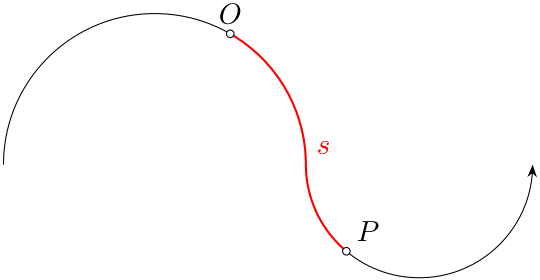
§2.6 自然坐标 · 切向和法向加速度

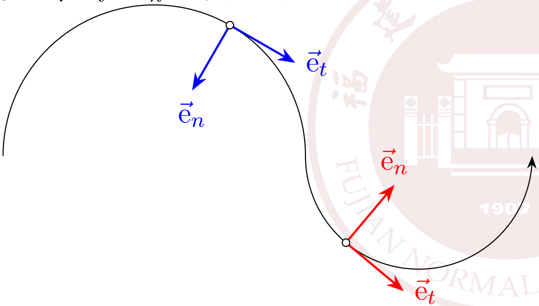
一、平面自然坐标系

当质点的运动轨迹已知时，可以使用平面自然坐标系。在轨迹上选择一点作为坐标原点 O，沿运动轨迹建立弯曲的坐标轴，质点所在位置与坐标原点之间的轨道长度 s 称为质点所在位置的自然坐标



P38：坐标增加的方向是人为规定的。习惯上选择质点前进的方向为坐标增加的正方向。

规定，沿质点所在位置的轨道切线指向质点前进方向的单位矢量为切向单位矢量，记为 $\vec{e}_t$；垂直切线指向轨道凹侧的单位矢量为法向单位矢量，记为 $\vec{e}_n$。显然，在轨道的不同位置，$\vec{e}_t$、$\vec{e}_n$ 是变化的

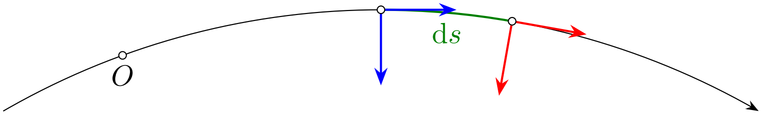


自然坐标系中，质点的运动学方程可以写成

$$s = s(t)$$

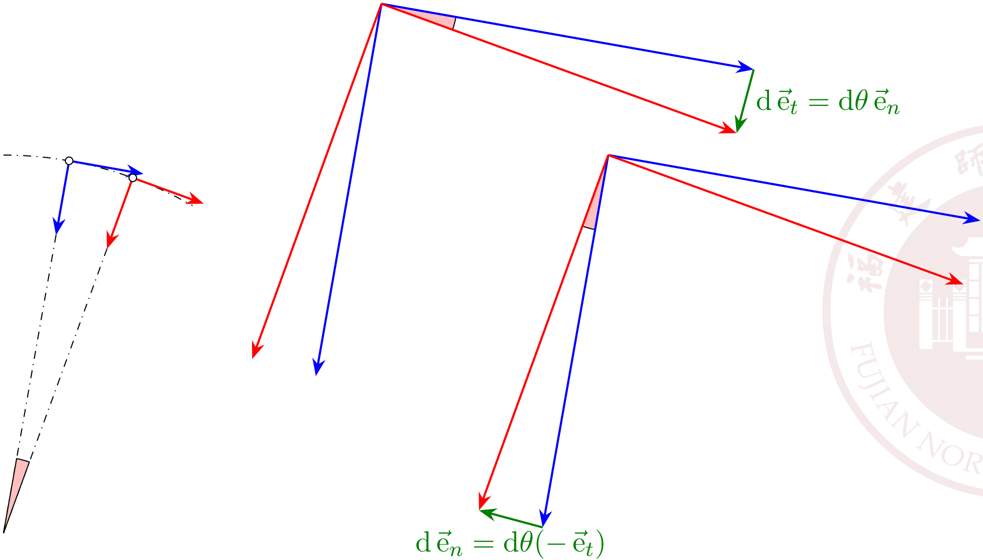
在一个历时 $\mathrm{d}t$ 的元过程中，s 发生了微小的变化，即质点经过了元路程 $\mathrm{d}s$，两个位置的单位矢量的改变量分别为

$$\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_t = \mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}_n, \mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_n = \mathrm{d}\theta(-\,\vec{\mathrm{e}}_t)$$



这里，任意一个微小的线段，都可以看成某个圆的圆弧的一小部分，这个圆称为曲线在该处的曲率圆，设其半径 (称为曲线在该处的曲率半径) 为 R，则有

$$\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$$

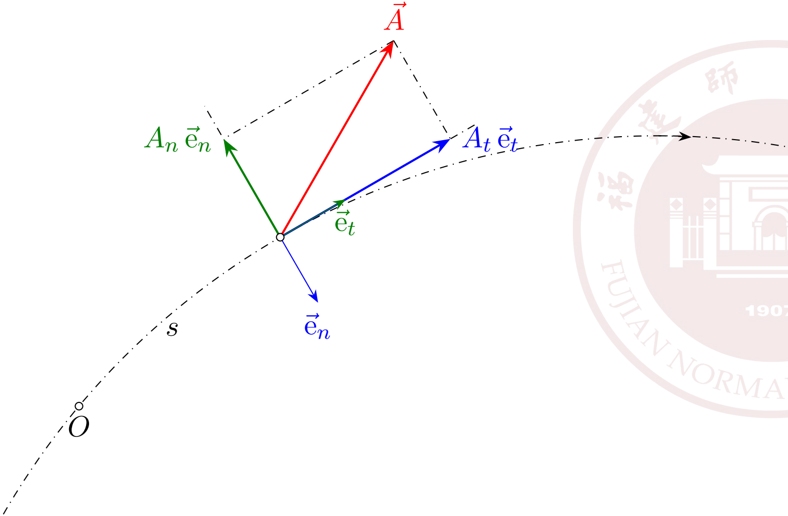

$\mathrm{d}\,\vec{e}_t = \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_n$
$\mathrm{d}\,\vec{e}_n = \mathrm{d}\theta(-\vec{e}_t)$

矢量在平面自然坐标系中的表示为

$$\vec{A} = A_t\,\vec{\mathrm{e}}_t + A_n\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

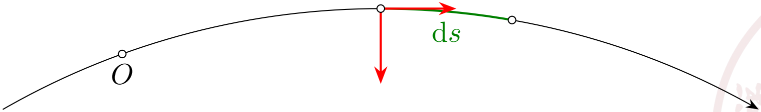
因此

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_t^2 + A_n^2}$$



位置矢量 $\vec{r}$ 和有限大小的位移 $\Delta\vec{r}$ 在平面自然坐标系中无法表示，但元位移可以表示成

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\,\vec{\mathrm{e}}_t$$



二、速度

平面自然坐标系中，速度可以一般地表示为

$$\vec{v} = v_t\,\vec{\mathrm{e}}_t + v_n\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

而

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\,\vec{\mathrm{e}}_t$$

所以

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_t$$

$$v_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, v_n = 0$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_t^2 + v_n^2} = |v_t|$$

速度只有切向分量，法向分量永远为零

P39：v_t 不同于速率 v，v_t 的正负反映运动方向。这是由于书上未事先指向坐标 s 增加的方向。本书认为坐标 s 增加的方向是可以人为规定的 (P38)，所以如果规定 s 增加的方向与质点运动的方向相反，那么 $v_t < 0$，v_t 和 v 就有区别。

三、加速度

平面自然坐标系中，加速度可以一般地表示为

$$\vec{a} = a_t\,\vec{\mathrm{e}}_t + a_n\,\vec{\mathrm{e}}_n$$
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

而

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\vec{v} = v_t\,\vec{\mathrm{e}}_t$$
$$v_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_t = \mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}_n$$
$$\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}(v_t\,\vec{\mathrm{e}}_t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_t + v_t\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_t}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_t + v_t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_n \\
a_t &= \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \\
a_n &= v_t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v_t\frac{\mathrm{d}s/R}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{v_t}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v_t^2}{R} = \frac{v^2}{R}
\end{aligned}$$

例题 2-13

汽车在半径为 200 m 的圆弧形公路上刹车，刹车开始阶段的运动学方程为 $s = 20t - 0.2t^3$(单位：m, s)。求汽车在 $t = 1$ s 时的加速度。

解答

$$s = 20t - 0.2t^3$$

$$v_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20 - 0.6t^2$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -1.2t$$

$$a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{(20 - 0.6t^2)^2}{R}$$

$t = 1$ s 时

$$a_t = -1.2\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = \frac{(20 - 0.6)^2}{200} = 1.8818\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{a} = -1.2\,\vec{\mathrm{e}}_t + 1.8818\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

例题 2-14

低速迫击炮以发射角 α 发射，其初速率为 v_0。在与发射点同一水平面上落地。不计空气阻力，求炮弹在最高点和落地点其运动轨迹的曲率半径。

解答

最高点，

$$v_t = v_0 \cos\alpha$$

$$a_n = g = \frac{v_t^2}{R}$$

$$R = \frac{v_t^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$$

落地点，

$$v_t = v_0$$

$$a_n = g\cos\alpha = \frac{v_t^2}{R}$$

$$R = \frac{v_t^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$$

例题 2-15

已知质点的运动学方程为 $\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$，其中 A、B、ω 均为正值常量，试求：(1) 质点的速度和加速度矢量；(2) 椭圆在长和短轴端点的曲率半径。

解答

(1)

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{e}_x - B\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$$

$$v_t = v = \omega\sqrt{A^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t)}$$

$$a = \omega^2\sqrt{A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = \cdots = \frac{\omega^2\sin(2\omega t)(A^2 - B^2)}{2\sqrt{A^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t)}}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},\ a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \cdots$$

解答

(2)

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v} = -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{a} = -A\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x - B\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

当 $\omega t = n\pi$ 时，

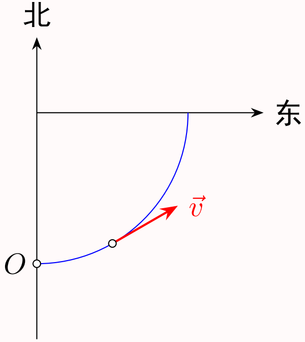
$$\vec{r} = \pm A\,\vec{\mathrm{e}}_x, \vec{v} = \pm B\omega\,\vec{\mathrm{e}}_y, v_t = v = B\omega$$
$$\vec{a} = \mp A\omega^2\,\vec{\mathrm{e}}_x, a_n = A\omega^2 = \frac{v_t^2}{R}$$
$$R = \frac{v_t^2}{a_n} = \frac{B^2}{A}$$

当 $\omega t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ 时，

$$\vec{r} = \pm B\,\vec{\mathrm{e}}_y, \vec{v} = \mp A\omega\,\vec{\mathrm{e}}_x, v_t = v = A\omega$$
$$\vec{a} = \mp B\omega^2\,\vec{\mathrm{e}}_y, a_n = B\omega^2 = \frac{v_t^2}{R}$$
$$R = \frac{v_t^2}{a_n} = \frac{A^2}{B}$$

习题 2.6.1

如图所示，列车在圆弧形轨道上自东转向北行驶，在我们所讨论的时间范围内，其运动学方程为 $s = 80t - t^2$(单位：m, s)。$t = 0$ 时，列车在图中 O 点，此圆弧轨道的半径 $r = 1500$ m。求列车驶过 O 点以后前进到 1200 m 处的速率 v 及加速度。



解答

$$s = 80t - t^2 = 1200$$

$$t = 20, t = 60$$

$$v_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 80 - 2t = 40\ \mathrm{m/s}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -2 = -2\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{40^2}{1500} = \frac{16}{15}\ \mathrm{m/s^2}$$