§7.4 刚体定轴转动的动能定理

一、力矩的功

定轴转动时，作用在位置矢量为 $\vec{r}$ 的某质元 $\mathrm{d}m$ 上的力为 $\vec{F}$。在刚体转动 $\mathrm{d}\theta$ 的元过程中，质元的元位移

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\,\mathrm{d}t=(\vec{\omega}\times\vec{r})\,\mathrm{d}t$$

力 $\vec{F}$ 对刚体所做的元功

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\&=\vec{F}\cdot[(\vec{\omega}\times\vec{r})\,\mathrm{d}t]\\&=[\vec{F}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

根据矢量的混合积公式【P407】

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}$$

可得

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})&=\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{F})=\vec{\omega}\cdot\vec{M}=M_z\omega\\\mathrm{d}W&=[\vec{F}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})]\,\mathrm{d}t=M_z\omega\,\mathrm{d}t=M_z\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

力 $\vec{F}$ 对刚体所做的元功等于 $\vec{F}$ 对转轴的力矩与元角位移的乘积

在有限过程中力矩所做的功

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_z\,\mathrm{d}\theta$$

力矩做功的功率

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{M_z\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M_z\omega$$

二、刚体定轴转动的动能定理

刚体做定轴转动时，刚体上每一个质元都绕转轴做圆周运动

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2(\mathrm{d}m)$$

其中 r 为 $\mathrm{d}m$ 与转轴之间的垂直距离。所以整个刚体的动能

$$E_k = \int_m \frac{1}{2}\omega^2 r^2(\mathrm{d}m) = \frac{1}{2}\omega^2 \int_m r^2(\mathrm{d}m) = \frac{1}{2}I\omega^2$$

定轴转动刚体的动能等于刚体对转轴的转动惯量和角速度平方乘积的一半

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

在任意元过程中，一对作用力和反作用力的总功

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12} \\ &= \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21} \end{aligned}$$

等于 m_1 施加给 m_2 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 与站在 m_1 上观察时 m_2(相对) 位置的改变量 $\mathrm{d}\vec{r}_{12}$ 的点乘积，也等于 m_2 施加给 m_1 的作用力 $\vec{F}_{21}$ 与站在 m_2 上观察时 m_1(相对) 位置的改变量 $\mathrm{d}\vec{r}_{21}$ 的点乘积。一般情况下，这个功不等于零

刚体内力所做功的总和恒为零

一般质点系，内力所做的总功一般情况下不等于零，但对于刚体，由于任意两点之间的距离保持不变，所以这两点之间的相对位移一定与二者的连线垂直，因此它们之间的内力所做的功的总和一定等于零。

P203

因刚体为不变质点系，任意二质元间的距离不变，(4.3.4) 式【P111，$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$】中的 $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{0}$，刚体内任何一对作用力和反作用力做功的总和为零。

这里，不应该是因为 $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{0}$ 而导致 $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$，而是因为 $\mathrm{d}\vec{r} \perp \vec{F}$【$\mathrm{d}\vec{r}$ 垂直二质元连线，$\vec{F}$ 沿二质元连线 (为什么？)】。

- 质点系动能定理

$$\mathrm{d}W_{内} + \mathrm{d}W_{外} = \mathrm{d}E_k$$
$$W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$$

质点系所有内力所做的功和所有外力所做功的总和等于整个质点系动能的改变量

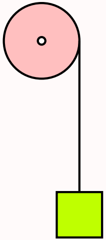
- 对于刚体，$W_{内} = 0$；对于定轴转动的刚体，$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$；所以定轴转动刚体的动能定理

$$W_{外} = \Delta E_k = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

ω_1 为初始时刻的角速度，ω_2 为末时刻的角速度。

例题

装置如图所示，均质圆柱体质量为 m_1，半径为 R，重锤质量为 m_2，最初静止，后将重锤释放下落并带动柱体旋转，求重锤下落 h 高度时的速率 v。不计阻力，不计绳的质量及伸长。



解答

圆柱体对轴的转动惯量

$$I = \frac{1}{2}m_1R^2$$

对圆柱体受力分析，它共受到三个力的作用，重力和轴的作用力，二者不做功，绳子的拉力 F，F 对轴的力矩为 $M = FR$，当重锤下落 h 高度时，圆柱体绕轴转动 θ 角，此过程中力矩对圆柱所做的功为

$$W_1 = M\theta = FR\theta = Fh$$

解答

对圆柱体运用定轴转动的动能定理

$$W_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = Fh$$

ω 为重锤下落 h 高度时圆柱体的角速度。以重锤为研究对象，对重锤受力分析，它共受到两个力的作用，竖直向下的重力，竖直向上的绳子拉力 F，当重锤下落 h 高度时，这两个力对重锤所做的功为

$$W_2 = (m_2 g - F)h$$

对重锤运用动能定理

$$W_2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 - 0 = (m_2 g - F)h$$

另绳子不可伸长，所以有

$$v = \omega R$$

联立以上各式，解得

$$v = \sqrt{\frac{4m_2 gh}{m_1 + 2m_2}}$$

三、刚体的重力势能

取坐标原点为重力势能零点，竖直向上为 z 轴正方向，任意质元 $\mathrm{d}m$ 的坐标为 (x, y, z)，则其 (与地球共有的) 重力势能

$$\mathrm{d}E_p = (\mathrm{d}m)gz$$

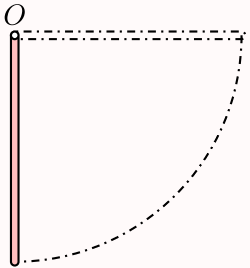
因此整个刚体的重力势能

$$E_p = \int_m (\mathrm{d}m)gz = mgz_C$$

等于整个刚体质量集中在重心时的重力势能

例题

均质杆的质量为 m，长 l，一端为光滑的支点。最初处于水平位置，释放后杆向下摆，如图所示，(1) 求杆在图示的竖直位置时，其下端点的线速度 v；(2) 求杆在图示的竖直位置时，杆对支点的作用力。



解答

杆绕轴的转动惯量

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

在杆下摆过程中，转轴的作用力不做功，只有重力做功

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v = \omega l$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}, v = \sqrt{3gl}$$

解答

以杆为研究对象，在竖直位置时，杆受到的重力和轴的作用力对轴的力矩均为零，因此根据定轴转动的转动定律，杆的角加速度为零，质心绕杆转动的切向加速度为零。此时质心的加速度就是质心绕杆转动的法向加速度，也就是质心做圆周运动的向心加速度，它是由杆所受到的合力提供的

$$F - mg = m\omega^2 \frac{l}{2}$$

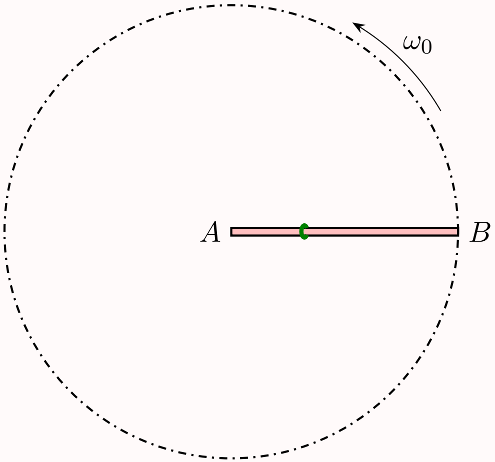
$$F = mg + m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{5}{2}mg$$

根据牛顿第三定律，杆对支点的作用力大小为 $\frac{5}{2}mg$，方向竖直向下

个人认为，P205 图 7.25(b) 中所标示的 $\vec{e}_t$、$\vec{e}_n$ 不太合适

例题

质量为 m 的小圆环套在一长为 l,质量为 M 的光滑均匀杆 AB 上，杆可以绕过其 A 端的固定轴在水平面上自由旋转。开始时，杆旋转的角速度为 ω_0，而小环在 A 处；当小环受到一微小的扰动后，即沿杆向外滑行。试求当小环脱离杆时的速度 (方向用与杆的夹角 θ 表示)。



解答

以杆和环为研究对象，系统受到的外力是杆和环的重力以及轴的作用力，它们对轴的力矩均为零，因此系统对轴的角动量守恒

$$I\omega_0 = (I + ml^2)\omega$$

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$

杆光滑，因此过程机械能守恒

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

解得

$$\omega = \frac{M}{M+3m}\omega_0$$

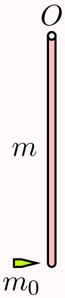
$$v = \sqrt{M(2M+3m)}\frac{\omega_0 l}{M+3m}$$

环脱离杆时，杆转动的角速度为 ω，因此环在垂直杆方向的速度分量为 ωl，而环总的速率为 v，因此

$$\sin\theta = \frac{\omega l}{v} = \sqrt{\frac{M}{2M+3m}}$$

习题 7.4.2

如图所示，质量为 2.97 kg，长为 1.0 m 的均质等截面细杆可绕水平光滑的轴线 O 转动，最初杆静止于竖直方向。一弹片质量为 10 g，以水平速度 200 m/s 射出并嵌入杆的下端，和杆一起运动，求杆的最大摆角 θ。



解答

弹片嵌入细杆的过程中，弹片和细杆组成的系统对固定轴的角动量守恒

$$m_0 v_0 l = (I + m_0 l^2)\omega$$

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

解答

上摆过程中，只有重力做功，系统机械能守恒，以初始位置为重力势能零点，则有

$$\frac{1}{2}(I+m_0l^2)\omega^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)+m_0gl(1-\cos\theta)$$

联立解得

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1-\frac{3m_0^2v_0^2}{(m+2m_0)(m+3m_0)gl}\\ &= 1-\frac{4}{2.99\times 9.8}\\ &\approx 0.8635\end{aligned}$$