

第三章 电磁感应

一、电磁感应定律

1 电磁感应现象

- 法拉第在 1822-1831 年，通过大量的实验研究，发现了电磁感应现象

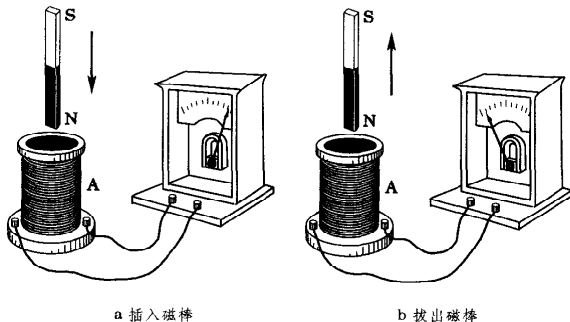


图 3 - 1 电磁感应现象的演示之一 —— 插入或拔出磁棒

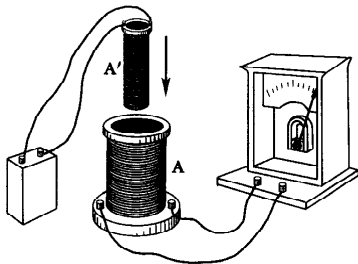


图 3-2 电磁感应现象的演示之二
——插入或拔出载流线圈

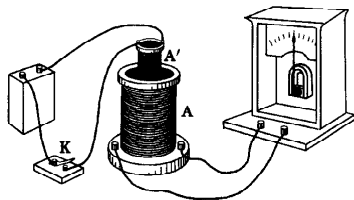


图 3-3 电磁感应现象的演示之三
——接通或断开初级线圈的电流

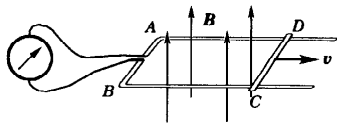


图 3-4 电磁感应现象的演示之四
——导线作切割磁感应线的运动

- 总结所有电磁感应实验，引发电磁感应最根本的原因是穿过闭合导体回路的磁通量发生了变化，回路中产生了感应电流
- 感应电流的大小与回路中的电阻有关，电磁感应所产生的电动势（感应电动势）则与回路中的电阻无关
- 即使回路不闭合，电磁感应现象仍然会发生，此时没有感应电流，但感应电动势仍然存在

2 法拉第电磁感应定律

- 均匀磁场中通过一个平面回路的磁通量

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta$$

- $\vec{S} = S \vec{e}_n$, \vec{e}_n 为选定的平面的法向方向单位矢量
- 磁通量为正说明磁场沿选定法向方向通过回路平面, 磁通量为负说明磁场逆着选定法向方向通过回路平面

- 选定回路的绕行方向与回路平面的法向方向成右手螺旋关系：以弯曲的四个手指沿选定的回路绕行方向，则大拇指的方向规定为回路平面的法向方向
- 电源的电动势的正方向选定为从电源负极通过电源内部指向电源正极的方向
- 大量电磁感应现象的实验结果表明，导体回路中感应电动势 \mathcal{E} 的大小与穿过回路的磁通量的变化率 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的大小成正比，而二者的方向相反。在国际单位制下，法拉第电磁感应定律表示为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- 如果回路是多匝线圈，通过第 i 匝线圈的磁通量为 Φ_i ，则第 i 匝线圈产生的感应电动势为

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}$$

由于线圈之间是串联连接，所以整个线圈总的感应电动势为各线圈感应电动势之和

$$\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_i \Phi_i = -\frac{d\Psi}{dt}$$

- 多匝线圈的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

- 磁通匝链数或全磁通：通过整个多匝线圈的磁通量

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$

- 如果通过每匝线圈的磁通量都相等, 即 $\Phi_i = \Phi$, 总匝数为 N , 则 $\Psi = N\Phi$

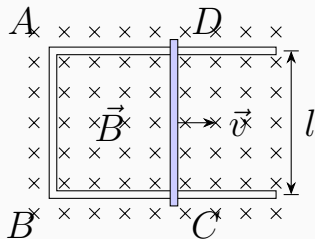
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

- 如果回路总的电阻为 R , 则感应电动势为 \mathcal{E} 时
感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

例题

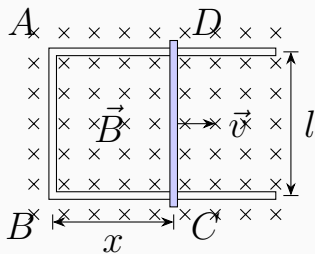
如图，磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场垂直纸面向里，一矩形导体线框 $ABCD$ 平放在纸面内，线框的 CD 边可以沿着 AD 和 BC 边滑动。设 CD 边的长度为 l ，向右滑动的速度为 \vec{v} 。求线框中感应电动势的大小。



解答

假定任意 t 时刻,
 CD 边与 AB 边之
间的距离为 x , 依
题意, CD 边以速率
 v 向右运动, 所以
 $\frac{dx}{dt} = v$

如果题目中理解成 CD 边滑动的速度一直是
 v , 那么也可以用 $x = x_0 + vt$, 但请注意, 这
里 x_0 一般情况下不一定等于零



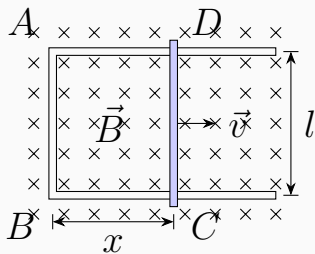
解答

t 时刻通过线框的磁通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \vec{B} \cdot \vec{S} \\ &= BS \\ &= Blx\end{aligned}$$

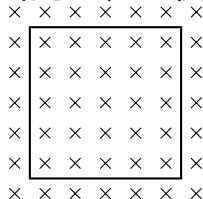
因此根据法拉第电磁感应定律，回路中的感应电动势的大小

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(Blx)}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$



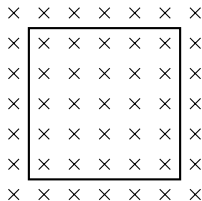
3 楞次定律

- 闭合回路中感应电流的方向总是使得它所激发的磁场来阻碍引起感应电流的磁通量的变化
- 如图，选定顺时针方向为回路绕行的正方向，同时选择垂直纸面向里为磁通量的正方向

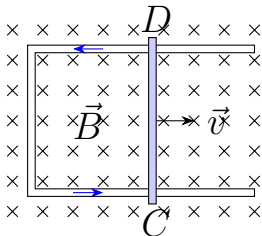


- 如果磁场方向如图所示垂直纸面向里，当磁场增强时，磁通量变大，感应电流的磁场要使磁通量变小，所以感应电流沿逆时针方向；当磁场减弱时，磁通量变小，感应电流的磁场要使磁通量变大，所以感应电流沿顺时针方向

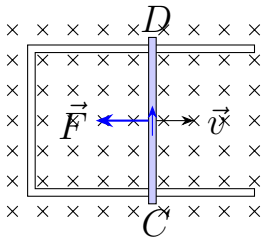
- 但要注意，感应电流的磁场只是阻碍引起感应电流的磁通量的变化，但最终磁通量还是变化了，只是变化得没那么多而已。比如原来磁通量变大，感应电流使得磁通量减小，但总的效果磁通量仍然是变大了，只是原来想变化两个单位的大小，现在只变化了一个单位，如此而已



- 楞次定律还有另外一种表述：感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因
- 引起感应电流的原因是 CD 向右运动，所以磁通量变大，所以感应电流的磁场要使得磁通量变小，感应电流沿逆时针方向



- 感应电流通过 CD ，在磁场中受到安培力作用 $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ ，力的方向与速度方向相反， CD 想向右走，感应电流不让它向右走，但最终它还是向右走，只是速度变小了而已



4 涡电流和电磁阻尼

4.1 涡电流

- 当大块金属处于变化的磁场或者相对磁场发生运动时，在金属内部会产生感应电流，感应电流呈闭合的涡旋状，所以称为涡电流，也称涡流

4.2 涡电流的热效应

- 电流通过闭合回路会产生焦耳热。有些场合需要用到这种热效应，就要想办法得到较大的涡电流，比如提高感应电动势，减小回路电阻；有些场合则要避免这种热效应，那就要反过来使得涡电流较小

4.3 涡电流的机械效应——电磁阻尼

- 根据楞次定律，感应电流的作用效果总是反抗引起感应电流的原因。因此感应电流在磁场中所受到的安培力总是与相对运动方向相反，或者力矩方向与相对转动方向相反
- 注意，阻尼作用是阻碍相对运动，不一定是阻碍运动

作业

- P161[3-1] 一横截面积为 $S = 20 \text{ cm}^2$ 的空心螺绕环，每厘米长度上绕有 50 匝，环外绕有 5 匝的副线圈，副线圈与电流计串联，构成一个电阻为 $R = 2 \Omega$ 的闭合回路。今使螺绕环中的电流每秒减少 20 A，求副线圈中的感应电动势 \mathcal{E} 和感应电流。

作业

- P161[3-2] 一正方形线圈每边长 100 mm, 在地磁场中转动, 每秒转 30 圈; 转轴通过中心并与一边平行, 且与地磁场 \vec{B} 垂直。(1) 线圈法线与地磁场 \vec{B} 的夹角为什么值时, 线圈中产生的感应电动势最大? (2) 设地磁场的 $B = 0.55 \text{ Gs}$, 这时要在线圈中最大产生 10 mV 的感应电动势, 求线圈的匝数 N 。

二、动生电动势和感生电动势

- 以单匝线圈为例
- 通过线圈的磁通量为

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 根据法拉第电磁感应定律，线圈上的感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{S}\end{aligned}$$

- \vec{B} 是 $d\vec{S}$ 所在处的磁感应强度, 一般情况下, 它既是位置的函数, 也是时间的函数, 即

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y, z, t)$$
$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- $d\vec{S} = dS \vec{e}_n$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d\vec{S} &= \frac{d}{dt} (dS \vec{e}_n) \\ &= \frac{d(dS)}{dt} \vec{e}_n + dS \frac{d(\vec{e}_n)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{S} \\
&= - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \cdot d\vec{S} \\
&\quad - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{B} \cdot \frac{d(dS)}{dt} \vec{e}_n - \int_S \vec{B} \cdot dS \frac{d(\vec{e}_n)}{dt}
\end{aligned}$$

- (1) 磁场 \vec{B} 随面元的位置发生变化, 而面元的位置随时间发生变化
- (2) 磁场 \vec{B} 随时间发生变化
- (3) 面元的大小 dS 随时间发生变化
- (4) 面元的方向 \vec{e}_n 随时间发生变化

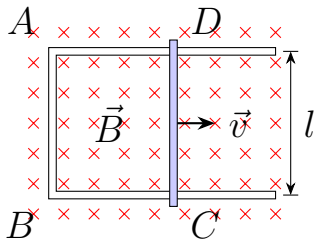
- 所谓的动生电动势是指在**恒定磁场**中由于导体运动而在导体内产生的感应电动势。磁场恒定是指磁场分布**不随时间发生变化**，但不同位置的磁场可以不同，即 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x, y, z)$
- 所谓的感生电动势是指**导体静止不动**，由于磁场发生变化而在导体内产生的感应电动势

- 动生和感生在某些情况下是等价的：“ A 静止， B 以速度 \vec{v} 运动”等价于“ B 静止， A 以速度 $-\vec{v}$ 运动”。如果 A 是激发磁场的电流， B 是产生感应电动势的导体，那么当 A 静止， B 以速度 \vec{v} 运动时，所产生的感应电动势属于动生电动势；而当 B 静止， A 以速度 $-\vec{v}$ 运动时，所产生的感应电动势属于感生电动势。而这两种情况，只是在两个不同的惯性参考系下观察的结果罢了
- 也可能存在磁场发生变化的同时，导体也在发生运动的情况，此时既有动生电动势，也有感生电动势

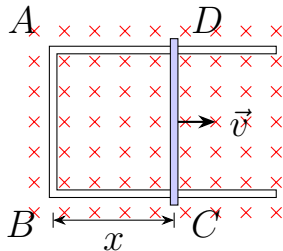
1 动生电动势

1.1 \vec{B} 不变, \vec{e}_n 不变, S 变化

- 如图, 磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场垂直纸面向里, 一矩形导体线框 $ABCD$ 平放在纸面内, 线框的 CD 边可以沿着 AD 和 BC 边滑动。设 CD 边的长度为 l , 向右滑动的速度为 \vec{v}



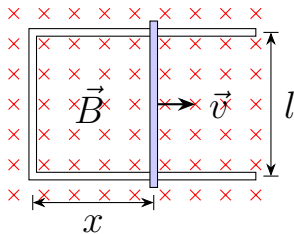
- 假定任意 t 时刻, CD 边与 AB 边之间的距离为 x , 依题意, CD 边以速率 v 向右运动, 所以 $\frac{dx}{dt} = v$
- 若指定垂直纸面向里为磁通量的正方向, 则沿回路顺时针方向为感应电动势的正方向



- t 时刻通过回路的磁通量 $\Phi = BS = Blx$, 因此根据法拉第电磁感应定律, 回路中的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

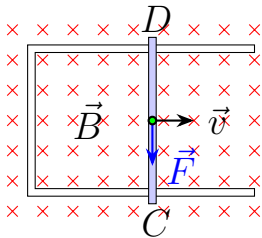
- 感应电动势的方向沿回路逆时针, 因此感应电流的方向也是沿回路逆时针方向, 电子则是沿回路顺时针方向运动



- 以 CD 中的电子为研究对象, CD 以速度 \vec{v} 向右运动, 则电子也具有相同的速度 (先不考虑无规则热运动), 运动的电子在磁场中受到洛伦兹力的作用

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

大小 $F = evB$, 方向从 D 指向 C , 所以电子在洛伦兹力作用下从 D 向 C 运动



- 电子受到的洛伦兹力在这里就是产生动生电动势的非静电力，因此与洛伦兹力对应的非静电性电场强度

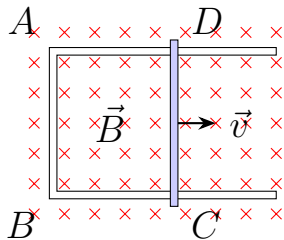
$$\vec{K} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

所以动生电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 注意, 在这个例子中, 当电子经过固定线框部分 $CBAD$ 时, 没有定向运动的速度, $\vec{v} = \vec{0}$, 因此 $\vec{K} = \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$, 非静电性电场只存在于 CD 段, 即运动的 CD 段相当于一个电源
- 所以以上沿整个回路积分只在 CD 段有非零结果, 因此

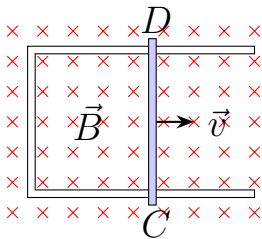
$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_{CD} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$



- 如果回路积分选择逆时针方向，因此积分从 C 积到 D ，因此

$$\mathcal{E} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Blv$$

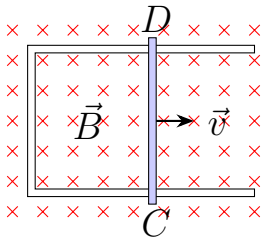
结果为正，说明 C 端是电源的负极， D 端为电源的正极（电源电动势的方向规定为从电源负极经电源内部指向电源正极）



- 如果回路积分选择顺时针方向，因此积分从 D 积到 C ，因此

$$\mathcal{E} = \int_D^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -Blv$$

结果为负，同样说明 C 端是电源的负极， D 端为电源的正极



- 在磁场中运动的导体相当于一个电源，如果没有构成回路，则不存在感应电流，但仍然可能存在感应电动势 (动生电动势)
- 对于一个任意的磁场，导体在其中做任意的运动，将导体视为很多小导体段，假设其中任意一段 $d\vec{l}$ 所在处的速度和磁场分别为 \vec{v} 和 \vec{B} ，那么它所产生的动生电动势为

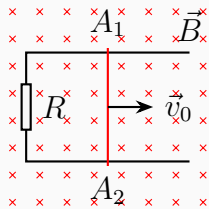
$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

因此整个运动导体的总的动生电动势为

$$\mathcal{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

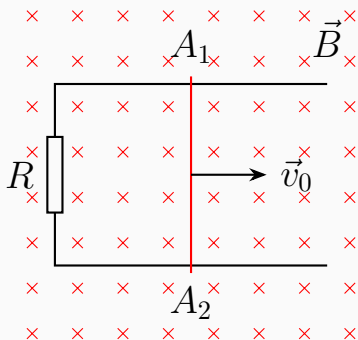
例题

如图所示, 水平放置的导体矩形框的平面与磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场垂直, 在此矩形框上有一质量为 m , 长为 L 的可移动细导体棒 A_1A_2 , 矩形框还接有一电阻 R , 其值较之导线的电阻值要大得多, 若开始时 ($t = 0$), 细导体棒以速度 \vec{v}_0 沿图示的矩形框运动, 试求棒的速率随时间变化的函数关系。忽略导体棒与导体矩形框之间的摩擦力。



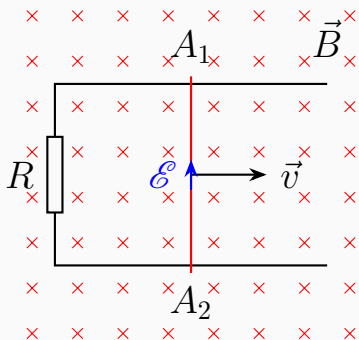
解答

思路：导体棒向右运动，产生感应电动势，回路产生感应电流，感应电流受到磁场力，受力分析，牛顿第二定律，得到任意时刻的加速度，已知初始时刻的速度，求任意时刻的速度



解答

以水平向右为 x 轴
建立直角坐标系, 假定任意 t 时刻, 导体棒的位置为 x , 速度为 v , 则此时导体棒上的感应电动势为 $\mathcal{E} = BLv$, 方向从 A_2 指向 A_1

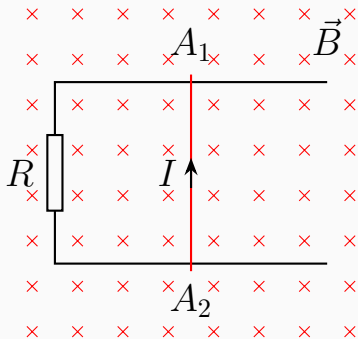


解答

回路中产生感应电
流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

方向为逆时针方向

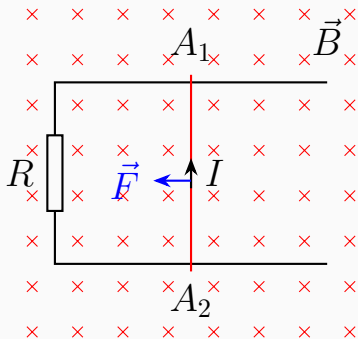


解答

电流流经导体棒时,
导体棒受到的磁场
力 (安培力)

$$F = -BIL$$

其中负号表示磁场
力的方向沿 x 轴负
方向



解答

所以导体棒的加速度

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{BIL}{m} = -\frac{BL\mathcal{E}}{mR} = -\frac{B^2L^2v}{mR}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{mR}$$

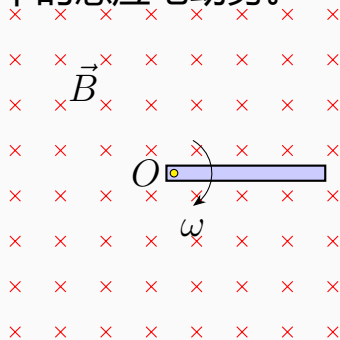
$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR} dt$$

解答

$$\begin{aligned}\frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 L^2}{mR} dt \\ \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= \int_0^t -\frac{B^2 L^2}{mR} dt \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{B^2 L^2}{mR} t \\ v &= v_0 e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}\end{aligned}$$

例题

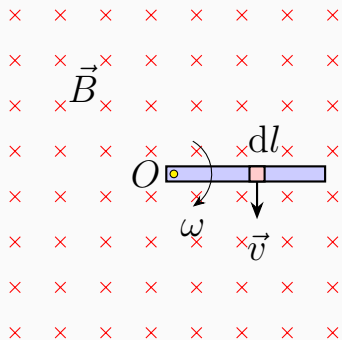
一根长为 L 的铜棒，在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中以角速度 ω 在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端 O 作匀速转动，如图所示，试求在铜棒中的感应电动势。



解答

在棒上任取离 O 点
 $l \rightarrow l + dl$ 小段, 它
的速度 $v = \omega l$, 因此
它的感应电动势为

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= vB dl \\ &= \omega Bl dl \end{aligned}$$

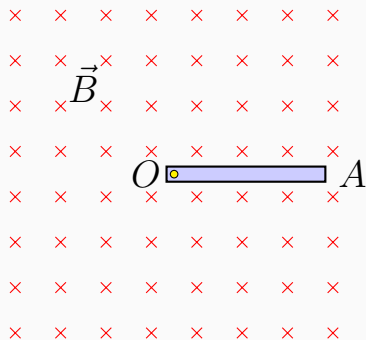


解答

整根铜棒的感应电动势为

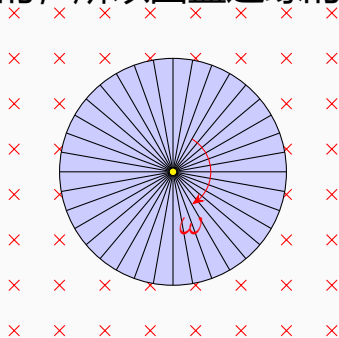
$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^L \omega B l \, dl \\ &= \frac{1}{2} \omega B L^2\end{aligned}$$

方向从 O 指向 A , 即
 A 端电势较高



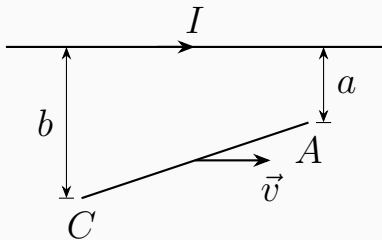
解答

如果金属圆盘绕中心轴转动，则可以把圆盘看成一根根的金属棒，那么在转动过程中，每根金属棒都产生一个感应电动势，但这些电动势是并联的，所以圆盘边缘的电势最高



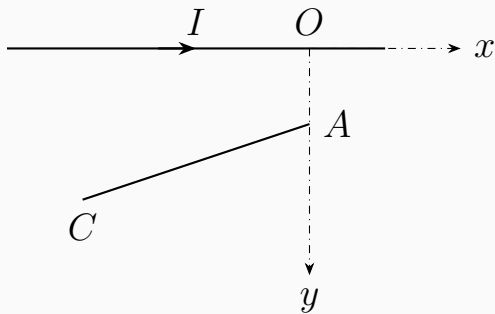
例题

一通有电流 I 的长直水平导线近旁有一斜向放置的金属棒 AC 与之共面，金属棒以平行于电流 I 的速度 \vec{v} 平动，如图所示，已知棒端 A 、 C 与导线的距离分别为 a 、 b ，求棒中的感应电动势。



解答

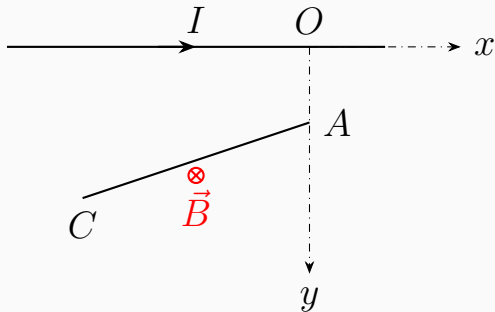
如图，以水平向右为 x 轴正方向，竖直向下为 y 轴正方向，建立直角坐标系，则 z 轴正方向垂直纸面向里



解答

电流 I 在 xy 平面内任一点 (x, y) 的磁感应强度为

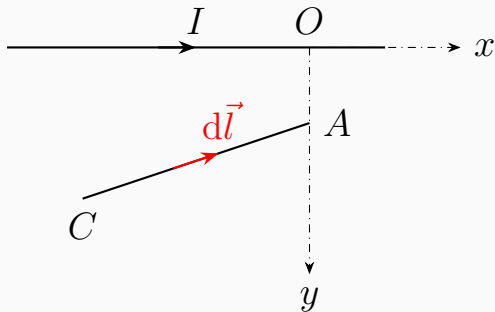
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{e}_z$$



解答

在金属棒上任取一小段 $d\vec{l}$

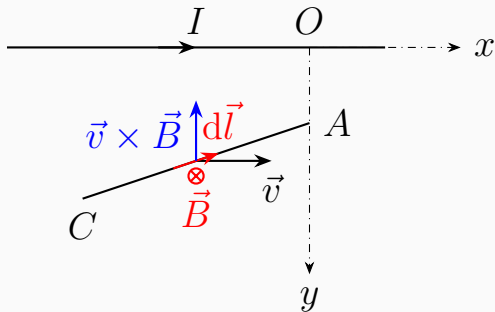
$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$$



解答

则在 $d\vec{l}$ 上产生的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$



解答

$$\vec{v} = v \vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{e}_z$$

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \left(v \vec{e}_x \times \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{e}_z \right) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi y} v (-\vec{e}_y) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) \\ &= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi y} dy \end{aligned}$$

解答

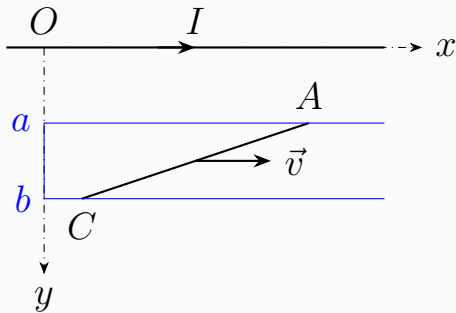
整根金属棒中的动生电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{CA} &= \int_C^A -\frac{\mu_0 I v}{2\pi y} dy \\&= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{y_A}{y_C} \\&= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a}{b} \\&= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\end{aligned}$$

其中 A 端电势较高，为电源的正极

解答

下面用法拉第电磁感应定律求金属棒的感应电动势



如图构造一个导体导轨，并与导体棒构成一个回路，并建立直角坐标系

解答

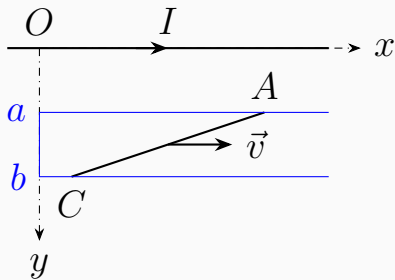
这是一个非均匀的恒定磁场, 通过回路的磁通量要通过积分求得。设任意 t 时刻, A 端和 C 端的坐标分别为

$$x_A = x_{A0} + vt$$

$$y_A = a$$

$$x_C = x_{C0} + vt$$

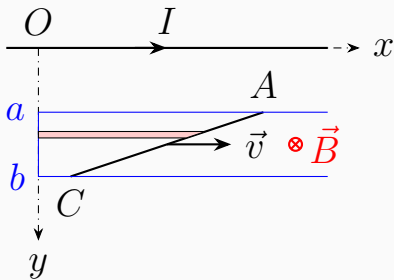
$$y_C = b$$



解答

以垂直纸面向里为磁通的正方向, 因此回路绕向正方向为顺时针方向。则图中所示小面积内的磁通量为

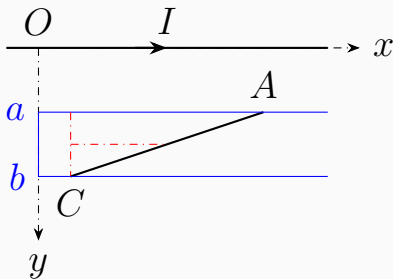
$$\begin{aligned}d\Phi &= B \, dS \\&= Bx \, dy \\&= \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x \, dy\end{aligned}$$



解答

其中

$$\frac{x - x_C}{x_A - x_C} = \frac{y_C - y}{y_C - y_A}$$
$$x = x_C + \frac{y_C - y}{y_C - y_A}(x_A - x_C)$$



解答

$$\begin{aligned}x &= x_C + \frac{y_C - y}{y_C - y_A}(x_A - x_C) \\&= x_{C0} + vt + \frac{b - y}{b - a}(x_{A0} - x_{C0})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x \, dy \\&= \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \left[x_{C0} + vt + \frac{b - y}{b - a}(x_{A0} - x_{C0}) \right] dy\end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x \, dy \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \frac{dx}{dt} \, dy \\ &= -\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi y} v \, dy \\ &= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\end{aligned}$$

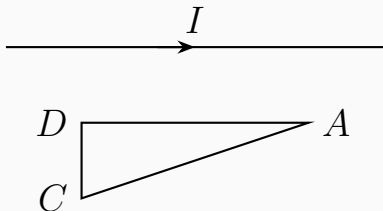
解答

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

负号表示感应电动势的方向与规定的回路绕向正方向 (顺时针方向) 相反, 即感应电动势的方向为逆时针方向, 即从 C 端指向 A 端

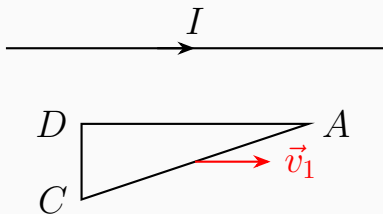
解答

如果回路由三根导体棒连接而成



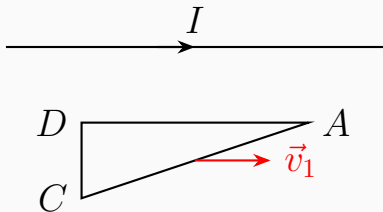
解答

当整个回路整体以 \vec{v}_1 运动时, AD 棒将不产生感应电动势【从前面的结论可以直接看出来, 实际上任取一小段导体也可以发现, 因为 $\vec{v}_1 \times \vec{B}$ 的方向 $d\vec{l}$ 的方向垂直, 所以 $d\mathcal{E} = (\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$ 】



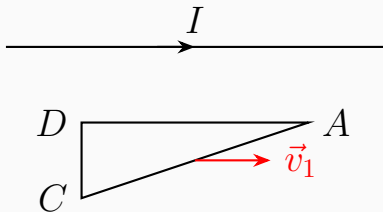
解答

AD 棒将不产生感应电动势, 即 A 、 D 两端电势相等, 而 AC 、 DC 产生的感应电动势相等



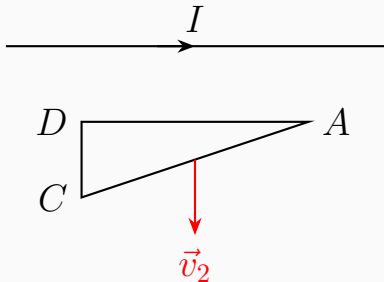
解答

其实在沿 \vec{v}_1 运动时，通过回路的磁通量保持不变，所以整个回路的感应电动势为零（但不同位置电势有区别）



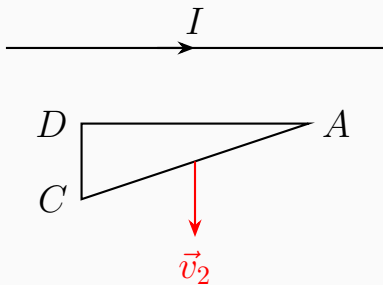
解答

当整个回路整体以 \vec{v}_2 运动时, 注意这里的磁场不是匀强磁场, 所以通过回路的磁通量会发生变化 (越来越小, 因为 B 越来越小), 所以整个回路的感应电动势并不为零



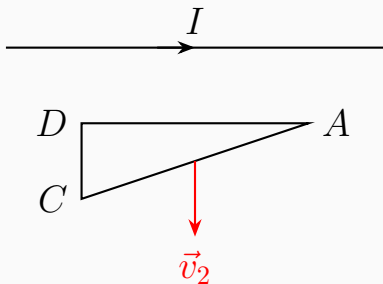
解答

这时, CD 段由于 $d\mathcal{E} = (\vec{v}_2 \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$, 所以 CD 棒将不产生感应电动势【但因最终回路中有感应电流, 所以 C 、 D 两端电势不等】



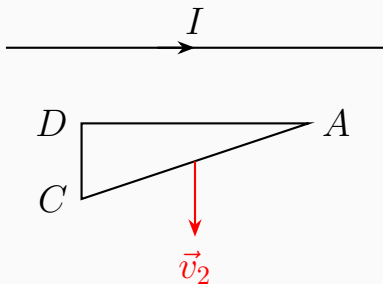
解答

而 AC 与 AD 段由于各小段对应的磁场不一样，所以各小段的感应电动势不相等，最终导致 AC 段与 AD 段的感应电动势不等



解答

由于 AD 段所在位置的磁场较大, 所以感应电动势也较大。所以整个回路中 A 端电势最高, D 端电势最低



解答

由于矢量的混和积公式【P342(A.10)】

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

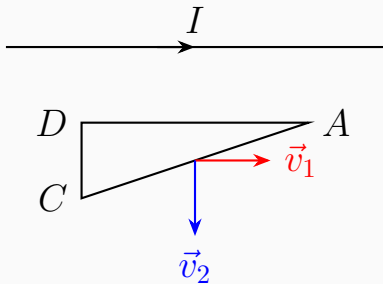
所以有

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (d\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}$$

解答

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (d\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}$$

- 对于 AD 段, $d\vec{l} \times \vec{v}_1 = \vec{0}$
- 对于 CD 段, $d\vec{l} \times \vec{v}_2 = \vec{0}$

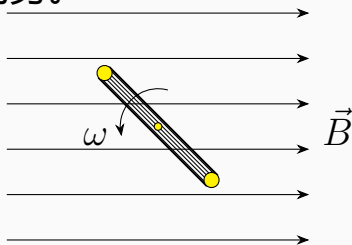


1.2 \vec{B} 不变, S 不变, \vec{e}_n 变化

- 发电机是利用电磁感应现象, 将机械能转变成电能的设备。交流电是指电动势和电流的大小和方向随时间做周期性变化的电动势和电流

交流发电机的原理

如图所示, 均匀磁场的磁感应强度大小为 B , 方向水平向右, 矩形线圈面积为 S 、匝数为 N , 线圈可绕垂直于纸面的固定转轴转动。试求: 当线圈以角速度 ω 匀速转动时, 线圈中的感应电动势。



解答

由法拉第电磁感应定律, 要求感应电动势, 应该先求出任意时刻的磁通量或磁链随时间变化的函数关系。

一般地假定, 在 $t = 0$ 时, 线圈的法线方向与磁场方向的夹角为 θ_0 , 则在任意 t 时刻, 二者的夹角 $\theta = \theta_0 + \omega t$, 因此, t 时刻通过线圈的磁链为

$$\begin{aligned}\Psi &= N\Phi \\ &= NBS \cos \theta \\ &= NBS \cos(\theta_0 + \omega t)\end{aligned}$$

解答

由法拉第电磁感应定律，可得 t 时刻线圈中的感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Psi}{dt} \\ &= NBS\omega \sin(\theta_0 + \omega t)\end{aligned}$$

这是一个大小和方向会随时间发生变化的电动势

解答

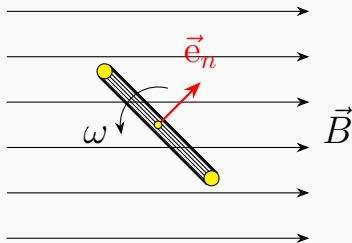
当与线圈相连的闭合回路的电阻为 R 时, 通过回路的感应电流

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBS\omega}{R} \sin(\theta_0 + \omega t)$$

这个感应电流的大小和方向也会随时间发生变化。这种电流称为简谐交变电流, 简称简谐交流电

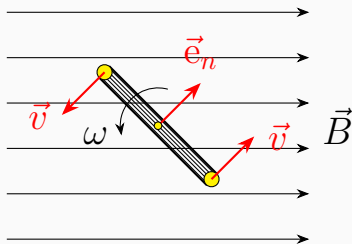
解答

也可以从动生电动势的公式计算线圈中的感应电动势



一般地设矩形线圈中与转轴垂直的边长为 a , 与转轴平行的边长为 b , 则 $S = ab$

解答



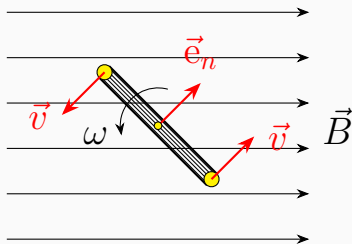
t 时刻, 两平行边上各点的运动速度大小均为 $v = \omega \frac{a}{2}$, 方向一边与 \vec{e}_n 同向, 一边与 \vec{e}_n 反向, 所以两边的速度与磁场的夹角分别为 $\theta = \theta_0 + \omega t$ 和 $\theta = \theta_0 + \omega t + \pi$

解答

可以算得，两边的动生电动势大小相等，均为

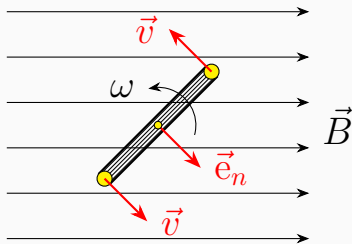
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 &= B \left(\omega \frac{a}{2} \right) |\sin \theta| \times b \\ &= \frac{1}{2} B \omega a b |\sin(\theta_0 + \omega t)| \\ &= \frac{1}{2} B S \omega |\sin(\theta_0 + \omega t)|\end{aligned}$$

解答



当 $\theta = \theta_0 + \omega t$ 在一、二象限时, 由 $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 可以判断, \mathcal{E}_1 、 \mathcal{E}_2 的方向都与线圈的绕行方向相同 (选定线圈平面法向方向 \vec{e}_n 的同时, 规定了线圈绕行方向的正方向)

解答



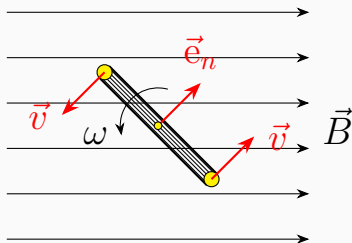
当 $\theta = \theta_0 + \omega t$ 在三、四象限时, 由 $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 可以判断, \mathcal{E}_1 、 \mathcal{E}_2 的方向都与线圈的绕行方向相反

解答

同时考虑 \mathcal{E}_1 、 \mathcal{E}_2 的大小和方向，它们可以写成

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}BS\omega \sin(\theta_0 + \omega t)$$

解答



对于与转轴垂直的两边，虽然各点的速度大小不等，但方向仍然是与 \vec{e}_n 平行，可以算得， $\vec{v} \times \vec{B}$ 在这两条边上处处与 $d\vec{l}$ 垂直，因此这两条边没有动生电动势（没有切割磁感应线）

解答

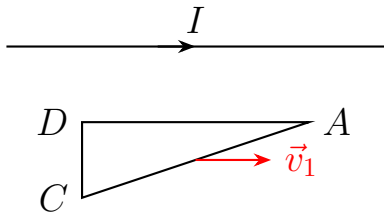
因此整个 N 匝线圈总的感应电动势

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= N(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \\ &= NBS\omega \sin(\theta_0 + \omega t)\end{aligned}$$

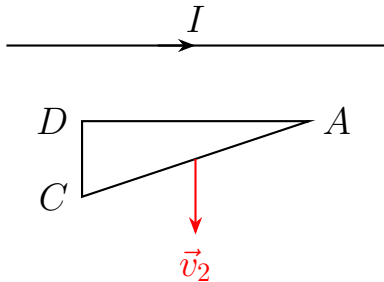
1.3 \vec{B} 不变, S 不变, \vec{e}_n 不变, 导体位置变化

- 这里 \vec{B} 不变是指磁场的大小和方向不随时间发生变化, 但整个磁场不是均匀磁场, 即不同位置磁场的大小和方向可以不一样。而整个导体线框在运动的过程中, 保持线框面积的大小和方向不变, 但不同时刻, 线框处于磁场中的不同位置, 因此线框平面上各点的磁场可能发生变化 (也可能不变), 所以通过线框平面的磁通量可能发生变化 (也可能不变)

- 当三角形线框以平行于电流方向的速度 \vec{v}_1 运动时，虽然线框平面内各点的位置发生变化，但各点的磁场并没有发生变化，因此通过线框平面的磁通量保持不变，没有感应电动势



- 当三角形线框以垂直于电流方向的速度 \vec{v}_2 运动时，线框平面内各点的位置发生变化，同时各点的磁场大小也发生变化，因此通过线框平面的磁通量发生变化，线框中有感应电动势



2 感生电动势

- 感生电动势是导体回路静止不动，而回路所在处的磁场随时间发生变化，引起穿过回路的磁通量发生变化，因而产生的感应电动势。所以，感生电动势可以表示成

$$\mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

注意这里 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 是面元 $d\vec{S}$ 所在处的磁感应强度随时间的变化率

- 随时间变化的磁场可以一般地表示成

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y, z, t)$$

导体不动, $d\vec{S}$ 处的坐标 (x, y, z) 不随时间变化,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

- 研究表明，随时间变化的磁场会在它周围产生一个感生电场，这个感生电场就是产生感生电动势的“非静电场”，用 \vec{E}_i 表示。在这个感生电场的作用下，导体回路中的载流子会发生定向运动形成感应电流。而由电动势的定义，有

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

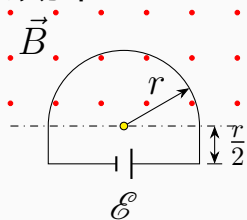
$$\mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

- 曲面 S 是以回路 L 为边界围成的任意形状的曲面，而且曲面的法线方向与回路的绕行方向成右手螺旋关系
- 感生电场的环路积分不等于零，环量不为零的电场称之为涡旋电场
- 变化的磁场可以产生涡旋电场

- 涡旋电场和静电场
 - 相同之处：它们对处于其中的电荷都有力的作用
 - 不同之处
 - 静电场是由电荷激发的，涡旋电场是由变化的磁场所激发的
 - 静电场的电场线是不闭合的，静电场是保守场，沿任意闭合回路的积分（环量）等于零，而涡旋电场的电场线是闭合的，因此涡旋电场不是保守场，沿闭合回路的积分等于回路的电动势，通常不为零

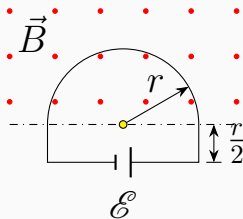
例题

如图所示为一个半径为 $r = 0.2 \text{ m}$ 的半圆和几条直线段组成的导电回路。半圆位于指向页面外部均匀磁场中。



磁场的大小由 $B = 4t^2 + 2t + 3$ 给出。 B 的单位为特斯拉, t 的单位为秒。一电动势 $\mathcal{E} = 2 \text{ V}$ 的理想电池与回路相连, 回路的电阻为 2Ω 。试求 $t = 10 \text{ s}$ 时, 回路中感应电动势的大小及方向, 回路中总电流的大小和方向。

解答



以垂直纸面向外为磁通量的正方向，即以逆时针为回路的绕行方向。任意 t 时刻，通过回路的磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$$

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2$$

解答

所以，由法拉第电磁感应定律，任意 t 时刻回路的感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi}{dt} \\&= -\frac{d(BS)}{dt} \\&= -\frac{dB}{dt}S \\&= -(8t + 2) \times \frac{1}{2}\pi r^2 \\&= -(4t + 1)\pi r^2\end{aligned}$$

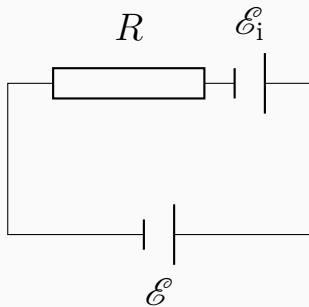
解答

当 $t = 10 \text{ s}$ 时, 回路的感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= -(4 \times 10 + 1)\pi r^2 \\ &= -41 \times \pi \times 0.2^2 \\ &= -1.64\pi \\ &\approx -5.15 \text{ V}\end{aligned}$$

所以, 感应电动势的大小为 5.15 V , 负号表示方向与回路的绕行方向相反, 即为顺时针方向

解答



解答

如果仅仅考虑由感应电动势引起的电流为

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{-5.15}{2.0} = -2.575 \text{ A}$$

负号表示电流方向与回路的绕行方向相反，
即为顺时针方向

解答

如果考虑回路中的总电流

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R} = \frac{2.0 - 5.15}{2.0} = -1.575 \text{ A}$$

负号表示电流方向与回路的绕行方向相反，
即为顺时针方向

- 矢量场论中的高斯定理 P352 【*】
 - 矢量场通过任意闭合曲面 S 的通量等于它所包围的体积 V 内散度的积分

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

- 矢量场论中的斯托克斯定理 P354 【*】
 - 矢量场在任意闭合回路 L 上的环量等于以它为边界的曲面 S 上旋度的积分

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

- 磁矢势 P94 【*】
- 通过曲面 S 的磁通量等于磁矢势 \vec{A} 沿曲面边界线 L 的线积分

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

对比以上斯托克斯定理可得

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 考虑到梯度的旋度恒为零

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \varphi) &= \nabla \times \left(\vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\&= \vec{e}_x \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \vec{e}_y \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] + \vec{e}_z \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \\&= \vec{e}_x \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right] + \vec{e}_y \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right] + \vec{e}_z \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] \\&= \vec{0}\end{aligned}$$

- 显然有

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} + \nabla \varphi) &= \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \varphi) \\&= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

可见, 对于同一个磁场 \vec{B} , 可以有不同的磁矢势的表达式 $\vec{A} + \nabla \varphi$, 其中 φ 是任意的标量函数。

- 用磁矢势表示感生电场【*】
- 随时间变化的磁场可以一般地表示成

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y, z, t)$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- 导体不动, $d\vec{l}$ 处的坐标 (x, y, z) 不随时间变化,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

- 当导体回路静止不动，磁场随时间发生变化时，

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= -\oint_L \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot d\vec{l} = -\oint_L \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \\ \mathcal{E} &= \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

对比可得

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

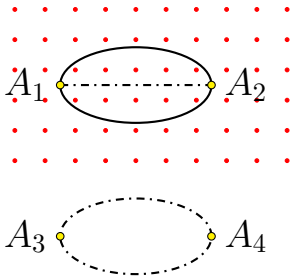
- 理论上，如果磁场的磁矢势已知，则可以求得空间中任意一点的感生电场

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- 麦克斯韦指出，当磁场发生变化时，在整个空间中的任一点，都会产生感生电场
- 不管在空间中是否存在导体，或者导体是否形成闭合回路，感生电场沿任意路径的积分，都将等于该路径中的感生电动势
- 如果存在导体，且形成闭合回路，则在导体回路中会出现感应电流 (感生电流)

- 问题 1：如果在这个空间中放一不导电的绳子围成一个回路，那么在这个回路上是否存在感生电动势吗？
- P134，实验表明，感生电动势完全与导体的种类和性质无关，感生电动势是由变化的磁场本身引起的。

- 问题 2：感生电场沿任意路径的积分，等于该路径中的感生电动势，那能否说，空间中两点之间存在电势差？
- 感生电场不是保守场，沿不同路径积分的结果通常不仅仅决定于始末位置，和积分路径也有关系。因此两点之间不同路径的电动势不一定相等，那么两点之间的电势差如何定义？



- 当空间中同时存在静电场 \vec{E}_s 和感生涡旋电场 \vec{E}_i 时, 根据电场强度的叠加原理, 空间中的总电场 $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$
- 由于静电场是保守场, 即静电场沿任意闭合回路的积分一定为零

$$\oint_L \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$$

- 所以总电场沿任意闭合回路的积分

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \oint_L (\vec{E}_s + \vec{E}_i) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_L \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

- 所以总电场沿任意闭合回路的积分

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \oint_L (\vec{E}_s + \vec{E}_i) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_L \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

上式表明，电场强度 \vec{E} 沿任意闭合回路 L 的环量等于磁感应强度 \vec{B} 随时间的变化率通过以 L 为边界的任意曲面 S 的通量的负值

- 法拉第电磁感应定律和楞次定律分别可以定量和定性地描述所有电磁感应现象，因此，不管是动生电动势还是感生电动势，都自然地要满足法拉第电磁感应定律的数学表达式

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

而它们的方向，也都可以用楞次定律来判断和解释

- 如果导体不构成回路，当导体在磁场中运动时，在导体上仍然有感应电动势（动生电动势）存在，只是这时不能再使用法拉第电磁感应定律来直接表示，除非你人为地补成回路。因此，不闭合的导体上的动生电动势要用下式来计算

$$\mathcal{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 同样地，在感生电动势的计算中，如果导体不构成回路，当磁场发生变化的时候，导体上一样有感应电动势（感生电动势）存在，这时候，理论上仍然可以用下式计算导体上的感生电动势

$$\mathcal{E} = \int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

- 问题：空间各点的 \vec{E}_i 怎么求得？除了上面介绍的通过磁矢势计算感生电场之外，还有没有其他方法？

- 理论上可以证明，根据矢量场对任意封闭曲面的通量及沿任意闭合曲线的环量，加上一定的边界条件，就能把矢量场唯一地确定下来
- 由前面的分析可知，感生电场 \vec{E}_i 满足

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

其中闭合回路 L 是任意选择的，曲面 S 是以 L 为边界的任意曲面，曲面的法向方向与回路的绕行方向成右手螺旋关系

- 而感生电场通过任意封闭曲面的通量，实验上不易测量。为此，麦克斯韦假定，感生电场对任意闭合曲面的通量都为零，由此得到的结论与实验对比发现都是一致的
- 与磁场的高斯定理比较发现，感生电场和磁感应强度的通量满足类似的关系，

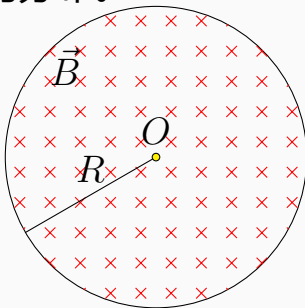
$$\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$$
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

因此表明感生电场的电场线和磁感应线一样是没有起点和终点的闭合曲线

- 在绝大多数情况下，通过以上方法计算感生电场是很困难的，只有少数具有对称性的简单情况才能计算得到。一个常见的例子就是计算载有时变电流的螺线管内的变化磁场所激发的感生电场

例题

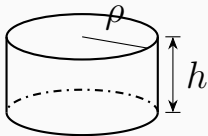
半径为 R 的圆柱形空间 (横截面) 内分布着均匀磁场 (如长直载流螺线管的内部), 磁感应强度的大小 B 随时间的变化率为 $\frac{dB}{dt}$, 试求感生电场的分布。



解答

由于磁场分布具有柱对称性，所以选择柱坐标系进行讨论。以磁场的中心轴为 z 轴，并选 \vec{B} 的方向为 z 轴正方向。以下讨论用 \vec{E} 表示感生电场。

解答



在柱坐标系中，感生电场可以一般地表示成

$$\vec{E} = E_{\rho} \vec{e}_{\rho} + E_{\varphi} \vec{e}_{\varphi} + E_z \vec{e}_z$$

以 z 轴为轴线，取一半径为 ρ 、高为 h 的闭合圆柱面为高斯面。

解答

由于磁场分布具有柱对称性, 它所激发的感生电场也具有柱对称性, 同一圆柱侧面上, 各点感生电场沿柱坐标的三个分量具有相同的值, 因此圆柱的两个底面上对应位置的 E_z 相等 (大小相等, 且同正或同负或同为零), 但 $d\vec{S}$ 的方向相反, 因此两个底面上感应电场的通量之和为零。

解答

而侧面上 E_φ 分量的方向 (\vec{e}_φ)、 E_z 分量的方向 (\vec{e}_z) 都与侧面的方向 ($\vec{e}_n = \vec{e}_\rho$) 垂直, 因此通过整个高斯面的感生电场的通量仅仅是 E_ρ 分量在侧面的通量

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{侧面}} E_\rho dS = E_\rho \cdot (2\pi\rho h)$$

解答

根据麦克斯韦的假定

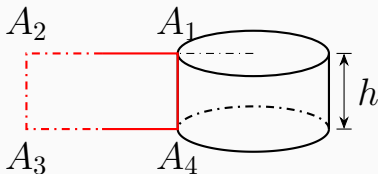
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$E_\rho \cdot (2\pi\rho h) = 0$$

$$E_\rho = 0$$

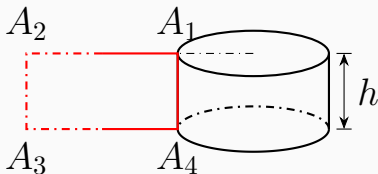
$$\vec{E} = E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z$$

解答



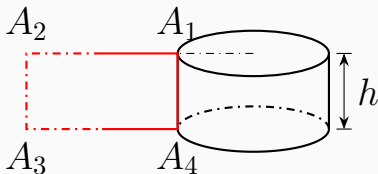
如图选择无限长矩形回路, A_1A_2 、 A_3A_4 沿 \vec{e}_ρ 方向, A_4A_1 、 A_2A_3 与 z 轴平行, A_2A_3 在无穷远处。考虑感生电场在这个回路上的环量。

解答



对于 A_1A_2 和 A_3A_4 , \vec{E} 和 $d\vec{l}$ 垂直, 环量为零; 对于 A_2A_3 , 由于磁场只分布在 $\rho < R$ 的有限区域, 可以认为在 $\rho \rightarrow \infty$ 处感生电场趋于零

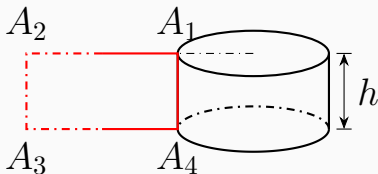
解答



所以整个回路的环量只等于 A_4A_1 上的环量

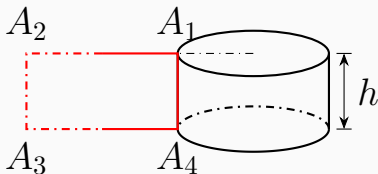
$$\oint_{A_1A_2A_3A_4A_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A_4}^{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_z h$$

解答



而磁场沿 z 轴方向, 因此 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 只有 z 分量, 选择 S 为矩形所在的平面, 则平面法向沿 \vec{e}_φ

解答



所以【在这个面内，磁通量始终等于零，因此感应电动势为零】

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

解答

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_z h = 0$$

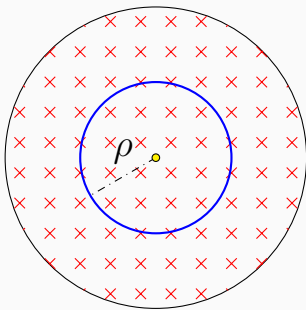
$$E_z = 0$$

$$\vec{E} = E_\varphi \vec{e}_\varphi = E \vec{e}_\varphi$$

以上，我们证明了，无限长圆柱形空间中的均匀磁场随时间变化时所激发的感生电场一定沿 \vec{e}_φ 方向。下面计算不同位置感生电场的大小

解答

在截面内取任意 ρ 为半径的圆为回路, 来计算感生电场。选顺时针为回路绕行方向, 即以磁场的方向为面的法向方向。



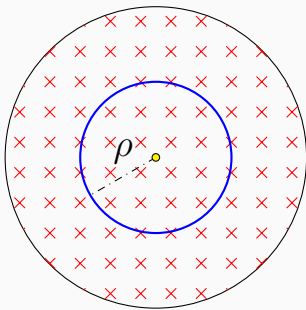
$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_i \cdot (2\pi\rho) &= -\frac{dB}{dt}S \\ E_i &= -\frac{dB}{dt} \frac{S}{2\pi\rho}\end{aligned}$$

解答

对于 $\rho < R$ 的位置,
 $S = \pi\rho^2$, 所以

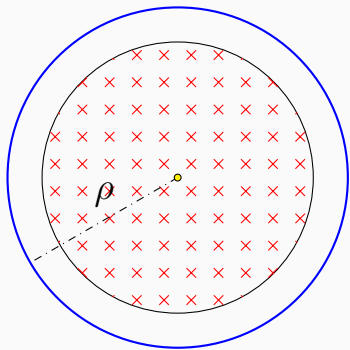
$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{dB}{dt} \frac{S}{2\pi\rho} \\ &= -\frac{dB}{dt} \cdot \frac{\pi\rho^2}{2\pi\rho} \\ &= -\frac{dB}{dt} \cdot \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$



解答

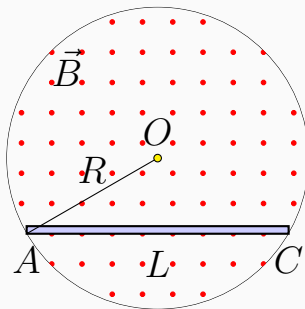
对于 $\rho > R$ 的位置,
 $S = \pi R^2$, 所以

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{dB}{dt} \frac{S}{2\pi\rho} \\ &= -\frac{dB}{dt} \cdot \frac{\pi R^2}{2\pi\rho} \\ &= -\frac{dB}{dt} \cdot \frac{R^2}{2\rho} \end{aligned}$$

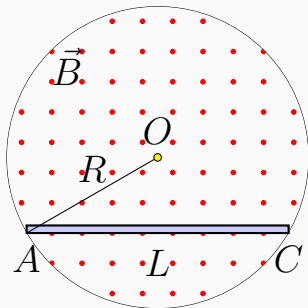


例题

在半径为 R 的圆柱形体积内，充满磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场。有一长为 L 的金属棒 AC 置放在磁场中， \vec{B} 的方向垂直纸面向外，如图所示。



例题



设磁场在减少, $\frac{dB}{dt} = -k$, k 为一常量。求棒中的感生电动势的大小和方向。

解答

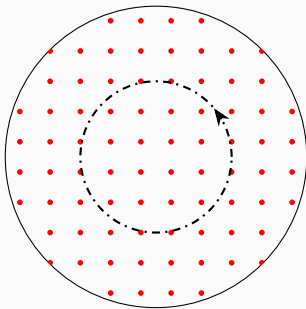
对于不闭合的导体上的感生电动势，要用到公式

$$\mathcal{E} = \int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

所以，这道题目的关键在于确定导体上每一点所在处的感生电场 \vec{E}_i 的大小和方向。对于具有柱对称的变化磁场，感生电场的方向只有沿 \vec{e}_φ 方向的分量 (这个结论可以直接使用)。

解答

对于圆柱体内区域, $\rho < R$, 取与圆柱同轴的圆周作为回路 L , S 就取圆平面, 回路绕行方向与 \vec{B} 成右手螺旋关系 (即逆时针方向), 则 S 的法向方向与 \vec{B} 同向 (即垂直纸面向外)



解答

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

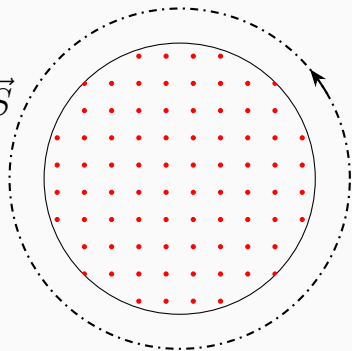
$$E_i \cdot (2\pi\rho) = k\pi\rho^2$$

$$E_i = \frac{k\rho}{2}$$

解答

对于圆柱体外区域,
 $\rho > R$,

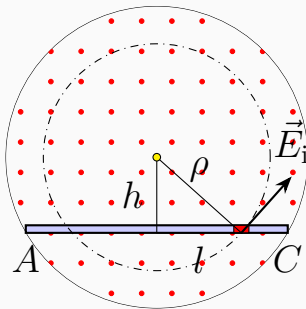
$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$E_i \cdot (2\pi\rho) = k\pi R^2$$
$$E_i = \frac{kR^2}{2\rho}$$



所以, 圆柱体外 (无
磁场分布区域), 也
有感生电场存在!

解答

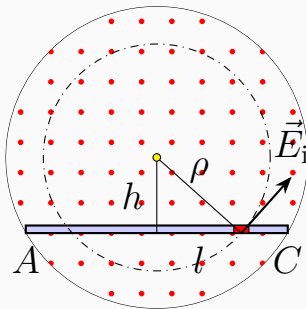
如图, 设金属棒到圆心的垂直距离为 h , 在金属棒上任取一小段 dl , 它到圆心的距离为 ρ , 它到金属棒中点的距离为 l , 该处感生电场的方向与金属棒的夹角为 θ



解答

则该段金属棒上的感生电动势为

$$\begin{aligned}d\mathcal{E} &= \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\&= E_i \cos \theta dl \\&= \frac{k\rho}{2} \cdot \frac{h}{\rho} \cdot dl \\&= \frac{kh}{2} dl\end{aligned}$$

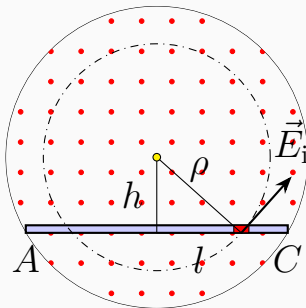


解答

所以整根金属棒上的感生电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{kh}{2}L \\ &= \frac{kL}{2}\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}\end{aligned}$$

方向由 A 指向 C

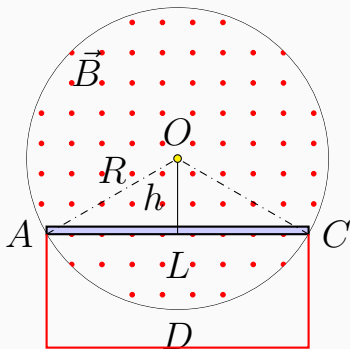


解答

对于不闭合导线上的感生电动势，如果想利用法拉第电磁感应定律通过磁通量求导计算，则需人为补成闭合回路。

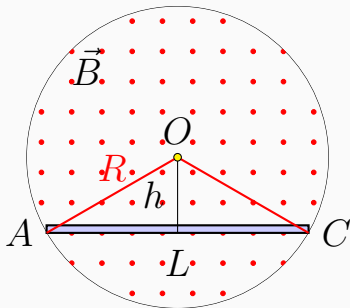
解答

第一个想到的是选择如图所示的回路, 则回路上的感生电动势也就是整根金属棒上的感生电动势【**这个结论是错误的!**】补充的回路的其他部分上面的感应电动势不为零! 圆柱体之外空间也有涡旋的感生电场!



解答

利用前面分析得到的柱对称时变磁场所激发的感生电场只有 \vec{e}_φ 分量的特点，因此沿任意半径，感生电动势恒为零，因此选择 $\triangle AOC$ 作为回路。在 $\triangle AOC$ 中，两个半径 OA 、 OC 上的感生电动势都为零，



因此整个回路的感生电动势就是整根金属棒上的感生电动势

解答

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{d}{dt}(BS) = -\frac{dB}{dt}S = kS\end{aligned}$$

这里的面积 S 就是 $\triangle OAC$ 的面积

$$S = S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}Lh$$

解答

所以，感生电动势为

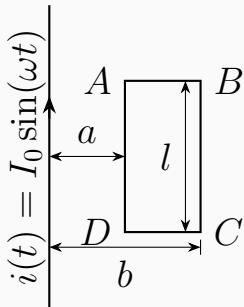
$$\mathcal{E} = kS = \frac{1}{2}kLh = \frac{1}{2}kL\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

这里以垂直纸面向外为磁通量的正方向，所以回路的绕向为逆时针，因此金属棒上电动势的方向为从 A 端指向 C 端

- 变化的磁场在空间中激发涡旋状的感生电场，带电粒子处于其中时，将受到电场力的作用。电子感应加速器就是利用这个原理对电子进行加速。

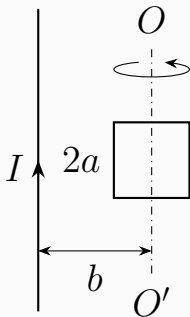
作业

- P161[3-3] 如本题图所示, 一很长的直导线有交变电流 $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$, 它旁边有一长方形线圈 $ABCD$, 长为 l , 宽为 $(b - a)$, 线圈和导线在同一平面内。求: (1) 穿过回路 $ABCD$ 的磁通量 Φ ; (2) 回路 $ABCD$ 中的感应电动势 \mathcal{E} 。



作业

- P161[3-5] 如本题图，电流为 I 的长直导线附近有正方形线圈绕中心轴 OO' 以匀角速度 ω 旋转，求线圈中的感应电动势。已知正方形边长为 $2a$ ， OO' 轴与长直导线平行，相距为 b 。



三、互感和自感

1 互感系数

- 两个邻近的静止线圈 A_1 和 A_2 , 匝数分别为 N_1 和 N_2
- 当其中一个线圈 A_1 通有电流时, 它将激发磁场, 线圈 A_2 处于该磁场中, 则有磁通量 (磁链) 通过 A_2
- 当通过 A_1 的电流发生变化时, 磁场也相应发生变化, 通过 A_2 的磁通量 (磁链) 也会发生变化, 因此 A_2 中将有感应电动势 (感生电动势) 产生, 这种现象称为互感现象
- 互感现象中产生的感应电动势 (感生电动势) 称为互感电动势
- 如果有随时间变化的电流通过 A_2 , 则在 A_1 中也将有感应电动势 (感生电动势) 产生

- 当其他所有条件 (两个线圈的形状、匝数和相对位置等) 保持不变, 通过 A_1 的电流 i_1 所激发的磁场 \vec{B}_1 的大小正比于 i_1 , 因此通过 A_2 的磁链 Ψ_{12} 也正比于 i_1 , 记为

$$\Psi_{12} = M_{12}i_1$$

所以

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}$$

- 通过 A_2 的电流 i_2 所激发的磁场 \vec{B}_2 的大小正比于 i_2 , 因此通过 A_1 的磁链 Ψ_{21} 也正比于 i_2 , 记为

$$\Psi_{21} = M_{21}i_2$$

所以

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2}$$

- 比例系数 $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}$ 和 $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2}$ 称为互感系数, 简称互感, 单位为亨利, 简称亨, 符号 H
- 互感的大小取决于 A_1 、 A_2 的形状、匝数、相对位置及周边的介质分布等, 但与 A_1 、 A_2 中通过的电流无关
- 当 A_1 、 A_2 的形状、匝数、相对位置及周边的介质分布等保持不变时, M_{12} 、 M_{21} 是个不变的常数

- 如果通过 A_1 的电流 i_1 发生变化, 则在 A_2 中产生的感应电动势 (感生电动势) 为

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{d(M_{12}i_1)}{dt} = -M_{12}\frac{di_1}{dt}$$

所以

$$M_{12} = -\frac{\mathcal{E}_2}{\frac{di_1}{dt}}$$

- 如果通过 A_2 的电流 i_2 发生变化, 则在 A_1 中产生的感应电动势 (感生电动势) 为

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d(M_{21}i_2)}{dt} = -M_{21}\frac{di_2}{dt}$$

所以

$$M_{21} = -\frac{\mathcal{E}_1}{\frac{di_2}{dt}}$$

- 当电流随时间变化的规律不变时，如果互感系数 $M_{12} = -\frac{\mathcal{E}_2}{\frac{di_1}{dt}}$ 和 $M_{21} = -\frac{\mathcal{E}_1}{\frac{di_2}{dt}}$ 越大，感应电动势也越大，说明互感现象越强烈
- 计算互感的一般方法是从它的定义出发，假定其中一个回路通有电流 i ，计算出在另一个回路中的磁通量 (或磁链) Ψ 与 i 之间的关系表达式，再用 $M = \frac{\Psi}{i}$ 求出互感
- 可以证明，互感系数 M_{12} 和 M_{21} 相等，即

$$M_{12} = M_{21} = M$$

例题

有两个长度均为 l 、半径分别为 r_1 和 r_2 (且 $r_1 < r_2$)、匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管，试计算它们的互感。

解答

- 假定在半径为 r_1 的螺线管回路中通有电流 i_1 ，则由长直密绕螺线管中磁场的特点【管内是匀强磁场，管外（管壁附近）磁场近似为零】，根据安培环路定理，求得磁场的分布

解答

- $r < r_1$ 区域

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$
$$B_1 \times L = \mu_0 (n_1 L) i_1$$
$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1$$

其中 $n_1 = \frac{N_1}{l}$ 为半径为 r_1 的螺线管上单位长度的匝数

- $r_1 < r < r_2$ 区域, 磁场近似为零

解答

- 因此, 通过半径为 r_2 的螺线管回路一个线圈的磁通量为

$$\Phi_{12} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = B_1(\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 i_1 (\pi r_1^2)$$

- 所以, 通过半径为 r_2 的螺线管回路的磁链为

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) i_1$$

其中 $n_2 = \frac{N_2}{l}$ 为半径为 r_2 的螺线管上单位长度的匝数

解答

- 所以, 半径为 r_1 的螺线管对半径为 r_2 的螺线管的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2)$$

解答

- 同样地，假定在半径为 r_2 的螺线管回路中通有电流 i_2 ，则由长直密绕螺线管中磁场的特点【管内是匀强磁场，管外（管壁附近）磁场近似为零】，根据安培环路定理，求得磁场的分布

解答

- $r < r_2$ 区域

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$
$$B_2 \times L = \mu_0 (n_2 L) i_2$$
$$B_2 = \mu_0 n_2 i_2$$

其中 $n_2 = \frac{N_2}{l}$ 为半径为 r_2 的螺线管上单位长度的匝数

- $r > r_2$ 附近区域，磁场近似为零

解答

- 因此, 通过半径为 r_1 的螺线管回路一个线圈的磁通量为

$$\Phi_{21} = \int_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = B_2(\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 i_2 (\pi r_1^2)$$

- 所以, 通过半径为 r_1 的螺线管回路的磁链为

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) i_2$$

其中 $n_1 = \frac{N_1}{l}$ 为半径为 r_1 的螺线管上单位长度的匝数

解答

- 所以, 半径为 r_2 的螺线管对半径为 r_1 的螺线管的互感为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2)$$

- 由此可见

$$M_{12} = M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2)$$

解答

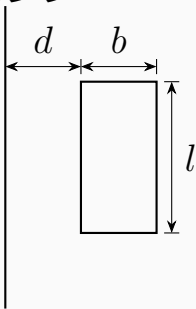
- 这个结论可以推广到更一般的情况：当 A_1 、 A_2 的形状、匝数、相对位置及周边的介质分布等保持不变时，

$$M_{12} = M_{21} = M$$

M 称为 A_1 、 A_2 间的互感

例题

有一无限长直导线与一宽长分别为 b 和 l 的矩形线圈处在同一平面内，直导线与矩形线圈的一侧平行，且相距为 d ，求它们的互感。若将长直导线放置在矩形线圈的对称线上，它们的互感又为多少？



解答

- 这个例题中只有一个是回路，另一个不是回路，但仍然通过磁通量与电流的关系计算出它们之间的互感

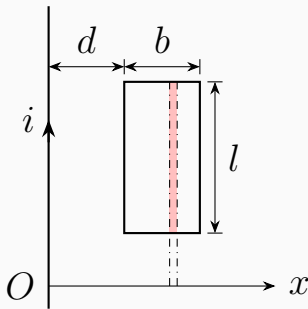
解答

- 假定通过长直导线的电流为 i ，则它所激发的磁场很容易由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \times (2\pi x) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$



解答

- 因此，通过矩形线圈的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\&= \int_d^{d+b} Bl \, dx \\&= \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l \, dx \\&= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}\end{aligned}$$

解答

- 因此，它们之间的互感

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$$

解答

- 若将长直导线放置在矩形线圈的对称线上, 则由于对称性, 通过线圈左半部分的磁通量和通过右半部分的磁通量大小相同, 方向相反, 所以通过整个线圈的磁通量为零, 因此, 互感也为零



2 自感系数

- 对于单个线圈，如果通过其中的电流发生变化，那么它所激发的磁场会发生变化，因此，通过它自身回路的磁通量 (磁链) 也会发生变化，所以，在它自身回路中也会产生感应电动势 (感生电动势)，这种现象称为自感现象
- 在自感现象中产生的感应电动势 (感生电动势) 称为自感电动势

- 与互感的定义类似，由于电流激发的磁场与电流本身成正比，所以，通过回路本身的磁通量 (磁链) 与电流成正比，即

$$\Psi = Li$$

其中比例系数 $L = \frac{\Psi}{i}$ 称为回路的自感系数，简称自感，它与回路中通过的电流无关 (这里不考虑磁介质的情况)，而只由回路本身的形状、匝数等决定

- 根据法拉第电磁感应定律，自感电动势可以表示成

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

所以自感又可以表示成 $L = -\frac{\mathcal{E}}{\frac{di}{dt}}$

- 自感的计算，一般也是先假定回路中通过的电流 i ，再算出通过回路的磁通量或磁链 Ψ ，再用 $L = \frac{\Psi}{i}$ 求出自感

例题

有一长度为 l 、半径为 R 、匝数为 N 的长直密绕螺线管，试计算它的自感。

解答

- 假定螺线管回路中通有电流 i ，则由长直密绕螺线管中磁场的特点【管内是匀强磁场，管外（管壁附近）磁场近似为零】，根据安培环路定理，求得磁场的分布

解答

- $r < R$ 区域

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{int}}$$

$$B \times L = \mu_0 (nL)i$$

$$B = \mu_0 ni$$

其中 $n = \frac{N}{l}$ 为螺线管上单位长度的匝数

- $r > R$ 区域, 磁场近似为零

解答

- 因此, 通过螺线管回路一个线圈的磁通量为

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \times (\pi R^2) = \mu_0 n i (\pi R^2)$$

- 所以, 通过螺线管回路的磁链为

$$\Psi = N\Phi = (nl)\mu_0 n i (\pi R^2) = \mu_0 n^2 l (\pi R^2) i$$

解答

- 所以，螺线管的自感为

$$L = \frac{\Psi}{i} = \mu_0 n^2 l (\pi R^2) = \mu_0 n^2 V$$

其中 $V = l(\pi R^2)$ 是螺线管的体积

例题

计算一个螺绕环的自感。设环的截面积为 S ，轴线半径为 R ，单位长度上的匝数为 n 。

解答

- 螺绕环的磁场只分布在螺绕环上, 且管内各点的半径可以看作近似相等, 因此管内各点的磁感应强度大小相等, 方向都沿圆周的切线方向

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \times (2\pi R) = \mu_0 (n \times 2\pi R) i$$

$$B = \mu_0 n i$$

解答

- 所以，通过一个线圈的磁通量为

$$\Phi = BS = \mu_0 n S i$$

- 因此，通过整个螺绕环的磁链为

$$\begin{aligned}\Psi &= N\Phi \\ &= (n \times 2\pi R)(\mu_0 n S i) \\ &= \mu_0 n^2 (2\pi R S) i\end{aligned}$$

解答

- 因此，它的自感为

$$L = \frac{\Psi}{i} = \mu_0 n^2 (2\pi RS) = \mu_0 n^2 V$$

其中 $V = 2\pi RS$ 是螺绕环的体积

例题

一根电缆由同轴的两个薄壁金属管构成，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$)。电流由内管流出，由外管流回。试求这种电缆单位长度的自感。

解答

- 由于电流分布的轴对称性, 可由安培环路定理求出两管壁间的磁场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

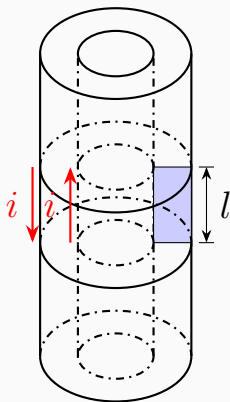
$$B \times (2\pi r) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

解答

- 所以，通过图中阴影部分的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} l dr \\ &= \frac{\mu_0 l i}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}\end{aligned}$$



解答

- 所以, l 长电缆的自感为

$$L_l = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- 因此, 单位长度电缆的自感为 (或者直接让上式中的 $l = 1$)

$$L_1 = \frac{L_l}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- 如果两个线圈中的任意一个通有电流时，所激发的磁场在两个线圈的每一匝的磁通量都相等，这种情形称为无漏磁
- 比如两个线圈密排并缠在一起

- 一般地假定两个线圈的匝数分别为 N_1 和 N_2 , 当第一个线圈通过电流 i_1 时, 假定通过每一个线圈的磁通量为 Φ_1 , 则通过第二个线圈的磁链为

$$\Psi_{12} = M_{12}i_1 = N_2\Phi_1$$

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_1}{i_1}$$

通过第一个线圈的磁链为

$$\Psi_1 = L_1i_1 = N_1\Phi_1$$

$$L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{i_1}$$

- 当第二个线圈通过电流 i_2 时, 假定通过每一个线圈的磁通量为 Φ_2 , 则通过第一个线圈的磁链为

$$\Psi_{21} = M_{21}i_2 = N_1\Phi_2$$

$$M_{21} = \frac{N_1\Phi_2}{i_2}$$

通过第二个线圈的磁链为

$$\Psi_2 = L_2i_2 = N_2\Phi_2$$

$$L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{i_2}$$

- 由于 $M_{12} = M_{21} = M$, 所以

$$\begin{aligned} M^2 &= M_{12}M_{21} \\ &= \frac{N_2\Phi_1}{i_1} \times \frac{N_1\Phi_2}{i_2} \\ &= \frac{N_1\Phi_1}{i_1} \times \frac{N_2\Phi_2}{i_2} \\ &= L_1L_2 \\ M &= \sqrt{L_1L_2} \end{aligned}$$

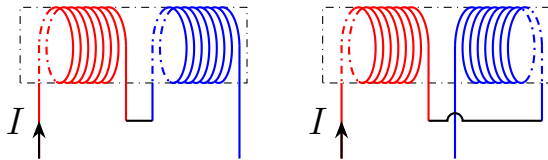
3 串联线圈的自感

- 一般地假定, 两个线圈的自感分别为 L_1 和 L_2 , 当把它们串联起来时, 可以看成是一个线圈, 因此串联线圈有它自己的自感
- 当两个线圈不是相距很远时, 如果线圈中通过电流, 不仅会在每个线圈本身产生磁通量, 还会在对方线圈也产生磁通量, 如果通过的电流发生变化时, 不仅每个线圈中有自感电动势, 两个线圈之间还有互感电动势

- 因此，串联线圈的总的自感，不再仅仅是两个线圈自感之和，还与两个线圈之间的互感有关，而互感不仅与两个线圈的形状和尺寸有关，还和两个线圈的位置有关，其实还与两个线圈串联时的联接方式有关
- 因此，这里讨论两个线圈本身的形状和尺寸固定，而且两个线圈的相对位置也固定（因此两个线圈之间的互感 M 也是固定的）时，不同的串联方式对总的自感的影响

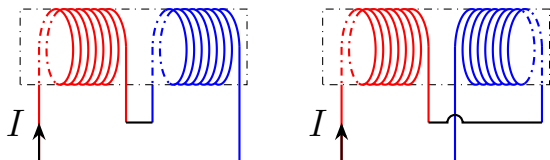
3.1 线圈顺接串联

- 如图所示的联接方式称为顺接串联



- 一般地假定，通过线圈的电流为 I ，则显然通过线圈 1 的磁链 $\Psi_1 = L_1 I$ ，通过线圈 2 的磁链 $\Psi_2 = L_2 I$ ，同时，线圈 1 中的电流激发的磁场在线圈 2 的磁链 $\Psi_{12} = M I$ ，线圈 2 中的电流激发的磁场在线圈 1 的磁链 $\Psi_{21} = M I$

- 一般地规定，与电流绕向成右手螺旋关系的磁通量为正，则线圈顺接串联时，以上通过线圈 1 的两个磁链 Ψ_1 和 Ψ_{21} 方向相同，通过线圈 2 的两个磁链 Ψ_2 和 Ψ_{12} 方向也相同，如图所示通过电流时，四个磁链都是从左向右



- 因此我们说通过整个串联线圈的总磁链

$$\begin{aligned}\Psi &= (\Psi_1 + \Psi_{21}) + (\Psi_2 + \Psi_{12}) \\ &= (L_1 I + M I) + (L_2 I + M I) \\ &= (L_1 + L_2 + 2M)I\end{aligned}$$

因此整个串联线圈的总自感

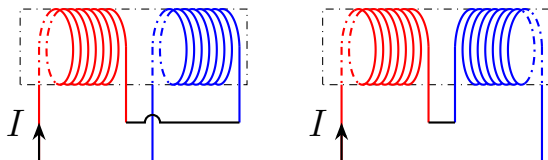
$$L = \frac{\Psi}{I} = L_1 + L_2 + 2M$$

- 可以验证，当电流随时间发生变化时，产生的自感电动势和互感电动势的方向也是相同的

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21} \\&= -\frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{d\Psi_2}{dt} - \frac{d\Psi_{12}}{dt} - \frac{d\Psi_{21}}{dt} \\&= -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} \\&= -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} \\L &= -\frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}} = L_1 + L_2 + 2M\end{aligned}$$

3.2 线圈反接 (逆接) 串联

- 如图所示的联接方式称为反接串联，也称为逆接串联



- 如果线圈中通过如图所示的电流时，对于左边线圈，磁通量向右为正，对于右边线圈，磁通量向左为正，因此两个线圈通过自身的磁链 $\Psi_1 = L_1 I$ 和 $\Psi_2 = L_2 I$ 仍然是正的，但通过对方的磁链均为负的， $\Psi_{12} = \Psi_{21} = -MI$

- 所以通过整个线圈总的磁链

$$\begin{aligned}\Psi &= (\Psi_1 + \Psi_{21}) + (\Psi_2 + \Psi_{12}) \\ &= (L_1 I - MI) + (L_2 I - MI) \\ &= (L_1 + L_2 - 2M)I\end{aligned}$$

因此整个串联线圈的总自感

$$L = \frac{\Psi}{I} = L_1 + L_2 - 2M$$

- 同样可以验证，当电流随时间发生变化时，产生的自感电动势和互感电动势的方向也是相反的。

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21} \\&= -\frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{d\Psi_2}{dt} - \frac{d\Psi_{12}}{dt} - \frac{d\Psi_{21}}{dt} \\&= -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} \\&= -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt} \\L &= -\frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}} = L_1 + L_2 - 2M\end{aligned}$$

4 自感磁能和互感磁能

- 当电容为 C 的电容器, 极板带电 $\pm Q$, 板间电压 U 时, 电容器储存的电能

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

这个能量是电源在对电容器充电的过程中, 把载流子从一个极板移动到另一个极板时, 电源所做的功

- 假设充电过程中的任意时刻，极板带电量为 $\pm q$ ，板间电压 u ，在接下来的一个元过程中，电源把 dq 从一个极板移动到另一个极板，做功 (dq 电势能的变化就是由于电源对它所做的功)

$$dW = (dq)u = \frac{q}{C} dq$$

- 所以在极板带电量从 0 充电到 Q 时，电源做的总功

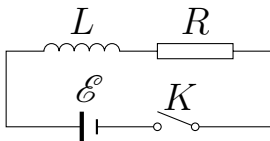
$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

这个功就转化为电容器储存的电

- 类似地，当线圈中通有一定的电流时，线圈也会储存一定的磁能。磁能存在于磁场中

4.1 自感磁能

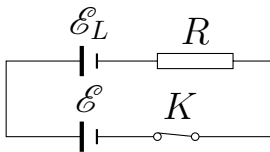
- 开关闭合前，回路不闭合，没有电流通过线圈；开关闭合后，回路闭合，有电流 (顺时针方向) 通过线圈，由于自感现象，线圈中产生自感电动势，根据楞次定律，自感电动势的方向要抵抗电流的增大 (逆时针方向)，因此回路中的电流在一段时间内是随时间变化的，之后才达到稳定值

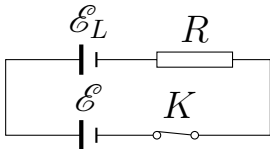


- 假定任意 t 时刻, 电流为 i , 则自感电动势 (同时包含了大小和方向)

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

在这个过程中电流增大, $\frac{di}{dt} > 0$, 所以负号表示逆时针方向, 大小即为 $L \frac{di}{dt}$





$$i = \frac{\mathcal{E} - L \frac{di}{dt}}{R}$$

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + iR$$

所以，在 t 时刻电源电动势的功率

$$\mathcal{E}i = Li \frac{di}{dt} + i^2 R$$

- 在 $t \rightarrow t + dt$ 时间段之间电源电动势所做的元功

$$\mathcal{E} i dt = Li \frac{di}{dt} dt + i^2 R dt = Li di + i^2 R dt$$

所以, 在 $0 \rightarrow t$ 时间段内电源电动势所做的总功

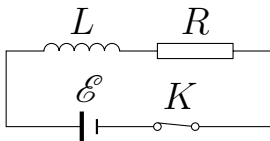
$$\int_0^t \mathcal{E} i dt = \int_0^I Li di + \int_0^t i^2 R dt$$

上式左边表示电源电动势所做的总功, 右边第二项表示电阻 R 上所产生的焦耳热, 右边第一项则表示电源电动势反抗自感电动势所做的功, 这部分功转换成自感线圈的磁能

- 因此, 自感为 L 的线圈中通过的电流为 I 时所储存的磁能 (自感磁能) 为

$$W_L = \int_0^I Li \, di = \frac{1}{2} LI^2$$

- P157, 当切断电源时电流由稳定值 I 减少到 0, 线圈中产生与电流方向相同的自感电动势。问题: 如果切断电源时回路就断开, 还会有电流吗?



4.2 互感磁能

- 设两个线圈中的互感为 $M_{12} = M_{21} = M$, 任意 t 时刻, 通过线圈 1 的电流为 i_1 , 通过线圈 2 的电流为 i_2 , 所以线圈 1 的互感电动势

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

线圈 2 的互感电动势

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

- 电源克服两个互感电动势分别做的功

$$\begin{aligned}W_1 &= - \int_0^t \mathcal{E}_1 i_1 dt = \int_0^t M \frac{di_2}{dt} i_1 dt \\&= \int_0^{i_2} M i_1 di_2 \\W_2 &= - \int_0^t \mathcal{E}_2 i_2 dt = \int_0^t M \frac{di_1}{dt} i_2 dt \\&= \int_0^{i_1} M i_2 di_1\end{aligned}$$

- 总功

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= \int_0^t M \frac{di_2}{dt} i_1 dt + \int_0^t M \frac{di_1}{dt} i_2 dt \\ &= \int_0^t M \left(\frac{di_2}{dt} i_1 + \frac{di_1}{dt} i_2 \right) dt \\ &= \int_0^t M \left[\frac{d(i_1 i_2)}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^{I_1 I_2} M d(i_1 i_2) \\ &= M I_1 I_2 \end{aligned}$$

- 电源克服互感电动势做功的过程就是把电源的能量转化成互感磁能储存在线圈中，所以互感为 M 的两个线圈中通过的电流分别为 I_1 和 I_2 时，互感磁能为

$$W_{12} = MI_1I_2$$

- P157, 自感磁能不可能为负，互感磁能可能为负。参照前面串联线圈的顺接和反接，规定，如果通过线圈的磁通的方向与线圈中的电流方向成右手螺旋关系则为正，否则为负，如果根据

$$\Psi = MI$$

$$M = \frac{\Psi}{I}$$

如此可以定义互感的正负

- 所以自感分别为 L_1 和 L_2 , 互感 $M_{12} = M_{21} = M$ 的两个线圈, 当其中分别通过电流 I_1 和 I_2 时, 线圈中所储存的总的磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 \\ &= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}M_{21}I_2I_1 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^2 M_{ij} I_i I_j \end{aligned}$$

- 可以推广到任意 n 个线圈的情况

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n M_{ij} I_i I_j$$

作业

- P163[3-25] 一螺绕环横截面的半径为 a , 中心环线的半径为 R , $R \gg a$, 其上由表面绝缘的导线均匀地密绕两个线圈, 一个 N_1 匝, 一个 N_2 匝, 求两线圈的互感 M 。

作业

- P163[3-26] 一圆形线圈由 50 匝表面绝缘的细导线绕成，圆面积为 $S = 4 \text{ cm}^2$ 。放在另一个半径 $R = 20 \text{ cm}$ 的大圆形线圈中心，两者同轴，如本题图所示，大圆形线圈由 100 匝表面绝缘的导线绕成。(1) 求这两线圈的互感 M ；(2) 当大圆形导线中的电流每秒减少 50 A 时，求小线圈中的感应电动势 \mathcal{E} 。

