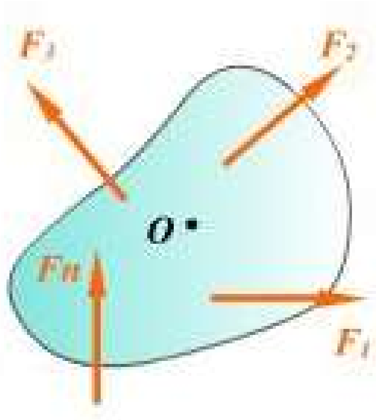
第三章　空间力系

张拉整体结构（Tensegrity）

平面力系小结



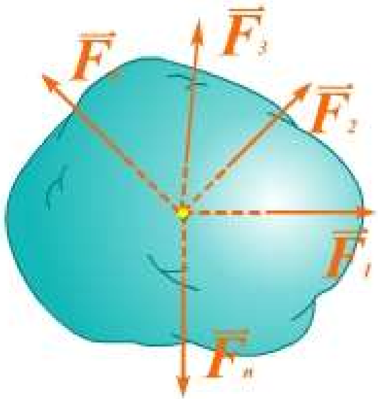
1. 另一个静力学基本要素：力偶（力偶矩）

描述力对刚体绕固定点O转动效果的描述：力矩

2. 两个定理：
力的平移定理—主矢与主矩
合力矩定理—合力

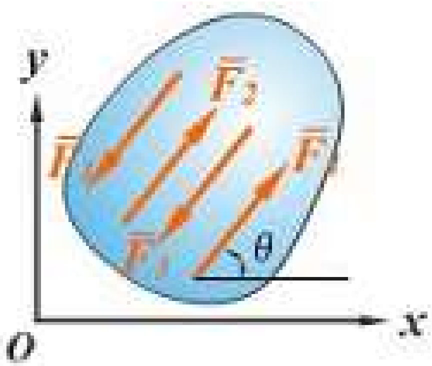
3. 平面力系的平衡方程（主矢，主矩均为0，3个平衡方程）
多物体系平衡（整体与局部）
桁架（二力杆+节点法/截面法）

平面汇交力系



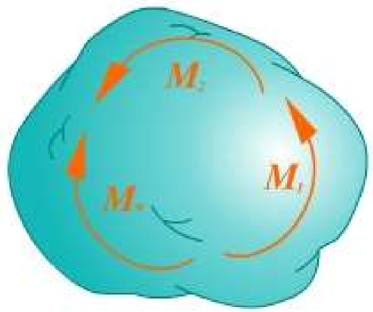
平衡方程（2个）：
力矩平衡自动满足（共点）
合力为0（力多边形封闭，或两个方向投影的力为0）

平面平行力系



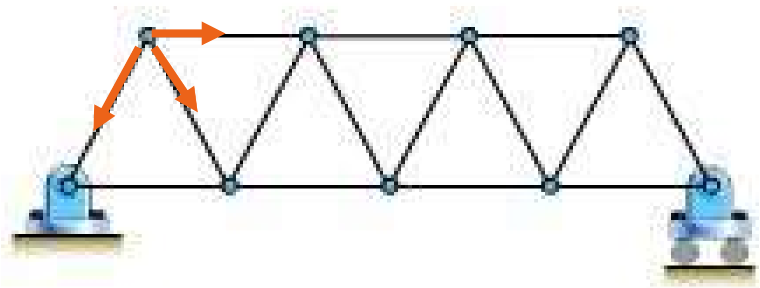
平衡方程（2个）：
一个方向力平衡自动满足（平行）
平行力系方向合力为0，力偶矩为0

平面力偶系

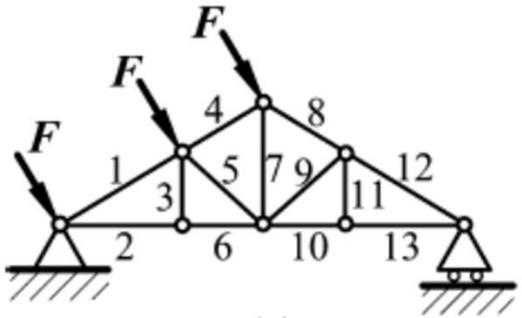


平衡方程 （1个）：
合力为0平衡自动满足（只有力偶）
合力偶矩为0

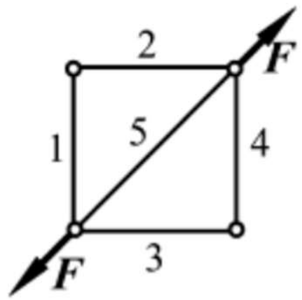
平面桁架结构：杆件都是二力杆，节点都是平面汇交力系



零力杆：杆件中内力为0（在当前加载条件下可以拆除）



(a)



(b)

(b)零力杆：1, 2, 3, 4
对1与2节点列平衡方程，只能杆力为0

(a)零力杆：3, 11, 9
杆1, 2, 4, 8, 12, 13肯定不为0
杆2, 3, 6的节点y方向只有3，所以3为零力杆，同理11
杆8，9, 11, 12节点11为零力杆，则9必为零力杆

本章主要内容：

1. 掌握空间汇交力系的合成与平衡，力在空间直角坐标系上的投影，力对点的矩和力对轴的矩的计算。
2. 了解空间任意力系的简化过程和掌握简化结果。
3. 能应用空间任意力系平衡方程求解单个物体的平衡问题。
4. 掌握重心的计算。

当空间力系中各力作用线汇交于一点时，称其为空间汇交力系.

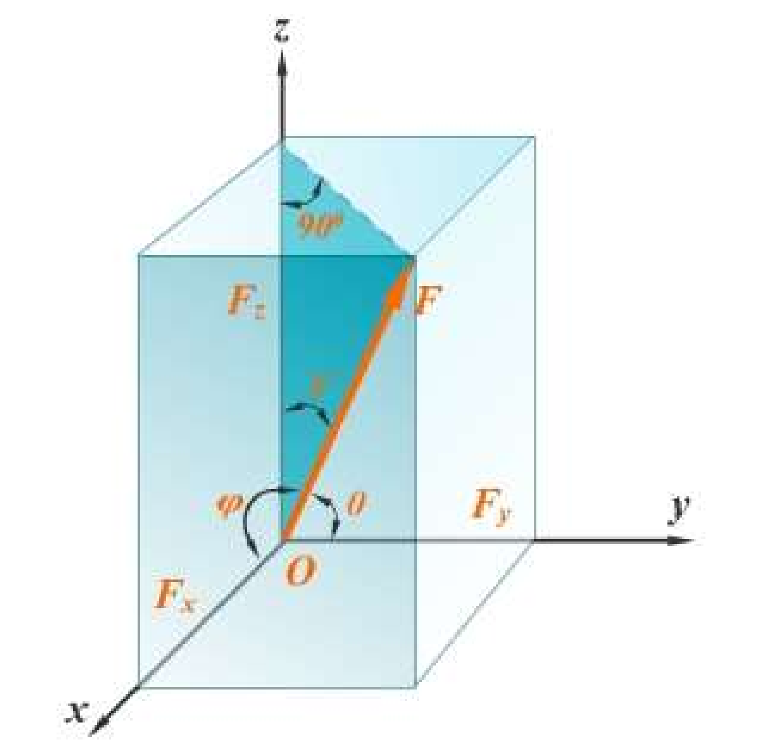
一. 力在直角坐标轴上的投影

直接投影法

$$F_x = F\cos\varphi$$

$$F_y = F\cos\theta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$



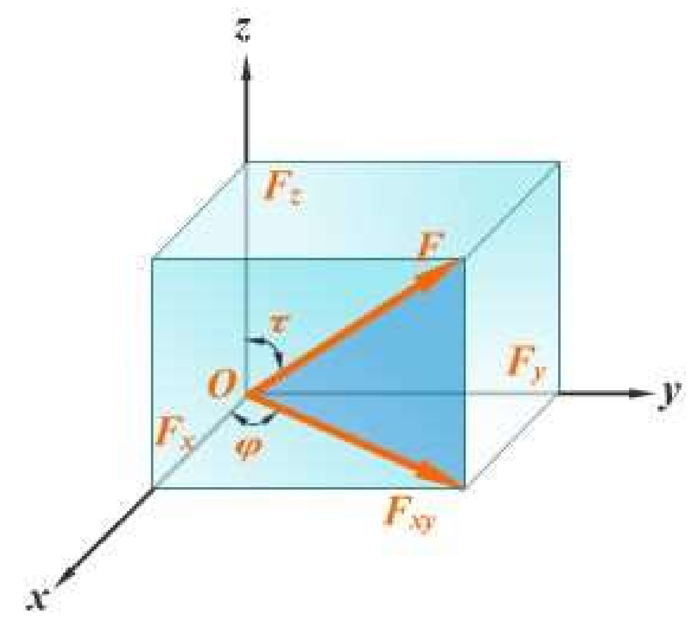
间接（二次）投影法

$$F_{xy} = F\sin\tau$$

$$F_x = F\sin\tau\cos\varphi$$

$$F_y = F\sin\tau\sin\varphi$$

$$F_z = F\cos\tau$$



二. 空间汇交力系的合力与平衡条件

空间汇交力系的合力 $\vec{F}_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F}_i$

合矢量（力）投影定理

$$F_{\mathrm{R}x} = \sum F_{ix} = \sum F_x \quad F_{\mathrm{R}y} = \sum F_{iy} = \sum F_y \quad F_{\mathrm{R}z} = \sum F_{iz} = \sum F_z$$

合力的大小 $F_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$

方向余弦

$$\cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_{\mathrm{R}}} \quad \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_{\mathrm{R}}} \quad \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{k}) = \frac{\sum F_z}{F_{\mathrm{R}}}$$

§3–1 空间汇交力系

空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

空间汇交力系平衡的充分必要条件是：

该力系的合力等于零，即 $\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0$

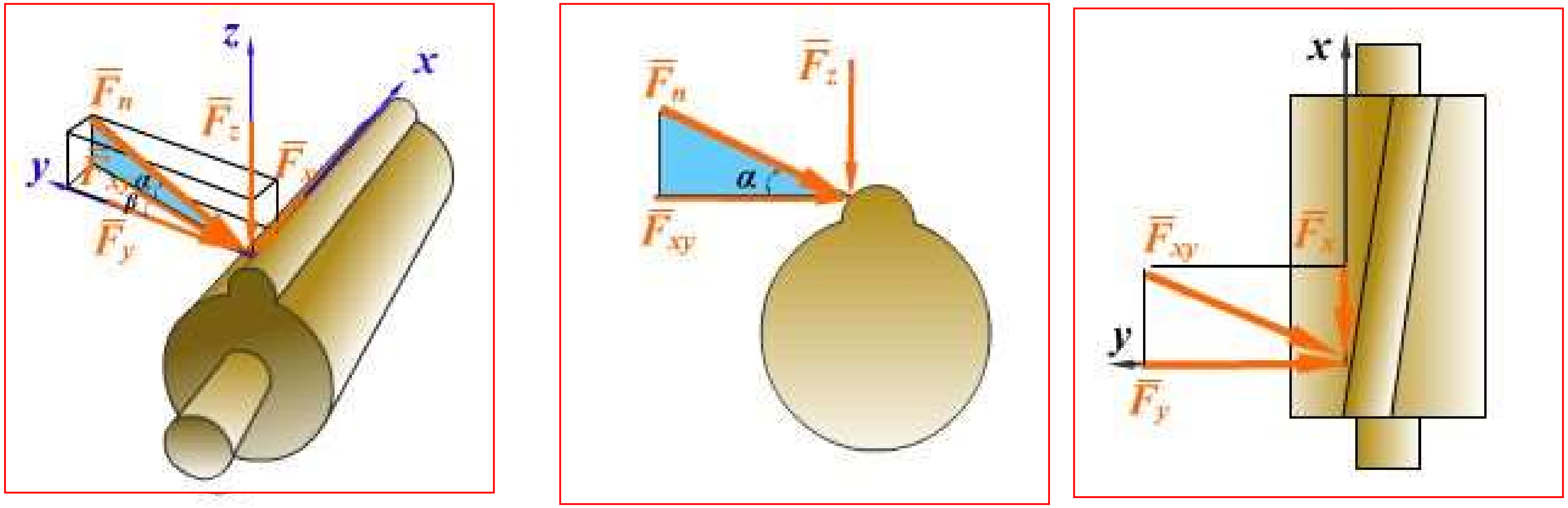
$$\boxed{\sum F_x = 0} \qquad \boxed{\sum F_y = 0} \qquad \boxed{\sum F_z = 0}$$

--称为空间汇交力系的平衡方程

空间汇交力系平衡的充要条件：该力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别为零.

例3-1　已知：$\vec{F}_n$, β , α

求：力 $\vec{F}_n$ 在三个坐标轴上的投影.



解：

$$F_z = -F_n \sin\alpha \qquad F_{xy} = F_n \cos\alpha$$

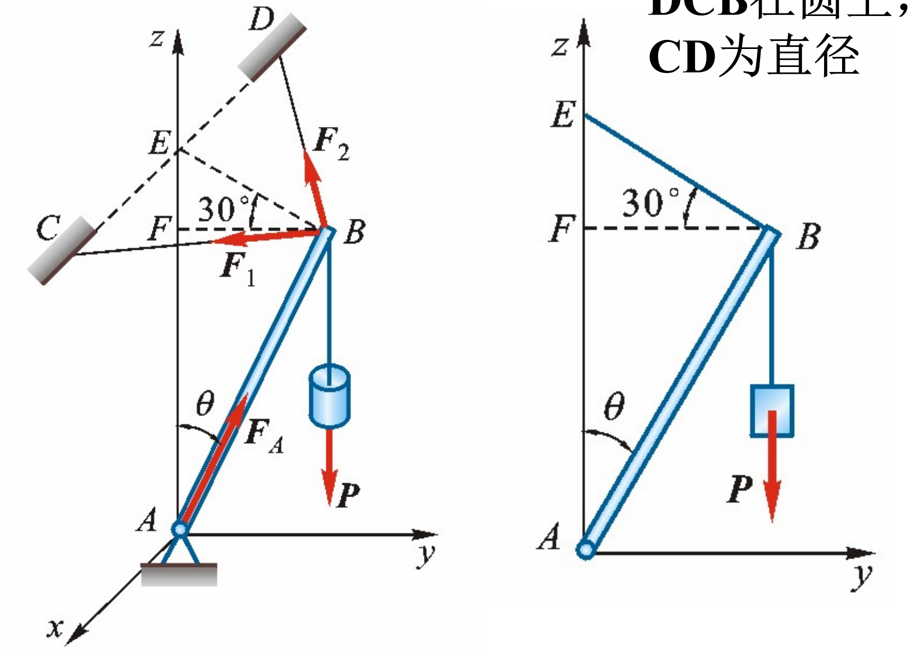
$$F_x = -F_{xy}\sin\beta = -F_n\cos\alpha\sin\beta$$

$$F_y = -F_{xy}\cos\beta = -F_n\cos\alpha\cos\beta$$

例3-2 已知：物重P=10kN，CE=EB=DE；$\theta=30^0$

求：杆受力及绳拉力

解： 画受力图，列平衡方程



DCB在圆上，
CD为直径

$$\sum F_x = 0$$

$$F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A \sin 30^\circ - F_1 \cos 45^\circ \cos 30^\circ - F_2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 0$$

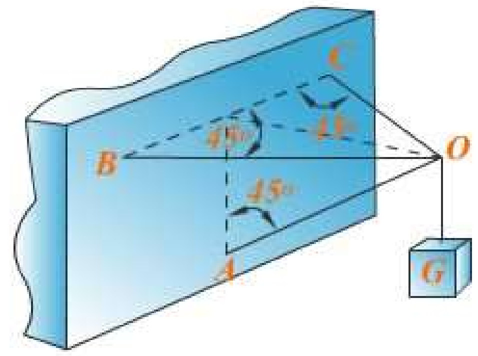
$$\sum F_z = 0$$

$$F_1 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_A \cos 30^\circ - P = 0$$

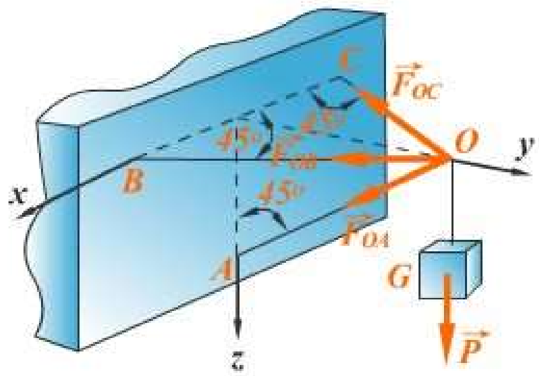
$$\Longrightarrow \quad F_1 = F_2 = 3.54\text{kN} \qquad F_A = 8.66\text{kN}$$

例3-3 已知：P=1000N ,各杆重不计.

求：三根杆所受力.



解： 各杆均为二力杆，取球铰O，画受力图。



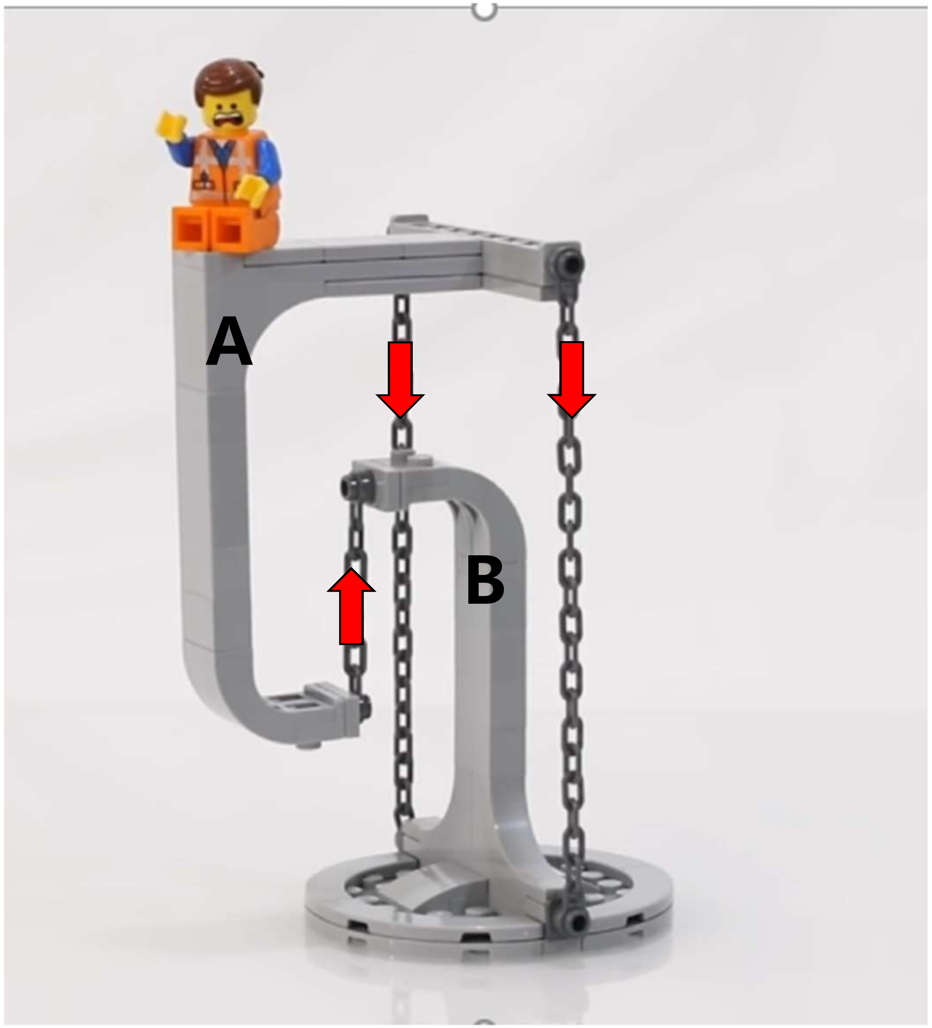
$$\sum F_x=0 \quad F_{OB}\sin 45^\circ - F_{OC}\sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y=0 \quad -F_{OB}\cos 45^\circ - F_{OC}\cos 45^\circ - F_{OA}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_z=0 \quad F_{OA}\sin 45^\circ - P = 0$$

$$F_{OA} = -1414\text{N} \qquad F_{OB} = F_{OC} = 707\text{N}（拉）$$

这是空间汇交力系吗？



刚体A与刚体B，三根绳索组成的刚体系

绳索张力互相平行
不是空间汇交力系

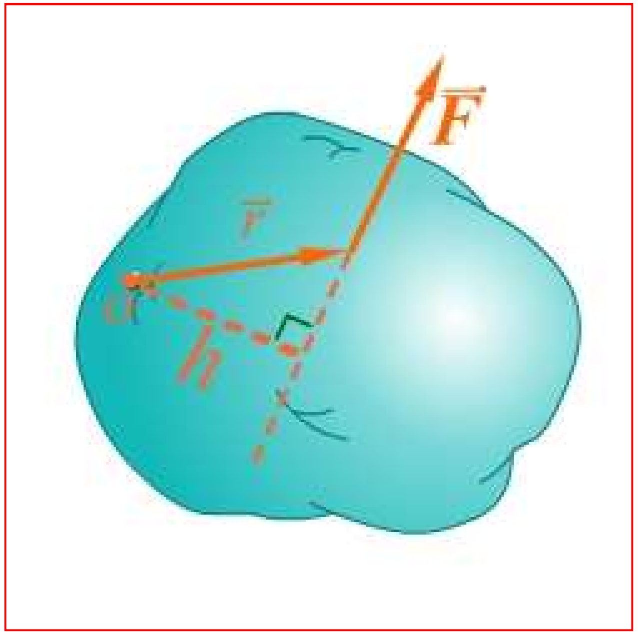
一. 力对点的矩以矢量表示 ——力矩矢

三要素:

（1）大小:力 $\vec{F}$ 与力臂的乘积

（2）转向:转动方向

（3）作用面：力矩作用面.



平面力矩：

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

平面力对点之矩是一个代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积，它的正负：力使物体绕矩心逆时针转向时为正，顺时针为负. 常用单位 $N \cdot m$ 或 $kN \cdot m$

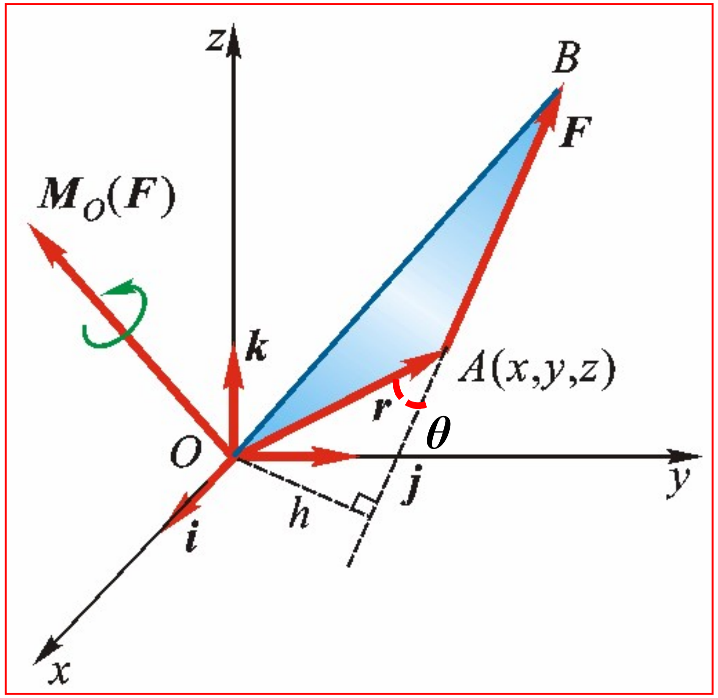
一. 力对点的矩以矢量表示 ——力矩矢

三要素:

（1）大小:力 $\vec{F}$ 与力臂的乘积

（2）转向向:转动方向

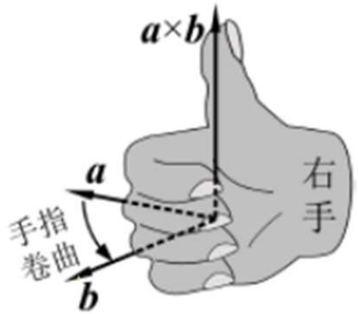
（3）作用面：力矩作用面的法向.



空间力矩：

大小：$F \cdot h = F \cdot r\sin\theta = 2S_{\Delta ABO}$

方向：垂于与**r**与**F**组成的平面，方向满足右手法则（作用面的法向）



$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}}$$

§ 3–2 力对点的矩和力对轴的矩

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad \vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\times(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})$$

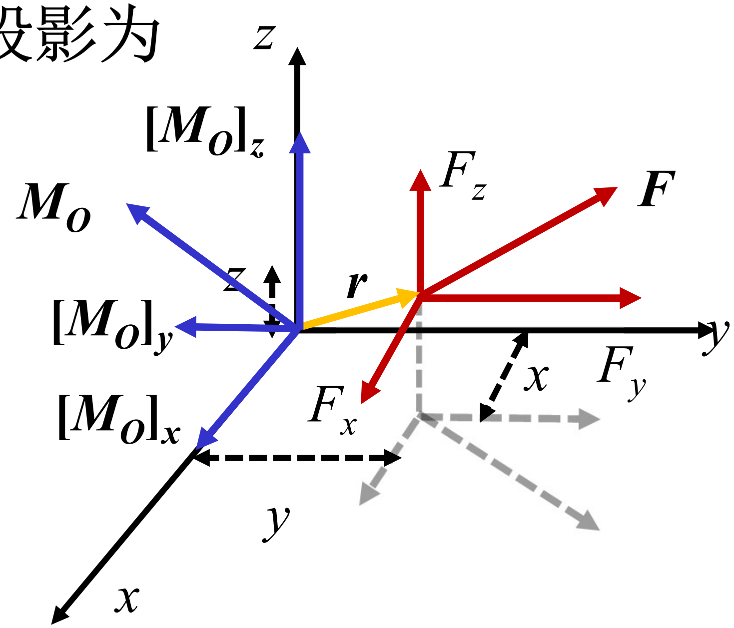
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k}$$

$\Rightarrow$ 力对点O的矩在三个坐标轴上的投影为

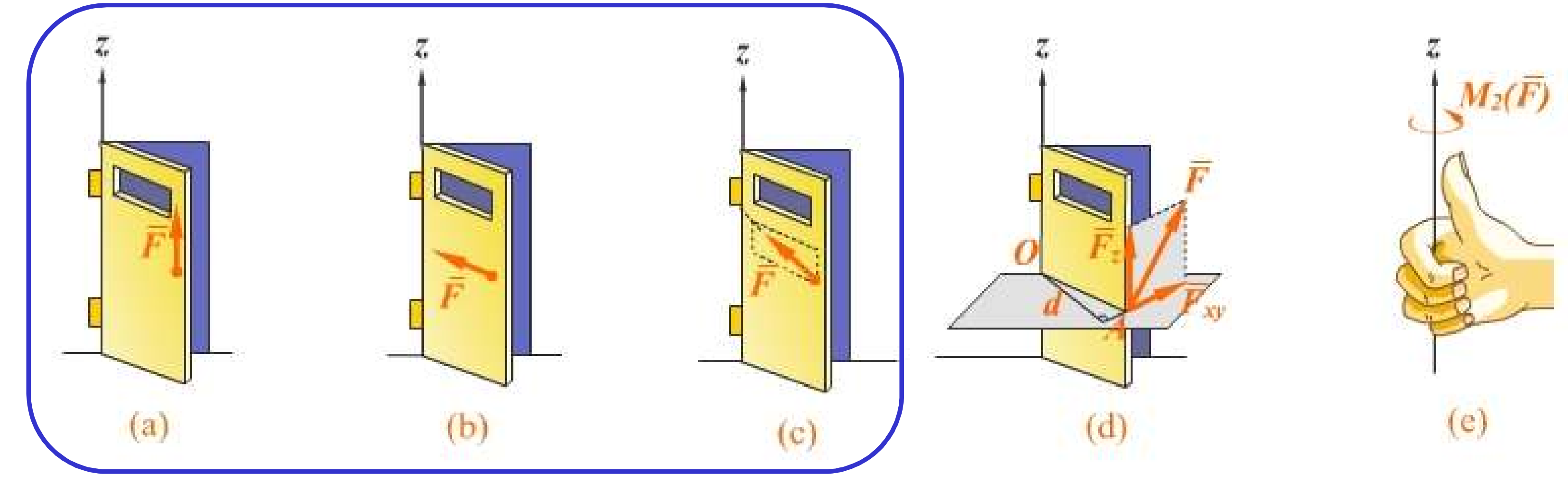
$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x=yF_z-zF_y$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y=zF_x-xF_z$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z=xF_y-yF_x$$

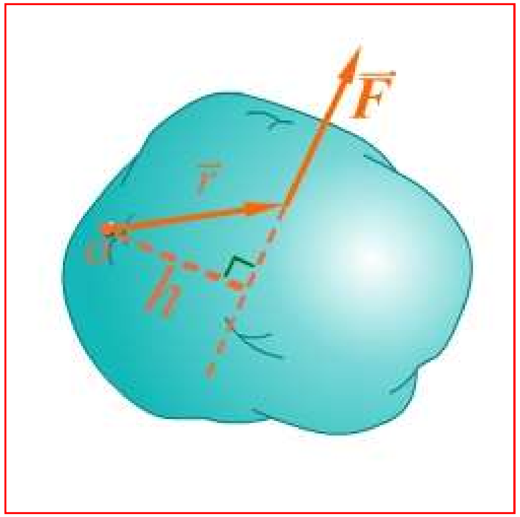


二. 力对轴的矩



力对z轴的力矩为0

力与轴相交或与轴平行（力与轴在同一平面内），力对该轴的矩为零.

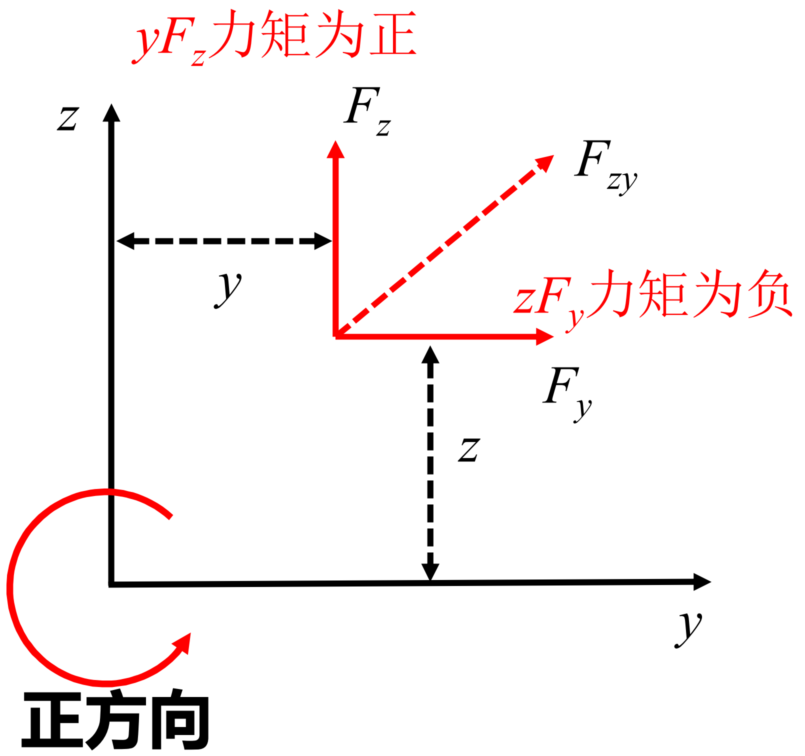


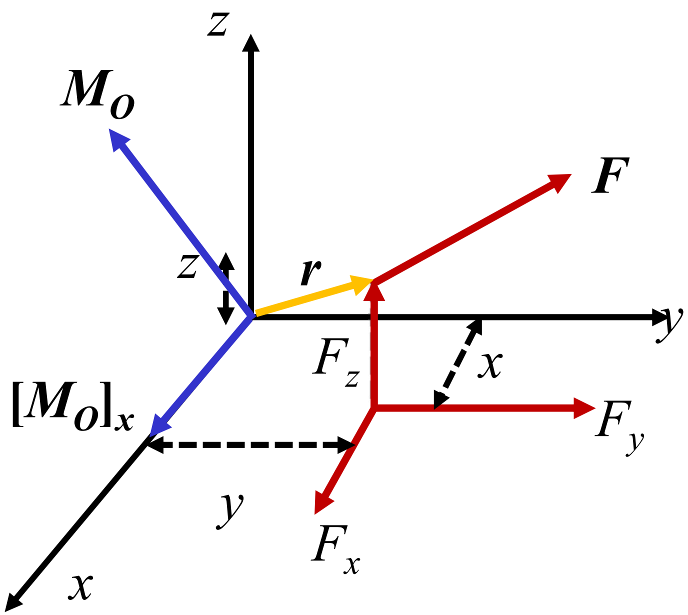
$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

空间力对轴的矩是一个代数量，其正负根据右手法则，与坐标轴同向为正，反向为负

三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$M_x(\vec{F})=M_x(\vec{F}_x)+M_x(\vec{F}_y)+M_x(\vec{F}_z)=F_z\cdot y-F_y\cdot z$$

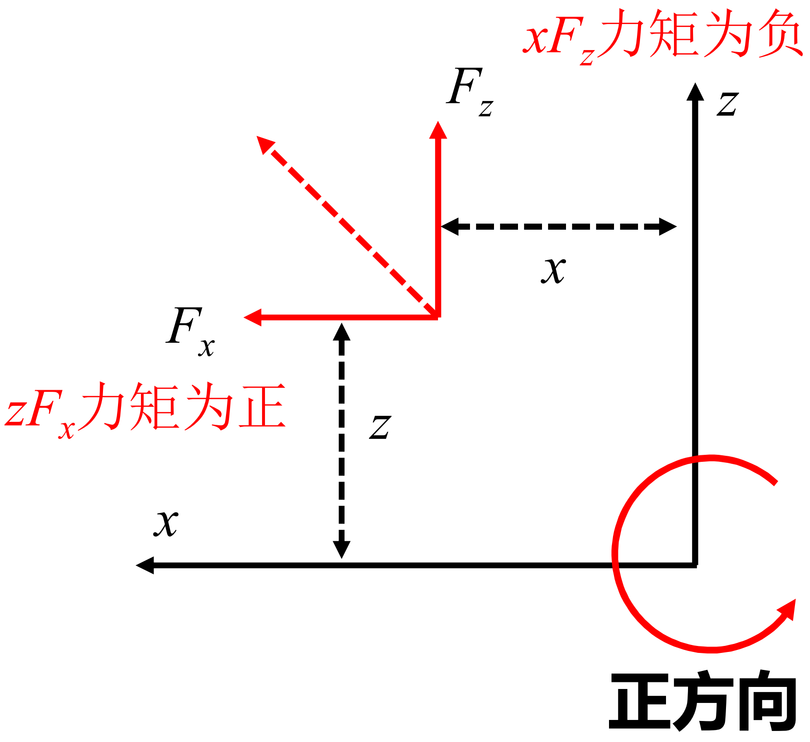


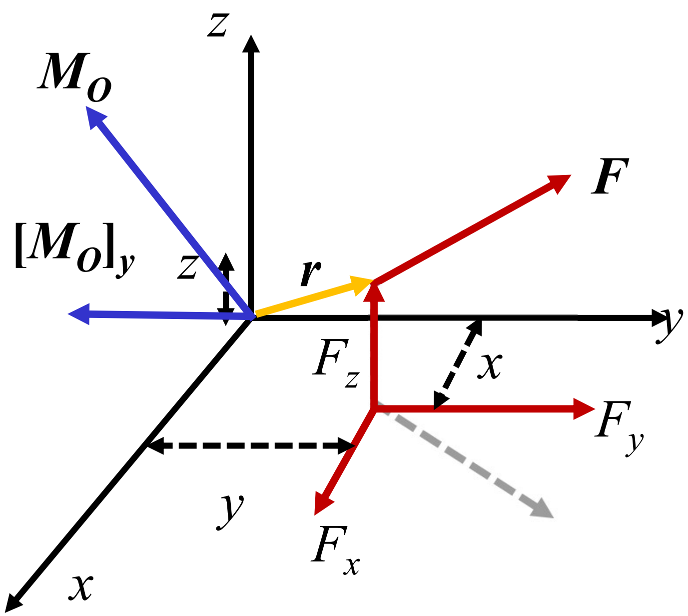


$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x=yF_z-zF_y=M_x(\vec{F})$$

三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_x) + M_y(\vec{F}_y) + M_y(\vec{F}_z) = F_x \cdot z - F_z \cdot x$$

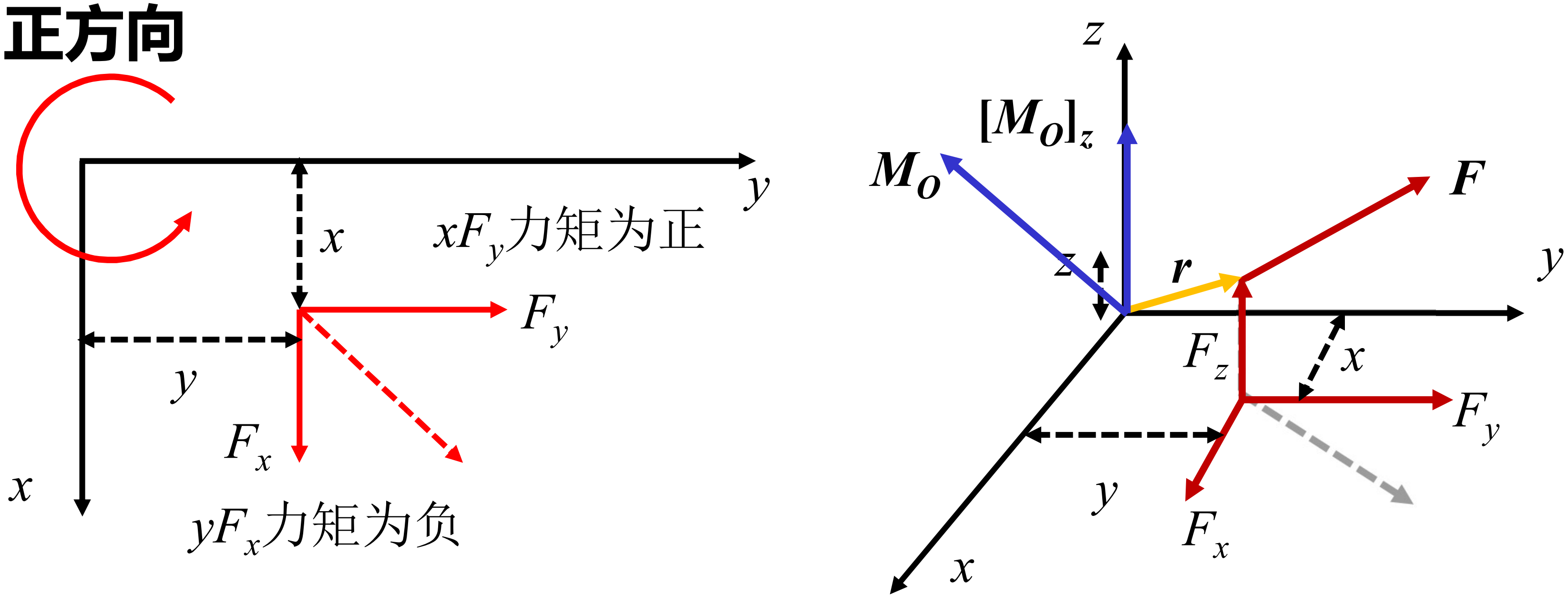




$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z = M_y(\vec{F})$$

三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y) + M_z(\vec{F}_z) = F_y \cdot x - F_x \cdot y$$



$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x = M_z(\vec{F})$$

三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$M_x(\vec{F}) = F_z \cdot y - F_y \cdot z$$

$$M_y(\vec{F}) = F_x \cdot z - F_z \cdot x$$

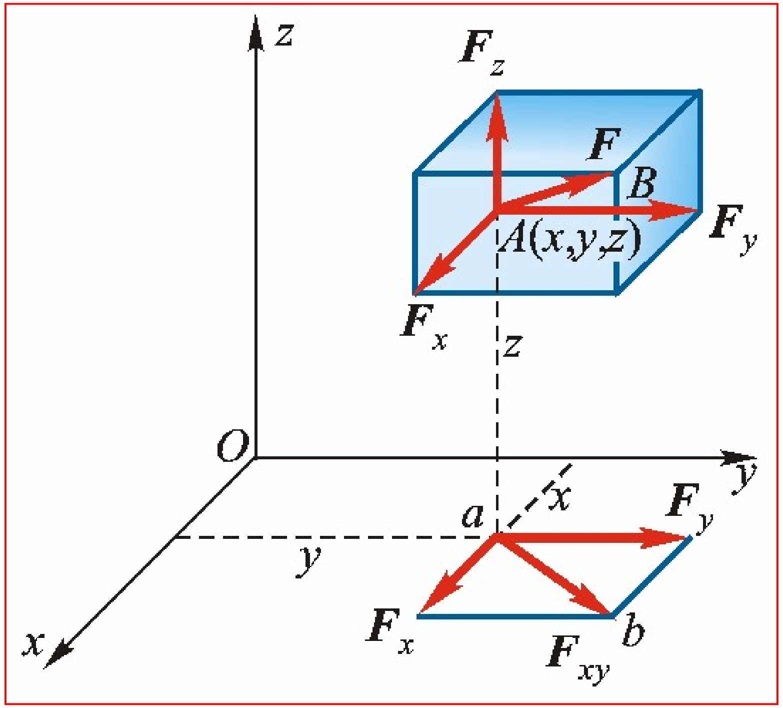
$$M_z(\vec{F}) = F_y \cdot x - F_x \cdot y$$

空间力对轴的矩：将空间力投影到与轴垂直平面，平面力对与轴相交的点矩。（标量, 正负由轴的正向决定）

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y = M_x(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z = M_y(\vec{F})$$

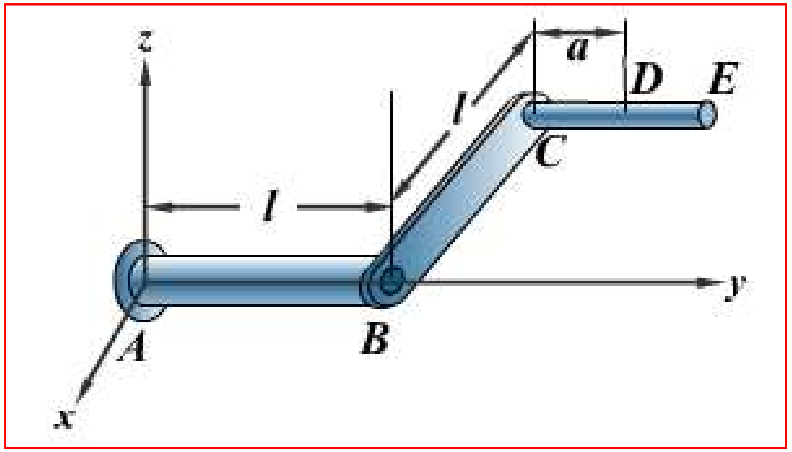
$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x = M_z(\vec{F})$$



例3-4

已知：已知曲柄在*xy*平面上

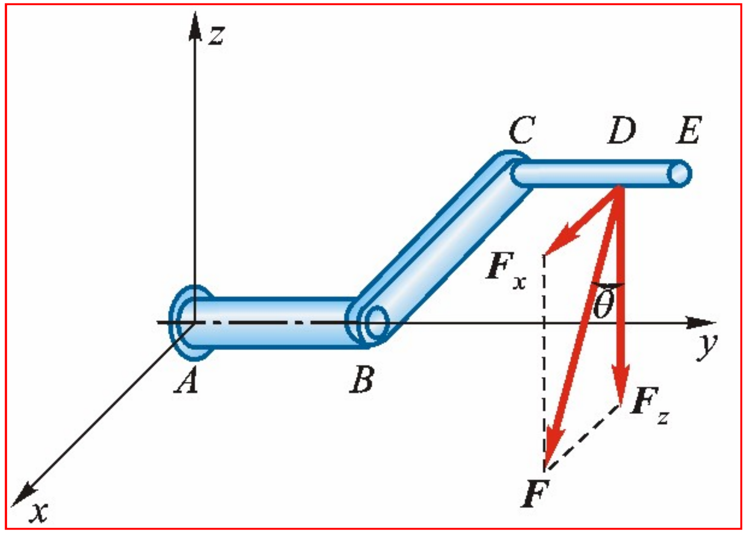
求：$M_x\left(\vec{F}\right), M_y\left(\vec{F}\right), M_z\left(\vec{F}\right)$



矢径 $\boldsymbol{r}=(-l, l+a, 0)$ (曲柄在*xy*平面内）

力 $\boldsymbol{F}=(F\sin\theta, 0, -F\cos\theta)$

力$\boldsymbol{F}$对A点的力矩$\boldsymbol{M_O(F)}$



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -l & l+a & 0 \\ F\sin\theta & 0 & -F\cos\theta \end{vmatrix}$$

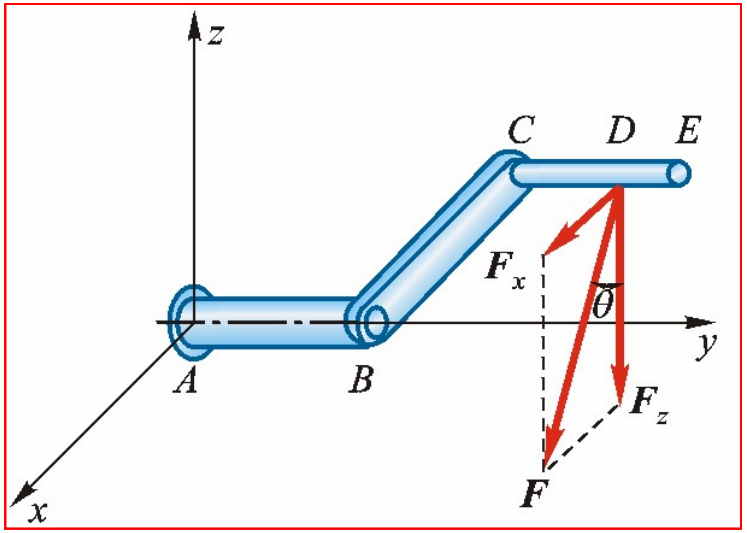
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$$= \underbrace{-F(l+a)\cos\theta}_{M_x\left(\vec{F}\right)}\vec{i} \underbrace{-Fl\cos\theta}_{M_y\left(\vec{F}\right)}\vec{j} \underbrace{-F(l+a)\sin\theta}_{M_z\left(\vec{F}\right)}\vec{k}$$

例3-4

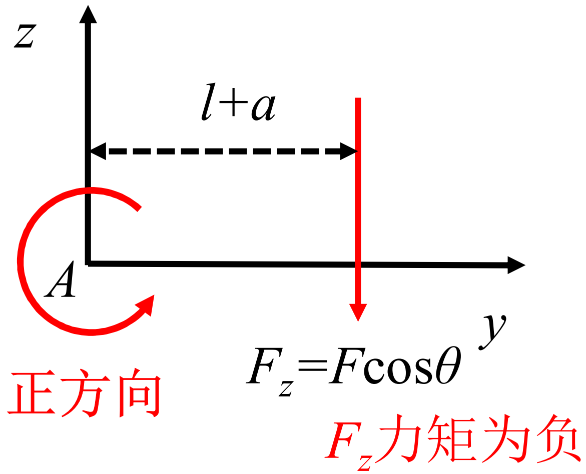
已知：F, l, a, θ

求：$M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$



解： 把力$\vec{F}$分解如图

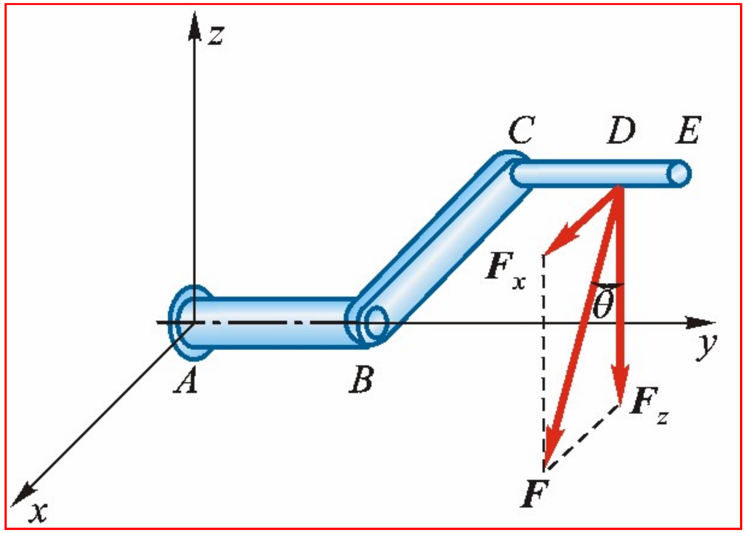
$$M_x(\vec{F}) = -F(l+a)\cos\theta$$



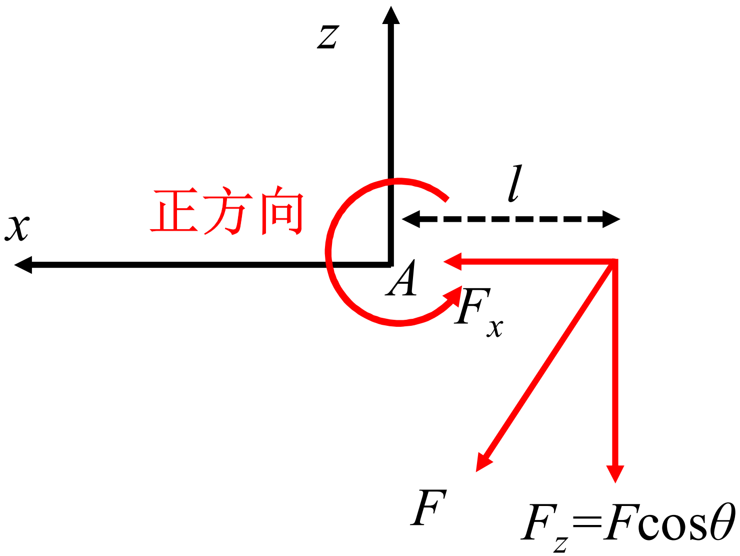
例3-4

已知：F,l,a,θ

求：$M_x(\vec{F}),M_y(\vec{F}),M_z(\vec{F})$



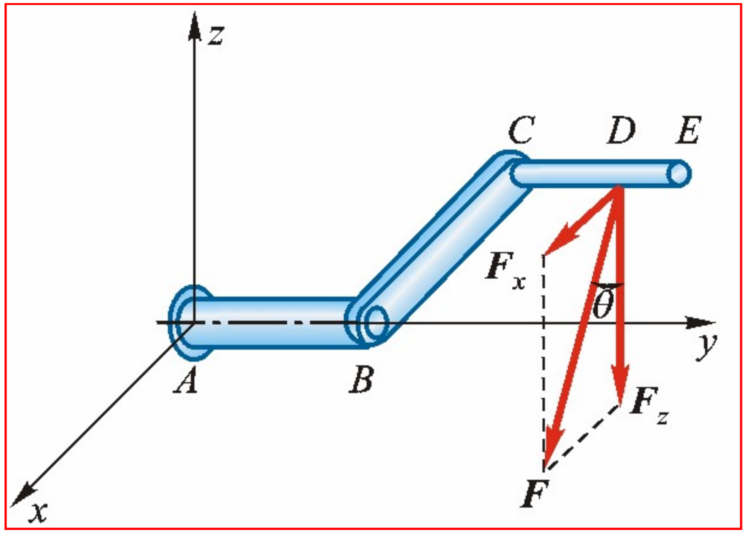
解：把力$\vec{F}$分解如图



$$M_y(\vec{F})=-Fl\cos\theta$$

F_z力矩为负

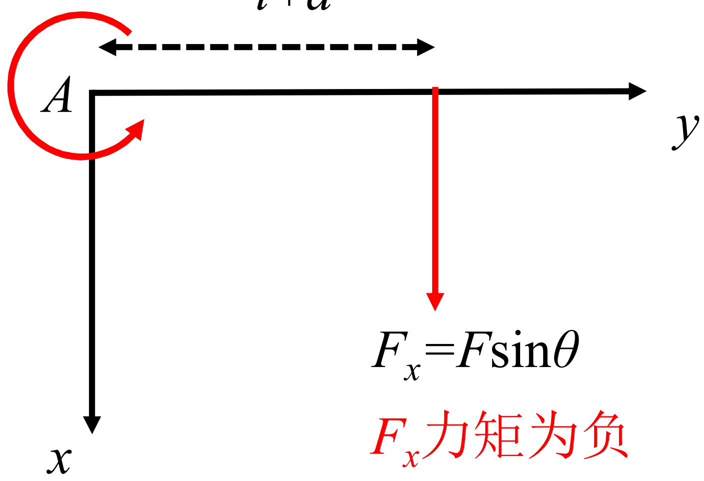
例3-4



已知： F, l, a, θ

求：$M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$

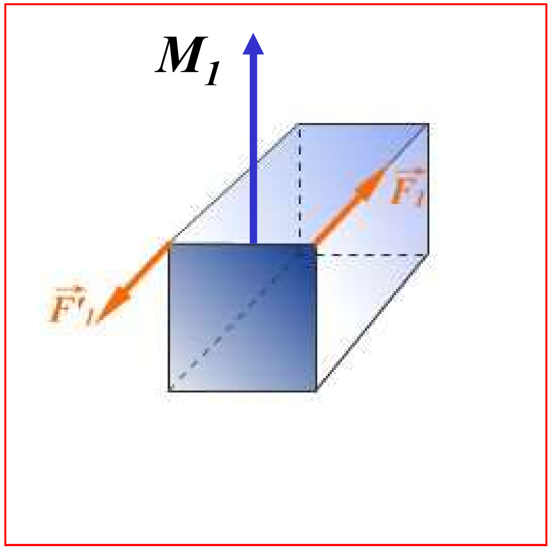
解：把力 $\vec{F}$ 分解如图

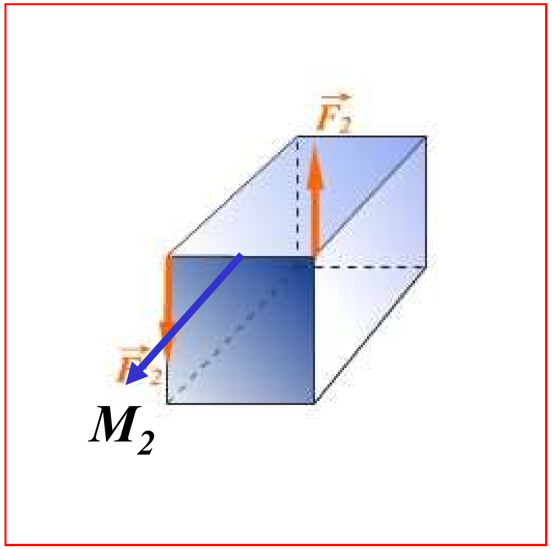


$$M_z(F) = -F(l+a)\sin\theta$$

一. 力偶矩以矢量表示——力偶矩矢

$$F_1 = F_2 = F_1' = F_2'$$





空间力偶的三要素

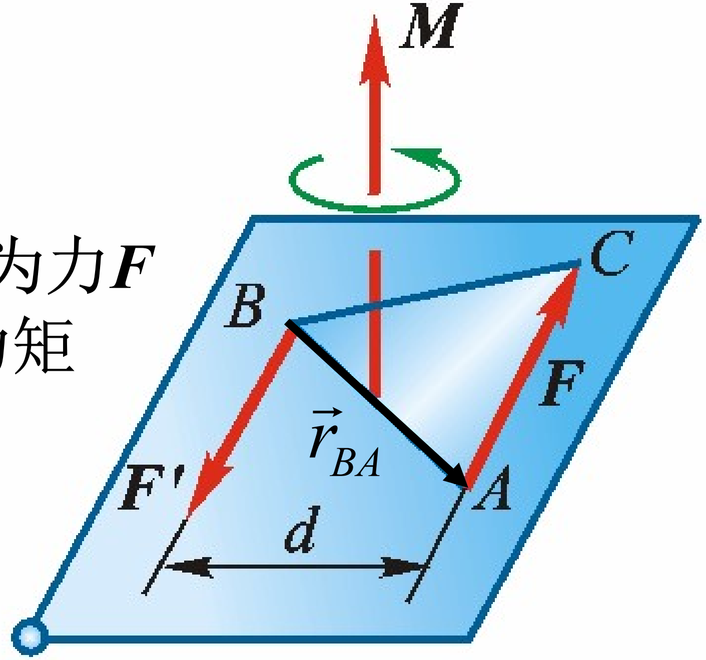
（1） 大小：力与力偶臂的乘积；

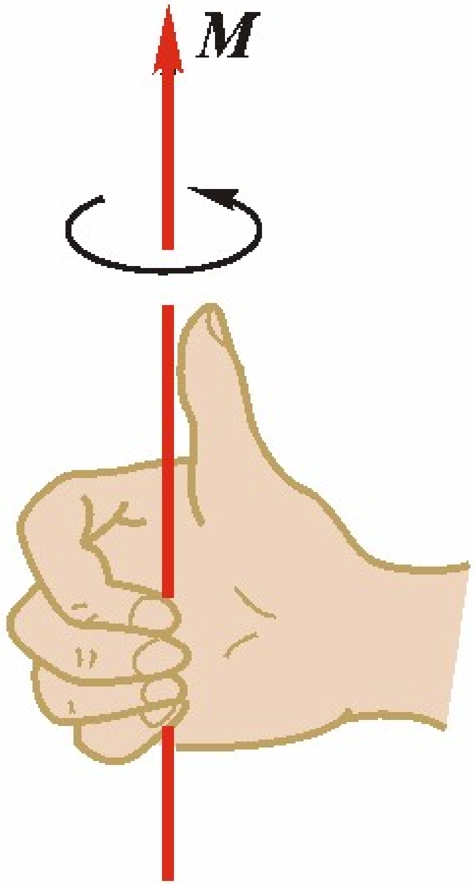
（2） 转向：转动方向；

（3） 作用面：力偶作用的平面。

§3–3 空间力偶

可以理解为力***F***
对点B的力矩





$$\vec{M}=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}$$

力矩：***r***为矩心到力的矢径
力偶矩：$\boldsymbol{r_{BA}}$为两个力的作用点的矢径
–空间力偶与其作用面内位置无关

空间力偶可以平移到与其作用面平行的任意平面上而不改变力偶对刚体的作用效果（矢量沿作用线）

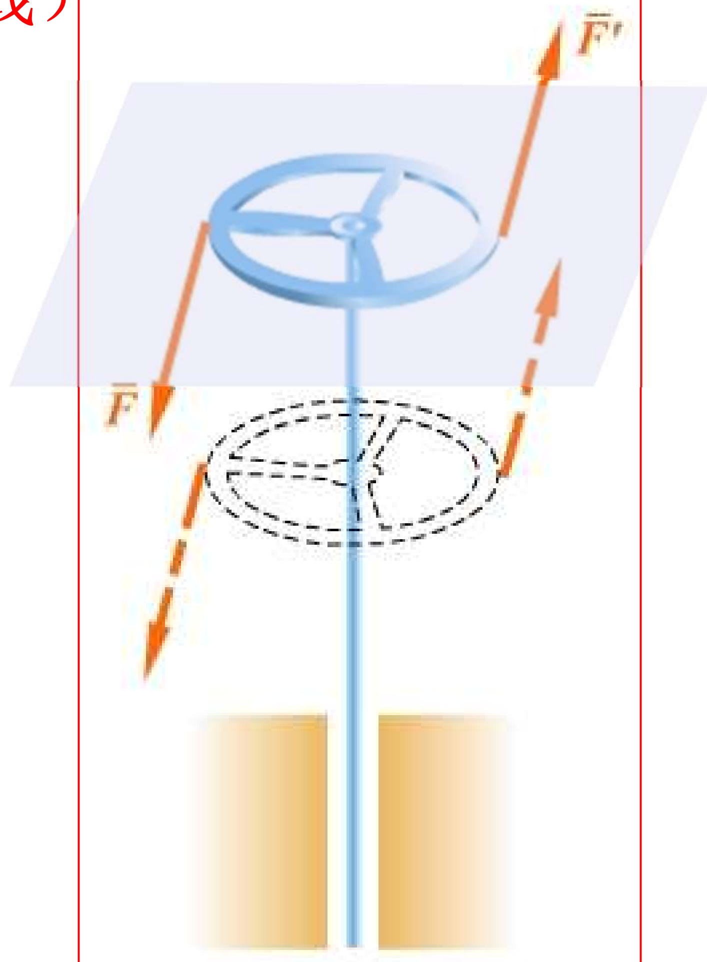
只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移转，且可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变

（平面力偶矩）

力偶矩矢是矢量

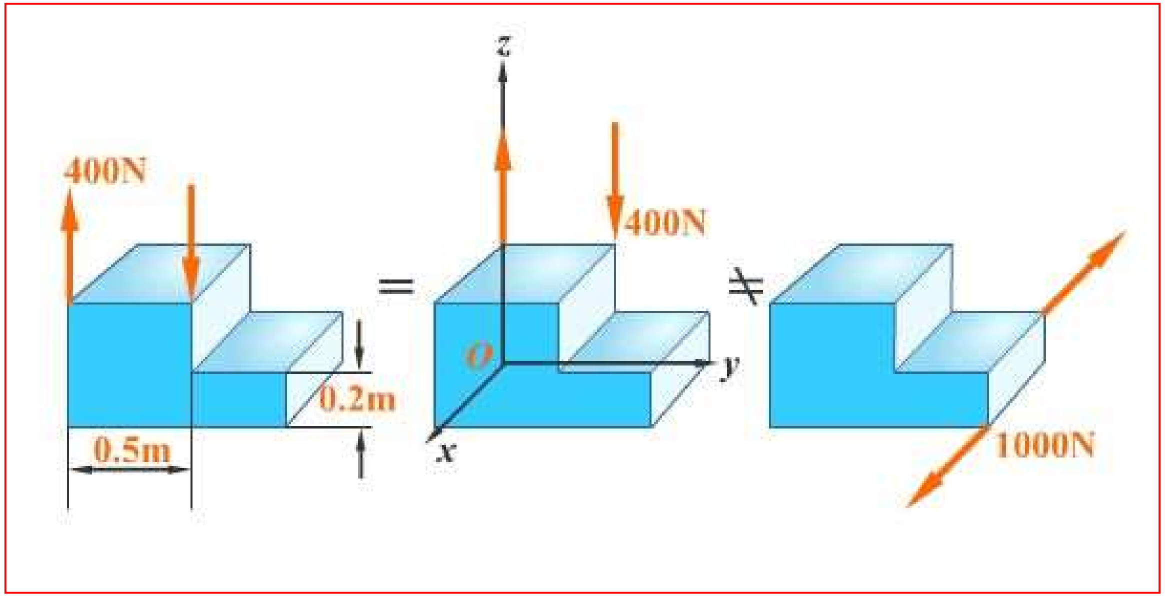
（大小、方向、作用面）

只要保持力偶矩矢大小与方向不变，可以在同一个刚体内自由移动



二. 力偶的等效定理

实例

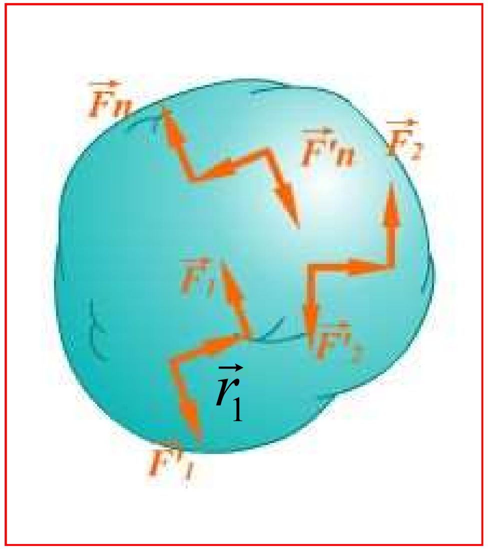


力偶矩大小：
Fh=400*0.5 Nm
=1000*0.2 Nm

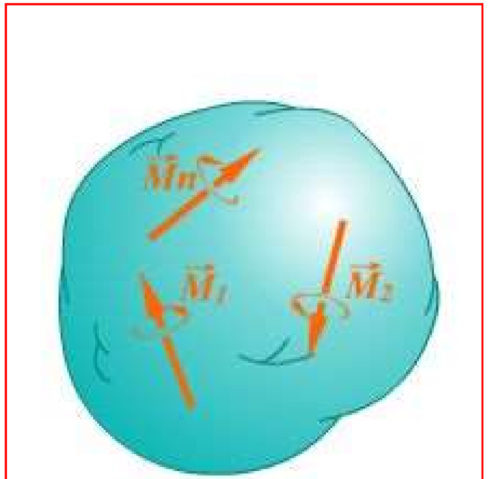
空间力偶的等效定理：作用在同一刚体上的两个力偶，如果其力偶矩相等，则它们彼此等效。

（与平面力偶相比，空间力偶需要考虑方向）

三．力偶系的合成与平衡条件

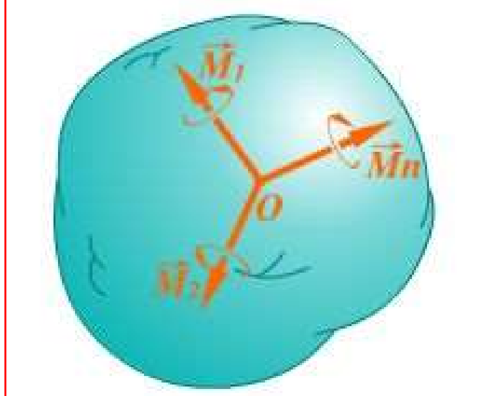


=



=

力偶移到刚体内一点



力偶可以在同一刚体内随意移动

$$\vec{M}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_1,\vec{M}_2=\vec{r}_2\times\vec{F}_2,\ldots\ldots,\vec{M}_n=\vec{r}_n\times\vec{F}_n$$

$$\boxed{\vec{M}=\sum\vec{M}_i}$$

$\vec{M}$为合力偶矩矢，等于各分力偶矩矢的矢量和.

$$M_x=\sum M_x\ ,M_y=\sum M_y\ ,M_z=\sum M_z$$

合力偶矩矢的大小和方向余弦

$$M=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2+(\sum M_z)^2}$$

$$\cos\theta=\frac{\sum M_x}{M}\qquad \cos\beta=\frac{\sum M_y}{M}\qquad \cos\gamma=\frac{\sum M_z}{M}$$

空间力偶系平衡的充分必要条件是：合力偶矩矢等于零，即

$$\vec{M}=0$$

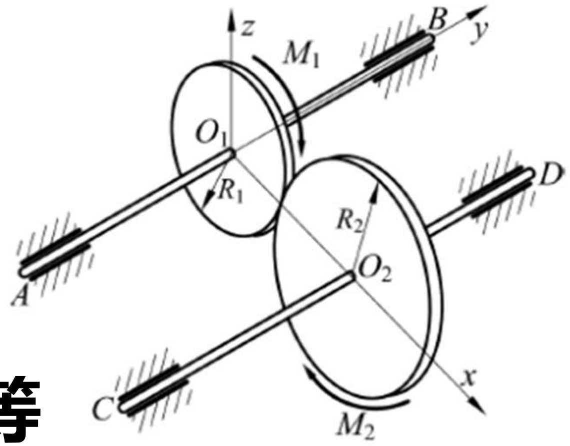
$$\boxed{\sum M_x=0\quad \sum M_y=0\quad \sum M_z=0}$$

--称为空间力偶系的平衡方程.

单选题 1分

设置

两齿轮半径$R_2=2R_1$，分别收到力偶矩M_1与M_2作用，达到平衡状态，下面说法正确的是



A $M_1=M_2$

B 轴AB与CD上约束力大小相等

C 可以把力偶矩M_1从齿轮O_1移动到齿轮O_2

D 以上说法都不正确

提交

作业

教材习题： 3-2，3-4， 3-7