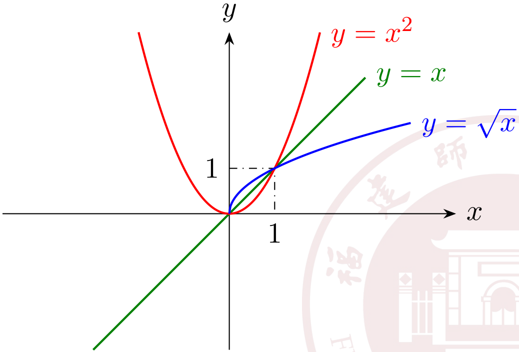
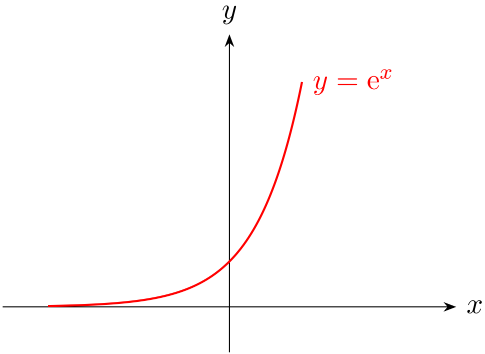
函数

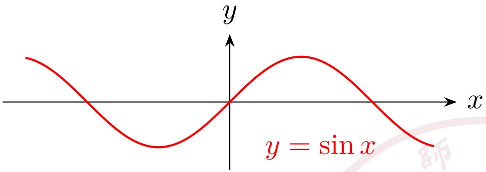
一、函数

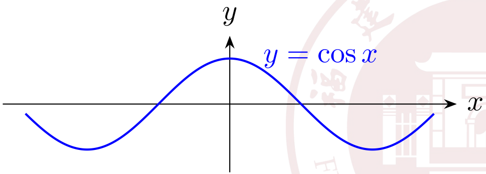
- 当自变量 x 在一定范围【定义域】内发生变化时，因变量 y 按照一定的规律相应地发生变化，一般地记为 $y=f(x)$
- 一个 x 只能有一个 y
- 常见的函数

$$y=x^n$$
$$y=\mathrm{e}^x$$
$$y=\sin x$$
$$y=\cos x$$









- 若 $y=f(z)$ 且 $z=g(x)$，则 $y=f[g(x)]$ 称 y 为 x 的复合函数，$z=g(x)$ 称为中间变量

例题

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(\varphi) = A\cos\varphi$$

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

x 是 t 的复合函数，中间变量 $\varphi = \omega t + \varphi_0$

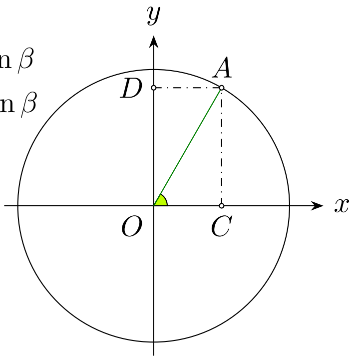
二、常用三角函数公式

- 两角和公式

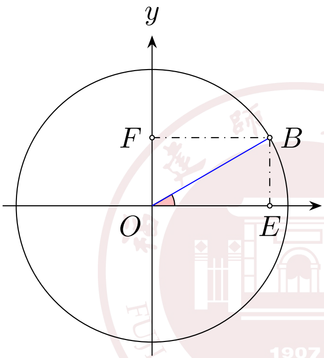
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

- 倍角公式

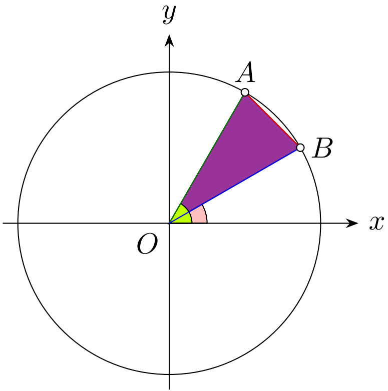
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

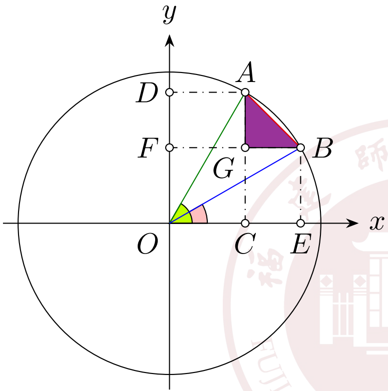


$$OA = 1$$
$$\angle AOx = \alpha$$
$$OC = \cos\alpha$$
$$OD = \sin\alpha$$



$$OB = 1$$
$$\angle BOx = \beta$$
$$OE = \cos\beta$$
$$OF = \sin\beta$$





$\triangle OAB$ 中，余弦定理

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\
&= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}
$$

$\triangle GAB$ 中，勾股定理

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= GA^2 + GB^2 \\
&= (OD - OF)^2 + (OE - OC)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\
&= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \\
AB^2 &= GA^2 + GB^2 \\
&= (OD - OF)^2 + (OE - OC)^2 \\
&= (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\beta - \cos\alpha)^2 \\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\
&= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha-\beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]\\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\
&= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin[\alpha-(-\beta)]\\
&= \sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

- 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

- 积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\alpha = A + B, \beta = A - B$$

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2}, B = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha = \sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin\beta = \sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin A\cos B$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos A\sin B$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha = \cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos\beta = \cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos A\cos B$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin A\sin B$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

三、极限

- 当自变量 x 无限逼近 x_0【$x = x_0 + 0^+$，$x = x_0 + 0^-$】时，如果函数 $y = f(x)$ 无限地逼近 A，则称函数 y 在 x_0 的极限为 A，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

- 若函数在 x_0 有定义【x_0 在定义域内】，则在该处的函数值即为其极限

例题

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

- 若函数在 x_0 无定义【x_0 在定义域外】,
  - 但在其左右邻域有相同的取值，即若 $f(x_0+0^+)=f(x_0+0^-)=A$，则该值即为函数在该处的极限

例题

求函数 $y=\frac{1-x^2}{1+x}$ 在 $x=-1$ 处的极限

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{1+x}$$

解答

函数 $y=\frac{1-x^2}{1+x}$ 在 $x=-1$ 处无定义
当 $x=-1+0^+=-0.99999$ 时，

$$y=\frac{1-(-0.99999)^2}{1+(-0.99999)}=\frac{(1-0.99999)(1+0.99999)}{1-0.99999}=1.99999\to 2$$

当 $x=-1+0^-=-1.00001$ 时，

$$y=\frac{1-(-1.00001)^2}{1+(-1.00001)}=\frac{(1+1.00001)(1-1.00001)}{1-1.00001}=2.00001\to 2$$

所以

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{1+x}=2$$

- 若函数在 x_0 无定义【x_0 在定义域外】，
  - 若 $f(x_0+0^+) \neq f(x_0+0^-)$，则函数在 x_0 处无极限

例题

求函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$$

解答

函数 $y = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处无定义

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 0^+\right) \to -\infty$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 0^-\right) \to +\infty$$

$y = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处无极限