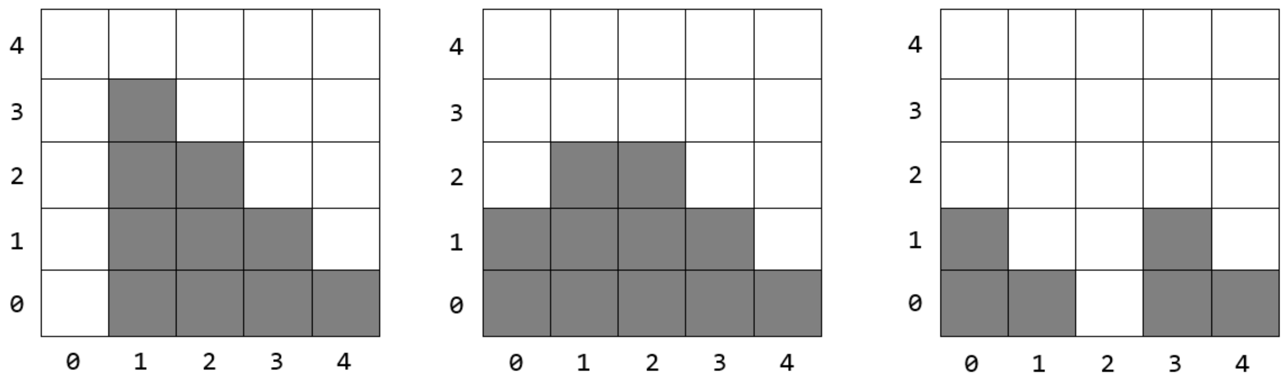
Zadanie: Dom dla Gekona

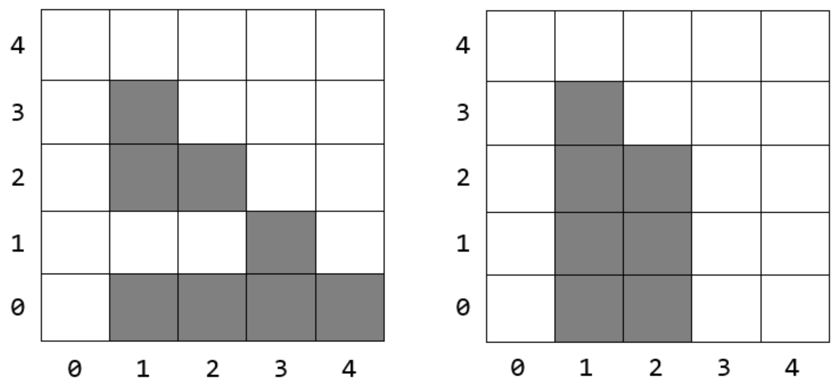
Szymon Tur

Kameleon Kazik jest już zmęczony ciągłymi wycieczkami do miasta i nieustannym kamuflażem (chociaż nigdy tego nie przyzna, jest bardzo uprzejmym kameleonem). Postanawia więc zaprosić Gekona Grzesia do lasu. Aby zapewnić mu godne przyjęcie, chce wybudować dla niego dom.

Dzikie kameleony budują tylko z bloków z piaskowca o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ og (*ogon gekona*: jednostka długości używana w gadziej społeczności). Projekty sporządzane przez leśnych architektów są dwuwymiarowe: budowla ma taki sam kształt w przekroju, co przednia ściana. Możemy więc utożsamiać położenie bloku z punktem (x, y), gdzie x oznacza odległość od lewego końca działki, a y oznacza wysokość nad ziemią, wyrażone w ogonach gekona. Oczywiście budowla nie może się zawalić, co ustala pewne warunki na to, gdzie możemy ustawić dany blok. Kameleony uwielbiają także trójkątne kształty, zatem przyjęta jest zasada, że aby ustawić blok na pozycji (x, y), należy wcześniej ustawić bloki na pozycjach $(x, y-1)$ i $(x+1, y-1)$. Bloki powinny być także stawiane tylko na współrzędnych całkowitych. Na poniższych rysunkach przedstawione są przykłady poprawnych, jak i niepoprawnych budowli.



Rysunek 1: Poprawne projekty budowli.



Rysunek 2: Niepoprawne projekty budowli, niespełniające zasady budownictwa kameleonów. W pierwszym projekcie bloki nie mają podparcia od dołu, a w drugim istnieje wysoki uskok z prawej strony.

Dzikie kameleony uznają budowlę za szczególnie estetyczną, gdy jej projekt zakłada postawienie bloku na pewnych ustalonych pozycjach. Kazik, jako uprzejmy, ale też rozważny kameleon, dąży do wybudowania jak najładniejszej budowli, jednocześnie starając się wykonać jak najmniej pracy. Ocenił, że blok na pozycji (x, y) da mu $p(x, y) \geq 0$ punktów zadowolenia, natomiast każde postawienie bloku odbierze mu 1 punkt zadowolenia. Łączne *zadowolenie z budowli* będzie więc dane wzorem

$$Z = \sum_{(x,y) \in \mathcal{B}} (p(x, y) - 1),$$

gdzie $\mathcal{B}$ oznacza zbiór współrzędnych ustawionych bloków w danej budowli. Kazik dysponuje działką o długości l i chce zbudować dom o wysokości co najwyżej h.

I etap: prace przedprojektowe (1,0 p.)

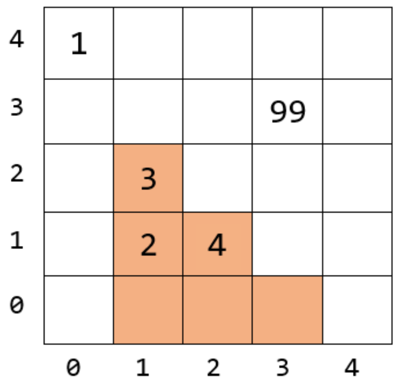
Kazik chce zbudować dom, z którego będzie zadowolony, czyli dla którego zadowolenie Kazika będzie liczbą dodatnią. Sprawdź, czy istnieje taka budowla.

II etap: kompletny projekt (1,5 p.)

Pomóż Kazikowi zaprojektować taką budowlę, która zmaksymalizuje zadowolenie Kazika (nadal nie budujemy budowli, z których Kazik nie będzie zadowolony). Zwróć wartość zadowolenia Kazika z budowli, a także *poprawną* kolejność ułożenia bloków. Jako poprawną kolejność rozumiemy taką, że kolejne bloki spełniają zasadę budownictwa kameleonów. Jeśli istenieje więcej niż jedno rozwiązanie, zwróć dowolne z nich.

Przykłady

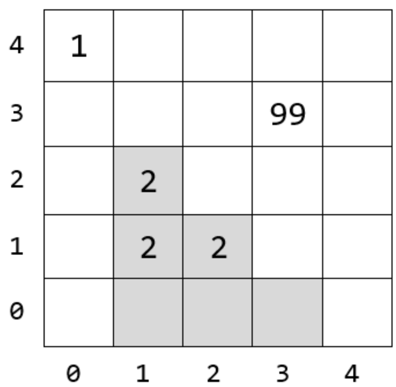
Przykład 1: istnieje proste rozwiązanie



Rysunek 3: Wizualizacja przykładu 1 wraz z rozwiązaniem (pomarańczowe). Liczby wpisane w pola przedstawiają dodatnie wartości $p(x, y)$.

W tym przykładzie rozwiązaniem jest budowla zaznaczona na pomarańczowo. Zadowolenie Kazika z tej budowli wyniesie $3 + 2 + 4 - 6 = 3$. Zauważmy, że pomimo wysokiej wartości $p(3, 3) = 99$, pole $(3, 3)$ nie może wziąć udziału w rozwiązaniu, bo położenie bloku na tym polu jest niemożliwe (istniałby wysoki uskok dla $x = 4$). Nie można także zbudować satysfakcjonującej Kazika budowli zawierającej pole $(0, 4)$. Można zauważyć, że budowla złożona z bloków $(2, 0)$, $(3, 0)$ i $(2, 1)$ także zadowoli Kazika. Jednak zadowolenie z niej jest równe $4 - 3 = 1$, zatem nie jest to optymalne rozwiązanie.

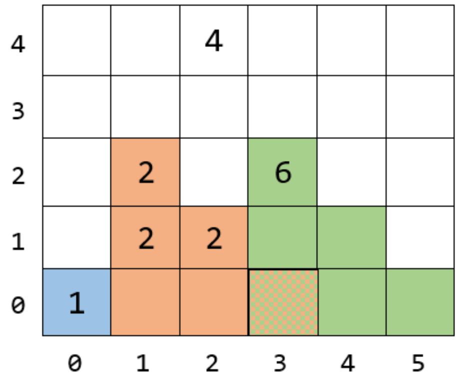
Przykład 2: brak rozwiązania



Rysunek 4: Wizualizacja przykładu 2. Na szaro zaznaczona poprawna budowla, dla której zadowolenie Kazika wynosi 0. Liczby wpisane w pola przedstawiają dodatnie wartości $p(x, y)$.

Ten przykład nie ma rozwiązania. Budowla, z której Kazik byłby najbardziej zadowolony, jest zaznaczona na rysunku na szaro. Jednak zadowolenie z niej jest równe $2 + 2 + 2 - 6 = 0$, a szukamy budowli z dodatnim zadowoleniem.

Przykład 3: bardziej skomplikowane i niejednoznaczne rozwiązanie



Rysunek 5: Wizualizacja przykładu 3. Rozwiązanie składa się z połączonego pomarańczowego i zielonego segmentu. Pomarańczowy i zielony segment mają jedno pole wspólne: $(3, 0)$. Liczby wpisane w pola przedstawiają dodatnie wartości $p(x, y)$.

W tym przykładzie rozwiązanie tworzą dwa połączone segmenty: pomarańczowy i zielony. Zadowolenie Kazika z tej budowli wyniesie $2+2+2+6-11 = 1$. Warto zauważyć, że osobno zarówno segment pomarańczowy, jak i zielony, nie zadowolą Kazika (jego zadowolenie z obu jednokolorowych budowli wyniesie 0). Tutaj rozwiązanie nie jest jednoznaczne: budowla z połączonych segmentów: pomarańczowego, zielonego i niebieskiego także jest poprawna, a zadowolenie z niej wynosi także $1 + 2 + 2 + 2 + 6 - 12 = 1$.

Uwagi i wskazówki

- Kluczem do rozwiązania zadania jest stworzenie grafu pomocniczego reprezentującego zasady układania bloków oraz wzrost/spadek zadowolenia spowodowany ustawieniem bloku.
- Maksymalizacja zadowolenia Kazika jest równoważna minimalizacji wartości wyrażenia

  $$|\mathcal{B}| + \sum_{(x,y)\notin\mathcal{B}} p(x, y),$$

  gdzie $\mathcal{B}$ oznacza zbiór współrzędnych ustawionych bloków w danej budowli.
- Jeśli nie istnieje budowla zadowalająca Kazika, jako maksymalne zadowolenie i jako kolejność ułożenia bloków zwróć `null`.
- Wymagana złożoność w obu etapach wynosi $O(lh(P - Z_{max}))$, gdzie P jest sumą punktów zadowolenia ze wszystkich bloków, a Z_{max} jest maksymalnym zadowoleniem Kazika z budowli. Warto zauważyć, że wyrażenie $P - Z$ jest równe wyrażeniu zapisanemu dwie uwagi wyżej.
- Optymalna budowla może składać się z kilku rozłącznych kawałków.