第一章　质点运动学

一、选择题

1. 位移与路程概念的理解

第 1 题 |【01A0101】

质点作圆周运动，在 t 时刻质点的位置矢量为 $\vec{r}$，t 至 $t+\Delta t$ 时间内的位移为 $\Delta\vec{r}$，路程为 Δs，则
(A) $|\Delta\vec{r}| = \Delta s = \Delta r$
(B) $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$，当 $\Delta t \to 0$ 时，有 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$
(C) $|\Delta\vec{r}| = \Delta s \neq \Delta r$，当 $\Delta t \to 0$ 时，有 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$
(D) $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$，当 $\Delta t \to 0$ 时，有 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s = \mathrm{d}r$

答案

B

解析

$\vec{r}$ 是 t 时刻质点相对原点的位置矢量，r 是质点与原点之间的距离；$\vec{r}'$ 是 t' 时刻质点相对原点的位置矢量，r' 是质点与原点之间的距离；时间间隔 $\Delta t = t' - t$，这段时间内质点的位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$，位移的大小为 $|\Delta\vec{r}|$。而 $\Delta r = r' - r$ 是两个时刻质点到原点之间距离的变化量，一般情况下 $\Delta r \neq |\Delta\vec{r}|$，$\Delta r$ 可正可负，$|\Delta\vec{r}|$ 不可能为负。当 $\Delta t \to 0$ 时，对于一个元过程，无穷小的变化量 Δ 写成 d，即 $\Delta \to \mathrm{d}$。

$$\vec{r} = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$
$$\vec{r}' = x'\,\vec{\mathrm{e}}_x + y'\,\vec{\mathrm{e}}_y + z'\,\vec{\mathrm{e}}_z$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$
$$\Delta\vec{r} = (x'-x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y'-y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z'-z)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$
$$\Delta r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (\mathrm{d}y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (\mathrm{d}z)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$
$$|\,\mathrm{d}\vec{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

$$\mathrm{d}r=\sqrt{(x+\mathrm{d}x)^2+(y+\mathrm{d}y)^2+(z+\mathrm{d}z)^2}-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

2. 速度与速率概念的理解

第 2 题 |【01A0201】

以下关于平均速度和平均速率的描述，正确的是

(A) 平均速度的大小就是平均速率
(B) 平均速度的大小一定小于平均速率
(C) 平均速度的大小一定大于平均速率
(D) 平均速度的大小一定不大于平均速率

答案

D

第 3 题 |【01A0202】

以下关于瞬时速度和瞬时速率的描述，正确的是

(A) 瞬时速度的大小就是瞬时速率
(B) 瞬时速度的大小一定小于瞬时速率
(C) 瞬时速度的大小一定大于瞬时速率
(D) 瞬时速度的大小一定不大于瞬时速率

答案

A

第 4 题 |【01A0203】

一质点在平面上作一般曲线运动，其瞬时速度为 $\vec{v}$，瞬时速率为 v，某一段时间内的平均速度为 $\bar{\vec{v}}$，平均速率为 $\bar{v}$，则有

(A) $|\vec{v}|=v$，$|\bar{\vec{v}}|=\bar{v}$
(B) $|\vec{v}|\neq v$，$|\bar{\vec{v}}|=\bar{v}$
(C) $|\vec{v}|\neq v$，$|\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$
(D) $|\vec{v}|=v$，$|\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$

答案

D

第 5 题 |【01A0204】

下列说法正确的是

(A) 平均速率等于平均速度的大小
(B) 运动物体速率不变时，速度可以变化
(C) 加速度恒定不变时，物体运动方向也不变
(D) 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成 (v_1、v_2 分别为初、末速率)$\bar{v} = \frac{v_1+v_2}{2}$

答案

B

第 6 题 |【01A0205】

一运动质点做二维运动，位矢为 $\vec{r}(x,y)$，其中 x、y 均为时间 t 的函数，下列式子中表示速度的大小的是
(A) $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ (B) $\frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ (C) $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ (D) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

答案

A

解析

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\,\vec{\mathrm{e}}_r)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{e}}_r+r\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{e}}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{e}}_\theta=v_r\,\vec{\mathrm{e}}_r+v_\theta\,\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

3. 加速度概念的理解

第 7 题 |【01A0301】

以下关于质点运动的描述中，正确的是
(A) 在直线运动中，加速度不断减小，则速度也不断减小
(B) 在直线运动中，加速度的方向和速度的方向相同
(C) 在某个过程中平均速率不为零，则平均速度也不可能为零
(D) 若加速度的大小和方向不变，则速度的大小和方向可不断变化

答案

D

第 8 题 |【01A0302】

以下运动形式中，$\vec{a}$ 保持不变的运动是

(A) 单摆的运动
(B) 匀速率圆周运动
(C) 行星的椭圆轨道运动
(D) 抛体运动

答案

D

4. 切向和法向加速度概念的理解

第 9 题 |【01A0401】

对于曲线运动的物体，以下说法中正确的是

(A) 切向加速度必不为零
(B) 速度的法向分量必为零
(C) 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零
(D) 若物体的加速度为恒矢量，它一定作匀变速率运动

答案

B

第 10 题 |【01A0402】

以下说法正确的是

(A) 质点做圆周运动时，加速度一定与速度垂直
(B) 质点做直线运动时，法向加速度必为零
(C) 质点做曲线运动时，轨道最弯处法向加速度最大
(D) 若某时刻质点的速率为零，则其切向加速度必为零

答案

B

第 11 题 |【01A0403】

质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，s 表示路程，a_t 表示切向加速度。(1) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$，(2) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v$，(3) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$，(4) $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|=a_t$，关于以上四个表达式的判断，正确的是

(A) 只有 (1)(4) 是对的　(B) 只有 (2)(4) 是对的　(C) 只有 (2) 是对的　(D) 只有 (3) 是对的

答案

D

二、填空题

1. 已知运动学方程求轨道方程

第 12 题 |【01B0101】

已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=2t\,\vec{\mathrm{e}}_x+(2-t^2)\,\vec{\mathrm{e}}_y$，则质点的轨道方程为______。

答案

$y=2-\frac{1}{4}x^2$

解析

$$\vec{r}=2t\,\vec{\mathrm{e}}_x+(2-t^2)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$x=2t, y=2-t^2$$
$$t=\frac{x}{2}$$
$$y=2-t^2=2-\frac{x^2}{4}$$

第 13 题 |【01B0102】

一质点的运动学方程为 $\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$，其中 A、B、ω 为三个正的常数，则质点的轨道方程为______。

答案

$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$

解析

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$x = A\cos(\omega t), y = B\sin(\omega t)$$
$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A}, \sin(\omega t) = \frac{y}{B}$$
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

2. 已知运动学方程求位移和路程

第 14 题 |【01B0201】

一质点沿 x 轴运动的规律是 $x = t^2 - 4t + 5(\mathrm{SI})$，则前三秒内它的位移是______m。

答案

-3

解析

$$x(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$$
$$x(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$$
$$\Delta x = x(3) - x(0) = -3\ \mathrm{m}$$

第 15 题 |【01B0202】

有一质点做直线运动，运动学方程为 $x = 4.5t^2 - 2t^3(\mathrm{SI})$，则质点第 2 s 内的路程为______m。

答案

2.25

解析

第 2 秒内是指 $t_1 = 1$ s 和 $t_2 = 2$ s 两个时刻之间的时间段。由题意可知，质点的运动方程为 $x = 4.5t^2 - 2t^3$，所以可以求得任意 t 时刻质点的速度为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 9t - 6t^2$$

由此可知，在 $t = 1.5$ s 前，质点沿 x 轴正方向运动，在 $t = 1.5$ s 后，质点沿 x 轴负方向运动。在

$t = 1.5$ s 时，质点的位置为 $x(1.5) = \frac{27}{8}$ m $= 3.375$ m，所以在第 2 s 内，质点的路程为

$$\Delta s = [x(1.5) - x(1)] + [x(1.5) - x(2)] = 2.25 \text{ m}$$

3. 已知运动学方程求速度

第 16 题 |【01B0301】

某质点做直线运动，其运动学方程为 $x = 4t - 2t^2$(SI)，则在 $t = 0$ 到 $t = 2$ s 这段时间内，质点的平均速度为_____m/s。

答案

0

解析

$$x(0) = 0$$
$$x(2) = 4 \times 2 - 2 \times 2^2 = 0$$
$$\Delta x = x(2) - x(0) = 0$$
$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta x\,\vec{e}_x}{\Delta t} = \vec{0}$$

第 17 题 |【01B0302】

某质点的运动学方程为 $\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y + Ct\,\vec{e}_z$，其中 A、B、C、ω 均为正常数，t 为时间，则任意 t 时刻质点运动的速度为 $\vec{v} =$_____。

答案

$-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y + C\,\vec{e}_z$

解析

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y + Ct\,\vec{e}_z$$
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y + C\,\vec{e}_z$$

第 18 题 |【01B0303】

一质点在 xy 平面内运动，其运动学方程为 $x = 6t$(SI) 和 $y = 19 - 2t^2$(SI)，则质点第 2 秒末的瞬时速度大小 $v_2 =$______m/s。

答案

10

解析

$$
\begin{gathered}
x = 6t \\
v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6 \\
y = 19 - 2t^2 \\
v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4t \\
\vec{v} = v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y = 6\,\vec{\mathrm{e}}_x - 4t\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{v}(t=2) = 6\,\vec{\mathrm{e}}_x - 8\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
v(t=2) = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10\ \mathrm{m/s}
\end{gathered}
$$

4. 已知运动学方程求加速度

第 19 题 |【01B0401】

已知某质点的运动学方程为 $x = t+2$(SI)，$y = t^2+2$(SI)，则质点的加速度矢量表达式为 $\vec{a} =$______m/s^2。

答案

$2\,\vec{\mathrm{e}}_y$

解析

$$
\begin{gathered}
x = t + 2, v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \\
y = t^2 + 2, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 2 \\
\vec{a} = a_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + a_y\,\vec{\mathrm{e}}_y = 2\,\vec{\mathrm{e}}_y
\end{gathered}
$$

第 20 题 |【01B0402】

已知某质点的运动学方程为 $\vec{r}=4t^2\,\vec{e}_x+(2t+3)\,\vec{e}_y(\mathrm{SI})$，则质点的加速度矢量表达式为 $\vec{a}=$______$\mathrm{m/s^2}$。

答案

$8\,\vec{e}_x$

解析

$$
\begin{aligned}
\vec{r}&=4t^2\,\vec{e}_x+(2t+3)\,\vec{e}_y\\
\vec{v}&=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=8t\,\vec{e}_x+2\,\vec{e}_y\\
\vec{a}&=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=8\,\vec{e}_x
\end{aligned}
$$

第 21 题 |【01B0403】

一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律为 $s=At-Bt^2$，式中 A、B 为大于零的常量，则 t 时刻质点的切向加速度 $a_t=$______。

答案

$-2B$

解析

$$
\begin{aligned}
s&=At-Bt^2\\
v&=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=A-2Bt\\
a_t&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2B
\end{aligned}
$$

第 22 题 |【01B0404】

一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律为 $s=At+Bt^2$，式中 A、B 为大于零的常量，则 t 时刻质点的加速度大小等于______。

答案

$\sqrt{4B^2+\frac{(A+2Bt)^4}{R^2}}$

解析

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=A+2Bt$$
$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2B$$
$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(A+2Bt)^2}{R}$$
$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{4B^2+\frac{(A+2Bt)^4}{R^2}}$$

5. 已知运动学方程求角加速度

第 23 题 |【01B0501】

质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=3+2t^2(\mathrm{SI})$，其中 θ 为以圆心为极点的极坐标系中质点的角位置，则 t 时刻质点的角加速度为 $\beta=$______rad/s^2。

答案

4

解析

$$\theta=3+2t^2$$
$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=4t$$
$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4$$

6. 已知加速度求速度

第 24 题 |【01B0601】

一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为 $a_x=3+2t(\mathrm{SI})$，如果 $t=0$ 时质点的速度 $v_{0x}=5\ \mathrm{m/s}$，则当 $t=3\ \mathrm{s}$ 时，质点的速度 $v_x=$______m/s。

答案

23

解析

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=3+2t$$
$$\mathrm{d}v_x=a_x\,\mathrm{d}t=(3+2t)\,\mathrm{d}t$$
$$\int_5^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^3(3+2t)\,\mathrm{d}t$$
$$v_x-5=\left[3t+t^2\right]\Big|_0^3=18$$
$$v_x=23\ \mathrm{m/s}$$

第 25 题 |【01B0602】

某做直线运动的物体的运动规律为 $a_x=-kv_x^2t$，式中的 k 为大于零的常数。当 $t=0$ 时，初速度为 v_{0x}，则任意 t 时刻的速度 $v_x=$______。

答案

$\frac{2v_{0x}}{kv_{0x}t^2+2}$

解析

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-kv_x^2t$$
$$-\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x^2}=kt\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{v_{0x}}^{v_x}-\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x^2}=\int_0^t kt\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{v_x}-\frac{1}{v_{0x}}=\frac{1}{2}kt^2$$
$$\frac{1}{v_x}=\frac{1}{v_{0x}}+\frac{1}{2}kt^2=\frac{kv_{0x}t^2+2}{2v_{0x}}$$
$$v_x=\frac{2v_{0x}}{kv_{0x}t^2+2}$$

7. 已知角加速度求角速度

第 26 题 |【01B0701】

一质点从静止出发沿半径 R 的圆周运动，其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta=12t^2-6t(\mathrm{SI})$，则质点的角速度 $\omega=$______rad/s。

答案

$4t^3-3t^2$

解析

$$\beta=12t^2-6t=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}\omega=(12t^2-6t)\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^{\omega}\mathrm{d}\omega=\int_0^t(12t^2-6t)\,\mathrm{d}t$$
$$\omega=4t^3-3t^2$$

8. 已知速度求运动学方程

第 27 题 |【01B0801】

在半径为 R 的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为 $v=At^2$(式中 A 为常量)，则从 $t=0$ 到 t 时刻质点走过的路程 $s(t)=$______。

答案

$\frac{1}{3}At^3$

解析

$$v=ct^2=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}s=At^2\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^s\mathrm{d}s=\int_0^t At^2\,\mathrm{d}t$$
$$s=\frac{1}{3}At^3$$

9. 已知加速度求运动学方程

第 28 题 |【01B0901】

一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a_x=6t$(SI)，已知 $t=0$ 时，质点位于 $x=10$ cm 处，初速度 $v_{0x}=0$，则该质点的运动学方程为______(SI)。

答案

$x = 0.1 + t^3$

解析

$$a_x = 6t = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}v_x = 6t\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t 6t\,\mathrm{d}t$$
$$v_x = 3t^2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{0.1}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t 3t^2\,\mathrm{d}t$$
$$x - 0.1 = t^3$$
$$x = 0.1 + t^3$$

10. 曲率半径

第 29 题 |【01B1001】

设抛射体的初速度的大小为 v_0，抛射角为 θ，则其抛物线最高点的曲率半径为______。

答案

$\frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$

解析

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$$

11. 相对运动中位置之间的关系

第 30 题 |【01B1101】

某个瞬间，在某坐标系中，A 的位置矢量为 $x_1\,\vec{e}_x + y_1\,\vec{e}_y$，$B$ 的位置矢量为 $x_2\,\vec{e}_x + y_2\,\vec{e}_y$，则 A 相对于 B 的位置矢量为______。

答案

$(x_1 - x_2)\,\vec{e}_x + (y_1 - y_2)\,\vec{e}_y$

解析

以题设坐标系为静止参考系，B 为运动参考系，A 为研究对象，则

$$\vec{r} = x_1\,\vec{e}_x + y_1\,\vec{e}_y$$
$$\vec{r}_0 = x_2\,\vec{e}_x + y_2\,\vec{e}_y$$
$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x_1 - x_2)\,\vec{e}_x + (y_1 - y_2)\,\vec{e}_y$$

12. 相对运动中速度之间的关系

第 31 题 |【01B1201】

在相对地面静止的坐标系内，A、B 两船都以 v 速率匀速行驶，A 船沿 x 轴正方向，B 船沿 y 轴正方向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系，那么在 A 船的坐标系中，B 船的速度为______。

答案

$-v\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y$

解析

以地为静止参考系，A 船为运动参考系，B 船为研究对象，则

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_0 = v\,\vec{e}_x$$
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0 = v\,\vec{e}_y - v\,\vec{e}_x$$

三、计算题

1. 直线运动的速度和加速度

第 32 题 |【01C0101】

离水面高度为 H 的岸上有人用绳索拉船靠岸，人以恒定速率 v_0 拉绳，求当船离岸的距离为 s 时，船的速率和加速度的大小。

解答

以水面与岸的交点为坐标原点，船所在方向为 x 轴正方向，设任意 t 时刻，船的位置为 x，此时绳子的长度为 L，则有

$$L^2 = H^2 + x^2 \qquad (1\ 分)$$

所以有

$$2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad (2\ 分)$$

$$L(-v_0) = xv \qquad (2\ 分)$$

$$v = -\frac{L}{x}v_0 = -\frac{\sqrt{H^2+x^2}}{x}v_0 \qquad (2\ 分)$$

所以当船离岸 s 时，船的速率为 $\frac{\sqrt{H^2+s^2}}{s}v_0$。 (1 分)
又由 $L(-v_0) = xv$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}(-v_0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad (2\ 分)$$

$$(-v_0)(-v_0) = v\cdot v + xa \qquad (2\ 分)$$

$$a = \frac{v_0^2-v^2}{x} = \frac{v_0^2}{x}\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right) = -\frac{H^2v_0^2}{x^3} \qquad (2\ 分)$$

所以当船离岸 s 时，船的加速度的大小为 $\frac{H^2v_0^2}{s^3}$。 (1 分)

2. 已知加速度求速度和位置

第 33 题 |【01C0201】

在有阻尼的介质中，从静止开始下落的物体，其运动过程中加速度为 $a_y = A + Bv_y$，其中 $A > 0$、$B < 0$ 为常量，v_y 为速度。求：(1) 下落物体的起始加速度；(2) 下落物体加速度为零时的速度；(3) 下落物体任意 t 时刻的速度。

解答

(1)

$$a_y(v_y=0)=A \qquad (3\text{ 分})$$

(2)

$$a_y=A+Bv_y=0$$

$$v_y=-\frac{A}{B} \qquad (3\text{ 分})$$

(3)

$$a_y=A+Bv_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \qquad (3\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{A+Bv_y}=\mathrm{d}t \qquad (3\text{ 分})$$

$$\int_0^{v_y}\frac{\mathrm{d}v_y}{A+Bv_y}=\int_0^t\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{B}\ln\frac{A+Bv_y}{A}=t$$

$$\ln\frac{A+Bv_y}{A}=Bt$$

$$\frac{A+Bv_y}{A}=\mathrm{e}^{Bt}=1+\frac{B}{A}v_y$$

$$\frac{B}{A}v_y=\mathrm{e}^{Bt}-1$$

$$v_y=\frac{A}{B}(\mathrm{e}^{Bt}-1) \qquad (1\text{ 分})$$

第 34 题 |【01C0202】

一艘正在沿直线以速率 v_0 行驶的汽船，关闭发动机后，由于阻力得到一个与速度反向、大小与船速平方成正比例的加速度，即 $a_x=-kv_x^2$，k 为常数。在关闭发动机后，试求：(1) 船在 t 时刻的速率；(2) 在时间 t 内，船行驶的距离；(3) 船在行驶距离 x 时的速率。

解答

(1)

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-kv_x^2$$

$$-\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x^2}=k\,\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$\int_{v_0}^{v_x}-\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x^2}=\int_0^t k\,\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{v_x}-\frac{1}{v_0}=kt$$

$$\frac{1}{v_x}=\frac{1}{v_0}+kt=\frac{1+kv_0t}{v_0}$$

$$v_x=\frac{v_0}{1+kv_0t} \quad (1\text{ 分})$$

(2)

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{1+kv_0t}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{v_0}{1+kv_0t}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \frac{v_0}{1+kv_0t}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$u=1+kv_0t$$

$$\mathrm{d}u=kv_0\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{kv_0}\,\mathrm{d}u$$

$$x=\int_0^t \frac{v_0}{1+kv_0t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{1+kv_0t}\frac{v_0}{u}\frac{1}{kv_0}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t) \quad (1\text{ 分})$$

(3)

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}=-kv_x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=-k\,\mathrm{d}x \quad (2\text{ 分})$$

$$\int_{v_0}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=\int_0^x -k\,\mathrm{d}x \quad (2\text{ 分})$$

$$\ln\frac{v_x}{v_0}=-kx$$

$$v_x=v_0\mathrm{e}^{-kx} \quad (1\text{ 分})$$

或者

$$x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t) \quad (1\text{ 分})$$

$$kx=\ln(1+kv_0t) \quad (1\text{ 分})$$

$$\mathrm{e}^{kx}=1+kv_0t \quad (1\text{ 分})$$

$$v_x=\frac{v_0}{1+kv_0t}=v_0\mathrm{e}^{-kx} \quad (2\text{ 分})$$

3. 已知运动学方程求轨道方程、速度和加速度，平面自然坐标系中的切向加速度、法向加速度和曲率半径

第 35 题 |【01C0301】

从某高楼天台以水平初速度 $\vec{v}_0$ 射出一发子弹，取枪口为坐标原点，沿 $\vec{v}_0$ 方向为 x 轴正方向，竖直向下为 y 轴正方向，并取发射时刻为时间原点，重力加速度大小为 g，求：(1) 子弹在 t 时刻的位置坐标；(2) 子弹的轨道方程；(3) 子弹在 t 时刻的速度、切向加速度和法向加速度。

解答

(1)

$$v_x = v_0, x = v_0 t \quad (2\text{ 分})$$

$$v_y = gt, y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2\text{ 分})$$

(2)

$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$y = \frac{1}{2}g \times \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (3\text{ 分})$$

(3)

$$\vec{v} = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y = v_0\,\vec{e}_x + gt\,\vec{e}_y \quad (2\text{ 分})$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \quad (2\text{ 分})$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \quad (2\text{ 分})$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \quad (2\text{ 分})$$

或者

$$\vec{v} = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y = v_0\,\vec{e}_x + gt\,\vec{e}_y \quad (2\text{ 分})$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \quad (2\text{ 分})$$

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \quad (1\text{ 分})$$

$$\cos\theta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \quad (1\text{ 分})$$

$$a_t = g\sin\theta = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \quad (1\text{ 分})$$

$$a_n = g\cos\theta = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \quad (1\text{ 分})$$

第 36 题 |【01C0302】

质点作平面曲线运动，其运动学方程为 $x=3t$，$y=1-t^2$。求：(1) 质点运动的轨道方程；(2)$t=2\ \mathrm{s}$ 时质点的速度和加速度；(3)t 时刻，质点的切向加速度、法向加速度和所在处轨道的曲率半径。

解答

(1)

$$x=3t,y=1-t^2$$
$$t=\frac{x}{3}$$
$$y=1-t^2=1-\frac{x^2}{9}$$
$$x^2+9y-9=0 \qquad (3\text{ 分})$$

(2)

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3$$
$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2t$$
$$\vec{v}=v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x+v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y=3\,\vec{\mathrm{e}}_x-2t\,\vec{\mathrm{e}}_y \qquad (2\text{ 分})$$
$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0$$
$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-2$$
$$\vec{a}=a_x\,\vec{\mathrm{e}}_x+a_y\,\vec{\mathrm{e}}_y=-2\,\vec{\mathrm{e}}_y \qquad (2\text{ 分})$$
$$\vec{v}(t=2)=3\,\vec{\mathrm{e}}_x-4\,\vec{\mathrm{e}}_y \qquad (1\text{ 分})$$
$$\vec{a}(t=2)=-2\,\vec{\mathrm{e}}_y \qquad (1\text{ 分})$$

(3)

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{9+4t^2} \qquad (1\text{ 分})$$
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=2 \qquad (1\text{ 分})$$
$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{4t}{\sqrt{9+4t^2}} \qquad (1\text{ 分})$$
$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{4-\frac{16t^2}{9+4t^2}}=\frac{6}{\sqrt{9+4t^2}} \qquad (1\text{ 分})$$
$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \qquad (1\text{ 分})$$
$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{9+4t^2}{\frac{6}{\sqrt{9+4t^2}}}=\frac{(9+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{6} \qquad (1\text{ 分})$$

4. 平面极坐标系中的速度和加速度

第 37 题 |【01C0401】

杆以匀角速 ω_0 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动。以 O 为极点，$t=0$ 时刻杆所在方向为极轴，沿杆转动方向为极角正方向建立极坐标系。在 $t=0$ 时刻，位于 O 的小球从静止开始沿杆做加速度大小为 a_0 的匀加速运动。试求在上述极坐标系下，(1) 小球在 t 时刻的速度矢量的表达式；(2) 小球在 t 时刻的加速度矢量的表达式。

解答

平面极坐标系中的速度和加速度分别为

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad (2\text{ 分})$$

$$v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad (2\text{ 分})$$

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \qquad (2\text{ 分})$$

$$a_\theta = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \qquad (2\text{ 分})$$

依题意，有

$$r = \frac{1}{2}a_0 t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \qquad (1\text{ 分})$$

所以

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = a_0 t \qquad (1\text{ 分})$$

$$v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}a_0\omega_0 t^2 \qquad (1\text{ 分})$$

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = a_0 - \frac{1}{2}a_0\omega_0^2 t^2 \qquad (1\text{ 分})$$

$$a_\theta = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 2a_0\omega_0 t \qquad (1\text{ 分})$$

小球在 t 时刻的速度为

$$\vec{v} = a_0 t\,\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{2}a_0\omega_0 t^2\,\vec{\mathrm{e}}_\theta \qquad (1\text{ 分})$$

小球在 t 时刻的加速度为

$$\vec{a} = \left(a_0 - \frac{1}{2}a_0\omega_0^2 t^2\right)\vec{\mathrm{e}}_r + 2a_0\omega_0 t\,\vec{\mathrm{e}}_\theta \qquad (1\text{ 分})$$

第二章 质点动力学

一、选择题

1. 惯性的理解

第 38 题 |【02A0101】

关于惯性有下面四种表述，正确的是

(A) 物体静止或作匀速运动时才具有惯性
(B) 物体在任何情况下均有惯性
(C) 物体受力作变速运动时没有惯性
(D) 物体受力作变速运动才具有惯性

答案

B

2. 摩擦力的方向

第 39 题 |【02A0401】

自行车在无滑动向右行进过程中，两个车轮所受到的摩擦力

(A) 前轮所受摩擦力向右，后轮所受摩擦力向右
(B) 前轮所受摩擦力向右，后轮所受摩擦力向左
(C) 前轮所受摩擦力向左，后轮所受摩擦力向右
(D) 前轮所受摩擦力向左，后轮所受摩擦力向左

答案

C

第 40 题 |【02A0402】

下列表述中正确的是

(A) 质点运动的方向和它所受的合外力的方向相同
(B) 质点的速度为零，它所受的合外力一定为零
(C) 质点作匀速率圆周运动，它所受的合外力必定与运动方向垂直
(D) 摩擦力总是阻碍物体间的相对运动，它的方向总是与物体的运动方向相反

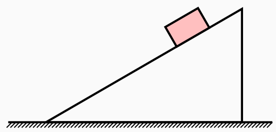
答案

C

3. 牛顿第二定律的理解

第 41 题 |【02A0501】

一斜面原来静止于水平光滑平面上，将一木块轻轻放于斜面上，如图。如果此后木块能静止于斜面上，则斜面将



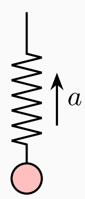
(A) 保持静止 (B) 向左加速运动 (C) 向右加速运动 (D) 向右匀速运动

答案

A

第 42 题 |【02A0502】

如图所示，手提一根下端系着重物的轻弹簧，竖直向上作匀加速运动，当手突然停止运动的瞬间，物体将



(A) 向上作加速运动 (B) 向上作匀速运动

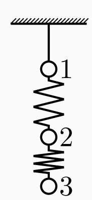
(C) 立即处于静止状态 (D) 在重力作用下向上作减速运动

答案

A

第 43 题 |【02A0503】

三个质量相等的小球由两根相同的轻弹簧联结，再用细绳悬于天花板上，处于静止状态。将绳子剪断瞬间，三个小球的加速度分别为



(A) $a_1 = a_2 = a_3 = g$ (B) $a_1 = g$，$a_2 = a_3 = 0$

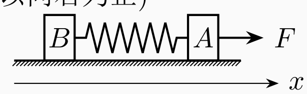
(C) $a_1 = 2g$，$a_2 = g$，$a_3 = 0$ (D) $a_1 = 3g$，$a_2 = a_3 = 0$

答案

D

第 44 题 |【02A0504】

质量分别为 m_1 和 m_2 的两滑块 A 和 B 通过一轻弹簧水平连接后置于水平桌面上，滑块与桌面间的摩擦系数均为 μ，系统在水平拉力 F 的作用下做匀速运动，如图所示。如突然撤消拉力，则刚撤消后瞬间，二者的加速度 a_A 和 a_B 分别为 (以向右为正)



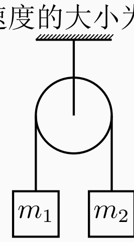
(A) $a_A = 0$，$a_B = 0$ (B) $a_A > 0$，$a_B < 0$ (C) $a_A < 0$，$a_B > 0$ (D) $a_A < 0$，$a_B = 0$

答案

D

第 45 题 |【02A0505】

如图所示，一轻绳跨过一个定滑轮，两端各系一质量分别为 m_1 和 m_2 的重物，且 $m_1 > m_2$。滑轮质量及轴上摩擦均不计，此时重物 m_2 的加速度的大小为 a_0。今用一竖直向下的恒力 $F = m_1 g$ 代替质量为 m_1 的物体，可得质量为 m_2 的重物的加速度的大小为 a，则



(A) $a > a_0$ (B) $a = a_0$ (C) $a < a_0$ (D) 无法确定

答案

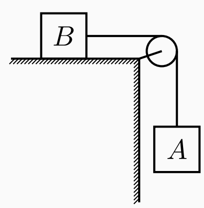
A

解析

$$m_1 g - T = m_1 a_0$$
$$T - m_2 g = m_2 a_0$$
$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a_0$$
$$a_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$
$$F - m_2 g = m_2 a$$
$$a = \frac{F - m_2 g}{m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_2} g$$

第 46 题 |【02A0506】

如图所示，物体 B 通过轻滑轮与物体 A 相连 (轻绳不可伸长)。若将两者由静止释放后，B 以加速度 a_1 向右运动；若去掉物体 A，并用与 A 的重力相同的力 F 竖直向下拉动绳子，B 仍向右运动，其加速度为 a_2，则



(A) $a_1 > a_2$ (B) $a_1 = a_2$ (C) $a_1 < a_2$ (D) 无法判断

答案

C

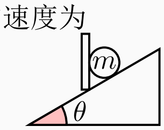
解析

$$m_A g - T = m_A a_1$$
$$T - \mu m_B g = m_B a_1$$
$$F - \mu m_B g = m_B a_2$$
$$(m_A - \mu m_B)g = (m_A + m_B)a_1$$
$$a_1 = \frac{m_A - \mu m_B}{m_A + m_B} g$$
$$a_2 = \frac{F - \mu m_B g}{m_B} = \frac{m_A - \mu m_B}{m_B} g$$

4. 牛顿第二定律的简单应用

第 47 题 |【02A0601】

如图所示，在倾角为 θ 的固定光滑斜面上，放一质量为 m 的光滑小球，球被竖直的木板挡住，在把竖直木板迅速拿开的这一瞬间，小球获得的加速度为



(A) $g\sin\theta$　(B) $g\cos\theta$　(C) $\frac{g}{\sin\theta}$　(D) $\frac{g}{\cos\theta}$

答案

A

第 48 题 |【02A0602】

不计弹簧测力计的质量，测力计下方挂一质量为 1 kg 的重物，测力计上方作用有一大小为 20 N、方向竖直向上的力，则弹簧测力计的示数为 (取重力加速度大小 $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$)

(A) 0 N　(B) 10 N　(C) 15 N　(D) 20 N

答案

D

第 49 题 |【02A0603】

竖直上抛一小球，空气阻力的大小不变，小球上升到最高点所用的时间为 t_1，小球从最高点下降到原位置所用的时间为 t_2，则有

(A) $t_1 > t_2$　(B) $t_1 = t_2$　(C) $t_1 < t_2$　(D) 无法判断

答案

C

二、填空题

1. 万有引力的计算

第 50 题 |【02B0201】

质量为 M、半径为 R 的均匀球面，质量为 m 的质点，质点与球面球心之间的距离为 a。当 $a < R$ 时，二者之间万有引力的大小为_____。万有引力常数为 G。

答案

0

第 51 题 |【02B0202】

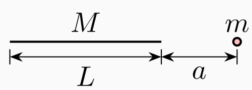
质量为 M、半径为 R 的均匀球体，质量为 m 的质点，质点与球体球心之间的距离为 a。当 $a > R$ 时，二者之间万有引力的大小为_____。万有引力常数为 G。

答案

$\frac{GMm}{a^2}$

第 52 题 |【02B0203】

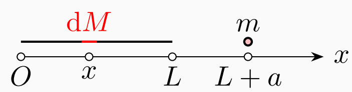
设有一匀质细杆，细杆质量为 M，长为 L，距细杆的一端 a 处有一质量为 m 的质点，则细杆对质点的引力的大小为_____。万有引力常数为 G。



答案

$\frac{GMm}{a(L+a)}$

解析



如图，取 x 轴沿细杆方向，原点 O 在杆的一端。取杆上 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 的一小段，看作质点，则其质量为 $\mathrm{d}M = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}x$，它对质点 m 的引力为：

$$\mathrm{d}F = -G\frac{m\,\mathrm{d}M}{r^2} = -\frac{GmM\,\mathrm{d}x}{L(L+a-x)^2}$$

其中负号表示力沿 x 轴负方向。

由于每一小段对 m 的引力都是同方向的，所以求合力只需计算其代数和：

$$F=\int \mathrm{d}F=-\int_0^L \frac{GmM\,\mathrm{d}x}{L(L+a-x)^2}=-\frac{GMm}{L}\left.\frac{1}{L+a-x}\right|_0^L=-\frac{GMm}{L}\left(\frac{1}{L+a-L}-\frac{1}{L+a-0}\right)$$
$$=-\frac{GMm}{L}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{L+a}\right)=-\frac{GMm}{L}\frac{(L+a)-a}{a(L+a)}=-\frac{GMm}{a(L+a)}$$

2. 弹簧的劲度系数

第 53 题 |【02B0301】

一根长为 $3L$、劲度系数为 $3k$ 的均匀弹簧截成完全相同的三段，并将它们两端分别相连组成并联弹簧组，则弹簧组的等效劲度系数等于_____。

答案

$27k$

第 54 题 |【02B0302】

一根自由长度为 10 cm、劲度系数为 k 的均匀弹簧，从中截取一段长度 3 cm，则其劲度系数为_____。

答案

$\frac{10}{3}k$

3. 牛顿第二定律的简单计算

第 55 题 |【02B0701】

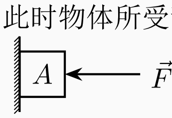
升降机的地板上放有质量为 m_A 的物体 A，其上放一质量为 m_B 的物体 B。当升降机以大小为 a 的加速度向下加速运动时 $(a<g)$，物体 A 对升降机地板的压力的大小为_____。

答案

$(m_A+m_B)(g-a)$

第 56 题 |【02B0702】

沿水平方向的外力 F 将物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，此时物体保持静止，并设其所受静摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力为_____。



答案

f_0

第 57 题 |【02B0703】

一质量为 m 的石块被大风刮得从崖顶落下，若大风对石块始终作用一稳定水平力 F，则石块下落过程中的加速度大小 $a =$______。设重力加速度大小为 g。

答案

$\sqrt{g^2+\frac{F^2}{m^2}}$

第 58 题 |【02B0704】

设空气的阻力不计，空气的浮力不变，一气球的总质量为 M(包括压舱沙袋)，以大小为 a 的加速度铅直下降。今欲使它以大小为 a 的加速度铅直上升，则应从气球中抛掉沙袋的质量为______。设重力加速度大小为 g。

答案

$\frac{2aM}{g+a}$

解析

$$Mg-F=Ma$$
$$F-mg=ma$$
$$F=M(g-a)=m(g+a)$$
$$m=\frac{g-a}{g+a}M$$
$$\Delta m=M-m=\frac{2a}{g+a}M$$

第 59 题 |【02B0705】

质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用，比例系数为 k，k 为正值常数。该物体的收尾速度 (即最后物体作匀速运动时的速度) 是______。设重力加速度大小为 g。

答案

$\sqrt{\frac{mg}{k}}$

4. 已知运动学方程求力

第 60 题 |【02B0901】

质量为 m 的质点，沿 xy 平面内一条轨道运动，其运动学方程为 $x = A[Bt - \sin(Bt)]$，$y = A[1 - \cos(Bt)]$，A、B 均为常数，则任意 t 时刻，质点在 x 方向所受的合力 $F_x =$______。

答案

$AB^2 m \sin(Bt)$

解析

$$x = A[Bt - \sin(Bt)]$$
$$v_x = A[B - B\cos(Bt)]$$
$$a_x = AB^2 \sin(Bt)$$
$$F_x = ma_x = AB^2 m \sin(Bt)$$

第 61 题 |【02B0902】

已知质量为 m 的某质点在任意 t 时刻的位置矢量为 $\vec{r} = [5\sin(3t) - 2\cos(2t)]\,\vec{\mathrm{e}}_x + 6\mathrm{e}^{4t}\,\vec{\mathrm{e}}_y$，则任意 t 时刻，质点所受到的合力为 $\vec{F} =$______。

答案

$[-45\sin(3t) + 8\cos(2t)]m\,\vec{\mathrm{e}}_x + 96me^{4t}\,\vec{\mathrm{e}}_y$

解析

$$\vec{r} = [5\sin(3t) - 2\cos(2t)]\,\vec{\mathrm{e}}_x + 6\mathrm{e}^{4t}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v} = [15\cos(3t) + 4\sin(2t)]\,\vec{\mathrm{e}}_x + 24\mathrm{e}^{4t}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{a} = [-45\sin(3t) + 8\cos(2t)]\,\vec{\mathrm{e}}_x + 96\mathrm{e}^{4t}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{F} = m\vec{a} = [-45\sin(3t) + 8\cos(2t)]m\,\vec{\mathrm{e}}_x + 96me^{4t}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

第 62 题 |【02B0903】

已知质量为 m 的质点在 $t=0$ 时的 z 坐标为 0，在任意 t 时刻，$x=\cos(5t)$，$y=\sin(5t)$，$\dot{z}=5$，则任意 t 时刻，质点所受到的合力 $\vec{F}=$______。

答案

$-25m[\cos(5t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+\sin(5t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]$

解析

$$x=\cos(5t), v_x=-5\sin(5t), a_x=-25\cos(5t), F_x=ma_x=-25m\cos(5t)$$
$$y=\sin(5t), v_y=5\cos(5t), a_y=-25\sin(5t), F_y=ma_y=-25m\sin(5t)$$
$$\dot{z}=5=v_z, a_z=0, F_z=ma_z=0$$
$$\vec{F}=F_x\,\vec{\mathrm{e}}_x+F_y\,\vec{\mathrm{e}}_y+F_z\,\vec{\mathrm{e}}_z=-25m[\cos(5t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+\sin(5t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]$$

5. 已知力求运动学方程

第 63 题 |【02B1001】

质量为 0.125 kg 的质点受到合力 $\vec{F}=t\,\vec{\mathrm{e}}_x$(SI) 的作用，当 $t=0$ 时，该质点以 $\vec{v}_0=2\,\vec{\mathrm{e}}_y$ 的速度通过坐标原点，该质点的运动学方程为 $\vec{r}=$______(SI)。

答案

$\frac{4}{3}t^3\,\vec{\mathrm{e}}_x+2t\,\vec{\mathrm{e}}_y$

解析

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=8t\,\vec{\mathrm{e}}_x$$
$$a_x=8t, a_y=0$$
$$\vec{v}_0=2\,\vec{\mathrm{e}}_y, v_{0x}=0, v_{0y}=2$$
$$v_y=v_{y0}=2, y=v_yt=2t$$
$$v_x=\int_0^t a_x\,\mathrm{dt}=4t^2$$
$$x=\int_0^t v_x\,\mathrm{dt}=\frac{4}{3}t^3$$

6. 质点运动学与质点动力学的联合应用

第 64 题 |【02B1101】

一质量为 m 的质点沿 x 轴正方向运动，假设该质点通过坐标为 $x(x>0)$ 的位置时速度的大小为 kx (k 为正值常量)，则此时作用于该质点上的合力 $F=$______。

答案

mk^2x

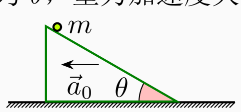
解析

$$v=kx$$
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kv=k^2x$$
$$F=ma=mk^2x$$

7. 非惯性参考系的牛顿第二定律

第 65 题 |【02B1201】

光滑楔子以匀加速度 $\vec{a}_0$ 沿水平面向左平动。质量为 m 的质点沿楔子的光滑斜面滑下，则质点对楔子的压力的大小为______。已知楔子的顶角为 θ，重力加速度大小为 g。



答案

$m(g\cos\theta-a_0\sin\theta)$

解析

以楔子为非惯性参考系，质点沿楔子的斜面运动，质点共受到三个力的作用：竖直向下的重力，垂直斜面向上的支持力，水平向右的惯性力

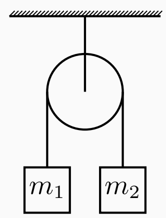
$$N-mg\cos\theta+ma_0\sin\theta=0$$
$$N=m(g\cos\theta-a_0\sin\theta)$$

三、计算题

1. 牛顿第二定律的应用

第 66 题 |【02C0801】

如图所示，一根细绳跨过定滑轮，在细绳两端分别悬挂质量为 m_1 和 m_2 的物体，且 $m_1 < m_2$。假设滑轮的质量与细绳的质量均略去不计，滑轮与细绳间的摩擦力以及轮轴的摩擦力也略去不计。求：(1)m_1 的加速度；(2) 细绳中的张力。



解答

以向上为 y 轴正方向(1 分)，分别对 m_1 和 m_2 受力分析：m_1 受到竖直向下的重力 m_1g 和竖直向上的绳子拉力 T(2 分)；m_2 受到竖直向下的重力 m_2g 和竖直向上的绳子拉力 T(2 分)。因为 $m_1 < m_2$，所以 m_1 的加速度大小为 a，方向向上(1 分)，m_2 的加速度大小为 a，方向向下(1 分)，分别对 m_1 和 m_2 列牛顿第二定律

$$T - m_1g = m_1a \quad (3\text{ 分})$$
$$T - m_2g = m_2(-a) \quad (3\text{ 分})$$

二式相减得

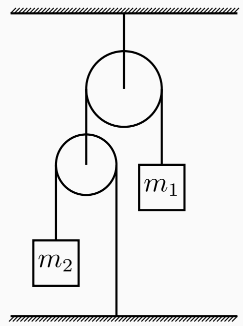
$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a$$
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \quad (1\text{ 分})$$

代入前面任意一式可得

$$T = m_1g + m_1a = m_1g\left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} \quad (1\text{ 分})$$

第 67 题 |【02C0802】

如图，不考虑滑轮及绳子的质量，忽略一切摩擦，绳子不可伸长，求：(1)m_1、m_2 的加速度；(2) 各段绳子中的张力。



解答

以向下为正方向(1 分)，分别对 m_1 和 m_2 受力分析：m_1 受到竖直向下的重力 m_1g 和竖直向上的绳子拉力 T_1(2 分)；m_2 受到竖直向下的重力 m_2g 和竖直向上的绳子拉力 T_2(2 分)。假设 m_1 的加速度为 a_1(1 分)，m_2 的加速度为 a_2(1 分)，分别对 m_1 和 m_2 列牛顿第二定律

$$m_1g - T_1 = m_1a_1 \qquad (1\text{ 分})$$

$$m_2g - T_2 = m_2a_2 \qquad (1\text{ 分})$$

由于绳子不计质量且不计摩擦

$$T_1 = 2T_2 \qquad (1\text{ 分})$$

由于绳子不可伸长

$$2a_1 + a_2 = 0 \qquad (1\text{ 分})$$

解得

$$a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}g \qquad (1\text{ 分})$$

$$a_2 = -\frac{2(m_1 - 2m_2)}{m_1 + 4m_2}g \qquad (1\text{ 分})$$

$$T_1 = \frac{6m_1m_2g}{m_1 + 4m_2} \qquad (1\text{ 分})$$

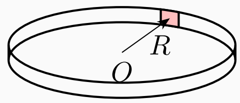
$$T_2 = \frac{3m_1m_2g}{m_1 + 4m_2} \qquad (1\text{ 分})$$

注：本题必须先选定正方向，最后计算出来的加速度如果大于零，说明沿选定正方向，如果小于零，说明与正方向相反。

2. 质点运动学与质点动力学的联合应用

第 68 题 |【02C1101】

如图所示，光滑的水平桌面上放置一半径为 R 的固定圆环，物体紧贴环的内侧作圆周运动，物体与圆环之间的摩擦因数为 μ。已知 $t=0$ 时物体的速率为 v_0，求：(1) 任意 t 时刻物体的速率 v；(2) 当物体速率从 v_0 减少到 $\frac{1}{2}v_0$ 时，物体所经历的时间及经过的路程。



解答

(1) 自然坐标系

$$-\mu m\frac{v^2}{R}=ma_t \quad (2\text{ 分})$$

$$a_t=-\mu\frac{v^2}{R}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad (1\text{ 分})$$

$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{\mu}{R}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$\int_{v_0}^{v}-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\int_0^t\frac{\mu}{R}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=\frac{\mu}{R}t$$

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{\mu}{R}t=\frac{R+\mu v_0t}{v_0R}$$

$$v=\frac{v_0R}{R+\mu v_0t} \quad (1\text{ 分})$$

(2)

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0R}{R+\mu v_0t} \quad (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{d}s=\frac{v_0R}{R+\mu v_0t}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$s=\int_0^t\frac{v_0R}{R+\mu v_0t}\,\mathrm{d}t=\frac{R}{\mu}\ln\frac{R+\mu v_0t}{R} \quad (2\text{ 分})$$

$$v=\frac{v_0R}{R+\mu v_0t}=\frac{v_0}{2}$$

$$\mu v_0t=R$$

$$t=\frac{R}{\mu v_0}$$

$$s=\frac{R}{\mu}\ln\frac{R+\mu v_0t}{R}=\frac{R}{\mu}\ln 2 \quad (1\text{ 分})$$

第 69 题 |【02C1102】

一质量为 m 的物体以 v_0 的初速度做竖直上抛运动，若受到的阻力 f 与速度平方成正比，即大小可表示为 $f = kv^2$，其中 k 为常数。设重力加速度为 g。试求此物体 (1) 上升的最大高度；(2) 回到上抛点时的速度大小。

解答

以抛出点为坐标原点，竖直向上为 y 轴正方向，抛出时刻为 $t=0$。 (1 分)

在物体上升过程中，它共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向下的空气阻力 kv^2，所以由牛顿第二定律，有

$$F = -mg - kv^2 = ma \qquad (2\text{ 分})$$

$$a = -g - \frac{k}{m}v^2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{v\,\mathrm{d}v}{g + \frac{k}{m}v^2} = -\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{v\,\mathrm{d}v}{g + \frac{k}{m}v^2} = \int_0^H -\,\mathrm{d}y \qquad (2\text{ 分})$$

$$H = -\int_{v_0}^{0} \frac{v\,\mathrm{d}v}{g + \frac{k}{m}v^2} = \int_0^{v_0} \frac{v\,\mathrm{d}v}{g + \frac{k}{m}v^2} = \frac{m}{2k}\ln\frac{mg + kv_0^2}{mg} \qquad (1\text{ 分})$$

在物体下降过程中，它共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的空气阻力 kv^2，所以由牛顿第二定律，有

$$F = -mg + kv^2 = ma \qquad (2\text{ 分})$$

$$a = -g + \frac{k}{m}v^2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{v\,\mathrm{d}v}{g - \frac{k}{m}v^2} = -\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^{v} \frac{v\,\mathrm{d}v}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int_H^0 -\,\mathrm{d}y \qquad (2\text{ 分})$$

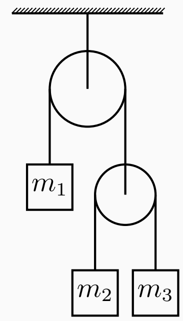
$$H = \int_0^{v} \frac{v\,\mathrm{d}v}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{m}{2k}\ln\frac{mg}{mg - kv^2}$$

$$v = -v_0\sqrt{\frac{mg}{mg + kv_0^2}} \qquad (1\text{ 分})$$

3. 非惯性参考系的牛顿第二定律

第 70 题 |【02C1201】

如图，滑轮和绳子不计质量，绳子不可伸长，所有部件之间的摩擦可以忽略，三个物体的质量分别为 m_1、m_2 和 m_3。求 m_1 的加速度。



解答

以向上为正方向(1 分)，分别对三个物体受力分析：三个物体均受到竖直向下的重力 m_ig 和竖直向上的绳子拉力 T_i。假设 m_i 的加速度为 a_i，分别对三个物体列牛顿第二定律

$$T_1 - m_1g = m_1a_1 \qquad (2\text{ 分})$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2 \qquad (2\text{ 分})$$

$$T_3 - m_3g = m_3a_3 \qquad (2\text{ 分})$$

由于绳子、滑轮不计质量且不计摩擦

$$T_2 = T_3 \qquad (2\text{ 分})$$

$$T_1 = T_2 + T_3 \qquad (2\text{ 分})$$

由于绳子不可伸长

$$a_1 + a_2 = -(a_1 + a_3) \qquad (3\text{ 分})$$

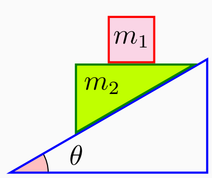
解得

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1(m_2+m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}g \qquad (1\text{ 分})$$

注：本题必须先选定正方向，最后计算出来的加速度如果大于零，说明沿选定正方向，如果小于零，说明与正方向相反。

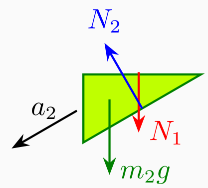
第 71 题 |【02C1202】

如图，质量为 m_2 的楔形物体放在倾角为 θ 的固定的光滑斜面上，楔形物体的上表面与水平面平行，上面放一质量为 m_1 的质点，忽略所有接触面的摩擦，求：(1) 楔形物体与斜面间的作用力；(2)m_1 相对于斜面的加速度。



解答

对 m_2 受力分析，如图所示。



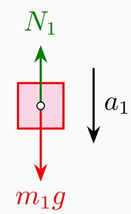
沿斜面方向列牛顿第二定律 (以沿斜面向下为正)

$$(m_2g + N_1)\sin\theta = m_2a_2 \quad (3\text{ 分})$$

沿垂直斜面方向列牛顿第二定律 (以垂直斜面向上为正)

$$N_2 - (m_2g + N_1)\cos\theta = 0 \quad (3\text{ 分})$$

对 m_1 受力分析，如图所示。



沿竖直方向列牛顿第二定律 (以竖直向下为正)

$$m_1g - N_1 = m_1a_1 \quad (3\text{ 分})$$

在竖直方向上二者加速度相等

$$a_1 = a_2\sin\theta \quad (3\text{ 分})$$

联立解得

$$a_1 = \frac{(m_1+m_2)g\sin^2\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta} \quad (1\text{ 分})$$

$$N_2 = \frac{m_1+m_2}{m_2+m_1\sin^2\theta}m_2g\cos\theta \quad (1\text{ 分})$$

a_1 方向竖直向下 (1 分)

第三章 动量定理

一、选择题

1. 质点动量定理的理解

第 72 题 |【03A0301】

质量分别为 m_A 和 $m_B(m_A > m_B)$、速度分别为 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_B$ 的两质点 A 和 B，受到相同的冲量作用，则

(A) A 的动量增量的绝对值比 B 的小

(B) A 的动量增量的绝对值比 B 的大

(C) A、B 的动量增量相等

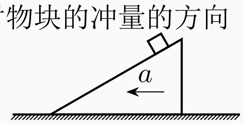
(D) A、B 的速度增量相等

答案

C

第 73 题 |【03A0302】

如图所示，一斜面固定在卡车上，一物块置于该斜面上。在卡车沿水平方向加速起动的过程中，物块在斜面上无相对滑动。此时斜面上摩擦力对物块的冲量的方向



(A) 是水平向前的

(B) 只可能沿斜面向上

(C) 只可能沿斜面向下

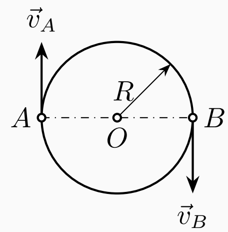
(D) 沿斜面向上或向下均有可能

答案

D

第 74 题 |【03A0303】

如图所示，做匀速圆周运动的物体，从 A 运动到 B 的过程中，物体所受合外力的冲量为



(A) 大小为零

(B) 大小不等于零，方向与 $\vec{v}_A$ 相同

(C) 大小不等于零，方向与 $\vec{v}_B$ 相同

(D) 大小不等于零，方向与物体在 B 点所受合力相同

答案

C

2. 质点动量定理的简单应用

第 75 题 |【03A0401】

质量为 m 的小球，沿水平方向以速率 v 与固定的竖直墙壁做弹性碰撞，设指向壁内的方向为正方向，则由于此碰撞，小球的动量增量为

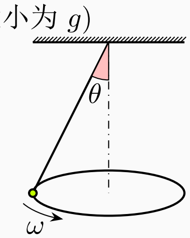
(A) mv　(B) 0　(C) $2mv$　(D) $-2mv$

答案

D

第 76 题 |【03A0402】

图示一圆锥摆，质量为 m 的小球在水平面内以角速度 ω 匀速转动。在小球转动一周的过程中，小球所受绳子拉力的冲量大小等于 (重力加速度大小为 g)



(A) 0　(B) $\frac{2\pi mg}{\omega}$　(C) $\frac{2\pi mg}{\omega\cos\theta}$　(D) $\frac{2\pi mg\cos\theta}{\omega}$

答案

B

解析

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$I_G = GT = \frac{2\pi}{\omega} mg$$

第 77 题 |【03A0403】

一物体从某一高度以 v_1 的速率水平抛出，已知它落地时的速率为 v_2，设重力加速度大小为 g，那么它运动时间是

(A) $\frac{v_2 - v_1}{g}$ (B) $\frac{v_2 - v_1}{2g}$ (C) $\frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}$ (D) $\frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{2g}$

答案

C

第 78 题 |【03A0404】

力 $\vec{F} = 12t\,\vec{\mathrm{e}}_x$(SI) 作用在质量 $m = 2$ kg 的物体上，使物体由原点从静止开始运动，则它在 3 秒末的动量为

(A) $-54\,\vec{\mathrm{e}}_x$ kg · m/s (B) $54\,\vec{\mathrm{e}}_x$ kg · m/s (C) $-27\,\vec{\mathrm{e}}_x$ kg · m/s (D) $27\,\vec{\mathrm{e}}_x$ kg · m/s

答案

B

解析

$$\Delta\vec{p} = \vec{I} = \int_0^3 \vec{F}\,\mathrm{d}t = (6t^2)_0^3\,\vec{\mathrm{e}}_x = 54\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

3. 质心运动定理的简单应用

第 79 题 |【03A0601】

一船浮于静水中，船长为 L，质量为 $2m$，一个质量为 m 的人从船尾走到船头。不计水和空气的阻力，则在此过程中船将

(A) 不动 (B) 后退 L (C) 后退 $\frac{1}{2}L$ (D) 后退 $\frac{1}{3}L$

答案

D

解析

$$2m \times \frac{L}{2} + m \times 0 = 2m \times x + m \times \left(x + \frac{L}{2}\right)$$
$$L = 2x + x + \frac{L}{2}$$
$$3x = \frac{L}{2}$$
$$x = \frac{L}{6}$$
$$s = \frac{L}{2} - x = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{L}{3}$$

4. 动量守恒定律的理解

第 80 题 |【03A0801】

在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，沿斜向上方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中 (忽略冰面摩擦力及空气阻力)

(A) 总动量守恒

(B) 总动量在任何方向的分量均不守恒

(C) 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其它方向不守恒

(D) 总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向不守恒

答案

D

第 81 题 |【03A0802】

一辆以速度大小 v_0 向右作匀速直线运动的小车行驶在光滑的水平地面上，向后抛出一质量为 m 的物体，物体相对小车的速度大小为 u，车和人的质量总和为 M，物体抛离小车后小车的速度为 v，以下哪

个方程表示的是物体抛离前后系统的动量守恒？

(A) $(M+m)v_0 = Mv + mu$

(B) $(M+m)v_0 = Mv - mu$

(C) $(M+m)v_0 = Mv + m(v_0 - u)$

(D) $(M+m)v_0 = Mv + m(v - u)$

答案

D

二、填空题

1. 变力的冲量

第 82 题 |【03B0101】

设作用在质量为 1 kg 的物体上的力 $F = 6t + 3$(SI)。如果物体在这个力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2 s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小 $I =$______$\mathrm{N\cdot s}$。

答案

18

解析

$$I = \int_0^2 F\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (6t+3)\,\mathrm{d}t = (3t^2 + 3t)_0^2 = 18\ \mathrm{N\cdot s}$$

第 83 题 |【03B0102】

一吊车底板上放一质量为 10 kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 $a = 3 + 5t$(SI)，则 $t = 0 \to 2$ s 内吊车底板给物体的冲量大小 $I =$______$\mathrm{N\cdot s}$。(取重力加速度大小为 $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$)

答案

360

解析

$$a = 3 + 5t$$

$$v = v_0 + 3t + \frac{5}{2}t^2$$

$$v_2 - v_0 = 3 \times 2 + \frac{5}{2} \times 2^2 = 16$$
$$\Delta p = m\Delta v = 160\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$
$$\Delta p = I = I_N + I_G$$
$$I_N = \Delta p - I_G = 160 - (-10 \times 10 \times 2) = 360\ \mathrm{N \cdot s}$$

2. 质点动量定理的简单应用

第 84 题 |【03B0401】

一质量为 m 的物体，以初速 $\vec{v}_0$ 从地面抛出，抛射角 $\theta = 30^\circ$，如忽略空气阻力，则从抛出到刚要接触地面的过程中，物体动量增量的大小为______。

答案

mv_0

第 85 题 |【03B0402】

一质量为 m 的物体，原来以速率 v 向北运动，它突然受到外力打击，变为向西运动，速率仍为 v，则外力的冲量大小为______。

答案

$\sqrt{2}mv$

解析

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = (-mv\,\vec{\mathrm{e}}_x) - (mv\,\vec{\mathrm{e}}_y) = -mv(\vec{\mathrm{e}}_x + \vec{\mathrm{e}}_y)$$

第 86 题 |【03B0403】

质量为 20 g 的子弹沿 x 轴正方向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 x 轴正方向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块受到的冲量的大小为______$\mathrm{N \cdot s}$。

答案

9

第 87 题 |【03B0404】

两块并排的木块 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2，木块对子弹的阻力为恒力 F，则子弹穿出后，木块 B 的速度大小为_____。

答案

$\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_2}$

解析

$$
\begin{aligned}
F\Delta t_1 &= (m_1+m_2)v_1 \\
F\Delta t_2 &= m_2(v_2-v_1) \\
v_1 &= \frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2} \\
v_2 = v_1+\frac{F\Delta t_2}{m_2} &= \frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_2}
\end{aligned}
$$

第 88 题 |【03B0405】

一质点在力 $F=5m(5-2t)(\mathrm{SI})$ 的作用下，$t=0$ 时从静止开始做直线运动，式中 m 为质点的质量，t 为时间，则当 $t=5\ \mathrm{s}$ 时，质点的速率为_____m/s。

答案

0

解析

$$\Delta p = mv = I = \int_0^5 F\,\mathrm{d}t = 5m(5t-t^2)_0^5 = 0$$

第 89 题 |【03B0406】

一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_0=0.2$，滑动摩擦系数 $\mu=0.16$，现对物体施一水平拉力 $F=2t(\mathrm{SI})$，则 2 秒末物体的速度大小 $v=$_____m/s。(取重力加速度大小为 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$)

答案

1.4

解析

注意，这题中，当拉力小于最大静摩擦力时，物体保持静止，所以物体开始运动的时刻 t_0 满足

$$F = 2t_0 = \mu_0 mg = 0.2\times 1\times 10 = 2$$
$$t_0 = 1\ \mathrm{s}$$

在 t_0 时刻后，物体在拉力 F 和滑动摩擦力 $f = \mu mg$ 作用下运动，此二力方向相反，因此合力为 $F - f = 2t - \mu mg$，从 t_0 到第 2 秒末，物体受到的外力的合冲量为

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t}(F-f)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t}(2t-\mu mg)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^2-\mu mgt\right]_1^2 = (2^2-1^2)-\mu mg(2-1) = 3-1.6 = 1.4\ \mathrm{N\cdot s} \end{aligned}$$

根据动量定理，有

$$I = \Delta p = m\Delta v = m(v-v_0)$$
$$v = v_0 + \frac{I}{m} = 0 + \frac{1.4}{1} = 1.4\ \mathrm{m/s}$$

第 90 题 |【03B0407】

质量为 1 kg 的小球 (可视为质点) 以 25 m/s 的速度垂直落在水平地板上，又以 15 m/s 的速度垂直弹回。小球碰撞地板的瞬间不计其重力，球与地板接触的时间为 0.02 s，作用在地板上的平均冲力的大小 $F =$______N。

答案

2000

解析

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$
$$I = 1\times[15-(-25)] = 40$$
$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{40}{0.02} = 2000$$

3. 动量守恒定律的简单应用

第 91 题 |【03B0901】

质量为 0.01 kg 的子弹沿 x 轴正方向以 500 m/s 的速率射入一个质量为 1 kg 的木块后，与木块一起仍沿 x 轴正方向以 100 m/s 的速率前进，则木块原来的速率为______m/s。

答案

96

解析

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$
$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1v_1}{m_2} = \frac{1.01 \times 100 - 0.01 \times 500}{1} = 96 \text{ m/s}$$
$$m_1(v_1 - v) = m_2(v - v_2) = 0.01 \times 400 = 4 \text{ N} \cdot \text{s}$$

第 92 题 |【03B0902】

两物体质量分别是 $m_1 = 5$ kg，$m_2 = 2$ kg，在光滑桌面上运动，速度分别为 $\vec{v}_1 = (3\,\vec{\mathrm{e}}_x + 7\,\vec{\mathrm{e}}_y)$ m/s，$\vec{v}_2 = 10\,\vec{\mathrm{e}}_x$ m/s。碰撞后合为一体，碰后的速度 $\vec{v} =$______m/s。

答案

$5\,\vec{\mathrm{e}}_x + 5\,\vec{\mathrm{e}}_y$

解析

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$
$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{5 \times (3\,\vec{\mathrm{e}}_x + 7\,\vec{\mathrm{e}}_y) + 2 \times (10\,\vec{\mathrm{e}}_x)}{5 + 2} = 5\,\vec{\mathrm{e}}_x + 5\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

第 93 题 |【03B0903】

粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度 $\vec{v}_{A0} = 3\,\vec{\mathrm{e}}_x + 4\,\vec{\mathrm{e}}_y$，粒子 B 的速度 $\vec{v}_{B0} = 2\,\vec{\mathrm{e}}_x - 7\,\vec{\mathrm{e}}_y$；在无外力作用的情况下两者发生碰撞，碰后粒子 A 的速度变为 $\vec{v}_A = 7\,\vec{\mathrm{e}}_x - 4\,\vec{\mathrm{e}}_y$，则此时粒子 B 的速度 $\vec{v}_B =$______。

答案

$\vec{\mathrm{e}}_x - 5\,\vec{\mathrm{e}}_y$

解析

$$m_A\vec{v}_{A0} + m_B\vec{v}_{B0} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$$

$$\vec{v}_B = \frac{m_A\vec{v}_{A0} + m_B\vec{v}_{B0} - m_A\vec{v}_A}{m_B} = \frac{(3\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y) + 4(2\,\vec{e}_x - 7\,\vec{e}_y) - (7\,\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y)}{4} = \frac{4\,\vec{e}_x - 20\,\vec{e}_y}{4} = \vec{e}_x - 5\,\vec{e}_y$$

三、计算题

1. 质点的动量定理

第 94 题 |【03C0201】

一颗子弹由枪口射出时的速率为 v_0，子弹在枪筒内被加速时，它所受到的合力 $F = A - Bt$，其中 A、B 为正值常量。假设子弹走到枪口处合力刚好为零，试求 (1) 子弹在枪筒内的时间；(2) 子弹所受的冲量；(3) 子弹的质量。

解答

(1)

$$F = A - Bt = 0$$

$$t = \frac{A}{B} \qquad (5\ 分)$$

(2)

$$I = \int_0^t F\,\mathrm{d}t = At - \frac{1}{2}Bt^2 = \frac{A^2}{B} - \frac{1}{2}B \times \frac{A^2}{B^2} = \frac{A^2}{2B} \qquad (5\ 分)$$

(3)

$$I = \Delta p = m\Delta v = mv_0$$

$$m = \frac{I}{v_0} = \frac{A^2}{2Bv_0} \qquad (5\ 分)$$

2. 质点系的动量定理

第 95 题 |【03C0501】

一根足够长的柔软均匀且不可伸长的细绳，绳的质量线密度为 λ。$t = 0$ 时刻，某人用手将其一端以速度 v 从地面竖直匀速拉起。试求任意 t 时刻手对绳子的拉力。

解答

以竖直向上为正方向。 (1 分)

t 时刻，主体为已被拉起的绳子，质量为 $M_1 = \lambda l = \lambda vt$，其速度为 $v_1 = v$； (2 分)

在接下来的 $\mathrm{d}t$ 时间内，将有 $M_2 = \lambda\,\mathrm{d}l = \lambda v\,\mathrm{d}t$ 的绳子将被拉起，这段绳子在 t 时刻仍然静止在地面

上，其速度为零 $v_2 = 0$； (2 分)
$t + \mathrm{d}t$ 时刻，$M_3 = M_1 + M_2 = \lambda v(t + \mathrm{d}t)$ 都被拉离地面，速度均为 $v_3 = v$。 (2 分)
以 $t + \mathrm{d}t$ 时刻已被拉离地面的绳子部分为研究对象， (1 分)
$t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，系统共受到两个力的作用：竖直向下的重力 $M_3 g$，竖直向上的手的拉力 T，(3 分)
由动量定理可得

$$(T - M_3 g)\,\mathrm{d}t = M_3 v_3 - (M_1 v_1 + M_2 v_2) \qquad (3\text{ 分})$$

整理得

$$T = \frac{M_2 v}{\mathrm{d}t} + M_3 g = \lambda v^2 + \lambda v g t \qquad (1\text{ 分})$$

第 96 题 |【03C0502】

某人用木桶从深井中打水，木桶的质量为 m_1，刚开始提桶 $(t = 0)$ 时，桶静止，桶内装有质量为 m_2 的水。由于桶的底部有一小洞，单位时间有质量为 m_3 的水以相对于桶的恒定速率 u 从洞口流出。设重力加速度为 g。若人以恒定的速率向上提桶，求提桶力随时间的变化关系。

解答

以 t 时刻桶内剩余的水和桶为研究对象， (1 分)
以向上为正方向。 (1 分)
t 时刻，主体质量为 $M_1 = m_1 + m_2 - m_3 t$，速度为 $v_1 = v$ (2 分)
$t + \mathrm{d}t$ 时刻，主体质量 $M_2 = m_1 + m_2 - m_3(t + \mathrm{d}t)$，速度为 $v_2 = v$ (2 分)
$t + \mathrm{d}t$ 时刻，附体质量为 $M_3 = m_3\,\mathrm{d}t$，速度为 $v_3 = v - u$ (2 分)
$t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，系统所受的合力为 $F - (m_1 + m_2 - m_3 t)g$，方向竖直向上 (3 分)
由动量定理可得

$$[F - (m_1 + m_2 - m_3 t)g]\,\mathrm{d}t = (M_2 v_2 + M_3 v_3) - M_1 v_1 \qquad (3\text{ 分})$$

整理得

$$F = (m_1 + m_2 - m_3 t)g - m_3 u \qquad (1\text{ 分})$$

第 97 题 |【03C0503】

某人用木桶从深井中打水，木桶的质量为 m_1，刚开始提桶 $(t = 0)$ 时，桶静止，桶内装有质量为 m_2 的水。由于桶的底部有一小洞，单位时间有质量为 m_3 的水以相对于桶的恒定速率 u 从洞口流出。设重力加速度为 g。若人以恒力 F 向上提桶，求水桶在 t 时刻的速率。

解答

以 t 时刻桶内剩余的水和桶为研究对象， (1 分)
以向上为正方向。 (1 分)
t 时刻，主体质量为 $M_1 = m_1 + m_2 - m_3 t$，速度为 $v_1 = v$ (2 分)
$t + \mathrm{d}t$ 时刻，主体质量 $M_2 = m_1 + m_2 - m_3(t + \mathrm{d}t)$，速度为 $v_2 = v + \mathrm{d}v$ (2 分)
$t + \mathrm{d}t$ 时刻，附体质量为 $M_3 = m_3\,\mathrm{d}t$，速度为 $v_3 = v + \mathrm{d}v - u$ (2 分)
$t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，系统所受的合力为 $F - (m_1 + m_2 - m_3 t)g$，方向竖直向上 (3 分)
由动量定理可得

$$[F - (m_1 + m_2 - m_3 t)g]\,\mathrm{d}t = (M_2 v_2 + M_3 v_3) - M_1 v_1 \quad (3\text{ 分})$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F + m_3 u}{m_1 + m_2 - m_3 t} - g$$
$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left(\frac{F + m_3 u}{m_1 + m_2 - m_3 t} - g\right)\mathrm{d}t$$
$$v = \frac{F + m_3 u}{m_3}\ln\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 - m_3 t} - gt \quad (1\text{ 分})$$

3. 动量守恒定律

第 98 题 |【03C0701】

光滑水平面上有两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小球 A 和 B。A 球静止，B 球以速度 $\vec{v}_1 = v\,\vec{e}_x$ 和 A 球发生碰撞，碰撞后 B 球的速度为 $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}v\,\vec{e}_y$，(1) 求碰后 A 球的速度 $\vec{v}_3$；(2) 若碰撞发生的时间为 Δt，试求碰撞过程中两球之间平均作用力的大小。

解答

(1) 依题意，有

$$\vec{v}_{A0} = \vec{0}, \vec{v}_{B0} = \vec{v}_1 = v\,\vec{e}_x, \vec{v}_B = \vec{v}_2 = \frac{1}{2}v\,\vec{e}_y \quad (3\text{ 分})$$

碰撞过程，以 A、B 球组成的系统在水平面内没有受到外力的作用，所以动量守恒，因此有

$$m_1\vec{v}_{A0} + m_2\vec{v}_{B0} = m_1\vec{v}_A + m_2\vec{v}_B \quad (4\text{ 分})$$
$$m_2 v\,\vec{e}_x = m_1\vec{v}_A + \frac{1}{2}m_2 v\,\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_A = \frac{m_2}{m_1}v\left(\vec{e}_x - \frac{1}{2}\,\vec{e}_y\right) \quad (1\text{ 分})$$

(2) 以 A 球为研究对象，由动量定理得

$$\Delta\vec{I} = \Delta\vec{p} = m_1(\vec{v}_A - \vec{v}_{A0}) = m_1\vec{v}_A \quad (4\text{ 分})$$
$$\bar{\vec{F}} = \frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t} = \frac{m_1\vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{m_2 v}{\Delta t}\left(\vec{e}_x - \frac{1}{2}\,\vec{e}_y\right) \quad (2\text{ 分})$$

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\sqrt{5}m_2 v}{2\Delta t} \quad (1\text{ 分})$$

第 99 题 |【03C0702】

水面上一质量为 M 的静止木船，从岸上以水平速度 v_0 将一质量为 m 的沙袋抛到船上，此后二者一起运动。设运动过程中受到的阻力与速率成正比，比例系数为 k，沙袋与船的作用时间很短，可忽略不计。求：(1) 沙袋抛到船上后，二者一起开始运动的初速率；(2) 木船再次静止前，任意时刻的速率；(3) 木船由开始运动到静止时所走过的距离。

解答

(1)

$$mv_0 = (m+M)v_1 \quad (2\text{ 分})$$

$$v_1 = \frac{m}{m+M}v_0 \quad (1\text{ 分})$$

(2)

$$F = -kv = (m+M)a \quad (2\text{ 分})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m+M}v \quad (2\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m+M}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_1}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^t -\frac{k}{m+M}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$\ln\frac{v}{v_1} = -\frac{k}{m+M}t$$

$$\frac{v}{v_1} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m+M}t}$$

$$v = v_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m+M}t} = \frac{m}{m+M}v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m+M}t} \quad (1\text{ 分})$$

(3)

$$F = -kv = (m+M)a$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{k}{m+M}v \quad (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{d}v = -\frac{k}{m+M}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_1}^{0}\mathrm{d}v = \int_0^s -\frac{k}{m+M}\,\mathrm{d}x \quad (2\text{ 分})$$

$$-v_1 = -\frac{k}{m+M}s$$

$$s = \frac{m+M}{k}v_1 = \frac{m+M}{k}\frac{m}{m+M}v_0 = \frac{m}{k}v_0 \quad (1\text{ 分})$$

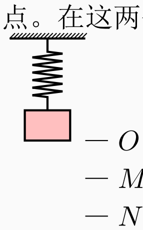
第四章 动能定理

一、选择题

1. 保守力的功与势能

第 100 题 |【04A0301】

一物体挂在一弹簧下面，平衡位置在 O 点，现用手向下拉物体，第一次把物体由 O 点拉到 M 点，第二次由 O 点拉到 N 点，再由 N 点送回 M 点。在这两个过程中，



(A) 弹性力作的功相等，重力作的功不相等
(B) 弹性力作的功相等，重力作的功也相等
(C) 弹性力作的功不相等，重力作的功相等
(D) 弹性力作的功不相等，重力作的功也不相等

答案

B

2. 动能定理的理解

第 101 题 |【04A0401】

一质点在几个外力同时作用下运动，
(A) 质点的动量改变时，质点的动能一定改变
(B) 质点的动能不变时，质点的动量也一定不变
(C) 外力的冲量是零时，外力的功一定为零
(D) 外力的功为零，外力的冲量一定为零

答案

C

第 102 题 |【04A0402】

当重物减速下降时，合外力对它做的功

(A) 为正值　　(B) 为负值

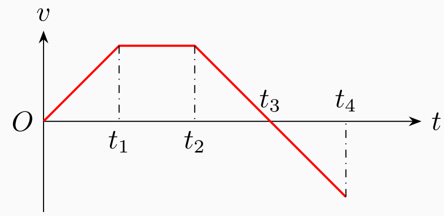
(C) 为零　　(D) 先为正值，后为负值

答案

B

第 103 题 |【04A0403】

一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3，则



(A) $W_1 > 0$，$W_2 < 0$，$W_3 < 0$　　(B) $W_1 > 0$，$W_2 < 0$，$W_3 > 0$

(C) $W_1 = 0$，$W_2 < 0$，$W_3 > 0$　　(D) $W_1 = 0$，$W_2 < 0$，$W_3 < 0$

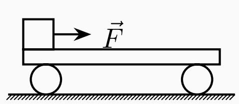
答案

C

3. 功能原理的理解

第 104 题 |【04A0601】

如图，在光滑水平地面上放着一辆小车，车上左端放着一只箱子，今用同样的水平恒力 $\vec{F}$ 拉箱子，使它由小车的左端运动到右端，一次小车被固定在水平地面上，另一次小车没被固定。以水平地面为参照系，在两个情况下，



(A) $\vec{F}$ 做的功相等　　(B) 摩擦力对箱子做的功相等

(C) 箱子获得的动能相等　　(D) 由于摩擦而产生的热相等

答案

D

4. 机械能守恒定律的理解

第 105 题 |【04A0801】

对于一个质点系而言，下列情况下系统机械能守恒的是

(A) 合外力为零
(B) 外力和非保守内力都不做功
(C) 合外力不做功
(D) 外力和保守内力都不做功

答案

B

第 106 题 |【04A0802】

下列说法中正确的是

(A) 系统不受外力的作用，内力都是保守力，则机械能和动量都守恒
(B) 系统所受的外力矢量和为零，内力都是保守力，则机械能和动量都守恒
(C) 系统所受的外力矢量和不为零，内力都是保守力，则机械能和动量都不守恒
(D) 系统不受外力作用，则它的机械能和动量都是守恒的

答案

A

第 107 题 |【04A0803】

一木块静止在光滑的水平面上，一颗子弹水平地射入木块，又穿出木块。在子弹穿过木块的过程中，将子弹和木块视为一个系统，则有

(A) 系统的动量和机械能都不守恒
(B) 系统的动量守恒，机械能不守恒
(C) 系统的动量不守恒，机械能守恒
(D) 系统的动量和机械能都守恒

答案

B

第 108 题 |【04A0804】

一子弹以水平速度 v_0 射入一静止于光滑水平面上的木块后，随木块一起运动。这一过程中，

(A) 子弹、木块组成的系统机械能守恒
(B) 子弹、木块组成的系统水平方向的动量守恒
(C) 子弹所受的冲量等于木块所受的冲量
(D) 子弹动能的减少等于木块动能的增加

答案

B

第 109 题 |【04A0805】

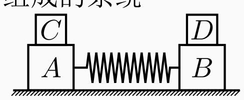
子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块而不穿出，以地面为参照系，下列说法中正确的是
(A) 子弹的动能转变为木块的动能
(B) 子弹——木块系统的机械能守恒
(C) 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功
(D) 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热

答案

C

第 110 题 |【04A0806】

如图所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B，置于光滑桌面上，A 和 B 之间连有一轻弹簧。另有质量为 m_1 和 m_2 的物体 C 和 D 分别置于物体 A 和 B 之上，且物体 A 和 C、B 和 D 之间的摩擦系数均不为零。首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，使弹簧被压缩，然后撤去外力，则在 A 和 B 弹开的过程中，对 A、B、C、D 和弹簧组成的系统



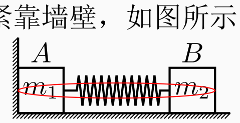
(A) 动量守恒，机械能守恒
(B) 动量不守恒，机械能守恒
(C) 动量不守恒，机械能不守恒
(D) 动量守恒，机械能不一定守恒

答案

D

第 111 题 |【04A0807】

两木块 A、B 的质量分别为 m_1 和 m_2，用一个质量不计、劲度系数为 k 的弹簧连接起来。把弹簧压缩 x_0 并用线扎住，放在光滑水平面上，A 紧靠墙壁，如图所示，然后烧断扎线。下列说法正确的是



(A) 弹簧由初态恢复为原长的过程中，以 A、B、弹簧为系统，动量守恒
(B) 在上述过程中，系统机械能守恒
(C) 当 A 离开墙后，整个系统动量守恒，机械能不守恒
(D) A 离开墙后，整个系统的总机械能为 $\frac{1}{2}kx_0^2$，总动量为零

答案

B

二、填空题

1. 恒力的功

第 112 题 |【04B0101】

某人拉住在河水中的船，使船相对于岸不动，若以岸为参考系，人对船所做的功______。(填“>0”,“$=0$”或“<0”)

答案

$=0$

第 113 题 |【04B0102】

一个质点同时在几个力的作用下发生了位移 $\Delta\vec{r}=4\,\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y+6\,\vec{e}_z$(SI)，其中一个力为恒力 $\vec{F}=-3\,\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y+9\,\vec{e}_z$(SI)，则此力在该位移过程中所做的功为______J。

答案

67

解析

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=(-3\,\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y+9\,\vec{e}_z)\cdot(4\,\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y+6\,\vec{e}_z)=(-3)\times4+(-5)\times(-5)+9\times6=67$$

第 114 题 |【04B0103】

质量为 m 的物体，置于电梯内，电梯以 $\frac{1}{2}g$ 的加速度匀加速下降 h，在此过程中，电梯对物体的作用力所做的功为______。

答案

$-\frac{1}{2}mgh$

解析

$$mg-N=m\frac{g}{2}$$
$$N=\frac{1}{2}mg$$

2. 变力的功

第 115 题 |【04B0201】

某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\,\vec{e}_x$(SI) 的作用下沿 x 轴作直线运动，在从 $x=2$ m 移动到 $x=4$ m 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为_____J。

答案

38

解析

$$W=\int_2^4(4+5x)\,\mathrm{d}x=\left[4x+\frac{5}{2}x^2\right]_2^4=\left[4\times4+\frac{5}{2}\times4^2\right]-\left[4\times2+\frac{5}{2}\times2^2\right]=38$$

3. 保守力的功与势能

第 116 题 |【04B0301】

一根弹簧下端挂质量为 0.1 kg 的砝码时长度为 0.07 m，挂 0.2 kg 的砝码时长度为 0.09 m。现在把此弹簧平放在光滑桌面上，并沿水平方向将其从长度 0.10 m 缓慢拉长到 0.14 m，则外力做功_____J。取重力加速度大小为 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$。

答案

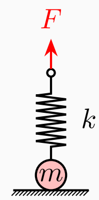
0.14

解析

$$m_1g=k(L_1-L_0)$$
$$m_2g=k(L_2-L_0)$$
$$(m_2-m_1)g=k(L_2-L_1)$$
$$k=\frac{(m_2-m_1)g}{L_2-L_1}=\frac{1}{0.02}=50\ \mathrm{N/m}$$
$$L_0=L_1-\frac{m_1g}{k}=0.05\ \mathrm{m}$$
$$F=k(L-L_0)$$
$$W=\int_{L_3}^{L_4}k(L-L_0)\,\mathrm{d}L=\frac{1}{2}k[(L_4-L_0)^2-(L_3-L_0)^2]=0.14\ \mathrm{J}$$

第 117 题 |【04B0302】

有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球，先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触，再施加外力 F 将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止。在此过程中外力 F 所做的功为_____。重力加速度大小为 g。

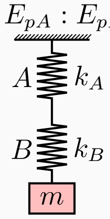


答案

$\frac{(mg)^2}{2k}$

第 118 题 |【04B0303】

A、B 二弹簧的劲度系数分别为 k_A 和 k_B，其质量均忽略不计。今将二弹簧连接起来并竖直悬挂，如图所示。当系统静止时，二弹簧的弹性势能之比 $E_{pA} : E_{pB} =$_____。



答案

$k_B : k_A$

4. 动能定理的简单应用

第 119 题 |【04B0501】

一质点在二恒力共同作用下，位移为 $\Delta\vec{r} = 3\,\vec{e}_x + 8\,\vec{e}_y$(SI)；在此过程中，动能增量为 24 J，已知其中一恒力 $\vec{F}_1 = 12\,\vec{e}_x - 3\,\vec{e}_y$(SI)，则另一恒力所作的功为_____J。

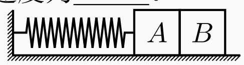
答案

12

5. 机械能守恒定律的简单应用

第 120 题 |【04B0901】

一水平放置的轻弹簧，劲度系数为 k，其一端固定，另一端系一质量为 m 的滑块 A，A 旁又有一质量相同的滑块 B，如图所示。设两滑块与桌面间无摩擦。若用外力将 A、B 一起推压使弹簧压缩量为 d 而静止，然后撤消外力，则 B 离开时的速度为______。



答案

$d\sqrt{\frac{k}{2m}}$

6. 碰撞

第 121 题 |【04B1001】

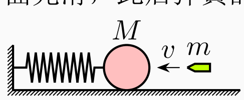
两球质量分别为 $m_1 = 2$ g 和 $m_2 = 5$ g，它们在光滑的水平桌面上运动。用直角坐标系 Oxy 描述其运动，两者的速度分别为 $\vec{v}_1 = 9\,\vec{e}_x$ cm/s，$\vec{v}_2 = (2\,\vec{e}_x + 7\,\vec{e}_y)$ cm/s，若两球碰撞后合为一体，则碰撞后两球速度 $\vec{v} =$______cm/s。

答案

$4\,\vec{e}_x + 5\,\vec{e}_y$

第 122 题 |【04B1002】

一质量为 M 的弹簧振子，水平放置且静止在平衡位置，如图所示。一质量为 m 的子弹以水平速度 $\vec{v}$ 射入振子中，并随之一起运动。如果水平面光滑，此后弹簧的最大势能为______。



答案

$\frac{m^2v^2}{2(M+m)}$

第 123 题 |【04B1003】

动能为 E_0 的 A 物体与静止的 B 物体碰撞，设 A 物体的质量为 B 物体的二倍，即 $m_A = 2m_B$。若碰撞为完全非弹性的，则碰撞后两物体总动能为______。

答案

$\frac{2}{3}E_0$

解析

$$E_0 = \frac{1}{2}m_A v_{A0}^2$$
$$m_A v_{A0} = (m_A + m_B)v_{AB}$$
$$v_{AB} = \frac{m_A}{m_A + m_B}v_{A0} = \frac{2}{3}v_{A0}$$
$$E_{AB} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{AB}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}m_A \times \frac{4}{9}v_{A0}^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}m_A v_{A0}^2 = \frac{2}{3}E_0$$

第 124 题 |【04B1004】

一个打桩机，夯的质量为 m_1，桩的质量为 m_2。假设夯与桩相碰撞时为完全非弹性碰撞且碰撞时间极短，则刚刚碰撞后夯与桩的动能是碰前夯的动能的______ 倍。

答案

$\frac{m_1}{m_1+m_2}$

第 125 题 |【04B1005】

质量为 m 的铁锤，从某一高度自由下落，与桩发生完全非弹性碰撞。设碰撞前锤速为 v，打击时间为 Δt，锤的质量不能忽略，则铁锤受到的平均冲力为______。重力加速度大小为 g。

答案

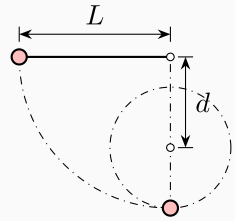
$\frac{mv}{\Delta t} + mg$

三、计算题

1. 机械能守恒定律

第 126 题 |【04C0701】

如图所示，长度为 L 的轻绳一端固定，一端系一质量为 m 的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为 d 处有一钉子，小球从水平位置无初速释放。(1) 求绳子碰到钉子后的瞬间小球的速度；(2) 欲使小球在以钉子为中心的圆周上绕一圈，d 的取值有什么样的要求？



解答

(1) 碰到钉子之前，小球在重力和绳子的拉力作用下绕悬挂点做圆周运动，绳子的拉力一直垂直于小球的运动轨迹，不做功，因此只有重力做功，所以小球的机械能守恒。以小球在最低点处为重力势能的零点，设碰前小球速度的大小为 v_1，则有

$$mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gL} \qquad (5\ 分)$$

碰到钉子时，绳子的拉力发生变化，但绳子的拉力与重力在此瞬间都与速度方向垂直，因此都没有作功，所以小球的速度并没有发生变化。或者说因为绳子的拉力与重力都通过悬挂点或钉子，所以这两个力对悬挂点或钉子的力矩都为零，因此小球对悬挂点或钉子的角动量矩不变，即速度没有发生变化，所以绳子碰到钉子后的瞬间小球的速度大小 $v_2 = v_1 = \sqrt{2gL}$，方向水平向右。 (3 分)

(2) 碰到钉子前，小球绕悬挂点做半径为 L 的圆周运动，碰到钉子后，小球绕钉子做半径为 $L-d$ 的圆周运动，在运动过程中，机械能守恒，所以小球在以钉子为中心的圆周上的最高点处的速度 v_3 满足

$$mgL = mg[2(L-d)] + \frac{1}{2}mv_3^2$$

$$\frac{mv_3^2}{L-d} = mg + T \geqslant mg \qquad (5\ 分)$$

整理得

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = mgL - mg[2(L-d)] = mg(2d-L) \geqslant \frac{1}{2}mg(L-d)$$

$$2d - L \geqslant \frac{1}{2}(L-d)$$

$$4d - 2L \geqslant L - d$$

$$5d \geqslant 3L$$

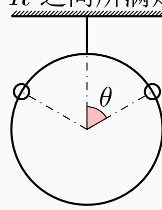
$$d \geqslant 0.6L \qquad (1\ 分)$$

再考虑到 $L \geqslant d$，所以有

$$L \geqslant d \geqslant 0.6L \qquad (1\ 分)$$

第 127 题 |【04C0702】

用细线将一质量为 M、半径为 R 的大圆环悬挂起来，两个质量均为 m、可视为质点的小圆环套在大圆环上，可以无摩擦地滑动。若小圆环沿相反方向从大圆环顶部自静止下滑，求在下滑过程中，大圆环刚能升起时，小圆环所在位置的 θ 与 M、m、R 之间所满足的函数关系。



解答

对大圆环受力分析：竖直向下的重力 Mg，绳子竖直向上的拉力 T，两边小环对它的压力 N，这个压力的方向一定通过大环圆心，但可能指向圆心，也可能背离圆心，这里假定指向圆心。(2 分)
如果大圆环刚能升起，则 $T=0$，此时 (1 分)

$$Mg+2N\cos\theta=0 \quad (3\text{ 分})$$

以一个小圆环为研究对象，在运动过程中它受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，大圆环对它的压力 N，方向背离大圆环圆心。(2 分)
由于无摩擦，所以小圆环下滑过程中机械能守恒，假设在 θ 处速率为 v，以大圆环顶部为重力势能零点，则有

$$0=\frac{1}{2}mv^2-mgR(1-\cos\theta) \quad (3\text{ 分})$$

而小圆环做圆周运动的向心力是由重力的分力和 N 的合力提供的，即

$$\frac{mv^2}{R}=mg\cos\theta-N \quad (3\text{ 分})$$

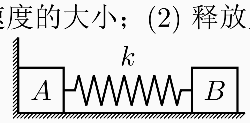
联立以上三式，整理得

$$Mg+2[mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)]\cos\theta=0$$
$$M+2m\cos\theta(3\cos\theta-2)=0 \quad (1\text{ 分})$$

说明，如果以上 N 假设的方向相反，一三两式有个符号差异，但不影响最后的结果；最后的函数形式可能不尽相同，只要是等价的，都算正确。

第 128 题 |【04C0703】

两个质量分别为 m_1 和 m_2 的木块 A 和 B，用一个质量忽略不计、劲度系数为 k 的弹簧联接起来，放置在光滑水平面上，使 A 紧靠墙壁，如图所示。用力推木块 B 使弹簧压缩 x_0，然后释放。求：(1) 释放后，A、B 两木块速度相等时的瞬时速度的大小；(2) 释放后，弹簧的最大伸长量。



解答

(1) 以 A、B、弹簧为系统，释放 B 到弹簧恢复原长的过程中，只有弹力做功，系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m_2v_1^2 \quad (3\text{ 分})$$

之后，系统水平方向不受外力，系统动量守恒

$$m_2v_1 = (m_1+m_2)v_2 \quad (4\text{ 分})$$

$$v_2 = \frac{m_2v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{k}{m_2}}x_0 \quad (1\text{ 分})$$

(2) 释放后，仍然只有弹力做功，机械能守恒， (1 分)
两者速度相等时，弹簧伸长量最大 (或压缩量最大) (1 分)

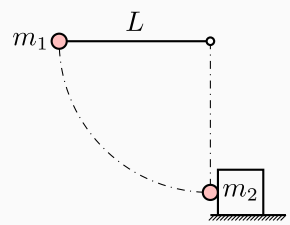
$$\frac{1}{2}m_2v_1^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4\text{ 分})$$

$$x = \sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}x_0 \quad (1\text{ 分})$$

2. 碰撞

第 129 题 |【04C1001】

如图所示，一质量为 m_1 的钢球 (视为质点) 系在一长为 L 的绳的一端，绳的另一端固定，钢块质量为 $m_2=2m_1$，静止于水平面上。现将钢球拉至图示水平位置，静止后释放，球到达最低点时与钢块发生完全弹性碰撞。重力加速度大小为 g。求：(1) 碰撞前球的速度大小 v_0；(2) 碰撞后球的速度大小 v_1；(3) 碰撞瞬间，钢球施加于钢块的冲量大小。



解答

(1) 碰前，钢球做圆周运动，只有重力做功 (绳子拉力不做功)，机械能守恒，以起始位置为重力势能零点

$$0 = \frac{1}{2}m_1v_0^2 - m_1gL \quad (3\text{ 分})$$

$$v_0 = \sqrt{2gL} \quad (1\text{ 分})$$

(2) 完全弹性碰撞，以水平向右为正

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad (3\text{ 分})$$

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_0-0}=1 \quad (3\text{ 分})$$

解得

$$v_1=-\frac{1}{3}v_0 \quad (1\text{ 分})$$
$$v_2=\frac{2}{3}v_0 \quad (1\text{ 分})$$

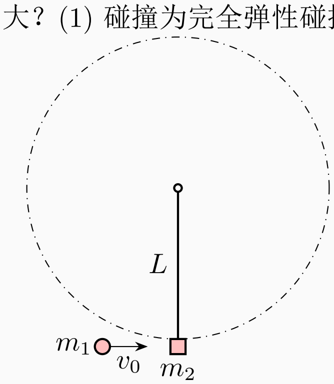
负号表示方向向左，大小为 $\frac{1}{3}v_0=\frac{1}{3}\sqrt{2gL}$。

(3) 以钢块为研究对象，由动量定理

$$I=\Delta p=m_2(v_2-0) \quad (2\text{ 分})$$
$$I=\frac{2}{3}m_2v_0=\frac{4}{3}m_1\sqrt{2gL} \quad (1\text{ 分})$$

第 130 题 |【04C1002】

如图，弹丸质量为 m_1，摆锤质量为 $m_2=3m_1$，摆线长为 L。原先 m_2 静止悬挂，m_1 以水平方向的速度 v_0 与之相碰，假设碰撞瞬间完成，如果碰后摆锤能够在竖直平面内完成一个完整的圆周运动，以下两种情况下，弹丸的速度最小应该多大？(1) 碰撞为完全弹性碰撞；(2) 碰撞为完全非弹性碰撞。



解答

碰后摆锤能够在竖直平面内完成一个完整的圆周运动，要求摆锤在最高点时摆线向下的拉力大于或等于零，因此速度大小 v_3 要满足

$$\frac{mv_3^2}{L}=mg+T\geqslant mg \quad (2\text{ 分})$$

碰后上摆过程中，只有重力做功，机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_3^2+mg(2L) \quad (2\text{ 分})$$

如果是完全弹性碰撞，以上 $m=m_2$，如果是完全非弹性碰撞，以上 $m=m_1+m_2$。

(1) 如果碰撞是完全弹性碰撞

$$m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2 \quad (3\text{ 分})$$

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_0-0}=1 \qquad (3\text{ 分})$$

解得

$$v_0\geqslant 2\sqrt{5gL} \qquad (1\text{ 分})$$

(2) 如果碰撞是完全非弹性碰撞

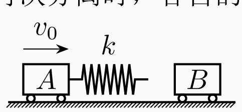
$$m_1v_0=(m_1+m_2)v_2 \qquad (3\text{ 分})$$

解得

$$v_0\geqslant 4\sqrt{5gL} \qquad (1\text{ 分})$$

第 131 题 |【04C1003】

如图所示，光滑的水平桌面上，小车 A 带着理想弹簧缓冲器，其质量为 m，弹簧质量不计，劲度系数为 k；小车 B 的质量为 $2m$。若 A 车以速度 v_0 与静止的 B 车发生碰撞，忽略所有阻力，求：(1) 两车相对静止时，弹簧的形变量；(2) 当二者再次分离时，各自的速度又等于多少？



解答

(1) 以 A、B 和弹簧为研究对象，以向右为正方向
在整个过程中，水平方向不受外力，系统动量守恒，两车相对静止时，二者速度相等

$$mv_0=(m+2m)v_1 \qquad (3\text{ 分})$$

只有弹力做功，系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(m+2m)v_1^2+\frac{1}{2}kx^2 \qquad (3\text{ 分})$$

联立以上二式解得 (弹簧被压缩，所以形变量小于零)

$$x=-\sqrt{\frac{2m}{3k}}v_0 \qquad (1\text{ 分})$$

(2) 弹簧恢复原长时，二者分离，过程动量守恒、机械能守恒

$$(m+2m)v_1=mv_2+(2m)v_3 \qquad (3\text{ 分})$$

$$\frac{1}{2}(m+2m)v_1^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}(2m)v_3^2 \qquad (3\text{ 分})$$

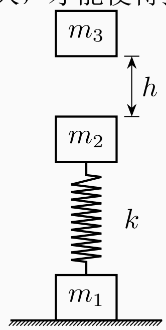
联立解得

$$v_2=-\frac{1}{3}v_0 \qquad (1\text{ 分})$$

$$v_3=\frac{2}{3}v_0 \qquad (1\text{ 分})$$

第 132 题 |【04C1004】

质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物块由一劲度系数为 k 的轻弹簧相连，竖直地放在水平桌面上，如图所示。另有一质量为 m_3 的物体从高出 m_2 为 h 的地方由静止开始自由落下，当与 m_2 发生碰撞后，即与 m_2 黏合在一起向下运动。试问 h 至少应多大，才能使得弹簧反弹起后 m_1 与桌面互相脱离？



解答

m_3 自由下落，与 m_2 碰撞前的速度设为 v_0，以 m_3 为研究对象，由机械能守恒定律可得

$$m_3gh=\frac{1}{2}m_3v_0^2, v_0=\sqrt{2gh} \qquad (3\text{ 分})$$

m_3 与 m_2 发生完全非弹性碰撞，碰后二者共同速度设为 v_1，由动量守恒定律可得

$$m_3v_0=(m_2+m_3)v_1, v_1=\frac{m_3v_0}{m_2+m_3} \qquad (3\text{ 分})$$

碰撞之前，m_2 静止，以 m_2 为研究对象，共受两个力作用而平衡：竖直向下的重力，竖直向上的弹簧弹力，设此时弹簧被压缩 L_1，则有

$$m_2g-kL_1=0, L_1=\frac{m_2g}{k} \qquad (2\text{ 分})$$

m_1 能脱离桌面，它所受到的弹力必然向上，且大等于其重力，设此时弹簧被拉伸 L_2，即有

$$kL_2\geqslant m_1g, L_2\geqslant\frac{m_1g}{k} \qquad (3\text{ 分})$$

从 m_3 和 m_2 发生碰撞到 m_1 脱离桌面，以 m_1、m_2、m_3、弹簧和地球为研究系统，只有重力和弹力做功，系统机械能守恒，以弹簧原长处为弹性势能零点和 m_2、m_3 的重力势能零点，m_1 的重力势能零点取在桌面上，则有

$$\frac{1}{2}(m_2+m_3)v_1^2+\frac{1}{2}kL_1^2-(m_2+m_3)gL_1=\frac{1}{2}(m_2+m_3)v_2^2+\frac{1}{2}kL_2^2+(m_2+m_3)gL_2 \qquad (3\text{ 分})$$

联立解得

$$h\geqslant\frac{g}{2km_3^2}(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_1+m_2+2m_3) \qquad (1\text{ 分})$$

第五章 角动量定理

一、选择题

1. 对点的角动量

第 133 题 |【05A0101】

一质点做匀速率圆周运动时，
(A) 它的动量不变，对圆心的角动量也不变
(B) 它的动量不变，对圆心的角动量不断改变
(C) 它的动量不断改变，对圆心的角动量不变
(D) 它的动量不断改变，对圆心的角动量也不断改变

答案

C

第 134 题 |【05A0102】

以下说法正确的是
(A) 做匀速直线运动的质点对任意参考点的角动量恒等于零
(B) 做匀速直线运动的质点对任意参考点的角动量守恒
(C) 做匀速圆周运动的质点对圆心的角动量恒等于零
(D) 做匀速圆周运动的质点对任意参考点的角动量守恒

答案

B

2. 对轴的角动量

第 135 题 |【05A0301】

关于质点系，以下说法正确的是

(A) 质点系的动量就等于其质心的动量

(B) 质点系对于轴线的角动量就是其质心对于该轴线的角动量

(C) 质点系的动能就等于其质心的动能

(D) 质点系动能的增加等于外力对质点系所做功的总和

答案

A

3. 角动量的简单计算

第 136 题 |【05A0501】

地球的质量为 m，太阳的质量为 M，地心与日心的距离为 R，万有引力常数为 G，假设地球绕太阳作圆周运动，则地球对日心的轨道角动量大小为

(A) $m\sqrt{GMR}$ (B) $\sqrt{\frac{GMm}{R}}$ (C) $Mm\sqrt{\frac{G}{R}}$ (D) $\sqrt{\frac{GMm}{2R}}$

答案

A

4. 角动量守恒定律的理解

第 137 题 |【05A0801】

一个小物体，位于光滑的水平桌面上，与一绳的一端相连结，绳的另一端穿过桌面中心的小孔伸到桌下，用手拉住绳子。该物体原来以角速度 ω 在半径为 R 的圆周上绕小孔旋转，今将绳从小孔缓慢往下拉，则物体的

(A) 动能不变，动量改变 (B) 动量不变，动能改变

(C) 对小孔的角动量改变，动量不变 (D) 对小孔的角动量不变，动量改变

答案

D

第 138 题 |【05A0802】

假设卫星绕地球中心做椭圆运动，则在运动过程中，
(A) 动量守恒，动能守恒
(B) 卫星对地球中心的角动量不守恒，机械能守恒
(C) 卫星对地球中心的角动量守恒，机械能守恒
(D) 卫星对地球中心的角动量不守恒，动量守恒

答案

C

第 139 题 |【05A0803】

人造地球卫星绕地球做椭圆轨道运动，卫星轨道近地点和远地点分别为 A 和 B，用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量及其动能的瞬时值，则有
(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$
(B) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$
(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$
(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

答案

C

第 140 题 |【05A0804】

当质点系所受合外力为零时，
(A) 动量必守恒
(B) 角动量必守恒
(C) 动能必守恒
(D) 机械能必守恒

答案

A

第 141 题 |【05A0805】

一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人。把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，此系统
(A) 动量守恒
(B) 机械能守恒
(C) 对转轴的角动量守恒
(D) 动量、机械能和角动量都守恒

答案

C

5. 角动量守恒定律的简单应用

第 142 题 |【05A0901】

质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上。平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为 J。平台和小孩开始时均静止。当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为

(A) $\omega=\frac{mR^2}{J}\frac{v}{R}$，顺时针 (B) $\omega=\frac{mR^2}{J}\frac{v}{R}$，逆时针

(C) $\omega=\frac{mR^2}{J+mR^2}\frac{v}{R}$，顺时针 (D) $\omega=\frac{mR^2}{J+mR^2}\frac{v}{R}$，逆时针

答案

A

第 143 题 |【05A0902】

有一半径为 R 的匀质圆形水平转台，可绕通过盘心且垂直于盘面的竖直固定轴转动，转动惯量为 J。台上有一人，质量为 m。当他站在离转轴 r 处时 $(r<R)$，转台和人一起以 ω_1 的角速度转动。若转轴处摩擦可以忽略，当人走到转台边缘时，转台和人一起转动的角速度 ω_2 等于

(A) $\frac{r^2}{R^2}\omega_1$ (B) $\frac{R^2}{r^2}\omega_1$ (C) $\frac{J+mR^2}{J+mr^2}\omega_1$ (D) $\frac{J+mr^2}{J+mR^2}\omega_1$

答案

D

第 144 题 |【05A0903】

花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0。然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$。这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_0$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$ (C) $\sqrt{3}\omega_0$ (D) $3\omega_0$

答案

D

二、填空题

1. 对点的角动量

第 145 题 |【05B0101】

某时刻位于 $\vec{r}$ 的质点的质量为 m，速度为 $\vec{v}$，则对于坐标原点，质点的角动量 $\vec{L}=$______。

答案

$\vec{r}\times(m\vec{v})$

第 146 题 |【05B0102】

有一质量为 m 的质点在一平面内做曲线运动，在某一直角坐标系下该质点的位置矢量为 $\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$，其中 A、B、ω 皆为常数，则任意时刻此质点对原点的角动量 $\vec{L}=$______。

答案

$mAB\omega\,\vec{e}_z$

解析

$$\begin{aligned}
\vec{r}&=A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y\\
\vec{v}&=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y\\
\vec{L}&=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=[A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y]\times m[-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y]\\
&=m[AB\omega\cos^2(\omega t)\,\vec{e}_z+AB\omega\sin^2(\omega t)\,\vec{e}_z]=mAB\omega\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

2. 对点的力矩

第 147 题 |【05B0201】

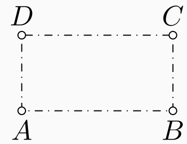
在给定的坐标系下，设力 $\vec{F}=3\,\vec{e}_x+4\,\vec{e}_y$ 的作用点位置矢量为 $\vec{r}=2\,\vec{e}_y-6\,\vec{e}_z$，其中力的单位为牛顿，位置矢量的单位为米，则该力对坐标原点的力矩 $\vec{M}=$______$\mathrm{N\cdot m}$。

答案

$24\,\vec{e}_x-18\,\vec{e}_y-6\,\vec{e}_z$

第 148 题 |【05B0202】

如图所示，质量 m 的小球位于水平桌面上长方形 $ABCD$ 的顶点 A 处，若 $AB=d_1$、$AC=d_2$、$AD=d_3$，则小球所受重力相对于 B 点的力矩的大小为______。重力加速度大小为 g。



答案

mgd_1

第 149 题 |【05B0203】

有一质量为 m 的质点在一平面内做曲线运动，在某一直角坐标系下该质点的位置矢量为 $\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$，其中 A、B、ω 皆为常数，则任意时刻此质点受到的对坐标原点的力矩 $\vec{M}=$______。

答案

0

解析

$$\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-A\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{e}_x-B\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{e}_y=-\omega^2\vec{r}$$
$$\vec{F}=m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}$$
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(-m\omega^2\vec{r})=\vec{0}$$

3. 对轴的角动量

第 150 题 |【05B0301】

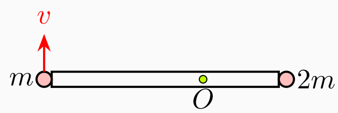
某时刻质量为 m 的质点位于 $\vec{r}=x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y$ 处，速度 $\vec{v}=v_1\,\vec{e}_x+v_2\,\vec{e}_y$，则对于坐标系 x 轴，质点的角动量 $L_x=$______。

答案

0

第 151 题 |【05B0302】

质量分别为 m 和 $2m$ 的两物体 (都可视为质点)，用一长为 l 的轻质刚性细杆相连，系统绕通过 O 点且垂直纸面的固定轴转动，已知 O 轴离质量为 $2m$ 的质点的距离为 $\frac{1}{3}l$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量大小为_____。



答案

mvl

4. 对轴的力矩

第 152 题 |【05B0401】

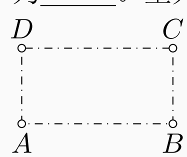
在给定的坐标系下，设力 $\vec{F}=3\,\vec{e}_x+4\,\vec{e}_y$ 的作用点位置矢量为 $\vec{r}=2\,\vec{e}_y-6\,\vec{e}_z$，其中力的单位为 N，位置矢量的单位为 m，则该力对坐标系 x 轴的力矩 $M_x=$_____N · m。

答案

24

第 153 题 |【05B0402】

如图所示，质量 m 的小球位于竖直平面内长方形 $ABCD$ 的顶点 A 处，若 $AB=d_1$、$AC=d_2$、$AD=d_3$，则小球所受重力相对于 BC 轴的力矩的大小为_____。重力加速度大小为 g。



答案

0

5. 角动量定理

第 154 题 |【05B0601】

已知一质点任意 t 时刻对坐标原点的角动量为 $\vec{L}=6t^2\,\vec{e}_x+(2t-3)\,\vec{e}_y$，则该质点在 t 时刻受到对坐标原点的合外力矩 $\vec{M}=$_____。

答案

$12t\,\vec{\mathrm{e}}_x + 2\,\vec{\mathrm{e}}_y$

第 155 题 |【05B0602】

一质量 $m = 2$ kg 的质点由静止开始做半径 $R = 5$ m 的圆周运动，任意 t 时刻，其相对圆心的角动量大小为 $L = 3t^2$，其中角动量 L 的单位为 $\mathrm{kg \cdot m^2/s}$，t 的单位为 s，则 t 时刻质点受到的相对于圆心的力矩大小为 $M =$______ $\mathrm{N \cdot m}$。

答案

$6t$

解析

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 6t\ \mathrm{N \cdot m}$$

6. 角动量守恒定律

第 156 题 |【05B0701】

将一质量为 m 的小木块系于轻绳的一端，小木块放在光滑的水平桌面上，绳的另一端穿过桌面上的小孔伸到桌下，用手拉住绳子，先使小木块在桌面上以角速度 ω_1 沿半径 r_1 的圆周运动，而后向下拉绳，使小木块运动半径减小到 r_2，则小木块的角速度 $\omega_2 =$______。(用已知的 ω_1、r_1、r_2 表示)

答案

$\frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1$

第 157 题 |【05B0702】

将一质量为 m 的小球，系于轻绳的一端，绳的另一端穿过光滑水平桌面上的小孔用手拉住。先使小球以角速度 ω_1 在桌面上做半径为 r_1 的圆周运动，然后缓慢将绳下拉，使半径缩小为 r_2，在此过程中小球的动能增量是______。

答案

$\frac{r_1^2 - r_2^2}{2r_2^2} m\omega_1^2 r_1^2$

第 158 题 |【05B0703】

哈雷慧星绕太阳的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆。它离太阳最近的距离是 r_1，此时它的速率是 v_1。它离太阳最远时的速率是 v_2，这时它离太阳的距离是 $r_2 =$______。

答案

$\frac{v_1}{v_2}r_1$

第 159 题 |【05B0704】

一飞轮以角速度 ω_0 绕光滑固定轴旋转，飞轮对轴的转动惯量为 J；另一静止飞轮突然和上述转动的飞轮啮合，绕同一转轴转动，该飞轮对轴的转动惯量为前者的二倍。啮合后整个系统的角速度 $\omega =$______。

答案

$\frac{1}{3}\omega_0$

三、计算题

1. 角动量定理

第 160 题 |【05C0601】

一质量 $m = 2$ kg 的质点由静止开始做半径 $R = 5$ m 的圆周运动。其相对圆心的角动量随时间的变化关系为 $L = 3t^2$，其中角动量 L 的单位为 $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$，t 的单位为 s。试求：(1) 质点受到的相对于圆心的力矩；(2) 质点运动角速度随时间的变化关系。

解答

(1) 由角动量定理

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

可得

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 6t\ \mathrm{N\cdot m} \qquad (8\ 分)$$

(2) 质点做圆周运动相对圆心的角动量

$$L = mR^2\omega$$

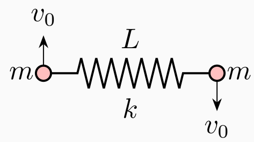
所以其角速度为

$$\omega = \frac{L}{mR^2} = \frac{3t^2}{2\times 5^2} = 0.06t^2\ \mathrm{rad/s} \qquad (7\ 分)$$

2. 角动量守恒定律

第 161 题 |【05C0701】

质量同为 m 的两个小球系于一轻弹簧两端后，放在光滑水平桌面上，弹簧处于自由长度状态，长为 L，它的劲度系数为 k。今使两球同时受水平冲量作用，各获得与连线垂直的等值反向初速度，如图所示。若在以后运动过程中弹簧可达的最大长度为 $2L$，试求两球初速度大小 v_0。



解答

以小球和弹簧为研究系统，由于两个小球质量相等，弹簧不计质量，所以系统的质心就在两个小球连线的中点。 (1 分)

由于桌面光滑，所以系统不受外力作用 (只考虑水平桌面上，竖直方向上重力与桌面的支持力抵消)，系统的内力又是保守力，所以系统对垂直桌面的任意转轴的角动量守恒、动量守恒、机械能守恒。(1 分)

依题意，开始时两球的速度等值反向，所以系统质心保持静止，整个系统始终绕着质心转动。 (1 分)

经过分析可知，两个小球沿着两者的连线做振动，当二者沿连线方向的速度为零时，弹簧将达到最大长度或最小长度。亦即，当弹簧达到最大长度 $2L$ 时，两个小球沿连线方向的速度分量为零，设此时小球的速度大小为 v_1。 (1 分)

综上，有：

$$mv_0\frac{L}{2}\times 2 = mv_1 L\times 2 \qquad (5\ 分)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2\times 2 = \frac{1}{2}mv_1^2\times 2 + \frac{1}{2}k(2L-L)^2 \qquad (5\ 分)$$

整理得：

$$v_1 = \frac{v_0}{2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}L \qquad (1\ 分)$$

第六章 刚体力学

一、选择题

1. 转动惯量

第 162 题 |【06A0301】

关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是
(A) 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关
(B) 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关
(C) 取决于刚体的质量，质量的空间分布和轴的位置
(D) 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关

答案

C

第 163 题 |【06A0302】

有两个半径相同、质量相同的细圆环。1 环的质量分布不均匀，2 环的质量分布均匀，它们对通过圆心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_1 和 J_2，则
(A) $J_1 > J_2$ (B) $J_1 < J_2$
(C) $J_1 = J_2$ (D) 不能确定 J_1 和 J_2 的大小关系

答案

C

第 164 题 |【06A0303】

有两个质量相等的铁球 A 和木球 B，二者的质量分布均匀，它们对通过各自球心的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B，则
(A) $J_A > J_B$ (B) $J_A < J_B$
(C) $J_A = J_B$ (D) 不能确定 J_A、J_B 哪个大

答案

B

2. 定轴转动的角动量

第 165 题 |【06A0401】

两个质量相同、半径相同的均质圆盘与圆环 (都视为刚体) 均绕通过其圆心且垂直盘面的转轴转动，若它们的角动量相同，圆盘的角速度大小为 ω_1，圆环的角速度大小为 ω_2，则

(A) $\omega_1 > \omega_2$ (B) $\omega_1 = \omega_2$ (C) $\omega_1 < \omega_2$ (D) 无法判断二者大小

答案

A

3. 定轴转动的转动定律

第 166 题 |【06A0501】

几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

(A) 必然不会转动 (B) 转速必然不变

(C) 转速必然改变 (D) 转速可能不变，也可能改变

答案

D

第 167 题 |【06A0502】

一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 J，绳下端挂一物体，物体所受重力为 P，滑轮的角加速度为 α。若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子，则滑轮的角加速度 α 将

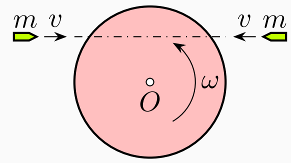
(A) 不变 (B) 变小 (C) 变大 (D) 如何变化无法判断

答案

C

第 168 题 |【06A0503】

圆盘绕 O 轴转动，如图所示。若同时射来两颗质量相同，速度大小相同、方向相反并在一直线上运动的子弹。子弹射入圆盘后均留在盘内，则子弹射入后圆盘的角速度 ω 将



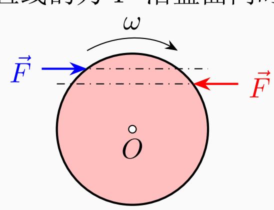
(A) 增大 (B) 不变 (C) 减小 (D) 无法判断

答案

C

第 169 题 |【06A0504】

一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴 O 以角速度 ω 按图示方向转动。若如图所示的情况那样，将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度 ω



(A) 必然增大 (B) 必然减少
(C) 不会改变 (D) 如何变化，不能确定

答案

A

4. 定轴转动的角动量守恒定律

第 170 题 |【06A0601】

刚体角动量守恒的充分且必要的条件是

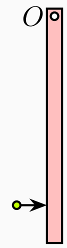
(A) 刚体不受外力矩的作用 (B) 刚体所受合外力矩为零
(C) 刚体所受的合外力和合外力矩均为零 (D) 刚体的转动惯量和角速度均保持不变

答案

B

第 171 题 |【06A0602】

如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴旋转，初始状态为静止悬挂。现有一小球自左方水平打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中细杆与小球这一系统



(A) 与地球组成的系统机械能守恒

(B) 只有动量守恒

(C) 只有对转轴 O 的角动量守恒

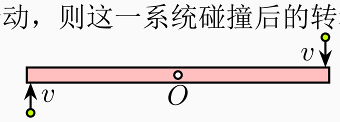
(D) 动量和角动量均守恒，这一系统与地球组成的系统的机械能守恒

答案

C

第 172 题 |【06A0603】

光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止。桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示。当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为



(A) $\frac{2v}{3L}$ (B) $\frac{6v}{7L}$ (C) $\frac{8v}{9L}$ (D) $\frac{12v}{7L}$

答案

B

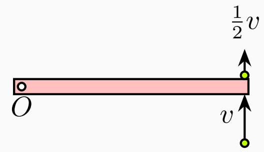
解析

$$2mvL = \left(\frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + mL^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{2mvL}{\frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + mL^2} = \frac{2mvL}{\frac{7}{3}mL^2} = \frac{6v}{7L}$$

第 173 题 |【06A0604】

如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L、质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$。一质量为 m、速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射向并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为



(A) $\frac{mv}{ML}$ (B) $\frac{3mv}{2ML}$ (C) $\frac{5mv}{3ML}$ (D) $\frac{7mv}{4ML}$

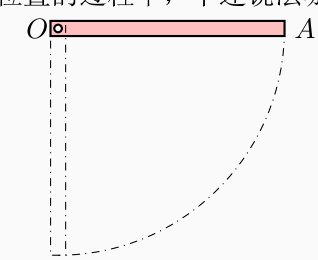
答案

B

5. 定轴转动的动能定理

第 174 题 |【06A0801】

均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？



(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小 (B) 角速度从小到大，角加速度从小到大
(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小 (D) 角速度从大到小，角加速度从小到大

答案

A

二、填空题

1. 定轴转动的运动学

第 175 题 |【06B0101】

某定轴转动刚体的运动学方程为 $\theta = 3t - t^2$(SI)，则第 2 秒末，刚体的角加速度为______rad/s^2。

答案

-2

第 176 题 |【06B0102】

某定轴转动刚体的初角速度 $\omega_0 = 10$ rad/s，角加速度 $\alpha = -5$ rad/s^2，则在 $t = 0 \to 4$ s 时间内的角位移为_____rad。

答案

0

第 177 题 |【06B0103】

半径为 R 的飞轮，初角速度为 ω_0，角加速度为 β，则在 t 时刻边缘上点的线速度大小 $v =$_____。

答案

$(\omega_0 + \beta t)R$

第 178 题 |【06B0104】

一刚体以 60 r/min 的角速度绕 z 轴作匀速转动，设某时刻刚体上一点 P 的位置矢量为 $\vec{r} = 3\,\vec{e}_x$(单位：cm)，则该时刻 P 点的速率等于_____m/s。

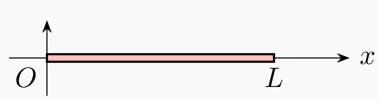
答案

0.06π

2. 刚体的质心

第 179 题 |【06B0201】

如图，设一细杆总长为 L，单位长度的质量 (质量线密度) 为 $\lambda = \lambda_0 + Ax$，λ_0 和 A 都是常数，则细杆的质心位置为_____。



答案

$\frac{3\lambda_0+2AL}{3(2\lambda_0+AL)}L$

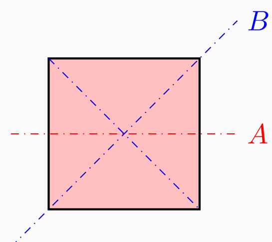
解析

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \int_0^L \lambda \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^L (\lambda_0 + Ax)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\lambda_0 x + \frac{1}{2}Ax^2\right)_0^L \\
&= \lambda_0 L + \frac{1}{2}AL^2 \\
x_0 &= \frac{1}{m_0}\int_0^L x\lambda \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{m_0}\int_0^L x(\lambda_0 + Ax)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{m_0}\left(\frac{1}{2}\lambda_0 x^2 + \frac{1}{3}Ax^3\right)_0^L \\
&= \frac{1}{\lambda_0 L + \frac{1}{2}AL^2}\left(\frac{1}{2}\lambda_0 L^2 + \frac{1}{3}AL^3\right) \\
&= \frac{3\lambda_0 + 2AL}{3(2\lambda_0 + AL)}L
\end{aligned}
$$

3. 转动惯量

第 180 题 |【06B0301】

一边长为 L、质量为 M 的均匀正方形薄木板，已知它对图中 A 轴的回转半径为 k，则木板对 B 轴的转动惯量为______。



答案

Mk^2

第 181 题 |【06B0302】

已知某质量为 M，半径为 R 的不均匀球体，其质心在球内，但偏离球心 d 远，假定对于通过球心且垂直于质心与球心连线的转轴，回转半径为 k，则对于通过质心且垂直于质心与球心连线的转轴的转动惯量为______。

答案

$M(k^2-d^2)$

第 182 题 |【06B0303】

已知质量为 m、半径为 R 的均匀圆盘对其任意一条直径的转动惯量为 J，则对于通过圆盘边缘且与盘面垂直的转轴，圆盘的转动惯量为_____。

答案

$2J+mR^2$

4. 定轴转动的转动定律

第 183 题 |【06B0501】

一飞轮以每分钟 600 转的转速旋转，转动惯量为 $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，现加一恒定的制动力矩使飞轮在 1 s 内停止转动，则该恒定制动力矩的大小为_____$\mathrm{N\cdot m}$。

答案

50π

第 184 题 |【06B0502】

一长为 l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球。现将杆由水平位置无初转速地释放，则杆与水平方向夹角为 θ 时，杆的角加速度为_____。

答案

$\frac{g}{l}\cos\theta$

第 185 题 |【06B0503】

一做定轴转动的物体，对转轴的转动惯量为 $3\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，初始角速度为 $6\ \mathrm{rad/s}$。现对物体加一恒定的制动力矩 $-12\ \mathrm{N\cdot m}$，当物体的角速度减慢到 $2\ \mathrm{rad/s}$ 时，物体已转过了角度_____ rad。

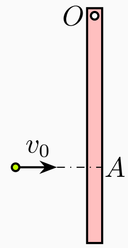
答案

4

5. 定轴转动的碰撞

第 186 题 |【06B0701】

长为 L、质量为 m 的匀质细杆可绕通过杆一端 O 的水平光滑固定轴转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，开始时杆铅直下垂，如图所示。有一质量也为 m 的子弹以水平速度 v_0 射穿杆上 A 点，出来时速度为 $\frac{1}{2}v_0$，已知 $OA=\frac{2}{3}L$，则子弹射穿的瞬间，杆的角速度大小为______。



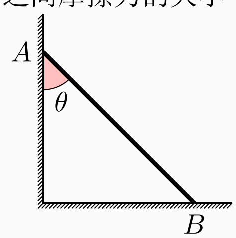
答案

$\frac{v_0}{L}$

6. 刚体的平衡

第 187 题 |【06B1001】

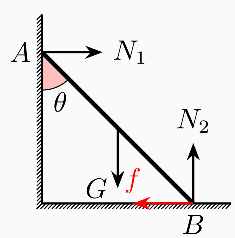
如图所示，一质量为 m 的匀质细杆 AB，A 端靠在光滑的竖直墙壁上，B 端置于粗糙水平地面上而静止，杆身与竖直方向成 θ 角，则地面与杆之间摩擦力的大小 $f=$______。重力加速度大小为 g。



答案

$\frac{1}{2}mg\tan\theta$

解析



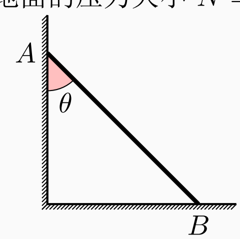
$$N_1 - f = 0$$
$$N_2 - mg = 0$$
$$mg\frac{L}{2}\sin\theta - N_1 L\cos\theta = 0$$

解得

$$N = f = \frac{1}{2}mg\tan\theta$$
$$N_2 = mg$$

第 188 题 |【06B1002】

如图所示，一质量为 m 的匀质细杆 AB，A 端靠在光滑的竖直墙壁上，B 端置于粗糙水平地面上而静止，杆身与竖直方向成 θ 角，则 B 端对地面的压力大小 $N =$______。重力加速度大小为 g。



答案

mg

三、计算题

1. 定轴转动的转动定律

第 189 题 |【06C0501】

一长为 L、质量为 m 的均匀细杆与水平桌面之间的摩擦系数为 μ，细杆可绕过其中心且垂直桌面的转轴转动，转轴无摩擦。(1) 试求细杆逆时针转动过程中，摩擦力对转轴的力矩；(2) 如果细杆的初始角速度为 ω_0，试求任意 t 时刻细杆转动的角速度 ω。

解答

(1) 摩擦力方向沿顺时针 (与转动方向相反)，力矩方向垂直纸面向里，大小 (1 分)

$$\mathrm{d}M = r\,\mathrm{d}f \quad (1\ 分)$$
$$\mathrm{d}f = \mu\,\mathrm{d}N \quad (1\ 分)$$
$$\mathrm{d}N = (\mathrm{d}m)g \quad (1\ 分)$$

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}r \qquad (1\text{ 分})$$

$$\lambda = \frac{m}{L} \qquad (1\text{ 分})$$

$$M = 2\int_0^{L/2} \mu\frac{m}{L}gr\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\mu mgL \qquad (2\text{ 分})$$

(2)

$$-M = J\alpha \qquad (2\text{ 分})$$

$$J = \frac{1}{12}mL^2 \qquad (1\text{ 分})$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{M}{J} = -\frac{3\mu g}{L} \qquad (1\text{ 分})$$

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{3\mu g}{L}\,\mathrm{d}t \qquad (1\text{ 分})$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\mathrm{d}\omega = \int_0^t -\frac{3\mu g}{L}\,\mathrm{d}t \qquad (1\text{ 分})$$

$$\omega - \omega_0 = -\frac{3\mu g}{L}t$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{3\mu g}{L}t \qquad (1\text{ 分})$$

第 190 题 |【06C0502】

质量为 m、竖直边长 a、水平边长 b 的匀质矩形薄板绕其竖直边转动，初始角速度为 ω_0。转动时受到空气的阻力，阻力垂直于板面，每一小面积所受阻力的大小正比于该块面积及其速度平方的乘积，比例常量为 k。求：(1) 薄板绕竖直边转动的转动惯量；(2) 当薄板转动的角速度为 ω 时薄板所受到的空气阻力对转轴的力矩；(3) 经过多少时间，薄板转动的角速度减为初始角速度的一半？

解答

(1) 以竖直边为 y 轴，水平边为 x 轴，转动惯量

$$\mathrm{d}J = (\mathrm{d}m)r^2 = x^2 \times \frac{m}{ab} \times a\,\mathrm{d}x = \frac{m}{b}x^2\,\mathrm{d}x$$

$$J = \int_0^b \frac{m}{b}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}mb^2 \qquad (4\text{ 分})$$

(2) 以角速度方向为正，空气阻力对转轴的力矩

$$\mathrm{d}M = -r\,\mathrm{d}f = -x\cdot k(\omega x)^2(a\,\mathrm{d}x) = -ka\omega^2x^3\,\mathrm{d}x$$

$$M = \int_0^b -ka\omega^2x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}kab^4\omega^2 \qquad (4\text{ 分})$$

(3) 定轴转动的转动定律

$$M = J\alpha$$

$$\alpha=\frac{M}{J}=-\frac{\frac{1}{4}kab^4\omega^2}{\frac{1}{3}mb^2}=-\frac{3kab^2}{4m}\omega^2=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad (3\text{ 分})$$

$$-\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}=\frac{3kab^2}{4m}\,\mathrm{d}t$$

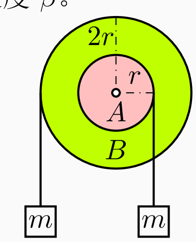
$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}-\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}=\int_0^t\frac{3kab^2}{4m}\,\mathrm{d}t \quad (3\text{ 分})$$

$$\frac{1}{\frac{\omega_0}{2}}-\frac{1}{\omega_0}=\frac{3kab^2}{4m}t$$

$$t=\frac{1}{\omega_0}\times\frac{4m}{3kab^2}=\frac{4m}{3kab^2\omega_0} \quad (1\text{ 分})$$

第 191 题 |【06C0503】

一个质量为 m、半径为 r 的均质圆盘 A 对其质心轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}mr^2$。现将圆盘 A 和另一个质量为 $2m$、半径为 $2r$ 的均质圆盘 B 同轴地粘在一起，此系统可绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑轴定轴转动。大小圆盘边缘都绕有轻绳，绳下端都挂着质量为 m 的物体，如图所示。求：(1) 上述粘合圆盘对中心轴的转动惯量 J；(2) 圆盘转动的角加速度 β。



解答

(1) 组合轮对转轴的转动惯量等于两个圆盘对转轴转动惯量之和，即

$$J=J_1+J_2=\frac{1}{2}m_1R_1^2+\frac{1}{2}m_2R_2^2=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{2}(2m)(2r)^2=\frac{9}{2}mr^2 \quad (3\text{ 分})$$

(2) 对两个重物和组合轮分别进行受力分析，并列动力学方程。
对左边重物，受到竖直向下的重力 mg 和竖直向上的拉力 T_1，假定其加速度为 a_1，方向竖直向下；

$$mg-T_1=ma_1 \quad (3\text{ 分})$$

对右边重物，受到竖直向下的重力 mg 和竖直向上的拉力 T_2，假定其加速度为 a_2，方向竖直向上；

$$T_2-mg=ma_2 \quad (3\text{ 分})$$

对于组合轮，受到竖直向下的重力 $3mg$，转轴的支持力，这两个力都通过转轴，所以它们对转轴的力矩为零；组合轮还受到两边绳子的拉力，大小分别为 T_1 和 T_2，方向都是竖直向下，假定其角加速度为 α，方向垂直纸面向外 (组合轮逆时针转动)，所以有

$$T_1\cdot(2r)-T_2\cdot r=J\alpha \quad (3\text{ 分})$$

因为绳子不打滑，所以有

$$a_1 = \alpha \cdot (2r) \quad (1\text{ 分})$$

$$a_2 = \alpha \cdot r \quad (1\text{ 分})$$

联立以上五个式子，整理得到

$$m(g - 2r\alpha) \cdot 2r - m(g + r\alpha) = \frac{9}{2}mr^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{2g}{19r} \quad (1\text{ 分})$$

2. 定轴转动的碰撞

第 192 题 |【06C0701】

一长为 L、质量为 m 的均匀细杆可绕其一端在竖直面内无摩擦地转动。现有一质量为 m 的质点以水平速度 v_0 与竖直悬挂的细杆发生完全弹性碰撞。已知碰撞过程中，转轴对细杆的作用力沿水平方向的分量为零，求：(1) 碰撞位置到转轴之间的距离 d；(2) 碰后细杆转动的角速度 ω。

解答

以杆和质点为研究对象，以 v_0 方向为正方向。 (1 分)
假定碰撞之后，质点的速度为 v_1，细杆质心的速度为 v_2，细杆转动的角速度为 ω。 (1 分)
碰撞过程中，水平方向系统不受外力，动量守恒

$$mv_0 = mv_1 + mv_2 \quad (3\text{ 分})$$

$$v_2 = \omega\frac{L}{2} \quad (1\text{ 分})$$

整个系统受到对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒

$$mv_0 d = mv_1 d + J\omega \quad (3\text{ 分})$$

$$J = \frac{1}{3}mL^2 \quad (1\text{ 分})$$

完全弹性碰撞，系统机械能没有损耗

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3\text{ 分})$$

联立解得

$$d = \frac{2}{3}L \quad (1\text{ 分})$$

$$\omega = \frac{12v_0}{7L} \quad (1\text{ 分})$$

第 193 题 |【06C0702】

质量为 m_1、长为 L 的均质细棒以一端为支点悬挂起来。一质量为 m_2 的子弹以 v_0 的水平速度射入棒的另一端，且留在棒内。设在棒偏转时，支点处的摩擦可忽略。试求：(1) 在子弹射入棒的瞬间，棒的角速度大小；(2) 棒的最大偏转角。

解答

(1) 对支点的角动量守恒

$$m_2 v_0 L = \left(\frac{1}{3}m_1L^2 + m_2L^2\right)\omega \qquad (7\text{ 分})$$

$$\omega = \frac{m_2v_0L}{\frac{1}{3}m_1L^2 + m_2L^2} = \frac{3m_2v_0}{(m_1+3m_2)L} \qquad (1\text{ 分})$$

(2) 机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1L^2 + m_2L^2\right)\omega^2 = m_1g\frac{L}{2}(1-\cos\theta) + m_2gL(1-\cos\theta) \qquad (6\text{ 分})$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{3(m_2v_0)^2}{(m_1+2m_2)(m_1+3m_2)gL} \qquad (1\text{ 分})$$

第 194 题 |【06C0703】

在一根长为 $3L$ 的轻杆上打一个小孔，小孔离一端的距离为 L，再在杆的两端以及距杆另一端 L 处各系一质量为 m_1 的小球，然后通过此孔将杆悬挂于一光滑的水平细轴上。开始时杆静止，一质量为 m 的小铅粒以 v_0 的水平速度射入中间小球，并留在里面。设小铅粒相对小球静止时杆的角位移可以忽略，小球、小铅粒均视为质点，试求：(1) 铅粒射入小球后，铅粒、所有小球及轻杆组成的系统对转轴的转动惯量；(2) 铅粒射入小球瞬间，轻杆的角速度大小；(3) 杆的最大摆角。

解答

(1)

$$J = m_1L^2 + m_1(2L)^2 + m_1L^2 + mL^2 = (6m_1+m)L^2 \qquad (4\text{ 分})$$

(2) 铅粒射入小球，系统角动量守恒

$$mv_0L = J\omega \qquad (4\text{ 分})$$

$$\omega = \frac{mv_0L}{J} = \frac{mv_0L}{(6m_1+m)L^2} = \frac{mv_0}{(6m_1+m)L} \qquad (1\text{ 分})$$

(3) 上摆过程，机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = (3m_1+m)gr_0(1-\cos\theta) \qquad (4\text{ 分})$$

$$r_0 = \frac{m_1(2L) + (m_1+m)L + m_1(-L)}{3m_1+m} = \frac{2m_1+m}{3m_1+m}L \qquad (1\text{ 分})$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\frac{1}{2}J\omega^2}{(3m_1+m)gr_0} = 1 - \frac{(6m_1+m)L^2 \times \frac{m^2v_0^2}{(6m_1+m)^2L^2}}{2(3m_1+m)g \times \frac{2m_1+m}{3m_1+m}L} = 1 - \frac{m^2v_0^2}{2(2m_1+m)(6m_1+m)gL} \quad (1 分)$$

第 195 题 |【06C0704】

质量为 m 的子弹，以速度 v_0 射入质量为 m_0、半径为 R 的静止圆盘的边缘，并留在该处，v_0 的方向与入射处的半径垂直。若盘心装有一与盘面垂直的光滑固定轴，求子弹射入后圆盘转动的角速度。已知质量为 m、半径为 R 的均匀圆盘对通过盘心且垂直于盘面的转轴的转动惯量为 $J=\frac{1}{2}mR^2$。

解答

以子弹和圆盘为研究对象，子弹射入圆盘的过程中，系统所受外力对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒。 (2 分)

子弹射入圆盘前，圆盘静止，圆盘对转轴的角动量 $L_1=0$，子弹对转轴的角动量 $L_2=mv_0R$。 (4 分)

子弹射入圆盘后，假定圆盘的角速度为 ω，则系统对转轴的角动量 $L_3=J\omega$，其中 $J=\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2$ 是整个系统对转轴的转动惯量。 (4 分)

由角动量守恒，得

$$L_1+L_2=L_3 \quad (4 分)$$

整理，得

$$mv_0R = \left(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{2mv_0}{(m_0+2m)R} \quad (1 分)$$

3. 定轴转动的动能定理

第 196 题 |【06C0801】

一根长为 L、质量为 M 的均匀细棒，其一端与光滑的水平轴相连，可在竖直平面内转动，另一端固定一质量为 m 的小球，小球可视为质点。设棒由水平静止释放，求细棒摆下 θ 角度时，(1) 棒的角加速度；(2) 棒的角速度。

解答

(1) 定轴转动的转动定律

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgL\cos\theta = J\alpha \quad (5 分)$$

$$J = \frac{1}{3}ML^2+mL^2 \quad (3 分)$$

解得

$$\alpha=\frac{3(M+2m)g\cos\theta}{2(M+3m)L} \qquad (1\ 分)$$

(2) 转动过程只有重力做功，机械能守恒，以水平位置为重力势能零点

$$0=\frac{1}{2}J\omega^2-Mg\frac{L}{2}\sin\theta-mgL\sin\theta \qquad (5\ 分)$$

解得

$$\omega=\sqrt{\frac{3(M+2m)g\sin\theta}{(M+3m)L}} \qquad (1\ 分)$$

第 197 题 |【06C0802】

一根长为 $3L$ 的刚性尺子，质量均匀分布，在距一端 L 处被钉到墙上，且可以在竖直平面内自由转动。先用手使尺子保持水平，然后释放。设尺子总质量 $3m$，求：(1) 尺子相对转轴的转动惯量；(2) 刚释放时尺子的角加速度的大小；(3) 尺子到竖直位置时的角速度的大小。

解答

(1)

$$J_1=\frac{1}{3}m_1L_1^2=\frac{1}{3}mL^2 \qquad (2\ 分)$$

$$J_2=\frac{1}{3}m_2L_2^2=\frac{1}{3}(2m)(2L)^2=\frac{8}{3}mL^2 \qquad (2\ 分)$$

$$J=J_1+J_2=3mL^2 \qquad (1\ 分)$$

(2) 定轴转动的转动定律

$$(3mg)\times\frac{1}{2}L=J\beta \qquad (4\ 分)$$

$$\beta=\frac{\frac{3}{2}mgL}{3mL^2}=\frac{g}{2L} \qquad (1\ 分)$$

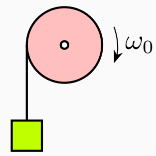
(3) 转动过程只有重力做功，机械能守恒，以水平位置为重力势能零点

$$0=\frac{1}{2}J\omega^2-(3mg)\times\frac{1}{2}L \qquad (4\ 分)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3mgL}{3mL^2}}=\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (1\ 分)$$

第 198 题 |【06C0803】

一轴承光滑的定滑轮，质量为 M，半径为 R，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 m 的物体，如图所示。已知定滑轮的转动惯量为 $J=\frac{1}{2}MR^2$，其初角速度大小为 ω_0，方向垂直纸面向里。求：(1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；(2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega=0$ 时，物体上升的高度；(3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度的大小和方向。



解答

(1) 对物体受力分析，竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子拉力 T，假设加速度向下，大小为 a，则由牛顿第二定律，有

$$mg-F=ma \qquad (2\text{ 分})$$

对滑轮受力分析，竖直向下的重力 Mg(重心在转轴上)，竖直向下的拉力 F，转轴的作用力 (大小方向均未知，但通过转轴)，假定滑轮角加速度大小为 β，方向垂直纸面向外，则由定轴转动的转动定律

$$FR=J\beta \qquad (2\text{ 分})$$

绳子不可伸长，一端固定在定滑轮上，另一端系在物体上

$$a=\beta R \qquad (2\text{ 分})$$

联立解得

$$\beta=\frac{2mg}{(2m+M)R} \qquad (1\text{ 分})$$

$$a=\frac{2mg}{2m+M} \qquad (1\text{ 分})$$

(2) 物体初速度大小 $v_0=\omega_0R$，方向向上，加速度大小为 a，方向向下，所以它做匀变速直线运动

$$h=\frac{v_0^2}{2a}=\frac{(2m+M)(\omega_0R)^2}{4mg} \qquad (4\text{ 分})$$

(3) 整个过程只有物体的重力做功，由物体和滑轮组成的系统机械能守恒，当物体回到原来位置时，物体的速度与初速度等值反向，滑轮的角速度也与初角速度等值反向，所以大小为 ω_0，方向垂直纸面向外。 (3 分)

4. 平面平行运动

第 199 题 |【06C0901】

一长为 L、质量为 m 的均匀细杆静止放置在光滑水平桌面上，现有一质量为 m 的质点以速度 v_0 垂直撞向细杆并发生完全弹性碰撞。已知碰撞过程中，细杆一端保持静止，求：(1) 碰撞位置到细杆质心之间的距离 d；(2) 碰后质点的速度 v_1。

解答

假设碰撞后质点的速度为 v_1，细杆质心的速度为 v_2，细杆绕质心的角速度为 ω。
因为水平面光滑，以质点和细杆为研究对象，系统只受竖直方向的重力和支持力，所以系统在水平方向上不受外力，动量守恒，且对通过细杆中心垂直桌面的转轴的力矩为零，所以系统对该转轴的角动量守恒。

$$mv_0 = mv_1 + mv_2 \qquad (3\text{ 分})$$

$$mv_0 d = mv_1 d + J\omega \qquad (3\text{ 分})$$

其中 $J = \frac{1}{12}mL^2$ 为细杆对质心转轴的转动惯量。 (1 分)
而依题意，细杆一端保持静止，速度为零，所以有

$$v_2 - \omega\frac{L}{2} = 0 \qquad (3\text{ 分})$$

完全弹性碰撞，动能没有损耗

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (3\text{ 分})$$

联立以上四式可解得

$$d = \frac{1}{6}L \qquad (1\text{ 分})$$

$$v_1 = \frac{1}{7}v_0 \qquad (1\text{ 分})$$

第 200 题 |【06C0902】

质量为 m 的子弹，以速度 v_0 射入置于光滑水平桌面上的、质量为 m_0、半径为 R 的静止圆盘的边缘，并留在该处，v_0 的方向与入射处的半径垂直。若圆盘是自由的，求子弹射入后系统质心的速度和系统转动的角速度。已知质量为 m、半径为 R 的均匀圆盘对通过盘心且垂直于盘面的转轴的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}mR^2$。

解答

以子弹和圆盘为研究对象，子弹射入圆盘的过程中，系统水平方向不受力，竖直方向受到重力和桌面的支持力，所以系统水平方向的动量守恒，系统对任意垂直桌面的转轴的角动量守恒。

动量守恒

$$p_1 + p_2 = p_3 \quad (1\ 分)$$

$$p_1 = 0 \quad (1\ 分)$$

$$p_2 = mv_0 \quad (1\ 分)$$

$$p_3 = (m + m_0)v_1 \quad (1\ 分)$$

$$mv_0 = (m + m_0)v_1$$

$$v_1 = \frac{mv_0}{m + m_0} \quad (1\ 分)$$

子弹射入圆盘前，圆盘静止，圆盘的动量 $p_1 = 0$，子弹的动量 $p_2 = mv_0$；子弹射入圆盘后，整个系统质心的速度设为 v_1，整个系统的动量就等于系统质心的动量 $p_3 = (m + m_0)v_1$。

角动量守恒，取通过盘心且垂直于盘面的转轴 (1 分)

$$L_1 + L_2 = L_3 + L_4 \quad (1\ 分)$$

$$L_1 = 0 \quad (1\ 分)$$

$$L_2 = mv_0R \quad (1\ 分)$$

$$L_3 = (m + m_0)v_1d \quad (1\ 分)$$

$$L_4 = J\omega \quad (1\ 分)$$

$$d = \frac{mR}{m + m_0} \quad (1\ 分)$$

$$J = J_1 + J_2$$

$$J_1 = m(R - d)^2 \quad (1\ 分)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}m_0R^2 + m_0d^2 \quad (1\ 分)$$

$$mv_0R = (m + m_0)v_1d + \left[m(R - d)^2 + \frac{1}{2}m_0R^2 + m_0d^2\right]\omega$$

$$\omega = \frac{2mv_0}{(3m + m_0)R} \quad (1\ 分)$$

子弹射入圆盘前，圆盘静止，圆盘对转轴的角动量 $L_1 = 0$，子弹对转轴的角动量 $L_2 = mv_0R$；子弹射入圆盘后，整个系统质心的速度设为 v_1，角速度设为 ω，d 为系统质心到圆盘中心的距离，质心对转轴的角动量 $L_3 = (m + m_0)v_1d$，系统对通过质心垂直盘面转轴的角动量 $L_4 = J\omega$，其中 $J = J_1 + J_2$ 是整个系统对通过质心垂直盘面转轴的转动惯量，$J_1 = m(R - d)^2$ 是子弹对通过质心垂直盘面转轴的转动惯量，$J_2 = \frac{1}{2}m_0R^2 + m_0d^2$ 是圆盘对通过质心垂直盘面转轴的转动惯量。

第七章 简谐振动

一、选择题

1. 简谐振动的特征量

第 201 题 |【07A0101】

一质量为 m 的物体挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下面，振动圆频率为 ω。若把此弹簧分割成二等份，将物体 m 挂在分割后的一根弹簧上，则振动圆频率是

(A) 2ω　　(B) $\sqrt{2}\omega$　　(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\omega$　　(D) $\frac{1}{2}\omega$

答案

B

解析

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$k'=2k$$
$$\omega'=\sqrt{\frac{k'}{m}}=\sqrt{\frac{2k}{m}}=\sqrt{2}\omega$$

第 202 题 |【07A0102】

把单摆摆球从平衡位置向位移正方向拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ，然后由静止放手任其振动，从放手时开始计时，并用余弦函数表示其运动学方程，则该单摆振动的初相为

(A) π　　(B) $\frac{1}{2}\pi$　　(C) θ　　(D) 0

答案

D

2. 简谐振动的表达式

第 203 题 |【07A0201】

一物体做简谐振动，振动表达式为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$。在 $t = \frac{1}{4}T(T$ 为周期) 时刻，物体的加速度为

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega^2$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega^2$

答案

B

第 204 题 |【07A0202】

竖直悬挂的弹簧振子处于静止状态，现用力将振子向下拉 0.02 m 后由静止释放，使之做简谐振动，并测得振动周期为 0.2 s。设竖直向下为 x 轴正方向，释放时为计时零点，则其用余弦函数表示的振动表达式为

(A) $x = 0.02\cos(10\pi t + \pi)$(SI)　(B) $x = 0.02\cos(10\pi t)$(SI)

(C) $x = 0.02\cos(0.4\pi t)$(SI)　(D) $x = 0.02\cos(0.4\pi t + \pi)$(SI)

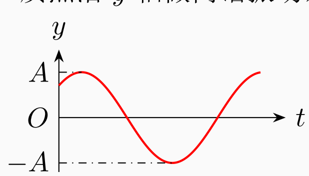
答案

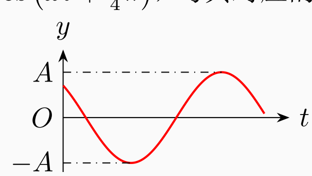
B

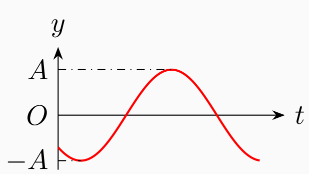
3. 振动曲线

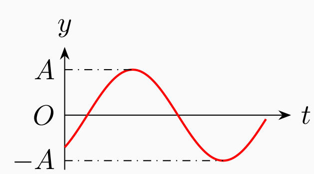
第 205 题 |【07A0301】

已知一质点沿 y 轴做简谐振动，其振动表达式为 $y = A\cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$，与其对应的振动曲线是

(A) 

(B) 

(C) 

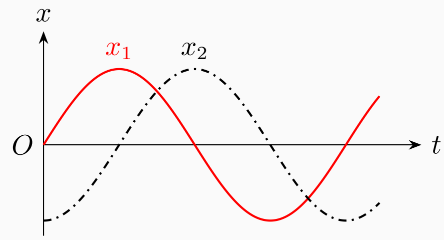
(D) 

答案

C

第 206 题 |【07A0302】

两个同周期简谐振动曲线如图所示。x_1 的相位比 x_2 的相位



(A) 落后 $\frac{1}{2}\pi$ (B) 超前 $\frac{1}{2}\pi$ (C) 落后 π (D) 超前 π

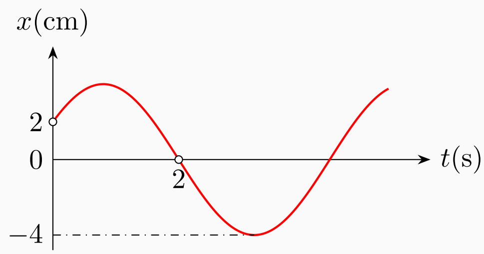
答案

B

4. 旋转矢量

第 207 题 |【07A0401】

用余弦函数描述一简谐振动，其振动曲线如图所示，则振动周期为



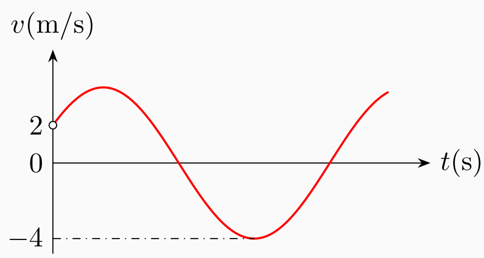
(A) 4 s (B) 4.8 s (C) 6 s (D) 8 s

答案

B

第 208 题 |【07A0402】

一质点做简谐振动，其速度与时间的曲线如图所示，若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初位相为



(A) $\frac{1}{6}\pi$ (B) $-\frac{1}{6}\pi$ (C) $\frac{5}{6}\pi$ (D) $-\frac{5}{6}\pi$

答案

D

5. 简谐振动的能量

第 209 题 |【07A0501】

一质点做简谐振动，其振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$。在求质点的振动动能时，得出下面 5 个表达式：(1)$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$；(2)$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$；(3)$\frac{1}{2}kA^2\sin(\omega t+\varphi_0)$；(4)$\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$；(5)$\frac{2\pi^2 mA^2}{T^2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$；其中 m 是质点的质量，k 是弹簧的劲度系数，T 是振动的周期。这些表达式中正确的有

(A) (1)(3) (B) (1)(5) (C) (3)(5) (D) (1)(3)(5)

答案

B

解析

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$
$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{2\pi^2}{T^2}mA^2$$

第 210 题 |【07A0502】

一弹簧振子做简谐振动，当位移为振幅的一半时，其动能为总能量的

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

答案

D

6. 同方向同频率简谐振动的合成

第 211 题 |【07A0601】

一质点同时参与了两个同方向的简谐振动，它们振动的表达式分别为 $x_1 = 0.05\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 0.05\cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$(SI)，其合运动的表达式为

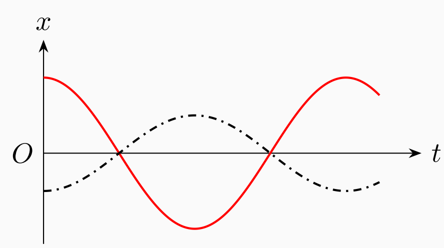
(A) $x = 0.1\cos(2\omega t + \pi)$(SI)
(B) $x = 0.1\cos(\omega t + \pi)$(SI)
(C) $x = 0.05\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$(SI)
(D) $x = 0.05\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$(SI)

答案

D

第 212 题 |【07A0602】

图中所画的是两个简谐振动的振动曲线。若这两个简谐振动可叠加，其合运动用余弦函数表示时的初相为



(A) $\frac{3}{2}\pi$
(B) π
(C) $\frac{1}{2}\pi$
(D) 0

答案

D

二、填空题

1. 简谐振动的特征量

第 213 题 |【07B0101】

一质量为 m 的质点挂在一弹簧测力计上，开始时静止在弹簧自然伸长处，之后放手，则弹簧测力计的最大读数为______。(重力加速度大小为 g)

答案

$2mg$

第 214 题 |【07B0102】

将质量为 0.2 kg 的物体，系于劲度系数 $k = 20$ N/m 的竖直悬挂的弹簧的下端。假定在弹簧不变形的位置将物体由静止释放，然后物体做简谐振动，则振动频率为______Hz。(重力加速度取 $g = 10$ m/s^2)

答案

$\frac{5}{\pi}$

解析

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{5}{\pi}$$

2. 简谐振动的表达式

第 215 题 |【07B0201】

一个质量为 m 的质点做简谐振动，其振动表达式为 $x = A\cos\left(\omega t - \frac{1}{2}\pi\right)$，则质点的初速度为______。

答案

$A\omega$

第 216 题 |【07B0202】

一质点沿 x 轴以 $x = 0$ 为平衡位置做简谐振动，频率为 0.25 Hz。$t = 0$ 时，$x = -5$ cm 而速度等于零，则用余弦函数表示的振动表达式为______(SI)。

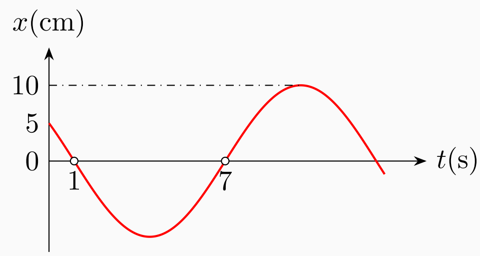
答案

$x = 0.05\cos(0.5\pi t + \pi)$

3. 振动曲线

第 217 题 |【07B0301】

一简谐振动用余弦函数表示，其振动曲线如图所示，则此简谐振动的 $\omega =$______rad/s。

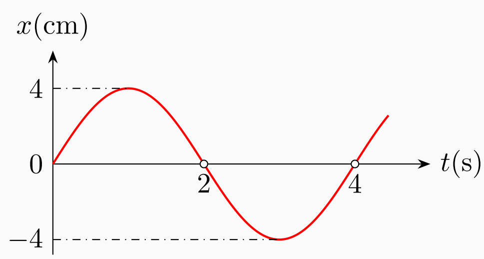


答案

$\frac{1}{6}\pi$

第 218 题 |【07B0302】

用余弦函数描述一个质点做简谐振动，其振动曲线如图所示，则由图可确定在 $t = 2$ s 时刻，此质点的速度方向为______。



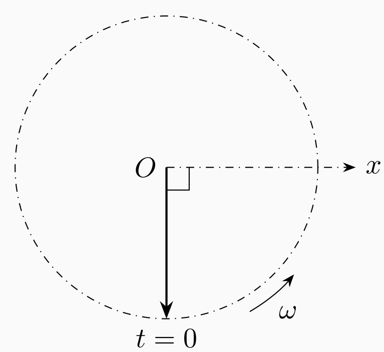
答案

x 轴负方向

4. 旋转矢量

第 219 题 |【07B0401】

图中用旋转矢量法表示了一个简谐振动。旋转矢量的长度为 0.04 m，旋转角速度 $\omega = 4\pi$ rad/s。此简谐振动以余弦函数表示的振动表达式为 $x =$______(SI)。



答案

$0.04\cos\left(4\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$

5. 简谐振动的能量

第 220 题 |【07B0501】

一弹簧振子做简谐振动，总能量为 E_1，如果简谐振动的振幅增加为原来的两倍，振子的质量增加为原来的四倍，则它的总能量为 $E_2 =$______。

答案

$4E_1$

第 221 题 |【07B0502】

质量为 m 物体和一个轻弹簧组成弹簧振子，其固有振动周期为 T。当它做振幅为 A 的简谐振动时，其振动能量 $E =$______。

答案

$\frac{2\pi^2 mA^2}{T^2}$

6. 同方向同频率简谐振动的合成

第 222 题 |【07B0601】

如果一个质点同时参与振动方向相同的两个同振幅 A、同圆频率 ω 且初相位相同的简谐振动，其合运动仍是简谐振动，那么它的振幅为______。

答案

$2A$

第 223 题 |【07B0602】

两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为 $x_1 = 0.06\cos\left(5t + \frac{1}{2}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 0.08\cos(\pi - 5t)$(SI)，它们的合振动的振辐为_____m。

答案

0.1

7. 拍

第 224 题 |【07B0701】

已知两个振动方向相同而圆频率分别为 ω_1 和 ω_2 的简谐振动的合运动有拍的现象，则拍频为_____。

答案

$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2\pi}$

三、计算题

1. 简谐振动的表达式

第 225 题 |【07C0201】

一质点沿 x 轴做简谐振动，其振动表达式为 $x = 0.4\cos\left[3\pi\left(t + \frac{1}{6}\right)\right]$ (SI)。试求：(1) 振幅、圆频率和周期；(2) 初相位、初位置和初速度；(3)$t = 1.5$ s 时的位置、速度和加速度。

解答

(1)

$$A = 0.4 \text{ m} \qquad (1\text{ 分})$$

$$\omega = 3\pi = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s} \qquad (1\text{ 分})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3} \text{ s} \qquad (1\text{ 分})$$

(2)

$$\varphi_0 = 3\pi \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad} \qquad (1\text{ 分})$$

$$x_0 = 0.4\cos\left[3\pi\left(0+\frac{1}{6}\right)\right] = 0\ \text{m} \qquad (2\ 分)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1.2\pi\sin\left[3\pi\left(t+\frac{1}{6}\right)\right] \qquad (3\ 分)$$

$$v_0 = -1.2\pi\sin\left[3\pi\left(0+\frac{1}{6}\right)\right] = -1.2\pi\ \text{m/s} \qquad (2\ 分)$$

(3)

$$x(1.5) = 0.4\cos\left[3\pi\left(1.5+\frac{1}{6}\right)\right] = -0.4\ \text{m} \qquad (2\ 分)$$

$$v(1.5) = -1.2\pi\sin\left[3\pi\left(1.5+\frac{1}{6}\right)\right] = 0\ \text{m/s} \qquad (2\ 分)$$

第 226 题 |【07C0202】

一简谐振动的表达式为 $x = A\cos(8t+\varphi_0)$(SI)。已知初始位置 $x_0 = 0.04$ m，初始速度 $v_0 = -0.24$ m/s。试确定振幅 A 和初位相 φ_0。

解答

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.04 \qquad (2\ 分)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -8A\sin(8t+\varphi_0) \qquad (3\ 分)$$

$$v_0 = -8A\sin\varphi_0 = -0.24 \qquad (2\ 分)$$

解得

$$A\cos\varphi_0 = 0.04$$

$$A\sin\varphi_0 = 0.03 \qquad (1\ 分)$$

$$A = \sqrt{(0.04)^2+(0.03)^2} = 0.05 \qquad (2\ 分)$$

$$\cos\varphi_0 = 0.8 \qquad (1\ 分)$$

$$\sin\varphi_0 = 0.6 \qquad (1\ 分)$$

$$\varphi_0 = 37^\circ = \frac{37}{180}\pi\ \text{rad} \qquad (3\ 分)$$

第 227 题 |【07C0203】

一质点沿 x 轴做简谐振动，其圆频率 $\omega = 10$ rad/s。试用余弦函数分别写出以下两种初始状态下的振动表达式：(1) 其初始位置 $x_0 = 1$ cm，初始速度 $v_0 = 10$ cm/s；(2) 其初始位置 $x_0 = 1$ cm，初始速度 $v_0 = -10$ cm/s。

解答

设振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$(SI)。 (2 分)
依题意，$\omega = 10$ rad/s。 (1 分)
(1)

$$x_0 = 0.01 = A\cos\varphi_0 \quad (2\text{ 分})$$
$$v_0 = 0.1 = -A\omega\sin\varphi_0 \quad (2\text{ 分})$$

整理得

$$A\cos\varphi_0 = 0.01$$
$$A\sin\varphi_0 = -0.01$$
$$A = 0.01\sqrt{2}\ \mathrm{m} \quad (1\text{ 分})$$
$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4} \quad (1\text{ 分})$$

所以振动表达式为 $x = 0.01\sqrt{2}\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$(SI)。
(2)

$$x_0 = 0.01 = A\cos\varphi_0 \quad (2\text{ 分})$$
$$v_0 = -0.1 = -A\omega\sin\varphi_0 \quad (2\text{ 分})$$

整理得

$$A\cos\varphi_0 = 0.01$$
$$A\sin\varphi_0 = 0.01$$
$$A = 0.01\sqrt{2}\ \mathrm{m} \quad (1\text{ 分})$$
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \quad (1\text{ 分})$$

所以振动表达式为 $x = 0.01\sqrt{2}\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$(SI)。

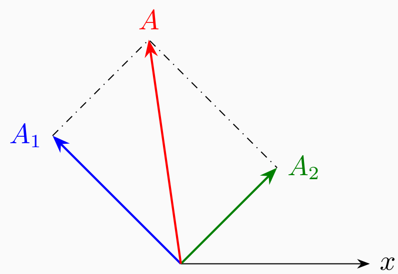
2. 同方向同频率简谐振动的合成

第 228 题 |【07C0601】

质点同时参与两个简谐振动 $x_1 = 0.08\cos\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 0.06\cos\left(10t + \frac{1}{4}\pi\right)$(SI)，求合振动的振幅和初始相位。

解答

旋转矢量图如下



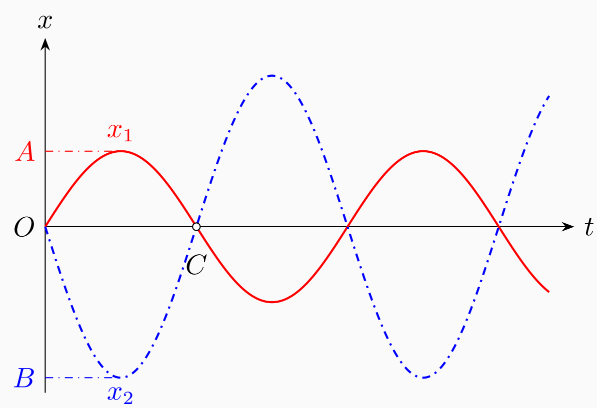
(9 分)

$$A=\sqrt{0.08^2+0.06^2}=0.1\ \mathrm{m} \qquad (3\text{ 分})$$

$$\varphi_0=\frac{1}{4}\pi+\frac{53}{180}\pi=\frac{98}{180}\pi=\frac{49}{90}\pi\ \mathrm{rad} \qquad (3\text{ 分})$$

第 229 题 |【07C0602】

两个简谐振动的振动曲线如图所示，请用余弦函数表示：(1) 两个简谐振动的振动表达式；(2) 合振动的振动表达式。



解答

(1)

$$A_1=A \qquad (1\text{ 分})$$

$$A_2=|B| \qquad (1\text{ 分})$$

$$\frac{T}{2}=C, T=2C \qquad (1\text{ 分})$$

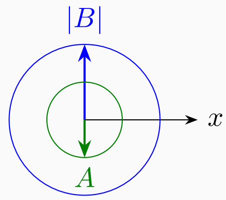
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{C} \qquad (1\text{ 分})$$

$$x_{10}=0 \qquad (1\text{ 分})$$

$$v_{10}>0 \qquad (1\text{ 分})$$

$$x_{20}=0 \qquad (1\text{ 分})$$

$$v_{20} < 0 \quad (1\ 分)$$



(2 分)

$$\varphi_{10} = -\frac{1}{2}\pi \quad (1\ 分)$$

$$\varphi_{20} = \frac{1}{2}\pi \quad (1\ 分)$$

$$x_1 = A\cos\left(\frac{\pi}{C}t - \frac{1}{2}\pi\right) \quad (1\ 分)$$

$$x_2 = |B|\cos\left(\frac{\pi}{C}t + \frac{1}{2}\pi\right) \quad (1\ 分)$$

(2)

$$x = x_1 + x_2 = (|B| - A)\cos\left(\frac{\pi}{C}t + \frac{1}{2}\pi\right) \quad (1\ 分)$$

第八章 平面简谐波

一、选择题

1. 波的表达式

第 230 题 |【08A0201】

下列表达式中表示沿 x 轴负向传播的平面简谐波的是 (式中 A、B 和 C 是正的常量)

(A) $y(x,t)=A\cos(Bx+Ct)$ (B) $y(x,t)=A\cos(Bx-Ct)$

(C) $y(x,t)=A\cos(Bx)\cos(Ct)$ (D) $y(x,t)=A\sin(Bx)\sin(Ct)$

答案

A

第 231 题 |【08A0202】

已知一平面简谐波的表达式为 $y=A\cos(Bt+Cx)$(A、B、C 为正值常量)，则

(A) 波的频率为 B (B) 波的传播速度为 $\frac{C}{B}$ (C) 波长为 $\frac{\pi}{C}$ (D) 波的周期为 $\frac{2\pi}{B}$

答案

D

第 232 题 |【08A0203】

在简谐波的传播过程中，沿传播方向相距半个波长的两个质点的振动速度

(A) 大小相同，方向相反 (B) 大小不同，方向相同

(C) 大小相同，方向相同 (D) 大小不同，方向相反

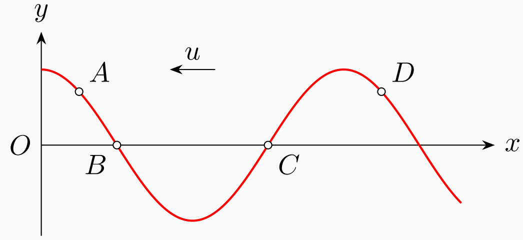
答案

A

2. 波形图

第 233 题 |【08A0301】

某横波以波速 u 沿 x 轴负方向传播，t 时刻波形曲线如图所示，则该时刻



(A) A 点振动速度大于零　　(B) B 点静止不动

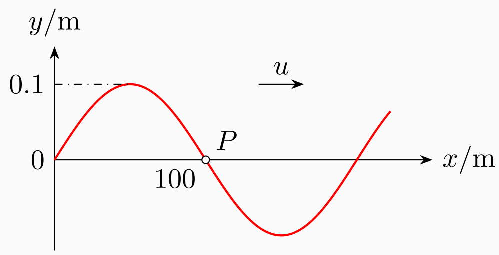
(C) C 点向下运动　　(D) D 点振动速度小于零

答案

D

第 234 题 |【08A0302】

图示为一简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，波速 $u=200\ \mathrm{m/s}$，则 P 处质点的振动速度的表达式为



(A) $v=-0.2\pi\cos(2\pi t-\pi)(\mathrm{SI})$　　(B) $v=-0.2\pi\cos(\pi t-\pi)(\mathrm{SI})$

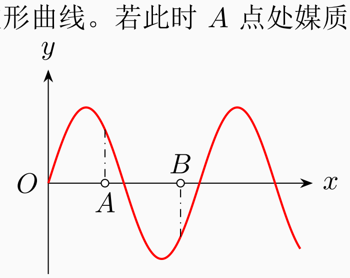
(C) $v=0.2\pi\cos\left(2\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)(\mathrm{SI})$　　(D) $v=0.2\pi\cos\left(\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)(\mathrm{SI})$

答案

A

第 235 题 |【08A0303】

图示一平面简谐机械波在 t 时刻的波形曲线。若此时 A 点处媒质质元的振动动能在增大，则



(A) A 点处质元的弹性势能在减小
(B) 波沿 x 轴负方向传播
(C) B 点处质元的振动动能在减小
(D) 各点的波的能量密度都不随时间变化

答案

B

3. 波的能量

第 236 题 |【08A0401】

一平面简谐波在弹性媒质中传播时，某一时刻媒质中某质元在负的最大位移处，则它的能量是

(A) 动能为零，势能最大
(B) 动能为零，势能为零
(C) 动能最大，势能最大
(D) 动能最大，势能为零

答案

B

第 237 题 |【08A0402】

一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中

(A) 它的势能转换成动能
(B) 它的动能转换成势能
(C) 它从相邻的一段媒质质元获得能量，其能量逐渐增加
(D) 它把自己的能量传给相邻的一段媒质质元，其能量逐渐减小

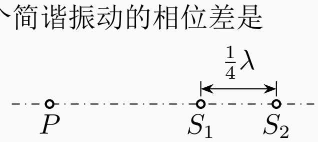
答案

C

4. 波的干涉

第 238 题 |【08A0501】

两相干波源 S_1 和 S_2 相距 $\frac{1}{4}\lambda$(λ 为波长)，S_1 的相位比 S_2 的相位超前 $\frac{1}{2}\pi$，在 S_1、S_2 所在直线上，S_1 外侧各点 (例如 P 点) 两波引起的两个简谐振动的相位差是



(A) 0
(B) $\frac{1}{2}\pi$
(C) π
(D) $\frac{3}{2}\pi$

答案

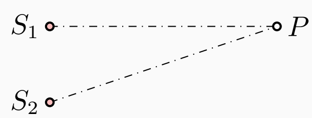
C

解析

$$\varphi_{10}-\varphi_{20}=\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_1=\varphi_{10}-kr_1$$
$$\varphi_2=\varphi_{20}-kr_2$$
$$\varphi_1-\varphi_2=(\varphi_{10}-\varphi_{20})-k(r_1-r_2)=\frac{1}{2}\pi-k\times\left(-\frac{1}{4}\lambda\right)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\pi$$

第 239 题 |【08A0502】

如图所示，S_1 和 S_2 为两相干波源，它们的振动方向均垂直于图面，发出波长为 λ 的简谐波，P 点是两列波相遇区域中的一点，已知 $\overline{S_1P}=2\lambda$，$\overline{S_2P}=2.2\lambda$，两列波在 P 点发生相消干涉。若 S_1 的振动表达式为 $y_1=A\cos(2\pi t+0.5\pi)$，则 S_2 的振动表达式为



(A) $y_2=A\cos(2\pi t-0.5\pi)$
(B) $y_2=A\cos(2\pi t+\pi)$
(C) $y_2=A\cos(2\pi t+0.5\pi)$
(D) $y_2=2A\cos(2\pi t-0.1\pi)$

答案

D

5. 驻波

第 240 题 |【08A0601】

沿着相反方向传播的两列相干波，其表达式为 $y_1=A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$ 和 $y_2=A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$。在叠加后形成的驻波中，各处简谐振动的振幅是

(A) A
(B) $2A$
(C) $2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$
(D) $\left|2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$

答案

D

第 241 题 |【08A0602】

在驻波中，两个相邻波节间各质点的振动

(A) 振幅相同，相位相同

(B) 振幅不同，相位相同

(C) 振幅相同，相位不同

(D) 振幅不同，相位不同

答案

B

二、填空题

1. 波的特征量

第 242 题 |【08B0101】

一平面简谐波在某介质中传播的速度为 6 m/s，振动周期为 0.1 s，则波长为_____m。

答案

0.6

第 243 题 |【08B0102】

频率为 500 Hz 的波在某介质中的波速为 350 m/s，在波的传播方向上，间距小于波长、相位差为 $\frac{2}{3}\pi$ 的两点之间的距离为_____m。

答案

$\frac{7}{30}$

2. 波的表达式

第 244 题 |【08B0201】

一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波的表达式为 $y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$，则 $x=-\lambda$ 处质点振动的表达式是_____。

答案

$y=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)$

第 245 题 |【08B0202】

已知一平面简谐波的波长为 1 m，振幅为 0.1 m，周期为 0.5 s。选波的传播方向为 x 轴正方向，并以振动初相为零的点为坐标原点，则用余弦函数表示时波的表达式为 $y=$______(SI)。

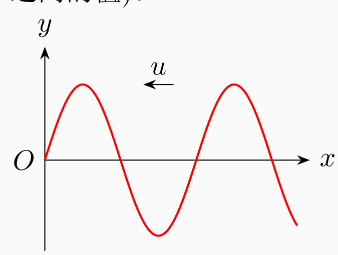
答案

$0.1\cos(4\pi t-2\pi x)$

3. 波形图

第 246 题 |【08B0301】

图为沿 x 轴负方向传播的平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形。若波的表达式以余弦函数表示，则 O 点处质点振动的初相为______(取 $-\pi$ 到 π 之间的值)。

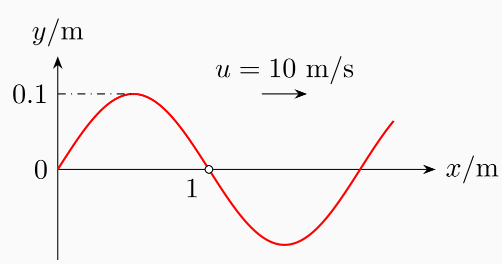


答案

$-\frac{1}{2}\pi$

第 247 题 |【08B0302】

图为 $t=\frac{1}{4}T$ 时一平面简谐波的波形曲线，则该波用余弦函数表示时的表达式为______(SI)。



答案

$y=0.1\cos(10\pi t-\pi x)$

4. 波的干涉

第 248 题 |【08B0501】

振幅均为 A 相干波源 S_1、S_2，相距 $\frac{3}{4}\lambda$(λ 为波长)，初相分别为 φ_{10} 和 φ_{20}。若在 S_1、S_2 所在直线上 S_1 外侧各点合振幅为 $2A$，则两波源的初相差 $\Delta\varphi_0=\varphi_{20}-\varphi_{10}=$______(取 0 到 2π 之间的值)。

答案

$\frac{3}{2}\pi$

第 249 题 |【08B0502】

两个相干点波源 S_1 和 S_2，它们的振动表达式分别是 $y_1=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$ 和 $y_2=A\cos\left(\omega t-\frac{1}{2}\pi\right)$。波从 S_1 传到 P 点经过的路程等于 2 个波长，波从 S_2 传到 P 点的路程等于 3.5 个波长。设两波波速相同，在传播过程中振幅不衰减，则两波传到 P 点引起 P 点的合振动的振幅为______。

答案

$2A$

5. 驻波

第 250 题 |【08B0601】

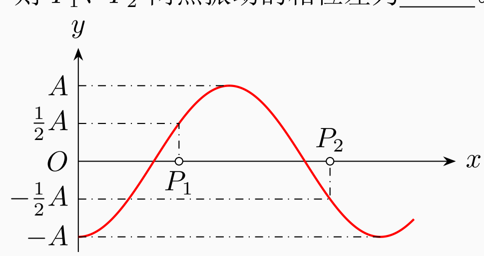
某一弦线上有两列平面简谐波，其表达式分别为 $y_1=0.1\cos(2t-4x)$(SI) 和 $y_2=0.1\cos(2t+4x)$(SI)。若这两列波相遇，则形成的驻波的表达式为______(SI)。

答案

$y=0.2\cos(4x)\cos(2t)$

第 251 题 |【08B0602】

某时刻驻波波形曲线如图所示，则 P_1、P_2 两点振动的相位差为______。



答案

π

6. 多普勒效应

第 252 题 |【08B0701】

设空气中声速为 340 m/s，一列火车以 17 m/s 的速度行驶，若汽笛的频率为 570 Hz，一个静止在火车前方的观测者听到的声音频率为______Hz。

答案

600

第 253 题 |【08B0702】

一固定的超声波探测仪，在海水中发出一束波速为 u、频率 f 的超声波，被一向着探测器驶来的潜艇反射回来。探测器测得反射波与其发射的入射波的频率相差为 Δf，则该潜艇的速度为______。

答案

$\frac{(\Delta f)u}{2f+\Delta f}$

解析

$$f_1 = \frac{u+v}{u} f$$
$$f_2 = \frac{u}{u-v} f_1$$
$$\Delta f = |f_2 - f| = \frac{2v}{u-v} f$$

三、计算题

1. 波的表达式

第 254 题 |【08C0201】

设有一平面简谐波，其表达式为 $y = 5\cos\left[2\pi\left(20t - \frac{x}{10}\right)\right]$，其中 x、y 的单位为 cm，t 的单位为 s。试求：(1) 振幅 A、频率 f、波长 λ 以及波速 u；(2) 若某处振动的初相位为 $\frac{3}{5}\pi$，求该处的位置 x。

解答

(1)

$$A = 5\ \text{cm} \qquad (1\ 分)$$
$$\omega = \frac{2\pi}{0.05} = 2\pi f$$

$$f=\frac{1}{0.05}=20\ \mathrm{Hz} \quad (3\text{ 分})$$

$$k=\frac{2\pi}{10}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda=10\ \mathrm{cm} \quad (3\text{ 分})$$

$$u=\lambda f=200\ \mathrm{cm/s}=2\ \mathrm{m/s} \quad (3\text{ 分})$$

(2)

$$\varphi(x,t)=2\pi\left(20t-\frac{x}{10}\right) \quad (2\text{ 分})$$

$$\varphi(x,0)=2\pi\left(-\frac{x}{10}\right)=-\frac{\pi x}{5}=\frac{3\pi}{5}+2n\pi \quad (2\text{ 分})$$

$$x=(10n-3)\ \mathrm{cm}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad (1\text{ 分})$$

第 255 题 |【08C0202】

设有一列沿 x 轴正方向传播的平面简谐波，它的波长 $\lambda=0.1$ m，位于 $x=0.05$ m 处的波源的振动方程为 $y=0.03\cos(\pi t)$(SI)。求：(1) 该波的周期 T、波速 u；(2) 该波的表达式 (用余弦函数表示)；(3)$t=0$ 时，$x=5$ m 处质点离开平衡位置的位移和振动速度。

解答

(1)

$$\omega=\pi=\frac{2\pi}{T}$$

$$T=2\ \mathrm{s} \quad (3\text{ 分})$$

$$\lambda=0.1\ \mathrm{m} \quad (1\text{ 分})$$

$$u=\frac{\lambda}{T}=0.05\ \mathrm{m/s} \quad (2\text{ 分})$$

(2)

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=20\pi\ \mathrm{rad/m} \quad (2\text{ 分})$$

$$y=0.03\cos(\pi t-kr) \quad (1\text{ 分})$$

$$r=x-0.05 \quad (1\text{ 分})$$

$$y=0.03\cos[\pi t-20\pi(x-0.05)]=0.03\cos(\pi t-20\pi x+\pi)(\mathrm{SI}) \quad (1\text{ 分})$$

(3)

$$y(x,t)=0.03\cos(\pi t-20\pi x+\pi)$$

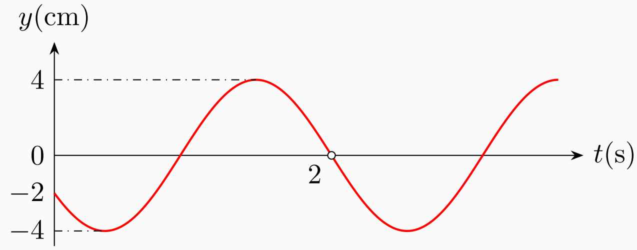
$$y(5,0)=0.03\cos(\pi\times0-20\pi\times5+\pi)=-0.03\ \mathrm{m} \quad (1\text{ 分})$$

$$v(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}=-0.03\pi\sin(\pi t-20\pi x+\pi) \quad (2\text{ 分})$$

$$v(5,0) = -0.03\pi\sin(\pi\times 0 - 20\pi\times 5 + \pi) = 0 \qquad (1\text{ 分})$$

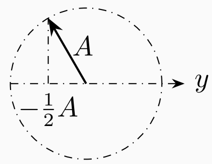
第 256 题 |【08C0203】

一平面简谐波沿一弦线自左向右传播，传播速度为 11 m/s，弦上某点 P 的振动曲线如图所示。若取该点为坐标 x 的原点，向右为正方向。若用余弦函数表示简谐波，求：(1) 在旋转矢量图中标出 P 点初相位；(2) 此波的表达式。



解答

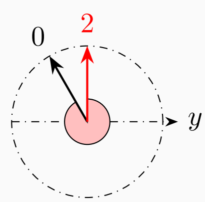
(1) 由图可得，$y_0 = -\frac{1}{2}A$，$v_0 < 0$，所以旋转矢量图如下



所以 $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$。 (5 分)

(2) 设波的表达式为 $y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$， (1 分)

由题图可得



$$A = 0.04\text{ m} \qquad (2\text{ 分})$$

$$\omega\times 2 = \frac{11}{6}\pi, \omega = \frac{11}{12}\pi \qquad (3\text{ 分})$$

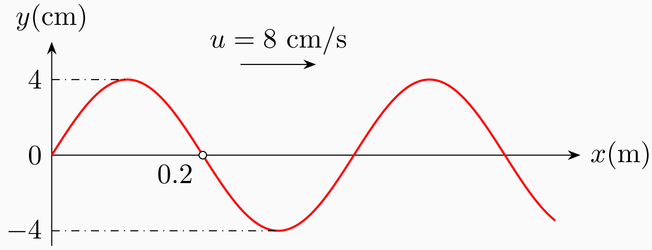
$$u = 11\text{ m/s} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}, k = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{12}\pi \qquad (3\text{ 分})$$

$$y = 0.04\cos\left(\frac{11}{12}\pi t - \frac{1}{12}\pi x + \frac{2}{3}\pi\right)\text{ (SI)} \qquad (1\text{ 分})$$

2. 波形图

第 257 题 |【08C0301】

如图所示为一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，求：(1) 该波的表达式 (用余弦函数表示)；(2)$t=2.5$ s 时刻 $x=0.2$ m 处质点的速度。



解答

(1) 设波的表达式为 $y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$，依题意， (1 分)

$$A=4\ \text{cm}=0.04\ \text{m} \quad (1\ 分)$$

$$\frac{\lambda}{2}=0.2\ \text{m},\lambda=0.4\ \text{m} \quad (2\ 分)$$

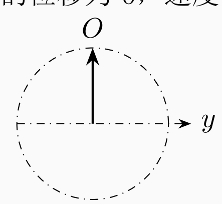
$$u=8\ \text{cm/s}=0.08\ \text{m/s} \quad (1\ 分)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=5\pi\ \text{rad/m} \quad (2\ 分)$$

$$T=\frac{\lambda}{u}=5\ \text{s},\omega=\frac{2\pi}{T}=0.4\pi\ \text{rad/s} \quad (2\ 分)$$

$$y=0.04\cos(0.4\pi t-5\pi x+\varphi_0)$$

由题意及题图可知，$t=0$ 时，原点 O 处的位移为 0，速度 $v<0$，所以由旋转矢量图



可知，此时其相位为

$$\varphi=0.4\pi\times0-5\pi\times0+\varphi_0=0.5\pi$$

$$\varphi_0=0.5\pi \quad (3\ 分)$$

所以波的表达式为

$$y=0.04\cos\left(0.4\pi t-5\pi x+0.5\pi\right)\text{(SI)} \quad (1\ 分)$$

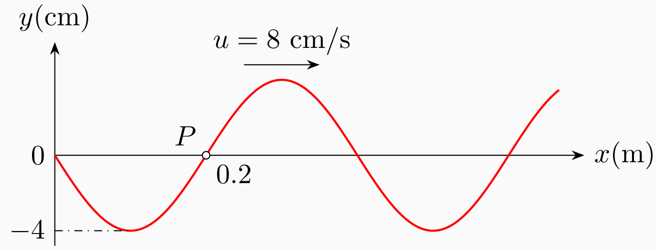
(2) 任意 x 处质点 t 时刻的速度

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-0.016\pi\sin\left(0.4\pi t-5\pi x+0.5\pi\right)\text{(SI)} \quad (1\ 分)$$

$$v(0.2,2.5)=-0.016\pi\sin\left(0.4\pi\times2.5-5\pi\times0.2+0.5\pi\right)=-0.016\pi\sin\left(0.5\pi\right)=-0.016\pi\ \text{m/s} \quad (1\ 分)$$

第 258 题 |【08C0302】

图示一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，请用余弦函数表示：(1) 该波的表达式；(2)P 处质点的振动表达式。



解答

(1)

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0) \qquad (1\text{ 分})$$

$$A=4\text{ cm}=0.04\text{ m} \qquad (1\text{ 分})$$

$$u=8\text{ cm/s}=0.08\text{ m/s} \qquad (1\text{ 分})$$

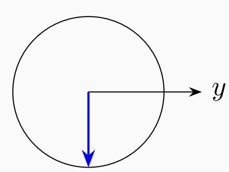
$$\frac{\lambda}{2}=0.2\text{ m},\lambda=0.4\text{ m} \qquad (2\text{ 分})$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=5\pi\text{ rad/m} \qquad (2\text{ 分})$$

$$T=\frac{\lambda}{u}=5\text{ s},\omega=\frac{2\pi}{T}=0.4\pi\text{ rad/s} \qquad (2\text{ 分})$$

$$y(0,0)=0,v(0,0)>0,\varphi_0=-\frac{\pi}{2} \qquad (3\text{ 分})$$

$$y(x,t)=0.04\cos(0.4\pi t-5\pi x-0.5\pi)(\text{SI}) \qquad (1\text{ 分})$$



(2) P 处 $x=0.2$ m

$$y(0.2,t)=0.04\cos(0.4\pi t-5\pi\times0.2-0.5\pi)=0.04\cos(0.4\pi t-1.5\pi)=0.04\cos(0.4\pi t+0.5\pi)(\text{SI})$$

(2 分)

3. 波的干涉

第 259 题 |【08C0501】

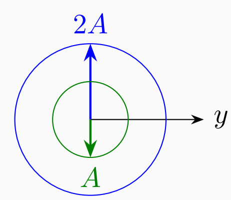
一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波的表达式为 $y_1=A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$，而另一平面简谐波沿 x 轴负方向传播，波的表达式为 $y_2=2A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$，求：(1)$x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的合振动的表达式；(2)$x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的速度表达式。

解答

(1) 两个波引起 $x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的振动分别为

$$y_1\left(\frac{1}{4}\lambda,t\right)=A\cos\left(2\pi ft-\frac{1}{2}\pi\right) \quad (3\text{ 分})$$

$$y_2\left(\frac{1}{4}\lambda,t\right)=2A\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right) \quad (3\text{ 分})$$



(3 分)

所以 $x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的合振动为

$$y\left(\frac{1}{4}\lambda,t\right)=y_1\left(\frac{1}{4}\lambda,t\right)+y_2\left(\frac{1}{4}\lambda,t\right)=A\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right) \quad (3\text{ 分})$$

(2) $x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2\pi fA\sin\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right) \quad (3\text{ 分})$$

4. 多普勒效应

第 260 题 |【08C0701】

一人站立不动，其左侧有一声源以 v_1 的速率向右运动，同时其右侧有一反射屏以 v_2 的速率向左运动。已知声频为 f，声速为 v_0，求人听到的“拍频”是多少？

解答

声源直接传到人耳的频率为

$$f_1=\frac{v_0}{v_0-v_1}f \quad (4\text{ 分})$$

反射屏接收到的频率为

$$f_2=\frac{v_0+v_2}{v_0-v_1}f \quad (4\text{ 分})$$

反射屏发出的波传到人耳的频率为

$$f_3=\frac{v_0}{v_0-v_2}f_2 \quad (4\text{ 分})$$

所以人耳听到的“拍频”为

$$\Delta f=|f_1-f_3| \quad (2\text{ 分})$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{v_0}{v_0 - v_1} f - \frac{v_0}{v_0 - v_2} \frac{v_0 + v_2}{v_0 - v_1} f \right| \\
&= \left| 1 - \frac{v_0 + v_2}{v_0 - v_2} \right| \frac{v_0}{v_0 - v_1} f \\
&= \frac{2 v_0 v_2}{(v_0 - v_1)(v_0 - v_2)} f
\end{aligned}
$$

(1 分)