§3.6 用冲量表述的动量定理

一、恒力的冲量

如果有一个恒力 $\vec{F}$ 在质点上持续作用了 Δt 时间，那么称力对质点的冲量

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

二、变力的冲量

如果作用在质点上的力为变力，即 $\vec{F}$ 是时间的函数，但在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间段内，可以把变力视为恒力，因此在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间段内质点受到的元冲量

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

在 $t_1 \to t_2$ 时间段内质点受到的冲量

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

变力在 $t_1 \to t_2$ 时间段内的平均力

$$\overline{\vec{F}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

因此，变力的冲量可以用平均力表示成

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \overline{\vec{F}}(t_2 - t_1)$$

如果一个力的作用时间很短，且在这很短的时间内力的大小变化很大，可达到很大的数值，这种力称为冲 (击) 力，如碰撞过程中物体之间的相互作用力

三、质点的动量定理

牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

加速度的定义

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

动量的定义

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

经典力学中，物体的质量不随物体的运动状态改变而改变，即 m 为常数

$$m\,\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(m\vec{v}) = \mathrm{d}\vec{p}$$

元冲量

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(m\vec{v}) = \mathrm{d}\vec{p}$$

$$\mathrm{d}\vec{I} = \mathrm{d}\vec{p}$$

质点动量定理的微分形式

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

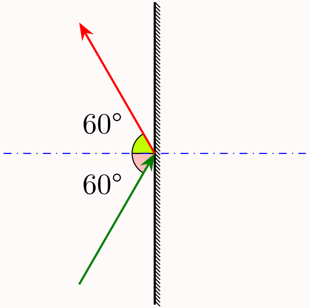
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m\Delta\vec{v}$$

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

质点动量定理的积分形式

例题 3-9

气体对容器壁的压强是由于大量分子碰撞器壁产生的。从分子运动的角度研究气体压强，首先考虑一个分子碰撞器壁的冲量。设某种气体分子质量为 m，以速率 v 沿与器壁法线成 $60°$ 的方向运动与器壁碰撞，反射到容器内，沿与法线成 $60°$ 的另一方向以速率 v 运动，如图所示。求该气体分子作用于器壁的冲量。



解答

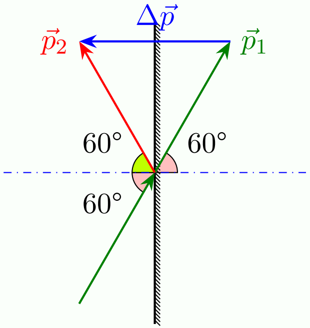
以气体分子为研究对象，碰撞过程前后，气体分子的动量改变量

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

根据动量定理，碰撞过程，气体分子受到器壁施加给它的冲量

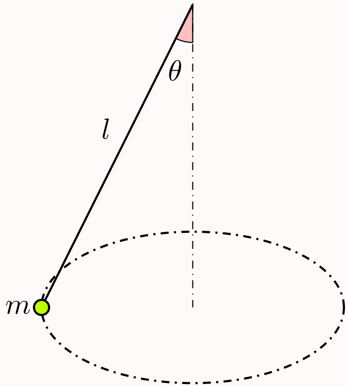
$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

根据牛顿第三定律，碰撞过程，气体分子施加给器壁的冲量大小为 mv，方向垂直器壁向右



例题 3-10

如图所示为一圆锥摆。设摆锤的质量为 m、摆长为 l、摆线与竖直方向夹角为 θ。试求：摆锤在水平面内转动半个圆周的过程中，重力、绳拉力及向心力的冲量及绳平均拉力。



解答

以摆锤为研究对象，对它进行受力分析，共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 F，在这两个力作用下摆锤在水平面内做匀速圆周运动

$$F\cos\theta - mg = 0$$

$$F\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = l\sin\theta$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\theta}{\cos\theta}}$$

所以经过半个圆周所花时间

$$t = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

解答

整个过程中，重力是个恒力，方向永远竖直向下，因此其冲量方向也是竖直向下，大小为

$$I_1 = mgt = m\pi\sqrt{gl\cos\theta}$$

经过半个圆周，速度大小不变，方向相反，因此动量改变量的大小

$$\Delta p = 2mv$$

方向在水平面内，根据动量定理，这是整个过程中摆锤所受合力的冲量，也就是向心力的冲量。

注意，摆锤运动过程中，绳子拉力的大小保持不变，但方向一直在改变，因此拉力的冲量不能直接用大小乘上时间。但摆锤所受总的冲量等于重力的冲量与绳子拉力的冲量的矢量和，所以绳子拉力的冲量等于总的冲量减去重力的冲量 (水平方向和竖直方向均有分量)，拉力的冲量除以时间就是平均拉力。

习题 3.6.2

一个质量为 m 的质点在 Oxy 平面上运动，其位置矢量为

$$\vec{r} = a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

求质点的动量。

解答

$$\vec{r} = a\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\omega\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\omega[-a\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + b\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y]$$

习题 3.6.3

自动步枪连发时每分钟可射出 120 发子弹，每颗子弹质量为 7.9 g，出口速率为 735 m/s。求射击时所需的平均力。

解答

一颗子弹射击过程的动量改变量

$$\begin{aligned}\Delta p_0 &= m(v-0)\\ &= mv\end{aligned}$$

一分钟内 120 发子弹总的动量改变量

$$\begin{aligned}\Delta p &= N\Delta p_0\\ &= Nmv\end{aligned}$$

根据动量定理，一分钟内，子弹受到的总的冲量

$$I = \Delta p$$

所以平均力

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \frac{\Delta p}{t}\\ &= \frac{Nmv}{t}\\ &= \frac{120\times 0.0079\times 735}{60}\\ &\approx 11.6\ \mathrm{N}\end{aligned}$$