积分

一、导数与原函数

- 如果已知 $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)$，则 $f(x)$ 称为 $F(x)$ 的导数，$F(x)$ 称为 $f(x)$ 的原函数

例题

- 已知 $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$，所以 $F(x)=\mathrm{e}^x$ 为 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的原函数
- 已知 $\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}=\cos x$，所以 $F(x)=\sin x$ 为 $f(x)=\cos x$ 的原函数
- 已知 $\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}=-\sin x$，所以 $F(x)=\cos x$ 为 $f(x)=-\sin x$ 的原函数；所以 $F(x)=-\cos x$ 为 $f(x)=\sin x$ 的原函数

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}=-\sin x$$
$$\frac{\mathrm{d}(-\cos x)}{\mathrm{d}x}=\sin x$$

例题

已知 $\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$，所以 $F(x) = x^n$ 为 $f(x) = nx^{n-1}$ 的原函数；所以 $F(x) = \frac{1}{n}x^n$ 为 $f(x) = x^{n-1}$ 的原函数；所以 $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 为 $f(x) = x^n$ 的原函数

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}, \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}x^n\right)}{\mathrm{d}x} = x^{n-1}$$

$$m = n-1, n = m+1$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)}{\mathrm{d}x} = x^m$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)}{\mathrm{d}x} = x^n$$

- 由于任意常数 C 的导数恒为零，即 $\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x} = 0$，所以若 $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$，则必定有

$$\frac{\mathrm{d}[F(x)+\mathrm{C}]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}$$
$$= f(x)$$

- 因此，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，那么 $F(x)+\mathrm{C}$ 也是 $f(x)$ 的原函数
- 所以，一个函数的导数是唯一的，但一个函数的原函数有无穷多个

二、不定积分

- 函数 $f(x)$ 的所有原函数的全体称为函数 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C}$$

- $f(x)$ 称为被积函数
- x 称为积分变量
- $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- C 称为积分常数

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

$$\mathrm{d}F(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + \mathrm{C}$$

三、常见基本函数的积分表

- 常见基本函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{C})}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}(ax)}{\mathrm{d}x} = a$$

$$\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

- 常见基本函数的积分表

$$\int 0\,\mathrm{d}x = \mathrm{C}$$

$$\int a\,\mathrm{d}x = ax + \mathrm{C}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \mathrm{C} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \mathrm{C} \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathrm{C}$$

四、常见的积分方法

- 分项积分法
  - 积分的两个性质

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a \neq 0)$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int [Af(x)+Bg(x)]\,\mathrm{d}x = A\int f(x)\,\mathrm{d}x + B\int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (A \neq 0, B \neq 0)$$

例题

求积分

$$\int [3x^2 - 5\sin x]\,\mathrm{d}x$$

解答

$$\begin{aligned}\int [3x^2 - 5\sin x]\,\mathrm{d}x &= 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 5\int \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= 3 \times \frac{1}{3}x^3 - 5(-\cos x) + \mathrm{C} \\ &= x^3 + 5\cos x + \mathrm{C}\end{aligned}$$

- 分部积分法
  - 根据函数乘积的微分运算法则

$$\mathrm{d}(uv) = (\mathrm{d}u)v + u(\mathrm{d}v)$$

可得

$$\begin{aligned} u\,\mathrm{d}v &= \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u \\ \int u\,\mathrm{d}v &= \int \mathrm{d}(uv) - \int v\,\mathrm{d}u \\ &= uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

- 换元积分法
  - 换元积分法有两种，这里只介绍第一类换元法，第二类换元法请参看高数【其实第二类换元法就是针对一些特殊形式的被积函数而选用的特殊的中间变量罢了】
  - 对于一般的被积函数，通常无法直接从常用基本函数的积分表直接得出积分结果
  - 如果引入某个中间变量 $u = u(x)$，将被积表达式改写成

$$f(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u$$

而 $g(u)$ 是某个常见的基本函数，那么积分就可以计算出来

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u$$

例题

计算积分

$$\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$$

解答

引入中间变量 $u = 3x$，则有

$$x = \frac{u}{3}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$$

$$\sin(3x)\,\mathrm{d}x = (\sin u)\cdot\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{3}\sin u\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3}\sin u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}(-\cos u) + \mathrm{C} \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x) + \mathrm{C}\end{aligned}$$

例题

计算积分

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

解答

先利用三角函数的关系把被积函数进行改写

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] \\
\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}x - \int \cos(2x) \, \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

解答

对于第二项，引入中间变量 $u = 2x$，可得

$$x = \frac{u}{2}, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= (\cos u)\cdot\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{2}\cos u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\sin u + \mathrm{C}\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) + \mathrm{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \mathrm{C}\right]\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \mathrm{C}\end{aligned}$$

由于 C 是任意常数，所以它乘上任意非零的数，还是一个任意常数，仍然写成 C

- 通常的函数都可以求其导数，但并不是所有的函数都可以解析地得到积分结果

五、定积分

- 如果已经求得 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，即已知

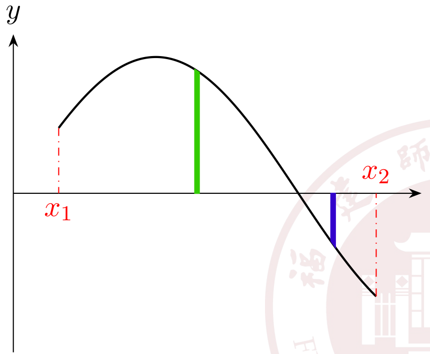
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C}$$

那么定积分为【牛顿——莱布尼茨公式】

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

其中 x_1 和 x_2 分别称为积分的下限和上限，表示积分过程中积分变量 x 的取值范围

- 积分的本质是求和，物理意义就是被积函数 $f(x)$ 的曲线与 x 轴所围的面积



- 本讲前面提到的几个常用基本函数的积分表要求熟记，其他常用函数的积分表可以查阅高数上册 P374-384 附录 IV
- 本门课程考试中如有用到将提供，但平时作业需自己查阅

例题

已知积分公式

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + \mathrm{C}$$

试求

$$\int_0^L \frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

其中 L、a、b 均为正的常数。

解答

令 $u=L+a-x$，则有 $x=L+a-u$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$

$$\frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}(-\mathrm{d}u)=-\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

$$\int\frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+\mathrm{C}$$

$$\int\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}+\mathrm{C}$$

$$\int\frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{(L+a-x)^2+b^2}}+\mathrm{C}$$

解答

$$\int \frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{(L+a-x)^2+b^2}} + \mathrm{C}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{\sqrt{(L+a-x)^2+b^2}}\right]_0^L \\ &= \frac{1}{\sqrt{(L+a-L)^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(L+a-0)^2+b^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(L+a)^2+b^2}}\end{aligned}$$

解答

令 $u=L+a-x$，则有 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$

$$\frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}(-\mathrm{d}u)=-\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^L\frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x=-\int_{L+a}^{a}\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+\mathrm{C}$$

$$\int\frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}+\mathrm{C}$$

$$\int_0^L\frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\right)_{L+a}^{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{(L+a)^2+b^2}}$$

解答

令 $u = L + a - x$，则有 $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$

$$\int_0^L \frac{L+a-x}{[(L+a-x)^2+b^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -\int_{L+a}^{a} \frac{u}{(u^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\right)_{L+a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(L+a)^2+b^2}}$$

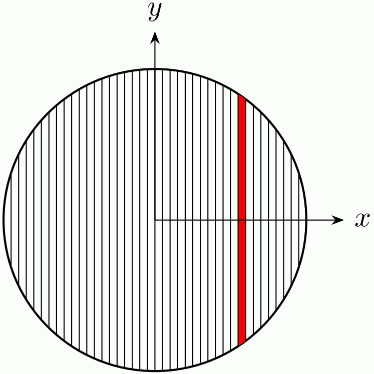
六、定积分在数学中的应用

例题

求半径为 R 的圆的面积。

解答

将圆看成由很多个微小的矩形所组成的，则圆的面积就等于所有矩形的面积之和



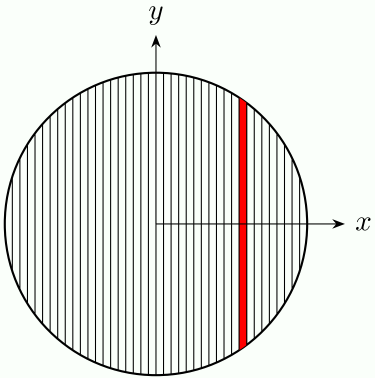
解答

对于其中任意一个小矩形 $(x \to x + \mathrm{d}x)$，其面积为

$$\mathrm{d}S = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以整个圆的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$



解答

由积分公式 (高数 (上册)P378 式 67)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \mathrm{C}$$

可得

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \mathrm{C}$$

所以圆的面积为

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \times \left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}$$

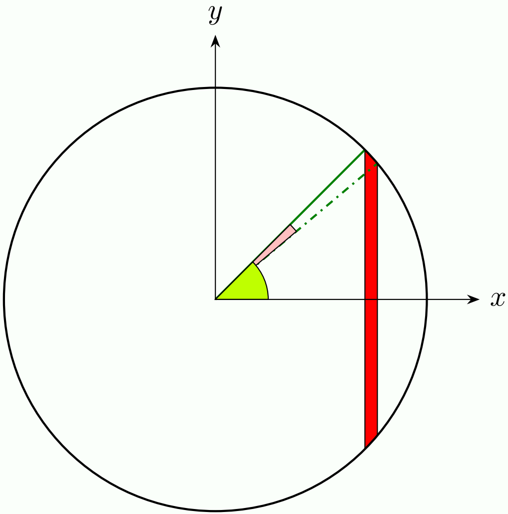
解答

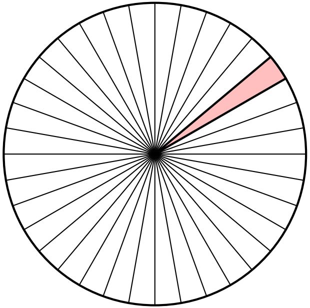
$$
\begin{aligned}
S &= 2\times\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}\\
&= 2\times\left\{\left[\frac{R}{2}\sqrt{R^2-R^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R}{R}\right]-\left[\frac{-R}{2}\sqrt{R^2-(-R)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{-R}{R}\right]\right\}\\
&= 2\times\left\{\left[0+\frac{R^2}{2}\times\frac{\pi}{2}\right]-\left[0+\frac{R^2}{2}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}\\
&= \pi R^2
\end{aligned}
$$

解答

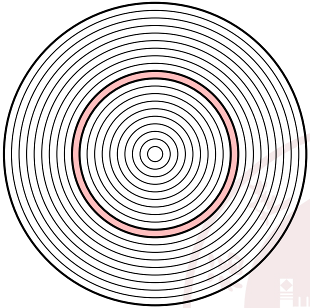
令 $x = R\cos\theta$，$\mathrm{d}x = -R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\pi}^{0} R\sin\theta \times (-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) \\
&= -R^2\int_{\pi}^{0} 2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= -R^2\int_{\pi}^{0} 2[1-\cos(2\theta)]\,\mathrm{d}\theta \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

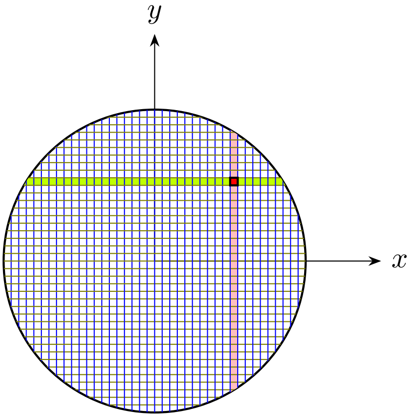




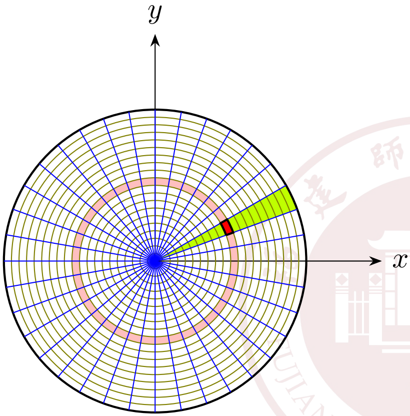
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} \times (R\,\mathrm{d}\theta) \times R$$



$$\mathrm{d}S = (2\pi r) \times (\mathrm{d}r)$$



$$\mathrm{d}S = (\mathrm{d}x) \times (\mathrm{d}y)$$



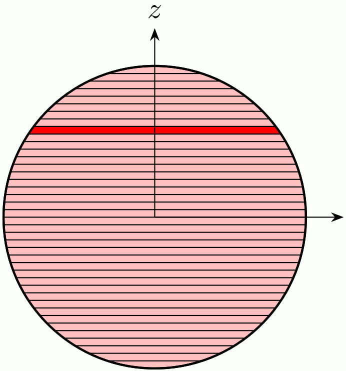
$$\mathrm{d}S = (\mathrm{d}r) \times (r\,\mathrm{d}\theta)$$

例题

求半径为 R 的球的体积。

解答

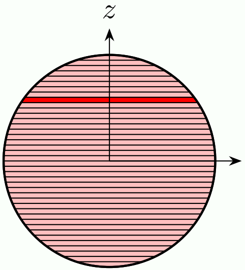
将球看成由很多个微小的圆柱体所组成的，则球的体积就等于所有圆柱体的体积之和



解答

对于其中任意一个小圆柱体【底面垂直 z 轴，两个底面所在位置分别为 z 和 $z+\mathrm{d}z$】，其体积为

$$\mathrm{d}V = \pi r^2\,\mathrm{d}z = \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$$



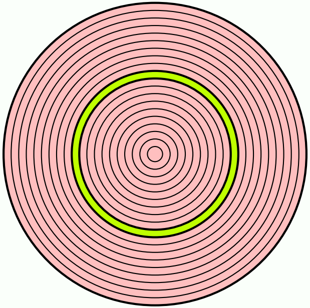
所以整个球的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \pi\left[\int_{-R}^{R} R^2\,\mathrm{d}z - \int_{-R}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\right] \\
&= \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R} \\
&= \pi\left[R^2 \times R - \frac{1}{3}R^3\right] - \pi\left[R^2 \times (-R) - \frac{1}{3}(-R)^3\right] \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

解答

当然也可以将球看成由很多薄球壳所组成的。
对于内外半径分别为 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 的球壳，其体积为

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

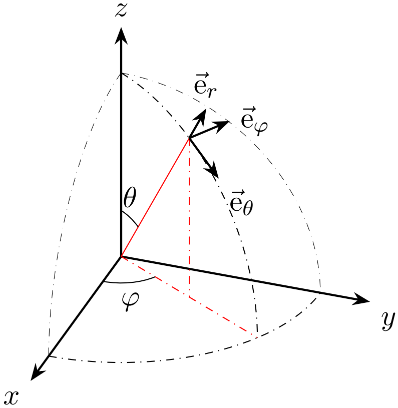


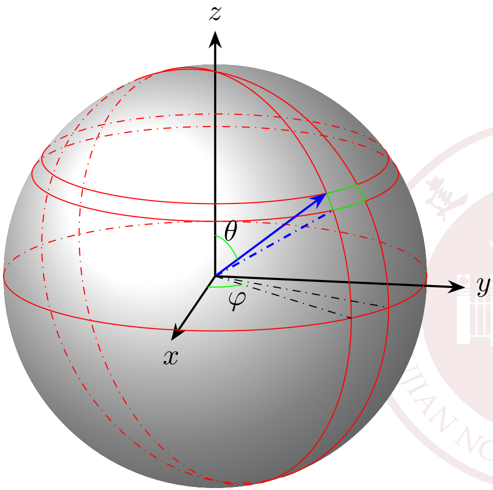
所以整个球体的体积为

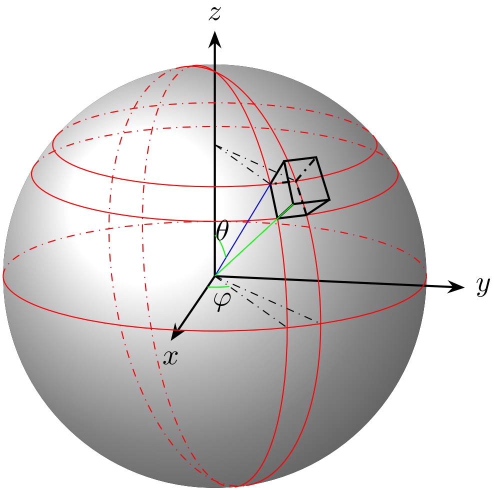
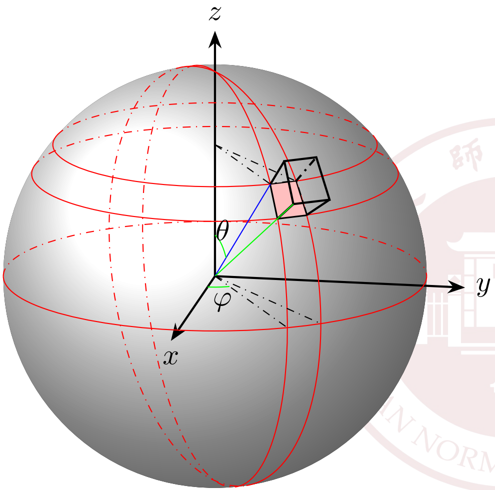
$$\begin{aligned} V &= \int_0^R 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi \times \frac{1}{3}R^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

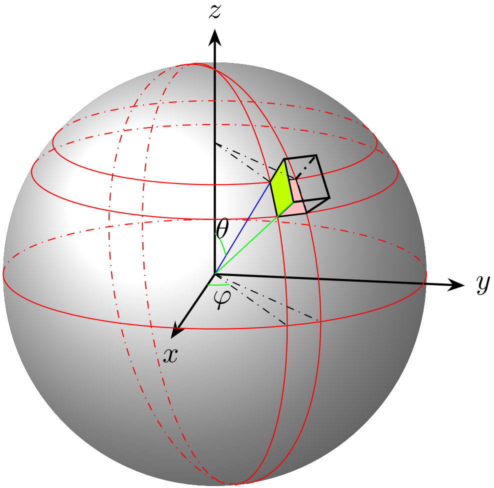
$$\mathrm{d}V = (\mathrm{d}x) \times (\mathrm{d}y) \times (\mathrm{d}z)$$

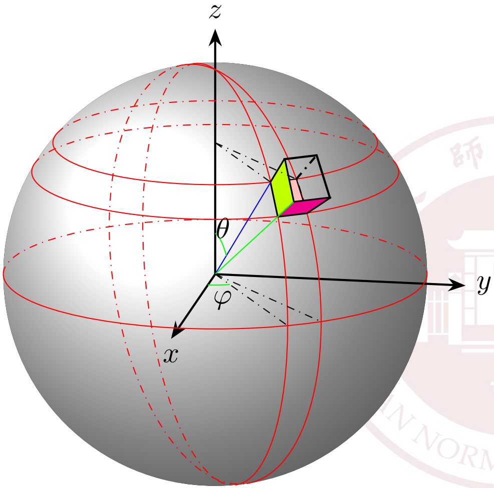
$$\mathrm{d}V = (\mathrm{d}r) \times (r\,\mathrm{d}\theta) \times (r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$$


z
$\vec{e}_r$
$\vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_\theta$
θ
φ
y
x


z
θ
φ
y
x


z
y
x
θ
φ

z
y
x
θ
φ


z
θ
y
φ
x


z
θ
y
φ
x

七、定积分在力学中的应用

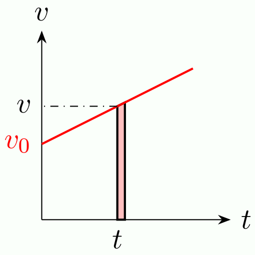
例题

求匀变速直线运动的位移。

解答

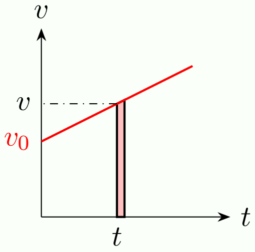
假定质点的初速度 ($t=0$ 时刻的速度) 为 v_0，加速度为 a，则任意 t 时刻质点的速度为

$$v(t)=v_0+at$$



解答

质点在任意一个无限小过程中的运动均可以视为匀速直线运动，设 t 时刻的速度为 v，经历的无限小时间为 $\mathrm{d}t$，则该无限小过程质点通过的位移为 $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$



则从 0 到 t 时刻质点的总位移为

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t (v_0 + at)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t v_0\,\mathrm{d}t + \int_0^t at\,\mathrm{d}t = v_0 \int_0^t \mathrm{d}t + a\int_0^t t\,\mathrm{d}t \\
&= [v_0 t]_0^t + \left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^t = \left[v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^t \\
&= \left[v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] - \left[v_0 \times 0 + \frac{1}{2}a \times 0^2\right] \\
&= v_0 t + \frac{1}{2}at^2
\end{aligned}$$