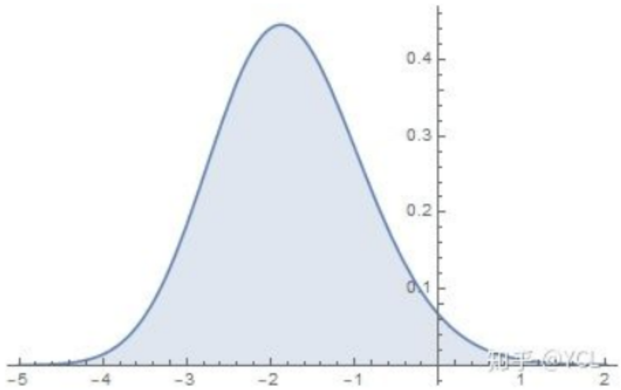
A：
结论：https://www.zhihu.com/question/266958886

任取 $\pi \in S_n$（视作 1 到 n 的一个排列），记 $\ell_n(\pi)$ 为其最长上升子序列的长度

1. 一句话的答案： $\mathbb{E}[\ell_n] \sim 2\sqrt{n} + \alpha n^{1/6} + o(n^{1/6}),\ \text{as}\ n \to \infty$ ，这里 $\alpha = -1.7710868074...$ 是所谓的Tracy-Widom GUE分布 F_2 的均值，这个分布的概率密度这样：



PDF of TW2

只需知道是 O(sqrt(n)) 的即可。

然后考虑把加元素倒序为删元素，时刻维护任意一个 LIS 的解，如果删到解中的元素暴力重构即可。
复杂度为 O(nsqrt(n)log(n)) 常数很差的实现可能无法通过 50000 的测试点，不过随机数据很好造，相信大家都在本机优化了自己的常数。

B：
题目中的限制等价于图中不存在大小超过 6 的联通块。
然后显然每个联通块染色的方案数是一个多项式，可以暴力把所有多项式插值出来。得到 O(n) 个多项式。
然后考虑对于 1~n 求和。
如果你有一定的 FFT 技巧，多点求值搞一搞什么的也可以做。
考虑到本质不同的大小为 6 的联通块的个数很少（OEIS A001349，112 种），实际上合并一下相同的多项式，暴力即可。

C：
此题可能有点码，是码量担当，不过显然没有防 ak 的能力。
K=2 是简单数位 DP 练习题。

我们将$\sum s(a_i) \equiv s(\sum a_i)(\mod d)$这个柿子的右边移到左边，变成$\sum s(a_i) - s(\sum a_i) \equiv 0(\mod d)$

$f[i][0/1][0/1][0/1][0/1][t][d]$ 表示考虑到第i位，第一个数和第二数的顶上下界情况，t表示从第$i-1$位是否进位，d表示上面式子的值

数据范围很宽松，暴力转移即可。

考虑怎么扩展上述思路。

1. 在数位DP中，我们要对每个数记录它是否贴了上下界，这题中我们显然不能开$2^k * 2^k = 4^k$这么大的状态存每个数贴的上下界情况，考虑如何优化
   - 对于L, R，我们假设它们第$i'+1$到第n位相同，从第i'位开始不同，那么前i'位这k个数一定是同时贴上下界，且从第i'位开始，他们一定不可能同时贴上下界，也就是只有3种情况：贴上界，贴下界，都不贴。于是我们对第$i'+1$位到第n位特殊处理，第i'位开始dp，就可以将上下界的状态缩小到3^k
   - 事实上3^k对于这个数据范围还是太大，而且可以进一步优化。其实没有必要记录每个数上下界的状态，我们只要对于这3个状态，记录每个状态的数有几个即可，用$[a][b]$记录贴下界的有a个数，贴上界的有b个，那么都不贴的就是$k-a-b$个，于是我们就用$k*k$的状态存下了k个数上下界的情况
2. 因为是k个数的和，当然会存在进位，要开个状态$[c]$记录下一位会进c位到这一位
3. 我们将$\sum s(a_i) \equiv s(\sum a_i)(\mod d)$这个柿子的右边移到左边，变成$\sum s(a_i) - s(\sum a_i) \equiv 0(\mod d)$，我们再开一维$[d]$存这个差

于是我们现在的状态是$f[i][a][b][c][d]$，表示当前dp到第i位，有a个数贴下界，b个数贴上界，第$i-1$位会进c位上来，柿子的值是d

然后考虑枚举了i, a, b, c, d后的转移

从第i'位开始dp，转移时枚举ai, bi, ci, di代表从i位转移到$i-1$位时，有ai个数从贴下界到不贴下界，有bi个数从贴上界到不贴上界，$i-2$位进位到$i-1$位进了ci位，第$i-1$位对柿子的贡献是di

我们用一个$h[i][ai][bi][ci][di]$表示第i位满足上述限制的填法的数量，对于每个枚举的i, a, b, c，去dp这个h数组

这个h不好直接dp，注意到影响h的值的只有第i位的上下界，外层的a，b，c，其实是不影响h的值的，所以对于每个i，我们再做一个dp

- 用$g[i][ai][bi][ci][cc][kc]$表示对于第i位，有ai个人从贴下界上来，bi个人从贴上界下来，ci个人原来就不贴上下界，下一位进位了kc个,$ai+bi+ci$个数这一位的和加上kc的进位的和为cc，这$ai+bi+ci$个数这一位的填法数量

有了g数组后h数组就很容易得到，注意处理h数组时转移要乘上组合数

得到了h数组，枚举一下就可以转移f了

详见 std

可以思考下对于更大的 L 和 R 还有什么优化的空间。