§7.3 刚体定轴转动的角动量 · 转动惯量

一、刚体定轴转动对轴上一点的角动量

以转轴为 z 轴，以参考点为坐标原点，则 $\vec{\omega} = \omega\,\vec{\mathrm{e}}_z$，刚体上任意取一质元，质量为 $\mathrm{d}m$，位置矢量为 $\vec{r}$，则 $\mathrm{d}m$ 对坐标原点的角动量为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{L} &= \vec{r} \times [(\mathrm{d}m)\vec{v}] \\
&= \vec{r} \times \vec{v}\,\mathrm{d}m \\
\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\
&= \omega\,\vec{\mathrm{e}}_z \times (x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= \omega(x\,\vec{\mathrm{e}}_y - y\,\vec{\mathrm{e}}_x) \\
\vec{r} \times \vec{v} &= (x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \times [\omega(x\,\vec{\mathrm{e}}_y - y\,\vec{\mathrm{e}}_x)] \\
&= \omega(x^2\,\vec{\mathrm{e}}_z + y^2\,\vec{\mathrm{e}}_z - zx\,\vec{\mathrm{e}}_x - zy\,\vec{\mathrm{e}}_y) \\
&= \omega[-zx\,\vec{\mathrm{e}}_x - zy\,\vec{\mathrm{e}}_y + (x^2 + y^2)\,\vec{\mathrm{e}}_z] \\
\mathrm{d}\vec{L} &= \omega[-zx\,\vec{\mathrm{e}}_x - zy\,\vec{\mathrm{e}}_y + (x^2 + y^2)\,\vec{\mathrm{e}}_z]\,\mathrm{d}m \\
&= (\mathrm{d}L_x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (\mathrm{d}L_y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (\mathrm{d}L_z)\,\vec{\mathrm{e}}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L_x &= -\omega xz\,\mathrm{d}m \\
\mathrm{d}L_y &= -\omega yz\,\mathrm{d}m \\
\mathrm{d}L_z &= \omega(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m \\
L_x &= -\omega \int_m xz\,\mathrm{d}m \\
L_y &= -\omega \int_m yz\,\mathrm{d}m \\
L_z &= \omega \int_m (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

如果刚体的质量分布关于 z 轴对称，即 $\rho(x,y,z)=\rho(-x,-y,z)$，则有

$$\int_m xz\,\mathrm{d}m=0$$

$$\int_m yz\,\mathrm{d}m=0$$

则 $L_x=0$，$L_y=0$。

如果刚体由两个质点所组成，一个质点位于 (x_0,y_0,z_0)，质量为 m_0，另一个质点质点位于 $(-x_0,-y_0,z_0)$，质量为 m_0，则

$$\int_m xz\,\mathrm{d}m=x_0z_0m_0+(-x_0)z_0m_0=0$$

$$\int_m yz\,\mathrm{d}m=y_0z_0m_0+(-y_0)z_0m_0=0$$

$$L_z=\omega\int_m (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m$$

为刚体对转轴的角动量，其中 $R=\sqrt{x^2+y^2}$ 为 $\mathrm{d}m$ 到转轴的垂直距离，也即定轴转动刚体上 $\mathrm{d}m$ 绕转轴做圆周运动的半径

二、刚体对一定转轴的转动惯量

刚体对转轴的角动量

$$L_z = \omega \int_m (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = I\omega$$

其中

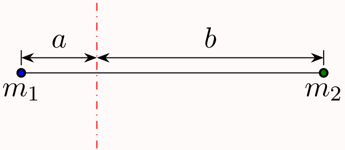
$$I = \int_m r^2\,\mathrm{d}m$$

称为刚体对转轴的转动惯量，通常用 I 或 J 表示，其中 r 为 $\mathrm{d}m$ 到转轴的垂直距离。

- 转动惯量是刚体绕转轴转动时惯性的量度 (惯性质量可以据此称为平动惯量)
- 转动惯量与刚体的质量分布及转轴位置有关

例题

一根不计质量的轻杆两端连有质量分别为 m_1 和 m_2 的质点，试求它们对图示转轴的转动惯量。



解答

m_1 对转轴的转动惯量为

$$I_1 = m_1 a^2$$

m_2 对转轴的转动惯量为

$$I_2 = m_2 b^2$$

所以系统对转轴的转动惯量为

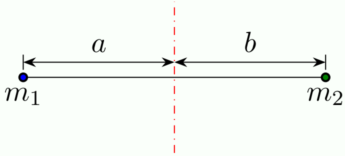
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= m_1 a^2 + m_2 b^2 \end{aligned}$$

解答

若

$$a = b = \frac{L}{2}$$

$$m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$$

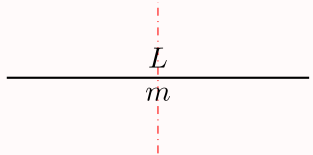


则

$$I = \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}mL^2$$

例题

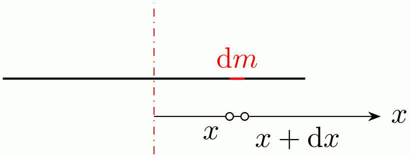
一根长为 L、质量为 m 的均匀细杆，转轴通过细杆中心且与细杆垂直，求细杆对该转轴的转动惯量。



解答

如图选择细杆中心为坐标原点，沿细杆方向建立 x 轴。将细杆看成很多质点，选其中 $x \to x + \mathrm{d}x$ 为质量元，则其质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x$$



解答

$\mathrm{d}m$ 到转轴的垂直距离为 $|x|$，所以它对转轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I = (\mathrm{d}m)|x|^2 = \frac{m}{L}x^2\,\mathrm{d}x$$

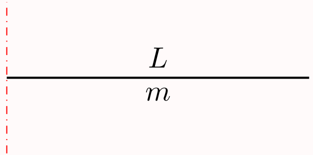
整根细杆对转轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m}{L}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m}{L} \times \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{12}mL^2 \end{aligned}$$

- 从本例和上例的结果可以发现：同一转轴，质量分布不同的物体，转动惯量是不同的

例题

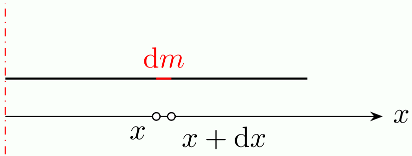
一根长为 L、质量为 m 的均匀细杆，转轴通过细杆一端且与细杆垂直，求细杆对该转轴的转动惯量。



解答

如图选择细杆一端为坐标原点，沿细杆方向建立 x 轴。将细杆看成很多质点，选其中 $x \to x+\mathrm{d}x$ 为质量元，则其质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x$$



解答

$\mathrm{d}m$ 到转轴的垂直距离为 x，所以它对转轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I = (\mathrm{d}m)x^2 = \frac{m}{L}x^2\,\mathrm{d}x$$

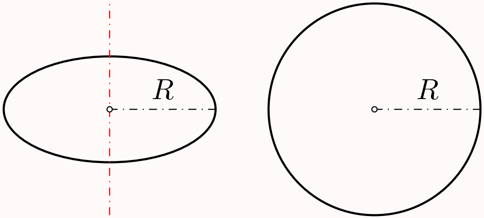
整根细杆对转轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L \frac{m}{L}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m}{L} \times \left(\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^L \\ &= \frac{1}{3}mL^2 \end{aligned}$$

- 从本例和上例的结果可以发现：同一物体，对不同转轴的转动惯量是不同的
- 常见刚体的转动惯量见 P196 的表 7.1，具体计算可参考专题讲义《转动惯量专题》

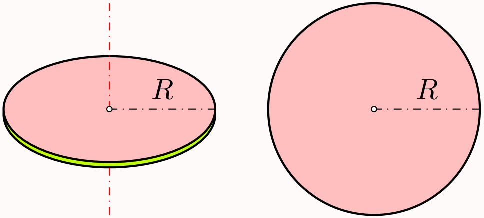
思考题

一个半径为 R、质量为 m 的均匀细圆环，转轴通过圆心且与圆面垂直，求细圆环对该转轴的转动惯量。



思考题

一个半径为 R、质量为 m 的均匀薄圆盘，转轴通过圆心且与圆面垂直，求薄圆盘对该转轴的转动惯量。



- 转动惯量的平行轴定理：设质量为 m 的刚体对通过质心的某转轴 A 的转动惯量为 I_C，现有另一转轴 B 与 A 平行，且两个转轴之间的距离为 d，则刚体对 B 轴的转动惯量为

$$I = I_C + md^2$$

如前两例，两个转轴均垂直于细杆，因此两个转轴平行，两个转轴之间的距离 $d = \frac{L}{2}$，细杆对通过质心的转轴的转动惯量 $I_C = \frac{1}{12}mL^2$，因此它对通过杆端的转轴的转动惯量

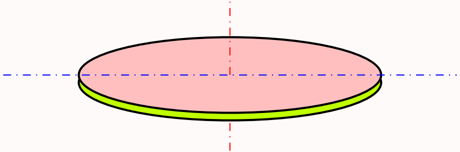
$$I = I_C + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

- 转动惯量的垂直轴定理 (正交轴定理)：对于薄板状刚体，厚度可以忽略不计，以薄板平面为 xy 平面，则 z 轴垂直于薄板平面。设薄板对三个坐标轴的转动惯量分别为 I_x、I_y 和 I_z，则它们之间满足

$$I_z = I_x + I_y$$

例题

已知，质量为 m、半径为 R 的均匀薄圆盘对通过圆心垂直圆面的转轴的转动惯量为 $I_1=\frac{1}{2}mR^2$，根据垂直轴定理可得，该圆盘对任意一条直径的转动惯量为 $I_2=\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{4}mR^2$

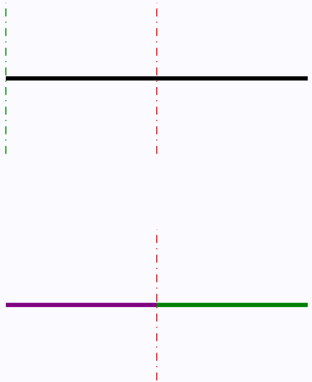


- 转动惯量的组合轴定理：由几个刚体组成的体系，对某转轴的转动惯量等于每个刚体对该轴转动惯量之和

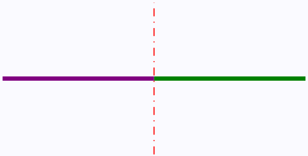
思考题

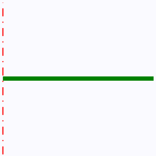
已知质量为 m、长为 L 的均匀细杆对通过其端点且与细杆垂直的转轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，有哪几种不同的方法可以证明该细杆对通过其中点且与细杆垂直的转轴的转动惯量为 $\frac{1}{12}mL^2$？

提示



提示





$$I_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2$$

$$m_1 = \frac{1}{2} m$$

$$L_1 = \frac{1}{2} L$$

$$I_2 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2$$

$$m_2 = \frac{1}{2} m$$

$$L_2 = \frac{1}{2} L$$

$$I = I_1 + I_2$$

- 回转半径：将刚体对某转轴的转动惯量写成刚体的质量与某个长度的平方的乘积

$$I = mk^2$$

  则这个长度 k 称为该刚体对该转轴的回转半径。
- 显然，同一刚体，对不同的转轴，回转半径也不同

三、刚体定轴转动的角动量定理和转动定理

- 质点系对参考点的角动量定理

$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点系对参考点的角动量随时间的变化率等于质点系各质点所受外力对参考点的力矩的矢量和

- 质点系对 z 轴的角动量定理

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

质点系对 z 轴的角动量随时间的变化率等于质点系各质点所受外力对 z 轴的力矩之和

- 刚体是一个特殊的质点系
- 定轴转动刚体对转轴的角动量

$$L_z = I\omega$$

- 定轴转动刚体对转轴的角动量定理

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$M_{外z}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z = \mathrm{d}(I\omega)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = L_{z2} - L_{z1} = I(\omega_2 - \omega_1)$$

刚体做定轴转动时，各质元与转轴之间的垂直距离保持不变，因此刚体对转轴的转动惯量是个常量，所以

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

即刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积等于刚体所受外力对转轴的力矩，这就是刚体定轴转动的转动定理

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

- 力是改变物体平动状态的原因，力使物体产生加速度
- 力矩是改变物体转动状态的原因，力矩使物体产生角加速度

四、刚体的重心

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m_C}\vec{r}_i$$

质点系的质心位置是各质点的位置以其质量为权重的平均值

$$x_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \qquad y_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \qquad z_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

质点系的重心位置是各质点的位置以其重力为权重的平均值

$$\vec{R}_C = \frac{1}{W_C}\sum_{i=1}^{N} W_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{W_i}{W_C}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i g_i}{m_C g}\vec{r}_i$$

如果质点系中各质点所在处的重力加速度相同，即 $g_i = g$，则显然重心位置与质心位置重合

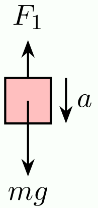
五、典型的例子

例题

P201 图 7.21(a) 表示一种用实验方法测量转动惯量的装置。待测刚体装在转动架上，线的一端绕在转动架的轮轴上，线与轮轴垂直，轮轴的轴体半径为 r，线的另一端通过定滑轮悬挂质量为 m 的重物。已知转动架转动惯量为 I_0，并测得 m 自静止开始下落 h 高度的时间为 t，求待测物体的转动惯量 I，不计两轴承处的摩擦，不计滑轮质量和线的质量，线的长度不变。

解答

以重物为研究对象，受力分析，物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子拉力 F_1，假定物体的加速度为 a，方向竖直向下，则有



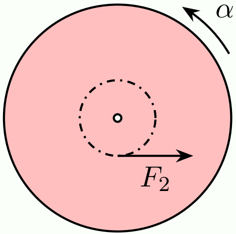
$$mg - F_1 = ma$$

$$h = \frac{1}{2}at^2$$

解答

以转动架和待测物体为研究对象，受力分析，共受到三个力作用，重力和轮轴的作用力对轮轴的力矩为零，绳子的拉力 F_2，设转动架的角加速度为 α，则有

$$F_2 r = (I_0 + I)\alpha$$



不计滑轮质量和线的质量，不计线与滑轮之间的摩擦，所以线的张力处处相等

$$F_1 = F_2$$

线的长度不变，所以

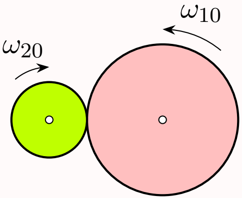
$$a = r\alpha$$

联立以上各式，解得

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) - I_0$$

例题

如图所示，有两个均匀实心圆柱轮子，质量各为 m_1 和 m_2，半径分别为 R_1 和 R_2，两转轴互相平行。两轮绕各自的中心轴的初始角速度各为 ω_{10} 和 ω_{20}。现将两轮子接触，当状态稳定后，试求它们的角速度。



解答

两个轮子对各自转轴的转动惯量分别为

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2, I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$$

取垂直纸面向外为角速度、角动量和力矩的正方向。对 m_1、m_2，各自受到的重力和转轴的作用力对各自转轴的力矩为零，假设 m_2 施加给 m_1 的摩擦力大小为 F，方向向上 (则 m_1 施加给 m_2 的摩擦力大小为 F，方向向下)，t 时刻，两轮子达到稳定状态，m_1、m_2 的角速度分别为 ω_1 和 ω_2

解答

分别对 m_1、m_2 运用角动量定理

$$\int_0^t -FR_1\,\mathrm{d}t = I_1(\omega_1 - \omega_{10})$$

$$\int_0^t -FR_2\,\mathrm{d}t = I_2(\omega_2 - \omega_{20})$$

这里 ω_{10}、ω_{20}、ω_1、ω_2 都含正负号。
稳定时，两轮接触点的线速度大小相等

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$$

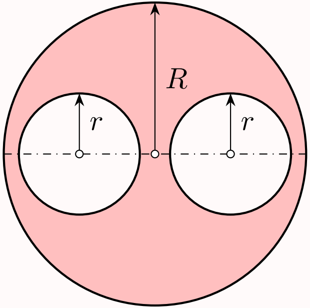
联立以上各式，解得

$$\omega_1 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_1}$$

$$\omega_2 = -\frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_2}$$

习题 7.3.3

如图所示，在质量为 m，半径为 R 的均质圆盘上挖出半径为 r 的两个圆孔，圆孔中心在半径 R 的中点，求剩余部分对过大圆盘中心且与盘面垂直的轴线的转动惯量。



解答

挖之前整个圆盘对转轴的转动惯量

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2$$

挖掉的一个圆孔对通过其圆心垂直盘面的转轴的转动惯量

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\pi R^2}\pi r^2\right) r^2 = \frac{m r^4}{2R^2}$$

解答

根据平行轴定理，它对过大圆盘中心且与盘面垂直的轴线的转动惯量

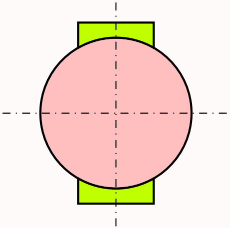
$$
\begin{aligned}
I_2 &= I_1 + \left(\frac{m}{\pi R^2}\pi r^2\right)\left(\frac{1}{2}R\right)^2 \\
&= \frac{mr^4}{2R^2} + \frac{1}{4}mr^2
\end{aligned}
$$

所以，剩余部分对过大圆盘中心且与盘面垂直的轴线的转动惯量

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 - 2I_2 \\
&= \frac{1}{2}mR^2 - \frac{mr^4}{R^2} - \frac{1}{2}mr^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(R^2 - r^2 - \frac{2r^4}{R^2}\right)
\end{aligned}
$$

习题 7.3.5

如图所示，一转动系统的转动惯量为 $I = 8.0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，转速为 $\omega = 41.9\ \mathrm{rad/s}$，两制动闸瓦对轮的压力都为 392 N，闸瓦与轮缘间的摩擦因数为 $\mu = 0.4$，轮半径为 $r = 0.4\ \mathrm{m}$，问从开始制动到静止需用多少时间？



解答

以初始转动方向为正，则摩擦力矩为负

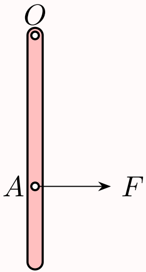
$$-2\mu N r = I\alpha$$

$$\alpha = -\frac{2\mu N r}{I} = \frac{0-\omega}{t}$$

$$t = \frac{\omega I}{2\mu N r} = \frac{41.9 \times 8}{2 \times 0.4 \times 392 \times 0.4} \approx 2.67\ \mathrm{s}$$

习题 7.3.6

如图所示，均质杆可绕支点 O 转动。当与杆垂直的冲力作用某点 A 时，支点 O 对杆的作用力并不因此冲力之作用而发生变化，则 A 点称为打击中心。设杆长为 L，求打击中心与支点的距离。



解答

当无冲力作用时，杆受重力和支点作用力而静止，因此支点作用力大小等于杆重力，方向竖直向上。按打击中心的定义，不管冲力 F 等于多少，支点对杆的作用力没有发生变化，因此杆受到三个力的作用力：竖直向下的重力 mg，竖直向上的支点作用力 $N = mg$，冲力 F。在此三力作用力，杆的质心具有与冲力同方向的加速度 a_C，

$$F = ma_C$$

解答

对于通过支点垂直杆的转轴，由转动定理，有

$$Fd = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{3}mL^2$$

其中 d 为打击中心与支点的距离。

均质杆的质心在其中点，当杆绕支点以角加速度 α 转动时，质心加速度 a_C 满足

$$a_C = \frac{L}{2}\alpha$$

联立以上各式，解得

$$d = \frac{2}{3}L$$