§4.5 功能原理和机械能守恒定律

- 如果质点系内部质点之间的相互作用力是保守力，称为系统的内保守力，与之对应的势能称为系统的内势能，内势能属于系统内部所有
- 如果质点系内部质点与外界之间的相互作用力是保守力，称为系统的外保守力，与之对应的势能称为系统的外势能，外势能属于系统与外界共有
- 内势能和外势能的总和称为系统的总势能。不加说明时，我们把系统的总势能简称为系统的势能
- 动能和势能之和称为机械能

$$E = E_k + E_p$$

一、质点系的功能原理

质点系的动能定理

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_k$$
$$W = \Delta E_k$$

作用在质点系的所有内力和所有外力的功的总和等于质点系动能的改变量

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \mathrm{d}W_{内非} + \mathrm{d}W_{内保} + \mathrm{d}W_{外非} + \mathrm{d}W_{外保} \\
&= \mathrm{d}W_{非} + \mathrm{d}W_{内保} + \mathrm{d}W_{外保} \\
\mathrm{d}W_{非} &= \mathrm{d}W_{内非} + \mathrm{d}W_{外非} \\
W &= W_{内非} + W_{内保} + W_{外非} + W_{外保} \\
&= W_{非} + W_{内保} + W_{外保} \\
W_{非} &= W_{内非} + W_{外非}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W_{内保} &= -\mathrm{d}E_{内p} \\
\mathrm{d}W_{外保} &= -\mathrm{d}E_{外p} \\
\mathrm{d}W_{内保} + \mathrm{d}W_{外保} &= -\mathrm{d}E_{内p} - \mathrm{d}E_{外p} = -\mathrm{d}E_p \\
W_{内保} &= -\Delta E_{内p} \\
W_{外保} &= -\Delta E_{外p} \\
W_{内保} + W_{外保} &= -\Delta E_{内p} - \Delta E_{外p} = -\Delta E_p
\end{aligned}$$

质点系的功能原理

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_k$$
$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_{\text{非}} + \mathrm{d}W_{\text{内保}} + \mathrm{d}W_{\text{外保}}$$
$$\mathrm{d}W_{\text{内保}} + \mathrm{d}W_{\text{外保}} = -\mathrm{d}E_p$$
$$\mathrm{d}W_{\text{非}} - \mathrm{d}E_p = \mathrm{d}E_k$$
$$\mathrm{d}W_{\text{非}} = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = \mathrm{d}(E_k + E_p) = \mathrm{d}E$$
$$W = \Delta E_k$$
$$W = W_{\text{非}} + W_{\text{内保}} + W_{\text{外保}}$$
$$W_{\text{内保}} + W_{\text{外保}} = -\Delta E_p$$
$$W_{\text{非}} - \Delta E_p = \Delta E_k$$
$$W_{\text{非}} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E$$

$$\mathrm{d}W_{\text{非}} = \mathrm{d}E$$
$$W_{\text{非}} = \Delta E$$

作用在质点系的所有非保守力 (含非保守内力和非保守外力) 的功的总和等于质点系总机械能的改变量

二、质点系的机械能守恒定律

由质点系的功能原理

$$\mathrm{d}W_{\text{非}} = \mathrm{d}E$$
$$W_{\text{非}} = \Delta E$$

如果质点系的机械能守恒，即质点系的机械能不随时间变化，因此

$$\mathrm{d}E = 0, \Delta E = 0$$

因此质点系机械能守恒的条件是

$$\mathrm{d}W_{\text{非}} = 0, W_{\text{非}} = 0$$

P119-120

在一过程中若外非保守力不做功，又每一对内非保守力不做功，则质点系机械能守恒。

$$W_{\text{内非}} = 0, W_{\text{外非}} = 0 \Rightarrow W_{\text{非}} = 0$$
$$W_{\text{非}} = 0 \not\Rightarrow W_{\text{内非}} = 0, W_{\text{外非}} = 0$$

每一对内非保守力不做功 $\Rightarrow W_{\text{内非}} = 0$

$W_{\text{内非}} = 0 \not\Rightarrow$ 每一对内非保守力不做功

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_{\text{非}} + \mathrm{d}W_{\text{内保}} + \mathrm{d}W_{\text{外保}} = \mathrm{d}E_k$$

$$\mathrm{d}W_{\text{内保}} + \mathrm{d}W_{\text{外保}} = -\mathrm{d}E_{\text{内}p} - \mathrm{d}E_{\text{外}p} = -\mathrm{d}E_p$$

$$W = W_{\text{非}} + W_{\text{内保}} + W_{\text{外保}} = \Delta E_k$$

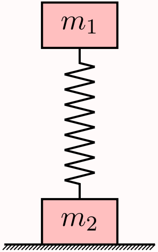
$$W_{\text{内保}} + W_{\text{外保}} = -\Delta E_{\text{内}p} - \Delta E_{\text{外}p} = -\Delta E_p$$

保守力做功，系统的动能和势能互相转换，但不影响系统的机械能

- 保守力做正功，势能转换成动能
- 保守力做负功，动能转换成势能

例题

一轻弹簧与质量为 m_1 和 m_2 的两个物体相连接，如图所示。至少用多大的力向下压 m_1 才能在此力撤除后弹簧把下面的物体带离地面？(弹簧质量不计)



解答

假设以 F 下压，弹簧的劲度系数为 k，则弹簧的压缩量为

$$x_1 = \frac{F + m_1 g}{k}$$

能把 m_2 带离地面，m_1 上升到最高点 (静止) 时，弹簧的伸长量

$$x_2 \geqslant \frac{m_2 g}{k}$$

以 m_1、弹簧、地球为研究系统，从撤除 F 到 m_2 被带离地面的过程，只有重力和弹力做功，系统机械能守恒。以弹簧自然伸展时为重力势能和弹性势能的零点，则有

$$-m_1 g x_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = m_1 g x_2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) = m_1 g(x_2 + x_1)$$

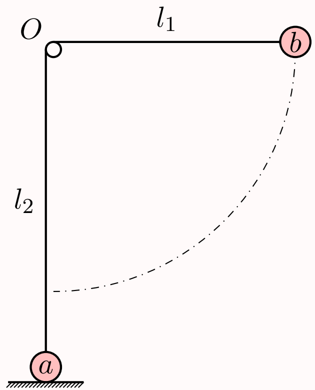
$$k(x_1 - x_2) = 2m_1 g$$

$$2m_1 g \leqslant F + m_1 g - m_2 g$$

$$F \geqslant (m_1 + m_2)g$$

例题

如图所示，一根跨越固定的水平光滑细杆的轻绳，两端各系一个质量为 m 的小球，球 a 置于地面，球 b 被拉到与细杆同一水平的位置。在绳被拉直时放手，使球 b 从静止状态向下摆动。试问球 a 刚要离开地面时，跨过细杆的绳与竖直方向的夹角等于多少？



解答

在 a 离开地面前，b 绕 O 做圆周运动,绳子的拉力始终垂直于 b 的运动轨迹，不做功，因此以 b 和地球组成的系统，机械能守恒。以 b 在水平位置时为重力势能的零点，假定 a 刚要离开地面时绳与竖直方向的夹角为 φ，b 的速度为 v，则有

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl_1\cos\varphi$$

对 b 受力分析，共受到两个力的作用：竖直向下的重力，沿绳子指向 O 的拉力，二者沿绳方向的合力提供 b 做圆周运动的向心力

$$F - mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{l_1}$$

a 刚要离开地面

$$F = mg$$

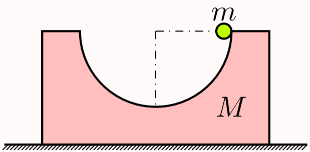
$$mg - mg\cos\varphi = \frac{2mgl_1\cos\varphi}{l_1}$$

$$1 - \cos\varphi = 2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}$$

例题

如图所示，具有半圆柱形凹槽的木块放置在光滑地面上，木块质量为 M，质量为 m 的质点从最高点由静止止下滑，摩擦力忽略不计。试求：(1) 质点下滑至最低点时给木块的压力；(2) 质点在最低点相对地的运动轨迹的曲率半径。



解答

以木块和质点为研究对象，质点下滑过程中，系统水平方向不受力，动量守恒。以地为参考系，以水平向右为正，假定质点下滑至最低点时，质点的速度为 v_1，木块的速度为 v_2，二者方向都在水平方向上，所以有

$$0 = mv_1 + Mv_2$$

解答

以木块、质点和地球为研究对象，质点下滑过程中，只有重力做功【木块与质点之间的作用力做功为零，为什么？】，系统机械能守恒。以初始位置为重力势能的零点，假定圆柱半径为 R，则有

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 - mgR$$

木块与质点之间的作用力对木块和质点做功都不为零。这一对作用力和反作用力的总功等于木块施加给质点的力与质点相对木块的位移的点乘积的积分。木块施加给质点的力沿半径方向指向圆柱的中心，而质点相对木块做圆周运动，因此元位移沿轨道的切线方向，与力的方向垂直。所以这对作用力和反作用力的总功等于零。

解答

由以上二式解得

$$v_2 = -\frac{m}{M}v_1$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v_1^2 = mgR$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}, v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gR}{M(m+M)}}$$

当质点下滑至最低点时，木块与质点之间的相互作用力沿竖直方向，在这瞬间，木块的加速度为零。以木块为参考系，质点相对木块做圆周运动，此瞬间的速度方向向左，大小

$$v' = |v_1 - v_2| = \sqrt{\frac{2(m+M)gR}{M}}$$

解答

对质点受力分析，质点共受到两个力的作用，竖直向下的重力，竖直向上的支持力，这两个力的合力提供质点做圆周运动的向心力

$$N - mg = \frac{m(v')^2}{R}$$

$$\begin{aligned} N &= mg + \frac{m(v')^2}{R} \\ &= mg + \frac{m}{R} \times \frac{2(m+M)gR}{M} \\ &= mg + \frac{2(m+M)}{M} mg \\ &= \frac{2m+3M}{M} mg \end{aligned}$$

根据牛顿第三定律，质点对木块的压力方向竖直向下，大小等于

$$N = \frac{2m+3M}{M} mg$$

解答

以地为参考系，质点受到的力还是竖直向下的重力 mg 和竖直向上的木块的支持力 N，质点相对地的速度为 v_1，因此法向方向的牛顿第二定律

$$F_n = N - mg = m\frac{v_1^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{mv_1^2}{N - mg} = \frac{m}{\frac{2(m+M)}{M}mg} \times \frac{2MgR}{m+M} = \frac{M^2}{(m+M)^2}R$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}$$

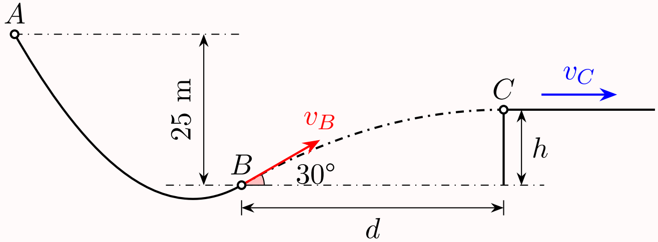
$$v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gR}{M(m+M)}}$$

$$\rho = \frac{M^2}{(m+M)^2}R$$

分析：若 $m \to 0$ 或 $M \to \infty$，则 $\rho = R$，这意味着滑块静止不动，质点相对于地的运动轨迹就是半圆周；若 $m \gg M$，$\rho \to 0$，这是因为质点相对于地面的速度为零静止不动，而一个点的曲率半径为零。【?】

习题 4.5.1

如图所示，滑雪运动员自 A 自由下滑，经 B 越过宽为 d 的横沟到达平台 C 时，其速度 v_C 刚好在水平方向，已知 A、B 两点的垂直高度为 25 m。坡道在 B 点的切线方向与水平面成 30° 角，不计摩擦。求 (1) 运动员离开 B 处的速率 v_B；(2)B、C 的垂直高度差 h 及沟宽 d；(3) 运动员到达平台时的速率 v_C。



解答

以运动员和地球为研究对象，以 B 点为重力势能零点，假定运动员质量为 m。$A \to B$ 过程，只有重力做功，系统机械能守恒

$$mgh_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh_{AB}} = 7\sqrt{10}\ \mathrm{m/s}$$

$$v_C = v_B\cos 30^\circ = \frac{7}{2}\sqrt{30}\ \mathrm{m/s}$$

$A \to B$ 斜抛，

$$v_{Bx} = v_B\cos 30^\circ$$

$$v_{By} = v_B\sin 30^\circ$$

$$v_{By} = gt$$

$$t = \frac{v_{By}}{g}$$

$$h = v_{By}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_{By}^2}{2g} = \frac{h_{AB}}{4} = 6.25\ \mathrm{m}$$

$$d = v_{Bx}t = h_{AB}\sin 60^\circ = 21.65\ \mathrm{m}$$