# §2.5 平面直角坐标系 · 抛体运动

- 如果质点的运动局限在某个平面内，质点的运动称为平面运动
- 描述平面运动时无需用到三维坐标系，只需用到二维的平面坐标系
- 常用的二维平面坐标系有平面直角坐标系、平面自然坐标系和平面极坐标系

# 一、平面直角坐标系

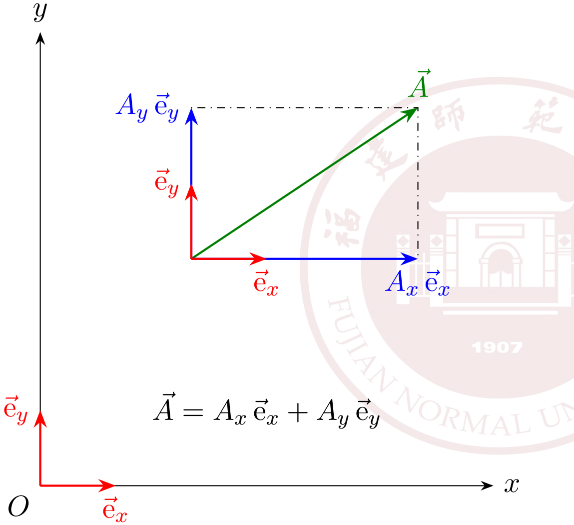
在平面直角坐标系中，任意矢量 $\vec{A}$ 可以一般地表示成

$$\vec{A} = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y$$

其中 $A_x$、$A_y$ 分别称为矢量 $\vec{A}$ 的 $x$ 分量和 $y$ 分量，$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ 是沿 $x$ 轴和 $y$ 轴方向的单位矢量。平面直角坐标系一经建立，$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ 是常矢量 (平面内任意位置的 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ 是一样的)，因此

$$\mathrm{d}(\vec{e}_x) = \vec{0}, \mathrm{d}(\vec{e}_y) = \vec{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} = \vec{0}, \frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$



平面直角坐标系中，平面运动的运动学方程可以表示成

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

分量形式为

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

位置矢量对时间求导即可得到速度

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

速度对时间求导即可得到加速度

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = a_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + a_y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

如果已知任意时刻的加速度

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + a_y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

以及 $t_0$ 时刻的速度

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_{0y}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

则可以通过积分求得任意时刻的速度

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

如果已知任意时刻的速度

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

以及 $t_0$ 时刻的位置

$$\vec{r}_0 = x_0\,\vec{\mathrm{e}}_x + y_0\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

则可以通过积分求得任意时刻的位置

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \qquad a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}v_x = a_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}v_y = a_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_{v_{0x}}^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_{v_{0y}}^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \qquad v_x - v_{0x} = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad v_y - v_{0y} = \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \qquad v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad v_y = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}x = v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}y = v_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad y - y_0 = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,\mathrm{d}t$$

## 习题 2.5.1

质点在 $Oxy$ 平面内运动，其加速度 $\vec{a} = -\cos t\,\vec{\mathrm{e}}_x - \sin t\,\vec{\mathrm{e}}_y$，位置和速度的初始条件为 $t = 0$ 时，$\vec{v}_0 = \vec{\mathrm{e}}_y$，$\vec{r}_0 = \vec{\mathrm{e}}_x$。求质点的运动学方程并画出轨迹。

## 解答

$$a_x = -\cos t$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \int_0^t a_x \,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^t -\cos t \,\mathrm{d}t \\ &= -\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v_x \,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^t -\sin t \,\mathrm{d}t \\ &= 1 + (\cos t - \cos 0) \\ &= \cos t \end{aligned}$$

$$a_y = -\sin t$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + \int_0^t a_y \,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^t -\sin t \,\mathrm{d}t \\ &= 1 + (\cos t - \cos 0) \\ &= \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \int_0^t v_y \,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^t \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= \sin t \end{aligned}$$

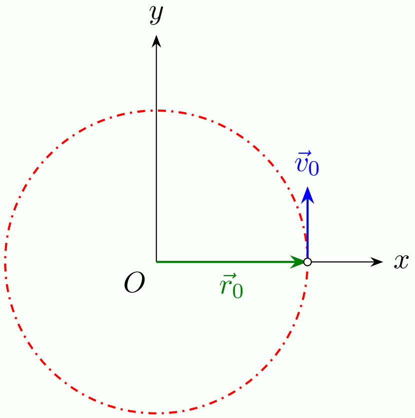
## 解答

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

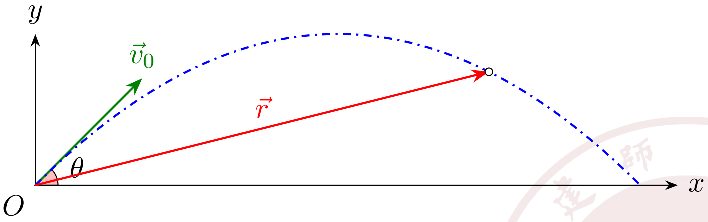
$$\vec{r} = \cos t\,\vec{\mathrm{e}}_x + \sin t\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



# 二、抛体运动

- 忽略一切阻力，只受到重力作用的质点的运动称为抛体运动
- 通常 (不是必须) 以抛出点为坐标原点，水平方向为 $x$ 轴，竖直方向为 $y$ 轴
- 通常以抛出时刻为计时起点 ($t=0$)
- 初速度的大小为 $v_0$，抛射角 (发射角，与 $x$ 轴正方向的夹角) 为 $\theta$，重力加速度记为 $g$




$$x=(v_0\cos\theta)t$$

$$y=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\vec{r}=[(v_0\cos\theta)t]\,\vec{\mathrm{e}}_x+\left[(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2\right]\vec{\mathrm{e}}_y$$

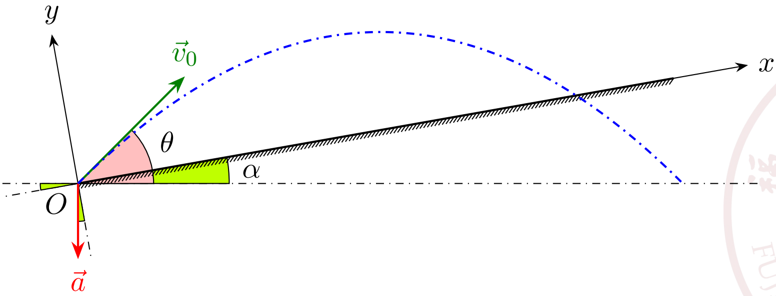
$$\vec{a} = -g\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_0\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$
$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- 抛体运动可以分解成水平方向的匀速运动和竖直方向的匀变速运动
- 抛体运动也可以分解成沿初速度方向的匀速运动和竖直方向的自由落体运动

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$
$$v_{0x} = v_0\cos\theta \qquad v_{0y} = v_0\sin\theta$$
$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - gt$$
$$x = v_{0x}t \qquad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\vec{a}_1 = \vec{0} \qquad \vec{a}_2 = -g\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v}_{01} = \vec{v}_0 \qquad \vec{v}_{02} = \vec{0}$$
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} \qquad \vec{v}_2 = \vec{a}_2 t$$
$$\vec{r}_1 = \vec{v}_{01}t \qquad \vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}_2 t^2$$

- 如果题目中有出现斜面，通常也可以沿平行斜面和垂直斜面方向建立坐标轴
- 这种情况下，抛体运动可以分解成沿两个坐标轴方向的匀变速运动




$$\vec{v}_0 = v_0 \cos(\theta - \alpha)\, \vec{e}_x + v_0 \sin(\theta - \alpha)\, \vec{e}_y$$

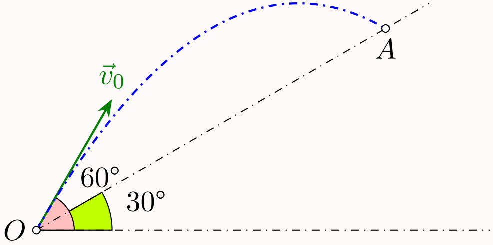
$$\vec{a} = -g \sin\alpha\, \vec{e}_x - g \cos\alpha\, \vec{e}_y$$

$$v_{0x} = v_0 \cos(\theta - \alpha), a_x = -g \sin\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin(\theta - \alpha), a_y = -g \cos\alpha$$

## 习题 2.5.3

迫击炮弹的发射角为 60°，发射速率 150 m/s。炮弹击中倾角 30° 的山坡上的目标，发射点正在山脚。求弹着点到发射点的距离 $OA$。



## 解答

【方法一】水平向右为 $x$ 轴正方向，竖直向上为 $y$ 轴正方向，则

$$x=(v_0\cos\theta)t$$

$$y=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{y}{x}=\tan\alpha$$

$$v_0=150,\theta=60^\circ,\alpha=30^\circ$$

解得【注：题目没有说明时，只能取 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$】

$$t=\frac{2v_0}{\sqrt{3}g},x=\frac{v_0^2}{\sqrt{3}g},y=\frac{v_0^2}{3g},OA=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2v_0^2}{3g}=\frac{2\times150^2}{3\times9.8}\approx1530.6\ \mathrm{m}$$

## 解答

【方法二】平行斜面向上为 $x$ 轴正方向，垂直斜面向上为 $y$ 轴正方向，则

$$v_{0x} = v_0 \cos(\theta - \alpha), a_x = -g \sin\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin(\theta - \alpha), a_y = -g \cos\alpha$$

$$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

在 $A$ 点

$$y_A = v_{0y} t_A + \frac{1}{2} a_y t_A^2 = 0$$

$$t_A = \frac{2v_{0y}}{-a_y} = \frac{2v_0 \sin(\theta - \alpha)}{g \cos\alpha}$$

$$OA = x_A = v_{0x} t_A + \frac{1}{2} a_x t_A^2 = \frac{v_0^2 \sin[2(\theta - \alpha)]}{g \cos\alpha} - \frac{2v_0^2 \sin\alpha \sin^2(\theta - \alpha)}{g \cos^2\alpha}$$

- P36-37：物体在空气中运动受到的阻力和物体本身的形状、空气密度、特别是和物体速率有关。大体来说，物体速率低于 $200\ \mathrm{m/s}$，可认为阻力与物体速率的平方成正比；速率达到 $400 \sim 600\ \mathrm{m/s}$，空气阻力和速率的三次方成正比；速率再大，阻力与速率的更高次方成正比。物体速率越小，抛体运动越接近理想情况。
- 为避免混淆，类似于 $\sin \alpha t$ 这样的表示，个人建议写成 $(\sin \alpha)t$