§9.3 简谐振动的能量转化

- 以放置在光滑水平面上的弹簧振子为例
- 任意 t 时刻，振子离开平衡位置的位移为

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

这也是该时刻弹簧的形变量，因此系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- 振子的速度为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

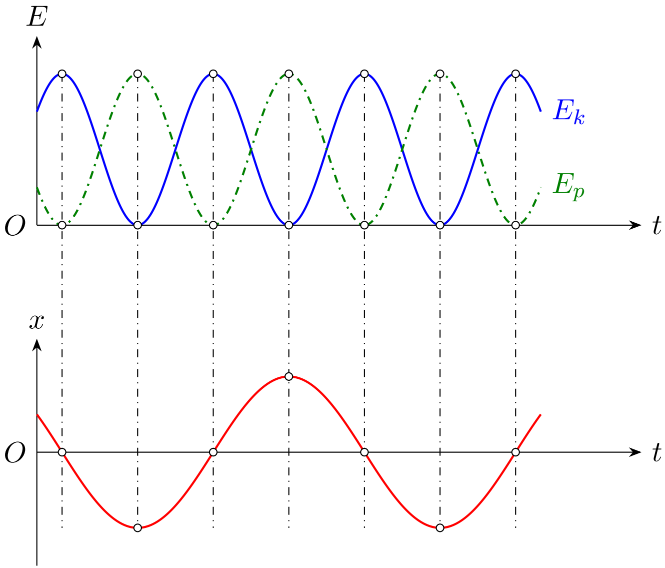
- 由于 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$，所以 $m\omega_0^2 = k$

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \\ E_p &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha \\
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)] \\
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha)]
\end{aligned}
$$

- 简谐振动过程中，系统的机械能保持不变，但动能和势能都在做简谐振动，频率是位移频率的两倍

$$
\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{4}kA^2[1-\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] \\
E_p &= \frac{1}{4}kA^2[1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] \\
E &= E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2
\end{aligned}
$$



- 当振子经过平衡位置时，$x = 0$，速率最大，因此动能最大，势能为零
- 当振子到达正负振幅时，$x = \pm A$，速率为零，因此动能为零，势能最大
- 在振动过程中，动能和势能互相转化，总的机械能保持不变
- 如果弹簧振子放置在竖直平面内，那么系统的势能除了弹性势能，还要考虑重力势能，总的势能零点取在此时的平衡位置处

例题

弹簧振子水平放置，克服弹簧拉力将质点自平衡位置移开 $0.04\ \mathrm{m}$，弹簧拉力为 $24\ \mathrm{N}$，随即释放，形成简谐振动。计算：(1) 弹簧振子的总能；(2) 求质点被释放后，行至振幅一半时，振子的动能和势能。

解答

$$F = kx$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{24}{0.04} = 600\ \mathrm{N/m}$$

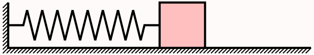
$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 600 \times 0.04^2 = 0.48\ \mathrm{J}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 600 \times 0.02^2 = 0.12\ \mathrm{J}$$

$$E_k = E - E_p = 0.36\ \mathrm{J}$$

例题

弹簧振子如图所示。弹簧原长 L，质量 m_s，劲度系数 k。滑块质量 m。计算弹簧振子系统的固有频率。



解答

取弹簧上距离固定端 $l \to l + \mathrm{d}l$ 部分为质元，则其质量

$$\mathrm{d}m_s = \frac{m_s}{L}\,\mathrm{d}l$$

设 t 时刻，振子离开平衡位置的位移为 x，则其速度

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

上述弹簧质元的速度

$$v'_x = \frac{l}{L} v_x$$

解答

此时系统的势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

振子的动能

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_x^2$$

弹簧质元的动能

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E'_k &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}m_s)(v'_x)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{m_s}{L}\,\mathrm{d}l \times \frac{l^2}{L^2}v_x^2 = \frac{m_s v_x^2}{2L^3} l^2\,\mathrm{d}l \end{aligned}$$

所以整根弹簧的动能

$$\begin{aligned} E'_k &= \int_0^L \frac{m_s v_x^2}{2L^3} l^2\,\mathrm{d}l \\ &= \frac{m_s v_x^2}{2L^3} \times \frac{1}{3}L^3 = \frac{1}{6}m_s v_x^2 \end{aligned}$$

所以整个系统的动能

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k1} + E'_k \\ &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{6}m_s v_x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)v_x^2 \end{aligned}$$

解答

整个系统的机械能是一个常数

$$E = E_k + E_p = \mathrm{C}$$

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)v_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathrm{C}$$

式子两边同时对时间求导

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right) \times 2v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k \times 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}} = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}}$$

习题 9.3.2

弹簧下面悬挂质量为 50 g 的物体，物体沿竖直方向的运动学方程为 $x = 2\sin(10t)$，平衡位置为势能零点，单位：cm，s。(1) 求弹簧的劲度系数；(2) 求最大动能；(3) 求总能。

解答

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 10\ \mathrm{rad/s} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ k &= m\omega_0^2 \\ &= 0.05 \times 10^2 \\ &= 5\ \mathrm{N/m} \end{aligned}$$

解答

$$
\begin{aligned}
x &= 2\sin(10t) \\
v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= 20\cos(20t) \\
v_{x\,\max} &= 20\ \mathrm{cm/s} \\
&= 0.2\ \mathrm{m/s} \\
E_{k\,\max} &= \frac{1}{2}mv_{x\,\max}^2 \\
&= \frac{1}{2}\times 0.05\times 0.2^2 \\
&= 0.001\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= E_{k\,\max} \\
&= 0.001\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kA^2 \\
&= \frac{1}{2}\times 5\times 0.02^2 \\
&= 0.001\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$