§4.3 质点和质点系动能定理

一、质点的动能定理

质量为 m 的质点，速度为 $\vec{v}$ 时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 元过程中，质量为 m 的质点受到的合力为 $\vec{F}$，发生了元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$，t 时刻质点的速度为 $\vec{v}$，$t + \mathrm{d}t$ 时刻质点的速度为 $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$，则该元过程中力对质点所做的元功为

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= m\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= m(\mathrm{d}\vec{v})\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= m(\mathrm{d}\vec{v})\cdot\vec{v} \\
&= m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= m\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\
&= m\vec{a}\cdot(\vec{v}\,\mathrm{d}t) \\
&= m(\vec{a}\,\mathrm{d}t)\cdot\vec{v} \\
&= m(\mathrm{d}\vec{v})\cdot\vec{v} \\
&= m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}
\end{aligned}
$$

对于任意矢量 $\vec{A}$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

$$\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{A}$$

$$\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 2\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{d}(A^2) = 2A\,\mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = \mathrm{d}(A^2)$$

$$2\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 2A\,\mathrm{d}A$$

$$\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = A\,\mathrm{d}A$$

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = v\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = mv\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{d}E_k$$

t 时刻质点的动能

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}mv^2$$

$t + \mathrm{d}t$ 时刻质点的动能

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})\cdot(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) \\ &= \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}) \\ &= \frac{1}{2}m(v^2+2\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}) \end{aligned}$$

$t \to t + \mathrm{d}t$ 时间段内质点动能的改变量

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_k &= E_{k2} - E_{k1} \\ &= \frac{1}{2}m(v^2+2\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}) - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(2\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}) \\ &\approx \frac{1}{2}m(2\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}) \\ &= m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} \\ &= mv\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

- 在任意元过程中，合力对质点所做的元功等于质点动能的微小改变量

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_k$$

- 在任意一个有限的过程中，合力对质点所做的功等于质点动能的改变量

$$\int_A^B \mathrm{d}W = \int_A^B \mathrm{d}E_k$$

$$W = \Delta E_k = E_{kB} - E_{kA}$$

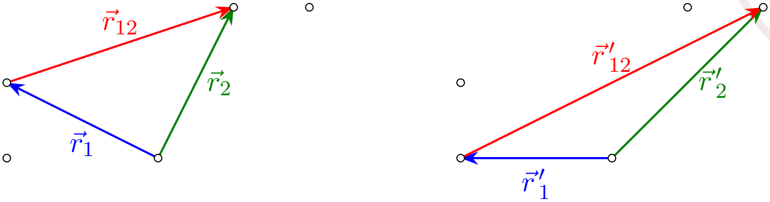
二、质点系内力的功

- 质点系的内力总是一对对作用力和反作用力
- 一般地假定，t 时刻，m_1 的位置矢量为 $\vec{r}_1$，m_2 的位置矢量为 $\vec{r}_2$，则 m_2 相对 m_1 的位置矢量为

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- 经过一个很小的 $\mathrm{d}t$ 时间，$t + \mathrm{d}t$ 时刻，m_1 的位置矢量为 $\vec{r}'_1$，m_2 的位置矢量为 $\vec{r}'_2$，则 m_2 相对 m_1 的位置矢量为

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$$

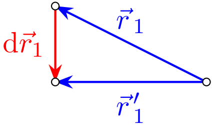


在这个过程中，m_1 的位移为

$$\mathrm{d}\vec{r}_1 = \vec{r}'_1 - \vec{r}_1$$

所以 $\vec{F}_{21}$ 对 m_1 所做的功为

$$\mathrm{d}W_1 = \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1$$

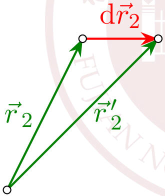


在这个过程中，m_2 的位移为

$$\mathrm{d}\vec{r}_2 = \vec{r}'_2 - \vec{r}_2$$

所以 $\vec{F}_{12}$ 对 m_2 所做的功为

$$\mathrm{d}W_2 = \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

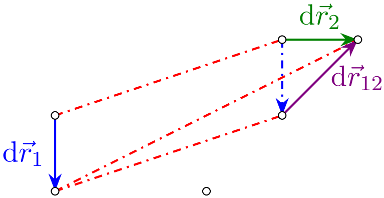


在这个时间段内，认为二者之间的相互作用力保持不变，记 m_1 施加给 m_2 的作用力为 $\vec{F}_{12}$，m_2 施加给 m_1 的作用力为 $\vec{F}_{21}$，则根据牛顿第三定律，有

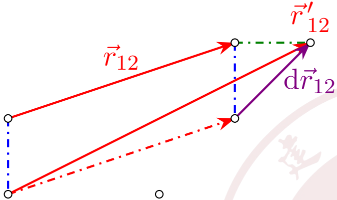
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

这个过程中这对作用力与反作用力所做的总功为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2 \\
&= \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\
&= (-\vec{F}_{12}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\
&= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 - \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 \\
&= \vec{F}_{12} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1) \\
&= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
&= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12}
\end{aligned}$$



$$\mathrm{d}\vec{r}_{12} = \mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1$$



$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r}_{12} &= \mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1 \\
&= (\vec{r}\,'_2 - \vec{r}_2) - (\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_1) \\
&= (\vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1) - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
&= \vec{r}\,'_{12} - \vec{r}_{12}
\end{aligned}$$

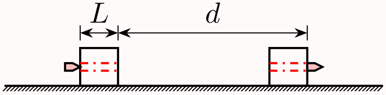
- 在任意元过程中，一对作用力和反作用力的总功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12} = \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

  等于 m_1 施加给 m_2 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 与站在 m_1 上观察时 m_2(相对) 位置的改变量 $\mathrm{d}\vec{r}_{12}$ 的点乘积，也等于 m_2 施加给 m_1 的作用力 $\vec{F}_{21}$ 与站在 m_2 上观察时 m_1(相对) 位置的改变量 $\mathrm{d}\vec{r}_{21}$ 的点乘积。一般情况下，这个功不等于零
- 一对作用力和反作用力总是同时出现同时消失，所以它们的冲量之和永远等于零，但它们所做功之和一般情况下不等于零

例题

长为 L、质量为 M 的木块静止在水平光滑地面上，质量为 m 的子弹以沿水平方向的初速度 v_1 射入木块。已知木块与子弹之间的摩擦力大小恒为 f，子弹射出木块时木块移动了 d。求此过程中摩擦力所做的总功。



解答

对于木块来说，它相对子弹向后运动，所以它受到的摩擦力方向向前，而木块移动的位移方向也向前，大小为 d，所以摩擦力对木块做正功

$$W_1 = fd$$

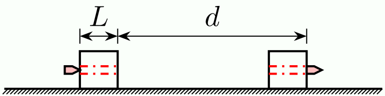
对于子弹来说，它相对木块向前运动，所以它受到的摩擦力方向向后，而子弹移动的位移方向向前，大小为 $d+L$，所以摩擦力对子弹做负功

$$W_2 = -f(d+L)$$

解答

因此过程中摩擦力所做的总功为

$$W = W_1 + W_2 = -fL$$



- 木块施加给子弹的摩擦力为向后的 f，站在木块上看子弹的相对位移为向前的 L
- 子弹施加给木块的摩擦力为向前的 f，站在子弹上看木块的相对位移为向后的 L

三、质点系的动能定理

一般地假定，质点系由 N 个质点组成，第 i 个质点的质量为 m_i，速度为 $\vec{v}_i$，则第 i 个质点的动能

$$E_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

质点系的动能为所有 N 个质点的动能之和

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} E_{ki} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

质心的质量

$$m_C = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

质心的速度

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m_C}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

质心的动能

$$E_{kC} = \frac{1}{2}m_C v_C^2 = \frac{1}{2}m_C \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C$$

第 i 个质点的速度为 $\vec{v}_i$，质心的速度为 $\vec{v}_C$，第 i 个质点相对于质心的速度为 $\vec{v}'_i$

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_C$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i &= (\vec{v}'_i + \vec{v}_C) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{v}_C) \\
&= \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C + \vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C \\
&= (v'_i)^2 + 2\vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C + v_C^2 \\
\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i &= \frac{1}{2} m_i (v'_i)^2 + m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2} m_i v_C^2 \\
\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v'_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_C^2
\end{aligned}$$

质点系内各质点相对质心运动的动能

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v'_i)^2 \equiv E'_k$$

质点系质心的动能

$$\begin{aligned}
E_{kC} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_C^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) v_C^2 \\
&= \frac{1}{2} m_C v_C^2
\end{aligned}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_C$$
$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i - m_i \vec{v}_C) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{N} m_i\right] \vec{v}_C \\
&= (m_C \vec{v}_C) - (m_C) \vec{v}_C \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C) = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i\right] \cdot \vec{v}_C$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C) = \vec{0}$$

柯尼希定理 (König's theorem)

$$E_k = E_{kC} + E'_k$$

质点系的动能等于质心的动能加上质点系内各质点相对质心运动的动能

质点系的动量等于质心的动量
但质点系的动能不等于质心的动能

在某个元过程中，第 i 个质点的动能定理

$$\mathrm{d}W_i = \mathrm{d}E_{ki}$$

作用在第 i 个质点上的所有力 (含内力和外力) 所做的总功等于第 i 个质点动能的改变量

$$\mathrm{d}W_i = \mathrm{d}W_{i内} + \mathrm{d}W_{i外}$$

在某个元过程中，质点系的动能定理

$$\mathrm{d}W = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}E_{ki} = \mathrm{d}E_k$$

作用在质点系上的所有力 (含所有内力和所有外力) 所做的总功等于质点系动能的改变量

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_{i内} + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_{i外}$$

在任意过程中，第 i 个质点的动能定理

$$W_i = \Delta E_{ki}$$
$$W_i = W_{i内} + W_{i外}$$

在任意过程中，质点系的动能定理

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta E_{ki} = \Delta E_k$$
$$\sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} W_{i内} + \sum_{i=1}^{N} W_{i外}$$
$$W = W_{内} + W_{外}$$

质点系动能定理

$$\mathrm{d}W_{内} + \mathrm{d}W_{外} = \mathrm{d}E_k$$
$$W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$$

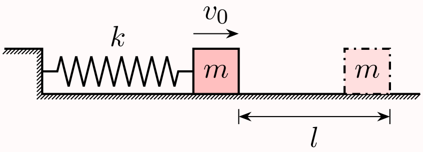
质点系所有内力所做的功和所有外力所做功的总和等于整个质点系动能的改变量

所有内力的冲量的总和恒等于零
但所有内力所做功的总和一般情况下不等于零

习题 4.3.3

如图所示，质量为 m 的物体与轻弹簧相连，最初，m 处于使弹簧既未压缩也未伸长的位置，并以速度 v_0 向右运动。弹簧的劲度系数为 k，物体与支承面间的滑动摩擦因数为 μ。求证物体能达到的最远距离 l 为

$$l = \frac{\mu m g}{k}\left(\sqrt{1 + \frac{k v_0^2}{\mu^2 m g^2}} - 1\right)$$



解答

以物体初始位置为坐标原点，向右为 x 轴正方向。假定任意 t 时刻，物体的位置为 x。以物体为研究对象，受力分析，物体共受到四个力的作用：竖直向下的重力 mg，支承面施加的竖直向上的支持力 $N = mg$；支承面施加的水平向左的摩擦力 $f = \mu N = \mu mg$，弹簧施加的水平向左的弹力 $T = kx$。在物体运动过程中，重力和支持力与物体运动方向垂直，不做功，摩擦力与弹力与运动方向相反，做负功。

由动能定理

$$\int_0^l (-\mu mg - kx)\,\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu mgl - \frac{1}{2}kl^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$l^2 + 2\frac{\mu mg}{k}l = \frac{1}{k}mv_0^2$$

$$\left(l + \frac{\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{k}mv_0^2 + \left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2$$

$$l = \frac{\mu mg}{k}\left(\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{\mu^2 mg^2}} - 1\right)$$