§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

静滑动摩擦力的特点

大小：$0 \le F_s \le F_{max}$ （范围）

$F_{max} = f_s F_N$ （库仑摩擦定律）

方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势/方向反向；

动滑动摩擦力的特点

大小：$F_d = f_d F_N$

带摩擦力的平衡问题几个新特点

1 画受力图时，必须考虑摩擦力以及法向约束力的作用点（法向约束力不一定与重力重合）；

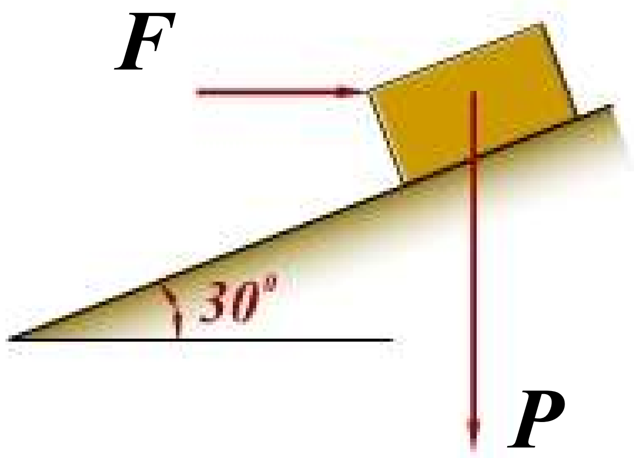
2 严格区分物体处于临界、非临界状态；

3 因 $0 \le F_s \le F_{max}$，问题的解有时在一个范围内（可以先假设平衡，进行求解）.

例4-1（平衡判断）

已知：$P = 1500\text{N}$，$f_s = 0.2$，$f_d = 0.18$，$F = 400\text{N}$。

求：物块是否静止，摩擦力的大小和方向.

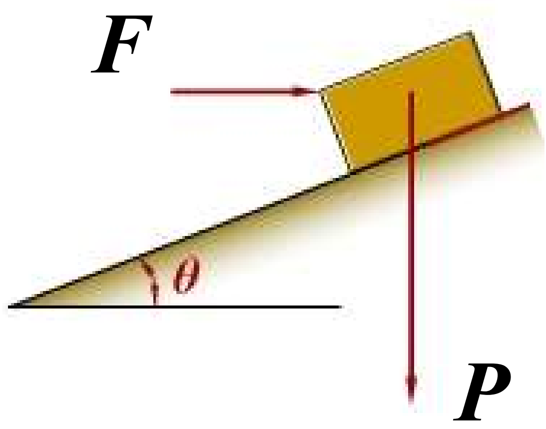


解此类问题的思路是：先假设物体静止和摩擦力的方向，应用平衡方程求解，将求得的摩擦力（大小与方向）与最大静摩擦力比较，确定物体是否静止

例4-2（临界滑动状态）

已知：P,θ,f_s .

求：使物块静止，水平推力$\boldsymbol{F}$ 的大小.



分析使物块静止的临界条件

（最大静摩擦力，两个趋势方向）

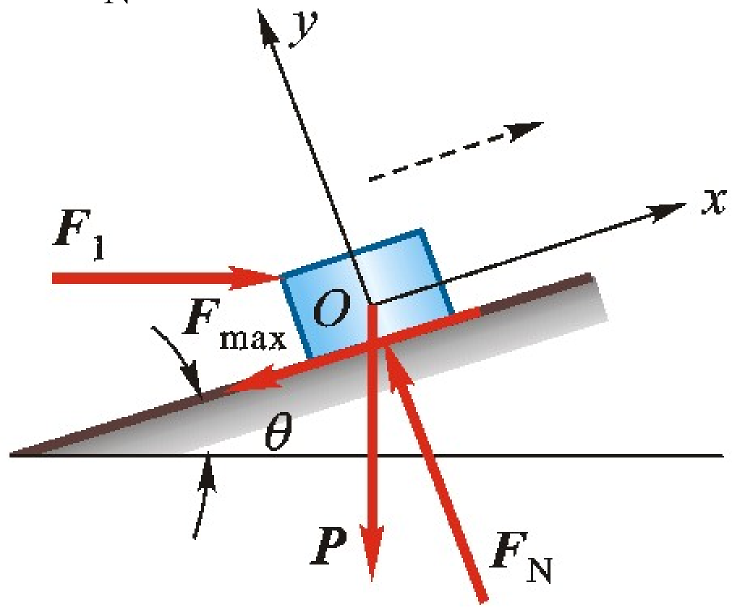
解： 使物块有上滑趋势时，摩擦力向下，推力为 F_1

画物块受力图

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1\cos\theta - P\sin\theta - F_{\max} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_1\sin\theta - P\cos\theta + F_N = 0$$

$$F_{\max} = f_s F_N$$



$$\Rightarrow F_1 = \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}P$$

物块静止时候，推力满足

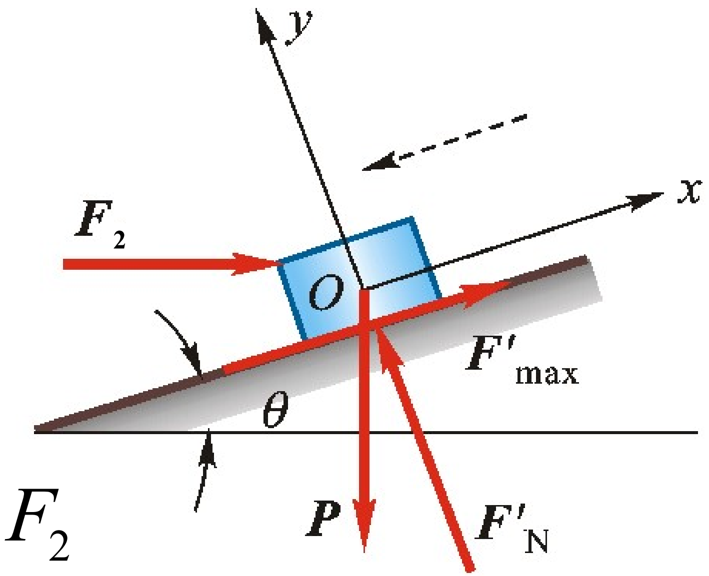
$$F \le F_1$$

设物块有下滑趋势时，摩擦力向上，推力为 F_2

画物块受力图

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_2\cos\theta - P\sin\theta + F'_{\max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_2\sin\theta - P\cos\theta + F'_N$$



$$F'_{\max} = f_s F'_N$$

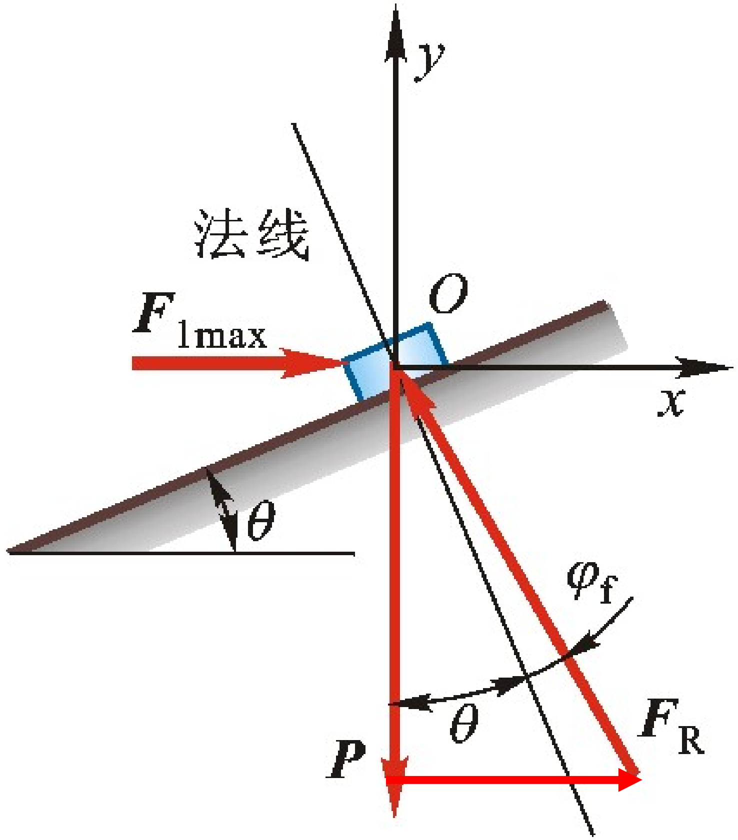
$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}P$$

物块静止时候，推力满足 $F \geq F_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}P \leq F \leq \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}P$$

用几何法求解

物块有向上滑动趋势时，最大约束反力在摩擦角内



物块平衡——

力三角形封闭

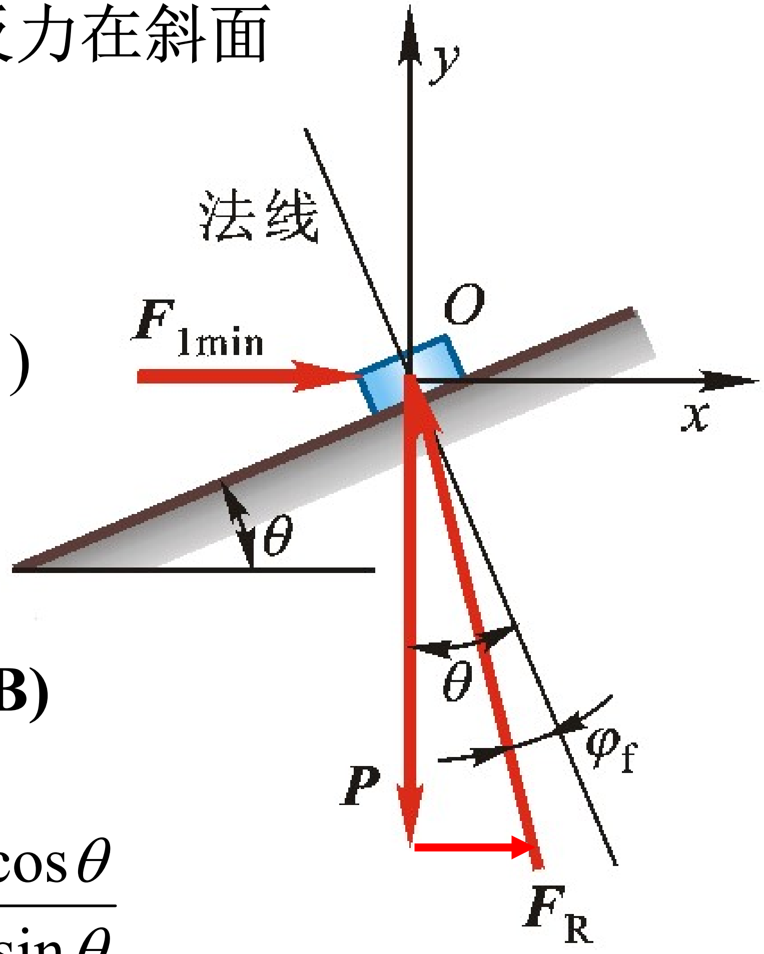
$$F_{1\max} = P\tan(\theta + \varphi_f)$$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

物块有向下滑动趋势时，最大约束反力在斜面法线另一侧，

$$F_{1\min} = P\tan(\theta - \varphi_f)$$

$$P\tan(\theta - \varphi_f) \le F \le P\tan(\theta + \varphi_f)$$



利用三角公式与 $\tan\varphi_f = f_s$，

tan(A+B) = (tanA+tanB)/(1-tanAtanB)

$$P\frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta} \le F \le P\frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

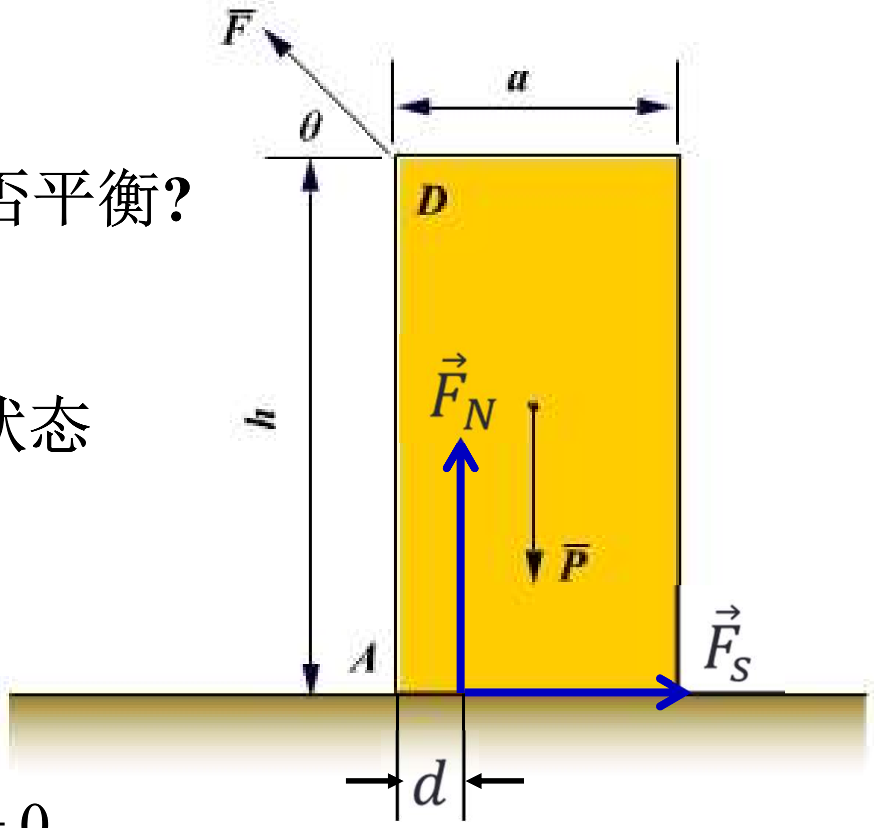
例4-3（箱子倾覆问题）

已知均质木箱重P=5kN，f_s=0.4，$h=2a=2$m，θ=30°. 求

(1)当D处为拉力F=1kN时，木箱是否平衡?

(2)能保持木箱平衡的最大拉力.

讨论：F_N的作用线位置如何确定？



解：（1）取木箱，设其处于平衡状态

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_s - F\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_N - P + F\sin\theta = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad hF\cos\theta - P\cdot\frac{a}{2} + F_N d = 0$$

因此 $F_s = 866\text{N}$ $\qquad F_N = 4500\text{N}$ $\qquad d = 0.171\text{m}$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

$$F_{max} = f_s F_N = 1800\text{N}$$

$F_s < F_{max}$，木箱不会滑动

又 $\boldsymbol{d}>\mathbf{0}$，木箱无翻倒趋势. 木箱平衡

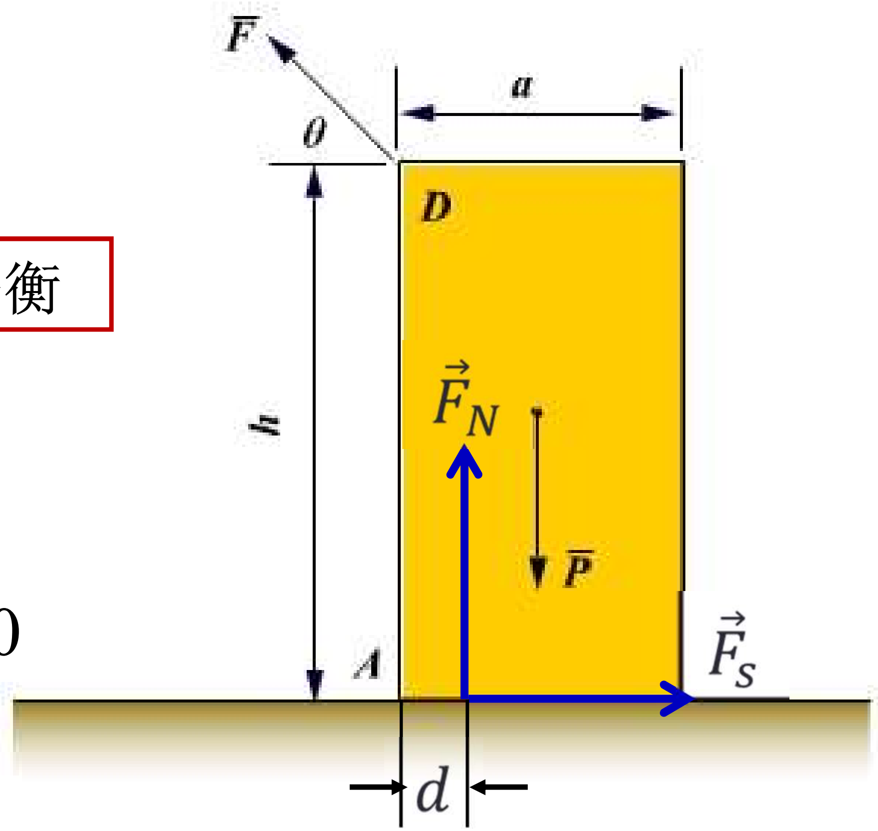
（2） 设木箱将要滑动时拉力为$\boldsymbol{F}_1$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_s - F_1 \cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_N - P + F_1 \sin\theta = 0$$

$$F_s = F_{max} = f_s F_N$$

解得 $$F_1 = \frac{f_s P}{\cos\theta + f_s \sin\theta} = 1876\text{N}$$



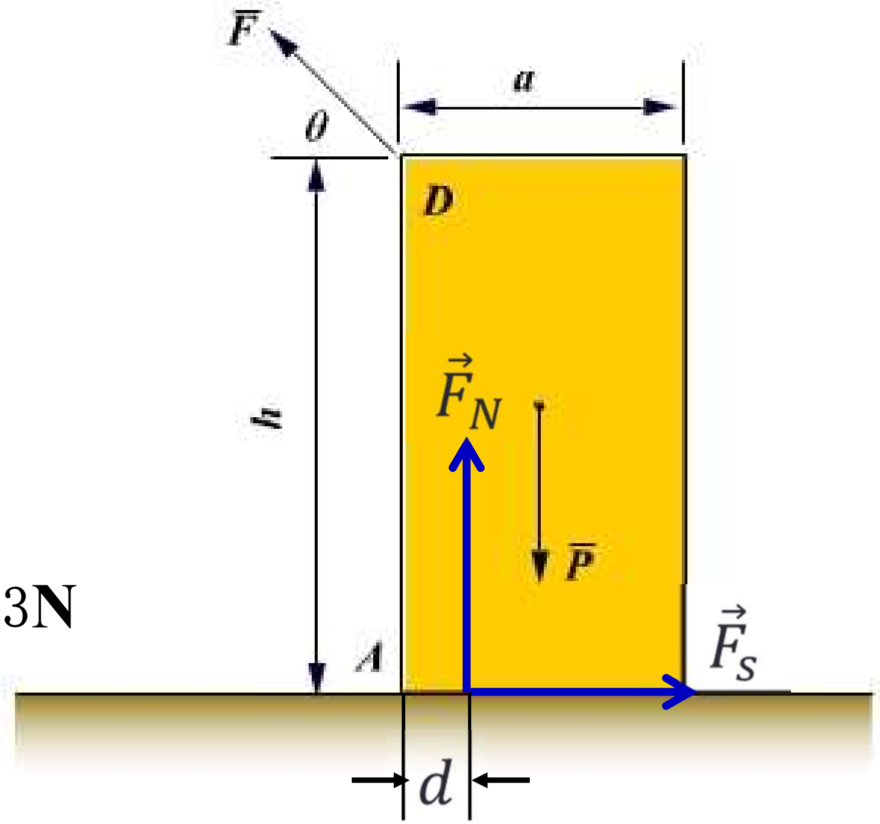
§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

设木箱有翻动趋势时拉力为$\boldsymbol{F}_2$

此时支撑力$\boldsymbol{F}_N$作用线满足$\boldsymbol{d=0}$

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_2 \cos\theta \cdot h - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

解得 $$F_2 = \frac{Pa}{2h\cos\theta} = 1443\text{N}$$



能保持木箱平衡的最大拉力为1443**N**

木箱将要滑动（向左侧）时拉力为$\boldsymbol{F}_1$=1876N

木箱将要翻动（绕A点）时拉力为$\boldsymbol{F}_2$=1443N

因此，木箱在拉力$\boldsymbol{F}$增大过程中，会先发生翻动。

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

例4-4 均质轮重 $P=100\text{N}$，杆无重，r ,l , $\theta=60^{\circ}$时，

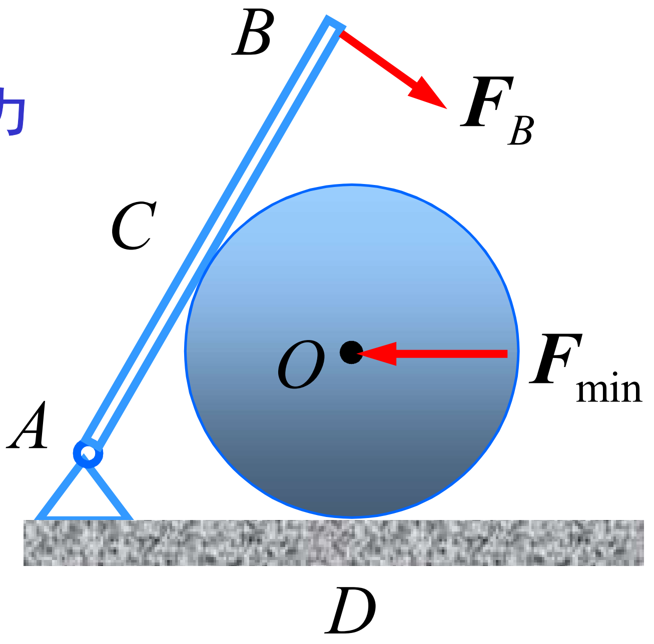
$$AC=CB=\frac{l}{2};\ F_B=50\text{N},\ f_C=0.4\text{（杆与轮间）}$$

求：若要维持系统平衡

（1）$f_D=0.3$ (轮与地面间静摩擦系数），轮心O处水平推力$\boldsymbol{F}_{\min}$

（2）$f_D=0.15$（轮与地面间静摩擦系数），轮心O处水平推力$\boldsymbol{F}_{\min}$.

两个摩擦力作用



f_D 大于某值，轮将沿AB板滑动.

f_D 小于某值，轮将向右滚动.

轮离开平衡状态，开始滑动有两种可能：沿杆AB滑动，沿地面滑动

我们是否可以直接代入静摩擦系数，假设C与D两处的摩擦力均达到最大值，直接进行平衡分析？

⇩

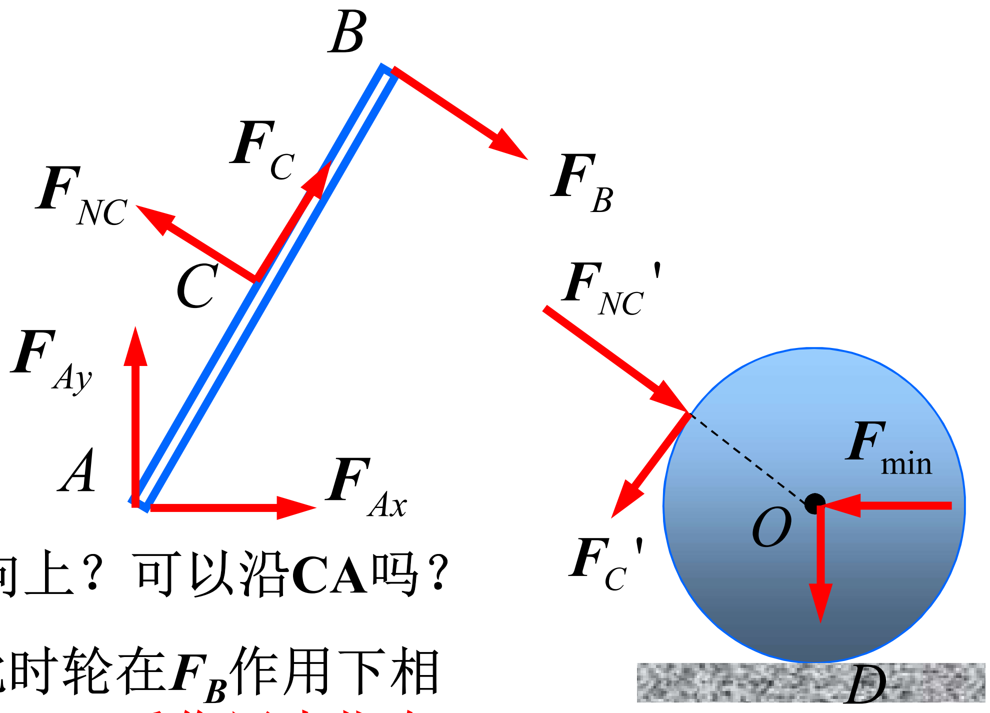
C, D 两处有一处摩擦力达最大值，系统即将运动.

解： 先设 C 处摩擦力达最大值，开始滑动（D不动）.

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_{\mathrm{NC}} \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0$$

⇨ $F_{\mathrm{NC}} = 100\mathrm{N}$

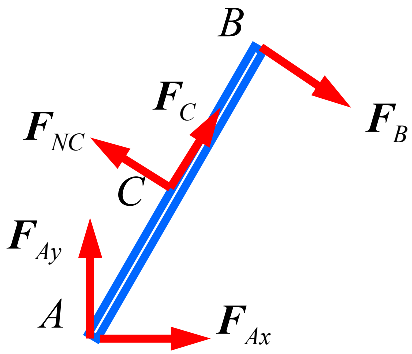
⇨ $F_C = F_{C\max} = f_C F_{\mathrm{NC}} = 40\mathrm{N}$



为什么C处的最大静摩擦力沿CB方向向上？可以沿CA吗？

因为我们要求的是最小水平力F_{min}，此时轮在F_B作用下相对平板AB向B运动，板对轮摩擦力指向A，反作用力指向B

对轮列平衡方程

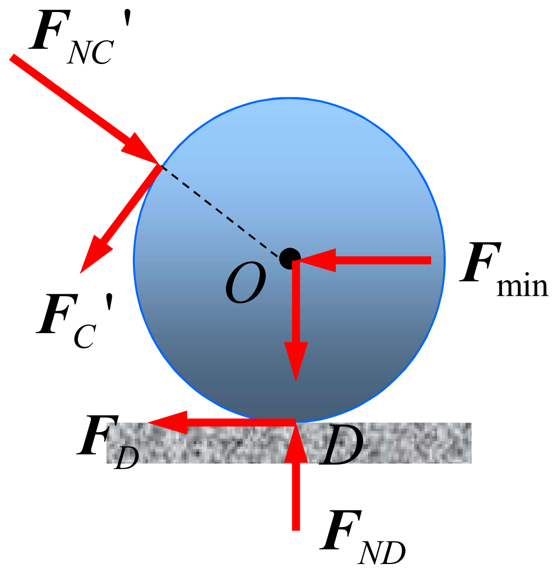


$$\Sigma M_O = 0 \qquad F'_C \cdot r - F_D \cdot r = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F'_{NC} \sin 60^{\circ} - F'_C \cos 60^{\circ} - F_{\min} - F_D = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{ND} - P - F_{NC}' \cos 60^{\circ} - F_C' \sin 60^{\circ} = 0$$

$$F'_{NC} = F_{NC} = 100\text{N}$$



$$F_D = F'_C = 40\text{N} \qquad F_{\min} = 26.6\text{N}$$

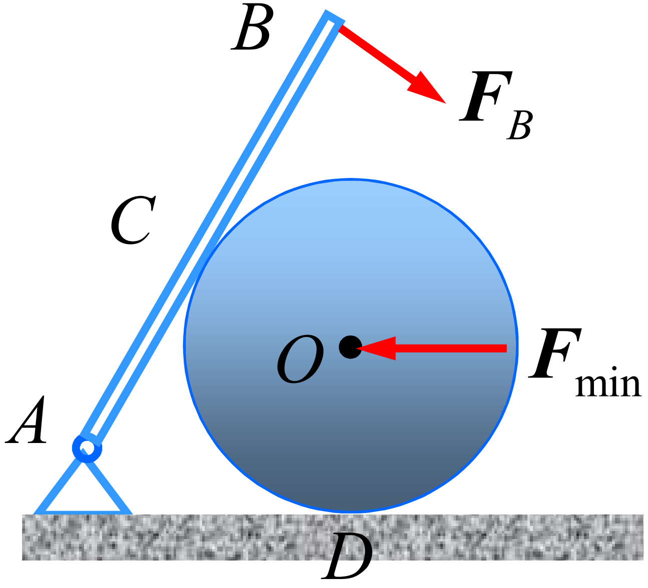
$$F_{ND} = 184.6\text{N}$$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

假设D处摩擦力达最大值，C处不滑动

取杆**AB.**

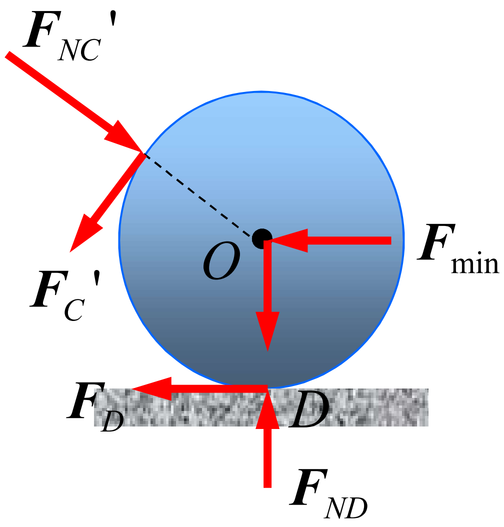
$$\Sigma M_A = 0 \qquad F_{NC}\cdot\frac{l}{2} - F_B\cdot l = 0$$

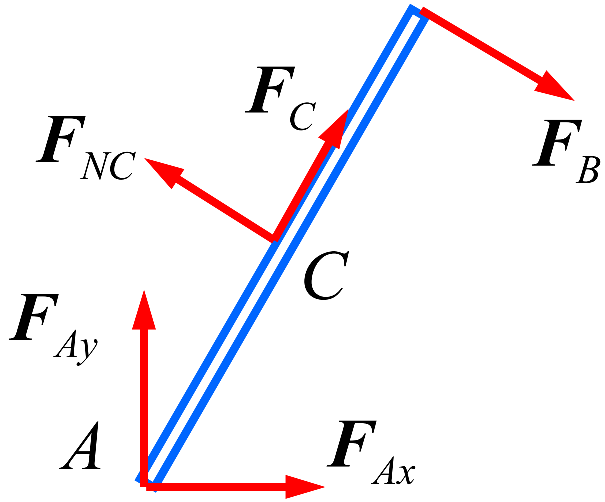


$\Rightarrow$ $F_{NC} = 100\text{N}$ 不变

但 $F_C \neq F_{C\max} = f_C F_{NC} = 40N$

F_C必须由轮的平衡条件决定





§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

对轮 $\Sigma M_O = 0 \quad F'_C \cdot r - F_D \cdot r = 0$

$\Sigma F_x = 0 \quad F'_{NC} \sin 60^\circ - F'_C \cos 60^\circ - F_{\min} - F_D = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{ND} - P - F'_{NC} \cos 60^\circ - F'_C \sin 60^\circ = 0$

$F_D = f_D F_{ND}$ （D将要滑动） $F'_{NC} = 100N$ ，代入上式

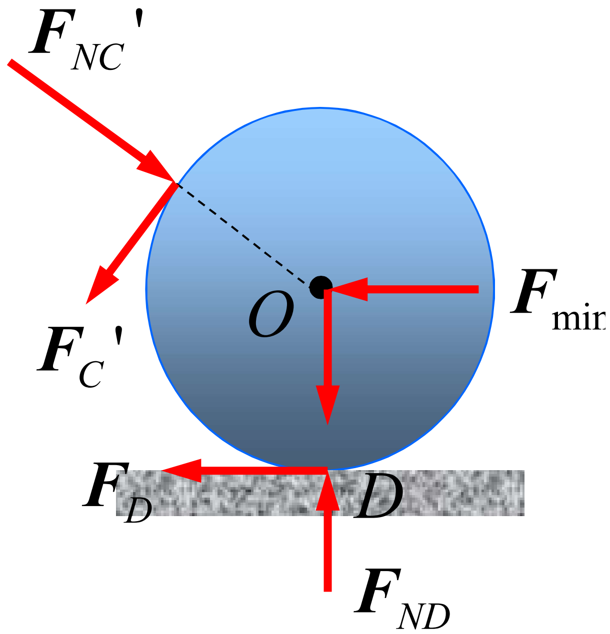
$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D\right) F_{ND} = P + 0.5 F'_{NC}$$

$$\Rightarrow F_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} F'_{NC} - 1.5 f_D F_{ND}$$

$$\Downarrow$$

$$F_C = F_D = \frac{f_D\left(P + 0.5 F'_{NC}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D}$$

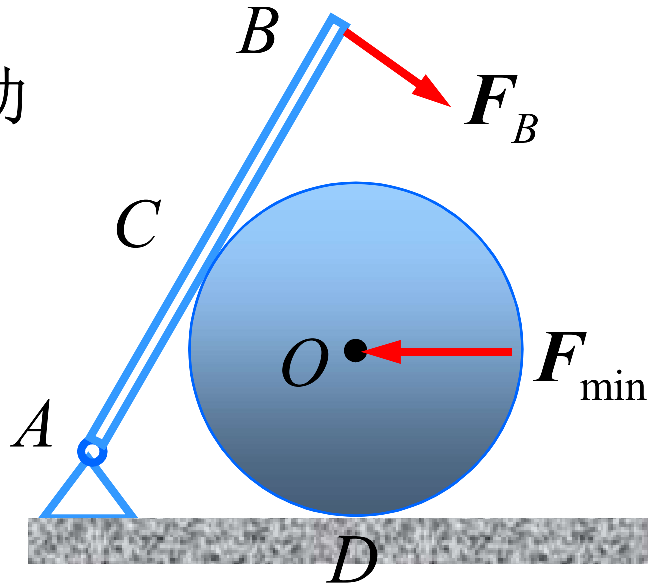
$$F_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} F'_{NC} - \frac{1.5 f_D\left(P + 0.5 F'_{NC}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D}$$



我们讨论了两个可能性：

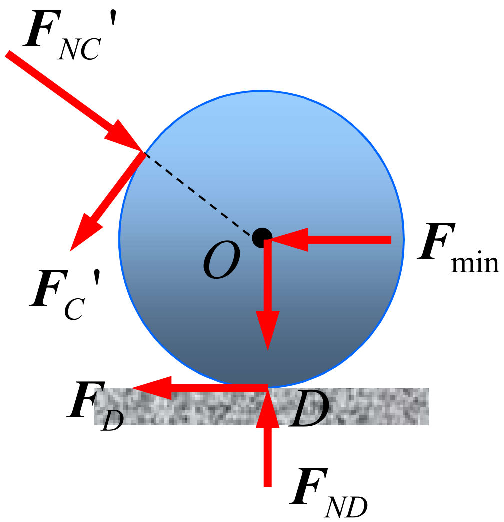
(1) C处滑动（最大静摩擦力），**D**处不滑动

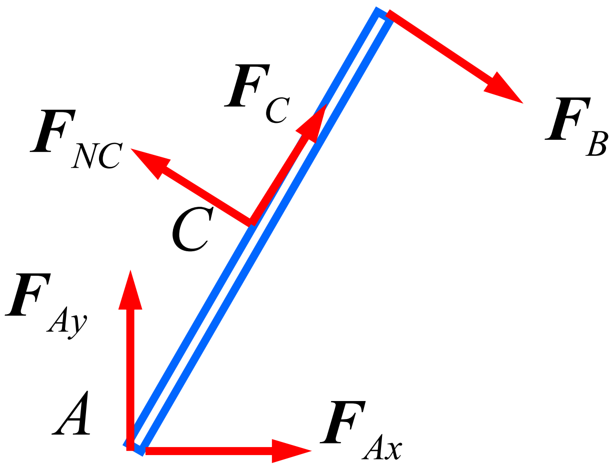
(2) C处不滑动，**D**处滑动（最大静摩擦力）



摩擦系数：轮与杆 $f_C = 0.4$

轮与地面 $f_D = 0.3$或者0.15





$$F_{NC} = F_{NC}' = 100N$$

不随着摩擦系数变化

$$F_D = F_C'$$

摩擦力大小随着摩擦系数、滑动情况变化

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

(1) C处滑动（最大静摩擦力），D处不滑动

$$F_C = F_{C\max} = f_C F_{NC} = 40\text{N}$$

$$\Downarrow$$

$$F_D = F_C' = 40\text{N} \quad F_{\min} = 26.6\text{N}$$

$$F_{ND} = 184.6\text{N}$$

$$\Downarrow$$

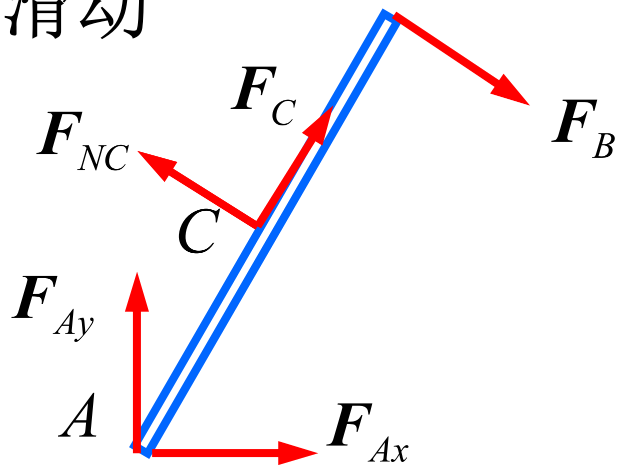
当$f_D = 0.3$时，$F_{D\max} = f_D F_{ND} = 55.39\text{N}$

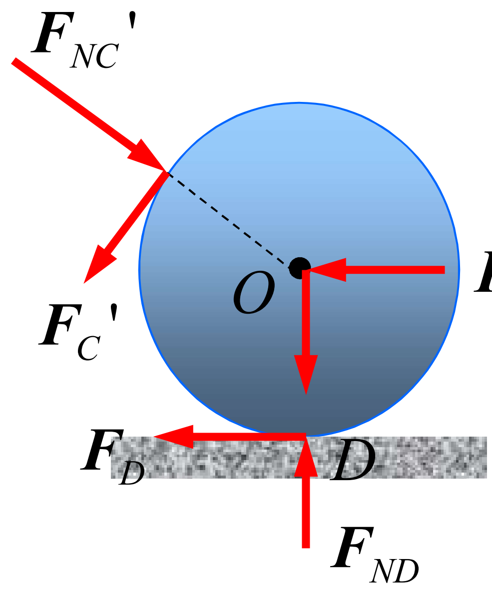
$F_D = 40\text{N} < F_{D\max}$，满足假设，**D**不滑动

当$f_D = 0.15$时，$F_{D\max} = f_D F_{ND} = 27.69\text{N}$

$F_D = 40\text{N} > F_{D\max}$，不满足假设，**D**滑动

$\Rightarrow$ 当$f_D = 0.3$时，$F_{\min} = 26.6\text{N}$





(2) C处不滑动，D处滑动（最大静摩擦力）

$F_C = F_D = f_D F_{ND}$ （大小需要通过F_{ND}求得）

$$F_{ND} = \frac{P + 0.5F_{NC}'}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D} \qquad F_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{NC}' - \frac{1.5 f_D \left(P + 0.5F_{NC}'\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D}$$

当$f_D = 0.3$时，$F_C = f_D F_{ND} = 60.80\text{N}$

$F_C > F_{C\max} = 40\text{N}$，不满足假设，C滑动

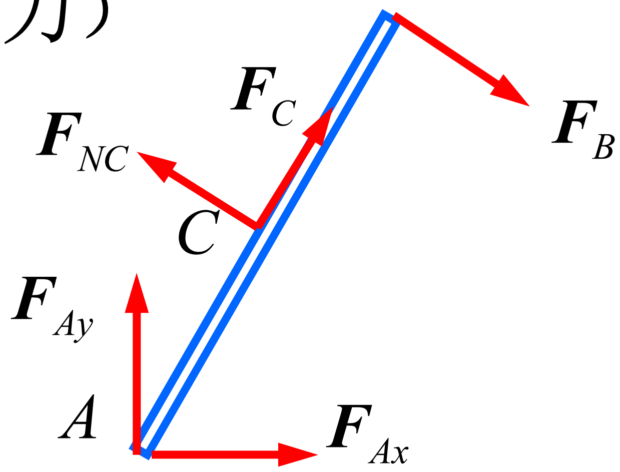
$F_{\min} = -4.59\text{N}$，

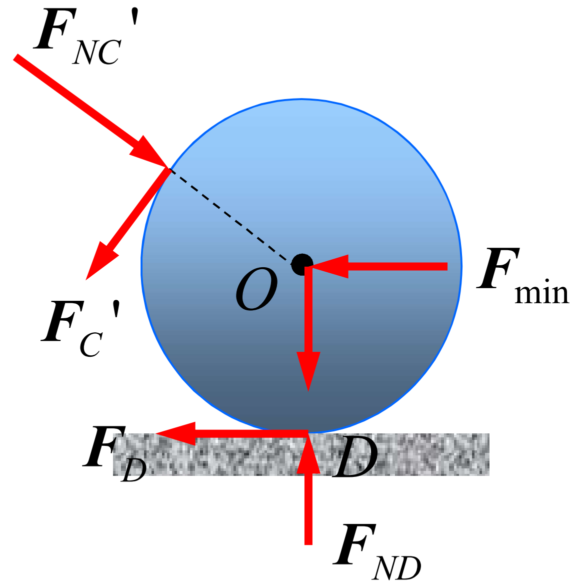
当$f_D = 0.15$时，$F_C = f_D F_{ND} = 25.86\text{N}$

$F_C < F_{C\max} = 40\text{N}$，满足假设，C不滑动

$F_{\min} = 47.81\text{N}$，

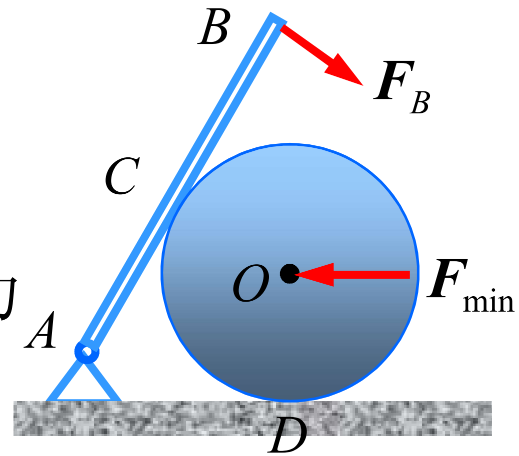
当$f_D = 0.15$时，$F_{\min} = 47.81\text{N}$





§4-4 滚动摩阻（擦）的概念

思考：给定f_C，增大f_D是否可以降低F_{min}?

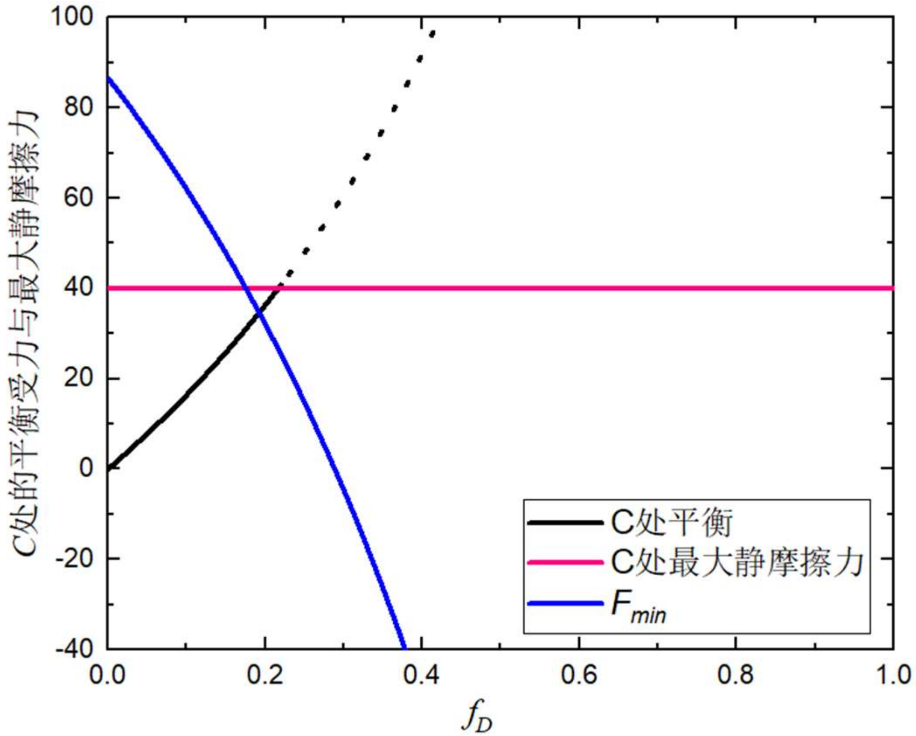


当f_D从0开始增加，先发生D处滑动（左图）

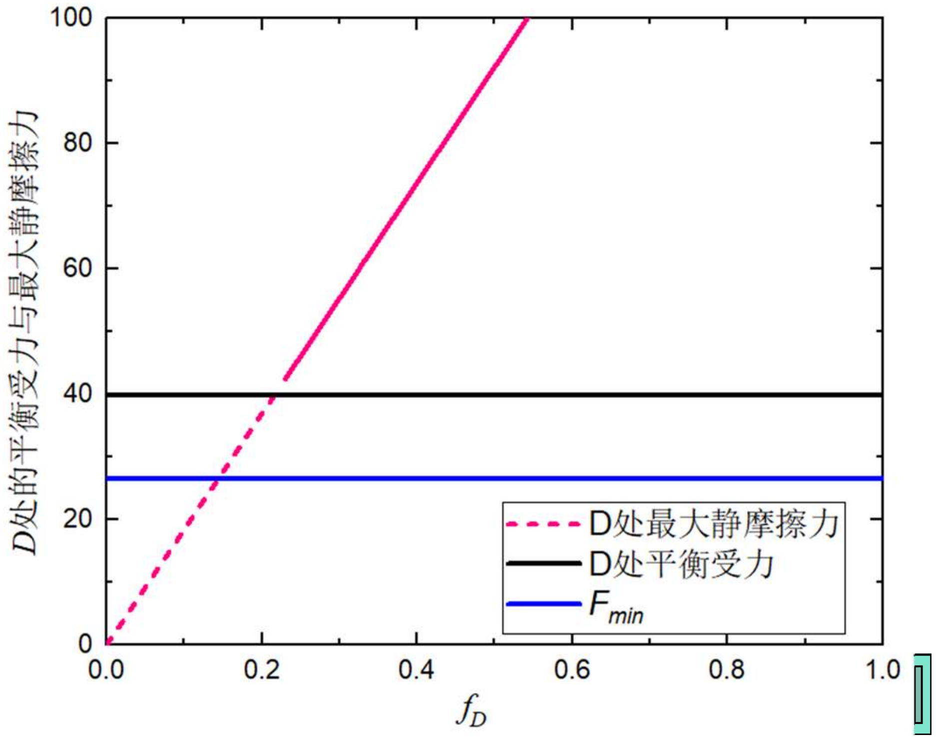
当f_D=0.22，C与D两处同时达到最大静摩擦力

当f_D>0.22，C处开始滑动

C处不滑动, D处滑动

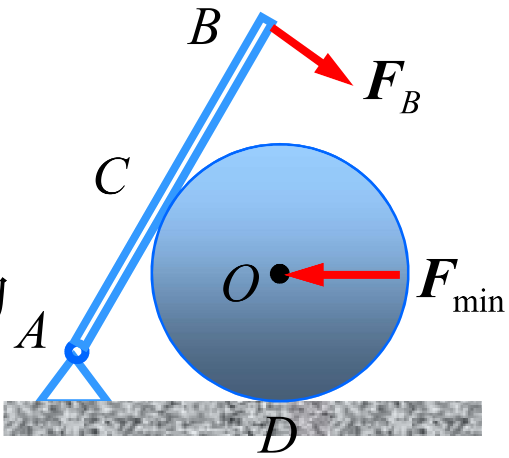


C处滑动，D处不滑动



§4-4 滚动摩阻（擦）的概念

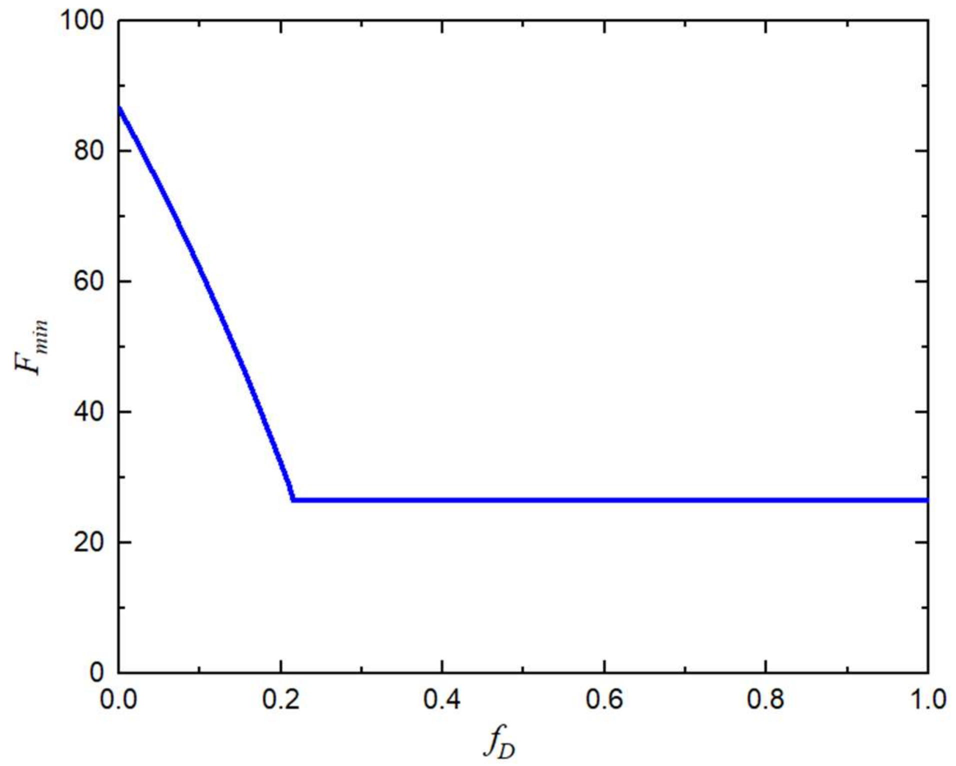
思考：给定f_C，增大f_D是否可以降低F_{min}?



当f_D从0开始增加，先发生D处滑动（左图）

当f_D=0.22，C与D两处同时达到最大静摩擦力

当f_D>0.22，C处开始滑动



在D处滑动（f_D<0.22），

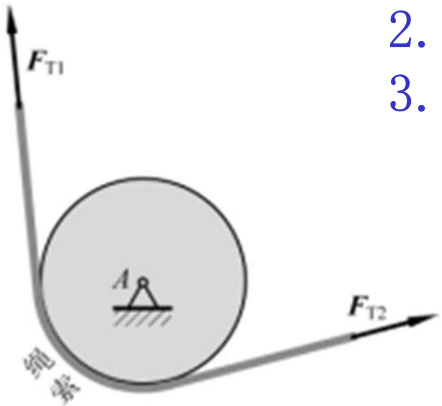
增大f_D可以降低F_{min}。

当C处开始滑动（f_D>0.22），

增大f_D可以不影响F_{min}。

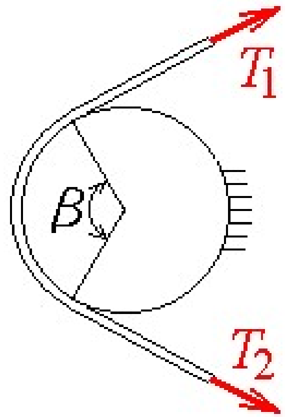
思考题

皮带与轮之间的摩擦系数为f_s，轮半径为r，皮带包角为β，皮带不滑动时张力T_1与T_2关系



柔索中拉力相等（$T_1=T_2$）的条件：

1. 滑轮保持平衡
2. 轮子形状必须是圆形
3. 不考虑摩擦力



§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

已知$T_1 > T_2$，画出皮带的画受力图和皮带微元的受力图。首先考虑微元的平衡：

$$\sum F_x = 0 : (T + \mathrm{d}T)\cos(\mathrm{d}\beta/2) - T\cos(\mathrm{d}\beta/2) = \mathrm{d}F$$

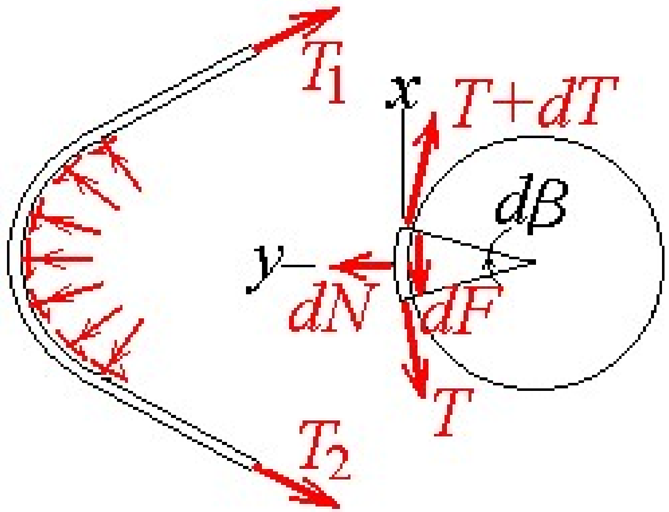
$$\Rightarrow \mathrm{d}T = \mathrm{d}F \qquad \cos(\mathrm{d}\beta/2) \sim 1$$

$$\sum F_y = 0 : \mathrm{d}N = (T + \mathrm{d}T)\sin(\mathrm{d}\beta/2) + T\sin(\mathrm{d}\beta/2)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}N = T\mathrm{d}\beta \qquad \sin(\mathrm{d}\beta/2) \sim \mathrm{d}\beta/2,\ dT\mathrm{d}\beta << Td\beta$$

根据静滑动摩擦 $\mathrm{d}F = f_s \mathrm{d}N$

$$\mathrm{d}T = f_s T\mathrm{d}\beta \qquad \int_{T_2}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{T} = f_s \int_0^{\beta} \mathrm{d}\beta$$



$$\ln\frac{T_1}{T_2} = f_s\beta \qquad T_1 = T_2 e^{f_s\beta}$$

$$\therefore \quad T_1 : T_2 = e^{f_s\beta}$$

例如，

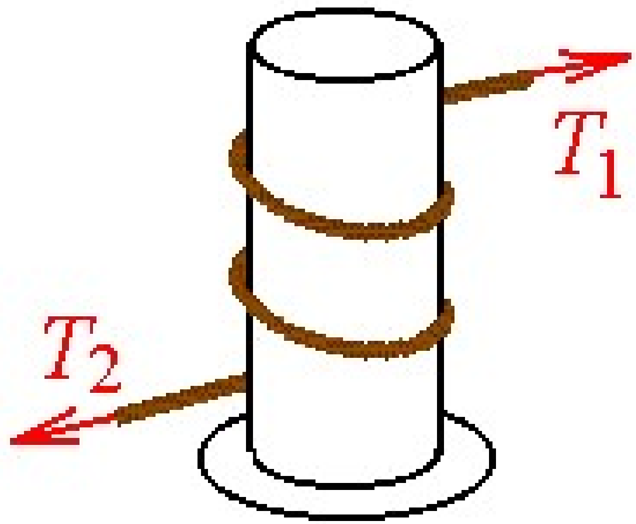
已知绳绕树两圈，$f_s = 0.5$, $T_2 = 500\text{N}$。

求使绳子不打滑的T_1范围。

$$T_1 / T_2 \le e^{f_s \beta}$$

$$\beta = 4\pi$$

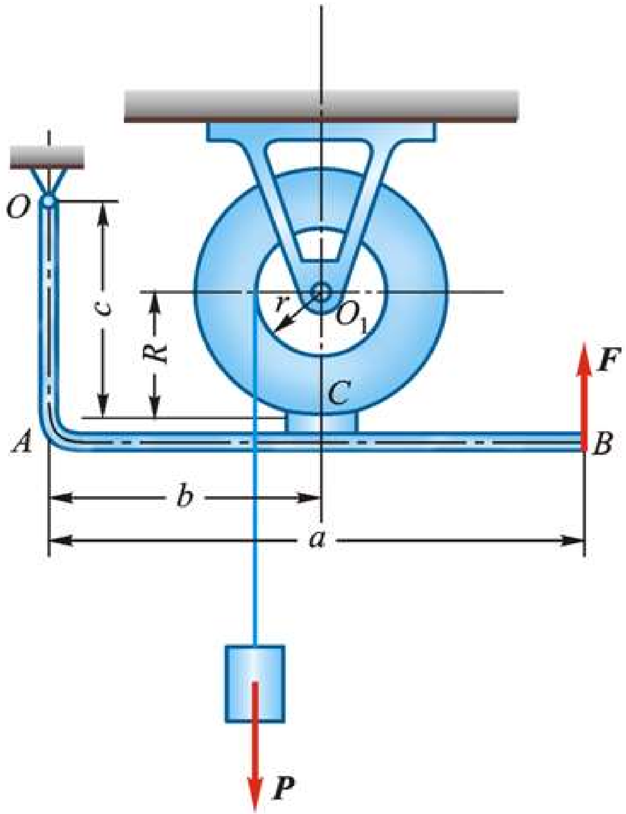
$$T_1 = 267000\text{N}$$



例4-5

已知：物块重 $\boldsymbol{P}$,鼓轮重心位于O_1处，闸杆重量不计，f_s ，各尺寸如图所示.

求：制动鼓轮所需铅直力F.



解：分别取闸杆与鼓轮

设鼓轮被制动处于平衡状态

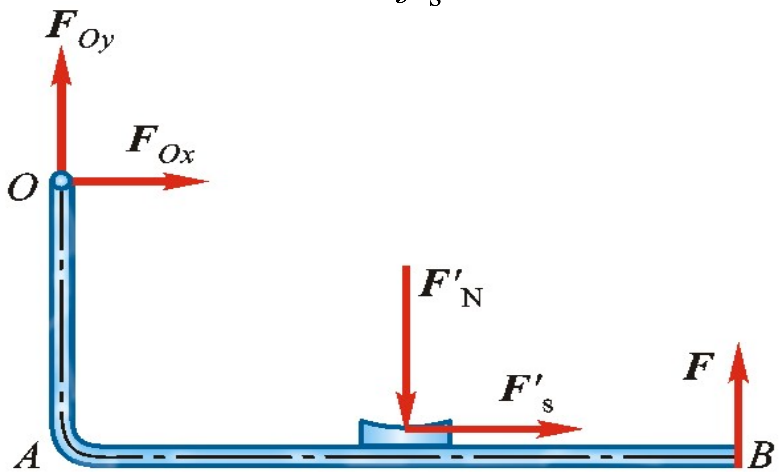
对鼓轮，$\sum M_{O_1}=0 \qquad rF_T - RF_s = 0$

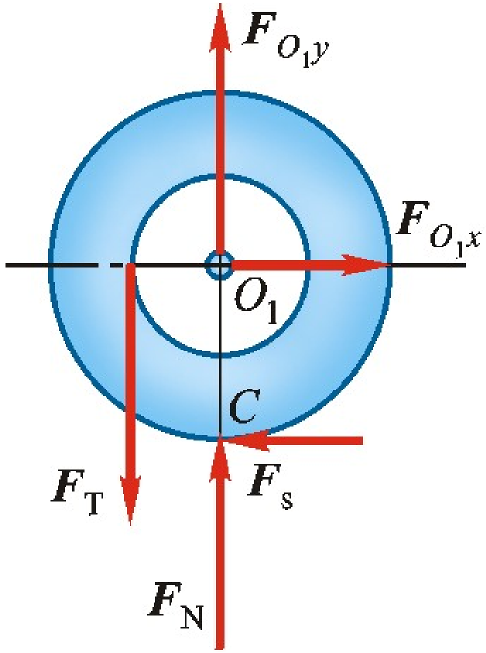
对闸杆，$\sum M_O = 0 \qquad Fa - F'_N b - F'_s c = 0$

且 $F'_s \le f_s F'_N$

而 $F_T = P, \qquad F'_s = F_s$

解得 $F \ge \dfrac{rP(b - f_s c)}{f_s R a}$



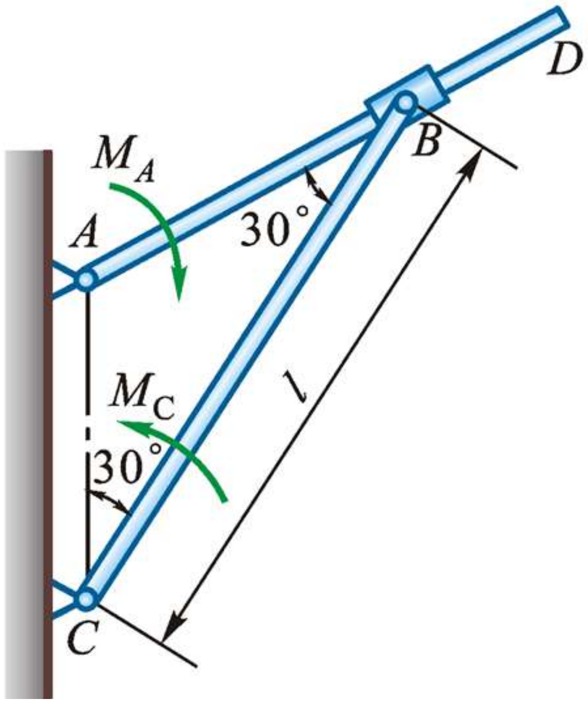


例4-6

已知：$M_A = 40\text{N}\cdot\text{m}$，$f_s = 0.3$， 各构件自重不计，

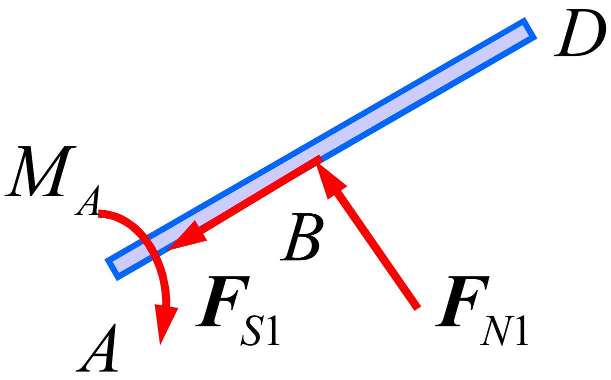
尺寸如图；

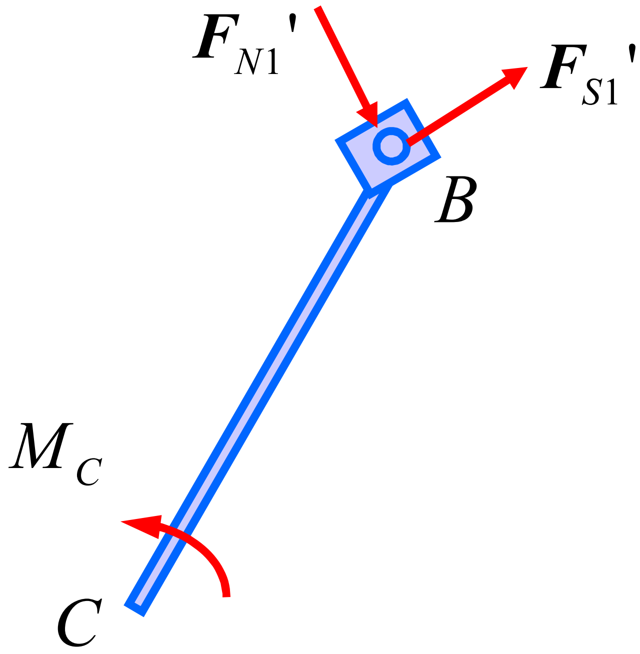
求：保持系统平衡的力偶矩 M_C



解：设 $M_C = M_{C1}$ 时，系统即将逆时针方向转动

画两杆受力图.





$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_{N1} \cdot AB - M_A = 0$$

$$\Sigma M_C = 0$$

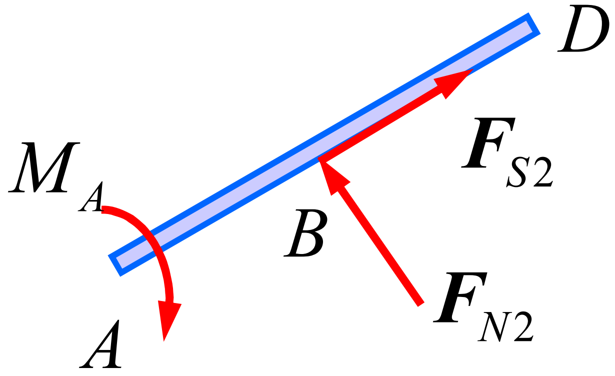
$$M_{C1} - F_{N1}' \cdot l \sin 60^\circ - F_{s1}' \cdot l \cos 60^\circ = 0$$

又 $$F'_{s1} = F_{s1} = f_s F_{N1} = f_s F'_{N1}$$

$$\Rightarrow \quad M_{C1} = 70.39\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

设 $M_C = M_{C2}$ 时，系统有顺时针方向转动趋势

画两杆受力图.



$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_{N2}\cdot AB - M_A = 0$$

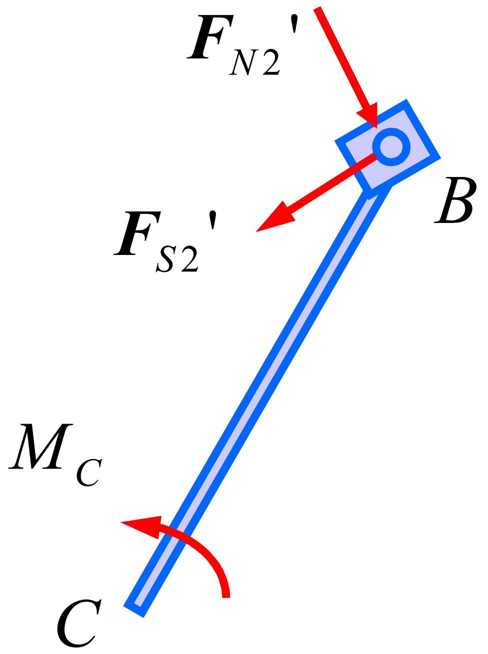
$$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{C2} - F'_{N2} \cdot l \sin 60^\circ - F'_{s2} \cdot l \cos 60^\circ = 0$$

又 $F'_{s2} = F_{s2} = f_s F_{N2} = f_s F'_{N2}$

$\Rightarrow$ $M_{C2} = 49.61 \mathrm{N \cdot m}$

$\Rightarrow$ 系统平衡时

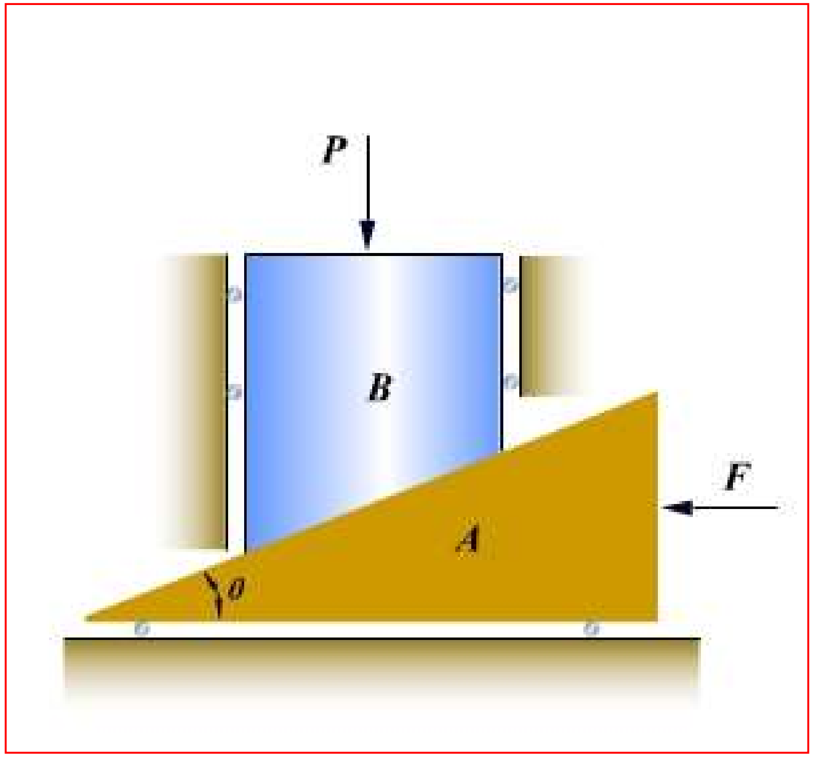
$$49.61 \mathrm{N \cdot m} \le M_C \le 70.39 \mathrm{N \cdot m}$$



例4-8

已知：力 **P**，角 θ，不计自重的 A,B 块间的静摩擦因数为 f_s，其它接触处光滑；

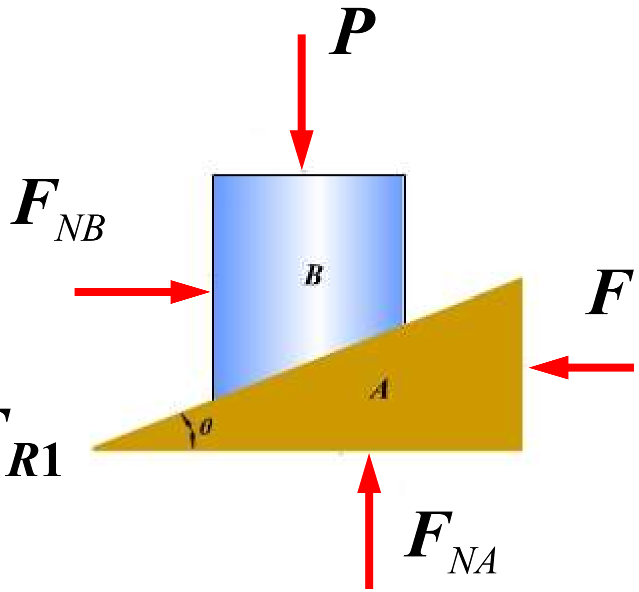
求：使系统保持平衡的力 **F** 的值.



解： 取整体分析，画受力图

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{NA} - P = 0$$

$$\Rightarrow F_{NA} = P$$



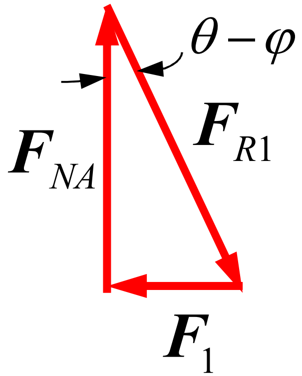
楔块 A 向右运动,全约束力为 $\boldsymbol{F}_{R1}$

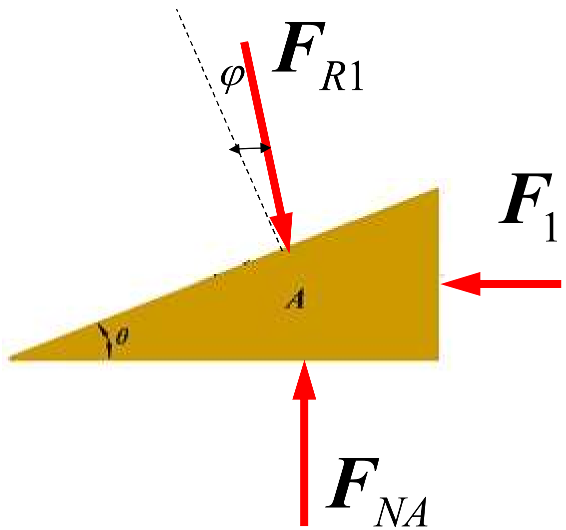
设力 $\boldsymbol{F}$ 小于 $\boldsymbol{F}_1$ 时，

取楔块 A 分析，画受力图

$$F_1 = F_{NA}\tan(\theta-\varphi)$$

$$= P\tan(\theta-\varphi)$$



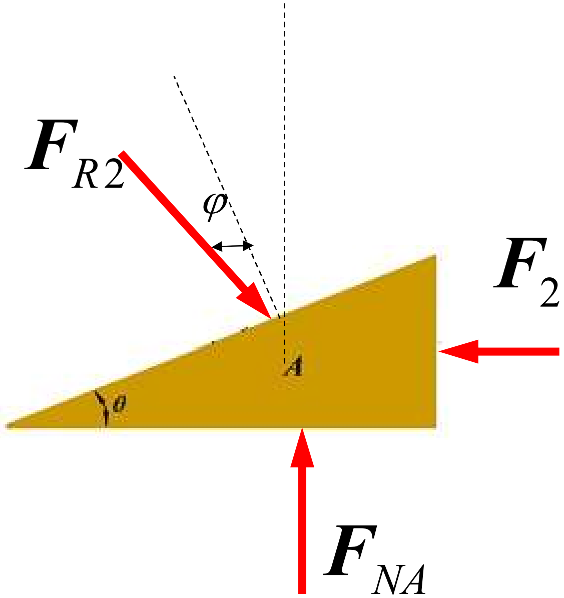


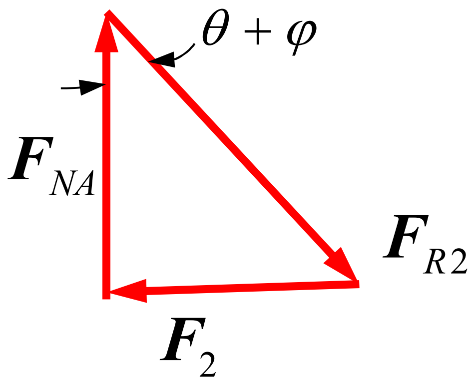
楔块A向左运动,全约束力为$\boldsymbol{F}_{R2}$，力$\boldsymbol{F}$大于$\boldsymbol{F}_2$

取楔块A分析，画受力图

$$F_2 = F_{NA}\tan(\theta+\varphi) = P\tan(\theta+\varphi)$$

$$\Rightarrow P\tan(\theta-\varphi) \le F \le P\tan(\theta+\varphi)$$

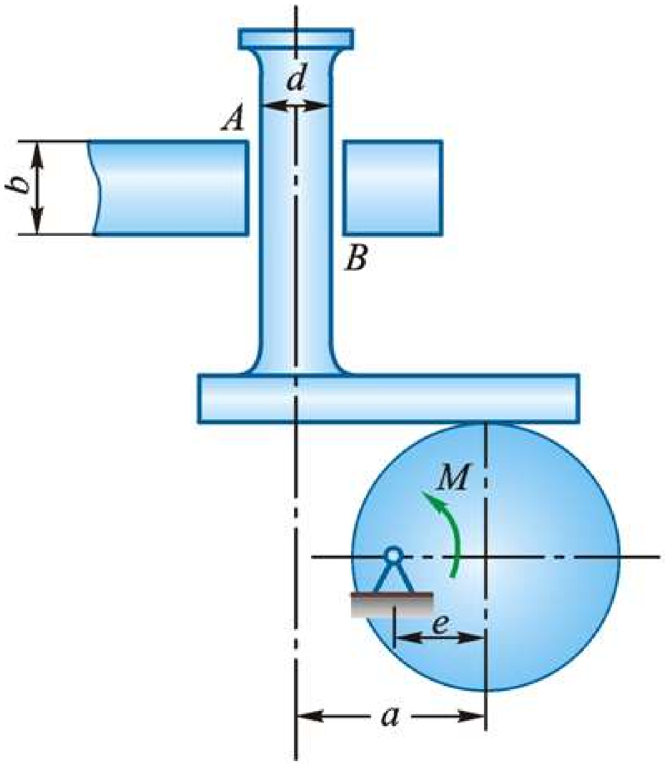




例4-9（自锁问题）

已知：b , d , f_s , 不计凸轮与挺杆处摩擦，不计挺杆质量；

求：挺杆不被卡住之 a 值.



解： 取挺杆，设挺杆处于刚好卡住位置（处于平衡）

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{NA} - F_{NB} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_A - F_B + F = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad F\left(a + \frac{d}{2}\right) - F_B d - F_{NB} b = 0$$

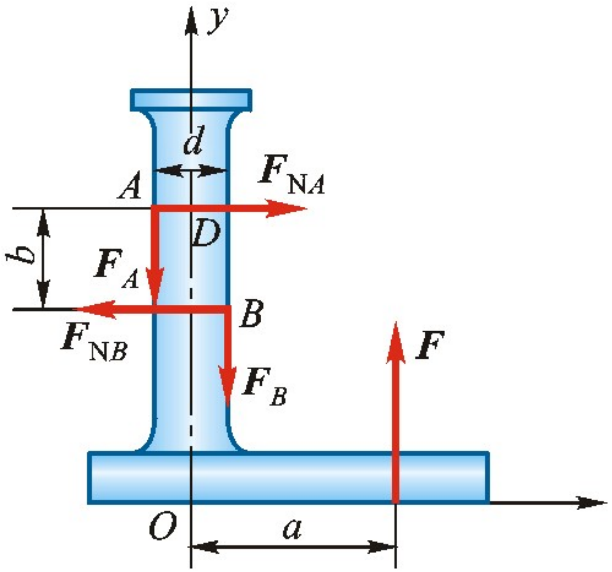
$$F_{NA} = F_{NB} \Rightarrow F_A = f_s F_{NA},\ F_B = f_s F_{NB}$$

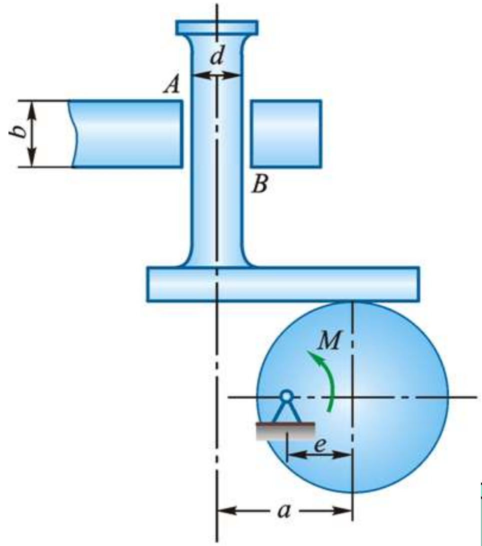
$$F_A = F_B = \frac{F}{2} \Rightarrow F_{NA} = F_{NB} = \frac{F}{2 f_s}$$

$$F\left(a + \frac{d}{2}\right) - \frac{F}{2} d - \frac{F}{2 f_s} b = Fa - \frac{F}{2 f_s} b = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{2 f_s}$$

$\Rightarrow$ 挺杆不被卡住时 $a < \dfrac{b}{2 f_s}$



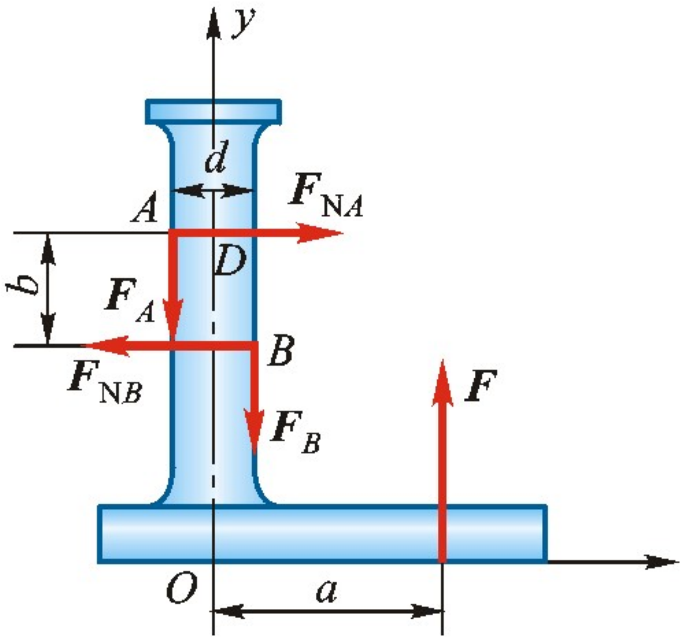


思考：为什么不卡住（不平衡）条件 $a<\dfrac{b}{2f_s}$

$$\Sigma F_x=0 \qquad F_{NA}-F_{NB}=0$$

$$\Sigma F_y=0 \qquad -F_A-F_B+F=0$$

$$\Sigma M_A=F(a+\frac{d}{2})-F_Bd-F_{NB}b<0$$



用最大摩擦系数分析

极限情况为无摩擦，则一定不会卡住

因此不被卡住条件为

$$0<f_s<\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad a<\frac{b}{2f_s}$$

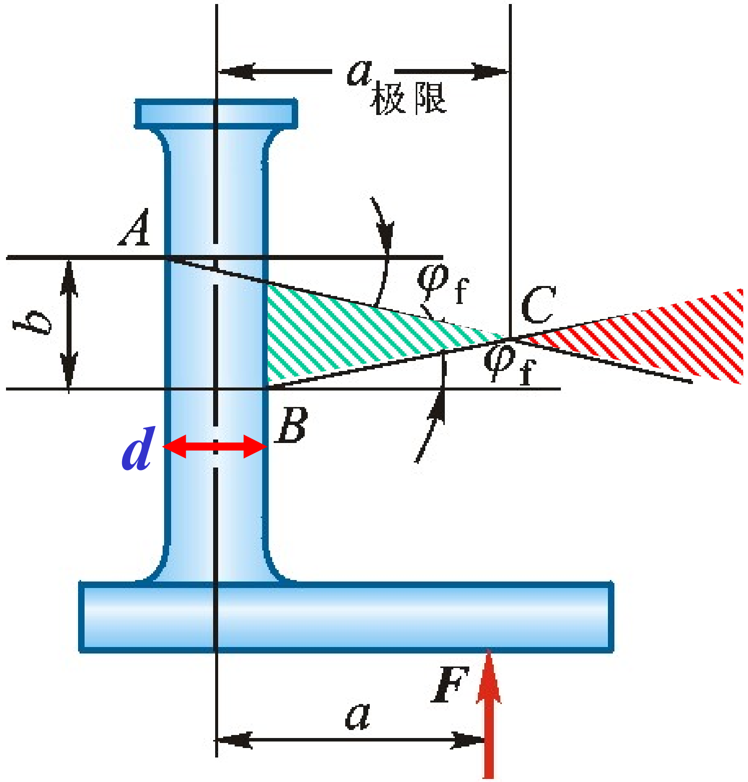
用几何法求解-自锁条件

解：$$b=(a_{极限}+\frac{d}{2})\tan\varphi+(a_{极限}-\frac{d}{2})\tan\varphi$$

$$=2a_{极限}\tan\varphi=2a_{极限}f_s$$

$$\Rightarrow a_{极限}=\frac{b}{2f_s}$$

三力平衡汇交



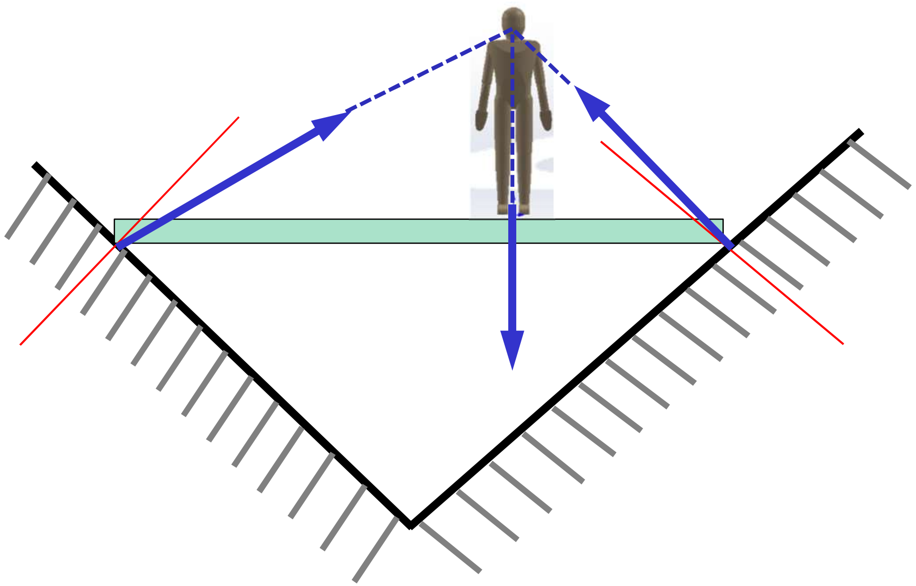
当$a<a_{极限}$，在A与B的摩擦角外，不满足三力平衡汇交，不可以卡住！

当$a>a_{极限}$，在A与B的摩擦角内，可以在任意点平衡，可以卡住！

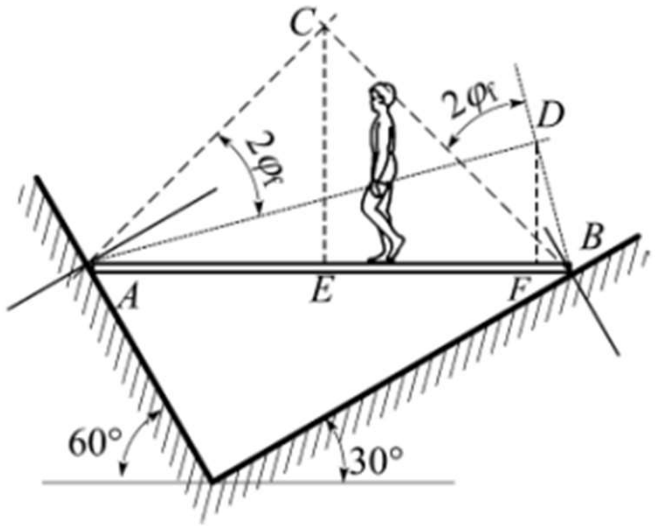
$$\Rightarrow a<\frac{b}{2f_s}$$

思考题：

水平梯子放在直角V形槽内，略去梯重，梯子与两个槽面的摩擦角均为φ_f。考虑人体重，则人在梯子哪些区域运动时，梯子不滑动。



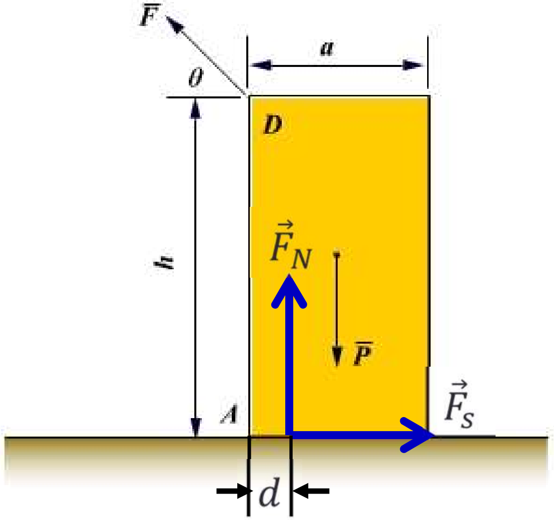
三力平衡汇交



EF之间满足平衡

考虑滑动摩擦时物体的平衡问题-解题思路小结

正向问题：已知主动力(F)，求解带摩擦条件是否平衡

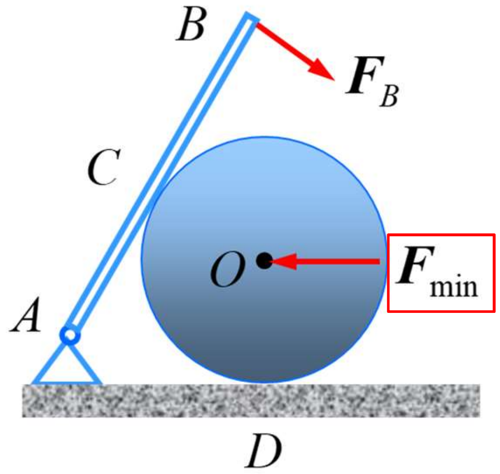


思路--静力学平衡问题分析：

相似点：判断平衡需要的约束力
（法向约束力+切向约束力（摩擦力））

不同点：法向约束力作用点（***d***）；
切向约束力与最大静摩擦力比较
（判断平衡）

反向问题：求带摩擦力时满足题目需要的主动力的范围



思路—考虑不平衡/平衡的条件：
不平衡：滑动（两个方向、多个位置）；翻到（***d***=0）；
平衡：卡住（保持自锁）

为什么要考虑将滑未滑的临界条件？
1. 这是系统打破平衡时候的条件；
2. 我们可以确定力作用点(比如C或D）
3. 我们可以确定摩擦力的条件（$F_{max}=f_s F_N$）

如果有多个摩擦力作用点，需要单独讨论其中一个将滑未滑时，其他点最大静摩擦力是否满足平衡。

作业

教材习题： 4-18,4-26, 4-27
（4-26中摩擦力在垂直速度方向分量为0）