

第四章 电磁介质

一、电介质

1 电介质的极化

1.1 介电常数

- 电介质是指不能导电的绝缘体
- 通常用介电常数 ε 来表示电介质绝缘能力特性，也称介质常数、介电系数或电容率
- 真空的介电常数记为 ε_0 ，空气的介电常数近似等于真空介电常数

- 其他电介质的介电常数与真空介电常数的比值称为该电介质的相对介电常数，通常用 ϵ_r 表示。
即

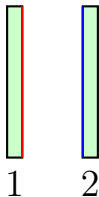
$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

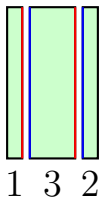
- 除了空气的相对介电常数约等于 1，其他常见电介质的相对介电常数均大于 1

1.2 电介质的极化现象

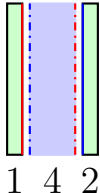
- 当带电 $+Q$ 和 $-Q$ 的两个导体板 1 和 2 平行放置时，静电平衡的结果是电荷只分布在内侧 (1 的右侧和 2 的左侧)，外侧 (1 的左侧和 2 的右侧) 均不带电，忽略边缘效应时，两板之间是一个匀强电场 \vec{E}_0



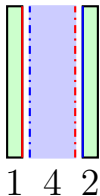
- 如果在两板之间插入一块不带电的导体板 3, 则静电感应的结果是板 3 两侧分别出现感应电荷 $-Q$ 和 $+Q$, 感应电荷所激发的感应电场 \vec{E}' 的方向与外电场 \vec{E}_0 的方向相反, 大小相等, 叠加的结果是导体板 3 内部电场处处为零



- 如果极板间插入介质，实验上发现，介质的两侧也会出现正负电荷，这种电荷称为极化电荷，介质在外电场作用下出现极化电荷的现象称为电介质的极化
- 与导体板类似，靠近板 1 的一侧出现的是负电荷，但电荷量不是 $-Q$ ，而是 $-Q'$ ，靠近板 2 的一侧出现的是正电荷，电荷量为 $+Q'$



- 极化电荷 $+Q'$ 和 $-Q'$ 所激发的电场 \vec{E}' 的方向与外电场 \vec{E}_0 的方向也是相反的, 但大小不相等, 因此介质内总的电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ 的方向仍然沿外电场 \vec{E}_0 的方向, 但大小被减弱了



- 金属导体中的自由电子可以脱离原子实的束缚在整个导体内自由移动，感应电荷就是自由电荷重新分布的结果
- 介质中的电子只能在原子核附近一定范围内活动，不会产生较大的移动，因此称为束缚电荷，极化电荷是束缚电荷在外电场作用下发生的微小移动形成的宏观效果

- 实验研究表明：同样的电荷分布，如果周围是真空时，某个位置的电场强度为 E_0 ；当周围充满相对介电常数为 ε_r 的电介质时，该位置的电场强度为 $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$
- 因此，对于电容器，如果其他条件保持一致，则当极板带同样电荷时，极板间填充相对介电常数为 ε_r 的电介质时极板间的电压是真空情况下的 $\frac{1}{\varepsilon_r}$ 倍，因此电容器的电容是真空时电容的 ε_r 倍，即 $C = \varepsilon_r C_0$
- 所以填充相对介电常数为 ε_r 、极板面积为 S 、板间距为 d 的平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

- 理想的电介质，由于原子中电子和原子核的结合力很强，电子处于束缚状态，没有可以自由移动的电荷，因此不能导电
- 如果外加电场足够强，电介质中的正、负电荷可能会被拉开而变成可以自由移动的电荷，那么电介质的绝缘性就会被破坏而变成导体，这种现象称为电介质击穿现象
- 电介质所能承受的不被击穿的最大电场强度称为电介质的击穿电场强度，或称介电强度，这时，电介质两侧的电压称为电介质的耐压，或称击穿电压

1.3 极化的微观机制

- 根据在正常情况 (没有外电场) 下, 分子中正、负电荷中心是否重合, 电介质在一般情况下可以分成两类
 - 分子中正、负电荷中心不重合的电介质称为极性电介质, 其中的分子称为有极分子
 - 分子中正、负电荷中心重合的电介质称为非极性电介质, 其中的分子称为无极分子
- 极性电介质中的分子具有固有的电偶极矩 (分子的固有电矩), 而非极性电介质中的分子没有固有的电偶极矩, 但在外电场的作用下, 由于正、负中心的分离, 将产生感应电偶极矩

(1) 位移极化

- 不管是极性电介质还是非极性电介质，在外电场作用下，分子中的正、负电荷中心都将发生反向的位移，形成感应的电偶极子
- 外电场的电场强度越大，这个位移就越大
- 电介质中的电荷是处于束缚状态下的，虽然正、负电荷中心会发生偏移，但也只能在其原来的位置附近，不会脱离晶体的点阵
- 虽然正、负电荷中心发生偏移，但在介质内部，相邻分子之间的正、负电荷从宏观上看会互相抵消，所以介质内部仍然对外呈现出电中性，但在介质的两侧（沿外电场方向的前后两侧），会分别呈现出电性

- 因为正电荷中心沿电场强度方向偏移 (实际上, 由于带正电的原子核的质量远大于带负电的电子的质量, 所以实际上主要是电子在外电场作用下逆着电场的方向偏移), 所以在外电场方向的前端, 出现的是正电荷, 而在外电场的后端, 则出现负电荷, 这个电荷称为极化电荷
- 这种电介质在外电场作用下出现极化电荷的现象称为电介质的极化
- 这种由于在外电场作用下, 正、负电荷中心发生位移而引起的极化称为位移极化

(2) 取向极化

- 电介质的极化, 除了上面提到的位移极化之外, 还有一种取向极化
- 取向极化只出现在极性电介质中
- 极性电介质中的分子固有电偶极矩, 在没有外电场的情况下, 不同分子的电偶极矩的取向是杂乱无章的, 因此, 从宏观上看, 不管是介质内部还是介质表面, 都呈现出电中性
- 但在外加电场作用下时, 所有电偶极矩的取向都将偏向外电场的方向, 因此同前, 在电介质的两侧, 也将分别出现极化电荷, 而在介质内部仍然是呈现电中性

- 综上所述，在外电场作用下，极性电介质有两种极化机制：位移极化和取向极化；而非极性电介质则只有一种极化机制：位移极化
- 两种极化机制从微观上来看虽然不尽相同，但在宏观上对外的表现是一样的，都是在电介质的两侧出现极化电荷
- 对于极性电介质，取向极化的效应比位移极化约大一个数量级，因此其中取向极化是主要的
- 在高频电场作用下，取向极化跟不上外电场的变化，这时，起作用的主要是质量比较小的电子发生位移而导致的位移极化

1.4 电极化强度矢量

(1) 概念

- 为了定量描述电介质的极化状态 (极化的程度和极化的方向), 通常使用单位体积中分子电偶极矩的矢量和来表示, 并称之为电极化强度矢量

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}$$

- 电介质的极化过程是外电场和电介质分子之间相互作用的过程，与外电场与导体的相互作用一样：电介质在外电场作用下会发生极化，产生极化电荷；而极化电荷也会激发电场，影响电场的分布；被影响的电场再影响电介质的极化，如此往复，直到平衡
- 实验研究表明，各向同性的电介质中，任一点的电极化强度矢量 \vec{P} 与该点的总电场强度 \vec{E} 成正比

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

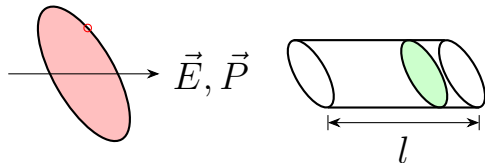
其中 χ_e 称为电介质的电极化率

- 如果电介质中各点的电极化强度矢量大小和方向都相同，我们称极化是均匀的，否则极化是不均匀的
- 对于均匀的各向同性电介质，极化电荷只集中在介质的表面层或两种介质的界面层
- 对于均匀极化的电介质，每个分子电偶极子的电矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ ，即正电荷带 $+q$ 、负电荷带 $-q$ ，一般地假定电介质中单位体积的分子数为 n ，则在 ΔV 体积内的分子数 $\Delta N = n\Delta V$ ，

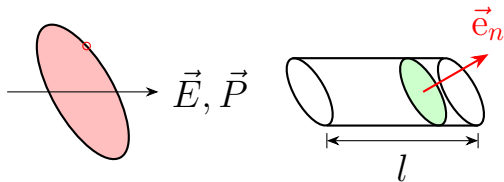
$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p} = \frac{1}{\Delta V} (\Delta N) \vec{p} = n\vec{p}$$

(2) 与极化电荷的关系

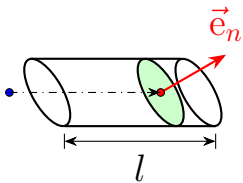
- 对于一个孤立的介质 (介质周围是真空), 在介质的表面附近做一斜圆柱, 圆柱的底面 dS 平行于介质的表面 (其中一个底面在介质外侧紧邻表面, 另一个底面在介质内)



- 侧面平行于电极化强度矢量 (因此也平行于外电场), 圆柱的长度等于分子电偶极子中正、负电荷中心的距离 l , 介质表面处的外法向方向与电场方向的夹角为 θ



- 由于介质内的正、负电荷都不能脱离电介质。对于电场前方介质表面处 ($\theta < \frac{\pi}{2}$), 圆柱体内所有表面层分子的正电荷不动, 负电荷逆着外电场方向发生了位移而穿出圆柱面



- 因此穿出圆柱面的总电荷量为

$$\begin{aligned}
 -dQ' &= -q(n dV) \\
 &= -qn dS(l \cos \theta) = -nql dS \cos \theta \\
 &= -np dS \cos \theta = -P dS \cos \theta \\
 &= -\vec{P} \cdot d\vec{S}
 \end{aligned}$$

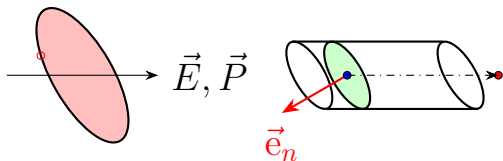
- 所以，圆柱体内剩余的电荷总量即为介质表面上的电荷量为

$$dQ' = P dS \cos \theta = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

- 因此，表面上该处的极化电荷面密度为

$$\sigma' = \frac{dQ'}{dS} = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

- 对于电场后方介质表面处 ($\theta > \frac{\pi}{2}$), 圆柱体内所有表面层分子的负电荷不动, 正电荷沿着外电场方向发生了位移而穿出圆柱面



- 因此穿出圆柱面的总电荷量为

$$\begin{aligned}
 dQ' &= q(n dV) \\
 &= qn dS |l \cos \theta| = -nql dS \cos \theta \\
 &= -np dS \cos \theta = -P dS \cos \theta \\
 &= -\vec{P} \cdot d\vec{S}
 \end{aligned}$$

- 所以，圆柱体内剩余的电荷总量即为介质表面上的电荷量为

$$-dQ' = P dS \cos \theta = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

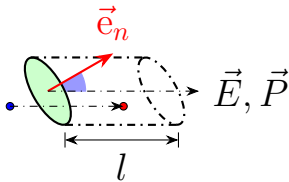
- 因此，表面上该处的极化电荷面密度为

$$\sigma' = \frac{-dQ'}{dS} = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

- 所以介质表面处极化电荷面密度等于介质内表面处电极化强度矢量在该处法向方向上的投影

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

- 即使是不均匀极化的介质，在介质内部任意取一个宏观足够小、微观足够大的区域，可以认为在该区域内介质是均匀极化的，假定该处的电极化强度矢量为 $\vec{P} = n\vec{p} = nq\vec{l}$



- 在该处取一面元 $d\vec{S} = dS \vec{e}_n$ ，面元的方向与电场强度 (电极化强度矢量) 的夹角为 θ ，穿过该面元的极化电荷

$$dQ' = q(n dV) = qnl \cos \theta dS = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

- 所以, 对于任意一个闭合曲面 S , 穿过它的极化电荷

$$Q' = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

- 所以闭合曲面 S 内所包围的极化电荷为 $-Q'$
- 反之, 若记曲面所包围的极化电荷为 Q' , 则穿过曲面的极化电荷即为

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q'$$

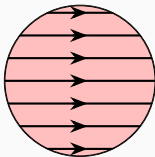
- 如果介质均匀极化, 则 \vec{P} 为常量, 则对于介质内部任意闭合曲面, 有

$$-Q' = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot \oint_S d\vec{S} = 0$$

即均匀极化介质内部的极化电荷处处为零, 因此, 对于均匀极化介质, 极化电荷只分布在介质表面

例题

半径为 R 的介质球被均匀极化, 电极化强度为 \vec{P} (方向见图)。试讨论电介质球表面的极化电荷分布。

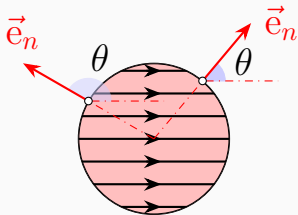


解答

电介质球表面某个位置的极化电荷面密度可以通过该点的电极化强度矢量和该点的外法线方向单位矢量求得

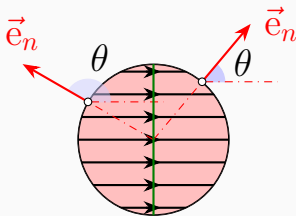
$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P \cos \theta$$

对于均匀极化的电介质，各点的电极化强度矢量 \vec{P} 都为同一个常矢量，而球面的外法线方向是从球心指向该处的



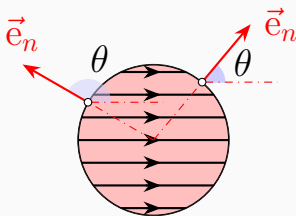
解答

- 对于右半球面, $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta > 0$, $\sigma' = P \cos \theta > 0$, 带正电荷
- 对于左半球面, $\theta > \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta < 0$, $\sigma' = P \cos \theta < 0$, 带负电荷
- 在图示竖直面 (绿色线), $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, $\sigma' = P \cos \theta = 0$, 不带电荷



解答

从整体上看,极化电荷的分布是不均匀的,但关于过球心沿电极化强度矢量方向的直径的轴对称



2 电介质中的电场和电荷

2.1 电介质中的电场强度

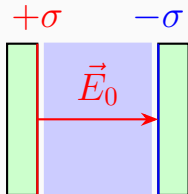
- 电介质放在外电场中时,会发生极化现象,产生极化电荷,外电场和极化电荷相互作用,直到达到平衡状态
- 电介质中的电场强度 \vec{E} 是由外电场 \vec{E}_0 和极化电荷所激发的附加电场 \vec{E}' 的叠加, 即 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$
- 在电介质内部, 由极化电荷所激发的附加电场 \vec{E}' 与外电场 \vec{E}_0 的方向总是相反, 因此总电场 \vec{E} 总是小于原来的外电场 \vec{E}_0 , 所以极化电荷所激发的附加电场 \vec{E}' 称为退极化场
- 电极化强度矢量 \vec{P} 是和总电场 \vec{E} 成正比

例题

求插在平行板电容器中的电介质板内的退极化场，已知极化强度为 \vec{P} 。

解答

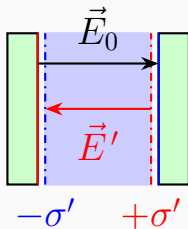
一般地假定平行板电容器左极板的(自由)电荷面密度为 $+\sigma$, 右极板的(自由)电荷面密度为 $-\sigma$, 则它们所产生的电场就是外电场



$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

解答

电介质左右两个表面的
(极化) 电荷面密度分别为
 $-\sigma'$ (左) 和 $+\sigma'$ (右), 它们
所产生的电场就是退极化场



$$\vec{E}' = \vec{E}'_+ + \vec{E}'_-$$

$$E' = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} - \frac{-\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

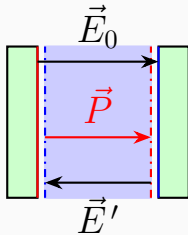
解答

极化电荷面密度和电极化强度矢量之间满足

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P \cos \theta$$

所以 $\sigma' = P$, 因此退极化场

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

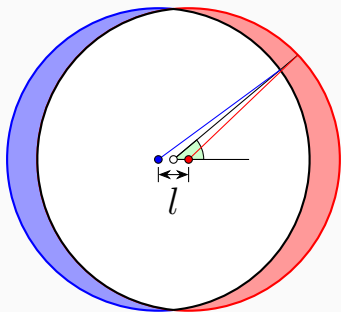


例题

求均匀极化的电介质球的退极化场，设电极化强度矢量为 \vec{P} 。

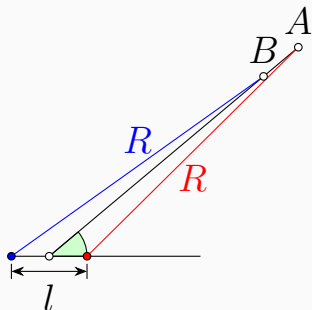
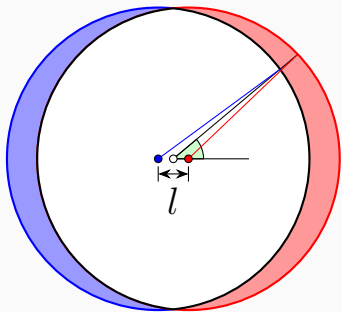
解答

- 将电介质球看成两个均匀带等量异号 (电荷体密度分别为 $\pm\rho$) 的球体重叠在一起的结果
- 没有外电场时, 两个球体球心重合 (非极性电介质), 在外电场作用下, 两个球体的球心相距 l

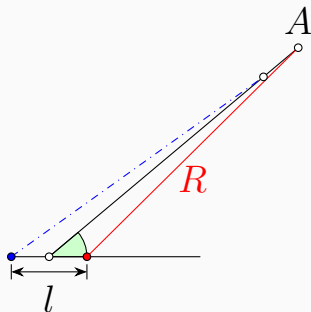


一般地设球的半径为 R , 则 $R \gg l$

解答



解答



$$OA = r_1$$

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + r_1^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)r_1 \cos \theta$$

解答

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + r_1^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)r_1 \cos \theta$$

$$= r_1^2 - (l \cos \theta)r_1 + \frac{l^2}{4}$$

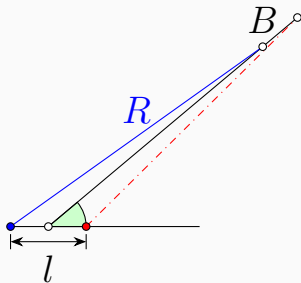
$$r_1^2 - (l \cos \theta)r_1 + \left(\frac{l^2}{4} - R^2\right) = 0$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(l \cos \theta)^2 - 4\left(\frac{l^2}{4} - R^2\right)}$$

解答

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(l \cos \theta)^2 - 4 \left(\frac{l^2}{4} - R^2 \right)} \\&= \frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2 \cos^2 \theta} \\&= \frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm R \sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2} \sin^2 \theta} \\&\approx \frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm R \\r_1 &\approx R + \frac{1}{2}(l \cos \theta)\end{aligned}$$

解答



$$OB = r_2$$

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + r_2^2 + 2 \left(\frac{l}{2}\right) r_2 \cos \theta$$

解答

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + r_2^2 + 2\left(\frac{l}{2}\right)r_2 \cos \theta$$

$$= r_2^2 + (l \cos \theta)r_2 + \frac{l^2}{4}$$

$$r_2^2 + (l \cos \theta)r_2 + \left(\frac{l^2}{4} - R^2\right) = 0$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(l \cos \theta)^2 - 4\left(\frac{l^2}{4} - R^2\right)}$$

解答

$$\begin{aligned}r_2 &= -\frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(l \cos \theta)^2 - 4 \left(\frac{l^2}{4} - R^2 \right)} \\&= -\frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2 \cos^2 \theta} \\&= -\frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm R \sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2} \sin^2 \theta} \\&\approx -\frac{1}{2}(l \cos \theta) \pm R \\r_2 &\approx R - \frac{1}{2}(l \cos \theta)\end{aligned}$$

解答

$$r_1 \approx R + \frac{1}{2}(l \cos \theta)$$

$$r_2 \approx R - \frac{1}{2}(l \cos \theta)$$

$$AB = OA - OB = r_1 - r_2 \approx l \cos \theta$$

在 AB 处取个小小的圆柱体，其中的极化电荷

$$dQ' = \rho dV = \rho dS \times AB = \rho l \cos \theta dS$$

$$\sigma' = \frac{dQ'}{dS} = \rho l \cos \theta$$

解答

$$\sigma' = \frac{dQ'}{dS} = \rho l \cos \theta$$

与前例的结果

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P \cos \theta$$

比较可得 $P = \rho l$

均匀带电球体球内的电场强度

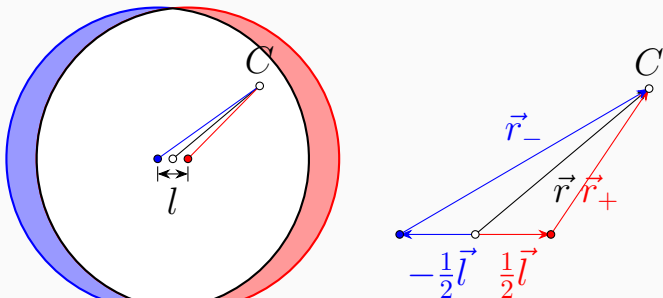
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho \vec{r}$$

解答



极化电荷所激发的总电场 (退极化场)

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}_+) + \vec{E}_-(\vec{r}_-)$$

解答

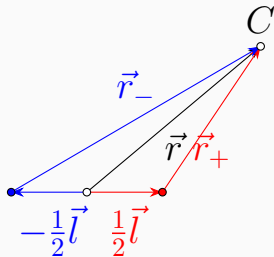
$$\vec{E}_+(\vec{r}_+) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_+ \vec{r}_+$$

$$\vec{E}_-(\vec{r}_-) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_- \vec{r}_-$$

$$\rho_+ = \rho, \rho_- = -\rho$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{l}$$

$$\vec{r}_- = \vec{r} - \left(-\frac{1}{2}\vec{l}\right)$$



解答

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{r}) &= \vec{E}_+(\vec{r}_+) + \vec{E}_-(\vec{r}_-) \\ &= \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho(-\vec{l}) \\ &= -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}\end{aligned}$$

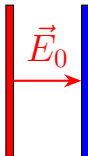
对于均匀极化介质球, 球内处处 \vec{P} 相等, 因此退极化场也处处相等

2.2 极化电荷与自由电荷的关系

- 假定平行板电容器的极板面积为 S ，板间距为 d ，极板上带有自由电荷，电荷面密度分别为 $\pm\sigma_0$ 。那么，当极板之间是真空时，极板间的电场强度大小为

$$E_0 = E_{0+} + E_{0-} = \left| \frac{\sigma_{0+}}{2\varepsilon_0} \right| + \left| \frac{\sigma_{0-}}{2\varepsilon_0} \right| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

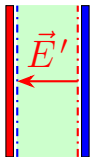
方向由正极板指向负极板



- 电介质极化时，在电介质沿外电场方向的两侧，各出现正、负极化电荷，其电荷面密度分别为 $\pm\sigma'$ ，它们所激发的附加电场的大小为

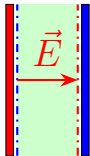
$$E' = E'_+ + E'_- = \left| \frac{\sigma'_+}{2\varepsilon_0} \right| + \left| \frac{\sigma'_-}{2\varepsilon_0} \right| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

方向与外电场方向相反，即从负极板指向正极板



- 外电场 \vec{E}_0 与附加电场 \vec{E}' 的方向相反，所以电介质中的合场强的大小为

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$



- 实验研究发现，当极板间插入相对介电常数为 ϵ_r 的电介质时，电场强度的大小变成

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

方向与原外电场 \vec{E}_0 方向一致，即从正极板指向负极板

- 由此可得

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\sigma_0 - \sigma' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r}$$

$$\sigma' = \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0$$

$$q' = \sigma' S = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0 S = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q_0$$

- 由电极化强度与极化电荷之间的关系

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P \cos \theta$$

当介质表面是平面时, $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$,

$$P = \sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \varepsilon_0 \varepsilon_r E = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E$$

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

3 电位移矢量的高斯定理

3.1 电位移矢量

- 电介质的介电常数【电容率】

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

定义电位移矢量 (电感应强度矢量)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

其中

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\
 &= \varepsilon_0 \vec{E} + (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E} \\
 &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\
 &= \varepsilon \vec{E}
 \end{aligned}$$

真空中

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= 1 \\
 \varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 \\
 \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} \\
 \chi_e &= \varepsilon_r - 1 = 0 \\
 \vec{P} &= \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

3.2 电位移矢量的高斯定理

- 通过任意闭合曲面的电场强度的通量等于该闭合曲面所包围的电荷量代数和除以真空介电常数 (电场强度的高斯定理)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- 无电介质时，高斯面所包围的电荷仅仅是自由电荷；而有电介质时，这个电荷就不仅仅是自由电荷 q_0 ，还可能有极化电荷 q' ，即 $q = q_0 + q'$ 。所以

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_0 + q'$$

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$$

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

- 在静电场中, 通过任意闭合曲面的电位移矢量的通量等于该闭合曲面内所包围的自由电荷的代数和 (电位移矢量的高斯定理)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

真空中 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

- 如果已知自由电荷的分布 q_0 和介质的介电常数 ε , 要求极化电荷 q' , 个人建议不要去背关系式

$$q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q_0$$

可通过以下思路求得

- 先利用电位移矢量的高斯定理求得电位移矢量 \vec{D} (这里要求电荷分布具有特殊对称性)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

- 再利用电位移矢量 \vec{D} 和电场强度 \vec{E} 之间的关系求得电场强度 \vec{E}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$$

- 再利用电场强度的高斯定理求得极化电荷 q'

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} q_0 \\ q_0 &= \varepsilon_r (q_0 + q') \\ q' &= -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q_0\end{aligned}$$

与正极板相邻的介质表面的极化电荷是负的，与负极板相邻的介质表面的极化电荷是正的

- 在静电场中，电场线起自一切正电荷（包括自由电荷和极化电荷，下同），终止于一切负电荷上。那么，对于充满电介质的电容器，正极板上带正的自由电荷，与之相邻的介质表面带负的极化电荷，负极板上带负的自由电荷，与之相邻的介质表面带正的极化电荷。因此，两个极板之间的电场线是怎么走的？

- 对于均匀的电介质, 介质内部没有自由电荷, 因此如果在介质内部任意选择一个闭合的曲面为高斯面 S , 那么由电位移矢量的高斯定理, 有

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 = 0$$

- 对于均匀的电介质, 每一点的介电常数均为 ε , 是一个常数, 每一点的电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$

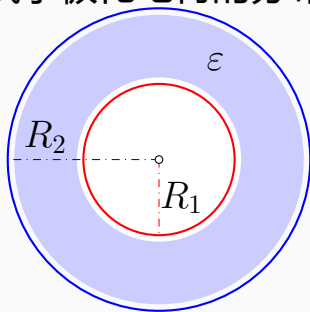
- 因此，对同一高斯面，电场强度的通量

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}$$
$$q_0 + q' = 0$$
$$q' = -q_0 = 0$$

以上高斯面 S 是介质内部任意选取的一个闭合曲面，因此可以取遍介质中任意小的区域，所以均匀电介质内部没有极化电荷

例题

半径为 R_1 的导体球带电 $+Q$ ，半径为 R_2 的、不计厚度的导体球壳带电 $-Q$ ，二者同心放置， $R_2 > R_1$ ，二者之间充满介电常数为 ε 的均匀介质，试求极化电荷的分布。



解答

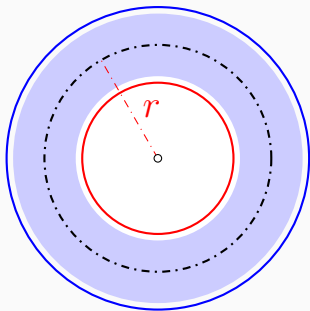
如图, 在介质内选择半径为 r 的球面为高斯面, 由电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \cdot (4\pi r^2) = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$



解答

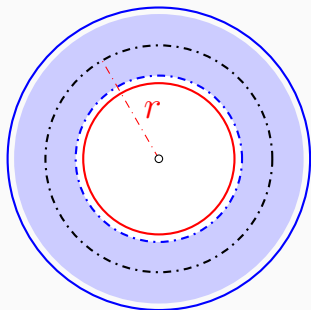
再由电场强度的高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q + q'}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\frac{Q}{\varepsilon} = \frac{Q + q'}{\varepsilon_0}$$



其中 q' 是介质内靠近 R_1 导体球处表面的极化电荷

解答

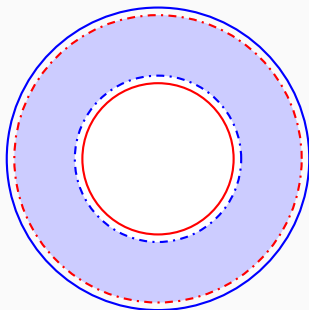
$$\frac{Q}{\varepsilon} = \frac{Q + q'}{\varepsilon_0}$$

$$Q = \varepsilon_r(Q + q')$$

$$(1 - \varepsilon_r)Q = \varepsilon_r q'$$

$$q' = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r}Q = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q$$

解答

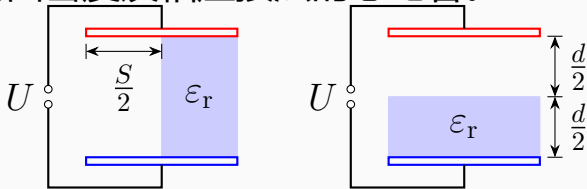


所以介质内靠近 R_2 导体球处表面的极化电荷为

$$-q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q$$

例题

如图所示，忽略边缘效应的平行板面积为 S ，板间距为 d ，接在电压为 U 的电源上，介质的相对介电常数为 ϵ_r 。求图中两种接法中板内各处电场强度的大小、自由电荷与束缚电荷的面密度及相应接法的总电容。



解答

两个电容器极板间的电压相等, 都为 U , 电容分别为

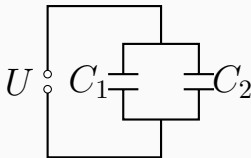
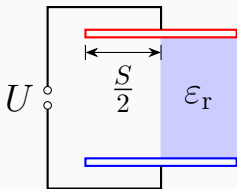
$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_0$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$$

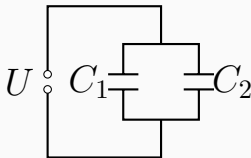
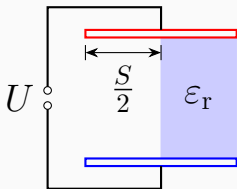
$$d_1 = d_2 = d$$



解答

所以总电容

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \frac{\epsilon_0 \frac{S}{2}}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{2}}{d} \\ &= \frac{\epsilon_0 S}{2d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2d} \\ &= \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r + 1) S}{2d} \end{aligned}$$



解答

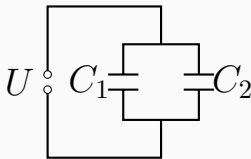
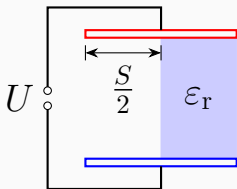
C_1 板间的电场强度

$$E_1 = \frac{U}{d}$$

C_1 极板上所带的自由电荷

$$Q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} U$$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{\frac{S}{2}} = \frac{\varepsilon_0}{d} U$$



解答

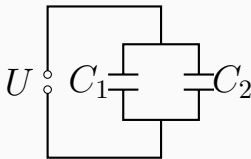
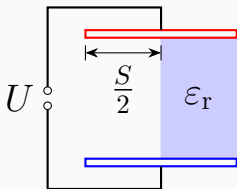
C_2 板间的电场强度

$$E_2 = \frac{U}{d}$$

C_2 极板上所带的自由电荷

$$Q_2 = C_2 U = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2d} U$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{\frac{S}{2}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U}{d}$$



解答

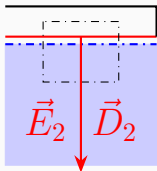
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_2 \Delta S = \sigma_2 \Delta S$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_2 \Delta S = \frac{(\sigma_2 - \sigma') \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$D_2 = \sigma_2 = \varepsilon_2 E_2$$

$$\varepsilon_0 E_2 = \sigma_2 - \sigma'$$

$$\sigma' = \sigma_2 - \varepsilon_0 E_2 = \sigma_2 - \varepsilon_0 \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\varepsilon_r}$$



介质表面上所带的极化电荷

$$\begin{aligned}
 \sigma' &= \sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\epsilon_r} \\
 &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_2 \\
 &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U}{d} \\
 &= \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{d} U
 \end{aligned}$$

解答

两个电容分别为

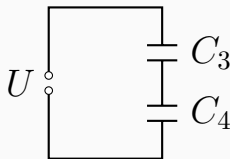
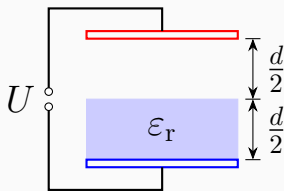
$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$S_3 = S_4 = S$$

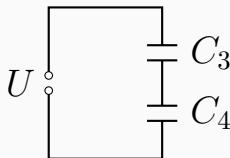
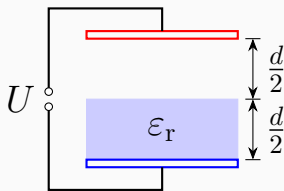
$$d_3 = d_4 = \frac{d}{2}$$



解答

所以总电容为

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \\ &= \frac{1}{\frac{\epsilon_0 S}{\frac{d}{2}}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{d}{2\epsilon_0 S} + \frac{d}{2\epsilon_0 \epsilon_r S} \\ &= \frac{d(\epsilon_r + 1)}{2\epsilon_0 \epsilon_r S}\end{aligned}$$



$$\frac{1}{C} = \frac{d(\epsilon_r + 1)}{2\epsilon_0\epsilon_r S}$$
$$C = \frac{2\epsilon_0\epsilon_r S}{(\epsilon_r + 1)d}$$

极板上所带的自由电荷为

$$Q_3 = Q_4 = Q = CU = \frac{2\epsilon_0\epsilon_r S}{(\epsilon_r + 1)d}U$$
$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_0 = \frac{Q}{S} = \frac{2\epsilon_0\epsilon_r}{(\epsilon_r + 1)d}U$$

解答

C_3 、 C_4 板间的电压及电场强度为

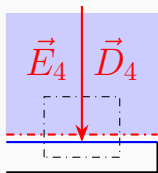
$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{(\varepsilon_r+1)d}U}{\frac{2\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{\varepsilon_r}{(\varepsilon_r+1)}U$$

$$E_3 = \frac{U_3}{\frac{d}{2}} = \frac{2\varepsilon_r}{(\varepsilon_r+1)d}U$$

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{(\varepsilon_r+1)d}U}{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}} = \frac{1}{(\varepsilon_r+1)}U$$

$$E_4 = \frac{U_4}{\frac{d}{2}} = \frac{2}{(\varepsilon_r+1)d}U$$

解答



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = -D_4 \Delta S = (-\sigma_4) \Delta S$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_4 \Delta S = \frac{(-\sigma_4 + \sigma') \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$D_4 = \sigma_4 = \varepsilon_4 E_4$$

$$\varepsilon_0 E_4 = \sigma_4 - \sigma'$$

$$\sigma' = \sigma_4 - \varepsilon_0 E_4 = \sigma_4 - \varepsilon_0 \frac{\sigma_4}{\varepsilon_4} = \sigma_4 - \frac{\sigma_4}{\varepsilon_r}$$

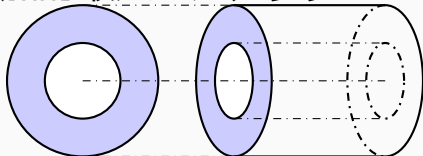
介质表面上所带的极化电荷

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma_4 - \frac{\sigma_4}{\varepsilon_r} \\&= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_4 \\&= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r}{(\varepsilon_r + 1)d} U \\&= \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 1)d} U\end{aligned}$$

例题

如图所示, 两共轴的长导体圆筒组成的电容器, 其内、外筒半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 其间充满均匀的、相对介电常数为 ε_r 的电介质, 若电介质的击穿电场强度为 E_m 。

(1) 当电压升高时, 介质的哪处先击穿? (2) 两筒间能加的最大电压为多少?



解答

如果介质中某处电场的场强超过电介质的击穿电场强度 E_m ，则该处介质将被击穿，因此，要先求出电介质中的电场分布随外接电压的变化关系

解答

假定电容器两极外接电压 U 时, 电极上单位长度所带的电荷量为 λ , 由于电荷分布的柱对称性, 很容易由电位移矢量的高斯定理求得电极之间的电场分布

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D \times (2\pi r h) = \lambda h$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}$$

解答

因此, 两电极间的电压为

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} E \, dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \, dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

解答

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$
$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

由此可见，当外接电压一定时，电介质中的电场强度与该处到轴线的半径成反比，因此，内表面半径最小，为 R_1 ，该处电场强度最大，最容易被击穿

解答

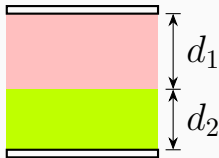
当内表面处的电场强度 $E(R_1) = E_m$ 时, 两极之间的电压即为电容能够支撑的最大电压, 因此

$$E(R_1) = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = E_m$$

$$U = E_m R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

作业

- P211[4-2] 平行板电容器 (极板面积为 S , 间距为 d) 中间有两层厚度各为 d_1 和 d_2 ($d_1 + d_2 = d$)、介电常量各为 ε_1 和 ε_2 (这里理解成绝对介电常量) 的电介质层 (见本题图)。试求: (1) 电容 C ; (2) 当金属板上带电面密度为 $\pm\sigma_{e0}$ 时, 两层介质的分界面上的极化电荷面密度 σ'_e ; (3) 极板间电势差 U ; (4) 两层介质中的电位移 \vec{D} 。



作业

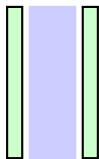
- P211[4-5] 平行板电容器的极板面积为 S , 间距为 d , 其间充满电介质, 介质的介电常量是变化的, 在一极板处为 ε_1 (这里理解成绝对介电常量, 下同), 在另一极板处为 ε_2 , 其它处的介电常量与到 ε_1 处的距离成线性关系, 略去边缘效应。(1) 求这电容器的 C ; (2) 当两极板上的电荷分别为 Q 和 $-Q$ 时, 求介质内的极化电荷体密度 ρ'_e 和表面上的极化电荷面密度 σ'_e 。

二、磁介质

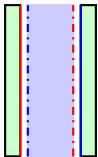
1 磁介质的磁化

1.1 回顾电介质的极化

- 电介质是指不导电的物质。两个极板之间插入电介质，当极板不带电时，即没有外加电场时，电介质处于未极化状态，即使是有极分子，介质内部各个分子的固有电矩的方向是杂乱无章的，宏观上来看，介质内部不显电性，任意宏观足够小微观足够大区域内的净电荷均为零



- 当极板带电时，在介质所在处有外电场的存在，介质在外电场的作用下产生极化电荷，极化电荷产生的退极化场与外电场方向相反，影响 (减弱) 介质内部的电场。我们称电介质在外电场作用下发生了极化现象，极化的机制有位移极化和取向极化两种



1.2 磁介质

- 凡与磁场有相互影响的物质统称为磁介质，实际上一切实物物质都是磁介质
- 有关磁介质磁化的理论，有两种不同的观点：分子电流观点和磁荷观点。两种观点假设的微观模型不同，因此得到的磁感应强度 \vec{B} 和磁场强度 \vec{H} 的物理意义不同，但最后得到的宏观规律的表达式却完全一样，因此计算结果完全一样。从这种意义上来说，两种观点是等效的

1.3 磁介质磁化理论的分子电流观点

- 分子电流观点，也就是安培的分子电流假说，即认为组成磁铁的最小单元 (磁分子) 就是分子环形电流。电子绕核运动和自旋形成分子环流，这是物质磁性的基本来源
- 载流线圈的磁矩

$$\vec{m} = IS \vec{e}_n$$

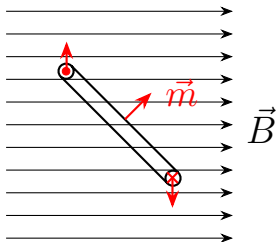
其中 \vec{e}_n 与电流的绕向成右手螺旋关系



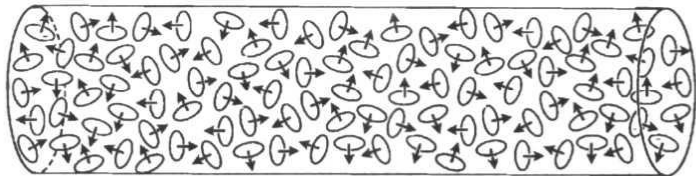
- 磁矩 \vec{m} 在均匀磁场 \vec{B} 中受到的力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

力矩的作用总是试图使磁矩 \vec{m} 转向磁场 \vec{B} 的方向



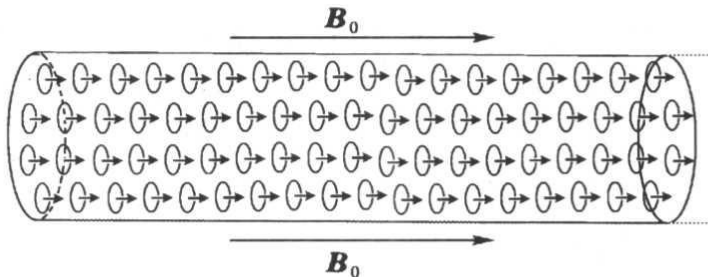
- 分子环流本身的尺寸很小，可以认为分子环流所在的区域是个均匀磁场
- 磁介质放置在没有磁场的区域时，介质内各个分子环形电流的取向是杂乱无章的，因此从宏观上看，磁介质不显磁性，我们称此时磁介质处于未磁化状态



- 当磁介质周围存在载流回路，载流回路在其周围空间中激发磁场 \vec{B}_0 ，此磁场称为磁化场，此电流称为励磁电流
- 分子环流的固有磁矩在磁场中受到力矩的作用，结果是所有分子磁矩都一定程度地转向外磁场的方向，外磁场越强，分子磁矩与 (所在处的) 外磁场的方向越一致
- 通电密绕螺线管内部的磁场可视为均匀磁场

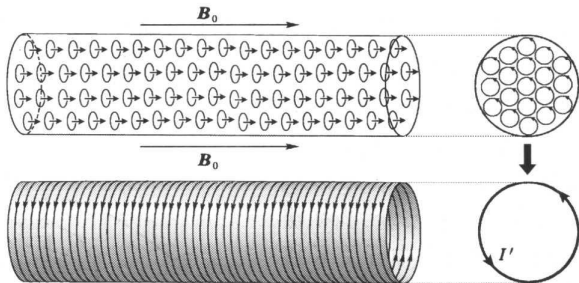
- P174, “当均匀介质均匀磁化时, 由于分子环流的回绕方向一致”, 个人认为这句话不太严谨
- 当外磁场较弱时, 分子环流只会稍微偏向磁场的方向, 但总体来看仍然还是杂乱无章的, 此时分子环流的回绕方向谈不上一致
- 磁场越强, 分子环流偏向磁场方向的程度越大, 但仍然不会是整齐划一的 (如果各处外磁场的方向不同, 则分子环流取向更不会一致)

- 只有当磁场足够强时 (且是均匀磁场), 才会使所有分子环流的磁矩都沿磁场方向, 这时才会出现 P174 图 4-18b 所示的样子



- 因此从宏观上看, 磁介质就具有了一定的磁性, 我们称此时磁介质处于磁化状态

- 当磁介质处于磁化状态时，介质内部的分子环流与周边相邻的分子环流互相抵消



- 从宏观上看，只剩下截面边缘的分子电流形成一个大的环形电流，称为磁化电流
- 整个磁介质可视为一个由磁化电流组成的螺线管，它所产生的磁场 \vec{B}' 与 \vec{B}_0 方向一致
- 介质内部的总磁场 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ 变得更强了

2 磁化强度矢量

2.1 定义

- 磁化强度矢量定义为单位体积内分子磁矩的矢量和

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{m}$$

\vec{m} 为磁介质中的分子磁矩

- 磁化强度矢量可以用来描述磁介质的磁化状态 (含磁化的程度和磁化的方向)

- 当磁介质未磁化时，每个分子的磁矩 \vec{m} 的取向是杂乱无章的，因此它们的矢量和等于零，所以未磁化的磁介质的磁化强度矢量 $\vec{M} = \vec{0}$
- 当磁介质处于外磁场 \vec{B}_0 中时，磁介质将处于磁化状态，介质内分子磁矩 \vec{m} 的方向将转向外磁场 \vec{B}_0 的方向，所以处于磁化状态的磁介质的磁化强度矢量 \vec{M} 与外磁场 \vec{B}_0 的方向一致，且外磁场 \vec{B}_0 越大，分子磁矩 \vec{m} 的排列越整齐，磁化强度矢量 \vec{M} 的大小越大，介质磁化程度越高

2.2 磁化电流的分布与磁化强度矢量的关系

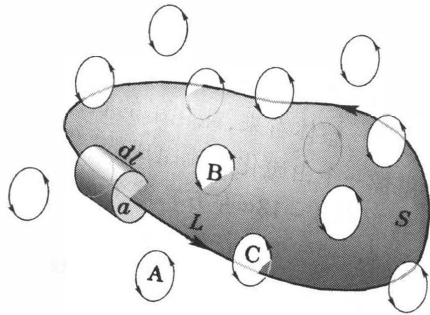
- 用平均分子磁矩代替每个分子的真实磁矩，即把所有分子看成完全相同的电流环，环内电流一般地记为 I ，环的面积记为 a ，方向记为 \vec{e}_n ，则分子磁矩

$$\vec{m} = I a \vec{e}_n = I \vec{a}$$

- 若单位体积的分子数 (分子数密度) 为 n , 则 ΔV 内的分子总数 $\Delta N = n\Delta V$, 所以

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{m} \\ &= \frac{1}{\Delta V} (\Delta N) \vec{m} \\ &= n \vec{m} \\ &= n I a \vec{e}_n \\ &= n I \vec{a}\end{aligned}$$

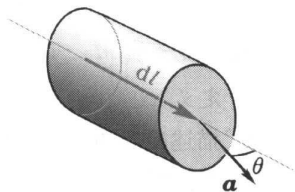
- 在磁介质中任取一个曲面 S ，其边界记为 L



可以发现，分子环流与 S 的关系可以分成三类：
不相交，相交一次，相交两次

- 其中不相交和相交两次，通过 S 面的总电流均为零，所以对通过 S 的电流有影响的只有相交一次的分子环流

- 在 L 上任取一个 $d\vec{l}$ ，以它为轴，以 \vec{a} 为底面做一个斜柱体，则柱体的体积 $dV = \vec{a} \cdot d\vec{l}$



- 中心在这个柱体内的分子环流的数目为 $dN = n dV = n \vec{a} \cdot d\vec{l}$ ，这些分子环流都与 S 相交一次，对通过 S 的电流的贡献都是 I ，所以总的贡献为

$$I(dN) = nI \vec{a} \cdot d\vec{l} = n\vec{m} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

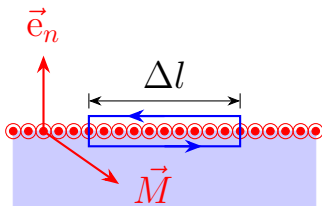
- 所以通过 S 的总电流

$$\sum I' = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

2.3 面磁化电流的线密度

- 如果电流在整个导体内流动，称为体电流，与电流流动方向垂直的截面上单位面积通过的电流称为体电流的 (面) 密度
- 如果电流在某个曲面上流动，称为面电流，与电流流动方向垂直的曲线上单位长度通过的电流称为面电流的 (线) 密度
- 磁介质处于均匀磁化状态时，磁化电流在介质表面上流动，是面电流，其线密度记为 i'

- 在磁介质表面附近取一矩形回路，回路的一对边与表面平行，且与磁化电流垂直，长度 Δl 为一阶小量，一边在介质内部，一边在介质外部；另一对边与表面垂直，长度为高阶小量

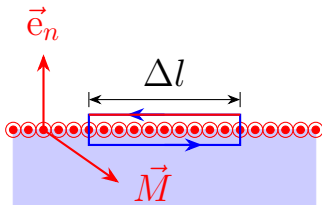


- 如图取逆时针为回路绕向，已知磁化电流的线密度 (单位长度的磁化电流) 为 i' ，与表面平行的边长为 Δl ，因此穿过回路的磁化电流

$$\sum I' = i' \Delta l$$

- 介质外部，磁化强度矢量 $\vec{M} = \vec{0}$ ，所以

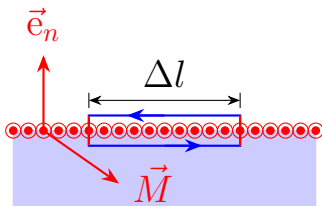
$$\int_{L_1} \vec{M} \cdot d\vec{l} = 0$$



- 与表面垂直的两条边，长为高阶小量，所以

$$\int_{L_2} \vec{M} \cdot d\vec{l} \approx 0$$

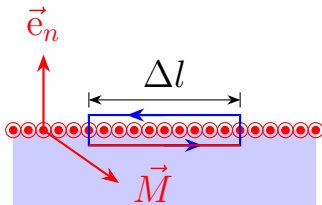
$$\int_{L_3} \vec{M} \cdot d\vec{l} \approx 0$$



- 介质内部，介质均匀磁化，磁化强度矢量 \vec{M} 为一常量， Δl 为一阶小量，所以

$$\int_{L_4} \vec{M} \cdot d\vec{l} = M_t \Delta l$$

其中 M_t 是磁化强度矢量 \vec{M} 在表面上的切向分量 (与磁化电流流向垂直)



$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I'$$

$$M_t \Delta l = i' \Delta l$$

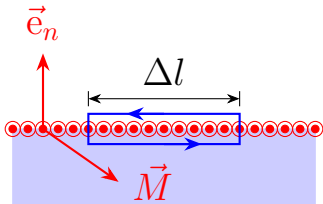
$$M_t = i'$$

- 磁化强度矢量 $\vec{M} = nI\vec{a}$ 与磁场的方向一致，所以分子环流的方向与磁场方向垂直，因此也与磁化强度矢量 \vec{M} 的方向垂直。而磁化电流是分子环流在截面边缘的表现，因此磁化电流的方向与磁化强度矢量 \vec{M} 的方向是垂直的，磁化强度矢量 \vec{M} 在表面上的切向分量一定与磁化电流的流向垂直

$$M_t = i'$$

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

\vec{i}' 的方向就是磁化电流的方向



3 磁介质中的磁场

- 理论上, 对于均匀磁化的磁介质, 如果磁化强度 \vec{M} 已知, 则可以求得介质表面上磁化电流的线密度

$$\vec{j}' = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

因此可以求得磁化电流 I' 的分布, 从而可以求得磁化电流所激发的附加磁场 \vec{B}' , 附加磁场 \vec{B}' 叠加在磁化场 \vec{B}_0 上, 即得介质内部的总磁场

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

- 已知电流分布求磁场分布，能够解析求解的情况很少
- 均匀磁化的磁介质中，磁化电流只分布在介质表面，一般情况下可等效于密绕螺线管或密绕螺绕环

- 对于无限长密绕螺线管，沿轴向方向单位长度的电流就是磁化电流的线密度

$$i' = n \times 1 \times I = nI$$

因此，由安培环路定理很容易求得磁化电流在介质内所激发的磁场

$$\oint_L \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$
$$B' \Delta l = \mu_0 (n \Delta l) I = \mu_0 n I \Delta l = \mu_0 i' \Delta l$$
$$B' = \mu_0 i'$$

- 对于密绕螺线管, \vec{M} 与 \vec{B}_0 同方向, 即平行于螺线管轴线, 因此与表面处的 \vec{e}_n 垂直, 因此 $i' = M$, 所以考虑矢量的方向, 则有

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{M}$$

所以总磁场

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

- 对于无限长密绕螺线管，由之前的分析可知，不管螺线管截面的形状和尺寸，管内的磁场是个均匀磁场
- 对于有限长螺线管，解析上只能利用圆电流回路在其轴线上的磁场，通过场强叠加原理求得有限长螺线管轴线上的磁场分布。具体的计算请翻阅之前相关章节的内容，这里只做简单的定性讨论
- 同轴的、相同绕向、互相平行的圆电流，在轴线上任意一个位置的磁场的方向是相同的，所以参与积分的圆电流越多，积分结果的磁场的大小越大，因此，对于轴线上的同一位置，螺线管的长度越长，磁场越大（短的螺线管只是长的螺线管的一部分）

- 对于螺绕环的情况可以类似分析，闭合螺绕环相当于无限长螺线管，有缺口的螺绕环相当于有限长螺线管，缺口越大，相当于螺线管长度越短

例题

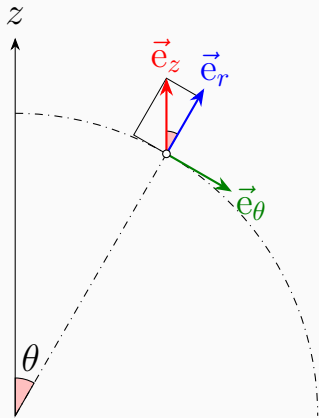
一被均匀磁化的介质球，半径为 R ，磁化强度为 \vec{M} 。试求：(1) 沿球面流动的磁化电流线密度 i' 和总磁化电流 I' ；(2) 磁化电流在球心处产生的磁感应强度 \vec{B}' 。

解答

均匀磁化的介质，磁化强度处处相等。以球心为坐标原点，以磁化强度矢量 \vec{M} 的方向为 z 轴正方向，球面上任意位置的法向方向单位矢量 \vec{e}_n 都是球坐标系中该处的 \vec{e}_r ，所以，球坐标中 θ 处 \vec{M} 与 \vec{e}_n 的夹角均为 θ

解答

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$



解答

根据磁化电流线密度 \vec{i}' 与磁化强度矢量 \vec{M} 之间的关系

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

所以 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 部分球面可以看成是一个圆环电流, 流过其中的磁化电流

$$dI' = i' dl = (M \sin \theta)(R d\theta) = M R \sin \theta d\theta$$

这个圆环电流的半径为 $r = R \sin \theta$

解答

所以整个球面上总的磁化电流

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^\pi M R \sin \theta \, d\theta \\ &= M R (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \\ &= 2MR \end{aligned}$$

解答

以上圆环电流 dI' 在球心处所激发的磁场要利用电流元的磁场，通过场强叠加原理计算而得

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\ dB' &= \int_0^\pi 2 \times \frac{\mu_0 dI'(R \sin \theta) d\varphi}{4\pi R^2} \times \sin \theta \\ &= \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{2R} dI' \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 M \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B' &= \frac{1}{2}\mu_0 M \sin^3 \theta \mathrm{d}\theta \\ B' &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\mu_0 M \sin^3 \theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 M \int_0^\pi \sin^2 \theta (\sin \theta \mathrm{d}\theta) \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 M \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) \mathrm{d}(-\cos \theta) \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 M \int_1^{-1} (\cos^2 \theta - 1) \mathrm{d}(\cos \theta) \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} B' &= \frac{1}{2} \mu_0 M \int_1^{-1} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 M \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right] \Big|_1^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 M \left\{ \left[-\frac{1}{3} - (-1) \right] - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 M \\ \vec{B}' &= \frac{2}{3} \mu_0 M \vec{e}_z \end{aligned}$$

4 磁场强度的安培环路定理

4.1 回顾电位移矢量的高斯定理

- 通过任意高斯面的电场强度的通量等于高斯面内所包围的所有电荷的代数和与真空介电常数的比值

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

其中高斯面内所包围的所有电荷，包括所有的自由电荷 q_0 和所有的极化电荷 q'

- 为了消去高斯定理中的极化电荷 q' , 引入电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$

对于均匀的各向同性的电介质

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

- 利用电极化强度矢量 \vec{P} 和极化电荷 q' 之间所满足的关系

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$$

整理即得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

通过任意高斯面的电位移矢量的通量等于高斯面内所包含的自由电荷的代数和

- 在真空中

$$\vec{P} = \vec{0}$$

$$\chi_e = 0$$

$$\varepsilon_r = 1$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

4.2 磁场强度矢量 \vec{H}

- 磁感应强度的安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

沿任意闭合安培环路的磁感应强度的环量等于穿过安培环路的所有电流的代数和与真空磁导率的乘积，这里穿过安培环路的电流包括由于电荷定向移动形成的传导电流 I_0 和由于介质磁化而形成的磁化电流 I'

- 为了消去安培环路定理中的磁化电流 I' ，引入磁场强度矢量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

- 实验研究表明，对于均匀的各向同性的磁介质，磁化强度矢量和磁场强度矢量成正比

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

其中 χ_m 称为介质的磁化率

- 所以

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \\ &= \mu_0\mu_r\vec{H} \\ &= \mu\vec{H}\end{aligned}$$

其中 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 称为介质的相对磁导率, $\mu = \mu_0\mu_r$ 称为介质的绝对磁导率

4.3 磁场强度的安培环路定理

- 利用磁化强度矢量与磁化电流之间的关系以及磁场强度矢量的定义

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I'$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

可得磁场强度矢量沿任意安培环路的环量

$$\begin{aligned}
\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} \\
&= \oint_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} - \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} \\
&= \frac{1}{\mu_0} [\mu_0 (I_0 + I')] - I' \\
&= I_0
\end{aligned}$$

- 磁场强度的安培环路定理：磁场强度沿任意安培环路的环量等于穿过安培环路的总的传导电流

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0$$

- 在真空中

$$\vec{M} = \vec{0}$$

$$\chi_m = 0$$

$$\mu_r = 1$$

$$\mu = \mu_0$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

例题

有一长圆柱形载流导体，其绝对磁导率为 μ ，半径为 R ，有电流 I 沿轴线方向在圆柱截面上均匀分布，导体外为真空，求磁场分布。

解答

电流分布具有柱对称性，所以磁场分布也具有柱对称性。所以在与电流垂直的平面内，以圆柱中心轴为圆心的圆上各点的磁场大小相等，方向沿圆周的切线方向

解答

由磁场强度的安培环路定理，有

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0$$

$$H \cdot (2\pi r) = I_0$$

$$H = \frac{I_0}{2\pi r}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu I_0}{2\pi r}$$

解答

当 $r < R$ 时 (导体内, 磁介质)

$$I_0 = \frac{I}{\pi R^2} \times \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$H = \frac{1}{2\pi r} \times \frac{Ir^2}{R^2} = \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu}{2\pi r} \times \frac{Ir^2}{R^2} = \frac{\mu Ir}{2\pi R^2}$$

解答

当 $r > R$ 时 (导体外, 真空)

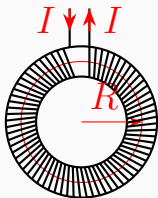
$$I_0 = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

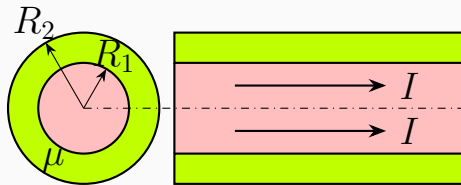
作业

- P214[4-33] 一环形铁芯横截面的直径为 4 mm，环的平均半径 $R = 15$ mm，环上密绕着 200 匝线圈，当线圈导线通有 25 mA 的电流时，铁芯的相对磁导率 $\mu_r = 300$ ，求通过铁芯横截面的磁通量 Φ 。



作业

- P214[4-35(1)(2)] 一无穷长圆柱形直导线外包一层绝对磁导率为 μ 的圆筒形磁介质, 导线半径为 R_1 , 磁介质的外半径为 R_2 , 导线内有电流 I 通过。(1) 求介质内、外的磁场强度和磁感应强度的分布, 并画 $H-r$ 和 $B-r$ 曲线; (2) 介质内、外表面的磁化面电流密度 i' 。



三、磁介质的磁化规律

1 磁介质的分类

- 物质是由分子或原子组成的，而原子是由带正电的原子核和带负电的核外电子组成，没有外电场时，根据原子中正电荷的中心与负电荷的中心是否重合，可以把分子一般地分成极性分子和无极性分子

- 经典物理学认为,带正电的原子核由于质量较大,近似认为是静止不动的,带负电的核外电子绕原子核运动,相当于一个电流环,对应的磁矩称为轨道磁矩,假定电子绕核运动的轨道为 r , 角速度为 ω , 则

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{e\omega}{2\pi}$$

$$S = \pi r^2$$

$$m = IS = \frac{e\omega}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2}e\omega r^2$$

- 电子带负电，所以电流的方向与电子运动的方向相反，因此

$$\vec{m} = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}$$

- 电子除了绕核运动之外，还有自旋，与自旋对应的磁矩称为自旋磁矩。一个电子的总磁矩是轨道磁矩与自旋磁矩之和
- 一般情况下，一个分子中可能有若干个电子，所以分子的总磁矩是分子中所有电子的轨道磁矩和自旋磁矩之和，原则上，原子核也有磁矩 (自旋磁矩)，但一般情况下忽略不计

- 在没有外加磁场的情况下，如果分子中所有电子的磁矩相互抵消，则整个分子的总磁矩为零，我们称这种分子没有固有磁矩；如果分子中所有电子的磁矩没有相互抵消，则整个分子的总磁矩不为零，我们称这种分子具有一定的固有磁矩

- 实验研究表明, 各向同性的电介质中, 任一点的电极化强度矢量 \vec{P} 与该点的总电场强度 \vec{E} 成正比

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

其中 χ_e 称为电介质的电极化率

- 电介质的相对介电常数

$$\varepsilon_r = \chi_e + 1$$

对于绝大多数电介质而言, 电极化率 χ_e 和相对介电常数 ε_r 都是与场强无关的常数, 且数量级通常在 10 以内

- 实验研究表明，对于均匀的各向同性的磁介质，磁化强度矢量和磁场强度矢量成正比

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

其中 χ_m 称为磁介质的磁化率

- 磁介质的相对磁导率

$$\mu_r = \chi_m + 1$$

- 根据磁介质的磁化率 χ_m 和相对磁导率 μ_r 取值不同，通常把磁介质分为三类：顺磁质、抗磁质和铁磁质。其中顺磁质和抗磁质属于弱磁性介质 ($|\chi_m| \ll 1, \mu_r \approx 1$)，而铁磁质属于强磁性介质

1.1 顺磁质

- 顺磁质的磁化率 $\chi_m > 0$, 相对磁导率 $\mu_r = 1 + \chi_m > 1$, 二者都是与磁场 \vec{H} 无关的常数。
而

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

所以 \vec{M} 与 \vec{H} 方向相同

- 在顺磁性物质中，分子具有一定的固有磁矩
- 没有外加磁场时，由于热运动各分子的磁矩方向是无规的，因此对于任意**宏观足够小微观足够大**的区域，总的分子磁矩为零，介质处于未磁化状态
- 当存在外加磁场时，各分子磁矩在外磁场作用下，都偏向外磁场的方向，因此任意**宏观足够小微观足够大**的区域，总的分子磁矩与外磁场的方向相同，

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$\chi_m > 0$ ，这就是顺磁效应的来源

- 分子的热运动与温度有关，温度越高，热运动越剧烈， χ_m 越小，顺磁效应越弱。即顺磁质的磁化率 χ_m 随温度的升高而减小
- 顺磁质在外磁场中的磁化过程称为取向磁化

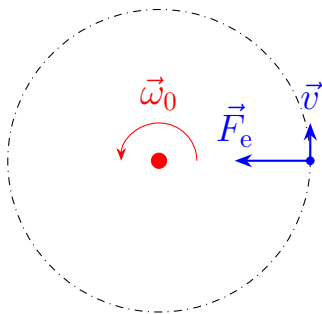
1.2 抗磁质

- 抗磁质的磁化率 $\chi_m < 0$, 相对磁导率 $\mu_r < 1$, 二者都是与磁场 \vec{H} 无关的常数。而

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

所以 \vec{M} 与 \vec{H} 方向相反

- 在抗磁性物质中，分子没有固有磁矩
- 没有外磁场时，假定电子绕原子核做半径为 r ，角速度为 ω_0 的圆周运动，电子受到的库仑力提供电子做圆周运动的向心力



$$F_e = \frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega_0^2 r$$

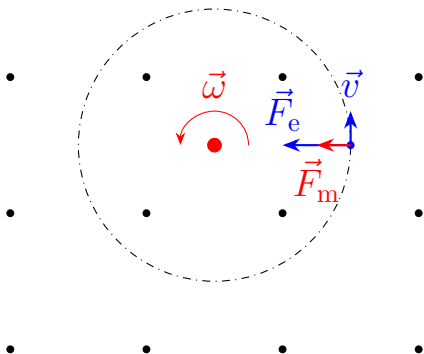
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3}}$$

- 当存在外加磁场时，运动的核外电子将受到洛伦兹力的作用

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

为简单起见，假定外加磁场 \vec{B} 与电子运动的轨道平面垂直，即 \vec{B} 与 $\vec{\omega}$ 平行

- 若 \vec{B} 与 $\vec{\omega}$ 同向, 则洛伦兹力与库仑力同方向, 假设此时电子运动的轨道不变, 则角速度将增加为 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$



$$\frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e(\omega r)B = m\omega^2 r$$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e(\omega_0 + \Delta\omega)rB = m(\omega_0 + \Delta\omega)^2 r$$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e\omega_0 rB + e(\Delta\omega)rB = m\omega_0^2 r + \dots$$

$$e\omega_0 rB + e(\Delta\omega)rB = 2m\omega_0(\Delta\omega)r + m(\Delta\omega)^2 r$$

$$e\omega_0 B + e(\Delta\omega)B = 2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2$$

- 当磁场不太大时

$$\vec{F}_m \ll \vec{F}_e$$

$$e(\omega r)B \ll \frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega_0^2 r$$

$$B \ll \frac{m\omega_0^2 r}{e(\omega r)} = \frac{m\omega_0^2}{e\omega} < \frac{m\omega_0}{e}$$

角速度改变量很小, $\Delta\omega \ll \omega_0$

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

$$\omega_0 + \Delta\omega \approx \omega_0$$

$$e\omega_0 B + e(\Delta\omega)B = e(\omega_0 + \Delta\omega)B \approx e\omega_0 B$$

$$2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2 = m(\Delta\omega)(2\omega_0 + \Delta\omega)$$

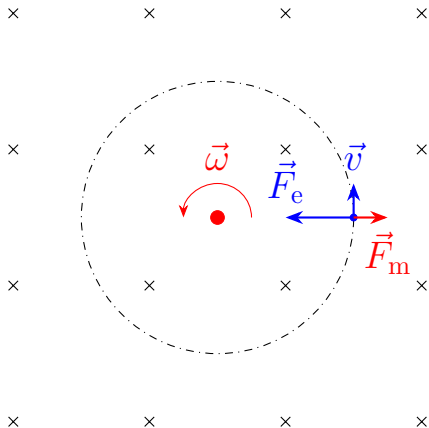
$$2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2 \approx m(\Delta\omega)(2\omega_0) = 2m\omega_0\Delta\omega$$

$$e\omega_0 B + e(\Delta\omega)B = 2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2$$

$$e\omega_0 B = 2m\omega_0\Delta\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}$$

- 若 \vec{B} 与 $\vec{\omega}$ 反向, 则洛伦兹力与库仑力反方向, 假设此时电子运动的轨道不变, 则角速度将减少为 $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$



$$\frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} - e(\omega r)B = m\omega^2 r$$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - e(\omega_0 - \Delta\omega)rB = m(\omega_0 - \Delta\omega)^2 r$$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - e\omega_0 rB + e(\Delta\omega)rB = m\omega_0^2 r + \dots$$

$$-e\omega_0 rB + e(\Delta\omega)rB = -2m\omega_0(\Delta\omega)r + m(\Delta\omega)^2 r$$

$$-e\omega_0 B + e(\Delta\omega)B = -2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2$$

- 当磁场不太大时，角速度改变量很小

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

$$\omega_0 - \Delta\omega \approx \omega_0$$

$$-e\omega_0 B + e(\Delta\omega)B = -e(\omega_0 - \Delta\omega)B \approx -e\omega_0 B$$

$$-2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2 = -m(\Delta\omega)(2\omega_0 - \Delta\omega)$$

$$-2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2 \approx -m(\Delta\omega)(2\omega_0) = -2m\omega_0\Delta\omega$$

$$-e\omega_0 B + e(\Delta\omega)B = -2m\omega_0(\Delta\omega) + m(\Delta\omega)^2$$

$$-e\omega_0 B = -2m\omega_0\Delta\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}$$

- 所以, 当 \vec{B} 与 $\vec{\omega}$ 平行时, 由于电子受到的洛伦兹力而引起的电子运动的角速度的改变量 $\Delta\vec{\omega}$ 的方向总是与外磁场 \vec{B} 的方向相同

$$\Delta\vec{\omega} = \frac{e}{2m}\vec{B}$$

- 根据电子轨道磁矩与角速度之间的关系

$$\vec{m} = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}$$

- 无外磁场时,

$$\vec{m}_0 = -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}_0$$

- 有外磁场 \vec{B} 时,

$$\begin{aligned}\vec{m} &= -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega} \\ &= -\frac{1}{2}er^2(\vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= -\frac{1}{2}er^2(\vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega}) \\
&= -\frac{1}{2}er^2\vec{\omega}_0 - \frac{1}{2}er^2\Delta\vec{\omega} \\
&= \vec{m}_0 - \frac{1}{2}er^2\Delta\vec{\omega} \\
\Delta\vec{m} &= \vec{m} - \vec{m}_0 \\
&= -\frac{1}{2}er^2\Delta\vec{\omega} \\
&= -\frac{1}{2}er^2 \cdot \frac{e}{2m}\vec{B} \\
&= -\frac{e^2r^2}{4m}\vec{B}
\end{aligned}$$

- 所以，每个电子的轨道磁矩的改变量 $\Delta \vec{m}$ 的方向总是与外磁场 \vec{B} 的方向相反，所以整个介质由于外磁场存在所激发的感生磁矩总是与外磁场 \vec{B} 的方向相反
- P189-190，理论上可以证明，不管 $\vec{\omega}_0$ 和 \vec{B} 成任何角度， $\Delta \vec{\omega}$ 和 \vec{B} 的方向总是相同，因此感生磁矩和 \vec{B} 的方向总是相反。如何证明？
- 以上分析是假定磁场不太大，如果磁场比较大，结果又会如何？
- 以上分析中假定存在外磁场时，电子轨道的半径不变，为什么？

- 在抗磁性物质中，每个电子仍然有轨道磁矩和自旋磁矩，二者之和也不为零，但一个分子中所有电子的磁矩之和为零，即分子没有固有磁矩。在外磁场 \vec{B} 作用下，每个电子的感生磁矩 $\Delta\vec{m}$ 总是与外磁场 \vec{B} 的方向相反，因此整个分子的感生磁矩也与外磁场 \vec{B} 的方向相反，这就是抗磁性的来源
- 抗磁质在外磁场中的磁化过程称为感应磁化

- 顺磁质每个分子中的电子在外磁场中也会出现感应磁矩，但它比分子固有磁矩约小 5 个数量级，因此完全可以忽略。分子磁矩远大于附加磁矩，分子磁矩是产生磁效应的主要原因。无外磁场时，分子磁矩取向杂乱无章，宏观上不显示磁性；在外磁场作用下，所有分子磁矩都力图转到外磁场方向，所以附加磁场与外磁场同向
- 无外场时抗磁质分子磁矩为零；在外磁场作用下，产生附加磁矩，附加磁矩是抗磁质产生磁效应的唯一原因。附加磁矩与外磁场相反，所以附加磁场与外磁场反向

- 超导体的基本特性之一是在特定温度 (转变温度) 以下电阻完全消失, 但超导体最根本的特性是它的磁学性质——完全抗磁性。将一超导体放在外磁场中时, 其体内的磁感应强度永远等于零, 这种现象称为迈斯纳效应

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{H} = -\vec{M}$$

$$\chi_m = -1$$

1.3 铁磁质

- 铁磁质的 χ_m 和 μ_r 比较复杂, 一般情况下, 铁磁质中的 \vec{M} 和 \vec{H} 不成比例, 经过不同的磁化过程到达同一个 \vec{H} , \vec{M} 会取不同的数值。因此 χ_m 和 μ_r 不再是与磁场 H 无关的常数, 而是与磁场 H 有关的函数 $\chi_m(H)$ 和 $\mu_r(H)$

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \chi_m(H) \vec{H} \\
\vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\
&= \mu_0[\vec{H} + \chi_m(H) \vec{H}] \\
&= \mu_0[1 + \chi_m(H)] \vec{H} \\
&= \mu_0 \mu_r(H) \vec{H} \\
&= \mu(H) \vec{H}
\end{aligned}$$

铁磁质的 χ_m 一般都很大, 其量级在 $10^2 \sim 10^6$, 所以 $M \gg H$, $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{M}$

2 铁磁质的磁化规律

2.1 铁磁质的性质

- 相对磁导率非常大：铁磁质能产生特别强的附加磁场，使铁磁质中的磁场增强 $10^2 \sim 10^6$ 倍
- 磁导率不是恒量，随所在处磁场强度变化而变化， B 与 H 不是线性关系

- 铁磁质磁化存在一居里点 (居里温度)
 - 在居里点, 磁性发生突变
 - 当温度在居里点以下时, 介质为铁磁质
 - 当温度在居里点以上时, 介质转化为顺磁质
 - 各种材料的居里点不同, 如铁的居里温度约为 770°C (1043 K)
- 外磁场撤去后, 仍能保留部分磁性, 存在磁滞现象

2.2 铁磁质的磁化

- 研究铁磁质的磁化规律，就是研究其 B 随 H 的变化关系或 M 随 H 的变化关系
- 对于密绕螺绕环，假定匝数是 N ，平均半径为 R ，通过的电流为 I ，由有磁场强度的安培环路定理可得

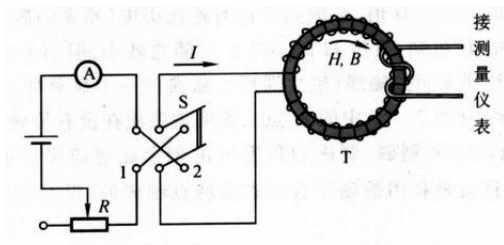
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$H \cdot (2\pi R) = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = nI$$

$$n = \frac{N}{2\pi R}$$

- 不管螺绕环中有没有磁介质，其中的磁场强度均为 H ，即 $H_0 = H$ ，因此 (P190) 称闭合铁芯螺绕环中没有退磁场 (P179-180)
- 将待测磁性材料加工成闭合环状，在其上密绕导线，形成一个闭合铁芯螺绕环。改变通过导线中的电流 I ，就可以得到不同的 H



- 在螺绕环上加一次级线圈 (假定为 N_2 匝), 当通过螺绕环中的电流发生变化时, 螺绕环中的磁场 H 也发生变化, B 也发生变化, 因此通过次级线圈的磁通量发生变化, 次级线圈中将产生感应电动势, 实验上通过测量次级线圈中的感应电动势来测量螺绕环中的磁感应强度 B

$$\begin{aligned}\Psi &= N_2 B S \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Psi}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt} \\ \Delta B &= -\frac{\mathcal{E}}{N_2 S} \Delta t\end{aligned}$$

- P190, 当螺绕环中的电流反向时 (大小不变, 方向变化, 即从 I 变成 $-I$), 螺绕环中的磁场 $H = nI$ 发生变化 (大小不变, 方向变化, 即从 H 变成 $-H$), 因此 B 也发生改变
- 如果是顺磁质或抗磁质, B 与 H 成线性关系, H 变成 $-H$ 时, B 变成 $-B$, 磁感应强度的改变量为 $-2B$; 但是对于铁磁质, 从后面的讨论可知, H 变成 $-H$ 时, B 并不会变成 $-B$, 因此这里磁感应强度的改变量不应该等于 $-2B$, 所以书上用这种方法确定 B 的值, 个人觉得值得商榷。梁灿彬的书上 (第三版 P301) 只说: 次级线圈 “就是为测量 B 而设的, 详情从略”

- 如果 B 能测得, 根据 B 、 M 、 H 之间的关系, 可以算得 M

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

(1) 起始磁化曲线

- 要研究磁介质的起始磁化特性时，需要先使之去磁 (P192)，即让磁介质中 $H = 0$ 时 M 也等于零，即处于未磁化状态
- 之后，慢慢增加通过螺绕环的电流，提高 H ，测量对应每个 H 的 B 和 M 。实验发现，随着 H 的增大， B 和 M 也随之增大

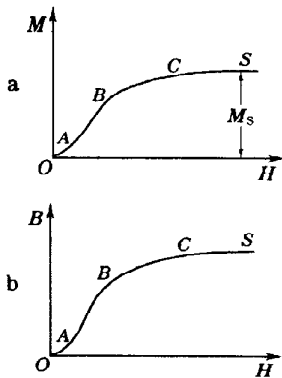


图 4 - 38 起始磁化曲线

- 开始时 B 和 M 增加得比较缓慢，之后会经过一段急剧增加的过程，然后又缓慢增加，最终几乎不再变化
- 当 H 继续增大， B 和 M 保持不变的状态，我们称为饱和磁化状态，此时的磁化强度 M 称为饱和磁化强度，记为 M_S
- 从未磁化状态到饱和磁化状态的过程曲线，称为铁磁质的起始磁化曲线

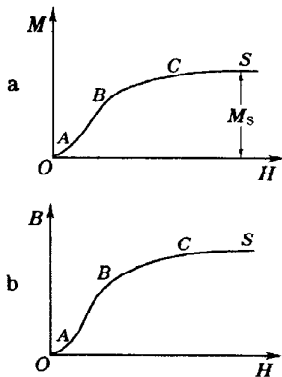


图 4 - 38 起始磁化曲线

- 由 $\vec{M} = \chi_m(H)\vec{H}$ 、 $\vec{B} = \mu_0\mu_r(H)\vec{H} = \mu(H)\vec{H}$ 可得

$$\frac{M}{H} = \chi_m(H)$$

$$\frac{B}{H} = \mu(H) = \mu_0\mu_r(H)$$

- 所以, $M-H$ 曲线或 $B-H$ 曲线上任一点到坐标原点的直线的斜率分别表示该状态下的磁化率 $\chi_m(H)$ 和绝对磁导率 $\mu(H) = \mu_0\mu_r(H)$

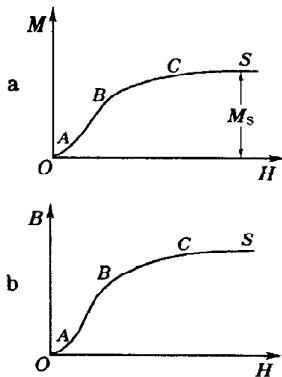


图 4-38 起始磁化曲线

- $H = 0$ 的磁化率和磁导率分别称为起始磁化率 $\chi_m(0)$ 和起始 (绝对) 磁导率 $\mu(0)$ 、起始相对磁导率 $\mu_r(0)$

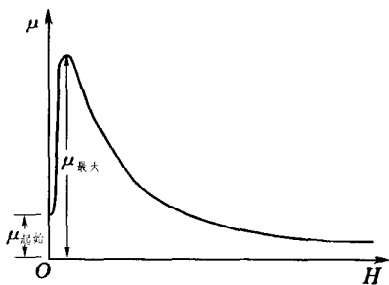


图 4 - 39 $\mu - H$ 曲线

- 从图上也可以发现，磁化率和磁导率存在一个最大值，分别称之为最大磁化率、最大（绝对）磁导率和最大相对磁导率

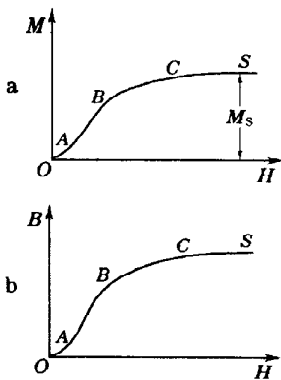


图 4 - 38 起始磁化曲线

(2) 磁滞回线

- 当铁磁质处于饱和磁化状态之后，降低通过螺绕环的电流，就可以降低其中的磁场，实验发现， $M-H$ 曲线和 $B-H$ 曲线不会沿起始磁化曲线原路返回
- 因此当 $H=0$ 时， $M \neq 0$ 、 $B \neq 0$ ，此时的磁化强度称为剩余磁化强度，记为 M_R ，此时的磁感应强度称为剩余磁感应强度，记为 B_R

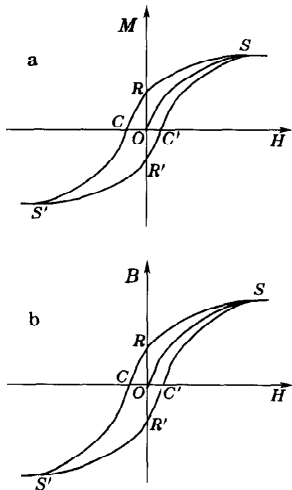


图 4 - 40 磁滞回线

- 之后，使螺绕环中通过反向的电流并逐渐加大，则螺绕环中的 H 也反向并逐渐加大，其中 M 、 H 会继续减小，当 $M = 0$ 、 $B = 0$ 时，称介质完全退磁，此时磁场 H 称为铁磁质的矫顽力，记为 H_C
- P191 脚注：严格来说，使 $M = 0$ 和使 $B = 0$ 所需的矫顽力并不完全相等，但在矫顽力不大的情况下，二者近似相等。从 $H = 0$ 到 $M = 0$ ($B = 0$) 这一段曲线，称为退磁曲线

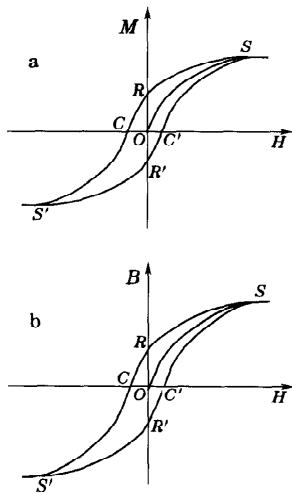


图 4 - 40 磁滞回线

- 如果反向电流继续加大，反向磁场 H 也继续加大，介质将反向磁化，直到饱和。一般情况下，反向的饱和磁化强度的数值和正向的饱和磁化强度的数值相等
- 之后，反向电流逐渐减小，并换回正向电流再逐渐加大，则 H 也逐渐减小 ($H < 0$) 再逐渐加大 ($H > 0$)， M 和 B 也逐渐减小再逐渐加大，但 $M-H$ 曲线和 $B-H$ 曲线不会沿之前的磁化曲线原路返回

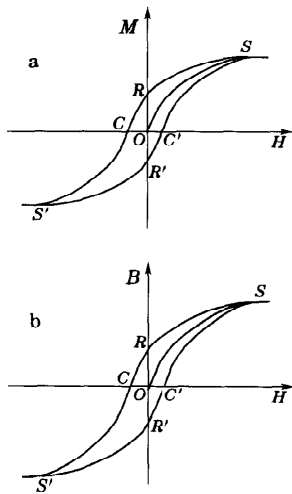


图 4 - 40 磁滞回线

- 实验发现，两个过程的磁化曲线关于坐标原点对称
- 实验还发现，当往复变化电流，因而往复变化磁场，使铁磁质到达饱和磁化状态之后再反向变化电流和磁场，磁化过程将沿以上过程循环变化，循环过程的 $M-H$ 曲线和 $B-H$ 曲线称为铁磁质的磁滞回线
- 磁化过程中 M 和 B 比 H 迟到达零点的现象称为磁滞现象

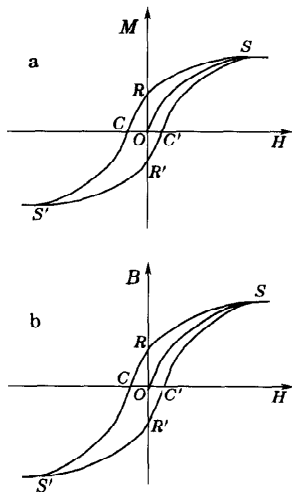


图 4 - 40 磁滞回线

3 磁滞损耗

- 铁磁材料在交变磁场作用下反复磁化时要消耗额外的能量，并以热的形式从铁磁质中放出，这种能量损耗叫做磁滞损耗。可以证明，磁滞损耗与磁滞回线所围面积成正比

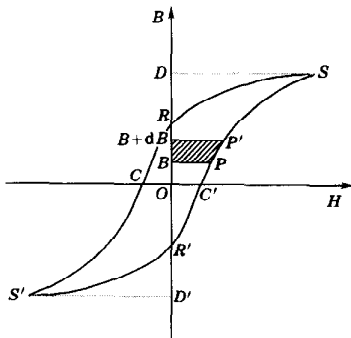
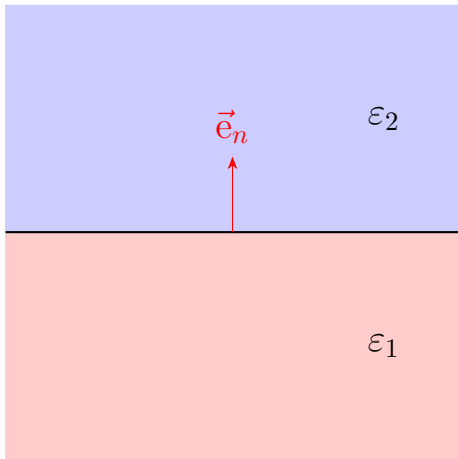


图 4 - 43 磁滞损耗

四、电磁介质界面上的边界条件 磁路定理

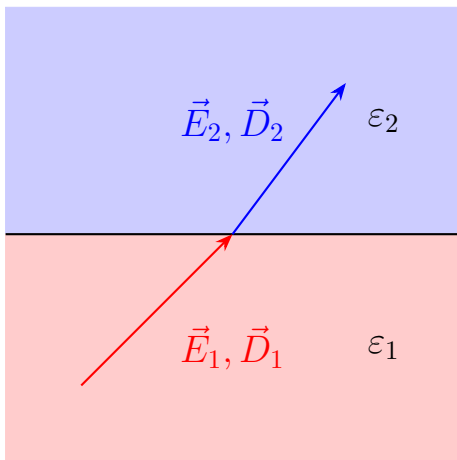
1 两种电介质分界面上的边界条件

- 很一般地假定，两种电介质的介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ，取界面的法向方向单位矢量 \vec{e}_n 从介质 1 指向介质 2



- 介质 1 中的电场强度记为 \vec{E}_1 , 电位移矢量 \vec{D}_1 介质 2 中的电场强度记为 \vec{E}_2 , 电位移矢量 \vec{D}_2

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1, \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$$



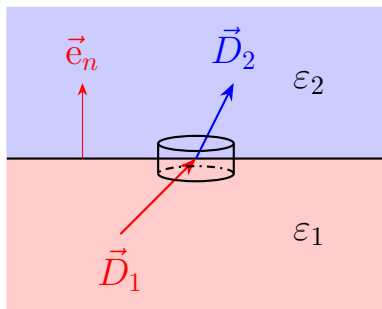
1.1 电位移矢量 \vec{D} 法向分量的连续性

- 电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

在介质不漏电的情况下，介质中不存在自由电荷，因此两种介质的界面上也没有自由电荷

- 在界面附近取一圆柱面为高斯面 S ，圆柱的两个底面面积为一阶小量 ΔS ，两个底面分别在两种介质中，且与界面平行；圆柱的侧面与界面垂直，高 h 为高阶小量



界面两侧电位移矢量 \vec{D} 的法向分量连续

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\vec{D}_1 \cdot [\Delta S(-\vec{e}_n)] + \vec{D}_2 \cdot [\Delta S(\vec{e}_n)] = 0$$

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{e}_n = \vec{D}_1 \cdot \vec{e}_n$$

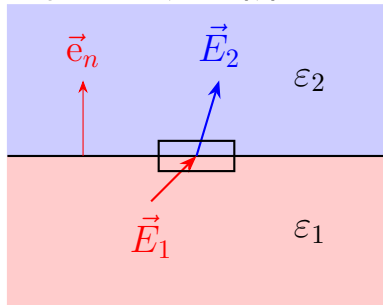
$$D_{2n} = D_{1n}$$

1.2 电场强度矢量 \vec{E} 切向分量的连续性

- 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 在界面附近取一矩形回路作为环路，矩形的一对边与界面平行，长 Δl 为一阶小量，另一对边与界面垂直，长 h 为高阶小量



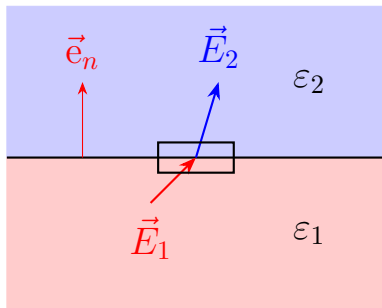
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}_2 = 0$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \Delta\vec{l}_1 = 0$$

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

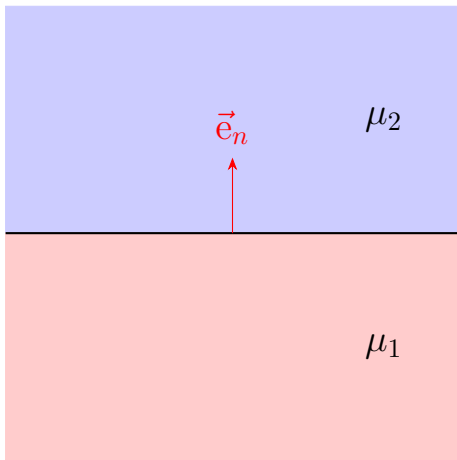
$$E_{1t} = E_{2t}$$



界面两侧电场强度矢量 \vec{E} 的切向分量连续

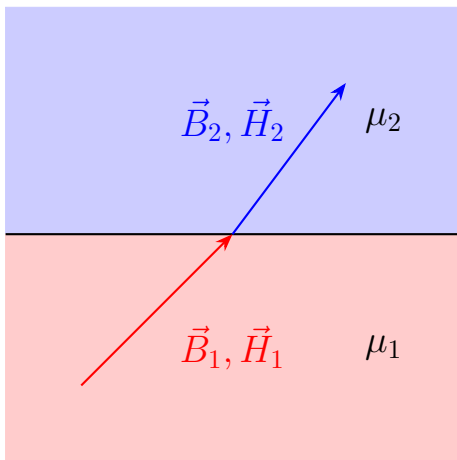
2 两种磁介质分界面上的边界条件

- 很一般地假定, 两种磁介质的磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 , 取界面的法向方向单位矢量 \vec{e}_n 从介质 1 指向介质 2



- 介质 1 中的磁感应强度记为 \vec{B}_1 , 磁场强度 \vec{H}_1 ,
介质 2 中的磁感应强度记为 \vec{B}_2 , 磁场强度 \vec{H}_2

$$\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1, \vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$$

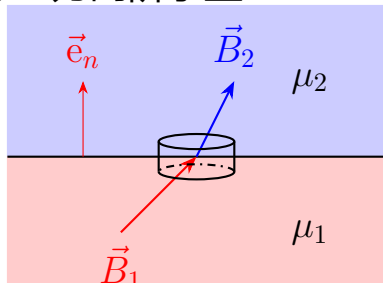


2.1 磁感应强度矢量 \vec{B} 法向分量的连续性

- 磁感应强度的高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 在界面附近取一圆柱面为高斯面 S ，圆柱的两个底面面积为一阶小量 ΔS ，两个底面分别在两种介质中，且与界面平行；圆柱的侧面与界面垂直，高 h 为高阶小量



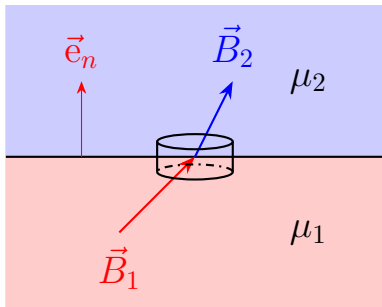
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B}_1 \cdot [\Delta S(-\vec{e}_n)] + \vec{B}_2 \cdot [\Delta S(\vec{e}_n)] = 0$$

$$\vec{B}_2 \cdot \vec{e}_n = \vec{B}_1 \cdot \vec{e}_n$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

界面两侧磁感应强度
矢量 \vec{B} 的法向分量连
续



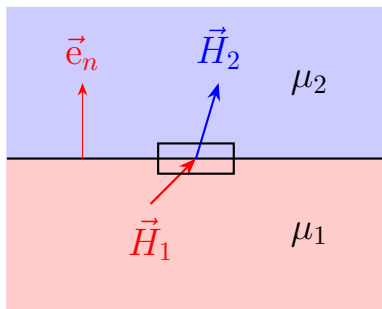
2.2 磁场强度矢量 \vec{H} 切向分量的连续性

- 磁场强度的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

P198 一般在不同磁介质的界面上没有传导电流 (为什么?)

- 在界面附近取一矩形回路作为环路，矩形的一对边与界面平行，长 Δl 为一阶小量，另一对边与界面垂直，长 h 为高阶小量



界面两侧磁场强度矢量 \vec{H} 的切向分量连续

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{H}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{H}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = 0$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \Delta \vec{l}_1 = 0$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

3 磁路定理

3.1 磁路

- 金属导体和绝缘体的电导率极为悬殊
- 铜的电阻率 $\rho = 1.75 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
- 铝的电阻率 $\rho = 2.83 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
- 天然橡胶的电阻率 $\rho \approx 10^{13} \Omega \cdot \text{m}$
- 石英玻璃的电阻率 $\rho \approx 10^{16} \sim 10^{17} \Omega \cdot \text{m}$
- 电导率是电阻率的倒数，电阻率越高，电导率越低
- P57 高电导率的物质就把电流集中在自己的内部
- 所以在电路中，电流几乎集中在导线内部
- 由欧姆定律的微分形式 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ，电场也几乎集中在导线内部

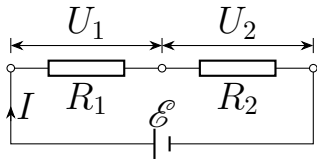
- 磁介质中，铁磁质的磁导率比非铁磁质（顺磁质和抗磁质）大很多
- $\mu \gg \mu_0$ ，高导磁率的物质把磁通量集中在自己内部
- 若用铁磁质材料制成闭合铁芯，其上缠绕线圈并通以电流，则磁感应线几乎全部集中在铁芯内部，此时可以把铁芯的边界看成磁感应线通过的管道，由铁芯所构成的闭合磁感应管称为磁路

3.2 磁路定理

- 所有导线 (电阻) 上的电压 (电势降落) 之和等于电源电动势, 通过所有导线 (电阻) 上的电流相等

$$\mathcal{E} = \sum_i U_i = \sum_i I_i R_i = I \sum_i R_i$$

$$R_i = \rho_i \frac{l_i}{S_i} = \frac{l_i}{\sigma_i S_i}$$



- 在磁路中，取任意一段磁路的表面为高斯面 (侧面为铁芯的表面，底面为磁路的截面)，由磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

可得，通过磁路上任意截面的磁通量 Φ 相等

- 取闭合磁路为安培环路，安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

如果绕在铁芯上的线圈共有 N 匝，通过线圈的电流为 I ，则

$$\sum I_0 = NI \equiv \mathcal{E}_m$$

称为磁通势或磁动势 (与电动势对应)

- 把整个闭合磁路分成若干段均匀磁路，其中第 i 段磁路的长度为 l_i ，截面积为 S_i ，绝对磁导率为 μ_i ，通过其中的磁感应强度为 B_i ，磁场强度为 H_i ，则有

$$\Phi_i = B_i S_i = \Phi$$

$$B_i = \frac{\Phi}{S_i} = \mu_i H_i$$

$$H_i = \frac{\Phi}{\mu_i S_i}$$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \sum_i H_i l_i = \sum_i \frac{\Phi}{\mu_i S_i} l_i \\ &= \Phi \sum_i \frac{l_i}{\mu_i S_i} = \Phi \sum_i R_{mi} \end{aligned}$$

$$R_{\text{mi}} = \frac{l_i}{\mu_i S_i}$$

称为第 i 段磁路的磁阻

$$U_{\text{mi}} = H_i l_i = \Phi_i R_{\text{mi}}$$

称为第 i 段磁路的磁位降落 (磁势降落、磁压)

- 磁路定理：闭合磁路上的磁动势等于各段磁路上磁势降落之和

$$\mathcal{E}_m = \sum_i U_{mi} = \sum_i \Phi_i R_{mi} = \Phi \sum_i R_{mi}$$

电路	磁路
电动势 \mathcal{E}	磁动势 $\mathcal{E}_m = NI$
电流 I	磁通量 Φ
电阻 $R = \frac{l}{\sigma S}$	磁阻 $R_m = \frac{l}{\mu S}$
电导率 σ	磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r$
电势降落 $U = IR$	磁势降落 $U_m = \Phi R_m$
$\mathcal{E} = \sum_i U_i$	$\mathcal{E}_m = \sum_i U_{mi}$

- 对于并联磁路，有

$$\Phi = \sum_i \Phi_i$$

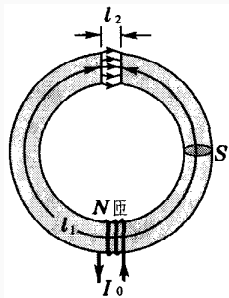
$$U_m = U_{mi}$$

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m}, \Phi_i = \frac{U_{mi}}{R_{mi}}$$

$$\frac{1}{R_m} = \sum_i \frac{1}{R_{mi}}$$

例题

由于种种原因，实际电感器件的磁芯不都是闭合的。这时的自感系数 L 与空心线圈自感系数 L_0 之比，称为器件的有效（相对）磁导率 $\mu_{\text{有效}}$ 。如图所示，磁环开有气隙。设磁芯材料的相对磁导率为 μ_r ，其长度为 l_1 ，气隙长度为 l_2 ，求有效磁导率。



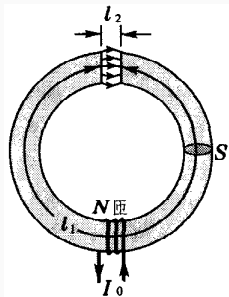
解答

一般地假定, 螺绕环的匝数为 N , 通过的电流为 I_0 , 如果空心线圈自感系数为 L_0 , 则通过螺绕环的磁链为

$$\Psi_0 = L_0 I_0 = N \Phi_0$$

空心螺绕环的磁阻

$$R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 S_0}$$



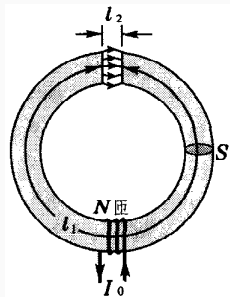
解答

由磁路定理，有

$$\mathcal{E}_m = NI_0 = \Phi_0 R_{m0}$$

所以

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{N\Phi_0}{I_0} \\ &= \frac{N}{I_0} \cdot \frac{NI_0}{R_{m0}} \\ &= \frac{N^2}{R_{m0}} \end{aligned}$$



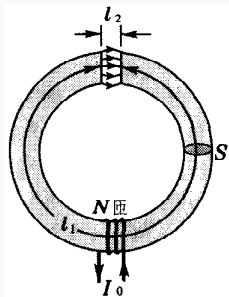
解答

开有气隙的磁环，相当于两段均匀磁路的串联，一段是磁芯，一段是空气。磁芯部分的磁阻为

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1}$$

空气部分的磁阻为

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 S_2}$$

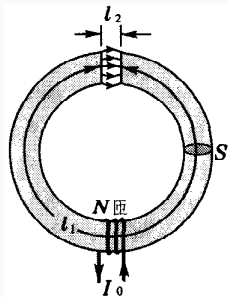


解答

一般情况下, 可以认为气隙长度远小于磁芯长度 $l_2 \ll l_1$, 因此忽略气隙部分的漏磁, 认为 $S_2 = S_1 = S_0$ 由磁路定理, 有

$$\mathcal{E}_m = NI_0 = \Phi(R_{m1} + R_{m2})$$

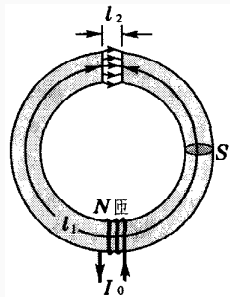
开有气隙的磁环的自感系数为 L , 因此通过的磁链为 $\Psi = LI_0 = N\Phi$



解答

所以

$$\begin{aligned} L &= \frac{N\Phi}{I_0} \\ &= \frac{N}{I_0} \cdot \frac{NI_0}{R_{m1} + R_{m2}} \\ &= \frac{N^2}{R_{m1} + R_{m2}} \end{aligned}$$



解答

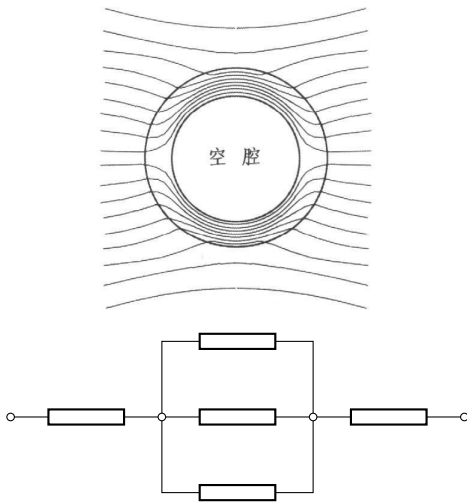
$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{有效}} &= \frac{L}{L_0} \\
 &= \frac{\frac{N^2}{R_{m1} + R_{m2}}}{\frac{N^2}{R_{m0}}} \\
 &= \frac{R_{m0}}{R_{m1} + R_{m2}} \\
 &= \frac{\frac{l_0}{\mu_0 S_0}}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 S_2}} \\
 &= \frac{\mu_r l_0}{l_1 + \mu_r l_2} \\
 &= \frac{\mu_r l_0}{l_0 - l_2 + \mu_r l_2} \\
 &= \frac{\mu_r l_0}{l_0 + l_2(\mu_r - 1)} \\
 &= \frac{\mu_r}{1 + \frac{l_2}{l_0}(\mu_r - 1)}
 \end{aligned}$$

4 磁屏蔽

- 铁芯具有把磁感应线集中到自己内部的性质，提供了制造磁屏蔽的可能
- 铁芯的磁导率远大于空气的磁导率，磁导率越大，磁阻越小

$$R_m = \frac{l}{\mu S}$$

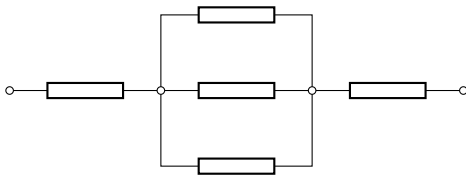
- 将铁壳放在外磁场中时，铁壳的壁与空腔中的空气可以看成并联磁路



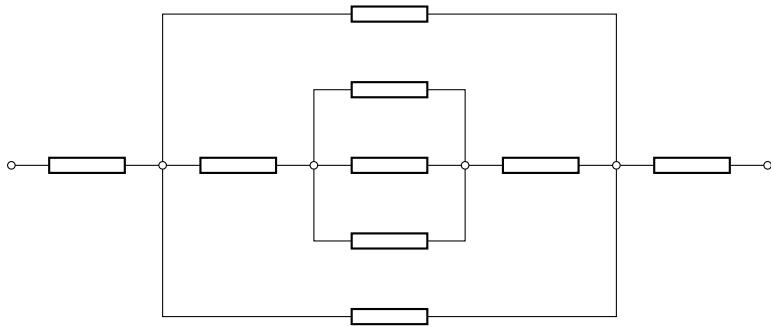
- 并联磁路两端的磁势降落相等，磁阻越大，通过的磁通量越小，所以外磁场的磁通量绝大部分从铁壳中通过，只有很少部分进入空腔

$$U_m = \Phi R_m$$

$$R_m = \frac{l}{\mu S}$$



- 铁壳的磁屏蔽效果没有金属导体壳的静电屏蔽效果好，实际应用中通常采用多层铁壳的办法，把漏进空腔里的磁通一次次地屏蔽掉



五、电磁场能

1 电场能量

1.1 任意带电体的静电能

- 任意带电体均可以视为由若干点电荷所组成的体系，整个带电体总的静电能包含每个点电荷的自能和所有点电荷之间的相互作用能

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_q (dq) U = \frac{1}{2} \int_q (dq) (U_1 + U_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_q (dq) U_1 + \frac{1}{2} \int_q (dq) U_2 \end{aligned}$$

U 是整个带电体在 dq 所在位置的总的电势， U_1 是 dq 在它自身所在位置的电势， U_2 是扣除 dq 之外其他带电体在 dq 所在位置的电势之和

$$W_e = \frac{1}{2} \int_q (dq) U_1 + \frac{1}{2} \int_q (dq) U_2$$

- 第一项是每个 dq 的自能之和, U_1 是 dq 在它自身所在位置的电势
- 第二项是所有 dq 之间的相互作用能, U_2 是扣除 dq 之外其他带电体在 dq 所在位置的电势之和
- 整个带电体总的静电能等于所有小带电体的自能之和加上小带电体之间的相互作用能

1.2 电容器的储能

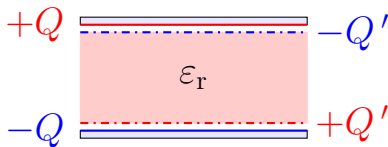
(1) 极板间为空气

- 电容为 C ，正极板带电量 $+Q$ ，电势为 U_+ ，负极板带电量为 $-Q$ ，电势为 U_- ，两极板之间的电压 $U = U_+ - U_-$ ，所以整个电容器储存的总电能

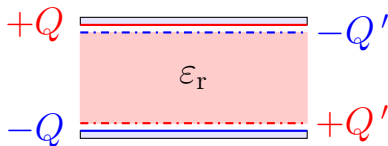
$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}[(+Q)U_+ + (-Q)U_-] \\ &= \frac{1}{2}Q(U_+ - U_-) \\ &= \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

(2) 极板间为各向同性的均匀介质 (ϵ_r)

- 如果极板间充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀介质，则介质中在靠近正极板的表面上将出现极化电荷 $-Q'$ ，在靠近负极板的表面上将出现极化电荷 $+Q'$ ，此时两极板的电势分别为 U'_+ 和 U'_-



- 整个带电体的电荷分布：正极板上的自由电荷 $+Q$ 、与之相邻的介质表面上的极化电荷 $-Q'$ ，它们两个的电势均为 U'_+ ；负极板上的自由电荷 $-Q$ 、与之相邻的介质表面上的极化电荷 $+Q'$ ，它们两个的电势均为 U'_-



- 整个带电体的静电能 (是不是就是此时电容器的储能?)

$$\begin{aligned}W'_{e1} &= \frac{1}{2}[(+Q - Q')U'_+ + (-Q + Q')U'_-] \\&= \frac{1}{2}(Q - Q')(U'_+ - U'_-) \\&= \frac{1}{2}(Q - Q')U'\end{aligned}$$

$U' = U'_+ - U'_-$ 是此时两极板之间的电压

- 根据极化电荷与自由电荷之间的关系

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D\Delta S = \sigma\Delta S$$

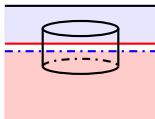
$$D = \sigma = \varepsilon E$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\sigma$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}$$

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S - \sigma'\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$$



$$\frac{1}{\varepsilon}\sigma = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\sigma = \sigma - \sigma'$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$$

$$Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q$$

$$Q - Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}$$

- 极板带电量 Q 保持不变, 当极板间为空气时, 极板间某点电场强度记为 E , 两极板间的电压记为 U , 当极板间为均匀各向同性介质时, 则极板间同一位置的电场强度变为 $E' = \frac{E}{\epsilon_r}$, 因此两极板间的电压变为 $U' = \frac{U}{\epsilon_r}$

$$\begin{aligned} W'_{e1} &= \frac{1}{2}(Q - Q')U' = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\epsilon_r} \cdot \frac{U}{\epsilon_r} \\ &= \frac{1}{\epsilon_r^2} \cdot \frac{1}{2}QU = \frac{1}{\epsilon_r^2}W_e \end{aligned}$$

- 同样的极板, 带同样的自由电荷, 板间充满介质时, 整个带电体 (含极板和电介质) 的静电能变成原来的 $\frac{1}{\epsilon_r^2}$

- 考虑到电介质对电容的影响

$$C' = \varepsilon_r C$$

可得，对于电容为 C' 、极板间充满 ε_r 的电介质的电容器，极板带电量为 Q 时，所储存的静电能

$$W'_{e2} = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_r C} = \frac{1}{\varepsilon_r} W_e$$

$$W'_{e1} = \frac{1}{2}(Q - Q')U' = \frac{1}{\varepsilon_r^2}W_e$$

$$W'_{e2} = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{1}{\varepsilon_r}W_e$$

二者的区别在于有没有考虑极化电荷的分布而产生的静电能，但两极板之间电压的变化是由于极化电荷的存在引起电场的变化，从而导致电压的改变

- P204 电容器的储能公式

$$W_e = \frac{1}{2} Q_0 U$$

其中 Q_0 是极板上的自由电荷

- 极化电荷所产生的静电能就不包含在电容器的储能之中，或者说此时整个带电体的静电能不仅仅是电容器所储存的静电能，还有其他的静电能 (P204 介质的极化能？)

- 实际上, $\frac{1}{2}Q_0U$ 是电容器充电过程中电源对它所做的功。当电容器极板之间充满介质时, 电源在对电容器充电的过程中, 也在对介质进行极化, 需要消耗一定的能量 (这部分能量转化为介质的极化能?), 剩余部分的能量才是整个带电体的静电能。所以, 电容器所储存的能量包含了整个带电体的静电能和介质的极化能

- 而从以上分析也可以看出，介质的极化能与极化电荷的静电能之间是有关系的

$$W_e = \frac{1}{2}Q_0U = W_{\text{静电}} + W_{\text{极化}}$$

$$W_{\text{静电}} = \frac{1}{2}(Q_0 - Q')U$$

$$W_{\text{极化}} = \frac{1}{2}Q_0U - W_{\text{静电}} = \frac{1}{2}Q'U$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}[(-Q')U_+ + (Q')U_-] &= -\frac{1}{2}Q'(U_+ - U_-) \\
 &= -\frac{1}{2}Q'U \\
 &= -W_{\text{极化}}
 \end{aligned}$$

即介质的极化能与极化电荷的静电能互相抵消，
整个电容器所储存的电能就等于自由电荷的静电能

1.3 电场的能量

- 以上分析给人的感觉是静电能分布在电荷分布的区域，有电荷的地方才有静电能，没有电荷的地方就没有静电能。但现在物理学的观点认为，静电能是分布在电场中的，即使在没有电荷分布的区域，仍然存在静电能
- 为简单起见，下面以平行板电容器为例进行说明
- 假设电容器的极板面积为 S ，板间距为 d ，板间充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质。当极板带电量为 Q 时，由静电平衡条件可知，电荷只分布在内侧两个面上，外侧两面带电量为零

- 由于极板间距很小，极板可以看成无穷大均匀带电平面，由高斯定理很容易求得板间的电场

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$D\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$Q = DS$$

- 而平行板电容器之间是匀强电场，所以板间电压

$$U = Ed$$

- 所以电容器的储能

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2} \cdot DS \cdot Ed \\&= \frac{1}{2}DE(Sd) = \frac{1}{2}DEV\end{aligned}$$

其中 $V = Sd$ 是电介质分布区域的体积

- 而由平行板电容器的电场分布可知，电场只分布在极板之间，极板之外的区域电场为零。因此从场的观点来看，电场的能量只分布电场存在的区域（极板间介质内），电场为零的区域（介质外）电场能量为零

1.4 电场的能量密度

- 由于平行板电容器极板间是匀强电场，所以介质中任意相同体积的区域电场能量相等，因此单位体积的能量 (称为能量密度) 就等于整个区域总的能量除以总的体积

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}DE$$

- 更一般的情况 (有些介质, 电位移矢量 \vec{D} 和电场强度 \vec{E} 之间不是简单的线性关系, 甚至可能方向都不同, 只有对各向同性的均匀介质, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ 才成立),

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$$

- 对于各向同性的均匀介质

$$D = \varepsilon E$$

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

- 真空中

$$\varepsilon = \varepsilon_0$$

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}$$

- 以上结论是从平行板电容器这个特例推导得到的，利用矢量分析的数学知识，可以证明，这个结论适用于任意电荷分布的电场

- 对于非均匀分布的电场，取一个无穷小的体积 dV ，可以认为 dV 内的电场是均匀的，因此 dV 内的静电能

$$dW_e = w_e dV = \frac{1}{2} DE dV$$

- 任意电场总可以划分成无穷多个 dV ，所有 dV 的静电能加起来就是整个电场总的静电能

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} DE dV$$

以上积分在电场分布区域进行

1.5 静电能的零点

- 讨论带电体的静电能时，通常选择所有点电荷相距无穷远时系统的总能量为静电能的零点
- 当带电体的电荷分布在有限区域上时，我们选择无穷远处为电势零点，那么整个带电体的静电能可以用下式算得

$$W_e = \frac{1}{2} \int_q (dq) U$$

- 但对于无限长均匀带电细棒、无穷大均匀带电平面这种带电体，就不能选择无穷远处为电势零点

- 电势零点原则上可以任意选择，由此导致的就是空间中某一点的电势是个相对的值，因此带电体在电场中的电势能也是个相对的值，所以带电体的静电能也是个相对的值
- 从电场的能量表达式

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} D E \, dV$$

当所有电荷都相距无穷远时，我们所研究区域的电场为零，所以电场能量为零

- 对于匀强电场，它一定只能在某个区域内存在，因此电场能量也是个有限的值。本来无限长、无穷大的带电体就是不存在的，只是在所讨论的问题中，忽略边缘效应而把某种带电体近似看成无限长、无穷大而已

例题

试求半径为 R 、带电量为 Q 的均匀带电球面的静电能。球外为真空。

解答

电荷分布在有限范围内，选择无穷远为电势零点，则均匀带电球面的电势分布为

$$U = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \end{cases}$$

所以，在电荷分布区域， $r = R$ ， $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ，
所以静电能

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

解答

又电荷分布具有球对称性，可以由高斯定理求得电场分布

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

所以电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \begin{cases} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

所以电场能量

$$\begin{aligned} W_e &= \int_0^\infty w_e dV \\ &= \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \int_R^\infty \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

例题

试求半径为 R 、带电量为 Q 的均匀带电球体的静电能。球外为真空。

解答

电荷分布具有球对称性，可以由高斯定理求得电场分布： $r > R$ 时

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

解答

$r < R$ 时

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E_2 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解答

电荷分布在有限区域，取无穷远处为电势零点，则电势分布： $r > R$ 时

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_r^\infty E_1 dr \\ &= \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

解答

$r < R$ 时

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_r^R E_2 dr + \int_R^\infty E_1 dr \\ &= \int_r^R \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

所以静电能

$$\begin{aligned}
 W_e &= \int_Q \frac{1}{2} (dQ) U \\
 &= \int_0^R \frac{1}{2} \cdot \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R (3R^2 r^2 - r^4) dr \\
 &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \left[R^2 r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right] \bigg|_0^R
 \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \left[R^2 r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right] \Big|_0^R \\ &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \cdot \frac{4}{5} R^5 \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

解答

而从电场能量的角度, 电场能量密度分别为:
 $r > R$ 时

$$w_{e1} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$r < R$ 时

$$w_{e2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 = \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^6}$$

所以电场能量

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V w_e dV \\ &= \int_0^R w_{e2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty w_{e1} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= W_{e2} + W_{e1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{e2} &= \int_0^R w_{e2} \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \int_0^R \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^6} \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 R^6} \cdot \frac{1}{5} R^5 \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 R} \cdot \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{e1} &= \int_R^{\infty} w_{e1} \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 R}
 \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned}W_e &= W_{e2} + W_{e1} \\&= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{1}{5} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \\&= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{6}{5} \\&= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

2 磁场能量

2.1 载流线圈的磁能

- 自感系数为 L 的线圈，通过其中的电流从 0 到 I 的过程中，电源电动势要抵抗感应电动势而做功，这部分功转化为磁场的能量而储存在载流线圈中，

$$W_m = \int_0^I L \frac{di}{dt} i dt = \frac{1}{2} L I^2$$

称为载流线圈的自感磁能

- 而互感为 M 的两个线圈通过的电流分别从 0 变化 I_1 和 I_2 的过程中, 电源电动势抵抗两个感应电动势所做的总功, 转化为互感磁能

$$W_m = MI_1I_2$$

2.2 磁场的能量

- 磁场的能量分布在磁场中。以密绕螺绕环为例。一般地假定螺绕环的半径为 R , 横截面积为 S , 匝数为 N , 闭合铁芯的相对磁导率为 μ_r
- 当通过其中的电流为 I 时, 由安培环路定理可得

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$H \cdot (2\pi R) = NI$$

$$H = \frac{N}{2\pi R} I = nI$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r nI$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r n I$$

$$\Phi = BS = \mu_0 \mu_r n S I$$

$$\Psi = N\Phi = (n \cdot 2\pi R) \cdot (\mu_0 \mu_r n S I)$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

其中 $n = \frac{N}{2\pi R}$ 为单位长度的匝数, $V = 2\pi R S$ 为螺绕环的体积

- 所以磁场能量可以表示为

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{1}{2}LI^2 \\&= \frac{1}{2}(\mu_0\mu_r n^2 V)I^2 \\&= \frac{1}{2}(\mu_0\mu_r nI) \cdot (nI) \cdot V \\&= \frac{1}{2}BH V\end{aligned}$$

2.3 磁场的能量密度

- 在密绕螺绕环中，磁场完全局限于它的内部，因此螺绕环的体积也就是磁场分布的体积，因此单位体积的磁场能量 (磁场的能量密度) 为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}BH$$

- 更一般的情况可以写成

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$$

以上结论是密绕螺绕环这个特例推导得到的，利用矢量分析的数学知识，可以证明，这个结论适用于任意电流分布的磁场

- 对于非均匀分布的磁场，取一个无穷小的体积 dV ，可以认为 dV 内的磁场是均匀的，因此 dV 内的磁能

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

- 任意磁场总可以划分成无穷多个 dV ，所有 dV 的磁能加起来就是整个磁场总的磁能

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

以上积分在磁场分布区域进行

- 如果有两个线圈, 通过的电流分别为 I_1 和 I_2 , 它们在空间中某位置所激发的磁场的磁感应强度和磁场强度分别为 \vec{B}_1 、 \vec{H}_1 和 \vec{B}_2 、 \vec{H}_2 , 则该位置总的磁感应强度和磁场强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

- 所以该位置附近的磁能密度

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{H}_1) \\ &= w_{m1} + w_{m2} + w_{m3} \end{aligned}$$

$$w_{m1} = \frac{1}{2} \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1$$

$$w_{m2} = \frac{1}{2} \vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2$$

分别是两个线圈的自感磁能密度

$$\begin{aligned}
 w_{m3} &= \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{H}_1) \\
 &= \frac{1}{2} (\mu_0 \mu_r \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 + \mu_0 \mu_r \vec{H}_2 \cdot \vec{H}_1) \\
 &= \mu_0 \mu_r \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2
 \end{aligned}$$

是两个线圈的互感磁能密度

作业

- P217[4-59(1)] 一平行板电容器极板面积为 S , 间距为 d , 电荷为 $\pm Q$ 。将一块厚度为 d 、相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质插入极板间空隙。计算静电能的改变。
- P217[4-60(1)] 一平行板电容器极板面积为 S , 间距为 d , 接在电源上以维持其电压为 U 。将一块厚度为 d 、相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质插入极板间空隙。计算静电能的改变。