第一章 静电场 恒定电流场

一、静电的基本现象和基本规律

1 电荷

- 带电：物体能够吸引其他轻小物体的性质
- 起电：使物体带电
- 常见的起电方式
  - 摩擦起电：相互摩擦的两个物体总是同时带电，而且所带电荷等量异号
  - 感应起电：不带电的金属靠近（靠近而不接触）带电体时，靠近带电体的一端带上了与带电体异种的电荷，远离带电体的一端带上了与带电体同种的电荷，两端所带的电荷等量异号
  - 接触起电：不带电的物体与带电体接触后带上与带电体同种的电荷

- 电量
  - 带电体所带电荷数量的多少，叫做电荷量，简称电量，通常用 q 或 Q 表示
  - 测量电量的仪器
    - 验电器 (定性)
    - 静电计 (定量)
  - 两种电荷
    - 正电荷和负电荷 (Franklin 命名，相对而言)
    - 同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引
    - 同种电荷放在一起，电量增加；异种电荷放在一起，电量减少

- 电中和
  - 正、负电荷互相完全抵消的状态
  - 任何不带电的物体，并不是说这个物体上没有电荷，而是它 (在任何宏观足够小、微观足够大区域) 带有了等量异号的电荷，所以整个物体处于中和状态，对外呈现电中性

- 电荷守恒定律
  - 电荷既不能被创造，也不能被消灭，它们只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分，在任何物理过程中，电荷的代数和是守恒的
  - 常见的起电方式中
    - 摩擦起电：电荷在两个物体之间转移
    - 感应起电：电荷在同一个物体的不同部位移动
    - 接触起电：电荷从一个物体转移到另一个物体
  - 物理学中普通的基本定律之一，不仅在宏观过程中成立，在微观过程中也成立

2 导体、绝缘体和半导体

- 物体转移或传导电荷的能力称为导电能力
- 根据物体的导电能力，习惯上把物体大致分成两类
  - 导体：电荷能够从产生的地方迅速转移或传导到其它部分的物体
  - 绝缘体：电荷几乎只能停留在产生的地方的物体 (绝缘体的导电能力很差，但仍然可以导电)
- 金属、电解液是常见的导体，玻璃、橡胶是常见的绝缘体，注意油类是绝缘体
- 物体的导电能力不是绝对的，在一定条件下会发生变化
  - 绝缘体在强电力作用下会被击穿而变成导体

- 半导体
  - 导电能力介于导体和绝缘体之间
  - 对于外加条件 (如温度、光照、杂质、压力、电磁场等) 非常敏感

3 物质的电结构

3.1 物质的组成

- 现代物理学认为，所有物质都是由分子或原子组成的，原子是由原子核和核外电子组成的，原子核是由质子和中子组成的
- 电子带负电，质子带正电，中子不带电
- 一个电子和一个质子所带电量的绝对值相等，通常用 e 表示，称为元电荷
- e 是电量的基本单元，原子核、原子、离子、分子以及宏观物体所带电量都是 e 的整数倍

$$e \approx 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

- 宏观物体内部存在大量的电子和质子
  - 正常情况下，物体的任意一部分 (宏观上足够小，微观上足够大) 所包含的电子数和质子数相等，因此对外呈现电中性
  - 在一定的条件下，物体的某一部分得到或失去一定量的电子，那么这部分中电子和质子的数量不再相等，对外就呈现出电性

- 摩擦起电过程
  - 摩擦起电过程中，电荷 (一般是电子) 在两个物体之间转移
  - 不同材质的物体，转移的电荷数目不等
  - 摩擦的结果是一个物体失去了电荷，另一个物体得到了电荷，两个物体都带电
  - 摩擦起电实际上是通过摩擦使电荷从一个物体转移到另一个物体的过程

- 感应起电过程
  - 对于金属导体，原子的最外层电子称为价电子，价电子可以摆脱原子的束缚而在导体内部自由运动，所以称为自由电子；原子核和内层电子构成原子实，可以认为原子实是静止不动的
  - 金属中原子实组成的点阵称为晶格或晶体点阵，自由电子在晶体点阵中作无规则运动
  - 当带电体 (假设带正电) 靠近金属导体时，自由电子在库仑力作用下向带电体靠拢，金属中靠近带电体的一端电子较多，对外呈现带负电，而另一端电子流失，对外呈现带正电
  - 感应起电实际上是在带电体产生的电场作用下，自由电子从导体内的一部分转移到另一部分的过程

3.2 自由电荷和束缚电荷

- 自由电荷
  - 导体中，可以摆脱原子的束缚在整个导体内自由运动的电荷，称为自由电荷
  - 金属导体中的自由电荷就是自由电子
  - 电解液中的自由电荷是正、负离子
- 束缚电荷
  - 绝缘体中，绝大部分电荷只能在原子或分子附近小范围内移动，不能脱离原子的束缚跑到较远的地方，这种电荷称为束缚电荷
  - 绝缘体中仍然存在少量的自由电子，所以绝缘体仍然具有微弱的导电性能

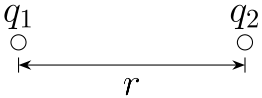
4 库仑定律

4.1 点电荷

- 与质点类似的一种理想模型
- 带电体的几何尺寸远小于它和其他带电体之间的距离
- 带电体的形状以及电荷在带电体上的分布对所研究问题的影响可以忽略不计
- 用一个不计大小，但带有带电体所有电量的点来代替带电体

4.2 真空中的库仑定律

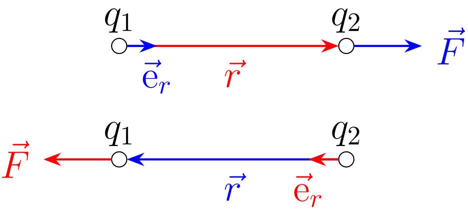
- 在真空中，两个静止的点电荷，带电量分别为 q_1 和 q_2，它们之间的距离为 r



- 它们之间的相互作用力 (库仑力) 的大小与它们带电量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比
- 库仑力的方向沿着二者的连线
  - q_1、q_2 同号时，库仑力为排斥力
  - q_1、q_2 异号时，库仑力为吸引力

- 规定：$\vec{r}$ 为从施力点电荷指向受力点电荷的矢量，$\vec{r} = r\,\vec{\mathrm{e}}_r$
- 库仑力的矢量表达式

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



- $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$ 为真空介电常数或真空电容率

4.3 库仑力的矢量叠加原理

- 点电荷与多个点电荷

$$\vec{F} = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

- 点电荷与连续带电体

$$\vec{F} = \int_{q_1} \frac{(\mathrm{d}q_1)q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 连续带电体与连续带电体

$$\vec{F} = \int_{q_1}\int_{q_2} \frac{(\mathrm{d}q_1)(\mathrm{d}q_2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

4.4 库仑力与万有引力

- 库仑力

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 万有引力

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

- 库仑力可能是引力也可能是斥力，万有引力一定是引力
- 与库仑力相比，万有引力一般都可以忽略不计

例题

已知电子的质量为 $m = 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$，带电量为 $q = -1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$，若两个电子之间的距离为 $r = 1 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$，试求它们之间的库仑力和万有引力的大小。

解答

库仑力

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times (1 \times 10^{-10})^2} \\
&\approx 2.30 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

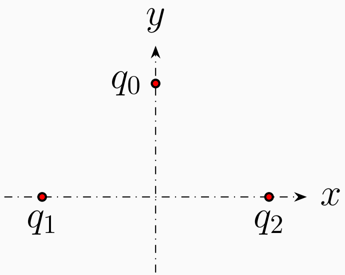
解答

万有引力

$$
\begin{aligned}
F_2 &= G\frac{m_1 m_2}{r^2} \\
&= 6.67\times10^{-11}\times\frac{(9.11\times10^{-31})^2}{(1\times10^{-10})^2} \\
&\approx 5.54\times10^{-51}\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

例题

在如图所示坐标系中，在 $(-a,0)$ 和 $(a,0)$ 处各有一个带电量为 q 的点电荷，在 $(0,b)$ 处有一带电量为 q_0 的点电荷。试求 q_0 所受的总的静电力。假定 $q>0$，$q_0>0$。



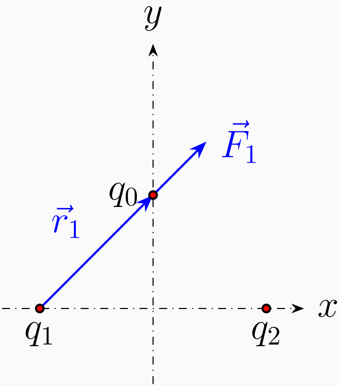
解答

- q_1 对 q_0 的静电力

$$\vec{r}_1 = a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_1 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1 = \frac{q_0 q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



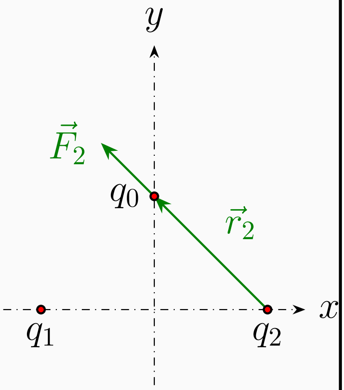
解答

- q_2 对 q_0 的静电力

$$\vec{r}_2 = -a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2 = \frac{q_0 q(-a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



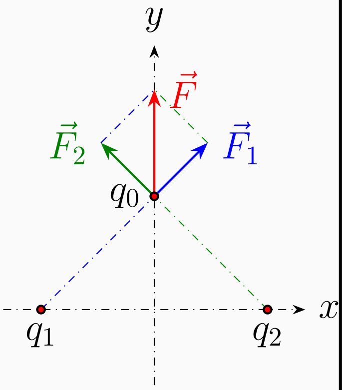
解答

- q_0 受到的总的静电力

$$\vec{F}_1 = \frac{q_0 q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

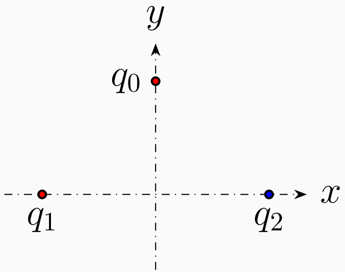
$$\vec{F}_2 = \frac{q_0 q(-a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q_0 q b\,\vec{\mathrm{e}}_y}{2\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



例题

在如图所示坐标系中，在 $(-a,0)$ 处有一个带电量为 q 的点电荷，在 $(a,0)$ 处有一个带电量为 $-q$ 的点电荷，在 $(0,b)$ 处有一带电量为 q_0 的点电荷。试求 q_0 所受的总的静电力。假定 $q>0$，$q_0>0$。



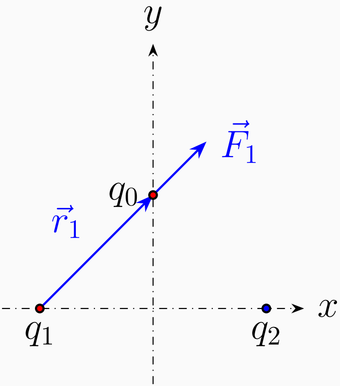
解答

- q_1 对 q_0 的静电力

$$\vec{r}_1 = a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_1 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1 = \frac{q_0 q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



解答

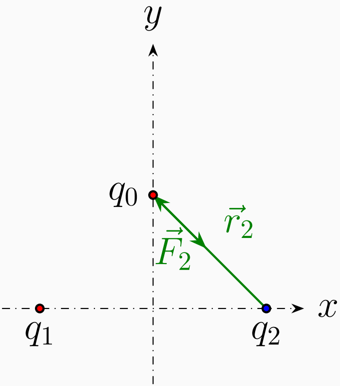
- q_2 对 q_0 的静电力

$$\vec{r}_2 = -a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y$$

$$r_2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2$$

$$= \frac{q_0 q(a\,\vec{e}_x - b\,\vec{e}_y)}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



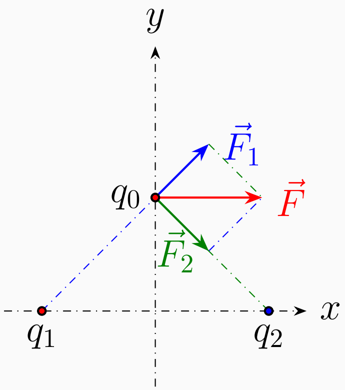
解答

- q_0 受到的总的静电力

$$\vec{F}_1 = \frac{q_0 q(a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

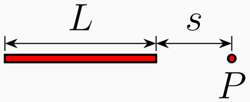
$$\vec{F}_2 = \frac{q_0 q(a\,\vec{e}_x - b\,\vec{e}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q_0 q a\,\vec{e}_x}{2\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



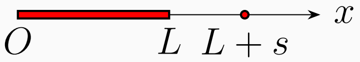
例题

如图所示，长为 L 的均匀带电细杆，电荷线密度为 $+\lambda$。在杆的延长线上，距杆右端距离为 s 的 P 点处，有一带电量为 q 的正点电荷。(1) 求该点电荷所受的电场力；(2) 当 $s \gg L$ 时，求该电荷所受的电场力。



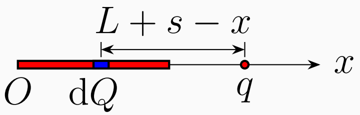
解答

以细杆一端为坐标原点，沿细杆建立 x 轴



在细杆上取 $x \to x + \mathrm{d}x$ 小段看成点电荷，则其电量为 $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}x$，它与 q 之间的距离

$$r = L + s - x$$



解答

$\mathrm{d}Q$ 与 q 之间的作用力

$$\mathrm{d}F = \frac{q\,\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$= \frac{q\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L+s-x)^2}$$

每一个 $\mathrm{d}Q$ 与 q 之间的作用力方向相同，所以整个细杆与 q 之间的作用力

$$F = \int_0^L \frac{q\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L+s-x)^2}$$

解答

令 $r=L+s-x$，则 $\mathrm{d}r=-\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^L \frac{q\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(L+s-x)^2} \\
&= \int_{L+s}^{s} \frac{q\lambda(-\mathrm{d}r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{L+s}^{s} \\
&= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{L+s}\right] \\
&= \frac{q\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 s(L+s)}
\end{aligned}$$

解答

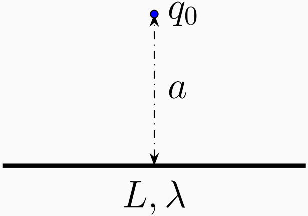
当 $s \gg L$ 时，

$$F = \frac{q\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 s(L+s)}$$
$$\to \frac{q(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 s^2}$$
$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 s^2}$$

此时可将细杆看成一个点电荷

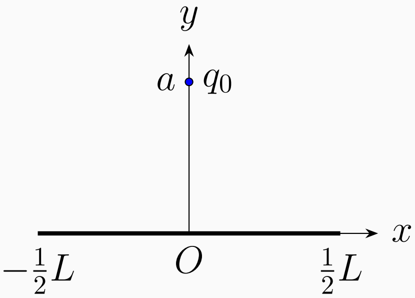
例题

有一带电荷量为 q_0 的点电荷位于一长为 L、线电荷密度为 λ 的均匀带电绝缘细棒的中垂线上距细棒 a 处，如图。求棒与点电荷间静电相互作用力的大小。



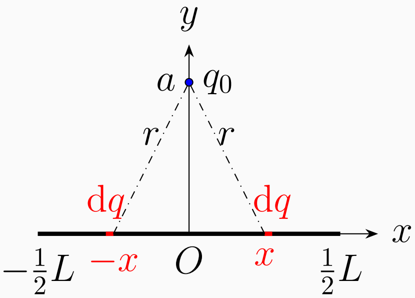
解答

- 如图建立坐标系



解答

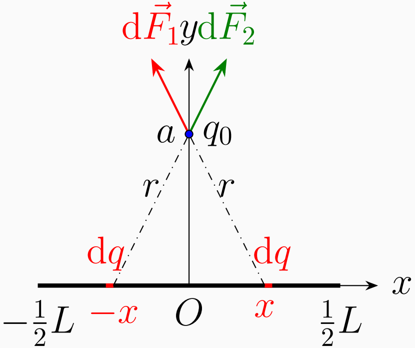
- 取两个对称的 $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x$，它们到 q_0 的距离均为 $r = \sqrt{a^2 + x^2}$



解答

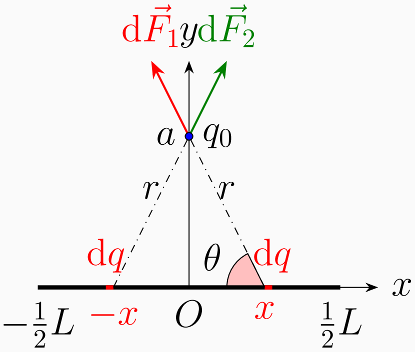
- 它们对 q_0 的作用力方向不同，大小相等

$$\mathrm{d}F = \frac{q_0\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_0\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)}$$



解答

- 两个 $\mathrm{d}q$ 的合力方向沿 y 轴，大小为 $2\times \mathrm{d}F\times\sin\theta$，其中 $\sin\theta=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$



解答

- 整根带电细棒对 q_0 的作用力方向沿 y 轴，大小为

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^{\frac{L}{2}} 2 \times \frac{q_0 \lambda \, \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + x^2)} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\
&= \frac{q_0 \lambda a}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

解答

- 积分公式【高等数学 (第 7 版) 上册 [同济大学数学系]P376 式 32】

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

或第二类换元法，令 $x = \frac{a}{\tan\theta}$

解答

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left[\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\frac{L}{2}}{a^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}} \\ &= \frac{L}{2a^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}}\end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{q_0\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{q_0\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\times\frac{L}{2a^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}}\\
&= \frac{q_0(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}}
\end{aligned}
$$

解答

- 当 $L \ll a$ 时，$\frac{L^2}{4} + a^2 \approx a^2$，所以

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{q_0(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \\
&\approx \frac{q_0(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{a^2}} \\
&= \frac{q_0(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}
\end{aligned}
$$

此时可以将细棒看成点电荷

解答

- 当 $L \gg a$ 时，$\frac{L^2}{4} + a^2 \approx \frac{L^2}{4}$，

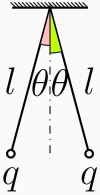
$$
\begin{aligned}
F &= \frac{q_0(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \\
&\approx \frac{q_0(\lambda L)}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{\frac{L^2}{4}}} \\
&= \frac{q_0\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

作业

- P66[1-1] 氢原子由一个质子 (即氢原子核) 和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径是 5.29×10^{-11} m。已知质子质量 $m_{\mathrm{p}} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg，电子质量 $m_{\mathrm{e}} = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，电荷分别为 $\pm e = \pm 1.60 \times 10^{-19}$ C，万有引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$。(1) 求电子所受质子的库仑力和引力；(2) 库仑力是万有引力的多少倍？(3) 求电子的速度。

作业

- P66[1-4] 两小球质量都是 m，都用长为 l 的细线挂在同一点；若它们带上相同的电量，平衡时两线夹角为 2θ(见本题图)。设小球的半径都可略去不计，求每个小球上的电量。



二、电场强度

1 电场

- 任何电荷在它周围的空间激发电场
- 电场对处于其中的任何电荷都有电场力的作用
- 施力电荷激发电场，电场对受力电荷施加电场力的作用
- 静电场：相对观察者静止的电荷在其周围空间产生的电场

2 电场强度

2.1 试探电荷

- 电量 q_0 足够小，不影响激发电场的电荷分布，不影响待测电场
- 几何尺度足够小，可以视为点电荷，可以用来测量任意位置的电场性质

2.2 电场强度

- 电量为 q_0 的试探电荷在空间某处受到的电场力为 $\vec{F}$，则该处的电场强度

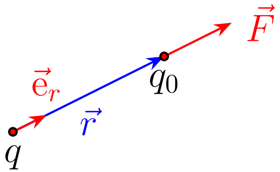
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- 某处电场强度的大小等于单位电荷在该处受到的电场力的大小，方向与正电荷在该处所受电场力的方向一致
- 均匀电场、匀强电场：空间中各点电场强度的大小和方向都相同的电场

2.3 点电荷的电场强度

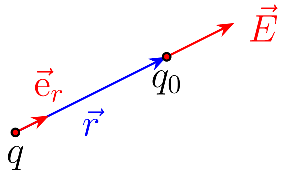
- 假设激发电场的点电荷 (场源电荷) 的电量为 q，试探电荷的电量为 q_0，二者之间的距离为 r，从 q(施力电荷) 所在位置指向 q_0(受力电荷) 所在位置的矢量记为 $\vec{r} = r\,\vec{\mathrm{e}}_r$，则 q 对 q_0 的电场力为

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



- q_0 所在位置的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathrm{e}}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



2.4 电场线

- 为了直观形象而定性地描述电场在空间中的分布，通常使用电场线
- 电场线的性质
  - 电场线某一点的切线方向表示该处电场强度的方向，电场线不会相交
  - 电场线的疏密表示该处电场强度的大小
  - 电场线起于正电荷或无穷远处，止于负电荷或无穷远处

3 电场叠加原理

3.1 多个点电荷

- 假设试探电荷 q_0 所在位置不变，当点电荷 q_1、q_2、……、q_N 分别单独存在时，q_0 受到的电场力分别为 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、……、$\vec{F}_N$，那么所有点电荷同时存在时，q_0 受到的总电场力

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

- 根据电场强度的定义，那么 q_0 所在位置总的电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{q_0}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i$$

其中 q_i 单独存在时 q_0 所在位置的电场强度

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

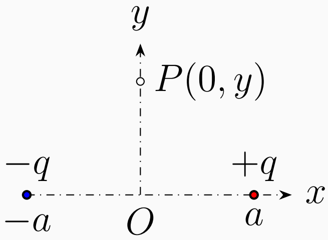
- 多个点电荷同时存在时，q_0 所在位置总的电场强度

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

其中 $\vec{r}_i$ 为从 q_i 所在位置指向 q_0 所在位置的矢量

例题

如图所示，在 x 轴上 $-a$ 处有一带电量为 $-q$ 的点电荷，在 a 处有一带电量为 $+q$ 的点电荷，求它们在 y 轴上任一位置 $P(0,y)$ 所激发的电场的电场强度。



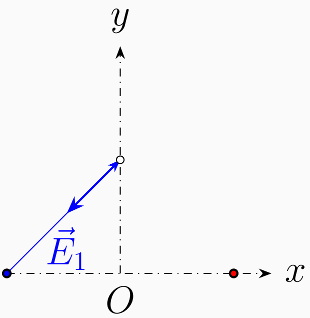
解答

- $-q$ 在 P 处的电场

$$\vec{r}_1 = a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_1 = (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1 = \frac{-q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



解答

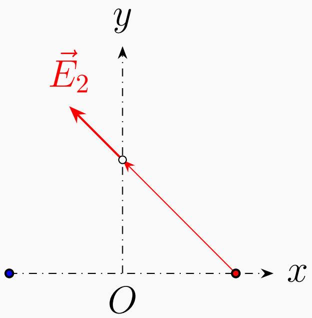
- q 在 P 处的电场

$$\vec{r}_2 = -a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_2 = (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2$$

$$= \frac{q(-a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



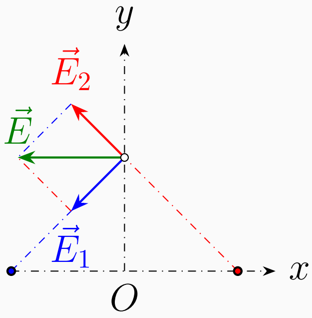
解答

- P 处的总电场

$$\vec{E}_1 = \frac{-q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

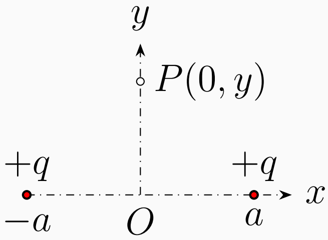
$$\vec{E}_2 = \frac{q(-a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-qa\,\vec{\mathrm{e}}_x}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



例题

如图所示，在 x 轴上 $-a$ 处有一带电量为 $+q$ 的点电荷，在 a 处有一带电量为 $+q$ 的点电荷，求它们在 y 轴上任一位置 $P(0,y)$ 所激发的电场的电场强度。



解答

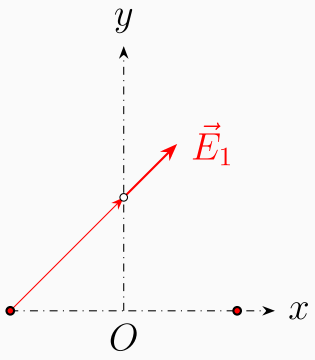
- 左边 $+q$ 在 P 处的电场

$$\vec{r}_1 = a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_1 = (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1$$

$$= \frac{q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



解答

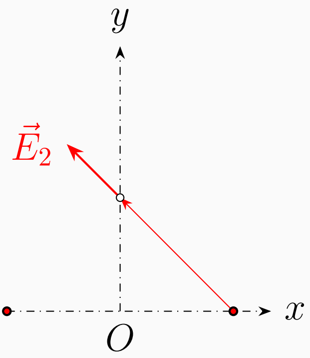
- 右边 $+q$ 在 P 处的电场

$$\vec{r}_2 = -a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$r_2 = (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2$$

$$= \frac{q(-a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



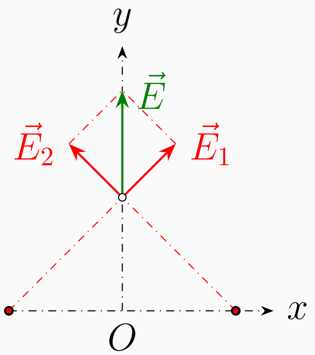
解答

- P 处的总电场

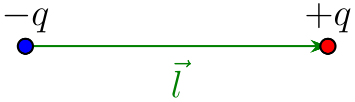
$$\vec{E}_1 = \frac{q(a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q(-a\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{qy\,\vec{\mathrm{e}}_y}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



- 由两个靠得很近的、所带电量等量异号的电荷组成的带电体系称为电偶极子
- 通常称 $\vec{p} = q\vec{l}$ 为电偶极矩，$\vec{l}$ 为从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量



3.2 连续分布的带电体

- 现代物理学认为，物质是由原子或分子组成的，原子是由原子核和核外电子组成的，原子核是由质子和中子组成的
  - 质子带正电，电子带负电
  - 质子和电子具有一定的大小，它们之间存在一定的距离
  - 微观上看，电荷总是分立的；宏观上看，可以把电荷看成是连续分布的

- 体分布
  - 当电荷在某一体积内连续分布时，定义电荷体密度 ρ 为单位体积的电荷
  - 在宏观上足够小、微观上足够大的体积 $\mathrm{d}V$ 内，可以认为电荷是均匀分布的，$\mathrm{d}V$ 可以视为点电荷，所带电量

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$$

- 面分布
  - 当电荷分布区域的厚度可以忽略不计，或者电荷分布区域的厚度处处相等且不考虑电荷沿厚度方向的分布时，可以将电荷看成是在某一曲面上连续分布，定义电荷面密度 σ 为单位面积的电荷
  - 在宏观上足够小、微观上足够大的面积 $\mathrm{d}S$ 内，可以认为电荷是均匀分布的，$\mathrm{d}S$ 可以视为点电荷，所带电量

$$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$$

  - 假定实际厚度为 δ，则有

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V = \rho(\delta\,\mathrm{d}S) = (\rho\delta)\,\mathrm{d}S = \sigma\,\mathrm{d}S$$
$$\sigma = \rho\delta$$

- 线分布
  - 当电荷分布区域的横截面积可以忽略不计，或者电荷分布区域的横截面积处处相等且不考虑电荷沿横截面方向的分布时，可以将电荷看成是在某一曲线上连续分布，定义电荷线密度 λ 为单位长度的电荷
  - 在宏观上足够小、微观上足够大的长度 $\mathrm{d}l$ 内，可以认为电荷是均匀分布的，$\mathrm{d}l$ 可以视为点电荷，所带电量

$$\mathrm{d}q = \lambda \,\mathrm{d}l$$

  - 假定实际横截面积为 S，则有

$$\mathrm{d}q = \rho \,\mathrm{d}V = \rho(S \,\mathrm{d}l) = (\rho S) \,\mathrm{d}l = \lambda \,\mathrm{d}l$$
$$\lambda = \rho S$$

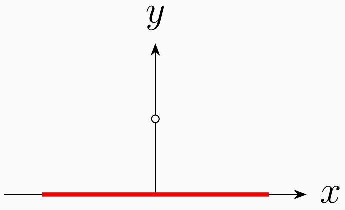
- 当带电体不能看成一个点电荷时，可以用微元法将带电体视为由很多点电荷组成的

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$
$$\vec{E} = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

其中 $\vec{r}$ 是由 $\mathrm{d}q$ 所在位置指向场点所在位置的矢量，积分在整个电荷分布区域进行

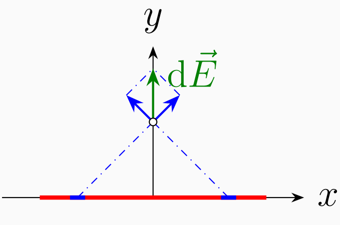
例题

求长为 L、电荷线密度为 λ 的均匀带电绝缘细棒在其中垂面上任意一点所激发的电场。



解答

- 如图，在 $x \to x + \mathrm{d}x$ 和 $-x \to -x - \mathrm{d}x$ 处对称地取两个点电荷，它们的带电量均为 $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x$
- 这两个点电荷在 $(0, y)$ 处激发的总电场为



$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{(\mathrm{d}q) y\,\vec{\mathrm{e}}_y}{2\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda(\mathrm{d}x) y\,\vec{\mathrm{e}}_y}{2\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解答

- 所以整根带电细棒在 $(0, y)$ 处激发的总电场的方向沿 y 轴正方向，大小为

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda(\mathrm{d}x)y}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

解答

- 积分公式【高等数学 (第 7 版) 上册 [同济大学数学系]P376 式 32】

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

或第二类换元法，令 $x = \frac{a}{\tan\theta}$

解答

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\frac{L}{2}}{y^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}$$

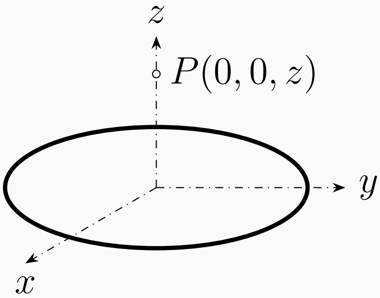
$$= \frac{L}{2y^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}$$

解答

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\times\frac{L}{2y^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}} \\
&= \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}
\end{aligned}
$$

例题

求半径为 R、带电量为 q 的均匀带电细圆环在通过圆环圆心、垂直圆环平面的轴线上任意一点的电场。



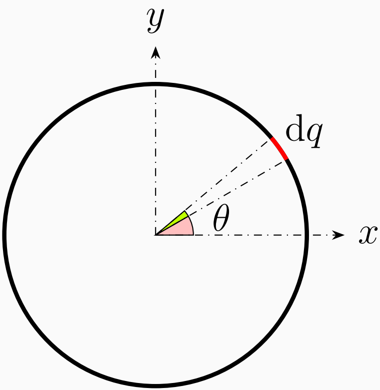
解答

- 取图示电荷元 $\mathrm{d}q$

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

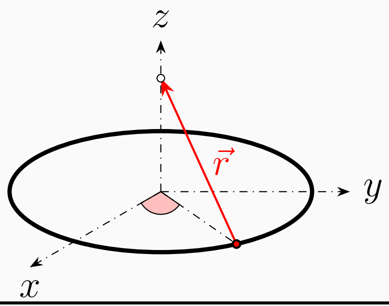
$$\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$$



解答

$$\vec{r} = z\,\vec{\mathrm{e}}_z - (R\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + R\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$
$$= -R\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - R\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$
$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$



解答

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{E} &= \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \\
&= \frac{q\,\mathrm{d}\theta(-R\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - R\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z)}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\mathrm{d}E_x &= \frac{-qR}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}E_y &= \frac{-qR}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}E_z &= \frac{qz}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{-qR}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 0 \\
E_y &= \frac{-qR}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 0 \\
E_z &= \frac{qz}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

解答

$$\vec{E} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

- 圆环圆心处，$z=0$，

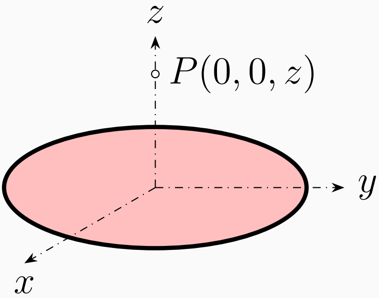
$$\vec{E} = \vec{0}$$

- 轴上远离环心处，$|z| \gg R$，$R^2+z^2 \approx z^2$

$$\vec{E} \approx \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0|z|^3}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

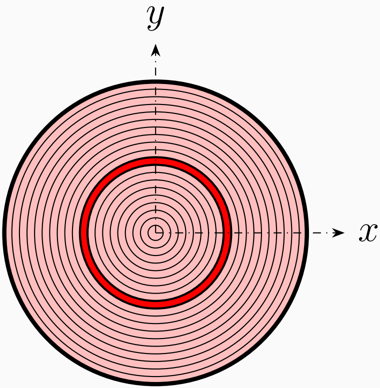
例题

求带电量为 q、半径为 R 的均匀带电圆盘轴线上任一点 P 的电场强度。



解答

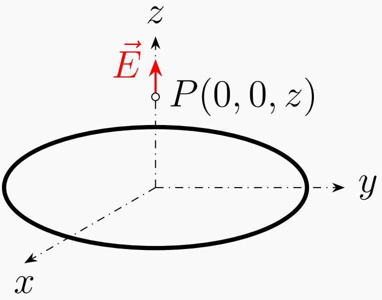
- 将圆盘看成由一个个细圆环所组成的，那么整个圆盘的电场就是所有圆环产生的电场的叠加



解答

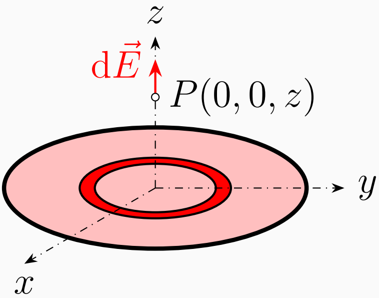
- 均匀带电圆环在轴线上的电场

$$\vec{E} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\mathrm{e}}_z$$



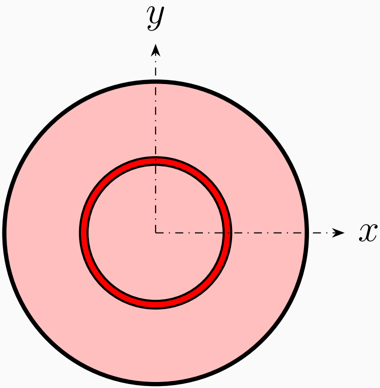
解答

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{(\mathrm{d}q)z}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$



解答

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{q}{\pi R^2} \\
\mathrm{d}S &= 2\pi r\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}q &= \sigma\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{2qr\,\mathrm{d}r}{R^2}
\end{aligned}
$$



解答

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{E} &= \frac{(\mathrm{d}q)z}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \frac{\left(\frac{2qr\,\mathrm{d}r}{R^2}\right)z}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\mathrm{e}}_z
\end{aligned}
$$

解答

$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R\frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

第一类换元法，令 $u=r^2+z^2$，则

$$\mathrm{d}u=2r\,\mathrm{d}r$$

$$\int_0^R\frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{3}{2}}}$$

解答

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{-2}{\sqrt{u}}\right]\Bigg|_{z^2}^{R^2+z^2} \\
&= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{2}{\sqrt{z^2}}-\frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2}}-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]
\end{aligned}
$$

解答

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{\mathrm{e}}_z$$

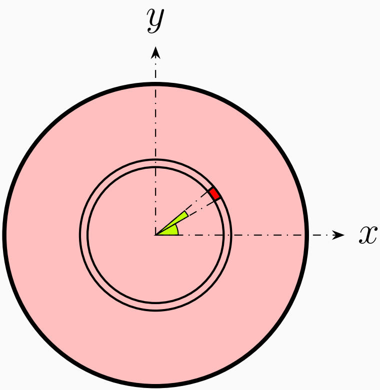
当 $R \to \infty$ 时，无限大均匀带电平面所激发的电场的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{z}{\sqrt{z^2}}\vec{\mathrm{e}}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{z^2}}\vec{\mathrm{e}}_z$$

解答

- 取 $r \to r + \mathrm{d}r$、$\theta \to \theta + \mathrm{d}\theta$ 部分视为一个点电荷

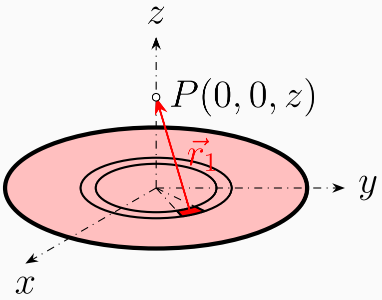
$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{q}{\pi R^2} \\ \mathrm{d}S &= (\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta) \\ \mathrm{d}q &= \sigma\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{qr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\pi R^2} \end{aligned}$$



解答

$$\vec{r}_1 = (z\,\vec{\mathrm{e}}_z) - (r\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + r\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + z^2}$$



解答

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{E} &= \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1 \\
&= \frac{\frac{qr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\pi R^2}(-r\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - r\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z)}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{q(-r\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - r\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

解答

$$\mathrm{d}E_x = \frac{-qr^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{d}E_y = \frac{-qr^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{qzr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解答

$$E_x = \frac{-q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$E_y = \frac{-q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$E_z = \frac{qz}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

4 带电体在电场中的受力

- 根据电场强度的定义

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

可知，带电量为 q 的点电荷在电场强度为 $\vec{E}$ 的地方受到的电场力为

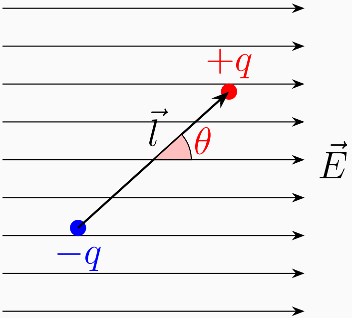
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

例题

计算电偶极子在均匀电场中所受的力矩。

解答

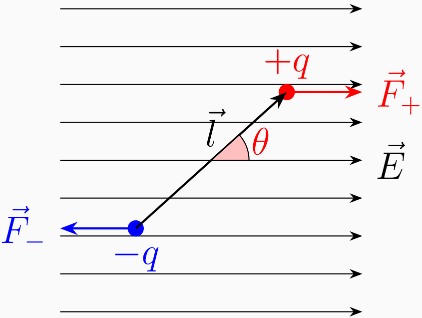
一般地，假设均匀电场的场强为 $\vec{E}$，电偶极子的电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{l}$，$\vec{E}$ 与 $\vec{l}$ 之间的夹角为 θ



解答

$+q$ 受到的电场力 $\vec{F}_+$，$-q$ 受到的电场力 $\vec{F}_-$，二者构成一对力偶

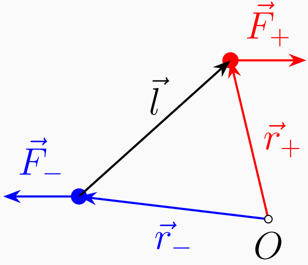
$$\vec{F}_+ = q\vec{E}, \vec{F}_- = -q\vec{E}$$



解答

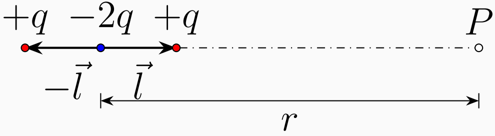
力偶对任意参考点的力矩的矢量和均相等，都等于力偶中的一个力对另一个力的作用点的力矩，称为力偶矩。力偶矩的作用是使电偶极矩 $\vec{p}$ 的方向转向电场 $\vec{E}$ 的方向

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \\
&= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ - \vec{r}_- \times \vec{F}_+ \\
&= (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_+ \\
&= \vec{l} \times q\vec{E} \\
&= q\vec{l} \times \vec{E} \\
&= \vec{p} \times \vec{E}
\end{aligned}
$$



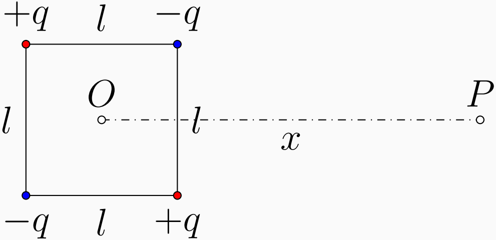
作业

- P67[1-10] 本题中所示是一种电四极子，它由两个相同的电偶极子 $\vec{p}=q\vec{l}$ 组成，这两个电偶极子在一直线上，但方向相反，它们的负电荷重合在一起。试证明：在它们的延长线上离中心 (即负电荷) 为 $r(r \gg l)$ 处，(1) 场强为 $E=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$；式中 $Q=2ql^2$ 叫做它的电四极矩。



作业

- P67[1-11] 本题中所示是另一种电四极子，设 q 和 l 都已知，图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 $x(x \gg l)$，$\overrightarrow{OP}$ 与正方形的一对边平行，求 P 点的电场强度 $\vec{E}$。

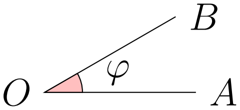


三、高斯定理

1 电通量

1.1 平面角

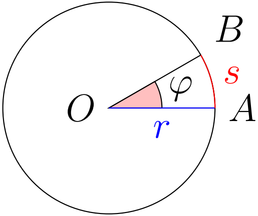
- 射线绕它的端点旋转，它的最初位置和最终位置所组成的图形称为角
- 射线的最初位置、最终位置分别称为角的始边、终边
- 射线的端点称为角的顶点



- 以角的顶点为圆心，任意长度 r 为半径作圆，则角所对应的弧长 s 与半径 r 的比值即为角的弧度 (rad)

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

- 平面角是单位圆 $(r = 1)$ 上的一段弧长【数值上相等】



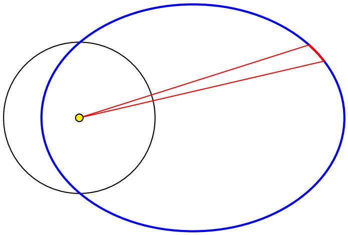
1.2 立体角

- 一个具有封闭准线的锥面所围成的空间部分称为立体角，锥面的顶点称为该立体角的顶点
- 以其顶点为球心，作半径为 R 的球面，以 S 表示该球面被立体角截得的部分的面积，则立体角

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

- 立体角的单位为球面度 (sr)
- 以观测点为球心，构造一个单位球面 $(R = 1)$; 立体角是单位球面上的一块面积【数值上相等】

- 任意物体投影到单位球面上的投影面积，即为该物体相对于该观测点的立体角
- 整个球面对球心所张的立体角为 4π
- 封闭曲面对曲面内任意一点所张的立体角为 4π

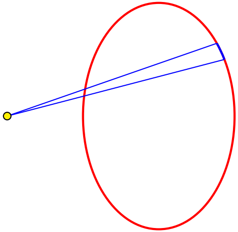


- 面元矢量 $\mathrm{d}\vec{S} = (\mathrm{d}S)\,\vec{\mathrm{e}}_n$
  - $\vec{\mathrm{e}}_n$ 为沿面元法向方向的单位矢量
  - 对于封闭曲面的面元，通常选择 $\vec{\mathrm{e}}_n$ 的方向由内指向外 (外法向单位矢量)
  - 对于开放曲面的面元，原则上可以任意选择 $\vec{\mathrm{e}}_n$ 的方向 (二选一)，但一经选定，在整个过程不能变换

- 对任意一个顶点 O，记从 O 指向 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的矢量为 $\vec{r} = r\,\vec{\mathrm{e}}_r$，则 $\mathrm{d}\vec{S}$ 对 O 所张的立体角 (可能正可能负)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\Omega &= \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^3} \\
&= \frac{(r\,\vec{\mathrm{e}}_r) \cdot [(\mathrm{d}S)\,\vec{\mathrm{e}}_n]}{r^3} \\
&= \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r \cdot \vec{\mathrm{e}}_n \\
&= \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

- 封闭曲面对曲面外任意一点所张的立体角为 0



1.3 电通量 (电场强度的通量)

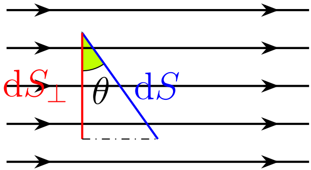
- 电场线的疏密程度只能定性地描述电场强度的大小 (越密越大，越疏越小)，无法给出定量关系
- 为了定量描述电场线的疏密程度与电场强度大小之间的关系，通常引入电场强度的通量的概念，简称为电通量
- 电通量也是一个假想的概念，是指通过某一曲面的电场线的数目，记为 Φ
- 电场强度的大小等于通过该处且垂直于电场线的单位面积上的电通量

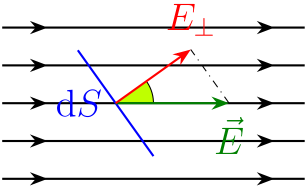
- 匀强电场中通过平面面积 $\vec{S}$ 的电通量为

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \vec{E} \cdot \vec{S} \\
&= ES\cos\theta \\
&= E(S\cos\theta) = ES_{\perp} \\
&= (E\cos\theta)S = E_{\perp}S
\end{aligned}
$$

- 通过一无限小面积元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电通量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi &= \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\ &= E\,\mathrm{d}S\cos\theta\\ &= E(\mathrm{d}S\cos\theta) = E\,\mathrm{d}S_\perp\\ &= (E\cos\theta)\,\mathrm{d}S = E_\perp\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$





- 通过任意一个有限大小的曲面的电通量为

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- 如果 S 是由 N 个曲面 (S_1、S_2、……、S_N) 所构成的，那么总的电通量等于通过所有曲面的电通量的代数和

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_i$$

- 如果 S 是一个闭合曲面，那么积分记为

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(1) 匀强电场的电通量

- 匀强电场：空间中各点的电场强度的大小和方向都相同，电场强度是一个常矢量
- 匀强电场通过任意曲面的电通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{E}\cdot \int_S \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \int_S E\,\mathrm{d}S\cos\theta = E\int_S \mathrm{d}S\cos\theta\end{aligned}$$

- 匀强电场通过任意闭合曲面的电通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{E}\cdot \oint_S \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ &= \oint_S E\,\mathrm{d}S\cos\theta = E\oint_S \mathrm{d}S\cos\theta = 0\end{aligned}$$

(2) 点电荷电场的电通量

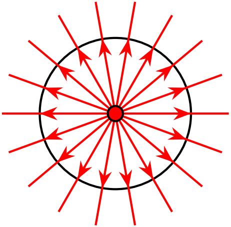
- 点电荷的电场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

- 在以点电荷为球心的球面上，电场强度的大小相等
- $\vec{\mathrm{e}}_r = \vec{\mathrm{e}}_n$

- 在以点电荷所在位置为球心，半径为 R 的球面上，点电荷电场的电通量为

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r \cdot (\mathrm{d}S)\,\vec{\mathrm{e}}_r \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \oint_S \mathrm{d}S \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times 4\pi R^2 \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

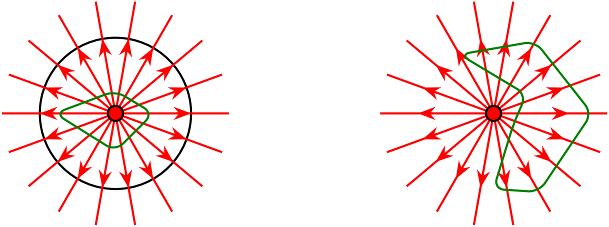


- 在任意包围点电荷的封闭曲面上，点电荷电场的电通量为

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- 在任意不包围点电荷的封闭曲面上，点电荷电场的电通量为

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



2 高斯定理

2.1 高斯定理的表述

- 通过一个任意闭合曲面 (高斯面) 的电通量等于该面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

- $\vec{E}$ 是所有电荷在 $\mathrm{d}\vec{S}$ 处所激发的总电场
- $\sum\limits_i q_i$ 仅仅是高斯面内的电荷的代数和，与高斯面外的电荷无关

2.2 高斯定理的证明

(1) 一个点电荷

- 带电量为 q 的点电荷在其周围空间中所激发的电场通过以点电荷所在位置为球心，任意 R 为半径的球面的电通量

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- 对于任意一个面元 $\mathrm{d}\vec{S} = (\mathrm{d}S)\,\vec{\mathrm{e}}_n$，从点电荷所在位置指向 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的矢量记为 $\vec{r} = r\,\vec{\mathrm{e}}_r$，则点电荷的电场通过该 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电通量

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi &= \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= E\cos\theta\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}S\cos\theta \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S\cos\theta}{r^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

- 点电荷的电场通过任意一个闭合曲面 S 的电通量

$$\Phi = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega$$

- 如果点电荷在闭合曲面 S 内，则

$$\oint_S \mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

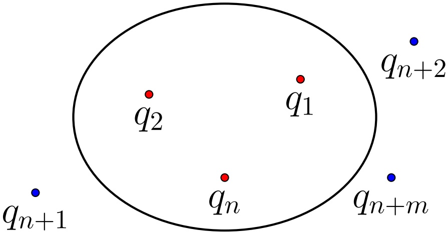
- 如果点电荷在闭合曲面 S 外，则

$$\oint_S \mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 0 = 0$$

(2) 多个点电荷

- 一般地假定，某曲面 S 内有 n 个点电荷 q_1、q_2、……、q_n，曲面外有 m 个点电荷 q_{n+1}、q_{n+2}、……、q_{n+m}



- 根据电场叠加原理，任意位置的总的电场强度等于所有点电荷在该处激发的电场强度的矢量和

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \sum_{i=1}^{n+m} \vec{E}_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} \vec{E}_k\end{aligned}$$

- 通过曲面 S 的电通量

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \oint_S \sum_{i=1}^{n+m} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \oint_S \left[\sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} \vec{E}_k\right]\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \oint_S \vec{E}_j \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \oint_S \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\varepsilon_0} + \sum_{k=n+1}^{n+m} 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n} q_j
\end{aligned}$$

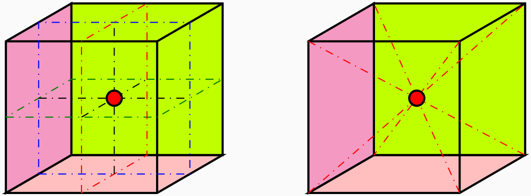
3 高斯定理的应用

3.1 求电通量

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

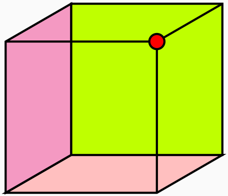
例题

一带电量为 q 的点电荷位于边长为 a 的正方体的中心，求通过正方体每个面的电通量。

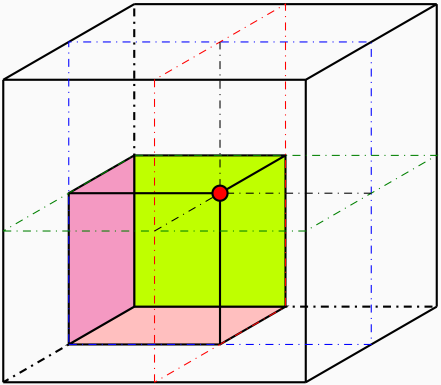


例题

一带电量为 q 的点电荷位于边长为 a 的正方体的一个顶点上，求通过正方体每个面的电通量。



提示

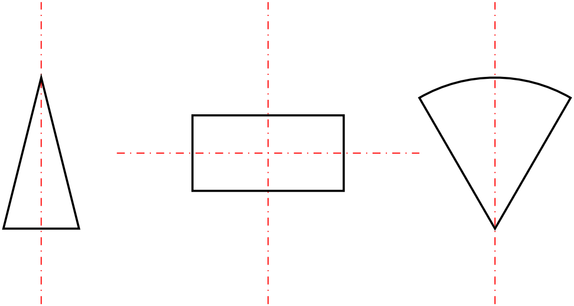


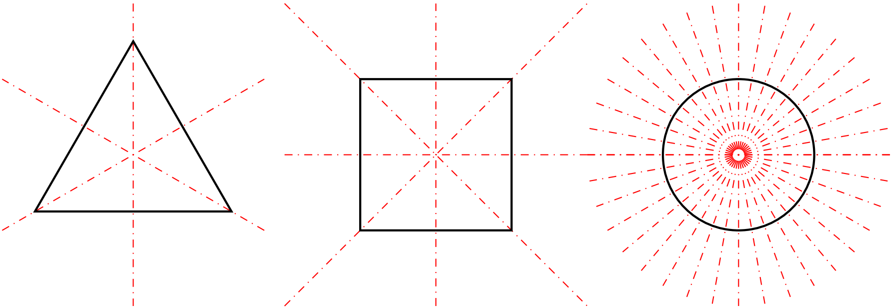
3.2 求电场

- 高斯定理本身对高斯面没有任何要求，只要是封闭曲面即可
- 高斯定理本身对带电体的形状和电荷分布没有任何要求
- 为了把通过高斯面的电通量用电场强度表示出来，通常要求选择的高斯面上各点的电场强度的大小 (局部或全部) 相等
- 高斯定理只能用来求某些具有特殊对称性的带电体的电场分布，相应地，高斯面只能选择某些具有特殊对称性的封闭曲面

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

- 如果一个平面图形沿着一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形 (a figure has reflectional symmetry)，这条直线叫做对称轴 (axis of symmetry)

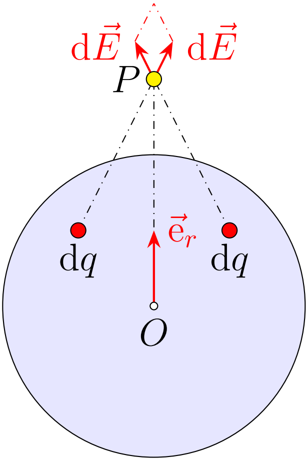




(1) 球对称的电场

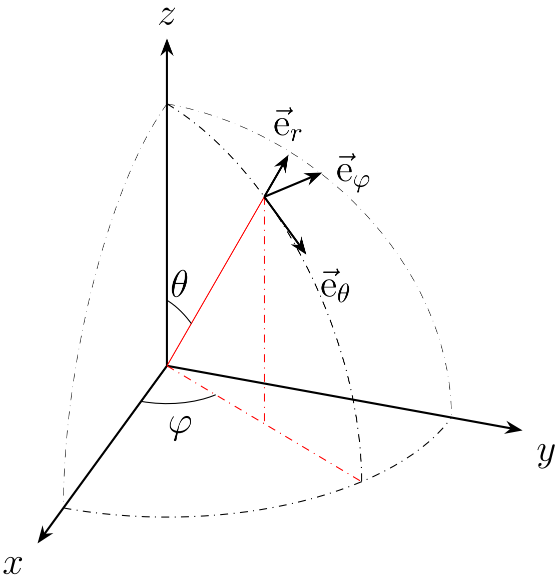
- 假若，一个标量场只相依于离某参考点的距离，则此标量场具有球对称性
- 假若，一个矢量场，方向都是朝内的径向方向或都是朝外的径向方向，大小仅相依于离参考点的距离，则此矢量场具有球对称性
- 如果带电体绕某一点 (球心) 任意旋转，电荷分布没有变化，那么我们称这个带电体的电荷分布具有球对称性
- 比如点电荷，均匀带电的球面 (不计厚度的球壳)，均匀带电的球壳 (有一定厚度)，均匀带电的球体，电荷密度只与 r(与球心之间的距离) 有关的球状带电体

- 具有球对称分布的带电体所激发的电场也具有球对称性
- 由于带电体绕球心任意旋转时电荷分布没有变化，因此任意位置的电场也不会发生变化
- 观察者不动带电体旋转，相当于带电体不动观察者反向旋转
- 因此场点绕球心任意旋转 (但保持与球心之间的距离不变，即一个球面上) 时电场分布也不发生变化

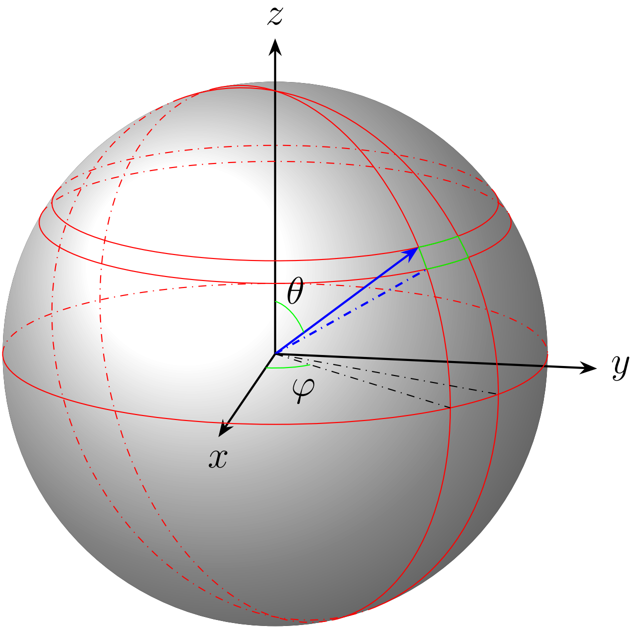


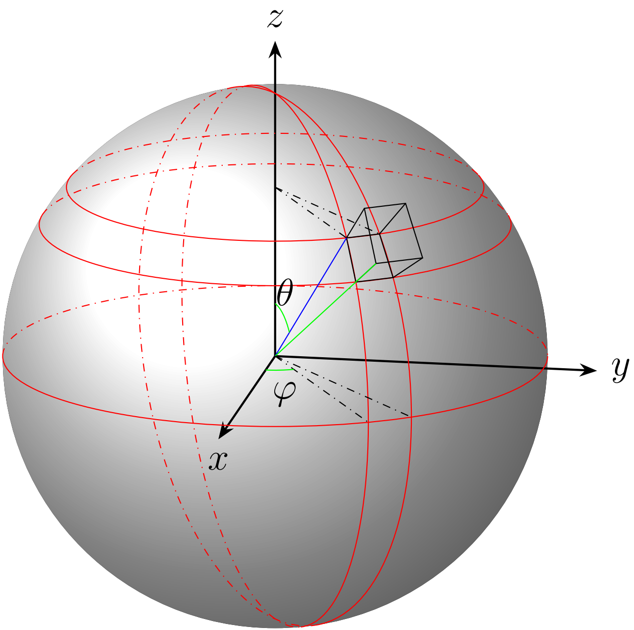
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

- 用高斯定理求球对称的电场时通常选择球面为高斯面，选择球坐标系 (r,θ,φ) 时计算比较方便



z
$\vec{\mathrm{e}}_r$
$\vec{\mathrm{e}}_\varphi$
$\vec{\mathrm{e}}_\theta$
θ
φ
y
x


z
θ
y
φ
x



z
y
x
θ
φ

例题

计算半径为 R、电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体的电场分布。

解答

- 通常题目求电场分布，就要求出整个空间所有位置的电场强度的表达式
- 由于电荷分布的球对称性，电场强度也是球对称的，通常建立球坐标系，以球心为坐标原点
- 整个空间分成两个区域，球内 $r < R$ 和球外 $r > R$，在两个区域分别选取一个球面为高斯面

解答

- 在球形高斯面上，各点的电场强度大小相等，方向均沿径向方向，即与球面处的法线方向平行，所以

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot S = E\times 4\pi r^2$$

解答

- 球内区域，$r < R$

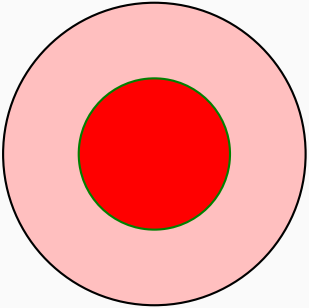
$$q = \rho V, V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{\mathrm{e}}_r = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$$



解答

- 球外区域，$r > R$

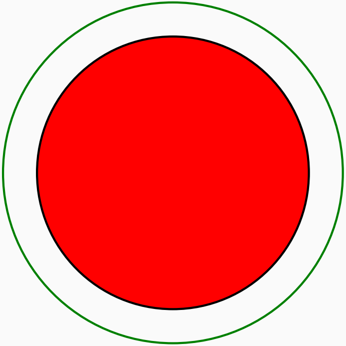
$$q = \rho V, V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathrm{e}}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



例题

试求半径为 R、带电量为 Q 的均匀带电空心球面的电场分布。

解答

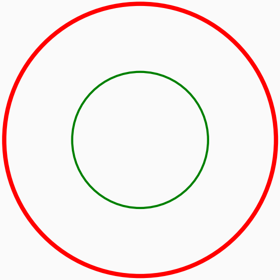
- 球内区域，$r < R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$



解答

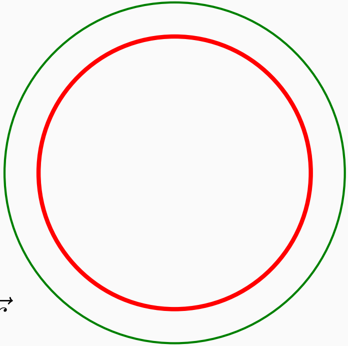
- 球外区域，$r > R$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

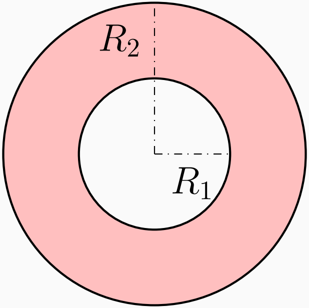
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathrm{e}}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



例题

试求内外半径分别为 R_1 和 R_2、电荷体密度为 ρ 的均匀带电球壳的电场分布。



解答

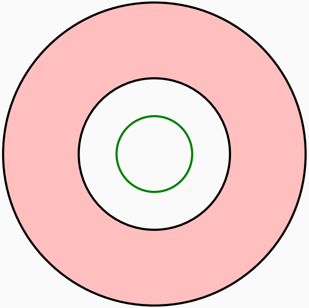
- $r < R_1$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$



解答

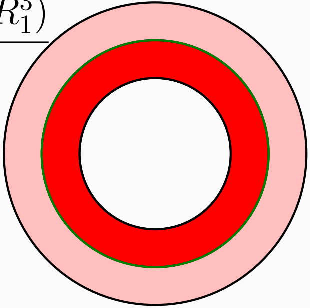
- $R_1 < r < R_2$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



解答

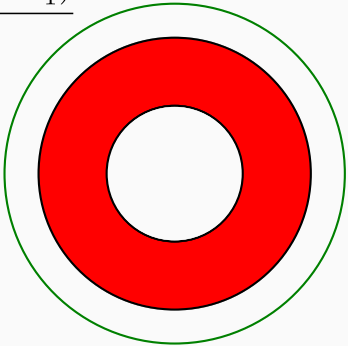
- $r > R_2$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

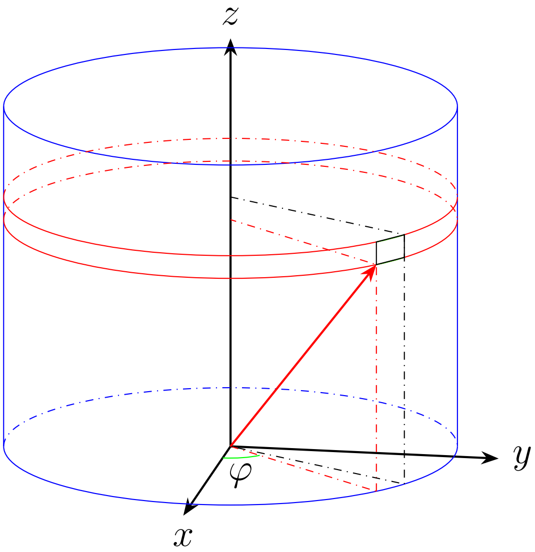
$$\vec{E} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



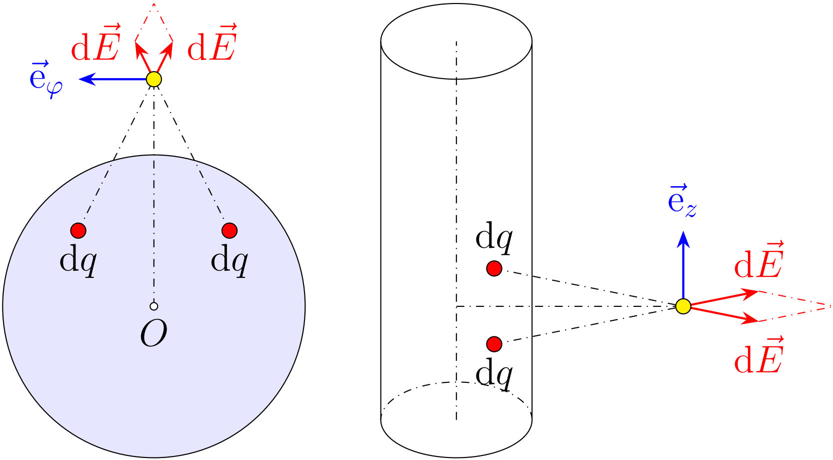
(2) 柱对称的电场

- 一个几何构形在绕一给定直线 (对称轴) 旋转时不变的性质称为轴对称
- 如果带电体绕某一直线 (对称轴) 任意旋转，电荷分布没有变化，那么我们称这个带电体的电荷分布具有轴对称性
- 具有轴对称性的带电体如果沿对称轴方向任意平移，电荷分布没有变化，那么我们称这个带电体的电荷分布具有柱对称性
- 比如无限长均匀带电直线，无限长均匀带电的 (圆) 柱面 (不计厚度的圆筒)，无限长均匀带电的圆筒 (有一定厚度)，无限长均匀带电的圆柱体，电荷密度只与 r(到对称轴的距离) 有关的无限长柱状带电体

- 具有柱对称分布的带电体所激发的电场也具有柱对称性
- 由于带电体绕对称轴任意旋转时电荷分布没有变化，因此任意位置的电场也不会发生变化
- 观察者不动带电体旋转，相当于带电体不动观察者反向旋转
- 因此场点绕对称轴任意旋转 (但保持到对称轴的距离不变，即在与对称轴垂直的圆周上) 时电场分布也不发生变化
- 用高斯定理求柱对称的电场时通常选择柱面为高斯面，选择柱坐标系 (r, φ, z) 时计算比较方便



z
y
x
φ



$$E_\varphi = 0, \vec{E} = E_r\,\vec{\mathrm{e}}_r + E_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

- 对于有限长带电体，$E_z \neq 0$
- 对于无限长带电体，$E_z = 0$

$$E_\varphi = 0, E_z = 0, \vec{E} = E(r)\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

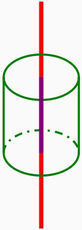
- 高斯定理只能用来求无限长带电体的电场分布，有限长的情况只能用叠加原理通过积分求得

例题

求线电荷密度为 λ 的无限长直带电线的电场分布。

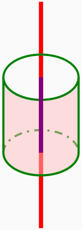
解答

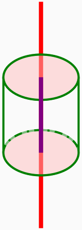
- 由于电荷分布的柱对称性，电场强度也是柱对称的，通常建立柱坐标系，以带电直线为 z 轴
- 选择以 z 轴为中心、半径为 r、高为任意长度 h 的圆柱面为高斯面



解答

- 在此圆柱的侧面，电场强度大小处处为 E，方向沿 $\vec{e}_r$，与侧面的法线方向一致，$\Phi_1 = E\cdot(2\pi rh)$
- 在两个底面处，虽然各点的电场强度大小不等，但各点的电场强度的方向与底面的方向垂直，所以这两个底面处的电通量为零，$\Phi_2 = 0$
- 高斯面内的电荷，$q = \lambda h$





解答

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

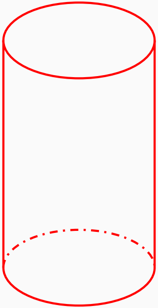
$$E\cdot(2\pi r h) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

例题

试求单位长度带电量为 λ、半径为 R 的无限长的空心圆柱面的电场分布。



解答

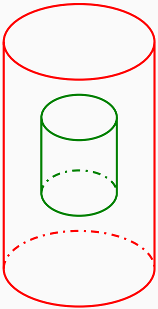
- $r < R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (2\pi r h) = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$



解答

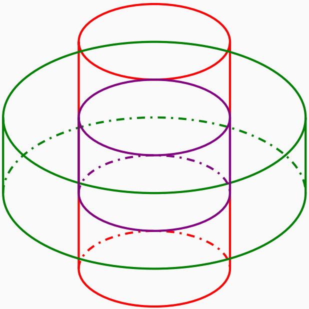
- $r > R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (2\pi r h) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

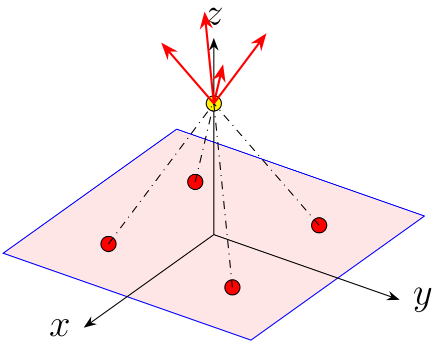
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{\mathrm{e}}_r$$



(3) 无限大均匀带电平面的电场

- 无限大平面可以看成圆心在任意位置的半径为无穷大的圆盘
- 均匀带电圆盘在其中心轴线上的电场强度的方向是沿轴线，即垂直盘面
- 无限大均匀带电平面在任意位置的电场强度的方向是垂直平面的
- 在无限大均匀带电平面两侧距离平面相同距离处各点的电场强度大小相等，两侧的方向相反



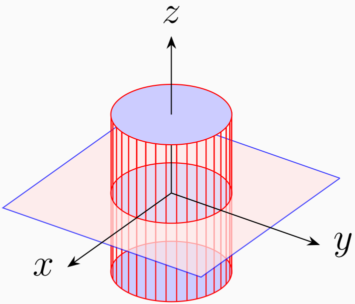
$$\vec{E} = E(z)\,\vec{\mathrm{e}}_z, E(-z) = -E(z)$$

例题

试求无限大均匀带电平面的电场分布。假设电荷面密度为 σ。

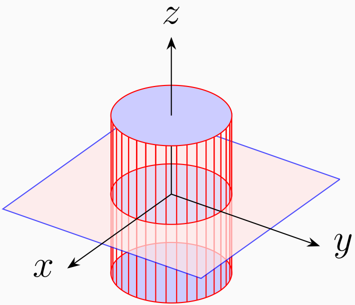
解答

一般地，以带电平面为 xy 平面。选择柱面为高斯面，两个底面 (不要求必须是圆) 均与 xy 平面平行，且分别处于 z 和 $-z$ 处，底面面积为 ΔS，侧面与 z 轴平行 (这个是必须的)



解答

在侧面上，电场强度方向与侧面平行，没有电通量；在两个底面上，电场强度大小相等，设为 E，但两个底面处电场强度的方向相反，均与底面垂直



解答

因此通过整个高斯面的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= (E\,\vec{\mathrm{e}}_z)\cdot(\Delta S\,\vec{\mathrm{e}}_z) + [E(-\,\vec{\mathrm{e}}_z)]\cdot[\Delta S(-\,\vec{\mathrm{e}}_z)] \\ &= 2E\Delta S\end{aligned}$$

而高斯面所包围的电荷量为

$$q = \sigma\Delta S$$

解答

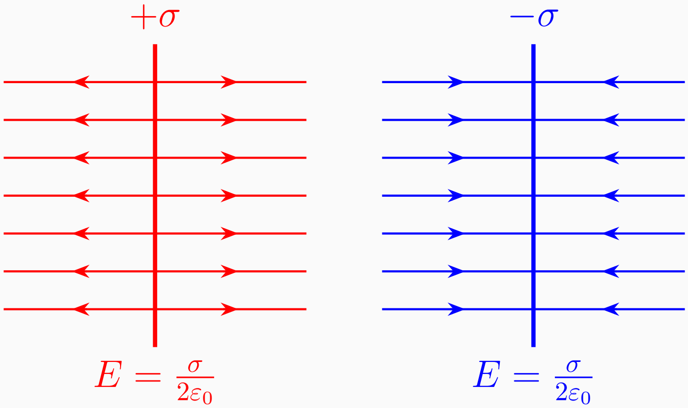
所以由高斯定理得

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

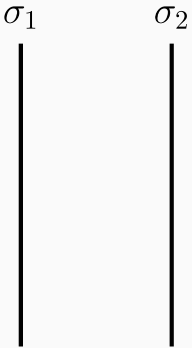
解答



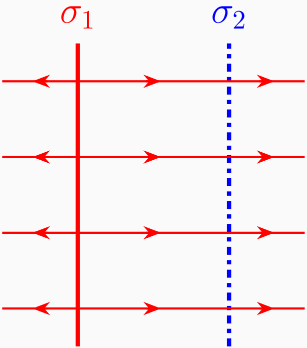
$+\sigma$
$-\sigma$
$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

例题

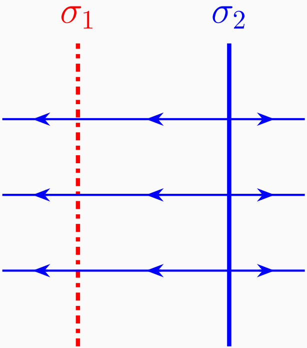
两个面电荷密度分别为 σ_1 和 σ_2 的无限大带电平板平行放置时，求电场分布。



解答

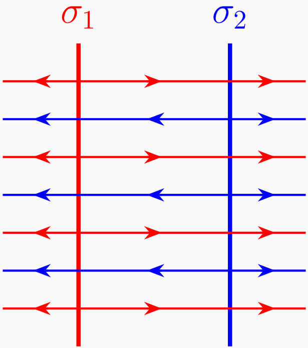


$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$



$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

解答

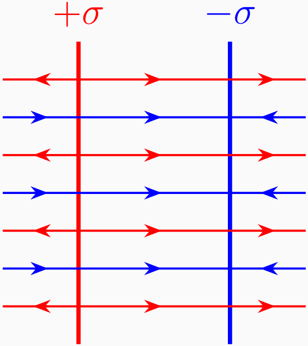


$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

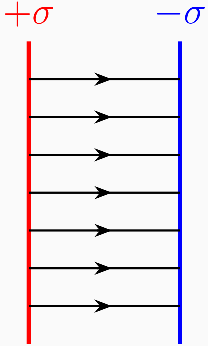
$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

解答

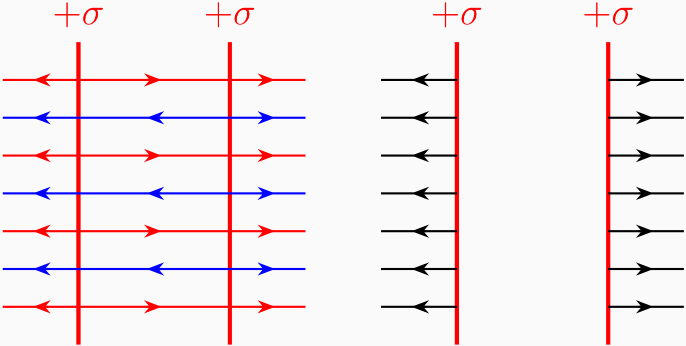


$$|E_1| = |E_2| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



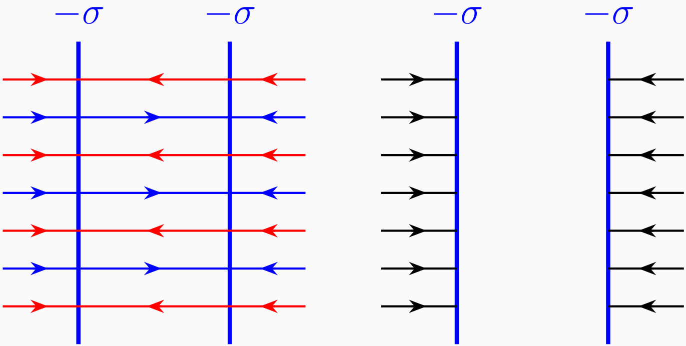
$$E = |E_1| + |E_2| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

解答



$$|E_1| = |E_2| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E = |E_1| + |E_2| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

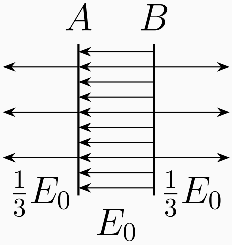
解答



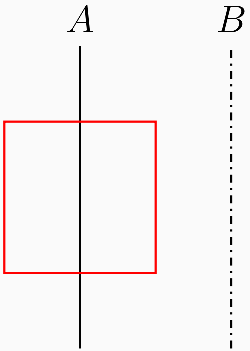
$$|E_1| = |E_2| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E = |E_1| + |E_2| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

例题

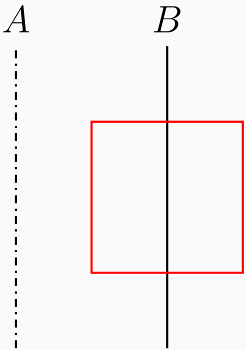
A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小为 E_0，两平面外侧电场强度大小都为 $\frac{1}{3}E_0$，方向如图。则 A、B 两平面上的电荷面密度分别为 $\sigma_A =$____，$\sigma_B =$____。



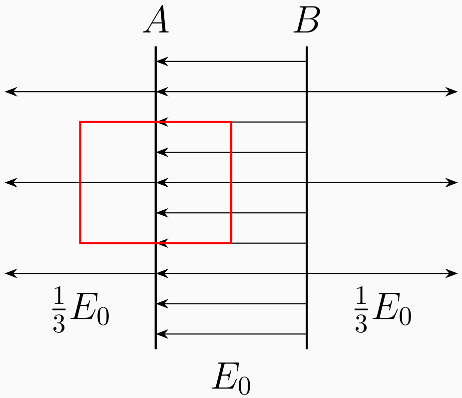
解答



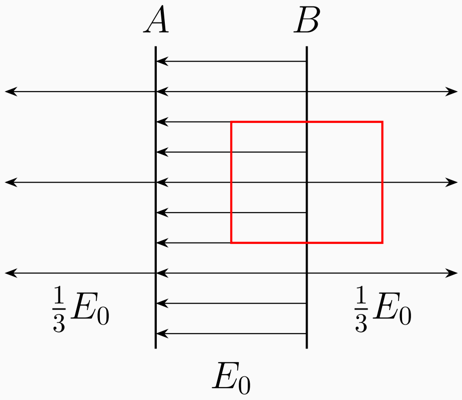
解答



解答



解答



作业

- P67[1-14] 根据量子理论，氢原子中心是个带正电 e 的原子核 (可看成点电荷)，外面是带负电的电子云。在正常状态 (核外电子处在 s 态) 下，电子云的电荷密度分布球对称：

$$\rho_{\mathrm{e}} = -\frac{e}{\pi a_{\mathrm{B}}^3}\mathrm{e}^{-2r/a_{\mathrm{B}}}$$

式中 a_{B} 为一常量 (它相当于经典原子模型中电子圆轨道的半径，称为玻尔半径)。求原子内的电场分布。

作业

- P67[1-16] 半径为 R 的无限长直圆筒面上均匀带电，沿轴线的电荷线密度为 λ。求场强分布，并画出 $E-r$ 曲线。
- P67[1-20] 一厚度为 d 的无限大平板，平板体内均匀带电，电荷体密度为 ρ_0。求板内、外场强的分布。

四、电势

1 静电力做功

1.1 单个点电荷的电场

- 点电荷 q 在空间中所激发的电场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 点电荷 q_0 在此电场中受到的电场力

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 当 q_0 发生位移 $\mathrm{d}\vec{r}$ 时，电场力所做的功为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

$$\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{A}$$

$$\mathrm{d}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 2\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{d}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = \mathrm{d}(A^2) = 2A\,\mathrm{d}A$$

$$\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = A\,\mathrm{d}A$$

$$\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\,\mathrm{d}r$$

- 所以电场力所做的功为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3} r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

- 当 q_0 从 A 点沿任意路径移动到 B 时，电场力所做的功

$$
\begin{aligned}
W_{AB} &= \int_A^B \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{r_A}^{r_B} \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{r_B}\right)-\left(-\frac{1}{r_A}\right)\right] \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]
\end{aligned}
$$

- 点电荷 q_0 在点电荷 q 所激发的电场中受到的电场力所做的功与 q_0 移动的路径无关
- 单个点电荷的电场中的电场力是个保守力

1.2 任意带电体的电场

- 任意带电体总可以看成由若干个点电荷所组成的带电体系
- 根据电场叠加原理，整个带电体所激发的总电场等于各个点电荷所激发的电场的矢量和

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

$$\vec{E} = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 点电荷 q_0 在此电场中所受到的静电力等于 q_0 受到每个点 (源) 电荷的静电力的矢量和

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = q_0\sum_i \vec{E}_i = \sum_i q_0\vec{E}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = q_0\vec{E}_i = \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

$$\mathrm{d}\vec{F} = q_0\,\mathrm{d}\vec{E} = \frac{q_0\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 每个点电荷的静电力做功都与路径无关，是保守力
- 因此总的静电力也是保守力，做功与路径无关

1.3 静电场的环路定理

- 保守力做功与路径无关，也可以表示为保守力沿任何闭合路径所做的总功为零，即

$$\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\oint_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

- 静电场的场强沿任何闭合环路的线积分 (即环量) 恒等于零
- 静电场是个保守场

2 电势能、电势差和电势

2.1 电势能

- 保守力做功与路径无关，只与始末位置有关，由此可以引入相应的势能
- 保守力做功等于相应势能的减少
- 静电力是个保守力，与静电力对应的势能叫做电势能
- 静电力沿任意路径所做的功等于始末位置电势能的减少

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=q_0\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
$$=-(W_B-W_A)=W_A-W_B$$

- 由静电力做功只能求出两个位置之间的电势能的差值，如果要确定某个位置的电势能，必须选择某个位置，规定它的电势能为零，此位置称为电势能的零点

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = W_A - W_B$$

$$W_A = W_B + q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

- 如果选择 B 点为电势能的零点，即令 $W_B = 0$，那么 A 点的电势能等于 q_0 从 A 点移动到零电势能点 B 时静电力所做的功

$$W_A = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

- 势能是相互作用的物体所共有的，因此 q_0 在 A 点的电势能是指 q_0 在 A 点时 q_0 和激发电场的带电体之间所共有的电势能

2.2 电势差

- 点电荷 q_0 从 A 点移动到 B 点时静电力所做的功 W_{AB} 与电荷量 q_0 的比值称为静电场中 A、B 两点的电势差

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q_0} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{W_A}{q_0} - \frac{W_B}{q_0}$$

- 电势差也称为电势降落或电压

2.3 电势

- 点电荷 q_0 在 A 点时系统的电势能 W_A 与电荷量 q_0 的比值称为静电场中 A 点的电势

$$
\begin{aligned}
U_A &= \frac{W_A}{q_0} \\
&= \frac{W_B}{q_0} + \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= U_B + \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}
\end{aligned}
$$

- 电势能的具体数值与电势能零点的选择有关，因此电势的具体数值也与电势零点的选择有关
- 电势能零点的电势能为零，因此该点的电势也为零，所以电势能的零点和电势的零点是一致的
- 如果选择 B 点为电势能的零点，则 B 点也是电势的零点，即令 $W_B = 0$，则 $U_B = 0$，那么 A 点的电势

$$U_A = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

- 电势零点的选择原则上是任意的，但对于一些常见的带电体，通常都有约定俗成的选择
  - 如果带电体的电荷分布在有限的区域内，即在无穷远处没有电荷分布，那么通常选择无穷远处为电势零点
  - 如果无穷远处有电荷分布 (如无限大带电平面、无限长带电直线)，那么应该选择某个有限远的地方为电势零点 (具体选择哪个位置，应该是使任意位置的电势的表达式尽量简单)

- 根据电势的定义，电势差就是两个位置电势的差值

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}U = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

如果 $\mathrm{d}\vec{r}$ 与 $\vec{E}$ 方向一致，则 $\mathrm{d}U < 0$，即：沿着电场线的方向，电势逐点降低！$\mathrm{d}U$ 指末位置的电势与初位置的电势之差

- 某点的电势与电势零点的选择有关，但任意两点之间的电势差与电势零点的选择无关

3 电势的求法

3.1 已知电势能求电势

- 如果已知点电荷 q_0 在某处时系统的电势能为 W，则根据定义，该点的电势为

$$U = \frac{W}{q_0}$$

3.2 已知电场分布求电势分布

- 如果电场已知,那么选择合适的零电势点,根据定义可以求得任意位置的电势

$$U_A = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

例题

试求单个点电荷 q 产生的电场中各点的电势。

解答

对于点电荷的电场，通常以点电荷所在位置为坐标原点，在球坐标系中，电场表示为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

解答

选择无穷远处 $(r \to \infty)$ 为电势零点，则任意位置 (r, θ, φ) 的电势

$$
\begin{aligned}
U(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} & &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_r^{\infty} \\
&= \int_{\vec{r}}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} & &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[0 - \left(-\frac{1}{r}\right)\right] \\
&= \int_{r}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} r\, \mathrm{d}r & &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, \mathrm{d}r & &= U(r)
\end{aligned}
$$

解答

$$U(\vec{r}) = U(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

对于带正电的点电荷，电场线从正电荷出发指向无穷远，沿着电场线方向电势逐点降低，无穷远处电势为零，因此正电荷电场的电势为正

例题

试求半径为 R、带电量为 Q 的均匀带电薄球壳产生的电场中电势的分布。

解答

以球壳球心为坐标原点，电荷分布具有球对称性，选择球坐标系比较方便，根据高斯定理很容易求得均匀带电球壳的电场分布

$r < R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E_1 \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times 0$$

$$E_1 = 0$$

$r > R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E_2 \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times Q$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

解答

电荷分布在有限区域，选择无穷远处为电势零点，则在球外区域 $(r > R)$，电势为

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]\Big|_r^\infty \\
&= \int_r^\infty \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r} &&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[0-\left(-\frac{1}{r}\right)\right] \\
&= \int_r^\infty E_2\,\mathrm{d}r &&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\
&= \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

解答

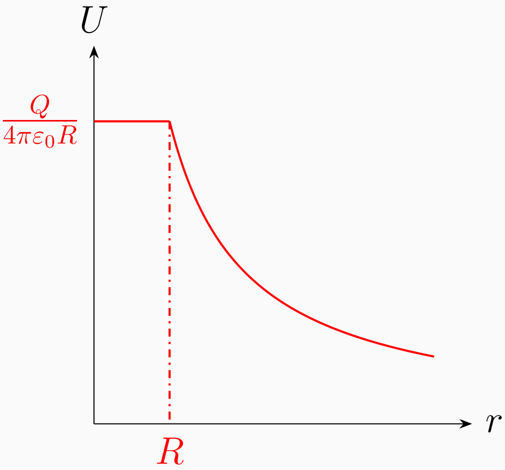
在球内区域 $(r < R)$，电势为

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_r^{R} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_r^{R} E_1 \, \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} E_2 \, \mathrm{d}r \\
&= 0 + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 0 + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_R^\infty \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[0-\left(-\frac{1}{R}\right)\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

解答



例题

试求半径为 R、带电量为 Q 的均匀带电球体产生的电场中电势的分布。

解答

以球心为坐标原点，电荷分布具有球对称性，选择球坐标系比较方便，根据高斯定理很容易求得均匀带电球体的电场分布。

在球内区域 $(r < R)$，

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E_1 \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$$

解答

在球外区域 $(r > R)$，

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E_2 \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times Q$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

解答

电荷分布在有限区域，选择无穷远处为电势零点，则在球外区域 $(r > R)$，电势为

$$U_2 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} E_2 \, \mathrm{d}r = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right] \Bigg|_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[0 - \left(-\frac{1}{r} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

解答

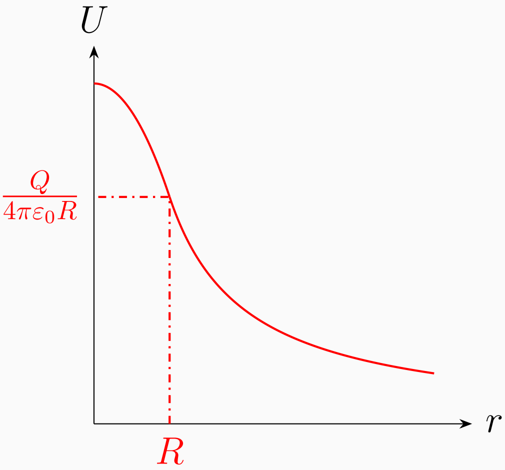
在球内区域 $(r < R)$，电势为

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_r^{R} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_r^{R} E_1 \, \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} E_2 \, \mathrm{d}r \\
&= \int_r^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \, \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]\Bigg|_r^R + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_R^\infty \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2)\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[0 - \left(-\frac{1}{R}\right)\right] \\
&= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)
\end{aligned}
$$

解答



- 【注意】对于柱对称带电体、无穷大带电平面等情况，由于无穷远处有电荷分布，不能选择无穷远处为电势零点！

3.3 电势叠加原理

- 任何带电体都可以看成由若干点电荷组成的带电体系
- 根据点电荷的电势公式及电场叠加原理，可以得到电势叠加原理

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

$$U_{iA}=\int_A^B \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_{iA}}-\frac{1}{r_{iB}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
U_A &= \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_A^B \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_A^B \left(\sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} \right) \\
&= \sum_i \int_A^B \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \sum_i U_{iA}
\end{aligned}
$$

- 当带电体的电荷分布在有限范围内时，选择无穷远处为电势零点，即 $r_{iB} \to \infty$，则

$$U_{iA} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{iA}}$$

$$U_A = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{iA}}$$

- 当带电体的电荷连续分布时

$$\mathrm{d}U_A = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

$$U_A = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

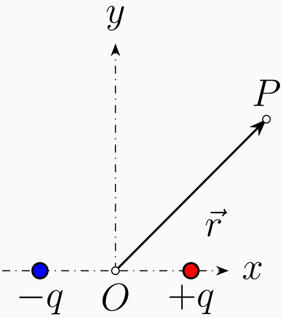
例题

求距电偶极子相当远的地方任一点的电势。已知电偶极子中两电荷 $\pm q$ 之间的距离为 l。

解答

以 $\pm q$ 和场点 P 所在平面为 xy 平面，如图建立直角坐标系，假定场点坐标为 (x, y)，则

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\vec{r} = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

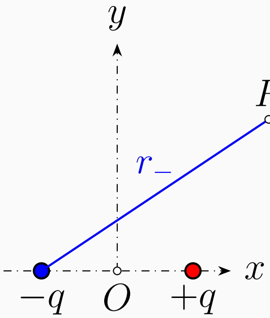


解答

根据点电荷的电势，选择无穷远处为电势零点，则 $-q$ 在 P 点的电势为

$$U_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$r_- = \sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}$$

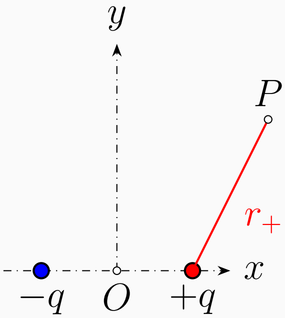


解答

$+q$ 在 P 点的电势为

$$U_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}$$

$$r_+ = \sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}$$



解答

根据电势叠加原理，电偶极子在 P 点的电势为

$$
\begin{aligned}
U &= U_- + U_+ \\
&= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right]
\end{aligned}
$$

解答

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒展开式【高数下 P282】

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0)](x-x_0)^n$$

二项展开式【高数下 P287-289】：当 $-1<x<1$ 时，

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

解答

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

当 x 为小量时，$(1+x)^n \approx 1 + nx$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$
$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

解答

当 $r=\sqrt{x^2+y^2}\gg l$ 时，$\frac{l}{r}$ 为小量

$$
\begin{aligned}
r_- &= \sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+y^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2+xl+\frac{l^2}{4}} \\
&= r\sqrt{1+\frac{xl}{r^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{l}{r}\right)^2} \\
&= r\sqrt{1+\frac{x}{r}\left(\frac{l}{r}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{l}{r}\right)^2}
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
r_- &= r\left\{1+\left[\frac{x}{r}\left(\frac{l}{r}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\approx r\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{r}\left(\frac{l}{r}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]\right\} \\
&\approx r\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{r}\left(\frac{l}{r}\right)\right]\right\} \\
&= r\left[1+\frac{xl}{2r^2}\right]
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
r_+ &= \sqrt{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2-xl+\frac{l^2}{4}} \\
&= r\sqrt{1-\frac{xl}{r^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{l}{r}\right)^2} \\
&\approx r\left[1-\frac{xl}{2r^2}\right]
\end{aligned}
$$

解答

$$r_- \approx r\left[1+\frac{xl}{2r^2}\right]$$

$$r_+ \approx r\left[1-\frac{xl}{2r^2}\right]$$

$$r_- - r_+ = r\times\frac{xl}{r^2} = \frac{xl}{r}$$

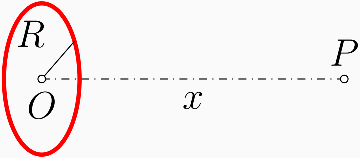
$$r_+r_- = r^2\left[1-\left(\frac{xl}{2r^2}\right)^2\right] \approx r^2$$

解答

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right] \\
&\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{xl}{r^3} \\
&= \frac{qlx}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{q\vec{l}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{\vec{p}\cdot\vec{\mathrm{e}}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}
$$

例题

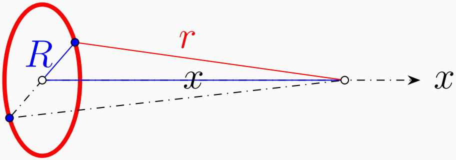
P67[1-25] 如本题图，一半径为 R 的均匀带电圆环，电荷总量为 $q(q>0)$。(1) 求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强；(2) 画出 $E-x$ 曲线；(3) 轴线上什么地方场强最大? 其值多少? (4) 求轴线上电势 $U(x)$ 的分布；(5) 画出 $U-x$ 曲线；(6) 轴线上什么地方电势最高? 其值多少?



解答

如图建立 x 轴，在圆环上对称地取两个点电荷 $\mathrm{d}q$，则它们到 P 点的距离

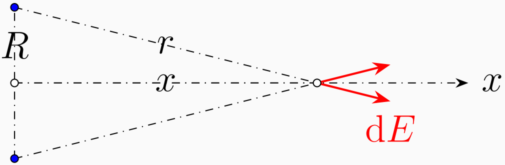
$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$



解答

由于对称性，两个 $\mathrm{d}q$ 在 P 点的电场强度之和一定沿 x 轴方向，大小为

$$2\times \mathrm{d}E\times\frac{x}{r}=2\times\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times\frac{x}{r}$$



解答

所以整个带电圆环在 P 点的总的电场强度一定沿 x 轴方向，大小为

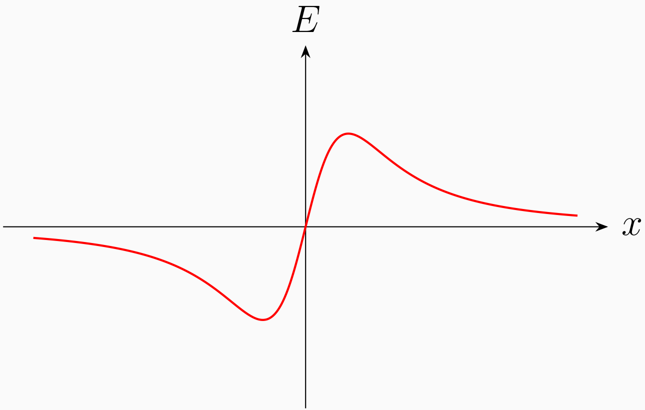
$$E = \int_{\frac{q}{2}} 2 \times \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times \frac{x}{r}$$

这个积分只要对半个圆环进行积分，结果为

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解答

$E-x$ 曲线



解答

$$E(x) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

极值处一阶导数为零

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$E_{\max} = \frac{\sqrt{3}q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$$

解答

电荷分布在有限区域，选择无穷远处为电势零点，一个 $\mathrm{d}q$ 在 P 点的电势为

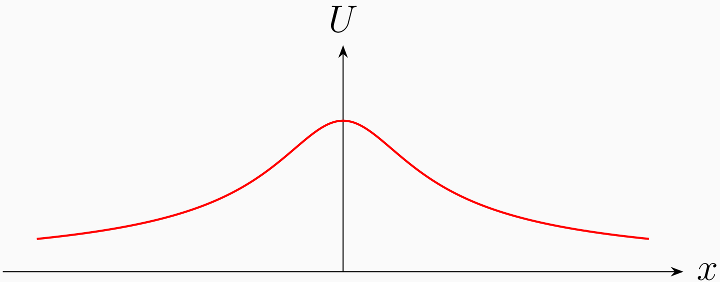
$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

所以整个圆环在 P 点的电势为

$$U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

解答

$U-x$ 曲线



解答

$$U(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]=0$$

$$x=0$$

$$U_{\max}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{0^2+R^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

4 已知电势求电场

- 如果已知电场分布可以通过下式求两点之间的电势差

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

- 如果两点非常靠近，那么

$$-\,\mathrm{d}U = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}U = -E_x\,\mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}y - E_z\,\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= -E_x\,\mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}y - E_z\,\mathrm{d}z \\
E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \\
\vec{E} &= E_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + E_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + E_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{\mathrm{e}}_z\right) \\
&= -\nabla U
\end{aligned}
$$

- 梯度的表达式【附录 B(P349)】
  - 柱坐标系

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\vec{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\vec{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

  - 球坐标系

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\vec{\mathrm{e}}_\varphi$$

例题

已知点电荷的电势为 $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，试利用电势与电场之间的关系求点电荷的电场分布。

解答

由于点电荷具有球对称性，所以选择球坐标系会比较方便，而在球坐标系中，

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\vec{\mathrm{e}}_\varphi$$

解答

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

解答

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla U \\
&= -\left[\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\vec{\mathrm{e}}_r + 0\cdot\vec{\mathrm{e}}_\theta + 0\cdot\vec{\mathrm{e}}_\varphi\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r
\end{aligned}
$$

解答

在直角坐标系中

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

解答

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) \times \frac{\partial r}{\partial x} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2x \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}x
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) \times \frac{\partial r}{\partial y} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2y \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} y
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) \times \frac{\partial r}{\partial z} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot 2z \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} z
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla U \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r
\end{aligned}
$$

5 等势面

- 由电势相等的点组成的面称为等势面
- 根据点电荷的电势 $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 可知，以点电荷为球心，任意一个球面上各点到点电荷之间的距离均相等，因此球面上各点的电势相等，即点电荷电场的等势面是以点电荷为球心的一个个球面
- 在等势面上取邻近的两点，则 $\mathrm{d}\vec{r}$ 一定在等势面内，而两点电势相等，因此两点之间的电势差

$$\mathrm{d}U = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

因此 $\vec{E}$ 一定与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 垂直，即电场强度的方向与等势面垂直

- 如果取一组等电势差的等势面，即相邻两等势面之间的电势差相等，则沿一条电场线方向

$$\mathrm{d}U = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -E\,\mathrm{d}r$$

显然 E 越大的地方，$\mathrm{d}r$ 越小，即等势面越密集的地方电场强度越大

作业

- P67[1-23] 求一对等量同号点电荷联线中点的场强和电势，设电荷都是 q，两者之间距离为 $2l$。
- P67[1-26] 半径为 R 的圆面均匀带电，电荷的面密度为 σ_e。(1) 求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强；(2) 在保持 σ_e 不变的情况下，当 $R \to 0$ 和 $R \to \infty$ 时结果各如何? (3) 在保持总电荷 $Q = \pi R^2 \sigma_\mathrm{e}$ 不变的情况下, 当 $R \to 0$ 和 $R \to \infty$ 时结果各如何? (4) 求轴线上电势 $U(x)$ 的分布，并画出 $U - x$ 曲线。

五、静电场中的导体

1 静电平衡

1.1 静电平衡状态

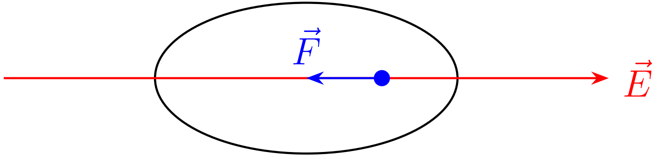
- 当带电体上的电荷分布不随时间发生变化时，我们称这个带电体处于静电平衡状态

1.2 静电平衡过程

(1) 电场改变导体内电荷的分布

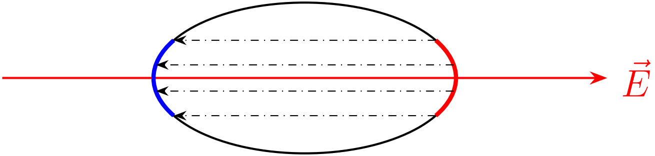
- 导体内部存在大量可以自由移动的自由电荷(电子)
- 没有电场时，导体内任何一个宏观足够小、微观足够大的区域都没有净电荷，呈现出电中性
- 在电场的作用下，自由电荷会发生较大范围的移动，从而改变导体内电荷的分布

- 电子在电场作用下，逆着电场的方向移动，到达电场后方导体的表面
- 电场前方导体失去电子而带正电
- 由于外电场的作用而使导体带上的电荷称为感应电荷



(2) 感应电荷激发附加的电场

- 附加电场的方向与外电场的方向相反
- 两个电场 (外电场和附加电场) 的叠加使得导体内部的电场减弱 (但仍然沿外电场的方向)
- 如果导体内部电场不为零，导体内的电子仍然会发生移动，导体两端的感应电荷持续增多，附加电场增强，总电场减弱，直到导体内部电场为零，电子不再发生移动

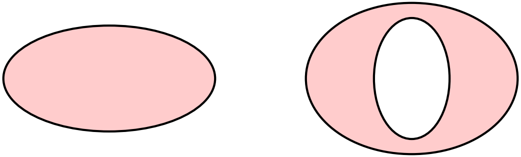


1.3 导体处于静电平衡时

- 导体内部电场处处为零，整个导体是个等势体，导体表面是个等势面
- 由于等势面与电场线垂直，因此靠近导体表面处的电场与导体表面垂直

1.4 导体的静电平衡条件是导体内部电场处处为零

- 对于实心导体而言，导体内部就是整个导体所占据的空间
- 对于空心导体，导体内的空腔属于导体外部



2 处于静电平衡状态的导体的电荷分布

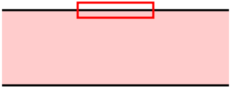
2.1 导体内部

- 导体处于静电平衡时内部电场处处为零
- 在导体内部任意宏观足够小、微观足够大区域取封闭曲面为高斯面，则通过高斯面的电通量永远等于零
- 根据高斯定理，高斯面内没有净电荷存在
- 结论：处于静电平衡状态的导体，内部没有净电荷
- 推论：处于静电平衡状态的导体，电荷只分布在导体表面

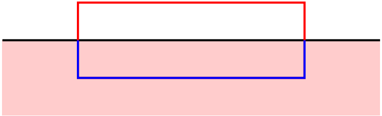
2.2 导体表面

(1) 电荷面密度与电场强度的关系

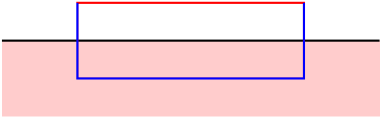
- 在导体表面附近取一很小的柱面为高斯面，柱面的侧面与导体表面垂直，柱面的底面与导体表面平行，底面面积为 ΔS



- 导体内部电场为零，通过导体内部的部分高斯面的电通量为零



- 导体外部靠近导体表面处电场与表面垂直，假定所取 ΔS 处电场大小为 E，则只有导体外的圆柱底面上有电通量，且电通量为 $\Phi = E\Delta S$



- 高斯面所包围的电荷量 $q = \sigma\Delta S$，其中 σ 为导体表面的电荷面密度

- 根据高斯定理，有

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma \Delta S)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

即电荷面密度越大的地方电场越强

(2) 电荷面密度与表面曲率的关系

- 孤立导体表面的电荷面密度与表面的曲率之间的关系较为复杂，并不存在单一的函数关系，但有定性的规律 (实验上总结得到)：曲率比较大的地方 (曲率半径比较小) 电荷面密度比较大，曲率比较小的地方电荷面密度比较小，曲率为负的地方，电荷面密度更小

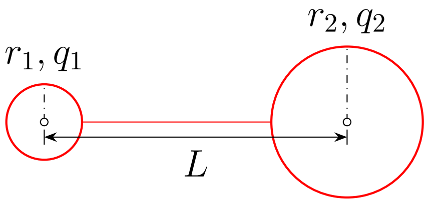
- 设 P 是曲线 C 上的点，在 C 上取邻近点 P 的点 Q，设点 P、Q 处切线与 x 轴的夹角分别为 θ 和 $\theta+\Delta\theta$，PQ 段的长度为 Δs，则

$$k=\lim_{Q\to P}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$$

  称为曲线 C 在点 P 的曲率
- 当 $k\neq 0$ 时，$R=\frac{1}{k}$ 称为 C 在点 P 的曲率半径
- 当 $k=0$ 时，规定 $R=\infty$

- 以上关于曲率的定义中取的是绝对值，所以前面所说的负曲率，其实是与法线方向的选择有关
- 对于封闭曲面，我们通常选择外法线方向 (即从曲面内部指向曲面外部)，这样，曲面凸出部分的曲率为正，曲面凹进部分曲率为负

- 假定两个半径分别为 r_1 和 r_2 的导体球，两球用一长直细导线相连，忽略导线上的电荷，静电平衡后两球的带电量分别为 q_1 和 q_2



- 两球球心之间的距离为 L，$L \gg r_1$、$L \gg r_2$、$r_1 < r_2$，两球离得很远，可以认为两球上的电荷分布不互相影响，电荷在球面上均匀分布

- 选择无穷远处为电势零点，带电量为 q、半径为 R 的均匀带电球面的电势分布

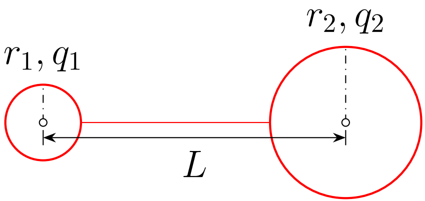
$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r < R \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$

- 小球球心处的电势为

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

- 大球球心处的电势为

$$U_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$



- 导体是个等势体，两球用导线相连，两球构成一个导体，所以两球球心电势相等

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 L}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 L}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{L}=\frac{q_1}{L}+\frac{q_2}{r_2}$$

$$\frac{q_1}{r_1}-\frac{q_1}{L}=\frac{q_2}{r_2}-\frac{q_2}{L}$$

$$\frac{q_1}{r_1}\left(1-\frac{r_1}{L}\right)=\frac{q_2}{r_2}\left(1-\frac{r_2}{L}\right)$$

$$L\gg r_1, L\gg r_2$$

$$\frac{q_1}{r_1}=\frac{q_2}{r_2}$$

- 所以

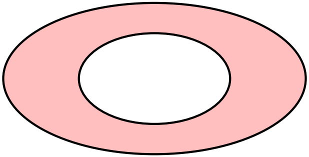
$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$
$$\frac{\sigma_1 \cdot (4\pi r_1^2)}{r_1} = \frac{\sigma_2 \cdot (4\pi r_2^2)}{r_2}$$
$$\sigma_1 r_1 = \sigma_2 r_2$$

  导体上曲率半径比较大 (曲率较小) 的地方电荷面密度比较小，曲率半径比较小 (曲率较大) 的地方电荷面密度比较大

- 【问题】曲率为负的地方电荷面密度更小，为什么？如何得到?

3 导体壳

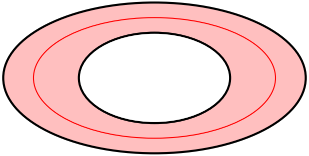
- 处于静电平衡状态时，导体的内部没有电场，导体是等势体，导体表面是等势面
- 导体内部没有净电荷，电荷只分布在导体表面
- 对于导体壳 (空心导体)，导体的表面有内表面和外表面



3.1 腔内无带电体

(1) 电荷分布

- 如果腔内没有带电体，由于导体内部没有电场，所以在导体内部选择一个闭合曲面，通过该闭合曲面的电通量恒为零，因此闭合曲面所包围的净电荷一定为零，所以内表面所带电荷总量为零



- 所带电荷总量为零，可能每个地方都不带电，也可能有些地方带正电荷有些地方带负电荷
- 如果有些地方带正电有些地方带负电，那么总有一根电场线从正电荷出发终止于负电荷，而沿着电场线电势逐点降低，因此这根电场线的两端电势必然不等，这与导体是个等势体相矛盾
- 因此不可能存在有些地方带正电有些地方带负电，所以内表面处处不带电，电荷只分布在外表面上
- 法拉第圆筒和范德格拉夫起电机就是利用这个电荷分布特点做成的

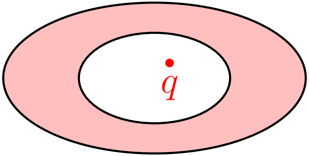
(2) 电场分布

- 电场线起于正电荷或无穷远处，终止负电荷或无穷远处，不会形成闭合线
- 对于导体内空腔，没有电荷分布，因此腔内没有电场线，即没有电场，$E = 0$，所以腔内各点电势处处相等
- 不管导体外电场如何，也不管导体本身带电量如何，静电平衡时，导体内空腔的电场永远为零
- 利用这个特点，对于有些仪器，为了不让它受到电场的干扰，可以在仪器外部添加一个导体壳 (金属罩)，实际应用中，甚至可以用金属网，起到静电屏蔽的作用

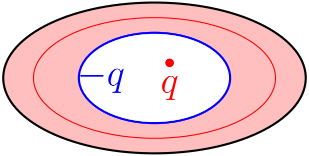
3.2 腔内有带电体

(1) 电荷分布

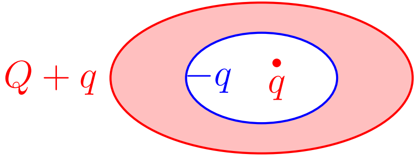
- 如果腔内有带电体，假定带电量为 q



- 由于静电平衡时，导体内部没有电场，因此在导体内部选择一个闭合曲面，通过该闭合曲面的电通量恒为零，因此闭合曲面所包围的净电荷一定为零，所以内表面所带电荷总量为 $-q$



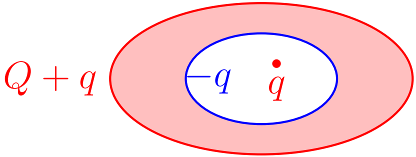
- 如果导体本身所带电量为 Q，则外表面所带电荷总量为 $Q+q$



- 内表面的 $-q$ 和外表面的 $+q$ 是由于腔内带电体存在而产生的感应电荷，这时，内表面是靠近带电体的近端，外表面是远离带电体的远端，因此近端所带电量与带电体的电量异号，远端则同号

(2) 电场分布

- 导体内表面有电荷分布，腔内有带电体，所以腔内有电场



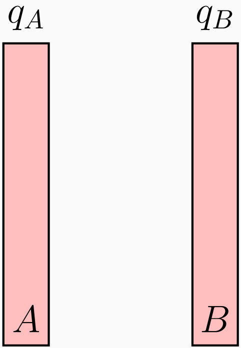
3.3 关于接地

- 所谓接地，是用导线把导体与地相连构成一个新的导体，这里，不管导线接在导体的什么部位，效果是相同的
- 接地后，不管带电体在什么位置，导体本身都属于近端，而远端则为大地
- 如果腔内有带电体，则内表面属于近端，大地为远端，外表面则属于新导体的内部，这时外表面不带电荷

- 如果没有外电场，那么不管腔内带电体的带电量如何，导体外空间也都没有电场，也就是，接地的导体壳可以把腔内带电体的电场屏蔽，使之不影响到外部空间，这是另一种静电屏蔽
- 保护腔内空间不受导体外部带电体影响时，导体壳无需接地
- 保护导体外空间不受腔内带电体影响时，导体壳需接地

例题

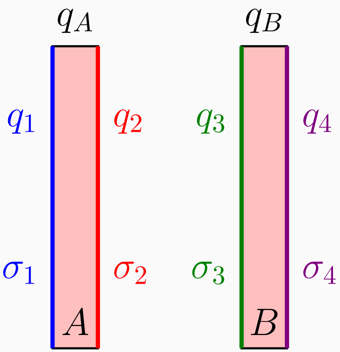
A、B 为靠得很近的两块平行金属板，板的面积为 S，板间距为 d，使 A、B 板带电分别为 q_A 和 q_B，求各板两侧所带的电荷量及两板间的电压。



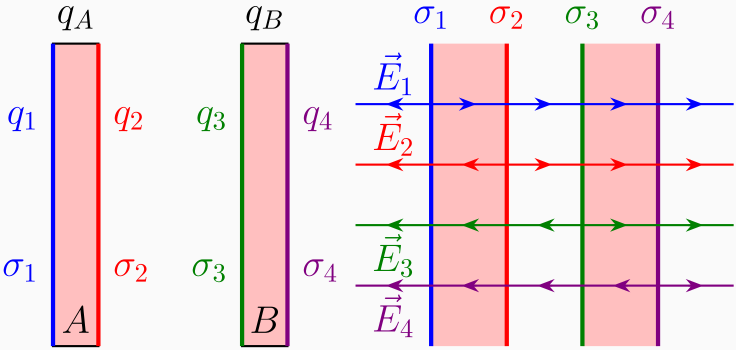
解答

- 假定静电平衡时两个板的四个表面的带电量分别为 q_1、q_2、q_3 和 q_4

$$
\begin{aligned}
q_A &= q_1 + q_2 \\
&= (\sigma_1 + \sigma_2)S \\
q_B &= q_3 + q_4 \\
&= (\sigma_3 + \sigma_4)S
\end{aligned}
$$

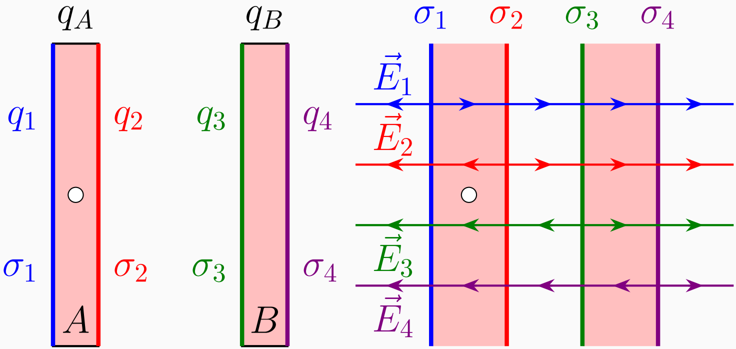


解答



$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}, E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}, E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}, E_4 = \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

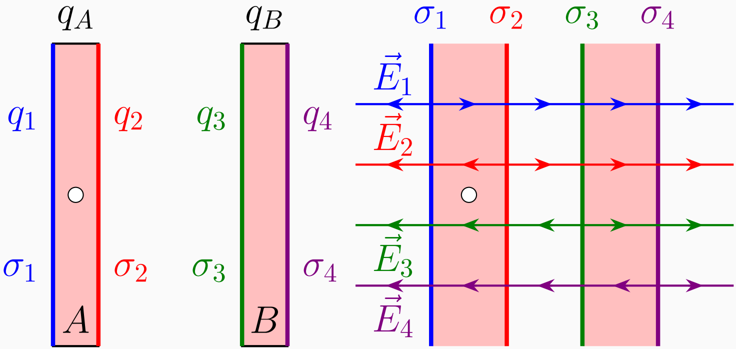
解答



q_A
q_B
q_1
q_2
q_3
q_4
σ_1
σ_2
σ_3
σ_4
A
B
σ_1
σ_2
σ_3
σ_4
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_2$
$\vec{E}_3$
$\vec{E}_4$

$$E_A = ? = 0$$

解答



$$E_A = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 = 0$$

解答

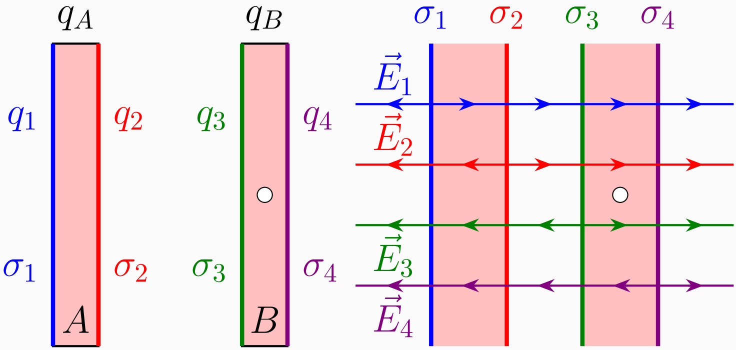
$$E_A = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 = 0$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}, E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}, E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}, E_4 = \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

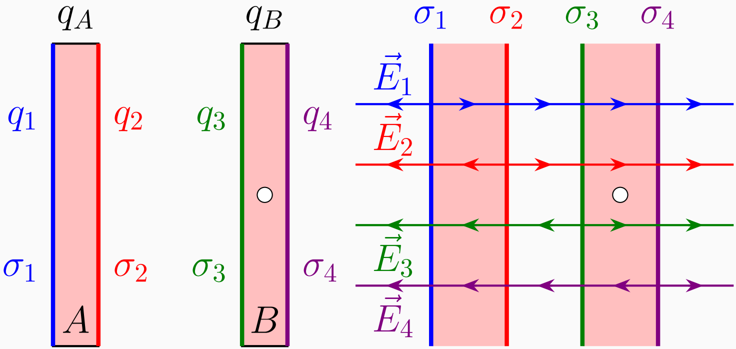
解答



q_A
q_B
q_1
q_2
q_3
q_4
σ_1
σ_2
σ_3
σ_4
A
B
σ_1
σ_2
σ_3
σ_4
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_2$
$\vec{E}_3$
$\vec{E}_4$

$$E_B = ? = 0$$

解答



$$E_B = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

解答

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$$
$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$q_1 - q_4 = 0$$
$$q_2 + q_3 = 0$$

解答

$$q_1 - q_4 = 0$$

$$q_2 + q_3 = 0$$

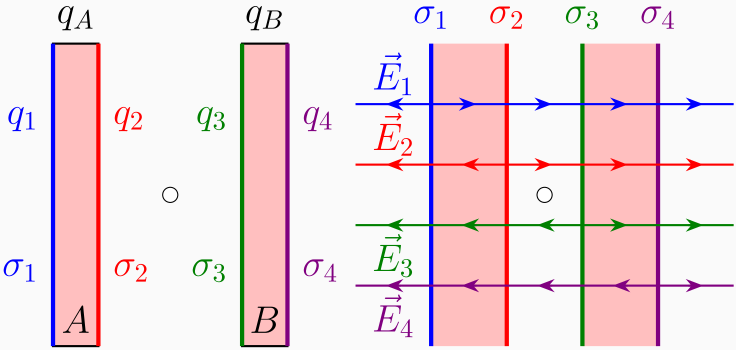
$$q_A = q_1 + q_2$$

$$q_B = q_3 + q_4$$

$$\Downarrow$$

$$q_1 =?, q_2 =?, q_3 =?, q_4 =?$$

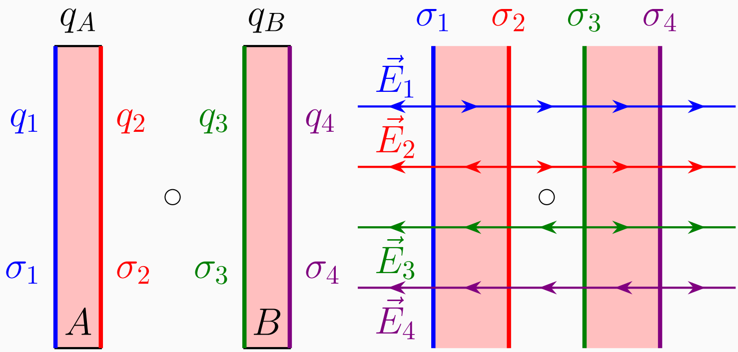
解答



q_A
q_B
q_1
q_2
q_3
q_4
σ_1
σ_2
σ_3
σ_4
A
B
σ_1
σ_2
σ_3
σ_4
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_2$
$\vec{E}_3$
$\vec{E}_4$

$$E = ?$$

解答



$$E = E_1 + E_2 - E_3 - E_4$$

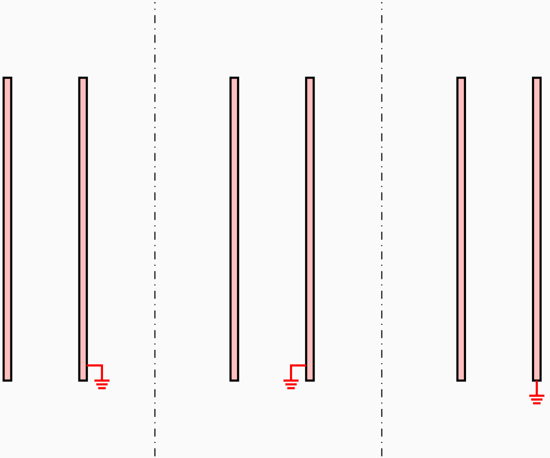
解答

$$E=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$U_{AB}=Ed$$

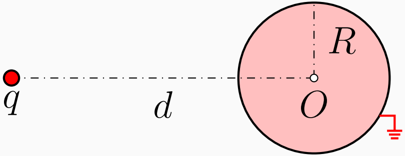
思考题

- 如图接地，各表面带电量如何变化？



例题

如图所示，在一接地导体球附近放置一电荷量为 q 的点电荷。已知球的半径为 R，点电荷离球心的距离为 d。求导体球表面上的感应电荷。



解答

- 导体球处于静电平衡状态时，导体球本身是个等势体，球内任意一点的电势都相同
- 当电荷分布在有限区域时，我们通常选择无穷远处为电势的零点 (只是通常这样选择，并不是必须这样选择)
- 导体球接地，那么导体球与地构成一个新的导体，所以导体球的电势与地的电势相等，在这里就是零

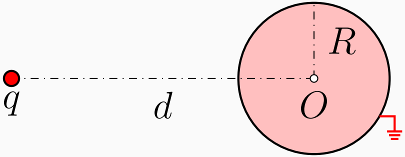
解答

- 以无穷远处为电势零点，点电荷 q 在 O 处的电势为

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

- 设感应电荷为 q'，它在 O 处的电势为

$$U_2 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



解答

- 注意这里感应电荷并不是均匀分布的，但球面上所有的元电荷与球心之间的距离均为 R

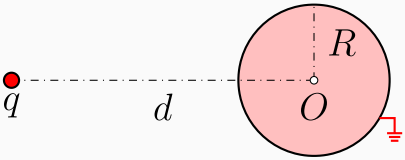
$$\mathrm{d}U_2 = \frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_2 = \int_{q'} \frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{q'} \mathrm{d}q' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

解答

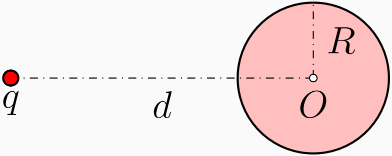
- 导体接地，以无穷远处为电势零点

$$U_O = U_1 + U_2 = 0$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



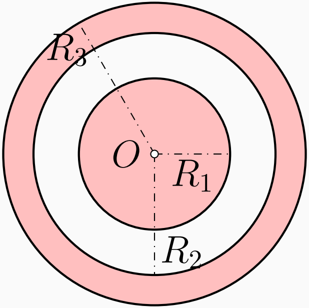
思考题

如图所示，在一导体球附近放置一电荷量为 q 的点电荷。已知球的半径为 R，点电荷离球心的距离为 d。如果导体球不接地，则导体球表面上的感应电荷 $q' =$____；若以无穷远处为电势零点，则球心 O 处的电势 $V_O =$____。



例题

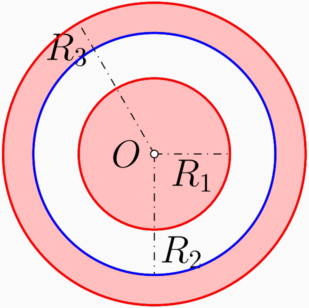
有一内外半径分别为 R_2、R_3 的金属球壳，在球壳中放一半径为 R_1 的同心金属球，如图所示，若使球壳和球均带有 q 的正电荷，问两导体球上的电荷如何分布？球心的电势为多少？两导体间电压为多少？



解答

- 静电平衡时
  - R_1 处，带电量 $q_1 = q$
  - R_2 处，带电量 $q_2 = -q$
  - R_3 处，带电量 $q_3 = 2q$

  三个均匀带电球面



解答

- 以无穷远处为电势零点，q_1、q_2、q_3 在 O 处的电势分别为

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$
$$U_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$
$$U_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

解答

- O 点总电势

$$
\begin{aligned}
U_O &= U_1 + U_2 + U_3 \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{2q}{R_3}\right)
\end{aligned}
$$

解答

- $R_1 < r < R_2$ 区域，可由高斯定理求得电场

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- 所以两导体间的电压为

$$\begin{aligned}\Delta U &= \int_{R_1}^{R_2} E \,\mathrm{d}r \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,\mathrm{d}r \\ &=?\end{aligned}$$

解答

- 半径为 R、带电量为 q 的均匀带电球面的电势分布 (以无穷远处为电势零点)

$$U(r < R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$
$$U(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

解答

- q_1、q_2、q_3 在 $r = R_1$ 处的电势分别为

$$U_{11} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$
$$U_{21} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$
$$U_{31} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

- $r = R_1$ 处的总电势为

$$U_1 = U_{11} + U_{21} + U_{31}$$

解答

- q_1、q_2、q_3 在 $r = R_2$ 处的电势分别为

$$U_{12} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$
$$U_{22} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$
$$U_{32} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

- $r = R_2$ 处的总电势为

$$U_2 = U_{12} + U_{22} + U_{32}$$

解答

- q_1、q_2、q_3 在 $r = R_3$ 处的电势分别为

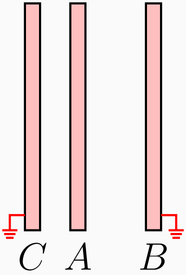
$$U_{13} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$
$$U_{23} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$
$$U_{33} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

- $r = R_3$ 处的总电势为

$$U_3 = U_{13} + U_{23} + U_{33}$$

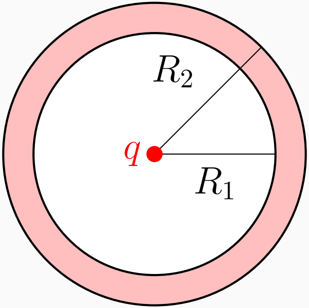
作业

- P71[1-49] 三平行金属板 A、B 和 C，面积都是 $200\ \mathrm{cm}^2$，A、B 相距 $4\ \mathrm{mm}$，A、C 相距 $2\ \mathrm{mm}$，B、C 两板都接地。如果使 A 板带正电 $3\times10^{-7}\ \mathrm{C}$，在略去边缘效应时，问 B 板和 C 板上感应电荷各是多少？以地的电势为零，问 A 板的电势是多少？



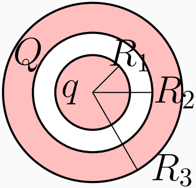
作业

- P71[1-50] 点电荷 q 处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2。求场强和电势的分布，并画出 $E-r$ 和 $U-r$ 曲线。



作业

- P71[1-52] 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q，球外有一内外半径为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q。(1) 求两球的电势 U_1 和 U_2; (2) 求两球的电势差 ΔU; (3) 以导线把球和球壳联接在一起后，U_1、U_2 和 ΔU 分别是多少？(4) 在情形 (1)、(2) 中，若外球接地，U_1、U_2 和 ΔU 分别是多少？(5) 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？



六、静电能

1 静电能及其零点

- 静电力是保守力，所以可以定义相应的势能(静电势能，简称为静电能)
- 势能是状态的函数，要确定某个状态具体的势能值，必须指定参考点 (零势能点)
- 保守力做功等于势能的减少量，系统在某个状态的静电能等于系统从该状态经过任何过程演化到零势能状态时静电力所做的功，也等于系统从零势能状态演化到所求状态时外力克服静电力所做的功

- 任何带电体均可以看成由若干点电荷组成的体系
- 当电荷分布在有限区域内时，通常选择无穷远处为电势能的零点
- 这里无穷远处是指两个相互作用的带电体之间相距无穷远
- 静电能的零点通常选择为所有点电荷之间都相距无穷远时系统的势能

- 一个带电体 (这里称为大带电体) 也可以看成由若干小带电体所组成的
- 每一个小带电体也是由若干点电荷所构成的，这些点电荷由相距无穷远演化成小带电体时外力所做的功就等于该小带电体的静电能，这个静电能称为该小带电体的自能
- 两个小带电体由相距无穷远变化到相距一定距离时外力所做的功称为这两个小带电体之间的相互作用能
- 整个大带电体的静电能等于所有小带电体的自能之和加上各带电体之间的相互作用能之和
- 最小的小带电体是一个电子或一个质子，要不要考虑电子或质子的自能?

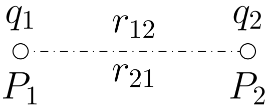
2 点电荷之间的相互作用能

2.1 两个点电荷

- 以两个点电荷相距无穷远时的电势能为零，当 q_1、q_2 相距 r 时，电势能为

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 把两个相距无穷远的点电荷 q_1、q_2 移到图中相距 $r_{12}(= r_{21})$ 的 P_1、P_2 两个位置，可以先把 q_1 移到 P_1，再把 q_2 移到 P_2，也可以先把 q_2 移到 P_2，再把 q_1 移到 P_1。两个过程，外力所做的功是相等的，都是 $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}$



- 形式上的变换

$$W_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} = q_1 U_{21}$$
$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = q_2 U_{12}$$

- q_2 激发的电场在 q_1 所在位置 P_1 的电势 $U_{21} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} = U_2(P_1)$
- q_1 激发的电场在 q_2 所在位置 P_2 的电势 $U_{12} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = U_1(P_2)$

- q_1、q_2 之间的相互作用能

$$q_1 U_{21} = q_2 U_{12} = \frac{1}{2}(q_1 U_{21} + q_2 U_{12})$$

$$W_{12} = W_{21} = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21})$$

2.2 多个点电荷

- 一般地假定，系统有 N 个点电荷，带电量分别为 q_1、q_2、……、q_N，它们的位置分别为 P_1、P_2、……、P_N
- q_i 激发的电场在 q_j 所在位置 P_j 的电势

$$U_{ij} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = U_i(P_j)$$

- q_j 激发的电场在 q_i 所在位置 P_i 的电势

$$U_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ji}} = U_j(P_i)$$

- q_i、q_j 之间的相互作用能

$$W_{ij} = q_i U_{ji} = q_j U_{ij} = W_{ji}$$

$$q_i U_{ji} = q_j U_{ij} = \frac{1}{2}(q_i U_{ji} + q_j U_{ij})$$

$$W_{ij} = W_{ji} = \frac{1}{2}(W_{ij} + W_{ji})$$

- 整个系统总的相互作用能

$$
\begin{aligned}
W_{互} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N} W_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(q_i\sum_{j=1,j\neq i}^{N} U_{ji}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i
\end{aligned}
$$

- 除 q_i 外其他 $N-1$ 个点电荷在 P_i 产生的总电势

$$U_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{N} U_{ji} = \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ji}}$$

以 $N=3$ 为例

$$
\begin{aligned}
W_{\text{互}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{3} W_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{j=1,j\neq 1}^{3} W_{1j}\right) + \left(\sum_{j=1,j\neq 2}^{3} W_{2j}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=1,j\neq 3}^{3} W_{3j}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}[(W_{12}+W_{13}) + (W_{21}+W_{23}) + (W_{31}+W_{32})] \\
&= W_{12}+W_{13}+W_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{\text{互}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{3} W_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{3} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(q_i \sum_{j=1,j\neq i}^{3} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{互} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(q_i \sum_{j=1,j\neq i}^{3}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right)\\
&= \frac{1}{2}q_1\left(\sum_{j=1,j\neq 1}^{3}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{1j}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}q_2\left(\sum_{j=1,j\neq 2}^{3}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{2j}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}q_3\left(\sum_{j=1,j\neq 3}^{3}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{3j}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{互} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(q_i\sum_{j=1,j\neq i}^{3}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right) \\
&= \frac{1}{2}q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{31}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{32}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(q_1U_1+q_2U_2+q_3U_3)
\end{aligned}
$$

3 电荷连续分布情形的静电能

- 对于电荷连续分布的带电体，根据微元法，可视为由无穷多个 $\mathrm{d}q$ 组成的多点电荷系统，那么整个系统的静电能

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int_q (\mathrm{d}q)U$$

其中 U 是 $\mathrm{d}q$ 所在处的电势，原则上是整个带电体扣除 $\mathrm{d}q$ 外在该处产生的电势

- 对于体分布的带电体，$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$，

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_V \rho U\,\mathrm{d}V$$

- 对于面分布的带电体，$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$，

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_S \sigma U\,\mathrm{d}S$$

- 对于线分布的带电体，$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l$，

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_l \lambda U\,\mathrm{d}l$$

例题

试求半径为 R、带电量为 q 的均匀带电球壳的静电自能。

解答

由于电荷分布具有球对称性，可以根据高斯定理求得电场分布

$$E=\begin{cases}0, & r<R\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$

选择无穷远处为电势零点，可以求得电势分布

$$U=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r<R\end{cases}$$

解答

在球壳上，$r = R$，$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 是个常数，因此整个球壳的静电自能

$$
\begin{aligned}
W_\mathrm{e} &= \frac{1}{2}\int_q (\mathrm{d}q)U \\
&= \frac{1}{2}\int_q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_q \mathrm{d}q \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\times q = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

例题

试求半径为 R、带电量为 q 的均匀带电球体的静电自能。

解答

由于电荷分布具有球对称性，可以根据高斯定理求得电场分布：

- 球内，$r < R$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

- 球外，$r > R$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

解答

选择无穷远处为电势零点，可以求得电势分布，由于电荷只分布在球内，这里只算球内空间的电势

$$
\begin{aligned}
U(r) &= \int_r^{\infty} E\,\mathrm{d}r \\
&= \int_r^{R} \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\mathrm{d}r + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)
\end{aligned}
$$

解答

取 $r \to r + \mathrm{d}r$ 部分为 $\mathrm{d}q$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q &= \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{3q}{R^3} r^2 \,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

解答

所以整个球体的静电自能

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2) \times \frac{3q}{R^3} r^2 \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R (3R^2 r^2 - r^4)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^6} \times \left[R^2 r^3 - \frac{1}{5} r^5\right]\Bigg|_0^R \\
&= \frac{3q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^6} \times \frac{4}{5} R^5 = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

4 电荷在外电场中的能量

- 根据电势的定义

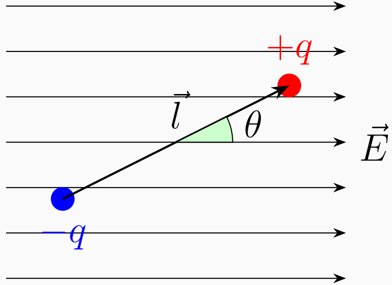
$$U_A = \frac{W_A}{q_0}$$

可得，如果已知电场中某点的电势，且将电荷视为试探电荷，即不考虑电荷对电场的影响，那么电荷在电场中时，电势能

$$W_A = qU_A$$

例题

试求电偶极子 $\vec{p} = q\vec{l}$ 在均匀外电场 $\vec{E}$ 中的电势能。假设 $\vec{l}$ 与 $\vec{E}$ 的夹角为 θ。



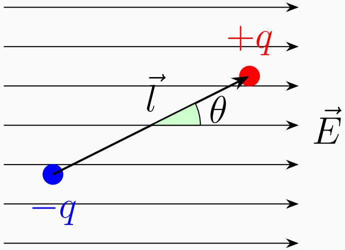
解答

- 对于匀强电场，不能选择无穷远处为势能零点
- 本题的结果与零势能点的选择无关，可任意选择势能零点
- 假设正电荷所在位置的电势为 U_+，负电荷所在位置的电势为 U_-，则电偶极子在电场中的电势能为

$$\begin{aligned} W_\mathrm{e} &= W_+ + W_- \\ &= (+q)U_+ + (-q)U_- \\ &= q(U_+ - U_-) \end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
W_\mathrm{e} &= q(U_+ - U_-) \\
&= q(-El\cos\theta) \\
&= -q\vec{E}\cdot\vec{l} \\
&= -\vec{p}\cdot\vec{E}
\end{aligned}
$$



七、电容

1 电容器和电容

- 电容器是一种在电场中以电势能的形式储存能量的器件
- 电容是反映电容器储存电荷或电能的本领的物理量
- 电容器是由两个导体组成的系统，两个导体称为电容器的两个极板
- 当两个极板带上等量异号的电荷，即一个极板带 $+q$，另一个极板带 $-q$，两个极板间的电势差 (电压) 为 U，那么电容器的电容

$$C = \frac{q}{U}$$

- 电容器的电容与两个极板的尺寸、形状和相对位置有关，与极板上的带电量、极板间的电压无关
- 电容器的电容、电量、电压之间的关系

$$C = \frac{q}{U}$$

$$q = CU$$

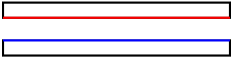
$$U = \frac{q}{C}$$

2 常见电容器的电容

- 计算电容的一般思路
  - 假定极板上带一定的电量 q，然后计算两个极板间的电压 U，再根据电容的定义 $C=\frac{q}{U}$ 求得电容
  - 假定两个极板间的电压 U，然后求极板上的带电量 q，再根据电容的定义 $C=\frac{q}{U}$ 求得电容

2.1 平行板电容器

- 一般地假定，两个平行放置的金属导体板，面积为 S，板间距为 d，d 很小，S 很大，忽略边缘效应，可以把两板视为无限大



- 当一块板上带电 $+q$，另一块板上带电 $-q$，静电平衡时，

$$q_1 + q_2 = q$$

$$q_3 + q_4 = -q$$

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0$$

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0$$

$$q_1 - q_2 - q_3 - q_4 = 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 - q_4 = 0$$

$$q_2 + q_3 = 0$$

$$q_1 - q_4 = 0$$

$$q_1 + q_2 = q$$
$$q_3 + q_4 = -q$$
$$q_2 + q_3 = 0$$
$$q_1 - q_4 = 0$$
$$q_1 = q_4 = 0$$
$$q_2 = q$$
$$q_3 = -q$$

- 两板外侧平面不带电
- 电荷分布在内侧平面

- 两极板间的电场是匀强电场，场强

$$E = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

- 两极板间的电压

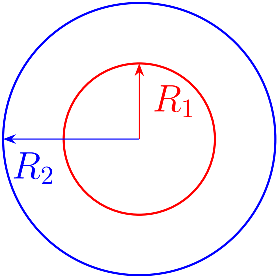
$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

- 电容

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{qd}{\varepsilon_0 S}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

2.2 球形电容器

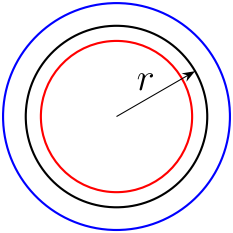
- 一般地假定，两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同心导体球壳



- 一般地假定，两个球壳的带电量分别为 $+q$ 和 $-q$，由于电荷分布具有球对称性，根据高斯定理，很容易求得两球之间区域 $(R_1 < r < R_2)$ 的电场

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



- 两球壳之间的电压

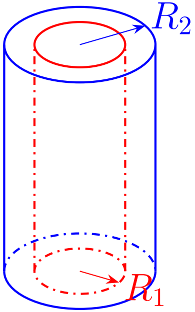
$$
\begin{aligned}
U &= \int_{R_1}^{R_2} E \,\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}
\end{aligned}
$$

- 电容

$$
C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}
$$

2.3 柱形电容器

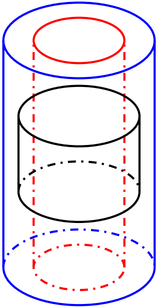
- 一般地假定，两个半径分别为 R_1 和 R_2、长为 L 的同轴导体圆筒，两个圆筒带电量分别为 $+q$ 和 $-q$



- 由于电荷分布具有柱对称性，根据高斯定理，很容易求得两圆筒之间区域的电场

$$E \cdot (2\pi r h) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{2\pi R_1 L} \cdot 2\pi R_1 h = \frac{q}{\varepsilon_0 L} h$$

$$E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 L r}$$



- 两圆筒之间的电压

$$
\begin{aligned}
U &= \int_{R_1}^{R_2} E \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r} \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}
\end{aligned}
$$

- 电容

$$
C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}
$$

2.4 孤立导体电容器

- 所谓的孤立导体是指导体附近没有其他导体和带电体
- 孤立导体电容器是指由孤立导体和大地之间所构成的电容器
- 当孤立导体的带电量为 q，如果以无穷远处为电势零点，则导体的电势 U 就是导体与大地之间的电势差，那么孤立导体电容器的电容

$$C = \frac{q}{U}$$

- 对于半径为 R 的孤立导体球，相当于球形电容器中 $R_1 = R$，$R_2 \to \infty$，所以孤立导体球的电容

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}} \to 4\pi\varepsilon_0 R$$

或：以地为电势零点时，半径为 R、带电量为 q 的孤立导体球的电势为

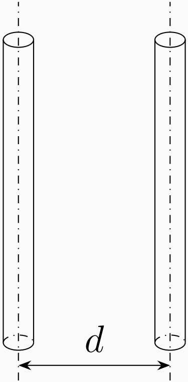
$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

因此电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

例题

P72[1-59] 半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 $d(d \gg a)$，求单位长度的电容。



解答

假设两根导线的带电量分别为 $+q$ 和 $-q$，导线长 L。对于单根导线，由于电荷分布具有柱对称性，可以由高斯定理求得导线外空间的电场

$$E \cdot (2\pi rh) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{q}{2\pi aL} \times 2\pi ah = \frac{q}{\varepsilon_0 L} h$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

解答

所以，在两根导线的轴线所在的平面内，两导线之间的电场

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)$$

这里取 d 为两导线轴线之间的距离

解答

因此两导线之间的电压

$$
\begin{aligned}
U &= \int_a^{d-a} E\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left[\ln r-\ln(d-r)\right]\Big|_a^{d-a} \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left[\ln\frac{d-a}{a}-\ln\frac{a}{d-a}\right] \\
&= \frac{q}{\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{d-a}{a}
\end{aligned}
$$

解答

所以电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q}{\frac{q}{\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{d-a}{a}}=\frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{d-a}{a}}$$

即电容与导线长度 L 成正比。
因此单位长度的电容为

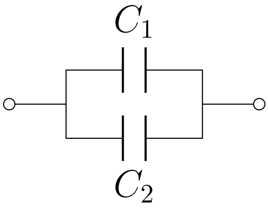
$$\frac{C}{L}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-a}{a}}$$

3 电容器的联接

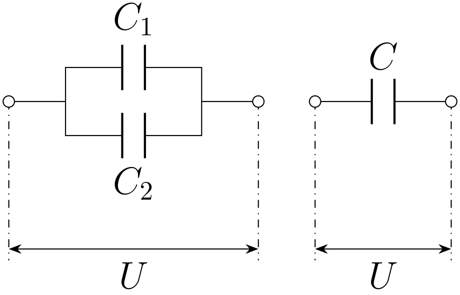
- 电容器最基本的组合方式有并联和串联

3.1 电容器的并联

- 将电容器的两个极板分别相连后接入电路的联接方式称为电容器的并联



- 一般地假定电容器两端的电压为 U，则显然两个电容器的极板上的带电量分别为 $q_1 = C_1U$、$q_2 = C_2U$
- 两个电容器的极板通过导线连接在一起，相当于一个导体，总的带电量 $q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U$，等效电容器的两个极板之间的电压仍然是 U



- 等效电容

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2$$

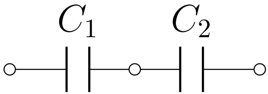
即由两个电容分别为 C_1 和 C_2 的电容器并联而成的电容器组的总电容 C 等于两个电容器的电容之和

- 【推广】任意 n 个电容器并联

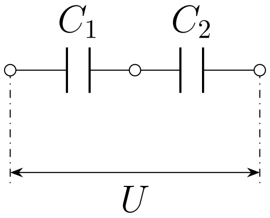
$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

3.2 电容器的串联

- 将电容器的一个极板与另一个电容器的一个极板相连，另外两个极板接入电路的联接方式称为电容器的串联



- 为了计算和讨论方便，假定两个电容器原来都不带电，将它们串联之后接在电压为 U 的电路中，充完电之后两端的极板上分别带上 $+q$ 和 $-q$ 的电量

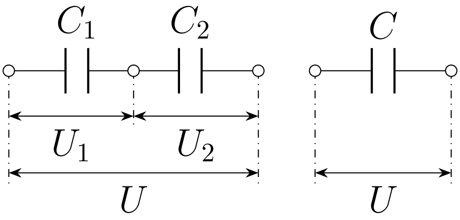


- 而中间两块极板用导线相连，相当于一个导体的两个侧面，由于静电感应，可知系统处于静电平衡时，两个极板上分别带上 $-q$ 和 $+q$ 的电量

- 两个电容器的电压分别为

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q}{C_1}$$
$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q}{C_2}$$

- 对于等效电容器，极板上的带电量仍然为 q，板间电压为 $U = U_1 + U_2$



- 串联电容器组的等效电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q}{U_1+U_2}=\frac{q}{\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

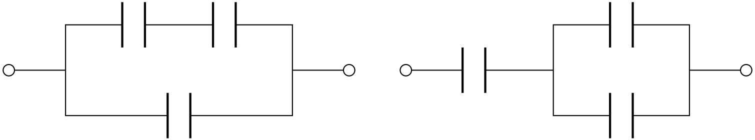
即串联电容器组的等效电容的倒数为两个电容器电容倒数之和

- 【推广】任意 n 个电容器串联

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

3.3 电容器的混联

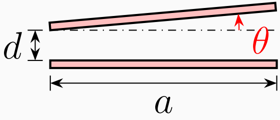
- 多个电容器联接时，
  - 全部并联
  - 全部串联
  - 既有并联也有串联 (称为混联)
  - 复杂联法 (不能分解成并联和串联)



例题

P71[1-58] 如图所示，一电容器两极板都是边长为 a 的正方形金属平板，两板不严格平行，其间有一夹角 θ。证明：当 $\theta \ll \frac{d}{a}$ 时，略去边缘效应，它的电容为

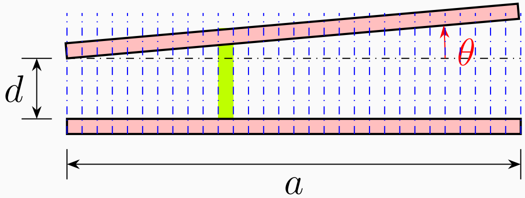
$$C = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)$$



解答

将电容器看成很多平行板电容器的并联，以平板左端为坐标原点，沿平板方向为 x 轴，取 $x \to x + \mathrm{d}x$ 部分，根据平行板电容器的电容公式可得

$$\mathrm{d}C = \frac{\varepsilon_0 (a\,\mathrm{d}x)}{d + x\tan\theta} \approx \frac{\varepsilon_0 a\,\mathrm{d}x}{d + x\theta}$$



解答

根据并联电容器组的电容公式可得整个电容器的电容

$$
\begin{aligned}
C &= \int_0^a \frac{\varepsilon_0 a \, \mathrm{d}x}{d + x\theta} \\
&= \varepsilon_0 a \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{d + x\theta} \\
&= \varepsilon_0 \frac{a}{\theta} \ln \frac{d + a\theta}{d} \\
&= \varepsilon_0 \frac{a}{\theta} \ln \left(1 + \frac{a\theta}{d} \right)
\end{aligned}
$$

解答

当 x 为小量时,【高数下 P285(4-10)】

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

解答

当 $\theta \ll \frac{d}{a}$ 时，$\frac{a\theta}{d}$ 为小量，

$$
\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right) &= \frac{a\theta}{d}-\frac{1}{2}\left(\frac{a\theta}{d}\right)^2+\cdots \\
&= \frac{a\theta}{d}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a\theta}{d}\right)+\cdots\right] \\
&\approx \frac{a\theta}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)
\end{aligned}
$$

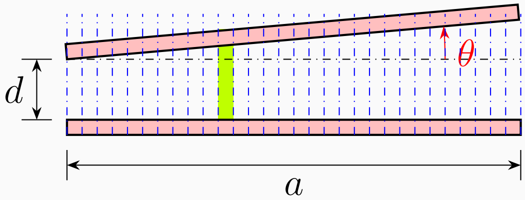
解答

$$
\begin{aligned}
C &= \varepsilon_0 \frac{a}{\theta} \ln\left(1 + \frac{a\theta}{d}\right) \\
&\approx \varepsilon_0 \frac{a}{\theta} \cdot \frac{a\theta}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right) \\
&= \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)
\end{aligned}
$$

解答

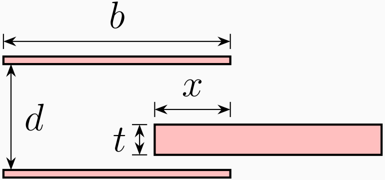
【问题】$x \to x + \mathrm{d}x$ 部分能看成平行板电容器吗？平行板电容器的电容公式是怎么得到的?

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



例题

如图所示，一平行板电容器，两极板为相同的矩形，宽为 a，长为 b，间距为 d，今将一厚度为 t、宽度为 a 的金属板平行地向电容器内插入，略去边缘效应，求插入金属板后的电容与金属板插入深度 x 的关系。



解答

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_2}{d_2}$$

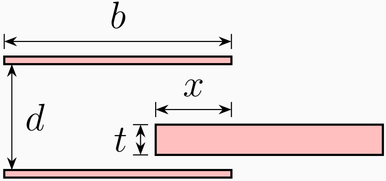
$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 S_3}{d_3}$$

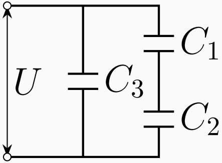
$$S_1 = S_2 = ax$$

$$S_3 = a(b - x)$$

$$d_1 + d_2 = d - t$$

$$d_3 = d$$



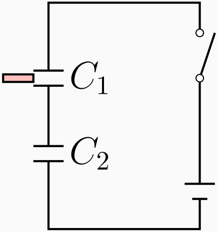


$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = C_3 + C_{12}$$

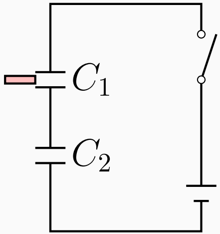
例题

C_1 和 C_2 两空气电容器串联起来接上电源充电。然后将电源断开，再把一金属板插入 C_1 中，如图所示。则两个电容器上的电压和电荷如何变化？如果电源接通呢？



解答

- 电源断开，电容器极板上的带电量 Q 保持不变
- C_2 保持不变，因此 U_2 不变
- 金属板插入 C_1 中，d_1 变小，C_1 变大，U_1 变小



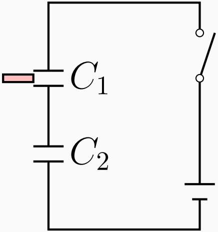
$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

解答

- 电源接通，加在两个电容器两端的总电压不变
- C_2 不变，C_1 变大，串联的等效电容变大
- Q 变大，U_2 变大，U_1 变小



$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

例题

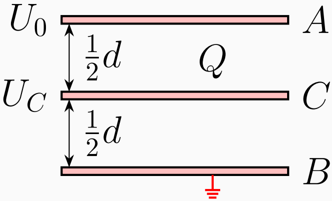
一平行板电容器充电后切断电源，若使二极板间距离增加，则二极板间场强____，电容____。(填“增大”或“减小”或“不变”)

解答

- 电源断开，Q 不变
- Q 不变，σ 不变，$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 不变
- d 变大，$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ 变小
- Q 不变，C 变小，$U = \frac{Q}{C}$ 变大
- E 不变，d 变大，$U = Ed$ 变大

例题

一平行板电容器，极板面积为 S，相距为 d。若 B 板接地，且保持 A 板的电势 $U_A = U_0$ 不变。如图。把一块面积相同的带有电荷为 Q 的导体薄板 C 平行地插入两板中间，则导体薄板 C 的电势 $U_C =$____。

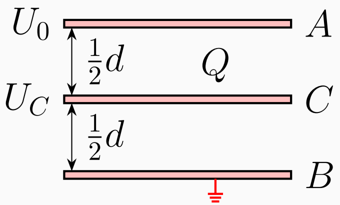


解答

- 假设两个电容器上的电压和电量分别为 U_1、Q_1 和 U_2、Q_2

$$Q_1 = C_1 U_1, Q_2 = C_2 U_2$$

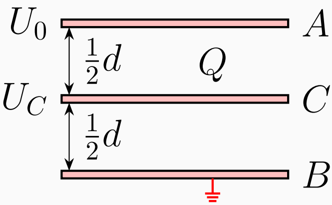
$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$



解答

- 假设 $U_A > U_C > U_B$，则 A 板带 $+Q_1$，C 板上表面带 $-Q_1$，C 板下表面带 Q_2，B 板带 $-Q_2$，则有

$$U_1 + U_2 = U_0$$
$$Q_2 - Q_1 = Q$$



解答

$$U_1 + U_2 = U_0$$

$$Q_2 - Q_1 = Q$$

$$\Downarrow$$

$$C_1U_1 + C_1U_2 = C_1U_0$$

$$C_2U_2 - C_1U_1 = Q$$

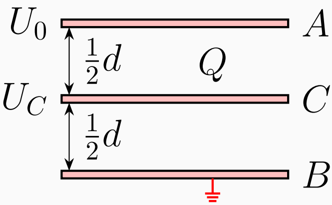
$$\Downarrow$$

$$(C_1 + C_2)U_2 = C_1U_0 + Q$$

解答

- 假设 $U_A < U_C > U_B$，则 A 板带 $-Q_1$，C 板上表面带 $+Q_1$，C 板下表面带 Q_2，B 板带 $-Q_2$，则有

$$-U_1 + U_2 = U_0$$
$$Q_1 + Q_2 = Q$$

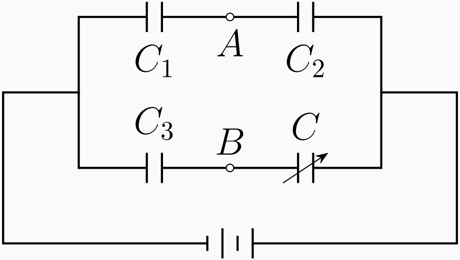


解答

$$-U_1 + U_2 = U_0$$
$$Q_1 + Q_2 = Q$$
$$\Downarrow$$
$$-C_1U_1 + C_1U_2 = C_1U_0$$
$$C_1U_1 + C_2U_2 = Q$$
$$\Downarrow$$
$$(C_1 + C_2)U_2 = C_1U_0 + Q$$

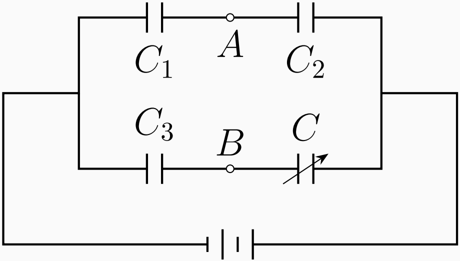
例题

如图所示，电容 C_1、C_2、C_3 已知，电容 C 可调，当调节到 A、B 两点电势相等时，电容 $C =$____。



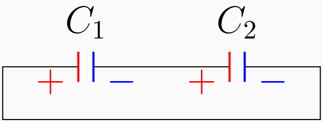
解答

$$U_1 = U_3$$
$$U_2 = U$$
$$Q_1 = Q_2$$
$$Q_3 = Q$$
$$C_1U_1 = C_2U_2$$
$$C_3U_3 = CU$$
$$\frac{C_1U_1}{C_3U_3} = \frac{C_2U_2}{CU}$$



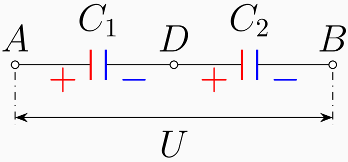
思考题

两个电容分别为 C_1 和 C_2 的电容器，带电量分别为 Q_1 和 Q_2，如图连接 (C_1 的正极板与 C_2 的负极板连接，C_1 的负极板与 C_2 的正极板连接)，问最终各极板上的带电量各是多少?



思考题

两个电容分别为 C_1 和 C_2 的电容器，带电量分别为 Q_1 和 Q_2，如图连接 (C_1 的负极板与 C_2 的正极板连接，C_1 的正极板、C_2 的负极板分别接入电压为 U 的电路中，假定外电路中左端电势比较高，即 $U_A - U_B = U$)，问最终各极板上的带电量各是多少？



4 电容器储能

- 电荷在静电场中有静电能
- 当电容为 C 的电容器，两个极板上分别带电 $+Q$ 和 $-Q$ 时，两个极板的电势分别为 U_+ 和 U_-，则两极板间的电压 $U = U_+ - U_-$

- 电容器所储存的能量 (电能) 就是两个极板上的电荷的静电能

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2}\sum_i q_i U_i \\
&= \frac{1}{2}[(+Q)U_+ + (-Q)U_-] \\
&= \frac{1}{2}Q(U_+ - U_-) \\
&= \frac{1}{2}QU
\end{aligned}
$$

- 利用电容器的 C、Q、U 之间的关系

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

$$Q = CU$$

- 也可以通过充电过程的分析来求得储能的表达式
- 电容器充电是指在电源的作用下，使电容器的两个极板带上电荷的过程
- 极板为金属导体，其中存在大量的自由电荷 (电子)，充电过程中，正极板上的电子在电源的作用下移到了负极板
- 假定某个时刻，极板带电为 $+q$ 和 $-q$，两极板的电势分别为 u_+ 和 u_-，则两板间的电压 $u = u_+ - u_-$
- 之后有 $-\,\mathrm{d}q$ 的电子被移动了，此过程中电源对电子做功，使得它的电势能增加 (转化为电容器的储能)

- 电势能增加量为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W_{\mathrm{e}} &= (-\mathrm{d}q)u_{-} - (-\mathrm{d}q)u_{+} \\
&= (\mathrm{d}q)(u_{+} - u_{-}) \\
&= (\mathrm{d}q)u \\
&= \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q
\end{aligned}
$$

其中 C 为电容器的电容

- 假定充电前极板不带电，充电完成后两个极板分别带电 $+Q$ 和 $-Q$，所以整个充电过程电源所做的总功 (全部转化为电容器的储能)

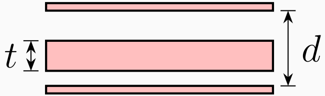
$$\begin{aligned} W_{\mathrm{e}} &= \int_0^Q \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q \\ &= \frac{Q^2}{2C} \end{aligned}$$

思考题

已知一平行板电容器，极板面积为 S，两板间距为 d，板间充满空气。当两极板上加电压 U 时，忽略边缘效应，两极板间相互作用力的大小为____。

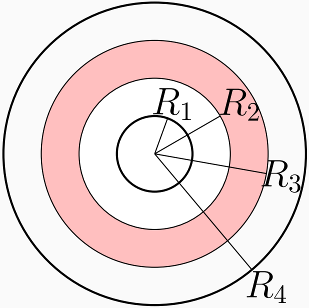
作业

- P71[1-57] 如本题图所示，平行板电容器两极板的面积都是 S，相距为 d，其间有一厚为 t 的金属片。略去边缘效应。(1) 求电容 C；(2) 金属片离极板的远近有无影响？



作业

- P72[1-62] 一球形电容器内外两壳的半径分别为 R_1 和 R_4，今在两壳之间放一个内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳。(1) 给内壳 (R_1) 以电量 Q，求 R_1 和 R_4 两壳的电势差；(2) 求以 R_1 和 R_4 为两极的电容。



八、电像法

1 静电场的边值问题

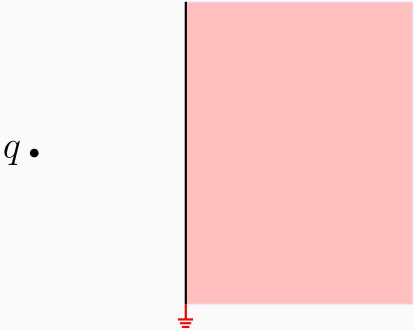
- 如果已知各带电导体的几何形状、相互位置以及每个导体的电势或每个导体的带电量或部分导体的电势以及其他导体的带电量，求电场的分布，这种问题称为静电场的边值问题，已知的导体的电势或带电量称为边界条件
- 唯一性定理告诉我们，给定的边界条件下，所求的电场是唯一确定的

2 电像法

- 电像法，也称为镜像法，适用于点电荷的边值问题，而且边界条件具有较好的对称性
- 电像法的关键是利用对称性以及边值关系，在待求区域外 (这样才不会影响待求区域内的电荷分布) 找到点电荷所对应的像电荷 (含带电量和位置)
- 像电荷的作用是取代边界面上感应电荷的作用，使得边界条件得到满足

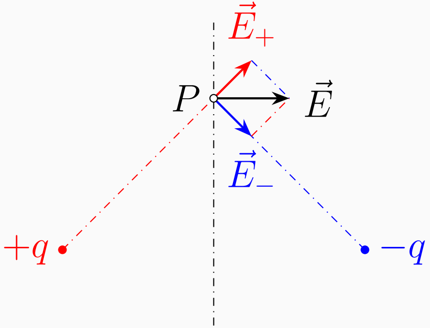
例题

在一接地的无穷大平面导体前有一点电荷 q，试求空间的电场分布和导体表面上的电荷分布。



解答

先来看一对带电量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的点电荷的电场。由场强叠加原理很容易得到，在二者的中垂面上，电场强度与中垂面垂直。

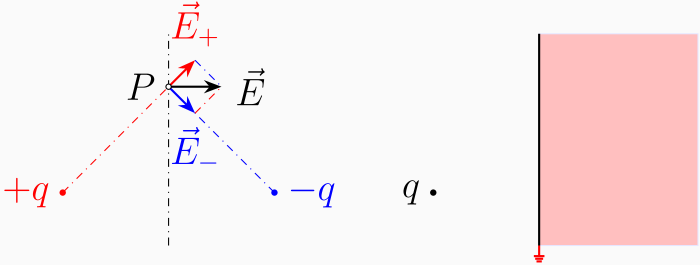


解答

- 若有一试探电荷在中垂面上移动，它所受到的电场力永远垂直于位移，因此电场力不做功
- 如果选择无穷远处为电势零点，那么中垂面上的电势处处为零
- 如果在中垂面的位置放一接地的无限大导体平面，同样选择无穷远处为电势零点，导体接地，其电势也为零

解答

对于左半空间，电荷分布情况以及边界条件完全相同，因此二者的电场分布是一样的。



解答

以导体平面为 xy 平面，q 在 z 轴正方向上，设 q 的坐标为 $(0,0,a)$，则 $-q$ 的坐标为 $(0,0,-a)$，左半空间任意位置 (x,y,z) 的电场和电势为

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3}\vec{r}_+ + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3}\vec{r}_-$$

$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

解答

$$\vec{r}_+ = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z-a)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$r_+ = \left[x^2 + y^2 + (z-a)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_+ = \frac{q\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} = \frac{q[x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z-a)\,\vec{\mathrm{e}}_z]}{4\pi\varepsilon_0[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$U_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}$$

解答

$$\vec{r}_- = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z+a)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$r_- = [x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-q\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3} = \frac{-q[x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z+a)\,\vec{\mathrm{e}}_z]}{4\pi\varepsilon_0[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$U_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}$$

解答

靠近导体平面处，$z \to 0$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_+ &= x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z-a)\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
&\to x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y - a\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
r_+ &= \left[x^2 + y^2 + (z-a)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\to \left[x^2 + y^2 + a^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
\vec{r}_- &= x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z+a)\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
&\to x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + a\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
r_- &= \left[x^2 + y^2 + (z+a)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\to \left[x^2 + y^2 + a^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

解答

靠近导体平面处，$z \to 0$

$$\vec{r}_+ \to x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y - a\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$r_+ \to [x^2 + y^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_+ = \frac{q\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} \to \frac{q[x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y - a\,\vec{\mathrm{e}}_z]}{4\pi\varepsilon_0[x^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$U_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} \to \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$$

解答

靠近导体平面处，$z \to 0$

$$\vec{r}_- \to x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + a\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$r_- \to [x^2 + y^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-q\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3} \to \frac{-q[x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + a\,\vec{\mathrm{e}}_z]}{4\pi\varepsilon_0[x^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$U_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} \to \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$$

解答

靠近导体平面处，$z \to 0$

$$\vec{E}_+ \to \frac{q[x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y - a\,\vec{\mathrm{e}}_z]}{4\pi\varepsilon_0[x^2+y^2+a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}_- \to \frac{-q[x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + a\,\vec{\mathrm{e}}_z]}{4\pi\varepsilon_0[x^2+y^2+a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \to -\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

解答

靠近导体平面处，$z \to 0$

$$U_+ \to \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

$$U_- \to \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

$$U = U_+ + U_- \to 0$$

解答

而导体处于静电平衡时，导体表面的电荷分布 (感应电荷) 与导体外的电场是有关系的

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta S$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E = -\frac{qa}{2\pi\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

解答

整个导体上感应电荷的总电量为

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_S \sigma \,\mathrm{d}S \\
&= \int_S -\frac{qa}{2\pi(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S \\
&= -\frac{qa}{2\pi}\int_S \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

解答

直角坐标系中

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

对于无限大平面，x 的取值范围为 $-\infty < x < \infty$，y 的取值范围为 $-\infty < y < \infty$

解答

$$
\begin{aligned}
A &= \int_S \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

解答

高数 (上)P376 式 (32)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

高数 (上)P375 式 (19)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \mathrm{C}$$

解答

高数 (上)P376 式 (32)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x}{(y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left[\frac{x}{(y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{y^2+a^2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{y^2+a^2}[1-(-1)] \\
&= \frac{2}{y^2+a^2}
\end{aligned}
$$

解答

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{y^2+a^2}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{y^2+a^2}\right] \mathrm{d}y$$

解答

高数 (上)P375 式 (19)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \mathrm{C}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{y^2+a^2}\right]\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{2}{a}\arctan\frac{y}{a}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
A =& \left[\frac{2}{a}\arctan\frac{y}{a}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
=& \frac{2}{a}\left[\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)\right] \\
=& \frac{2}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
=& \frac{2\pi}{a}
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
A &= \int_S \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{2\pi}{a} \\
Q &= -\frac{qa}{2\pi}\int_S \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S \\
&= -\frac{qa}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{a} \\
&= -q
\end{aligned}
$$

解答

平面极坐标系中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\mathrm{d}S = (\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

对于无限大平面，r 的取值范围为 $0 \leqslant x < \infty$，θ 的取值范围为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

解答

$$
\begin{aligned}
A &= \int_S \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta) \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2\pi)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

解答

令 $u = r^2 + a^2$，则 $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$

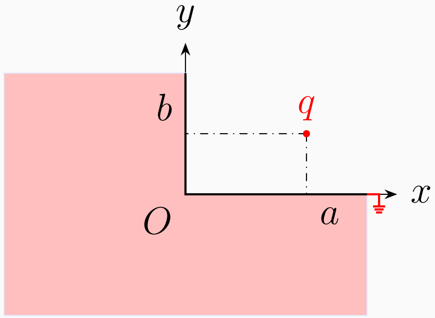
$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\infty \frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi \int_{a^2}^\infty \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u}{u^{\frac{3}{2}}} \\ &= \pi \int_{a^2}^\infty u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
A &= \pi \int_{a^2}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}u \\
&= \pi \left[-2u^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{a^2}^{\infty} \\
&= -2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right] \Big|_{a^2}^{\infty} \\
&= -2\pi \left[0 - \frac{1}{a} \right] \\
&= \frac{2\pi}{a}
\end{aligned}
$$

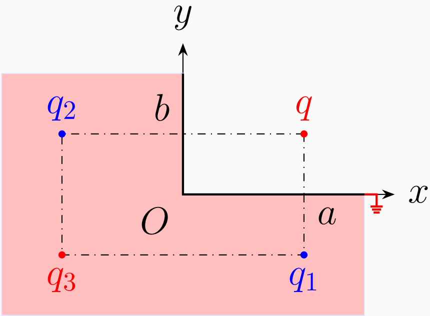
例题

如图，xz 平面和 yz 平面是两个半无限大接地导体平面，在 $(a, b, 0)$ 处有一个点电荷 q，试求 (x, y, z) 处的电势 ($x > 0$，$y > 0$)。



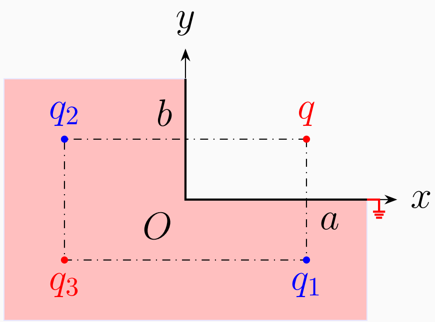
解答

由对称性分析可知，镜像电荷 $q_1=-q$ 位于 $(a,-b,0)$ 处，$q_2=-q$ 位于 $(-a,b,0)$ 处，$q_3=q$ 位于 $(-a,-b,0)$ 处



解答

三个镜像电荷加上原电荷，四个点电荷可以同时保证两个平面的电势均为零，所以可以用三个镜像电荷来代替两个半无限大导体平面



解答

空间中 (x,y,z) 处的电势就是四个点电荷在该处的电势之和

$$U(x,y,z)=U_0+U_1+U_2+U_3$$

$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}$$

$$U_1=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}$$

$$U_2=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}$$

$$U_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}$$

解答

很容易验证，在 xz 平面 $(y=0)$ 或 yz 平面 $(x=0)$，电势均为零

$$U(x,0,z)=U(0,y,z)=0$$

任意位置 (x,y,z) 的电场可以通过 $\vec{E}=-\nabla U$ 求得，也可以直接通过四个点电荷的电场叠加而得

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}_0+\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

解答

$$\vec{E}_0 = \frac{q\big[(x-a)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y-b)\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z\big]}{4\pi\varepsilon_0\big[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2\big]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{-q\big[(x-a)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y+b)\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z\big]}{4\pi\varepsilon_0\big[(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2\big]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-q\big[(x+a)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y-b)\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z\big]}{4\pi\varepsilon_0\big[(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2\big]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{q\big[(x+a)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y+b)\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z\big]}{4\pi\varepsilon_0\big[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2\big]^{\frac{3}{2}}}$$

解答

xz 平面 $(y = 0)$ 的电场

$$\vec{E}(x,0,z) = \frac{qb}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[(x+a)^2+b^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_y - \frac{qb}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[(x-a)^2+b^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

yz 平面 $(x = 0)$ 的电场

$$\vec{E}(0,y,z) = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[a^2+(y+b)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_x - \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[a^2+(y-b)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

解答

从而求得导体各处的感应电荷面密度

$$\begin{aligned}
\sigma(x,0,z) &= \varepsilon_0 E(x,0,z) \\
&= \frac{qb}{2\pi}\frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&- \frac{qb}{2\pi}\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\sigma(0,y,z) &= \varepsilon_0 E(0,y,z) \\
&= \frac{qa}{2\pi}\frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&- \frac{qa}{2\pi}\frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

解答

理论上通过积分即可求得感应电荷

$$
\begin{aligned}
Q_{xz} &= \int_{xz} \sigma(x,0,z)\,\mathrm{d}S \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x,0,z)\,\mathrm{d}z \\
Q_{yz} &= \int_{yz} \sigma(0,y,z)\,\mathrm{d}S \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(0,y,z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

例题

P68[1-28] 有两个异号点电荷 ne 和 $-e(n > 1)$，相距为 a。(1) 证明电势为零的等电势面是一个球面。(2) 证明球心在这两个点电荷的延长线上，且在 $-e$ 点电荷的外边。(3) 这球的半径为多少？

解答

以点电荷 ne 所在位置为坐标原点，以点电荷 $-e$ 所在方向为 x 轴正方向，依题意，$-e$ 所在位置的坐标为 $(a,0,0)$，则空间中任意一点 (x,y,z) 到两个点电荷之间的距离分别为

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$$

解答

根据点电荷的电势 (以无穷远处为电势零点)$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 和电势叠加原理可知，(x,y,z) 处的总电势为

$$U=\frac{ne}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

解答

所以对于电势为零的等电势面，有

$$\frac{ne}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=0$$

$$\frac{n}{r}-\frac{1}{r_1}=0$$

$$nr_1=r$$

$$n\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$n^2[(x-a)^2+y^2+z^2]=x^2+y^2+z^2$$

解答

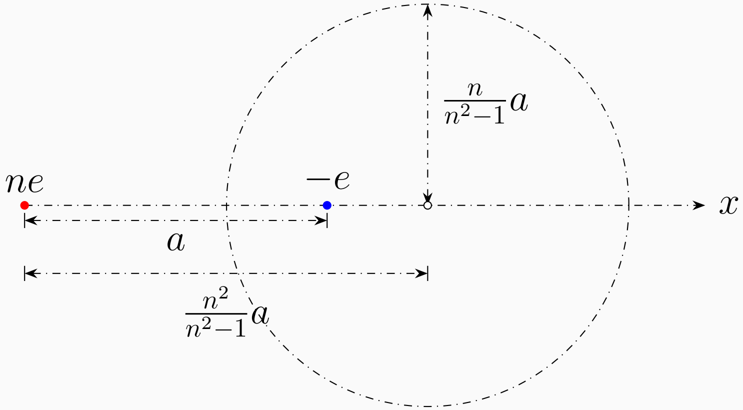
$$n^2[(x-a)^2+y^2+z^2]=x^2+y^2+z^2$$

$$(n^2-1)(x^2+y^2+z^2)-2n^2ax+n^2a^2=0$$

$$x^2-2\frac{n^2}{n^2-1}ax+\frac{n^2}{n^2-1}a^2+y^2+z^2=0$$

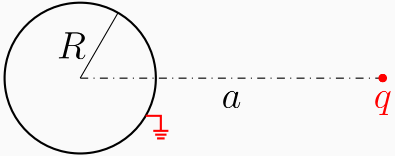
$$\left(x-\frac{n^2}{n^2-1}a\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{n}{n^2-1}a\right)^2$$

解答



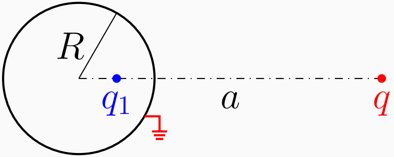
例题

一半径为 R 的接地导体球，球外有一带电量为 q 的点电荷，距球心 a。试求镜像电荷的带电量和位置。



解答

由上面的习题或根据对称性分析可得，镜像电荷位于点电荷 q 与导体球球心的连线上，假设镜像电荷带电量为 q_1，与球心的距离为 b

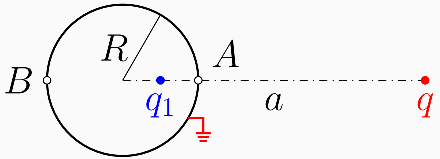


解答

导体球接地，电势为零，所以球上任意一点的电势均为零，所以 A、B 两点的电势也为零

$$U_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a-R)} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(R-b)} = 0$$

$$U_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a+R)} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(R+b)} = 0$$



解答

由此二式整理可得

$$\frac{q}{a-R}+\frac{q_1}{R-b}=0$$

$$\frac{q}{a+R}+\frac{q_1}{R+b}=0$$

$$\frac{q}{q_1}=-\frac{a-R}{R-b}=-\frac{a+R}{R+b}$$

$$(a-R)(R+b)=(a+R)(R-b)$$

$$aR-R^2+ab-bR=aR+R^2-ab-bR$$

$$R^2=ab$$

$$b=\frac{R^2}{a}$$

解答

$$\frac{q}{q_1} = -\frac{a-R}{R-b} = -\frac{a+R}{R+b}$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

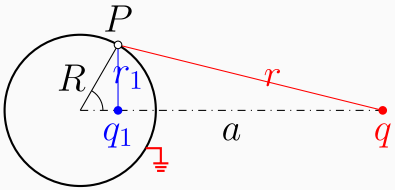
$$q_1 = -\frac{R-b}{a-R}q = -\frac{R-\frac{R^2}{a}}{a-R}q$$

$$q_1 = -\frac{aR-R^2}{a(a-R)}q = -\frac{R}{a}q$$

解答

对于球面上任意一点 P，其电势

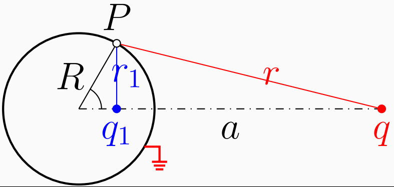
$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{a r_1}\right)$$



解答

而由余弦定理，有

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta$$
$$r_1^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{R^2 + a^2 - r^2}{2Ra} = \frac{R^2 + b^2 - r_1^2}{2Rb}$$
$$(R^2 + a^2 - r^2)b = (R^2 + b^2 - r_1^2)a$$



解答

$$(R^2+a^2-r^2)b=(R^2+b^2-r_1^2)a$$

$$b=\frac{R^2}{a}$$

$$(R^2+a^2-r^2)\frac{R^2}{a}=R^2a+\frac{R^4}{a}-r_1^2a$$

$$(R^2+a^2-r^2)R^2=R^2a^2+R^4-r_1^2a^2$$

$$R^4+R^2a^2-R^2r^2=R^2a^2+R^4-r_1^2a^2$$

$$R^2r^2=r_1^2a^2$$

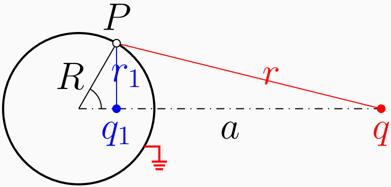
$$Rr=r_1a$$

$$\frac{1}{r}=\frac{R}{ar_1}$$

解答

对于球面上任意一点 P，其电势

$$
\begin{aligned}
U_P &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{a r_1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$



解答

- 镜像电荷的带电量和位置确定之后，原则上球外空间的电场分布和电势分布就可以求得，因此也可求得导体表面的电荷分布
- 但从导体处于静电平衡状态时是个等势体可知，球心电势也为零，而球心电势等于 q 在球心的电势与感应电荷在球心电势之和

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q\,'}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$

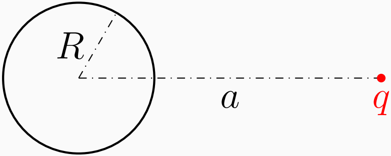
$$q\,' = -\frac{R}{a}q = q_1$$

解答

感应电荷对于球外空间的电场的影响可以用镜像电荷代替

例题

一半径为 R、带电量为 q_0 的导体球，球外有一带电量为 q 的点电荷，距球心 a。试求所有镜像电荷的带电量和位置。

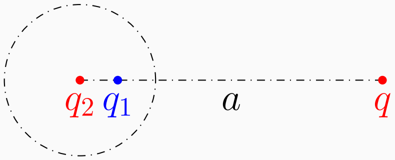


解答

如果导体球不拼地，而是带有一定的电量 q_0，那么在 q 的影响下，q_0 不再是均匀分布在整个球面上，但整个球面所带的总电量仍然是 q_0

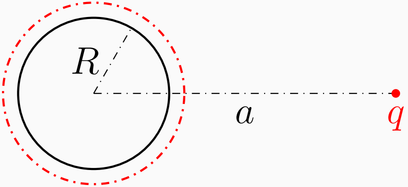
解答

由以上分析可知，q 和 q_1 在球面上产生的总电势为零。而球心处的点电荷 q_2 在球面上的电势处处相等。因此 q、q_1、q_2 三个点电荷在球面上的总电势仍然处处相等，保持球面是个等势面

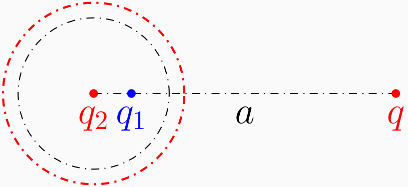


解答

选择一个封闭曲面包围住导体球，根据高斯定理，高斯面所围的电荷总量为 q_0



同样的高斯面，但用 q_1 和 q_2 代替导体球，根据高斯定理，高斯面所围的电荷总量为 q_1+q_2



解答

所以

$$q_1 + q_2 = q_0$$

$$q_1 = -\frac{R}{a}q$$

$$q_2 = q_0 - q_1 = q_0 + \frac{R}{a}q$$

解答

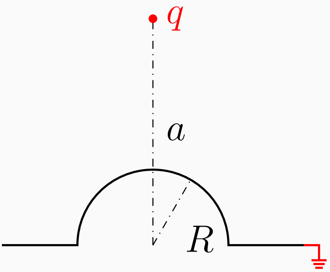
所以导体球面上的电势为

$$\begin{aligned} U &= U_0 + U_1 + U_2 \\ &= U_2 \\ &= \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ &= \frac{q_0 + \frac{R}{a} q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

导体球上电荷 (不均匀分布的 q_0) 对球外空间电场的贡献可以用 q_1 和 q_2 来代替

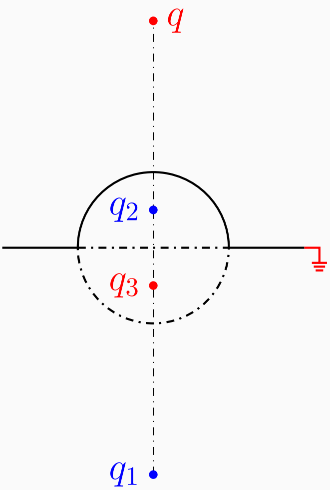
例题

在接地的无限大导体平面上有一半径为 R 的半球凸起，半球的球心在导体平面上，点电荷 q 位于系统的对称轴上，并与平面相距为 a。试求所有镜像电荷的带电量和位置。



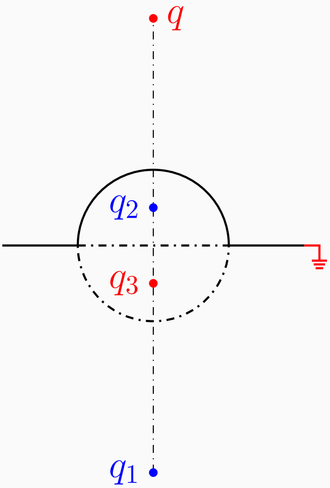
解答

- 若以球心为坐标原点，竖直向上为 z 轴正方向，则 q 的坐标为 $(0,0,a)$，共有三个镜像电荷
- $q_1=-q$，$(0,0,-a)$
- $q_2=-\frac{R}{a}q$，$\left(0,0,\frac{R^2}{a}\right)$
- $q_3=\frac{R}{a}q$，$\left(0,0,-\frac{R^2}{a}\right)$



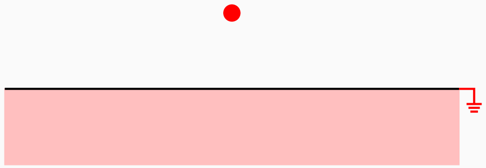
解答

- q 和 q_1 使平面电势为零
- q_2 和 q_3 使平面电势为零
- q 和 q_2 使球面电势为零
- q_1 和 q_3 使球面电势为零



作业

- P72[1-65] 地面可以看成是无穷大的导体平面，一均匀带电无限长直导线平行地面放置(垂直纸面)，求空间的电场强度、电势分布和地表面上的电荷分布。



九、恒定电流场

1 欧姆定律的微分形式

1.1 电流

- 电荷的定向移动形成电流
- 单位时间通过导体某个面积的电荷量定义为通过该面积的电流

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

- 电流的方向规定为正电荷移动的方向
- 电流有大小有方向，但并不是矢量，电流的方向仅仅是表示正电荷移动的方向而已
- 金属导体中移动的电荷是自由电子；电解质溶液中移动的电荷是正、负离子

1.2 电流密度矢量

- 电流密度是个矢量，其方向表示导体中该点电流的方向
- 如果电流在块状导体中流动，电流密度的大小等于该处与电流方向垂直的单位面积上的电流
- 如果已知导体中某点的电流密度矢量为 $\vec{j}$，在该处取一个面元矢量 $\mathrm{d}\vec{S}$，则通过该面元的电流

$$\mathrm{d}I = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j \, \mathrm{d}S \cos\theta$$

其中 θ 为面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的法向方向与电流方向的夹角

- 通过任意一个曲面 S 的电流为

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- 通过任意一个闭合曲面 S 的电流为

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

1.3 一段均匀电路的欧姆定律

- 在恒定电流的情况下，通过一段均匀导体的电流 I、导体两端的电压 U、该段导体的电阻 R 之间满足以下关系

$$I = \frac{U}{R}$$
$$U = IR$$

1.4 电阻定律

- 对于一定材料的、粗细均匀的柱形导体，长度为 L，横截面积为 S，电阻率为 ρ，则该段导体的电阻

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

- 长度 L 是指导体沿电流流动方向的尺度
- 截面积 S 则是与电流方向垂直的面积

- 电阻的倒数称为电导 $G=\frac{1}{R}$，电阻率的倒数称为电导率 $\sigma=\frac{1}{\rho}$。电导的单位为西门子，符号是 S

$$R=\rho\frac{L}{S}$$
$$G=\sigma\frac{S}{L}$$

- 电阻的串联公式

$$R_{\text{串}}=R_1+R_2$$

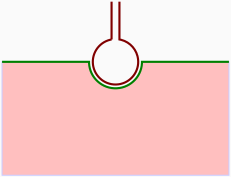
- 电阻的并联公式

$$\frac{1}{R_{\text{并}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

例题

大地可看成均匀的导电介质，其电阻率为 ρ。用一半径为 a 的球形电极与大地表面相接，半个球体埋在地下，电极本身的电阻可以忽略。试证明此电极的接地电阻为

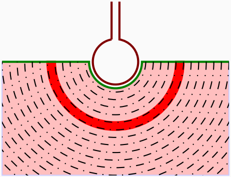
$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$



解答

整个大地的电阻可以看成无数个与球形电极同心的半球面电阻串联而成，取半径为 $r \to r + \mathrm{d}r$ 部分，其电阻为

$$\mathrm{d}R = \rho \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r^2}$$



解答

所以总电阻为

$$
\begin{aligned}
R &= \int_a^{\infty} \rho \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r^2} \\
&= \frac{\rho}{2\pi} \left[-\frac{1}{r} \right] \Bigg|_a^{\infty} \\
&= \frac{\rho}{2\pi a}
\end{aligned}
$$

1.5 欧姆定律的微分形式

- 对于一段很小的导体，长度为 $\mathrm{d}L$，横截面积为 $\mathrm{d}S$，电导率为 σ，则其电阻

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}$$

- 通过这段导体的电流为 $\mathrm{d}I$，导体两端的电压为 $\mathrm{d}U$，则有

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}I \times \mathrm{d}R$$

- 整理得

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}I \times \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \sigma\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}L}$$

$$j = \sigma E$$

- 实验研究表明，导体中电场强度的方向与电流密度的方向处处相同
- 所以电流密度矢量和电场强度矢量之间满足

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

此式称为欧姆定律的微分形式

- 处于恒定电流场中的导体，并不是处于静电平衡状态，导体内有恒定的电荷分布，导体内电场也不为零

2 电流的连续方程

- 电荷守恒定律指出，电荷既不能被创造，也不能被消灭，它们只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分，在任何物理过程中，电荷的代数和是守恒的
- 在导体内任意取一个闭合的曲面 S，任何时间段内，曲面所包围的电荷的变化都是从曲面流进或流出的
- 设任意 t 时刻曲面所包围的电荷为 q，$t+\mathrm{d}t$ 时刻曲面所包围的电荷为 $q+\mathrm{d}q$，在 $\mathrm{d}t$ 时间内曲面所包围的电荷增加了 $\mathrm{d}q$，即在 $\mathrm{d}t$ 时间内有 $\mathrm{d}q$ 的电荷从曲面外经过曲面进入曲面内，或者说在 $\mathrm{d}t$ 时间内有 $-\mathrm{d}q$ 的电荷从曲面内经过曲面移动到曲面外

- 通过闭合曲面 S 的电流

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- 对于闭合曲面，通常选择外法线为面元的方向，因此这里电流就表示从曲面内流向曲面外，电荷也是从曲面内向曲面外移动的
- $\mathrm{d}t$ 时间通过曲面流向外面的电荷为 $I\,\mathrm{d}t$
- 所以有

$$I\,\mathrm{d}t = \left(\oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}q$$

$$\oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

这称为电流的连续方程

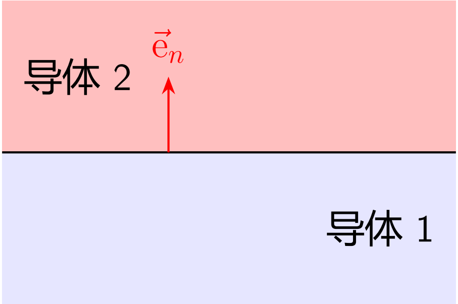
- 对于恒定电路，电流不随时间变化，导体内所有区域的电荷分布也不随时间变化，但电荷是有移动的，只是一个区域移走多少电荷的同时也有等量的电荷移入，任意区域的电荷量保持不变
- 因此对于任意曲面，曲面内的电荷量不随时间发生变化，$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0$，所以

$$\oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

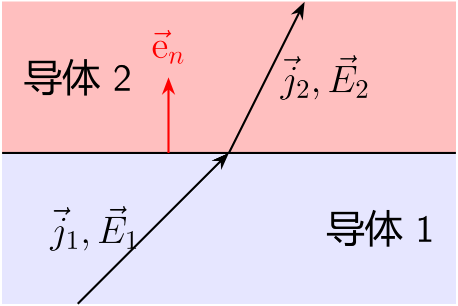
即恒定电路中通过任何闭合曲面的电流为零。这也称为电流的恒定条件

3 电流在导体界面上的边界条件

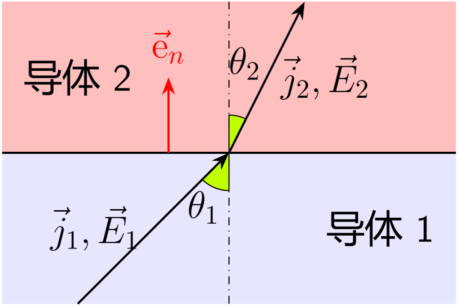
- 一般地假定某电路中有两种导体相连，电流从导体 1 流向导体 2。规定两种导体界面的法向方向 $\vec{\mathrm{e}}_n$ 从导体 1 指向导体 2



- 导体 1 的电导率为 σ_1，在导体 1 中，电流密度矢量为 $\vec{j}_1$，电场强度为 $\vec{E}_1$；导体 2 的电导率为 σ_2，在导体 2 中，电流密度矢量为 $\vec{j}_2$，电场强度为 $\vec{E}_2$

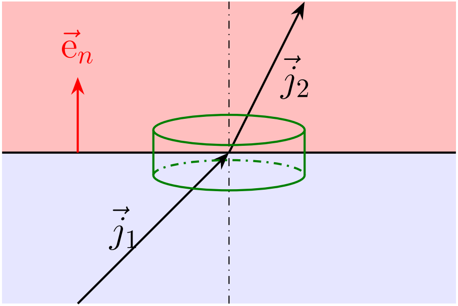


- 根据欧姆定律的微分形式，同一个导体中，电流密度和电场强度方向相同，$\vec{j}_1$、$\vec{E}_1$ 与 $\vec{\mathrm{e}}_n$ 的夹角记为 θ_1，$\vec{j}_2$、$\vec{E}_2$ 与 $\vec{\mathrm{e}}_n$ 的夹角记为 θ_2



3.1 电流密度矢量的法向分量连续

- 在界面附近取一个很小的柱形闭合曲面，底面与界面平行，底面面积 ΔS 为一阶小量，侧面与界面垂直，高 h 为高阶小量

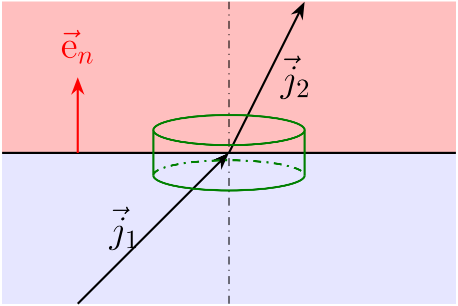


- 根据电流的恒定条件

$$\oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

忽略通过柱体侧面的电流

$$\vec{j}_1 \cdot \Delta S(-\vec{\mathrm{e}}_n) + \vec{j}_2 \cdot \Delta S\,\vec{\mathrm{e}}_n = 0$$



$$\vec{j}_1 \cdot \Delta S(-\vec{\mathrm{e}}_n) + \vec{j}_2 \cdot \Delta S\,\vec{\mathrm{e}}_n = 0$$

$$\vec{j}_2 \cdot \vec{\mathrm{e}}_n = \vec{j}_1 \cdot \vec{\mathrm{e}}_n$$

$$j_{1n} = \vec{j}_1 \cdot \vec{\mathrm{e}}_n = j_1 \cos\theta_1$$

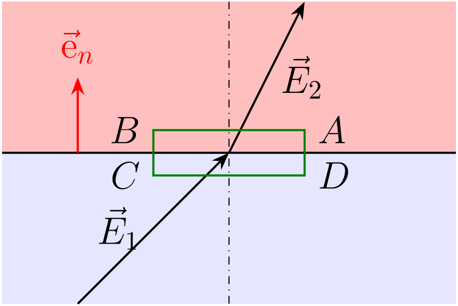
$$j_{2n} = \vec{j}_2 \cdot \vec{\mathrm{e}}_n = j_2 \cos\theta_2$$

$$j_{2n} = j_{1n}$$

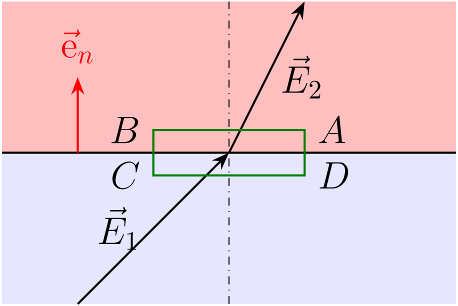
即导体界面两侧，电流密度的法向分量连续

3.2 电场强度矢量的切向分量连续

- 在导体分界面附近取一很小的闭合矩形回路 $ABCDA$，其中 AB 和 CD 平行于界面，长 ΔL 为一阶小量，BC、DA 垂直于分界面，长为高阶小量



- 恒定电路中的电场为恒定电场，空间中各点的电场强度大小和方向均不随时间变化，它也满足静电场的环路定理 (P55 脚注)



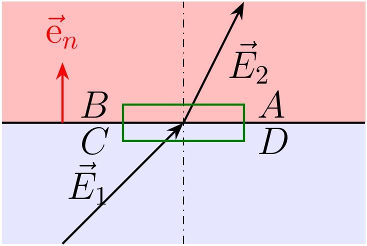
- 因此，对于 $ABCDA$ 回路

$$\oint_{ABCDA} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

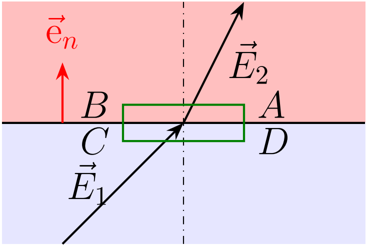
- 由于矩形回路很小，可以认为 AB 和 CD 上各点的电场强度相等，因此

$$\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\int_C^D \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{CD}$$



- 而 BC、DA 为高阶小量，电场在它们上面的线积分可以忽略不计



$$\vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 + \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{CD} + 0 = 0$$

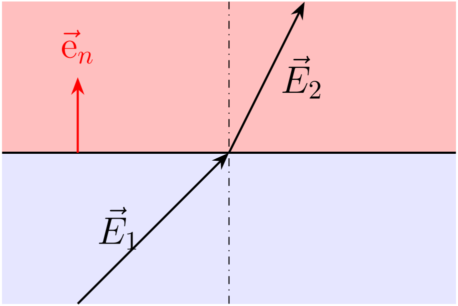
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$-E_2 \sin\theta_2 \Delta L + E_1 \sin\theta_1 \Delta L = 0$$

$$E_2 \sin\theta_2 = E_1 \sin\theta_1$$

即导体界面两侧，电场强度的切向分量连续

- 问题：$\vec{E}_1$、$\vec{E}_2$ 与 $\vec{\mathrm{e}}_n$ 一定在同一个平面内吗？



4 非静电力与电动势

4.1 导体中维持电流的必要条件

- 在静电感应过程中，金属导体内的大量自由电子在外电场驱使下会发生定向运动，形成宏观电流，但这电流的持续时间是极短暂的
- 若将导体两端接到电池的两极上，就能在导体内形成长时间持续的电流
- 在导体中维持电流的必要条件是导体内电场强度不为零，即导体两端必须有电势差
- 如果电流要保持不变，那么导体两端的电势差也要保持不变

4.2 电源

- 在已充好电的电容器的两个极板上，分别带有 $+Q$ 和 $-Q$ 的电量，板间电压 $U = \frac{Q}{C}$，板间电场强度从正极板指向负极板，所以正极板的电势比负极板来得高
- 由于电容器两极板之间是由空气或电介质填充，自由电荷无法通过
- 如果用一根导线连接两个极板，则在连接的瞬间，导线两端存在电势差，导线内部存在电场，自由电荷 (电子) 可以通过导线进行转移 (从负极板转移到正极板)，因此导线上存在电流

- 随着电荷的转移，两个极板上的剩余电荷 (净电荷) 越来越少，两个极板之间 (导线两端) 的电势差 $U = \frac{Q}{C}$ 也逐渐减小，导线上的电流也越来越小
- 当两个极板上的净电荷为零时，两个极板之间就没有电势差，导线上也就没有电流了
- 要维持导体之中的电流，就必须在导体两端有电势差；要维持导体之中有恒定的电流，就要求导体两端有恒定的电势差
- 电容器的极板上的电荷总有流尽的时候，如果没有其他途径补充电荷，连接电容器两极板间的导线中的电流必然不能持续

- 如果要保持导线中的电流，我们就要想办法给极板补充电荷，即需要一个“电荷泵”，它可以把自由电子从正极“泵”到负极
- 这个“电荷泵”就是电源
- 电池是最常见到的电源，除此之外还有发电机等
- 电源中，电势较高的一端称为电源的正极，电势较低的一端称为电源的负极
- 沿着电场线的方向，电势逐点降低，电源内部的电场是从正极指向负极
- 自由电子在电源内部受到的电场力是由负极指向正极的，这个力属于静电力，在这个力作用下，自由电子有从负极移向正极的趋势

- 电源的作用是把自由电子从正极移动到负极
- 在电源内部，电子必然有受到另外一个从正极指向负极的力，这个力不是静电力，我们称之为非静电力
- 通常我们用 $\vec{F}$ 表示静电力，用 $\vec{F}_K$ 表示非静电力
- 非静电力的作用是维持电源两极之间存在恒定的电势差
- 当两极上积累的正、负电荷较少时，电源内部的电场较弱，静电力小于非静电力，自由电子在二者的共同作用下，将从正极移动到负极，两极上积累的电荷继续增加，直到静电力与非静电力平衡

- 注意电子的移动方向
  - 在电源外部，正极的电势较高，负极的电势较低，因此电子在正极的电势能较低，在负极的电势能较高，在静电力作用下，电子从电势能较高的负极移动到电势能较低的正极，电势能降低，电场力做正功
  - 在电源内部，正极的电势还是较负极高，电子在正极的电势能还是比在负极时的低，这时，电子在非静电力的作用下，克服静电力做功，从电势能较低的正极移动到电势能较高的负极，移动过程中，静电力做负功，电势能升高，非静电力做正功，而非静电力是电源提供的，所以电源要消耗能量
- 电源就是把其他形式的能量转换为电能的装置

4.3 电动势

- 在电源内部自由电子同时受到静电力 $\vec{F} = q\vec{E}$ 和非静电力 $\vec{F}_K = q\vec{K}$ 的作用，其中 $\vec{K}$ 是一种非静电性的电场
- 当电子从电源负极出发，经过外电路到达电源正极，再从电源内部回到电源负极，绕行一周时，静电力和非静电力所做的总功为

$$
\begin{aligned}
W &= \oint_L (\vec{F} + \vec{F}_K) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= q \oint_L (\vec{E} + \vec{K}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= q \left(\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \right)
\end{aligned}
$$

- 由于静电场是个保守场，由静电场的环路定理，有

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

代入上式，得

$$W = q\oint_L \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$
$$\frac{W}{q} = \oint_L \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

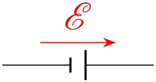
- 由于电源外部只有静电力，所以上述积分其实只在电源内部积分
  - 对于自由电荷 (电子)，从电源正极经过电源内部积分到电源负极
  - 对于正电荷，从电源负极经过电源内部积分到电源正极

  电源内部的载流子可能带正电荷也可能带负电荷
- 单位电荷通过电源内部沿闭合回路移动一周时非静电力所做的功，定义为电源的电动势
- 这个功越大，说明电源把其他形式的能量转换成电能的能力越大，电源的电动势越大

- 电源电动势，通常用花写的 $\mathscr{E}$ 表示，因此

$$\mathscr{E} = \oint_L \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 电动势的方向规定为从电源负极经电源内部指向电源正极 (不是矢量的方向，仅用来表示电势的高低)



4.4 电源的功率

- 电源就是把其他形式的能量转换为电能的装置，通过非静电力对载流子做功，把其他能量转换成载流子的电能
- 在闭合回路中运动一周，非静电力对载流子做的功

$$W = \oint_L \vec{F}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L q\vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\mathscr{E}$$

- 假定一个载流子运动一周使用的时间为 t，那么在 t 时间之内，对于恒定电流而言，通过任意截面的电荷量 $q = It$，这些电荷都在电源作用下移动了一周，因此，在 t 时间内，电源做的功为

$$W = q\mathscr{E} = It\mathscr{E}$$

- 所以电源的功率为

$$P = \frac{W}{t} = I\mathscr{E}$$

这个功率是电源的总功率

5 恒定电场对电流分布的调节作用

- 电流的恒定条件，即恒定电路中通过任何闭合曲面的电流为零

$$\oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

- 欧姆定律的微分形式

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

- 综合以上二式，有

$$\oint_S \sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

- 如果闭合曲面 S 选择在一个均匀的导体内部，则电导率 σ 是一个常数，可以提到积分号外，而且 $\sigma \neq 0$

$$\oint_S \sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

- P55 脚注：恒定电场也满足高斯定律，所以

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

- 因此均匀导体内部任意部位，$\sum q = 0$，任意微观足够大宏观足够小的区域内，净电荷恒为零

- 如果闭合曲面 S 选择在导体不均匀处，比如在两个导体的分界面附近，那么在闭合曲面的不同位置，电导率 σ 取不同值，因此 $\oint_S \sigma\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 中的 σ 不能提到积分号外，这时

$$\oint_S \sigma\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

仍然满足

- 很一般地假定可以把 S 分成两部分 S_1 和 S_2，在两个曲面上电导率分别是个常数 σ_1 和 σ_2，则

$$
\begin{aligned}
0 &= \oint_S \sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \int_{S_1} \sigma_1 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \sigma_2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \sigma_1 \int_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sigma_2 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \sigma_1 \int_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sigma_1 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + (\sigma_2 - \sigma_1) \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \sigma_1 \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + (\sigma_2 - \sigma_1) \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}
$$

$$0 = \sigma_1 \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + (\sigma_2 - \sigma_1) \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\sigma_1 \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

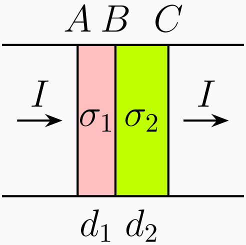
- 当 $\int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \neq 0$ 时

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \neq 0$$

  此时 S 所包围的净电荷不为零
- 在恒定电流的情况下，均匀导体内部没有净电荷，电荷只分布在导体的不均匀处或分界面上

作业

- P72[1-66] 本题图中两边为电导率很大的导体，中间两层是电导率分别为 σ_1、σ_2 的均匀导电介质，其厚度分别为 d_1、d_2，导体的截面积为 S，通过导体的恒定电流为 I，求: (1) 两层导电介质中的场强 E_1 和 E_2; (2) 电势差 U_{AB} 和 U_{BC}。



作业

- P72[1-67] 同轴电缆内、外半径分别为 a 和 b, 其间电介质有漏电阻, 电导率为 σ, 如图所示。求长度为 l 的一段电缆内的漏阻。