§9.1 简谐振动的动力学特征

- 从广义上看，振动是指描述系统状态的参量在某个基准值附近交替变化的过程
- 狭义上的振动是指力学中的机械振动，是物体在平衡位置附近，在同一路线上来回重复的周期运动
- 简谐振动是机械振动中最简单的一种，是指描述机械振动的物理量 (如位移、角度等) 随时间的变化呈余弦或正弦的函数形式的机械振动
- 机械振动的传播即是机械波
- 质点在某位置所受的合力 (或沿运动方向所受的合力) 等于零，则该位置称为平衡位置。
- 若作用于质点的力 (或沿运动方向的力) 总与质点离开平衡位置的位移成正比，且指向平衡位置，则此作用力称为线性恢复力。通常以平衡位置为坐标原点，用 x 表示质点离开平衡位置的位移，则线性恢复力表示为

$$F_x = -\lambda x$$

  其中 λ 为正的常量。
- 质点在线性恢复力作用下围绕平衡位置的运动称为简谐振动。

一、水平放置的弹簧振子

- 质量不计、劲度系数为 k 的弹簧，一端固定，一端与质量为 m 的振子相连，振子可视为质点
- 系统放置在光滑水平面上，以弹簧自然伸长时振子所在位置为坐标原点，沿弹簧伸长方向为 x 轴正方向
- 当振子处于 x 处时,弹簧被拉伸 x(当 $x < 0$ 时，弹簧被压缩 $|x| = -x$，即被拉伸 x)，所以振子受到弹簧的弹力

$$F_x = -kx$$

- 在水平方向对振子列牛顿第二定律【在竖直方向上，振子的重力与水平面支持力互相平衡】

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- 令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

二、竖直放置的弹簧振子

- 弹簧一端固定，固连振子的一端自由下垂
- 平衡 (静止) 时，弹簧被拉伸了 x_0，$kx_0 = mg$，以此位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向
- 将振子向下拉伸一段距离之后放手，当振子位于 x 处时，弹簧的伸长量为 $x + x_0$，所以弹簧的弹力为

$$F_x = -k(x + x_0)$$

- 在竖直方向上振子还受到重力的作用，在竖直方向上对振子列牛顿第二定律

$$mg - k(x + x_0) = ma_x$$

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- 令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

可以证明，将弹簧振子放在倾角为 θ 的光滑斜面上时，弹簧振子的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

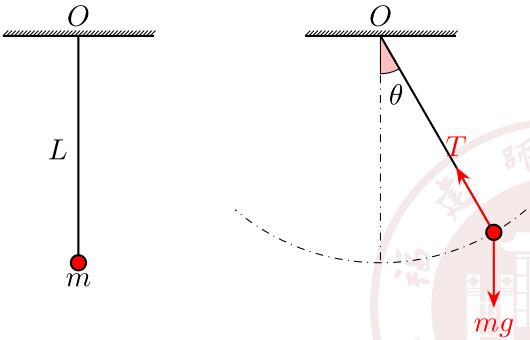
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

这种情况下，振子在平衡位置时弹簧的伸长量 x_0 满足

$$kx_0 = mg\sin\theta$$

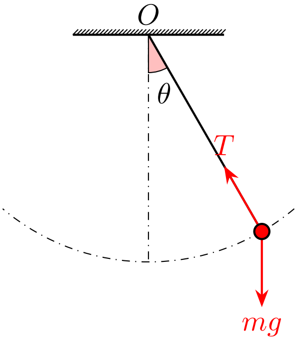
三、(小角度) 单摆

- 一根长为 L、质量不计的细绳 (摆线)，一端固定，另一端固连一个质量为 m 的可视为质点的摆球
- 平衡 (静止) 时，摆线沿竖直方向，以此为参考位置，将摆线拉开偏离平衡位置一定角度放手让摆球运动
- 在任意时刻，摆线与参考位置之间的夹角为 θ，此时摆球受到竖直向下的重力 mg 和沿绳子方向的拉力 T



- 对于摆球的运动，有两种不同的处理方法
  - 一种是看成绕通过悬挂点且垂直纸面的转轴的定轴转动
  - 另一种是看成曲线运动中的变速圆周运动

- 定轴转动
  - 规定角度向右 (逆时针) 为正，则转轴垂直纸面向外为正
  - 绳子拉力通过转轴，所以绳子拉力对转轴的力矩为零
  - 重力对转轴的力矩为 $M = -mgL\sin\theta$



- 定轴转动
  - 定轴转动的转动定律

$$M = I\alpha$$

$$-mgL\sin\theta = mL^2\alpha$$

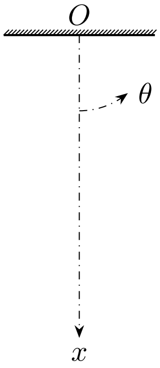
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

- 当θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$，并令 $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

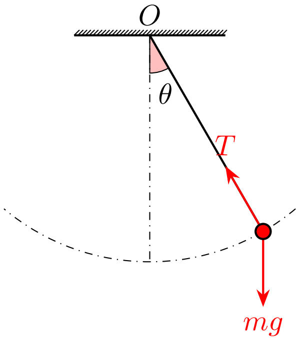
- 圆周运动 (极坐标系)
  - 以 O 为极点，竖直向下为极轴方向，逆时针为极角增大的方向，建立极坐标系



- 圆周运动 (极坐标系)
  - 圆周运动在极坐标系中

$$
\begin{aligned}
r &= L \\
\omega &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
v_r &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \\
v_\theta &= r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega L = L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
a_r &= \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} - v_\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 L \\
a_\theta &= v_r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

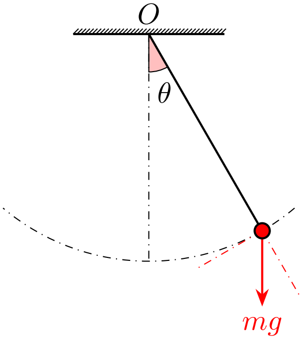
- 圆周运动 (极坐标系)
  - 摆球共受到两个力的作用：竖直向下的重力和沿绳子方向的拉力【考虑摆球在横向方向的受力】
  - 拉力沿径向方向，所以横向方向的分力为零

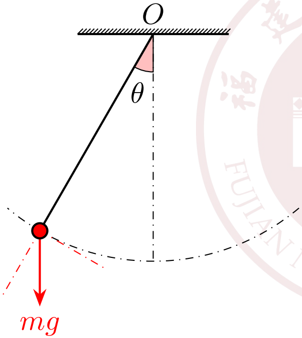


- 圆周运动 (极坐标系)
  - 重力在横向方向的分力为 $-mg\sin\theta$

    在极轴右侧，$\theta > 0$，重力的横向分力的方向与该处的横向单位矢量的方向相反

    在极轴左侧，$\theta < 0$，重力的横向分力的方向与该处的横向单位矢量的方向相同





- 圆周运动 (极坐标系)
  - 对摆球列横向方向的牛顿第二定律

$$F_\theta = ma_\theta$$

$$F_\theta = -mg\sin\theta, a_\theta = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

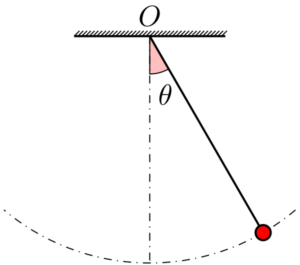
$$-mg\sin\theta = mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

- 当θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$，并令 $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

- 圆周运动 (自然坐标系)
  - 摆球从不同方向经过轨道中的同一个位置 (自然坐标系中的不同位置) 时，切向方向的正方向是相反的
  - 切向速度永远大于等于零，但 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 时正时负



- 圆周运动 (自然坐标系)
  - 当摆球从左向右摆动时

$$v = L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

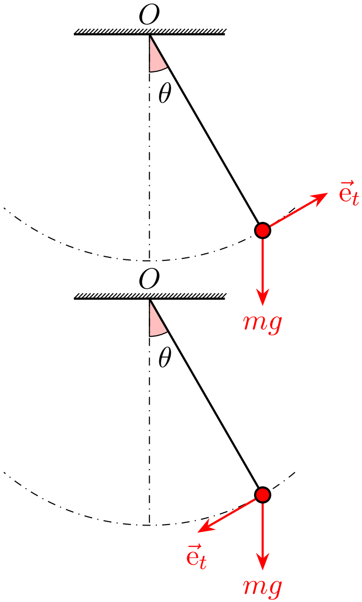
$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$F_t = -mg\sin\theta = ma_t$$

$$a_t = -g\sin\theta = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-g\sin\theta = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$



- 圆周运动 (自然坐标系)
  - 当摆球从右向左摆动时

$$v = -L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$F_t = mg\sin\theta = ma_t$$

$$a_t = g\sin\theta = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$g\sin\theta = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

- 圆周运动 (自然坐标系)
  - 当θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$，并令 $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

注意

实验上大角度单摆情况下，$\sin\theta$ 不能只取到一次方项而用 θ 代替，这时要取到三次方、五次方项甚至更多

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

- 书上还介绍了扭摆的动力学方程，由于时间关系，大家自行看书，这里不再详述
- 总之，简谐振动的动力学方程都可以表示成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2x = 0$$

这里 x 可以是真实的位移【离开平衡位置的位移】，也可以是广义的位移 (如角位移等)，ω_0 只决定于系统本身性质，称为简谐振动的固有圆频率