Piotr Jankiewicz, 288767, grupa 2, projekt 2, zadanie 46

Wstęp

Wektory i wartości własne macierzy to co do definicji takie λ i wektor v, że dla macierzy przekształcenia A zachodzi $Av = \lambda v$, to znaczy, że przekształcenie A dla wektora v nie przechodzi na inną przestrzeń, lecz ewentualnie zostaje w tej przestrzeni przeskalowany. Oczywistym jest więc, że zbiór wszystich wektorów własnych niezależnych liniowo jest dobrą bazą do przedstawiania wyniku jakiekokolwiek przechkształcenia dzięki danej macierzy jako kombinacja liniowa wektorów własnych z bazy. Faktem jest, że jeśli istaniałyby metody znajdujące takowe wektory, możnaby na wiloraką liczbę sposobów implementować ich właściwości np. w uczeniu maszynowym. Można dzięki nim lepiej zrozumieć istotę przekształcenia i dlatego też powstało wiele metod ich odnajdywania. Odwrócona metoda potęgowa jest jedną z nich, a ten oto raport stanowi moje efekty w jej implementacji w języku matlab wraz z eksperymentami i wnioskami co do jej skuteczności.

Opis Metody

Odwrócona Metody Potęgowej z normalizowaniem i przesunięciem jest metodą potęgową zaimplementowaną do macierzy odwrotnej oraz z przesunięciem wartości dominującej dzięki sprytnemu przekształeniu wyjściowego równania przy wyprowadzaniu wzoru na wartość własną macierzy odwrotnej:

$$
\begin{gathered}
Av = \lambda v \\
\text{Av - } \alpha I v = \lambda v - \alpha I v \\
\text{Av - } \alpha I v = \lambda v - \alpha I v \\
(\text{A - } \alpha I)v = (\lambda - \alpha)v \\
\text{v} = (\text{A - } \alpha I)^{-1}(\lambda - \alpha)v \\
(\text{A - } \alpha I)^{-1}v = \tfrac{1}{(\lambda - \alpha)}
\end{gathered}
$$

Dzięki takiemu przekształceniu, im bliżej α będzie się znajdywać początkowa λ, tym bardziej w kolejnych iteracjach metodybędzię ona dominująca. Postawje natomiast inny problem przy takim przekształceniu: co zrobić z numerycznie obiążającą operacją odwracania macierzy $(A - \alpha I)^{-1}$? Odpowiedź znajdziemy w kolejnym sprytnym przekształceniu, czyli dekompozycji owej macierzy na iloczyn dwóch: ortagonalnej i trójkątnej, czyli QR. Jest to niezbędne do sprostania wymaganiom treści projektu by macierz A mogła być rozmiarów nawet do 20000 na 200000. Pozwala nam to zapisać wzór na kolejne wartości przy iterowaniu, aż do uzyskania założonej tolerancji błędu w następujący sposób:

$$
\begin{gathered}
b_{k+1} = \tfrac{(A - \alpha I)^{-1} b_k}{\|(A - \alpha I)^{-1} b_k\|} \\
(\text{A - } \alpha I) b_k = QR \\
(\text{A - } \alpha I)^{-1} = R^{-1} Q^T \\
\text{Rb}_{k+1} = Q^T b_k
\end{gathered}
$$

W tej formie po ostatnim przekształceniu osiągnięta zostaje znacznie uproszczona pod względem złożoności numerycznej formuła na kolejne wartości przybliżeń wektora własnego macierzy odwrotnej (pamiętając by w odpowiednim momencie podzielić wynik przez normę). Pozostaje jedynie kwestia reflektorów houesholdera. Po krótce: reflektory householdera dzięki swojej właściwosić odbicia, nadają się do znajdywania przekszałceń zerujących korejne kolumny przekształcenia, uzyskując macierz trójkątną górną R oraz macierz ortagonalną w formie iloczynu kolejnych macierzy przekształceń opartych o odbicia: $H_1 H_2$.... Numerycznie Dzięki temu rozkładowi, późniejsza eliminacja z backward substitution. Metodą tą uzyskamy wektor własny najbliższy do wartościu μ.

Eksperymenty numeryczne

Przeprowadzając testy dla macierzy 3 na 3, 5 na 5, 10 na 10 oraz 2000 na 2000 dla różnych wartości początkowych μ, choć szybkość wykonywania metody była zadowalająca, to niestety wyniki - im dalsza wartość μ od spodziewanej λ, tym gorszy końcowy wynik metody.

Uwagi Końcowe

Metoda potęgowa działa tylko dla macierzy z n liniowo niezależnych wektorów własnych, ale ponieważ bierzemy pod uwagę tylko macierze trójdiagonalne, ten warunek jest z góry spełniony.