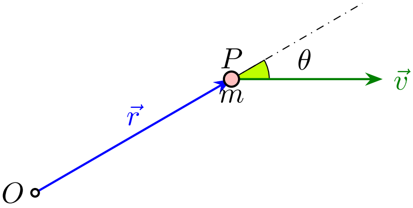
§5.1 质点的角动量定理及角动量守恒定律

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\vec{B} &= B_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + B_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + B_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\vec{C} &= C_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + C_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + C_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \vec{A}\times\vec{B} \\
&= (A_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + A_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + A_z\,\vec{\mathrm{e}}_z)\times(B_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + B_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + B_z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{\mathrm{e}}_z
\end{aligned}
$$

一、质点对参考点的角动量

在某参考系中，质量为 m 的质点在 t 时刻经过位置矢量为 $\vec{r}$ 的 P 点时，速度为 $\vec{v}$，则称该时刻质点对坐标原点 O 的角动量 (或称动量矩) 为

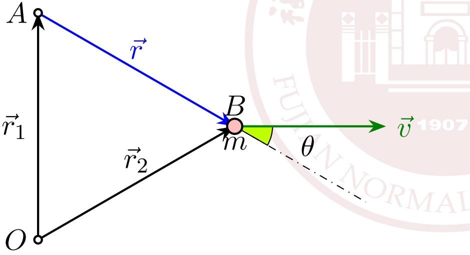
$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$$



若 t 时刻，质点所在位置 (B) 的位置矢量为 $\vec{r}_2$，参考点 (A) 的位置矢量为 $\vec{r}_1$，则质点对参考点 (A) 的角动量为

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

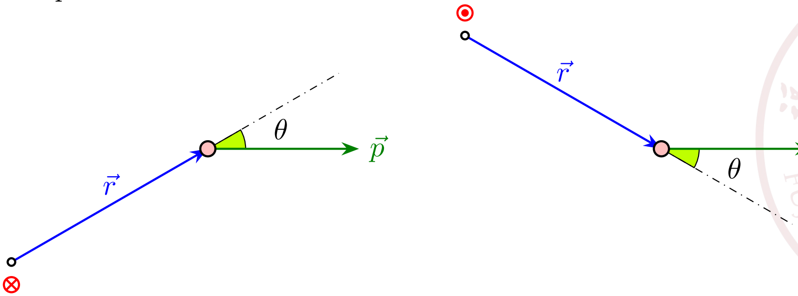
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



根据矢量叉乘的运算规则，角动量的大小

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = rp\sin\theta$$

方向垂直于 $\vec{r}$、$\vec{p}$ 所在的平面



- 由前面的讨论可知，角动量与参考点的选择有关，因此在讨论中必须指明对哪个参考点的角动量。
- P143：为明确角动量对于参考点的依赖性，作图时把角动量矢量的起点置于参考点上。

直角坐标系中

$$\vec{r} = r_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + r_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + r_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{p} = p_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + p_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + p_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = L_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + L_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + L_z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$L_x = r_y p_z - r_z p_y$$

$$L_y = r_z p_x - r_x p_z$$

$$L_z = r_x p_y - r_y p_x$$

如果参考点为坐标原点

$$\vec{r} = x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

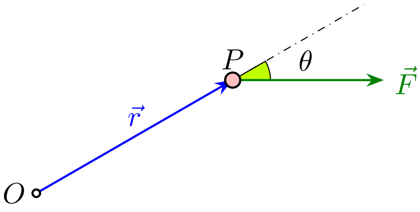
如果 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y_2 - y_1)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z_2 - z_1)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

二、力对参考点的力矩

在某参考系中，t 时刻，质点经过位置矢量为 $\vec{r}$ 的 P 点，所受作用力为 $\vec{F}$，则称该时刻力 $\vec{F}$ 对坐标原点 O 的力矩为

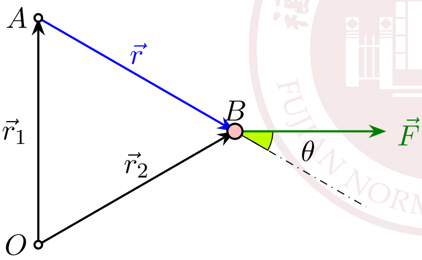
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



若 t 时刻，质点所在位置 (B) 的位置矢量为 $\vec{r}_2$，参考点 (A) 的位置矢量为 $\vec{r}_1$，则力 $\vec{F}$ 对参考点 (A) 的力矩为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

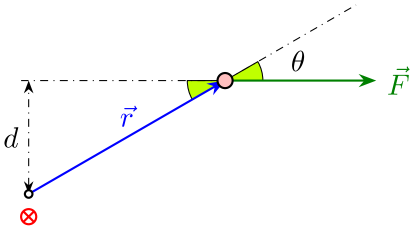
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

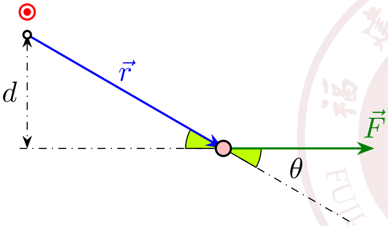


根据矢量叉乘的运算规则，力矩的大小

$$M = |\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF\sin\theta = Fd$$

方向垂直于 $\vec{r}$、$\vec{F}$ 所在的平面





- 由前面的讨论可知，力矩与参考点的选择有关，因此在讨论中必须指明力对哪个参考点的力矩。
- P143：为了明确表示力矩依赖于参考点的位置，把力矩矢量的起点画在参考点处。

直角坐标系中

$$\vec{r} = r_x\,\vec{e}_x + r_y\,\vec{e}_y + r_z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{F} = F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = M_x\,\vec{e}_x + M_y\,\vec{e}_y + M_z\,\vec{e}_z$$

$$M_x = r_yF_z - r_zF_y$$

$$M_y = r_zF_x - r_xF_z$$

$$M_z = r_xF_y - r_yF_x$$

如果质点同时受到 n 个力的作用，对同一个参考点，每个力都有力矩，则质点受到的总的力矩为每个力的力矩的矢量和，等于合力对该参考点的力矩

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}\times\vec{F}_i)\\ &= \vec{r}\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\\ &= \vec{r}\times\vec{F}\end{aligned}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

三、质点对参考点的角动量定理和角动量守恒定律

在惯性参考系中，牛顿第二定律满足

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

因此动量定理满足

因此有

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

其中 $\vec{r}$ 为从任意参考点指向质点所在位置的矢量，即质点相对任意参考点的相对位置矢量，因此

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

即为此时质点所受合力对该参考点的力矩

对于任意矢量 $\vec{A}$，恒有 $\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}$，因此

$$\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}$$

$$\vec{v}\times(m\vec{v})=\vec{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{0}$$

$$\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

其中 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ 为此时质点对同一个参考点的角动量

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点对某参考点的角动量随时间的变化率等于质点所受到的合力对该参考点的力矩，上式即为质点对参考点的角动量定理的微分形式

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L}=\vec{L}_2-\vec{L}_1=\Delta\vec{L}$$

某一段时间内，质点所受到的合力对某参考点的力矩的冲量 (冲量矩，角冲量) 等于这段时间里质点对该参考点角动量的改变量，这就是质点对参考点的角动量定理的积分形式

如果质点所受的合力对某参考点的力矩 $\vec{M}=\vec{0}$，则由质点对参考点的角动量定理可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$$

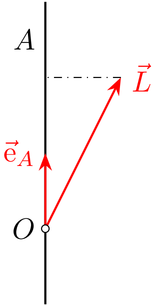
即质点对该参考点的角动量不随时间变化，这就是质点对参考点的角动量守恒定律。如果从 t_1 到 t_2 时间段内，质点所受合力对某参考点的力矩始终为零，则始末时刻质点对该参考点的角动量相等。

- 有心力的作用线始终通过力心，因此有心力对力心的力矩始终为零，因此只在有心力作用下的物体，对力心的角动量守恒。
- 做匀速圆周运动的物体对圆心的角动量守恒。【所受合力指向圆心】
- 做匀速直线运动的物体对任意参考点的角动量守恒。【所受合力为零】

四、质点对轴的角动量定理和角动量守恒定律

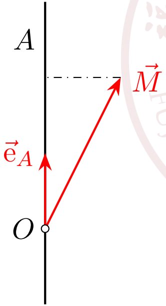
一般地，假定某时刻质点对参考点 O 的角动量为 $\vec{L}$，某个通过 O 点的轴 A，沿轴方向的单位矢量记为 $\vec{\mathrm{e}}_A$，则该时刻质点对轴 A 的角动量

$$L_A = \vec{L} \cdot \vec{\mathrm{e}}_A$$



同样地，假定某时刻质点所受合力对参考点 O 的力矩为 $\vec{M}$，某个通过 O 点的轴 A，沿轴方向的单位矢量记为 $\vec{\mathrm{e}}_A$，则该时刻质点所受合力对轴 A 的力矩

$$M_A = \vec{M} \cdot \vec{\mathrm{e}}_A$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L_x = r_y p_z - r_z p_y = \vec{e}_x \cdot \vec{L}$$

$$L_y = r_z p_x - r_x p_z = \vec{e}_y \cdot \vec{L}$$

$$L_z = r_x p_y - r_y p_x = \vec{e}_z \cdot \vec{L}$$

L_x、L_y、L_z 分别为质点对通过参考点与 x 轴、y 轴、z 轴平行的轴的角动量

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y = \vec{e}_x \cdot \vec{M}$$

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z = \vec{e}_y \cdot \vec{M}$$

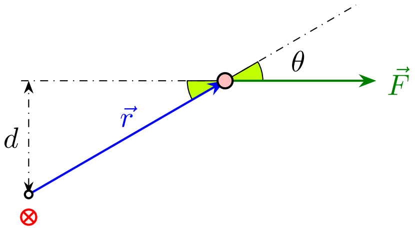
$$M_z = r_x F_y - r_y F_x = \vec{e}_z \cdot \vec{M}$$

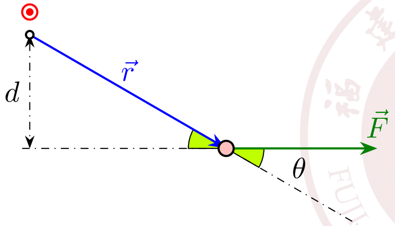
M_x、M_y、M_z 分别为质点所受合力对通过参考点与 x 轴、y 轴、z 轴平行的轴的力矩

根据矢量叉乘的运算规则，力矩的大小

$$M = |\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF\sin\theta = Fd$$

方向垂直于 $\vec{r}$、$\vec{F}$ 所在的平面





- 如果 $\vec{F} = F_z\,\vec{e}_z$，则 $M_z = 0$，即与轴平行的力对轴的力矩恒等于零。
- 如果力的作用线通过轴，该力对轴的力矩等于零。

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{M} = \vec{\mathrm{e}}_z \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{L})}{\mathrm{d}t}$$

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

质点对 z 轴的角动量随时间的变化率等于质点所受合力对 z 轴的力矩，这就是质点对轴的角动量定理的微分形式

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

$$M_z\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z\,\mathrm{d}t = \int_{L_{z1}}^{L_{z2}} \mathrm{d}L_z = L_{z2} - L_{z1} = \Delta L_z$$

某一段时间内，质点所受合力对 z 轴的角冲量等于这段时间内质点对 z 轴的角动量的改变量，这就是质点对轴的角动量定理的积分形式

如果质点所受的合力对 z 轴的力矩 $M_z=0$，则由质点对 z 轴的角动量定理可得

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=0$$

即质点对 z 轴的角动量不随时间变化，这就是质点对 z 轴的角动量守恒定律。如果从 t_1 到 t_2 时间段内，质点所受合力对 z 轴的力矩始终为零，则始末时刻质点对 z 轴的角动量相等。

例题

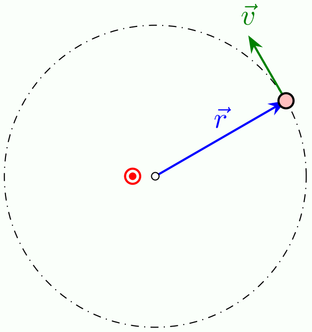
质量为 m 的质点做半径为 R、角速度为 ω 的匀速圆周运动，求质点对圆心的角动量。

解答

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = mR(\omega R) = mR^2\omega = I\omega$$

其中 $I = mR^2$ 称为质点做圆周运动时对通过圆心垂直圆面的转轴的转动惯量



习题 5.1.2&5.1.5

一个质量为 m 的质点沿着一条由 $\vec{r}=A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$ 定义的空间曲线运动，其中 A、B、ω 皆为常量。求此质点所受的对原点的力矩及质点对原点的角动量。

解答

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\\
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\\
&= -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x+B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\\
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\\
&= -A\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x-B\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\\
&= -\omega^2\vec{r}\\
\vec{F} &= m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{v} &= -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{F} &= -m\omega^2\vec{r} \\
\vec{M} &= \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\left(-m\omega^2\vec{r}\right) = \vec{0} \\
\vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p} \\
&= [A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]\times m[-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y] \\
&= m\omega AB\,\vec{\mathrm{e}}_z
\end{aligned}
$$

习题 5.1.3&5.1.6

一个具有单位质量的质点在力场

$$\vec{F} = (3t^2 - 4t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (12t - 6)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

中运动，其中 t 为时间。设质点在 $t = 0$ 时位于原点，且速度为零。求 $t = 2$ 时质点所受的对原点的力矩及质点对原点的角动量。

解答

$$\vec{F} = (3t^2 - 4t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (12t - 6)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$m = 1$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = (3t^2 - 4t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (12t - 6)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$t = 0, \vec{r}_0 = \vec{0}, \vec{v}_0 = \vec{0}$$

$$t = 2, \vec{F}_2 = 4\,\vec{\mathrm{e}}_x + 18\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

解答

$$\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^t \left[(3t^2 - 4t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (12t - 6)\,\vec{\mathrm{e}}_y\right]\mathrm{d}t$$
$$= (t^3 - 2t^2)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (6t^2 - 6t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{v}_2 = 12\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^t \left[(t^3 - 2t^2)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (6t^2 - 6t)\,\vec{\mathrm{e}}_y\right]\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3\right)\vec{\mathrm{e}}_x + (2t^3 - 3t^2)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{r}_2 = -\frac{4}{3}\,\vec{\mathrm{e}}_x + 4\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$
$$= \left(-\frac{4}{3}\,\vec{\mathrm{e}}_x + 4\,\vec{\mathrm{e}}_y\right) \times (4\,\vec{\mathrm{e}}_x + 18\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$
$$= -40\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$
$$= \left(-\frac{4}{3}\,\vec{\mathrm{e}}_x + 4\,\vec{\mathrm{e}}_y\right) \times (1 \times 12\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$
$$= -16\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

习题 5.1.8

一个质量为 m 的质点在 Oxy 平面内运动，其位置矢量为

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

其中 A、B、ω 皆为正常量。试以运动学及动力学观点证明该质点对于坐标原点的角动量守恒。

解答

运动学

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{v} = -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p}\\ &= [A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]\times m[-A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]\\ &= m\omega AB\,\vec{\mathrm{e}}_z\end{aligned}$$

解答

动力学

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= A\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{v} &= -A\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + B\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{a} &= -A\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x - B\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
&= -\omega^2\vec{r} \\
\vec{F} &= m\vec{a} \\
&= -m\omega^2\vec{r} \\
\vec{M} &= \vec{r}\times\vec{F} \\
&= \vec{r}\times\left(-m\omega^2\vec{r}\right) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$