§2.3 质点直线运动——从坐标到速度和加速度

一、直线运动

- 当质点的运动轨迹是一条直线时，质点的运动称为直线运动
- 当质点做直线运动时，通常 (但不是必须) 选择质点运动轨迹所在的直线为坐标轴，如 x 轴【如果质点在竖直方向上做直线运动，如自由落体、竖直上抛等，通常选为 y 轴】
- 在质点运动轨迹上选择一个位置为坐标原点，确定一个方向 (如水平向右) 为 x 轴正方向
- 如此建立坐标系后，描述质点直线运动的位矢、速度和加速度都将只有一个分量

$$\vec{r} = x\,\vec{\mathrm{e}}_x$$
$$\vec{v} = v_x\,\vec{\mathrm{e}}_x$$
$$\vec{a} = a_x\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

因此，通常直接使用它们的分量来描述，分量的绝对值表示矢量的大小，分量的正负表示矢量的方向

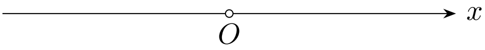
二、运动学方程

如前建立坐标系后，做直线运动的质点的运动学方程的矢量形式

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\mathrm{e}}_x$$

因此分量形式

$$x = x(t)$$



- 当 $x > 0$ 时，说明质点位于坐标原点的右侧
- 当 $x < 0$ 时，说明质点位于坐标原点的左侧
- $|x|$ 表示质点所在位置与坐标原点之间的距离

三、速度和加速度

若已知质点的运动学方程

$$x = x(t)$$

则通过求导可得任意时刻质点的速度

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

任意时刻质点的加速度

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

- 当 $v_x > 0$ 时，说明质点沿 x 轴正方向运动
- 当 $v_x < 0$ 时，说明质点沿 x 轴负方向运动
- $v = |v_x|$ 表示质点运动速度的大小
- 当 $a_x > 0$ 时，说明质点的加速度沿 x 轴正方向
- 当 $a_x < 0$ 时，说明质点的加速度沿 x 轴负方向
- $a = |a_x|$ 表示质点运动加速度的大小
- 当 a_x 和 v_x 同号时，说明质点做加速运动
- 当 a_x 和 v_x 异号时，说明质点做减速运动

四、匀速和匀变速直线运动

若质点的运动学方程为

$$x = A + Bt$$

其中 A、B 为常数，则可得质点任意时刻的速度和加速度

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$$

质点的运动为匀速直线运动

- 速度为常量，加速度为零
- $x_0 = x(t=0) = A$ 为质点在初始时刻 ($t=0$ 时刻) 的位置

若质点的运动学方程为

$$x = A + Bt + Ct^2$$

其中 A、B、C 为常数，则可得质点任意时刻的速度和加速度

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 2C$$

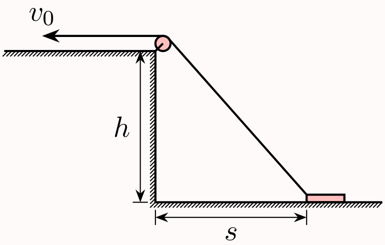
质点的运动为匀变速直线运动

- 加速度为常量
- $x_0 = x(t=0) = A$ 为质点在初始时刻 ($t=0$ 时刻) 的位置
- $v_{0x} = v_x(t=0) = B$ 为质点在初始时刻 ($t=0$ 时刻) 的速度

五、应用举例

例题 2-4

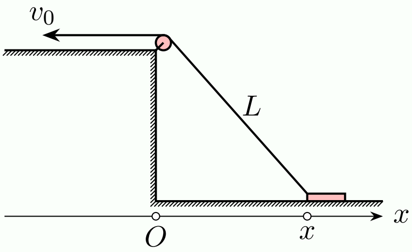
离水面高度为 h 的岸上有人用绳拉船靠岸。人以恒定速率 v_0 拉船，求当船离岸的距离为 s 时，船的速度和加速度。



解答

如图建立坐标系，设任意 t 时刻，船的位置为 x，船头到滑轮间绳长为 L，则有

$$L^2 = h^2 + x^2$$



依题意

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -v_0, v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

解答

【方法一】

$$L^2 = h^2 + x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}(L^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(h^2+x^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(L^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(L^2)}{\mathrm{d}L} \times \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 2L(-v_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2xv_x$$

$$2L(-v_0) = 2xv_x$$

$$2L(-v_0) = 2xv_x$$

$$v_x = -\frac{L}{x}v_0 = -\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0$$

当 $x = s$ 时，

$$v_x = -\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$$

其中负号表示船沿 x 轴负方向运动

解答

【方法二】

$$L^2 = h^2 + x^2$$

$$x = \sqrt{L^2 - h^2}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}L} \times \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}L} = \frac{1}{2}(L^2 - h^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2L = \frac{L}{\sqrt{L^2 - h^2}} = \frac{L}{x}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}L} \times \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{x}(-v_0) = -\frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0$$

- 求得速度之后，原则上速度对时间的导数就是加速度
- 但要注意，这里速度是位置的函数，位置是时间的函数，即速度是时间的复合函数
- 要求某位置的加速度，必须先求出任意位置的加速度，再代入具体的位置

解答

【方法一】

$$v_x = -\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = -\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0$$

$$v_x = -\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0 = -v_0\frac{u(x)}{w(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{w(x)}\right]$$

$$u(x) = \sqrt{h^2+x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(h^2+x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$w(x) = x$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 1$$

解答

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{w(x)}\right]=\frac{1}{w^2}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}w-u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\times x-\sqrt{h^2+x^2}\times 1\right]$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{x^2-(h^2+x^2)}{\sqrt{h^2+x^2}}\right]=-\frac{h^2}{x^2\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}=-v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{w(x)}\right]=\frac{h^2}{x^2\sqrt{h^2+x^2}}v_0$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{h^2}{x^2\sqrt{h^2+x^2}}v_0\times\left(-\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0\right)=-\frac{h^2}{x^3}v_0^2$$

解答

当 $x = s$ 时，

$$a_x = -\frac{h^2}{s^3} v_0^2$$

其中负号表示船的加速度沿 x 轴负方向

解答

【方法二】

$$L^2 = h^2 + x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}(L^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(h^2+x^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t}$$

$$2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$-Lv_0 = xv_x$$

$$\frac{\mathrm{d}(-Lv_0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(xv_x)}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}v_0 - L\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}v_x + x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$-(-v_0)v_0 - L\times 0 = v_x \times v_x + x \times a_x$$

$$v_0^2 = v_x^2 + a_x x$$

$$v_x = -\frac{L}{x}v_0$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{v_0^2 - v_x^2}{x} \\ &= \frac{v_0^2}{x}\left(1 - \frac{L^2}{x^2}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{x}\left(1 - \frac{x^2+h^2}{x^2}\right) \\ &= -\frac{h^2}{x^3}v_0^2 \end{aligned}$$

思考题

- 思考题 2.1
  - 质点位置矢量方向不变，质点是否一定作直线运动?
  - 质点沿直线运动，其位置矢量是否一定方向不变?
- 思考题 2.2
  - 若质点的速度矢量的方向不变仅大小改变，质点作何种运动?
  - 速度矢量的大小不变而方向改变，作何种运动?
- 思考题 2.4
  - 是否可能存在这样的直线运动，质点速度逐渐增加但其加速度却在减小?

习题 2.3.3

跳伞运动员的速度为

$$v = \beta\frac{1-\mathrm{e}^{-qt}}{1+\mathrm{e}^{-qt}}$$

速度竖直向下，β、q 为正常量。求其加速度。讨论当时间足够长时 (即 $t\to\infty$)，速度和加速度的变化趋势。

解答

$$v = \beta\frac{1-\mathrm{e}^{-qt}}{1+\mathrm{e}^{-qt}}$$

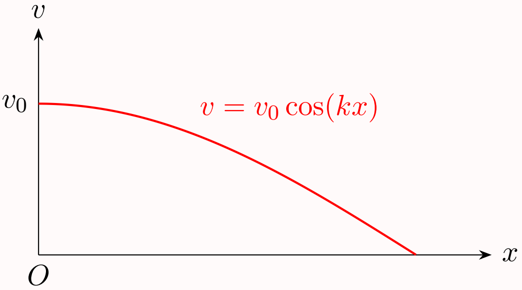
$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \beta\frac{q\mathrm{e}^{-qt}(1+\mathrm{e}^{-qt})-(1-\mathrm{e}^{-qt})(-q\mathrm{e}^{-qt})}{(1+\mathrm{e}^{-qt})^2} \\ &= 2q\beta\frac{\mathrm{e}^{-qt}}{(1+\mathrm{e}^{-qt})^2} \end{aligned}$$

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty}\beta\frac{1-\mathrm{e}^{-qt}}{1+\mathrm{e}^{-qt}} = \beta$$

$$a_\infty = \lim_{t\to\infty}2q\beta\frac{\mathrm{e}^{-qt}}{(1+\mathrm{e}^{-qt})^2} = 0$$

习题 2.3.4

直线运行的高速列车在电子计算机控制下减速进站。列车原运行速率为 v_0，其速率变化规律如图所示（$v = v_0\cos(kx)$，k 为常数）。求列车行至 x 时加速度的大小。



解答

$$v = v_0\cos(kx)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kv_0\sin(kx)$$

$$a = -kv_0^2\sin(kx)\cos(kx) = -\frac{1}{2}kv_0^2\sin(2kx)$$

问题 1

【注意】本题所给数据使用的单位不是国际单位制，因此计算得到的加速度的单位是什么？若先转成国际单位制，那么速度的表达式又是什么？

提示

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

x 的单位是 km，$\mathrm{d}x$ 的单位也是 km；v 的单位是 $\mathrm{km/h}$，$\mathrm{d}v$ 的单位也是 $\mathrm{km/h}$，$\mathrm{d}t$ 的单位是 h，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的单位是 $1/\mathrm{h}$，因此 a 的单位是 $\mathrm{km/h^2}$

问题 2

下式中速度 v 和 v_0 的单位为 km/h，位置 x 的单位为 km

$$v = v_0 \cos \frac{\pi x}{5}$$

现在使用国际单位制单位 (速度 v 和 v_0 的单位为 m/s，位置 x 的单位为 m)，表达式应该改为什么？

提示

依原题图

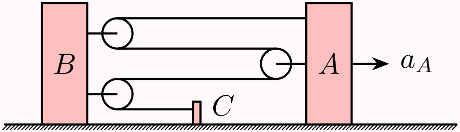
$$2500k = \frac{\pi}{2}$$

$$k = \frac{\pi}{5000}$$

$$v = v_0 \cos \frac{\pi x}{5000}$$

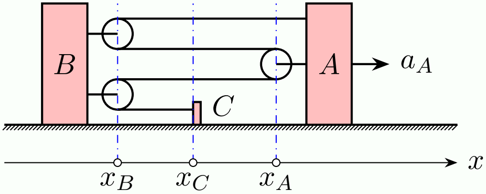
习题 2.3.5

如图所示，在水平桌面上放置 A、B 两物体，用一根不可伸长的绳索按图示的装置把它们联结起来。C 与桌面固定。已知物体 A 的加速度 $a_A = 0.5g$。求物体 B 的加速度。(提示：运用绳不可伸长的条件)



解答

如图建立 x 轴，假定任意 t 时刻，各物体的位置如图所示。



由于绳子不可伸长，因此有

$$3(x_A - x_B) + (x_C - x_B) = L_0$$

其中 x_C、L_0 为常数。

解答

$$3(x_A - x_B) + (x_C - x_B) = L_0$$

上式对时间求二阶导，得

$$3(a_A - a_B) + (0 - a_B) = 0$$

$$3a_A - 4a_B = 0$$

$$a_B = \frac{3}{4}a_A$$