§3.8 动量守恒定律

一、质点系动量守恒定律

- 质点系动量定理

$$\mathrm{d}\vec{I} = \mathrm{d}\vec{p}$$
$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

某一时间段内质点系所受到的合冲量等于质点系动量的改变量

- 动量守恒，是指动量是个不变量，因此

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{0}$$
$$\Delta\vec{p} = \vec{0}$$

任意时间段内质点系动量的改变量为零，因此要求任意时间段内质点系受到的合冲量为零

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{0}$$
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{0}$$

- 若某一时间段内，质点系所受外力的矢量和始终保持为零，

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} = \vec{0}$$

则在该时间段内，质点系的动量 $\vec{p}$ 守恒。

二、动量沿某一坐标轴的投影守恒

若某一时间段内，质点系所受外力的矢量和不为零，

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} \neq \vec{0}$$

但其沿某一坐标轴的投影始终保持为零，

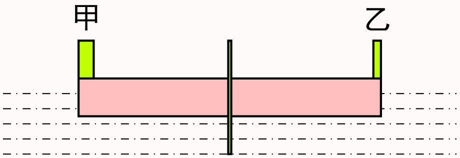
$$F_x = \sum_{i=1}^{N} F_{i外x} \equiv 0$$

则在该时间段内，质点系的动量不守恒，但动量沿该坐标轴的投影 p_x 守恒。

三、例题

例题 3-16

一质量为 M，长为 L 的小船静浮在水面上，船的两头各站甲、乙两人，甲的质量为 m_1，乙的质量为 $m_2(m_1 > m_2)$。如图所示，两人同时以相同的速率 v_0 向位于船正中但固定在水中的木桩走去。忽略船与水之间的阻力，问谁先走到木桩处？



解答

以木桩所在位置为坐标原点，水平向右为 x 轴正方向。以船和两个人为研究对象，水平方向系统不受力，系统动量守恒。假定船的速度为 v，则甲的速度 $v_1 = v + v_0$，乙的速度 $v_2 = v - v_0$。(这里 v_0 是甲和乙相对船的速率)

$$0 = Mv + m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$0 = Mv + m_1(v + v_0) + m_2(v - v_0)$$

$$(M + m_1 + m_2)v = (m_2 - m_1)v_0$$

$$v = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} v_0 < 0$$

船向左运动

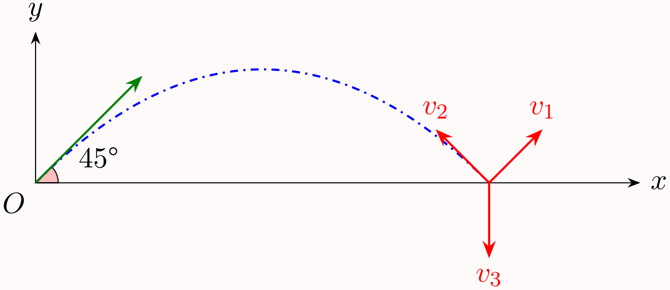
$$\begin{aligned} v_1 &= v + v_0 \\ &= \frac{M + 2m_2}{M + m_1 + m_2} v_0 \\ v_2 &= v - v_0 \\ &= -\frac{M + 2m_1}{M + m_1 + m_2} v_0 \end{aligned}$$

$$m_1 > m_2$$

$$|v_2| > v_1$$

习题 3.8.1

如图所示，一枚手榴弹投出方向与水平面成 45° 角，投出的速率为 $25\ \mathrm{m/s}$。在刚要接触与发射点同一水平面的目标时爆炸，设分成质量相等的三块，一块以速度 v_3 竖直朝下，一块顺爆炸处切线方向以 $v_2 = 15\ \mathrm{m/s}$ 飞出，一块沿法线方向以 v_1 飞出，求 v_1 和 v_3。不计空气阻力。



解答

假设手榴弹质量为 m。爆炸前，系统的动量

$$\vec{p}_0 = m v_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_y \right)$$

爆炸后

$$\vec{p}_1 = \frac{m}{3} v_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_y \right)$$

$$\vec{p}_2 = \frac{m}{3} v_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_y \right)$$

$$\vec{p}_3 = -\frac{m}{3} v_3\,\vec{e}_y$$

爆炸过程，系统动量守恒。

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} m v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{3} v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{3} v_2$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} m v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{3} v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{3} v_2 - \frac{m}{3} v_3$$

解得

$$v_1 = 3v_0 + v_2 = 90\ \mathrm{m/s}$$

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2 + 3v_0}{\sqrt{2}} = 90\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$$

习题 3.8.3

三只质量均为 m 的小船鱼贯而行，速度都是 v。中间一船同时以水平速度 u(相对于此船) 把两质量均为 m_0 的物体抛到前后两只船上，问当二物体落入船后，三只船的速度各如何？忽略水和空气的阻力。

解答

以中间船和两物体为研究系统，假设抛出后中间船的速度为 v_2，则由系统动量守恒，有

$$(m+2m_0)v = mv_2 + m_0(v_2-u) + m_0(v_2+u)$$

解得

$$v_2 = v$$

解答

以前船和一物体为研究系统，假设物体落入船后，船的速度为 v_1，则由系统动量守恒，有

$$mv + m_0(v_2 + u) = (m + m_0)v_1$$

解得

$$v_1 = v + \frac{m_0 u}{m + m_0}$$

以后船和一物体为研究系统，假设物体落入船后，船的速度为 v_3，则由系统动量守恒，有

$$mv + m_0(v_2 - u) = (m + m_0)v_3$$

解得

$$v_3 = v - \frac{m_0 u}{m + m_0}$$

例题

质量为 M 的小车以速度 v_0 在光滑水平面上向右运动。先后把两个质量均为 m 的物体以水平速度 u 分别向前和向后抛出，问最后小车的速度。

解答

以车和两物体为研究对象，水平方向不受力，系统动量守恒。设向前抛出物体后，车的速度为 v_1，则有

$$(M+2m)v_0 = (M+m)v_1 + m(v_1+u)$$

$$v_1 = v_0 - \frac{mu}{M+2m}$$

解答

再以车和仍在车上的物体为研究对象，水平方向不受力，系统动量守恒。设向后抛出物体后，车的速度为 v_2，则有

$$(M+m)v_1 = Mv_2 + m(v_2 - u)$$

$$v_2 = v_1 + \frac{mu}{M+m} = v_0 - \frac{mu}{M+2m} + \frac{mu}{M+m}$$