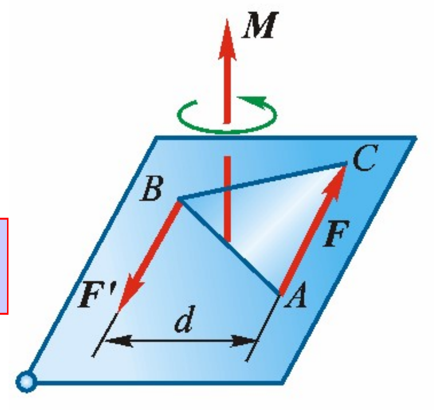
上节课内容回顾

1. 空间力偶系

矢量（大小=力*力臂，转向：右手法则，
　　　　方向：力偶作用面的法向）
在同一个刚体内可以自由移动，矢量加法

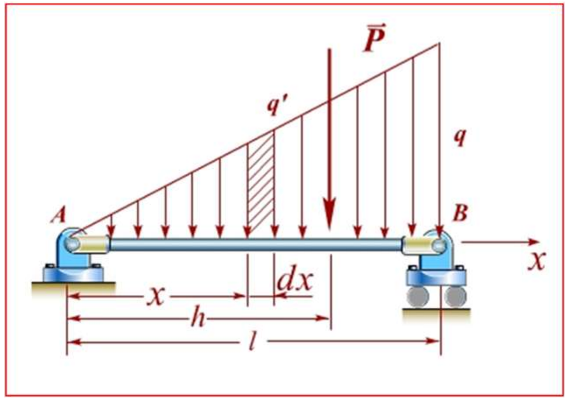
$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$



2. 空间力系简化：根据主矢与主矩是否为0，存在四种组合

主矢	主矩		最终简化结果	说明
$F'_R=0$	$M_O=0$		平衡	
	$M_O\neq 0$		力偶	此种情形的主矩与简化中心无关
$F'_R\neq 0$	$M_O=0$		集中力	集中力作用线过简化中心
	$M_O\neq 0$	$F'_R \perp M_O$	集中力	集中力作用线到简化中心的 $d=\lvert M_O/F'_R \rvert$
		$F'_R \parallel M_O$	力螺旋	力螺旋的力过简化中心
		F'_R与M_O夹角θ	力螺旋	力螺旋的力到简化中心的距离 $d=\lvert M_O\sin\theta/F'_R \rvert$

一. 平行力系中心



物体重力合力的作用点为物体的重心。

重心就是主矩为0的平行力系的简化中心

合力矩定理

$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$$

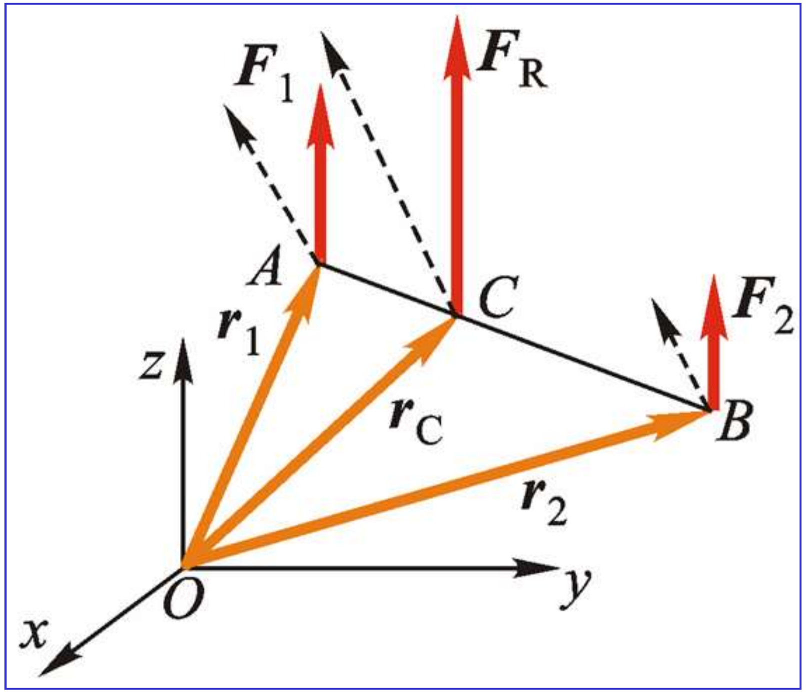
$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

分力对任意点的力矩和等于合力对该点的力矩

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

$$y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

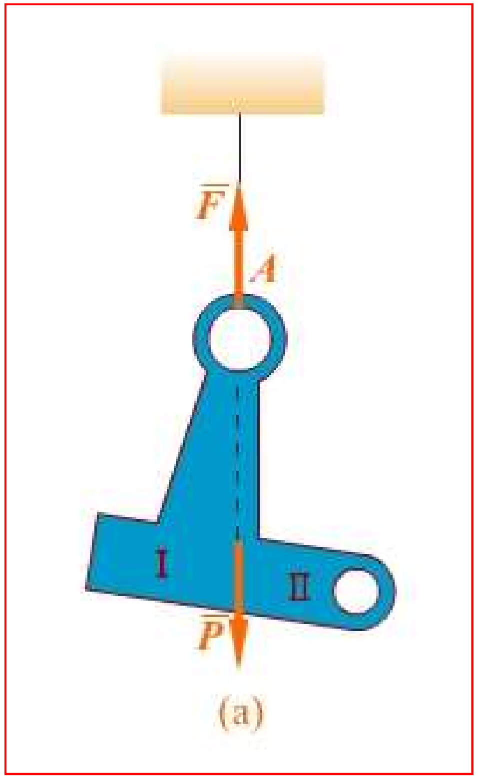
$$z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$



平行力系合力作用点的位置

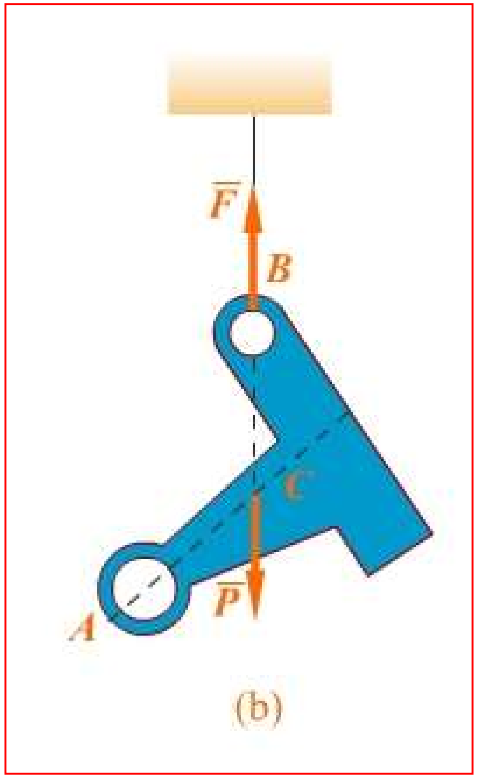
二．确定重心的实验方法：悬挂法与称重法

悬挂法



二力平衡

重心位于力作用线上

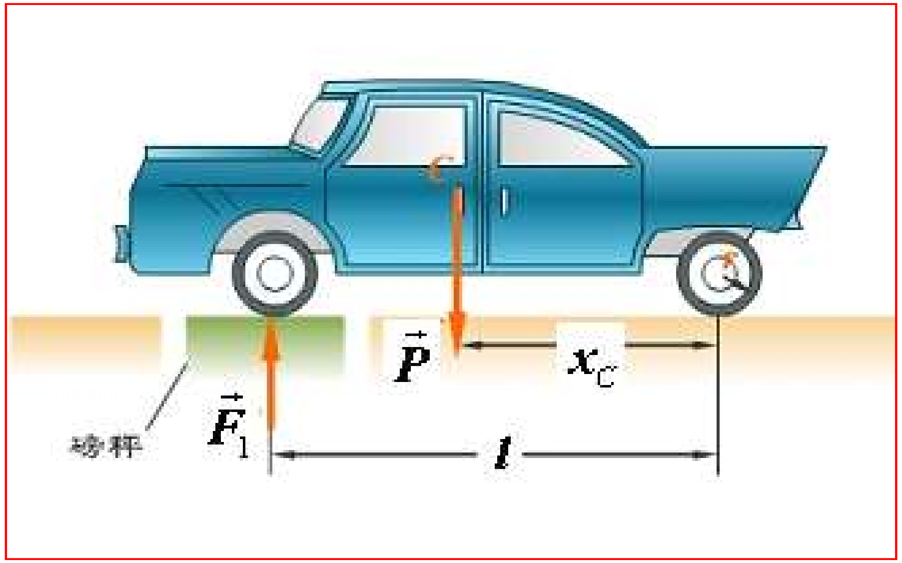


称重法

$$P \cdot x_C = F_1 \cdot l \quad 则 \quad x_C = \frac{F_1}{P} l$$

$$P \cdot x_C' = F_2 \cdot l' \quad 则 \quad x_C' = \frac{F_2}{P} l'$$

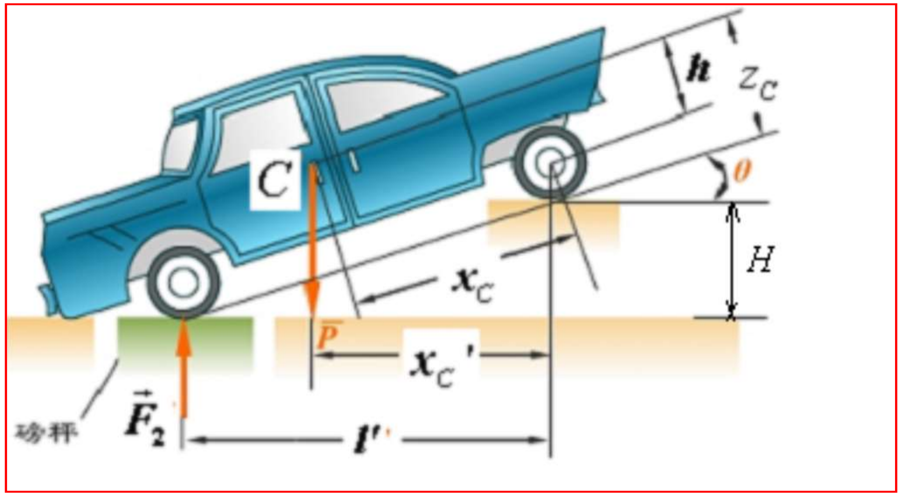
$$l' = l \cos\theta$$



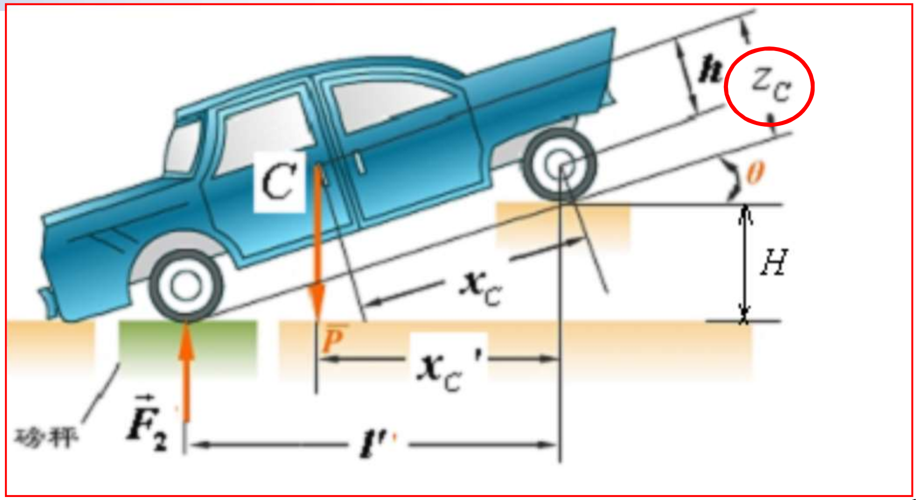
这是水平方向的重心。
竖直方向怎么确定？

方法1：吊起来找力作用线

方法2：竖直抬起后轮，测量前轮的压力变化



称重法



$$x_C = \frac{F_1}{P} l \qquad x_C' = \frac{F_2}{P} l'$$ 测量得到

$$l' = l\cos\theta$$ 几何关系

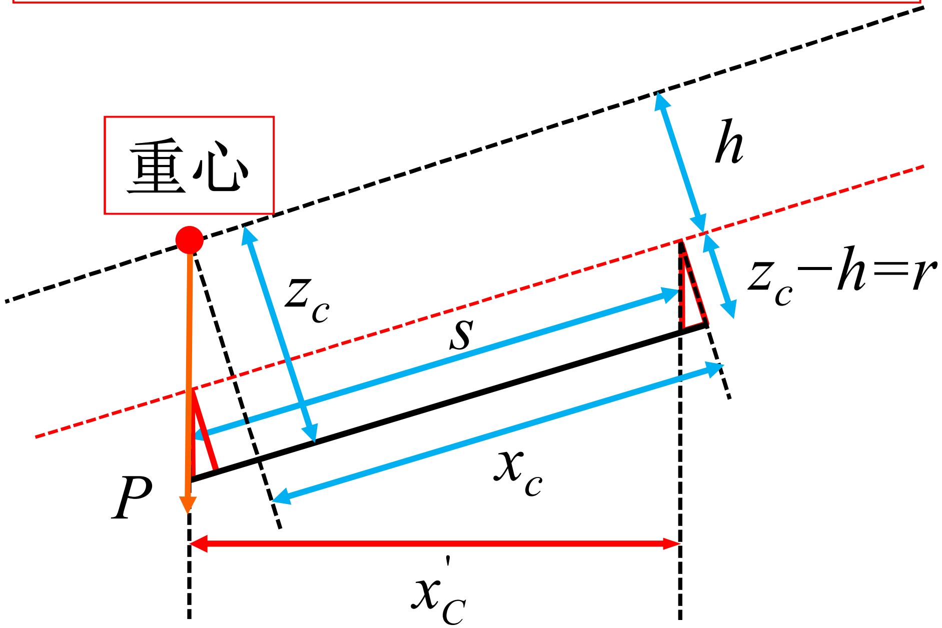
$$x_C' = s\cos\theta = x_C\cos\theta + h\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{H}{l} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{l^2 - H^2}}{l}$$

$$x_C' = \frac{x_c}{l}\sqrt{l^2 - H^2} + (z_c - r)\frac{H}{l}$$

$$x_C' = \frac{F_2}{P} l' = \frac{F_2}{P}\sqrt{l^2 - H^2} \qquad x_C = \frac{F_1}{P} l$$

$$z_C = r + \frac{F_2 - F_1}{P} \cdot \frac{1}{H} \cdot \sqrt{l^2 - H^2}$$



$$s = x_c + z_c\tan\theta - (z_c - h)\tan\theta = x_c + h\tan\theta$$

三. 计算重心坐标的公式

$$x_C=\frac{\sum P_i x_i}{P} \qquad y_C=\frac{\sum P_i y_i}{P} \qquad z_C=\frac{\sum P_i z_i}{P}$$

$P_i=m_i g$为第i部分物体的重力

对均质物体，均质板状物体，有

均质物体密度不变 (ρ)

$$x_C=\frac{\sum V_i x_i}{V} \qquad y_C=\frac{\sum V_i y_i}{V} \qquad z_C=\frac{\sum V_i z_i}{V}$$

$P_i=\rho V_i g$，V_i为第i部分物体的体积

等厚度物体 (h)

$$x_C=\frac{\sum A_i x_i}{A} \qquad y_C=\frac{\sum A_i y_i}{A} \qquad z_C=\frac{\sum A_i z_i}{A}$$

$V_i=hA_i$，A_i为第i部分物体的面积

--称为重心或形心公式

对均质物体，均质板状物体，均质杆，重心位置只决定于物体的体积和形状，重心与物体的几何中心（即形心）重合。

均质物体的形心

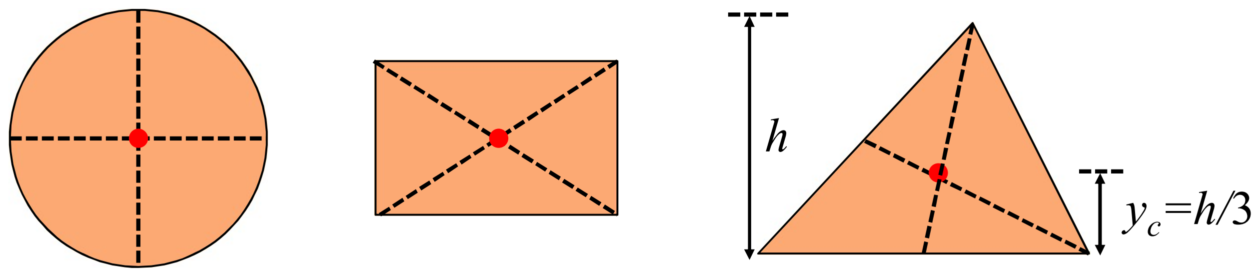
均质体	均质等厚薄板	等截面细杆
$X_C=\dfrac{\int_v xdV}{V}$	$X_C=\dfrac{\int_s xdA}{A}$	$X_C=\dfrac{\int_l xdl}{l}$
$Y_C=\dfrac{\int_v ydV}{V}$	$Y_C=\dfrac{\int_s ydA}{A}$	$Y_C=\dfrac{\int_l ydl}{l}$
$Z_C=\dfrac{\int_v zdV}{V}$	$Z_C=\dfrac{\int_s zdA}{A}$	$Z_C=\dfrac{\int_l zdl}{l}$

确定重心位置的计算方法

（1）直接法　直接根据中心坐标公式进行计算；

（2）对称物体　具有对称面、对称轴和对称中心的形状规则的均质物体，其重心一定在对称面、对称轴和对称中心上.

如矩形、圆、球体……



（3）组合物体　常用分割法或负面积法确定重心位置。即将组合物体分成若干形状简单、重心位置易求出的物体。

例3-12（重心分割法求解）

已知：均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示．求：其重心坐标

解： 厚度方向重心坐标已确定，只求重心的x,y坐标即可.

用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与坐标分别为

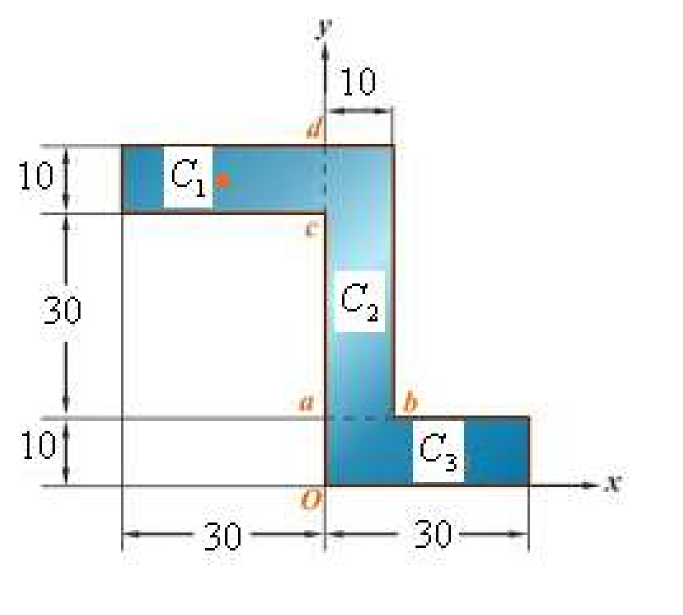
$$x_1=-15\text{mm}\quad y_1=45\text{mm}\quad A_1=300\text{mm}^2$$

$$x_2=5\text{mm}\quad y_2=30\text{mm}\quad A_2=400\text{mm}^2$$

$$x_3=15\text{mm}\quad y_3=5\text{mm}\quad A_3=300\text{mm}^2$$

则 $$x_C=\sum\frac{A_ix_i}{A}=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3}{A_1+A_2+A_3}=2\text{mm}$$

$$y_C=\sum\frac{A_iy_i}{A}=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=27\text{mm}$$

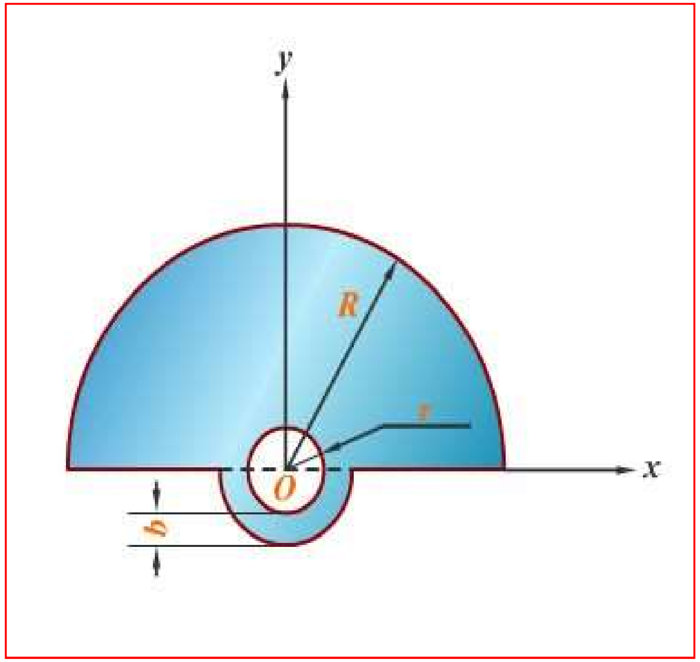


例3-13（重心负面积法求解）

已知：等厚均质偏心块的 $R=100\text{mm}, r=17\text{mm}, b=13\text{mm}$

求：其重心坐标.

解： 用负面积法，为三部分组成.



由对称性，有 $x_C=0$

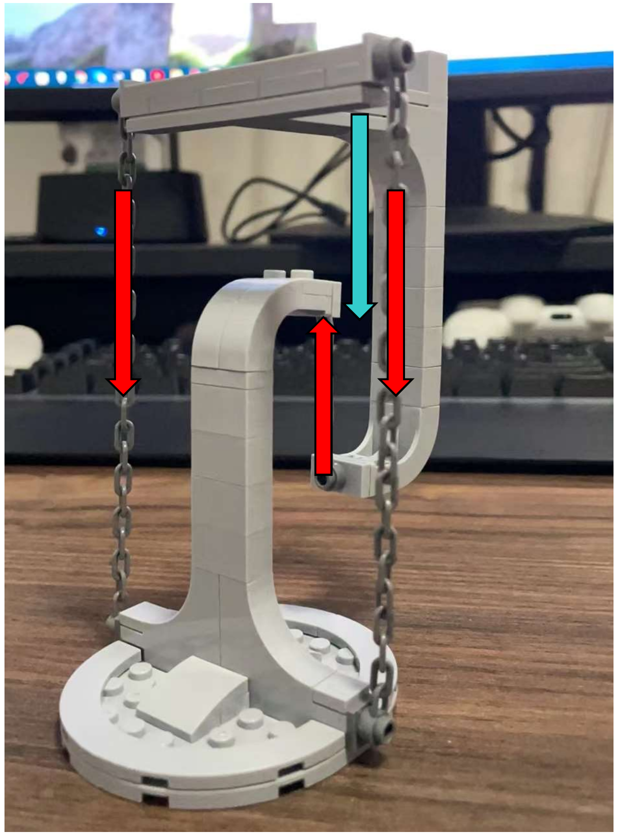
$$A_1=\frac{\pi}{2}R^2, A_2=\frac{\pi}{2}(r+b)^2, A_3=-\pi r^2$$

$$y_1=\frac{4R}{3\pi}, y_2=-\frac{4(r+b)}{3\pi}, y_3=0$$

由 $$y_C=\frac{\sum A_i y_i}{A}$$

得 $$y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=40.01\text{mm}$$

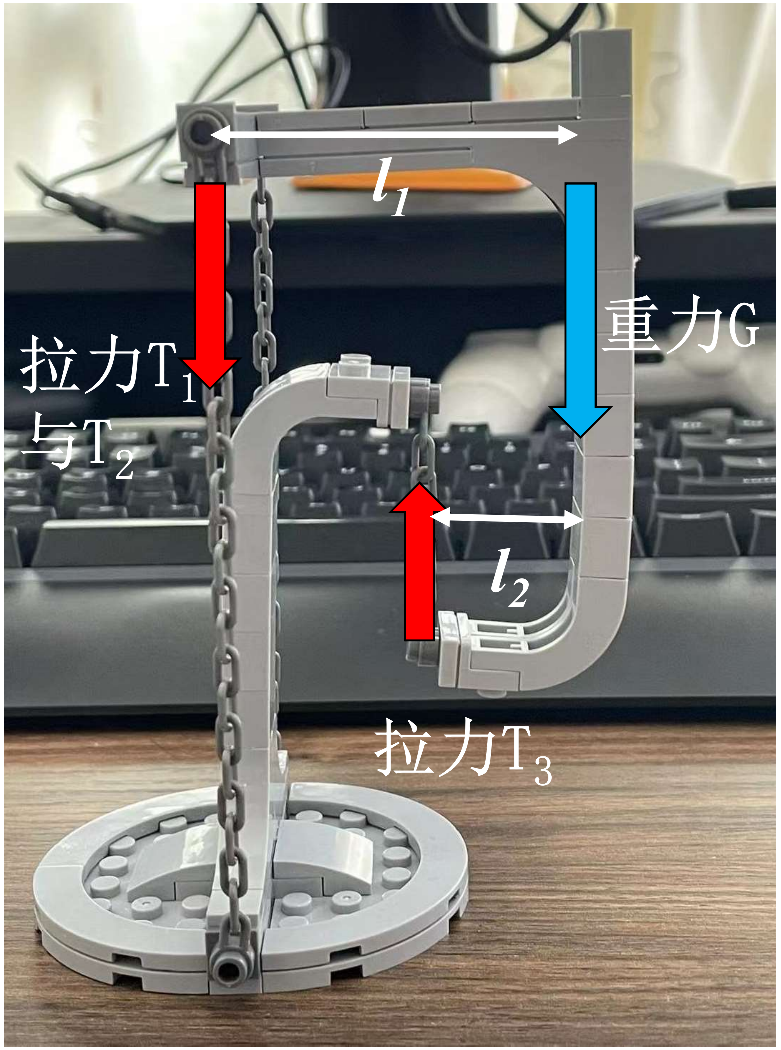
张拉整体结构 （Tensegrity）



绳索的拉力与杆件的重力组成一个空间平行力系

张拉整体结构 （Tensegrity）

如何安排重心位置是实现平衡的前提



$$T_1=T_2$$

$$2T_1+G=T_3$$

$$Gl_2=2T_1(l_1-l_2)$$

$$\Downarrow$$

$$2Gl_2/(l_1-l_2)+G=T_3>0$$

$$\Downarrow$$

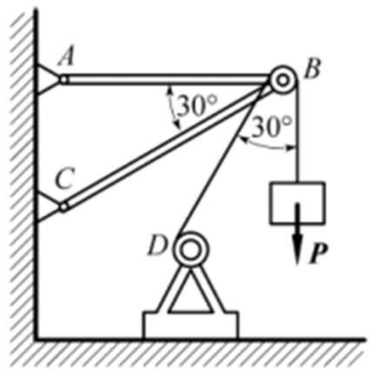
$$(l_1+l_2)/(l_1-l_2)>0$$

$$\Downarrow$$

$$l_1>l_2$$

第2章作业

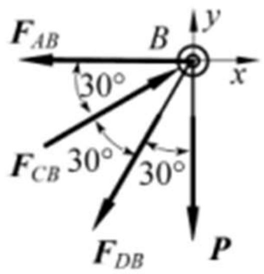
2-4 物体重 $P=20$ kN，用绳子挂在支架的滑轮 B 上，绳子的另一端接在绞车 D 上，如图 T2-4 所示。转动绞车，物体便能升起。设滑轮的大小，杆 AB 与 CB 自重及摩擦均略去不计，A，B 和 C 三处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时，求拉杆 AB 和支杆 CB 所受的力。



解 选择滑轮 B 为研究对象，受力分析如图 J2-4 所示。图中：①确定 $\boldsymbol{F}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{F}_{CB}$ 的方向分别利用了 AB 和 BC 二力杆的特性；②由滑轮性质可确定 $F_{DB}=P$。

列平衡方程组：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: -F_{AB} + F_{CB}\cos 30^\circ - F_{DB}\sin 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0: -P + F_{CB}\sin 30^\circ - F_{DB}\cos 30^\circ = 0 \end{cases}$$



解得

$$F_{CB} = (2+\sqrt{3})P = 74.641\ \text{kN};\quad F_{AB} = (1+\sqrt{3})P = 54.641\ \text{kN}$$

平衡的刚体系可以选取任意部分列平衡方程

第2章作业

2-5 图 T2-5 所示为一拔桩装置。在木桩的点 A 上系一绳，将绳的另一端固定在点 C，在绳的点 B 系另一绳 BE，将它的另一端固定在点 E。然后在绳的点 D 用力向下拉，使绳的 BD 段水平，AB 段竖直，DE 段与水平线、CB 段与竖直线间成等角 $\theta=0.1$ rad（当 θ 很小时，$\tan\theta\approx\theta$）。如向下的拉力 $F=800$ N，求绳 AB 作用于桩上的拉力。

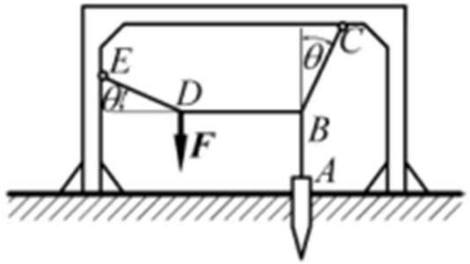
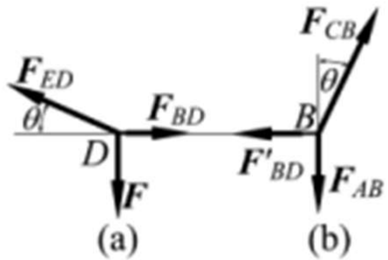


图 T2-5

解 取 D 作受力分析，如图 J2-5(a)所示。列平衡方程组有

$$\begin{cases}\sum F_x = 0:\ F_{BD} - F_{ED}\cos\theta = 0 \\ \sum F_y = 0:\ F_{ED}\sin\theta - F = 0\end{cases}$$

解得 $F_{BD}=F\cot\theta$。

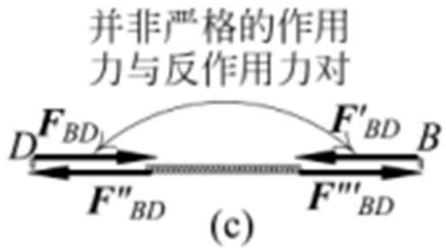


再取 B 点作受力分析，如图 J2-5(b)所示，图中 $F'_{BD}=F_{BD}$。对图 J2-5(b)列平衡方程组有

$$\begin{cases}\sum F_x = 0:\ F_{CB}\sin\theta - F'_{BD} = 0 \\ \sum F_y = 0:\ F_{CB}\cos\theta - F_{AB} = 0\end{cases}$$

解得

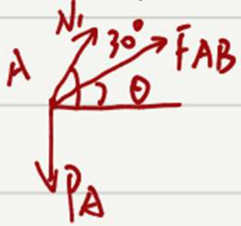
$$F_{AB} = F'_{BD}\cot\theta = F\cot^2\theta$$



DE、BD与BC段绳索可以理解为分离，各自张力不同

2-8 在杆 AB 的两端用光滑铰链与两轮中心 A 和 B 相连，并将它们置于两光滑斜面上。①两轮重量均为 P，杆重不计，求平衡时角 θ 的值。②如轮重量 $P_A=300$ N，欲使平衡时杆 AB 处于水平位置（$\theta=0°$），轮 B 重量 P_B 应为多少？

2.8 对球A进行受力分析：



平衡方程：$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{AB}\cdot\cos\theta+N_1\cos30^\circ=0\\ F_{AB}\cdot\sin\theta+N_1\sin30^\circ=P_A\end{cases}$

对球B进行受力分析：

平衡方程：$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{AB}\cdot\cos\theta+N_2\cos60^\circ=0\\ F_{AB}\cdot\sin\theta+P_B=N_2\sin60^\circ\end{cases}$

1) 当 $P_A=P_B=P$ 时，此时解得 $\theta=30^\circ$

2) 当 $\theta=0$ 时，此时解得 $P_B=100N$

第2章作业

2-8 在杆 AB 的两端用光滑铰链与两轮中心 A 和 B 相连，并将它们置于两光滑斜面上。①两轮重量均为 P，杆重不计，求平衡时角 θ 的值。②如轮重量 $P_A=300$ N，欲使平衡时杆 AB 处于水平位置（$\theta=0°$），轮 B 重量 P_B 应为多少？

解 （1）把 $\boldsymbol{P}_A$ 和 $\boldsymbol{P}_B$ 合起来，即图 J2-8(a) 中的 $\boldsymbol{P}_{AB}$，其作用点位于 AB 的中点 C。如此操作后，AB 受到三个集中力：$\boldsymbol{P}_{AB}$，$\boldsymbol{P}_{NA}$，$\boldsymbol{P}_{NB}$。根据三力平衡汇交定理，上述三力交于一点，即图中 H 点。由几何信息知道 $AIBH$ 为矩形，对角线 HI 铅垂，从而有 $\angle AIC=60°$。这样 $\triangle AIC$ 为等边三角形，而 AG 垂直于底边 CI，故有 $\theta=30°$。

合并重力，三力平衡汇交

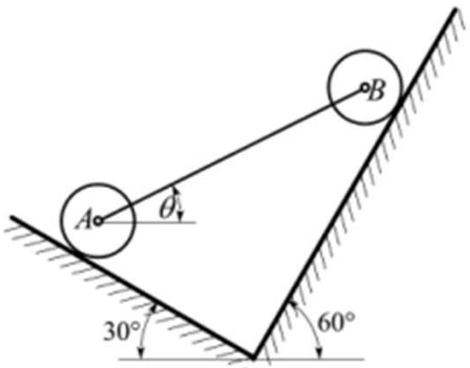


图 T2-8

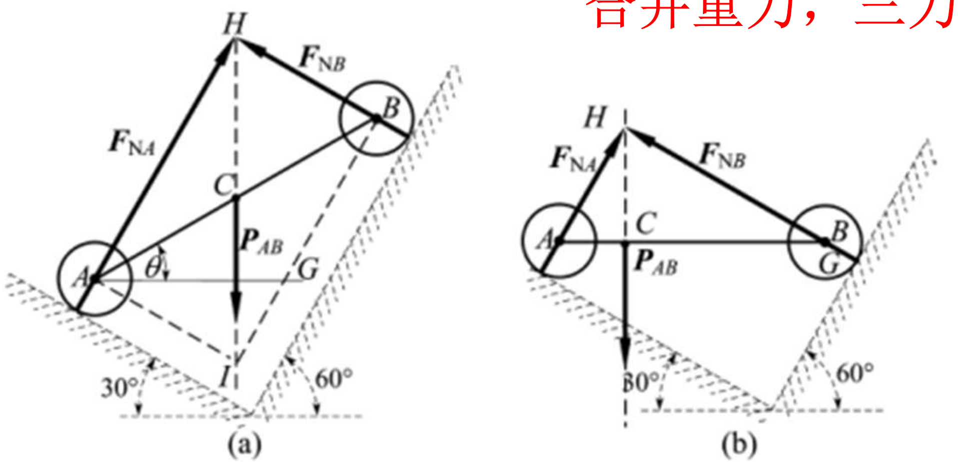


图 J2-8

（2）当 AB 处于水平时，$\boldsymbol{P}_A$ 和 $\boldsymbol{P}_B$ 合起来的作用点 C 满足 $AC/CB=1:3$，而对 C 的矩平衡有 $P_A\times AC-P_B\times CB=0$，这样得到 $P_B=P_A\times AC/CB=100$ N。

2-11 在图 T2-11 所示结构中，各构件的自重略去不计。在构件 AB 上作用一矩为 M 的力偶。求支座 A 和 C 的约束力。

解 BC 为二力杆，因此 $\boldsymbol{F}_{CB}$ 沿 CB 方向。取 AB 分析，如图 J2-11 所示。$\boldsymbol{F}_{RA}$ 与 $\boldsymbol{F}_{CB}$ 必须构成力偶，以便与 M 平衡，据此定出 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 方向与 $\boldsymbol{F}_{CB}$ 平行。由力偶系平衡可得

$$F_{RA}=F_{CB}=M/(2a\sqrt{2})=\sqrt{2}M/(4a)$$

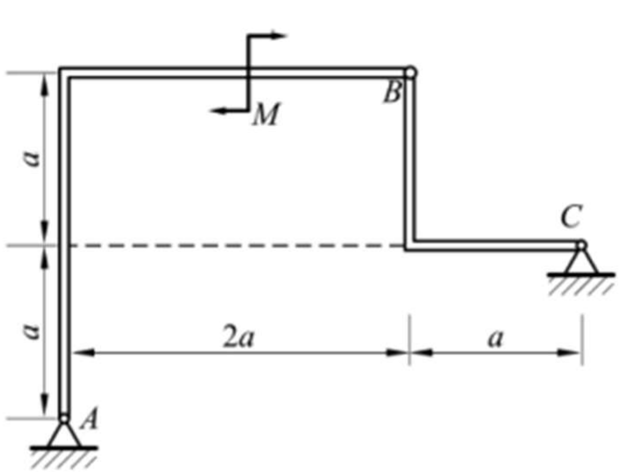


图 T2-11

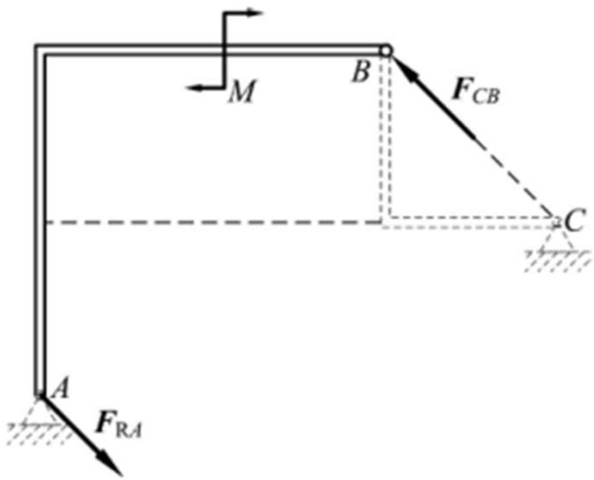


图 J2-11

力偶只能由力偶平衡

二力杆力方向为受力点连线

2-14 直角弯杆 $ABCD$ 与直杆 DE 和 EC 铰接如图。作用在杆 DE 上力偶矩 $M_2=40\ \text{kN}\cdot\text{m}$。不计各构件自重，不计摩擦。求支座 A 和 B 的约束力，以及杆 EC 所受到的力。

解 EC 为二力杆，所以 ED 为力偶与力偶平衡情形，其受力分析见图 J2-14(a)。A 处的约束力方向垂直于支撑面。B 铰的约束力的水平分量和垂直分量可以合成为一个集中力，因此从整体来看，也是力偶与力偶平行情形，受力分析见图 J2-14(b)。

对图 J2-14(a)有

$$\sum M=0:\qquad M-F_{EC}\times DE\times\sin\theta_E=0$$

其中 $\theta_E=45°$。解得 $F_{EC}=M/(DE\sin\theta_E)=10\sqrt{2}\ \text{kN}$。

力偶只能由力偶平衡

二力杆力方向为受力点连线

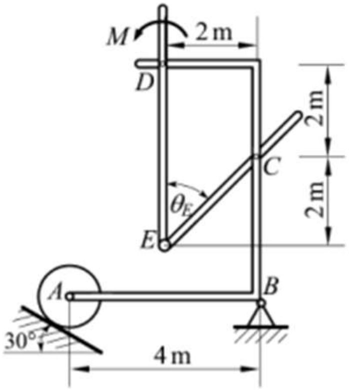


图 T2-14

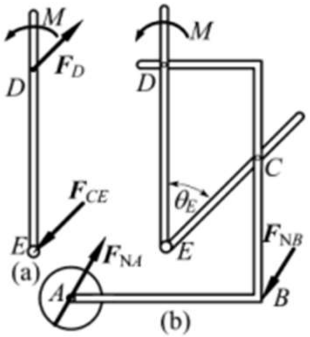


图 J2-14

对图 J2-14(b)有

$$\begin{cases}F_{RB}=F_{NA}\\ M-F_{NA}\times AB\times\cos\theta_E=0\end{cases}$$

解得

$$F_{RB}=F_{NA}=M/(AB\times\cos30°)=20\sqrt{3}/3\text{kN}$$

2-15 在图 T2-15 所示机构中，曲柄 OA 上作用一力偶，其力偶矩为 M；另在滑块 D 上作用水平力 F。机构尺寸如图，各杆重量不计。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。

解 （1）取 AO 杆为研究对象。受力分析如图 J2-15(a)所示。图中：$\boldsymbol{F}_{BA}$ 方向由二力杆 BA 性质确定；$\boldsymbol{F}_O$ 方向按力偶只能与力偶平衡确定。对该图列矩平衡方程可确定 $F_{BA}=M/(a\cos\theta)$。

（2）取铰链 B 为研究对象。受力分析如图 J2-15(b)所示。图中三个力的方向均根据二力杆性质确定，并且有 $F_{AB}=F_{BA}$。对该图沿 η（$\boldsymbol{F}_{CB}$ 的垂直方向）投影有

$$\sum F_\eta=0: \qquad F_{AB}\cos 2\theta - F_{DB}\sin 2\theta = 0$$

解得

$$F_{DB}=F_{AB}\cot 2\theta = F_{BA}\cot 2\theta = (M\cot 2\theta)/(a\cos\theta)。$$

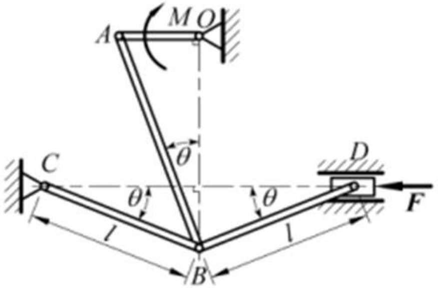


图 T2-15

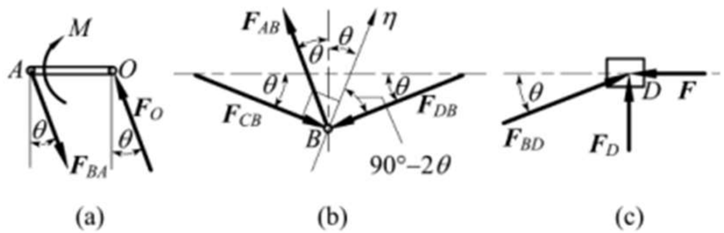


图 J2-15

（3）取滑块 D 为研究对象。受力分析如图 J2-15(c)所示。图中 $\boldsymbol{F}_D$ 方向由滑道性质确定；$\boldsymbol{F}_{BD}$ 方向由二力杆性质确定，并且有 $F_{BD}=F_{DB}$。受力沿水平投影的平衡方程为

$$\sum F_x=0: \qquad F - F_{BD}\cos\theta = 0$$

解得

$$F = F_{BD}\cos\theta = (M\cot 2\theta)/a$$

第2章作业

2-21　如图 T2-21 所示，飞机机翼上安装一台发动机，作用在机翼 OA 上的气动力按梯形分布：$q_1=60\ \mathrm{kN/m}$，$q_2=40\ \mathrm{kN/m}$。机翼重 $P_1=45\ \mathrm{kN}$，发动机重 $P_2=20\ \mathrm{kN}$，发动机螺旋桨的作用力偶矩 $M=18\ \mathrm{kN\cdot m}$。求机翼处于平衡状态时，机翼根部固定端 O 的受力。

解　机翼的受力分析如图 J2-21 所示。图中：梯形载荷分解为三角形分布载荷和矩形分布载荷的叠加；三角形分布部分的 $\boldsymbol{F}_3$ 大小为 $(q_1-q_2)\times 9/2=90(\mathrm{kN})$，作用线距翼根 6 m；矩形分布的部分 $\boldsymbol{F}_4$ 的大小 $q_2\times 9=360(\mathrm{kN})$，作用线距翼根 4.5 m。对受力图 J2-21 列平衡方程组

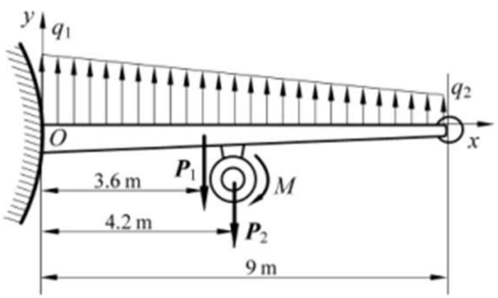


图　T2-21

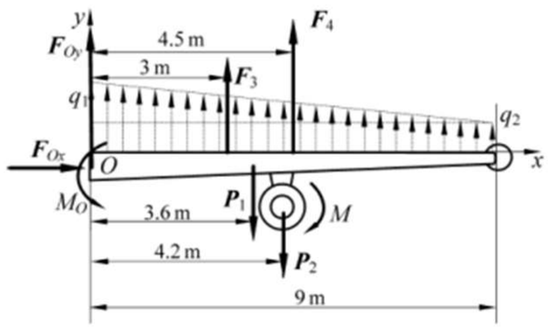


图　J2-21

三角形分布，作用点离最大值**1/3**

均匀分布，作用点位于**1/2**

$$\begin{cases}\sum F_x=0:\ F_{Ax}=0\\ \sum F_y=0:\ F_{Oy}+F_3+F_4-P_1-P_2=0\\ \sum M_O=0:\ M_O+F_3\times 3\ \mathrm{m}+F_4\times 4.5\ \mathrm{m}-P_1\times 3.6\ \mathrm{m}-P_2\times 4.2\ \mathrm{m}-M=0\end{cases}$$

解得

$$F_{Ox}=0;\quad F_{Oy}=-385\ \mathrm{kN};\quad M_O=-1626\ \mathrm{kN\cdot m}$$

2-37 图 T2-37 所示两等长杆 AB 与 BC 在点 B 用铰链连接，又在杆的 D、E 两点连一弹簧。弹簧的刚度系数为 k，当距离 AC 等于 a 时，弹簧内拉力为零。点 C 作用一水平力 $\boldsymbol{F}$。设 $AB=l$，$BD=b$。不计杆重，求系统平衡时距离 AC 的值。

解 由几何关系可确定弹簧的原长为

$$l_0 = a \times b/l$$

(1) 先取整体为研究对象，受力分析如图 J2-37(a)所示。对点 A 写矩平衡方程

$$\sum M_A = 0: \qquad F \times 0 + F_{NC} \times AC = 0$$

得到 $F_{NC}=0$。

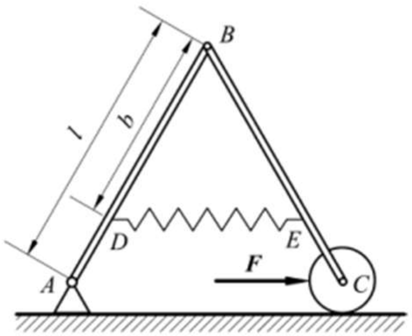


图 T2-37

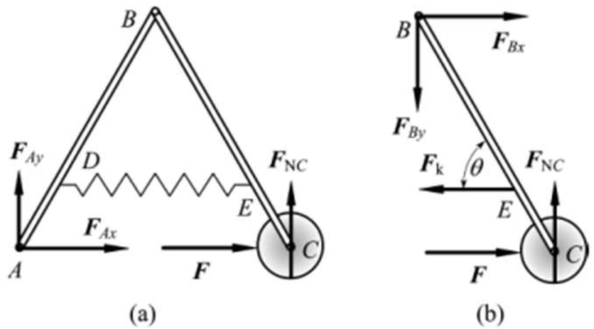


图 J2-37

(2) 取 BC 杆为研究对象，受力分析如图 J2-37(b)所示，其中弹簧力 $F_k = k(AC \times b/l - l_0)$。对 B 点矩平衡方程为

$$\sum M_B = 0: \qquad -F_k \sin\theta \times b + F\sin\theta \times l + F_{NC} \times (l\cos\theta) = 0$$

解得

$$AC = a + (l/b)^2 F/k$$

第2章作业

2-39 不计图 T2-39 所示结构中各构件自重。A 处为固定端约束，C 处为光滑接触，D 处为铰链连接。$F_1=F_2=400$ N，$M=300$ N·m；$AB=BC=400$ mm，$CD=DE=300$ mm，$\theta=45°$。求固定端 A 处和铰链 D 处的约束力。

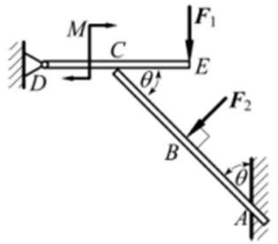


图 T2-39

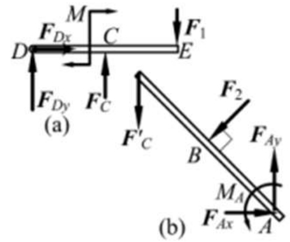


图 J2-39

判断C点的约束力！

解 取 DE 作受力分析，如图 J2-39(a)所示。由平衡方程

$$\begin{cases}\sum M_D=0:\ -F_1\times DE-M+F_C\times DE/2=0\\ \sum F_x=0:\ F_{Dx}=0\\ \sum F_y=0:\ F_{Dy}-F_1+F'_C=0\end{cases}$$

解得

$$F_C=2F_1+(2M/DE)=1800\ \text{N}$$

$$F_{Dx}=0;\quad F_{Ay}=F_1-F_C=-1400\ \text{N}$$

取 CBA 作受力分析，如图 J2-39(b)所示。由平衡方程

$$\begin{cases}\sum M_A=0:\ M_A+F_2\times AB+F'_C\times AC\sin\theta=0\\ \sum F_x=0:\ F_{Ax}-F_2\sin\theta=0\\ \sum F_y=0:\ F_{Ay}-F_2\cos\theta-F'_C=0\end{cases}$$

解得

$$M_A=-F_2\times AB-F'_C\times AC\sin\theta=-1178\ \text{kN·m}$$

$$F_{Ax}=F_2\sin\theta=200\sqrt{2}\ \text{N}=282.8\ \text{N}$$

$$F_{Ay}=F_2\cos\theta+F'_C=2083\ \text{N}$$

第2章作业

2-43 图 T2-43 所示结构位于铅垂面内，由杆 AB、CD 及斜 T 形杆 BCE 组成，不计各杆的自重。已知载荷 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和尺寸 a，且 $M=F_1a$，$\boldsymbol{F}_2$ 作用于销钉 B 上。求：(1)固定端 A 处的约束力；(2)销钉 B 对杆 AB 及 T 形杆的作用力。

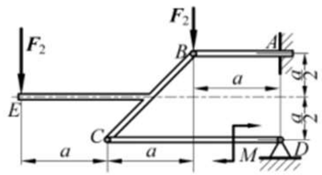


图 T2-43

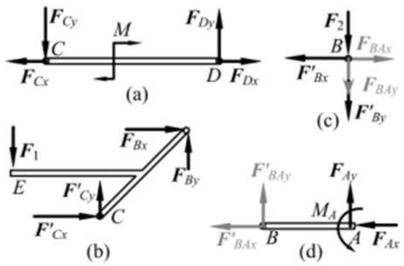


图 J2-43

铰链可以单独拿出来讨论

解 (1) 先取 CD 为研究对象，因为它的受力相对简单。受力分析如图 J2-43(a)所示。对 D 点矩平衡方程为

$$\sum M_D=0:\quad F_{Cy}\times 2a-M=0$$

解得 $F_{Cy}=M/(2a)=F_1/2$。

(2) 取 T 形杆 BCE 为研究对象，受力分析如图 J2-43(b)所示，图中 $F'_{Cx}=F_{Cx}$ 和 $F'_{Cy}=F_{Cy}$。列平衡方程

$$\begin{cases}\sum F_y=0:\ F_{By}+F'_{Cy}-F_1=0\\ \sum M_C=0:\ F_{By}\times a+F_1\times a-F_{Bx}\times a=0\end{cases}$$

解得

$$F_{By}=F_1/2;\quad F_{Bx}=3F_1/2$$

(3) 取销钉 B 为研究对象，受力分析如图 J2-43(c)所示，图中 $F'_{Bx}=F_{Bx}$ 和 $F'_{By}=F_{By}$。列平衡方程

$$\begin{cases}\sum F_y=0:\ -F'_{By}-F_{BAy}-F_2=0\\ \sum F_x=0:\ -F'_{Bx}+F_{BAx}=0\end{cases}$$

解得

$$F_{BAy}=-F_2-F'_{By}=-F_1/2-F_2;\quad F_{BAx}=F'_{Bx}=3F_1/2$$

(4) 取悬臂梁 AB 为研究对象，受力分析如图 J2-43(d)所示，图中 $F'_{BAx}=F_{ABx}$ 和 $F'_{ABy}=F_{BAy}$。列平衡方程

$$\begin{cases}\sum F_x=0:\ -F'_{BAx}-F_{Ax}=0\\ \sum F_y=0:\ F'_{BAy}+F_{Ay}=0\\ \sum M_A=0:\ M_A-F'_{BAy}\times a=0\end{cases}$$

解得

$$F_{Ax}=-F'_{BAx}=-3F_1/2;\quad F_{Ay}=-F'_{BAy}=F_1/2+F_2;$$
$$M_A=F'_{BAy}a=-a(F_1/2+F_2)$$

2-57 求图 T2-57 所示桁架杆 1,2,3 的内力。

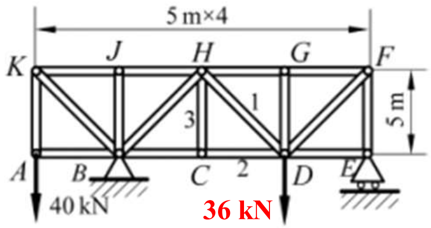


图 T2-57

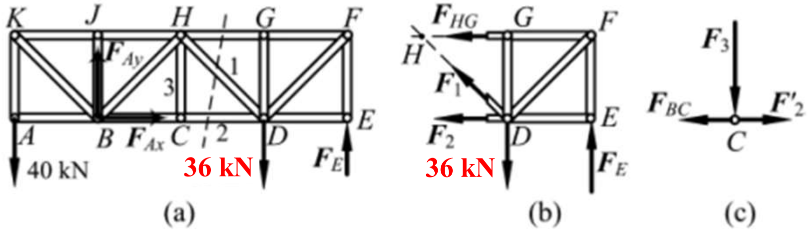


图 J2-57

解 （1）整体受力分析如图 T2-57(a)所示。对 B 的矩平衡方程为

$$\sum M_B = 0: \quad F_E \times 15 - 36\ \text{kN} \times 10 + 40\ \text{kN} \times 5 = 0$$

解得

$$F_E = 32/3\ \text{kN} = 10.67\ \text{kN}$$

（2）作截面切断 HG，1 和 2 杆，取右侧部分，受力分析如图 J2-57(b)所示。列平衡方程

$$\sum M_H = 0: F_2 \times 5 + F_E \times 10 - 36\ \text{kN} \times 5 = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_1 \sin 45^\circ + F_E - 60\ \text{kN} = 0$$

解得

$$F_2 = -44/3\ \text{kN} = -14.67\ \text{kN} \quad , \quad F_1 = 76\sqrt{2}/3\ \text{kN} = 35.83\ \text{kN}$$

（3）取节点 C，受力分析如图 J2-57(c)所示。列平衡方程

$$\sum F_y = 0: \quad F_3 = 0$$

可得 $F_3 = 0$。

2-60 平面桁架的支座和载荷如图 T2-60 所示，求杆 1、2 和 3 的内力。

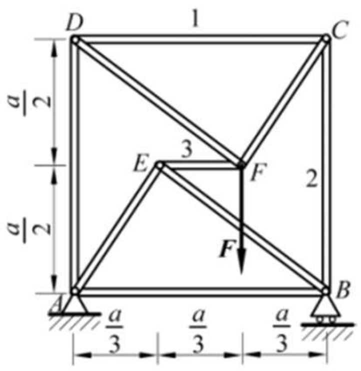


图 T2-60

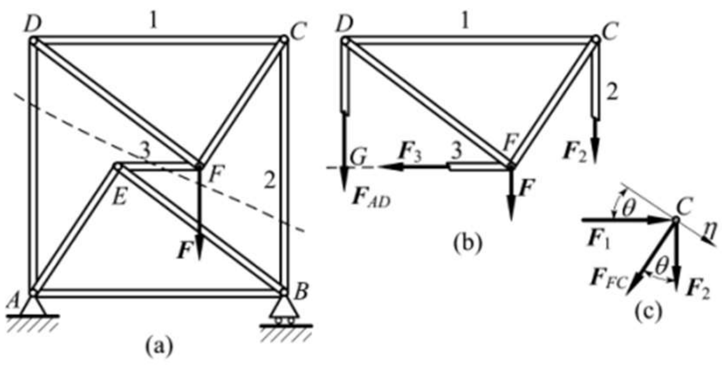


图 J2-60

解 按图 J2-60(a)虚线所示截面，取截开的上半部分进行分析，受力如图 J2-60(b)所示。列平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: F_3 = 0 \\ \sum M_D = 0: F_2 \times a + F \times 2a/3 = 0 \end{cases}$$

技巧1：取通过三个杆的截面

解得

$$F_3 = 0; \quad F_2 = -2F/3$$

再取节点 C，受力分析如图 J2-60(c)所示。沿 η 方向（$\boldsymbol{F}_{FC}$ 的垂直方向）投影有

$$F_2 \sin\theta + F_1 \cos\theta = 0$$

可解出

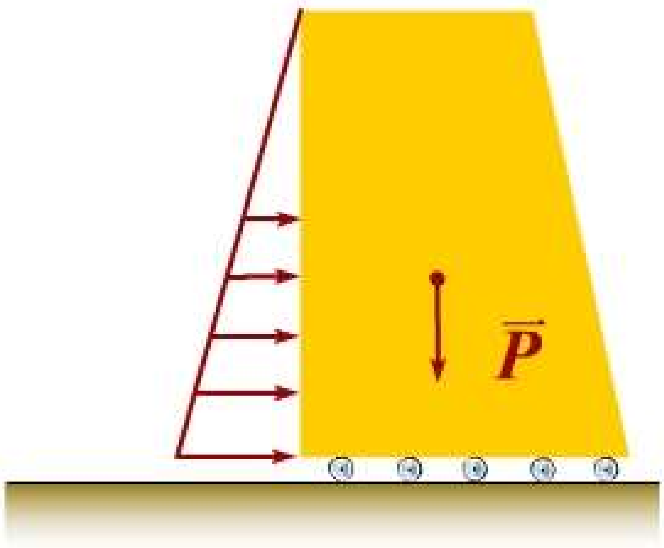
技巧2：投影到未知力的垂直方向

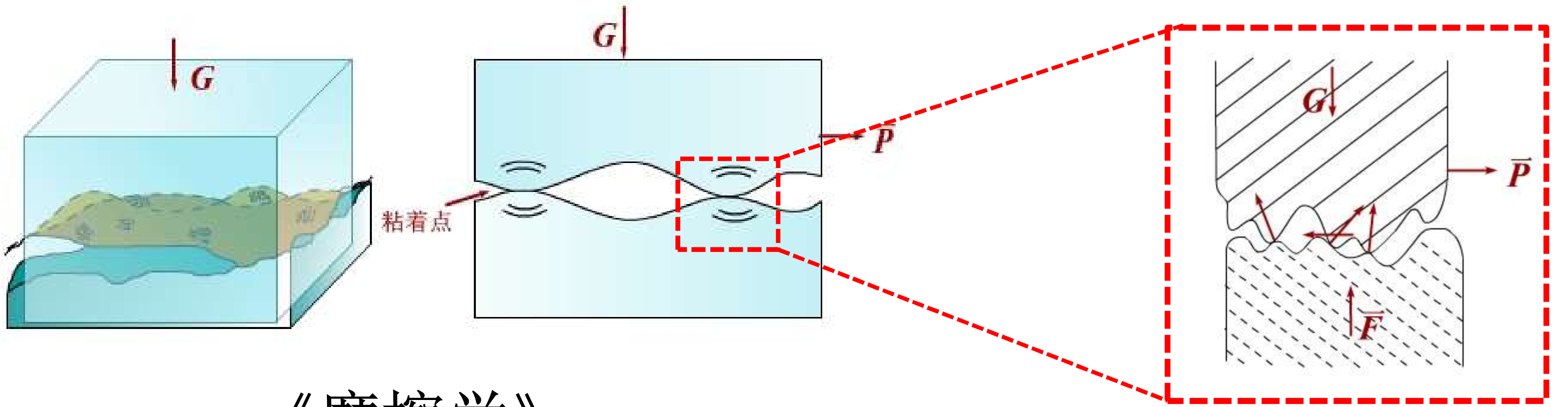
$$F_1 = F_2 \tan\theta = 2/3F \times 2/3 = 4F/9$$

第四章　摩　擦

摩擦被定义为“在两个粗糙表面之间发生的抵抗相对运动的现象。”

- 摩擦
  - 滑动摩擦
    - 静滑动摩擦
    - 动滑动摩擦
  - 滚动摩擦
    - 静滚动摩擦
    - 动滚动摩擦





《摩擦学》

两本电话本交叠，产生的摩擦力可以有多大？

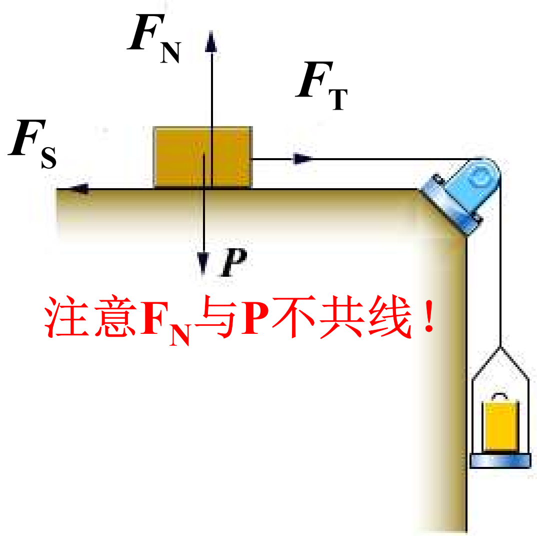
https://www.bilibili.com/video/BV1aB4y1J72P/?share_source=copy_web&vd_source=4340fc1f5ffdd1da9b42868674483118

本章主要内容：

1. 掌握静、动摩擦系数，了解摩擦角、自锁和滚动摩阻的概念。
2. 能熟练应用解析法求解考虑摩擦时物体的平衡问题。（摩擦力与法向约束力的作用点）

1. 滑动摩擦力

接触面对物体作用的切向约束力



2. 平衡状态

A）静止； B）临界（将滑未滑）； C）匀速滑动

$$\sum F_x = F_T - F_S = 0$$

$$F_S = F_T$$

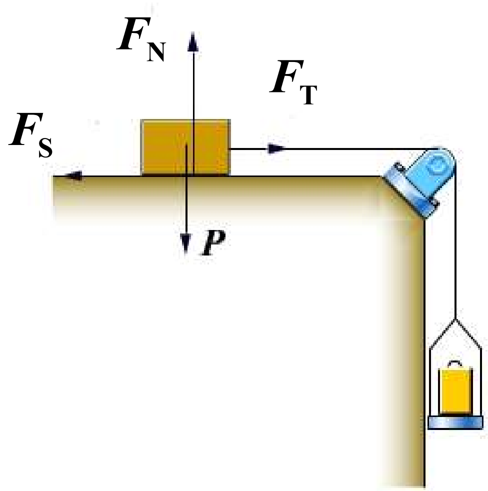
3. 静滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，
　　与相对滑动趋势反向；

大小：$0 \le F_s \le F_{max}$ （范围）

$$F_{max} = f_s F_N$$ （库仑摩擦定律）

4. 临界滑动摩擦力的特点



方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势反向；

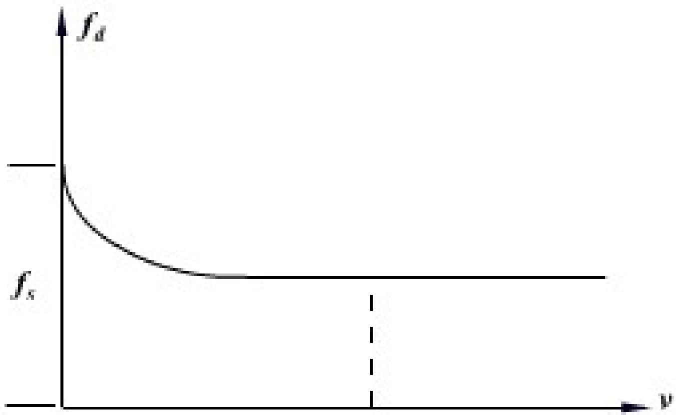
大小：$F_{max} = f_s F_N$

5. 动滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势反向；

大小：$F_d = f_d F_N$

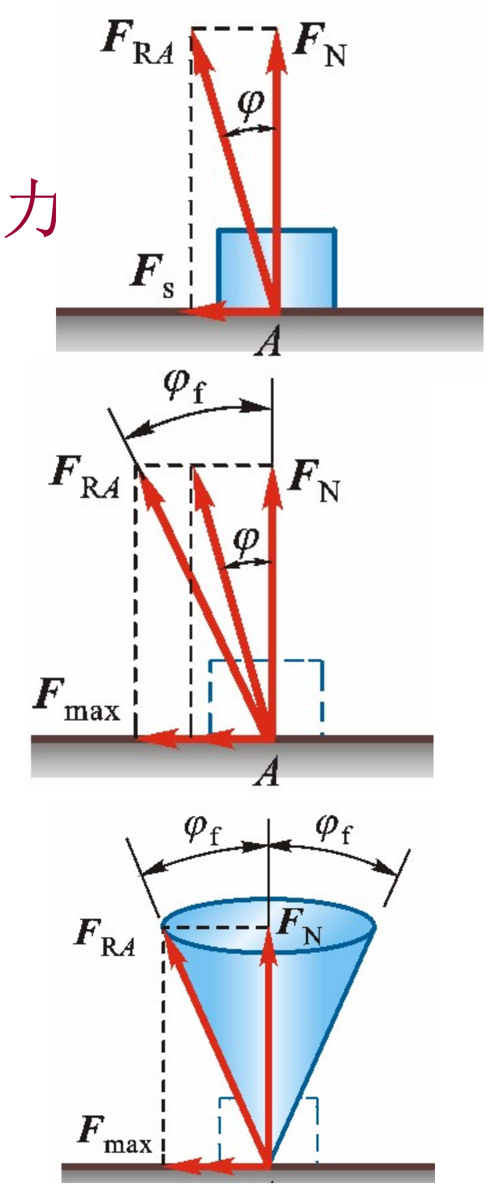
$f_d < f_s$（对多数材料，通常情况下，f_d随着速度增加而下降）



§4-2 摩擦角和自锁现象

一. 摩擦角

$\vec{F}_{RA}$ --全约束力：法向约束力+切向摩擦力



物体处于临界平衡状态时，全约束力和法线间的夹角--摩擦角

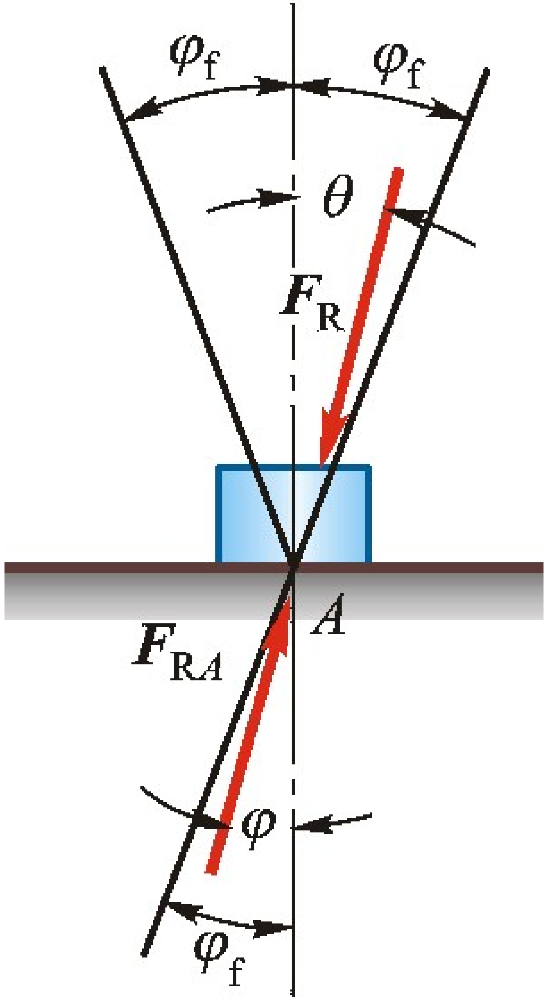
$$\tan\varphi_f = \frac{F_{max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

全约束力和法线间的夹角的正切等于静滑动摩擦系数.

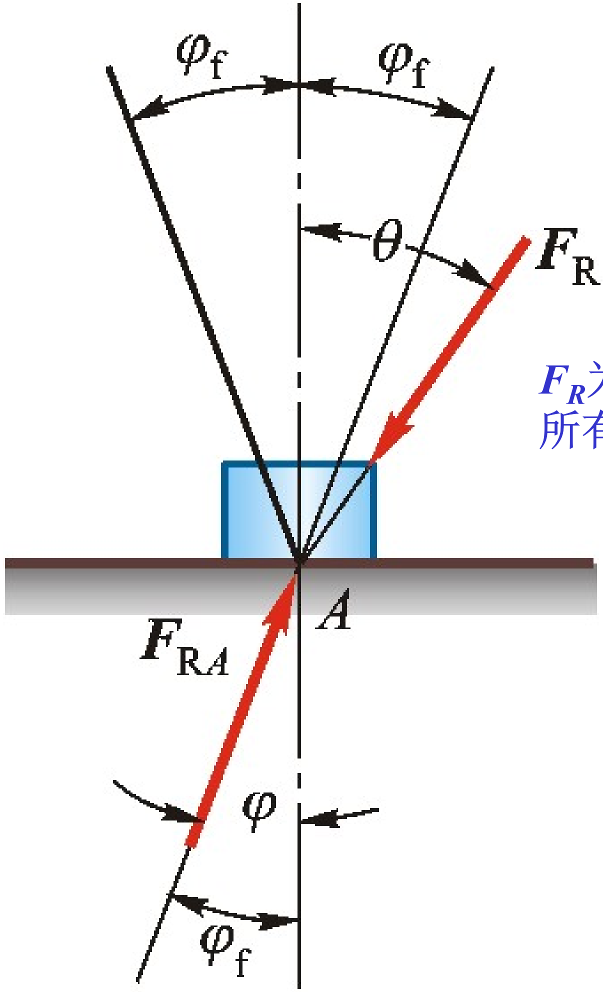
摩擦锥 $0 \le \varphi \le \varphi_f$

（全约束力只能在摩擦锥内部）

二. 自锁现象

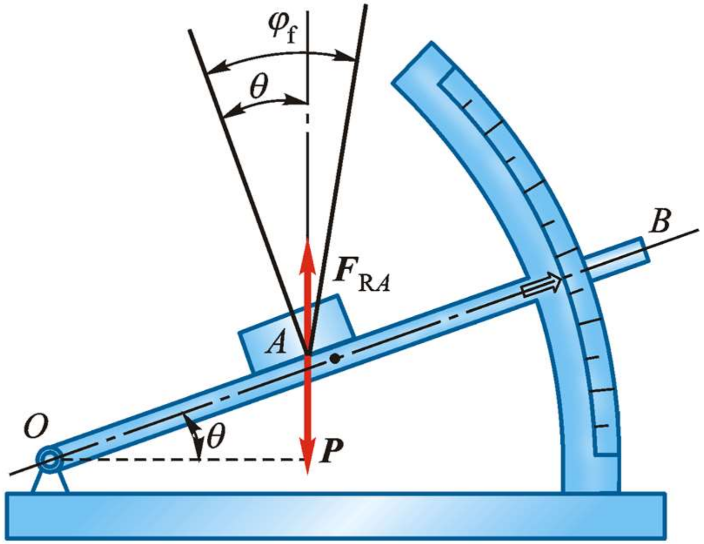


二力平衡，自锁

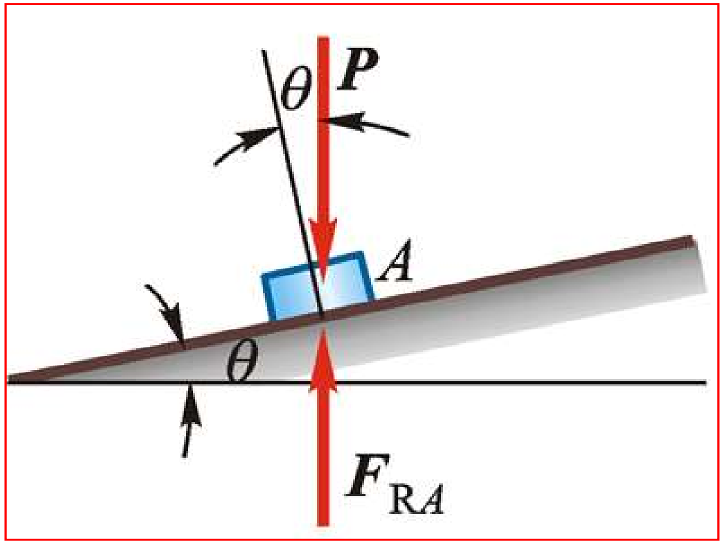


全约束力最大角度为φ_f，移动

三. 测定摩擦系数的一种简易方法



$$\tan\theta = \tan\varphi_f = f_s$$

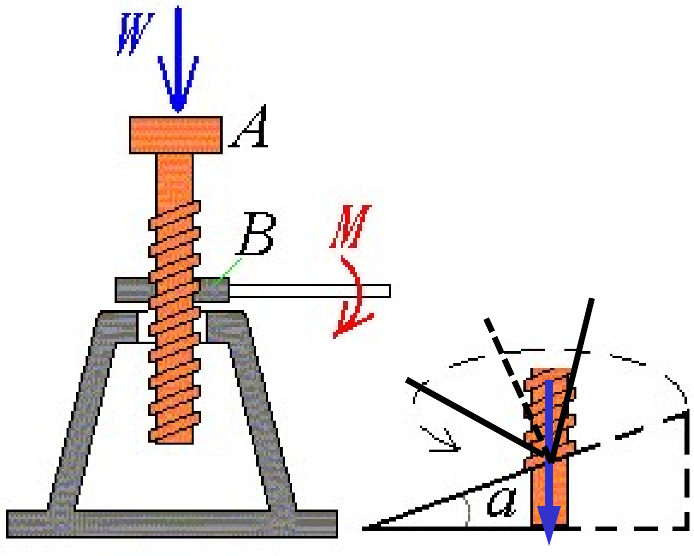


斜面自锁条件 $\theta \le \varphi_f$

§4-2 摩擦角和自锁现象

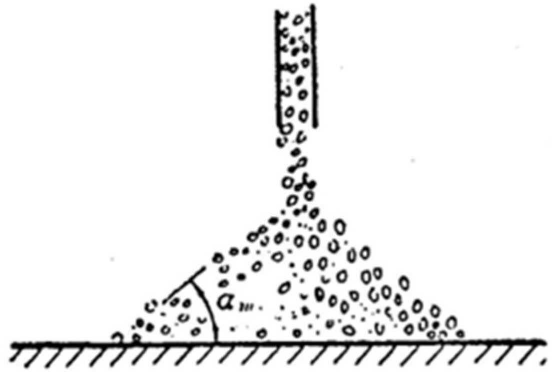
千斤顶

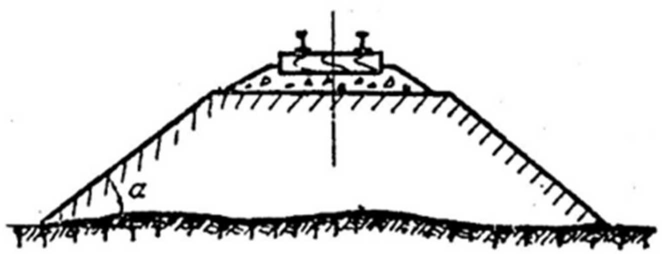
粮食、沙子等最大堆放角度



自锁条件

$$\alpha \le \varphi_f$$





§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

仍为平衡问题，平衡方程照用，求解步骤与前面基本相同.

几个新特点

1 画受力图时，必须考虑摩擦力以及法向约束力的作用点（法向约束力不一定与重力重合）；

2 严格区分物体处于临界、非临界状态；

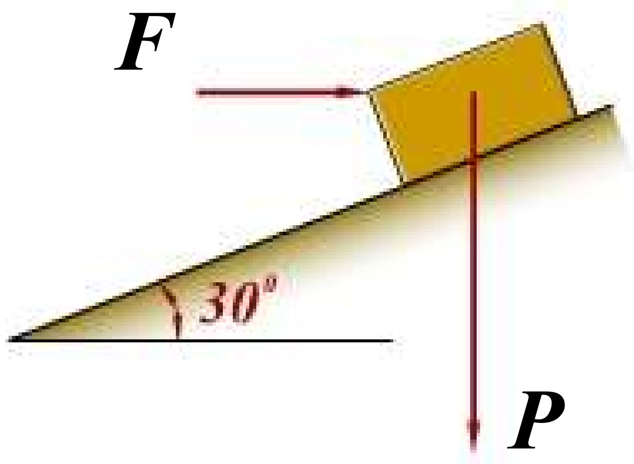
3 因 $0 \le F_s \le F_{\max}$，问题的解有时在一个范围内（可以先假设平衡，进行求解）.

4 摩擦面全约束反力$\boldsymbol{F_R}$的作用线一定位于摩擦锥内；

例4-1（平衡判断）

已知：$P = 1500\text{N}$, $f_s = 0.2$, $f_d = 0.18$, $F = 400\mathbf{N}$。

求：物块是否静止，摩擦力的大小和方向.



解此类问题的思路是：先假设物体静止和摩擦力的方向，应用平衡方程求解，将求得的摩擦力与最大静摩擦力比较，确定物体是否静止

解： 设物块平衡，假设摩擦力向下，画受力图

$$\sum F_x = 0 \qquad F\cos 30° - P\sin 30° - F_s = 0$$

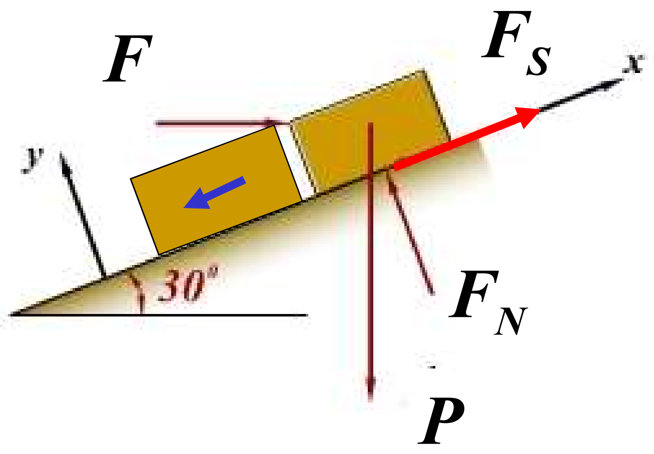
$$\sum F_y = 0 \qquad -F\sin 30° - P\cos 30° + F_N = 0$$

$$F_s = -403.6\text{N}(\text{向上}) \qquad F_N = 1499\ \mathbf{N}$$

而 $F_{max} = f_s F_N = 299.8\text{N}$

$|F_s| > F_{max}$ ，物块不可能在斜面上静止，而是向下滑动

物块沿斜面向下运动（非平衡状态）。摩擦力为动滑动摩擦力，动摩擦力方向沿斜面向上。



$$F_d = f_d F_N = 269.8\text{N}，\text{向上}.$$

作业

教材习题： 3-25,4-3, 4-15
（注：4-15中失去平衡有四种情况：上滑、下滑、前翻、后翻）