§6.3 引力势能

对于任意矢量 $\vec{A}$，有

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$$

$$\vec{A}\cdot(\mathrm{d}\vec{A})=(\mathrm{d}\vec{A})\cdot\vec{A}$$

$$\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{A})=(\mathrm{d}\vec{A})\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot(\mathrm{d}\vec{A})=2\vec{A}\cdot(\mathrm{d}\vec{A})$$

$$\mathrm{d}(A^2)=2A\,\mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{A})=\mathrm{d}(A^2)$$

$$2\vec{A}\cdot(\mathrm{d}\vec{A})=2A\,\mathrm{d}A$$

$$\vec{A}\cdot(\mathrm{d}\vec{A})=A\,\mathrm{d}A$$

$$\vec{r}\cdot(\mathrm{d}\vec{r})=r\,\mathrm{d}r$$

两个质量分别为 m_1 和 m_2 的质点，m_1 固定在坐标原点，当 m_2 位于 $\vec{r}$ 处时，m_2 受到 m_1 施加的万有引力

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

当 m_2 发生了 $\mathrm{d}\vec{r}$ 位移时，万有引力对 m_2 所做的功为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \end{aligned}$$

当 m_2 从 $\vec{r}_1$ 处运动到 $\vec{r}_2$ 处的过程中，万有引力对 m_2 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{m_1 m_2}{r^3} r\,\mathrm{d}r \\ &= Gm_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} -\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \end{aligned}$$

这个功只与始末位置有关，与中间经历的具体路径无关，因此万有引力是保守力，可以定义相应的势能，称为万有引力势能。而保守力做功等于相应势能的减少！

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p2}-E_{p1}) = E_{p1}-E_{p2}$$

$$E_{p1} = E_{p2} + Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

如果选择 m_2 位于 $\vec{r}_2$ 时的万有引力势能 $E_{p2}=0$，则 m_2 位于 $\vec{r}_1$ 时的万有引力势能

$$E_{p1}=Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

原则上，万有引力的势能零点 $\vec{r}_2$ 是可以任意选择的，习惯上通常选择 m_1、m_2 相距无穷远 (即 $r_2\to\infty$) 时系统的万有引力势能为零，则 $r_1=r$(即 m_1、m_2 相距 r) 时系统的万有引力势能

$$E_p=-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

如果由两个质点所组成的系统，只存在万有引力作用，则包括万有引力势能在内的系统的机械能守恒。

在地球上发射的物体绕地球飞行做圆周运动所需的最小初始速度，称为第一宇宙速度，也称环绕速度。此时地球施加给物体的万有引力提供物体做圆周运动的向心力

$$G\frac{Mm}{r^2}=\frac{mv_1^2}{r}$$

$$v_1=\sqrt{\frac{GM_E}{R_E}}\approx 7.9\times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

在地球上发射的物体摆脱地球引力束缚，飞离地球所需的最小初始速度，称为第二宇宙速度，也称地球的逃逸速度。过程机械能守恒 (在地球上发射时的机械能等于飞离地球时的机械能)

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{M_Em}{R_E}=\frac{1}{2}mv^2+0\geqslant 0$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}=\sqrt{2}v_1\approx 11.2\times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

在地球上发射的物体摆脱太阳引力束缚，飞出太阳系所需的最小初始速度，称为第三宇宙速度，也称为太阳的逃逸速度。

- 第一步：逃离地球。假定物体从地球上发射时的速率为 v_3，当它摆脱地球束缚时速率为 v_{31}，这个过程，以地球和物体为研究对象，认为系统只受到地球和物体之间的万有引力，则系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv_{31}^2$$

- 第二步：逃离太阳。以太阳和物体为研究对象，这时要选择太阳参考系，要考虑地球经绕太阳的公转。平均日地距离记为 R_{SE}，地球绕太阳的公转周期 $T = 1$ 年，因此地球绕太阳公转的速率

$$v_{32} = \frac{2\pi R_{SE}}{T}$$

- 如果物体脱离地球时的速度方向与地球绕太阳公转的速度方向相同，则在太阳参考系中，物体脱离地球后的速率

$$v_{30} = v_{31} + v_{32}$$

同时，认为物体脱离地球后与太阳的距离为 R_{SE}

- 认为系统只受到太阳和物体之间的万有引力，则系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_{30}^2 - G\frac{M_S m}{R_{SE}} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \geqslant 0$$

$$v_{30} \geqslant \sqrt{2G\frac{M_S}{R_{SE}}}$$

- 太阳质量 $M_S = 1.9891 \times 10^{30}$ kg
- 地球质量 $M_E = 5.9742 \times 10^{24}$ kg
- 日地平均距离 $R_{SE} = 1.496 \times 10^{11}$ m
- 地球平均半径 $R_E = 6.373 \times 10^6$ m
- 万有引力常量 $G = 6.6732 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$

$$v_3 \approx 1.67 \times 10^4\ \mathrm{m/s}$$

习题 6.3.2

已知地球表面的重力加速度为 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，围绕地球的大圆周长为 $4\times10^7\ \mathrm{m}$，月球与地球的直径及质量之比分别是 $\frac{D_{月}}{D_{地}}=0.27$ 和 $\frac{m_{月}}{m_{地}}=0.0123$。试计算从月球表面逃离月球引力场所必需的最小速度。

解答

以物体和月球为研究对象，只考虑月球和物体之间的万有引力，机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{m_{月}m}{R_{月}}=0$$

$$v=\sqrt{2G\frac{m_{月}}{R_{月}}}$$

$$g=G\frac{m_{地}}{R_{地}^2}$$

$$G=g\frac{R_{地}^2}{m_{地}}$$

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{2g\frac{R_{地}^2}{m_{地}}\frac{m_{月}}{R_{月}}}\\&=\sqrt{2R_{地}g\frac{R_{地}}{R_{月}}\frac{m_{月}}{m_{地}}}\\&=\cdots\\&\approx2.38\times10^3\ \mathrm{m/s}\end{aligned}$$