§2.4 质点直线运动——从加速度到速度和坐标

一、已知加速度求速度

若已知任意时刻质点的加速度 $a_x(t)$，以及 t_0 时刻质点的速度 v_{0x}，则可以通过积分求得任意时刻质点的速度 $v_x(t)$

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v_x = a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta v_x = v_x - v_{0x} = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

若已知质点的加速度与速度有关 $a_x(v_x)$，以及 t_0 时刻质点的速度 v_{0x}，则可以通过积分求得任意时刻质点的速度 $v_x(t)$

$$a_x(v_x) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{a_x(v_x)} = \mathrm{d}t \quad \text{(分离变量)}$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{a_x(v_x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{a_x(v_x)} = t - t_0$$

若已知质点的加速度与速度有关 $a_x(v_x)$，以及通过 x_0 位置时质点的速度 v_{0x}，则可以通过积分求得通过任意位置时质点的速度 $v_x(x)$

$$a_x(v_x) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{v_x\,\mathrm{d}v_x}{a_x(v_x)} = \mathrm{d}x \quad \text{(分离变量)}$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{v_x\,\mathrm{d}v_x}{a_x(v_x)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{v_x\,\mathrm{d}v_x}{a_x(v_x)} = x - x_0$$

若已知通过任意位置时质点的加速度 $a_x(x)$，以及通过 x_0 位置时质点的速度 v_{0x}，则可以通过积分求得通过任意位置时质点的速度 $v_x(x)$

$$a_x(x) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$$

$$v_x\,\mathrm{d}v_x = a_x(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(分离变量)}$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} v_x\,\mathrm{d}v_x = \int_{x_0}^{x} a_x(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}(v_x^2 - v_{0x}^2) = \int_{x_0}^{x} a_x(x)\,\mathrm{d}x$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2\int_{x_0}^{x} a_x(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 2-7

跳水运动员沿竖直方向入水，接触水面时速率为 v_0，入水后地球对他的吸引力和水的浮力相抵消，仅受水的阻碍而减速。自水面向下取为 y 轴正方向，其加速度为 $a_y = -kv_y^2$，v_y 为速度，k 为常量。取入水时刻 $t=0$，求运动员入水后速度随时间的变化。

解答

$$a_y = -kv_y^2 = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y^2} = k\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v_y} -\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y^2} = \int_0^t k\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{v_y} - \frac{1}{v_0} = kt$$

$$\frac{1}{v_y} = \frac{1}{v_0} + kt = \frac{1+kv_0t}{v_0}$$

$$v_y = \frac{v_0}{1+kv_0t}$$

例题 2-8

跳水运动员沿竖直方向入水，接触水面时速率为 v_0，入水后地球对他的吸引力和水的浮力相抵消，仅受水的阻碍而减速。自水面向下取为 y 轴正方向，其加速度为 $a_y=-kv_y^2$，v_y 为速度，k 为常量。取入水位置为 $y=0$，求运动员速度减为入水速度的 $\frac{1}{10}$ 时，运动员的入水深度。

解答

$$a_y=-kv_y^2=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{v_y\,\mathrm{d}v_y}{v_y^2}=-k\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{v_0}^{\frac{1}{10}v_0}\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y}=\int_0^y -k\,\mathrm{d}y$$

$$\ln\frac{1}{10}=-ky$$

$$y=\frac{1}{k}\ln 10$$

例题

若已知某质点的加速度与位置有关，$a_x = -\omega^2 x$，且当 $x = 0$ 时，速度 $v_{0x} = A\omega$，其中 A、ω 均为正的常量。试求质点的速度与位置之间的关系 $v_x(x)$。

解答

$$a_x = -\omega^2 x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$$

$$v_x\,\mathrm{d}v_x = -\omega^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{A\omega}^{v_x} v_x\,\mathrm{d}v_x = \int_0^x -\omega^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}(v_x^2 - A^2\omega^2) = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$v_x^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$v_x = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

二、已知速度求位置

若已知任意时刻质点的速度 $v_x(t)$，以及 t_0 时刻质点的位置 x_0，则可以通过积分求得任意时刻质点的位置 $x(t)$

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}x = v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta x = x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

若已知通过任意位置时质点的速度 $v_x(x)$，以及 t_0 时刻质点的位置 x_0，则可以通过积分求得任意时刻质点的位置 $x(t)$

$$v_x(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x)} = \mathrm{d}t \quad \text{（分离变量）}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{v_x(x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{v_x(x)} = t - t_0$$

例题

已知某质点的速度 $v_x = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$，其中 A、ω 均为正的常数，$t = 0$ 时刻，质点的位置 $x = 0$。试求质点的运动学方程。

解答

$$v_x = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t$$

积分公式【高数上 P378 第 59 式】

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + \mathrm{C}$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{A} = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t = \omega t$$

$$x = A\sin(\omega t)$$

解答

或者用 (第二类) 换元法自己积分，令 $x = A\sin\theta$(或 $x = A\cos\theta$)，则

- $\mathrm{d}x = A\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$
- 下限，$x = 0$ 时，$\theta = 0$
- 上限，$x = x$ 时，$\theta = \theta$
- x 在 $-A$ 到 $+A$ 之间取值，θ 在 $-\frac{1}{2}\pi$ 到 $+\frac{1}{2}\pi$ 之间取值，因此 $\sqrt{A^2 - x^2} = A\cos\theta$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_0^\theta \frac{A\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{A\cos\theta} = \int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t = \omega t$$

$$x = A\sin(\theta) = A\sin(\omega t)$$

解答

若令 $x = A\cos\theta$，则

- $\mathrm{d}x = -A\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$
- 下限，$x = 0$ 时，$\theta = \frac{1}{2}\pi$
- 上限，$x = x$ 时，$\theta = \theta$
- x 在 $-A$ 到 $+A$ 之间取值，θ 在 π 到 0 之间取值，因此 $\sqrt{A^2 - x^2} = A\sin\theta$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \frac{-A\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{A\sin\theta} = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi - \theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t = \omega t$$

$$\theta = \frac{1}{2}\pi - \omega t$$

$$x = A\cos\theta = A\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \omega t\right) = A\sin(\omega t)$$

习题 2.4.3

一质点作直线运动，其瞬时加速度的变化规律为 $a_x = -A\omega^2\cos(\omega t)$。在 $t=0$ 时，$v_x = 0$，$x = A$，其中 A、ω 均为正常数，求此质点的运动学方程。

解答

$$a_x = -A\omega^2\cos(\omega t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v_x = -A\omega^2\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x = \int_0^t -A\omega^2\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$v_x = -A\omega\sin(\omega t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}x = -A\omega\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_A^x\mathrm{d}x = \int_0^t -A\omega\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$x - A = A[\cos(\omega t) - 1]$$

$$x = A\cos(\omega t)$$

习题 2.4.4

飞机着陆时为尽快停止采用降落伞制动。刚着陆即 $t=0$ 时，速度为 v_0，且坐标为 $x=0$。假设其加速度为 $a_x=-bv_x^2$，b 为常量。求飞机速度随时间的变化 $v_x(t)$。

解答

$$a_x=-bv_x^2=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x^2}=b\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}-\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x^2}=\int_0^t b\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{v_x}-\frac{1}{v_0}=bt$$

$$\frac{1}{v_x}=\frac{1}{v_0}+bt=\frac{1+bv_0t}{v_0}$$

$$v_x=\frac{v_0}{1+bv_0t}$$