

SÉANCE 3

GRAPHES (PARTIE 2) - MAXIMISATION DE FLOTS

Mattéo Delabre & Guillaume Pérution-Kihli

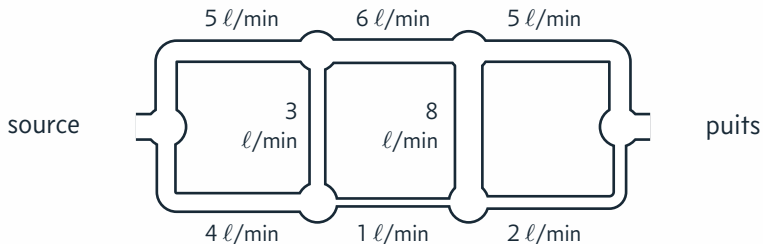
Université de Montpellier
19 février 2022

PLAN

- 1** Introduction
- 2** Réseaux et problème de maximisation de flot
- 3** Algorithme pour trouver un flot maximum
- 4** Entraînons-nous !
- 5** Quelques problèmes associés

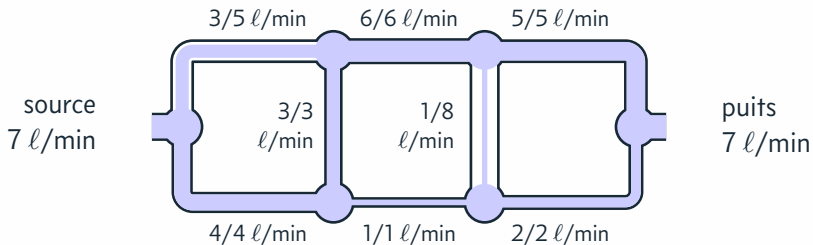
EXEMPLE INTRODUCTIF

Quel est le plus grand débit d'eau possible en sortie du système ?



EXEMPLE INTRODUCTIF

Quel est le plus grand débit d'eau possible en sortie du système ?

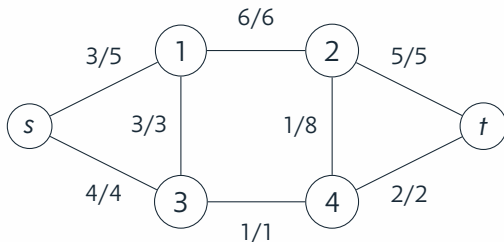


PLAN

- 1 Introduction
- 2 Réseaux et problème de maximisation de flot**
- 3 Algorithme pour trouver un flot maximum
- 4 Entraînons-nous !
- 5 Quelques problèmes associés

GÉNÉRALISONS UN PEU

Quel est la valeur maximum d'un flot dans ce graphe ?



- Données dans un réseau informatique
- Trains dans un réseau ferroviaire
- Marchandises dans une chaîne logistique

UTILITÉ DE CE PROBLÈME

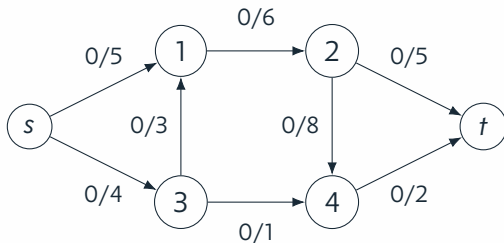
- ▶ Algorithmes de résolution efficaces
 - **Edmonds-Karp** : $O(|V| \times |E|^2)$
 - Dinic : $O(|V|^2 \times |E|)$
- ▶ Grand pouvoir de modélisation
 - Nombre maximum de chemins disjoints
 - Résilience d'un réseau
 - Couplage maximal dans un biparti
 - Élimination d'équipes au baseball

PLAN

- 1 Introduction
- 2 Réseaux et problème de maximisation de flot
- 3 Algorithme pour trouver un flot maximum**
- 4 Entraînons-nous !
- 5 Quelques problèmes associés

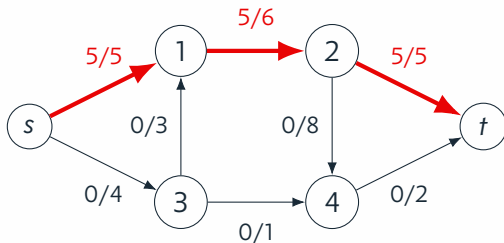
PREMIER ALGORITHME GROUTON

Rechercher des plus courts chemins augmentants, tant que c'est possible.
S'il n'y en a plus, c'est qu'on a trouvé un flot maximum.



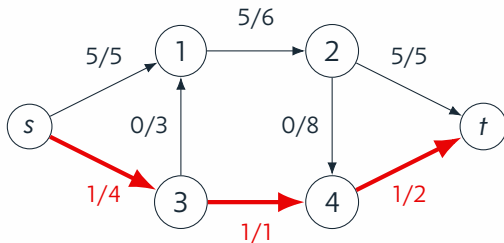
PREMIER ALGORITHME GROUTON

Rechercher des plus courts chemins augmentants, tant que c'est possible.
S'il n'y en a plus, c'est qu'on a trouvé un flot maximum.



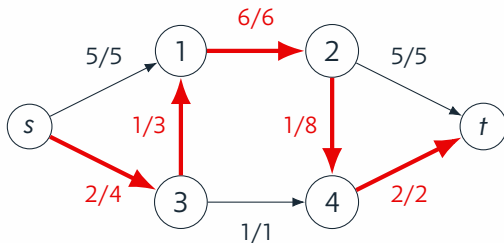
PREMIER ALGORITHME GROUTON

Rechercher des plus courts chemins augmentants, tant que c'est possible.
S'il n'y en a plus, c'est qu'on a trouvé un flot maximum.

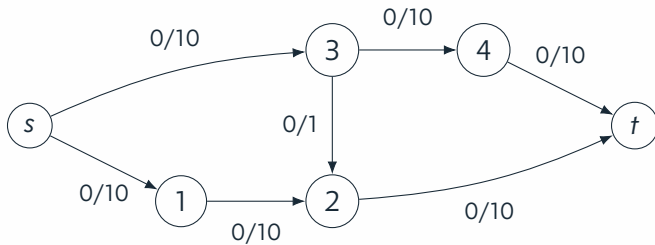


PREMIER ALGORITHME GROUTON

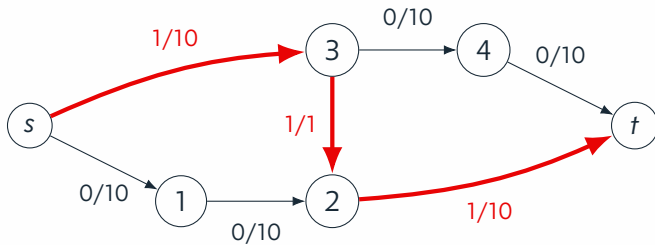
Rechercher des plus courts chemins augmentants, tant que c'est possible.
S'il n'y en a plus, c'est qu'on a trouvé un flot maximum.



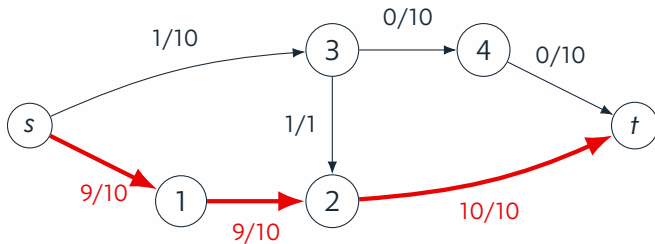
CONTRE-EXEMPLE



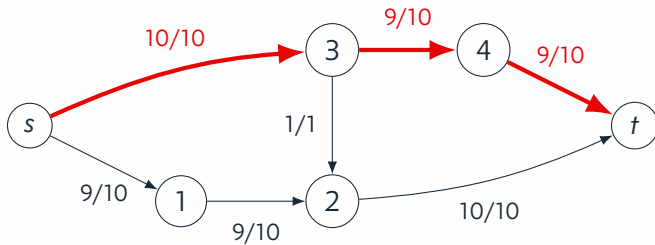
CONTRE-EXEMPLE



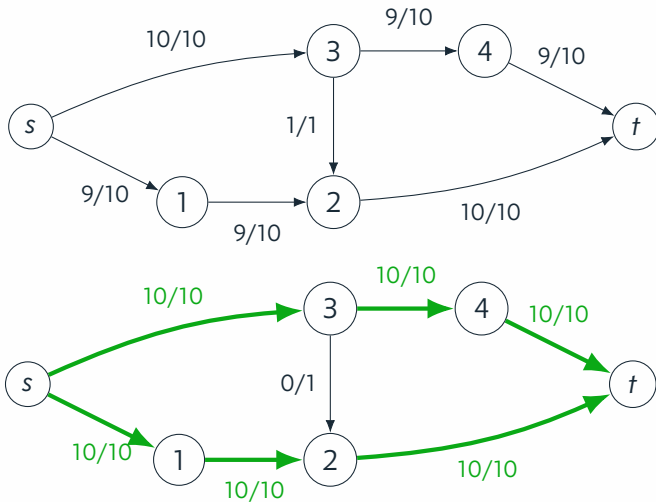
CONTRE-EXEMPLE



CONTRE-EXEMPLE

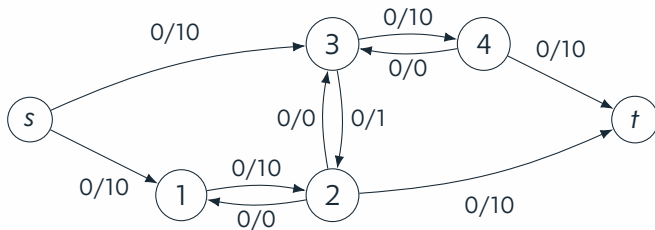


CONTRE-EXEMPLE



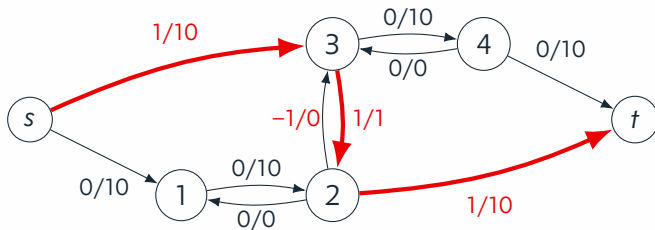
SE DONNER LE DROIT À L'ERREUR

Ajout d'arcs-retour qui permettent de rediriger un flot déjà affecté.



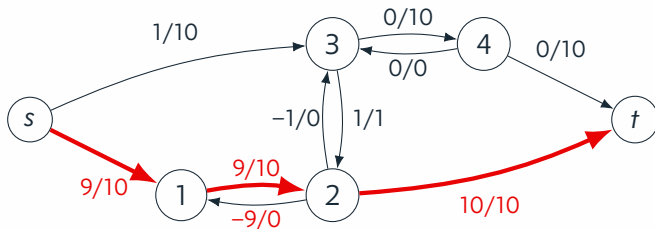
SE DONNER LE DROIT À L'ERREUR

Ajout d'arcs-retour qui permettent de rediriger un flot déjà affecté.



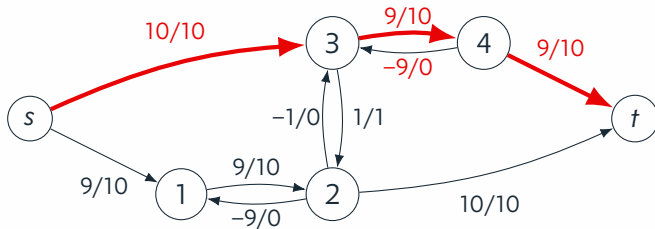
SE DONNER LE DROIT À L'ERREUR

Ajout d'arcs-retour qui permettent de rediriger un flot déjà affecté.



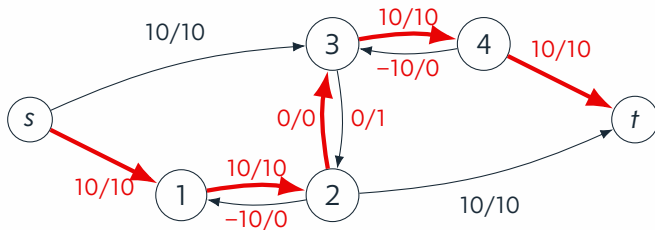
SE DONNER LE DROIT À L'ERREUR

Ajout d'arcs-retour qui permettent de rediriger un flot déjà affecté.



SE DONNER LE DROIT À L'ERREUR

Ajout d'arcs-retour qui permettent de rediriger un flot déjà affecté.



ALGORITHME D'EDMONDS-KARP

- ▶ Trouver un chemin augmentant
 - 1 Faire un parcours en largeur du graphe, en partant de s et en ne traversant que les arêtes où il reste du flot non utilisé
 - 2 Retenir, pour chaque sommet u
 - ▶ Son parent dans le parcours
 - ▶ La quantité de flot qu'on peut rajouter sur le chemin (s, u)
 - 3 Retourner un plus court chemin qui mène de s à t

- ▶ Trouver la valeur maximum du flot
 - 1 Répéter tant qu'on peut trouver un chemin augmentant
 - 2 Incrémenter le flot utilisé dans le sens du chemin
 - 3 Décrémenter le flot utilisé dans le sens inverse du chemin

PLAN

- 1 Introduction
- 2 Réseaux et problème de maximisation de flot
- 3 Algorithme pour trouver un flot maximum
- 4 **Entraînons-nous !**
- 5 Quelques problèmes associés

DISTRIBUTION DE T-SHIRTS

Les participants à un concours ont donné leur préférence de taille pour leur t-shirt (parmi S, M, L, XL, XXL, XXXL). Certains participants ont donné deux tailles adjacentes (ex. « L ou XL »). Déterminez une façon de distribuer les t-shirts qui satisfasse tout le monde.



Entrée *Ligne 1* : nombre de t-shirts de chaque taille. *Ligne 2* : n , le nombre de participants. *n lignes suivantes* : choix de chaque participant.

Limites $n \leq 10^5$ et nombre total de t-shirts $\leq 10^5$. Temps : 1 s.

Sortie « NO » s'il n'y a pas de solution, sinon « YES » suivi d'une des solutions possibles.

Tiré de Technocup 2017 — Elimination Round 1

MODÉLISATION COMME UN FLOT

0 1 0 1 1 0

3

XL

S,M

XL,XXL

MODÉLISATION COMME UN FLOT

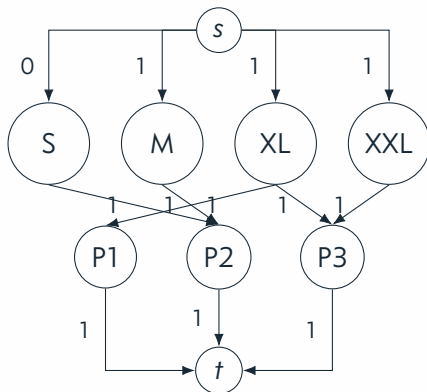
0 1 0 1 1 0

3

XL

S,M

XL, XXL

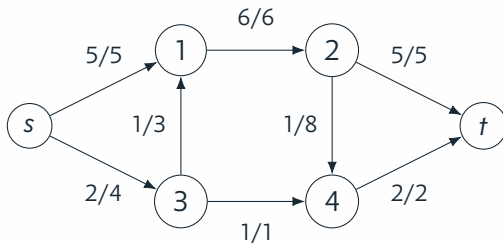


PLAN

- 1** Introduction
- 2** Réseaux et problème de maximisation de flot
- 3** Algorithme pour trouver un flot maximum
- 4** Entraînons-nous !
- 5** **Quelques problèmes associés**

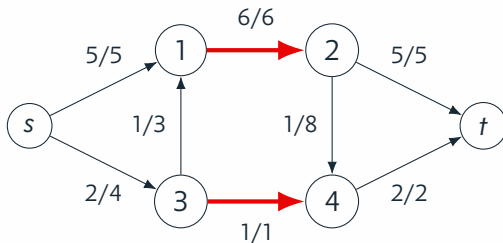
COUPE MINIMALE

- **Coupe minimale** : Enlever des arêtes du graphe de sorte à déconnecter s de t , en minimisant le poids des arêtes retirées.



COUPE MINIMALE

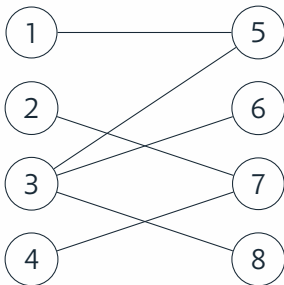
- **Coupe minimale** : Enlever des arêtes du graphe de sorte à déconnecter s de t , en minimisant le poids des arêtes retirées.



- **Flot maximum = Coupe minimum**
- Le réseau ne peut pas supporter un flot plus important que celui d'une quelconque coupe. Une coupe ne peut pas être d'un poids inférieur à celui d'un quelconque flot.

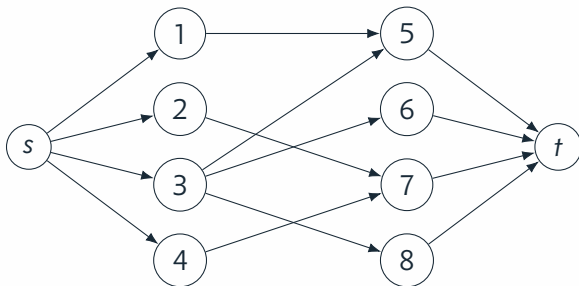
COUPLAGE MAXIMAL DANS UN BIPARTI

- ▶ **Biparti** : Composé de deux ensembles de sommets indépendants.
- ▶ **Couplage** : Ensemble d'arêtes non-adjacentes (« disjointes »).



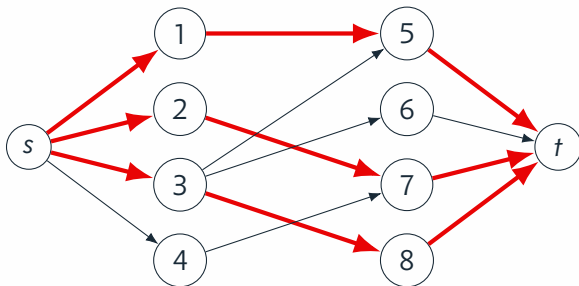
COUPLAGE MAXIMAL DANS UN BIPARTI

- ▶ **Biparti** : Composé de deux ensembles de sommets indépendants.
- ▶ **Couplage** : Ensemble d'arêtes non-adjacentes (« disjointes »).



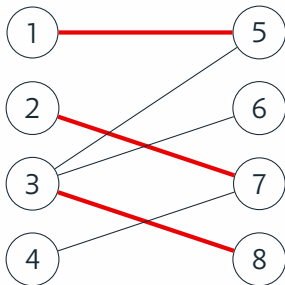
COUPLAGE MAXIMAL DANS UN BIPARTI

- **Biparti** : Composé de deux ensembles de sommets indépendants.
- **Couplage** : Ensemble d'arêtes non-adjacentes (« disjointes »).



COUPLAGE MAXIMAL DANS UN BIPARTI

- ▶ **Biparti** : Composé de deux ensembles de sommets indépendants.
- ▶ **Couplage** : Ensemble d'arêtes non-adjacentes (« disjointes »).



EXERCICES ET RÉFÉRENCES

- ▶ Exercices :
 - **Technocup 2017, "T-shirts Distribution"**
 - UVa 10480, "Sabotage"
- ▶ Dans les livres de référence :
 - Dürr et Vie, §9.5 à §9.8.
 - Laaksonen, §12.3.
 - Halim, §4.6.