§7.5 刚体平面运动的动力学

一、刚体平面运动的基本动力学方程

- 刚体的平面运动可以分解成某个基点的平动和刚体绕通过基点且与运动平面垂直的转轴的转动。
- 基点的选择原则上是任意的。
- 在运动学中，通常选择瞬心为基点，此时，任意质元都绕瞬轴做圆周运动。
- 在动力学中，通常选择质心为基点。

质点系的质心运动定理

$$\vec{F} = m_C \vec{a}_C$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外}$$

质心所受的合力就是整个质点系中所有质点所受所有外力的矢量和，它等于质心的质量与质心的加速度的乘积。刚体是个特殊的质点系，因此质心运动定理仍然适用。

质点系对质心的角动量定理

$$\vec{M}' = \vec{M}'_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}$$

质心参考系中，整个质点系所受到的对质心的力矩（质点系中所有质点所受到的外力对质心的力矩的矢量和）等于质点系对质心的角动量随时间的变化率。

对于过质心且与运动平面垂直的转轴

$$M'_z = M'_{外z} = \frac{\mathrm{d}L'_z}{\mathrm{d}t} = I'_z\alpha'_z$$

刚体所受各力对通过质心且与运动平面垂直的转轴的力矩之和等于刚体对该轴的转动惯量与刚体角加速度的乘积，这就是刚体对质心轴的转动定理。

刚体随质心平动的动力学

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} = m_C\vec{a}_C$$

刚体绕质心轴转动的动力学

$$M'_z = M'_{外z} = \frac{\mathrm{d}L'_z}{\mathrm{d}t} = I'_z\alpha'_z$$

二者合称为刚体平面运动的基本动力学方程

二、作用在刚体上的力

作用在刚体上的力有两种作用效果

- 使质心产生加速度

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\text{外}}=m_C\vec{a}_C$$

- 使刚体产生角加速度

$$M'_z=M'_{\text{外}z}=\frac{\mathrm{d}L'_z}{\mathrm{d}t}=I'_z\alpha'_z$$

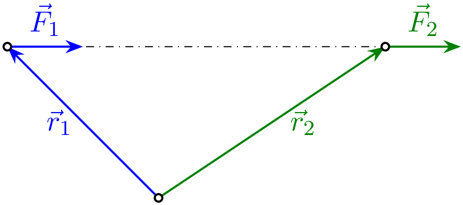
作用在质点上的力的三要素

- 大小
- 方向
- 作用点

作用在刚体上的力的三要素

- 大小
- 方向
- 作用线

作用在刚体上的力沿其作用线移动时，不改变其对刚体的作用效果 (力的滑移矢量性质)

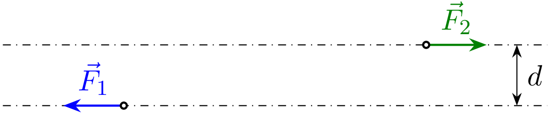


$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_2$$

$$M_{1z} = M_{2z}$$

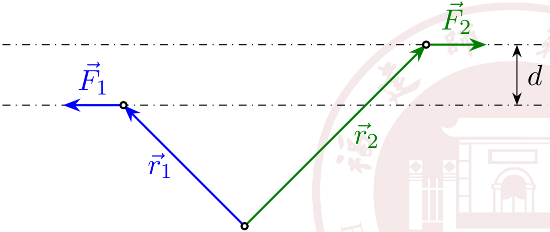
大小相等、方向相反、作用线不在同一直线上的一对力称为力偶



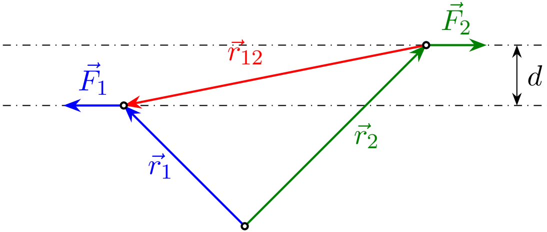
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

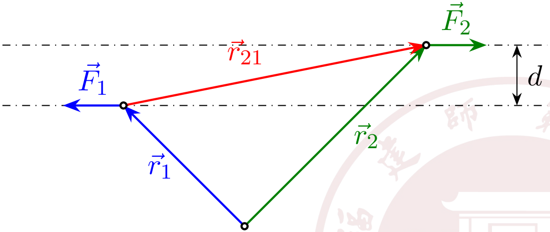
力偶的两个力的作用线之间的距离称为力偶的力偶臂，如上图中的 d

力偶的特点：力偶中两个力对任意参考点的力矩之和与参考点的选择无关。



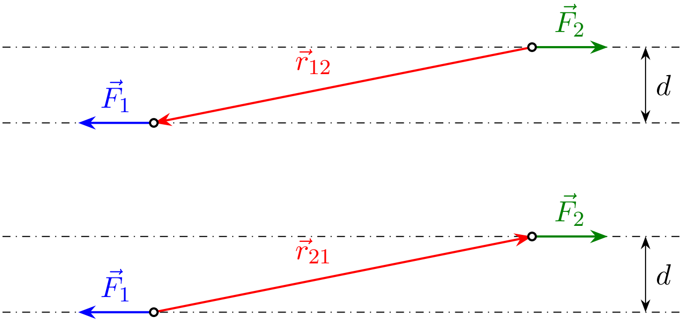
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$





$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\
&= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) \\
&= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \\
&= \vec{r}_{12} \times \vec{F}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\
&= \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_2) + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\
&= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \\
&= \vec{r}_{21} \times \vec{F}_2
\end{aligned}
$$

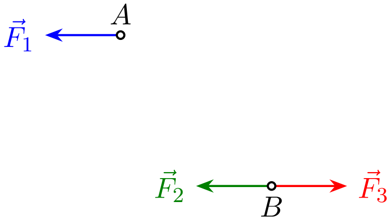


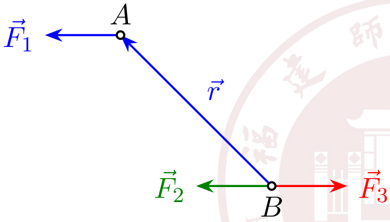
$$\vec{M} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_2$$

力偶矩等于其中一个力对另一个力的作用点的力矩，力偶矩的大小等于其中一个力的大小与力偶臂的乘积

- 力偶的两个力大小相等、方向相反，$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$，因此它们的矢量和为零，所以力偶对质心的加速度没有影响。
- 如果力偶矩在质心轴的投影不为零，则力偶矩将使刚体产生角加速度。【力偶矩大小 Fd 不为零，但方向可能垂直于质心轴，因此力偶矩在质心轴的投影可能为零】

- 如图，三力大小相等，方向如图所示，则单单一个力 $\vec{F}_1$ 的作用效果与三个力共同作用的效果相同，而三个力共同作用的效果可以看成力 $\vec{F}_2$ 的作用效果加上力偶 ($\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_3$) 的作用效果。

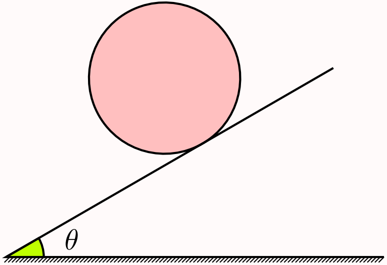




- 即作用于 A 点的力 $\vec{F}_1$，如果偏离其作用线平移到作用点 B，为保证其作用效果不变，应该在平移的过程中，附加上一对力偶，这对力偶的力偶矩等于原来的力 ($\vec{F}_1$) 对新的作用点 (B 点) 的力矩。
- P208 第三段没读懂【如图 7.29 中之例，分析时可将四力移至质心，按要求四力合力矩为零 (为什么)，于是四力等效于作用于质心的合力。又如设一力沿切线方向作用于静止的滑轮边缘，其效果之一的力偶使滑轮加速转动，另一效果则为作用于质心的力，它将增加对支座的压力 (为什么)。】

例题

固定斜面倾角为 θ，质量为 m 半径为 R 的均质圆柱体沿斜面向下作无滑滚动，求圆柱体质心的加速度 $\vec{a}_C$ 及斜面作用于柱体的摩擦力 $\vec{F}$。



解答

以沿斜面向下为 x 轴正方向，垂直斜面向上为 y 轴正方向，则 z 轴正方向垂直纸面向里。以圆柱体为研究对象，受力分析如图所示

$$mg\sin\theta - F = ma_C$$

$$N - mg\cos\theta = 0$$

$$-FR = I\alpha$$

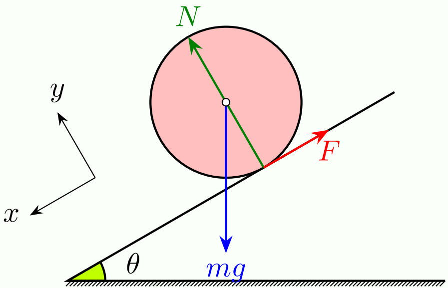
$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$v_C + R\omega = 0 \Rightarrow a_C + R\alpha = 0$$

解答

解得

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin\theta, \quad F = \frac{1}{3} mg \sin\theta$$



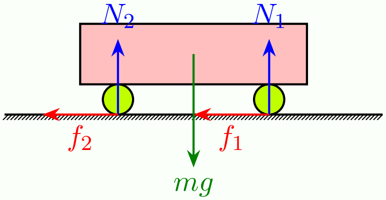
如果刚体既做平面平行运动又做平动，则刚体的运动称为二维平动，此时刚体的角速度和角加速度为零，因此刚体所受各力对通过质心且与运动平面垂直的转轴的力矩之和等于零。

例题

质量为 m 的汽车在水平路面上急刹车，前后轮均停止转动。前后轮相距 L，与地面的摩擦因数为 μ。汽车质心离地面高度为 h，与前轮轴水平距离为 l。求前后车轮对地面的压力。

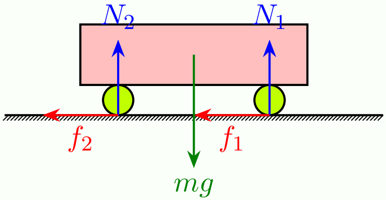
解答

假定汽车原来向右行驶。以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则垂直纸面向外为 z 轴正方向。以汽车为研究对象，受力分析如图所示



解答

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$
$$-f_1 - f_2 = ma_C$$
$$N_1 l - N_2(L - l) - f_1 h - f_2 h = 0$$
$$f_1 = \mu N_1$$
$$f_2 = \mu N_2$$



解得

$$N_1 = \frac{mg(L - l + \mu h)}{L}$$
$$N_2 = \frac{mg(l - \mu h)}{L}$$

以上 N_1、N_2 为地面对车轮的作用力，根据牛顿第三定律，可得车轮对地面的压力。

三、刚体平面运动的动能

柯尼希定理 (König's theorem)

$$E_k = E_{kC} + E'_k$$

质点系的动能等于质心的动能加上质点系内各质点相对质心运动的动能

$$E_{kC} = \frac{1}{2} m_C v_C^2$$
$$E'_k = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

其中 I_C 是刚体相对质心轴的转动惯量

如果知道某时刻的瞬轴，以及刚体相对该瞬轴的转动惯量 I，则刚体该时刻的动能也可以写成

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

如果瞬轴与质心轴之间的距离为 d，则 $v_C = \omega d$，因此

$$I = I_C + m_C d^2$$

质点系动能定理：质点系所有内力所做的功和所有外力所做功的总和等于整个质点系动能的改变量

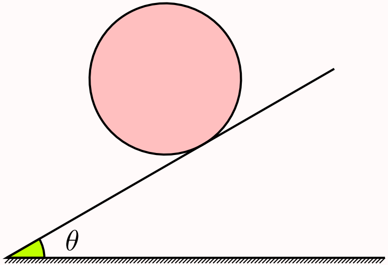
$$\mathrm{d}W_{内} + \mathrm{d}W_{外} = \mathrm{d}E_k$$
$$W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$$

对于刚体，所有内力所做的功的总和为零，因此

$$W_{外} = \Delta E_k$$

例题

固定斜面倾角为 θ，质量为 m 半径为 R 的均质圆柱体沿斜面向下作无滑滚动，设圆柱体自静止开始滚下，求质心下落高度 h 时，圆柱体质心的速率。



解答

无滑滚动，摩擦力为静摩擦力，不做功，因此只有重力做功

$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

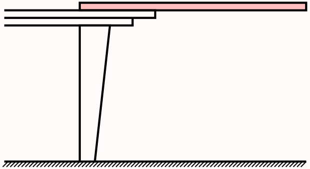
$$v_C - \omega R = 0$$

解得

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

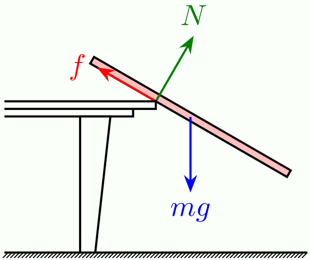
例题

将一根长为 L、质量为 m 的均匀杆的一部分 $l(l<\frac{1}{2}L)$ 搁放在桌边，杆与桌子之间的摩擦系数为 μ，另一端用手托住，使杆处于水平状态。现释放手托的一端，试问：(1) 当杆转过的角度 θ 为多大时，杆开始滑离桌边；(2) 如果 $l=0$，那么手离开杆右端的瞬间，杆的左端对桌边的压力为多少？



解答

杆在滑离桌边前绕桌边转轴转动，摩擦力为静摩擦力，且通过桌边转轴，桌面支持力垂直杆且通过转轴，过程只有重力对杆做功。以初始水平状态为重力势能的零点，垂直纸面向里为力矩和角动量的正方向



解答

机械能守恒

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\left(\frac{1}{2}L - l\right)\sin\theta$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L - l\right)^2$$

沿杆方向 (法向) 和垂直杆方向 (切向) 列质心运动定理

$$f - mg\sin\theta = ma_{Cn} = m\omega^2\left(\frac{1}{2}L - l\right)$$

$$mg\cos\theta - N = ma_{Ct}$$

解答

转动定律 (相对质心轴)

$$N\left(\frac{1}{2}L-l\right)=\frac{1}{12}mL^2\alpha$$

或转动定律 (相对桌边转轴)

$$mg\left(\frac{1}{2}L-l\right)\cos\theta=I\alpha$$

未滑离 (摩擦力为静摩擦力，桌边为瞬轴)

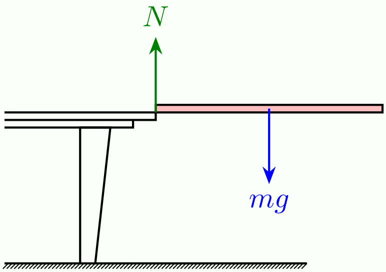
$$f\leqslant\mu N$$

$$a_{Ct}=\alpha\left(\frac{1}{2}L-l\right)$$

解得

$$\tan\theta\leqslant\frac{\mu L^2}{10L^2-36Ll+36l^2}$$

解答



$$mg - N = ma_C$$

$$N\frac{L}{2} = \frac{1}{12}mL^2\alpha$$

$$a_C = \alpha\frac{L}{2}$$

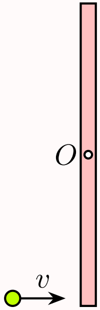
解得

$$N = \frac{1}{4}mg$$

根据牛顿第三定律，杆对桌的压力大小为 $\frac{1}{4}mg$，方向垂直桌面向下

例题

有一长 l、质量为 m 的匀质细杆，置于光滑的水平面上，可绕过杆的中点 O 的光滑固定竖直轴转动。初始时杆静止，有一质量与杆相同的小球沿与杆垂直的速度 v 飞来，与杆端点碰撞并黏附于杆端点上，如图所示。(1) 分析系统碰撞后的运动状态；(2) 若去掉固定轴，杆中点不固定，再求碰撞后系统的运动状态。



解答

以小球和杆为研究对象，如果有固定轴，系统所受外力有：小球和杆的重力，方向竖直向下；水平桌面的支持力，方向竖直向上；固定轴的作用力，方向未知，但通过杆。各力对转轴的力矩均为零，因此系统对转轴的角动量守恒。以垂直纸面向外为角动量的正方向

$$mv\frac{l}{2} = \left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega$$

$$\omega = \frac{3v}{2l}$$

解答

如无固定轴，系统所受外力有：小球和杆的重力，方向竖直向下；水平桌面的支持力，方向竖直向上。这些力互相平衡，且对任意竖直轴的力矩均为零，因此对系统质心轴的力矩也为零。所以系统的动量守恒，对质心轴的角动量也守恒。
匀质杆，杆的质心在杆的中点；杆与小球质量相同，因此杆与小球组成的系统的质心与碰撞端的距离为 $\frac{1}{4}l$。

$$mv = (2m)v_C$$

$$mv\frac{l}{4} = I\omega'$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

$$I_2 = m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}ml^2$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5}{24}ml^2$$

解得

$$v_C = \frac{1}{2}v$$

$$\omega' = \frac{6v}{5l}$$

习题 7.4.3

一质量为 m_1，速度为 $\vec{v}_1$ 的子弹沿水平面击中并嵌入一质量为 $m_2 = 99m_1$，长度为 L 的棒的端点，速度 $\vec{v}_1$ 与棒垂直，棒原来静止于光滑的水平面上。子弹击中棒后共同运动，求棒和子弹绕垂直于平面的轴的角速度等于多少？

解答

以棒和子弹为研究对象，受力分析，系统所受外力有：棒和子弹的重力，方向竖直向下；水平桌面的支持力，方向竖直向上。这些力互相平衡，且对任意竖直轴的力矩均为零，因此对系统质心轴的力矩也为零。所以系统的动量守恒，对质心轴的角动量也守恒。

解答

匀质棒，棒的质心在棒的中点；因此棒与子弹组成的系统的质心与碰撞端的距离为

$$d=\frac{m_1\times 0+m_2\times\frac{L}{2}}{m_1+m_2}=\frac{99L}{200}\approx\frac{1}{2}L$$

动量守恒

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v_C$$

$$v_C=\frac{v_1}{100}\approx 0$$

角动量守恒 (相对系统质心轴)

$$m_1v_1d=I\omega$$

$$I=I_1+I_2$$

$$I_1=m_1d^2\approx\frac{1}{4}m_1L^2$$

$$I_2=\frac{1}{12}m_2L^2+m_2\left(\frac{L}{2}-d\right)^2\approx\frac{33}{4}m_1L^2$$

$$I=I_1+I_2\approx\frac{17}{2}m_1L^2$$

解得

$$\omega\approx\frac{v_1}{17L}$$

习题 7.5.1

10 m 高的烟囱因底部损坏而倒下来，求其上端到达地面时的线速度。设倾倒时，底部未移动。可近似认为烟囱为细均质杆。

解答

烟囱倾倒过程，只有重力做功，所以机械能守恒。以地面为重力势能零点，

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}mL^2 \times \omega^2$$

$$v = \omega L$$

解得

$$v = \sqrt{3gL} = \sqrt{3 \times 9.8 \times 10} \approx 17.1 \text{ m/s}$$