§5.2 质点系的角动量定理及角动量守恒定律

一、质点系对参考点的角动量定理和角动量守恒定律

一般地假定，质点系由 N 个质点所组成，第 i 个质点的质量为 m_i。某时刻，m_i 的位置矢量为 $\vec{r}_i$，速度为 $\vec{v}_i$，它所受到的力

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i\text{内}} + \vec{F}_{i\text{外}}$$

则该时刻，m_i 对坐标原点的角动量

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

m_i 受到的对坐标原点的力矩

$$\begin{aligned}\vec{M}_i &= \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\text{内}} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\text{外}} \\ &= \vec{M}_{i\text{内}} + \vec{M}_{i\text{外}}\end{aligned}$$

该时刻，整个质点系对坐标原点的角动量定义为该时刻所有质点对坐标原点的角动量的矢量和

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)]$$

该时刻，整个质点系受到的对坐标原点的力矩定义为该时刻所有质点受到的对坐标原点的力矩的矢量和

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{M}_{\text{内}} + \vec{M}_{\text{外}}$$

$$\vec{M}_{\text{内}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i\text{内}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\text{内}})$$

$$\vec{M}_{\text{外}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i\text{外}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\text{外}})$$

m_i 对坐标原点的角动量定理

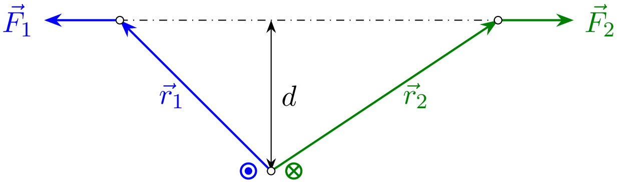
$$\vec{M}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

对所有质点求和

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

- 一对作用力和反作用力，大小相等、方向相反，作用线在同一条直线



它们对任意参考点的力矩大小相等、方向相反，因此一对作用力和反作用力对任意参考点的力矩的矢量和永远为零。

- 质点系的内力是一对对作用力和反作用力，因此

$$\vec{M}_{内} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i内} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i内}) = \vec{0}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{内} + \vec{M}_{外} = \vec{M}_{外}$$

- 质点系对坐标原点的角动量随时间的变化率等于质点系各质点所受外力对坐标原点的力矩的矢量和，这就是质点系对坐标原点的角动量定理。

$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

- 当质点系各质点所受外力对坐标原点的力矩的矢量和始终为零时，质点系对坐标原点的角动量保持不变，这就是质点系对坐标原点的角动量守恒定律。

二、质点系对轴的角动量定理和角动量守恒定律

m_i 对 z 轴的角动量定理

$$M_{iz} = M_{i\text{内}z} + M_{i\text{外}z} = \frac{\mathrm{d}L_{iz}}{\mathrm{d}t}$$

对所有质点求和

$$\sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}L_{iz}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sum\limits_{i=1}^{N} L_{iz}}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} M_{i\text{内}z} + \sum_{i=1}^{N} M_{i\text{外}z} = \sum_{i=1}^{N} M_{i\text{外}z}$$

质点系对 z 轴的角动量

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz}$$

质点系所有质点所受外力对 z 轴的力矩

$$M_{\text{外}z} = \sum_{i=1}^{N} M_{i\text{外}z}$$

- 质点系对 z 轴的角动量随时间的变化率等于质点系各质点所受外力对 z 轴的力矩之和，这就是质点系对 z 轴的角动量定理。

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

- 当质点系各质点所受外力对 z 轴的力矩之和始终为零时，质点系对 z 轴的角动量保持不变，这就是质点系对 z 轴的角动量守恒定律。

如果质点系中各个质点都绕同一个轴 (设为 z 轴) 做圆周运动，第 i 个质点对 z 轴的角动量

$$L_{iz} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_i$$

其中 r_i 为 m_i 到 z 轴的距离，ω_i 为 m_i 绕 z 轴做圆周运动的角速度，则整个质点系对 z 轴的角动量

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2 \omega_i)$$

如果所有质点绕 z 轴做圆周运动的角速度相同，即 $\omega_i = \omega$，则

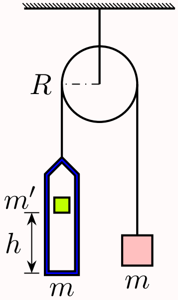
$$L_z = \sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2 \omega_i) = \left[\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2)\right] \omega = I\omega$$

其中 $I = \sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2)$ 为整个质点系对 z 轴的转动惯量。

- 如果质点系各质点所受外力对 z 轴的力矩之和为零，则质点系对 z 轴的角动量守恒。
- 当质点系中 m_j 到 z 轴的距离 r_j 发生了变化而其他质点到 z 轴的距离保持不变，则整个质点系对 z 轴的转动惯量 I 将发生变化，因此 ω 发生变化：
  - 若 r_j 变大，则 I 变大，ω 变小
  - 若 r_j 变小，则 I 变小，ω 变大

例题

如图所示，滑轮两边悬挂的重物与盘的质量相同而处于平衡，现有距盘底高为 h 质量为 m' 的胶泥自由下落，求胶泥粘在盘上时盘获得的初速度。滑轮和绳质量不计，不计轴承摩擦及绳的伸长。



解答

- 以重物、盘、胶泥为研究对象，以轴承为参考轴，以垂直纸面向外为轴的正方向(对轴的力矩和角动量的正方向)。胶泥自由下落碰到盘前的速度方向向下，大小为 $v_0 = \sqrt{2gh}$，设胶泥粘到盘上后胶泥和盘的速度方向向下，大小为 v，由于绳不可伸长，因此重物的速度方向向上，大小也是 v。
- 在胶泥粘到盘上的过程中，系统所受外力有：重物、盘、胶泥受到的重力，绳子对重物的拉力，绳子对盘的拉力；内力有胶泥与盘之间碰撞过程的冲击力。通常认为碰撞过程冲击力远大于外力【这里绳子的两个拉力呢？】，而且碰撞时间很短，因此忽略外力对轴的力矩，认为系统对轴的角动量守恒

$$Rm'v_0 = R(m+m')v + Rmv$$

$$v = \frac{m'v_0}{2m+m'} = \frac{m'}{2m+m'}\sqrt{2gh}$$

习题 5.2.3

两个滑冰运动员的质量各为 $70\ \mathrm{kg}$，以 $6.5\ \mathrm{m/s}$ 的速率沿相反方向滑行，滑行路线间的垂直距离为 $10\ \mathrm{m}$。当彼此交错时，各抓住长为 $10\ \mathrm{m}$ 绳索的一端，然后相对旋转。(1) 在抓住绳索一端之前，各自对绳中心的角动量是多少？抓住之后是多少？(2) 他们各自收拢绳索，到绳长为 $5\ \mathrm{m}$ 时，各自的速率如何？(3) 绳长为 $5\ \mathrm{m}$ 时，绳内张力多大？(4) 二人在收拢绳索时，各做了多少功？(5) 总动能如何变化？

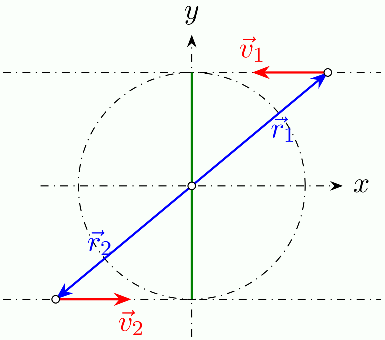
解答

以滑冰运动员和绳子为研究对象，两个滑冰运动员分别受到竖直方向的重力和地面的支持力，抓住绳子后还受到绳子的拉力，其中，重力和地面支持力的合力为零，所以它们对绳子中点的力矩为零；而绳子的拉力一定通过绳子中点，所以它对绳子中点的力矩也为零。所以每个滑冰运动员所受到的力对绳子中点的力矩均为零，由角动量定理，滑冰运动员对绳子中点的角动量守恒，因此抓住绳索前后，他们对绳子中点的角动量不变。

解答

以绳子中点为坐标原点，如图建立直角坐标系，依题意，有

$$m_1 = m_2 = 70$$
$$\vec{r}_1 = x_1\,\vec{\mathrm{e}}_x + 5\,\vec{\mathrm{e}}_y, \vec{r}_2 = x_2\,\vec{\mathrm{e}}_x - 5\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v}_1 = -6.5\,\vec{\mathrm{e}}_x, \vec{v}_2 = 6.5\,\vec{\mathrm{e}}_x$$



所以他们对绳子中点的角动量为

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \cdots = 2275\,\vec{\mathrm{e}}_z\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$
$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \cdots = 2275\,\vec{\mathrm{e}}_z\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

解答

由于整个系统所受合力为零，所以系统的质心 (绳子中点) 加速度为零且速度为零【因为初始时刻系统动量为零】，即质心静止不动。所以二人抓住绳子后，绕质心做圆周运动，所以滑冰运动员的速度垂直于绳子。

由角动量守恒定律可得

$$L_1 = m_1 v_3 r_3$$
$$L_2 = m_2 v_4 r_4$$
$$2275 = 70 \times v_3 \times 2.5$$
$$2275 = 70 \times v_4 \times 2.5$$
$$v_3 = v_4 = 13\ \mathrm{m/s}$$

解答

滑冰运动员做圆周运动的向心力由绳子的拉力提供，所以

$$T=\frac{m_1v_3^2}{r_3}=\frac{70\times13^2}{2.5}=4732\ \mathrm{N}$$

以滑冰运动员为研究对象，重力和地面支持力不做功，动能发生变化，就是由人拉绳子时所做的功，由动能定理得

$$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}m_1v_3^2-\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}\times70\times(13^2-6.5^2)=4436.25\ \mathrm{J}$$

总动能增加了

$$2\Delta E_k=8872.5\ \mathrm{J}$$