§9.2 简谐振动的运动学

一、简谐振动的运动学方程

- 微分方程 (简谐振动的动力学方程)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0$$

的解即为简谐振动的运动学方程

- 同济大学的《高等数学》(第 7 版) 上册 P338-343 有专门介绍这个方程的求解，这里简单概述如下
- 假定微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0$$

的试探解为 $x=\mathrm{e}^{kt}$

- 将试探解 $x=\mathrm{e}^{kt}$ 代入微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0$$

整理可得微分方程的特征方程为

$$k^2+\omega_0^2=0$$

- 微分方程的特征方程

$$k^2+\omega_0^2=0$$

的根为

$$k_1=\mathrm{i}\omega_0, k_2=-\mathrm{i}\omega_0$$

这是一对共轭的复根

- 所以方程的通解为

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

- 通解 $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ 等效于

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

其中的积分常数 C_1、C_2 或 A、φ_0 由初始条件【一般是 $t = 0$ 时，$x = x_0$，$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0$】来确定

- 下面用运动学方法求运动学方程
- 简谐振动的动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

可以改写成

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x$$

即已知加速度随位置的变化关系

- 由于已知的是 a 与 x 之间的关系，所以要把加速度变换成

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\omega_0^2 x$$

由此可得 (分离变量)

$$v_x \, \mathrm{d}v_x = -\omega_0^2 x \, \mathrm{d}x$$

- 代入初始条件 ($t=0$ 时，$x=x_0$，$v_x=v_0$)，积分得

$$\int_{v_0}^{v_x} v_x\,\mathrm{d}v_x = \int_{x_0}^{x} -\omega_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}(v_x^2-v_0^2) = -\frac{1}{2}\omega_0^2(x^2-x_0^2)$$
$$v_x^2 = v_0^2-\omega_0^2(x^2-x_0^2)$$
$$= (v_0^2+\omega_0^2x_0^2)-\omega_0^2x^2$$

- 令 $v_0^2+\omega_0^2x_0^2=\omega_0^2A_1^2$

$$v_x^2 = (v_0^2+\omega_0^2x_0^2)-\omega_0^2x^2 = \omega_0^2(A_1^2-x^2)$$
$$v_x = \pm\omega_0\sqrt{A_1^2-x^2}$$

注意，这里 v_x 有两个解，表示质点经过同一位置 x 时速度 v_x 可能有两个取值

- 又由

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\omega_0\sqrt{A_1^2-x^2}$$

可得 (分离变量)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}} = \pm\omega_0\,\mathrm{d}t$$

- 代入初始条件 ($t=0$ 时，$x=x_0$，$v_x=v_0$)，再积分一次得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=\int_0^t \pm\omega_0\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=\pm\omega_0 t$$

- 被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，需要用到第二类换元法，或者直接查积分表【高数 P378(59)】

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+\mathrm{C}$$

- 令 $x=A_1\cos\varphi$(第二类换元法)

$$\mathrm{d}x=-A_1\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$A_1^2-x^2=A_1^2\sin^2\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=-\frac{A_1\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{A_1^2\sin^2\varphi}}$$

$$=-\frac{\sin\varphi}{|\sin\varphi|}\,\mathrm{d}\varphi$$

由于 x 的取值为 $-A_1\leqslant x\leqslant A_1$，所以 φ 的取值可以取为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\sin\varphi\geqslant 0$，$|\sin\varphi|=\sin\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=-\frac{\sin\varphi}{|\sin\varphi|}\,\mathrm{d}\varphi=-\,\mathrm{d}\varphi$$

- 所以

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=\int_{\varphi_0}^{\varphi}-\mathrm{d}\varphi=\varphi_0-\varphi$$

其中

$$x_0=A_1\cos\varphi_0, x=A_1\cos\varphi$$

- 所以

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=\pm\omega_0 t$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A_1^2-x^2}}=\varphi_0-\varphi$$

$$\varphi=\varphi_0\mp\omega_0 t$$

$$x=A_1\cos\varphi=A_1\cos(\varphi_0\mp\omega_0 t)$$

- 利用余弦函数的性质 $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$

$$x=A_1\cos(\varphi_0\mp\omega_0 t)=A_1\cos(\omega_0 t\mp\varphi_0)$$

其中正负号源于质点经过同一位置 x 时速度 v 的方向不同所致，实际上也就是质点在不同时刻经过同一位置，式中 A_1、φ_0 满足

$$v_0^2+\omega_0^2x_0^2=\omega_0^2A_1^2$$

$$x_0=A_1\cos\varphi_0$$

- 简谐振动的运动学方程的一般形式

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- 积分常数 A、φ_0 由初始条件【一般是 $t=0$ 时，$x = x_0$，$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0$】来确定

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$

$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0$$

$$-\frac{v_0}{\omega_0} = A\sin\varphi_0$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{x_0}{A}$$

$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0 \Rightarrow \sin\varphi_0 = -\frac{v_0}{A\omega_0}$$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

$$\varphi_{01} = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right)$$

$$\varphi_{02} = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right) + \pi$$

x_0	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\varphi_0$	$+$	$+$	$-$	$-$
v_0	$+$	$-$	$+$	$-$
$\sin\varphi_0$	$-$	$+$	$-$	$+$
象限	四	一	三	二
φ_0	φ_{01}	φ_{01}	φ_{02}	φ_{02}

二、描述简谐振动的特征量

- 振动物体的运动状态完全恢复到原来的状态，称物体完成一次全振动
- 物体的运动状态包括物体离开平衡位置的位移、速度和加速度，由于三个量都是矢量，恢复到原来的状态，要求大小和方向都恢复
- 物体完成一次全振动所用的时间称为简谐振动的周期，记为 T
- 单位时间 $(1\ \mathrm{s})$ 内物体完成全振动的次数称为简谐振动的频率，记为 f 或 ν，$f=\frac{1}{T}$
- $2\pi\ \mathrm{s}$ 时间内物体完成全振动的次数称为简谐振动的圆频率，记为 ω_0 或简记为 ω

$$\omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

- 简谐振动的周期、频率、圆频率都是由振动系统本身的性质决定的，因此频率也称为固有频率或本征频率，圆频率也称为固有圆频率或本征圆频率
- 弹簧振子的固有圆频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 单摆的固有圆频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

- 物体在振动过程中偏离平衡位置的距离的最大值称为简谐振动的振幅，记为 A
- 振动表达式 $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ 中，$\omega_0 t + \varphi_0$ 称为简谐振动在 t 时刻的相位，记为 φ
- 相位也称为位相、周相、相、……，英文单词 “phase”
- $t = 0$ 时刻的相位称为简谐振动的初相、初位相、初相位，记为 φ_0
- 通常取 $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi$ 或 $-\pi \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$

- 若两个振动的相位分别为 φ_1 和 φ_2，那么两个振动的相位差可以定义为 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$，也可以定义为 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
  - 若 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，说明振动 2 比振动 1 相位超前 $\Delta\varphi$，或者振动 1 比振动 2 相位落后 (滞后)$\Delta\varphi$
  - 超前 $\Delta\varphi$ 等效于落后 (滞后)$2\pi - \Delta\varphi$
  - 若 $\Delta\varphi = \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \cdots$，则称两振动同相
  - 若 $\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \cdots$，则称两振动反相

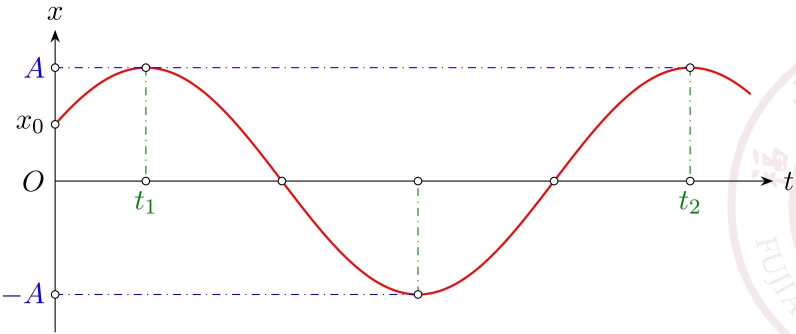
P254：若 $\pi > (\varphi_1 - \varphi_2) > 0$，则称 φ_1 超前 φ_2；若 $2\pi > (\varphi_1 - \varphi_2) > \pi$，则称 φ_1 落后于相位 φ_2。如果 $\varphi_1 - \varphi_2$ 包含有 2π 的整数倍，应当先减去，再根据余下的数决定二振动相位超前或落后。

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
&= A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \\
a_x &= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\
&= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
&= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)
\end{aligned}
$$

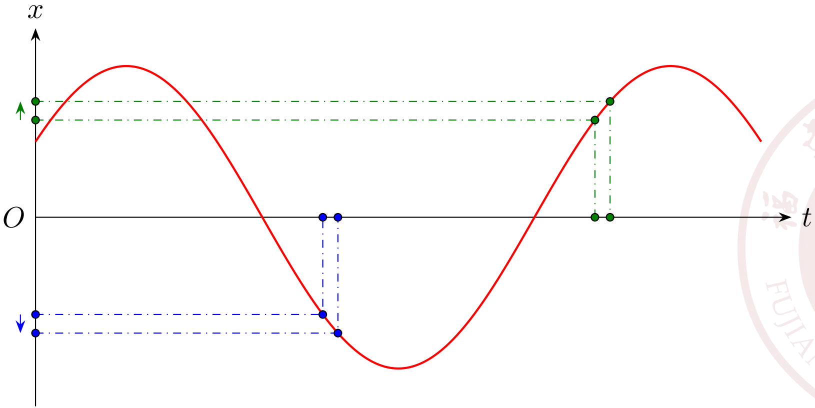
- 做简谐振动物体的速度和加速度也在做简谐振动，速度的振幅为 $A\omega_0$，加速度的振幅为 $A\omega_0^2$
- 速度比位移位相超前 $\frac{\pi}{2}$，加速度和位移反相

三、简谐振动的 $x-t$ 图和相轨迹

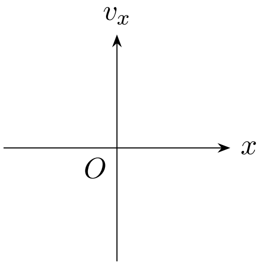
- 振动曲线：以 t 为横坐标，x 为纵坐标，表示任意时刻质点离开平衡位置的位移
- 简谐振动的振动曲线是一条正弦或余弦曲线



- 从振动曲线判断质点在任意时刻的速度方向



- 相平面：以 x 为横坐标，v_x 为纵坐标，建立坐标系，其上一点表示质点在某个时刻的运动状态
- 随时间的推移，质点运动状态在相平面上的代表点移动而画出的曲线，称为相轨迹

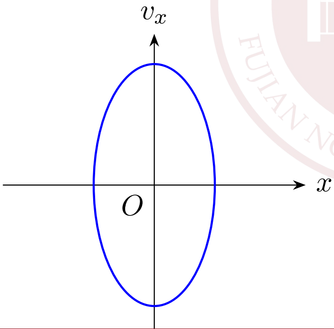


- 简谐振动的相轨迹是一个椭圆

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

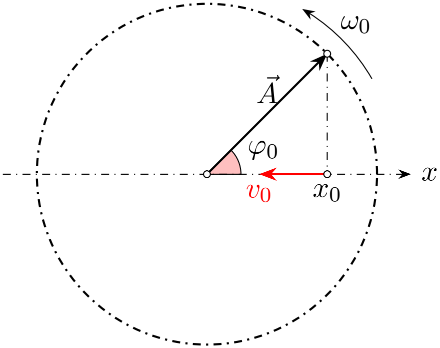
$$v_x = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{(A\omega_0)^2} = 1$$



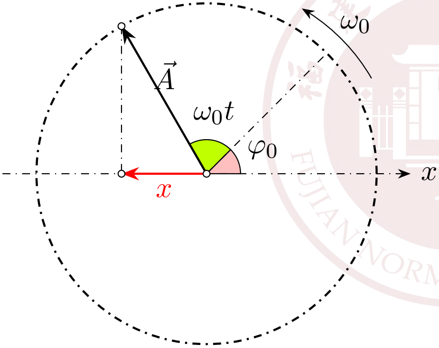
四、简谐振动的矢量表示法

- 简谐振动 $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ 可以用一个长度为 A、绕坐标原点以角速度 ω_0 逆时针匀速旋转的矢量 $\vec{A}$ 来表示
- $t = 0$ 时刻，$\vec{A}$ 与 x 轴的夹角为 φ_0



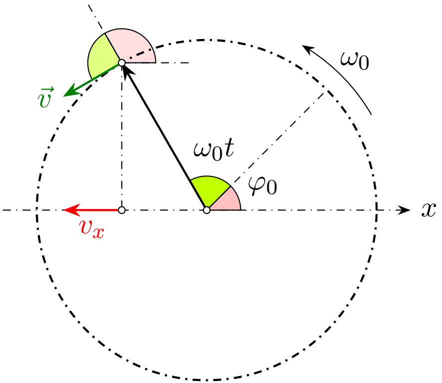
- t 时刻，$\vec{A}$ 与 x 轴的夹角为 $\omega_0 t + \varphi_0$
- t 时刻，$\vec{A}$ 沿 x 轴的分量为

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



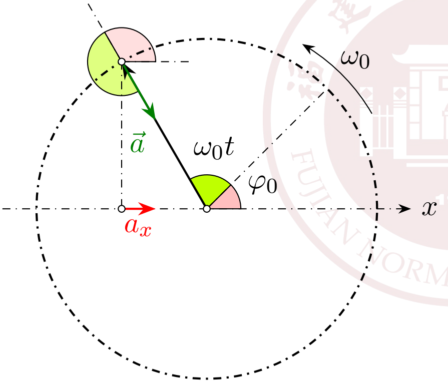
- t 时刻，$\vec{v}$ 与 x 轴的夹角为 $\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$
- t 时刻，$\vec{v}$ 沿 x 轴的分量为

$$v_x = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$



- t 时刻，$\vec{a}$ 与 x 轴的夹角为 $\omega_0 t + \varphi_0 + \pi$
- t 时刻，$\vec{a}$ 沿 x 轴的分量为

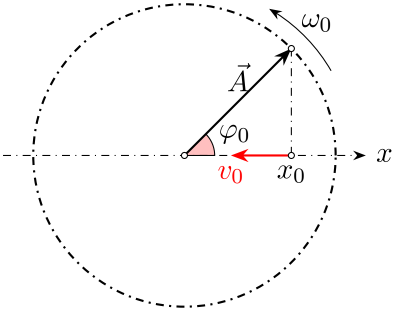
$$a_x = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$



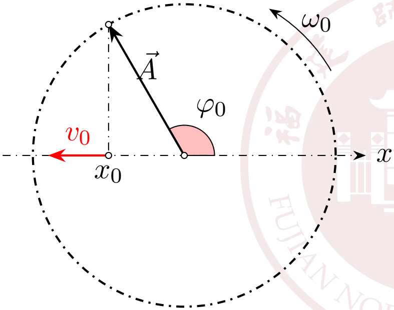
- 旋转矢量和简谐振动之间的对应关系

旋转矢量	简谐振动
长度 A	振幅 A
角速度 ω	圆频率 ω_0
初角位置 φ_0	初相位 φ_0
角位置 $\omega t+\varphi_0$	相位 $\omega_0 t+\varphi_0$

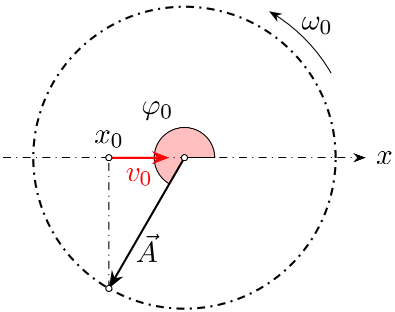
$$x_0 = A\cos\varphi_0 > 0$$
$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0 < 0$$



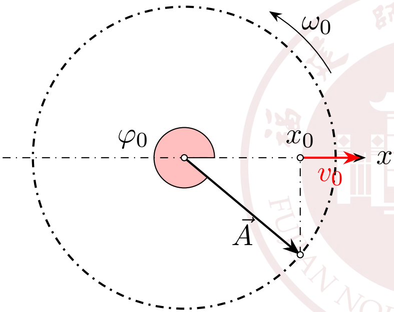
$$x_0 = A\cos\varphi_0 < 0$$
$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0 < 0$$



$$x_0 = A\cos\varphi_0 < 0$$
$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0 > 0$$



$$x_0 = A\cos\varphi_0 > 0$$
$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0 > 0$$



习题 9.2.6

一弹簧振子，弹簧的劲度系数为 $k = 9.8\ \mathrm{N/m}$，物体质量为 $m = 200\ \mathrm{g}$。现将弹簧自平衡位置拉长 $2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$，并给物体一远离平衡位置的速度，其大小为 $7.0\ \mathrm{cm/s}$，求该振子的运动学方程 (SI 单位)。

解答

依题意

$$k = 9.8\ \mathrm{N/m}$$

$$m = 200\ \mathrm{g} = 0.2\ \mathrm{kg}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.2}} = 7\ \mathrm{rad/s}$$

$$x_0 = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cm} = 0.02\sqrt{2}\ \mathrm{m} = A\cos\varphi_0$$

$$v_0 = 7.0\ \mathrm{cm/s} = 0.07\ \mathrm{m/s} = -A\omega_0\sin\varphi_0$$

$$A\sin\varphi_0 = -0.01$$

$$A = \sqrt{(-0.01)^2 + (0.02\sqrt{2})^2} = 0.03\ \mathrm{m}$$

解答

$$\sin\varphi_0 = -\frac{1}{3}$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\varphi_0 \approx -0.34$$

$$x = 0.03\cos(7t - 0.34)(\mathrm{SI})$$