Sol

oier.namespace.std

A. 屏幕(screen)

看到题大部分人第一反应应该是矩阵乘法。

~~可惜这个递推式不线性~~。

但是不要着急，我们可以先看一下递推式的形式：

$$a_i = \frac{a_{i-1} + \left(\frac{1}{a_{i-1}}\right)}{2}$$

我们设

$$a_i = \frac{x_i + y_i}{x_i - y_i}$$

由a_i的递推式有

$$a_{i+1} = \frac{{x_i}^2 + {y_i}^2}{{x_i}^2 - {y_i}^2}$$
$$a_{i+2} = \frac{{x_i}^4 + {y_i}^4}{{x_i}^4 - {y_i}^4}$$
$$\dots$$

这些表达式的形式非常相近。

且由于a_1已知，我们可以求出 x_1, y_1 的一组特解：

$$x_1 = \frac{a_1 + 1}{2}$$
$$y_1 = \frac{a_1 - 1}{2}$$

因此我们就有了一种快速求a_i的方法：

由数学归纳法可证得

$$x_n = {x_1}^{2^{n-1}}$$

$$y_n = {y_1}^{2^{n-1}}$$

所以我们只需要用快速幂结合欧拉定理求出 x_n, y_n 的值。

复杂度 $O(T\log_2 n)$。~~（我保证了 T1 是签到题你看代码才 20 行（捂脸~~

B. 直角三角形(rigtri)

一道不错的~~毒瘤~~计算几何题。

其实 B 的思维难度是要比 C 大一点的……不过由于 C 是~~明显的~~数据结构，所以让我丢到后面去了。

当然如果您和这题杠了四个小时一无所获的话……（光速逃

考虑证明这样一个引理：

【引理 I】如果存在合法解，那么一定有一个解满足三个顶点均在矩形的边（包括顶点）上。

如果存在解：那么以这个解的斜边为直径作一个圆，那么这个圆一定与包含直角顶点的矩形有一个交点，因为圆的直径上的两点均在第三个矩形外（矩形互不重叠），而又有这个直角顶点在矩形内，由于圆是连续曲线，一定会与这个矩形的边有交。现在我们得到了一个直角顶点落在矩形边上的直角三角形。

作出两直角边表示的直线，则同理这两条直线与另两个矩形有交。

这两个交点和直角顶点构成的一定还是一个直角三角形，而这三个点均在三个矩形边界上。

（引理证毕。）

下面，我们来以上一个引理的基础上尝试证明另一个引理：

【引理 II】如果存在合法解，那么一定有一个解的两个顶点在矩形的顶点上。

由引理 I 我们知道这三个解可以在三条线段上（即三个矩形的三条边）。

作出两直角边表示的直线，那么我们以直角顶点为旋转中心旋转这两条直线，一定能旋转至一个状态，使两直线中的一条抵达线段的末端，另一条仍与原来的线段相交。此时直角三角形的一个非直角顶点落在矩形的顶点上。

固定这个非直角顶点，设其为 R。

对于另两条线段，由于前面的叙述，一定对这个 R 存在一组解，记为 Δ RST。

不妨设这组解的直角顶点 S 在某一个矩形的边 AB 上。

如果 RA 可以和第三个矩形上的某一点 G 组成直角三角形。那么结论成立。

否则，AS 间一定存在一个临界点 P，使得 RP 可以和另一个矩形的一个顶点组成一个直角三角形。

（引理证毕。）

由引理 II，我们只需要枚举矩形的一对顶点，然后暴力判断即可。

复杂度 O(T*144(?)*判断常数)。

一种错误的做法会得到 65 分。方法是枚举两个矩形的顶点，判断第三个矩形的四个顶点中是否能与之前的两个点组成至少一个锐角三角形和钝角三角形，之后二分直角顶点的位置。

有兴趣的同学可以想想这样为什么是错的。

C. 平衡树(bst)

显然答案具有单调性（一个点对于 x 平衡，那么它对于任意 x'>x 也平衡）。

只需要求出来每个点使其平衡的最小 alpha，然后排个序二分答案即可。

将树上的每一条无向边拆成两条有向边。

定义一条有向边平衡，当且仅当这条边的终点的父亲为这条边的起点时的子结点个数小于两个，或者(最大的子节点的子树/整棵树的大小)<=alpha。

一个点为根平衡当且仅当以这个点为根做 dfs 时经过的所有有向边都平衡，并且如果它度数大于 1，还需要满足它自身最大的子节点/n<=alpha。

我们可以预处理出以 1 为根每一棵子树的 size，以及每个节点的最大子树和次大子树大小，就可以 O(1)求出使任意一条有向边平衡的最小 alpha。

考虑一条有向边的影响：它会使得它指向的子树之外的所有节点的最小 alpha 不能小于这条边的最小 alpha，而不影响它指向的子树。

然后我们就可以在 dfs 序上作子树取 max 的操作了。但是要注意特殊判断根节点的平衡情况。

复杂度 $O((n+m)\log_2 n)$。

一些番外

T1 本来想只出 x=3（找规律能发现是$(2^{2^{n-1}}+1)/(2^{2^{n-1}}-1)$ ）

然后发现这玩意形式很好于是尝试推导一些性质……然后就有了形似上文的解法……

T2 由我和同机房的 Starria 学姐共同完成。Thanks & rp++!

因此在下发的 sol 中我附带了两份标程，分别为我写的版本和 Starria 的版本。

不得不说我的码风比较毒瘤……>_<还请原谅。

T3 的 idea 也比较套路吧……我似乎只会到处出贡献题。

原本这道题没有多测，也没有节点平衡定义中有至少两个子树的限制，但是在 Starria 的启发下经过了两次加强，成为了现在的版本。

预估平均分：70+35+50=155。

祝大家在接下来的 OI 生涯中 RP++，Score++。

Let’s fight on towards our dreams without any hesitation.

oier.namespace.std

2019/11/29