

第六章 麦克斯韦电磁理论

一、麦克斯韦电磁理论

1 麦克斯韦方程组

1.1 电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}$$
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

- 各向同性、均匀、线性电介质

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

- 连续分布的带电体

$$q_0 = \int_V \rho \, dV$$
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 = \int_V \rho \, dV$$

V 为高斯面 S 所包围的体积

- 积分变换的高斯定理

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

\Downarrow

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \int_V \rho dV$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \int_V \rho dV$$

对任意高斯面 S 都成立，因此对任意体积 V 都成立，所以必有

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

电荷以发散的方式激发电场

- 静电场高斯定理的积分形式

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

- 静电场高斯定理的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

1.2 磁场的高斯定理

- 磁感应强度通过任意闭合曲面 (高斯面) 的通量恒等于零

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 积分变换的高斯定理

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

对任意高斯面 S 都成立, 因此对任意体积 V 都成立, 所以必有

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- 磁场高斯定理的积分形式

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 磁场高斯定理的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- 麦克斯韦认为，静电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

和磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

不仅适用于静电场和恒定电流的磁场，也适用于一般电磁场

1.3 电场的环路定理

- 静电场是保守场，所以静电场的电场强度 \vec{E}_S 对任意闭合回路的环流为零，即

$$\oint_C \vec{E}_S \cdot d\vec{l} = 0$$

- 麦克斯韦认为, 当磁场随时间发生变化时, 将在周围空间中产生感生电场 (涡旋电场) \vec{E}_i , 感生电场 \vec{E}_i 不是保守场, 它对任意闭合回路的环流一般并不为零, 而有

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 空间中的电场是这两种电场的叠加, 即 $\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_i$, 所以有

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 积分变换的斯托克斯定理

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$
$$\Downarrow$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

对任意闭合回路 C 均成立，且对任意以 C 为边界的曲面 S 均成立，所以有

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

变化的磁场以涡旋的方式激发电场

- 电场环路定理的积分形式

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 电场环路定理的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

1.4 磁场的安培环路定理

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_0 + I')$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0$$

- 均匀的、各向同性的、非铁磁的磁介质

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

- 连续分布的电流

$$I_0 = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

S 为以闭合回路 C 为边界的任意曲面

- 麦克斯韦认为，变化的磁场会激发电场 (感生电场，有旋电场)，而变化的电场也会激发磁场 (有旋磁场)，因此提出了位移电流的概念：通过电场中某一截面的位移电流 I_d 等于通过该截面电位移通量 Φ_D 对时间的变化率，即

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

- 位移电流密度矢量

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- 麦克斯韦认为，位移电流 I_d 和传导电流 I_C 一样，也会在其周围空间激发磁场，电路中可以同时存在传导电流和位移电流，它们之和称为全电流

$$I = I_C + I_d$$

- 一般情况下，安培环路定理表示成

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = I_C + I_d = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

- 积分变换的斯托克斯定理

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

对任意闭合回路 C 均成立, 且对任意以 C 为边界的曲面 S 均成立, 所以有

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_C + \vec{j}_d = \vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

传导电流和变化的电场以涡旋的方式激发磁场

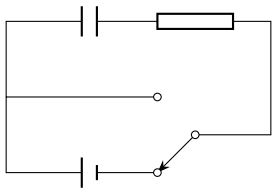
- 全电流安培环路定理的积分形式

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$$

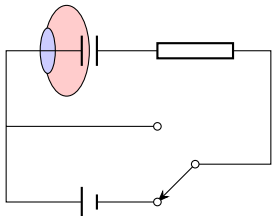
- 全电流安培环路定理的微分形式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_C + \vec{j}_d = \vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

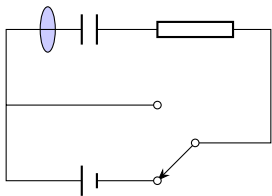
- 在 RC 电路的充放电过程中，回路中的电流 i 是随时间变化的，电容器极板上的电荷量 q 也是随时间变化的，因此电容器极板间的电场 \vec{E} 、 \vec{D} 也是随时间变化的，因此，在电容器极板之间存在着位移电流



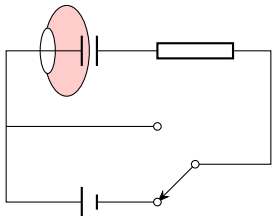
- 选定闭合回路 C ，以 C 为边界构造两个曲面 S_1 和 S_2



- 通过 S_1 的全电流就是回路中的传导电流 $I_C = i$



- 通过 S_2 的全电流就是电容器极板间的位移电流 I_d



- 根据全电流安培环路定理

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{S_1} (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S} = I_C = i \\ &= \int_{S_2} (\vec{j}_C + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S} = I_d\end{aligned}$$

例题

有一半径为 $R = 0.2 \text{ m}$ 的圆形平行板空气电容器，现对该电容器充电，使极板上的电荷随时间的变化率，即充电电路上的传导电流 $\frac{dq}{dt} = 10 \text{ A}$ 。若略去电容器的边缘效应，求：

(1) 两极板间的总位移电流；(2) 两极板间离轴线的距离为 $r_1 = 0.1 \text{ m}$ 处和 $r_2 = 0.3 \text{ m}$ 的点 P 处的磁感应强度。

解答

(1) 由全电流安培环路定律可知, 两极板间的总位移电流等于回路上的传导电流, 因此

$$I_d = I_C = i = \frac{dq}{dt} = 10 \text{ A}$$

解答

(2) 由于极板间电场分布的轴对称性, 因此由于电场变化而激发的磁场也具有轴对称性, 即在以极板轴线为轴的同心圆上各点的磁感应强度大小相等, 方向沿圆周的切线方向, 因此, 选择同心圆为闭合回路, 应用全电流安培环路定理, 可以求得空间中的磁场分布

解答

假定某 t 时刻，极板上的带电量为 q ，因为题目忽略边缘效应，所以可以把极板看成无限大带电平板，因此板间的电位移矢量的大小可以由电位移矢量的高斯定理求得：

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$
$$D\Delta S = \frac{q}{\pi R^2}\Delta S$$
$$D = \frac{q}{\pi R^2}$$

解答

所以, 对于极板内的场点, $r < R$, 由全电流安培环路定理得

$$\oint_C \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I_d$$

$$H_1 \cdot (2\pi r) = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d(D\pi r^2)}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dq}{dt}$$

$$H_1 = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dq}{dt}$$

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dq}{dt}$$

解答

对于极板外的场点, $r > R$, 由全电流安培环路定理得

$$\oint_C \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_d$$

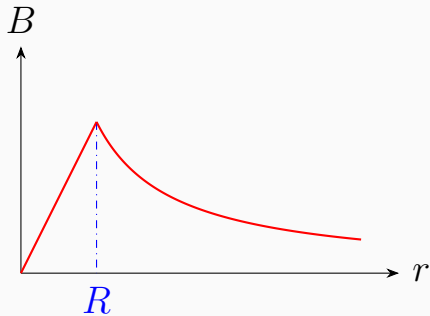
$$H_2 \cdot (2\pi r) = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d(D\pi R^2)}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

$$H_2 = \frac{1}{2\pi r} \frac{dq}{dt}$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{dq}{dt}$$

解答

$B - r$ 曲线



解答

代入具体数值, 求出 $r_1 = 0.1 \text{ m}$ 处的磁感应强度

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.1}{2\pi \times 0.2^2} \times 10 \\ &= 5 \times 10^{-6} \text{ T} \end{aligned}$$

解答

$r_2 = 0.3 \text{ m}$ 处的磁感应强度

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi \times 0.3} \times 10 \\ &\approx 6.67 \times 10^{-6} \text{ T} \end{aligned}$$

2 电磁场的基本方程

- 电磁场基本方程的积分形式

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

表示电磁场某个区域范围之内的性质

- 电磁场基本方程的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

表示电磁场某个场点附近的性质

- 介质的电磁性质方程
 - 各向同性、均匀、线性电介质

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

- 均匀的、各向同性的、非铁磁的磁介质

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

- 导电物质 (导体)

$$\vec{j}_C = \sigma \vec{E}$$

- 麦克斯韦根据电磁场的基本方程，预言了电磁波的存在，并指出电磁波在真空中的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- 在真空中, 既没有电荷分布 $\rho = 0$, 也没有电流分布 $\vec{j}_C = \vec{0}$, 而且 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ 、 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- 真空中的麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- 数学恒等式【P355 式 (B.35)】

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- 数学恒等式【P355 式 (B.35)】

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= -\nabla^2 \vec{B} \\
\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\
-\nabla^2 \vec{B} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

- 真空中电磁场的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

- 以速度 u 沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \frac{\omega}{k}$$

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= -A \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \cdot (-k) \\ &= Ak \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= Ak \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \cdot (-k) \\ &= -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= -A \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \cdot (\omega) \\ &= -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \cdot (\omega) \\ &= -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$u = \frac{\omega}{k}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

平面简谐波以速度 u 传播

- 真空中电磁场的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

- 真空中电磁波以光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ 传播
- 光是一种电磁波

作业

- P338[6-1] 一平行板电容器的两极板都是半径为 5.0 cm 的圆导体片, 在充电时, 其中电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12}\text{ V}/(\text{m} \cdot \text{s})$ 。求: (1) 两极板间的位移电流; (2) 极板边缘的磁感应强度。

作业

- P339[6-3] 如本题图, 同心球形电容器中有绝对介电常量为 ε 和导电率为 σ 的漏电介质。电容器充电后遂即缓慢放电, 这时在介质中有径向衰减电流通过。求此过程中的位移电流密度与传导电流密度的关系, 以及磁场的分布。

