§7.6 刚体的平衡

- 本书未给出平衡状态的定义
- 平衡包括静平衡和动平衡
- 本书仅讨论在某个惯性参考系中刚体处于静止的状态，则在另一惯性参考系中，该刚体做匀速直线运动
- 本书仅讨论刚体所受的所有外力都在同一个平面内的情况

- 如果刚体静止，则刚体的质心加速度必为零，因此根据质心运动定理，刚体所受的外力的矢量和必为零

$$\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{i外} = \vec{0}$$

上式称为刚体的力平衡条件

- 如果刚体静止，则刚体绕任意转轴的角加速度必为零，因此根据转动定理，刚体所受的外力对任意转轴的力矩之和必为零，因此刚体所受的外力对任意参考点的力矩矢量和必为零

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \vec{0}$$

上式称为刚体的力矩平衡条件

- 力平衡方程 (直角坐标系中的分量形式)

$$\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i F_{iz} = 0$$

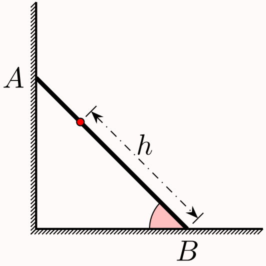
- 力矩平衡方程 (直角坐标系中的分量形式)

$$\sum_i M_{ix} = 0, \sum_i M_{iy} = 0, \sum_i M_{iz} = 0$$

如果刚体受到约束，只能在某个平面 (取为 xy 平面) 内运动，那么力平衡方程中不需要考虑 z 分量，力矩平衡方程中只需要考虑 z 分量。

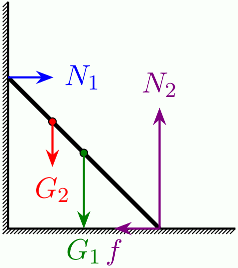
例题

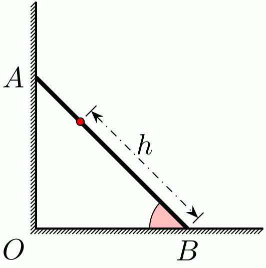
一架匀质的梯子，质量为 m_1、长为 L，上端 A 靠于光滑的墙上，下端 B 置于粗糙地面上，梯与地面之间的摩擦系数为 μ。现有一质量为 m_2 的物体放在梯上距梯下端 h 处。试求梯子不滑动的条件。



解答

以梯子为研究对象，受力分析如下





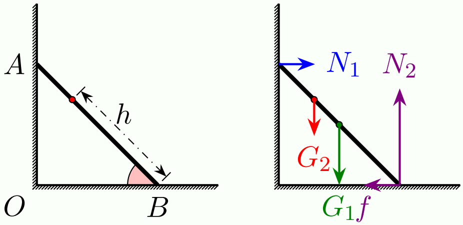
力平衡方程为

$$N_1 - f = 0$$
$$N_2 - G_1 - G_2 = 0$$

力矩平衡方程原则上可以通过任意一个点的任何一个转轴而列，这里可以选择墙角 O 或者梯子上端 A 或者梯子下端 B 为参考点，转轴垂直纸面，并以逆时针（垂直纸面向外）为正。

解答

以下三式分别是以 B、O、A 为参考点时的力矩平衡方程为【可以证明，这三个力矩平衡方程是等价的 (考虑了两个力平衡方程)】



$$-N_1 \cdot L\sin\theta + G_1 \cdot \frac{L}{2}\cos\theta + G_2 \cdot h\cos\theta = 0$$

$$N_2 \cdot L\cos\theta - G_1 \cdot \frac{L}{2}\cos\theta - G_2 \cdot (L-h)\cos\theta - N_1 \cdot L\sin\theta = 0$$

$$N_2 \cdot L\cos\theta - G_1 \cdot \frac{L}{2}\cos\theta - G_2 \cdot (L-h)\cos\theta - f \cdot L\sin\theta = 0$$

解答

梯子不会滑动的条件是摩擦力 f 与 N_2 之间要满足

$$f \leqslant \mu N_2$$

解得

$$f = N_1 = \frac{(G_1 L + 2G_2 h)\cos\theta}{2L\sin\theta}$$

$$N_2 = G_1 + G_2$$

代入 $f \leqslant \mu N_2$ 即得

$$\frac{(G_1 L + 2G_2 h)\cos\theta}{2L\sin\theta} \leqslant \mu(G_1 + G_2)$$

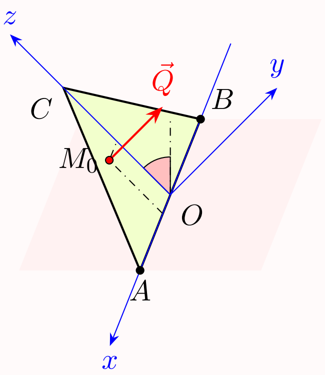
$$(G_1 L + 2G_2 h)\cos\theta \leqslant 2\mu(G_1 + G_2)L\sin\theta$$

$$(m_1 L + 2m_2 h)\cos\theta \leqslant 2\mu(m_1 + m_2)L\sin\theta$$

$$\tan\theta \geqslant \frac{m_1 L + 2m_2 h}{2\mu(m_1 + m_2)L}$$

例题

如图所示，一质量为 m、底边 AB 长为 b、等腰边长为 a、质量均匀分布的等腰三角形平板，可绕过光滑铰链支点 A、B 的水平轴 x 自由转动；图中原点 O 位于 AB 的中点，y 轴垂直于板面斜向上，z 轴在板面上从原点 O 指向三角形顶点 C。今在平板上任一给定点 $M_0(x_0, 0, z_0)$ 加一垂直于板面的拉力 $\vec{Q}$。(1) 若平衡时平板与竖直方向成的角度为 φ，求拉力 $\vec{Q}$ 以及铰链支点对三角形板的作用力 $\vec{N}_A$ 和 $\vec{N}_B$；(2) 若在三角形平板上缓慢改变拉力 $\vec{Q}$ 的作用点 M 的位置，使平衡时平板与竖直方向成的角度仍保持为 φ，则改变的作用点 M 形成的轨迹满足什么条件时，可使铰链支点 A 或 B 对板作用力的垂直平板的分量在 M 变动中保持不变？



解答

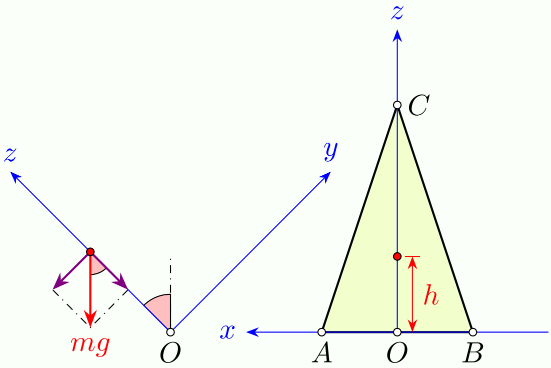
这是刚体平衡的问题，题中已经给出坐标系，对刚体进行受力分析。刚体共受到四个力的作用。

重力大小为 $G = mg$，方向竖直向下，在直角坐标系中写成

$$\vec{G} = (0, -mg\sin\varphi, -mg\cos\varphi)$$

作用点在重心

$$\vec{r}_1 = (0, 0, h)$$



解答

拉力

$$\vec{Q} = (0, Q, 0)$$

作用点在

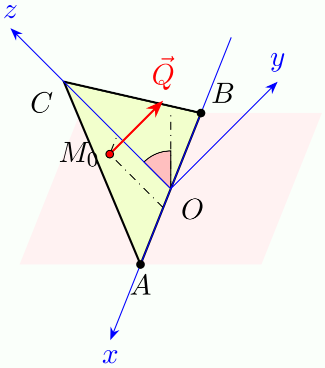
$$\vec{r}_2 = (x_0, 0, z_0)$$

铰链支点 A、B 提供的支持力分别为

$$\vec{N}_A = (N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az})$$
$$\vec{N}_B = (N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz})$$

作用点分别在

$$\vec{r}_A = \left(\frac{b}{2}, 0, 0\right)$$
$$\vec{r}_B = \left(-\frac{b}{2}, 0, 0\right)$$



解答

在这四个力的作用下，刚体处于平衡，所以刚体所受合外力为零，即

$$\vec{G}+\vec{Q}+\vec{N}_A+\vec{N}_B=\vec{0}$$

因此在 x、y、z 三个方向上的分量也均为零

$$\begin{aligned}
\vec{G} &= (0, \quad -mg\sin\varphi, \quad -mg\cos\varphi) \\
\vec{Q} &= (0, \quad Q, \quad 0) \\
\vec{N}_A &= (N_{Ax}, \quad N_{Ay}, \quad N_{Az}) \\
\vec{N}_B &= (N_{Bx}, \quad N_{By}, \quad N_{Bz})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0+0+N_{Ax}+N_{Bx} &= 0 \\
-mg\sin\varphi+Q+N_{Ay}+N_{By} &= 0 \\
-mg\cos\varphi+0+N_{Az}+N_{Bz} &= 0
\end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (0, 0, h) \\
\vec{G} &= (0, -mg\sin\varphi, -mg\cos\varphi) \\
\vec{M}_G &= \vec{r}_1 \times \vec{G} = (mgh\sin\varphi, 0, 0) \\
\vec{r}_2 &= (x_0, 0, z_0) \\
\vec{Q} &= (0, Q, 0) \\
\vec{M}_Q &= \vec{r}_2 \times \vec{Q} = (-Qz_0, 0, Qx_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_A &= \left(\frac{b}{2}, 0, 0\right) \\
\vec{N}_A &= (N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}) \\
\vec{M}_A &= \vec{r}_A \times \vec{N}_A = \left(0, -\frac{b}{2}N_{Az}, \frac{b}{2}N_{Ay}\right) \\
\vec{r}_B &= \left(-\frac{b}{2}, 0, 0\right) \\
\vec{N}_B &= (N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz}) \\
\vec{M}_B &= \vec{r}_B \times \vec{N}_B = \left(0, \frac{b}{2}N_{Bz}, -\frac{b}{2}N_{By}\right)
\end{aligned}$$

解答

$$\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_Q + \vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
\vec{M}_G &= \left(mgh\sin\varphi,\quad 0,\quad 0\right) \\
\vec{M}_Q &= \left(-Qz_0,\quad 0,\quad Qx_0\right) \\
\vec{M}_A &= \left(0,\quad -\frac{b}{2}N_{Az},\quad \frac{b}{2}N_{Ay}\right) \\
\vec{M}_B &= \left(0,\quad \frac{b}{2}N_{Bz},\quad -\frac{b}{2}N_{By}\right)
\end{aligned}$$

$$mgh\sin\varphi - Qz_0 = 0$$

$$\frac{b}{2}N_{Bz} - \frac{b}{2}N_{Az} = 0$$

$$Qx_0 + \frac{b}{2}N_{Ay} - \frac{b}{2}N_{By} = 0$$

解答

$$N_{Ax} + N_{Bx} = 0$$

$$-mg\sin\varphi + Q + N_{Ay} + N_{By} = 0$$

$$-mg\cos\varphi + N_{Az} + N_{Bz} = 0$$

$$mgh\sin\varphi - Qz_0 = 0$$

$$\frac{b}{2}N_{Bz} - \frac{b}{2}N_{Az} = 0$$

$$Qx_0 + \frac{b}{2}N_{Ay} - \frac{b}{2}N_{By} = 0$$

$$N_{Ay} = \frac{mgb\sin\varphi}{2} - \frac{1}{2}Q - \frac{x_0}{b}Q$$

$$N_{By} = \frac{mgb\sin\varphi}{2} - \frac{1}{2}Q + \frac{x_0}{b}Q$$

$$N_{Bz} = N_{Az} = \frac{1}{2}mg\cos\varphi$$

$$Q = \frac{mgh\sin\varphi}{z_0}$$

解答

N_{Ay} 不变时，

$$N_{Ay}=\frac{mgb\sin\varphi}{2}-\frac{b+2x_0}{2b}\frac{mgh\sin\varphi}{z_0}=\frac{mgb\sin\varphi}{2}-\frac{b+2x}{2b}\frac{mgh\sin\varphi}{z}$$

$$\frac{b+2x}{z}=\frac{b+2x_0}{z_0}$$

N_{By} 不变时，

$$N_{By}=\frac{mgb\sin\varphi}{2}-\frac{b-2x_0}{2b}\frac{mgh\sin\varphi}{z_0}=\frac{mgb\sin\varphi}{2}-\frac{b-2x}{2b}\frac{mgh\sin\varphi}{z}$$

$$\frac{b-2x}{z}=\frac{b-2x_0}{z_0}$$