

〈〈명제. T에 속한 노드의 개수가 n, T의 height는 h라고 할 때 $h \leq \log_2 n$ 이다〉〉

아래의 명제를 증명하면 위의 명제가 참임

임시명제. Union-by-size를 사용하여 만들어진 트리 T에 대하여, $\text{size}(T) \geq 2^{\text{height}(T)}$ 이다.

(위의 명제에서 로그를 넘긴 것임)

먼저 $\text{size}(T)$ 가 1일 때 높이는 0이기 때문에 참임.

가정: 처음 i번의 link(union by size) 후에 위의 명제가 참임.

r개의 노드를 가진 트리 T는 자신보다 더 적은 노드(s개)를 가진 트리 Y와 link될 때만 height가 변한다. 따라서 $r > s$ 일 때, $\text{height}(T) > \text{height}(Y)$ 인 경우와 $\text{height}(T) \leq \text{height}(Y)$ 인 경우로 나눠서 모두 참임을 증명하면, i + 1 번의 link 인 경우가 참임을 증명하는 것이고, 곧 수학적 귀납법에 따라 임시명제가 참임을 증명할 수 있음.

1) $\text{height}(T) > \text{height}(Y)$ 인 경우

$$\text{size}'(T) \geq \text{size}(T)$$

$$\geq 2^{\text{height}(T)} \quad // \text{가정에 의해 가능}$$

$$= 2^{\text{height}'(T)}$$

Y의 높이보다 T의 높이가 크기 때문에 union by size로 합치더라도 높이의 변화가 없음.

2) $\text{height}(T) \leq \text{height}(Y)$ 인 경우

$$\text{size}'(T) = \text{size}(T) + \text{size}(Y)$$

$$\geq 2 * \text{size}(Y) \quad // \text{Union-by-size 방식이기 때문}$$

$$\geq 2 * 2^{\text{height}(Y)} \quad // \text{가정에 의해 가능}$$

$$= 2^{\text{height}(Y) + 1}$$

$$= 2^{\text{height}'(T)}$$

모든 경우에 대해서 i + 1일 때 참임을 증명했으므로 i일 때 임시명제가 참이다.

따라서 임시명제 $\text{size}(T) \geq 2^{\text{height}(T)}$ 에서 로그를 넘기면 $\log_2(\text{size}(T)) \geq \text{height}(T)$ 이다.

즉. T에 속한 노드의 개수가 n, T의 height는 h라고 할 때 $h \leq \log_2 n$ 이다.