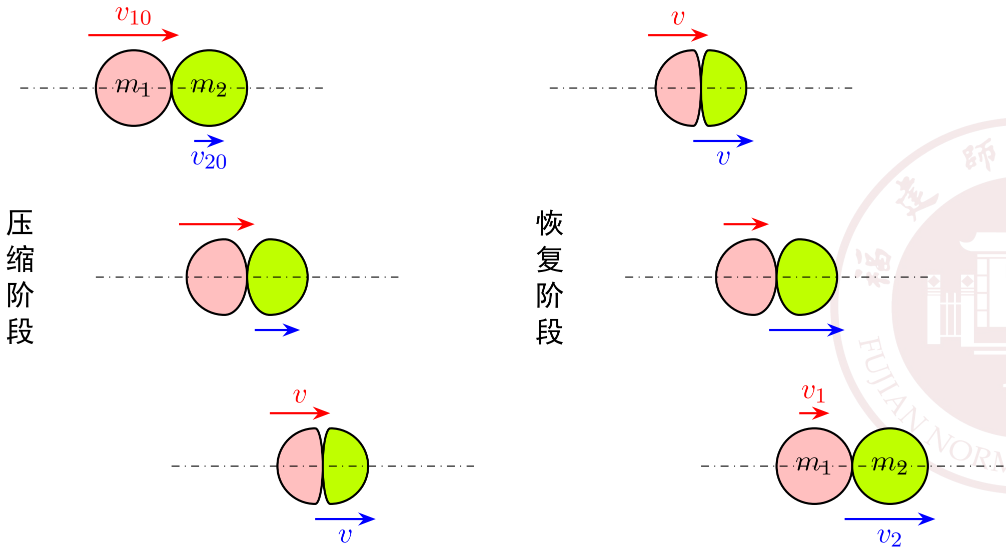
§4.6 对心碰撞

- 两个或两个以上相对运动的物体接触并伴有速度突然变化的现象，称为碰撞 (collision)
- 碰撞过程持续的时间一般很短，因此碰撞过程重力、摩擦力等的冲量很小，通常可以忽略，而支持力、拉力等的冲量不一定很小，可能不能忽略
- 碰撞前后，物体的动量有明显的变化，物体所受的冲量主要是碰撞过程中物体间的相互作用力 (碰撞力、冲击力) 的冲量
- 当碰撞的冲击力远大于由碰撞物体组成的系统所受的外力时，近似认为系统动量守恒
- 由于碰撞过程经历的时间很短【通常为百分之几秒甚至千分之几秒】，相互作用的物体的速度又发生有限大的改变，因此物体间的相互作用力通常很大，且变化较为复杂，所以研究碰撞问题时，一般不用力而用冲量来度量碰撞的作用
- 假定碰撞发生的时间为 Δt，一个物体动量的改变量为 $\Delta\vec{p}$，那么碰撞过程的平均作用力为

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

- 由于碰撞时间很短，所以碰撞前后物体的位置没有发生明显变化，通常认为碰撞就在某个地点发生
- 两个物体的碰撞称为二体碰撞
- 两个以上物体的碰撞称为多体碰撞
- 碰撞前后各物体的速度都在同一条直线上的碰撞称为一维碰撞，也称对心碰撞、正碰 (撞)


v_{10}
m_1
m_2
v_{20}
v
v
压缩阶段
恢复阶段
v
v
v_1
m_1
m_2
v_2

压缩阶段

$$-I_1 = m_1 v - m_1 v_{10}$$
$$I_1 = m_2 v - m_2 v_{20}$$

I_1 称为压缩冲量

$$\frac{I_1}{m_1} = v_{10} - v, \frac{I_1}{m_2} = v - v_{20}$$
$$v_{10} - v_{20} = I_1 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$v_{10} - v_{20}$：碰撞前二者靠近的速度

恢复阶段

$$-I_2 = m_1 v_1 - m_1 v$$
$$I_2 = m_2 v_2 - m_2 v$$

I_2 称为恢复冲量

$$\frac{I_2}{m_1} = v - v_1, \frac{I_2}{m_2} = v_2 - v$$
$$v_2 - v_1 = I_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$v_2 - v_1$：碰撞后二者分开的速度

一、关于对心碰撞的基本公式

以发生碰撞的 m_1 和 m_2 为研究对象，如果碰撞过程外力的冲量可以忽略不计，则系统的动量守恒

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

实验研究表明：用给定两种材料做成的小球，不论它们的质量和运动速度如何，恢复冲量 I_2 与压缩冲量 I_1 的比值为一常数，这个常数称为这两种给定材料之间的恢复系数 e，即

$$e = \frac{I_2}{I_1}$$

$$0 \leqslant e \leqslant 1$$

$$v_{10} - v_{20} = I_1 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$v_2 - v_1 = I_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$e = \frac{I_2}{I_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

恢复系数 e 等于碰撞后二者分开的速度 $(v_2 - v_1)$ 与碰撞前二者靠近的速度 $(v_{10} - v_{20})$ 的比值

联立

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$$

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}$$

可以解得

$$v_1=\frac{(m_1v_{10}+m_2v_{20})-em_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$v_2=\frac{(m_1v_{10}+m_2v_{20})+em_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$$

$$e(v_{10}-v_{20})=v_2-v_1$$

$$em_2v_{10}-em_2v_{20}=m_2v_2-m_2v_1$$

$$(m_1-em_2)v_{10}+(m_2+em_2)v_{20}=(m_1+m_2)v_1$$

$$v_1=\frac{(m_1-em_2)v_{10}+(m_2+em_2)v_{20}}{m_1+m_2}=\frac{(m_1v_{10}+m_2v_{20})-em_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$em_1v_{10}-em_1v_{20}=m_1v_2-m_1v_1$$

$$(m_1+em_1)v_{10}+(m_2-em_1)v_{20}=(m_1+m_2)v_2$$

$$v_2=\frac{(m_1+em_1)v_{10}+(m_2-em_1)v_{20}}{m_1+m_2}=\frac{(m_1v_{10}+m_2v_{20})+em_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

二、完全弹性碰撞

$$e = 1 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

$$I_2 = I_1$$

$$v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$$

- 碰撞后两个物体完全恢复到碰撞前的形状
- 碰撞之后系统的动能等于碰撞之前系统的动能

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1$$

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20})$$

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20}$$

$$m_1 (v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1) = m_2 (v_2 - v_{20})(v_{20} + v_2)$$

$$m_1 (v_{10}^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_{20}^2)$$

$$m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

完全弹性碰撞只是碰撞之后的动能等于碰撞之前的动能，在碰撞过程中，在压缩阶段有一部分动能转化为形变势能，在恢复阶段形变势能又全部转化为动能，因此过程中系统的动能是变化的，不能讲“动能守恒”！只能讲机械能没有损耗。

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{(m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) - e m_2 (v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{(m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) - m_2 (v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{(m_1 - m_2) v_{10} + 2 m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \\
v_2 &= \frac{(m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) + e m_1 (v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{(m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) + m_1 (v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{(m_2 - m_1) v_{20} + 2 m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

- 若 $m_1 = m_2$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{(m_1 - m_2) v_{10} + 2 m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} = v_{20} \\
v_2 &= \frac{2 m_1 v_{10} + (m_2 - m_1) v_{20}}{m_1 + m_2} = v_{10}
\end{aligned}
$$

两个质量相等的质点发生完全弹性碰撞时，速度交换

- 若 $m_1 \ll m_2$ 且 $v_{20} = 0$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \approx -v_{10}$$
$$v_2 = \frac{2m_1v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2} \approx 0$$

乒乓球与墙发生完全弹性碰撞时，乒乓球几乎原速返回，墙仍然静止

- 若 $m_1 \gg m_2$ 且 $v_{20} = 0$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \approx v_{10}$$
$$v_2 = \frac{2m_1v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2} \approx 2v_{10}$$

运动的重球与静止的轻球发生完全弹性碰撞时，重球几乎保持原速前进，轻球以两倍速度前进

三、完全非弹性碰撞

$$e = 0 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

$$I_2 = 0$$

$$v_2 = v_1 = v$$

- 没有恢复阶段，二者达到共同速度之后就一起运动

由系统动量守恒可得碰后的共同速度

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

若 $v_{20} = 0$，则动能的损失

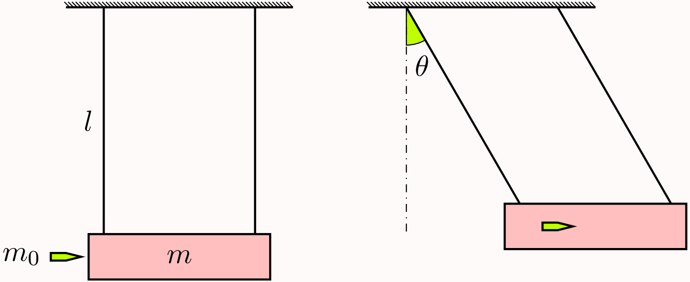
$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) m_1 v_{10}^2 \\
&= \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{k0}
\end{aligned}$$

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2$$

- 若 $m_1 \gg m_2$，则 $\Delta E_k \to 0$，动能几乎没有损失
- 若 $m_1 \ll m_2$，则 $\Delta E_k \to E_{k0}$，动能几乎全部损失

例题

冲击摆可用于测子弹速率。长为 l 的线悬挂质量为 m 的木块，子弹质量为 m_0，沿水平方向射入木块，子弹最后嵌在木块内一定位置，且测得木块摆过角度 θ，$m \gg m_0$，求子弹射入的速率 v。



解答

子弹射入木块，以子弹和木块为研究对象，完全非弹性碰撞，假定子弹射入木块前的速度为 v，射入木块后子弹和木块的速度为 v_1，则有

$$m_0 v = (m_0 + m) v_1$$

子弹和木块上摆过程，以子弹和木块为研究对象，系统受到重力和绳子拉力，其中绳子拉力不做功 (力的方向和位移方向垂直)，因此只有重力做功，系统机械能守恒 (含地球)【或者由动能定理】，以上摆前木块的位置为重力势能零点

$$\frac{1}{2}(m_0 + m)v_1^2 = (m_0 + m)gl(1 - \cos\theta)$$

$$v_1^2 = 2gl(1 - \cos\theta)$$

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}$$

$$v = \frac{m_0 + m}{m_0} v_1 = \frac{m_0 + m}{m_0} \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}$$

四、非完全弹性碰撞

$$0 < e < 1$$

恢复阶段形变势能部分转化为动能，压缩阶段的形变没有完全恢复到碰撞前的状态，还有部分形变残留

例题

某小球从离地面 H 高处自由下落并反弹，若测得小球反弹上升的最大高度为 h，试求小球与地面之间的恢复系数 e。

解答

以向下为正，小球为 1，地为 2，则碰撞前

$$v_{10} = \sqrt{2gH}, v_{20} = 0$$

碰撞后

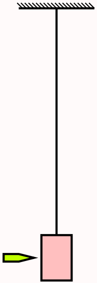
$$v_1 = -\sqrt{2gh}, v_2 = 0$$

所以恢复系数

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = \frac{0 - (-\sqrt{2gh})}{\sqrt{2gH} - 0} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

习题 4.6.4

参考图 4.17(a) 所示装置，质量为 2 g 的子弹以 500 m/s 的速度射向质量为 1 kg、用 1 m 长的绳子悬挂着的摆。子弹穿过摆后仍然有 100 m/s 的速度。问摆沿竖直方向升起的高度。



解答

子弹射穿摆的过程，子弹和摆组成的系统动量守恒

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 = 2\ \mathrm{g} = 0.002\ \mathrm{kg}$$

$$m_2 = 1\ \mathrm{kg}$$

$$v_{10} = 500\ \mathrm{m/s}$$

$$v_1 = 100\ \mathrm{m/s}$$

解答

摆上升过程，以摆和地球为研究对象，只有重力做功，机械能守恒，以上摆前摆的位置为重力势能零点

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = m_2gh$$

解得

$$h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{[m_1(v_{10} - v_1)]^2}{2m_2^2g} = \frac{[0.002 \times (500 - 100)]^2}{2 \times 1^2 \times 9.8} \approx 0.033\ \mathrm{m}$$

习题 4.6.6

如图所示，质量为 $m_1 = 0.790\ \mathrm{kg}$ 和 $m_2 = 0.800\ \mathrm{kg}$ 的物体以劲度系数为 $10\ \mathrm{N/m}$ 的轻弹簧相连，置于光滑水平桌面上。最初弹簧自由伸张。质量为 $0.01\ \mathrm{kg}$ 的子弹以速率 $v_0 = 100\ \mathrm{m/s}$ 沿水平负方向射于 m_1 内，问弹簧最多压缩了多少？

解答

子弹射入 m_1 过程，以子弹和 m_1 为研究对象，系统动量守恒，以水平向左为正方向

$$m_0 v_0 = (m_0 + m_1) v_1$$

$$m_0 = 0.01\ \mathrm{kg}$$

$$m_1 = 0.790\ \mathrm{kg}$$

$$m_2 = 0.800\ \mathrm{kg}$$

$$v_0 = 100\ \mathrm{m/s}$$

解答

m_1 压缩弹簧过程，以 m_1、m_2、子弹为研究对象，系统动量守恒，机械能没有损耗，当 m_1 和 m_2 速度相等时，弹簧形变最大

$$(m_0+m_1)v_1 = (m_0+m_1+m_2)v_2$$

$$\frac{1}{2}(m_0+m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}(m_0+m_1+m_2)v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

解得

$$v_1 = \frac{m_0 v_0}{m_0+m_1} = 1.25\ \mathrm{m/s}$$

$$v_2 = \frac{(m_0+m_1)v_1}{m_0+m_1+m_2} = 0.625\ \mathrm{m/s}$$

$$x = 0.25\ \mathrm{m}$$