清华大学

《大学物理》题库

解答

Argo

20220627

写在前面

我于 2014 年春季开始参与我校《大学物理 B/C》的教学工作，为了积累教学参考资料，于 2014 年 04 月 22 日从百度文库搜得《清华大学〈大学物理〉习题库试题及答案》，历经一年多于 2015 年 07 月 13 日完成了 718 题的解答和排版工作 (文字用 tex，图片用 origin)，生成第一份文件“清华大学大学物理题库全集含详解 20150714.pdf”。之后将这份材料提供给 2015 级物理学同学做参考，并将同学发现的错误更正后生成第二、三、……份文件。2016 年 04 月，根据我校《大学物理 B/C》的教学内容安排对章节顺序做了调整，生成“大学物理习题库含详解 20160414.pdf”，并提供给所教的《大学物理》专业的同学，陆续收到同学反馈的错误并持续修正。2018 年 01 月，修改页面尺寸，生成适合手机浏览的版本 (因各种原因此版本未传给学生使用)。2019 年将题库中力学部分的内容按我校《力学》课程的章节顺序，把所有选择、填空、计算题目按知识点重新编辑排版生成“清华题库 (力学部分) 详解 v20191110.pdf”，2020 年 02 月，进行全新改版，1、根据我校《大学物理 B/C》的教学内容安排进行章节排序，2、按知识点整理所有选择、填空、计算题，3、题目和解答分别生成单独文件，将整份材料分成五个部分：(第一部分：力学)、(第二部分：电磁学)、(第三部分：热学)、(第四部分：振动和波动)、(第五部分：光学)。2020 年暑假，添加了封面，将所有图片改用 tikz 重新绘制，并于 2020 年 08 月 05 日生成了新版本，之后个别题目有所修改，每次修改都会生成新的版本，但 2020 年 06 月之后的修改没有列入勘误表。

前两天大物期末考试改卷过程中，有老师反应有些同学在使用这个材料的过程中，希望能够及时与人讨论，为此我新建了一个 QQ 群：228092268，有需要讨论的同学可以加入交流，加群时请报上年级、专业和姓名，加群后请第一时间修改群名片，也欢迎愿意交流的老师加入。但在群里交流，有一些基本的要求，比如交流时应该先说明提问者自己经过思考之后的思路和解法，我个人是不会回答“这道题怎么做”、“这题的答案是不是……”之类的问题。另外，建这个群的目的主要是为了我们学校的同学在学习大学物理过程中遇到问题而进行交流，因此其他学校的同学不建议加入，大物学完之后的同学建议及时退出。本资料的后续更新版本只发布于此群中。

最后一个声明：封面上写的 argo，以及每页页脚处的“@argo”，仅仅是表明这份资料是我排版编辑的，其中内容的版权我不知道应该属于谁。

argo 于 2022 年 06 月 27 日

勘误表

1. 20151116：力学，填空题，【0100】,【2015 物理学郑兰花】
2. 20151118：力学，选择题，【0686】,【2015 物理学陈慧芳】
3. 20151214：机械波，填空题，【3076】,【2015 物理学叶子青】
4. 20161229：相对论，填空题，【4363】,【2016 物理学林锦扬】
5. 20170103：相对论，选择题，【4356】
6. 20171127：力学，选择题，【0442】,【2017 材料物理宋加贝】
7. 20171204：力学，计算题，【0769】,【2017 材料物理宋加贝】
8. 20171220：机械振动，选择题，【5505】,【2016 化材学院】
9. 20171230：光学，选择题，【3664】,【2016 化学毕嘉慧】

10. 20180102：电学，填空题，【5166】,【2017 材料物理宋加贝】
11. 20180103：热学，填空题，【0192】,【2016 化学毕嘉慧】
12. 20180103：光学，计算题，【3660】,【2016 化工肖子恒】
13. 20180118：光学，选择题，【3633】,【2016 化学毕嘉慧】
14. 20180121：电学，填空题，【1041】,【2017 材料物理肖靖】
15. 20180316：热学，选择题，【4955】,【2017 物理学张颖祺】
16. 20181225：机械振动，选择题，【5505】,【2017 资环】
17. 20190110：热学，计算题，【4111】,【2018 物理学杨溢】
18. 20190112：光学，选择题，【3516】,【2017 物理学郑佳蓥】
19. 20190113：机械振动，填空题，【3817】,【2018 物理学杨溢】
20. 20190114：力学，计算题，【0201】,【2018 物理学叶俊豪】
21. 20190114：力学，计算题，【0257】,【2018 物理学叶俊豪】
22. 20190114：机械波，选择题，【3152】,【2018 物理学黄思思】
23. 20190114：机械波，计算题，【5319】,【2018 物理学黄思思】
24. 20190114：力学，选择题，【5020】,【2018 物理学林晗琪】
25. 20190114：力学，填空题，【0093】,【2018 物理学杨溢】
26. 20190114：机械振动，填空题，【3033】,【2018 物理学杨溢】
27. 20190115：机械振动，填空题，【3046】,【2018 物理学蔡媛】
28. 20190226：磁学，填空题，【2616】
29. 20190422：磁学，计算题，【2251】,【2018 物理学蔡媛】
30. 20190531：磁学，填空题，【5160】
31. 20190603：磁学，填空题，【2339】
32. 20190627：电学，选择题，【1582】,【2018 物理学林晓敏】
33. 20190629：磁学，填空题，【2615】,【2018 物理学杨溢】
34. 20191117：力学，计算题，【0416】,【2019 物理学赵英金】
35. 20191219：刚体，选择题，【0132】,【2019 物理学李倩】
36. 20200224：电学，填空题，【1042】
37. 20200413：磁学，填空题，【5310】,【2019 物理学刘菁馨】

38. 20200422：磁学，计算题，【2499】,【2019 物理学何海霞】

39. 20200422：磁学，填空题，【2144】,【2019 物理学林琪琪】

40. 20200531：磁学，计算题，【2499】

目录

第一部分

力学

第一章 质点运动学

1.1 质点运动的描述

1.1.1 运动方程和轨道方程

第 1 题 |【0592】

已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=4t^2\,\vec{e}_x+(2t+3)\,\vec{e}_y$(SI)，则该质点的轨道方程为______。

答案

$x=(y-3)^2$

解析

$$\vec{r}=4t^2\,\vec{e}_x+(2t+3)\,\vec{e}_y$$
$$x=4t^2, y=2t+3$$
$$2t=y-3$$
$$4t^2=x=(y-3)^2$$

第 2 题 |【5003】

一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r}=at^2\,\vec{e}_x+bt^2\,\vec{e}_y$(其中 a、b 为常量)，则该质点作

(A) 匀速直线运动 (B) 变速直线运动 (C) 抛物线运动 (D) 一般曲线运动

答案

B

解析

$$\vec{r} = at^2\,\vec{e}_x + bt^2\,\vec{e}_y$$
$$x = at^2, y = bt^2 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2at\,\vec{e}_x + 2bt\,\vec{e}_y$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2a\,\vec{e}_x + 2b\,\vec{e}_y$$

运动轨迹是一条直线，所以是直线运动；速度随时间变化，所以是变速运动；加速度是个常矢量，所以是匀变速运动；所以质点做匀变速直线运动。

1.1.2 平均速度、平均速率、(瞬时) 速度、(瞬时) 速率

第 3 题 |【0015】

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x, y)$ 的端点处，其速度大小为

(A) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ (B) $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ (C) $\frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ (D) $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

答案

D

解析

$r = |\vec{r}|$ 表示某点到坐标原点之间的距离；$\mathrm{d}r$ 表示上述距离的变化量；$\mathrm{d}\vec{r}$ 表示位移；所以 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ 是速度矢量

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$$
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_y$$
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

第 4 题 |【0508】

质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 T 秒转一圈。在 $2T$ 时间间隔中，其平均速度大小与平均速率大小分别为

(A) $\frac{2\pi R}{T}$，$\frac{2\pi R}{T}$ (B) 0，$\frac{2\pi R}{T}$ (C) 0，0 (D) $\frac{2\pi R}{T}$，0

答案

B

解析

平均速度是指位移与时间的比值；平均速率是路程与时间的比值。

圆周运动，$2T$ 时间之内，质点完成了两圈，位移为 0，路程为 $2\times 2\pi R=4\pi R$，所以平均速度的大小为 0；平均速率的大小为 $\frac{4\pi R}{2T}=\frac{2\pi R}{T}$。

第 5 题 | 【0597】

一质点在 Oxy 平面内运动。运动学方程为 $x=2t(\mathrm{SI})$ 和 $y=19-2t^2(\mathrm{SI})$，则在第 2 秒内质点的平均速度大小 $|\bar{\vec{v}}|=$______，2 秒末的瞬时速度大小 $v_2=$______。

答案

$\sqrt{40}\ \mathrm{m/s}\approx 6.32\ \mathrm{m/s}$，$\sqrt{68}\ \mathrm{m/s}\approx 8.25\ \mathrm{m/s}$

解析

平均速度是某个时间段内质点通过的位移与时间的比值，质点在第 2 秒内的平均速度就是质点在第 2 秒初的位置到第 2 秒末的位置之间的变化 (质点在第 2 秒内的位移) 与时间 (1 秒) 的比值，所以由运动学方程可得

$$x=2t, y=19-2t^2$$

$$\vec{r}=x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y=2t\,\vec{e}_x+(19-2t^2)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_1=2\,\vec{e}_x+17\,\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_2=4\,\vec{e}_x+11\,\vec{e}_y$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=2\,\vec{e}_x-6\,\vec{e}_y$$

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{2\,\vec{e}_x-6\,\vec{e}_y}{1}=2\,\vec{e}_x-6\,\vec{e}_y$$

$$|\bar{\vec{v}}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}\ \mathrm{m/s}\approx 6.32\ \mathrm{m/s}$$

而瞬时速度可以由运动学方程直接求导得到

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\,\vec{e}_x-4t\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_2=2\,\vec{e}_x-8\,\vec{e}_y$$

$$v_{2x}=2, v_{2y}=-8$$

$$v_2=\sqrt{v_{2x}^2+v_{2y}^2}=\sqrt{2^2+(-8)^2}=\sqrt{68}\ \mathrm{m/s}\approx 8.25\ \mathrm{m/s}$$

1.1.3 加速度

第 6 题 |【0601】

下列说法哪一条正确？

(A) 加速度恒定不变时，物体运动方向也不变

(B) 平均速率等于平均速度的大小

(C) 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成 (v_1、v_2 分别为初、末速率)$\bar{v}=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$

(D) 运动物体速率不变时，速度可以变化

答案

D

解析

抛体运动，加速度恒为重力加速度，保持不变，但物体的运动方向一直在发生变化；

平均速率等于路程除以时间 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，平均速度的大小等于位移的大小除以时间 $|\vec{\bar{v}}|=\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$，一般情况下，位移的大小并不会等于路程 $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$，所以一般情况下，平均速率并不会等于平均速度的大小；

$\bar{v}=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$ 这个只是匀变速直线运动中平均速率与始末速率之间的关系，并不适用于任意运动；

做匀速率圆周运动的物体的速率保持不变，但速度一直在变化，因为速度是个矢量，既有大小也有方向，大小不同方向改变时，速度矢量也发生变化。

第 7 题 |【0518】

以下五种运动形式中，$\vec{a}$ 保持不变的运动是

(A) 单摆的运动　(B) 匀速率圆周运动　(C) 行星的椭圆轨道运动

(D) 抛体运动　(E) 圆锥摆运动

答案

D

解析

加速度是个矢量，既有大小，又有方向。

单摆运动的过程中，速度大小一直变化，所以向心加速度 (法向加速度) 的大小和方向一直都是变化，切向加速度的大小和方向也一直在改变，所以加速度也一直在改变；

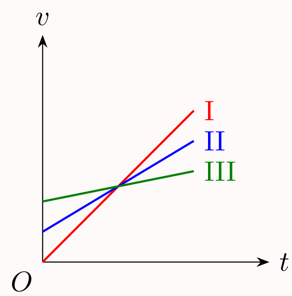
匀速率圆周运动，切向速度的大小保持不变，法向加速度的大小不变，方向一直在变化；没有切向加速度；所以总的加速度也一直在改变 (大小不变，方向变化)；

行星的椭圆轨道运动，所受合力即为万有引力，大小和方向一直在改变，所以总的加速度的大小和方向也一直在改变；

抛体运动，物体只受到重力的作用，大小和方向保持不变，所以物体的加速度也保持不变，一直都是重力加速度，大小为 g，方向竖直向下；
圆锥摆运动，法向加速度的方向一直在改变，所以总的加速度也一直在改变。

第 8 题 |【0589】

在 $v-t$ 图中所示的三条直线都表示同一类型的运动：(1)I、II、III 三条直线表示的是_____ 运动；(2)_____ 直线所表示的运动的加速度最大。



答案

匀加速直线，I

解析

图中三条直线所表示的速度都随时间增加而变大，都是匀加速直线运动；直线 I 表示相同时间间隔内速度增加量最大，所以它表示的运动的加速度最大。

第 9 题 |【0253】

已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=\left(5+2t-\frac{1}{2}t^2\right)\vec{e}_x+\left(4t+\frac{1}{3}t^3\right)\vec{e}_y$(SI)。当 $t=2$ s 时，加速度的大小为 $a=$_____，加速度 $\vec{a}$ 与 x 轴正方向间夹角 $\alpha=$_____。

答案

$\sqrt{17}$ m/s^2，104°

解析

已知质点的位置随时间的变化关系，通过求导可以得到质点在任意时刻的速度和加速度

$$\vec{r}=\left(5+2t-\frac{1}{2}t^2\right)\vec{e}_x+\left(4t+\frac{1}{3}t^3\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=(2-t)\,\vec{e}_x+\left(4+t^2\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\vec{\mathrm{e}}_x+2t\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

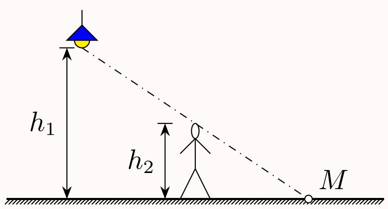
所以 $t=2$ s 时，

$$\vec{a}=-\vec{\mathrm{e}}_x+4\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$a_x=-1, a_y=4$$
$$a=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}\ \mathrm{m/s^2}$$
$$\tan\alpha=\frac{a_y}{a_x}=-4, \alpha=\pi-\arctan 4\approx 104^\circ$$

1.2 直线运动

第 10 题 |【0257】

灯距地面高度为 h_1，一个人身高为 h_2，在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走，如图所示。他的头顶在地上的影子 M 点沿地面移动的速度为 $v_M=$______。



答案

$\frac{h_1}{h_1-h_2}v$

解析

以灯正下方为坐标原点，设某 t 时刻，人的位置为 x_1，M 的位置为 x_2，则由几何关系有

$$\frac{x_2}{h_1}=\frac{x_2-x_1}{h_2}$$
$$\frac{x_2-x_1}{x_2}=1-\frac{x_1}{x_2}=\frac{h_2}{h_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2}=1-\frac{h_2}{h_1}=\frac{h_1-h_2}{h_1}$$
$$x_2=x_1\frac{h_1}{h_1-h_2}$$
$$v_M=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{h_1}{h_1-h_2}=\frac{h_1}{h_1-h_2}v$$

1.2.1 第一类基本问题

第 11 题 |【0018】

某质点作直线运动的运动学方程为 $x=3t-5t^3+6(\mathrm{SI})$，则该质点作

(A) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向　　(B) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

(C) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向　　(D) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

答案

D

解析

$$x=3t-5t^3+6$$
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3-15t^2$$
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-30t$$

加速度随时间变化，所以是变加速运动；$t>0$ 时，$a<0$，说明加速度的方向沿 x 轴负方向。

第 12 题 |【0255】

一质点沿直线运动，其坐标 x 与时间 t 有如下关系 $x=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)(\mathrm{SI})$($A$、$\omega$ 皆为常数)，(1) 任意时刻 t 质点的加速度 $a=$______；(2) 质点通过原点的时刻 $t=$______。

答案

$A\mathrm{e}^{-\beta t}[(\beta^2-\omega^2)\cos(\omega t)+2\beta\omega\sin(\omega t)]$，$(2k+1)\frac{\pi}{2\omega},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

解析

已知位置随时间的变化关系，通过求导可以求得任意时刻的速度和加速度

$$x=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)$$
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(-\beta)\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)+A\mathrm{e}^{-\beta t}(-\omega)\sin(\omega t)=-A\mathrm{e}^{-\beta t}[\beta\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)]$$
$$\begin{aligned}a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=-A(-\beta)\mathrm{e}^{-\beta t}[\beta\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)]-A\mathrm{e}^{-\beta t}[-\beta\omega\sin(\omega t)+\omega^2\cos(\omega t)]\\&=A\mathrm{e}^{-\beta t}[\beta^2\cos(\omega t)+\beta\omega\sin(\omega t)+\beta\omega\sin(\omega t)-\omega^2\cos(\omega t)]\\&=A\mathrm{e}^{-\beta t}[(\beta^2-\omega^2)\cos(\omega t)+2\beta\omega\sin(\omega t)]\end{aligned}$$

而当质点通过原点，则 $x=0$，由运动方程，得

$$x=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)=0$$

$$\cos(\omega t) = 0$$

$$\omega t = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{2k+1}{2}\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$t = (2k+1)\frac{\pi}{2\omega}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

1.2.2 第二类基本问题

第 13 题 |【0007】

一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为 $a = 3 + 2t(\mathrm{SI})$，如果初始时质点的速度 $v_0 = 5\ \mathrm{m/s}$，则当 $t = 3\ \mathrm{s}$ 时，质点的速度 $v =$______。

答案

23 m/s

解析

已知加速度随时间的变化关系和某初始时刻的速度，通过积分可以求得任意时刻的速度

$$a = 3 + 2t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t = (3 + 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (3 + 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$v - v_0 = (3t + t^2)_{t_0}^{t}$$

$$v = v_0 + (3t + t^2)_{t_0}^{t} = 5 + (3t + t^2)_0^3 = 5 + (3 \times 3 + 3^2) = 23\ \mathrm{m/s}$$

第 14 题 |【0604】

某物体的运动规律为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2 t$，式中的 k 为大于零的常量。当 $t = 0$ 时，初速为 v_0，则速度 v 与时间 t 的函数关系是

(A) $v = \frac{1}{2}kt^2 + v_0$　　(B) $v = -\frac{1}{2}kt^2 + v_0$　　(C) $\frac{1}{v} = \frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}$　　(D) $\frac{1}{v} = -\frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}$

答案

C

解析

依题意，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$$
$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=kt\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{v_0}^{v}-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\int_0^t kt\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=\frac{1}{2}kt^2$$
$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{2}kt^2$$

第 15 题 |【0004】

一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=2+6x^2(\mathrm{SI})$；如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解答

已知加速度随位置之间的关系及某个初始位置的速度，通过积分可以求任意位置的速度。

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
$$v\,\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{v_0}^{v}v\,\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v=\int_0^x(2+6x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}v^2=2x+2x^3$$
$$v^2=4x+4x^3$$
$$v=\sqrt{4x+4x^3}=2\sqrt{x+x^3}$$

1.3 曲线运动

1.3.1 抛体运动

第 16 题 |【0599】

以初速率 v_0、抛射角 θ 抛出一物体，则其抛物线轨道最高点处的曲率半径为______。

答案

$\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$

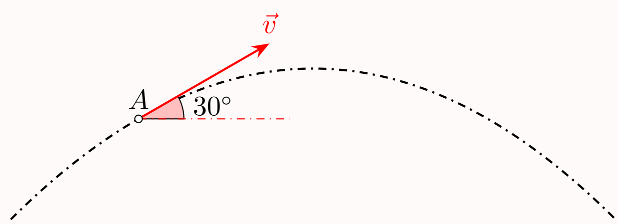
解析

做抛体运动的质点，其只受到重力的作用，所以其总速度为重力加速度，方向竖直向下，在轨道最高点，其速度只有水平分量，大小为初速度的水平分量，所以此处切向加速度为零，法向加速度等于 g，因此有

$$a_n = g = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{\rho}$$
$$\rho = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

第 17 题 |【0017】

一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道 A 点处速度 $\vec{v}$ 的大小为 v，其方向与水平方向夹角成 30°。则物体在 A 点的切向加速度 $a_t =$______，轨道的曲率半径 $\rho =$______。



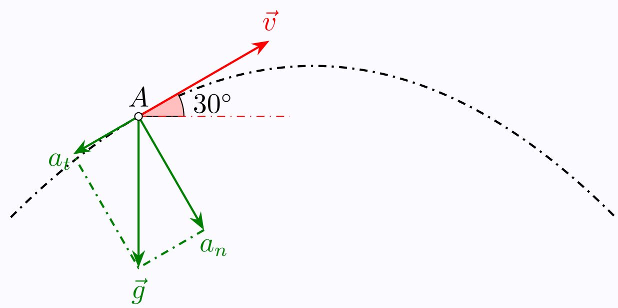
答案

$-\frac{g}{2}$，$\frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$

解析

斜抛物体的总加速度为重力加速度，大小为 g，方向竖直向下，所以，任意位置的切向加速度的大小为 $a_t = g\sin\theta$，图中所示方向与速度方向相反；法向加速度的大小为 $a_n = g\cos\theta = \frac{v^2}{\rho}$，所以该处的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{g\cos\theta} = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$$



1.3.2 圆周运动

第 18 题 |【5382】

质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为 (v 表示任一时刻质点的速率)

(A) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　(B) $\frac{v^2}{R}$　(C) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v^2}{R}$　(D) $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{v^4}{R^2}}$

答案

D

解析

切向加速度

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

法向加速度

$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

总加速度

$$\vec{a}=a_t\,\vec{\mathrm{e}}_t+a_n\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{v^4}{R^2}}$$

第 19 题 |【0006】

质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=3+2t^2$(SI)，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$_____；角加速度 $\beta=$_____。

答案

$16Rt^2\ \mathrm{m/s^2}$，$4\ \mathrm{rad/s^2}$

解析

已知圆周运动中角坐标随时间的变化关系，通过求导可以求得角速度和角加速度

$$\theta = 3 + 2t^2\ \mathrm{rad}$$
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 4t\ \mathrm{rad/s}$$
$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4\ \mathrm{rad/s^2}$$

再根据角量与线量之间的关系，可得质点的线速度和加速度

$$v = \omega R = 4Rt\ \mathrm{m/s}$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 16Rt^2\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 4R\ \mathrm{m/s^2} = \beta R$$

第 20 题 |【0262】

一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律为 $s = bt - \frac{1}{2}ct^2(\mathrm{SI})$，式中 b、c 为大于零的常量，且 $b^2 > Rc$。则此质点运动的切向加速度 $a_t =$______；法向加速度 $a_n =$______。

答案

$-c\ (\mathrm{m/s^2})$，$\frac{(b-ct)^2}{R}\ (\mathrm{m/s^2})$

解析

已知圆周运动质点的位置随时间的变化关系，通过求导可以得到质点在任意时刻的速度和加速度

$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2$$
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = b - ct$$
$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c\ (\mathrm{m/s^2})$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}\ (\mathrm{m/s^2})$$

第 21 题 |【0509】

在半径为 R 的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为 $v=ct^2$(式中 c 为常量)，则从 $t=0$ 到 t 时刻质点走过的路程 $s(t)=$_____；t 时刻质点的切向加速度 $a_t=$_____；t 时刻质点的法向加速度 $a_n=$_____。

答案

$\frac{1}{3}ct^3$，$2ct$，$\frac{c^2t^4}{R}$

解析

已知质点的速率与时间之间的关系，通过积分可以求得质点走过的路

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=ct^2$$

$$\mathrm{d}s=v\,\mathrm{d}t=ct^2\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{s_0}^{s}\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}v\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}ct^2\,\mathrm{d}t$$

$$s-s_0=\frac{1}{3}c(t^3-t_0^3)$$

$$s=s_0+\frac{1}{3}c(t^3-t_0^3)=\frac{1}{3}ct^3$$

而通过求导可得切向加速度

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2ct$$

法向加速度则为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{c^2t^4}{R}$$

第 22 题 |【0261】

一质点从静止出发沿半径 $R=1$ m 的圆周运动，其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta=12t^2-6t(\mathrm{SI})$，则质点的角速度 $\omega=$_____； 切向加速度 $a_t=$_____。

答案

$4t^3-3t^2$ (rad/s)，$12t^2-6t$ (m/s^2)

解析

已知圆周运动质点的角加速度随时间的变化关系和某个初始时刻的角速度，通过积分可以得到质点在任意时刻的角速度

$$\beta=12t^2-6t=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$d\omega = \beta\,dt = (12t^2 - 6t)\,dt$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \beta\,dt = \int_{t_0}^{t} (12t^2 - 6t)\,dt$$
$$\omega - \omega_0 = (4t^3 - 3t^2)_{t_0}^{t}$$
$$\omega = \omega_0 + (4t^3 - 3t^2)_{t_0}^{t} = 4t^3 - 3t^2 \text{ (rad/s)}$$

而根据切向加速度与角加速度之间的关系可以求得切向加速度为

$$a_t = R\beta = 12t^2 - 6t \text{ (m/s}^2)$$

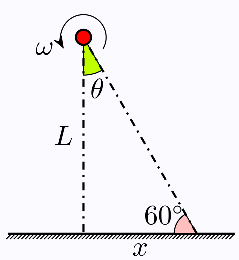
第 23 题 |【0264】

距河岸 (看成直线)500 m 处有一艘静止的船，船上的探照灯以转速为 $n = 1$ r/min 转动。当光束与岸边成 60° 角时，光束沿岸边移动的速度 $v =$______。

答案

$\frac{200\pi}{9}$ m/s ≈ 69.8 m/s

解析



如图所示，由几何关系有

$$x = L\tan\theta$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega L\frac{1}{\cos^2\theta}$$

依题意，$L = 500$ m，$\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ rad/s，$\theta = 30°$，所以光束沿岸边移动的速度为

$$v = \omega L\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\pi}{30} \times 500 \times \frac{1}{\cos^2 30°} = \frac{500\pi}{30 \times 3/4} = \frac{200\pi}{9} \text{ m/s} \approx 69.8 \text{ m/s}$$

1.3.3 一般曲线运动

第 24 题 |【0519】

对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的

(A) 切向加速度必不为零

(B) 法向加速度必不为零 (拐点处除外)

(C) 由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零

(D) 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零

(E) 若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动

答案

B

解析

在自然坐标系中，质点的速度为

$$\vec{v} = v\,\vec{\mathrm{e}}_t$$

加速度为

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, a_n = \frac{v^2}{R}$$

R 是曲线某点的曲率半径。

所以，当物体做匀速率曲线运动时，速率不变，切向加速度为零，但法向加速度不为零，所以其总加速度不为零，因为虽然速度的大小不变，但速度的方向一直在改变，因此速度矢量在改变，所以必然有加速度；

除拐点外，物体的法向加速度永远大于零，因为法向单位矢量永远指向曲线凹的一侧；

物体的速度只有切向分量，法向分量永远为零，但并不说明加速度也只有切向分量，因为加速度是与速度的变化量有关，并不是与速度有关；

若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，那么有可能物体的切向加速度和法向加速度都在变化，比如抛体运动，其加速度为重力加速度，为恒矢量，但运动过程中的切向加速度和法向加速度一直是变化的，物体并不是作匀变速率运动 (匀变速率即要求切向加速度的大小为常量)。

第 25 题 |【0602】

质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，s 表示路程，a_t 表示切向加速度，下列表达式中，(1)$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$，(2)$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v$，(3)$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$，(4)$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = a_t$

(A) 只有 (1)、(4) 是对的

(B) 只有 (2)、(4) 是对的

(C) 只有 (2) 是对的 (D) 只有 (3) 是对的

答案

D

解析

在自然坐标系中，质点的速度为

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t$$
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

加速度为

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_n$$
$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, a_n = \frac{v^2}{R}, a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

R 是曲线某点的曲率半径。
另外，一般地

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$
$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

1.4 相对运动

第 26 题 |【0014】

在相对地面静止的坐标系内，A、B 二船都以 2 m/s 速率匀速行驶，A 船沿 x 轴正向，B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系 (x、y 方向单位矢用 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ 表示)，那么在 A 船上的坐标系中，B 船的速度 (以 m/s 为单位) 为

(A) $2\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y$ (B) $-2\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y$ (C) $-2\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_y$ (D) $2\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_y$

答案

B

解析

以地为静止参考系，A 船为运动参考系，B 船为研究对象，则依题意，有

$$\vec{v}=2\,\vec{e}_y,\vec{v}_0=2\,\vec{e}_x$$

根据伽利略速度相加公式

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'$$

可得 B 船相对 A 船的运动速度为

$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{v}_0=2\,\vec{e}_y-2\,\vec{e}_x$$

第 27 题 |【0686】

某人骑自行车以速率 v 向西行驶，今有风以相同速率从北偏东 30° 方向吹来，试问人感到风从哪个方向吹来？

(A) 北偏东 30° (B) 南偏东 30° (C) 北偏西 30° (D) 西偏南 30°

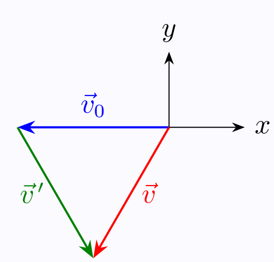
答案

C

解析

以地为静止参考系，人为运动参考系，风为研究对象，由西向东为 x 轴正方向，由南向北为 y 轴正方向，依题意，有

$$\vec{v}_0=-v\,\vec{e}_x$$
$$\vec{v}=v(-\sin 30^\circ\,\vec{e}_x-\cos 30^\circ\,\vec{e}_y)$$



所以，根据伽利略速度相加公式，有

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'$$
$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{v}_0=v(-\sin 30^\circ\,\vec{e}_x-\cos 30^\circ\,\vec{e}_y)-(-v\,\vec{e}_x)$$
$$=v\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{e}_x-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_y\right]=v\left(\frac{1}{2}\,\vec{e}_x-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_y\right)$$

第 28 题 |【0691】

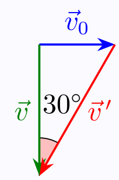
当一列火车以 10 m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30°，则雨滴相对于地面的速率是_____；相对于列车的速率是_____。

答案

17.3 m/s，20 m/s

解析

如图，依题意，$v_0 = 10$ m/s，由图中很容易得到



$$v' = \frac{v_0}{\sin 30^\circ} = 2v_0 = 20 \text{ m/s}$$
$$v = v' \cos 30^\circ = \sqrt{3}v_0 = 17.3 \text{ m/s}$$

第 29 题 |【0026】

一飞机相对空气的速度大小为 200 km/h，风速为 56 km/h，方向从西向东。地面雷达站测得飞机速度大小为 192 km/h，方向是

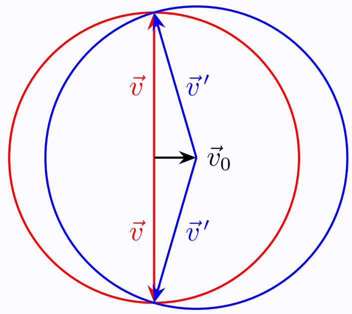
(A) 南偏西 16.3° (B) 北偏东 16.3° (C) 向正南或向正北 (D) 西偏北 16.3°
(E) 东偏南 16.3°

答案

C

解析

以地面为静止参考系，风为运动参考系，飞机为研究对象，由西向东为 x 轴正方向，由南向北为 y 轴正方向。依题意，$\vec{v}_0 = 56\,\vec{e}_x$ km/h，$v = 192$ km/h，$v' = 200$ km/h，其中 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}'$ 的方向均未知。但由于 $56^2 + 192^2 = 200^2$，由图很容易得到，$\vec{v}$ 的方向为正南或正北。而 $\vec{v}'$ 的方向则为南偏西或北偏西 $\arcsin \frac{v_0}{v'} = \arcsin \frac{56}{200} \approx 0.2838$ rad $\approx 16.3^\circ$。



第 30 题 |【0688】

两条直路交叉成 α 角，两辆汽车分别以速率 v_1 和 v_2 沿两条路行驶，一车相对另一车的速度大小为_____。

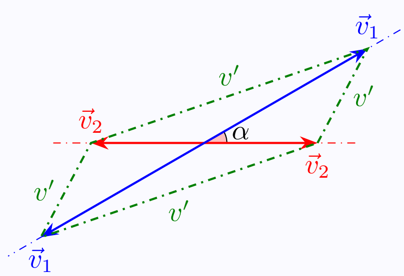
答案

$\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}$，$\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}$

解析

如图，共有四种可能的情况，根据三角形的余弦定理，相对速度的大小共有两种情况

$$v' = \sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}$$
$$v' = \sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}$$



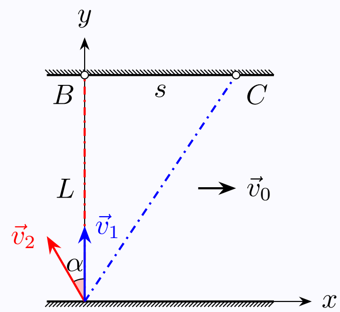
第 31 题 |【0271】

小船从岸边 A 点出发渡河，如果它保持与河岸垂直向前划，则经过时间 t_1 到达对岸下游 C 点；如果小船以同样速率划行，但垂直河岸横渡到正对岸 B 点，则需与 A、B 两点联成的直线成 α 角逆流划行，经过时间 t_2 到达 B 点。若 B、C 两点间距为 s，则 (1) 此河宽度 $L=$_____；(2)$\alpha=$_____。

答案

$\frac{st_2}{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}$，$\arccos\frac{t_1}{t_2}$ 或 $\arcsin\frac{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}{t_2}$

解析



如图，以水流方向为 x 轴正方向，垂直河岸指向对岸为 y 轴正方向，设水流的速度为 $\vec{v}_0=v_0\,\vec{e}_x$，小船划速为 v_1。依题意，第一种情况下，小船相对河水的速度为 $\vec{v}_1=v_1\,\vec{e}_y$；第二种情况下，小船相对河水的速度为 $\vec{v}_2=-v_1\sin\alpha\,\vec{e}_x+v_1\cos\alpha\,\vec{e}_y$；则有

$$v_1t_1=L$$
$$v_0t_1=s$$
$$v_0=v_1\sin\alpha$$
$$(v_1\cos\alpha)t_2=L$$

整理得

$$v_1t_1=L,v_1t_2\cos\alpha=L$$
$$t_1=t_2\cos\alpha$$
$$\cos\alpha=\frac{t_1}{t_2},\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{t_1^2}{t_2^2}}=\frac{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}{t_2}$$
$$\alpha=\arccos\frac{t_1}{t_2},\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}{t_2}$$
$$v_1t_1=L,v_1t_1\sin\alpha=s$$
$$L\sin\alpha=s\Rightarrow L=\frac{s}{\sin\alpha}=\frac{st_2}{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}$$

第二章 质点动力学

2.1 动量与牛顿运动定律

2.1.1 几种常见的力

1. 弹力

第 32 题 |【3008】

一长度为 l、劲度系数为 k 的均匀轻弹簧分割成长度分别为 l_1 和 l_2 的两部分，且 $l_1 = nl_2$，n 为整数。则相应的劲度系数 k_1 和 k_2 为

(A) $k_1 = \frac{nk}{n+1}$，$k_2 = (n+1)k$

(B) $k_1 = \frac{(n+1)k}{n}$，$k_2 = \frac{k}{n+1}$

(C) $k_1 = \frac{(n+1)k}{n}$，$k_2 = (n+1)k$

(D) $k_1 = \frac{nk}{n+1}$，$k_2 = \frac{k}{n+1}$

答案

C

解析

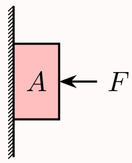
两个弹簧串联在一起，两端施加一定的力，二者均发生变形，那么有

$$
\begin{gathered}
F = kx = k_1x_1 = k_2x_2 \\
\frac{x_1}{x_2} = \frac{l_1}{l_2} = n \Rightarrow x_1 = nx_2 \\
x = x_1 + x_2 = (n+1)x_2 \\
\frac{F}{k} = (n+1)\frac{F}{k_2} \Rightarrow k_2 = (n+1)k \\
k_1 = \frac{x_2}{x_1}k_2 = \frac{1}{n}k_2 = \frac{n+1}{n}k
\end{gathered}
$$

2. 摩擦力

第 33 题 |【0043】

沿水平方向的外力 F 将物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，此时物体保持静止，并设其所受静摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力为______。



答案

f_0

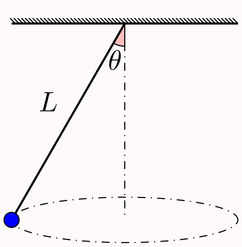
解析

静摩擦的大小是可以变化的，随外界条件的不同可能会有所不同。本题中物体 A 共受到四个力的作用而处于平衡状态 (静止)，水平方向受到外力 F 和墙壁的支持力 N，二者互相平衡，外力变化时，支持力也跟着变化；竖直方向受到竖直向下的重力 mg 和竖直向上的静摩擦力 f (如果墙面光滑，物体将向下运动，因此物体相对墙有向下运动的趋势，所以摩擦力方向向上)，二者也相互平衡，只要外力足够大，支持力也就足够大，物体就保持静止，静摩擦力就等于重力，依题意，重力的大小就等于 $mg = f_0$，因此外力增至 $2F$ 时，物体仍然是保持静止，所以它所受到的摩擦力仍然等于重力，也就是它仍然等于 f_0。

2.1.2 牛顿运动定律的应用

第 34 题 |【0334】

一个圆锥摆的摆线长为 L，摆线与竖直方向的夹角恒为 θ，如图所示，则摆锤转动的周期为



(A) $\sqrt{\frac{L}{g}}$　　(B) $\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$　　(C) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$　　(D) $2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$

答案

D

解析

摆锤共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 T，这两个力在竖直方向上合力为零，在水平面上的合力提供摆锤作圆周运动的向心力，设摆锤运动的速率为 v，则有

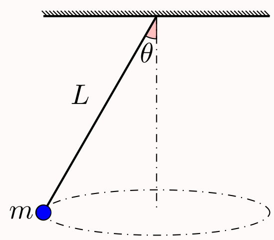
$$T\cos\theta = mg$$
$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{L\sin\theta}$$
$$v^2 = \frac{TL\sin^2\theta}{m} = \frac{mgL\sin^2\theta}{m\cos\theta} = \frac{gL\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$v = \sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta$$

所以摆锤转动的周期为

$$T = \frac{2\pi L\sin\theta}{v} = \frac{2\pi L\sin\theta}{\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

第 35 题 |【0351】

一圆锥摆摆长为 L、摆锤质量为 m，在水平面上作匀速圆周运动，摆线与铅直线夹角 θ，则 (1) 摆线的张力 $T =$______；(2) 摆锤的速率 $v =$______。



答案

$\frac{mg}{\cos\theta}$，$\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta$

解析

对摆锤进行受力分析，共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 T，在这两个力作用下，摆锤在水平面上做匀速圆周运动，所以有

$$T\cos\theta = mg$$
$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{L\sin\theta}$$

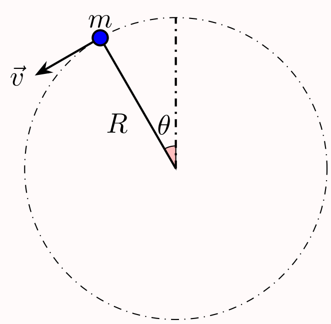
整理得

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$v^2 = \frac{TL\sin^2\theta}{m} = \frac{gL\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$v = \sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta$$

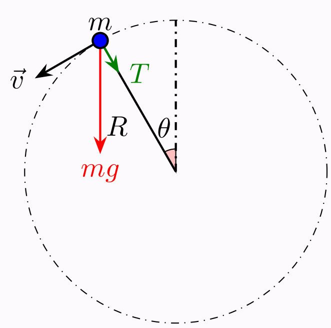
第 36 题 |【0044】

质量为 m 的物体系于长度为 R 的绳子的一个端点上，在竖直平面内绕绳子另一端点 (固定) 作圆周运动。设 t 时刻物体瞬时速度的大小为 v，绳子与竖直向上的方向成 θ 角，如图所示。(1) 求 t 时刻绳中的张力 T 和物体的切向加速度 a_t；(2) 说明在物体运动过程中 a_t 的大小和方向如何变化？



解答

以物体为研究对象，对物体进行受力分析，如图所示。



物体在运动过程中共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 T，其中重力沿绳子方向的分力与绳子拉力的合成提供物体做圆周运动的向心力，而重力沿圆周切线方向的分力使得物体沿切向方向产生切向加速度，所以有

$$m\frac{v^2}{R} = T + mg\cos\theta$$
$$ma_t = mg\sin\theta$$

所以，整理得

$$T = m\frac{v^2}{R} - mg\cos\theta$$
$$a_t = g\sin\theta$$

由上述切向加速度的表达式 $a_t = g\sin\theta$ 可以看出，切向加速度的大小随 θ 而变化：当 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ 时，$a_t > 0$，且随 θ 增大而增大，在这个阶段，物体的速率越来越大，且速率变化率也越来越大；当 $\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时，$a_t > 0$，且随 θ 增大而减小，在这个阶段，物体的速率越来越大，但速率变化率也越来越小；当 $\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$ 时，$a_t < 0$，且其绝对值随 θ 增大而增大，在这个阶段，物体的速率越来越小，且速率变化率也越来越大；当 $\frac{3}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 时，$a_t < 0$，且其绝对值随 θ 增大而减小，在这个阶段，物体的速率越来越小，但速率变化率也越来越小。

第 37 题 |【0028】

一水平放置的飞轮可绕通过中心的竖直轴转动，飞轮的辐条上装有一个小滑块，它可在辐条上无摩擦地滑动。一轻弹簧一端固定在飞轮转轴上，另一端与滑块联接。当飞轮以角速度 ω 旋转时，弹簧的长度为原长的 f 倍，已知 $\omega = \omega_0$ 时，$f = f_0$，求 ω 与 f 的函数关系。

解答

由于滑块可以在辐条上无摩擦地滑动，所以滑块做圆周运动的向心力由弹簧的弹力提供。设弹簧原长为 L，劲度系数为 k，依题意，有

$$m\omega^2(fL) = k(f-1)L$$

$$\omega^2 = \frac{k(f-1)}{mf}$$

又依题意，有

$$\omega_0^2 = \frac{k(f_0-1)}{mf_0}$$

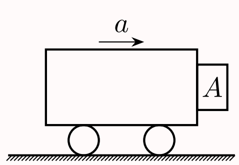
$$k = \omega_0^2\frac{mf_0}{f_0-1}$$

代入前式，有

$$\omega^2 = \frac{k(f-1)}{mf} = \omega_0^2\frac{mf_0}{f_0-1}\frac{f-1}{mf} = \omega_0^2\frac{f_0(f-1)}{(f_0-1)f}$$

第 38 题 |【5390】

如图所示，一个小物体 A 靠在一辆小车的竖直前壁上，A 和车壁间静摩擦系数是 μ_s，若要使物体 A 不致掉下来，小车的加速度的最小值应为 $a =$______。



答案

$\frac{g}{\mu_s}$

解析

对物体进行受力分析，共受到三个力的作用，水平方向，小车对物体的压力 N，竖直方向，竖直向下的重力 mg，竖直向上的静摩擦力 f，在这三个力作用下，物体与小车相对静止，共同具有水平向右的加速度 a，所以有

$$N = ma$$

$$f - mg = 0$$

$$f \leqslant \mu_s N$$

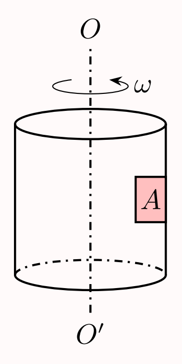
整理得

$$mg \leqslant \mu_s ma$$

$$a \geqslant \frac{g}{\mu_s}$$

第 39 题 |【0029】

竖立的圆筒形转笼，半径为 R，绕中心轴 OO' 转动，物块 A 紧靠在圆筒的内壁上，物块与圆筒间的摩擦系数为 μ，要使物块 A 不下落，圆筒转动的角速度 ω 至少应为



(A) $\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$　　(B) $\sqrt{\mu g}$　　(C) $\sqrt{\frac{g}{\mu R}}$　　(D) $\sqrt{\frac{g}{R}}$

答案

C

解析

物块共受到三个力的作用：竖直向下的重力 mg，垂直圆筒内壁指向转轴的支持力 N，沿圆筒内壁方向竖直向上的摩擦力 f。其中 N 提供物块做圆周运动的向心力，即

$$N = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

而物块不下落，物块与圆筒之间的摩擦力为静摩擦力，所以

$$f \leqslant \mu N$$
$$f = mg$$

因此，有

$$mg \leqslant \mu N = \mu m\omega^2 R$$
$$\omega^2 \geqslant \frac{g}{\mu R}$$
$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

第 40 题 |【0354】

质量为 m 的雨滴下降时，因受空气阻力，在落地前已是匀速运动，其速率为 $v = 5.0$ m/s。设空气阻力大小与雨滴速率的平方成正比，问：当雨滴下降速率为 $v = 4.0$ m/s 时，其加速度 a 多大？

解答

雨滴在下降过程中共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向上的空气阻力 $f = kv^2$。依题意，当 $v_1 = 5.0$ m/s 时，子弹做匀速运动，所以加速度为零，即合外力为零，此时空气阻力与重力等值反向，所以

$$mg = kv_1^2$$
$$k = \frac{mg}{v_1^2}$$

当雨滴下降速率为 $v_2 = 4.0$ m/s 时，由牛顿第二定律，有

$$ma = mg - f = mg - mg\frac{v_2^2}{v_1^2} = mg\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2}$$
$$a = g\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2} = g\frac{5^2 - 4^2}{5^2} = \frac{9}{25}g = 3.528 \text{ m/s}^2$$

第 41 题 |【0338】

质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用，比例系数为 k，k 为正值常量。该下落物体的收尾速度 (即最后物体作匀速运动时的速度) 将是

(A) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ (B) $\frac{g}{2k}$ (C) gk (D) $\sqrt{gk}$

答案

A

解析

物体受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的空气阻力 $-kv^2$，当物体作匀速运动时，它的加速度为零，所以它所受的合力为零，所以有

$$mg - kv^2 = 0$$
$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

2.1.3 质点动力学与质点运动学的结合

第 42 题 |【0037】

质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为 k，忽略子弹的重力，求：(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；(2) 子弹进入沙土的最大深度。

解答

依题意，以子弹初速度的方向为正方向，则子弹所受阻力为

$$f = -kv$$

根据牛顿第二定律，可以求得加速度为

$$a = \frac{f}{m} = -\frac{k}{m}v$$

再根据已知初始条件，$t_0 = 0$ 时，$v = v_0$，根据数学上的分离变量法，通过积分可以求得任意时刻的速度

$$a = -\frac{k}{m}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_{t_0}^{t}-\frac{k}{m}\,\mathrm{d}t$$
$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}t$$
$$v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

选择子弹射入沙士的位置为坐标原点，则 $t_0=0$ 时，$x=0$，所以

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t}v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,\mathrm{d}t$$
$$x=-\frac{m}{k}v_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^t=-\frac{m}{k}v_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1\right]$$

而子弹进入沙土的最大深度处时，速度为零，即

$$v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=0$$

所以最大深度为

$$x=-\frac{m}{k}v_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1\right]=-\frac{m}{k}v_0\left[0-1\right]=\frac{m}{k}v_0$$

【另法】这题，第二步求最大深度还可以通过另一种数学处理来求得。

$$a=-\frac{k}{m}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
$$\mathrm{d}v=-\frac{k}{m}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}-\frac{k}{m}\,\mathrm{d}x$$
$$0-v_0=-\frac{k}{m}x$$
$$x=\frac{m}{k}v_0$$

【另法】这题，第二步求最大深度还可以通过动能定理来求得。

$$W=\Delta E_k$$
$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}E_k$$
$$F\,\mathrm{d}x=-kv\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=mv\,\mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\,\mathrm{d}v$$
$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}-\frac{m}{k}\,\mathrm{d}v$$
$$x-0=-\frac{m}{k}(0-v_0)=\frac{m}{k}v_0$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

2.2.1 冲量

第 43 题 |【0184】

设作用在质量为 1 kg 的物体上的力 $F = 6t + 3$(SI)。如果物体在这一力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0 s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小 $I =$_____。

答案

$18\ \mathrm{N \cdot s}$

解析

已知变力随时间的变化关系，根据冲量的定义通过积分求冲量

$$I = \int_{t_0}^{t} F\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (6t+3)\,\mathrm{d}t = (3t^2+3t)_{t_0}^{t} = 3\times 2.0^2 + 3\times 2.0 = 18\ \mathrm{N\cdot s}$$

2.2.2 动量定理

第 44 题 |【0060】

一质量为 m 的物体，原来以速率 v 向北运动，它突然受到外力打击，变为向西运动，速率仍为 v，则外力的冲量大小为_____，方向为_____。

答案

$\sqrt{2}mv$，正西南或南偏西 $45°$

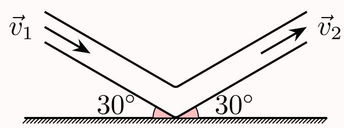
解析

以由西向东为 x 轴正方向，由南向北为 y 轴正方向，依题意打击前物体的初速度为 $\vec{v}_1 = v\,\vec{e}_y$，打击后物体的速度为 $\vec{v}_2 = -v\,\vec{e}_x$，所以打击过程外力的冲量为

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m(-v\,\vec{e}_x - v\,\vec{e}_y)$$
$$I_x = -mv, I_y = -mv, I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{2}mv$$

第 45 题 |【0516】

如图所示，流水以初速度 $\vec{v}_1$ 进入弯管，流出时的速度为 $\vec{v}_2$，且 $v_1 = v_2 = v$。设每秒流入的水质量为 m，则在管子转弯处，水对管壁的平均冲力大小是_____，方向_____。(管内水受到的重力不考虑)。



答案

mv，竖直向下

解析

依题意，一秒时间内，有质量为 m 的水由初动量 $m\vec{v}_1$ 变成末动量 $m\vec{v}_2$，以这部分水为研究对象，则系统的动量增量为 $\Delta\vec{p}=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$，这个动量的增量就是由于管壁对水施加的冲量 $\vec{I}=\vec{F}\Delta t=\vec{F}$，所以由动量定理得

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}$$
$$\vec{F}=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则 $\vec{v}_1=v\cos 30^\circ\,\vec{e}_x-v\sin 30^\circ\,\vec{e}_y$，$\vec{v}_2=v\cos 30^\circ\,\vec{e}_x+v\sin 30^\circ\,\vec{e}_y$，所以

$$\begin{aligned}\vec{F}=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)&=m[(v\cos 30^\circ\,\vec{e}_x+v\sin 30^\circ\,\vec{e}_y)-(v\cos 30^\circ\,\vec{e}_x-v\sin 30^\circ\,\vec{e}_y)]\\&=mv(2\sin 30^\circ\,\vec{e}_y)=mv\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

即管壁对水的平均作用力的大小为 mv，方向竖直向上。根据作用力与反作用力定律，水对管壁的平均冲力的大小为 mv，方向竖直向下。

第 46 题 |【5258】

一质量为 m 的物体，以初速 $\vec{v}_0$ 从地面抛出，抛射角 $\theta=30^\circ$，如忽略空气阻力，则从抛出到刚要接触地面的过程中 (1) 物体动量增量的大小为______，(2) 物体动量增量的方向为______。

答案

mv_0，竖直向下

解析

忽略空气阻力，抛射体只受到重力的作用，重力的方向是竖直向下的，所以过程重力的冲量的方向也是竖直向下的。以水平向右为 x 轴正方向【假定物体向右上方抛出】，竖直向上为 y 轴正方向，根据斜抛运动的规律，可知抛出速度 $\vec{v}_0=v_0\cos\theta\,\vec{e}_x+v_0\sin\theta\,\vec{e}_y$，落地时的速度为 $\vec{v}=v_0\cos\theta\,\vec{e}_x-v_0\sin\theta\,\vec{e}_y$，

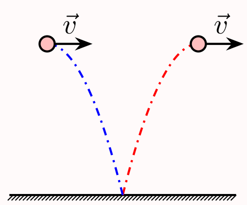
所以物体动量的增量为

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = -2mv_0 \sin\theta\, \vec{e}_y = -mv_0\, \vec{e}_y$$

所以物体动量增量的大小为 mv_0，方向竖直向下。

第 47 题 |【0068】

一质量为 m 的小球 A，在距离地面某一高度处以速度 $\vec{v}$ 水平抛出，触地后反跳。在抛出 t 秒后小球 A 跳回原高度，速度仍沿水平方向，速度大小也与抛出时相同，如图。则小球 A 与地面碰撞过程中，地面给它的冲量的方向为______，冲量的大小为______。



答案

垂直地面竖直向上，mgt

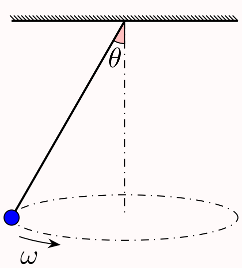
解析

依题意，小球碰地前和碰地后，水平方向的速度分量保持不变，竖直方向的速度分量等值反号，因此小球在与地面的碰撞过程中，地面给它的冲量的方向一定是垂直地面竖直向上的。另依题意还可得，小球从抛出到碰地所花的时间为 $\frac{1}{2}t$，所以碰地前小球在竖直方向的速度分量的大小为 $\frac{1}{2}gt$，所以冲量的大小为

$$|\vec{I}| = |\Delta\vec{p}| = |m\Delta\vec{v}| = m|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = m \times 2 \times \frac{1}{2}gt = mgt$$

第 48 题 |【0374】

图示一圆锥摆，质量为 m 的小球在水平面内以角速度 ω 匀速转动。在小球转动一周的过程中，(1) 小球动量增量的大小等于______；(2) 小球所受重力的冲量的大小等于______；(3) 小球所受绳子拉力的冲量大小等于______。



答案

0，$\frac{2\pi mg}{\omega}$，$\frac{2\pi mg}{\omega}$

解析

小球运动一周，速度恢复原来的大小和方向，所以动量也恢复原来的大小和方向，因此小球动量的增量为零。
小球在平面内以角速度 ω 匀速转动，转动一周所用的时间为

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

而重力是个恒力，大小一直为 mg，方向一直竖直向下，所以重力的冲量大小为

$$I_1 = mgT = \frac{2\pi mg}{\omega}$$

方向竖直向下。
对于绳子的拉力，其方向一直变化，其冲量直接计算较为复杂，但根据动量定理，小球动量的变化量等于它所受所有外力的冲量的总和，据前可知，小球的动量变化量为零，小球共受到两个力的作用，重力和绳子的拉力，所以在这段时间内，重力和拉力的冲量一定等值反向，因此绳子拉力的冲量的大小 $I_2 = I_1 = \frac{2\pi mg}{\omega}$，方向竖直向上。

第 49 题 |【0367】

质量为 20 g 的子弹沿 x 轴正向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 x 轴正向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块所受冲量的大小为

(A) 9 N · s (B) −9 N · s (C) 10 N · s (D) −10 N · s

答案

A

解析

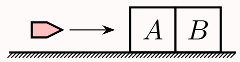
子弹和木块组成的系统在过程中动量守恒，子弹受到的冲量与木块受到的冲量等值反向，因为二者受到的力是一对作用力与反作用力，二者作用的时间相同。依题意，子弹受到的冲量为

$$I = \Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = 0.02 \times (50 - 500) = -9\ \mathrm{N \cdot s}$$

所以木块受到的冲量为 9 N · s。

第 50 题 |【0062】

两块并排的木块 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2，木块对子弹的阻力为恒力 F，则子弹穿出后，木块 A 的速度大小为_____，木块 B 的速度大小为_____。



答案

$\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$，$\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_2}$

解析

子弹穿出 A 前，以 A、B 整体作为研究对象，在水平方向上，系统只受到子弹对 A 的作用力，根据作用力与反作用力定律，子弹对 A 的作用力也是恒力，大小为 F，方向水平向右，作用时间为 Δt_1，根据动量定理，子弹穿出 A 时，A、B 的速度大小 v_1 满足

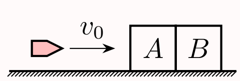
$$I_1=F\Delta t_1=(m_1+m_2)v_1$$
$$v_1=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$$

子弹穿出 A 进入 B，到子弹穿出 B 这段时间内，以 B 为研究对象，在水平方向上，B 只受到子弹对 B 的作用力，根据作用力与反作用力定律，子弹对 B 的作用力也是恒力，大小为 F，方向水平向右，作用时间为 Δt_2，根据动量定理，子弹穿出 B 时，B 的速度大小 v_2 满足

$$I_2=F\Delta t_2=m_2v_2-m_2v_1$$
$$v_2=v_1+\frac{F\Delta t_2}{m_2}=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

第 51 题 |【0769】

如图所示，有两个长方形的物体 A 和 B 紧靠着静止放在光滑的水平桌面上，已知 $m_A=2$ kg，$m_B=3$ kg。现有一质量 $m=100$ g 的子弹以速率 $v_0=800$ m/s 水平射入长方体 A，经 $t=0.01$ s，又射入长方体 B，最后停留在长方体 B 内未射出。设子弹射入 A 时所受的摩擦力为 $f=3\times10^3$ N，求：(1) 子弹在射入 A 的过程中，B 受到 A 的作用力的大小。(2) 当子弹留在 B 中时，A 和 B 的速度大小。



解答

整个过程可以分成两段，第一段，子弹穿过 A，第二段子弹进入 B 到相对静止。

第一阶段，若以子弹和 A、B 为研究对象，由于水平桌面光滑，系统在水平方向上不受外力作用，系统

动量守恒，假设子弹穿出 A 时，子弹的速度为 v_1，A 和 B 的速度为 v_2，则有

$$mv_0 = mv_1 + (m_A + m_B)v_2$$

若只以子弹为研究对象，在水平方向上，子弹受到木块的摩擦力 f 的作用，作用时间为 t，所以由动量定理，有

$$-ft = mv_1 - mv_0$$

这里因为子弹受到的摩擦力的方向与子弹前进的方向相反，所以冲量取负号，其实是摩擦力取负号。若单以 B 为研究对象，在水平方向上，B 受到 A 向右推的压力 N，这个力的作用时间也是 t，因此由动量定理，有

$$Nt = m_B v_2$$

联立上述前两式，其实就是以 A、B 为研究对象，则在水平方向上，系统受到子弹施加的向前的摩擦力 f，作用时间为 t，所以由动量定理，有

$$ft = (m_A + m_B)v_2$$

所以综合上面最后两式，有

$$\frac{N}{f} = \frac{m_B}{m_A + m_B}$$
$$N = \frac{m_B}{m_A + m_B} f = \frac{3}{2+3} \times 3 \times 10^3 = 1.8 \times 10^3 \text{ N}$$

当然，由上面几式还可以解得

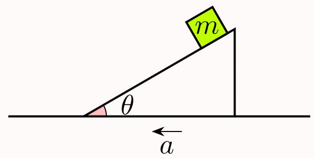
$$v_1 = v_0 - \frac{ft}{m} = 800 - \frac{3 \times 10^3 \times 0.01}{0.1} = 500 \text{ m/s}$$
$$v_2 = \frac{ft}{m_A + m_B} = \frac{3 \times 10^3 \times 0.01}{2+3} = 6 \text{ m/s}$$

上述 v_2 就是子弹离开 A 之后 A 的速度，在第二阶段，A 在水平方向上不受力，所以做匀速直线运动。而在第二阶段，以子弹和 B 为研究对象，系统在水平方向上不受力，所以系统的动量守恒，子弹离开 A 进入 B 时，子弹的速度为 v_1，B 的速度为 v_2，设最后子弹留在 B 中时子弹和 B 的共同速度为 v_3，则有

$$mv_1 + m_B v_2 = (m + m_B)v_3$$
$$v_3 = \frac{mv_1 + m_B v_2}{m + m_B} = \frac{0.1 \times 500 + 3 \times 6}{0.1 + 3} = \frac{680}{31} \text{ m/s}$$

第 52 题 |【0706】

如图所示。一斜面固定在卡车上，一物块置于该斜面上。在卡车沿水平方向加速起动的过程中，物块在斜面上无相对滑动。此时斜面上摩擦力对物块的冲量的方向



(A) 是水平向前的
(B) 只可能沿斜面向上
(C) 只可能沿斜面向下
(D) 沿斜面向上或向下均有可能

答案

D

解析

物块共受到三个力的作用：竖直向下的重力 mg，垂直斜面向上的支持力 N，沿斜面方向的静摩擦力 f，在这三个力的作用下，物块具有和卡车一样的水平向左的加速度 a，所以它所受的合力也是沿水平向左方向的，假定 f 沿斜面向上，则有

$$N\sin\theta - f\cos\theta = ma$$
$$N\cos\theta + f\sin\theta = mg$$

所以

$$N = m(a\sin\theta + g\cos\theta)$$
$$f = m(g\sin\theta - a\cos\theta)$$

显然，当 $g\sin\theta - a\cos\theta > 0$ 时，$f > 0$，沿斜面向上；当 $g\sin\theta - a\cos\theta < 0$ 时，$f < 0$，沿斜面向下。

第 53 题 |【0020】

一质点在力 $F = 5m(5-2t)$(SI) 的作用下，$t = 0$ 时从静止开始作直线运动，式中 m 为质点的质量，t 为时间，则当 $t = 5$ s 时，质点的速率为

(A) 50 m/s (B) 25 m/s (C) 0 (D) −50 m/s

答案

C

解析

已知力随时间的变化关系，可以求得任意时间段的冲量，根据动量定理，已知初时刻的动量，可以求得末时刻的动量

$$I=\int_0^5 F\,\mathrm{d}t=\int_0^5 5m(5-2t)\,\mathrm{d}t=5m(5t-t^2)_0^5=0=\Delta p=m\Delta v=m(v-v_0)$$

$$v=v_0=0$$

本题也可以根据质点动力学和运动学来求解，知道力，求加速度，再求速度

$$F=5m(5-2t)$$
$$a=\frac{F}{m}=5(5-2t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t=5(5-2t)\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\,\mathrm{d}t=\int_0^t 5(5-2t)\,\mathrm{d}t$$
$$v-v_0=5(5t-t^2)_0^t=5(5t-t^2)=5(5\times5-5^2)=0$$
$$v=v_0=0$$

第 54 题 |【0371】

一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为 $F=400-\frac{4\times10^5}{3}t(\mathrm{SI})$，子弹从枪口射出时的速率为 300 m/s。假设子弹离开枪口时合力刚好为零，则 (1) 子弹走完枪筒全长所用的时间 $t=$_____，(2) 子弹在枪筒中所受力的冲量 $I=$_____，(3) 子弹的质量 $m=$_____。

答案

3×10^{-3} s，0.6 N·s，2 g

解析

依题意，子弹离开枪口时的合力刚好为零，所以

$$F=400-\frac{4\times10^5}{3}t=0$$
$$t=\frac{400}{\frac{4\times10^5}{3}}=3\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$

已知力随时间的变化关系，根据冲量的定义。通过积分可以求出某时间段内力的冲量为

$$I=\int_{t_0}^{t}F\,\mathrm{d}t=\int_0^t\left(400-\frac{4\times10^5}{3}t\right)\mathrm{d}t=\left(400t-\frac{2\times10^5}{3}t^2\right)_0^t$$
$$=400\times3\times10^{-3}-\frac{2\times10^5}{3}\times(3\times10^{-3})^2=1.2-0.6=0.6\ \mathrm{N\cdot s}$$

根据动量定理，可求得子弹的质量

$$I = \Delta p = m\Delta v$$
$$m = \frac{I}{\Delta v} = \frac{0.6}{300-0} = 0.002\ \mathrm{kg} = 2\ \mathrm{g}$$

第 55 题 |【0708】

一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_0 = 0.20$，滑动摩擦系数 $\mu = 0.16$，现对物体施一水平拉力 $F = t + 0.96(\mathrm{SI})$，则 2 秒末物体的速度大小 $v =$_____。

答案

0.892 m/s

解析

注意，这题中，当拉力小于最大静摩擦力时，物体保持静止，所以物体开始运动的时刻 t_0 满足

$$F = t_0 + 0.96 = \mu_0 mg = 0.20 \times 1 \times 9.8 = 1.96$$
$$t_0 = 1\ \mathrm{s}$$

在 t_0 时刻后，物体在拉力 F 和滑动摩擦力 $f = \mu mg$ 作用下运动，此二力方向相反，因此合力为 $F - f = t + 0.96 - \mu mg$，从 t_0 到第 2 秒末，物体受到的外力的合冲量为

$$I = \int_{t_0}^{t} (F - f)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (t + 0.96 - \mu mg)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + (0.96 - 0.16 \times 1 \times 9.8)t\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 0.608(2-1) = 1.5 - 0.608 = 0.892\ \mathrm{N\cdot s}$$

根据动量定理，有

$$I = \Delta p = m\Delta v = m(v - v_0)$$
$$v = v_0 + \frac{I}{m} = 0 + \frac{0.892}{1} = 0.892\ \mathrm{m/s}$$

第 56 题 |【0710】

一吊车底板上放一质量为 10 kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 $a = 3 + 5t(\mathrm{SI})$，则 2 秒内吊车底板给物体的冲量大小 $I =$_____；2 秒内物体动量的增量大小_____。

答案

356 $\mathrm{N\cdot s}$，160 $\mathrm{N\cdot s}$

解析

物体共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向上的底板的支持力 N，在这两个力的作用下，物体跟随吊车共同具有向上的加速度 a。假设计时开始 $t=0$ 时，吊车的速度为 v_0，假定 $t=2$ s 时，吊车的速度为 v_2。

已知加速度和物体的质量，可以求得物体所受的合力，此合力是个变力，利用积分求得该时间段内的合力的冲量，再求出重力的冲量，就可以求得支持力的冲量；当然也可以直接求得底板对物体的支持力，进而求其冲量

$$F=N-mg=ma\Rightarrow N=m(g+a)$$
$$I_N=\int_{t_0}^{t}N\,\mathrm{d}t=m\int_{t_0}^{t}(g+a)\,\mathrm{d}t=10\int_0^2(12.8+5t)\,\mathrm{d}t$$
$$=10\times(12.8t+2.5t^2)_0^2=10\times(12.8\times2+2.5\times2^2)=356\ \mathrm{N\cdot s}$$

而重力的冲量为 $I_G=mg\Delta t=2mg=2\times10\times9.8=196\ \mathrm{N\cdot s}$，两个冲量的方向相反，所以合冲量为二者之差，根据动量定理，有

$$I=I_N-I_G=\Delta p=m\Delta v=m(v_2-v_0)$$
$$\Delta p=356-196=160\ \mathrm{N\cdot s}$$

当然，本题也可以根据加速度求得该时间段内的速度增量

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3+5t$$
$$\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t=(3+5t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Delta v=\int_{v_0}^{v_2}\mathrm{d}v=\int_{t_0}^{t}a\,\mathrm{d}t=\int_0^2(3+5t)\,\mathrm{d}t=(3t+2.5t^2)_0^2=16\ \mathrm{m/s}$$

所以该时间段内物体的动量增量为

$$\Delta p=m\Delta v=10\times16=160\ \mathrm{N\cdot s}$$

依题意，吊车加速上升，所以以上速度增量和动量增量的方向都是竖直向上。而在这个时间段内，重力的冲量为 $I_G=mg\Delta t=2mg=2\times10\times9.8=196\ \mathrm{N\cdot s}$，它的方向是竖直向下的。根据动量定理，物体所受到的总的冲量等于它的动量的增量，而总的冲量为支持力的冲量与重力冲量的矢量和，所以支持力的冲量为

$$I_N=I+I_G=\Delta p+I_G=160+196=356\ \mathrm{N\cdot s}$$

2.2.3 动量守恒定律

第 57 题 |【0379】

在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，沿斜向上方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中 (忽略冰面摩擦力及空气阻力)

(A) 总动量守恒
(B) 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其它方向动量不守恒
(C) 总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒
(D) 总动量在任何方向的分量均不守恒

答案

C

解析

由炮车和炮弹组成的系统，在发射炮弹的过程中，忽略重力、冰面摩擦力及空气阻力 (重力与冲击力相比可以忽略)，但冰面的支持力在这个过程中不能忽略，【系统发射炮弹前只在水平方向上有动量，发射炮弹之后，炮车仍然在水平方面上运动，炮弹的速度既有水平分量又有竖直分量】而这个支持力一定垂直于冰面，即沿竖直方向，所以系统在水平方向上的动量守恒，在竖直方向上的动量不守恒。

第 58 题 |【0454】

一船浮于静水中，船长 L，质量为 m，一个质量也为 m 的人从船尾走到船头。不计水和空气的阻力，则在此过程中船将

(A) 不动 (B) 后退 L (C) 后退 $\frac{1}{2}L$ (D) 后退 $\frac{1}{3}L$

答案

C

解析

由人和船组成的系统，在过程中所受合外力为零，因此根据质心运动定理，质心加速度为零，而刚开始时人和船均静止，所以质心保持不动。以船头为 x 轴正方向，刚开始时船尾处为坐标原点，假定人走到船头时船尾的坐标为 x，则人的坐标为 $x+L$，根据质心的定义有

$$m\cdot 0+m\cdot\frac{1}{2}L=m\cdot\left(x+\frac{L}{2}\right)+m\cdot(x+L)$$

$$\frac{1}{2}L=\left(x+\frac{L}{2}\right)+(x+L)=2x+\frac{3}{2}L$$

$$x=-\frac{1}{2}L$$

即船后退 $\frac{1}{2}L$。

第 59 题 |【0659】

一炮弹由于特殊原因在水平飞行过程中，突然炸裂成两块，其中一块作自由下落，则另一块着地点 (飞行过程中阻力不计)

(A) 比原来更远

(B) 比原来更近

(C) 仍和原来一样远

(D) 条件不足，不能判定

答案

A

解析

炮弹在爆炸过程中动量守恒，而依题意，爆炸前，炮弹的速度沿水平方向，爆炸后一块碎片作自由下落，所以其爆炸后的速度为零，所以另一块碎片的速度一定沿水平方向，且其速度大小一定大于原来炮弹的速度大小，相同高度，落地时间不变，速度变大，所以飞行的距离变远。

第 60 题 |【0711】

粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度 $\vec{v}_{A0}=3\,\vec{e}_x+4\,\vec{e}_y$，粒子 B 的速度 $\vec{v}_{B0}=2\,\vec{e}_x-7\,\vec{e}_y$；在无外力作用的情况下两者发生碰撞，碰后粒子 A 的速度变为 $\vec{v}_A=7\,\vec{e}_x-4\,\vec{e}_y$，则此时粒子 B 的速度 $\vec{v}_B=$______。

答案

$\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y$

解析

在无外力作用的情况下，两个粒子组成的系统在碰撞过程中动量守恒，设粒子 A 的质量为 $m_A=m$，则依题意粒子 B 的质量为 $m_B=4m_A=4m$。因此，由动量守恒定律，有

$$m_A\vec{v}_{A0}+m_B\vec{v}_{B0}=m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B$$

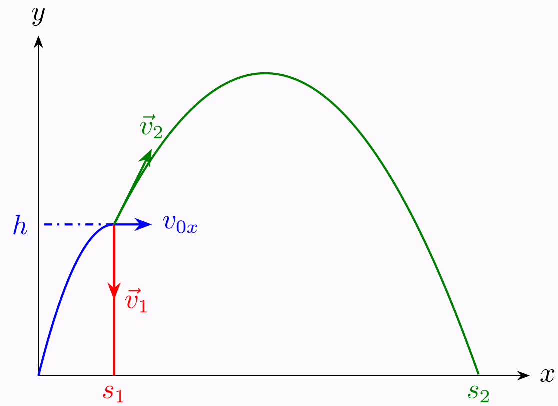
$$\vec{v}_B=\frac{m_A\vec{v}_{A0}+m_B\vec{v}_{B0}-m_A\vec{v}_A}{m_B}=\frac{m(3\,\vec{e}_x+4\,\vec{e}_y)+4m(2\,\vec{e}_x-7\,\vec{e}_y)-m(7\,\vec{e}_x-4\,\vec{e}_y)}{4m}$$

$$=\frac{3\,\vec{e}_x+4\,\vec{e}_y+4(2\,\vec{e}_x-7\,\vec{e}_y)-(7\,\vec{e}_x-4\,\vec{e}_y)}{4}=\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y$$

第 61 题 |【5009】

一炮弹发射后在其运行轨道上的最高点 $h=19.6\ \mathrm{m}$ 处炸裂成质量相等的两块。其中一块在爆炸后 1 秒钟落到爆炸点正下方的地面上。设此处与发射点的距离 $s_1=1000\ \mathrm{m}$，问另一块落地点与发射地点间的距离是多少？(空气阻力不计，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$)

解答



设炮弹总质量为 $m_0=2m$，爆炸后两个碎片的质量分别为 $m_1=m_2=m$，炮弹发射时的初速度为 $\vec{v}_0=v_{0x}\,\vec{\mathrm{e}}_x+v_{0y}\,\vec{\mathrm{e}}_y$，爆炸后两个碎片的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，炮弹发射 t_0 时间后到达轨道最高点，爆炸后第一个碎片经过 t_1 时间落到爆炸点正下方的地面上，第二个碎片经过 t_2 时间落到地面，落地点与发射点之间的距离为 s_2。则在爆炸过程中，动量守恒，所以依题意有

$$\vec{v}_1=v_1\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{v}_2=v_{2x}\,\vec{\mathrm{e}}_x+v_{2y}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$m_0v_{0x}\,\vec{\mathrm{e}}_x=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

$$-h=v_1t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$h=v_{0y}t_0-\frac{1}{2}gt_0^2=\frac{1}{2}gt_0^2$$

$$v_{0y}=gt_0$$

$$s_1=v_{0x}t_0$$

$$-h=v_{2y}t_2-\frac{1}{2}gt_2^2$$

$$s_2=s_1+v_{2x}t_2$$

解得

$$t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 19.6}{9.8}}=2\ \mathrm{s}$$

$$v_{0x}=\frac{s_1}{t_0}=\frac{1000}{2}=500\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{0y}=9.8\times 2=19.6\ \mathrm{m/s}$$

$$v_1=\frac{1}{2}gt_1-\frac{h}{t_1}=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1-\frac{19.6}{1}=-14.7\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}_2=2v_{0x}\,\vec{\mathrm{e}}_x-\vec{v}_1=1000\,\vec{\mathrm{e}}_x+14.7\,\vec{\mathrm{e}}_y\ \mathrm{m/s}$$

$$-19.6=14.7t_2-4.9t_2^2\Rightarrow t_2^2-3t_2-4=(t_2+1)(t_2-4)=0\Rightarrow t_2=4\ \mathrm{s}$$

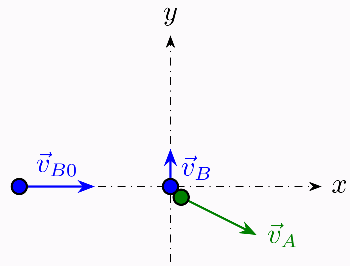
$$s_2=1000+1000\times 4=5000\ \mathrm{m}$$

第 62 题 |【0730】

光滑水平面上有两个质量不同的小球 A 和 B。A 球静止，B 球以速度 $\vec{v}$ 和 A 球发生碰撞，碰撞后 B 球速度的大小为 $\frac{1}{2}v$，方向与 $\vec{v}$ 垂直，求碰后 A 球运动方向。

解答

设 A 球质量为 m_1，B 球质量为 m_2，以 B 球碰前速度的方向为 x 轴正方向，碰后速度的方向为 y 轴正方向，建立坐标系，如图。



依题意，有

$$\vec{v}_{A0} = 0, \vec{v}_{B0} = v\,\vec{e}_x, \vec{v}_B = \frac{1}{2}v\,\vec{e}_y$$

碰撞过程，以 A、B 球组成的系统在水平面内没有受到外力的作用，所以动量守恒，因此有

$$m_1\vec{v}_{A0} + m_2\vec{v}_{B0} = m_1\vec{v}_A + m_2\vec{v}_B$$
$$m_2 v\,\vec{e}_x = m_1\vec{v}_A + \frac{1}{2}m_2 v\,\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_A = \frac{m_2}{m_1}v\left(\vec{e}_x - \frac{1}{2}\,\vec{e}_y\right)$$

第 63 题 |【0719】

质量为 M 的车以速度 v_0 沿光滑水平地面直线前进，车上的人将一质量为 m 的物体相对于车以速度 u 竖直上抛，则此时车的速度 $v =$______。

答案

v_0

解析

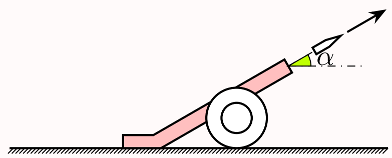
在水平方向上，以车、人及物体组成的系统所受的合力为零，所以在水平方向上系统的动量守恒。以车前进方向为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则抛出物体前，系统的速度为 $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$，设抛出物体后，车和人的速度为 $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$，而物体相对车的速度为 $\vec{v}' = u\,\vec{e}_y$，根据伽利略速度相加公式，物体相

对地面的速度为 $\vec{v}_2=\vec{v}+\vec{v}'=v\,\vec{e}_x+u\,\vec{e}_y$，所以水平方向的动量守恒写成

$$(M+m)v_0=Mv+mv$$
$$v=v_0$$

第 64 题 |【0452】

如图，水平地面上一辆静止的炮车发射炮弹。炮车质量为 M，炮身仰角为 α，炮弹质量为 m，炮弹刚出口时，相对于炮身的速度为 u，不计地面摩擦。(1) 求炮弹刚出口时，炮车的反冲速度大小；(2) 若炮筒长为 L，求发炮过程中炮车移动的距离。



解答

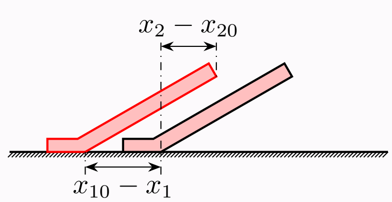
以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，设炮车的反冲速度为 $\vec{v}_1=-v_1\,\vec{e}_x$，则炮弹刚射出时的速度为

$$\vec{v}_2=(-v_1+u\cos\alpha)\,\vec{e}_x+u\sin\alpha\,\vec{e}_y$$

由于不计地面摩擦，所以由炮车和炮弹组成的系统在水平方向上所受合外力为零，系统的动量守恒，原来炮车静止，所以有

$$0=-Mv_1+m(-v_1+u\cos\alpha)$$
$$v_1=\frac{mu\cos\alpha}{M+m}$$

由于不计地面摩擦，所以由炮车和炮弹组成的系统在水平方向上所受合外力为零，原来炮车静止，所以系统的质心在发炮过程中在水平方向的位置保持不动。假设发炮前，炮车质心的水平位置为 x_{10}，炮弹质心的水平位置为 x_{20}，炮弹离开炮口时，炮车质心的水平位置为 x_1，炮弹质心的水平位置为 x_2，则有 (图中黑色是发炮前的炮车的位置，红色是炮弹离开炮口时炮车的位置，图中所标是两段移动的距离，不是以上四个坐标位置)



$$Mx_{10}+mx_{20}=Mx_1+mx_2$$
$$(x_{10}-x_1)+(x_2-x_{20})=L\cos\alpha$$

解得

$$M(x_{10}-x_1)=m(x_2-x_{20})$$
$$x_2-x_{20}=\frac{M}{m}(x_{10}-x_1)$$
$$(x_{10}-x_1)+\frac{M}{m}(x_{10}-x_1)=\frac{m+M}{m}(x_{10}-x_1)=L\cos\alpha$$
$$x_{10}-x_1=\frac{m}{m+M}L\cos\alpha$$

2.3 功 动能定理

2.3.1 功

第 65 题 |【0745】

某人拉住在河水中的船，使船相对于岸不动，以地面为参考系，人对船所做的功_____；以流水为参考系，人对船所做的功_____。(填 >0，$=0$ 或 <0)

答案

$=0$，>0

解析

从地面参考系上看，人对船的力的方向与河水的运动方向相反，船在这个力的作用下没有发生位移，所以做功为零；从流水参考系来看，人对船的拉力不变，还是与河水的运动方向相反，但从河水上看，船的位移也与河水的运动方向相反，因此人对船所做的功大于零。
从这个题目还可以看出，从不同参考系看，真实存在的牛顿力保持不变，但物体发生的位移与参考系的选择有关。

第 66 题 |【0350】

一个质点同时在几个力作用下的位移为 $\Delta\vec{r}=4\,\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y+6\,\vec{e}_z(\mathrm{SI})$，其中一个力为恒力 $\vec{F}=-3\,\vec{e}_x-5\,\vec{e}_y+9\,\vec{e}_z(\mathrm{SI})$，则此力在该位移过程中所作的功为

(A) -67 J (B) 17 J (C) 67 J (D) 91 J

答案

C

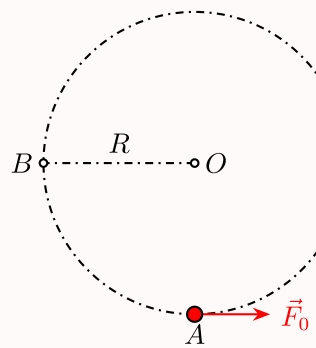
解析

根据恒力做功的定义

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=(-3\,\vec{\mathrm{e}}_x-5\,\vec{\mathrm{e}}_y+9\,\vec{\mathrm{e}}_z)\cdot(4\,\vec{\mathrm{e}}_x-5\,\vec{\mathrm{e}}_y+6\,\vec{\mathrm{e}}_z)=(-3)\cdot4+(-5)\cdot(-5)+9\cdot6=67\ \mathrm{J}$$

第 67 题 |【0082】

图中，沿着半径为 R 圆周运动的质点，所受的几个力中有一个是恒力 $\vec{F}_0$，方向始终沿 x 轴正向，即 $\vec{F}_0=F_0\,\vec{\mathrm{e}}_x$。当质点从 A 点沿逆时针方向走过 $\frac{3}{4}$ 圆周到达 B 点时，力 $\vec{F}_0$ 所作的功为 $W=$______。



答案

$-F_0R$

解析

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则从 A 到 B，质点的位移为 $\Delta\vec{r}=-R\,\vec{\mathrm{e}}_x+R\,\vec{\mathrm{e}}_y$，根据力做功的定义可知，恒力 $\vec{F}_0$ 在这个过程中所做的功为

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=(-R\,\vec{\mathrm{e}}_x+R\,\vec{\mathrm{e}}_y)\cdot F_0\,\vec{\mathrm{e}}_x=-F_0R$$

第 68 题 |【0732】

某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\,\vec{\mathrm{e}}_x(\mathrm{SI})$ 的作用下沿 x 轴作直线运动，在从 $x=0$ 移动到 $x=10$ m 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为______。

答案

290 J

解析

根据变力做功的定义有

$$W=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^{10}(4+5x)\,\mathrm{d}x=(4x+2.5x^2)_0^{10}=40+250=290\ \mathrm{J}$$

第 69 题 |【0416】

一物体按规律 $x=ct^3$ 在流体媒质中作直线运动，式中 c 为常量，t 为时间。设媒质对物体的阻力正比于速度的平方，比例系数为 k，试求物体由 $x=0$ 运动到 $x=L$ 时，阻力所作的功。

解答

已知位置随时间的变化关系，通过求导可以得到速度

$$x=ct^3$$
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2=3c^{1/3}x^{2/3}$$

依题意，可得阻力的表达式为

$$f=-kv^2=-9kc^2t^4=-9kc^{2/3}x^{4/3}$$

根据变力做功的定义，可得

$$W=\int_{x_0}^{x}f\,\mathrm{d}x=\int_0^L-9kc^{2/3}x^{4/3}\,\mathrm{d}x=-\frac{27}{7}kc^{2/3}L^{7/3}$$

2.3.2 动能定理

第 70 题 |【0422】

一质量为 m 的质点在 Oxy 平面上运动，其位置矢量为 $\vec{r}=a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y(\mathrm{SI})$，式中 a、b、ω 是正值常量，且 $a>b$。(1) 求质点在 A 点 $(a,0)$ 时和 B 点 $(0,b)$ 时的动能；(2) 求质点所受的合外力 $\vec{F}$ 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中 $\vec{F}$ 的分力 F_x 和 F_y 分别作的功。

解答

已知位置随时间的变化关系，通过求导可以得到速度和加速度

$$\vec{r}=a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x-b\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y=-\omega^2\vec{r}$$

在 A 点 $(a,0)$，

$$\cos(\omega t)=1,\sin(\omega t)=0$$

所以速度为

$$\vec{v}_A=b\omega\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

所以质点的动能为

$$E_{kA}=\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

在 B 点 $(0,b)$，

$$\cos(\omega t)=0,\sin(\omega t)=1$$

所以速度为

$$\vec{v}_B=-a\omega\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

所以质点的动能为

$$E_{kB}=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

上面已经求得质点的加速度 $\vec{a}$，利用牛顿第二定律，可得质点所受合外力为

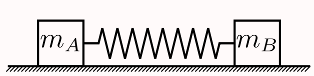
$$\vec{F}=m\vec{a}=-ma\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x-mb\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y=-m\omega^2\vec{r}$$
$$F_x=-ma\omega^2\cos(\omega t)=-m\omega^2x,F_y=-mb\omega^2\sin(\omega t)=-m\omega^2y$$

根据变力做功的定义，可得

$$W=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}(F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y)$$
$$W_x=\int_{x_A}^{x_B}F_x\,\mathrm{d}x=\int_a^0-m\omega^2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}m\omega^2(0^2-a^2)=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$$
$$W_y=\int_{y_A}^{y_B}F_y\,\mathrm{d}y=\int_0^b-m\omega^2y\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}m\omega^2(b^2-0^2)=-\frac{1}{2}m\omega^2b^2$$

第 71 题 |【0386】

A、B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B，且 $m_B=2m_A$，两者用一轻弹簧连接后静止于光滑水平桌面上，如图所示。若用外力将两木块压近使弹簧被压缩，然后将外力撤去，则此后两木块运动动能之比 $\frac{E_{kA}}{E_{kB}}$ 为



(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

答案

D

解析

由两木块和轻弹簧组成的系统，在运动过程中只受到弹簧的内力的作用，所以系统的动量守恒，而开始时系统静止，假定任意时刻二者的速度分别为 v_A 和 v_B，则有

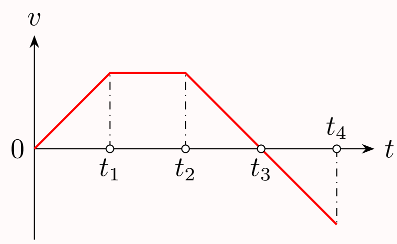
$$0 = m_A v_A + m_B v_B \Rightarrow v_A = \frac{m_B}{m_A} v_B$$

因此，二者的动能之比为

$$\frac{E_{kA}}{E_{kB}} = \frac{\frac{1}{2} m_A v_A^2}{\frac{1}{2} m_B v_B^2} = \frac{m_A v_A^2}{m_B v_B^2} = \frac{m_A \frac{m_B^2}{m_A^2} v_B^2}{m_B v_B^2} = \frac{m_A m_B^2}{m_B m_A^2} = \frac{m_B}{m_A} = 2$$

第 72 题 |【0074】

一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3，则



(A) $W_1 > 0$，$W_2 < 0$，$W_3 < 0$

(B) $W_1 > 0$，$W_2 < 0$，$W_3 > 0$

(C) $W_1 = 0$，$W_2 < 0$，$W_3 > 0$

(D) $W_1 = 0$，$W_2 < 0$，$W_3 < 0$

答案

C

解析

t_1 时刻，物体的速度大小为 v_1，方向沿正方向；t_2 时刻，物体的速度大小为 $v_2 = v_1$，方向沿正方向；t_3 时刻，物体的速度大小为 $v_3 = 0$；t_4 时刻，物体的速度大小为 v_4，方向沿负方向。根据动能定理

$$W_1 = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 0$$
$$W_2 = E_{k3} - E_{k2} = \frac{1}{2} m (v_3^2 - v_2^2) < 0$$
$$W_3 = E_{k4} - E_{k3} = \frac{1}{2} m (v_4^2 - v_3^2) > 0$$

还可以根据力做功的公式来判断。在 t_1 到 t_2 时段，速度不变，所以加速度为零，物体所受合外力为零

$F_1=0$，虽然物体有通过一定的位移 $s_1>0$，但这个时间段外力所做的功 $W_1=F_1s_1=0$；在 t_2 到 t_3 时段，速度变小，所以加速度小于零，物体所受合外力小于零 $F_2<0$，但速度大于零，所以物体通过的位移 $s_2>0$，因此这个时间段外力所做的功 $W_2=F_2s_2<0$；在 t_3 到 t_4 时段，速度反向增大，所以加速度小于零，物体所受合外力小于零 $F_3<0$，但这段时间内速度小于零，所以物体通过的位移 $s_3<0$，因此这个时间段外力所做的功 $W_3=F_3s_3>0$。

第 73 题 |【5379】

当重物减速下降时，合外力对它做的功

(A) 为正值　(B) 为负值

(C) 为零　(D) 先为正值，后为负值

答案

B

解析

减速下降，速度越来越小，所以动能越来越小，根据动能定理，合外力所做的功等于动能的增加量，动能减小，所以外力的功为负值。这里的合外力包含了重力。

第 74 题 |【0078】

质量为 m 的质点在外力作用下，其运动方程为 $\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$，式中 A、B、ω 都是正的常量。由此可知外力在 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 这段时间内所作的功为

(A) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2+B^2)$　(B) $m\omega^2(A^2+B^2)$　(C) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-B^2)$　(D) $\frac{1}{2}m\omega^2(B^2-A^2)$

答案

C

解析

已知运动方程求速度

$$\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{e}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_1=B\omega\,\vec{e}_y,\vec{v}_2=-A\omega\,\vec{e}_x$$

根据动能定理，可得这段时间内力所做的功为

$$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=\frac{1}{2}m[(-A\omega)^2-(B\omega)^2]=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-B^2)$$

也可以通过求加速度和力再求功

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-A\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{e}_x-B\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{F}=m\vec{a}=-mA\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{e}_x-mB\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$$
$$\mathrm{d}\vec{r}=[-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y]\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=[-mA\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{e}_x-mB\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{e}_y]\cdot[-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y]\,\mathrm{d}t$$
$$=[mA^2\omega^3\cos(\omega t)\sin(\omega t)-mB^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t)]\,\mathrm{d}t=m\omega^3(A^2-B^2)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$W=\int_{t_1}^{t_2}m\omega^3(A^2-B^2)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t=m\omega^3(A^2-B^2)\int_{t_1}^{t_2}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$=m\omega^2(A^2-B^2)\times\frac{1}{2}[\sin^2(\omega t)]_{t_1}^{t_2}=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-B^2)[\sin^2(\omega t_2)-\sin^2(\omega t_1)]=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-B^2)$$

第 75 题 |【0479】

一质点在几个外力同时作用下运动时，下述哪种说法正确？

(A) 质点的动量改变时，质点的动能一定改变

(B) 质点的动能不变时，质点的动量也一定不变

(C) 外力的冲量是零，外力的功一定为零

(D) 外力的功为零，外力的冲量一定为零

答案

C

解析

匀速圆周运动中，质点的动量改变，但动能不变；所以 A、B 错误。

质点与固定的墙壁发生完全弹性碰撞，质点的动能保持不变，但动量发生变化，因此外力做功为零，但外力的冲量不为零；所以 D 错误。

从冲量和功的定义来看，在一个很小的时间段 $\mathrm{d}t$ 内，通常认为外力在这个很短的时间段内为恒力，因此如果外力的冲量 $\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 为零，则表示外力 $\vec{F}$ 为零，那么外力的功 $\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t=\vec{v}\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 也一定为零；但对于一个有限长度的时间段 Δt 内，力可以是一个变力，这时如果外力的冲量为零，则力一般情况下并不时时刻刻为零，因此一般情况下会认为该力的功不一定为零。

但从动量定理

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

可知，当冲量为零时，$\vec{v}_2=\vec{v}_1$，即质点在始末状态的速度相等，那么根据动能定理

$$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=0$$

所以质点在始末状态的动能一定相等，因此力的功一定为零。

第 76 题 |【0733】

一质点在二恒力共同作用下，位移为 $\Delta\vec{r} = 3\,\vec{e}_x + 8\,\vec{e}_y$(SI)；在此过程中，动能增量为 24 J，已知其中一恒力 $\vec{F}_1 = 12\,\vec{e}_x - 3\,\vec{e}_y$(SI)，则另一恒力所作的功为______。

答案

12 J

解析

根据恒力做功的定义，$\vec{F}_1$ 在过程中所做的功为

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} = (12\,\vec{e}_x - 3\,\vec{e}_y)\cdot(3\,\vec{e}_x + 8\,\vec{e}_y) = 12\times 3 + (-3)\times 8 = 12 \text{ J}$$

而根据动能定理，质点动能的增量等于过程中所有外力所做功的总和，所以有

$$\Delta E_k = W = W_1 + W_2$$
$$W_2 = \Delta E_k - W_1 = 24 - 12 = 12 \text{ J}$$

第 77 题 |【0202】

质量 $m = 2$ kg 的物体沿 x 轴作直线运动，所受合外力 $F = 10 + 6x^2$(SI)。如果在 $x = 0$ 处时速度 $v_0 = 0$；试求该物体运动到 $x = 4$ m 处时速度的大小。

解答

根据变力做功的定义，可得

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (10 + 6x^2)\,\mathrm{d}x = (10x + 2x^3)_0^4 = 10\times 4 + 2\times 4^3 = 168 \text{ J}$$

根据动能定理，可得

$$W = \Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 168}{2}} = \sqrt{168} \text{ m/s}$$

第 78 题 |【0441】

一特殊的轻弹簧，弹性力 $F = -kx^3$，k 为一常量系数，x 为伸长 (或压缩) 量。现将弹簧水平放置于光滑的水平面上，一端固定，一端与质量为 m 的滑块相连而处于自然长度状态。今沿弹簧长度方向给滑块一个冲量，使其获得一速度 v，压缩弹簧，则弹簧被压缩的最大长度为

(A) $\sqrt{\frac{m}{k}}v$　(B) $\sqrt{\frac{k}{m}}v$　(C) $\left(\frac{4mv}{k}\right)^{1/4}$　(D) $\left(\frac{2mv^2}{k}\right)^{1/4}$

答案

D

解析

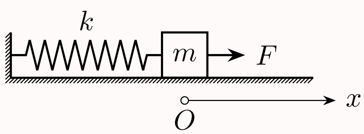
开始时滑块获得一定的速度，因此具有一定的动能，之后在弹簧弹力的作用下，当滑块速度降为零时，弹簧被压缩的最厉害，因此，由动能定理，得

$$W = -\Delta E_k = \frac{1}{2}m(0^2 - v^2) = -\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^x F\,\mathrm{d}x = \int_0^x -kx^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}kx^4$$

$$x = \left(\frac{2mv^2}{k}\right)^{1/4}$$

第 79 题 |【0093】

如图所示，劲度系数为 k 的弹簧，一端固定在墙壁上，另一端连一质量为 m 的物体，物体在坐标原点 O 时弹簧长度为原长。物体与桌面间的摩擦系数为 μ。若物体在不变的外力 F 作用下向右移动，则物体到达最远位置时系统的弹性势能 $E_p =$______。



答案

$\frac{2(F-\mu mg)^2}{k}$

解析

在运动过程中，物体在竖直方向上共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的桌面的支持力 N，而且这两个力互相平衡，所以有 $N = mg$；在水平方向上物体共受到三个力的作用：水平向右的恒力 F，水平向左的弹簧拉力 kx，水平向左的滑动摩擦力 $f = \mu N = \mu mg$，根据牛顿第二定律，在水平方向上物体的加速度为

$$a = \frac{F - kx - \mu mg}{m}$$

物体到达最远位置时，物体静止，假定此时弹簧伸长量为 x，则有

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}x = \frac{F - kx - \mu mg}{m}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \frac{F - kx - \mu mg}{m}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 0 = \left[\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)x - \frac{k}{2m}x^2\right]_0^x = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right)x - \frac{k}{2m}x^2 = x\left(\frac{F}{m} - \mu g - \frac{k}{2m}x\right)$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\frac{F}{m} - \mu g}{\frac{k}{2m}} = \frac{2(F - \mu mg)}{k}$$

所以，物体到达最远位置时弹簧的伸长量为 $x = x_2 = \frac{2(F-\mu mg)}{k}$，所以弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{4(F - \mu mg)^2}{k^2} = \frac{2(F - \mu mg)^2}{k}$$

2.4 功能原理 机械能守恒定律

2.4.1 保守力，势能

第 80 题 |

【5019】对功的概念有以下几种说法：(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作功的代数和必为零。在上述说法中

(A) (1)、(2) 是正确的 (B) (2)、(3) 是正确的 (C) 只有 (2) 是正确的 (D) 只有 (3) 是正确的

答案

C

解析

保守力做正功，势能减少；

保守力做功只与始末位置有关，与中间过程无关，换言之，经过任意闭合回路，保守力做功为零；

作用力与反作用力虽然大小相等、方向相反，但二力作用在不同物体上，通过的位移不一定相等，因此二者所做的功不一定等值反号。

第 81 题 |【0100】

已知地球质量为 M，半径为 R。一质量为 m 的火箭从地面上升到距地面高度为 $2R$ 处。在此过程中，地球引力对火箭作的功为______。

答案

$-\frac{2GMm}{3R}$

解析

火箭受到地球的万有引力的大小为

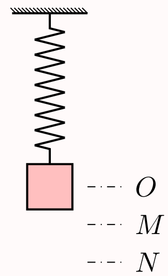
$$F=\frac{GMm}{r^2}$$

其中 r 是由地心到火箭的距离，引力的方向一直是指向地心，与位移的方向相反，所以在此过程中万有引力的功为

$$W=\int_R^{3R}-F\,\mathrm{d}r=\int_R^{3R}-\frac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r=GMm\left(\frac{1}{3R}-\frac{1}{R}\right)=-\frac{2GMm}{3R}$$

第 82 题 |【5262】

一物体挂在一弹簧下面，平衡位置在 O 点，现用手向下拉物体，第一次把物体由 O 点拉到 M 点，第二次由 O 点拉到 N 点，再由 N 点送回 M 点。则在这两个过程中



(A) 弹性力作的功相等，重力作的功不相等

(B) 弹性力作的功相等，重力作的功也相等

(C) 弹性力作的功不相等，重力作的功相等

(D) 弹性力作的功不相等，重力作的功也不相等

答案

B

解析

重力的弹性力都是保守力，保守力做功只与始末位置有关，与中间过程无关，所以二者的功都相等。

第 83 题 |【5020】

有一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长为 l_0，将它吊在天花板上。当它下端挂一托盘平衡时，其长度变为 l_1。然后在托盘中放一重物，弹簧长度变为 l_2，则由 l_1 伸长至 l_2 的过程中，弹性力所作的功为

(A) $-\int_{l_1}^{l_2}kx\,\mathrm{d}x$

(B) $\int_{l_1}^{l_2}kx\,\mathrm{d}x$

(C) $-\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0}kx\,\mathrm{d}x$

(D) $\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0}kx\,\mathrm{d}x$

答案

C

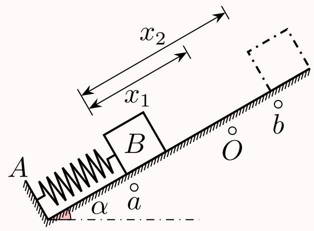
解析

胡克定律 $F=-kx$ 中的 x 是弹簧的形变量，所以依题意，弹簧原长为 l_0，当弹簧长度为 l 时，形变量为 $x=l-l_0$，因此弹簧的弹性力所做的功为

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F\,\mathrm{d}x=\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0}-kx\,\mathrm{d}x=-\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0}kx\,\mathrm{d}x$$

第 84 题 |【0101】

劲度系数为 k 的轻弹簧，一端与倾角为 α 的斜面上的固定档板 A 相接，另一端与质量为 m 的物体 B 相连。O 点为弹簧没有连物体、长度为原长时的端点位置，a 点为物体 B 的平衡位置。现在将物体 B 由 a 点沿斜面向上移动到 b 点 (如图所示)。设 a 点与 O 点，a 点与 b 点之间距离分别为 x_1 和 x_2，则在此过程中，由弹簧、物体 B 和地球组成的系统势能的增加为



(A) $\frac{1}{2}kx_2^2+mgx_2\sin\alpha$　　(B) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+mg(x_2-x_1)\sin\alpha$

(C) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_1^2+mgx_2\sin\alpha$　　(D) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+mg(x_2-x_1)\cos\alpha$

答案

C

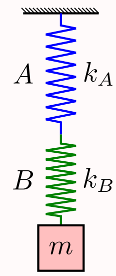
解析

以地面为重力势能的零点，以弹簧自然伸展位置为弹性势能的零点，则初态的重力势能为 mgh_a，弹性势能为 $\frac{1}{2}kx_1^2$；末态的重力势能为 mgh_b，弹性势能为 $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$；所以过程中系统势能的增加量为

$$\begin{aligned}\Delta E_p&=\left[mgh_b+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2\right]-\left[mgh_a+\frac{1}{2}kx_1^2\right]\\&=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_1^2+mg(h_b-h_a)\\&=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_1^2+mgx_2\sin\alpha\end{aligned}$$

第 85 题 |【0408】

A、B 二弹簧的劲度系数分别为 k_A 和 k_B，其质量均忽略不计。今将二弹簧连接起来并竖直悬挂，如图所示。当系统静止时，二弹簧的弹性势能 E_{pA} 与 E_{pB} 之比为



(A) $\frac{E_{pA}}{E_{pB}}=\frac{k_A}{k_B}$ (B) $\frac{E_{pA}}{E_{pB}}=\frac{k_A^2}{k_B^2}$ (C) $\frac{E_{pA}}{E_{pB}}=\frac{k_B}{k_A}$ (D) $\frac{E_{pA}}{E_{pB}}=\frac{k_B^2}{k_A^2}$

答案

C

解析

不计弹簧质量时，二者的弹力相等，都等于物体的重力，即

$$k_Ax_A=k_Bx_B=mg\Rightarrow\frac{x_A}{x_B}=\frac{k_B}{k_A}$$

而以弹簧自然伸展时的状态为弹簧弹性势能的零点，则两个弹簧的弹性势能分别为

$$E_{pA}=\frac{1}{2}k_Ax_A^2$$
$$E_{pB}=\frac{1}{2}k_Bx_B^2$$

所以二者之比为

$$\frac{E_{pA}}{E_{pB}}=\frac{\frac{1}{2}k_Ax_A^2}{\frac{1}{2}k_Bx_B^2}=\frac{k_Ax_A^2}{k_Bx_B^2}=\frac{k_Ax_A}{k_Bx_B}\times\frac{x_A}{x_B}=\frac{x_A}{x_B}=\frac{k_B}{k_A}$$

2.4.2 功能原理

第 86 题 |【0744】

一长为 L，质量为 m 的匀质链条，放在光滑的桌面上，若其长度的 $\frac{1}{5}$ 悬挂于桌边下，将其慢慢拉回桌面，需做功______。

答案

$\frac{1}{50}mgL$

解析

慢慢拉回，所以不考虑动能的变化，但系统的势能发生了变化，因此机械能也发生了变化

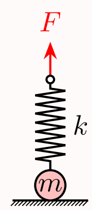
$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=0+\frac{1}{5}mg\times\frac{1}{10}L=\frac{1}{50}mgL$$

根据功能原理，系统机械能的变化量等于外力所做的功，即

$$W=\Delta E=\frac{1}{50}mgL$$

第 87 题 |【0095】

有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球，开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触，今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力作功为



(A) $\frac{m^2g^2}{4k}$ (B) $\frac{m^2g^2}{3k}$ (C) $\frac{m^2g^2}{2k}$ (D) $\frac{2m^2g^2}{k}$ (E) $\frac{4m^2g^2}{k}$

答案

C

解析

以轻弹簧和小球为研究系统，在整个过程中，外力做功，系统的机械能发生变化，而在整个过程中，只有弹性势能发生变化，重力势能和动能均保持不变。当小球刚好能脱离地面时，弹簧施加给小球的弹力刚好等于小球的重力，所以弹簧的形变量 x 满足

$$mg=kx\Rightarrow x=\frac{mg}{k}$$

此时弹性势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2}=\frac{m^2g^2}{2k}$$

第 88 题 |【5021】

有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球。先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触。再将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止。在此过程中外力所作的功为______。

答案

$\frac{m^2g^2}{2k}$

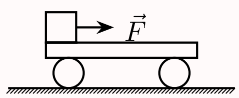
解析

小球要刚能脱离地面，它所受到的弹簧的拉力要刚好等于小球本身的重力。在此过程中，由小球和弹簧组成的系统，动能保持为零，重力势能保持不变，弹性势能慢慢增加，所以总的机械能慢慢增加，机械能的变化量就等于外力所做的功。因此，有

$$kx = mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k}$$
$$W = \Delta E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} = \frac{m^2g^2}{2k}$$

第 89 题 |【0413】

如图，在光滑水平地面上放着一辆小车，车上左端放着一只箱子，今用同样的水平恒力 $\vec{F}$ 拉箱子，使它由小车的左端达到右端，一次小车被固定在水平地面上，另一次小车没有固定。试以水平地面为参照系，判断下列结论中正确的是



(A) 在两种情况下，$\vec{F}$ 做的功相等
(B) 在两种情况下，摩擦力对箱子做的功相等
(C) 在两种情况下，箱子获得的动能相等
(D) 在两种情况下，由于摩擦而产生的热相等

答案

D

解析

两种情况下，箱子和小车都有相对滑动，所以摩擦力都是滑动摩擦力，大小不变，因此箱子所受到的合力相同。两种情况下，箱子移动的距离不同，但箱子相对小车移动的距离相同。
力 $\vec{F}$ 不变，但力通过的位移变化，所以两种情况下 $\vec{F}$ 所做的功不同；
摩擦力不变，但位移变化，所以两种情况下，摩擦力所做的功不同；
箱子所受的合力不变，但位移变化，所以两种情况下，箱子获得的动能不同；
摩擦力不变，相对位移不变，所以两种情况下，由于摩擦而产生的热不变。

2.4.3 机械能守恒定律

第 90 题 |【0442】

对于一个物体系来说，在下列的哪种情况下系统的机械能守恒？

(A) 合外力为零

(B) 合外力不作功

(C) 外力和非保守内力都不作功

(D) 外力和保守内力都不作功

答案

C

解析

由质点系的动能定理可知，质点系中所有内力和外力所做的功等于质点系动能的增加量，

$$\Delta E_k = W_{\text{内力}} + W_{\text{外力}} = W_{\text{保守内力}} + W_{\text{非保守内力}} + W_{\text{外力}}$$

其中所有保守内力所做的功又等于质点系势能的减少量，

$$W_{\text{保守内力}} = -\Delta E_p$$

而质点系的机械能等于质点系的动能和势能之和，

$$E = E_k + E_p$$
$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W_{\text{非保守内力}} + W_{\text{外力}}$$

所以，当外力和非保守内力不作功时，质点系的机械能守恒。

第 91 题 |【0644】

一质量为 m 的质点在指向圆心的平方反比力 $F = -\frac{k}{r^2}$ 的作用下，作半径为 r 的圆周运动。此质点的速度 $v =$______。若取距圆心无穷远处为势能零点，它的机械能 $E =$______。

答案

$\sqrt{\frac{k}{mr}}$，$-\frac{k}{2r}$

解析

质点在平方反比力 $F = -\frac{k}{r^2}$ 的作用下，作半径为 r 的圆周运动，所以有

$$\frac{k}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$
$$v = \sqrt{\frac{k}{mr}}$$

若取距圆心无穷远处为势能零点，则势能为

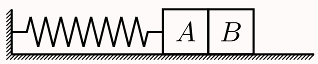
$$E_p = \int_r^\infty F\,\mathrm{d}r = \int_r^\infty -\frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{k}{r}$$

所以总的机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\frac{k}{mr} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2r}$$

第 92 题 |【0339】

一水平放置的轻弹簧，劲度系数为 k，其一端固定，另一端系一质量为 m 的滑块 A，A 旁又有一质量相同的滑块 B，如图所示。设两滑块与桌面间无摩擦。若用外力将 A、B 一起推压使弹簧压缩量为 d 而静止，然后撤消外力，则 B 离开时的速度为



(A) 0 (B) $d\sqrt{\frac{k}{2m}}$ (C) $d\sqrt{\frac{k}{m}}$ (D) $d\sqrt{\frac{2k}{m}}$

答案

B

解析

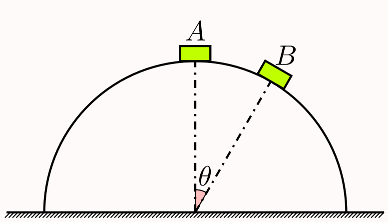
弹簧恢复原长时 A、B 分离，设分离时的速度大小为 v。在此过程中，由 A、B 和弹簧组成的系统的机械能守恒。以弹簧自然伸展位置为弹性势能的零点，则有

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}(2m)v^2$$

$$v = d\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

第 93 题 |【0225】

质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处 (球面固定不动)，如图所示。当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为



(A) $a = 2g(1-\cos\theta)$ (B) $a = g\sin\theta$

(C) $a=g$ (D) $a=\sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2+g^2\sin^2\theta}$

答案

D

解析

由于球面光滑，所以球面对质点的支持力一定垂直于球面，即从球心指向质点，此外质点还受到竖直向下的重力的作用，因此在质点运动过程中质点的机械能守恒，或者根据动能定理，均可求得质点在 B 处的速度大小

$$\frac{1}{2}mv^2=mgR(1-\cos\theta)$$
$$v^2=2gR(1-\cos\theta)$$

所以质点的法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=2g(1-\cos\theta)$$

而沿切向方向，质点所受的合力就是重力沿切向的分力，因此质点的切向加速度为

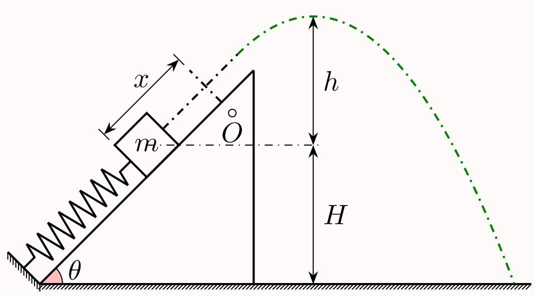
$$a_t=\frac{F_t}{m}=\frac{mg\sin\theta}{m}=g\sin\theta$$

所以，质点的总的加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{g^2\sin^2\theta+4g^2(1-\cos\theta)^2}$$

第 94 题 |【0097】

如图，劲度系数为 k 的轻弹簧在质量为 m 的木块和外力 (未画出) 作用下，处于被压缩的状态，其压缩量为 x。当撤去外力后弹簧被释放，木块沿光滑斜面弹出，最后落到地面上。



(A) 在此过程中，木块的动能与弹性势能之和守恒

(B) 木块到达最高点时，高度 h 满足 $\frac{1}{2}kx^2=mgh$

(C) 木块落地时的速度 v 满足 $\frac{1}{2}kx^2+mgH=\frac{1}{2}mv^2$

(D) 木块落地点的水平距离随 θ 的不同而异，θ 愈大，落地点愈远

答案

C

解析

由于斜面光滑，忽略空气阻力，轻弹簧和木块的机械能守恒。以地面为重力势能零点，以弹簧自然伸展状态为弹性势能的零点，系统的机械能包括木块的动能、弹簧的弹性势能和木块的重力势能 (严格来说，重力势能属于木块和地球共有)。初始状态下，木块静止，动能为零，弹性势能为 $\frac{1}{2}kx^2$，重力势能为 mgH，在最高点，木块具有水平方向的速度，所以具有一定的动能，弹性势能为零，重力势能为 $mg(H+h)$，所以在最高点的机械能为

$$mg(H+h)+\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{2}kx^2+mgH$$
$$mgh=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}mv_x^2$$

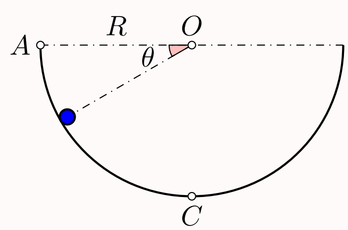
在落地点，重力势能为零，弹性势能为零，只有木块的动能，所以

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2+mgH$$

D 选项中，题目给出的条件无法写出落地点的具体表达式，但可以大概判断是错误的，当斜面倾角趋于 90° 时，落地点显然不会最远。

第 95 题 |【0094】

如图所示，假设物体沿着竖直面上圆弧形轨道下滑，轨道是光滑的，在从 A 至 C 的下滑过程中，下面哪个说法是正确的？



(A) 它的加速度大小不变，方向永远指向圆心
(B) 它的速率均匀增加
(C) 它的合外力大小变化，方向永远指向圆心
(D) 它的合外力大小不变
(E) 轨道支持力的大小不断增加

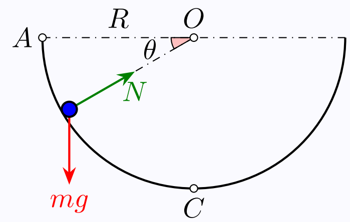
答案

E

解析

物体下滑过程中，轨道光滑，所以机械能守恒。在任意位置，物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，指向圆心的轨道支持力 N。轨道支持力与重力的分力提供物体做圆周运动的向心力，重力的另一个分力使物体具有切向加速度，即物体即有切向加速度，也有法向加速度。所以 A、C 错误。

设在图示任意 θ 角处，物体的速度大小为 v，以 A 点处为重力势能的零点，由于题目没说明物体从 A 处由静止开始下滑，所以一般地假定物体在 A 处的速度大小为 v_0，则由机械能守恒定律，有



$$0+\frac{1}{2}mv_0^2=-mgR\sin\theta+\frac{1}{2}mv^2$$
$$v=\sqrt{v_0^2+2gR\sin\theta}$$

而由牛顿第二定律，有

$$N-mg\sin\theta=ma_n=m\frac{v^2}{R}$$
$$mg\cos\theta=ma_t=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g\cos\theta$$

所以，切向加速度会随 θ 变化，速率的变化是不均匀的，所以 B 错误。而

$$N-mg\sin\theta=m\frac{v^2}{R}$$
$$N=mg\sin\theta+m\frac{v^2}{R}=mg\sin\theta+m\frac{v_0^2+2gR\sin\theta}{R}=3mg\sin\theta+m\frac{v_0^2}{R}$$

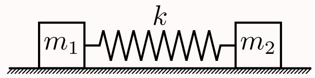
随着 θ 的增大，N 也增大。而合力的大小为

$$F=\sqrt{(N-mg\sin\theta)^2+(mg\cos\theta)^2}=\sqrt{m^2\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+(mg\cos\theta)^2}$$
$$=m\sqrt{\left(\frac{v_0^2+2gR\sin\theta}{R}\right)^2+(g\cos\theta)^2}$$

显然，合力大小也会随着 θ 的变化而变化，所以 D 错误。

第 96 题 |【0176】

质量分别为 m_1、m_2 的两个物体用一劲度系数为 k 的轻弹簧相联，放在水平光滑桌面上，如图所示。当两物体相距 x 时，系统由静止释放。已知弹簧的自然长度为 x_0，则当物体相距 x_0 时，m_1 的速度大小为



(A) $\sqrt{\frac{k(x-x_0)^2}{m_1}}$ (B) $\sqrt{\frac{k(x-x_0)^2}{m_2}}$ (C) $\sqrt{\frac{k(x-x_0)^2}{m_1+m_2}}$ (D) $\sqrt{\frac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}}$ (E) $\sqrt{\frac{km_1(x-x_0)^2}{m_2(m_1+m_2)}}$

答案

D

解析

由 m_1、m_2 和轻弹簧组成的系统，在过程中所受合外力为零，且内力为弹性的弹性力，是保守力，所以系统的动量守恒，机械能守恒。依题意，当两物体相距 x 时，弹簧的形变量为 $x-x_0$，两物体静止，所以系统只有弹性势能 (系统的重力势能保持不变，选为零点)；当两物体相距 x_0 时，弹簧无形变，所以系统的弹性势能为零，设此时两物体的速度分别为 v_1 和 v_2，则有

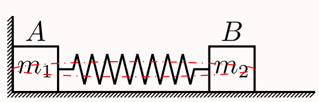
$$m_1v_1+m_2v_2=0$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

联立解得

$$v_2=-\frac{m_1}{m_2}v_1$$
$$m_1v_1^2+\frac{m_1^2}{m_2}v_1^2=\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}=k(x-x_0)^2$$
$$v_1^2=\frac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}$$
$$|v_1|=\sqrt{\frac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}}$$

第 97 题 |【0453】

两木块 A、B 的质量分别为 m_1 和 m_2，用一个质量不计、劲度系数为 k 的弹簧连接起来。把弹簧压缩 x_0 并用线扎住，放在光滑水平面上，A 紧靠墙壁，如图所示，然后烧断扎线。判断下列说法哪个正确。



(A) 弹簧由初态恢复为原长的过程中，以 A、B、弹簧为系统，动量守恒
(B) 在上述过程中，系统机械能守恒
(C) 当 A 离开墙后，整个系统动量守恒，机械能不守恒
(D) A 离开墙后，整个系统的总机械能为 $\frac{1}{2}kx_0^2$，总动量为零

答案

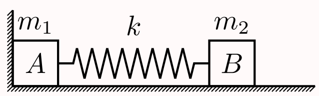
B

解析

弹簧由初态恢复为原长的过程中，墙壁对 A 有支持力，所以系统的动量不守恒，但这个支持力不作功，所以系统的机械能守恒；当 A 离开墙后，系统所受合外力为零，合外力做功也为零，所以系统的动量守恒，机械能也守恒。整个过程，系统的机械能都守恒，所以系统的总机械能等于初始状态的机械能，即弹簧的弹性势能 $\frac{1}{2}kx_0^2$【因为整个过程系统的重力势能保持不变，所以可以取为零】。A 离开墙后，系统的动量守恒，离开墙的瞬间，A 的速度为零，但 B 的速度不为零，所以系统的总动量不为零。

第 98 题 |【0183】

两个质量分别为 m_1 和 m_2 的木块 A 和 B，用一个质量忽略不计、劲度系数为 k 的弹簧联接起来，放置在光滑水平面上，使 A 紧靠墙壁，如图所示。用力推木块 B 使弹簧压缩 x_0，然后释放。已知 $m_1 = m$，$m_2 = 3m$，求：(1) 释放后，A、B 两木块速度相等时的瞬时速度的大小；(2) 释放后，弹簧的最大伸长量。



解答

释放之后在弹簧恢复原长之前，墙壁对 A 有作用力，但这个作用力不做功，所以这个阶段，由两个木块和弹簧组成的系统动量不守恒，但机械能守恒。所以，弹簧恢复原长的瞬间，B 的速度大小 v_0 满足

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m_2v_0^2$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}x_0 = \sqrt{\frac{k}{3m}}x_0$$

之后，A 离开墙壁，系统在水平方向不再受到外力作用，系统机械能守恒、动量守恒。当 A、B 速度相等时，弹簧形变量最大，可能是被拉伸最大，也可能是被压缩最大，所以有

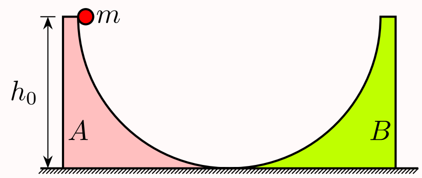
$$m_2v_0 = (m_1 + m_2)v$$
$$\frac{1}{2}m_2v_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

解得

$$v = \frac{m_2v_0}{m_1 + m_2} = \frac{3m}{m + 3m}\sqrt{\frac{k}{3m}}x_0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3k}{m}}x_0$$
$$x = \sqrt{x_0^2 - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{k}} = x_0\sqrt{1 - \frac{4m}{k} \times \frac{1}{16} \times \frac{3k}{m}} = x_0\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{x_0}{2}$$

第 99 题 |【0209】

两个形状完全相同、质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，相向地放在地板上，今有一质量为 m 的小物体，从静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0，所有接触面均光滑。试求小物体在 B 轨上上升的最大高度 (设 A、B 导轨与地面相切)。



解答

小物体从 A 上滑下时，以小物体与 A 为研究对象，由于所有接触都光滑，所以系统在水平方向上不受外力作用，系统水平方向上动量守恒，机械能守恒。由于导轨与地面相切，所以物体离开 A 时的速度也是沿水平方向，设物体离开 A 时，物体的速度为 v_1，A 的速度为 v_A，则有

$$0 = mv_1 + Mv_A$$
$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2$$

解得

$$v_A = -\frac{mv_1}{M}$$
$$2mgh_0 = mv_1^2 + M\frac{m^2v_1^2}{M^2} = \frac{M+m}{M}mv_1^2$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2Mgh_0}{M+m}}$$

之后，物体沿 B 上升，以小物体与 B 为研究对象，由于所有接触都光滑，所以系统在水平方向上不受外力作用，系统水平方向上动量守恒，机械能守恒。当物体与 B 的水平速度分量相等且物体的竖直速度分量为零时，小物体在 B 轨上上升的高度最大，设此时二者的水平速度分量为 v_x，物体上升的高度为 h，则有

$$mv_1 = (m+M)v_x$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_x^2 + mgh$$

解得

$$v_x = \frac{mv_1}{m+M}$$
$$2mgh = mv_1^2 - (m+M)v_x^2 = mv_1^2 - (m+M)\frac{m^2v_1^2}{(m+M)^2} = \frac{M}{m+M}mv_1^2$$
$$h = \frac{M}{2(m+M)g}v_1^2 = \frac{M}{2(m+M)g} \times \frac{2Mgh_0}{M+m} = \frac{M^2}{(m+M)^2}h_0$$

第 100 题 |【0735】

二质点的质量各为 m_1，m_2。当它们之间的距离由 a 缩短到 b 时，它们之间万有引力所做的功为______。

答案

$-Gm_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

解析

以二者相距无穷远时的位置为万有引力的势能零点，根据万有引力做功等于万有引力势能的减小可得

$$W=-Gm_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

第 101 题 |【0073】

质量为 m 的一艘宇宙飞船关闭发动机返回地球时，可认为该飞船只在地球的引力场中运动。已知地球质量为 M，万有引力恒量为 G，则当它从距地球中心 R_1 处下降到 R_2 处时，飞船增加的动能应等于

(A) $\frac{GMm}{R_2}$ (B) $\frac{GMm}{R_2^2}$ (C) $GMm\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}$ (D) $GMm\frac{R_1-R_2}{R_1^2}$ (E) $GMm\frac{R_1-R_2}{R_1^2R_2^2}$

答案

C

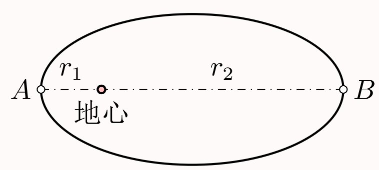
解析

在宇宙飞船的运动过程中，只受到地球的万有引力的作用，万有引力是保守力，所以系统的机械能守恒，以无穷远处为万有引力势能的零点，则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{R_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{R_2}$$
$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{GMm}{R_2}-\frac{GMm}{R_1}=GMm\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}$$

第 102 题 |【0072】

一人造地球卫星绕地球作椭圆运动，近地点为 A，远地点为 B。A、B 两点距地心分别为 r_1、r_2。设卫星质量为 m，地球质量为 M，万有引力常量为 G。则卫星在 A、B 两点处的万有引力势能之差 $E_{pB}-E_{pA}=$______；卫星在 A、B 两点的动能之差 $E_{kB}-E_{kA}=$______。



答案

$GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$，$GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$

解析

以卫星与地球相距无穷远时为万有引力势能的零点，则当卫星与地球相距 r 时，万有引力势能为

$$E_p=-\frac{GMm}{r}$$

所以在近地点，万有引力势能为

$$E_{pA}=-\frac{GMm}{r_1}$$

在远地点，万有引力势能为

$$E_{pB}=-\frac{GMm}{r_2}$$

二者之差为

$$E_{pB}-E_{pA}=-\frac{GMm}{r_2}+\frac{GMm}{r_1}=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

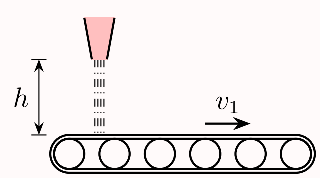
而在整个运动过程中，只有万有引力做功，所以系统的机械能守恒，即

$$E_{kA}+E_{pA}=E_{kB}+E_{pB}$$

$$E_{kB}-E_{kA}=E_{pA}-E_{pB}=GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

第 103 题 |【0703】

如图所示，砂子从 $h=0.8$ m 高处下落到以 3 m/s 的速率水平向右运动的传送带上。取重力加速度 $g=10$ m/s^2。传送带给予刚落到传送带上的砂子的作用力的方向为



(A) 与水平夹角 53° 向下

(B) 与水平夹角 53° 向上

(C) 与水平夹角 37° 向上

(D) 与水平夹角 37° 向下

答案

B

解析

砂子自由下落，碰到传送带前机械能守恒，具有竖直向下的速度 v_0，

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\times 0.8} = 4\ \mathrm{m/s}$$

碰到传送带后，砂子具有与传送带相同的水平向右的速度 v_1，在这个过程中，受到了传送带施加给砂子的作用力 (忽略这个过程中砂子重力的影响)，这个作用力的冲量使得砂子的动量发生变化，以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则冲量为

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = m[3\,\vec{e}_x - (-4\,\vec{e}_y)] = m(3\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y)$$

2.5 碰撞

第 104 题 |【0478】

一子弹以水平速度 v_0 射入一静止于光滑水平面上的木块后，随木块一起运动。对于这一过程正确的分析是

(A) 子弹、木块组成的系统机械能守恒
(B) 子弹、木块组成的系统水平方向的动量守恒
(C) 子弹所受的冲量等于木块所受的冲量
(D) 子弹动能的减少等于木块动能的增加

答案

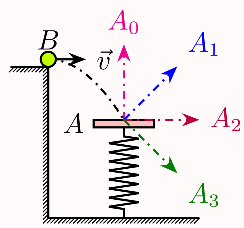
B

解析

子弹与木块之间有摩擦力，这是一对内力；由于水平面光滑，所以外力 (重力和水平面的支持力) 都不作功，且互相平衡。运动过程中摩擦力有作功，所以系统的机械能不守恒，但动量守恒，因此子弹受到的冲量与木块受到的冲量等值反向；系统势能没有发生变化，机械能不守恒也代表动能不守恒，所以子弹动能的减少并不等于木块动能的增加，摩擦力做功部分转化为系统的内能 (热能)。

第 105 题 |【0366】

质量为 m 的平板 A，用竖立的弹簧支持而处在水平位置，如图。从平台上投掷一个质量也是 m 的球 B，球的初速为 v，沿水平方向。球由于重力作用下落，与平板发生完全弹性碰撞。假定平板是光滑的。则与平板碰撞后球的运动方向应为



(A) A_0 方向　(B) A_1 方向　(C) A_2 方向　(D) A_3 方向

答案

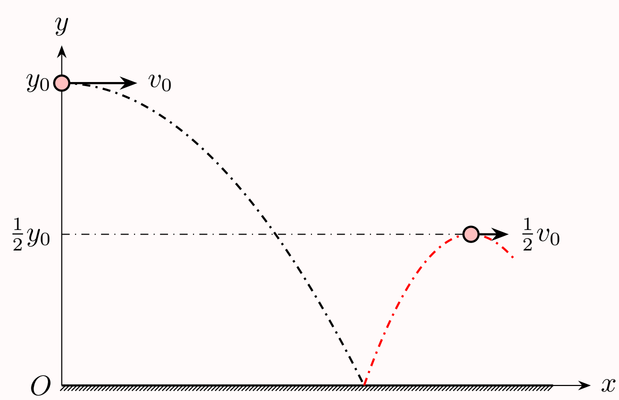
C

解析

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向。球在碰到平板之前的速度可以记为 $\vec{v}_B = v_{Bx}\,\vec{e}_x + v_{By}\,\vec{e}_y$，其中 $v_{Bx} = v$，沿水平向右，$v_{By} < 0$，沿竖直向下；碰前平板 A 静止。由于平板光滑，所以 x 方向碰撞二者的速度分量保持不变，而 y 方向发生完全弹性碰撞，由于 A、B 质量相等，二者速度交换，所以碰后 B 沿竖直方向的速度为零，所以碰后 B 的总的速度方向为水平向右，即沿图中 A_2 方向。

第 106 题 |【0055】

质量为 m 的小球自高为 y_0 处沿水平方向以速率 v_0 抛出，与地面碰撞后跳起的最大高度为 $\frac{1}{2}y_0$，水平速率为 $\frac{1}{2}v_0$，则碰撞过程中 (1) 地面对小球的竖直冲量的大小为_____；(2) 地面对小球的水平冲量的大小为_____。



答案

$(1+\sqrt{2})m\sqrt{gy_0}$，$\frac{1}{2}mv_0$

解析

小球在抛出到碰地前机械能守恒，碰后弹起到最大高度处也机械能守恒。以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，设碰地前瞬间小球的速度为 $\vec{v}_1 = v_{1x}\,\vec{e}_x + v_{1y}\,\vec{e}_y$，碰地后弹起瞬间小球的速度为 $\vec{v}_2 = v_{2x}\,\vec{e}_x + v_{2y}\,\vec{e}_y$，则有

$$v_{1x} = v_0, v_{2x} = \frac{1}{2}v_0, v_{1y} = -\sqrt{2gy_0}, v_{2y} = \sqrt{2g\times\frac{1}{2}y_0} = \sqrt{gy_0}$$

所以碰撞过程，地面对小球的总的冲量为

$$\begin{aligned}\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) &= m[(v_{2x} - v_{1x})\,\vec{e}_x + (v_{2y} - v_{1y})\,\vec{e}_y] \\ &= m\left[-\frac{1}{2}v_0\,\vec{e}_x + (1+\sqrt{2})\sqrt{gy_0}\,\vec{e}_y\right]\end{aligned}$$

第 107 题 |【5630】

一个打桩机，夯的质量为 m_1，桩的质量为 m_2。假设夯与桩相碰撞时为完全非弹性碰撞且碰撞时间极短，则刚刚碰撞后夯与桩的动能是碰前夯的动能的______ 倍。

答案

$\frac{m_1}{m_1+m_2}$

解析

碰前桩是静止的，设碰前夯的速度大小为 v_1，由于是完全非弹性碰撞，所以碰后夯与桩的速度大小相等，设为 v_2，碰撞过程动量守恒，所以有

$$m_1v_1 = (m_1+m_2)v_2$$
$$v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

所以碰后夯与桩的动能为

$$\begin{aligned}E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}v_1^2 \\ &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}E_0\end{aligned}$$

第三章 刚体力学

3.1 刚体的定轴转动

第 108 题 |【0290】

半径为 $r = 1.5$ m 的飞轮，初角速度 $\omega_0 = 10$ rad/s，角加速度 $\alpha = -5$ rad/s^2，则在 $t =$______ 时角位移为零，而此时边缘上点的线速度 $v =$______。

答案

4 s，-15 m/s

解析

由角速度和初角速度，通过积分可以求得任意时刻的角速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^t \alpha\,\mathrm{d}t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 10 - 5t \text{ rad/s}$$

继而再次积分，可以求得任意时间段的角位移

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \int_0^t (10 - 5t)\,\mathrm{d}t = (10t - 2.5t^2)_0^t = 10t - 2.5t^2$$

让上述角位移等于零，即可求得时间

$$\Delta\theta = 10t - 2.5t^2 = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 4 \text{ s}$$

把上述时间代入角速度表达式，可求得该时刻的角速度，再利用线速度和角速度的关系，即可求得此时刻边缘上点的线速度

$$\omega = 10 - 5 \times 4 = -10 \text{ rad/s}$$
$$v = \omega R = -10 \times 1.5 = -15 \text{ m/s}$$

3.2 刚体定轴转动的转动定律

3.2.1 转动惯量

第 109 题 |【0289】

关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是

(A) 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关

(B) 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关

(C) 取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置

(D) 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关

答案

C

解析

根据刚体转动惯量的定义

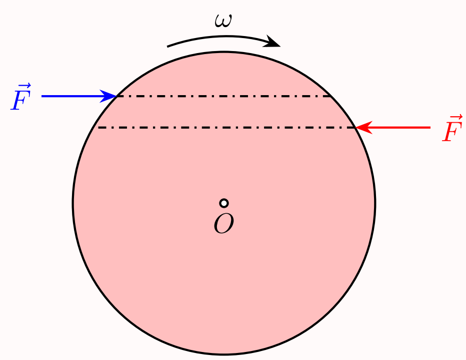
$$\mathrm{d}I = r_\perp^2 \,\mathrm{d}m$$
$$I = \int r_\perp^2 \,\mathrm{d}m$$

刚体对轴的转动惯量与刚体的质量、质量的分布以及转轴的位置都有关系。

3.2.2 定轴转动的转动定律

第 110 题 |【0153】

一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴 O 以角速度 ω 按图示方向转动。若如图所示的情况那样，将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度 ω



(A) 必然增大 (B) 必然减少

(C) 不会改变 (D) 如何变化，不能确定

答案

A

解析

图中向右的力到固定轴的力臂大于向左的力到固定轴的力臂，因此前者对固定轴的力矩大于后者的力矩，而前者的力矩方向与圆盘转动方向相同，所以圆盘所受合外力矩的方向与转动方向相同，产生的角加速度与角速度的方向相同，所以角速度将增大。

第 111 题 |【0240】

一飞轮以 600 rev/min 的转速旋转，转动惯量为 $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，现加一恒定的制动力矩使飞轮在 1 s 内停止转动，则该恒定制动力矩的大小 $M=$______。

答案

$50\pi\ \mathrm{N\cdot m}$

解析

根据角动量定理的积分形式

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$M\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}L$$

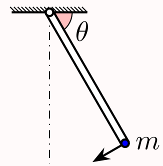
$$\int M\,\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}L$$

$$M\Delta t=\Delta L$$

$$M=\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{I\Delta\omega}{\Delta t}=2.5\times\frac{10\times 2\pi}{1}=50\pi\ \mathrm{N\cdot m}$$

第 112 题 |【0149】

一长为 l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球，如图所示。现将杆由水平位置无初转速地释放。则杆刚被释放时的角加速度 $\alpha_0 =$_____，杆与水平方向夹角为 $60°$ 时的角加速度 $\alpha =$_____。



答案

$\frac{g}{l}$，$\frac{g}{2l}$

解析

以小球为研究对象，在运动过程中受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，沿杆方向的拉力 T，其中 T 通过转轴，所以它对转轴的力矩为零，而重力在图示 θ 角位置时对转轴的力矩为

$$M = mgl\cos\theta$$

而小球对转轴的转动惯量为 $I = ml^2$，所以根据定轴转动的转动定律

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

可得，任意 θ 角时，小球 (所以含轻杆) 绕转轴转动的角加速度为

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{mgl\cos\theta}{ml^2} = \frac{g\cos\theta}{l}$$

当 $\theta = 0$ 时，

$$\alpha_0 = \frac{g}{l}$$

当 $\theta = 60°$ 时，

$$\alpha = \frac{g}{2l}$$

第 113 题 |【0551】

一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量 $J = 3.0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，角速度 $\omega_0 = 6.0\ \mathrm{rad/s}$。现对物体加一恒定的制动力矩 $M = -12\ \mathrm{N\cdot m}$，当物体的角速度减慢到 $\omega = 2.0\ \mathrm{rad/s}$ 时，物体已转过了角度 $\Delta\theta =$_____。

答案

4 rad

解析

根据角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{J}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\times\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$
$$\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{M}{J}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega}\omega\,\mathrm{d}\omega=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{M}{J}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2)=\frac{M}{J}\Delta\theta$$
$$\Delta\theta=\frac{J(\omega^2-\omega_0^2)}{2M}=\frac{3\times(2^2-6^2)}{2\times(-12)}=4\ \mathrm{rad}$$

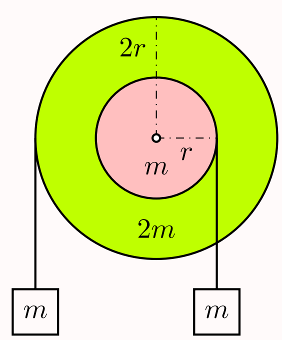
这题也可以根据转动的动能定理来求解。力矩所做的功等于动能的变化量。

$$W=\int M\,\mathrm{d}\theta=M\Delta\theta=\Delta E_k=\frac{1}{2}J(\omega^2-\omega_0^2)$$
$$\Delta\theta=\frac{J(\omega^2-\omega_0^2)}{2M}$$

因为这里力矩是个恒力矩，所以可以直接提到积分号外。

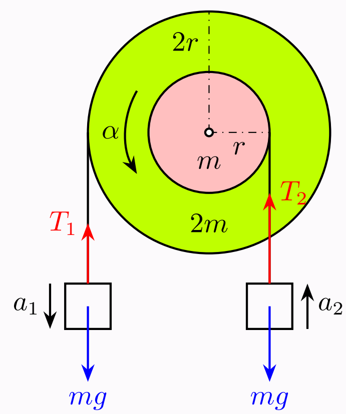
第 114 题 |【0561】

质量分别为 m 和 $2m$、半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对转轴的转动惯量为 $\frac{9}{2}mr^2$，大小圆盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为 m 的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。



解答

分别对物体和滑轮进行受力分析，如图。



左边物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子的拉力 T_1，在这两个力作用下，物体具有向下的加速度 a_1；右边物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子的拉力 T_2，在这两个力作用下，物体具有向上的加速度 a_2；滑轮则受到五个力的作用：竖直向下的重力 mg 和 $2mg$，竖直向上的轴承的支持力 N，竖直向下的绳子的拉力 T_1 和 T_2，其中 mg、$2mg$ 和 N 都通过转轴，所以对转轴没有力矩，只有绳子的拉力 T_1 和 T_2 对转轴有力矩，在这些力矩作用下，滑轮具有逆时针的角加速度 α。因此，根据牛顿第二定律和定轴转动的角动量定理，有

$$mg - T_1 = ma_1$$
$$T_2 - mg = ma_2$$
$$T_1(2r) - T_2 r = J\alpha$$

由于绳子不可伸长，所以物体的加速度和滑轮的角加速度之间存在关系

$$a_1 = 2r\alpha$$
$$a_2 = r\alpha$$

联立以上五式，可以解得

$$T_1 = mg - ma_1 = mg - 2mr\alpha$$
$$T_2 = mg + ma_2 = mg + mr\alpha$$
$$2(mg - 2mr\alpha)r - (mg + mr\alpha)r = J\alpha = mgr - 5mr^2\alpha$$
$$\alpha = \frac{mgr}{J + 5mr^2} = \frac{mgr}{\frac{9}{2}mr^2 + 5mr^2} = \frac{2g}{19r}$$

第 115 题 |【0292】

一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 J，绳下端挂一物体。物体所受重力为 P，滑轮的角加速度为 α。若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子，滑轮的角加速度 α 将

(A) 不变　(B) 变小　(C) 变大　(D) 如何变化无法判断

答案

C

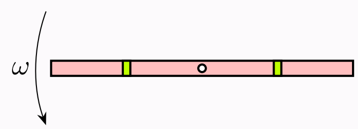
解析

绳下挂物体时，物体具有向下的加速度，所以绳子的拉力小于物体的重力；拉力对转轴的力臂保持不变，滑轮对转轴的转动惯量保持不变，绳子拉力变大，对转轴的力矩变大，根据定轴转动的转动定律，滑轮的角加速度将变大。

第 116 题 |【0211】

质量为 $M = 0.03$ kg，长为 $l = 0.2$ m 的均匀细棒，在一水平面内绕通过棒中心并与棒垂直的光滑固定轴自由转动。细棒上套有两个可沿棒滑动的小物体，每个质量都为 $m = 0.02$ kg。开始时，两小物体分别被固定在棒中心的两侧且距棒中心各为 $r = 0.05$ m，此系统以 $n_1 = 15$ rev/min 的转速转动。若将小物体松开，设它们在滑动过程中受到的阻力正比于它们相对棒的速度，(已知棒对中心轴的转动惯量为 $\frac{1}{12}Ml^2$) 求：(1) 当两小物体到达棒端时，系统的角速度是多少？(2) 当两小物体飞离棒端，棒的角速度是多少？

解答



以小物体和细棒组成的系统在整个运动过程中，所受合外力的力矩为零，所以系统的角动量守恒，在任意时刻，有

$$L = (I + 2mR_0^2)\omega_0 = (I + 2mR^2)\omega$$

$$\omega = \frac{I + 2mR_0^2}{I + 2mR^2}\omega_0 = \frac{\frac{1}{12}Ml^2 + 2m\left(\frac{l}{4}\right)^2}{\frac{1}{12}Ml^2 + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2}\omega_0 = \frac{2M + 3m}{2M + 12m}\omega_0$$

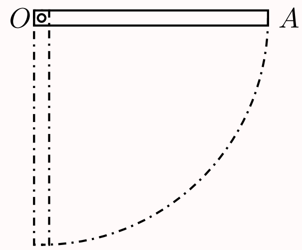
$$= \frac{2 \times 0.03 + 3 \times 0.02}{2 \times 0.03 + 12 \times 0.02} \times \frac{15}{60} \times 2\pi = 0.2\pi \text{ rad/s}$$

而在物体飞离棒端的过程中，物体对棒的作用力沿着棒的方向，通过转轴，所以对棒的力矩为零，因此并不会改变棒本身的角动量，所以棒的角速度不会发生变化，仍然是物体在棒端时的角速度。

3.3 刚体定轴转动的动能定理

第 117 题 |【0165】

均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？



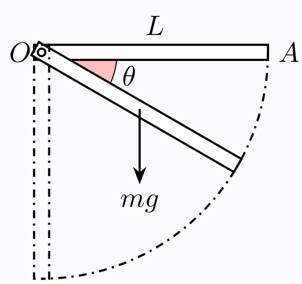
(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小　　(B) 角速度从小到大，角加速度从小到大
(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小　　(D) 角速度从大到小，角加速度从小到大

答案

A

解析

棒对转轴的转动惯量 I 是个常数，在整个过程中，棒受到两个力的作用，重力和轴的支持力，其中支持力通过转轴且不作功，对转轴的力矩为零，所以机械能守恒。而在不同位置，重力对转轴的力矩不同。如图中任意 θ 角处，有



$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\frac{L}{2}\sin\theta$$
$$mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\alpha$$

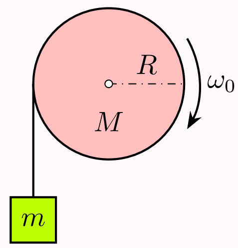
所以

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL\sin\theta}{I}}$$
$$\alpha = \frac{mgL}{2I}\cos\theta$$

所以，随着 θ 的增大，ω 增大，α 减小。

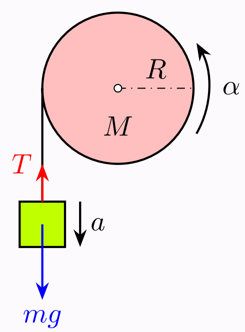
第 118 题 |【0241】

一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M = 2.00$ kg，半径为 $R = 0.100$ m，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m = 5.00$ kg 的物体，如图所示。已知定滑轮的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}MR^2$，其初角速度 $\omega_0 = 10.0$ rad/s，方向垂直纸面向里。求：(1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；(2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega = 0$ 时，物体上升的高度；(3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度的大小和方向。



解答

分别对物体和滑轮进行受力分析，如图。



物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子的拉力 T，在这两个力作用下，物体具有向下的加速度 a；滑轮则受到三个力的作用：竖直向下的重力 Mg，竖直向下的绳子的拉力 T，竖直向上的轴承的支持力 N，其中 Mg 和 N 都通过转轴，所以对转轴没有力矩，只有绳子的拉力对转轴有力矩，在这个力矩作用下，滑轮具有逆时针的角加速度 α。因此，根据牛顿第二定律和定轴转动的角动量定理，有

$$mg - T = ma$$
$$TR = J\alpha$$

由于绳子不可伸长，所以物体的加速度和滑轮的角加速度之间存在关系

$$a = R\alpha$$

联立以上三式，可以解得

$$T = mg - ma = mg - mR\alpha$$
$$(mg - mR\alpha)R = J\alpha = mgR - mR^2\alpha$$

$$\alpha=\frac{mgR}{J+mR^2}=\frac{mgR}{\frac{1}{2}MR^2+mR^2}=\frac{2mg}{(M+2m)R}=\frac{2\times5\times9.8}{(2+2\times5)\times0.1}\approx81.7\mathrm{rad/s^2}$$

所以滑轮做的是角加速度恒定的匀变速转动 (因为角加速度的方向与初始角速度的方向相反，所以滑轮刚开始做匀减速转动，到静止之后开始做匀加速转动)，物体做的是匀变速直线运动 (物体其实做的是竖直上抛运动，只是加速度的大小不是重力加速度而已)。以顺时针方向为转动的正方向，则竖直向上为物体移动的正方向，依题意，滑轮的初角速度为 ω_0，则物体的初速度为 $v_0=R\omega_0$，所以任意时刻，滑轮的角速度为

$$\omega=\omega_0-\alpha t$$

物体的速度为

$$v=v_0-at=R\omega_0-R\alpha t=R\omega$$

所以滑轮的角位移为

$$\Delta\theta=\omega_0t-\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2(-\alpha)}$$

物体的位移为

$$\Delta x=v_0t-\frac{1}{2}at^2=R\Delta\theta=\frac{v^2-v_0^2}{2(-a)}$$

所以，当 $\omega=0$ 时，

$$\Delta\theta=\frac{0-10^2}{2\times(-81.7)}\approx0.612\mathrm{rad}$$
$$\Delta x=R\Delta\theta=0.1\times0.612=0.0612\mathrm{m}$$

由于整个过程只有重力做功，所以由物体和滑轮组成的系统的机械能守恒，因此当物体回到原来位置的时候，物体的速度与初速度等值反向，滑轮的角速度也与初角速度等值反向，当然也可以通过上面的速度和角速度的表达式求出这个结论。

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\Rightarrow\omega\,\mathrm{d}\omega=\alpha\,\mathrm{d}\theta$$
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Rightarrow v\,\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}x$$

物体回到原来位置，$\Delta x=0$，可求出时间 t，代入速度与时间的表达式求出该时刻的速度。

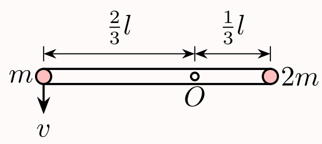
$$\Delta x=v_0t-\frac{1}{2}at^2=0\Rightarrow t=\frac{2v_0}{a}$$
$$v=v_0-at=v_0-a\frac{2v_0}{a}=-v_0$$
$$\Delta\theta=\omega_0t-\frac{1}{2}\alpha t^2=0\Rightarrow t=\frac{2\omega_0}{\alpha}$$
$$\omega=\omega_0-\alpha t=\omega_0-\alpha\frac{2\omega_0}{\alpha}=-\omega_0$$

3.4 角动量定理 角动量守恒定律

3.4.1 力矩和角动量

第 119 题 |【0542】

质量分别为 m 和 $2m$ 的两物体 (都可视为质点)，用一长为 l 的轻质刚性细杆相连，系统绕通过杆且与杆垂直的竖直固定轴 O 转动，已知 O 轴离质量为 $2m$ 的质点的距离为 $\frac{1}{3}l$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量 (动量矩) 大小为_____。



答案

mvl

解析

已知 m 的线速度为 v，则可求系统绕转轴转动的角速度为

$$\omega = \frac{v}{\frac{2}{3}l} = \frac{3v}{2l}$$

而系统对转轴的转动惯量为

$$I = m\left(\frac{2}{3}l\right)^2 + (2m)\left(\frac{1}{3}l\right)^2 = \frac{2}{3}ml^2$$

所以整个系统对转轴的角动量的大小为

$$L = I\omega = \frac{2}{3}ml^2 \times \frac{3v}{2l} = mvl$$

本题还可以分别求出两个物体对转轴的角动量，再求整个系统对转轴的角动量

$$L_1 = m_1v_1r_1 = mv \times \left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{2}{3}mvl$$
$$L_2 = m_2v_2r_2 = (2m) \times \left(\frac{1}{2}v\right) \times \left(\frac{1}{3}l\right) = \frac{1}{3}mvl$$
$$L = L_1 + L_2 = mvl$$

第 120 题 |【0404】

地球的质量为 m，太阳的质量为 M，地心与日心的距离为 R，引力常量为 G，则地球绕太阳作圆周运动的轨道角动量为 $L =$_____。

答案

$m\sqrt{GMR}$

解析

这里假定地球绕太阳做匀速圆周运动，向心力由太阳与地球之间的万有引力提供，所以

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}$$
$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

所以地球的角动量为

$$L=mvR=m\sqrt{\frac{GM}{R}}R=m\sqrt{GMR}$$

第 121 题 |【0724】

一质量为 m 的质点沿着一条曲线运动，其位置矢量在空间直角坐标系中的表达式为 $\vec{r}=a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$，其中 a、b、ω 皆为常量，则此质点对原点的角动量 $\vec{L}=$_____；此质点所受对原点的力矩 $\vec{M}=$_____。

答案

$m\omega ab\,\vec{\mathrm{e}}_z$，0

解析

已知运动方程，通过求导可以得到速度和加速度，再利用牛顿第二定律，可以得到质点所受到的合力

$$\vec{r}=a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x-b\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y=-\omega^2\vec{r}$$
$$\vec{p}=m\vec{v}=m\omega[-a\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]$$
$$\vec{F}=m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}$$

根据角动量和力矩的定义，可得

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=[a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]\times m\omega[-a\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+b\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]=m\omega ab\,\vec{\mathrm{e}}_z$$
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(-m\omega^2\vec{r})=-m\omega^2\vec{r}\times\vec{r}=0$$

3.4.2 角动量定理和角动量守恒定律

第 122 题 |【0294】

刚体角动量守恒的充分且必要的条件是

(A) 刚体不受外力矩的作用

(B) 刚体所受合外力矩为零

(C) 刚体所受的合外力和合外力矩均为零

(D) 刚体的转动惯量和角速度均保持不变

答案

B

解析

由刚体定轴转动的转动定律

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

其中 M 为刚体所受到的相对转轴的合外力矩，当 $M=0$ 时，即刚体所受合外力矩为零时，刚体的角动量守恒。

第 123 题 |【0148】

几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

(A) 必然不会转动

(B) 转速必然不变

(C) 转速必然改变

(D) 转速可能不变，也可能改变

答案

D

解析

决定刚体定轴转动角加速度的物理量是刚体所受到的总的力矩

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\alpha$$

几个力的矢量和为零，力矩可能为零，也可能不为零。

第 124 题 |【0197】

一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人。把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，此系统

(A) 动量守恒

(B) 机械能守恒

(C) 对转轴的角动量守恒

(D) 动量、机械能和角动量都守恒

(E) 动量、机械能和角动量都不守恒

答案

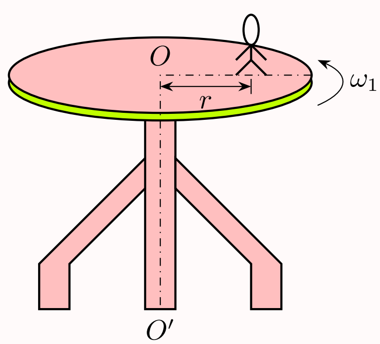
C

解析

以人和圆盘为研究对象，在人在盘上走动的过程中，系统受到转轴施加的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，另外，人与转盘之间还有摩擦力存在，人与转盘有相对位移，这个摩擦力有做功，所以系统的机械能不守恒。

第 125 题 |【0229】

有一半径为 R 的匀质圆形水平转台，可绕通过盘心 O 且垂直于盘面的竖直固定轴 OO' 转动，转动惯量为 J。台上有一人，质量为 m。当他站在离转轴 r 处时 $(r<R)$，转台和人一起以 ω_1 的角速度转动，如图。若转轴处摩擦可以忽略，问当人走到转台边缘时，转台和人一起转动的角速度 $\omega_2 =$______。



答案

$\frac{J+mr^2}{J+mR^2}\omega_1$

解析

以人和转台为研究对象，在人走动过程中系统对转轴的角动量守恒，所以有

$$L=(J+mr^2)\omega_1=(J+mR^2)\omega_2$$

$$\omega_2=\frac{J+mr^2}{J+mR^2}\omega_1$$

第 126 题 |【0228】

质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上。平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为 J。平台和小孩开始时均静止。当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为

(A) $\omega = \frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$，顺时针 (B) $\omega = \frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$，逆时针

(C) $\omega = \frac{mR^2}{J+mR^2}\left(\frac{v}{R}\right)$，顺时针 (D) $\omega = \frac{mR^2}{J+mR^2}\left(\frac{v}{R}\right)$，逆时针

答案

A

解析

以小孩和平台为研究对象，在小孩在平台上走动的过程中，系统受到转轴施加的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，所以小孩逆时针走动时，平台必定顺时针转动。假定平台转动的角速度为 ω，则有

$$0 = mvR + J\omega$$

$$\omega = \frac{mvR}{J} = \frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$$

第 127 题 |【0126】

花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0。然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$。这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_0$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$ (C) $\sqrt{3}\omega_0$ (D) $3\omega_0$

答案

D

解析

运动员在转动的过程中角动量守恒，所以有

$$L = J_0\omega_0 = J\omega$$

$$\omega = \frac{J_0\omega_0}{J} = \frac{J_0\omega_0}{\frac{1}{3}J_0} = 3\omega_0$$

第 128 题 |【0125】

一飞轮以角速度 ω_0 绕光滑固定轴旋转，飞轮对轴的转动惯量为 J_1；另一静止飞轮突然和上述转动的飞轮啮合，绕同一转轴转动，该飞轮对轴的转动惯量为前者的二倍。啮合后整个系统的角速度 $\omega =$______。

答案

$\frac{1}{3}\omega_0$

解析

以两个飞轮为研究对象，系统在啮合过程中对转轴的角动量守恒，所以有

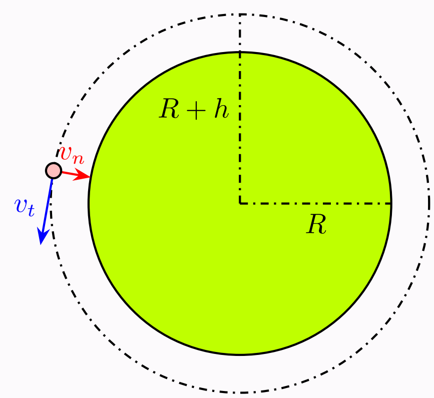
$$L = J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$$
$$\omega = \frac{J_1\omega_0}{J_1 + J_2} = \frac{J_1\omega_0}{J_1 + 2J_1} = \frac{1}{3}\omega_0$$

第 129 题 |【0201】

地球可看作是半径 $R = 6400$ km 的球体，一颗人造地球卫星在地面上空 $h = 800$ km 的圆形轨道上，以 7.5 km/s 的速度绕地球运动。在卫星的外侧发生一次爆炸，其冲量不影响卫星当时的绕地圆周切向速度 $v_t = 7.5$ km/s，但却给予卫星一个指向地心的径向速度 $v_n = 0.2$ km/s。求这次爆炸后使卫星轨道的最低点和最高点各位于地面上空多少公里？

解答

设地球的质量为 M，卫星的质量为 m，在卫星的运动过程中，只受到地球万有引力的作用，万有引力一定指向地球的地心，所以对地球地心的力矩为零，所以卫星对地球地心的角动量守恒；另外万有引力是个保守力，所以系统的机械能守恒。



爆炸前，卫星的轨道为圆形轨道，爆炸后，卫星的轨道为椭圆轨道。卫星在椭圆轨道的最低点和最高点时的速度方向和卫星与地心连线垂直。所以有

$$mv_t(R+h) = mvr$$
$$\frac{1}{2}m(v_t^2 + v_n^2) - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

而当卫星在圆形轨道上运动时，其向心力就是卫星与地球之间的万有引力，所以有

$$\frac{mv_t^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

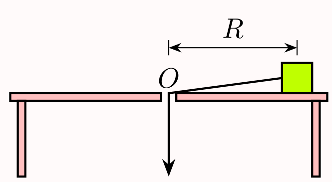
联立求得

$$GM = v_t^2(R+h)$$
$$vr = v_t(R+h)$$
$$(v_t^2+v_n^2) - 2v_t^2 = v_n^2 - v_t^2 = v^2 - 2\frac{v_t^2(R+h)}{r} = v^2 - 2vv_t$$
$$v^2 - 2vv_t + v_t^2 = (v-v_t)^2 = v_n^2$$
$$v = v_t \pm v_n$$
$$r = \frac{v_t}{v}(R+h) = \frac{v_t}{v_t \pm v_n}(R+h)$$
$$h_1 = \frac{v_t}{v_t+v_n}(R+h) - R = \frac{7.5}{7.5+0.2}(6400+800) - 6400 \approx 613\ \mathrm{km}$$
$$h_2 = \frac{v_t}{v_t-v_n}(R+h) - R = \frac{7.5}{7.5-0.2}(6400+800) - 6400 \approx 997\ \mathrm{km}$$

3.4.3 有心力

第 130 题 |【0128】

如图所示，一个小物体，位于光滑的水平桌面上，与一绳的一端相连结，绳的另一端穿过桌面中心的小孔 O。该物体原以角速度 ω 在半径为 R 的圆周上绕 O 旋转，今将绳从小孔缓慢往下拉。则物体



(A) 动能不变，动量改变
(B) 动量不变，动能改变
(C) 角动量不变，动量不变
(D) 角动量改变，动量改变
(E) 角动量不变，动能、动量都改变

答案

E

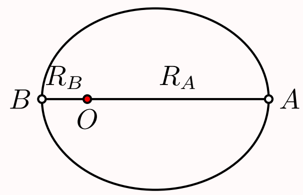
解析

绳子对物体的作用力始终通过 O 点，在整个过程中，这个力始终不为零，所以物体的动量不守恒；物体沿绳子方向有位移，所以绳子的拉力有做功，动能有变化；但这个力始终通过 O 点，因此对 O 点的力矩为零，所以物体对 O 点的角动量守恒。

角动量守恒，半径越来越小，所以动量越来越大，速度大小越来越大，角速度越来越大，动能越来越大。

第 131 题 |【0193】

一人造地球卫星到地球中心 O 的最大距离和最小距离分别是 R_A 和 R_B。设卫星对应的角动量分别是 L_A、L_B，动能分别是 E_{kA}、E_{kB}，则应有



(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$　(B) $L_A > L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$　(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$

(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$　(E) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

答案

E

解析

人造卫星受到的地球的万有引力是有心力，是保守力，始终通过地球，所以这个力对地球的力矩为零，因此卫星对地球的角动量守恒，即 $L_A = L_B = mv_AR_A = mv_BR_B$，所以 $v_A < v_B$，因此 $E_{kA} = \frac{1}{2}mv_A^2 < \frac{1}{2}mv_B^2 = E_{kB}$。

第 132 题 |【0406】

人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动，卫星轨道近地点和远地点分别为 A 和 B。用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量及其动能的瞬时值，则应有

(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$　(B) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$　(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

答案

C

解析

人造地球卫星在绕地球运动的过程中，只受到地球万有引力的作用，万有引力是有心力，是保守力，因此机械能守恒，对地球的角动量守恒。在近地点和远地点，速度方向刚好与卫星和地球的连线垂直，所以有

$$L_A = mv_AR_A = mv_BR_B = L_B \Rightarrow v_A = \frac{R_B}{R_A}v_B$$

$$E_{kA} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2\frac{R_B^2}{R_A^2} > \frac{1}{2}mv_B^2 = E_{kB}$$

如从机械能守恒角度来看，以无穷远处为万有引力势能零点，则有

$$E_{kA}+E_{pA}=E_{kB}+E_{pB}$$
$$E_{pA}=-\frac{GMm}{R_A},E_{pB}=-\frac{GMm}{R_B}$$
$$E_{pA}<E_{pB},E_{kA}>E_{kB}$$

第 133 题 |【0712】

哈雷慧星绕太阳的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆。它离太阳最近的距离是 $r_1=8.75\times10^{10}$ m，此时它的速率是 $v_1=5.46\times10^4$ m/s。它离太阳最远时的速率是 $v_2=9.08\times10^2$ m/s，这时它离太阳的距离是 $r_2=$______。

答案

5.26×10^{12} m

解析

彗星在绕太阳运动的过程中，只受到太阳万有引力的作用，太阳的万有引力是个有心力，一直通过太阳，因此万有引力对太阳的力矩为零，所以彗星对太阳的角动量守恒，即

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$
$$r_2=\frac{v_1}{v_2}r_1=\frac{5.46\times10^4}{9.08\times10^2}\times8.75\times10^{10}\approx5.26\times10^{12}\ \mathrm{m}$$

第 134 题 |【0667】

将一质量为 m 的小球，系于轻绳的一端，绳的另一端穿过光滑水平桌面上的小孔用手拉住。先使小球以角速度 ω_1 在桌面上做半径为 r_1 的圆周运动，然后缓慢将绳下拉，使半径缩小为 r_2，在此过程中小球的动能增量是______。

答案

$\frac{1}{2}m\omega_1^2r_1^2\frac{r_1^2-r_2^2}{r_2^2}$

解析

在水平面内，小球只受到绳子的拉力的作用，这个拉力一直通过小孔，所以是个有心力，因此这个力对小孔的力矩一直为零，所以小球对小孔的角动量守恒，而且这个拉力提供小球作圆周运动的向心力，因

此有

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$
$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1$$

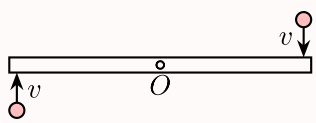
所以小球动能的增量为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv_1^2\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2} = \frac{1}{2}m\omega_1^2r_1^2\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2}$$

3.4.4 定轴转动的碰撞

第 135 题 |【0132】

光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止。桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示。当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为



(A) $\frac{2v}{3L}$ (B) $\frac{4v}{5L}$ (C) $\frac{6v}{7L}$ (D) $\frac{8v}{9L}$ (E) $\frac{12v}{7L}$

答案

C

解析

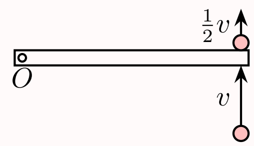
以两个小球和细杆为研究对象，在碰撞过程中，转轴对系统施加的作用力大小和方向均未知，但一定通过转轴，因此对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，所以有

$$mvL + mvL = \left(\frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + mL^2\right)\omega$$
$$\omega = \frac{2mvL}{\frac{7}{3}mL^2} = \frac{6v}{7L}$$

第 136 题 |【0133】

如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L、质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$。一质量为 m、速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射

入并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为



(A) $\frac{mv}{ML}$　(B) $\frac{3mv}{2ML}$　(C) $\frac{5mv}{3ML}$　(D) $\frac{7mv}{4ML}$

答案

B

解析

以子弹和细棒为研究对象，在子弹射穿细棒的过程中，系统受到转轴施加的不可忽略的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，所以有

$$mvL = m\frac{1}{2}vL + \frac{1}{3}ML^2\omega$$

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}mvL}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3mv}{2ML}$$

第二部分

电磁学

第四章　真空中的静电场

4.1 库仑定律

4.1.1 库仑定律

第 137 题 |【1440】

真空中有两个点电荷 M、N，相互间作用力为 $\vec{F}$，当另一点电荷 Q 移近这两个点电荷时，M、N 两点电荷之间的作用力

(A) 大小不变，方向改变　　(B) 大小改变，方向不变

(C) 大小和方向都不变　　(D) 大小和方向都改变

答案

C

解析

两个点电荷之间的相互作用只与两个点电荷所带的电量、两个点电荷的位置有关，与其他电荷没有关系

$$\vec{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\vec{e}_r$$

第 138 题 |【1303】

电子的质量为 m_e，电荷为 $-e$，绕静止的氢原子核 (即质子) 作半径为 r 的匀速率圆周运动，则电子的速率为 (式中 $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

(A) $e\sqrt{\frac{m_er}{k}}$　　(B) $e\sqrt{\frac{k}{m_er}}$　　(C) $e\sqrt{\frac{k}{2m_er}}$　　(D) $e\sqrt{\frac{2k}{m_er}}$

答案

B

解析

电子与质子之间的静电力提供电子绕质心作圆周运动的向心力，所以有

$$\frac{ke^2}{r^2}=\frac{m_ev^2}{r}$$
$$v^2=\frac{ke^2}{m_er}$$
$$v=e\sqrt{\frac{k}{m_er}}$$

4.1.2 电场力叠加原理

第 139 题 |【5093】

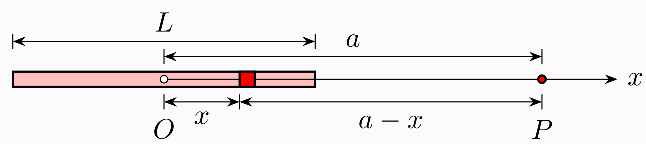
电荷 $Q(Q>0)$ 均匀分布在长为 L 的细棒上，在细棒的延长线上距细棒中心 O 距离为 a 的 P 点处放一电荷为 $q(q>0)$ 的点电荷，求带电细棒对该点电荷的静电力。

解答

根据点电荷的电场强度公式

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\vec{e}_r$$

和电场叠加原理，将带电细杆分割成一个个元电荷。以细棒中心为坐标原点，沿棒方向建立 x 轴，如图，



则对于 $x\to x+\mathrm{d}x$ 段的元电荷，其带电量为 $\mathrm{d}q=\frac{Q}{L}\,\mathrm{d}x$，它到 P 点的距离为 $r=a-x$，所以它在 P 处的电场为

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\,\vec{e}_x=\frac{Q\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0L(a-x)^2}\,\vec{e}_x$$

所以 P 处的总电场为

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{Q\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0L(a-x)^2}\,\vec{e}_x=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0L}\left[\frac{1}{a-x}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\vec{e}_x=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0L}\left[\frac{1}{a-\frac{L}{2}}-\frac{1}{a+\frac{L}{2}}\right]\vec{e}_x\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2-\frac{L^2}{4}\right)}\,\vec{e}_x=\frac{Q}{\pi\varepsilon_0(4a^2-L^2)}\,\vec{e}_x\end{aligned}$$

所以 q 在 P 处时受到的静电力为

$$\vec{F}=q\vec{E}=\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0(4a^2-L^2)}\,\vec{e}_x$$

4.2　电场强度

4.2.1　电场强度的定义

第 140 题 |【1003】

下列几个说法中哪一个是正确的？

(A) 电场中某点场强的方向，就是将点电荷放在该点所受电场力的方向

(B) 在以点电荷为中心的球面上，由该点电荷所产生的场强处处相同

(C) 场强可由 $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ 定出，其中 q 为试验电荷，q 可正、可负，$\vec{F}$ 为试验电荷所受的电场力

(D) 以上说法都不正确

答案

C

解析

(A)，如果点电荷所带电荷为正，则电场力方向即为该处电场强度的方向；如果点电荷所带电荷为负，则电场力方向与该处电场强度的方向相反。

(B)，电场强度是一个矢量，在点电荷所在位置为球心的球面上，各处电场强度的大小相等，但方向各不相同，所以电场强度不同。

(C)，电场强度可以由 $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ 计算得到，但不能说电场强度与检验电荷所反比，与所受电场力成正比。

第 141 题 |【1551】

关于电场强度定义式 $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$，下列说法中哪个是正确的？

(A) 场强 $\vec{E}$ 的大小与试探电荷 q_0 的大小成反比

(B) 对场中某点，试探电荷受力 $\vec{F}$ 与 q_0 的比值不因 q_0 而变

(C) 试探电荷受力 $\vec{F}$ 的方向就是场强 $\vec{E}$ 的方向

(D) 若场中某点不放试探电荷 q_0，则 $\vec{F}=0$，从而 $\vec{E}=0$

答案

B

解析

电场强度的大小和方向可以由

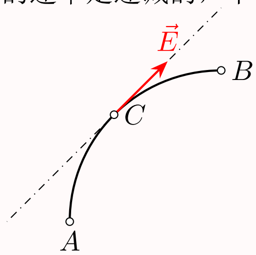
$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

来计算得到，但电场与检验电荷并没有关系，不管检验电荷存在不存在，不管检验电荷带正电还是负电，电场都不会发生变化，因此不能说电场强度的大小与检验电荷的大小成反比，如果检验电荷带正电，那

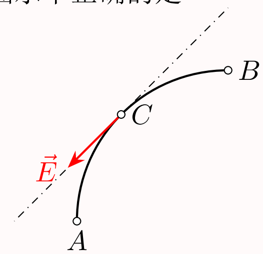
么它所受到的电场力的方向与该处电场强度的方向相同，如果检验电荷带负电，那么它所受到的电场力的方向与该处电场强度的方向相反。

第 142 题 |【1445】

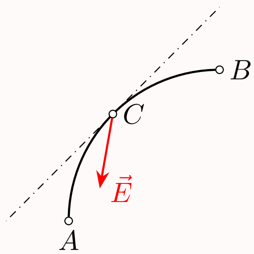
一个带负电荷的质点，在电场力作用下从 A 点经 C 点运动到 B 点，其运动轨迹如图所示。已知质点运动的速率是递减的，下面关于 C 点场强方向的四个图示中正确的是



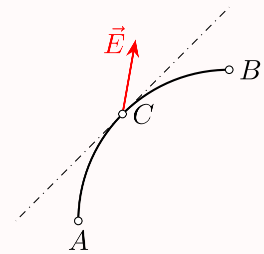
(A)



(B)



(C)



(D)

答案

D

解析

依题意，质点做曲线运动，速率递减，所以切向加速度与运动方向相反，而法向加速度一定指向凹侧，所以质点在 C 点的总的加速度沿 C 中箭头方向，所以质点所受到的力的方向与加速度的方向一致。又因为质点带负电荷，所以电场力的方向与电场强度的方向相反，因此图 D 正确。

4.2.2 电场叠加原理

第 143 题 |【1049】

由一根绝缘细线围成的边长为 l 的正方形线框，使它均匀带电，其电荷线密度为 λ，则在正方形中心处的电场强度的大小 $E =$______。

答案

O

解析

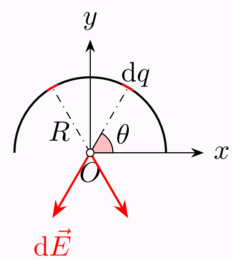
由于对称性，很容易得到中心处的电场强度为零。

第 144 题 |【1262】

用绝缘细线弯成的半圆环，半径为 R，其上均匀地带有正电荷 Q，试求圆心 O 点的电场强度。

解答

如图，选择两个对称的电荷元，



则它们在 O 点的合场强沿 y 轴负方向，即

$$\mathrm{d}E_y=-2\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\times\sin\theta=-\frac{\lambda R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0R^2}=-\frac{\lambda\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0R}=-\frac{Q\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

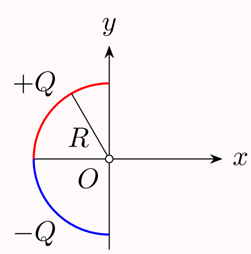
所以总场强为

$$E_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{Q\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}(-\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

$$\vec{E}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\,\vec{e}_y$$

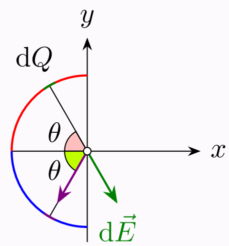
第 145 题 |【1009】

一个细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷 $+Q$，沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$，如图所示。试求圆心 O 处的电场强度。



解答

如图，取两个对称的电荷元，



则它们在圆心 O 处产生的合场强的方向沿 y 轴负方向，大小为

$$\mathrm{d}E_y=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\times\sin\theta\times 2=\frac{\frac{Q}{\pi/2}\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}\times\sin\theta\times 2=\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

所以总的电场为

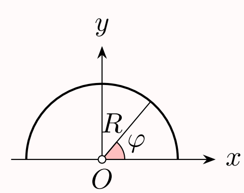
$$E_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}(-\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

所以

$$\vec{E}=-\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

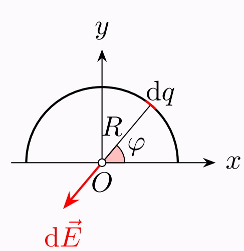
第 146 题 |【1010】

带电细线弯成半径为 R 的半圆形，电荷线密度为 $\lambda=\lambda_0\sin\varphi$，式中 λ_0 为一常数，φ 为半径 R 与 x 轴的夹角，如图所示。试求圆心 O 处的电场强度。



解答

如图，取电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l=\lambda_0\sin\varphi R\,\mathrm{d}\varphi=R\lambda_0\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$，



则它在圆心 O 处产生电场强度为

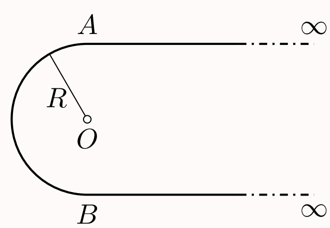
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{E} &= \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(-\cos\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_x - \sin\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_y) \\ &= -\frac{R\lambda_0\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(\cos\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_x + \sin\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_y) \\ &= \mathrm{d}E_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{d}E_y\,\vec{\mathrm{e}}_y \\ \mathrm{d}E_x &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}E_y &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

所以总的电场为

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^\pi -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)_0^\pi = 0 \\ E_y &= \int_0^\pi -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)_0^\pi = -\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0 R} \\ \vec{E} &= -\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0 R}\,\vec{\mathrm{e}}_y \end{aligned}$$

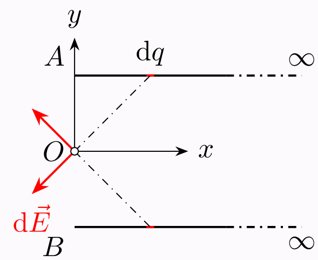
第 147 题 |【1190】

电荷线密度为 λ 的“无限长”均匀带电细线，弯成图示形状。若半圆弧 $\widehat{AB}$ 的半径为 R，试求圆心 O 点的场强。



解答

先分别求半无限长带电直线和半圆弧在圆心 O 点的场强。
先求上下两条半无限长带电直线产生的电场。



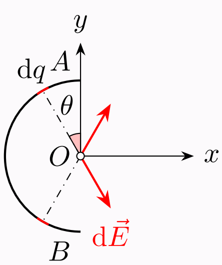
如图选择两个对称的电荷元，则它们在 O 点的合场强沿 x 轴负方向，即

$$\mathrm{d}E_x = -2\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)} \times \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}} = -\frac{\lambda x\,\mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

所以这一部分的总场强为

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^{\infty} -\frac{\lambda x\,\mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

再求半圆弧产生的电场。



如图选择两个对称的电荷元，则它们在 O 点的合场强沿 x 轴正方向，即

$$\mathrm{d}E_x = 2\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times \sin\theta = \frac{\lambda R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

所以这一部分的总场强为

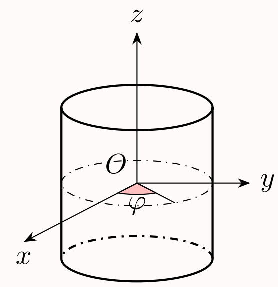
$$E_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}(-\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

所以 O 点的总场强为

$$E = E_1 + E_2 = 0$$

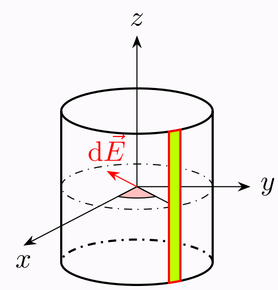
第 148 题 |【1012】

一“无限长”圆柱面，其电荷面密度为：$\sigma = \sigma_0\cos\varphi$，式中 φ 为半径 R 与 x 轴所夹的角，试求圆柱轴线上一点的场强。



解答

如图，取图中所示窄条电荷元，则其可视为无限长带电直线，



其电荷线密度为 $\mathrm{d}\lambda = \sigma R\,\mathrm{d}\varphi = R\sigma_0\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$，则它在圆柱轴线上的电场可以由高斯定理求得

$$\oint_S (\mathrm{d}\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}q}{\varepsilon_0}$$
$$(\mathrm{d}E)(2\pi Rh) = \frac{\mathrm{d}\lambda h}{\varepsilon_0}$$
$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$
$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}(-\cos\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_x - \sin\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_y) = \mathrm{d}E_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{d}E_y\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\mathrm{d}E_x = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cos\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}E_y = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

所以总的电场为

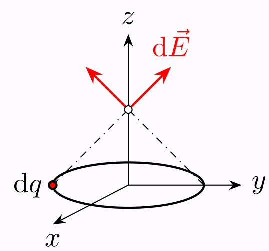
$$E_x = \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)_0^{2\pi} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$
$$E_y = \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)_0^{2\pi} = 0$$
$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

第 149 题 |【1264】

一半径为 R 的半球面，均匀地带有电荷，电荷面密度为 σ，求球心 O 处的电场强度。

解答

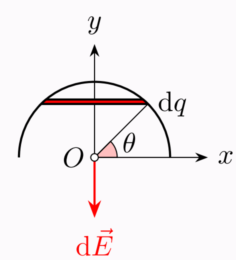
先求一个带电量为 q、半径为 R 的带电圆环在其轴线上距离环心 a 处的电场，



如图，则总的电场沿 z 轴正方向，大小为

$$E=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2)}\times\frac{a}{(R^2+a^2)^{1/2}}=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2)^{3/2}}$$

将半球面分割成一个个圆环，如图，



则角度在 $\theta\to\theta+\mathrm{d}\theta$ 的小圆环的半径为 $r=R\cos\theta$，带电量为 $\mathrm{d}q=\sigma(2\pi r\times R\,\mathrm{d}\theta)=2\pi R^2\sigma\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，球心到圆环中心的距离为 $a=R\sin\theta$，所以这个小圆环在球心处产生的场强方向沿 y 轴负方向，大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{(\mathrm{d}q)a}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{(R\sin\theta)(2\pi R^2\sigma\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

所以总的电场强度的大小为

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

4.3 电通量 高斯定理

4.3.1 电通量

第 150 题 |【1603】

一面积为 S 的平面，放在场强为 $\vec{E}$ 的均匀电场中，已知 $\vec{E}$ 与平面间的夹角为 $\theta(\theta < \frac{\pi}{2})$，则通过该平面的电场强度通量的数值 $\Phi_e =$______。

答案

$ES\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

解析

电场强度的通量

$$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

其中面的方向定义为面的法线方向，所以在这里就是 $\frac{\pi}{2}-\theta$，所以

$$\Phi_e = ES\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

4.3.2 高斯定理的理解

第 151 题 |【1432】

高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V$

(A) 适用于任何静电场

(B) 只适用于真空中的静电场

(C) 只适用于具有球对称性、轴对称性和平面对称性的静电场

(D) 只适用于虽然不具有 (C) 中所述的对称性、但可以找到合适的高斯面的静电场

答案

A

解析

高斯定理本身适用于任何静电场。只是对于真空中的静电场，右边的电荷只包括自由电荷，因为真空中并不存在束缚电荷，而对于介质，电荷包含了自由电荷和束缚电荷。关于对称性，定理本身并不要求一定要具有什么对称性，但在具体的计算过程中，只有某些特殊对称性的电场，才可以取比较适当的高斯面，可以求出通过高斯面的电通量。

第 152 题 |【1434】

关于高斯定理的理解有下面几种说法，其中正确的是

(A) 如果高斯面上 $\vec{E}$ 处处为零，则该面内必无电荷

(B) 如果高斯面内无电荷，则高斯面上 $\vec{E}$ 处处为零

(C) 如果高斯面上 $\vec{E}$ 处处不为零，则高斯面内必有电荷

(D) 如果高斯面内有净电荷，则通过高斯面的电场强度通量必不为零

答案

D

解析

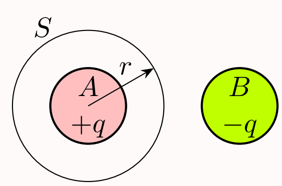
高斯定理是指电场在高斯面上的通量与高斯面所包围的全部净电荷之间的关系。

如果高斯面上各点的电场都为零，那么通过高斯面的通量也一定为零，所以高斯面内的净电荷为零，但可以有等量的异号电荷存在，比如高斯面选为空腔导体球内的任一曲面，但空腔内存在有等量异号的电荷。

如果高斯面内无电荷，则净电荷为零，但高斯面上的电场是所有电荷的电场之和，不仅与面内的电荷有关，还与面外的电荷也有关系，如一匀强电场。对于匀强电场，处处电场强度不为零，但任意一个高斯面内都没有电荷。

第 153 题 |【5084】

A 和 B 为两个均匀带电球体，A 带电荷 $+q$，B 带电荷 $-q$，作一与 A 同心的球面 S 为高斯面，如图所示。则



(A) 通过 S 面的电场强度通量为零，S 面上各点的场强为零

(B) 通过 S 面的电场强度通量为 $\frac{q}{\varepsilon_0}$，S 面上各点的场强为 $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(C) 通过 S 面的电场强度通量为 $-\frac{q}{\varepsilon_0}$，S 面上各点的场强为 $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(D) 通过 S 面的电场强度通量为 $\frac{q}{\varepsilon_0}$，但 S 面上各点的场强不能直接由高斯定理求出

答案

D

解析

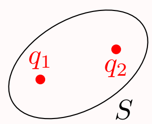
高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

中，高斯面上各点的电场强度是整个空间所有电荷在该处产生的电场的矢量和，而通过整个高斯面上的电通量之和仅仅与高斯面内所包含的电荷有关，与高斯面外的电荷无关。

第 154 题 |【5426】

电荷分别为 q_1 和 q_2 的两个点电荷单独在空间各点产生的静电场强分别为 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$，空间各点总场强为 $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$。现在作一封闭曲面 S，如图所示，则以下两式分别给出通过 S 的电场强度通量：$\oint_S \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}=$_____，$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=$_____。



答案

$\frac{q_1}{\varepsilon_0}$，$\frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0}$

解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

如果只有 q_1 存在时，空间的电场分布为 $\vec{E}_1$，所以由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

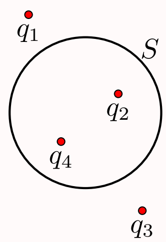
当 q_1 和 q_2 同时存在时，空间的电场分布为 $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$，所以由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0}$$

注意，这里 q_2 处在高斯面之内，所以右边的 $q=q_1+q_2$；如果 q_2 处在高斯面之外，右边的电荷仅仅是高斯面所包围的电荷的代数和，则 $q=q_1$。

第 155 题 |【1499】

点电荷 q_1、q_2、q_3 和 q_4 在真空中的分布如图所示。图中 S 为闭合曲面，则通过该闭合曲面的电场强度通量 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=$_____，式中的 $\vec{E}$ 是点电荷_____ 在闭合曲面上任一点产生的场强的矢量和。



答案

$\frac{q_2+q_4}{\varepsilon_0}$，$q_1$、$q_2$、$q_3$、$q_4$

解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

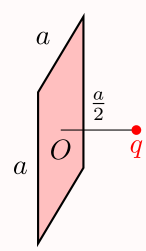
中，式子右边的电荷是高斯面所包围的所有电荷的代数和，本题中即为 $q = q_2 + q_4$，所以高斯面上的电通量为 $\frac{q_2+q_4}{\varepsilon_0}$。

虽然高斯面上的电通量只与高斯面内所包围的电荷有关，但高斯面上各处的电场强度是所有电荷共同激发的矢量和。

4.3.3 利用高斯定理求电通量

第 156 题 |【1035】

有一边长为 a 的正方形平面，在其中垂线上距中心 O 点 $\frac{1}{2}a$ 处，有一电荷为 q 的正点电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为



(A) $\frac{q}{3\varepsilon_0}$ (B) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ (C) $\frac{q}{3\pi\varepsilon_0}$ (D) $\frac{q}{6\varepsilon_0}$

答案

D

解析

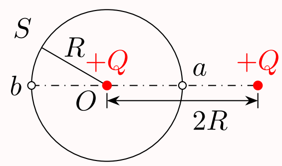
以点电荷为中心，选择一个边长为 a 的立方体表面为高斯面，图示正方形平面为立方体的一个面，根据对称性，通过六个面的电通量相等，而根据高斯定理有，通过整个立方体表面的电通量为

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

所以，通过一个面的电通量为 $\frac{q}{6\varepsilon_0}$。

第 157 题 |【1500】

如图所示，真空中两个正点电荷 Q，相距 $2R$。若以其中一点电荷所在处 O 点为中心，以 R 为半径作高斯球面 S，则通过该球面的电场强度通量 $=$______；若以 $\vec{r}_0$ 表示高斯面外法线方向的单位矢量，则高斯面上 a、b 两点的电场强度分别为______。



答案

$\frac{Q}{\varepsilon_0}$，0，$\frac{5Q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{r}_0$

解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

所以题目中所选高斯面内所包含的电荷 $q = Q$，所以高斯面上的电场强度通量为 $\frac{Q}{\varepsilon_0}$。
所以很容易得到点电荷的电场强度分布

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

考虑到方向，a 点处两个点电荷所激发的电场大小相等，方向相反，所以总的电场为零。两个点电荷在 b 点处激发的电场强度分别为

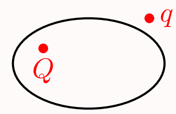
$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$
$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (3R)^2} = \frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2}$$

二者方向相同，所以 b 点的总的电场强度为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{10Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{5Q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$$

第 158 题 |【1056】

点电荷 Q 被曲面 S 所包围，从无穷远处引入另一点电荷 q 至曲面外一点，如图所示，则引入前后



(A) 曲面 S 的电场强度通量不变，曲面上各点场强不变
(B) 曲面 S 的电场强度通量变化，曲面上各点场强不变
(C) 曲面 S 的电场强度通量变化，曲面上各点场强变化
(D) 曲面 S 的电场强度通量不变，曲面上各点场强变化

答案

D

解析

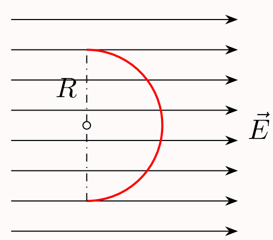
高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

中，式子右边的电荷量是高斯面所包围的电荷，与高斯面外的电荷无关，所以，引入前后，高斯面内的电荷量没有发生变化，因此通过同一曲面的电场强度的通量也没有变化，但任意一点的电场强度是由两个点电荷各自产生的电场的叠加，因此曲面上各点的电场强度发生了变化。

第 159 题 |【5083】

若匀强电场的场强为 $\vec{E}$，其方向平行于半径为 R 的半球面的轴，如图所示。则通过此半球面的电场强度通量 Φ_e 为



(A) $\pi R^2 E$　(B) $2\pi R^2 E$　(C) $\frac{1}{2}\pi R^2 E$　(D) $\sqrt{2}\pi R^2 E$　(E) $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi R^2 E$

答案

A

解析

以半球面 S_1 与圆面 S_2 为高斯面，则高斯面所包围的空间中电荷为零，因此通过整个高斯面的通量为零，所以

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0$$

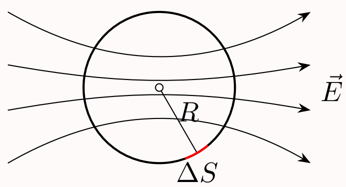
$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -(-E\cdot\pi R^2) = \pi R^2 E$$

即，本题将不容易积分的半球面上的电通量换成比较容易计算的圆面上的电通量，而对于圆面是各点，因为电场强度的方向与面元的法向方向刚好相反，所以有一负号。

第 160 题 |【5272】

在空间有一非均匀电场，其电场线分布如图所示。在电场中作一半径为 R 的闭合球面 S，已知通过球面上某一面元 ΔS 的电场强度通量为 Φ_e，则通过该球面其余部分的电场强度通量为



(A) $-\Phi_e$　　(B) $\frac{4\pi R^2}{\Delta S}\Phi_e$　　(C) $\frac{4\pi R^2-\Delta S}{\Delta S}\Phi_e$　　(D) 0

答案

A

解析

以球面 S 为高斯面，由于高斯面所包围的空间中电荷为零，因此通过整个高斯面的通量为零，所以

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0$$

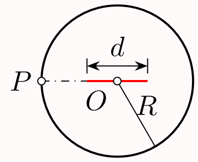
$$\int_{\Delta S} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\int_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{\Delta S} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\Phi_e$$

即，本题通过高斯定理，将待求曲面上的电通量转换成整个高斯面上的电通量与已知曲面上的高斯面之差。

第 161 题 |【5166】

一均匀带电直线长为 d，电荷线密度为 $+\lambda$，以导线中点 O 为球心，R 为半径 $(R>d)$ 作一球面，如图所示，则通过该球面的电场强度通量为_____。带电直线的延长线与球面交点 P 处的电场强度的大小为_____，方向_____。



答案

$\frac{\lambda d}{\varepsilon_0}$，$\frac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0(4R^2-d^2)}$，水平向左

解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

所以高斯面所包围的电荷 $q=\lambda d$，所以高斯面上的电通量为 $\frac{\lambda d}{\varepsilon_0}$。

以球心为坐标原点，水平向左为 x 轴正方向，取 $x\to x+\mathrm{d}x$ 段为元电荷，其电量 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x$，它到 P 点的距离为 $r=R-x$，它在 P 点产生的电场强度的方向沿水平向左，所以由电场的叠加原理，P 处的电场强度的方向沿水平向左，大小为

$$E=\int_{-d/2}^{d/2}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(R-x)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R-x}\right]_{-d/2}^{d/2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R-\frac{d}{2}}-\frac{1}{R+\frac{d}{2}}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d}{R^2-\frac{d^2}{4}}\right]$$
$$=\frac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0(4R^2-d^2)}$$

4.3.4 利用高斯定理求电场强度

第 162 题 |【1558】

下面列出的真空中静电场的场强公式，其中哪个是正确的？

(A) 点电荷 q 的电场 $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$($r$ 为点电荷到场点的距离)

(B) “无限长”均匀带电直线 (电荷线密度 λ) 的电场 $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$($\vec{r}$ 为带电直线到场点的垂直于直线的矢量)

(C) “无限大”均匀带电平面 (电荷面密度 σ) 的电场 $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

(D) 半径为 R 的均匀带电球面 (电荷面密度 σ) 外的电场 $\vec{E}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$($\vec{r}$ 为球心到场点的矢量)

答案

D

解析

高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

关键在于根据带电体的对称性选择适当的高斯面，使得在高斯面上的电通量能够方便地积分得到。

对于点电荷，通常以点电荷为球心，以任意 r 为半径，做一球面选做高斯面，则高斯面上各点的电场强度大小相等，方向都与该处的面元垂直，所以有

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

对于无限长均匀带电直导线，通常选择高斯面为一半径为 r、高为 h 的圆柱面，以导线所在直线为圆柱面的中心轴线，底面与导线垂直，侧面与导线平行，则在两个底面处，电场强度的方向与底面平行，所以通量为零；而在侧面上，各点的电场强度大小相等，方向均与该处的面元垂直，所以有

$$E\cdot 2\pi rh=\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$
$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{\mathrm{e}}_r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$

对于无限大均匀带电平面，通常选择高斯面为一底面积为 S、高为 h 的圆柱面，底面与平面平行，侧面与平面垂直，两底面分居平面两侧等距离处，则在侧面上，电场强度的方向与侧面平行，所以通量为零；而在两个底面上，各点的电场强度大小相等，方向均与该处的面元垂直，所以有

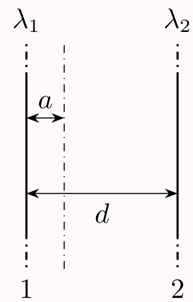
$$E\cdot 2S=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

对于半径为 R 的均匀带电球面，通常选择高斯面为一半径为 r、与带面球面同心的球面，则在高斯面上，各点的电场强度大小相等，方向均与该处的面元垂直，所以有

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$
$$\vec{E}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

第 163 题 |【1050】

两根相互平行的“无限长”均匀带正电直线 1、2，相距为 d，其电荷线密度分别为 λ_1 和 λ_2 如图所示，则场强等于零的点与直线 1 的距离 a 为_____。



答案

$\frac{\lambda_1 d}{\lambda_1+\lambda_2}$

解析

由于对称性，由高斯定理很容易求得无限长均匀带电直线的电场强度

$$E\cdot(2\pi rh)=\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

考虑到方向，则有

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 a}=\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0(d-a)}$$
$$\lambda_1(d-a)=\lambda_2 a$$
$$a=\frac{\lambda_1 d}{\lambda_1+\lambda_2}$$

第 164 题 |【1567】

一半径为 R 的“无限长”均匀带电圆柱面，其电荷面密度为 σ。该圆柱面内、外场强分布为 ($\vec{r}$ 表示在垂直于圆柱面的平面上，从轴线处引出的矢径)：$\vec{E}(\vec{r})=$_____$(r<R)$，$\vec{E}(\vec{r})=$_____$(r>R)$。

答案

0，$\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$

解析

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，各点的电场强度的方向一定是垂直于轴线的。所以选择与带电圆柱面同轴的半径为 r、高为 h 的圆柱面为高斯面。则在圆柱面内，$r < R$，由高斯定理得

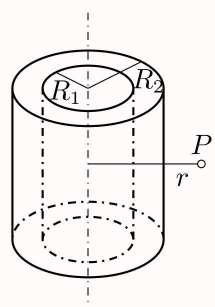
$$E_1 \cdot (2\pi rh) = \frac{0}{\varepsilon_0}$$
$$E_1 = 0$$

在圆柱面外，$r > R$，由高斯定理得

$$E_2 \cdot (2\pi rh) = \frac{\sigma \cdot (2\pi Rh)}{\varepsilon_0}$$
$$E_2 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$
$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{\mathrm{e}}_r = E_2 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r^2} \vec{r}$$

第 165 题 |【1494】

如图所示，两个“无限长”的、半径分别为 R_1 和 R_2 的共轴圆柱面，均匀带电，沿轴线方向单位长度上的所带电荷分别为 λ_1 和 λ_2，则在外圆柱面外面、距离轴线为 r 处的 P 点的电场强度大小 E 为



(A) $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (B) $\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0(r-R_1)} + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0(r-R_2)}$

(C) $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0(r-R_2)}$ (D) $\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$

答案

A

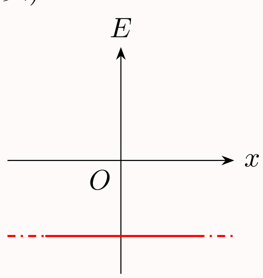
解析

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，所以在与带电柱面同轴的任意一个柱面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电柱面同轴的、半径为 $r > R_2$、高为 h 的柱面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，

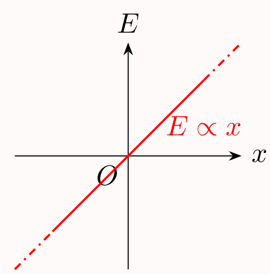
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 2\pi r h = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)h}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

第 166 题 |【1405】

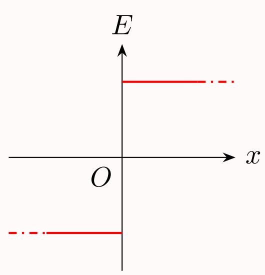
设有一“无限大”均匀带正电荷的平面。取 x 轴垂直带电平面，坐标原点在带电平面上，则其周围空间各点的电场强度 $\vec{E}$ 随距离平面的位置坐标 x 变化的关系曲线为 (规定场强方向沿 x 轴正向为正、反之为负)



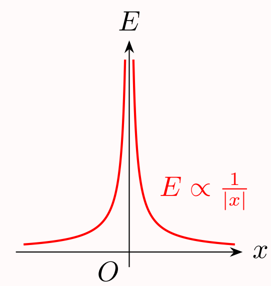
(A)



(B)



(C)



(D)

答案

C

解析

设平面电荷面密度为 σ，高斯面取为一圆柱面，底面与平面平行，侧面与平面垂直，底面积为 S，高为 h，则在底面处，各点的电场强度相等，方向都是垂直底面向外，而在侧面，虽然各点的电场强度大小不等，但各点电场强度的方向都与侧面平行，所以通量为零，因此，由高斯定理可得

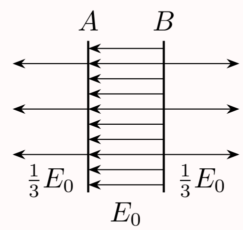
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

即在平面两侧都是一个匀强电场，场强的大小相等，但两侧场强的方向相反。

第 167 题 |【1042】

A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小为 E_0，两平面外侧电场强度大小都为 $\frac{1}{3}E_0$，方向如图。则 A、B 两平面上的电荷面密度分别为 $\sigma_A=$______，$\sigma_B=$______。



答案

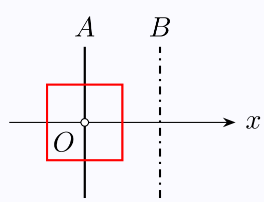
$-\frac{2}{3}\varepsilon_0E_0$，$\frac{4}{3}\varepsilon_0E_0$

解析

【解法一】先假定两面的电荷面密度，再用高斯定理分别求两个面所激发的电场，再用电场叠加原理求得三个区域的电场，联立求解。

假定两平面的电荷面密度分别为 σ_A 和 σ_B。以 A 面所在位置为坐标原点，向右为 x 轴正方向。

先计算只有 A 面带电时的电场分布。如图取一圆柱面为高斯面 S_1，圆柱底面与 A 面平行且与 A 面等距，面积为 S，侧面与 A 面垂直，



则由高斯定理可得

$$\oint_{S_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_A(-\vec{e}_x)\cdot S(-\vec{e}_x)+E_A(-\vec{e}_x)\cdot S(\vec{e}_x)=\frac{\sigma_AS}{\varepsilon_0}$$

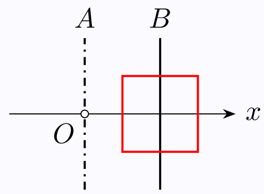
$$2E_AS=\frac{\sigma_AS}{\varepsilon_0}$$

$$E_A=\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}$$

所以只有 A 面带电时的电场分布为

$$\vec{E}_1=\begin{cases}-E_A\,\vec{\mathrm{e}}_x & x<0\\ E_A\,\vec{\mathrm{e}}_x & x>0\end{cases}$$

再计算只有 B 面带电时的电场分布，假定 B 面所在位置为 $x=a$。如图取一圆柱面为高斯面 S_2，圆柱底面与 B 面平行且与 B 面等距，面积为 S，侧面与 B 面垂直，



则由高斯定理可得

$$\oint_{S_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_B(-\vec{\mathrm{e}}_x)\cdot S(-\vec{\mathrm{e}}_x)+E_B(-\vec{\mathrm{e}}_x)\cdot S(\vec{\mathrm{e}}_x)=\frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$2E_BS=\frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$E_B=\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}$$

所以只有 B 面带电时的电场分布为

$$\vec{E}_2=\begin{cases}-E_B\,\vec{\mathrm{e}}_x & x<a\\ E_B\,\vec{\mathrm{e}}_x & x>a\end{cases}$$

所以，当 A、B 同时带电时，总的电场分布为

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\begin{cases}-(E_A+E_B)\,\vec{\mathrm{e}}_x & x<0\\ (E_A-E_B)\,\vec{\mathrm{e}}_x & 0<x<a\\ (E_A+E_B)\,\vec{\mathrm{e}}_x & x>a\end{cases}$$

依题意

$$E_A+E_B=\frac{1}{3}E_0=\frac{\sigma_A+\sigma_B}{2\varepsilon_0}$$

$$E_B-E_A=E_0=\frac{\sigma_B-\sigma_A}{2\varepsilon_0}$$

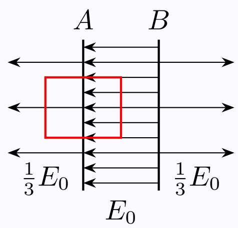
解得

$$\sigma_B=\frac{4}{3}\varepsilon_0E_0$$

$$\sigma_A=-\frac{2}{3}\varepsilon_0E_0$$

【解法二】既然电场分布已知，直接用高斯定理就可以求得两个面的电荷面密度。

如图选取一圆柱面为高斯面 S_1，圆柱底面与 A 面平行，面积为 S，侧面与 A 面垂直，



以水平向右为 x 轴正方向，则由高斯定理可得

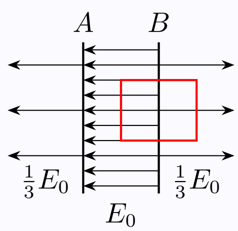
$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{3}E_0(-\vec{\mathrm{e}}_x)\cdot S(-\vec{\mathrm{e}}_x) + E_0(-\vec{\mathrm{e}}_x)\cdot S(\vec{\mathrm{e}}_x) = \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{3}E_0S - E_0S = \frac{\sigma_A S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_A = -\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0$$

如图选取另一圆柱面为高斯面 S_2，圆柱底面与 B 面平行，面积为 S，侧面与 B 面垂直，



以水平向右为 x 轴正方向，则由高斯定理可得

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

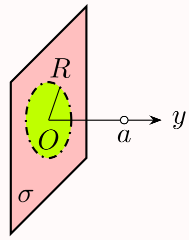
$$E_0(-\vec{\mathrm{e}}_x)\cdot S(-\vec{\mathrm{e}}_x) + \frac{1}{3}E_0(\vec{\mathrm{e}}_x)\cdot S(\vec{\mathrm{e}}_x) = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$E_0S + \frac{1}{3}E_0S = \frac{\sigma_B S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_B = \frac{4}{3}\varepsilon_0 E_0$$

第 168 题 |【1096】

如图所示，一电荷面密度为 σ 的“无限大”平面，在距离平面 a 处的一点的场强大小的一半是由平面上的一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的。试求该圆半径的大小。

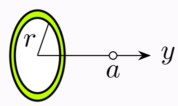


解答

先用高斯定理求无限大带电平面所激发的电场，根据对称性可知，电场强度的方向沿 y 轴。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot(2S) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

再用电场叠加原理求一个半径为 $r\to r+\mathrm{d}r$ 的细圆环在该处所激发的电场，如图。



则有

$$\mathrm{d}E_y = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)} \times \frac{a}{(r^2+a^2)^{1/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}} r\,\mathrm{d}r$$

所以半径为 R 的圆盘所激发的总电场为

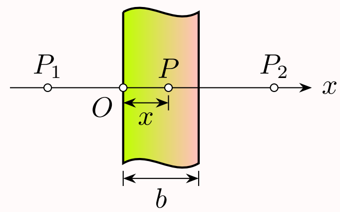
$$E_y = \int_0^R \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}} r\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{1}{(r^2+a^2)^{3/2}} r\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\mathrm{d}(r^2+a^2)}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\left[\frac{-2}{\sqrt{r^2+a^2}}\right]_0^R = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right]$$

依题意，有

$$E_y = \frac{1}{2}E$$
$$\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right] = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{1}{2a}$$
$$\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}$$
$$R = \sqrt{3}a$$

第 169 题 |【1503】

如图所示，一厚为 b 的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为 $\rho = kx (0 \leqslant x \leqslant b)$，式中 k 为一正的常量。求：(1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小；(2) 平板内任一点 P 处的电场强度；(3) 场强为零的点在何处？



解答

先由高斯定理求出无限大带电平面的电场

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (2S) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

所以将带电平板切割成一块块带电平面，考虑 $x \to x + \mathrm{d}x$ 处的平面，其带电量为 $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V = kx \times S\,\mathrm{d}x = Skx\,\mathrm{d}x$，所以其电荷面密度为 $\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{S} = kx\,\mathrm{d}x$，因此它所激发的电场的大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{kx\,\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}$$

注意其方向，在平面左侧，电场强度的方向向左；在平面右侧，电场强度的方向向右。

所以 P_1 处的电场强度方向向左，大小为

$$E_1 = \int_0^b \frac{kx\,\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

P_2 处的电场强度方向向右，大小为

$$E_2 = \int_0^b \frac{kx\,\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

板内 x 处的电场强度为

$$E_3 = \int_0^x \frac{kx\,\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} - \int_x^b \frac{kx\,\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} = \frac{kx^2}{4\varepsilon_0} - \frac{k(b^2 - x^2)}{4\varepsilon_0} = \frac{k(2x^2 - b^2)}{4\varepsilon_0}$$

所以场强为零处

$$E_3 = 0 = \frac{k(2x^2 - b^2)}{4\varepsilon_0}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

第 170 题 |【1370】

半径为 R 的均匀带电球面，若其电荷面密度为 σ，则在距离球面 R 处的电场强度大小为

(A) $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$　(B) $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$　(C) $\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$　(D) $\frac{\sigma}{8\varepsilon_0}$

答案

C

解析

关于题目中“距离球面 R 处”个人认为表述上不太严谨，一则没有说明球内还是球外，二则到一个曲面的距离要怎么定义？这里理解成半径为 $2R$ 的球面。

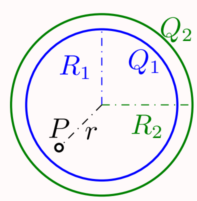
取半径为 $r=2R$ 的球面为高斯面，由高斯定理，得

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = E\cdot 4\pi(2R)^2 = 16\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

第 171 题 |【1490】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为 R_1、带有电荷 Q_1，外球面半径为 R_2、带有电荷 Q_2，则在内球面里面、距离球心为 r 处的 P 点的场强大小 E 为



(A) $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　(B) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$　(C) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　(D) 0

答案

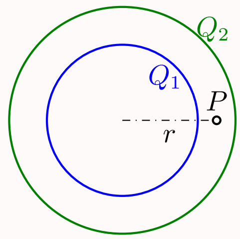
D

解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，所以在与球面同心的任意一个球面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电球面同心的球面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，对于 $r<R_1$ 的球面，所包围的电荷为零，所以球面上的电场强度为零。

第 172 题 |【1492】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面带电荷 Q_1，外球面带电荷 Q_2，则在两球面之间、距离球心为 r 处的 P 点的场强大小 E 为



(A) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (B) $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (C) $\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (D) $\frac{Q_2-Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

答案

A

解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，所以在与球面同心的任意一个球面上，各点的电场强度的大小相等，方向沿半径方向。所以，以与带电球面同心的球面为高斯面，运用高斯定理，很容易知道，对于 $R_1 < r < R_2$ 的球面，所包围的电荷为 Q_1，所以由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

第 173 题 |【1373】

一半径为 R 的带电球体，其电荷体密度分布为：$\rho = Ar(r\leqslant R)$，$\rho = 0(r > R)$，A 为一常量。试求球体内外的场强分布。

解答

虽然电荷不是均匀分布，但电荷体密度只与半径有关，所以仍然具有球对称性，所以可以使用高斯定理求解电场。选择半径为 r 的同心球面为高斯面，则在同一个高斯面上各点的电场强度的大小相等，方向都沿径向，所以由高斯定理可得：当 $r < R$ 时，

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r Ar(4\pi r^2\,\mathrm{d}r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\times 4\pi A\times\frac{1}{4}r^4 = \frac{\pi A r^4}{\varepsilon_0}$$

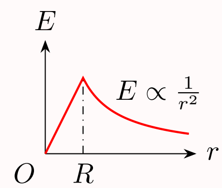
$$E=\frac{\pi Ar^4}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}$$

当 $r>R$ 时

$$E\cdot(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R Ar(4\pi r^2\,\mathrm{d}r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\times4\pi A\times\frac{1}{4}R^4=\frac{\pi AR^4}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\pi AR^4}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{AR^4}{4\varepsilon_0r^2}$$

第 174 题 |【1255】

图示为一具有球对称性分布的静电场的 $E-r$ 关系曲线。请指出该静电场是由下列哪种带电体产生的



(A) 半径为 R 的均匀带电球面
(B) 半径为 R 的均匀带电球体
(C) 半径为 R 的、电荷体密度为 $\rho=Ar(A$ 为常数) 的非均匀带电球体
(D) 半径为 R 的、电荷体密度为 $\rho=\frac{A}{r}(A$ 为常数) 的非均匀带电球体

答案

B

解析

不管是哪种情况的带电体，电荷分布都具有球对称性，所以都可以选择球面为高斯面。在球体外部空间，都可以把带电体看成电荷集中在球心的点电荷，因此球外空间的电场强度的大小均为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

而对于球内部空间，四种情况产生的电场各不相同。
对于均匀带电球面，球内没有电荷分布，因此电通量为零，电场强度为零，即球内无电场分布。
对于均匀带电球体，由高斯定理有

$$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\cdot4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\propto r$$

对于半径为 R 的、电荷体密度为 $\rho = Ar$(A 为常数) 的非均匀带电球体，由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_0^r r^3\,dr = \frac{\pi A r^4}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0} \propto r^2$$

对于半径为 R 的、电荷体密度为 $\rho = \frac{A}{r}$(A 为常数) 的非均匀带电球体，由高斯定理有

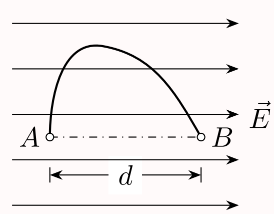
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_0^r r\,dr = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{A}{2\varepsilon_0} = \mathrm{C}$$

4.4 电势能　电势

4.4.1 电场力做功

第 175 题 |【1438】

如图所示，在场强为 $\vec{E}$ 的均匀电场中，A、B 两点间距离为 d。AB 连线方向与 $\vec{E}$ 方向一致。从 A 点经任意路径到 B 点的场强线积分 $\int_{AB}\vec{E}\cdot d\vec{l}=$______。



答案

Ed

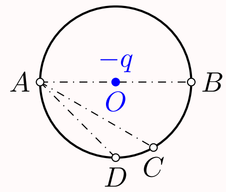
解析

对于匀强电场，$\vec{E}$ 是个常矢量，所以可以直接提取到积分号外，即

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{l} = \vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} = Ed$$

第 176 题 |【1076】

点电荷 $-q$ 位于圆心 O 处，A、B、C、D 为同一圆周上的四点，如图所示。现将一试验电荷从 A 点分别移动到 B、C、D 各点，则



(A) 从 A 到 B，电场力作功最大

(B) 从 A 到 C，电场力作功最大

(C) 从 A 到 D，电场力作功最大

(D) 从 A 到各点，电场力作功相等

答案

D

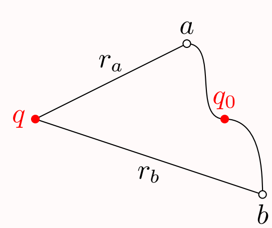
解析

以无穷远为电势零点，点电荷 $-q$ 所激发的电场在同一球面上各点的电势相等。所以图中 A、B、C、D 四点的电势相等。

而电场力做功就等于电荷的电势能的改变量，电场力做正功，电势能减小，电场力做负功，电势能增加。因为四点电势相等，所以检验电荷在四点的电势能也相等，所以检验电荷从 A 点分别移动到 B、C、D 各点的过程中，电场力所做的功相等，均为零。

第 177 题 |【1313】

如图所示，在电荷为 q 的点电荷的静电场中，将一电荷为 q_0 的试验电荷从 a 点经任意路径移动到 b 点，电场力所作的功 $W =$______。



答案

$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$

解析

电场力是保守力，电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。所以求过程的功，可以通过始末位置的电势能来计算。

当以无穷远为电势零点时，点电荷 Q 的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以 a 点的电势为

$$V_a=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_a}$$

b 点的总电势为

$$V_b=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_b}$$

所以试验电荷 q_0 在 a 点和 b 点的电势能分别为

$$W_a=q_0V_a$$
$$W_b=q_0V_b$$

所以在从 a 点移动到 b 点的过程中，电势能的变化量为

$$\Delta W=W_b-W_a=q_0(V_b-V_a)=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)$$

所以电场力做功为

$$W=-\Delta W=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

第 178 题 |【1041】

在点电荷 q 的电场中，把一个 -1.0×10^{-9} C 的电荷，从无限远处 (设无限远处电势为零) 移到离该点电荷距离 0.1 m 处，克服电场力作功 1.8×10^{-5} J，则该点电荷 $q=$______。

答案

-2×10^{-7} C

解析

当以无穷远为电势零点时，点电荷 Q 的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以点电荷 q 在该处的电势能为

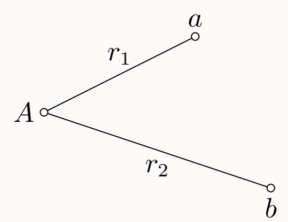
$$W=qV=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

依题意，在电荷移动过程中，克服电场力做功，所以具有电势能，因此有

$$q=\frac{W}{V}=\frac{4\pi\varepsilon_0 rW}{Q}=\frac{4\pi\varepsilon_0\times 0.1\times 1.8\times 10^{-5}}{-1.0\times 10^{-9}}$$
$$=-4\times 3.14\times 8.854\times 10^{-12}\times 1.8\times 10^{3}=-2\times 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

第 179 题 |【5085】

在电荷为 $-Q$ 的点电荷 A 的静电场中，将另一电荷为 q 的点电荷 B 从 a 点移到 b 点。a、b 两点距离点电荷 A 的距离分别为 r_1 和 r_2，如图所示。则移动过程中电场力做的功为



(A) $-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ (B) $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ (C) $-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ (D) $-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(r_2-r_1)}$

答案

C

解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，点电荷所激发的电场的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以电荷为 $-Q$ 的点电荷 A 在 a、b 两点的电势分别为

$$V_a=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$V_b=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

所以电荷为 q 的点电荷 B 在 a、b 两点的电势能分别为

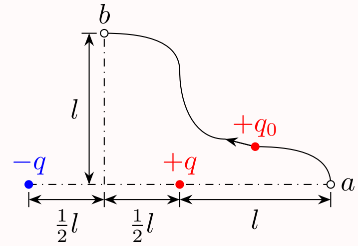
$$W_a=qV_a=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$W_b=qV_b=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

所以移动过程中电场力所做的功为

$$W=W_a-W_b=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

第 180 题 |【1508】

如图所示，在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 产生的电场中，将一点电荷 $+q_0$ 沿箭头所示路径由 a 点移至 b 点，则外力作功 $W =$______。



答案

$-\frac{qq_0}{8\pi\varepsilon_0 l}$

解析

根据点电荷的电势公式和电势叠加原理，当以无穷远处为电势零点时，a、b 处的电势分别为

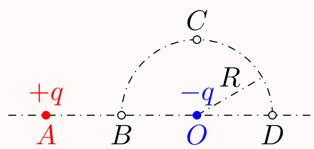
$$V_a = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2l)} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}$$
$$V_b = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0\frac{\sqrt{5}}{2}l} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\frac{\sqrt{5}}{2}l} = 0$$

注意本题求的是外力做的功，所以等于点电荷电势能的增加量，即

$$W = W_b - W_a = q_0(V_b - V_a) = -\frac{qq_0}{8\pi\varepsilon_0 l}$$

第 181 题 |【1079】

图示 BCD 是以 O 点为圆心，以 R 为半径的半圆弧，在 A 点有一电荷为 $+q$ 的点电荷，O 点有一电荷为 $-q$ 的点电荷。线段 $\overline{BA} = R$。现将一单位正电荷从 B 点沿半圆弧轨道 BCD 移到 D 点，则电场力所作的功为______。



答案

$\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$

解析

电场力是保守力，电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。所以求过程的功，可以通过始末位置的电势能来计算。另外，由于电场的叠加原理，总的电场力为各个点电荷所激发的电场的矢量和，总的功为各个点电荷所做功之和。
当以无穷远为电势零点时，点电荷 Q 的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以 B 点的总电势为

$$V_B=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

D 点的总电势为

$$V_D=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0(3R)}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

对于单位正电荷，$q_0=1$，它在 B 点和 D 点的电势能分别为

$$W_B=q_0V_B=0$$
$$W_D=q_0V_D=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

所以在从 B 点移动到 D 点的过程中，电势能的变化量为

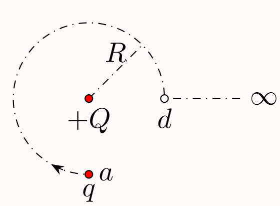
$$\Delta W=W_D-W_B=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

所以电场力做功为

$$W=-\Delta W=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

第 182 题 |【1078】

如图所示。试验电荷 q，在点电荷 $+Q$ 产生的电场中，沿半径为 R 的整个圆弧的 $\frac{3}{4}$ 圆弧轨道由 a 点移到 d 点的过程中电场力作功为_____；从 d 点移到无穷远处的过程中，电场力作功为_____。



答案

0，$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

解析

当以无穷远为电势零点时，点电荷 Q 的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以点电荷 q 在该处的电势能为

$$W=qV=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

依题意，点电荷在 a 点和 d 点的电势均为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以在从 a 点移动到 d 点的过程中，电场力做功为零【当试验电荷沿圆形轨道运动时，电场力沿径向方向，元位移沿轨道切线方向，二者一直垂直，所以做功为零】。当点电荷从 d 点运动到无穷远的过程中，电场力做功，电势能减少，所以

$$W=qV=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

4.4.2 电势差

第 183 题 |【1266】

在已知静电场分布的条件下，任意两点 P_1 和 P_2 之间的电势差决定于

(A) P_1 和 P_2 两点的位置

(B) P_1 和 P_2 两点处的电场强度的大小和方向

(C) 试验电荷所带电荷的正负

(D) 试验电荷的电荷大小

答案

A

解析

静电场是保守场，电场点任意两点之间的电势差只与该两个位置有关，而与检验电荷无关。当然，在计算两点之间的电势差时，要用到电场的分布，因此电势差与两点之间的电场强度分布有关，而不是与该两点外的电场强度有关。

4.4.3 电势

第 184 题 |【1016】

静电场中某点电势的数值等于

(A) 试验电荷 q_0 置于该点时具有的电势能

(B) 单位试验电荷置于该点时具有的电势能

(C) 单位正电荷置于该点时具有的电势能

(D) 把单位正电荷从该点移到电势零点外力所作的功

答案

C

解析

带电量为 q 的点电荷置于电场中电势为 V 处所具有的电势能为 W，则有

$$W = qV$$
$$V = \frac{W}{q}$$

所以，电势在数值上等于单位正电荷在该处时的电势能。

而电场力做功，电势能减少，所以某处的电势能等于电荷从该处移到电势能零点时电场力所做的功。

第 185 题 |【1267】

关于静电场中某点电势值的正负，下列说法中正确的是

(A) 电势值的正负取决于置于该点的试验电荷的正负

(B) 电势值的正负取决于电场力对试验电荷作功的正负

(C) 电势值的正负取决于电势零点的选取

(D) 电势值的正负取决于产生电场的电荷的正负

答案

C

第 186 题 |【1613】

一质量为 m，电荷为 q 的粒子，从电势为 U_A 的 A 点，在电场力作用下运动到电势为 U_B 的 B 点。若粒子到达 B 点时的速率为 v_B，则它在 A 点时的速率 $v_A =$______。

答案

$\sqrt{\frac{2q(U_B-U_A)}{m}+v_B^2}$

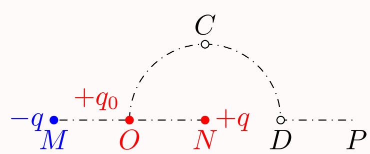
解析

题目中没有涉及高度，所以不考虑重力势能的变化。所以粒子的能量就只算电势能和动能。所以有

$$qU_A+\frac{1}{2}mv_A^2=qU_B+\frac{1}{2}mv_B^2$$
$$v_A=\sqrt{\frac{2q(U_B-U_A)}{m}+v_B^2}$$

第 187 题 |【1505】

如图所示，直线 MN 长为 $2l$，弧 OCD 是以 N 点为中心，l 为半径的半圆弧，N 点有正电荷 $+q$，M 点有负电荷 $-q$。今将一试验电荷 $+q_0$ 从 O 点出发沿路径 $OCDP$ 移到无穷远处，设无穷远处电势为零，则电场力作功



(A) $A<0$，且为有限常量
(B) $A>0$，且为有限常量
(C) $A=\infty$
(D) $A=0$

答案

D

解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，点电荷所激发的电场的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以 N 点正电荷 $+q$ 在 O 点的电势为

$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

M 点负电荷 $-q$ 在 O 点的电势为

$$V_2=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

所以 O 点的总电势为

$$V_O = V_1 + V_2 = 0$$

所以检验电荷在 O 点的电势能等于零。因此检验电荷从 O 点移动到无穷远处时，电场力所做的功为零。

第 188 题 |【1316】

相距为 r_1 的两个电子，在重力可忽略的情况下由静止开始运动到相距为 r_2，从相距 r_1 到相距 r_2 期间，两电子系统的下列哪一个量是不变的？

(A) 动能总和　(B) 电势能总和　(C) 动量总和　(D) 电相互作用力

答案

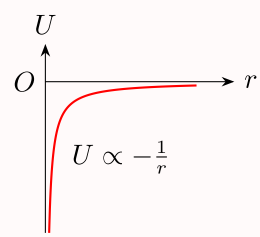
C

解析

两个电荷之间的静电力是一对作用力与反作用力。在重力可以忽略的情况下，由两个电子所组成的系统只受到这对静电力的作用，所以系统的动量守恒。
运动过程中，二者之间的距离发生变化，静电力也发生变化，静电力做功，电势能变化，动能变化。

第 189 题 |【1582】

图中所示为一球对称性静电场的电势分布曲线，r 表示离对称中心的距离。请指出该电场是由下列哪一种带电体产生的。



(A) 半径为 R 的均匀带负电球面　(B) 半径为 R 的均匀带负电球体

(C) 正点电荷　(D) 负点电荷

答案

D

解析

由于点电荷，电场强度为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

当以无穷远处为电势的零点时，电势为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

对于均匀带电球面，电场强度为

$$E_1=0(\text{当}r<R\text{时})$$
$$E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\sigma\times 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}(\text{当}r>R\text{时})$$

当以无穷远处为电势的零点时，电势为

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}(\text{当}r>R\text{时})$$
$$U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}(\text{当}r<R\text{时})$$

对于均匀带电球体，电场强度为

$$E_1\cdot 4\pi r^2=\frac{\rho\times\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_1=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}(\text{当}r<R\text{时})$$
$$E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}(\text{当}r>R\text{时})$$

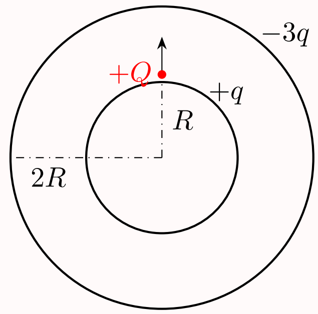
当以无穷远处为电势的零点时，电势为

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}(\text{当}r>R\text{时})$$
$$U_1=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho(R^2-r^2)}{6\varepsilon_0}=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}(\text{当}r<R\text{时})$$

4.4.4 已知电场求电势

第 190 题 |【1240】

如图所示，在真空中半径分别为 R 和 $2R$ 的两个同心球面，其上分别均匀地带有电荷 $+q$ 和 $-3q$。今将一电荷为 $+Q$ 的带电粒子从内球面处由静止释放，则该粒子到达外球面时的动能为



(A) $\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (B) $\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 R}$ (C) $\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 R}$ (D) $\frac{3Qq}{8\pi\varepsilon_0 R}$

答案

C

解析

电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力，静电场力做功只与始末位置有关，与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时，带电量为 Q、半径为 R 的带电球面所激发的电场的电势为

$$V(r>R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
$$V(r<R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以两个带电球面在外球面的电势分别为

$$V_{12}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2R)},V_{22}=\frac{-3q}{4\pi\varepsilon_0(2R)}$$

两个带电球面在内球面的电势分别为

$$V_{11}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R)},V_{21}=\frac{-3q}{4\pi\varepsilon_0(2R)}$$

所以两个球面处的电势分别为

$$V_1=V_{11}+V_{21}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R)}+\frac{-3q}{4\pi\varepsilon_0(2R)}$$
$$V_2=V_{12}+V_{22}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2R)}+\frac{-3q}{4\pi\varepsilon_0(2R)}$$

所以电荷 $+Q$ 在两个球面处的电势能分别为

$$W_1=QV_1=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(R)}+\frac{-3qQ}{4\pi\varepsilon_0(2R)}$$
$$W_2=QV_2=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(2R)}+\frac{-3qQ}{4\pi\varepsilon_0(2R)}$$

在这个过程中电场力所做的功为

$$A = W_1 - W_2 = \left[\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\varepsilon_0(2R)}\right] - \left[\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(2R)} + \frac{-3qQ}{4\pi\varepsilon_0(2R)}\right] = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

根据动能定理，电场力对电荷所做的功就等于电荷动能的增加量，电荷从静止开始释放，所以电荷末态的动能就是

$$E_k = A = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

第 191 题 |【1592】

一半径为 R 的均匀带电球面，其电荷面密度为 σ。若规定无穷远处为电势零点，则该球面上的电势 $U =$______。

答案

$\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

解析

由于均匀带电球面的电荷分布具有球对称性，所以可以用高斯定理很容易求得电场的分布，在球外空间，电场沿径向方向，大小为

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\times(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\times(4\pi R^2)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathrm{e}}_r$$

所以，当选择无穷远处为电势零点时，球面上的电势为

$$V = \int_R^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_R^\infty E\,\mathrm{d}r = \left.\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}\right|_R^\infty = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

第 192 题 |【1589】

一半径为 R 的均匀带电球面，带有电荷 Q。若设该球面上电势为零，则球面内各点电势 $U =$______。

答案

0

解析

根据均匀带电球面的电场分布的特点，在球内电场为零，所以球内任意一点到球面上任意一点之间的电势差为零。所以若设球面上电势为零，则球面内任意一点的电势也为零。

第 193 题 |【1584】

一半径为 R 的均匀带电球面，带有电荷 Q。若规定该球面上的电势值为零，则无限远处的电势将等于

(A) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (B) 0 (C) $-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (D) ∞

答案

C

解析

对于均匀带电球面，电场强度为

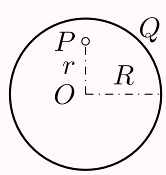
$$E_1 = 0(\text{当}r < R\text{时})$$
$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma \times 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}(\text{当}r > R\text{时})$$

当以球面处为电势的零点时，无限远处的电势为

$$U_\infty = \int_\infty^R E\,\mathrm{d}r = \int_\infty^R E_2\,\mathrm{d}r = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_\infty^R = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

第 194 题 |【1087】

如图所示，半径为 R 的均匀带电球面，总电荷为 Q，设无穷远处的电势为零，则球内距离球心为 r 的 P 点处的电场强度的大小和电势为



(A) $E = 0$，$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (B) $E = 0$，$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

(C) $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (D) $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

答案

B

解析

由高斯定理很容易求得均匀带电球面的电场分布

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1\cdot 4\pi r^2=0, E_1=0, r<R$$

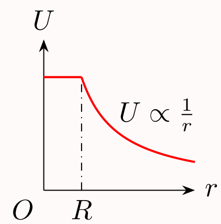
$$E_2\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}, E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r>R$$

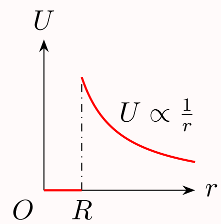
所以球内的电势分布为

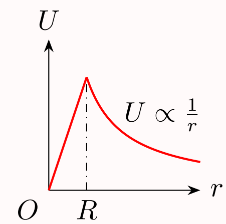
$$U_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R E_1\,\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=0+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r=-\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_R^{\infty}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

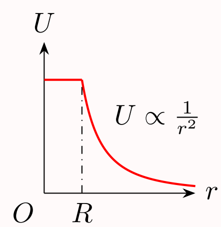
第 195 题 |【1017】

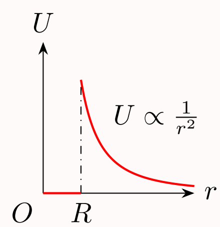
半径为 R 的均匀带电球面，总电荷为 Q。设无穷远处电势为零，则该带电体所产生的电场的电势 U，随离球心的距离 r 变化的分布曲线为

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

答案

A

解析

由高斯定理很容易求得均匀带电球面的电场分布

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1\cdot 4\pi r^2=0, E_1=0, r<R$$

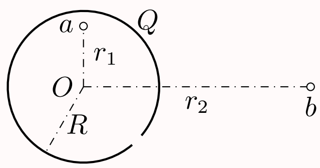
$$E_2\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}, E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r>R$$

所以电势分布为

$$U_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R E_1\,\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=0+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r=-\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_R^{\infty}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$
$$U_2=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r=-\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_r^{\infty}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

第 196 题 |【1507】

如图所示，在半径为 R 的球壳上均匀带有电荷 Q，将一个点电荷 $q(q\ll Q)$ 从球内 a 点经球壳上一个小孔移到球外 b 点。则此过程中电场力作功 $W=$______。



答案

$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_2}\right)$

解析

根据均匀带电球壳的电场分布特点，在球内电场为零，所以球内的电势等于球面上的电势，而球外的电势相当于所有电荷集中在球心时的电势，即

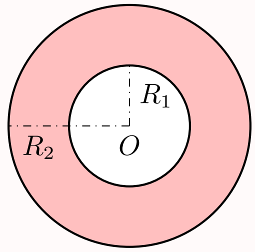
$$V(r>R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
$$V(r<R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

这里一般地选择无穷远处为电势的零点。所以点电荷 q 从球内 a 点移到球外 b 点时电场力所做的功为

$$W=qV_a-qV_b=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_2}\right)$$

第 197 题 |【1519】

图示为一个均匀带电的球层，其电荷体密度为 ρ，球层内表面半径为 R_1，外表面半径为 R_2。设无穷远处为电势零点，求空腔内任一点的电势。



解答

由于电荷分布具有球对称性，所以可以用高斯定理求电场分布。高斯面选择为同心球面。对于空腔内区域，$r < R_1$，

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E_1\cdot(4\pi r^2) = 0$$
$$E_1 = 0$$

对于球层内区域，$R_1 < r < R_2$，

$$E_2\cdot(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\times\rho\times\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$
$$E_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

对于球外区域，$r > R_2$，

$$E_3\cdot(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\times\rho\times\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$
$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

选择无穷远处为电势零点时，空腔内的电势为

$$\begin{aligned}
V = \int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} &= \int_r^{R_1} E_1\,\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} E_2\,\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} E_3\,\mathrm{d}r \\
&= 0 + \int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{R_1^3}{r}\right]_{R_1}^{R_2} + \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{\infty} \\
&= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1^3}{R_2} - R_1^2\right] + \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} \\
&= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 + R_2^2\right] = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)
\end{aligned}$$

本题也可以使用电势叠加原理求解。运用电势叠加原理求解时，要应用到空腔部分电场为零，所以腔内各点电势相等，通过求球心处的电势来求腔内任意一点的电势。将球层分割成一个个球壳，对于 $r \to r + \mathrm{d}r$

之间的球壳，在球心处的电势为

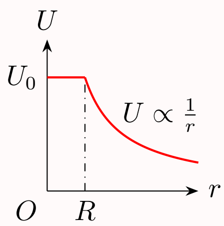
$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{4\pi\rho r^2\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho r\,\mathrm{d}r}{\varepsilon_0}$$

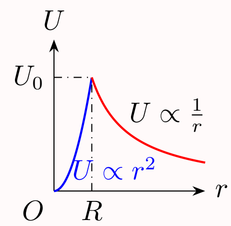
所以总的电势为

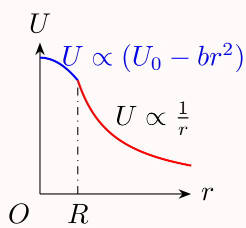
$$V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho r\,\mathrm{d}r}{\varepsilon_0}=\frac{\rho(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0}$$

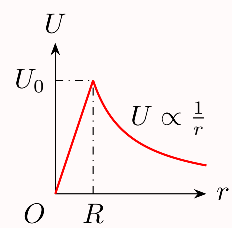
第 198 题 |【1417】

设无穷远处电势为零，则半径为 R 的均匀带电球体产生的电场的电势分布规律为 (图中的 U_0 和 b 皆为常量)

(A)


(B)


(C)


(D)


答案

C

解析

由于电荷分布的球对称性，很容易由高斯定理求出电场分布 (设电荷体密度为 ρ)

$$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\times\frac{4}{3}\pi r^3\rho\Rightarrow E_1=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}(\text{当 } r<R \text{ 时})$$

$$E_2\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\times\frac{4}{3}\pi R^3\rho\Rightarrow E_2=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}(\text{当 } r>R \text{ 时})$$

选择无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$U_2=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=\left[-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right]_r^{\infty}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}(\text{当 } r>R \text{ 时})$$

$$U_1=\int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R E_1\,\mathrm{d}r+\int_R^\infty E_2\,\mathrm{d}r=\left[\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right]_r^R+\left[-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right]_R^\infty=\frac{\rho(R^2-r^2)}{6\varepsilon_0}+\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R}$$
$$=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}(\text{当 } r<R \text{ 时})$$

其实从电场分布就可以直接判断出来答案是 (C)，r 越大，电势越低。

第 199 题 |【1374】

一半径为 R 的带电球体，其电荷体密度分布为：$\rho=\frac{qr}{\pi R^4}(r\leqslant R)$($q$ 为一正的常量)，$\rho=0(r>R)$。试求：(1) 带电球体的总电荷；(2) 球内、外各点的电场强度；(3) 球内、外各点的电势。

解答

(1) 带电球体的总电荷为

$$Q=\int\rho\,\mathrm{d}V=\int_0^R\frac{qr}{\pi R^4}(4\pi r^2\,\mathrm{d}r)=\frac{4q}{R^4}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{4q}{R^4}\times\frac{1}{4}R^4=q$$

(2) 虽然电荷不是均匀分布，但电荷体密度只与半径有关，所以仍然具有球对称性，所以可以使用高斯定理求解电场。选择半径为 r 的同心球面为高斯面，则在同一个高斯面上各点的电场强度的大小相等，方向都沿径向，所以由高斯定理可得：当 $r<R$ 时，

$$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E_1\cdot(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\frac{qr}{\pi R^4}(4\pi r^2\,\mathrm{d}r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\times\frac{4q}{R^4}\int_0^r r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\varepsilon_0}\times\frac{4q}{R^4}\times\frac{1}{4}r^4=\frac{qr^4}{\varepsilon_0 R^4}$$
$$E_1=\frac{qr^4}{4\pi\varepsilon_0R^4r^2}=\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0R^4}$$

当 $r>R$ 时

$$E_2\cdot(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,\mathrm{d}V=\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

(3) 因为电荷分布在有限区域，所以通常选择无穷远处为电势零点，所以在球外空间的电势为

$$V_2=\int_r^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^\infty E_2\,\mathrm{d}r=\int_r^\infty\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r}$$

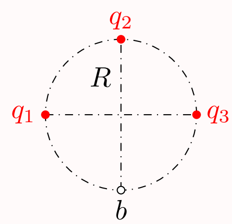
在球内空间的电势为

$$V_1=\int_r^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R E_1\,\mathrm{d}r+\int_R^\infty E_2\,\mathrm{d}r=\int_r^R\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0R^4}\,\mathrm{d}r+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}$$
$$=\frac{q(R^3-r^3)}{12\pi\varepsilon_0R^4}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}=\frac{q}{3\pi\varepsilon_0R}-\frac{qr^3}{12\pi\varepsilon_0R^4}$$

4.4.5 电势叠加原理求电势

第 200 题 |【1382】

电荷分别为 q_1、q_2、q_3 的三个点电荷分别位于同一圆周的三个点上，如图所示。设无穷远处为电势零点，圆半径为 R，则 b 点处的电势 $U =$______。



答案

$\frac{\sqrt{2}(q_1+q_3)+q_2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

解析

选择电势零点为无穷远处，带电量为 Q 的点电荷在离它 r 处的电势为

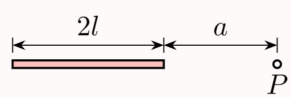
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

依题意，三个点电荷到 b 点的距离分别为 $r_1 = \sqrt{2}R = r_3$，$r_2 = 2R$，所以 b 点处的总电势为

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}(q_1+q_3)+q_2}{2R} = \frac{\sqrt{2}(q_1+q_3)+q_2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

第 201 题 |【1597】

电荷 q 均匀分布在长为 $2l$ 的细杆上，求在杆外延长线上与杆端距离为 a 的 P 点的电势 (设无穷远处为电势零点)。



解答

根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

和电势叠加原理，将带电细杆分割成一个个元电荷，则对于 $x \to x + \mathrm{d}x$ 段的元电荷，其带电量为

$\mathrm{d}q = \frac{q}{2l}\,\mathrm{d}x$，它到 P 点的距离为 $r = l + a - x$，所以它在 P 处的电势为

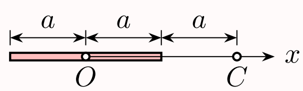
$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q\,\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 l(l+a-x)}$$

所以 P 处的总电势为

$$V = \int_{-l}^{l} \frac{q\,\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 l(l+a-x)} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left[-\ln(l+a-x)\right]_{-l}^{l} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{2l+a}{a}$$

第 202 题 |【1380】

真空中一均匀带电细直杆，长度为 $2a$，总电荷为 $+Q$，沿 Ox 轴固定放置 (如图)。一运动粒子质量为 m、带有电荷 $+q$，在经过 x 轴上的 C 点时，速率为 v。试求：(1) 粒子在经过 C 点时，它与带电杆之间的相互作用电势能 (设无穷远处为电势零点)；(2) 粒子在电场力作用下运动到无穷远处的速率 v_∞(设 v_∞ 远小于光速)。



解答

根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

和电势叠加原理，将带电细杆分割成一个个元电荷，则对于 $x \to x + \mathrm{d}x$ 段的元电荷，其带电量为 $\mathrm{d}q = \frac{Q}{2a}\,\mathrm{d}x$，它到 C 点的距离为 $r = 2a - x$，所以它在 C 处的电势为

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q\,\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 a(2a-x)}$$

所以 C 处的总电势为

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{Q\,\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 a(2a-x)} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[-\ln(2a-x)\right]_{-a}^{a} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln 3$$

所以 q 在 C 处时的电势能为

$$W = qV = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln 3$$

在粒子从 C 点运动到无穷远的过程中，只有电场力做功，所以由能量守恒定律可得【这里不考虑重力势能的变化】

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$
$$v_\infty = \sqrt{v^2 + \frac{2qV}{m}} = \sqrt{v^2 + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 am}\ln 3}$$

第 203 题 |【1176】

真空中，有一均匀带电细圆环，电荷线密度为 λ，其圆心处的电场强度 $E_0 =$______，电势 $U_0 =$______。(选无穷远处电势为零)

答案

0，$\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

解析

由于对称性，圆环上关于圆心对称的两个点电荷在圆心处产生的合场强为零，所以整个圆环在圆心处产生的总的电场强度为零。
而电势是标量，以无穷远处为电势零点，圆环上任意一个元电荷 $\mathrm{d}q$ 在圆心处的电势为

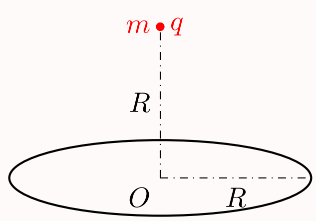
$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

设圆环的半径为 R，则整个圆环在圆心处的电势为

$$U = \oint \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda\cdot(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$

第 204 题 |【1242】

一半径为 R 的均匀带电细圆环，带有电荷 Q，水平放置。在圆环轴线的上方离圆心 R 处，有一质量为 m、带电荷为 q 的小球。当小球从静止下落到圆心位置时，它的速度为 $v =$______。



答案

$\sqrt{2gR - \frac{Qq(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}m\pi\varepsilon_0 R}}$

解析

根据点电荷的电势公式和电势叠加原理，当以无穷远处为电势零点时，起点和圆心处的电势分别为

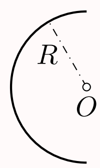
$$V_1 = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}R)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}R)}$$
$$V_O = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以根据动能定理或能量守恒定律，可得

$$qV_1 + mgR = qV_O + \frac{1}{2}mv^2$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = q(V_1 - V_O) + mgR$$
$$v = \sqrt{\frac{2q(V_1 - V_O)}{m} + 2gR} = \sqrt{2gR - \frac{Qq(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}m\pi\varepsilon_0 R}}$$

第 205 题 |【5167】

真空中有一半径为 R 的半圆细环，均匀带电 Q，如图所示。设无穷远处为电势零点，则圆心 O 点处的电势 $U =$_____，若将一带电量为 q 的点电荷从无穷远处移到圆心 O 点，则电场力做功 $W =$_____。



答案

$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$，$-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

解析

根据点电荷的电势公式和电势叠加原理，可得圆心 O 处的电势为【当以无穷远处为电势零点时】

$$V_O = \int \mathrm{d}V_O = \int \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int \mathrm{d}Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以当点电荷 q 位于 O 处时其电势能为

$$W_O = qV_O = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

而在无穷远处其电势能为零。因此当 q 从无穷远处移到 O 处时，电场力所做的功等于其电势能的减小值，即

$$W = W_\infty - W_O = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

第 206 题 |【1407】

一半径为 R 的均匀带电圆盘，电荷面密度为 σ，设无穷远处为电势零点，则圆盘中心 O 点的电势 $U =$______。

答案

$\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$

解析

选择电势零点为无穷远处，带电量为 Q 的点电荷在离它 r 处的电势为

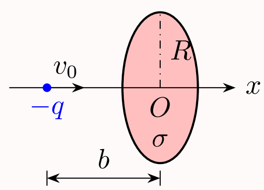
$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以圆盘中心的电势为

$$V=\int \mathrm{d}V=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int\frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int\frac{\sigma(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_0^R\frac{2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

第 207 题 |【5246】

如图所示，一个半径为 R 的均匀带电圆板，其电荷面密度为 $\sigma(>0)$，今有一质量为 m，电荷为 $-q$ 的粒子 $(q>0)$ 沿圆板轴线 (x 轴) 方向向圆板运动，已知在距圆心 O(也是 x 轴原点) 为 b 的位置上时，粒子的速度为 v_0，求粒子击中圆板时的速度 (设圆板带电的均匀性始终不变)。



解答

根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

和电势叠加原理，将带电圆板分割成一个个元电荷。在圆板上 $r\to r+\mathrm{d}r$、$\theta\to\theta+\mathrm{d}\theta$ 区域的元电荷，其带电量为 $\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)=\sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，它到 P 点的距离为 $R=\sqrt{r^2+b^2}$，所以它在 P 处的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+b^2}}$$

所以 P 处的总电势为

$$V_P=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\sigma r\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+b^2}}=\int_0^R\frac{\sigma r\,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+b^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+b^2}\right]_0^R=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+b^2}-b\right]$$

圆心处的电势为

$$V_O=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R$$

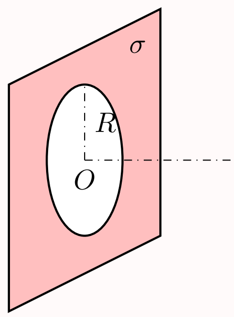
带电粒子从 P 处到 O 处运动的过程中，能量守恒，所以有

$$\frac{1}{2}mv_P^2+(-q)V_P=\frac{1}{2}mv_O^2+(-q)V_O$$

$$v_O=\sqrt{v_P^2+\frac{2(-q)(V_P-V_O)}{m}}=\sqrt{v_0^2+\frac{2q\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+b^2}-b\right)\right]}{m}}$$
$$=\sqrt{v_0^2+\frac{q\sigma\left(R+b-\sqrt{R^2+b^2}\right)}{\varepsilon_0 m}}$$

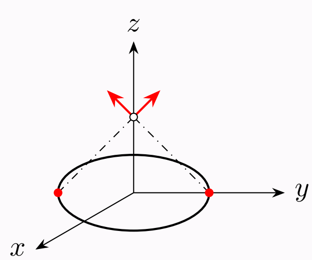
第 208 题 |【1180】

一“无限大”平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ。如图所示，试求通过小孔中心 O 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势 (选 O 点的电势为零)。



解答

先求一个带电量为 q、半径为 R 的带电圆环在其轴线上距离环心 a 处的电场，如图，



则总的电场沿 z 轴正方向，大小为

$$E=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2)}\times\frac{a}{(R^2+a^2)^{1/2}}=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2)^{3/2}}$$

所以将题目所给平面切割成一个个圆环，则对于半径 $r\to r+\mathrm{d}r$ 部分的圆环，其带电量为 $\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma\times(2\pi r\,\mathrm{d}r)=2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r$，所以这个圆环在距离环心 (即小孔中心) 距离 a 处的电场强度为

$$\mathrm{d}E=\frac{(\mathrm{d}q)a}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a\times 2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a\sigma r\,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}$$

所以整个平面在该处的电场强度为

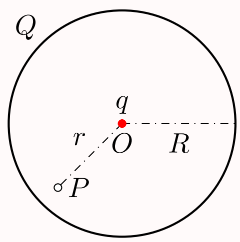
$$E=\int_R^{\infty}\frac{a\sigma r\,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(r^2+a^2)^{1/2}}\right]_R^{\infty}=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2}}$$

这里，由于在无穷远处有电荷分布，所以不能选择无穷远处为电势零点，依题意，选择 O 点为电势零点，则该处的电势为

$$V=\int_a^0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^0\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+x^2}\right]_a^0=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R-\sqrt{R^2+a^2}\right]$$

第 209 题 |【5082】

真空中一半径为 R 的球面均匀带电 Q，在球心 O 处有一电荷为 q 的点电荷，如图所示。设无穷远处为电势零点，则在球内离球心 O 距离为 r 的 P 点处的电势为



(A) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (B) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{Q}{R}\right)$ (C) $\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (D) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{Q-q}{R}\right)$

答案

B

解析

由高斯定理很容易得到电场强度的分布为

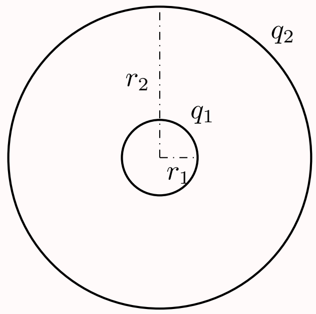
$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\text{当}r<R\text{时})$$
$$E_2=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\text{当}r>R\text{时})$$

当以无穷远处为电势的零点时，P 点处的电势为

$$U=\int_r^{\infty}E\,\mathrm{d}r=\int_r^{R}E_1\,\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=\left[-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_r^R+\left[-\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_R^{\infty}$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

第 210 题 |【1215】

如图所示，两同心带电球面，内球面半径为 $r_1 = 5$ cm，带电荷 $q_1 = 3\times10^{-8}$ C；外球面半径为 $r_2 = 20$ cm，带电荷 $q_2 = -6\times10^{-8}$ C，设无穷远处电势为零，则空间另一电势为零的球面半径 $r =$______。



答案

10 cm

解析

分别计算两个球面的电势分布，再利用电势叠加原理求出总的电势分布。

设均匀带电球面半径为 R，带电量为 Q，则由高斯定理很容易求得电场分布：在球内，电场为零，即 $\vec{E}(r<R)=\vec{E}_1=0$，在球外，电场为

$$\vec{E}(r>R)=\vec{E}_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

再根据电势的定义，当带电体分布在有限区域，通常选择电势零点为无穷远处，所以

$$V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}E\,\mathrm{d}r$$

$$V(r>R)=V_2=\int_r^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V(r<R)=V_1=\int_r^{R}E_1\,\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E_2\,\mathrm{d}r=V_2(R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以，内球面半径 $R=r_1$，带电量 $Q=q_1$，它在空间中所激发的电场的电势分布为

$$V_A(r<r_1)=V_{A1}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$V_A(r>r_1)=V_{A2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

外球面半径 $R=r_2$，带电量 $Q=q_2$，它在空间中所激发的电场的电势分布为

$$V_B(r<r_2)=V_{B1}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$
$$V_B(r>r_2)=V_{B2}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

因此，整个空间总的电势分布为

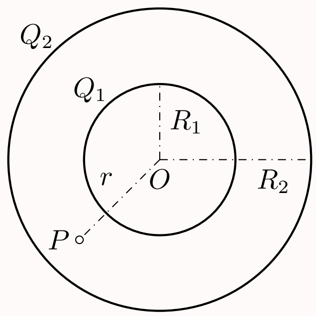
$$V(r<r_1)=V_A(r<r_1)+V_B(r<r_2)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$V(r_1<r<r_2)=V_A(r>r_1)+V_B(r<r_2)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$
$$V(r>r_2)=V_A(r>r_1)+V_B(r>r_2)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{r}\right)$$

代入题目所给的数值，可得，当 $r=10$ cm 时，电势为零。

第 211 题 |【1516】

如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为 R_1、带电荷 Q_1，外球面半径为 R_2、带电荷 Q_2。设无穷远处为电势零点，则在两个球面之间、距离球心为 r 处的 P 点的电势 U 为



(A) $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (B) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ (C) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ (D) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

答案

C

解析

由于电荷分布的球对称性，很容易由高斯定理求出电场分布

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E_1\cdot 4\pi r^2=0\Rightarrow E_1=0(\text{当}r<R_1\text{时})$$
$$E_2\cdot 4\pi r^2=\frac{Q_1}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\text{当}R_1<r<R_2\text{时})$$
$$E_3\cdot 4\pi r^2=\frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_3=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\text{当}r>R_2\text{时})$$

选择无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$U_2=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R_2}E_2\,dr+\int_{R_2}^\infty E_3\,dr=\left[-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_r^{R_2}+\left[-\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{R_2}^\infty$$
$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}(\text{当}R_1<r<R_2\text{时})$$

4.5 静电场中的电偶极子

第 212 题 |【1439】

一电偶极子放在均匀电场中，当电偶极矩的方向与场强方向不一致时，其所受的合力 $\vec{F}$ 和合力矩 $\vec{M}$ 为

(A) $\vec{F}=0$，$\vec{M}=0$ (B) $\vec{F}=0$，$\vec{M}\neq 0$ (C) $\vec{F}\neq 0$，$\vec{M}=0$ (D) $\vec{F}\neq 0$，$\vec{M}\neq 0$

答案

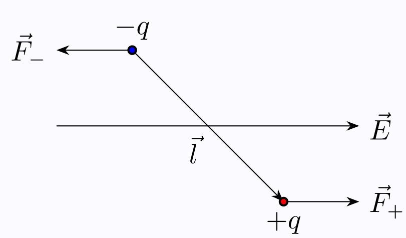
B

解析

如图，当电偶极子放在均匀电场中，正负电荷所受到的静电力的大小相等，方向相反，所以合力为零 (不管电偶极矩方向与场强方向是否一致)。而合力矩

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\vec{r}_-\times\vec{F}_-+\vec{r}_+\times\vec{F}_+=\vec{r}_-\times(-\vec{F}_+)+\vec{r}_+\times\vec{F}_+\\&=(\vec{r}_+-\vec{r}_-)\times\vec{F}_+=\vec{l}\times\vec{F}_+=q\vec{l}\times\vec{E}\end{aligned}$$

所以当电偶极矩方向与场强方向不一致时，$\vec{l}\times\vec{E}\neq 0$，所以 $\vec{M}\neq 0$；当电偶极矩方向与场强方向一致时，$\vec{l}\times\vec{E}=0$，所以 $\vec{M}=0$。



第 213 题 |【1450】

一电矩为 $\vec{p}$ 的电偶极子在场强为 $\vec{E}$ 的均匀电场中，$\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 间的夹角为 θ，则它所受的电场力 $\vec{F}=$_____，力矩的大小 $M=$_____。

答案

0，$pE\sin\theta$

解析

电偶极子是一对相距为 l、带电量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的点电荷对，其电矩定义为 $\vec{p}=q\vec{l}$，其中 $\vec{l}$ 的方向从 $-q$ 指向 $+q$。因此在匀强电场中，两个点电荷所受到的电场力大小相等，方向相反 (一个沿电场强度的方向，一个逆着电场强度的方向)，但不一定在同一条直线上。所以当电偶极子的电矩与电场强度

之间有一定的夹角时，电偶极子受到的是一对力偶。所以这里说的电偶极子所受的电场力，应该是指这对力偶的“合力”，所以为零。而力偶对于任意一点的力矩是常量，其大小为

$$M = Fl\sin\theta = qEl\sin\theta = pE\sin\theta$$

第五章 静电场中的导体与电介质

5.1 静电场中的导体

5.1.1 静电平衡条件

第 214 题 |【1480】

当一个带电导体达到静电平衡时

(A) 表面上电荷密度较大处电势较高

(B) 表面曲率较大处电势较高

(C) 导体内部的电势比导体表面的电势高

(D) 导体内任一点与其表面上任一点的电势差等于零

答案

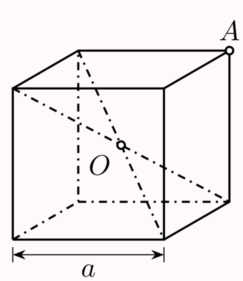
D

解析

静电平衡时，导体内部电场为零，导体是个等势体，导体内任意一点的电势均相等。

第 215 题 |【5108】

静电场中有一立方形均匀导体，边长为 a。已知立方导体中心 O 处的电势为 U_0，则立方体顶点 A 的电势为______。



答案

U_0

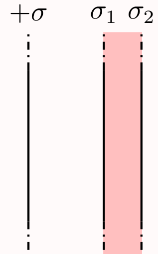
解析

静电平衡时，导体是个等势体，导体上所有点的电势相等。

5.1.2 静电平衡时的电荷分布

第 216 题 |【1138】

一“无限大”均匀带电平面 A，其附近放一与它平行的有一定厚度的“无限大”平面导体板 B，如图所示。已知 A 上的电荷面密度为 $+\sigma$，则在导体板 B 的两个表面 1 和 2 上的感生电荷面密度为



(A) $\sigma_1=-\sigma$，$\sigma_2=+\sigma$

(B) $\sigma_1=-\frac{1}{2}\sigma$，$\sigma_2=+\frac{1}{2}\sigma$

(C) $\sigma_1=+\frac{1}{2}\sigma$，$\sigma_2=-\frac{1}{2}\sigma$

(D) $\sigma_1=-\sigma$，$\sigma_2=0$

答案

B

解析

静电平衡时，导体板内的电场为零，即 B 中任意一点的电场强度为零，而 B 中电场强度可视为三个无限大带电平面所激发的电场的矢量和。

另由于 B 原来不带电，所以两个表面的感应电荷必定等量异号，因此有 $\sigma_1=-\sigma_2$。

而无限大带电平面的电场很容易由高斯定理求得，取一底面与带电平面平行，侧面与带电平面垂直的柱面为高斯面，并设底面积为 S，则有

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot(2S)=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

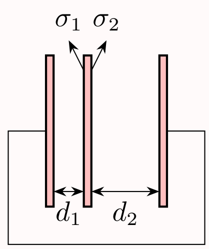
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

所以 B 内任意一点的电场强度为

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0$$
$$\sigma+\sigma_1-\sigma_2=0=\sigma+\sigma_1+\sigma_1=\sigma+2\sigma_1$$
$$\sigma_1=-\frac{\sigma}{2},\sigma_2=-\sigma_1=\frac{\sigma}{2}$$

第 217 题 |【1235】

三块互相平行的导体板，相互之间的距离 d_1 和 d_2 比板面积线度小得多，外面二板用导线连接。中间板上带电，设左右两面上电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2，如图所示。则比值 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 为



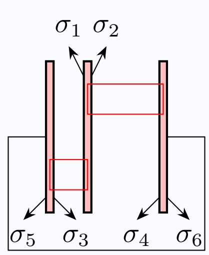
(A) $\frac{d_1}{d_2}$　(B) $\frac{d_2}{d_1}$　(C) 1　(D) $\frac{d_2^2}{d_1^2}$

答案

B

解析

两板用导线连接，整个导体是等势体，所以左右两个导体板电势相等，因此两板与中间板之间的电势差相等。另静电平衡时，导体内电场为零，所以由图两个高斯面很容易求得 $\sigma_3=-\sigma_1$，$\sigma_4=-\sigma_2$，因此还可得 $\sigma_5=\sigma_6$。



所以中间板两侧的电场分别为

$$E_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$
$$E_2=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

方向分别为从中间板指向左右两板，所以左右两板与中间板之间的电势差分别为

$$U_1 = E_1 d_1, U_2 = E_2 d_2$$
$$U_1 = U_2$$
$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_2$$
$$\sigma_1 d_1 = \sigma_2 d_2$$
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

而外面两个导体板原来不带电，可得

$$\sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 = 0$$
$$\sigma_5 = \sigma_6 = -\frac{\sigma_3 + \sigma_4}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

第 218 题 |【1330】

一金属球壳的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，带电荷为 Q。在球心处有一电荷为 q 的点电荷，则球壳内表面上的电荷面密度 $\sigma =$______。

答案

$-\frac{q}{4\pi R_1^2}$

解析

静电平衡时，导体内电场为零，所以球壳内表面所带的电荷为 $-q$，外表面所带的电荷为 $Q+q$，因此球壳内表面的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi R_1^2}$$

5.1.3 静电平衡时的电场分布

第 219 题 |【1644】

在一个带正电荷的金属球附近，放一个带正电的点电荷 q_0，测得 q_0 所受的力为 F，则 $\frac{F}{q_0}$ 的值一定______于不放 q_0 时该点原有的场强大小。(填“大”、“等”、“小”)

答案

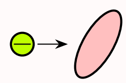
小

解析

当正电荷 q_0 靠近金属球时，金属球上的正电荷发生重新分布，靠近点电荷的球面上的部分电荷转移到远离点电荷的球面上，所以金属球上的电荷在点电荷所在位置所激发的电场大小变小。

第 220 题 |【1175】

如图所示，将一负电荷从无穷远处移到一个不带电的导体附近，则导体内的电场强度______，导体的电势______。(填“增大”、“不变”、“减小”)



答案

不变，减小

解析

静电平衡时，导体内电场为零，所以电荷在移动过程中，导体内的电场保持为零，不变。
而以无穷远处为电势零点时，点电荷的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以负电荷的电势分布为空间电势为负，且越靠近负电荷，电势越低，因此负电荷靠近导体时，导体的电势减小。

第 221 题 |【1171】

选无穷远处为电势零点，半径为 R 的导体球带电后，其电势为 U_0，则球外离球心距离为 r 处的电场强度的大小为

(A) $\frac{R^2U_0}{r^3}$ (B) $\frac{U_0}{R}$ (C) $\frac{RU_0}{r^2}$ (D) $\frac{U_0}{r}$

答案

C

解析

设导体球的带电量为 Q，则由高斯定理很容易求得球外空间的电场分布。选择半径为 r 的同心球面为高斯面，则有

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot(4\pi r^2)=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

以无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$V = \int_r^{\infty} E\,\mathrm{d}r = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以导体球的电势为

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由此可得

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = U_0 R$$

所以球外空间的电场强度的大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{U_0 R}{r^2}$$

第 222 题 |【1357】

一半径为 R 的薄金属球壳，带电荷 $-Q$。设无穷远处电势为零，则球壳内各点的电势 U 可表示为 $(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$

(A) $U < -k\frac{Q}{R}$　　(B) $U = -k\frac{Q}{R}$　　(C) $U > -k\frac{Q}{R}$　　(D) $-k\frac{Q}{R} < U < 0$

答案

B

解析

薄金属球壳，就是金属球面吧。球面内电场为零，球外电场相当于所有电荷集中在球心的情形，即

$$E(r > R) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{kQ}{r^2}$$

$$E(r < R) = 0$$

因此，球面内电势就等于球面上的电势，球外电势为

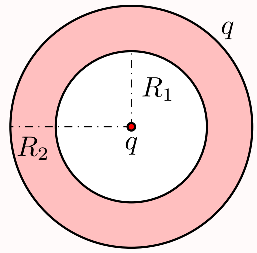
$$U = -\frac{kQ}{r}$$

球面上电势为

$$U = -\frac{kQ}{R}$$

第 223 题 |【1210】

一空心导体球壳，其内、外半径分别为 R_1 和 R_2，带电荷 q，如图所示。当球壳中心处再放一电荷为 q 的点电荷时，则导体球壳的电势 (设无穷远处为电势零点) 为



(A) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ (B) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ (C) $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$ (D) $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$

答案

D

解析

依题意，静电平衡后，球壳内表面带电 $-q$，外表面带电 $2q$。由于带电的球对称性，很容易由高斯定理求得空间各处的电场分布

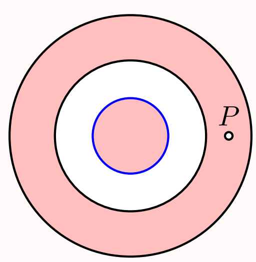
$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r < R_1$$
$$E_2 = 0, R_1 < r < R_2$$
$$E_3 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}, r > R_2$$

设无穷远处为电势零点，则导体球壳的电势为

$$V = \int_{R_2}^{\infty} E\,\mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$$

第 224 题 |【1355】

如图所示，一带负电荷的金属球，外面同心地罩一不带电的金属球壳，则在球壳中一点 P 处的场强大小与电势 (设无穷远处为电势零点) 分别为



(A) $E = 0$，$U > 0$ (B) $E = 0$，$U < 0$ (C) $E = 0$，$U = 0$ (D) $E > 0$，$U < 0$

答案

B

解析

假定金属球带电 $-q$，则静电平衡时，球壳内表面带正电 $+q$，外表面带等量负电 $-q$，而导体内部电场为零，所以 P 处场强的大小 $E=0$。但球壳外电场

$$E=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

方向从无穷远指向球心。所以当以无穷远处为电势零点时，球壳外的电势小于零，所以球壳的电势也小于零。

第 225 题 |【1486】

一任意形状的带电导体，其电荷面密度分布为 $\sigma(x,y,z)$，则在导体表面外附近任意点处的电场强度的大小 $E(x,y,z)=$_____，其方向_____。

答案

$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，垂直表面

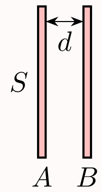
解析

静电平衡时，导体内电场为零，导体是个等势体，导体外电场的方向一定是垂直该处的表面。选择一个微小的圆柱面为高斯面，圆柱面的底面平行于导体表面，一个面在导体内，一个面在导体外，侧面垂直于导体表面，由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=ES=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

第 226 题 |【5119】

如图所示，A、B 为靠得很近的两块平行的大金属平板，两板的面积均为 S，板间的距离为 d。今使 A 板带电荷 q_A，B 板带电荷 q_B，且 $q_A>q_B$。则 A 板的靠近 B 的一侧所带电荷为_____；两板间电势差 $U=$_____。



答案

$\frac{q_A-q_B}{2}$，$\frac{(q_A-q_B)d}{2\varepsilon_0 S}$

解析

根据静电平衡时，导体内部电场为零，以及无限大带电平面的电场公式，假定从左到右四个面的电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4，很容易得到

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \Rightarrow \sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4=0$$
$$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \Rightarrow \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0$$
$$\sigma_1-\sigma_4=0, \sigma_2+\sigma_3=0$$
$$\sigma_1=\sigma_4, \sigma_2=-\sigma_3$$

又根据两块金属板的带电量，有

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{q_A}{S}, \sigma_3+\sigma_4=\frac{q_B}{S}=\sigma_1-\sigma_2$$
$$\sigma_2=\frac{q_A-q_B}{2S}$$
$$Q_2=\sigma_2 S=\frac{q_A-q_B}{2}$$

所以极板间的电场强度为

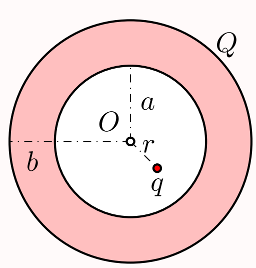
$$E=\frac{\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{q_A-q_B}{2\varepsilon_0 S}$$

因此两板间的电势差为

$$U=Ed=\frac{(q_A-q_B)d}{2\varepsilon_0 S}$$

第 227 题 |【1651】

如图所示，一内半径为 a、外半径为 b 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q。设无限远处为电势零点，试求：(1) 球壳内外表面上的电荷。(2) 球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势。(3) 球心 O 点处的总电势。



解答

(1) 静电平衡时，导体内部电场为零，所以很容易得到，球壳内表面的带电量为 $-q$，所以外表面的带电量为 $Q+q$。注意，此时，由于 q 不在球心，所以球壳内表面的电荷不是均匀分布的，而是在距离 q 近的地方，电荷密度较大，距离 q 远的地方，电荷密度较小。但球壳外表面仍然是均匀分布的。

(2) 根据点电荷的电势公式【以无穷远处为电势零点】

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

和电势叠加原理，将球壳内表面分割成一个个元电荷。注意，任意一个元电荷到球心的距离都是 a，所以虽然电荷不是均匀分布，计算电势时没有影响，

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$V_a=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int\mathrm{d}q=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

(3) 同理，球壳外表面的电荷在球心处的电势为

$$V_b=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

而点电荷 q 在球心处的电势为

$$V_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

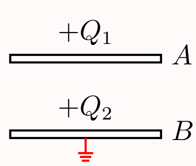
所以球心处的总电势为

$$V=V_a+V_b+V_q=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{a}+\frac{Q+q}{b}+\frac{q}{r}\right]$$

5.1.4 接地

第 228 题 |【1205】

A、B 为两导体大平板，面积均为 S，平行放置，如图所示。A 板带电荷 $+Q_1$，B 板带电荷 $+Q_2$，如果使 B 板接地，则 AB 间电场强度的大小 E 为



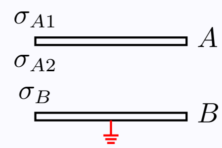
(A) $\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S}$ (B) $\frac{Q_1-Q_2}{2\varepsilon_0 S}$ (C) $\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$ (D) $\frac{Q_1+Q_2}{2\varepsilon_0 S}$

答案

C

解析

依题意，静电平衡且 B 板接地后，设两个板四个面的电荷面密度分别为 σ_{A1}、σ_{A2}、σ_B 和 0，如图。



由于 A 板带电量 Q_1 不变，所以有

$$(\sigma_{A1}+\sigma_{A2})S=Q_1$$

根据无限大带电平面的电场分布

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

且静电平衡时导体内部电场为零，很容易得到，A 板内电场为零，有

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}=0$$
$$\sigma_{A1}-\sigma_{A2}-\sigma_B=0$$

B 板内电场为零，有

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}=0$$
$$\sigma_{A1}+\sigma_{A2}+\sigma_B=0$$

综合以上三式，可得

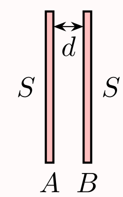
$$\sigma_{A1}+\sigma_{A2}=\frac{Q_1}{S}$$
$$\sigma_{A1}-\sigma_{A2}-\sigma_B=0$$
$$\sigma_{A1}+\sigma_{A2}+\sigma_B=0$$
$$\sigma_{A1}=0,\sigma_{A2}=-\sigma_B=\frac{Q_1}{S}$$

所以 AB 间的电场强度为

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{A1}+\sigma_{A2}-\sigma_B}{2\varepsilon_0}=\frac{2\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0}=\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$$

第 229 题 |【1152】

如图所示，把一块原来不带电的金属板 B，移近一块已带有正电荷 Q 的金属板 A，平行放置。设两板面积都是 S，板间距离是 d，忽略边缘效应。当 B 板不接地时，两板间电势差 $U_{AB}=$______；B 板接地时两板间电势差 $U'_{AB}=$______。



答案

$\frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$，$\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

解析

静电平衡时，设从左到右四个面的电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4，由静电平衡时导体内电场为零可得

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\Rightarrow\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4=0$$
$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\Rightarrow\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0$$
$$\sigma_2+\sigma_3=0,\sigma_1-\sigma_4=0$$

又因为 A 板总的带电量为 Q，B 板不带电，所以有

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{Q}{S},\sigma_3=-\sigma_4$$
$$\sigma_4=\frac{Q}{2S}=\sigma_1=\sigma_2=-\sigma_3$$

所以极板间的电场强度为

$$E=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

所以极板间电势差为

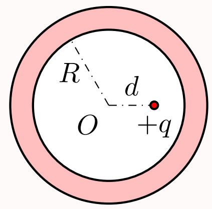
$$U_{AB}=Ed=\frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

当 B 板接地时，有

$$\sigma_2'+\sigma_3'=0,\sigma_1'-\sigma_4'=0$$
$$\sigma_1'+\sigma_2'=\frac{Q}{S},\sigma_4'=0$$
$$\sigma_1'=\sigma_4'=0,\sigma_2'=\frac{Q}{S}=-\sigma_3'$$
$$E'=\frac{\sigma_1'+\sigma_2'-\sigma_3'-\sigma_4'}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_2'}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$
$$U_{AB}'=E'd=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

第 230 题 |【1213】

一个未带电的空腔导体球壳，内半径为 R。在腔内离球心的距离为 d 处 ($d < R$)，固定一点电荷 $+q$，如图所示。用导线把球壳接地后，再把地线撤去。选无穷远处为电势零点，则球心 O 处的电势为



(A) 0　(B) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$　(C) $-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$　(D) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)$

答案

D

解析

依题意，静电平衡后，接地前，球壳内表面带电 $-q$，外表面带电 q。接地后，球壳内表面带电 $-q$，外表面带电 0。所以球心处的电势为点电荷 $+q$ 的电势与内表面的电势的叠加。当选择无穷远处为电势零点时，点电荷 $+q$ 在 O 点的电势为

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

内表面所带电荷 $-q$ 在 O 点的电势为

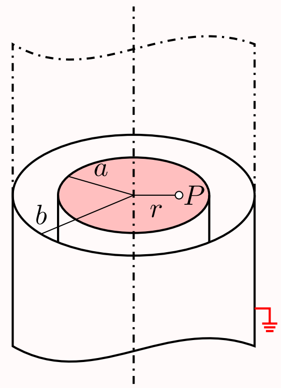
$$V_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以 O 点的总电势为

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)$$

第 231 题 |【1484】

如图所示，一半径为 a 的“无限长”圆柱面上均匀带电，其电荷线密度为 λ。在它外面同轴地套一半径为 b 的薄金属圆筒，圆筒原先不带电，但与地连接。设地的电势为零，则在内圆柱面里面、距离轴线为 r 的 P 点的场强大小和电势分别为



(A) $E=0$，$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$

(B) $E=0$，$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

(C) $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$，$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r}$

(D) $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$，$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

答案

B

解析

由于静电平衡，金属圆筒上带上也与圆柱面等量异号的电荷。
由于电荷分布的轴对称性，很容易由高斯定理求出电场分布

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1\cdot 2\pi rh=0\Rightarrow E_1=0(\text{当}r<a\text{时})$$

$$E_2\cdot 2\pi rh=\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}(\text{当}a<r<b\text{时})$$

$$E_3\cdot 2\pi rh=0\Rightarrow E_3=0(\text{当}r>b\text{时})$$

选择无穷远处为电势零点，则电势分布为

$$U_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^a E_1\,\mathrm{d}r+\int_a^b E_2\,\mathrm{d}r+\int_b^{\infty}E_3\,\mathrm{d}r=\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\right]_a^b=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}(\text{当}r<a\text{时})$$

5.2 电容器 电容

5.2.1 平行板电容器

第 232 题 |【5106】

一平行板电容器充电后切断电源，若使二极板间距离增加，则二极板间场强______，电容______。(填“增大”或“减小”或“不变”)

答案

不变，减小

解析

电容器充电后切断电源，极板上所带电量 Q 保持不变，拉大两板之间距离 d 时，板间电场强度 E 保持不变，所以板间电压 $U=Ed$ 增大，所以电容 $C=\frac{Q}{U}$ 减小。当然也可以直接从平行板电容器的电容公式求得

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

d 增大，C 减小。

第 233 题 |【1371】

已知一平行板电容器，极板面积为 S，两板间隔为 d，其中充满空气。当两极板上加电压 U 时，忽略边缘效应，两极板间的相互作用力 $F=$______。

答案

$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$

解析

根据平行板电容器的电容公式及其与电压和电量之间的关系，有

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{Q}{U}$$

所以极板上的带电量为

$$Q=CU=\frac{\varepsilon_0 S}{d}U$$

其中一个极板 (记为 A) 带 $+Q$，另一个极板 (记为 B) 带 $-Q$。所以 A 极板所受到的电场力是 B 极板上的电荷在 A 极板处所产生的电场作用在 A 极板的电荷上。忽略边缘效应，极板可视为无限大带电平面，所以其电场可由高斯定理求得

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot(2S)=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}=\frac{U}{2d}$$

因此，注意，这里 A 极板在 B 极板处所产生的电场强度的大小仅仅是平行板电容器之间匀强电场的一半。所以极板上的电荷所受到的电场力的大小为

$$F=QE=\frac{\varepsilon_0 S}{d}U\times\frac{U}{2d}=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}$$

5.2.2 电容器的串并联

第 234 题 |【1460】

如果在空气平行板电容器的两极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板，则由于金属板的插入及其相对极板所放位置的不同，对电容器电容的影响为

(A) 使电容减小，但与金属板相对极板的位置无关

(B) 使电容减小，且与金属板相对极板的位置有关

(C) 使电容增大，但与金属板相对极板的位置无关

(D) 使电容增大，且与金属板相对极板的位置有关

答案

C

解析

平行板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

当极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板，可以认为两个极板间的距离变小，所以电容器的电容增大。其实插入金属板，是将一个电容变成两个电容并进行串联，两个新电容器的极板面积不变，间距分别为 d_1 和 d_2，所以两个电容分别为

$$C_1=\frac{\varepsilon S}{d_1},C_2=\frac{\varepsilon S}{d_2}$$

而由电容器串联的公式

$$\frac{1}{C_{12}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d_1}{\varepsilon S}+\frac{d_2}{\varepsilon S}=\frac{d_1+d_2}{\varepsilon S}$$
$$C_{12}=\frac{\varepsilon S}{d_1+d_2}$$

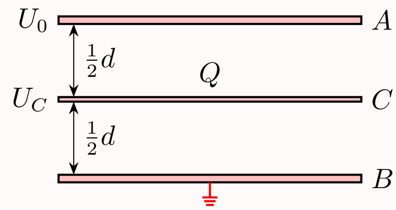
而显然 $d_1+d_2=d-d_0<d$，其中 d_0 为金属板的厚度，所以 $C_{12}>C$，且与金属板的位置无关。

对于空气电容器，以上 $\varepsilon=\varepsilon_0$。

问题：如果金属板不是平行插入，结果将怎么样？

第 235 题 |【1518】

一平行板电容器，极板面积为 S，相距为 d。若 B 板接地，且保持 A 板的电势 $U_A = U_0$ 不变。如图，把一块面积相同的带有电荷为 Q 的导体薄板 C 平行地插入两板中间，则导体薄板 C 的电势 $U_C =$______。



答案

$\frac{U_0}{2} + \frac{Qd}{4\varepsilon_0 S}$

解析

平行板电容器的电容及其与电压和电量之间的关系

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U}$$

所以，依题意，上下两个电容器的电容相等，且均为

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$

假设两个电容器上的电压和电量分别为 U_1、U_2、Q_1、Q_2，则有

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} = C_2 = \frac{Q_2}{U_2}$$

这里要特别注意各个极板带电量的正负和各个极板电势的高低。假定由上到下电势依次降低，则中间导体薄板的上下两个面的带电量分别为 $-Q_1$ 和 Q_2，所以有

$$U_1 + U_2 = U_0$$
$$Q_2 - Q_1 = Q$$

所以，综合以上各式，有

$$C_2U_2 - C_1U_1 = Q$$
$$C_1U_1 + C_1U_2 = C_1U_0$$
$$(C_1 + C_2)U_2 = C_1U_0 + Q$$
$$U_2 = \frac{C_1U_0 + Q}{C_1 + C_2} = \frac{U_0}{2} + \frac{Q}{2 \times \frac{2\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{U_0}{2} + \frac{Qd}{4\varepsilon_0 S}$$

第 236 题 |【1116】

一空气平行板电容器，两极板间距为 d，充电后板间电压为 U。然后将电源断开，在两板间平行地插入一厚度为 $\frac{1}{3}d$ 的金属板，则板间电压变成 $U' =$______。

答案

$\frac{2}{3}U$

解析

电容器充电电源断开后，极板上的带电量保持不变。根据平行板电容器的电容公式及其与电压和电量之间的关系，有

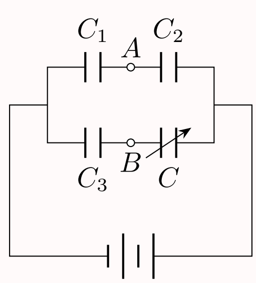
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U}$$
$$U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

插入金属板之后，等效电容的板间距 $d' = d - \frac{1}{3}d = \frac{2}{3}d$，所以板间电压

$$U' = \frac{Qd'}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3}\frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3}U$$

第 237 题 |【1465】

如图所示，电容 C_1、C_2、C_3 已知，电容 C 可调，当调节到 A、B 两点电势相等时，电容 $C =$______。



答案

$\frac{C_2C_3}{C_1}$

解析

依题意，A、B 两点电势相等，则说明 C_1 和 C_3 的电压相同，C_2 和 C 的电压相同，而 C_1 和 C_2 串联，C_3 和 C 串联，则说明 C_1 和 C_2 的带电量相等，C_3 和 C 的带电量相等，即有

$$U_1 = U_3, U_2 = U, Q_1 = Q_2, Q_3 = Q$$

$$C_1U_1 = C_2U_2, C_3U_3 = CU$$
$$C = \frac{U_3}{U}C_3 = \frac{U_1}{U_2}C_3 = \frac{C_2}{C_1}C_3 = \frac{C_2C_3}{C_1}$$

5.3 静电场中的电介质

5.3.1 电介质对电场、电容的影响

第 238 题 |【1358】

设有一个带正电的导体球壳。当球壳内充满电介质、球壳外是真空时，球壳外一点的场强大小和电势用 E_1，U_1 表示；而球壳内、外均为真空时，壳外一点的场强大小和电势用 E_2，U_2 表示，则两种情况下壳外同一点处的场强大小和电势大小的关系为

(A) $E_1 = E_2$，$U_1 = U_2$　(B) $E_1 = E_2$，$U_1 > U_2$　(C) $E_1 > E_2$，$U_1 > U_2$　(D) $E_1 < E_2$，$U_1 < U_2$

答案

A

解析

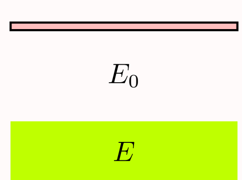
有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$$

导体球壳，当壳内空腔不带电时，电荷只分布在外表面，不管腔内是介质还是真空，腔内均无电场，而壳外空间的电场和电势均相当于球壳所带电荷全部集中在球心时的情况。题目所给两种情况，壳外空间均为真空，所以壳外空间的电场强度没有发生变化，当都以无穷远处为电势零点，或者选择任意同一个位置为电势零点，壳外同一位置的电势保持不变。

第 239 题 |【1345】

在空气平行板电容器中，平行地插上一块各向同性均匀电介质板，如图所示。当电容器充电后，若忽略边缘效应，则电介质中的场强 E 与空气中的场强 E_0 相比较，应有



(A) $E > E_0$，两者方向相同　(B) $E = E_0$，两者方向相同
(C) $E < E_0$，两者方向相同　(D) $E < E_0$，两者方向相反

答案

C

解析

有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$$

充电之后，极板上所带电荷保持不变，选择两个不同的高斯柱面，柱面的底面与极板平行，一个底面在极板内，另一个底面分别在介质中和空气中，侧面与极板垂直，很容易求得介质和空气中的电位移矢量相等，即 $\vec{D} = \vec{D}_0$。所以

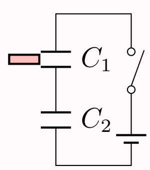
$$\varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

所以二者方向相同，大小满足

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_r} < 1$$

第 240 题 |【1325】

C_1 和 C_2 两空气电容器串联起来接上电源充电。然后将电源断开，再把一电介质板插入 C_1 中，如图所示。则



(A) C_1 上电势差减小，C_2 上电势差增大
(B) C_1 上电势差减小，C_2 上电势差不变
(C) C_1 上电势差增大，C_2 上电势差减小
(D) C_1 上电势差增大，C_2 上电势差不变

答案

B

解析

电容器充电后与电源断开，极板上所带电荷量不会发生变化。电容器的电容

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}$$

当电容器中插入介质，电容器的电容增大，所以电容器极板间的电势差减小。
所以，对于 C_1，电容增大，电荷不变，电势差减小；对于 C_2，电容不变，电荷不变，电势差不变。

5.3.2 相对介电常数

第 241 题 |【1631】

两个点电荷在真空中相距 $d_1 = 7$ cm 时的相互作用力与在煤油中相距 $d_2 = 5$ cm 时的相互作用力相等，则煤油的相对介电常量 $\varepsilon_r =$______。

答案

1.96

解析

点电荷之间的库仑相互作用是施力电荷在空间中激发电场，再作用在受力电荷上。所以介质中的库仑定律可以写成

$$\vec{F} = q_1\vec{E} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$

所以，依题意，有

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 \times 0.07^2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \times 0.05^2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{0.07^2}{0.05^2} = \frac{49}{25} = 1.96$$

5.4 有电介质时的高斯定理

5.4.1 电位移矢量

第 242 题 |【1104】

在相对介电常量为 ε_r 的各向同性的电介质中，电位移矢量与场强之间的关系是______。

答案

$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

解析

各向同性的电介质中，电位移矢量为 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$。

5.4.2 有电介质时的高斯定理

第 243 题 |【1099】

关于高斯定理，下列说法中哪一个是正确的？

(A) 高斯面内不包围自由电荷，则面上各点电位移矢量 $\vec{D}$ 为零

(B) 高斯面上处处 $\vec{D}$ 为零，则面内必不存在自由电荷

(C) 高斯面的 $\vec{D}$ 通量仅与面内自由电荷有关

(D) 以上说法都不正确

答案

C

解析

通过任意一个封闭曲面的电位移矢量的通量，等于高斯面所包围体积中自由电荷的代数和。

$$\oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q_0$$

但是高斯面上各点的电场强度以及电位移矢量是由所有电荷所激发产生的，不仅仅包括面内的电荷，也包括面外的电荷，不仅仅包括自由电荷，也包括束缚电荷。如果高斯面上处处 $\vec{D}$ 为零，只能说明高斯面内所含的自由电荷的代数和为零，可能包含等量的正电荷和负电荷。

第 244 题 |【5621】

在静电场中，作闭合曲面 S，若有 $\oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$(式中 $\vec{D}$ 为电位移矢量)，则 S 面内必定

(A) 既无自由电荷，也无束缚电荷

(B) 没有自由电荷

(C) 自由电荷和束缚电荷的代数和为零

(D) 自由电荷的代数和为零

答案

D

解析

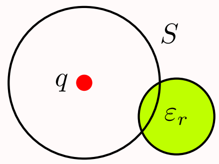
有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q_0$$

公式右边为高斯面 S 所包围体积中所有自由电荷的代数和。

第 245 题 |【1454】

在一点电荷 q 产生的静电场中，一块电介质如图放置，以点电荷所在处为球心作一球形闭合面 S，则对此球形闭合面



(A) 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强
(B) 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强
(C) 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立
(D) 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立

答案

B

解析

有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_0$$

高斯定理对于任意电场中的任意封闭曲面均成立。但要用它来求电场时，通常要求电荷分布具有某种对称性，并根据对称性选择适当的高斯面，目的在于能够把上式左边的电位移通量积分出来，所以要求所选择的高斯面至少是分成若干区域，在每个区域上电位移通量可以表示成电位移矢量的大小与面积的乘积。

第 246 题 |【5281】

一平行板电容器始终与端电压一定的电源相联。当电容器两极板间为真空时，电场强度为 $\vec{E}_0$，电位移为 $\vec{D}_0$，而当两极板间充满相对介电常量为 ε_r 的各向同性均匀电介质时，电场强度为 $\vec{E}$，电位移为 $\vec{D}$，则

(A) $\vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$，$\vec{D}=\vec{D}_0$　(B) $\vec{E}=\vec{E}_0$，$\vec{D}=\varepsilon_r\vec{D}_0$　(C) $\vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$，$\vec{D}=\frac{\vec{D}_0}{\varepsilon_r}$　(D) $\vec{E}=\vec{E}_0$，$\vec{D}=\vec{D}_0$

答案

B

解析

当电容器的极板始终与电源相联，则极板两端的电压保持不变。而极板间距保持不变，所以板间的电场强度保持不变，$\vec{E}=\vec{E}_0$。平行板电容器的电容为

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

介质不同，电容不同，极板上所带电量不同。由有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_0$$

板间的电位移矢量不同。

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_0=\varepsilon_r\vec{D}_0$$

第 247 题 |【1390】

一个半径为 R 的薄金属球壳，带有电荷 q，壳内真空，壳外是无限大的相对介电常量为 ε_r 的各向同性均匀电介质。设无穷远处为电势零点，则球壳的电势 $U=$______。

答案

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$

解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，由高斯定理很容易求得球外空间的电场强度。

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q$$
$$D\cdot(4\pi r^2)=q$$
$$D=\frac{q}{4\pi r^2}=\varepsilon_0\varepsilon_r E$$
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

所以，以无穷远处为电势零点，球壳的电势为

$$V=\int_R^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_R^\infty E\,\mathrm{d}r=\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

第 248 题 |【1629】

一个带电荷 q、半径为 R 的金属球壳，壳内是真空，壳外是介电常量为 ε 的无限大各向同性均匀电介质，则此球壳的电势 $U=$______。

答案

$\frac{q}{4\pi\varepsilon R}$

解析

由于电荷分布具有球对称性，所以电场分布也具有球对称性，由高斯定理很容易求得球外空间的电场强度。

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q$$
$$D\cdot(4\pi r^2) = q$$
$$D = \frac{q}{4\pi r^2} = \varepsilon E$$
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

所以，以无穷远处为电势零点，球壳的电势为

$$V = \int_R^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_R^{\infty} E\,\mathrm{d}r = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

第 249 题 |【1105】

半径为 R_1 和 R_2 的两个同轴金属圆筒，其间充满着相对介电常量为 ε_r 的均匀介质。设两筒上单位长度带有的电荷分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，则介质中离轴线的距离为 r 处的电位移矢量的大小 $D =$_____，电场强度的大小 $E =$_____。

答案

$\frac{\lambda}{2\pi r}$，$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

解析

由于电荷分布具有轴对称性，所以电场分布也具有轴对称性，所以可以使用高斯定理来计算电场。选择与圆筒同轴的、半径为 r、高度为 h 的圆柱面为高斯面，根据有电介质时的高斯定理，有

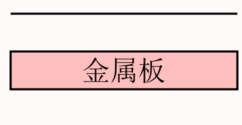
$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q$$
$$D\cdot(2\pi rh) = \lambda h$$
$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$
$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

5.5 静电场的能量 能量密度

5.5.1 电容器的能量

第 250 题 |【1524】

将一空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，断开电源。再将一块与极板面积相同的金属板平行地插入两极板之间，如图所示，则由于金属板的插入及其所放位置的不同，对电容器储能的影响为



(A) 储能减少，但与金属板相对极板的位置无关 (B) 储能减少，且与金属板相对极板的位置有关
(C) 储能增加，但与金属板相对极板的位置无关 (D) 储能增加，且与金属板相对极板的位置有关

答案

A

解析

平行板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}=\frac{Q}{U}$$

充电后与电源断开，极板上所带电量 Q 保持不变，插入金属板，d 减小，所以电容 C 增大，电压 U 减小。但电量不变，由高斯定理可得，电场 E 不变。而电场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$$

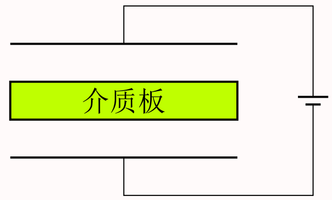
所以电场能量密度不变，但电场存在的区域变小，所以电场能量减小。
也可以由电场能量

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2C}Q^2$$

电量保持不变，电容增大，所以电场能量减小。

第 251 题 |【1533】

将一空气平行板电容器接到电源上充电到一定电压后，在保持与电源连接的情况下，把一块与极板面积相同的各向同性均匀电介质板平行地插入两极板之间，如图所示。介质板的插入及其所处位置的不同，对电容器储存电能的影响为



(A) 储能减少，但与介质板相对极板的位置无关 (B) 储能减少，且与介质板相对极板的位置有关
(C) 储能增加，但与介质板相对极板的位置无关 (D) 储能增加，且与介质板相对极板的位置有关

答案

C

解析

平行板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}=\frac{Q}{U}$$

在保持与电源连接的情况下，极板间的电压 U 保持不变，插入介质板，把一个电容器变成三个串联的电容器，三个电容分别为

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1},C_2=\frac{\varepsilon S}{d_2},C_3=\frac{\varepsilon_0 S}{d_3}$$

根据电容的串联公式

$$\frac{1}{C_{123}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}=\frac{d_1}{\varepsilon_0 S}+\frac{d_2}{\varepsilon S}+\frac{d_3}{\varepsilon_0 S}=\frac{d_1+d_2/\varepsilon_r+d_3}{\varepsilon_0 S}$$
$$C_{123}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1+d_2/\varepsilon_r+d_3}$$

而显然 $d_1+\frac{d_2}{\varepsilon_r}+d_3<d_1+d_2+d_3=d$，所以

$$C_{123}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1+d_2/\varepsilon_r+d_3}>\frac{\varepsilon_0 S}{d}=C$$

即电容增大。
而由电容器的电场能量

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2C}Q^2$$

电压保持不变，电容增大，所以电场能量增大。

5.5.2 静电场的能量

第 252 题 |【1218】

一个平行板电容器，充电后与电源断开，当用绝缘手柄将电容器两极板间距离拉大，则两极板间的电势差 U_{12}、电场强度的大小 E、电场能量 W 将发生如下变化

(A) U_{12} 减小，E 减小，W 减小
(B) U_{12} 增大，E 增大，W 增大
(C) U_{12} 增大，E 不变，W 增大
(D) U_{12} 减小，E 不变，W 不变

答案

C

解析

电容器充电后与电源断开，极板上所带电荷量不会发生变化。电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}=\frac{Q}{U}$$

当极板间距离 d 增大，电容器的电容 C 减小，Q 不变，所以极板间的电势差 U 增大。而由高斯定理，极板上电荷量不变，板间电场强度不变，距离拉大，板间电势差也必然增大。
而电场强度不变，所以板间的电场能量密度

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

不变，但距离拉大时，板间电场分布的区域的体积增大，所以总的电场能量增大。

第 253 题 |【1224】

一空气平行板电容器充电后与电源断开，然后在两极板间充满某种各向同性、均匀电介质，则电场强度的大小 E、电容 C、电压 U、电场能量 W 四个量各自与充入介质前相比较，增大 $(\uparrow)$ 或减小 $(\downarrow)$ 的情形为

(A) $E\uparrow$，$C\uparrow$，$U\uparrow$，$W\uparrow$
(B) $E\downarrow$，$C\uparrow$，$U\downarrow$，$W\downarrow$
(C) $E\downarrow$，$C\uparrow$，$U\uparrow$，$W\downarrow$
(D) $E\uparrow$，$C\downarrow$，$U\downarrow$，$W\uparrow$

答案

B

解析

平行板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}=\frac{Q}{U}$$

充电后与电源断开，极板上所带电量 Q 保持不变，插入介质，ε 增大，所以电容 C 增大，电压 U 减小，

极板间距不变，所以电场强度 E 减小。
当然也可以由有电介质时的高斯定理可得，电量不变，电位移矢量不变，介电常数增大，所以电场强度减小，间距不变，所以电压减小。
而电场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$$

所以电位移矢量不变，电场强度减小，所以电场能量密度减小，电场能量减小。
也可以由电场能量

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2C}Q^2$$

电量保持不变，电容增大，所以电场能量减小。

第 254 题 |【1207】

一平行板电容器，充电后切断电源，然后使两极板间充满相对介电常量为 ε_r 的各向同性均匀电介质。此时两极板间的电场强度是原来的_____ 倍；电场能量是原来的_____ 倍。

答案

$\frac{1}{\varepsilon_r}$，$\frac{1}{\varepsilon_r}$

解析

平行板电容器充电后切断电源，则极板上所带的电荷保持不变。因此由有电介质时的高斯定理可知，插入介质前后，极板间的电位移矢量保持不变，所以电场强度发生变化。

$$D=\varepsilon_0 E$$
$$D'=\varepsilon_0\varepsilon_r E'$$
$$D=D'$$
$$E'=\frac{E}{\varepsilon_r}$$
$$U'=E'd=\frac{E}{\varepsilon_r}d=\frac{U}{\varepsilon_r}$$
$$W_e'=\frac{1}{2}Q'U'=\frac{1}{2}Q\frac{U}{\varepsilon_r}=\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{2}QU\right)=\frac{1}{\varepsilon_r}W_e$$

第 255 题 |【1220】

一空气电容器充电后切断电源，电容器储能 W_0，若此时在极板间灌入相对介电常量为 ε_r 的煤油，则电容器储能变为 W_0 的_____ 倍。如果灌煤油时电容器一直与电源相连接，则电容器储能将是 W_0 的_____

倍。

答案

$\frac{1}{\varepsilon_r}$，ε_r

解析

电容器充电后切断电源，极板上所带电量 Q 保持不变，极板间灌入介质时，改变了电容器的电容，从而改变了电场能量。

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=\varepsilon_r C$$

$$W'=\frac{Q^2}{2C'}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_r C}=\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{\varepsilon_r}W_0$$

若电容器一直与电源相连接，则极板间电压 U 保持不变，极板间灌入介质时，改变了电容器的电容，从而改变了电场能量。

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=\varepsilon_r C$$

$$W'=\frac{1}{2}C'U^2=\frac{1}{2}\varepsilon_r CU^2=\varepsilon_r\frac{1}{2}CU^2=\varepsilon_r W_0$$

第 256 题 |【1123】

如果某带电体其电荷分布的体密度 ρ 增大为原来的 2 倍，则其电场的能量变为原来的

(A) 2 倍　　(B) $\frac{1}{2}$ 倍　　(C) 4 倍　　(D) $\frac{1}{4}$ 倍

答案

C

解析

由点电荷的电场场强

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

当电荷分布的体密度 ρ 增大为原来的 2 倍，电场强度也增大为原来的两倍。

而电场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

所以电场能量密度增大为原来的四倍，电场能量也变为原来的四倍。

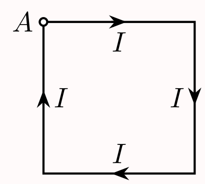
第七章　稳恒磁场

7.1　毕奥-萨伐尔定律

7.1.1　磁场叠加原理

第 257 题 |【2020】

边长为 l 的正方形线圈中通有电流 I，此线圈在 A 点 (见图) 产生的磁感强度 B 为



(A) $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$　(B) $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$　(C) $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$　(D) 以上均不对

答案

A

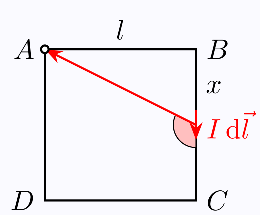
解析

毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

所以，AB 段，由于 $\mathrm{d}\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 成 $180°$，DA 段，$\mathrm{d}\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 成 $0°$，所以这两段在 A 点产生的磁场均为零。对于 BC 段上任意一个电流元 $I\,\mathrm{d}\vec{l}$，它在 A 点产生的磁场的方向都是垂直纸面向里，大小为

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I|\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}x)r\sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}x)\sin^3\theta}{r^2\sin^2\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}x)\sin^3\theta}{l^2}$$



而

$$x=-\frac{l\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\mathrm{d}x=-l\frac{-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\mathrm{d}B_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\times\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\times\sin^3\theta}{l^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l}$$

$$B_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l}=\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi l}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi l}$$

同理，可以求得 CD 段在 A 点产生的磁场，方向也是垂直纸面向里，大小为

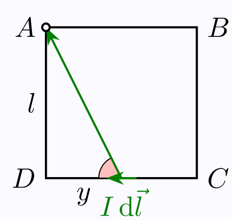
$$\mathrm{d}B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(-\,\mathrm{d}y)\sin^3\theta}{l^2}$$

$$y=\frac{l\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\mathrm{d}y=l\frac{-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\times\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\times\sin^3\theta}{l^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l}$$

$$B_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l}=\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi l}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi l}$$



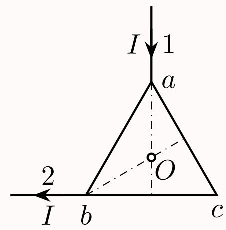
所以 A 点的总磁感应强度为

$$B=B_1+B_2=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$$

方向垂直纸面向里。

第 258 题 |【5468】

电流 I 由长直导线 1 沿垂直 bc 边方向经 a 点流入由电阻均匀的导线构成的正三角形线框，再由 b 点流出，经长直导线 2 沿 cb 延长线方向返回电源 (如图)。若载流直导线 1、2 和三角形框中的电流在框中心 O 点产生的磁感强度分别用 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 和 $\vec{B}_3$ 表示，则 O 点的磁感强度大小



(A) $B=0$，因为 $B_1=B_2=B_3=0$

(B) $B=0$，因为虽然 $B_1\neq 0$、$B_2\neq 0$，但 $\vec{B}_1+\vec{B}_2=0$，$B_3=0$

(C) $B\neq 0$，因为虽然 $B_3=0$、$B_1=0$，但 $B_2\neq 0$

(D) $B\neq 0$，因为虽然 $\vec{B}_1+\vec{B}_2\neq 0$，但 $B_3\neq 0$

答案

C

解析

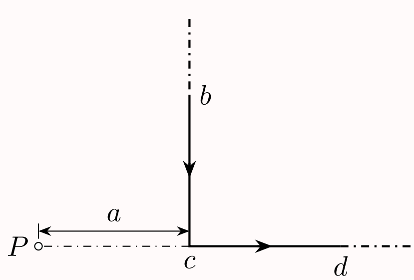
毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

因为直导线 1 通过 O 点，所以 $B_1=0$。而正三角形线框电阻均匀，所以 $R_{acb}=2R_{ab}$，所以通过两条支路的电流 $I_{ab}=2I_{acb}$。ac 段和 cb 段在 O 点产生的磁场大小相等，方向都是垂直纸面向里，而 ab 段在 O 点产生的磁场的方向垂直纸面向外，大小为 ac 段的两倍 (因为电流是两倍关系)，所以三角形线框在 O 点产生的总磁场 $B_3=0$。而对于直导线 2，每一个电流元在 O 点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向里，所以 $B_2\neq 0$。

第 259 题 |【2023】

一条无限长载流导线折成如图示形状，导线上通有电流 $I=10$ A。P 点在 cd 的延长线上，它到折点的距离 $a=2$ cm，则 P 点的磁感强度 $B=$______。



答案

5×10^{-5} T

解析

电流元的磁场公式

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$ 为从电流元所在位置指向所求位置的矢量。由此也可见，如果 $\mathrm{d}\vec{l}\parallel\vec{r}$，那么 $\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}=0$，该电流元在场点所激发的磁场为零。所以 cd 段在 P 点的磁场为零。

而 ab 段上的电流元在 P 点的磁场的方向都是垂直纸面向里，大小可以通过积分得到，也可以通过对称性分析得出它是 ab 所在直线的无限长通电直线的磁场的一半，而无限长通电直线的磁场可以通过安培环路定理求得：

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以所求磁场为

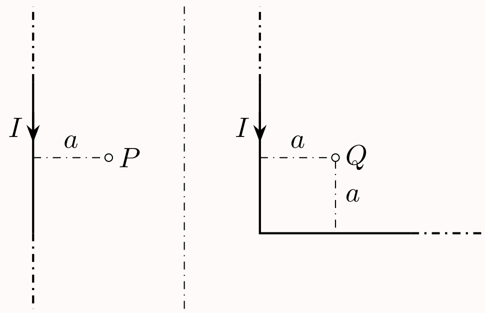
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{4\pi\times0.02}=5\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

下面根据磁场叠加原理直接通过积分来求磁场

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B&=\frac{\mu_0 I(-\mathrm{d}z)\sin\theta}{4\pi(z^2+a^2)}=-\frac{\mu_0 I a\,\mathrm{d}z}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}}\\&=-\frac{\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}(a/\tan\theta)}{4\pi(a/\sin\theta)^2}=-\frac{\mu_0 I\sin^3\theta a(-\sin^{-2}\theta\,\mathrm{d}\theta)}{4\pi a^2}=\frac{\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi a}\\B&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi a}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(-\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\end{aligned}$$

第 260 题 |【2354】

通有电流 I 的无限长直导线有如图三种形状，则 P，Q，O 各点磁感强度的大小 B_P，B_Q，B_O 间的关系为



(A) $B_P > B_Q > B_O$ (B) $B_Q > B_P > B_O$ (C) $B_Q > B_O > B_P$ (D) $B_O > B_Q > B_P$

答案

D

解析

毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

第一种情况可以用安培环路定理求磁场

$$B_P\cdot(2\pi a) = \mu_0 I$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

第二种情况是用直线电流的磁场来计算

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}l)r\sin\theta}{r^3}$$

$$l = -r\cos\theta, a = r\sin\theta \Rightarrow \frac{l}{a} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow l = -a\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \mathrm{d}l = \frac{a}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\theta\frac{a}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$B_Q = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[(-\cos\theta)_0^{\frac{3\pi}{4}} + (-\cos\theta)_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

第三种情况分成两个半无限长直线和一个半圆弧来计算

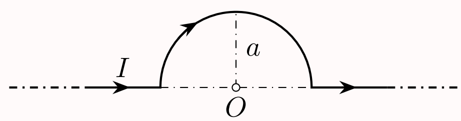
$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right] + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int \mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \times 2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \times \pi a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[1 + \frac{\pi}{2}\right]$$

所以显然有 $B_O > B_Q > B_P$。其实，后两种情况中的两个半无限长部分所产生的磁场，就是第一种情况，所以剩下的就是比较多余那部分的磁场了，而第三种情况中，每一个电流元的磁场都比第二种的大，而且第三种的电流元还更长，所以答案其实是显然的。

第 261 题 |【2562】

在真空中，将一根无限长载流导线在一平面内弯成如图所示的形状，并通以电流 I，则圆心 O 点的磁感强度 B 的值为______。



答案

$\frac{\mu_0 I}{4a}$

解析

电流元的磁场公式

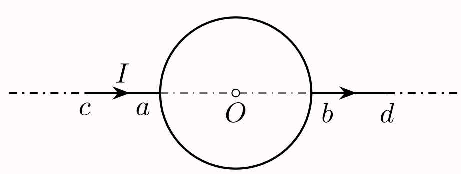
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I\, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算半圆产生的磁场叠加即可。
半圆产生的磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int_L \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \cdot \pi a = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

第 262 题 |【2353】

如图所示，电流从 a 点分两路通过对称的圆环形分路，汇合于 b 点。若 ca、bd 都沿环的径向，则在环形分路的环心处的磁感强度



(A) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸内　　(B) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸外
(C) 方向在环形分路所在平面，且指向 b　　(D) 方向在环形分路所在平面内，且指向 a
(E) 为零

答案

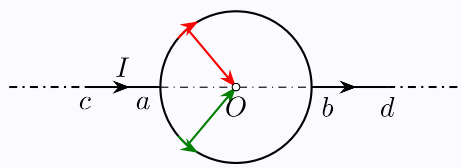
E

解析

毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

圆环形分路是对称的，所以上下两个分路的电流是相等的，均为 $\frac{1}{2}I$。



任意一个电流元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 与相应的 $\vec{r}$ 都成 90°，所以

$$\frac{|\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}|}{r^3}=\frac{\mathrm{d}l}{R^2}$$

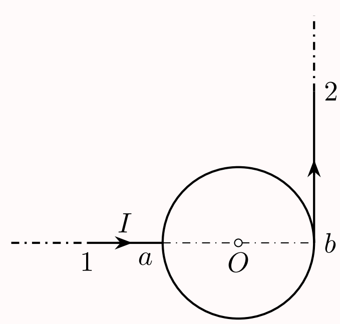
上分路产生的磁场的方向垂直纸面向里，下分路产生的磁场的方向垂直纸面向外，大小相等，均为

$$B=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{2R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{2R^2}\int\mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{2R^2}\times\pi R=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

所以总磁感应强度为 0。

第 263 题 |【5470】

电流由长直导线 1 沿半径方向经 a 点流入一电阻均匀的圆环，再由 b 点沿切向从圆环流出，经长导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上电流强度为 I，圆环的半径为 R，且 a、b 与圆心 O 三点在同一直线上。设直电流 1、2 及圆环电流分别在 O 点产生的磁感强度为 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 及 $\vec{B}_3$，则 O 点的磁感强度的大小



(A) $B=0$，因为 $B_1=B_2=B_3=0$

(B) $B=0$，因为 $\vec{B}_1+\vec{B}_2=0$，$B_3=0$

(C) $B \neq 0$，因为虽然 $B_1 = B_3 = 0$，但 $B_2 \neq 0$ (D) $B \neq 0$，因为虽然 $B_1 = B_2 = 0$，但 $B_3 \neq 0$
(E) $B \neq 0$，因为虽然 $B_2 = B_3 = 0$，但 $B_1 \neq 0$

答案

C

解析

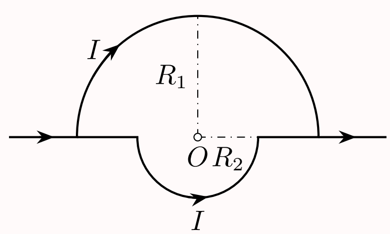
毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

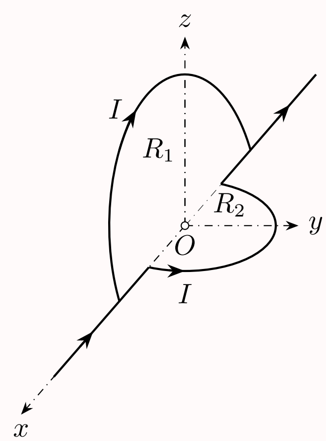
因为直导线 1 通过 O 点，所以 $B_1 = 0$。而圆环电阻均匀，所以通过两条支路的电流相等，所以两条支路在 O 点激发的磁场大小相等，方向相反，左边支路产生的磁场垂直纸面向外，右边支路产生的磁场垂直纸面向里，所以 $B_3 = 0$。而对于直导线 2，每一个电流元在 O 点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向外，所以 $B_2 \neq 0$。

第 264 题 |【2043】

真空中稳恒电流 I 流过两个半径分别为 R_1，R_2 的同心半圆形导线，两半圆导线间由沿直径的直导线连接，电流沿直导线流入。(1) 如果两个半圆共面，圆心 O 点的磁感强度 $\vec{B}_0$ 的大小为_____，方向为_____；



(2) 如果两个半圆面正交，则圆心 O 点的磁感强度 $\vec{B}_0$ 的大小为_____，$\vec{B}_0$ 的方向与 y 轴的夹角为_____。



答案

(1)$\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$，垂直纸面向外，(2)$\frac{\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}}$，$\pi-\arctan\frac{R_1}{R_2}$

解析

电流元的磁场公式

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

(1) 左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算两个半圆产生的磁场叠加即可。
上半圆，磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\int_{L_1}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\cdot\pi R_1=\frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

半圆，磁场的方向垂直纸面向外，大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2}\int_{L_2}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2}\cdot\pi R_2=\frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向外，大小为

$$B=B_2-B_1=\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4R_1}=\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

(2) 同样地，沿 x 轴方向的两段电流产生的磁场为零，只要计算两个半圆的磁场即可。
xz 平面上的半圆，产生的磁场的方向沿 y 轴负方向，大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

xy 平面上的半圆，产生的磁场的方向沿 z 轴正方向，大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以总的磁场为

$$\vec{B}=-B_1\,\vec{e}_y+B_2\,\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 I}{4R_1}\,\vec{e}_y+\frac{\mu_0 I}{4R_2}\,\vec{e}_z$$

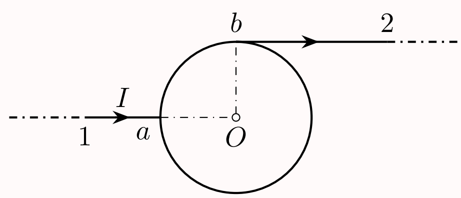
$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}}$$

与 y 轴正方向的夹角为 φ

$$\varphi=\pi-\arctan\frac{B_2}{B_1}=\pi-\arctan\frac{R_1}{R_2}$$

第 265 题 |【5481】

在真空中，电流由长直导线 1 沿半径方向经 a 点流入一由电阻均匀的导线构成的圆环，再由 b 点沿切向流出，经长直导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上的电流强度为 I，圆环半径为 R，$\angle aOb=90°$。则圆心 O 点处的磁感强度的大小 $B=$______。



答案

$\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

解析

电流可以分成四段，长直导线 1 的电流指向 O 点，所以产生的磁场为零，即 $B_1=0$。直导线 2 产生的磁场是无限长直导线的一半，即

$$B_2=\frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

这个磁场的方向垂直纸面向里。电流进入圆环后分成两个部分，由于电阻均匀，所以电流与电阻成反比，流经四分之三圆的电流为 $I_3=\frac{1}{4}I$，流经四分之一圆的电流为 $I_4=\frac{3}{4}I$，两个电流的磁场方向相反，I_3 的磁场垂直纸面向外，大小为

$$B_3=\frac{\mu_0\frac{1}{4}I}{4\pi R^2}\cdot\frac{3}{4}(2\pi R)=\frac{3\mu_0 I}{32R}$$

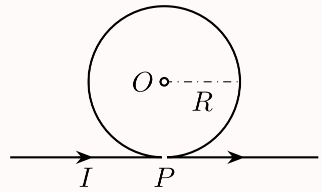
I_4 的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_4=\frac{\mu_0\frac{3}{4}I}{4\pi R^2}\cdot\frac{1}{4}(2\pi R)=\frac{3\mu_0 I}{32R}$$

所以总的磁场垂直纸面向里，大小 $B=B_1+B_2-B_3+B_4=B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$。

第 266 题 |【5125】

一根无限长直导线通有电流 I，在 P 点处被弯成了一个半径为 R 的圆，且 P 点处无交叉和接触，则圆心 O 处的磁感强度大小为______，方向为______。



答案

$\frac{\mu_0 I(\pi-1)}{2\pi R}$，垂直纸面向里

解析

整个电流分成三段，两个半无限长直导线等效于一根无限长直导线，再加一个圆形导线。
无限长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1 \cdot (2\pi R) = \mu_0 I$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

其方向垂直纸面向外。圆形电流的磁场可以用电流元的磁场直接积分得到，方向垂直纸面向里，大小为

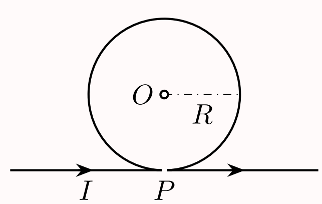
$$B_2 = \oint_{L_2} \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}l}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I(2\pi R)}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向里，大小

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I(\pi-1)}{2\pi R}$$

第 267 题 |【2016】

无限长直导线在 P 处弯成半径为 R 的圆，当通以电流 I 时，则在圆心 O 点的磁感强度大小等于



(A) $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (B) $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ (C) 0 (D) $\frac{\mu_0 I}{2R}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$ (E) $\frac{\mu_0 I}{4R}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$

答案

D

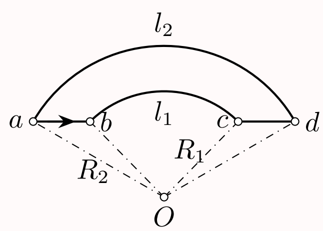
解析

题目要求的圆心的磁场可以看成一根无限长直导线和一个圆形线圈分别产生的磁场之和。无限长直导线的磁场可以通过安培环路定理求得【大小设为 B_1，方向垂直纸面向外】，圆形线圈的磁场可以利用磁场叠加原理求得【大小设为 B_2，方向垂直纸面向里】。

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B_1(2\pi R) = \mu_0 I$$
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$
$$B_2 = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\times(2\pi R) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$
$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$$

第 268 题 |【2251】

有一条载有电流 I 的导线弯成如图示 $abcda$ 形状。其中 ab、cd 是直线段，其余为圆弧。两段圆弧的长度和半径分别为 l_1、R_1 和 l_2、R_2，两段圆弧共面共心。求圆心 O 处的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小。



解答

电流元的元磁场为

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

可见，$abcd$ 段在 O 点的磁场是垂直纸面向里，da 段在 O 点的磁场是垂直纸面向外，圆弧段的磁场比较容易算，先算两个圆弧的磁场。

bc 圆弧段的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_{bc} = \int_b^c \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R_1^2} = \frac{\mu_0 I l_1}{4\pi R_1^2}$$

da 圆弧段的磁场垂直纸面向外，大小为

$$B_{da} = \int_d^a \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R_2^2} = \frac{\mu_0 I l_2}{4\pi R_2^2}$$

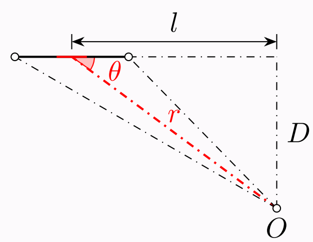
下面再计算两个直线段的磁场。

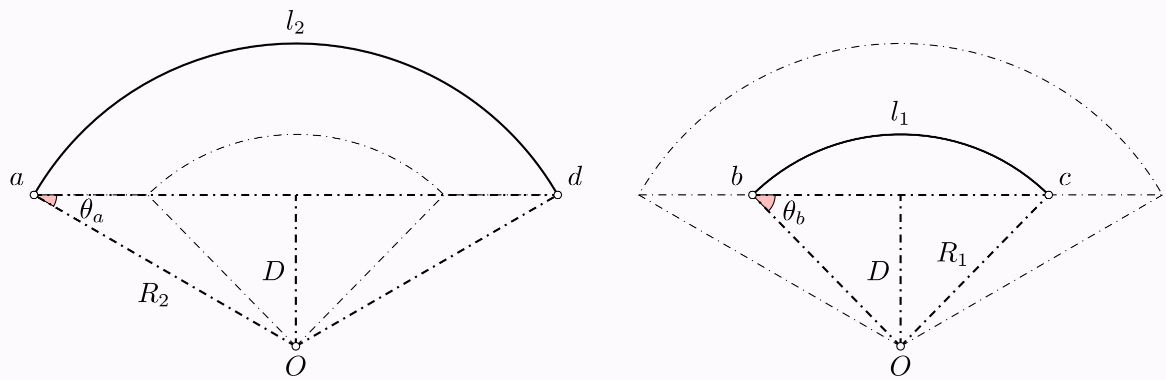
ab 直线段的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_{ab}=\int_a^b \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(-\,\mathrm{d}l)\sin\theta}{r^2}$$

其中

$$\frac{l_1}{R_1}=\pi-2\theta_b,\theta_b=\frac{\pi}{2}-\frac{l_1}{2R_1}$$
$$\frac{l_2}{R_2}=\pi-2\theta_a,\theta_a=\frac{\pi}{2}-\frac{l_2}{2R_2}$$
$$D=r\sin\theta=R_1\sin\theta_b=R_2\sin\theta_a$$
$$r=\frac{D}{\sin\theta}$$
$$l=r\cos\theta$$





所以从 a 到 b 取一小段电流元，电流元的长度为 $-\,\mathrm{d}l$(l 变小，$\mathrm{d}l<0$)

$$\begin{aligned}
l&=\frac{D\cos\theta}{\sin\theta}\\
\mathrm{d}l&=\mathrm{d}\left(\frac{D\cos\theta}{\sin\theta}\right)\\
&=D\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)\sin\theta-\cos\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sin^2\theta}\\
&=D\frac{(-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)\sin\theta-\cos\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)}{\sin^2\theta}\\
&=-\frac{D}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$\frac{(-\,\mathrm{d}l)\sin\theta}{r^2}=\frac{\frac{D}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta}{\frac{D^2}{\sin^2\theta}}=\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{D}$$

$$
\begin{aligned}
B_{ab} &= \int_a^b \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(-\,\mathrm{d}l)\sin\theta}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_a^b \frac{(-\,\mathrm{d}l)\sin\theta}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{D} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi D}\int_{\theta_a}^{\theta_b} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi D}\left[-\cos\theta\right]_{\theta_a}^{\theta_b} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi D}[\cos\theta_a - \cos\theta_b] \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1\sin\theta_b}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_2}{2R_2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_1}{2R_1}\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right) - \sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

同样可得 cd 直线段的磁场垂直纸面向里，大小为

$$
B_{cd} = B_{ab} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right) - \sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]
$$

所以 O 点总的磁场大小为

$$
\begin{aligned}
B = B_{ab}+B_{bc}+B_{cd}-B_{da} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right) - \sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right] + \frac{\mu_0 I l_1}{4\pi R_1^2} - \frac{\mu_0 I l_2}{4\pi R_2^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right) - \sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right] + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^2} - \frac{l_2}{R_2^2}\right)
\end{aligned}
$$

7.1.2 运动电荷的磁场

第 269 题 |【5310】

若把氢原子的基态电子轨道看作是圆轨道，已知电子轨道半径 $r = 0.53\times10^{-10}$ m，绕核运动速度大小 $v = 2.18\times10^{6}$ m/s，则氢原子基态电子在原子核处产生的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小为_____。

答案

12.4 T

解析

运动电荷的磁场公式

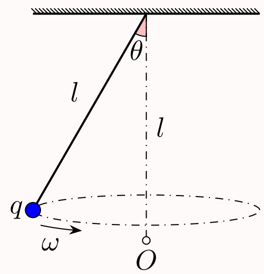
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

圆周运动，$\vec{v}\perp\vec{r}$，所以其大小为

$$B=\frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}=\frac{10^{-7}\times 1.6\times 10^{-19}\times 2.18\times 10^{6}}{(0.53\times 10^{-10})^2}\approx 12.4\ \mathrm{T}$$

第 270 题 |【2252】

绕铅直轴作匀角速度转动的圆锥摆，摆长为 l，摆球所带电荷为 q。求角速度 ω 为何值时，该带电摆球在轴上悬点为 l 处的 O 点产生的磁感强度沿竖直方向的分量值最大。



解答

对于圆锥摆，有

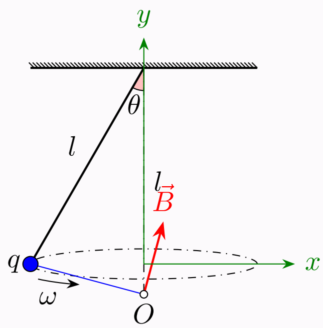
$$mg=F\cos\theta$$
$$F\sin\theta=m\omega^2(l\sin\theta)$$
$$\frac{g}{\cos\theta}=\omega^2 l$$
$$\cos\theta=\frac{g}{\omega^2 l},\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}\geqslant\sqrt{\frac{g}{l}}$$

形成圆锥摆的角速度有个最小值！

运动电荷的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

如图建立直角坐标系。



则有

$$\vec{v}=\omega l\sin\theta\,\vec{e}_z$$
$$\vec{r}=l\sin\theta\,\vec{e}_x-l(1-\cos\theta)\,\vec{e}_y$$
$$r=\sqrt{(l\sin\theta)^2+l^2(1-\cos\theta)^2}=l\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2l\sin\frac{\theta}{2}$$
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q(\omega l\sin\theta\,\vec{e}_z)\times[l\sin\theta\,\vec{e}_x-l(1-\cos\theta)\,\vec{e}_y]}{4\pi\left[l\sqrt{2(1-\cos\theta)}\right]^3}$$
$$B_y=\frac{\mu_0 q\omega l^2\sin^2\theta}{4\pi\left[l\sqrt{2(1-\cos\theta)}\right]^3}=\frac{\mu_0 q\omega\sin^2\theta}{4\pi l\left[\sqrt{2(1-\cos\theta)}\right]^3}=\frac{\mu_0 q\omega\frac{\omega^4l^2-g^2}{\omega^4l^2}}{4\pi l\left[\sqrt{2\frac{\omega^2l-g}{\omega^2 l}}\right]^3}=\frac{\mu_0 q(\omega^4l^2-g^2)}{4\pi(2l)^{3/2}(\omega^2l-g)^{3/2}}$$
$$=\frac{\mu_0 q(\omega^2l+g)}{4\pi(2l)^{3/2}(\omega^2l-g)^{1/2}}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{(\omega^2l+g)}{(\omega^2l-g)^{1/2}}$$

要求 B_y 的极大值，第一个要求它对 ω 的一阶导数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}\omega}=0=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{2\omega l(\omega^2l-g)^{1/2}-(\omega^2l+g)\frac{1}{2}(\omega^2l-g)^{-1/2}(2\omega l)}{\omega^2l-g}$$
$$=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{2\omega l(\omega^2l-g)-\omega l(\omega^2l+g)}{(\omega^2l-g)^{3/2}}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{\omega l(\omega^2l-3g)}{(\omega^2l-g)^{3/2}}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{3/2}}$$
$$\omega=0,\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}},\omega\to\infty$$

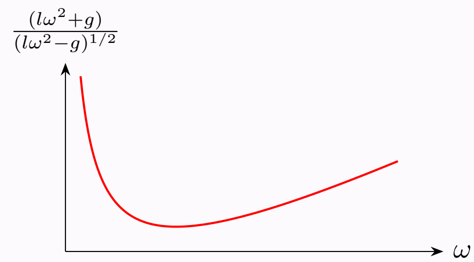
二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2B_y}{\mathrm{d}\omega^2}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{3/2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{3/2}}=\frac{(3l^2\omega^2-3gl)(l\omega^2-g)^{3/2}-(l^2\omega^3-3gl\omega)\frac{3}{2}(l\omega^2-g)^{1/2}(2l\omega)}{(l\omega^2-g)^3}$$
$$=\frac{(3l^2\omega^2-3gl)(l\omega^2-g)-3l\omega(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$
$$=\frac{3l[(l\omega^2-g)(l\omega^2-g)-l^2\omega^4+3gl\omega^2]}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$
$$=\frac{3l[l^2\omega^4+g^2-2gl\omega^2-l^2\omega^4+3gl\omega^2]}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$

$$= \frac{3l[g^2+gl\omega^2]}{(l\omega^2-g)^{5/2}} = \frac{3gl(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2B_y}{\mathrm{d}\omega^2} = \frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{3gl(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 qgl}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$

下图是以 $g=1$、$l=1$ 时画出的 $\frac{(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{1/2}}$ 随 ω 的变化关系曲线：



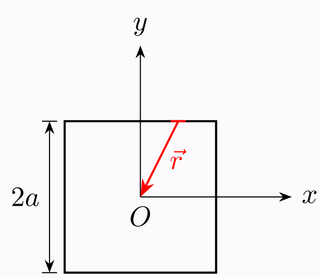
从中也可以看出，存在极小值点，不存在极大值点。所以，怀疑本题有误。

第 271 题 |【2253】

一线电荷密度为 λ 的带电正方形闭合线框绕过其中心并垂直于其平面的轴以角速度 ω 旋转，试求正方形中心处的磁感强度的大小。【积分公式 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$】

解答

如图，建立直角坐标系。



设正方形边长为 $2a$，由于四条边的等效性，总的磁场为一条边磁场的四倍，所以只需要计算一条边的磁场即可。下面以 $y=a$ 的边进行计算。取 $x\to x+\mathrm{d}x$ 为元电荷，则其带电量为 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x$，它到线框中心的距离为 $r=\sqrt{a^2+x^2}$，它的运动速率为 $v=\omega r$。则该运动元电荷的元磁场为

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}q)\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

由于做定轴转动，所以必有 $\vec{v}\perp\vec{r}$，所以元磁场的大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega\lambda\,\mathrm{d}x}{r} = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

方向垂直纸面，如果是顺时针转动，则磁场方向垂直纸面向里；如果是逆时针转动，则磁场方向垂直纸

面向外。所以总的磁场可以由上式直接积分得到

$$B_1=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

由积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$$

得

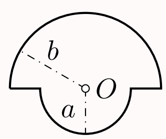
$$\begin{aligned}B_1&=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]_{-a}^{a}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln\frac{a+\sqrt{a^2+a^2}}{-a+\sqrt{(-a)^2+a^2}}\right]=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]\\&=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln(\sqrt{2}+1)^2\right]=\frac{\mu_0\omega\lambda}{2\pi}\ln(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

所以整个线框在中心处产生的总的磁场为

$$B=4B_1=\frac{2\mu_0\omega\lambda}{\pi}\ln(\sqrt{2}+1)$$

第 272 题 |【2269】

有一闭合回路由半径为 a 和 b 的两个同心共面半圆连接而成，如图。其上均匀分布线密度为 λ 的电荷，当回路以匀角速度 ω 绕过 O 点垂直于回路平面的轴转动时，求圆心 O 处的磁感强度的大小。



解答

运动元电荷的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}q)\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

假设回路做顺时针转动，则 $v=\omega r$，每个运动元电荷在 O 处产生的磁场的方向都是垂直纸面向里，所以直接对大小进行积分。第一个计算大半圆的磁场

$$B_1=\int_{L_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\lambda\,\mathrm{d}l)(\omega b)b}{b^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega(\pi b)}{b}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

再计算小半圆的磁场

$$B_2=\int_{L_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\lambda\,\mathrm{d}l)(\omega a)a}{a^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega(\pi a)}{a}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

两个直线段部分的磁场相同，计算一个后直接乘 2 即可

$$B_3=B_4=\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\lambda\,\mathrm{d}r)(\omega r)r}{r^3}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

所以总的磁场的大小为

$$B=B_1+B_2+B_3+B_4=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}+\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$
$$+\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}\times 2=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}+\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\left(\pi+\ln\frac{b}{a}\right)$$

本题也可以使用圆电流的磁场来计算。圆电流在中心的磁场大小

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot(2\pi R)}{R^2}=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

大半圆的等效电流、半径、激发的磁场分别为

$$I_1=\frac{q_1}{T}=\frac{q_1}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\pi b}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\omega b}{2},R_1=b,B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}=\frac{\mu_0}{2b}\frac{\lambda\omega b}{2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

小半圆的等效电流、半径、激发的磁场分别为

$$I_2=\frac{q_2}{T}=\frac{q_2}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\pi a}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\omega a}{2},R_2=a,B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}=\frac{\mu_0}{2a}\frac{\lambda\omega a}{2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

直线段上任意一个元电荷的等效电流、半径、激发的元磁场分别为

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}q}{T}=\frac{\lambda\,\mathrm{d}r}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\omega\,\mathrm{d}r}{2\pi},R=r,\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2R}=\frac{\mu_0}{2r}\frac{\lambda\omega\,\mathrm{d}r}{2\pi}=\frac{\mu_0\lambda\omega\,\mathrm{d}r}{4\pi r}$$

第 273 题 |【2569】

半径为 R 的薄圆盘均匀带电，总电荷为 q。令此盘绕通过盘心且垂直盘面的轴线匀速转动，角速度为 ω，求轴线上距盘心 x 处的磁感强度的大小。【积分公式 $\displaystyle\int\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2+2a^2}{(a^2+x^2)^{1/2}}+\mathrm{C}$】

解答

以圆盘中心为坐标原点，转轴为 x，盘面所在平面为 yz 平面，建立直角坐标系。假定 $\vec{\omega}=\omega\,\vec{\mathrm{e}}_x$，待求场点坐标为 $(x,0,0)$，在盘面上 $r\to r+\mathrm{d}r$、$\theta\to\theta+\mathrm{d}\theta$ 处的元电荷带电量为

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{\pi R^2}(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

它到场点的矢量为

$$\vec{r}=(x,0,0)-(0,r\cos\theta,r\sin\theta)=x\,\vec{\mathrm{e}}_x-r\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y-r\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

它的速度为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times(0,r\cos\theta,r\sin\theta)=-\omega r\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y+\omega r\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_z=\omega r(-\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y+\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_z)$$

所以该元电荷在场点的元磁场为

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}q)\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\frac{q}{\pi R^2}(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)[\omega r(-\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y+\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_z)]\times(x\,\vec{\mathrm{e}}_x-r\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y-r\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_z)}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2 R^2}\frac{[\vec{e}_x(r\sin^2\theta + r\cos^2\theta) + \vec{e}_y(x\cos\theta) + \vec{e}_z(x\sin\theta)]}{(x^2+r^2)^{3/2}} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2 R^2}\frac{[\vec{e}_x(r) + \vec{e}_y(x\cos\theta) + \vec{e}_z(x\sin\theta)]}{(x^2+r^2)^{3/2}} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

对 θ 从 0 到 2π 进行积分，则得圆盘上 $r \to r+\mathrm{d}r$ 一个小圆环的电荷转动时在场点产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2 R^2}\frac{\vec{e}_x(r)}{(x^2+r^2)^{3/2}} r^2\,\mathrm{d}r \times 2\pi = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\,\vec{e}_x$$

对 r 从 0 到 R 进行积分，则得整个圆盘在场点产生的磁场，这里利用题目所给积分公式

$$\int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+2a^2}{(a^2+x^2)^{1/2}} + \mathrm{C}$$

所以所求磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\int_0^R \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\,\vec{e}_x = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\left[\frac{r^2+2x^2}{(x^2+r^2)^{1/2}}\right]_0^R \vec{e}_x = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\left[\frac{R^2+2x^2}{(x^2+R^2)^{1/2}} - 2x\right]\vec{e}_x$$

以上用运动电荷的磁场计算得到了结果，下面用圆电流磁场的方法重新计算一遍。
$r \to r+\mathrm{d}r$ 处的带电圆环转动起来时的等效圆电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\frac{q}{\pi R^2}\times 2\pi r\,\mathrm{d}r}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega r\,\mathrm{d}r}{\pi R^2}$$

在这个圆电流上取 $\theta \to \theta + \mathrm{d}\theta$ 段电流元，则

$$\mathrm{d}\vec{l} = r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta = r\,\mathrm{d}\theta(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)$$

它到场点的矢量为

$$\vec{r} = (x,0,0) - (0, r\cos\theta, r\sin\theta) = x\,\vec{e}_x - r\cos\theta\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z$$

所以该电流元在场点的元磁场为

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}I)\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\omega r\,\mathrm{d}r}{\pi R^2}\frac{[r\,\mathrm{d}\theta(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)]\times[x\,\vec{e}_x - r\cos\theta\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z]}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

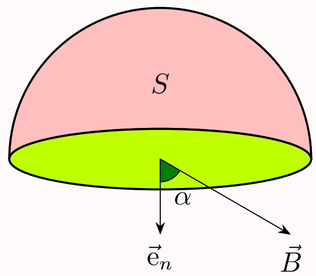
$$= \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2 R^2}\frac{[(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)]\times[x\,\vec{e}_x - r\cos\theta\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z]}{(x^2+r^2)^{3/2}} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

剩下的计算和前面相同，对角度积分，得到一个圆电流在场点的磁场，对半径积分，得到整个圆盘在场点的磁场。

7.2 磁通量 磁场的高斯定理

第 274 题 |【5566】

在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\vec{e}_n$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 α，则通过半球面 S 的磁通量 (取弯面向外为正) 为



(A) $\pi r^2 B$ (B) $2\pi r^2 B$ (C) $-\pi r^2 B\sin\alpha$ (D) $-\pi r^2 B\cos\alpha$

答案

D

解析

磁场中的高斯定理

$$\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

因为磁场线一定是封闭曲线，所以通过任意一个封闭曲面的磁通量一定恒为零。所以，以半球面和边线所在的平面的圆面【记为 S'】组成的封闭曲面为高斯面，运用磁场的高斯定理，得

$$\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{S'} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
$$\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S'} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\vec{B}\cdot\int_{S'}\mathrm{d}\vec{S} = -\vec{B}\cdot\vec{S}' = -BS\cos\alpha = -B\pi r^2\cos\alpha$$

第 275 题 |【2549】

一个密绕的细长螺线管，每厘米长度上绕有 10 匝细导线，螺线管的横截面积为 10 cm^2。当在螺线管中通入 10 A 的电流时，它的横截面上的磁通量为______。

答案

1.256×10^{-5} Wb

解析

螺线管内的磁场视为匀强磁场，螺线管外的磁场视为零，可以由安培环路定理求螺线管内的磁场

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$BL = \mu_0 nLI$$
$$B = \mu_0 nI$$

所以磁通量为

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS = \mu_0 nIS = 4\times 3.14\times 10^{-7}\times 1000\times 10\times 10\times 10^{-4} = 1.256\times 10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

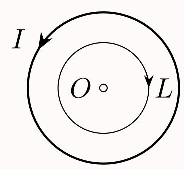
注意，题目中给的是每厘米长度上绕有 10 匝，计算时要换算成每米 1000 匝，即 n 要用 1000 代。

7.3 安培环路定理

7.3.1 安培环路定理的理解

第 276 题 |【2046】

如图，在一圆形电流 I 所在的平面内，选取一个同心圆形闭合回路 L，则由安培环路定理可知



(A) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，且环路上任意一点 $B = 0$

(B) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，且环路上任意一点 $B \neq 0$

(C) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$，且环路上任意一点 $B \neq 0$

(D) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$，且环路上任意一点 $B =$ 常量

答案

B

解析

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

此题中，没有电流与回路 L 链接，所以上式右边的 $I = 0$，因此磁场沿回路 L 的环流为零，但回路上任意一点的磁感应强度都不为零，只是因为各点的 $\vec{B}$ 的方向都是垂直纸面向上，与回路垂直，所以环流为零。

第 277 题 |【2652】

在磁场空间分别取两个闭合回路，若两个回路各自包围载流导线的根数不同，但电流的代数和相同。则磁感强度沿各闭合回路的线积分_____；两个回路上的磁场分布_____。(填：相同、不相同)

答案

相同，不相同

解析

安培环路定理

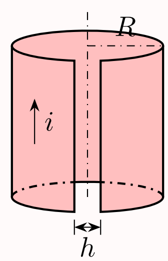
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

当电流代数和相同时，上式中的 I 相同，因此两个回路的磁感应强度沿各自闭合回路的线积分 (环流) 相同。但因为两种情况下电流分布不相同，所以空间各点的磁感应强度一般情况下并不会相同。

7.3.2 安培环路定理的应用

第 278 题 |【2710】

将半径为 R 的无限长导体薄壁管 (厚度忽略) 沿轴向割去一宽度为 $h(h \ll R)$ 的无限长狭缝后，再沿轴向流有在管壁上均匀分布的电流，其面电流密度 (垂直于电流的单位长度截线上的电流) 为 i(如图)，则管轴线磁感强度的大小是_____。



答案

$\frac{\mu_0 ih}{2\pi R}$

解析

将管壁电流沿轴向切割成一系列的无限长直线电流。由于对称性的关系，关于管轴对称的两个同样大小的无限长直线电流在管轴线上产生的磁场刚好互相抵消。所以最后只剩下与被裁掉的狭缝对称的那个无限长直线电流。根据面电流密度的定义，该无限长直线中通过的电流为 $I = ih$，所以由安培环路定理

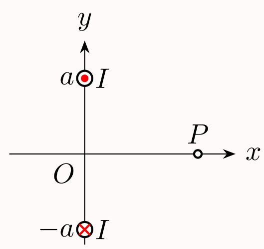
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

可得

$$B \cdot (2\pi R) = \mu_0 ih$$
$$B = \frac{\mu_0 ih}{2\pi R}$$

第 279 题 |【2054】

图所示为两条穿过 y 轴且垂直于 $x-y$ 平面的平行长直导线的正视图，两条导线皆通有电流 I，但方向相反，它们到 x 轴的距离皆为 a。(1) 推导出 x 轴上 P 点处的磁感强度 $\vec{B}(x)$ 的表达式；(2) 求 P 点在 x 轴上何处时，该点的 B 取得最大值。



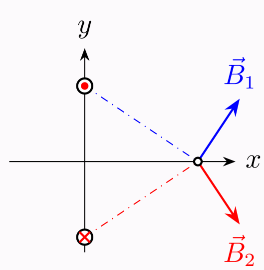
解答

无限长通电直导线的磁场可以通过安培环路定理求得：

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，两根电流产生的磁场方向如上图所示，大小相等，均为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}}$$



所以，P 点处的磁感强度为

$$\vec{B} = 2B_1 \sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} \times \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\vec{\mathrm{e}}_x = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2+a^2)}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

由于 $x^2+a^2 \geqslant a^2$，所以当 $x=0$ 时，$x^2+a^2=a^2$ 取得最小值，相应的磁场取得最大值。当然数学上当

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=0, \frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}<0$$

时，函数取得极大值，所以

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mu_0 Ia(2x)}{\pi(x^2+a^2)^2}=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\infty$$

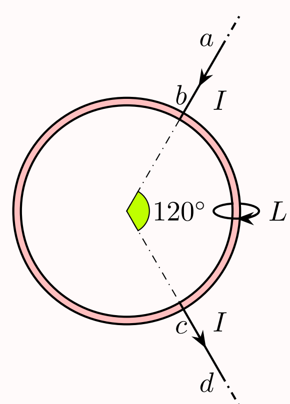
$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mu_0 Ia[2\times(x^2+a^2)^2-(2x)\times(2x)]}{\pi(x^2+a^2)^4}=-\frac{2\mu_0 Ia[(x^2+a^2)^2-2x^2]}{\pi(x^2+a^2)^4}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-\frac{2\mu_0 Ia[(a^2)^2]}{\pi(a^2)^4}<0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\pm\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{2\mu_0 Ia[(x^2)^2-2x^2]}{\pi(x^2)^4}=0$$

第 280 题 |【2047】

如图，两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感强度 $\vec{B}$ 沿图中闭合路径 L 的积分 $\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 等于



(A) $\mu_0 I$　　(B) $\frac{1}{3}\mu_0 I$　　(C) $\frac{1}{4}\mu_0 I$　　(D) $\frac{2}{3}\mu_0 I$

答案

D

解析

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

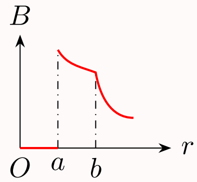
而铁环截面处处相等，所以电阻与长度成正比，左边支路的长度是右边支路的两倍，所以左边支路的电阻是右边支路的两倍，两个电阻并联，所以通过左边支路的电流是通过右边支路电流的一半，总的电流

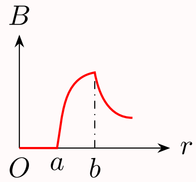
为 I，所以通过左边支路的电流是 $\frac{1}{3}I$，通过右边支路的电流是 $\frac{2}{3}I$。所以，由安培环路定理，有

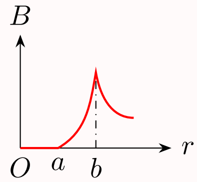
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{2I}{3} = \frac{2\mu_0 I}{3}$$

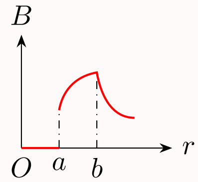
第 281 题 |【2003】

无限长载流空心圆柱导体的内外半径分别为 a、b，电流在导体截面上均匀分布，则空间各处的 $\vec{B}$ 的大小与场点到圆柱中心轴线的距离 r 的关系定性地如图所示。正确的图是

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

答案

B

解析

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

由于电流分布具有轴对称性，所以磁场分布也具有轴对称性，可以使用安培环路定理求磁场。选择安培环路为以圆柱轴线为圆心、与圆柱垂直、半径为 r 的圆周。则在该圆周上各点的磁场的大小相等，方向均沿圆周的切线方向，所以安培环路定理中左边的积分 (环流) 为

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot(2\pi r)$$

在不同区域，安培环路定理中右边的电流不同。
当 $r<a$ 时，空心区域，没有电流，$I=0$，所以 $B=0$；
当 $a<r<b$ 时，导体内部区域，电流为 $I=j\cdot S=j\cdot\pi(r^2-a^2)=j\pi(r^2-a^2)$，所以

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\pi(r^2-a^2)}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j(r^2-a^2)}{2r}=\frac{\mu_0 j}{2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)$$

当 $r=a$ 时，$B=0$，当 $r=b$ 时，$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}$。
当 $r>b$ 时，导体外区域，电流为 $I=j\pi(b^2-a^2)$，所以

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\pi(b^2-a^2)}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2r}$$

在这个区域，$B\propto\frac{1}{r}$，当 $r=b$ 时，$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}$。
四个选项的区别在 $a<r<b$ 区域，由以上讨论很容易排除选项 A 和 D，但 B 和 C 要如何判断？

如前讨论可知，$r=a$ 时，$B=0$；$r=b$ 时，$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}$。由此二点确定的直线上任意 r 时的 B 为

$$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}\times\frac{r-a}{b-a}=\frac{\mu_0 j(b+a)(r-a)}{2b}=\frac{\mu_0 j}{2}\frac{(b+a)(r-a)}{b}=\frac{\mu_0 j}{2}\frac{br-ab+ar-a^2}{b}$$
$$=\frac{\mu_0 j}{2}\left[r-\frac{a(b-r)+a^2}{b}\right]$$

又因为

$$\frac{a(b-r)+a^2}{b}-\frac{a^2}{r}=\frac{[a(b-r)+a^2]r-a^2b}{br}=\frac{abr-ar^2+a^2r-a^2b}{br}=\frac{ab(r-a)-ar(r-a)}{br}$$
$$=\frac{a(b-r)(r-a)}{br}$$
$$a<r<b\Rightarrow(b-r)>0,(r-a)>0\Rightarrow\frac{a(b-r)(r-a)}{br}>0\Rightarrow\frac{a(b-r)+a^2}{b}-\frac{a^2}{r}>0$$
$$\frac{a(b-r)+a^2}{b}>\frac{a^2}{r}$$
$$r-\frac{a(b-r)+a^2}{b}<r-\frac{a^2}{r}$$
$$\frac{\mu_0 j}{2}\left[r-\frac{a(b-r)+a^2}{b}\right]<\frac{\mu_0 j}{2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)$$

所以 $a<r<b$ 区域中任意一个 r 处的 B 应该比 a、b 两点之间的直线所对应的 B 来得大，所以曲线应该是向上凸的，因此此题答案选 B。

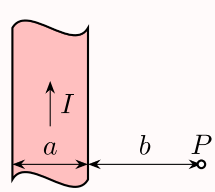
有老师提出，作为选择题，无须严格证明函数的曲线，只要通过比较 $r=a$ 和 $r=b$ 两点的斜率关系，就可以判断到底是选项 B 还是选项 C。

$$f=r-\frac{a^2}{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=1+\frac{a^2}{r^2}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a}=1+\frac{a^2}{a^2}=2$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r=b}=1+\frac{a^2}{b^2}<2$$

所以选项应该为 B。

第 282 题 |【2292】

有一无限长通电流的扁平铜片，宽度为 a，厚度不计，电流 I 在铜片上均匀分布，在铜片外与铜片共面，离铜片右边缘为 b 处的 P 点 (如图) 的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小为



(A) $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$　(B) $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$　(C) $\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\frac{a+b}{b}$　(D) $\frac{\mu_0 I}{\pi(a+2b)}$

答案

B

解析

将通电铜片看成一根根细直导线，利用无限长直导线的磁场公式，积分得到所求磁场。
无限长通电直导线的磁场可以用安培环路定理来求

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

以铜片左侧为坐标原点，水平向右为 x 轴正方向，任取 $x \to x+\mathrm{d}x$ 为所研究的细直导线，则通过它的电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{I}{a}\,\mathrm{d}x$$

它到 P 点的距离为 $r = a+b-x$，所以它在 P 点产生的磁场方向垂直纸面向里，大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}x}{2\pi a(a+b-x)}$$

所以，总的磁场为

$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}x}{2\pi a(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[-\ln(a+b-x)\right]_0^a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

第 283 题 |【2049】

一载有电流 I 的细导线分别均匀密绕在半径为 R 和 r 的长直圆筒上形成两个螺线管，两螺线管单位长度上的匝数相等。设 $R = 2r$，则两螺线管中的磁感强度大小 B_R 和 B_r 应满足

(A) $B_R = 2B_r$　(B) $B_R = B_r$　(C) $2B_R = B_r$　(D) $B_R = 4B_r$

答案

B

解析

密绕长直螺线管的磁场，认为螺线管内部是一个均匀的磁场，螺线管外靠近螺线管的地方，磁场近似为零。这个作为默认的已知条件。
所以，螺线管内部的磁场可以用安培环路定理来求

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$BL=\mu_0 LnI$$

$$B=\mu_0 nI$$

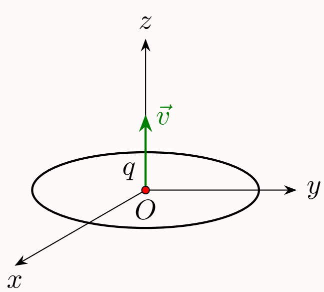
这里 n 为单位长度的匝数。由此可见，螺线管内部的磁场与螺线管的半径无关。因此有 $B_R=B_r$。

7.4 带电粒子在电磁场中的运动

7.4.1 带电粒子在电场和磁场中所受的力

第 284 题 |【0361】

如图所示，一半径为 R，通有电流为 I 的圆形回路，位于 Oxy 平面内，圆心为 O。一带正电荷为 q 的粒子，以速度 $\vec{v}$ 沿 z 轴向上运动，当带正电荷的粒子恰好通过 O 点时，作用于圆形回路上的力为_____，作用在带电粒子上的力为_____。



答案

0，0

解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

圆形电流在其圆心的磁场一定是沿轴向的，因此这里就是沿 z 轴方向，可能沿正方向，也可能沿反方向，因此题目没有给出电流的绕向。所以带电粒子在 O 点受到的力一定为零。
运动电荷的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

所以运动电荷在圆形回路上的磁场的方向是沿着切线方向的。而电流元在磁场中的受力为

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{m}} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

所以各个电流元和它所在处的磁场的方向平行，每个电流元所受到的磁场力均为零，因此整个圆形回路所受到的力也为零。

第 285 题 |【2665】

在非均匀磁场中，有一电荷为 q 的运动电荷。当电荷运动至某点时，其速率为 v，运动方向与磁场方向间的夹角为 α，此时测出它所受的磁力为 f_m。则该运动电荷所在处的磁感强度的大小为______。磁力 f_m 的方向一定垂直于______。

答案

$\frac{f_{\mathrm{m}}}{qv\sin\alpha}$，$\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 所在的平面

解析

运动电荷在磁场中所受到的洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

所以其大小为

$$F_{\mathrm{m}} = qvB\sin\alpha$$

所以有

$$B = \frac{F_{\mathrm{m}}}{qv\sin\alpha} = \frac{f_{\mathrm{m}}}{qv\sin\alpha}$$

根据矢量叉乘的运算法则，$\vec{F}_{\mathrm{m}}$ 的方向就是 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向，因此一定是与 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 所在的平面垂直。

7.4.2 带电粒子在均匀磁场中的运动

第 286 题 |【2060】

一电荷为 q 的粒子在均匀磁场中运动，下列哪种说法是正确的？

(A) 只要速度大小相同，粒子所受的洛伦兹力就相同

(B) 在速度不变的前提下，若电荷 q 变为 $-q$，则粒子受力反向，数值不变

(C) 粒子进入磁场后，其动能和动量都不变

(D) 洛伦兹力与速度方向垂直，所以带电粒子运动的轨迹必定是圆

答案

B

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

力是一个矢量，速度大小相同，但方向不同时，洛伦兹力的大小和方向都会发生变化。洛伦兹力一定垂直于速度，因此产生的加速度一定是垂直于速度方向，所以速度的大小不会发生变化，但速度的方向一直在改变，因此粒子的动能不会变化，但动量一直在变化。如果粒子的初始速度是垂直磁场的，那么粒子的运动轨迹是一个圆，但如果初始速度的方向并不是垂直磁场，那么粒子的运动轨迹是一个螺旋线，在垂直磁场方向是圆周运动，沿磁场方向是匀速直线运动。在速度不变的前提下，如果带电量变为负号，那么洛伦兹力的大小不变，方向相反。

第 287 题 |【2373】

一运动电荷 q，质量为 m，进入均匀磁场中，

(A) 其动能改变，动量不变

(B) 其动能和动量都改变

(C) 其动能不变，动量改变

(D) 其动能、动量都不变

答案

C

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

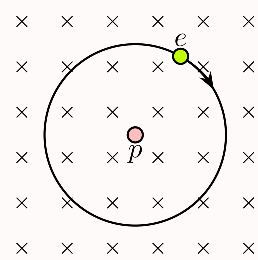
运动电荷在均匀磁场中将受到洛伦兹力的作用，洛伦兹力的方向一定是垂直于运动方向，所以电荷的运动速度的大小保持不变，方向发生变化，因此电子的动能保持不变，动量发生变化。

当然，如果电荷的运动速度的方向与磁场的方向平行，那么电荷所受到的力为零，动能和动量都不发生变化，电荷做匀速直线运动穿过磁场。

所以，此题不太严谨。

第 288 题 |【2062】

按玻尔的氢原子理论，电子在以质子为中心、半径为 r 的圆形轨道上运动。如果把这样一个原子放在均匀的外磁场中，使电子轨道平面与 $\vec{B}$ 垂直，如图所示，则在 r 不变的情况下，电子轨道运动的角速度将



(A) 增加　(B) 减小　(C) 不变　(D) 改变方向

答案

A

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

库仑力

$$\vec{F}_{\mathrm{e}} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

对电子进行受力分析，原来只受到质子的吸引力，提供电子做圆周运动的向心力。放入磁场后，电子还受到洛伦兹力，因为电子带负电，所以洛伦兹力的方向指向圆心，与质子的库仑力同方向，因此合力增大，在轨道半径不变的情况下，

$$F = m\omega^2 r$$

圆周运动的角速度将增大。

第 289 题 |【2575】

A、B 两个电子都垂直于磁场方向射入一均匀磁场而作圆周运动。A 电子的速率是 B 电子速率的两倍。设 R_A，R_B 分别为 A 电子与 B 电子的轨道半径；T_A，T_B 分别为它们各自的周期。则

(A) $R_A : R_B = 2$，$T_A : T_B = 2$　(B) $R_A : R_B = \frac{1}{2}$，$T_A : T_B = 1$

(C) $R_A : R_B = 1$，$T_A : T_B = \frac{1}{2}$　(D) $R_A : R_B = 2$，$T_A : T_B = 1$

答案

D

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

依题意，$\vec{v}$ 垂直于 $\vec{B}$，所以洛伦兹力的大小为 $F = qvB$，它提供给电子做圆周运动的向心力，所以

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

所以

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{mv_A}{qB}}{\frac{mv_B}{qB}} = \frac{v_A}{v_B} = 2:1$$
$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2\pi m}{qB}}{\frac{2\pi m}{qB}} = 1$$

第 290 题 |【2784】

α 粒子与质子以同一速率垂直于磁场方向入射到均匀磁场中，它们各自作圆周运动的半径比 $\frac{R_\alpha}{R_p}$ 和周期比 $\frac{T_\alpha}{T_p}$ 分别为

(A) 1 和 2 (B) 1 和 1 (C) 2 和 2 (D) 2 和 1

答案

C

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

α 粒子即为氦原子核，由两个质子和两个中子所构成，质量约为质子的四倍，带电量为质子的两倍。依题意，$\vec{v}$ 垂直于 $\vec{B}$，所以洛伦兹力的大小为 $F = qvB$，它提供给粒子做圆周运动的向心力，所以

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

所以

$$\frac{R_\alpha}{R_p} = \frac{\frac{m_\alpha v_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{m_p v_p}{q_p B}} = \frac{\frac{4m_p v_p}{2q_p}}{\frac{m_p v_p}{q_p}} = 2$$

$$\frac{T_\alpha}{T_p} = \frac{\frac{2\pi m_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{2\pi m_p}{q_p B}} = \frac{\frac{m_\alpha}{q_\alpha}}{\frac{m_p}{q_p}} = \frac{\frac{4m_p}{2q_p}}{\frac{m_p}{q_p}} = 2$$

第 291 题 |【2065】

两个带电粒子，以相同的速度垂直磁感线飞入匀强磁场，它们的质量之比是 $1:4$，电荷之比是 $1:2$，它们所受的磁场力之比是______，运动轨迹半径之比是______。

答案

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

这个力一定与运动电荷的速度垂直，所以提供它作圆周运动的向心力。依题意，$\vec{v}\perp\vec{B}$，所以力的大小为

$$F_{\mathrm{m}} = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

所以有

$$\frac{F_{\mathrm{m}1}}{F_{\mathrm{m}2}} = \frac{q_1 v_1 B_1}{q_2 v_2 B_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{m_1 v_1}{q_1 B_1}}{\frac{m_2 v_2}{q_2 B_2}} = \frac{m_1 q_2}{m_2 q_1} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

第 292 题 |【2066】

一带电粒子平行磁感线射入匀强磁场，则它作______ 运动；一带电粒子垂直磁感线射入匀强磁场，则它作______ 运动；一带电粒子与磁感线成任意交角射入匀强磁场，则它作______ 运动。

答案

匀速直线，匀速圆周，等距螺旋线

解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

显然 $\vec{F}_{\mathrm{m}} \perp \vec{V}$，$\vec{F}_{\mathrm{m}} \perp \vec{B}$。
当 $\vec{V} \parallel \vec{B}$ 时，$\vec{F}_{\mathrm{m}} = 0$，粒子做匀速直线运动。
当 $\vec{V} \perp \vec{B}$ 时，$F_{\mathrm{m}} = qvB$，粒子做匀速圆周运动。
当 $\vec{V}$、$\vec{B}$ 成任意角【这里应该是指非平行非垂直】时，力与速度方向垂直，所以速度大小一定不变；力与磁场方向垂直，所以沿磁场方向不受力，保持匀速运动，垂直磁场方向的速度大小也保持不变，做匀速圆周运动。因此粒子做螺旋线运动，且螺距保持不变。

第 293 题 |【2235】

带电粒子穿过过饱和蒸汽时，在它走过的路径上，过饱和蒸汽便凝结成小液滴，从而显示出粒子的运动轨迹。这就是云室的原理。今在云室中有磁感强度大小为 $B = 1$ T 的均匀磁场，观测到一个质子的径迹是半径 $r = 20$ cm 的圆弧。已知质子的电荷为 $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C，静止质量 $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg，则该质子的动能为_____。

答案

3.07×10^{-13} J

解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

这里显然默认 $\vec{v} \perp \vec{B}$，而这个力提供粒子做圆周运动的向心力，所以有

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$
$$v = \frac{qBr}{m}$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qBr)^2}{2m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \times 1 \times 0.2)^2}{2 \times 1.67 \times 10^{-27}} \approx 3.07 \times 10^{-13} \text{ J}$$

第 294 题 |【2457】

带电粒子沿垂直于磁感线的方向飞入有介质的匀强磁场中。由于粒子和磁场中的物质相互作用，损失了自己原有动能的一半。路径起点的轨道曲率半径与路径终点的轨道曲率半径之比为_____。

答案

$\sqrt{2}$

解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

依题意，有 $\vec{v} \perp \vec{B}$，而这个力提供粒子做圆周运动的向心力，所以有

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$
$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{qB}$$
$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{E_{k1}}{E_{k2}}} = \sqrt{2}$$

第 295 题 |【2581】

电子在磁感强度 $B = 0.1$ T 的匀强磁场中沿圆周运动，电子运动形成的等效圆电流强度 $I =$______。(电子电荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C，电子质量 $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg)

答案

4.47×10^{-10} A

解析

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

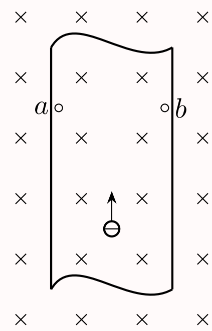
$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

这里应该依然是默认 $\vec{v} \perp \vec{B}$，而这个力提供粒子做圆周运动的向心力，所以有

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$
$$r = \frac{mv}{qB}$$
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$
$$I = \frac{q}{T} = \frac{q^2 B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2 \times 0.1}{2\pi \times 9.11 \times 10^{-31}} \approx 4.47 \times 10^{-10} \text{ A}$$

第 296 题 |【2451】

一铜条置于均匀磁场中，铜条中电子流的方向如图所示。试问下述哪一种情况将会发生？



(A) 在铜条上 a、b 两点产生一小电势差，且 $U_a > U_b$
(B) 在铜条上 a、b 两点产生一小电势差，且 $U_a < U_b$
(C) 在铜条上产生涡流
(D) 电子受到洛伦兹力而减速

答案

A

解析

洛伦兹力公式

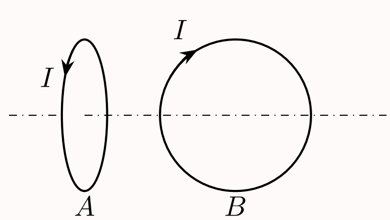
$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电子在磁场中受到的洛伦兹力的方向为运动方向的右侧，所以电子将汇集到右侧，铜条右侧带负电，左侧带正电，所以左侧电势比右侧高。
洛伦兹力一定与运动方向垂直，不会改变速度的大小，但会改变速度的方向。

7.5 载流导线在磁场中受的力

第 297 题 |【2381】

有两个半径相同的圆环形载流导线 A、B，它们可以自由转动和移动，把它们放在相互垂直的位置上，如图所示，将发生以下哪一种运动？



(A) A、B 均发生转动和平动，最后两线圈电流同方向并紧靠一起
(B) A 不动，B 在磁力作用下发生转动和平动
(C) A、B 都在运动，但运动的趋势不能确定
(D) A 和 B 都在转动，但不平动，最后两线圈磁矩同方向平行

答案

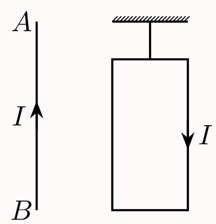
A

解析

提供的答案是 A，还没想到应该怎么做这题。

第 298 题 |【2466】

把轻的正方形线圈用细线挂在载流直导线 AB 的附近，两者在同一平面内，直导线 AB 固定，线圈可以活动。当正方形线圈通以如图所示的电流时线圈将



(A) 不动
(B) 发生转动，同时靠近导线 AB
(C) 发生转动，同时离开导线 AB
(D) 靠近导线 AB
(E) 离开导线 AB

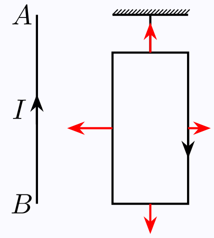
答案

D

解析

电流元在磁场中所受到的安培力为

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$



在图示位置，I 在线圈所在位置产生的磁场的方向垂直纸面向里，靠近电流的位置磁场较强，远离电流的位置磁场较弱。所以可以得到，线圈四条边所受到的力如图所示，四个力的方向都在纸面上，所以不会绕垂直纸面的轴线转动，但会绕悬挂点转动。而四个力当中，上下两条边，对应电流元所受到的力刚好大小相等方向相反，所以上下两边的合力为零【只在图示瞬间】，而左右两条边，由于左边的磁场较强，所以力较大，因此整个线圈所到向左的力，线圈将绕悬挂点靠近直线。

第 299 题 |【2090】

在匀强磁场中，有两个平面线圈，其面积 $A_1 = 2A_2$，通有电流 $I_1 = 2I_2$，它们所受的最大磁力矩之比 $\frac{M_1}{M_2}$ 等于

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

答案

C

解析

磁矩

$$\vec{m} = IS\,\vec{e}_n$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

所以

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{m_1 B}{m_2 B} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{I_1 A_1}{I_2 A_2} = 4$$

第 300 题 |【2096】

在磁场中某点放一很小的试验线圈。若线圈的面积增大一倍，且其中电流也增大一倍，该线圈所受的最大磁力矩将是原来的______ 倍。

答案

4

解析

分子电流磁矩

$$\vec{m} = IS\,\vec{e}_n$$

它在磁场中受到的磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

所以，若线圈的面积增大一倍，且其中电流也增大一倍，则磁矩增加为四倍，最大磁力矩将是原来的四倍。

第 301 题 |【5303】

一平面试验线圈的磁矩大小 p_m 为 $1 \times 10^{-8}\ \mathrm{A \cdot m^2}$，把它放入待测磁场中的 A 处，试验线圈如此之小，以致可以认为它所占据的空间内场是均匀的。当此线圈的 p_m 与 z 轴平行时，所受磁力矩大小为 $M = 5 \times 10^{-9}\ \mathrm{N \cdot m}$，方向沿 x 轴负方向；当此线圈的 p_m 与 y 轴平行时，所受磁力矩为零。则空间 A 点处的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小为______，方向为______。

答案

$0.5\ \mathrm{T}$，y 轴正方向

解析

磁矩 $\vec{p}_m$ 在磁场 $\vec{B}$ 中的磁力矩为

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

依题意【当此线圈的 p_m 与 y 轴平行时，所受磁力矩为零】，磁场的方向与 y 轴平行，假设为 $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$。又由题意【当此线圈的 p_m 与 z 轴平行时，所受磁力矩大小为 $M = 5 \times 10^{-9}\ \mathrm{N \cdot m}$，方向沿 x 轴负方向】可得

$$M = p_m B$$
$$B = \frac{M}{p_m} = \frac{5 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-8}} = 0.5\ \mathrm{T}$$

其实这里的平行，一定指的是沿正方向吗？

第 302 题 |【2026】

一质点带有电荷 $q=8.0\times10^{-10}$ C，以速度 $v=3.0\times10^{5}$ m $\cdot$ s^{-1} 在半径为 $R=6.00\times10^{-3}$ m 的圆周上，作匀速圆周运动。该带电质点在轨道中心所产生的磁感强度 $B=$______，该带电质点轨道运动的磁矩 $p_{\mathrm{m}}=$______。

答案

$\frac{2}{3}\times10^{-6}$ T，7.2×10^{-7} A $\cdot$ m^2

解析

运动电荷的磁场公式

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$ 为从电荷所在位置指向所求位置的矢量。做圆周运动时，$\vec{v}$ 一定垂直 $\vec{r}$，所以所求磁场的方向一定是垂直于运动平面，大小为

$$B=\frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}=\frac{10^{-7}\times8.0\times10^{-10}\times3.0\times10^{5}}{(6.00\times10^{-3})^2}=\frac{2}{3}\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}}=IS\vec{e}_n$$

所以磁矩的大小为

$$p_{\mathrm{m}}=IS=I\pi R^2=\frac{q}{T}\pi R^2=\frac{q}{2\pi R/v}\pi R^2=\frac{1}{2}qvR$$
$$=\frac{1}{2}\times8.0\times10^{-10}\times3.0\times10^{5}\times6.00\times10^{-3}=7.2\times10^{-7}\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

第 303 题 |【2103】

一电子以速率 $v=2.20\times10^{6}$ m $\cdot$ s^{-1} 垂直磁力线射入磁感强度为 $B=2.36$ T 的均匀磁场，则该电子的轨道磁矩为______。其方向与磁场方向______。

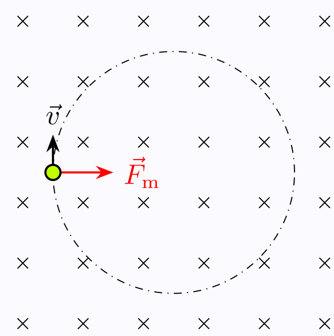
答案

9.34×10^{-19} A $\cdot$ m^2，相反

解析

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$



当 $\vec{v} \perp \vec{B}$ 时，洛伦兹力的大小为

$$F_{\mathrm{m}} = qvB$$

它提供给粒子做圆周运动的向心力

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

所以轨道半径

$$r = \frac{mv}{qB}$$

等效电流

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi r/v} = \frac{qv}{2\pi r} = \frac{q^2B}{2\pi m}$$

分子电流磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}} = IS\vec{\mathrm{e}}_n$$

其大小为

$$p_{\mathrm{m}} = IS = \frac{q^2B}{2\pi m} \times \pi\frac{m^2v^2}{q^2B^2} = \frac{mv^2}{2B} = \frac{9.11\times10^{-31}\times(2.20\times10^6)^2}{2\times2.36} \approx 9.34\times10^{-19}\mathrm{A\cdot m^2}$$

如上图，假定磁场垂直纸面向里，电子竖直向上运动，则所受洛伦兹力向右，电子顺时针转动，等效电流逆时针，所以磁矩是垂直纸面向外，其方向与磁场方向相反。这里注意电子带负电，洛伦兹力与 $\vec{v}\times\vec{B}$ 方向相反，电流的方向与电子的运动方向相反。

第 304 题 |【2387】

已知面积相等的载流圆线圈与载流正方形线圈的磁矩之比为 2 : 1，圆线圈在其中心处产生的磁感强度为 B_0，那么正方形线圈 (边长为 a) 在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀外磁场中所受最大磁力矩为______。

答案

$\frac{B_0Ba^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$

解析

圆线圈在其中心处的磁感应强度

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot (2\pi R) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

依题意，有

$$S = \pi R^2 = a^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

所以其磁矩

$$m_0 = IS = \frac{2B_0 R}{\mu_0} a^2 = \frac{2B_0 a^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$$

所以正方形线圈的磁矩为

$$m = \frac{1}{2} m_0 = \frac{B_0 a^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$$

它在磁场中受到的最大磁力矩为

$$M = mB = \frac{B_0 B a^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$$

第 305 题 |【2601】

在磁感强度 $B = 0.02$ T 的匀强磁场中，有一半径为 10 cm 圆线圈，线圈磁矩与磁感线同向平行，回路中通有 $I = 1$ A 的电流。若圆线圈绕某个直径旋转 180°，使其磁矩与磁感线反向平行，且线圈转动过程中电流 I 保持不变，则外力的功 $W =$______。

答案

1.256×10^{-3} J

解析

磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n = I\pi R^2 \vec{e}_n$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

磁力矩的功

$$\mathrm{d}W = -M\,\mathrm{d}\theta = -I\pi R^2 B\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

这里 θ 表示 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角。当 θ 增大时，$\mathrm{d}\theta > 0$，磁力矩的方向与磁矩转动的方向相反，所以上式有个负号。

所以在转动过程中，磁力矩总的功

$$W = \int_0^{\pi} -I\pi R^2 B\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = I\pi R^2 B(\cos\theta)_0^{\pi} = -2I\pi R^2 B$$

所以外力的功

$$-W = 2I\pi R^2 B = 2\times 1\times\pi\times 0.1^2\times 0.02 = 1.256\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

第 306 题 |【2630】

氢原子中电子质量 m，电荷 e，它沿某一圆轨道绕原子核运动，其等效圆电流的磁矩大小 p_{m} 与电子轨道运动的动量矩大小 L 之比 $\frac{p_{\mathrm{m}}}{L}=$______。

答案

$\frac{e}{2m}$

解析

磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}} = IS\,\vec{\mathrm{e}}_n = I\pi R^2\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

其大小

$$p_{\mathrm{m}} = I\pi R^2 = \frac{q}{T}\pi R^2 = \frac{e}{2\pi R/v}\pi R^2 = \frac{evR}{2}$$

动量矩

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}$$

圆周运动，$\vec{r}\perp\vec{v}$，所以动量矩大小

$$L = mRv$$

所以

$$\frac{p_{\mathrm{m}}}{L} = \frac{evR}{2mRv} = \frac{e}{2m}$$

第 307 题 |【2653】

假设把氢原子看成是一个电子绕核作匀速圆周运动的带电系统。已知平面轨道的半径为 r，电子的电荷为 e，质量为 m_e。将此系统置于磁感强度为 $\vec{B}_0$ 的均匀外磁场中，设 $\vec{B}_0$ 的方向与轨道平面平行，求此系统所受的力矩 $\vec{M}$。

解答

思路：电子绕核运动，视为分子电流，计算磁矩，磁矩置入磁场，计算磁力矩。

磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}}=IS\,\vec{\mathrm{e}}_n$$

$$S=\pi r^2$$

$$I=\frac{q}{T}=\frac{e}{\frac{2\pi r}{v}}=\frac{ev}{2\pi r}$$

$$p_{\mathrm{m}}=\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2=\frac{evr}{2}$$

提供电子绕核做圆周运动的向心力的力是电子与原子核之间的库仑力

$$m_e\frac{v^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$v^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$$

$$v=\frac{e}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}$$

$$p_{\mathrm{m}}=\frac{er}{2}\times\frac{e}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}=\frac{e^2 r}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}$$

磁矩在磁场中受到的磁力矩为

$$\vec{M}=\vec{p}_{\mathrm{m}}\times\vec{B}$$

如果以轨道平面为 xy 平面，电子绕核顺时针转动，则电流逆时针，$\vec{e}_n=\vec{e}_z$，设 $\vec{B}=B_0\,\vec{\mathrm{e}}_x$，则

$$\vec{M}=p_{\mathrm{m}}\,\vec{\mathrm{e}}_z\times B_0\,\vec{\mathrm{e}}_x=p_{\mathrm{m}}B_0\,\vec{\mathrm{e}}_y=\frac{B_0e^2r}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}\,\vec{\mathrm{e}}_y=\frac{B_0e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m_e}}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

第九章 电磁感应

9.1 电磁感应及法拉第电磁感应定律

第 308 题 |【2404】

一导体圆线圈在均匀磁场中运动，能使其中产生感应电流的一种情况是

(A) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向平行 (B) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向垂直

(C) 线圈平面垂直于磁场并沿垂直磁场方向平移 (D) 线圈平面平行于磁场并沿垂直磁场方向平移

答案

B

解析

产生感应电流的根本原因在于通过线圈平面的磁通量发生变化。

如果磁场平行于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量恒为零，转动过程也一直保持为零，所以不会产生感应电流。

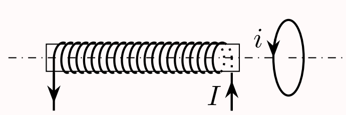
如果磁场垂直于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量就是磁感应强度与线圈面积的乘积，转动过程中，线圈平面的法线方向与磁场之间的夹角发生变化，所以通过线圈的磁通量发生变化，所以线圈中有感应电流。

如果线圈平面垂直磁场并沿垂直磁场的方向平稳，那么通过线圈的磁通量并没有发生变化，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

如果线圈平面平行于磁场，则通过线圈的磁通量为零，移动过程磁通量也一直保持为零，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

第 309 题 |【2493】

如图所示，一载流螺线管的旁边有一圆形线圈，欲使线圈产生图示方向的感应电流 i，下列哪一种情况可以做到？



(A) 载流螺线管向线圈靠近 (B) 载流螺线管离开线圈

(C) 载流螺线管中电流增大 (D) 载流螺线管中插入铁芯

答案

B

解析

载流螺线管在线圈所在处产生的磁场是从左到右的，而且靠近螺线管处的磁场大小较大，远离螺线管处的磁场大小较小。
所以螺线管靠近线圈，相当于线圈靠近螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，而且磁通量大小增大，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量减小，感应电流的方向与图示方向应该相反。
如果螺线管离开线圈，相当于线圈离开螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，但磁通量大小变小，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量增大，感应电流的方向与图示方向相同。
如果载流螺线管中的电流增大，那么产生的磁场也增大，通过线圈的磁通量也增大，感应电流应该与图示方向相反。
当通过的电流不变而在螺线管中插入铁芯时，磁场变大，通过线圈的磁通量变大，因此线圈中会产生感应电流的方向与图示相反。
根据磁介质的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

电流不变，所以螺线管内的 H 不变，但有没有磁介质，改变的是磁导率，从而改变磁场强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$。

第 310 题 |【2147】

一块铜板垂直于磁场方向放在磁感强度正在增大的磁场中时，铜板中出现的涡流 (感应电流) 将

(A) 加速铜板中磁场的增加　(B) 减缓铜板中磁场的增加

(C) 对磁场不起作用　(D) 使铜板中磁场反向

答案

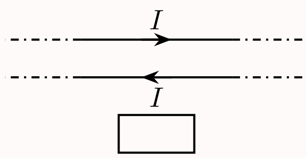
B

解析

感应电流会阻止磁场的增大，但只是减缓其增大的速度 (程度)，无法改变其增大的事实。

第 311 题 |【2145】

两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流 I，并各以 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内 (如图)，则



(A) 线圈中无感应电流
(B) 线圈中感应电流为顺时针方向
(C) 线圈中感应电流为逆时针方向
(D) 线圈中感应电流方向不确定

答案

B

解析

在矩形线圈所在处，下导线比上导线所产生的磁场大，而下导线产生的磁场的方向垂直纸面向外，上导线产生的磁场的方向垂直纸面向内，所以合磁场的方向垂直纸面向外。当电流变化时，磁场大小也跟着发生变化，所以磁通量也发生变化，电流增大，磁通量增大，根据楞次定律，感应电流的所产生的磁场要试图阻止磁通量的增加，所以感应电流的方向应该为顺时针方向。

9.2 动生电动势和感生电动势

9.2.1 动生电动势

第 312 题 |【2183】

在感应电场中电磁感应定律可写成 $\oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，式中 $\vec{E}_K$ 为感应电场的电场强度。此式表明

(A) 闭合曲线 L 上 $\vec{E}_K$ 处处相等
(B) 感应电场是保守力场
(C) 感应电场的电场强度线不是闭合曲线
(D) 在感应电场中不能像对静电场那样引入电势的概念

答案

D

解析

感生电动势

$$\mathscr{E} = \oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

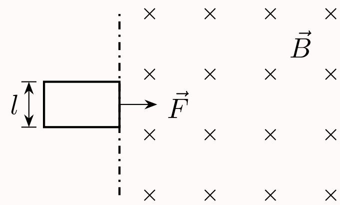
感生电场 $\vec{E}_K$ 沿任意一个闭合曲线的环流等于通过该闭合曲线所围面积的磁通量随时间的变化率的负

数，等于沿该闭合曲线的感生电动势。这里并没有要求闭合曲线上各点的感生电场相等。而从上式也可以看出一般情况下感生电场沿任意闭合曲线的积分并不等于零，因此感生电场不是保守场，不能定义势能。从这里，看不出感生电场的电场线是不是闭合曲线。

1. 均匀磁场

第 313 题 |【0313】

如图所示，电阻为 R、质量为 m、宽为 l 的矩形导电回路。从所画的静止位置开始受恒力 $\vec{F}$ 的作用。在虚线右方空间内有磁感强度为 $\vec{B}$ 且垂直于图面的均匀磁场。忽略回路自感。求在回路左边未进入磁场前，速度随时间的变化关系。

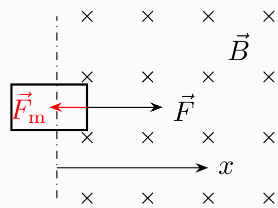


解答

思路：线圈进入磁场，磁通量变化，产生感应电动势，产生感应电流，电流在磁场中受力，在任意一个位置受力分析，求加速度，求速度。

如图，设某 t 时刻回路进入磁场 x，速度大小为 v，则通过回路的磁通量为

$$\Phi = Blx$$



由于随着线圈的运动，回路磁通量增大，所以回路的感应电动势的方向为逆时针方向，大小为

$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Blv$$

所以通过回路中的感应电流的方向为逆时针方向，大小为

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

电流元在磁场中会受到安培力的作用

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\rm m} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

所以回路上边受到向下的安培力，下边受到向上的安培力，这两个力大小相等，方向相反，互相抵消，左边未进入磁场，不受安培力，右边所受的安培力方向向左，大小为

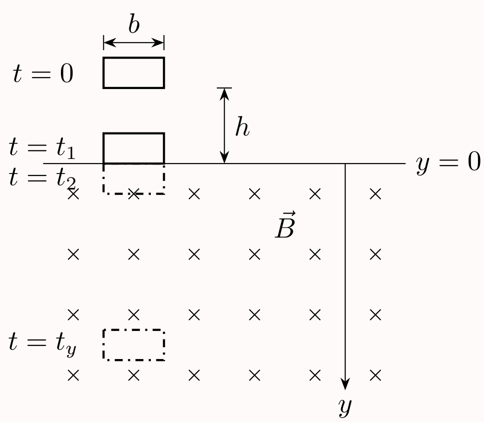
$$F_{\rm m} = BIl = \frac{B^2l^2v}{R}$$

所以线圈受到的合力为

$$
\begin{aligned}
F-F_{\mathrm{m}}&=ma\\
F-\frac{B^2l^2v}{R}&=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\
FR-B^2l^2v&=mR\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\
mR\frac{\mathrm{d}v}{FR-B^2l^2v}&=\mathrm{d}t\\
\int_0^v mR\frac{\mathrm{d}v}{FR-B^2l^2v}&=\int_0^t\mathrm{d}t\\
-\frac{mR}{B^2l^2}\left[\ln(FR-B^2l^2v)\right]_0^v&=t\\
\ln\frac{FR-B^2l^2v}{FR}&=-\frac{B^2l^2}{mR}t\\
\frac{FR-B^2l^2v}{FR}&=\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\\
v&=\frac{FR}{B^2l^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)
\end{aligned}
$$

第 314 题 |【2769】

由质量为 m、电阻为 R 的均匀导线做成的矩形线框，宽为 b，在 $t=0$ 时由静止下落，这时线框的下底边在 $y=0$ 平面上方高度为 h 处 (如图所示)。$y=0$ 平面以上没有磁场；$y=0$ 平面以下则有匀强磁场 $\vec{B}$，其方向在图中垂直纸面向里。现已知在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$，线框位置如图所示，求线框速度 v 与时间 t 的函数关系 (不计空气阻力，且忽略线框自感)。



解答

线框进入磁场之前，只受重力作用，做初速度为零的自由落体运动，即当 $0<t<t_1$ 时，$v=gt$，而 $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$。在 t_1 时刻，线圈的速度 $v_1=gt_1=\sqrt{2gh}$。

当线框完全进入磁场之后，$t>t_2$，通过线框的磁通量保持不变，所以没有感生电流，没有感生电动势，线

框只受重力作用，加速度为 g，设 t_2 时刻的速度为 v_2，所以任意 $t > t_2$ 时刻的速度为 $v = v_2 + g(t - t_2)$。在线框部分进入磁场时，$t_1 < t < t_2$，通过线框的磁通量增加，产生逆时针方向的感应电流，上边框未进入磁场，所受磁力为零。左边框电流向下，磁场垂直纸面向里，根据安培力公式

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{m}} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

可知，左边框受到向右的磁力。同样地，对于右边框，电流向上，所受磁力向左，与左边框所受磁力正好抵消。对于下边框，电流向右，磁力向上。设某 $t_1 < t < t_2$ 时刻，线框进入磁场的长度为 y，线框的速度为 v，则通过线框的磁通量为

$$\Phi = Bby$$

所以感应电动势的大小为

$$\mathscr{E} = \left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = Bbv$$

所以感应电流的大小为

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Bbv}{R}$$

所以线框所受的安培力为

$$F_{\mathrm{m}} = BIL = \frac{B^2b^2v}{R}$$

所以线框受到向下的重力和向上的安培力，根据牛顿第二定律，有

$$mg - \frac{B^2b^2v}{R} = ma$$

$$a = g - \frac{B^2b^2v}{mR} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{B^2b^2v}{mR}} = \mathrm{d}t$$

$$\int_{v_1}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{B^2b^2v}{mR}} = \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t$$

$$-\frac{mR}{B^2b^2}\left[\ln\left(g - \frac{B^2b^2v}{mR}\right)\right]_{v_1}^{v} = t - t_1$$

$$\ln\frac{g - \frac{B^2b^2v}{mR}}{g - \frac{B^2b^2v_1}{mR}} = -\frac{B^2b^2}{mR}(t - t_1)$$

$$\frac{g - \frac{B^2b^2v}{mR}}{g - \frac{B^2b^2v_1}{mR}} = \mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}$$

$$g - \frac{B^2b^2v}{mR} = \left(g - \frac{B^2b^2v_1}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}$$

$$\frac{B^2b^2v}{mR} = g - \left(g - \frac{B^2b^2v_1}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}$$

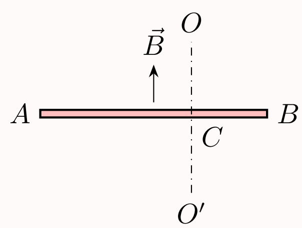
$$v = \frac{mR}{B^2b^2}\left[g - \left(g - \frac{B^2b^2v_1}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}\right] = \frac{mR}{B^2b^2}\left[g - \left(g - \frac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}\right]$$

当 $t=t_2$ 时，速度为

$$v_2=\frac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\frac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t_2-t_1)}\right]$$

第 315 题 |【2123】

如图所示，导体棒 AB 在均匀磁场 B 中绕通过 C 点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴 OO' 转动 (角速度 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{B}$ 同方向)，BC 的长度为棒长的 $\frac{1}{3}$，则



(A) A 点比 B 点电势高

(B) A 点与 B 点电势相等

(C) A 点比 B 点电势低

(D) 有稳恒电流从 A 点流向 B 点

答案

A

解析

动生电动势

$$\mathscr{E}=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

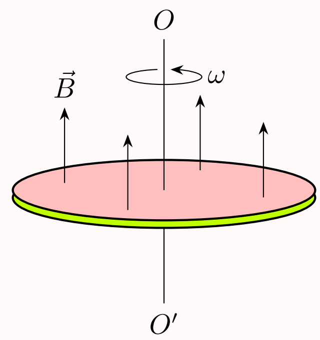
由此可以判定 A 点电势比 C 点高，B 点电势也比 C 点高。作为选择题，只需要判定 AC 之间的电压大于 BC 之间的电压，就可以得到 A 点比 B 点电势高。而由于没有构成闭合回路，所以没有电流。现在计算一下 AC 和 BC 之间的电压。

$$U_{AC}=V_A-V_C=\int_C^A(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\frac{2l}{3}}vB\,\mathrm{d}l=\int_0^{\frac{2l}{3}}\omega lB\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega B\left(\frac{2l}{3}\right)^2=\frac{2}{9}\omega Bl^2$$

$$U_{BC}=V_B-V_C=\int_C^B(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\frac{l}{3}}vB\,\mathrm{d}l=\int_0^{\frac{l}{3}}\omega lB\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega B\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{1}{18}\omega Bl^2$$

第 316 题 |【2504】

圆铜盘水平放置在均匀磁场中，$\vec{B}$ 的方向垂直盘面向上。当铜盘绕通过中心垂直于盘面的轴沿图示方向转动时，



(A) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的相反方向流动
(B) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的方向流动
(C) 铜盘上产生涡流
(D) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘边缘处电势最高
(E) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘中心处电势最高

答案

D

解析

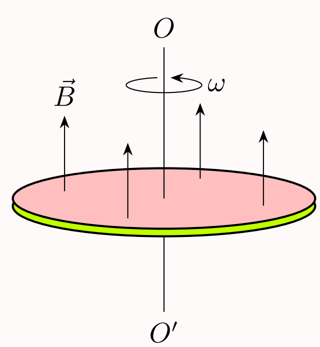
将圆盘看成一根根线段绕盘心转动。根据动生电动势

$$\mathscr{E}=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

可以判定铜盘边缘处电势比中心电势高。

第 317 题 |【2144】

半径为 R 的金属圆板在均匀磁场中以角速度 ω 绕中心轴旋转，均匀磁场的方向平行于转轴，如图所示。这时板中由中心至同一边缘点的不同曲线上总感应电动势的大小_____，方向_____。



答案

$\frac{1}{2}B\omega R^2$，由中心指向边缘

解析

圆板可以沿半径方向切割成一根根金属细杆，在转动过程中，每根细杆上都产生感应电动势，因此整个圆板相当于很多个感应电动势的并联，电动势仍然等于一根细杆的感应电动势

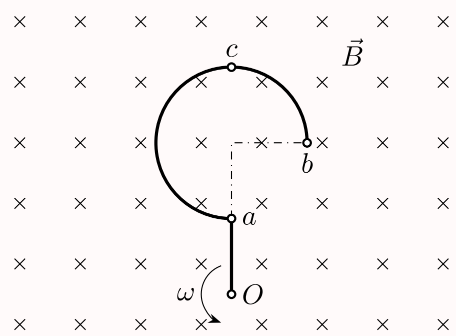
$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

所以感应电动势的方向由中心指向边缘，大小为

$$\mathscr{E} = \int_0^R vB\,\mathrm{d}r = \int_0^R \omega Br\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

第 318 题 |【2508】

一导线被弯成如图所示形状，acb 为半径为 R 的四分之三圆弧，直线段 Oa 长为 R。若此导线放在匀强磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 的方向垂直图面向内。导线以角速度 ω 在图面内绕 O 点匀速转动，则此导线中的动生电动势 $\mathscr{E}_i =$______，电势最高的点是______。



答案

$\frac{5}{2}B\omega R^2$，O 点

解析

动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -B\omega r\,\mathrm{d}r$$

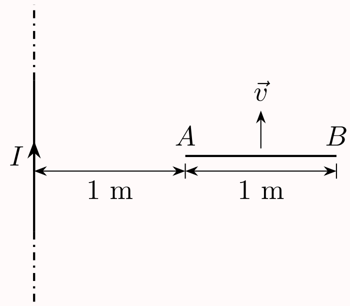
所以感应电动势的方向由 b 点沿曲线指向 O 点，因此 O 点电势最高。感应电动势的大小为

$$\mathscr{E} = \int_b^O -B\omega r\,\mathrm{d}r = \int_{\sqrt{5}R}^0 -B\omega r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}B\omega(5R^2) = \frac{5}{2}B\omega R^2$$

2. 长直载流导线的磁场

第 319 题 |【2134】

金属杆 AB 以匀速 $v = 2$ m/s 平行于长直载流导线运动，导线与 AB 共面且相互垂直，如图所示。已知导线载有电流 $I = 40$ A，则此金属杆中的感应电动势 $\mathscr{E}_i =$______，电势较高端为______。($\ln 2 = 0.69$)



答案

1.104×10^{-5} V，A 端

解析

无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

图中金属杆处磁场的方向为垂直纸面向里。动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

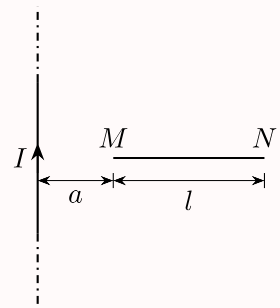
以导线所在位置为坐标原点，沿金属杆方向建立 x 轴，则金属杆中的感应电动势为

$$\mathscr{E} = \int_1^2 -vB\,\mathrm{d}x = \int_1^2 -v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\left[\ln x\right]_1^2 = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln 2$$
$$= -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 2}{2\pi} \times 0.69 = -1.104 \times 10^{-5}\text{ V}$$

所以电动势从 B 端指向 A 端，A 端电势比较高。

第 320 题 |【2510】

如图所示，一段长度为 l 的直导线 MN，水平放置在载电流为 I 的竖直长导线旁与竖直导线共面，并从静止由图示位置自由下落，则 t 秒末导线两端的电势差 $U_M - U_N =$______。



答案

$\frac{\mu_0 Igt}{2\pi}\ln\frac{a}{a+l}$

解析

自由落体运动 t 秒末的速率为

$$v=gt$$

方向竖直向下。长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧磁场的方向垂直纸面向里。动生电动势

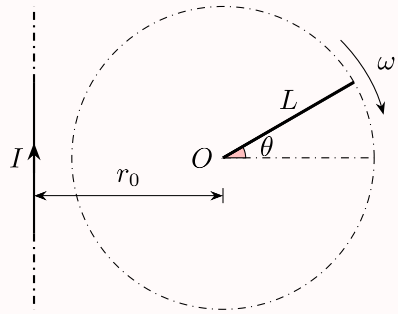
$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=Bv\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Igt}{2\pi r}\,\mathrm{d}r$$

所以感应电动势的方向由 M 点指向 N 点，所以

$$U_M-U_N=\int_N^M\frac{\mu_0 Igt}{2\pi r}\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Igt}{2\pi}\left[\ln r\right]_{a+l}^{a}=\frac{\mu_0 Igt}{2\pi}\ln\frac{a}{a+l}$$

第 321 题 |【2327】

一无限长竖直导线上通有稳定电流 I，电流方向向上。导线旁有一与导线共面、长度为 L 的金属棒，绕其一端 O 在该平面内顺时针匀速转动，如图所示。转动角速度为 ω，O 点到导线的垂直距离为 $r_0(r_0>L)$。试求金属棒转到与水平面成 θ 角时，棒内感应电动势的大小和方向。



解答

金属棒上取离 O 点 $l \to l + \mathrm{d}l$ 段为研究对象，则其运动速度的大小 $v = \omega l$。当金属棒与水平面成 θ 角时，它与长直电流之间的距离 $r = r_0 + l\cos\theta$。长直电流在研究对象处的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l\cos\theta)}$$

方向垂直纸面向里。所以研究对象上的感应电动势 (动生电动势)

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = (\omega l) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l\cos\theta)} \cdot \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \cdot \frac{l\,\mathrm{d}l}{r_0 + l\cos\theta}$$

所以整根金属棒的感应电动势

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \int_0^L \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \cdot \frac{l\,\mathrm{d}l}{r_0 + l\cos\theta} \\
&= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \int_0^L \frac{l}{r_0 + l\cos\theta}\,\mathrm{d}l \\
&= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi\cos\theta} \int_0^L \left[1 - \frac{r_0}{r_0 + l\cos\theta}\right] \mathrm{d}l \\
&= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi\cos\theta} \left[l - \frac{r_0}{\cos\theta} \ln(r_0 + l\cos\theta)\right]_0^L \\
&= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi\cos\theta} \left[L - \frac{r_0}{\cos\theta} \ln\frac{r_0 + L\cos\theta}{r_0}\right]
\end{aligned}$$

方向从 O 沿杆指向末端。

第 322 题 |【2676】

在竖直放置的一根无限长载流直导线右侧有一与其共面的任意形状的平面线圈。直导线中的电流由下向上，当线圈平行于导线向下运动时，线圈中的感应电动势_____；当线圈以垂直于导线的速度靠近导线时，线圈中的感应电动势_____。(填“> 0”，“< 0”或“$= 0$”) (设顺时针方向的感应电动势为正)。

答案

$=0$，<0

解析

无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

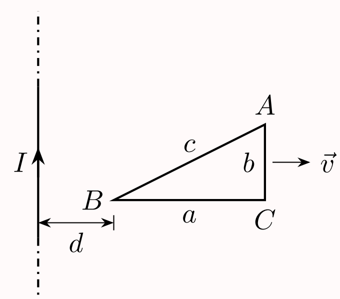
所以，越靠近载流导线，r 越小，磁场越大，同一个 r 处，磁场不变。另在由下向上的电流右侧，磁场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

所以当线圈平行于导线向下运动时，通过线圈的磁通量不变，所以感应电动势为零。当线圈靠近导线时，磁场变大，磁通量变大，感应电动势为负。

第 323 题 |【2499】

无限长直导线，通以常定电流 I。有一与之共面的直角三角形线圈 ABC。已知 AC 边长为 b，且与长直导线平行，BC 边长为 a。若线圈以垂直于导线方向的速度 $\vec{v}$ 向右平移，当 B 点与长直导线的距离为 d 时，求线圈 ABC 内的感应电动势的大小和感应电动势的方向。



解答

无限长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧，磁场的方向垂直纸面向里。

计算电动势的两种方法：
【方法一】动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathscr{E}_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B vB\,\mathrm{d}y = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_b^0 \frac{1}{d + \frac{a}{b}y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{b}{a} \left[\ln\left(d + \frac{a}{b}y\right)\right]_b^0 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{b}{a} \ln \frac{d}{d + \frac{a}{b}b} = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi a} \ln \frac{d}{d+a}$$

$$\mathscr{E}_{BC} = \int_B^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\mathscr{E}_{CA} = \int_C^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = vBL_{CA} = v \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+d)} \times b = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi(a+d)}$$

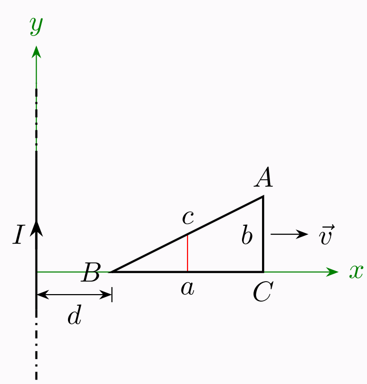
$$\mathscr{E}_{ABCA} = \mathscr{E}_{AB} + \mathscr{E}_{BC} + \mathscr{E}_{CA} = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi a} \ln \frac{d}{d+a} + \frac{\mu_0 I v b}{2\pi(a+d)}$$

$$= \frac{\mu_0 I v b}{2\pi} \left[\frac{1}{a} \ln \frac{d}{d+a} + \frac{1}{a+d}\right] = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi} \left[\frac{1}{a+d} - \frac{1}{a} \ln \frac{d+a}{d}\right]$$

从上式很难直接看出 $\mathscr{E}_{ABCA}$ 的正负，但从相同高度处的 AB、AC 上的元线段来看，AC 处的磁场较弱，所以感应电动势的大小较小，因此 AB 段总的感应电动势的方向从 B 指向 A，AC 段总的感应电动势的方向从 C 指向 A，但 AB 段的感应电动势的大小较大，所以总的感应电动势的方向为沿 $BACB$ 绕向，即上式中 $\mathscr{E}_{ABCA} < 0$。
【方法二】先求出任意时刻通过三角形线框的磁通量，再从法拉第电磁感应定律出发求感应电动势。如图建立直角坐标系，则 AB 直线所在的方程为

$$y = \frac{b}{a}(x - d)$$

$$x = d + \frac{a}{b}y$$



$$\Phi = \int_r^{r+a} By\,\mathrm{d}x = \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{b}{a}(x - r)\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \int_r^{r+a} \left(1 - \frac{r}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} (x - r\ln x)_r^{r+a}$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \{[(r+a) - r\ln(r+a)] - [r - r\ln r]\} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[a - r\ln \frac{r+a}{r}\right]$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[-\ln \frac{r+a}{r} - r \times \frac{r}{r+a} \times \left(-\frac{a}{r^2}\right)\right] \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left[\frac{a}{r+a} - \ln\frac{r+a}{r}\right]v = -\frac{\mu_0 Ibv}{2\pi a}\left[\frac{a}{r+a} - \ln\frac{r+a}{r}\right]$$

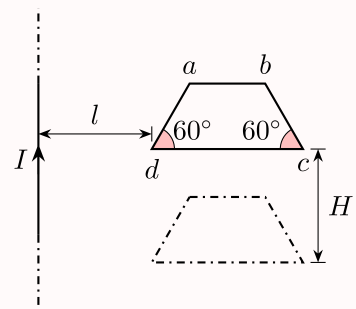
注意上式求导过程中 r 为任意时刻 B 点到通电直导线之间的距离，是随时间变化的函数，其对时间的导数就等于线框运动的速度。要求图示位置时的感应电动势，要先对任意 r 求导后再将 $r = d$ 代入，即

$$\mathscr{E} = -\frac{\mu_0 Ibv}{2\pi a}\left[\frac{a}{d+a} - \ln\frac{d+a}{d}\right]$$

由于上面磁通量以垂直纸面向里为正方向，所以相应的感应电动势的正方向为顺时针方向。而从愣次定律也可以判断出感应电动势的方向，线框远离直导线，磁场减弱，磁通量减少，感应电流所产生的附加磁通量要阻止磁通量的减少，所以感应电流的方向为顺时针方向，感应电动势的方向为顺时针方向。

第 324 题 |【0310】

如图所示，一长直导线通有电流 I，其旁共面地放置一匀质金属梯形线框 $abcda$，已知：$da = ab = bc = L$，两斜边与下底边夹角均为 $60°$，d 点与导线相距 l。今线框从静止开始自由下落 H 高度，且保持线框平面与长直导线始终共面，求：(1) 下落高度为 H 的瞬间，线框中的感应电流为多少？(2) 该瞬时线框中电势最高处与电势最低处之间的电势差为多少？



解答

(1) 由于下落过程，通过线框的磁通量保持不变，所以线框中的感应电动势为零，感应电流为零。
(2) 无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

直线右边磁场方向垂直纸面向里。
线框做自由落体运动，下落 H 时速率为 $v = \sqrt{2gH}$。
动生电动势

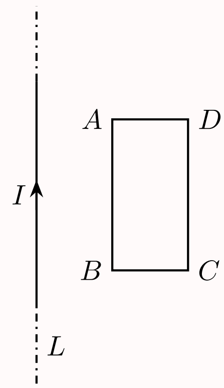
$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\,\mathrm{d}r$$

$$\mathscr{E}_{dc}=\int_{l}^{l+2L}\frac{\mu_0 I v}{2\pi r}\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{l+2L}{l}=\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{l+2L}{l}=\frac{\mu_0 I\sqrt{2gH}}{2\pi}\ln\frac{l+2L}{l}$$

其中 dc 段的长度由图可知为 $L_{dc}=L_{da}\cos 60^\circ+L_{ab}+L_{bc}\cos 60^\circ=2L$。整个线框中 c 点电势最高，d 点电势最低。

第 325 题 |【2128】

如图所示，在一长直导线 L 中通有电流 I，$ABCD$ 为一矩形线圈，它与 L 皆在纸面内，且 AB 边与 L 平行。(1) 矩形线圈在纸面内向右移动时，线圈中感应电动势方向为_____；(2) 矩形线圈绕 AD 边旋转，当 BC 边已离开纸面正向外运动时，线圈中感应动势的方向为_____。



答案

$ADCBA$ 绕向，$ADCBA$ 绕向

解析

无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定理可得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，越靠近载流导线，r 越小，磁场越大，同一个 r 处，磁场不变。另在由下向上的电流右侧，磁场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

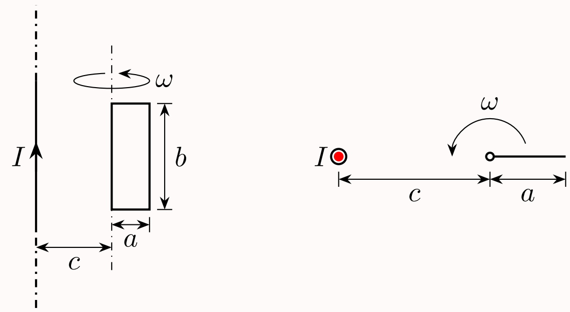
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

所以当线圈向右移动时，磁场变小，磁通量变小，感应电动势为正，即沿顺时针方向，即 $ADCBA$ 绕向。

若矩形线圈绕 AD 边旋转，当 BC 边已离开纸面正向外运动时，磁通量也是变小，因此感应电动势也是为正，即沿顺时针方向，即 $ADCBA$ 绕向。

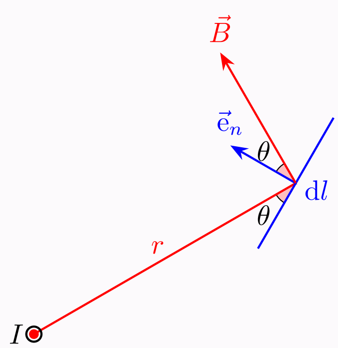
第 326 题 |【2743】

一边长为 a 及 b 的矩形导线框，它的边长为 b 的边与一载有电流为 I 的长直导线平行，其中一条边与长直导线相距为 c，$c>a$，如图所示。今线框以此边为轴以角速度 ω 匀速旋转，求框中的感应电动势 $\mathscr{E}$。



解答

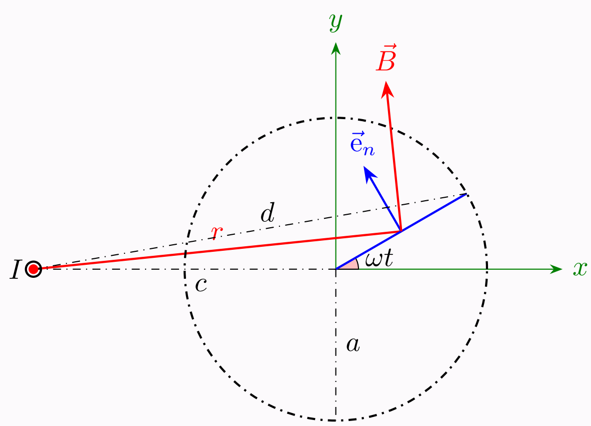
思路 1：计算任意时刻通过线框的磁通量，再利用法拉第电磁感应定律求得感应电动势。
思路 2：本题中磁场分布不随时间变化，线框运动，原则上也可以通过计算动生电动势的方法来求，但由于磁场非匀强，各处磁场的大小和方向都不相同，感觉计算起来不那么容易，当然细致分析一下可以发现，转轴所在边由于静止不动，不产生感应电动势；上下两边，一个可以认为它们运动方向与磁场线平行，运动过程没有切割磁场线，所以也没有产生感应电动势，另一方面简单的计算表明，线上各处的 $\vec{v}\times\vec{B}$ 一定垂直于 $\mathrm{d}\vec{l}$，所以感应电动势为零；所以最后只需要计算与转轴平行的对边所产生的感应电动势，而该边始终和通电直导线平行，各点到通电直导线的距离相等，因此各点的磁场相同，因此感应电动势就是 $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l}$。其中 $(\vec{v}\times\vec{B})\parallel\vec{l}$，而按下图建立坐标系之后，$\vec{v}$ 的方向表达比较容易，难在 $\vec{B}$ 的方向表达。



其实同样的，在思路 1 中计算任意时刻的磁通量，也涉及这个问题，面元的方向就是这里 $\vec{v}$ 的方向，但 $\vec{B}$ 的方向很难表示，因此想直接通过矢量计算磁通量 $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 比较麻烦。
但从上图可以看出

$$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{B}\cdot b\,\mathrm{d}l\vec{e}_n=Bb\,\mathrm{d}l\cos\theta=Bb\,\mathrm{d}r$$

以题图所示时刻为 $t=0$ 时刻。则任意 t 时刻时，线框位置如下图所示。



无限长直导线的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$

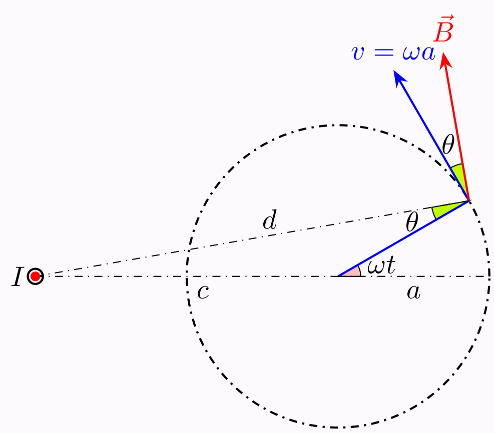
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以该时刻通过线框的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi = \int_c^d Bb\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{d}{c} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(c+a\cos\omega t)^2+(a\sin\omega t)^2}}{c} \\ = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos\omega t}}{c}\end{aligned}$$

所以感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos\omega t}}\times\frac{1}{2\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos\omega t}}\times 2ac(-\sin\omega t)\times\omega \\ = \frac{\mu_0 Iabc\omega\sin\omega t}{2\pi(c^2+a^2+2ac\cos\omega t)}\end{aligned}$$



动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathscr{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l}=vBl\sin\theta=\omega a\times\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\times b\times\sin\theta=\frac{\mu_0 Iab\omega}{2\pi d}\times\sin\theta$$

根据三角形正弦定理得

$$\frac{\sin\theta}{c}=\frac{\sin(\pi-\omega t)}{d}$$
$$\sin\theta=\frac{c\sin\omega t}{d}$$

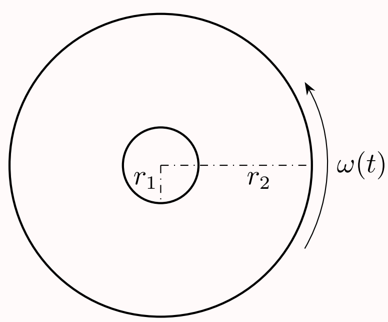
所以感生电动势为

$$\mathscr{E}=\frac{\mu_0 Iab\omega}{2\pi d}\times\frac{c\sin\omega t}{d}=\frac{\mu_0 Iabc\omega\sin\omega t}{2\pi d^2}=\frac{\mu_0 Iabc\omega\sin\omega t}{2\pi(c^2+a^2+2ac\cos\omega t)}$$

3. 其他磁场

第 327 题 |【2409】

如图所示，一半径为 r_2、电荷线密度为 λ 的均匀带电圆环，里边有一半径为 r_1、总电阻为 R 的导体环，两环共面同心 ($r_2\gg r_1$)，当大环以变角速度 $\omega=\omega(t)$ 绕垂直于环面的中心轴旋转时，求小环中的感应电流。其方向如何？



解答

当大环绕中心轴转动时，任意瞬间的等效圆电流为

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\lambda\Delta l}{\Delta t}=\lambda v=\lambda\omega r_2$$

任意 t 时刻，它在圆心处所激发的磁场方向垂直纸面向外，大小为

$$B=\frac{\mu_0 I(2\pi r_2)}{4\pi r_2^2}=\frac{\mu_0 I}{2r_2}=\frac{\mu_0\lambda\omega r_2}{2r_2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}$$

小环半径很小，近似认为小环所在处磁场处处相等，则通过小环的磁通量近似为

$$\Phi\approx B\pi r_1^2=\frac{\mu_0\lambda\omega\pi r_1^2}{2}$$

这里，以垂直纸面向外为磁通量的正方向，所以逆时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0\lambda\pi r_1^2}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

所以感应电流为

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=-\frac{\mu_0\lambda\pi r_1^2}{2R}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

当 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}>0$ 时，$i<0$，即转速加快时，感应电流沿顺时针方向；当 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}<0$ 时，$i>0$，即转速减慢时，感应电流沿逆时针方向。

第 328 题 |【2616】

桌子上水平放置一个半径 $r=10$ cm 的金属圆环，其电阻 $R=1\ \Omega$。若地球磁场磁感强度的竖直分量为 5×10^{-5} T。那么将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电荷 $q=$______。

答案

3.14×10^{-6} C

解析

思路：求感应电动势，求感应电流，求电荷。
法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

感应电流

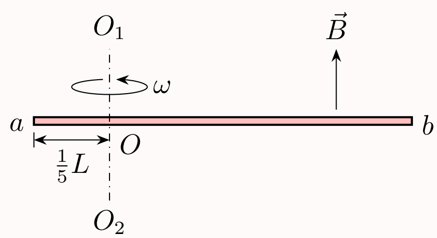
$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

所以通过的电荷为

$$\begin{aligned}q&=\int\mathrm{d}q=\int I\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathscr{E}}{R}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}\Phi}{R}=\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{2BS}{R}=\frac{2B\pi r^2}{R}\\&=\frac{2\times5\times10^{-5}\pi\times(0.1)^2}{1}=3.14\times10^{-6}\ \mathrm{C}\end{aligned}$$

第 329 题 |【2509】

如图所示，一根长为 L 的金属细杆 ab 绕竖直轴 O_1O_2 以角速度 ω 在水平面内旋转。O_1O_2 在离细杆 a 端 $\frac{1}{5}L$ 处。若已知地磁场在竖直方向的分量为 $\vec{B}$。求 ab 两端间的电势差 U_a-U_b。



解答

动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\omega lB\,\mathrm{d}l$$

由此可以判断，电动势的方向是从 O 点指向 a 端和 b 端。

$$\mathscr{E}_{Ob}=\int_O^b B\omega l\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega\left(\frac{4}{5}L\right)^2=\frac{8}{25}B\omega L^2$$
$$\mathscr{E}_{Oa}=\int_O^a B\omega l\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega\left(\frac{1}{5}L\right)^2=\frac{1}{50}B\omega L^2$$

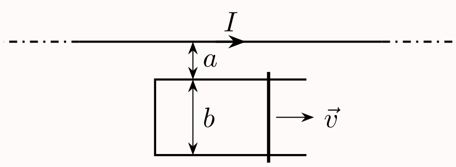
所以

$$U_a-U_b=(U_a-U_O)+(U_O-U_b)=\mathscr{E}_{Oa}-\mathscr{E}_{Ob}$$
$$=\frac{1}{50}B\omega L^2-\frac{8}{25}B\omega L^2=-\frac{15}{50}B\omega L^2=-\frac{3}{10}B\omega L^2$$

9.2.2 感生电动势

第 330 题 |【2139】

如图所示，真空中一长直导线通有电流 $I(t)=I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$(式中 I_0、λ 为常量，t 为时间)，有一带滑动边的矩形导线框与长直导线平行共面，二者相距 a。矩形线框的滑动边与长直导线垂直，它的长度为 b，并且以匀速 $\vec{v}$(方向平行长直导线) 滑动。若忽略线框中的自感电动势，并设开始时滑动边与对边重合，试求任意时刻 t 在矩形线框内的感应电动势 $\mathscr{E}_i$，并讨论 $\mathscr{E}_i$ 方向。



解答

本题激发磁场的电流随时间发生变化，所有磁场会随时间发生变化，所以回路中有感生电动势；而导体又发生运动，所以还有动生电动势，可以分别计算这两个，也可以直接从法拉第电磁感应定律出来，先求出任意时间通过线框回路的磁通量，再直接求导得到感应电动势。

以 $t=0$ 时刻滑动边所在位置为坐标原点，水平向右建立 x 轴，则任意 t 时刻，滑动边的位置 $x=vt$，长直导线中通过的电流 $I(t)=I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$，它在空间所激发的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$B=\frac{\mu_0 I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}}{2\pi r}$$

在线框所在处的磁场的方向是垂直纸面向里，通过线框的磁通量为

$$\Phi=\int_a^{a+b}Bx\,\mathrm{d}r=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}}{2\pi r}vt\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}}{2\pi}vt\ln\frac{a+b}{a}=\frac{\mu_0I_0v}{2\pi}t\mathrm{e}^{-\lambda t}\ln\frac{a+b}{a}$$

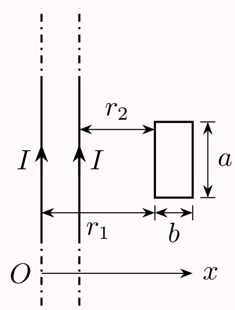
这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0I_0v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}+t\mathrm{e}^{-\lambda t}\times(-\lambda)\right]=\frac{\mu_0I_0v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}(\lambda t-1)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

当 $\lambda t-1<0$，即 $t<\frac{1}{\lambda}$ 时，$\mathscr{E}<0$，感应电动势的方向为逆时针；当 $\lambda t-1>0$，即 $t>\frac{1}{\lambda}$ 时，$\mathscr{E}>0$，感应电动势的方向为顺时针。

第 331 题 |【2150】

如图所示，两条平行长直导线和一个矩形导线框共面。且导线框的一个边与长直导线平行，他到两长直导线的距离分别为 r_1、r_2。已知两导线中电流都为 $I=I_0\sin(\omega t)$，其中 I_0 和 ω 为常数，t 为时间。导线框长为 a 宽为 b，求导线框中的感应电动势。



解答

任意 t 时刻，两根通电导线的磁场分别由安培环路定理求得

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0I$$

$$B_1\cdot(2\pi x)=\mu_0I_0\sin(\omega t)$$

$$B_1=\frac{\mu_0I_0\sin(\omega t)}{2\pi x}$$

$$B_2\cdot[2\pi(x-r_1+r_2)]=\mu_0I_0\sin(\omega t)$$

$$B_2=\frac{\mu_0I_0\sin(\omega t)}{2\pi(x-r_1+r_2)}$$

在线框所在处，两个磁场的方向都是垂直纸面向里，所以总的磁场方向也是垂直纸面向里，大小为

$$B=B_1+B_2=\frac{\mu_0I_0\sin(\omega t)}{2\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-r_1+r_2}\right]$$

所以通过线框的磁通量为

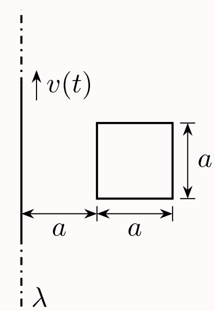
$$\Phi = \int_{r_1}^{r_1+b} Ba\,\mathrm{d}x = \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-r_1+r_2}\right] a\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mu_0 a I_0 \sin(\omega t)}{2\pi}\left[\ln x + \ln(x-r_1+r_2)\right]_{r_1}^{r_1+b} = \frac{\mu_0 a I_0 \sin(\omega t)}{2\pi}\ln\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}$$

这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 a I_0 \omega \cos(\omega t)}{2\pi}\ln\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}$$

第 332 题 |【2407】

如图所示，一电荷线密度为 λ 的长直带电线 (与一正方形线圈共面并与其一对边平行) 以变速率 $v = v(t)$ 沿着其长度方向运动，正方形线圈中的总电阻为 R，求 t 时刻方形线圈中感应电流 $i(t)$ 的大小 (不计线圈自身的自感)。



解答

等效电流为

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta l}{\Delta t} = \lambda v$$

任意 t 时刻，它所激发的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 \lambda v$$
$$B = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}$$

在线框所在处，磁场的方向垂直纸面向里，所以通过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{2a} Ba\,\mathrm{d}r = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} a\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \lambda v a}{2\pi}\ln\frac{2a}{a} = \frac{\mu_0 \lambda a v}{2\pi}\ln 2$$

这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感

应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0\lambda a}{2\pi}(\ln 2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

所以感应电流为

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=-\frac{\mu_0\lambda a}{2\pi R}(\ln 2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

上式最后结果的正负值表示感应电流的方向，所以其大小为

$$|i|=\frac{\mu_0\lambda a}{2\pi R}(\ln 2)\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$$

第 333 题 |【2615】

半径为 a 的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为 n，通以交变电流 $i=I_m\sin(\omega t)$，则围在管外的同轴圆形回路 (半径为 r) 上的感生电动势为______。

答案

$-\mu_0\pi\omega a^2 nI_m\cos(\omega t)$

解析

密绕螺线管的磁场只分布在管内，管内为均匀磁场，管外磁场为零，所以管内磁场可以由安培环路定理可得

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B\cdot L=\mu_0 nLi$$

$$B=\mu_0 ni=\mu_0 nI_m\sin(\omega t)$$

所以通过管外半径为 r 的同轴圆形回路的磁通量为

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\pi a^2=\mu_0\pi a^2 nI_m\sin(\omega t)$$

注意这里只有管内部分有磁场，管外没有磁场，所以面积只能用螺线管的截面积。所以感生电动势为

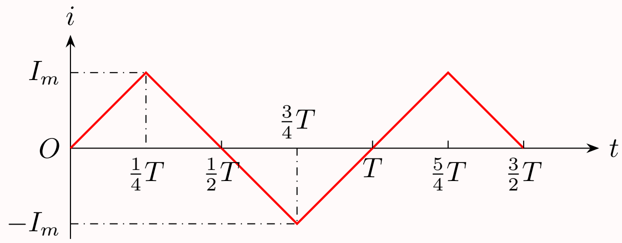
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\mu_0\pi\omega a^2 nI_m\cos(\omega t)$$

或者

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\int_S\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\pi a^2=-\mu_0\pi\omega a^2 nI_m\cos(\omega t)$$

第 334 题 |【5554】

半径为 R 的长直螺线管单位长度上密绕有 n 匝线圈。在管外有一包围着螺线管、面积为 S 的圆线圈，其平面垂直于螺线管轴线。螺线管中电流 i 随时间作周期为 T 的变化，如图所示。求圆线圈中的感生电动势 $\mathscr{E}$。画出 $\mathscr{E}-t$ 曲线，注明时间坐标。



解答

无限长直密绕螺线管的磁场可以由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B\cdot L = \mu_0 nLi$$

$$B = \mu_0 ni$$

由于螺线管的磁场只分布在管内，而且管内磁场可以近似认为是匀强磁场，所以通过线圈的磁通量为

$$\Phi = BS = \mu_0 ni\pi R^2$$

所以感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n\pi R^2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

当 $0<t<\frac{T}{4}$ 时，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{T/4}=\frac{4I_m}{T}$，感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\mu_0 n\pi R^2\times\frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n\pi R^2 I_m}{T}$$

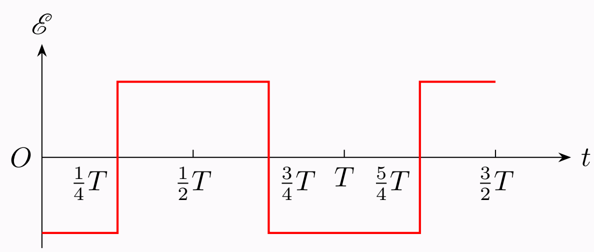
当 $\frac{T}{4}<t<\frac{3T}{4}$ 时，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{-2I_m}{T/2}=-\frac{4I_m}{T}$，感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\mu_0 n\pi R^2\times\left(-\frac{4I_m}{T}\right) = \frac{4\mu_0 n\pi R^2 I_m}{T}$$

当 $\frac{3T}{4}<t<T$ 时，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{T/4}=\frac{4I_m}{T}$，感应电动势为

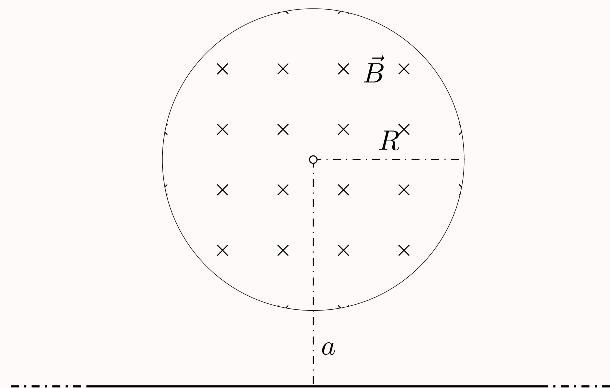
$$\mathscr{E} = -\mu_0 n\pi R^2\times\frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n\pi R^2 I_m}{T}$$

所以 $\mathscr{E}-t$ 曲线如下图所示：



第 335 题 |【2742】

在半径为 R 的圆柱形空间内，存在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，$\vec{B}$ 的方向与圆柱的轴线平行。有一无限长直导线在垂直圆柱中心轴线的平面内，两线相距为 a，$a>R$，如图所示。已知磁感强度随时间的变化率为 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$，求长直导线中的感应电动势 $\mathscr{E}$，并说明其方向。

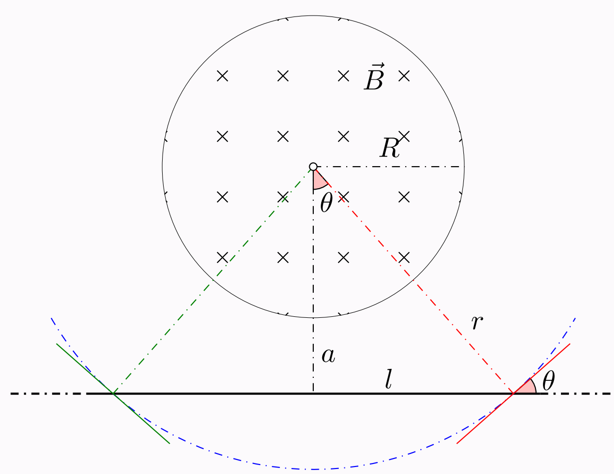


解答

由于磁场分布相对圆柱的轴线对称，所以当磁场发生变化的时候，在以圆柱轴线为中心且垂直于轴线的同一个圆周上，各点的感生电场大小相等，方向沿圆周的切线，即

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=\oint_L\vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_S\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
$$E_{\mathrm{i}}\cdot(2\pi r)=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$
$$E_{\mathrm{i}}=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

当磁场增加时，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$，感生电场沿逆时针方向；当磁场减少时，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}<0$，感生电场沿顺时针方向。



所以沿任意一条曲线的感生电动势为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=\int_L\vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

所以所求感生电动势为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=\int_L E_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}l\cos\theta=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_L\frac{1}{r}\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

由上图可知

$$a=r\cos\theta, l=r\sin\theta$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\cos\theta, l=a\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \mathrm{d}l=a\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

代入感生电动势积分式，得

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_L\frac{1}{a}\cos\theta\times\cos\theta\times\frac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

9.3 互感

第 336 题 |【2156】

两个相距不太远的平面圆线圈，怎样可使其互感系数近似为零？设其中一线圈的轴线恰通过另一线圈的圆心

(A) 两线圈的轴线互相平行放置
(B) 两线圈并联
(C) 两线圈的轴线互相垂直放置
(D) 两线圈串联

答案

C

解析

计算互感的基本方法是假定一个线圈中通过电流 I，计算通过另一线圈的磁通量 ϕ(磁链 Φ)，二者的比值即为互感

$$M=\frac{\phi}{I}$$

如果互感近似为零，则说明通过另一线圈的磁通量近似为零，所以磁场线与线圈平面平行。所以，两线圈的轴线互相垂直放置时，互感近似为零。

第 337 题 |【2752】

在真空中一个通有电流的线圈 a 所产生的磁场内有另一个线圈 b，a 和 b 相对位置固定。若线圈 b 中电流为零 (断路)，则线圈 b 与 a 间的互感系数

(A) 一定为零
(B) 一定不为零

(C) 可为零也可不为零，与线圈 b 中电流无关　　(D) 是不可能确定的

答案

C

解析

互感与两个线圈的形状、位置等有关，与线圈中是否通电无关。计算互感的基本思路是假定一个线圈中通以电流，计算另一线圈中的磁通量或磁链，二者相除即为互感。

9.4 自感

第 338 题 |【2417】

对于单匝线圈取自感系数的定义式为 $L=\frac{\Phi}{I}$。当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变，且无铁磁性物质时，若线圈中的电流强度变小，则线圈的自感系数 L

(A) 变大，与电流成反比关系　　(B) 变小

(C) 不变　　(D) 变大，但与电流不成反比关系

答案

C

解析

计算自感的基本方法是假定线圈中通过电流 I，计算通过自身的磁通量 ϕ(磁链 Φ)，二者的比值即为自感

$$L=\frac{\Phi}{I}$$

自感只与线圈本身的形状、匝数等有关，而与通过的电流无关。电流变化时，它所激发的磁场会随电流线性变化，因此磁通量也线性变化，二者的比值保持不变。

第 339 题 |【2421】

已知一螺绕环的自感系数为 L。若将该螺绕环锯成两个半环式的螺线管，则两个半环螺线管的自感系数

(A) 都等于 $\frac{1}{2}L$　　(B) 有一个大于 $\frac{1}{2}L$，另一个小于 $\frac{1}{2}L$

(C) 都大于 $\frac{1}{2}L$　　(D) 都小于 $\frac{1}{2}L$

答案

D

解析

两个自感分别为 L_1、L_2，互感为 M 的线圈顺接串联时等效于一个自感线圈，其自感为

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

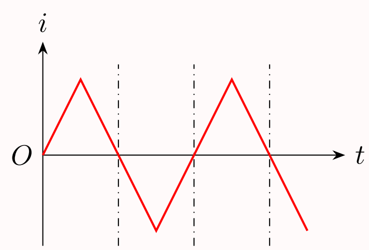
当 $L_1 = L_2$ 时，显然有

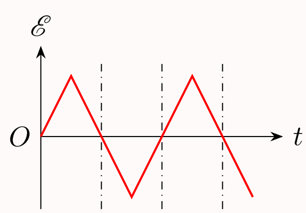
$$L_1 = L_2 = \frac{L}{2} - M$$

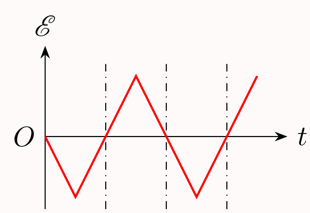
其中 M 为正数，所以两个半环螺线管的自感系数均小于 $\frac{1}{2}L$。

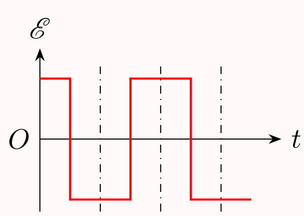
第 340 题 |【5138】

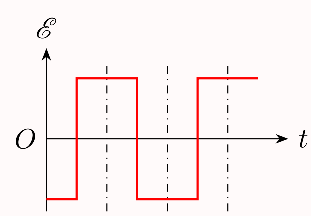
在一自感线圈中通过的电流 i 随时间 t 的变化规律如图所示，若以 i 的正流向作为 $\mathscr{E}$ 的正方向，则代表线圈内自感电动势 $\mathscr{E}$ 随时间 t 变化规律的曲线应为



(A)


(B)


(C)


(D)


答案

D

解析

法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

自感电动势

$$\mathscr{E}=-\int\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\propto-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

第一小段，电流线性增大，$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}>0$，自感电动势为一个负的不变的值。第二小段，电流线性减小，$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}<0$，自感电动势为一个正的不变的值。

第 341 题 |【2159】

无铁芯的长直螺线管的自感系数表达式为 $L=\mu_0 n^2 V$，其中 n 为单位长度上的匝数，V 为螺线管的体积。若考虑端缘效应时，实际的自感系数应_____(填：大于、小于或等于) 此式给出的值。若在管内装上铁芯，则 L 与电流_____。(填：有关，无关)。

答案

小于，有关

解析

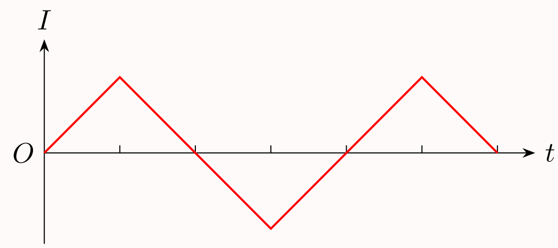
当通以电流 I 时，通过的磁链为 Φ，则自感系数为

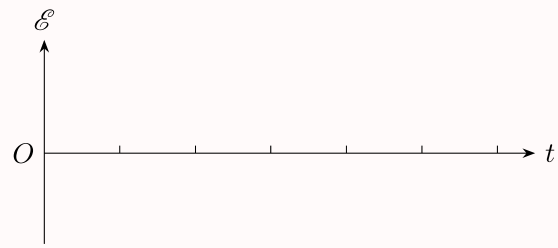
$$L=\frac{\Phi}{I}$$

考虑端缘效应，就是认为螺线管是有限长而不是无限长的，因此激发磁场的线圈减少，螺线管内的磁场必然会减少一点点，通过的磁链减少，所以实际的自感系数必然会减小。
当线圈中无铁芯时，线圈的自感系数仅依赖于线圈本身的因素，与电流无关；当线圈中有铁芯时，自感系数与电流有关。

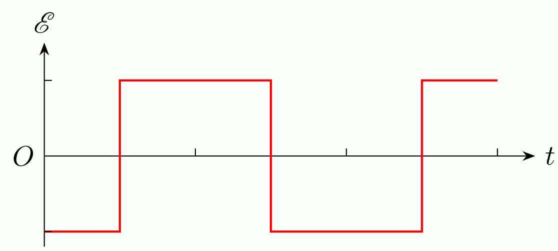
第 342 题 |【2521】

一线圈中通过的电流 I 随时间 t 变化的曲线如图所示。试定性画出自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 随时间变化的曲线。(以 I 的正向作为 $\mathscr{E}$ 的正向)





答案



解析

根据自感系数的定义和感应电动势的定义，有

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

第 343 题 |【2525】

一自感线圈中，电流强度在 0.002 s 内均匀地由 10 A 增加到 12 A，此过程中线圈内自感电动势为 400 V，则线圈的自感系数为 $L =$______。

答案

0.4 H

解析

根据自感电动势的定义，有

$$\mathscr{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$L = \left|\frac{\mathscr{E}}{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}\right| = \left|\frac{\mathscr{E}\Delta t}{\Delta I}\right| = \frac{400\times 0.002}{12-10} = 0.4\ \mathrm{H}$$

9.5 自感磁能 磁场的能量密度

第 344 题 |【5141】

有两个长直密绕螺线管，长度及线圈匝数均相同，半径分别为 r_1 和 r_2。管内充满均匀介质，其磁导率分别为 μ_1 和 μ_2。设 $r_1 : r_2 = 1 : 2$，$\mu_1 : \mu_2 = 2 : 1$，当将两只螺线管串联在电路中通电稳定后，其自感系数之比 $L_1 : L_2$ 与磁能之比 $W_{\mathrm{m}1} : W_{\mathrm{m}2}$ 分别为

(A) $L_1 : L_2 = 1 : 1$，$W_{\mathrm{m}1} : W_{\mathrm{m}2} = 1 : 1$
(B) $L_1 : L_2 = 1 : 2$，$W_{\mathrm{m}1} : W_{\mathrm{m}2} = 1 : 1$
(C) $L_1 : L_2 = 1 : 2$，$W_{\mathrm{m}1} : W_{\mathrm{m}2} = 1 : 2$
(D) $L_1 : L_2 = 2 : 1$，$W_{\mathrm{m}1} : W_{\mathrm{m}2} = 2 : 1$

答案

C

解析

螺线管内的磁场与螺线管的半径无关，与磁导率成正比【根据有磁介质时的安培环路定理可以求得 $H = \frac{NI}{L}$ 与半径无关，而 $B = \mu H$】，所以，当两个螺线管串联在电路中时，通过的电流相等，因此 $B_1 : B_2 = \mu_1 : \mu_2 = 2 : 1$，而通过线圈的磁链 $\Phi = NBS = NB\pi r^2$，所以

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{N_1B_1\pi r_1^2}{N_2B_2\pi r_2^2} = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 : 2$$

所以自感

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\Phi_1/I_1}{\Phi_2/I_2} = 1 : 2$$

而磁能

$$\frac{W_{\mathrm{m}1}}{W_{\mathrm{m}2}} = \frac{\frac{1}{2}L_1I_1^2}{\frac{1}{2}L_2I_2^2} = \frac{L_1}{L_2} = 1 : 2$$

第 345 题 |【2338】

真空中两只长直螺线管 1 和 2，长度相等，单层密绕匝数相同，直径之比 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4}$。当它们通以相同电流时，两螺线管储存的磁能之比为 $\frac{W_1}{W_2} =$______。

答案

$\frac{1}{16}$

解析

假定螺线管中的电流为 I，长度为 L，匝数为 N，直径为 d，忽略边缘效应，即可视为无限长直螺线管，则管内磁场可由安培环路定理求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B\cdot L = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

所以通过螺线管的磁链为

$$\Phi = NBS = N\times\frac{\mu_0 NI}{L}\times\pi\frac{d^2}{4} = \frac{\mu_0 N^2 I\pi d^2}{4L}$$

所以自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2\pi d^2}{4L}$$

所以磁场能量为

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

所以两螺线管的磁能之比为

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{16}$$

第 346 题 |【5149】

无限长密绕直螺线管通以电流 I，内部充满均匀、各向同性的磁介质，磁导率为 μ。管上单位长度绕有 n 匝导线，则管内部的磁感强度为______，内部的磁能密度为______。

答案

μnI，$\frac{1}{2}\mu n^2 I^2$

解析

管内磁场可先由有磁介质时的安培环路定理求得磁场强度，再求得磁感应强度

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

$$H\cdot L = nLI$$

$$H = nI$$
$$B = \mu H = \mu nI$$

而磁场的能量密度为

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2$$

9.6 位移电流 电磁场基本方程的积分形式

9.6.1 位移电流

第 347 题 |【5161】

一平行板空气电容器的两极板都是半径为 R 的圆形导体片，在充电时，板间电场强度的变化率为 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$。若略去边缘效应，则两板间的位移电流为______。

答案

$\varepsilon_0\pi R^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$

解析

位移电流密度矢量

$$\vec{j}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

所以，位移电流

$$I_D = j_D S = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2 = \varepsilon_0\pi R^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

第 348 题 |【2790】

对位移电流，有下述四种说法，请指出哪一种说法正确

(A) 位移电流是指变化电场
(B) 位移电流是由线性变化磁场产生的
(C) 位移电流的热效应服从焦耳——楞次定律
(D) 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

答案

A

解析

通过某一截面的位移电流等于通过该截面电位移通量对时间的变化率

$$I_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S\vec{j}_{\mathrm{d}}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

其中

$$\vec{j}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

称为位移电流密度矢量。
全电流安培环路定理

$$\oint_C\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I=I_{\mathrm{C}}+I_{\mathrm{d}}=\int_S(\vec{j}_{\mathrm{C}}+\vec{j}_{\mathrm{d}})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

即位移电流与传导电流在激发磁场上的地位是相当的，它也满足安培环路定理。
焦耳定律或焦耳——楞次定律是定量说明传导电流将电能转换为热能的定律。1841 年，英国物理学家詹姆斯 • 焦耳发现载流导体中产生的热量 Q(称为焦耳热) 与电流 I 的平方、导体的电阻 R 和通电时间 t 成比例。而在 1842 年时，俄国物理学家海因里希 • 楞次也独立发现上述的关系，因此也称为“焦耳一楞次定律”。

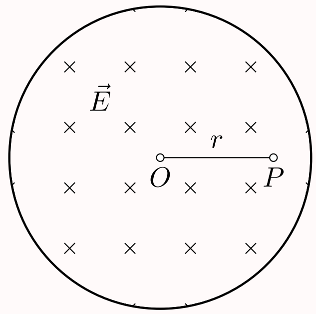
$$Q=I^2R$$

位移电流与传导电流两者相比，唯一共同点仅在于都可以在空间激发磁场，但二者本质是不同的：

- 位移电流的本质是变化着的电场，而传导电流则是自由电荷的定向运动
- 传导电流在通过导体时会产生焦耳热，而位移电流则不会产生焦耳热；位移电流也不会产生化学效应
- 位移电流也即变化着的电场可以存在于真空、导体、电介质中，而传导电流只能存在于导体中
- 位移电流的磁效应服从安培环路定理

第 349 题 |【0323】

图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场 $\vec{E}$，其方向垂直纸面向内，$\vec{E}$ 的大小随时间 t 线性增加，P 为柱体内与轴线相距为 r 的一点，则：(1)P 点的位移电流密度的方向为_____；(2)P 点感生磁场的方向为_____。



答案

垂直纸面向内，垂直 OP 向下

解析

位移电流密度矢量

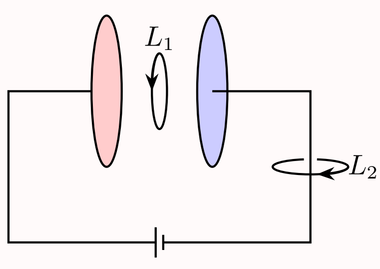
$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

所以，电场方向垂直纸面向内，大小随时间线性增加，因此位移电流密度矢量的方向垂直纸面向内。所以，圆柱体内相当于有一个垂直纸面向内的电流通过，由此产生的感生磁场是沿着以圆柱体轴线为中心、通过该点的圆的切线方向，因此图中就是垂直 OP 向下。

9.6.2 全电流安培环路定理

第 350 题 |【5159】

如图，平板电容器 (忽略边缘效应) 充电时，沿环路 L_1 的磁场强度 $\vec{H}$ 的环流与沿环路 L_2 的磁场强度 $\vec{H}$ 的环流两者，必有



(A) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} > \oint_{L_2} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(B) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(C) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(D) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

答案

C

解析

全电流安培环路定理

$$\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I = I_\mathrm{C} + I_\mathrm{d}$$

显然

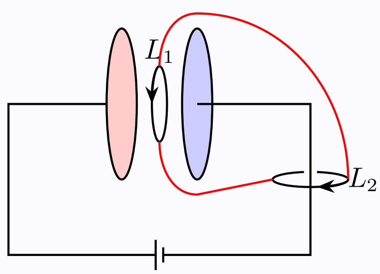
$$\oint_{L_2} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_\mathrm{C}$$

这里的 I_C 就是充电过程中某个瞬间通过回路中的传导电流。而

$$\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_\mathrm{d}$$

这里的 I_d 只是通过 L_1 部分的位移电流，所以显然有

$$\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



第 351 题 |【5160】

在没有自由电荷与传导电流的变化电磁场中，沿闭合环路 l(设环路包围的面积为 S)，$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} =$______，$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} =$______。

答案

$$\int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S},\quad -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

解析

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho\,\mathrm{d}V$$
$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$
$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

没有自由电荷与传导电流，$\rho=0$，$\vec{J}=0$，所以

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$
$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$
$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

9.6.3 麦克斯韦方程组

第 352 题 |【2180】

写出麦克斯韦方程组的积分形式：______，______，______，______。

答案

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$，$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho\,\mathrm{d}V$，$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$，$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$

第 353 题 |【2339】

反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{1}$$
$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{2}$$
$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \tag{3}$$
$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{4}$$

试判断下列结论是包含于或等效于哪一个麦克斯韦方程式的。将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处：

1. 变化的磁场一定伴随有电场；______
2. 磁感线是无头无尾的；______
3. 电荷总伴随有电场。______

答案

(2)，(3)，(1)

解析

介质中电场的高斯定理：电荷以发散的方式激发电场

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$$

电场的安培环路定理：变化的磁场以涡旋的方式激发电场

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

磁场的高斯定理：磁场是个无散场，磁力线是一组闭合的曲线

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

介质中磁场的安培环路定理：传导电流和变化的电场以涡旋的方式激发磁场

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

第三部分

热学

第十一章　热力学基础

11.1　热力学第一定律及其应用

11.1.1　理想气体的内能

第 354 题 |【4655】

有两瓶气体，一瓶是氦气，另一瓶是氢气 (均视为刚性分子理想气体)，若它们的压强、体积、温度均相同，则氢气的内能是氦气的_____ 倍。

答案

$\frac{5}{3}$

解析

氦气是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_{\mathrm{He}}=3$；氢气是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_{\mathrm{H}_2}=5$，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

压强、体积、温度均相同，则摩尔数相同，所以

$$\frac{E_{\mathrm{H}_2}}{E_{\mathrm{He}}}=\frac{i_{\mathrm{H}_2}}{i_{\mathrm{He}}}=\frac{5}{3}$$

第 355 题 |【4016】

三个容器内分别贮有 1 mol 氦 (He)、1 mol 氢 (H_2) 和 1 mol 氨 (NH_3) (均视为刚性分子的理想气体)。若它们的温度都升高 1 K，则三种气体的内能的增加值分别为：氦：$\Delta E=$_____；氢：$\Delta E=$_____；氨：$\Delta E=$_____。

答案

12.465 J，20.775 J，24.93 J

解析

氦气是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_A = 3$；氢气是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_B = 5$，氨气是刚性多原子分子理想气体，其自由度为 $i_C = 6$，而理想气体的内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT$$

所以当温度变化 ΔT 时，内能变化为

$$\Delta E = \frac{i}{2}nR\Delta T$$

所以，当 $\Delta T = 1$ K 时，

$$\Delta E_A = \frac{i_A}{2}n_AR\Delta T = \frac{3}{2}R = 1.5\times 8.31 = 12.465 \text{ J}$$
$$\Delta E_B = \frac{i_B}{2}n_BR\Delta T = \frac{5}{2}R = 2.5\times 8.31 = 20.775 \text{ J}$$
$$\Delta E_C = \frac{i_C}{2}n_CR\Delta T = \frac{6}{2}R = 3R = 3\times 8.31 = 24.93 \text{ J}$$

第 356 题 |【4273】

一定量 H_2 气 (视为刚性分子的理想气体)，若温度每升高 1 K，其内能增加 41.6 J，则该 H_2 气的质量为_____。(普适气体常量 $R = 8.31$ J/(mol · K))

答案

4×10^{-3} kg

解析

氢气是刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{5}{2}nRT$$

依题意

$$\frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{5}{2}nR = 41.6$$
$$n = \frac{m}{M} = \frac{2}{5R}\times\frac{\Delta E}{\Delta T}$$
$$m = \frac{2}{5R}\times\frac{\Delta E}{\Delta T}\times M = \frac{2}{5\times 8.31}\times 41.6\times 2\times 10^{-3} \approx 4\times 10^{-3} \text{ kg}$$

第 357 题 |【4301】

一超声波源发射超声波的功率为 10 W。假设它工作 10 s，并且全部波动能量都被 1 mol 氧气吸收而用于增加其内能，则氧气的温度升高了多少？(氧气分子视为刚性分子，普适气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$)

解答

氧气是刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{5}{2}nRT$$

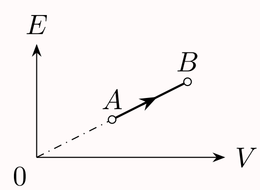
依题意，氧气内能的增加量为

$$\Delta E = \frac{5}{2}nR\Delta T = Pt$$

$$\Delta T = \frac{2Pt}{5nR} = \frac{2\times 10\times 10}{5\times 1\times 8.31} \approx 4.81\ \mathrm{K}$$

第 358 题 |【4101】

某理想气体状态变化时，内能随体积的变化关系如图中 AB 直线所示。$A\to B$ 表示的过程是



(A) 等压过程 (B) 等体过程 (C) 等温过程 (D) 绝热过程

答案

A

解析

理想气体的内能只与温度有关，而且是成正比

$$E = \frac{i}{2}RT$$

所以，由图中可见，内能与体积与正比，也就是温度与体积成正比，由理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得

$$\frac{T}{V} = \frac{p}{nR}$$

所以过程是等压过程。

11.1.2 热力学第一定律

第 359 题 |【4656】

用绝热材料制成的一个容器，体积为 $2V_0$，被绝热板隔成 A、B 两部分，A 内储有 1 mol 单原子分子理想气体，B 内储有 2 mol 刚性双原子分子理想气体，A、B 两部分压强相等均为 p_0，两部分体积均为 V_0，则：(1) 两种气体各自的内能分别为 $E_A =$_____；$E_B =$_____；(2) 抽去绝热板，两种气体混合后处于平衡时的温度为 $T =$_____。

答案

$\frac{3}{2}p_0V_0$，$\frac{5}{2}p_0V_0$，$\frac{8p_0V_0}{13R}$

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

两部分的温度分别为

$$T_A = \frac{p_AV_A}{n_AR} = \frac{p_0V_0}{R}$$
$$T_B = \frac{p_BV_B}{n_BR} = \frac{p_0V_0}{2R}$$

A 气体是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_A = 3$；B 气体是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_B = 5$，而理想气体的内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT$$

所以两种气体各自的内能分别为

$$E_A = \frac{i_A}{2}n_ART_A = \frac{3}{2} \times R \times \frac{p_0V_0}{R} = \frac{3}{2}p_0V_0$$
$$E_B = \frac{i_B}{2}n_BRT_B = \frac{5}{2} \times 2R \times \frac{p_0V_0}{2R} = \frac{5}{2}p_0V_0$$

混合后，设平衡时两气体的共同温度为 T，则两种气体各自的内能分别为

$$E'_A = \frac{i_A}{2}n_ART = \frac{3}{2} \times RT = \frac{3}{2}RT$$
$$E'_B = \frac{i_B}{2}n_BRT = \frac{5}{2} \times 2RT = 5RT$$

由于容器绝热，由两种气体组成的系统与外界之间即没有做功也没有传热，所以系统的总的内能保持不变，所以有

$$E_A + E_B = E'_A + E'_B$$
$$\frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{5}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}RT + 5RT$$
$$4p_0V_0 = \frac{13}{2}RT$$
$$T = \frac{8p_0V_0}{13R}$$

第 360 题 |【4089】

有两个相同的容器，容积固定不变，一个盛有氨气，另一个盛有氢气 (看成刚性分子的理想气体)，它们的压强和温度都相等，现将 5 J 的热量传给氢气，使氢气温度升高，如果使氨气也升高同样的温度，则应向氨气传递热量是

(A) 6 J (B) 5 J (C) 3 J (D) 2 J

答案

A

解析

氢气是刚性双原子分子，自由度为 $i_{\mathrm{H_2}}=5$，氨气是刚性多原子分子，自由度为 $i_{\mathrm{NH_3}}=6$。依题意，两个气体压强、温度、体积均相等，根据理想气体物态方程

$$pV=nRT$$

所以二者的摩尔数也相等。而容器的容积固定，所以气体的体积不变，等容过程，气体不做功，根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

外界传递给系统的热量全部用来增加系统的内能，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

所以

$$\Delta E=\frac{i}{2}nR\Delta T=Q$$
$$\frac{Q_{\mathrm{H_2}}}{Q_{\mathrm{NH_3}}}=\frac{i_{\mathrm{H_2}}}{i_{\mathrm{NH_3}}}$$
$$Q_{\mathrm{NH_3}}=\frac{i_{\mathrm{NH_3}}}{i_{\mathrm{H_2}}}Q_{\mathrm{H_2}}=\frac{6}{5}\times 5=6\ \mathrm{J}$$

原文件中提供的答案是 C，疑似错误。从网上找到另一个完全类似的题目，只是题目中的氨气换成了氦气，那么氦气是单原子分子，自由度为 $i_{\mathrm{He}}=3$，则算出来的答案是 3 J。

第 361 题 |【4109】

一定量的某种理想气体在等压过程中对外作功为 200 J。若此种气体为单原子分子气体，则该过程中需吸热______ J；若为双原子分子气体，则需吸热______ J。

答案

500 J，700 J

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

等压过程

$$W = p\Delta V = nR\Delta T$$
$$\Delta E = \frac{i}{2}nR\Delta T = \frac{i}{2}p\Delta V = \frac{i}{2}W$$
$$Q = \Delta E + W = \frac{i+2}{2}W$$

单原子分子，$i = 3$，所以

$$Q = \frac{5}{2}W = 500\ \mathrm{J}$$

刚性双原子分子，$i = 5$，所以

$$Q = \frac{7}{2}W = 700\ \mathrm{J}$$

在不是非常高的温度下，一般都把气体分子看成刚性分子，题目不作特殊说明时，一般都认为是刚性分子。如果是弹性双原子分子，则 $i = 6$，那么

$$Q = \frac{8}{2}W = 800\ \mathrm{J}$$

第 362 题 |【4319】

有 1 mol 刚性双原子分子理想气体，在等压膨胀过程中对外作功 W，则其温度变化 $\Delta T =$______；从外界吸取的热量 $Q_p =$______。

答案

$\frac{W}{R}$，$\frac{7}{2}W$

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

等压过程

$$W = p\Delta V = nR\Delta T$$
$$\Delta T = \frac{W}{nR}$$
$$\Delta E = \frac{i}{2}nR\Delta T = \frac{i}{2}p\Delta V = \frac{i}{2}W$$
$$Q = \Delta E + W = \frac{i+2}{2}W$$

对于 1 mol 刚性双原子分子，$n=1$，$i=5$，所以

$$\Delta T = \frac{W}{R}$$
$$Q = \frac{7}{2}W$$

第 363 题 |【4689】

压强、体积和温度都相同的氢气和氦气（均视为刚性分子的理想气体），它们的质量之比为 $m_1 : m_2 =$______，它们的内能之比为 $E_1 : E_2 =$______，如果它们分别在等压过程中吸收了相同的热量，则它们对外作功之比为 $W_1 : W_2 =$______。(各量下角标 1 表示氢气，2 表示氦气)

答案

$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{5}{7}$

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

压强、体积和温度都相同时

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$$
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

而理想气体的内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT$$

由前可知，两种气体的摩尔数相等，而氢气是刚性双原子分子，自由度 $i_1=5$，氦气是刚性单原子分子，自由度 $i_2=3$，所以二者的内能之比为

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{i_1}{i_2}=\frac{5}{3}$$

而对于等压过程，气体所做的功为

$$W=p\Delta V=nR\Delta T$$

内能的变化量为

$$\Delta E=\frac{i}{2}nR\Delta T$$

所以根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

可得吸收的热量为

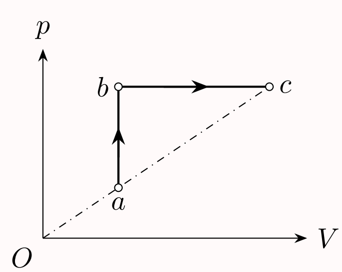
$$Q=\Delta E+W=\frac{i+2}{2}nR\Delta T$$

依题意，$Q_1=Q_2$，所以

$$\frac{(\Delta T)_1}{(\Delta T)_2}=\frac{i_2+2}{i_1+2}=\frac{5}{7}$$
$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{(\Delta T)_1}{(\Delta T)_2}=\frac{5}{7}$$

第 364 题 |【4108】

如图所示，一定量的理想气体经历 $a\to b\to c$ 过程，在此过程中气体从外界吸收热量 Q，系统内能变化 ΔE，请在以下空格内填上“>0”或“<0”或“$=0$”：Q______，ΔE______。



答案

>0，>0

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

而且理想气体的内能只与温度有关，由图可以看出，$a \to b$ 过程是等容过程，气体不做功，但压强增加，所以温度升高，所以气体的内能增大，所以气体从外界吸收了热量；$b \to c$ 过程是等压膨胀过程，气体对外做功，而且温度升高，内能增大，所以气体也从外界吸收了热量。所以整个 $a \to b \to c$ 过程，气体从外界吸收热量，$Q > 0$；而由图上可以看出，

$$\begin{aligned} p_cV_c &> p_aV_a \\ nRT_c &> nRT_a \\ T_c &> T_a \end{aligned}$$

即末态的温度高于初态的温度，所以气体的内能增加，即 $\Delta E > 0$。

第 365 题 |【5345】

3 mol 的理想气体开始时处在压强 $p_1 = 6$ atm、温度 $T_1 = 500$ K 的平衡态。经过一个等温过程，压强变为 $p_2 = 3$ atm。该气体在此等温过程中吸收的热量为 $Q =$______ J。

答案

8.64×10^3

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

对于等温过程，内能变化为零，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

系统所吸收的热量等于系统所做的功

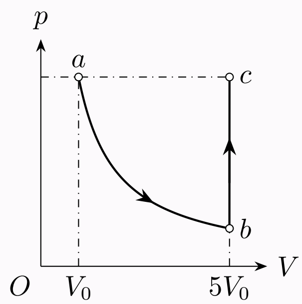
$$\begin{aligned} Q = W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{p_1}{p_2} \\ &= 3 \times 8.31 \times 500 \times \ln\frac{6}{3} \approx 8.64 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

第 366 题 |【4324】

3 mol 温度为 $T_0=273$ K 的理想气体，先经等温过程体积膨胀到原来的 5 倍，然后等体加热，使其末态的压强刚好等于初始压强，整个过程传给气体的热量为 $Q=8\times10^4$ J。试画出此过程的 $p-V$ 图，并求这种气体的比热容比 γ 值。(普适气体常量 $R=8.31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$)

解答

依题意，过程的 $p-V$ 图如图所示。



由理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

可得

$$T_c=\frac{p_cV_c}{nR}=\frac{p_a(5V_a)}{nR}=5\frac{p_aV_a}{nR}=5T_a=5T_0$$

$a\to b$ 过程是等温膨胀过程，内能不变，$\Delta E_{ab}=0$，系统对外做功

$$W_{ab}=\int_{V_a}^{V_b}p\,\mathrm{d}V=\int_{V_a}^{V_b}\frac{nRT_a}{V}\,\mathrm{d}V=nRT_0\ln5$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

该过程系统从外界所吸收的热量为

$$Q_{ab}=\Delta E_{ab}+W_{ab}=nRT_0\ln5$$

而 $b\to c$ 过程是等容升温过程，等容，体积不变，做功为零，$W_{bc}=0$，设气体的摩尔定容热容量为 $C_{V,\mathrm{m}}$，则过程系统所吸收的热量为

$$Q_{bc}=nC_{V,\mathrm{m}}\Delta T=nC_{V,\mathrm{m}}(5T_0-T_0)=4nC_{V,\mathrm{m}}T_0$$

依题意，整个过程系统所吸收的热量为

$$Q=Q_{ab}+Q_{bc}=nRT_0\ln5+4nC_{V,\mathrm{m}}T_0=nT_0(R\ln5+4C_{V,\mathrm{m}})$$

$$R\ln5+4C_{V,\mathrm{m}}=\frac{Q}{nT_0}$$

$$C_{V,\mathrm{m}}=\frac{Q}{4nT_0}-\frac{R\ln5}{4}=\frac{8\times10^4}{4\times3\times273}-\frac{8.31\times\ln5}{4}\approx21.1\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$$

$$\gamma=\frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}=1+\frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}}=1+\frac{8.31}{21.1}\approx1.39$$

第 367 题 |【5347】

一气缸内盛有 1 mol 温度为 27℃，压强为 1 atm 的氮气 (视作刚性双原子分子的理想气体)。先使它等压膨胀到原来体积的两倍，再等体升压使其压强变为 2 atm，最后使它等温膨胀到压强为 1 atm。求：氮气在全部过程中对外作的功，吸的热及其内能的变化。(普适气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$)

解答

理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

依题意，$n = 1$ mol，$p_1 = 1\ \mathrm{atm} = 1.013\times10^5$ Pa，$T_1 = 300$ K，所以

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1}$$

$p_2 = p_1$，$V_2 = 2V_1$，所以

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = 2T_1$$

$V_3 = V_2 = 2V_1$，$p_3 = 2p_1$，所以

$$T_3 = \frac{p_3V_3}{nR} = 4T_1$$

$T_4 = T_3 = 4T_1$，$p_4 = p_1$，所以

$$V_4 = \frac{nRT_4}{p_4} = 4V_1$$

氮气视作刚性双原子分子的理想气体，所以其内能为

$$E = \frac{5}{2}nRT$$

因此整个过程内能的变化量为

$$\Delta E = \frac{5}{2}nR\Delta T = 2.5\times1\times8.31\times3\times300 \approx 1.87\times10^4\ \mathrm{J}$$

而各个过程所做的功分别为

$$W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = p_1V_1 = nRT_1$$

$$W_{23} = 0$$

$$W_{34} = \int_{V_3}^{V_4} p\,\mathrm{d}V = nRT_3\ln\frac{V_4}{V_3} = (4\ln2)nRT_1$$

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} = (4\ln2+1)nRT_1 = (4\ln2+1)\times1\times8.31\times300 \approx 9.41\times10^3\ \mathrm{J}$$

所以过程所吸收的热量为

$$Q = \Delta E + W = 1.87\times10^4 + 9.41\times10^3 = 2.81\times10^4\ \mathrm{J}$$

第 368 题 |【4098】

质量一定的理想气体，从相同状态出发，分别经历等温过程、等压过程和绝热过程，使其体积增加一倍。那么气体温度的改变 (绝对值) 在

(A) 绝热过程中最大，等压过程中最小

(B) 绝热过程中最大，等温过程中最小

(C) 等压过程中最大，绝热过程中最小

(D) 等压过程中最大，等温过程中最小

答案

D

解析

理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$
$$T = \frac{pV}{nR}$$

初态设为 (p_1, V_1, T_1)，末态设为 (p_2, V_2, T_2)，依题意，$V_2 = 2V_1$。

等温过程，$T_2 = T_1$，所以温度改变量 $\Delta T = |T_2 - T_1| = 0$。

等压过程，$p_2 = p_1$，所以

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = \frac{p_1(2V_1)}{nR} = 2\frac{p_1V_1}{nR} = 2T_1$$
$$\Delta T = |T_2 - T_1| = T_1$$

绝热过程，过程方程 $pV^\gamma = \mathrm{C}$，其中 $\gamma > 1$，过程方程还有其他形式

$$\mathrm{C} = pV \times V^{\gamma-1} = nRTV^{\gamma-1}$$
$$T = \frac{\mathrm{C}}{nRV^{\gamma-1}}$$

所以有

$$T_1 = \frac{\mathrm{C}}{nRV_1^{\gamma-1}}$$
$$T_2 = \frac{\mathrm{C}}{nRV_2^{\gamma-1}} = \frac{\mathrm{C}}{nR(2V_1)^{\gamma-1}} = \frac{1}{2^{\gamma-1}}\frac{\mathrm{C}}{nRV_1^{\gamma-1}} = \frac{1}{2^{\gamma-1}}T_1$$
$$\Delta T = |T_2 - T_1| = \left|\frac{1}{2^{\gamma-1}} - 1\right| T_1 = \left|1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right| T_1$$
$$\gamma > 1 \Rightarrow \gamma - 1 > 0 \Rightarrow 2^{\gamma-1} > 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{2^{\gamma-1}} > 0 \Rightarrow 1 > 1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}} > 0 \Rightarrow \Delta T < T_1$$

第 369 题 |【4092】

某理想气体等温压缩到给定体积时外界对气体作功 $|W_1|$，又经绝热膨胀返回原来体积时气体对外作功 $|W_2|$，则整个过程中气体 (1) 从外界吸收的热量 $Q =$______；(2) 内能增加了 $\Delta E =$______。

答案

$-|W_1|$，$-|W_2|$

解析

根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

而理想气体的内能只与温度有关，所以等温压缩过程，温度不变，内能不变，外界对气体作功 $|W_1|$，气体释放了热量也是 $|W_1|$；绝热膨胀过程，气体与外界之间没有热量交换，气体对外作功 $|W_2|$，所以内能减小了 $|W_2|$，所以整个过程，气体释放了热量 $|W_1|$，即吸收了 $-|W_1|$，内能减小了 $|W_2|$，即增加了 $-|W_2|$。

第 370 题 |【4111】

0.02 kg 的氦气 (视为理想气体)，温度由 17℃ 升为 27℃。若在升温过程中，(1) 体积保持不变；(2) 压强保持不变；(3) 不与外界交换热量；试分别求出气体内能的改变、吸收的热量、外界对气体所作的功。(普适气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$)

解答

氦气是刚性单原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT$$

而内能是个态函数，且仅与温度有关，所以不管哪个过程，始末态的温度固定，内能固定，所以内能的变化量也固定，为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T = 1.5 \times \frac{20}{4} \times 8.31 \times 10 = 623.25\ \mathrm{J}$$

热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

所以

$$Q = \Delta E + W$$

其中过程所做的功为

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

(1) 体积保持不变，$V_2 = V_1$，$W = 0$，所以 $Q = \Delta E = 623.25$ J。
(2) 压强保持不变，由理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得

$$V = \frac{nRT}{p}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p\Delta V = pV_2 - pV_1 = nR(T_2 - T_1) = \frac{20}{4} \times 8.31 \times 10 = 415.5\ \mathrm{J}$$

$$Q = \Delta E + W = 623.25 + 415.5 = 1038.75\ \mathrm{J}$$

(3) 不与外界交换热量，$Q = 0$，所以

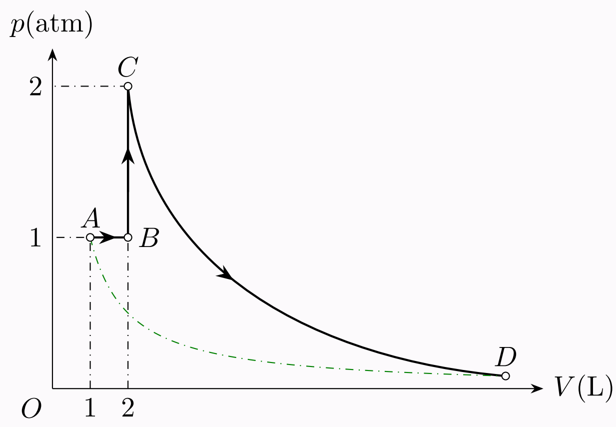
$$W = -\Delta E = -623.25\ \mathrm{J}$$

第 371 题 |【4114】

一定量的某单原子分子理想气体装在封闭的汽缸里。此汽缸有可活动的活塞 (活塞与气缸壁之间无摩擦且无漏气)。已知气体的初压强 $p_1 = 1$ atm，体积 $V_1 = 1$ L，现将该气体在等压下加热直到体积为原来的两倍，然后在等体积下加热直到压强为原来的 2 倍，最后作绝热膨胀，直到温度下降到初温为止，(1) 在 $p-V$ 图上将整个过程表示出来；(2) 试求在整个过程中气体内能的改变；(3) 试求在整个过程中气体所吸收的热量；(4) 试求在整个过程中气体所作的功。

解答

(1) 过程的 $p-V$ 图如下所示：



(2) 单原子分子理想气体的内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

依题意，末态 D 与初态 A 同温，所以整个过程的内能改变量为零。

(3) 根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

而依题意，$p_B = p_A$，$V_B = 2V_A$，$p_C = 2p_B$，$V_C = V_B$，$p_C V_C^\gamma = p_D V_D^\gamma$，$p_D V_D = p_A V_A$，所以

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{p_1 V_1}{nR} = T_1$$
$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_1(2V_1)}{nR} = 2T_1$$
$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{(2p_1)(2V_1)}{nR} = 4T_1$$
$$T_D = T_1$$

$A \to B$ 过程，等压，气体做功 $W_{AB} = p_1(2V_1 - V_1) = p_1 V_1$，内能改变量

$$\Delta E_{AB} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{AB} = \frac{3}{2}nRT_1 = \frac{3}{2}p_1 V_1$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

气体从外界吸收的总热量

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + W_{AB} = \frac{5}{2}p_1 V_1$$

$B \to C$ 过程，等容，气体做功 $W_{BC} = 0$，内能改变量

$$\Delta E_{BC} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{3}{2}nR(2T_1) = 3p_1 V_1$$

气体从外界吸收的总热量

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} + W_{BC} = 3p_1 V_1$$

$C \to D$ 过程，绝热，$Q_{CD} = 0$，内能改变量

$$\Delta E_{CD} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{CD} = \frac{3}{2}nR(-3T_1) = -\frac{9}{2}p_1 V_1$$

所以气体做功

$$W_{CD} = Q_{CD} - \Delta E_{CD} = 0 + \frac{9}{2}p_1 V_1 = \frac{9}{2}p_1 V_1$$

所以整个过程中气体所吸收的热量

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = \frac{5}{2}p_1 V_1 + 3p_1 V_1 + 0 = \frac{11}{2}p_1 V_1 = 5.5 \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3} \approx 557\ \mathrm{J}$$

(4) 整个过程中气体所作的功

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = p_1 V_1 + 0 + \frac{9}{2}p_1 V_1 = \frac{11}{2}p_1 V_1 = 5.5 \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3} \approx 557\ \mathrm{J}$$

第 372 题 |【4584】

一定量理想气体，从同一状态开始使其体积由 V_1 膨胀到 $2V_1$，分别经历以下三种过程：(1) 等压过程；(2) 等温过程；(3) 绝热过程。其中：______ 过程气体对外作功最多；______ 过程气体内能增加最多；______ 过程气体吸收的热量最多。

答案

等压，等压，等压

解析

设初态为 (p_1, V_1, T_1)，末态为 (p_2, V_2, T_2)，依题意，$V_2 = 2V_1$。根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

等压过程，$p_2 = p_1$，所以 $T_2 = 2T_1$，气体做功、内能增加量和吸收的热量分别为

$$W_1 = p_1(V_2 - V_1) = p_1V_1 = nRT_1$$
$$\Delta E_1 = \frac{i}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}nRT_1$$
$$Q_1 = \Delta E_1 + W_1 = \frac{i+2}{2}nRT_1$$

等温过程，$T_2 = T_1$，所以 $p_2 = \frac{1}{2}p_1$，内能变化量、气体做功和吸收的热量分别为

$$\Delta E_2 = 0$$
$$W_2 = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,\mathrm{d}V = nRT_1\ln 2$$
$$Q_2 = \Delta E_2 + W_2 = nRT_1\ln 2$$

绝对热程，$Q_3 = 0$，过程方程

$$pV^\gamma = \mathrm{C} = p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$$

所以

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^\gamma = \frac{p_1}{2^\gamma}$$
$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = \frac{p_1(2V_1)}{2^\gamma nR} = \frac{T_1}{2^{\gamma-1}}$$
$$\Delta E_3 = \frac{i}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}nRT_1\left(\frac{1}{2^{\gamma-1}} - 1\right) = nRT_1\left(\frac{i}{2^\gamma} - \frac{i}{2}\right)$$
$$W_3 = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{C}}{V^\gamma}\,\mathrm{d}V = -\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\mathrm{C}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{\mathrm{C}}{V_1^{\gamma-1}}\right) = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_1V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{p_2V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}}\right)$$

$$=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}nR(T_1-T_2)=-\Delta E_3=nRT_1\left(\frac{i}{2}-\frac{i}{2^{\gamma}}\right)$$

$$\gamma=\frac{C_V}{C_p}=\frac{\frac{i+2}{2}nR}{\frac{i}{2}nR}=\frac{i+2}{i}\Rightarrow\gamma-1=\frac{2}{i}\Rightarrow\frac{1}{\gamma-1}=\frac{i}{2}$$

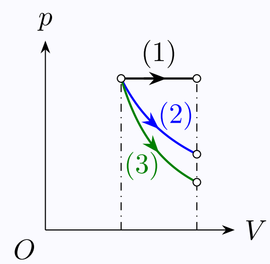
所以

$$W_1=nRT_1>W_2=nRT_1\ln 2>W_3=nRT_1\left(\frac{i}{2}-\frac{i}{2^{\gamma}}\right)$$

$$\Delta E_1=\frac{i}{2}nRT_1>\Delta E_2=0>\Delta E_3=nRT_1\left(\frac{i}{2^{\gamma}}-\frac{i}{2}\right)$$

$$Q_1=\frac{i+2}{2}nRT_1>Q_2=nRT_1\ln 2>Q_3=0$$

从 $p-V$ 图可以看出 (1) 为等压过程，(2) 为等温过程，(3) 为绝热过程。由于过程曲线与横轴所围的面积为该过程系统所做的功，所以 (1) 等压过程所做的功最大，(2) 等温过程次之，(3) 绝热过程最小；等温过程温度不变，等压过程温度升高，绝热过程，温度下降，所以 (1) 等压过程，内能增加，(2) 等温过程，内能不变，(3) 绝热过程，内能减少；至于吸收的热量，绝热过程不吸热，另外两个过程的过程曲线都在绝热过程曲线的右上方，所以过程都是吸热，另外根据热力学第一定律，过程吸收的热量等于内能的增加量加上系统对外所做的功，据前两项的分析，显然可得，(1) 等压过程所吸收的热量最大，(2) 等温过程次之，(3) 绝热过程最小 (为零)。



第 373 题 |【4094】

1 mol 的单原子分子理想气体从状态 A 变为状态 B，如果不知是什么气体，变化过程也不知道，但 A、B 两态的压强、体积和温度都知道，则可求出

(A) 气体所作的功　　(B) 气体内能的变化

(C) 气体传给外界的热量　　(D) 气体的质量

答案

B

解析

根据理想气体物态方程

$$pV = nRT$$

依题意，已知压强、温度、体积，则可以求出气体的摩尔数，但气体的类型不懂，无法确定其摩尔质量，所以气体的质量无法确定。
题目给定的气体是单原子分子理想气体，所以其自由度为 $i=3$，其内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT$$

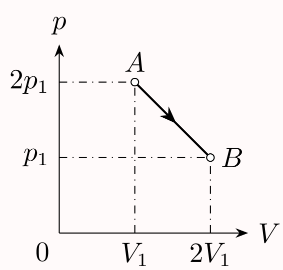
始末状态的温度已知，所以温度的变化量 ΔT 已知，所以内能的变化量 ΔE 也可求。根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

过程未知，所以 Q 和 W 无法确定。

第 374 题 |【4472】

一定量理想气体，从 A 状态 $(2p_1, V_1)$ 经历如图所示的直线过程变到 B 状态 $(p_1, 2V_1)$，则 AB 过程中系统作功 $W=$_____；内能改变 $\Delta E=$_____。



答案

$\frac{3}{2}p_1V_1$，0

解析

在 $p-V$ 图中，过程曲线与 V 轴所围的面积就等于该过程系统所做的功，所以 AB 过程中系统所做的功为

$$W = \frac{1}{2}(2p_1+p_1)(2V_1-V_1) = \frac{3}{2}p_1V_1$$

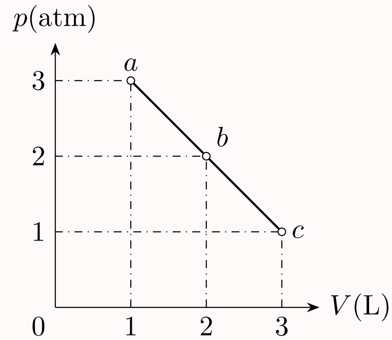
而根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得，A、B 两态的温度相等，而理想气体的内能只与温度有关，所以过程内能不变，即改变量 $\Delta E = 0$。

第 375 题 |【4587】

一定量的理想气体，由状态 a 经 b 到达 c。(如图，abc 为一直线) 求此过程中 (1) 气体对外作的功；(2) 气体内能的增量；(3) 气体吸收的热量。(1 atm $= 1.013\times 10^5$ Pa)



解答

(1)$p-V$ 图中过程曲线与 V 轴所围的面积表示过程中系统对外界所做的功，所以

$$W=\frac{1}{2}\times(3+1)\times 1.013\times 10^5\times(3-1)\times 0.001=405.2\ \text{J}$$

(2) 由理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

可得

$$T_c=\frac{p_cV_c}{nR}=\frac{p_aV_a}{nR}=T_a$$

而理想气体的内能仅仅是温度的函数，始末状态温度相等，所以过程系统的内能改变量为零。

(3) 根据热力学第一定律

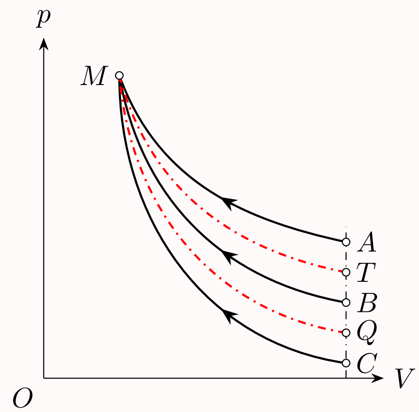
$$\Delta E=Q-W$$

该过程系统从外界所吸收的热量为

$$Q=\Delta E+W=405.2\ \text{J}$$

第 376 题 |【4316】

如图为一理想气体几种状态变化过程的 $p-V$ 图，其中 MT 为等温线，MQ 为绝热线，在 AM、BM、CM 三种准静态过程中：(1) 温度降低的是_____ 过程；(2) 气体放热的是_____ 过程。



答案

AM，AM、BM

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

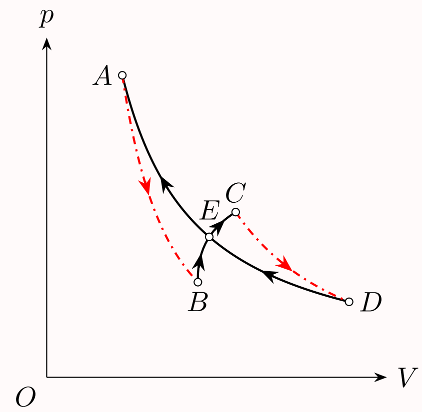
由 $p-V$ 图可以看出，$T_A > T_T = T_M > T_B > T_C$，所以三种准静态过程中，温度降低的过程是 AM 过程。

系统经历一个热力学过程后是吸热还是放热，可以用经过初态的一条绝热线作为判断依据，若过程的末态在绝热线的右上方，则此过程必定吸热，反之，若过程的末态在绝热线的左下方，则此过程必定放热。注意，题目所给的三个过程的末态都经过 M 点，不是初态，所以不能直接使用上面的结论进行判断，但我们可以把三个过程反过来，MA、MB、MC 三个过程中，从上面的判据可知，MA、MB 两个过程吸热，MC 过程放热，所以 AM、BM 两个过程放热，CM 过程吸热。

11.2　循环过程　卡诺定理

第 377 题 |【4701】

如图所示，绝热过程 AB、CD，等温过程 DEA，和任意过程 BEC，组成一循环过程。若图中 ECD 所包围的面积为 70 J，EAB 所包围的面积为 30 J，DEA 过程中系统放热 100 J，则：(1) 整个循环过程 $(ABCDEA)$ 系统对外作功为_____。(2)BEC 过程中系统从外界吸热为_____。



答案

40 J，140 J

解析

$p-V$ 图中，闭合曲线所围的面积表示循环过程所做的净功，顺时针时做正功，逆时针时做负功，所以图中 ECD 是顺时针，EAB 是逆时针，因此整个循环过程系统对外作功为

$$W_{ABCDEA}=W_{ECD}+W_{EAB}=70-30=40\text{ J}$$

一个循环过程，系统恢复原态，内能变化量为零，所以根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

整个循环过程中系统从外界吸收的热量等于系统对外界所做的功，依题意，绝热过程 AB、CD，系统不吸收热量，DEA 过程中系统放热 100 J，所以

$$Q=Q_{AB}+Q_{BEC}+Q_{CD}+Q_{DEA}=0+Q_{BEC}+0-100=Q_{BEC}-100\text{ J}$$
$$W=40\text{ J}$$
$$Q_{BEC}-100=40$$
$$Q_{BEC}=140\text{ J}$$

第 378 题 |【4084】

图 (a)、(b)、(c) 各表示联接在一起的两个循环过程，其中 (c) 图是两个半径相等的圆构成的两个循环过程，图 (a) 和 (b) 则为半径不等的两个圆。那么

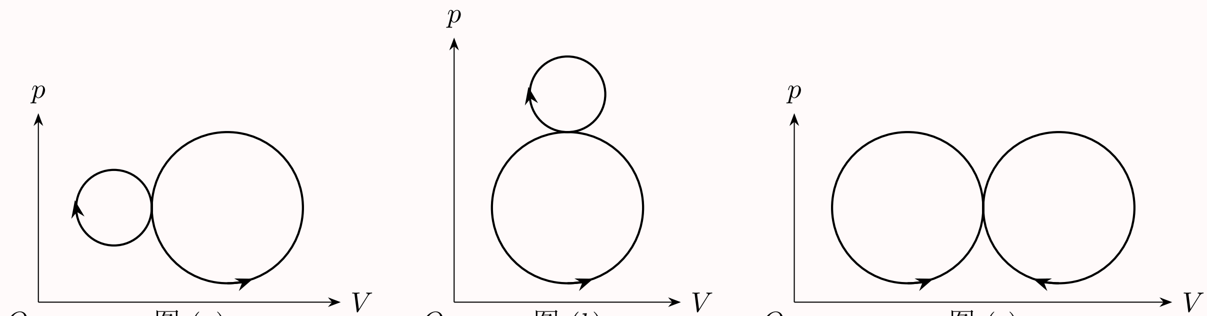


图 (a) 图 (b) 图 (c)

(A) 图 (a) 总净功为负；图 (b) 总净功为正；图 (c) 总净功为零
(B) 图 (a) 总净功为负；图 (b) 总净功为负；图 (c) 总净功为正
(C) 图 (a) 总净功为负；图 (b) 总净功为负；图 (c) 总净功为零
(D) 图 (a) 总净功为正；图 (b) 总净功为正；图 (c) 总净功为负

答案

C

解析

在 $p-V$ 图中，闭合曲线所包围的面积表示循环过程所做的总功，其中顺时针的正循环做正功，逆时针的逆循环做负功。所以图 (a) 中，左边正循环所做的正功小于右边逆循环的负功，总功为负；图 (b) 中，上面正循环所做的正功小于下面逆循环的负功，总功为负；图 (c) 中，右边正循环所做的正功等于左边逆循环的负功，总功为零。

第 379 题 |【4095】

一定量的某种理想气体起始温度为 T，体积为 V，该气体在下面循环过程中经过三个平衡过程：(1) 绝热膨胀到体积为 $2V$，(2) 等体变化使温度恢复为 T，(3) 等温压缩到原来体积 V，则此整个循环过程中

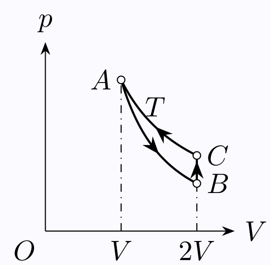
(A) 气体向外界放热 (B) 气体对外界作正功 (C) 气体内能增加 (D) 气体内能减少

答案

A

解析

依题意，循环过程的 $p-V$ 图如图所示。



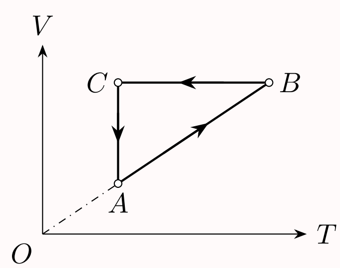
对于一个循环过程，始态和末态重合，内能保持不变，而由图可以看出，这个循环是一个逆循环，所以循环过程外界对系统做正功，系统对外界作负功，根据热力学第一定律，

$$\Delta E = Q - W$$

内能不变，$\Delta E = 0$，系统对外界做负功，$W < 0$，所以 $Q < 0$，即系统向外界放出热量。

第 380 题 |【4116】

一定量理想气体经历的循环过程用 $V-T$ 曲线表示如图。在此循环过程中，气体从外界吸热的过程是



(A) $A \to B$ (B) $B \to C$ (C) $C \to A$ (D) $B \to C$ 和 $C \to A$

答案

A

解析

由题可以看出，$A \to B$ 是等压膨胀升温过程，$B \to C$ 是等容降温过程，$C \to A$ 是等温压缩过程。根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$
$$Q = \Delta E + W$$

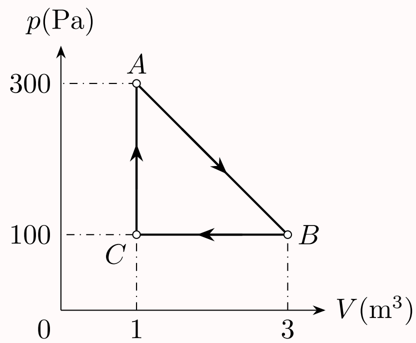
$A \to B$ 是等压膨胀升温过程，膨胀，气体对外做功，$W > 0$，升温，内能增加，$\Delta E > 0$，所以 $Q > 0$，气体从外界吸收热量。

$B \to C$ 是等容降温过程，等容，气体不做功，$W = 0$，降温，内能降低，$\Delta E < 0$，所以 $Q < 0$，气体释放热量到外界。

$C \to A$ 是等温压缩过程，等温，内能不变，$\Delta E = 0$，压缩，外界对气体做功，$W < 0$，所以 $Q < 0$，气体释放热量到外界。

第 381 题 |【4104】

一定量的某种理想气体进行如图所示的循环过程。已知气体在状态 A 的温度为 $T_A = 300$ K，求：(1) 气体在状态 B、C 的温度；(2) 各过程中气体对外所作的功；(3) 经过整个循环过程，气体从外界吸收的总热量 (各过程吸热的代数和)。



解答

(1) 理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

所以

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{300}{nR} = 300 \text{ K}$$
$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{300}{nR} = 300 \text{ K}$$
$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{100}{nR} = 100 \text{ K}$$

(2)$p-V$ 图中，过程曲线与 V 轴所围面积就表示过程所做的功，所以

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \times (300+100) \times (3-1) = 400 \text{ J}$$
$$W_{BC} = 100 \times (1-3) = -200 \text{ J}$$
$$W_{CA} = 0$$

(3) 一个循环过程，系统恢复原态，内能不变，$\Delta E = 0$，根据热力学第一定律

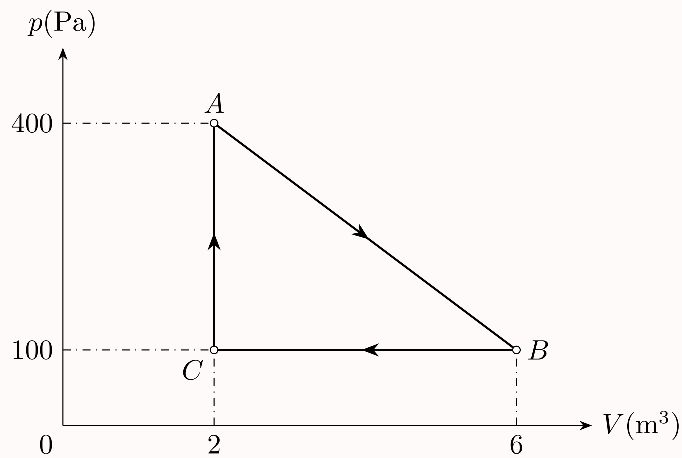
$$\Delta E = Q - W$$

可得一个循环过程中气体从外界吸收的总热量

$$Q = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 400 - 200 + 0 = 200 \text{ J}$$

第 382 题 |【4130】

比热容比 $\gamma = 1.40$ 的理想气体进行如图所示的循环。已知状态 A 的温度为 300 K。求：(1) 状态 B、C 的温度；(2) 每一过程中气体所吸收的净热量。



解答

(1) 根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

有

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{800}{nR} = 300\ \mathrm{K} \Rightarrow nR = \frac{8}{3}$$
$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{600}{8/3} = 225\ \mathrm{K}$$
$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{200}{8/3} = 75\ \mathrm{K}$$

(2) 根据比热容的公式

$$\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{2}{i} = 1.4 \Rightarrow i = 5$$

气体为刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{5}{2}nRT = \frac{5}{2} \times \frac{8}{3}T = \frac{20}{3}T$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = \frac{20}{3}\Delta T$$

$p-V$ 图中过程曲线与 V 轴所围面积即为过程所做功，所以 $A \to B$ 过程，气体所做功为

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \times (400 + 100) \times (6 - 2) = 1000\ \mathrm{J}$$

气体内能改变量

$$\Delta E_{AB}=\frac{20}{3}\Delta T_{AB}=\frac{20}{3}\times(225-300)=-500\ \mathrm{J}$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

系统吸收的热量 $Q_{AB}=\Delta E_{AB}+W_{AB}=500\ \mathrm{J}$。
$B\to C$ 过程，压强不变，做功

$$W_{BC}=p_B(V_C-V_B)=100\times(2-6)=-400\ \mathrm{J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{BC}=\frac{20}{3}\Delta T_{BC}=\frac{20}{3}\times(75-225)=-1000\ \mathrm{J}$$

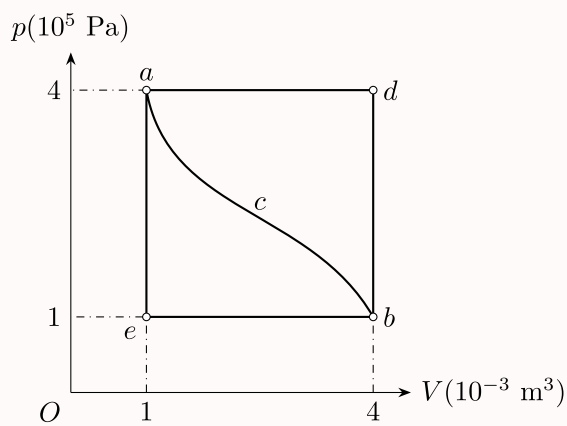
所以系统吸收的热量 $Q_{BC}=\Delta E_{BC}+W_{BC}=-1400\ \mathrm{J}$，系统放热。
$C\to A$ 过程，体积不变，做功 $W_{CA}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{CA}=\frac{20}{3}\Delta T_{CA}=\frac{20}{3}\times(300-75)=1500\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{CA}=\Delta E_{CA}=1500\ \mathrm{J}$。

第 383 题 |【4100】

一定量的理想气体经历 acb 过程时吸热 500 J，则经历 $acbda$ 过程时，吸热为



(A) -1200 J (B) -700 J (C) -400 J (D) 700 J

答案

B

解析

根据理想气体物态方程

$$pV = nRT$$

根据题目所给图中数据，a、b 两态的温度相等，因此两态气体的内能相等，所以 bda 过程内能的变化量为零，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

bda 过程系统所吸收的热量 Q 等于过程气体对外所做的功 W。
而 bd 过程是等容过程，气体所做功 $W_{bd} = 0$，da 过程为等压过程，气体所做功为

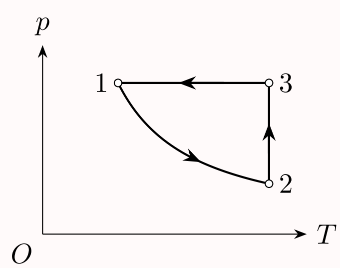
$$W_{da} = p\Delta V = p(V_a - V_d) = 4 \times 10^5 \times (1-4) \times 10^{-3} = -1200\ \mathrm{J}$$

所以

$$Q_{bda} = W_{bda} = W_{bd} + W_{da} = 0 - 1200\ \mathrm{J}$$
$$Q_{acbda} = Q_{acb} + Q_{bda} = 500 - 1200 = -700\ \mathrm{J}$$

第 384 题 |【4683】

已知一定量的理想气体经历 $p-T$ 图上所示的循环过程，图中各过程的吸热、放热情况为：(1) 过程 $1 \to 2$ 中，气体_____；(2) 过程 $2 \to 3$ 中，气体_____；(3) 过程 $3 \to 1$ 中，气体_____。



答案

吸热，放热，放热

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

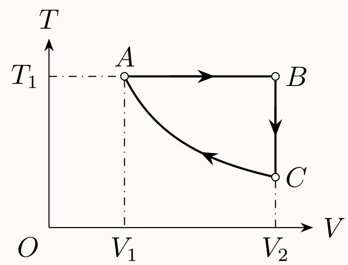
和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

$1\rightarrow2$ 过程，温度升高，压强降低，所以体积一定膨胀，温度升高，内能增加，$\Delta E>0$，体积膨胀，气体对外做功，$W>0$，所以 $Q=\Delta E+W>0$，气体吸热；$2\rightarrow3$ 过程，温度不变，压强升高，所以体积一定压缩，温度不变，内能不变，$\Delta E=0$，体积压缩，外界对气体做功，$W<0$，所以 $Q=\Delta E+W<0$，气体放热；$3\rightarrow1$ 过程，压强不变，温度下降，所以体积一定压缩，温度下降，内能减小，$\Delta E<0$，体积压缩，外界对气体做功，$W<0$，所以 $Q=\Delta E+W<0$，气体放热。

第 385 题 |【4154】

1 mol 理想气体 (设 $\gamma=\frac{C_p}{C_V}$ 为已知) 的循环过程如 $T-V$ 图所示，其中 CA 为绝热过程，A 点状态参量 (T_1,V_1) 和 B 点的状态参量 (T_2,V_2) 为已知。试求 C 点的状态参量：$V_C=$______，$T_C=$______，$p_C=$______。



答案

V_2，$\frac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$，$\frac{RT_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma}}$

解析

由 $T-V$ 图可以直接看出，$T_A=T_B$，$V_B=V_C$，所以 $V_C=V_2$。
而 CA 为绝热过程，由理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

和绝热过程的过程方程

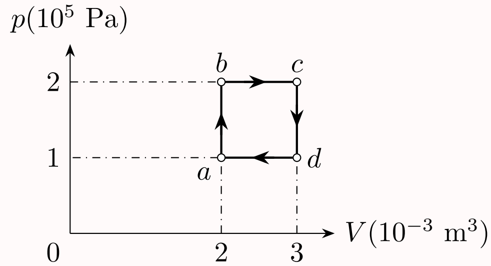
$$pV^\gamma=\mathrm{C}$$

可得

$$p_AV_A=nRT_A=RT_A$$
$$p_CV_C=nRT_C=RT_C$$
$$p_AV_A^\gamma=p_CV_C^\gamma$$
$$p_C=\frac{p_AV_A^\gamma}{V_C^\gamma}=\frac{p_1V_1^\gamma}{V_2^\gamma}=\frac{RT_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^\gamma}$$
$$T_C=\frac{p_CV_C}{R}=\frac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$$

第 386 题 |【4110】

如图所示，$abcda$ 为 1 mol 单原子分子理想气体的循环过程，求：(1) 气体循环一次，在吸热过程中从外界共吸收的热量；(2) 气体循环一次对外做的净功；(3) 证明在 $abcd$ 四态，气体的温度有 $T_aT_c = T_bT_d$。



解答

(1) 单原子分子理想气体的自由度 $i = 3$，所以其内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{3}{2}nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

依题意，$n = 1$ mol，根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

有

$$\begin{aligned}
T_a &= \frac{p_aV_a}{R} = \frac{1\times 10^5\times 2\times 10^{-3}}{8.31} \approx 24\text{ K}\\
T_b &= \frac{p_bV_b}{R} = 2T_a = 48\text{ K}\\
T_c &= \frac{p_cV_c}{R} = 3T_a = 72\text{ K}\\
T_d &= \frac{p_dV_d}{R} = 1.5T_a = 36\text{ K}\\
T_aT_c &= 3T_a^2 = T_bT_d
\end{aligned}$$

$a \to b$ 过程，体积不变，做功 $W_{ab} = 0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{ab} = \frac{3}{2}R\Delta T_{ab} = \frac{3}{2}RT_a = \frac{3}{2}p_aV_a = 1.5\times 1\times 10^5\times 2\times 10^{-3} = 300\text{ J}$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

系统吸收的热量 $Q_{ab} = \Delta E_{ab} = 300$ J。

$b \to c$ 过程，压强不变，做功

$$W_{bc} = p_b(V_c - V_b) = 2\times 10^5\times 1\times 10^{-3} = 200\text{ J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{bc}=\frac{3}{2}R\Delta T_{bc}=\frac{3}{2}RT_a=\frac{3}{2}p_aV_a=300\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{bc}=\Delta E_{bc}+W_{bc}=500\ \mathrm{J}$。
$c\to d$ 过程，体积不变，做功 $W_{cd}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{cd}=\frac{3}{2}R\Delta T_{cd}=\frac{3}{2}R(-1.5)T_a=-\frac{9}{4}p_aV_a=-450\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{cd}=\Delta E_{cd}=-450\ \mathrm{J}$，系统放热。
$d\to a$ 过程，压强不变，做功

$$W_{da}=p_d(V_a-V_d)=1\times10^5\times(-1\times10^{-3})=-100\ \mathrm{J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{da}=\frac{3}{2}R\Delta T_{da}=\frac{3}{2}R(-0.5T_a)=-\frac{3}{4}p_aV_a=-150\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{da}=\Delta E_{da}+W_{da}=-250\ \mathrm{J}$，系统放热。
综上，气体循环一次，$a\to b$、$b\to c$ 两个过程吸热，吸收的总热量为 $Q_{ab}+Q_{bc}=800\ \mathrm{J}$。
(2) 气体循环一次对外做的净功

$$W=W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da}=0+200+0-100=100\ \mathrm{J}$$

当然，根据 $p-V$ 图中，循环过程的闭合曲线所围面积也可以算出同样的结果。
(3) 如前，

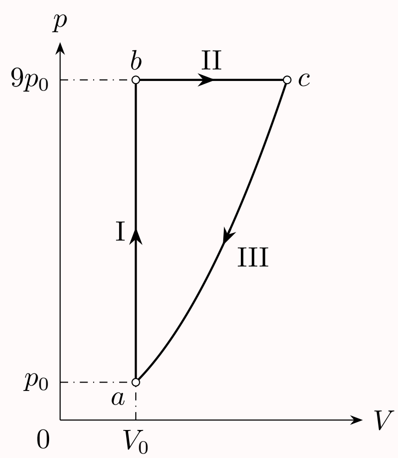
$$T_b=\frac{p_bV_b}{R}=2T_a$$
$$T_c=\frac{p_cV_c}{R}=3T_a$$
$$T_d=\frac{p_dV_d}{R}=1.5T_a$$

所以，有

$$T_aT_c=3T_a^2=T_bT_d$$

第 387 题 |【0203】

1 mol 单原子分子的理想气体，经历如图所示的可逆循环，联结 ac 两点的曲线 III 的方程为 $p=\frac{p_0V^2}{V_0^2}$，a 点的温度为 T_0。(1) 试以 T_0，普适气体常量 R 表示 I、II、III 过程中气体吸收的热量；(2) 求此循环的效率。



解答

理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

依题意，$n = 1$ mol，气体为单原子分子的理想气体，所以其内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}RT$$

内能的变化量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}R\Delta T$$

(1) 过程 I，等容过程，气体做功为零，$W_1 = 0$，末态温度为

$$T_b = \frac{p_b V_b}{R} = 9T_0$$

内能的变化量为

$$\Delta E_1 = \frac{3}{2}R\Delta T_1 = 12RT_0$$

所以吸收的热量为

$$Q_1 = \Delta E_1 + W_1 = 12RT_0$$

过程 II，等压过程，气体做功，$W_2 = p_2(V_c - V_b)$，末态温度可以由 ca 过程的过程方程和理想气体的物态方程求得

$$p_c = \frac{p_0 V_c^2}{V_0^2}$$

$$V_c = V_0\sqrt{\frac{p_c}{p_0}} = 3V_0$$
$$T_c = \frac{p_c V_c}{R} = 27T_0$$

所以本过程气体所做的功和内能的变化量分别为

$$W_2 = 9p_0(3V_0 - V_0) = 18p_0V_0 = 18RT_0$$
$$\Delta E_2 = \frac{3}{2}R\Delta T_2 = 27RT_0$$

所以吸收的热量为

$$Q_2 = \Delta E_2 + W_2 = 45RT_0$$

过程 III，过程方程 $p = \frac{p_0V^2}{V_0^2}$，所以过程所做的功为

$$W_3 = \int_{V_c}^{V_a} p\,\mathrm{d}V = \frac{p_0}{3V_0^2}(V_a^3 - V_c^3) = -\frac{26}{3}p_0V_0 = -\frac{26}{3}RT_0$$

内能的变化量为

$$\Delta E_3 = \frac{3}{2}R\Delta T_3 = -39RT_0$$

所以吸收的热量为

$$Q_3 = \Delta E_3 + W_3 = -\frac{143}{3}RT_0$$

所以本过程放热。
(2) 所以，整个循环过程中，系统共吸收的热量为 $Q_1 + Q_2 = 57RT_0$，共放出的热量为 $-Q_3 = \frac{143}{3}RT_0$，所以循环过程的效率为

$$\eta = 1 - \frac{\frac{143}{3}RT_0}{57RT_0} = \frac{28}{171} \approx 0.164 = 16.4\%$$

第 388 题 |【4097】

1 mol 理想气体在 $T_1 = 400$ K 的高温热源与 $T_2 = 300$ K 的低温热源间作卡诺循环 (可逆的)，在 400 K 的等温线上起始体积为 $V_1 = 0.001\ \mathrm{m}^3$，终止体积为 $V_2 = 0.005\ \mathrm{m}^3$，试求此气体在每一循环中 (1) 从高温热源吸收的热量 Q_1；(2) 气体所作的净功 W；(3) 气体传给低温热源的热量 Q_2。

解答

(1) 理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

所以等温过程中

$$p=\frac{nRT}{V}$$

在与高温热源接触的等温膨胀过程中，气体对外做功

$$W_1=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=nRT\ln\frac{V_2}{V_1}=(400\ln 5)R\approx 5.35\times 10^3\ \mathrm{J}$$

而等温过程，内能不变，$\Delta E_1=0$，根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

系统从高温热源处吸收的热量为

$$Q_1=\Delta E_1+W_1=W_1=5.35\times 10^3\ \mathrm{J}$$

(2) 根据卡诺热机的效率

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

可得一个循环过程中气体所做的净功为

$$W=\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)Q_1=\left(1-\frac{300}{400}\right)\times 5.35\times 10^3\approx 1.34\times 10^3\ \mathrm{J}$$

(3) 所以，气体传给低温热源的热量为

$$Q_2=Q_1-W=5.35\times 10^3-1.34\times 10^3=4.01\times 10^3\ \mathrm{J}$$

第 389 题 |【4128】

可逆卡诺热机可以逆向运转。逆向循环时，从低温热源吸热，向高温热源放热，而且吸的热量和放出的热量等于它正循环时向低温热源放出的热量和从高温热源吸的热量。设高温热源的温度为 $T_1=450\ \mathrm{K}$，低温热源的温度为 $T_2=300\ \mathrm{K}$，卡诺热机逆向循环时从低温热源吸热 $Q_2=400\ \mathrm{J}$，则该卡诺热机逆向循环一次外界必须作功 $W=$______。

答案

200 J

解析

卡诺热机的热效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$T_1 = 450$ K，$T_2 = 300$ K，$Q_2 = 400$ J，所以

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 = \frac{450}{300} \times 400 = 600 \text{ J}$$
$$W = Q_1 - Q_2 = 600 - 400 = 200 \text{ J}$$

第 390 题 |【4698】

一个作可逆卡诺循环的热机，其效率为 η，它逆向运转时便成为一台致冷机，该致冷机的致冷系数 $w = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$，则 η 与 w 的关系为______。

答案

$\eta = \frac{1}{w+1}$

解析

卡诺热机的热效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

卡诺制冷机的制冷系数为

$$w = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

所以有

$$\frac{1}{w} = \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{T_1}{T_2} - 1$$
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{w} + 1 = \frac{w+1}{w}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{w}{w+1}$$
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{w}{w+1} = \frac{1}{w+1}$$
$$\eta(w+1) = 1, w = \frac{1}{\eta} - 1$$

第 391 题 |【4124】

设高温热源的热力学温度是低温热源的热力学温度的 n 倍，则理想气体在一次卡诺循环中，传给低温热源的热量是从高温热源吸取热量的

(A) n 倍 (B) $n-1$ 倍 (C) $\frac{1}{n}$ 倍 (D) $\frac{n+1}{n}$ 倍

答案

C

解析

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$T_1 = nT_2$，所以

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n}$$

第 392 题 |【4127】

一卡诺热机 (可逆的)，低温热源的温度为 27°C，热机效率为 40%，其高温热源温度为______ K。今欲将该热机效率提高到 50%，若低温热源保持不变，则高温热源的温度应增加______ K。

答案

500，100

解析

卡诺热机的热效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$\eta = 0.4$，$T_2 = 300\ \text{K}$，所以

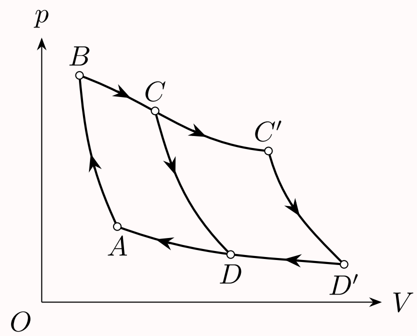
$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta} = \frac{300}{1-0.4} = 500\ \text{K}$$

若 $\eta' = 0.5$，$T_2' = 300\ \text{K}$，所以

$$T_1' = \frac{T_2'}{1-\eta'} = \frac{300}{1-0.5} = 600\ \text{K}$$
$$\Delta T = T_1' - T_1 = 100\ \text{K}$$

第 393 题 |【4126】

如图表示的两个卡诺循环，第一个沿 $ABCDA$ 进行，第二个沿 $ABC'D'A$ 进行，这两个循环的效率 η_1 和 η_2 的关系及这两个循环所作的净功 W_1 和 W_2 的关系是



(A) $\eta_1=\eta_2$，$W_1=W_2$ (B) $\eta_1>\eta_2$，$W_1=W_2$ (C) $\eta_1=\eta_2$，$W_1>W_2$ (D) $\eta_1=\eta_2$，$W_1<W_2$

答案

D

解析

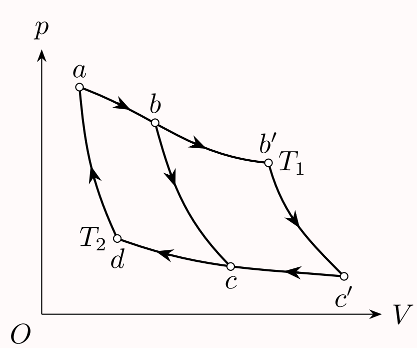
工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

依题意，循环 $ABC'D'A$ 比 $ABCDA$ 的面积大，所以所做净功大，但两个循环的高低温热源相同，所以效率不变。

第 394 题 |【4122】

如果卡诺热机的循环曲线所包围的面积从图中的 $abcda$ 增大为 $ab'c'da$，那么循环 $abcda$ 与 $ab'c'da$ 所作的净功和热机效率变化情况是



(A) 净功增大，效率提高
(B) 净功增大，效率降低
(C) 净功和效率都不变
(D) 净功增大，效率不变

答案

D

解析

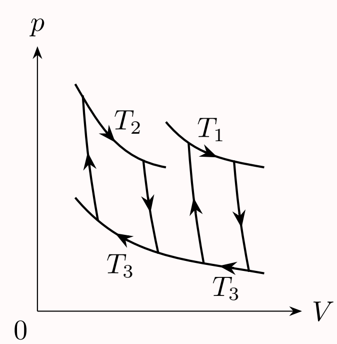
工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，循环 $ab'c'da$ 比 $abcda$ 的面积大，所以所做净功大，但两个循环的高低温热源相同，所以效率不变。

第 395 题 |【4121】

两个卡诺热机的循环曲线如图所示，一个工作在温度为 T_1 与 T_3 的两个热源之间，另一个工作在温度为 T_2 与 T_3 的两个热源之间，已知这两个循环曲线所包围的面积相等。由此可知



(A) 两个热机的效率一定相等

(B) 两个热机从高温热源所吸收的热量一定相等

(C) 两个热机向低温热源所放出的热量一定相等

(D) 两个热机吸收的热量与放出的热量 (绝对值) 的差值一定相等

答案

D

解析

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

而在 $p-V$ 图中，循环曲线所包围的面积表示循环过程系统对外界所做的功，顺时针的正循环，系统

做正功，逆时针的逆循环，系统做负功。依题意，两个循环过程的面积相等，所以两个过程系统对外界所做的功相等，此功等于系统从高温吸收的热量与释放到低温的热量之间的差值。而两个循环，低温热源的温度相同，均为 T_3，但高温热源的温度不等，分别为 T_1 和 T_2，所以两个热机的效应不等。

第 396 题 |【4123】

在温度分别为 327℃ 和 27℃ 的高温热源和低温热源之间工作的热机，理论上的最大效率为

(A) 25%　(B) 50%　(C) 75%　(D) 91.74%

答案

B

解析

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

以上温度使用的是热力学温标，所以 $T_1=327+273=600$ K，$T_2=27+273=300$ K，而根据卡诺定理，所有热机中卡诺热机的效率最高，所以理论上的最大效率为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{300}{600}=0.5=50\%$$

11.3 热力学第二定律

第 397 题 |【4133】

关于可逆过程和不可逆过程的判断：(1) 可逆热力学过程一定是准静态过程；(2) 准静态过程一定是可逆过程；(3) 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程；(4) 凡有摩擦的过程，一定是不可逆过程。以上四种判断，其中正确的是

(A) (1)、(2)、(3)　(B) (1)、(2)、(4)　(C) (2)、(4)　(D) (1)、(4)

答案

D

解析

准静态过程是进行得无限缓慢，系统经历的每一个中间过程都可以看成是平衡态的热力学过程。
可逆过程是指过程进行方向相反时，从末态回到初态，系统和外界完全恢复原状的热力学过程。
不可逆过程并不是指过程不能反向进行，而是说过程反向进行时，从末态回到初态时，系统和外界不能同时完全恢复原状的热力学过程，可能系统恢复了原状，但外界没有恢复原状，也可能外界恢复了原状，但系统没有恢复原状，还可能是系统和外界都不能恢复原状。
无摩擦的准静态过程一定是可逆过程。
自然界中自发发生的宏观过程一定是不可逆过程。

第 398 题 |【4125】

有人设计一台卡诺热机 (可逆的)。每循环一次可从 400 K 的高温热源吸热 1800 J，向 300 K 的低温热源放热 800 J。同时对外作功 1000 J，这样的设计是

(A) 可以的，符合热力学第一定律
(B) 可以的，符合热力学第二定律
(C) 不行的，卡诺循环所作的功不能大于向低温热源放出的热量
(D) 不行的，这个热机的效率超过理论值

答案

D

解析

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$Q_1=1800$ J，$Q_2=800$ J，$W=1000$ J，$T_1=400$ K，$T_2=300$ K，所以热机效率的理论值为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{300}{400}=\frac{1}{4}$$

而设计的热机效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{1000}{1800}=\frac{5}{9}>\frac{1}{4}$$

$W=Q_1-Q_2$，不违反热力学第一定律，但设计的效率超过理论值，所以是不可行的。

第 399 题 |【4143】

“理想气体和单一热源接触作等温膨胀时，吸收的热量全部用来对外作功。”对此说法，有如下几种评论，哪种是正确的？

(A) 不违反热力学第一定律，但违反热力学第二定律
(B) 不违反热力学第二定律，但违反热力学第一定律
(C) 不违反热力学第一定律，也不违反热力学第二定律
(D) 违反热力学第一定律，也违反热力学第二定律

答案

C

解析

等温膨胀过程，温度不变，内能不变，气体膨胀，对外做功，根据热力学第一定律，气体吸收的热量等于气体对外所做的功，因此没有违反热力学第一定律。对于一个循环过程，气体不可能把吸收到的热量全部用来做功，但这里的过程并不是一个循环过程，所以与第二定律不矛盾。

第 400 题 |【4135】

根据热力学第二定律可知

(A) 功可以全部转换为热，但热不能全部转换为功
(B) 热可以从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体
(C) 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程
(D) 一切自发过程都是不可逆的

答案

D

解析

在等温膨胀过程中，系统所吸收的热量全部转化成功。
热不能自动从低温传到高温，但在外界做功的条件下，可以实现，比如制冷机。
不可逆过程并不是不能反向进行，而是反向进行的时候，系统和外界不能完全恢复原状。
一切自发的宏观过程都是不可逆的。

第 401 题 |【4136】

根据热力学第二定律判断下列哪种说法是正确的

(A) 热量能从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体
(B) 功可以全部变为热，但热不能全部变为功
(C) 气体能够自由膨胀，但不能自动收缩
(D) 有规则运动的能量能够变为无规则运动的能量，但无规则运动的能量不能变为有规则运动的能量

答案

C

解析

热不能自动从低温传到高温，但在外界做功的条件下，可以实现，比如制冷机。
在等温膨胀过程中，系统所吸收的热量全部转化成功。
在一定的条件下，无规则运动的能量也可以变为有规则运动的能量。
气体自由膨胀是一个自发的过程，自发的过程是不可逆的，所以气体不会自动收缩，除非外界条件发生变化。

11.4 熵 熵增加原理

第 402 题 |【4596】

在一个孤立系统内，一切实际过程都向着_____ 的方向进行。这就是热力学第二定律的统计意义。从宏观上说，一切与热现象有关的实际的过程都是_____。

答案

熵增加，不可逆

解析

热力学第二定律的实质在于指出，一切与热现象有关的自发的宏观过程都是不可逆的。统计物理认为，在一个孤立系统中，自发的过程总是由概率较小的宏观状态向概率较大的宏观状态进行；即由包含微观状态数目较少的宏观状态向包含微观状态数目较多的宏观状态进行；即由非平衡态向平衡态进行。这就是热力学第二定律的统计意义。
本题原文件中提供的第一个空格的答案是“状态几率增大”，个人觉得填“熵增加”应该也可以。

第 403 题 |【4336】

由绝热材料包围的容器被隔板隔为两半，左边是理想气体，右边真空。如果把隔板撤去，气体将进行自由膨胀过程，达到平衡后气体的温度_____(“升高”、“ 降低” 或 “不变”)，气体的熵_____(“增加”、“减小” 或 “不变”)。

答案

不变，增加

解析

依题意，自由膨胀过程，系统做功为零，绝热容器，系统吸热为零，因此根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

系统的内能不变，而理想气体的内能仅仅与温度有关，所以气体的温度保持不变。
而自由膨胀过程是一个自发的不可逆的过程，根据熵增加原理，末态的熵高于初态的熵，所以过程的熵增加。

第 404 题 |【4142】

一绝热容器被隔板分成两半，一半是真空，另一半是理想气体。若把隔板抽出，气体将进行自由膨胀，达到平衡后

(A) 温度不变，熵增加 (B) 温度升高，熵增加 (C) 温度降低，熵增加 (D) 温度不变，熵不变

答案

A

解析

容器绝热，所以过程气体不吸热；自由膨胀，过程气体不做功；根据热力学第一定律，气体内能不变。
而理想气体的内能仅仅与温度有关，内能不变，温度不变。
但气体的自由膨胀是一个自发的过程，是一个不可逆的过程，因此根据熵增加原理，过程熵增加。

第十二章　气体动理论

12.1　理想气体的压强公式　温度的微观本质

12.1.1　理想气体分子的微观模型和统计假设

第 405 题 |【4252】

一定量的理想气体贮于某一容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m。根据理想气体的分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量的平均值

(A) $\overline{v_x}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$　(B) $\overline{v_x}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$　(C) $\overline{v_x}=\frac{8kT}{3\pi m}$　(D) $\overline{v_x}=0$

答案

D

解析

根据理想气体的分子模型和统计假设，分子的运动方向是各向同性的，即沿任意方向运动的概率是相同的，分子速度在各个方向上的分量的各种统计平均值相等

$$\overline{v_x}=\overline{v_y}=\overline{v_z}=0$$

第 406 题 |【4251】

一定量的理想气体贮于某一容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m。根据理想气体的分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量平方的平均值

(A) $\overline{v_x^2}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$　(B) $\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3kT}{m}}$　(C) $\overline{v_x^2}=\frac{3kT}{m}$　(D) $\overline{v_x^2}=\frac{kT}{m}$

答案

D

解析

根据理想气体的分子模型和统计假设，

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而理想气体的平均平动动能为

$$\overline{E_k}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$$

所以有

$$\overline{v^2}=\frac{3kT}{m}$$
$$\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{kT}{m}$$

第 407 题 |【4253】

一定量的理想气体贮于某一容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m。根据理想气体分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量的下列平均值 $\overline{v_x}=$______，$\overline{v_x^2}=$______。

答案

0，$\frac{kT}{m}$

解析

根据理想气体分子模型和统计假设

$$\overline{v_x}=\overline{v_y}=\overline{v_z}=0$$
$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而根据方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

可得

$$\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{1}{3}\times\frac{3kT}{m}=\frac{kT}{m}$$

12.1.2 理想气体的压强公式

第 408 题 |【4056】

若理想气体的体积为 V，压强为 p，温度为 T，一个分子的质量为 m，k 为玻尔兹曼常量，R 为普适气体常量，则该理想气体的分子数为

(A) $\frac{pV}{m}$ (B) $\frac{pV}{kT}$ (C) $\frac{pV}{RT}$ (D) $\frac{pV}{mT}$

答案

B

解析

由理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = NkT$$

可得

$$N = \frac{pV}{kT}$$

第 409 题 |【4155】

有 1 mol 刚性多原子分子的理想气体，原来的压强为 1.0 atm，温度为 27℃，若经过一绝热过程，使其压强增加到 16 atm。试求：(1) 气体内能的增量；(2) 在该过程中气体所作的功；(3) 终态时，气体的分子数密度。

解答

(1) 刚性多原子分子理想气体的自由度 $i = 6$，所以其内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = 3nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = 3nR\Delta T$$

而其比热比

$$\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{2}{i} = \frac{4}{3}$$

依题意，$n = 1$ mol，$p_1 = 1.0$ atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa，$T_1 = 300$ K，$p_2 = 16$ atm，过程是绝热过程，所以有

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$$

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = \frac{1}{8} V_1$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

有

$$p_1 V_1 = RT_1$$

$$p_2 V_2 = RT_2$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{R} = \frac{(16 p_1) \times \frac{1}{8} V_1}{R} = 2T_1$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = 3R\Delta T = 3RT_1 = 3 \times 8.31 \times 300 = 7479 \text{ J}$$

(2) 因为过程绝热，所以系统吸收的热量 $Q = 0$，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

所以过程气体所做的功

$$W = -\Delta E = -7479 \text{ J}$$

(3) 由理想气体的物态方程

$$pV = nRT = NkT$$

可得，终态时，气体的分子数密度为

$$\frac{N}{V} = \frac{p_2}{kT_2} = \frac{16 \times 1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 600} \approx 1.96 \times 10^{26} \text{ 个/m}^3$$

12.1.3 温度的微观本质

第 410 题 |【4012】

关于温度的意义，有下列几种说法：(1) 气体的温度是分子平均平动动能的量度；(2) 气体的温度是大量气体分子热运动的集体表现，具有统计意义；(3) 温度的高低反映物质内部分子运动剧烈程度的不同；(4) 从微观上看，气体的温度表示每个气体分子的冷热程度。这些说法中正确的是

(A) (1)、(2)、(4)　　(B) (1)、(2)、(3)　　(C) (2)、(3)、(4)　　(D) (1)、(3)、(4)

答案

B

解析

单个气体分子不存在冷热之说。

12.2　气体分子速率分布律　玻耳兹曼分布律

12.2.1　速率分布函数

第 411 题 |【0192】

处于重力场中的某种气体，在高度 z 处单位体积内的分子数即分子数密度为 n。若 $f(v)$ 是分子的速率分布函数，则坐标介于 $x \sim x+\mathrm{d}x$、$y \sim y+\mathrm{d}y$、$z \sim z+\mathrm{d}z$ 区间内，速率介于 $v \sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数 $\mathrm{d}N =$_____。

答案

$f(v)n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v$

解析

依题意，在高度 z 处单位体积内的分子数即分子数密度为 n，所以坐标介于 $x \sim x+\mathrm{d}x$、$y \sim y+\mathrm{d}y$、$z \sim z+\mathrm{d}z$ 区间内的分子数为

$$\mathrm{d}N_0 = n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

根据速率分布函数的定义

$$f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}N_0}$$

所以

$$\mathrm{d}N = f(v)\,\mathrm{d}N_0\,\mathrm{d}v = f(v)n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v$$

12.2.2　麦克斯韦分子速率分布

第 412 题 |【4459】

已知 $f(v)$ 为麦克斯韦速率分布函数，N 为总分子数，则：(1) 速率 $v > 100\ \mathrm{m/s}$ 的分子数占总分子数的百分比的表达式为_____；(2) 速率 $v > 100\ \mathrm{m/s}$ 的分子数的表达式为_____。

答案

$\int_{100}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v$，$\int_{100}^{\infty} Nf(v)\,\mathrm{d}v$

解析

根据速率分布函数的定义，速率 $v > 100\ \mathrm{m/s}$ 的分子数占总分子数的百分比的表达式为

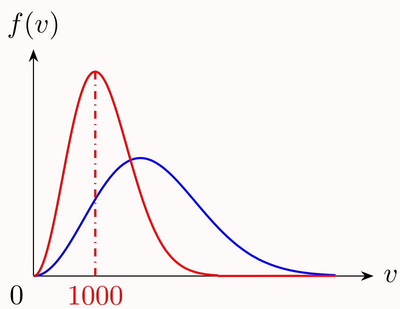
$$\int_{100}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v$$

速率 $v > 100\ \mathrm{m/s}$ 的分子数的表达式为

$$\int_{100}^{\infty} Nf(v)\,\mathrm{d}v$$

第 413 题 |【4040】

图示的曲线分别表示了氢气和氦气在同一温度下的分子速率的分布情况。由图可知，氦气分子的最概然速率为______，氢气分子的最概然速率为______。



答案

$1000\ \mathrm{m/s}$，$1000\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$

解析

根据最概然速率的表达式

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

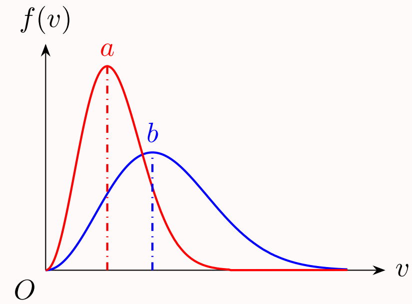
可知，同一温度下，摩尔质量越大的气体分子的最概然速率越小，所以由图可得，氦气的最概然速率为 1000，图中没有给出单位，默认应该是国际单位制单位。所以有

$$v_{p\mathrm{He}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{He}}}} = 1000\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{p\mathrm{H_2}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{H_2}}}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{He}}}} \times \sqrt{\frac{M_{\mathrm{He}}}{M_{\mathrm{H_2}}}} = 1000\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$$

第 414 题 |【4041】

设图示的两条曲线分别表示在相同温度下氧气和氢气分子的速率分布曲线；令 $(v_p)_{O_2}$ 和 $(v_p)_{H_2}$ 分别表示氧气和氢气的最概然速率，则



(A) 图中 a 表示氧气分子的速率分布曲线；$\frac{(v_p)_{O_2}}{(v_p)_{H_2}}=4$
(B) 图中 a 表示氧气分子的速率分布曲线；$\frac{(v_p)_{O_2}}{(v_p)_{H_2}}=\frac{1}{4}$
(C) 图中 b 表示氧气分子的速率分布曲线；$\frac{(v_p)_{O_2}}{(v_p)_{H_2}}=\frac{1}{4}$
(D) 图中 b 表示氧气分子的速率分布曲线；$\frac{(v_p)_{O_2}}{(v_p)_{H_2}}=4$

答案

B

解析

根据最概然速率的表达式

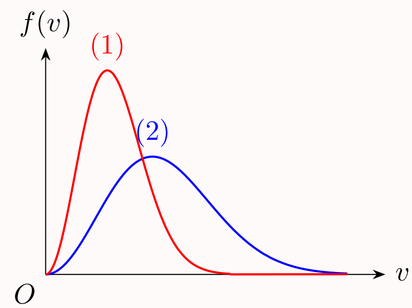
$$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

所以温度相同时，最概然速率与摩尔质量的根号成反比

$$\frac{(v_p)_{O_2}}{(v_p)_{H_2}}=\sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}}=\sqrt{\frac{2}{32}}=\frac{1}{4}$$

第 415 题 |【4282】

现有两条气体分子速率分布曲线 (1) 和 (2)，如图所示。若两条曲线分别表示同一种气体处于不同的温度下的速率分布，则曲线_____ 表示气体的温度较高。若两条曲线分别表示同一温度下的氢气和氧气的速率分布，则曲线_____ 表示的是氧气的速率分布。



答案

(2)，(1)

解析

由图可以看出，两条分布曲线对应的最概然速率之间的大小关系 $v_{p1} < v_{p2}$，而最概然速率与温度的根号成正比，与摩尔质量的根号成反比，即 $v_p \propto \sqrt{\frac{T}{M}}$，所以可知，曲线 (2) 的温度较高，曲线 (1) 是氧气的分布曲线。

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

12.2.3 三种统计速率

第 416 题 |【4039】

设声波通过理想气体的速率正比于气体分子的热运动平均速率，则声波通过具有相同温度的氧气和氢气的速率之比 $\frac{v_{O_2}}{v_{H_2}}$ 为

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

答案

D

解析

根据平均速率的表达式

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

所以温度相同时，平均速率与摩尔质量的根号成反比

$$\frac{\bar{v}_{O_2}}{\bar{v}_{H_2}} = \sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{4}$$

第 417 题 |【4042】

某气体在温度为 $T = 273$ K 时，压强为 $p = 1.0 \times 10^{-2}$ atm，密度 $\rho = 1.24 \times 10^{-2}$ kg/m^3，则该气体分子的方均根速率为______。(1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa)

答案

495 m/s

解析

根据方均根速率的表达式

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

和理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

可得

$$\frac{RT}{M} = \frac{pV}{m} = \frac{p}{\rho}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.0 \times 10^{-2} \times 1.013 \times 10^5}{1.24 \times 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.013 \times 10^5}{1.24}} \approx 495 \text{ m/s}$$

第 418 题 |【4006】

在容积为 10^{-2} m^3 的容器中，装有质量 100 g 的气体，若气体分子的方均根速率为 200 m/s，则气体的压强为______。

答案

$\frac{4}{3} \times 10^5$ Pa

解析

方均根速率的表达式为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

可得

$$\frac{RT}{M}=\frac{\overline{v^2}}{3}$$

$$p=\frac{m}{V}\times\frac{RT}{M}=\frac{0.1}{10^{-2}}\times\frac{200^2}{3}=\frac{4}{3}\times 10^5\ \mathrm{Pa}$$

第 419 题 |【4008】

若某种理想气体分子的方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}=450\ \mathrm{m/s}$，气体压强为 $p=7\times 10^4\ \mathrm{Pa}$，则该气体的密度为 $\rho=$______。

答案

$1.037\ \mathrm{kg/m^3}$

解析

方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

所以

$$\frac{RT}{M}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而根据理想气体的物态方程

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

可得

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}=\frac{p}{RT/M}=\frac{p}{\frac{1}{3}\overline{v^2}}=\frac{3p}{\overline{v^2}}=\frac{3\times 7\times 10^4}{450^2}\approx 1.037\ \mathrm{kg/m^3}$$

第 420 题 |【4258】

已知某理想气体分子的方均根速率为 400 m/s。当其压强为 1 atm 时，求气体的密度。

解答

根据方均根速率的公式

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

可得

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{M}$$
$$\frac{RT}{M} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

而由理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

可得，气体的密度为

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{p}{RT/M} = \frac{3p}{\overline{v^2}} = \frac{3\times 1.013\times 10^5}{400^2} \approx 1.90\ \mathrm{kg/m^3}$$

12.2.4 玻耳兹曼分布律

第 421 题 |【4029】

已知大气中分子数密度 n 随高度 h 的变化规律：$n = n_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right)$，式中 n_0 为 $h=0$ 处的分子数密度。若大气中空气的摩尔质量为 M_{mol}，温度为 T，且处处相同，并设重力场是均匀的，则空气分子数密度减少到地面的一半时的高度为______。(符号 $\exp(a)$，即 e^a)

答案

$\frac{RT}{M_{\text{mol}}g}\ln 2$

解析

依题意，

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right) = \frac{1}{2}n_0$$
$$\exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT} = \ln 2$$
$$h = \frac{RT}{M_{\text{mol}}g}\ln 2$$

12.3 能量均分定理 理想气体的热力学能

第 422 题 |【4075】

已知一容器内的理想气体在温度为 273 K、压强为 1.0×10^{-2} atm 时，其密度为 1.24×10^{-2} kg/m^3，则该气体的摩尔质量 $M_{\rm mol}=$______；容器单位体积内分子的总平动动能 $=$______。

答案

28×10^{-3} kg/mol，1.52×10^3 J

解析

根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT=\frac{m}{M}RT=\frac{N}{N_A}RT=NkT$$

可得

$$M=\frac{m}{pV}RT=\frac{\rho RT}{p}=\frac{1.24\times10^{-2}\times8.31\times273}{1.0\times10^{-2}\times1.013\times10^5}\approx28\times10^{-3}\ \text{kg/mol}$$

不管是什么类型的气体，单个分子的平均平动动能均为

$$\overline{E_k}=\frac{3}{2}kT$$

容器单位体积内分子的总平动动能

$$E_k=\frac{N}{V}\overline{E_k}=\frac{p}{kT}\times\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}p=1.5\times1.0\times10^{-2}\times1.013\times10^5\approx1.52\times10^3\ \text{J}$$

第 423 题 |【4013】

一瓶氦气和一瓶氮气密度相同，分子平均平动动能相同，而且它们都处于平衡状态，则它们

(A) 温度相同、压强相同 (B) 温度、压强都不相同

(C) 温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强 (D) 温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强

答案

C

解析

不管是什么类型的气体分子，分子的平均平动动能都是 $\frac{3}{2}kT$，所以分子平均平动动能相同时，二者的温度相同。

由理想气体物态方程

$$pV=\frac{N}{N_A}RT=\frac{m}{M}RT$$

可得

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}$$

所以，温度 T 相同，密度 ρ 相同，但摩尔质量 M 不同，所以压强 p 不同，摩尔质量 M 越大，压强 p 越小，所以氦气的摩尔质量小，压强大。

第 424 题 |【4058】

两瓶不同种类的理想气体，它们的温度和压强都相同，但体积不同，则单位体积内的气体分子数 n，单位体积内的气体分子的总平动动能 $(\frac{E_k}{V})$，单位体积内的气体质量 ρ，分别有如下关系

(A) n 不同，$\frac{E_k}{V}$ 不同，ρ 不同

(B) n 不同，$\frac{E_k}{V}$ 不同，ρ 相同

(C) n 相同，$\frac{E_k}{V}$ 相同，ρ 不同

(D) n 相同，$\frac{E_k}{V}$ 相同，ρ 相同

答案

C

解析

由理想气体物态方程

$$pV=\frac{N}{N_A}RT=\frac{m}{M}RT$$

可得

$$n=\frac{N}{V}=\frac{pN_A}{RT}$$
$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}$$

所以，温度 T 相同，压强 p 相同，单位体积内的气体分子数 n 相同；但不同类型的气体的摩尔质量 M 不同，所以单位体积内的气体质量 ρ 不同。另，温度 T 相同，压强 p 相同，但体积 V 不同，则必然摩尔数不同，但单位体积内的分子数相同。根据能量均分定理，任何类型气体分子的平动自由度均为 3，因此每个气体分子的平均平动动能相同，但摩尔数不同，所以分子总数不同，所以总的平动动能不同，但单位体积内的平动动能相同。

第 425 题 |【4014】

温度、压强相同的氦气和氧气，它们分子的平均动能 $\overline{E_k}$ 和平均平动动能 $\overline{E_t}$ 有如下关系

(A) $\overline{E_k}$ 和 $\overline{E_t}$ 都相等

(B) $\overline{E_k}$ 相等，而 $\overline{E_t}$ 不相等

(C) $\overline{E_t}$ 相等，而 $\overline{E_k}$ 不相等

(D) $\overline{E_k}$ 和 $\overline{E_t}$ 都不相等

答案

C

解析

氦气是单原子分子，自由度为 3，氧气是双原子分子，自由度为 5。但不管是什么分子，平动自由度均为 3，根据能量均分定理，分子的平均平动动能

$$\overline{E_t} = \frac{3}{2}kT$$

而动能包括平动动能、转动动能和振动动能，单原子分子只有平动动能，双原子分子除了 3 个平动自由度之外，还有 2 个转动自由度，所以

$$\overline{E_{k\mathrm{He}}} = \frac{3}{2}kT$$
$$\overline{E_{k\mathrm{O_2}}} = \frac{5}{2}kT$$

第 426 题 |【4017】

1 mol 氧气 (视为刚性双原子分子的理想气体) 贮于一氧气瓶中，温度为 27°C，这瓶氧气的内能为_____ J；分子的平均平动动能为_____ J；分子的平均总动能为_____。(摩尔气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$，玻尔兹曼常量 $k = 1.38\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$)

答案

6.23×10^{3} J，6.21×10^{-21} J，1.035×10^{-20} J

解析

刚性双原子分子的平动自由度为 $t=3$，转动自由度为 $r=2$，振动自由度为 $s=0$，根据能量均分定理，一个分子的平均平动动能为

$$\overline{E_t} = \frac{t}{2}kT = 1.5\times1.38\times10^{-23}\times300 = 6.21\times10^{-21}\ \mathrm{J}$$

一个分子的平均总动能为

$$\overline{E} = \frac{t+r}{2}kT = 2.5\times1.38\times10^{-23}\times300 = 1.035\times10^{-20}\ \mathrm{J}$$

而气体的总的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT=2.5\times1\times8.31\times300\approx6.23\times10^{3}\ \mathrm{J}$$

第 427 题 |【4018】

有一瓶质量为 M 的氢气 (视作刚性双原子分子的理想气体)，温度为 T，则氢分子的平均平动动能为______，氢分子的平均动能为______，该瓶氢气的内能为______。

答案

$\frac{3}{2}kT$，$\frac{5}{2}kT$，$\frac{5}{4}\times10^{3}MRT$

解析

刚性双原子分子的平动自由度为 $t=3$，转动自由度为 $r=2$，振动自由度为 $s=0$，根据能量均分定理，一个分子的平均平动动能为

$$\overline{E_t}=\frac{t}{2}kT=\frac{3}{2}kT$$

一个分子的平均总动能为

$$\overline{E}=\frac{t+r}{2}kT=\frac{5}{2}kT$$

而气体的总的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{5}{2}\times\frac{M}{2\times10^{-3}}\times RT=\frac{5}{4}\times10^{3}MRT$$

第 428 题 |【4077】

有 $2\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ 刚性双原子分子理想气体，其内能为 6.75×10^{2} J。(1) 试求气体的压强；(2) 设分子总数为 5.4×10^{22} 个，求分子的平均平动动能及气体的温度。

解答

(1) 刚性双原子分子理想气体的内能为

$$E=\frac{5}{2}nRT$$

而理想气体的物态方程为

$$pV=nRT$$

所以气体的压强为

$$p=\frac{nRT}{V}=\frac{2E}{5V}=\frac{2\times6.75\times10^2}{5\times2\times10^{-3}}=1.35\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

(2) 刚性双原子分子理想气体的内能还可以写为

$$E=\frac{5}{2}NkT$$

而分子的平均平动动能为

$$\overline{E_k}=\frac{3}{2}kT$$

所以有

$$T=\frac{2E}{5Nk}=\frac{2\times6.75\times10^2}{5\times5.4\times10^{22}\times1.38\times10^{-23}}\approx362\ \mathrm{K}$$

$$\overline{E_k}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}k\times\frac{2E}{5Nk}=\frac{3E}{5N}=\frac{3\times6.75\times10^2}{5\times5.4\times10^{22}}=7.5\times10^{-21}\ \mathrm{J}$$

第 429 题 |【4068】

储有某种刚性双原子分子理想气体的容器以速度 $v=100\ \mathrm{m/s}$ 运动，假设该容器突然停止，气体的全部定向运动动能都变为气体分子热运动的动能，此时容器中气体的温度上升 6.74 K，由此可知容器中气体的摩尔质量 $M_{\mathrm{mol}}=$______。

答案

$28\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$

解析

以 1 mol 气体为例进行研究，则气体的质量为 $m=M_{\mathrm{mol}}$。当气体定向运动时，定向运动的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

由于气体是刚性双原子分子理想气体，所以其内能就是气体分子热运动的动能

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{5}{2}RT$$

依题意，有

$$\Delta E=\frac{5}{2}R\Delta T=E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

$$m=M_{\mathrm{mol}}=\frac{5R\Delta T}{v^2}=\frac{5\times8.31\times6.74}{100^2}\approx28\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$$

第 430 题 |【4069】

容积为 10 L(升) 的盒子以速率 $v = 200$ m/s 匀速运动，容器中充有质量为 50 g，温度为 18℃ 的氢气，设盒子突然停止，气体的全部定向运动的动能都变为气体分子热运动的动能，容器与外界没有热量交换，则达到热平衡后；氢气的温度将增加______ K；氢气的压强将增加______ Pa。

答案

1.93，4×10^4

解析

当气体定向运动时，定向运动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

由于氢气是刚性双原子分子理想气体，所以其内能就是气体分子热运动的动能

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{5}{2} \times \frac{50}{2}RT = \frac{125}{2}RT$$

依题意，有

$$\Delta E = \frac{5}{2}nR(\Delta T) = \frac{125}{2}R\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\Delta T = \frac{mv^2}{5nR} = \frac{mv^2}{125R} = \frac{0.05 \times 200^2}{125 \times 8.31} \approx 1.93 \text{ K}$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

在题目所给的过程中，容器的容积保持不变，因此气体的体积也保持不变，所以有

$$(\Delta p)V = nR(\Delta T)$$
$$\Delta p = \frac{nR(\Delta T)}{V} = \frac{mv^2}{5V} = \frac{0.05 \times 200^2}{5 \times 0.01} = 4 \times 10^4 \text{ Pa}$$

第 431 题 |【4302】

储有 1 mol 氧气，容积为 1 m^3 的容器以 $v = 10$ m/s 的速度运动。设容器突然停止，其中氧气的 80% 的机械运动动能转化为气体分子热运动动能，问气体的温度及压强各升高了多少？(氧气分子视为刚性分子，普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

解答

氧气是刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{5}{2}nRT$$

当容器运动时，气体做机械运动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

依题意

$$\Delta E = \frac{5}{2}nR\Delta T = 0.8E_k = \frac{2}{5}mv^2$$

$$\Delta T = \frac{4mv^2}{25nR} = \frac{4Mv^2}{25R} = \frac{4\times 32\times 10^{-3}\times 10^2}{25\times 8.31} \approx 0.0616\text{K}$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

容器容积不变，气体经历的是等容过程，所以有

$$(\Delta p)V = nR\Delta T$$

$$\Delta p = \frac{nR\Delta T}{V} = \frac{nR}{V}\times\frac{4mv^2}{25nR} = \frac{4mv^2}{25V} = \frac{4\times 32\times 10^{-3}\times 10^2}{25\times 1} = 0.512\ \text{Pa}$$

第 432 题 |【4070】

容积为 20.0 L(升) 的瓶子以速率 $v = 200\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 匀速运动，瓶子中充有质量为 100 g 的氦气。设瓶子突然停止，且气体的全部定向运动动能都变为气体分子热运动的动能，瓶子与外界没有热量交换，求热平衡后氦气的温度、压强、内能及氦气分子的平均动能各增加多少？(摩尔气体常量 $R = 8.31\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$，玻尔兹曼常量 $k = 1.38\times 10^{-23}\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$)

解答

氦气是刚性单原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT$$

当容器运动时，气体做机械运动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

依题意

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta T = \frac{mv^2}{3nR} = \frac{Mv^2}{3R} = \frac{4\times 10^{-3}\times 200^2}{3\times 8.31} \approx 6.42\ \text{K}$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

容器容积不变，气体经历的是等容过程，所以有

$$(\Delta p)V = nR\Delta T$$

$$\Delta p = \frac{nR\Delta T}{V} = \frac{nR}{V} \times \frac{mv^2}{3nR} = \frac{mv^2}{3V} = \frac{0.1 \times 200^2}{3 \times 0.02} \approx 6.67 \times 10^4\ \text{Pa}$$

而依前所述，内能的增加量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 0.1 \times 200^2 = 2000\ \text{J}$$

而对于刚性单原子分子理想气体，气体分子的平均动能为

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$$

所以气体分子的平均动能的增加量为

$$\Delta\overline{E_k} = \frac{3}{2}k\Delta T = 1.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 6.42 \approx 1.33 \times 10^{-22}\ \text{J}$$

第 433 题 |【4025】

一气体分子的质量可以根据该气体的定体比热来计算。氩气的定体比热 $c_V = 0.314\ \text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$，则氩原子的质量 $m =$______。

答案

6.59×10^{-26} kg

解析

氩气，单原子分子，分子量 40，符号 Ar。
单原子分子的平动自由度为 $t = 3$，转动自由度为 $r = 0$，振动自由度为 $s = 0$，根据能量均分定理，一个分子的平均平动动能为

$$\overline{E_t} = \frac{t}{2}kT = \frac{3}{2}kT$$

一个分子的平均总动能为

$$\overline{E} = \frac{t+r}{2}kT = \frac{3}{2}kT$$

而气体的总的内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{3}{2}nRT$$

而在定体 (等容) 过程中，气体做功为零，所以根据热力学第一定律，内能的增加就等于气体从外界所吸收的热量

$$\Delta E = Q - W = Q = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

根据比热的定义，有

$$c_V = \frac{Q}{M\Delta T} = \frac{3nR}{2M} = \frac{3R}{2M_{\text{mol}}} = \frac{3N_A k}{2M_{\text{mol}}}$$
$$m = \frac{M_{\text{mol}}}{N_A} = \frac{3k}{2c_V} = \frac{3\times 1.38\times 10^{-23}}{2\times 314} \approx 6.59\times 10^{-26}\ \text{kg}$$

第 434 题 |【4022】

在标准状态下，若氧气 (视为刚性双原子分子的理想气体) 和氦气的体积比 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$，则其内能之比 $\frac{E_1}{E_2}$ 为

(A) $\frac{3}{10}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{5}{6}$　　(D) $\frac{5}{3}$

答案

C

解析

理想气体的体积比等于摩尔数比

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$$

氦气是单原子分子，平动自由度为 3，转动自由度为零，振动自由度为零；氧气是双原子分子，平动自由度为 3，转动自由度为 2，振动自由度为零。又理想气体不考虑势能，所以内能就等于其动能，根据能量均分定理，

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1 N_A \overline{E}_{k\text{O}_2}}{n_2 N_A \overline{E}_{k\text{He}}} = \frac{1}{2}\times\frac{\frac{5}{2}kT}{\frac{3}{2}kT} = \frac{5}{6}$$

第 435 题 |【4023】

水蒸气分解成同温度的氢气和氧气，内能增加了百分之几 (不计振动自由度和化学能)?

(A) 66.7%　　(B) 50%　　(C) 25%　　(D) 0

答案

C

解析

1 mol 水蒸气分解成 1 mol 的氢气和 0.5 mol 氧气。水蒸气是多原子分子，由于不考虑振动自由度，所以平动自由度为 3，转动自由度为 3；氢气和氧气都是双原子分子，平动自由度为 3，转动自由度为 2。又理想气体不考虑势能，所以内能就等于其动能，根据能量均分定理，1 mol 水蒸气的内能为

$$E_{\mathrm{H_2O}} = 1 \times N_A \times \frac{6}{2}kT = 3RT$$

1 mol 氢气的内能为

$$E_{\mathrm{H_2}} = 1 \times N_A \times \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}RT$$

0.5 mol 氧气的内能为

$$E_{\mathrm{O_2}} = 0.5 \times N_A \times \frac{5}{2}kT = \frac{5}{4}RT$$

所以内能增加了

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{\mathrm{H_2}} + E_{\mathrm{O_2}} - E_{\mathrm{H_2O}}}{E_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{\frac{5}{2}RT + \frac{5}{4}RT - 3RT}{3RT} = \frac{1}{4}$$

12.4 气体分子的平均自由程

第 436 题 |【4407】

气缸内盛有一定量的氢气 (可视作理想气体)，当温度不变而压强增大一倍时，氢气分子的平均碰撞频率 $\overline{Z}$ 和平均自由程 $\overline{\lambda}$ 的变化情况是

(A) $\overline{Z}$ 和 $\overline{\lambda}$ 都增大一倍

(B) $\overline{Z}$ 和 $\overline{\lambda}$ 都减为原来的一半

(C) $\overline{Z}$ 增大一倍而 $\overline{\lambda}$ 减为原来的一半

(D) $\overline{Z}$ 减为原来的一半而 $\overline{\lambda}$ 增大一倍

答案

C

解析

由理想气体的物态方程

$$pV = \frac{N}{N_A}RT$$

可得，T 不变，p 变成 $2p$ 时，V 变成 $\frac{1}{2}V$。分子数不变，体积变小，所以单位体积的分子数即分子数密度增大一倍，温度不变，分子的平均速率不变，所以单位时间走过的路程不变，单位时间遇到的分子数越多，即碰撞的频率越大，而两次碰撞之间分子走过的路程 (平均自由程) 越短。

平均碰撞频率

$$\overline{Z} = \sqrt{2}n\pi d^2\overline{v}$$

平均自由程

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

第 437 题 |【4955】

容积恒定的容器内盛有一定量某种理想气体，其分子热运动的平均自由程为 $\overline{\lambda}_0$，平均碰撞频率为 $\overline{Z}_0$，若气体的热力学温度降低为原来的 $\frac{1}{4}$ 倍，则此时分子平均自由程 $\overline{\lambda}$ 和平均碰撞频率 $\overline{Z}$ 分别为

(A) $\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_0$，$\overline{Z}=\overline{Z}_0$

(B) $\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_0$，$\overline{Z}=\frac{1}{2}\overline{Z}_0$

(C) $\overline{\lambda}=2\overline{\lambda}_0$，$\overline{Z}=2\overline{Z}_0$

(D) $\overline{\lambda}=\sqrt{2}\overline{\lambda}_0$，$\overline{Z}=\frac{1}{2}\overline{Z}_0$

答案

B

解析

平均自由程

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

平均碰撞频率

$$\overline{Z}=\sqrt{2}n\pi d^2\overline{v}$$

容器的容积恒定，所以气体的体积固定，一定量的气体，所以气体的分子数固定，所以分子数密度 n 恒定。而对于特定的气体，分子的有效直径 d 可以认为是个常数，因此温度变化时，平均自由程不变，但分子的平均速率

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

与温度的开根号成正比，所以温度变为原来的 $\frac{1}{4}$，平均速率变为原来的 $\frac{1}{2}$，所以平均碰撞频率也变为原来的 $\frac{1}{2}$。

第 438 题 |【4465】

在一封闭容器中盛有 1 mol 氦气 (视作理想气体)，这时分子无规则运动的平均自由程仅决定于

(A) 压强 p

(B) 体积 V

(C) 温度 T

(D) 平均碰撞频率 $\overline{Z}$

答案

B

解析

平均自由程

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}=\frac{\bar{v}}{\overline{Z}}$$

其中对于特定的气体，分子的有效直径 d 可以认为是个常数，因此平均自由程决定于气体的分子数密度 n。而对于 1 mol 氮气，分子的总数固定，所以分子数密度取决于气体的体积，即容器的容积。

第 439 题 |【4956】

一定量的某种理想气体，先经过等体过程使其热力学温度升高为原来的 2 倍；再经过等压过程使其体积膨胀为原来的 2 倍，则分子的平均自由程变为原来的_____ 倍。

答案

2

解析

设初态为 (p_1,V_1,T_1)，中间态为 (p_2,V_2,T_2)，末态为 (p_3,V_3,T_3)，依题意，有 $V_2=V_1$、$T_2=2T_1$；$p_3=p_2$、$V_3=2V_1$，根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

可得

$$p_1V_1=nRT_1$$
$$p_2V_2=nRT_2$$
$$p_3V_3=nRT_3$$
$$p_2=\frac{nRT_2}{V_2}=\frac{nR(2T_1)}{V_1}=2p_1$$
$$T_3=\frac{p_3V_3}{nR}=\frac{(2p_1)(2V_1)}{nR}=4T_1$$

而平均自由程的表达式为

$$\overline{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2p}$$

所以

$$\overline{\lambda}_3=\frac{kT_3}{\sqrt{2}\pi d^2p_3}=\frac{k(4T_1)}{\sqrt{2}\pi d^2(2p_1)}=2\overline{\lambda}_1$$

第四部分

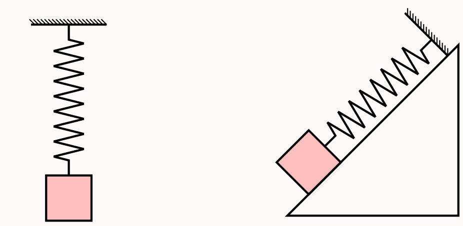
振动和波动

第十三章　振动

13.1　简谐振动的动力学

第 440 题 |【3023】

一弹簧振子，当把它水平放置时，它可以作简谐振动。若把它竖直放置或放在固定的光滑斜面上，试判断下面哪种情况是正确的



(A) 竖直放置可作简谐振动，放在光滑斜面上不能作简谐振动
(B) 竖直放置不能作简谐振动，放在光滑斜面上可作简谐振动
(C) 两种情况都可作简谐振动
(D) 两种情况都不能作简谐振动

答案

C

解析

如果物体所受的合力与其离开平衡位置的距离成正比，且方向相反，那么物体的运动就是简谐振动。对于竖直放置的弹簧振子，其平衡位置就是在它所受合力为零的位置，因此此时弹簧不再是自然伸展状态，而是有一定的伸长量 x_0，这个伸长量满足

$$kx_0 = mg$$

以该位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向，则物体的位置就是物体离开平衡位置的距离。设位置为 x 时，则弹簧伸长量为 $x + x_0$，此时物体所受的合力为

$$F = mg - k(x + x_0) = -kx$$

因此，竖直放置的弹簧振子的运动也是简谐振动。

当弹簧振子放在倾角为 θ 的光滑斜面上时，平衡位置仍然是振子所受合力为零的地方，设此时弹簧的伸长量为 x_0，则沿斜面方向，振子的受力为

$$kx_0 = mg\sin\theta$$

同样以此位置为坐标原点，沿斜面向下为 x 轴正方向，则物体的位置就是物体离开平衡位置的距离。设位置为 x 时，则弹簧伸长量为 $x+x_0$，此时物体所受的合力为

$$F = mg\sin\theta - k(x+x_0) = -kx$$

因此，放在光滑斜面上的弹簧振子的运动也是简谐振动。

13.2 简谐振动的运动学

13.2.1 简谐振动的速度和加速度

第 441 题 |【5502】

一质点作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$。在时间 $t=\frac{1}{2}T$(T 为周期) 时，质点的速度为
(A) $-A\omega\sin\varphi$ (B) $A\omega\sin\varphi$ (C) $-A\omega\cos\varphi$ (D) $A\omega\cos\varphi$

答案

B

解析

根据简谐振动的表达式

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

可得物体的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

所以，在 $t=\frac{1}{2}T$(T 为周期) 时刻，物体的加速度为

$$v = -A\omega\sin\left(\omega\frac{T}{2}+\varphi\right) = -A\omega\sin(\pi+\varphi) = A\omega\sin\varphi$$

第 442 题 |【5501】

一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t+\frac{1}{4}\pi\right)$。在 $t=\frac{1}{4}T$(T 为周期) 时刻，物体的加速度为
(A) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$ (C) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$

答案

B

解析

根据简谐振动的表达式

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

可得物体的速度和加速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

所以，在 $t = \frac{1}{4}T$(T 为周期) 时刻，物体的加速度为

$$a = -A\omega^2\cos\left(\omega\frac{T}{4} + \frac{1}{4}\pi\right) = -A\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\pi\right) = -A\omega^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$$

13.2.2 描述简谐振动的特征量

1. 周期、频率和圆频度

第 443 题 |【3552】

一个弹簧振子和一个单摆 (只考虑小幅度摆动)，在地面上的固有振动周期分别为 T_1 和 T_2。将它们拿到月球上去，相应的周期分别为 T_1' 和 T_2'。则有

(A) $T_1' > T_1$ 且 $T_2' > T_2$ (B) $T_1' < T_1$ 且 $T_2' < T_2$ (C) $T_1' = T_1$ 且 $T_2' = T_2$ (D) $T_1' = T_1$ 且 $T_2' > T_2$

答案

D

解析

弹簧振子的周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

小角度单摆的周期为

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

地面与月球的区别在于重力加速度 g 的取值不同，月球表面的重力加速度 g' 小于地球表面的重力加速

度 g，所以有

$$T_1' = T_1, T_2' > T_2$$

第 444 题 |【3007】

一质量为 m 的物体挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下面，振动角频率为 ω。若把此弹簧分割成二等份，将物体 m 挂在分割后的一根弹簧上，则振动角频率是

(A) 2ω (B) $\sqrt{2}\omega$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\omega$ (D) $\frac{1}{2}\omega$

答案

B

解析

弹簧做简谐振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

当将弹簧分成两份时，劲度系数 $k' = 2k$，所以圆频率变为

$$\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}\omega$$

第 445 题 |【3820】

将质量为 0.2 kg 的物体，系于劲度系数 $k = 19$ N/m 的竖直悬挂的弹簧的下端。假定在弹簧不变形的位置将物体由静止释放，然后物体作简谐振动，则振动频率为_____，振幅为_____。

答案

1.55 Hz，0.103 m

解析

弹簧振子做简谐振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19}{0.2}} = \sqrt{95} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

所以频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{95}}{2\pi} \approx 1.55 \text{ Hz}$$

竖直悬挂的弹簧振子，平衡位置时弹簧的伸长量就是题目中的振幅，因此

$$kA = mg$$
$$A = \frac{mg}{k} = \frac{0.2 \times 9.8}{19} \approx 0.103 \text{ m}$$

2. 相位

第 446 题 |【3817】

一简谐振动的表达式为 $x = A\cos(3t + \varphi_0)$，已知 $t = 0$ 时的初位移为 0.04 m，初速度为 0.09 m/s，则振幅 $A =$______，初相 $\varphi_0 =$______。

答案

0.05 m，$-37°$

解析

由简谐振动的表达式

$$x = A\cos(3t + \varphi_0)$$

可得速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3A\sin(3t + \varphi_0)$$

依题意，$t = 0$ 时，质点的位置和速度分别为

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.04$$
$$v_0 = -3A\sin\varphi_0 = 0.09$$

整理得

$$A = 0.05 \text{ m}$$
$$\cos\varphi_0 = 0.8, \sin\varphi_0 = -0.6 \Rightarrow \varphi_0 = -37°$$

第 447 题 |【3001】

把单摆摆球从平衡位置向位移正方向拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ，然后由静止放手任其振动，从放手时开始计时。若用余弦函数表示其运动方程，则该单摆振动的初相为

(A) π (B) $\frac{1}{2}\pi$ (C) 0 (D) θ

答案

C

解析

用余弦函数表示的简谐振动的表达式一般可以写成

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

一般地，对于单摆，离开平衡位置的位移 x 就是摆线与竖直方向的夹角 θ，而振幅 A 就是摆线与竖直方向的最大夹角 θ_0，即单摆的一般表达式可以写成

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，当 $t = 0$ 时，$\theta = \theta_0$【这里的 θ_0 就是题目中给出的 θ】，所以通常在 0 到 2π 之间取值的初相 $\varphi_0 = 0$。【一般地，初相的取值范围还可能在 $-\pi$ 到 π 之间】

第 448 题 |【3002】

两个质点各自作简谐振动，它们的振幅相同、周期相同。第一个质点的振动方程为 $x_1 = A\cos(\omega t + \alpha)$。当第一个质点从相对于其平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大正位移处。则第二个质点的振动方程为

(A) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ (B) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$

(C) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$ (D) $x_2 = A\cos(\omega t + \alpha + \pi)$

答案

B

解析

依题意，第二个质点的振动相位滞后于第一个质点 $\frac{1}{2}\pi$，所以其振动表达式为

$$x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 449 题 |【3818】

两个弹簧振子的周期都是 0.4 s，设开始时第一个振子从平衡位置向负方向运动，经过 0.5 s 后，第二个振子才从正方向的端点开始运动，则这两振动的相位差为______。

答案

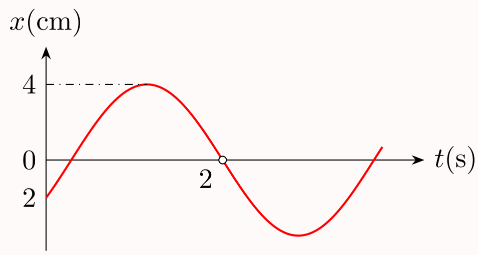
π

解析

依题意，第一个振子的初位相为 $\frac{1}{2}\pi$，经过 0.5 s，即 1.25 个周期，相位变成 3π，或称为 π，此时第二个振子的相位为零，所以二者的相位差为 π。

第 450 题 |【3398】

一质点作简谐振动。其振动曲线如图所示。根据此图，它的周期 T =______，用余弦函数描述时初相 φ_0 =______。



答案

$\frac{24}{7}$ s，$-\frac{2}{3}\pi$

解析

从振动曲线可以得到，振幅 $A = 4$ cm，$t = 0$ 时，$x_0 = -2$ cm，$v_0 > 0$；$t = 2$ s 时，$x_2 = 0$，$v_2 < 0$；设振动表达式为

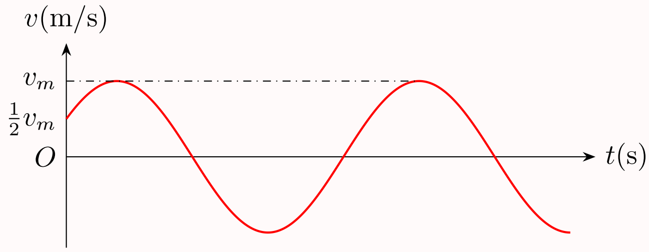
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则有

$$x_0 = 0.04\cos\varphi_0 = -0.02 \Rightarrow \cos\varphi_0 = -0.5 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{2}{3}\pi$$
$$v_0 = -0.04\omega\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{2}{3}\pi$$
$$x_2 = 0.04\cos(2\omega + \varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos(2\omega + \varphi_0) = 0 \Rightarrow 2\omega + \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \omega = \frac{1}{4}\pi - \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{7}{12}\pi$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{7}{12}\pi} = \frac{24}{7}\text{ s}$$

第 451 题 |【3396】

一质点作简谐振动。其运动速度与时间的曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初相应为



(A) $\frac{1}{6}\pi$ (B) $\frac{5}{6}\pi$ (C) $-\frac{5}{6}\pi$ (D) $-\frac{1}{6}\pi$ (E) $-\frac{2}{3}\pi$

答案

C

解析

用余弦函数表示的简谐振动的表达式一般可以写成

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以质点运动的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -v_m\sin(\omega t + \varphi_0)$$

质点运动的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -a_m\cos(\omega t + \varphi_0)$$

由图可以看出，当 $t = 0$ 时，$v = 0.5v_m$，$a > 0$，即

$$v = -v_m\sin\varphi_0 = 0.5v_m$$
$$\sin\varphi_0 = -0.5$$
$$\varphi_{01} = 2n\pi - \frac{\pi}{6}, \varphi_{02} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$
$$a = -a_m\cos\varphi_0 > 0$$
$$\cos\varphi_0 < 0$$
$$\varphi_0 = \varphi_{02} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

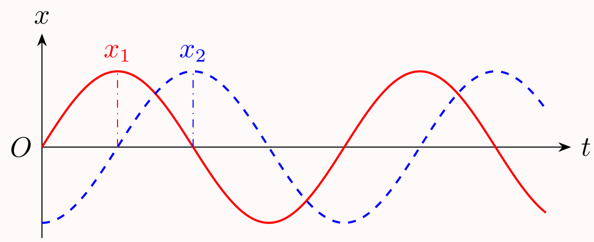
而一般初位相取值在 $0 \to 2\pi$ 或 $-\pi \to \pi$，所以上式中可以取 $n = -1$ 或 $n = 0$，得

$$\varphi_0 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$
$$\varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

所以答案为题目中给出的选项 (C)。

第 452 题 |【3030】

两个同周期简谐振动曲线如图所示。x_1 的相位比 x_2 的相位



(A) 落后 $\frac{1}{2}\pi$ (B) 超前 $\frac{1}{2}\pi$ (C) 落后 π (D) 超前 π

答案

B

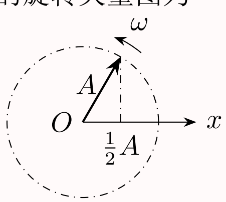
解析

由振动曲线可知，x_1 的振动比 x_2 超前四分之一周期，因此相位超前 $\frac{1}{2}\pi$。

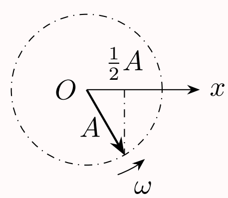
13.2.3 旋转矢量

第 453 题 |【3042】

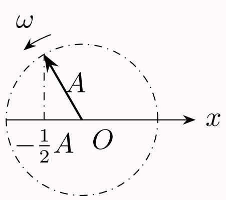
一个质点作简谐振动，振幅为 A，在起始时刻质点的位移为 $\frac{1}{2}A$，且向 x 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为



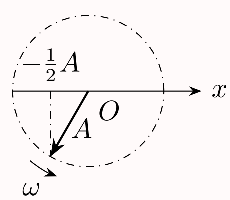
(A)



(B)



(C)



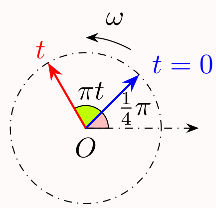
(D)

答案

B

第 454 题 |【3046】

一简谐振动的旋转矢量图如图所示，振幅矢量长 2 cm，则该简谐振动的初相为_____，振动方程为_____。



答案

$\frac{1}{4}\pi$，$x=0.02\cos\left(\pi t+\frac{1}{4}\pi\right)$

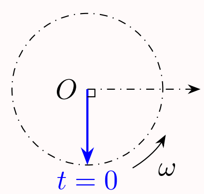
解析

从旋转矢量图及题意可以得到，振幅 $A=2$ cm，圆频率 $\omega=\pi$ rad/s，$\varphi_0=\frac{1}{4}\pi$，所以振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.02\cos\left(\pi t+\frac{1}{4}\pi\right)$$

第 455 题 |【3567】

图中用旋转矢量法表示了一个简谐振动。旋转矢量的长度为 0.04 m，旋转角速度 $\omega=4\pi$ rad/s。此简谐振动以余弦函数表示的振动方程为 $x=$_____(SI)。



答案

$0.04\cos\left(4\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$

解析

从图中旋转矢量图及题意可以看出，振幅 $A=0.04$ m，圆频率 $\omega=4\pi$ rad/s，初位相 $\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$，所以其振动表达式为

$$x=0.04\cos\left(4\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$$

第 456 题 |【3254】

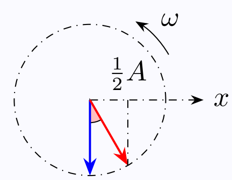
一质点作简谐振动，周期为 T。质点由平衡位置向 x 轴正方向运动时，由平衡位置到二分之一最大位移这段路程所需要的时间为

(A) $\frac{1}{4}T$ (B) $\frac{1}{6}T$ (C) $\frac{1}{8}T$ (D) $\frac{1}{12}T$

答案

D

解析



由以上旋转矢量图很容易看出，过程所对应的相位差为 $\Delta\varphi = 30°$，所以所用的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{360°}T = \frac{1}{12}T$$

第 457 题 |【5312】

一质点在 x 轴上作简谐振动，振辐 $A = 4$ cm，周期 $T = 2$ s，其平衡位置取作坐标原点。若 $t = 0$ 时刻质点第一次通过 $x = -2$ cm 处，且向 x 轴负方向运动，则质点第二次通过 $x = -2$ cm 处的时刻为

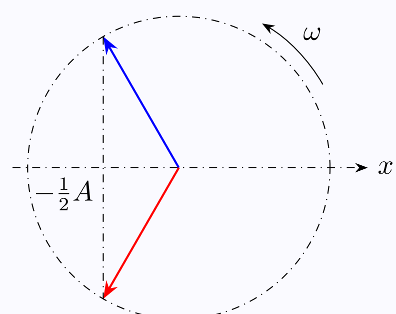
(A) 1 s (B) $\frac{2}{3}$ s (C) $\frac{4}{3}$ s (D) 2 s

答案

B

解析

根据旋转矢量图



可知，相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

所以所花时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}T = \frac{1}{3}T = \frac{2}{3}\ \mathrm{s}$$

第 458 题 |【5178】

一质点沿 x 轴作简谐振动，振动方程为 $x = 4\times10^{-2}\cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)$(SI)。从 $t = 0$ 时刻起，到质点位置在 $x = -2\ \mathrm{cm}$ 处，且向 x 轴正方向运动的最短时间间隔为

(A) $\frac{1}{8}$ s (B) $\frac{1}{6}$ s (C) $\frac{1}{4}$ s (D) $\frac{1}{3}$ s (E) $\frac{1}{2}$ s

答案

E

解析

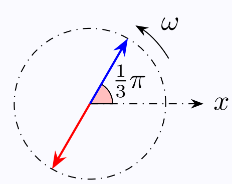
根据简谐振动的表达式

$$x = 4\times10^{-2}\cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)$$

可得，简谐振动的圆频率和周期分别为

$$\omega = 2\pi\ \mathrm{rad/s}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 1\ \mathrm{s}$$

根据旋转矢量图



可得，质点从初始位置到所求位置的相位差为 π，因此所用的时间为半个周期，即

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\ \mathrm{s}$$

第 459 题 |【3009】

一弹簧振子作简谐振动，振幅为 A，周期为 T，其运动方程用余弦函数表示。若 $t=0$ 时，(1) 振子在负的最大位移处，则初相为_____；(2) 振子在平衡位置向正方向运动，则初相为_____；(3) 振子在位移为 $\frac{1}{2}A$ 处，且向负方向运动，则初相为_____。

答案

$\pm\pi$，$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$

解析

用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$。因此，在 $t=0$ 时，振子的位置和速度分别为

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，(1)$x_0 = -A$，即

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = -A$$
$$\cos\varphi_0 = -1$$
$$\varphi_0 = (2n+1)\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

一般初位相在 0 到 2π 或 $-\pi$ 到 π 之间取值，所以这种情况下取 $\varphi_0 = \pi$ 或 $\varphi_0 = -\pi$。

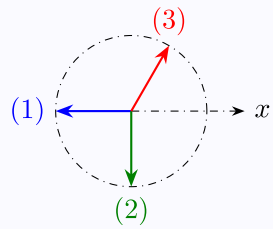
(2)$x = 0$ 且 $v > 0$，则

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

(3)$x = \frac{A}{2}$ 且 $v < 0$，则

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = \frac{A}{2} \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

本题用旋转矢量法可以很方便地确定出初相，如图。



第 460 题 |【3819】

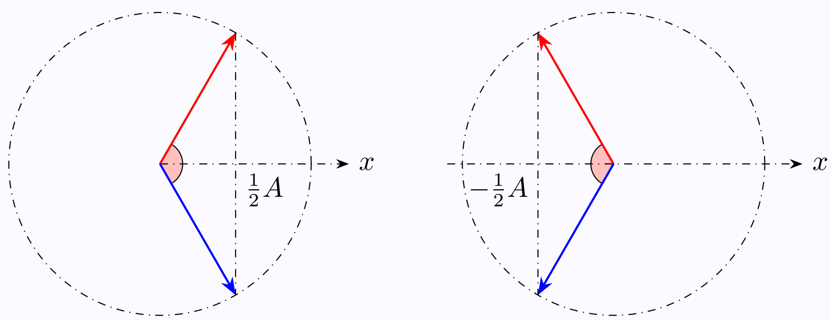
两质点沿水平 x 轴线作相同频率和相同振幅的简谐振动，平衡位置都在坐标原点。它们总是沿相反方向经过同一个点，其位移 x 的绝对值为振幅的一半，则它们之间的相位差为______。

答案

$\frac{2}{3}\pi$

解析

由旋转矢量图很容易看出，两种情况下二者的相位差都是 $\frac{2}{3}\pi$。



第 461 题 |【3557】

一质点沿 x 轴作简谐振动，振动范围的中心点为 x 轴的原点。已知周期为 T，振幅为 A。(1) 若 $t=0$ 时质点过 $x=0$ 处且朝 x 轴正方向运动，则振动方程为 $x=$______。(2) 若 $t=0$ 时质点处于 $x=\frac{1}{2}A$ 处且向 x 轴负方向运动，则振动方程为 $x=$______。

答案

$A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)$，$A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)$

解析

用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

质点的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$。因此，在 $t = 0$ 时，质点的位置和速度分别为

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，(1)$x_0 = 0$，$v_0 > 0$，即

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

所以振动表达式为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

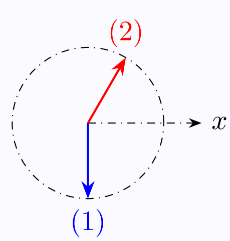
(2)$x = \frac{A}{2}$ 且 $v < 0$，则

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = \frac{A}{2} \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

所以振动表达式为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

本题用旋转矢量法可以很方便地确定出初相，如图。



13.2.4 振动表达式和振动曲线

第 462 题 |【3390】

一质点作简谐振动，速度最大值 $v_m = 5$ cm/s，振幅 $A = 2$ cm。若令速度具有正最大值的那一时刻为 $t = 0$，则振动表达式为_____。

答案

$x = 0.02\cos(2.5t - 0.5\pi)$

解析

用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

质点的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以 $v_m = A\omega$，$\omega = \frac{v_m}{A} = 2.5$ rad/s。依题意，在 $t = 0$ 时，$v = v_m$，所以

$$\begin{aligned} -A\omega\sin\varphi_0 &= v_m = A\omega \\ \sin\varphi_0 &= -1 \\ \varphi_0 &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

所以振动表达式为

$$x = 0.02\cos(2.5t - 0.5\pi)$$

第 463 题 |【3816】

一质点沿 x 轴以 $x = 0$ 为平衡位置作简谐振动，频率为 0.25 Hz。$t = 0$ 时，$x = -0.37$ cm 而速度等于零，则振幅是_____，振动的数值表达式为_____。

答案

0.37 cm，$x = 0.37\cos(0.5\pi t + \pi)$ cm

解析

用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

质点的速度表达式为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f=0.5\pi\ \mathrm{rad/s}$。因此，在 $t=0$ 时，质点的位置和速度分别为

$$x_0=A\cos\varphi_0$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，$x_0=-0.37\ \mathrm{cm}$，$v_0=0$，即

$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0=0\Rightarrow\sin\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_{01}=0,\varphi_{02}=\pi$$
$$x_0=A\cos\varphi_0=-0.37\ \mathrm{cm}\Rightarrow A=0.37\ \mathrm{cm},\cos\varphi_0=-1\Rightarrow\varphi_0=\pi$$

所以振动表达式为

$$x=0.37\cos(0.5\pi t+\pi)\ \mathrm{cm}$$

第 464 题 |【3017】

一质点沿 x 轴作简谐振动，其角频率 $\omega=10\ \mathrm{rad/s}$。试分别写出以下两种初始状态下的振动方程：(1) 其初始位移 $x_0=7.5\ \mathrm{cm}$，初始速度 $v_0=75.0\ \mathrm{cm/s}$；(2) 其初始位移 $x_0=7.5\ \mathrm{cm}$，初始速度 $v_0=-75.0\ \mathrm{cm/s}$。

解答

设简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

可得速度表达式为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

所以 $t=0$ 时刻质点的位置和速度分别为

$$x_0=A\cos\varphi_0$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，$\omega=10\ \mathrm{rad/s}$，
(1)$x_0=7.5\ \mathrm{cm}$，$v_0=75.0\ \mathrm{cm/s}$，即

$$x_0=A\cos\varphi_0=0.075$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0=0.75$$

解得

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{0.075^2+0.075^2}=0.075\sqrt{2}\ \mathrm{m}\approx 0.106\ \mathrm{m}$$

$$\cos\varphi_0=\frac{x_0}{A}=\frac{0.075}{0.075\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\varphi_0=\frac{v_0}{-A\omega}=\frac{0.75}{-0.075\sqrt{2}\times 10}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi_0=-\frac{1}{4}\pi$$

所以振动的表达式为

$$x=0.106\cos\left(10t-\frac{1}{4}\pi\right)$$

(2)$x_0=7.5\ \mathrm{cm}$，$v_0=-75.0\ \mathrm{cm/s}$，即

$$x_0=A\cos\varphi_0=0.075$$

$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0=-0.75$$

解得

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{0.075^2+0.075^2}=0.075\sqrt{2}\ \mathrm{m}\approx 0.106\ \mathrm{m}$$

$$\cos\varphi_0=\frac{x_0}{A}=\frac{0.075}{0.075\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\varphi_0=\frac{v_0}{-A\omega}=\frac{-0.75}{-0.075\sqrt{2}\times 10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi_0=\frac{1}{4}\pi$$

所以振动的表达式为

$$x=0.106\cos\left(10t+\frac{1}{4}\pi\right)$$

第 465 题 |【3018】

一轻弹簧在 60 N 的拉力下伸长 30 cm。现把质量为 4 kg 的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止，再把物体向下拉 10 cm，然后由静止释放并开始计时。求：(1) 物体的振动方程；(2) 物体在平衡位置上方 5 cm 时弹簧对物体的拉力；(3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 5 cm 处所需要的最短时间。

解答

以平衡位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向。

(1) 依题意，由胡克定律 $F=kx$ 得弹簧的劲度系数为

$$k=\frac{F}{x}=\frac{60}{0.3}=200\ \mathrm{N/m}$$

所以弹簧振子做简谐振动的圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{200}{4}}=\sqrt{50}\ \mathrm{rad/s}$$

$t=0$ 时，$x_0=0.1$ m，$v_0=0$，假定简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则有

$$x_0=A\cos\varphi_0=0.1$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0=0$$

解得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.1$$
$$\cos\varphi_0=0$$
$$\varphi_0=0$$

所以简谐振动的表达式为

$$x=0.1\cos(\sqrt{50}t)$$

(2) 平衡位置时，物体所受合力为零，所以此时弹簧的伸长量为

$$l_0=\frac{mg}{k}=\frac{4\times 9.8}{200}=0.196\ \mathrm{m}$$

所以，在平衡位置上方 5 cm 处，弹簧的伸长量为 $l=0.146$ m，由胡克定律可得，此时弹簧的拉力为

$$F=kl=200\times 0.146=29.2\ \mathrm{N}$$

(3) 物体第一次越过平衡位置时刻为，相位为 $\omega t=\frac{1}{2}\pi$，$v_0=75.0$ cm/s，即

$$t_1=\frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2\sqrt{50}}\ \mathrm{s}$$

而当它运动到平衡位置上方 5 cm 处

$$-0.05=0.1\cos(\sqrt{50}t)$$
$$\cos(\sqrt{50}t)=-0.5$$

$$\sqrt{50}t=(2n+1)\pi\pm\frac{1}{3}\pi, n=0,1,2,\cdots$$
$$\Delta t=t-t_1=\frac{(2n+1)\pi\pm\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi}{\omega}$$

当 $n=0$ 时，所用时间最短，为

$$\Delta t=\frac{\pi-\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi}{\omega}=\frac{\pi}{6\sqrt{50}}\approx 0.074\ \mathrm{s}$$

第 466 题 |【3391】

在一竖直轻弹簧的下端悬挂一小球，弹簧被拉长 $l_0=1.2\ \mathrm{cm}$ 而平衡。再经拉动后，该小球在竖直方向作振幅为 $A=2\ \mathrm{cm}$ 的振动，试证此振动为简谐振动；选小球在正最大位移处开始计时，写出此振动的数值表达式。

解答

以平衡位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向，依题意，在平衡位置，弹簧被拉长 $l_0=1.2\ \mathrm{cm}$，假定弹簧的劲度系数为 k，小球的质量为 m，则有

$$kl_0=mg$$

在小球振动过程中，假定任意时刻，小球的位置为 x，则弹簧的伸长量为 $x+l_0$，此时小球共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向上的弹簧拉力 $f=k(x+l_0)$，所以小球所受的合力为

$$F=mg-k(x+l_0)=-kx$$

则小球所受合力与小球离开平衡位置的距离成正比，且指向平衡位置，所以小球的振动是简谐振动。假定此振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

依题意，振幅 $A=2\ \mathrm{cm}$，圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{l_0}}=\sqrt{\frac{9.8}{0.012}}\approx 28.58\ \mathrm{rad/s}$$

$t=0$ 时，

$$x=A=A\cos\varphi_0\Rightarrow\varphi_0=0$$

所以，振动的表达式为

$$x=0.02\cos(28.58t)$$

第 467 题 |【5191】

一物体作简谐振动，其速度最大值 $v_m = 3\times10^{-2}$ m/s，其振幅 $A = 2\times10^{-2}$ m。若 $t=0$ 时，物体位于平衡位置且向 x 轴的负方向运动。求：(1) 振动周期 T；(2) 加速度的最大值 a_m；(3) 振动方程的数值式。

解答

(1) 假定简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则有

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以

$$v_m = A\omega$$
$$\omega = \frac{v_m}{A} = \frac{3\times10^{-2}}{2\times10^{-2}} = 1.5\ \mathrm{rad/s}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3}\pi\ \mathrm{s}$$

(2) 加速度的最大值为

$$a_m = A\omega^2 = 2\times10^{-2}\times1.5^2 = 4.5\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$$

(3) 依题意，$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0<0$，所以

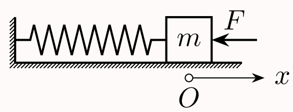
$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$$

所以简谐振动的表达式为

$$x = 0.02\cos\left(1.5t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 468 题 |【5511】

如图，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k = 24$ N/m，重物的质量 $m = 6$ kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 $F = 10$ N 向左作用于物体 (不计摩擦)，使之由平衡位置向左运动了 0.05 m 时撤去力 F。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。



解答

由功能原理可知，外力对弹簧所做的功等于系统机械能的增加，以重物在平衡位置时的势能为势能零点，则外力撤去时，弹簧振子的能量为

$$\Delta E = E - 0 = W = Fs = 10 \times 0.05 = 0.5 \text{ J}$$

此能量等于弹簧振子的最大势能，即

$$E = E_{p\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.5}{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \approx 0.204 \text{ m}$$

而圆频率为

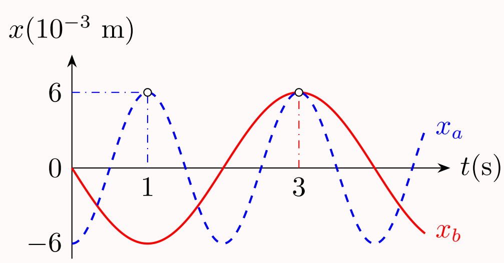
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = 2 \text{ rad/s}$$

$t = 0$ 时，$x_0 = -A$，所以 $\varphi_0 = \pi$，所以物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.204\cos(2t + \pi)$$

第 469 题 |【3399】

已知两简谐振动曲线如图所示，则这两个简谐振动方程 (余弦形式) 分别为_____ 和_____。



答案

$x_a = 6 \times 10^{-3}\cos(\pi t - \pi)$，$x_b = 6 \times 10^{-3}\cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$

解析

从振动曲线可以得到，对于 x_a，振幅 $A_a = 6\times10^{-3}$ m，周期 $T_a = 3-1 = 2$ s，$t=0$ 时，$x_{0a} = -6\times10^{-3}$ m $= -A_a$，设其振动表达式为

$$x_a = A_a\cos(\omega_a t + \varphi_{0a})$$

则有

$$x_{0a} = -A_a = A_a\cos\varphi_{0a} \Rightarrow \cos\varphi_{0a} = -1 \Rightarrow \varphi_{0a} = -\pi$$
$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

所以其振动表达式为

$$x_a = 6\times10^{-3}\cos(\pi t - \pi)$$

对于 x_b，振幅 $A_b = 6\times10^{-3}$ m，周期 $T_b = \frac{3}{3/4} = 4$ s，$t=0$ 时，$x_{0b}=0$，$v_{0b}<0$，设其振动表达式为

$$x_b = A_b\cos(\omega_b t + \varphi_{0b})$$

则有

$$x_{0b} = 0 = A_b\cos\varphi_{0b} \Rightarrow \cos\varphi_{0b} = 0 \Rightarrow \varphi_{0b} = \pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v_{0b} = -A_b\omega_b\sin\varphi_{0b} < 0 \Rightarrow \sin\varphi_{0b} > 0 \Rightarrow \varphi_{0b} = \frac{1}{2}\pi$$
$$\omega_b = \frac{2\pi}{T_b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad/s}$$

所以其振动表达式为

$$x_b = 6\times10^{-3}\cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 470 题 |【5179】

一弹簧振子，重物的质量为 m，弹簧的劲度系数为 k，该振子作振幅为 A 的简谐振动。当重物通过平衡位置且向规定的正方向运动时，开始计时。则其振动方程为

(A) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{1}{2}\pi\right)$ (B) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{1}{2}\pi\right)$ (C) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t + \frac{1}{2}\pi\right)$

(D) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t - \frac{1}{2}\pi\right)$ (E) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

答案

B

解析

简谐振动的一般表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以质点的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

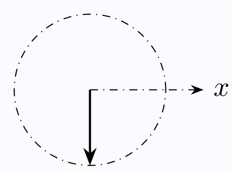
依题意，弹簧振动做简谐振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

而 $t = 0$ 时，$x = 0$，$v > 0$，所以

$$x = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v = -A\omega\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$$

或者根据旋转矢量图

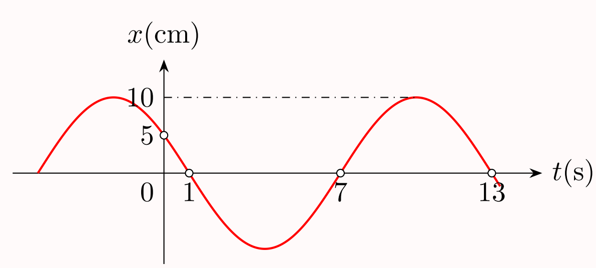


可得，振动的初位相为

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$$

第 471 题 |【3033】

一简谐振动用余弦函数表示，其振动曲线如图所示，则此简谐振动的三个特征量为 $A =$______;$\omega =$______;$\varphi_0 =$______。



答案

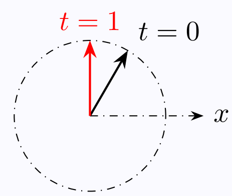
$A = 10$ cm，$\frac{\pi}{6}$ rad/s，$\frac{1}{3}\pi$

解析

从振动曲线可以看出，振幅 $A=10$ cm，周期 $T=13-1=12$ s，$t=0$ 时，$x_0=5=\frac{A}{2}$，$v_0<0$，或者 $t=1$ s 时，$x_1=0$，所以

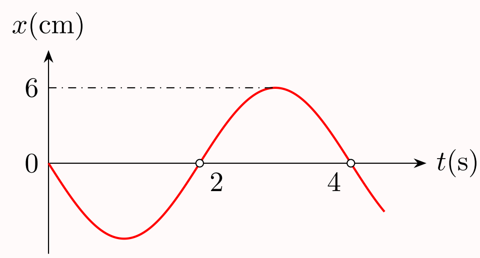
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad/s}$$
$$\cos\varphi_0=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{3}\pi$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi_0\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{6}+\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi\Rightarrow\varphi_0=\frac{1}{3}\pi$$

初相还可以通过旋转矢量图方便得到。



第 472 题 |【3041】

一简谐振动曲线如图所示，则由图可确定在 $t=2$ s 时刻质点的位移为_____，速度为_____。



答案

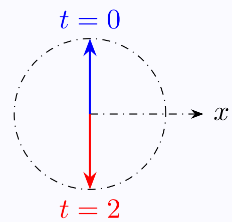
0，0.03π m/s

解析

从振动曲线可以看出，振幅 $A=6$ cm，周期 $T=4$ s，$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0<0$，或者 $t=2$ s 时，$x_2=0$，$v_2>0$，所以

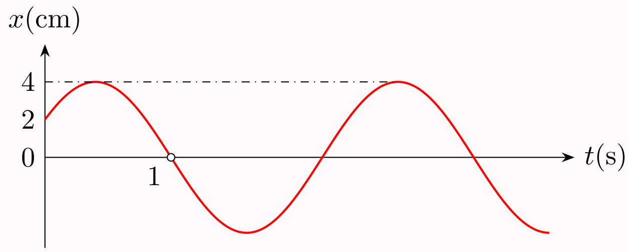
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad/s}$$
$$\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0<0\Rightarrow\sin\varphi_0=1\Rightarrow\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$
$$v_2=-A\omega\sin\left(\frac{\pi}{2}\times2+\varphi_0\right)=-A\omega\sin\left(\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=A\omega=0.06\times\frac{\pi}{2}=0.03\pi\ \mathrm{m/s}$$

初相还可以通过旋转矢量图方便得到。



第 473 题 |【3270】

一简谐振动曲线如图所示。则振动周期是



(A) 2.62 s (B) 2.40 s (C) 2.20 s (D) 2.00 s

答案

B

解析

简谐振动的一般表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，从图中可以看出来，$A = 4$ cm，当 $t = 0$ 时，$x = 2$ cm，且 $v > 0$；当 $t = 1$ s 时，$x = 0$；所以有

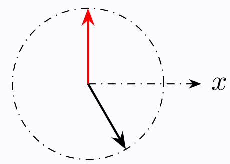
$$2 = 4\cos\varphi_0$$
$$-4\omega\sin\varphi_0 > 0$$
$$0 = 4\cos(\omega + \varphi_0)$$

所以

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$
$$\omega + \varphi_0 = \omega - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{6}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{12}{5} = 2.4\ \mathrm{s}$$

另外，由旋转矢量图



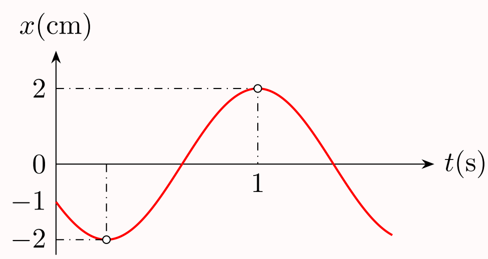
也很容易看出，过程所对应的相位差为 $\Delta\varphi = \frac{5\pi}{6}$，而依题意，过程所用的时间为 1 s，所以有

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T$$

$$T = \frac{2\pi(\Delta t)}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi \times 1}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{12}{5} = 2.4\ \mathrm{s}$$

第 474 题 |【5186】

已知某简谐振动的振动曲线如图所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。则此简谐振动的振动方程为



(A) $x = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$ (B) $x = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)$ (C) $x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$

(D) $x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)$ (E) $x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t - \frac{1}{4}\pi\right)$

答案

C

解析

简谐振动的一般表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，从图中可以看出来，$A = 2$ cm，当 $t = 0$ 时，$x = -1$ cm，且 $v < 0$；当 $t = 1$ s 时，$x = 2$ cm；所以有

$$-1 = 2\cos\varphi_0$$

$$-2\omega\sin\varphi_0 < 0$$
$$2 = 2\cos(\omega+\varphi_0)$$

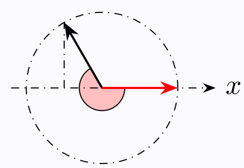
所以

$$\cos\varphi_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{2\pi}{3}$$
$$\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$$
$$\omega+\varphi_0 = \omega+\frac{2\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{3}$$

所以振动表达式为

$$x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)$$

另外，由旋转矢量图



也很容易看出，初位相 $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$，过程所对应的相位差为 $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{3}$，而依题意，过程所用的时间为 1 s，所以有

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{1} = \frac{4\pi}{3}\ \mathrm{rad/s}$$

所以振动表达式为

$$x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)$$

13.3 简谐振动的能量

第 475 题 |【3028】

一弹簧振子作简谐振动，总能量为 E_1，如果简谐振动振幅增加为原来的两倍，重物的质量增为原来的四倍，则它的总能量 E_2 变为

(A) $\frac{1}{4}E_1$　(B) $\frac{1}{2}E_1$　(C) $2E_1$　(D) $4E_1$

答案

D

解析

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

而系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = \frac{k}{m}$，所以系统的总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2$$

即总能量与振幅的平方成正比，所以当振幅增加为原来的两倍时，总能量增加为原来的四倍！

第 476 题 |【5182】

一弹簧振子作简谐振动，当位移为振幅的一半时，其动能为总能量的

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案

D

解析

以弹簧振子为例。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

而系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = \frac{k}{m}$，所以系统的总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

所以，当位移为振幅的一半时，即

$$x = \frac{1}{2}A$$

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}E$$

第 477 题 |【3393】

当质点以频率 f 作简谐振动时，它的动能的变化频率为

(A) $4f$ (B) $2f$ (C) f (D) $\frac{1}{2}f$

答案

B

解析

以弹簧振子为例。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \left(\frac{1}{4}mA^2\omega^2\right)[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

所以振子的动能也是做简谐振动，其变化的圆频率为 2ω，为振动简谐振动圆频率的两倍。而 $f = \frac{\omega}{2\pi}$，所以频率也是两倍。

第 478 题 |【5504】

一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$。则该物体在 $t = 0$ 时刻的动能与 $t = \frac{1}{8}T(T$ 为振动周期) 时刻的动能之比为

(A) $1:4$ (B) $1:2$ (C) $1:1$ (D) $2:1$ (E) $4:1$

答案

D

解析

物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

所以其速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

所以动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$t = 0$ 时刻的动能为

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$t = \frac{1}{8}T$ 时刻的动能为

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\omega \times \frac{T}{8} + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \times \frac{1}{2}$$

所以二者之比为

$$\frac{E_{k0}}{E_{k1}} = 2$$

第 479 题 |【5505】

一质点作简谐振动，其振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$。在求质点的振动动能时，得出下面 5 个表达式：(1)$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$；(2)$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$；(3)$\frac{1}{2}kA^2\sin(\omega t + \varphi_0)$；(4)$\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$；(5)$\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$；其中 m 是质点的质量，k 是弹簧的劲度系数，T 是振动的周期。这些表达式中

(A) (1)、(4) 是对的 (B) (2)、(4) 是对的 (C) (1)、(5) 是对的

(D) (1)、(3)、(5) 是对的 (E) (2)、(5) 是对的

答案

C

解析

简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以质点的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以质点的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = \frac{k}{m}$，所以质点的动能还可以写成

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

考虑到 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，所以质点的动能还可以写成

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2\frac{4\pi^2}{T^2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

注意 (3) 中 sin 没有平方。

第 480 题 |【3029】

一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的一半时，其动能是总能量的_____。(设平衡位置处势能为零)。当这物块在平衡位置时，弹簧的长度比原长长 Δl，这一振动系统的周期为_____。

答案

$\frac{3}{4}$，$2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$

解析

设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[-A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

所以当 $x = \frac{1}{2}A$ 时，

$$\cos(\omega t - \varphi_0) = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2(\omega t - \varphi_0) = \frac{3}{4}$$
$$E_k = E\sin^2(\omega t - \varphi_0) = \frac{3}{4}E$$

又依题意，有

$$k\Delta l = mg$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$$

第 481 题 |【3268】

一系统作简谐振动，周期为 T，以余弦函数表达振动时，初相为零。在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T$ 范围内，系统在 $t =$_____ 时刻动能和势能相等。

答案

$\frac{T}{8}$ 和 $\frac{3T}{8}$

解析

设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[-A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$

依题意，$\varphi_0=0$，考虑到 $\omega^2=\frac{k}{m}$，当动能与势能相等时，有

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t-\varphi_0)=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t-\varphi_0)$$
$$\sin^2(\omega t-\varphi_0)=\cos^2(\omega t-\varphi_0)$$
$$\sin^2(\omega t)=\cos^2(\omega t)$$
$$\sin(\omega t)=\pm\cos(\omega t)$$

在 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}T$ 范围内，上式的结果是

$$\omega t_1=\frac{1}{4}\pi,\omega t_2=\frac{3}{4}\pi$$
$$t_1=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{\pi}{4\times\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{8},t_2=\frac{3\pi}{4\omega}=\frac{3\pi}{4\times\frac{2\pi}{T}}=\frac{3T}{8}$$

第 482 题 |【3561】

质量为 m 物体和一个轻弹簧组成弹簧振子，其固有振动周期为 T。当它作振幅为 A 自由简谐振动时，其振动能量 $E=$______。

答案

$\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2$

解析

设简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t-\varphi_0)$$

则其动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[-A\omega\sin(\omega t-\varphi_0)\right]^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t-\varphi_0)$$

而势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t-\varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2=\frac{k}{m}$，总能量为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$$

依题意，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$
$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2A^2=\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2$$

第 483 题 |【3821】

一弹簧振子系统具有 1.0 J 的振动能量，0.10 m 的振幅和 1.0 m/s 的最大速率，则弹簧的劲度系数为______，振子的振动频率为______。

答案

200 N/m，1.59 Hz

解析

设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)$$

动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = \frac{k}{m}$，总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

依题意，

$$A = 0.10\ \mathrm{m}, v_m = A\omega = 1.0\ \mathrm{m/s}, E = 1.0\ \mathrm{J}$$
$$\omega = \frac{v_m}{A} = \frac{1.0}{0.10} = 10\ \mathrm{rad/s} = 2\pi f$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59\ \mathrm{Hz}$$
$$k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2\times 1.0}{0.10^2} = 200\ \mathrm{N/m}$$

第 484 题 |【3835】

在竖直悬挂的轻弹簧下端系一质量为 100 g 的物体，当物体处于平衡状态时，再对物体加一拉力使弹簧伸长，然后从静止状态将物体释放。已知物体在 32 s 内完成 48 次振动，振幅为 5 cm。(1) 上述的外加拉力是多大？(2) 当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

解答

(1) 依题意，物体做简谐振动的频率为

$$f=\frac{48}{32}=1.5\ \mathrm{Hz}$$

所以圆频率为

$$\omega=2\pi f=3\pi\ \mathrm{rad/s}$$

根据弹簧振子的圆频率与弹簧劲度系数之间的关系

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

可得弹簧的劲度系数为

$$k=m\omega^2=0.9\pi^2\ \mathrm{N/m}$$

当施加题目所说的拉力时，物体共受到三个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向下的拉力 T_1，竖直向上的弹簧弹力 T_2，所以有

$$\begin{gathered}mg+T_1=T_2\\ T_2=k(l_0+A)\\ kl_0=mg\end{gathered}$$

所以外加拉力为

$$T_1=kA=0.9\pi^2\times0.05=0.045\pi^2\ \mathrm{N}\approx0.444\ \mathrm{N}$$

(2) 设物体做简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，

$$\begin{gathered}x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.01\\ \cos(\omega t+\varphi_0)=\frac{x}{A}=0.2\\ \sin^2(\omega t+\varphi_0)=0.96\\ v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)\\ E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=0.96\times0.5\times0.1\times0.05^2\times(3\pi)^2\approx0.0107\ \mathrm{J}\\ E_p=\frac{1}{2}kx^2=0.5\times0.9\pi^2\times0.01^2\approx4.44\times10^{-4}\ \mathrm{J}\end{gathered}$$

注意，这里的势能其实包含重力势能和弹性势能，但二者之和刚好可以表示成 $\frac{1}{2}kx^2$，这里的 x 是物体离开平衡位置的距离，并不是弹簧的形变量。而且这里势能的零点选择为平衡位置，即让平衡位置重力势能和弹性势能之和等于零。

第 485 题 |【3836】

在一竖直轻弹簧下端悬挂质量 $m=5$ g 的小球，弹簧伸长 $\Delta l=1$ cm 而平衡。经推动后，该小球在竖直方向作振幅为 $A=4$ cm 的振动，求：(1) 小球的振动周期；(2) 振动能量。

解答

(1) 依题意，根据胡克定律，平衡时

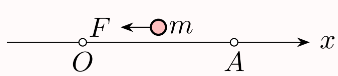
$$k\Delta l=mg$$
$$\frac{k}{m}=\frac{g}{\Delta l}$$
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0.01}{9.8}}=\frac{\sqrt{2}}{7}\pi\ \mathrm{s}$$

(2) 振动总能量为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}kA^2$$
$$=0.5\times0.005\times0.04^2\times\frac{9.8}{0.01}=3.92\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

第 486 题 |【5506】

一物体质量 $m=2$ kg，受到的作用力为 $F=-8x(\mathrm{SI})$。若该物体偏离坐标原点 O 的最大位移为 $A=0.10$ m，则物体动能的最大值为多少？



解答

依题意，物体所受到的力与离开平衡位置的距离成正比，且指向平衡位置，所以物体做简谐振动，等效的弹簧劲度系数为 $k=8$ N/m。

而根据简谐振动能量的特点，当物体在平衡位置时，物体具有最大的动能；当物体在最大位移处，物体具有最大的势能；在振动过程中的任意位移处，动能与势能之和即振动的总能量保持不变，等于前述的最大动能和最大势能，因此

$$E_{k\max}=E_{p\max}=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\times8\times0.1^2=0.04\ \mathrm{J}$$

第 487 题 |【3560】

弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为

(A) kA^2 (B) $\frac{1}{2}kA^2$ (C) $\frac{1}{4}kA^2$ (D) 0

答案

D

解析

以弹簧振子为例。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \left(\frac{1}{4}mA^2\omega^2\right)[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

而系统的弹性势能为

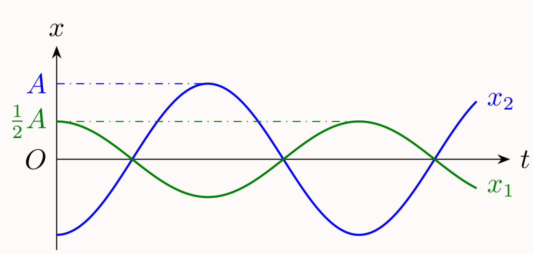
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \left(\frac{1}{4}kA^2\right)[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

即简谐振动中，动能和势能的变化频率都是振子振动频率的两倍，因此动能和势能变化的周期是振动变化周期的一半，即在振子振动的半个周期内，动能和势能都变化了一个周期，即恢复原来的值，因此弹性力在半个周期内所做的功为零。

13.4 简谐振动的合成

第 488 题 |【3562】

图中所画的是两个简谐振动的振动曲线。若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为



(A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) π (C) $\frac{1}{2}\pi$ (D) 0

答案

B

解析

由振动曲线可以看出两个振动的表达式分别为

$$x_1 = \frac{1}{2}A\cos(\omega t)$$
$$x_2 = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos(\omega t)$$

所以二者的合振动的表达式为

$$x = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}A\cos(\omega t) - A\cos(\omega t) = -\frac{1}{2}A\cos(\omega t) = \frac{1}{2}A\cos(\omega t + \pi)$$

第 489 题 |【3839】

两个同方向的简谐振动，周期相同，振幅分别为 $A_1 = 0.05$ m 和 $A_2 = 0.07$ m，它们合成为一个振幅为 $A = 0.09$ m 的简谐振动。则这两个分振动的相位差______rad。

答案

1.47

解析

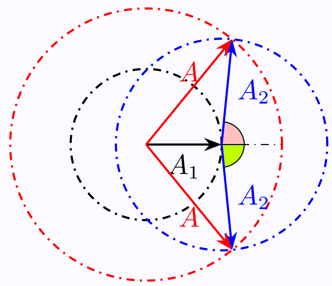
根据同方向同频率简谐振动合成的合振幅的公式

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}$$

可得

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi) \\ \cos(\Delta\varphi) &= \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} \\ \Delta\varphi &= \arccos\frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} \\ &= \arccos\frac{0.09^2 - 0.05^2 - 0.07^2}{2\times 0.05\times 0.07} \\ &= \arccos\frac{1}{10} \approx 1.47 \text{ rad} \end{aligned}$$

另外，根据旋转矢量图结合三角形余弦定理，也可以求得所求相位差。



第 490 题 |【3401】

两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：$x_1 = 6\times10^{-2}\cos\left(5t+\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 2\times10^{-2}\cos(\pi-5t)$(SI)，它们的合振动的振幅为______，初相为______。

答案

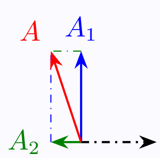
$2\sqrt{10}\times10^{-2}$ m，$\frac{1}{2}\pi+\arctan\frac{1}{3}$

解析

题中第二个简谐振动的表达式可以改写成

$$x_2 = 2\times10^{-2}\cos(\pi-5t) = 2\times10^{-2}\cos(5t-\pi) = 2\times10^{-2}\cos(5t+\pi)$$

所以，根据旋转矢量图



很容易知道合振动的振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2+A_2^2} = 2\sqrt{10}\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

初相为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi+\arctan\frac{1}{3}$$

注：本题原文件提供的答案有问题。

第 491 题 |【5314】

一质点同时参与了两个同方向的简谐振动，它们的振动方程分别为 $x_1 = 0.05\cos\left(\omega t+\frac{1}{4}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 0.05\cos\left(\omega t+\frac{9}{12}\pi\right)$(SI)，其合成运动的运动方程为 $x =$______。

答案

$0.0707\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$

解析

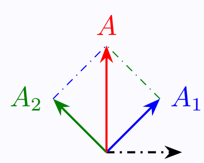
第二个简谐振动的表达式可以改写成

$$x_2=0.05\cos\left(\omega t+\frac{9}{12}\pi\right)=0.05\cos\left(\omega t+\frac{3}{4}\pi\right)$$

根据同方向同频率简谐振动合成的计算公式可得合振动为

$$\begin{aligned}x=x_1+x_2&=0.05\cos\left(\omega t+\frac{1}{4}\pi\right)+0.05\cos\left(\omega t+\frac{3}{4}\pi\right)\\&=2\times0.05\cos\left(\omega t+\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{2}\pi\right)\\&=0.1\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\\&=0.0707\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

另外，根据旋转矢量图也可以求得合振动的振幅和初相。



注：本题原文件所提供的答案有误。

第 492 题 |【5315】

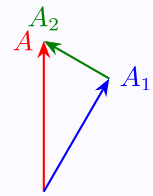
两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20 cm，与第一个简谐振动的相位差为 $\varphi-\varphi_1=\frac{1}{6}\pi$。若第一个简谐振动的振幅为 $10\sqrt{3}$ cm = 17.3 cm，则第二个简谐振动的振幅为_____cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2$ 为_____。

答案

10 cm，$-\frac{1}{2}\pi$

解析

根据旋转矢量图很容易求得第二个简谐振动的振幅为 $A_2=10$ cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2=-\frac{1}{2}\pi$。


A_2
A
A_1

第十四章 波动

14.1 波的基本概念

第 493 题 |【3841】

把一根十分长的绳子拉成水平，用手握其一端。维持拉力恒定，使绳端在垂直于绳子的方向上作简谐振动，则

(A) 振动频率越高，波长越长
(B) 振动频率越低，波长越长
(C) 振动频率越高，波速越大
(D) 振动频率越低，波速越大

答案

B

解析

在柔软细绳中传播的是横波，其波速为

$$u=\sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

式中，F 是绳中张力；ρ 为细绳的质量线密度。所以当拉力恒定时，波传播的速度保持不变。
又根据波速与频率和波长之间的关系

$$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu$$

波速恒定，所以频率越高，波长越短，频率越低，波长越长。

14.2 平面简谐波

14.2.1 平面简谐波的表达式

第 494 题 |【3413】

下列函数 $f(x,t)$ 可表示弹性介质中的一维波动，式中 A、a 和 b 是正的常量。其中哪个函数表示沿 x 轴负向传播的行波？

(A) $f(x,t)=A\cos(ax+bt)$ (B) $f(x,t)=A\cos(ax-bt)$

(C) $f(x,t)=A\cos(ax)\cdot\cos(bt)$ (D) $f(x,t)=A\sin(ax)\cdot\sin(bt)$

答案

A

解析

沿 x 正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

沿 x 负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\varphi_0)$$

第 495 题 |【3068】

已知一平面简谐波的表达式为 $y=A\cos(at-bx)$(a、b 为正值常量)，则

(A) 波的频率为 a (B) 波的传播速度为 $\frac{b}{a}$ (C) 波长为 $\frac{\pi}{b}$ (D) 波的周期为 $\frac{2\pi}{a}$

答案

D

解析

平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$
$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{2\pi}{k}$$
$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\frac{\omega}{k}$$

所以，依题意，有 $\omega=a$，$k=b$，所以 $f=\frac{a}{2\pi}$，$T=\frac{2\pi}{a}$，$\lambda=\frac{2\pi}{b}$，$v=\frac{a}{b}$。

第 496 题 |【3411】

若一平面简谐波的表达式为 $y=A\cos(Bt-Cx)$，式中 A、B、C 为正值常量，则

(A) 波速为 C　(B) 周期为 $\frac{1}{B}$　(C) 波长为 $\frac{2\pi}{C}$　(D) 角频率为 $\frac{2\pi}{B}$

答案

C

解析

平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$$
$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k}$$
$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\frac{\omega}{k}$$

所以，依题意，有 $\omega=B$，$k=C$，所以 $T=\frac{2\pi}{B}$，$\lambda=\frac{2\pi}{C}$，$v=\frac{B}{C}$。

第 497 题 |【3479】

在简谐波传播过程中，沿传播方向相距为 $\frac{1}{2}\lambda$(λ 为波长) 的两点的振动速度必定

(A) 大小相同，而方向相反　(B) 大小和方向均相同

(C) 大小不同，方向相同　(D) 大小不同，而方向相反

答案

A

解析

平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

所以任意 t 时刻 x 处质点的振动速度为

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-A\omega\sin(\omega t-kx+\varphi_0)$$

考虑到 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，所以有

$$\begin{aligned}v\left(x+\frac{1}{2}\lambda,t\right)&=-A\omega\sin\left[\omega t-k\left(x+\frac{1}{2}\lambda\right)+\varphi_0\right]\\&=-A\omega\sin\left[\omega t-kx-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{1}{2}\lambda+\varphi_0\right]\\&=-A\omega\sin\left[\omega t-kx-\pi+\varphi_0\right]\\&=A\omega\sin(\omega t-kx+\varphi_0)\\&=-v(x,t)\end{aligned}$$

第 498 题 |【3483】

一简谐横波沿 Ox 轴传播。若 Ox 轴上 P_1 和 P_2 两点相距 $\frac{1}{8}\lambda$(其中 λ 为该波的波长)，则在波的传播过程中，这两点振动速度的

(A) 方向总是相同 (B) 方向总是相反

(C) 方向有时相同，有时相反 (D) 大小总是不相等

答案

C

解析

平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

所以任意 t 时刻 x 处质点的振动速度为

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-A\omega\sin(\omega t-kx+\varphi_0)$$

考虑到 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，所以有

$$\begin{aligned}v\left(x+\frac{1}{8}\lambda,t\right)&=-A\omega\sin\left[\omega t-k\left(x+\frac{1}{8}\lambda\right)+\varphi_0\right]\\&=-A\omega\sin\left[\omega t-kx-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{1}{8}\lambda+\varphi_0\right]\\&=-A\omega\sin\left[\omega t-kx-\frac{1}{4}\pi+\varphi_0\right]\end{aligned}$$

所以这两点的速度有时方向相同，有时方向相反，偶而大小相等。

第 499 题 |【5513】

频率为 100 Hz，传播速度为 300 m/s 的平面简谐波，波线上距离小于波长的两点振动的相位差为 $\frac{1}{3}\pi$，则此两点相距

(A) 2.86 m (B) 2.19 m (C) 0.5 m (D) 0.25 m

答案

C

解析

简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

t 时刻 x 处质点的相位为 $\varphi=\omega t-kx+\varphi_0$，所以波线上相距 Δx 的两点的相位差为

$$\Delta\varphi=k\Delta x$$

而其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f,u=\frac{\lambda}{T}=\lambda f$$
$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi f}{\lambda f}=\frac{2\pi f}{u}$$

所以

$$\Delta x=\frac{\Delta\varphi}{k}=\frac{\Delta\varphi}{\frac{2\pi f}{u}}=\frac{u\Delta\varphi}{2\pi f}=\frac{300\times\frac{1}{3}\pi}{2\pi\times 100}=\frac{1}{2}\ \mathrm{m}$$

第 500 题 |【3065】

频率为 500 Hz 的波，其波速为 350 m/s，相位差为 $\frac{2}{3}\pi$ 的两点间距离为_____。

答案

$\frac{7}{30}$ m

解析

平面简谐波的一般表达式为

$$y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

其中 x 处质点 t 时刻简谐振动的相位为

$$\varphi=\omega t-kx+\varphi_0$$

式中

$$\omega=2\pi f,k=\frac{2\pi}{\lambda},u=\frac{\lambda}{T}=\lambda f$$
$$\lambda=\frac{u}{f},k=2\pi\frac{f}{u}$$

所以任意两点之间的相位差为

$$\Delta\varphi=-k\Delta x$$
$$\Delta x=-\frac{\Delta\varphi}{k}=-\frac{u\Delta\varphi}{2\pi f}=-\frac{350\times 2\pi/3}{2\pi\times 500}=-\frac{7}{30}\ \mathrm{m}$$

第 501 题 |【3853】

一平面简谐波。波速为 6.0 m/s，振动周期为 0.1 s，则波长为______。在波的传播方向上，有两质点 (其间距离小于波长) 的振动相位差为 $\frac{5}{6}\pi$，则此两质点相距______。

答案

0.6 m，0.25 m

解析

依题意，波速为 $u=6.0$ m/s，振动周期为 $T=0.1$ s，所以波长为

$$\lambda=uT=0.6\ \mathrm{m}$$

而任意一点 x 处在 t 时刻的相位为

$$\varphi=\omega t-kx+\varphi_0$$

所以任意两点 x_1、x_2 的相位差为

$$\Delta\varphi=-k\Delta x$$
$$\Delta x=-\frac{\Delta\varphi}{k}=-\frac{\Delta\varphi}{2\pi/\lambda}=-\frac{5\pi/6}{2\pi/0.6}=-0.25\ \mathrm{m}$$

第 502 题 |【5515】

A、B 是简谐波波线上的两点。已知，B 点振动的相位比 A 点落后 $\frac{1}{3}\pi$，A、B 两点相距 0.5 m，波的频率为 100 Hz，则该波的波长 $\lambda=$______ m，波速 $u=$______ m/s。

答案

3，300

解析

平面简谐波中任意一点 x 处在 t 时刻的相位为

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$$

所以任意两点 x_1、x_2 的相位差为

$$\Delta\varphi = -k\Delta x$$

$$k = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{-\pi/3}{0.5} = \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad/m}$$

所以波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 3\ \mathrm{m}$$

而波的频率为 $f = 100\ \mathrm{Hz}$，所以波传播的速度为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 300\ \mathrm{m/s}$$

第 503 题 |【3062】

已知波源的振动周期为 4.00×10^{-2} s，波的传播速度为 300 m/s，波沿 x 轴正方向传播，则位于 $x_1 = 10.0$ m 和 $x_2 = 16.0$ m 的两质点振动相位差为______。

答案

π

解析

已知周期 $T = 4.00\times10^{-2}$ s，传播速度 $u = 300$ m/s，所以波长为

$$\lambda = uT = 12\ \mathrm{m}$$

所以波数为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{6}\pi\ \mathrm{rad/m}$$

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波中任意一点 x 处在 t 时刻的相位为

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$$

所以任意两点 x_1、x_2 的相位差为

$$\Delta\varphi = -k\Delta x = -\frac{1}{6}\pi\times(16-10) = -\pi$$

第 504 题 |【3576】

已知一平面简谐波的表达式为 $A\cos(at-bx)$，(a、b 均为正值常量)，则波沿 x 轴传播的速度为______。

答案

$\frac{a}{b}$

解析

依题意，圆频率 $\omega=a$，波数 $k=b$，所以波传播的速度为

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda}=\frac{\omega}{k}=\frac{a}{b}$$

第 505 题 |【3075】

一平面简谐波的表达式为 $y=0.025\cos(125t-0.37x)(\mathrm{SI})$，其角频率 $\omega=$______，波速 $u=$______，波长 $\lambda=$______。

答案

125 rad/s，338 m/s，16.98 m

解析

平面简谐波的一般表达式为

$$y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

其中圆频率为 ω，物理量之间存在以下关系

$$\begin{aligned}
k=\frac{2\pi}{\lambda}&\Rightarrow\lambda=\frac{2\pi}{k}\\
\omega=\frac{2\pi}{T}&\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}\\
u=\frac{\lambda}{T}&=\frac{2\pi/k}{2\pi/\omega}=\frac{\omega}{k}
\end{aligned}$$

依题意，$\omega=125\ \mathrm{rad/s}$，$k=0.37\ \mathrm{rad/m}$，$u=\frac{\omega}{k}=\frac{125}{0.37}\approx338\ \mathrm{m/s}$，$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{0.37}\approx16.98\ \mathrm{m}$。

第 506 题 |【3426】

一声纳装置向海水中发出超声波，其波的表达式为：$y=1.2\times10^{-3}\cos(3.14\times10^5t-220x)(\mathrm{SI})$，则此波的频率 $f=$______，波长 $\lambda=$______，海水中声速 $u=$______。

答案

5×10^4 Hz，$\frac{\pi}{110}$ m，1.43×10^3 m/s

解析

沿 x 轴正向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$A=1.2\times10^{-3}$ m，$\omega=3.14\times10^5$ rad/s，$k=220$ rad/m，所以有

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{3.14\times10^5}{2\pi}=5\times10^4\ \text{Hz}$$
$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{220}=\frac{\pi}{110}\ \text{m}$$
$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}=\frac{3.14\times10^5}{220}\approx1.43\times10^3\ \text{m/s}$$

第 507 题 |【3852】

一横波的表达式是 $y=0.02\sin[2\pi(100t-40x)-0.4\pi]$(SI)，则振幅是______，波长是______，频率是______，波的传播速度是______。

答案

0.02 m，0.025 m，100 Hz，2.5 m/s

解析

依题意，振幅 $A=0.02$ m，圆频率 $\omega=200\pi$ rad/s，波数 $k=80\pi$ rad/m，所以波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=0.025\ \text{m}$$

频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=100\ \text{Hz}$$

波的传播速度是

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda}=\frac{\omega}{k}=2.5\ \text{m/s}$$

注：本题网络上原文件的横波表达式有问题，这里的表达式是根据答案凑出来的。另简谐波既可以用余弦函数表示，也可以用正弦函数表示，只是习惯上用余弦函数表示而已，两种表示的差别仅在相位有个常数差。

第 508 题 |【3410】

一横波沿绳子传播，其波的表达式为 $y = 0.05\cos(100\pi t - 2\pi x)$(SI)。(1) 求此波的振幅、波速、频率和波长；(2) 求绳子上各质点的最大振动速度和最大振动加速度；(3) 求 $x_1 = 0.2$ m 处和 $x_2 = 0.7$ m 处二质点振动的相位差。

解答

(1) 由简谐波的表达式为

$$y = 0.05\cos(100\pi t - 2\pi x)$$

可得，此波的振幅为 $A = 0.05$ m，圆频率为 $\omega = 100\pi$ rad/s，波数为 $k = 2\pi$ rad/m，所以频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ m}$$

波速为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{k} = 50 \text{ m/s} = \lambda f$$

(2) 由简谐波的表达式为

$$y = 0.05\cos(100\pi t - 2\pi x)$$

可得绳子上各质点的振动速度和振动加速度的表达式分别为

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -5\pi\sin(100\pi t - 2\pi x)$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -500\pi^2\cos(100\pi t - 2\pi x)$$

所以最大的振动速度为

$$v_{\max} = 5\pi \text{ m/s}$$

最大的振动加速度为

$$a_{\max} = 500\pi^2 \text{ m/s}^2$$

(3) 由简谐波的表达式为

$$y = 0.05\cos(100\pi t - 2\pi x)$$

可得，$x_1 = 0.2$ m 处质点振动的相位为

$$\varphi_1 = 100\pi t - 2\pi x_1 = 100\pi t - 0.4\pi$$

$x_2 = 0.7$ m 处质点振动的相位为

$$\varphi_2 = 100\pi t - 2\pi x_2 = 100\pi t - 1.4\pi$$

所以两处质点的振动的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi$$

第 509 题 |【5319】

已知一平面简谐波的表达式为 $y = A\cos[\pi(4t + 2x)]$(SI)。(1) 求该波的波长 λ，频率 f 和波速 u 的值；(2) 写出 $t = 4.2$ s 时刻各波峰位置的坐标表达式，并求出此时离坐标原点最近的那个波峰的位置；(3) 求 $t = 4.2$ s 时离坐标原点最近的那个波峰通过坐标原点的时刻 t。

解答

(1) 由简谐波的表达式为

$$y = A\cos[\pi(4t + 2x)]$$

可得，此波的振幅为 A，圆频率为 $\omega = 4\pi$ rad/s，波数为 $k = 2\pi$ rad/m，所以波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ m}$$

频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2 \text{ Hz}$$

波速为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{k} = 2 \text{ m/s} = \lambda f$$

(2) 由简谐波的表达式为

$$y = A\cos[\pi(4t + 2x)]$$

可得 $t = 4.2$ s 时刻的波形表达式为

$$y = A\cos[\pi(4 \times 4.2 + 2x)] = A\cos[\pi(16.8 + 2x)]$$

波峰处，$y = A$，即

$$y = A\cos[\pi(16.8 + 2x)] = A$$

$$\cos[\pi(16.8 + 2x)] = 1$$

$$\pi(16.8 + 2x) = 2n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

$$x_n = n - 8.4 \text{ m}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

此时离坐标原点最近的那个波峰的位置为

$$x_8 = -0.4 \text{ m}$$

(3) 由简谐波的表达式为

$$y = A\cos[\pi(4t + 2x)]$$

可得波沿 x 轴负方向传播，传播速度为 $u = 2$ m/s，在 $t = 4.2$ s 时刻该波峰位于 $x = -0.4$ m 处，所以它从原点到该位置所花的时间为 $\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{-0.4-0}{2} = -0.2$ s，因此，它通过坐标原点的时刻为 $t = 4$ s 时刻。

第 510 题 |【3342】

一平面简谐波 (机械波) 沿 x 轴正方向传播，波动表达式为 $y=0.2\cos\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi x\right)$(SI)，则 $x=-3$ m 处媒质质点的振动加速度 a 的表达式为_____。

答案

$-0.2\pi^2\cos\left(\pi t+\frac{3}{2}\pi\right)$(SI)

解析

根据平面简谐波的表达式

$$y(x,t)=0.2\cos\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

可得，质点的速度表达式为

$$v(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}=-0.2\pi\sin\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

质点的加速度表达式为

$$a(x,t)=\frac{\partial v}{\partial t}=-0.2\pi^2\cos\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

所以 $x=-3$ m 处媒质质点的振动加速度 a 的表达式为

$$a(-3,t)=-0.2\pi^2\cos\left[\pi t-\frac{1}{2}\pi\times(-3)\right]=-0.2\pi^2\cos\left(\pi t+\frac{3}{2}\pi\right)$$

第 511 题 |【3136】

一平面余弦波沿 Ox 轴正方向传播，波动表达式为 $y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi\right]$，则 $x=-\lambda$ 处质点的振动方程是_____；若以 $x=\lambda$ 处为新的坐标轴原点，且此坐标轴指向与波的传播方向相反，则对此新的坐标轴，该波的波动表达式是_____。

答案

$y=A\cos\left[2\pi\frac{t}{T}+\phi\right]$，$y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x'}{\lambda}\right)+\phi\right]$

解析

已知沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi\right]$$

则 $x=-\lambda$ 处质点的振动方程为

$$y(-\lambda,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{-\lambda}{\lambda}\right)+\phi\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+1\right)+\phi\right]=A\cos\left[2\pi\frac{t}{T}+\phi\right]$$

若以 $x=\lambda$ 处为新的坐标轴 x' 原点，且此坐标轴指向与波的传播方向相反，则新旧坐标之间的关系为 $x'=\lambda-x$，或 $x=\lambda-x'$，所以在新坐标轴下波的表达式为

$$y(x',t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\lambda-x'}{\lambda}\right)+\phi\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-1+\frac{x'}{\lambda}\right)+\phi\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x'}{\lambda}\right)+\phi\right]$$

第 512 题 |【3412】

一平面简谐波沿 x 轴负方向传播。已知 $x=x_0$ 处质点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，若波速为 u，则此波的表达式为

(A) $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_0-x}{u}\right)+\varphi_0\right]$

(B) $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_0-x}{u}\right)+\varphi_0\right]$

(C) $y=A\cos\left(\omega t-\frac{x_0-x}{u}+\varphi_0\right)$

(D) $y=A\cos\left(\omega t+\frac{x_0-x}{u}+\varphi_0\right)$

答案

A

解析

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\phi_0)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

依题意，$x=x_0$ 处质点的振动方程为

$$y(x_0,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x_0}{u}\right)+\phi_0\right]=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以

$$\omega\left(t+\frac{x_0}{u}\right)+\phi_0=\omega t+\varphi_0$$
$$\phi_0=\varphi_0-\omega\frac{x_0}{u}$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi_0-\omega\frac{x_0}{u}\right]=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x-x_0}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

第 513 题 |【3573】

一平面简谐波沿 x 轴负方向传播。已知 $x=b$ 处质点的振动方程为：$y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，波速为 u，则波的表达式为

(A) $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{b+x}{u}\right)+\varphi_0\right]$ (B) $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{b+x}{u}\right)+\varphi_0\right]$

(C) $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x-b}{u}\right)+\varphi_0\right]$ (D) $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{b-x}{u}\right)+\varphi_0\right]$

答案

C

解析

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\phi_0)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

依题意，$x=b$ 处质点的振动方程为

$$y(b,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{b}{u}\right)+\phi_0\right]=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\omega\left(t+\frac{b}{u}\right)+\phi_0=\omega t+\varphi_0$$

$$\phi_0=\varphi_0-\omega\frac{b}{u}$$

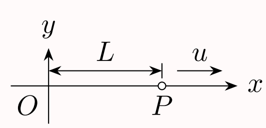
所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi_0-\omega\frac{b}{u}\right]=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x-b}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

另外，本题中，由于波沿 x 轴负方向传播，所以相位中的 x 前一定为加号，(B)、(D) 可排除，再将 $x=b$ 代入 (A)、(C)，只有 (C) 能回到题目中的 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$。

第 514 题 |【3072】

如图所示，一平面简谐波沿 x 轴正向传播，已知 P 点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\phi_0)$，则波的表达式为



(A) $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x-L}{u}\right)+\phi_0\right]$ (B) $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$

(C) $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$ (D) $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x-L}{u}\right)+\phi_0\right]$

答案

A

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

所以 P 点的振动方程为

$$y(L,t)=A\cos(\omega t-kL+\varphi_0)$$

依题意，

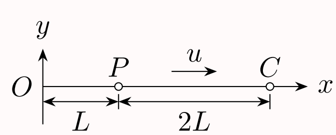
$$-kL+\varphi_0=\phi_0$$
$$\varphi_0=\phi_0+kL$$
$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\frac{\omega}{k}$$
$$k=\frac{\omega}{u}$$
$$\varphi_0=\phi_0+\frac{\omega}{u}L$$

所以波的表达式为

$$\begin{aligned}y(x,t)&=A\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{u}x+\phi_0+\frac{\omega}{u}L\right)\\&=A\cos\left[\omega t-\frac{\omega}{u}(x-L)+\phi_0\right]\\&=A\cos\left\{\omega\left[t-\frac{(x-L)}{u}\right]+\phi_0\right\}\end{aligned}$$

第 515 题 |【3073】

如图，一平面简谐波以波速 u 沿 x 轴正方向传播，O 为坐标原点。已知 P 点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t)$，则



(A) O 点的振动方程为 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{L}{u}\right)\right]$
(B) 波的表达式为 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{L}{u}-\frac{x}{u}\right)\right]$
(C) 波的表达式为 $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{L}{u}-\frac{x}{u}\right)\right]$
(D) C 点的振动方程为 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{3L}{u}\right)\right]$

答案

C

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

所以 P 点的振动方程为

$$y(L,t)=A\cos(\omega t-kL+\varphi_0)$$

依题意，

$$-kL+\varphi_0=0$$
$$\varphi_0=kL$$
$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\frac{\omega}{k}$$
$$k=\frac{\omega}{u}$$
$$\varphi_0=\frac{\omega}{u}L$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{u}x+\frac{\omega}{u}L\right)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}+\frac{L}{u}\right)\right]$$

所以 O 点的振动方程为

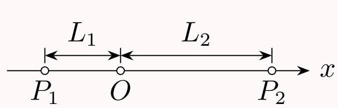
$$y(0,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{0}{u}+\frac{L}{u}\right)\right]=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{L}{u}\right)\right]$$

C 点的振动方程为

$$y(3L,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{3L}{u}+\frac{L}{u}\right)\right]=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{2L}{u}\right)\right]$$

第 516 题 |【3133】

一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，波长为 λ。若如图 P_1 点处质点的振动方程为 $y_1=A\cos(2\pi ft+\phi)$，则 P_2 点处质点的振动方程为_____；与 P_1 点处质点振动状态相同的那些点的位置是_____。



答案

$y_2=A\cos\left(2\pi ft-2\pi\frac{L_2+L_1}{\lambda}+\phi\right)$，$x=-L_1-n\lambda,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)=A\cos\left(2\pi ft-2\pi\frac{x}{\lambda}+\varphi_0\right)$$

依题意，P_1 点处质点的振动方程为

$$y(-L_1,t)=A\cos\left(2\pi ft-2\pi\frac{-L_1}{\lambda}+\varphi_0\right)=A\cos(2\pi ft+\phi)$$

$$-2\pi\frac{-L_1}{\lambda}+\varphi_0=\phi$$

$$\varphi_0=\phi+2\pi\frac{-L_1}{\lambda}=\phi-2\pi\frac{L_1}{\lambda}$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(2\pi ft-2\pi\frac{x}{\lambda}+\phi-2\pi\frac{L_1}{\lambda}\right)$$

所以 P_2 点处质点的振动方程为

$$y(L_2,t)=A\cos\left(2\pi ft-2\pi\frac{L_2}{\lambda}+\phi-2\pi\frac{L_1}{\lambda}\right)=A\cos\left(2\pi ft-2\pi\frac{L_2+L_1}{\lambda}+\phi\right)$$

而与 P_1 点处质点振动状态相同的那些点就是振动相位相差 2π 整数倍的点，即

$$2\pi ft-2\pi\frac{x}{\lambda}+\phi-2\pi\frac{L_1}{\lambda}=2\pi ft+\phi+2n\pi$$

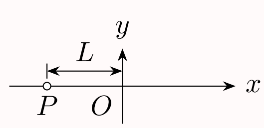
$$-\frac{x}{\lambda}-\frac{L_1}{\lambda}=n$$

$$-x-L_1=n\lambda$$

$$x=-L_1-n\lambda,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

第 517 题 |【3134】

如图所示，一平面简谐波沿 Ox 轴负方向传播，波长为 λ，若 P 处质点的振动方程是 $y_P=A\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right)$，则该波的表达式是_____；$P$ 处质点_____ 时刻的振动状态与 O 处质点 t_1 时刻的振动状态相同。



答案

$y=A\cos\left(2\pi ft+2\pi\frac{x+L}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi\right)$，$t=t_1+\frac{L}{\lambda f}+\frac{n}{f}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

解析

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\varphi_0)=A\cos\left(2\pi ft+2\pi\frac{x}{\lambda}+\varphi_0\right)$$

依题意，P 点处质点的振动方程为

$$y(-L,t)=A\cos\left(2\pi ft+2\pi\frac{-L}{\lambda}+\varphi_0\right)=A\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right)$$
$$2\pi ft+2\pi\frac{-L}{\lambda}+\varphi_0=2\pi ft+\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_0=\frac{1}{2}\pi+2\pi\frac{L}{\lambda}$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(2\pi ft+2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi+2\pi\frac{L}{\lambda}\right)=A\cos\left(2\pi ft+2\pi\frac{x+L}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi\right)$$

所以 O 处质点 t_1 时刻的振动状态

$$y(0,t_1)=A\cos\left(2\pi ft_1+2\pi\frac{L}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi\right)$$

所以设 P 处质点 t 时刻的振动状态与 O 处质点 t_1 时刻的振动状态相同，即

$$2\pi ft+\frac{1}{2}\pi=2\pi ft_1+2\pi\frac{L}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi+2n\pi$$
$$ft=ft_1+\frac{L}{\lambda}+n$$
$$t=t_1+\frac{L}{\lambda f}+\frac{n}{f}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

第 518 题 |【3077】

一平面简谐波沿 x 轴负方向传播。已知 $x=-1$ m 处质点的振动方程为：$y=A\cos(\omega t+\phi)$，若波速为 u，则此波的表达式为______。

答案

$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x+1}{u}\right)+\phi\right]$

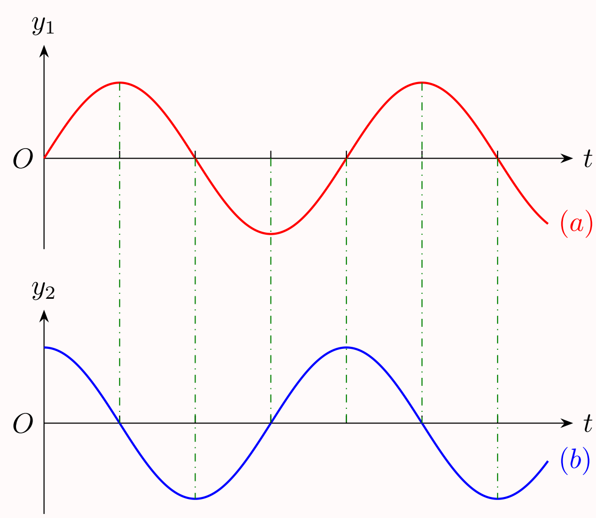
解析

沿波传播方向，相位依次滞后，换言之，在 x_1 处质点 t_1 时刻的振动状态，传到 x_2 时需要使用的时间为 $\Delta t=\frac{\Delta x}{u}$，所以，在 x_2 处质点 $t_1+\Delta t$ 时刻的振动状态就是在 x_1 处质点 t_1 时刻的振动状态，换言之，在 x_2 处质点 t 时刻的振动状态就是在 x_1 处质点 $t-\Delta t$ 时刻的振动状态，即

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\phi]=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{-1-x}{u}\right)+\phi\right]=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x+1}{u}\right)+\phi\right]$$

第 519 题 |【3608】

一简谐波沿 x 轴正方向传播。x_1 和 x_2 两点处的振动曲线分别如图 (a) 和 (b) 所示。已知 $x_2>x_1$ 且 $x_2-x_1<\lambda$(λ 为波长)，则 x_2 点的相位比 x_1 点的相位滞后______。



答案

$\frac{3}{2}\pi$

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

$x=x_1$ 点的振动表达式为

$$y(x_1,t)=A\cos(\omega t-kx_1+\varphi_0)$$

$x=x_2$ 点的振动表达式为

$$y(x_2,t)=A\cos(\omega t-kx_2+\varphi_0)$$

从图中可以看出，$t=0$ 时，$y(x_1,0)=0$，$v(x_1,0)>0$，$y(x_2,0)=A$，所以

$$y(x_1,0)=A\cos(-kx_1+\varphi_0)=0\Rightarrow\cos(-kx_1+\varphi_0)=0$$

$$v(x_1,0)=-A\omega\sin(-kx_1+\varphi_0)>0\Rightarrow\sin(-kx_1+\varphi_0)<0$$
$$-kx_1+\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi+kx_1$$
$$y(x_2,0)=A\cos(-kx_2+\varphi_0)=A\Rightarrow\cos(-kx_2+\varphi_0)=1\Rightarrow -kx_2+\varphi_0=0$$
$$-\frac{1}{2}\pi+kx_1-kx_2=0\Rightarrow k(x_1-x_2)=\frac{1}{2}\pi$$

所以 x_1 点的相位为

$$\varphi_1=\omega t-kx_1-\frac{1}{2}\pi+kx_1=\omega t-\frac{1}{2}\pi$$

x_2 点的相位为

$$\varphi_2=\omega t-kx_2-\frac{1}{2}\pi+kx_1=\omega t-k(x_2-x_1)-\frac{1}{2}\pi$$

所以二者的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-k(x_2-x_1)=\frac{1}{2}\pi$$

即 2 比 1 超前 $\frac{1}{2}\pi$，或称滞后 $\frac{3}{2}\pi$。

第 520 题 |【3423】

一列平面简谐波沿 x 轴正向无衰减地传播，波的振幅为 2×10^{-3} m，周期为 0.01 s，波速为 400 m/s。当 $t=0$ 时 x 轴原点处的质元正通过平衡位置向 y 轴正方向运动，则该简谐波的表达式为______。

答案

$2\times10^{-3}\cos\left(200\pi t-\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)

解析

沿 x 轴正向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

所以媒质中质点的速度表达式为

$$v(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$A=2\times10^{-3}$ m，$T=0.01$ s，$u=400$ m/s，$t=0$ 时，$y(0,0)=0$，$v(0,0)>0$，所以有

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=200\pi\ \mathrm{rad/s}$$
$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{200\pi}{400} = \frac{\pi}{2}$$

$$y(0,0) = A\cos\varphi_0 = 0$$

$$v(0,0) = -A\omega\sin\varphi_0 > 0$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$$

所以简谐波的一般表达式为

$$y(x,t) = 2\times10^{-3}\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 521 题 |【3572】

已知一平面简谐波的波长 $\lambda = 1$ m，振幅 $A = 0.1$ m，周期 $T = 0.5$ s。选波的传播方向为 x 轴正方向，并以振动初相为零的点为 x 轴原点，则波动表达式为 $y =$______(SI)。

答案

$0.1\cos(4\pi t - 2\pi x)$

解析

依题意，周期 $T = 0.5$ s，所以圆频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \text{ rad/s}$$

波长 $\lambda = 1$ m，所以波数为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \text{ rad/m}$$

初相为零，因此，平面简谐波的表达式为

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) = 0.1\cos(4\pi t - 2\pi x)$$

第 522 题 |【3086】

一平面简谐波沿 x 轴正向传播，波的振幅 $A = 10$ cm，波的角频率 $\omega = 7\pi$ rad/s。当 $t = 1.0$ s 时，$x = 10$ cm 处的 a 质点正通过其平衡位置向 y 轴负方向运动，而 $x = 20$ cm 处的 b 质点正通过 $y = 5.0$ cm 点向 y 轴正方向运动。设该波波长 $\lambda > 10$ cm，求该平面波的表达式。

解答

设该平面简谐波的表达式为

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

依题意，有振幅 $A = 10\ \text{cm} = 0.1\ \text{m}$，波的角频率 $\omega = 7\pi\ \text{rad/s}$，$t = 1.0\ \text{s}$ 时，$x = 10\ \text{cm} = 0.1\ \text{m}$ 处的 a 质点正通过其平衡位置向 y 轴负方向运动，所以有

$$y_a = 0.1\cos(7\pi \times 1.0 - k \times 0.1 + \varphi_0) = 0$$
$$v_a = -0.7\pi\sin(7\pi \times 1.0 - k \times 0.1 + \varphi_0) < 0$$
$$7\pi \times 1.0 - k \times 0.1 + \varphi_0 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

而 $t = 1.0\ \text{s}$ 时，$x = 20\ \text{cm} = 0.2\ \text{m}$ 处的 b 质点正通过 $y = 5.0\ \text{cm} = 0.05\ \text{m}$ 点向 y 轴正方向运动，所以有

$$y_b = 0.1\cos(7\pi \times 1.0 - k \times 0.2 + \varphi_0) = 0.05$$
$$v_b = -0.7\pi\sin(7\pi \times 1.0 - k \times 0.2 + \varphi_0) > 0$$
$$7\pi \times 1.0 - k \times 0.2 + \varphi_0 = \left(2m - \frac{1}{3}\right)\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

所以由上两式可得

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= (7\pi \times 1.0 - k \times 0.1 + \varphi_0) - (7\pi \times 1.0 - k \times 0.2 + \varphi_0) = 0.1k \\ &= \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - \left(2m - \frac{1}{3}\right)\pi = \left[2(n-m) + \frac{5}{6}\right]\pi \\ k &= \left[20(n-m) + \frac{25}{3}\right]\pi = \left[20l + \frac{25}{3}\right]\pi, l = 0, 1, 2, 3, \cdots\end{aligned}$$

而波长 $\lambda > 10\ \text{cm} = 0.1\ \text{m}$，所以波数

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} < 20\pi\ \text{rad/m}$$

所以只能取 $l = 0$，因此波数为

$$k = \frac{25}{3}\pi$$

因此初相为

$$\varphi_0 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - 7\pi + \frac{5}{6}\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

一般可以在 0 到 2π 之间取值，所以令 $n = 3$，所以

$$\varphi_0 = \frac{1}{3}\pi$$

所以该平面波的表达式为

$$y = 0.1\cos\left(7\pi t - \frac{25}{3}\pi x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

第 523 题 |【3344】

一简谐波沿 Ox 轴负方向传播，x 轴上 P_1 点处的振动方程为 $y_{P_1}=0.04\cos\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)。$x$ 轴上 P_2 点的坐标减去 P_1 点的坐标等于 $\frac{3}{4}\lambda$(λ 为波长)，则 P_2 点的振动方程为______。

答案

$y=0.04\cos(\pi t+\pi)$(SI)

解析

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\varphi_0)$$

假定 P_1 点处的坐标为 x_1，P_2 点处的坐标为 x_2，则依题意，P_1 点处的振动方程为

$$y(x_1,t)=A\cos(\omega t+kx_1+\varphi_0)=0.04\cos\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$$
$$A=0.04,\omega=\pi,kx_1+\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi,\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi-kx_1$$

而

$$x_2-x_1=\frac{3}{4}\lambda\Rightarrow x_2=x_1+\frac{3}{4}\lambda$$
$$y(x_2,t)=A\cos(\omega t+kx_2+\varphi_0)=0.04\cos\left[\pi t+k\left(x_1+\frac{3}{4}\lambda\right)-\frac{1}{2}\pi-kx_1\right]$$
$$=0.04\cos\left[\pi t+\frac{3}{4}k\lambda-\frac{1}{2}\pi\right]=0.04\cos\left[\pi t+\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\right]=0.04\cos(\pi t+\pi)$$

第 524 题 |【5516】

平面简谐波沿 x 轴正方向传播，振幅为 2 cm，频率为 50 Hz，波速为 200 m/s。在 $t=0$ 时，$x=0$ 处的质点正在平衡位置向 y 轴正方向运动，求 $x=4$ m 处媒质质点振动的表达式及该点在 $t=2$ s 时的振动速度。

解答

设该平面简谐波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，振幅 $A=0.02$ m，频率 $f=50$ Hz，波速 $u=200$ m/s，所以圆频率

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f=100\pi\ \text{rad/s}$$

波数为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad/m}$$

又 $t=0$ 时，原点处质点的位置为 $y(0,0)=0$，速度 $v(0,2)>0$，所以有

$$y(0,0) = 0.02\cos\varphi_0 = 0$$
$$v(0,0) = -2\pi\sin\varphi_0 > 0$$
$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$$

所以波的表达式为

$$y(x,t) = 0.02\cos\left(100\pi t - \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ (SI)}$$

所以 $x=4$ m 处媒质质点振动的表达式为

$$y(4,t) = 0.02\cos\left(100\pi t - \frac{1}{2}\pi\times 4 - \frac{1}{2}\pi\right)$$
$$= 0.02\cos\left(100\pi t - 2\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = 0.02\cos\left(100\pi t - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ (SI)}$$

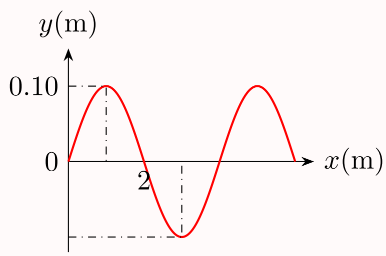
该点在 $t=2$ s 时的振动速度为

$$v(4,2) = -2\pi\sin\left(100\pi\times 2 - \frac{1}{2}\pi\right) = 2\pi \text{ m/s}$$

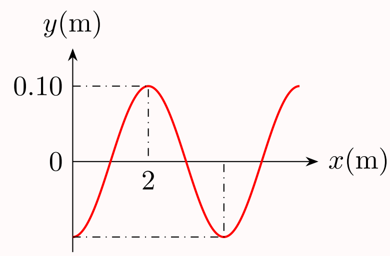
14.2.2 波形曲线

第 525 题 |【3147】

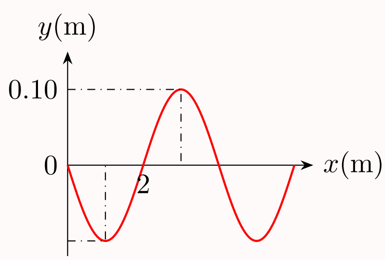
一平面简谐波沿 Ox 正方向传播，波动表达式为 $y=0.1\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$(SI)，该波在 $t=0.5$ s 时刻的波形图是



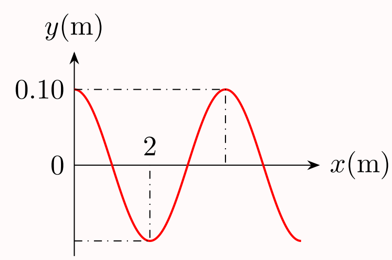
(A)



(B)



(C)



(D)

答案

B

解析

依题意，该波在 $t=0.5$ s 时刻的波形图表达式为

$$y(x,0.5)=0.1\cos\left[2\pi\left(\frac{0.5}{2}-\frac{x}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=0.1\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}x\right)$$

所以 $x=0$ 处

$$y(0,0.5)=0.1\cos\pi=-0.1$$

第 526 题 |【5200】

已知波长为 λ 的平面简谐波沿 x 轴负方向传播。$x=\frac{1}{4}\lambda$ 处质点的振动方程为 $y=A\cos\frac{2\pi}{\lambda}ut$(SI)。(1) 写出该平面简谐波的表达式；(2) 画出 $t=T$ 时刻的波形图。

解答

(1) 设该平面简谐波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\varphi_0)$$

则 $x=\frac{1}{4}\lambda$ 处质点的振动方程为

$$y\left(\frac{1}{4}\lambda,t\right)=A\cos\left(\omega t+k\times\frac{1}{4}\lambda+\varphi_0\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi+\varphi_0\right)$$

与题目中所给的表达式 $y=A\cos\frac{2\pi}{\lambda}ut$ 相比较可得

$$\omega=\frac{2\pi}{\lambda}u$$

$$\frac{1}{2}\pi+\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$

而依题意，波长为 λ，所以波数为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

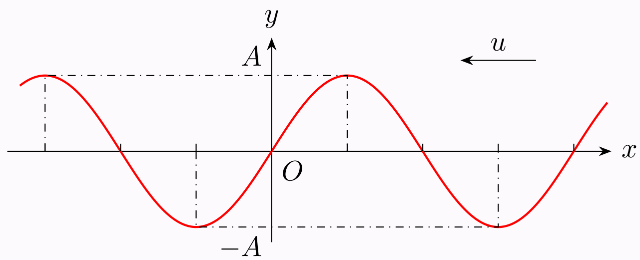
所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}ut+\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

(2)$t=T$ 时刻的波形表达式为

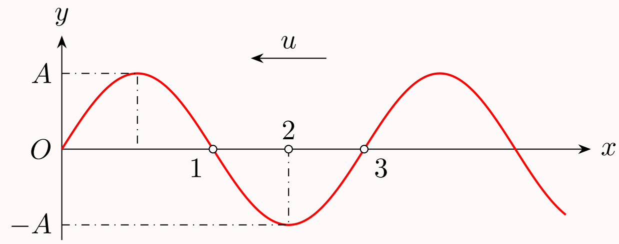
$$y(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}uT+\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{1}{2}\pi\right)=A\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{1}{2}\pi\right)=A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

波形图如下所示：



第 527 题 |【5193】

一横波沿 x 轴负方向传播，若 t 时刻波形曲线如图所示，则在 $t+\frac{1}{4}T$ 时刻 x 轴上的 1、2、3 三点的振动位移分别是



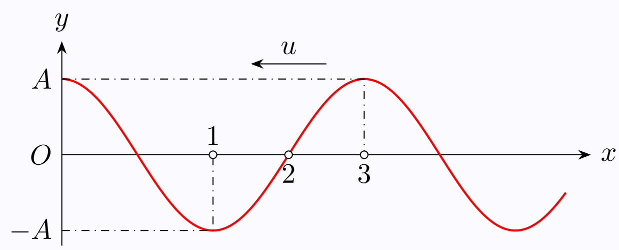
(A) A，0，$-A$ (B) $-A$，0，A (C) 0，A，0 (D) 0，$-A$，0

答案

B

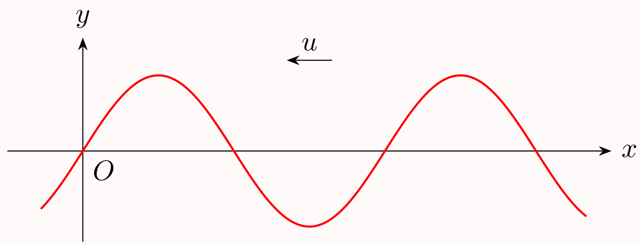
解析

$t+\frac{1}{4}T$ 时刻的波形图如图所示



第 528 题 |【3847】

图为沿 x 轴负方向传播的平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形。若波的表达式以余弦函数表示，则 O 点处质点振动的初相为



(A) 0
(B) $\frac{1}{2}\pi$
(C) π
(D) $\frac{3}{2}\pi$

答案

D

解析

图示简谐波的表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

所以 O 点处质点的振动表达式为

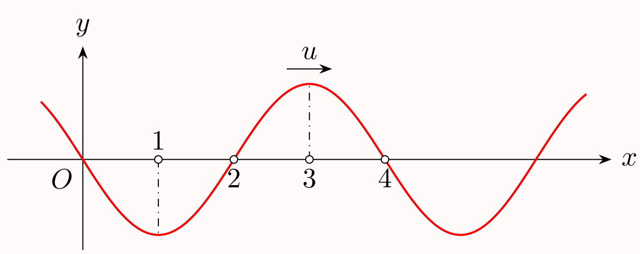
$$y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以 φ_0 就是它的初相。由波形图可以看出，O 点处质点在 $t=0$ 时刻的位置为 $y_0=0$，速度的方向向 y 轴正方向 (因为图中波沿 x 轴负方向传播，下一时刻，O 点处质点的位置 $y>0$)，所以有

$$y(0,0) = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v(0,0) = -A\omega\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$$

第 529 题 |【3409】

一简谐波沿 x 轴正方向传播，$t=\frac{1}{4}T$ 时的波形曲线如图所示。若振动以余弦函数表示，且此题各点振动的初相取 $-\pi$ 到 π 之间的值，则



(A) O 点的初相为 $\varphi_0 = 0$
(B) 1 点的初相为 $\varphi_1 = -\frac{1}{2}\pi$
(C) 2 点的初相为 $\varphi_2 = \pi$
(D) 3 点的初相为 $\varphi_3 = -\frac{1}{2}\pi$

答案

D

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$t=\frac{1}{4}T$ 时刻的波形图表达式为

$$y\left(x,\frac{1}{4}T\right)=A\cos\left(\frac{1}{2}\pi-kx+\varphi_0\right)$$

由图中可以看出，$t=\frac{1}{4}T$ 时刻 O 点的离开平衡位置的距离为 $y\left(0,\frac{1}{4}T\right)=0$，且 O 点的速度大于零，所以有

$$y\left(0,\frac{1}{4}T\right)=A\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\varphi_0\right)=0\Rightarrow\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\varphi_0\right)=0$$
$$v\left(0,\frac{1}{4}T\right)=-A\omega\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\varphi_0\right)>0\Rightarrow\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\varphi_0\right)<0$$
$$\frac{1}{2}\pi+\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_0=-\pi$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx-\pi)$$

所以 x 处质点的初相为

$$\varphi_{x0}=-kx-\pi$$

所以 O 处质点的初相为

$$\varphi_{00}=-\pi$$

1 处质点的初相为

$$\varphi_{\lambda/4,0}=-\frac{1}{2}\pi-\pi=-\frac{3}{2}\pi$$

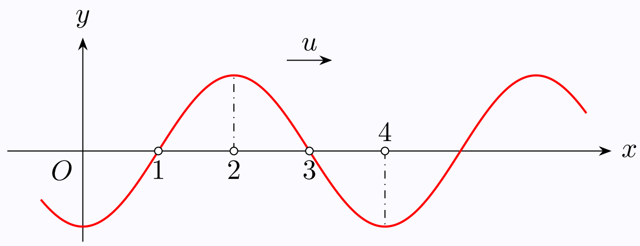
2 处质点的初相为

$$\varphi_{\lambda/2,0}=-\pi-\pi=-2\pi$$

3 处质点的初相为

$$\varphi_{3\lambda/4,0}=-\frac{3}{2}\pi-\pi=-\frac{5}{2}\pi$$

当然，依题意，还可以画出 $t=0$ 时刻的波形图如下

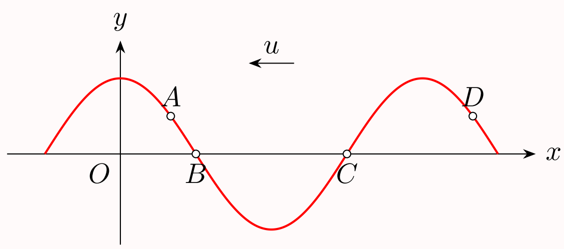


由此图也可以得到各处质点的初相。

注意，沿着波传播方向，质点的相位依次滞后。

第 530 题 |【3407】

横波以波速 u 沿 x 轴负方向传播。t 时刻波形曲线如图。则该时刻



(A) A 点振动速度大于零

(B) B 点静止不动

(C) C 点向下运动

(D) D 点振动速度小于零

答案

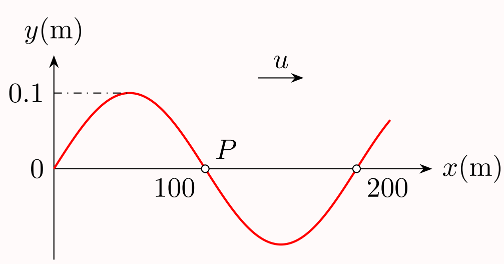
D

解析

波形图中某个位置的质点下一时刻的位置由该时刻波前进的后方的质点位置所决定。所以图中 A、B、D 三点下一时刻都往下运动，速度小于零，C 点下一时刻都往上运动，速度大于零。

第 531 题 |【3341】

图示一简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图，波速 $u = 200$ m/s，则 P 处质点的振动速度的表达式为



(A) $v=-0.2\pi\cos(2\pi t-\pi)$(SI)
(B) $v=-0.2\pi\cos(\pi t-\pi)$(SI)
(C) $v=0.2\pi\cos\left(2\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)
(D) $v=0.2\pi\cos\left(\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)$(SI)

答案

A

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$t=0$ 时刻的波形图表达式为

$$y(x,0)=A\cos(-kx+\varphi_0)$$

由图中可以看出，振幅 $A=0.1$ m，波长 $\lambda=200$ m，波速 $u=200$ m/s，$t=0$ 时刻 O 点的离开平衡位置的距离为 $y(0,0)=0$，且 O 点的速度小于零，所以有

$$y(0,0)=A\cos\varphi_0=0\Rightarrow\cos\varphi_0=0$$
$$v(0,0)=-A\omega\sin\varphi_0<0\Rightarrow\sin\varphi_0>0$$
$$\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$

又因为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{200}=0.01\pi\ \mathrm{rad/m}$$
$$u=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow T=\frac{\lambda}{u}$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{u}{\lambda}=2\pi\times\frac{200}{200}=2\pi\ \mathrm{rad/s}$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=0.1\cos\left(2\pi t-0.01\pi x+\frac{1}{2}\pi\right)$$

所以 P 点的振动表达式为

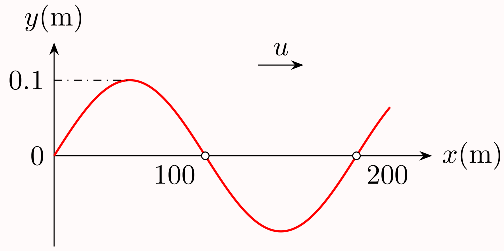
$$y(100,t)=0.1\cos\left(2\pi t-\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=0.1\cos\left(2\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$$

其振动的速度为

$$v(100,t)=-0.2\pi\sin\left(2\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)=-0.2\pi\cos(2\pi t-\pi)$$

第 532 题 |【3338】

图示一简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，波速 $u=200$ m/s，则图中 O 点的振动加速度的表达式为



(A) $a=0.4\pi^2\cos\left(\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)
(B) $a=0.4\pi^2\cos\left(\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)$(SI)
(C) $a=-0.4\pi^2\cos(2\pi t-\pi)$(SI)
(D) $a=-0.4\pi^2\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)

答案

D

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$t=0$ 时刻的波形图表达式为

$$y(x,0)=A\cos(-kx+\varphi_0)$$

由图中可以看出，振幅 $A=0.1$ m，波长 $\lambda=200$ m，波速 $u=200$ m/s，$t=0$ 时刻 O 点的离开平衡位置的距离为 $y(0,0)=0$，且 O 点的速度小于零，所以有

$$y(0,0)=A\cos\varphi_0=0\Rightarrow\cos\varphi_0=0$$
$$v(0,0)=-A\omega\sin\varphi_0<0\Rightarrow\sin\varphi_0>0$$
$$\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$

又因为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{200}=0.01\pi\ \mathrm{rad/m}$$
$$u=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow T=\frac{\lambda}{u}$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{u}{\lambda}=2\pi\frac{200}{200}=2\pi\ \mathrm{rad/s}$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=0.1\cos\left(2\pi t-0.01\pi x+\frac{1}{2}\pi\right)$$

所以 O 点的振动表达式为

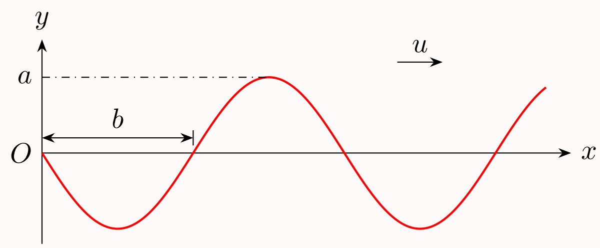
$$y(0,t)=0.1\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$$

其振动的速度和加速度分别为

$$v(0,t)=-0.2\pi\sin\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$$
$$a(0,t)=-0.4\pi^2\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$$

第 533 题 |【3071】

一平面简谐波以速度 u 沿 x 轴正方向传播，在 $t=t'$ 时波形曲线如图所示。则坐标原点 O 的振动方程为



(A) $y=a\cos\left[\frac{u}{b}(t-t')+\frac{\pi}{2}\right]$
(B) $y=a\cos\left[2\pi\frac{u}{b}(t-t')-\frac{\pi}{2}\right]$
(C) $y=a\cos\left[\pi\frac{u}{b}(t+t')+\frac{\pi}{2}\right]$
(D) $y=a\cos\left[\pi\frac{u}{b}(t-t')-\frac{\pi}{2}\right]$

答案

D

解析

由题目所给波形图可以看出，振幅 $A=a$，波长 $\lambda=2b$，波速为 $v=u$，$t=t'$ 时坐标原点 O 的位置为 $y(0,t')=0$，振动的速度 $v(0,t')>0$。
沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

所以坐标原点 O 的振动方程为

$$y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

依题意，

$$A=a$$

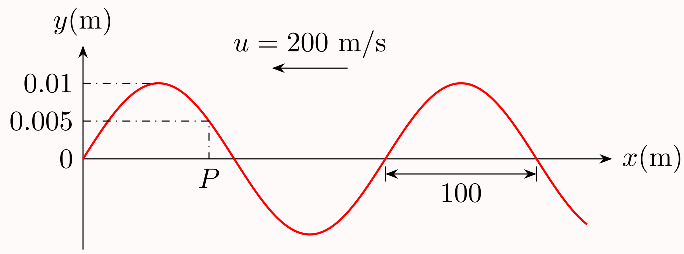
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{b}$$
$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\omega}{k}$$
$$\omega = vk = u\frac{\pi}{b}$$
$$y(0,t') = 0 = a\cos\left(u\frac{\pi}{b}t' + \varphi_0\right) \Rightarrow u\frac{\pi}{b}t' + \varphi_0 = \pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v(0,t') = -au\frac{\pi}{b}\sin\left(u\frac{\pi}{b}t' + \varphi_0\right) > 0 \Rightarrow \sin\left(u\frac{\pi}{b}t' + \varphi_0\right) < 0 \Rightarrow u\frac{\pi}{b}t' + \varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi - u\frac{\pi}{b}t'$$

所以坐标原点 O 的振动方程为

$$y(0,t) = a\cos\left[u\frac{\pi}{b}t - \frac{1}{2}\pi - u\frac{\pi}{b}t'\right] = a\cos\left[\pi\frac{u}{b}(t-t') - \frac{1}{2}\pi\right]$$

第 534 题 |【3152】

图中画出一平面简谐波在 $t = 2$ s 时刻的波形图，则平衡位置在 P 点的质点的振动方程是



(A) $y_P = 0.01\cos\left[\pi(t-2) + \frac{1}{3}\pi\right]$　　(B) $y_P = 0.01\cos\left[\pi(t+2) + \frac{1}{3}\pi\right]$

(C) $y_P = 0.01\cos\left[2\pi(t-2) + \frac{1}{3}\pi\right]$　　(D) $y_P = 0.01\cos\left[2\pi(t-2) - \frac{1}{3}\pi\right]$

答案

C

解析

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

依题意，$t = 2$ s 时刻的波形图表达式为

$$y(x,2) = A\cos(2\omega + kx + \varphi_0)$$

P 点的振动方程为

$$y(x_P,t)=A\cos(\omega t+kx_P+\varphi_0)$$

由图中可以看出，振幅 $A=0.01$ m，波长 $\lambda=200$ m，波速 $u=200$ m/s，$t=2$ s 时刻 P 点的离开平衡位置的距离为 $y(x_P,2)=0.005\ \text{m}=\frac{1}{2}A$，且 P 点的速度小于零，所以有

$$y(x_P,2)=A\cos(2\omega+kx_P+\varphi_0)=\frac{1}{2}A\Rightarrow\cos(2\omega+kx_P+\varphi_0)=\frac{1}{2}$$
$$v(x_P,2)=-A\omega\sin(2\omega+kx_P+\varphi_0)<0\Rightarrow\sin(2\omega+kx_P+\varphi_0)>0$$
$$2\omega+kx_P+\varphi_0=\frac{1}{3}\pi$$
$$kx_P+\varphi_0=\frac{1}{3}\pi-2\omega$$

又因为

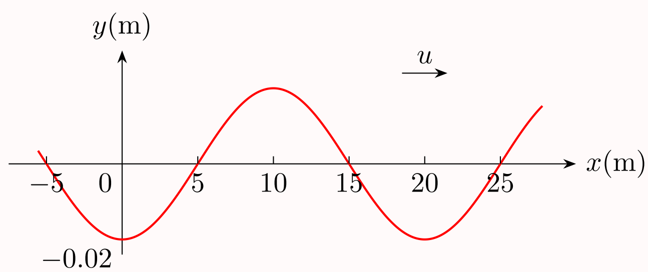
$$u=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow T=\frac{\lambda}{u}$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{u}{\lambda}=2\pi\times\frac{200}{200}=2\pi\ \text{rad/s}$$

所以 P 点的振动方程为

$$y(x_P,t)=A\cos\left[\omega t+\frac{1}{3}\pi-2\omega\right]=A\cos\left[\omega(t-2)+\frac{1}{3}\pi\right]=0.01\cos\left[2\pi(t-2)+\frac{1}{3}\pi\right]$$

第 535 题 |【3575】

一平面简谐波，波速 $u=5$ m/s，$t=3$ s 时波形曲线如图，则 $x=0$ 处质点的振动方程为



(A) $y=2\times10^{-2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)　(B) $y=2\times10^{-2}\cos(\pi t+\pi)$(SI)

(C) $y=2\times10^{-2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)　(D) $y=2\times10^{-2}\cos\left(\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)$(SI)

答案

A

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$t=3$ s 时刻的波形图表达式为

$$y(x,3)=A\cos(3\omega-kx+\varphi_0)$$

由图中可以看出，$A=0.02$ m，$\lambda=20$ m，$t=3$ s 时刻 O 点的离开平衡位置的距离为 $y(0,3)=-A$，所以有

$$y(0,3)=A\cos(3\omega+\varphi_0)=-A\Rightarrow\cos(3\omega+\varphi_0)=-1\Rightarrow 3\omega+\varphi_0=\pi\Rightarrow\varphi_0=\pi-3\omega$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\lambda/u}=\frac{2u\pi}{\lambda}=\frac{10\pi}{20}=\frac{\pi}{2}$$
$$\varphi_0=\pi-\frac{3}{2}\pi=-\frac{1}{2}\pi$$
$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}$$

所以波的表达式为

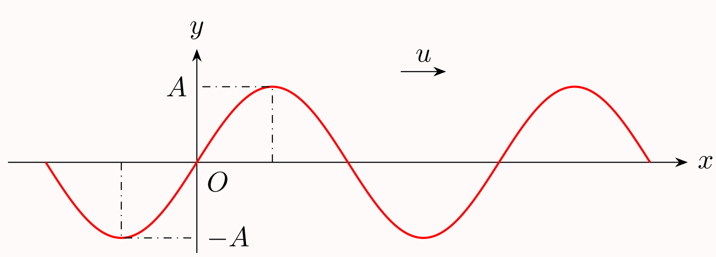
$$y(x,t)=0.02\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{10}x-\frac{1}{2}\pi\right)$$

所以 $x=0$ 处质点的振动方程为

$$y(0,t)=0.02\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{2}\pi\right)$$

第 536 题 |【3424】

一沿 x 轴正方向传播的平面简谐波，频率为 f，振幅为 A，已知 $t=t_0$ 时刻的波形曲线如图所示，则 $x=0$ 点的振动方程为______。



答案

$y=A\cos\left[2\pi f(t-t_0)+\frac{1}{2}\pi\right]$

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

$t=t_0$ 时刻的波形表达式为

$$y(x,t_0)=A\cos(\omega t_0-kx+\varphi_0)$$

依题意，频率为 f，所以圆频率为 $\omega=2\pi f$，又 $t=t_0$ 时，$y(0,t_0)=0$，$v(0,t_0)<0$，所以

$$y(0,t_0)=A\cos(\omega t_0+\varphi_0)=0\Rightarrow\cos(\omega t_0+\varphi_0)=0$$
$$v(0,t_0)=-A\omega\sin(\omega t_0+\varphi_0)<0\Rightarrow\sin(\omega t_0+\varphi_0)>0$$
$$\omega t_0+\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_0=\frac{1}{2}\pi-\omega t_0=\frac{1}{2}\pi-2\pi f t_0$$

所以波的表达式为

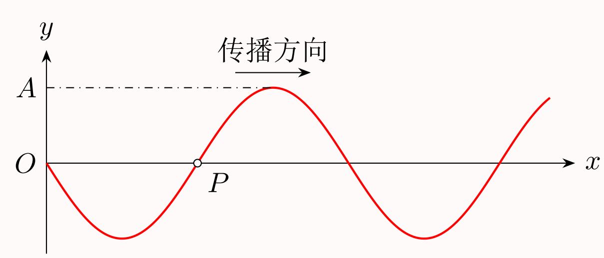
$$y(x,t)=A\cos\left(2\pi ft-kx+\frac{1}{2}\pi-2\pi ft_0\right)$$

所以 $x=0$ 点的振动方程为

$$y(0,t)=A\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi-2\pi ft_0\right)=A\cos\left[2\pi f(t-t_0)+\frac{1}{2}\pi\right]$$

第 537 题 |【3330】

图示一平面简谐波在 $t=2$ s 时刻的波形图，波的振幅为 0.2 m，周期为 4 s，则图中 P 点处质点的振动方程为______。



答案

$y=0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{2}\pi\right)$(SI)

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

依题意，$A=0.2\ \mathrm{m}$，$T=4\ \mathrm{s}$，$t=2\ \mathrm{s}$ 时，$y(0,2)=0$，$v(0,2)>0$，而 P 点与 O 相距半个波长，所以二者反相，或相位相差 π，因此有

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad/s}$$

$$y(0,2)=A\cos(2\omega+\varphi_0)=0\Rightarrow\cos(2\omega+\varphi_0)=0\Rightarrow 2\omega+\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi$$

$$v(0,2)=-A\omega\sin(2\omega+\varphi_0)>0\Rightarrow\sin(2\omega+\varphi_0)<0\Rightarrow 2\omega+\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$

$$\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi-2\omega=-\frac{3}{2}\pi$$

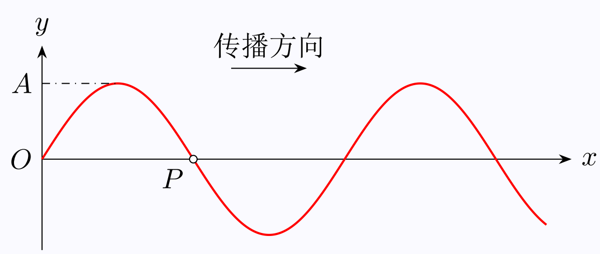
所以波的表达式为

$$y(x,t)=0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-kx-\frac{3}{2}\pi\right)$$

假定波长为 λ，则 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，P 点位置为 $x_P=\frac{1}{2}\lambda$，因此 P 点处质点的振动方程为

$$y(\frac{1}{2}\lambda,t)=0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{1}{2}\lambda-\frac{3}{2}\pi\right)=0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\pi-\frac{3}{2}\pi\right)=0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{2}\pi\right)$$

由题意还可得 $t=0$ 时刻的波形图如下

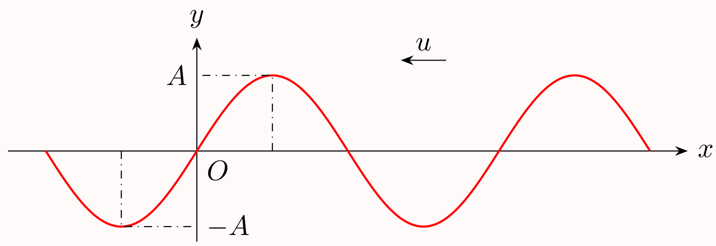


由此图也可得

$$\varphi_0=-\frac{3}{2}\pi$$

第 538 题 |【3415】

一平面简谐波，沿 x 轴负方向传播。角频率为 ω，波速为 u。设 $t=\frac{1}{4}T$ 时刻的波形如图所示，则该波的表达式为



(A) $y = A\cos[\omega(t - xu)]$

(B) $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \frac{1}{2}\pi\right]$

(C) $y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right)\right]$

(D) $y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \pi\right]$

答案

D

解析

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

依题意，$t = \frac{1}{4}T$ 时刻的波形表达式为

$$y\left(x, \frac{T}{4}\right) = A\cos\left[\omega\left(\frac{T}{4} + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{u}\right) + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right]$$

而由图可以看出，$t = \frac{1}{4}T$ 时刻，$x = 0$ 处的质点离开平衡位置的距离为 $y(0, T/4) = 0$，且 O 点的速度大于零，所以有

$$y\left(0, \frac{T}{4}\right) = A\cos\left[\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right] = 0 \Rightarrow \cos\left[\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

$$v\left(0, \frac{T}{4}\right) = -A\omega\sin\left[\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right] > 0 \Rightarrow \sin\left[\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right] < 0$$

$$\varphi_0 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

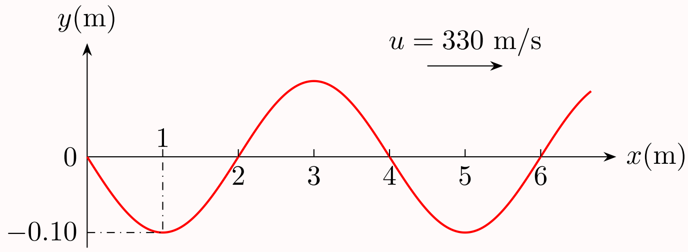
$$\varphi_0 = -\pi$$

所以波的表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) - \pi\right]$$

第 539 题 |【3076】

图为 $t = \frac{1}{4}T$ 时一平面简谐波的波形曲线，则其波的表达式为_____。



答案

$y = 0.1\cos\left(165\pi t - \frac{1}{2}\pi x + \pi\right)$

解析

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

从题目所给波形图可以看出，振幅 $A = 0.1$ m，波长 $\lambda = 4$ m，所以波数为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad/m}$$

而波传播速度为 $u = 330$ m/s，所以圆频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda/u} = \frac{2\pi u}{\lambda} = \frac{2\pi\times 330}{4} = 165\pi \text{ rad/s}$$

又如图中可以看出，$t = \frac{1}{4}T$ 时 $x = 1$ s 处的质点离开平衡位置的距离为 $y(1, T/4) = -A$，所以

$$y = A\cos\left(\omega\frac{T}{4} - k + \varphi_0\right) = -A$$

$$\cos\left(\omega\frac{T}{4} - k + \varphi_0\right) = -1$$

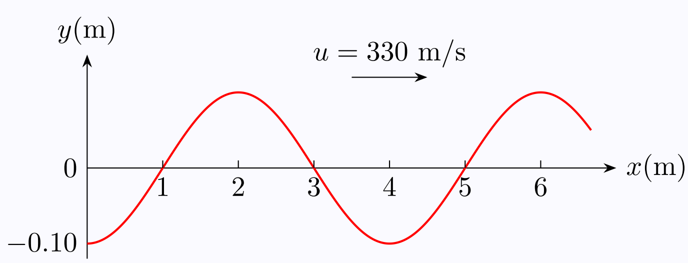
$$\omega\frac{T}{4} - k + \varphi_0 = \pi$$

$$\varphi_0 = \pi - \omega\frac{T}{4} + k = \pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$$

所以波的表达式为

$$y = 0.1\cos\left(165\pi t - \frac{1}{2}\pi x + \pi\right)$$

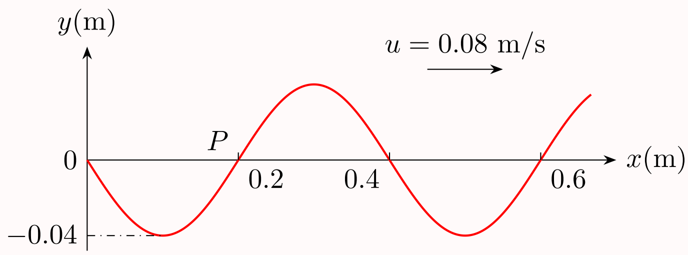
另外，由题目所给波形图可以得到 $t = 0$ 时的波形图如下



由此也可以得到初相 $\varphi_0=\pi$。

第 540 题 |【3141】

图示一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，求：(1) 该波的波动表达式；(2)P 处质点的振动方程。



解答

设该平面简谐波的表达式为

$$y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

由波形图可以看出，振幅 $A=0.04$ m，波长 $\lambda=0.4$ m，波传播的速度 $u=0.08$ m/s，且 $t=0$ 时，$x=0$ 处的质点正通过其平衡位置向 y 轴正方向运动，所以有

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=5\pi\ \mathrm{rad/m}$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi u}{uT}=\frac{2\pi u}{\lambda}=\frac{2}{5}\pi\ \mathrm{rad/s}$$
$$y_0=A\cos\varphi_0=0$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0>0$$
$$\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$

所以该波的表达式为

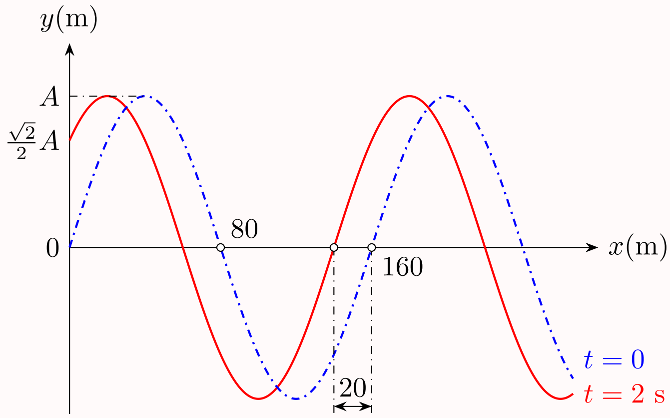
$$y=0.04\cos\left(\frac{2}{5}\pi t-5\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)\ (\mathrm{SI})$$

所以 P 处 ($x=0.2$ m) 质点的振动方程为

$$y_P=0.04\cos\left(\frac{2}{5}\pi t-5\pi\times 0.2-\frac{1}{2}\pi\right)=0.04\cos\left(\frac{2}{5}\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)\ (\mathrm{SI})$$

第 541 题 |【3142】

图示一平面余弦波在 $t=0$ 时刻与 $t=2$ s 时刻的波形图。已知波速为 u，求：(1) 坐标原点处介质质点的振动方程；(2) 该波的波动表达式。



解答

此题有诸多不明确的地方，第一，波向哪个方向传播？第二，波在 2 s 之内传播的距离是否超过了一个波长？题目中并没有明确地给出这两个信息！

由题目所给的波形图可以看出以下信息：振幅为 A，具体数值不明；波长为 $\lambda=160$ m，$t=0$ 时坐标原点处介质质点通过平衡位置，$t=2$ s 时坐标原点处介质质点的位置在 $\frac{\sqrt{2}}{2}A$。在 2 s 时间内波传播的距离为 $d=n\lambda+140=160n+140$ m，当 $n\geqslant 0$ 时，表示波沿 x 轴正方向传播，当 $n<0$ 时，表示波沿 x 轴负方向传播。所以波速 $u=\frac{d}{2}=80n+70$ m/s，$u>0$ 表示波沿 x 轴正方向传播，$u<0$ 表示波沿 x 轴负方向传播，

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{1}{80}\pi\ \mathrm{rad/m}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\lambda/|u|}=ku=\frac{|80n+70|}{80}\pi=\frac{|8n+7|}{8}\pi$$

设坐标原点处介质质点的振动方程为

$$y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则依题意有

$$y_0=A\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi$$

$$y_2=A\cos(2\omega+\varphi_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}A\Rightarrow 2\omega+\varphi_0=2m\pi\pm\frac{1}{4}\pi$$

$$\Rightarrow\varphi_0=2m\pi\pm\frac{1}{4}\pi-2\omega=2m\pi\pm\frac{1}{4}\pi-\frac{|8n+7|}{4}\pi$$

上述表达式较麻烦，其实只分两种情况：如果波沿 x 轴正方向传播，则 $\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$；如果波沿 x 轴负方向传播，则 $\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$。所以坐标原点处介质质点的振动方程为

$$y=A\cos\left(\frac{|8n+7|}{8}\pi t\pm\frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

所以该波的波动表达式为

$$y=A\cos\left(\frac{|8n+7|}{8}\pi t\pm\frac{1}{80}\pi x\pm\frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

若波沿 x 轴正方向传播，$n \geqslant 0$，坐标原点处介质质点的振动方程为

$$y = A\cos\left(\frac{8n+7}{8}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

该波的波动表达式为

$$y = A\cos\left(\frac{8n+7}{8}\pi t - \frac{1}{80}\pi x + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

当波在 2 s 内沿 x 轴正方向传播不超过一个波长时，$n=0$，坐标原点处介质质点的振动方程为

$$y = A\cos\left(\frac{7}{8}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

该波的波动表达式为

$$y = A\cos\left(\frac{7}{8}\pi t - \frac{1}{80}\pi x + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

若波沿 x 轴负方向传播，$n < 0$，坐标原点处介质质点的振动方程为

$$y = A\cos\left(\frac{-8n-7}{8}\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

该波的波动表达式为

$$y = A\cos\left(\frac{-8n-7}{8}\pi t + \frac{1}{80}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

当波在 2 s 内沿 x 轴负方向传播不超过一个波长时，$n=-1$，坐标原点处介质质点的振动方程为

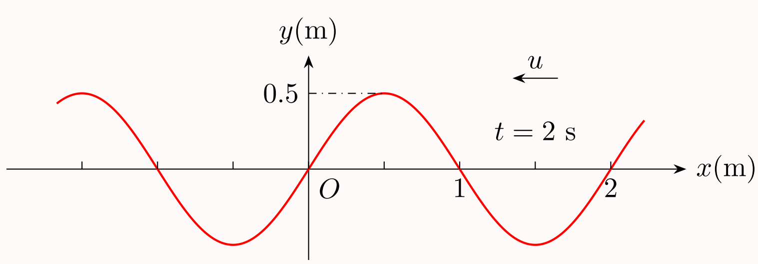
$$y = A\cos\left(\frac{1}{8}\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

该波的波动表达式为

$$y = A\cos\left(\frac{1}{8}\pi t + \frac{1}{80}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{(SI)}$$

第 542 题 |【5206】

沿 x 轴负方向传播的平面简谐波在 $t=2$ s 时刻的波形曲线如图所示，设波速 $u=0.5$ m/s。求：原点 O 的振动方程。



解答

设该平面简谐波的表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

则 $t = 2$ s 时刻的波形表达式为

$$y(x,2) = A\cos(2\omega + kx + \varphi_0)$$

原点 O 的振动方程为

$$y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，振幅 $A = 0.5$ m，波长 $\lambda = 2$ m，波速 $u = 0.5$ m/s，所以圆频率

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda/u} = \frac{2\pi u}{\lambda} = 0.5\pi \text{ rad/s}$$

由题目中所给波形图可以看出，$t = 2$ s 时，原点处质点的位置为 $y(0,2) = 0$，速度 $v(0,2) > 0$，所以有

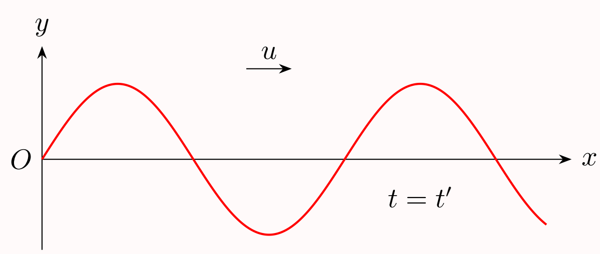
$$y(0,2) = 0.5\cos(\pi + \varphi_0) = 0$$
$$v(0,2) = -0.25\pi\sin(\pi + \varphi_0) > 0$$
$$\pi + \varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$$

所以原点 O 的振动方程为

$$y(0,t) = 0.5\cos\left(\frac{1}{2}\pi t - \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (SI)}$$

第 543 题 |【3078】

一平面简谐波沿 x 轴正向传播，其振幅为 A，频率为 f，波速为 u。设 $t = t'$ 时刻的波形曲线如图所示。求：(1)$x = 0$ 处质点振动方程；(2) 该波的表达式。



解答

设该平面简谐波的表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

依题意，振幅为 A，频率为 f，波速为 u，所以圆频率

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

波数为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{uT}=\frac{2\pi f}{u}$$

又 $t=t'$ 时，原点处质点的位置为 $y(0,t')=0$，速度 $v(0,t')<0$，所以有

$$y(0,t')=A\cos(\omega t'+\varphi_0)=0$$
$$v(0,t')=-A\omega\sin(\omega t'+\varphi_0)<0$$
$$\omega t'+\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$
$$\varphi_0=\frac{1}{2}\pi-\omega t'$$

所以波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi f(t-t')-\frac{2\pi f}{u}x+\frac{1}{2}\pi\right]$$

所以 $x=0$ 处质点振动方程为

$$y(0,t)=A\cos\left[2\pi f(t-t')+\frac{1}{2}\pi\right]$$

14.3 波的能量

第 544 题 |【3088】

一平面简谐波在弹性媒质中传播时，某一时刻媒质中某质元在负的最大位移处，则它的能量是

(A) 动能为零，势能最大　　(B) 动能为零，势能为零

(C) 动能最大，势能最大　　(D) 动能最大，势能为零

答案

B

解析

简谐波中任意一个质元在任意时刻的动能等于势能，在位移最大处，质点的运动速度为零，所以动能和势能均为零；在平衡位置，质点的速度最大，所以动能和势能均最大。

第 545 题 |【3089】

一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中

(A) 它的势能转换成动能

(B) 它的动能转换成势能

(C) 它从相邻的一段媒质质元获得能量，其能量逐渐增加

(D) 它把自己的能量传给相邻的一段媒质质元，其能量逐渐减小

答案

C

解析

简谐波中任意一个质元在任意时刻的动能等于势能，在位移最大处，质点的运动速度为零，所以动能和势能均为零；在平衡位置，质点的速度最大，所以动能和势能均最大。所以质元从平衡位置向最大位移处运动的过程中，能量逐渐减小；从最大位移处向平衡位置运动时，能量逐渐增加。

第 546 题 |【3287】

当一平面简谐机械波在弹性媒质中传播时，下述各结论哪个是正确的？

(A) 媒质质元的振动动能增大时，其弹性势能减小，总机械能守恒

(B) 媒质质元的振动动能和弹性势能都作周期性变化，但二者的相位不相同

(C) 媒质质元的振动动能和弹性势能的相位在任一时刻都相同，但二者的数值不相等

(D) 媒质质元在其平衡位置处弹性势能最大

答案

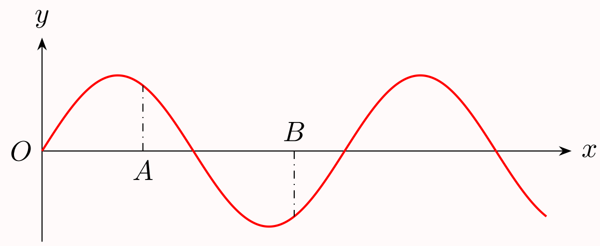
D

解析

简谐波中任意一个质元在任意时刻的动能等于势能，在位移最大处，质点的运动速度为零，所以动能和势能均为零；在平衡位置，质点的速度最大，所以动能和势能均最大。所以质元从平衡位置向最大位移处运动的过程中，能量逐渐减小；从最大位移处向平衡位置运动时，能量逐渐增加。由简谐波的一般表达式可知，任意一个质元都做简谐振动，其速度也做简谐振动，所以其动能与做简谐振动，但动能振动的频率是质元的两倍。

第 547 题 |【3289】

图示一平面简谐机械波在 t 时刻的波形曲线。若此时 A 点处媒质质元的振动动能在增大，则



(A) A 点处质元的弹性势能在减小

(B) 波沿 x 轴负方向传播

(C) B 点处质元的振动动能在减小

(D) 各点的波的能量密度都不随时间变化

答案

B

解析

简谐波中任意一个质元在任意时刻的动能等于势能。在位移最大处，质点的运动速度为零，所以动能和势能均为零；在平衡位置，质点的速度最大，所以动能和势能均最大。所以质元从平衡位置向最大位移处运动的过程中，能量逐渐减小；从最大位移处向平衡位置运动时，能量逐渐增加。

依题意，此时 A 点处媒质质元的振动动能在增大，所以质元在向平衡位置运动，所以波沿 x 轴负方向传播，所以 B 处质元也向平衡位置运动，因此 B 处质元的动能也在增大。

对于某个质元，体积不变，能量越大，能量密度也越大，所以能量密度的变化趋势与能量的变化趋势相同，即质元从平衡位置向最大位移处运动的过程中，能量逐渐减小，能量密度也逐渐减小；从最大位移处向平衡位置运动时，能量逐渐增加，能量密度也逐渐增加。能量在做周期性变化，能量密度也在做周期性变化，不同位置的能量密度在某个时刻是不一样的。

第 548 题 |【3294】

在截面积为 S 的圆管中，有一列平面简谐波在传播，其波的表达式为 $y = A\cos\left[\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right]$，管中波的平均能量密度是 w，则通过截面积 S 的平均能流是______。

答案

$\frac{wS\omega\lambda}{2\pi}$

解析

平均能量密度 $\overline{w}$ 与平均能流 $\overline{P}$ 之间的关系为

$$\overline{P} = \overline{w}uS$$

依题意，$\overline{w}=w$，圆频率为 ω，波数为 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，所以波传播的速度为

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega\lambda}{2\pi}$$

所以平均能流为

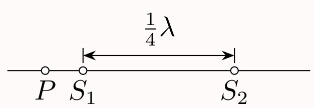
$$\overline{P}=w\times\frac{\omega\lambda}{2\pi}\times S=\frac{wS\omega\lambda}{2\pi}$$

14.4 波的叠加原理 波的干涉 驻波

14.4.1 波的干涉

第 549 题 |【3434】

两相干波源 S_1 和 S_2 相距 $\frac{1}{4}\lambda$，(λ 为波长)，S_1 的相位比 S_2 的相位超前 $\frac{1}{2}\pi$，在 S_1，S_2 的连线上，S_1 外侧各点 (例如 P 点) 两波引起的两谐振动的相位差是



(A) 0　　(B) $\frac{1}{2}\pi$　　(C) π　　(D) $\frac{3}{2}\pi$

答案

C

解析

依题意，波长为 λ，所以波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，假定 S_1 点振动的初相为 ϕ_1，因为 S_1 的相位比 S_2 的相位超前 $\frac{1}{2}\pi$，所以 S_2 点振动的初相为 $\phi_2=\phi_1-\frac{1}{2}\pi$，再假定 $\overline{S_1P}=r$，则 $\overline{S_2P}=r+\frac{1}{4}\lambda$，所以两波传到 P 点时引起 P 点振动的初相分别为

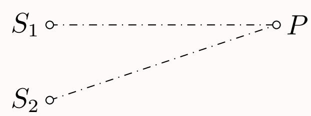
$$\varphi_1=\phi_1-kr$$
$$\varphi_2=\phi_2-k\left(r+\frac{1}{4}\lambda\right)$$

所以二者在 P 点的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\left[\phi_2-k\left(r+\frac{1}{4}\lambda\right)\right]-[\phi_1-kr]=(\phi_2-\phi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{1}{4}\lambda=-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi=-\pi$$

第 550 题 |【3295】

如图所示，S_1 和 S_2 为两相干波源，它们的振动方向均垂直于图面，发出波长为 λ 的简谐波，P 点是两列波相遇区域中的一点，已知 $\overline{S_1P}=2\lambda$，$\overline{S_2P}=2.2\lambda$，两列波在 P 点发生相消干涉。若 S_1 的振动方程为 $y_1=A\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$，则 S_2 的振动方程为



(A) $y_2=A\cos\left(2\pi t-\frac{1}{2}\pi\right)$
(B) $y_2=A\cos\left(2\pi t+\pi\right)$
(C) $y_2=A\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$
(D) $y_2=2A\cos(2\pi t-0.1\pi)$

答案

D

解析

依题意，已知 S_1 的振动方程为 $y_1=A\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$，且 $\overline{S_1P}=2\lambda$，则 S_1 传到 P 处时引起 P 处质点的振动方程为

$$y_{1P}=A\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi-k\overline{S_1P}\right)$$

因此 S_1 和 S_2 为两相干波源，所以二者的频率相同，假定 S_2 的振动方程为 $y_2=A_2\cos\left(2\pi t+\varphi_0\right)$，又因为 $\overline{S_2P}=2.2\lambda$，则 S_2 传到 P 处时引起 P 处质点的振动方程为

$$y_{2P}=A_2\cos\left(2\pi t+\varphi_0-k\overline{S_2P}\right)$$

又因为二者的波长均为 λ，所以 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，而二者在 P 点发生相消干涉，所以二者在 P 点的相位差为 $\Delta\varphi=(2n+1)\pi$，所以

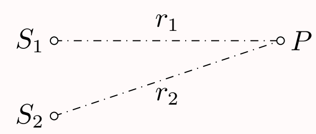
$$\Delta\varphi=(2n+1)\pi=\left[2\pi t+\frac{1}{2}\pi-k\overline{S_1P}\right]-\left[2\pi t+\varphi_0-k\overline{S_2P}\right]=\frac{1}{2}\pi-k(\overline{S_1P}-\overline{S_2P})-\varphi_0$$

$$\begin{aligned}\varphi_0&=\frac{1}{2}\pi-k(\overline{S_1P}-\overline{S_2P})-(2n+1)\pi=\frac{1}{2}\pi-k(2\lambda-2.2\lambda)-(2n+1)\pi\\&=\frac{1}{2}\pi+0.2k\lambda-(2n+1)\pi=[0.9-(2n+1)]\pi\end{aligned}$$

当 $n=0$ 时，$\varphi_0=-0.1\pi$。

第 551 题 |【3433】

如图所示，两列波长为 λ 的相干波在 P 点相遇。波在 S_1 点振动的初相是 ϕ_1，S_1 到 P 点的距离是 r_1；波在 S_2 点的初相是 ϕ_2，S_2 到 P 点的距离是 r_2，以 n 代表零或正、负整数，则 P 点是干涉极大的条件为



(A) $r_2 - r_1 = n\lambda$

(B) $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi$

(C) $\phi_2 - \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2n\pi$

(D) $\phi_2 - \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi$

答案

D

解析

依题意，波长为 λ，所以波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$，已知 S_1 点振动的初相为 ϕ_1，S_1 到 P 点的距离是 r_1，所以由 S_1 传到 P 点引起 P 点振动的初相为

$$\varphi_1 = \phi_1 - kr_1 = \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}r_1$$

波在 S_2 点的初相是 ϕ_2，S_2 到 P 点的距离是 r_2，所以由 S_2 传到 P 点引起 P 点振动的初相为

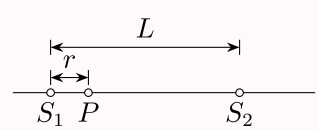
$$\varphi_2 = \phi_2 - kr_2 = \phi_2 - \frac{2\pi}{\lambda}r_2$$

而 P 点干涉极大，要求二者在 P 点的相位差为 $\Delta\varphi = 2n\pi$，所以

$$\Delta\varphi = 2n\pi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left[\phi_2 - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right] - \left[\phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}r_1\right] = (\phi_2 - \phi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

第 552 题 |【3301】

如图所示，S_1 和 S_2 为同相位的两相干波源，相距为 L，P 点距 S_1 为 r；波源 S_1 在 P 点引起的振动振幅为 A_1，波源 S_2 在 P 点引起的振动振幅为 A_2，两波波长都是 λ，则 P 点的振幅 $A =$______。



答案

$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(L-2r)\right]}$

解析

以 S_1 为坐标原点，S_1S_2 方向为 x 轴正方向，由 S_1 发出的沿 x 正方向传播的波的表达式为

$$y_1(x,t)=A_1\cos(\omega t-kx+\varphi_1)$$

由 S_2 发出的沿 x 负方向传播的波的表达式为

$$y_2(x,t)=A_2\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$$

依题意，S_1 和 S_2 为同相位的两相干波源，相距为 L，所以有

$$\omega t+\varphi_1=\omega t+kL+\varphi_2$$
$$\varphi_1=kL+\varphi_2$$

波源 S_1 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_1(r,t)=A_1\cos(\omega t-kr+kL+\varphi_2)=A_1\cos[\omega t+k(L-r)+\varphi_2]$$

波源 S_2 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_2(r,t)=A_2\cos(\omega t+kr+\varphi_2)$$

所以 P 点的合振动为

$$y=y_1(r,t)+y_2(r,t)=A_1\cos[\omega t+k(L-r)+\varphi_2]+A_2\cos(\omega t+kr+\varphi_2)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\{[\omega t+k(L-r)+\varphi_2]-(\omega t+kr+\varphi_2)\}}$$
$$=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[k(L-2r)]}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(L-2r)\right]}$$

第 553 题 |【3587】

两个相干点波源 S_1 和 S_2，它们的振动方程分别是 $y_1=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$ 和 $y_2=A\cos\left(\omega t-\frac{1}{2}\pi\right)$。波从 S_1 传到 P 点经过的路程等于 2 个波长，波从 S_2 传到 P 点的路程等于 $\frac{7}{2}$ 个波长。设两波波速相同，在传播过程中振幅不衰减，则两波传到 P 点的振动的合振幅为______。

答案

$2A$

解析

波源 S_1 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_{1P}=A\cos\left[\omega t-k(2\lambda)+\frac{1}{2}\pi\right]=A\cos\left(\omega t-4\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$$

波源 S_2 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_{2P}=A\cos\left[\omega t-k\left(\frac{7}{2}\lambda\right)-\frac{1}{2}\pi\right]=A\cos\left[\omega t-7\pi-\frac{1}{2}\pi\right]$$
$$=A\cos\left(\omega t-\frac{3}{2}\pi\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$$

所以 P 点的合振动为

$$y=y_{1P}+y_{2P}=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)+A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)=2A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$$

第 554 题 |【3588】

两相干波源 S_1 和 S_2 的振动方程分别是 $y_1=A\cos(\omega t+\phi)$ 和 $y_2=A\cos(\omega t+\phi)$，S_1 距 P 点 3 个波长，S_2 距 P 点 4.5 个波长。设波传播过程中振幅不变，则两波同时传到 P 点时的合振幅是_____。

答案

0

解析

波源 S_1 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_{1P}=A\cos\left[\omega t-k(3\lambda)+\phi\right]=A\cos\left[\omega t-6\pi+\phi\right]=A\cos\left[\omega t+\phi\right]$$

波源 S_2 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_{2P}=A\cos\left[\omega t-k(4.5\lambda)+\phi\right]=A\cos\left[\omega t-9\pi+\phi\right]=A\cos\left[\omega t+\phi-\pi\right]=-A\cos\left[\omega t+\phi\right]$$

所以 P 点的合振动为

$$y=y_{1P}+y_{2P}=A\cos\left[\omega t+\phi\right]-A\cos\left[\omega t+\phi\right]=0$$

第 555 题 |【3589】

两相干波源 S_1 和 S_2 的振动方程分别是 $y_1=A\cos\omega t$ 和 $y_2=A\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$。$S_1$ 距 P 点 3 个波长，S_2 距 P 点 $\frac{21}{4}$ 个波长。两波在 P 点引起的两个振动的相位差是_____。

答案

0

解析

波源 S_1 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_{1P}=A\cos[\omega t-k(3\lambda)]=A\cos(\omega t-6\pi)=A\cos\omega t$$

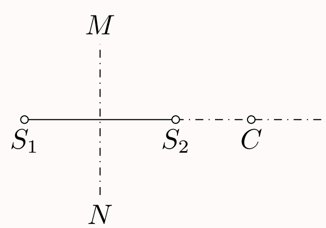
波源 S_2 在 P 点引起的振动表达式为

$$y_{2P}=A\cos\left[\omega t-k\left(\frac{21}{4}\lambda\right)+\frac{1}{2}\pi\right]=A\cos\left(\omega t-\frac{21}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=A\cos(\omega t-10\pi)=A\cos\omega t$$

所以两波在 P 点引起的两个振动的相位差是 0。

第 556 题 |【5517】

S_1、S_2 为振动频率、振动方向均相同的两个点波源，振动方向垂直纸面，两者相距 $\frac{3}{2}\lambda$(λ 为波长) 如图。已知 S_1 的初相为 $\frac{1}{2}\pi$。(1) 若使射线 S_2C 上各点由两列波引起的振动均干涉相消，则 S_2 的初相应为______。(2) 若使 S_1S_2 连线的中垂线 MN 上各点由两列波引起的振动均干涉相消，则 S_2 的初位相应为______。



答案

$\frac{4n+1}{2}\pi,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$， $\frac{4n+3}{2}\pi,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

解析

(1) 设 S_2 到 C 点的距离为 l，则波源 S_1 在 C 点引起的振动相位为

$$\varphi_{1C}=\omega t-k\left(\frac{3}{2}\lambda+l\right)+\frac{1}{2}\pi=\omega t-kl-3\pi+\frac{1}{2}\pi=\omega t-kl-\frac{1}{2}\pi$$

波源 S_2 在 C 点引起的振动相位为

$$\varphi_{2C}=\omega t-kl+\varphi_0$$

若 C 点要发生干涉相消，则要求

$$\Delta\varphi=(2n+1)\pi=\varphi_{2P}-\varphi_{1P}=(\omega t-kl+\varphi_0)-\left(\omega t-kl-\frac{1}{2}\pi\right)=\varphi_0+\frac{1}{2}\pi$$

$$\varphi_0=(2n+1)\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{4n+1}{2}\pi,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

(2) 设 S_1 到 MN 上某点的距离为 l，则波源 S_1 在该点引起的振动相位为

$$\varphi_1 = \omega t - kl + \frac{1}{2}\pi$$

波源 S_2 在该点引起的振动相位为

$$\varphi_2 = \omega t - kl + \varphi_0$$

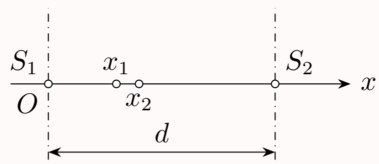
若该点要发生干涉相消，则要求

$$\Delta\varphi = (2n+1)\pi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kl + \varphi_0) - \left(\omega t - kl + \frac{1}{2}\pi\right) = \varphi_0 - \frac{1}{2}\pi$$

$$\varphi_0 = (2n+1)\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{4n+3}{2}\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

第 557 题 | 【3099】

如图所示，两相干波源在 x 轴上的位置为 S_1 和 S_2，其间距离为 $d = 30$ m，S_1 位于坐标原点 O。设波只沿 x 轴正负方向传播，单独传播时强度保持不变。$x_1 = 9$ m 和 $x_2 = 12$ m 处的两点是相邻的两个因干涉而静止的点。求两波的波长和两波源间最小相位差。



解答

设两个波源的振动方程分别为

$$y_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

则二者传到 $x_1 = 9$ m 处引起质点的振动方程分别为

$$y_{11} = A\cos(\omega t - 9k + \varphi_1)$$
$$y_{21} = A\cos(\omega t - 21k + \varphi_2)$$

二者传到 $x_2 = 12$ m 处引起质点的振动方程分别为

$$y_{12} = A\cos(\omega t - 12k + \varphi_1)$$
$$y_{22} = A\cos(\omega t - 18k + \varphi_2)$$

依题意有

$$(\omega t - 9k + \varphi_1) = (\omega t - 21k + \varphi_2) + (2n+1)\pi \Rightarrow 12k + (\varphi_1 - \varphi_2) = (2n+1)\pi$$

$$(\omega t-12k+\varphi_1)=(\omega t-18k+\varphi_2)+(2m+1)\pi \Rightarrow 6k+(\varphi_1-\varphi_2)=(2m+1)\pi$$
$$6k=2(n-m)\pi \Rightarrow k=\frac{n-m}{3}\pi=\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{\frac{n-m}{3}\pi}=\frac{6}{n-m}$$

由于 $x_1=9$ m 和 $x_2=12$ m 处的两点是相邻的两个因干涉而静止的点，所以 $n-m=1$，因此波长 $\lambda=6$ m。所以两波源之间的相位差为

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$$
$$=(2m+1)\pi-6k=(2m+1)\pi-2(n-m)\pi=(2m+1)\pi-2\pi=(2m-1)\pi$$

所以最小相位差为 π。

本题也可以使用驻波的概念和性质来求解。依题意，$x_1=9$ m 和 $x_2=12$ m 处的两点是两个相邻的波节，而两个相邻波节之间的距离是半个波长，因此很容易得到两波的波长为 6 m。所以波数 $k=\frac{1}{3}\pi$ rad/m。而假定两波的表达式分别为

$$y_1=A\cos(\omega t-kx+\varphi_{01})$$
$$y_2=A\cos(\omega t+kx+\varphi_{02})$$

二者合成的驻波的表达式为

$$y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx+\frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_{02}+\varphi_{01}}{2}\right)$$

注意，这里波源 S_1 的相位为 $\varphi_1=\omega t+\varphi_{01}$，波源 S_2 的相位为 $\varphi_2=\omega t+kd+\varphi_{02}$，所以两波源的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=kd+\varphi_{02}-\varphi_{01}$$

而 $x_1=9$ m 为波节的位置，所以有

$$9k+\frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$
$$\varphi_{02}-\varphi_{01}=(2n+1)\pi-18k=(2n+1)\pi-6\pi$$
$$\Delta\varphi=kd+\varphi_{02}-\varphi_{01}=30k+\varphi_{02}-\varphi_{01}=4\pi+(2n+1)\pi=(2n+5)\pi$$

因此，$n=-2$ 时，$\Delta\varphi=\pi$，$n=-3$ 时，$\Delta\varphi=-\pi$，这就是两波源间最小相位差。

第 558 题 |【3476】

一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，波的表达式为 $y=A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$，而另一平面简谐波沿 Ox 轴负方向传播，波的表达式为 $y=2A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$，求：(1)$x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的合振动方程；(2)$x=\frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的速度表达式。

解答

设两个波源的振动方程分别为

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$
$$y_2 = 2A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

则二者传到 $x = \frac{1}{4}\lambda$ 处引起质点的振动方程分别为

$$y_{1x} = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{\lambda/4}{\lambda}\right)\right] = A\cos\left(2\pi ft - \frac{1}{2}\pi\right)$$
$$y_{2x} = 2A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{\lambda/4}{\lambda}\right)\right] = 2A\cos\left(2\pi ft + \frac{1}{2}\pi\right) = -2A\cos\left(2\pi ft - \frac{1}{2}\pi\right)$$

所以 $x = \frac{1}{4}\lambda$ 处介质质点的合振动方程为

$$\begin{aligned} y = y_{1x} + y_{2x} &= A\cos\left(2\pi ft - \frac{1}{2}\pi\right) - 2A\cos\left(2\pi ft - \frac{1}{2}\pi\right) \\ &= -A\cos\left(2\pi ft - \frac{1}{2}\pi\right) = A\cos\left(2\pi ft + \frac{1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

因此其速度表达式为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -2\pi fA\sin\left(2\pi ft + \frac{1}{2}\pi\right)$$

14.4.2 驻波

第 559 题 |【3101】

在驻波中，两个相邻波节间各质点的振动

(A) 振幅相同，相位相同
(B) 振幅不同，相位相同
(C) 振幅相同，相位不同
(D) 振幅不同，相位不同

答案

B

解析

由两列同振幅的相向传播的行波

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$
$$y_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

合成的驻波的一般表达式为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

其中 x 处的振幅为

$$A_x = \left|2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right|$$

所以不同处质点的振幅是不一样的。而相邻两个节点之间的相位为

$$\varphi = \omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + n\pi$$

所以相邻两个节点之间的相位是一样的，节点两侧的相位是反相的。

第 560 题 |【3308】

在波长为 λ 的驻波中，两个相邻波腹之间的距离为

(A) $\frac{1}{4}\lambda$ (B) $\frac{1}{2}\lambda$ (C) $\frac{3}{4}\lambda$ (D) λ

答案

B

解析

驻波的波长是指合成驻波的行波的波长。因此两个相邻波腹或波节之间的距离都是半个波长。

由两列同振幅的相向传播的行波

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$
$$y_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

合成的驻波的一般表达式为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

其中 x 处的振幅为

$$A_x = \left|2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right|$$

振幅为零【最小】的点称为波节，振幅为 $2A$【最大】的点称为波腹。所以波节处

$$\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0$$
$$kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$
$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2k}$$
$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

波腹处

$$\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)=\pm 1$$

$$kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=n\pi$$

$$x_n=n\frac{\pi}{k}-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2k}$$

$$\Delta x=x_{n+1}-x_n=\frac{\pi}{k}=\frac{\lambda}{2}$$

第 561 题 |【3309】

在波长为 λ 的驻波中，两个相邻波节之间的距离为

(A) λ (B) $\frac{3}{4}\lambda$ (C) $\frac{1}{2}\lambda$ (D) $\frac{1}{4}\lambda$

答案

C

解析

驻波的波长是指合成驻波的行波的波长。因此两个相邻波腹或波节之间的距离都是半个波长。

由两列同振幅的相向传播的行波

$$y_1=A\cos(\omega t-kx+\varphi_1)$$

$$y_2=A\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$$

合成的驻波的一般表达式为

$$y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$$

其中 x 处的振幅为

$$A_x=\left|2A\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|$$

振幅为零【最小】的点称为波节，振幅为 $2A$【最大】的点称为波腹。所以波节处

$$\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)=0$$

$$kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$x_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2k}$$

$$\Delta x=x_{n+1}-x_n=\frac{\pi}{k}=\frac{\lambda}{2}$$

波腹处

$$\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)=\pm 1$$
$$kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=n\pi$$
$$x_n=n\frac{\pi}{k}-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2k}$$
$$\Delta x=x_{n+1}-x_n=\frac{\pi}{k}=\frac{\lambda}{2}$$

第 562 题 |【3597】

在弦线上有一驻波，其表达式为 $y=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos(2\pi ft)$，两个相邻波节之间的距离是______。

答案

$\frac{1}{2}\lambda$

解析

由驻波的表达式

$$y=2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi ft)$$

可知波节处振幅为零，即

$$\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)=0$$
$$2\pi\frac{x}{\lambda}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$
$$x_n=\frac{2n+1}{4}\lambda, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

所以相邻波节之间的距离为

$$\Delta x=x_n-x_{n-1}=\frac{1}{2}\lambda$$

第 563 题 |【3591】

沿着相反方向传播的两列相干波，其表达式为 $y_1=A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$ 和 $y_2=A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$。在叠加后形成的驻波中，各处简谐振动的振幅是

(A) A (B) $2A$ (C) $2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ (D) $\left|2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$

答案

D

解析

由沿着相反方向传播的两列相干波

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$
$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

合成的驻波的表达式为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi ft)$$

其中 x 处的振幅为

$$A_x = \left|2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$$

第 564 题 |【3592】

沿着相反方向传播的两列相干波，其表达式为 $y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$ 和 $y_2 = A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$。叠加后形成的驻波中，波节的位置坐标为

(A) $x = \pm n\lambda$ (B) $x = \pm\frac{1}{2}n\lambda$ (C) $x = \pm\frac{1}{2}(2n+1)\lambda$ (D) $x = \pm\frac{1}{4}(2n+1)\lambda$

其中的 $n = 0$，1，2，3，$\cdots$。

答案

D

解析

由沿着相反方向传播的两列相干波

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$
$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

合成的驻波的表达式为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi ft)$$

其中 x 处的振幅为

$$A_x = \left|2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$$

振幅为零【最小】的点称为波节，振幅为 $2A$【最大】的点称为波腹。所以波节处

$$\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = 0$$

$$2\pi\frac{x}{\lambda}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$
$$x_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

第 565 题 |【3487】

一驻波表达式为 $y=A\cos(2\pi x)\cos(100\pi t)(\mathrm{SI})$。位于 $x_1=\frac{1}{8}$ m 处的质元 P_1 与位于 $x_2=\frac{3}{8}$ m 处的质元 P_2 的振动相位差为______。

答案

π

解析

由驻波的表达式

$$y=A\cos(2\pi x)\cos(100\pi t)$$

可知位于 $x_1=\frac{1}{8}$ m 处的质元 P_1 的振动方程为

$$y_1=A\cos\left(2\pi\times\frac{1}{8}\right)\cos(100\pi t)=A\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(100\pi t)=\frac{\sqrt{2}}{2}A\cos(100\pi t)$$

其相位为

$$\varphi_1=100\pi t$$

位于 $x_2=\frac{3}{8}$ m 处的质元 P_2 的振动方程为

$$y_2=A\cos\left(2\pi\times\frac{3}{8}\right)\cos(100\pi t)=A\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(100\pi t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}A\cos(100\pi t)=\frac{\sqrt{2}}{2}A\cos(100\pi t+\pi)$$

其相位为

$$\varphi_2=100\pi t+\pi$$

所以二者的相位差为 π。

第 566 题 |【3154】

一驻波表达式为 $y=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos(\omega t)$，则 $x=-\frac{1}{2}\lambda$ 处质点的振动方程是______；该质点的振动速度表达式是______。

答案

$y=2A\cos(\omega t+\pi)$，$v=2A\omega\sin(\omega t)$

解析

已知驻波表达式为

$$y=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos(\omega t)$$

所以 $x=-\frac{1}{2}\lambda$ 处质点的振动方程是

$$y=2A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\times\left(-\frac{1}{2}\lambda\right)\right]\cos(\omega t)=2A\cos(-\pi)\cos(\omega t)=-2A\cos(\omega t)=2A\cos(\omega t+\pi)$$

所以该质点的振动速度表达式是

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2A\omega\sin(\omega t+\pi)=2A\omega\sin(\omega t)$$

第 567 题 |【3315】

设平面简谐波沿 x 轴传播时在 $x=0$ 处发生反射，反射波的表达式为 $y_2=A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\pi\right]$，已知反射点为一自由端，则由入射波和反射波形成的驻波的波节位置的坐标为______。

答案

$x=\frac{2n+1}{4}\lambda, n=0,1,2,3,\cdots$

解析

由反射波的表达式

$$y_2=A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\pi\right]$$

可知反射波在反射点 $x=0$ 的相位为

$$\varphi_{20}=2\pi ft+\frac{1}{2}\pi$$

由于反射点为自由端，所以反射波无半波损失，所以入射波在反射点的相位为

$$\varphi_{10}=\varphi_{20}=2\pi ft+\frac{1}{2}\pi$$

所以入射波的表达式为

$$y_1=A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\pi\right]$$

所以形成的驻波的表达式为

$$y=y_1+y_2=A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\pi\right]+A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\pi\right]$$

$$= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right)$$

波节处

$$\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)=0$$

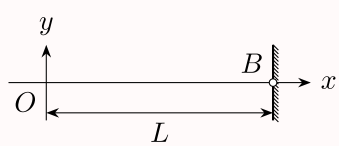
$$2\pi\frac{x}{\lambda}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

$$x=\frac{2n+1}{4}\lambda, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

考虑到入射波和反射波都在 $x\geqslant 0$ 空间中传播，所以波节的位置为 $x=\frac{2n+1}{4}\lambda, n=0,1,2,3,\cdots$。

第 568 题 |【3441】

设沿弦线传播的一入射波的表达式为 $y_1=A\cos\left[\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}\right]$，波在 $x=L$ 处 (B 点) 发生反射，反射点为自由端 (如图)。设波在传播和反射过程中振幅不变，则反射波的表达式是 $y_2=$______。



答案

$A\cos\left[\omega t+2\pi\frac{x}{\lambda}-4\pi\frac{L}{\lambda}\right]$

解析

自由端反射，反射波的相位等于入射波的相位，而波传播方向相反，所以，入射波在反射点的相位为

$$\varphi=\omega t-2\pi\frac{L}{\lambda}$$

假设反射波的表达式为

$$y_2=A\cos\left[\omega t+2\pi\frac{x}{\lambda}+\varphi_0\right]$$

则有

$$\omega t+2\pi\frac{L}{\lambda}+\varphi_0=\omega t-2\pi\frac{L}{\lambda}$$

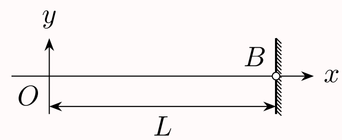
$$\varphi_0=-4\pi\frac{L}{\lambda}$$

所以反射波的表达式为

$$y_2=A\cos\left[\omega t+2\pi\frac{x}{\lambda}-4\pi\frac{L}{\lambda}\right]$$

第 569 题 |【3442】

设沿弦线传播的一入射波的表达式为 $y_1 = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi\right]$，波在 $x = L$ 处（B 点）发生反射，反射点为固定端（如图）。设波在传播和反射过程中振幅不变，则反射波的表达式是 $y_2 =$______。



答案

$A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\left(\phi-\pi-4\pi\frac{L}{\lambda}\right)\right]$

解析

固定端反射，反射波的相位有半波损失，即与入射波的相位相差 π，而波传播方向相反，所以，入射波在反射点的相位为

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)+\phi$$

假设反射波的表达式为

$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

则有

$$2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda}\right)+\varphi_0 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)+\phi-\pi$$
$$\varphi_0 = \phi-\pi-4\pi\frac{L}{\lambda}$$

所以反射波的表达式为

$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\left(\phi-\pi-4\pi\frac{L}{\lambda}\right)\right]$$

第 570 题 |【3313】

设入射波的表达式为 $y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$。波在 $x = 0$ 处发生反射，反射点为固定端，则形成的驻波表达式为______。

答案

$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(2\pi ft-\frac{1}{2}\pi\right)$

解析

由入射波的表达式

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

可知入射波在反射点 $x=0$ 的相位为

$$\varphi_{10} = 2\pi ft$$

由于反射点为固定端，所以反射波有半波损失，即反射波在反射点的相位为

$$\varphi_{20} = \varphi_{10} - \pi = 2\pi ft - \pi$$

所以反射波的表达式为

$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)-\pi\right]$$

所以形成的驻波的表达式为

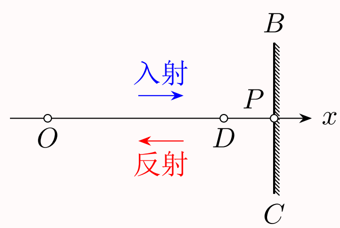
$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= A\cos\left[2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right] + A\cos\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)-\pi\right] \\ &= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(2\pi ft-\frac{1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

这里，半波损失可以用 $-\pi$，也可以用 $+\pi$，所以最后得到的驻波表达式中 $\frac{1}{2}\pi$ 前的正负号可以互换，其实就是两个项同时加一个负号负负得正而已，即

$$\begin{aligned} y &= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(2\pi ft-\frac{1}{2}\pi\right) \\ &= 2A\left[-\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{1}{2}\pi\right)\right]\left[-\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right)\right] \\ &= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(2\pi ft+\frac{1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

第 571 题 |【3111】

如图所示，一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，BC 为波密媒质的反射面。波由 P 点反射，$\overline{OP}=\frac{3}{4}\lambda$，$\overline{DP}=\frac{1}{6}\lambda$。在 $t=0$ 时，O 处质点的合振动是经过平衡位置向负方向运动。求 D 点处入射波与反射波的合振动方程。(设入射波和反射波的振幅皆为 A，频率为 ν)



解答

以 O 点为坐标原点，设入射波和反射波的表达式分别为

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_{10}\right]$$
$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_{20}\right]$$

则入射波和反射波在反射点的相位分别为

$$\varphi_1 = 2\pi\left(ft - \frac{\overline{OP}}{\lambda}\right) + \varphi_{10} = 2\pi\left(ft - \frac{3}{4}\right) + \varphi_{10} = 2\pi ft - \frac{3}{2}\pi + \varphi_{10}$$
$$\varphi_2 = 2\pi\left(ft + \frac{\overline{OP}}{\lambda}\right) + \varphi_{20} = 2\pi\left(ft + \frac{3}{4}\right) + \varphi_{20} = 2\pi ft + \frac{3}{2}\pi + \varphi_{20}$$

由于 BC 为波密媒质的反射面，反射时有半波损失，所以有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi = \left[2\pi ft + \frac{3}{2}\pi + \varphi_{20}\right] - \left[2\pi ft - \frac{3}{2}\pi + \varphi_{10}\right] = 3\pi + \varphi_{20} - \varphi_{10}$$
$$\varphi_{20} = \varphi_{10} - 2\pi$$

所以 O 处质点的合振动的表达式为

$$y_0 = y_{10} + y_{20} = A\cos[2\pi ft + \varphi_{10}] + A\cos[2\pi ft + \varphi_{20}] = 2A\cos[2\pi ft + \varphi_{10}]$$

依题意，$t = 0$ 时 O 处质点经过平衡位置向负方向运动，即

$$y_0 = 2A\cos\varphi_{10} = 0$$
$$v_0 = -4A\pi ft\sin\varphi_{10} < 0$$
$$\varphi_{10} = \frac{1}{2}\pi$$

所以入射波和反射波的表达式分别为

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\pi\right]$$
$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\pi\right]$$

所以 D 点的合振动方程为

$$y_D = y_{1D} + y_{2D} = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{7}{12}\right) + \frac{1}{2}\pi\right] + A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{7}{12}\right) + \frac{1}{2}\pi\right]$$
$$= A\cos\left(2\pi ft - \frac{2}{3}\pi\right) + A\cos\left(2\pi ft + \frac{5}{3}\pi\right) = 2A\cos\left(2\pi ft + \frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$$
$$= -\sqrt{3}A\cos\left(2\pi ft + \frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{3}A\cos\left(2\pi ft + \frac{3}{2}\pi\right)$$

14.5 多普勒效应

第 572 题 |【5523】

设声波在媒质中的传播速度为 u，声源的频率为 f_S。若声源 S 不动，而接收器 R 相对于媒质以速度 v_R 沿着 S、R 连线向着声源 S 运动，则位于 S、R 连线中点的质点 P 的振动频率为

(A) f_S (B) $\frac{u+v_R}{u}f_S$ (C) $\frac{u}{u+v_R}f_S$ (D) $\frac{u}{u-v_R}f_S$

答案

A

解析

接收器探测到的频率为

$$f'=\frac{v'}{\lambda'}=\frac{v\pm v_R}{\lambda\pm v_ST}=\frac{v\pm v_R}{v\pm v_S}f_0$$

- 当波源向着观察者以 v_S 运动时，$\lambda'=\lambda-v_ST=\frac{v-v_S}{f_0}$；
- 当波源背离观察者以 v_S 运动时，$\lambda'=\lambda+v_ST=\frac{v+v_S}{f_0}$；
- 当观察者向着波源以 v_R 运动时，$v'=v+v_R$；
- 当观察者背离波源以 v_R 运动时，$v'=v-v_R$。

但这个题目中问的并不是接收器探测到的频率，而是媒质中质点的运动频率，那就仅仅是波源发出的波传播到媒质中时引起质点的振动，因此其频率仍然是波源的频率。

第 573 题 |【3112】

一机车汽笛频率为 750 Hz，机车以时速 90 公里远离静止的观察者。观察者听到的声音的频率是 (设空气中声速为 340 m/s)

(A) 810 Hz (B) 699 Hz (C) 805 Hz (D) 695 Hz

答案

B

解析

接收器探测到的频率为

$$f'=\frac{v'}{\lambda'}=\frac{v\pm v_R}{\lambda\pm v_ST}=\frac{v\pm v_R}{v\pm v_S}f_0$$

- 当波源向着观察者以 v_S 运动时，$\lambda'=\lambda-v_ST=\frac{v-v_S}{f_0}$；

- 当波源背离观察者以 v_S 运动时，$\lambda' = \lambda + v_S T = \frac{v+v_S}{f_0}$；
- 当观察者向着波源以 v_R 运动时，$v' = v + v_R$；
- 当观察者背离波源以 v_R 运动时，$v' = v - v_R$。

依题意，$f_0 = 750$ Hz，$v_R = 0$，$v_S = 90$ km/h $= 25$ m/s，$v = 340$ m/s，所以，观察者听到的频率为

$$f' = \frac{v}{v+v_S} f_0 = \frac{340}{340+25} \times 750 \approx 699 \text{ Hz}$$

第 574 题 |【3115】

一列火车以 20 m/s 的速度行驶，若机车汽笛的频率为 600 Hz，一静止观测者在机车前和机车后所听到的声音频率分别为_____ 和_____(设空气中声速为 340 m/s)。

答案

637.5 Hz，566.7 Hz

解析

多普勒效应公式

$$f' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v \pm v_R}{\lambda \pm v_S T} = \frac{v \pm v_R}{v \pm v_S} f$$

这里，观察者静止，所以 $v_R = 0$，$v_S = 20$ m/s，$v = 340$ m/s，$f = 600$ Hz，在机车前方，波源向着观察者运动，

$$f' = \frac{v}{v - v_S} f = \frac{340}{340-20} \times 600 = 637.5 \text{ Hz}$$

在机车后方，波源背离观察者运动，

$$f' = \frac{v}{v + v_S} f = \frac{340}{340+20} \times 600 \approx 566.7 \text{ Hz}$$

第五部分

光学

第十六章 光的干涉

16.1 光程

第 575 题 |【3165】

在相同的时间内，一束波长为 λ 的单色光在空气中和在玻璃中

(A) 传播的路程相等，走过的光程相等
(B) 传播的路程相等，走过的光程不相等
(C) 传播的路程不相等，走过的光程相等
(D) 传播的路程不相等，走过的光程不相等

答案

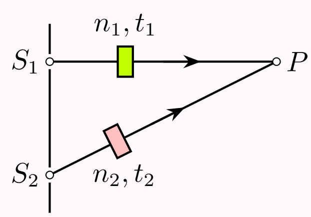
C

解析

光在折射率为 n 的介质中的速度为 $v=\frac{c}{n}$，因此在 t 时间内走过的几何路程为 $r=vt=\frac{ct}{n}$，而物理上把折射率 n 与几何光程 r 的乘积 nr 称为光程，所以 $nr=ct$。所以光在任何介质中在相同时间走过的几何路程与介质的折射率有关，而光程是相同的。

第 576 题 |【3611】

如图，S_1、S_2 是两个相干光源，它们到 P 点的距离分别为 r_1 和 r_2。路径 S_1P 垂直穿过一块厚度为 t_1，折射率为 n_1 的介质板，路径 S_2P 垂直穿过厚度为 t_2，折射率为 n_2 的另一介质板，其余部分可看作真空，这两条路径的光程差等于



(A) $(r_2+n_2t_2)-(r_1+n_1t_1)$
(B) $[r_2+(n_2-1)t_2]-[r_1+(n_1-1)t_1]$
(C) $(r_2-n_2t_2)-(r_1-n_1t_1)$
(D) $n_2t_2-n_1t_1$

答案

B

解析

S_1 到 P 之间的光程为 $r_1-t_1+n_1t_1=r_1+(n_1-1)t_1$，$S_2$ 到 P 之间的光程为 $r_2-t_2+n_2t_2=r_2+(n_2-1)t_2$，所以两条路径的光程差为 $[r_2+(n_2-1)t_2]-[r_1+(n_1-1)t_1]$。

第 577 题 |【3162】

在真空中波长为 λ 的单色光，在折射率为 n 的透明介质中从 A 沿某路径传播到 B，若 A、B 两点相位差为 3π，则此路径 AB 的光程为

(A) 1.5λ　　(B) $\frac{1.5\lambda}{n}$　　(C) $1.5n\lambda$　　(D) 3λ

答案

A

解析

光程与相位差之间的关系为

$$\Delta\varphi=\frac{nr}{\lambda}\times 2\pi$$
$$nr=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda=\frac{3\pi}{2\pi}\lambda=1.5\lambda$$

16.2 分波阵面法的干涉

第 578 题 |【3378】

光强均为 I_0 的两束相干光相遇而发生干涉时，在相遇区域内有可能出现的最大光强是______。

答案

$4I_0$

解析

光强与振幅的平方成正比。两束相干光光强相同，所以振幅也相同，它们发生干涉时，合振幅的最大值为二者振幅之和 (相长干涉)，因此合振幅为每束光的振幅的两倍，因此光强为每束光光强的四倍。

第 579 题 |【3169】

用白光光源进行双缝实验，若用一个纯红色的滤光片遮盖一条缝，用一个纯蓝色的滤光片遮盖另一条缝，则

(A) 干涉条纹的宽度将发生改变 (B) 产生红光和蓝光的两套彩色干涉条纹

(C) 干涉条纹的亮度将发生改变 (D) 不产生干涉条纹

答案

D

解析

两束光能够发生干涉所满足的条件称为相干条件：振动方向相同，频率方向，相位差恒定。红光和蓝光，频率不同，所以不满足相干条件，不发生发干涉。

第 580 题 |【3164】

若一双缝装置的两个缝分别被折射率为 n_1 和 n_2 的两块厚度均为 e 的透明介质所遮盖，此时由双缝分别到屏上原中央极大所在处的两束光的光程差 $\delta =$_____。

答案

$(n_1 - n_2)e$

解析

原中央极大处，两光线的光程相同，光程差为零。两缝被两透明介质遮盖后，两个光路的光程的改变量分别为

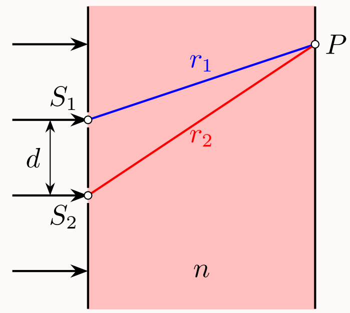
$$\Delta(nr)_1 = (n_1 - 1)e$$
$$\Delta(nr)_2 = (n_2 - 1)e$$

所以光程差为

$$\delta = \Delta(nr)_1 - \Delta(nr)_2 = (n_1 - 1)e - (n_2 - 1)e = (n_1 - n_2)e$$

第 581 题 |【3671】

单色平行光垂直入射到双缝上。观察屏上 P 点到两缝的距离分别为 r_1 和 r_2。设双缝和屏之间充满折射率为 n 的媒质，则 P 点处二相干光线的光程差为_____。



答案

$n(r_2 - r_1)$

解析

光程是指光在真空中走过的路程，当光在介质中传播时，光程等于光在介质中走过的几何路程与介质折射率的乘积，因此光程差为

$$\delta = nr_2 - nr_1 = n(r_2 - r_1)$$

第 582 题 |【3171】

在双缝干涉实验中，两条缝的宽度原来是相等的。若其中一缝的宽度略变窄 (缝中心位置不变)，则

(A) 干涉条纹的间距变宽

(B) 干涉条纹的间距变窄

(C) 干涉条纹的间距不变，但原极小处的强度不再为零

(D) 不再发生干涉现象

答案

C

解析

在双缝干涉实验中，狭缝的宽度本来都是不考虑的，也就是说狭缝的宽度远小于缝之间的距离和缝到屏之间的距离，干涉条纹的分布取决于狭缝之间的距离和缝到接收屏之间的距离，所以缝略变宽或略变窄并不会影响干涉条纹的分布，但是缝的宽度不同，到达屏上时的光强将不同【振幅不等】，因此在原来极小的位置【干涉相消】，总的强度将不再为零。

第 583 题 |【3172】

在双缝干涉实验中，为使屏上的干涉条纹间距变大，可以采取的办法是

(A) 使屏靠近双缝

(B) 使两缝的间距变小

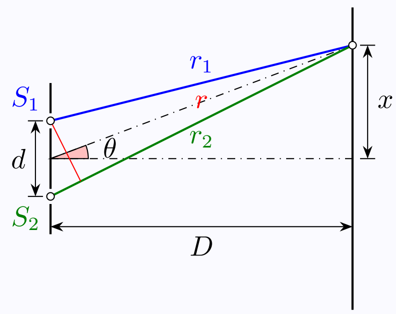
(C) 把两个缝的宽度稍微调窄

(D) 改用波长较小的单色光源

答案

B

解析



光源 S_1、S_2 到屏上某点的光程差为

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d\sin\theta$$

上式近似成立的要求是 $d \ll D$【这是能够观察到明显双缝干涉条纹的条件】，而不管 θ 的取值。而显然有

$$x = D\tan\theta \approx D\theta \approx D\sin\theta$$

上式近似成立的要求是 θ 为小角度。

而屏上暗纹的位置是干涉相消的位置，所以光程差为半波长的奇数倍，即

$$\delta_n = \pm(2n-1)\frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

所以在小角度 θ 的情况下，第 n 级暗纹的位置

$$x_n = D\sin\theta_n = D\frac{\delta_n}{d} = \pm(2n-1)\frac{D\lambda}{2d}$$

所以两个相邻暗纹之间的间距为

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \frac{D\lambda}{d}$$

所以要使屏上的干涉条纹间距变大，应使缝与屏的间距 D 增大；或波长 λ 增大；或缝间距 d 减小。

第 584 题 |【3677】

把双缝干涉实验装置放在折射率为 n 的水中，两缝间距离为 d，双缝到屏的距离为 $D(D \gg d)$，所用单色光在真空中的波长为 λ，则屏上干涉条纹中相邻的明纹之间的距离是

(A) $\frac{\lambda D}{nd}$ (B) $\frac{n\lambda D}{d}$ (C) $\frac{\lambda d}{nD}$ (D) $\frac{\lambda D}{2nd}$

答案

A

解析

当实验装置放在水中时，双缝到干涉点之间的光程差为

$$\delta = nr_2 - nr_1 = n\Delta r \approx nd\sin\theta$$

所以相邻明纹之间的距离为

$$\Delta x = \Delta(D\tan\theta) \approx \Delta(D\sin\theta) = \Delta\left[\frac{D\delta}{nd}\right] = \frac{D(\Delta\delta)}{nd} = \frac{D\lambda}{nd}$$

第 585 题 |【3178】

一双缝干涉装置，在空气中观察时干涉条纹间距为 1.0 mm。若整个装置放在水中，干涉条纹的间距将为______ mm。(设水的折射率为 $\frac{4}{3}$)

答案

0.75

解析

双缝干涉中的光程差为

$$\delta = nd\sin\theta$$

所以有

$$\delta = k\lambda$$

$$x = D\tan\theta \approx D\sin\theta = \frac{D}{nd}k\lambda$$

$$\Delta x = \frac{D}{nd}\lambda$$

所以条纹间距与介质的折射率成反比，因此

$$\Delta x = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}\ \mathrm{mm}$$

第 586 题 |【3500】

在双缝干涉实验中，所用单色光波长为 $\lambda = 562.5\ \mathrm{nm}(1\ \mathrm{nm} = 10^{-9}\ \mathrm{m})$，双缝与观察屏的距离 $D = 1.2\ \mathrm{m}$，若测得屏上相邻明条纹间距为 $\Delta x = 1.5\ \mathrm{mm}$，则双缝的间距 $d =$______。

答案

$4.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$

解析

双缝干涉中的光程差为

$$\delta = nd\sin\theta$$

所以有

$$\delta = k\lambda$$

$$x = D\tan\theta \approx D\sin\theta = \frac{D}{nd}k\lambda$$

$$\Delta x = \frac{D}{nd}\lambda$$

所以

$$d = \frac{D}{n\Delta x}\lambda = \frac{1.2}{1 \times 1.5 \times 10^{-3}} \times 562.5 \times 10^{-9} = 4.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

第 587 题 |【3504】

在双缝干涉实验中，所用光波波长 $\lambda = 5.461 \times 10^{-4}\ \mathrm{mm}$，双缝与屏间的距离 $D = 300\ \mathrm{mm}$，双缝间距为 $d = 0.134\ \mathrm{mm}$，则中央明条纹两侧的两个第三级明条纹之间的距离为______。

答案

$7.34\ \mathrm{mm}$

解析

双缝干涉中的光程差为

$$\delta = nd\sin\theta$$

所以对于明纹有

$$\delta = k\lambda$$

$$x = D\tan\theta \approx D\sin\theta = \frac{D}{nd}k\lambda$$

所以对于第三级明条纹

$$x_3 = \frac{D}{nd} \times 3\lambda = \frac{300}{0.134} \times 3 \times 5.461 \times 10^{-4} \approx 3.67 \text{ mm}$$

中央明条纹两侧的两个第三级明条纹之间的距离为 $2x_3 = 7.34$ mm。

第 588 题 |【3683】

在双缝干涉实验中，双缝间距为 d，双缝到屏的距离为 $D(D \gg d)$，测得中央零级明纹与第五级明纹之间的距离为 x，则入射光的波长为______。

答案

$\frac{dx}{5D}$

解析

双缝干涉中的光程差为

$$\delta = nd\sin\theta$$

所以对于明纹有

$$\delta = k\lambda$$

$$x = D\tan\theta \approx D\sin\theta = \frac{D}{nd}k\lambda$$

所以对于第五级明条纹

$$x_5 = \frac{D}{d} \times 5\lambda = x$$

$$\lambda = \frac{dx}{5D}$$

第 589 题 |【3684】

在双缝干涉实验中，若两缝的间距为所用光波波长的 N 倍，观察屏到双缝的距离为 D，则屏上相邻明纹的间距为______。

答案

$\frac{D}{N}$

解析

双缝干涉中的光程差为

$$\delta = nd\sin\theta$$

所以对于明纹有

$$\delta = k\lambda$$

$$x = D\tan\theta \approx D\sin\theta = \frac{D}{nd}k\lambda$$

$$\Delta x = \frac{D}{nd}\lambda = \frac{D}{N\lambda}\lambda = \frac{D}{N}$$

第 590 题 |【3498】

在双缝干涉实验中，入射光的波长为 λ，用玻璃纸遮住双缝中的一个缝，若玻璃纸中光程比相同厚度的空气的光程大 2.5λ，则屏上原来的明纹处

(A) 仍为明条纹

(B) 变为暗条纹

(C) 既非明纹也非暗纹

(D) 无法确定是明纹，还是暗纹

答案

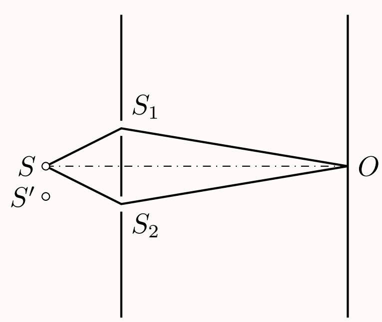
B

解析

这里的明纹一般是指干涉条纹中最亮的地方，即干涉相长的位置，因此两缝到明纹处的相位差为波长的整数倍，即 $\delta = r_2 - r_1 = n\lambda$。现将一缝【假定为 S_1】用玻璃纸遮住，则该缝到原明纹处的光程发生了变化，依题意，$r_1' = r_1 + 2.5\lambda$，所以新的光程差变为 $\delta' = r_2 - r_1' = r_2 - r_1 - 2.5\lambda = (n-2.5)\lambda$，它一定是半波长的奇数倍，所以一定是暗条纹。若被遮的缝为 S_2，则 $r_2' = r_2 + 2.5\lambda$，$\delta' = r_2' - r_1 = r_2 + 2.5\lambda - r_1 = (n+2.5)\lambda$，也是暗条纹。

第 591 题 |【3612】

在双缝干涉实验中，若单色光源 S 到两缝 S_1、S_2 距离相等，则观察屏上中央明条纹位于图中 O 处。现将光源 S 向下移动到示意图中的 S' 位置，则



(A) 中央明条纹也向下移动，且条纹间距不变　(B) 中央明条纹向上移动，且条纹间距不变
(C) 中央明条纹向下移动，且条纹间距增大　(D) 中央明条纹向上移动，且条纹间距增大

答案

B

解析

中央明纹是两束相干光光程差为零的干涉点。光源移到 S' 位置时，S' 到 S_1 的光程大于 S' 到 S_2 的光程，因此 S_1 到新中央明纹的光程要小于 S_2 到新中央明纹的光程，所以中央明纹的位置向上移动。而条纹间距取决于两缝之间的距离 d、缝到屏之间的距离 D 以及所使用的光波的波长 λ，所以本题中以上三者均不变，因此条纹间距不变。

第 592 题 |【3182】

在双缝干涉实验中，波长 $\lambda = 550$ nm 的单色平行光垂直入射到缝间距 $d = 2 \times 10^{-4}$ m 的双缝上，屏到双缝的距离 $D = 2$ m。求：(1) 中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距；(2) 用一厚度为 $e = 6.6 \times 10^{-6}$ m、折射率为 $n = 1.58$ 的玻璃片覆盖一缝后，零级明纹将移到原来的第几级明纹处？($1\ \text{nm} = 10^{-9}$ m)

解答

(1) 双缝干涉实验中，两个缝到干涉点的光程差为

$$\delta = d\sin\theta$$

对于第 10 级明纹中心，有

$$\delta = d\sin\theta = 10\lambda$$
$$\sin\theta = \frac{10\lambda}{d} = \frac{10 \times 5.5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} = 2.75 \times 10^{-2} \approx \theta \approx \tan\theta$$
$$x = D\tan\theta$$
$$\Delta x = 2x = 2D\tan\theta \approx 2D\sin\theta = 2 \times 2 \times 2.75 \times 10^{-2} = 0.11\ \text{m}$$

即中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距约为 0.11 m。
(2) 覆盖玻璃片前后，光程差改变量为

$$\Delta\delta = (n-1)e = k\lambda$$
$$k = \frac{(n-1)e}{\lambda} = \frac{(1.58-1) \times 6.6 \times 10^{-6}}{5.5 \times 10^{-7}} \approx 6.96$$

即干涉条纹移动了将近 7 条，因此零级明纹将移到原来第 7 级明纹处。
注：原题目中厚度为 $e = 6.6 \times 10^{-5}$ m，以此数值算出来的 $k \approx 69.6$，更靠近暗纹处。

16.3 分振幅法的干涉

16.3.1 劈形膜干涉

第 593 题 |【3693】

分别用波长 $\lambda_1 = 500$ nm 与波长 $\lambda_1 = 600$ nm 的平行单色光垂直照射到劈形膜上，劈形膜的折射率为 3.1，膜两侧是同样的媒质，则这两种波长的光分别形成的第七条明纹所对应的膜的厚度之差为_____nm。

答案

104.8

解析

依题意，

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda = 7\lambda$$
$$e = \frac{6.5\lambda}{2n} = \frac{13\lambda}{4n}$$
$$\Delta e = \frac{13\Delta\lambda}{4n} = \frac{13\times(600-500)}{4\times 3.1} \approx 104.8 \text{ nm}$$

第 594 题 |【3510】

折射率分别为 n_1 和 n_2 的两块平板玻璃构成空气劈尖，用波长为 λ 的单色光垂直照射。如果将该劈尖装置浸入折射率为 n 的透明液体中，且 $n_2 > n > n_1$，则劈尖厚度为 e 的地方两反射光的光程差的改变量是_____。

答案

$2(n-1)e \pm \frac{1}{2}\lambda$

解析

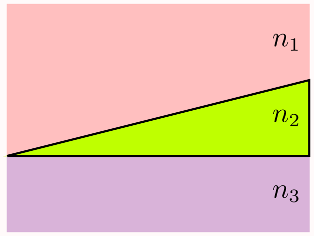
在空气中时，上表面的反射光无半波损失，下表面的反射光有半波损失；在折射率为 n 的透明液体中时，两个表面的反射光均有或均无半波损失，所以两种情况下，额外光程差改变了半个波长。所以，两种情况下总的光程差的改变量为

$$\Delta\delta = 2ne - \left(2e + \frac{1}{2}\lambda\right) = 2(n-1)e - \frac{1}{2}\lambda$$

当然，如果这里半波损失用的是减半个波长，那么结果是加半个波长。

第 595 题 |【3621】

用波长为 λ 的单色光垂直照射如图所示的、折射率为 n_2 的劈形膜 ($n_1 > n_2$，$n_3 > n_2$)，观察反射光干涉。从劈形膜顶开始，第 2 条明条纹对应的膜厚度 $e =$______。



答案

$\frac{3\lambda}{4n_2}$

解析

依题意，上表面，从光密射向光疏，反射光无半波损失；下表面，从光疏射向光密，反射光有半波损失；所以膜厚度为 e 处的光程差为

$$\delta = 2n_2 e + \frac{1}{2}\lambda$$

而对于第 2 条明纹

$$\delta = 2n_2 e + \frac{1}{2}\lambda = 2\lambda$$
$$e = \frac{3\lambda}{4n_2}$$

第 596 题 |【3194】

在空气中有一劈形透明膜，其劈尖角 $\theta = 1.0 \times 10^{-4}$ rad，在波长 $\lambda = 700$ nm 的单色光垂直照射下，测得两相邻干涉明条纹间距 $l = 0.25$ cm，由此可知此透明材料的折射率 $n =$______。

答案

1.4

解析

依题意，有

$$2nl\tan\theta = \lambda$$

$$n = \frac{\lambda}{2l\tan\theta} \approx \frac{\lambda}{2l\theta} = \frac{7 \times 10^{-7}}{2 \times 0.25 \times 10^{-2} \times 1.0 \times 10^{-4}} = 1.4$$

第 597 题 |【3622】

用波长为 λ 的单色光垂直照射折射率为 n 的劈形膜形成等厚干涉条纹，若测得相邻明条纹的间距为 l，则劈尖角 $\theta =$______。

答案

$\frac{\lambda}{2nl}$

解析

依题意，相邻两条纹之间的光程差为

$$\Delta\delta = 2n\Delta e = \lambda$$

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta e}{l} = \frac{\lambda}{2nl} \approx \theta$$

第 598 题 |【3699】

波长为 λ 的平行单色光垂直照射到劈形膜上，劈尖角为 θ，劈形膜的折射率为 n，第 k 级明条纹与第 $k+5$ 级明纹的间距是______。

答案

$\frac{5\lambda}{2n\theta}$

解析

依题意，

$$\Delta\delta = 2n\Delta e = 5\lambda$$

$$\Delta e = \frac{5\lambda}{2n}$$

$$l = \frac{\Delta e}{\tan\theta} \approx \frac{\Delta e}{\theta} = \frac{5\lambda}{2n\theta}$$

第 599 题 |【3660】

用波长为 500 nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色光垂直照射到由两块光学平玻璃构成的空气劈形膜上。在观察反射光的干涉现象中，距劈形膜棱边 $l = 1.56$ cm 的 A 处是从棱边算起的第四条暗条纹中心。(1) 求此空气劈形膜的劈尖角 θ；(2) 改用 600 nm 的单色光垂直照射到此劈尖上仍观察反射光的干涉条纹，A 处是明条纹还是暗条纹？(3) 在第 (2) 问的情形从棱边到 A 处的范围内共有几条明纹？几条暗纹？

解答

(1) 依题意，A 处的光程差为

$$\delta = 2e + \frac{1}{2}\lambda = \left(3 + \frac{1}{2}\right)\lambda$$
$$e = \frac{3\lambda}{2} = 1.5 \times 5 \times 10^{-7} = 7.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = l\sin\theta$$
$$\sin\theta = \frac{e}{l} = \frac{7.5 \times 10^{-7}}{0.0156} \approx 4.8 \times 10^{-5}$$
$$\theta \approx \sin\theta = 4.8 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad}$$

(2) 改用 600 nm 的单色光垂直照射时，A 处的光程差为

$$\delta = 2e + \frac{1}{2}\lambda = k\lambda$$
$$k = \frac{2e}{\lambda} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 7.5 \times 10^{-7}}{6 \times 10^{-7}} + \frac{1}{2} = 3$$

所以 A 处是明条纹。

(3) 由于半波损失，棱边处是暗纹。所以第 (2) 问中，从棱边开始到 A 处，共有 3 条暗纹 (含棱边处的暗纹)，3 条明纹。【零级暗纹，一级明纹，一级暗纹，二级明纹，二级暗纹，三级明纹】

第 600 题 |【5325】

两块平玻璃构成空气劈形膜，左边为棱边，用单色平行光垂直入射。若上面的平玻璃慢慢地向上平移，则干涉条纹

(A) 向棱边方向平移，条纹间隔变小　　(B) 向棱边方向平移，条纹间隔变大

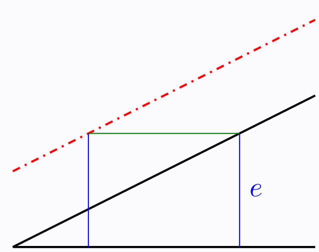
(C) 向棱边方向平移，条纹间隔不变　　(D) 向远离棱边的方向平移，条纹间隔不变

(E) 向远离棱边的方向平移，条纹间隔变小

答案

C

解析



上平玻璃向上平移的过程中，薄膜厚度逐渐增大，而同一级条纹对应的光程差相同，薄膜厚度相同，所以条纹向左侧棱边平移，即原来右边的条纹 (薄膜厚度较大) 移到左边的位置。而对于玻璃的两边，薄

膜的厚度差不变，所以光程差的变化量相同。两个相邻条纹之间对应的光程差相差一个波长，所以整个视场中条纹的数目保持不变，所以条纹的间隔保持不变。

第 601 题 |【5326】

两块平玻璃构成空气劈形膜，左边为棱边，用单色平行光垂直入射。若上面的平玻璃以棱边为轴，沿逆时针方向作微小转动，则干涉条纹的

(A) 间隔变小，并向棱边方向平移

(B) 间隔变大，并向远离棱边方向平移

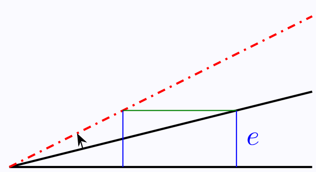
(C) 间隔不变，向棱边方向平移

(D) 间隔变小，并向远离棱边方向平移

答案

A

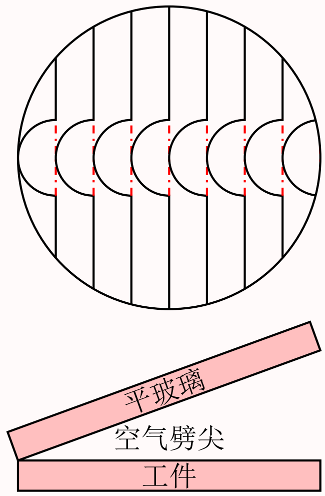
解析



上平玻璃转动的过程中，薄膜厚度逐渐增大，而同一级条纹对应的光程差相同，薄膜厚度相同，所以条纹向左侧棱边平移，即原来右边的条纹 (薄膜厚度较大) 移到左边的位置。而对于玻璃的同一位置，薄膜的厚度变大，所以光程差变大。两个相邻条纹之间对应的光程差相差一个波长，所以从棱边到该位置的条纹的数目增加，所以条纹的间隔变小。

第 602 题 |【3188】

用劈尖干涉法可检测工件表面缺陷，当波长为 λ 的单色平行光垂直入射时，若观察到的干涉条纹如图所示，每一条纹弯曲部分的顶点恰好与其左边条纹的直线部分的连线相切，则工件表面与条纹弯曲处对应的部分

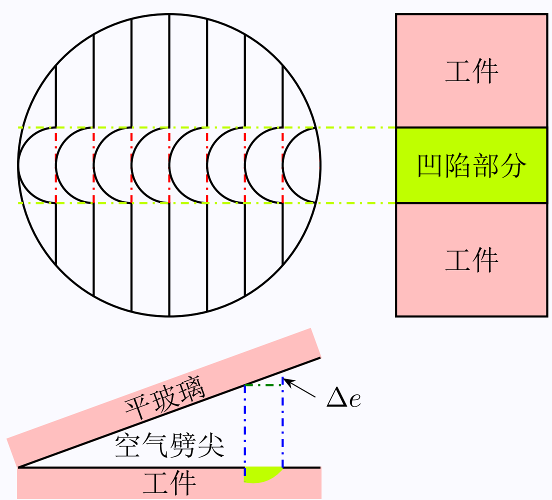


(A) 凸起，且高度为 $\frac{1}{4}\lambda$　(B) 凸起，且高度为 $\frac{1}{2}\lambda$　(C) 凹陷，且深度为 $\frac{1}{2}\lambda$　(D) 凹陷，且深度为 $\frac{1}{4}\lambda$

答案

C

解析



同一个条纹对应的光程差相同，相邻条纹，光程差相差一个波长。对于空气膜的等厚干涉，光程差 δ 与薄膜厚度 e 之间的关系为

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda$$

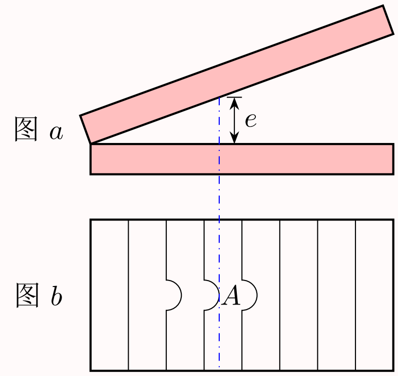
对于空气膜，折射率 $n = 1$。上表面为玻璃板，是标准的平面，下表面为工件，可能存在各种缺陷。

$$\Delta\delta = 2n(\Delta e) = \lambda$$

$$\Delta e = \frac{1}{2n}\lambda$$

第 603 题 |【3509】

图 a 为一块光学平板玻璃与一个加工过的平面一端接触，构成的空气劈尖，用波长为 λ 的单色光垂直照射。看到反射光干涉条纹 (实线为暗条纹) 如图 b 所示。则干涉条纹上 A 点处所对应的空气薄膜厚度为 $e=$______。



答案

$\frac{3\lambda}{2}$

解析

依题意，A 点与左侧边缘的干涉条纹相隔三条，而两相邻条纹之间的光程差为一个波长，因此二者的光程差相差为三个波长，即

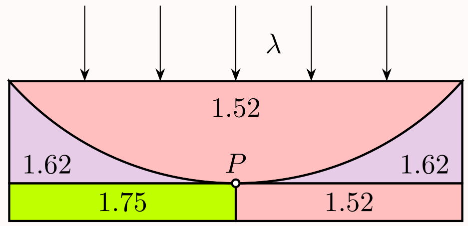
$$\Delta\delta = 2e = 3\lambda$$

$$e = \frac{3\lambda}{2}$$

16.3.2 牛顿环

第 604 题 |【3185】

在图示三种透明材料构成的牛顿环装置中，用单色光垂直照射，在反射光中看到干涉条纹，则在接触点 P 处形成的圆斑为



图中数字为各处的折射率

(A) 全明　　(B) 全暗

(C) 右半部明，左半部暗　　(D) 右半部暗，左半部明

答案

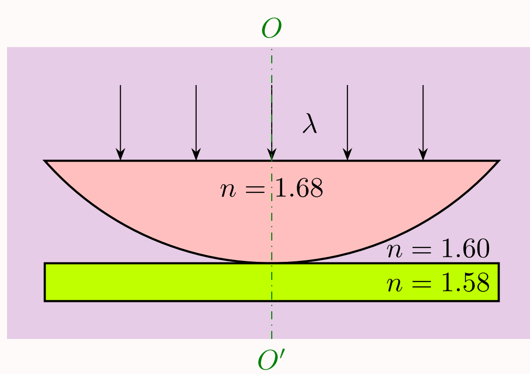
D

解析

靠近接触点附近，薄膜厚度趋近于零，因此光程差为零。左半部分，上下两个表面的反射都是从光疏射向光密，都有半波损失，所以总的光程差还是零，因此是相长干涉，是明纹；右半部分，上表面是从光疏射向光密，反射有半波损失，下表面是光密射向光疏，无半波损失，所以总的光程差为 π，因此是相消干涉，是暗纹。

第 605 题 |【3507】

如图所示，平板玻璃和凸透镜构成牛顿环装置，全部浸入 $n = 1.60$ 的液体中，凸透镜可沿 OO' 移动，用波长 $\lambda = 500$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色光垂直入射。从上向下观察，看到中心是一个暗斑，此时凸透镜顶点距平板玻璃的距离最少是



(A) 156.3 nm　　(B) 148.8 nm　　(C) 78.1 nm　　(D) 74.4 nm　　(E) 0

答案

C

解析

两个表面的反射都是从光密射向光疏，因此都没有半波损失，所以没有额外光程差，即光程差为

$$\delta = 2ne$$

依题意，中心处为暗斑，所以

$$\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k = 0, 1, 2, \cdots$$
$$e_k = \frac{2k+1}{4n}\lambda$$

当 $k = 0$ 时，液体膜厚度最小，为

$$e_0 = \frac{1}{4n}\lambda = \frac{1}{4 \times 1.60} \times 500 \times 10^{-9} \approx 78.1 \times 10^{-9}\ \text{m} = 78.1\ \text{nm}$$

第 606 题 |【7946】

一平凸透镜，凸面朝下放在一平玻璃板上。透镜刚好与玻璃板接触。波长分别为 $\lambda_1 = 600$ nm 和 $\lambda_2 = 500$ nm 的两种单色光垂直入射，观察反射光形成的牛顿环。从中心向外数的两种光的第五个明环所对应的空气膜厚度之差为_____nm。

答案

225

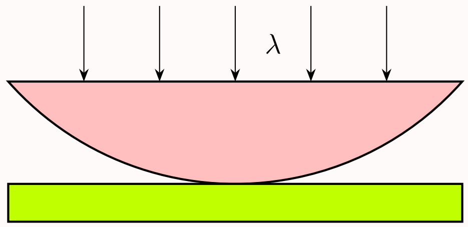
解析

依题意，

$$\delta = 2e + \frac{1}{2}\lambda = 5\lambda$$
$$e = \frac{4.5\lambda}{2} = \frac{9\lambda}{4}$$
$$\Delta e = \frac{9\Delta\lambda}{4} = \frac{9 \times (600 - 500)}{4} = 225\ \text{nm}$$

第 607 题 |【3189】

用波长为 λ 的单色光垂直照射如图所示的牛顿环装置，观察从空气膜上下表面反射的光形成的牛顿环。若使平凸透镜慢慢地垂直向上移动，从透镜顶点与平面玻璃接触到两者距离为 d 的移动过程中，移过视场中某固定观察点的条纹数目等于_____。



答案

$\frac{2d}{\lambda}$

解析

在透镜移动的过程中，任意一个位置两束反射光的光程差的变化量为

$$\Delta\delta = 2d$$

而移动一个条纹，光程差变化量为一个波长，所以

$$\Delta\delta = (\Delta k)\lambda$$
$$\Delta k = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda}$$

第 608 题 |【3187】

若把牛顿环装置 (都是用折射率为 1.52 的玻璃制成的) 由空气搬入折射率为 1.33 的水中，则干涉条纹
(A) 中心暗斑变成亮斑 (B) 变疏 (C) 变密 (D) 间距不变

答案

C

解析

不管是在空气中，还是在水中，反射光干涉中都有半波损失，因此两束光的光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda$$

中心处，薄膜厚度 $e = 0$，所以一直是相消干涉，中心一直是暗斑。而考虑到透镜的曲率半径 R 远大于薄膜厚度 e，因此干涉条纹的半径

$$r = \sqrt{R^2 - (R-e)^2} \approx \sqrt{2Re}$$

对于明纹

$$\delta = k\lambda, k = 1, 2, 3, \cdots$$

$$e_k = \frac{2k-1}{4n}\lambda$$

$$r_k = \sqrt{\frac{2k-1}{2n}R\lambda} = \sqrt{2k-1}\sqrt{\frac{1}{2n}R\lambda}$$

$$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k = (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})\sqrt{\frac{1}{2n}R\lambda}$$

从空气变成水，n 变大，所以条纹间距 Δr_k 变小。

第 609 题 |【5324】

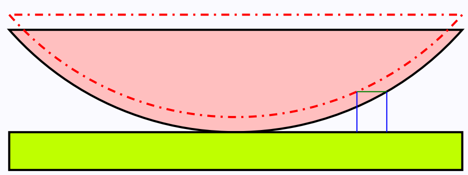
把一平凸透镜放在平玻璃上，构成牛顿环装置。当平凸透镜慢慢地向上平移时，由反射光形成的牛顿环

(A) 向中心收缩，条纹间隔变小
(B) 向中心收缩，环心呈明暗交替变化
(C) 向外扩张，环心呈明暗交替变化
(D) 向外扩张，条纹间隔变大

答案

B

解析



平凸透镜向上平移的过程中，薄膜厚度逐渐增大，而同一级条纹对应的光程差相同，薄膜厚度相同，所以条纹向中心收缩，即原来半径较大的条纹移到半径较小的位置。对于环心处，随着薄膜厚度的增加，光程差时而变成半波长的奇数倍，时而变成波长的整数倍，所以环心明暗交替变化。而对于环心和环边缘，薄膜的厚度差不变，所以光程差的变化量相同。两个相邻条纹之间对应的光程差相差一个波长，所以整个视场中条纹的数目保持不变，所以条纹的间隔保持不变。

第 610 题 |【3689】

在牛顿环实验装置中，曲率半径为 R 的平凸透镜与平玻璃板在中心恰好接触，它们之间充满折射率为 n 的透明介质，垂直入射到牛顿环装置上的平行单色光在真空中的波长为 λ，则反射光形成的干涉条纹中暗环半径 r_k 的表达式为

(A) $r_k = \sqrt{k\lambda R}$
(B) $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R}{n}}$
(C) $r_k = \sqrt{kn\lambda R}$
(D) $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{nR}}$

答案

B

解析

若介质的折射率小于玻璃的折射率，则上表面的反射是从光密射出光疏，无半波损失，下表面由光疏射向光密，有半波损失；若介质的折射率大于玻璃的折射率，则上表面由光疏射向光密，有半波损失，下表面的反射是从光密射出光疏，无半波损失；所以不管是哪种情况，都有额外的半个波长的光程差，因此牛顿环中光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda$$

对于暗纹，有

$$\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$e_k = \frac{k}{2n}\lambda$$

考虑到薄膜厚度远小于透镜的曲率半径，即 $e \ll R$，所以有

$$r_k = \sqrt{R^2 - (R - e_k)^2} \approx \sqrt{2Re_k} = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$$

第 611 题 |【3190】

一个平凸透镜的顶点和一平板玻璃接触，用单色光垂直照射，观察反射光形成的牛顿环，测得中央暗斑外第 k 个暗环半径为 r_1。现将透镜和玻璃板之间的空气换成某种液体 (其折射率小于玻璃的折射率)，第 k 个暗环的半径变为 r_2，由此可知该液体的折射率为______。

答案

$\frac{r_1^2}{r_2^2}$

解析

对于折射率小于玻璃的折射率的任何介质，牛顿环实验中都有额外的半波损失，因此光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda$$

对于第 k 个暗环，有

$$\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$2ne = k\lambda$$

$$e_k = \frac{k\lambda}{2n}$$

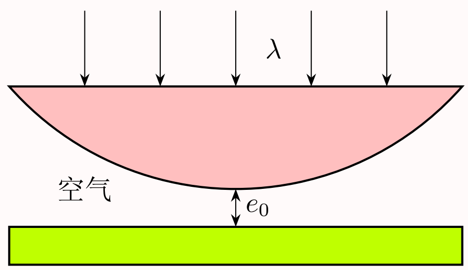
$$r_k = \sqrt{R^2 - (R - e_k)^2} \approx \sqrt{2Re_k} = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$$

所以，依题意，有

$$r_1 = \sqrt{kR\lambda}$$
$$r_2 = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$$
$$n = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

第 612 题 |【3198】

如图所示，牛顿环装置的平凸透镜与平板玻璃有一小缝隙 e_0。现用波长为 λ 的单色光垂直照射，已知平凸透镜的曲率半径为 R，求反射光形成的牛顿环的各暗环半径。



解答

依题意，任意薄膜厚度 e 处的光程差为

$$\delta = 2e + \frac{1}{2}\lambda$$

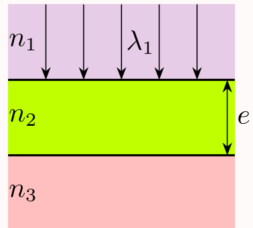
对于暗纹，有

$$\delta = 2e + \frac{1}{2}\lambda = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$
$$2e = k\lambda$$
$$e_k = \frac{k\lambda}{2} \geqslant e_0, k \geqslant \frac{2e_0}{\lambda}$$
$$r_k = \sqrt{R^2 - [R - (e_k - e_0)]^2} \approx \sqrt{2R(e_k - e_0)} = \sqrt{R(k\lambda - 2e_0)}$$

16.3.3 平行膜干涉

第 613 题 |【3664】

如图所示，平行单色光垂直照射到薄膜上，经上下两表面反射的两束光发生干涉，若薄膜的厚度为 e，并且 $n_1 < n_2 > n_3$，λ_1 为入射光在折射率为 n_1 的媒质中的波长，则两束反射光在相遇点的相位差为



(A) $\frac{2\pi n_2 e}{n_1\lambda_1}$ (B) $\frac{4\pi n_1 e}{n_2\lambda_1}+\pi$ (C) $\frac{4\pi n_2 e}{n_1\lambda_1}+\pi$ (D) $\frac{4\pi n_2 e}{n_1\lambda_1}$

答案

C

解析

当光从光疏介质射向光密介质时，在界面处发生反射，将有半波损失，因此在上表面，$n_1<n_2$，反射有半波损失，在下表面，$n_2>n_3$，反射无半波损失。所以两束反射光的光程差为 $\Delta(nr)=2n_2e+\frac{\lambda}{2}$，它所对应的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta(nr)}{\lambda}\times 2\pi$$

其中 λ 为光在真空中的波长。而光在不同介质中频率 f 保持不变，因此周期 T 不变，但光传播的速度 $v=\frac{c}{n}$ 会随介质而不同，所以光在介质中的波长

$$\lambda_n=vT=\frac{cT}{n}$$

即波长与折射率成反比，所以真空中的波长

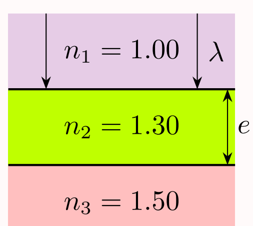
$$\lambda=cT=n_1\lambda_1$$

所以总的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta(nr)}{\lambda}\times 2\pi=\frac{4\pi n_2 e}{n_1\lambda_1}+\pi$$

第 614 题 |【3619】

波长为 λ 的单色光垂直照射如图所示的透明薄膜。膜厚度为 e，两束反射光的光程差 $\delta=$______。



答案

$2.60e$

解析

当光从光疏介质射向光密介质时，在介质界面处发生的反射有半波损失，所以题中上表面发生的反射有半波损失，下表面发生的反射也有半波损失，所以两束反射光没有额外的光程差，因此总的光程差为

$$\delta = 2n_2e = 2.60e$$

第 615 题 |【3186】

一束波长为 λ 的单色光由空气垂直入射到折射率为 n 的透明薄膜上，透明薄膜放在空气中，要使反射光得到干涉加强，则薄膜最小的厚度为

(A) $\frac{1}{4}\lambda$　(B) $\frac{1}{4n}\lambda$　(C) $\frac{1}{2}\lambda$　(D) $\frac{1}{2n}\lambda$

答案

B

解析

要使反射光干涉加强，即要使干涉相长，所以两束光的光程差要为波长的整数倍，注意这里有半波损失，所以

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda = k\lambda, k = 1, 2, 3, \cdots$$
$$e = \frac{2k-1}{4n}\lambda, k = 1, 2, 3, \cdots$$

所以薄膜的最小厚度为 $k = 1$ 时的 e，即 $e_{\min} = \frac{1}{4n}\lambda$。

第 616 题 |【5208】

在玻璃 (折射率 $n_3 = 1.60$) 表面镀一层 MgF_2(折射率 $n_2 = 1.38$) 薄膜作为增透膜。为了使波长为 500 nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的光从空气 ($n_1 = 1.00$) 正入射时尽可能少反射，MgF_2 薄膜的最少厚度应是

(A) 78.1 nm　(B) 90.6 nm　(C) 125 nm　(D) 181 nm　(E) 250 nm

答案

B

解析

要使尽可能少反射，即要求反射时干涉相消。这里两个反射都是从光疏射向光密，因此都有半波损失，所以总的额外光程差为零，所以总的光程差为

$$\delta = 2n_2e = \frac{2k+1}{2}\lambda, k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$
$$e_k = \frac{2k+1}{4n_2}\lambda$$
$$e_{\min} = e_0 = \frac{1}{4n_2}\lambda = \frac{1}{4\times 1.38}\times 500 \approx 90.6 \text{ nm}$$

第 617 题 |【7936】

由两块玻璃片 ($n_1 = 1.75$) 所形成的空气劈形膜，其一端厚度为零，另一端厚度为 0.002 cm。现用波长为 700 nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色平行光，沿入射角为 30° 角的方向射在膜的上表面，则形成的干涉条纹数为

(A) 27 (B) 40 (C) 56 (D) 100

答案

A

解析

虽然题目给的是劈形膜，但入射光不是垂直入射，而是有一定倾角，所以考虑光程差时要用等倾干涉的公式，而不能使用等厚干涉的公式。

考虑厚度为 $e = 2\times 10^{-5}$ m 的空气膜，当入射光线的入射角为 30° 时，两束相干光的光程差为

$$\delta = 2\frac{e}{\cos\gamma} - 2n_1e\tan\gamma\sin i + \frac{1}{2}\lambda = 2e\cos\gamma + \frac{1}{2}\lambda$$

其中

$$\frac{\sin i}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$
$$\sin\gamma = n_1\sin i = \frac{7}{8}, \cos\gamma = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

所以玻璃片两端光程差的差为

$$\Delta\delta = 2e\cos\gamma$$

而相邻两个条纹所对应的光程差的差为一个波长，所以，总的干涉条纹数为

$$k = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{2e\cos\gamma}{\lambda} = \frac{2\times 2\times 10^{-5}\times\frac{\sqrt{15}}{8}}{7\times 10^{-7}} = \frac{50\sqrt{15}}{7} \approx 27.66$$

第 618 题 |【7938】

空气中一玻璃劈形膜其一端厚度为零另一端厚度为 0.005 cm，折射率为 1.5。现用波长为 600 nm(1 nm = 10^{-9} m) 的单色平行光，沿入射角为 30° 角的方向射到劈的上表面，则在劈形膜上形成的干涉条纹数目为______。

答案

235

解析

虽然题目给的是劈形膜，但入射光不是垂直入射，而是有一定倾角，所以考虑光程差时要用等倾干涉的公式，而不能使用等厚干涉的公式。
考虑厚度为 $e = 5 \times 10^{-5}$ m 的玻璃膜，当入射光线的入射角为 30° 时，两束相干光的光程差为

$$\delta = 2n_1 \frac{e}{\cos\gamma} - 2e\tan\gamma\sin i + \frac{1}{2}\lambda = 2n_1 e\cos\gamma + \frac{1}{2}\lambda$$

其中

$$\frac{\sin i}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{1}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin i}{n_1} = \frac{\sin 30°}{1.5} = \frac{1}{3}, \cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

所以玻璃片两端光程差的差为

$$\Delta\delta = 2n_1 e\cos\gamma$$

而相邻两个条纹所对应的光程差的差为一个波长，所以，总的干涉条纹数为

$$k = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{2n_1 e\cos\gamma}{\lambda} = \frac{2 \times 1.5 \times 5 \times 10^{-5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}}{6 \times 10^{-7}} = \frac{500\sqrt{2}}{3} \approx 235.7$$

16.3.4 迈克耳孙干涉仪

第 619 题 |【3200】

在迈克耳孙干涉仪的一条光路中，放入一折射率为 n，厚度为 d 的透明薄片，放入后，这条光路的光程改变了

(A) $2(n-1)d$ (B) $2nd$ (C) $2(n-1)d + \frac{1}{2}\lambda$ (D) nd

(E) $(n-1)d$

答案

A

解析

该部分光路，原来的光程为 $2d$，新的光程为 $2nd$，所以光程的改变量为 $2(n-1)d$。

第 620 题 |【3516】

在迈克耳孙干涉仪的一支光路中，放入一片折射率为 n 的透明介质薄膜后，测出两束光的光程差的改变量为一个波长 λ，则薄膜的厚度是

(A) $\frac{1}{2}\lambda$ (B) $\frac{1}{2n}\lambda$ (C) $\frac{1}{n}\lambda$ (D) $\frac{1}{2(n-1)}\lambda$

答案

D

解析

如果插入的薄膜的厚度为 d，则该部分光路原来的光程为 $2d$，新的光程为 $2nd$，所以光程的改变量为 $2(n-1)d$。依题意，有

$$\Delta\delta = 2(n-1)d = \lambda$$
$$d = \frac{\lambda}{2(n-1)}$$

第 621 题 |【3517】

在迈克耳孙干涉仪的一支光路上，垂直于光路放入折射率为 n、厚度为 h 的透明介质薄膜。与未放入此薄膜时相比较，两光束光程差的改变量为______。

答案

$2(n-1)h$

解析

其他光路不变，所以其他的光程也不变，变化的仅仅是薄膜所在部分，未放入薄膜时，该部分光程为 $\delta_1 = 2h$，放入薄膜后，该部分的光程为 $\delta_2 = 2nh$，所以光程差的改变量为

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = 2(n-1)h$$

第 622 题 |【3203】

用迈克耳孙干涉仪测微小的位移。若入射光波波长 $\lambda = 628.9$ nm，当动臂反射镜移动时，干涉条纹移动了 2048 条，反射镜移动的距离 $d =$______。

答案

6.44×10^{-4} m

解析

迈克耳孙干涉仪的可动反射镜 M 移动 d，则光程差改变了

$$\Delta\delta=2d$$

而干涉条纹移动一条，光程差改变一个波长，所以

$$\Delta\delta=2048\lambda=2d$$
$$d=1024\lambda=1024\times6.289\times10^{-7}\approx6.44\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

第 623 题 |【3711】

已知在迈克耳孙干涉仪中使用波长为 λ 的单色光。在干涉仪的可动反射镜移动距离 d 的过程中，干涉条纹将移动______ 条。

答案

$\frac{2d}{\lambda}$

解析

可动反射镜移动距离 d 时，该支路的光路改变 $\Delta(nr)=2d$，而另一支路的光程没有发生变化，所以两个支路的光程差的改变量为

$$\Delta\delta=2d$$

而干涉条纹移动一条，对应的光程差改变量为一个波长，所以有

$$\Delta\delta=k\lambda$$
$$k=\frac{\Delta\delta}{\lambda}=\frac{2d}{\lambda}$$

第 624 题 |【3201】

若在迈克耳孙干涉仪的可动反射镜 M 移动 0.620 mm 过程中，观察到干涉条纹移动了 2300 条，则所用光波的波长为______nm。(1 nm = 10^{-9} m)

答案

539.1

解析

迈克耳孙干涉仪的可动反射镜 M 移动 0.620 mm，则光程差改变了

$$\Delta\delta = 2\Delta l = 1.24 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

而干涉条纹移动一条，光程差改变一个波长，所以

$$\Delta\delta = 2300\lambda$$

$$\lambda = \frac{\Delta\delta}{2300} = \frac{1.24 \times 10^{-3}}{2300} \approx 5.391 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = 539.1\ \mathrm{nm}$$

第 625 题 |【3713】

在迈克耳孙干涉仪的可动反射镜移动了距离 d 的过程中，若观察到干涉条纹移动了 N 条，则所用光波的波长 $\lambda =$______。

答案

$\frac{2d}{N}$

解析

可动反射镜移动距离 d 时，该支路的光路改变 $\Delta(nr) = 2d$，而另一支路的光程没有发生变化，所以两个支路的光程差的改变量为

$$\Delta\delta = 2d$$

而干涉条纹移动一条，对应的光程差改变量为一个波长，所以有

$$\Delta\delta = N\lambda$$

$$\lambda = \frac{\Delta\delta}{N} = \frac{2d}{N}$$

第十七章 光的衍射

17.1 惠更斯-菲涅耳原理

第 626 题 |【3520】

根据惠更斯——菲涅耳原理，若已知光在某时刻的波阵面为 S，则 S 的前方某点 P 的光强度决定于波阵面 S 上所有面积元发出的子波各自传到 P 点的

(A) 振动振幅之和
(B) 光强之和
(C) 振动振幅之和的平方
(D) 振动的相干叠加

答案

D

解析

同一时刻波阵面上各个面积元都可以视为相干波源，它们所发出的子波会发生相干叠加，叠加的结果决定了振动的合振幅，进而决定了光强。

17.2 单缝夫琅禾费衍射

第 627 题 |【3353】

在单缝夫琅禾费衍射实验中，波长为 λ 的单色光垂直入射在宽度为 $a = 4\lambda$ 的单缝上，对应于衍射角为 30° 的方向，单缝处波阵面可分成的半波带数目为

(A) 2 个
(B) 4 个
(C) 6 个
(D) 8 个

答案

B

解析

依题意，狭缝上下两端到衍射点最大的光程差为

$$\delta = a\sin\theta = 2\lambda$$

而半波带法是以半个波长的光程差为一个单位进行划分波阵面的，所以狭缝处波阵面可划分的半波带的个数为 4 个。

第 628 题 |【3207】

在单缝的夫琅禾费衍射实验中，屏上第三级暗纹对应于单缝处波面可划分为______ 个半波带，若将缝宽缩小一半，原来第三级暗纹处将是______ 纹。

答案

6，明

解析

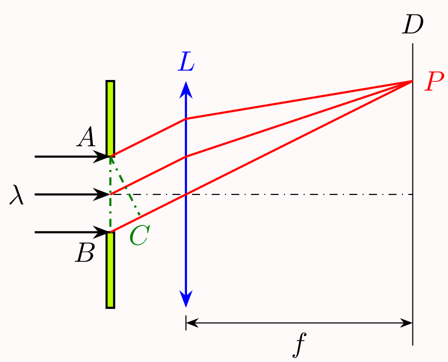
两个半波带之前都是中央明纹，两个半波带的时候是第一级暗纹，四个半波带时是第二级暗纹，六个半波带时是第三级暗纹。

$$\delta = a\sin\theta = k\frac{\lambda}{2}$$

如前所述，对于第三级暗纹，$k=6$。若将缝宽缩小一半，即 $a'=\frac{a}{2}$，则 $k'=\frac{k}{2}=3$，对应明纹。

第 629 题 |【3355】

一束波长为 λ 的平行单色光垂直入射到一单缝 AB 上，装置如图。在屏幕 D 上形成衍射图样，如果 P 是中央亮纹一侧第一个暗纹所在的位置，则 $\overline{BC}$ 的长度为



(A) $\frac{1}{2}\lambda$ (B) λ (C) $\frac{3}{2}\lambda$ (D) 2λ

答案

B

解析

依题意，狭缝上下两端到衍射点最大的光程差为

$$\delta = a\sin\theta = \overline{BC}$$

而半波带法是以半个波长的光程差为一个单位进行划分波阵面的，依题意，P 是中央亮纹一侧第一个暗纹所在的位置，所以狭缝处波阵面可划分的半波带的个数为 $k=2$，因此

$$\overline{BC} = \delta = k\frac{\lambda}{2} = \lambda$$

第 630 题 |【3523】

波长为 λ 的单色平行光垂直入射到一狭缝上，若第一级暗纹的位置对应的衍射角为 $\theta=\pm\frac{1}{6}\pi$，则缝宽的大小为

(A) $\frac{1}{2}\lambda$　　(B) λ　　(C) 2λ　　(D) 3λ

答案

C

解析

根据半波带法，一级暗纹对应两条半波带，所以有

$$\delta = a\sin\theta = k\frac{\lambda}{2}$$

$$a = \frac{k\frac{\lambda}{2}}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{1/2} = 2\lambda$$

第 631 题 |【3633】

将波长为 λ 的平行单色光垂直投射于一狭缝上，若对应于衍射图样的第一级暗纹位置的衍射角的绝对值为 θ，则缝的宽度等于______。

答案

$\frac{\lambda}{\sin\theta}$

解析

依题意，有

$$\delta = a\sin\theta = 2\times\frac{\lambda}{2} = \lambda$$

$$a = \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

第 632 题 |【3720】

若对应于衍射角 $\theta = 30°$，单缝处的波面可划分为 4 个半波带，则单缝的宽度 $a =$______λ。(λ 为入射光波长)。

答案

4

解析

依题意，有

$$\delta = a\sin\theta = 4 \times \frac{\lambda}{2} = 2\lambda$$
$$a = \frac{2\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\lambda}{\sin 30°} = 4\lambda$$

第 633 题 |【3742】

在单缝夫琅禾费衍射实验中，波长为 λ 的单色光垂直入射在宽度 $a = 5\lambda$ 的单缝上。对应于衍射角 θ 的方向上若单缝处波面恰好可分成 5 个半波带，则衍射角 $\theta =$______。

答案

$30°$

解析

依题意，有

$$\delta = a\sin\theta = 5 \times \frac{\lambda}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{5\lambda}{2a} = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 30°$$

第 634 题 |【3631】

在夫琅禾费单缝衍射实验中，对于给定的入射单色光，当缝宽度变小时，除中央亮纹的中心位置不变外，各级衍射条纹

(A) 对应的衍射角变小

(B) 对应的衍射角变大

(C) 对应的衍射角也不变

(D) 光强也不变

答案

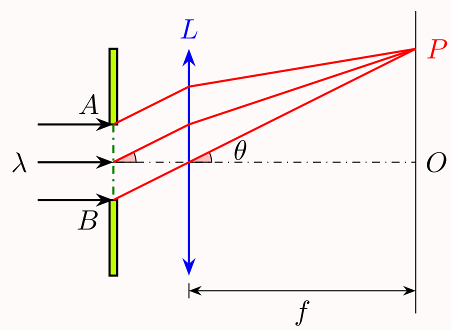
B

解析

同一个衍射条纹，对应的半波带的数目相同，入射单色光给定，波长不变，则最大光程差不变，狭缝宽度 a 变小，则对应的 $\sin\theta$ 要变大，因此对应的衍射角变大。而狭缝宽度变小，划分成相同数目的半波带时，单个半波带对应的狭缝宽度变小，因此光强变弱。

第 635 题 |【5219】

波长为 $\lambda = 480.0$ nm 的平行光垂直照射到宽度为 $a = 0.40$ mm 的单缝上，单缝后透镜的焦距为 $f = 60$ cm，当单缝两边缘点 A、B 射向 P 点的两条光线在 P 点的相位差为 π 时，P 点离透镜焦点 O 的距离等于______。



答案

0.36 mm

解析

当两束光的相位差为 π 时，二者的光程差为半个波长，所以依题意，有

$$\delta = a\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2a}$$

$$x = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\frac{\lambda}{2a} = 0.6 \times \frac{4.8\times 10^{-7}}{2\times 4\times 10^{-4}} = 0.36\times 10^{-3}\ \text{m} = 0.36\ \text{mm}$$

第 636 题 |【3718】

在单缝夫琅禾费衍射实验中，若增大缝宽，其他条件不变，则中央明条纹

(A) 宽度变小　　(B) 宽度变大

(C) 宽度不变，且中心强度也不变　　(D) 宽度不变，但中心强度增大

答案

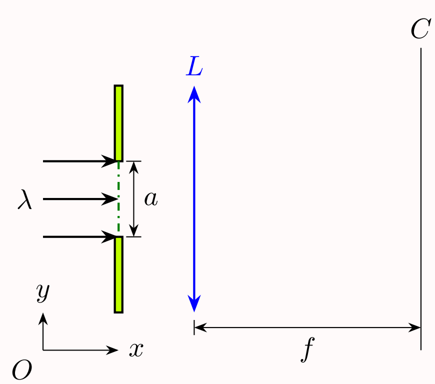
A

解析

中央明纹的宽度就是两侧一级暗纹之间的距离。缝宽增大，一级暗纹对应的衍射角变小，因此一级暗纹到中央明纹中心的距离也变小，所以中央明纹宽度变小。而中央明纹中心是整个狭缝垂直入射 (即衍射角为零) 时的衍射点，因此狭缝越大，光强越大。

第 637 题 |【5648】

在如图所示的单缝夫琅禾费衍射装置中，将单缝宽度 a 稍稍变宽，同时使单缝沿 y 轴正方向作微小平移 (透镜屏幕位置不动)，则屏幕 C 上的中央衍射条纹将



(A) 变窄，同时向上移　(B) 变窄，同时向下移　(C) 变窄，不移动　(D) 变宽，同时向上移

(E) 变宽，不移

答案

C

解析

中央衍射明纹的中心都是衍射角为零时的汇聚点，所以一定都在透镜的焦点上，所以条纹不会上下移

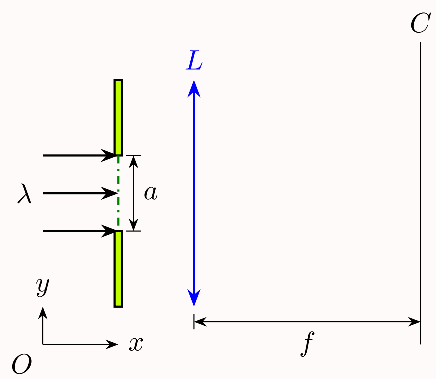
动。而中央明纹的宽度则是两侧一级暗纹之间的距离，其衍射角满足

$$\delta = a\sin\theta = 2\times\frac{\lambda}{2} = \lambda$$

所以 a 变大，θ 变小，宽度变小。

第 638 题 |【5649】

在如图所示的夫琅禾费衍射装置中，将单缝宽度 a 稍稍变窄，同时使会聚透镜 L 沿 y 轴正方向作微小平移 (单缝与屏幕位置不动)，则屏幕 C 上的中央衍射条纹将



(A) 变宽，同时向上移动　(B) 变宽，同时向下移动　(C) 变宽，不移动
(D) 变窄，同时向上移动　(E) 变窄，不移动

答案

A

解析

中央衍射明纹的中心都是衍射角为零时的汇聚点，所以一定都在透镜的焦点上，透镜上移，则焦点也上移，所以条纹上移。而中央明纹的宽度则是两侧一级暗纹之间的距离，其衍射角满足

$$\delta = a\sin\theta = 2\times\frac{\lambda}{2} = \lambda$$

所以 a 变小，θ 变大，宽度变大。

第 639 题 |【3357】

在单缝夫琅禾费衍射实验中，设第一级暗纹的衍射角很小，若钠黄光 ($\lambda_1 \approx 589$ nm) 中央明纹宽度为 4.0 mm，则 $\lambda_2 = 442$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的蓝紫色光的中央明纹宽度为______。

答案

3.0 mm

解析

中央明纹的宽度即为两侧一级暗纹之间的距离，设缝宽为 a，透镜的焦距为 f，则有

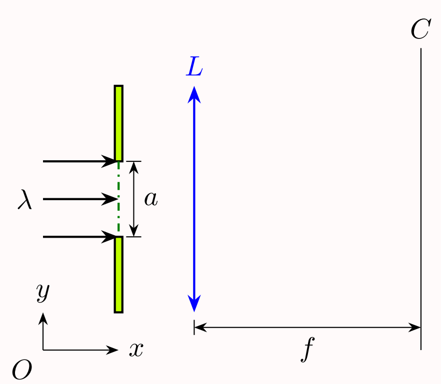
$$\delta = a\sin\theta = 2\times\frac{\lambda}{2} = \lambda$$
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$
$$\Delta x_1 = 2f\tan\theta \approx 2f\sin\theta = 2f\frac{\lambda}{a}$$

由此可见，中央明纹的宽度与所使用的光波的波长成正比，因此

$$\frac{\Delta x_1'}{\Delta x_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$
$$\Delta x_1' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Delta x_1 = \frac{442}{589}\times 4.0 \approx 3.0\ \mathrm{mm}$$

第 640 题 |【5650】

在如图所示的单缝夫琅禾费衍射装置中，设中央明纹的衍射角范围很小。若使单缝宽度 a 变为原来的 $\frac{3}{2}$，同时使入射的单色光的波长 λ 变为原来的 $\frac{3}{4}$，则屏幕 C 上单缝衍射条纹中央明纹的宽度 Δx 将变为原来的



(A) $\frac{3}{4}$ 倍 (B) $\frac{2}{3}$ 倍 (C) $\frac{9}{8}$ 倍 (D) $\frac{1}{2}$ 倍 (E) 2 倍

答案

D

解析

中央明纹的宽度是两侧一级暗纹之间的距离，其衍射角满足

$$\delta = a\sin\theta = 2\times\frac{\lambda}{2} = \lambda$$

$$\Delta x = 2f\tan\theta \approx 2f\sin\theta = 2f\frac{\lambda}{a}$$

$$\Delta x' = 2f\frac{\lambda'}{a'} = 2f\frac{(3/4)\lambda}{(3/2)a} = \frac{1}{2}\times 2f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x$$

第 641 题 |【3715】

一单色平行光束垂直照射在宽度为 1.0 mm 的单缝上，在缝后放一焦距为 2.0 m 的会聚透镜。已知位于透镜焦平面处的屏幕上的中央明条纹宽度为 2.0 mm，则入射光波长约为

(A) 100 nm　(B) 400 nm　(C) 500 nm　(D) 600 nm

答案

C

解析

中央明纹的宽度就是两侧一级暗纹之间的距离，所以一级暗纹到中央明纹中心的距离为中央明纹宽度的一半，依题意，$a = 1\times10^{-3}$ m，$f = 2$ m，$x_0 = 2\times10^{-3}$ m，所以

$$\tan\theta = \frac{x_0/2}{f} = 5\times10^{-4} \approx \sin\theta$$

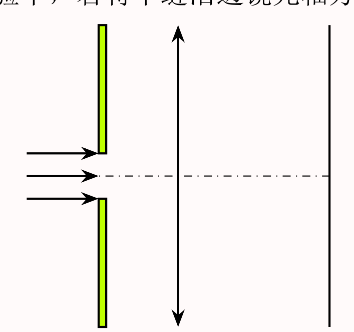
而一级暗纹，对应的半波带数目为 2，所以

$$\delta = a\sin\theta = k\frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2a\sin\theta}{k} = a\sin\theta = 1\times10^{-3}\times5\times10^{-4} = 5\times10^{-7}\ \mathrm{m} = 500\ \mathrm{nm}$$

第 642 题 |【3356】

在如图所示的单缝夫琅禾费衍射实验中，若将单缝沿透镜光轴方向向透镜平移，则屏幕上的衍射条纹



(A) 间距变大
(B) 间距变小
(C) 不发生变化
(D) 间距不变，但明暗条纹的位置交替变化

答案

C

解析

单缝夫琅禾费衍射实验中衍射条纹的位置与衍射角有关，狭缝宽度不变时，同一衍射角所对应的最大光程差不变，半波带的数目不变，衍射条纹的明或暗性质不变。而对于同一衍射角，只要透镜的焦距不变，衍射条纹在焦平面上的位置就不会发生变化。

第 643 题 |【5327】

波长 $\lambda = 500$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色光垂直照射到宽度 $a = 0.25$ mm 的单缝上，单缝后面放置一凸透镜，在凸透镜的焦平面上放置一屏幕，用以观测衍射条纹。今测得屏幕上中央明条纹一侧第三个暗条纹和另一侧第三个暗条纹之间的距离为 $d = 12$ mm，则凸透镜的焦距 f 为

(A) 2 m (B) 1 m (C) 0.5 m (D) 0.2 m (E) 0.1 m

答案

B

解析

依题意，第三级暗纹到中央明纹中心的距离为 $\frac{d}{2} = 6\text{ mm} = 6\times 10^{-3}$ m，所以

$$\tan\theta = \frac{d/2}{f} \approx \sin\theta = \frac{k\frac{\lambda}{2}}{a}$$

$$f = \frac{da}{k\lambda} = \frac{12\times 10^{-3}\times 0.25\times 10^{-3}}{6\times 5\times 10^{-7}} = 1\text{ m}$$

第 644 题 |【3524】

平行单色光垂直入射在缝宽为 $a = 0.15$ mm 的单缝上。缝后有焦距为 $f = 400$ mm 的凸透镜，在其焦平面上放置观察屏幕。现测得屏幕上中央明条纹两侧的两个第三级暗纹之间的距离为 8 mm，则入射光的波长为 $\lambda =$______。

答案

500 nm

解析

依题意，第三级暗纹所对应的衍射角满足

$$\tan\theta = \frac{4}{400} = 0.01 \approx \sin\theta$$
$$\delta = a\sin\theta = 6\times\frac{\lambda}{2} = 3\lambda$$
$$\lambda = \frac{a\sin\theta}{3} = \frac{0.15\times 0.01}{3} = 0.0005\ \mathrm{mm} = 500\ \mathrm{nm}$$

17.3 光栅衍射

第 645 题 |【3525】

波长为 λ 的单色光垂直入射于光栅常数为 d、缝宽为 a、总缝数为 N 的光栅上。取 $k=0$，±1，±2，$\cdots$，则决定出现主极大的衍射角 θ 的公式可写成

(A) $Na\sin\theta = k\lambda$ (B) $a\sin\theta = k\lambda$ (C) $Nd\sin\theta = k\lambda$ (D) $d\sin\theta = k\lambda$

答案

D

解析

光栅方程

$$d\sin\theta = k\lambda$$

即表示主极大位置的衍射角所满足的方程。

第 646 题 |【3637】

波长为 λ 的单色光垂直投射于缝宽为 a，总缝数为 N，光栅常数为 d 的光栅上，光栅方程 (表示出现主极大的衍射角 θ 应满足的条件) 为______。

答案

$\delta = d\sin\theta = k\lambda, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

解析

光栅方程为

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

第 647 题 |【3362】

某单色光垂直入射到一个每毫米有 800 条刻线的光栅上，如果第一级谱线的衍射角为 30°，则入射光的波长应为______。

答案

625 nm

解析

依题意，每毫米有 800 条刻线，所以光栅常数 $d=\frac{0.001}{800}=1.25\times10^{-6}$ m，而由光栅方程，有

$$\delta=d\sin\theta=k\lambda=\lambda=1.25\times10^{-6}\times\sin30^\circ=6.25\times10^{-7}\ \mathrm{m}=625\ \mathrm{nm}$$

第 648 题 |【3221】

一束平行光垂直入射到某个光栅上，该光束有两种波长的光，$\lambda_1=440$ nm，$\lambda_2=660$ nm($1\ \mathrm{nm}=10^{-9}$ m)。实验发现，两种波长的谱线 (不计中央明纹) 第二次重合于衍射角 $\theta=60^\circ$ 的方向上。求此光栅的光栅常数 d。

解答

由光栅方程

$$\delta=d\sin\theta=k_1\lambda_1=k_2\lambda_2$$

及题意可得，

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{3}{2}$$

$$k_1=6,k_2=4$$

$$d=\frac{k_1\lambda_1}{\sin\theta}=\frac{6\times4.4\times10^{-7}}{\sin60^\circ}\approx3.05\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

第 649 题 |【3638】

波长为 500 nm($1\ \mathrm{nm}=10^{-9}$ m) 的单色光垂直入射到光栅常数为 1.0×10^{-4} cm 的平面衍射光栅上，第一级衍射主极大所对应的衍射角 $\theta=$______。

答案

30°

解析

光栅方程为

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda = \lambda$$
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{5\times10^{-7}}{1.0\times10^{-6}} = 0.5$$
$$\theta = 30^\circ$$

第 650 题 |【3214】

对某一定波长的垂直入射光，衍射光栅的屏幕上只能出现零级和一级主极大，欲使屏幕上出现更高级次的主极大，应该

(A) 换一个光栅常数较小的光栅
(B) 换一个光栅常数较大的光栅
(C) 将光栅向靠近屏幕的方向移动
(D) 将光栅向远离屏幕的方向移动

答案

B

解析

光栅方程

$$d\sin\theta = k\lambda$$
$$k = \frac{d\sin\theta}{\lambda}$$

屏幕一定，最大的衍射角一定，要想提高级次，即提高 k，则可以增大 d 或减小 λ。

第 651 题 |【3636】

波长 $\lambda = 550$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色光垂直入射于光栅常数 $d = 2\times10^{-4}$ cm 的平面衍射光栅上，可能观察到的光谱线的最大级次为

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5

答案

B

解析

光栅方程

$$d\sin\theta = k\lambda$$

$$k = \frac{d\sin\theta}{\lambda} \leqslant \frac{d}{\lambda} = \frac{2\times10^{-6}}{5.5\times10^{-7}} \approx 3.6$$

第 652 题 |【3731】

波长为 $\lambda = 550$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色光垂直入射于光栅常数 $d = 2\times10^{-4}$ cm 的平面衍射光栅上，可能观察到光谱线的最高级次为第______ 级。

答案

3

解析

光栅方程为

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

$$k = \frac{d\sin\theta}{\lambda} \leqslant \frac{d}{\lambda} = \frac{2\times10^{-6}}{5.5\times10^{-7}} \approx 3.6$$

第 653 题 |【3212】

一束平行单色光垂直入射在光栅上，当光栅常数 $(a+b)$ 为下列哪种情况时 (a 代表每条缝的宽度)，$k=3$、6、9 等级次的主极大均不出现？

(A) $a+b=2a$ (B) $a+b=3a$ (C) $a+b=4a$ (D) $a+b=6a$

答案

B

解析

光栅缺级条件

$$d\sin\theta = k\lambda \qquad (\text{干涉相长})$$

$$a\sin\theta = k'\lambda \qquad (\text{衍射相消})$$

所以

$$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}$$

$$d = a+b = \frac{k}{k'}a$$

第 654 题 |【3635】

在光栅光谱中，假如所有偶数级次的主极大都恰好在单缝衍射的暗纹方向上，因而实际上不出现，那么此光栅每个透光缝宽度 a 和相邻两缝间不透光部分宽度 b 的关系为

(A) $a = \frac{1}{2}b$ (B) $a = b$ (C) $a = 2b$ (D) $a = 3b$

答案

B

解析

光栅缺级条件

$$d\sin\theta = k\lambda(\text{干涉相长})$$
$$a\sin\theta = k'\lambda(\text{衍射相消})$$

所以

$$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}$$
$$d = a + b = \frac{k}{k'}a = 2a$$
$$a = b$$

第 655 题 |【5656】

用波长为 λ 的单色平行光垂直入射在一块多缝光栅上，其光栅常数 $d = 3\ \mu\text{m}$，缝宽 $a = 1\ \mu\text{m}$，则在单缝衍射的中央明条纹中共有_____ 条谱线 (主极大)。

答案

5

解析

单缝衍射的中央明条纹的边缘是一级暗纹，其衍射角满足

$$\delta = a\sin\theta = 2 \times \frac{\lambda}{2} = \lambda$$
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

而由光栅方程可得

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$
$$k = \frac{d\sin\theta}{\lambda} = \frac{d \times \lambda}{a\lambda} = \frac{d}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

所以主极大谱级有 $k=0,\pm1,\pm2$，共 5 条，其中 $k=\pm3$ 缺级。

第 656 题 |【3220】

波长 $\lambda=600$ nm(1 nm $=10^{-9}$ m) 的单色光垂直入射到一光栅上，测得第二级主极大的衍射角为 30°，且第三级是缺级。(1) 光栅常数 $(a+b)$ 等于多少？(2) 透光缝可能的最小宽度 a 等于多少？(3) 在选定了上述 $(a+b)$ 和 a 之后，求在衍射角 $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$ 范围内可能观察到的全部主极大的级次。

解答

(1) 由光栅方程

$$\delta=d\sin\theta=k\lambda$$

及题意可得，对于第二级主极大，有

$$\delta=d\sin\theta=2\lambda$$

$$d=\frac{2\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times6\times10^{-7}}{\sin30^\circ}=2.4\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

(2) 由光栅缺级条件

$$d\sin\theta=k\lambda$$

$$a\sin\theta=k'\lambda$$

依题意，第三级缺级，所以有 $k=3$，所以

$$\frac{d}{a}=\frac{k}{k'}$$

$$a=\frac{k'}{k}d=k'\times\frac{d}{k}$$

所以，当 $k'=1$ 时，a 最小，为

$$a=1\times\frac{2.4\times10^{-6}}{3}=8\times10^{-7}\ \mathrm{m}$$

(3) 由光栅方程

$$\delta=d\sin\theta=k\lambda$$

可得

$$k=\frac{d\sin\theta}{\lambda}$$

$$-\frac{d}{\lambda}<k<\frac{d}{\lambda}=\frac{2.4\times10^{-6}}{6\times10^{-7}}=4$$

$$-4<k<4,k=-3,-2,-1,0,1,2,3$$

但依题意，$k=\pm3$ 缺级，所以能观察到的主极大的级次为 -2，-1，0，1，2 共 5 条。

第 657 题 |【3530】

一衍射光栅，每厘米 200 条透光缝，每条透光缝宽为 $a = 2\times10^{-3}$ cm，在光栅后放一焦距 $f = 1$ m 的凸透镜，现以 $\lambda = 600$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的单色平行光垂直照射光栅，求：(1) 透光缝 a 的单缝衍射中央明条纹宽度为多少？(2) 在该宽度内，有几个光栅衍射主极大？

解答

(1) 单缝衍射中央明条纹宽度就是两侧一级暗纹之间的距离，所以有

$$\delta = a\sin\theta = k\frac{\lambda}{2} = 2\times\frac{\lambda}{2} = \lambda$$
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{6\times10^{-7}}{2\times10^{-5}} = 0.03 \approx \theta$$
$$x = f\tan\theta \approx f\sin\theta$$
$$\Delta x = 2x = 2f\sin\theta = 2\times1\times0.03 = 0.06\ \mathrm{m}$$

(2) 依题意，光栅上每厘米有 200 条刻线，所以光栅常数为 $d = \frac{0.01}{200} = 5\times10^{-5}$ m，由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

可得

$$k = \frac{d\sin\theta}{\lambda} \leqslant \frac{d\frac{\lambda}{a}}{\lambda} = \frac{d}{a} = \frac{5\times10^{-5}}{2\times10^{-5}} = 2.5$$

所以，在单缝衍射中央明条纹宽度内，共有 $k = 0, \pm1, \pm2$ 共 5 个主极大。

第 658 题 |【3211】

(1) 在单缝夫琅禾费衍射实验中，垂直入射的光有两种波长，$\lambda_1 = 400$ nm，$\lambda_2 = 760$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m)。已知单缝宽度 $a = 1.0\times10^{-2}$ cm，透镜焦距 $f = 50$ cm。求两种光第一级衍射明纹中心之间的距离。(2) 若用光栅常数 $d = 1.0\times10^{-3}$ cm 的光栅替换单缝，其他条件和上一问相同，求两种光第一级主极大之间的距离。

解答

(1) 单缝衍射中，一级衍射明纹对应三个半波带，所以有

$$\delta = a\sin\theta = 3\frac{\lambda}{2}$$
$$x_1 = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\frac{3\lambda}{2a}$$
$$\Delta x_1 = f\frac{3\Delta\lambda}{2a} = 0.5\times\frac{3\times(760-400)\times10^{-9}}{2\times1.0\times10^{-4}} = 2.7\times10^{-3}\ \mathrm{m} = 2.7\ \mathrm{mm}$$

(2) 光栅衍射中，由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

一级主极大，$k=1$，所以

$$\sin\theta=\frac{\lambda}{d}$$

$$x_1=f\tan\theta\approx f\sin\theta=f\frac{\lambda}{d}$$

$$\Delta x_1=f\frac{\Delta\lambda}{d}=0.5\times\frac{(760-400)\times10^{-9}}{1.0\times10^{-4}}=1.8\times10^{-3}\ \mathrm{m}=1.8\ \mathrm{mm}$$

第 659 题 |【5534】

设光栅平面、透镜均与屏幕平行。则当入射的平行单色光从垂直于光栅平面入射变为斜入射时，能观察到的光谱线的最高级次 k

(A) 变小　(B) 变大　(C) 不变　(D) 的改变无法确定

答案

B

解析

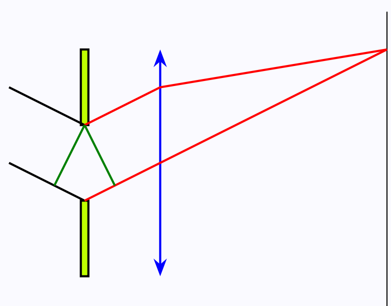
当入射的平行光变成斜入射时，相邻狭缝的光程差变成

$$\delta=\delta_0+d\sin\theta$$

因此光栅方程变成

$$\delta_0+d\sin\theta=k\lambda$$

显然，能观察到的光谱线的最高级次 k 将变大。



第 660 题 |【5536】

设光栅平面和透镜都与屏幕平行，在平面透射光栅上每厘米有 5000 条刻线，用它来观察钠黄光 ($\lambda=589$ nm) 的光谱线。(1) 当光线垂直入射到光栅上时，能看到的光谱线的最高级次 k_m 是多少？(2) 当光线以 30° 的入射角 (入射线与光栅平面的法线的夹角) 斜入射到光栅上时，能看到的光谱线的最高级次

k'_m 是多少？(1 nm = 10^{-9} m)

解答

(1) 依题意，光栅上每厘米有 5000 条刻线，所以光栅常数为 $d=\frac{0.01}{5000}=2\times10^{-6}$ m，由光栅方程

$$\delta=d\sin\theta=k\lambda$$

可得

$$k=\frac{d\sin\theta}{\lambda}<\frac{d}{\lambda}=\frac{2\times10^{-6}}{5.89\times10^{-7}}\approx3.40$$
$$k_m=3$$

(2) 对于斜入射情况，入射光到达光栅时的光程差为

$$\delta_0=d\sin\theta_0$$

所以到达衍射点的总的光程差为

$$\delta=d\sin\theta+\delta_0=d(\sin\theta+\sin\theta_0)$$

因此斜入射情况下的光栅方程为

$$\delta=d(\sin\theta+\sin\theta_0)=k'\lambda$$

所以有

$$k'=\frac{\delta}{\lambda}=\frac{d(\sin\theta+\sin\theta_0)}{\lambda}<\frac{d(1+\sin\theta_0)}{\lambda}=\frac{2\times10^{-6}\times(1+\sin30^\circ)}{5.89\times10^{-7}}\approx5.10$$
$$k'_m=5$$

第 661 题 |【3204】

测量单色光的波长时，下列方法中哪一种方法最为准确？

(A) 双缝干涉　　(B) 牛顿环　　(C) 单缝衍射　　(D) 光栅衍射

答案

D

解析

双缝干涉

$$\delta=d\sin\theta=k\lambda$$

$$x = D\tan\theta \approx D\sin\theta = \frac{D}{d}k\lambda$$
$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$$
$$\lambda = \frac{d}{D}\Delta x$$

通过测量条纹间距 Δx、狭缝间距 d、缝屏距离 D，从而求得波长。具体实验中，d、D 作为已知量。

单缝衍射

$$\delta = a\sin\theta = k\frac{\lambda}{2}$$
$$\Delta x = 2f\tan\theta \approx 2f\sin\theta = 2f\frac{\lambda}{a}$$
$$\lambda = \frac{a}{2f}\Delta x$$

通过测量中央明纹宽度 Δx、狭缝宽度 a、透镜焦距 f，从而求得波长。具体实验中，a、f 作为已知量。

光栅衍射

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$
$$x = f\tan\theta \approx f\sin\theta = \frac{f}{d}k\lambda$$
$$\Delta x = \frac{f}{d}\lambda$$
$$\lambda = \frac{d}{f}\Delta x$$

通过测量主极大明纹之间的间距 Δx、光栅常数 d、透镜焦距 f，从而求得波长。具体实验中，d、f 作为已知量。

牛顿环

$$\delta = 2ne + \frac{1}{2}\lambda = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$$
$$r = \sqrt{R^2 - (R-e)^2} \approx \sqrt{2Re} = \sqrt{kR\lambda}$$
$$\Delta r^2 = r_{k+1}^2 - r_k^2 = R\lambda$$
$$\lambda = \frac{1}{R}(r_{k+1}^2 - r_k^2)$$

通过测量暗纹的半径【实验上由于条纹的圆心位置不好确定，通常是通过测量直径来得到半径】r_k，利用已知的透镜的曲率半径 R，从而求得波长。

以上是四种方法测量波长的基本原理，都是通过测量条纹的间距或半径来求得波长，所以哪种方法测得的间距或半径最为准确，所测量的波长也最为准确。注意这是大学物理的试题，不是大学物理实验的试题。除牛顿环的条纹是圆环之外，其他三种条纹都是直线，直线之间的间距相对来说比圆环的半径更容易测量。而三种直线条纹中，光栅的条纹对比度最大，测量条纹的间距最准确，所以用光栅衍射测量得到的波长最为准确。

第 662 题 |【3213】

一束白光垂直照射在一光栅上，在形成的同一级光栅光谱中，偏离中央明纹最远的是

(A) 紫光 (B) 绿光 (C) 黄光 (D) 红光

答案

D

解析

光栅方程

$$d\sin\theta = k\lambda$$

对于同一级光谱，k 相等，所以波长越大，衍射角越大，偏离中央明纹最远。而红光波长最大，所以红光的光谱偏离中央明纹最远。

第 663 题 |【5659】

可见光的波长范围是 400 nm – 760 nm。用平行的白光垂直入射在平面透射光栅上时，它产生的不与另一级光谱重叠的完整的可见光光谱是第_____ 级光谱。(1 nm = 10^{-9} m)

答案

1

解析

由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

可知，同一级光谱，不同波长的光所对应的衍射角不同，而且波长越大，衍射角越大，所以，如果第 k 级波长较大的光波的衍射角大于第 $k+1$ 级波长较小的光波的衍射角，则光谱重叠，即

$$d\sin\theta_{k\max} = k\lambda_{\max} \Rightarrow \sin\theta_{k\max} = \frac{k\lambda_{\max}}{d}$$
$$d\sin\theta_{(k+1)\min} = (k+1)\lambda_{\min} \Rightarrow \sin\theta_{(k+1)\min} = \frac{(k+1)\lambda_{\min}}{d}$$
$$\theta_{k\max} > \theta_{(k+1)\min} \Rightarrow \sin\theta_{k\max} > \sin\theta_{(k+1)\min}$$
$$\frac{k\lambda_{\max}}{d} > \frac{(k+1)\lambda_{\min}}{d}$$
$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} > \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$$
$$\frac{1}{k} < \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\min}}$$

$$k > \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} = \frac{400}{760 - 400} = \frac{10}{9}$$

因此，第 2 级波长较大的光波的衍射角大于第 3 级波长较小的光波的衍射角，即第 2 级光谱发生重叠，因此完整的可见光光谱只有第 1 级。

第 664 题 |【3361】

某元素的特征光谱中含有波长分别为 $\lambda_1 = 450$ nm 和 $\lambda_2 = 750$ nm(1 nm $= 10^{-9}$ m) 的光谱线。在光栅光谱中，这两种波长的谱线有重叠现象，重叠处 λ_2 的谱线的级数将是

(A) 2，3，4，5，⋯ (B) 2，5，8，11，⋯ (C) 2，4，6，8，⋯ (D) 3，6，9，12，⋯

答案

D

解析

谱线重叠，说明两个波长的不同级次的衍射图线出现在同一衍射角处，所以有

$$d\sin\theta = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$$

$$k_2 = k_1\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{450}{750}k_1 = \frac{3}{5}k_1$$

所以，当 $k_1 = 5, 10, 15, 20, \cdots$ 时，$k_2 = 3, 6, 9, 12, \cdots$。

第 665 题 |【3738】

用钠光 ($\lambda = 589.3$ nm) 垂直照射到某光栅上，测得第三级光谱的衍射角为 $60°$。(1) 若换用另一光源测得其第二级光谱的衍射角为 $30°$，求后一光源发光的波长。(2) 若以白光 (400 nm – 760 nm) 照射在该光栅上，求其第二级光谱的张角。(1 nm $= 10^{-9}$ m)

解答

(1) 由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

可得光栅常数为

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{3 \times 5.893 \times 10^{-7}}{\sin 60°} \approx 2.04 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

所以，对于第二个光源，有

$$\lambda = \frac{d\sin\theta}{k} = \frac{2.04 \times 10^{-6} \times \sin 30°}{2} = 5.1 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = 510\ \mathrm{nm}$$

(2) 由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

可得

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{d}$$
$$\theta_{\min} = \arcsin\frac{k\lambda_{\min}}{d} = \arcsin\frac{2\times 4\times 10^{-7}}{2.04\times 10^{-6}} \approx 0.4030\ \mathrm{rad}$$
$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{k\lambda_{\max}}{d} = \arcsin\frac{2\times 7.6\times 10^{-7}}{2.04\times 10^{-6}} \approx 0.8407\ \mathrm{rad}$$
$$\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min} = 0.4377\ \mathrm{rad} \approx 25^\circ$$

第 666 题 |【0470】

用每毫米 300 条刻痕的衍射光栅来检验仅含有属于红和蓝的两种单色成分的光谱。已知红谱线波长 λ_R 在 $0.63-0.76\ \mu$m 范围内，蓝谱线波长 λ_B 在 $0.43-0.49\ \mu$m 范围内。当光垂直入射到光栅时，发现在衍射角为 24.46° 处，红蓝两谱线同时出现。(1) 在什么角度下红蓝两谱线还会同时出现？(2) 在什么角度下只有红谱线出现？

解答

(1) 依题意，每毫米 300 条刻痕的衍射光栅的光栅常数为 $d = \frac{0.001}{300} = \frac{1}{3}\times 10^{-5}$ m。由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

依题意，在衍射角为 $\theta = 24.46^\circ$ 处

$$\delta = d\sin\theta = \frac{1}{3}\times 10^{-5}\times\sin 24.46^\circ = 1.38\times 10^{-6}\ \mathrm{m} = 1.38\ \mu\mathrm{m} = k_R\lambda_R = k_B\lambda_B$$
$$\frac{\delta}{\lambda_{R\min}} = \frac{1.38}{0.63} \approx 2.19, \frac{\delta}{\lambda_{R\max}} = \frac{1.38}{0.76} \approx 1.82, k_R = 2, \lambda_R = \frac{\delta}{k_R} = 0.69\ \mu\mathrm{m}$$
$$\frac{\delta}{\lambda_{B\min}} = \frac{1.38}{0.43} \approx 3.21, \frac{\delta}{\lambda_{B\max}} = \frac{1.38}{0.49} \approx 2.82, k_B = 3, \lambda_B = \frac{\delta}{k_B} = 0.46\ \mu\mathrm{m}$$

所以在衍射角为 $\theta = 24.46^\circ$ 处，2 级红光与 3 级蓝光同时出现，其中红光的波长为 $\lambda_R = 0.69\ \mu$m，蓝光的波长为 $\lambda_B = 0.46\ \mu$m。由

$$\delta = d\sin\theta = k_R\lambda_R = k_B\lambda_B$$

可得

$$\frac{k_R}{k_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_R} = \frac{2}{3}$$

而

$$k_R = \frac{d\sin\theta}{\lambda_R} \leqslant \frac{d}{\lambda_R} = \frac{\frac{1}{3}\times 10^{-5}}{0.69\times 10^{-6}} \approx 4.83$$

$$k_B = \frac{d\sin\theta}{\lambda_B} \leqslant \frac{d}{\lambda_B} = \frac{\frac{1}{3}\times 10^{-5}}{0.46\times 10^{-6}} \approx 7.24$$

即最多可观察到 4 级红光光谱，7 级蓝光光谱，因此 4 级红光与 6 级蓝光还将同时出现，此时的衍射角为

$$\delta = d\sin\theta = k_R\lambda_R$$
$$\sin\theta = \frac{k_R\lambda_R}{d} = \frac{4\times 0.69\times 10^{-6}}{\frac{1}{3}\times 10^{-5}} = 0.828$$
$$\theta = 0.9755 \text{ rad} \approx 55.9^\circ$$

即在衍射角为 $\theta = 55.9^\circ$ 处，可以同时观察到 4 级红光与 6 级蓝光。

(2) 如前所述，最多可观察到 4 级红光光谱，其中 2 级和 4 级与蓝光光谱同时出现，所以只有 1 级和 3 级是单独出现的，因此有

$$\delta = d\sin\theta = k_R\lambda_R$$
$$\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda_R}{d} = \arcsin\frac{0.69\times 10^{-6}}{\frac{1}{3}\times 10^{-5}} = \arcsin 0.207 \approx 11.9^\circ$$
$$\theta_3 = \arcsin\frac{3\lambda_R}{d} = \arcsin\frac{3\times 0.69\times 10^{-6}}{\frac{1}{3}\times 10^{-5}} = \arcsin 0.621 \approx 38.4^\circ$$

即在衍射角为 $\theta = 11.9^\circ$ 处，可以单独观察到 1 级红光光谱；在衍射角为 $\theta = 38.4^\circ$ 处，可以单独观察到 3 级红光光谱。

第十八章　光的偏振

18.1　偏振片　起偏与检偏　马吕斯定律

第 667 题 |【3542】

如果两个偏振片堆叠在一起，且偏振化方向之间夹角为 60°，光强为 I_0 的自然光垂直入射在偏振片上，则出射光强为

(A) $\frac{I_0}{8}$　　(B) $\frac{I_0}{4}$　　(C) $\frac{3I_0}{8}$　　(D) $\frac{3I_0}{4}$

答案

A

解析

自然光通过偏振片，光强变成一半；线偏振光通过偏振片，出射光强与入射光强满足马吕斯定律

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

所以，依题意有

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8} I_0$$

第 668 题 |【3368】

一束光强为 I_0 的自然光垂直穿过两个偏振片，且此两偏振片的偏振化方向成 45° 角，则穿过两个偏振片后的光强 I 为

(A) $\frac{I_0}{4\sqrt{2}}$　　(B) $\frac{I_0}{4}$　　(C) $\frac{I_0}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}I_0}{2}$

答案

B

解析

自然光通过偏振片，光强变成一半；线偏振光通过偏振片，出射光强与入射光强满足马吕斯定律

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

所以，依题意有

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0$$

第 669 题 |【3246】

一束光是自然光和线偏振光的混合光，让它垂直通过一偏振片。若以此入射光束为轴旋转偏振片，测得透射光强度最大值是最小值的 5 倍，那么入射光束中自然光与线偏振光的光强比值为

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

答案

A

解析

自然光通过偏振片，光强变成一半；线偏振光通过偏振片，出射光强与入射光强满足马吕斯定律

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

设入射光中自然光的光强为 I_1，线偏振光的光强为 I_2，则出射光的光强为

$$I = \frac{1}{2} I_1 + I_2 \cos^2 \alpha$$
$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_1$$
$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_1 + I_2$$

依题意

$$I_{\max} = 5 I_{\min}$$
$$\frac{1}{2} I_1 + I_2 = 5 \left(\frac{1}{2} I_1 \right)$$
$$I_2 = 2 I_1$$

18.2 反射光和折射光的偏振

第 670 题 |【3639】

自然光以布儒斯特角由空气入射到一玻璃表面上，反射光是

(A) 在入射面内振动的完全线偏振光 (B) 平行于入射面的振动占优势的部分偏振光

(C) 垂直于入射面振动的完全线偏振光 (D) 垂直于入射面的振动占优势的部分偏振光

答案

C

解析

当入射角为布儒斯特角时，反射光为完全偏振光，且偏振方向垂直于入射面。

第 671 题 |【3640】

自然光以布儒斯特角 i_0 从第一种介质（折射率为 n_1）入射到第二种介质（折射率为 n_2）内，则 $\tan i_0 =$______。

答案

$\frac{n_2}{n_1}$

解析

根据布儒斯特定律，有

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

第 672 题 |【3233】

一束自然光从空气投射到玻璃表面上 (空气折射率为 1)，当折射角为 30° 时，反射光是完全偏振光，则此玻璃板的折射率等于______。

答案

$\sqrt{3}$

解析

当入射光以布儒斯特角入射时，反射光是完全偏振光，且此时反射光线与折射光线互相垂直，依题意，此时折射角为 $30°$，所以布儒斯特角为 $i_0 = 90° - 30° = 60°$，而根据布儒斯特定律，有

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = n = \tan(90° - 30°) = \sqrt{3}$$

第 673 题 |【3545】

自然光以 $60°$ 的入射角照射到某两介质交界面时，反射光为完全线偏振光，则知折射光为

(A) 完全线偏振光且折射角是 $30°$

(B) 部分偏振光且只是在该光由真空入射到折射率为 $\sqrt{3}$ 的介质时，折射角是 $30°$

(C) 部分偏振光，但须知两种介质的折射率才能确定折射角

(D) 部分偏振光且折射角是 $30°$

答案

D

解析

依题意，布儒斯特角为 $60°$，而当入射角为布儒斯特角时，折射光与反射光互相垂直。