上节课内容回顾

1. 平面汇交力系

可传递性+力合成—作用线汇交一点

2. 平面汇交力系的平衡

几何法：力多边形封闭
解析法：x与y方向投影的合力为零

3. 解题基本思路

确定要分析的刚体，画受力图
找二力杆与三力汇交点，尽可能多确定未知力的方向
平衡的条件

4. 力矩

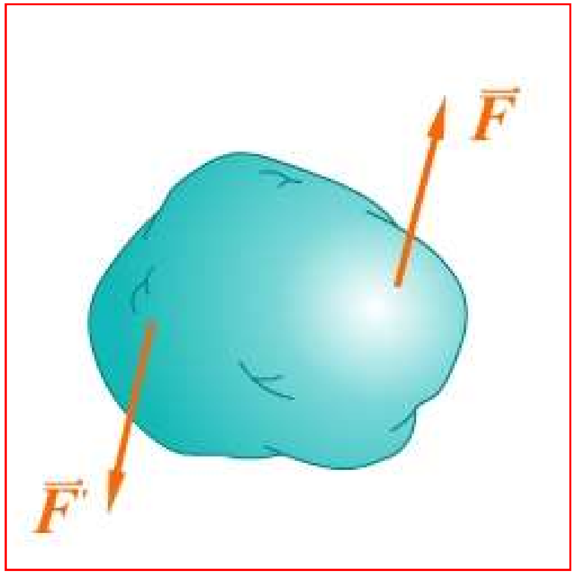
作用在刚体上的力对一个点的转动效果
力矩的计算（力大小*矩心到作用线的垂直距离）
平面力矩是个标量（正负判据）
解析法（投影在x与y轴分别算）

三、力偶和力偶矩

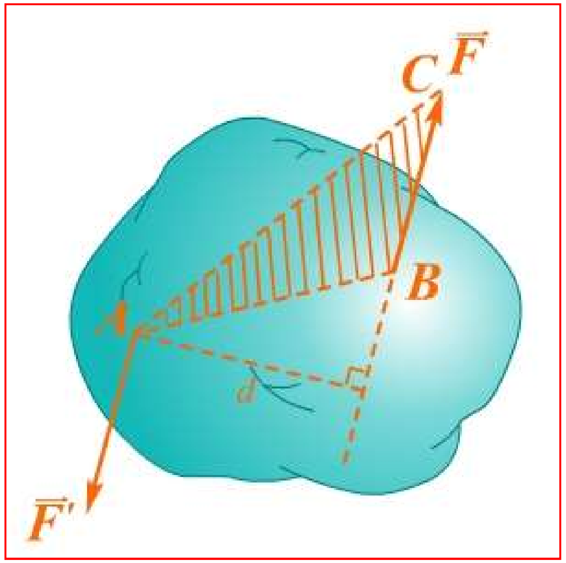
力偶：描述非共点力的作用效果（转动）

由两个等值、反向、不共线的平行力组成的力系称为力偶，记作 $(\vec{F},\vec{F}')$

力偶矩：$M=\pm F\cdot d$



力偶中两力所在平面称为力偶作用面.

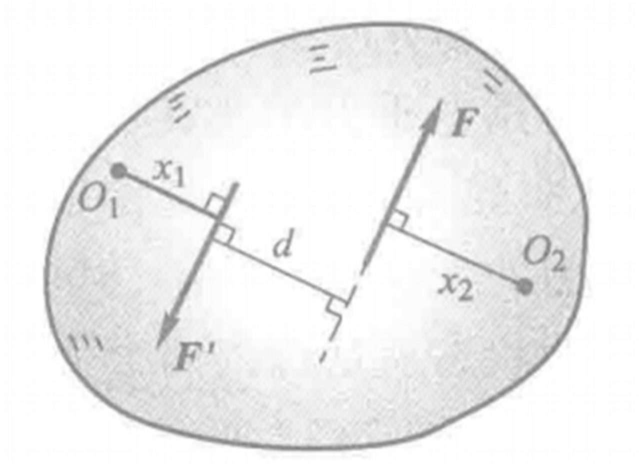


力+力偶是静力学两个基本要素

四、同平面内力偶的等效定理（力偶的矩心）

定理：同平面内的两个力偶，如果力偶矩相等，则两力偶彼此等效。

（力偶的力偶矩不随着矩心的变化而变化, 力矩怎样？）



对O_1计算力偶矩：$M_{O1}(F)+M_{O1}(F')=F\cdot(d+x_1)-F'\cdot x_1=Fd$

对O_2计算力偶矩：$M_{O2}(F)+M_{O2}(F')=-F\cdot x_2+F'\cdot(d+x_2)=Fd$

四、同平面内力偶的等效定理

定理：同平面内的两个力偶，如果力偶矩相等，则两力偶彼此等效。（力偶的力偶矩不随着矩心的变化而变化）

推论：

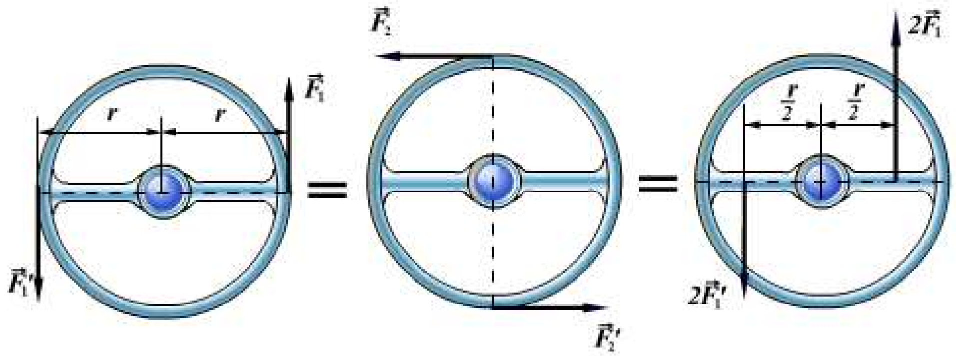
1. 任一力偶可在它的作用面内任意转移，而不改变它对刚体的作用。因此力偶对刚体的作用与力偶在其作用面内的位置无关。

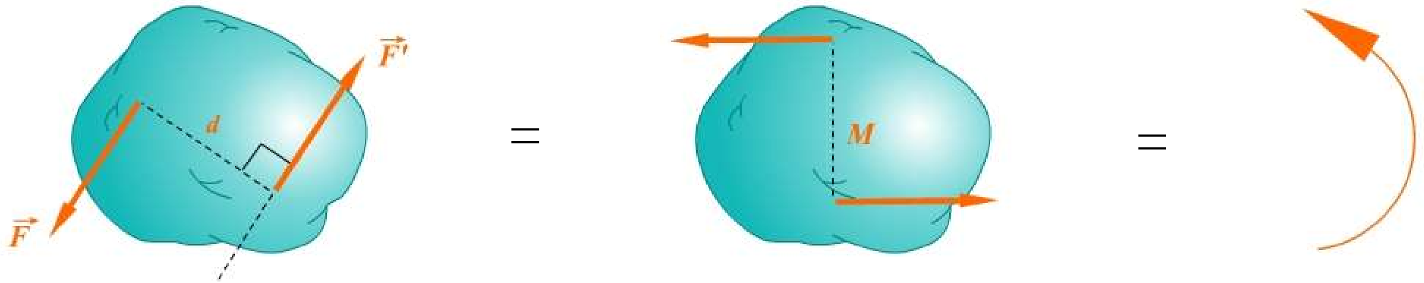
刚体力偶只与作用面有关，与作用点无关

只要保持力偶矩不变，可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变.

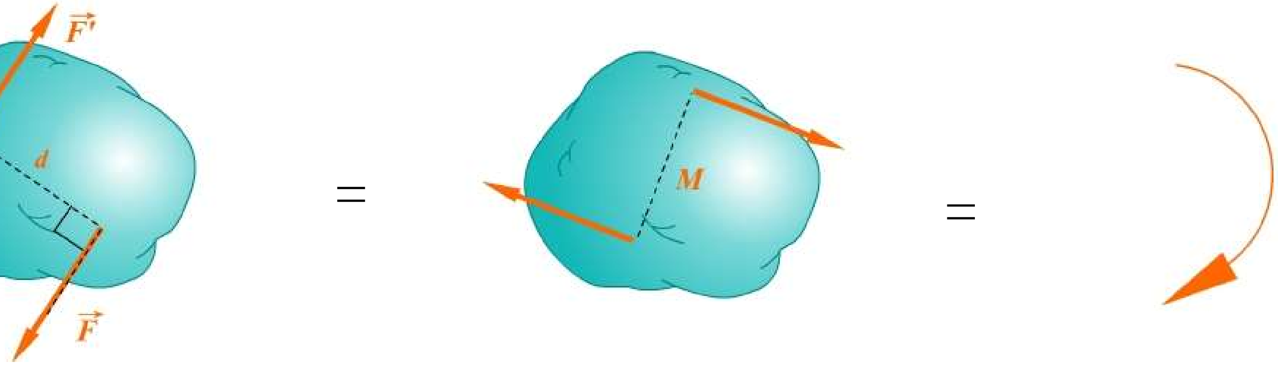
2. 力偶中的力偶臂和力的大小都不是力偶的特征量，只有力偶矩是平面力偶作用的唯一度量。

§2-2 平面力对点之矩与平面力偶理论





$$M = Fd$$



$$M = -Fd$$

只有力偶矩是平面力偶作用的唯一度量

小结

力与力偶

1. 力：大小、方向与作用线
   力偶：大小、（转动）方向

2. 力在刚体内沿作用线传递
   力偶在作用平面自由移动

3. 力能组成平面汇交力系，平面平行力系，平面任意力系
   力偶能组成平面力偶系

4. 平面汇交力系：矢量加减
   平面力偶系：标量加减

力矩与力偶矩

1. 力矩：大小、方向
   力偶矩：大小、方向

2. 力矩：度量力对刚体绕矩心的转动效果,大小与矩心的位置相关。
   力偶矩：度量力偶对刚体的转动效果，力偶矩大小与作用面内位置无关。

多选题 1分

设置

以下关于平面情形下力偶(矩）与力矩的说法，正确的是（多选题）

A 在平面情形，两者都是标量，可以直接进行标量加减计算

B 一般规定力矩逆时针为正，顺时针为负，而力偶则不满足以上规定

C 力偶与力矩都是力对点的矩，是一样的物理量

D 力偶矩是衡量力偶对刚体转动状态的改变能力，力偶矩的大小可通过计算组成力偶的两个力对任意点的矩的标量和得到

提交

五、平面力偶系的合成和平衡条件

平面力偶系：
只有力偶作用，并且力偶都在同一平面内

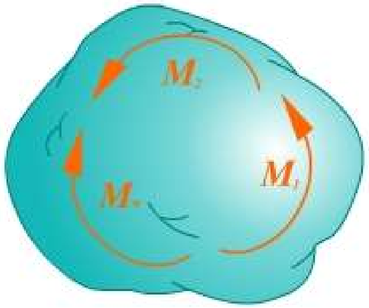
已知：$M_1, M_2, \cdots M_n;$

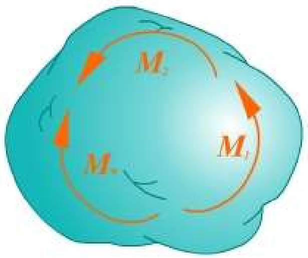
任选一段距离 d

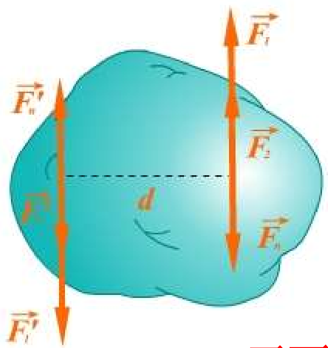
$$\frac{M_1}{d} = F_1 \qquad M_1 = F_1 d$$

$$\frac{M_2}{d} = F_2 \qquad M_2 = F_2 d$$

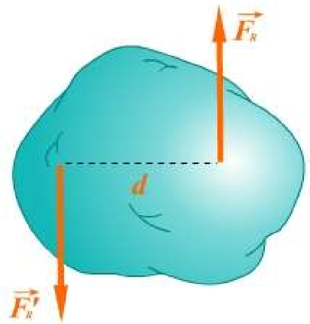
$$\left|\frac{M_n}{d}\right| = F_n \qquad M_n = -F_n d$$







=



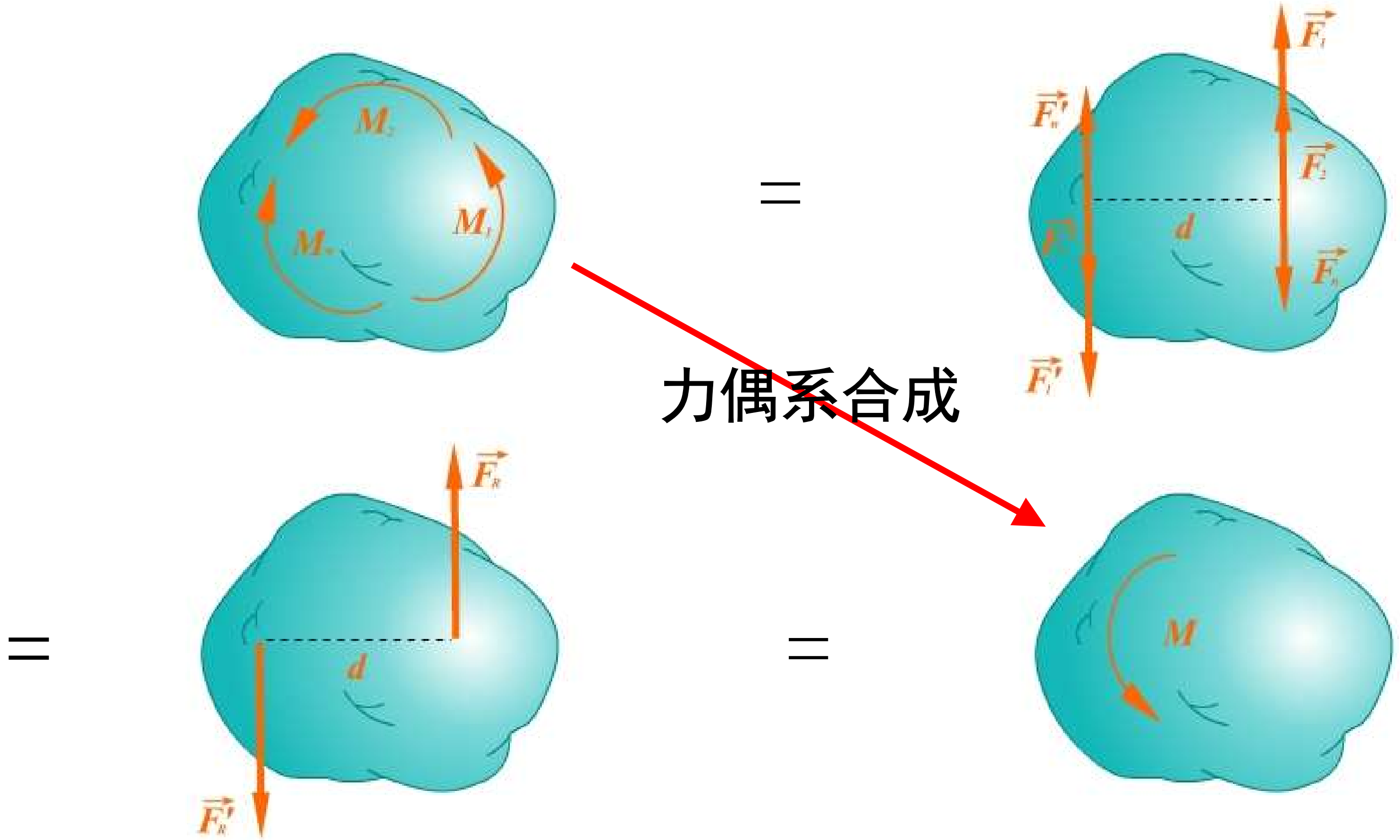
平面汇交力系-合力

§2-2 平面力对点之矩与平面力偶理论

$$F_{\mathrm{R}} = F_1 + F_2 + \cdots - F_n$$

（平面汇交力系） $F_R = F'_{\mathrm{R}}$

$$F'_{\mathrm{R}} = F'_1 + F'_2 + \cdots - F'_n$$



§2-2 平面力对点之矩与平面力偶理论

$$M = F_R d = F_1 d + F_2 d + \cdots - F_n d = M_1 + M_2 + \cdots M_n$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum M_i$$

通过力的合成去定义力偶矩的合成

平面力偶系平衡的充要条件 $M = 0$，有如下平衡方程

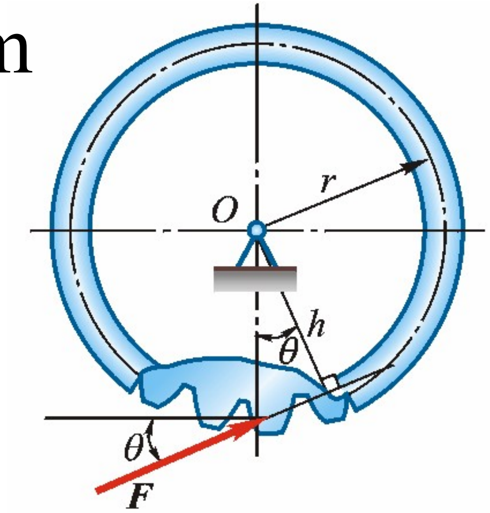
$$\sum M_i = 0$$

平面力偶系平衡的必要和充分条件是：所有各力偶矩的代数和等于零.

例2-6(简单力矩计算)

已知：$F=1400\text{N}$, $\theta=20^\circ$, $r=60\text{mm}$

求：$M_O(\vec{F})$

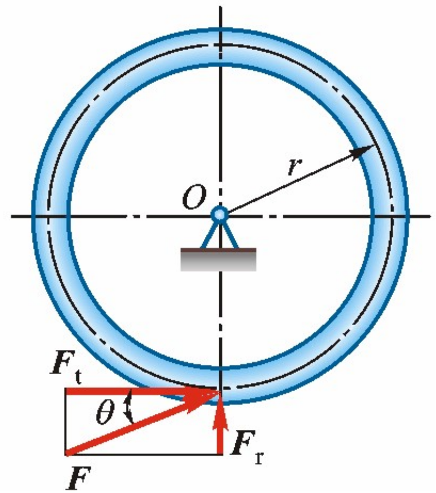


解：直接按定义

$$M_O\left(\vec{F}\right)=F\cdot h=F\cdot r\cdot\cos\theta$$

$$=78.93\text{N}\cdot\text{m}$$

按合力矩定理



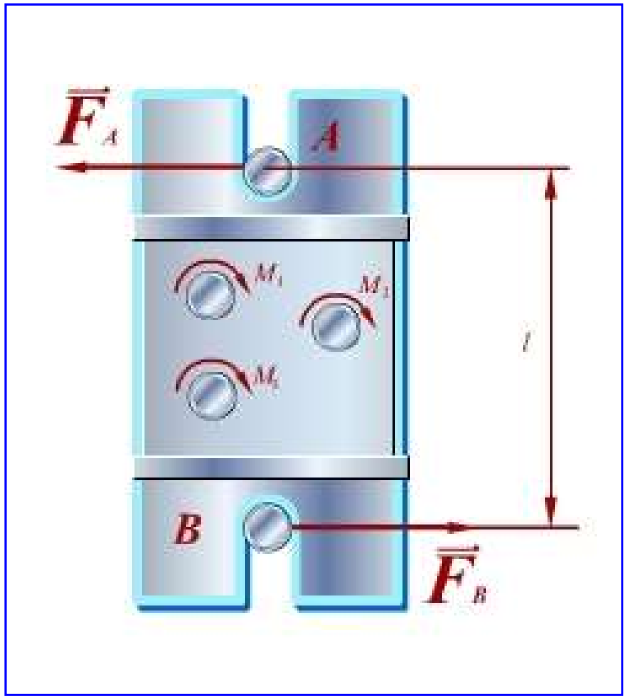
$$M_O\left(\vec{F}\right)=M_O\left(\vec{F}_t\right)+M_O\left(\vec{F}_r\right)$$

$$=F\cdot\cos\theta\cdot r=78.93\text{N}\cdot\text{m}$$

例2-7（平面力偶系平衡）

已知：$M_1 = M_2 = 10\mathbf{N\cdot m}, M_3 = 20\mathbf{N\cdot m}, l = 200\mathbf{mm}$；

求：　光滑螺柱 AB 所受水平力.



解： 由力偶只能由力偶平衡的性质，其受力图为

$$\sum M = 0$$

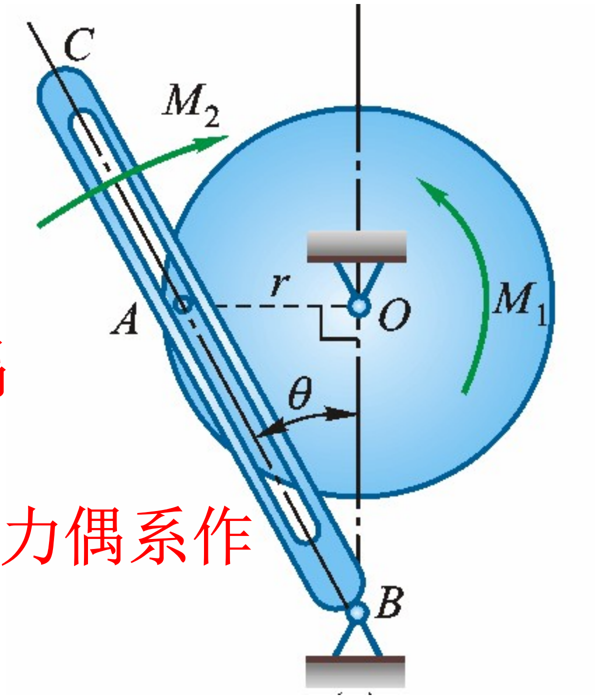
$$F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

解得 $$F_A = F_B = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{l} = 200\mathrm{N}$$

例2-8(平面力偶系平衡)

已知 $M_1 = 2\mathrm{kN \cdot m}, OA = r = 0.5\mathrm{m}, \theta = 30^\circ;$

求：平衡时的 M_2 及铰链 O, B 处的约束力.



M

M_1与M_2均为力偶

杆BC与圆轮O在力偶系作用下平衡。

思考题：
只受到力偶的杆件是二力杆吗？

不是，因为力偶也是主动力（系）

解： 力偶只能由力偶平衡的性质

取杆 BC，画受力图.

$$\sum M = 0 \quad F_A' \cdot \frac{r}{\sin\theta} - M_2 = 0$$

取圆轮0，画受力图.

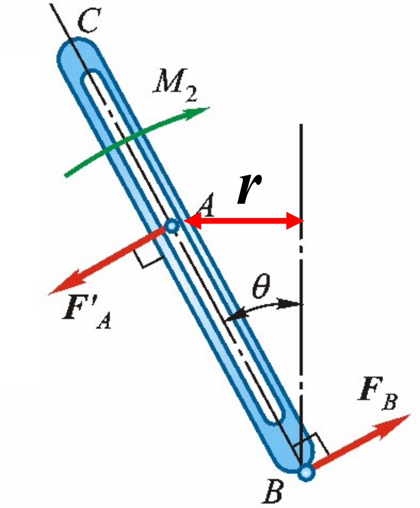
$$\sum M = 0 \quad M_1 - F_A \cdot r\sin\theta = 0$$

其中 $M_1 = 2\text{kN}\cdot\text{m}$

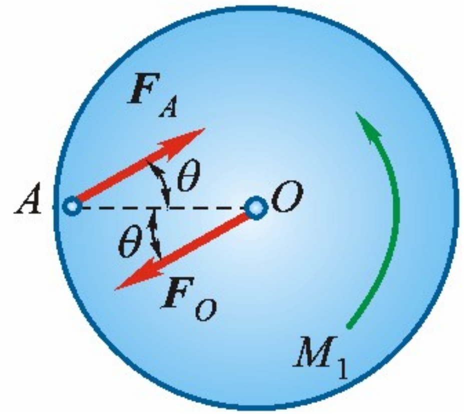
解得 $F_O = F_A = 8\text{kN}$

解得 $M_2 = 8\text{kN}\cdot\text{m}$

$F_B = F_A = 8\text{kN}$



F'_A与F_B构成力偶

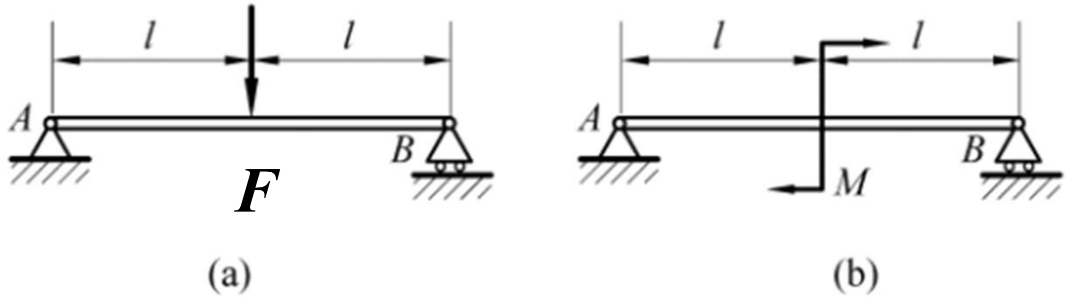


F_A与F_O构成力偶

单选题 1分

设置

如图所示外力F与力偶**M**分别作用在梁**AB**上，判断（**a**）与（**b**）中支座A的约束力是否相同



A 相同

B 只有$M=Fl$，才相同

提交

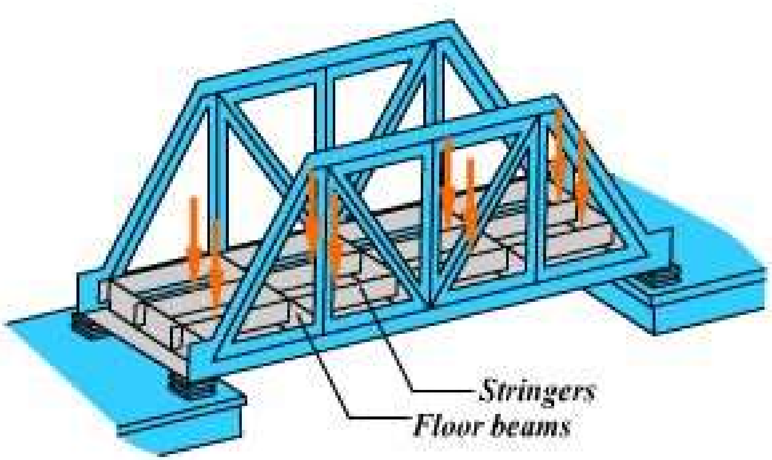
C 不相同

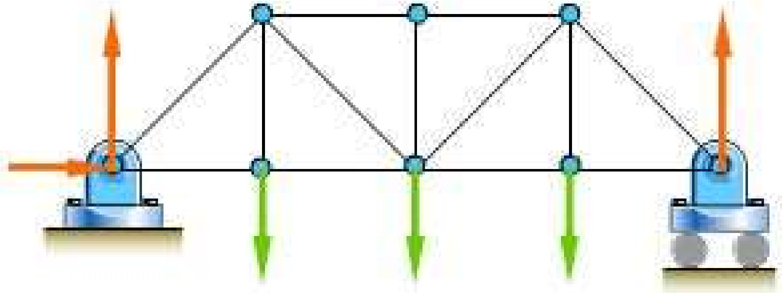
D 通过改变力偶M的位置，使得两者约束力相同

平面任意力系

当力系中各力的作用线处于同一平面内且任意分布时，称其为平面任意力系.

平面任意力系实例

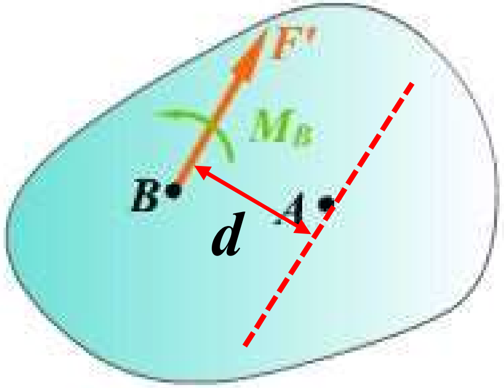




平面平行力系是平面任意力系的特例，各力互相平行但不相交.

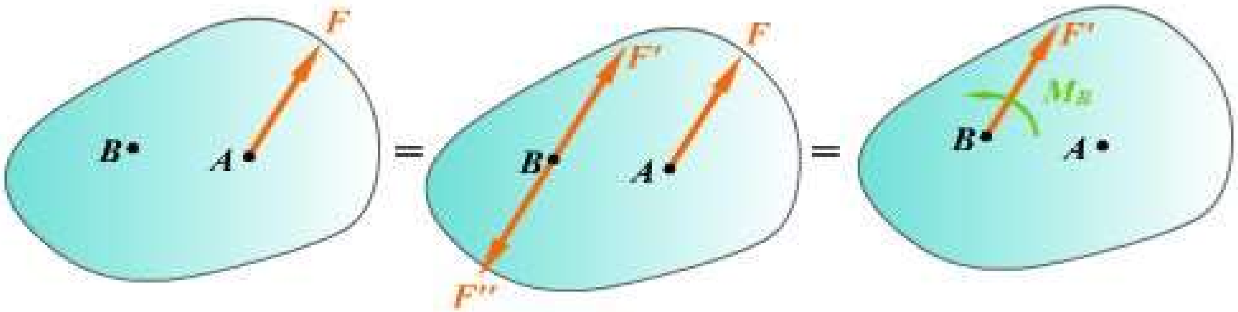
一. 力的平移定理

可以把作用在刚体上点 A 的力 F 平行移到任一点 B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩.



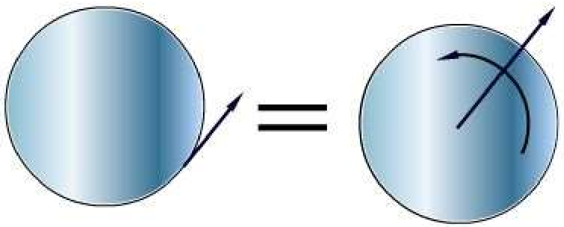
$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

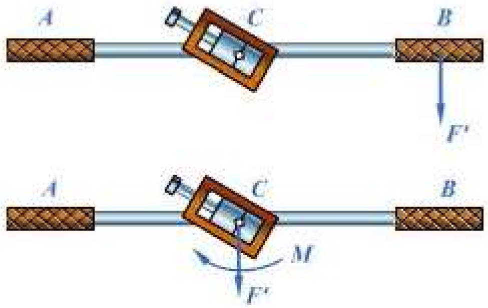
d是力偶臂长度，不是AB距离



公理3+
力偶定义

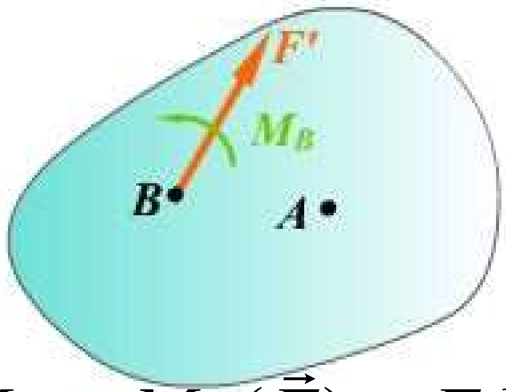
实例





一. 力的平移定理

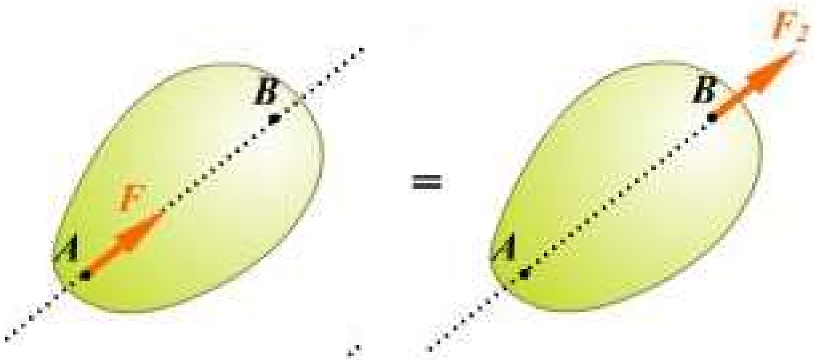
可以把作用在刚体上点 A 的力 F 平行移到任一点 B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩.



$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

推理1 力的可传性（平移定理的特殊情况）

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。



$$M_B = M_B(\vec{F}) = 0$$

$$(d = 0)$$

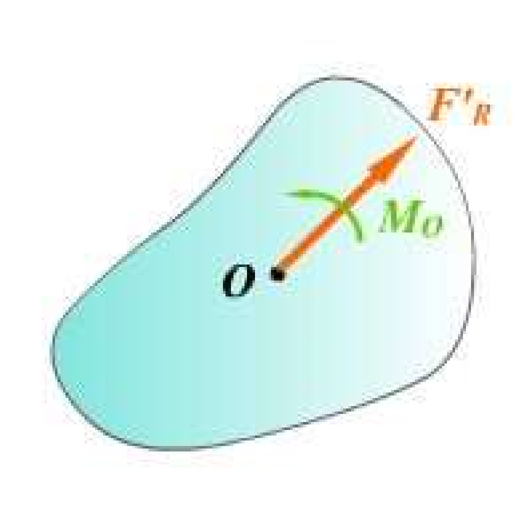
作用在刚体上的力的三要素为大小、方向和作用线.

二. 平面任意力系向作用面内一点简化 · 主矢和主矩

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1 \qquad M_1 = M_O(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 \qquad M_2 = M_O(\vec{F}_2)$$

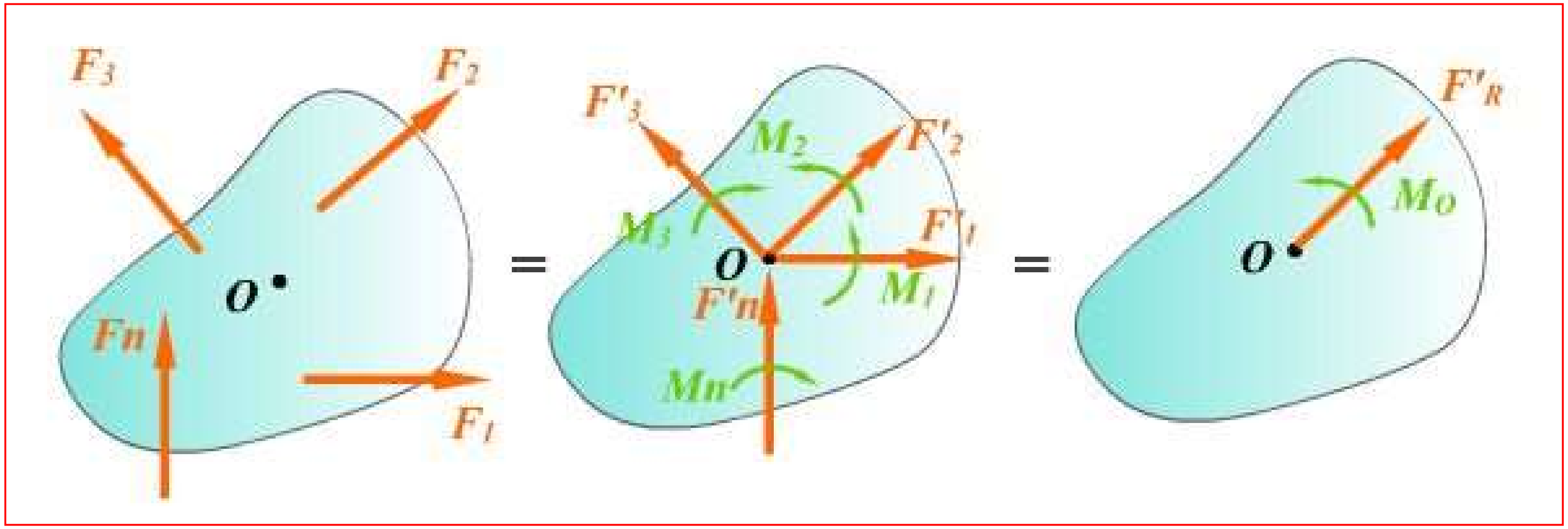
$$\vec{F}_n' = \vec{F}_n \qquad M_n = M_O(\vec{F}_n)$$



$$\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i' = \sum \vec{F}_i$$

$$\boldsymbol{M_O} = \sum \boldsymbol{M_i} = \sum \boldsymbol{M_O}(\vec{\boldsymbol{F}}_i)$$

主矢 $\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i$ 主矩 $M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$



平面任意力系向作用面内任一点简化，可得一个力和一个力偶。

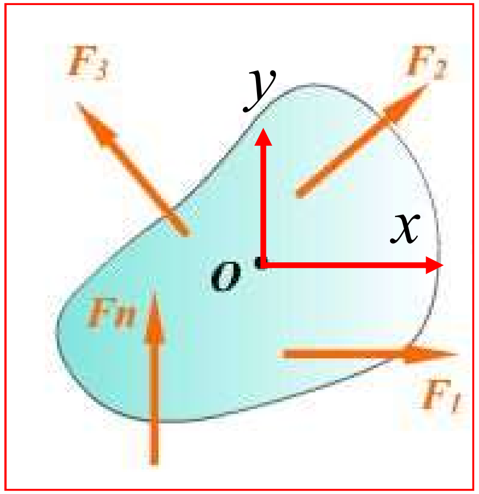
力为力系的主矢，大小与简化中心无关，但是作用线通过简化中心；力偶为力系对***O***点的主矩，作用点任意，但是大小一般与简化中心有关。**（力的平移定理）**

主矢 $\vec{F}'_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F}_i$　　主矩 $M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$

主矢与主矩的计算方法 – 先选定简化中心

$$F_{Rx}'=\sum F_{ix}'=\sum F_{ix}=\sum F_x$$

$$F_{Ry}'=\sum F_{iy}'=\sum F_{iy}=\sum F_y$$



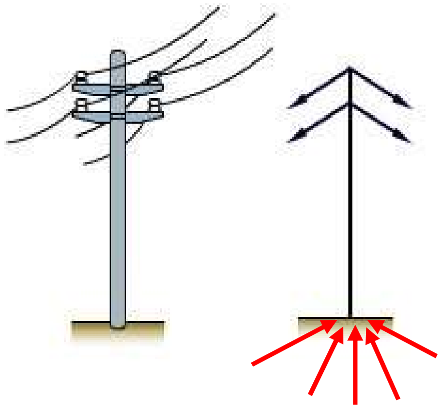
主矢大小 $$F_R'=\sqrt{(\sum F_{ix})^2+(\sum F_{iy})^2}$$

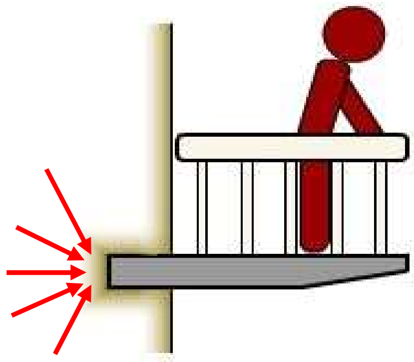
方向 $$\cos(\vec{F}'_R,\vec{i})=\frac{\sum F_{ix}}{F_R'}\qquad \cos(\vec{F}'_R,\vec{j})=\frac{\sum F_{iy}}{F_R'}$$

作用点　作用于简化中心上

主矩 $$\boldsymbol{M_O}=\sum \boldsymbol{M_O}(\vec{\boldsymbol{F}}_i)$$

平面固定端约束：平面任意力系向一点简化实例





简化结果一般为主矢、主矩均不为0

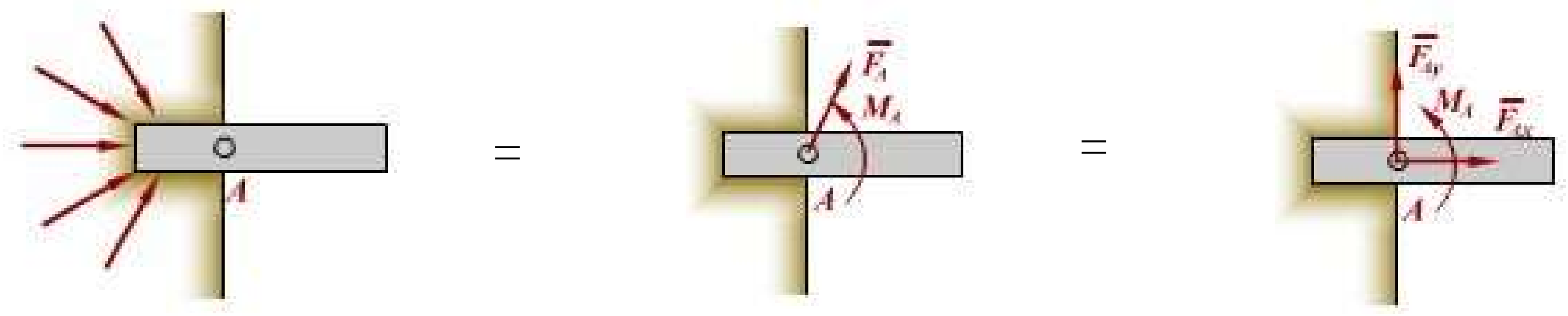
↓

约束力系的主矢约束平面运动，主矩约束转动

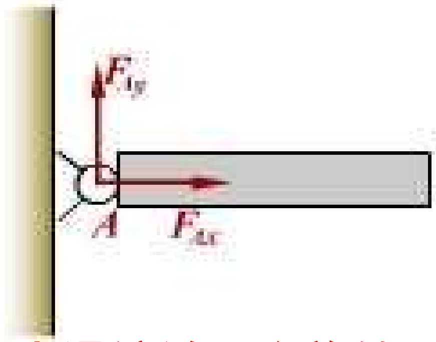
↓

不能移动+不能旋转

§2-3 平面任意力系的简化

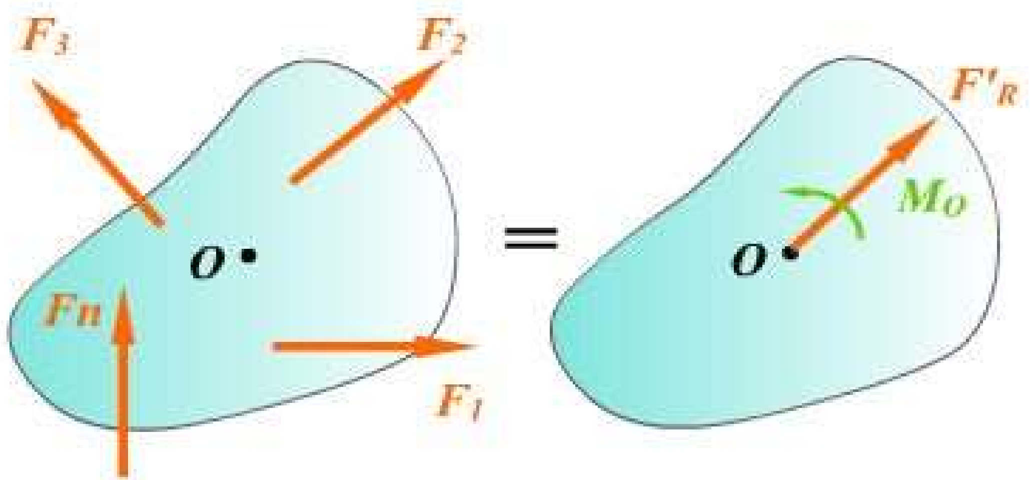


≠



光滑铰链，会旋转

三. 平面任意力系的简化结果分析



几个简化结果？

(1) $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0 \quad M_O \neq 0$ → 可以继续简化，为什么？

(2) $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0 \quad M_O = 0$

变为情况（2）

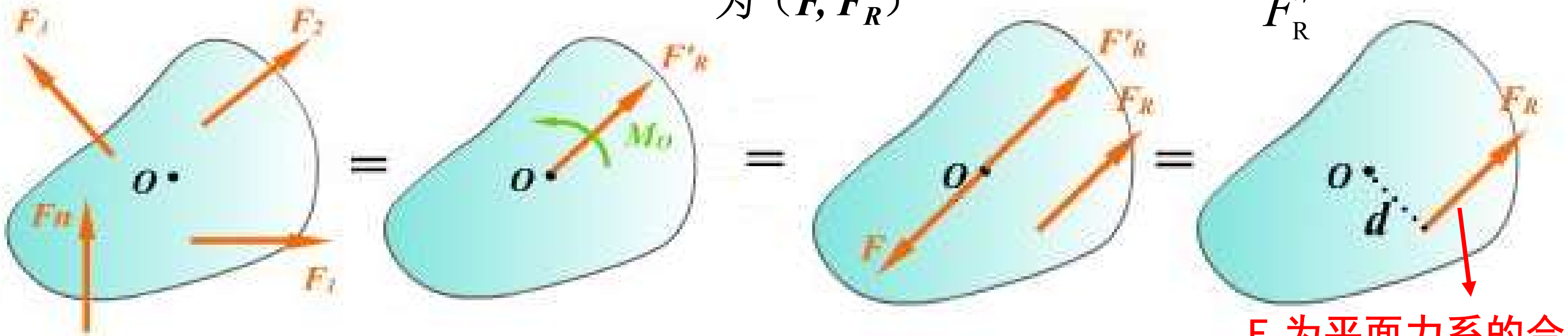
(3) $\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0 \quad M_O \neq 0$

(4) $\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0 \quad M_O = 0$

$\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0 \quad M_O \neq 0 \Rightarrow$ **F**$_{\mathbf{R}}$为平面任意力系的合力，作用线离简化中心***O***距离为$M_O / |F'_{\mathrm{R}}|$

把力偶$\boldsymbol{M_0}$表示为（$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F_R}$）

$$d = \frac{M_O}{F'_{\mathrm{R}}}$$



F$_{\mathrm{R}}$为平面力系的合力

$$M_O = F'_{\mathrm{R}} d$$
$$F_{\mathrm{R}} = F'_{\mathrm{R}} = F$$

$$\Rightarrow M_O(\overline{F}_{\mathrm{R}}) = M_O = \sum M_O(\overline{F}_i)$$

合力对***O***的力矩　　力系对***O***的力矩

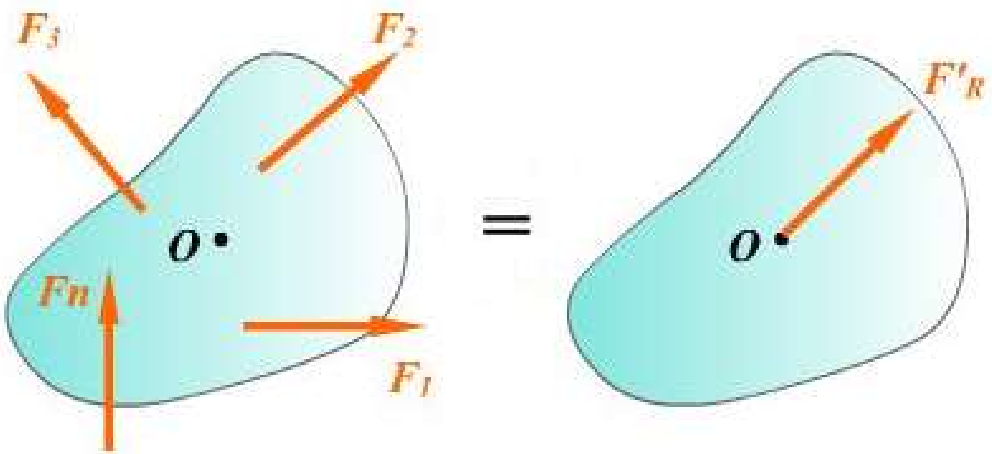
合力矩定理：平面任意力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩代数和

三. 平面任意力系的简化结果分析

$\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0 \quad M_O = 0$ ⟹ 在0点的主矩为0

合力：平面力系向作用面内点简化后主矩为0，对应的主矢为平面力系的合力

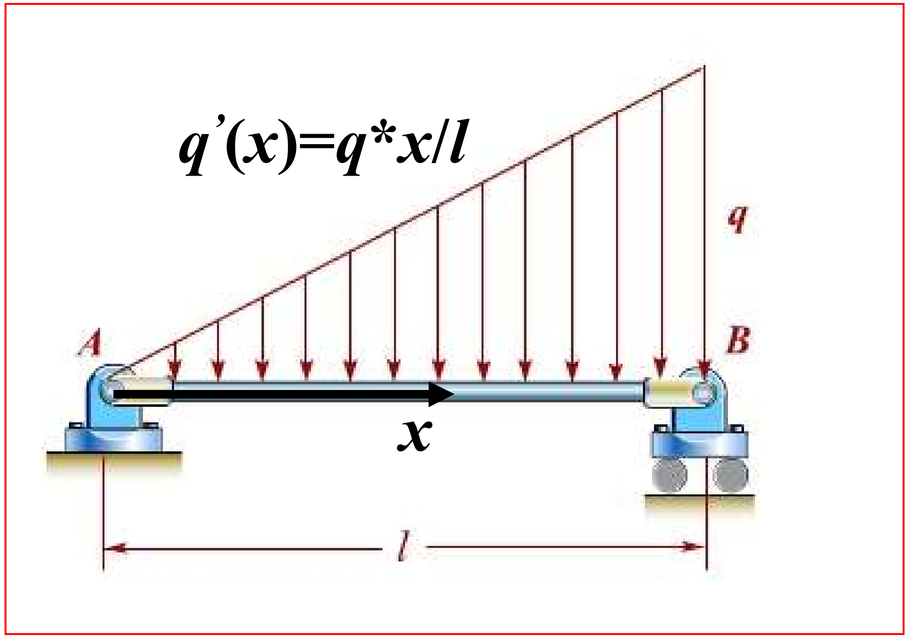
--平面力系可以简化为一个合力



例2-9（分布力力矩计算）

已知：q, l;

求：合力及合力作用线位置.



解： 建立坐标系

微元**dx**上的力为：

$$q'dx = \frac{x}{l} \cdot q dx$$

选取A为简化中心，

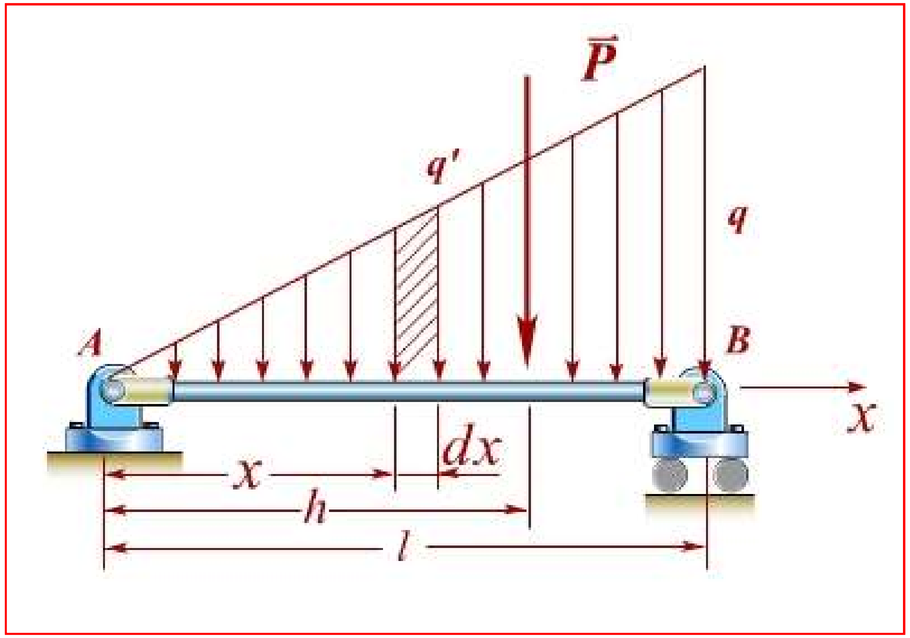
$$F_R = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot q\,\mathbf{d}x = \frac{1}{2} ql \quad \text{主矢}$$

$$M_A = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot q \cdot x\mathbf{d}x = \frac{1}{3} ql^2 \quad \text{主矩}$$

往A点简化主矢、主矩均不为0

合力的作用点主矩为0

例2-9（分布力力矩计算）



已知：q, l;

求：合力及合力作用线位置.

解： 合力大小为主矢大小

$$P = F_R = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} q l$$

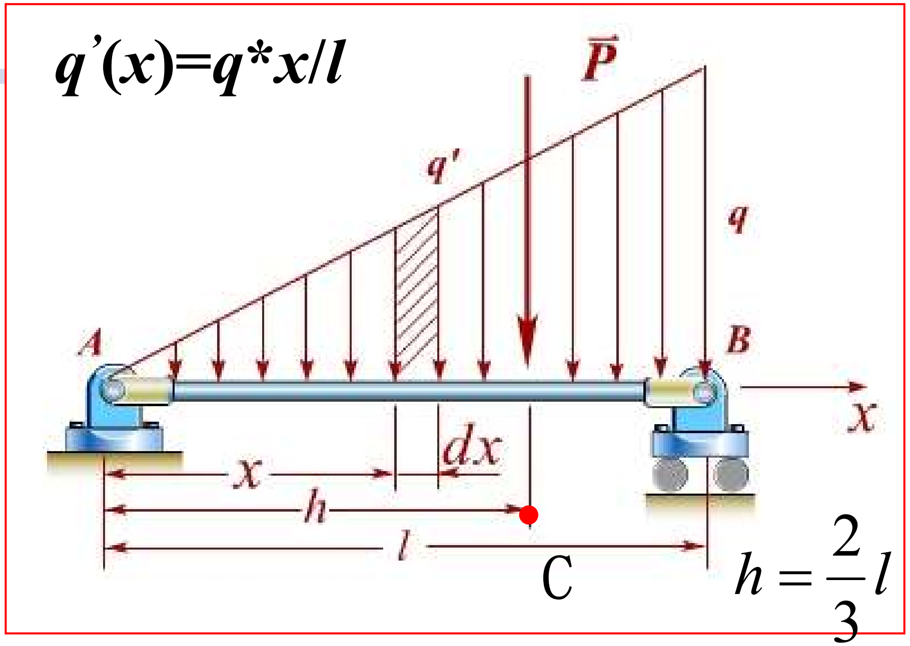
合力矩定理：

合力对固定点的力矩等于分力对固定点的力矩

$$P \cdot h = \int_0^l q' \cdot x \, \mathbf{d}x = \int_0^l \frac{x^2}{2l} q \, \mathbf{d}x = \frac{q l^2}{6}$$

因为 $P = \frac{1}{2} q l$ 得 $h = \frac{2}{3} l$

平面平行力系的合力



主矢：向A点简化

$$F_{RA}=\int_0^l \frac{x}{l}\cdot q\,\mathbf{d}x=\frac{1}{2}ql$$

主矩：向A点简化

$$M_A=\int_0^l q'\,\mathbf{d}x\cdot x=\int_0^l \frac{x^2}{l}q\,\mathbf{d}x=\frac{ql^2}{3}$$

向C点简化的主矢为平面平行力系的合力，作用在C点的合力P对刚体任意点的力矩等于分力的力矩之和

主矢：向C点简化

$$F_{RC}=\int_0^l \frac{x}{l}\cdot q\,\mathbf{d}x=\frac{1}{2}ql$$

主矩：向C点简化

$$M_C=\int_0^{\frac{2}{3}l} q'\cdot\left(\tfrac{2}{3}l-x\right)\mathbf{d}x-\int_{\frac{2}{3}l}^{l} q'\cdot\left(x-\tfrac{2}{3}l\right)\mathbf{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{qx}{l}\cdot\left(\tfrac{2}{3}l-x\right)\mathbf{d}x-\int_{\frac{2}{3}l}^{l} \frac{qx}{l}\cdot\left(x-\tfrac{2}{3}l\right)\mathbf{d}x$$

$$=\frac{ql^2}{3}-\frac{ql^2}{3}=0$$

作业

教材习题：2-11，2-14,2-15