微分

一、微分的概念

- 变量 x 的无限小改变量，即 $\Delta x \to 0$，称为变量 x 的微分，记为 $\mathrm{d}x$
- 微分 $\mathrm{d}x$ 无限趋于零，但不等于零，且可正可负
- $(\mathrm{d}x)^2$ 是一个比 $\mathrm{d}x$ 更趋近于零的高阶无穷小量，加减运算中可以将高阶小量忽略不计

$$x \pm \mathrm{d}x \to x$$
$$\mathrm{d}x \pm (\mathrm{d}x)^2 \to \mathrm{d}x$$

$$x = x \times 1 = x \times (\mathrm{d}x)^0$$

即有限大小的 x 可以称为零阶小量，与零阶小量 x 相比，一阶小量 $\mathrm{d}x$ 是高阶小量，因此二者相加减时可以将高阶小量 $\mathrm{d}x$ 忽略不计

$$x \pm \mathrm{d}x \to x$$

- 由于自变量的无限小改变引起的函数的无穷小改变称为函数的微分

$$y = f(x)$$
$$\mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$$

括号里面的表达式表示自变量的取值：自变量为 x 时，函数值为 $f(x)$；自变量为 $x + \mathrm{d}x$ 时，函数值为 $f(x + \mathrm{d}x)$

- 严格来说，力学中微小过程的元功 $\mathrm{d}W$ 仅仅是一个小量而不一定是一个微分

二、常见基本函数的微分

例题

$y = f(x) = \mathrm{C}$，C 为任意一个固定的常数。求 $\mathrm{d}y$。

解答

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &= \mathrm{C} \\
f(x) &= \mathrm{C} \\
f(x+\mathrm{d}x) &= \mathrm{C} \\
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= \mathrm{C} - \mathrm{C} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

即任意常数的微分为零，即 $\mathrm{d}\mathrm{C} = 0$

例题

$y=f(x)=ax$，a 为任意非零常数，求 $\mathrm{d}y$。

解答

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) = ax \\
f(x) &= ax \\
f(x+\mathrm{d}x) &= a\times(x+\mathrm{d}x) \\
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= a\times(x+\mathrm{d}x) - ax \\
&= a\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

即 $\mathrm{d}(ax) = a\,\mathrm{d}x$

例题

$y=f(x)=x^2$，求 $\mathrm{d}y$。

解答

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) = x^2 \\
f(x) &= x^2 \\
f(x+\mathrm{d}x) &= (x+\mathrm{d}x)^2 \\
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^2 - x^2 \\
&= x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 - x^2 \\
&= 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 \\
&= 2x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

这里利用高阶小量在加减运算中可以忽略的性质，因此有 $\mathrm{d}(x^2)=2x\,\mathrm{d}x$

例题

$y = f(x) = x^3$，求 $\mathrm{d}y$。

解答

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) = x^3 \\
f(x) &= x^3 \\
f(x+\mathrm{d}x) &= (x+\mathrm{d}x)^3 \\
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3 \\
&= 3x^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

这里利用高阶小量在加减运算中可以忽略的性质，因此有 $\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\,\mathrm{d}x$

提示

一般地，利用二项式定理

$$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-i},C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

和高阶小量在加减运算中可以忽略的性质，可得 $\mathrm{d}(x^n)=nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$
这里 n 可以推广到任意实数，而不限制在整数

提示

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) = x^n \\
f(x) &= x^n \\
f(x+\mathrm{d}x) &= (x+\mathrm{d}x)^n \\
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^n - x^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i (\mathrm{d}x)^{n-i} - x^n \\
&= C_n^0 x^0 (\mathrm{d}x)^n + C_n^1 x^1 (\mathrm{d}x)^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} (\mathrm{d}x)^1 + C_n^n x^n (\mathrm{d}x)^0 - x^n \\
&= C_n^{n-1} x^{n-1}\,\mathrm{d}x + C_n^{n-2} x^{n-2} (\mathrm{d}x)^2 + C_n^{n-3} x^{n-3} (\mathrm{d}x)^3 + \cdots + C_n^0 x^0 (\mathrm{d}x)^n \\
&= n x^{n-1}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

利用三角函数的和差化积公式

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

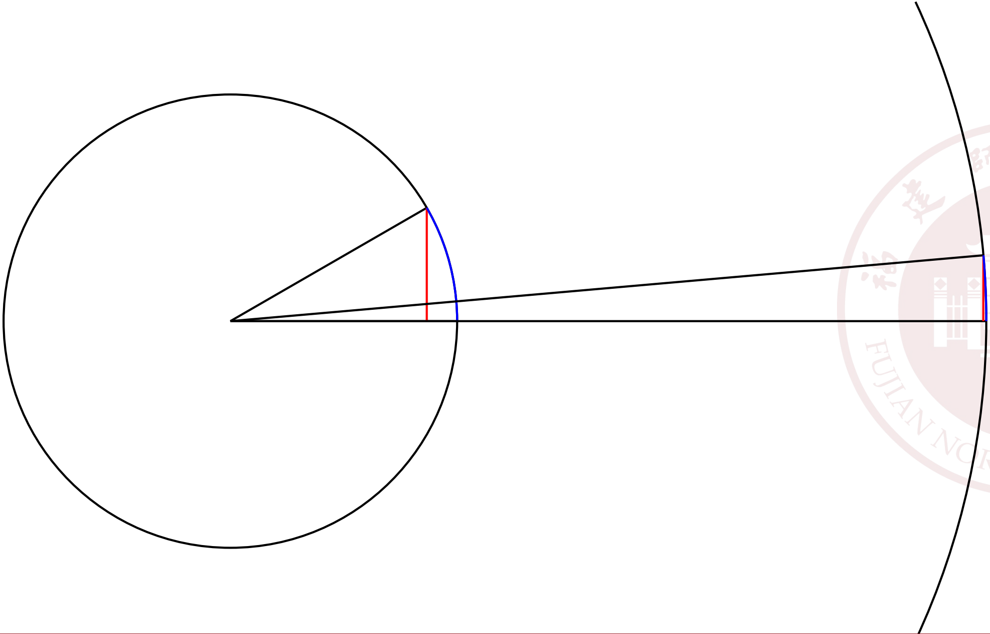
或者和角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

以及近似表达式

$$\sin(\mathrm{d}x) \approx \mathrm{d}x, \cos(\mathrm{d}x) \approx 1$$

可得 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的微分



$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sin x &= \sin(x+\mathrm{d}x)-\sin x\\ &= 2\cos\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\sin\frac{\mathrm{d}x}{2}\\ &= 2\cos x\times\frac{\mathrm{d}x}{2}\\ &= \cos x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\cos x &= \cos(x+\mathrm{d}x)-\cos x\\ &= -2\sin\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\sin\frac{\mathrm{d}x}{2}\\ &= -2\sin x\times\frac{\mathrm{d}x}{2}\\ &= -\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sin x &= \sin(x+\mathrm{d}x)-\sin x\\ &= \sin x\cos(\mathrm{d}x)+\cos x\sin(\mathrm{d}x)-\sin x\\ &= \sin x\times 1+\cos x\times\mathrm{d}x-\sin x\\ &= \cos x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\cos x &= \cos(x+\mathrm{d}x)-\cos x\\ &= \cos x\cos(\mathrm{d}x)-\sin x\sin(\mathrm{d}x)-\cos x\\ &= \cos x\times 1-\sin x\times\mathrm{d}x-\cos x\\ &= -\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

- 常见基本函数的微分

$$\mathrm{d}(\mathrm{C}) = 0$$
$$\mathrm{d}(ax) = a\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

三、微分的运算法则

- 一般地假定两个函数分别为 $y_1 = u(x)$ 和 $y_2 = v(x)$，则有

$$\begin{aligned} u(x) &= u \\ u(x+\mathrm{d}x) &= u + \mathrm{d}u \\ v(x) &= v \\ v(x+\mathrm{d}x) &= v + \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}u &= u(x+\mathrm{d}x) - u(x) \\ \mathrm{d}v &= v(x+\mathrm{d}x) - v(x) \end{aligned}$$

对于函数 $y = u(x)$，一般地，当自变量为 x 时，函数值记为 u；假设当自变量为 $x + \mathrm{d}x$ 时，函数值为 u'，即

$$\begin{aligned} u(x) &= u \\ u(x+\mathrm{d}x) &= u' \end{aligned}$$

那么根据函数微分的定义

$$\mathrm{d}u = u(x+\mathrm{d}x) - u(x) = u' - u$$

所以

$$u(x+\mathrm{d}x) = u' = u + \mathrm{d}u$$

- 函数和与差的微分
  - 设 $y_3 = y_1 \pm y_2 = u \pm v$，则

$$
\begin{aligned}
y_3(x) &= u(x) \pm v(x) \\
&= u \pm v \\
y_3(x + \mathrm{d}x) &= u(x + \mathrm{d}x) \pm v(x + \mathrm{d}x) \\
&= (u + \mathrm{d}u) \pm (v + \mathrm{d}v) \\
\mathrm{d}y_3 &= \mathrm{d}(u \pm v) \\
&= y_3(x + \mathrm{d}x) - y_3(x) \\
&= [u(x + \mathrm{d}x) \pm v(x + \mathrm{d}x)] - [u(x) \pm v(x)] \\
&= [u(x + \mathrm{d}x) - u(x)] \pm [v(x + \mathrm{d}x) - v(x)] \\
&= \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

  - 即函数和与差的微分等于微分的和与差

$$
\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v
$$

- 函数乘积的微分
  - 设 $y_4 = y_1 y_2 = uv$，则

$$
\begin{aligned}
y_4(x) &= u(x)v(x) \\
&= uv \\
y_4(x+\mathrm{d}x) &= u(x+\mathrm{d}x)v(x+\mathrm{d}x) \\
&= (u+\mathrm{d}u)(v+\mathrm{d}v) \\
\mathrm{d}y_4 &= \mathrm{d}(uv) \\
&= y_4(x+\mathrm{d}x) - y_4(x) \\
&= [u(x+\mathrm{d}x)v(x+\mathrm{d}x)] - [u(x)v(x)] \\
&= [(u+\mathrm{d}u)(v+\mathrm{d}v)] - [uv] \\
&= uv + u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u + (\mathrm{d}u)(\mathrm{d}v) - uv \\
&= u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u + (\mathrm{d}u)(\mathrm{d}v) \\
&= u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

- 两个函数乘积的微分等于第一个函数的微分与第二个函数的乘积，加上第二个函数的微分与第一个函数的乘积，即

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(uv) &= (\mathrm{d}u)v + u(\mathrm{d}v) \\
&= u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

- 函数商的微分
  - 设 $y_5 = \frac{y_1}{y_2} = \frac{u}{v}$，则

$$y_5(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u}{v}$$

$$y_5(x+\mathrm{d}x) = \frac{u(x+\mathrm{d}x)}{v(x+\mathrm{d}x)} = \frac{u+\mathrm{d}u}{v+\mathrm{d}v}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y_5 &= \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) \\
&= y_5(x+\mathrm{d}x) - y_5(x) \\
&= \frac{u(x+\mathrm{d}x)}{v(x+\mathrm{d}x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\
&= \frac{u+\mathrm{d}u}{v+\mathrm{d}v} - \frac{u}{v}
\end{aligned}$$

  - 设 $y_5 = \frac{y_1}{y_2} = \frac{u}{v}$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y_5 &= \frac{u+\mathrm{d}u}{v+\mathrm{d}v} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{(u+\mathrm{d}u)v - u(v+\mathrm{d}v)}{v(v+\mathrm{d}v)} \\
&= \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2}
\end{aligned}$$

  - 两个函数商的微分等于分子的微分与分母的乘积减去分母的微分与分子的乘积，二者之差与分母平方的商，即

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2}$$

- 微分的运算法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2}$$

据此，可以推广到

$$\mathrm{d}(u \pm v \pm w) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \pm \mathrm{d}w$$

$$\mathrm{d}(uvw) = (\mathrm{d}u)vw + u(\mathrm{d}v)w + uv(\mathrm{d}w)$$

四、复合函数的微分

利用基本函数的微分公式

$$\mathrm{d}(\mathrm{C}) = 0$$

$$\mathrm{d}(ax) = a\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

及微分的运算法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2}$$

可以计算复合函数的微分

例题

求函数 $y=\sin(2x)$ 的微分。

解答

$$
\begin{aligned}
y &= \sin(2x) \\
y &= \sin u \Rightarrow \mathrm{d}y = \cos u \,\mathrm{d}u \\
u &= 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}y &= \cos u \,\mathrm{d}u \\
&= \cos(2x) \times 2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

例题

求函数 $x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$ 的微分，其中 A、ω、φ_0 均为非零常数。

解答

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$x = Au_1 \Rightarrow \mathrm{d}x = A\,\mathrm{d}u_1$$

$$u_1 = \cos u_2 \Rightarrow \mathrm{d}u_1 = -\sin u_2\,\mathrm{d}u_2$$

$$u_2 = u_3 + u_4 \Rightarrow \mathrm{d}u_2 = \mathrm{d}u_3 + \mathrm{d}u_4 \Rightarrow \mathrm{d}u_2 = \omega\,\mathrm{d}t$$

$$u_3 = \omega t \Rightarrow \mathrm{d}u_3 = \omega\,\mathrm{d}t$$

$$u_4 = \varphi_0 \Rightarrow \mathrm{d}u_4 = 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= A\,\mathrm{d}u_1 \\ &= A(-\sin u_2\,\mathrm{d}u_2) \\ &= -A\sin u_2(\omega\,\mathrm{d}t) \\ &= -A\omega\sin u_2\,\mathrm{d}t \\ &= -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例题

求函数 $y = \tan x$ 的微分。

解答

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2}$$

$$u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}v = -\sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \frac{(\mathrm{d}u)v - u(\mathrm{d}v)}{v^2} \\ &= \frac{(\cos x \, \mathrm{d}x) \cos x - \sin x(-\sin x \, \mathrm{d}x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x \, \mathrm{d}x + \sin^2 x \, \mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

例题

已知 $y=\sqrt{x^2+H^2}$，H 为常数，试求 $\mathrm{d}y$。

解答

$$y=\sqrt{x^2+H^2}$$

$$y=u^{1/2}\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{1}{2}u^{1/2-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$u=x^2+H^2\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times 2x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+H^2}}\end{aligned}$$

解答

另外一种方法

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2 + H^2} \\
y^2 &= x^2 + H^2 \\
\mathrm{d}(y^2) &= \mathrm{d}(x^2 + H^2) \\
&= \mathrm{d}(x^2) + \mathrm{d}(H^2) \\
2y\,\mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x + 0 \\
\mathrm{d}y &= \frac{x\,\mathrm{d}x}{y} \\
&= \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + H^2}}
\end{aligned}
$$

圆的面积 $S(r)=\pi r^2$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= S(r+\mathrm{d}r)-S(r)=\pi(r+\mathrm{d}r)^2-\pi r^2\\ &=\pi[r^2+2r\,\mathrm{d}r+(\mathrm{d}r)^2-r^2]\\ &=\pi[2r\,\mathrm{d}r+(\mathrm{d}r)^2]\\ &=2\pi r\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

球的体积 $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= V(r+\mathrm{d}r)-V(r)=\frac{4}{3}\pi(r+\mathrm{d}r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3\\ &=\frac{4}{3}\pi[r^3+3r^2\,\mathrm{d}r+3r(\mathrm{d}r)^2+(\mathrm{d}r)^3-r^3]\\ &=\frac{4}{3}\pi[3r^2\,\mathrm{d}r+3r(\mathrm{d}r)^2+(\mathrm{d}r)^3]\\ &=4\pi r^2\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$