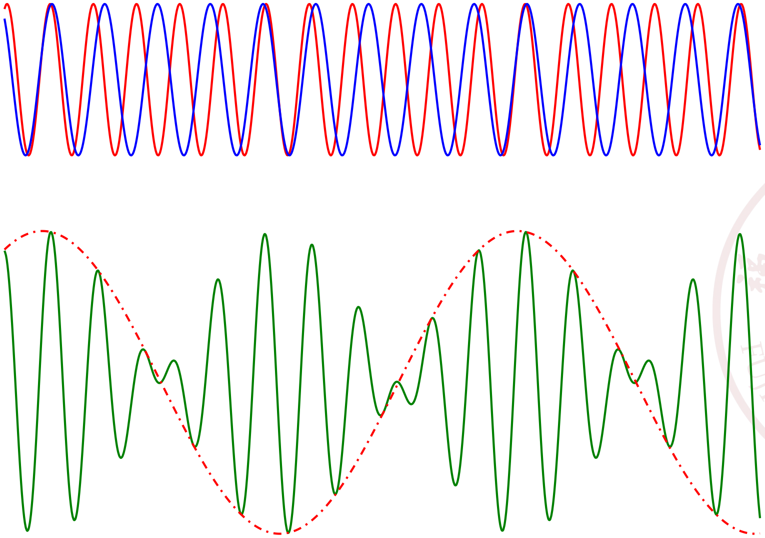
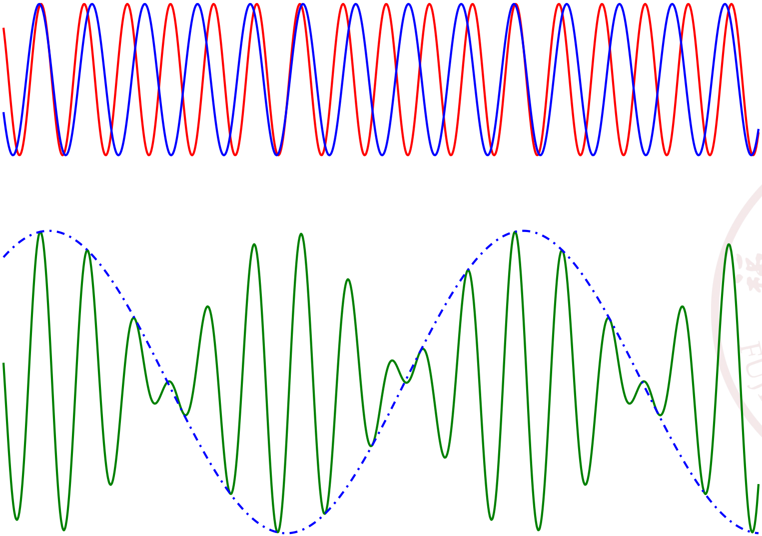
§10.5 波的叠加和干涉 · 驻波

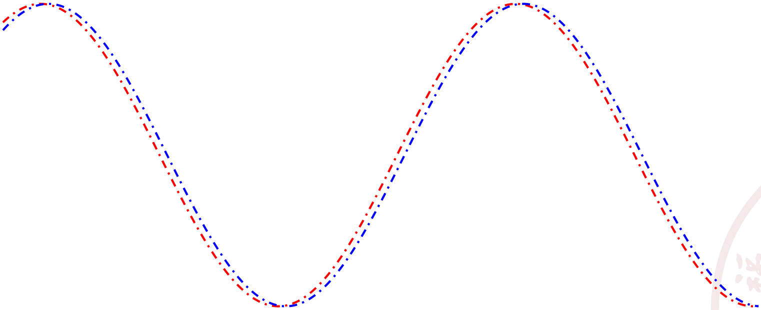
一、波的叠加・群速

- 波的叠加原理：两列互相独立传播的波，在两波相遇的地方，体元的位移等于各列波单独传播时在该处引起的位移的矢量和。
- 而在两波相遇之后，各列波又各自保持原来的特性不变，按照原来的方向继续传播。因此，波的叠加原理也称为波的独立传播原理。
- 波是振动在介质中的传播，传播的是运动状态和能量，因此相位也在传播，所以波在介质中传播的速度也称为相速度。
- P309：波包向前传播的速率称为群速度

$$
\begin{aligned}
y_1 &= A\cos[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x] \\
y_2 &= A\cos[(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)x] \\
y &= y_1+y_2 \\
&= 2A\cos[(\Delta\omega)t-(\Delta k)x]\cos(\omega t-kx)
\end{aligned}
$$







$$A(x,t) = 2A\cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x]$$

$$v_{\text{群}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

二、波的干涉

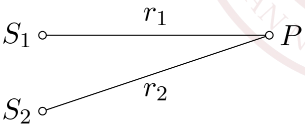
- 两列满足一定条件的波在介质中传播而相遇，在相遇区域引起各空间点合振动的振幅出现稳定分布的现象称为波的干涉。
- 形成波的干涉现象的两列波称为相干波，相应的波源称为相干波源
- 形成波的干涉的条件称为相干条件
  - 振动方向相同
  - 频率相同
  - 相位差恒定

- 设两个波源 S_1、S_2 的振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$
$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

- S_1、S_2 到相遇点 P 的距离分别为 r_1 和 r_2，因此两列波引起的 P 点的振动分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_{10})$$
$$y_2 = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_{20})$$

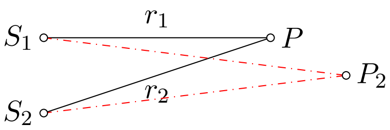


- 所以 P 点的合运动为

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 + y_2 \\
&= A_1\cos(\omega t - kr_1 + \varphi_{10}) + A_2\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_{20}) \\
&= A\cos(\omega t + \varphi_0)
\end{aligned}
$$

$$
A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \\
&= (\omega t - kr_2 + \varphi_{20}) - (\omega t - kr_1 + \varphi_{10}) \\
&= k(r_1 - r_2) + (\varphi_{20} - \varphi_{10})
\end{aligned}
$$



- 合振动的振幅

$$
A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}
$$

$$
\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) + (\varphi_{20} - \varphi_{10})
$$

- 对于不同的相遇点，r_1、r_2 不一样，所以 $\Delta\varphi$ 不一样，所以 A 不一样
- 当 $\Delta\varphi = 2n\pi$，$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 时，$A = A_1 + A_2$，干涉相长
- 当 $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$，$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 时，$A = |A_1 - A_2|$，干涉相消

三、驻波

- 驻波是一种特殊的“波的干涉”
- P310“……的振动称为驻波”个人持保留意见
- 振动是一个质点的运动，波是多个质点的运动
- 驻波与行波相对应
  - 行波的波形随时间变化发生移动 (但形状不发生变化)
  - 驻波的波形随时间变化而形状发生变化但不移动

- 考虑两列在同一直线上传播，但传播方向相反的相干波，一般地假定两列波的表达式分别为

$$
\begin{aligned}
y_1 &= A_1\cos(\omega t - kx + \varphi_{10}) \\
y_2 &= A_2\cos(\omega t + kx + \varphi_{20})
\end{aligned}
$$

- 假定两个波源分别位于 x_1 和 x_2，则在 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 区域两波相遇发生干涉

$$
y = y_1 + y_2 = A_1\cos(\omega t - kx + \varphi_{10}) + A_2\cos(\omega t + kx + \varphi_{20})
$$

利用三角函数的和差化积公式

$$
\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

若 $A_1 = A_2 = A_0$，则

$$
\begin{aligned}
y &= A_0[\cos(\omega t - kx + \varphi_{10}) + \cos(\omega t + kx + \varphi_{20})] \\
&= 2A_0\cos(kx + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2)
\end{aligned}
$$

其中 $\varphi_1 = \frac{\varphi_{20}-\varphi_{10}}{2}$，$\varphi_2 = \frac{\varphi_{10}+\varphi_{20}}{2}$。

若 $A_1 > A_2$，则令 $A_1 = A_3 + A_4$，$A_2 = A_3 - A_4$，

$$\begin{aligned} y = & A_3[\cos(\omega t - kx + \varphi_{10}) + \cos(\omega t + kx + \varphi_{20})] \\ & + A_4[\cos(\omega t - kx + \varphi_{10}) - \cos(\omega t + kx + \varphi_{20})] \\ & = 2A_3 \cos(kx + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) + 2A_4 \sin(kx + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

这里还利用了另一个三角函数的和差化积公式

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

- 下面只讨论 $A_1 = A_2 = A_0$ 的情况，$A_1 > A_2$ 的情况留给学有余力的同学自行讨论【课后习题 10.5.3】
- 书上假设 $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$，则 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$
- $A_1 = A_2 = A_0$ 时驻波的表达式为

$$y = 2A_0 \cos(kx + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

- 当 x 取某个定值，如 x_0，代入驻波表达式，得到的式子表示 x_0 处质点的振动方程

$$y(x_0,t)=2A_0\cos(kx_0+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)$$

- 如果 $\cos(kx_0+\varphi_1)>0$，则说明 x_0 处质点的振动的振幅为 $2A_0\cos(kx_0+\varphi_1)$，t 时刻的相位 $\varphi(t)=\omega t+\varphi_2$
- 如果 $\cos(kx_0+\varphi_1)<0$，则说明 x_0 处质点的振动的振幅为 $2A_0|\cos(kx_0+\varphi_1)|$，$t$ 时刻的相位 $\varphi(t)=\omega t+\varphi_2+\pi$

$$\begin{aligned}y(x_0,t)&=2A_0\cos(kx_0+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)\\&=-2A_0|\cos(kx_0+\varphi_1)|\cos(\omega t+\varphi_2)\\&=2A_0|\cos(kx_0+\varphi_1)|\cos(\omega t+\varphi_2+\pi)\end{aligned}$$

- 所以任意 x 处质点振动的振幅为

$$A = 2A_0|\cos(kx+\varphi_1)|$$

- 当 $kx+\varphi_1 = n\pi$ 时，$A = 2A_0$，振幅最大，对应的位置称为驻波的波腹
- 波腹的位置

$$kx+\varphi_1 = n\pi$$

$$x_n = \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi_1}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} - \frac{\varphi_1}{k} = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\varphi_1}{k}$$

相邻波腹之间的距离

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2}$$

- 当 $kx+\varphi_1 = \frac{2n+1}{2}\pi$ 时，$A = 0$，振幅最小，对应的位置称为驻波的波节
- 波节的位置

$$kx+\varphi_1 = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2k} - \frac{\varphi_1}{k} = \frac{(2n+1)\pi}{2\times\frac{2\pi}{\lambda}} - \frac{\varphi_1}{k}$$

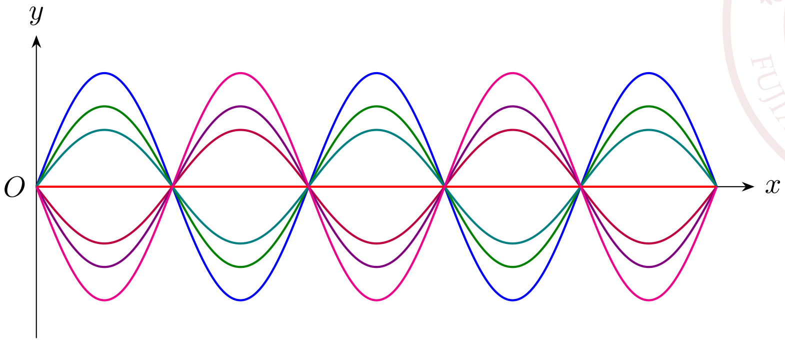
$$x_n = \frac{(2n+1)\lambda}{4} - \frac{\varphi_1}{k}$$

相邻波节之间的距离

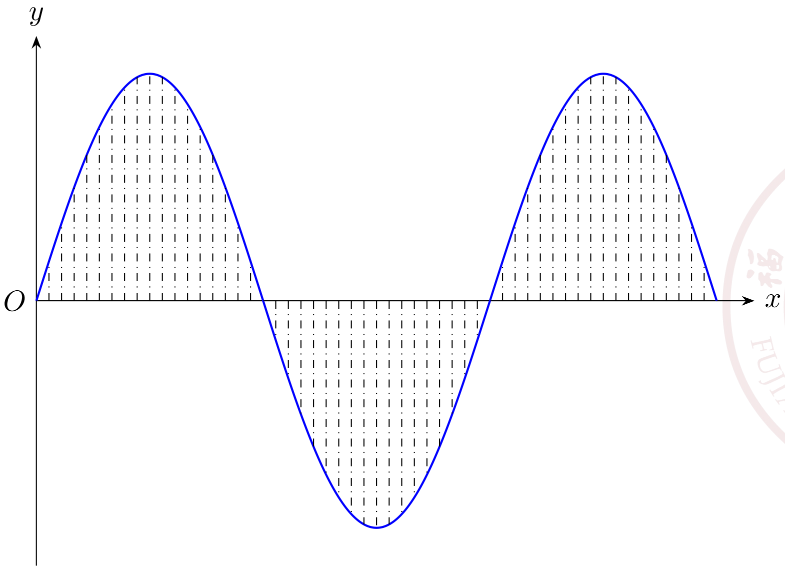
$$\Delta x = x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2}$$

- 对于两个相邻的波节之间所有的质点，$\cos(kx+\varphi_1)$ 同号 (都是正的或者都是负的)，因此它们的相位都是 $\omega t+\varphi_2$(同正时) 或者 $\omega t+\varphi_2+\pi$(同负时)，即相邻波节之间所有质点的振动是同相的
- 一个波节两侧的质点，$\cos(kx+\varphi_1)$ 异号，因此它们的振动是反相的
- 驻波表达式中 t 取某个定值，如 t_0 时，得到的式子表示 t_0 时刻驻波的波形

$$y(x,t_0)=2A_0\cos(kx+\varphi_1)\cos(\omega t_0+\varphi_2)$$



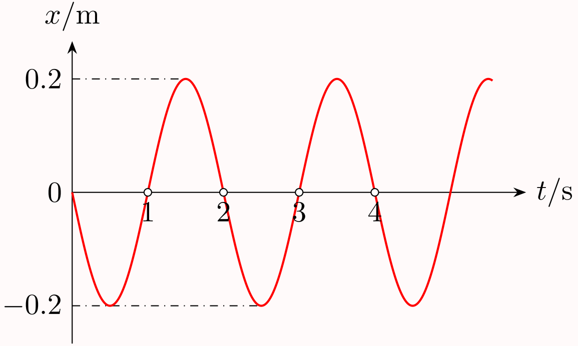
- 考虑一个简谐振动的过程，质点在平衡位置速度最大，在正负振幅处，速度为零
- 频率相同的情况下，振幅越大，经过平衡位置的速度越大
- 对于驻波，各点做简谐振动的频率相同，波腹处振幅最大，波节处振幅最小
- 质点在同一时刻经过各自的平衡位置【此时大家都没有形变，因此势能为零】，此时波腹处质点的速度较大，波节处质点的速度为零，因此这种时刻驻波的能量表现为动能，主要集中在波腹的位置
- 在另一时刻所有质点同时到达最大位移处【有些在正的最大位移，有些在负的最大位移】，这时所有质点的速度都为零【因此动能为零】，波腹处的变形最小，波节处的变形最大【这点不好理解】，这时驻波的能量表现为势能，主要集中在波节的位置
- 在整个运动过程中，驻波的能量在波节和波腹之间移动，在动能和势能之间转换，两个波节之间的能量总和保持不变



y
O
x

习题 10.5.8

一平面简谐波自左向右传播，在波射线上某质元 A 的振动曲线如图所示。后来此波在前进方向上遇一障碍物而反射，并与该入射平面简谐波叠加而成驻波，相邻波节、波腹距离为 $3\ \mathrm{m}$，以质元 A 的平衡位置为 y 轴原点，写出该入射波的波方程。

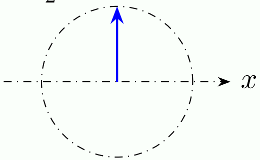


解答

依题意，一般地假定波方程为

$$x = A\cos(\omega t - ky + \varphi_0)$$

依题图，$A = 0.2$ m，$T = 2$ s，$t = 0$ 时，$x(0,0) = 0$，$v_x(0,0) < 0$，由旋转矢量图可得，$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$$

依题意，相邻波节、波腹距离为 3 m，所以 $\lambda = 12$ m，因此

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/m}$$

所以所求波方程为

$$x = 0.2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}y + \frac{\pi}{2}\right) \text{(SI)}$$

习题 10.5.9

同一介质中有两个平面简谐波做同频率、同方向、同振幅的振动。两列波相对传播，波长 8 m。波射线上 A、B 两点相距 20 m。一波在 A 处为波峰时，另一波在 B 处相位为 $-\frac{\pi}{2}$。求 AB 连线上因干涉而静止的各点的位置。

解答

以 A 点为坐标原点，$A \to B$ 为 x 轴正方向，设两波的波方程分别为

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_{10})$$
$$y_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_{20})$$

依题意，

$$\lambda = 8\ \mathrm{m}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad/m}$$

解答

取题目所给时刻为 $t=0$，则

$$\varphi_{10}=0$$

$$20k+\varphi_{20}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{20}=-\frac{\pi}{2}-20\times\frac{\pi}{4}=-\frac{11\pi}{2}$$

两波干涉形成的驻波的表达式为

$$y=2A\cos(kx+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\varphi_1=\frac{\varphi_{20}-\varphi_{10}}{2}=-\frac{11\pi}{4}$$

$$\varphi_2=\frac{\varphi_{10}+\varphi_{20}}{2}=-\frac{11\pi}{4}$$

因干涉而静止

$$\cos(kx+\varphi_1)=0$$

$$kx+\varphi_1=\frac{2n+1}{2}\pi$$

$$x=\frac{2n+1}{2k}\pi-\frac{\varphi_1}{k}=4n+13$$

$$x=1,5,9,13,17\ \mathrm{m}$$