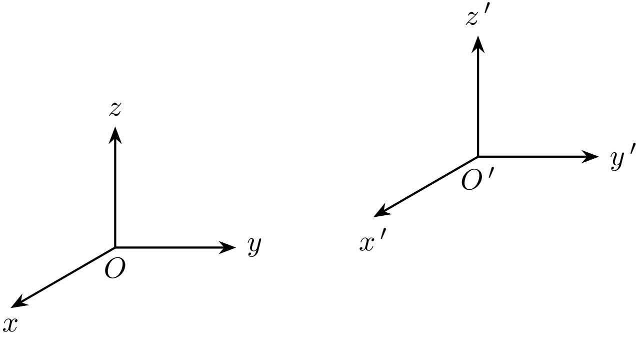
§3.5 非惯性系中的动力学

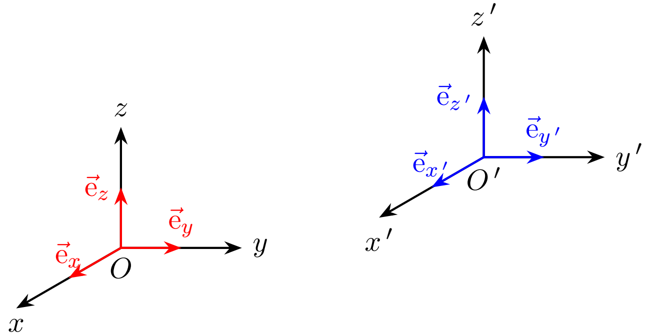
- 同一个质点的运动，从不同的参考系观察，观察的结果 (位置、速度、加速度等) 会有所区别，即质点的位置、速度、加速度等与参考系的选择有关
- 物体的受力，不管从哪个参考系观察，观察的结果是一样的，即物体的受力与参考系的选择无关

一、平动参考系中的相对运动

- 一般地假设有两个参考系 S_1 和 S_2，研究对象 P
- 称 S_1 为“静止”参考系，S_2 为运动参考系，S_2 相对 S_1 平动 (固连在两个参考系上的坐标系的坐标轴永远平行)
- $t=0$ 时刻，两个参考系重合
- 平动是指物体上任意两点所在的直线在整个运动过程中始终保持平行的运动，做平动物体上任意一点的运动状态完全相同，大家具有相同的速度和加速度
- 平动参考系的坐标轴始终保持与静止参考系的坐标轴平行



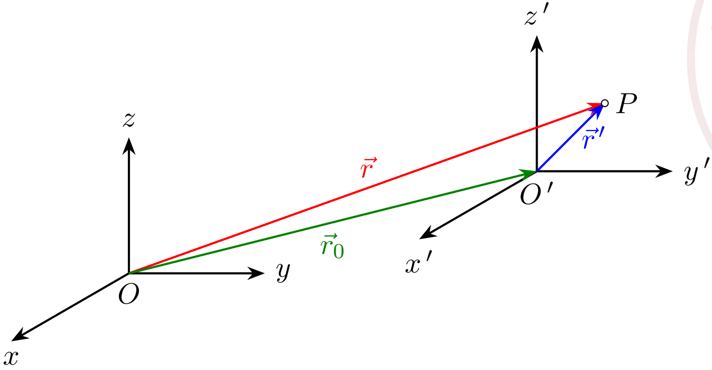
- 两个坐标系的三个沿坐标轴方向的单位矢量相等，即 $\vec{e}_x = \vec{e}_{x'}$，$\vec{e}_y = \vec{e}_{y'}$，$\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$



- S_1 上观察的 P 的运动称为绝对运动，相应的物理量称为绝对位置、绝对速度、绝对加速度，用 $\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ 表示
- S_2 上观察的 P 的运动称为相对运动，相应的物理量称为相对位置、相对速度、相对加速度，用 $\vec{r}'$、$\vec{v}'$、$\vec{a}'$ 表示
- S_1 上观察的 S_2 的坐标原点的运动称为牵连运动，相应的物理量称为牵连位置、牵连速度、牵连加速度，用 $\vec{r}_0$、$\vec{v}_0$、$\vec{a}_0$ 表示

任意 t 时刻

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$
$$\vec{r}' = x'\,\vec{e}_{x'} + y'\,\vec{e}_{y'} + z'\,\vec{e}_{z'}$$
$$\vec{r}_0 = x_0\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y + z_0\,\vec{e}_z$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$



任意 t 时刻

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$$

静止参考系与平动参考系中位置矢量、速度、加速度的变换关系

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0$$

P 相对于 S_1 的运动【绝对运动】等于 P 相对于 S_2 的运动【相对运动】加上 S_2 相对于 S_1 的运动【牵连运动】

二、平动参考系中的惯性力

- 物体的受力，不管从哪个参考系观察，观察的结果是一样的，即物体的受力与参考系的选择无关
- 某时刻，S_1 上观察到 P 所受的合力

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

S_2 上观察到 P 所受的合力

$$\vec{F}' = \sum_i \vec{F}'_i$$

则

$$\vec{F}_i = \vec{F}'_i, \vec{F} = \vec{F}'$$

假设 S_1 上 P 所受的合力和它的加速度满足牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

则 S_1 为惯性参考系

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

$$\vec{F}' = \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

$$\vec{F}' = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

- 当 $\vec{a}_0 = \vec{0}$ 时，

$$\vec{F}' = m\vec{a}'$$

S_2 上 P 所受的合力和它的加速度满足牛顿第二定律，S_2 为惯性参考系。即相对于已知惯性参考系静止或做匀速直线运动的平动参考系也是惯性参考系。

- 当 $\vec{a}_0 \neq \vec{0}$ 时，

$$\vec{F}' \neq m\vec{a}'$$

S_2 上 P 所受的合力和它的加速度不满足牛顿第二定律，S_2 为非惯性参考系。即相对于已知惯性参考系做变速运动的平动参考系是非惯性参考系。

- 在非惯性参考系中

$$\vec{F}' = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

$$\vec{F}' - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$$

引入假想的、找不到施力物体的惯性力

$$\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_0$$

m 为受力质点的质量，$\vec{a}_0$ 为非惯性参考系相对惯性参考系的加速度

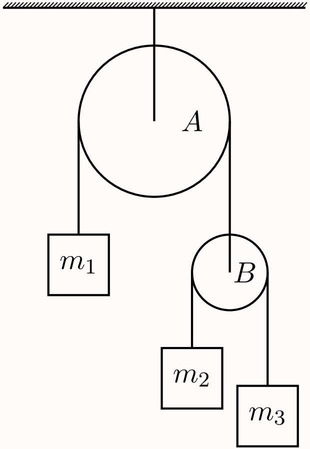
- 平动非惯性参考系中的牛顿第二定律

$$\vec{F}' + \vec{F}_{\text{惯}} = m\vec{a}'$$

认为物体在平动非惯性参考系中，除了受到真实存在的、能找到施力物体的牛顿力外，还受到假想的、找不到施力物体的惯性力

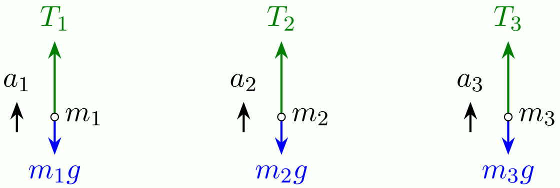
例题

滑轮不计质量、绳子不可伸长且不计质量，忽略一切摩擦，求各物体的加速度和各绳中的张力。



解答

以地面为参考系，对三个物体分别进行受力分析，如图所示，假定三者的加速度均向上，最后计算出来的结果如果为负，则说明其真实加速度向下

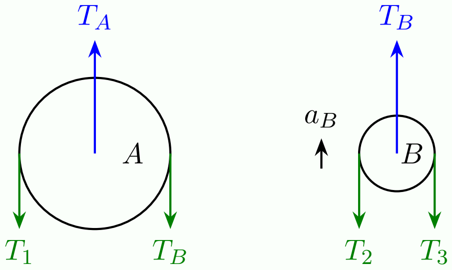


分别对三个物体列牛顿第二定律 (以向上为正方向)

$$T_1 - m_1g = m_1a_1$$
$$T_2 - m_2g = m_2a_2$$
$$T_3 - m_3g = m_3a_3$$

解答

对两个滑轮分别进行受力分析，如图所示



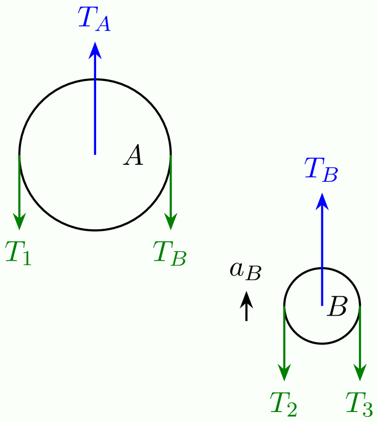
由于绳子不计质量且忽略一切摩擦，所以同一根绳子各处的张力相等

$$T_1 = T_B$$
$$T_2 = T_3$$

解答

由于滑轮不计质量，所以有

$$F_A = m_A a_A$$
$$m_A = 0, a_A = 0$$
$$T_A - T_1 - T_B = 0$$
$$F_B = m_B a_B$$
$$m_B = 0$$
$$T_B - T_2 - T_3 = 0$$



解答

综合以上四式，可得

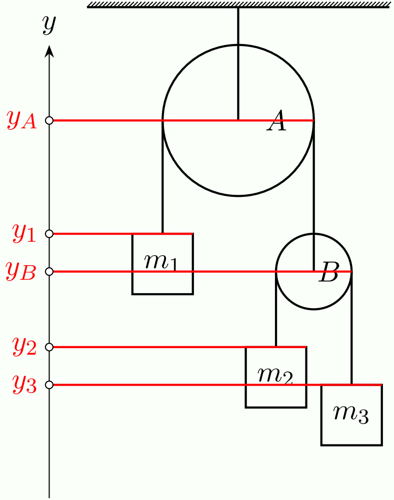
$$T_2 = T_3$$
$$T_1 = 2T_2$$

六个未知数 (T_1、T_2、T_3、a_1、a_2、a_3)，五个方程

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$
$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$
$$T_3 - m_3 g = m_3 a_3$$
$$T_2 = T_3$$
$$T_1 = 2T_2$$

解答

求加速度之间的关系的第一种方法：根据运动学的知识，加速度是位置对时间的二阶导数。
取向上为 y 轴正方向，假定任意时刻各物体的位置如图所示



解答

由于绳子不可伸长

$$(y_A - y_1) + (y_A - y_B) = L_1$$
$$(y_B - y_2) + (y_B - y_3) = L_2$$

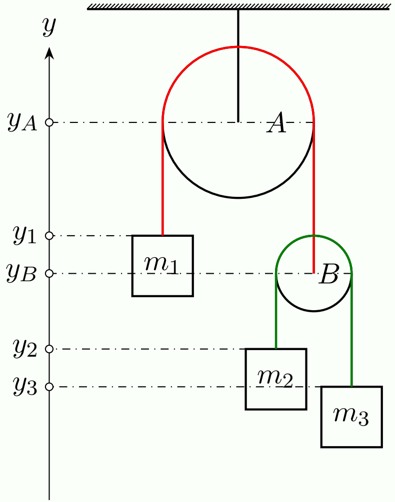
对时间求二阶导

$$(a_A - a_1) + (a_A - a_B) = 0$$
$$(a_B - a_2) + (a_B - a_3) = 0$$

滑轮 A 静止，$a_A = 0$

$$a_B = -a_1$$
$$2a_B - a_2 - a_3 = 0$$

整理得 $2a_1 + a_2 + a_3 = 0$



解答

求加速度之间的关系的第二种方法：根据相对运动中的加速度相加公式，利用滑轮两侧的物体相对滑轮的加速度等值反向的结论。

加速度相加公式

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$
$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$$

以地为静止参考系，滑轮 B 为运动参考系，以向上为 y 轴正方向，则 $\vec{a}_0 = -a_1 \,\vec{e}_y$

解答

以 m_2 为研究对象

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= a_2\,\vec{e}_y \\
\vec{a}\,' &= \vec{a} - \vec{a}_0 \\
&= a_2\,\vec{e}_y - (-a_1\,\vec{e}_y) \\
&= (a_1 + a_2)\,\vec{e}_y \\
a'_2 &= a_1 + a_2
\end{aligned}
$$

以 m_3 为研究对象

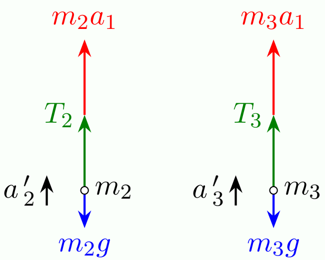
$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= a_3\,\vec{e}_y \\
\vec{a}\,' &= \vec{a} - \vec{a}_0 \\
&= a_3\,\vec{e}_y - (-a_1\,\vec{e}_y) \\
&= (a_1 + a_3)\,\vec{e}_y \\
a'_3 &= a_1 + a_3
\end{aligned}
$$

m_2、m_3 相对滑轮 B 的加速度等值反向

$$
\begin{aligned}
a'_2 &= -a'_3 \\
(a_1 + a_2) &= -(a_1 + a_3) \\
2a_1 + a_2 + a_3 &= 0
\end{aligned}
$$

解答

- 求加速度之间的关系的第三种方法：从非惯性系角度考虑，利用滑轮两侧的物体**相对滑轮**的加速度等值反向的结论
- 以动滑轮 B 为参考系，这是一个非惯性参考系，其加速度 $a_0 = a_B = -a_1$
- 在 B 上对 m_2、m_3 受力分析时，除了它们受到的真实的牛顿力之外，还要受到假想的惯性力



$$
\begin{gathered}
T_2 + m_2a_1 - m_2g = m_2a'_2 \\
T_3 + m_3a_1 - m_3g = m_3a'_3 \\
a'_2 = -a'_3
\end{gathered}
$$

解答

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$
$$T_2 + m_2 a_1 - m_2 g = m_2 a_2'$$
$$T_3 + m_3 a_1 - m_3 g = m_3 a_3'$$
$$T_2 = T_3$$
$$T_1 = 2T_2$$
$$a_2' = -a_3'$$

以上六式联立求出 a_2'、a_3' 后，再利用加速度相加公式求出 a_2、a_3

$$a_2 = a_2' - a_1$$
$$a_3 = a_3' - a_1$$

$$T_1 = \frac{8m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}g$$

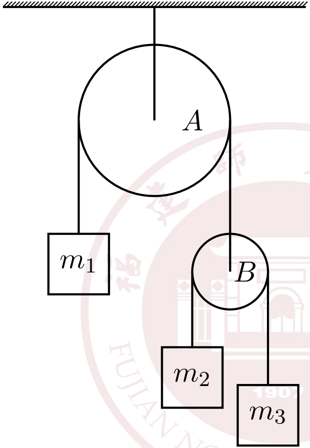
$$T_2 = T_3 = \frac{4m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}g$$

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1(m_2+m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}g$$

$$a_2 = \frac{m_1(3m_3 - m_2) - 4m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}g$$

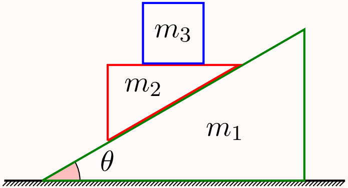
$$a_3 = \frac{m_1(3m_2 - m_3) - 4m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}g$$

- 若 $m_1 = 0$
- 若 $m_2 = 0$
- 若 $m_3 = 0$
- 若 $m_2 = m_3$
- 若 m_2、m_3 互换
- 若 $m_2 = m_3 = m$、$m_1 = 2m$



例题

如图，假定所有接触面光滑，地面水平，m_2 上表面水平，求各物体相对地面的加速度和各物体之间的压力。



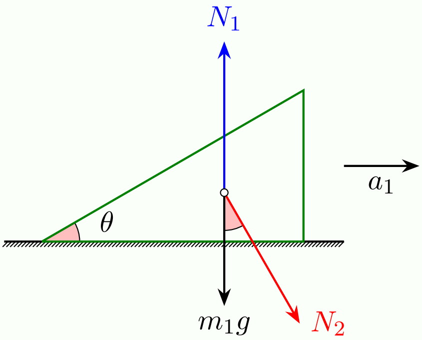
解答

以地面为参考系 (地面为惯性参考系)，对 m_1 进行受力分析。

分别在水平方向和竖直方向列牛顿第二定律 (水平向右为正，竖直向上为正)

$$N_2 \sin\theta = m_1 a_1$$

$$N_1 - m_1 g - N_2 \cos\theta = 0$$



解答

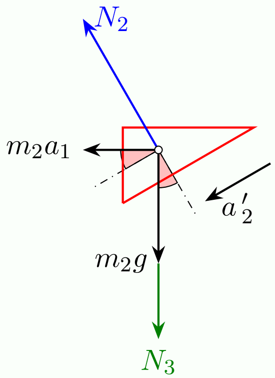
以 m_1 为参考系 (m_1 为非惯性参考系)，对 m_2 进行受力分析

注意：m_2 相对 m_1 沿斜面方向运动

分别在平行斜面方向和垂直斜面方向列牛顿第二定律 (沿斜面向下为正，垂直斜面向上为正)

$$(m_2 g + N_3)\sin\theta + m_2 a_1 \cos\theta = m_2 a_2'$$

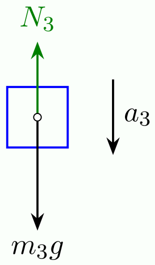
$$N_2 + m_2 a_1 \sin\theta - (m_2 g + N_3)\cos\theta = 0$$



解答

对 m_3 进行受力分析，可以选择不同的参考系，如果选择地面参考系，则受力情况如图所示。可列牛顿第二定律 (以竖直向下为正)

$$m_3 g - N_3 = m_3 a_3$$



六个未知数 (a_1、a'_2、a_3、N_1、N_2、N_3) 五个方程

$$N_2 \sin\theta = m_1 a_1$$
$$N_1 - m_1 g - N_2 \cos\theta = 0$$
$$(m_2 g + N_3)\sin\theta + m_2 a_1 \cos\theta = m_2 a'_2$$
$$N_2 + m_2 a_1 \sin\theta - (m_2 g + N_3)\cos\theta = 0$$
$$m_3 g - N_3 = m_3 a_3$$

解答

- 如果选择 m_1 为参考系，则 m_3 的加速度方向不好判断，所以不建议
- 如果选择 m_2 为参考系，则 m_3 的加速度一定沿 m_2 上表面，即沿水平方向。但要注意，这时的惯性力应该是

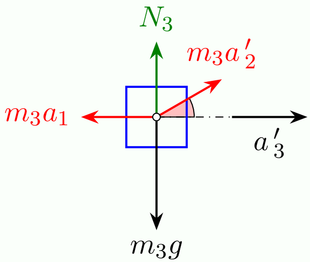
$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{惯}} &= -m_3\vec{a}_2 = -m_3(\vec{a}_2' + \vec{a}_1) \\
&= -m_3\vec{a}_2' - m_3\vec{a}_1
\end{aligned}
$$

解答

以 m_2 为参考系 (m_2 为非惯性参考系)，对 m_3 进行受力分析

分别在水平方向和竖直方向列牛顿第二定律 (水平向右为正，竖直向上为正)

$$m_3 a'_2 \cos\theta - m_3 a_1 = m_3 a'_3$$
$$N_3 + m_3 a'_2 \sin\theta - m_3 g = 0$$



解答

六个未知数 (a_1、a'_2、a'_3、N_1、N_2、N_3) 六个方程

$$N_2 \sin\theta = m_1 a_1$$

$$N_1 - m_1 g - N_2 \cos\theta = 0$$

$$(m_2 g + N_3)\sin\theta + m_2 a_1 \cos\theta = m_2 a'_2$$

$$N_2 + m_2 a_1 \sin\theta - (m_2 g + N_3)\cos\theta = 0$$

$$m_3 a'_2 \cos\theta - m_3 a_1 = m_3 a'_3$$

$$N_3 + m_3 a'_2 \sin\theta - m_3 g = 0$$

解答

以地为绝对参考系，m_2 为运动参考系，m_3 为研究对象，根据伽利略加速度变换关系有

$$\vec{a}_3 = \vec{a}'_3 + \vec{a}_2$$

以地为绝对参考系，m_1 为运动参考系，m_2 为研究对象，根据伽利略加速度变换关系有

$$\vec{a}_2 = \vec{a}'_2 + \vec{a}_1$$

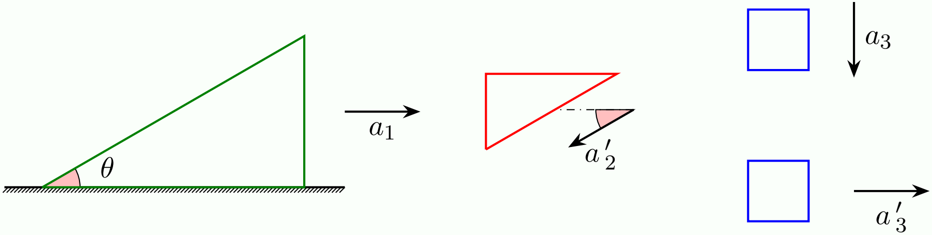
联立以上二式可得

$$\vec{a}'_3 = \vec{a}_3 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3 - \vec{a}_1 - \vec{a}'_2$$

解答

取水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= a_1\,\vec{\mathrm{e}}_x \\
\vec{a}_2' &= -a_2'\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - a_2'\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{a}_3 &= -a_3\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{a}_3' &= a_3'\,\vec{\mathrm{e}}_x
\end{aligned}
$$



解答

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= a_1\,\vec{\mathrm{e}}_x \\
\vec{a}\,'_2 &= -a\,'_2\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - a\,'_2\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{a}_3 &= -a_3\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{a}\,'_3 &= a\,'_3\,\vec{\mathrm{e}}_x \\
\vec{a}\,'_3 &= \vec{a}_3 - \vec{a}_1 - \vec{a}\,'_2 \\
a'_3\,\vec{\mathrm{e}}_x &= -a_3\,\vec{\mathrm{e}}_y - a_1\,\vec{\mathrm{e}}_x - [-a'_2\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - a'_2\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y] \\
&= (a'_2\cos\theta - a_1)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (a'_2\sin\theta - a_3)\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
a'_3 &= a'_2\cos\theta - a_1 \\
0 &= a'_2\sin\theta - a_3
\end{aligned}
$$

解答

六个未知数 (a_1、a'_2、a_3、N_1、N_2、N_3) 六个方程

$$N_2 \sin\theta = m_1 a_1$$

$$N_1 - m_1 g - N_2 \cos\theta = 0$$

$$(m_2 g + N_3)\sin\theta + m_2 a_1 \cos\theta = m_2 a'_2$$

$$N_2 + m_2 a_1 \sin\theta - (m_2 g + N_3)\cos\theta = 0$$

$$m_3 g - N_3 = m_3 a_3$$

$$0 = a'_2 \sin\theta - a_3$$

解答

$$N_1 = \frac{m_1m_2 + m_2(m_2+m_3) + m_1m_3\sin^2\theta}{m_1m_2 + (m_1m_3 + m_2m_3 + m_2^2)\sin^2\theta} m_1 g$$

$$N_2 = \frac{m_1m_2(m_2+m_3)g\cos\theta}{m_1m_2 + (m_1m_3 + m_2m_3 + m_2^2)\sin^2\theta}$$

$$N_3 = \frac{m_1m_2 - m_1m_2\sin^2\theta}{m_1m_2 + (m_1m_3 + m_2m_3 + m_2^2)\sin^2\theta} m_3 g$$

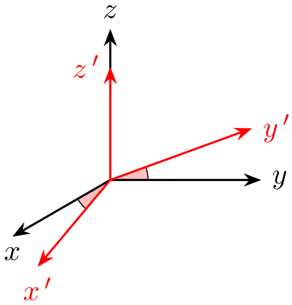
$$a_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)g\sin\theta\cos\theta}{m_1m_2 + (m_1m_3 + m_2m_3 + m_2^2)\sin^2\theta}$$

$$a_2' = \frac{(m_1+m_2)(m_2+m_3)g\sin\theta}{m_1m_2 + (m_1m_3 + m_2m_3 + m_2^2)\sin^2\theta}$$

$$a_3' = \frac{m_1(m_2+m_3)g\sin\theta\cos\theta}{m_1m_2 + (m_1m_3 + m_2m_3 + m_2^2)\sin^2\theta}$$

三、定轴转动参考系

以转轴所在直线为 z 轴，直角坐标系 $Oxyz$ 固定在静止参考系上，$O'x'y'z'$ 固定在转动参考系上，$t=0$ 时刻二者重合，任意 t 时刻，x 轴与 x' 轴的夹角为 θ(这个角度会随时间发生变化)



定轴转动时，角速度矢量

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_z$$

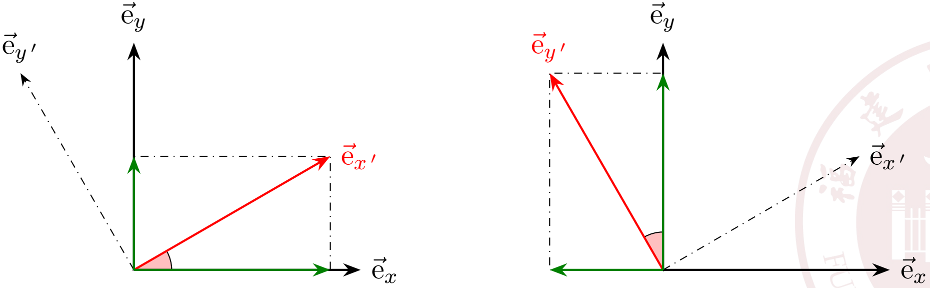
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

角加速度矢量

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \beta\,\vec{e}_z$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}$$

由于 $O'x'y'z'$ 随转动参考系做定轴转动，所以 $\vec{e}_{x'}$、$\vec{e}_{y'}$ 一直在改变 (但 $\vec{e}_{z'}=\vec{e}_z$ 保持不变)



$$\vec{e}_{x'}=\cos\theta\,\vec{e}_x+\sin\theta\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_{y'}=-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{e}}_{x'} &= \cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + \sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{\mathrm{e}}_{y'} &= -\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + \cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}(\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + \sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{\mathrm{d}\theta}\omega = (-\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + \cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y)\omega \\
&= \vec{\mathrm{e}}_{y'}\omega = (\vec{\mathrm{e}}_{z'} \times \vec{\mathrm{e}}_{x'})\omega = (\omega\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \times \vec{\mathrm{e}}_{x'} \\
&= \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{e}}_{x'} \\
\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}(-\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x + \cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y)}{\mathrm{d}\theta}\omega = (-\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_x - \sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_y)\omega \\
&= -\vec{\mathrm{e}}_{x'}\omega = (\vec{\mathrm{e}}_{z'} \times \vec{\mathrm{e}}_{y'})\omega = (\omega\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \times \vec{\mathrm{e}}_{y'} \\
&= \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{e}}_{y'}
\end{aligned}
$$

在静止参考系上观察研究对象的运动

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y + v_z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

在转动参考系上观察研究对象的运动

$$\vec{r}' = x'\,\vec{e}_{x'} + y'\,\vec{e}_{y'} + z'\,\vec{e}_{z'}$$

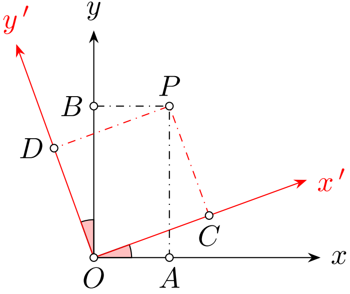
$$\vec{v}' = v'_x\,\vec{e}_{x'} + v'_y\,\vec{e}_{y'} + v'_z\,\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{a}' = a'_x\,\vec{e}_{x'} + a'_y\,\vec{e}_{y'} + a'_z\,\vec{e}_{z'}$$

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}, v'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}, v'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}$$

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t}, a'_y = \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t}, a'_z = \frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t}$$

任意 t 时刻的位置



$$x = OA = BP$$

$$y = OB = AP$$

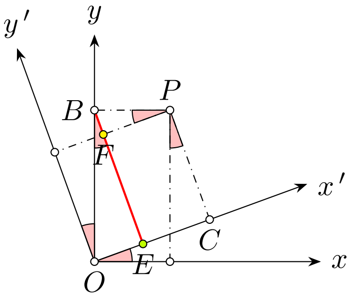
$$x' = OC = DP$$

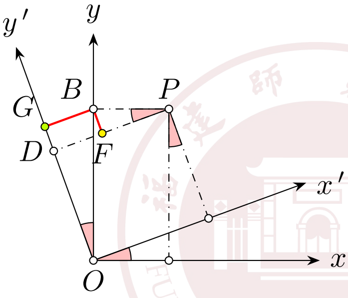
$$y' = OD = CP$$

$$OE = OB\sin\theta = y\sin\theta$$

$$EC = FP = BP\cos\theta = x\cos\theta$$

$$x' = OC = x\cos\theta + y\sin\theta$$



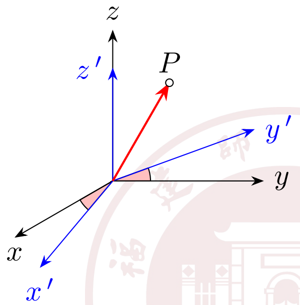


$$OG = OB\cos\theta = y\cos\theta$$

$$DG = BF = BP\sin\theta = x\sin\theta$$

$$y' = OD = y\cos\theta - x\sin\theta$$

任意 t 时刻的位置



$$
\begin{aligned}
\vec{e}_{x'} &= \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \\
\vec{e}_{y'} &= -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \\
\vec{e}_{z'} &= \vec{e}_z \\
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\
y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \\
z' &= z \\
x'\,\vec{e}_{x'} + y'\,\vec{e}_{y'} &= (x\cos\theta + y\sin\theta)(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) + (y\cos\theta - x\sin\theta)(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y) \\
&= x\cos^2\theta\,\vec{e}_x + x\cos\theta\sin\theta\,\vec{e}_y + y\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_x + y\sin^2\theta\,\vec{e}_y \\
&\quad - y\cos\theta\sin\theta\,\vec{e}_x + y\cos^2\theta\,\vec{e}_y + x\sin^2\theta\,\vec{e}_x - x\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_y \\
&= x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y \\
\vec{r} &= x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \\
&= x'\,\vec{e}_{x'} + y'\,\vec{e}_{y'} + z'\,\vec{e}_{z'} \\
&= \vec{r}\,'
\end{aligned}
$$

任意 t 时刻的速度

$$\vec{r}=\vec{r}\,',\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}=x\,\vec{\mathrm{e}}_x+y\,\vec{\mathrm{e}}_y+z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\vec{r}\,'=x'\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}+y'\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}+z'\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_z}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t}=\omega\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}=\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{x'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t}=-\omega\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}=\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{y'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}=\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{z'}$$

$$\vec{\omega}=\omega\,\vec{\mathrm{e}}_z=\omega\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}$$

$$\vec{\mathrm{e}}_{z'}\times\vec{\mathrm{e}}_{z'}=\vec{0}$$

$$\vec{r}=x\,\vec{\mathrm{e}}_x+y\,\vec{\mathrm{e}}_y+z\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\,\vec{\mathrm{e}}_x+y\,\vec{\mathrm{e}}_y+z\,\vec{\mathrm{e}}_z)\\&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_x+x\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_y+y\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_z+z\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_z}{\mathrm{d}t}\\&=v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x+x\cdot\vec{0}+v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y+y\cdot\vec{0}+v_z\,\vec{\mathrm{e}}_z+z\cdot\vec{0}\\&=v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x+v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y+v_z\,\vec{\mathrm{e}}_z\\&=\vec{v}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}' &= x'\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + y'\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + z'\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + y'\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + z'\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + x'\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + y'\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} + z'\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}}{\mathrm{d}t} \\
&= v'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + x'(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{x'}) + v'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + y'(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{y'}) + v'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} + z'(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= v'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + v'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + v'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} + \vec{\omega}\times(x'\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}) + \vec{\omega}\times(y'\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}) + \vec{\omega}\times(z'\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= \vec{v}' + \vec{\omega}\times(x'\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + y'\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + z'\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'
\end{aligned}
$$

任意 t 时刻的速度

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

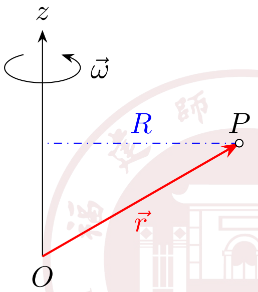
$$\vec{r} = \vec{r}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



任意 t 时刻的加速度

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_0 \\
\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t} \\
\vec{v} &= v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + v_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\vec{v}' &= v'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + v'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + v'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} \\
\vec{v}_0 &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + v_z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_x\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_y + v_y\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_z + v_z\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_z}{\mathrm{d}t} \\
&= a_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_x\cdot\vec{0} + a_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + v_y\cdot\vec{0} + a_z\,\vec{\mathrm{e}}_z + v_z\cdot\vec{0} \\
&= a_x\,\vec{\mathrm{e}}_x + a_y\,\vec{\mathrm{e}}_y + a_z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \vec{a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + v'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + v'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + v'_x\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + v'_y\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} + v'_z\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}}{\mathrm{d}t} \\
&= a'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + v'_x(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{x'}) + a'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + v'_y(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{y'}) + a'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} + v'_z(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= a'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + a'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + a'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'} + \vec{\omega}\times(v'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'}) + \vec{\omega}\times(v'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'}) + \vec{\omega}\times(v'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= \vec{a}' + \vec{\omega}\times(v'_x\,\vec{\mathrm{e}}_{x'} + v'_y\,\vec{\mathrm{e}}_{y'} + v'_z\,\vec{\mathrm{e}}_{z'}) \\
&= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}\times\vec{r})}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{\beta}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}) \\
&= \vec{\beta}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})
\end{aligned}
$$

任意 t 时刻的加速度

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\beta} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{01} + \vec{a}_{02} + \vec{a}_{03}$$

$$\vec{a}_{01} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_{02} = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

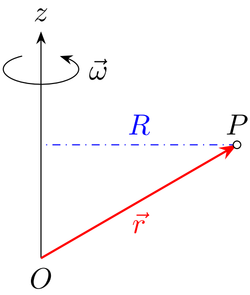
$$\vec{a}_{03} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

静止参考系与定轴转动参考系中位置矢量、速度、加速度的变换关系

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\beta} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$



$\vec{a}_{01} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}$，$P$ 点随转动参考系做圆周运动的速度，大小为 ωR，方向垂直纸面向里，R 是 P 点到转轴的距离
- $\vec{a}_{01} = \vec{\omega} \times \vec{v}_0$，大小为 $\omega^2 R$，方向由 P 点垂直指向转轴

$\vec{a}_{02} = \vec{\beta} \times \vec{r}$

- 如果转速越来越快，$\beta > 0$，$\vec{\beta}$ 沿 z 轴正方向，$\vec{a}_{02}$ 大小为 βR，方向垂直纸面向里
- 如果转速越来越慢，$\beta < 0$，$\vec{\beta}$ 沿 z 轴负方向，$\vec{a}_{02}$ 大小为 $|\beta| R$，方向垂直纸面向外
- 如果匀速转动，$\beta = 0$，$\vec{a}_{02} = \vec{0}$

$\vec{a}_{03} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

- 方向一定垂直于由 $\vec{\omega}$ 和 $\vec{v}'$ 所决定的平面；若 $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$，则 $\vec{a}_{03} = \vec{0}$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{01} + \vec{a}_{02} + \vec{a}_{03}$$

$$\vec{a}_{01} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_{02} = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{03} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{01} + m\vec{a}_{02} + m\vec{a}_{03}$$

$$m\vec{a} - m\vec{a}_{01} - m\vec{a}_{02} - m\vec{a}_{03} = m\vec{a}'$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{离} + \vec{F}_{切} + \vec{F}_{科} = m\vec{a}'$$

- 惯性离心力

$$\vec{F}_{离} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

- 切向惯性力

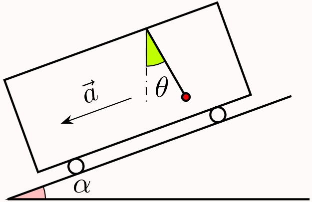
$$\vec{F}_{切} = -m\vec{\beta} \times \vec{r}$$

- 科里奥利力

$$\vec{F}_{科} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

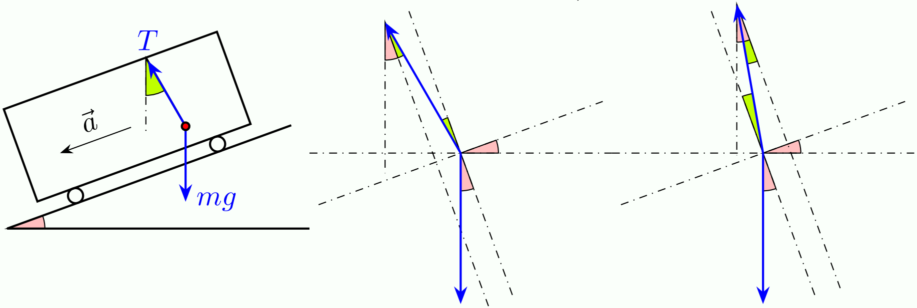
习题 3.5.1

如图所示，小车以匀加速度 $\vec{a}$ 沿倾角为 α 的斜面向下运动，摆锤相对于小车保持静止，求悬线与竖直方向的夹角 (分别自惯性系和非惯性系中求解)。



解答

以地为惯性参考系，以摆锤为研究对象，摆锤以匀加速度 $\vec{a}$ 沿倾角为 α 的斜面向下运动，摆锤共受到两个力的作用：竖直向下的重力，沿绳子方向的拉力



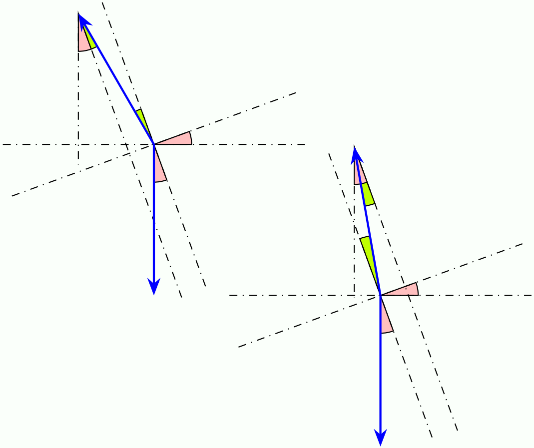
解答

分别沿平行斜面和垂直斜面列牛顿第二定律 ($\theta > \alpha$)

$$T\sin(\theta-\alpha)+mg\sin\alpha=ma$$
$$T\cos(\theta-\alpha)-mg\cos\alpha=0$$

或 ($\alpha > \theta$)

$$mg\sin\alpha-T\sin(\alpha-\theta)=ma$$
$$T\cos(\alpha-\theta)-mg\cos\alpha=0$$



解答

以上两种情况的式子是等价的，取其中一种计算

$$T = \frac{mg\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}$$

$$mg\cos\alpha\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)} + mg\sin\alpha = ma$$

$$\tan(\theta-\alpha) = \frac{a-g\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

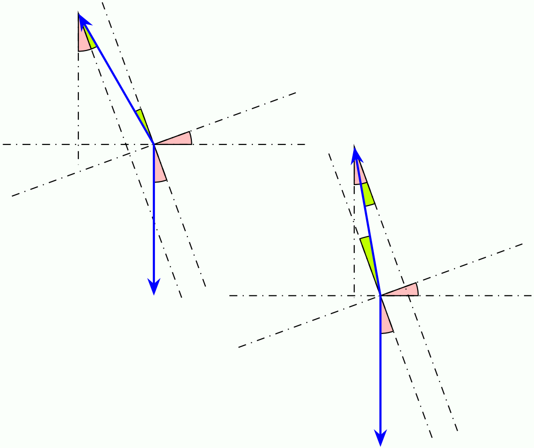
解答

分别沿水平方向和竖直方向列牛顿第二定律

$$T\sin\theta = ma\cos\alpha$$
$$mg - T\cos\theta = ma\sin\alpha$$

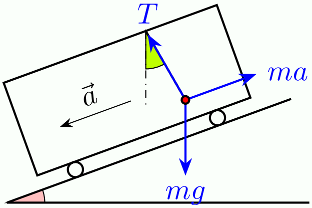
解得

$$T\sin\theta = ma\cos\alpha$$
$$T\cos\theta = mg - ma\sin\alpha$$
$$\tan\theta = \frac{ma\cos\alpha}{mg - ma\sin\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}$$
$$\theta = \arctan\frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}$$



解答

以小车为非惯性参考系，以摆锤为研究对象，摆锤相对小车静止，摆锤共受到三个力的作用：竖直向下的重力，沿绳子方向的拉力，惯性力



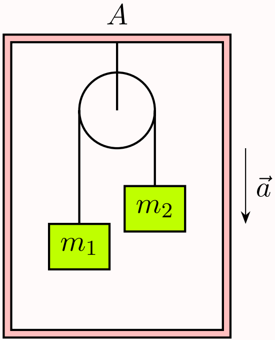
分别沿水平方向和竖直方向列牛顿第二定律

$$
ma\cos\alpha - T\sin\theta = 0
$$

$$
T\cos\theta + ma\sin\alpha - mg = 0
$$

习题 3.5.2

升降机 A 内有一装置如图所示。悬挂的两物体的质量各为 m_1，m_2，且 $m_1 \neq m_2$。若不计绳及滑轮质量，不计轴承摩擦，绳不可伸长，忽略绳与滑轮之间的摩擦，求当升降机以加速度 $\vec{a}$(方向向下) 运动时，两物体的加速度各是多少？绳内的张力是多少？



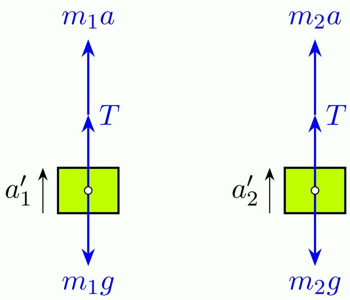
解答

以升降机为非惯性参考系，分别以两物体为研究对象，受力分析。分别对两物体列牛顿第二定律

$$m_1a + T - m_1g = m_1a_1'$$
$$m_2a + T - m_2g = m_2a_2'$$

由于绳子不可伸长

$$a_1' = -a_2'$$



解答

联立解得

$$a_1' = \frac{(m_1 - m_2)(a - g)}{m_1 + m_2}$$

$$a_2' = \frac{(m_2 - m_1)(a - g)}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g - a)$$

所以两物体对地的加速度分别为 (以向上为正)

$$a_1 = a_1' - a = \frac{(m_2 - m_1)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2}$$

$$a_2 = a_2' - a = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_1 a}{m_1 + m_2}$$