

第二章 恒磁场

一、磁的基本现象和基本规律

1 磁的库仑定律

1.1 磁极

- 磁铁中磁性特别强的区域称为磁极
- 使磁铁在水平面内自由转动，指向地球北极方向的一端称为北极 (N)，指向地球南极方向的一端称为南极 (S)
- 同号的磁极互相排斥，异号的磁极互相吸引

1.2 磁荷 (磁单极)

- 一个小磁针可看成一个“磁偶极子”，在它的两端各带有正、负“磁荷”， N 极带正磁荷 $+q_m$ ， S 极带负磁荷 $-q_m$
- “磁偶极子”的“磁偶极矩”为 $\vec{p}_m = q_m \vec{l}$
- “磁荷”总是以“磁偶极子”的形式成对出现，到目前为止，还没发现单独的“磁荷”

1.3 磁的库仑定律

- 假定“磁荷”可以单独存在, 与点电荷类似, 引入理想模型——“点磁荷”
- 在点电荷之间的库仑定律

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

的启发下, 库仑认为: 真空中相距 r 的两个点磁荷 q_{m1} 和 q_{m2} 之间的作用力为

$$F = \frac{q_{m1} q_{m2}}{4\pi \mu_0 r^2}$$

其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 称为真空磁导率

- 在假定磁荷存在的前提下，与电场类似地引入磁场强度 (单位点磁荷受到的磁场力)、磁势等概念

2 电流的磁效应

2.1 奥斯特实验

- 电流可以对磁铁施加作用力
- 磁铁可以对载流导线施加作用力
- 电流和电流之间也有相互作用力
- 磁极或电流在其周围激发磁场，磁场对处于其中的磁极或电流施加作用力

2.2 安培分子环流假说

- 组成磁铁的最小单元 (磁分子) 就是环形电流
- 电子绕核运动和自旋形成分子环流
- 物质磁性的基本来源

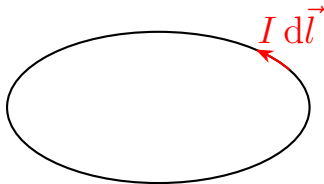
2.3 磁现象的本质

- 运动的电荷之间存在磁相互作用
- 不管电荷静止还是运动, 库仑相互作用都存在
- 只有运动的电荷之间才存在磁相互作用

3 安培定律

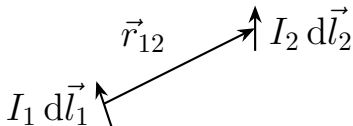
3.1 电流元

- 把载流回路看成由许多无穷小的线元所组成，每一个线元称为电流元
- 一般地假定通过的电流为 I ，线元的长度为 dl ，则电流元表示成 $I d\vec{l}$ ，方向为电流的方向



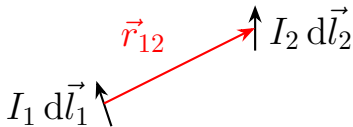
3.2 电流元之间的相互作用力

- 一般地假定两个电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 和 $I_2 d\vec{l}_2$, 两个电流元之间的距离 $r_{12} = r_{21}$, 从 $I_1 d\vec{l}_1$ 指向 $I_2 d\vec{l}_2$ 的矢量 $\vec{r}_{12} = r_{12}\vec{e}_{r_{12}}$



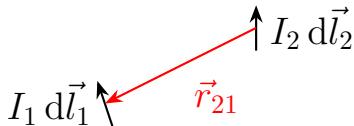
- 电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 施加给电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 的作用力为

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{12}})}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \end{aligned}$$



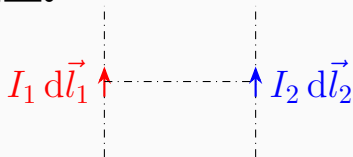
- 电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 施加给电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 的作用力为

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{e}_{r_{21}})}{r_{21}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} \end{aligned}$$



例题

求一对平行电流元之间的相互作用力，二者都与连线垂直。



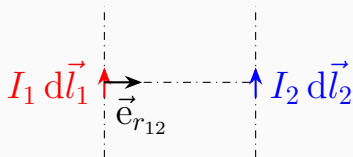
解答

以水平向右为 \vec{e}_x , 竖直向上为 \vec{e}_y , 垂直纸面向外为 \vec{e}_z

$$d\vec{l}_1 = dl_1 \vec{e}_y$$

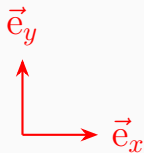
$$d\vec{l}_2 = dl_2 \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{r_{12}} = \vec{e}_x$$



解答

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{12}})}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl_2 \vec{e}_y \times (I_1 dl_1 \vec{e}_y \times \vec{e}_x)}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{12}^2} [\vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times \vec{e}_x)] \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{12}^2} (-\vec{e}_x) \end{aligned}$$



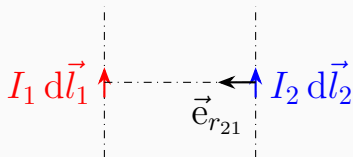
解答

以水平向右为 \vec{e}_x , 竖直向上为 \vec{e}_y , 垂直纸面向外为 \vec{e}_z

$$d\vec{l}_1 = dl_1 \vec{e}_y$$

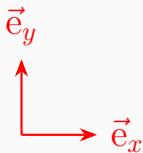
$$d\vec{l}_2 = dl_2 \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{r_{21}} = -\vec{e}_x$$



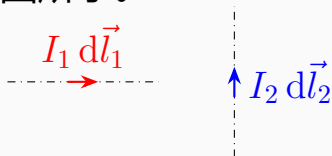
解答

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{e}_{r_{21}})}{r_{21}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \vec{e}_y \times [I_2 dl_2 \vec{e}_y \times (-\vec{e}_x)]}{r_{21}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{21}^2} \{ \vec{e}_y \times [\vec{e}_y \times (-\vec{e}_x)] \} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{21}^2} \vec{e}_x \end{aligned}$$



例题

求一对共面垂直电流元之间的相互作用力，二者方向如图所示。



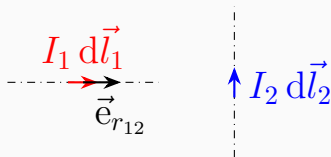
解答

以水平向右为 \vec{e}_x , 竖直向上为 \vec{e}_y , 垂直纸面向外为 \vec{e}_z , 则

$$d\vec{l}_1 = dl_1 \vec{e}_x$$

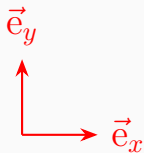
$$d\vec{l}_2 = dl_2 \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{r_{12}} = \vec{e}_x$$



解答

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{12}})}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl_2 \vec{e}_y \times (I_1 dl_1 \vec{e}_x \times \vec{e}_x)}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{12}^2} [\vec{e}_y \times (\vec{e}_x \times \vec{e}_x)] \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$



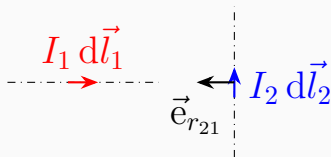
解答

以水平向右为 \vec{e}_x , 竖直向上为 \vec{e}_y , 垂直纸面向外为 \vec{e}_z , 则

$$d\vec{l}_1 = dl_1 \vec{e}_x$$

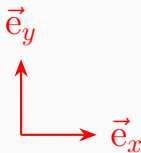
$$d\vec{l}_2 = dl_2 \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{r_{21}} = -\vec{e}_x$$



解答

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{e}_{r_{21}})}{r_{21}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \vec{e}_x \times [I_2 dl_2 \vec{e}_y \times (-\vec{e}_x)]}{r_{21}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{21}^2} \{ \vec{e}_x \times [\vec{e}_y \times (-\vec{e}_x)] \} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r_{21}^2} (-\vec{e}_y) \end{aligned}$$



- 可见，两电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律
- 但可以证明，两个闭合回路的电流之间的相互作用力是满足牛顿第三定律的

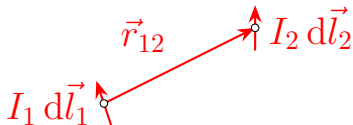
二、毕奥—萨伐尔定律

1 磁感应强度

- 电流与电流之间的相互作用是通过磁场进行的，电流在空间中激发磁场，磁场对处于其中的电流施加力的作用

1.1 安培定律

$$\begin{aligned}d\vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{12}})}{r_{12}^2} \\&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \\&= I_2 d\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)\end{aligned}$$

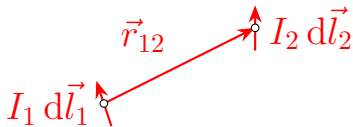


- $I_1 d\vec{l}_1$ 在其周围空间中激发磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$I_2 d\vec{l}_2$ 在磁场中受到磁场力

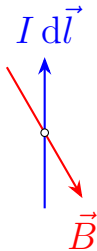
$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}$$



- 更一般地, 空间某点的磁场为 \vec{B} , 如果有一试探电流元 $I d\vec{l}$ 置于该处, 则它受到的磁场力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

这个力与电流元放置的方向有关



1.2 磁场力的大小

$$dF = BI \, dl \sin \theta$$

- 当 $\theta = 0$ 或 π 时, $dF = 0$, 即电流元的方向与磁场的方向相同或相反时, 电流元受力为零
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 力为最大值

$$(dF)_{\max} = BI \, dl$$

- 原则上可以通过试探电流元在某处所受的磁场力来定义该处的磁感应强度

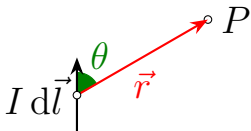
$$B = \frac{(dF)_{\max}}{I \, dl}$$

2 毕奥——萨伐尔定律

2.1 电流元的磁场

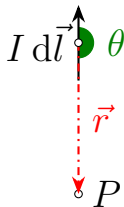
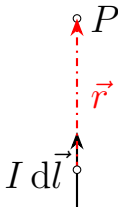
- 任意一个闭合载流回路 L 总可以看成由许多电流元所组成
- 对于其中任意一个电流元 $I d\vec{l}$, 它在空间中某点 (场点) 所激发的磁场的磁感应强度为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



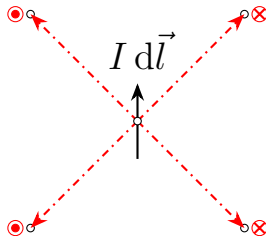
- $\theta = 0$ 或 π

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \vec{0}$$



- 在其右侧的场点，磁场的方向垂直纸面向里，在其左侧的场点，磁场的方向垂直纸面向外

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



2.2 任意载流回路的磁场

- 任意一个载流回路 L 总可以看成由许多电流元所组成
- 电流元的磁场

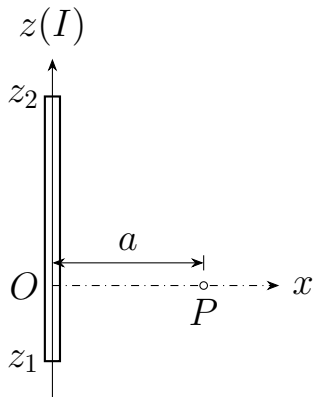
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

- 叠加原理

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

2.3 载流直导线的磁场

- 以载流直导线所在直线为 z 轴，电流方向为 z 轴正方向，假定场点在 $(a, 0, 0)$ 处，则 y 轴正方向垂直纸面向里

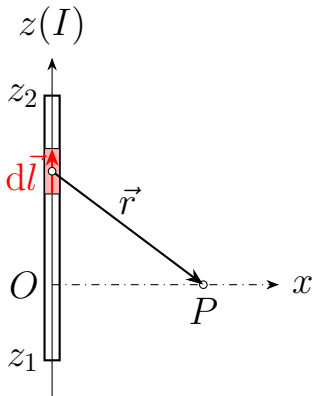


- 取 $z \rightarrow z + dz$ 段导线为电流元, 则

$$d\vec{l} = dz \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = a \vec{e}_x - z \vec{e}_z$$

$$r = \sqrt{a^2 + z^2}$$



- 一般地假定导线中的电流为 I ，则该电流元在 P 点的磁场为

$$\begin{aligned}
 d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \vec{e}_z \times (a \vec{e}_x - z \vec{e}_z)}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

- 整根载流导线在 P 点的磁场为

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y \\ &= \vec{e}_y \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

磁场的方向与电流的方向成右手螺旋关系：大姆指指向电流的方向，四个手指的绕向即为磁场的方向

- 根据积分公式 (高数上册 P376(32))

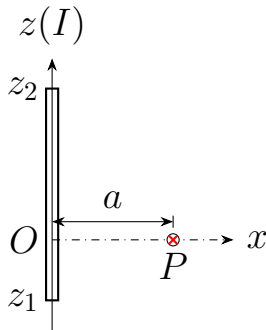
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

可得

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left[\frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \bigg|_{z_1}^{z_2} \\ &= \frac{z_2}{a^2 \sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{a^2 \sqrt{a^2 + z_1^2}} \end{aligned}$$

- 载流直导线的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{z_2}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \right] \vec{e}_y$$



- 如果导线无限长, 即 $z_1 \rightarrow -\infty, z_2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{z_2}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{z_2^2} + 1}} - \frac{-1}{\sqrt{\frac{a^2}{z_1^2} + 1}} \right] \\ &\rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [1 - (-1)] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \end{aligned}$$

- 如果导线半无限长，而且场点和一端平行 ($z_1 = 0, z_2 \rightarrow \infty$)

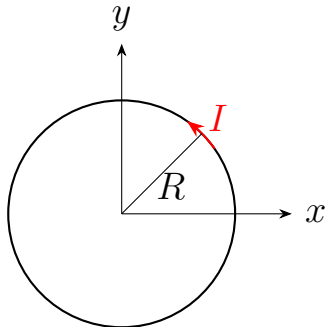
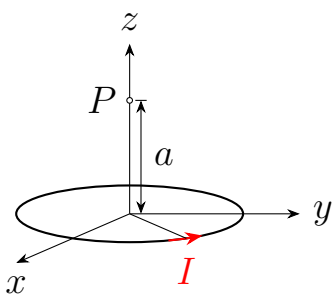
$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{z_2}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{z_2^2} + 1}} - \frac{0}{\sqrt{a^2 + 0}} \right] \\
 &\rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [1 - 0] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}
 \end{aligned}$$

- 如果导线半无限长，而且场点和一端平行 ($z_1 \rightarrow -\infty, z_2 = 0$)

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{z_2}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{0}{\sqrt{a^2 + 0}} - \frac{-1}{\sqrt{\frac{a^2}{z_1^2} + 1}} \right] \\
 &\rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [0 - (-1)] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}
 \end{aligned}$$

2.4 载流圆线圈轴线上的磁场

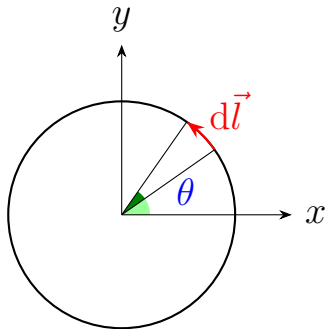
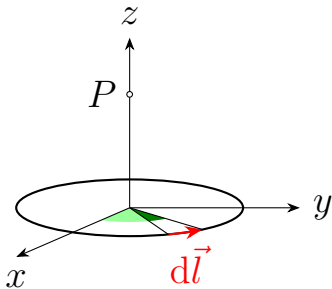
- 一般地假定载流线圈中的电流为 I ，线圈半径为 R 。以线圈圆心为坐标原点，线圈平面为 xy 平面。场点坐标一般地设为 $(0, 0, a)$



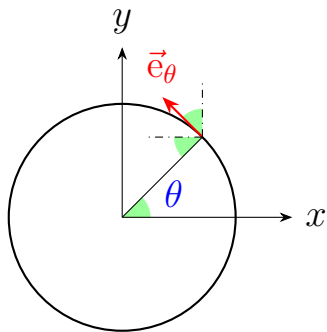
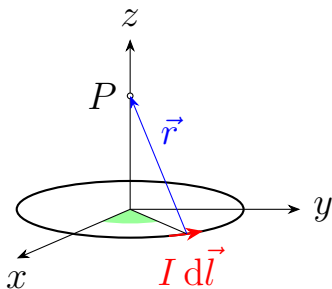
- 取 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 部分为电流元, 则

$$dl = R d\theta$$

$$d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta$$



$$\begin{aligned}\vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \vec{r} &= a \vec{e}_z - R(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\ r &= \sqrt{R^2 + a^2}\end{aligned}$$



- $I d\vec{l}$ 在 P 点激发的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\theta \vec{e}_\theta \times \vec{r}}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I R d\theta}{4\pi (R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\theta \times \vec{r} \end{aligned}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{r} = a \vec{e}_z - R(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_\theta \times \vec{r} &= a \sin \theta \vec{e}_y + a \cos \theta \vec{e}_x + (R \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta) \vec{e}_z \\ &= a \cos \theta \vec{e}_x + a \sin \theta \vec{e}_y + R \vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I R d\theta}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\theta \times \vec{r} \\ &= \frac{\mu_0 I R d\theta}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} [a \cos \theta \vec{e}_x + a \sin \theta \vec{e}_y + R \vec{e}_z] \\ &= (dB_x) \vec{e}_x + (dB_y) \vec{e}_y + (dB_z) \vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I R d\theta}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} [a \cos \theta \vec{e}_x + a \sin \theta \vec{e}_y + R \vec{e}_z] \\
&= (dB_x) \vec{e}_x + (dB_y) \vec{e}_y + (dB_z) \vec{e}_z \\
dB_x &= \frac{\mu_0 I R a}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \theta d\theta \\
dB_y &= \frac{\mu_0 I R a}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta \\
dB_z &= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta
\end{aligned}$$

- 整个载流圆线圈在 P 点总的磁场为

$$B_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R a}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \theta \, d\theta = 0$$

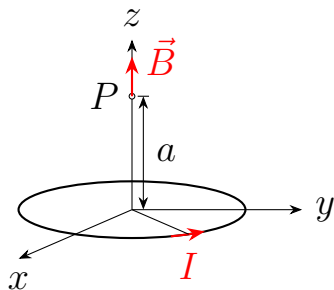
$$B_y = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R a}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta \, d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} B_z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \times 2\pi \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

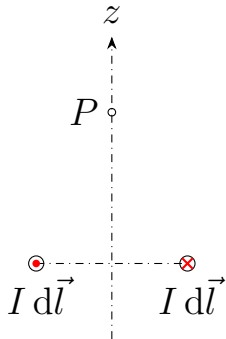
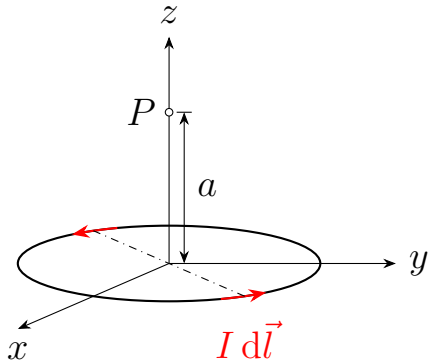
- 整个载流圆线圈在 P 点总的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

磁场方向和电流方向成右手螺旋关系：四个手指沿电流流动的方向，大姆指沿磁场方向

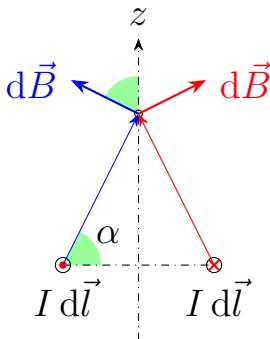


- 关于线圈圆心对称地取两个电流元



- 这两个电流元在 P 点的磁场之和沿 z 轴方向, 大小为

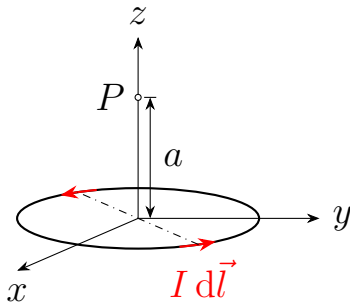
$$\begin{aligned}
 2 \times d\vec{B} \times \cos \alpha &= 2 \times \frac{\mu_0 I R d\theta}{4\pi(R^2 + a^2)} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \\
 &= \frac{\mu_0 I R^2 d\theta}{2\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$



- 整个载流圆线圈在 P 点总的磁场为

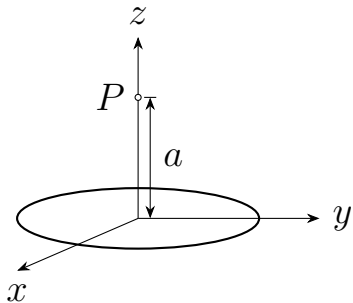
$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I R^2 d\theta}{2\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$



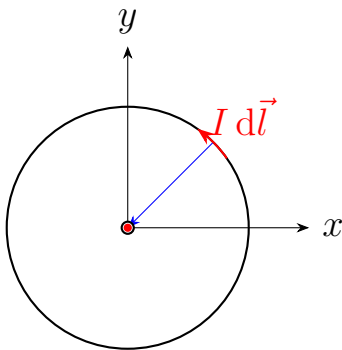
- 在线圈圆心处, $a = 0$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R} \end{aligned}$$



- 在线圈圆心处

$$\begin{aligned}d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\&= \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} \vec{e}_z \\B &= \oint_L \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} \\&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint_L dl \\&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \times 2\pi R \\&= \frac{\mu_0 I}{2R}\end{aligned}$$

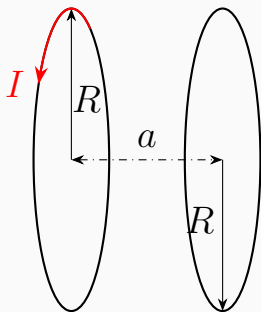


- 如果场点远离线圈, 即 $a \gg R$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3 \left(\frac{R^2}{a^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\rightarrow \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3} \end{aligned}$$

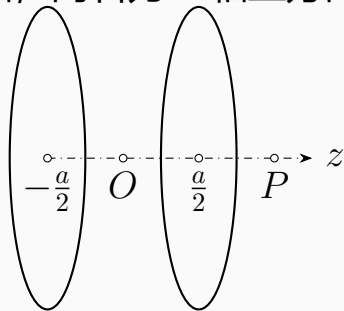
例题

一对相同的圆形线圈，彼此平行且共轴。设两线圈内的电流都是 I ，且回绕方向一致，线圈的半径为 R ，二者的间距为 a 。求轴线上的磁场分布。如果 $a = R$ ，这对圆线圈称为亥姆霍兹线圈。



解答

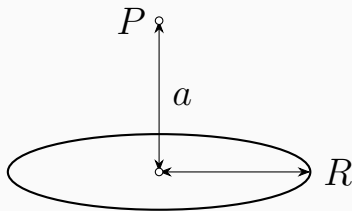
以两线圈圆心连线中点 O 为坐标原点, 沿轴线为 z 轴, 向右为 z 轴正方向



解答

根据载流圆线圈在轴线上的磁场

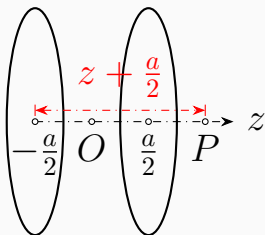
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$



解答

左侧线圈在 P 点的磁场

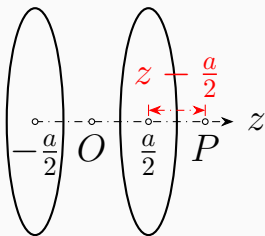
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[R^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$



解答

右侧线圈在 P 点的磁场

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[R^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$



解答

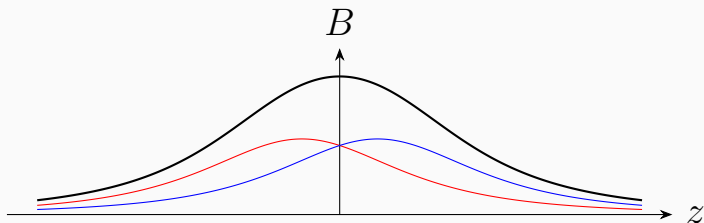
P 点的总磁场

$$B = B_1 + B_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[R^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[R^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R} \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{a}{2R} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{a}{2R} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

解答

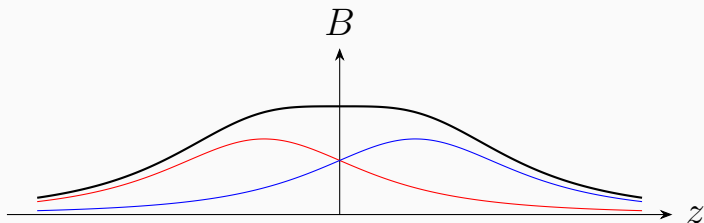
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{a}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{a}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$



$$a = \frac{1}{2}R$$

解答

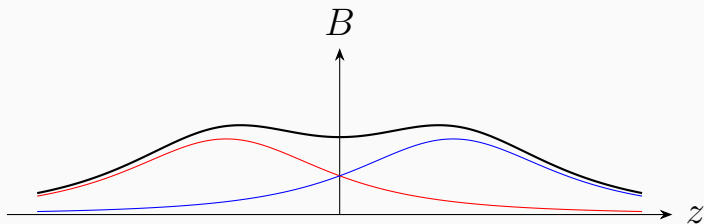
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{a}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{a}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$



$$a = R$$

解答

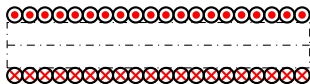
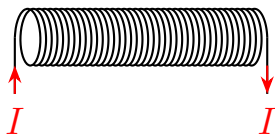
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{a}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{a}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$



$$a = \frac{3}{2}R$$

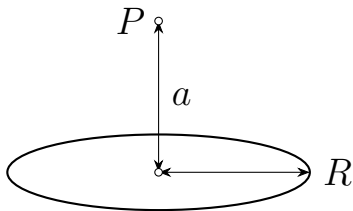
2.5 螺线管轴线上的磁场

- 绕在圆柱面上的螺线形线圈称为螺线管
- 忽略导线的直径且认为导线是一匝紧挨着一匝密绕的
- 当导线中通有电流时，可以近似看成电流在圆筒表面沿环向流动
- 一般地假定螺线管长度为 L ，总匝数为 N ，则单位长度的匝数为 $n = \frac{N}{L}$
- 导线中的电流为 I ，螺线管的半径为 R
- 将螺线管电流看成由很多载流圆环所组成



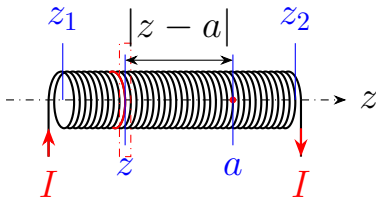
- 根据载流圆线圈在轴线上的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$



- 以螺线管轴线为 z 轴，取 $z \rightarrow z + dz$ 部分为载流圆圈，则其中的电流

$$dI = I(n dz)$$



- 场点坐标 $(0, 0, a)$
- dI 在场点的磁场

$$dB = \frac{\mu_0(dI)R^2}{2[R^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

- 整个螺线管在场点 $(0, 0, a)$ 处的磁场

$$\begin{aligned} B &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu_0(dI)R^2}{2[R^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{N\mu_0IR^2}{2L} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{[R^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

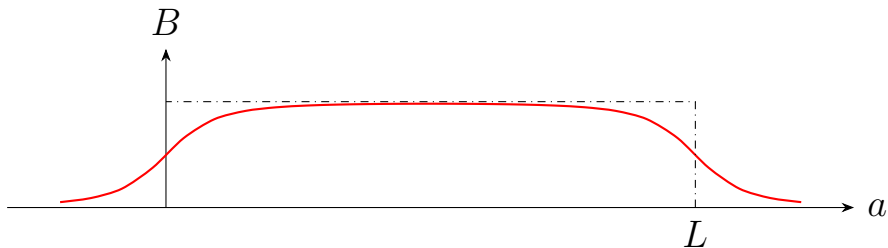
高数上册 P376(32)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{[R^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{z_2 - a}{R^2 \sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{R^2 \sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \\ &= \frac{1}{R^2} \left[\frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{[R^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{1}{R^2} \left[\frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right] \\
 B &= \frac{N\mu_0 IR^2}{2L} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{[R^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{N\mu_0 I}{2L} \left[\frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2L} \left[\frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right]$$



$$z_1 = 0, z_2 = L = 10R$$

- 对于无限长螺线管, $z_1 \rightarrow -\infty$ 、 $z_2 \rightarrow \infty$, $n = \frac{N}{L}$ 为有限值

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2L} \left[\frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right]$$

$$\rightarrow \mu_0 n I$$

- 对于半无限长的一端, $z_1 \rightarrow -\infty$ 、 $z_2 = a$ 或者 $z_1 = a$ 、 $z_2 \rightarrow \infty$

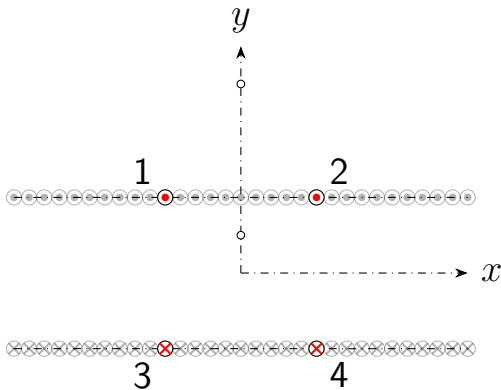
$$B = \frac{N\mu_0 I}{2L} \left[\frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right]$$

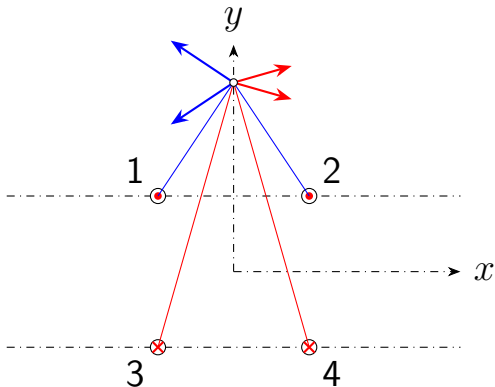
$$\rightarrow \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

- 对于实际的螺线管，若 $L \gg R$ ，忽略边缘效应，则可近似视为无限长螺线管
- 以上结果只是说明了无限长螺线管的轴线上磁场处处相等，并不能说明螺线管内磁场处处相等

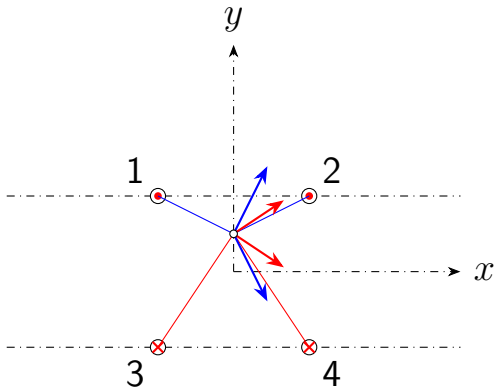
2.6 螺线管非轴线上磁场

- 相对场点对称地取四个电流元，由图可以定性地得到，四个电流元的总磁场的方向与螺线管的轴线平行

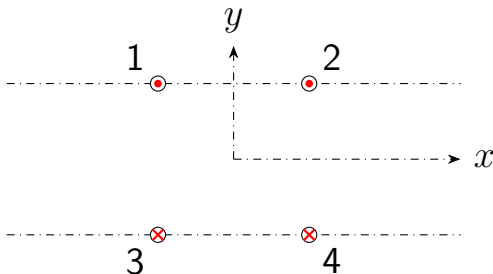




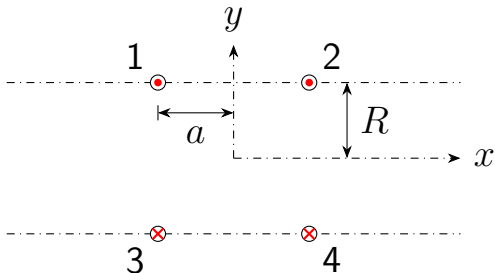
对于螺线管外的场点，上两个电流元 (1 和 2) 的合磁场方向与下两个电流元 (3 和 4) 的合磁场方向相反，总磁场减弱



对于螺线管内的场点，上两个电流元 (1 和 2) 的合磁场方向与下两个电流元 (3 和 4) 的合磁场方向相同，总磁场增强



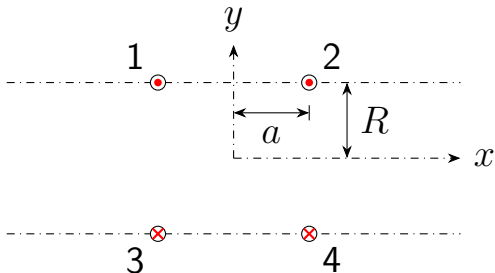
以四个电流元所在平面为 xy 平面，场点在 yz 平面 (水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，垂直纸面向外为 z 轴正方向)，一般地假定，场点位置 $(0, y, z)$



$$I_1 d\vec{l}_1 = I dl \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_1 = a \vec{e}_x + (y - R) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

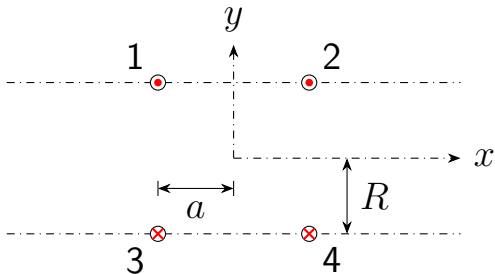
$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_1}{r_1^3}$$



$$I_2 d\vec{l}_2 = I dl \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_2 = -a \vec{e}_x + (y - R) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

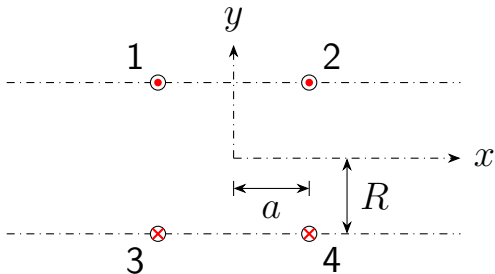
$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_2}{r_2^3}$$



$$I_3 d\vec{l}_3 = I d\vec{l}(-\vec{e}_z)$$

$$\vec{r}_3 = a\vec{e}_x + (y + R)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_3 d\vec{l}_3 \times \vec{r}_3}{r_3^3}$$



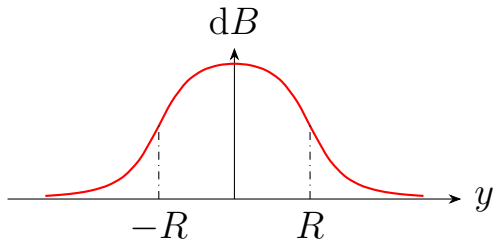
$$I_4 d\vec{l}_4 = I d\vec{l}(-\vec{e}_z)$$

$$\vec{r}_4 = -a\vec{e}_x + (y+R)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

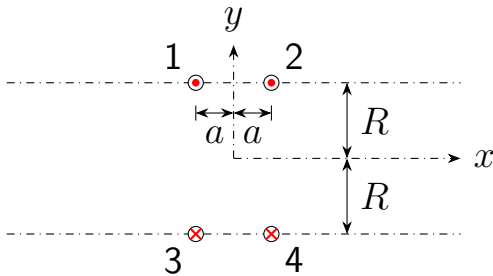
$$d\vec{B}_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_4 d\vec{l}_4 \times \vec{r}_4}{r_4^3}$$

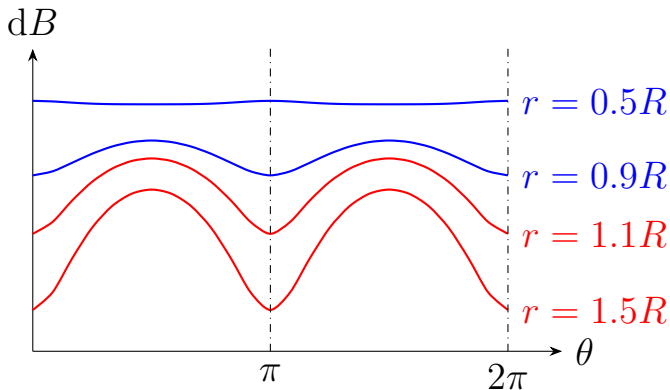
四个电流元总的磁场

$$\begin{aligned}d\vec{B} &= d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 + d\vec{B}_3 + d\vec{B}_4 \\&= \frac{\mu_0 I dl}{2\pi} \left\{ \frac{y+R}{[a^2 + (y+R)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y-R}{[a^2 + (y-R)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \vec{e}_x\end{aligned}$$



$$a = 0.5R, \quad z = 0$$

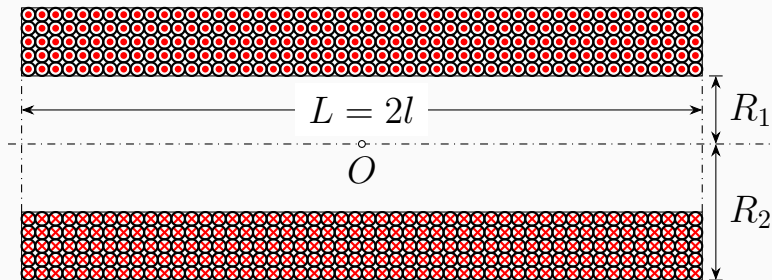




$$a = 0.5R, \quad y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

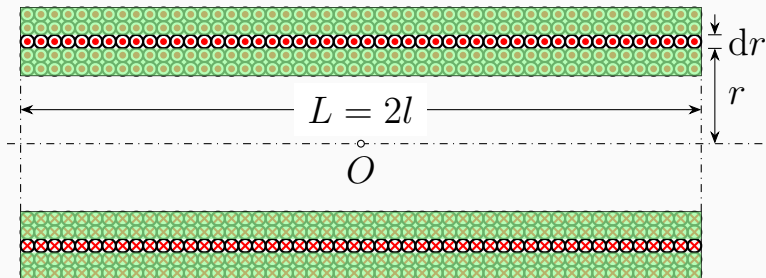
例题

一多层密绕螺线管的内半径为 R_1 , 外半径为 R_2 , 长 $L = 2l$ 。设总匝数为 N , 导线中通过的电流为 I , 求这螺线管中心 O 的磁感应强度。



解答

单位横截面积的匝数为 $n = \frac{N}{L(R_2 - R_1)}$ 。将多层密绕螺线管看成由很多螺线管组成的，取 $r \rightarrow r + dr$ 部分，则这部分螺线管的总匝数 $dN = nL dr$



螺线管轴线上的磁场

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2L} \left\{ \frac{z_2 - a}{\sqrt{R^2 + (z_2 - a)^2}} - \frac{z_1 - a}{\sqrt{R^2 + (z_1 - a)^2}} \right\}$$

$$dN = nL dr, \quad R = r, \quad a = 0, \quad z_1 = -l, \quad z_2 = l$$

$$\begin{aligned} dB &= \frac{(dN)\mu_0 I}{2L} \left\{ \frac{l - 0}{\sqrt{r^2 + (l - 0)^2}} - \frac{-l - 0}{\sqrt{r^2 + (-l - 0)^2}} \right\} \\ &= \frac{(NL dr)\mu_0 I}{L^2(R_2 - R_1)} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \\ &= \frac{N\mu_0 I}{2(R_2 - R_1)} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} \end{aligned}$$

解答

整个多层密绕螺线管在 O 点激发的磁场

$$\begin{aligned} B &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{N\mu_0 I}{2(R_2 - R_1)} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} \\ &= \frac{N\mu_0 I}{2(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} \end{aligned}$$

解答

高数上册 P376(31)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} \\ &= \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + l^2} \right) \right] \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + l^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + l^2}} \end{aligned}$$

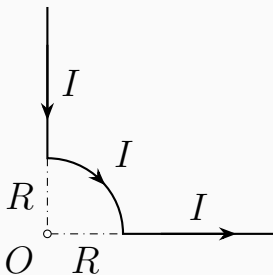
解答

$$\begin{aligned} A &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} \\ &= \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + l^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + l^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{N\mu_0 I}{2(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} \\ &= \frac{N\mu_0 I}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + l^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + l^2}} \end{aligned}$$

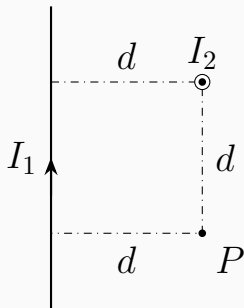
作业

- P117[2-1] 如图所示，一条无限长直导线在一处弯折成 $1/4$ 圆弧，圆弧的半径为 R ，圆心在 O ，直线的延长线都通过圆心。已知导线中的电流为 I ，求 O 点的磁感应强度。



作业

- P117[2-4] 如图，两根无限长直线载流导线垂直而不相交，其间最近距离为 $d = 2\text{ cm}$ ，电流分别为 $I_1 = 4\text{ A}$ 和 $I_2 = 6\text{ A}$ ， P 点到两导线的距离都是 d ，求 P 点的磁感应强度 B 。



三、安培环路定理

1 磁感应线

- 电场中可以用电场线来描述电场的分布，磁场中可以用磁感应线来描述磁场的分布
- 电场中任意一点的电场线的切线方向表示该处电场强度的方向，磁场中任意一点磁感应线的切线方向表示该处磁感应强度的方向
- 电场线是从正电荷或无穷远处出发，终止于负电荷或无穷远处，所以有四种情况：
 - 正电荷指向负电荷
 - 正电荷指向无穷远
 - 无穷远指向负电荷
 - 无穷远指向无穷远

电场线不相交不闭合；磁感应线是一组闭合的曲线，当然它也是不相交的

- 常见磁场的磁感应线
- 无限长载流直导线的磁感应线

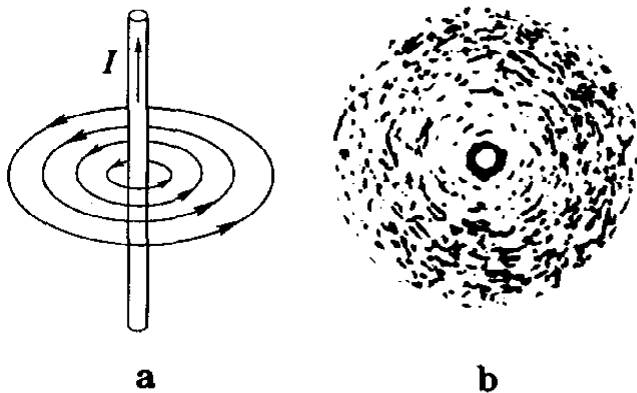


图 2 - 19 长直导线的磁感应线

- 载流圆线圈的磁感应线

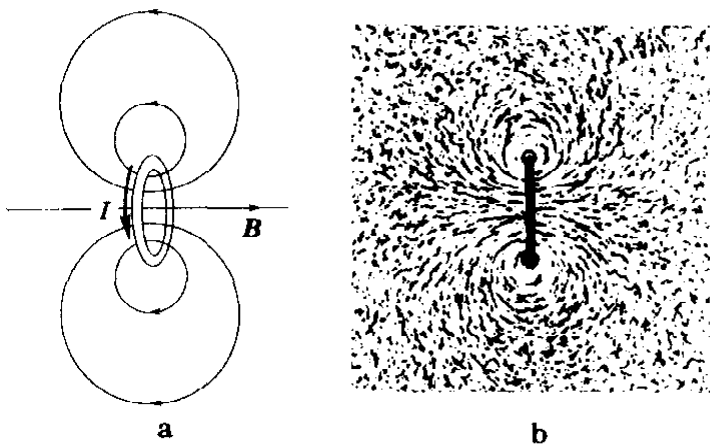


图 2 - 22 圆线圈的磁感应线

- 螺线管的磁感应线

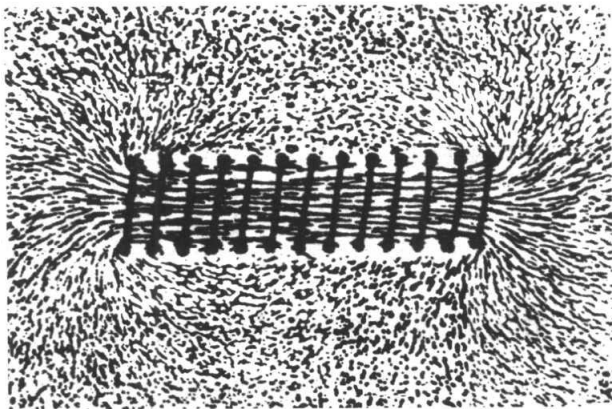


图 2 - 28 螺线管的磁感应线

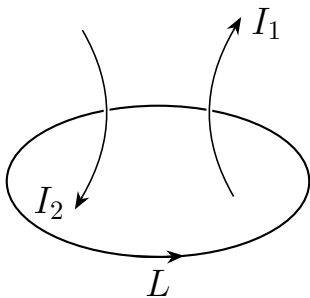
2 安培环路定理

- 磁感应强度沿任意闭合环路 L (安培环路) 的线积分等于穿过该环路所有电流的代数和与真空磁导率的乘积

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

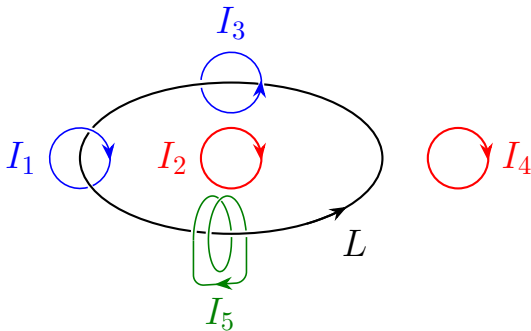
- 如果电流的方向与安培环路 L 的绕向满足右手关系则为正, 否则为负
- \vec{B} 是所有电流在 $d\vec{l}$ 处产生的总磁场
- $\sum I$ 仅仅是穿过 L 的电流

- 电流方向与积分路径 L 的绕向成右手螺旋关系时为正，否则为负。图中 I_1 为正， I_2 为负



- 只有与回路相铰链的电流，才算被回路所包围的电流。图中 I_2 、 I_4 与 L 无铰链，没有被 L 包围， I_5 与 L 铰链了 2 次

$$\sum I = -I_1 + I_3 - 2I_5$$

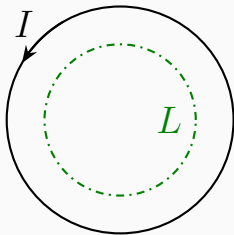


- 安培环路定理本身对于电流的分布没有任何要求，也就是说对于任意分布的电流，选择任意形状的安培环路，安培环路定理都成立
- 但要用它来计算磁场时，通常要求在所选择的安培环路上，所有点的磁感应强度大小相等，方向与环路夹角相同（最好为零或 π ），即使不能整个环路上所有点一样，也至少要求是分段相同
- 这样选择安培环路的目的是能够很方便地表示出磁感应强度沿安培环路的积分

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

例题

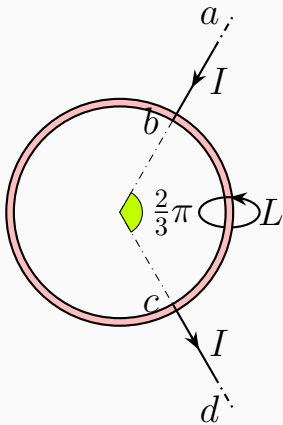
如图，在一圆形电流 I 所在的平面内，选取一个同心圆形闭合回路 L ，则由安培环路定理可知， $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ____，且环路上任意一点 B ____。(填 “= 0” 或 “ $\neq 0$ ”)



例题

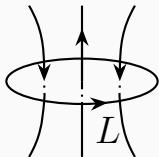
两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感应强度 \vec{B} 沿图中闭合路径 L 的积分

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



例题

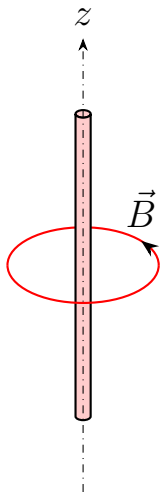
如图所示，三根载流导线穿过一闭合回路 L 所围成的面。若改变三根导线之间的相互间隔，但均不越出积分回路，则 L 上各点的 \vec{B} ____, \vec{B} 沿回路 L 的环流值____。(填“改变”或“不变”)



2.1 长直载流导线的磁场

- **无限长**载流直导线，电流分布具有柱对称性，磁场分布也具有柱对称性；电流绕 z 轴转动任意角度，电流分布不变，磁场分布不变；电流转动场点不动，等价于电流不动场点反向转动
- 在与电流垂直的平面内，以电流为圆心的任意圆周上各点的磁场大小相等，方向沿圆周的切线

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = B(r) \vec{e}_\varphi$$



- 以这个圆周为安培环路 L , 则

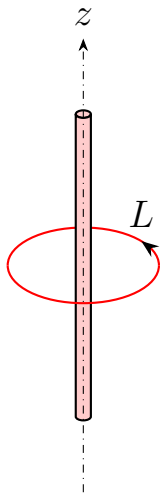
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \times (2\pi r)$$

其中 r 为圆周的半径, 即场点到电流所在直线的距离, 这里取回路的绕向与磁场的方向一致

- 而通过回路的电流就是通过载流导线的电流

$$\sum I = I$$

这里电流的方向与回路的绕向成右手螺旋关系



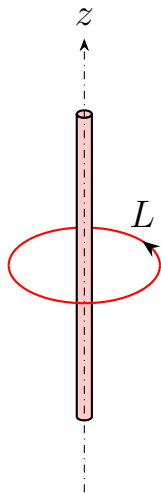
- 根据安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

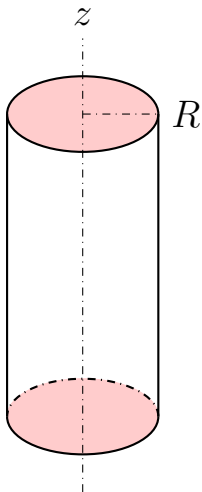
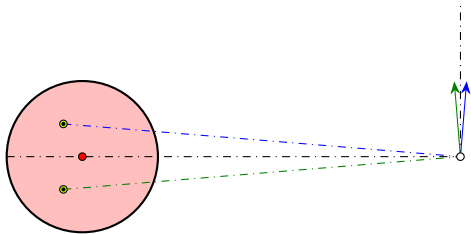
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁场的方向沿柱坐标系的 \vec{e}_φ



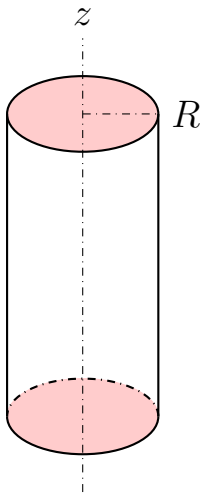
2.2 圆截面无限长直载流导线的磁场

- 把导线视为粗细均匀、半径为 R 的圆柱体, 电流 I 在整个截面上均匀分布, 那么电流密度 $j = \frac{I}{\pi R^2}$ 是一个常数
- 由于电流分布具有柱对称性, 所以磁场分布也具有柱对称性, 在柱坐标系中, $\vec{B}(r, \varphi, z) = B(r) \vec{e}_\varphi$



- 选择半径为 r 的圆周作为安培环路 L

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \times (2\pi r)$$



- 当 $r > R$ 时

$$\sum I = I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 I$$

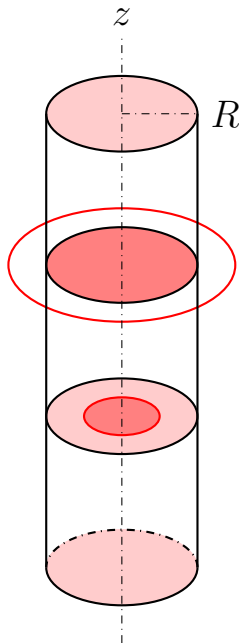
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

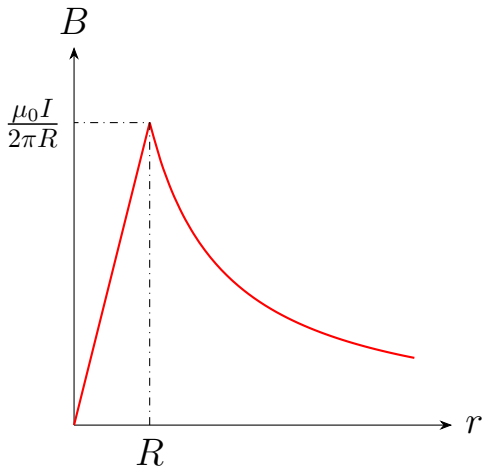
- 当 $r < R$ 时

$$\sum I = j(\pi r^2) = \frac{I}{\pi R^2}(\pi r^2)$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{R^2} r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$





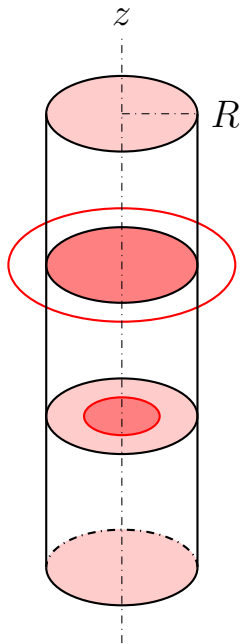
- 如果电流在截面上**不是均匀分布**，而是电流密度与柱坐标系中的 r 有关，即 $j = j(r)$ ，这种情况也可以用安培环路定理来计算磁场，只是此时的 $\sum I$ 要用积分计算得到

- 当 $r > R$ 时

$$\sum I = \int_0^R j(r) \times (2\pi r dr)$$

- 当 $r < R$ 时

$$\sum I = \int_0^r j(r) \times (2\pi r dr)$$



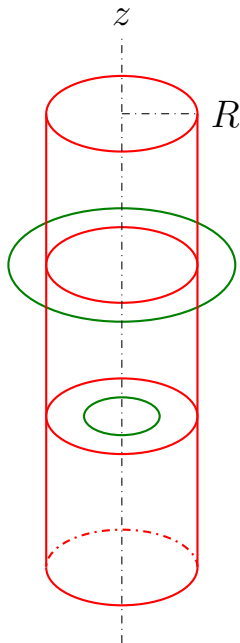
- 如果电流只在圆柱表面上流动

- 当 $r > R$ 时

$$\sum I = I$$

- 当 $r < R$ 时

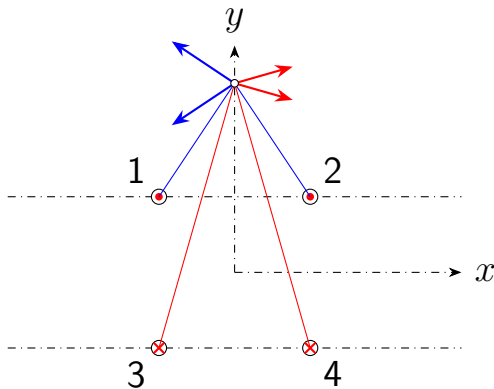
$$\sum I = 0$$



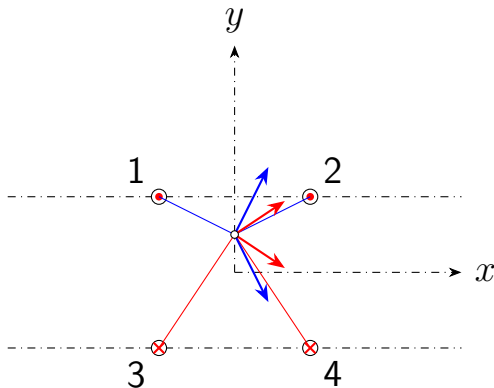
2.3 无限长密绕螺线管的磁场

- 第一种方法：假定已知螺线管内外磁场方向均与轴线平行，且轴线处的磁场大小为 $\mu_0 n I$ ，通过以下方法证明：
 - 管内磁场处处相等，且都等于轴线处的磁场
 - 管外磁场处处为零

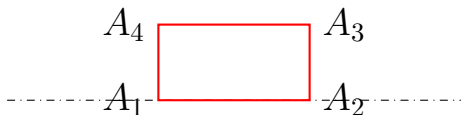
- 管外磁场沿水平方向 (可能向右, 也可能向左)



- 管内磁场沿水平向右
- 轴线上磁场的大小为 $\mu_0 n I$



- 取矩形回路 $A_1A_2A_3A_4A_1$ 为安培环路, 其中 A_1A_2 在螺线管的轴线上, A_3A_4 在管内任意一条与轴线平行的直线上



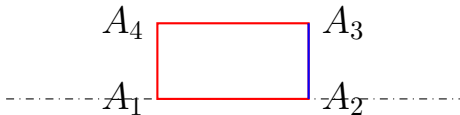
- A_1A_2 上每点磁场的大小相等, 设为 B_1 , 方向水平向右

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 \times \overline{A_1A_2}$$



- A_2A_3 上每点磁场的方向水平向右

$$\int_{A_2}^{A_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



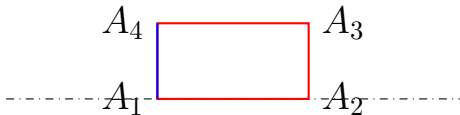
- A_3A_4 上每点磁场的大小相等, 设为 B_2 , 方向水平向右

$$\int_{A_3}^{A_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_2 \times \overline{A_3A_4}$$



- A_4A_1 上每点磁场的方向水平向右

$$\int_{A_4}^{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

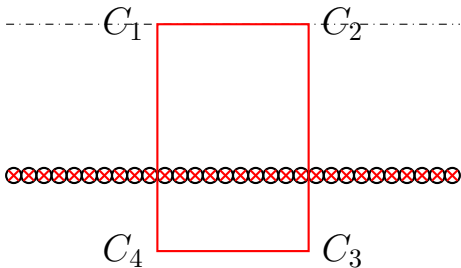
$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{A_4}^{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times 0$$

$$B_1 \times \overline{A_1 A_2} + 0 - B_2 \times \overline{A_3 A_4} + 0 = 0$$

$$B_2 = B_1 = \mu_0 n I$$

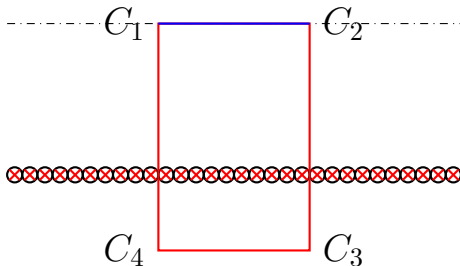
即无限长密绕螺线管内部磁场处处相等，且都等于轴线处的磁场

- 取矩形回路 $C_1C_2C_3C_4C_1$ 为安培环路, 其中 C_1C_2 在螺线管的轴线上, C_3C_4 在管外任意一条与轴线平行的直线上



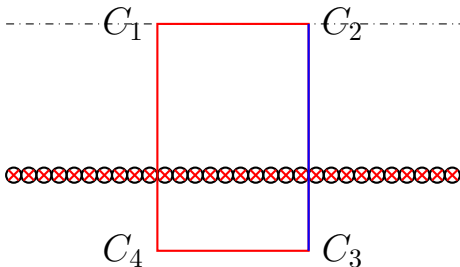
- C_1C_2 上每点磁场的大小相等, 设为 B_1 , 方向水平向右

$$\int_{C_1}^{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 \times \overline{C_1C_2}$$



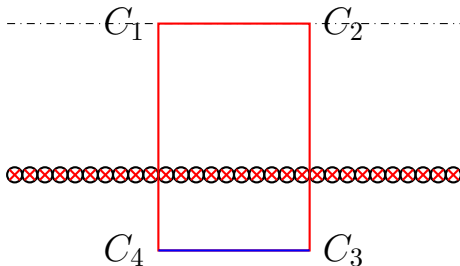
- C_2C_3 上每点磁场的方向沿水平方向

$$\int_{C_2}^{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



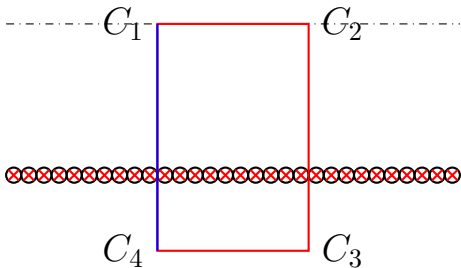
- C_3C_4 上每点磁场的大小相等, 设为 B_2 , 方向沿水平方向 (假设向右)

$$\int_{C_3}^{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_2 \times \overline{C_3C_4}$$



- C_4C_1 上每点磁场的方向沿水平方向

$$\int_{C_4}^{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\sum I = n \times \overline{C_1 C_2} \times I$$

$$B_1 = \mu_0 n I$$

$$B_2 = 0$$

即无限长密绕螺线管外部磁场处处为零

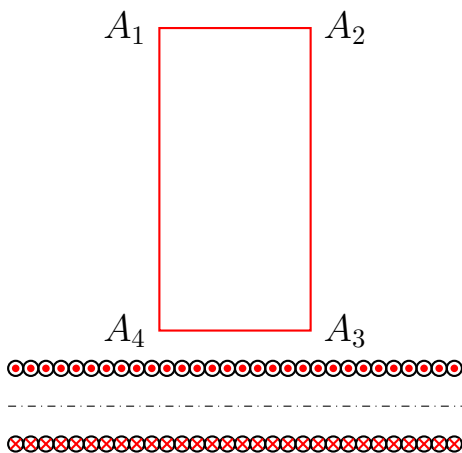
- 第二种方法：假定已知螺线管内外磁场方向均与轴线平行，和毕奥——萨伐尔定律，通过以下方法证明：
 - 管外磁场处处为零
 - 管内磁场处处相等，且都等于 $\mu_0 n I$

- 根据毕奥——萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

可知，电流元的磁场与距离平方成反比，由此可得，在距螺线管无穷远处的磁场趋近于零【为什么？】；且螺线管内外磁场的方向都与轴线平行

- 选择矩形回路 $A_1A_2A_3A_4A_1$ 为安培环路，其中 A_1A_2 在无穷远处与轴线平行， A_3A_4 在管外任意一条与轴线平行的直线上



$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \times \overline{A_1 A_2}$$

$$\int_{A_2}^{A_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

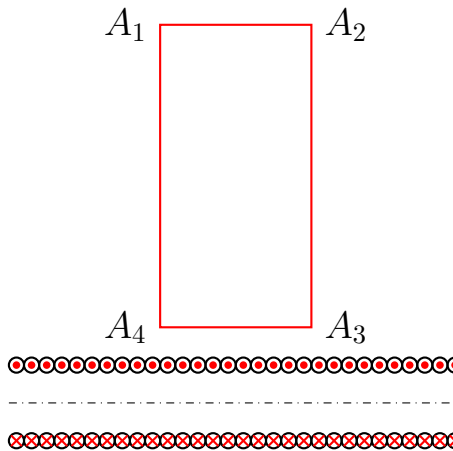
$$\int_{A_3}^{A_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_2 \times \overline{A_3 A_4}$$

$$\int_{A_4}^{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

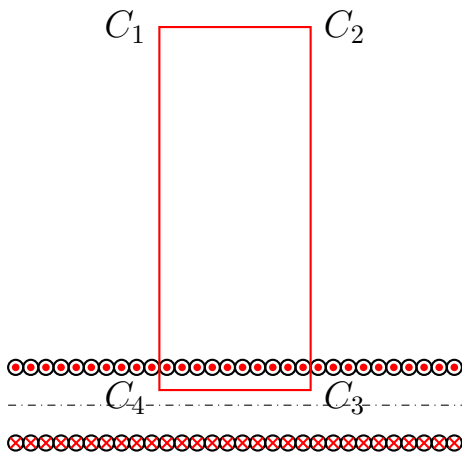
$$\sum I = 0$$

$$B_2 = 0$$

即无限长密绕螺线管外部磁场处处为零



- 选择矩形回路 $C_1C_2C_3C_4C_1$ 为安培环路，其中 C_1C_2 在无穷远处与轴线平行， C_3C_4 在管内任意一条与轴线平行的直线上



$$\int_{C_1}^{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \times \overline{C_1 C_2}$$

$$\int_{C_2}^{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{C_3}^{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_2 \times \overline{C_3 C_4}$$

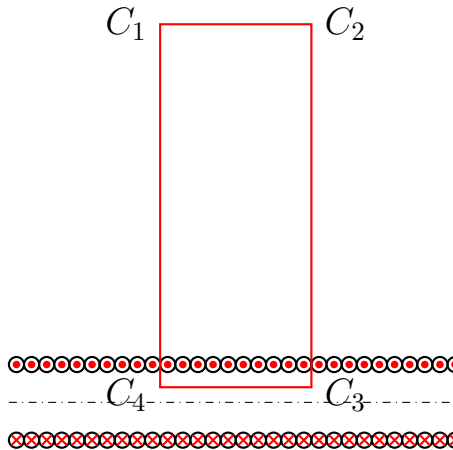
$$\int_{C_4}^{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\sum I = -(n \times \overline{C_1 C_2}) I$$

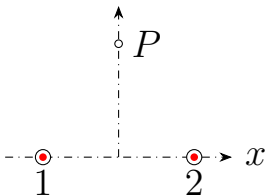
$$-B_2 \times \overline{C_3 C_4} = \mu_0 [-(n \times \overline{C_1 C_2}) I]$$

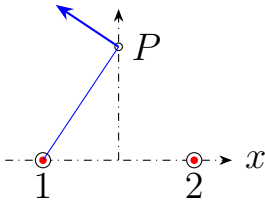
$$B_2 = \mu_0 n I$$

即无限长密绕螺线管内部磁场处处都等于 $\mu_0 n I$



- 下面讨论任意形状截面的无限长密绕螺线管的磁场分布
- 水平向右为 x 轴正方向, 竖直向上为 y 轴正方向, 垂直纸面向外为 z 轴正方向。两个同方向平行放置电流元的位置分别为 $(-a, 0, 0)$ 和 $(a, 0, 0)$, 场点位置为 $(0, y, z)$



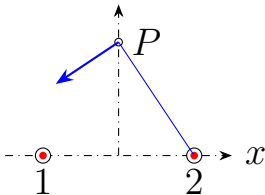


$$I_1 d\vec{l}_1 = I dl \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_1 = a \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}$$

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_1}{r_1^3} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{a \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

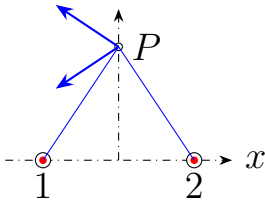


$$I_2 d\vec{l}_2 = I dl \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_2 = -a \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + y^2 + z^2} = r_1$$

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_2}{r_2^3} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{-a \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{a \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{-a \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

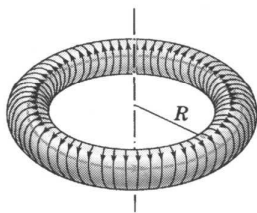
$$d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi} \frac{-y \vec{e}_x}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

一对同方向平行放置的电流元在它们的中垂面上任意一点的合磁场永远垂直于中垂面

- 因此，【根据上述第二种方法可得】对于任意形状截面的无限长密绕螺线管，管外磁场都为零，管内都是匀强磁场，大小都等于 $B = \mu_0 n I$

2.4 密绕螺绕环的磁场

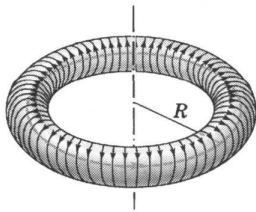
- 绕在环面上的螺线形线圈称为螺绕环



电流分布具有轴对称性，所以磁场分布具有轴对称性，选择柱坐标系会比较方便。一般地假定螺绕环的总匝数为 N ，通过的电流为 I

- 选择与螺绕环同轴的、半径为 r 的圆周为安培环路 L ，则在圆周上每点的磁场大小相等，方向沿圆周的切线【轴对称性磁场的特点】

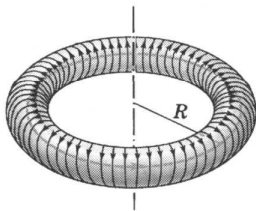
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \times (2\pi r)$$



- 如果安培环路 L 在螺绕环外部，则

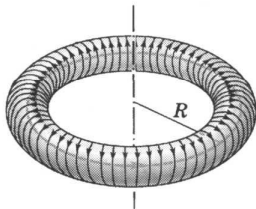
$$\sum I = 0$$
$$B = 0$$

即螺绕环外部磁场为零



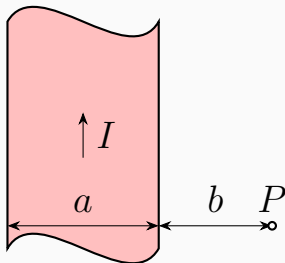
- 如果安培环路 L 在螺绕环内部, 则

$$\sum I = NI$$
$$B \times (2\pi r) = \mu_0(NI)$$
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



例题

有一无限长通电流的扁平铜片，宽度为 a ，厚度不计，电流 I 在铜片上均匀分布，在铜片外与铜片共面，离铜片右边缘为 b 处的 P 点的磁感应强度 \vec{B} 的大小为_____。



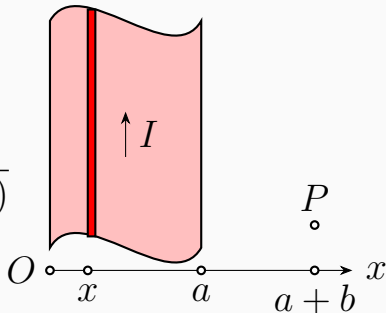
解答

$$dI = \frac{I}{a} dx$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}$$

$$r = a + b - x$$

$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a + b - x)}$$

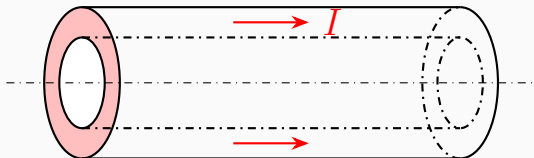
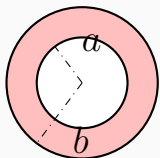


思考题

设 xy 平面上通有沿 x 轴正方向的均匀电流, 面电流的线密度 (垂直于电流的单位长度上的电流) 记为 i , 试分析任意位置的场点 (x, y, z) 处磁感应强度的方向并求其大小。

作业

- P118[2-17] 有一很长的载流导体直圆筒，内半径为 a ，外半径为 b ，电流为 I ，电流沿轴向方向流动，并且均匀分布在管壁的横截面上。空间某一点到管轴的垂直距离为 r ，求：(1) $r < a$ ，(2) $a < r < b$ ，(3) $r > b$ 等处的磁感应强度。

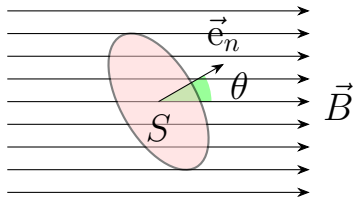


四、磁场的高斯定理

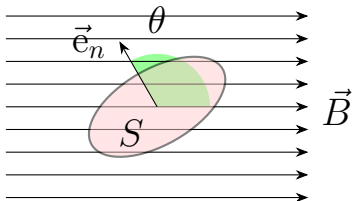
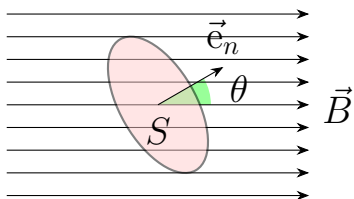
1 磁通量

- 若某区域内磁感应强度 \vec{B} 是个恒量 (匀强磁场), 该区域内有个面积为 S 的平面, 取其法向方向单位矢量为 \vec{e}_n , 则通过该面积的磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot (S \vec{e}_n) = BS \cos \theta$$



- 若 $\theta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\Phi > 0$ 表示磁感应线沿 \vec{e}_n 方向穿过 S
- 若 $\theta > \frac{\pi}{2}$, 则 $\Phi < 0$ 表示磁感应线逆着 \vec{e}_n 方向穿过 S



- 对于非匀强磁场，在无限小的面积上可以忽略磁场的变化而认为磁场处处相等，因此通过面元 $d\vec{S}$ 的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 所以通过任意曲面 S 的磁通量为

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 通过任意封闭曲面 S 的磁通量为

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

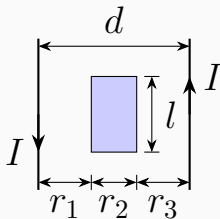
2 磁场的“高斯定理”

- 稳恒磁场的磁感应线是一组闭合的曲线，所以对于任何闭合曲面，某条磁感应线从某处进入该曲面，则必定从另一位置穿出该曲面。所以通过任意闭合曲面的磁通量恒为零

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

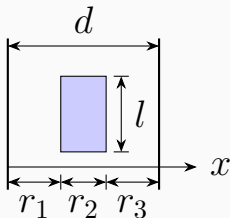
例题

如图所示, 两根平行长直导线载有电流 I , 试求通过图中矩形面积的磁通量。



解答

以两直线所在平面为 xy 平面，水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，垂直纸面向外为 z 轴正方向，坐标原点设在左边直线上



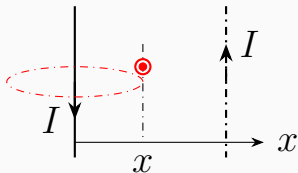
解答

左边电流在 xy 平面上 x 处的磁场方向垂直纸面向外 (沿 z 轴正方向)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B_1 \cdot (2\pi x) = \mu_0 I$$

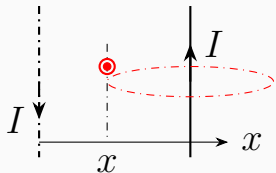
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$



解答

右边电流在同一位置的磁场方向也是垂直纸面向外 (沿 z 轴正方向)

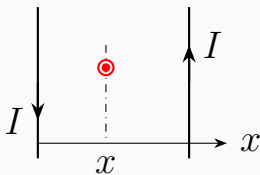
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$
$$B_2 \cdot [2\pi(d-x)] = \mu_0 I$$
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$$



解答

总的磁感应强度

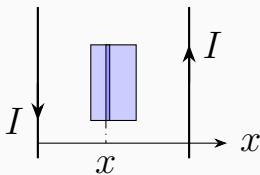
$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \end{aligned}$$



解答

通过图中 $x \rightarrow x + dx$ 处小矩形的磁通量

$$\begin{aligned} d\Phi &= B dS \\ &= B(l dx) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx \end{aligned}$$



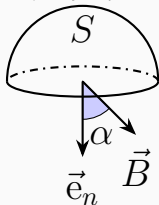
解答

通过整个矩形的磁通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{r_1}^{r_1+r_2} Bl \, dx \\&= \int_{r_1}^{r_1+r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l \, dx \\&= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\ln \frac{r_1 + r_2}{r_1} - \ln \frac{r_3}{r_2 + r_3} \right] \\&= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)}{r_1 r_3}\end{aligned}$$

例题

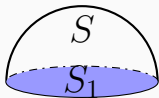
在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S , S 的边线所在平面的法向方向单位矢量 \vec{e}_n 与 \vec{B} 的夹角为 α , 则通过半球面 S 的磁通量为多少? 取弯面向外为正。



解答

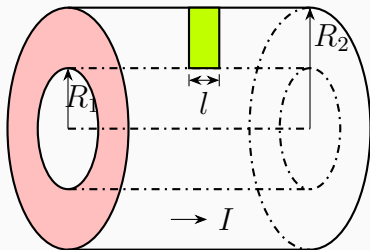
以 S 边线所在的圆为 S_1 , 则 S 和 S_1 组成封闭曲面。根据磁场的“高斯定理”

$$\oint_{S+S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B\pi r^2 \cos \alpha$$

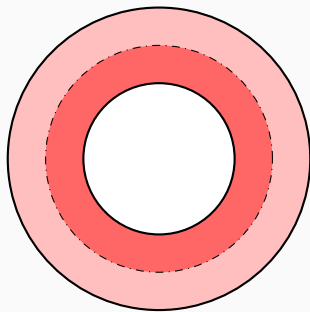


例题

无限长空心圆柱形导体的内、外半径分别为 R_1 和 R_2 ，电流 I 沿轴向流动，如图，设电流均匀分布在导体的横截面上。求：(1) 导体内部 ($R_1 < r < R_2$) 各点的磁感应强度，其中 r 是任一点到圆柱轴线的距离；(2) 求通过长度为 l 的一段截面 (图中阴影部分) 的磁通量。



解答



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \times (2\pi r)$$
$$\sum I = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2)$$

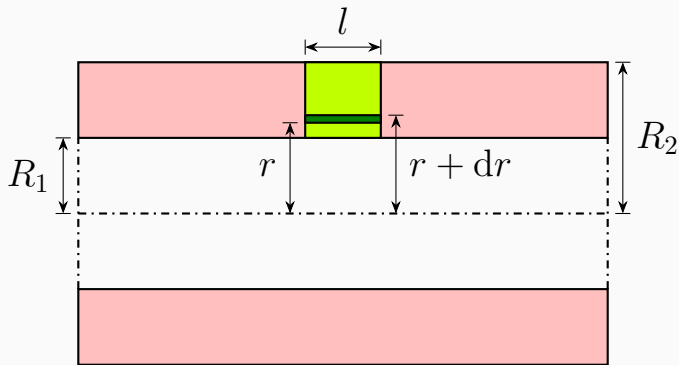
解答

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \times (2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right)$$

解答



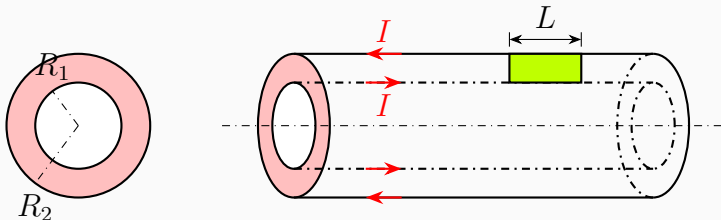
$$dS = l dr$$

解答

$$\begin{aligned}d\Phi &= B \, dS \\&= \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) l \, dr \\ \Phi &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) dr \\&= \frac{\mu_0 I l}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[\frac{1}{2} r^2 - R_1^2 \ln r \right] \Big|_{R_1}^{R_2}\end{aligned}$$

作业

- P118[2-20(1)(2)] 一对同轴无穷长直的空心导体圆筒，内、外半径分别为 R_1 和 R_2 (筒壁厚度可以忽略)。电流 I 沿内筒流去，沿外筒流回 (见图)，(1) 计算两筒间的磁感应强度 B ；(2) 通过长度为 L 的一段截面 (图中阴影区) 的磁通量 Φ 。

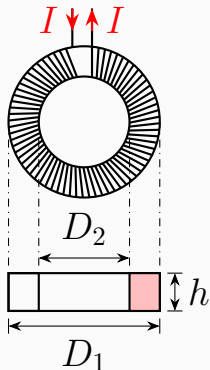


作业

- P118[2-21] 矩形截面的螺绕环, 尺寸见本题图, (1) 求环内磁感应强度的分布; (2) 证明通过螺绕环截面 (图中阴影区) 的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

其中 N 为螺绕环总匝数,
 I 为其中电流的大小。



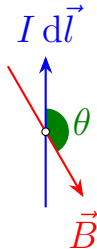
五、磁场对载流导线的作用

1 安培力

1.1 安培力公式

- 一般地假设电流元 $I d\vec{l}$ 所在位置的磁场为 \vec{B} , 则电流元受到磁场的作用力 (安培力)

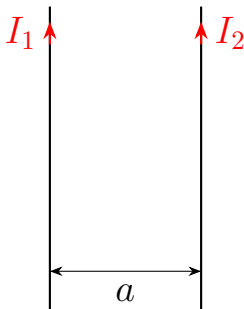
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$



- 任意一个载流回路，总可以看成由若干电流元所组成，每个电流元受到的力都可以由上式求得，但要注意，不同电流元受到的作用力的作用点不同，所以原则上整个载流回路受到的是一个力系的作用，一般情况下不一定能简化成一个力的作用
- 根据力系简化的规则，一个力系通常可以简化成一个力和/或一个力矩。所以通常所说的一个载流回路在磁场上所受到的力是指载流回路上所有电流元所受到的力的矢量和

1.2 平行无限长载流直导线间的相互作用

- 一般地假设，两根导线中的电流分别为 I_1 和 I_2 ，两导线之间的距离为 a

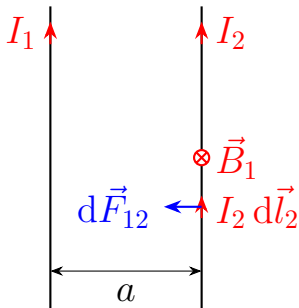


- 对于无限长载流直导线，由安培环路定理可以求得其磁场，如果两个电流都是向上，那么 I_1 在 I_2 位置的磁场方向垂直纸面向里，大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

- 所以电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 受到的安培力方向向左 (指向 I_1)，大小

$$dF_{12} = (I_2 dl_2) B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

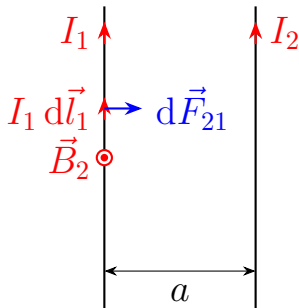


- I_2 在 I_1 位置的磁场方向垂直纸面向外, 大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

- 所以电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 受到的安培力方向向右 (指向 I_2), 大小

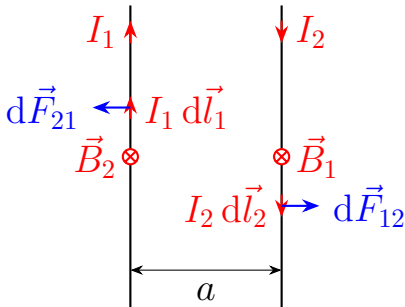
$$dF_{21} = (I_1 dl_1) B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_1$$



- 所以单位长度导线上受到的安培力

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{dF_{21}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

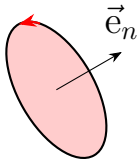
- 如果两个电流方向相反，则相互作用力是排斥力



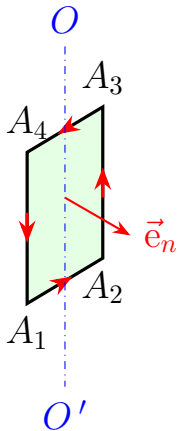
2 磁场对载流平面线圈的作用

2.1 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的力矩

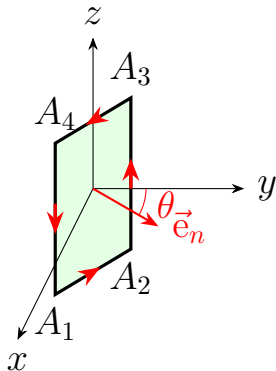
- 对于载流线圈，通常用右手螺旋关系来表示线圈在空间的取向：弯曲的四个手指沿电流在线圈中的回绕方向，大姆指代表线圈平面的法向方向 \vec{e}_n
- 这个 \vec{e}_n 称为线圈的右旋法向单位矢量，它可以同时表示线圈中电流的流向和线圈平面的取向



- 一般地假定, 矩形线圈 $A_1A_2A_3A_4$ 的边长 $A_1A_2 = a$ 、 $A_2A_3 = b$, 整个矩形可以绕中心轴 OO' 自由转动, OO' 平行于 A_2A_3 边且垂直于磁场, 电流 I 沿 $A_1A_2A_3A_4A_1$ 流动

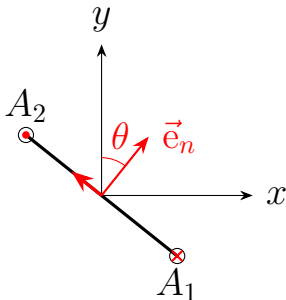


- 以 OO' 为 z 轴, 均匀磁场 \vec{B} 的方向为 y 轴正方向。设某时刻, \vec{e}_n 与 \vec{B} 的夹角为 θ



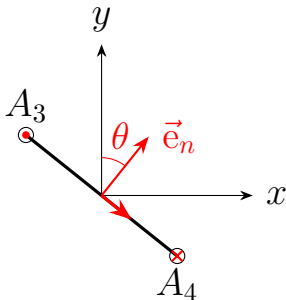
- 设某时刻, \vec{e}_n 与 \vec{B} 的夹角为 θ , 则 A_1A_2 上电流元与 \vec{B} 的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$, 所以 A_1A_2 上所有电流元受到的安培力方向均沿 $-\vec{e}_z$, 大小

$$dF_{A_1A_2} = BI \, dl \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$



- 设某时刻, \vec{e}_n 与 \vec{B} 的夹角为 θ , 则 A_3A_4 上电流元与 \vec{B} 的夹角为 $\frac{\pi}{2} + \theta$, 所以 A_3A_4 上所有电流元受到的安培力方向均沿 $+\vec{e}_z$, 大小

$$dF_{A_3A_4} = BI \, dl \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$



- 根据平行力系简化的规则, A_1A_2 上所有电流元受到的安培力可以简化成作用在其中点上的力, 方向沿 $-\vec{e}_z$, 大小

$$F_{A_1A_2} = BI\overline{A_1A_2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = BIa \cos \theta$$

- 根据平行力系简化的规则, A_3A_4 上所有电流元受到的安培力可以简化成作用在其中点上的力, 方向沿 $+\vec{e}_z$, 大小

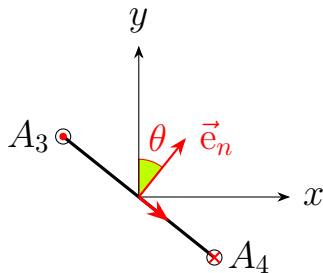
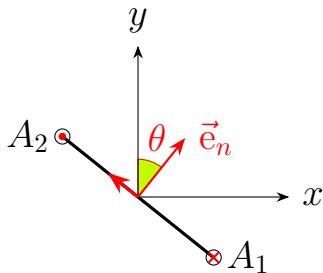
$$F_{A_3A_4} = BI\overline{A_3A_4} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = BIa \cos \theta$$

- $F_{A_1A_2}$ 方向沿 $-\vec{e}_z$, $F_{A_3A_4}$ 方向沿 $+\vec{e}_z$

$$F_{A_1A_2} = BI\overline{A_1A_2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = BIa \cos\theta$$

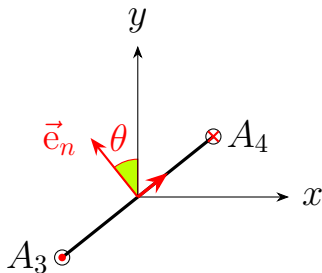
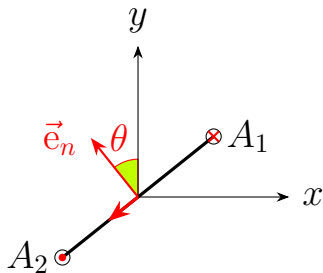
$$F_{A_3A_4} = BI\overline{A_3A_4} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = BIa \cos\theta$$

所以这两条边上的力对整个线圈的作用效果为零



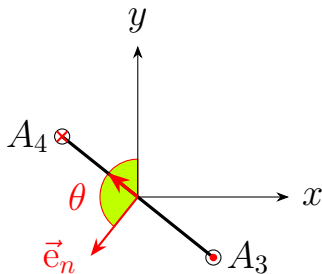
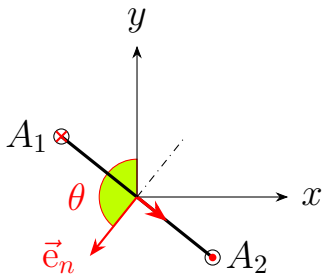
$$dF_{A_1A_2} = BI \, dl \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$dF_{A_3A_4} = BI \, dl \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$



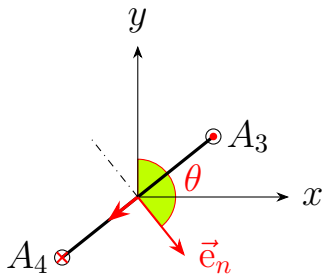
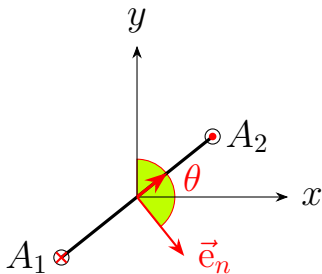
$$dF_{A_1A_2} = BI \, dl \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

$$dF_{A_3A_4} = BI \, dl \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$



$$dF_{A_1A_2} = BI \, dl \sin \left(\pi - \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$dF_{A_3A_4} = BI \, dl \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

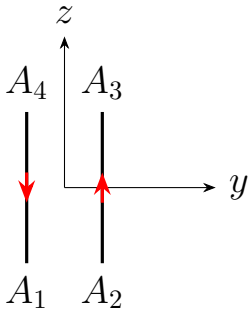


$$dF_{A_1A_2} = BI \, dl \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$dF_{A_3A_4} = BI \, dl \sin \left(\pi - \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

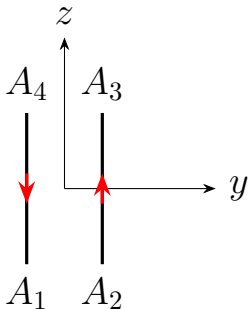
- A_2A_3 上电流元与 \vec{B} 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, A_2A_3 上电流元 $I d\vec{l} = I dl \vec{e}_z$ 受到的安培力

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{A_2A_3} &= I d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= (I dl \vec{e}_z) \times (B \vec{e}_y) \\ &= -BI dl \vec{e}_x \end{aligned}$$



- A_4A_1 上电流元与 \vec{B} 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, A_4A_1 上电流元 $I d\vec{l} = I dl(-\vec{e}_z)$ 受到的安培力

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{A_4A_1} &= I d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= (-I dl \vec{e}_z) \times (B \vec{e}_y) \\ &= BI dl \vec{e}_x \end{aligned}$$



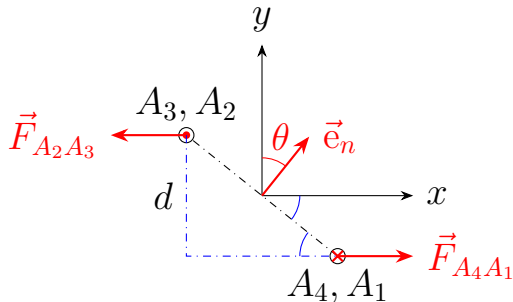
- 根据平行力系简化的规则, A_2A_3 上所有电流元受到的安培力可以简化成作用在其中点上的力

$$\vec{F}_{A_2A_3} = -BI\overline{A_2A_3} \vec{e}_x = -BIb \vec{e}_x$$

- 根据平行力系简化的规则, A_4A_1 上所有电流元受到的安培力可以简化成作用在其中点上的力

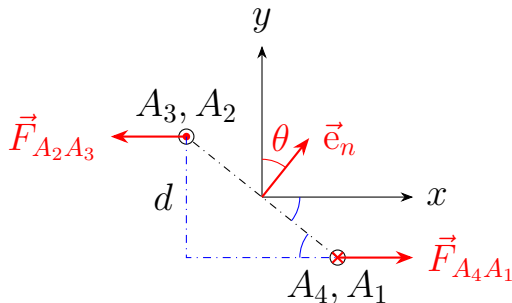
$$\vec{F}_{A_4A_1} = BI\overline{A_4A_1} \vec{e}_x = BIb \vec{e}_x$$

- 注意，这两个力虽然大小相等方向相反，但作用线不在同一条直线上，是一对力偶

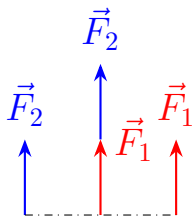


- 其力偶矩

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= Fd \vec{e}_z \\
 &= Fa \sin \theta \vec{e}_z \\
 &= BIab \sin \theta \vec{e}_z \\
 &= BIS \sin \theta \vec{e}_z \\
 &= (IS \vec{e}_n) \times \vec{B}
 \end{aligned}$$



- 根据平行力系的简化，两个同方向大小相等的力可以简化为它们作用点连线中点上的合力

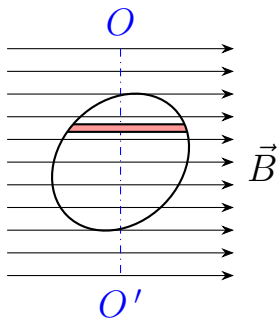


- 如果磁场不是均匀的，每个相同大小的电流元所受安培力虽然是同方向但大小不相等，那么一条载流直线段上所有电流元所受的安培力不能简化成作用在线段中点上的力

2.2 载流线圈的磁矩

- 任意平面线圈总可以看成是由一系列微小的矩形线圈所组成。在均匀磁场中，一个微小矩形线圈所受到的力矩

$$d\vec{M} = (I dS \vec{e}_n) \times \vec{B}$$

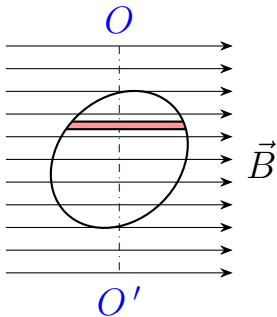


- 每一个微小线圈的右旋法向单位矢量相同，因此，任意载流平面线圈在均匀磁场中受到的力矩

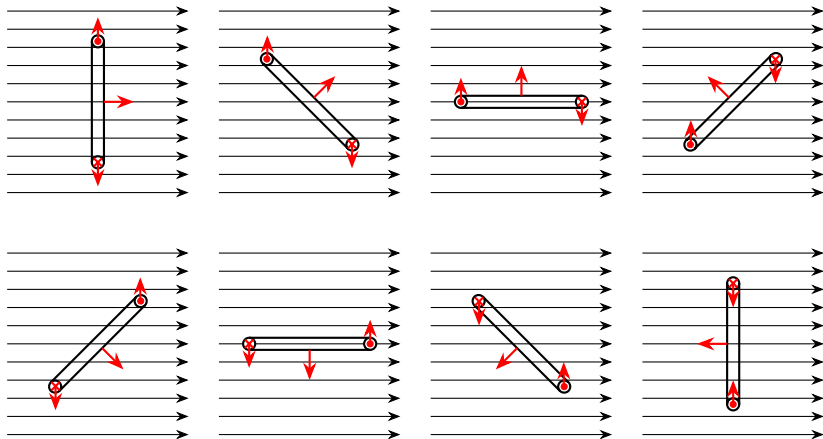
$$\vec{M} = (IS \vec{e}_n) \times \vec{B}$$

- 定义 $\vec{m} = IS \vec{e}_n$ 为载流线圈的磁矩，则

$$\begin{aligned}\vec{M} &= (IS \vec{e}_n) \times \vec{B} \\ &= \vec{m} \times \vec{B}\end{aligned}$$



- 力矩的作用总是试图使载流线圈的磁矩 \vec{m} 转向磁场 \vec{B} 的方向



3 应用实例

3.1 直流电动机

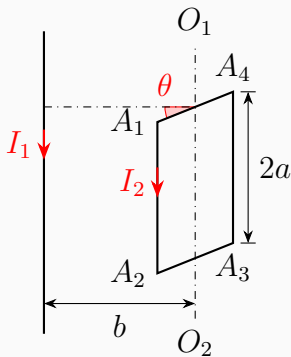
- 直流电动机就是利用载流线圈在磁场中受到的力矩使得线圈的磁矩转向磁场方向这个性质而进行工作的。从以上分析可知，最终线圈将静止在 $\theta = 0$ 的位置。为了使线圈持续转动，通常使用换向器，在 $\theta = 0$ 位置改变线圈中的电流方向

3.2 磁电式电流计

- 磁电式电流计也是利用磁场对载流线圈的作用来工作的，具体原理自行阅读课本 P102-103

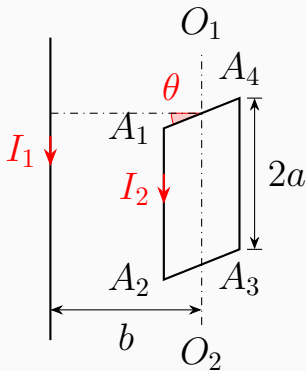
例题

P120[2-32] 载有电流 I_1 的长直导线旁边有一正方形线圈, 边长为 $2a$, 载有电流 I_2 , 线圈中心到导线的垂直距离为 b , 电流方向如图所示。线圈可绕平行于导线的轴 O_1O_2 转动。求: (1) 线圈在 θ 角度位置时所受的合力 \vec{F} 和合力矩 \vec{M} ; (2) 线圈平衡时 θ 的值; (3) 线圈从平衡位置转到 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, I_1 作用在线圈上的力做了多少功? (这里线圈可以绕转轴转动, 隐含 $b > a$)



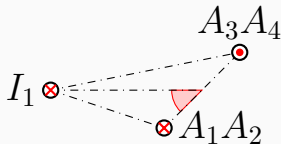
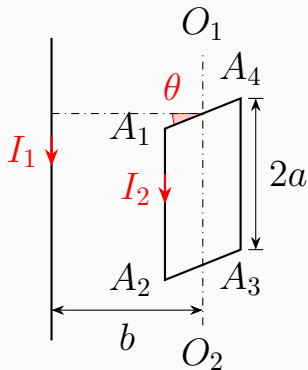
解答

上下两边 A_1A_4 、 A_2A_3 对应位置磁场相同，电流方向相反，所以安培力大小相等方向相反作用在同一直线上 (A_1A_4 受到向上的力， A_2A_3 受到向下的力)



解答

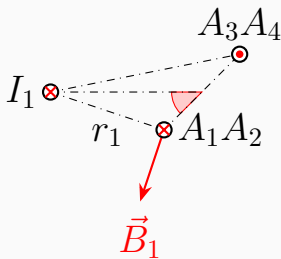
为了方便分析 A_1A_2 、 A_3A_4 的受力，沿转轴从 O_1 看向 O_2



解答

对于长直电流 I_1 , 它在 A_1A_2 处的磁场为 \vec{B}_1
方向如图所示, 大小

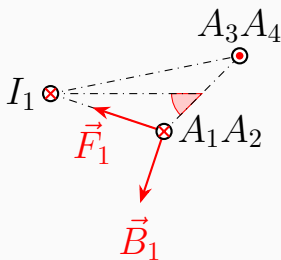
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}$$



解答

所以 A_1A_2 受到的安培力 \vec{F}_1 方向如图所示, 大小

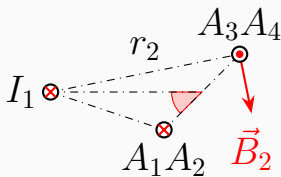
$$F_1 = B_1 I_2 L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi r_1}$$



解答

对于长直电流 I_1 , 它在 A_3A_4 处的磁场为 \vec{B}_2
方向如图所示, 大小

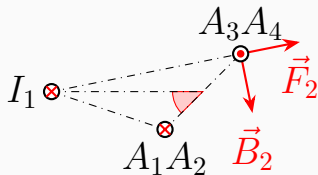
$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2}$$



解答

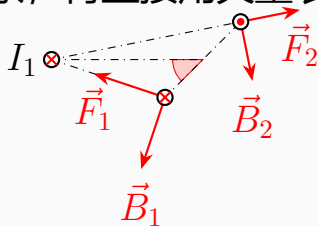
所以 A_3A_4 受到的安培力 \vec{F}_2 方向如图所示, 大小

$$F_2 = B_2 I_2 L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi r_2}$$



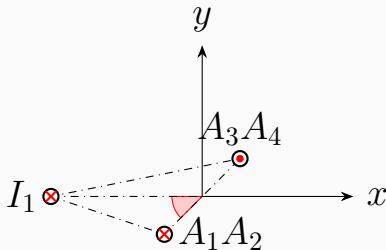
解答

这里 \vec{F}_1 、 \vec{F}_2 大小不等，方向也不同，它们的合成原则上从几何关系可以求得，下面先建立直角坐标系，再直接用矢量表示出来

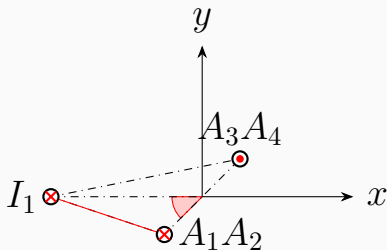


解答

以转轴为 z 轴, I_1 和转轴所在平面为 xz 平面, 建立如图所示坐标系。则 I_1 所在位置为 $(-b, 0)$, A_1A_2 所在位置为 $(-a \cos \theta, -a \sin \theta)$, A_3A_4 所在位置为 $(a \cos \theta, a \sin \theta)$

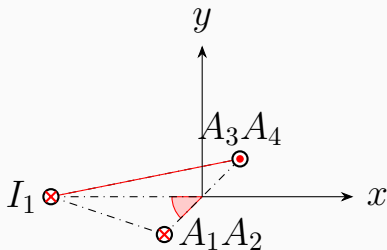


解答



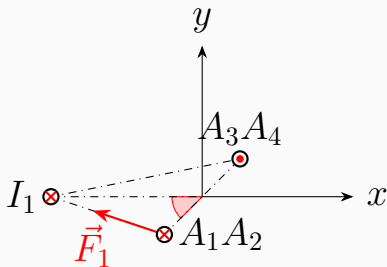
$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(a \cos \theta - b)^2 + (a \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \end{aligned}$$

解答



$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{(a \cos \theta + b)^2 + (a \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta} \end{aligned}$$

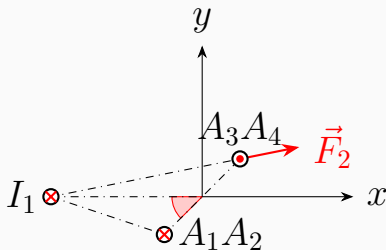
解答



$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_1$$

$$\vec{r}_1 = (a \cos \theta - b) \vec{e}_x + (a \sin \theta) \vec{e}_y = r_1 \vec{e}_1$$

解答



$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{r}_2 = (a \cos \theta + b) \vec{e}_x + (a \sin \theta) \vec{e}_y = r_2 \vec{e}_2$$

解答

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi r_1^2} \vec{r}_1$$

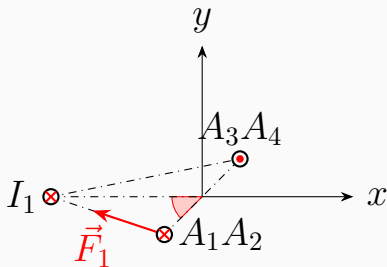
$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi r_2^2} \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = (a \cos \theta - b) \vec{e}_x + (a \sin \theta) \vec{e}_y$$

$$\vec{r}_2 = (a \cos \theta + b) \vec{e}_x + (a \sin \theta) \vec{e}_y$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

解答

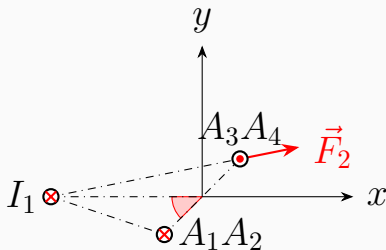


\vec{F}_1 对坐标原点的力矩

$$\vec{M}_1 = \vec{R}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{R}_1 = -a \cos \theta \vec{e}_x - a \sin \theta \vec{e}_y$$

解答



\vec{F}_2 对坐标原点的力矩

$$\vec{M}_2 = \vec{R}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{R}_2 = a \cos \theta \vec{e}_x + a \sin \theta \vec{e}_y$$

解答

总的力矩

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\ &= -\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b (a^2 + b^2) \sin \theta}{\pi [(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \theta]} \vec{e}_z\end{aligned}$$

解答

由于转轴对线圈可以有有力的作用, 但这个力对转轴的力矩恒为零, 重力与转轴平行, 对转轴的力矩也为零, 所以线圈平衡时, 不要求 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, 但要求 $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$, 所以要求 $\sin \theta = 0$, $\theta = 0$ 或 π

$$\vec{M} = -\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b (a^2 + b^2) \sin \theta}{\pi [(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \theta]} \vec{e}_z$$

解答

原则上计算力做的功

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

但对于这道题目，由于每时每刻力和位移之间的夹角是变化的，计算并不容易

解答

这里使用力矩做功来计算会更简单

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b (a^2 + b^2) \sin \theta}{\pi [(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \theta]} \, d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a (a^2 + b^2)}{\pi} \times A \\ A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2ab \sin \theta \, d\theta}{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

解答

令 $u = 2ab \cos \theta$, 则

$$du = -2ab \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2ab \sin \theta d\theta}{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \\ &= \int_{2ab}^0 \frac{du}{(a^2 + b^2)^2 - u^2} \\ &= \int_{2ab}^0 \frac{du}{(a^2 + b^2 + u)(a^2 + b^2 - u)} \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} A &= \int_{2ab}^0 \frac{du}{(a^2 + b^2 + u)(a^2 + b^2 - u)} \\ &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \times (A_1 + A_2) \end{aligned}$$

$$A_1 = \int_{2ab}^0 \frac{du}{a^2 + b^2 + u}$$

$$A_2 = \int_{2ab}^0 \frac{du}{a^2 + b^2 - u}$$

解答

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{2ab}^0 \frac{du}{a^2 + b^2 + u} \\ &= [\ln(a^2 + b^2 + u)] \Big|_{2ab}^0 \\ &= \ln \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2ab} \\ A_2 &= \int_{2ab}^0 \frac{du}{a^2 + b^2 - u} \\ &= [-\ln(a^2 + b^2 - u)] \Big|_{2ab}^0 \\ &= \ln \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

解答

$$A_1 = \ln \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$A_2 = \ln \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2}$$

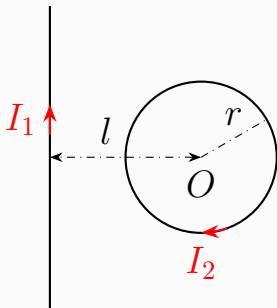
$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \ln \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} \\ &= 2 \ln \frac{b - a}{a + b} \end{aligned}$$

解答

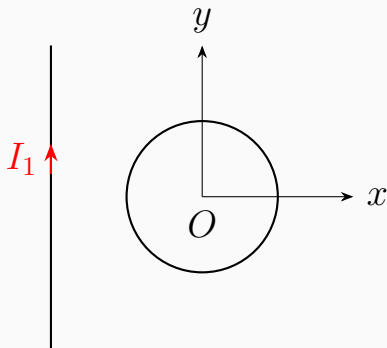
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \times (A_1 + A_2) \\ &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \times 2 \ln \frac{b-a}{a+b} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \ln \frac{b-a}{b+a} \\ W &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a (a^2 + b^2)}{\pi} \times \frac{1}{a^2 + b^2} \ln \frac{b-a}{b+a} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi} \ln \frac{b-a}{b+a} \end{aligned}$$

例题

P120[2-33] 载有电流 I_1 的长直导线旁边有一平面圆形线圈，线圈半径为 r ，中心到直导线的距离为 l ，线圈载有电流 I_2 ，线圈和直导线在同一平面内 (如图)。求 I_1 作用在圆形线圈上的力。

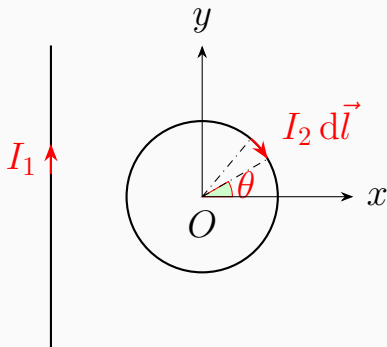


解答



以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则垂直纸面向外为 z 轴正方向

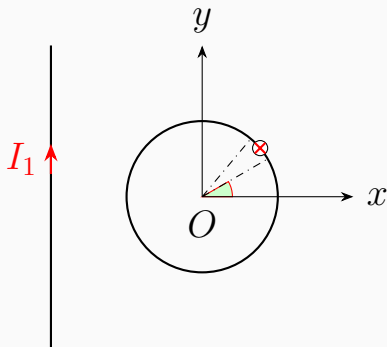
解答



取圆上 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 部分为电流元，则

$$d\vec{l} = (r d\theta)(\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$$

解答



I_1 在该处的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(l + r \cos \theta)} (-\vec{e}_z)$$

解答

所以电流元受到的安培力

$$d\vec{l} = (r d\theta)(\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(l + r \cos \theta)}(-\vec{e}_z)$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I_2 d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 r (\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_x) d\theta}{2\pi(l + r \cos \theta)} \\ &= (dF_x) \vec{e}_x + (dF_y) \vec{e}_y \end{aligned}$$

解答

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 r (\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_x) d\theta}{2\pi(l + r \cos \theta)}$$

$$= (dF_x) \vec{e}_x + (dF_y) \vec{e}_y$$

$$dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 r \cos \theta d\theta}{2\pi(l + r \cos \theta)}$$

$$dF_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2 r \sin \theta d\theta}{2\pi(l + r \cos \theta)}$$

解答

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{r \sin \theta \, d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta \, d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} [-\ln(l + r \cos \theta)] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{l + r}{l + r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{r \cos \theta \, d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \, d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{l}{l + r \cos \theta} \right] d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[2\pi - l \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \right] \end{aligned}$$

解答

积分公式【高数上册 P381(105)】

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{a + b} \sqrt{\frac{a + b}{a - b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C, \\ (a^2 > b^2)$$

解答

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \left[\frac{2}{l + r} \sqrt{\frac{l + r}{l - r}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l - r}{l + r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{2\pi} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l - r}{l + r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \pi \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan 0 \right) \end{aligned}$$

解答

$$\tan 0 = 0, \quad \tan \pi = 0, \quad \arctan 0 = 0$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \pi \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan 0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

解答

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta}$$

$= 0$

被积函数恒为正，积分等于零？

解答

由于被积函数是偶函数，因此

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= 2 \left[\frac{2}{l + r} \sqrt{\frac{l + r}{l - r}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l - r}{l + r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{\pi} \\ &= \left[\frac{4}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l - r}{l + r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{\pi} \end{aligned}$$

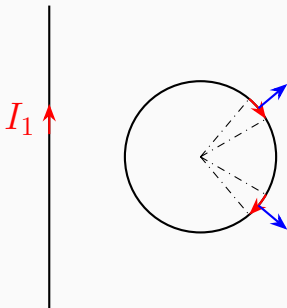
解答

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{4}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - \frac{4}{\sqrt{l^2 - r^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan 0 \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{l^2 - r^2}} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{l^2 - r^2}} \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[2\pi - l \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[2\pi - l \times \frac{2\pi}{\sqrt{l^2 - r^2}} \right] \\ &= \mu_0 I_1 I_2 \left[1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 - r^2}} \right] \end{aligned}$$

解答



根据对称性, $F_y = 0$, 整个圆形线圈的 F_x 是上半圆的两倍

解答

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{l + r \cos \theta} \\ &= \frac{2}{l + r} \sqrt{\frac{l + r}{l - r}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{l - r}{l + r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^{\pi} \\ &\quad + \frac{2}{l + r} \sqrt{\frac{l + r}{l - r}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{l - r}{l + r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_{\pi}^{2\pi} \end{aligned}$$

解答

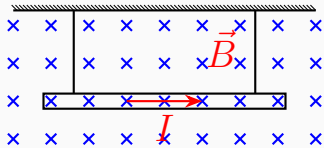
$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_0^\pi \\ &= \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \bigg|_{\pi}^{2\pi} \\ &= \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \pi \right) \\ &\quad - \arctan \left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}} \tan \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

作业

- P119[2-23] 如本题图所示, 有一根长为 l 的直导线, 质量为 m , 用细绳子平挂在外磁场 \vec{B} 中, 导线中通有电流 I , I 的方向与 \vec{B} 垂直。(1) 求绳子张力为 0 时的电流 I 。当 $l = 50 \text{ cm}$, $m = 10 \text{ g}$, $B = 1 \text{ T}$ 时, $I = ?$
(2) 在什么条件下导线会向上运动?



作业

- P119[2-29] 一螺线管长 30 cm, 横截面的直径为 15 mm, 由表面绝缘的细导线密绕而成, 每厘米绕有 100 匝。当导线中通有 2 A 的电流后, 把这螺线管放到 $B = 4 \text{ T}$ 的均匀磁场中, 求: (1) 螺线管的磁矩; (2) 螺线管所受力矩的最大值。

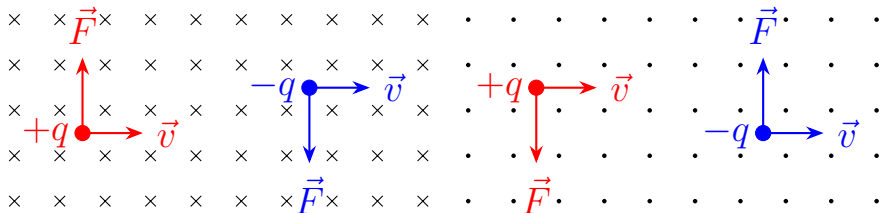
六、带电粒子在磁场中的运动

1 带电粒子在磁场中的受力

1.1 洛伦兹力

- 带电量为 q 、速度为 \vec{v} 的粒子在磁感应强度为 \vec{B} 的磁场中受到的洛伦兹力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



- 洛伦兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 总是与速度垂直，元位移 $d\vec{r} = \vec{v} dt$ 总是沿速度方向，因此洛伦兹力对带电粒子所做的功

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv 0$$

- 如果运动的带电粒子只受到磁场的洛伦兹力 (忽略重力等)，那么粒子的速度的大小不会发生变化，只会改变速度的方向，因此粒子的动能不变，但动量会发生变化

1.2 运动电荷与电流元

- 一个运动电荷就是一个瞬时的电流元
- 电荷的定向运动形成电流。根据电流的定义，单位时间通过某个面积的电荷量就是通过该面积的电流强度

$$I = \frac{dq}{dt}$$
$$dq = I dt$$

因此， dq 就是在 dt 时间内通过该面积的电荷量

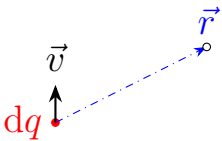
- 在该 dt 时间内以该 dq 为研究对象，在很短的时间内，可以认为该点电荷做匀速直线运动，速度为 \vec{v} ，则在 dt 内 dq 的位移为 $d\vec{l} = \vec{v} dt$ ，因此

$$(dq)\vec{v} = (I dt)\vec{v} = I(\vec{v} dt) = I d\vec{l}$$

也就是，以速度 \vec{v} 运动的电荷 dq 等价于一个电流元 $I d\vec{l}$

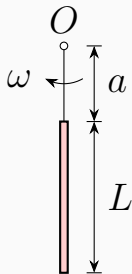
- 因此以速度 \vec{v} 运动的电荷 dq 在周围空间中所激发的磁场为

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$



例题

一均匀带电细棒，长为 L ，带电量为 $+q$ ，绕垂直于纸面的轴 O 以匀角速度 ω 转动，细棒的一端离 O 点距离为 a ，转动中保持 a 不变。求 O 点的磁感应强度。



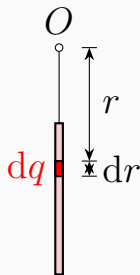
解答

由于细棒均匀带电，所以电荷
线密度

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

细棒上取离 O 点 $r \rightarrow r + dr$ 段
为点电荷，则其带电量

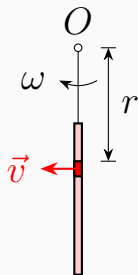
$$dq = \lambda dr = \frac{q}{L} dr$$



解答

细棒绕 O 以匀角速度 ω 转动,
所以点电荷的速度大小

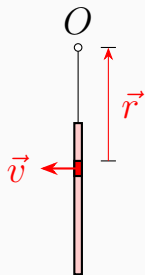
$$v = \omega r$$



解答

点电荷 dq 在 O 点的磁场垂直纸面向里, 大小

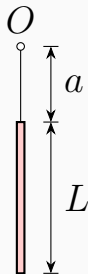
$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)v}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{q}{L} dr \cdot \omega r}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi L} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$



解答

整根细棒在 O 点的磁场垂直纸面向里，大小

$$\begin{aligned} B &= \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi L} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi L} \ln \frac{a+L}{a} \end{aligned}$$



例题

半径为 R 、带电量为 Q 的均匀带电细圆环，放在绝缘的水平面上，当它以角速度 ω 绕竖直中心轴转动时，求圆环中心 O 点处的磁感应强度大小；若将此圆环换成一半径为 R 的均匀带电薄圆盘，电荷面密度为 σ ，它以角速度 ω 绕竖直中心轴转动时，求圆盘中心 O 点处的磁感应强度大小。

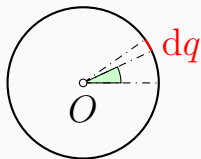
解答

由于圆环均匀带电，所以其电荷线密度

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

圆环上取 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 段圆弧为点电荷，则其带电量

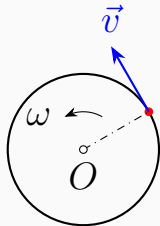
$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{2\pi R} R d\theta = \frac{Q}{2\pi} d\theta$$



解答

圆环绕 O 以匀角速度 ω 转动, 所以点电荷 dq 的速度大小

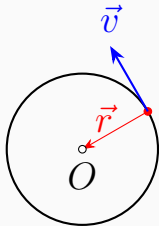
$$v = \omega R$$



解答

点电荷 dq 在 O 点的磁场垂直纸面向外，大小

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dq)v}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{Q}{2\pi} d\theta \times \omega R}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0 Q \omega}{8\pi^2 R} d\theta \end{aligned}$$



解答

整个圆环在 O 点的磁场垂直纸面向外, 大小

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 Q \omega}{8\pi^2 R} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 Q \omega}{8\pi^2 R} \times 2\pi \\ &= \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi R} \end{aligned}$$

解答

以匀角速度 ω 转动的带电圆环相当于一个载流线圈，一个周期内通过线圈上任意截面的电量为 Q ，所以通过线圈的电流

$$I = \frac{Q}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega Q}{2\pi}$$

解答

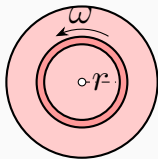
载流线圈在圆心处的磁场

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(R d\theta)}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \times 2\pi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R} \\ &= \frac{\mu_0}{2R} \times \frac{\omega Q}{2\pi} \\ &= \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi R} \end{aligned}$$

解答

对于均匀带电薄圆盘，可以看成由一系列均匀带电圆环所组成。取 $r \rightarrow r + dr$ 部分为细圆环，其带电量

$$dq = \sigma dS = \sigma \times (2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$$



解答

利用前面细圆环在圆心的磁场的计算结果

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B &= \frac{\mu_0(\mathrm{d}q)\omega}{4\pi r} \\ &= \frac{\mu_0 \times (2\pi\sigma r \mathrm{d}r) \times \omega}{4\pi r} \\ &= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

整个薄圆盘在 O 处的磁场

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} R$$

1.3 洛伦兹力与安培力

- 金属导体中存在大量的自由电子，自由电子在导体中的定向移动形成电流
- 当载流导体置于磁场中时，从宏观上看，每个电流元都受到安培力的作用，而从微观上看，则是每个运动的自由电子受到洛伦兹力的作用

- 一般地假定导体中自由电子数密度 (单位体积中自由电子的数目) 为 n , 导体中通过的电流为 I , 导体在垂直电流方向的横截面积为 S , 自由电子定向运动的速度大小为 u , 每个电子的带电量为 $-e$, 那么在 dt 时间内, 通过任意一个截面的电量为

$$dq = e dN = e(n dV) = en(S dl) = enS(u dt)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = enSu$$

- u 是自由电子做定向运动的速度的大小
- 导体内自由电子的运动除了定向运动之外还有热运动, 但所有自由电子热运动统计平均的结果是自由电子热运动的平均速度为零

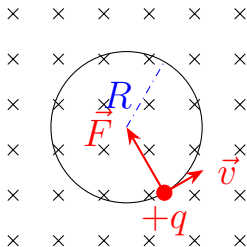
2 带电粒子在磁场中的运动

2.1 带电粒子在均匀磁场中的运动

- 设在空间某区域内存在均匀磁场 \vec{B} , 某一时刻质量为 m 、带电量为 q 、速度为 \vec{v} 的粒子经过磁场中某处

(1) \vec{v} 垂直于 \vec{B}

- 由洛伦兹力公式 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 及矢量叉乘的运算规则可知, 洛伦兹力 \vec{F} 垂直于 \vec{v} 、 \vec{B} 所在平面, 即 \vec{F} 垂直于 \vec{v} 且 \vec{F} 垂直于 \vec{B} , 所以 q 在与磁场垂直的平面内做匀速圆周运动, 且洛伦兹力提供做向心力

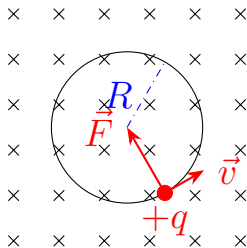


$$F = qvB \sin \theta = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$



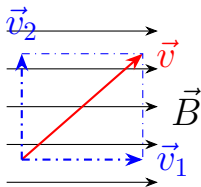
(2) \vec{v} 与 \vec{B} 成 θ 角

- 当速度和磁场不垂直时, 把 \vec{v} 写成

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$v_1 = v \cos \theta, v_2 = v \sin \theta$$

即 \vec{v}_1 表示 \vec{v} 沿平行于 \vec{B} 的分速度, \vec{v}_2 表示 \vec{v} 沿垂直于 \vec{B} 的分速度

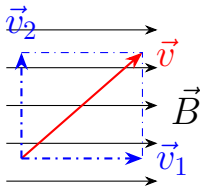


• 洛伦兹力

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= q(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{B} \\ &= q\vec{v}_1 \times \vec{B} + q\vec{v}_2 \times \vec{B} \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2\end{aligned}$$

$$\vec{F}_1 = q\vec{v}_1 \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_2 = q\vec{v}_2 \times \vec{B}$$



- \vec{v}_1 平行于 \vec{B}

$$\vec{F}_1 = q\vec{v}_1 \times \vec{B} = \vec{0}$$

- \vec{v}_2 垂直于 \vec{B}

$$\vec{F}_2 = q\vec{v}_2 \times \vec{B}$$

$$F_2 = qv_2B$$

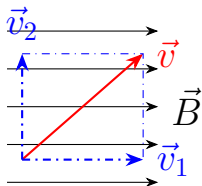
- 洛伦兹力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v}_2 \times \vec{B}$$

在平行于磁场的方向上, q 不受力, 保持做匀速运动, 在垂直于磁场的方向上, q 受到的洛伦兹力与 \vec{v}_2 垂直, 做匀速圆周运动, 因此 q 做螺旋运动

- q 做螺旋运动, 回转一周前进的距离 (螺距) 为

$$h = v_1 T = \frac{2\pi m v_1}{qB} = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$



2.2 荷质比的测定

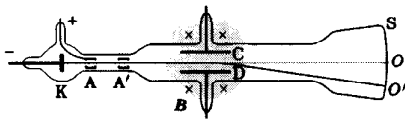
- 所谓荷质比是带电粒子带电量与质量之间的比值，也称比荷（单位质量的电荷量）

(1) 汤姆孙实验

- Joseph John Thomson, 1856-1940, 英国物理学家, 电子的发现者。因通过气体电传导性的研究，测出电子的电荷与质量的比值，1906年获诺贝尔物理学奖



- A 、 A' 上各有一小孔，使得只有沿两小孔连线方向运动的电子才能通过。 C 、 D 为平行板电容器的两个极板，改变两极板之间的电压，可以在两极板间产生垂直两极板方向的匀强电场。同时在两极板之间通过其他手段产生垂直于纸面的均匀磁场

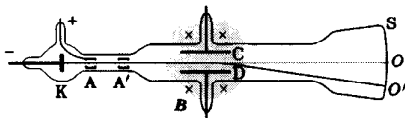


- 由前面分析有

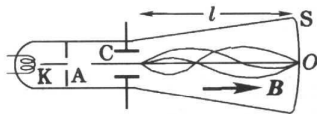
$$R = \frac{mv}{qB}, \frac{q}{m} = \frac{v}{RB}$$

只要测出 v 、 R 、 B 就可求得电子的荷质比

- 通过调整加在 C 、 D 之间的电场和磁场，使得电子通过该区域时所受到的电场力和洛伦兹力平衡， $qE = qvB$ ，即可求得 $v = \frac{E}{B}$
- 再撤去电场保留磁场，测出电子偏转的半径 R



(2) 磁聚焦法



2.3 回旋加速器

- 回旋加速器主要由两个 D 形盒构成。D 形盒之间有一缝隙，两个 D 形盒接上交流电压在缝隙里形成交变电场 (保证带电粒子每次经过电场均被加速)，D 形盒区域施加垂直于 D 形盒底面的磁场

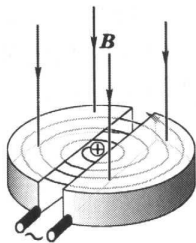


图 2 - 68 回旋加速
器的 D 形盒

- 带电粒子在电场加速下以一定速度进入均匀磁场，偏转半圈之后再经电场加速进入另一个均匀磁场，再偏转半圈之后再经电场加速回到第一个均匀磁场，如此反复
- 每经过一次电场均被加速，速度变大，在磁场中偏转的半径 $R = \frac{mv}{qB}$ 跟着变大，但周期 $T = \frac{2\pi m}{qB}$ 和速度无关保持不变

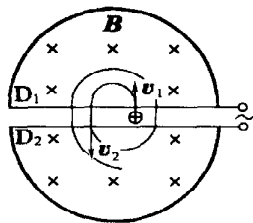
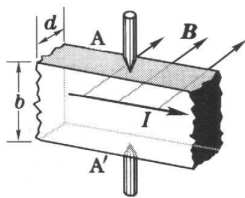


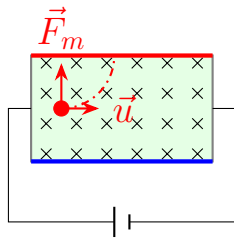
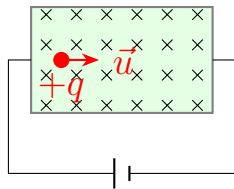
图 2 - 69 回旋加速器原理

2.4 霍耳效应

- 有一长方体导电板 (导体或半导体), 磁场垂直板面, 当有电流水平通过时, 实验发现, 在导电板的上下两侧之间出现电压, 这种效应称为霍耳效应



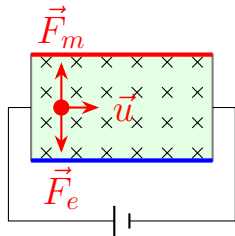
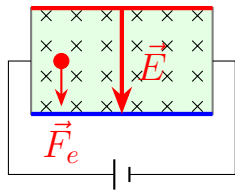
- 如果导电板中的载流子带正电 $+q$ ，则电流从左向右时，载流子的运动方向也是从左向右，一般地假定载流子的定向运动的平均速率为 u
- 载流子 $+q$ 在磁场中受到的洛伦兹力大小为 $F_m = quB$ ，方向向上，则带正电的载流子聚集在导电板的上侧，相应地，下侧流失了载流子而带负电，两侧聚集电荷形成电势差，设为 ΔU



- 因此有一电场从上指向下，场强 $E = \frac{\Delta U}{b}$ ，其中 b 为导电板上下方向的宽度。这个电场施加给载流子向下的电场力 $F_e = qE$
- 当向下的电场力与向上的洛伦兹力平衡时，载流子不再偏转而直接向右运动，此时

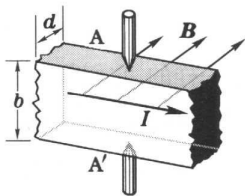
$$q \frac{\Delta U}{b} = quB$$

$$\frac{\Delta U}{b} = uB$$



- 假定导电板的厚度为 d ，则垂直电流方向的截面积 $S = bd$ ，一般地假定载流子的粒子数密度 (也称为载流子浓度) 为 n ，则根据前面得到的电流表达式，有

$$I = qn(bd)u, u = \frac{I}{qnbd}$$



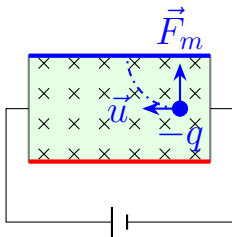
$$\frac{\Delta U}{b} = uB$$

$$u = \frac{I}{qnb d}$$

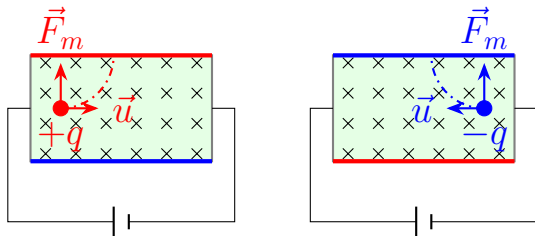
$$\Delta U = uBb = \frac{1}{qn} \frac{BI}{d} = K \frac{BI}{d}$$

霍耳系数 $K \equiv \frac{1}{qn}$ 与导电板的载流子浓度 n 有关

- 如果导电板中的载流子带负电 $-q$ ，则电流从左向右时，载流子的运动方向从右向左，因此它所受到的洛伦兹力仍然是向上的，此时带负电的载流子聚集在上侧，下侧则出现正电荷，所以下侧电势较高，电场从下指向上



- 可见，只要电流从左向右流，不管载流子带正电还是带负电，都向上偏转，由此，可以根据霍尔效应来检测载流子的类型

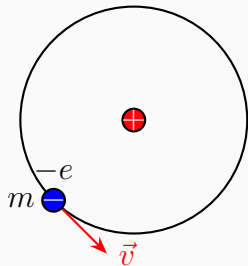


作业

P120[2-34] 试证明电子绕原子核沿圆形轨道运动时磁矩与角动量大小之比为

$$\gamma = \frac{-e}{2m} (\text{经典回旋磁比率})$$

式中 $-e$ 和 m 是电子的电荷与质量, 负号表示磁矩与角动量的方向相反, 如图。(它们各沿什么方向?) 【提示: 计算磁矩时, 可把在圆周上运动的电子看成是电流环。】



作业

P121[2-43] 一种质谱仪的构造原理如图所示, 离子源 S 产生质量为 m 、电荷为 q 的离子, 离子产生出来时速度很小, 可以看作是静止的; 离子产生出来后经过电压 U 加速, 进入磁感应强度为 B 的均匀磁场, 沿着半圆周运动而达到记录它的照相底片 P 上, 测得它在 P 上的位置到入口处的距离为 x 。证明这离子的质量为

$$m = \frac{qB^2}{8U} x^2$$

