§6.2 万有引力定律 · 引力质量与惯性质量

一、万有引力定律

- 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点，相距 r 时，它们之间的万有引力的大小为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

方向由受力物体指向施力物体。其中 G 称为引力常量。

- 如果规定 $\vec{r}$ 矢量为从施力质点所在位置指向受力质点所在位置，

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

则万有引力的矢量式可以写成

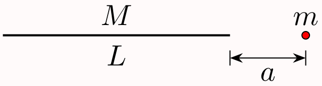
$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{e}_r = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

如果物体的形状和大小不能忽略，即物体不能视为质点，则需要把物体看成由无穷多质元所组成的质点系，质元与质元之间的万有引力可以用上述万有引力公式计算，整个物体所受到的万有引力就是组成它的所有质元所受到的万有引力的矢量和

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F} &= -G\frac{(\mathrm{d}m)M}{r^2}\,\vec{e}_r \\
&= -G\frac{(\mathrm{d}m)M}{r^3}\vec{r} \\
\vec{F} &= \int_m -G\frac{(\mathrm{d}m)M}{r^2}\,\vec{e}_r \\
&= \int_m -G\frac{(\mathrm{d}m)M}{r^3}\vec{r}
\end{aligned}$$

例题

如图，一根长为 L、质量为 M 的均匀细棒与一个质量为 m 的质点相距为 a，试求它们之间万有引力的大小。



解答

引入几个密度的概念

- 线状物体的质量线密度 λ：单位长度的质量
- 面状物体的质量面密度 σ：单位面积的质量
- 体状物体的质量体密度 ρ：单位体积的质量

不同情况下质元的质量分别表示为

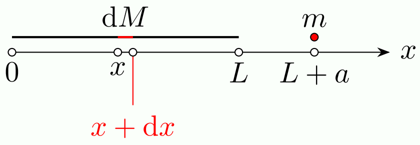
$$\mathrm{d}m = \lambda \,\mathrm{d}L$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \,\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}m = \rho \,\mathrm{d}V$$

解答

以细棒一端为坐标原点，沿细棒建立 x 轴。这里，细棒不能视为一个质点，无法直接计算万有引力。利用微元法，将细棒看成很多微小的质元所组成，取其中 $x \to x + \mathrm{d}x$ 小段进行研究。本题中由于细棒是均匀的，其质量线密度



$$\lambda = \frac{M}{L}$$

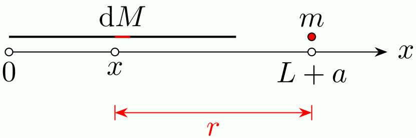
所取微元的长度为 $\mathrm{d}x$，其质量

$$\mathrm{d}M = \lambda\,\mathrm{d}x = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}x$$

解答

$\mathrm{d}M$ 与 m 之间的距离

$$r = L + a - x$$



$\mathrm{d}M$ 与 m 之间万有引力的大小为

$$\mathrm{d}F = G\frac{(\mathrm{d}M)m}{r^2} = G\frac{Mm\,\mathrm{d}x}{L(L+a-x)^2} = \frac{GMm}{L}\frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2}$$

解答

m 受到的所有质元的万有引力的方向均沿 x 轴负方向，因此合力就等于各分力之和，这里就可以直接对大小进行积分

$$F=\int_0^L \frac{GMm}{L}\frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2}$$
$$=\frac{GMm}{L}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2}$$

计算以上积分，使用第一类换元法：令 $r=L+a-x$，则

1. $\mathrm{d}r=-\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}r$
2. 当 $x=0$ 时，$r=L+a$
3. 当 $x=L$ 时，$r=a$

解答

$$\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2} = \int_{L+a}^{a} \frac{-\,\mathrm{d}r}{r^2} = \left[\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{L+a}^{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} = \frac{L}{a(L+a)}$$

$$F = \frac{GMm}{L}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2} = \frac{GMm}{L} \times \frac{L}{a(L+a)} = \frac{GMm}{a(L+a)}$$

解答

- 如果在细棒中心处有个质量为 M 的质点，那么它与 m 之间的万有引力的大小为

$$F' = \frac{GMm}{\left(\frac{L}{2}+a\right)^2} \neq \frac{GMm}{a(L+a)}$$

即这里细棒不能用其中心位置的质点代替！

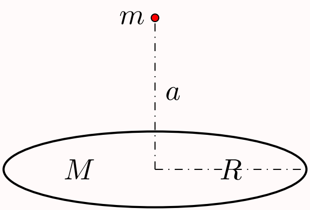
- 当 $a \gg L$ 时，

$$\frac{GMm}{a(L+a)} \approx \frac{GMm}{a^2}$$

可以将细棒视为质点！

例题

如图，一根半径为 R、质量为 M 的均匀圆圈，一个质量为 m 的质点位于通过圆圈圆心且垂直于圆圈平面的轴线上，与圆心之间的距离为 a，试求它们之间万有引力的大小。



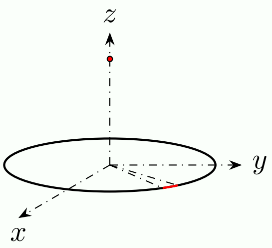
解答

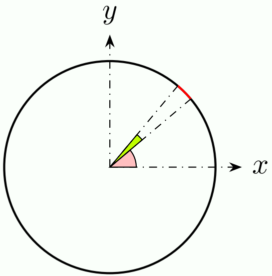
以圆心为坐标原点，圆圈所在平面为 xy 平面，建立直角坐标系。同样地，圆圈不能看成一个质点，使用微元法，将圆圈看成很多微小的质元所组成，取其中 $\theta \to \theta + \mathrm{d}\theta$ 部分来研究。由于圆圈均匀，其质量线密度

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$

所取部分微元的长度为 $\mathrm{d}L = R\,\mathrm{d}\theta$，其质量

$$\mathrm{d}M = \lambda\,\mathrm{d}L = \frac{M}{2\pi R} \times R\,\mathrm{d}\theta = \frac{M}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$$



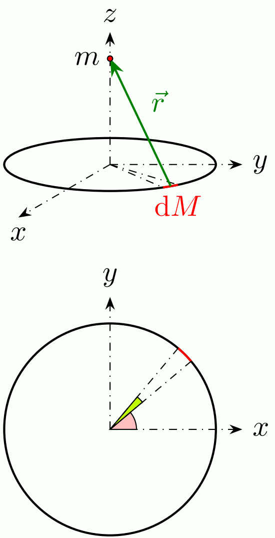


解答

从 $\mathrm{d}M$ 指向 m 的矢量

$$\vec{r} = -R\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - R\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y + a\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$



解答

$\mathrm{d}M$ 对 m 的万有引力

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F} &= -G\frac{(\mathrm{d}M)m}{r^3}\vec{r} \\
&= -\frac{GMm\,\mathrm{d}\theta}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \times (-R\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - R\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y + a\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= (\mathrm{d}F_x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (\mathrm{d}F_y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (\mathrm{d}F_z)\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\mathrm{d}F_x &= \frac{GMmR}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}F_y &= \frac{GMmR}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}F_z &= -\frac{GMma}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

解答

整个圆圈对 m 的万有引力

$$F_x = \int_0^{2\pi} \frac{GMmR}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{GMmR}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \left[\sin\theta\right]\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} \frac{GMmR}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{GMmR}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \left[-\cos\theta\right]\Big|_0^{2\pi} = 0$$

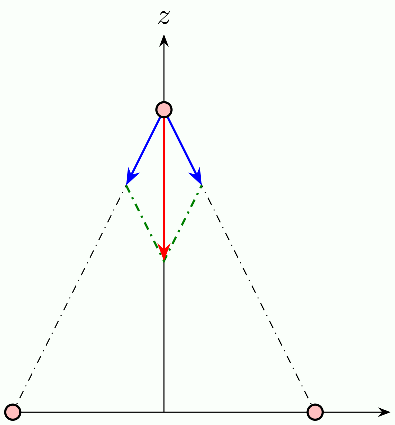
$$F_z = \int_0^{2\pi} -\frac{GMma}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\theta = -\frac{GMma}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}} \left[\theta\right]\Big|_0^{2\pi} = -\frac{GMma}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{\mathrm{e}}_x + F_y \vec{\mathrm{e}}_y + F_z \vec{\mathrm{e}}_z = -\frac{GMma}{(R^2+a^2)^{3/2}} \vec{\mathrm{e}}_z$$

- 当 $a \gg R$ 时，可以将圆圈视为质点
- 当 $a = 0$ 时，$\vec{F} = \vec{0}$，即均匀圆圈和位于其圆心的质点之间的万有引力为零

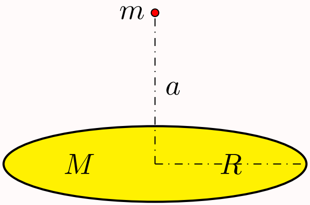
解答

对于均匀分布的圆圈，取两个关于原点对称的同样大小的质元，它们对 m 的万有引力在 xy 平面内的分力刚好大小相等方向相反，所以二者的合力沿 z 轴方向，所以整个圆圈对 m 的万有引力也是沿 z 轴方向。这个结论只对均匀分布的圆圈成立！



例题

如图，一个半径为 R、质量为 M 的均匀圆盘，一个质量为 m 的质点位于通过圆盘圆心且垂直于圆盘平面的轴线上，与圆心之间的距离为 a，试求它们之间万有引力的大小。



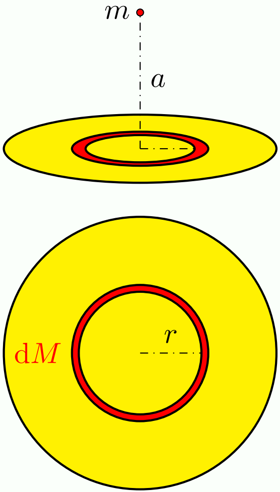
解答

将圆盘视为很多圆圈所组成，取其中 $r \to r + \mathrm{d}r$ 部分来研究，这部分视为半径为 r、质量为 $\mathrm{d}M$ 的均匀圆圈，利用上例得到的结果。由于圆盘均匀，其质量面密度

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

所取圆圈部分的面积为 $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$，其质量

$$\mathrm{d}M = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{M}{\pi R^2} \times 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{2Mr\,\mathrm{d}r}{R^2}$$



解答

半径为 R、质量为 M 的均匀圆圈与质点 m 的万有引力

$$F_z = -\frac{GMma}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

半径为 r、质量为 $\mathrm{d}M$ 的均匀圆圈与质点 m 的万有引力

$$\mathrm{d}F_z = -\frac{G(\mathrm{d}M)ma}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

所取圆圈部分与 m 之间的万有引力的大小

$$\mathrm{d}F_z = \frac{G(\mathrm{d}M)ma}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{GMma}{R^2} \times \frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

解答

整个圆盘与 m 之间的万有引力的大小

$$F = \frac{GMma}{R^2}\int_0^R \frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

计算以上积分，使用第一类换元法：令 $u = r^2 + a^2$，则

1. $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$
2. 当 $r = 0$ 时，$u = a^2$
3. 当 $r = R$ 时，$u = R^2 + a^2$

$$\int_0^R \frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}} = \int_{a^2}^{R^2+a^2} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}} = \left[-2\frac{1}{u^{1/2}}\right]\Bigg|_{a^2}^{R^2+a^2} = 2\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(R^2+a^2)^{1/2}}\right]$$

解答

整个圆盘与 m 之间的万有引力的大小

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{GMma}{R^2}\int_0^R \frac{2r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{GMma}{R^2}\times 2\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{(R^2+a^2)^{1/2}}\right] \\
&= \frac{2GMma}{R^2}\times\frac{(R^2+a^2)^{1/2}-a}{a(R^2+a^2)^{1/2}} \\
&= \frac{2GMma}{R^2}\times\frac{R^2}{a(R^2+a^2)^{1/2}[(R^2+a^2)^{1/2}+a]} \\
&= \frac{2GMm}{(R^2+a^2)^{1/2}[(R^2+a^2)^{1/2}+a]}
\end{aligned}
$$

解答

当 $a \gg R$ 时，

$$F = \frac{2GMm}{(R^2+a^2)^{1/2}[(R^2+a^2)^{1/2}+a]}$$
$$\to \frac{2GMm}{(a^2)^{1/2}[(a^2)^{1/2}+a]}$$
$$= \frac{GMm}{a^2}$$

圆盘可以视为一个质点

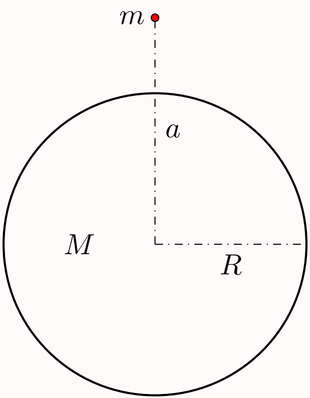
当 $a \ll R$ 时，

$$F = \frac{2GMm}{(R^2+a^2)^{1/2}[(R^2+a^2)^{1/2}+a]}$$
$$\to \frac{2GMm}{(R^2)^{1/2}[(R^2)^{1/2}+a]}$$
$$\to \frac{2GMm}{R^2} = \frac{2G(\sigma\pi R^2)m}{R^2}$$
$$= 2\pi Gm\sigma$$

这是质量面密度为 σ 的无穷大均匀平面与平面外质点 m 之间的万有引力

例题

如图，一个半径为 R、质量为 M 的均匀球面，一个质量为 m 的质点与球心之间的距离为 a，试求它们之间万有引力的大小。【若 $a < R$，则质点在球面内；若 $a > R$，则质点在球面外】



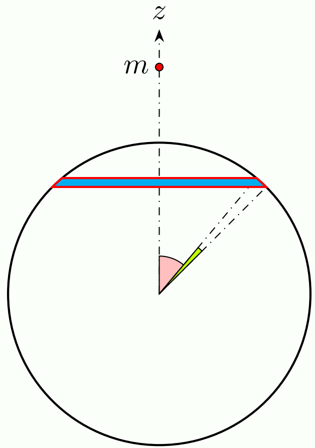
解答

以球心为坐标原点，球心与 m 连线为 z 轴。将球面看成很多微小圆圈所组成，取其中 $z \to z + \mathrm{d}z$ 部分为研究对象，对应图中的 $\theta \to \theta + \mathrm{d}\theta$。由于球面均匀，其质量面密度

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

所取圆圈的半径为 $r = R\sin\theta$，所取圆圈部分的面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi r(R\,\mathrm{d}\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$



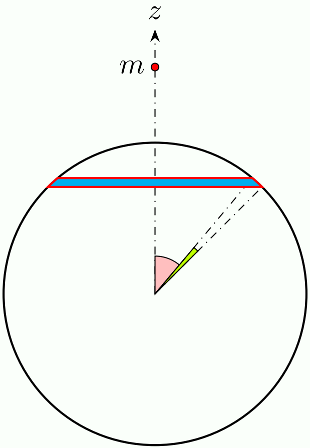
解答

所取圆圈部分的质量

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \sigma\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{M}{4\pi R^2} \times 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{M}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

质点 m 到所取圆圈中心之间的距离

$$
\begin{aligned}
a' &= a - z \\
&= a - R\cos\theta
\end{aligned}
$$



解答

$\mathrm{d}M$ 与 m 之间的万有引力的大小

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= \frac{G(\mathrm{d}M)m(a')}{[r^2+(a')^2]^{3/2}} \\
&= \frac{GMm(a-R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2[(R\sin\theta)^2+(a-R\cos\theta)^2]^{3/2}} \\
&= \frac{GMm}{2}\times\frac{(a-R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

整个球面对 m 的万有引力

$$
F = \frac{GMm}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a-R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{3/2}}
$$

这个积分不要求掌握，但建议自己动手演算一遍

$$A=\int_0^\pi \frac{(a-R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{3/2}}$$

令 $u=\cos\theta$，则

1. $\mathrm{d}u=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，$\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}u$
2. 当 $\theta=0$ 时，$u=1$
3. 当 $\theta=\pi$ 时，$u=-1$

$$\begin{aligned}
A&=\int_1^{-1}\frac{(a-Ru)(-\mathrm{d}u)}{(R^2+a^2-2Rau)^{3/2}}\\
&=-\frac{1}{2a}\int_1^{-1}\frac{(2a^2-2Rau)\,\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^{3/2}}\\
&=-\frac{1}{2a}\int_1^{-1}\frac{[(R^2+a^2-2Rau)+(a^2-R^2)]\,\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^{3/2}}\\
&=-\frac{1}{2a}\int_1^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^{1/2}}-\frac{a^2-R^2}{2a}\int_1^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^n}$$

令 $v = R^2 + a^2 - 2Rau$，则

1. $\mathrm{d}v = -2Ra\,\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}u = -\frac{1}{2Ra}\,\mathrm{d}v$
2. 当 $u = 1$ 时，$v = (R-a)^2$
3. 当 $u = -1$ 时，$v = (R+a)^2$

$$\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^n} = -\frac{1}{2Ra}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \frac{\mathrm{d}v}{v^n}$$

$$B = \int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^{1/2}} = -\frac{1}{2Ra}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \frac{\mathrm{d}v}{v^{1/2}}$$

$$C = \int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{(R^2+a^2-2Rau)^{3/2}} = -\frac{1}{2Ra}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \frac{\mathrm{d}v}{v^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2Ra}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \frac{\mathrm{d}v}{v^{1/2}} \\ &= -\frac{1}{2Ra}\left[2v^{1/2}\right]\Big|_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \\ &= \frac{|R-a|-|R+a|}{Ra} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{2Ra}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \frac{\mathrm{d}v}{v^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2Ra}\left[\frac{-2}{v^{1/2}}\right]\Big|_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \\ &= \frac{1}{Ra}\left[\frac{1}{|R+a|}-\frac{1}{|R-a|}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} \frac{(a - R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{2a}\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{(R^2 + a^2 - 2Rau)^{1/2}} - \frac{a^2 - R^2}{2a}\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{(R^2 + a^2 - 2Rau)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{2a} \times \frac{|R-a| - |R+a|}{Ra} - \frac{a^2 - R^2}{2a} \times \frac{1}{Ra}\left[\frac{1}{|R+a|} - \frac{1}{|R-a|}\right] \\
&= -\frac{|R-a| - |R+a|}{2Ra^2} - \frac{a^2 - R^2}{2Ra^2}\left[\frac{1}{|R+a|} - \frac{1}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{1}{2Ra^2}\left[|R+a| - |R-a| - (a^2 - R^2)\left(\frac{1}{|R+a|} - \frac{1}{|R-a|}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2Ra^2}\left[|R+a| - \frac{a^2 - R^2}{|R+a|} - |R-a| + \frac{a^2 - R^2}{|R-a|}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2Ra^2}\left[|R+a| - \frac{a^2-R^2}{|R+a|} - |R-a| + \frac{a^2-R^2}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{1}{2Ra^2}\left[\frac{|R+a|^2-(a^2-R^2)}{|R+a|} + \frac{a^2-R^2-|R-a|^2}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{1}{2Ra^2}\left[\frac{R^2+a^2+2Ra-(a^2-R^2)}{|R+a|} + \frac{a^2-R^2-(R^2+a^2-2Ra)}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{1}{2Ra^2}\left[\frac{2R^2+2Ra}{|R+a|} + \frac{2Ra-2R^2}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{1}{a^2}\left[\frac{R+a}{|R+a|} + \frac{a-R}{|R-a|}\right]
\end{aligned}
$$

解答

整个球面对 m 的万有引力

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{GMm}{2}\int_0^\pi \frac{(a-R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{3/2}} \\
&= \frac{GMm}{2}\times\frac{1}{a^2}\left[\frac{R+a}{|R+a|}+\frac{a-R}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{GMm}{2a^2}\left[\frac{R+a}{|R+a|}+\frac{a-R}{|R-a|}\right]
\end{aligned}
$$

解答

❶ 当 $a > R$ 时，质点在球面外

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{GMm}{2a^2}\left[\frac{R+a}{|R+a|}+\frac{a-R}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{GMm}{2a^2}\left[\frac{R+a}{R+a}+\frac{a-R}{a-R}\right] \\
&= \frac{GMm}{a^2}
\end{aligned}
$$

均匀球面对球外质点的万有引力等于球面质量集中在球心时对质点的万有引力！

❷ 当 $a < R$ 时，质点在球面内

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{GMm}{2a^2}\left[\frac{R+a}{|R+a|}+\frac{a-R}{|R-a|}\right] \\
&= \frac{GMm}{2a^2}\left[\frac{R+a}{R+a}+\frac{a-R}{R-a}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

均匀球面对球内质点的万有引力等于零！

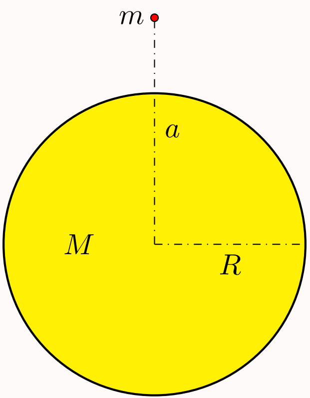
解答

本题的积分过程不要求，但结论希望大家能够记住！

1. 均匀球面对球外质点的万有引力等于球面质量集中在球心时对质点的万有引力
2. 均匀球面对球内质点的万有引力等于零

例题

如图，一个半径为 R、质量为 M 的均匀球体，一个质量为 m 的质点与球心之间的距离为 a，试求它们之间万有引力的大小。【若 $a < R$，则质点在球内；若 $a > R$，则质点在球外】



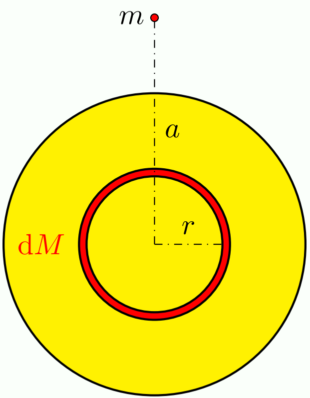
解答

对于均匀球体，将它看成由很多均匀薄球壳所组成的，取其中 $r \to r+\mathrm{d}r$ 部分的薄球壳为研究对象，这部分薄球壳视为半径为 r、质量为 $\mathrm{d}M$ 的均匀球面，得用上例的结果进行计算。由于球体均匀，其质量体密度

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

所取部分薄球壳的体积为 $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$，其质量

$$\mathrm{d}M = \rho\,\mathrm{d}V = \frac{3M}{4\pi R^3} \times 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{3Mr^2\,\mathrm{d}r}{R^3}$$



解答

如果 m 在球外，即 $a > R$，则 $a > r$，即对于所有薄球壳，m 都在球外，所以 $\mathrm{d}M$ 对 m 的万有引力的大小

$$\mathrm{d}F = \frac{G(\mathrm{d}M)m}{a^2} = \frac{Gm}{a^2} \times \frac{3Mr^2\,\mathrm{d}r}{R^3} = \frac{GMm}{a^2R^3} \times 3r^2\,\mathrm{d}r$$

整个球体对 m 的万有引力

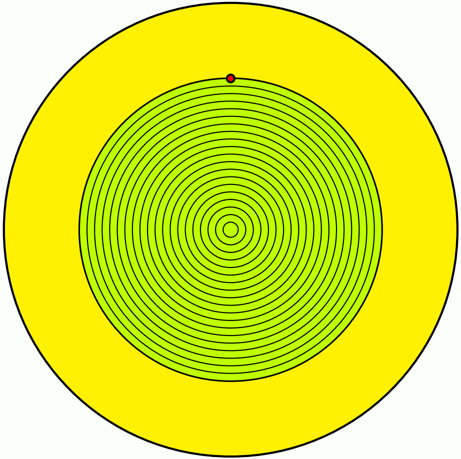
$$\begin{aligned} F &= \int_M \frac{G(\mathrm{d}M)m}{a^2} = \frac{Gm}{a^2}\int_M \mathrm{d}M = \frac{GMm}{a^2} \\ &= \int_0^R \frac{GMm}{a^2R^3} \times 3r^2\,\mathrm{d}r = \frac{GMm}{a^2R^3}\int_0^R 3r^2\,\mathrm{d}r = \frac{GMm}{a^2R^3} \times R^3 = \frac{GMm}{a^2} \end{aligned}$$

均匀球体对球外质点的万有引力等于球体质量集中在球心时对质点的万有引力！

解答

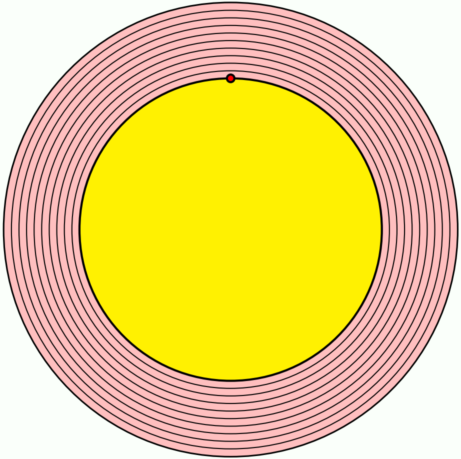
如果 m 在球内，即 $a < R$，则当 $R > a > r$，即对所选薄球壳，m 在球外，$\mathrm{d}M$ 对 m 的万有引力的大小为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= \frac{G(\mathrm{d}M)m}{a^2} \\
&= \frac{Gm}{a^2} \times \frac{3Mr^2\,\mathrm{d}r}{R^3} \\
&= \frac{GMm}{a^2R^3} \times 3r^2\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$



解答

当 $R > r > a$，即对所选薄球壳，m 在球内，
$\mathrm{d}M$ 对 m 的万有引力的大小为零



解答

整个球体对 m 的万有引力

$$
\begin{aligned}
F = \int_{M'} \frac{G(\mathrm{d}M)m}{a^2} &= \frac{Gm}{a^2}\int_{M'} \mathrm{d}M = \frac{G(M')m}{a^2} \\
&= \int_0^a \frac{GMm}{a^2R^3} \times 3r^2\,\mathrm{d}r = \frac{GMm}{a^2R^3}\int_0^a 3r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{GMm}{a^2R^3} \times a^3 = \frac{GMm}{R^3}a
\end{aligned}
$$

半径为 a 的球体质量

$$
M' = \int_{M'} \mathrm{d}M = \rho V' = \rho \times \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{Ma^3}{R^3}
$$

解答

整个球体对 m 的万有引力

$$F=\frac{G(M')m}{a^2}=\frac{GMm}{R^3}a$$

均匀球体对球内质点的万有引力等于质点所在处以内部分球体质量集中在球心时对质点的万有引力！

在计算地球与其他物体的万有引力时，通常将地球近似看成均匀球体，地球半径为 R，地球质量为 M，所以地球表面附近质量为 m 的质点受到的地球的万有引力即为

$$F=\frac{GMm}{R^2}$$

二、引力质量与惯性质量

- 用来表征物体惯性大小的质量称为惯性质量，牛顿第二定律中的质量即为惯性质量

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- 用来表征物体吸引其他物体能力的质量称为引力质量，万有引力定律中的质量即为引力质量

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- 惯性质量和引力质量是物体的同一本质在不同方面的表现。
- 非常精密的实验证明，任何物体的惯性质量同它的引力质量严格地成正比例。
- 如果选择适当的单位，可以使物体的引力质量和惯性质量在数值上相等。
- 惯性质量和引力质量等价是广义相对论原理的基本出发点之一。

三、引力常量的测量

Henry Cavendish(亨利·卡文迪许，卡文迪什) 扭秤实验

$$G = 6.754 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$$

单位

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

$$\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 = \mathrm{m}^3/(\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg})$$

四、地球自转对重量的影响

- 当物体在地球表面附近运动时，通常选择地球为惯性参考系，这时，地球对物体的万有引力就是物体所受到的重力。在这种情况下，可以说物体所受重力指向地心
- 当需要考虑地球自转的影响时，地球不能再视为惯性参考系，这时，地球是一个转动参考系，是非惯性参考系，在这个参考系中对物体受力分析时，除了万有引力，还要考虑惯性力。
  - 如果物体相对地球静止，则科里奥利力

$$-2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{0}$$

  如果认为地球做匀速转动，则切向惯性力

$$-m\vec{\beta} \times \vec{r} = \vec{0}$$

  但惯性离心力 $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 一般情况下不为零
  - 这种情况下 (认为地球为非惯性参考系时)，重力通常定义为万有引力和惯性离心力的合力。这时，不能说重力指向地心。在不同纬度上，惯性离心力不同，因此重力会随纬度而变。

五、牛顿万有引力定律的适用范围

- 经典的万有引力定律适用于弱场低速
- 引力半径

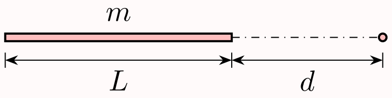
$$R_g = \frac{2Gm}{c^2}$$

G 为万有引力常量，m 为产生引力场的球体的质量，c 为光速

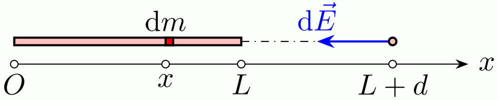
- 若产生引力场的球体的半径 $R \gg R_g$，则牛顿万有引力定律适用
- 若 R 和 R_g 相当，甚至 $R < R_g$，则牛顿万有引力定律不再适用，要用广义相对论的引力定律

习题 6.2.6

如图所示，一均质细杆长 L，质量为 m。求距其一端为 d 处单位质量质点受到的引力 (亦称引力场强度)。



解答



$$\mathrm{d}\vec{F} = G\frac{(\mathrm{d}m)M}{r^2}(-\vec{\mathrm{e}}_r)$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{M} = G\frac{\mathrm{d}m}{r^2}(-\vec{\mathrm{e}}_r)$$

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$r = L + d - x$$

解答

$$\mathrm{d}\vec{F} = G\frac{(\mathrm{d}m)M}{r^2}(-\vec{\mathrm{e}}_r)$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{M} = G\frac{\mathrm{d}m}{r^2}(-\vec{\mathrm{e}}_r)$$

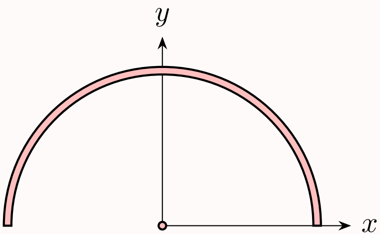
$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$r = L + d - x$$

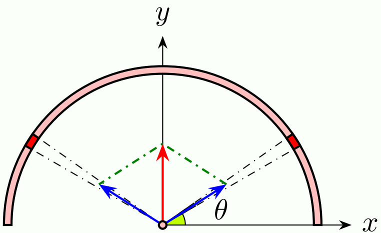
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= G\frac{\mathrm{d}m}{r^2} \\
&= \frac{Gm}{L}\frac{\mathrm{d}x}{(L+d-x)^2} \\
E &= \frac{Gm}{L}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{(L+d-x)^2} \\
&= \frac{Gm}{L}\left[\frac{1}{L+d-x}\right]\Bigg|_0^L \\
&= \frac{Gm}{L}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right] \\
&= \frac{Gm}{d(L+d)}
\end{aligned}$$

习题 6.2.7

如图所示，半径为 R 的细半圆环线密度为 λ。求位于圆心处单位质量质点受到的引力 (引力场强度)。



解答



如图，关于 y 轴对称地取两个质元

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l = \lambda R\,\mathrm{d}\theta$$

解答

则它们在圆心处的引力场强度之和方向沿 y 轴正方向，大小为

$$\mathrm{d}E = 2 \times \frac{G\lambda R\,\mathrm{d}\theta}{R^2} \times \sin\theta = \frac{2G\lambda}{R}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

所以整个半圆环在圆心处的引力场强度方向沿 y 轴正方向，大小为

$$E = \frac{2G\lambda}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2G\lambda}{R}\left[-\cos\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2G\lambda}{R}$$