§4.7 非对心碰撞

- 如果两个物体碰撞之前的速度不在二者质心的连线上，则碰撞称为非对心碰撞或斜碰(撞)
- 碰撞前后各物体的速度在同一个平面内的碰撞称为二维碰撞
- 碰撞前后各物体的速度不在同一平面内的碰撞称为三维碰撞
- 本节仅讨论二维完全弹性碰撞
- 假定两物体的表面光滑，因此碰撞过程中相互作用力沿二者接触时的质心连线
- 以二者接触时的接触点为坐标原点，质心连线为 y 轴，x 轴与之垂直
- 很一般地假定两物体的质量分别为 m_1 和 m_2，碰撞前两物体的速度分别为 $\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$，碰撞后两物体的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{10} &= v_{10x}\,\vec{e}_x + v_{10y}\,\vec{e}_y \\
\vec{v}_{20} &= v_{20x}\,\vec{e}_x + v_{20y}\,\vec{e}_y \\
\vec{v}_1 &= v_{1x}\,\vec{e}_x + v_{1y}\,\vec{e}_y \\
\vec{v}_2 &= v_{2x}\,\vec{e}_x + v_{2y}\,\vec{e}_y
\end{aligned}
$$

- 选择适当的参考系，使得其中一个物体 (如 m_2) 碰撞之前速度为零，即

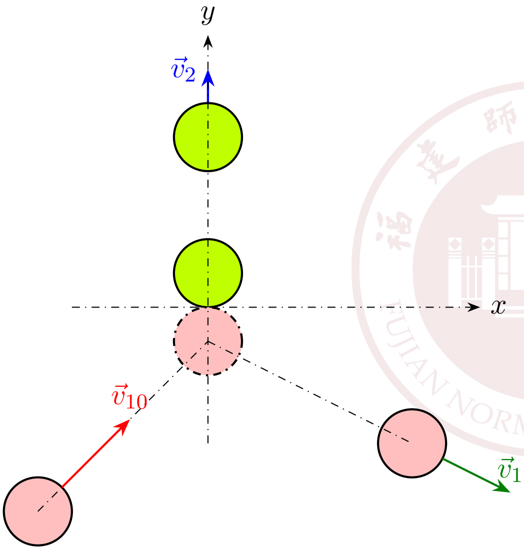
$$\vec{v}_{20} = \vec{0}$$
$$v_{20x} = 0$$
$$v_{20y} = 0$$

- 碰撞过程历时很短，如果外力的冲量可以忽略，则系统动量守恒

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$
$$m_1(v_{10x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_{10y}\,\vec{\mathrm{e}}_y) = m_1(v_{1x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_{1y}\,\vec{\mathrm{e}}_y) + m_2(v_{2x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_{2y}\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$
$$m_1v_{10x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}$$
$$m_1v_{10y} = m_1v_{1y} + m_2v_{2y}$$

假定两物体的表面光滑，因此碰撞过程中相互作用力沿二者接触时的质心连线，则有

$$v_{1x} = v_{10x}$$
$$v_{2x} = v_{20x} = 0$$



此时，恢复系数为

$$e=\frac{v_{2y}-v_{1y}}{v_{10y}-v_{20y}}=\frac{v_{2y}-v_{1y}}{v_{10y}}$$

联立

$$m_1v_{10y}=m_1v_{1y}+m_2v_{2y}$$
$$e=\frac{v_{2y}-v_{1y}}{v_{10y}}$$

可以解得

$$v_{1y}=\frac{(m_1-em_2)v_{10y}}{m_1+m_2}$$
$$v_{2y}=\frac{(1+e)m_1v_{10y}}{m_1+m_2}$$

$$m_1v_{10y}=m_1v_{1y}+m_2v_{2y}$$
$$ev_{10y}=v_{2y}-v_{1y}$$
$$em_2v_{10y}=m_2v_{2y}-m_2v_{1y}$$
$$(m_1-em_2)v_{10y}=(m_1+m_2)v_{1y}$$
$$v_{1y}=\frac{(m_1-em_2)v_{10y}}{m_1+m_2}$$
$$m_1v_{10y}=m_1v_{1y}+m_2v_{2y}$$
$$ev_{10y}=v_{2y}-v_{1y}$$
$$em_1v_{10y}=m_1v_{2y}-m_1v_{1y}$$
$$(1+e)m_1v_{10y}=(m_1+m_2)v_{2y}$$
$$v_{2y}=\frac{(1+e)m_1v_{10y}}{m_1+m_2}$$

完全弹性碰撞，$e=1$

$$
\begin{aligned}
v_{1x} &= v_{10x} \\
v_{2x} &= 0 \\
v_{1y} &= \frac{(m_1 - e m_2) v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{(m_1 - m_2) v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
v_{2y} &= \frac{(1+e) m_1 v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{2 m_1 v_{10y}}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

若 $m_1 = m_2$

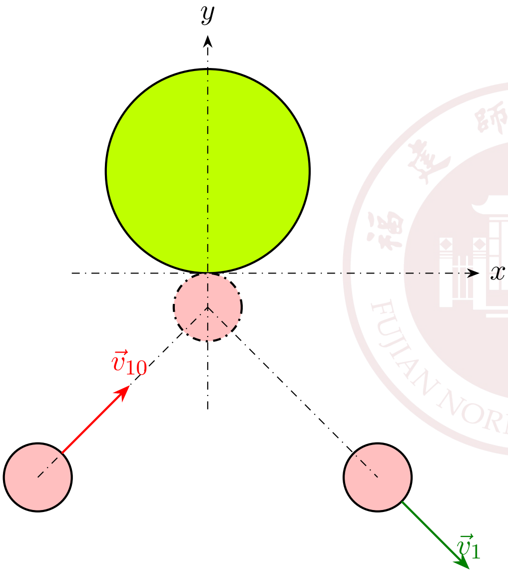
$$
\begin{aligned}
v_{1x} &= v_{10x} \\
v_{2x} &= 0 \\
v_{1y} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&= 0 \\
v_{2y} &= \frac{2 m_1 v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&= v_{10y} \\
\vec{v}_1 &= v_{10x}\,\vec{\mathrm{e}}_x \\
\vec{v}_2 &= v_{10y}\,\vec{\mathrm{e}}_y
\end{aligned}
$$

若 $m_1 \gg m_2$

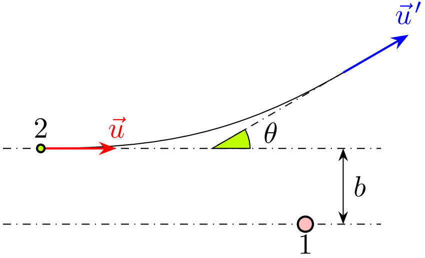
$$
\begin{aligned}
v_{1x} &= v_{10x} \\
v_{2x} &= 0 \\
v_{1y} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&\approx v_{10y} \\
v_{2y} &= \frac{2 m_1 v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&\approx 2 v_{10y} \\
\vec{v}_1 &= v_{10x}\,\vec{\mathrm{e}}_x + v_{10y}\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
&= \vec{v}_{10} \\
\vec{v}_2 &= 2 v_{10y}\,\vec{\mathrm{e}}_y
\end{aligned}
$$

若 $m_1 \ll m_2$

$$
\begin{aligned}
v_{1x} &= v_{10x} \\
v_{2x} &= 0 \\
v_{1y} &= \frac{(m_1 - m_2)v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&\approx -v_{10y} \\
v_{2y} &= \frac{2m_1 v_{10y}}{m_1 + m_2} \\
&\approx 0 \\
\vec{v}_1 &= v_{10x}\,\vec{\mathrm{e}}_x - v_{10y}\,\vec{\mathrm{e}}_y \\
\vec{v}_2 &= \vec{0}
\end{aligned}
$$



P129-130 散射



习题 4.7.1

质量为 m 的氘核的速率 u 与静止的质量为 $2m$ 的 α 粒子发生完全弹性碰撞，氘核以与原方向成 90° 角散射。(1) 求 α 粒子的运动方向；(2) 用 u 表示 α 粒子的末速度；(3) 百分之几的能量由氘核传给 α 粒子？

解答

以氘核碰撞前的速度方向为 x 轴正方向，碰撞后的速度方向为 y 轴正方向，以氘核和 α 粒子为研究对象，碰撞过程系统动量守恒

$$mu\,\vec{e}_x = mu_1\,\vec{e}_y + 2m\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(u\,\vec{e}_x - u_1\,\vec{e}_y)$$

完全弹性碰撞，机械能没有损耗

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2$$

$$u^2 - u_1^2 = 2v^2 = 2 \times \frac{1}{4}(u^2 + u_1^2)$$

解答

$$
\begin{aligned}
2u^2 - 2u_1^2 &= u^2 + u_1^2 \\
u^2 &= 3u_1^2 \\
u_1 &= \frac{u}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{1}{2}(u\,\vec{\mathrm{e}}_x - u_1\,\vec{\mathrm{e}}_y) \\
&= \frac{1}{2}\left(u\,\vec{\mathrm{e}}_x - \frac{u}{\sqrt{3}}\,\vec{\mathrm{e}}_y\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}u\left(\sqrt{3}\,\vec{\mathrm{e}}_x - \vec{\mathrm{e}}_y\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\mathrm{e}}_x - \frac{1}{2}\,\vec{\mathrm{e}}_y\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\alpha &= \frac{1}{2}(2m)v^2 \\
&= \frac{1}{2}(2m) \times \frac{1}{12}u^2 \times 4 \\
&= \frac{1}{2}mu^2 \times \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$