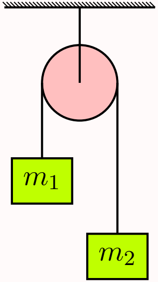
§3.4 牛顿运动定律的应用

一、质点的直线运动

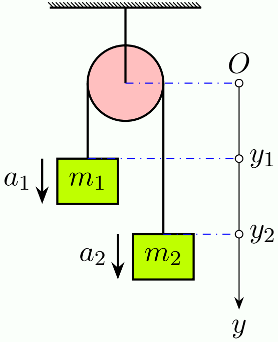
例题 3-1：阿特伍德机

滑轮不计质量，绳子不计质量，绳子不可伸长，忽略绳子与滑轮之间的摩擦和滑轮轴承的摩擦。m_1、m_2 视为质点。求物体的加速度和绳中的张力。



解答

以滑轮圆心为坐标原点，竖直向下为 y 轴正方向。任意 t 时刻，两质点的位置分别为 y_1 和 y_2，两质点的加速度分别为 a_1 和 a_2。



解答

分别以两物体为研究对象，受力分析。
对两物体列 y 方向的牛顿第二定律

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

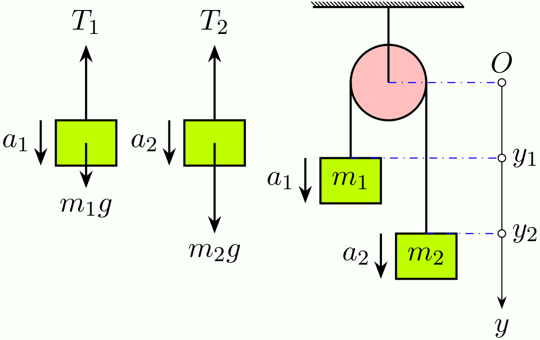
由于绳子不计质量，忽略绳子与滑轮之间的摩擦，因此有

$$T_1 = T_2$$

由于绳子不可伸长，所以有

$$y_1 + y_2 = L$$

$$y_1 + y_2 = L$$
$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$$
$$a_1 + a_2 = 0$$



解答

四个未知数 (a_1、a_2、T_1、T_2) 四个方程

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$
$$T_1 = T_2$$
$$a_1 + a_2 = 0$$

联立解得

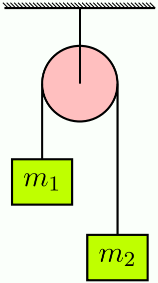
$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$
$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$
$$T_1 = T_2 = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

解答

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

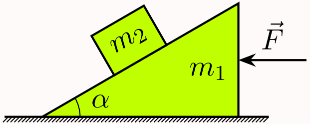


讨论

- $m_1 = 0$ 时，$a_1 = -g$，$a_2 = g$，$T_1 = T_2 = 0$
- $m_2 = 0$ 时，$a_1 = g$，$a_2 = -g$，$T_1 = T_2 = 0$
- $m_1 = m_2$ 时，$a_1 = 0$，$a_2 = 0$，$T_1 = T_2 = mg$

例题 3-2

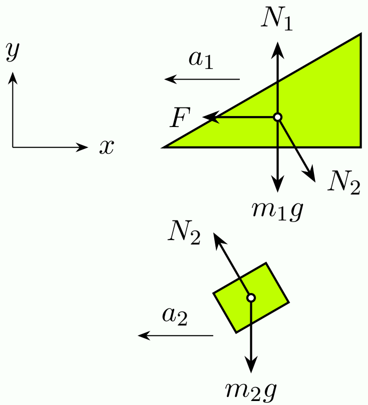
斜面质量为 m_1，滑块质量为 m_2，m_1 和 m_2 之间、m_1 和平面间均无摩擦，用水平力 $\vec{F}$ 推斜面。问斜面倾角 α 应多大，m_1 和 m_2 相对静止。



解答

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向。分别以 m_1、m_2 为研究对象，受力分析，分别对 m_1、m_2 列牛顿第二定律的分量形式

$$N_2\sin\alpha - F = m_1(-a_1)$$
$$N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g = 0$$
$$-N_2\sin\alpha = m_2(-a_2)$$
$$N_2\cos\alpha - m_2 g = 0$$



m_1 和 m_2 相对静止，所以

$$a_1 = a_2$$

解答

五个未知数 (a_1、a_2、N_1、N_2、α) 五个方程

$$N_2 \sin\alpha - F = m_1(-a_1)$$
$$N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g = 0$$
$$-N_2\sin\alpha = m_2(-a_2)$$
$$N_2\cos\alpha - m_2 g = 0$$
$$a_1 = a_2$$

联立解得

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{m_1 + m_2}$$
$$N_1 = (m_1 + m_2)g$$
$$N_2 = \sqrt{(m_2 g)^2 + \left(\frac{m_2 F}{m_1 + m_2}\right)^2}$$
$$\tan\alpha = \frac{F}{(m_1 + m_2)g}$$

二、变力作用下的直线运动

例题 3-3

已知一质点从静止自高空下落，设重力加速度始终保持一常量，质点所受空气阻力与其速率成正比，方向与速度相反。求质点速度。

解答

以质点开始下落处为坐标原点，竖直向下为 y 轴正方向，开始下落时刻 $t=0$。一般地设质点的质量为 m。对质点受力分析，共受两个力作用，竖直向下的重力 $W=mg$，竖直向上的空气阻力 $f=-kv$，k 为常数。列牛顿第二定律

$$mg-kv=ma$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\frac{k}{m}v$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

解答

第一类换元法，令 $u=g-\frac{k}{m}v$，则 $\mathrm{d}u=-\frac{k}{m}\,\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}v=-\frac{m}{k}\,\mathrm{d}u$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\int_g^{g-\frac{k}{m}v}\frac{-\frac{m}{k}\,\mathrm{d}u}{u}$$

$$=-\frac{m}{k}\int_g^{g-\frac{k}{m}v}\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$=-\frac{m}{k}\ln\frac{g-\frac{k}{m}v}{g}$$

$$\int_0^t \mathrm{d}t=t$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$-\frac{m}{k}\ln\frac{g-\frac{k}{m}v}{g}=t$$

$$\ln\frac{g-\frac{k}{m}v}{g}=-\frac{k}{m}t$$

$$\frac{g-\frac{k}{m}v}{g}=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=1-\frac{kv}{mg}$$

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

例题

一物体以 v_0 的初速度做竖直上抛运动，若受到的阻力 f 与速度平方成正比，即大小可表示为 $f = mgk^2v^2$，其中 m 为物体的质量、g 为重力加速度、k 为常数。试求此物体 (1) 上升的最大高度；(2) 回到上抛点时的速度大小。

解答

- 以物体为研究对象，以抛出点为坐标原点，竖直向上为 y 轴正方向，抛出时刻为 $t = 0$
- 对物体受力分析，物体共受到两个力的作用，竖直向下的重力，大小为 mg，空气阻力，大小为 $f = mgk^2v^2$，方向与速度方向相反，上升阶段，空气阻力方向竖直向下，下降阶段，空气阻力方向竖直向上

解答

- 上升阶段的任意时刻 t，设质点位置为 y，速度为 v，加速度为 a，则根据牛顿第二定律，有 (竖直向上为 y 轴正方向)

$$F = ma = -mg - mgk^2v^2$$

- 上升到最高位置 H，速度 $v = 0$，因此要求速度随位置的变化关系

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

由牛顿第二定律得

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= -mg - mgk^2v^2 \\ a &= -g - gk^2v^2 \\ &= -g(1 + k^2v^2) \\ &= v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \end{aligned}$$

分离变量得

$$\frac{v\,\mathrm{d}v}{1 + k^2v^2} = -g\,\mathrm{d}y$$

解答

积分

$$\int_{v_0}^{0} \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+k^2v^2} = \int_0^H -g\,\mathrm{d}y = -gH$$

第一类换元法,引入中间变量 $u = 1+k^2v^2$,则

$$\mathrm{d}u = 2k^2 v\,\mathrm{d}v$$

$$v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k^2}\mathrm{d}u$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+k^2v^2} = \int_{1+k^2v_0^2}^{1} \frac{\frac{1}{2k^2}\mathrm{d}u}{u}$$

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^{0} \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+k^2v^2} &= \int_{1+k^2v_0^2}^{1} \frac{\frac{1}{2k^2}\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2k^2}\int_{1+k^2v_0^2}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2k^2}[\ln u]\Big|_{1+k^2v_0^2}^{1} \\
&= \frac{1}{2k^2}\left[\ln 1 - \ln(1+k^2v_0^2)\right] \\
&= -\frac{1}{2k^2}\ln(1+k^2v_0^2) \\
&= -gH \\
H &= \frac{1}{2gk^2}\ln(1+k^2v_0^2)
\end{aligned}$$

解答

下降阶段的任意时刻 t，设质点位置为 y，速度为 v，加速度为 a，则根据牛顿第二定律，有 (竖直向上为 y 轴正方向)

$$F = ma = -mg + mgk^2v^2$$

回到上抛点，$y = 0$，假定速度 $v = v_1$(向下运动，$v_1 < 0$)，因此要求速度随位置的变化关系

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

由牛顿第二定律得

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= -mg + mgk^2v^2 \\ a &= -g + gk^2v^2 \\ &= -g(1 - k^2v^2) \\ &= v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \end{aligned}$$

分离变量得

$$\frac{v\,\mathrm{d}v}{1 - k^2v^2} = -g\,\mathrm{d}y$$

解答

积分

$$\int_0^{v_1} \frac{v\,\mathrm{d}v}{1-k^2v^2} = \int_H^0 -g\,\mathrm{d}y = gH$$

第一类换元法,引入中间变量 $u = 1-k^2v^2$,则

$$\mathrm{d}u = -2k^2 v\,\mathrm{d}v$$

$$v\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{2k^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^{v_1} \frac{v\,\mathrm{d}v}{1-k^2v^2} = \int_1^{1-k^2v_1^2} \frac{-\frac{1}{2k^2}\,\mathrm{d}u}{u}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{v_1} \frac{v\,\mathrm{d}v}{1-k^2v^2} &= \int_1^{1-k^2v_1^2} \frac{-\frac{1}{2k^2}\,\mathrm{d}u}{u} \\
&= -\frac{1}{2k^2}\int_1^{1-k^2v_1^2} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= -\frac{1}{2k^2}\left[\ln u\right]\Big|_1^{1-k^2v_1^2} \\
&= -\frac{1}{2k^2}\left[\ln(1-k^2v_1^2) - \ln 1\right] \\
&= -\frac{1}{2k^2}\ln(1-k^2v_1^2) \\
&= gH
\end{aligned}$$

$$H = -\frac{1}{2gk^2}\ln(1-k^2v_1^2)$$

解答

$$H = \frac{1}{2gk^2}\ln(1+k^2v_0^2)$$

$$H = -\frac{1}{2gk^2}\ln(1-k^2v_1^2)$$

$$\ln(1+k^2v_0^2) = -\ln(1-k^2v_1^2)$$

$$\ln(1+k^2v_0^2)+\ln(1-k^2v_1^2) = 0$$

$$(1+k^2v_0^2)(1-k^2v_1^2) = 1$$

$$1-k^2v_1^2 = \frac{1}{1+k^2v_0^2}$$

$$k^2v_1^2 = 1-\frac{1}{1+k^2v_0^2} = \frac{k^2v_0^2}{1+k^2v_0^2}$$

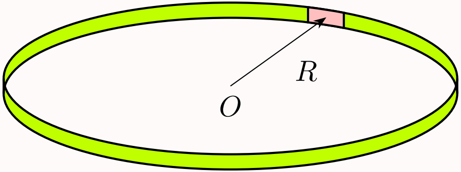
$$v_1^2 = \frac{v_0^2}{1+k^2v_0^2}$$

$$v_1 = -\frac{v_0}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}$$

三、质点的曲线运动

例题

如图所示，光滑的水平桌面上放置一半径为 R 的固定圆环，物体紧贴环的内侧作圆周运动，物体与圆环之间的摩擦因数为 μ。已知 $t=0$ 时物体的速率为 v_0，求：(1) 任意 t 时刻物体的速率 v；(2) 当物体速率从 v_0 减少到 $\frac{1}{2}v_0$ 时，物体所经历的时间及经过的路程。



解答

(1) 以物体为研究对象，受力分析，物体共受到四个力的作用：竖直向下的重力 W，光滑水平面施加的竖直向上的支持力 N_0；圆形轨道施加的方向在水平面内的两个力：垂直轨道指向圆心的支持力 N_1，与轨道相切、与运动方向相反的摩擦力 $f=\mu N_1$。

解答

竖直方向上，重力 W 与支持力 N_0 平衡；水平面内，采用自然坐标系，列切向方向上的牛顿第二定律

$$-\mu N_1 = m a_t$$

列法向方向上的牛顿第二定律

$$N_1 = m\frac{v^2}{R}$$

整理，得

$$-\mu m\frac{v^2}{R} = m a_t$$

$$a_t = -\mu\frac{v^2}{R} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \frac{\mu}{R}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t \frac{\mu}{R}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{\mu}{R}t$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{\mu}{R}t = \frac{R+\mu v_0 t}{v_0 R}$$

$$v = \frac{v_0 R}{R+\mu v_0 t}$$

解答

(2)

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0R}{R+\mu v_0 t}$$

$$\mathrm{d}s=\frac{v_0R}{R+\mu v_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$s=\int_0^t\frac{v_0R}{R+\mu v_0 t}\,\mathrm{d}t=\frac{R}{\mu}\ln\frac{R+\mu v_0 t}{R}$$

$$v=\frac{v_0R}{R+\mu v_0 t}=\frac{v_0}{2}$$

$$\mu v_0 t=R$$

$$s=\frac{R}{\mu}\ln\frac{R+\mu v_0 t}{R}=\frac{R}{\mu}\ln 2$$

或 $a_t=-\mu\frac{v^2}{R}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{\mu}{R}\,\mathrm{d}s$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^s-\frac{\mu}{R}\,\mathrm{d}s$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{\mu}{R}s$$

$$s=\frac{R}{\mu}\ln\frac{v_0}{v}$$

当 $v=\frac{v_0}{2}$ 时，

$$s=\frac{R}{\mu}\ln 2$$

四、质点的平衡

- 当质点保持静止或做匀速直线运动，则称质点处于平衡状态。
- 当质点处于平衡状态时，加速度为零，因此由牛顿第二定律可知，此时质点所受合力为零，这就是质点的平衡条件。
- 质点平衡方程的矢量形式

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- 直角坐标系中，质点平衡方程的分量形式

$$\sum_i F_{ix} = 0$$

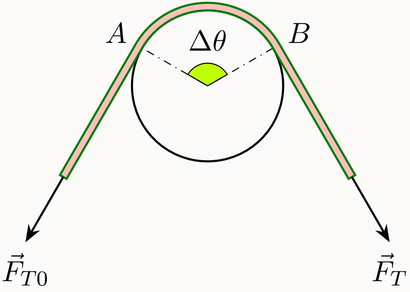
$$\sum_i F_{iy} = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = 0$$

- 当质点处于平衡状态时，质点所受合力为零，因此各力沿任意方向的投影之和也为零。

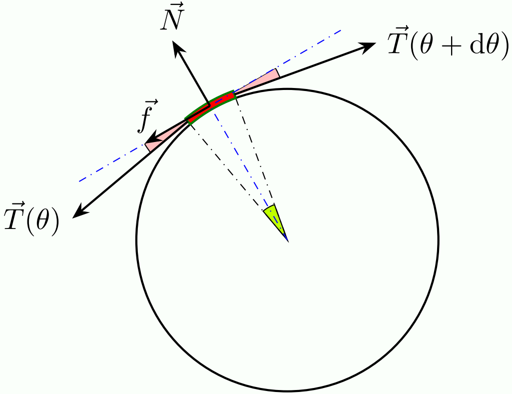
例题 3-5

将绳索在木桩上绕几圈，能使绳的一端受到极大拉力，例如拴一头牛，只要用很小的力拽住绳的另一端，即可将绳索固定，原因在哪里？图表示绳与圆柱体在 $\overset{\frown}{AB}$ 弧段上接触且无相对滑动，$\overset{\frown}{AB}$ 对应的平面角 $\Delta\theta$ 称为“包角”。$\vec{F}_{T0}$ 和 $\vec{F}_T$ 分别表示 A 点和 B 点绳的张力。设绳与圆柱间的静摩擦因数为 μ_0；不计绳的质量。求在 $\vec{F}_{T0}$ 一定的条件下，$\vec{F}_T$ 的最大值 $F_{T\,\max}$。



解答

取对圆心张角为 $\mathrm{d}\theta$ 的一小段绳子为研究对象，对它进行受力分析：两端的绳子对它的拉力分别为 $\vec{T}(\theta)$ 和 $\vec{T}(\theta+\mathrm{d}\theta)$，圆柱体对它的支持力 N，静摩擦力 $f \leqslant \mu_0 N$



解答

由于绳子静止，所受合力为零，因此沿任意方向的分量之和也为零。沿切线方向和半径方向 (这里不好说是自然坐标系) 分别列牛顿第二定律

$$T(\theta+\mathrm{d}\theta)\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-T(\theta)\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-f=0$$
$$N-T(\theta+\mathrm{d}\theta)\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-T(\theta)\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}=0$$

由于 $\mathrm{d}\theta\to 0$，所以有

$$\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$$
$$\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx 1$$

另记

$$T(\theta)=T$$
$$\mathrm{d}T=T(\theta+\mathrm{d}\theta)-T(\theta)$$

解答

整理，得

$$f = T(\theta + \mathrm{d}\theta) - T(\theta) = \mathrm{d}T$$

$$N = [T(\theta + \mathrm{d}\theta) + T(\theta)]\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$$

$$f \leqslant \mu_0 N$$

$$\mathrm{d}T \leqslant \mu_0(2T + \mathrm{d}T)\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \approx \mu_0 T\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} \leqslant \mu_0\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{F_{T0}}^{F_T} \frac{\mathrm{d}T}{T} \leqslant \int_0^{\Delta\theta} \mu_0\,\mathrm{d}\theta$$

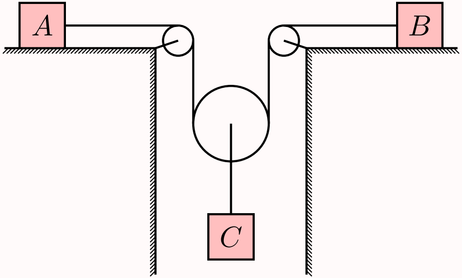
$$\ln\frac{F_T}{F_{T0}} \leqslant \mu_0 \Delta\theta$$

$$F_T \leqslant F_{T0}\mathrm{e}^{\mu_0\Delta\theta}$$

$$F_{T\max} = F_{T0}\mathrm{e}^{\mu_0\Delta\theta}$$

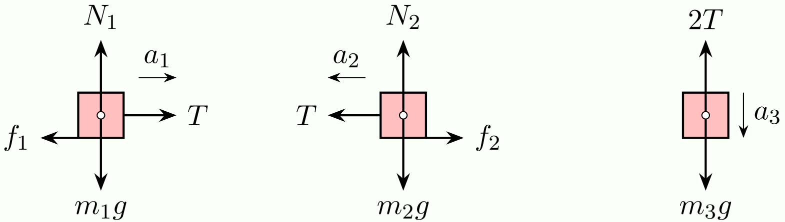
习题 3.4.7

在图示的装置中，物体 A、B、C 的质量各为 m_1、m_2、m_3，且两两不等。若物体 A、B 与桌面间的摩擦因数均为 μ，求三个物体的加速度及绳内的张力。不计绳和滑轮质量，不计轴承摩擦，绳不可伸长 (忽略绳与滑轮之间的摩擦)。



解答

由于题目未给出 m_1、m_2、m_3 和 μ 的具体数值，所以可能存在 A、B 静止的情况。分别以 A、B、C 为研究对象，受力分析 (考虑到绳子不计质量，忽略绳与滑轮之间的摩擦)



解答

向右为 x 轴正方向，向下为 y 轴正方向。分别对三个物体列牛顿第二定律

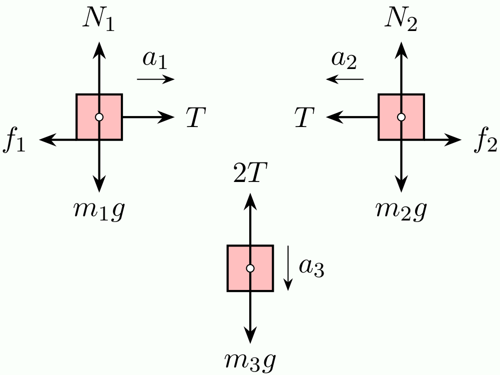
$$m_1 g - N_1 = 0$$

$$T - f_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 g - N_2 = 0$$

$$f_2 - T = m_2(-a_2)$$

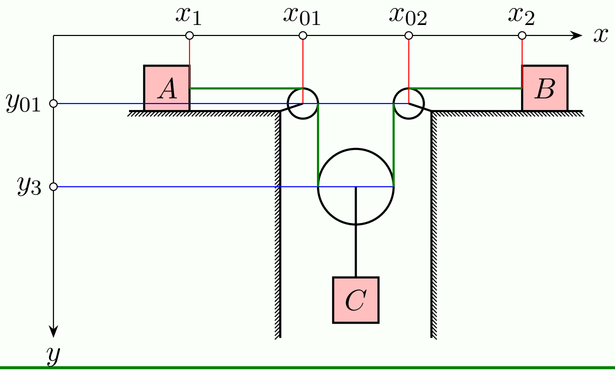
$$m_3 g - 2T = m_3 a_3$$



解答

绳子不可伸长

$$(x_2 - x_{02}) + (x_{01} - x_1) + 2(y_3 - y_{01}) = L$$



解答

联立

$$(x_2 - x_{02}) + (x_{01} - x_1) + 2(y_3 - y_{01}) = L$$
$$(\ddot{x}_2 - 0) + (0 - \ddot{x}_1) + 2(\ddot{y}_3 - 0) = 0$$
$$-a_2 - a_1 + 2a_3 = 0$$

【此前六式与 A、B 运动与否无关，均成立，此后各式成立的条件为】

假设 A、B 都运动，则

$$f_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g$$
$$f_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$$

$$T - \mu m_1 g = m_1 a_1 \quad (1)$$
$$T - \mu m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$
$$m_3 g - 2T = m_3 a_3 \quad (3)$$
$$-a_2 - a_1 + 2a_3 = 0 \quad (4)$$

解答

(1) 式解出 T

$$T = \mu m_1 g + m_1 a_1 \qquad (1)$$

代入 (2)(3) 式，消去 T

$$\mu(m_1 - m_2)g + m_1 a_1 = m_2 a_2 \qquad (2)$$

$$m_3 g - 2(\mu m_1 g + m_1 a_1) = m_3 a_3 \qquad (3)$$

$$-a_2 - a_1 + 2a_3 = 0 \qquad (4)$$

(4) 式解出 a_2

$$a_2 = -a_1 + 2a_3 \qquad (4)$$

代入 (2) 式，消去 a_2

$$\mu(m_1 - m_2)g + (m_1 + m_2)a_1 = 2m_2 a_3 \qquad (2)$$

$$m_3 g - 2\mu m_1 g - 2m_1 a_1 = m_3 a_3 \qquad (3)$$

解答

(2) 式 $\times m_3$ =(3) 式 $\times(2m_2)$

$$\mu(m_1-m_2)m_3g+(m_1+m_2)m_3a_1=2m_2m_3g-4\mu m_1m_2g-4m_1m_2a_1$$

$$[(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2]a_1=[2m_2m_3-\mu(4m_1m_2+m_1m_3-m_2m_3)]g$$

$$a_1=g\frac{2m_2m_3-\mu(4m_1m_2+m_1m_3-m_2m_3)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}=g\left[\frac{2m_2m_3(1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}-\mu\right]$$

解答

a_1 代回 (2) 或 (3) 式得到 a_3

$$
\begin{aligned}
a_3 &= g - \frac{4m_1m_2(1+\mu)g}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2} \\
&= g\frac{(m_1+m_2)m_3-4m_1m_2\mu}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2} \\
&= g\left[\frac{(m_1+m_2)m_3(1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}-\mu\right]
\end{aligned}
$$

a_1 代回 (1) 式得到 T

$$
T = \frac{2m_1m_2m_3(1+\mu)g}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}
$$

a_1、a_3 代回 (4) 式得到 a_2

$$
a_2 = g\left[\frac{2m_1m_3(1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}-\mu\right]
$$

解答

$$a_1 = g\left[\frac{2m_2m_3(1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2} - \mu\right]$$

$$a_2 = g\left[\frac{2m_1m_3(1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2} - \mu\right]$$

$$a_3 = g\left[\frac{(m_1+m_2)m_3(1+\mu)}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2} - \mu\right]$$

$$T = \frac{2m_1m_2m_3(1+\mu)g}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}$$

以上结果是在假设 A、B 都运动的前提下得到的

- 若 $T < \mu m_1 g$ 或 $a_1 < 0$，则 m_1 静止

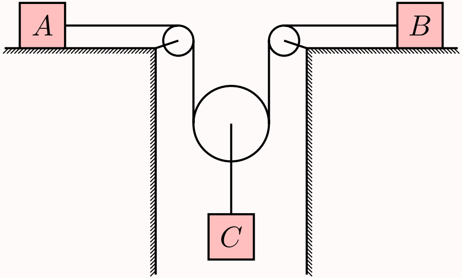
$$2m_2m_3 < \mu(m_1m_3 - m_2m_3 + 4m_1m_2)$$

- 若 $T < \mu m_2 g$ 或 $a_2 < 0$，则 m_2 静止

$$2m_1m_3 < \mu(m_2m_3 - m_1m_3 + 4m_1m_2)$$

问题 1

如何分析当 $m_1 = 0$ 或 $m_2 = 0$ 或 $m_3 = 0$ 时各物体的加速度和绳子的拉力？



提示

$$
\begin{aligned}
m_1 g - N_1 &= 0 \\
T - f_1 &= m_1 a_1 \\
m_2 g - N_2 &= 0 \\
f_2 - T &= m_2(-a_2) \\
m_3 g - 2T &= m_3 a_3 \\
-a_2 - a_1 + 2a_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 0 \\
N_1 &= 0 \\
f_1 &= 0 \\
T &= 0 \\
a_3 &= g \\
f_2 &= 0 \\
a_2 &= 0 \\
a_1 &= 2g
\end{aligned}
$$

习题 3.4.9

跳伞运动员张伞时的速度为 $v_0=0$，阻力大小与速度平方成正比：$F_{阻}=\alpha v^2$，人伞总质量为 m。求 $v=v(t)$ 的函数。【提示：积分时可利用式 $\frac{1}{1-v^2}=\frac{1}{2(1+v)}+\frac{1}{2(1-v)}$】

解答

以竖直向下为 y 轴正方向，张伞时刻为 $t=0$。以人和伞为研究对象，受力分析：向下的重力 mg，向上的阻力 $F_{阻}$。列牛顿第二定律

$$mg-\alpha v^2=ma$$

$$a=g-\frac{\alpha}{m}v^2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{\alpha}{m}v^2}=\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{\alpha}{m}v^2}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

解答

令 $\frac{mg}{\alpha} = \beta^2$，则 $\beta = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g - \frac{\alpha}{m}v^2} &= \frac{m}{\alpha}\left[\frac{1}{\frac{mg}{\alpha} - v^2}\right] \\
&= \frac{m}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta^2 - v^2}\right] \\
&= \frac{\beta^2}{g}\left[\frac{1}{\beta + v} + \frac{1}{\beta - v}\right]\frac{1}{2\beta} \\
&= \frac{\beta}{2g}\left[\frac{1}{\beta + v} + \frac{1}{\beta - v}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{\alpha}{m}v^2} &= \frac{\beta}{2g}\left[\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\beta + v} + \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\beta - v}\right] \\
&= \frac{\beta}{2g}\left[\ln\frac{\beta + v}{\beta} - \ln\frac{\beta - v}{\beta}\right] \\
&= \frac{\beta}{2g}\ln\left[\frac{\beta + v}{\beta} \times \frac{\beta}{\beta - v}\right] \\
&= \frac{\beta}{2g}\ln\frac{\beta + v}{\beta - v}
\end{aligned}$$

解答

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{\alpha}{m}v^2}=\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{\beta}{2g}\ln\frac{\beta+v}{\beta-v}=t$$

$$\ln\frac{\beta+v}{\beta-v}=\frac{2gt}{\beta}$$

$$\frac{\beta+v}{\beta-v}=\mathrm{e}^{\frac{2gt}{\beta}}$$

$$\beta+v=(\beta-v)\mathrm{e}^{\frac{2gt}{\beta}}$$

$$v(1+\mathrm{e}^{\frac{2gt}{\beta}})=\beta(\mathrm{e}^{\frac{2gt}{\beta}}-1)$$

$$v=\beta\frac{\mathrm{e}^{\frac{2gt}{\beta}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2gt}{\beta}}+1}$$

高数 (第 7 版) 上册 P375(21) 式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\mathrm{C}$$

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{\beta^2-v^2}=-\frac{1}{2\beta}\left[\ln\left|\frac{v-\beta}{v+\beta}\right|\right]_0^v=\frac{1}{2\beta}\ln\frac{\beta+v}{\beta-v}$$

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{\alpha}{m}v^2}=\frac{\beta^2}{g}\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{\beta^2-v^2}$$

$$=\frac{\beta^2}{g}\times\frac{1}{2\beta}\ln\frac{\beta+v}{\beta-v}$$

$$=\frac{\beta}{2g}\ln\frac{\beta+v}{\beta-v}$$