§4.4 保守力与非保守力·势能

一、力场

- 质点受到的力通常与质点的位置、速度、时间等因素有关。
  - 若弹簧一端固定，另一端与质点相连，则当质点处于不同位置，弹簧形变量不同，弹簧的弹力不同
  - 若质点在粗糙的地面运动，速度方向不同时，摩擦力的方向也不同
  - 通常认为质点受到的空气阻力与速度大小有关，因此质点在空中运动时，速度会发生变化，空气阻力也会发生变化
- 如果质点受到的力仅与质点的位置有关，即

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

则这种力称为场力。存在场力的空间称为力场。

实用数学手册 (第 2 版)[叶其孝, 沈永欢]P575

如果对空间区域 D 的每个点，都对应某个物理量的一个确定的值，则称在 D 上确定了该物理量的一个场。如果这物理量是数量，则称所讨论的场为数量场或标量场；如果是向量，则称为向量场。温度场、密度场、电位场等，都是数量场；力场、电场、磁场等，都是矢量场。

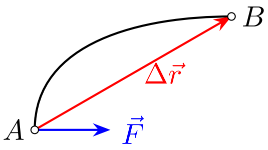
- 重力、万有引力、弹簧的弹力、静电力等属于场力
- 摩擦力、运动电荷在磁场中受到的洛伦兹力不是场力
- 地球表面附近不大范围内的重力场、带电粒子在无限大带电平面周围受到的静电力场均可视为均匀力场
- 如果质点所受力的作用线总是通过某一点，则该力称为有心力，该点称为力心

二、保守力与非保守力

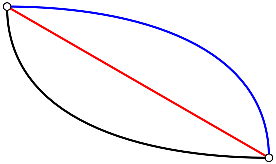
- 保守力所做的功仅由受力质点的始末位置决定而与受力质点所经历的路径无关
- 保守力沿任意闭合路径所做的功都等于零
- 如果质点受到的力 $\vec{F}$ 为恒力，则质点沿任意曲线运动的过程中，$\vec{F}$ 对质点所做的功

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

只与始末位置有关，与具体路径无关，因此恒力是保守力



在地球表面附近运动的质点所受到的重力可以视为恒力，所以重力所做的功也只与始末位置有关，与具体的路径无关。因此重力也是保守力



取竖直向上为 z 轴正方向，则重力为 $\vec{F}=-mg\,\vec{\mathrm{e}}_z$，那么质点从 $A(x_A,y_A,z_A)$ 到 $B(x_B,y_B,z_B)$ 的过程中重力所做的功为

$$\vec{F}=-mg\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\Delta\vec{r}=(x_B-x_A)\,\vec{\mathrm{e}}_x+(y_B-y_A)\,\vec{\mathrm{e}}_y+(z_B-z_A)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=-mg(z_B-z_A)$$

FUJIAN NORMAL UN 1907

弹簧一端固定，另一端与质量为 m 的质点相连，弹簧的劲度系数为 k。以弹簧自然伸长时质点的位置为坐标原点，沿弹簧伸长方向为 x 轴正方向，则质点从 x_1 运动到 x_2 的过程中弹簧弹力对质点所做的功

$$W_{AB} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

弹簧的弹力也是保守力

- 非保守力所做的功不仅决定于受力质点的始末位置，还与受力质点所经历的路径有关。相同的始末位置，也许有些路径功相等，只要有一个路径的功与其他路径的功不等，力就是非保守力
- 非保守力沿任意闭合路径所做的功不都等于零。也许有些闭合路径的功为零，只要有一个闭合路径的功不为零，力就是非保守力

根据积分变换的斯托克斯 (Stokes) 定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

以及保守力沿任何闭合路径做功恒为零的特点，可以得到判断一个力 $\vec{F}$ 是否保守力的判据

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

微分算符 ∇ 在直角坐标系中表示为

$$\nabla = \vec{\mathrm{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathrm{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathrm{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

符号 $\frac{\partial}{\partial x}$、$\frac{\partial}{\partial y}$、$\frac{\partial}{\partial z}$ 表示其后的多元函数对一个变量的导数，称为偏导数。若函数是以 x、y、z 为自变量，那么 $\frac{\partial}{\partial x}$ 表示把函数中的 y 和 z 变量看成常数，再对 x 变量求导数，更严谨地应该写成 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z}$

在直角坐标系中

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_x & \vec{\mathrm{e}}_y & \vec{\mathrm{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{\mathrm{e}}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \vec{\mathrm{e}}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \vec{\mathrm{e}}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

三、势能

- 由于保守力做功只与受力质点的始、末位置有关，与中间过程没有关系，因此可以定义一个与位置有关的函数，用来表示保守力的功，这个函数就是与保守力相对应的势能函数
- 规定某个过程中某保守力所做的功等于相应势能的减少，即

$$
\begin{aligned}
W &= \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\Delta E_p \\
&= -(E_{pB} - E_{pA}) = E_{pA} - E_{pB}
\end{aligned}
$$

注意，由上式只能定义出两个位置势能的变化量，而无法确定某个位置势能的具体值

- 质点从高处落向低处，重力做正功，重力势能减小
- 质点从低处抛向高处，重力做负功，重力势能增大

如果要确定某个位置势能的具体值，必须先规定势能的参考点，即规定某个特定位置的势能为零，再通过任意位置与特定位置之间的势能差来确定待求位置的势能值

$$\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$

$$E_{pA} = E_{pB} + \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

如果令 $E_{pB} = 0$，即选择 B 点为势能为零的位置，那么 A 点的势能为

$$E_{pA} = \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

它等于从待求位置 (A 点) 经过任意路径到达势能零点 (B 点) 时保守力所做的功。显然，选择不同的势能零点将影响某点的势能值，但不会影响两点之间的势能差。

福建師範 FUJIAN NORMAL UN 1907

原则上，势能零点的选择是任意的，但习惯上都有一个惯用的选择

- 对于重力势能：通常选择地面上某点为坐标原点，竖直向上为 z 轴正方向，选择坐标原点为重力势能的零点，则任意位置 (x,y,z) 的重力势能为

$$
\begin{aligned}
E_{p重} &= \int_{(x,y,z)}^{(0,0,0)} \vec{F}_{重} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_{(x,y,z)}^{(0,0,0)} (-mg\,\vec{\mathrm{e}}_z) \cdot (\mathrm{d}x\,\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{d}y\,\vec{\mathrm{e}}_y + \mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= \int_z^0 -mg\,\mathrm{d}z \\
&= [-mgz]\big|_z^0 \\
&= mgz
\end{aligned}
$$

- 对于弹性势能：通常选择弹簧自然伸长 $(x=0)$ 处为弹性势能的零点，则弹簧伸长 x 时的弹性势能为

$$
\begin{aligned}
E_{p弹} &= \int_x^0 \vec{F}_{弹} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_x^0 (-kx\,\vec{\mathrm{e}}_x) \cdot (\mathrm{d}x\,\vec{\mathrm{e}}_x) \\
&= \int_x^0 -kx\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]\Bigg|_x^0 \\
&= \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}
$$

- P117：因势能与质点间的保守力相联系，故势能属于以保守力相互作用的质点系，例如重力势能属于地球和受重力作用的质点所共有，弹簧弹性势能属于弹簧和相连质点所共有。为了方便常采用“重力场中某质点的 (重力) 势能”等简略说法。
- 由已知保守力求势能的一般方法：先选择势能零点，再通过保守力从待求位置到势能零点所做的功来计算待求位置的势能。由此我们还可以知道，对于两个无限接近的点，它们之间的势能差可以表示成

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_p &= -\,\mathrm{d}W \\ &= -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= -F_x\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}y - F_z\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

对于任意多元函数 $A(x,y,z)$，其微分表达式可以一般地写成

$$\mathrm{d}A=\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,z}\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{x,y}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}E_p=-F_x\,\mathrm{d}x-F_y\,\mathrm{d}y-F_z\,\mathrm{d}z$$

一般而言，势能 E_p 是空间坐标 (x,y,z) 的函数，所以有

$$F_x=-\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}\qquad F_y=-\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}\qquad F_z=-\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}$$

保守力与相应势能的关系

$$\begin{aligned}\vec{F}&=F_x\,\vec{\mathrm{e}}_x+F_y\,\vec{\mathrm{e}}_y+F_z\,\vec{\mathrm{e}}_z\\&=-\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{\mathrm{e}}_x-\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{\mathrm{e}}_y-\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{\mathrm{e}}_z\\&=-\nabla E_p\end{aligned}$$

四、势能是物体相对位置的函数

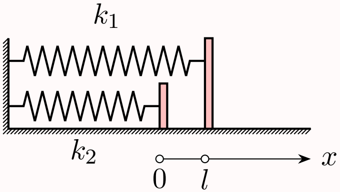
- 前面通过保守力做功计算势能时是假定施力物体静止不动而受力质点在运动，如果施力物体和受力物体都在运动，那么他们之间的保守力是一对作用力和反作用力
- 在任意元过程中，一对作用力和反作用力的总功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12} = \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

  等于 m_1 施加给 m_2 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 与站在 m_1 上观察时 m_2(相对) 位置的改变量 $\mathrm{d}\vec{r}_{12}$ 的点乘积，也等于 m_2 施加给 m_1 的作用力 $\vec{F}_{21}$ 与站在 m_2 上观察时 m_1(相对) 位置的改变量 $\mathrm{d}\vec{r}_{21}$ 的点乘积。
- 因此，若两运动质点彼此作用以保守力，则作用力和反作用力的总功只和两质点始末相对位置有关，这样就可以用他们之间的作用力和反作用力的总功来定义由这两个运动质点所组成的质点系的势能差。类似地可以定义更一般的由 N 个质点组成的质点系的势能。

习题 4.4.1

如图所示，两个仅可压缩的弹簧组成一可变劲度系数的弹簧组，弹簧 1 和 2 的劲度系数各为 k_1 和 k_2。它们自由伸展的长度相差 l。坐标原点置于弹簧 2 自由伸展处。求弹簧组在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 和 $x < 0$ 时弹性势能的表示式。



解答

以坐标原点为弹性势能的零点，当 $0 \leqslant x \leqslant l$ 时

$$
\begin{aligned}
E_p &= \int_x^0 -k_1(x-l)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}k_1(x-l)^2\right]\Big|_x^0 \\
&= \frac{1}{2}k_1\left[(x-l)^2 - l^2\right]
\end{aligned}
$$

解答

当 $x < 0$ 时

$$
\begin{aligned}
E_p &= \int_x^0 \left[-k_1(x-l) - k_2 x\right] \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}k_1(x-l)^2 - \frac{1}{2}k_2 x^2\right]\Bigg|_x^0 \\
&= \frac{1}{2}k_1\left[(x-l)^2 - l^2\right] + \frac{1}{2}k_2 x^2
\end{aligned}
$$