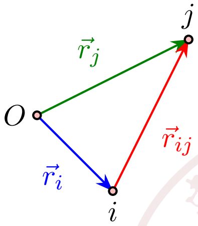
§7.1 刚体运动的描述

- 刚体是在任何情况下形状和大小都不发生变化的力学研究对象的理想模型
- 研究刚体力学时，把刚体分成许多部分，每一部分都小到可以视为质点，称为刚体的“质元”。由于刚体不形变，因此任意两个质元之间的距离保持不变，质元间距离保持不变的质点系称为“不变质点系”。把刚体视为不变质点系并运用已知的质点系的运动规律来研究，是刚体力学的基本方法。

一、刚体的平动

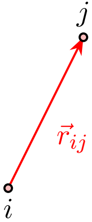
- 刚体最基本的运动形式是平动和绕固定轴的转动。
- 刚体上任意两点所在直线在运动过程中保持平行，这样的运动称为平动。
- 刚体的特点：任意两点之间的距离保持不变。
- 平动的特点：任意两点所在直线在运动过程中保持平行。



$$\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{r}_{ij}$$

$$\vec{v}_j = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_j = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_i$$



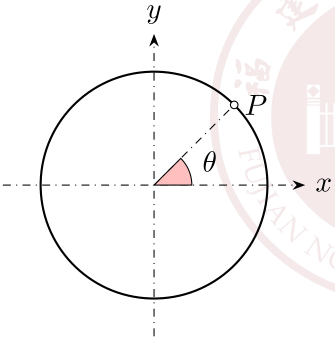
刚体做平动时，$\vec{r}_{ij}$ 是个常矢量。

做平动的刚体，虽然其上各点的位置矢量不同，但各点的速度和加速度相同。

二、刚体绕固定轴的转动

- 若刚体运动时，所有质元都在与某一直线垂直的诸平面上作圆周运动，且圆心在该直线上，则称刚体绕固定轴转动，该直线称为转轴。
- 通常取转轴为 z 轴

质点在 xy 平面内做圆周运动。以圆心为坐标原点，任意时刻质点位于 P 处，质点与原点的连线和 x 轴正方向的夹角 θ【通常逆时针为正，顺时针为负】称为此时质点的角位置 (角坐标)



角位置的改变量称为角位移

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

单位时间的角位移称为平均角速度

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

平均角速度的极限称为 (瞬时) 角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

单位时间角速度的改变量称为平均角加速度

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

平均角加速度的极限称为 (瞬时) 角加速度

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

一般情况下

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha(t)$$

$$\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\,\mathrm{d}t$$

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha\,\mathrm{d}t$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega(t)$$

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{t_0}^{t} \omega\,\mathrm{d}t$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega\,\mathrm{d}t$$

对于匀速圆周运动

$$\omega = \mathrm{C}$$

$$\alpha = 0$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

其中 θ_0 为 $t = 0$ 时刻质点的角位置

对于匀角加速圆周运动

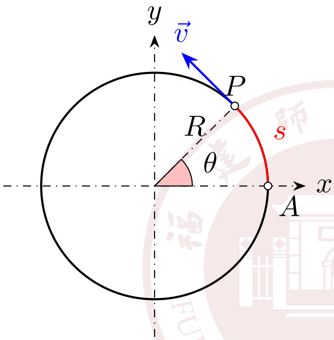
$$\alpha = \mathrm{C}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

其中 θ_0 为 $t = 0$ 时刻质点的角位置，ω_0 为 $t = 0$ 时刻质点的角速度

以圆周和 x 轴的交点 A 为自然坐标系的原点，则质点的线位置为质点所在位置到 A 点的曲线长度



$$s = R\theta$$

圆周运动质点的速度必定沿切向方向

$$v = v_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

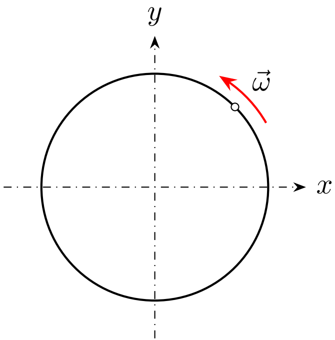
圆周运动质点的加速度既有切向分量，也有法向分量

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R$$

过圆心垂直圆平面的直线【图中即为 z 轴】称为圆周运动的转轴。当质点绕 z 轴逆时针转动时，根据右手定则，我们规定质点的角速度的方向沿 z 轴正方向

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{\mathrm{e}}_z$$



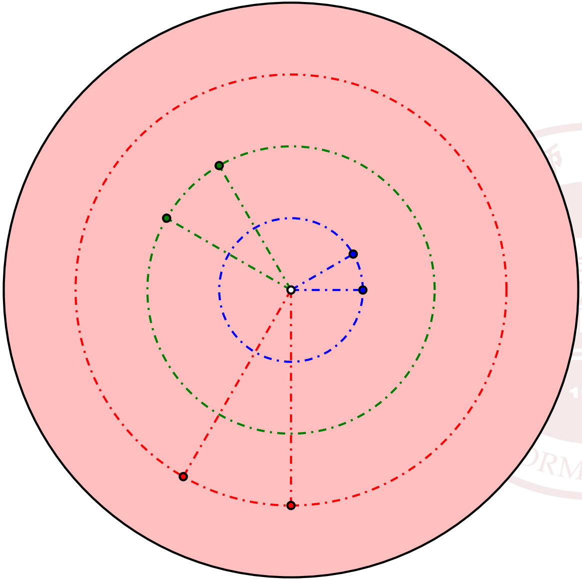
圆周运动各物理量之间的关系

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

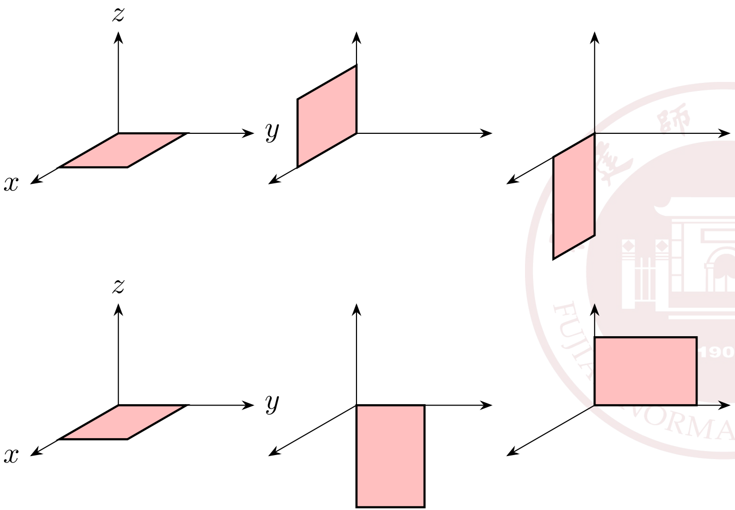
$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r})}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\
&= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})
\end{aligned}$$

- 定轴转动的刚体，与转轴平行的任意直线上所有质元的速度和加速度均相同，不同直线上的质元的速度和加速度各不相同，但它们的角位移、角速度、角加速度却是相同的



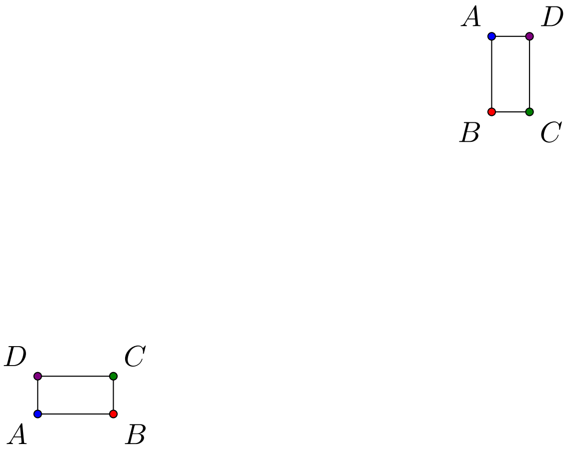
特别注意 P186

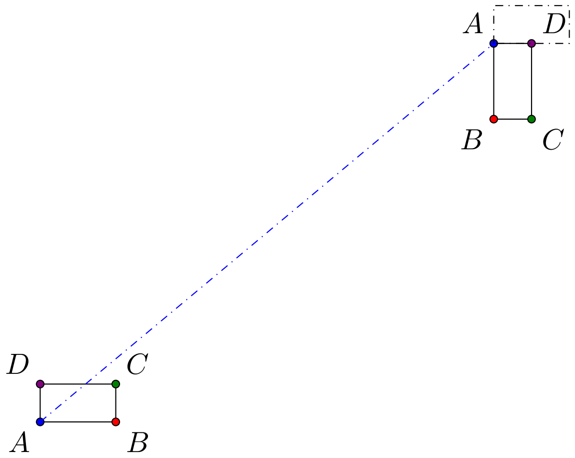
有限大小的角位移不是矢量，无穷小的角位移才是矢量

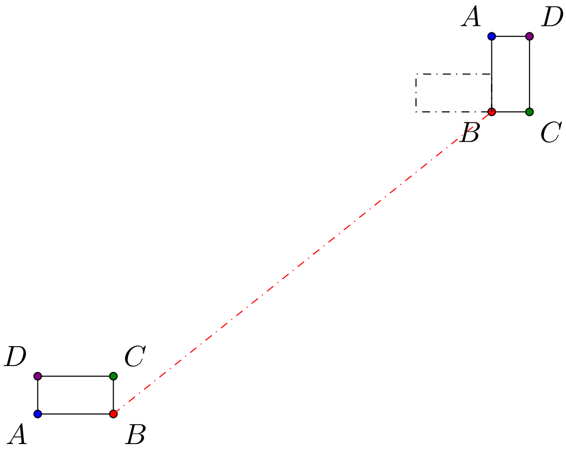


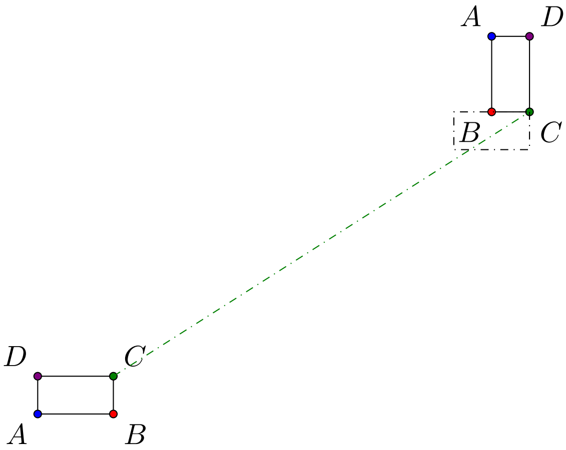
三、刚体的平面运动

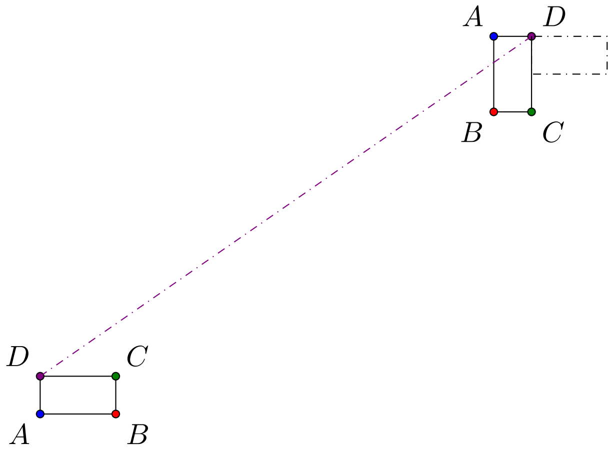
- 刚体上各点均在平面内运动，且这些平面均与一固定平面平行，则称刚体作平面运动，该固定平面称为运动平面
- 平面运动也称为平面平行运动
- 做平面平行运动的刚体，与固定平面垂直的任意直线上各点的运动状况相同
- 如果运动平面上每一点的运动已知，则整个刚体任意一点的运动都已知
- 刚体的平面平行运动可以看成刚体随着某个基点的平动加上刚体绕着该基点的转动
- 原则上，基点是可以任意选择的
- 同一个运动过程，选择不同的基点，基点平动的路径 (位移) 是不同的【所以平动的速度是不同的】，但刚体绕基点转动的方向和角度是相同的【所以转动的角速度是相同的】


A
D
B
C
D
C
A
B


A
D
B
C
D
C
A
B


A
D
B
C
D
C
A
B


A
D
B
C
D
C
A
B


A
D
B
C
D
C
A
B

- 刚体上不同点的速度和加速度是不同的，但角速度和角加速度是相同的；对不同基点，刚体转动的角速度和角加速度也是相同
- 刚体上任一点 A 的速度和加速度等于基点 P 的速度和加速度加上刚体绕基点转动的速度和加速度
- 以 A 为研究对象，选择地面为静止参考系，P 点为平动参考系的坐标原点
- A 对地的运动为绝对运动

$$\vec{r} = \vec{r}_A, \vec{v} = \vec{v}_A, \vec{a} = \vec{a}_A$$

- P 点的运动就是牵连运动

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_P, \vec{v}_0 = \vec{v}_P, \vec{a}_0 = \vec{a}_P$$

- A 相对 P 做圆周运动 (相对运动)

$$\vec{r}' = \vec{r}_{PA}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PA})\end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_A, \vec{v} = \vec{v}_A, \vec{a} = \vec{a}_A$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_P, \vec{v}_0 = \vec{v}_P, \vec{a}_0 = \vec{a}_P$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_{PA}, \vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA}$$

$$\vec{a}' = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PA})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \vec{r}_A = \vec{r}_P + \vec{r}_{PA}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA}$$

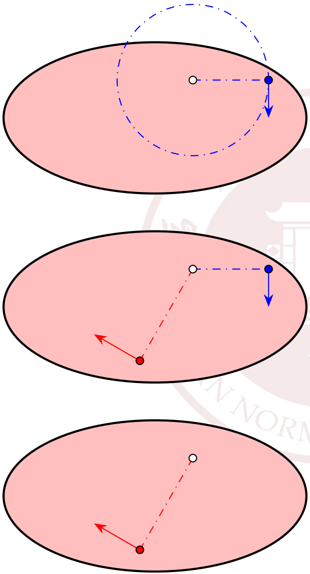
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}', \vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PA})$$

- 当刚体做非平动的平面平行运动时，任意时刻，总存在某个速度为零的点，这个点称为刚体在这个时刻的瞬时转动中心，或称瞬心
- 瞬心可能在刚体上，也可能在刚体外
- 通过瞬心垂直于运动平面的直线称为刚体在这个时刻的瞬时转轴，或称瞬轴
- 其实瞬轴上的每一个点都是瞬心
- 在研究刚体平面平行运动的运动学性质时，通常选择刚体的瞬心作为基点
- 当刚体的接触点与接触面之间无相对滑动时，刚体的运动称为纯滚动
- 当刚体在固定平面上做纯滚动时，接触点即为瞬心

- 瞬心速度为零，刚体上的每一点都绕瞬轴做圆周运动，其速度一定沿以转轴为中心的圆周的切线方向

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA}$$

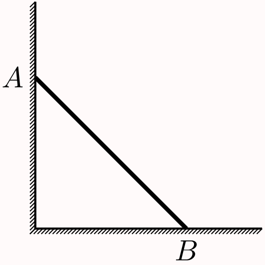
- 如果瞬轴已知，且角速度方向已知，则可以确定任意一点的速度方向
- 如果已知两点的速度方向 (非平行)，则可以确定瞬轴位置
- 如果已知某时刻一点的速度大小 v 和方向以及该时刻刚体转动的角速度大小 ω 和方向，也可以确定瞬轴的位置 $R = \frac{v}{\omega}$



- 某个瞬心只是在某个瞬间速度为零，一般情况下不同时刻的瞬心是不同的点，因此不同时刻的瞬轴也是不同的
- 对于定轴转动，转轴上的点的速度永远为零，它们永远是瞬心，瞬轴就是固定的同一个转轴
- 瞬心只是某个时刻速度为零，上一时刻和下一时刻一般情况下速度并不为零，因此瞬心的加速度一般也不为零
- 在任意时刻，刚体都是绕着该时刻的瞬轴做圆周运动

思考题

梯子靠着墙壁往下滑的过程中瞬心的位置



习题 7.1.2

汽车发动机的转速在 12 s 内由 1200 r/min 增加到 3000 r/min。(1) 假设转动是匀加速转动，求角加速度。(2) 在此时间内，发动机转了多少转？

解答

$$\omega_1 = 1200\ \mathrm{r/min} = 1200 \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{60\ \mathrm{s}} = 40\pi\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega_2 = 3000\ \mathrm{r/min} = 3000 \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{60\ \mathrm{s}} = 100\pi\ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{100\pi - 40\pi}{12} = 5\pi\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 40\pi \times 12 + \frac{1}{2} \times 5\pi \times 12^2 \\ &= 840\pi\ \mathrm{rad} \\ &= 420\ \mathrm{r}\end{aligned}$$

习题 7.1.3

某发动机飞轮在时间间隔 t 内的角位移为

$$\theta = at + bt^3 - ct^4 (\text{单位：}\ \mathrm{rad}, \mathrm{s})$$

求 t 时刻的角速度和角加速度。

解答

$$\theta = at + bt^3 - ct^4$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (a + 3bt^2 - 4ct^3)\ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (6bt - 12ct^2)\ \mathrm{rad/s^2}$$

习题 7.1.4

半径为 $0.1\ \mathrm{m}$ 的圆盘在竖直平面内转动，在圆盘平面内建立 Oxy 坐标系，原点在轴上，x 和 y 轴沿水平和竖直向上的方向。边沿上一点 A 当 $t=0$ 时恰好在 x 轴上，该点的角坐标满足 $\theta = 1.2t + t^2$(单位：rad, s)。求 (1)$t=0$ 时，(2) 自 $t=0$ 开始转 45° 时，(3) 转过 90° 时，A 点的速度和加速度在 x 和 y 轴上的投影。

解答

$$\theta = 1.2t + t^2$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (1.2 + 2t)\ \mathrm{rad/s}$$

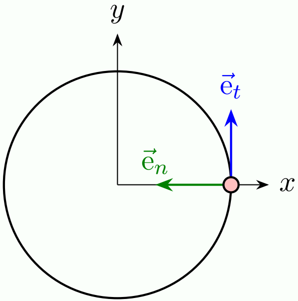
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\ \mathrm{rad/s^2}$$

解答

(1)$t=0$ 时，

$$\theta = 1.2t + t^2 = 0$$
$$\omega = 1.2 + 2t = 1.2\ \mathrm{rad/s}$$
$$\alpha = 2\ \mathrm{rad/s^2}$$
$$r = 0.1\ \mathrm{m}$$
$$v = v_t = \omega r = 0.12\ \mathrm{m/s}$$
$$a_t = \alpha r = 0.2\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_n = \omega^2 r = 0.144\ \mathrm{m/s^2}$$

$$v_x = 0$$
$$v_y = v = 0.12\ \mathrm{m/s}$$
$$a_x = -a_n = -0.144\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_y = a_t = 0.2\ \mathrm{m/s^2}$$



解答

(2) 自 $t=0$ 开始转 $45°$ 时，

$$\theta = 1.2t + t^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 0.6^2} - 0.6 = \cdots \ \mathrm{s}$$

$$\omega = 1.2 + 2t = \cdots \ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha = 2 \ \mathrm{rad/s^2}$$

$$r = 0.1 \ \mathrm{m}$$

$$v = v_t = \omega r = \cdots \ \mathrm{m/s}$$

$$a_t = \alpha r = 0.2 \ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = \omega^2 r = \cdots \ \mathrm{m/s^2}$$

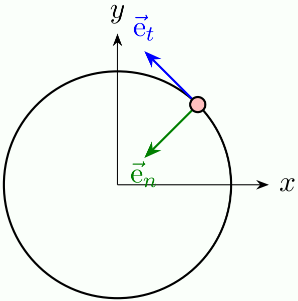
$$\vec{e}_t = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$

$$v_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}v, v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$a_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(a_t + a_n)$$

$$a_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_t - a_n)$$



解答

(3) 转过 90° 时，

$$\theta = 1.2t + t^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 0.6^2} - 0.6 = \cdots \ \mathrm{s}$$

$$\omega = 1.2 + 2t = \cdots \ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha = 2 \ \mathrm{rad/s^2}$$

$$r = 0.1 \ \mathrm{m}$$

$$v = v_t = \omega r = \cdots \ \mathrm{m/s}$$

$$a_t = \alpha r = 0.2 \ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = \omega^2 r = \cdots \ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{\mathrm{e}}_t = -\vec{\mathrm{e}}_x$$

$$\vec{\mathrm{e}}_n = -\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$v_x = -v$$

$$v_y = 0$$

$$a_x = -a_t$$

$$a_y = -a_n$$