理论力学第 1-7 章作业

cyhfj@qq.com

2022 年 8 月 31 日更新

目录

第 1 章 质点运动学

1.2

质点的径向和横向速度分别为 λr 和 $\mu\theta$（λ 和 μ 为常量），试证径向和横向加速度分别为

$$\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

和

$$\mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right).$$

作答

已知径向和横向速度

$$\begin{aligned}v_r&=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\lambda r\\ v_\theta&=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mu\theta\end{aligned}$$

径向加速度

$$\begin{aligned}a_r&=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}-r\left(\frac{\mu\theta}{r}\right)^2\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda r)-\frac{\mu^2\theta^2}{r}\\ &=\lambda\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}-\frac{\mu^2\theta^2}{r}\\ &=\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}\end{aligned}$$

上式用到的表达习惯是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\\ \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

同理，横向加速度

$$\begin{aligned}
a_\theta &= r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\
&= r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+2\lambda r\frac{\mu\theta}{r}\\
&= r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mu\theta}{r}+2\lambda\mu\theta\\
&= r\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r}\right)+2\lambda\mu\theta\\
&= r\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\mu\theta}{r}-\theta\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)+2\lambda\mu\theta\\
&= r\mu\left(\frac{\mu\theta}{r^2}-\theta\frac{1}{r^2}\cdot\lambda r\right)+2\lambda\mu\theta\\
&= \mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)
\end{aligned}$$

1.4

质点做平面曲线运动，其径向速度为正值常量，$v_r = c\,(c>0)$；其径向加速度为负值，并到极点的距离的三次方成反比，

$$a_r = -\frac{b^2}{r^3}\quad (b>0)\,,$$

求质点的运动学方程。

设 $t=0$ 时，$r=r_0,\theta=\theta_0$, 且运动中

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}>0.$$

作答

已知径向速度

$$v_r = c = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\quad (c>0)\,,$$

求解微分方程并代入初值得

$$r\,(t) = ct + r|_{t=0} = ct + r_0. \tag{1}$$

已知径向加速度

$$a_r = -\frac{b^2}{r^3} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\quad (b>0)\,, \tag{2}$$

将式 (1) 代入 (2) 得

$$a_r = -\frac{b^2}{(ct+r_0)^3} = -\,(ct+r_0)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{b^2}{(ct+r_0)^4}=\left[\frac{b}{(ct+r_0)^2}\right]^2. \tag{3}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}>0,$$

所以式 (3) 开平方的结果是

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{b}{(ct+r_0)^2}. \tag{4}$$

求解微分方程 (4) 并代入初值

$$\theta|_{t=0}=\theta_0$$

得到

$$\theta(t)=-\frac{1}{c}\frac{b}{ct+r_0}+\frac{b}{cr_0}+\theta_0. \tag{5}$$

式 (1) 和式 (5) 所求的质点运动学方程（的分量形式）。

1.5

质点的轨道曲线在 Oxy 平面内, 其速度的 y 分量为正值常量 $c\,(c>0)$, 试证质点加速度的大小可以表示为

$$a=\frac{v^3}{c\rho},$$

其中 v 为速率, ρ 为轨道曲率半径.

作答

已知质点速度的 y 分量为常量 c, 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=c\,(c>0)\,,$$

所以其速度的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+c^2}, \tag{6}$$

变换得到速度的 x 分量

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{v^2-c^2}. \tag{7}$$

因为速度的大小 $v=|v_t|$, 所以切向加速度的大小为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+c^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{8}$$

易知加速度的 y 分量为 0, 那么

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=a, \tag{9}$$

将式 (6) (7) (9) 代回式 (8) 并开平方得到

$$a_t^2=\frac{v^2-c^2}{v^2}a^2. \tag{10}$$

又有加速度与其分量的关系

$$a^2=a_n^2+a_t^2 \tag{11}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{12}$$

联立式 (10) (11) (12) 求解得到

$$a=\frac{v^3}{c\rho}.$$

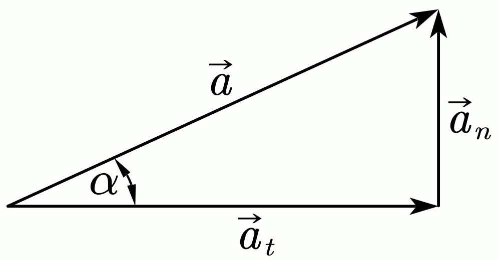
1.6

质点沿半径为 r 的圆周运动, 初速度为 $\boldsymbol{v}_0$, 其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变, 求质点速率随时间的变化规律.

作答

以质点运动的圆周圆心为原点, 建立自然坐标系. 先取 $\boldsymbol{e}_t$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向, 那么质点的速度大小 $v=v_t$, 切向加速度的大小为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$



依题意得

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_t\rangle=\alpha. \tag{14}$$

首先, 考查式 (14) 中夹角 α 的取值范围, 因为质点做圆周运动, 法向加速度

$$a_n=\frac{v^2}{r} \tag{15}$$

不可能为 0, 所以

$$\alpha \in (0, \pi).$$

那么切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的关系可以表为

$$\frac{a_t}{a_n} = \cot \alpha. \tag{16}$$

接下来, 求解速率 v 随时间 t 变化规律的数学表达式.

将式 (13) 和 (15) 代入式 (16) 并整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \frac{\cot \alpha}{r}\, \mathrm{d}t. \tag{17}$$

求解微分方程 (17) 并代入初值条件 $v|_{t=0} = v_0$ 得到

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{\cot \alpha}{r} t.$$

下面, 我们对 α 取不同值时的变化规律进行分类讨论.

(1) 当 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时, $v(t) \equiv v_0$, 即质点速率保持 v_0 不变.

(2) 当 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 质点速率 v 随时间 t 的增加而增大.

实际上, 当 $t = \dfrac{r}{v_0 \cot \alpha}$ 时, v 已经达到无穷.

(3) 当 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 时, 质点速率 v 随时间 t 的增加而减小.

当 $t \to \infty$ 时, $v \to 0$, 此时 $a_n \to 0, a_t \to 0$, 那么 v 的大小和方向均不再发生变化, 所以一开始取 $\boldsymbol{e}_t$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向是可行的.

第 2 章　质点动力学

2.3

将质量为 m 的质点竖直上抛, 设空气阻力与速度平方成正比, 其大小 $F_R=mk^2gv^4$. 如上抛初速度为 v_0, 试证该质点落回抛出点时的速率

$$v=\frac{v_0}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}.$$

作答

不管是上抛过程还是之后的下落，我们始终规定，竖直向上为正方向，抛出点的位置为坐标原点. 上抛过程中，空气阻力 F_R 和重力均竖直向下（为负号），由牛顿第二定律有

$$\begin{aligned}-F_R-mg&=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\-mg\left(k^2v^2+1\right)&=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\-g\left(k^2v^2+1\right)&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

为了求出竖直上抛上升的高度 H（因为它是关联上抛下落两过程的关键物理量），我们作变换

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\-g\left(k^2v^2+1\right)&=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\-\frac{v\,\mathrm{d}v}{g\left(k^2v^2+1\right)}&=\mathrm{d}x\end{aligned}$$

接下来，两边同时定积分，积分的下限是两个变量各自的初状态 $v=v_0,x=0$，积分的上限是各自的末状态 $v=0$（上抛的终点）和 $x=H$（上升的高度），即

$$\begin{aligned}-\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}v^2}{2g\left(k^2v^2+1\right)}&=\int_0^H\mathrm{d}x\\-\frac{1}{2g}\left[\frac{1}{k^2}\ln\left(k^2v^2+1\right)\right]_{v^2=v_0^2}^{v^2=0}&=[x]_0^H\\H=-\frac{1}{2g}\frac{1}{k^2}\left[0-\ln\left(k^2v_0^2+1\right)\right]&=\frac{1}{2g}\frac{1}{k^2}\ln\left(k^2v_0^2+1\right)\end{aligned}$$

下落过程，重力向下（为负），阻力向上（为正），由牛顿第二定律有（按理来说，我们不该两部分分析都有 v，应该用 $v_\uparrow$ 和 $v_\downarrow$ 区分开更加合理，但在不引起误会的情形下，仍然使用 v 也可以）

$$F_R-mg=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$
\begin{aligned}
m\left(k^2v^2-1\right) &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\
\left(k^2v^2-1\right) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\
\frac{v\,\mathrm{d}v}{g\left(k^2v^2-1\right)} &= \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

接下来依旧是定积分，积分的下限是下落过程的初状态（也是上抛过程的末状态），积分的上限是末状态 $v=v$（题目要求的该质点落回抛出点时的速率）和 $x=0$（落回抛出点，抛出点的位置为坐标原点），即

$$
\begin{aligned}
\int_0^v \frac{\mathrm{d}v^2}{2g\left(k^2v^2-1\right)} &= \int_H^0 \mathrm{d}x\\
\frac{1}{2g}\left[\frac{1}{k^2}\ln\left(1-k^2v^2\right)\right]_{v=0}^{v=v} &= [x]_H^0
\end{aligned}
$$

注意，这里 $\ln x$ 和 $\ln(-x)$ 都是 $1/x$ 的原函数，这里为了避免出现 $\ln\left(\text{负数}\right)$，应该选择后一种，继续把剩下的算完：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2g}\frac{1}{k^2}\ln\left(1-k^2v^2\right) &= -H\\
\frac{1}{2g}\frac{1}{k^2}\ln\left(1-k^2v^2\right) &= -\frac{1}{2g}\frac{1}{k^2}\ln\left(k^2v_0^2+1\right)\\
\ln\left(1-k^2v^2\right)+\ln\left(k^2v_0^2+1\right) &= 0=\ln 1\\
\left(1-k^2v^2\right)\left(k^2v_0^2+1\right) &= 1\\
k^2v^2 &= 1-\frac{1}{k^2v_0^2+1}=\frac{k^2v_0^2}{k^2v_0^2+1}\\
v &= \frac{v_0}{\sqrt{k^2v_0^2+1}}
\end{aligned}
$$

2.5

一小球质量为 m, 系在不可伸长的轻绳之一端, 可在光滑水平桌面上滑动. 绳的另一端穿过桌面上的小孔, 握在一个人的手中使它向下做匀速率运动, 速率为 c. 设初始时绳时拉直的, 小球与小孔的距离为 R, 其初速度在垂直绳方向上的投影为 $\boldsymbol{v}_0$. 试求小球的运动规律及绳的拉力.

作答

以小孔所在位置为极点, 初始时小孔指向小球的方向为极轴, 建立极坐标系. 描述

小球运动的动力学方程组为

$$\begin{cases} ma_r = m\left[\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = -T & \text{(18a)} \\ ma_\theta = m\left(r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0 & \text{(18b)} \\ v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -c & \text{(18c)} \end{cases}$$

求解微分方程 (18c) 并代入初值条件 $r|_{t=0} = R$ 得到

$$r(t) = R - ct. \tag{19}$$

将径向运动方程 (19) 代入式 (18b) 并整理得

$$(R - ct)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 2c\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{20}$$

求解微分方程 (20) 并代入初值条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{v_0}{R},$$

得到角速度

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 R}{(R - ct)^2}. \tag{21}$$

将式 (21) 代入 (18a) 解得

$$T = \frac{m v_0^2 R^2}{(R - ct)^3}$$

即为所求的绳的拉力.

求解微分方程 (21) 并代入初值条件 $\theta|_{t=0} = 0$ 得到横向运动方程

$$\theta(t) = \frac{v_0 t}{R - ct}. \tag{22}$$

式 (19) 和 (22) 即为小球的运动学方程（的分量形式）.

2.6

一质量为 m 的珠子串在一半径为 R 的铁丝做成的圆环上, 圆环水平放置. 设珠子的初始速率为 v_0, 珠子与圆环间的动摩擦因素为 μ, 求珠子经过多少弧长后停止运动.

作答

以圆环为轨道, 圆环的圆心为原点, 建立描述珠子运动的自然坐标系. 描述小球运动的微分方程组为

$$\begin{cases} ma_t = -\mu\sqrt{R_n^2+R_b^2} & \text{(23a)} \\ ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} = R_n & \text{(23b)} \\ ma_b = R_b - mg = 0 & \text{(23c)} \end{cases}$$

约束方程可以表为

$$\rho = R. \tag{24}$$

题目要求珠子停止运动时经过的弧长 $s|_{v=0}$, 为了消去 t 参数, 我们作如下变换

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{v\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}. \tag{25}$$

将方程 (23b) (23c) 和变换式 (25) 代入 (23a) 并整理得

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\sqrt{v^4+g^2R^2}} = \frac{-2\mu}{R}\,\mathrm{d}s \tag{26}$$

应用积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C \quad (a>0)$$

求解微分方程 (26) 得到

$$\ln\left(2v^2+2\sqrt{v^4+g^2R^2}\right)+C = \frac{-2\mu}{R}s. \tag{27}$$

其中, C 为积分常数.

将初值条件 $v|_{s=0} = v_0$ 代入式 (27) 可以确定积分常数为

$$C = -\ln\left(2v_0^2+2\sqrt{v_0^4+g^2R^2}\right). \tag{28}$$

令式 (27) 中 $v=0$, 并将积分常数 (28) 代回, 可以求得

$$s = \frac{R}{2\mu}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+g^2R^2}}{gR}$$

即为珠子停止运动时经过的弧长.

当然，用定积分更加方便也合理，积分的下限是初始条件 $v=v_0, s=0$，上限是末状态条件 $v=0$, $s=s$（要求的经过多少弧长），计算步骤如下：

$$\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}v^2}{\sqrt{v^4+g^2R^2}} = \int_0^s\frac{-2\mu}{R}\,\mathrm{d}s$$

$$\left[\ln\left(2v^2+2\sqrt{v^4+g^2R^2}\right)\right]_{v_0}^{0}=\left[\frac{-2\mu}{R}s\right]_0^s$$

$$\ln(2gR)-\ln\left(2v_0^2+2\sqrt{v_0^4+g^2R^2}\right)=\frac{-2\mu}{R}s_0$$

$$s_0=\frac{R}{2\mu}\left[\ln\left(2v_0^2+2\sqrt{v_0^4+g^2R^2}\right)-\ln(2gR)\right]$$

$$s=\frac{R}{2\mu}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+g^2R^2}}{gR}$$

2.8

力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 分别作用在长方体的顶角 A 和 B, 长方体的尺寸和坐标系如习题 2.8 图所示, 试计算 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 对原点 O 及 3 个坐标轴的力矩.

作答

（1）力 $\boldsymbol{F}_1$ 及其矢尾对 O 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 可表为

$$\boldsymbol{F}_1=F_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_1=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 对原点 O 的力矩为

$$\boldsymbol{M}_{1O}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1=F_1(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=F_1(b\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j}).$$

$\boldsymbol{F}_1$ 对坐标轴 x,y,z 的力矩分别为

$$M_{1x}=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{M}_{1O}=F_1\boldsymbol{i}\cdot(b\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j})=bF_1$$

$$M_{1y}=\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{M}_{1O}=F_1\boldsymbol{j}\cdot(b\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j})=-aF_1$$

$$M_{1z}=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{M}_{1O}=F_1\boldsymbol{k}\cdot(b\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j})=0$$

（2）力 $\boldsymbol{F}_2$ 及其矢尾对 O 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_2$ 可表为

$$\boldsymbol{F}_2=-\frac{aF_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{i}-\frac{bF_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{j}=-\frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r}_2=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{F}_2$ 对原点 O 的力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{2O}&=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2\\&=-\frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})\times(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})\\&=-\frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a&b&c\\a&b&0\end{vmatrix}\\&=\frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}(bc\boldsymbol{i}-ac\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{F}_2$ 对坐标轴 x, y, z 的力矩分别为

$$M_{2x} = \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{M}_{2O} = \frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{i} \cdot (bc\boldsymbol{i} - ac\boldsymbol{j}) = \frac{bcF_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$M_{2y} = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{M}_{2O} = \frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{j} \cdot (bc\boldsymbol{i} - ac\boldsymbol{j}) = -\frac{acF_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$M_{2z} = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{M}_{2O} = \frac{F_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{k} \cdot (bc\boldsymbol{i} - ac\boldsymbol{j}) = 0$$

实际上, 力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用线与 z 轴平行（共面）, 力 $\boldsymbol{F}_2$ 的延长线与 z 轴相交, 易得它们对 z 轴的力矩 M_{1z}, M_{2z} 均为 0.

2.9

已知质量为 m 的质点做螺旋运动, 其运动学方程为

$$x(t) = r_0 \cos\omega t, y(t) = r_0 \sin\omega t, z(t) = kt.$$

其中, r_0、ω 和 k 为常量. 试求:

（1）t 时刻质点对坐标原点 O 的角动量;

（2）t 时刻质点对过 $P(a,b,c)$ 点, 方向余弦为 (α,β,γ) 的轴的角动量.

作答

根据运动学方程求得质点的速度表达式

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = -r_0\sin\omega t\boldsymbol{i} + r_0\cos\omega t\boldsymbol{j} + k\boldsymbol{k}.$$

（1）速度为 $\boldsymbol{v}$ 的质点对 O 点的位置矢量可表为

$$\boldsymbol{r}_O = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = r_0\cos\omega t\boldsymbol{i} + r_0\sin\omega t\boldsymbol{j} + kt\boldsymbol{k}$$

那么质点对对坐标原点的角动量为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_O &= \boldsymbol{r}_O \times m\boldsymbol{v} \\
&= m\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ r_0\cos\omega t & r_0\sin\omega t & kt \\ -r_0\omega\sin\omega t & r_0\omega\cos\omega t & k \end{vmatrix} \\
&= m\left[r_0k(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\boldsymbol{i} - r_0k(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t)\boldsymbol{j} + r_0^2\omega\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)\boldsymbol{k}\right] \\
&= mr_0k(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\boldsymbol{i} - mr_0k(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t)\boldsymbol{j} + mr_0^2\omega\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

（2）速度为 $\boldsymbol{v}$ 的质点对 $P(a,b,c)$ 点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_P = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j} + (z-c)\boldsymbol{k} = (r_0\cos\omega t - a)\boldsymbol{i} + (r_0\sin\omega t - b)\boldsymbol{j} + (kt - c)\boldsymbol{k}$$

那么质点对 P 点的角动量为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_P &= \boldsymbol{r}_P \times m\boldsymbol{v} \\
&= m\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ r_0\cos\omega t - a & r_0\sin\omega t - b & kt - c \\ -r_0\omega\sin\omega t & r_0\omega\cos\omega t & k \end{vmatrix} \\
&= m\left[k\left(r_0\sin\omega t - b\right) - \left(kt - c\right)r_0\omega\cos\omega t\right]\boldsymbol{i} \\
&\quad - m\left[k\left(r_0\cos\omega t - a\right) + \left(kt - c\right)r_0\omega\sin\omega t\right]\boldsymbol{j} + m\left[r_0^2\omega - r_0\omega\left(a\cos\omega t + b\sin\omega t\right)\right]\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

方向余弦为 (α, β, γ) 的轴的矢量表达式为

$$
\boldsymbol{e}_l = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k},
$$

那么质点对固定轴 $\boldsymbol{e}_l$ 的角动量为

$$
\begin{aligned}
L_l &= \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{L}_P \\
&= m\alpha\left[k\left(r_0\sin\omega t - b\right) - \left(kt - c\right)r_0\omega\cos\omega t\right] \\
&\quad - m\beta\left[k\left(r_0\cos\omega t - a\right) + \left(kt - c\right)r_0\omega\sin\omega t\right] + m\gamma\left[r_0^2\omega - r_0\omega\left(a\cos\omega t + b\sin\omega t\right)\right]
\end{aligned}
$$

2.13

已知质点所受力 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量为

$$
F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, F_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,
$$

系数 $a_{ij}\,(i, j = 1, 2, 3)$ 都是常量. 这些 a_{ij} 满足什么条件时, 与力 $\boldsymbol{F}$ 相关的势能存在? 在这些条件被满足的情形下, 计算势能.

作答

质点所受力可表为

$$
\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},
$$

计算其旋度

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \left(a_{32} - a_{23}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_{13} - a_{31}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_{21} - a_{12}\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

当 $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ 时, 力 $\boldsymbol{F}$ 为保守力, 与它相关的势能存在, 由此解得

$$
a_{32} = a_{23}, a_{13} = a_{31}, a_{21} = a_{12},
$$

可以简化写作 $a_{ij} = a_{ji}\,(i, j = 1, 2, 3)$.

设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, 那么

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k},
$$

可得力 $\boldsymbol{F}$ 的元功

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z\\&=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)\,\mathrm{d}x+(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z)\,\mathrm{d}y+(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)\,\mathrm{d}z\\&=\mathrm{d}U\end{aligned}$$

其中, $U(x,y,z)$ 是受力质点位置的标量函数, 即势函数. 可以用曲线积分法、凑全微分显式法或分部积分法把它解出来

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2\right)+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz.$$

以坐标原点 $(0,0,0)$ 为势能零点, 质点位于点 (x,y,z) 处的势能函数 $V(x,y,z)$ 为势函数 U 的负值

$$V(x,y,z)=-U=-\frac{1}{2}\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2\right)-(a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz).$$

如何从

$$\mathrm{d}U=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)\,\mathrm{d}x+(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z)\,\mathrm{d}y+(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)\,\mathrm{d}z$$

算出 $U(x,y,z)$ 呢？因为保守力做的功与路径无关，我们可以选择一条特殊的、便于计算的路径，最容易想到的便是每步都走“直线”，也就是

$$(0,0,0)\to(x,0,0)\to(x,y,0)\to(x,y,z)$$

所以

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z)\,\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)\,\mathrm{d}z\\&=\left[\frac{1}{2}a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{13}xz\right]_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}+\left[a_{12}xy+\frac{1}{2}a_{22}y^2+a_{23}yz\right]_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}\\&\quad+\left[a_{13}xz+a_{23}yz+\frac{1}{2}a_{33}z^2\right]_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}\\&=\left(\frac{1}{2}a_{11}x^2\right)+\left(a_{12}xy+\frac{1}{2}a_{22}y^2\right)+\left(a_{13}xz+a_{23}yz+\frac{1}{2}a_{33}z^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2\right)+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz\end{aligned}$$

2.14

一带有电荷 q 的质点在电偶极子的场中所受的力为

$$F_r=2pqr^{-3}\cos\theta,F_\theta=pqr^{-3}\sin\theta,$$

p 为偶极距, r 为质点到偶极子中心的距离, 试证此力为保守力.

作答

已知 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta$, 计算力 $\boldsymbol{F}$ 所做元功

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{F}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&=F_r\,\mathrm{d}r+rF_\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=2pqr^{-3}\cos\theta\,\mathrm{d}r+pqr^{-2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\mathrm{d}\left(-pqr^{-2}\cos\theta\right)\end{aligned}$$

因其可表为受力质点位置的标量函数, 故力 $\boldsymbol{F}$ 为保守力.

2.15

质点 M 在 Oxy 平面内运动, 静止中心 A 和 B 均以与距离成正比的力吸引质点, 比例系数为 k, 试证明势能存在并求出质点的势能.

作答

设 M 点坐标为 (x,y), 那么 M 对 O,A,B 点的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_A=(x+b)\,\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\text{（从 }A\text{ 指向 }M\text{ ）}$$

$$\boldsymbol{r}_B=(x-b)\,\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

那么 A 和 B 对质点 M 的吸引力分别为

$$\boldsymbol{F}_A=-kr_A\frac{\boldsymbol{r}_A}{r_A}=-k\left[(x+b)\,\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\right]\text{（从 }M\text{ 指向 }A\text{，因为是吸引力，所以要加负号）}$$

$$\boldsymbol{F}_B=-kr_B\frac{\boldsymbol{r}_B}{r_B}=-k\left[(x-b)\,\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\right]$$

质点所受的合力为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_A+\boldsymbol{F}_B=-2k\,(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=-2k\boldsymbol{r}$, 计算其元功

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-2k\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-2kr\,\mathrm{d}r=-k\,\mathrm{d}r^2=\mathrm{d}\left(-kr^2\right),$$

因其可表为受力质点位置的标量函数, 故力 $\boldsymbol{F}$ 为保守力, 质点的势能存在.

以坐标原点为势能零点, 则质点位于 $\boldsymbol{r}$ 处的势能为

$$V\,(x,y)=V\,(r)=-kr^2=-k\left(x^2+y^2\right).$$

第 3 章　刚体运动学

3.1

外半径为 R 的线轴在水平面上沿直线做无滑滚动, 内部绕线轴的半径为 r, 线无滑地绕在轴上, 线端点 A 以不变速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向运动, 如教材习题 3.1 图所示, 求:

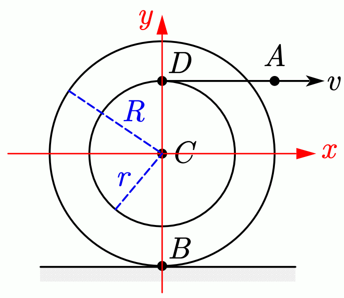
(1) 轴心 C 的速度和线轴的角速度;

(2) 线轴与水平面接触点 B 的加速度.

作答

线轴做平面平行运动.

以 C 为原点, $\boldsymbol{DA}$ 和 $\boldsymbol{CD}$ 分别为 x, y 轴的正方向, 建立如图所示的直角坐标系.



不妨设轴心 C 的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 和线轴的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 分别为

$$\boldsymbol{v}_C = v_C \boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$$

已知线轴与水平面接触点 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 为 0. 以 C 为基点, $\boldsymbol{v}_B$ 可以表为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{CB} = 0$$
$$v_C \boldsymbol{i} - \omega R \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = (v_C + \omega R)\, \boldsymbol{i} = 0$$
$$v_C + \omega R = 0 \tag{29}$$

同样地, 易知 D 点的速度 $\boldsymbol{v}_D$ 与线端点 A 相同. 以 C 为基点, $\boldsymbol{v}_D$ 可以表为

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{CD} = v\boldsymbol{i}$$
$$v_C \boldsymbol{i} + \omega r \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = (v_C - \omega r)\, \boldsymbol{i} = v\boldsymbol{i}$$
$$v_C - \omega r = v \tag{30}$$

联立式 (29) 和 (30) 解得

$$v_C = \frac{vR}{R+r}$$
$$\omega = -\frac{v}{R+r}$$

那么轴心 C 的速度和线轴的角速度分别为

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{vR}{R+r}\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{v}{R+r}\boldsymbol{k}$$

以 C 为基点, B 点的加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 可以表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_B &= \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{CB} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{CB})\\ &= \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{CB} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_C\end{aligned}$$

先求得

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{vR}{R+r}\boldsymbol{i} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{R+r}\boldsymbol{k} = 0$$

那么 B 点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_B = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_C = -\omega\frac{vR}{R+r}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \frac{v^2R}{(R+r)^2}\boldsymbol{j},$$

其方向由 B 指向基点 C.

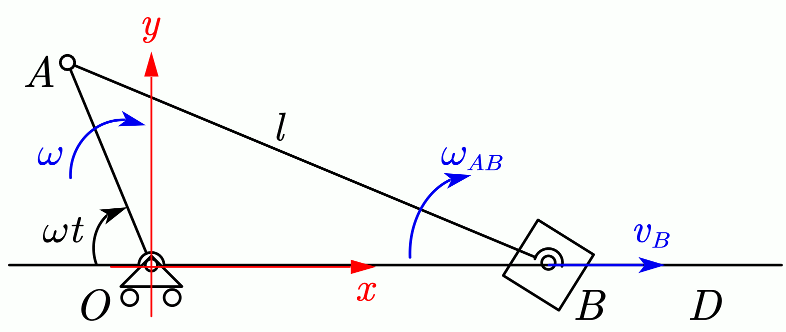
3.2

曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 点转动, 曲柄 OA 借助杆 AB 推动滑块 B 沿轨道 OD 运动. 设 $\overline{OA}=r, \overline{AB}=l$, DO 与 OA 夹角为 ωt, 如教材习题图 3.2 所示.

求杆 AB 的角速度和 B 点的速度.

作答

以 O 为原点, Ox 方向为 $\boldsymbol{OB}$, Oy 方向在运动平面内指向 A 点一侧, 建立如图所示的直角坐标系.



在 $\triangle AOB$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{l}{\sin(\pi-\omega t)}=\frac{r}{\sin\alpha}$$
$$\sin\alpha=\frac{r}{l}\sin\omega t$$
$$\alpha=\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{r\omega}{l}\cos\omega t\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}}=\frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}$$

杆 AB 做定点运动, 其瞬时轴过 B 点且垂直于运动平面. 由角速度矢量的定义及右手螺旋定则, 即可得到它的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{AB}=-\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=-\frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}\boldsymbol{k}.$$

曲柄 OA 做定轴转动, 角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{OA}=-\omega\boldsymbol{k},$$

那么 A 的速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_A&=\boldsymbol{\omega}_{OA}\times\boldsymbol{OA}\\&=-\omega\boldsymbol{k}\times(r\sin\omega t\boldsymbol{j}-r\cos\omega t\boldsymbol{i})\\&=r\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+r\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

滑块 B 做平面平行运动, 以 A 为基点, 其速度可表为

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{AB},\tag{31}$$

其中, B 相对于 A 的位置矢量

$$\boldsymbol{AB}=l(\cos\alpha\boldsymbol{i}-\sin\alpha\boldsymbol{j})=l\cos\alpha\boldsymbol{i}-r\sin\omega t\boldsymbol{j}.\tag{32}$$

因为滑块 B 沿轨道 OD 运动, 所以其 $\boldsymbol{j}$ 分量速度为 0, 即

$$\boldsymbol{v}_B=v_B\boldsymbol{i},$$

那么在计算式 (31) 时, 只需考虑 $\boldsymbol{i}$ 分量, 计算结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_B&=r\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+r\sin\omega t\frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}\\&=r\omega\sin\omega t\left(1-\frac{r\cos\omega t}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}\right)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

事实上, 若将式 (32) 中的余弦函数表成

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t},$$

并代入式 (31) 计算, 最后会发现滑块 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 在 $\boldsymbol{j}$ 分量上的速度为 0, 附上简略的计算过程:

$$\boldsymbol{AB} = l\cos\alpha\boldsymbol{i} - l\sin\alpha\boldsymbol{j} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}\boldsymbol{i} - r\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{AB} = -r\omega\cos\omega t\boldsymbol{j} - \frac{r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}_B = (r\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + r\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}) - \left(r\omega\cos\omega t\boldsymbol{j} + \frac{r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}}\boldsymbol{i}\right)$$

3.3

半径为 a 的圆柱夹在互相平行的两板间, 两板分别以不变的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 反向运动, 如教材习题 3.3 图所示. 设圆柱与两板间均无滑动, 求:

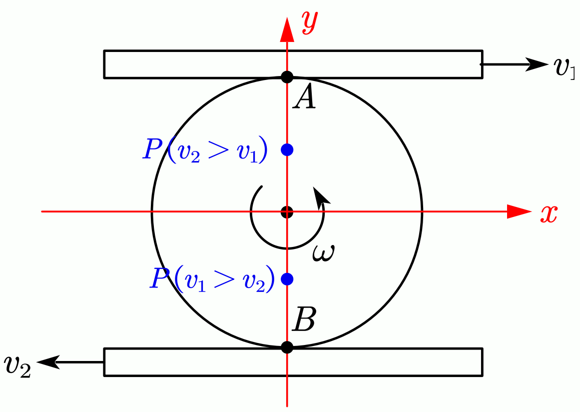
（1）瞬心位置;

（2）圆柱上与上板的接触点 A 的加速度.

作答

圆柱做平面平行运动, A, B 两点的速度方向分别与 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 一致, 可用作图法确定瞬心 P 在直径 AB 上.

以 O 为原点, $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{OA}$ 分别为 x, y 轴的正方向, 建立如图所示的直角坐标系.



不妨设圆柱的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}, \tag{33}$$

圆柱上 A, B 点的速度分别可表为

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PA}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PB}$$

那么

$$v_1\boldsymbol{i} = \omega\overline{PA}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\omega\overline{PA}\boldsymbol{i}$$

$$-v_2\boldsymbol{i} = -\omega\overline{PB}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = \omega\overline{PB}\boldsymbol{i}$$

$$v_1 = -\omega\overline{PA} \tag{34}$$

$$v_2 = -\omega\overline{PB} \tag{35}$$

联立式 (34) 和 (35) 及 $\overline{PA}+\overline{PB}=2a$ 解得

$$\overline{PA} = \frac{2av_1}{v_1+v_2} \tag{36}$$

$$\overline{PB} = \frac{2av_2}{v_1+v_2} \tag{37}$$

$$\omega = -\frac{v_1+v_2}{2a} \tag{38}$$

根据式 (36) 或 (37) 即可确定瞬心 P 在直径 AB 上的具体位置, 在我们所建立的坐标系中的坐标为

$$P\left(0, a\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}\right),$$

该式表明，若 $v_2>v_1$，那么瞬心 P 在 OA 上，反之则在 OB 上.

由式 (38) 可得圆柱的角速度矢量

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{v_1+v_2}{2a}\boldsymbol{k},$$

顺便求出 O 的速度

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PO} = -\frac{v_1+v_2}{2a}\left(\frac{2av_1}{v_1+v_2}-a\right)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = \frac{v_1-v_2}{2}\boldsymbol{i}.$$

以 O 为基点, 圆柱上与上板的接触点 A 的加速度可表为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{OA}),$$

先求得

$$\boldsymbol{a}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_1-v_2}{2}\boldsymbol{i} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_1+v_2}{2a}\boldsymbol{k} = 0$$

那么 A 点加速度的计算结果为

$$\boldsymbol{a}_A = \omega^2a\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}) = -\omega^2a\boldsymbol{j} = -\frac{(v_1+v_2)^2}{4a}\boldsymbol{j},$$

其方向由 A 指向基点 O.

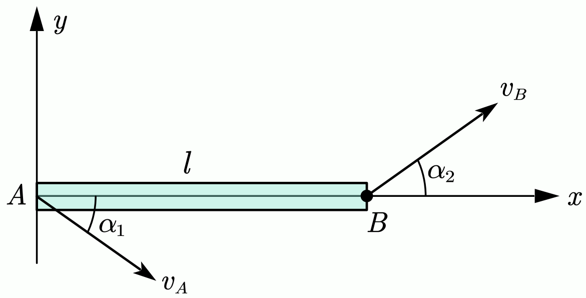
3.4

长为 l 的细杆 AB 在 Oxy 平面内运动，$\boldsymbol{v}_A$ 的大小和方向已知，且知道 $\boldsymbol{v}_B$ 的方向，如习题 3.4 图所示。求

（1）杆的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 及 $\boldsymbol{v}_B$ 的大小；

（2）杆上某点 C 的位置，$\boldsymbol{v}_C$ 刚好沿杆的方向。

作答



（1）以 A 为基点，$\boldsymbol{v}_B$ 可以表示成

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB},$$

将上面的 4 个矢量全都按题目所说的直角坐标系正交分解，有

$$\boldsymbol{v}_B = v_B \cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + v_B \sin\alpha_2 \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v}_A = v_A \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} - v_A \sin\alpha_1 \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{AB} = l\boldsymbol{i}$$

将这 4 个式子全部代回第 1 个方程，得到

$$\begin{aligned} v_B \cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + v_B \sin\alpha_2 \boldsymbol{j} &= (v_A \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} - v_A \sin\alpha_1 \boldsymbol{j}) + \omega l \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} \\ &= v_A \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + (\omega l - v_A \sin\alpha_1)\, \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

可想而知，对应分量必须相等，即

$$v_B \cos\alpha_2 = v_A \cos\alpha_1$$
$$v_B \sin\alpha_2 = \omega l - v_A \sin\alpha_1$$

马上可以解出

$$v_B = \frac{v_A \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$$
$$\omega = \frac{v_A}{l} (\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1 \tan\alpha_2)$$

便是题目要求的杆的角速度和 $\boldsymbol{v}_B$ 的大小。

（2）以 A 为基点，$\boldsymbol{v}_C$ 可以表示成

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{AC}$$

因为点 C 就在杆上，不妨设它距离原点（也是点 A）为 x，那么

$$\boldsymbol{AC}=x\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}_C=v_A\cos\alpha_1\boldsymbol{i}-v_A\sin\alpha_1\boldsymbol{j}+\omega x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=v_A\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+(\omega x-v_A\sin\alpha_1)\,\boldsymbol{j}$$

要让 $\boldsymbol{v}_C$ 刚好沿杆的方向（x 轴），上面式子的第 2 个分量必须为 0，所以

$$\omega x-v_A\sin\alpha_1=0$$

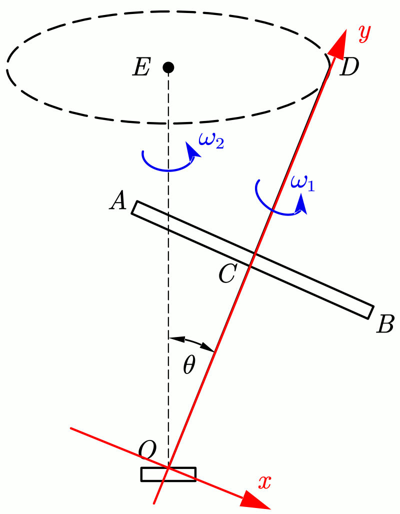
$$x=\frac{v_A\sin\alpha_1}{\omega}=l\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1+\cos\alpha_1\tan\alpha_2}=\frac{l}{1+\cot\alpha_1\tan\alpha_2}$$

3.6

转轮 AB 绕过轮心且与轮面垂直的 OD 轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 转动, 而 OD 绕竖直线 OE 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 转动. 已知转轮半径 $\overline{CB}=a$, $\overline{OC}=b$, $\angle EOD=\theta$, 如教材习题 3.6 图所示. 试求转轮最低点速度 $\boldsymbol{v}_B$. 若有兴趣, 可试求 $\boldsymbol{a}_B$.

作答

转轮 AB 的运动可视为绕定点 O 做定点运动.



以 O 为原点, $\boldsymbol{CB}$ 和 $\boldsymbol{OD}$ 分别为 x,z 轴的正方向, 建立如图所示的直角坐标系（坐标系 $Oxyz$ 相对地面不是固定的，相对转轮是固定的）. 即得

$$\boldsymbol{\omega}_1=\omega_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2=-\omega_2\sin\theta\boldsymbol{i}+\omega_2\cos\theta\boldsymbol{k}$$

所以转轮的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = -\omega_2 \sin\theta \boldsymbol{i} + (\omega_1 + \omega_2 \cos\theta)\, \boldsymbol{k}.$$

B 相对于 O 的位置矢量

$$\boldsymbol{OB} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{k},$$

那么转轮最低点速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OB} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\omega_2 \sin\theta & 0 & \omega_1 + \omega_2 \cos\theta \\ a & 0 & b \end{vmatrix} \\ &= \left[\omega_2 b \sin\theta + a\left(\omega_1 + \omega_2 \cos\theta\right)\right] \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

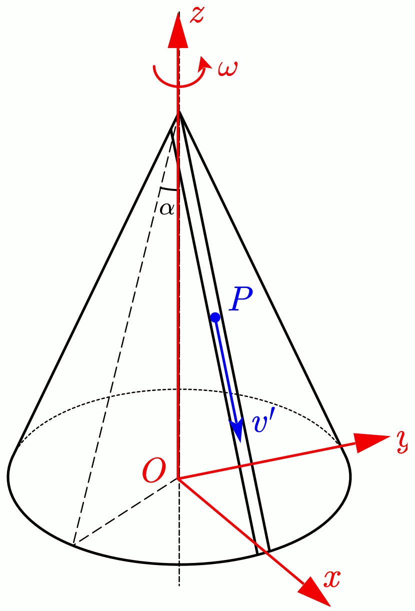
第 4 章　非惯性系中的质点力学

4.1

半径角为 α 的圆锥以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕对称轴转动, 圆锥表面有一沿母线运动的细槽. 质点 P 由圆锥顶点开始, 相对圆锥以速度 $\boldsymbol{r}'$ 沿槽做匀速运动, 如教材习题 4.1 图所示. 求 t 时刻 P 点绝对加速度的量值（以地面为 S 系）.

作答

题目已经指定地面为静止系 S. 以圆锥顶点 O 为原点（也是静止系 S 的原点）, Oz 沿对称轴向上, 建立如图所示的运动坐标系 $Oxyz$ 为 S' 系, 使在圆锥绕对称轴 Oz 转动的过程中, 细槽所在的母线始终位于 Oxz 平面内.



那么, 圆锥绕对称轴转动的匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可表为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}.$$

质点 P 在 S' 系中相对原点 O 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}'=v'\sin\alpha\boldsymbol{i}-v'\cos\alpha\boldsymbol{k},$$

据此计算质点 P 相对 S' 系的速度（即相对速度）

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=v'\left(\sin\alpha\boldsymbol{i}-\cos\alpha\boldsymbol{k}\right),$$

相对加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=0. \tag{39}$$

由于 S' 系的运动而造成的 P 点相对 S 系（地面）的加速度（即牵连加速度）为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right),$$

因为静止系 S 和运动系 S' 的原点重合, $\boldsymbol{R}=0$. 易得牵连转动加速度也为 0, 那么

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=\omega^2v'\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times(\sin\alpha\boldsymbol{i}-\cos\alpha\boldsymbol{k})]=-\omega^2v'\sin\alpha\boldsymbol{i}. \tag{40}$$

由于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 互相耦合而形成的科氏加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=2\omega v'\boldsymbol{k}\times(\sin\alpha\boldsymbol{i}-\cos\alpha\boldsymbol{k})=2\omega v'\sin\alpha\boldsymbol{j}. \tag{41}$$

P 点的绝对加速度为上述 3 个加速度 (39) (40) (41) 的矢量和

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}=2\omega v'\sin\alpha\boldsymbol{j}-\omega^2v'\sin\alpha\boldsymbol{i}=\omega v'(2\boldsymbol{j}-\omega t\boldsymbol{i})\sin\alpha,$$

其大小（量值）为

$$a=\omega v'\sqrt{4+\omega^2t^2}\sin\alpha.$$

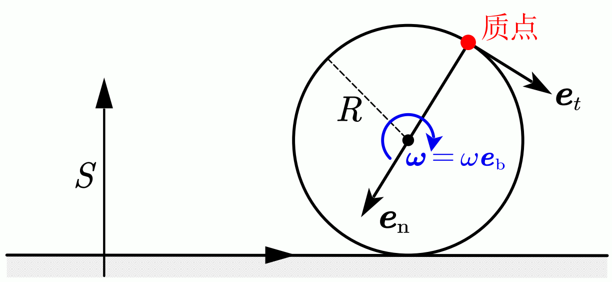
4.3

半径为 R 的车轮在竖直平面内沿一直线轨道做无滑滚动, 已知轮心的速率为常量 v. 轮缘上有一质点以与轮心速率相等的速率 v, 相对车轮沿轮缘顺着车轮滚动方向运动.

求:（1）质点相对车轮的加速度;（2）质点相对地面的加速度.

作答

建立固连于地的静止 S 系, 固连于车轮的运动 S' 系. 以轮缘上的质点指向轮心的方向为主方向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$, 沿轮缘切线指向质点运动方向为切向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$, 建立如图所示的自然坐标系（主方向和切向确定后, 副法向自然也就确定了）.



车轮（S' 系）在竖直平面内滚动的角速度可表为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}=\frac{v}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}.$$

质点在 S' 系（车轮）中相对于轮心的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}'=-R\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}},$$

质点相对车轮的速度（即相对速度）

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}=v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}.$$

质点相对车轮的加速度（即相对加速度）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}. \tag{42}$$

由于 S' 系（车轮）的运动而造成的质点相对 S 系（地面）的加速度（即牵连加速度）为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \\ &= -\frac{v}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}\times\left(\frac{v}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}\times R\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\right) \\ &= \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} \\ &= \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\end{aligned} \tag{43}$$

由于角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和相对速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 互相耦合而形成的科氏加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} = 2\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} = 2\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}, \tag{44}$$

质点相对地面的加速度（即绝对加速度）为上述 3 个加速度 (42) (43) (44) 的矢量和

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = 4\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}.$$

4.5

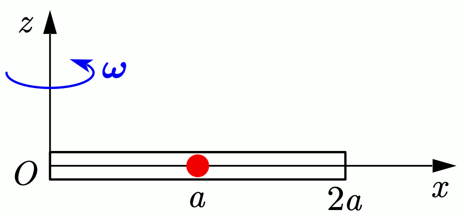
在内壁光滑的水平直管中有质量为 m 的小球，此管以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕过其一端的竖直轴转动．如开始时小球到转动轴的距离为 a，球相对管的速率为 0，而管的总长度为 $2a$．求：

（1）小球从开始运动到离开管口所需的时间；

（2）小球刚要离开管口时相对管的速度和相对地面的速度．

作答

以直管为参考系，Ox 沿直管，Oz 沿竖直轴向上，建立坐标系 $Oxyz$．



小球相对 O 点的位置矢量可以用坐标 x 来表示

$$\boldsymbol{r}' = x\boldsymbol{i},$$

其相对速度和相对加速度分别为

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$$

分析小球的受力, 重力

$$\boldsymbol{W} = -mg\boldsymbol{k},$$

管壁施予的约束力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{N}y}\boldsymbol{j} + F_{\mathrm{N}z}\boldsymbol{k},$$

科氏力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' = -2m\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}.$$

不难发现, 以上 3 个力均与相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 垂直, 即与 Ox 垂直, 它们都不做功.

牵连惯性力

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}} &= -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} \\
&= -m\left[\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\right] \\
&= -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \\
&= -m\omega^2x\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}) \\
&= m\omega^2x\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

实际上, 坐标系原点 O 相对地面静止, 管以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动, 此时牵连加速度的前两项均为 0, 牵连惯性力退化为惯性离心力.

综合运动分析和受力分析, 可以得出小球（质点）沿 Ox 轴的动力学方程

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}} = m\boldsymbol{a}'$$
$$m\omega^2x\boldsymbol{i} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2x = 0$$

该方程是二阶常微分齐次线性方程, 具有以下形式的通解

$$x(t) = C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t},$$

利用初始位置和初始速度

$$x|_{t=0} = a,\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

可以确定积分常数为

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2},$$

那么小球的位置坐标 x 随时间 t 的变化关系式为

$$x(t)=\frac{a}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)=\frac{a}{2}\cosh\omega t.$$

尝试用位置坐标 x 来表示时间（这个形式其实是双曲余弦函数的反函数. ）

$$t(x)=\frac{1}{\omega}\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right],$$

那么, 从开始运动到离开管口（$x=2a$ 处）所用的时间

$$t(2a)=\frac{1}{\omega}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

小球的相对速度和绝对速度（相对地面的速度）可表为

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{a\omega}{2}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)\boldsymbol{i}=a\omega\boldsymbol{i}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$$
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=a\omega\boldsymbol{i}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\omega x\boldsymbol{j}$$

那么, 刚要离开管口（$x=2a$ 处）时

$$\boldsymbol{v}'|_{x=2a}=\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{v}|_{x=2a}=\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{i}+2a\omega\boldsymbol{j}$$

4.6

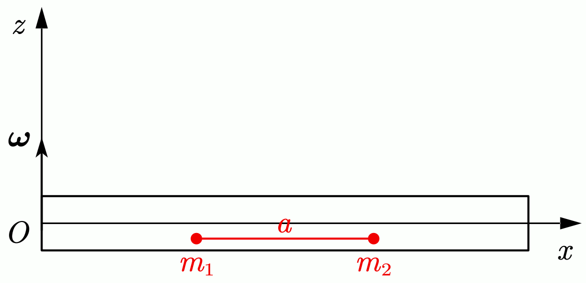
质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点, 用一原长为 a 的弹性轻绳相连, 绳的劲度系数为

$$k=\frac{2m_1m_2\omega^2}{m_1+m_2}.$$

如将此系统放在内壁光滑的水平管中, 水平管绕管上某点以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕竖直轴转动. 初始时两质点均相对水平管静止, 两质点间的距离为 a. 试求 t 时刻两质点的距离.

作答

以水平管为参考系, Ox 沿直管, Oz 沿竖直轴向上, 建立坐标系 $Oxyz$.



与上一题同样的分析（公式基本相同, 此处从略）, 可得出: 对质点 m_1 和 m_2，重力 $\boldsymbol{W}$、管壁施予的约束力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$、科氏力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{c}$ 均与相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 垂直, 即与 Ox 轴垂直, 它们都不做功.

此外, 还受到退化为惯性离心力的牵连惯性力

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = m_i\omega^2 x_i \boldsymbol{i} \ \ (i = 1, 2)\,,$$

和弹性轻绳拉力

$$T = k\,(x_2 - x_1 - a)\,\boldsymbol{i} = k\,(l - a)\,,$$

其中, $l = x_2 - x_1$ 为两质点的距离, 是本题待求的物理量.

质点 m_1 沿 Ox 的动力学方程

$$m_1 \boldsymbol{a}_1' = m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{F}_\mathrm{t} + T\boldsymbol{i}$$

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1\omega^2 x_1 + k\,(l - a) \tag{45}$$

同理可得质点 m_2 沿 Ox 的动力学方程

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2\omega^2 x_2 - k\,(l - a)\,. \tag{46}$$

联系 (45) 和 (46) 消去 x_1 和 x_2

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 l - k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(l - a) = \omega^2 l - 2\omega^2\,(l - a)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 l = 2\omega^2 a$$

该方程是二阶常微分非齐次方程, 其解由齐次方程的通解和一个特解组成

$$l\,(t) = 2a + C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t,$$

利用初始间距和初始速度差

$$l|_{t=0} = x_2|_{t=0} - x_1|_{t=0} = a$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

可以确定积分常数

$$C_1 = -a, C_2 = 0.$$

那么两质点的距离 l 随时间 t 的变化关系式

$$l\,(t) = 2a - a\cos\omega t = a\,(2 - \cos\omega t)\,.$$

第 5 章 质点系动力学

5.2

质量为 m_0 的人手持质量为 m 的物体, 此人以与地面成 α 角的初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向前蹦出. 当他跳出最高点时, 将物体以相对自己的速度 u 水平向后抛出. 问由于物体的抛出, 跳的距离增加了多少?

作答

人从最高点到落地的时间 t（也是从地面蹦出到最高点的时间）满足

$$gt = v_0 \sin\alpha$$
$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

那么原来跳的距离为

$$x_1 = v_0 t \cos\alpha.$$

以人与物体为质点系, 水平方向动量守恒

$$(m + m_0)\, v_0 \cos\alpha = m_0 v + m\,(v - u)\,,$$

可以求出抛出物体后人（相对地面）的速度

$$v = v_0 \cos\alpha + \frac{mu}{m + m_0},$$

那么由于物体的抛出, 跳的距离为

$$x_2 = vt.$$

跳的距离增加了

$$\Delta x = x_2 - x_1 = t\,(v - v_0 \cos\alpha) = t\frac{mu}{m + m_0} = \frac{muv_0 \sin\alpha}{(m + m_0)\, g}.$$

5.4

两个质点 A 和 B 质量分别为 m_A 和 m_B, 初始是位于同一竖直线上, B 质点静止, 高度为 h; A 质点有水平初速度 $\boldsymbol{v}_0$, A 和 B 间的距离为 l. 在以下 3 种情况下求出质点 A 和 B 的质心轨迹:

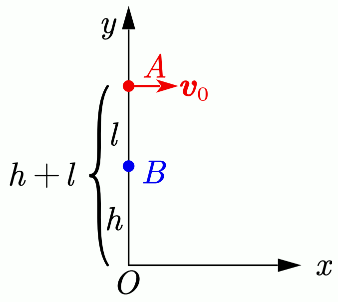
（1）A 和 B 两质点间没有相互作用;

（2）质点 A 和 B 以万有引力相互作用;

（3）A 和 B 间以轻杆相连.

作答

x 轴沿 A 质点初速度方向, y 轴由 B 指向 A.



在第（1）种情况下, 做平抛运动的质点 A 的水平位置（位置矢量的 x 分量）和竖直位置（位置矢量的 y 分量）随时间的变化关系为

$$x_A = v_0 t,\ y_A = h + l - \frac{1}{2}gt^2,$$

同样地, 做自由落体运动的质点 B 的水平位置和竖直位置随时间的变化关系为

$$x_B = 0,\ y_B = h - \frac{1}{2}gt^2$$

根据质心运动定理, 求得质心 C 位置矢量的 x 分量为

$$x_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A v_0 t}{m_A + m_B},$$

变换一下, 得

$$t = \frac{(m_A + m_B)\, x_C}{m_A v_0},$$

y 分量为

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} \\ &= \frac{1}{m_A + m_B}\left[m_A\left(h + l - \frac{1}{2}gt^2\right) + m_B\left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\right] \\ &= h + \frac{m_A l}{m_A + m_B} - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

将时间 t 代入得

$$y_C = h + \frac{m_A l}{m_A + m_B} - \frac{1}{2}g\left(\frac{m_A + m_B}{m_A v_0}\right)^2 x_C^2,$$

即为第（1）种情况下质心 C 的轨迹, 是个抛物线.

由于质心运动与 A 和 B 间的内力无关, 所以情况（2）、（3）下的质心轨迹与（1）相同.

5.7

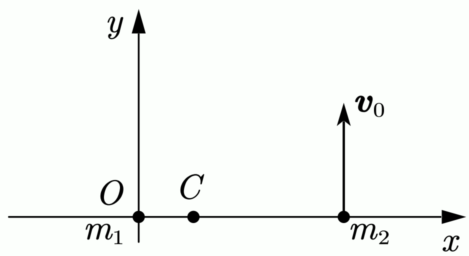
质量为 m_1 和 m_2 的二质点, 用一根长为 l 的不可伸长的轻绳相连. 初始时 m_1 被握在手中不动, m_2 以匀速率绕 m_1 做圆周运动. 在某瞬时将 m_1 放手, 试求以后二质点的运动, 并证明绳内张力

$$F_T=\frac{m_1m_2v_0^2}{(m_1+m_2)\,l}.$$

不考虑重力及质点间引力作用, 并已知绳一直是张紧的.

作答

建立如图所示的坐标系



初始时 m_1 和 m_2 的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1\big|_{t=0}=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{v}_2\big|_{t=0}=v_0\boldsymbol{j}$$

因为质点系不受外力（题目已经声明不考虑重力）, 所以在整个运动过程中质点系动量守恒, m_1 和 m_2 的相对质心 C 的速度一直保持着初始速度

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_C\big|_{t=0}=\frac{m_1\,\boldsymbol{v}_1\big|_{t=0}+m_2\,\boldsymbol{v}_2\big|_{t=0}}{m_1+m_2}=\frac{m_2v_0}{m_1+m_2}\boldsymbol{j},$$

且质点系在质心系中对质心 C 的角动量守恒, 其表达式为

$$\boldsymbol{L}_C'=m_1\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{v}_1'+m_2\boldsymbol{r}_2'\times\boldsymbol{v}_2'.$$

考查 m_1 和 m_2 在质心系（非惯性系）内做圆周运动, 它们相对质心 C 的位置矢量大小保持不变（绳一直是张紧的）, 相对距离分别为

$$r_1'=\frac{m_2l}{m_1+m_2}$$

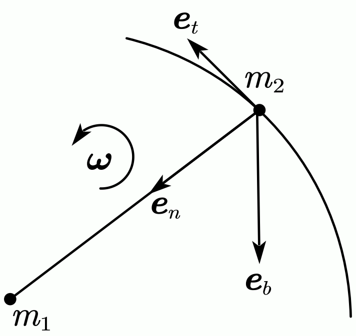
$$r_2'=\frac{m_1l}{m_1+m_2}$$

且相对位置矢量与相对速度始终垂直, 即

$$\forall t\geq 0,\boldsymbol{r}_1'\perp\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{r}_2'\perp\boldsymbol{v}_2'.$$

据此可知 m_1 和 m_2 相对质心系的速率（相对速度大小）不变, 与初始相对速率相同

$$v_1' = v_1'|_{t=0} = |\boldsymbol{v}_1|_{t=0} - \boldsymbol{v}_C|_{t=0}| = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}$$
$$v_2' = v_2'|_{t=0} = |\boldsymbol{v}_2|_{t=0} - \boldsymbol{v}_C|_{t=0}| = v_0 - \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2} = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}$$



相对速度的方向沿圆周运动的切线方向, 用 $\boldsymbol{e}_\text{t}$ 来表示, 所以 m_1 和 m_2 的（绝对）速度为

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_C + v_1'\boldsymbol{e}_\text{t} = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{e}_\text{t})$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_C + v_2'\boldsymbol{e}_\text{t} = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}\boldsymbol{j} + \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}\boldsymbol{e}_\text{t}$$

这里, 惯性系采用直角坐标, 非惯性系（质心系）采用自然坐标.

绳内张力提供质点 m_1 在质心系中做圆周运动的向心力, 其大小为

$$F_T = m_1 \frac{{v_1'}^2}{r_1'} = m_1\left(\frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}\right)^2\left(\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{(m_1+m_2)\,l}.$$

也可以用 m_2 来计算, 结果一样

$$F_T = m_2 \frac{{v_2'}^2}{r_2'} = m_2\left(\frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}\right)^2\left(\frac{m_1 l}{m_1+m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{(m_1+m_2)\,l}.$$

下面从另一角度来求解 m_1 和 m_2 相对质心系的速度, 质点系在惯性系中对坐标原点 O 的角动量守恒

$$L_C = m_1 r_1^2\omega + m_2 r_2^2\omega = m_2 r_2\, v_2|_{t=0},$$

将（绝对）位置大小 $r_1 = 0, r_2 = l$ 代入得

$$m_2 l^2\omega = m_2 l v_0$$
$$\omega = \frac{v_0}{l}$$

ω 为张紧的绳转动的角速度. 由此可得

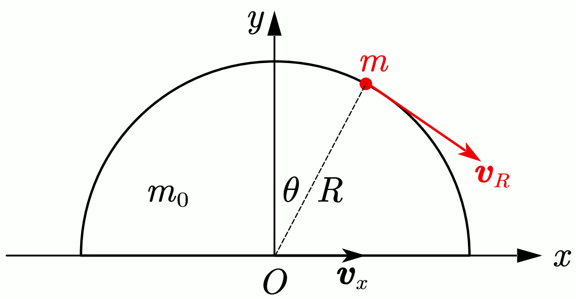
$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_1' = -\frac{v_0}{l}\boldsymbol{e}_\text{b}\times\left(\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\boldsymbol{e}_\text{n}\right) = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}\boldsymbol{e}_\text{t}$$
$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_2' = -\frac{v_0}{l}\boldsymbol{e}_\text{b}\times\left(\frac{m_1 l}{m_1+m_2}\boldsymbol{e}_\text{n}\right) = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}\boldsymbol{e}_\text{t}$$

5.10

质量为 m_0, 半径为 R 的光滑半球, 其底面放在光滑水平面上, 有一质量为 m 的质点沿球面滑下. 初始时二者均静止, 质点初位置与球心连线和竖直方向上的直线间夹角为 α. 求质点滑到它与与球心连线和竖直方向上直线间夹角为 θ 时 $\dot{\theta}$ 的值.

作答

建立如图所示的坐标系



光滑半球 m_0 沿水平 Ox 方向的速度大小可表为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

质点 m 沿球面滑下的速度大小为

$$v_R=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

因为水平方向上系统不受外力（竖直方向上受重力）, 所以沿水平 Ox 方向动量守恒

$$m_0v_x+m\left(v_x+v_R\cos\theta\right)=0,$$

由系统的总机械能守恒得

$$\frac{1}{2}m_0v_x^2+\frac{1}{2}m\left[\left(v_x+v_R\cos\theta\right)^2+\left(v_R\sin\theta\right)^2\right]+mgR\cos\theta=mgR\cos\alpha,$$

联立以上式子, 解出 $\dot{\theta}$ 关于夹角 θ 的表达式

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2g\left(\cos\alpha-\cos\theta\right)}{R}\left(1-\frac{m\cos^2\theta}{m_0+m}\right)^{-1}}.$$

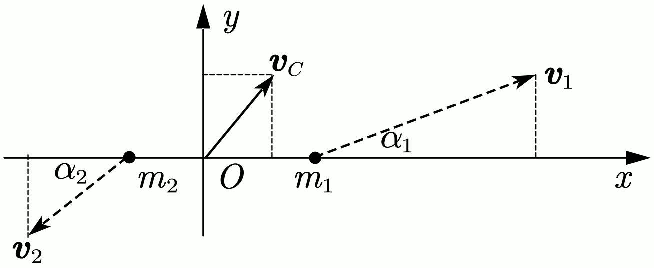
5.11

轻杆 AB 长为 l, 两端有质量分别为 m_1 和 m_2 的质点 A 和 B, 杆只能在竖直平面内运动. 某瞬时 A 点速度为 $\boldsymbol{v}_1$, B 速度为 $\boldsymbol{v}_2$, 分别与杆夹角 α_1 和 α_2.

（1）试求此系统在质心系中相对质心的角动量;

（2）考虑重力作用, 试求此系统在以后的运动中角速度的变化.

作答



值得注意的是, $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 并不是质点 A 和 B 在质心系中相对质心 C 的速度, 而是在惯性系中的速度, 所以不能直接用

$$\boldsymbol{L}'_C = m_1\boldsymbol{r}'_1 \times \boldsymbol{v}'_1 + m_2\boldsymbol{r}'_2 \times \boldsymbol{v}'_2$$

来计算. 实际上, $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是质点 A 和 B 在惯性系中的速度矢量, 它们与质心 C 的速度满足

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_1$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_2$$

建立如图所示的坐标系, 将质心速度 $\boldsymbol{v}_C$ 沿 Oy 方向分解（投影）得到

$$v_{Cy} + \omega r_1 = v_1 \sin\alpha_1$$
$$v_{Cy} - \omega r_2 = -v_2 \sin\alpha_2$$

两式相减得

$$\omega\left(r_{CA} + r_{CA}\right) = v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2$$
$$\omega = \frac{v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2}{l}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} = \frac{v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2}{l}\boldsymbol{k}$$

轻杆 AB 绕质心 C 转动的转动惯量为

$$I_C = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = m_1\left(\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1 l}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1m_2l^2}{m_1+m_2},$$

所以系统在质心系中相对质心的角动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}'_C &= I_C\boldsymbol{\omega}\\ &= \frac{m_1m_2l^2}{m_1+m_2}\frac{v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2}{l}\boldsymbol{k}\\ &= \frac{m_1m_2l\left(v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2\right)}{m_1+m_2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

考虑重力作用, 根据重力过质心 C, 力矩为 0, 可知系统在质心系中相对质心的角动量守恒, 所以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在运动中保持不变.

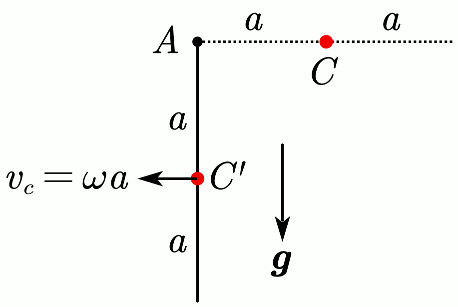
5.19

长为 $2a$ 的匀质棒 AB, 以光滑铰链悬于 A 点, 棒可在竖直面内摆动. 初始时棒自水平位置无初速度地开始运动, 当棒摆至垂直位置时铰链突然脱落. 试证在以后的运动中棒质心的运动轨迹为一抛物线；并求棒的质心下落 h 距离后, 棒一共转了几圈？

作答

匀质棒 AB 绕悬点 A 的转动惯量为

$$I=\int r^2\,\mathrm{d}m=\int_0^{2a}\lambda r^2\,\mathrm{d}r=\frac{m}{2a}\int_0^{2a}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}ma^2.$$



自水平位置绕 A 点摆至垂直位置的过程中, 机械能守恒

$$mga=\frac{1}{2}I\omega^2,$$

解得棒转动的角速度为

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2a}}.$$

在以后的运动中, 质心在水平方向上做匀速直线运动,

$$x\left(t\right)=v_Ct=\omega at=t\sqrt{\frac{3ga}{2}},$$

在竖直方向上做自由落体运动

$$y\left(t\right)=\frac{1}{2}gt^2.$$

消去时间 t 可以得到

$$y\left(x\right)=\frac{x^2}{3a},$$

即为棒质心的运动轨迹, 是一条抛物线.

棒的质心下落 h 距离时, 取竖直位移

$$y\left(t\right)=\frac{1}{2}gt^2=h,$$

解得

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

此时棒一共转过了

$$\theta=\omega t=\sqrt{\frac{3g}{2a}}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{3h}{a}}\,\mathrm{rad},$$

转过的圈数等于

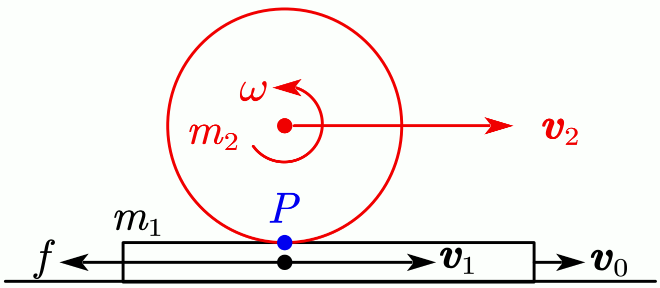
$$n=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}.$$

5.21

一面光滑一面粗糙的平板, 质量为 m_1, 将其光滑的一面放在光滑水平桌面上, 粗糙面上放一质量为 m_2 的球. 初始时板与球均静止, 若板沿其长度方向突然获得一速度 $\boldsymbol{v}_0$, 问经多少时间后球开始做无滑滚动? 设球与板间摩擦因数为 μ, 板的长度足够长.

作答

建立如图所示的坐标系



板 m_1 的水平运动微分方程

$$m_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-f=-\mu m_2 g,$$

球 m_2 的水平运动微分方程

$$m_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=f=\mu m_2 g,$$

和转动微分方程

$$I\alpha=fR$$

$$\frac{2}{5}m_2R^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\mu m_2 gR$$

它们的初值条件分别为

$$v_1|_{t=0}=v_0$$

$$v_2|_{t=0}=0$$

$$\omega|_{t=0}=0$$

解得

$$v_1(t) = v_0 - \frac{\mu m_2 g}{m_1} t$$

$$v_2(t) = \mu g t$$

$$\omega(t) = \frac{5\mu g}{2R} t$$

球与板接触点 P 的速度是水平运动速度和转动线速度之和

$$v_P = v_2 + \omega R = \frac{7}{2}\mu g t$$

球开始做无滑滚动的条件是

$$v_P = v_1$$

即

$$\frac{7}{2}\mu g t = v_0 - \frac{\mu m_2 g}{m_1} t,$$

求得球开始做无滑滚动经历的时间

$$t = v_0 \left[\left(\frac{7}{2} + \frac{m_2}{m_1}\right)\mu g\right]^{-1}.$$

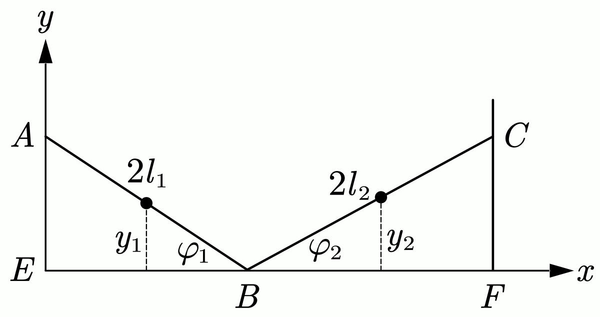
第 6 章　拉格朗日动力学

6.7

用铰链连接的刚性杆 AB 和 BC, 重量分别为 W_1 和 W_2, 杆长分别为 $2l_1$ 和 $2l_2$, A 和 C 两端分别靠在光滑墙壁上. 试用虚功原理求两杆处于平衡时 φ_1 角和 φ_2 角的关系.

作答

建立如图所示的坐标系.



因为系统只有 $s=1$ 个自由度, 故以角 φ_1 为广义坐标. 由虚功原理得

$$-W_1\delta y_1 - W_2\delta y_2 = 0. \tag{47}$$

由坐标变换方程得

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1\sin\varphi_1 & y_2 &= l_2\sin\varphi_2 \\ \delta y_1 &= l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 & \delta y_2 &= l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2 \end{aligned}$$

我们只有 1 个广义坐标——φ_1, 所以还得把 $\delta\varphi_2$ 转化为 $\delta\varphi_1$. 由

$$2\left(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\right) = \overline{EF}$$

为定长, 得

$$-2\left(l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2\right) = 0$$
$$\delta\varphi_2 = -\frac{l_1\sin\varphi_1}{l_2\sin\varphi_2}\delta\varphi_1$$

代入 (47) 解得

$$W_1\cot\varphi_1 = W_2\cot\varphi_2.$$

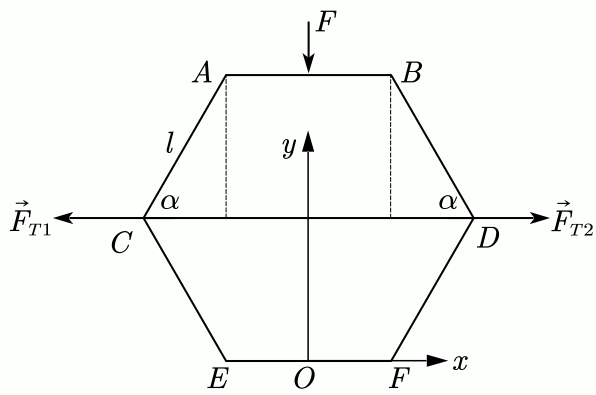
即为两杆处于平衡时 φ_1 角和 φ_2 角的关系

6.9

等边六角形连杆装置放置在竖直面内, 忽略杆的重量. 各杆间用光滑铰链连接, 底边 EF 固定不动. C、D 点间用绳连接, AB 中点受竖直向下的力 $\vec{F}$ 作用. 已知平衡时 $\angle ACD=\alpha$, 试用虚功原理求平衡时 $\vec{F}$ 与绳内张力 $\vec{F_T}$ 之间的关系.

作答

建立如图所示的坐标系.



以约束力 $\vec{F}_{T1}$ 和 $\vec{F}_{T2}$ 代替绳子的约束, 其中

$$F_{T1}=F_{T2}=F_T.$$

因为系统只有 $s=1$ 个自由度, 以角 α 为广义坐标. 由虚功原理得

$$-F\delta y+F_{T1}\delta x_C-F_{T2}\delta x_D=0. \tag{48}$$

由坐标变换方程得

$$\begin{aligned} y&=2l\sin\alpha & x_C&=x_{OA}-l\cos\alpha & x_D&=x_{OB}+l\cos\alpha \\ \delta y&=2l\cos\alpha\delta\alpha & \delta x_C&=l\sin\alpha\delta\alpha & \delta x_D&=-l\sin\alpha\delta\alpha \end{aligned}$$

代回 (48) 解得

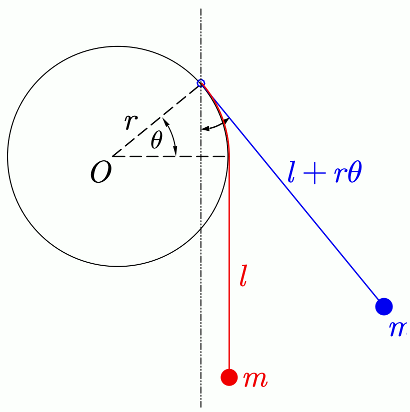
$$F_T=F\cot\alpha.$$

6.11

质量为 m 的质点悬在不可伸长的轻绳上, 绳的另一端绕在半径为 r 的固定圆柱上. 设质点在平衡位置时, 绳下垂部分长 l. 试用拉格朗日方法写出质点摆动时的运动微分方程.

作答

质点 m 在竖直面内摆动, 自由度 $s=1$. 选取题目中的 θ（轻绳悬点和 O 点的连线与水平轴的夹角）为广义坐标. 轻绳的悬点和摆的绳长不是固定的, 随 θ 变化.



系统的动能为 $T=\frac{1}{2}m\left(\rho\omega\right)^2$, 其中, 绳长 ρ 与广义坐标 θ 的关系为 $\rho=l+r\theta$, 角速度 $\omega=\dot{\theta}$, 故动能表成

$$T=\frac{1}{2}m\left(l+r\theta\right)^2\dot{\theta}^2.$$

选取过圆柱中心 O 的水平面为重力势能 V 的零势能面, 那么重力势能 V 可以表成关于广义坐标 θ 的函数, 即

$$V=mg\left(r\sin\theta-\rho\cos\theta\right)=mg\left[r\sin\theta-\left(l+r\theta\right)\cos\theta\right].$$

所以质点 m 的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(l+r\theta\right)^2\dot{\theta}^2-mg\left[r\sin\theta-\left(l+r\theta\right)\cos\theta\right].$$

将其代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得到

$$2mr\left(l+r\theta\right)\dot{\theta}^2+m\left(l+r\theta\right)^2\ddot{\theta}-mr\left(l+r\theta\right)\dot{\theta}^2+mg\left(l+r\theta\right)\sin\theta=0,$$

化简求得质点摆动时的运动微分方程

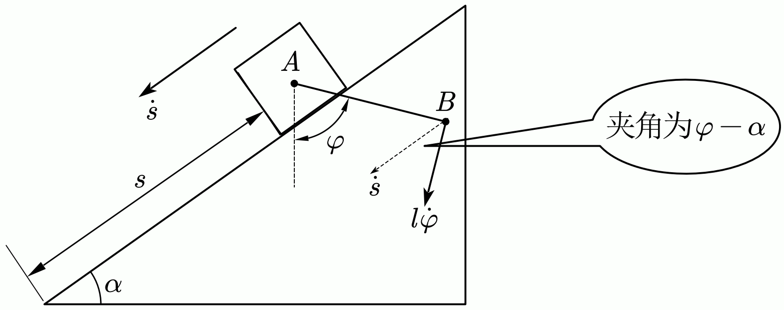
$$r\dot{\theta}^2+\left(l+r\theta\right)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0.$$

6.13

倾角为 α 的光滑固定尖劈上放有一质量为 m_1 的滑块 A, 上面用铰链与轻杆连接, 轻杆又与一小球 B 相连, 轻杆只能在竖直面内运动. 已知杆长为 l, 小球质量为 m_2. 试用拉格朗日方程建立滑块、轻杆和小球组成的系统的运动微分方程.

作答

滑块、轻杆和小球组成的系统可以沿尖劈斜面下滑, 小球 B 在所研究的系统（非惯性系）中可以滑块 A 转动, 构成一个摆, 故系统自由度 $s=2$.



选取滑块到斜面底端的距离 s 和摆的摆角（与竖直线的夹角）φ 为广义坐标.

滑块 A（相对惯性系的）动能为

$$T_A=\frac{1}{2}m_1\dot{s}^2.$$

已知小球 B 在非惯性系（摆）中绕 A 转动的角速度为 $\dot{\varphi}$, 其线速度 $l\dot{\varphi}$ 与 $\dot{s}$ 的夹角为 $\varphi-\alpha$, 将其沿平行于斜面（也就是 $\dot{s}$ 的方向）和垂直于斜面的方向分解, 得到

$$v_B^{\parallel}=\dot{s}+l\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\,,\ v_B^{\perp}=l\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)\,.$$

那么其动能也可表为与广义坐标的函数, 即

$$T_B=\frac{1}{2}m_2\left[\left(v_B^{\parallel}\right)^2+\left(v_B^{\perp}\right)^2\right]=\frac{1}{2}m_2\left[\dot{s}^2+(l\dot{\varphi})^2+2\dot{s}l\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\right].$$

观察括号内式子的结构, 可以体会到, 小球 B 相对惯性系的速度 v_B 其实是线速度 $l\dot{\varphi}$ 与系统沿斜面下滑的速度 $\dot{s}$ 的矢量和, 计算遵循余弦定理.

选取斜面底端为重力势能 V 的零势能面, 那么滑块和小球的重力势能分别为

$$V_A=m_1gs\sin\alpha,\ V_B=m_2g(s\sin\alpha-l\cos\varphi)\,.$$

所以系统的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L&=(T_A+T_B)-(V_A+V_B)\\&=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{s}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-(m_1+m_2)gs\sin\alpha+m_2gl\cos\varphi\end{aligned}$$

将其分别代入下面的 2 个拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{s}}-\frac{\partial L}{\partial s}=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

得到

$$(m_1+m_2)\ddot{s}+m_2l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)+(m_1+m_2)g\sin\alpha=0$$

$$m_2l^2\ddot{\varphi}+m_2l\ddot{s}\cos(\varphi-\alpha)+m_2l\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)-m_2l\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)+m_2gl\sin\varphi=0$$

第 2 个方程可以稍作化简, 即 $l\ddot{\varphi}+\ddot{s}\cos(\varphi-\alpha)+g\sin\varphi=0$.

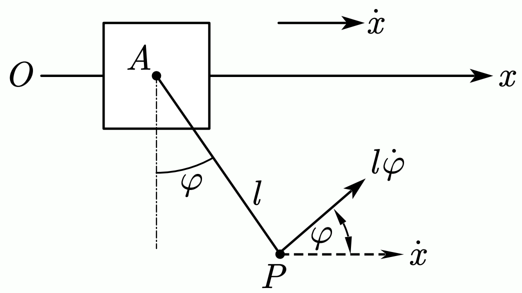
6.14

质量为 m_1 的滑块 A 可以沿水平轴 x 运动. 质量为 m_2 的小球 P 经长为 l 的轻杆与滑块相连, 组成的摆可以在竖直平面内摆动, 试写出下面两种情况下的拉格朗日函数, 并判断存在哪些第一积分.

（1）滑块在 x 轴上自由滑动;

（2）滑块以 $x=A\sin\omega t$ 的规律在 x 轴上滑动（A 和 ω 为常量）.

作答



（1）滑块在 x 轴上不受约束地自由滑动, 系统的自由度 $s=2$, 故选取滑块坐标 x 与轻杆和滑块组成的摆的摆角 φ 为广义坐标.

滑块 A 的动能可表为

$$T_A=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2.$$

与 6.13 类似, 小球 P 在非惯性系（摆）中绕滑块 A 转动的角速度为 $\dot{\varphi}$, 其线速度 $l\dot{\varphi}$ 与系统沿 x 运动的速度 $\dot{x}$ 的夹角为 $\pi-\varphi$. 由余弦定理得, 小球 P 相对惯性系的速度满足

$$v_P^2=\dot{x}^2+(l\dot{\varphi})^2+2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

故其动能与广义坐标的函数关系为

$$T_P=\frac{1}{2}m_2v_P^2=\frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2+(l\dot{\varphi})^2+2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi\right].$$

选取水平轴 x 所在的平面为重力势能的零势能面, 那么滑块 A 和小球 P 的重力势能分别为

$$V_A=0,\ V_P=-m_2gl\cos\varphi.$$

至此可得系统的拉格朗日函数

$$\begin{aligned}L(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi},t)&=(T_A+T_P)-(V_A+V_P)\\&=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+m_2gl\cos\varphi\end{aligned}$$

考查该系统的广义动量积分, 由于拉格朗日函数不显含广义坐标 x, 即 $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, 那么与 x 对应的广义动量积分为

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi=\text{常量}.$$

考查广义能量积分, 拉格朗日函数不显含时间 t, 即 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$. 另一方面, 坐标 x 不显含时间 t, 动能

$$T=T_A+T_P=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

不含除广义坐标、广义速度和时间 t 之外的其他变量, 且是广义速度（$\dot{x}$ 和 $\dot{\varphi}$）的二次齐次函数, 那么

$$T_1=T_0=0,\ T=T_2,$$

所以系统具有广义能量积分, 机械能守恒, 即

$$H=E=T+\left(V_A+V_P\right)=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi-m_2gl\cos\varphi=\text{常量}.$$

（2）滑块在 x 轴上滑动时受到约束 $x=A\sin\omega t$, 所以自由度 $s=1$, 选取摆的摆角 φ 为广义坐标. 要计算拉格朗日函数, 只需将（1）的结果中的 $\dot{x}$ 替换为 $A\omega\cos\omega t$, 所以

$$L\left(\varphi,\dot{\varphi},t\right)=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\left(A\omega\cos\omega t\right)^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\left(A\omega\cos\omega t\right)\dot{\varphi}\cos\varphi+m_2gl\cos\varphi$$

显然, 拉格朗日函数中同时显含广义坐标 φ 和广义速度 $\dot{\varphi}$, 也显含时间 t, 也就是

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}\neq 0,\ \frac{\partial L}{\partial t}\neq 0,$$

所以该系统不存在广义动量积分和广义能量积分.

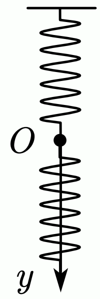
第 7 章　哈密顿动力学

7.2

质量为 m 的质点连接 2 个劲度系数为 k 的轻弹簧, 在竖直线上运动, 弹簧的原长均为固定点间距离的一半. 试写出系统的哈密顿函数, 并用正则方程写出质点的运动微分方程.

作答

建立如图所示的 y 轴, 方向竖直向下, 原点 O 在弹簧自由伸长处.



质点 m 和两弹簧组成的系统在竖直线上运动, 自由度 $s=1$, 故以质点坐标 y 为广义坐标. 系统的动能可表为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2=T_2,$$

该式说明动能表达式为广义速度 $\dot{y}$ 的二次齐项式.

系统的势能由两个弹簧的弹性势能和质点 m 的重力势能组成, 以原点 O 为势能零点, 可得

$$V=2\times\frac{1}{2}ky^2-mgy=ky^2-mgy.$$

据此, 广义能量为

$$H=T_2-T_0+V=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+ky^2-mgy. \tag{49}$$

广义动量可表为

$$p_y=\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=m\dot{y},$$

反解出

$$\dot{y}=\frac{p_y}{m},$$

将其代入广义能量的表达式 (49) 即可得到系统的哈密顿函数

$$H=\frac{p_y^2}{2m}+ky^2-mgy.$$

因为系统是理想完整有势系, 所以质点的运动微分方程可以用正则方程写出

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}$$

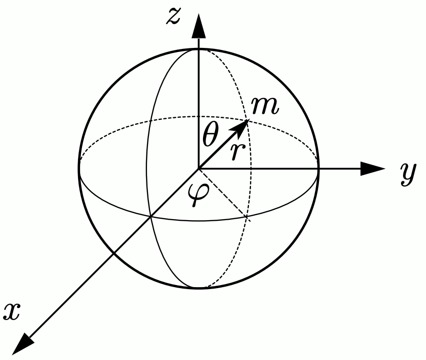
$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=-2ky+mg$$

7.3

一质量为 m 的质点, 在半径为 R 的光滑固定球面上运动, 试建立此质点的正则方程, 并判断存在的守恒量.

作答

建立如图所示的球坐标系, 质点 m 在光滑固定球面上运动, 所以自由度 $s=2$, 选取球坐标 θ 和 φ 为广义坐标.



质点 m 在球坐标中的动能一般式为

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right),$$

这里 $r=R$, 所以

$$T=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2+R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)=T_2,$$

该式说明动能表达式为广义速度 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\varphi}$ 的二次齐项式.

以平面 xOy 为重力势能的零势能面, 质点的重力势能可表为

$$V=mgr\cos\theta=mgR\cos\theta.$$

据此, 广义能量为

$$H=T_2-T_0+V=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2+R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+mgR\cos\theta. \tag{50}$$

广义动量可表为

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=mR^2\dot{\theta},p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta.$$

反解出

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2},\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}.$$

将其代入广义能量的表达式 (50) 即可得到系统的哈密顿函数

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}m\left[R^2\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2+R^2\left(\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}\right)^2\sin^2\theta\right]+mgR\cos\theta\\&=\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{R^2}+\frac{p_\varphi^2}{R^2\sin^2\theta}\right)+mgR\cos\theta\end{aligned}$$

系统是理想完整有势系, 所以质点存在正则方程

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2} \qquad \dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta}+mgR\sin\theta$$
$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta} \qquad \dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$$

考察广义动量积分, 因为

$$\frac{\partial H}{\partial \theta}\neq 0, \frac{\partial H}{\partial \varphi}=0,$$

所以系统与 φ 对应的广义动量守恒, 即

$$p_\varphi=\text{常量}.$$

考察广义能量积分, 因为

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0, T=T_2,$$

所以系统机械能守恒, 即

$$H=T+V=E=\text{常量}.$$

7.4

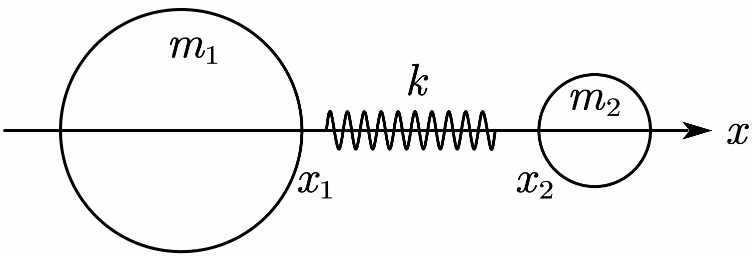
质量分别为 m_1 和 m_2 的小球同串在一根光滑的水平杆上, 两球用劲度系数为 k 的弹簧连接, 弹簧原长为 l.

(1) 试从哈密顿函数判断是否存在广义能量积分和广义动量积分, 并写出表达式.

(2) 用正则方程写出两小球的运动微分方程.

作答

小球 m_1 和 m_2 与弹簧组成的系统在水平线上运动, 存在自由度 $s=2$. 建立如图所示的 x 轴, 以弹簧与两小球的连接点坐标 x_1 和 x_2 为系统的广义坐标.



系统的动能可表为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2=T_2,$$

该式说明动能表达式为广义速度 $\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 的二次齐项式.

系统的势能为弹簧的弹性势能, 题目指出弹簧原长为 l, 故

$$V=\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1-l\right)^2.$$

据此, 可得广义能量

$$H=T_2-T_0+V=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1-l\right)^2. \tag{51}$$

广义动量可表为

$$p_{x_1}=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1,p_{x_2}=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2.$$

反解出

$$\dot{x}_1=\frac{p_{x_1}}{m_1},\dot{x}_2=\frac{p_{x_2}}{m_2}.$$

将其代入广义能量的表达式 (51) 即可得到系统的哈密顿函数

$$H=\frac{p_{x_1}^2}{2m_1}+\frac{p_{x_2}^2}{2m_2}+\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1-l\right)^2.$$

因为

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0,T=T_2,$$

所以系统存在广义能量积分, 且机械能守恒

$$H=T+V=E=\text{常量}.$$

因为

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=-k\left(x_2-x_1-l\right)\neq 0,\frac{\partial H}{\partial x_2}=k\left(x_2-x_1-l\right)\neq 0,$$

所以系统不存在广义动量积分.

系统是理想完整有势系, 所以两小球的运动微分方程可以用正则方程写出

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=\frac{p_{x_1}}{m_1} & \dot{p}_{x_1}&=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=k\left(x_2-x_1-l\right)\\
\dot{x}_2&=\frac{p_{x_2}}{m_2} & \dot{p}_{x_2}&=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-k\left(x_2-x_1-l\right)
\end{aligned}$$