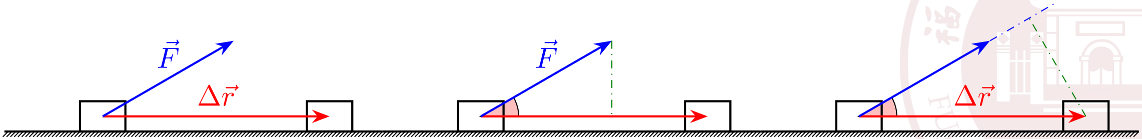
§4.2 力的元功 · 用线积分表示功

一、力的元功和功率

恒力 $\vec{F}$ 作用在一个做直线运动的物体上，在某过程中物体发生的位移为 $\Delta\vec{r}$，则在此过程中恒力 $\vec{F}$ 对物体所做的功为

$$
\begin{aligned}
W &= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F|\Delta\vec{r}|\cos\theta \\
&= (F\cos\theta)|\Delta\vec{r}| = F(|\Delta\vec{r}|\cos\theta)
\end{aligned}
$$



P106：更换受力点并不意味着受力质点发生位移。如图 4.4 所示，手握住一端固定于墙壁的绳并在绳上滑动，绳上不同点顺次充当摩擦力受力点，但各受力质点均未发生位移，故作用于绳的摩擦力不做功。

- 在任意元过程中，任意变化的力 $\vec{F}$ 均可视为恒力，任意的曲线运动均可视为直线运动。假设某元过程物体的元位移为 $\mathrm{d}\vec{r}$，则此元过程中力 $\vec{F}$ 对物体所做的元功为

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta$$

元功仅仅是一个很小过程的很小的功，并不能说是功的微分

- 一质点如果同时受到多个力的作用，则在任意元过程中，合力的元功等于各分力元功的代数和

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}W_i = \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}W = \sum_i \mathrm{d}W_i$$

- 对于某过程，某力所做的功为 W，过程耗时 Δt，则该过程该力做功的平均功率定义为

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

- 对于某元过程，过程耗时 $\mathrm{d}t$，力做功 $\mathrm{d}W$，则该元过程中该力做功的平均功率的极限称为该时刻该力做功的瞬时功率，简称功率

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

二、利用不同坐标系表示元功

直角坐标系中

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z \\
\mathrm{d}\vec{r} &= (\mathrm{d}x)\,\vec{e}_x + (\mathrm{d}y)\,\vec{e}_y + (\mathrm{d}z)\,\vec{e}_z \\
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

平面极坐标系中

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= F_r\,\vec{e}_r + F_\theta\,\vec{e}_\theta \\
\mathrm{d}\vec{r} &= (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\theta)\,\vec{e}_\theta \\
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= F_r\,\mathrm{d}r + F_\theta r\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

平面自然坐标系中

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= F_t\,\vec{e}_t + F_n\,\vec{e}_n \\
\mathrm{d}\vec{r} &= (\mathrm{d}s)\,\vec{e}_t \\
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= F_t\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

三、力在有限路径上的功

- 任意一个有限的过程总可以看成由许多元过程所组成，因此力在有限路径上的功就是许多元过程的功之和

$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

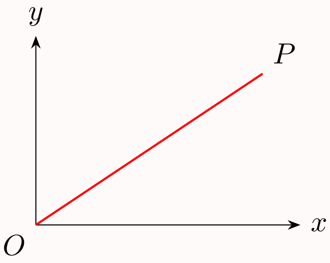
注意，这里积分要沿实际路径进行，同一个起点和同一个终点，不同路径，积分的结果可能不同

- 直角坐标系中

$$\begin{aligned}W&=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\&=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}(F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

例题

某物体从坐标原点沿直线运动到 $P(a,b)$ 点，所受力为 $\vec{F} = 2x\,\vec{e}_x + 3y\,\vec{e}_y$，求该过程中力对物体所做的功。

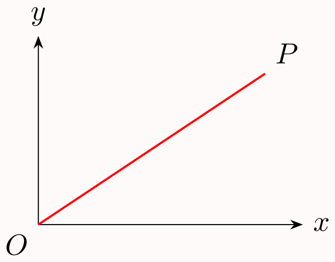


解答

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= 2x\,\vec{e}_x + 3y\,\vec{e}_y \\
\mathrm{d}\vec{r} &= (\mathrm{d}x)\,\vec{e}_x + (\mathrm{d}y)\,\vec{e}_y \\
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= 2x\,\mathrm{d}x + 3y\,\mathrm{d}y \\
W &= \int_{(0,0)}^{(a,b)} (2x\,\mathrm{d}x + 3y\,\mathrm{d}y) \\
&= \int_0^a 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^b 3y\,\mathrm{d}y \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

例题

某物体从坐标原点沿直线运动到 $P(a,b)$ 点，所受力为 $\vec{F} = 2y\,\vec{e}_x + 3x\,\vec{e}_y$，求该过程中力对物体所做的功。

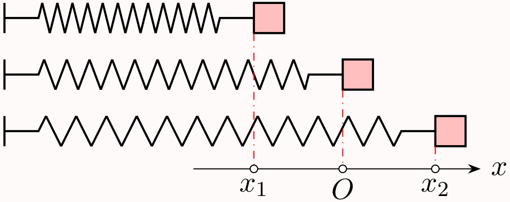


解答

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= 2y\,\vec{e}_x + 3x\,\vec{e}_y \\
\mathrm{d}\vec{r} &= (\mathrm{d}x)\,\vec{e}_x + (\mathrm{d}y)\,\vec{e}_y \\
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 2y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y \\
W &= \int_{(0,0)}^{(a,b)} (2y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y) \\
&= \int_{(0,0)}^{(a,b)} 2y\,\mathrm{d}x + \int_{(0,0)}^{(a,b)} 3x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a 2\frac{b}{a}x\,\mathrm{d}x + \int_0^b 3\frac{a}{b}y\,\mathrm{d}y \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

例题

劲度系数为 k 的弹簧，一端固定，一端与质量为 m 的质点相连。以弹簧自然伸长时质点的位置为坐标原点，沿弹簧伸长方向为 x 轴正方向。求质点从 x_1 运动到 x_2 过程中弹簧弹力对质点所做的功。



解答

当质点位于任意 x 处时，弹力为 $F=-kx$，因此弹力所做的功为

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{x_1}^{x_2} -kx\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2
\end{aligned}
$$

习题 4.2.3

一非线性拉伸弹簧的弹性力的大小为 $F = k_1 l + k_2 l^3$，l 表示弹簧的伸长量，k_1 为正。(1) 分别研究当 $k_2 > 0$，$k_2 < 0$ 和 $k_2 = 0$ 时弹簧的劲度 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ 有何不同；(2) 求出将弹簧由 l_1 拉长至 l_2 时弹簧对外界所做的功。

解答

$$F = k_1 l + k_2 l^3$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = k_1 + 3k_2 l^2$$

- $k_2 > 0$，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ 与伸长量 l 有关，l 越大，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ 越大
- $k_2 < 0$，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ 与伸长量 l 有关，l 越大，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ 越小
- $k_2 = 0$，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ 与伸长量 l 无关

$$W = \int_{l_1}^{l_2} -(k_1 l + k_2 l^3)\,\mathrm{d}l = -\left[\frac{1}{2}k_1 l^2 + \frac{1}{4}k_2 l^4\right]_{l_1}^{l_2}$$

$$= \frac{1}{2}k_1(l_1^2 - l_2^2) + \frac{1}{4}k_2(l_1^4 - l_2^4)$$