Midterm of FCS

Swen Chan

July 2023

1

(a)
$$((R \longrightarrow S) \longrightarrow R) \longrightarrow R$$

 $= ((\neg R \lor S) \longrightarrow R) \longrightarrow R$
 $= ((R \land \neg S) \lor R) \longrightarrow R$
 $= (\neg (R \land \neg S) \land \neg R) \lor R$
 $= ((\neg R \lor S) \land \neg R) \lor R$
 $= ((\neg R \lor S) \land \neg R) \lor R$
 $= ((\neg R \lor (S \land \neg R)) \lor R$
 $= \neg R \lor R \lor (S \land \neg R)) \lor R$
 $= \neg R \lor R \lor (S \land \neg R)$
 $= T$
(b) $(P \longleftrightarrow Q)$
 $= (P \longrightarrow Q) \land (Q \longrightarrow P)$
 $= ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land P)$
 $= ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land P)$
 $= ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land P) \lor (Q \land P))$
 $= ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land P) \lor (Q \land P))$
 $= (P \lor Q) \longrightarrow (P \land Q) ...(1)$
and we can easily get that $(P \land Q) \longrightarrow (P \lor Q)$ is a tatuology by the following steps:
 $(P \land Q) \longrightarrow (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg P \lor \neg Q \lor (P \lor Q)$
 $= \neg$

(c)

$$\neg (\forall x, P(x) \land [\exists x : Q(x) \land \neg R(x)])$$

$$= \exists x, \neg P(x) \lor \neg [\exists x : (Q(x) \land \neg R(x)]$$

$$= \exists x, \neg P(x) \lor [\forall x : \neg Q(x) \lor R(x)]$$

(d)

$$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow R$$