§3.7 质点系动量定理和质心运动定理

一、质点系动量定理

- 由两个或两个以上的质点所组成的系统称为质点系
- 连续分布的、不能忽略大小和形状的物体可以看成由无穷多个微小质元组成的质点系
- 一般地假定，质点系由 N 个质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，任意 t 时刻，其位置为 $\vec{r}_i$，速度为 $\vec{v}_i$，加速度为 $\vec{a}_i$，则质点系的动量为该时刻质点系内所有质点的动量的矢量和

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

- 任意 t 时刻，第 i 个质点所受合力为

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i内} + \vec{F}_{i外}$$

其中

$$\vec{F}_{i内} = \sum_{j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_{ij}$ 为质点系内部第 j 个质点对第 i 个质点的作用力，称为内力；$\vec{F}_{i外}$ 是质点系外所有质点对第 i 个质点的作用力的矢量和，称为外力

- 由于内力总是一对对作用力和反作用力，$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$，所以 t 时刻，质点系所受合力为

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{内}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{外}} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{外}}
\end{aligned}
$$

即内力的矢量和永远为零，质点系所受合力等于所有质点所受外力的矢量和

- $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，第 i 个质点的动量定理

$$
\mathrm{d}\vec{I}_i = \mathrm{d}\vec{p}_i
$$

$$
\mathrm{d}\vec{I}_i = \vec{F}_i \, \mathrm{d}t = \vec{F}_{i\text{内}} \, \mathrm{d}t + \vec{F}_{i\text{外}} \, \mathrm{d}t
$$

$$
\mathrm{d}\vec{p}_i = \mathrm{d}(m_i \vec{v}_i) = m_i \, \mathrm{d}\vec{v}_i
$$

- $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，质点系的动量定理

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{I}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{p}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{I}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i \, \mathrm{d}t) = \mathrm{d}\vec{I}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{p}_i = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \mathrm{d}\vec{p}$$

$$\mathrm{d}\vec{I} = \mathrm{d}\vec{p}$$

质点系在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内所受到的合冲量等于质点系的动量的改变量

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{I}_i &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i \, \mathrm{d}t) = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right) \mathrm{d}t = \vec{F} \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i\text{内}} \, \mathrm{d}t + \vec{F}_{i\text{外}} \, \mathrm{d}t) \\
&= {\color{red}\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i\text{内}} \, \mathrm{d}t)} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i\text{外}} \, \mathrm{d}t) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i\text{外}} \, \mathrm{d}t) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{外}}\right) \mathrm{d}t = \vec{F} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- $t_1 \to t_2$ 时间内，第 i 个质点的动量定理

$$
\begin{aligned}
\vec{I}_i &= \Delta \vec{p}_i \\
\vec{I}_i &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i\text{内}} \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i\text{外}} \,\mathrm{d}t \\
\Delta \vec{p}_i &= \vec{p}_{i2} - \vec{p}_{i1} \\
&= m_i \vec{v}_{i2} - m_i \vec{v}_{i1} \\
&= m_i (\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}) \\
&= m_i \Delta \vec{v}_i
\end{aligned}
$$

- $t_1 \to t_2$ 时间内，质点系的动量定理

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i &= \sum_{i=1}^{N} \Delta \vec{p}_i \\
\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i &= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \,\mathrm{d}t = \vec{I} \\
\sum_{i=1}^{N} \Delta \vec{p}_i &= \Delta \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \right) = \Delta \vec{p} \\
\sum_{i=1}^{N} \Delta \vec{p}_i &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{p}_{i2} - \vec{p}_{i1}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i2} - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i1} \\
&= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i &= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i\text{内}} \,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i\text{外}} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i\text{外}} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{外}} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{外}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \,\mathrm{d}t \\
&= \vec{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i &= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \,\mathrm{d}t \\
&= \vec{I}
\end{aligned}
$$

- $t_1 \to t_2$ 时间内，质点系的动量定理

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

质点系在 $t_1 \to t_2$ 时间内所受到的合冲量等于质点系的动量的改变量

- 由于内力总是一对对作用力和反作用力，$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$，所以内力的矢量和永远为零

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i内} = \vec{0}$$

作用力和反作用力总是同时出现同时消失，所以内力的冲量的矢量和永远为零

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i内}\,\mathrm{d}t = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i内}\,\mathrm{d}t = \vec{0}$$

二、质心运动定理

- 一般地假定，质点系由 N 个质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，任意 t 时刻，其位置为 $\vec{r}_i$，则质点系的质心的质量为质点系内所有质点的质量的总和

$$m_C = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

- 质心的位置

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m_C}\vec{r}_i$$

即质点的位置以其质量为权重的平均值

$$x_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, y_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, z_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

- 对于质量连续分布的物体

$$m_C = \int_m \mathrm{d}m$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

$$x_C = \frac{1}{m_C}\int_m x\,\mathrm{d}m$$

$$y_C = \frac{1}{m_C}\int_m y\,\mathrm{d}m$$

$$z_C = \frac{1}{m_C}\int_m z\,\mathrm{d}m$$

- 对于质量均匀分布的规则几何物体，其质心位于其几何中心

- 引入几个密度的概念
  - 线状物体的质量线密度 λ：单位长度的质量
  - 面状物体的质量面密度 σ：单位面积的质量
  - 体状物体的质量体密度 ρ：单位体积的质量
- 不同情况下质元的质量分别表示为

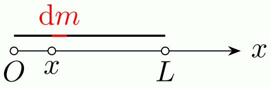
$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}L$$
$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$$
$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

例题

试求一根长为 L、质量为 m 的均匀细棒的质心位置。

解答

以细棒一端为坐标原点，沿细棒方向建立 x 轴。



取细棒上 $x \to x + \mathrm{d}x$ 部分为质点，则其位置为 x，质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x$$

整根细棒的质心位置

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m_C}\int_m x\,\mathrm{d}m \\ &= \frac{1}{m}\int_0^L x\frac{m}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{m}\times\frac{m}{L}\times\frac{1}{2}\left[x^2\right]\Big|_0^L \\ &= \frac{1}{m}\times\frac{m}{L}\times\frac{1}{2}L^2 \\ &= \frac{1}{2}L \end{aligned}$$

均匀细棒的质心位于其中点位置

例题

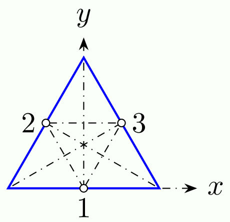
三根完全相同的、长为 L、质量为 m 的均匀细棒围成一个等边三角形，试求其质心位置。

解答

如图建立直角坐标系，则三根细棒的质心位置分别为

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{1}{4}L, \qquad x_3 = \frac{1}{4}L$$

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}L, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}L$$



解答

总的质心位置

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\cdot 0 + m\cdot\left(-\frac{1}{4}L\right) + m\cdot\frac{1}{4}L}{m+m+m} = 0$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\cdot 0 + m\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}L + m\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}L}{m+m+m} = \frac{\sqrt{3}}{6}L$$

例题

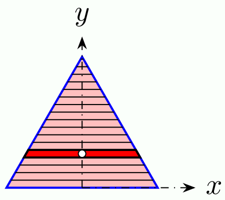
试求边长为 L、质量为 m 的均匀等边三角形面板的质心位置。

解答

将三角形面板看成无数根细棒所组成的。如图建立直角坐标系，取 $y \to y+\mathrm{d}y$ 部分为一细棒，则其质量为

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$$

其质心位置为 $(0, y)$



$$\sigma = \frac{m}{\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L}$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L - y}{\frac{\sqrt{3}}{2}L}L\cdot\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}m = \frac{8m}{3L^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L - y\right)\mathrm{d}y$$

解答

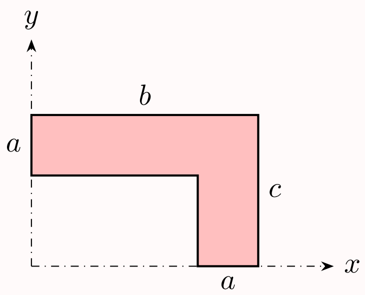
整个三角形面板的质心位置

$$
\begin{aligned}
x_C &= \frac{1}{m_C}\int_m x\,\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} 0\cdot\frac{8m}{3L^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L - y\right)\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_C &= \frac{1}{m_C}\int_m y\,\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} y\cdot\frac{8m}{3L^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L - y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3L^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}Ly^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}L
\end{aligned}
$$

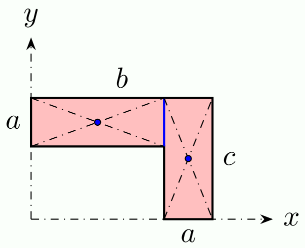
例题

试求如图所示质量均匀的面板的质心位置。



解答

假设面板的质量面密度为 σ。如图，将面板看成两个矩形，则它们的质量分别为



$$m_1 = \sigma a(b-a)$$
$$m_2 = \sigma ac$$

整个面板的质心质量为

$$\begin{aligned} m_C &= m_1 + m_2 \\ &= \sigma[a(b-a+c)] \end{aligned}$$

它们的质心位置分别处于两个矩形的中心，即

$$x_1 = \frac{b-a}{2}, \quad y_1 = c - \frac{a}{2}$$
$$x_2 = b - \frac{a}{2}, \quad y_2 = \frac{c}{2}$$

解答

整个面板的质心位置为

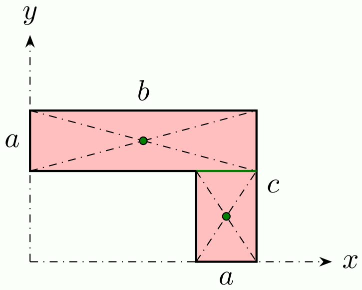
$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_C} = \frac{\sigma a(b-a)\cdot\frac{b-a}{2} + \sigma ac\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}{\sigma[a(b-a+c)]} = \frac{(b-a)^2 + c(2b-a)}{2(b-a+c)} = \frac{a^2+b^2-2ab+2bc-ac}{2(b+c-a)}$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_C} = \frac{\sigma a(b-a)\cdot\left(c-\frac{a}{2}\right) + \sigma ac\cdot\frac{c}{2}}{\sigma[a(b-a+c)]} = \frac{(b-a)(2c-a)+c^2}{2(b-a+c)} = \frac{a^2+c^2-ab-2ac+2bc}{2(b-a+c)}$$

解答

也可以将面板看成如图两个矩形，则它们的质量分别为

$$m_1 = \sigma ab, m_2 = \sigma a(c-a)$$



整个面板的质心质量为

$$m_C = m_1 + m_2 = \sigma[a(b+c-a)]$$

它们的质心位置分别处于两个矩形的中心，即

$$x_1 = \frac{b}{2}, \qquad y_1 = c - \frac{a}{2}$$

$$x_2 = b - \frac{a}{2}, \qquad y_2 = \frac{c-a}{2}$$

解答

整个面板的质心位置为

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_C} = \frac{\sigma ab \cdot \frac{b}{2} + \sigma a(c-a)\cdot\left(b - \frac{a}{2}\right)}{\sigma[a(b+c-a)]} = \frac{b^2 + (c-a)(2b-a)}{2(b+c-a)} = \frac{a^2+b^2-2ab+2bc-ac}{2(b+c-a)}$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_C} = \frac{\sigma ab \cdot \left(c - \frac{a}{2}\right) + \sigma a(c-a)\cdot\frac{c-a}{2}}{\sigma[a(b+c-a)]} = \frac{b(2c-a) + (c-a)^2}{2(b+c-a)} = \frac{a^2+c^2-ab-2ac+2bc}{2(b+c-a)}$$

解答

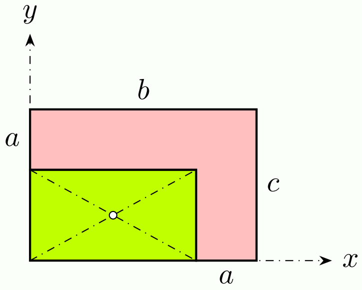
第三种方法：

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_C}$$

$$m_C\vec{r}_C = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

$$m_2\vec{r}_2 = m_C\vec{r}_C - m_1\vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_C\vec{r}_C - m_1\vec{r}_1}{m_2} = \frac{m_C\vec{r}_C + (-m_1)\vec{r}_1}{m_C + (-m_1)}$$



引入一块质量面密度相同的矩形，其尺寸为 $(b-a)\times(c-a)$，则其质量为

$$m_1 = \sigma(b-a)(c-a)$$

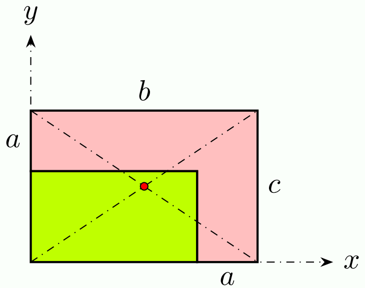
其质心位置为

$$x_1 = \frac{b-a}{2}, y_1 = \frac{c-a}{2}$$

解答

所求面板的质量为 m_2，其质心位置设为 $\vec{r}_2=(x_2,y_2)$。这两个面板组成的系统的质心质量为 $m_C=\sigma bc$，质心位置为

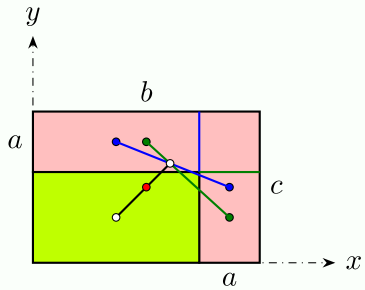
$$x_C=\frac{b}{2},y_C=\frac{c}{2}$$



$$\begin{aligned}
x_2&=\frac{m_Cx_C-m_1x_1}{m_C-m_1}\\
&=\frac{\sigma bc\cdot\frac{b}{2}-\sigma(b-a)(c-a)\cdot\frac{b-a}{2}}{\sigma bc-\sigma(b-a)(c-a)}\\
&=\frac{a^2+b^2-2ab+2bc-ac}{2(b+c-a)}\\
y_2&=\frac{m_Cy_C-m_1y_1}{m_C-m_1}\\
&=\frac{\sigma bc\cdot\frac{c}{2}-\sigma(b-a)(c-a)\cdot\frac{c-a}{2}}{\sigma bc-\sigma(b-a)(c-a)}\\
&=\frac{a^2+c^2-ab-2ac+2bc}{2(b+c-a)}
\end{aligned}$$

解答

由于两个质点组成的质点系的质心必定是两个质点的连线上，所以可以通过画图的方式由两条连线的交点确定所求位置



任意 t 时刻质心的位置

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

质心的速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\int_m \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{v}\,\mathrm{d}m$$

质心的加速度

$$\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

$$\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\int_m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{a}\,\mathrm{d}m$$

任意 t 时刻第 i 个质点

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i内} + \vec{F}_{i外} = m_i \vec{a}_i$$

对质点系内所有 N 个质点求和

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i内} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_C = \frac{1}{m_C} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$m_C \vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = m_C \vec{a}_C$$

质点系的质心运动定理

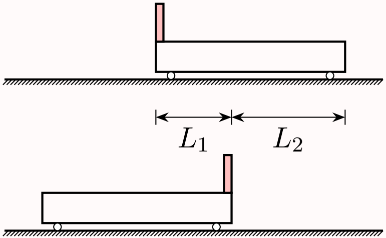
$$\vec{F} = m_C \vec{a}_C$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外}$$

质心所受的合力就是整个质点系中所有质点所受所有外力的矢量和，它等于质心的质量与质心的加速度的乘积

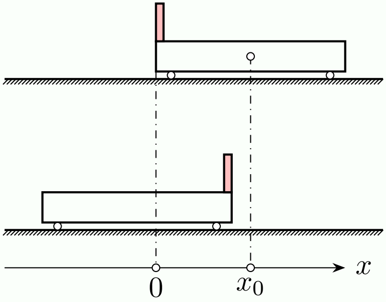
例题

质量为 M、长为 L 的平板小车静止停放在光滑水平地面上，车的一端站着一质量为 m 的人。之后，人从车的一端走到另一端。问从地面上看，人的位移大小和车的位移大小各是多少？



解答

- 以刚开始时人的位置为坐标原点，沿车的方向为 x 轴。
- 依题意，开始时，人在原点，车的质心位置在 x_0。



解答

- 设人走到另一端时，人的位置为 x_1，车的质心位置在 x_2。
- 人的位移大小为

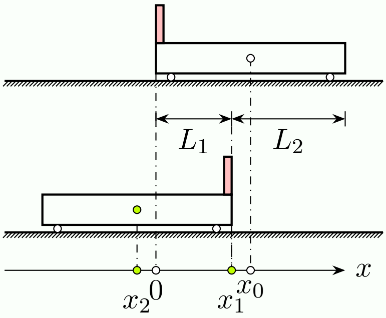
$$L_1 = x_1 - 0 = x_1$$

- 车的位移的大小为

$$L_2 = x_0 - x_2$$

- 车长 L

$$L = L_1 + L_2$$



解答

以人和车为研究对象，由于水平地面光滑，所以系统在水平方向上不受外力作用，且刚开始系统静止，因此在整个过程中，系统的质心静止不动。

开始时的质心

$$x_C = \frac{m \cdot 0 + M \cdot x_0}{m + M}$$

最后的质心

$$x_C = \frac{m \cdot x_1 + M \cdot x_2}{m + M}$$

$$\frac{m \cdot 0 + M \cdot x_0}{m + M} = \frac{m \cdot x_1 + M \cdot x_2}{m + M}$$

$$M(x_0 - x_2) = m x_1$$

$$L_1 = x_1$$

$$L_2 = x_0 - x_2$$

$$M L_2 = m L_1$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$L_1 = \frac{M}{m + M} L$$

$$L_2 = \frac{m}{m + M} L$$

三、质点系相对于质心系的动量

- 以质点系的质心为坐标原点的平动参考系称为质心参考系，简称为质心系
- 一般地假定，质点系由 N 个质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，任意 t 时刻，其速度为 $\vec{v}_i$，质点系的动量为该时刻质点系内所有质点的动量的矢量和

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m_C \vec{v}_C$$

质点系的动量等于质心的动量

从质心系上观察，第 i 个质点的速度

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$$

所以从质心系上观察，质点系的动量

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= \sum_{i=1}^{N} \vec{p}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i = m_C \vec{v}'_C \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_C)\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m_C \vec{v}_C$$

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_C) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{v}_C = m_C \vec{v}_C$$

$$\vec{p}\,' = \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_C) = \vec{0}$$

质点系对质心参考系的动量恒为零

从质心系上观察质心的速度

$$\vec{v}\,'_C = \frac{1}{m_C} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}\,'_i = \vec{0}$$

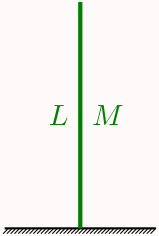
从质心系上观察质心的动量

$$\vec{p}\,'_C = m_C \vec{v}\,'_C = \vec{0}$$

质点系的动量等于质心的动量

例题 3-11

如图所示质量为 M 的均质细软绳，总长为 L，下端恰好与水平地面接触。用手提着绳上端，使绳子处于静止伸直状态，然后松手，绳自由落下。试求绳下落 $l(l < L)$ 长度时，地面所受正压力 N。



解答

- 如果绳子静止悬挂在空中，由于自身重力，各段绳子之间存在相互作用力。
- 如果绳子在空中下落未触地，大家都自由下落，各段绳子之间无相互作用力。
- 如果绳子下落过程中部分已触地，尚在空中部分的绳子内部之间有没有相互作用力？
- 即将落地部分，地面对它有支持力，这个力会不会影响到上面各段绳子？
- 题目提到细软绳，是不是意味着地面的支持力只作用在即将落地的部分而不会影响到其他部分的绳子？
- 注意分析书上解法一的研究对象【根据动量的变化量和冲量来分析】。
- P98“此部分动量被 N_2 在 $\mathrm{d}t$ 内所产生的冲量所平衡”这句话是否合适？
- 动量定理的微分形式是指在 $\mathrm{d}t$ 时间内研究对象所受到的冲量等于该时间内研究对象动量的改变量

解答

【解法一】任意 t 时刻，已有 l 长绳子落在地上，尚在空中部分的绳子的速度大小为 $v=\sqrt{2gl}$。在接下来 $\mathrm{d}t$ 时间内，将有 $v\,\mathrm{d}t$ 长的绳子落到地上。地面受到的正压力 N 来自两部分，已经落地部分绳子的压力 $N_1=m_1g$，即将落地部分绳子的压力 N_2(待求)，即 $N=N_1+N_2$。

以即将落地的绳子为研究对象，在 $t\to t+\mathrm{d}t$ 时间段内，它共受到两个力的作用，竖直向下的重力 $(\mathrm{d}m)g$，竖直向上的地面的支持力 N_2，所以它受到的冲量

$$\mathrm{d}I=[(\mathrm{d}m)g-N_2]\,\mathrm{d}t\approx -N_2\,\mathrm{d}t$$

以向下为正方向，忽略高阶小量

解答

t 时刻，研究对象尚在空中，速度大小为 $v=\sqrt{2gl}$，方向竖直向下；$t+\mathrm{d}t$ 时刻，研究对象落在地上，静止。所以 $t\rightarrow t+\mathrm{d}t$ 时间段内，研究对象动量的改变量 (以向下为正方向)

$$\mathrm{d}p=0-(\mathrm{d}m)v=-(\mathrm{d}m)v$$

动量定理

$$-N_2\,\mathrm{d}t=-(\mathrm{d}m)v$$

$$\mathrm{d}m=\lambda\,\mathrm{d}l=\frac{M}{L}v\,\mathrm{d}t$$

$$N_2=\frac{M}{L}v^2=2\left(\frac{M}{L}l\right)g=2m_1g$$

$$N=N_1+N_2=3m_1g$$

解答

【解法二】以整根绳子为研究对象，以向下为正方向。

- t 时刻，绳子分成两个部分，l 长部分静止在地面上，$L-l$ 长部分尚在空中，速度 $v=\sqrt{2gl}$，所以系统的动量为 $p_1=\frac{L-l}{L}M\sqrt{2gl}$
- $t+\mathrm{d}t$ 时刻，绳子分成两个部分，$l+v\,\mathrm{d}t$ 长部分静止在地面上，$L-l-v\,\mathrm{d}t$ 长部分尚在空中，速度 $v_2=v+g\,\mathrm{d}t$，所以系统的动量为 $p_2=\frac{L-l-v\,\mathrm{d}t}{L}M(v+g\,\mathrm{d}t)$

$t\to t+\mathrm{d}t$ 时间内，系统动量的改变量为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}p &= p_2-p_1\\
&=\frac{L-l-v\,\mathrm{d}t}{L}M(v+g\,\mathrm{d}t)-\frac{L-l}{L}Mv\\
&=\frac{L-l-v\,\mathrm{d}t}{L}Mg\,\mathrm{d}t-\frac{Mv^2\,\mathrm{d}t}{L}\\
&\approx\left(\frac{L-l}{L}Mg-\frac{Mv^2}{L}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

解答

$t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，系统共受到两个力的作用：竖直向下的重力 Mg，竖直向上的地面支持力 N，因此系统受到的冲量为

$$\mathrm{d}I = (Mg - N)\,\mathrm{d}t$$

根据动量定理

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}p$$

$$(Mg - N)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{L-l}{L}Mg - \frac{Mv^2}{L}\right)\mathrm{d}t$$

$$N = Mg - \left(\frac{L-l}{L}Mg - \frac{Mv^2}{L}\right) = 3\frac{l}{L}Mg$$

解答

【解法三】质心运动定理。以整根绳子为研究对象，以地面为坐标原点，竖直向上为 y 轴正方向。系统共受到两个外力的作用：竖直向下的重力 Mg，竖直向上的地面支持力 N，因此质心的加速度

$$a_C = \frac{N - Mg}{M}$$

任意 t 时刻，l 长绳子落在地面上，$L-l$ 长绳子仍在空中，整根绳子的质心位置

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M}$$

$$m_1 = \frac{l}{L} M$$

$$m_2 = \frac{L-l}{L} M$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{L-l}{2}$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M} = \frac{(L-l)^2}{2L}$$

解答

!!! 千万小心!!!

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \qquad (1)$$

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \qquad (2)$$

$$\vec{a}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \qquad (3)$$

(2)、(3) 式是在m_i 不随时间变化的前提下由 (1) 式对时间求导而得到的

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gl}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = g$$

$$y_C = \frac{(L-l)^2}{2L}$$

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}l} \times \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{l-L}{L}\sqrt{2gl} \end{aligned}$$

解答

$$v_C = \frac{l-L}{L}\sqrt{2gl}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{L}\sqrt{2gl} + \frac{l-L}{L}\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{l}}$$

$$= \frac{1}{L}\sqrt{2gl} + \frac{l-L}{L}\sqrt{\frac{g}{2l}}$$

$$a_C = \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}l} \times \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{2gl}{L} + \frac{l-L}{L}g$$

$$= \frac{3l-L}{L}g$$

$$a_C = \frac{N-Mg}{M} = \frac{3l-L}{L}g$$

$$N - Mg = \frac{3l-L}{L}Mg$$

$$N = 3\frac{l}{L}Mg$$

习题 3.7.3

气球下悬软梯，总质量为 m_1，软梯上站一质量为 m_2 的人，共同在气球所受浮力 F 作用下加速上升。若人以相对于软梯的加速度 a_r 上升，问气球的加速度如何？(用质心运动定理和质点系动量定理两种方法)

解答

【方法一】质心运动定理。以向上为正方向，质点系共受两个力作用：竖直向下的重力 $(m_1+m_2)g$，竖直向上的浮力 F，因此质心的加速度

$$a_C=\frac{F-(m_1+m_2)g}{m_1+m_2}$$

而假设气球的加速度为 a，则人的加速度为 $a+a_r$，因此质心的加速度

$$a_C=\frac{m_1a+m_2(a+a_r)}{m_1+m_2}$$

联立以上二式

$$\frac{F-(m_1+m_2)g}{m_1+m_2}=\frac{m_1a+m_2(a+a_r)}{m_1+m_2}$$

$$F-(m_1+m_2)g=m_1a+m_2(a+a_r)$$

$$a=\frac{F-m_2a_r}{m_1+m_2}-g$$

解答

【方法二】质点系动量定理。以向上为正方向，t 时刻，气球的速度为 v_1，人的速度为 v_2，系统的动量

$$p_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$t + \mathrm{d}t$ 时刻，气球的速度为 $v_1 + \mathrm{d}v_1$，人的速度为 $v_2 + \mathrm{d}v_2$，系统的动量

$$p_2 = m_1(v_1 + \mathrm{d}v_1) + m_2(v_2 + \mathrm{d}v_2)$$

$t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，系统共受两个力作用：竖直向下的重力 $(m_1 + m_2)g$，竖直向上的浮力 F，系统受到的冲量

$$\mathrm{d}I = [F - (m_1 + m_2)g]\,\mathrm{d}t$$

质点系动量定理

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}p$$

$$[F - (m_1 + m_2)g]\,\mathrm{d}t = m_1\,\mathrm{d}v_1 + m_2\,\mathrm{d}v_2$$

$$F - (m_1 + m_2)g = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

$$a_2 = a_1 + a_r$$

$$a_1 = \frac{F - m_2 a_r}{m_1 + m_2} - g$$