§10.2 平面简谐波方程

- 平面波传播时，若介质中体元均按余弦或正弦规律运动，叫做平面简谐波，也称为余弦波或正弦波
- 简谐振动在介质中传播形成的波称为简谐波
- 波阵面为平面的简谐波称为平面简谐波
- 简谐波在介质中传播时引起介质中每个质点都做简谐振动

一、描述简谐波的特征量

- 波长
  - 沿波传播方向上相邻的两个同相位点之间的距离
  - 通常用 λ 表示
- 波速
  - 单位时间波传播的距离，即为波传播的速度，也就是相位传播的速度，也称为相速度，通常用 v 表示
  - 波在介质中传播的速度是由介质本身的性质决定的
- 周期和频率
  - 波的周期和频率就是波源振动的周期和频率

$$f = \frac{1}{T}$$

  - 波的周期就是波源完成一次全振动所花的时间，也是波源的振动状态传播一个波长所花的时间，也是一个完整的波形通过介质中任意一点所花的时间

- 波长、波速、周期之间的关系

$$\lambda = vT$$
$$v = \frac{\lambda}{T}$$
$$T = \frac{\lambda}{v}$$

- 周期和频率是由波源决定的，与介质无关
- 波速是由介质决定的，与波源无关
- 波长既与波源有关，也与介质有关
  - 同一个波源发出的波，不管在什么介质中传播，频率不变，在不同介质中传播时波长不同
  - 不管是什么波源发出的波【同是横波或同是纵波】，在同一介质中传播时，波速相同，波长不同

二、平面简谐波方程

- 以波源所在位置为坐标原点，沿波传播方向建立 x 轴 (假设波沿 x 轴正方向传播)
- 波源做简谐振动，一般地设任意 t 时刻波源离开平衡位置的位移为

$$y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- 经过 Δt 时间，这个振动状态传播到介质中 $x = v\Delta t$ 处，即 $x = v\Delta t$ 处的质点在 $t + \Delta t$ 时刻离开平衡位置的位移是

$$y(x, t + \Delta t) = y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- $x = v\Delta t$ 处的质点在 $t + \Delta t$ 时刻离开平衡位置的位移等于波源 $x = 0$ 在 t 时刻离开平衡位置的位移

$$y(x, t + \Delta t) = y(0,t)$$

$x = v\Delta t$ 处的质点在 t 时刻离开平衡位置的位移等于波源 $x = 0$ 在 $t - \Delta t$ 时刻离开平衡位置的位移

$$y(x,t) = y(0, t - \Delta t)$$

$$
\begin{aligned}
y(0,t) &= A\cos(\omega t+\varphi_0) \\
y(x,t) &= y(0,t-\Delta t) \\
&= A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi_0] \\
&= A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right] \\
&= A\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{v}x+\varphi_0\right) \\
&= A\cos(\omega t-kx+\varphi_0) \\
\frac{\omega}{v} &= \frac{2\pi}{Tv}=\frac{2\pi}{\lambda}=k
\end{aligned}
$$

- 平面简谐波的一般表达式

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 称为波数或角波数
- x 是质点所在的位置
- y 是质点离开平衡位置的位移
- 二者并不一定是互相垂直的【如果是横波，二者是垂直的；如果是纵波，二者是平行的】
- $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$ 是 x 处质点做简谐振动在 t 时刻的相位，其初位相为 $-kx + \varphi_0$
- 如果波源在坐标原点，则 $x = 0$，因此波源的初位相为 φ_0 (这里 φ_0 是坐标原点 $x = 0$ 处质点的初位相)
- 如果波源不在坐标原点，而在 x_0 处，则波源的初位相为 $-kx_0 + \varphi_0$

- 平面简谐波的一般表达式

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- 上式中 x 取某个定值 x_1，所得表达式为 x_1 处质点做简谐振动的表达式

$$y(x_1,t) = A\cos(\omega t - kx_1 + \varphi_0)$$

- 上式中 t 取某个定值 t_1，所得表达式为 t_1 时刻的波形

$$y(x,t_1) = A\cos(\omega t_1 - kx + \varphi_0)$$

  它表示 t_1 时刻任意位置的质点离开平衡位置的位移的分布情况
- 以上波的表达式是假设波沿 x 轴正方向传播时得到的结论，如果波源在 x_0，则上式中 x 的取值范围是 $x \geqslant x_0$

- 同理可得，沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的一般表达式

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

如果波源在 x_0 处，则上式中 $x \leqslant x_0$，波源的初位相为 $kx_0 + \varphi_0$

- 一般地，如果波源在 x_0 处，波源的振动表达式为

$$y(x_0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则沿传播方向上距离波源 r 处的质点的振动表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

注意，这里 φ_0 是波源 $x = x_0$ 处质点的初位相

- 平面简谐波的表达式

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

- 若波沿 x 轴正方向传播，则 $x \geqslant x_0$，$r = x - x_0$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \\ &= A\cos[\omega t - k(x - x_0) + \varphi_0] \\ &= A\cos[\omega t - kx + (\varphi_0 + kx_0)] \end{aligned}$$

- 若波沿 x 轴负方向传播，则 $x \leqslant x_0$，$r = x_0 - x$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \\ &= A\cos[\omega t - k(x_0 - x) + \varphi_0] \\ &= A\cos[\omega t + kx + (\varphi_0 - kx_0)] \end{aligned}$$

三、平面简谐波方程的多种形式

- 以沿 x 轴正方向传播的平面简谐波为例，波的表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- 利用各物理量之间的关系

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$f = \frac{1}{T}$$
$$\lambda = vT$$

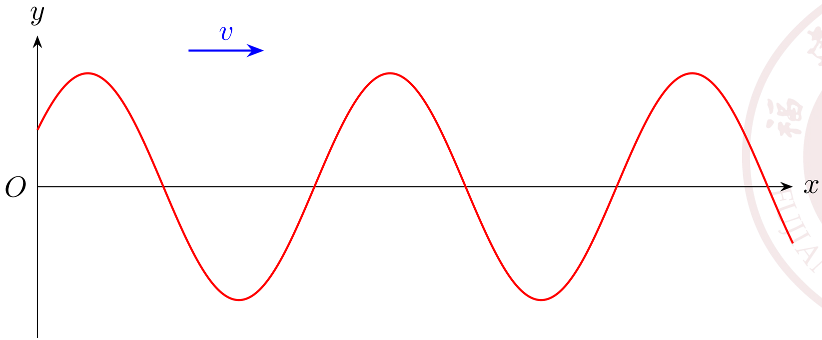
可以把波的表达式改写成各种形式

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \\
&= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi_0\right] \\
&= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{2\pi/\lambda}{2\pi/T}x\right) + \varphi_0\right] \\
&= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{T}{\lambda}x\right) + \varphi_0\right] \\
&= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] \\
&= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \\
&= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]
\end{aligned}$$

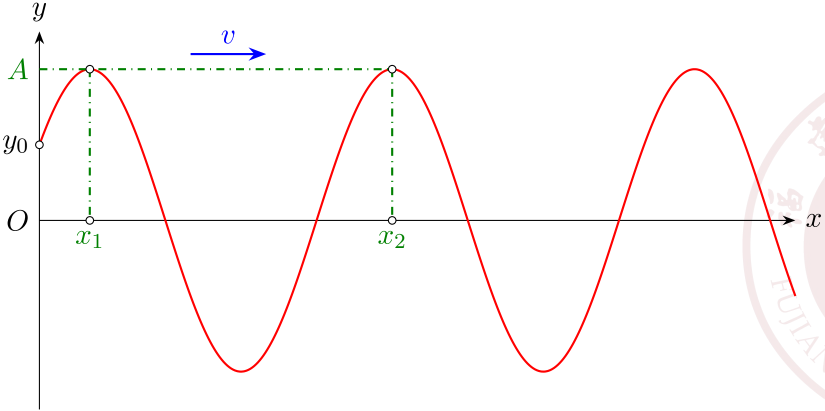
四、波形曲线

- 沿 x 轴正方向传播的平面简谐波在 t_1 时刻的波形

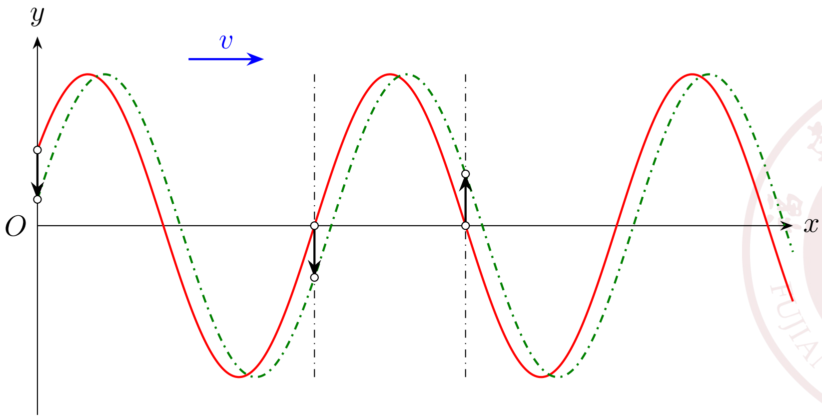
$$y(x,t_1) = A\cos(\omega t_1 - kx + \varphi_0)$$



- 从波形曲线读取特征量



- 从波形曲线判断质点的运动方向



习题 10.2.4

写出振幅为 A，频率 $\nu = f$，波速 $v = c$，沿 x 轴正方向传播的平面简谐波方程 $y(x,t)$。波源在原点 O，且当 $t = 0$ 时，波源处于平衡位置 $y = 0$，且速度沿 y(书上为 x，有误) 轴正方向。

解答

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的一般表达式为

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

依题意

$$\omega = 2\pi f$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{c}{f}$$

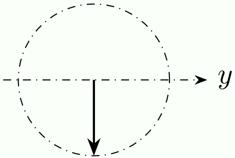
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$$

解答

依题意，$y(0,0)=0$，

$$v_y(0,0)=\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0,t=0}>0$$

根据旋转矢量图可知，$\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$



所以所求平面简谐波的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(2\pi ft-\frac{2\pi f}{c}x-\frac{\pi}{2}\right)$$

习题 10.2.5

已知波源在原点 $x=0$ 的平面简谐波方程为

$$y = A\cos(bt - cx)$$

A，b，c 均为常量。(1) 求振幅、频率、波速和波长；(2) 写出在传播方向上距波源 l 处一点的振动方程式，此质点的初相位如何？

解答

依题意，振幅为 A，

$$\omega = b = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{b}{2\pi}$$

$$k = c = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{c}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{2\pi}{c} \times \frac{b}{2\pi} = \frac{b}{c}$$

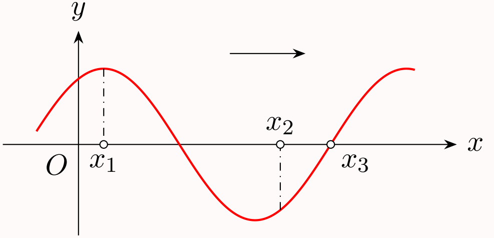
$x = l$ 代入波的表达式即得该点的振动表达式

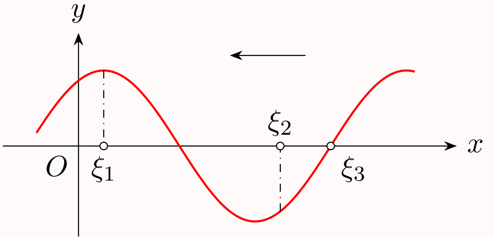
$$y = A\cos(bt - cl)$$

其 t 时刻的相位 $\varphi = bt - cl$，因此其初相位 $\varphi_0 = -cl$。

习题 10.2.9

两图分别表示向右和向左传的两列平面简谐波在某一瞬时的波形图，说明此时 x_1、x_2、x_3 以及 ξ_1、ξ_2、ξ_3 各质元的位移和速度为正还是为负？它们的相位如何？(对于 x_2 和 ξ_2 只要求说明其相位在第几象限)





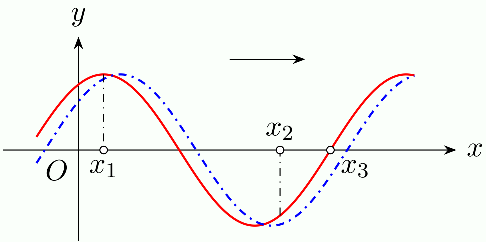
解答

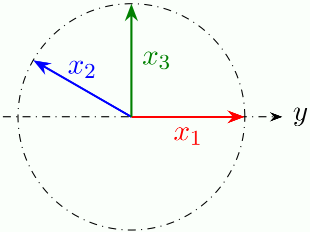
- 波沿 x 轴正方向传播，

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

x 越大，相位 $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$ 越小

- 对 x_1，$y_1 = A$，$v_{y1} = 0$，$\varphi_1 = 0$
- 对 x_2，$y_2 < 0$，$v_{y2} < 0$，φ_2 在第二象限
- 对 x_3，$y_3 = 0$，$v_{y3} < 0$，$\varphi_3 = -\frac{3\pi}{2}$





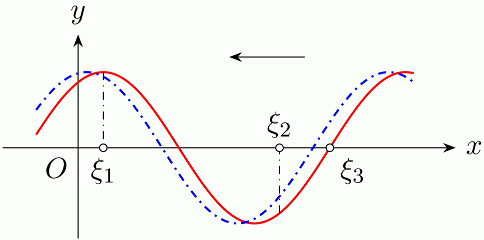
解答

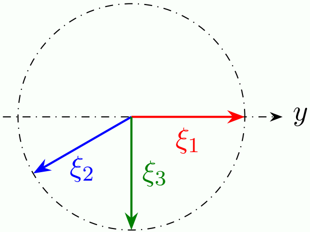
- 波沿 x 轴负方向传播，

$$y = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

x 越大，相位 $\varphi = \omega t + kx + \varphi_0$ 越大

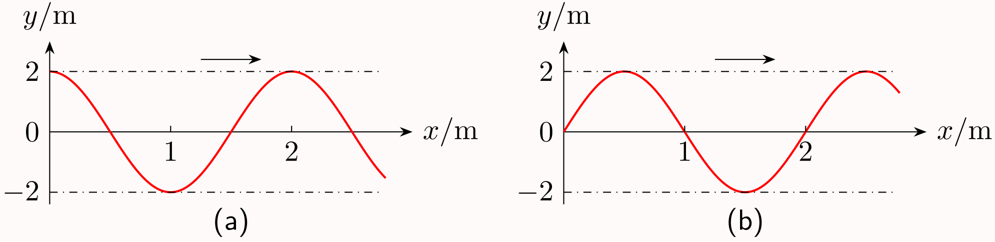
- 对 ξ_1，$y_1 = A$，$v_{y1} = 0$，$\varphi_1 = 0$
- 对 ξ_2，$y_2 < 0$，$v_{y2} > 0$，φ_2 在第三象限
- 对 ξ_3，$y_3 = 0$，$v_{y3} > 0$，$\varphi_3 = \frac{3}{2}\pi$





习题 10.2.10

图 (a)、(b) 分别表示 $t=0$ 和 $t=2$ s 时的某一平面简谐波的波形图。试写出此平面简谐波波方程。



解答

一般地设波的表达式为

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

依题图 (a)

$$A = 2\ \mathrm{m}$$

$$\lambda = 2\ \mathrm{m} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi\ \mathrm{rad/m}$$

$$y(0,0) = A \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

所以波的表达式为

$$y = A\cos(\omega t - \pi x)$$

依题图 (b)

$$y(0,2) = 0 = 2\cos(2\omega)$$

$$v(0,2) = -2\omega\sin(2\omega) < 0$$

$$2\omega = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n = 0,1,2,\cdots$$

$$\omega = \frac{\pi}{4} + n\pi, n = 0,1,2,\cdots$$

根据题目所给信息，无法判断这里 n 应该取多少

解答

【另法】根据两个图可知，在 $0 \to 2$ s 时间段内，波向右传播了 $\left(n+\frac{1}{4}\right)\lambda$，所以波传播的速度

$$v=\frac{\left(n+\frac{1}{4}\right)\lambda}{2}=\left(n+\frac{1}{4}\right)\ \mathrm{m/s}$$

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\pi}{T}\times\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\omega}{k}$$

$$\omega=kv=\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi\ \mathrm{rad/s}$$