§5.3 质点系对质心的角动量定理和角动量守恒定律

一般地假定，质点系由 N 个质点所组成，第 i 个质点的质量为 m_i。某时刻，m_i 的位置矢量为 $\vec{r}_i$，速度为 $\vec{v}_i$，则该时刻，m_i 对坐标原点的角动量

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

该时刻，整个质点系对坐标原点的角动量

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)]$$

质点系质心的位置

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_i)$$

质点系质心的速度

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{v}_i)$$

其中

$$m_C = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

质心对坐标原点的角动量

$$\vec{L}_C = \vec{r}_C \times \vec{p}_C = \vec{r}_C \times (m_C\vec{v}_C)$$

m_i 相对质心的位置矢量

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_C$$

m_i 相对质心的速度

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$$

m_i 对质心的角动量

$$\vec{L}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i = \vec{r}'_i \times (m_i\vec{v}'_i)$$

整个质点系对质心的角动量

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}'_i = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}'_i \times (m_i\vec{v}'_i)]$$

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_i &= \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \\
&= (\vec{r}_C + \vec{r}\,'_i) \times [m_i(\vec{v}_C + \vec{v}\,'_i)] \\
&= \vec{r}_C \times (m_i \vec{v}_C) + \vec{r}_C \times (m_i \vec{v}\,'_i) + \vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}_C) + \vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}\,'_i)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C \times (m_i \vec{v}_C)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C \times (m_i \vec{v}\,'_i)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}_C)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}\,'_i)]
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C \times (m_i \vec{v}_C)] &= \vec{r}_C \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{v}_C \\
&= \vec{r}_C \times (m_C \vec{v}_C) \\
&= \vec{L}_C
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}\,'_i)] = \vec{L}\,'
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C \times (m_i \vec{v}_C)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C \times (m_i \vec{v}'_i)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}_C)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)] \\
&= \vec{L}_C + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C \times (m_i \vec{v}'_i)] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}_C)] + \vec{L}'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_C \times (m_i\vec{v}'_i)] &= \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^{N}[m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_C)] \\
&= \vec{r}_C \times \left[\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{v}_C)\right] \\
&= \vec{r}_C \times (m_C\vec{v}_C - m_C\vec{v}_C) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}'_i \times (m_i\vec{v}_C)] &= \left[\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}'_i)\right] \times \vec{v}_C = \left\{\sum_{i=1}^{N}[m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_C)]\right\} \times \vec{v}_C \\
&= \left[\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_C)\right] \times \vec{v}_C \\
&= (m_C\vec{r}_C - m_C\vec{r}_C) \times \vec{v}_C \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

$$\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}'$$

质点系对坐标原点的角动量等于质点系质心对坐标原点的角动量与质点系对质心的角动量的矢量和。

- 由于质点系所受外力的矢量和可能不为零，因此质心的加速度可能不为零，所以质心参考系不一定是惯性参考系。
- 动量定理、动能定理、角动量定理都是从牛顿第二定律出发得到的，因此是在惯性参考系下适用的，在质心参考系下不一定满足。
- 在非惯性参考系中，引入惯性力，则牛顿第二定律形式上可以得到满足。

假定某时刻质心的加速度为 $\vec{a}_C$，则在质心参考系中，m_i 受到的力除了真实的外力 $\vec{F}_{i外}$ 和内力 $\vec{F}_{i内}$ 外，还有假想的惯性力 $-m_i\vec{a}_C$，则 m_i 受到的合力

$$\vec{F}'_i = \vec{F}_{i外} + \vec{F}_{i内} - m_i\vec{a}_C$$

所以 m_i 受到的相对质心的力矩

$$\vec{M}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{F}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{F}_{i外} + \vec{r}'_i \times \vec{F}_{i内} - \vec{r}'_i \times (m_i\vec{a}_C)$$

所以整个质点系受到的相对质心的力矩

$$\begin{aligned}
\vec{M}' &= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}'_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}'_i \times \vec{F}_{i外} + \vec{r}'_i \times \vec{F}_{i内} - \vec{r}'_i \times (m_i\vec{a}_C)] \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}'_i \times \vec{F}_{i外}) + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}'_i \times \vec{F}_{i内}) - \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}'_i \times (m_i\vec{a}_C)]
\end{aligned}$$

质点系所有质点所受外力对质心的力矩的矢量和

$$\vec{M}'_{外} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}'_i \times \vec{F}_{i外})$$

质点系所有质点所受内力对质心的力矩的矢量和

$$\vec{M}'_{内} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}'_i \times \vec{F}_{i内})$$

一对作用力和反作用力，大小相等、方向相反，作用线在同一条直线上，因此它们对任意参考点的力矩的矢量和恒等于零。质点系的内力是一对对作用力和反作用力，因此 $\vec{M}'_{内} = \vec{0}$

质点系所有质点所受惯性力对质心的力矩的矢量和

$$\begin{aligned}\vec{M}'_{惯} &= \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}'_i \times (-m_i \vec{a}_C)] \\ &= -\left[\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}'_i)\right] \times \vec{a}_C \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

整个质点系受到的相对质心的力矩等于质点系所有质点所受外力对质心的力矩的矢量和

$$\vec{M}' = \vec{M}'_{外}$$

质心参考系中 m_i 的牛顿第二定律

$$\vec{F}'_i = \vec{F}_{i外} + \vec{F}_{i内} - m_i\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{p}'_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}'_i \times \vec{F}'_i = \vec{r}'_i \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}'_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}'_i \times \vec{v}'_i = \vec{0} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'_i}{\mathrm{d}t} \times \vec{v}'_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'_i}{\mathrm{d}t} \times (m_i\vec{v}'_i) = \vec{0} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'_i}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}'_i$$

$$\vec{r}'_i \times \vec{F}'_i = \vec{r}'_i \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}'_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}'_i}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}'_i = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}'_i \times \vec{p}'_i)}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}'_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'_i}{\mathrm{d}t}$$

质心参考系中，m_i 受到的合力对质心的力矩等于 m_i 对质心的角动量随时间的变化率。

$$\vec{M}'_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'_i}{\mathrm{d}t}$$

上式对质心系中所有质点求和

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}'_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{L}'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{L}'_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}' = \vec{M}'_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}$$

质心参考系中，整个质点系所受到的对质心的力矩 (质点系中所有质点所受到的外力对质心的力矩的矢量和) 等于质点系对质心的角动量随时间的变化率，这就是质点系对质心的角动量定理

当质点系中所有质点所受到的外力对质心的力矩的矢量和为零时，质点系对质心的角动量不随时间变化，即质点系对质心的角动量是个常矢量，这就是质点系对质心的角动量守恒定律。