变质量系统

一、变质量系统的定义

二、增质型变质量系统

三、减质型变质量系统

四、实例

一、变质量系统的定义

1. 通常我们把研究对象称为系统，除了研究对象之外的所有物体统称为外界或环境
2. 按照这种定义，如果研究对象确定，那么它的质量应该是保持不变的
3. 所以本讲讨论的变质量系统与上述系统的定义有所区别

4. 所谓变质量系统是由主体和附体组成的系统，其中的变质量是指主体的质量会发生变化，主体和附体的总质量并没有发生变化
    1. 比如雨滴在下落过程中，由于周边水汽的凝聚，雨滴的质量会逐渐增大，这里雨滴是主体【称为增质型主体】，周边的水汽是附体

- 4 所谓变质量系统是由主体和附体组成的系统，其中的变质量是指主体的质量会发生变化，主体和附体的总质量并没有发生变化
  - 2 又如火箭在发射过程中，由于不断喷出燃料，火箭 (含未喷出的燃料) 的质量会逐渐减小，这里火箭是主体【称为减质型主体】，(被喷出的) 燃料是附体

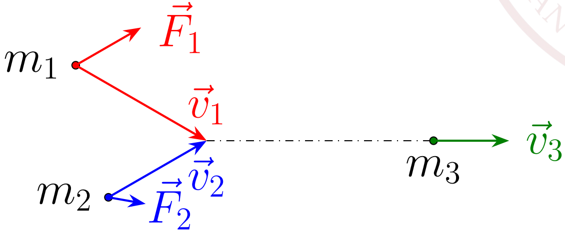
4. 所谓变质量系统是由主体和附体组成的系统，其中的变质量是指主体的质量会发生变化，主体和附体的总质量并没有发生变化
    3. 更复杂的情况是在运动过程中既有附体流入主体，也有附体流出主体。比如雨滴在运动过程中由于和空气的摩擦会有部分转化为水汽，火箭运动过程中也会有尘埃吸附在火箭上

- 所谓变质量系统是由主体和附体组成的系统，其中的变质量是指主体的质量会发生变化，主体和附体的总质量并没有发生变化
  - 本讲我们只讨论前面两种基本情况：增质型和减质型
  - 一般情况下，附体的质量都远小于主体的质量

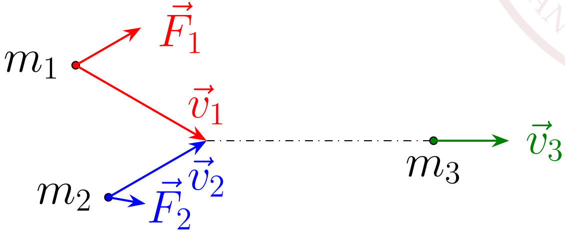
5. 根据研究问题的不同，研究对象通常会有两种不同的选择
   1. 如果要研究主体与附体之间的相互作用，通常选择主体或附体为研究对象
   2. 如果要研究主体的速度或加速度，通常选择主体和附体的整体为研究对象

二、增质型变质量系统

1. 一般地假定 t 时刻主体的质量为 $m_1 = m$，速度为 $\vec{v}_1 = \vec{v}$，它所受到的合力为 $\vec{F}_1$，附体的质量为 $m_2 = \mathrm{d}m$，速度为 $\vec{v}_2$，它所受到的合力为 $\vec{F}_2$【由于附体很小，它所受到的力主要是重力和阻力，一般情况下都可以忽略不计，即通常取 $\vec{F}_2 = \vec{0}$】



2. 之后附体并入主体，耗时 $\mathrm{d}t$，因此 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，新主体的质量为 $m_3=m_1+m_2=m+\mathrm{d}m$，速度为 $\vec{v}_3=\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$，合并期间，主体对附体的作用力为 $\vec{F}_{12}$【作用时间很短，可视为恒力，其实是变化的，而且是很复杂的变化】，附体对主体的作用力为 $\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$



3. 如果要计算主体的速度和加速度，通常选择主体和附体的整体为研究对象，根据动量定理，有

$$
\begin{aligned}
&(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\,\mathrm{d}t \\
&=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-[m\vec{v}+(\mathrm{d}m)\vec{v}_2] \\
&=m\,\mathrm{d}\vec{v}+(\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_2)
\end{aligned}
$$

其中 $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ 为系统 (主体和附体) 所受的合外力，记为 $\vec{F}$【如前，由于通常取 $\vec{F}_2=\vec{0}$，所以 $\vec{F}\approx\vec{F}_1$】

4. 忽略二阶小量 $(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\vec{v})$

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v} + (\mathrm{d}m)(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

$$\vec{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v}_2 - \vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left[\vec{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v}_2 - \vec{v})\right]$$

其中 $\vec{v}_2 - \vec{v}$ 为附体相对主体的运动速度

5 特别地，如果 $\vec{v}_2 = \vec{0}$，即附体原来静止，那么有

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v} + (\mathrm{d}m)\vec{v} = \mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left[\vec{F} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}\right]$$

6 如果要计算主体和附体之间的相互作用力，可以选择主体为研究对象，根据动量定理，有

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_{21})\,\mathrm{d}t=m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-m\vec{v}=m\,\mathrm{d}\vec{v}$$

所以有

$$\vec{F}_1+\vec{F}_{21}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}_{21}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\vec{F}_1$$

7 如果要计算主体和附体之间的相互作用力，也可以选择附体为研究对象，根据动量定理，有

$$(\vec{F}_2 + \vec{F}_{12})\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}m)(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) - (\mathrm{d}m)\vec{v}_2$$

忽略二阶小量 $(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\vec{v})$，有

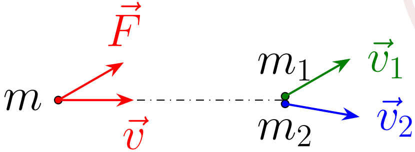
$$(\vec{F}_2 + \vec{F}_{12})\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}m)(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

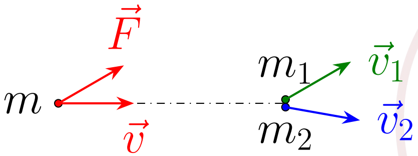
$$\vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{v}_2) - \vec{F}_2$$

三、减质型变质量系统

1. 一般地假定 t 时刻主体的质量为 m，速度为 $\vec{v}$，它所受到的合力为 $\vec{F}$，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，主体的质量变为 $m_1 = m + \mathrm{d}m$【这里 $\mathrm{d}m < 0$】，速度为 $\vec{v}_1 = \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$，分离出来的附体的质量为 $m_2 = -\mathrm{d}m$，速度为 $\vec{v}_2$，



❷ 附体从主体分离的过程，主体对附体的作用力为 $\vec{F}_{12}$【作用时间很短，可视为恒力】，附体对主体的作用力为 $\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$



3. 如果要计算主体的速度和加速度，通常以原来的主体【后面的新主体加附体】为研究对象，由动量定理，有

$$\begin{aligned}\vec{F}\,\mathrm{d}t &= [m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2] - m\vec{v} \\ &= (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)\vec{v}_2 - m\vec{v} \\ &= m\,\mathrm{d}\vec{v} + (\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_2)\end{aligned}$$

4 忽略二阶小量 $(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\vec{v})$

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v} + (\mathrm{d}m)(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left[\vec{F} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{v}_2)\right]$$

5 如果要计算主体和附体之间的相互作用力，通常以新主体为研究对象，由动量定理可得

$$\begin{aligned}(\vec{F}+\vec{F}_{21})\,\mathrm{d}t &= m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v} \\ &= m_1(\vec{v}_1-\vec{v}) \\ &= (m+\mathrm{d}m)[(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-\vec{v}] \\ &= (m+\mathrm{d}m)\,\mathrm{d}\vec{v}\end{aligned}$$

❻ 忽略二阶小量 $(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\vec{v})$

$$(\vec{F}+\vec{F}_{21})\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v}$$

$$\vec{F}+\vec{F}_{21} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}_{21} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{F}$$

7 如果要计算主体和附体之间的相互作用力，也可以选择附体为研究对象，由动量定理可得

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{12}\,\mathrm{d}t &= m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v} \\
&= m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}) \\
&= (-\,\mathrm{d}m)(\vec{v}_2 - \vec{v}) \\
&= \mathrm{d}m(\vec{v} - \vec{v}_2) \\
\vec{F}_{12} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{v}_2)
\end{aligned}
$$

四、实例

例题

光滑水平面上质量为 M 的小车以速度 v_1 向右运动，质量为 m 的人以速度 v_2 向右运动，$v_2 > v_1$，人追上小车后速度不变跳上小车，并静止于小车上。假设人跳上小车并静止于小车所用的时间为 Δt，试求此过程中人与小车之间的平均相互作用力的大小 F。

解答

以水平向右为正方向，假设人跳上之后人和车的共同速度为 v_3。以人和车为研究对象，系统水平方向不受力，所以系统动量守恒，因此有

$$Mv_1 + mv_2 = (m + M)v_3$$

$$v_3 = \frac{Mv_1 + mv_2}{m + M}$$

解答

以人为研究对象，水平方向上只受到车对人的作用力，所以根据动量定理，得

$$F_2\Delta t = mv_3 - mv_2$$

$$v_3 = \frac{Mv_1 + mv_2}{m + M}$$

$$F_2 = \frac{Mm(v_1 - v_2)}{(m + M)\Delta t}$$

解答

以车为研究对象，水平方向上只受到人对车的作用力，所以根据动量定理，得

$$F_1\Delta t = Mv_3 - Mv_1$$

$$v_3 = \frac{Mv_1 + mv_2}{m+M}$$

$$F_1 = \frac{Mm(v_2 - v_1)}{(m+M)\Delta t}$$

例题

水平光滑地面上一质量为 M 的小车，车上站一质量为 m 的人，二者以速度 v_0 向右运动。之后人以相对速度 u 向左跳离小车，假设跳离过程所用时间为 Δt，试求跳离过程中人和车之间的平均相互作用力的大小 F。

解答

这个题目的关键是如何理解“人以相对速度 u 向左跳离小车”。

一般地假定人跳离前车的速度为 $\vec{v}_1$，人跳离后车的速度为 $\vec{v}_2$，人相对车的跳离速度为 $\vec{u}$，是指人跳离车之后，从车上看人的速度为 $\vec{u}$，因此，人对地的速度为 $\vec{v}_2+\vec{u}$，而非 $\vec{v}_1+\vec{u}$！

解答

以水平向右为正方向，设跳离之后车的速度为 v_1，人的速度为 v_2，则依题意有

$$v_2 = v_1 - u$$

解答

以人和车为研究对象，水平方向系统不受力，所以系统动量守恒，因此有

$$(m+M)v_0 = Mv_1 + mv_2$$

解答

联立以上两式可得

$$(m+M)v_0 = Mv_1 + m(v_1 - u)$$

$$(m+M)v_0 = (M+m)v_1 - mu$$

$$v_1 = v_0 + \frac{mu}{m+M}$$

$$v_2 = v_0 - \frac{Mu}{m+M}$$

解答

以人为研究对象，水平方向上只受到车对人的作用力，所以根据动量定理，得

$$F_2 \Delta t = m v_2 - m v_0$$

$$v_2 = v_0 - \frac{Mu}{m+M}$$

$$F_2 = -\frac{Mmu}{(m+M)\Delta t}$$

解答

以车为研究对象，水平方向上只受到人对车的作用力，所以根据动量定理，得

$$F_1 \Delta t = M v_1 - M v_0$$

$$v_1 = v_0 + \frac{mu}{m+M}$$

$$F_1 = \frac{Mmu}{(m+M)\Delta t}$$

例题

有 N 个人站在铁路上静止的平板车上，每人的质量为 m，平板车的质量为 M。他们以相对于平板车的速度 u 跳离平板车的某端，平板车无摩擦地沿相反方向滑动。

例题

(1) 若所有的人同时跳车，平板车的最终速度大小 v_a 是多少？(2) 若他们一个一个地跳离，平板车的最终速度大小 v_b 是多少？(3) 上面两种情况，哪一个最终速度大？

解答

以平板车前进的方向为 x 轴正方向建立一维坐标系，则 $\vec{u} = -u\,\vec{\mathrm{e}}_x$，那么 u 就是指人跳离的相对速度的大小

解答

由于平板车与地面之间无摩擦，以人与平板车为研究系统，在水平方向上，系统所受的合外力为零，所以系统的动量守恒

解答

第一种情况，刚开始时，N 个人和平板车都静止，所以初态系统的动量为 $\vec{p}_1 = \vec{0}$

解答

设所有人同时跳车之后平板车的最终速度为 $\vec{v}_a = v_a\,\vec{\mathrm{e}}_x$，则人的速度为 $\vec{v}_a + \vec{u} = (v_a - u)\,\vec{\mathrm{e}}_x$，所以系统末态的动量为

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_2 &= M\vec{v}_a + Nm(\vec{v}_a + \vec{u}) \\
&= [Mv_a + Nm(v_a - u)]\,\vec{\mathrm{e}}_x
\end{aligned}
$$

解答

由于系统动量守恒，所以有

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1$$

$$\left[Mv_a + Nm(v_a - u)\right]\vec{\mathrm{e}}_x = \vec{0}$$

$$Mv_a + Nm(v_a - u) = 0$$

$$v_a = \frac{Nm}{M + Nm}u$$

解答

$$v_a = \frac{Nm}{M + Nm} u$$

$v_a > 0$，说明车是沿 x 轴正方向运动，与人跳离车的方向相反

解答

第二种情况要一步一步来分析。刚开始时，以 N 个人和平板车为研究对象。同前，N 个人和平板车都静止，所以初态系统的动量为 $\vec{p}_{11} = \vec{0}$

解答

当第一个人跳离平板车之后，设平板车的速度为 $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{\mathrm{e}}_x$，则人的速度为 $\vec{v}_1 + \vec{u} = (v_1 - u)\,\vec{\mathrm{e}}_x$，所以系统末态的动量为

$$\begin{aligned}\vec{p}_{12} &= [M + (N-1)m]\vec{v}_1 + m(\vec{v}_1 + \vec{u}) \\ &= \{[M + (N-1)m]v_1 + m(v_1 - u)\}\,\vec{\mathrm{e}}_x \\ &= [(M + Nm)v_1 - mu]\,\vec{\mathrm{e}}_x\end{aligned}$$

解答

由于系统动量守恒，所以有

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_{11}$$

$$[(M + Nm)v_1 - mu]\,\vec{\mathrm{e}}_x = \vec{0}$$

$$(M + Nm)v_1 - mu = 0$$

$$v_1 = \frac{m}{M + Nm}u$$

解答

第二步，以仍在车上的 $N-1$ 个人和平板车为研究对象。则系统的初态动量为

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{21} &= [M+(N-1)m]\vec{v}_1 \\
&= [M+(N-1)m]v_1\,\vec{\mathrm{e}}_x
\end{aligned}
$$

解答

当第二个人跳离平板车之后，设平板车的速度为 $\vec{v}_2 = v_2\,\vec{\mathrm{e}}_x$，则人的速度为 $\vec{v}_2 + \vec{u} = (v_2 - u)\,\vec{\mathrm{e}}_x$，所以系统末态的动量为

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{22} &= [M + (N-2)m]\vec{v}_2 + m(\vec{v}_2 + \vec{u}) \\
&= \{[M + (N-2)m]v_2 + m(v_2 - u)\}\,\vec{\mathrm{e}}_x \\
&= \{[M + (N-1)m]v_2 - mu\}\,\vec{\mathrm{e}}_x
\end{aligned}
$$

解答

由于系统动量守恒，所以有

$$\vec{p}_{22} = \vec{p}_{21}$$

$$\vec{p}_{21} = [M + (N-1)m]v_1\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$\vec{p}_{22} = \{[M + (N-1)m]v_2 - mu\}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$[M + (N-1)m]v_2 - mu = [M + (N-1)m]v_1$$

$$[M + (N-1)m]v_2 = [M + (N-1)m]v_1 + mu$$

$$v_2 = v_1 + \frac{m}{M + (N-1)m}u$$

$$v_2 = v_1 + \frac{m}{M+(N-1)m}u$$

$$v_1 = \frac{m}{M+Nm}u$$

$$v_2 = \frac{m}{M+Nm}u + \frac{m}{M+(N-1)m}u$$

$$= \sum_{n=0}^{1} \frac{m}{M+(N-n)m}u$$

$$= \sum_{n=1}^{2} \frac{m}{M+(N+1-n)m}u$$

解答

第三步，以仍在车上的 $N-2$ 个人和平板车为研究对象。则系统的初态动量为

$$\begin{aligned}\vec{p}_{31} &= [M+(N-2)m]\vec{v}_2 \\ &= [M+(N-2)m]v_2\,\vec{\mathrm{e}}_x\end{aligned}$$

解答

当第三个人跳离平板车之后，设平板车的速度为 $\vec{v}_3 = v_3\,\vec{\mathrm{e}}_x$，则人的速度为 $\vec{v}_3 + \vec{u} = (v_3 - u)\,\vec{\mathrm{e}}_x$，所以系统末态的动量为

$$\begin{aligned}\vec{p}_{32} &= [M + (N-3)m]\vec{v}_3 + m(\vec{v}_3 + \vec{u}) \\ &= \{[M + (N-3)m]v_3 + m(v_3 - u)\}\,\vec{\mathrm{e}}_x \\ &= \{[M + (N-2)m]v_3 - mu\}\,\vec{\mathrm{e}}_x\end{aligned}$$

解答

由于系统动量守恒，所以有

$$\vec{p}_{32} = \vec{p}_{31}$$

$$\vec{p}_{31} = [M + (N-2)m]v_2\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$\vec{p}_{32} = \{[M + (N-2)m]v_3 - mu\}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$[M + (N-2)m]v_3 - mu = [M + (N-2)m]v_2$$

$$[M + (N-2)m]v_3 = [M + (N-2)m]v_2 + mu$$

$$v_3 = v_2 + \frac{m}{M + (N-2)m}u$$

解答

$$v_3 = v_2 + \frac{m}{M + (N-2)m} u$$

$$v_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{m}{M + (N+1-n)m} u$$

$$v_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{m}{M + (N+1-n)m} u$$

解答

依此类推，第 i 步，以仍在车上的 $N-i+1$ 个人和平板车为研究对象。则系统的初态动量为

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{i1} &= [M+(N-i+1)m]\vec{v}_{i-1} \\
&= [M+(N-i+1)m]v_{i-1}\,\vec{\mathrm{e}}_x
\end{aligned}
$$

解答

当第 i 个人跳离平板车之后，设平板车的速度为 $\vec{v}_i = v_i\,\vec{\mathrm{e}}_x$，则人的速度为 $\vec{v}_i + \vec{u} = (v_i - u)\,\vec{\mathrm{e}}_x$，所以系统末态的动量为

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{i2} &= [M + (N - i)m]\vec{v}_i + m(\vec{v}_i + \vec{u}) \\
&= \{[M + (N - i)m]v_i + m(v_i - u)\}\,\vec{\mathrm{e}}_x \\
&= \{[M + (N - i + 1)m]v_i - mu\}\,\vec{\mathrm{e}}_x
\end{aligned}
$$

解答

由于系统动量守恒，所以有

$$\vec{p}_{i2} = \vec{p}_{i1}$$

$$\vec{p}_{i1} = [M + (N - i + 1)m]v_{i-1}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$\vec{p}_{i2} = \{[M + (N - i + 1)m]v_i - mu\}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$v_i = v_{i-1} + \frac{m}{M + (N - i + 1)m}u$$

$$v_i = \sum_{n=1}^{i} \frac{m}{M + (N + 1 - n)m}u$$

解答

当第 N 个人跳离平板车后，平板车的速度大小为

$$v_b = v_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{M + (N + 1 - n)m} u$$

$$
\begin{aligned}
v_b &= \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{M+(N+1-n)m} u \\
&> \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{M+(N+1-1)m} u \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{M+Nm} u \\
&= \frac{Nm}{M+Nm} u = v_a
\end{aligned}
$$

这也是使用多级火箭发送卫星以获得更大速度的原理

例题

线密度为 λ 的柔软长链条盘成一团置于地面，链条的一端系着一质量为 m 的球。若将球以初速 v_0 竖直上抛，球能上升多高?

解答

研究对象的选择，是解决这道题目时物理分析的难点所在，之后，在运用系统动量定理时，高阶无穷小量的处理是数学上的一般原则，还有一个常用的微分方面的数学处理，都是小难点。特殊的换元法，是本题的难点，作为了解不要求掌握

解答

以地面为坐标原点，竖直向上建立 x 轴，小球上抛时刻为时间原点。设任意 t 时刻，小球速度为 v，位置为 x，则悬在空中部分的细绳质量为 λx；在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，小球速度为 $v+\mathrm{d}v$，位置为 $x+\mathrm{d}x$，则悬在空中部分的细绳质量为 $\lambda(x+\mathrm{d}x)$，其中 $\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t$

解答

以 $t + \mathrm{d}t$ 时刻小球和悬在空中的部分细绳为研究对象，考虑它们在 t 到 $t + \mathrm{d}t$ 时段的动量定理，则有

$$
\begin{aligned}
&-[m+\lambda(x+\mathrm{d}x)]g\,\mathrm{d}t \\
&=[m+\lambda(x+\mathrm{d}x)](v+\mathrm{d}v)-(m+\lambda x)v
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
&-[m+\lambda(x+\mathrm{d}x)]g\,\mathrm{d}t \\
&=[m+\lambda(x+\mathrm{d}x)](v+\mathrm{d}v)-(m+\lambda x)v
\end{aligned}
$$

展开

$$
\begin{aligned}
&-(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t-\lambda g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&=(m+\lambda x)(v+\mathrm{d}v)+\lambda\,\mathrm{d}x(v+\mathrm{d}v) \\
&-(m+\lambda x)v
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
&-(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t-\lambda g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&=(m+\lambda x)(v+\mathrm{d}v)+\lambda\,\mathrm{d}x(v+\mathrm{d}v)\\
&-(m+\lambda x)v
\end{aligned}
$$

利用 $\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
&-(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t-\lambda gv(\mathrm{d}t)^2\\
&=(m+\lambda x)\,\mathrm{d}v+\lambda v^2\,\mathrm{d}t+\lambda v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
& -(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t-\lambda g v(\mathrm{d}t)^2 \\
&= (m+\lambda x)\,\mathrm{d}v+\lambda v^2\,\mathrm{d}t+\lambda v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

略去高阶无穷小量 $(\mathrm{d}t)^2$ 和 $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$

$$
-(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t=(m+\lambda x)\,\mathrm{d}v+\lambda v^2\,\mathrm{d}t
$$

解答

$$-(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t = (m+\lambda x)\,\mathrm{d}v + \lambda v^2\,\mathrm{d}t$$

移项合并同类项

$$\begin{aligned}(m+\lambda x)\,\mathrm{d}v &= -(m+\lambda x)g\,\mathrm{d}t - \lambda v^2\,\mathrm{d}t\\ &= -[(m+\lambda x)g + \lambda v^2]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

解答

$$(m+\lambda x)\,\mathrm{d}v = -[(m+\lambda x)g+\lambda v^2]\,\mathrm{d}t$$

$$(m+\lambda x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -[(m+\lambda x)g+\lambda v^2]$$

常用的数学处理

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$(m+\lambda x)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -[(m+\lambda x)g+\lambda v^2]$$

解答

特殊的换元法，令 $\xi = (m + \lambda x)^2 v^2$【求解本题的数学难点所在，注意这里的 v 会随 x 变化，即 v 是 x 的隐函数】，则有

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(m + \lambda x)^2}{\mathrm{d}x} v^2 + (m + \lambda x)^2 \frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}x}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(m+\lambda x)^2}{\mathrm{d}x}v^2 + (m+\lambda x)^2\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}(m+\lambda x)^2}{\mathrm{d}(m+\lambda x)} \cdot \frac{\mathrm{d}(m+\lambda x)}{\mathrm{d}x} \cdot v^2 \\
&\quad + (m+\lambda x)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\
&= 2(m+\lambda x)\cdot\lambda\cdot v^2 + (m+\lambda x)^2\cdot 2v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = 2(m+\lambda x)\cdot\lambda\cdot v^2 + (m+\lambda x)^2\cdot 2v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$(m+\lambda x)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -[(m+\lambda x)g + \lambda v^2]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} &= 2(m+\lambda x)\cdot\lambda\cdot v^2 + (m+\lambda x)^2\cdot 2v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\ &= 2\lambda(m+\lambda x)v^2\\ &\quad + 2(m+\lambda x)\left[-(m+\lambda x)g - \lambda v^2\right]\\ &= -2(m+\lambda x)^2 g\end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} &= -2(m+\lambda x)^2 g \\
\mathrm{d}\xi &= -2(m+\lambda x)^2 g\,\mathrm{d}x \\
&= -2g(m^2+2m\lambda x+\lambda^2 x^2)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

解答

$$\xi = (m+\lambda x)^2 v^2$$

依题意，在 $t=0$ 时刻，$x=x_0=0, v=v_0$，所以 $\xi_0=m^2v_0^2$；假定在某 t_1 时刻，小球上升到最大高度，即 $x=x_1$，此时 $v=v_1=0$，所以 $\xi_1=0$

解答

$$\mathrm{d}\xi = -2g(m^2 + 2m\lambda x + \lambda^2 x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \mathrm{d}\xi = \int_{x_0}^{x_1} -2g(m^2 + 2m\lambda x + \lambda^2 x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\xi_1 - \xi_0 = -2g\left(m^2 x + m\lambda x^2 + \frac{1}{3}\lambda^2 x^3\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$-m^2 v_0^2 = -2g\left(m^2 x_1 + m\lambda x_1^2 + \frac{1}{3}\lambda^2 x_1^3\right)$$

$$-m^2v_0^2 = -2g\left(m^2x_1 + m\lambda x_1^2 + \frac{1}{3}\lambda^2 x_1^3\right)$$

$$x_1^3 + \frac{3m}{\lambda}x_1^2 + \frac{3m^2}{\lambda^2}x_1 - \frac{3m^2v_0^2}{2g\lambda^2} = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{m}{\lambda}\right)^3 - \frac{m^3}{\lambda^3} - \frac{3m^2v_0^2}{2g\lambda^2} = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{m}{\lambda}\right)^3 = \frac{m^3}{\lambda^3} + \frac{3m^2v_0^2}{2g\lambda^2}$$

$$\left(x_1 + \frac{m}{\lambda}\right)^3 = \frac{m^3}{\lambda^3}\left(1 + \frac{3\lambda v_0^2}{2mg}\right)$$

解答

$$\left(x_1+\frac{m}{\lambda}\right)^3=\frac{m^3}{\lambda^3}\left(1+\frac{3\lambda v_0^2}{2mg}\right)$$

$$x_1+\frac{m}{\lambda}=\frac{m}{\lambda}\left(1+\frac{3\lambda v_0^2}{2mg}\right)^{1/3}$$

$$x_1=\frac{m}{\lambda}\left[\left(1+\frac{3\lambda v_0^2}{2mg}\right)^{1/3}-1\right]$$