2016047883\_정성훈

**<<<명제. T에 속한 노드의 개수가 n, T의 height는 h라고 할 때 h <= log2n 이다>>>**

아래의 명제를 증명하면 위의 명제가 참임

**임시명제.** Union-by-size를 사용하여 만들어진 트리 T에 대하여, size(T) >= 2height(T)이다.

(위의 명제에서 로그를 넘긴 것임)

먼저 size(T)가 1일 때 높이는 0이기 때문에 참임.

가정: 처음 i번의 link(union by size) 후에 위의 명제가 참임.

r개의 노드를 가진 트리 T는 자신보다 더 적은 노드(s개)를 가진 트리 Y와 link될 때만 height가 변한다. 따라서 r > s 일 때, height(T) > height(Y)인 경우와 height(T) <= height(Y)인 경우로 나눠서 모두 참임을 증명하면, i + 1 번의 link 인 경우가 참임을 증명하는 것이고, 곧 수학적 귀납법에 따라 임시명제가 참임을 증명할 수 있음.

1. height(T) > height(Y) 인 경우

size’(T) >= size(T)

>= 2height(T) // 가정에 의해 가능

= 2height’(T)

Y의 높이보다 T의 높이가 크기 때문에 union by size로 합치더라도 높이의 변화가 없음.

1. height(T) <= height(Y) 인 경우

size’(T) = size(T) + size(Y)

>= 2 \* size(Y) // Union-by-size 방식이기 때문

>= 2 \* 2height(Y) // 가정에 의해 가능

= 2height(Y) + 1

= 2height’(T)

모든 경우에 대해서 i + 1일 때 참임을 증명했으므로 i일 때 임시명제가 참이다.

따라서 임시명제 size(T) >= 2height(T) 에서 로그를 넘기면 log2(size(T)) >= height(T)이다.

즉. T에 속한 노드의 개수가 n, T의 height는 h라고 할 때 h <= log2n 이다.