

数据结构与算法



第3章 栈和队列

第3章 内容提要

∞ 栈的性质

∞ 栈的实现

∞ 栈的应用(自学)

∞ 队列的性质

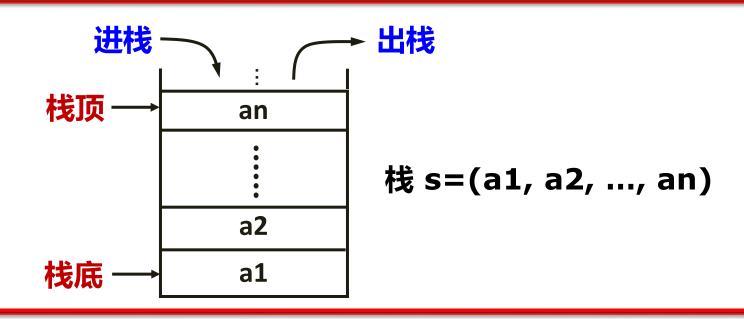
∞ 队列的实现

∞ 队列的应用 (自学)



栈 (Stack)

栈 (stack)



- 定义:限定仅在表的一端进行插入或删除操作的线性表
 - 允许插入和删除的一端称为栈顶,另一端称为栈底
 - 不含元素的空表称空栈
- 特点:后进先出 (**LIFO**) 或 先进后出 (FILO)

栈 (stack)

- 栈的实现方式有两种
 - 第一种方式: 顺序栈
 - 采用顺序存储结构(顺序表)实现
 - 第二种方式:链栈
 - 采用链式存储结构(链表)实现

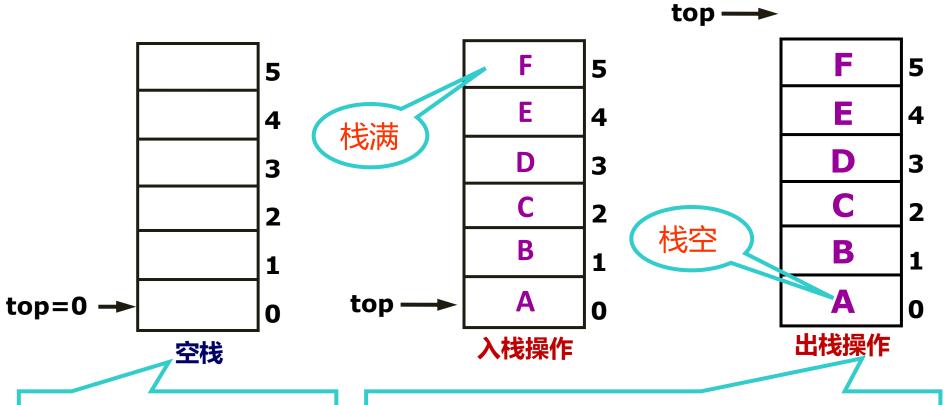
∞ 栈的主要操作

- 初始化: init_stack(S)
- 进栈: push_stack(S, e)
- 退栈: pop_stack(S)
- 查看栈顶: top_stack(S)
- 判栈空,判栈满

顺序栈

栈的存储结构: 顺序栈





栈顶指针top,初值为0

指向实际栈顶后的空位置

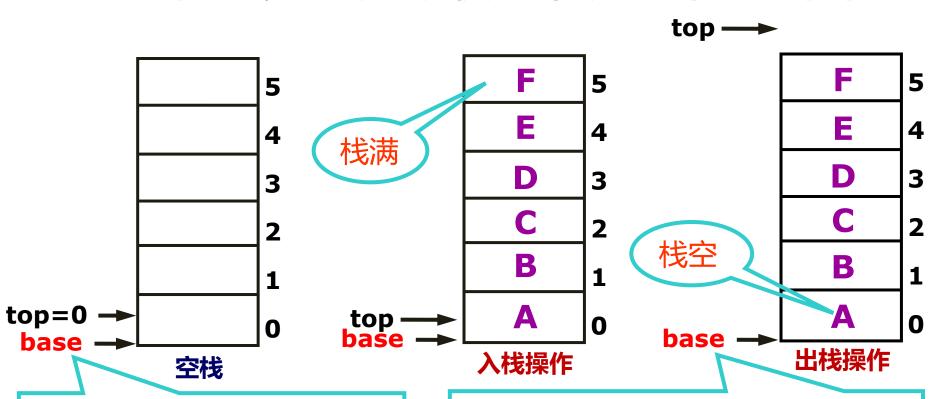
设数组维数为M

top=0,栈空,此时出栈,则下溢(underflow)

top=M, 栈满, 此时入栈, 则上溢 (overflow)

栈的存储结构: 顺序栈

🖎 采用一维数组实现:为了方便处理,设置一个base指针



- 栈底指针: base
 - 始终指向栈底的位置
- 栈顶指针: top
 - 指向实际栈顶后的空位置
 - 初值为top=base

- 设数组维数为M
- top base == 0, 栈空
 - 此时出栈,则下溢 (underflow)
- top base == M, 栈满
 - 此时入栈,则上溢 (overflow)

顺序栈的数据结构定义

```
∞ 静态分配存储空间
  typedef struct stack{
                             // 存放栈顶位置
     int top;
     ElemType data[MAXSIZE]; // 存放数据元素
  }TStack;
∞ 动态分配存储空间
 typedef struct stack{
                    // 存放栈顶位置和栈的容量
    int top, len;
    ElemType *pdata; // 指向数据元素存储空间的指针
 }TStack, *PStack;
```



∞ 栈的初始化: 动态分配存储空间

```
PStack init_stack (int n){
   PStack ps = NULL; ElemType *p; // 指向栈底的指针
   ps = (PStack) malloc (sizeof(TStack)); // 判空略
   p = (ElemType*) malloc (sizeof(ElemType)*n);
   if (p){
      ps->pdata = p;
      ps->top = 0;
      ps->len = n;
   } else{printf("分配空间失败! \n");}
   return ps;
```



```
○○ 枝的销毁: 释放为栈动态分配的存储空间

void destroy_stack (PStack ps) {

if(ps->pdata) { // 首先判断栈的存储空间是否存在

free (ps->pdata); ps->pdata = NULL;

ps->len = 0; ps->top = 0;

}

}
```

∞ 栈的清空

```
void clear_stack (PStack ps){
    ps->top = 0;
```



∞ 栈的判空函数

```
bool isempty_stack (PStack ps){
    return (ps -> top <= 0);
}</pre>
```

∞ 栈的判满函数

```
bool isfull_stack (PStack ps){
    return (ps -> top >= ps->len );
}
```



∞ 入栈: 插入元素item为新的栈顶元素

```
int push_stack(PStack ps, ElemType e) {
    if( isfull_stack (ps) ){
        return 1;
    else{
        ps->pdata[ps->top] = e;
        ps->top++;
    return 0;
```



```
∞ 出栈: 取出栈顶元素, 通过函数参数item返回
  int pop_stack(PStack ps, ElemType *item) {
     int status = 0;
     if( isempty_stack(ps) ){
                                课后练习
        status = -1;
                             请同学们编程实现
                           含有base指针的顺序栈
     else{
        (ps->top)--;
        *item = ps->pdata[ps->top];
     return status;
        请思考:顺序栈有什么缺陷,如何解决?
```

顺序栈小结

∞ 顺序栈的实现可以采用静态分配或动态分配

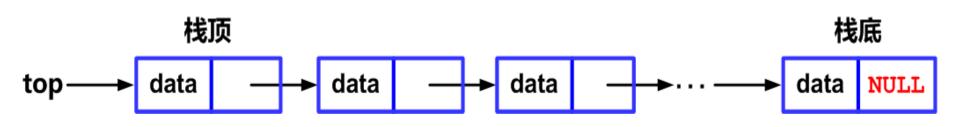
∞ 请思考:顺序栈有什么缺点,如何解决?

- 顺序栈需要预先分配空间
 - 如果数组预分配空间太小,容易造成溢出
 - 如果数组预分配空间太大,又会浪费空间
- 解决办法:可用单链表来实现栈



链栈

链栈的数据结构



∞ 链栈结点的定义

typedef struct node {

ElemType data;

struct node *next;

}TNode, *PStack;



∞ 链栈的初始化操作

```
PStack ps = NULL; // 声明一个指向栈顶的指针
```

∞ 链栈的判空操作

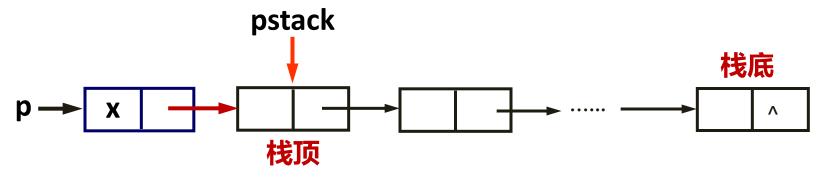
```
bool isempty_stack(PStack ps){
    return ps == NULL;
}
```



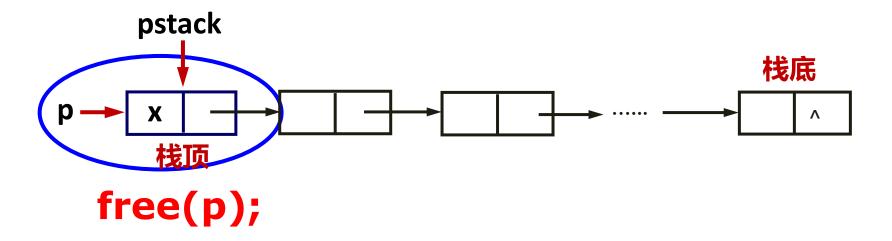
∞ 链栈的清空操作(即:销毁操作) void clear_stack(PStack *pps) { if(!(*pps)) return; PStack p = *pps; PStack ps = p; while (ps){ ps = ps->next;free(p); p = ps;*pps = NULL;



∞ 入栈算法



∞ 出栈算法



∞ 链栈的入栈操作:插入元素item为新的栈顶元素 void push_stack(PStack *pps, ElemType e){ PStack p = (PStack)malloc(sizeof(TNode)); if (p){ p->data = e; p->next = NULL; } else{ p->next = *pps; // 将新结点插入到表头位置 // 修改栈顶指针 *pps = p;



```
∞ 链栈的出栈操作:弹出栈顶元素(通过指针参数item返回)
  ElemType pop_stack(PStack *pps) {
     PStack p; ElemType e;
     // 注意: 出栈前一定要判空, 对空栈执行出栈操作会导致下溢
     if (isempty_stack(*pps)) {
        printf("栈空! \n"); exit(0);}
     else {
        p = *pps;
                          // p指向栈顶元素
        *pps = p->next;
                         // 栈顶指针下移
                         // 保存当前栈顶元素值
        e = p->data;
                         // 删除当前栈顶元素
        free(p);
     return e;
```

栈的应用:数制转换

○ 1. 数制转换: 十进制数 N 与其他 b 进制数的转换

• 辗转相除法: N = (N / b)*b + N % b

• 例如: **(1348)** ₁₀ = **(2504)** ₈, 运算过程如下:

	N	N/8	N %8	
•	1348	168	4	_
	168	21	0	
	21	2	5	
	2	0	2	

栈的应用:数制转换

```
// 输入任意非负十进制整数,打印输出等值的b进制数
void dec2base(int n, int b) {
   int d; PStack ps = NULL;
   while ( n ) { // 辗转相除
      push_stack (&ps, n%b);
      n = n / b;
   while (!isempty_stack (ps)){
      d = pop_stack(&ps);
      printf("%d", digit);
                n = (n / b)*b + n % b
```



栈的应用: 函数的递归调用

- ∞ 什么是递归 (recursion) ?
 - 程序调用自身的编程技巧称为递归
 - 例如n!的定义就是递归的: n! = n × (n 1)!
- ∞ 为什么要用递归?
 - 将一个大型的复杂问题转化为
 - 一些与原问题相似的规模较小的问题来进行求解
- ∞ 递归程序的要素?
 - 递归调用:问题得到简化
 - 程序出口:结束(返回)条件



栈的应用: 函数的递归调用

```
∞ 编写函数求 n!
   int factorial (int n) {
      if (n <= 1)
递归的终止条件
return 1;
      else
        return n * factorial (n - 1); 函数的递归调用
                是同一个问题,但问题规模被缩减
```

∞ 为了解递归的工作原理,我们来跟踪 factorial(4) 的执行



```
int fact (int n)
int main(void){
   int a = fact(4);
                                      if (n <= 1)
   printf("fact(4) = %d", a);
                                         return 1;
                                      else
   return 0;
                                         return n * fact (n - 1);
                                             (2 <= 1)?
                                             求解表达式
                              (3<=1)?
                                             2* fac (1) -
int a = fac(4);
                                                          return 1
                              求解表达式
```

3* fac (2)

return 6

return 2

思考: 此时是哪个函数返回?

fact(2)

(4 <= 1)?

求解表达式

return 24

4* fac (3)

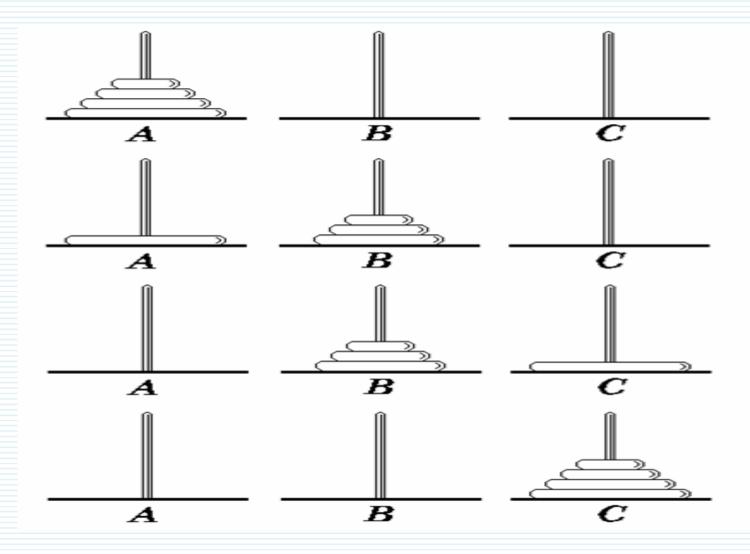
fac(4)

Hanoi Tower (汉诺塔) 问题

- ∞ 问题描述:设有A、B、C3个塔座
 - 在塔座A上有一叠共n个圆盘
 - 自上而下,由小到大地叠在一起
- A B C
 - 自上而下依次编号为1,2,...,n
 - 问题:要求将塔座A上的圆盘全部移到塔座C上,仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时遵守以下规则:
 - 每次只允许移动1个圆盘
 - 任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上
 - 在规则1和2的前提下,可将圆盘移至任何一塔座上

用递归技术求解汉诺塔问题

∞ 将4个盘子从A移至C,以B为辅助





汉诺塔问题的规模

∞ 一般的Hanoi塔玩具不超过8片

- 如果n=8, 需移动255次
- 如果n=10,需移动1023次



- 如果n=64, 需移动2⁶⁴-1次
 - 如果每秒移动一块圆盘,需5845.54亿年
 - 按照宇宙大爆炸理论推测,宇宙的年龄也仅为137亿年



用递归技术求解汉诺塔问题

∞ 算法设计思路

- 当n=1时,问题可以直接求解,一步完成
- 当n>1时,分三步完成:
 - 将n-1个较小盘子设法移动到辅助塔座
 - 构造出一个比原问题规模小1的问题
 - 将最大的盘子从原塔座一步移至目标塔座
 - 将n-1个较小的盘子设法从辅助塔座移至目标塔座
 - 仍然是比原问题规模小1的问题



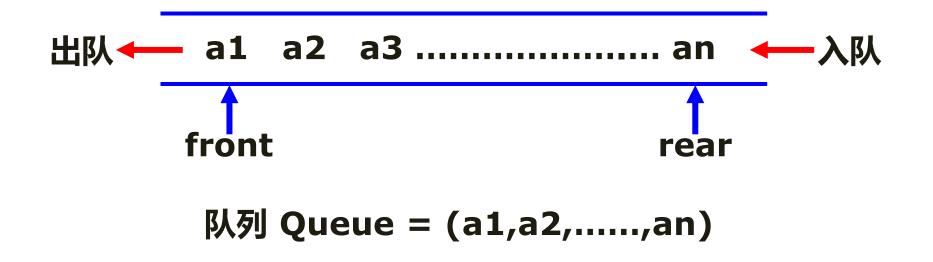
汉诺塔问题的递归算法

```
void hanoi (int n, int src, int tar, int aux){
   if(n>0){
       hanoi(n-1, src, aux, tar);
       move(src, tar);
       hanoi(n-1, aux, tar, src);
```

其中: hanoi(int n, int src, int tar, int aux) 表示将塔座src上的n个盘子移动到塔座tar, 以塔座aux为辅助 (auxiliary)

队列 (queue)

队列



- 队列:限定只能在表的一端插入,在另一端删除的线性表
 - 队尾 (rear) : 允许插入的一端
 - 队头 (front) : 允许删除的一端
- ∞ 队列的特点:先进先出 (First In First Out, FIFO)



队列

∞ 队列的实现方式有两种

- 第一种方式:顺序队列
 - 采用顺序存储结构(顺序表)实现
- 第二种方式:链队列
 - 采用链式存储结构(链表)实现

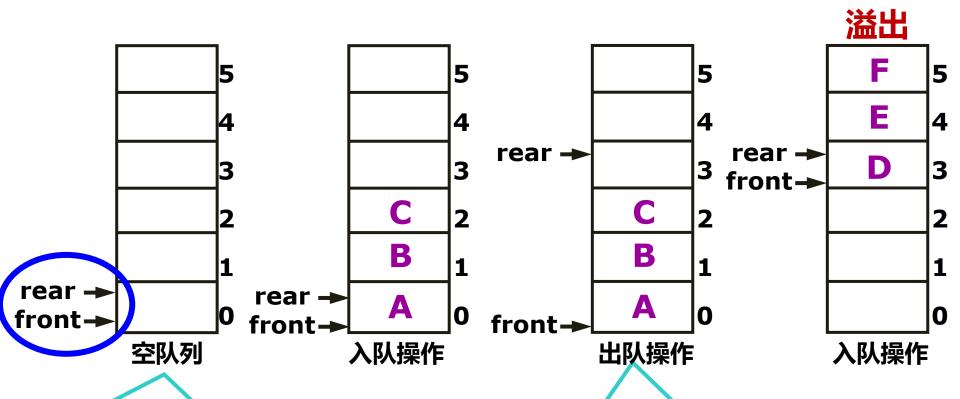
∞ 队列的主要操作

- 初始化: init_queue(Q)
- 入队: enqueue(Q, e)
- 出队: dequeue(Q)
- 判队空,判队满(循环队列)

顺序队列 (Sequential Queue)

顺序队列的存储结构

○ 顺序队列采用一维数组实现,设置头尾两个指针



front: 指示队首位置

rear: 指示队尾元素的下一个位置

初值: front=rear=0

入队: Q[rear++]=x;

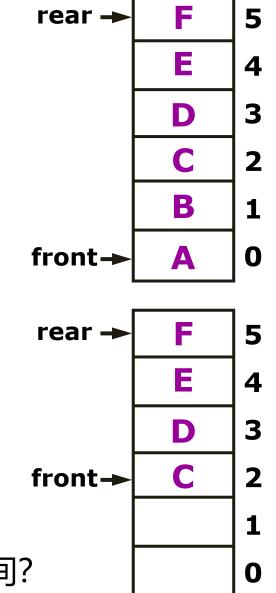
出队: x=Q[front++];

空队列: front==rear

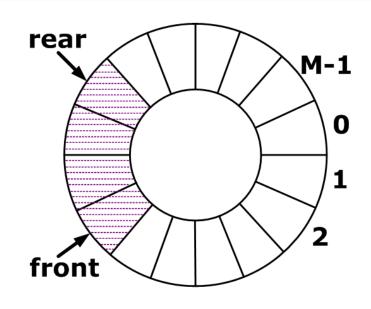
顺序队列的存储结构

∞ 顺序队列存在的问题

- 设数组维数为M
- front==0, rear==M
 - 如果此时有元素入队会怎样?
 - 队列发生: 溢出
- front≠0, rear==M
 - 如果此时有元素入队会怎样?
 - 队列发生: 假溢出
- 思考:怎样利用front指针之前的空间?



顺序队列的存储结构

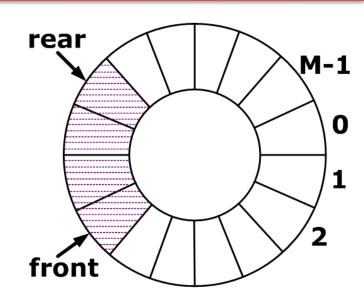


- ∞ 怎样利用front指针之前的空间?
 - 每次出队操作后剩余元素向下移动 浪费时间!
 - 采用循环队列
 - 将队列设想成环形: 让Q[0]接在Q[M-1]之后
 - o 若 rear==M, 则令 rear=0 思考: 如何实现?

循环队列(Circular Queue)

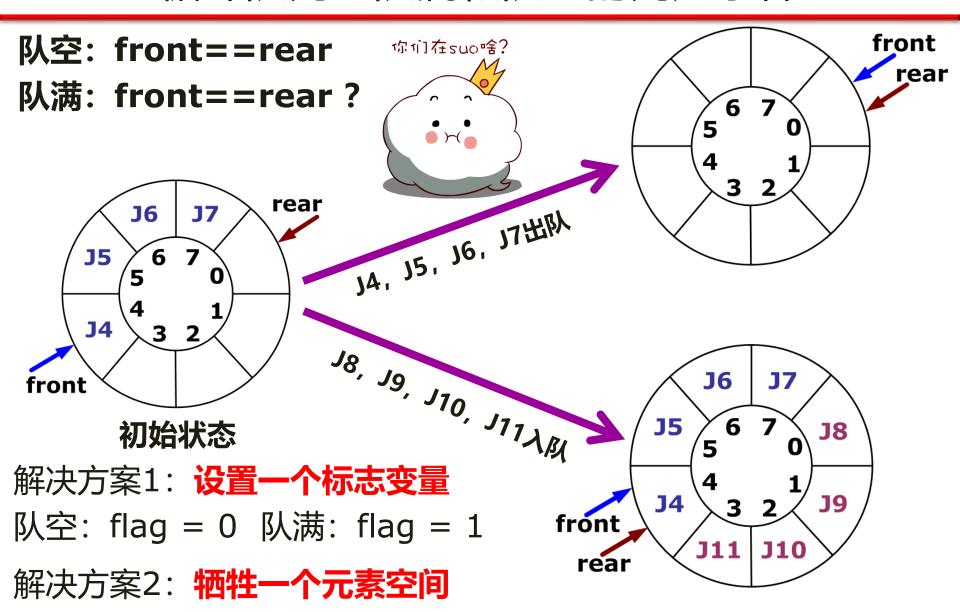
- ∞ 循环队列的实现:利用"模"运算
 - 入队:
 - o Q[rear] = x;
 - o rear = (rear+1)%M;
 - 出队:
 - o x = Q[front];
 - o front = (front+1)%M;

∞ 问题:怎样判空和判满?





循环队列: 队满和队空的判定条件



队空: front==rear 队满: (rear+1)%M==front

顺序队列的数据结构定义

```
∞ 静态分配存储空间
  typedef struct {
     int front, rear;
                               // 队头和队尾指针
     ElemType data[MAXSIZE];
                            ____// 数据元素存储空间
  }TQue;
∞ 动态分配存储空间
  typedef struct {
                          // 队头和队尾指针,队列长度
     int front, rear, len;
     ElemType *pdata;
                          // 指向数据元素存储空间的指针
  }TQue, *PQue;
```

循环队列的初始化

```
PQue init_queue(int n){
   PQue pque; ElemType *p;
   pque = (PQue)malloc(sizeof(TQue)); // 判空略
   p = (ElemType*)malloc(n*sizeof(ElemType));
   if(p){
     pque->pdata = p;
     pque->front = 0;
     pque->rear = 0;
     pque->len = n;
   else {printf("申请空间失败! \n"); exit(0);}
   return pque;
```



循环队列基本操作: 销毁与清空

```
∞ 循环队列的销毁:释放为队列动态分配的存储空间
  void destroy_queue(Pque *ppque) {
     Pque pque = *ppque;
     if(pque->pdata) {
         free(pque->pdata); pque->pdata = NULL; }
     if(pque){
         free(pque); *ppque = NULL;}
∞ 循环队列的清空
  void clear_queue(PQue pque){
     pque->front = 0;
     pque->rear = 0;
```

循环队列的判空与判满: 牺牲单位元素空间

∞ 循环队列的判空函数

```
int isempty_queue(PQue pque){
    return (pque->front == pque->rear);
}
```

∞ 循环队列的判满函数

```
int isfull_queue(PQue pque){
  int r = (pque->rear + 1) % (pque->len);
  return (r == pque->front);
}
```

循环队列基本操作: 元素入队

∞ 循环队列的入队算法:插入元素 e 为新的队尾元素

```
void en_queue(PQue pque, ElemType e){
   int m = pque->len;
   if (! isfull_queue(pque)){
      pque->pdata[pque->rear] = e;
      pque->rear = (pque->rear + 1) % m;
   else printf("队列已满,入队操作无效\n");
```



循环队列基本操作: 元素出队

∞ 循环队列的出队算法: 取出队首元素作为函数返回值

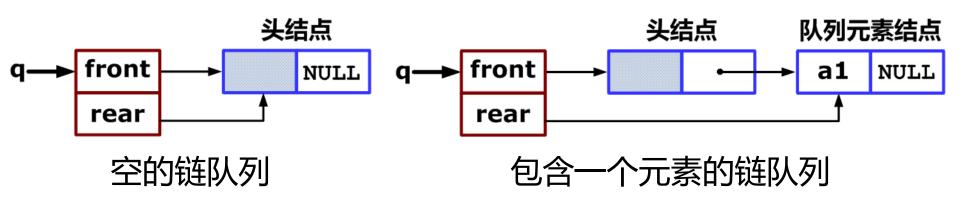
```
ElemType de_queue(PQue pque){
   int m= pque->len; ElemType item;
   if (! isempty_queue(pque)){
      item = pque->pdata[pque->front];
      pque->front = (pque->front + 1) % m;
   return item;
```

} 含有标志位或计数器的循环队列:请同学们自己实现



链队列 (Linked Queue)

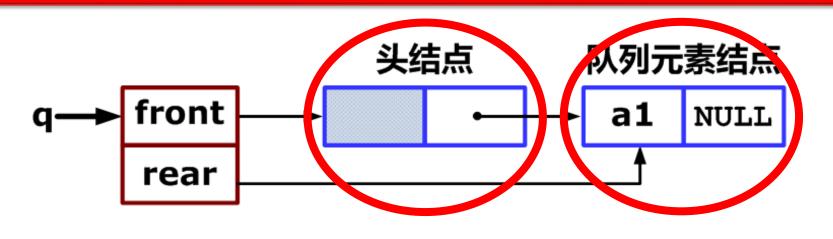
链队列的存储结构



∞ 问题:选择哪种链表作为队列的存储结构?

- 提示:单链表、循环单链表、双链表、循环双链表?
 - 不关心前驱结点: 采用单链表
- 提示:是否需要头结点? **保留头结点,以便处理空队列**
- 提示:队列是FIFO **增设一个尾指针,方便在队尾插入**
- 综上: 采用含有2个指针, 带头结点的单链表

链队列的数据结构定义

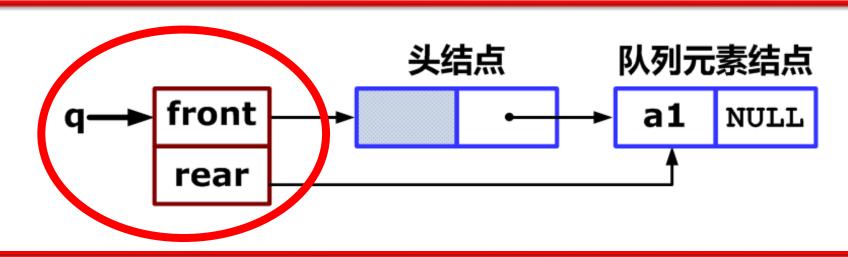


∞ 链队列中的元素结点

}TNode, *PNode;

```
typedef struct qnode {
    ElemType data; // 队列中结点的数据元素
    struct qnode *next; // 指向后继结点的指针
```

链队列的数据结构定义



∞ 链队列的数据结构

```
typedef struct{
    TNode *front; // 队头指针
    TNode *rear; // 队尾指针
    int len; // 队列长度
} TQue,*PQue;
```

链队列的初始化

```
PQue init_queue(){
   PQue pque; PNode p;
   pque = (Pque)malloc(sizeof(TQue)); // 判空略
   p = (PNode)malloc(sizeof(TNode));
   if(p){
     p->next = NULL;
     pque->front = p;
     pque->rear = p;
     pque->len = 0;
   else { printf("申请空间失败! \n"); exit(0); }
   return pque;
```



链队列的判空

```
int isempty_queue(PQue pque){
    return (pque->front == pque->rear);
}
```



链队列的基本操作: 元素入队

```
void en_queue (PQue pque, ElemType e) {
   PNode p = (PNode)malloc(sizeof(TNode));
   if(p){
      p->data = e; p->next = NULL;
      pque->rear->next=p; // 元素入队
                           // 修改队尾指针
      pque->rear = p;
   else{ printf("空间申请失败! \n"); exit(0); }
```



链队列的基本操作: 元素出队

```
ElemType de_queue(PQue pque){
   PQue p; ElemType e;
   if(pque->front == pque->rear){
      printf("队列为空, 出队操作无效! \n"); exit(0);
   p = pque->front->next; // pque->front指向头结点
   pque->front->next = p->next; // 元素出队
   e = p->data; free(p);
   if(pque->front->next == NULL) // 出队后队列为空
      pque->rear = pque->front;
   return e;
```

○ 一个农夫带着一只狼、一只羊和一棵白菜来到河东岸准备渡河到西岸,但渡船很小,只能容纳农夫和其中一件物品,而且船只能由农夫来操作。问题:农夫在不单独留下羊和狼或者羊和白菜的情况下,怎样渡河?



- □ 提示:解题的第一步:用符号表示问题
 - 合理的符号表达会简化对问题的处理……数据结构设计
- ∞ 提示: 怎样表达任意时刻农夫、狼、白菜和羊的位置状态?
 - 提示:可以用 0 表示在河的东岸, 1 表示在河的西岸
 - 可以用二进制数构成的数组来表达这四个对象的状态
 - o (dddd)_B ⇔ {Farmer, Wolf, Cabbage, Goat}
- ∞ 提示:问题的初始状态和终止状态是怎样的?
 - Start: 0000; Terminal: 1111
- ∞ 思考: 总共有多少种状态? 状态空间的维度与容量
 - 答案: 维度4, 取值范围{0,1}, 可能的状态共有24种



- □ 用 0/1 构成的数组来表达这四个对象的状态
 - (dddd)_B ⇔ {Farmer, Wolf, Cabbage, Goat}
- ∞ 问题的初始状态S: 0000; 终止状态T: 1111 共24 种状态
- ∞ 原始问题转化为:在约束条件下搜索从状态S到状态T的路径
 - 约束1:狼和羊不能独处;羊和菜不能独处
 - 约束2: 农夫必须每次均过河, 且只能携带一样物品
- ∞ 思考:怎样搜索答案?
 - 问题1:怎样表达农夫的选择?
 - 问题2: 怎样记录合法的状态转换路径?
 - 问题3:怎样驱动搜索过程?



- ∞ 问题1:怎样表达农夫的选择?
 - 若当前状态为: {F, W, C, G} = (1011)_B
 - 设:农夫准备带羊过河,则渡河后状态?
 - 答: (0 0 1 0)_B → 怎样用C语言表达?
 - 提示: 引入一个passenger变量 pas = (0 0 0 1)B
 - 其中: 1表示对应的成员参与本次渡河
 - $\circ (0010)_B = (1011)_B ^(1001)_B$
 - 设农夫什么也不带,则渡河后状态?
 - \circ (0011)_B = (1011)_B $^{\wedge}$ (1000)_B
 - 问:如果农夫想带狼过河呢? 不可以! 只能选同侧物品

- ∞ 问题1:怎样表达农夫的选择?
 - 怎样判断passenger是否合法(与农夫同侧)?
 - 提示:关于乘客的约束有哪些?
 - 农夫必须每次均过河,且只能携带与之同侧的一样物品
 - 若当前状态为: state = (1011)_B
 - 思考:怎样判断哪些物品与农夫位于河岸的同一侧?
 - o 提示: a = state & 0X08 农夫是否在河的西岸
 - o 提示: **b = state & pas** 选定物品是否在河的西岸
 - 思考: 当a与b同为真或同为假时? 农夫与该物品位于同侧
 - 此时令: pas = pas | 0X08

- ∞ 问题2: 怎样记录合法的状态转换路径?
 - 设置一个route数组用于记录路径间的转换途径

int route[16] //16种可能状态

- 数组下标(十进制)与状态(二进制)1:1对应
- 数组填充原则: route[m] = s
 - o s: 当前状态 (如{F, W, C, G} = **0001**⇔1)
 - o m: 后续状态 (如{F, W, C, G} = **1011** ⇔ 11)
- 问: route[11] = 1表示什么意思?
 - ▶答:状态11是由前驱状态1转换得到的
 - ▶ 相应的动作为:农夫携带卷心菜渡河

农夫过河问题: 判断状态是否合法

```
// 判断当前状态s是否安全: 若安全则返回1, 否则返回0
int check(int s){
   // 羊菜同岸且农夫不在场
   if(((s \& 1)!=0) == ((s \& 2)!=0)) \& \&
       (((s \& 1) != 0) != ((s \& 8) != 0)){
       return 0; }
   // 狼羊同岸且农夫不在场
   if(((s \& 1)!=0) == ((s \& 4)!=0)) \& \&
       (((s \& 1) != 0) != ((s \& 8) != 0)){
       return 0; }
   return 1;
```



- ∞ 问题3:怎样驱动搜索过程?
 - 提示: 首先需要选择状态空间的存储结构: 哪种线性表?
 - 两种基本的搜索策略:深度优先搜索 vs 广度优先搜索
 - 深度优先搜索采用栈实现;广度优先搜索采用队列实现
 - 对本问题而言栈和队列都可以:队列更符合解题直觉
 - 引入状态选择队列: sque
 - 用于保存搜索过程中农夫的选择可能导致的状态改变
 - 思考:怎样利用队列实现搜索?



农夫过河问题的算法流程

∞ 系统初始化

- route数组元素初始化值全部设置为-1
- 初始化状态选择队列sque: 将状态0000入队 (即数字0)

ca 循环处理

- 处理队首状态的转换(农夫可能的选择)
- 如果渡河动作导致的状态结果安全,则:
 - 将渡河动作结束后得到的新状态加入队尾
 - 在route数组中新状态对应的位置记录当前状态
- 结束条件? **状态选择队列为空,或者route[15]!=-1**

农夫过河问题

```
void cross_river(){
   TQue sque; int pas, after; int route[16]; ......
   for(i = 0; i < 16; i++) route[i] = -1;
   init_queue(&sque, 17);
   en_queue(&sque, 0); // 初始状态0入队
   while(!isempty(&sque) && (route[15] == -1)){
     s = de_queue(&sque);
     for(pas = 1; pas<= 8; pas <<= 1 ){
       if(((s \& 8)!=0) == ((s \& pas)!=0)){
         after = s^( 8 | pas ); // 农夫每次需渡河
         if(check(after)&&(route[after]== -1)){
          route[after] = s;
          en_queue(&sque, after);
}}}}
```

农夫过河问题的算法流程

∞ 结果输出

- 首先判断问题是否有解
 - o 怎样判断? route[15]!=-1时有解
- 如果有解,怎样得到状态变迁的路径?
 - 可根据route数组元素的值得到状态路径
- 思考:采取怎样的策略遍历route数组得到正确输出?
 - o 循环初始条件: **state** = **15**
 - o 循环结束条件: state = = 0
 - 循环变量更新: state = route[state]



