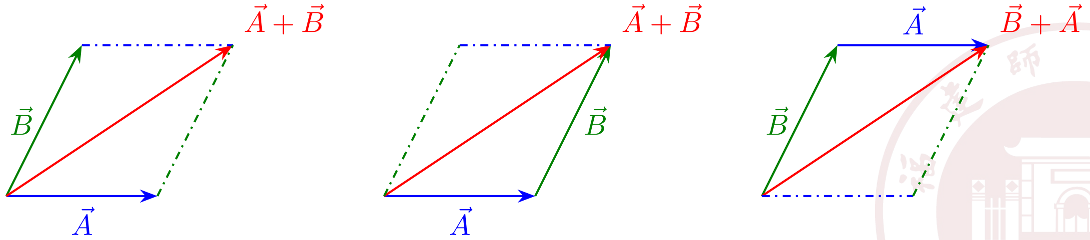
矢量代数初步

一、矢量

- 既有大小又有方向，而且加法满足平行四边形法则或三角形法则的量称为矢量，一般地记为 $\vec{A}$



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

- 矢量的大小也称为矢量的模，记为

$$A = |\vec{A}|$$

- 长度为 1 的矢量称为单位矢量 (基矢)
- 长度为 0 的矢量称为零矢量，记为 $\vec{0}$
- 矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量记为

$$\vec{\mathrm{e}}_A \equiv \frac{\vec{A}}{A}$$

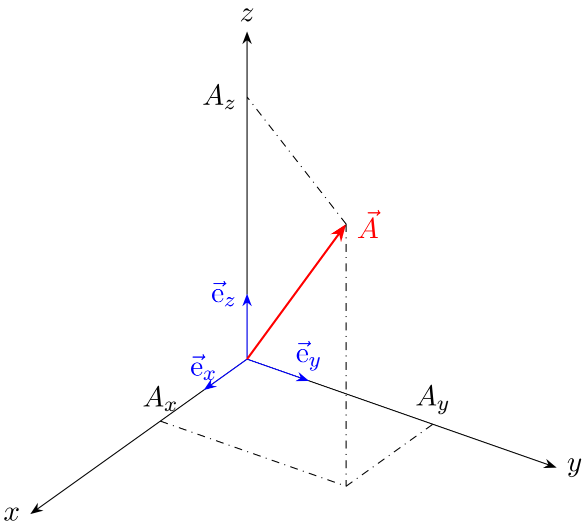
- 矢量 $\vec{A}$ 可以一般地表示为

$$\vec{A} = A\,\vec{\mathrm{e}}_A$$

- 在三维直角坐标系中，任意矢量 $\vec{A}$ 可以一般地表示成

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\ &= (A_x, A_y, A_z)\end{aligned}$$

- $\vec{\mathrm{e}}_x$、$\vec{\mathrm{e}}_y$、$\vec{\mathrm{e}}_z$：沿三个坐标轴的单位矢量
- A_x、A_y、A_z：矢量 $\vec{A}$ 沿三个坐标轴的**分量**，A_x、A_y、A_z 可正可负可零
- $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
- $A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x$、$A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y$、$A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$：矢量 $\vec{A}$ 沿三个坐标轴的**分矢量**



- 从坐标原点指向 (x, y, z) 处的矢量称为该处的位置矢量，通常记为

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\ &= (x, y, z)\end{aligned}$$

所以

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- 两个矢量相等，表示两个矢量的大小和方向均相同，因此对应的分量相等
- 若 $\vec{A}=\vec{B}$，则有

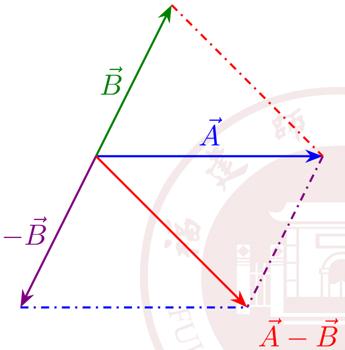
$$A_x=B_x, A_y=B_y, A_z=B_z$$
$$A=B, \vec{\mathrm{e}}_A=\vec{\mathrm{e}}_B$$

- 若 $\vec{A}=-\vec{B}$，则表示两个矢量的大小相等，方向相反

$$A_x=-B_x, A_y=-B_y, A_z=-B_z$$
$$A=B, \vec{\mathrm{e}}_A=-\vec{\mathrm{e}}_B$$

- 矢量相减可以看成矢量相加的一种特例

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



二、矢量的基本运算

- 矢量的加减
  - 两个矢量相加或相减，其结果仍然是一个矢量
  - 矢量加减的运算规则：对应的分量相加减

$$\vec{A} = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z$$
$$\vec{B} = B_x\,\vec{e}_x + B_y\,\vec{e}_y + B_z\,\vec{e}_z$$
$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \pm \vec{B}\\ &= (A_x \pm B_x)\,\vec{e}_x + (A_y \pm B_y)\,\vec{e}_y + (A_z \pm B_z)\,\vec{e}_z\end{aligned}$$
$$C_x = A_x \pm B_x, C_y = A_y \pm B_y, C_z = A_z \pm B_z$$

  - 矢量加减运算的基本性质

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$
$$\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$$

- 矢量加法运算的推广：多个矢量之和

$$\vec{A}_i = A_{ix}\,\vec{e}_x + A_{iy}\,\vec{e}_y + A_{iz}\,\vec{e}_z$$
$$\begin{aligned}\vec{B} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i\\ &\equiv \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \cdots + \vec{A}_n\end{aligned}$$
$$B_x = \sum_{i=1}^{n} A_{ix}$$
$$B_y = \sum_{i=1}^{n} A_{iy}$$
$$B_z = \sum_{i=1}^{n} A_{iz}$$

- 数乘矢量
  - 设 m 为任意一个数，

$$\vec{A} = A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

则

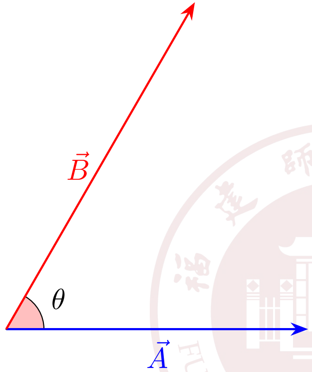
$$m\vec{A} = mA_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + mA_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + mA_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

- 矢量点乘
  - 两个矢量点乘的结果是一个标量，所以点乘也称为点积、标积、标量积，dot product，the scale product
  - 若

$$\vec{A} = A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z = A\,\vec{\mathrm{e}}_A$$
$$\vec{B} = B_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + B_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + B_z\,\vec{\mathrm{e}}_z = B\,\vec{\mathrm{e}}_B$$

则

$$\begin{aligned} C &= \vec{A}\cdot\vec{B} \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= AB\,\vec{\mathrm{e}}_A\cdot\vec{\mathrm{e}}_B \\ &= AB\cos\theta \end{aligned}$$



θ 是矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 之间小于 180° 的夹角

- 矢量点乘
  - 矢量点乘运算的基本性质

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=1,\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=1,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1$$
$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=0,\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=0,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=0$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$$
$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$

例题

恒力 $\vec{F}$ 作用在质点上使之发生位移 $\Delta\vec{r}$ 时对质点所做的功就是力和位移的点乘积

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F|\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

一般地，

$$\vec{F}=F_x\,\vec{e}_x+F_y\,\vec{e}_y+F_z\,\vec{e}_z$$
$$\Delta\vec{r}=\Delta x\,\vec{e}_x+\Delta y\,\vec{e}_y+\Delta z\,\vec{e}_z$$
$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$$

- 矢量叉乘
  - 两个矢量叉乘的结果是一个矢量，所以叉乘也称为叉积、矢积、矢量积，cross product，the vector product
  - 若

$$\vec{A} = A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z = A\,\vec{\mathrm{e}}_A$$

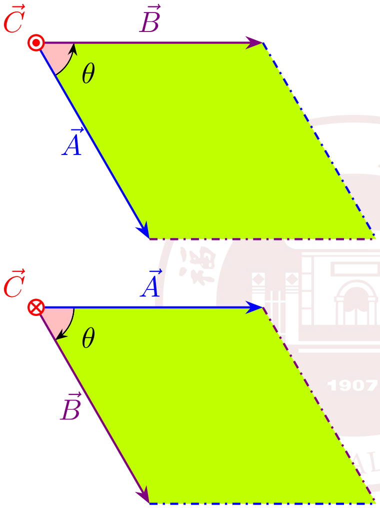
$$\vec{B} = B_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + B_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + B_z\,\vec{\mathrm{e}}_z = B\,\vec{\mathrm{e}}_B$$

则

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C\,\vec{\mathrm{e}}_C$$

$$C = AB\sin\theta$$

方向遵从右手螺旋关系：右手四个手指从矢量 $\vec{A}$ 沿着小于 180° 的夹角转向矢量 $\vec{B}$，则大姆指的方向就是 $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ 的方向



- 矢量叉乘
  - 矢量叉乘运算的基本性质

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z, \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x, \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

例题

力学中作用在 (x, y, z) 处的力 $\vec{F}$ 对坐标原点的力矩就定义为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z \\
\vec{B} &= B_x\,\vec{e}_x + B_y\,\vec{e}_y + B_z\,\vec{e}_z \\
\vec{C} &= \vec{A}\times\vec{B} \\
&= (A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z)\times(B_x\,\vec{e}_x + B_y\,\vec{e}_y + B_z\,\vec{e}_z) \\
&= A_x\,\vec{e}_x\times B_x\,\vec{e}_x + A_x\,\vec{e}_x\times B_y\,\vec{e}_y + A_x\,\vec{e}_x\times B_z\,\vec{e}_z \\
&+ A_y\,\vec{e}_y\times B_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y\times B_y\,\vec{e}_y + A_y\,\vec{e}_y\times B_z\,\vec{e}_z \\
&+ A_z\,\vec{e}_z\times B_x\,\vec{e}_x + A_z\,\vec{e}_z\times B_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z\times B_z\,\vec{e}_z \\
&= \vec{0} + A_xB_y\,\vec{e}_z + A_xB_z(-\vec{e}_y) + A_yB_x(-\vec{e}_z) + \vec{0} + A_yB_z\,\vec{e}_x + A_zB_x\,\vec{e}_y + A_zB_y(-\vec{e}_x) + \vec{0} \\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

用三乘三行列式表示

$$
\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}
$$

- 矢量函数的求导
  - 物理学中，当某个矢量 $\vec{A}$ 随着时间 t 发生变化时，我们称矢量 $\vec{A}$ 是时间 t 的函数，此时 $\vec{A}$ 是一个矢量函数，则显然一般情况下，它的大小和方向都会随着时间 t 发生变化

$$\begin{aligned}\vec{A}(t) &= A(t)\,\vec{\mathrm{e}}_A(t)\\ &= A_x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z(t)\,\vec{\mathrm{e}}_z\end{aligned}$$

  - 在直角坐标系中，三个沿坐标轴方向的单位矢量 $\vec{\mathrm{e}}_x$、$\vec{\mathrm{e}}_y$、$\vec{\mathrm{e}}_z$ 不随时间发生变化

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_x}{\mathrm{d}t} = \vec{0}, \frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_y}{\mathrm{d}t} = \vec{0}, \frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

  - 函数求导的运算法则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_x\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_y\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_z + A_z\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_z}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_x + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_y + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_z
\end{aligned}
$$

假定 f、$\vec{A}$、$\vec{B}$ 都是 t 的函数

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}+\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(f\vec{A})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec{A}+f\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\times\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

- 矢量没有求商的运算，分母不能为矢量
- 矢量的积分较为复杂，一般化成直角坐标系中各个分量的积分