§4.8 质心参考系 · 粒子的对撞

- 质心参考系就是将坐标原点选在质点系的质心上的坐标系
- 以地为基本参考系（“静止”参考系)，质心参考系为平动参考系
- 一般地假定，质点系由 N 个质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，则质心的质量

$$m_C = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

- 任意 t 时刻，从“静止”参考系 (地) 上观察，m_i 的位置为 $\vec{r}_i$，速度为 $\vec{v}_i$，则质心的位置和速度

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i, \vec{v}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

- 任意 t 时刻，从运动参考系 (质心) 上观察，m_i 的位置为 $\vec{r}'_i$，速度为 $\vec{v}'_i$，则

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_C$$

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$$

$$\vec{r}'_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}'_i = \vec{0}$$

$$\vec{v}'_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}'_i = \vec{0}$$

从质心参考系上看，质心的动量永远等于零

$$\vec{p}'_C = m_C \vec{v}'_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i = \vec{0}$$

如果质点系由两个质点所组成，

$$\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{v}'_i = \vec{0} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

从质心参考系上看，两个质点的动量总是大小相等方向相反

柯尼希定理 (König's theorem)

$$E_k = E_{kC} + E'_k$$

质点系的动能等于质心的动能加上质点系内各质点相对质心运动的动能

$$E_{kC} = \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

$$E'_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v'_i)^2$$

对于两体碰撞问题，从质心参考系上看，m_1 的速度为 $\vec{v}'_1$，m_2 的速度为 $\vec{v}'_2$，则 m_1 相对 m_2 的速度为 $\vec{u} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$，而依前有

$$m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = \vec{0}$$

可得

$$\begin{aligned}
m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 &= \vec{0} \\
\vec{u} &= \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 \\
m_2\vec{u} &= m_2\vec{v}'_1 - m_2\vec{v}'_2 \\
m_2\vec{u} &= (m_1 + m_2)\vec{v}'_1 \\
\vec{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 &= \vec{0} \\
\vec{u} &= \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 \\
m_1\vec{u} &= m_1\vec{v}'_1 - m_1\vec{v}'_2 \\
-m_1\vec{u} &= (m_1 + m_2)\vec{v}'_2 \\
\vec{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{u}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E'_k &= \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2 \\
&= \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1+m_2)^2}u^2 + \frac{m_2 m_1^2}{2(m_1+m_2)^2}u^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}u^2 \\
&= \frac{1}{2}\mu u^2 \\
\mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}
\end{aligned}
$$

两体碰撞中，两质点相对质心运动的动能等于折合质量与两者之间相对速度平方乘积的一半，μ 称为折合质量。

- 碰撞过程中，如果外力的冲量可以忽略，则系统的动量守恒，因此质心的速度保持不变，所以质心的动能保持不变。
- 如果是非完全弹性碰撞或完全非弹性碰撞，系统部分动能转化为形变势能，转化的这部分动能就是质点系相对质心的动能。
- 对于完全非弹性碰撞，碰后二者速度相等，相对速度为零，碰撞前质点系相对质心的动能全部转化为形变势能。

对于质量相等的两个质点，$m_1 = m_2 = m$，则

$$m_C = m_1 + m_2 = 2m$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}m$$

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

若 $\vec{v}_1 = \vec{v}$，$\vec{v}_2 = \vec{0}$，静止靶，

$$\vec{v}_C = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}m_C v_C^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

$$E'_k = \frac{1}{2}\mu u^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}m\times v^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

能够被转化的能量 E'_k 只占总能量的一半

若 $\vec{v}_1 = \vec{v} = -\vec{v}_2$，对撞机，

$$\vec{v}_C = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 2\vec{v}$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}m_C v_C^2 = 0$$

$$E'_k = \frac{1}{2}\mu u^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}m\times 4v^2 = mv^2$$

全部能量都能够被转化