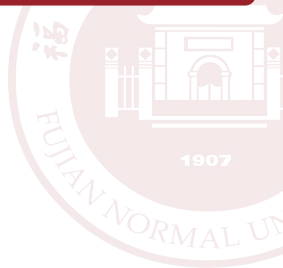


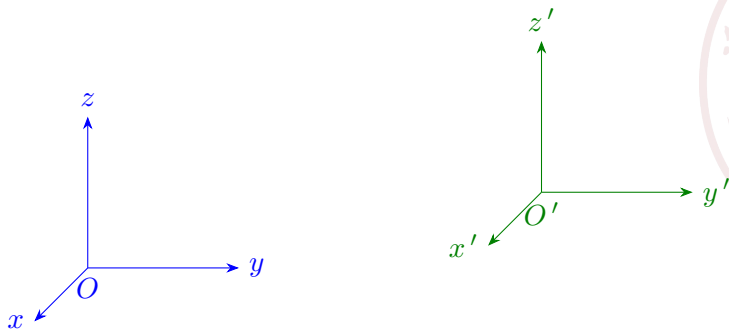
§2.8 伽利略变换



一、伽利略变换

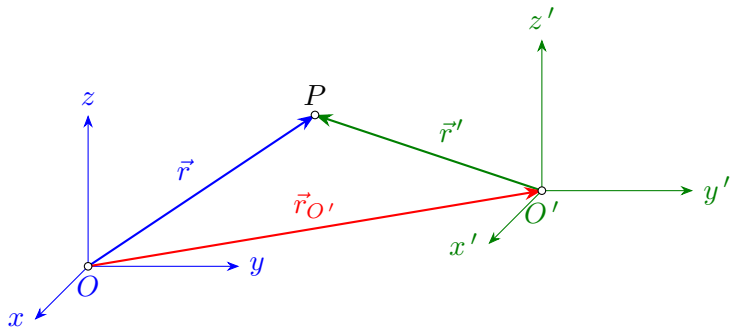


- 同一个物体的运动，从不同的参考系观察，得到的描述不尽相同
- 选择其中一个参考系作为基本参考系，称为 O 系，在其中建立直角坐标系 $Oxyz$
- 另一参考系作为运动参考系，称为 O' 系，在其中建立直角坐标系 $O'x'y'z'$
- 假定 $t = 0$ 时刻，两坐标系完全重合，之后 O' 系相对 O 系以速度 \vec{v}_0 作**匀速直线运动**，运动过程中保持两坐标系的相应坐标轴始终平行



某时刻, 质点出现于 P 处, 从基本参考系上观测到的质点的位置矢量为 \vec{r} , 从运动参考系上观测到的质点的位置矢量为 \vec{r}' , 此时运动参考系的坐标原点相对基本参考系坐标原点的位置矢量为 $\vec{r}_{O'}$

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$



从基本参考系上观测到质点出现于 P 处的时刻为 t , 从运动参考系上观测到质点出现于 P 处的时刻为 t' , 经典力学认为, $t = t'$



$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

$$t = t'$$

$$\vec{r}_{O'} = \vec{v}_0 t' = \vec{v}_0 t$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t' + \vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t$$

$$x' = x - v_{0x} t$$

$$y' = y - v_{0y} t$$

$$z' = z - v_{0z} t$$

$$t' = t$$

从基本参考系到运动参考系的时空变换关系称为伽利略变换

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t'$$

$$x = x' + v_{0x} t'$$

$$y = y' + v_{0y} t'$$

$$z = z' + v_{0z} t'$$

$$t = t'$$

从运动参考系到基本参考系的时空变换关系称为伽利略逆变换



二、经典时空观



伽利略变换中蕴含着经典的时空观 (绝对时空观)

- 时间和空间是相对独立的
- 时间测量和空间测量与参考系的运动状态无关

相对论时空观

- 时间和空间是相互关联的
- 时间和空间与物体的运动状态有关

从基本参考系上观测到质点 A 出现于 P_1 处的时刻为 t_1 , 质点 B 出现于 P_2 处的时刻为 t_2 , 从运动参考系上观测到质点 A 出现于 P_1 处的时刻为 t'_1 , 质点 B 出现于 P_2 处的时刻为 t'_2 , 则有

$$t'_1 = t_1$$

$$t'_2 = t_2$$

$$t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$$

在两个参考系中观测, 两个事件的时间间隔是相同的。

若在基本参考系上观测时两个事件是同时发生的, 即 $t_2 = t_1$, 则有 $t'_2 = t'_1$, 即在运动参考系上观测时两个事件也是同时发生的。



假定 $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ ，即运动参考系相对基本参考系沿 x 轴做匀速直线运动。有一根杆相对运动参考系静止放置在 x' 轴上随运动参考系一起运动。如果在运动参考系上，杆的两端的坐标分别为 x'_1 和 x'_2 ，则在运动参考系上测得杆的长度为 $L' = |x'_2 - x'_1|$ 。如果要在基本参考系上测量此杆的长度，需要在**同一时刻**确定杆两端的位置

$$x_1 = x'_1 + v_0 t$$

$$x_2 = x'_2 + v_0 t$$

则在基本参考系上测得杆的长度为

$$L = |x_2 - x_1| = |x'_2 - x'_1| = L'$$



三、伽利略速度变换关系



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_{O'} + \vec{r}' \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{v}_{O'} &= \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}_0 \\ \vec{v}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt}\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$

- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 为在基本参考系上测得的 P 的速度, 称为绝对速度
- $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ 为在运动参考系上测得的 P 的速度, 称为相对速度
- $\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}_0$ 为在基本参考系上测得的运动参考系坐标原点的速度, 称为牵连速度

伽利略速度变换关系

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$

绝对速度等于相对速度加上牵连速度

四、加速度在伽利略变换下为不变量



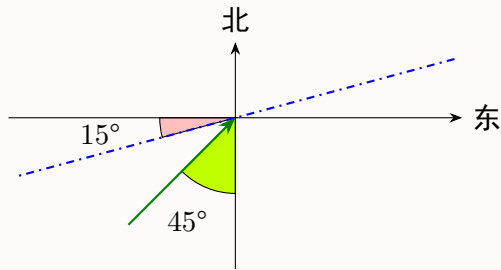
$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}' \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{a}_{O'} &= \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{0} \\ \vec{a}' &= \frac{d\vec{v}'}{dt} \\ \vec{a} &= \vec{a}'\end{aligned}$$

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ 为在基本参考系上测得的 P 的加速度，称为绝对加速度
- $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$ 为在运动参考系上测得的 P 的加速度，称为相对加速度
- 由于运动参考系相对基本参考系做匀速直线运动，牵连速度 $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_0$ 为常矢量，因此牵连加速度 $\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{0}$



习题 2.8.1

如图所示，飞机在某高度的水平面上飞行。机身的方向是自东北向西南，与正西夹 15° 角，风以 100 km/h 的速率自西南向东北方向吹来，与正南夹 45° 角，结果飞机向正西方向运动。求飞机相对于风的速度及相对于地面的速度。



解答

以东为 x 轴正方向，北为 y 轴正方向。以地为基本参考系，风为运动参考系，飞机为研究对象。依题意，

$$\vec{v}_0 = 100(\sin 45^\circ \vec{e}_x + \cos 45^\circ \vec{e}_y)$$

$$\vec{v}' = v_1(-\cos 15^\circ \vec{e}_x - \sin 15^\circ \vec{e}_y)$$

$$\vec{v} = -v_2 \vec{e}_x$$

解答

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$-v_2 \vec{e}_x = 100(\sin 45^\circ \vec{e}_x + \cos 45^\circ \vec{e}_y) + v_1(-\cos 15^\circ \vec{e}_x - \sin 15^\circ \vec{e}_y)$$

$$-v_2 = 100 \sin 45^\circ - v_1 \cos 15^\circ$$

$$0 = 100 \cos 45^\circ - v_1 \sin 15^\circ$$

解得

$$v_1 = \frac{100 \cos 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 273.2 \text{ km/h} = 75.89 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 193.2 \text{ km/h} = 53.67 \text{ m/s}$$

习题 2.8.4

河的两岸互相平行。一船由 A 点朝与岸垂直的方向匀速驶去, 经 10 min 到达对岸 C 点。若船从 A 点出发仍按第一次渡河速率不变但垂直地到达彼岸的 B 点, 需要 12.5 min。已知 $BC = 120$ m。求: (1) 河宽 l , (2) 第二次渡河时船的速度 \vec{u} , (3) 水流速度 \vec{v} 。

解答

以与岸平行, 水流方向为 x 轴正方向, 垂直岸为 y 轴正方向。以岸为基本参考系, 水为运动参考系, 船为研究对象。

第一次渡河,

$$\vec{v}_{\text{相对}} = u \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_{\text{牵连}} = v \vec{e}_x$$

$$\vec{v}_{\text{绝对}} = v \vec{e}_x + u \vec{e}_y$$

$$120 = v \times 10 \times 60$$

$$l = u \times 10 \times 60$$

解答

第二次渡河,

$$\vec{v}_{\text{相对}} = u(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$$

$$\vec{v}_{\text{牵连}} = v \vec{e}_x$$

$$\vec{v}_{\text{绝对}} = (u \cos \theta + v) \vec{e}_x + u \sin \theta \vec{e}_y$$

$$u \cos \theta + v = 0$$

$$l = u \sin \theta \times 12.5 \times 60$$

联立

$$120 = v \times 10 \times 60$$

$$l = u \times 10 \times 60$$

$$u \cos \theta + v = 0$$

$$l = u \sin \theta \times 12.5 \times 60$$

解得

$$v = 0.2 \text{ m/s}$$

$$\sin \theta = \frac{10}{12.5} = 0.8$$

$$u = \frac{1}{3} \text{ m/s}$$

$$l = 200 \text{ m}$$