§10.4 平均能流密度

一、介质中波的能量分布

- 平面简谐波

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- 介质中任意一个质元 (x 附近)，其质量

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

- 任意 t 时刻质元的运动速度

$$v_y(x,t) = -A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- 质元的机械能

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = 2\,\mathrm{d}E_k = (\rho\,\mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

不同时刻不同位置，能量是不一样的

- 质元的动能

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_k &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)[v_y(x,t)]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\rho\,\mathrm{d}V)[-A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi_0)]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\rho\,\mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)\end{aligned}$$

- 质元的势能的计算很复杂，记住结论：

$$\mathrm{d}E_p = \mathrm{d}E_k$$

- 波的能量密度：单位体积的能量

$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

是时间和空间的函数，不同时刻不同位置，能量密度是不一样的

- 时间平均能量密度：一个时间周期之内的平均能量密度

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{E}}_T &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\end{aligned}$$

- 空间平均能量密度：一个空间周期之内的平均能量密度

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{E}}_\lambda &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathscr{E}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\end{aligned}$$

二、平均能流密度

- 单位时间内通过媒质中某一面积的能量称为通过该面积的能流，记为 P
- 媒质中某一面积元 $\mathrm{d}S$ 所在处的能量密度

$$\mathscr{E} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- $\mathrm{d}S$ 的法线与波传播方向的夹角为 θ
- $\mathrm{d}t$ 时间内通过 $\mathrm{d}S$ 的能量

$$\mathrm{d}E = \mathscr{E}\,\mathrm{d}V = \mathscr{E}(\mathrm{d}S)(v\,\mathrm{d}t)\cos\theta$$

- 单位时间内通过 $\mathrm{d}S$ 的能量即通过 $\mathrm{d}S$ 的能流

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E}(\mathrm{d}S)v\cos\theta$$

- 若 $\theta = 0$，$\mathrm{d}S$ 与波传播方向垂直

$$\mathrm{d}P = \mathscr{E}v\,\mathrm{d}S$$

- 某一面积 S 上处处能量密度 $\mathscr{E}$ 相等 (x 相同)

$$P = \mathscr{E} v S = v S \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

不同位置 (x 不同) 不同时刻 (t 不同)，能流是不一样的

- 能流在一个周期之内的平均值称为通过该面积的平均能流

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T P\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E} v S\cos\theta\,\mathrm{d}t = \overline{\mathscr{E} v S\cos\theta} \\ &= \left[\frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}\,\mathrm{d}t\right] v S\cos\theta = \bar{\mathscr{E}} v S\cos\theta\end{aligned}$$

当 $\theta = 0$ 时，$\bar{P} = \bar{\mathscr{E}} v S$

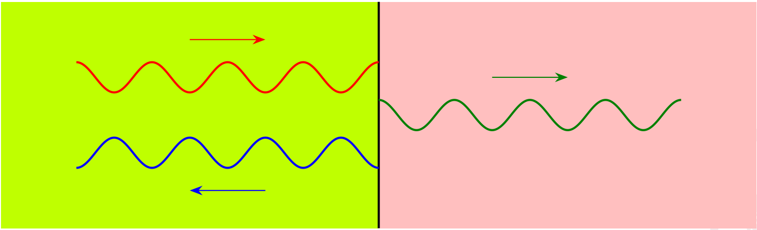
- 通过与波传播方向垂直的单位面积上的平均能流称为平均能流密度，也称为波的强度，通常记为 I

$$I = \frac{\bar{P}}{S\cos\theta} = \bar{\mathscr{E}} v = \frac{1}{2} v \rho A^2 \omega^2$$

- I 与 A^2 成正比
- I 与 ω^2 成正比
- I 与 ρ 成正比

三、波的反射和透射 · 半波损失

- 波从一种介质向另一种介质传播，在两种介质的界面上发生反射和透射



- 通常称介质的质量密度和波在其中传播的波速的乘积为该介质的波阻
- 波阻较大的介质称为波密介质，波阻较小的介质称为波疏介质
- 一般地假定入射波和反射波所在介质 (称为介质 1) 的波阻为 Z_1，透射波所在介质 (称为介质 2) 的波阻为 Z_2

- 定义反射系数为

$$\gamma = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

透射系数为

$$\tau = 1 - \gamma$$

- 当 $Z_1 \approx Z_2$ 时，$\gamma \approx 0$，$\tau \approx 1$，主要是透射
- 当 $Z_1 \gg Z_2$ 或 $Z_1 \ll Z_2$ 时，$\gamma \approx 1$，$\tau \approx 0$，主要是反射

- 波的频率取决于波源，因此入射波、反射波、透射波的频率相同
- 波的传播速度取决于介质，因此入射波和反射波的传播速度相同，入射波和透射波的传播速度不同
- 波的波长 $\lambda = vT = \frac{v}{f}$，因此入射波和反射波的波长相同，入射波和透射波的波长不同
- 可以证明【P322 选读 10.4】，当波从波密介质射向波疏介质时，反射波和入射波在边界处引起的分振动相位相同；当波从波疏介质射向波密介质时，反射波和入射波在边界处引起的分振动相位相差 π，这种现象称为半波损失。
- 固定端反射有半波损失，自由端反射没有半波损失

例题

如图所示，沿 x 轴传播的平面简谐波方程为 $y=10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t-\frac{x}{200}\right)\right]$ (x，y 的单位为 m，t 的单位为 s)。隔开两种介质的反射界面 A 与坐标原点 O 相距 2.25 m。设反射端两侧波阻相差悬殊可视为固定端。求反射波方程。

解答

入射波在 A 点引起的振动

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t-\frac{2.25}{200}\right)\right]\\
&= 10^{-3}\cos(200\pi t-2.25\pi)\\
&= 10^{-3}\cos(200\pi t-0.25\pi)
\end{aligned}
$$

解答

反射端两侧波阻相差悬殊，因此主要是反射，所以反射波的振幅约等于入射波的振幅，因此反射波的表达式一般地写成

$$y = 10^{-3}\cos(200\pi t + \pi x + \varphi_0)$$

反射波在 A 点引起的振动

$$\begin{aligned} y_2 &= 10^{-3}\cos(200\pi t + 2.25\pi + \varphi_0) \\ &= 10^{-3}\cos(200\pi t + 0.25\pi + \varphi_0) \end{aligned}$$

反射可视为固定端反射，因此有半波损失，所以

$$200\pi t + 0.25\pi + \varphi_0 = 200\pi t - 0.25\pi + (2n+1)\pi$$
$$\varphi_0 = (2n + 1 - 0.5)\pi = (2n + 0.5)\pi$$

取 $n = 0$，则 $\varphi_0 = 0.5\pi$，所以反射波的表达式为

$$y = 10^{-3}\cos(200\pi t + \pi x + 0.5\pi)$$