

# NOI 2020 模拟赛 Contest 1

diamond\_duke

题目名称	石子	内存	子集
可执行文件名	stone	memory	subset
输入文件名	标准输入	标准输入	标准输入
输出文件名	标准输出	标准输出	标准输出
时间限制	1s	1s	2s
内存限制	512MB	512MB	512MB
子任务个数	4	3	4
题目类型	传统型	传统型	传统型

**请注意：** 评测时开启 O2 优化和 C++11 编译选项，栈空间限制同空间限制。

## 1 石子

根据期望的线性性，答案  $E(t) = P_2 + P_3 + \cdots + P_n + 1$ ，其中  $P_i$  是第  $i$  堆石子在第 1 堆之前被取走的概率。

考虑第  $i$  堆，可以发现其他堆都不会影响这两堆，因此相当于只要考虑只有这两堆的情况，因此概率即为  $\frac{a_i}{a_1 + a_i}$ 。

因此答案即为  $\sum_{i=2}^n \frac{a_i}{a_1 + a_i} + 1$ ，直接计算即可。

时间复杂度： $\Theta(n)$ 。

## 2 内存

对于每个  $x$ ，考虑如果用它来压缩那么可以达到的最优解，设为  $F(x)$ 。

假如给定一个  $x$ ，想要求  $F(x)$ ，那么可以通过二分贪心在  $\Theta(n \log_2 n)$  的时间内算出。

直接对于所有  $x$  都暴力计算即可得到  $\Theta(nm \log_2 n)$  的复杂度，可以通过子任务 1, 2。

如果我们以随机顺序遍历所有  $x$ ，则在期望情况下，新的  $F(x)$  比当前所有  $F$  的值都要小的  $x$  个数的期望应该是  $\sum 1/i$ ，这是调和级数，为  $\Theta(\ln n)$ 。

于是我们只对于这些  $x$  二分即可：我们令答案为  $\text{ans} - 1$  并贪心，即可判断当前的  $x$  是否满足条件。

时间复杂度： $\Theta(nm + n \ln n \log_2 n)$ 。

### 3 子集

显然我们只会选择  $n$  的约数，因为如果选了其他的那么最小公倍数一定不是  $n$ 。

考虑对  $n$  进行分解，设  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 。那么我们要求选的数字满足：对于每个  $i \in [1, k]$ ，均存在一个数在  $p_i$  中是 0 次方，也存在一个数在  $p_i$  中是  $\alpha_i$  次方。

直接计算并不容易，考虑容斥原理：如果只有一个  $p^\alpha$ ，那么我们用所有情况去掉不存在 0 次方的情况，再去掉不存在  $\alpha$  次方的情况，然后加上都不存在的情况即可。

然后对于原问题，我们可以  $\Theta(4^k)$  枚举每个质因数是上面四种情况中的哪一种，然后计算出这种情况下的方案数即可。时间复杂度： $\Theta(4^{\omega(n)} \omega(n))$ ，可以通过子任务 1, 2。

考虑如何进行优化。注意到对于第一种情况，方案数为  $(\alpha_i + 1)$ ，第二种和第三种情况都是  $\alpha_i$ ，而第四种是  $(\alpha_i - 1)$ 。因此，我们可以转而枚举方案数的可能性，这只有三种，因此枚举的复杂度从  $\Theta(4^k)$  降到了  $\Theta(3^k)$ 。

值得一提的是，这里对  $n$  进行分解是本题的难点： $\Theta(\sqrt{n})$  的复杂度并不可接受，但我们并不需要真的得到  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ，而是只要知道  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  即可。

我们考虑先分解出所有  $p_i \leq \sqrt[3]{n}$  的  $p_i^{\alpha_i}$ ，那么剩余部分只有  $p, p^2, pq$  三种，其中  $p, q$  都是质数。

那么我们先使用 Miller Rabin 算法判断  $p$  的情况，然后开根号后平方判断  $p^2$  的情况，剩余的情况就是  $pq$  的情况了。

时间复杂度： $\Theta(\sqrt[3]{n} + 3^{\omega(n)} \omega(n))$ 。