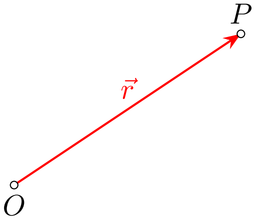
§2.1 质点的运动学方程

一、位置矢量

- 设 t 时刻，质点位于 P 点
- 由参考点 (通常为坐标原点) 指向质点所在位置的矢量称为质点在该时刻的位置矢量，通常用 $\vec{r}$ 表示



- 在直角坐标系中，$\vec{r}$ 一般地表示为

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \\ &= r\,\vec{e}_r\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}r &= |\vec{r}| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} \\ &= \frac{x}{r}\,\vec{e}_x + \frac{y}{r}\,\vec{e}_y + \frac{z}{r}\,\vec{e}_z\end{aligned}$$

二、运动学方程

- 运动的质点，不同时刻出现在不同的位置
- 质点的位置矢量 $\vec{r}$ 随时间变化

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

即位置矢量是以时间为自变量的函数，称为质点的运动学方程，或称质点的运动方程

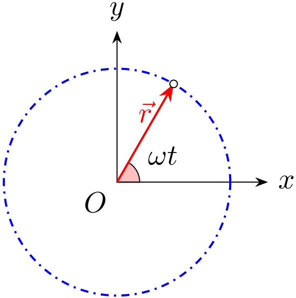
- 直角坐标系中

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + y(t)\,\vec{\mathrm{e}}_y + z(t)\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

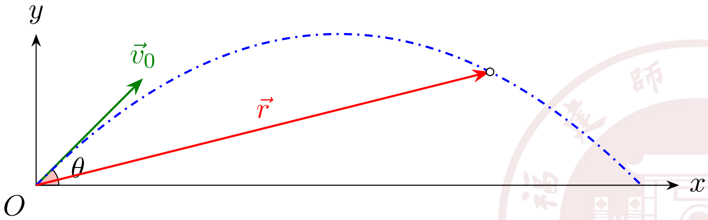
上式称为质点运动学方程的矢量形式，它等价于

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

上式称为质点运动学方程的分量形式



匀速圆周运动



抛体运动

$$x = R\cos(\omega t)$$
$$y = R\sin(\omega t)$$
$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_x + R\sin(\omega t)\,\vec{\mathrm{e}}_y$$

$$x = (v_0\cos\theta)t$$
$$y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\vec{r} = [(v_0\cos\theta)t]\,\vec{\mathrm{e}}_x + \left[(v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\vec{\mathrm{e}}_y$$

三、轨道方程

- 二维直角坐标系中，某质点的运动学方程为

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

消去时间 t，可得 x、y 坐标满足的函数关系

$$y = y(x), \text{或} x = x(y), \text{或} f(x, y) = 0$$

称为质点的轨道方程

某质点的运动学方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y = B\sin(\omega t + \varphi_0)$$

其中 A、B、ω、φ_0 为常数，则有

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$\frac{y}{B} = \sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

抛体运动的运动学方程为

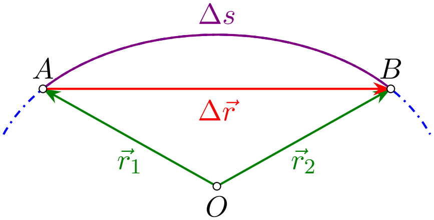
$$x = (v_0 \cos\theta)t$$
$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

其中 v_0、θ、g 为常数，则有

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$
$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2$$

四、位移和路程

- 质点沿某轨道运动，t_1 时刻质点出现在位矢为 $\vec{r}_1$ 的 A 处，t_2 时刻质点出现在位矢为 $\vec{r}_2$ 的 B 处，



- 则从起点 A 指向终点 B 的矢量称为质点在 $t_1 \to t_2$ 时间内的位移 (矢量)，记为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

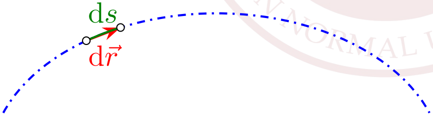
- 而从起点 A 到终点 B 之间轨道的长度称为质点在 $t_1 \to t_2$ 时间内的路程，记为 Δs

- 显然，一般情况下，位移的大小与路程并不会相等

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$$

- 但对于历时无穷小 $(\mathrm{d}t)$ 的任意元过程，元位移 $(\mathrm{d}\vec{r})$ 的大小等于元路程 $(\mathrm{d}s)$

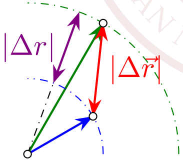
$$|\,\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$$



在三维直角坐标系中

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= x_1\,\vec{\mathrm{e}}_x + y_1\,\vec{\mathrm{e}}_y + z_1\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\vec{r}_2 &= x_2\,\vec{\mathrm{e}}_x + y_2\,\vec{\mathrm{e}}_y + z_2\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\
&= (x_2 - x_1)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (y_2 - y_1)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (z_2 - z_1)\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= (\Delta x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (\Delta y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (\Delta z)\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
|\Delta\vec{r}| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\
r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\
r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\
\Delta r &= r_2 - r_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z \\
\mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}(x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= \mathrm{d}(x\,\vec{\mathrm{e}}_x) + \mathrm{d}(y\,\vec{\mathrm{e}}_y) + \mathrm{d}(z\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= (\mathrm{d}x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + x(\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_x) \\
&\quad + (\mathrm{d}y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + y(\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_y) \\
&\quad + (\mathrm{d}z)\,\vec{\mathrm{e}}_z + z(\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_z) \\
&= (\mathrm{d}x)\,\vec{\mathrm{e}}_x + (\mathrm{d}y)\,\vec{\mathrm{e}}_y + (\mathrm{d}z)\,\vec{\mathrm{e}}_z
\end{aligned}
$$



一般情况下，$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r = \Delta|\vec{r}|$，且 Δr 可能为负

习题 2.1.3

质点的运动学方程为

$$\vec{r} = 4t^2\,\vec{e}_x + (2t+3)\,\vec{e}_y$$

(单位：m)。(1) 求质点轨迹；(2) 求自 $t = 0\ \mathrm{s}$ 至 $t = 1\ \mathrm{s}$ 质点的位移。

解答

(1)

$$\vec{r} = 4t^2\,\vec{e}_x + (2t+3)\,\vec{e}_y$$

$$x = 4t^2$$

$$y = 2t + 3$$

$$2t = y - 3$$

$$x = 4t^2 = (2t)^2 = (y-3)^2$$

$$x = (y-3)^2$$

(2)

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0) = 3\,\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t=1) = 4\,\vec{e}_x + 5\,\vec{e}_y$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (4\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y)\ \mathrm{m}$$