导数

一、导数的概念

- 对于函数 $y=f(x)$，当自变量从 x 变化到 $x+\Delta x$ 时，函数值的改变量为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则函数在 x 处的导数定义为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\&=y'\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\end{aligned}$$

- 函数 $y=f(x)$ 的导数一般情况下仍然是自变量 x 的函数，所以也称为导函数

- 导数也称为微商，是函数的微分与自变量微分的商。所以有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

最后一式就是复合函数的求导运算规则

- 当函数的自变量很明确时，可以用类似于 y' 的符号表示导数，但个人建议使用 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 这种符号，可以明确地看出函数和自变量
- 当自变量是时间 t 时，物理上通常使用

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

二、常见基本函数的导数

- 根据常见基本函数的微分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{C}) &= 0 \\
\mathrm{d}(ax) &= a\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(x^n) &= nx^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(\sin x) &= \cos x\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(\cos x) &= -\sin x\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) &= \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(\ln x) &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

以及导数就是微商的概念，可得常见基本函数的导数

- 常见基本函数的导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\mathrm{C})}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}(ax)}{\mathrm{d}x} &= a \\
\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} &= nx^{n-1} \\
\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} &= \cos x \\
\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} &= -\sin x \\
\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^x \\
\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

三、导数的运算法则

- 根据微分的运算法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2}$$

以及导数就是微商的概念，可得导数的运算法则

$$\frac{\mathrm{d}(u \pm v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

- 由于导数就是微商，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

例题

若已知 $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$，试求函数 $y = \ln x$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x}$。

解答

由基本函数的导数有

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^y}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^y$$

因为 $y = \ln x$，则 $x = \mathrm{e}^y$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^y}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^y = x$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x}$$

例题

若已知 $\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$，试求函数 $y = \arcsin x$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x}$。

解答

由基本函数的导数有

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}y} = \cos y$$

解答

因为 $y=\arcsin x$【这个函数的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，值域为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$】，则 $x=\sin y$，所以有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}&=\frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}y}\\&=\cos y\\&=\sqrt{1-\sin^2 y}\\&=\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

【注意：这里 y 的取值范围是 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos y\geqslant 0$】

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\arcsin x$$

$$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

四、复合函数的导数

- 根据导数就是微商的概念，很容易得到复合函数的求导规则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

这里要特别注意

谁是谁的函数，谁对谁求导！

五、高阶导数

- 函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 通常情况下仍然是 x 的函数，通常称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数
- 一阶导数的导数称为二阶导数，记为

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2y=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=y^{(2)}$$

- 二阶导数的导数称为三阶导数，三阶导数的导数称为四阶导数，……
- 二阶以上的导数统称为高阶导数
- n 阶导数记为 $y^{(n)}$
- 0 阶导数就是函数本身
- 物理学上通常只用到二阶导数
- 对时间的二阶导数通常记为

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

例题

求函数 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，其中 A、ω、φ_0 均为非零常数。

解答

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = A\cos\varphi \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = -A\sin\varphi$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ &= -A\sin\varphi\cdot\omega \\ &= -A\omega\sin\varphi \\ &= -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= v\end{aligned}$$

解答

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega \sin\varphi \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = -A\omega\cos\varphi$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ &= -A\omega\cos\varphi\cdot\omega \\ &= -A\omega^2\cos\varphi \\ &= -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)\end{aligned}$$