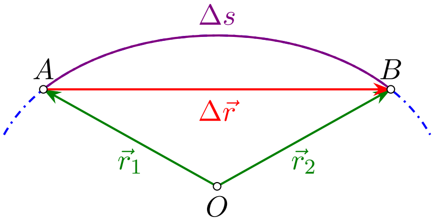
§2.2 速度和加速度

一、平均速度和平均速率

质点沿某轨道运动，t_1 时刻质点出现在位矢为 $\vec{r}_1$ 的 A 处，t_2 时刻质点出现在位矢为 $\vec{r}_2$ 的 B 处，则质点在 $t_1 \to t_2$ 时间内的位移 (矢量) 为 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$，质点在 $t_1 \to t_2$ 时间内的路程为 Δs



质点在 $t_1 \to t_2$ 时间内的平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

质点在 $t_1 \to t_2$ 时间内的平均速率

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

由于一般情况下位移的大小不等于路程

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$$
$$\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$|\bar{\vec{v}}| \neq \bar{v}$$

因此，一般情况下平均速度的大小不等于平均速率

二、(瞬时) 速度和 (瞬时) 速率

对于 $t \to t+\mathrm{d}t$ 之间的元过程，质点的元位移为 $\mathrm{d}\vec{r}$，元路程为 $\mathrm{d}s$，因此质点的 (瞬时) 速度

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{v}}$$

质点的 (瞬时) 速率

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}$$

由于元位移的大小等于元路程

$$|\,\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$$

$$\frac{|\,\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$|\vec{v}| = v$$

因此，(瞬时) 速度的大小等于 (瞬时) 速率

- 任意元过程的运动均可以视为匀速直线运动
- 匀速直线运动的平均速度等于过程中任意时刻的瞬时速度
- 在不引起混淆的情况下，瞬时速度简称为速度，瞬时速率简称为速率
- 直角坐标系中

$$\vec{r} = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (\mathrm{d}y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (\mathrm{d}z)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{v} = v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + v_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

三、平均加速度和 (瞬时) 加速度

设 t_1 时刻质点的 (瞬时) 速度为 $\vec{v}_1$，t_2 时刻质点的 (瞬时) 速度为 $\vec{v}_2$，则在 $t_1 \to t_2$ 时间内质点的平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

平均加速度在 $\Delta t \to 0$ 时的极限称为 (瞬时) 加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

- 任意元过程的运动均可以视为匀变速运动
- 匀变速运动的平均加速度等于过程中任意时刻的瞬时加速度
- 在不引起混淆的情况下，瞬时加速度简称为加速度

直角坐标系中

$$\vec{v} = v_x \, \vec{\mathrm{e}}_x + v_y \, \vec{\mathrm{e}}_y + v_z \, \vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \, \vec{\mathrm{e}}_x + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \, \vec{\mathrm{e}}_y + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \, \vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{a} = a_x \, \vec{\mathrm{e}}_x + a_y \, \vec{\mathrm{e}}_y + a_z \, \vec{\mathrm{e}}_z$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

习题 2.2.6

(1)$\vec{r}=R\cos t\,\vec{\mathrm{e}}_x+R\sin t\,\vec{\mathrm{e}}_y+2t\,\vec{\mathrm{e}}_z$(单位：m, s)，$R$ 为正常数。求 $t=0,\frac{\pi}{2}$ s 时的速度和加速度。(2)$\vec{r}=3t\,\vec{\mathrm{e}}_x-4.5t^2\,\vec{\mathrm{e}}_y+6t^3\,\vec{\mathrm{e}}_z$。求 $t=0,1$ s 时的速度和加速度。

解答

(1)

$$\vec{r}=R\cos t\,\vec{\mathrm{e}}_x+R\sin t\,\vec{\mathrm{e}}_y+2t\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-R\sin t\,\vec{\mathrm{e}}_x+R\cos t\,\vec{\mathrm{e}}_y+2\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-R\cos t\,\vec{\mathrm{e}}_x-R\sin t\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{v}(t=0)=R\,\vec{\mathrm{e}}_y+2\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{v}(t=\frac{\pi}{2})=-R\,\vec{\mathrm{e}}_x+2\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{a}(t=0)=-R\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$\vec{a}(t=\frac{\pi}{2})=-R\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

解答

(2)

$$\vec{r} = 3t\,\vec{e}_x - 4.5t^2\,\vec{e}_y + 6t^3\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 3\,\vec{e}_x - 9t\,\vec{e}_y + 18t^2\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -9\,\vec{e}_y + 36t\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = 3\,\vec{e}_x, \qquad v_{0x} = 3, v_{0y} = 0, v_{0z} = 0$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t=1) = 3\,\vec{e}_x - 9\,\vec{e}_y + 18\,\vec{e}_z, \qquad v_{1x} = 3, v_{1y} = -9, v_{1z} = 18$$

$$\vec{a}_0 = \vec{a}(t=0) = -9\,\vec{e}_y, \qquad a_{0x} = 0, a_{0y} = -9, a_{0z} = 0$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}(t=1) = -9\,\vec{e}_y + 36\,\vec{e}_z, \qquad a_{1x} = 0, a_{1y} = -9, a_{1z} = 36$$