§7.2 刚体的动量和质心运动定理

- 刚体是一个特殊的质点系 (不变质点系)

一、刚体的质心

- 一般地假定，质点系由 N 个质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，任意 t 时刻，其位置为 $\vec{r}_i$，则质点系的质心的质量为质点系内所有质点的质量的总和

$$m_C = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

- 质心的位置

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m_C}\vec{r}_i$$

即质点的位置以其质量为权重的平均值

$$x_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \qquad y_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \qquad z_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

- 对于质量连续分布的物体

$$m_C = \int_m \mathrm{d}m$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

$$x_C = \frac{1}{m_C}\int_m x\,\mathrm{d}m$$

$$y_C = \frac{1}{m_C}\int_m y\,\mathrm{d}m$$

$$z_C = \frac{1}{m_C}\int_m z\,\mathrm{d}m$$

- 对于线状物体

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}L$$

- 对于面状物体

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$$

- 对于体状物体

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

- 对于质量均匀分布的规则几何物体，其质心位于其几何中心

- 如果物体质量分布不均匀(以体状物体为例，线状和面状类似)，即质量体密度 ρ 是位置的函数 $\rho=\rho(x,y,z)$，则

$$\mathrm{d}m=\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$m_C=\int_m \mathrm{d}m=\int_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$\vec{r}_C=\frac{1}{m_C}\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m=\frac{\int_V \vec{r}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}$$

- 如果物体质量分布均匀，即质量体密度 ρ 是个常数，则

$$\vec{r}_C=\frac{\int_V \vec{r}\rho\,\mathrm{d}V}{\int_V \rho\,\mathrm{d}V}=\frac{\int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int_V \mathrm{d}V}=\frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V$$

$$x_C=\frac{1}{V}\int_V x\,\mathrm{d}V$$

$$y_C=\frac{1}{V}\int_V y\,\mathrm{d}V$$

$$z_C=\frac{1}{V}\int_V z\,\mathrm{d}V$$

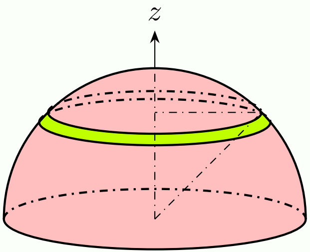
例题

求半径为 a 的均质半圆球的质心。

解答

如图建立坐标系，取 $z \to z + \mathrm{d}z$ 部分为 $\mathrm{d}m$，设质量体密度为 ρ，则

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \,\mathrm{d}z = \pi\left(a^2 - z^2\right)\mathrm{d}z$$



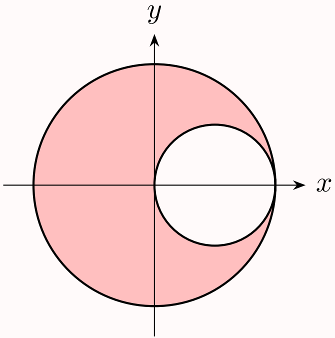
解答

由于对称性，质心一定在 z 轴上，且

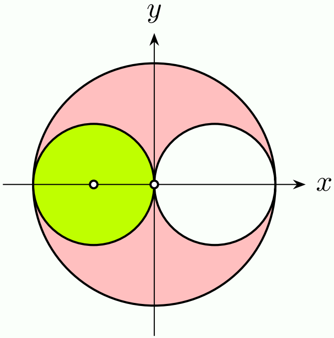
$$
\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{V}\int_V z\,\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi a^3}\int_0^a z\pi(a^2-z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{2a^3}\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^4\right) \\
&= \frac{3}{8}a
\end{aligned}
$$

例题

在半径为 R 的均质等厚大圆板的一侧挖掉半径为 $\frac{R}{2}$ 的小圆板，大小圆相切，如图所示。求余下部分的质心。



解答



解答

$$m_1 = \sigma\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

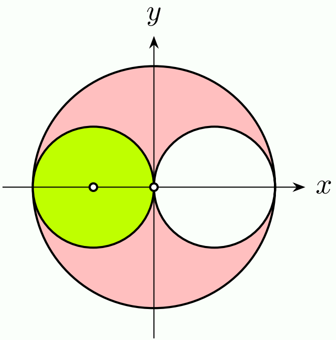
$$m_2 = \sigma\left[\pi R^2 - 2\times\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$$

$$x_{1C} = -\frac{R}{2}$$

$$y_{1C} = 0$$

$$x_{2C} = 0$$

$$y_{2C} = 0$$



$$x_C = \frac{m_1x_{1C} + m_2x_{2C}}{m_1 + m_2} = -\frac{R}{6}$$

$$y_C = \frac{m_1y_{1C} + m_2y_{2C}}{m_1 + m_2} = 0$$

二、刚体的动量与质心运动定理

质心的位置

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

质心的速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{v}\,\mathrm{d}m$$

质心的加速度

$$\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{a}\,\mathrm{d}m$$

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{v}\,\mathrm{d}m$$

$$m_C\vec{v}_C = \int_m \vec{v}\,\mathrm{d}m$$

$$\vec{p}_C = \vec{p}$$

质点系质心的动量等于质点系的动量
刚体的动量等于刚体质心的动量

$$\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_C}\int_m \vec{a}\,\mathrm{d}m$$

$$m_C\vec{a}_C = m_C\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \int_m \vec{a}\,\mathrm{d}m$$

$$\vec{a}\,\mathrm{d}m = \mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\vec{F}_{\text{内}} + \mathrm{d}\vec{F}_{\text{外}}$$

$$\int_m \mathrm{d}\vec{F}_{\text{内}} = \vec{0}$$

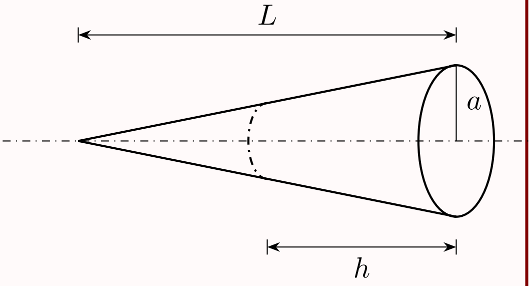
$$\int_m \vec{a}\,\mathrm{d}m = \int_m \mathrm{d}\vec{F}_{\text{外}} = \vec{F}_{\text{外}}$$

$$\vec{F}_{\text{外}} = m_C\vec{a}_C = m_C\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

刚体所受外力的矢量和等于刚体质心的质量与质心加速度的乘积，等于刚体质心动量对时间的变化率，等于刚体动量对时间的变化率。当刚体所受外力的矢量和为零时，刚体的动量守恒

习题 7.2.2

如图所示，在下面两种情况下求如图直圆锥体的总质量和质心位置。(1) 圆锥体为均质；(2) 密度为 h 的函数 $\rho = \rho_0\left(1-\frac{h}{L}\right)$，$\rho_0$ 为正常量。



解答

以圆锥体底部为 xy 平面，圆心为坐标原点，中心轴为 z 轴，取 $z \to z+\mathrm{d}z$ 部分为 $\mathrm{d}m$，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}m &= \rho\,\mathrm{d}V \\
&= \rho\pi\left(\frac{L-z}{L}a\right)^2 \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

由于对称性，质心一定在 z 轴上

解答

(1) 圆锥体为均质

$$
\begin{aligned}
m_C &= \int_0^L \rho\pi\left(\frac{L-z}{L}a\right)^2 \mathrm{d}z \\
&= \rho\pi\frac{a^2}{L^2}\left[-\frac{1}{3}(L-z)^3\right]\Bigg|_0^L \\
&= \frac{1}{3}\rho\pi a^2 L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{m_C}\int_0^L z\rho\pi\left(\frac{L-z}{L}a\right)^2 \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{m_C}\times\rho\pi\frac{a^2}{L^2}\int_0^L z(L-z)^2\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{L^3}\left[\frac{1}{2}L^2z^2-\frac{2}{3}Lz^3+\frac{1}{4}z^4\right]\Bigg|_0^L \\
&= \frac{1}{4}L
\end{aligned}
$$

解答

(2)ρ 是 h 的函数，在这里就是 z 的函数

$$
\begin{aligned}
m_C &= \int_0^L \rho_0\left(1-\frac{z}{L}\right)\pi\left(\frac{L-z}{L}a\right)^2 \mathrm{d}z \\
&= \rho_0\pi\frac{a^2}{L^3}\left[-\frac{1}{4}(L-z)^4\right]\Bigg|_0^L \\
&= \frac{1}{4}\rho_0\pi a^2 L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{m_C}\int_0^L \rho_0\left(1-\frac{z}{L}\right)\rho\pi\left(\frac{L-z}{L}a\right)^2 \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{m_C}\times\rho_0\pi\frac{a^2}{L^3}\int_0^L z(L-z)^3\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{4}{L^4}\left[\frac{1}{2}L^3z^2-L^2z^3+\frac{3}{4}Lz^4-\frac{1}{5}z^5\right]\Bigg|_0^L \\
&= \frac{1}{5}L
\end{aligned}
$$