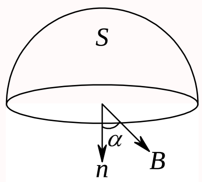
第四章 磁学

1、选择题

第 256 题



【5566】在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\vec{n}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 α，则通过半球面 S 的磁通量 (取弯面向外为正) 为

(A) $\pi r^2 B$　(B) $2\pi r^2 B$　(C) $-\pi r^2 B\sin\alpha$　(D) $-\pi r^2 B\cos\alpha$

解析

【答案】D

【解析】磁通量，磁场的高斯定理。

磁场中的高斯定理

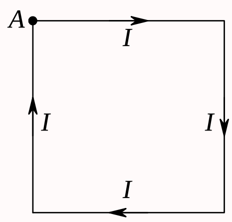
$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

因为磁场线一定是封闭曲线，所以通过任意一个封闭曲面的磁通量一定恒为零。所以，以半球面和边线所在的平面的圆面【记为 S'】组成的封闭曲面为高斯面，运用磁场的高斯定理，得

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S'} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S'} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\vec{B}\cdot\int_{S'} \mathrm{d}\vec{S} = -\vec{B}\cdot\vec{S}' = -BS\cos\alpha = -B\pi r^2\cos\alpha$$

第 257 题



【2020】边长为 l 的正方形线圈中通有电流 I，此线圈在 A 点 (见图) 产生的磁感强度 B 为

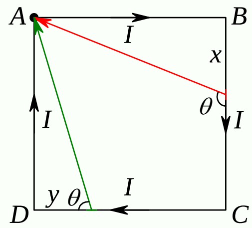
(A) $\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$　(D) 以上均不对

解析

【答案】A

【解析】毕奥——萨伐尔定律，磁场的叠加原理。

毕奥——萨伐尔定律



$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

所以，AB 段，由于 $\mathrm{d}\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 成 180°，DA 段，$\mathrm{d}\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 成 0°，所以这两段在 A 点产生的磁场均为零。

对于 BC 段上任意一个电流元 $I\,\mathrm{d}\vec{l}$，它在 A 点产生的磁场的方向都是垂直纸面向里，大小为

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I|\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}x)r\sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}x)\sin^3\theta}{r^2\sin^2\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}x)\sin^3\theta}{l^2}$$

而

$$x = -\frac{l\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\mathrm{d}x = -l\frac{-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\times\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\times\sin^3\theta}{l^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l}$$
$$B_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi l} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi l}$$

同理，可以求得 CD 段在 A 点产生的磁场，方向也是垂直纸面向里，大小为

$$\mathrm{d}B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(-\,\mathrm{d}y)\sin^3\theta}{l^2}$$
$$y = \frac{l\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\mathrm{d}y = l\frac{-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\times\frac{l}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\times\sin^3\theta}{l^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l}$$
$$B_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi l} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi l}$$

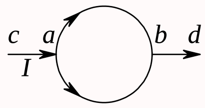
所以 A 点的总磁感应强度为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$$

方向垂直纸面向里。

第 258 题

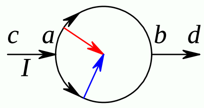
【2353】如图所示，电流从 a 点分两路通过对称的圆环形分路，汇合于 b 点。若 ca、bd 都沿环的径向，则在环形分路的环心处的磁感强度



(A) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸内
(B) 方向垂直环形分路所在平面且指向纸外
(C) 方向在环形分路所在平面，且指向 b
(D) 方向在环形分路所在平面内，且指向 a
(E) 为零

解析

【答案】E
【解析】毕奥——萨伐尔定律，磁场的叠加原理。
毕奥——萨伐尔定律



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

圆环形分路是对称的，所以上下两个分路的电流是相等的，均为 $I/2$。任意一个电流元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 与相应的 $\vec{r}$ 都成 $90°$，所以

$$\frac{|\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}|}{r^3}=\frac{\mathrm{d}l}{R^2}$$

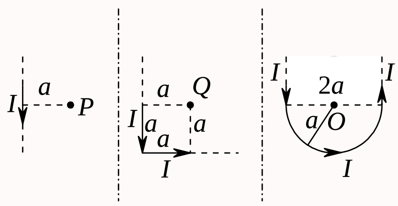
上分路产生的磁场的方向垂直纸面向里，下分路产生的磁场的方向垂直纸面向外，大小相等，均为

$$B=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{2R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{2R^2}\int\mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{2R^2}\times\pi R=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

所以总磁感应强度为 0。

第 259 题

【2354】通有电流 I 的无限长直导线有如图三种形状，则 P，Q，O 各点磁感强度的大小 B_P，B_Q，B_O 间的关系为：



(A) $B_P>B_Q>B_O$ (B) $B_Q>B_P>B_O$
(C) $B_Q>B_O>B_P$ (D) $B_O>B_Q>B_P$

解析

【答案】D
【解析】毕奥——萨伐尔定律，磁场的叠加原理，安培环路定律。
毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

安培环路定律

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

第一种情况可以用安培环路定律求磁场

$$B_P \cdot (2\pi a) = \mu_0 I$$
$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

第二种情况是用直线电流的磁场来计算

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}l) r\sin\theta}{r^3}$$
$$l = -r\cos\theta, a = r\sin\theta \Rightarrow \frac{l}{a} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow l = -a\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \mathrm{d}l = \frac{a}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\theta\frac{a}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$B_Q = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[(-\cos\theta)_0^{\frac{3\pi}{4}} + (-\cos\theta)_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right]$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

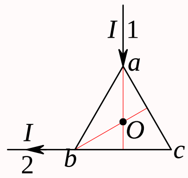
第三种情况分成两个半无限长直线和一个半圆弧来计算

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right] + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int \mathrm{d}l$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\times 2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\times \pi a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[1 + \frac{\pi}{2}\right]$$

所以显然有 $B_O > B_Q > B_P$。其实，后两种情况中的两个半无限长部分所产生的磁场，就是第一种情况，所以剩下的就是比较多余那部分的磁场了，而第三种情况中，每一个电流元的磁场都比第二种的大，而且第三种的电流元还更长，所以答案其实是显然的。

第 260 题

【5468】电流 I 由长直导线 1 沿垂直 bc 边方向经 a 点流入由电阻均匀的导线构成的正三角形线框，再由 b 点流出，经长直导线 2 沿 cb 延长线方向返回电源 (如图)。若载流直导线 1、2 和三角形框中的电流在框中心 O 点产生的磁感强度分别用 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 和 $\vec{B}_3$ 表示，则 O 点的磁感强度大小



(A) $B = 0$，因为 $B_1 = B_2 = B_3 = 0$

(B) $B = 0$，因为虽然 $B_1 \neq 0$、$B_2 \neq 0$，但 $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$，$B_3 = 0$

(C) $B \neq 0$，因为虽然 $B_3 = 0$、$B_1 = 0$，但 $B_2 \neq 0$

(D) $B \neq 0$，因为虽然 $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 \neq 0$，但 $B_3 \neq 0$

解析

【答案】C

【解析】毕奥——萨伐尔定律，磁场的叠加原理。

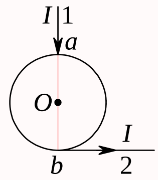
毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

因为直导线 1 通过 O 点，所以 $B_1=0$。而正三角形线框电阻均匀，所以 $R_{acb}=2R_{ab}$，所以通过两条支路的电流 $I_{ab}=2I_{acb}$。ac 段和 cb 段在 O 点产生的磁场大小相等，方向都是垂直纸面向里，而 ab 段在 O 点产生的磁场的方向垂直纸面向外，大小为 ac 段的两倍（因为电流是两倍关系），所以三角形线框在 O 点产生的总磁场 $B_3=0$。而对于直导线 2，每一个电流元在 O 点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向里，所以 $B_2\neq 0$。

第 261 题

【5470】电流由长直导线 1 沿半径方向经 a 点流入一电阻均匀的圆环，再由 b 点沿切向从圆环流出，经长导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上电流强度为 I，圆环的半径为 R，且 a、b 与圆心 O 三点在同一直线上。设直电流 1、2 及圆环电流分别在 O 点产生的磁感强度为 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 及 $\vec{B}_3$，则 O 点的磁感强度的大小



(A) $B=0$，因为 $B_1=B_2=B_3=0$

(B) $B=0$，因为 $\vec{B}_1+\vec{B}_2=0$，$B_3=0$

(C) $B\neq 0$，因为虽然 $B_1=B_3=0$，但 $B_2\neq 0$

(D) $B\neq 0$，因为虽然 $B_1=B_2=0$，但 $B_3\neq 0$

(E) $B\neq 0$，因为虽然 $B_2=B_3=0$，但 $B_1\neq 0$

解析

【答案】C

【解析】毕奥——萨伐尔定律，磁场的叠加原理。

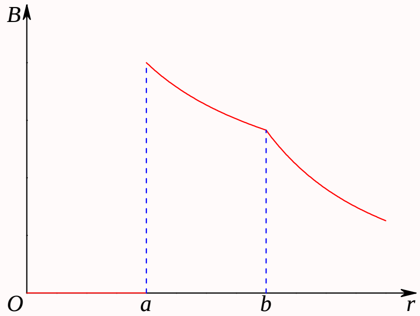
毕奥——萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

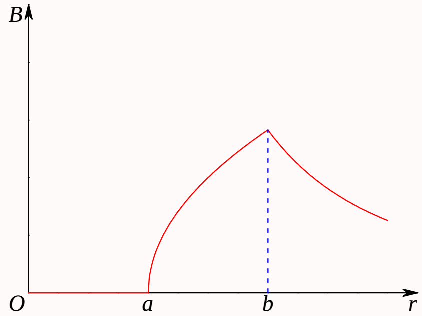
因为直导线 1 通过 O 点，所以 $B_1=0$。而圆环电阻均匀，所以通过两条支路的电流相等，所以两条支路在 O 点激发的磁场大小相等，方向相反，左边支路产生的磁场垂直纸面向外，右边支路产生的磁场垂直纸面向里，所以 $B_3=0$。而对于直导线 2，每一个电流元在 O 点所激发的磁场的方向都是垂直纸面向外，所以 $B_2\neq 0$。

第 262 题

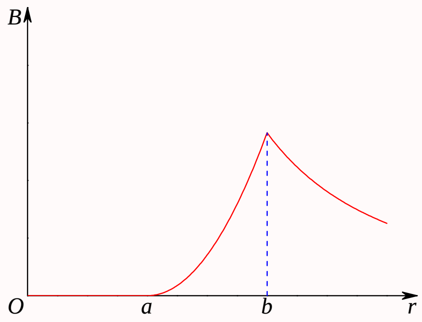
【2003】无限长载流空心圆柱导体的内外半径分别为 a、b，电流在导体截面上均匀分布，则空间各处的 $\vec{B}$ 的大小与场点到圆柱中心轴线的距离 r 的关系定性地如图所示。正确的图是



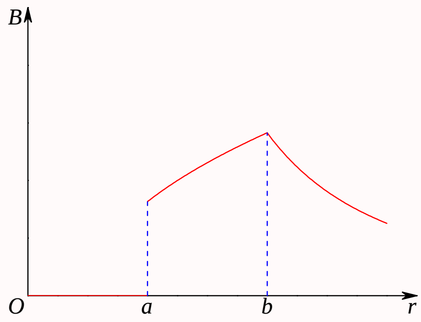
(A)



(B)



(C)



(D)

解析

【答案】B

【解析】安培环路定律。

安培环路定律

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

由于电流分布具有轴对称性，所以磁场分布也具有轴对称性，可以使用安培环路定律求磁场。选择安培环路为以圆柱轴线为圆心、与圆柱垂直、半径为 r 的圆周。则在该圆周上各点的磁场的大小相等，方向均沿圆周的切线方向，所以安培环路定律中左边的积分（环流）为

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot(2\pi r)$$

在不同区域，安培环路定律中右边的电流不同。

当 $r<a$ 时，空心区域，没有电流，$I=0$，所以 $B=0$；

当 $a<r<b$ 时，导体内部区域，电流为 $I=j\cdot S=j\cdot\pi(r^2-a^2)=j\pi(r^2-a^2)$，所以

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\pi(r^2-a^2)}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j(r^2-a^2)}{2r}=\frac{\mu_0 j}{2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)$$

当 $r=a$ 时，$B=0$，当 $r=b$ 时，$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}$。

当 $r>b$ 时，导体外区域，电流为 $I=j\pi(b^2-a^2)$，所以

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\pi(b^2-a^2)}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2r}$$

在这个区域，$B\propto 1/r$，当 $r=b$ 时，$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}$。

四个选项的区别在 $a<r<b$ 区域，由以上讨论很容易排除选项 A 和 D，但 B 和 C 要如何判断？如前讨论可知，$r=a$ 时，$B=0$；$r=b$ 时，$B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}$。由此二点确定的直线上任意 r 时的 B 为

$$\begin{aligned}B=\frac{\mu_0 j(b^2-a^2)}{2b}\times\frac{r-a}{b-a}&=\frac{\mu_0 j(b+a)(r-a)}{2b}=\frac{\mu_0 j}{2}\frac{(b+a)(r-a)}{b}=\frac{\mu_0 j}{2}\frac{br-ab+ar-a^2}{b}\\&=\frac{\mu_0 j}{2}\left[r-\frac{a(b-r)+a^2}{b}\right]\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{a(b-r)+a^2}{b}-\frac{a^2}{r}=\frac{[a(b-r)+a^2]r-a^2b}{br}=\frac{abr-ar^2+a^2r-a^2b}{br}=\frac{ab(r-a)-ar(r-a)}{br}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a(b-r)(r-a)}{br} \\
a<r<b \Rightarrow (b-r)>0,(r-a)>0 \Rightarrow \frac{a(b-r)(r-a)}{br} &> 0 \Rightarrow \frac{a(b-r)+a^2}{b}-\frac{a^2}{r}>0 \\
\frac{a(b-r)+a^2}{b} &> \frac{a^2}{r} \\
r-\frac{a(b-r)+a^2}{b} &< r-\frac{a^2}{r} \\
\frac{\mu_0 j}{2}\left[r-\frac{a(b-r)+a^2}{b}\right] &< \frac{\mu_0 j}{2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)
\end{aligned}
$$

所以 $a<r<b$ 区域中任意一个 r 处的 B 应该比 a、b 两点之间的直线所对应的 B 来得大，所以曲线应该是向上凸的，因此此题答案选 B。

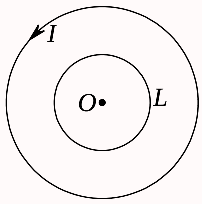
有老师提出，作为选择题，无须严格证明函数的曲线，只要通过比较 $r=a$ 和 $r=b$ 两点的斜率关系，就可以判断到底是选项 B 还是选项 C。

$$
\begin{aligned}
f &= r-\frac{a^2}{r} \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} &= 1+\frac{a^2}{r^2} \\
\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} &= 1+\frac{a^2}{a^2}=2 \\
\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r=b} &= 1+\frac{a^2}{b^2}<2
\end{aligned}
$$

所以选项应该为 B。

第 263 题

【2046】如图，在一圆形电流 I 所在的平面内，选取一个同心圆形闭合回路 L，则由安培环路定理可知



(A) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$，且环路上任意一点 $B=0$

(B) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$，且环路上任意一点 $B\neq 0$

(C) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$，且环路上任意一点 $B\neq 0$

(D) $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$，且环路上任意一点 $B=$ 常量

解析

【答案】B

【解析】安培环路定律。

安培环路定律

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

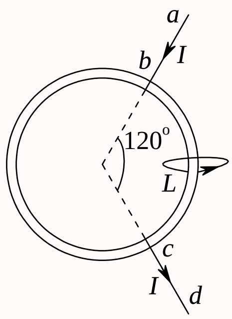
此题中，没有电流与回路 L 链接，所以上式右边的 $I=0$，因此磁场沿回路 L 的环流为零，但回路上任意一点的磁感应强度都不为零，只是因为各点的 $\vec{B}$ 的方向都是垂直纸面向上，与回路垂直，所

以环流为零。

第 264 题

【2047】如图，两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感强度 $\vec{B}$ 沿图中闭合路径 L 的积分 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 等于

(A) $\mu_0 I$ (B) $\frac{1}{3}\mu_0 I$ (C) $\frac{1}{4}\mu_0 I$ (D) $\frac{2}{3}\mu_0 I$



解析

【答案】D

【解析】安培环路定律。

安培环路定律

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

而铁环截面处处相等，所以电阻与长度成正比，左边支路的长度是右边支路的两倍，所以左边支路的电阻是右边支路的两倍，两个电阻并联，所以通过左边支路的电流是通过右边支路电流的一半，总的电流为 I，所以通过左边支路的电流是 $I/3$，通过右边支路的电流是 $2I/3$。所以，由安培环路定律，有

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{2I}{3} = \frac{2\mu_0 I}{3}$$

第 265 题

【2060】一电荷为 q 的粒子在均匀磁场中运动，下列哪种说法是正确的？

(A) 只要速度大小相同，粒子所受的洛伦兹力就相同

(B) 在速度不变的前提下，若电荷 q 变为 $-q$，则粒子受力反向，数值不变

(C) 粒子进入磁场后，其动能和动量都不变

(D) 洛伦兹力与速度方向垂直，所以带电粒子运动的轨迹必定是圆

解析

【答案】B

【解析】洛伦兹力。

洛伦兹力公式

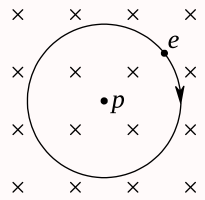
$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

力是一个矢量，速度大小相同，但方向不同时，洛伦兹力的大小和方向都会发生变化。洛伦兹力一

定垂直于速度，因此产生的加速度一定是垂直于速度方向，所以速度的大小不会发生变化，但速度的方向一直在改变，因此粒子的动能不会变化，但动量一直在变化。如果粒子的初始速度是垂直磁场的，那么粒子的运动轨迹是一个圆，但如果初始速度的方向并不是垂直磁场，那么粒子的运动轨迹是一个螺旋线，在垂直磁场方向是圆周运动，沿磁场方向是匀速直线运动。在速度不变的前提下，如果带电量变为负号，那么洛伦兹力的大小不变，方向相反。

第 266 题

【2062】按玻尔的氢原子理论，电子在以质子为中心、半径为 r 的圆形轨道上运动。如果把这样一个原子放在均匀的外磁场中，使电子轨道平面与 $\vec{B}$ 垂直，如图所示，则在 r 不变的情况下，电子轨道运动的角速度将：



(A) 增加 (B) 减小 (C) 不变 (D) 改变方向

解析

【答案】A

【解析】洛伦兹力，库仑力，圆周运动的向心力。

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\rm m}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

库仑力

$$\vec{F}_{\rm e}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

对电子进行受力分析，原来只受到质子的吸引力，提供电子做圆周运动的向心力。放入磁场后，电子还受到洛伦兹力，因为电子带负电，所以洛伦兹力的方向指向圆心，与质子的库仑力同方向，因此合力增大，在轨道半径不变的情况下，

$$F=m\omega^2 r$$

圆周运动的角速度将增大。

第 267 题

【2373】一运动电荷 q，质量为 m，进入均匀磁场中，

(A) 其动能改变，动量不变 (B) 其动能和动量都改变

(C) 其动能不变，动量改变 (D) 其动能、动量都不变

解析

【答案】C

【解析】洛伦兹力

洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

运动电荷在均匀磁场中将受到洛伦兹力的作用，洛伦兹力的方向一定是垂直于运动方向，所以电荷的运动速度的大小保持不变，方向发生变化，因此电子的动能保持不变，动量发生变化。
当然，如果电荷的运动速度的方向与磁场的方向平行，那么电荷所受到的力为零，动能和动量都不发生变化，电荷做匀速直线运动穿过磁场。
所以，此题不太严谨。

第 268 题

【2575】A、B 两个电子都垂直于磁场方向射入一均匀磁场而作圆周运动。A 电子的速率是 B 电子速率的两倍。设 R_A，R_B 分别为 A 电子与 B 电子的轨道半径；T_A，T_B 分别为它们各自的周期。则

(A) $R_A : R_B = 2$，$T_A : T_B = 2$
(B) $R_A : R_B = \frac{1}{2}$，$T_A : T_B = 1$
(C) $R_A : R_B = 1$，$T_A : T_B = \frac{1}{2}$
(D) $R_A : R_B = 2$，$T_A : T_B = 1$

解析

【答案】D
【解析】洛伦兹力
洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

依题意，$\vec{v}$ 垂直于 $\vec{B}$，所以洛伦兹力的大小为 $F = qvB$，它提供给电子做圆周运动的向心力，所以

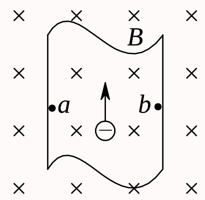
$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

所以

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{mv_A}{qB}}{\frac{mv_B}{qB}} = \frac{v_A}{v_B} = 2 : 1$$
$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2\pi m}{qB}}{\frac{2\pi m}{qB}} = 1$$

第 269 题

【2451】一铜条置于均匀磁场中，铜条中电子流的方向如图所示。试问下述哪一种情况将会发生？



(A) 在铜条上 a、b 两点产生一小电势差，且 $U_a > U_b$
(B) 在铜条上 a、b 两点产生一小电势差，且 $U_a < U_b$
(C) 在铜条上产生涡流
(D) 电子受到洛伦兹力而减速

解析

【答案】A
【解析】洛伦兹力
洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电子在磁场中受到的洛伦兹力的方向为运动方向的右侧，所以电子将汇集到右侧，铜条右侧带负电，左侧带正电，所以左侧电势比右侧高。
洛伦兹力一定与运动方向垂直，不会改变速度的大小，但会改变速度的方向。

第 270 题

【2784】α 粒子与质子以同一速率垂直于磁场方向入射到均匀磁场中，它们各自作圆周运动的半径比 R_α/R_p 和周期比 T_α/T_p 分别为：

(A) 1 和 2　(B) 1 和 1　(C) 2 和 2　(D) 2 和 1

解析

【答案】C
【解析】洛伦兹力
洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

α 粒子即为氦原子核，由两个质子和两个中子所构成，质量约为质子的四倍，带电量为质子的两倍。依题意，$\vec{v}$ 垂直于 $\vec{B}$，所以洛伦兹力的大小为 $F = qvB$，它提供给粒子做圆周运动的向心力，所以

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

所以

$$\frac{R_\alpha}{R_p} = \frac{\frac{m_\alpha v_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{m_p v_p}{q_p B}} = \frac{\frac{4m_p v_p}{2q_p}}{\frac{m_p v_p}{q_p}} = 2$$

$$\frac{T_\alpha}{T_p}=\frac{\frac{2\pi m_\alpha}{q_\alpha B}}{\frac{2\pi m_p}{q_p B}}=\frac{\frac{m_\alpha}{q_\alpha}}{\frac{m_p}{q_p}}=\frac{\frac{4m_p}{2q_p}}{\frac{m_p}{q_p}}=2$$

第 271 题

【2090】在匀强磁场中，有两个平面线圈，其面积 $A_1=2A_2$，通有电流 $I_1=2I_2$，它们所受的最大磁力矩之比 M_1/M_2 等于

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 1/4

解析

【答案】C

【解析】磁力矩，磁矩

磁矩

$$\vec{m}=IS\vec{e}_n$$

磁力矩

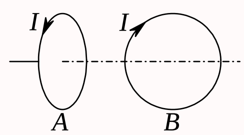
$$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$$

所以

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{m_1 B}{m_2 B}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{I_1 A_1}{I_2 A_2}=4$$

第 272 题

【2381】有两个半径相同的圆环形载流导线 A、B，它们可以自由转动和移动，把它们放在相互垂直的位置上，如图所示，将发生以下哪一种运动？



(A) A、B 均发生转动和平动，最后两线圈电流同方向并紧靠一起

(B) A 不动，B 在磁力作用下发生转动和平动

(C) A、B 都在运动，但运动的趋势不能确定

(D) A 和 B 都在转动，但不平动，最后两线圈磁矩同方向平行

解析

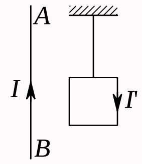
【答案】A

【解析】磁力矩，磁矩

提供的答案是 A，还没想到应该怎么做这题。

第 273 题

【2466】把轻的正方形线圈用细线挂在载流直导线 AB 的附近，两者在同一平面内，直导线 AB 固定，线圈可以活动。当正方形线圈通以如图所示的电流时线圈将



(A) 不动　(B) 发生转动，同时靠近导线 AB

(C) 发生转动，同时离开导线 AB　(D) 靠近导线 AB

(E) 离开导线 AB

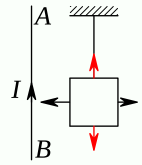
解析

【答案】D

【解析】安培力

电流元在磁场中所受到的安培力为

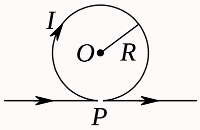
$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$



在图示位置，I 在线圈所在位置产生的磁场的方向垂直纸面向里，靠近电流的位置磁场较强，远离电流的位置磁场较弱。所以可以得到，线圈四条边所受到的力如图所示，四个力的方向都在纸面上，所以不会绕垂直纸面的轴线转动，但会绕悬挂点转动。而四个力当中，上下两条边，对应电流元所受到的力刚好大小相等方向相反，所以上下两边的合力为零【只在图示瞬间】，而左右两条边，由于左边的磁场较强，所以力较大，因此整个线圈所到向左的力，线圈将绕悬挂点靠近直线。

第 274 题

【2016】无限长直导线在 P 处弯成半径为 R 的圆，当通以电流 I 时，则在圆心 O 点的磁感强度大小等于



(A) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$　(B) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$　(C) 0

(D) $\dfrac{\mu_0 I}{2R}\left(1-\dfrac{1}{\pi}\right)$　(E) $\dfrac{\mu_0 I}{4R}\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right)$

解析

【答案】D

【解析】磁场叠加原理，安培环路定律

题目要求的圆心的磁场可以看成一根无限长直导线和一个圆形线圈分别产生的磁场之和。无限长直导线的磁场可以通过安培环路定律求得【大小设为 B_1，方向垂直纸面向外】，圆形线圈的磁场可以利用磁场叠加原理求得【大小设为 B_2，方向垂直纸面向里】。

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1(2\pi R) = \mu_0 I$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B_2 = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\times(2\pi R) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

第 275 题

【2049】一载有电流 I 的细导线分别均匀密绕在半径为 R 和 r 的长直圆筒上形成两个螺线管，两螺线管单位长度上的匝数相等。设 $R = 2r$，则两螺线管中的磁感强度大小 B_R 和 B_r 应满足：

(A) $B_R = 2B_r$ (B) $B_R = B_r$ (C) $2B_R = B_r$ (D) $B_R = 4B_r$

解析

【答案】B

【解析】安培环路定律

密绕长直螺线管的磁场，认为螺线管内部是一个均匀的磁场，螺线管外靠近螺线管的地方，磁场近似为零。这个作为默认的已知条件。

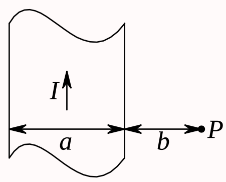
所以，螺线管内部的磁场可以用安培环路定律来求

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$BL = \mu_0 LnI$$
$$B = \mu_0 nI$$

这里 n 为单位长度的匝数。由此可见，螺线管内部的磁场与螺线管的半径无关。因此有 $B_R = B_r$。

第 276 题

【2292】有一无限长通电流的扁平铜片，宽度为 a，厚度不计，电流 I 在铜片上均匀分布，在铜片外与铜片共面，离铜片右边缘为 b 处的 P 点 (如图) 的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小为



(A) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$ (B) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b}{b}$ (C) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\dfrac{a+b}{b}$ (D) $\dfrac{\mu_0 I}{\pi(a+2b)}$

解析

【答案】B

【解析】安培环路定律

将通电铜片看成一根根细直导线，利用无限长直导线的磁场公式，积分得到所求磁场。

无限长通电直导线的磁场可以用安培环路定律来求

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

以铜片左侧为坐标原点，水平向右为 x 轴正方向，任取 $x \to x + \mathrm{d}x$ 为所研究的细直导线，则通过

它的电流为

$$\mathrm{d}I=\frac{I}{a}\,\mathrm{d}x$$

它到 P 点的距离为 $r=a+b-x$，所以它在 P 点产生的磁场方向垂直纸面向里，大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}x}{2\pi a(a+b-x)}$$

所以，总的磁场为

$$B=\int_0^a\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}x}{2\pi a(a+b-x)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[-\ln(a+b-x)\right]_0^a=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

第 277 题

【2398】关于稳恒电流磁场的磁场强度 $\vec{H}$，下列几种说法中哪个是正确的？

(A) $\vec{H}$ 仅与传导电流有关

(B) 若闭合曲线内没有包围传导电流，则曲线上各点的 $\vec{H}$ 必为零

(C) 若闭合曲线上各点 $\vec{H}$ 均为零，则该曲线所包围传导电流的代数和为零

(D) 以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的 $\vec{H}$ 通量均相等

解析

【答案】C

【解析】介质中的安培环路定律，磁场中的高斯定理

介质中的安培环路定律

$$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I$$

上式右边仅仅是传导电流，但左边的 $\vec{H}$ 是由传导电流和分子电流共同激发的磁场。

如果闭合曲线内没有包围传导电流，只能说明 $\vec{H}$ 沿闭合曲线的环流为零，并不能说明闭合曲线上各点的 $\vec{H}$ 一定为零。

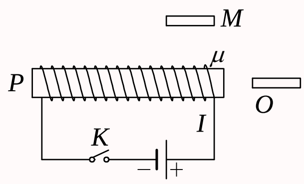
磁场中的高斯定理为

$$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

由此可得，以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的 $\vec{B}$ 通量均相等。而不同区域，$\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 的比例系数不一定相同，所以以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的 $\vec{H}$ 通量不一定相等。

第 278 题

【2400】附图中，M、P、O 为由软磁材料制成的棒，三者在同一平面内，当 K 闭合后，



(A) M 的左端出现 N 极 (B) P 的左端出现 N 极

(C) O 的右端出现 N 极 (D) P 的右端出现 N 极

解析

【答案】B
【解析】磁现象。
当 K 闭合后，电流从右边流入，由右手定则可知，螺线管左端为 N 极，右端为 S 极。根据同性磁极相斥，异性磁极相吸，M 的左端为 S 极，右端为 N 极，O 的左端为 N 极，右端为 S 极。

第 279 题

【2608】磁介质有三种，用相对磁导率 μ_r 表征它们各自的特性时，
(A) 顺磁质 $\mu_r>0$，抗磁质 $\mu_r<0$，铁磁质 $\mu_r\gg 1$
(B) 顺磁质 $\mu_r>1$，抗磁质 $\mu_r=1$，铁磁质 $\mu_r\gg 1$
(C) 顺磁质 $\mu_r>1$，抗磁质 $\mu_r<1$，铁磁质 $\mu_r\gg 1$
(D) 顺磁质 $\mu_r<0$，抗磁质 $\mu_r<1$，铁磁质 $\mu_r>0$

解析

【答案】C
【解析】磁介质的相对磁导率。
磁化强度 $\vec{M}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 之间满足关系

$$\vec{M}=g\vec{B}$$

其中 g 是一个反映磁介质磁化特性的量，与 $\vec{B}$ 无关。g 的数值可正可负，取决于磁介质的性质。当 $g>0$ 时，$\vec{M}$ 与 $\vec{B}$ 同向，为顺磁质；当 $g<0$ 时，$\vec{M}$ 与 $\vec{B}$ 反向，为抗磁质。
某种磁介质的磁导率 μ 与真空磁导率 μ_0 的比值称为该磁介质的相对磁导率

$$\mu_r=\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{1}{1-g\mu_0}$$

所以，顺磁质的 $\mu_r>1$；抗磁质的 $\mu_r<1$；铁磁质的 $\mu_r\gg 1$。

第 280 题

【2609】用细导线均匀密绕成长为 l、半径为 $a(l\gg a)$、总匝数为 N 的螺线管，管内充满相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质。若线圈中载有稳恒电流 I，则管中任意一点的
(A) 磁感强度大小为 $B=\mu_0\mu_r NI$
(B) 磁感强度大小为 $B=\mu_r NI/l$
(C) 磁场强度大小为 $H=\mu_0 NI/l$
(D) 磁场强度大小为 $H=NI/l$

解析

【答案】D
【解析】磁介质中的安培环路定律
磁介质中的安培环路定律为

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I$$

一般地认为密绕螺线管的磁场只分布在螺线管内，而且是均匀磁场，螺线管外靠近螺线管的地方，

磁场近似为零，所以有

$$H \cdot l = NI$$
$$H = \frac{NI}{l}$$

而对于相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质，有

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

所以

$$B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r NI}{l}$$

第 281 题

【2736】顺磁物质的磁导率：

(A) 比真空的磁导率略小　　(B) 比真空的磁导率略大

(C) 远小于真空的磁导率　　(D) 远大于真空的磁导率

解析

【答案】B

【解析】磁介质的磁导率

磁化强度 $\vec{M}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 之间满足关系

$$\vec{M} = g\vec{B}$$

其中 g 是一个反映磁介质磁化特性的量，与 $\vec{B}$ 无关。g 的数值可正可负，取决于磁介质的性质。当 $g > 0$ 时，$\vec{M}$ 与 $\vec{B}$ 同向，为顺磁质；当 $g < 0$ 时，$\vec{M}$ 与 $\vec{B}$ 反向，为抗磁质。

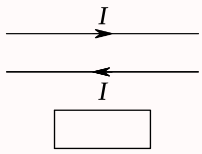
磁介质的磁导率

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} - g} = \frac{\mu_0}{1 - g\mu_0}$$

所以，顺磁质的 $\mu > \mu_0$；抗磁质的 $\mu < \mu_0$；铁磁质的 $\mu \gg \mu_0$。

第 282 题

【2145】两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流 I，并各以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ 的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内 (如图)，则：



(A) 线圈中无感应电流　　(B) 线圈中感应电流为顺时针方向

(C) 线圈中感应电流为逆时针方向　　(D) 线圈中感应电流方向不确定

解析

【答案】B
【解析】法拉第电磁感应定律
在矩形线圈所在处，下导线比上导线所产生的磁场大，而下导线产生的磁场的方向垂直纸面向外，上导线产生的磁场的方向垂直纸面向内，所以合磁场的方向垂直纸面向外。当电流变化时，磁场大小也跟着发生变化，所以磁通量也发生变化，电流增大，磁通量增大，根据楞次定律，感应电流的所产生的磁场要试图阻止磁通量的增加，所以感应电流的方向应该为顺时针方向。

第 283 题

【2147】一块铜板垂直于磁场方向放在磁感强度正在增大的磁场中时，铜板中出现的涡流 (感应电流) 将
(A) 加速铜板中磁场的增加
(B) 减缓铜板中磁场的增加
(C) 对磁场不起作用
(D) 使铜板中磁场反向

解析

【答案】B
【解析】涡流，愣次定律
感应电流会阻止磁场的增大，但只是减缓其增大的速度（程度），无法改变其增大的事实。

第 284 题

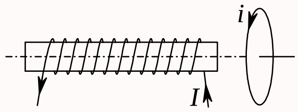
【2404】一导体圆线圈在均匀磁场中运动，能使其中产生感应电流的一种情况是
(A) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向平行
(B) 线圈绕自身直径轴转动，轴与磁场方向垂直
(C) 线圈平面垂直于磁场并沿垂直磁场方向平移
(D) 线圈平面平行于磁场并沿垂直磁场方向平移

解析

【答案】B
【解析】法拉第电磁感应定律
产生感应电流的根本原因在于通过线圈平面的磁通量发生变化。
如果磁场平行于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量恒为零，转动过程也一直保持为零，所以不会产生感应电流。
如果磁场垂直于线圈所在平面，那么通过线圈平面的磁通量就是磁感应强度与线圈面积的乘积，转动过程中，线圈平面的法线方向与磁场之间的夹角发生变化，所以通过线圈的磁通量发生变化，所以线圈中有感应电流。
如果线圈平面垂直磁场并沿垂直磁场的方向平稳，那么通过线圈的磁通量并没有发生变化，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。
如果线圈平面平行于磁场，则通过线圈的磁通量为零，移动过程磁通量也一直保持为零，虽然线圈有切割磁场线，但产生的感应电动势互相抵消，所以感应电流为零。

第 285 题

【2493】如图所示，一载流螺线管的旁边有一圆形线圈，欲使线圈产生图示方向的感应电流 i，下列哪一种情况可以做到？



(A) 载流螺线管向线圈靠近　　(B) 载流螺线管离开线圈

(C) 载流螺线管中电流增大　　(D) 载流螺线管中插入铁芯

解析

【答案】B

【解析】法拉第电磁感应定律

载流螺线管在线圈所在处产生的磁场是从左到右的，而且靠近螺线管处的磁场大小较大，远离螺线管处的磁场大小较小。

所以螺线管靠近线圈，相当于线圈靠近螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，而且磁通量大小增大，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量减小，感应电流的方向与图示方向应该相反。

如果螺线管离开线圈，相当于线圈离开螺线管，通过线圈的磁通量是向右的，但磁通量大小变小，根据楞次定律，感应电流的磁场应该要使通过线圈的磁通量增大，感应电流的方向与图示方向相同。

如果载流螺线管中的电流增大，那么产生的磁场也增大，通过线圈的磁通量也增大，感应电流应该与图示方向相反。

当通过的电流不变而在螺线管中插入铁芯时，螺线管内部的磁场发生变化，外部磁场并没有发生变化，所以通过线圈的磁通量也没发生变化，因此线圈中不会产生感应电流。

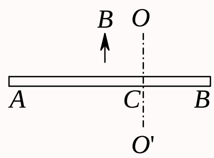
根据磁介质的安培环路定律

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

电流不变，所以螺线管内的 H 不变，但有没有磁介质，改变的是磁导率，从而改变磁场强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$。

第 286 题

【2123】如图所示，导体棒 AB 在均匀磁场 B 中绕通过 C 点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴 OO' 转动（角速度 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{B}$ 同方向），BC 的长度为棒长的 $\dfrac{1}{3}$，则



(A) A 点比 B 点电势高　　(B) A 点与 B 点电势相等

(C) A 点比 B 点电势低　　(D) 有稳恒电流从 A 点流向 B 点

解析

【答案】A

【解析】动生电动势

动生电动势

$$\mathscr{E}=\int (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

由此可以判定 A 点电势比 C 点高，B 点电势也比 C 点高。作为选择题，只需要判定 AC 之间的电压大于 BC 之间的电压，就可以得到 A 点比 B 点电势高。而由于没有构成闭合回路，所以没有

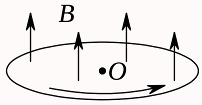
电流。

现在计算一下 AC 和 BC 之间的电压。

$$U_{AC}=V_A-V_C=\int_C^A(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\frac{2l}{3}}vB\,\mathrm{d}l=\int_0^{\frac{2l}{3}}\omega lB\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega B\left(\frac{2l}{3}\right)^2=\frac{2}{9}\omega Bl^2$$
$$U_{BC}=V_B-V_C=\int_C^B(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\frac{l}{3}}vB\,\mathrm{d}l=\int_0^{\frac{l}{3}}\omega lB\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega B\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{1}{18}\omega Bl^2$$

第 287 题

【2504】圆铜盘水平放置在均匀磁场中，$\vec{B}$ 的方向垂直盘面向上。当铜盘绕通过中心垂直于盘面的轴沿图示方向转动时，



(A) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的相反方向流动
(B) 铜盘上有感应电流产生，沿着铜盘转动的方向流动
(C) 铜盘上产生涡流
(D) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘边缘处电势最高
(E) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘中心处电势最高

解析

【答案】D
【解析】动生电动势
将圆盘看成一根根线段绕盘心转动。根据动生电动势

$$\mathscr{E}=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

可以判定铜盘边缘处电势比中心电势高。

第 288 题

【2156】两个相距不太远的平面圆线圈，怎样可使其互感系数近似为零？设其中一线圈的轴线恰通过另一线圈的圆心

(A) 两线圈的轴线互相平行放置
(B) 两线圈并联
(C) 两线圈的轴线互相垂直放置
(D) 两线圈串联

解析

【答案】C
【解析】互感
计算互感的基本方法是假定一个线圈中通过电流 I，计算通过另一线圈的磁通量 ϕ（磁链 Φ），二者的比值即为互感

$$M=\frac{\phi}{I}$$

如果互感近似为零，则说明通过另一线圈的磁通量近似为零，所以磁场线与线圈平面平行。所以，两线圈的轴线互相垂直放置时，互感近似为零。

第 289 题

【2417】对于单匝线圈取自感系数的定义式为 $L=\Phi/I$。当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变，且无铁磁性物质时，若线圈中的电流强度变小，则线圈的自感系数 L

(A) 变大，与电流成反比关系
(B) 变小
(C) 不变
(D) 变大，但与电流不成反比关系

解析

【答案】C

【解析】自感

计算自感的基本方法是假定线圈中通过电流 I，计算通过自身的磁通量 ϕ（磁链 Φ），二者的比值即为自感

$$L=\frac{\Phi}{I}$$

自感只与线圈本身的形状、匝数等有关，而与通过的电流无关。电流变化时，它所激发的磁场会随电流线性变化，因此磁通量也线性变化，二者的比值保持不变。

第 290 题

【2421】已知一螺绕环的自感系数为 L。若将该螺绕环锯成两个半环式的螺线管，则两个半环螺线管的自感系数

(A) 都等于 $\frac{1}{2}L$
(B) 有一个大于 $\frac{1}{2}L$，另一个小于 $\frac{1}{2}L$
(C) 都大于 $\frac{1}{2}L$
(D) 都小于 $\frac{1}{2}L$

解析

【答案】D

【解析】互感线圈的串联。

两个自感分别为 L_1、L_2，互感为 M 的线圈顺接串联时等效于一个自感线圈，其自感为

$$L=L_1+L_2+2M$$

当 $L_1=L_2$ 时，显然有

$$L_1=L_2=\frac{L}{2}-M$$

其中 M 为正数，所以两个半环螺线管的自感系数均小于 $\frac{1}{2}L$。

第 291 题

【2752】在真空中一个通有电流的线圈 a 所产生的磁场内有另一个线圈 b，a 和 b 相对位置固定。若线圈 b 中电流为零 (断路)，则线圈 b 与 a 间的互感系数：

(A) 一定为零
(B) 一定不为零
(C) 可为零也可不为零，与线圈 b 中电流无关
(D) 是不可能确定的

解析

【答案】C

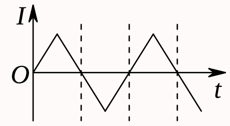
【解析】互感

互感与两个线圈的形状、位置等有关，与线圈中是否通电无关。计算互感的基本思路是假定一个线圈中通以电流，计算另一线圈中的磁通量或磁链，二者相除即为互感。

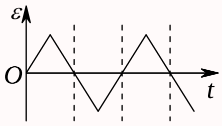
第 292 题

【5138】在一自感线圈中通过的电流 I 随时间 t 的变化规律如图 (a) 所示，若以 I 的正流向作为 $\mathscr{E}$ 的正方向，则代表线圈内自感电动势 $\mathscr{E}$ 随时间 t 变化规律的曲线应为图 (b) 中 (A)、(B)、(C)、(D) 中的哪一个？

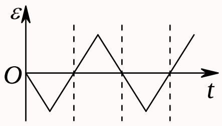
(a)



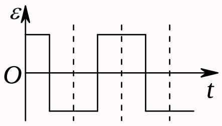
(A)



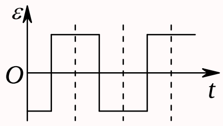
(B)



(C)



(D)



解析

【答案】D

【解析】法拉第电磁感应定律

法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

自感电动势

$$\mathscr{E}=-\int\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\propto-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

第一小段，电流线性增大，$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}>0$，自感电动势为一个负的不变的值。第二小段，电流线性减小，$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}<0$，自感电动势为一个正的不变的值。

第 293 题

【5141】有两个长直密绕螺线管，长度及线圈匝数均相同，半径分别为 r_1 和 r_2。管内充满均匀介质，其磁导率分别为 μ_1 和 μ_2。设 $r_1:r_2=1:2$，$\mu_1:\mu_2=2:1$，当将两只螺线管串联在电路中通电稳定后，其自感系数之比 $L_1:L_2$ 与磁能之比 $W_{\mathrm{m}1}:W_{\mathrm{m}2}$ 分别为：

(A) $L_1:L_2=1:1$，$W_{\mathrm{m}1}:W_{\mathrm{m}2}=1:1$

(B) $L_1:L_2=1:2$，$W_{\mathrm{m}1}:W_{\mathrm{m}2}=1:1$

(C) $L_1:L_2=1:2$，$W_{\mathrm{m}1}:W_{\mathrm{m}2}=1:2$

(D) $L_1:L_2=2:1$，$W_{\mathrm{m}1}:W_{\mathrm{m}2}=2:1$

解析

【答案】C

【解析】自感，磁能

螺线管内的磁场与螺线管的半径无关，与磁导率成正比【根据磁介质中的安培环路定律可以求得 $H=\frac{NI}{L}$ 与半径无关，而 $B=\mu H$】，所以，当两个螺线管串联在电路中时，通过的电流相等，因此 $B_1:B_2=\mu_1:\mu_2=2:1$，而通过线圈的磁链 $\Phi=NBS=NB\pi r^2$，所以

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=\frac{N_1B_1\pi r_1^2}{N_2B_2\pi r_2^2}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1:2$$

所以自感

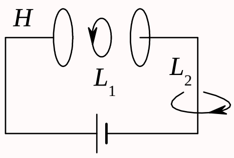
$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{\Phi_1/I_1}{\Phi_2/I_2}=1:2$$

而磁能

$$\frac{W_{\mathrm{m}1}}{W_{\mathrm{m}2}}=\frac{\frac{1}{2}L_1I_1^2}{\frac{1}{2}L_2I_2^2}=\frac{L_1}{L_2}=1:2$$

第 294 题

【5159】如图，平板电容器 (忽略边缘效应) 充电时，沿环路 L_1 的磁场强度 $\vec{H}$ 的环流与沿环路 L_2 的磁场强度 $\vec{H}$ 的环流两者，必有：



(A) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}>\oint_{L_2}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ (B) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_{L_2}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

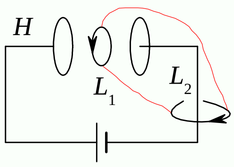
(C) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}<\oint_{L_2}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ (D) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$

解析

【答案】C

【解析】全电流安培环路定律

全电流安培环路定律



$$\oint_C\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I=I_{\mathrm{C}}+I_{\mathrm{d}}$$

显然

$$\oint_{L_2}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_{\mathrm{C}}$$

这里的 I_{C} 就是充电过程中某个瞬间通过回路中的传导电流。而

$$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_{\mathrm{d}}$$

这里的 I_{d} 只是通过 L_1 部分的位移电流，所以显然有

$$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}<\oint_{L_2}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

第 295 题

【2183】在感应电场中电磁感应定律可写成 $\oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，式中 $\vec{E}_K$ 为感应电场的电场强度。此式表明：

(A) 闭合曲线 L 上 $\vec{E}_K$ 处处相等

(B) 感应电场是保守力场

(C) 感应电场的电场强度线不是闭合曲线

(D) 在感应电场中不能像对静电场那样引入电势的概念

解析

【答案】D

【解析】感生电动势

感生电动势

$$\mathscr{E} = \oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

感生电场 $\vec{E}_K$ 沿任意一个闭合曲线的环流等于通过该闭合曲线所围面积的磁通量随时间的变化率的负数，等于沿该闭合曲线的感生电动势。这里并没有要求闭合曲线上各点的感生电场相等。而从上式也可以看出一般情况下感生电场沿任意闭合曲线的积分并不等于零，因此感生电场不是保守场，不能定义势能。从这里，看不出感生电场的电场线是不是闭合曲线。

第 296 题

【2790】对位移电流，有下述四种说法，请指出哪一种说法正确

(A) 位移电流是指变化电场

(B) 位移电流是由线性变化磁场产生的

(C) 位移电流的热效应服从焦耳 —— 楞次定律

(D) 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

解析

【答案】A

【解析】位移电流

通过某一截面的位移电流等于通过该截面电位移通量对时间的变化率

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{j}_{\mathrm{d}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

其中

$$\vec{j}_{\mathrm{d}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

称为位移电流密度矢量。

全电流安培环路定律

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I = I_{\mathrm{C}} + I_{\mathrm{d}} = \int_S (\vec{j}_{\mathrm{C}} + \vec{j}_{\mathrm{d}}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

即位移电流与传导电流在激发磁场上的地位是相当的，它也满足安培环路定律。
焦耳定律或焦耳 —— 楞次定律是定量说明传导电流将电能转换为热能的定律。1841 年，英国物理学家詹姆斯 • 焦耳发现载流导体中产生的热量 Q（称为焦耳热）与电流 I 的平方、导体的电阻 R 和通电时间 t 成比例。而在 1842 年时，俄国物理学家海因里希 • 楞次也独立发现上述的关系，因此也称为“焦耳－楞次定律”。

$$Q = I^2 R$$

位移电流与传导电流两者相比，唯一共同点仅在于都可以在空间激发磁场，但二者本质是不同的：

- ☞ 位移电流的本质是变化着的电场，而传导电流则是自由电荷的定向运动
- ☞ 传导电流在通过导体时会产生焦耳热，而位移电流则不会产生焦耳热；位移电流也不会产生化学效应
- ☞ 位移电流也即变化着的电场可以存在于真空、导体、电介质中，而传导电流只能存在于导体中
- ☞ 位移电流的磁效应服从安培环路定理

2、填空题

第 297 题

【2549】一个密绕的细长螺线管，每厘米长度上绕有 10 匝细导线，螺线管的横截面积为 10 cm^2。当在螺线管中通入 10 A 的电流时，它的横截面上的磁通量为______。

解析

【答案】1.256×10^{-5} Wb
【解析】磁通量
螺线管内的磁场视为匀强磁场，螺线管外的磁场视为零，可以由安培环路定律求螺线管内的磁场

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$BL = \mu_0 nLI$$
$$B = \mu_0 nI$$

所以磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \mu_0 nIS = 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 1000 \times 10 \times 10 \times 10^{-4} = 1.256 \times 10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

注意，题目中给的是每厘米长度上绕有 10 匝，计算时要换算成每米 1000 匝，即 n 要用 1000 代。

第 298 题

【5303】一平面试验线圈的磁矩大小 p_m 为 1×10^{-8} A $\cdot$ m^2，把它放入待测磁场中的 A 处，试验线圈如此之小，以致可以认为它所占据的空间内场是均匀的。当此线圈的 p_m 与 z 轴平行时，所受磁

力矩大小为 $M=5\times10^{-9}\ \mathrm{N\cdot m}$，方向沿 x 轴负方向；当此线圈的 p_m 与 y 轴平行时，所受磁力矩为零。则空间 A 点处的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小为______，方向为______。

解析

【答案】0.5 T；y 轴正方向。

【解析】磁力矩。

磁矩 $\vec{p}_m$ 在磁场 $\vec{B}$ 中的磁力矩为

$$\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$$

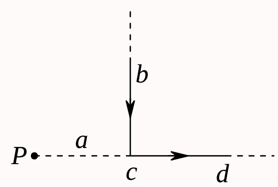
依题意【当此线圈的 p_m 与 y 轴平行时，所受磁力矩为零】，磁场的方向与 y 轴平行，假设为 $\vec{B}=B\,\vec{e}_y$。又由题意【当此线圈的 p_m 与 z 轴平行时，所受磁力矩大小为 $M=5\times10^{-9}\ \mathrm{N\cdot m}$，方向沿 x 轴负方向】可得

$$M=p_mB$$
$$B=\frac{M}{p_m}=\frac{5\times10^{-9}}{1\times10^{-8}}=0.5\ \mathrm{T}$$

其实这里的平行，一定指的是沿正方向吗？

第 299 题

【2023】一条无限长载流导线折成如图示形状，导线上通有电流 $I=10$ A。P 点在 cd 的延长线上，它到折点的距离 $a=2$ cm，则 P 点的磁感强度 $B=$______。



解析

【答案】5×10^{-5} T。

【解析】磁场叠加原理，安培环路定律。

电流元的磁场公式

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$ 为从电流元所在位置指向所求位置的矢量。由此也可见，如果 $\mathrm{d}\vec{l}\parallel\vec{r}$，那么 $\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}=0$，该电流元在场点所激发的磁场为零。所以 cd 段在 P 点的磁场为零。

而 ab 段上的电流元在 P 点的磁场的方向都是垂直纸面向里，大小可以通过积分得到，也可以通过对称性分析得出它是 ab 所在直线的无限长通电直线的磁场的一半，而无限长通电直线的磁场可以通过安培环路定律求得：

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以所求磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{4\pi\times0.02}=5\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

下面根据磁场叠加原理直接通过积分来求磁场

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B&=\frac{\mu_0 I(-\,\mathrm{d}z)\sin\theta}{4\pi(z^2+a^2)}=-\frac{\mu_0 Ia\,\mathrm{d}z}{4\pi(z^2+a^2)}\\&=-\frac{\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}(a/\tan\theta)}{4\pi(a/\sin\theta)^2}=-\frac{\mu_0 I\sin^3\theta a(-\sin^{-2}\theta\,\mathrm{d}\theta)}{4\pi a^2}=\frac{\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi a}\\B&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi a}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(-\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\end{aligned}$$

第 300 题

【2026】一质点带有电荷 $q=8.0\times10^{-10}$ C，以速度 $v=3.0\times10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 在半径为 $R=6.00\times10^{-3}$ m 的圆周上，作匀速圆周运动。该带电质点在轨道中心所产生的磁感强度 $B=$______，该带电质点轨道运动的磁矩 $p_{\mathrm{m}}=$______。

解析

【答案】$\frac{2}{3}\times10^{-6}$ T；$7.2\times10^{-7}\ \mathrm{A\cdot m^2}$。
【解析】运动电荷的磁场，磁矩。
运动电荷的磁场公式

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$\vec{r}$ 为从电荷所在位置指向所求位置的矢量。做圆周运动时，$\vec{v}$ 一定垂直 $\vec{r}$，所以所求磁场的方向一定是垂直于运动平面，大小为

$$B=\frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}=\frac{10^{-7}\times8.0\times10^{-10}\times3.0\times10^5}{(6.00\times10^{-3})^2}=\frac{2}{3}\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

磁矩

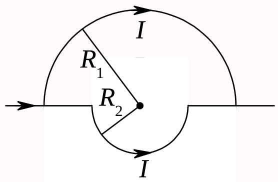
$$\vec{p}_{\mathrm{m}}=IS\vec{e}_n$$

所以磁矩的大小为

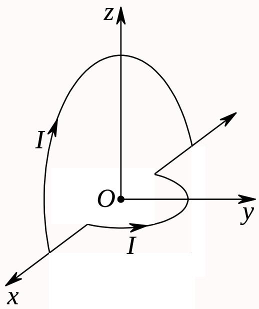
$$\begin{aligned}p_{\mathrm{m}}&=IS=I\pi R^2=\frac{q}{T}\pi R^2=\frac{q}{2\pi R/v}\pi R^2=\frac{1}{2}qvR\\&=\frac{1}{2}\times8.0\times10^{-10}\times3.0\times10^5\times6.00\times10^{-3}=7.2\times10^{-7}\ \mathrm{A\cdot m^2}\end{aligned}$$

第 301 题

【2043】真空中稳恒电流 I 流过两个半径分别为 R_1，R_2 的同心半圆形导线，两半圆导线间由沿直径的直导线连接，电流沿直导线流入。(1) 如果两个半圆共面 (右图)，圆心 O 点的磁感强度 $\vec{B}_0$ 的大小为_____，方向为_____；



(2) 如果两个半圆面正交 (右图)，则圆心 O 点的磁感强度 $\vec{B}_0$ 的大小为_____，$\vec{B}_0$ 的方向与 y 轴的夹角为_____。



解析

【答案】(1) $\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$；垂直纸面向外。(2) $\frac{\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}}$；$\pi-\arctan\frac{R_1}{R_2}$。

【解析】磁场叠加原理。

电流元的磁场公式

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

(1) 左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算两个半圆产生的磁场叠加即可。

上半圆，磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\int_{L_1}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\cdot\pi R_1=\frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

半圆，磁场的方向垂直纸面向外，大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2}\int_{L_2}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2}\cdot\pi R_2=\frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向外，大小为

$$B=B_2-B_1=\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4R_1}=\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

(2) 同样地，沿 x 轴方向的两段电流产生的磁场为零，只要计算两个半圆的磁场即可。

xz 平面上的半圆，产生的磁场的方向沿 y 轴负方向，大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

xy 平面上的半圆，产生的磁场的方向沿 z 轴正方向，大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4R_2}$$

所以总的磁场为

$$\vec{B}=-B_1\vec{e}_y+B_2\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 I}{4R_1}\vec{e}_y+\frac{\mu_0 I}{4R_2}\vec{e}_z$$

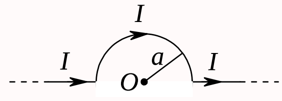
$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}}$$

与 y 轴正方向的夹角为 φ

$$\varphi=\pi-\arctan\frac{B_2}{B_1}=\pi-\arctan\frac{R_1}{R_2}$$

第 302 题

【2562】在真空中，将一根无限长载流导线在一平面内弯成如图所示的形状，并通以电流 I，则圆心 O 点的磁感强度 B 的值为_____。



解析

【答案】$\frac{\mu_0 I}{4a}$。
【解析】磁场叠加原理。
电流元的磁场公式

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

左右两段沿直径的电流产生的磁场为零，所以只要计算半圆产生的磁场叠加即可。
半圆产生的磁场的方向垂直纸面向里，大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int_L \mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\cdot\pi a=\frac{\mu_0 I}{4a}$$

第 303 题

【2665】在非均匀磁场中，有一电荷为 q 的运动电荷。当电荷运动至某点时，其速率为 v，运动方向与磁场方向间的夹角为 α，此时测出它所受的磁力为 f_m。则该运动电荷所在处的磁感强度的大小为_____。磁力 f_m 的方向一定垂直于_____。

解析

【答案】$\frac{f_{\mathrm{m}}}{qv\sin\alpha}$；$\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 所在的平面。
【解析】磁场力，洛伦兹力。
运动电荷在磁场中所受到的洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

所以其大小为

$$F_{\mathrm{m}}=qvB\sin\alpha$$

所以有

$$B=\frac{F_{\mathrm{m}}}{qv\sin\alpha}=\frac{f_{\mathrm{m}}}{qv\sin\alpha}$$

根据矢量叉乘的运算法则，$\vec{F}_{\mathrm{m}}$ 的方向就是 $\vec{v}\times\vec{B}$ 的方向，因此一定是与 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 所在的平面垂直。

第 304 题

【5310】若把氢原子的基态电子轨道看作是圆轨道，已知电子轨道半径 $r=0.53\times10^{-10}$ m，绕核运动速度大小 $v=2.18\times10^{6}$ m/s，则氢原子基态电子在原子核处产生的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小为_____。

解析

【答案】12.4 T。
【解析】运动电荷的磁场。
运动电荷的磁场公式

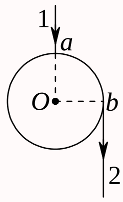
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

圆周运动，$\vec{v}\parallel\vec{r}$，所以其大小为

$$B=\frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}=\frac{10^{-7}\times1.6\times10^{-19}\times2.18\times10^{6}}{(0.53\times10^{-10})^2}\approx12.4\ \mathrm{T}$$

第 305 题

【5481】在真空中，电流由长直导线 1 沿半径方向经 a 点流入一由电阻均匀的导线构成的圆环，再由 b 点沿切向流出，经长直导线 2 返回电源 (如图)。已知直导线上的电流强度为 I，圆环半径为 R，$\angle aOb=90°$。则圆心 O 点处的磁感强度的大小 $B=$_____。



解析

【答案】$\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$。
【解析】磁场叠加原理。
电流可以分成四段，长直导线 1 的电流指向 O 点，所以产生的磁场为零，即 $B_1=0$。直导线 2 产生的磁场是无限长直导线的一半，即

$$B_2=\frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

这个磁场的方向垂直纸面向里。电流进入圆环后分成两个部分，由于电阻均匀，所以电流与电阻成反比，流经四分之三圆的电流为 $I_3=I/4$，流经四分之一圆的电流为 $I_4=3I/4$，两个电流的磁场方向相反，I_3 的磁场垂直纸面向外，大小为

$$B_3=\frac{\mu_0\frac{1}{4}I}{4\pi R^2}\cdot\frac{3}{4}(2\pi R)=\frac{3\mu_0 I}{32R}$$

I_4 的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_4=\frac{\mu_0\frac{3}{4}I}{4\pi R^2}\cdot\frac{1}{4}(2\pi R)=\frac{3\mu_0 I}{32R}$$

所以总的磁场垂直纸面向里在，大小 $B=B_1+B_2-B_3+B_4=B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$。

第 306 题

【2652】在磁场空间分别取两个闭合回路，若两个回路各自包围载流导线的根数不同，但电流的代数和相同。则磁感强度沿各闭合回路的线积分______；两个回路上的磁场分布______。(填：相同、不相同)

解析

【答案】相同；不相同。

【解析】安培环路定律。

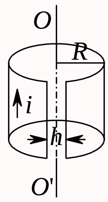
安培环路定律

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

当电流代数和相同时，上式中的 I 相同，因此两个回路的磁感应强度沿各自闭合回路的线积分（环流）相同。但因为两种情况下电流分布不相同，所以空间各点的磁感应强度一般情况下并不会相同。

第 307 题

【2710】将半径为 R 的无限长导体薄壁管 (厚度忽略) 沿轴向割去一宽度为 $h(h \ll R)$ 的无限长狭缝后，再沿轴向流有在管壁上均匀分布的电流，其面电流密度 (垂直于电流的单位长度截线上的电流) 为 i(如图)，则管轴线磁感强度的大小是______。



解析

【答案】$\frac{\mu_0 ih}{2\pi R}$。

【解析】安培环路定律，磁场叠加原理。

将管壁电流沿轴向切割成一系列的无限长直线电流。由于对称性的关系，关于管轴对称的两个同样大小的无限长直线电流在管轴线上产生的磁场刚好互相抵消。所以最后只剩下与被裁掉的狭缝对称的那个无限长直线电流。根据面电流密度的定义，该无限长直线中通过的电流为 $I = ih$，所以由安培环路定律

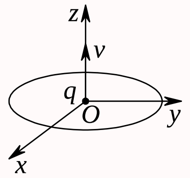
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

可得

$$B\cdot(2\pi R) = \mu_0 ih$$
$$B = \frac{\mu_0 ih}{2\pi R}$$

第 308 题

【0361】如图所示，一半径为 R，通有电流为 I 的圆形回路，位于 Oxy 平面内，圆心为 O。一带正电荷为 q 的粒子，以速度 $\vec{v}$ 沿 z 轴向上运动，当带正电荷的粒子恰好通过 O 点时，作用于圆形回路上的力为______，作用在带电粒子上的力为______。



解析

【答案】0，0。

【解析】洛伦兹力公式，运动电荷的磁场，电流元在磁场上的受力。

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

圆形电流在其圆心的磁场一定是沿轴向的，因此这里就是沿 z 轴方向，可能沿正方向，也可能沿反方向，因此题目没有给出电流的绕向。所以带电粒子在 O 点受到的力一定为零。

运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

所以运动电荷在圆形回路上的磁场的方向是沿着切线方向的。而电流元在磁场中的受力为

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{m}} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

所以各个电流元和它所在处的磁场的方向平行，每个电流元所受到的磁场力均为零，因此整个圆形回路所受到的力也为零。

第 309 题

【2065】两个带电粒子，以相同的速度垂直磁感线飞入匀强磁场，它们的质量之比是 $1:4$，电荷之比是 $1:2$，它们所受的磁场力之是______，运动轨迹半径之比是______。

解析

【答案】$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$。

【解析】洛伦兹力公式。

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

这个力一定与运动电荷的速度垂直，所以提供它作圆周运动的向心力。依题意，$\vec{v} \perp \vec{B}$，所以力的大小为

$$F_{\mathrm{m}} = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

所以有

$$\frac{F_{\mathrm{m1}}}{F_{\mathrm{m2}}} = \frac{q_1 v_1 B_1}{q_2 v_2 B_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{\frac{m_1v_1}{q_1B_1}}{\frac{m_2v_2}{q_2B_2}}=\frac{m_1q_2}{m_2q_1}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{1}{2}$$

第 310 题

【2066】一带电粒子平行磁感线射入匀强磁场，则它作_____ 运动；一带电粒子垂直磁感线射入匀强磁场，则它作_____ 运动；一带电粒子与磁感线成任意交角射入匀强磁场，则它作_____ 运动。

解析

【答案】匀速直线；匀速圆周；等距螺旋线。
【解析】洛伦兹力公式。
运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

显然 $\vec{F}_{\mathrm{m}}\perp\vec{V}$，$\vec{F}_{\mathrm{m}}\perp\vec{B}$。
当 $\vec{V}\parallel\vec{B}$ 时，$\vec{F}_{\mathrm{m}}=0$，粒子做匀速直线运动。
当 $\vec{V}\perp\vec{B}$ 时，$F_{\mathrm{m}}=qvB$，粒子做匀速圆周运动。
当 $\vec{V}$、$\vec{B}$ 成任意角【这里应该是指非平行非垂直】时，力与速度方向垂直，所以速度大小一定不变；力与磁场方向垂直，所以沿磁场方向不受力，保持匀速运动，垂直磁场方向的速度大小也保持不变，做匀速圆周运动。因此粒子做螺旋线运动，且螺距保持不变。

第 311 题

【2235】带电粒子穿过过饱和蒸汽时，在它走过的路径上，过饱和蒸汽便凝结成小液滴，从而显示出粒子的运动轨迹。这就是云室的原理。今在云室中有磁感强度大小为 $B=1$ T 的均匀磁场，观测到一个质子的径迹是半径 $r=20$ cm 的圆弧。已知质子的电荷为 $q=1.6\times10^{-19}$ C，静止质量 $m=1.67\times10^{-27}$ kg，则该质子的动能为_____。

解析

【答案】3.07×10^{-13} J。
【解析】洛伦兹力公式。
运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

这里显然默认 $\vec{v}\perp\vec{B}$，而这个力提供粒子做圆周运动的向心力，所以有

$$qvB=\frac{mv^2}{r}$$

$$v=\frac{qBr}{m}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{(qBr)^2}{2m}=\frac{(1.6\times10^{-19}\times1\times0.2)^2}{2\times1.67\times10^{-27}}\approx3.07\times10^{-13}\text{ J}$$

第 312 题

【2457】带电粒子沿垂直于磁感线的方向飞入有介质的匀强磁场中。由于粒子和磁场中的物质相互作用，损失了自己原有动能的一半。路径起点的轨道曲率半径与路径终点的轨道曲率半径之比为______。

解析

【答案】$\sqrt{2}$。
【解析】洛伦兹力公式。
运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

依题意，有 $\vec{v}\perp\vec{B}$，而这个力提供粒子做圆周运动的向心力，所以有

$$qvB=\frac{mv^2}{r}$$
$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{\sqrt{2mE_k}}{qB}$$
$$\frac{r_1}{r_2}=\sqrt{\frac{E_{k1}}{E_{k2}}}=\sqrt{2}$$

第 313 题

【2581】电子在磁感强度 $B=0.1$ T 的匀强磁场中沿圆周运动，电子运动形成的等效圆电流强度 $I=$______。(电子电荷 $e=1.60\times10^{-19}$ C，电子质量 $m=9.11\times10^{-31}$ kg)

解析

【答案】4.47×10^{-10} A。
【解析】洛伦兹力公式。
运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

这里应该依然是默认 $\vec{v}\perp\vec{B}$，而这个力提供粒子做圆周运动的向心力，所以有

$$qvB=\frac{mv^2}{r}$$
$$r=\frac{mv}{qB}$$
$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$$
$$I=\frac{q}{T}=\frac{q^2B}{2\pi m}=\frac{(1.60\times10^{-19})^2\times0.1}{2\pi\times9.11\times10^{-31}}\approx4.47\times10^{-10}\ \mathrm{A}$$

第 314 题

【2096】在磁场中某点放一很小的试验线圈。若线圈的面积增大一倍，且其中电流也增大一倍，该线圈所受的最大磁力矩将是原来的______ 倍。

解析

【答案】4。
【解析】磁矩，磁力矩。
分子电流磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n$$

它在磁场中受到的磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

所以，若线圈的面积增大一倍，且其中电流也增大一倍，则磁矩增加为四倍，最大磁力矩将是原来的四倍。

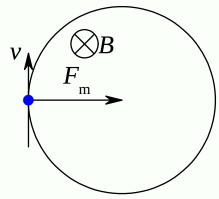
第 315 题

【2103】一电子以速率 $v = 2.20 \times 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 垂直磁力线射入磁感强度为 $B = 2.36\ \mathrm{T}$ 的均匀磁场，则该电子的轨道磁矩为______。其方向与磁场方向______。

解析

【答案】$9.34 \times 10^{-19}\ \mathrm{A \cdot m^2}$；相反。
【解析】洛伦兹力公式，磁矩。
洛伦兹力公式

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



当 $\vec{v} \perp \vec{B}$ 时，洛伦兹力的大小为

$$F_{\mathrm{m}} = qvB$$

它提供给粒子做圆周运动的向心力

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

所以轨道半径

$$r = \frac{mv}{qB}$$

等效电流

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi r/v} = \frac{qv}{2\pi r} = \frac{q^2B}{2\pi m}$$

分子电流磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}} = IS\vec{e}_n$$

其大小为

$$p_{\rm m}=IS=\frac{q^2B}{2\pi m}\times\pi\frac{m^2v^2}{q^2B^2}=\frac{mv^2}{2B}=\frac{9.11\times10^{-31}\times(2.20\times10^6)^2}{2\times2.36}\approx9.34\times10^{-19}{\rm A}\cdot{\rm m}^2$$

如上图，假定磁场垂直纸面向里，电子竖直向上运动，则所受洛伦兹力向右，电子顺时针转动，等效电流逆时针，所以磁矩是垂直纸面向外，其方向与磁场方向相反。这里注意电子带负电，洛伦兹力与 $\vec{v}\times\vec{B}$ 方向相反，电流的方向与电子的运动方向相反。

第 316 题

【2387】已知面积相等的载流圆线圈与载流正方形线圈的磁矩之比为 $2:1$，圆线圈在其中心处产生的磁感强度为 B_0，那么正方形线圈 (边长为 a) 在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀外磁场中所受最大磁力矩为______。

解析

【答案】$\frac{B_0Ba^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$。
【解析】圆线圈的磁场，磁力矩。
圆线圈在其中心处的磁感应强度

$$B_0=\frac{\mu_0I}{4\pi R^2}\cdot(2\pi R)=\frac{\mu_0I}{2R}$$

依题意，有

$$S=\pi R^2=a^2\Rightarrow R=\frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

所以其磁矩

$$m_0=IS=\frac{2B_0R}{\mu_0}a^2=\frac{2B_0a^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$$

所以正方形线圈的磁矩为

$$m=\frac{1}{2}m_0=\frac{B_0a^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$$

它在磁场中受到的最大磁力矩为

$$M=mB=\frac{B_0Ba^3}{\mu_0\sqrt{\pi}}$$

第 317 题

【2601】在磁感强度 $B=0.02$ T 的匀强磁场中，有一半径为 10 cm 圆线圈，线圈磁矩与磁感线同向平行，回路中通有 $I=1$ A 的电流。若圆线圈绕某个直径旋转 180°，使其磁矩与磁感线反向平行，且线圈转动过程中电流 I 保持不变，则外力的功 $A=$______。

解析

【答案】1.256×10^{-3} J。
【解析】磁矩，磁力矩，磁力矩的功。
磁矩

$$\vec{m}=IS\vec{\mathrm{e}}_n=I\pi R^2\vec{\mathrm{e}}_n$$

磁力矩

$$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$$

磁力矩的功

$$\mathrm{d}W=-M\,\mathrm{d}\theta=-I\pi R^2B\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

这里 θ 表示 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角。当 θ 增大时，$\mathrm{d}\theta>0$，磁力矩的方向与磁矩转动的方向相反，所以上式有个负号。
所以在转动过程中，磁力矩总的功

$$W=\int_0^\pi -I\pi R^2B\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=I\pi R^2B(\cos\theta)_0^\pi=-2I\pi R^2B$$

所以外力的功

$$A=-W=2I\pi R^2B=2\times1\times\pi\times0.1^2\times0.02=1.256\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

第 318 题

【2630】氢原子中电子质量 m，电荷 e，它沿某一圆轨道绕原子核运动，其等效圆电流的磁矩大小 p_{m} 与电子轨道运动的动量矩大小 L 之比 $\dfrac{p_{\mathrm{m}}}{L}=$______。

解析

【答案】$\dfrac{e}{2m}$。
【解析】磁矩，动量矩。
磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}}=IS\vec{\mathrm{e}}_n=I\pi R^2\vec{\mathrm{e}}_n$$

其大小

$$p_{\mathrm{m}}=I\pi R^2=\frac{q}{T}\pi R^2=\frac{e}{2\pi R/v}\pi R^2=\frac{evR}{2}$$

动量矩

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m\vec{r}\times\vec{v}$$

圆周运动，$\vec{r}\perp\vec{v}$，所以动量矩大小

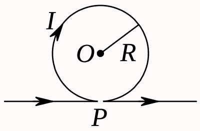
$$L=mRv$$

所以

$$\frac{p_{\mathrm{m}}}{L}=\frac{evR}{2mRv}=\frac{e}{2m}$$

第 319 题

【5125】一根无限长直导线通有电流 I，在 P 点处被弯成了一个半径为 R 的圆，且 P 点处无交叉和接触，则圆心 O 处的磁感强度大小为_____，方向为_____。



解析

【答案】$\frac{\mu_0 I(\pi-1)}{2\pi R}$；垂直纸面向里。
【解析】磁场叠加原理，安培环路定律。
整个电流分成三段，两个半无限长直导线等效于一根无限长直导线，再加一个圆形导线。
无限长直导线的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_{L_1}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B_1\cdot(2\pi R)=\mu_0 I$$
$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

其方向垂直纸面向外。圆形电流的磁场可以用电流元的磁场直接积分得到，方向垂直纸面向里，大小为

$$B_2=\oint_{L_2}\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}l}{4\pi R^2}=\frac{\mu_0 I(2\pi R)}{4\pi R^2}=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

所以总的磁场的方向垂直纸面向里，大小

$$B=B_2-B_1=\frac{\mu_0 I}{2R}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I(\pi-1)}{2\pi R}$$

第 320 题

【2109】一个绕有 500 匝导线的平均周长 50 cm 的细环，载有 0.3 A 电流时，铁芯的相对磁导率为 600。(1) 铁芯中的磁感强度 B 为_____；(2) 铁芯中的磁场强度 H 为_____。($\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$)

解析

【答案】0.226 T；300 A/m。
【解析】磁介质中的安培环路定律。
磁介质中的安培环路定律

$$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I$$
$$H\cdot L=NI$$

$$H = \frac{NI}{L} = \frac{500\times 0.3}{0.5} = 300\ \mathrm{A/m}$$

所以磁感应强度为

$$B = \mu H = \mu_0\mu_r H = 4\pi\times 10^{-7}\times 600\times 300 \approx 0.226\ \mathrm{T}$$

第 321 题

【2401】长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流 I 通过，其间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质。介质中离中心轴距离为 r 的某点处的磁场强度的大小 $H =$______，磁感强度的大小 $B =$______。

解析

【答案】$\frac{I}{2\pi r}$；$\frac{\mu I}{2\pi r}$。

【解析】磁介质中的安培环路定律。

选择以中心轴为圆心，半径为 r 的圆周为回路，由磁介质中的安培环路定律可得

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

$$H\cdot(2\pi r) = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

所以磁感应强度为

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

第 322 题

【2676】在竖直放置的一根无限长载流直导线右侧有一与其共面的任意形状的平面线圈。直导线中的电流由下向上，当线圈平行于导线向下运动时，线圈中的感应电动势______；当线圈以垂直于导线的速度靠近导线时，线圈中的感应电动势______。(填“>0”，“<0” 或 “$=0$”) (设顺时针方向的感应电动势为正)。

解析

【答案】$=0$；<0。

【解析】安培环路定律，法拉第电磁感应定律。

无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定律可得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，越靠近载流导线，r 越小，磁场越大，同一个 r 处，磁场不变。另在由下向上的电流右侧，磁

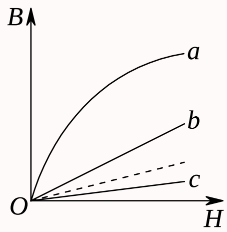
场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

所以当线圈平行于导线向下运动时，通过线圈的磁通量不变，所以感应电动势为零。当线圈靠近导线时，磁场变大，磁通量变大，感应电动势为负。

第 323 题

【5134】图示为三种不同的磁介质的 $B\sim H$ 关系曲线，其中虚线表示的是 $B=\mu_0H$ 的关系。说明 a、b、c 各代表哪一类磁介质的 $B\sim H$ 关系曲线：a 代表_____ 的 $B\sim H$ 关系曲线；b 代表_____ 的 $B\sim H$ 关系曲线；c 代表_____ 的 $B\sim H$ 关系曲线。



解析

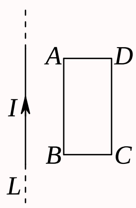
【答案】铁磁质；顺磁质；抗磁质。
【解析】磁介质的类型。
在真空中，载流导体所产生的磁场的磁感应强度记为 $\vec{B}_0$，磁介质放入磁场被磁化后所产生的附加磁场的磁感应强度记为 $\vec{B}'$，磁介质中总的磁感应强度记为 $\vec{B}$，则根据叠加原理，有

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$$

当 $\vec{B}'$ 的方向与 $\vec{B}_0$ 的方向相同时，磁介质称为顺磁质；当 $\vec{B}'$ 的方向与 $\vec{B}_0$ 的方向相反时，磁介质称为抗磁质；顺磁质和抗磁质统称为弱磁性物质，它们的附加磁场 $\vec{B}'$ 的大小远小于 $\vec{B}_0$ 的大小。另一种磁介质称为铁磁质，是强磁性物质，其附加磁场 $\vec{B}'$ 的方向与 $\vec{B}_0$ 相同，$\vec{B}'$ 的大小比 $\vec{B}_0$ 大很多。

第 324 题

【2128】如图所示，在一长直导线 L 中通有电流 I，$ABCD$ 为一矩形线圈，它与 L 皆在纸面内，且 AB 边与 L 平行。(1) 矩形线圈在纸面内向右移动时，线圈中感应电动势方向为_____；(2) 矩形线圈绕 AD 边旋转，当 BC 边已离开纸面正向外运动时，线圈中感应动势的方向为_____。



解析

【答案】$ADCBA$ 绕向；$ADCBA$ 绕向。
【解析】安培环路定律，法拉第电磁感应定律。
无限长载流直导线的磁场可以由安培环路定律可得

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0I$$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，越靠近载流导线，r 越小，磁场越大，同一个 r 处，磁场不变。另在由下向上的电流右侧，磁场的方向为垂直纸面向里。而法拉第电磁感应定律为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

所以当线圈向右移动时，磁场变小，磁通量变小，感应电动势为正，即沿顺时针方向，即 $ADCBA$ 绕向。

若矩形线圈绕 AD 边旋转，当 BC 边已离开纸面正向外运动时，磁通量也是变小，因此感应电动势也是为正，即沿顺时针方向，即 $ADCBA$ 绕向。

第 325 题

【2615】半径为 a 的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为 n，通以交变电流 $i=I_m\sin\omega t$，则围在管外的同轴圆形回路 (半径为 r) 上的感生电动势为______。

解析

【答案】$-\mu_0\pi\omega a^2nI_m\cos\omega t$。

【解析】安培环路定律，法拉第电磁感应定律。

密绕螺线管的磁场只分布在管内，管内为均匀磁场，管外磁场为零，所以管内磁场可以由安培环路定律可得

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$B\cdot L=\mu_0 nLi$$
$$B=\mu_0 ni=\mu_0 nI_m\sin\omega t$$

所以通过管内半径为 r 的同轴圆形回路的磁通量为

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\pi a^2=\mu_0\pi a^2 nI_m\sin\omega t$$

注意这里只有管内部分有磁场，管内没有磁场，所以面积只能用螺线管的截面积。所以感生电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\mu_0\pi\omega a^2nI_m\cos\omega t$$

或者

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\int_S\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\pi a^2=-\mu_0\pi\omega a^2nI_m\cos\omega t$$

第 326 题

【2616】桌子上水平放置一个半径 $r = 10$ cm 的金属圆环，其电阻 $R = 1$ 。若地球磁场磁感强度的竖直分量为 5×10^{-5} T。那么将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电荷 $q =$______。

解析

【答案】3.14×10^{-6} C。

【解析】法拉第电磁感应定律。

思路：求感应电动势，求感应电流，求电荷。

法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

感应电流

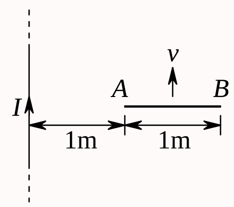
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

所以通过的电荷为

$$\begin{aligned} q = \int \mathrm{d}q = \int I\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathscr{E}}{R}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\Phi}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2BS}{R} = \frac{2B\pi r^2}{R} \\ = \frac{2\times5\times10^{-5}\pi\times(0.1)^2}{1} = 3.14\times10^{-6}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

第 327 题

【2134】金属杆 AB 以匀速 $v = 2$ m/s 平行于长直载流导线运动，导线与 AB 共面且相互垂直，如图所示。已知导线载有电流 $I = 40$ A，则此金属杆中的感应电动势 $\mathscr{E}_i =$______，电势较高端为______。$(\ln 2 = 0.69)$



解析

【答案】1.104×10^{-5} V；A 端。

【解析】动生电动势。

无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

图中金属杆处磁场的方向为垂直纸面向里。动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

以导线所在位置为坐标原点，沿金属杆方向建立 x 轴，则金属杆中的感应电动势为

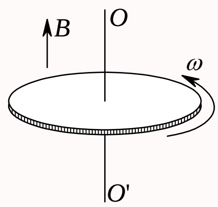
$$\mathscr{E} = \int_1^2 -vB\,\mathrm{d}x = \int_1^2 -v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}[\ln x]_1^2 = -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln 2$$

$$= -\frac{4\pi\times10^{-7}\times40\times2}{2\pi}\times0.69 = -1.104\times10^{-5}\ \mathrm{V}$$

所以电动势从 B 端指向 A 端，A 端电势比较高。

第 328 题

【2144】金属圆板在均匀磁场中以角速度 ω 绕中心轴旋转，均匀磁场的方向平行于转轴，如图所示。这时板中由中心至同一边缘点的不同曲线上总感应电动势的大小______，方向______。



解析

【答案】$\frac{1}{2}B\omega R^2$；由中心指向边缘。

【解析】动生电动势。

圆板可以沿半径方向切割成一根根金属细杆，在转动过程中，每根细杆上都产生感应电动势，因此整个圆板相当于很多个感应电动势的并联，电动势仍然等于一根细杆的感应电动势

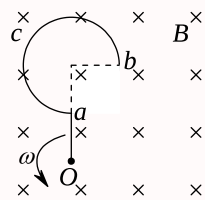
$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

所以感应电动势的方向由中心指向边缘，大小为

$$\mathscr{E} = \int_0^R vB\,\mathrm{d}r = \int_0^R \omega Br\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

第 329 题

【2508】一导线被弯成如图所示形状，acb 为半径为 R 的四分之三圆弧，直线段 Oa 长为 R。若此导线放在匀强磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 的方向垂直图面向内。导线以角速度 ω 在图面内绕 O 点匀速转动，则此导线中的动生电动势 $\mathscr{E}_i =$______，电势最高的点是______。



解析

【答案】$\frac{5}{2}B\omega R^2$；O 点。

【解析】动生电动势。

动生电动势

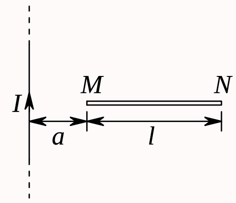
$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -B\omega r\,\mathrm{d}r$$

所以感应电动势的方向由 b 点沿曲线指向 O 点，因此 O 点电势最高。感应电动势的大小为

$$\mathscr{E} = \int_b^O -B\omega r\,\mathrm{d}r = \int_{\sqrt{5}R}^0 -B\omega r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}B\omega(5R^2) = \frac{5}{2}B\omega R^2$$

第 330 题

【2510】如图所示，一段长度为 l 的直导线 MN，水平放置在载电流为 I 的竖直长导线旁与竖直导线共面，并从静止由图示位置自由下落，则 t 秒末导线两端的电势差 $U_M - U_N =$______。



解析

【答案】$\frac{\mu_0 I g t}{2\pi}\ln\frac{a}{a+l}$。

【解析】动生电动势。

自由落体运动 t 秒末的速率为

$$v = gt$$

方向竖直向下。长直导线的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧磁场的方向垂直纸面向里。动生电动势

$$d\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = Bv\,dr = \frac{\mu_0 I g t}{2\pi r}\,dr$$

所以感应电动势的方向由 M 点指向 N 点，所以

$$U_M - U_N = \int_N^M \frac{\mu_0 I g t}{2\pi r}\,dr = \frac{\mu_0 I g t}{2\pi}[\ln r]_{a+l}^{a} = \frac{\mu_0 I g t}{2\pi}\ln\frac{a}{a+l}$$

第 331 题

【2159】无铁芯的长直螺线管的自感系数表达式为 $L = \mu_0 n^2 V$，其中 n 为单位长度上的匝数，V 为螺线管的体积。若考虑端缘效应时，实际的自感系数应______(填：大于、小于或等于) 此式给出的值。若在管内装上铁芯，则 L 与电流______。(填：有关，无关)。

解析

【答案】小于；有关。

【解析】自感系数。

当通以电流 I 时，通过的磁链为 Φ，则自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

考虑端缘效应，就是认为螺线管是有限长而不是无限长的，因此激发磁场的线圈减少，螺线管内的磁场必然会减少一点点，通过的磁链减少，所以实际的自感系数必然会减小。

当线圈中无铁芯时，线圈的自感系数仅依赖于线圈本身的因素，与电流无关；当线圈中有铁芯时，自

感系数与电流有关。

第 332 题

【2180】写出麦克斯韦方程组的积分形式：______，______，______，______。

解析

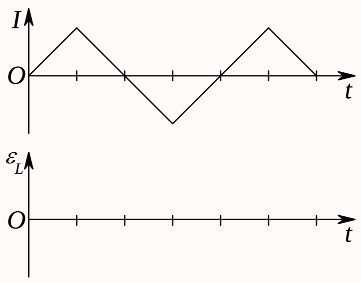
【答案】

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mathscr{E}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q=\int_V \rho\,\mathrm{d}V$$
$$\oint_L \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

【解析】麦克斯韦方程组。

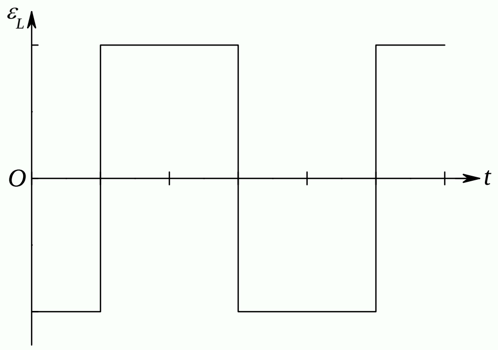
第 333 题

【2521】一线圈中通过的电流 I 随时间 t 变化的曲线如图所示。试定性画出自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 随时间变化的曲线。(以 I 的正向作为 $\mathscr{E}$ 的正向)



解析

【答案】



【解析】自感电动势。

根据自感系数的定义和感应电动势的定义，有

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

第 334 题

【2525】一自感线圈中，电流强度在 0.002 s 内均匀地由 10 A 增加到 12 A，此过程中线圈内自感电动势为 400 V，则线圈的自感系数为 $L =$______。

解析

【答案】0.4 H。
【解析】自感电动势。
根据自感电动势的定义，有

$$\mathscr{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$L = \left|\frac{\mathscr{E}}{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}\right| = \left|\frac{\mathscr{E}\Delta t}{\Delta I}\right| = \frac{400 \times 0.002}{12 - 10} = 0.4\ \mathrm{H}$$

第 335 题

【2338】真空中两只长直螺线管 1 和 2，长度相等，单层密绕匝数相同，直径之比 $d_1/d_2 = 1/4$。当它们通以相同电流时，两螺线管贮存的磁能之比为 $W_1/W_2 =$______。

解析

【答案】$\frac{1}{16}$。
【解析】自感系数，磁场能量。
假定螺线管中的电流为 I，长度为 L，匝数为 N，直径为 d，忽略边缘效应，即可视为无限长直螺线管，则管内磁场可由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot L = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

所以通过螺线管的磁链为

$$\Phi = NBS = N \times \frac{\mu_0 NI}{L} \times \pi\frac{d^2}{4} = \frac{\mu_0 N^2 I\pi d^2}{4L}$$

所以自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4L}$$

所以磁场能量为

$$W=\frac{1}{2}LI^2$$

所以两螺线管的磁能之比为

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{1}{16}$$

第 336 题

【5149】无限长密绕直螺线管通以电流 I，内部充满均匀、各向同性的磁介质，磁导率为 μ。管上单位长度绕有 n 匝导线，则管内部的磁感强度为_____，内部的磁能密度为_____。

解析

【答案】μnI；$\frac{1}{2}\mu n^2I^2$。
【解析】磁场能量密度。
管内磁场可先由介质中的安培环路定律求得磁场强度，再求得磁感应强度

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I$$

$$H\cdot L=nLI$$

$$H=nI$$

$$B=\mu H=\mu nI$$

而磁场的能量密度为

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2\mu}B^2=\frac{1}{2}\mu n^2I^2$$

第 337 题

【2339】反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{4.1}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{4.2}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \tag{4.3}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{4.4}$$

试判断下列结论是包含于或等效于哪一个麦克斯韦方程式的。将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处：

1. 变化的磁场一定伴随有电场；_____
2. 磁感线是无头无尾的；_____

3. 电荷总伴随有电场。______

解析

【答案】(2)；(3)；(1)。

【解析】麦克斯韦方程组。

介质中电场的高斯定理：电荷以发散的方式激发电场

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho\, dV$$

电场的安培环路定律：变化的磁场以涡旋的方式激发电场

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

磁场的高斯定理：磁场是个无旋场，磁力线是一组闭合的曲线

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

介质中磁场的安培环路定律：传导电流和变化的电场以涡旋的方式激发磁场

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

第 338 题

【5160】在没有自由电荷与传导电流的变化电磁场中，沿闭合环路 l(设环路包围的面积为 S)，$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=$______，$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=$______。

解析

【答案】(2)；(3)；(1)。

【解析】麦克斯韦方程组。

介质中电场的高斯定理：电荷以发散的方式激发电场

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho\, dV$$

电场的安培环路定律：变化的磁场以涡旋的方式激发电场

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

磁场的高斯定理：磁场是个无旋场，磁力线是一组闭合的曲线

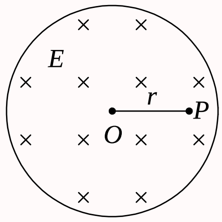
$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

介质中磁场的安培环路定律：传导电流和变化的电场以涡旋的方式激发磁场

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

第 339 题

【0323】图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场 $\vec{E}$，其方向垂直纸面向内，$\vec{E}$ 的大小随时间 t 线性增加，P 为柱体内与轴线相距为 r 的一点，则：(1)P 点的位移电流密度的方向为_____；(2)P 点感生磁场的方向为_____。



解析

【答案】垂直纸面向内；垂直 OP 向下。
【解析】位移电流密度矢量，感生磁场。
位移电流密度矢量

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

所以，电场方向垂直纸面向内，大小随时间线性增加，因此位移电流密度矢量的方向垂直纸面向内。所以，圆柱体内相当于有一个垂直纸面向内的电流通过，由此产生的感生磁场是沿着以圆柱体轴线为中心、通过该点的圆的切线方向，因此图中就是垂直 OP 向下。

第 340 题

【5161】一平行板空气电容器的两极板都是半径为 R 的圆形导体片，在充电时，板间电场强度的变化率为 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$。若略去边缘效应，则两板间的位移电流为_____。

解析

【答案】$\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$。
【解析】位移电流密度矢量，位移电流。
位移电流密度矢量

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

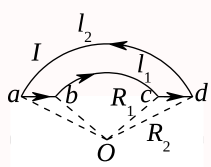
所以，位移电流

$$I_D = j_D S = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \pi R^2 = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

3、计算题

第 341 题

【2251】有一条载有电流 I 的导线弯成如图示 $abcda$ 形状。其中 ab、cd 是直线段，其余为圆弧。两段圆弧的长度和半径分别为 l_1、R_1 和 l_2、R_2，两段圆弧共面共心。求圆心 O 处的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小。

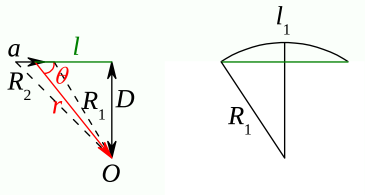


解析

【解析】磁场叠加原理。

电流元的元磁场为

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



可见，$abcd$ 段在 O 点的磁场是垂直纸面向里，da 段在 O 点的磁场是垂直纸面向外，圆弧段的磁场比较容易算，先算两个圆弧的磁场。

bc 圆弧段的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_{bc}=\int_b^c\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R_1^2}=\frac{\mu_0 Il_1}{4\pi R_1^2}$$

da 圆弧段的磁场垂直纸面向外，大小为

$$B_{da}=\int_d^a\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R_2^2}=\frac{\mu_0 Il_2}{4\pi R_2^2}$$

下面再计算两个直线段的磁场。ab 圆弧段的磁场垂直纸面向里，大小为

$$\begin{aligned}B_{ab}&=\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(-\mathrm{d}l)\sin\theta}{r^2}=\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-I\sin\theta\,\mathrm{d}(D\cos\theta/\sin\theta)}{(D/\sin\theta)^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi D}\int_a^b-\sin^3\theta(-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi D}[-\cos\theta]_a^b=\frac{\mu_0 I}{4\pi D}[\cos\theta_a-\cos\theta_b]=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1\sin\theta_b}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_2}{2R_2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right)-\sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]\end{aligned}$$

同样可得 cd 圆弧段的磁场垂直纸面向里，大小为

$$B_{cd}=B_{ab}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right)-\sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]$$

所以 O 点总的磁场大小为

$$\begin{aligned}B=B_{ab}+B_{bc}+B_{cd}-B_{da}&=\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right)-\sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]+\frac{\mu_0 Il_1}{4\pi R_1^2}-\frac{\mu_0 Il_2}{4\pi R_2^2}\\&=\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1\cos\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)}\left[\sin\left(\frac{l_2}{2R_2}\right)-\sin\left(\frac{l_1}{2R_1}\right)\right]+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^2}-\frac{l_2}{R_2^2}\right)\end{aligned}$$

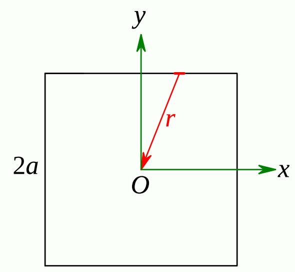
第 342 题

【2253】一线电荷密度为 λ 的带电正方形闭合线框绕过其中心并垂直于其平面的轴以角速度 ω 旋转，试求正方形中心处的磁感强度的大小。【积分公式 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$】

解析

【解析】运动电荷的磁场，磁场叠加原理。

如图，建立直角坐标系。设正方形边长为 $2a$，由于四条边的等效性，总的磁场为一条边磁场的四倍，所以只需要计算一条边的磁场即可。下面以 $y=a$ 的边进行计算。取 $x\to x+\mathrm{d}x$ 为元电荷，则其带电量为 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x$，它到线框中心的距离为 $r=\sqrt{a^2+x^2}$，它的运动速率为 $v=\omega r$。则该运动元电荷的元磁场为



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}q)\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

由于做定轴转动，所以必有 $\vec{v}\perp\vec{r}$，所以元磁场的大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega\lambda\,\mathrm{d}x}{r}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

方向垂直纸面，如果是顺时针转动，则磁场方向垂直纸面向里；如果是逆时针转动，则磁场方向垂直纸面向外。所以总的磁场可以由上式直接积分得到

$$B_1=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

由积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$$

得

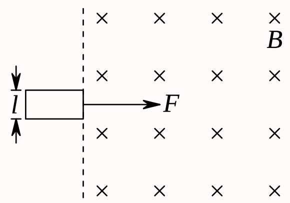
$$B_1=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]_{-a}^{a}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln\frac{a+\sqrt{a^2+a^2}}{-a+\sqrt{(-a)^2+a^2}}\right]=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$$
$$=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\left[\ln(\sqrt{2}+1)^2\right]=\frac{\mu_0\omega\lambda}{2\pi}\ln(\sqrt{2}+1)$$

所以整个线框在中心处产生的总的磁场为

$$B=4B_1=\frac{2\mu_0\omega\lambda}{\pi}\ln(\sqrt{2}+1)$$

第 343 题

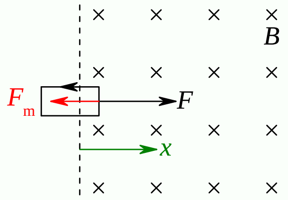
【0313】如图所示，电阻为 R、质量为 m、宽为 l 的矩形导电回路。从所画的静止位置开始受恒力 $\vec{F}$ 的作用。在虚线右方空间内有磁感强度为 $\vec{B}$ 且垂直于图面的均匀磁场。忽略回路自感。求在回路左边未进入磁场前，作为时间函数的速度表示式。



解析

【解析】感应电动势。

思路：线圈进入磁场，磁通量变化，产生感应电动势，产生感应电流，电流在磁场中受力，在任意一个位置受力分析，求加速度，求速度。



如图，设某 t 时刻回路进入磁场 x，速度大小为 v，则通过回路的磁通量为

$$\Phi = Blx$$

由于随着线圈的运动，回路磁通量增大，所以回路的感应电动势的方向为逆时针方向，大小为

$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Blv$$

所以通过回路中的感应电流的方向为逆时针方向，大小为

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

电流元在磁场中会受到安培力的作用

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{m}} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

所以回路上边受到向下的安培力，下边受到向上的安培力，这两个力大小相等，方向相反，互相抵消，左边未进入磁场，不受安培力，右边所受的安培力方向向左，大小为

$$F_{\mathrm{m}} = BIl = \frac{B^2l^2v}{R}$$

所以线圈受到的合力为

$$F - F_{\mathrm{m}} = ma$$
$$F - \frac{B^2l^2v}{R} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$FR - B^2l^2v = mR\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$mR\frac{\mathrm{d}v}{FR - B^2l^2v} = \mathrm{d}t$$
$$\int_0^v mR\frac{\mathrm{d}v}{FR - B^2l^2v} = \int_0^t \mathrm{d}t$$
$$-\frac{mR}{B^2l^2}\left[\ln(FR - B^2l^2v)\right]_0^v = t$$
$$\ln\frac{FR - B^2l^2v}{FR} = -\frac{B^2l^2}{mR}t$$
$$\frac{FR - B^2l^2v}{FR} = \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$
$$v = \frac{FR}{B^2l^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$$

第 344 题

【2653】假设把氢原子看成是一个电子绕核作匀速圆周运动的带电系统。已知平面轨道的半径为 r，电子的电荷为 e，质量为 m_e。将此系统置于磁感强度为 $\vec{B}_0$ 的均匀外磁场中，设 $\vec{B}_0$ 的方向与轨道平面平行，求此系统所受的力矩 $\vec{M}$。

解析

【解析】磁矩，磁力矩。

思路：电子绕核运动，视为分子电流，计算磁矩，磁矩置入磁场，计算磁力矩。

磁矩

$$\vec{p}_{\mathrm{m}}=IS\vec{\mathrm{e}}_n$$
$$S=\pi r^2$$
$$I=\frac{q}{T}=\frac{e}{\frac{2\pi r}{v}}=\frac{ev}{2\pi r}$$
$$p_{\mathrm{m}}=\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2=\frac{evr}{2}$$

提供电子绕核做圆周运动的向心力的力是电子与原子核之间的库仑力

$$m_e\frac{v^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$v^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$$
$$v=\frac{e}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}$$
$$p_{\mathrm{m}}=\frac{er}{2}\times\frac{e}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}=\frac{e^2 r}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}$$

磁矩在磁场中受到的磁力矩为

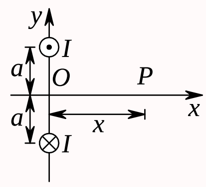
$$\vec{M}=\vec{p}_{\mathrm{m}}\times\vec{B}$$

如果以轨道平面为 xy 平面，电子绕核顺时针转动，则电流逆时针，$\vec{\mathrm{e}}_n=\vec{\mathrm{e}}_z$，设 $\vec{B}=B_0\vec{\mathrm{e}}_x$，则

$$\vec{M}=p_{\mathrm{m}}\vec{\mathrm{e}}_z\times B_0\vec{\mathrm{e}}_x=p_{\mathrm{m}}B_0\vec{\mathrm{e}}_y=\frac{B_0e^2r}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}\vec{\mathrm{e}}_y=\frac{B_0e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m_e}}\vec{\mathrm{e}}_y$$

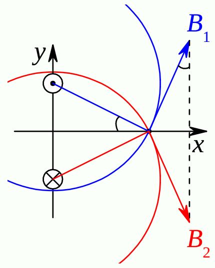
第 345 题

【2054】图所示为两条穿过 y 轴且垂直于 $x-y$ 平面的平行长直导线的正视图，两条导线皆通有电流 I，但方向相反，它们到 x 轴的距离皆为 a。(1) 推导出 x 轴上 P 点处的磁感强度 $\vec{B}(x)$ 的表达式；(2) 求 P 点在 x 轴上何处时，该点的 B 取得最大值。



解析

【解析】安培环路定律，磁场叠加原理。



无限长通电直导线的磁场可以通过安培环路定律求得：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以，两根电流产生的磁场方向如上图所示，大小相等，均为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}}$$

所以，P 点处的磁感强度为

$$\vec{B} = 2B_1\sin\theta\vec{e}_x = 2\times\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}}\times\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\vec{e}_x = \frac{\mu_0 Ia}{\pi(x^2+a^2)}\vec{e}_x$$

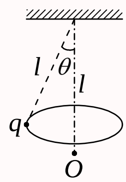
由于 $x^2+a^2 \geqslant a^2$，所以当 $x=0$ 时，$x^2+a^2=a^2$ 取得最小值，相应的磁场取得最大值。当然数学上当

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = 0, \frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2} < 0$$

时，函数取得极大值，所以

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mu_0 Ia(2x)}{\pi(x^2+a^2)^2} = 0 \Rightarrow x=0, x=\pm\infty$$
$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mu_0 Ia[2\times(x^2+a^2)^2-(2x)\times(2x)]}{\pi(x^2+a^2)^4} = -\frac{2\mu_0 Ia[(x^2+a^2)^2-2x^2]}{\pi(x^2+a^2)^4}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = -\frac{2\mu_0 Ia[(a^2)^2]}{\pi(a^2)^4} < 0$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2\mu_0 Ia[(x^2)^2-2x^2]}{\pi(x^2)^4} = 0$$

第 346 题



【2252】绕铅直轴作匀角速度转动的圆锥摆，摆长为 l，摆球所带电荷为 q。求角速度 ω 为何值时，该带电摆球在轴上悬点为 l 处的 O 点产生的磁感强度沿竖直方向的分量值最大。

解析

【解析】运动电荷的磁场。

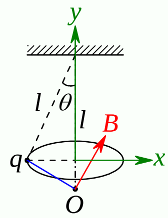
对于圆锥摆，有

$$mg = F\cos\theta$$
$$F\sin\theta = m\omega^2(l\sin\theta)$$
$$\frac{g}{\cos\theta} = \omega^2 l$$

$$\cos\theta=\frac{g}{\omega^2 l},\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}\geqslant\sqrt{\frac{g}{l}}$$

形成圆锥摆的角速度有个最小值！
运动电荷的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$



如图建立直角坐标系。则有

$$\vec{v}=\omega l\sin\theta\vec{e}_z$$
$$\vec{r}=l\sin\theta\vec{e}_x-l(1-\cos\theta)\vec{e}_y$$
$$r=\sqrt{(l\sin\theta)^2+l^2(1-\cos\theta)^2}=l\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2l\sin\frac{\theta}{2}$$
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q(\omega l\sin\theta\vec{e}_z)\times[l\sin\theta\vec{e}_x-l(1-\cos\theta)\vec{e}_y]}{4\pi\left[l\sqrt{2(1-\cos\theta)}\right]^3}$$

$$B_y=\frac{\mu_0 q\omega l^2\sin^2\theta}{4\pi\left[l\sqrt{2(1-\cos\theta)}\right]^3}=\frac{\mu_0 q\omega\sin^2\theta}{4\pi l\left[\sqrt{2(1-\cos\theta)}\right]^3}=\frac{\mu_0 q\omega\frac{\omega^4 l^2-g^2}{\omega^4 l^2}}{4\pi l\left[\sqrt{2\frac{\omega^2 l-g}{\omega^2 l}}\right]^3}=\frac{\mu_0 q(\omega^4 l^2-g^2)}{4\pi(2l)^{3/2}(\omega^2 l-g)^{3/2}}$$
$$=\frac{\mu_0 q(\omega^2 l+g)}{4\pi(2l)^{3/2}(\omega^2 l-g)^{1/2}}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{(\omega^2 l+g)}{(\omega^2 l-g)^{1/2}}$$

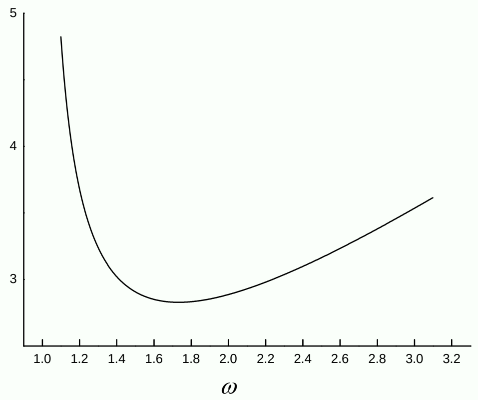
要求 B_y 的极大值，第一个要求它对 ω 的一阶导数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}\omega}=0=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{2\omega l(\omega^2 l-g)^{1/2}-(\omega^2 l+g)\frac{1}{2}(\omega^2 l-g)^{-1/2}(2\omega l)}{\omega^2 l-g}$$
$$=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{2\omega l(\omega^2 l-g)-\omega l(\omega^2 l+g)}{(\omega^2 l-g)^{3/2}}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{\omega l(\omega^2 l-3g)}{(\omega^2 l-g)^{3/2}}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{3/2}}$$
$$\omega=0,\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}},\omega\to\infty$$

二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2B_y}{\mathrm{d}\omega^2}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{3/2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{3/2}}=\frac{(3l^2\omega^2-3gl)(l\omega^2-g)^{3/2}-(l^2\omega^3-3gl\omega)\frac{3}{2}(l\omega^2-g)^{1/2}(2l\omega)}{(l\omega^2-g)^3}$$
$$=\frac{(3l^2\omega^2-3gl)(l\omega^2-g)-3l\omega(l^2\omega^3-3gl\omega)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$
$$=\frac{3l[(l\omega^2-g)(l\omega^2-g)-l^2\omega^4+3gl\omega^2]}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$
$$=\frac{3l[l^2\omega^4+g^2-2gl\omega^2-l^2\omega^4+3gl\omega^2]}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$
$$=\frac{3l[g^2+gl\omega^2]}{(l\omega^2-g)^{5/2}}=\frac{3gl(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2B_y}{\mathrm{d}\omega^2}=\frac{\mu_0 q}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{3gl(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}=\frac{3\mu_0 qgl}{4\pi(2l)^{3/2}}\frac{(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{5/2}}$$

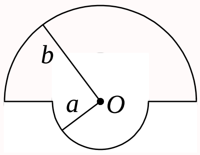
下图是以 $g=1$、$l=1$ 时画出的 $\frac{(l\omega^2+g)}{(l\omega^2-g)^{1/2}}$ 随 ω 的变化关系曲线：



从中也可以看出，存在极小值点，不存在极大值点。所以，怀疑本题有误。

第 347 题

【2269】有一闭合回路由半径为 a 和 b 的两个同心共面半圆连接而成，如图。其上均匀分布线密度为 λ 的电荷，当回路以匀角速度 ω 绕过 O 点垂直于回路平面的轴转动时，求圆心 O 点处的磁感强度的大小。



解析

【解析】运动电荷的磁场。

运动元电荷的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}q)\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

假设回路做顺时针转动，则 $v=\omega r$，每个运动元电荷在 O 处产生的磁场的方向都是垂直纸面向里，所以直接对大小进行积分。第一个计算大半圆的磁场

$$B_1=\int_{L_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\lambda\,\mathrm{d}l)(\omega b)b}{b^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega(\pi b)}{b}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

再计算小半圆的磁场

$$B_2=\int_{L_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\lambda\,\mathrm{d}l)(\omega a)a}{a^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega(\pi a)}{a}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

两个直线段部分的磁场相同，计算一个后直接乘 2 即可

$$B_3=B_4=\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\lambda\,\mathrm{d}r)(\omega r)r}{r^3}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

所以总的磁场的大小为

$$B=B_1+B_2+B_3+B_4=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}+\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$
$$+\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}\times 2=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}+\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\left(\pi+\ln\frac{b}{a}\right)$$

本题也可以使用圆电流的磁场来计算。圆电流在中心的磁场大小

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot(2\pi R)}{R^2}=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

大半圆的等效电流、半径、激发的磁场分别为

$$I_1=\frac{q_1}{T}=\frac{q_1}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\pi b}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\omega b}{2},R_1=b,B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}=\frac{\mu_0}{2b}\frac{\lambda\omega b}{2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

小半圆的等效电流、半径、激发的磁场分别为

$$I_2=\frac{q_2}{T}=\frac{q_2}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\pi a}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\omega a}{2},R_2=a,B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}=\frac{\mu_0}{2a}\frac{\lambda\omega a}{2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

直线段上任意一个元电荷的等效电流、半径、激发的元磁场分别为

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}q}{T}=\frac{\lambda\,\mathrm{d}r}{2\pi/\omega}=\frac{\lambda\omega\,\mathrm{d}r}{2\pi},R=r,\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2R}=\frac{\mu_0}{2r}\frac{\lambda\omega\,\mathrm{d}r}{2\pi}=\frac{\mu_0\lambda\omega\,\mathrm{d}r}{4\pi r}$$

第 348 题

【2569】半径为 R 的薄圆盘均匀带电，总电荷为 q。令此盘绕通过盘心且垂直盘面的轴线匀速转动，角速度为 ω，求轴线上距盘心 x 处的磁感强度的大小。【积分公式 $\int\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2+2a^2}{(a^2+x^2)^{1/2}}+\mathrm{C}$】

解析

【解析】运动电荷的磁场，圆电流的磁场，磁场的叠加原理。

以圆盘中心为坐标原点，转轴为 x，盘面所在平面为 yz 平面，建立直角坐标系。假定 $\vec{\omega}=\omega\vec{e}_x$，待求场点坐标为 $(x,0,0)$，在盘面上 $r\to r+\mathrm{d}r$、$\theta\to\theta+\mathrm{d}\theta$ 处的元电荷带电量为

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{\pi R^2}(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

它到场点的矢量为

$$\vec{r}=(x,0,0)-(0,r\cos\theta,r\sin\theta)=x\vec{e}_x-r\cos\theta\vec{e}_y-r\sin\theta\vec{e}_z$$

它的速度为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times(0,r\cos\theta,r\sin\theta)=-\omega r\sin\theta\vec{e}_y+\omega r\cos\theta\vec{e}_z=\omega r(-\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z)$$

所以该元电荷在场点的元磁场为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{B}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}q)\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\frac{q}{\pi R^2}(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)[\omega r(-\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z)]\times(x\vec{e}_x-r\cos\theta\vec{e}_y-r\sin\theta\vec{e}_z)}{(x^2+r^2)^{3/2}}\\&=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2R^2}\frac{[\vec{e}_x(r\sin^2\theta+r\cos^2\theta)+\vec{e}_y(x\cos\theta)+\vec{e}_z(x\sin\theta)]}{(x^2+r^2)^{3/2}}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2R^2}\frac{[\vec{e}_x(r)+\vec{e}_y(x\cos\theta)+\vec{e}_z(x\sin\theta)]}{(x^2+r^2)^{3/2}}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

对 θ 从 0 到 2π 进行积分，则得圆盘上 $r\to r+\mathrm{d}r$ 一个小圆环的电荷转动时在场点产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2R^2}\frac{\vec{e}_x(r)}{(x^2+r^2)^{3/2}}r^2\,\mathrm{d}r\times 2\pi=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\vec{e}_x$$

对 r 从 0 到 R 进行积分，则得整个圆盘在场点产生的磁场，这里利用题目所给积分公式

$$\int\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2+2a^2}{(a^2+x^2)^{1/2}}+\mathrm{C}$$

所以所求磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\int_0^R\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\vec{e}_x=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\left[\frac{r^2+2x^2}{(x^2+r^2)^{1/2}}\right]_0^R\vec{e}_x=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\left[\frac{R^2+2x^2}{(x^2+R^2)^{1/2}}-2x\right]\vec{e}_x$$

以上用运动电荷的磁场计算得到了结果，下面用圆电流磁场的方法重新计算一遍。
$r\to r+\mathrm{d}r$ 处的带电圆环转动起来时的等效圆电流为

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}q}{T}=\frac{\frac{q}{\pi R^2}\times 2\pi r\,\mathrm{d}r}{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{q\omega r\,\mathrm{d}r}{\pi R^2}$$

在这个圆电流上取 $\theta\to\theta+\mathrm{d}\theta$ 段电流元，则

$$\mathrm{d}\vec{l}=r\,\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta=r\,\mathrm{d}\theta(-\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z)$$

它到场点的矢量为

$$\vec{r}=(x,0,0)-(0,r\cos\theta,r\sin\theta)=x\vec{e}_x-r\cos\theta\vec{e}_y-r\sin\theta\vec{e}_z$$

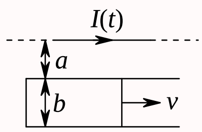
所以该电流元在场点的元磁场为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{B}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{d}I)\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\omega r\,\mathrm{d}r}{\pi R^2}\frac{[r\,\mathrm{d}\theta(-\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z)]\times[x\vec{e}_x-r\cos\theta\vec{e}_y-r\sin\theta\vec{e}_z]}{(x^2+r^2)^{3/2}}\\&=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi^2R^2}\frac{[(-\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z)]\times[x\vec{e}_x-r\cos\theta\vec{e}_y-r\sin\theta\vec{e}_z]}{(x^2+r^2)^{3/2}}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

剩下的计算和前面相同，对角度积分，得到一个圆电流在场点的磁场，对半径积分，得到整个圆盘在场点的磁场。

第 349 题

【2139】如图所示，真空中一长直导线通有电流 $I(t)=I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$(式中 I_0、λ 为常量，t 为时间)，有一带滑动边的矩形导线框与长直导线平行共面，二者相距 a。矩形线框的滑动边与长直导线垂直，它的长度为 b，并且以匀速 $\vec{v}$(方向平行长直导线) 滑动。若忽略线框中的自感电动势，并设开始时滑动边与对边重合，试求任意时刻 t 在矩形线框内的感应电动势 $\mathscr{E}_i$，并讨论 $\mathscr{E}_i$ 方向。



解析

【解析】法拉第电磁感应定律。
本题激发磁场的电流随时间发生变化，所有磁场会随时间发生变化，所以回路中有感生电动势；而导体又发生运动，所以还有动生电动势，可以分别计算这两个，也可以直接从法拉第电磁感应定律出来，先求出任意时间通过线框回路的磁通量，再直接求导得到感应电动势。
以 $t=0$ 时刻滑动边所在位置为坐标原点，水平向右建立 x 轴，则任意 t 时刻，滑动边的位置 $x=vt$，长直导线中通过的电流 $I(t)=I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$，它在空间所激发的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$B=\frac{\mu_0 I_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2\pi r}$$

在线框所在处的磁场的方向是垂直纸面向里，通过线框的磁通量为

$$\Phi=\int_a^{a+b} Bx\,\mathrm{d}r=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2\pi r}vt\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2\pi}vt\ln\frac{a+b}{a}=\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}t\mathrm{e}^{-\lambda t}\ln\frac{a+b}{a}$$

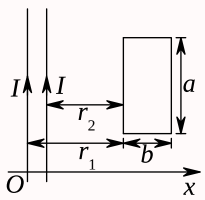
这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}+t\mathrm{e}^{-\lambda t}\times(-\lambda)\right]=\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}(\lambda t-1)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

当 $\lambda t-1<0$，即 $t<\frac{1}{\lambda}$ 时，$\mathscr{E}<0$，感应电动势的方向为逆时针；当 $\lambda t-1>0$，即 $t>\frac{1}{\lambda}$ 时，$\mathscr{E}>0$，感应电动势的方向为顺时针。

第 350 题

【2150】如图所示，两条平行长直导线和一个矩形导线框共面。且导线框的一个边与长直导线平行，他到两长直导线的距离分别为 r_1、r_2。已知两导线中电流都为 $I=I_0\sin\omega t$，其中 I_0 和 ω 为常数，t 为时间。导线框长为 a 宽为 b，求导线框中的感应电动势。



解析

【解析】安培环路定律，法拉第电磁感应定律。

任意 t 时刻，两根通电导线的磁场分别由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B_1\cdot(2\pi x)=\mu_0 I_0\sin\omega t$$

$$B_1=\frac{\mu_0 I_0\sin\omega t}{2\pi x}$$

$$B_2\cdot[2\pi(x-r_1+r_2)=\mu_0 I_0\sin\omega t$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I_0\sin\omega t}{2\pi(x-r_1+r_2)}$$

在线框所在处，两个磁场的方向都是垂直纸面向里，所以总的磁场方向也是垂直纸面向里，大小为

$$B=B_1+B_2=\frac{\mu_0 I_0\sin\omega t}{2\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-r_1+r_2}\right]$$

所以通过线框的磁通量为

$$\Phi=\int_{r_1}^{r_1+b}Ba\,\mathrm{d}x=\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{\mu_0 I_0\sin\omega t}{2\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-r_1+r_2}\right]a\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\mu_0 a I_0\sin\omega t}{2\pi}\left[\ln x+\ln(x-r_1+r_2)\right]_{r_1}^{r_1+b}=\frac{\mu_0 a I_0\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}$$

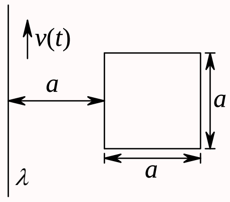
这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所

以感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 a I_0\omega\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}$$

第 351 题

【2407】如图所示，一电荷线密度为 λ 的长直带电线 (与一正方形线圈共面并与其一对边平行) 以变速率 $v=v(t)$ 沿着其长度方向运动，正方形线圈中的总电阻为 R，求 t 时刻方形线圈中感应电流 $i(t)$ 的大小 (不计线圈自身的自感)。



解析

【解析】安培环路定律，法拉第电磁感应定律。
等效电流为

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\lambda\Delta l}{\Delta t}=\lambda v$$

任意 t 时刻，它所激发的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0\lambda v$$

$$B=\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi r}$$

在线框所在处，磁场的方向垂直纸面向里，所以通过线框的磁通量为

$$\Phi=\int_a^{2a}Ba\,\mathrm{d}r=\int_a^{2a}\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi r}a\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\lambda va}{2\pi}\ln\frac{2a}{a}=\frac{\mu_0\lambda av}{2\pi}\ln 2$$

这里，以垂直纸面向里为磁通量的正方向，所以顺时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0\lambda a}{2\pi}(\ln 2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

所以感应电流为

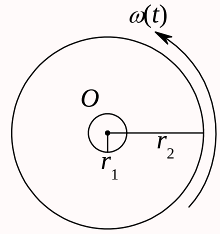
$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=-\frac{\mu_0\lambda a}{2\pi R}(\ln 2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

上式最后结果的正负值表示感应电流的方向，所以其大小为

$$|i|=\frac{\mu_0\lambda a}{2\pi R}(\ln 2)\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$$

第 352 题

【2409】如图所示，一半径为 r_2、电荷线密度为 λ 的均匀带电圆环，里边有一半径为 r_1、总电阻为 R 的导体环，两环共面同心 $(r_2 \gg r_1)$，当大环以变角速度 $\omega = \omega(t)$ 绕垂直于环面的中心轴旋转时，求小环中的感应电流。其方向如何？



解析

【解析】安培环路定律，法拉第电磁感应定律。

当大环绕中心轴转动时，任意瞬间的等效圆电流为

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta l}{\Delta t} = \lambda v = \lambda \omega r_2$$

任意 t 时刻，它在圆心处所激发的磁场方向垂直纸面向外，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I(2\pi r_2)}{4\pi r_2^2} = \frac{\mu_0 I}{2r_2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega r_2}{2r_2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2}$$

小环半径很小，近似认为小环所在处磁场处处相等，则通过小环的磁通量近似为

$$\Phi \approx B\pi r_1^2 = \frac{\mu_0 \lambda \omega \pi r_1^2}{2}$$

这里，以垂直纸面向外为磁通量的正方向，所以逆时针方向为感应电流和感应电动势的正方向。所以感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 \lambda \pi r_1^2}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

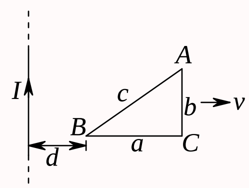
所以感应电流为

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{\mu_0 \lambda \pi r_1^2}{2R}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

当 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} > 0$ 时，$i < 0$，即转速加快时，感应电流沿顺时针方向；当 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} < 0$ 时，$i > 0$，即转速减慢时，感应电流沿逆时针方向。

第 353 题

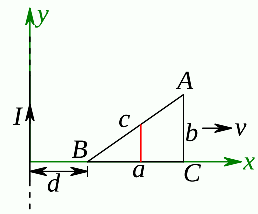
【2499】无限长直导线，通以常定电流 I。有一与之共面的直角三角形线圈 ABC。已知 AC 边长为 b，且与长直导线平行，BC 边长为 a。若线圈以垂直于导线方向的速度 $\vec{v}$ 向右平移，当 B 点与长直导线的距离为 d 时，求线圈 ABC 内的感应电动势的大小和感应电动势的方向。



解析

【解析】安培环路定律，动生电动势，法拉第电磁感应定律。

如图建立直角坐标系，则 AB 直线所在的方程为



$$y = \frac{b}{a}(x-d)$$
$$x = d + \frac{a}{b}y$$

无限长直导线的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B\cdot(2\pi r) = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在导线右侧，磁场的方向垂直纸面向里。动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$$\mathscr{E}_{AB} = \int_A^B (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B vB\,\mathrm{d}y = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\int_b^0 \frac{1}{d+\frac{a}{b}y}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\frac{b}{a}\left[\ln\left(d+\frac{a}{b}y\right)\right]_b^0 = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\frac{b}{a}\ln\frac{d}{d+\frac{a}{b}b} = \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi a}\ln\frac{d}{d+a}$$
$$\mathscr{E}_{BC} = \int_B^C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$$
$$\mathscr{E}_{CA} = \int_C^A (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = vBL_{CA} = v\times\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+d)}\times b = \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi(a+d)}$$
$$\mathscr{E}_{ABCA} = \mathscr{E}_{AB} + \mathscr{E}_{BC} + \mathscr{E}_{CA} = \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi a}\ln\frac{d}{d+a} + \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi(a+d)}$$
$$= \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi}\left[\frac{1}{a}\ln\frac{d}{d+a} + \frac{1}{a+d}\right] = \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi}\left[\frac{1}{a+d} - \frac{1}{a}\ln\frac{d+a}{d}\right]$$

从上式很难直接看出 $\mathscr{E}_{ABCA}$ 的正负，但从相同高度处的 AB、AC 上的元线段来看，AC 处的磁场较弱，所以感应电动势的大小较小，因此 AB 段总的感应电动势的方向从 B 指向 A，AC 段总的感应电动势的方向从 C 指向 A，但 AB 段的感应电动势的大小较大，所以总的感应电动势的方向为沿 $BACA$ 绕向，即上式中 $\mathscr{E}_{ABCA} < 0$。

下面先求出任意时刻通过三角形线框的磁通量，再从法拉第电磁感应定律出发求感应电动势。

$$\Phi = \int_r^{r+a} By\,\mathrm{d}x = \int_r^{r+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{b}{a}(x-r)\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\int_r^{r+a}\left(1-\frac{r}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left(x - r\ln x\right)_r^{r+a}$$
$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\{[(r+a) - r\ln(r+a)] - [r - r\ln r]\} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left[a - r\ln\frac{r+a}{r}\right]$$
$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left[-\ln\frac{r+a}{r} - r\times\frac{r}{r+a}\times\left(-\frac{a}{r^2}\right)\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left[\frac{a}{r+a} - \ln\frac{r+a}{r}\right]v = \frac{\mu_0 Ibv}{2\pi a}\left[\frac{a}{r+a} - \ln\frac{r+a}{r}\right]$$

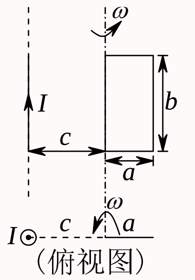
注意上式求导过程中 r 为任意时刻 B 点到通电直导线之间的距离，是随时间变化的函数，其对时间的导数就等于线框运动的速度。要求图示位置时的感应电动势，要先对任意 r 求导后再将 $r = d$ 代入，即

$$\mathscr{E} = \frac{\mu_0 Ibv}{2\pi a}\left[\frac{a}{d+a} - \ln\frac{d+a}{d}\right]$$

由于上面磁通量以垂直纸面向里为正方向，所以相应的感应电动势的正方向为顺时针方向。而从愣次定律也可以判断出感应电动势的方向，线框远离直导线，磁场减弱，磁通量减少，感应电流所产生的附加磁通量要阻止磁通量的减少，所以感应电流的方向为顺时针方向，感应电动势的方向为顺时针方向。

第 354 题

【2743】一边长为 a 及 b 的矩形导线框，它的边长为 b 的边与一载有电流为 I 的长直导线平行，其中一条边与长直导线相距为 c，$c>a$，如图所示。今线框以此边为轴以角速度 ω 匀速旋转，求框中的感应电动势 $\mathscr{E}$。



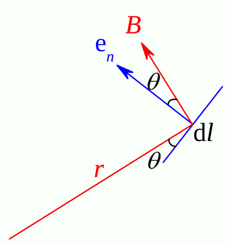
（俯视图）

解析

【解析】安培环路定律，动生电动势，法拉第电磁感应定律。

思路 1：计算任意时刻通过线框的磁通量，再利用法拉第电磁感应定律求得感应电动势。

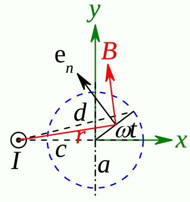
思路 2：本题中磁场分布不随时间变化，线框运动，原则上也可以通过计算动生电动势的方法来求，但由于磁场非匀强，各处磁场的大小和方向都不相同，感觉计算起来不那么容易，当然细致分析一下可以发现，转轴所在边由于静止不动，不发生感应电动势；上下两边，一个可以认为它们运动方向与磁场线平行，运动过程没有切割磁场线，所以也没有产生感应电动势，另一方向简单的计算表明，线上各处的 $\vec{v}\times\vec{B}$ 一定垂直于 $\mathrm{d}\vec{l}$，所以感应电动势为零；所以最后只需要计算与转轴平行的对边所产生的感应电动势，而该边始终和通电直导线平行，各点到通点直导线的距离相等，因此各点的磁场相同，因此感应电动势就是 $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l}$。其中 $(\vec{v}\times\vec{B})\parallel\vec{l}$，而按右图建立坐标系之后，$\vec{v}$ 的方向表达比较容易，难在 $\vec{B}$ 的方向表达。其实同样的，在思路 1 中计算任意时刻的磁通量，也涉及这个问题，面元的方向就是这里 $\vec{v}$ 的方向，但 $\vec{B}$ 的方向很难表示，因此想直接通过矢量计算磁通量 $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 比较麻烦。



但从上图可以看出

$$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{B}\cdot b\,\mathrm{d}l\vec{e}_n=Bb\,\mathrm{d}l\cos\theta=Bb\,\mathrm{d}r$$

以题图所示时刻为 $t=0$ 时刻。则任意 t 时刻时，线框位置如右图所示。无限长直导线的磁场可以由安培环路定律求得



$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu_0 I$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

所以该时刻通过线框的磁通量为

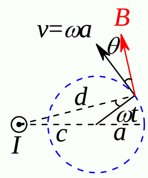
$$\Phi = \int_c^d Bb\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{d}{c} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(c+a\cos\omega t)^2+(a\sin\omega t)^2}}{c}$$
$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos\omega t}}{c}$$

所以感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos\omega t}}\times\frac{1}{2\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos\omega t}}\times 2ac(-\sin\omega t)\times\omega$$
$$= \frac{\mu_0 Iabc\omega\sin\omega t}{2\pi(c^2+a^2+2ac\cos\omega t)}$$

动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$$\mathscr{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l} = vBl\sin\theta = \omega a\times\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\times b\times\sin\theta = \frac{\mu_0 Iab\omega}{2\pi d}\times\sin\theta$$



根据三角形正弦定理得

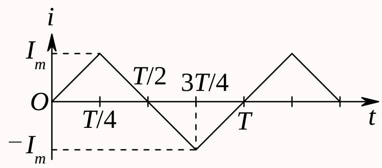
$$\frac{\sin\theta}{c} = \frac{\sin(\pi-\omega t)}{d}$$
$$\sin\theta = \frac{c\sin\omega t}{d}$$

所以感生电动势为

$$\mathscr{E} = \frac{\mu_0 Iab\omega}{2\pi d}\times\frac{c\sin\omega t}{d} = \frac{\mu_0 Iabc\omega\sin\omega t}{2\pi d^2} = \frac{\mu_0 Iabc\omega\sin\omega t}{2\pi(c^2+a^2+2ac\cos\omega t)}$$

第 355 题

【5554】半径为 R 的长直螺线管单位长度上密绕有 n 匝线圈。在管外有一包围着螺线管、面积为 S 的圆线圈，其平面垂直于螺线管轴线。螺线管中电流 i 随时间作周期为 T 的变化，如图所示。求圆线圈中的感生电动势 $\mathscr{E}$。画出 $\mathscr{E}-t$ 曲线，注明时间坐标。



解析

【解析】安培环路定律，感生电动势。
无限长直密绕螺线管的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$
$$B\cdot L = \mu_0 nLi$$
$$B = \mu_0 ni$$

由于螺线管的磁场只分布在管内，而且管内磁场可以近似认为是匀强磁场，所以通过线圈的磁通量

为

$$\Phi = BS = \mu_0 n i \pi R^2$$

所以感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n \pi R^2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

当 $0 < t < \frac{T}{4}$ 时，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{I_m}{T/4} = \frac{4I_m}{T}$，感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T}$$

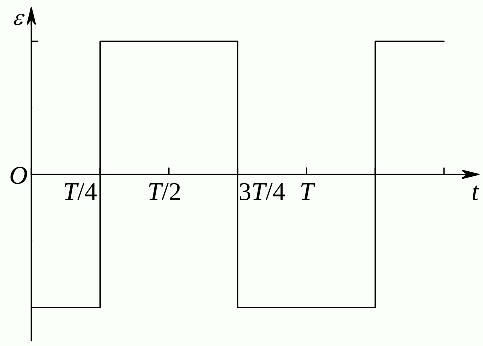
当 $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$ 时，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-2I_m}{T/2} = -\frac{4I_m}{T}$，感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \left(-\frac{4I_m}{T}\right) = \frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T}$$

当 $\frac{3T}{4} < t < T$ 时，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{I_m}{T/4} = \frac{4I_m}{T}$，感应电动势为

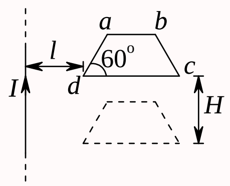
$$\mathscr{E} = -\mu_0 n \pi R^2 \times \frac{4I_m}{T} = -\frac{4\mu_0 n \pi R^2 I_m}{T}$$

所以 $\mathscr{E} - t$ 曲线如下图所示：



第 356 题

【0310】如图所示，一长直导线通有电流 I，其旁共面地放置一匀质金属梯形线框 $abcda$，已知：$da = ab = bc = L$，两斜边与下底边夹角均为 60°，d 点与导线相距 l。今线框从静止开始自由下落 H 高度，且保持线框平面与长直导线始终共面，求：(1) 下落高度为 H 的瞬间，线框中的感应电流为多少？(2) 该瞬时线框中电势最高处与电势最低处之间的电势差为多少？



解析

【解析】安培环路定律，动生电动势。

无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

直线右边磁场方向垂直纸面向里。由于下落过程，通过线框的磁通量保持不变，所以线框中的感应电动势为零，感应电流为零，所以线框做自由落体运动，下落 H 时速率为 $v = \sqrt{2gH}$。动生电动势

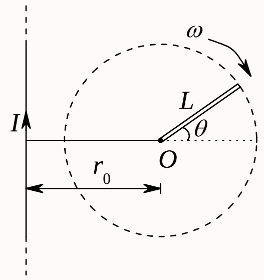
$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi r}\,\mathrm{d}r$$

$$\mathscr{E}_{dc} = \int_l^{l+2L} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\frac{l+2L}{l} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\frac{l+2L}{l} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2gH}}{2\pi} \ln\frac{l+2L}{l}$$

其中 dc 段的长度由图可知为 $L_{dc} = L_{da}\cos 60° + L_{ab} + L_{bc}\cos 60° = 2L$。整个线框中 c 点电势最高，d 点电势最低。

第 357 题

【2327】一无限长竖直导线上通有稳定电流 I，电流方向向上。导线旁有一与导线共面、长度为 L 的金属棒，绕其一端 O 在该平面内顺时针匀速转动，如图所示。转动角速度为 ω，O 点到导线的垂直距离为 $r_0(r_0 > L)$。试求金属棒转到与水平面成 θ 角时，棒内感应电动势的大小和方向。



解析

【解析】安培环路定律，动生电动势。

无限长通电直导线的磁场可以由安培环路定律求得

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

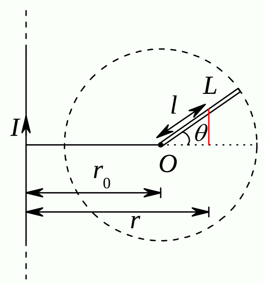
$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

直线右边磁场方向垂直纸面向里。

如右图，杆上取离 O 点距离为 $l \to l + \mathrm{d}l$ 段为研究对象，其速率为 $v = \omega l$，它到通电直导线的距离为 $r = r_0 + l\cos\theta$，所以该处的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l\cos\theta)}$$



该元线段的动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = vB\,\mathrm{d}l = (\omega l) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + l\cos\theta)} \times \mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 \omega I l\,\mathrm{d}l}{2\pi(r_0 + l\cos\theta)} = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \frac{l\,\mathrm{d}l}{r_0 + l\cos\theta}$$

方向从 O 点沿杆指向末端。所以棒内总的感应电动势为

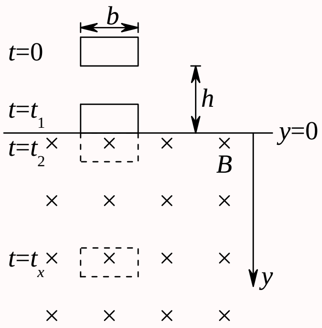
$$\mathscr{E} = \int_0^L \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \frac{l\,\mathrm{d}l}{r_0 + l\cos\theta} = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \int_0^L \frac{l\,\mathrm{d}l}{r_0 + l\cos\theta}$$

$$\frac{l}{r_0+l\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{l\cos\theta}{r_0+l\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{l\cos\theta+r_0-r_0}{r_0+l\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\left(1-\frac{r_0}{r_0+l\cos\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}&=\frac{\mu_0\omega I}{2\pi}\int_0^L\frac{1}{\cos\theta}\left(1-\frac{r_0}{r_0+l\cos\theta}\right)\mathrm{d}l=\frac{\mu_0\omega I}{2\pi\cos\theta}\left[l-\frac{r_0}{\cos\theta}\ln(r_0+l\cos\theta)\right]_0^L\\&=\frac{\mu_0\omega I}{2\pi\cos\theta}\left[L-\frac{r_0}{\cos\theta}\ln\frac{r_0+L\cos\theta}{r_0}\right]\end{aligned}$$

第 358 题

【2769】由质量为 m、电阻为 R 的均匀导线做成的矩形线框，宽为 b，在 $t=0$ 时由静止下落，这时线框的下底边在 $y=0$ 平面上方高度为 h 处 (如图所示)。$y=0$ 平面以上没有磁场；$y=0$ 平面以下则有匀强磁场 $\vec{B}$，其方向在图中垂直纸面向里。现已知在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$，线框位置如图所示，求线框速度 v 与时间 t 的函数关系 (不计空气阻力，且忽略线框自感)。



解析

【解析】动生电动势。

线框进入磁场之前，只受重力作用，做初速度为零的自由落体运动，即当 $0<t<t_1$ 时，$v=gt$，而 $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$。在 t_1 时刻，线圈的速度 $v_1=gt_1=\sqrt{2gh}$。

当线框完全进入磁场之后，$t>t_2$，通过线框的磁通量保持不变，所以没有感生电流，没有感生电动势，线框只受重力作用，加速度为 g，设 t_2 时刻的速度为 v_2，所以任意 $t>t_2$ 时刻的速度为 $v=v_2+g(t-t_2)$。

在线框部分进入磁场时，$t_1<t<t_2$，通过线框的磁通量增加，产生逆时针方向的感应电流，上边框未进入磁场，所受磁力为零。左边框电流向下，磁场垂直纸面向里，根据安培力公式

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}=I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

可知，左边框受到向右的磁力。同样地，对于右边框，电流向上，所受磁力向左，与左边框所受磁力正好抵消。对于下边框，电流向右，磁力向上。设某 $t_1<t<t_2$ 时刻，线框进入磁场的长度为 y，线框的速度为 v，则通过线框的磁通量为

$$\Phi=Bby$$

所以感应电动势的大小为

$$\mathscr{E}=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=Bbv$$

所以感应电流的大小为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{Bbv}{R}$$

所以线框所受的安培力为

$$F_\mathrm{m}=BIL=\frac{B^2b^2v}{R}$$

所以线框受到向下的重力和向上的安培力，根据牛顿第二定律，有

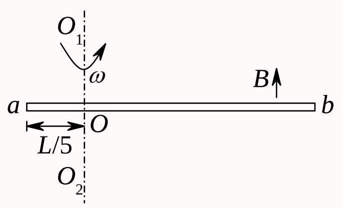
$$mg-\frac{B^2b^2v}{R}=ma$$
$$a=g-\frac{B^2b^2v}{mR}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{B^2b^2v}{mR}}=\mathrm{d}t$$
$$\int_{v_1}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{B^2b^2v}{mR}}=\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t$$
$$-\frac{mR}{B^2b^2}\left[\ln\left(g-\frac{B^2b^2v}{mR}\right)\right]_{v_1}^{v}=t-t_1$$
$$\ln\frac{g-\frac{B^2b^2v}{mR}}{g-\frac{B^2b^2v_1}{mR}}=-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)$$
$$\frac{g-\frac{B^2b^2v}{mR}}{g-\frac{B^2b^2v_1}{mR}}=\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}$$
$$g-\frac{B^2b^2v}{mR}=\left(g-\frac{B^2b^2v_1}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}$$
$$\frac{B^2b^2v}{mR}=g-\left(g-\frac{B^2b^2v_1}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}$$
$$v=\frac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\frac{B^2b^2v_1}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}\right]=\frac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\frac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t-t_1)}\right]$$

当 $t=t_2$ 时，速度为

$$v_2=\frac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\frac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)\mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}(t_2-t_1)}\right]$$

第 359 题

【2509】如图所示，一根长为 L 的金属细杆 ab 绕竖直轴 O_1O_2 以角速度 ω 在水平面内旋转。O_1O_2 在离细杆 a 端 $L/5$ 处。若已知地磁场在竖直方向的分量为 $\vec{B}$。求 ab 两端间的电势差 U_a-U_b。



解析

【解析】动生电动势。

动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\omega lB\,\mathrm{d}l$$

由此可以判断，电动势的方向是从 O 点指向 a 端和 b 端。

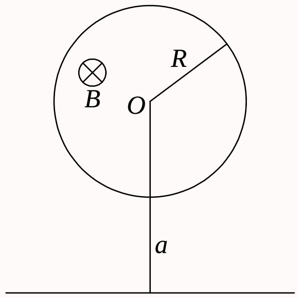
$$\mathscr{E}_{Ob}=\int_O^b B\omega l\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega\left(\frac{4}{5}L\right)^2=\frac{8}{25}B\omega L^2$$
$$\mathscr{E}_{Oa}=\int_O^a B\omega l\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega\left(\frac{1}{5}L\right)^2=\frac{1}{50}B\omega L^2$$

所以

$$
\begin{aligned}
U_a-U_b&=(U_a-U_O)+(U_O-U_b)=\mathscr{E}_{Oa}-\mathscr{E}_{Ob}\\
&=\frac{1}{50}B\omega L^2-\frac{8}{25}B\omega L^2=-\frac{15}{50}B\omega L^2=-\frac{3}{10}B\omega L^2
\end{aligned}
$$

第 360 题

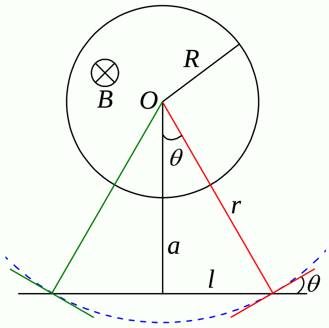
【2742】在半径为 R 的圆柱形空间内，存在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，$\vec{B}$ 的方向与圆柱的轴线平行。有一无限长直导线在垂直圆柱中心轴线的平面内，两线相距为 a，$a>R$，如图所示。已知磁感强度随时间的变化率为 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$，求长直导线中的感应电动势 $\mathscr{E}$，并说明其方向。



解析

【解析】感生电场，感生电动势，法拉第电磁感应定律。

由于磁场分布相对圆柱的轴线对称，所以当磁场发生变化的时候，在以圆柱轴线为中心且垂直于轴线的同一个圆周上，各点的感生电场大小相等，方向沿圆周的切线，即



$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_\mathrm{i}=\oint_L\vec{E}_\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}\vec{l}&=-\int_S\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\
E_\mathrm{i}\cdot(2\pi r)&=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2\\
E_\mathrm{i}&=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

当磁场增加时，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$，感生电场沿逆时针方向；当磁场减少时，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}<0$，感生电场沿顺时针方向。所以沿任意一条曲线的感生电动势为

$$\mathscr{E}_\mathrm{i}=\int_L\vec{E}_\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

所以所求感生电动势为

$$\mathscr{E}_\mathrm{i}=\int_L E_\mathrm{i}\,\mathrm{d}l\cos\theta=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_L\frac{1}{r}\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

由上图可知

$$
\begin{gathered}
a=r\cos\theta,l=r\sin\theta\\
\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\cos\theta,l=a\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\mathrm{d}l=a\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{gathered}
$$

代入感生电动势积分式，得

$$\mathscr{E}_\mathrm{i}=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_L\frac{1}{a}\cos\theta\times\cos\theta\times\frac{a}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

第五章 热学

1、选择题

第 361 题

【4251】一定量的理想气体贮于某一容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m。根据理想气体的分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量平方的平均值

(A) $\overline{v_x^2}=\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$ (B) $\overline{v_x^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$ (C) $\overline{v_x^2}=\dfrac{3kT}{m}$ (D) $\overline{v_x^2}=\dfrac{kT}{m}$

解析

【答案】D

【解析】理想气体的分子模型和统计假设。

根据理想气体的分子模型和统计假设，

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而理想气体的平均平动动能为

$$\overline{E_k}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$$

所以有

$$\overline{v^2}=\frac{3kT}{m}$$
$$\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{kT}{m}$$

第 362 题

【4252】一定量的理想气体贮于某一容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m。根据理想气体的分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量的平均值

(A) $\overline{v_x}=\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$ (B) $\overline{v_x}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$ (C) $\overline{v_x}=\dfrac{8kT}{3\pi m}$ (D) $\overline{v_x}=0$

解析

【答案】D

【解析】理想气体的分子模型和统计假设。

根据理想气体的分子模型和统计假设，分子的运动方向是各向同性的，即沿任意方向运动的概率是

相同的，分子速度在各个方向上的分量的各种统计平均值相等

$$\overline{v_x}=\overline{v_y}=\overline{v_z}=0$$

第 363 题

【4014】温度、压强相同的氦气和氧气，它们分子的平均动能 $\bar{\varepsilon}$ 和平均平动动能 $\bar{w}$ 有如下关系：

(A) $\bar{\varepsilon}$ 和 $\bar{w}$ 都相等 (B) $\bar{\varepsilon}$ 相等，而 $\bar{w}$ 不相等

(C) $\bar{w}$ 相等，而 $\bar{\varepsilon}$ 不相等 (D) $\bar{\varepsilon}$ 和 $\bar{w}$ 都不相等

解析

【答案】C

【解析】能量均分定理。

氦气是单原子分子，自由度为 3，氧气是双原子分子，自由度为 5。但不管是什么分子，平动自由度均为 3，根据能量均分定理，分子的平均平动动能

$$\bar{w}=\frac{3}{2}kT$$

而动能包括平动动能、转动动能和振动动能，单原子分子只有平动动能，双原子分子除了 3 个平动自由度之外，还有 2 个转动自由度，所以

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{He}}=\frac{3}{2}kT$$

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{O_2}}=\frac{5}{2}kT$$

第 364 题

【4022】在标准状态下，若氧气 (视为刚性双原子分子的理想气体) 和氦气的体积比 $V_1/V_2=1/2$，则其内能之比 E_1/E_2 为：

(A) 3/10 (B) 1/2 (C) 5/6 (D) 5/3

解析

【答案】C

【解析】能量均分定理。

理想气体的体积比等于摩尔数比

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$$

氦气是单原子分子，平动自由度为 3，转动自由度为零，振动自由度为零；氧气是双原子分子，平动自由度为 3，转动自由度为 2，振动自由度为零。又理想气体不考虑势能，所以内能就等于其动能，根据能量均分定理，

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{n_1N_A\bar{\varepsilon}_{\mathrm{O_2}}}{n_2N_A\bar{\varepsilon}_{\mathrm{He}}}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{5}{2}kT}{\frac{3}{2}kT}=\frac{5}{6}$$

第 365 题

【4023】水蒸气分解成同温度的氢气和氧气，内能增加了百分之几 (不计振动自由度和化学能)?

(A) 66.7% (B) 50% (C) 25% (D) 0

解析

【答案】C

【解析】能量均分定理。

1 mol 水蒸气分解成 1 mol 的氢气和 0.5 mol 氧气。水蒸气是多原子分子，由于不考虑振动自由度，所以平动自由度为 3，转动自由度为 3；氢气和氧气都是双原子分子，平动自由度为 3，转动自由度为 2。又理想气体不考虑势能，所以内能就等于其动能，根据能量均分定理，1 mol 水蒸气的内能为

$$E_{\mathrm{H_2O}} = 1 \times N_A \times \frac{6}{2}kT = 3RT$$

1 mol 氢气的内能为

$$E_{\mathrm{H_2}} = 1 \times N_A \times \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}RT$$

0.5 mol 氧气的内能为

$$E_{\mathrm{O_2}} = 0.5 \times N_A \times \frac{5}{2}kT = \frac{5}{4}RT$$

所以内能增加了

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{\mathrm{H_2}} + E_{\mathrm{O_2}} - E_{\mathrm{H_2O}}}{E_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{\frac{5}{2}RT + \frac{5}{4}RT - 3RT}{3RT} = \frac{1}{4}$$

第 366 题

【4058】两瓶不同种类的理想气体，它们的温度和压强都相同，但体积不同，则单位体积内的气体分子数 n，单位体积内的气体分子的总平动动能 (E_k/V)，单位体积内的气体质量 ρ，分别有如下关系：

(A) n 不同，E_k/V 不同，ρ 不同 (B) n 不同，E_k/V 不同，ρ 相同

(C) n 相同，E_k/V 相同，ρ 不同 (D) n 相同，E_k/V 相同，ρ 相同

解析

【答案】C

【解析】理想气体物态方程，能量均分定理。

由理想气体物态方程

$$pV = \frac{N}{N_A}RT = \frac{m}{M}RT$$

可得

$$n = \frac{N}{V} = \frac{pN_A}{RT}$$
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

所以，温度 T 相同，压强 p 相同，单位体积内的气体分子数 n 相同；但不同类型的气体的摩尔质量 M 不同，所以单位体积内的气体质量 ρ 不同。另，温度 T 相同，压强 p 相同，但体积 V 不同，则必然摩尔数不同，但单位体积内的分子数相同。根据能量均分定理，任何类型气体分子的平动自由度均为 3，因此每个气体分子的平均平动动能相同，但摩尔数不同，所以分子总数不同，所以总的平动动能不同，但单位体积内的平动动能相同。

第 367 题

【4013】一瓶氦气和一瓶氮气密度相同，分子平均平动动能相同，而且它们都处于平衡状态，则它们
(A) 温度相同、压强相同 (B) 温度、压强都不相同
(C) 温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强 (D) 温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强

解析

【答案】C
【解析】理想气体物态方程，能量均分定理。
不管是什么类型的气体分子，分子的平均平动动能都是 $3kT/2$，所以分子平均平动动能相同时，二者的温度相同。
由理想气体物态方程

$$pV = \frac{N}{N_A}RT = \frac{m}{M}RT$$

可得

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

所以，温度 T 相同，密度 ρ 相同，但摩尔质量 M 不同，所以压强 p 不同，摩尔质量 M 越大，压强 p 越小，所以氦气的摩尔质量小，压强大。

第 368 题

【4012】关于温度的意义，有下列几种说法：(1) 气体的温度是分子平均平动动能的量度；(2) 气体的温度是大量气体分子热运动的集体表现，具有统计意义；(3) 温度的高低反映物质内部分子运动剧烈程度的不同；(4) 从微观上看，气体的温度表示每个气体分子的冷热程度。这些说法中正确的是
(A) (1)、(2)、(4) (B) (1)、(2)、(3) (C) (2)、(3)、(4) (D) (1)、(3)、(4)

解析

【答案】B
【解析】温度的意义。
单个气体分子不存在冷热之说。

第 369 题

【4039】设声波通过理想气体的速率正比于气体分子的热运动平均速率，则声波通过具有相同温度的氧气和氢气的速率之比 v_{O_2}/v_{H_2} 为

(A) 1　　(B) 1/2　　(C) 1/3　　(D) 1/4

解析

【答案】D

【解析】平均速率。

根据平均速率的表达式

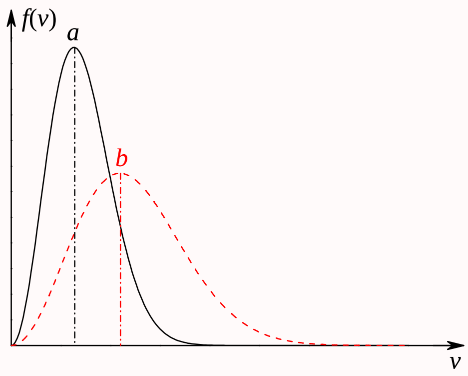
$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

所以温度相同时，平均速率与摩尔质量的根号成反比

$$\frac{\bar{v}_{O_2}}{\bar{v}_{H_2}}=\sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}}=\sqrt{\frac{2}{32}}=\frac{1}{4}$$

第 370 题

【4041】设图示的两条曲线分别表示在相同温度下氧气和氢气分子的速率分布曲线；令 $(v_p)_{O_2}$ 和 $(v_p)_{H_2}$ 分别表示氧气和氢气的最概然速率，则：



(A) 图中 a 表示氧气分子的速率分布曲线；$(v_p)_{O_2}/(v_p)_{H_2}=4$

(B) 图中 a 表示氧气分子的速率分布曲线；$(v_p)_{O_2}/(v_p)_{H_2}=1/4$

(C) 图中 b 表示氧气分子的速率分布曲线；$(v_p)_{O_2}/(v_p)_{H_2}=1/4$

(D) 图中 b 表示氧气分子的速率分布曲线；$(v_p)_{O_2}/(v_p)_{H_2}=4$

解析

【答案】B

【解析】最概然速率。

根据最概然速率的表达式

$$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

所以温度相同时，最概然速率与摩尔质量的根号成反比

$$\frac{(v_p)_{O_2}}{(v_p)_{H_2}}=\sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}}=\sqrt{\frac{2}{32}}=\frac{1}{4}$$

第 371 题

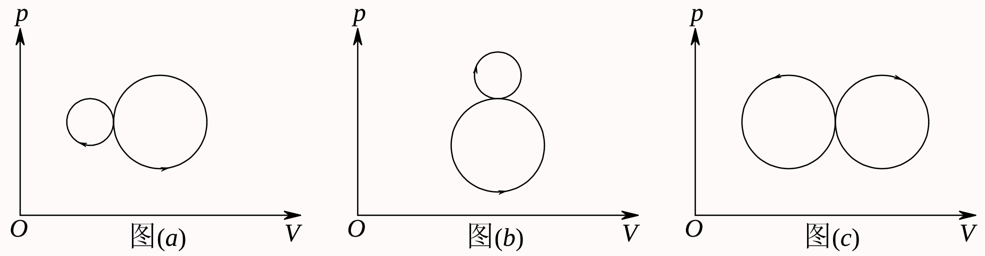
【4084】图 (a)、(b)、(c) 各表示联接在一起的两个循环过程，其中 (c) 图是两个半径相等的圆构成的两个循环过程，图 (a) 和 (b) 则为半径不等的两个圆。那么：

(A) 图 (a) 总净功为负。图 (b) 总净功为正。图 (c) 总净功为零

(B) 图 (a) 总净功为负。图 (b) 总净功为负。图 (c) 总净功为正

(C) 图 (a) 总净功为负。图 (b) 总净功为负。图 (c) 总净功为零

(D) 图 (a) 总净功为正。图 (b) 总净功为正。图 (c) 总净功为负



解析

【答案】C

【解析】$p-V$ 图，做功。

在 $p-V$ 图中，闭合曲线所包围的面积表示循环过程所做的总功，其中顺时针的正循环做正功，逆时针的逆循环做负功。所以图 (a) 中，左边正循环所做的正功小于右边逆循环的负功，总功为负；图 (b) 中，上面正循环所做的正功小于下面逆循环的负功，总功为负；图 (c) 中，右边正循环所做的正功等于左边逆循环的负功，总功为零。

第 372 题

【4133】关于可逆过程和不可逆过程的判断：(1) 可逆热力学过程一定是准静态过程；(2) 准静态过程一定是可逆过程；(3) 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程；(4) 凡有摩擦的过程，一定是不可逆过程。以上四种判断，其中正确的是

(A) (1)、(2)、(3) (B) (1)、(2)、(4) (C) (2)、(4) (D) (1)、(4)

解析

【答案】D

【解析】准静态过程，可逆过程，不可逆过程。

准静态过程是进行得无限缓慢，系统经历的每一个中间过程都可以看成是平衡态的热力学过程。

可逆过程是指过程进行方向相反时，从末态回到初态，系统和外界完全恢复原状的热力学过程。

不可逆过程并不是指过程不能反向进行，而是说过程反向进行时，从末态回到初态时，系统和外界不能同时完全恢复原状的热力学过程，可能系统恢复了原状，但外界没有恢复原状，也可能外界恢复了原状，但系统没有恢复原状，还可能是系统和外界都不能恢复原状。

无摩擦的准静态过程一定是可逆过程。

自然界中自发发生的宏观过程一定是不可逆过程。

第 373 题

【4098】质量一定的理想气体，从相同状态出发，分别经历等温过程、等压过程和绝热过程，使其体积增加一倍。那么气体温度的改变 (绝对值) 在

(A) 绝热过程中最大，等压过程中最小 (B) 绝热过程中最大，等温过程中最小

(C) 等压过程中最大，绝热过程中最小 (D) 等压过程中最大，等温过程中最小

解析

【答案】D

【解析】理想气体物态方程，过程方程。

理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$
$$T = \frac{pV}{nR}$$

初态设为 (p_1, V_1, T_1)，末态设为 (p_2, V_2, T_2)，依题意，$V_2 = 2V_1$。

等温过程，$T_2 = T_1$，所以温度改变量 $\Delta T = |T_2 - T_1| = 0$。

等压过程，$p_2 = p_1$，所以

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = \frac{p_1(2V_1)}{nR} = 2\frac{p_1V_1}{nR} = 2T_1$$
$$\Delta T = |T_2 - T_1| = T_1$$

绝热过程，过程方程 $pV^\gamma = \mathrm{C}$，其中 $\gamma > 1$，过程方程还有其他形式

$$\mathrm{C} = pV \times V^{\gamma-1} = nRTV^{\gamma-1}$$
$$T = \frac{\mathrm{C}}{nRV^{\gamma-1}}$$

所以有

$$T_1 = \frac{\mathrm{C}}{nRV_1^{\gamma-1}}$$
$$T_2 = \frac{\mathrm{C}}{nRV_2^{\gamma-1}} = \frac{\mathrm{C}}{nR(2V_1)^{\gamma-1}} = \frac{1}{2^{\gamma-1}}\frac{\mathrm{C}}{nRV_1^{\gamma-1}} = \frac{1}{2^{\gamma-1}}T_1$$
$$\Delta T = |T_2 - T_1| = \left|\frac{1}{2^{\gamma-1}} - 1\right| T_1 = \left|1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right| T_1$$
$$\gamma > 1 \Rightarrow \gamma - 1 > 0 \Rightarrow 2^{\gamma-1} > 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{2^{\gamma-1}} > 0 \Rightarrow 1 > 1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}} > 0 \Rightarrow \Delta T < T_1$$

第 374 题

【4089】有两个相同的容器，容积固定不变，一个盛有氨气，另一个盛有氢气（看成刚性分子的理想气体），它们的压强和温度都相等，现将 5 J 的热量传给氢气，使氢气温度升高，如果使氨气也升高同样的温度，则应向氨气传递热量是：

(A) 6 J (B) 5 J (C) 3 J (D) 2 J

解析

【答案】A
【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律。
氢气是刚性双原子分子，自由度为 $i_{\mathrm{H_2}}=5$，氨气是刚性多原子分子，自由度为 $i_{\mathrm{NH_3}}=6$。依题意，两个气体压强、温度、体积均相等，根据理想气体物态方程

$$pV=nRT$$

所以二者的摩尔数也相等。而容器的容积固定，所以气体的体积不变，等容过程，气体不做功，根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

外界传递给系统的热量全部用来增加系统的内能，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

所以

$$\Delta E=\frac{i}{2}nR\Delta T=Q$$
$$\frac{Q_{\mathrm{H_2}}}{Q_{\mathrm{NH_3}}}=\frac{i_{\mathrm{H_2}}}{i_{\mathrm{NH_3}}}$$
$$Q_{\mathrm{NH_3}}=\frac{i_{\mathrm{NH_3}}}{i_{\mathrm{H_2}}}Q_{\mathrm{H_2}}=\frac{6}{5}\times 5=6\ \mathrm{J}$$

原文件中提供的答案是 C，疑似错误。从网上找到另一个完全类似的题目，只是题目中的氨气换成了氦气，那么氦气是单原子分子，自由度为 $i_{\mathrm{He}}=3$，则算出来的答案是 3 J。

第 375 题

【4094】1 mol 的单原子分子理想气体从状态 A 变为状态 B，如果不知是什么气体，变化过程也不知道，但 A、B 两态的压强、体积和温度都知道，则可求出：
(A) 气体所作的功
(B) 气体内能的变化
(C) 气体传给外界的热量
(D) 气体的质量

解析

【答案】B
【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律。
根据理想气体物态方程

$$pV=nRT$$

依题意，已知压强、温度、体积，则可以求出气体的摩尔数，但气体的类型不懂，无法确定其摩尔质量，所以气体的质量无法确定。
题目给定的气体是单原子分子理想气体，所以其自由度为 $i=3$，其内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

始末状态的温度已知，所以温度的变化量 ΔT 已知，所以内能的变化量 ΔE 也可求。根据热力学第一定律

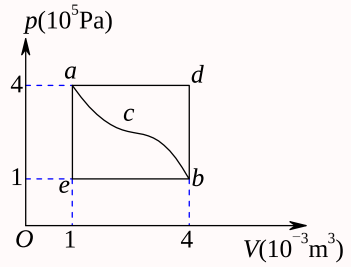
$$\Delta E = Q - W$$

过程未知，所以 Q 和 W 无法确定。

第 376 题

【4100】一定量的理想气体经历 acb 过程时吸热 500 J，则经历 $acbda$ 过程时，吸热为

(A) -1200 J (B) -700 J (C) -400 J (D) 700 J



解析

【答案】B

【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律。

根据理想气体物态方程

$$pV = nRT$$

根据题目所给图中数据，a、b 两态的温度相等，因此两态气体的内能相等，所以 bda 过程内能的变化量为零，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

bda 过程系统所吸收的热量 Q 等于过程气体对外所做的功 W。

而 bd 过程是等容过程，气体所做功 $W_{bd} = 0$，da 过程为等压过程，气体所做功为

$$W_{da} = p\Delta V = p(V_a - V_d) = 4 \times 10^5 \times (1-4) \times 10^{-3} = -1200\text{J}$$

所以

$$Q_{bda} = W_{bda} = W_{bd} + W_{da} = 0 - 1200 \text{ J}$$
$$Q_{acbda} = Q_{acb} + Q_{bda} = 500 - 1200 = -700 \text{ J}$$

第 377 题

【4095】一定量的某种理想气体起始温度为 T，体积为 V，该气体在下面循环过程中经过三个平衡过程：(1) 绝热膨胀到体积为 $2V$，(2) 等体变化使温度恢复为 T，(3) 等温压缩到原来体积 V，则此整个循环过程中

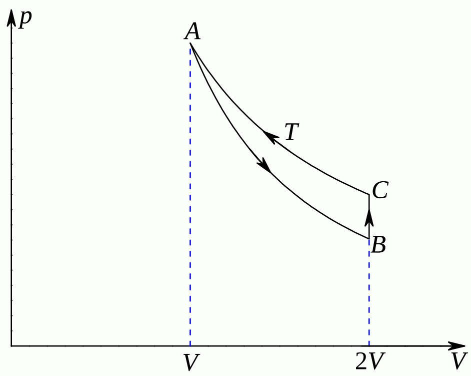
(A) 气体向外界放热 (B) 气体对外界作正功

(C) 气体内能增加 (D) 气体内能减少

解析

【答案】A

【解析】热力学第一定律。



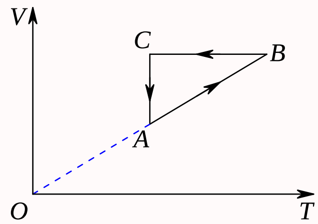
依题意，循环过程的 $p-V$ 图如图所示。

对于一个循环过程，始态和末态重合，内能保持不变，而由图可以看出，这个循环是一个逆循环，所以循环过程外界对系统做正功，系统对外界作负功，根据热力学第一定律，

$$\Delta E = Q - W$$

内能不变，$\Delta E = 0$，系统对外界做负功，$W < 0$，所以 $Q < 0$，即系统向外界放出热量。

第 378 题



【4116】一定量理想气体经历的循环过程用 $V-T$ 曲线表示如图。在此循环过程中，气体从外界吸热的过程是

(A) $A \to B$ (B) $B \to C$

(C) $C \to A$ (D) $B \to C$ 和 $C \to A$

解析

【答案】A

【解析】热力学第一定律。

由题可以看出，$A \to B$ 是等压膨胀升温过程，$B \to C$ 是等容降温过程，$C \to A$ 是等温压缩过程。根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

$$Q = \Delta E + W$$

$A \to B$ 是等压膨胀升温过程，膨胀，气体对外做功，$W > 0$，升温，内能增加，$\Delta E > 0$，所以 $Q > 0$，气体从外界吸收热量。

$B \to C$ 是等容降温过程，等容，气体不做功，$W = 0$，降温，内能降低，$\Delta E < 0$，所以 $Q < 0$，气体释放热量到外界。

$C \to A$ 是等温压缩过程，等温，内能不变，$\Delta E = 0$，压缩，外界对气体做功，$W < 0$，所以 $Q < 0$，气体释放热量到外界。

第 379 题

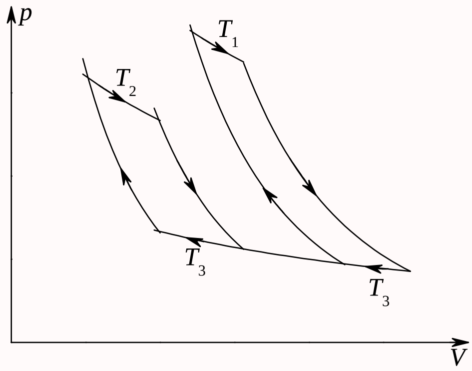
【4121】两个卡诺热机的循环曲线如图所示，一个工作在温度为 T_1 与 T_3 的两个热源之间，另一个工作在温度为 T_2 与 T_3 的两个热源之间，已知这两个循环曲线所包围的面积相等。由此可知：

(A) 两个热机的效率一定相等

(B) 两个热机从高温热源所吸收的热量一定相等

(C) 两个热机向低温热源所放出的热量一定相等

(D) 两个热机吸收的热量与放出的热量（绝对值）的差值一定相等



解析

【答案】D

【解析】卡诺热机的效率。

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

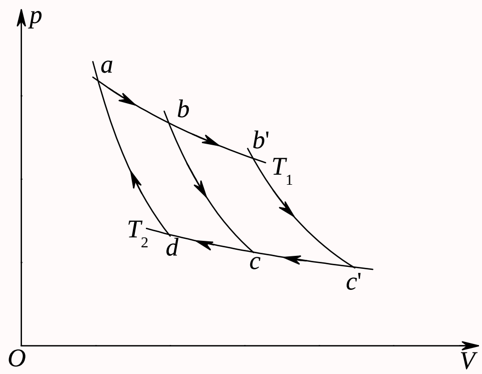
而在 $p-V$ 图中，循环曲线所包围的面积表示循环过程系统对外界所做的功，顺时针的正循环，系统做正功，逆时针的逆循环，系统做负功。依题意，两个循环过程的面积相等，所以两个过程系统对外界所做的功相等，此功等于系统从高温吸收的热量与释放到低温的热量之间的差值。而两个循环，低温热源的温度相同，均为 T_3，但高温热源的温度不等，分别为 T_1 和 T_2，所以两个热机的效应不等。

第 380 题

【4122】如果卡诺热机的循环曲线所包围的面积从图中的 $abcda$ 增大为 $ab'c'da$，那么循环 $abcda$ 与 $ab'c'da$ 所作的净功和热机效率变化情况是：

(A) 净功增大，效率提高 (B) 净功增大，效率降低

(C) 净功和效率都不变 (D) 净功增大，效率不变



解析

【答案】D

【解析】卡诺热机的效率。

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量

Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，循环 $ab'c'da$ 比 $abcda$ 的面积大，所以所做净功大，但两个循环的高低温热源相同，所以效率不变。

第 381 题

【4123】在温度分别为 327℃ 和 27℃ 的高温热源和低温热源之间工作的热机，理论上的最大效率为

(A) 25% (B) 50% (C) 75% (D) 91.74%

解析

【答案】B

【解析】卡诺定理，卡诺热机的效率。

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

以上温度使用的是热力学温标，所以 $T_1 = 327 + 273 = 600$ K，$T_2 = 27 + 273 = 300$ K，而根据卡诺定理，所有热机中卡诺热机的效率最高，所以理论上的最大效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{600} = 0.5 = 50\%$$

第 382 题

【4124】设高温热源的热力学温度是低温热源的热力学温度的 n 倍，则理想气体在一次卡诺循环中，传给低温热源的热量是从高温热源吸取热量的

(A) n 倍 (B) $n-1$ 倍 (C) $\frac{1}{n}$ 倍 (D) $\frac{n+1}{n}$ 倍

解析

【答案】C

【解析】卡诺热机的效率。

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$T_1 = nT_2$，所以

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n}$$

第 383 题

【4125】有人设计一台卡诺热机 (可逆的)。每循环一次可从 400 K 的高温热源吸热 1800 J，向 300 K 的低温热源放热 800 J。同时对外作功 1000 J，这样的设计是

(A) 可以的，符合热力学第一定律

(B) 可以的，符合热力学第二定律

(C) 不行的，卡诺循环所作的功不能大于向低温热源放出的热量

(D) 不行的，这个热机的效率超过理论值

解析

【答案】D

【解析】热力学第一定律，热力学第二定律，卡诺热机的效率。

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量 Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$Q_1=1800$ J，$Q_2=800$ J，$W=1000$ J，$T_1=400$ K，$T_2=300$ K，所以热机效率的理论值为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{300}{400}=\frac{1}{4}$$

而设计的热机效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{1000}{1800}=\frac{5}{9}>\frac{1}{4}$$

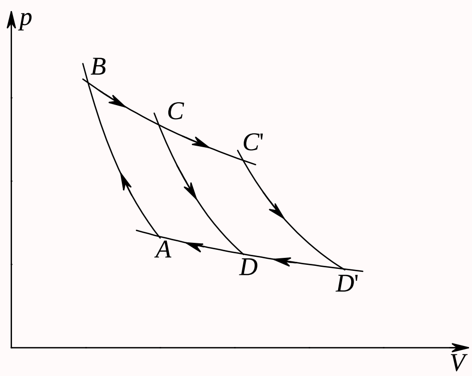
$W=Q_1-Q_2$，不违反热力学第一定律，但设计的效率超过理论值，所以是不可行的。

第 384 题

【4126】如图表示的两个卡诺循环，第一个沿 $ABCDA$ 进行，第二个沿 $ABC'D'A$ 进行，这两个循环的效率 η_1 和 η_2 的关系及这两个循环所作的净功 W_1 和 W_2 的关系是

(A) $\eta_1=\eta_2$，$W_1=W_2$ (B) $\eta_1>\eta_2$，$W_1=W_2$

(C) $\eta_1=\eta_2$，$W_1>W_2$ (D) $\eta_1=\eta_2$，$W_1<W_2$



解析

【答案】D

【解析】卡诺热机的效率，$p-V$ 图。

工作在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间的卡诺热机，在一个循环过程中从高温热源处吸收了热量

Q_1，释放了 Q_2 热量到低温热源处，对外做了功 W，该热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，循环 $ABC'D'A$ 比 $ABCDA$ 的面积大，所以所做净功大，但两个循环的高低温热源相同，所以效率不变。

第 385 题

【4135】根据热力学第二定律可知：

(A) 功可以全部转换为热，但热不能全部转换为功

(B) 热可以从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体

(C) 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程

(D) 一切自发过程都是不可逆的

解析

【答案】D

【解析】热力学第二定律。

在等温膨胀过程中，系统所吸收的热量全部转化成功。

热不能自动从低温传到高温，但在外界做功的条件下，可以实现，比如制冷机。

不可逆过程并不是不能反向进行，而是反向进行的时候，系统和外界不能完全恢复原状。

一切自发的宏观过程都是不可逆的。

第 386 题

【4136】根据热力学第二定律判断下列哪种说法是正确的

(A) 热量能从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体

(B) 功可以全部变为热，但热不能全部变为功

(C) 气体能够自由膨胀，但不能自动收缩

(D) 有规则运动的能量能够变为无规则运动的能量，但无规则运动的能量不能变为有规则运动的能量

解析

【答案】C

【解析】热力学第二定律。

热不能自动从低温传到高温，但在外界做功的条件下，可以实现，比如制冷机。

在等温膨胀过程中，系统所吸收的热量全部转化成功。

在一定的条件下，无规则运动的能量也可以变为有规则运动的能量。

气体自由膨胀是一个自发的过程，自发的过程是不可逆的，所以气体不会自动收缩，除非外界条件发生变化。

第 387 题

【4142】一绝热容器被隔板分成两半，一半是真空，另一半是理想气体。若把隔板抽出，气体将进行自由膨胀，达到平衡后

(A) 温度不变，熵增加 (B) 温度升高，熵增加

(C) 温度降低，熵增加 (D) 温度不变，熵不变

解析

【答案】A

【解析】热力学第一定律，熵增加原理。

容器绝热，所以过程气体不吸热；自由膨胀，过程气体不做功；根据热力学第一定律，气体内能不变。而理想气体的内能仅仅与温度有关，内能不变，温度不变。

但气体的自由膨胀是一个自发的过程，是一个不可逆的过程，因此根据熵增加原理，过程熵增加。

第 388 题

【4143】“理想气体和单一热源接触作等温膨胀时，吸收的热量全部用来对外作功。”对此说法，有如下几种评论，哪种是正确的？

(A) 不违反热力学第一定律，但违反热力学第二定律

(B) 不违反热力学第二定律，但违反热力学第一定律

(C) 不违反热力学第一定律，也不违反热力学第二定律

(D) 违反热力学第一定律，也违反热力学第二定律

解析

【答案】C

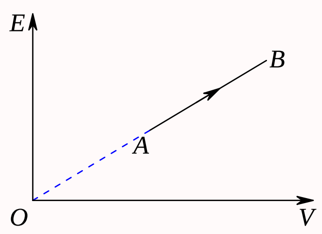
【解析】热力学第一定律，热力学第二定律。

等温膨胀过程，温度不变，内能不变，气体膨胀，对外做功，根据热力学第一定律，气体吸收的热量等于气体对外所做的功，因此没有违反热力学第一定律。对于一个循环过程，气体不可能把吸收到的热量全部用来做功，但这里的过程并不是一个循环过程，所以与第二定律不矛盾。

第 389 题

【4101】某理想气体状态变化时，内能随体积的变化关系如图中 AB 直线所示。$A \to B$ 表示的过程是

(A) 等压过程 (B) 等体过程 (C) 等温过程 (D) 绝热过程



解析

【答案】A

【解析】理想气体的内能。

理想气体的内能只与温度有关，而且是成正比

$$E=\frac{i}{2}RT$$

所以，由图中可见，内能与体积与正比，也就是温度与体积成正比，由理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

可得

$$\frac{T}{V}=\frac{p}{nR}$$

所以过程是等压过程。

第 390 题

【4056】若理想气体的体积为 V，压强为 p，温度为 T，一个分子的质量为 m，k 为玻尔兹曼常量，R 为普适气体常量，则该理想气体的分子数为：

(A) pV/m　(B) $pV/(kT)$　(C) $pV/(RT)$　(D) $pV/(mT)$

解析

【答案】B

【解析】理想气体的物态方程。

由理想气体的物态方程

$$pV=nRT=\frac{N}{N_A}RT=NkT$$

可得

$$N=\frac{pV}{kT}$$

第 391 题

【4407】气缸内盛有一定量的氢气 (可视作理想气体)，当温度不变而压强增大一倍时，氢气分子的平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是：

(A) $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都增大一倍　(B) $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都减为原来的一半

(C) $\bar{Z}$ 增大一倍而 $\bar{\lambda}$ 减为原来的一半　(D) $\bar{Z}$ 减为原来的一半而 $\bar{\lambda}$ 增大一倍

解析

【答案】C

【解析】理想气体的物态方程，平均碰撞频率，平均自由程。

由理想气体的物态方程

$$pV=\frac{N}{N_A}RT$$

可得，T 不变，p 变成 $2p$ 时，V 变成 $V/2$。分子数不变，体积变小，所以单位体积的分子数即分子数密度增大一倍，温度不变，分子的平均速率不变，所以单位时间走过的路程不变，单位时间遇到的分子数越多，即碰撞的频率越大，而两次碰撞之间分子走过的路程（平均自由程）越短。
平均碰撞频率

$$\bar{Z}=\sqrt{2}n\pi d^2\bar{v}$$

平均自由程

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

第 392 题

【4465】在一封闭容器中盛有 1 mol 氦气 (视作理想气体)，这时分子无规则运动的平均自由程仅决定于：

(A) 压强 p (B) 体积 V (C) 温度 T (D) 平均碰撞频率 $\bar{Z}$

解析

【答案】B
【解析】平均自由程。
平均自由程

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}=\frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$$

其中对于特定的气体，分子的有效直径 d 可以认为是个常数，因此平均自由程决定于气体的分子数密度 n。而对于 1 mol 氦气，分子的总数固定，所以分子数密度取决于气体的体积，即容器的容积。

第 393 题

【4955】容积恒定的容器内盛有一定量某种理想气体，其分子热运动的平均自由程为 $\bar{\lambda}_0$，平均碰撞频率为 $\bar{Z}_0$，若气体的热力学温度降低为原来的 1/4 倍，则此时分子平均自由程 $\bar{\lambda}$ 和平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 分别为：

(A) $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0$，$\bar{Z}=\bar{Z}_0$ (B) $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0$，$\bar{Z}=\frac{1}{2}\bar{Z}_0$

(C) $\bar{\lambda}=2\bar{\lambda}_0$，$\bar{Z}=2\bar{Z}_0$ (D) $\bar{\lambda}=\sqrt{2}\bar{\lambda}_0$，$\bar{Z}=\frac{1}{2}\bar{Z}_0$

解析

【答案】B
【解析】平均自由程，平均碰撞频率，平均速率。
平均自由程

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

平均碰撞频率

$$\bar{Z}=\sqrt{2}n\pi d^2\bar{v}$$

容器的容积恒定，所以气体的体积固定，一定量的气体，所以气体的分子数固定，所以分子数密度 n 恒定。而对于特定的气体，分子的有效直径 d 可以认为是个常数，因此温度变化时，平均自由程不变，但分子的平均速率

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

与温度的开根号成正比，所以温度变为原来的 1/4，平均速率变为原来的 1/2，所以平均碰撞频率也变为原来的 1/2。

2、填空题

第 394 题

【4008】若某种理想气体分子的方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}=450\ \mathrm{m/s}$，气体压强为 $p=7\times10^4\ \mathrm{Pa}$，则该气体的密度为 $\rho=$______。

解析

【答案】$1.037\ \mathrm{kg/m^3}$

【解析】方均根速率，理想气体物态方程。

方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

所以

$$\frac{RT}{M}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而根据理想气体的物态方程

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

可得

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}=\frac{p}{RT/M}=\frac{p}{\frac{1}{3}\overline{v^2}}=\frac{3p}{\overline{v^2}}=\frac{3\times7\times10^4}{450^2}\approx1.037\ \mathrm{kg/m^3}$$

第 395 题

【4253】一定量的理想气体贮于某一容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m。根据理想气体分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量的下列平均值 $\overline{v_x}=$______，$\overline{v_x^2}=$______。

解析

【答案】0；$\dfrac{kT}{m}$

【解析】理想气体分子模型和统计假设，方均根速率。

根据理想气体分子模型和统计假设

$$\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$$
$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而根据方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

可得

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3kT}{m} = \frac{kT}{m}$$

第 396 题

【4017】1 mol 氧气 (视为刚性双原子分子的理想气体) 贮于一氧气瓶中，温度为 27°C，这瓶氧气的内能为_____J；分子的平均平动动能为_____J；分子的平均总动能为_____。(摩尔气体常量 $R = 8.31$ J/(mol · K)，玻尔兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K)

解析

【答案】6.23×10^3 J；6.21×10^{-21} J；1.035×10^{-20} J

【解析】能量均分定理。

刚性双原子分子的平动自由度为 $t = 3$，转动自由度为 $r = 2$，振动自由度为 $s = 0$，根据能量均分定理，一个分子的平均平动动能为

$$\overline{E_t} = \frac{t}{2}kT = 1.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

一个分子的平均总动能为

$$\overline{E} = \frac{t+r}{2}kT = 2.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 1.035 \times 10^{-20}\ \text{J}$$

而气体的总的内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = 2.5 \times 1 \times 8.31 \times 300 \approx 6.23 \times 10^3\ \text{J}$$

第 397 题

【4018】有一瓶质量为 M 的氢气 (视作刚性双原子分子的理想气体)，温度为 T，则氢分子的平均平动动能为_____，氢分子的平均动能为_____，该瓶氢气的内能为_____。

解析

【答案】$\frac{3}{2}kT$；$\frac{5}{2}kT$；$\frac{5}{4}\times 10^3MRT$
【解析】能量均分定理。
刚性双原子分子的平动自由度为 $t=3$，转动自由度为 $r=2$，振动自由度为 $s=0$，根据能量均分定理，一个分子的平均平动动能为

$$\overline{E_t}=\frac{t}{2}kT=\frac{3}{2}kT$$

一个分子的平均总动能为

$$\overline{E}=\frac{t+r}{2}kT=\frac{5}{2}kT$$

而气体的总的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{5}{2}\times\frac{M}{2\times 10^{-3}}\times RT=\frac{5}{4}\times 10^3MRT$$

第 398 题

【4025】一气体分子的质量可以根据该气体的定体比热来计算。氩气的定体比热 $C_V=0.314\ \mathrm{kJ/(kg\cdot K)}$，则氩原子的质量 $m=$______。

解析

【答案】6.59×10^{-26} kg
【解析】能量均分定理。
氩气，单原子分子，分子量 40，符号 Ar。
单原子分子的平动自由度为 $t=3$，转动自由度为 $r=0$，振动自由度为 $s=0$，根据能量均分定理，一个分子的平均平动动能为

$$\overline{E_t}=\frac{t}{2}kT=\frac{3}{2}kT$$

一个分子的平均总动能为

$$\overline{E}=\frac{t+r}{2}kT=\frac{3}{2}kT$$

而气体的总的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{3}{2}nRT$$

而在定体（等容）过程中，气体做功为零，所以根据热力学第一定律，内能的增加就等于气体从外界所吸收的热量

$$\Delta E=Q-W=Q=\frac{3}{2}nR\Delta T$$

根据比热的定义，有

$$C_V=\frac{Q}{M\Delta T}=\frac{3nR}{2M}=\frac{3R}{2M_{\mathrm{mol}}}=\frac{3N_Ak}{2M_{\mathrm{mol}}}$$
$$m=\frac{M_{\mathrm{mol}}}{N_A}=\frac{3k}{2C_V}=\frac{3\times 1.38\times 10^{-23}}{2\times 314}\approx 6.59\times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

第 399 题

【4068】储有某种刚性双原子分子理想气体的容器以速度 $v = 100$ m/s 运动，假设该容器突然停止，气体的全部定向运动动能都变为气体分子热运动的动能，此时容器中气体的温度上升 6.74 K，由此可知容器中气体的摩尔质量 $M_{\text{mol}} =$______。

解析

【答案】28×10^{-3} kg/mol
【解析】能量均分定理。
以 1 mol 气体为例进行研究，则气体的质量为 $m = M_{\text{mol}}$。当气体定向运动时，定向运动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

由于气体是刚性双原子分子理想气体，所以其内能就是气体分子热运动的动能

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{5}{2}RT$$

依题意，有

$$\Delta E = \frac{5}{2}R\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$m = M_{\text{mol}} = \frac{5R\Delta T}{v^2} = \frac{5 \times 8.31 \times 6.74}{100^2} \approx 28 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

第 400 题

【4069】容积为 10 L(升) 的盒子以速率 $v = 200$ m/s 匀速运动，容器中充有质量为 50 g，温度为 18℃ 的氢气，设盒子突然停止，气体的全部定向运动的动能都变为气体分子热运动的动能，容器与外界没有热量交换，则达到热平衡后；氢气的温度将增加______K；氢气的压强将增加______Pa。

解析

【答案】1.93；4×10^4
【解析】能量均分定理，理想气体物态方程。
当气体定向运动时，定向运动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

由于氢气是刚性双原子分子理想气体，所以其内能就是气体分子热运动的动能

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{5}{2} \times \frac{50}{2}RT = \frac{125}{2}RT$$

依题意，有

$$\Delta E = \frac{5}{2}nR(\Delta T) = \frac{125}{2}R\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\Delta T = \frac{mv^2}{5nR} = \frac{mv^2}{125R} = \frac{0.05 \times 200^2}{125 \times 8.31} \approx 1.93 \text{ K}$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

在题目所给的过程中，容器的容积保持不变，因此气体的体积也保持不变，所以有

$$(\Delta p)V = nR(\Delta T)$$
$$\Delta p = \frac{nR(\Delta T)}{V} = \frac{mv^2}{5V} = \frac{0.05\times 200^2}{5\times 0.01} = 4\times 10^4\ \mathrm{Pa}$$

第 401 题

【4075】已知一容器内的理想气体在温度为 273 K、压强为 1.0×10^{-2} atm 时，其密度为 $1.24\times 10^{-2}\ \mathrm{kg/m^3}$，则该气体的摩尔质量 $M_{\mathrm{mol}} =$______；容器单位体积内分子的总平动动能 $=$______。

解析

【答案】28×10^{-3} kg/mol；1.52×10^3 J
【解析】理想气体物态方程。
根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT = \frac{N}{N_A}RT = NkT$$

可得

$$M = \frac{m}{pV}RT = \frac{\rho RT}{p} = \frac{1.24\times 10^{-2}\times 8.31\times 273}{1.0\times 10^{-2}\times 1.013\times 10^5} \approx 28\times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$$

不管是什么类型的气体，单个分子的平均平动动能均为

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$$

容器单位体积内分子的总平动动能

$$E_k = \frac{N}{V}\overline{E_k} = \frac{p}{kT}\times\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}p = 1.5\times 1.0\times 10^{-2}\times 1.013\times 10^5 \approx 1.52\times 10^3\ \mathrm{J}$$

第 402 题

【4273】一定量 H_2 气 (视为刚性分子的理想气体)，若温度每升高 1 K，其内能增加 41.6 J，则该 H_2 气的质量为______。(普适气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$)

解析

【答案】4×10^{-3} kg
【解析】理想气体的内能。
氢气是刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{5}{2}nRT$$

依题意

$$\frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{5}{2}nR = 41.6$$

$$n=\frac{m}{M}=\frac{2}{5R}\times\frac{\Delta E}{\Delta T}$$
$$m=\frac{2}{5R}\times\frac{\Delta E}{\Delta T}\times M=\frac{2}{5\times 8.31}\times 41.6\times 2\times 10^{-3}\approx 4\times 10^{-3}\ \mathrm{kg}$$

第 403 题

【4655】有两瓶气体，一瓶是氦气，另一瓶是氢气 (均视为刚性分子理想气体)，若它们的压强、体积、温度均相同，则氢气的内能是氦气的_____ 倍。

解析

【答案】$\frac{5}{3}$
【解析】理想气体的内能。
氦气是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_{\mathrm{He}}=3$；氢气是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_{\mathrm{H_2}}=5$，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

压强、体积、温度均相同，则摩尔数相同，所以

$$\frac{E_{\mathrm{H_2}}}{E_{\mathrm{He}}}=\frac{i_{\mathrm{H_2}}}{i_{\mathrm{He}}}=\frac{5}{3}$$

第 404 题

【4656】用绝热材料制成的一个容器，体积为 $2V_0$，被绝热板隔成 A、B 两部分，A 内储有 1 mol 单原子分子理想气体，B 内储有 2 mol 刚性双原子分子理想气体，A、B 两部分压强相等均为 p_0，两部分体积均为 V_0，则：(1) 两种气体各自的内能分别为 $E_A=$_____；$E_B=$_____；(2) 抽去绝热板，两种气体混合后处于平衡时的温度为 $T=$_____。

解析

【答案】$\frac{3}{2}p_0V_0$；$\frac{5}{2}p_0V_0$；$\frac{8p_0V_0}{13R}$
【解析】理想气体的内能。
根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

两部分的温度分别为

$$T_A=\frac{p_AV_A}{n_AR}=\frac{p_0V_0}{R}$$
$$T_B=\frac{p_BV_B}{n_BR}=\frac{p_0V_0}{2R}$$

A 气体是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_A=3$；B 气体是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_B=5$，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

所以两种气体各自的内能分别为

$$E_A=\frac{i_A}{2}n_ART_A=\frac{3}{2}\times R\times\frac{p_0V_0}{R}=\frac{3}{2}p_0V_0$$
$$E_B=\frac{i_B}{2}n_BRT_B=\frac{5}{2}\times 2R\times\frac{p_0V_0}{2R}=\frac{5}{2}p_0V_0$$

混合后，设平衡时两气体的共同温度为 T，则两种气体各自的内能分别为

$$E_A'=\frac{i_A}{2}n_ART=\frac{3}{2}\times RT=\frac{3}{2}RT$$
$$E_B'=\frac{i_B}{2}n_BRT=\frac{5}{2}\times 2RT=5RT$$

由于容器绝热，由两种气体组成的系统与外界之间即没有做功也没有传热，所以系统的总的内能保持不变，所以有

$$E_A+E_B=E_A'+E_B'$$
$$\frac{3}{2}p_0V_0+\frac{5}{2}p_0V_0=\frac{3}{2}RT+5RT$$
$$4p_0V_0=\frac{13}{2}RT$$
$$T=\frac{8p_0V_0}{13R}$$

第 405 题

【4016】三个容器内分别贮有 1 mol 氦 (He)、1 mol 氢 (H_2) 和 1 mol 氨 (NH_3)(均视为刚性分子的理想气体)。若它们的温度都升高 1 K，则三种气体的内能的增加值分别为：氦：$\Delta E=$_____；氢：$\Delta E=$_____；氨：$\Delta E=$_____。

解析

【答案】12.45 J；20.75 J；24.9 J
【解析】理想气体的内能。
氦气是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_A=3$；氢气是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_B=5$，氨气是刚性多原子分子理想气体，其自由度为 $i_C=6$，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

所以当温度变化 ΔT 时，内能变化为

$$\Delta E=\frac{i}{2}nR\Delta T$$

所以，当 $\Delta T=1$ K 时，

$$\Delta E_A=\frac{i_A}{2}n_AR\Delta T=\frac{3}{2}R=1.5\times 8.3=12.45\text{ J}$$

$$\Delta E_B = \frac{i_B}{2} n_B R \Delta T = \frac{5}{2} R = 2.5 \times 8.3 = 20.75 \text{ J}$$
$$\Delta E_C = \frac{i_C}{2} n_C R \Delta T = \frac{6}{2} R = 3R = 3 \times 8.3 = 24.9 \text{ J}$$

第 406 题

【0192】处于重力场中的某种气体，在高度 z 处单位体积内的分子数即分子数密度为 n。若 $f(v)$ 是分子的速率分布函数，则坐标介于 $x \sim x+\mathrm{d}x$、$y \sim y+\mathrm{d}y$、$z \sim z+\mathrm{d}z$ 区间内，速率介于 $v \sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数 $\mathrm{d}N =$______。

解析

【答案】$f(v)n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v$

【解析】速率分布函数。

依题意，在高度 z 处单位体积内的分子数即分子数密度为 n，所以坐标介于 $x \sim x+\mathrm{d}x$、$y \sim y+\mathrm{d}y$、$z \sim z+\mathrm{d}z$ 区间内的分子数为

$$\mathrm{d}N_0 = n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

根据速率分布函数的定义

$$f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}N_0}$$

所以

$$\mathrm{d}N = f(v)\,\mathrm{d}N_0\,\mathrm{d}v = f(v)n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v$$

第 407 题

【4029】已知大气中分子数密度 n 随高度 h 的变化规律:$n = n_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right)$,式中 n_0 为 $h=0$ 处的分子数密度。若大气中空气的摩尔质量为 M_{mol}，温度为 T，且处处相同，并设重力场是均匀的，则空气分子数密度减少到地面的一半时的高度为______。(符号 $\exp(a)$，即 e^a)

解析

【答案】$\frac{RT}{M_{\text{mol}}g}\ln 2$

【解析】速率分布函数。

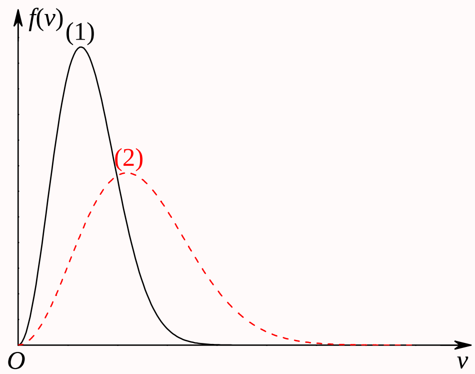
依题意，

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right) = \frac{1}{2}n_0$$
$$\exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT} = \ln 2$$

$$h=\frac{RT}{M_{\mathrm{mol}}g}\ln 2$$

第 408 题

【4282】现有两条气体分子速率分布曲线 (1) 和 (2)，如图所示。若两条曲线分别表示同一种气体处于不同的温度下的速率分布，则曲线_____ 表示气体的温度较高。若两条曲线分别表示同一温度下的氢气和氧气的速率分布，则曲线_____ 表示的是氧气的速率分布。



解析

【答案】(2)；(1)

【解析】速率分布函数，速率分布曲线，最概然速率。

由图可以看出，两条分布曲线对应的最概然速率之间的大小关系 $v_{P1}<v_{p2}$，而最概然速率与温度的根号成正比，与摩尔质量的根号成反比，即 $v_P\propto\sqrt{T/M}$，所以可知，曲线 (2) 的温度较高，曲线 (1) 是氧气的分布曲线。

$$v_P=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

第 409 题

【4459】已知 $f(v)$ 为麦克斯韦速率分布函数，N 为总分子数，则：(1) 速率 $v>100$ m/s 的分子数占总分子数的百分比的表达式为_____；(2) 速率 $v>100$ m/s 的分子数的表达式为_____。

解析

【答案】$\int_{100}^{\infty}f(v)\,\mathrm{d}v$；$\int_{100}^{\infty}Nf(v)\,\mathrm{d}v$

【解析】麦克斯韦速率分布函数。

根据速率分布函数的定义，速率 $v>100$ m/s 的分子数占总分子数的百分比的表达式为

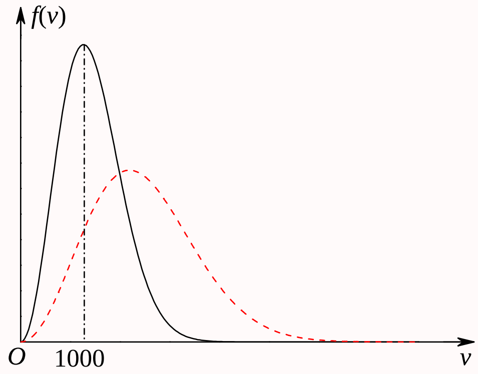
$$\int_{100}^{\infty}f(v)\,\mathrm{d}v$$

速率 $v>100$ m/s 的分子数的表达式为

$$\int_{100}^{\infty}Nf(v)\,\mathrm{d}v$$

第 410 题

【4040】图示的曲线分别表示了氢气和氦气在同一温度下的分子速率的分布情况。由图可知，氦气分子的最概然速率为______，氢气分子的最概然速率为______。



解析

【答案】1000 m/s；$1000\sqrt{2}$ m/s

【解析】速率分布函数，速率分布曲线，最概然速率。

根据最概然速率的表达式

$$v_P=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

可知，同一温度下，摩尔质量越大的气体分子的最概然速率越小，所以由图可得，氦气的最概然速率为 1000，图中没有给出单位，默认应该是国际单位制单位。所以有

$$v_{P\mathrm{He}}=\sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{He}}}}=1000\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{P\mathrm{H_2}}=\sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{H_2}}}}=\sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{He}}}}\times\sqrt{\frac{M_{\mathrm{He}}}{M_{\mathrm{H_2}}}}=1000\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$$

第 411 题

【4042】某气体在温度为 $T=273$ K 时，压强为 $p=1.0\times10^{-2}$ atm，密度 $\rho=1.24\times10^{-2}\ \mathrm{kg/m^3}$，则该气体分子的方均根速率为______。($1\ \mathrm{atm}=1.013\times10^5$ Pa)

解析

【答案】495 m/s

【解析】方均根速率，理想气体的物态方程。

根据方均根速率的表达式

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

和理想气体的物态方程

$$pV=nRT=\frac{m}{M}RT$$

可得

$$\frac{RT}{M}=\frac{pV}{m}=\frac{p}{\rho}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}=\sqrt{\frac{3\times1.0\times10^{-2}\times1.013\times10^5}{1.24\times10^{-2}}}=\sqrt{\frac{3\times1.013\times10^5}{1.24}}\approx495\ \mathrm{m/s}$$

第 412 题

【4092】某理想气体等温压缩到给定体积时外界对气体作功 $|W_1|$，又经绝热膨胀返回原来体积时气体对外作功 $|W_2|$，则整个过程中气体 (1) 从外界吸收的热量 $Q=$______；(2) 内能增加了 $\Delta E=$______。

解析

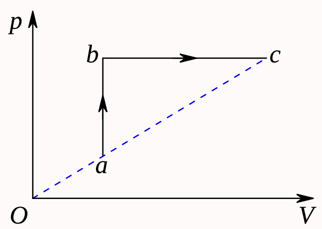
【答案】$-|W_1|$；$-|W_2|$
【解析】热力学第一定律，理想气体的内能。
根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

而理想气体的内能只与温度有关，所以等温压缩过程，温度不变，内能不变，外界对气体作功 $|W_1|$，气体释放了热量也是 $|W_1|$；绝热膨胀过程，气体与外界之间没有热量交换，气体对外作功 $|W_2|$，所以内能减小了 $|W_2|$，所以整个过程，气体释放了热量 $|W_1|$，即吸收了 $-|W_1|$，内能减小了 $|W_2|$，即增加了 $-|W_2|$。

第 413 题

【4108】如图所示，一定量的理想气体经历 $a\to b\to c$ 过程，在此过程中气体从外界吸收热量 Q，系统内能变化 ΔE，请在以下空格内填上 “>0” 或 “<0” 或 “$=0$”：Q______，ΔE______。



解析

【答案】>0；>0
【解析】热力学第一定律，理想气体的内能。
根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

而且理想气体的内能只与温度有关，由图可以看出，$a\to b$ 过程是等容过程，气体不做功，但压强增加，所以温度升高，所以气体的内能增大，所以气体从外界吸收了热量；$b\to c$ 过程是等压膨胀过程，气体对外做功，而且温度升高，内能增大，所以气体也从外界吸收了热量。所以整个 $a\to b\to c$

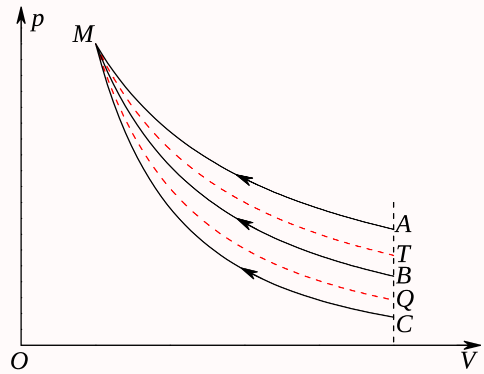
过程，气体从外界吸收热量，$Q>0$；而由图上可以看出，

$$p_cV_c > p_aV_a$$
$$nRT_c > nRT_a$$
$$T_c > T_a$$

即末态的温度高于初态的温度，所以气体的内能增加，即 $\Delta E>0$。

第 414 题

【4316】下图为一理想气体几种状态变化过程的 $p-V$ 图，其中 MT 为等温线，MQ 为绝热线，在 AM、BM、CM 三种准静态过程中：(1) 温度降低的是_____ 过程；(2) 气体放热的是_____ 过程。



解析

【答案】AM；AM、BM
【解析】$p-V$ 图。
根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

由 $p-V$ 图可以看出，$T_A>T_T=T_M>T_B>T_C$，所以三种准静态过程中，温度降低的过程是 AM 过程。
系统经历一个热力学过程后是吸热还是放热，可以用经过初态的一条绝热线作为判断依据，若过程的末态在绝热线的右上方，则此过程必定吸热，反之，若过程的末态在绝热线的左下方，则此过程必定放热。注意，题目所给的三个过程的末态都经过 M 点，不是初态，所以不能直接使用上面的结论进行判断，但我们可以把三个过程反过来，MA、MB、MC 三个过程中，从上面的判据可知，MA、MB 两个过程吸热，MC 过程放热，所以 AM、BM 两个过程放热，CM 过程吸热。

第 415 题

【4584】一定量理想气体，从同一状态开始使其体积由 V_1 膨胀到 $2V_1$，分别经历以下三种过程：(1) 等压过程；(2) 等温过程；(3) 绝热过程。其中：_____ 过程气体对外作功最多；_____ 过程气体内能增加最多；_____ 过程气体吸收的热量最多。

解析

【答案】等压；等压；等压

【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律，$p-V$ 图。

设初态为 (p_1,V_1,T_1)，末态为 (p_2,V_2,T_2)，依题意，$V_2=2V_1$。根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

等压过程，$p_2=p_1$，所以 $T_2=2T_1$，气体做功、内能增加量和吸收的热量分别为

$$\begin{aligned} W_1&=p_1(V_2-V_1)=p_1V_1=nRT_1\\ \Delta E_1&=\frac{i}{2}nR(T_2-T_1)=\frac{i}{2}nRT_1\\ Q_1&=\Delta E_1+W_1=\frac{i+2}{2}nRT_1 \end{aligned}$$

等温过程，$T_2=T_1$，所以 $p_2=\dfrac{1}{2}p_1$，内能变化量、气体做功和吸收的热量分别为

$$\begin{aligned} \Delta E_2&=0\\ W_2&=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{nRT_1}{V}\,\mathrm{d}V=nRT_1\ln 2\\ Q_2&=\Delta E_2+W_2=nRT_1\ln 2 \end{aligned}$$

绝对热程，$Q_3=0$，过程方程

$$pV^\gamma=\mathrm{C}=p_1V_1^\gamma=p_2V_2^\gamma$$

所以

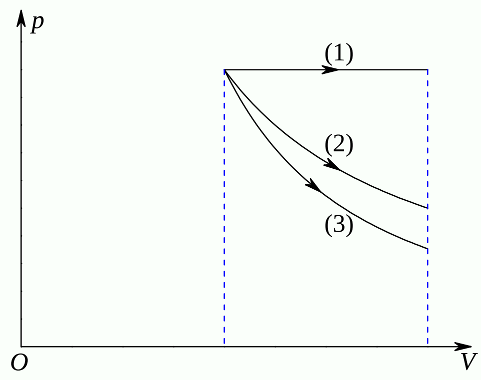
$$\begin{aligned} p_2&=p_1(V_1/V_2)^\gamma=\frac{p_1}{2^\gamma}\\ T_2&=\frac{p_2V_2}{nR}=\frac{p_1(2V_1)}{2^\gamma nR}=\frac{T_1}{2^{\gamma-1}}\\ \Delta E_3&=\frac{i}{2}nR(T_2-T_1)=\frac{i}{2}nRT_1\left(\frac{1}{2^{\gamma-1}}-1\right)=nRT_1\left(\frac{i}{2^\gamma}-\frac{i}{2}\right)\\ W_3&=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{C}}{V^\gamma}\,\mathrm{d}V=-\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\mathrm{C}}{V_2^{\gamma-1}}-\frac{\mathrm{C}}{V_1^{\gamma-1}}\right)=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_1V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}}-\frac{p_2V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}}\right)\\ &=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}nR(T_1-T_2)=-\Delta E_3=nRT_1\left(\frac{i}{2}-\frac{i}{2^\gamma}\right)\\ \gamma&=\frac{C_V}{C_p}=\frac{\frac{i+2}{2}nR}{\frac{i}{2}nR}=\frac{i+2}{i}\Rightarrow\gamma-1=\frac{2}{i}\Rightarrow\frac{1}{\gamma-1}=\frac{i}{2} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} W_1=nRT_1>W_2=nRT_1\ln 2>W_3=nRT_1\left(\frac{i}{2}-\frac{i}{2^\gamma}\right)\\ \Delta E_1=\frac{i}{2}nRT_1>\Delta E_2=0>\Delta E_3=nRT_1\left(\frac{i}{2^\gamma}-\frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

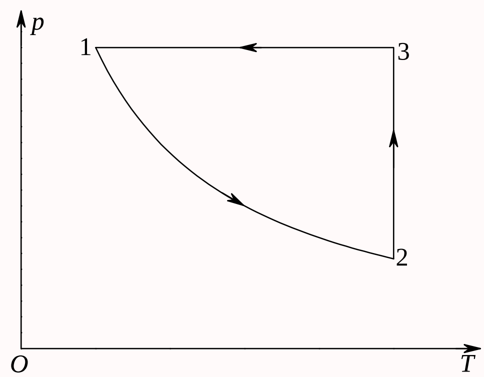
$$Q_1=\frac{i+2}{2}nRT_1>Q_2=nRT_1\ln 2>Q_3=0$$

从 $p-V$ 图可以看出 (1) 为等压过程，(2) 为等温过程，(3) 为绝热过程。由于过程曲线与横轴所围的面积为该过程系统所做的功，所以 (1) 等压过程所做的功最大，(2) 等温过程次之，(3) 绝热过程最小；等温过程温度不变，等压过程温度升高，绝热过程，温度下降，所以 (1) 等压过程，内能增加，(2) 等温过程，内能不变，(3) 绝热过程，内能减少；至于吸收的热量，绝热过程不吸热，另外两个过程的过程曲线都在绝热过程曲线的右上方，所以过程都是吸热，另外根据热力学第一定律，过程吸收的热量等于内能的增加量加上系统对外所做的功，据前两项的分析，显然可得，(1) 等压过程所吸收的热量最大，(2) 等温过程次之，(3) 绝热过程最小（为零）。



第 416 题

【4683】已知一定量的理想气体经历 $p-T$ 图上所示的循环过程，图中各过程的吸热、放热情况为：(1) 过程 $1\to 2$ 中，气体_____；(2) 过程 $2\to 3$ 中，气体_____；(3) 过程 $3\to 1$ 中，气体_____。



解析

【答案】吸热；放热；放热

【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律，$p-V$ 图。

根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

$1\to 2$ 过程，温度升高，压强降低，所以体积一定膨胀，温度升高，内能增加，$\Delta E>0$，体积膨胀，气体对外做功，$W>0$，所以 $Q=\Delta E+W>0$，气体吸热；$2\to 3$ 过程，温度不变，压强升高，所以体积一定压缩，温度不变，内能不变，$\Delta E=0$，体积压缩，外界对气体做功，$W<0$，所以 $Q=\Delta E+W<0$，气体放热；$3\to 1$ 过程，压强不变，温度下降，所以体积一定压缩，温度下降，内能减小，$\Delta E<0$，体积压缩，外界对气体做功，$W<0$，所以 $Q=\Delta E+W<0$，气体放热。

第 417 题

【4109】一定量的某种理想气体在等压过程中对外作功为 200 J。若此种气体为单原子分子气体，则该过程中需吸热_____J；若为双原子分子气体，则需吸热_____J。

解析

【答案】500 J；700 J

【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律，理想气体的内能。

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

等压过程

$$W = p\Delta V = nR\Delta T$$
$$\Delta E = \frac{i}{2}nR\Delta T = \frac{i}{2}p\Delta V = \frac{i}{2}W$$
$$Q = \Delta E + W = \frac{i+2}{2}W$$

单原子分子，$i = 3$，所以

$$Q = \frac{5}{2}W = 500\ \mathrm{J}$$

刚性双原子分子，$i = 5$，所以

$$Q = \frac{7}{2}W = 700\ \mathrm{J}$$

在不是非常高的温度下，一般都把气体分子看成刚性分子，题目不作特殊说明时，一般都认为是刚性分子。如果是弹性双原子分子，则 $i = 6$，那么

$$Q = \frac{8}{2}W = 800\ \mathrm{J}$$

第 418 题

【4319】有 1 mol 刚性双原子分子理想气体，在等压膨胀过程中对外作功 W，则其温度变化 $\Delta T =$_____；从外界吸取的热量 $Q_p =$_____。

解析

【答案】$\frac{W}{R}$；$\frac{7}{2}W$

【解析】理想气体物态方程，热力学第一定律，理想气体的内能。

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

等压过程

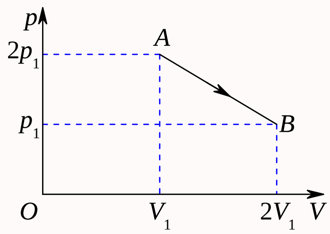
$$W = p\Delta V = nR\Delta T$$
$$\Delta T = \frac{W}{nR}$$
$$\Delta E = \frac{i}{2}nR\Delta T = \frac{i}{2}p\Delta V = \frac{i}{2}W$$
$$Q = \Delta E + W = \frac{i+2}{2}W$$

对于 1 mol 刚性双原子分子，$n=1$，$i=5$，所以

$$\Delta T = \frac{W}{R}$$
$$Q = \frac{7}{2}W$$

第 419 题

【4472】一定量理想气体，从 A 状态 $(2p_1, V_1)$ 经历如图所示的直线过程变到 B 状态 $(p_1, 2V_1)$，则 AB 过程中系统作功 $W=$______；内能改变 $\Delta E=$______。



解析

【答案】$\frac{3}{2}p_1V_1$；0

【解析】$p-V$ 图，理想气体物态方程，理想气体的内能。

在 $p-V$ 图中，过程曲线与 V 轴所围的面积就等于该过程系统所做的功，所以 AB 过程中系统所做的功为

$$W = \frac{1}{2}(2p_1+p_1)(2V_1-V_1) = \frac{3}{2}p_1V_1$$

而根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得，A、B 两态的温度相等，而理想气体的内能只与温度有关，所以过程内能不变，即改变量 $\Delta E = 0$。

第 420 题

【4689】压强、体积和温度都相同的氢气和氦气 (均视为刚性分子的理想气体)，它们的质量之比为 $m_1:m_2=$______，它们的内能之比为 $E_1:E_2=$______，如果它们分别在等压过程中吸收了相同的热量，则它们对外作功之比为 $W_1:W_2=$______。(各量下角标 1 表示氢气，2 表示氦气)

解析

【答案】$\frac{1}{2}$；$\frac{5}{3}$；$\frac{5}{7}$

【解析】理想气体物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律。

根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT=\frac{m}{M}RT$$

压强、体积和温度都相同时

$$\frac{m_1}{M_1}=\frac{m_2}{M_2}$$
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

由前可知，两种气体的摩尔数相等，而氢气是刚性双原子分子，自由度 $i_1=5$，氦气是刚性单原子分子，自由度 $i_2=3$，所以二者的内能之比为

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{i_1}{i_2}=\frac{5}{3}$$

而对于等压过程，气体所做的功为

$$W=p\Delta V=nR\Delta T$$

内能的变化量为

$$\Delta E=\frac{i}{2}nR\Delta T$$

所以根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

可得吸收的热量为

$$Q=\Delta E+W=\frac{i+2}{2}nR\Delta T$$

依题意，$Q_1=Q_2$，所以

$$\frac{(\Delta T)_1}{(\Delta T)_2}=\frac{i_2+2}{i_1+2}=\frac{5}{7}$$
$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{(\Delta T)_1}{(\Delta T)_2}=\frac{5}{7}$$

第 421 题

【5345】3 mol 的理想气体开始时处在压强 $p_1 = 6$ atm、温度 $T_1 = 500$ K 的平衡态。经过一个等温过程，压强变为 $p_2 = 3$ atm。该气体在此等温过程中吸收的热量为 $Q =$_____J。

解析

【答案】8.64×10^3

【解析】理想气体物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律。

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

对于等温过程，内能变化为零，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

系统所吸收的热量等于系统所做的功

$$Q = W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{p_1}{p_2}$$
$$= 3 \times 8.31 \times 500 \times \ln\frac{6}{3} \approx 8.64 \times 10^3 \text{ J}$$

第 422 题

【4127】一卡诺热机 (可逆的)，低温热源的温度为 27℃，热机效率为 40%，其高温热源温度为_____K。今欲将该热机效率提高到 50%，若低温热源保持不变，则高温热源的温度应增加_____K。

解析

【答案】500；100

【解析】卡诺热机的热效率。

卡诺热机的热效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$\eta = 0.4$，$T_2 = 300$ K，所以

$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta} = \frac{300}{1-0.4} = 500 \text{ K}$$

若 $\eta' = 0.5$，$T_2' = 300$ K，所以

$$T_1' = \frac{T_2'}{1-\eta'} = \frac{300}{1-0.5} = 600 \text{ K}$$
$$\Delta T = T_1' - T_1 = 100 \text{ K}$$

第 423 题

【4128】可逆卡诺热机可以逆向运转。逆向循环时，从低温热源吸热，向高温热源放热，而且吸的热量和放出的热量等于它正循环时向低温热源放出的热量和从高温热源吸的热量。设高温热源的温度为 $T_1 = 450$ K，低温热源的温度为 $T_2 = 300$ K，卡诺热机逆向循环时从低温热源吸热 $Q_2 = 400$ J，则该卡诺热机逆向循环一次外界必须作功 $W =$_____。

解析

【答案】200 J

【解析】卡诺热机的热效率。

卡诺热机的热效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

依题意，$T_1 = 450$ K，$T_2 = 300$ K，$Q_2 = 400$ J，所以

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2}Q_2 = \frac{450}{300} \times 400 = 600 \text{ J}$$
$$W = Q_1 - Q_2 = 600 - 400 = 200 \text{ J}$$

第 424 题

【4698】一个作可逆卡诺循环的热机，其效率为 η，它逆向运转时便成为一台致冷机，该致冷机的致冷系数 $w = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$，则 η 与 w 的关系为_____。

解析

【答案】$\eta = \dfrac{1}{w+1}$

【解析】卡诺热机的热效率，卡诺制冷机的制冷系数。

卡诺热机的热效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

卡诺制冷机的制冷系数为

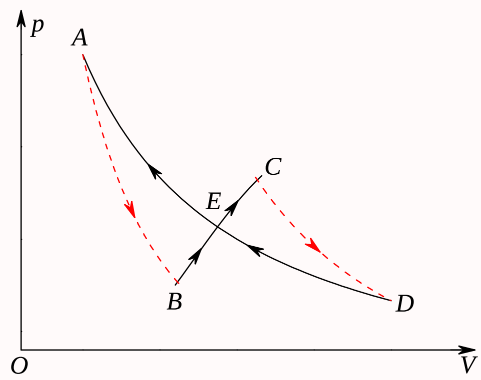
$$w = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

所以有

$$\frac{1}{w} = \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{T_1}{T_2} - 1$$
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{w} + 1 = \frac{w+1}{w}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{w}{w+1}$$
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{w}{w+1} = \frac{1}{w+1}$$
$$\eta(w+1) = 1, w = \frac{1}{\eta} - 1$$

第 425 题

【4701】如图所示，绝热过程 AB、CD，等温过程 DEA，和任意过程 BEC，组成一循环过程。若图中 ECD 所包围的面积为 70 J，EAB 所包围的面积为 30 J，DEA 过程中系统放热 100 J，则：(1) 整个循环过程 ($ABCDEA$) 系统对外作功为_____。(2)BEC 过程中系统从外界吸热为_____。



解析

【答案】40 J；140 J

【解析】$p-V$ 图，热力学第一定律。

$p-V$ 图中，闭合曲线所围的面积表示循环过程所做的净功，顺时针时做正功，逆时针时做负功，所以图中 ECD 是顺时针，EAB 是逆时针，因此整个循环过程系统对外作功为

$$W_{ABCDEA} = W_{ECD} + W_{EAB} = 70 - 30 = 40 \text{ J}$$

一个循环过程，系统恢复原态，内能变化量为零，所以根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

整个循环过程中系统从外界吸收的热量等于系统对外界所做的功，依题意，绝热过程 AB、CD，系统不吸收热量，DEA 过程中系统放热 100 J，所以

$$Q = Q_{AB} + Q_{BEC} + Q_{CD} + Q_{DEA} = 0 + Q_{BEC} + 0 - 100 = Q_{BEC} - 100 \text{ J}$$
$$W = 40 \text{ J}$$
$$Q_{BEC} - 100 = 40$$
$$Q_{BEC} = 140 \text{ J}$$

第 426 题

【4336】由绝热材料包围的容器被隔板隔为两半，左边是理想气体，右边真空。如果把隔板撤去，气体将进行自由膨胀过程，达到平衡后气体的温度_____(“升高”、“ 降低” 或 “不变”)，气体的熵_____(“增加”、“减小” 或 “不变”)。

解析

【答案】不变；增加

【解析】热力学第一定律，熵增加原理。

依题意，自由膨胀过程，系统做功为零，绝热容器，系统吸热为零，因此根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

系统的内能不变，而理想气体的内能仅仅与温度有关，所以气体的温度保持不变。
而自由膨胀过程是一个自发的不可逆的过程，根据熵增加原理，末态的熵高于初态的熵，所以过程的熵增加。

第 427 题

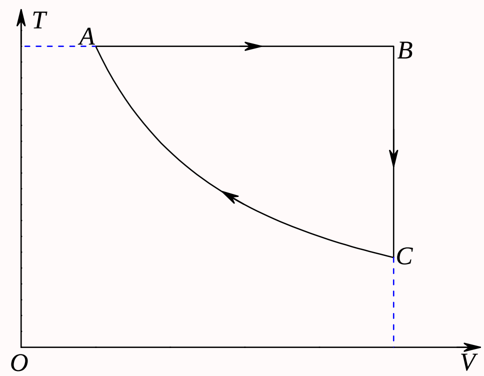
【4596】在一个孤立系统内，一切实际过程都向着_____ 的方向进行。这就是热力学第二定律的统计意义。从宏观上说，一切与热现象有关的实际的过程都是_____。

解析

【答案】熵增加；不可逆
【解析】热力学第二定律，熵增加原理。
热力学第二定律的实质在于指出，一切与热现象有关的自发的宏观过程都是不可逆的。统计物理认为，在一个孤立系统中，自发的过程总是由概率较小的宏观状态向概率较大的宏观状态进行；即由包含微观状态数目较少的宏观状态向包含微观状态数目较多的宏观状态进行；即由非平衡态向平衡态进行。这就是热力学第二定律的统计意义。
本题原文件中提供的第一个空格的答案是“状态几率增大”，个人觉得填“熵增加”应该也可以。

第 428 题

【4154】1 mol 理想气体 (设 $\gamma = C_p/C_V$ 为已知) 的循环过程如 $T-V$ 图所示，其中 CA 为绝热过程，A 点状态参量 (T_1, V_1) 和 B 点的状态参量 (T_2, V_2) 为已知。试求 C 点的状态参量：$V_C =$_____，$T_C =$_____，$p_C =$_____。



解析

【答案】V_2；$\dfrac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$；$\dfrac{RT_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma}}$
【解析】理想气体的物态方程，绝热过程的过程方程，$T-V$ 图。
由 $T-V$ 图可以直接看出，$T_A = T_B$，$V_B = V_C$，所以 $V_C = V_2$。
而 CA 为绝热过程，由理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

和绝热过程的过程方程

$$pV^{\gamma} = \mathrm{C}$$

可得

$$p_A V_A = nRT_A = RT_A$$
$$p_C V_C = nRT_C = RT_C$$
$$p_A V_A^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma}$$
$$p_C = \frac{p_A V_A^{\gamma}}{V_C^{\gamma}} = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}} = \frac{RT_1 V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma}}$$
$$T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{T_1 V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$$

第 429 题

【4006】在容积为 $10^{-2}\ \mathrm{m}^3$ 的容器中，装有质量 100 g 的气体，若气体分子的方均根速率为 200 m/s，则气体的压强为______。

解析

【答案】$\dfrac{4}{3} \times 10^5\ \mathrm{Pa}$
【解析】理想气体的物态方程，方均根速率。
方均根速率的表达式为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

理想气体的物态方程

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

可得

$$\frac{RT}{M} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$
$$p = \frac{m}{V} \times \frac{RT}{M} = \frac{0.1}{10^{-2}} \times \frac{200^2}{3} = \frac{4}{3} \times 10^5\ \mathrm{Pa}$$

第 430 题

【4956】一定量的某种理想气体，先经过等体过程使其热力学温度升高为原来的 2 倍；再经过等压过程使其体积膨胀为原来的 2 倍，则分子的平均自由程变为原来的______ 倍。

解析

【答案】2
【解析】理想气体的物态方程，平均自由程。
设初态为 (p_1, V_1, T_1)，中间态为 (p_2, V_2, T_2)，末态为 (p_3, V_3, T_3)，依题意，有 $V_2 = V_1$、$T_2 = 2T_1$；

$p_3=p_2$、$V_3=2V_1$，根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

可得

$$p_1V_1=nRT_1$$
$$p_2V_2=nRT_2$$
$$p_3V_3=nRT_3$$
$$p_2=\frac{nRT_2}{V_2}=\frac{nR(2T_1)}{V_1}=2p_1$$
$$T_3=\frac{p_3V_3}{nR}=\frac{(2p_1)(2V_1)}{nR}=4T_1$$

而平均自由程的表达式为

$$\bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2p}$$

所以

$$\bar{\lambda}_3=\frac{kT_3}{\sqrt{2}\pi d^2p_3}=\frac{k(4T_1)}{\sqrt{2}\pi d^2(2p_1)}=2\bar{\lambda}_1$$

3、计算题

第 431 题

【4302】储有 1 mol 氧气，容积为 1 $\mathrm{m^3}$ 的容器以 $v=10$ m/s 的速度运动。设容器突然停止，其中氧气的 80% 的机械运动动能转化为气体分子热运动动能，问气体的温度及压强各升高了多少？(氧气分子视为刚性分子，普适气体常量 $R=8.31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$)

解析

【解析】理想气体的物态方程，理想气体的内能。
氧气是刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E=\frac{5}{2}nRT$$

当容器运动时，气体做机械运动的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

依题意

$$\Delta E=\frac{5}{2}nR\Delta T=0.8E_k=\frac{2}{5}mv^2$$
$$\Delta T=\frac{4mv^2}{25nR}=\frac{4Mv^2}{25R}=\frac{4\times 32\times 10^{-3}\times 10^2}{25\times 8.31}\approx 0.0616\mathrm{K}$$

根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

容器容积不变，气体经历的是等容过程，所以有

$$(\Delta p)V = nR\Delta T$$

$$\Delta p = \frac{nR\Delta T}{V} = \frac{nR}{V} \times \frac{4mv^2}{25nR} = \frac{4mv^2}{25V} = \frac{4 \times 32 \times 10^{-3} \times 10^2}{25 \times 1} = 0.512\ \mathrm{Pa}$$

第 432 题

【4070】容积为 20.0 L(升) 的瓶子以速率 $v = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 匀速运动，瓶子中充有质量为 100 g 的氦气。设瓶子突然停止，且气体的全部定向运动动能都变为气体分子热运动的动能，瓶子与外界没有热量交换，求热平衡后氦气的温度、压强、内能及氦气分子的平均动能各增加多少？(摩尔气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$，玻尔兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$)

解析

【解析】理想气体的物态方程，理想气体的内能。

氦气是刚性单原子分子理想气体，其内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT$$

当容器运动时，气体做机械运动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

依题意

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta T = \frac{mv^2}{3nR} = \frac{Mv^2}{3R} = \frac{4 \times 10^{-3} \times 200^2}{3 \times 8.31} \approx 6.42\ \mathrm{K}$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

容器容积不变，气体经历的是等容过程，所以有

$$(\Delta p)V = nR\Delta T$$

$$\Delta p = \frac{nR\Delta T}{V} = \frac{nR}{V} \times \frac{mv^2}{3nR} = \frac{mv^2}{3V} = \frac{0.1 \times 200^2}{3 \times 0.02} \approx 6.67 \times 10^4\ \mathrm{Pa}$$

而依前所述，内能的增加量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 0.1 \times 200^2 = 2000\ \mathrm{J}$$

而对于刚性单原子分子理想气体，气体分子的平均动能为

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT$$

所以气体分子的平均动能的增加量为

$$\Delta \bar{E} = \frac{3}{2}k\Delta T = 1.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 6.42 \approx 1.33 \times 10^{-22}\ \mathrm{J}$$

第 433 题

【4077】有 $2\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ 刚性双原子分子理想气体，其内能为 6.75×10^2 J。(1) 试求气体的压强；(2) 设分子总数为 5.4×10^{22} 个，求分子的平均平动动能及气体的温度。

解析

【解析】理想气体的物态方程，理想气体的内能。
(1) 刚性双原子分子理想气体的内能为

$$E=\frac{5}{2}nRT$$

而理想气体的物态方程为

$$pV=nRT$$

所以气体的压强为

$$p=\frac{nRT}{V}=\frac{2E}{5V}=\frac{2\times6.75\times10^2}{5\times2\times10^{-3}}=1.35\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

(2) 刚性双原子分子理想气体的内能还可以写为

$$E=\frac{5}{2}NkT$$

而分子的平均平动动能为

$$\bar{E}_k=\frac{3}{2}kT$$

所以有

$$T=\frac{2E}{5Nk}=\frac{2\times6.75\times10^2}{5\times5.4\times10^{22}\times1.38\times10^{-23}}\approx362\ \mathrm{K}$$
$$\bar{E}_k=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}k\times\frac{2E}{5Nk}=\frac{3E}{5N}=\frac{3\times6.75\times10^2}{5\times5.4\times10^{22}}=7.5\times10^{-21}\ \mathrm{J}$$

第 434 题

【4301】一超声波源发射超声波的功率为 10 W。假设它工作 10 s，并且全部波动能量都被 1 mol 氧气吸收而用于增加其内能，则氧气的温度升高了多少？(氧气分子视为刚性分子，普适气体常量 $R=8.31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$)

解析

【解析】理想气体的内能。
氧气是刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E=\frac{5}{2}nRT$$

依题意，氧气内能的增加量为

$$\Delta E=\frac{5}{2}nR\Delta T=Pt$$

$$\Delta T=\frac{2Pt}{5nR}=\frac{2\times 10\times 10}{5\times 1\times 8.31}\approx 4.81\ \mathrm{K}$$

第 435 题

【4111】0.02 kg 的氦气 (视为理想气体)，温度由 17℃ 升为 27℃。若在升温过程中，(1) 体积保持不变；(2) 压强保持不变；(3) 不与外界交换热量；试分别求出气体内能的改变、吸收的热量、外界对气体所作的功。(普适气体常量 $R=8.31\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$)

解析

【解析】理想气体的内能，热力学第一定律，理想气体的物态方程。
氦气是刚性单原子分子理想气体，其内能为

$$E=\frac{3}{2}nRT$$

而内能是个态函数，且仅与温度有关，所以不管哪个过程，始末态的温度固定，内能固定，所以内能的变化量也固定，为

$$\Delta E=\frac{3}{2}nR\Delta T=1.5\times\frac{20}{4}\times 8.31\times 10=623.25\ \mathrm{J}$$

热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

所以

$$Q=\Delta E+W$$

其中过程所做的功为

$$W=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V$$

(1) 体积保持不变，$V_2=V_1$，$W=0$，所以 $Q=\Delta E=623.25$ J。
(2) 压强保持不变，由理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

可得

$$V=\frac{nRT}{p}$$

$$W=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=p\Delta V=pV_2-pV_1=nR(T_2-T_1)=\frac{20}{4}\times 8.31\times 10=415.5\ \mathrm{J}$$

$$Q=\Delta E+W=623.25+415.5=1038.75\ \mathrm{J}$$

(3) 不与外界交换热量，$Q=0$，所以

$$W=-\Delta E=-623.25\ \mathrm{J}$$

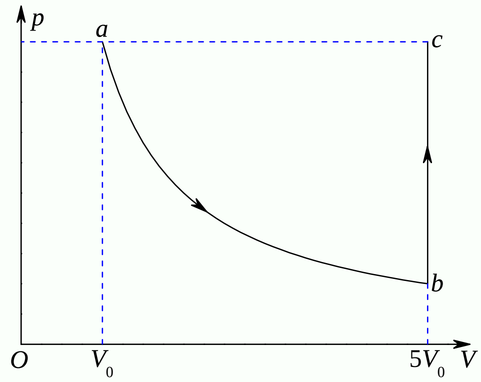
第 436 题

【4324】3 mol 温度为 $T_0 = 273$ K 的理想气体，先经等温过程体积膨胀到原来的 5 倍，然后等体加热，使其末态的压强刚好等于初始压强，整个过程传给气体的热量为 $Q = 8 \times 10^4$ J。试画出此过程的 $p - V$ 图，并求这种气体的比热容比 γ 值。(普适气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$)

解析

【解析】$p - V$ 图，理想气体的物态方程，热力学第一定律，理想气体的内能。

依题意，过程的 $p - V$ 图如图所示。



由理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得

$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{p_a(5V_a)}{nR} = 5\frac{p_a V_a}{nR} = 5T_a = 5T_0$$

$a \to b$ 过程是等温膨胀过程，内能不变，$\Delta E_{ab} = 0$，系统对外做功

$$W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_a}^{V_b} \frac{nRT_a}{V}\,\mathrm{d}V = nRT_0 \ln 5$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

该过程系统从外界所吸收的热量为

$$Q_{ab} = \Delta E_{ab} + W_{ab} = nRT_0 \ln 5$$

而 $b \to c$ 过程是等容升温过程，等容，体积不变，做功为零，$W_{bc} = 0$，设气体的摩尔定容热容量为 $C_{V,\mathrm{m}}$，则过程系统所吸收的热量为

$$Q_{bc} = nC_{V,\mathrm{m}}\Delta T = nC_{V,\mathrm{m}}(5T_0 - T_0) = 4nC_{V,\mathrm{m}}T_0$$

依题意，整个过程系统所吸收的热量为

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} = nRT_0 \ln 5 + 4nC_{V,\mathrm{m}}T_0 = nT_0(R\ln 5 + 4C_{V,\mathrm{m}})$$

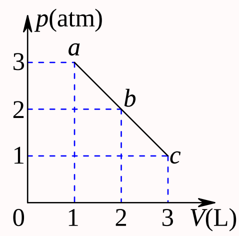
$$R\ln 5 + 4C_{V,\mathrm{m}} = \frac{Q}{nT_0}$$

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{Q}{4nT_0} - \frac{R\ln 5}{4} = \frac{8 \times 10^4}{4 \times 3 \times 273} - \frac{8.31 \times \ln 5}{4} \approx 21.1\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$$

$$\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{8.31}{21.1} \approx 1.39$$

第 437 题

【4587】一定量的理想气体，由状态 a 经 b 到达 c。(如图，abc 为一直线) 求此过程中 (1) 气体对外作的功；(2) 气体内能的增量；(3) 气体吸收的热量。(1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa)



解析

【解析】$p-V$ 图，理想气体的物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律。

(1)$p-V$ 图中过程曲线与 V 轴所围的面积表示过程中系统对外界所做的功，所以

$$W = \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1.013 \times 10^5 \times (3-1) \times 0.001 = 405.2 \text{ J}$$

(2) 由理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得

$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{p_a V_a}{nR} = T_a$$

而理想气体的内能仅仅是温度的函数，始末状态温度相等，所以过程系统的内能改变量为零。

(3) 根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

该过程系统从外界所吸收的热量为

$$Q = \Delta E + W = 405.2 \text{ J}$$

第 438 题

【5347】一气缸内盛有 1 mol 温度为 27℃，压强为 1 atm 的氮气 (视作刚性双原子分子的理想气体)。先使它等压膨胀到原来体积的两倍，再等体升压使其压强变为 2 atm，最后使它等温膨胀到压强为 1 atm。求：氮气在全部过程中对外作的功，吸的热及其内能的变化。(普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

解析

【解析】理想气体的物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律。

理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

依题意，$n=1$ mol，$p_1=1$ atm $=1.013\times10^5$ Pa，$T_1=300$ K，所以

$$V_1=\frac{nRT_1}{p_1}$$

$p_2=p_1$，$V_2=2V_1$，所以

$$T_2=\frac{p_2V_2}{nR}=2T_1$$

$V_3=V_2=2V_1$，$p_3=2p_1$，所以

$$T_3=\frac{p_3V_3}{nR}=4T_1$$

$T_4=T_3=4T_1$，$p_4=p_1$，所以

$$V_4=\frac{nRT_4}{p_4}=4V_1$$

氮气视作刚性双原子分子的理想气体，所以其内能为

$$E=\frac{5}{2}nRT$$

因此整个过程内能的变化量为

$$\Delta E=\frac{5}{2}nR\Delta T=2.5\times1\times8.31\times3\times300\approx1.87\times10^4\ \mathrm{J}$$

而各个过程所做的功分别为

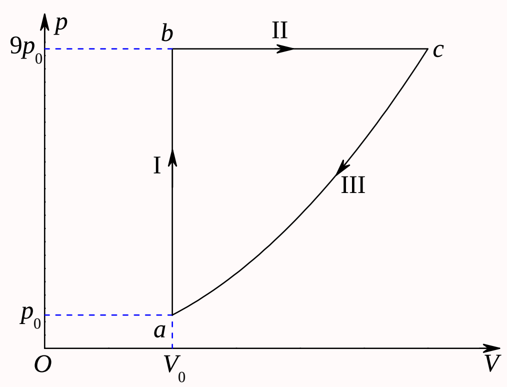
$$W_{12}=p_1(V_2-V_1)=p_1V_1=nRT_1$$
$$W_{23}=0$$
$$W_{34}=\int_{V_3}^{V_4}p\,\mathrm{d}V=nRT_3\ln\frac{V_4}{V_3}=(4\ln2)nRT_1$$
$$W=W_{12}+W_{23}+W_{34}=(4\ln2+1)nRT_1=(4\ln2+1)\times1\times8.31\times300\approx9.41\times10^3\ \mathrm{J}$$

所以过程所吸收的热量为

$$Q=\Delta E+W=1.87\times10^4+9.41\times10^3=2.81\times10^4\ \mathrm{J}$$

第 439 题

【0203】1 mol 单原子分子的理想气体，经历如图所示的可逆循环，联结 ac 两点的曲线 III 的方程为 $p=p_0V^2/V_0^2$，a 点的温度为 T_0。(1) 试以 T_0，普适气体常量 R 表示 I、II、III 过程中气体吸收的热量；(2) 求此循环的效率。



解析

【解析】理想气体的物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律。
理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

依题意，$n = 1$ mol，气体为单原子分子的理想气体，所以其内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}RT$$

内能的变化量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}R\Delta T$$

(1) 过程 I，等容过程，气体做功为零，$W_1 = 0$，末态温度为

$$T_b = \frac{p_b V_b}{R} = 9T_0$$

内能的变化量为

$$\Delta E_1 = \frac{3}{2}R\Delta T_1 = 12RT_0$$

所以吸收的热量为

$$Q_1 = \Delta E_1 + W_1 = 12RT_0$$

过程 II，等压过程，气体做功，$W_2 = p_2(V_c - V_b)$，末态温度可以由 ca 过程的过程方程和理想气体的物态方程求得

$$p_c = p_0 V_c^2/V_0^2$$
$$V_c = V_0\sqrt{p_c/p_0} = 3V_0$$
$$T_c = \frac{p_c V_c}{R} = 27T_0$$

所以本过程气体所做的功和内能的变化量分别为

$$W_2 = 9p_0(3V_0 - V_0) = 18p_0V_0 = 18RT_0$$
$$\Delta E_2 = \frac{3}{2}R\Delta T_2 = 27RT_0$$

所以吸收的热量为

$$Q_2 = \Delta E_2 + W_2 = 45RT_0$$

过程 III，过程方程 $p = p_0V^2/V_0^2$，所以过程所做的功为

$$W_3 = \int_{V_c}^{V_a} p\,\mathrm{d}V = \frac{p_0}{3V_0^2}(V_a^3 - V_c^3) = -\frac{26}{3}p_0V_0 = -\frac{26}{3}RT_0$$

内能的变化量为

$$\Delta E_3=\frac{3}{2}R\Delta T_3=-39RT_0$$

所以吸收的热量为

$$Q_3=\Delta E_3+W_3=-\frac{143}{3}RT_0$$

所以本过程放热。

(2) 所以，整个循环过程中，系统共吸收的热量为 $Q_1+Q_2=57RT_0$，共放出的热量为 $-Q_3=\frac{143}{3}RT_0$，所以循环过程的效率为

$$\eta=1-\frac{\frac{143}{3}RT_0}{57RT_0}=\frac{28}{171}\approx 0.164=16.4\%$$

第 440 题

【4097】1 mol 理想气体在 $T_1=400$ K 的高温热源与 $T_2=300$ K 的低温热源间作卡诺循环（可逆的），在 400 K 的等温线上起始体积为 $V_1=0.001$ m^3，终止体积为 $V_2=0.005$ m^3，试求此气体在每一循环中 (1) 从高温热源吸收的热量 Q_1；(2) 气体所作的净功 W；(3) 气体传给低温热源的热量 Q_2。

解析

【解析】理想气体的物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律，卡诺热机的效率。

(1) 理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

所以等温过程中

$$p=\frac{nRT}{V}$$

在与高温热源接触的等温膨胀过程中，气体对外做功

$$W_1=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=nRT\ln\frac{V_2}{V_1}=(400\ln 5)R\approx 5.35\times 10^3\ \mathrm{J}$$

而等温过程，内能不变，$\Delta E_1=0$，根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

系统从高温热源处吸收的热量为

$$Q_1=\Delta E_1+W_1=W_1=5.35\times 10^3\ \mathrm{J}$$

(2) 根据卡诺热机的效率

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

可得一个循环过程中气体所做的净功为

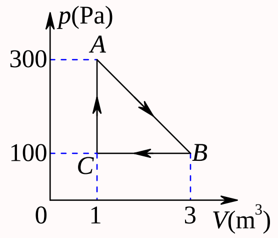
$$W = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_1 = \left(1 - \frac{300}{400}\right) \times 5.35 \times 10^3 \approx 1.34 \times 10^3 \text{ J}$$

(3) 所以，气体传给低温热源的热量为

$$Q_2 = Q_1 - W = 5.35 \times 10^3 - 1.34 \times 10^3 = 4.01 \times 10^3 \text{ J}$$

第 441 题

【4104】一定量的某种理想气体进行如图所示的循环过程。已知气体在状态 A 的温度为 $T_A = 300$ K，求：(1) 气体在状态 B、C 的温度；(2) 各过程中气体对外所作的功；(3) 经过整个循环过程，气体从外界吸收的总热量 (各过程吸热的代数和)。



解析

【解析】理想气体的物态方程，$p - V$ 图，热力学第一定律。

(1) 理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

所以

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{300}{nR} = 300 \text{ K}$$
$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{300}{nR} = 300 \text{ K}$$
$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{100}{nR} = 100 \text{ K}$$

(2)$p - V$ 图中，过程曲线与 V 轴所围面积就表示过程所做的功，所以

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \times (300 + 100) \times (3 - 1) = 400 \text{ J}$$
$$W_{BC} = 100 \times (1 - 3) = -200 \text{ J}$$
$$W_{CA} = 0$$

(3) 一个循环过程，系统恢复原态，内能不变，$\Delta E = 0$，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

可得一个循环过程中气体从外界吸收的总热量

$$Q = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 400 - 200 + 0 = 200 \text{ J}$$

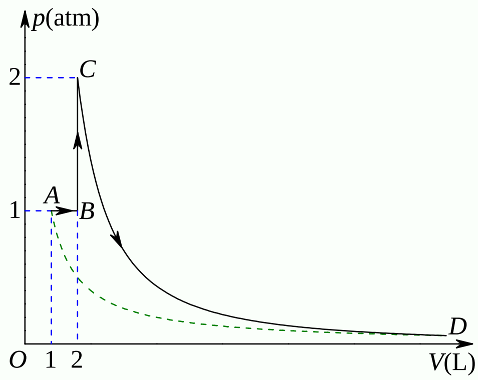
第 442 题

【4114】一定量的某单原子分子理想气体装在封闭的汽缸里。此汽缸有可活动的活塞 (活塞与气缸壁之间无摩擦且无漏气)。已知气体的初压强 $p_1 = 1$ atm，体积 $V_1 = 1$ L，现将该气体在等压下加热直到体积为原来的两倍，然后在等体积下加热直到压强为原来的 2 倍，最后作绝热膨胀，直到温度下降到初温为止，(1) 在 $p-V$ 图上将整个过程表示出来；(2) 试求在整个过程中气体内能的改变；(3) 试求在整个过程中气体所吸收的热量；(4) 试求在整个过程中气体所作的功。

解析

【解析】$p-V$ 图，理想气体的内能，理想气体的物态方程，热力学第一定律。

(1) 过程的 $p-V$ 图如下所示：



(2) 单原子分子理想气体的内能为

$$E = \frac{3}{2}nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

依题意，末态 D 与初态 A 同温，所以整个过程的内能改变量为零。

(3) 根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

而依题意，$p_B = p_A$，$V_B = 2V_A$，$p_C = 2p_B$，$V_C = V_B$，$p_C V_C^\gamma = p_D V_D^\gamma$，$p_D V_D = p_A V_A$，所以

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{p_1 V_1}{nR} = T_1$$
$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_1(2V_1)}{nR} = 2T_1$$
$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{(2p_1)(2V_1)}{nR} = 4T_1$$
$$T_D = T_1$$

$A \to B$ 过程，等压，气体做功 $W_{AB} = p_1(2V_1 - V_1) = p_1 V_1$，内能改变量

$$\Delta E_{AB} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{AB} = \frac{3}{2}nRT_1 = \frac{3}{2}p_1 V_1$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

气体从外界吸收的总热量

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + W_{AB} = \frac{5}{2}p_1V_1$$

$B \to C$ 过程，等容，气体做功 $W_{BC} = 0$，内能改变量

$$\Delta E_{BC} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{3}{2}nR(2T_1) = 3p_1V_1$$

气体从外界吸收的总热量

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} + W_{BC} = 3p_1V_1$$

$C \to D$ 过程，绝热，$Q_{CD} = 0$，内能改变量

$$\Delta E_{CD} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{CD} = \frac{3}{2}nR(-3T_1) = -\frac{9}{2}p_1V_1$$

所以气体做功

$$W_{CD} = Q_{CD} - \Delta E_{CD} = 0 + \frac{9}{2}p_1V_1 = \frac{9}{2}p_1V_1$$

所以整个过程中气体所吸收的热量

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = \frac{5}{2}p_1V_1 + 3p_1V_1 + 0 = \frac{11}{2}p_1V_1 = 5.5 \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3} \approx 557 \text{ J}$$

(4) 整个过程中气体所作的功

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = p_1V_1 + 0 + \frac{9}{2}p_1V_1 = \frac{11}{2}p_1V_1 = 5.5 \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3} \approx 557 \text{ J}$$

第 443 题

【4155】有 1 mol 刚性多原子分子的理想气体，原来的压强为 1.0 atm，温度为 27℃，若经过一绝热过程，使其压强增加到 16 atm。试求：(1) 气体内能的增量；(2) 在该过程中气体所作的功；(3) 终态时，气体的分子数密度。

解析

【解析】理想气体的内能，理想气体的物态方程，绝热过程的过程方程，热力学第一定律。

(1) 刚性多原子分子理想气体的自由度 $i = 6$，所以其内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = 3nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = 3nR\Delta T$$

而其比热比

$$\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{2}{i} = \frac{4}{3}$$

依题意，$n = 1$ mol，$p_1 = 1.0$ atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa，$T_1 = 300$ K，$p_2 = 16$ atm，过程是绝热过程，所以有

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = \frac{1}{8} V_1$$

根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

有

$$p_1 V_1 = RT_1$$

$$p_2 V_2 = RT_2$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{R} = \frac{(16 p_1) \times \frac{1}{8} V_1}{R} = 2T_1$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = 3R\Delta T = 3RT_1 = 3 \times 8.31 \times 300 = 7479 \text{ J}$$

(2) 因为过程绝热，所以系统吸收的热量 $Q = 0$，根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

所以过程气体所做的功

$$W = -\Delta E = -7479 \text{ J}$$

(3) 由理想气体的物态方程

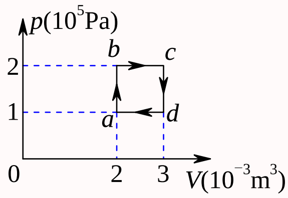
$$pV = nRT = NkT$$

可得，终态时，气体的分子数密度为

$$\frac{N}{V} = \frac{p_2}{kT_2} = \frac{16 \times 1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 600} \approx 1.96 \times 10^{26} \text{ 个/m}^3$$

第 444 题

【4110】如图所示，$abcda$ 为 1 mol 单原子分子理想气体的循环过程，求：(1) 气体循环一次，在吸热过程中从外界共吸收的热量；(2) 气体循环一次对外做的净功；(3) 证明在 $abcd$ 四态，气体的温度有 $T_a T_c = T_b T_d$。



解析

【解析】$p-V$ 图，理想气体的内能，理想气体的物态方程，热力学第一定律。
(1) 单原子分子理想气体的自由度 $i=3$，所以其内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{3}{2}nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E=\frac{3}{2}nR\Delta T$$

依题意，$n=1$ mol，根据理想气体的物态方程

$$pV=nRT$$

有

$$\begin{aligned}T_a&=\frac{p_aV_a}{R}=\frac{1\times10^5\times2\times10^{-3}}{8.31}\approx24\text{ K}\\T_b&=\frac{p_bV_b}{R}=2T_a=48\text{ K}\\T_c&=\frac{p_cV_c}{R}=3T_a=72\text{ K}\\T_d&=\frac{p_dV_d}{R}=1.5T_a=36\text{ K}\\T_aT_c&=3T_a^2=T_bT_d\end{aligned}$$

$a\to b$ 过程，体积不变，做功 $W_{ab}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{ab}=\frac{3}{2}R\Delta T_{ab}=\frac{3}{2}RT_a=\frac{3}{2}p_aV_a=1.5\times1\times10^5\times2\times10^{-3}=300\text{ J}$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

系统吸收的热量 $Q_{ab}=\Delta E_{ab}=300$ J。
$b\to c$ 过程，压强不变，做功

$$W_{bc}=p_b(V_c-V_b)=2\times10^5\times1\times10^{-3}=200\text{ J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{bc}=\frac{3}{2}R\Delta T_{bc}=\frac{3}{2}RT_a=\frac{3}{2}p_aV_a=300\text{ J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{bc}=\Delta E_{bc}+W_{bc}=500$ J。
$c\to d$ 过程，体积不变，做功 $W_{cd}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{cd}=\frac{3}{2}R\Delta T_{cd}=\frac{3}{2}R(-1.5)T_a=-\frac{9}{4}p_aV_a=-450\text{ J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{cd}=\Delta E_{cd}=-450$ J，系统放热。
$d\to a$ 过程，压强不变，做功

$$W_{da}=p_d(V_a-V_d)=1\times10^5\times(-1\times10^{-3})=-100\text{ J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{da} = \frac{3}{2}R\Delta T_{da} = \frac{3}{2}R(-0.5T_a) = -\frac{3}{4}p_aV_a = -150\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{da} = \Delta E_{da} + W_{da} = -250$ J，系统放热。
综上，气体循环一次，$a \to b$、$b \to c$ 两个过程吸热，吸收的总热量为 $Q_{ab} + Q_{bc} = 800$ J。
(2) 气体循环一次对外做的净功

$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da} = 0 + 200 + 0 - 100 = 100\ \mathrm{J}$$

当然，根据 $p-V$ 图中，循环过程的闭合曲线所围面积也可以算出同样的结果。
(3) 如前，

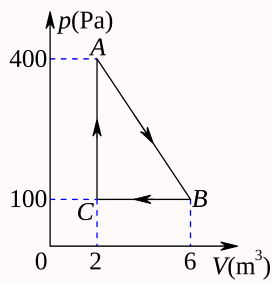
$$T_b = \frac{p_bV_b}{R} = 2T_a$$
$$T_c = \frac{p_cV_c}{R} = 3T_a$$
$$T_d = \frac{p_dV_d}{R} = 1.5T_a$$

所以，有

$$T_aT_c = 3T_a^2 = T_bT_d$$

第 445 题

【4130】比热容比 $\gamma = 1.40$ 的理想气体进行如图所示的循环。已知状态 A 的温度为 300 K。求：(1) 状态 B、C 的温度；(2) 每一过程中气体所吸收的净热量。



解析

【解析】$p-V$ 图，理想气体的物态方程，理想气体的内能，热力学第一定律。
(1) 根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

有

$$T_A = \frac{p_AV_A}{nR} = \frac{800}{nR} = 300\ \mathrm{K} \Rightarrow nR = \frac{8}{3}$$
$$T_B = \frac{p_BV_B}{nR} = \frac{600}{8/3} = 225\ \mathrm{K}$$
$$T_C = \frac{p_CV_C}{nR} = \frac{200}{8/3} = 75\ \mathrm{K}$$

(2) 根据比热容的公式

$$\gamma=\frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}=1+\frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}}=1+\frac{2}{i}=1.4\Rightarrow i=5$$

气体为刚性双原子分子理想气体，其内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{5}{2}nRT=\frac{5}{2}\times\frac{8}{3}T=\frac{20}{3}T$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E=\frac{20}{3}\Delta T$$

$p-V$ 图中过程曲线与 V 轴所围面积即为过程所做功，所以 $A\to B$ 过程，气体所做功为

$$W_{AB}=\frac{1}{2}\times(400+100)\times(6-2)=1000\ \mathrm{J}$$

气体内能改变量

$$\Delta E_{AB}=\frac{20}{3}\Delta T_{AB}=\frac{20}{3}\times(225-300)=-500\ \mathrm{J}$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

系统吸收的热量 $Q_{AB}=\Delta E_{AB}+W_{AB}=500\ \mathrm{J}$。
$B\to C$ 过程，压强不变，做功

$$W_{BC}=p_B(V_C-V_B)=100\times(2-6)=-400\ \mathrm{J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{BC}=\frac{20}{3}\Delta T_{BC}=\frac{20}{3}\times(75-225)=-1000\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{BC}=\Delta E_{BC}+W_{BC}=-1400\ \mathrm{J}$，系统放热。
$C\to A$ 过程，体积不变，做功 $W_{CA}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{CA}=\frac{20}{3}\Delta T_{CA}=\frac{20}{3}\times(300-75)=1500\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{CA}=\Delta E_{CA}=1500\ \mathrm{J}$。

第 446 题

【4258】已知某理想气体分子的方均根速率为 400 m/s。当其压强为 1 atm 时，求气体的密度。

解析

【解析】理想气体的物态方程，方均根速率。

根据方均根速率的公式

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

可得

$$\overline{v^2}=\frac{3RT}{M}$$
$$\frac{RT}{M}=\frac{\overline{v^2}}{3}$$

而由理想气体的物态方程

$$pV=nRT=\frac{m}{M}RT$$

可得，气体的密度为

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}=\frac{p}{RT/M}=\frac{3p}{\overline{v^2}}=\frac{3\times 1.013\times 10^5}{400^2}\approx 1.90\ \mathrm{kg/m^3}$$