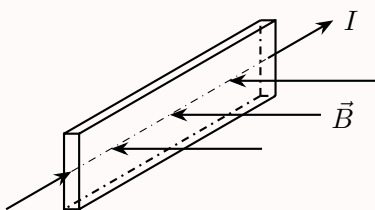
霍耳效应

$$quB = q \frac{\Delta U}{b}$$

## 【0205B21】

如图所示，长方形直金属条中通有电流  $I$ ，金属条放在磁感应强度为  $\vec{B}$  的匀强磁场中， $\vec{B}$  的方向垂直于金属条的左右侧面，则金属条的上侧面将积累\_\_\_\_\_ (填“正”或“负”) 电荷。



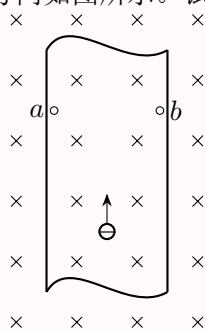


答案

负

【0205A10】

一铜条置于均匀磁场中，铜条中电子流的方向如图所示。试问下述哪一种情况将会发生？



- (A) 在铜条上  $a$ 、 $b$  两点产生一电势差，且  $U_a > U_b$
- (B) 在铜条上  $a$ 、 $b$  两点产生一电势差，且  $U_a < U_b$
- (C) 在铜条上产生涡流
- (D) 电子受到洛伦兹力而减速

答案

A

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电子在磁场中受到的洛伦兹力的方向为运动方向的右侧，所以电子将汇集到右侧，铜条右侧带负电，左侧带正电，所以左侧电势比右侧高。

洛伦兹力一定与运动方向垂直，不会改变速度的大小，但会改变速度的方向。

## 第三章 电磁感应

### 1、电磁感应定律

#### 1.1 电磁感应现象

【0301A01】

一导体圆线圈在均匀磁场中运动，能使其产生感应电流的一种情况是

- (A) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向平行 (B) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向垂直  
(C) 线圈平面垂直于磁场并沿垂直磁场方向平移 (D) 线圈平面平行于磁场并沿垂直磁场方向平移

答案

B

解析

产生感应电流的根本原因在于通过线圈平面的磁通量发生变化。

如果磁场平行于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量恒为零，转动过程也一直保持为零，所以不会产生感应电流。

如果磁场垂直于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量就是磁感应强度与线圈面积的乘积，转动过程中，线圈平面的法线方向与磁场之间的夹角发生变化，所以通过线圈的磁通量发生变化，所以线圈中有感应电流。

如果线圈平面垂直磁场并沿垂直磁场的方向平稳，那么通过线圈的磁通量并没有发生变化，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

如果线圈平面平行于磁场，则通过线圈的磁通量为零，移动过程磁通量也一直保持为零，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

#### 1.2 电磁感应定律

法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

## 【0301A02】

大小、形状均相同的铁环和铜环所包围的面积中，通以相同变化率的磁通量，则环中  
 (A) 感应电动势相同，感应电流相同 (B) 感应电动势相同，感应电流不同  
 (C) 感应电动势不同，感应电流相同 (D) 感应电动势不同，感应电流不同

## 答案

B

## 【0301B01】

桌子上水平放置一个半径  $r = 10 \text{ cm}$  的金属圆环，其电阻  $R = 1 \Omega$ 。若地球磁场磁感强度的竖直分量为  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$ 。那么将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电荷  $q = \underline{\hspace{1cm}} \text{ C}$ 。

## 答案

 $3.14 \times 10^{-6}$ 

## 解析

思路：求感应电动势，求感应电流，求电荷。

法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{dq}{dt}$$

所以通过的电荷为

$$\begin{aligned} q &= \int dq = \int I dt = \int \frac{\mathcal{E}}{R} dt = \int \frac{d\Phi}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2BS}{R} = \frac{2B\pi r^2}{R} \\ &= \frac{2 \times 5 \times 10^{-5} \pi \times (0.1)^2}{1} = 3.14 \times 10^{-6} \text{ C} \end{aligned}$$

## 1.3 楞次定律

## 【0301A03】

一块铜板垂直于磁场方向放在磁感强度正在增大的磁场中时，铜板中出现的涡流（感应电流）将

- (A) 加速铜板中磁场的增加 (B) 减缓铜板中磁场的增加  
 (C) 对磁场不起作用 (D) 使铜板中磁场反向

## 答案

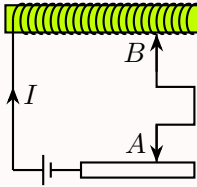
B

## 解析

感应电流会阻止磁场的增大，但只是减缓其增大的速度（程度），无法改变其增大的事实。

## 【0301A04】

如图所示，闭合电路由带铁芯的螺线管、电源和滑线变阻器组成，螺线管的电阻可忽略。请问下列哪一种情况下可以使线圈中的感应电流和原电流  $I$  的方向相反？



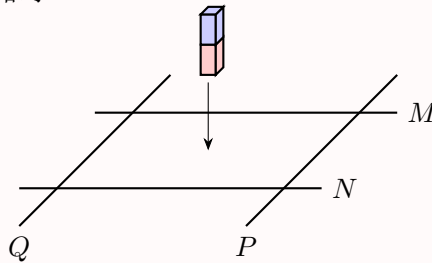
- (A) 滑线变阻器的触点  $A$  向左移动  
 (B) 滑线变阻器的触点  $A$  向右移动  
 (C) 螺线管上接点  $B$  向左移动  
 (D) 螺线管上接点  $B$  向右移动

## 答案

AD

## 【0301A05】

如图所示，光滑固定导轨  $M$ 、 $N$  水平放置，两根导体棒  $P$  和  $Q$  平行放在导轨上，形成一个闭合回路，当一条形磁铁从高处下落接近回路时



- (A)  $P$  和  $Q$  均向右运动  
 (B)  $P$  和  $Q$  均向左运动  
 (C)  $P$  和  $Q$  将互相远离  
 (D)  $P$  和  $Q$  将互相靠近

## 答案

D

## 2、动生电动势和感生电动势

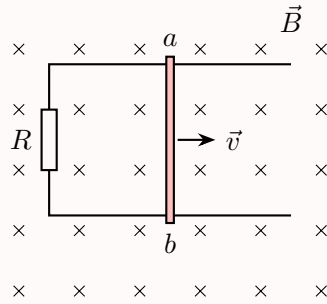
## 2.1 动生电动势

动生电动势

$$\mathcal{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

【0302A01】

如图所示，一匀强磁场  $\vec{B}$  垂直纸面向内，长为  $L$  的导线  $ab$  可以无摩擦地在导轨上滑动，除电阻  $R$  外，其它部分电阻不计，当  $ab$  以匀速  $v$  向右运动时，回路中电流为



(A)  $\frac{B^2 L^2 v}{R}$

(B)  $\frac{B^2 L^2 v}{2R}$

(C)  $\frac{BLv}{R}$

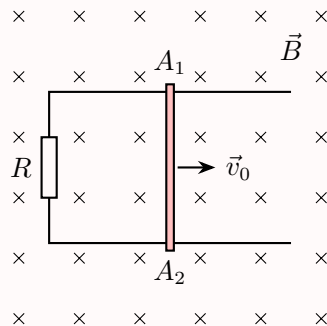
(D)  $\frac{BLv}{2R}$

答案

C

【0302C01】

如图所示，水平放置的导体矩形框的平面与磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场垂直，在此矩形框上有一质量为  $m$ ，长为  $L$  的可移动细导体棒  $A_1A_2$ ，矩形框还接有一电阻  $R$ ，其值较之导线的电阻值要大得多，若开始时 ( $t = 0$ )，细导体棒以速度  $\vec{v}_0$  沿图示的矩形框运动，试求棒的速率随时间变化的函数关系。忽略导体棒与导体矩形框之间的摩擦力。



## 解答

以磁场的方向 (垂直纸面向里) 为磁通量的正方向, 则顺时针为回路的绕行正方向。设  $t$  时刻导体棒的速率为  $v$ ,  $A_1A_2$  与  $R$  之间的距离为  $x$ , 则通过回路的磁通量

$$\Phi = BS = BLx$$

因此回路的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

负号表示感应电动势的方向与回路绕行正方向相反, 即逆时针。因此回路的感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{BLv}{R}$$

同样负号表示感应电流的方向与回路绕行正方向相反, 即逆时针, 所以电流从  $A_2$  流向  $A_1$ 。因此  $A_1A_2$  受到的安培力方向与速度方向相反, 大小

$$F = |BIL| = \frac{B^2L^2v}{R}$$

以速度方向为正, 由牛顿第二定律可得  $A_1A_2$  的加速度

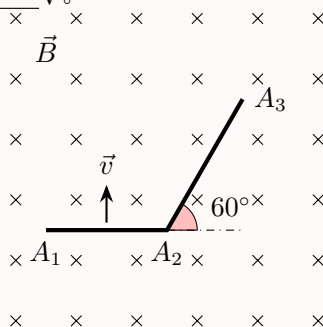
$$\begin{aligned} a &= -\frac{F}{m} = -\frac{B^2L^2v}{mR} = \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR} dt \\ \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= \int_0^t -\frac{B^2L^2}{mR} dt \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{B^2L^2}{mR} t \\ v &= v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR} t} \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 磁通量得 2 分
2. 法拉第电磁感应定律得到感应电动势得 4 分
3. 感应电流得 2 分
4. 安培力得 4 分
5. 牛顿第二定律得到加速度得 2 分
6. 积分得 1 分

## 【0302B01】

如图所示, 金属杆  $A_1A_2A_3$  处于磁感强度  $B = 0.1 \text{ T}$  的匀强磁场中, 磁场方向垂直纸面向里。已知  $A_1A_2 = A_2A_3 = 0.2 \text{ m}$ , 当金属杆在图中标明的速度方向运动时, 测得  $A_1$ 、 $A_3$  两点间的电势差是  $3 \text{ V}$ , 则可知  $A_1$ 、 $A_2$  两点间的电势差是\_\_\_\_\_V。

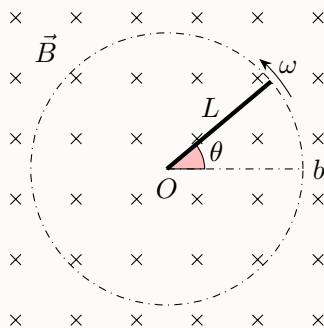


## 答案

2

## 【0302A02】

一根长度为  $L$  的铜棒, 在均匀磁场  $\vec{B}$  中以匀角速度  $\omega$  绕通过其一端的定轴旋转,  $\vec{B}$  的方向垂直铜棒转动的平面, 如图所示。设  $t = 0$  时, 铜棒与  $Ob$  成  $\theta$  角 ( $b$  为铜棒转动的平面上一个固定点), 则在  $t$  时刻铜棒两端之间的感应电动势是



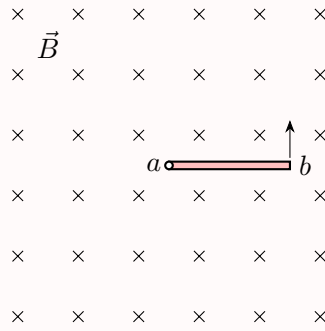
- (A)  $\omega L^2 B \cos(\omega t + \theta)$     (B)  $\frac{1}{2} \omega L^2 B$     (C)  $2 \omega L^2 B \cos(\omega t + \theta)$     (D)  $\frac{1}{2} \omega L^2 B \cos(\omega t)$

## 答案

B

## 【0302B02】

如图所示, 一根长为  $1 \text{ m}$  的导体细直棒  $ab$ , 绕端点  $a$  以每秒  $2$  转的角速度匀速旋转, 棒的旋转平面垂直于  $0.5 \text{ T}$  的均匀磁场, 则  $ab$  棒上的感应电动势大小为\_\_\_\_\_V。

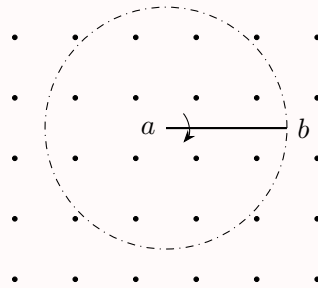


答案

 $\pi$ 

【0302A03】

如图所示，一根长为 1 m 的细直棒  $ab$ ，绕垂直于棒且过其一端  $a$  的轴以每秒 2 转的角速度旋转，棒的旋转平面垂直于 0.5 T 的均匀磁场，则在棒的中点，等效非静电性场强的大小和方向为



- (A) 6.28 V/m, 方向由  $a$  指向  $b$   
 (C) 6.28 V/m, 方向由  $b$  指向  $a$

- (B) 3.14 V/m, 方向由  $a$  指向  $b$   
 (D) 3.14 V/m, 方向由  $b$  指向  $a$

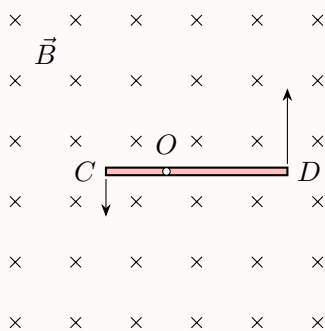
答案

D

【0302B03】

一长为  $L$  的导体棒  $CD$ ，在与一均匀磁场垂直的平面内，绕位于  $\frac{1}{3}L$  处的轴  $O$  以匀角速度  $\omega$  沿逆时针方向旋转，磁场方向如图所示，磁感应强度大小为  $B$ ，则导体棒内的磁感应电动势等于\_\_\_\_\_。



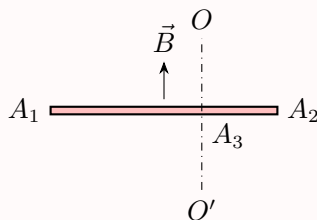


答案

$$\frac{1}{6}B\omega L^2$$

【0302A04】

如图所示，导体棒  $A_1A_2$  在均匀磁场  $\vec{B}$  中绕通过  $A_3$  点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴  $OO'$  转动 (角速度  $\vec{\omega}$  与  $\vec{B}$  同方向)， $A_2A_3$  的长度为棒长的  $\frac{1}{3}$ ，则



- (A)  $A_1$  点比  $A_2$  点电势高  
(C)  $A_1$  点比  $A_2$  点电势低

- (B)  $A_1$  点与  $A_2$  点电势相等  
(D) 有稳恒电流从  $A_1$  点流向  $A_2$  点

答案

A

解析

动生电动势

$$\mathcal{E} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

由此可以判定  $A_1$  点电势比  $A_3$  点高， $A_2$  点电势也比  $A_3$  点高。作为选择题，只需要判定  $A_1A_3$  之间的电压大于  $A_2A_3$  之间的电压，就可以得到  $A_1$  点比  $A_2$  点电势高。而由于没有构成闭合回路，所以没有电流。

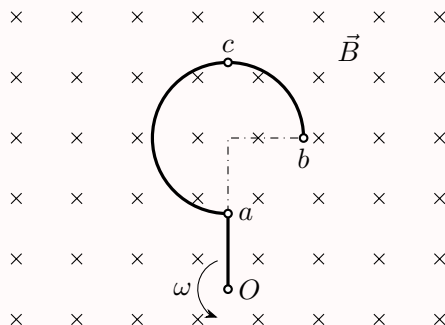
现在计算一下  $A_1A_3$  和  $A_2A_3$  之间的电压。

$$U_{13} = V_1 - V_3 = \int_{A_3}^{A_1} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{2l}{3}} vB dl = \int_0^{\frac{2l}{3}} \omega l B dl = \frac{1}{2} \omega B \left( \frac{2l}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} \omega B l^2$$

$$U_{23} = V_2 - V_3 = \int_{A_3}^{A_2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{l}{3}} vB dl = \int_0^{\frac{l}{3}} \omega l B dl = \frac{1}{2} \omega B \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \omega B l^2$$

## 【0302B04】

一导线被弯成如图所示形状， $acb$  为半径为  $R$  的四分之三圆弧，直线段  $Oa$  长为  $R$ 。若此导线放在匀强磁场  $\vec{B}$  中， $\vec{B}$  的方向垂直图面向内。导线以角速度  $\omega$  在图面内绕  $O$  点匀速转动，则此导线中的动生电动势为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{5}{2} B \omega R^2$$

## 解析

动生电动势

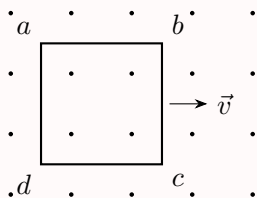
$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -B\omega r dr$$

所以感应电动势的方向由  $b$  点沿曲线指向  $O$  点，因此  $O$  点电势最高。感应电动势的大小为

$$\mathcal{E} = \int_b^O -B\omega r dr = \int_{\sqrt{5}R}^0 -B\omega r dr = \frac{1}{2} B\omega (5R^2) = \frac{5}{2} B\omega R^2$$

## 【0302A05】

如图所示，边长为  $L$  的正方形导线框  $abcd$ ，在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中以速度  $\vec{v}$  垂直于  $bc$  边在线框平面内平动，磁场方向与线框平面垂直。设整个线框中的总的感应电动势为  $\mathcal{E}$ ， $b$ 、 $c$  两点间的电势差为  $U$ ，则



(A)  $\mathcal{E} = BLv$ ,  $U = BLv$

(B)  $\mathcal{E} = 0$ ,  $U = BLv$

(C)  $\mathcal{E} = 0$ ,  $U = 0$

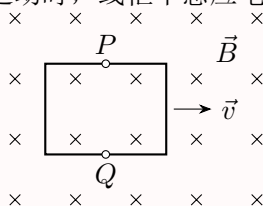
(D)  $\mathcal{E} = BLv$ ,  $U = 0$

答案

B

## 【0302B05】

如图所示, 均匀磁场中有一矩形线框, 框的上下两边中点分别为  $P$ 、 $Q$ , 当线框以速度  $\vec{v}$  垂直于均匀磁场 (磁场  $\vec{B}$  垂直于纸面向里) 水平向右运动时, 线框中感应电流\_\_\_\_\_(填 “= 0” 或 “ $\neq 0$ ”)。

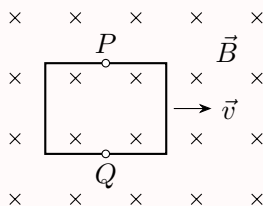


答案

= 0

## 【0302B06】

如图所示, 均匀磁场中有一矩形线框, 框的上下两边中点分别为  $P$ 、 $Q$ , 当线框以速度  $\vec{v}$  垂直于均匀磁场 (磁场  $\vec{B}$  垂直于纸面向里) 水平向右运动时,  $P$ 、 $Q$  两点之间的电势差  $U_P - U_Q$ \_\_\_\_\_(填 “> 0” 或 “= 0” 或 “< 0”)。

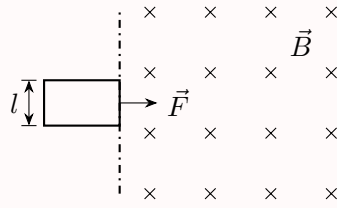


答案

&gt; 0

## 【0302C02】

如图所示, 电阻为  $R$ 、质量为  $m$ 、宽为  $l$  的矩形导电回路。从所画的静止位置开始受恒力  $\vec{F}$  的作用。在虚线右方空间内有磁感强度为  $\vec{B}$  且垂直于图面的均匀磁场。忽略回路自感。求在回路左边未进入磁场前, 速度随时间的变化关系。

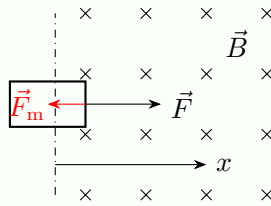


## 解答

思路：线圈进入磁场，磁通量变化，产生感应电动势，产生感应电流，电流在磁场中受力，在任意一个位置受力分析，求加速度，求速度。

如图，设某  $t$  时刻回路进入磁场  $x$ ，速度大小为  $v$ ，则通过回路的磁通量为

$$\Phi = Blx$$



由于随着线圈的运动，回路磁通量增大，所以回路的感应电动势的方向为逆时针方向，大小为

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$

所以通过回路中的感应电流的方向为逆时针方向，大小为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

电流元在磁场中会受到安培力的作用

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

所以回路上边受到向下的安培力，下边受到向上的安培力，这两个力大小相等，方向相反，互相抵消，左边未进入磁场，不受安培力，右边所受的安培力方向向左，大小为

$$F_m = BIl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

所以线圈受到的合力为

$$\begin{aligned} F - F_m &= ma \\ F - \frac{B^2 l^2 v}{R} &= m \frac{dv}{dt} \\ FR - B^2 l^2 v &= mR \frac{dv}{dt} \\ mR \frac{dv}{FR - B^2 l^2 v} &= dt \end{aligned}$$

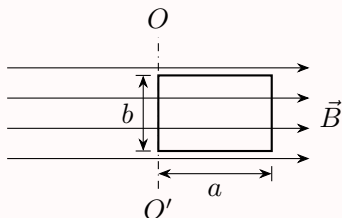
$$\begin{aligned}
 \int_0^v mR \frac{dv}{FR - B^2 l^2 v} &= \int_0^t dt \\
 -\frac{mR}{B^2 l^2} [\ln(FR - B^2 l^2 v)]_0^v &= t \\
 \ln \frac{FR - B^2 l^2 v}{FR} &= -\frac{B^2 l^2}{mR} t \\
 \frac{FR - B^2 l^2 v}{FR} &= e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \\
 v &= \frac{FR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}\right)
 \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 感应电动势 5 分
2. 安培力 5 分
3. 求速度 5 分

## 【0302A06】

一个长为  $a$ 、宽为  $b$  的矩形线框，置于均匀磁场中，线框绕  $OO'$  轴以角速度  $\omega$  做匀速转动，如图所示。设  $t = 0$  时，线框平面平行于磁场，则任意  $t$  时刻感应电动势的大小为



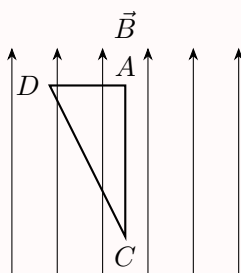
- (A)  $\omega abB |\cos(\omega t)|$       (B)  $\omega abB |\sin(\omega t)|$       (C)  $\frac{1}{2} \omega abB |\cos(\omega t)|$       (D)  $\frac{1}{2} \omega abB |\sin(\omega t)|$

## 答案

A

## 【0302B07】

如图所示，在磁感应强度大小为  $B$  的均匀磁场中，有一刚性直角三角形线圈  $ACD$ ， $AD = a$ ， $CD = 2a$ ， $AC$  边平行于磁场方向，线圈绕  $AC$  以角速度  $\omega$  匀速转动。转动过程中， $AD$  边的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。

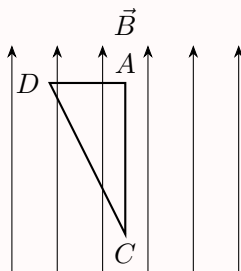


答案

$$\frac{1}{2}B\omega a^2$$

【0302B08】

如图所示，在磁感应强度大小为  $B$  的均匀磁场中，有一刚性直角三角形线圈  $ACD$ ， $AD = a$ ， $CD = 2a$ ， $AC$  边平行于磁场方向，线圈绕  $AC$  以角速度  $\omega$  匀速转动。转动过程中，线圈的总电动势的大小为\_\_\_\_\_。

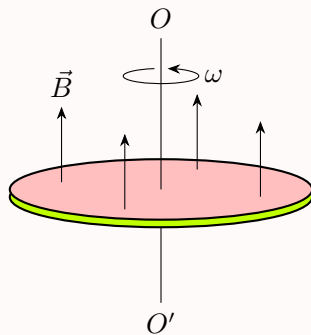


答案

0

【0302A07】

圆铜盘水平放置在均匀磁场中， $\vec{B}$  的方向垂直盘面向上。当铜盘绕通过中心垂直于盘面的轴沿图示方向转动时，



- (A) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的相反方向流动  
 (B) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的方向流动  
 (C) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘边缘处电势最高  
 (D) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘中心处电势最高

答案

C

解析

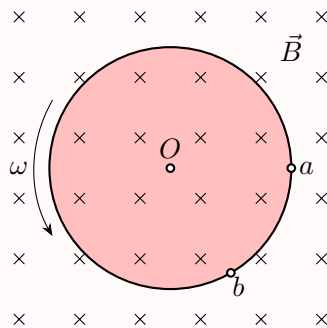
将圆盘看成一根根线段绕盘心转动。根据动生电动势

$$\mathcal{E} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

可以判定铜盘边缘处电势比中心电势高。

【0302B09】

半径为  $L$  的均匀导体薄圆盘绕通过中心  $O$  的垂直轴转动，角速度为  $\omega$ ，盘面与均匀磁场  $\vec{B}$  垂直，如图所示，则  $U_a - U_b =$ \_\_\_\_\_。

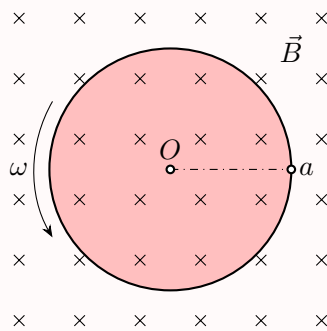


答案

0

【0302B10】

半径为  $R$  的均匀导体薄圆盘的盘面与均匀磁场  $\vec{B}$  垂直。圆盘绕通过中心  $O$  的垂直轴转动，角速度为  $\omega$ ，方向如图所示。 $a$  为盘边缘一点，则  $Oa$  直线段中动生电动势的方向为\_\_\_\_\_。

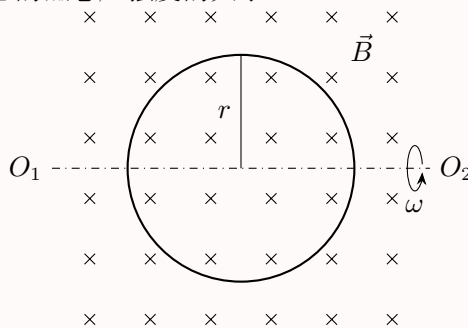


## 答案

$a \rightarrow O$

## 【0302C03】

如图所示，一个半径为  $r$ 、匝数为  $N$  的圆形线圈，置于均匀磁场  $\vec{B}$  中。圆形线圈可绕通过圆心的轴  $O_1O_2$  转动，转动的角速度为  $\omega$ 。设初始时刻圆线圈处在图示位置，求：(1)  $t$  时刻通过线圈的磁链  $\Psi(t)$  和感应电动势；(2) 当转过角度  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时，线圈中的瞬时电流值 (线圈的电阻为  $R$ ，不计自感)；(3) 当转过角度  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时，圆心处的总的磁感应强度的大小。



## 解答

(1)

$$\Psi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = NB\pi r^2 \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = NB\pi r^2 \omega \sin(\omega t)$$

(2)

$$I = \left| \frac{\mathcal{E}}{R} \right| = \frac{NB\pi r^2 \omega}{R}$$

(3) 一匝线圈电流在圆心的磁场

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 NB\pi r \omega}{2R}$$

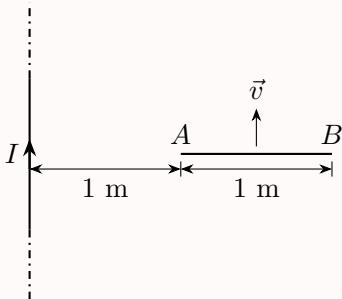


方向与外磁场的方向垂直, 所以  $N$  匝线圈在圆心的总磁场为  $NB_1$ , 所以圆心处总的磁感应强度的大小为

$$\sqrt{B^2 + (NB_1)^2} = B\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 N^2 \pi r \omega}{2R}\right)^2}$$

## 【0302B11】

金属杆  $AC$  以匀速  $v = 2 \text{ m/s}$  平行于长直载流导线运动, 导线与  $AC$  共面且相互垂直, 如图所示。已知导线载有电流  $I = 40 \text{ A}$ , 则此金属杆中的感应电动势  $\mathcal{E} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ V}$ 。( $\ln 2 = 0.69$ )



## 答案

$$1.104 \times 10^{-5}$$

## 解析

无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

图中金属杆处磁场的方向为垂直纸面向里。动生电动势

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

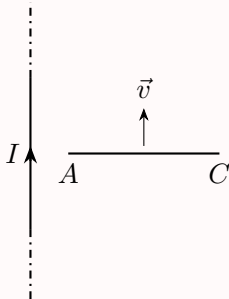
以导线所在位置为坐标原点, 沿金属杆方向建立  $x$  轴, 则金属杆中的感应电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_1^2 -vB dx = \int_1^2 -v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} [\ln x]_1^2 = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 2 \\ &= -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 2}{2\pi} \times 0.69 = -1.104 \times 10^{-5} \text{ V} \end{aligned}$$

所以电动势从  $C$  端指向  $A$  端,  $A$  端电势比较高。

## 【0302B12】

金属杆  $AC$  以  $\vec{v}$  平行于长直载流导线运动，导线与  $AC$  共面且相互垂直，如图所示。已知导线载有电流  $I$ ，则此金属杆中电势较高的一端为\_\_\_\_\_端。(填“ $A$ ”或“ $C$ ”)

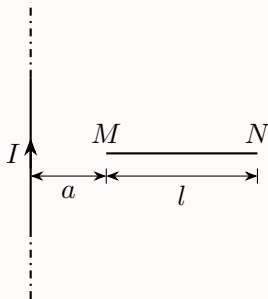


## 答案

A

## 【0302B13】

如图所示，一段长度为  $l$  的直导线  $MN$ ，水平放置在载电流为  $I$  的竖直长导线旁与竖直导线共面，并从静止由图示位置自由下落，则  $t$  秒末导线两端的电势差  $U_M - U_N =$ \_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{\mu_0 I g t}{2\pi} \ln \frac{a}{a+l}$$

## 解析

自由落体运动  $t$  秒末的速率为

$$v = gt$$

方向竖直向下。长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧磁场的方向垂直纸面向里。动生电动势

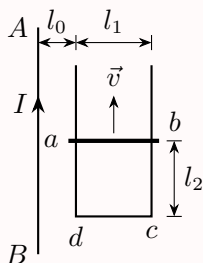
$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Bv dr = \frac{\mu_0 Igt}{2\pi r} dr$$

所以感应电动势的方向由  $M$  点指向  $N$  点，所以

$$U_M - U_N = \int_N^M \frac{\mu_0 Igt}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Igt}{2\pi} [\ln r]_{a+l}^a = \frac{\mu_0 Igt}{2\pi} \ln \frac{a}{a+l}$$

### 【0302C04】

如图所示，无限长直导线中稳恒电流为  $I$ ，矩形导线框  $abcd$  与长直导线共面，且  $ad \parallel AB$ ， $cd$  边固定， $ab$  边沿  $da$  及  $cb$  以速度  $\vec{v}$  无摩擦地匀速平动，设线框自感忽略不计， $t = 0$  时， $ab$  边与  $cd$  边重合。(1) 任意时刻线框包围面积上的磁通量；(2) 任意时刻  $ab$  上的动生电动势，并判断方向。



### 解答

(1) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$dS = l_2 dr = vt dr$$

$$\Phi = \int_{l_0}^{l_0+l_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} vt dr = \frac{\mu_0 Ivt}{2\pi} \ln \frac{l_0 + l_1}{l_0}$$

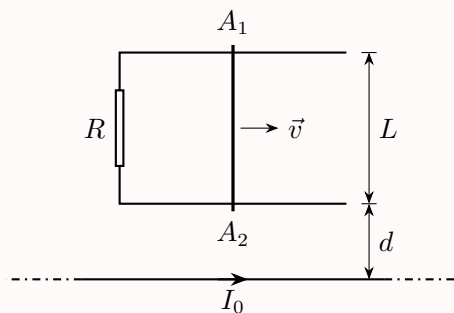
(2) 以顺时针为感应电动势的正方向

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{l_0 + l_1}{l_0}$$

所以方向由  $b$  指向  $a$ 。

### 【0302C05】

如图所示，一无限长载流直导线中通过的电流为  $I_0$ ，导线线框的宽度为  $L$ ，线框总电阻近似不变，以图中  $R$  表示。 $A_1A_2$  段可以无摩擦地在线框上滑动，线框与载流导线之间的距离为  $d$ 。现有一外力  $\vec{F}$  作用在  $A_1A_2$  上，使之以速度  $\vec{v}$  向右作匀速直线运动。试求：(1)  $A_1A_2$  上感应电动势的大小和方向；(2) 通过  $A_1A_2$  的电流大小和方向；(3) 作用在  $A_1A_2$  上的外力的大小和方向。



## 解答

(1) 线框所在处直线电流的磁场方向垂直纸面向外，大小

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

所以  $A_1 A_2$  上感应电动势的方向从  $A_1$  指向  $A_2$ ，大小

$$\mathcal{E} = \int_d^{L+d} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} v \, dr = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

(2) 通过  $A_1 A_2$  的电流的方向从  $A_1$  指向  $A_2$ ，大小

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \frac{d+L}{d}$$

(3)  $A_1 A_2$  做匀速直线运动，所受合力为零，因此所受外力方向与安培力相反（安培力向左，外力向右），大小相等，为

$$F = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \times \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \frac{d+L}{d} \times dr = \frac{v}{R} \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d} \right)^2$$

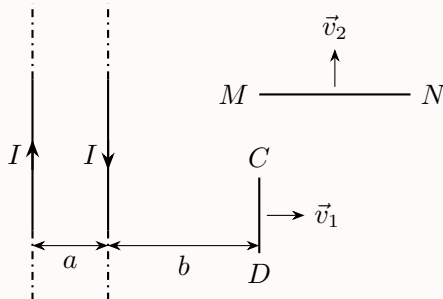
## 评分标准

1. 磁场大小 3 分方向 1 分共 4 分
2. 电动势大小 3 分方向 1 分共 4 分
3. 电流大小 2 分方向 1 分共 3 分
4. 外力大小 3 分方向 1 分共 4 分

## 【0302C06】

两相互平行的无限长直导线载有大小相等、方向相反的电流  $I$ ，长度为  $L_1$  的金属杆  $CD$  与两导线共面且平行，而长度为  $L_2$  的金属杆  $MN$  与两导线共面且垂直，相对位置如图所示。(1) 求出两长直导线右侧任意一点的磁感应强度；(2) 若  $CD$  杆以速率  $v_1$  垂直于导线向右匀速平移，求该杆中的感应电动势，

并判断哪端电势较高? (3) 若  $MN$  杆以速率  $v_2$  平行于导线向上匀速平移, 求该杆中的感应电动势, 并判断哪端电势较高?



### 解答

(1) 以左边载流导线所在位置为坐标原点, 水平向右为  $x$  轴正方向, 则左边载流导线在  $x > a$  处的磁场方向垂直纸面向里, 大小

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

右边载流导线在  $x > a$  处的磁场方向垂直纸面向外, 大小

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)}$$

所以总的磁场方向垂直纸面向外, 大小

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right)$$

(2)  $CD$  上感应电动势的方向从  $C$  指向  $D$ , 所以  $D$  端电势较高, 大小

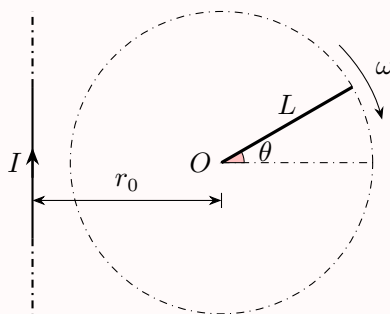
$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right) L_1 v_1 = \frac{\mu_0 I L_1 v_1 a}{2\pi b(a+b)}$$

(3)  $MN$  上感应电动势的方向从  $M$  指向  $N$ , 所以  $N$  端电势较高, 大小

$$\mathcal{E}_2 = \int_{a+b}^{a+b+L_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right) v_2 dx = \frac{\mu_0 I v_2}{2\pi} \left( \ln \frac{b+L_2}{b} - \ln \frac{a+b+L_2}{a+b} \right) = \frac{\mu_0 I v_2}{2\pi} \ln \frac{(a+b)(b+L_2)}{b(a+b+L_2)}$$

### 【0302C07】

一无限长竖直导线上通有稳定电流  $I$ , 电流方向向上。导线旁有一与导线共面、长度为  $L$  的金属棒, 绕其一端  $O$  在该平面内顺时针匀速转动, 如图所示。转动角速度为  $\omega$ ,  $O$  点到导线的垂直距离为  $r_0$  ( $r_0 > L$ )。试求金属棒转到与水平面成  $\theta$  角时, 棒内感应电动势的大小和方向。



## 解答

金属棒上取离  $O$  点  $l \rightarrow l + dl$  段为研究对象，则其运动速度的大小  $v = \omega l$ 。当金属棒与水平面成  $\theta$  角时，它与长直电流之间的距离  $r = r_0 + l \cos \theta$ 。长直电流在研究对象处的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l \cos \theta)}$$

方向垂直纸面向里。所以研究对象上的感应电动势（动生电动势）

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\omega l) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l \cos \theta)} \cdot dl = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \cdot \frac{l dl}{r_0 + l \cos \theta}$$

所以整根金属棒的感应电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^L \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \cdot \frac{l dl}{r_0 + l \cos \theta} \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \int_0^L \frac{l}{r_0 + l \cos \theta} dl \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi \cos \theta} \int_0^L \left[ 1 - \frac{r_0}{r_0 + l \cos \theta} \right] dl \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi \cos \theta} \left[ l - \frac{r_0}{\cos \theta} \ln(r_0 + l \cos \theta) \right]_0^L \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi \cos \theta} \left[ L - \frac{r_0}{\cos \theta} \ln \frac{r_0 + L \cos \theta}{r_0} \right] \end{aligned}$$

方向从  $O$  沿杆指向末端。

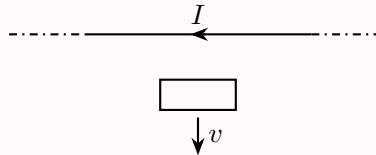
## 评分标准

1. 取研究对象得到其速度大小得 2 分
2. 安培环路定理求磁场得 5 分，方向得 1 分
3. 动生电动势得 5 分

4. 积分得 1 分，方向得 1 分

【0302A08】

一根无限长水平直导线载有电流  $I$ ，一个与导线共面的矩形线圈沿垂直于导线方向以恒定速率运动，如图所示，则



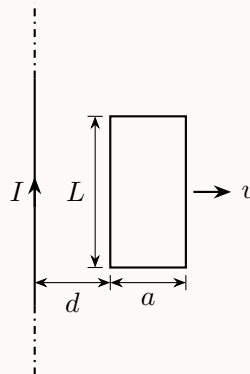
- (A) 线圈中无感应电流  
(B) 线圈中感应电流为顺时针方向  
(C) 线圈中感应电流为逆时针方向  
(D) 线圈中感应电流的方向无法确定

答案

C

【0302B14】

如图所示，长直导线中通有电流  $I$  时，另一矩形线圈共  $N$  匝，边长分别为  $a$  和  $L$ ，以速率  $v$  向右平动，当线圈与导线距离为  $d$  时，线圈中感应电动势大小为\_\_\_\_\_。

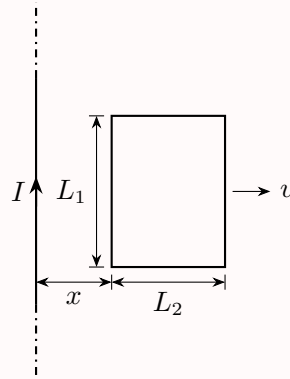


答案

$$\frac{\mu_0 N I L v}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right)$$

【0302C08】

如图所示，长直导线中通有电流  $I$ ，其右边放置一矩形线圈，共  $N$  匝，长为  $L_1$ ，宽为  $L_2$ ，矩形线圈以  $v$  的速率向右平动，求：(1) 当线圈与导线距离为  $x$  时，穿过矩形线圈的磁链 (磁通匝数)；(2) 当线圈与导线距离为  $x$  时线圈中的感应电动势的大小及方向。



## 解答

(1) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Psi = N \int_x^{x+L_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L_1 dr = \frac{\mu_0 N I L_1}{2\pi} \ln \frac{x+L_2}{x}$$

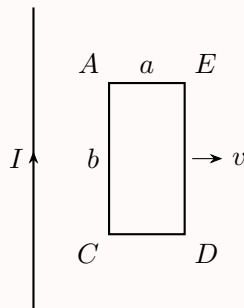
(2) 以顺时针为感应电动势的正方向

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\mu_0 N I L_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x+L_2} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 N I L_1 L_2 v}{2\pi x(x+L_2)}$$

所以感应电动势的大小为  $\frac{\mu_0 N I L_1 L_2 v}{2\pi x(x+L_2)}$ , 方向为顺时针方向。

## 【0302C09】

如图所示, 一无限长直导线载有电流  $I$ , 该导线与宽  $a$ 、长  $b$  的矩形导线框  $ACDE$  共面, 且与  $AC$  边平行。线框以恒定速率  $v$  沿着与长直导线垂直的方向向右平移。当  $AC$  与直导线相距  $x$  时, 求: (1) 穿过线框的磁通量; (2) 线框总感应电动势的大小和方向; (3)  $AC$ 、 $AE$  导线的感应电动势, 并指出哪端电势高。





## 解答

(1) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b \, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

(2) 以顺时针为感应电动势的正方向

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi x(x+a)}$$

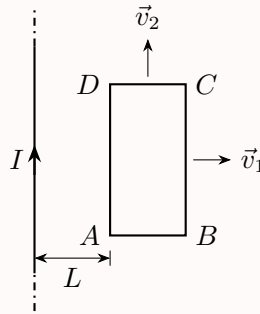
所以感应电动势的大小为  $\frac{\mu_0 I a b v}{2\pi x(x+a)}$ ，方向为顺时针方向。

(3)  $\vec{v}$  向右,  $\vec{B}$  向里,  $\vec{v} \times \vec{B}$  向上, 所以  $AC$  段感应电动势向上,  $A$  端电势高,  $AE$  段感应电动势为零,  $AC$  段感应电动势的大小为

$$\mathcal{E}_{AC} = \frac{\mu_0 I b v}{2\pi x}$$

## 【0302C10】

如图, 在通有电流  $I$  的无限长直导线附近, 有一矩形线圈  $ABCD$  与其共面, 线圈的左右两根导线平行于该长直导线。线圈以速度  $\vec{v}_1$  垂直于导线向右平移, 已知  $AB = a$ ,  $BC = b$ , 当线圈运动到  $A$  点距导线为  $L$  的位置时, 求: (1) 通过线圈所包围面积的磁通量; (2) 线圈中的感应电动势的大小和方向; (3) 若矩形线圈沿着与电流平行的方向以速度  $\vec{v}_2$  在平面内移动, 线圈中磁应电动势的大小, 哪点电势高?



## 解答

(1) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_L^{L+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b \, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{L+a}{L}$$

(2) 以顺时针为感应电动势的正方向

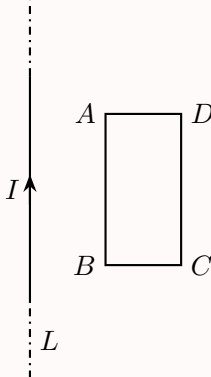
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left( \frac{1}{L+a} - \frac{1}{L} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I a b v_1}{2\pi L(L+a)}$$

所以感应电动势的大小为  $\frac{\mu_0 I a b v_1}{2\pi L(L+a)}$ ，方向为顺时针方向。

(3) 当线圈以  $\vec{v}_2$  运动时, 通过线圈的磁通量是个恒量, 因此整个线圈的感应电动势为零。  $\vec{v}_2$  向上,  $\vec{B}$  向里,  $\vec{v}_2 \times \vec{B}$  向左, 所以  $AD$  端电势高。

## 【0302B15】

如图所示, 在一长直导线  $L$  中通有电流  $I$ ,  $ABCD$  为一矩形线圈, 它与  $L$  皆在纸面内, 且  $AB$  边与  $L$  平行。矩形线圈在纸面内向右移动时, 线圈中感应电动势方向为\_\_\_\_(“ $ABCD A$  绕向”或“ $ADCBA$  绕向”)。



## 答案

$ADCBA$  绕向

## 解析

无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定理可得

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B \cdot (2\pi r) &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\end{aligned}$$

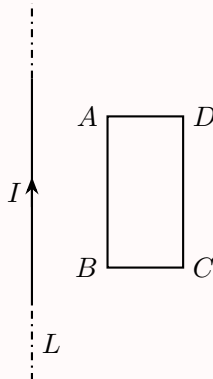
所以, 越靠近载流导线,  $r$  越小, 磁场越大, 同一个  $r$  处, 磁场不变。另在由下向上的电流右侧, 磁场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

所以当线圈向右移动时, 磁场变小, 磁通量变小, 感应电动势为正, 即沿顺时针方向, 即  $ADCBA$  绕向。

## 【0302B16】

如图所示, 在一长直导线  $L$  中通有电流  $I$ ,  $ABCD$  为一矩形线圈, 它与  $L$  皆在纸面内, 且  $AB$  边与  $L$  平行。矩形线圈绕  $AD$  边旋转, 当  $BC$  边离开纸面向外运动时, 线圈中感应电动势的方向为\_\_\_\_ (“ $ABCD$ ” 绕向” 或 “ $ADCBA$ ” 绕向”)。



## 答案

$ADCBA$  绕向

## 解析

无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

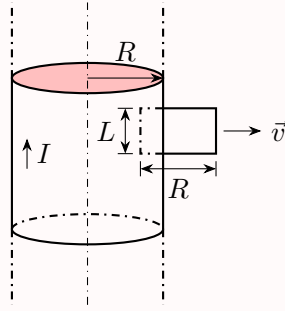
所以, 越靠近载流导线,  $r$  越小, 磁场越大, 同一个  $r$  处, 磁场不变。另在由下向上的电流右侧, 磁场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

若矩形线圈绕  $AD$  边旋转, 当  $BC$  边已离开纸面向外运动时, 磁通量变小, 因此感应电动势为正, 即沿顺时针方向, 即  $ADCBA$  绕向。

## 【0302C11】

如图所示, 半径为  $R$  的无限长实心圆柱导体载有电流  $I$ , 电流沿轴向流动, 并均匀分布在导体横截面上。一宽为  $R$ 、长为  $L$  的矩形回路 (与导体轴线同平面) 以速度  $\vec{v}$  向导体外运动 (设导体内有一很小的缝隙, 但不影响电流及磁场的分布)。设初始时刻矩形回路一边与导体轴线重合, 求: (1) 载流导体内外磁感应强度分布; (2)  $t = \frac{R}{2v}$  时刻回路中的感应电动势的大小和感应电流方向。



## 解答

(1)  $r < R$ , 载流导体内,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B_1(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$r > R$ , 载流导体外,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B_2(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁场方向垂直纸面向里。

(2) 不管导体内外, 磁场  $\vec{B}$  的方向都是垂直纸面向里, 速度  $\vec{v}$  都是向右, 因此  $\vec{v} \times \vec{B}$  向上, 因此上下两段的感应电动势为零; 对于左段, 电动势向上, 大小

$$\mathcal{E}_1 = B_1 L v = \frac{\mu_0 I \frac{R}{2}}{2\pi R^2} L v = \frac{\mu_0 I L v}{4\pi R}$$

对于右段, 电动势向上, 大小

$$\mathcal{E}_2 = B_2 L v = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{3R}{2}} L v = \frac{\mu_0 I L v}{3\pi R}$$

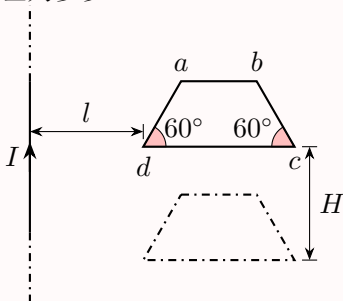
因此  $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ , 总的感应电动势的大小为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{\mu_0 I L v}{12\pi R}$$

方向为逆时针方向, 因此感应电流的方向也是逆时针方向。

## 【0302C12】

如图所示, 一长直导线通有电流  $I$ , 其旁共面地放置一匀质金属梯形线框  $abcd$ , 已知:  $da = ab = bc = L$ , 两斜边与下底边夹角均为  $60^\circ$ ,  $d$  点与导线相距  $l$ . 今线框从静止开始自由下落  $H$  高度, 且保持线框平面与长直导线始终共面, 求: (1) 下落高度为  $H$  的瞬间, 线框中的感应电流为多少? (2) 该瞬时线框中电势最高处与电势最低处之间的电势差为多少?



## 解答

- (1) 由于下落过程, 通过线框的磁通量保持不变, 所以线框中的感应电动势为零, 感应电流为零。  
 (2) 无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

直线右边磁场方向垂直纸面向里。

线框做自由落体运动, 下落  $H$  时速率为  $v = \sqrt{2gH}$ 。

动生电动势

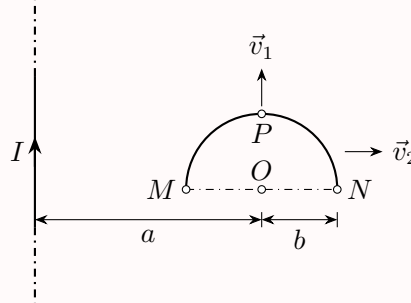
$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr$$

$$\mathcal{E}_{dc} = \int_l^{l+2L} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{l+2L}{l} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{l+2L}{l} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2gH}}{2\pi} \ln \frac{l+2L}{l}$$

其中  $dc$  段的长度由图可知为  $L_{dc} = L_{da} \cos 60^\circ + L_{ab} + L_{bc} \cos 60^\circ = 2L$ 。整个线框中  $c$  点电势最高,  $d$  点电势最低。

## 【0302C13】

如图所示, 载有电流  $I$  的长直导线附近有一半径为  $b$  的半圆环导体  $MPN$ , 二者共面, 端点  $MN$  的连线与长直导线垂直, 环心  $O$  与导线相距  $a$ ,  $P$  为导体的中点。求: (1) 若半圆环以速度  $\vec{v}_1$  平行导线平移, 半圆环内感应电动势的大小和方向; (2) 若半圆环以速度  $\vec{v}_2$  向右平移, 半圆环内哪点电势最高?



## 解答

以载流导线为  $y$  轴，以电流方向为  $y$  轴正方向，选择  $x$  轴过环心，向右为  $x$  轴正方向，则垂直纸面向外为  $z$  轴正方向。则在半圆环导体所在处的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\vec{e}_z)$$

(1) 半圆环以速度  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_y$  平行导线平移，

$$(\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \left[ (v_1 \vec{e}_y) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\vec{e}_z) \right] \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) = -\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi x} dx$$

$$\mathcal{E}_{MP} = \int_M^P (\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_M^P -\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi} \ln \frac{a}{a-b}$$

$$\mathcal{E}_{PN} = \int_P^N (\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_P^N -\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\mathcal{E}_{MPN} = \mathcal{E}_{MP} + \mathcal{E}_{PN} = -\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

所以感应电动势的大小为  $\frac{\mu_0 I v_1}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$ ，方向从  $N$  指向  $M$ 。

(2) 半圆环以速度  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_x$  向右平移，

$$\vec{v}_2 \times \vec{B} = (v_2 \vec{e}_x) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I v_2}{2\pi x} \vec{e}_y$$

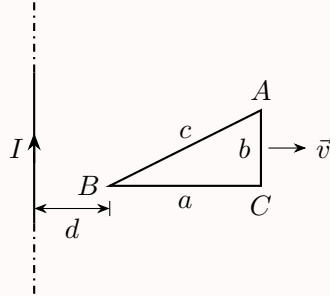
所以  $P$  点电势最高。

## 评分标准

1. 计算磁场 4 分
2. 计算感应电动势 5 分
3. 感应电动势的方向 1 分
4.  $\vec{v}_2$  时判断感应电动势的方向 3 分
5. 得到  $P$  点电势最高 2 分

## 【0302C14】

无限长直导线，通以恒定电流  $I$ 。有一与之共面的直角三角形线圈  $ABC$ 。已知  $AC$  边长为  $b$ ，且与长直导线平行， $BC$  边长为  $a$ 。若线圈以垂直于导线方向的速度  $\vec{v}$  向右平移，当  $B$  点与长直导线的距离为  $d$  时，求线圈  $ABC$  内的感应电动势的大小和感应电动势的方向。



## 解答

无限长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧，磁场的方向垂直纸面向里。

计算电动势的两种方法：

【方法一】动生电动势

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{AB} &= \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B vB dy = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \int_b^0 \frac{1}{d + \frac{a}{b}y} dy \\ &= \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \frac{b}{a} \left[ \ln \left( d + \frac{a}{b}y \right) \right]_b^0 = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \frac{b}{a} \ln \frac{d}{d + \frac{a}{b}b} = \frac{\mu_0 Iv b}{2\pi a} \ln \frac{d}{d+a} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{BC} = \int_B^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\mathcal{E}_{CA} = \int_C^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBL_{CA} = v \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+d)} \times b = \frac{\mu_0 Iv b}{2\pi(a+d)}$$

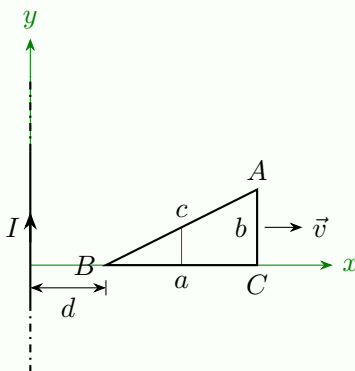
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ABCA} &= \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} + \mathcal{E}_{CA} = \frac{\mu_0 Iv b}{2\pi a} \ln \frac{d}{d+a} + \frac{\mu_0 Iv b}{2\pi(a+d)} \\ &= \frac{\mu_0 Iv b}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} \ln \frac{d}{d+a} + \frac{1}{a+d} \right] = \frac{\mu_0 Iv b}{2\pi} \left[ \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a} \ln \frac{d+a}{d} \right] \end{aligned}$$

从上式很难直接看出  $\mathcal{E}_{ABCA}$  的正负，但从相同高度处的  $AB$ 、 $AC$  上的元线段来看， $AC$  处的磁场较弱，所以感应电动势的大小较小，因此  $AB$  段总的感应电动势的方向从  $B$  指向  $A$ ， $AC$  段总的感应电动势的方向从  $C$  指向  $A$ ，但  $AB$  段的感应电动势的大小较大，所以总的感应电动势的方向为沿  $BACB$  绕向，即上式中  $\mathcal{E}_{ABCA} < 0$ 。

【方法二】先求出任意时刻通过三角形线框的磁通量，再从法拉第电磁感应定律出发求感应电动势。如图建立直角坐标系，则  $AB$  直线所在的方程为

$$y = \frac{b}{a}(x - d)$$

$$x = d + \frac{a}{b}y$$



$$\begin{aligned}\Phi &= \int_r^{r+a} B y dx = \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{b}{a}(x - r) dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \int_r^{r+a} \left(1 - \frac{r}{x}\right) dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} (x - r \ln x)_r^{r+a} \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \{[(r+a) - r \ln(r+a)] - [r - r \ln r]\} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[a - r \ln \frac{r+a}{r}\right] \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[-\ln \frac{r+a}{r} - r \times \frac{r}{r+a} \times \left(-\frac{a}{r^2}\right)\right] \frac{dr}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[\frac{a}{r+a} - \ln \frac{r+a}{r}\right] v = -\frac{\mu_0 I b v}{2\pi a} \left[\frac{a}{r+a} - \ln \frac{r+a}{r}\right]\end{aligned}$$

注意上式求导过程中  $r$  为任意时刻  $B$  点到通电直导线之间的距离，是随时间变化的函数，其对时间的导数就等于线框运动的速度。要求图示位置时的感应电动势，要先对任意  $r$  求导后再将  $r = d$  代入，即

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I b v}{2\pi a} \left[\frac{a}{d+a} - \ln \frac{d+a}{d}\right]$$

由于上面磁通量以垂直纸面向里为正方向，所以相应的感应电动势的正方向为顺时针方向。而从楞次定律也可以判断出感应电动势的方向，线框远离直导线，磁场减弱，磁通量减少，感应电流所产生的附加磁通量要阻止磁通量的减少，所以感应电流的方向为顺时针方向，感应电动势的方向为顺时针方向。

### 【0302B17】

在竖直放置的一根无限长载流直导线右侧有一与其共面的任意形状的平面线圈。直导线中的电流由向上，以顺时针方向为感应电动势的正方向，当线圈平行于导线向下运动时，线圈中的感应电动势\_\_\_\_\_。(填“> 0”，“< 0”或“= 0”)

答案

= 0



## 解析

无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，越靠近载流导线， $r$  越小，磁场越大，同一个  $r$  处，磁场不变。另在由下向上的电流右侧，磁场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

所以当线圈平行于导线向下运动时，通过线圈的磁通量不变，所以感应电动势为零。当线圈靠近导线时，磁场变大，磁通量变大，感应电动势为负。

## 【0302B18】

在竖直放置的一根无限长载流直导线右侧有一与其共面的任意形状的平面线圈。直导线中的电流由下向上，以顺时针方向为感应电动势的正方向，当线圈以垂直于导线的速度靠近导线时，线圈中的感应电动势\_\_\_\_\_。(填“> 0”，“< 0”或“= 0”)

## 答案

< 0

## 【0302A09】

交流发电机是根据下列哪个原理制成的？

(A) 电磁感应

(B) 通电线圈在磁场中受力转动

(C) 奥斯特实验

(D) 磁极之间的相互作用

## 答案

A

## 2.2 感生电动势

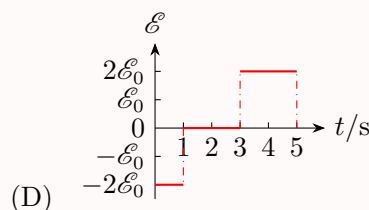
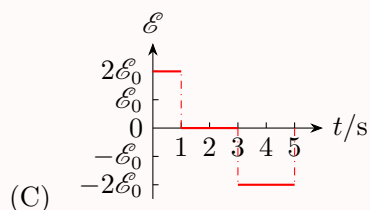
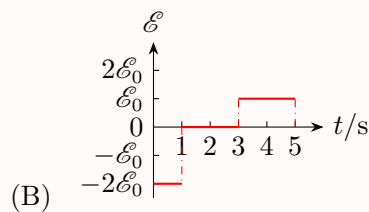
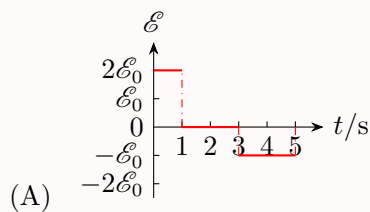
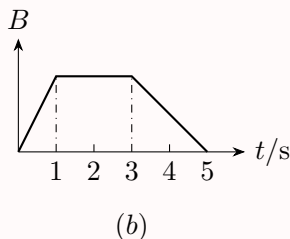
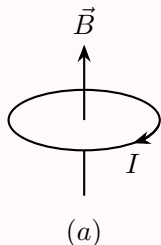
感生电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = \int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

## 【0302A10】

在竖直向上的匀强磁场中，水平放置一个不变形的单匝金属圆线圈，规定线圈中感应电流的正方向如下图所示 (a) 所示，当磁场的磁感应强度的大小  $B$  随时间如下图所示 (b) 变化时，正确表示线圈中感应电动势  $\mathcal{E}$  变化的是



答案

A

## 【0302B19】

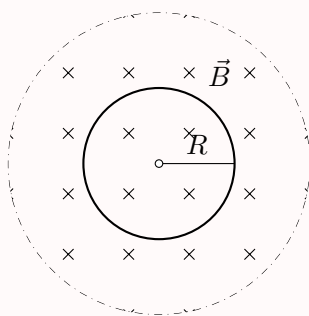
长为  $4a$  的导线组成一正方形回路，总电阻为  $R$ ，现有均匀变化的匀强磁场  $\vec{B}$  垂直穿过该回路包围的平面，测得回路中感应电流为  $I$ ，则  $\frac{dB}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$\frac{IR}{a^2}$$

## 【0302B20】

均匀磁场  $\vec{B}$  被局限在圆柱形空间，半径为  $R$  的圆线圈置于其中，线圈的中心与磁场中心重合， $\vec{B}$  垂直于线圈平面，如图所示。如果磁感应强度方向不变，其大小随时间  $t$  发生变化： $B = 3t^2 + 2t + 1$ ，则线圈上各点的感生电场的大小为\_\_\_\_\_。

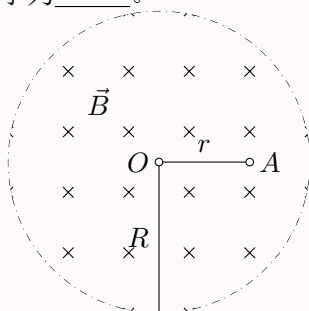


答案

$$(3t + 1)R$$

【0302B21】

如图所示，一个限定在半径为  $R$  的圆柱体内的均匀磁场以  $|\frac{dB}{dt}| = k$  的恒定变化率减弱，则位于圆柱内距离轴线为  $r$  的  $A$  点的感生电场的大小为\_\_\_\_\_。

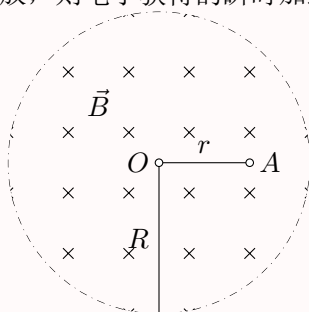


答案

$$\frac{1}{2}kr$$

【0302B22】

如图所示，一个限定在半径为  $R$  的圆柱体内的均匀磁场以  $|\frac{dB}{dt}| = k$  的恒定变化率减弱，若一电子从位于圆柱内距离轴线为  $r$  的  $A$  点静止释放，则电子获得的瞬时加速度方向为\_\_\_\_\_。

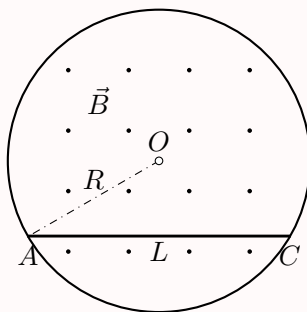


## 答案

垂直  $OA$  向上

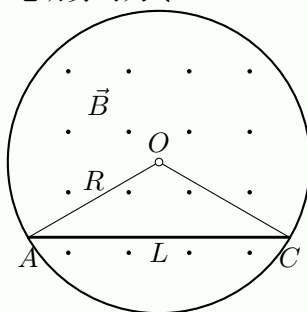
## 【0302C15】

在半径为  $R$  的圆柱形体积内，充满磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场。有一长为  $L$  的金属棒  $AC$  置放在磁场中， $\vec{B}$  的方向垂直纸面向外，如图所示，设磁场在减少， $\frac{dB}{dt} = -k$ ， $k$  为一正值常量。求棒中的感生电动势的大小和方向。



## 解答

圆柱形磁场变化时所激发的感生电场在与圆柱同轴的圆周上各点的大小相等，方向沿圆周的切线方向。所以沿任意半径方向摆放的导体中感生电动势均为零。



因此，添加  $OA$ 、 $OC$ ，与  $AC$  构成闭合回路，则回路的感应电动势（感生电动势）就是  $AC$  上的感生电动势。

取垂直纸面向外为磁通量的正方向，则逆时针为回路绕行的正方向。假定  $t$  时刻磁场的大小为  $B$ ，则通过回路的磁通量

$$\Phi_B = BS = B \cdot \frac{1}{2}L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{1}{2}BL\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

由法拉第电磁感应定律可得回路的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{1}{2}L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{2}L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot (-k) = \frac{1}{2}kL\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

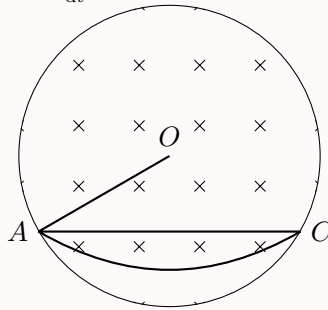
电动势为正，说明方向就是回路绕行的正方向，即逆时针方向，因此棒中感生电动势的方向是从  $A$  指向  $C$ 。

## 评分标准

1. 感生电场的大小和方向各得 1 分，沿半径方向感生电动势为零得 1 分
2. 构造回路得 1 分，指定正方向得 1 分
3. 计算磁通量得 4 分
4. 法拉第电磁感应定律计算感应电动势得 5 分
5. 感生电动势方向得 1 分

## 【0302A11】

圆柱形空间内有一匀强磁场  $\vec{B}$ ，与磁场垂直的平面内放置着直导线  $\overline{AC}$ 、 $\overline{OA}$  和弯曲导线  $\widehat{AC}$ ，如图所示，其中  $O$  为圆心。若  $\vec{B}$  的大小以速率  $\frac{dB}{dt}$  发生变化，则



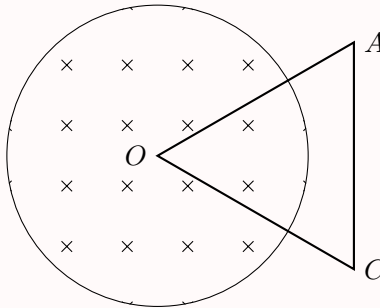
- (A) 电动势只有在  $\overline{AC}$  导线中产生  
 (B) 电动势只有在弯曲导线  $\widehat{AC}$  中产生  
 (C) 电动势在  $\overline{AC}$  和  $\overline{OA}$  中都产生  
 (D) 电动势在  $\overline{AC}$  和  $\widehat{AC}$  中都产生

## 答案

D

## 【0302A12】

半径为  $R$  的圆柱形空间中存在均匀磁场， $\vec{B}$  的方向与柱的轴线平行， $\vec{B}$  随时间减弱，变化率  $\frac{dB}{dt}$  为常量。如图所示，一边长为  $\frac{3}{2}R$  的等边三角形导体回路放在磁场中， $AC$  上的感应电动势为



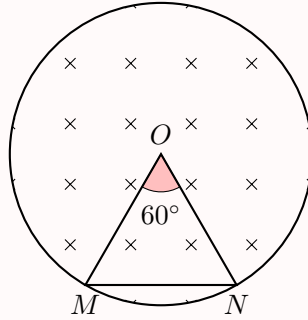
- (A)  $\frac{\pi R^2}{6} \frac{dB}{dt}$       (B)  $\frac{\sqrt{3}R^2}{16} \frac{dB}{dt}$       (C)  $\frac{\pi R^2}{18} \frac{dB}{dt}$       (D) 0

答案

A

【0302B23】

如图所示，半径为  $R$  的圆柱形空间 (横截面) 内分布着均匀的磁场，磁感应强度  $B$  的大小随时间的变化式为:  $B = kt$  (其中  $k$  为正值常数)，与磁场垂直的平面内有一边长为  $R$  的等边三角形  $OMN$  导体，则导体  $OM$  的中点的感生电场的大小等于\_\_\_\_\_。

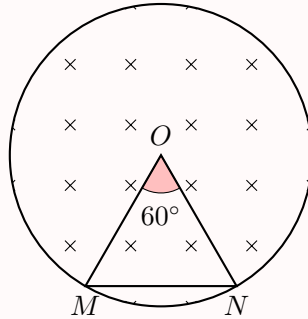


答案

 $\frac{1}{4}kR$ 

【0302B24】

如图所示，半径为  $R$  的圆柱形空间 (横截面) 内分布着均匀的磁场，磁感应强度  $B$  的大小随时间的变化式为:  $B = kt$  (其中  $k$  为正值常数)，与磁场垂直的平面内有一边长为  $R$  的等边三角形  $OMN$  导体，则导体  $ON$  中的感应电动势等于\_\_\_\_\_。

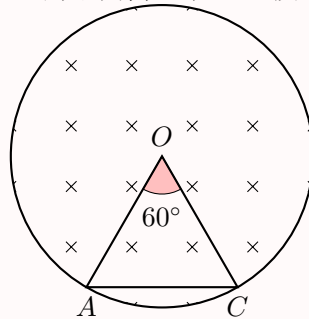


答案

0

## 【0302C16】

如图所示, 半径为  $R$  的圆柱形空间 (横截面) 内分布着均匀的磁场  $\vec{B}$ , 磁感应强度的大小随时间的变化式为  $B = k \cos(\omega t)$  (其中  $k$ 、 $\omega$  均为常数)。(1) 求圆柱形空间内外的感生电场的分布; (2) 边长为  $R$  的等边三角形  $OAC$  导体置放与磁场中垂直的平面内, 求  $AC$  段中的感应电动势。



## 解答

(1)  $r < R$ , 圆柱内,

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_{i1}(2\pi r) = [k\omega \sin(\omega t)](\pi r^2)$$

$$E_{i1} = \frac{1}{2}kr\omega \sin(\omega t)$$

$r > R$ , 圆柱外,

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_{i2}(2\pi r) = [k\omega \sin(\omega t)](\pi R^2)$$

$$E_{i2} = \frac{kR^2\omega}{2r} \sin(\omega t)$$

(2) 感生电场沿圆周切线方向, 因此沿任意半径方向的感生电动势均为零, 所以  $AC$  段中的感生电动势就等于整个等边三角形回路的感生电动势, 以垂直纸面向里为磁通量的正方向, 则感应电动势的正方向为顺时针方向。

$$\Phi = BS = \frac{1}{2} \times R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R \times B = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 B$$

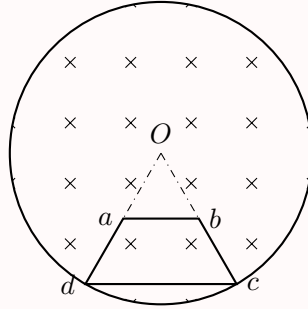
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 k\omega \sin(\omega t)$$

## 评分标准

1. 两个区域的感生电场各 5 分
2. 感生电动势 5 分

## 【0302B25】

如图，一垂直向内的均匀磁场局限在半径为  $R$  的圆柱形空腔内， $\frac{dB}{dt}$  为一恒量，且随时间减少，腔内放置一等腰梯形金属线框， $cd = R$ ， $ab = \frac{1}{2}R$ ，则线框中的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。

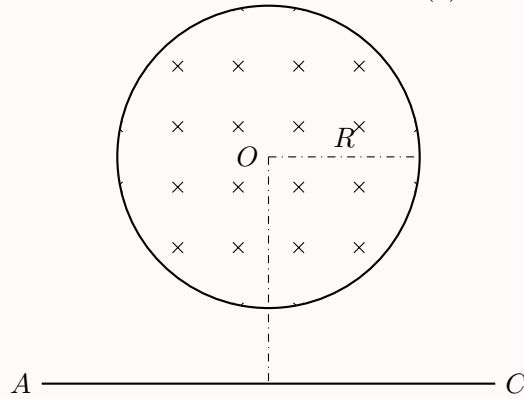


## 答案

$$\frac{3\sqrt{3}}{16}R^2 \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

## 【0302C17】

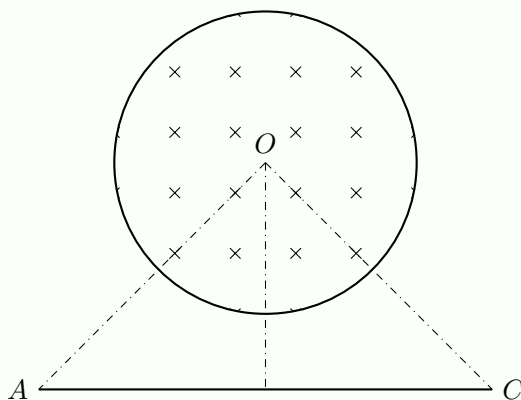
如图所示，均匀磁场被限制在半径为  $R$  的圆柱形空间，磁感应强度随时间均匀增强： $\frac{dB}{dt} = k$ ， $k$  为一正值常数。在圆柱形空间外与磁场垂直的一平面内有长  $2L$  的导体棒  $AC$ ，与圆柱轴线相距  $L$ 。 $O$  在  $AC$  中垂面上。(1) 计算  $AC$  上的感应电动势，并指出哪端电势高；(2) 求  $A$  点的感生电场。



## 解答

(1) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向，顺时针为感应电动势和感生电场的正方向。





由于感生电场沿切向方向，因此任意半径上的感生电动势均为零，因此  $AC$  上的电动势就是  $OAC$  整个回路的电动势，所以

$$\Phi = \frac{1}{4}\pi R^2 B$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{4}\pi R^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{4}\pi R^2 k$$

负号表示电动势沿逆时针方向，因此  $C$  端电势高。

(2)

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_i(2\pi r) = -k\pi R^2$$

$$E_i = -\frac{kR^2}{2r}$$

$A$  点， $r = \sqrt{2}L$ ，所以  $A$  点的感生电场

$$E_i = -\frac{kR^2}{2\sqrt{2}L}$$

负号表示感生电场沿逆时针方向。

#### 评分标准

1. 感生电动势 6 分，方向 1 分，共 7 分
2. 感生电场大小 7 分，方向 1 分，共 8 分

#### 【0302B26】

有一无限长螺线管，每米有线圈 800 匝，在其中心放置一个圆形小线圈，其匝数为 30，其半径为 0.01 米，且使其轴线与无限长螺线管轴线平行，若在 0.01 秒内，使螺线管中电流均匀地从 0 增加到 5 安，则圆形小线圈中感应电动势等于\_\_\_\_\_ 伏。

答案

$$1200\pi\mu_0$$

【0302B27】

半径为  $a$  的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为  $n$ ，通以交变电流  $i = I_m \sin(\omega t)$ ，则围在管外的同轴圆形回路（半径为  $r$ ）上的感生电动势为\_\_\_\_\_。

答案

$$-\mu_0\pi\omega a^2 n I_m \cos(\omega t)$$

解析

密绕螺线管的磁场只分布在管内，管内为均匀磁场，管外磁场为零，所以管内磁场可以由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot L = \mu_0 n L i$$

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 n I_m \sin \omega t$$

所以通过管外半径为  $r$  的同轴圆形回路的磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \pi a^2 = \mu_0 \pi a^2 n I_m \sin \omega t$$

注意这里只有管内部分有磁场，管外没有磁场，所以面积只能用螺线管的截面积。所以感生电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \pi \omega a^2 n I_m \cos \omega t$$

或者

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi a^2 = -\mu_0 \pi \omega a^2 n I_m \cos \omega t$$

【0302B28】

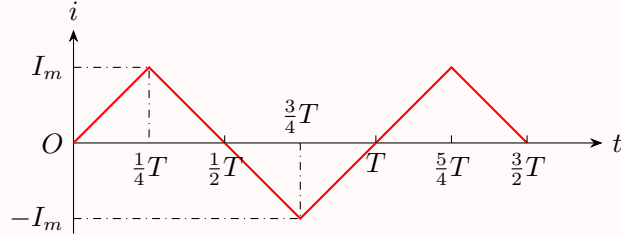
半径为  $R$  的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为  $n$ ，通有交变电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ ，则围在管内的半径为  $r$  的同轴圆形回路上的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\mu_0 n I_0 \omega \pi r^2 |\cos(\omega t)|$$

## 【0302C18】

半径为  $R$  的长直螺线管单位长度上密绕有  $n$  匝线圈。在管外有一包围着螺线管、面积为  $S$  的圆线圈，其平面垂直于螺线管轴线。螺线管中电流  $i$  随时间作周期为  $T$  的变化，如图所示。求圆线圈中的感生电动势  $\mathcal{E}$ 。画出  $\mathcal{E} - t$  曲线，注明时间坐标。



## 解答

无限长直密绕螺线管的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot L = \mu_0 n L i$$

$$B = \mu_0 n i$$

由于螺线管的磁场只分布在管内，而且管内磁场可以近似认为是匀强磁场，所以通过线圈的磁通量为

$$\Phi = \mu_0 n i \pi R^2$$

所以感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n \pi R^2 \frac{di}{dt}$$

当  $0 < t < \frac{T}{4}$  时， $\frac{di}{dt} = \frac{I_m}{T/4} = \frac{4I_m}{T}$ ，感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T}$$

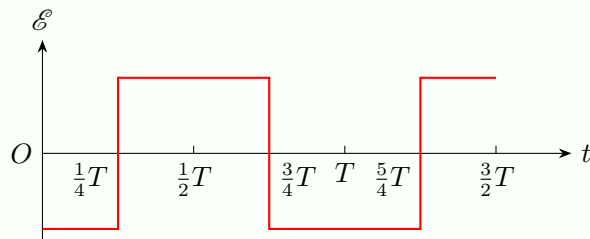
当  $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$  时， $\frac{di}{dt} = \frac{-2I_m}{T/2} = -\frac{4I_m}{T}$ ，感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \left(-\frac{4I_m}{T}\right) = \frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T}$$

当  $\frac{3T}{4} < t < T$  时， $\frac{di}{dt} = \frac{I_m}{T/4} = \frac{4I_m}{T}$ ，感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T}$$

所以  $\mathcal{E} - t$  曲线如下图所示：

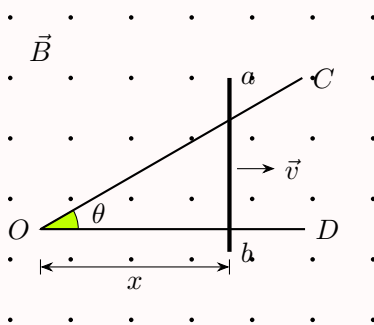


## 评分标准

1. 计算磁场 5 分
2. 计算磁通量 2 分
3. 计算感应电动势 3 分
4. 计算并画图 5 分, 无计算只画图最多 3 分

## 【0302C19】

如图所示, 有一弯成  $\theta$  角的金属框架  $OCD$ , 一导线  $ab$  垂直于  $OD$  以恒定速度  $\vec{v}$  在金属框架上滑动, 设  $\vec{v}$  垂直于  $ab$  向右。已知均匀磁场的方向垂直纸面向外, 设初始  $t = 0$  时,  $x = 0$ , 分别求以下情况框架内的感应电动势  $\mathcal{E}$  的变化规律。(1) 磁场不随时间改变; (2) 磁场方向不变, 其大小  $B = kt$  ( $k$  为大于 0 的常数)



## 解答

以垂直纸面向外为磁通量正方向, 逆时针为感应电动势的正方向。  $t$  时刻, 线框的面积

$$S = \frac{1}{2}x \times x \tan \theta = \frac{1}{2}v^2 t^2 \tan \theta$$

通过线框的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{1}{2}Bv^2 t^2 \tan \theta$$

(1) 磁场不随时间改变, 则感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bv^2 t \tan \theta$$

负号表示感应电动势的方向为顺时针方向, 即从  $a$  指向  $b$ 。

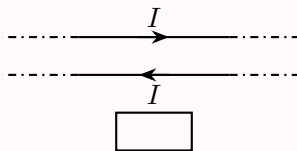
(2)  $B = kt$ , 则

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2}Bv^2 t^2 \tan \theta = \frac{1}{2}kv^2 t^3 \tan \theta \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3}{2}kv^2 t^2 \tan \theta\end{aligned}$$

负号表示感应电动势的方向为顺时针方向, 即从  $a$  指向  $b$ 。

## 【0302A13】

两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流  $I$ ，并各以  $\frac{dI}{dt}$  的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内 (如图)，则



- (A) 线圈中无感应电流  
(B) 线圈中感应电流为顺时针方向  
(C) 线圈中感应电流为逆时针方向  
(D) 线圈中感应电流方向不确定

## 答案

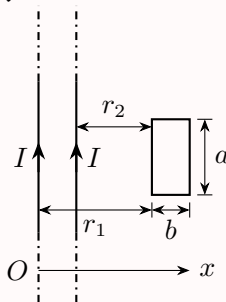
B

## 解析

在矩形线圈所在处，下导线比上导线所产生的磁场大，而下导线产生的磁场的方向垂直纸面向外，上导线产生的磁场的方向垂直纸面向内，所以合磁场的方向垂直纸面向外。当电流变化时，磁场大小也跟着发生变化，所以磁通量也发生变化，电流增大，磁通量增大，根据楞次定律，感应电流的所产生的磁场要试图阻止磁通量的增加，所以感应电流的方向应该为顺时针方向。

## 【0302C20】

如图所示，两根平行长直导线和一个矩形导线框共面，导线框长为  $a$  宽为  $b$ ，导线框的一条边与长直导线平行，到两长直导线的距离分别为  $r_1$ 、 $r_2$ 。已知两导线中电流都为  $I = I_0 \sin(\omega t)$ ，其中  $I_0$  和  $\omega$  为常数， $t$  为时间。求导线框中的感应电动势。



## 解答

任意  $t$  时刻，两根通电导线的磁场分别由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1 \cdot (2\pi x) = \mu_0 I_0 \sin(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x}$$

$$B_2 \cdot [2\pi(x - r_1 + r_2)] = \mu_0 I_0 \sin(\omega t)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi(x - r_1 + r_2)}$$

在线框所在处，两个磁场的方向都是垂直纸面向里，所以总的磁场方向也是垂直纸面向里，大小为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x - r_1 + r_2} \right]$$

所以通过线框的磁通量为

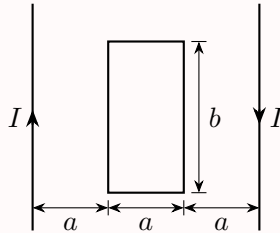
$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{r_1}^{r_1+b} B a \, dx = \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x - r_1 + r_2} \right] a \, dx \\ &= \frac{\mu_0 a I_0 \sin(\omega t)}{2\pi} [\ln x + \ln(x - r_1 + r_2)]_{r_1}^{r_1+b} = \frac{\mu_0 a I_0 \sin(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{(r_1 + b)(r_2 + b)}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a I_0 \omega \cos(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{(r_1 + b)(r_2 + b)}{r_1 r_2}$$

### 【0302C21】

两根平行长直导线相距  $3a$ ，置于真空中，每根导线通有随时间周期性变化的电流  $I = I_0 \sin(\omega t)$  ( $I_0$ 、 $\omega$  均为常数)，但方向相反 (如图)。求：(1) 两导线间的平面内磁场的分布；(2) 通过图中边长为  $a$  和  $b$  的矩形回路中的磁通量；(3) 任意时刻矩形回路中的感应电动势。



### 解答

(1) 以左边导线所在处为坐标原点，向右为  $x$  轴正方向。左边电流的磁场，方向垂直纸面向里，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1 \cdot (2\pi x) = \mu_0 I_0 \sin(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x}$$

右边电流的磁场，方向垂直纸面向里，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_2 \cdot [2\pi(3a - x)] = \mu_0 I_0 \sin(\omega t)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi(3a - x)}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi(3a - x)}$$

(2) 以垂直纸面向里为磁通量的正方向

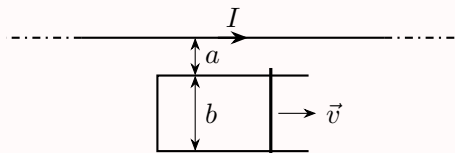
$$\Phi = \int_a^{2a} \left[ \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi(3a - x)} \right] b dx = \frac{\ln 2}{\pi} \mu_0 I_0 b \sin(\omega t)$$

(3) 以顺时针为感应电动势的正方向，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\ln 2}{\pi} \mu_0 I_0 b \omega \cos(\omega t)$$

### 【0302C22】

如图所示，真空中一长直导线通有电流  $I = I_0 e^{-\lambda t}$  (式中  $I_0$ 、 $\lambda$  为常量， $t$  为时间)，有一带滑动边的矩形导线框与长直导线平行共面，二者相距  $a$ 。矩形线框的滑动边与长直导线垂直，它的长度为  $b$ ，并且以匀速  $\vec{v}$  (方向平行长直导线) 滑动。若忽略线框中的自感电动势，并设开始时滑动边与对边重合，试求：(1) 任意时刻  $t$  穿过矩形线框所包围面积上的磁通量；(2) 任意时刻  $t$  在矩形线框内的感应电动势  $\mathcal{E}$ ，并讨论其方向。



### 解答

(1) 以  $t = 0$  时刻滑动边所在位置为坐标原点，水平向右建立  $x$  轴，则任意  $t$  时刻，滑动边的位置  $x = vt$ ，长直导线中通过的电流  $I = I_0 e^{-\lambda t}$ ，它在空间所激发的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I_0 e^{-\lambda t}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0 e^{-\lambda t}}{2\pi r}$$

在线框所在处的磁场的方向是垂直纸面向里，通过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{a+b} Bx dr = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_0 e^{-\lambda t}}{2\pi r} vt dr = \frac{\mu_0 I_0 e^{-\lambda t}}{2\pi} vt \ln \frac{a+b}{a} = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} t e^{-\lambda t} \ln \frac{a+b}{a}$$

这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。

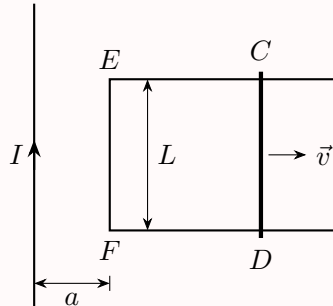
(2) 所以感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} [e^{-\lambda t} + t e^{-\lambda t} \times (-\lambda)] = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} (\lambda t - 1) e^{-\lambda t}$$

当  $\lambda t - 1 < 0$ , 即  $t < \frac{1}{\lambda}$  时,  $\mathcal{E} < 0$ , 感应电动势的方向为逆时针; 当  $\lambda t - 1 > 0$ , 即  $t > \frac{1}{\lambda}$  时,  $\mathcal{E} > 0$ , 感应电动势的方向为顺时针。

### 【0302C23】

如图所示, 一长直导线载有电流  $I$ , 相距  $a$  处有一共面的导轨, 宽  $L$ , 导体棒  $CD$  以速度  $\vec{v}$  沿着导轨匀速向右滑动, 初始时刻  $CD$  棒与  $EF$  重合。  $t$  时刻导体棒运动到图中所示位置, 试求: (1) 通过回路所包围的面积磁通量 (电流  $I$  恒定); (2) 若长直导线上的电流为  $I = I_0 \cos(\omega t)$ , 那么回路总的感应电动势大小为多少。



### 解答

(1) 磁场垂直纸面向里, 所以以垂直纸面向里为磁通量的正方向,

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B \cdot (2\pi r) &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ \Phi &= \int_a^{a+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{a+vt}{a} \end{aligned}$$

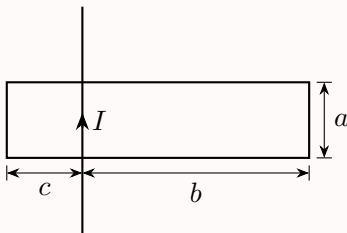
(2) 以顺时针为感应电动势的正方向

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{a+vt}{a} = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} \cos(\omega t) \ln \frac{a+vt}{a} \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} \left[ -\omega \sin(\omega t) \ln \frac{a+vt}{a} + \cos(\omega t) \frac{v}{a+vt} \right] \end{aligned}$$



## 【0302C24】

一无限长直导线通有电流  $I$ ，有一矩形导线框与其共面放置，如图所示，已知线框短边与直导线平行，且  $b = 3c$ ，求：(1) 线框包围面积上的磁通量；(2) 设电流恒定，线框由图示位置以速度  $v$  垂直导线向左平移，当两条短边与导线等距时，线框的感应电动势  $\mathcal{E}_1$  等于多少？(3) 若线框不动，而电流随时间  $t$  变化，即  $I = I_0 \sin(\omega t)$ ，则线框的感应电动势  $\mathcal{E}_2$  又等于多少？



## 解答

(1) 导线左边磁场垂直纸面向外，右边磁场垂直纸面向里，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

以垂直纸面向里为磁通量正方向，则通过整个线框的磁通量为

$$\Phi = \int_c^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3$$

(2) 设  $t$  时刻，线框左边与载流直线的距离为  $x$ ，则右边与载流直线的距离为  $4c - x$ ，此时通过整个线框的磁通量为

$$\Phi = \int_x^{4c-x} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{4c-x}{x}$$

所以感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[ \frac{1}{4c-x}(-1) - \frac{1}{x} \right] \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left[ \frac{1}{4c-x} + \frac{1}{x} \right]$$

当两条短边与导线等距时， $x = 2c$ ，因此

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi c}$$

另一种方法，用动生电动势公式计算。当两条短边与导线等距时， $x = 2c$ ，两条短边所在位置的磁场大小相等，都是  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi c}$ ，但左边磁场垂直纸面向外，右边磁场垂直纸面向里，而两边的运动速度大小都是  $v$ ，方向都是向左，因此左边的感应电动势向上，右边的感应电动势向下，大小都是

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi c} a v = \frac{\mu_0 I a v}{4\pi c}$$

因此整个线框总的感应电动势为

$$\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi c}$$

磁通量方向垂直向里为正，因此感应电动势顺时针为正。

(3) 线框不动， $I = I_0 \sin(\omega t)$ ，则通过整个线框的磁通量

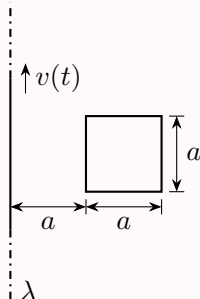
$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3 = \frac{\mu_0 I_0 a \ln 3}{2\pi} \sin(\omega t)$$

因此线框的感应电动势

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 a \ln 3}{2\pi} \omega \cos(\omega t)$$

### 【0302C25】

无限长直导线均匀带电，与一正方形线圈共面并与其一对边平行，如图所示。已知长直导线的电荷线密度为  $\lambda$ ，若让长直导线沿着其长度方向作变速率运动，运动速率满足  $\frac{dv}{dt} = k > 0$ ，求：(1) 运动后，长直细导线上形成的等效电流的强度；(2) 设正方形线圈中的总电阻为  $R$ ，以长直导线开始运动为计时起点，求  $t$  时刻正方形线圈中感应电流  $i(t)$  的大小及方向。



### 解答

(1) 等效电流为

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \lambda v$$

(2) 任意  $t$  时刻，它所激发的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 \lambda v$$

$$B = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}$$

在线框所在处，磁场的方向垂直纸面向里，所以通过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{2a} B a dr = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 \lambda v a}{2\pi} \ln \frac{2a}{a} = \frac{\mu_0 \lambda a v}{2\pi} \ln 2$$

这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \lambda a}{2\pi} (\ln 2) \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu_0 \lambda a k}{2\pi} \ln 2$$

所以感应电流为

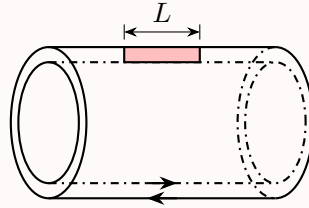
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 \lambda a k}{2\pi R} \ln 2$$

负号表示感应电流的方向为逆时针方向，所以其大小为

$$|i| = \frac{\mu_0 \lambda a k}{2\pi R} \ln 2$$

### 【0302C26】

一同轴空心直圆筒电缆，内、外筒半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  (筒壁厚度可以忽略)，电流  $I$  沿内筒流出去，沿外筒流回，如图所示。求：(1) 磁感应强度的空间分布；(2) 通过长度为  $L$  的一段截面 (图中阴影部分) 的磁通量；(3) 若电流随时间  $t$  变化： $I = I_0 \sin(\omega t)$ ，图中阴影回路中的感生电动势将多大？



### 解答

(1) 电流分布具有柱对称性，可以由安培环路定理求磁场分布

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$r < R_1,$$

$$\begin{aligned} B_1(2\pi r) &= \mu_0 \times 0 \\ B_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$R_1 < r < R_2,$$

$$\begin{aligned} B_2(2\pi r) &= \mu_0 I \\ B_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned}$$

$$r > R_2,$$

$$\begin{aligned} B_3(2\pi r) &= \mu_0 (I - I) \\ B_3 &= 0 \end{aligned}$$

(2) 图中阴影区域，磁场垂直纸面向外，所以以垂直纸面向外为磁通量的正方向，则

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3) 以上以垂直纸面向外为磁通量的正方向，所以逆时针为感应电动势的正方向，

$$\Phi = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_0 I_0 L \sin(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 L \omega \cos(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### 评分标准

1. 安培环路定理 2 分
2. 每个区域的磁场各 2 分共 6 分
3. 磁通量计算 3 分
4. 感应电动势计算 4 分

### 【0302A14】

$\oint_L \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ ，式中  $\vec{E}_K$  为感生电场的电场强度。此式表明

- (A) 闭合曲线  $L$  上  $\vec{E}_K$  处处相等  
 (B) 感生电场是保守力场  
 (C) 感生电场的电场强度线不是闭合曲线  
 (D) 在感生电场中不能像对静电场那样引入电势的概念

### 答案

D

### 解析

感生电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

感生电场  $\vec{E}_K$  沿任意一个闭合曲线的环流等于通过该闭合曲线所围面积的磁通量随时间的变化率的负数，等于沿该闭合曲线的感生电动势。这里并没有要求闭合曲线上各点的感生电场相等。而从上式也可以看出一般情况下感生电场沿任意闭合曲线的积分并不等于零，因此感生电场不是保守场，不能定义势能。从这里，看不出感生电场的电场线是不是闭合曲线。

## 【0302A15】

下列有关静电场和感生电场说法正确的是

- (A) 静电场和感生电场都是非保守场  
(B) 静电场和感生电场都是保守场  
(C) 静电场是保守场，感生电场是非保守场  
(D) 静电场是非保守场，感生电场是保守场

## 答案

C

## 【0302B29】

感生电场是由\_\_\_\_\_激发的。

## 答案

变化的磁场

## 【0302B30】

感生电场沿着任一闭合曲面的积分值  $\oint_S \vec{E}_K \cdot d\vec{S}$  \_\_\_\_\_ 0 (填入 “<”、“>” 或 “=” )。

## 答案

=

### 3、互感和自感

#### 3.1 互感

$$\Psi = Mi$$

$$\mathcal{E} = -M \frac{di}{dt}$$

#### 【0303A01】

两个相距不太远的平面圆线圈，其中一线圈的轴线恰通过另一线圈的圆心，下面哪种情况互感系数近似为零？

- (A) 两线圈的轴线互相平行放置 (B) 两线圈并联  
(C) 两线圈的轴线互相垂直放置 (D) 两线圈串联

#### 答案

C

#### 解析

计算互感的基本方法是假定一个线圈中通过电流  $I$ ，计算通过另一线圈的磁通量  $\Phi$  (磁链  $\Psi$ )，二者的比值即为互感

$$M = \frac{\Phi}{I}$$

如果互感近似为零，则说明通过另一线圈的磁通量近似为零，所以磁场线与线圈平面平行。所以，两线圈的轴线互相垂直放置时，互感近似为零。

#### 【0303A02】

在真空中一个通有电流的线圈  $a$  所产生的磁场内有另一个线圈  $b$ ， $a$  和  $b$  相对位置固定。若线圈  $b$  中电流为零 (断路)，则线圈  $b$  与  $a$  间的互感系数

- (A) 一定为零 (B) 一定不为零  
(C) 可为零也可不为零，与线圈  $b$  中电流无关 (D) 是不可能确定的

#### 答案

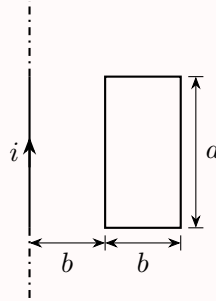
C

#### 解析

互感与两个线圈的形状、位置等有关，与线圈中是否通电无关。计算互感的基本思路是假定一个线圈中通以电流，计算另一线圈中的磁通量或磁链，二者相除即为互感。

## 【0303B01】

如图所示，矩形线圈由  $N$  匝导线绕成，与其共面的长直导线通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ ，则它们之间的互感系数  $M =$ \_\_\_\_\_。

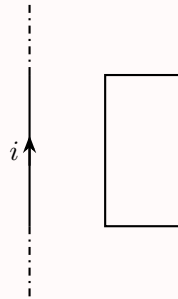


## 答案

$$\frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln 2$$

## 【0303B02】

如图所示，矩形线圈和长直导线之间的互感系数为  $M$ ，长直导线通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ 。当长直导线中电流  $i = 0$  的瞬间，通过矩形线圈的磁通量为\_\_\_\_\_。

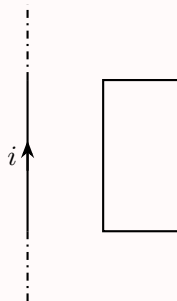


## 答案

$$0$$

## 【0303B03】

如图所示，矩形线圈和长直导线之间的互感系数为  $M$ ，长直导线通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ 。当长直导线中电流  $i = 0$  的瞬间，矩形线圈中的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。



答案

$$MI_0\omega$$

### 3.2 自感

$$\Psi = Li$$

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

【0303A03】

当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变，且无铁磁性物质时，若线圈中的电流强度变小，则线圈的自感系数

- (A) 变大，与电流成反比关系                      (B) 变小  
(C) 变大，但与电流不成反比关系              (D) 不变

答案

D

【0303A04】

自感为 0.25 H 的线圈，当电流在 4 s 内由 2 A 均匀减小到零时，线圈中自感电动势的大小为

- (A) 0.125 V                      (B) 3.5 V                      (C) 0.031 V                      (D) 0.0078 V

答案

A



## 【0303B04】

一自感线圈中, 电流强度在 0.002 s 内均匀地由 10 A 增加到 12 A, 此过程中线圈内自感电动势为 400 V, 则线圈的自感系数为  $L = \underline{\hspace{1cm}}$  H。

## 答案

0.4

## 解析

根据自感电动势的定义, 有

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \left| \frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}} \right| = \left| \frac{\mathcal{E} \Delta t}{\Delta I} \right| = \frac{400 \times 0.002}{12 - 10} = 0.4 \text{ H}$$

## 【0303B05】

半径为  $a$  的无限长密绕直螺线管, 单位长度上的匝数为  $n$ , 则单位长度上的自感系数等于  $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

## 答案

 $\mu_0 n^2 \pi a^2$ 

## 【0303B06】

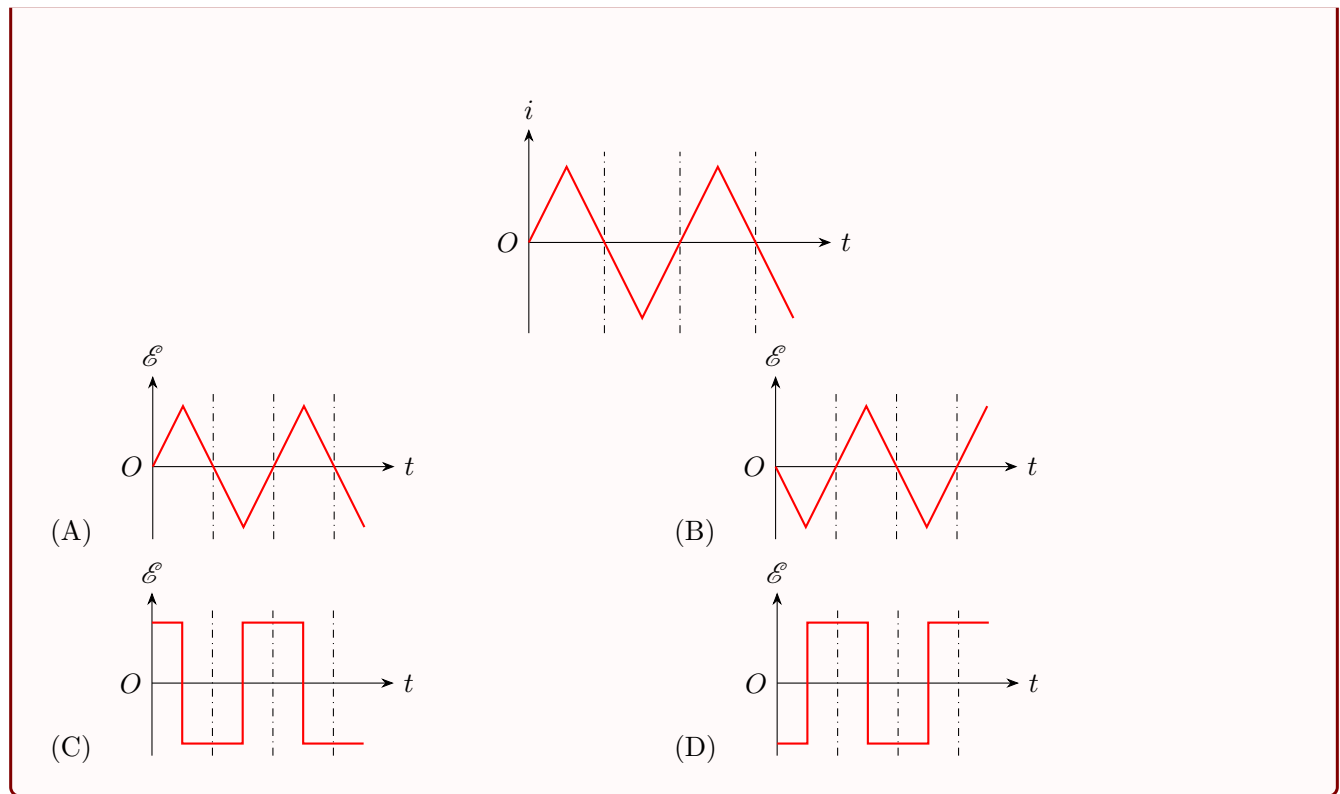
单位长度上的匝数为  $n$  的无限长密绕直螺线管, 单位长度上的自感系数为  $L$ , 螺线管中通有电流  $i = I_0 \sin(\omega t)$ , 其中  $I_0$ 、 $\omega$  为常数。当螺线管中电流  $i = 0$  的瞬间, 单位长度的螺线管上的感应电动势的大小为  $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

## 答案

 $LI_0\omega$ 

## 【0303A05】

在一自感线圈中通过的电流  $i$  随时间  $t$  的变化规律如图所示, 若以  $i$  的正流向作为  $\mathcal{E}$  的正方向, 则代表线圈内自感电动势  $\mathcal{E}$  随时间  $t$  变化规律的曲线应为



答案

D

解析

法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

自感电动势

$$\mathcal{E} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \propto -\frac{di}{dt}$$

第一小段, 电流线性增大,  $\frac{di}{dt} > 0$ , 自感电动势为一个负的不变的值。第二小段, 电流线性减小,  $\frac{di}{dt} < 0$ , 自感电动势为一个正的不变的值。

### 3.3 串联线圈的自感

无漏磁

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

串联线圈的自感系数

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

## 【0303A06】

已知一螺绕环的自感系数为  $L$ 。若将该螺绕环锯成两个半环式的螺线管，则两个半环螺线管的自感系数

- (A) 都等于  $\frac{1}{2}L$  (B) 有一个大于  $\frac{1}{2}L$ ，另一个小于  $\frac{1}{2}L$   
(C) 都大于  $\frac{1}{2}L$  (D) 都小于  $\frac{1}{2}L$

## 答案

D

## 解析

两个自感分别为  $L_1$ 、 $L_2$ ，互感为  $M$  的线圈顺接串联时等效于一个自感线圈，其自感为

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

当  $L_1 = L_2$  时，显然有

$$L_1 = L_2 = \frac{L}{2} - M$$

其中  $M$  为正数，所以两个半环螺线管的自感系数均小于  $\frac{1}{2}L$ 。

## 3.4 自感磁能

自感磁能

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2$$

## 【0303A07】

一无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为  $n$ ，横截面面积为  $S$ ，管内外均为真空。当该螺线管通有恒定电流  $I$  时

- (A) 电流恒定，则单位长度上自感为 0 (B) 单位长度上自感为  $\mu_0 n^2 S$ ，与电流无关  
(C) 单位长度上自感为  $\mu_0 n S$ ，与电流无关 (D) 单位长度上储能与电流  $I$  成正比

## 答案

B

## 【0303B07】

真空中一长直螺线管通有电流  $I$ ，螺线管面积为  $S$ ，长度为  $L$ ，单位长度的匝数为  $n$ ，该螺线管储存的磁能为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{2}\mu_0 n^2 L S I^2$$

【0303B08】

长直密绕螺线管的半径为  $R$ ，单位长度上的匝数为  $n$ ，管内外均为真空。当该螺线管通有电流  $I$  时，单位长度的螺线管储存的磁能为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi R^2 I^2$$

【0303B09】

一环内外半径差别不大、平均半径为  $R$ 、截面积为  $S$  的环形螺线管 (螺绕环)，其上密绕有  $N$  匝线圈，管内为真空。当线圈中通有电流强度为  $I$  的电流时，管内存储的磁能为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{\mu_0 N^2 S I^2}{4\pi R}$$

【0303B10】

自感为  $0.25\text{ H}$  的线圈中，当电流在  $1\text{ s}$  内由  $2\text{ A}$  均匀减小到  $0$  时，自感磁能变化了\_\_\_\_\_J。

答案

$$0.5$$

【0303B11】

有两根内无铁芯的长直螺线管  $A$ 、 $B$ ，它们的半径和总匝数都相等，二者的长度关系为  $l_A = 2l_B$ ，电流关系为  $I_A = 2I_B$ 。假设两螺线管的长度均远大于半径，则二者的自感磁能之比  $W_{mA} : W_{mB} =$ \_\_\_\_\_。

答案

$$2 : 1$$

【0303B12】

有两个长直密绕螺线管，管内均为真空，长度及总匝数都相等，半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ 。设  $R_1 : R_2 = 1 : 2$ ，当将这两个螺线管串联在电路中通电稳定后，磁能之比  $W_{m1} : W_{m2} =$ \_\_\_\_\_。

## 答案

1 : 4

## 【0303B13】

真空中两只长直螺线管 1 和 2，长度相等，单层密绕匝数相同，直径之比  $d_1 : d_2 = 1 : 4$ 。当它们通以相同电流时，两螺线管储存的磁能之比  $W_{m1} : W_{m2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

1 : 16

## 解析

假定螺线管中的电流为  $I$ ，长度为  $L$ ，匝数为  $N$ ，直径为  $d$ ，忽略边缘效应，即可视为无限长直螺线管，则管内磁场可由安培环路定理求得

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B \cdot L &= \mu_0 N I \\ B &= \frac{\mu_0 N I}{L}\end{aligned}$$

所以通过螺线管的磁链为

$$\Phi = NBS = N \times \frac{\mu_0 N I}{L} \times \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\mu_0 N^2 I \pi d^2}{4L}$$

所以自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4L}$$

所以磁场能量为

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

所以两螺线管的磁能之比为

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{16}$$

## 【0303A08】

两个线圈  $A$  和  $B$  并联地接到一电动势恒定的电源上，线圈  $A$  的自感和电阻分别是线圈  $B$  的两倍，线圈  $A$  和  $B$  之间的互感可忽略不计，当达到稳定状态后，线圈  $A$  的磁场能量与  $B$  的磁场能量的比值是

(A)  $\frac{1}{2}$ 

(B) 1

(C) 2

(D) 4

答案

A

## 第四章 电磁介质

### 1、电介质

#### 1.1 电介质对电场和电容的影响

【0401A01】

一空气平行板电容器充电后与电源断开，然后在两极板间充满某种各向同性、均匀电介质，则与充入介质前相比较，

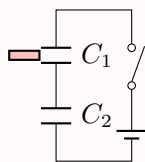
- (A) 电容增大，两极板间电压增大 (B) 电容增大，两极板间电压减小  
(C) 电容减小，两极板间电压增大 (D) 电容减小，两极板间电压减小

答案

B

【0401A02】

$C_1$  和  $C_2$  两空气电容器串联起来接上电源充电，然后将电源断开，再把一电介质板插入  $C_1$  中，如图所示。则



- (A)  $C_1$  上电势差减小， $C_2$  上电势差增大 (B)  $C_1$  上电势差减小， $C_2$  上电势差不变  
(C)  $C_1$  上电势差增大， $C_2$  上电势差减小 (D)  $C_1$  上电势差增大， $C_2$  上电势差不变

答案

B

解析

电容器充电后与电源断开，极板上所带电荷量不会发生变化。电容器的电容

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

当电容器中插入介质，电容器的电容增大，所以电容器极板间的电势差减小。

所以，对于  $C_1$ ，电容增大，电荷不变，电势差减小；对于  $C_2$ ，电容不变，电荷不变，电势差不变。

## 【0401B01】

面积为  $S$  的平行板电容器，两板间距为  $d$ 。若插入厚度为  $\frac{1}{3}d$ 、面积也为  $S$ 、相对介电常数为  $\epsilon_r$  的电介质，其电容值等于\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{3\epsilon_0\epsilon_r S}{(2\epsilon_r+1)d}$$

## 【0401B02】

两极板间距为  $d$  的真空平行板电容器电容为  $C_0$ ，在两极板之间平行地插入厚度  $t = \frac{2}{3}d$ 、相对介电常数为  $\epsilon_r$  的同尺寸介质板（面积与极板相等），此时电容器的电容  $C =$ \_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} C_0$$

## 【0401B03】

平行板真空电容器的电容为  $C_0$ ，充电后两极板间的电场强度大小为  $E_0$ 。断开电源，并在两极板间充满绝对介电常数为  $\epsilon$  的均匀电介质，此时两极板间的电场强度大小为  $E$ ，则  $E : E_0 =$ \_\_\_\_\_。

答案

$$\epsilon_0 : \epsilon$$

## 【0401B04】

平行板真空电容器的电容为  $C_0$ ，充电后两极板间的电场强度大小为  $E_0$ 。断开电源，并在两极板间充满绝对介电常数为  $\epsilon$  的均匀电介质，此时的电容为  $C$ ，则  $C : C_0 =$ \_\_\_\_\_。

答案

$$\epsilon : \epsilon_0$$



## 【0401A03】

设有一个带正电的导体球壳。当球壳内充满电介质、球壳外是真空时，球壳外某一点的场强大小和电势分别为  $E_1$  和  $U_1$ ；当球壳内、外均为真空时，球壳外同一点的场强大小和电势分别为  $E_2$  和  $U_2$ ，则有

- (A)  $E_1 = E_2, U_1 = U_2$  (B)  $E_1 = E_2, U_1 > U_2$  (C)  $E_1 > E_2, U_1 > U_2$  (D)  $E_1 < E_2, U_1 < U_2$

## 答案

A

## 解析

有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

导体球壳，当壳内空腔不带电时，电荷只分布在外表面，不管腔内是介质还是真空，腔内均无电场，而壳外空间的电场和电势均相当于球壳所带电荷全部集中在球心时的情况。题目所给两种情况，壳外空间均为真空，所以壳外空间的电场强度没有发生变化，当都以无穷远处为电势零点，或者选择任意同一个位置为电势零点，壳外同一位置的电势保持不变。

## 1.2 电位移矢量

电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$

## 【0401B05】

在相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性的电介质中，电位移矢量与电场强度矢量之间的关系是\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

## 解析

各向同性的电介质中，电位移矢量为  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ 。

## 【0401A04】

如图，平行板电容器带电，左、右分别充满介电常数不相等的各向同性均匀介质，则两种介质内



- (A) 电场强度相等, 电位移矢量相等  
(C) 电场强度不等, 电位移矢量相等

- (B) 电场强度相等, 电位移矢量不等  
(D) 电场强度、电位移矢量均不等

## 答案

B

## 【0401A05】

一平行板电容器始终与端电压一定的电源相联。当电容器两极板间为真空时, 极板间的电场强度为  $\vec{E}_0$ , 电位移为  $\vec{D}_0$ ; 当两极板间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质时, 极板间的电场强度为  $\vec{E}$ , 电位移为  $\vec{D}$ , 则

- (A)  $\vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}$ ,  $\vec{D} = \vec{D}_0$  (B)  $\vec{E} = \vec{E}_0$ ,  $\vec{D} = \epsilon_r \vec{D}_0$   
(C)  $\vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}$ ,  $\vec{D}_0 = \epsilon_r \vec{D}$  (D)  $\vec{E} = \vec{E}_0$ ,  $\vec{D} = \vec{D}_0$

## 答案

B

## 解析

当电容器的极板始终与电源相联, 则极板两端的电压保持不变。而极板间距保持不变, 所以板间的电场强度保持不变,  $\vec{E} = \vec{E}_0$ 。平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

介质不同, 电容不同, 极板上所带电量不同。由有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

板间的电位移矢量不同。

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{D}_0$$

## 【0401A06】

在各向同性的电介质中, 当外电场不是很强时, 电极化强度矢量  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , 式中  $\vec{E}$  是

- (A) 自由电荷产生的电场强度 (B) 束缚电荷产生的电场强度  
(C) 自由电荷和束缚电荷共同产生的电场强度 (D) 所求场点的分子电偶极子产生的电场强度

答案

C

## 1.3 有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\epsilon_0}$$

【0401A07】

关于高斯定理，下列说法中哪一个是正确的？

- (A) 高斯面内不包围自由电荷，则面上各点电位移矢量为零
- (B) 高斯面上处处电位移矢量为零，则面内必不存在自由电荷
- (C) 高斯面的电位移矢量通量仅与面内自由电荷有关
- (D) 以上说法都不正确

答案

C

解析

通过任意一个封闭曲面的电位移矢量的通量，等于高斯面所包围体积中自由电荷的代数和。

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

但是高斯面上各点的电场强度以及电位移矢量是由所有电荷所激发产生的，不仅仅包括面内的电荷，也包括面外的电荷，不仅仅包括自由电荷，也包括束缚电荷。如果高斯面上处处  $\vec{D}$  为零，只能说明高斯面内所含的自由电荷的代数和为零，可能包含等量的正电荷和负电荷。

【0401A08】

在静电场中，作闭合曲面  $S$ ，若有  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$  (式中  $\vec{D}$  为电位移矢量)，则  $S$  面内必定

- (A) 既无自由电荷，也无束缚电荷
- (B) 没有自由电荷
- (C) 自由电荷和束缚电荷的代数和为零
- (D) 自由电荷的代数和为零

答案

D

## 解析

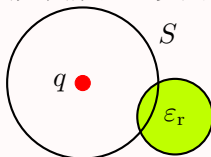
有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

公式右边为高斯面  $S$  所包围体积中所有自由电荷的代数和。

## 【0401A09】

在一点电荷  $q$  产生的静电场中，一块电介质如图放置，以点电荷所在处为球心作一球面  $S$ ，则对此球面



- (A) 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强
- (B) 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强
- (C) 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立
- (D) 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立

## 答案

B

## 解析

有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

高斯定理对于任意电场中的任意封闭曲面均成立。但要用它来求电场时，通常要求电荷分布具有某种对称性，并根据对称性选择适当的高斯面，目的在于能够把上式左边的电位移通量积分出来，所以要求所选择的高斯面至少是分成若干区域，在每个区域上电位移通量可以表示成电位移矢量的大小与面积的乘积。

## 【0401A10】

在空气平行板电容器中，平行地插上一块各向同性均匀电介质板，如图所示。当电容器充电后，若忽略边缘效应，则电介质中的场强  $E_1$  与空气中的场强  $E_0$  相比较，应有

$E_0$

$E_1$

(A)  $E_1 > E_0$ , 两者方向相同(B)  $E_1 = E_0$ , 两者方向相同(C)  $E_1 < E_0$ , 两者方向相同(D)  $E_1 < E_0$ , 两者方向相反

答案

C

解析

有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

充电之后, 极板上所带电荷保持不变, 选择两个不同的高斯柱面, 柱面的底面与极板平行, 一个底面在极板内, 另一个底面分别在介质中和空气中, 侧面与极板垂直, 很容易求得介质和空气中的电位移矢量相等, 即  $\vec{D} = \vec{D}_0$ 。所以

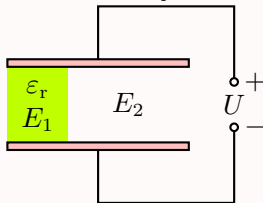
$$\varepsilon \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

所以二者方向相同, 大小满足

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_r} < 1$$

【0401B06】

已知平行板电容器的极板面积为  $S$ , 板间距离为  $d$ , 两板间充有一部分电介质, 如图所示。将该电容器接在电压为  $U$  的电源上, 设介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ , 则介质内、外的场强大小之比  $E_1 : E_2 =$ \_\_\_\_\_。

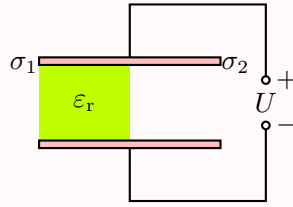


答案

1 : 1

【0401B07】

已知平行板电容器的极板面积为  $S$ , 板间距离为  $d$ , 两板间充有一部分电介质, 如图所示。将该电容器接在电压为  $U$  的电源上, 设介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ , 则极板左右两边的自由电荷面密度之比  $\sigma_1 : \sigma_2 =$ \_\_\_\_\_。



答案

$$\epsilon_r : 1$$

【0401B08】

一个半径为  $R$  的薄金属球壳，带有电荷  $q$ ，壳内真空，壳外是无限大的相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质。设无穷远处为电势零点，则球壳的电势  $U = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$$

解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，由高斯定理很容易求得球外空间的电场强度。

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ D \cdot (4\pi r^2) &= q \\ D &= \frac{q}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \epsilon_r E \\ E &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}\end{aligned}$$

所以，以无穷远处为电势零点，球壳的电势为

$$V = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \int_R^\infty \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R}$$

【0401B09】

一个带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的金属球壳，壳内是真空，壳外是相对介电常数为  $\epsilon_r$  的无限大各向同性均匀电介质，则球壳内距球心为  $r$  处的电场强度大小  $E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$0$$

## 【0401A11】

一导体球外充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质，若测得导体表面附近的场强大小为  $E$ ，则导体球面上的自由电荷面密度  $\sigma$  为

- (A)  $\epsilon_0 E$  (B)  $\epsilon_r E$  (C)  $\epsilon_0 \epsilon_r E$  (D)  $(\epsilon_0 \epsilon_r - \epsilon_0) E$

## 答案

C

## 【0401B10】

半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两个同轴金属圆筒，其间充满着相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀介质。设两筒上单位长度带有的电荷分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ ，则介质中到轴线的距离为  $r$  处的电位移矢量的大小  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$\frac{\lambda}{2\pi r}$$

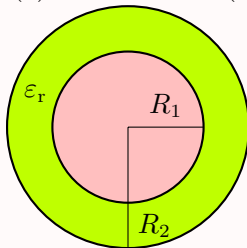
## 解析

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，所以可以使用高斯定理来计算电场。选择与圆筒同轴的、半径为  $r$ 、高度为  $h$  的圆柱面为高斯面，根据有电介质时的高斯定理，有

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ D \cdot (2\pi r h) &= \lambda h \\ D &= \frac{\lambda}{2\pi r} \\ E &= \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}\end{aligned}$$

## 【0401C01】

半径为  $R_1$  的金属球被一层外半径为  $R_2$  的均匀电介质包裹着，金属球带电量为  $Q$ ，电介质的相对介电常数为  $\epsilon_r$ 。以无穷远处为电势零点，求：(1) 电场的分布；(2) 电势的分布。



## 解答

(1)  $r < R_1$ , 导体内部, 电场为零;

$R_1 < r < R_2$ , 介质内部,

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D_2(4\pi r^2) &= Q \\ D_2 &= \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2 \\ E_2 &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}\end{aligned}$$

$r > R_2$ , 空气中,

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D_3(4\pi r^2) &= Q \\ D_3 &= \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 E_3 \\ E_3 &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

(2) 以无穷远处为电势零点,  $r > R_2$ , 空气中,

$$U_3 = \int_r^\infty E_3 dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

$R_1 < r < R_2$ , 介质内部,

$$U_2 = \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

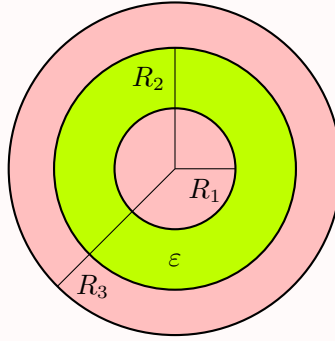
$r < R_1$ , 导体内部,

$$U_1 = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

## 【0401C02】

半径为  $R_1$ 、带电量为  $Q$  的导体球, 外面套有一个带电量为  $q$  的同心导体球壳, 球壳内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$ , 球与球壳之间充满介电常数为  $\varepsilon$  的各向同性均匀介质, 球壳外为真空。以无穷远处为电势零点, 试求: (1) 自由电荷的分布; (2) 电场的分布; (3) 电势的分布。





## 解答

(1) 静电平衡时, 自由电荷分布在导体的表面上:  $r = R_1$  处, 均匀分布电荷  $Q$ ;  $r = R_2$  处, 均匀分布电荷  $-Q$ ;  $r = R_3$  处, 均匀分布电荷  $Q + q$ 。

(2) 静电平衡时, 导体内部电场为零, 所以  $r < R_1$  处,  $E_1 = 0$ ;  $R_2 < r < R_3$  处,  $E_3 = 0$ 。  
 $R_1 < r < R_2$ , 介质内部,

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D_2(4\pi r^2) &= Q \\ D_2 &= \frac{Q}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \epsilon_r E_2 \\ E_2 &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}\end{aligned}$$

$r > R_3$ , 空气中,

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D_4(4\pi r^2) &= Q + q \\ D_4 &= \frac{Q + q}{4\pi r^2} = \epsilon_0 E_4 \\ E_4 &= \frac{Q + q}{4\pi \epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

(3) 以无穷远处为电势零点,  $r > R_3$ , 空气中,

$$U_4 = \int_r^\infty E_4 dr = \frac{Q + q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$R_2 < r < R_3$ , 导体球壳内部,

$$U_3 = \int_r^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^\infty E_4 dr = \frac{Q + q}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

$R_1 < r < R_2$ , 介质内部,

$$U_2 = \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^\infty E_4 dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q + q}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

$r < R_1$ , 导体球内部,

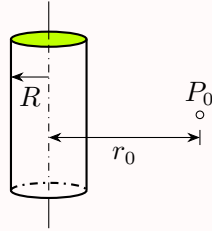
$$U_1 = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^{\infty} E_4 dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

### 评分标准

1. 电荷分布 3 分
2. 电场分布 6 分
3. 电势分布 6 分

### 【0401C03】

如图所示, “无限长” 均匀带电圆柱面, 半径为  $R$ , 单位长度上带电量为  $+\lambda$ , 其内部充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性的均匀电介质。选取距带电圆柱面轴线为  $r_0$  的  $P_0$  点为电势零点, 试求: (1) 电场的分布; (2) 电势的分布。



### 解答

(1)  $r < R$ , 介质内,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_1(2\pi r h) = 0$$

$$D_1 = 0 = \epsilon_0 \epsilon_r E_1$$

$$E_1 = 0$$

$r > R$ , 介质外空气中,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_2(2\pi r h) = \lambda h$$

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r} = \epsilon_0 E_2$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 选取距带电圆柱面轴线为  $r_0$  的  $P_0$  点为电势零点,  $r > R$ , 介质外空气中,

$$U_2 = \int_r^{r_0} E_2 dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

$r < R$ , 介质内,

$$U_1 = \int_r^R E_1 dr + \int_R^{r_0} E_2 dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R}$$

## 1.4 极化电荷

### 【0401A12】

平行板电容器充满某种电介质, 极板间距  $d$ , 电压  $U$ 。如果断开电源后抽出介质板, 电压升高到  $3U$ , 可知极化电荷产生的电场强度为

- (A)  $\frac{2U}{3d}$   
(C)  $\frac{5U}{d}$

- (B)  $\frac{2U}{d}$   
(D) 条件不足, 无法确定

答案

B

### 【0401B11】

平行板电容器两极间充满某种介质, 板间距  $d = 2 \text{ mm}$ , 电压  $0.6 \text{ V}$ , 如果断开电源后抽出介质, 则电压升高到  $1.8 \text{ V}$ 。由此可知, 极化电荷产生的场强大小为\_\_\_\_\_  $\text{V/m}$ 。

答案

600

### 【0401B12】

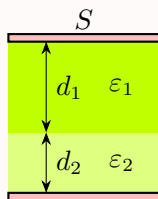
一导体球外充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质, 若测得导体表面附近的场强大小为  $E$ , 则与导体球面相邻的介质表面处, 极化电荷面密度  $\sigma' =$ \_\_\_\_\_。

答案

$\epsilon_0(1 - \epsilon_r)E$

## 【0401B13】

如图所示，一平行板电容器，极板面积为  $S$ ，间距为  $d$ ，中间有两层各向同性的电介质层，其厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$  ( $d_1 + d_2 = d$ )，介电常数分别为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ 。当极板上自由电荷面密度为  $\pm\sigma_0$  时，介电常数为  $\varepsilon_1$  的介质表面上的极化电荷面密度  $\sigma'_1 =$ \_\_\_\_\_。

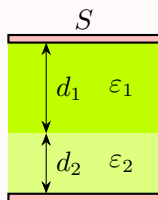


## 答案

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_0$$

## 【0401B14】

如图所示，一平行板电容器，极板面积为  $S$ ，间距为  $d$ ，中间有两层各向同性的电介质层，其厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$  ( $d_1 + d_2 = d$ )，介电常数分别为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ 。当极板上自由电荷面密度为  $\pm\sigma_0$  时，介电常数为  $\varepsilon_2$  的介质表面上的极化电荷面密度  $\sigma'_2 =$ \_\_\_\_\_。

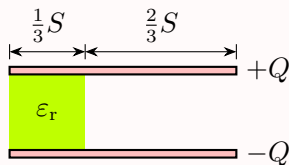


## 答案

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2} \sigma_0$$

## 【0401C04】

一平行板电容器的极板面积为  $S$ ，板间距离为  $d$ ，充满电后极板上带电量为  $\pm Q$ 。现将电容器与电源断开，然后在两极板间插入相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性的均匀介质，如图所示。求插入电介质后：(1) 自由电荷面密度和极化电荷面密度；(2) 介质内的电位移矢量的大小。



## 解答

(1) 设两个区域的自由电荷面密度分别为  $\sigma_{01}$  和  $\sigma_{02}$ ，则有

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

$$D = \sigma_0 = \varepsilon E$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 d = E_2 d$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_{01} = \varepsilon_r \sigma_{02}$$

$$\sigma_{01} \times \frac{1}{3} S + \sigma_{02} \times \frac{2}{3} S = Q$$

$$\sigma_{02} = \frac{3Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

$$\sigma_{01} = \frac{3\varepsilon_r Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 - q'}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \Delta S = \frac{\sigma_{01} \Delta S - \sigma' \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_{01} - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \sigma_{01} - \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_{01} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

(2)

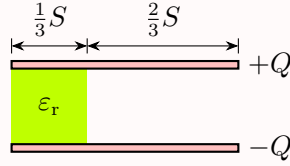
$$D_1 = \sigma_{01} = \frac{3\varepsilon_r Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

## 评分标准

1. 两个高斯定理各 2 分共 4 分
2. 自由电荷面密度各 2 分共 4 分
3. 极化电荷面密度 4 分
4. 电位移矢量 3 分

## 【0401C05】

一平行板电容器的极板面积为  $S$ ，板间距离为  $d$ ，充满电后极板上带电量为  $\pm Q$ 。现将电容器与电源断开，然后在两极板间插入相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性的均匀介质，如图所示。求：(1) 自由电荷面密度；(2) 束缚电荷面密度；(3) 等效电容。



## 解答

(1) 设两个区域的自由电荷面密度分别为  $\sigma_{01}$  和  $\sigma_{02}$ ，则有

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

$$D = \sigma_0 = \varepsilon E$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 d = E_2 d$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_{01} = \varepsilon_r \sigma_{02}$$

$$\sigma_{01} \times \frac{1}{3} S + \sigma_{02} \times \frac{2}{3} S = Q$$

$$\sigma_{02} = \frac{3Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

$$\sigma_{01} = \frac{3\varepsilon_r Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

(2)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 - q'}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \Delta S = \frac{\sigma_{01} \Delta S - \sigma' \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_{01} - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \sigma_{01} - \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_{01} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)Q}{(2 + \varepsilon_r)S}$$

(3)

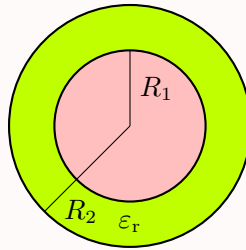
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \times \frac{1}{3} S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{3d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \times \frac{2}{3} S}{d} = \frac{2\varepsilon_0 S}{3d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 (2 + \varepsilon_r) S}{3d}$$

## 【0401C06】

如图所示，半径为  $R_1$  的金属球被一层外半径为  $R_2$  的均匀介质球壳包裹着，设电介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ ，金属球带正电荷  $Q$ ，求：(1) 电介质内部的电位移矢量和电场强度；(2) 金属球和电介质外表面之间的电势差；(3) 介质内表面 ( $r = R_1$ ) 处的极化电荷面密度  $\sigma'$ 。



## 解答

(1)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D(4\pi r^2) = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

(2)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(3)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 - q'}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q - q'}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} (4\pi r^2) = \frac{Q - q'}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_r} = Q - q'$$

$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q$$

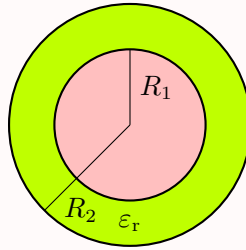
$$\sigma' = \frac{-q'}{4\pi R_1^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

## 评分标准

1. 高斯定理 3 分，电位移 1 分，电场强度 1 分
2. 电势差 5 分
3. 高斯定理 3 分，极化电荷面密度 2 分 (差一个负号只得 1 分)

## 【0401C07】

如图，半径为  $R_1$  的金属球被一层外半径为  $R_2$  的均匀电介质球壳包裹着，设电介质的相对介电常数为  $\epsilon_r$ ，金属球带电量为  $Q$ 。(1) 求金属球之外各点的电场强度；(2) 以无穷远处为电势零点，求金属球的电势；(3) 介质球壳内、外表面的极化电荷面密度。



## 解答

(1)  $R_1 < r < R_2$ ，介质内，

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_1(4\pi r^2) = Q$$

$$D_1 = \frac{Q}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \epsilon_r E_1$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

$r > R_2$ ，介质外空气中，

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_2(4\pi r^2) = Q$$

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} = \epsilon_0 E_2$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



(2) 以无穷远处为电势零点，金属球的电势

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

(3)

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_0 - q'}{\epsilon_0} \\ E(4\pi r^2) &= \frac{Q - q'}{\epsilon_0} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} (4\pi r^2) &= \frac{Q - q'}{\epsilon_0} \\ \frac{Q}{\epsilon_r} &= Q - q' \\ q' &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q \end{aligned}$$

$r = R_1$ ，介质内表面，

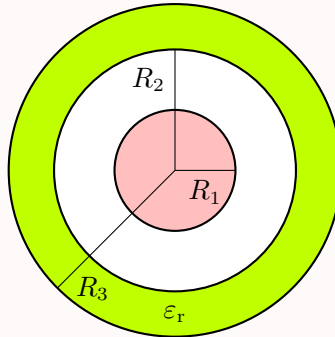
$$\sigma'_1 = \frac{-q'}{4\pi R_1^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$r = R_2$ ，介质外表面，

$$\sigma'_2 = \frac{q'}{4\pi R_2^2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

### 【0401C08】

如图所示，半径为  $R_1$  的金属球，带电量  $+Q$ ，置于一个内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的均匀介质球壳中，介质的相对介电常数为  $\epsilon_r$ 。试求：(1) 空间中各点的电场强度；(2) 介质的极化强度矢量  $\vec{P}$  的大小；(3) 介质球壳内、外表面的极化电荷面密度  $\sigma'_1$  和  $\sigma'_2$ 。



### 解答

(1)  $r < R_1$ ，导体球内，静电平衡，电场  $E_1 = 0$ ；

$R_1 < r < R_2$ , 空气中,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_2(4\pi r^2) = Q$$

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 E_2$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$R_2 < r < R_3$ , 介质内,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_3(4\pi r^2) = Q$$

$$D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_3$$

$$E_3 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$r > R_3$ , 空气中,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_4(4\pi r^2) = Q$$

$$D_4 = \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 E_4$$

$$E_4 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

(2)  $R_2 < r < R_3$ , 介质内,

$$D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_3 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$P = D_3 - \varepsilon_0 E_3 = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi \varepsilon_r r^2}$$

(3)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 - q'}{\varepsilon_0}$$

$$E_3(4\pi r^2) = \frac{Q - q'}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} (4\pi r^2) = \frac{Q - q'}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_r} = Q - q'$$

$$q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q$$

$r = R_2$ , 介质内表面,

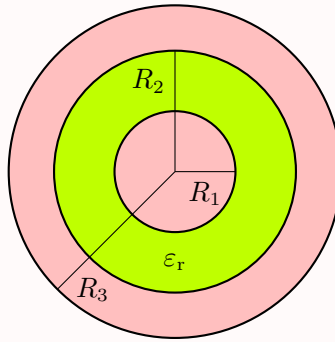
$$\sigma'_1 = \frac{-q'}{4\pi R_2^2} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

$r = R_3$ , 介质外表面,

$$\sigma'_2 = \frac{q'}{4\pi R_3^2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_3^2}$$

### 【0401C09】

半径为  $R_1$  的导体球带电  $Q$ , 内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的导体球壳带电  $q$ , 二者同心放置, 如图所示, 二者之间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性电介质, 求: (1) 电介质内部的电场分布; (2) 导体球与导体球壳的电势差; (3) 电介质层外表面的极化电荷面密度。



### 解答

(1)

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\ D(4\pi r^2) &= Q \\ D &= \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \\ E &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \end{aligned}$$

(2)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(3)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 - q'}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}
 E(4\pi r^2) &= \frac{Q - q'}{\varepsilon_0} \\
 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}(4\pi r^2) &= \frac{Q - q'}{\varepsilon_0} \\
 \frac{Q}{\varepsilon_r} &= Q - q' \\
 q' &= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q
 \end{aligned}$$

$r = R_2$ , 介质外表面,

$$\sigma' = \frac{q'}{4\pi R_2^2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

### 【0401C10】

一被均匀极化的介质球, 半径为  $R$ , 极化强度为  $\vec{P}$ 。试求: (1) 球表面的极化电荷面密度  $\sigma'$  和总极化电荷  $q'$ ; (2) 极化电荷在球心处产生的电场强度  $\vec{E}'$ 。

### 解答

以球心为球坐标原点, 以极化强度矢量  $\vec{P}$  的方向为  $z$  轴正方向, 介质球表面上任意一处的球坐标为  $(R, \theta, \varphi)$ , 该处球面面元的法向方向  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 与  $z$  轴的夹角为  $\theta$ , 根据极化电荷与极化强度矢量之间的关系可得该处极化电荷面密度

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P \cos \theta$$

所以同一个  $\theta$  处极化电荷是均匀分布的,  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  处可视为一个均匀带电圆环, 其半径为  $r = R \sin \theta$ , 其带电量

$$dq' = \sigma' dS = (P \cos \theta) \cdot (2\pi R \sin \theta) \cdot (R d\theta) = 2\pi R^2 P \sin \theta \cos \theta d\theta$$

所以整个球面总的极化电荷

$$q' = \int_0^\pi 2\pi R^2 P \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 P \int_0^\pi \sin \theta (\cos \theta d\theta) = 2\pi R^2 P \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)_0^\pi = 0$$

由于对称性, 以上所取均匀带电圆环在球心处的电场强度的方向沿  $z$  轴负方向 (与  $\vec{P}$  反向), 大小

$$dE' = \int_0^\pi 2 \times \frac{\sigma' \cdot (R d\theta) \cdot (R \sin \theta d\varphi)}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times \cos \theta = \frac{P}{2\varepsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

所以整个球面上的极化电荷在球心处的总电场强度的方向沿  $z$  轴负方向 (与  $\vec{P}$  反向), 大小

$$\begin{aligned}
 E' &= \int_0^\pi \frac{P}{2\varepsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{P}{2\varepsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta (\sin \theta d\theta)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{P}{2\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right)_0^\pi$$

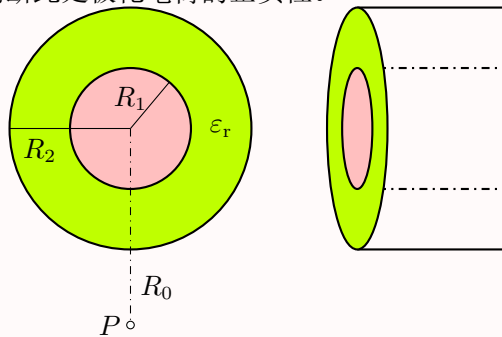
$$= \frac{P}{3\varepsilon_0}$$

## 评分标准

1. 建立球坐标系得 1 分
2. 极化电荷面密度得 3 分
3. 取圆环，半径得 1 分，带电量得 2 分
4. 积分求总极化电荷，上下限得 1 分，积分结果得 1 分
5. 电场强度方向得 1 分
6. 对称性、叠加原理求圆环的电场强度得 3 分
7. 积分求总电场强度，上下限得 1 分，积分结果得 1 分

## 【0401C11】

如图，一个半径为  $R_1$  的带电长导体圆柱面，单位长度上带  $+\lambda$  的电量，其外部被一层外半径为  $R_2$  的同轴圆柱筒均匀电介质包裹着，设电介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ ，求：(1) 电场强度大小  $E$  的空间分布；(2) 求导体圆柱面的电势（选取距带电圆柱面轴线为  $R_0$  的  $P$  点为电势零点）；(3) 介质内表面 ( $r = R_1$ ) 处的极化面电荷密度  $\sigma'$ ，并判断此处极化电荷的正负性。



## 解答

- (1)  $r < R_1$ ，导体内，静电平衡，电场  $E_1 = 0$ ；  
 $R_1 < r < R_2$ ，介质内，

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_2(2\pi r h) = \lambda h$$

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}$$

$r > R_2$ , 介质外空气中,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D_3(2\pi r h) = \lambda h$$

$$D_3 = \frac{\lambda}{2\pi r} = \varepsilon_0 E_3$$

$$E_3 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

(2) 选取距带电圆柱面轴线为  $R_0$  的  $P$  点为电势零点, 则导体圆柱面的电势

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_0} E_3 dr = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_0}{R_2}$$

(3)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 - q'}{\varepsilon_0}$$

$$E_2(2\pi r h) = \frac{\lambda h + \lambda' h}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} (2\pi r h) = \frac{\lambda h + \lambda' h}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\lambda}{\varepsilon_r} = \lambda + \lambda'$$

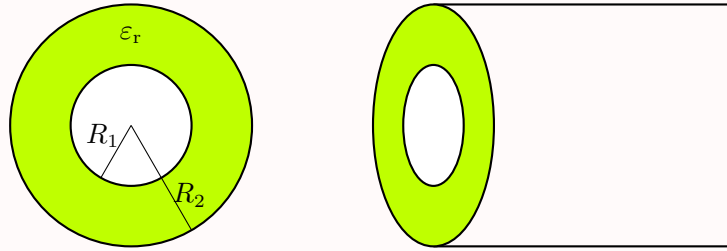
$$\lambda' = \lambda - \frac{\lambda}{\varepsilon_r} = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \lambda < 0$$

所以介质内表面 ( $r = R_1$ ) 处的极化电荷为负电荷。

## 1.5 电介质的击穿

### 【0401C12】

如图, 两共轴的长导体圆筒组成的电容器, 内外筒半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), 其间有层均匀的相对介电常数  $\varepsilon_r$  的电介质, 若介质的击穿场强为  $E_M$ 。求: (1) 当电压升高时, 介质的哪处先击穿? (2) 两筒间能加的最大电压为多少?



## 解答

(1) 假定内筒单位长度的带电量为  $\lambda$ ，则  $R_1 < r < R_2$ ，介质内，

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D(2\pi r h) = \lambda h$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}$$

所以  $r$  越小， $E$  越大，内筒附近先击穿。

(2)

$$E_M = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r R_1}$$

$$E = \frac{R_1}{r} E_M$$

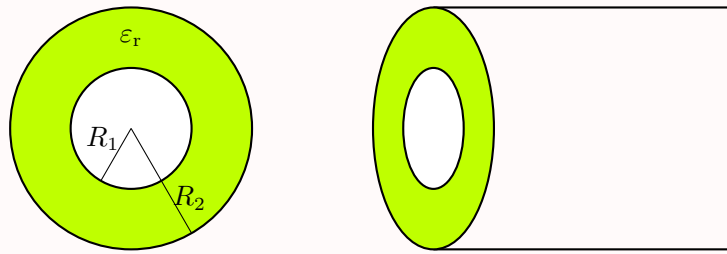
$$U_M = \int_{R_1}^{R_2} E dr = R_1 E_M \ln \frac{R_2}{R_1}$$

## 评分标准

1. 计算电场强度 7 分
2. 得到内筒先击穿 1 分
3. 计算电压 7 分

## 【0401C13】

两共轴的长导体圆筒组成电容器，内、外筒半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  ( $R_1 < R_2$ )，其间充满各向同性的均匀电介质，相对介电常数为  $\epsilon_r$ 。若该电容器的击穿电压为  $U_M$ ，求：(1) 当电压升高时，介质的哪处先击穿？(2) 该电介质的击穿场强  $E_M$ 。



## 解答

(1) 假定内桶单位长度的带电量为  $\lambda$ ，则  $R_1 < r < R_2$ ，介质内，

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D(2\pi r h) = \lambda h$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}$$

所以  $r$  越小， $E$  越大，内筒附近先击穿。

(2)

$$U_M = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$E_M = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r R_1} = \frac{U_M}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

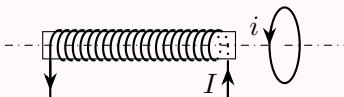


## 2、磁介质

## 2.1 磁介质对磁场的影响

【0402A01】

如图所示，一载流螺线管的旁边有一圆形线圈，欲使线圈产生图示方向的感应电流  $i$ ，下列哪一种情况可以做到？



- (A) 载流螺线管向线圈靠近  
(B) 载流螺线管离开线圈  
(C) 载流螺线管中电流增大  
(D) 载流螺线管中插入铁芯

答案

B

解析

载流螺线管在线圈所在处产生的磁场是从左到右的，而且靠近螺线管处的磁场大小较大，远离螺线管处的磁场大小较小。

所以螺线管靠近线圈，相当于线圈靠近螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，而且磁通量大小增大，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量减小，感应电流的方向与图示方向应该相反。如果螺线管离开线圈，相当于线圈离开螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，但磁通量大小变小，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量增大，感应电流的方向与图示方向相同。

如果载流螺线管中的电流增大，那么产生的磁场也增大，通过线圈的磁通量也增大，感应电流应该与图示方向相反。

当通过的电流不变而在螺线管中插入铁芯时，磁场变大，通过线圈的磁通量变大，因此线圈中会产生感应电流的方向与图示相反。

根据磁介质的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

电流不变，所以螺线管内的  $H$  不变，但有没有磁介质，改变的是磁导率，从而改变磁场强度  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。

【0402B01】

带电粒子沿垂直于磁感线的方向飞入有介质的匀强磁场中。由于粒子和磁场中的物质相互作用，损失了自己原有动能的一半。路径起点的轨道曲率半径与路径终点的轨道曲率半径之比为\_\_\_\_\_。

答案

 $\sqrt{2}$

## 解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

依题意, 有  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , 而这个力提供粒子做圆周运动的向心力, 所以有

$$\begin{aligned} qvB &= \frac{mv^2}{r} \\ r &= \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{qB} \\ \frac{r_1}{r_2} &= \sqrt{\frac{E_{k1}}{E_{k2}}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

## 2.2 磁化电流

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

## 【0402C01】

一被均匀磁化的介质球, 半径为  $R$ , 磁化强度为  $\vec{M}$ 。试求: (1) 沿球面流动的磁化电流线密度  $i'$  和总磁化电流  $I'$ ; (2) 磁化电流在球心处产生的磁感应强度  $\vec{B}'$ 。

## 解答

以球心为球坐标原点, 以磁化强度矢量  $\vec{M}$  的方向为  $z$  轴正方向, 介质球表面上任意一处的球坐标为  $(R, \theta, \varphi)$ , 该处球面法向方向  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 与  $z$  轴的夹角为  $\theta$ , 根据磁化电流线密度与磁化强度矢量之间的关系可得该处磁化电流线密度

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

所以球面上  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  部分可视为一个载流圆环, 其中流过的磁化电流

$$dI' = i' dl = (M \sin \theta) \cdot (R d\theta) = MR \sin \theta d\theta$$

圆环半径为  $r = R \sin \theta$ 。所以整个球面上总的磁化电流

$$I' = \int_0^\pi MR \sin \theta d\theta = MR(-\cos \theta)_0^\pi = 2MR$$

由于对称性, 以上所取载流圆环在球心处的磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向 (与  $\vec{M}$  同向), 大小

$$dB' = \int_0^\pi 2 \times \frac{\mu_0(dI') \cdot (R \sin \theta d\varphi)}{4\pi R^2} \times \sin \theta = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta$$

所以整个球面上的磁化电流在球心处的总磁感应强度的方向沿  $z$  轴正方向 (与  $\vec{M}$  同向), 大小

$$B' = \int_0^\pi \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 M}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta (\sin \theta d\theta) \\
 &= \frac{\mu_0 M}{2} \left( \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right)_0^\pi \\
 &= \frac{2}{3} \mu_0 M \\
 \vec{B}' &= \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}
 \end{aligned}$$

## 评分标准

1. 建立球坐标系得 1 分
2. 磁化电流线密度得 3 分
3. 取圆环，半径得 1 分，电流得 2 分
4. 积分求总磁化电流，上下限得 1 分，积分结果得 1 分
5. 磁感应强度方向得 1 分
6. 对称性、叠加原理求圆环的磁感应强度得 3 分
7. 积分求总磁感应强度，上下限得 1 分，积分结果得 1 分

## 2.3 有磁介质时的安培环路定理

磁场强度矢量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0$$

真空中的安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_0 + I')$$

## 【0402B02】

长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流  $I$  通过，其间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质。介质中离中心轴距离为  $r$  的某点处的磁场强度的大小  $H = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$$\frac{I}{2\pi r}$$

【0402B03】

长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流  $I$  通过，其间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质。介质中离中心轴距离为  $r$  的某点处的磁感强度的大小  $B = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

答案

$$\frac{\mu I}{2\pi r}$$

解析

选择以中心轴为圆心，半径为  $r$  的圆周为回路，由有磁介质时的安培环路定理可得

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I \\ H \cdot (2\pi r) &= I \\ H &= \frac{I}{2\pi r}\end{aligned}$$

所以磁感应强度为

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

【0402A02】

用细导线均匀密绕成长为  $l$ 、半径为  $a$  ( $l \gg a$ )、总匝数为  $N$  的螺线管，管内充满相对磁导率为  $\mu_r$  的均匀磁介质。若线圈中载有稳恒电流  $I$ ，则管中任意一点的

- (A) 磁感强度大小为  $B = \mu_0 \mu_r N I$                       (B) 磁感强度大小为  $B = \frac{\mu_r N I}{l}$   
(C) 磁场强度大小为  $H = \frac{\mu_0 N I}{l}$                       (D) 磁场强度大小为  $H = \frac{N I}{l}$

答案

D

解析

有磁介质时的安培环路定理为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

一般地认为密绕螺线管的磁场只分布在螺线管内，而且是均匀磁场，螺线管外靠近螺线管的地方，磁场近似为零，所以有

$$H \cdot l = NI$$

$$H = \frac{NI}{l}$$

而对于相对磁导率为  $\mu_r$  的均匀磁介质，有

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

所以

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l}$$

### 【0402A03】

关于稳恒电流磁场的磁场强度  $\vec{H}$ ，下列几种说法中哪个是正确的？

- (A)  $\vec{H}$  仅与传导电流有关
- (B) 若闭合曲线内没有包围传导电流，则曲线上各点的  $\vec{H}$  必为零
- (C) 若闭合曲线上各点  $\vec{H}$  均为零，则该曲线所包围传导电流的代数和为零
- (D) 以闭合曲线  $L$  为边缘的任意曲面的  $\vec{H}$  通量均相等

### 答案

C

### 解析

有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

上式右边仅仅是传导电流，但左边的  $\vec{H}$  是由传导电流和分子电流共同激发的磁场。

如果闭合曲线内没有包围传导电流，只能说明  $\vec{H}$  沿闭合曲线的环流为零，并不能说明闭合曲线上各点的  $\vec{H}$  一定为零。

磁场中的高斯定理为

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

由此可得，以闭合曲线  $L$  为边缘的任意曲面的  $\vec{B}$  通量均相等。而不同区域， $\vec{B}$  和  $\vec{H}$  的比例系数不一定相同，所以以闭合曲线  $L$  为边缘的任意曲面的  $\vec{H}$  通量不一定相等。

## 【0402B04】

一个绕有 500 匝导线的平均周长 50 cm 的细环，载有 0.3 A 电流时，铁芯的相对磁导率为 600。铁芯中的磁场强度的大小  $H = \underline{\hspace{1cm}}$  A/m。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ )

## 答案

300

## 解析

有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$H \cdot L = NI$$

$$H = \frac{NI}{L} = \frac{500 \times 0.3}{0.5} = 300 \text{ A/m}$$

## 【0402B05】

一个绕有 500 匝导线的平均周长 50 cm 的细环，载有 0.3 A 电流时，铁芯的相对磁导率为 600。铁芯中的磁感强度的大小  $B = \underline{\hspace{1cm}}$  T。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ )

## 答案

0.226

## 解析

有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$H \cdot L = NI$$

$$H = \frac{NI}{L} = \frac{500 \times 0.3}{0.5} = 300 \text{ A/m}$$

所以磁感应强度为

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \times 10^{-7} \times 600 \times 300 \approx 0.226 \text{ T}$$

## 5、电磁场能

## 5.1 电容器的储能

电容器的储能

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

## 【0405A01】

一个空气平行板电容器，充电后把电源断开，这时电容器中储存的能量为  $W_{e0}$ ，然后在两极板间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质，则该电容器中储存的能量为

- (A)  $\frac{1}{\varepsilon_r}W_{e0}$       (B)  $\varepsilon_r W_{e0}$       (C)  $(1 + \varepsilon_r)W_{e0}$       (D)  $W_{e0}$

答案

A

## 【0405A02】

一空气平行板电容器，接电源充电后电容器中储存的能量为  $W_{e0}$ 。在保持恒压电源接通的条件下，在两极板间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质，则电容器中储存的能量为

- (A)  $\varepsilon_r W_{e0}$       (B)  $\frac{1}{\varepsilon_r} W_{e0}$       (C)  $(1 + \varepsilon_r)W_{e0}$       (D)  $W_{e0}$

答案

A

## 【0405B01】

一空气电容器充电后切断电源，电容器储能  $W_{e0}$ ，若此时在极板间灌入相对介电常量为  $\varepsilon_r$  的煤油，则电容器储能变为\_\_\_\_\_。

答案

$$\frac{1}{\varepsilon_r}W_{e0}$$

解析

电容器充电后切断电源，极板上所带电量  $Q$  保持不变，极板间灌入介质时，改变了电容器的电容，从而改变了电场能量。

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C$$

$$W'_e = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_r C} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{\varepsilon_r} W_{e0}$$

## 【0405B02】

一空气电容器充电后一直与电源相连接，电容器储能  $W_{e0}$ ，若此时在极板间灌入相对介电常量为  $\varepsilon_r$  的煤油，则电容器储能变为  $W_{e0}$  的\_\_\_\_\_倍。

## 答案

$\varepsilon_r$

## 解析

若电容器一直与电源相连接，则极板间电压  $U$  保持不变，极板间灌入介质时，改变了电容器的电容，从而改变了电场能量。

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C$$

$$W'_e = \frac{1}{2} C' U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C U^2 = \varepsilon_r \frac{1}{2} C U^2 = \varepsilon_r W_{e0}$$

## 【0405A03】

平行板介质电容器充满电后仍与电源保持连接，通过外力作用将其中的电介质板完全抽出，使其成为真空电容器，则抽出前后，以下描述错误的是

- (A) 极板上的电荷减少 (B) 极板间的电场强度减少  
(C) 电容器的储能减少 (D) 外力所做的功等于电容器储能的改变量

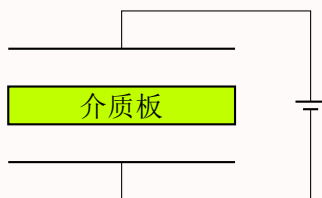
## 答案

B

## 【0405A04】

将一空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，在保持与电源连接的情况下，把一块与极板面积相同的各向同性均匀电介质板平行地插入两极板之间，如图所示。介质板的插入及其所处位置的不同，对电容器储存电能的影响为





- (A) 储能减少, 但与介质板相对极板的位置无关 (B) 储能减少, 且与介质板相对极板的位置有关  
(C) 储能增加, 但与介质板相对极板的位置无关 (D) 储能增加, 且与介质板相对极板的位置有关

## 答案

C

## 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

在保持与电源连接的情况下, 极板间的电压  $U$  保持不变, 插入介质板, 把一个电容器变成三个串联的电容器, 三个电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon S}{d_2}, C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_3}$$

根据电容的串联公式

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon S} + \frac{d_3}{\varepsilon_0 S} = \frac{d_1 + d_2/\varepsilon_r + d_3}{\varepsilon_0 S}$$

$$C_{123} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2/\varepsilon_r + d_3}$$

而显然  $d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_r} + d_3 < d_1 + d_2 + d_3 = d$ , 所以

$$C_{123} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2/\varepsilon_r + d_3} > \frac{\varepsilon_0 S}{d} = C$$

即电容增大。

而由电容器的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2C} Q^2$$

电压保持不变, 电容增大, 所以电场能量增大。

## 【0405B03】

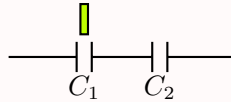
两极板间距为  $d$  的平行板电容器电容量为  $C_0$ , 充电  $Q$  后与电源断开。在两极板之间平行地插入与平行板面积相同且厚度  $t = \frac{2}{3}d$  的介质板, 已知该介质的相对介电常数  $\varepsilon_r = 3$ , 此时电容器的储能为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{5Q^2}{18C_0}$$

## 【0405A05】

如图所示，两个完全相同的电容器  $C_1$  和  $C_2$ ，串联后与电源连接。现将一各向同性均匀电介质板插入  $C_1$  中，则



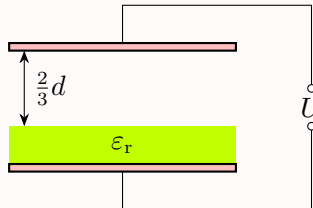
- (A) 电容器组总电容减小  
(B)  $C_1$  上的电量大于  $C_2$  上的电量  
(C)  $C_1$  上的电压高于  $C_2$  上的电压  
(D) 电容器组贮存的总能量增大

## 答案

D

## 【0405C01】

如图，忽略边缘效应的平行板电容器，极板面积为  $S$ ，板间距离为  $d$ ，接在电压为  $U$  的电源上，电介质的相对介电常数为  $\epsilon_r$ 。求：(1) 等效电容；(2) 自由电荷面密度；(3) 束缚电荷面密度；(4) 电容器中储存的静电能。



## 解答

(1)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_0 S}{\frac{2}{3}d} = \frac{3\epsilon_0 S}{2d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\frac{1}{3}d} = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \\ \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d(1+2\epsilon_r)}{3\epsilon_0 \epsilon_r S} \\ C &= \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r S}{(1+2\epsilon_r)d} \end{aligned}$$

(2)

$$Q = CU$$

$$\sigma_0 = \frac{Q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r}{(1+2\varepsilon_r)d}U$$

(3) 介质中

$$D\Delta S = \sigma_0\Delta S$$

$$D = \sigma_0 = \varepsilon_0\varepsilon_r E$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$E\Delta S = \frac{\sigma_0\Delta S - \sigma'\Delta S}{\varepsilon_0}$$

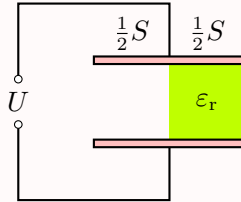
$$\sigma' = \sigma_0 - \varepsilon_0 E = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{(1 + 2\varepsilon_r)d}U$$

(4)

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r S}{2(1 + 2\varepsilon_r)d}U^2$$

## 【0405C02】

如图，忽略边缘效应的平行板电容器，极板面积为  $S$ ，板间距离为  $d$ ，接在电压为  $U$  的电源上，电介质的相对介电常数为  $\varepsilon_r$ 。求：(1) 板内各处的电场强度的大小；(2) 自由电荷面密度与束缚电荷面密度；(3) 等效电容；(4) 电容器中储存的静电能。



## 解答

(1) 两端电压相同，距离相同，真空和介质中的电场强度相同

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

(2) 真空中

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1$$

$$D_1 \Delta S = \sigma_{01} \Delta S$$

$$\sigma_{01} = D_1 = \frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

介质中

$$D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2$$

$$\begin{aligned}
 D_2 \Delta S &= \sigma_{02} \Delta S \\
 \sigma_{02} = D_2 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r U}{d} \\
 E_2 \Delta S &= \frac{\sigma_{02} \Delta S - \sigma'_2 \Delta S}{\varepsilon_0} \\
 \sigma'_2 = \sigma_{02} - \varepsilon_0 E_2 &= \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{U}{d}
 \end{aligned}$$

(3)

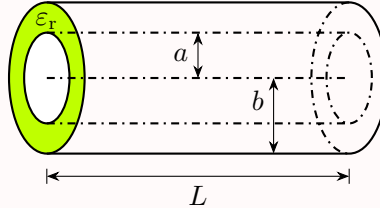
$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\varepsilon_0 \frac{1}{2} S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} \\
 C_2 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{2} S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d} \\
 C &= C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 (1 + \varepsilon_r) S}{2d}
 \end{aligned}$$

(4)

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon_0 (1 + \varepsilon_r) S}{4d} U^2$$

## 【0405C03】

如图所示，一电容器由两个同轴圆筒组成，内筒半径为  $a$ ，外筒半径为  $b$ ，长为  $L$ ，中间充满相对介电常量为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质。内、外筒分别带有等量异号电荷  $\pm Q$ 。忽略边缘效应，求：(1) 圆柱形电容器的电容；(2) 电容器贮存的能量。



## 解答

(1)

$$\begin{aligned}
 \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q_0 \\
 D(2\pi r h) &= \frac{Q}{L} h \\
 D &= \frac{Q}{2\pi L r} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \\
 E &= \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L r} \\
 U &= \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \ln \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln \frac{b}{a}}$$

(2)

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln \frac{b}{a}$$

## 评分标准

1. 求电场 5 分
2. 求电压 3 分
3. 求电容 2 分
4. 求能量 5 分

## 5.2 电场能量

电场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

电场的能量

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

## 【0405A06】

一个平行板电容器，充电后与电源断开，当用绝缘手柄将电容器两极板间距离拉大，则两极板间的电势差  $U$ 、电场强度的大小  $E$ 、电场能量  $W_e$  将发生如下变化

- (A)  $U$  减小,  $E$  减小,  $W_e$  减小 (B)  $U$  增大,  $E$  增大,  $W_e$  增大  
(C)  $U$  增大,  $E$  不变,  $W_e$  增大 (D)  $U$  减小,  $E$  不变,  $W_e$  不变

## 答案

C

## 解析

电容器充电后与电源断开，极板上所带电荷量不会发生变化。电容器的电容

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

当极板间距离  $d$  增大，电容器的电容  $C$  减小， $Q$  不变，所以极板间的电势差  $U$  增大。而由高斯定理，极板上电荷量不变，板间电场强度不变，距离拉大，板间电势差也必然增大。

而电场强度不变，所以板间的电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

不变，但距离拉大时，板间电场分布的区域的体积增大，所以总的电场能量增大。

### 【0405A07】

一空气平行板电容器充电后与电源断开，然后在两极板间充满某种各向同性、均匀电介质，则电场强度的大小  $E$ 、电容  $C$ 、电压  $U$ 、电场能量  $W_e$  四个量各自与充入介质前相比较，增大 ( $\uparrow$ ) 或减小 ( $\downarrow$ ) 的情形为

(A)  $E \uparrow, C \uparrow, U \uparrow, W_e \uparrow$

(B)  $E \downarrow, C \uparrow, U \downarrow, W_e \downarrow$

(C)  $E \downarrow, C \uparrow, U \uparrow, W_e \downarrow$

(D)  $E \uparrow, C \downarrow, U \downarrow, W_e \uparrow$

### 答案

B

### 解析

平行板电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

充电后与电源断开，极板上所带电量  $Q$  保持不变，插入介质， $\varepsilon$  增大，所以电容  $C$  增大，电压  $U$  减小，极板间距不变，所以电场强度  $E$  减小。

当然也可以由有电介质时的高斯定理可得，电量不变，电位移矢量不变，介电常数增大，所以电场强度减小，间距不变，所以电压减小。

而电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

所以电位移矢量不变，电场强度减小，所以电场能量密度减小，电场能量减小。

也可以由电场能量

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2C}Q^2$$

电量保持不变，电容增大，所以电场能量减小。

### 【0405A08】

一空气平行板电容器在充电后充入石蜡，石蜡注入时电容器仍与电源相接，那么注入石蜡后，场强  $E$ 、电容  $C$  和电场能量密度  $w_e$  的变化为

- (A)  $E$  不变,  $C$  减小,  $w_e$  增大  
(C)  $E$  增大,  $C$  减小,  $w_e$  增大

- (B)  $E$  不变,  $C$  增大,  $w_e$  增大  
(D)  $E$  减小,  $C$  减小,  $w_e$  减小

答案

B

【0405A09】

如果某带电体的电荷分布体密度  $\rho$  增大为原来的 2 倍, 则其电场的能量变为原来的

- (A) 2 倍                      (B)  $\frac{1}{2}$  倍                      (C) 4 倍                      (D)  $\frac{1}{4}$  倍

答案

C

解析

由点电荷的电场场强

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

当电荷分布的体密度  $\rho$  增大为原来的 2 倍, 电场强度也增大为原来的两倍。

而电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

所以电场能量密度增大为原来的四倍, 电场能量也变为原来的四倍。

【0405B08】

如果某带电体的电荷分布体密度  $\rho$  增大为原来的 2 倍, 则其电场的能量变为原来的\_\_\_\_\_ 倍。

答案

4

【0405A10】

两个同样的金属球  $a$ 、 $b$  原来均不带电。现将  $a$  球充电到  $Q$  后, 使它与  $b$  球接触, 然后分开足够远, 二者均可视为孤立导体, 则接触后、前  $a$  球电场的能量密度的比值  $w_{e2} : w_{e1}$  等于

(A)  $\frac{1}{8}$

(B)  $\frac{1}{4}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D)  $\frac{3}{4}$

答案

B

【0405B04】

一平行板电容器，充电后切断电源，然后使两极板间充满相对介电常量为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质。此时两极板间的电场能量是原来的\_\_\_\_\_倍。

答案

$\frac{1}{\varepsilon_r}$

解析

平行板电容器充电后切断电源，则极板上所带的电荷保持不变。因此由有电介质时的高斯定理可知，插入介质前后，极板间的电位移矢量保持不变，所以电场强度发生变化。

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$D' = \varepsilon_0 \varepsilon_r E'$$

$$D = D'$$

$$E' = \frac{E}{\varepsilon_r}$$

$$U' = E'd = \frac{E}{\varepsilon_r} d = \frac{U}{\varepsilon_r}$$

$$W'_e = \frac{1}{2} Q' U' = \frac{1}{2} Q \frac{U}{\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r} \left( \frac{1}{2} Q U \right) = \frac{1}{\varepsilon_r} W_e$$

【0405B05】

一平行板电容器两极板间电压为  $U$ ，极板面积为  $S$ ，其间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀电介质，电介质厚度为  $d$ ，则电介质中的电场能量密度  $w_e =$ \_\_\_\_\_。

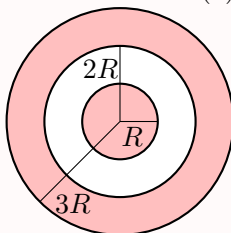
答案

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r U^2}{2d^2}$$



## 【0405C04】

如图, 一个带电量为  $q$ 、半径为  $R$  的导体球, 其外罩一个带电量为  $Q$ 、内外半径分别为  $2R$  和  $3R$  的同心导体球壳。静电平衡后, 以无穷远为电势零点, 内导体球的电势是导体球壳电势的 2 倍。(1) 求导体球上的电荷量  $q$  以及静电平衡后空间各点的电场强度; (2) 求此系统的电场能量。



## 解答

(1) 静电平衡时导体内电场为零, 所以当  $r < R$  时,  $E_1 = 0$ ; 当  $2R < r < 3R$  时,  $E_3 = 0$ ; 电荷分布具有球对称性, 可以用高斯定理求电场, 当  $R < r < 2R$  时,

$$E_2(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

当  $r > 3R$  时,

$$E_4(4\pi r^2) = \frac{q + Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_4 = \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

以无穷远为电势零点, 导体球壳的电势

$$U_1 = \int_{3R}^{\infty} E_4 dr = \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0(3R)}$$

导体球的电势

$$U_2 = \int_R^{2R} E_2 dr + \int_{3R}^{\infty} E_4 dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) + \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0(3R)} = \frac{3q + 2(q + Q)}{4\pi\varepsilon_0(6R)}$$

依题意,  $U_2 = 2U_1$ , 所以

$$\frac{3q + 2(q + Q)}{4\pi\varepsilon_0(6R)} = 2 \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0(3R)}$$

$$3q + 2(q + Q) = 4(q + Q)$$

$$q = 2Q$$

所以电场分布为

$$E = \begin{cases} E_1 = 0, & r < R \\ E_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}, & R < r < 2R \\ E_3 = 0, & 2R < r < 3R \\ E_4 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > 3R \end{cases}$$

(2) 当  $r < R$  时,  $E_1 = 0$ ,  $W_1 = 0$ ; 当  $2R < r < 3R$  时,  $E_3 = 0$ ,  $W_3 = 0$ ; 当  $R < r < 2R$  时,

$$E_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$W_2 = \int_R^{2R} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 (4\pi r^2 dr) = \int_R^{2R} \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

当  $r > 3R$  时,

$$E_4 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

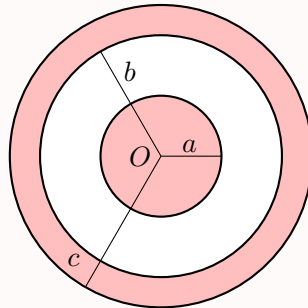
$$W_4 = \int_{3R}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_4^2 (4\pi r^2 dr) = \int_{3R}^{\infty} \frac{9Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{3Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

所以总的电场能量

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{5Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

#### 【0405C05】

如图所示, 一内半径为  $b$ 、外半径为  $c$  的金属球壳带有电荷  $Q$ , 在球壳空腔内有一半径为  $a$  的同心金属小球, 带电量为  $q$ 。设无限远处为电势零点, 试求: (1) 球壳内、外表面上的电荷量; (2) 空间电场的分布; (3) 球心  $O$  点处的总电势; (4) 在  $a < r < b$  空间储存的电场能量。



#### 解答

(1) 系统具有球对称性, 静电平衡后导体内部电场为零, 因此电荷分布为:  $r = a$  处, 均匀带电, 带电量  $q_1 = q$ ;  $r = b$  处, 均匀带电, 带电量  $q_2 = -q$ ;  $r = c$  处, 均匀带电, 带电量  $q_3 = Q + q$ 。

(2) 电荷分布具有球对称性, 可以由高斯定理求电场。静电平衡后导体内部电场为零, 因此  $r < a$  处,  $E_1 = 0$ ;  $b < r < c$  处,  $E_3 = 0$ ;  $a < r < b$  处,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

$$E_2(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$r > c$  处,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$$E_4(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_4 = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(3) 根据均匀带电球面在球内的电势 (以无限远处为电势零点)

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球心的电势为三个均匀带电球面在球心电势之和

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{a} - \frac{q}{b} + \frac{Q+q}{c} \right)$$

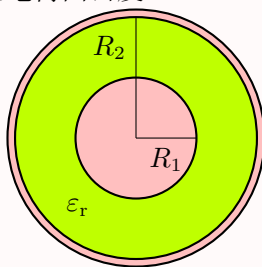
(4)

$$w_{e2} = \frac{1}{2} D_2 E_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

$$W_{e2} = \int_a^b \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} (4\pi r^2 dr) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

#### 【0405C06】

球形电容器由半径为  $R_1$  的金属球和与它同心的金属球壳组成, 球壳内半径为  $R_2$ , 其间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的各向同性均匀介质, 如图所示。当内球带正电  $Q$  时, 求: (1) 介质层内的场强; (2) 电容器所存储的能量; (3) 电介质内表面的极化电荷面密度。



#### 解答

由于电荷分布具有球对称性, 可用高斯定理求电场分布。在介质层内取一个与金属球同心的、半径为  $r$  的球面为高斯面, 由电位移矢量的高斯定理可得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \cdot (4\pi r^2) = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} = \varepsilon E$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

方向沿半径方向指向外 (球坐标系中的  $\vec{e}_r$ )。同样可以求得, 介质层外区域 ( $r < R_1$ 、 $r > R_2$ ) 电场为零, 即电场只分布在介质层内。

所以介质层内的电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon r^4}$$

所以  $r \rightarrow r + dr$  部分的电场能量

$$dW_e = w_e dV = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr$$

所以总的电场能量

$$W_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

在介质层内取一个与金属球同心的、半径为  $r$  的球面为高斯面, 由电场强度的高斯定理可得

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_0 + q'}{\epsilon_0} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot (4\pi r^2) &= \frac{Q + q'}{\epsilon_0} \\ \frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q &= Q + q' \\ q' &= \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon} Q \\ \sigma' &= \frac{q'}{4\pi R_1^2} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2} \end{aligned}$$

### 评分标准

1. 介质层内的电场 7 分
  - (a) 电位移矢量的高斯定理 3 分
  - (b) 得到电位移矢量 2 分
  - (c) 得到电场强度大小 1 分、方向 1 分
2. 电场能量 4 分
  - (a) 电场能量密度 2 分
  - (b) 球层的电场能量 1 分
  - (c) 积分 1 分
3. 极化电荷 4 分
  - (a) 电场强度的高斯定理 3 分

(b) 得到极化电荷分布 1 分

### 【0405C07】

半径为  $R_1$  的导体圆柱单位长度带电  $\lambda_1$ ，内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的导体圆柱筒单位长度带电  $\lambda_2$ ，二者同轴放置 ( $R_1 < R_2 < R_3$ )，二者之间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性电介质，忽略边缘效应，求：(1) 电介质内部的场强分布；(2) 导体圆柱与导体圆柱筒的电势差；(3) 单位长度电介质层内的电场能量。

### 解答

(1) 电荷分布具有柱对称性，可以用高斯定理求电场

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D(2\pi r h) = \lambda_1 h$$

$$D = \frac{\lambda_1}{2\pi r} = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}$$

(2)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\lambda_1}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3)

$$w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{\lambda_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

$$W_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2} (2\pi r \times 1 \times dr) = \frac{\lambda_1^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### 评分标准

1. 计算电场 5 分
2. 计算电势差 5 分
3. 计算电场能量 5 分

## 5.3 磁场能量

磁场的能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

## 磁场的能量

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

## 【0405A11】

有两个长直密绕螺线管，长度及线圈匝数均相同，半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ 。管内充满均匀介质，其绝对磁导率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ 。设  $r_1 : r_2 = 1 : 2$ ， $\mu_1 : \mu_2 = 2 : 1$ ，当将两只螺线管串联在电路中通电稳定后，其自感系数之比  $L_1 : L_2$  与磁能之比  $W_{m1} : W_{m2}$  分别为

- (A)  $L_1 : L_2 = 1 : 1$ ， $W_{m1} : W_{m2} = 1 : 1$       (B)  $L_1 : L_2 = 1 : 2$ ， $W_{m1} : W_{m2} = 1 : 1$   
 (C)  $L_1 : L_2 = 1 : 2$ ， $W_{m1} : W_{m2} = 1 : 2$       (D)  $L_1 : L_2 = 2 : 1$ ， $W_{m1} : W_{m2} = 2 : 1$

## 答案

C

## 解析

螺线管内的磁场与螺线管的半径无关，与磁导率成正比【根据有磁介质时的安培环路定理可以求得  $H = \frac{NI}{L}$  与半径无关，而  $B = \mu H$ 】，所以，当两个螺线管串联在电路中时，通过的电流相等，因此  $B_1 : B_2 = \mu_1 : \mu_2 = 2 : 1$ ，而通过线圈的磁链  $\Phi = NBS = NB\pi r^2$ ，所以

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{N_1 B_1 \pi r_1^2}{N_2 B_2 \pi r_2^2} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 : 2$$

所以自感

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\Phi_1 / I_1}{\Phi_2 / I_2} = 1 : 2$$

而磁能

$$\frac{W_{m1}}{W_{m2}} = \frac{\frac{1}{2} L_1 I_1^2}{\frac{1}{2} L_2 I_2^2} = \frac{L_1}{L_2} = 1 : 2$$

## 【0405B06】

无限长密绕直螺线管通以电流  $I$ ，管内、外均为真空，管上单位长度绕有  $n$  匝导线，则螺线管内部的磁能密度为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

## 【0405B07】

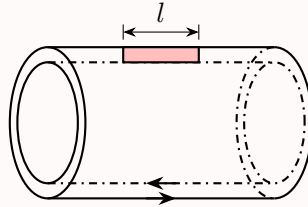
无限长密绕直螺线管通以电流  $I$ ，内部充满均匀、各向同性的磁介质，绝对磁导率为  $\mu$ 。管上单位长度绕有  $n$  匝导线，则螺线管内部的磁能密度为\_\_\_\_\_。

## 答案

$$\frac{1}{2}\mu n^2 I^2$$

## 【0405C08】

一同轴空心直圆筒电缆，内、外筒半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  (筒壁厚度可以忽略)，电流  $I$  沿内筒流出去，沿外筒流回，如图所示。求：(1) 两圆筒间的磁感应强度分布；(2) 通过长度为  $l$  的一段截面 (图中的阴影部分) 的磁通量；(3) 单位长度圆筒电缆的自感；(4) 单位长度电缆中贮存的磁能。



## 解答

(1)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(2)

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times l \, dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3)

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(4)

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{W_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

## 评分标准

1. 磁感应强度 5 分
2. 磁通量 4 分
3. 自感 3 分
4. 磁能 3 分



## 第六章 麦克斯韦电磁理论

### 1、麦克斯韦电磁理论

#### 1.1 位移电流

位移电流密度

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

位移电流

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S}$$

#### 【0601B01】

一平行板空气电容器的两极板都是半径为  $R$  的圆形导体片，在充电时，板间电场强度的变化率为  $\frac{dE}{dt}$ 。若略去边缘效应，则两板间的位移电流为\_\_\_\_\_。

#### 答案

$$\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

#### 解析

位移电流密度矢量

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

所以，位移电流

$$I_d = j_d S = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi R^2 = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

#### 【0601B02】

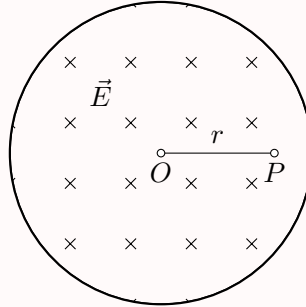
一平行板空气电容器的两极板都是半径为  $R$  的圆形导体片，在充电时，板间电场强度的变化率为  $\frac{dE}{dt}$ 。若略去边缘效应，则两板间的位移电流密度的大小为\_\_\_\_\_。

答案

$$\epsilon_0 \left| \frac{dE}{dt} \right|$$

【0601B03】

图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场  $\vec{E}$ ，其方向垂直纸面向内， $\vec{E}$  的大小随时间  $t$  线性增加， $P$  为柱体内与轴线相距为  $r$  的一点，则  $P$  点的位移电流密度的方向为\_\_\_\_\_。



答案

垂直纸面向内

解析

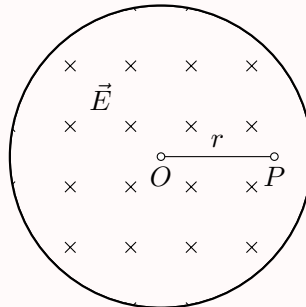
位移电流密度矢量

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

所以，电场方向垂直纸面向内，大小随时间线性增加，因此位移电流密度矢量的方向垂直纸面向内。

【0601B04】

图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场  $\vec{E}$ ，其方向垂直纸面向内， $\vec{E}$  的大小随时间  $t$  的变化关系为  $E = E_0 + kt$ ，其中  $E_0$ 、 $k$  均为正值常数， $P$  为柱体内与轴线相距为  $r$  的一点，则  $P$  点的位移电流密度的大小为\_\_\_\_\_。



答案

$$\varepsilon_0 k$$

解析

位移电流密度矢量

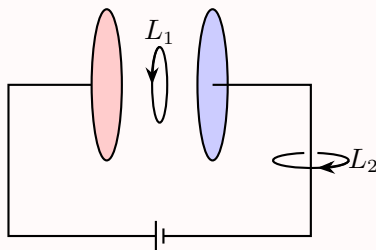
$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## 1.2 全电流安培环路定理

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = I_C + I_d = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

【0601A01】

如图, 平板电容器 (忽略边缘效应) 充电时, 沿环路  $L_1$  的磁场强度  $\vec{H}$  的环流与沿环路  $L_2$  的磁场强度  $\vec{H}$  的环流, 两者必有



(A)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} > \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$   
 (C)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(B)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$   
 (D)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

答案

C

解析

全电流安培环路定理

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = I_C + I_d$$

显然

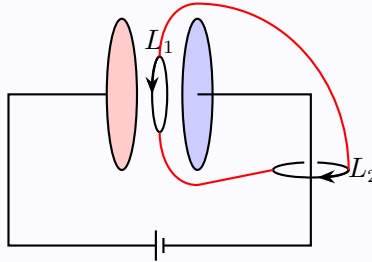
$$\oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C$$

这里的  $I_C$  就是充电过程中某个瞬间通过回路中的传导电流。而

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_d$$

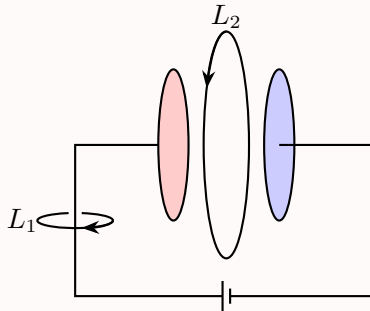
这里的  $I_d$  只是通过  $L_1$  部分的位移电流，所以显然有

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$



#### 【0601B05】

如图，平板电容器 (忽略边缘效应) 充电时，沿环路  $L_1$  的磁场强度  $\vec{H}$  的环流与沿环路  $L_2$  的磁场强度  $\vec{H}$  的环流，两者必有  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l}$  \_\_\_\_\_  $\oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$  (填 “>”、“=” 或 “<”)。

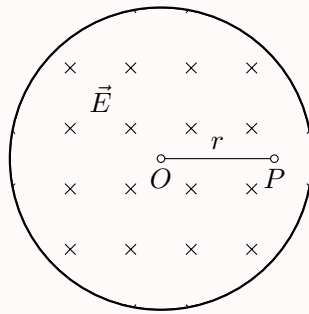


#### 答案

<

#### 【0601A02】

图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场  $\vec{E}$ ，其方向垂直纸面向内， $\vec{E}$  的大小随时间  $t$  线性增加， $P$  为柱体内与轴线相距为  $r$  的一点，则  $P$  点感生磁场的方向为



- (A) 垂直纸面向内      (B) 垂直纸面向外      (C) 垂直  $OP$  向上      (D) 垂直  $OP$  向下

### 答案

D

### 解析

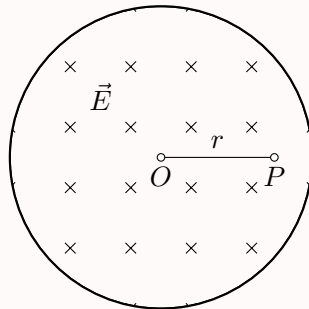
位移电流密度矢量

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

所以，电场方向垂直纸面向内，大小随时间线性增加，因此位移电流密度矢量的方向垂直纸面向内。所以，圆柱体内相当于有一个垂直纸面向内的电流通过，由此产生的感生磁场是沿着以圆柱体轴线为中心、通过该点的圆的切线方向，因此图中就是垂直  $OP$  向下。

### 【0601B06】

图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场  $\vec{E}$ ，其方向垂直纸面向内， $\vec{E}$  的大小随时间  $t$  线性增加， $P$  为柱体内与轴线相距为  $r$  的一点，则  $P$  点感生磁场的方向为\_\_\_\_\_。

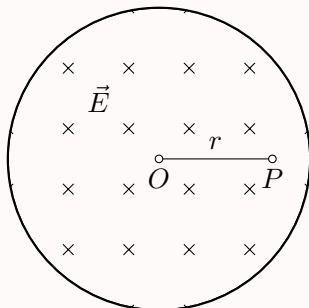


### 答案

垂直  $OP$  向下

## 【0601B07】

图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场  $\vec{E}$ ，其方向垂直纸面向内， $\vec{E}$  的大小随时间  $t$  的变化关系为  $E = E_0 + kt$ ，其中  $E_0$ 、 $k$  均为正值常数， $P$  为柱体内与轴线相距为  $r$  的一点，则  $P$  点感生磁场的大小为\_\_\_\_\_。



## 答案

$$\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0kr$$

## 解析

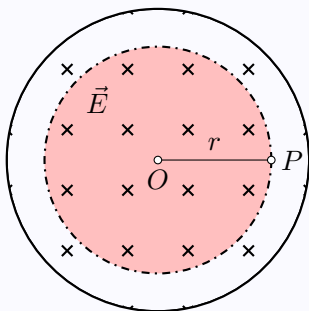
全电流安培环路定理

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

$$H(2\pi r) = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} (\pi r^2)$$

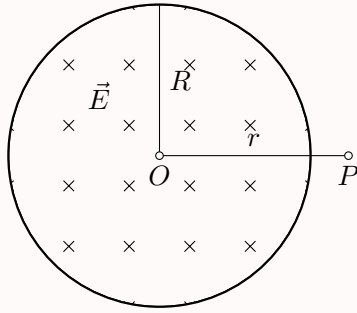
$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 kr$$

$$B = \mu_0 H = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 kr$$



## 【0601B08】

图示为一半径为  $R$  的圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场  $\vec{E}$ ，其方向垂直纸面向内， $\vec{E}$  的大小随时间  $t$  的变化关系为  $E = E_0 + kt$ ，其中  $E_0$ 、 $k$  均为正值常数， $P$  为柱体外与轴线相距为  $r$  的一点，则  $P$  点感生磁场的大小为\_\_\_\_\_。



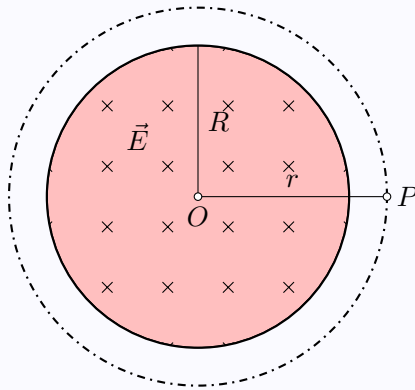
答案

$$\frac{\mu_0 \varepsilon_0 k R^2}{2r}$$

解析

全电流安培环路定理

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S} \\ H(2\pi r) &= \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} (\pi R^2) \\ H &= \frac{\varepsilon_0 k R^2}{2r} \\ B = \mu_0 H &= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 k R^2}{2r}\end{aligned}$$



### 1.3 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组的积分形式

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q = \int_V \rho dV \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0\end{aligned}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦方程组的微分形式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

**【0601A03】**

表示“电荷以发散的方式激发电场”的是

- (A)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$       (B)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$       (C)  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$       (D)  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

答案

A

**【0601A04】**

表示“变化的磁场以涡旋的方式激发电场”的是

- (A)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$       (B)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$       (C)  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$       (D)  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

答案

B

**【0601A05】**

表示“磁感应线一定是闭合曲线”的是

- (A)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$       (B)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$       (C)  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$       (D)  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

答案

C

**【0601A06】**

表示“传导电流和变化的电场以涡旋的方式激发磁场”的是



(A)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$       (B)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$       (C)  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$       (D)  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

答案

D

【0601B09】

麦克斯韦方程组的积分形式表示“电荷以发散的方式激发电场”的是\_\_\_\_\_。

答案

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

【0601B10】

麦克斯韦方程组的积分形式表示“变化的磁场以涡旋的方式激发电场”的是\_\_\_\_\_。

答案

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

【0601B11】

麦克斯韦方程组的积分形式表示“磁感应线一定是闭合曲线”的是\_\_\_\_\_。

答案

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

【0601B12】

麦克斯韦方程组的积分形式表示“传导电流和变化的电场以涡旋的方式激发磁场”的是\_\_\_\_\_。

答案

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

## 【0601B13】

在变化电磁场中没有自由电荷分布、没有传导电流分布的区域内，沿闭合环路  $L$  (设环路包围的面积为  $S$ )， $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

## 解析

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

没有自由电荷与传导电流， $\rho = 0$ ， $\vec{j} = 0$ ，所以

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

## 【0601B14】

在变化电磁场中没有自由电荷分布、没有传导电流分布的区域内，沿闭合环路  $L$  (设环路包围的面积为  $S$ )， $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 答案

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$