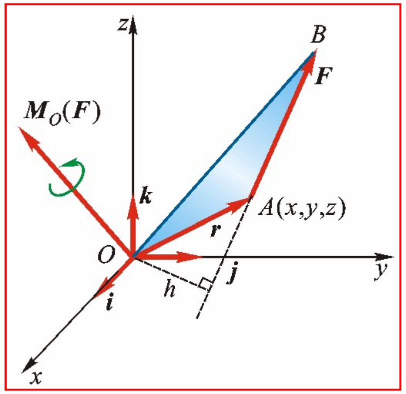
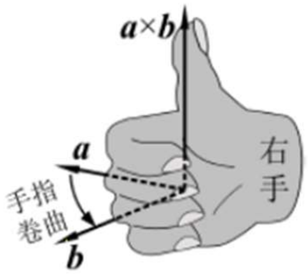
上节课内容回顾

1. 空间汇交力系:合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

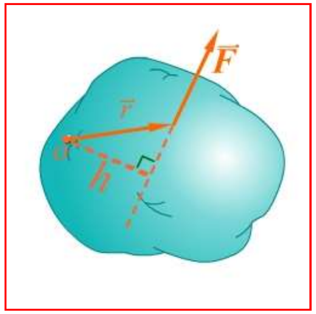
2. 空间力对点的矩





$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

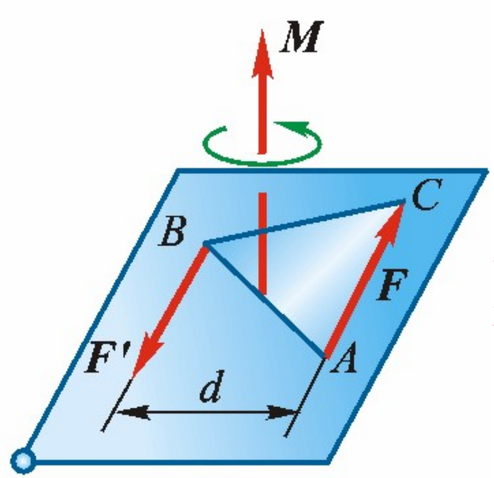
3. 空间力对轴的矩



标量, 正负由轴的正向决定

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

4. 空间力偶（系）



$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

一对等值、反向、不共线的平行空间力**(*F*, *F'*)**

作用在同一刚体上的两个力偶，如果其力偶矩相等(大小、方向），则它们彼此等效

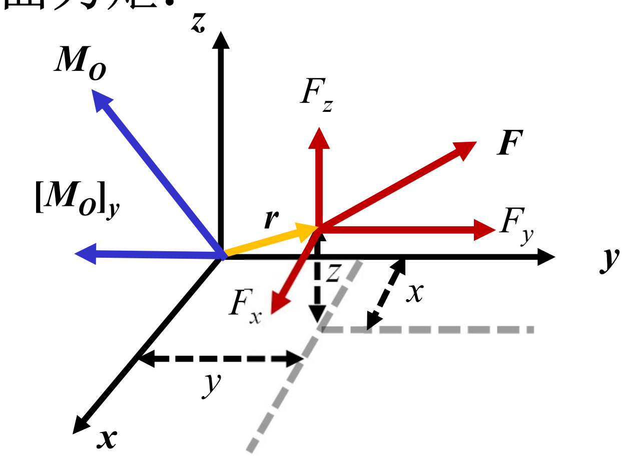
只要保持力偶矩矢大小与方向不变，可以在同一个刚体内自由移动

5. 如何计算空间力对轴的矩

对点的力矩叉乘：
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(yF_z - zF_y)}_{[M_O]_x}\vec{i} + \underbrace{(zF_x - xF_z)}_{[M_O]_y}\vec{j} + \underbrace{(xF_y - yF_x)}_{[M_O]_z}\vec{k}$$

平面力矩：



F_x—通过力臂z对y轴产生力矩zF_x

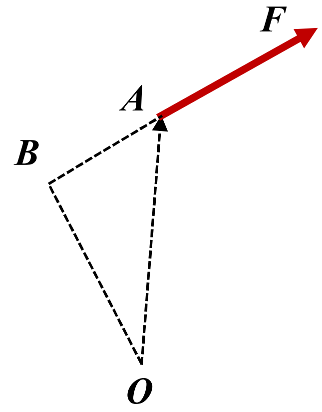
F_y—不对y轴产生力矩（平行）

F_z—通过力臂x对y轴产生力矩$-xF_z$

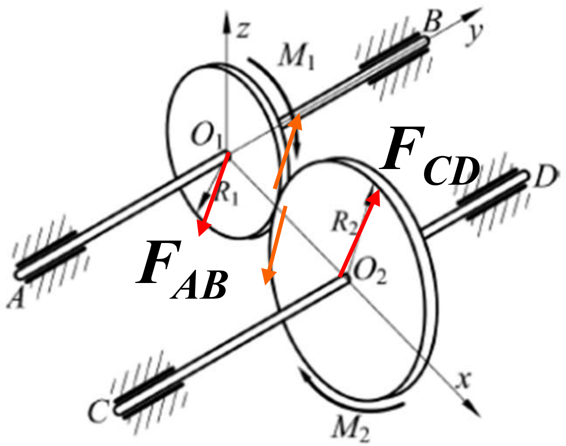
证明：空间力沿作用线在刚体内移动，不改变力对点的矩。

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$
$$= \left(\vec{r}_{OB} + \vec{r}_{AB}\right) \times \vec{F}$$
$$= \vec{r}_{OB} \times \vec{F} + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$
$$= \vec{r}_{OB} \times \vec{F}$$



两齿轮半径$R_2=2R_1$，受到力偶矩M_1与M_2作用达到平衡状态。



思路1：把两齿轮作为整体，只受到力偶矩M_1与M_2平衡，因此$M_1=M_2$

错误：没有分析AB与CD提供的约束力

思路2：把两齿轮作为整体，受到力偶矩M_1与M_2，以及AB与CD提供的约束力F_{AB}与F_{CD}，组成的空间力偶系平衡。

正确，但是平衡方程不能提供M_1与M_2关系

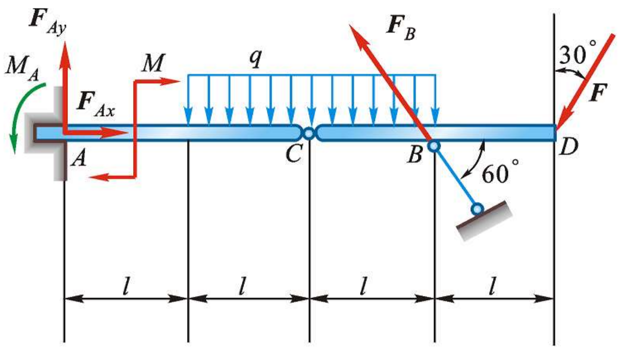
分析单个齿轮，齿轮间作用力与反作用力相等。

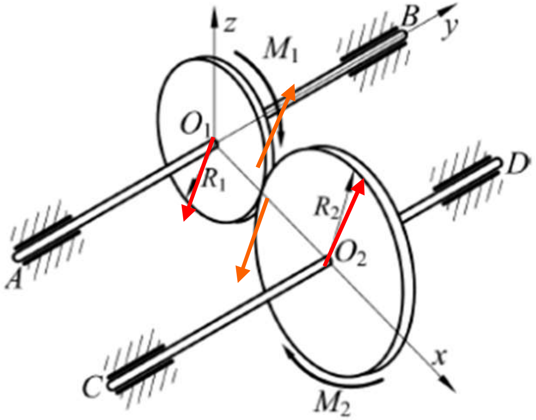
对齿轮O_1，受到力偶矩M_1与力偶(F_{AB}, F)作用平衡，$M_1=FR_1$

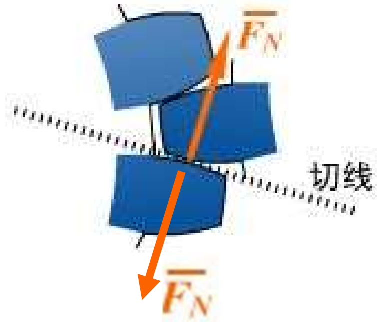
对齿轮O_2，受到力偶矩M_2与力偶(F_{CD}, F)作用平衡，$M_2=FR_2$

通过分别对两个刚体进行平衡分析，$M_1=0.5M_2$

思考题：为什么不把力偶$\mathbf{M_1}$直接移动到齿轮$\mathbf{O_2}$进行受力分析？







两个齿轮互相啮合，两齿轮之间的接触力为作用力与反作用力，大小相等，方向相反。因此两个齿轮间传递了约束力$\boldsymbol{F_N}$。

牛顿第三定律（静力学第五公理）保证了两个刚体之间可以传递力，但是力偶作为静力学另一个基本元素（一对特殊的力），无法在刚体间直接传递。

力偶在同一个刚体内可以随意移动，不改变对刚体的作用效果。齿轮O_1与齿轮O_2属于两个刚体，并不满足力偶矩随意移动的条件。对局部刚体进行受力分析时候，必须在对同一个刚体内的力偶与受力进行平衡分析。

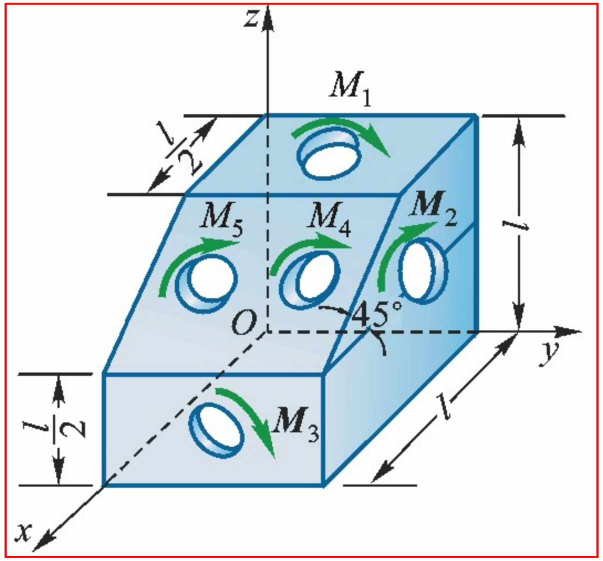
例3-5（空间力偶系平衡）

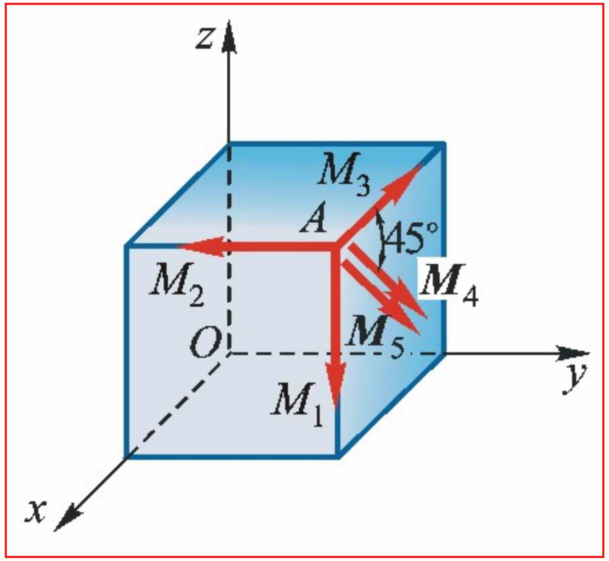
已知：在工件四个面上同时钻5个孔，每个孔所受切削力偶矩均为**80N·m.**

求：工件所受合力偶矩在 x, y, z 轴上的投影.

解：

把力偶用力偶矩矢表示，平行移到点 A .





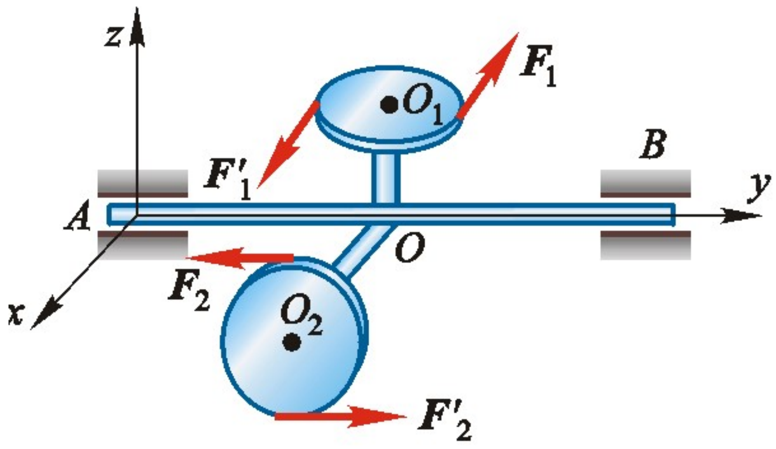
$$M_x = \sum M_{ix} = -M_3 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = \sum M_{iy} = -M_2 = -80\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = \sum M_{iz} = -M_1 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{N}\cdot\text{m}$$

例3-6（空间力组成空间力偶系）

已知：两圆盘半径均为200mm，AB =800mm，圆盘面O_1垂直于z轴，圆盘面O_2垂直于x轴，两盘面上作用有力偶，F_1=3N，F_2=5N，构件自重不计.



求:轴承***A*,*B***处的约束力.

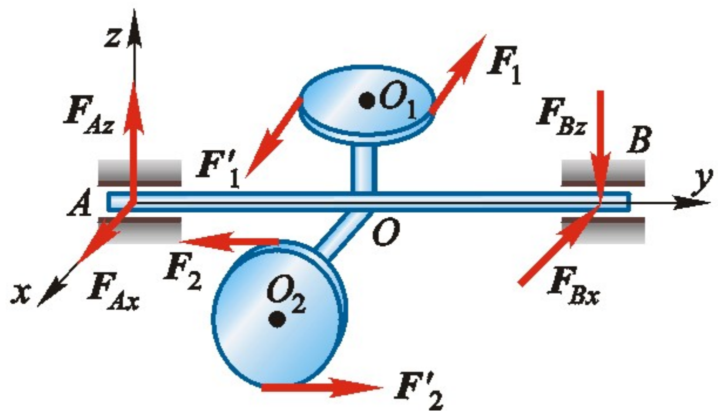
解： 取整体，受力图如图所示.

$$\sum M_x = 0 \quad F_2 \cdot 400 - F_{Bz} \cdot 800 = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad F_1 \cdot 400 + F_{Bx} \cdot 800 = 0$$

$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5\mathrm{N}$$

$$F_{Az} = F_{Bz} = 2.5\mathrm{N}$$

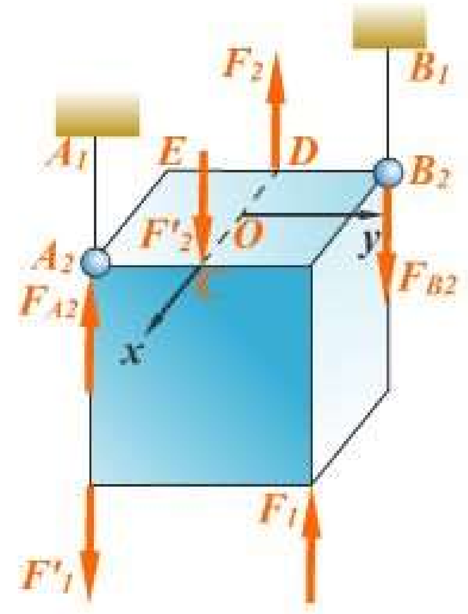


例3-7（空间力偶系平衡）

已知：正方体上作用两个力偶 $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2')$，

$CD // A_2E$，不计正方体和直杆自重.

求：正方体平衡时，力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ 的关系和两根杆受力.



(a)

可以换成绳索吗？

解：两杆为二力杆，取正方体，画受力图建坐标系如图b

以矢量表示力偶，如图c

$$\sum M_x = 0 \qquad M_1 - M_3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_y = 0 \qquad M_2 - M_3 \sin 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \qquad M_1 = M_2$$

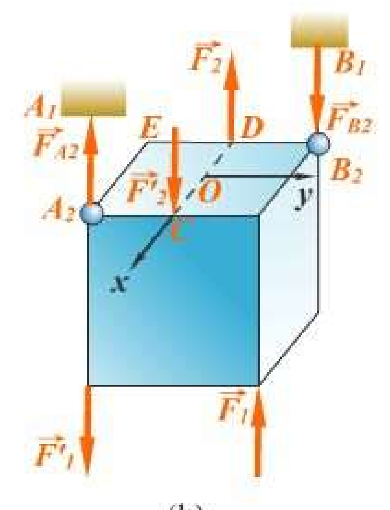
设正方体边长为a ,有

$$M_1 = F_1 \cdot a = M_2 = F_2 \cdot a$$

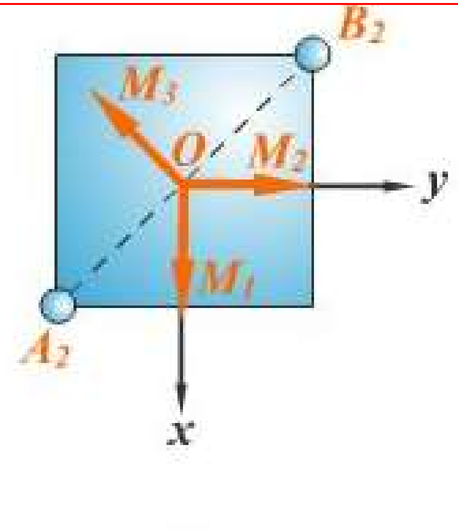
有 $F_1 = F_2$ $\qquad M_3 = F_{A2} \cdot \sqrt{2} a$

$$\Rightarrow \qquad F_{A2} = F_{B2} = F_1 = F_2$$

杆A_1A_2受拉，B_1B_2受压。



(b)

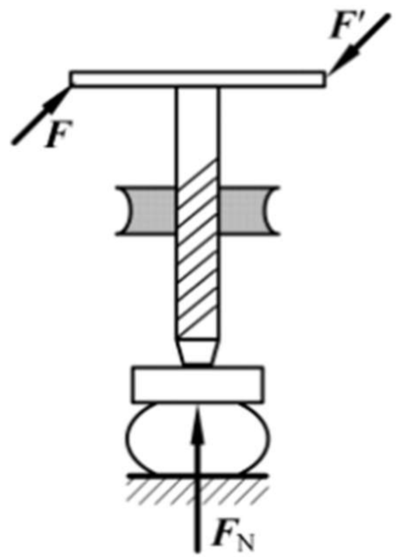


(c)

单选题 1分

设置

根据力与力偶的关系，下面关于压榨机的说法正确的是



A F与F'形成力偶

B 物体的抵抗力F_N平衡了力偶（F, F'）

C 压榨机只受到力偶（F, F'）与物体的反抗力F_N

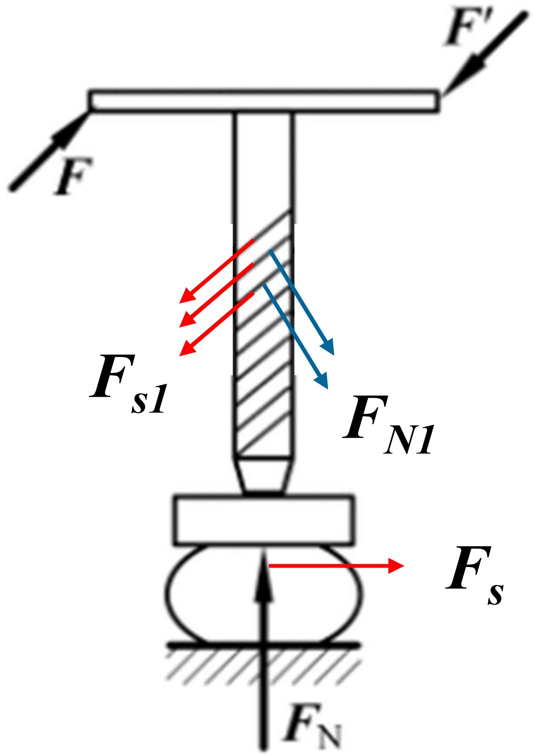
D 以上说法都不正确

提交

受力分析：取螺杆作为分析对象

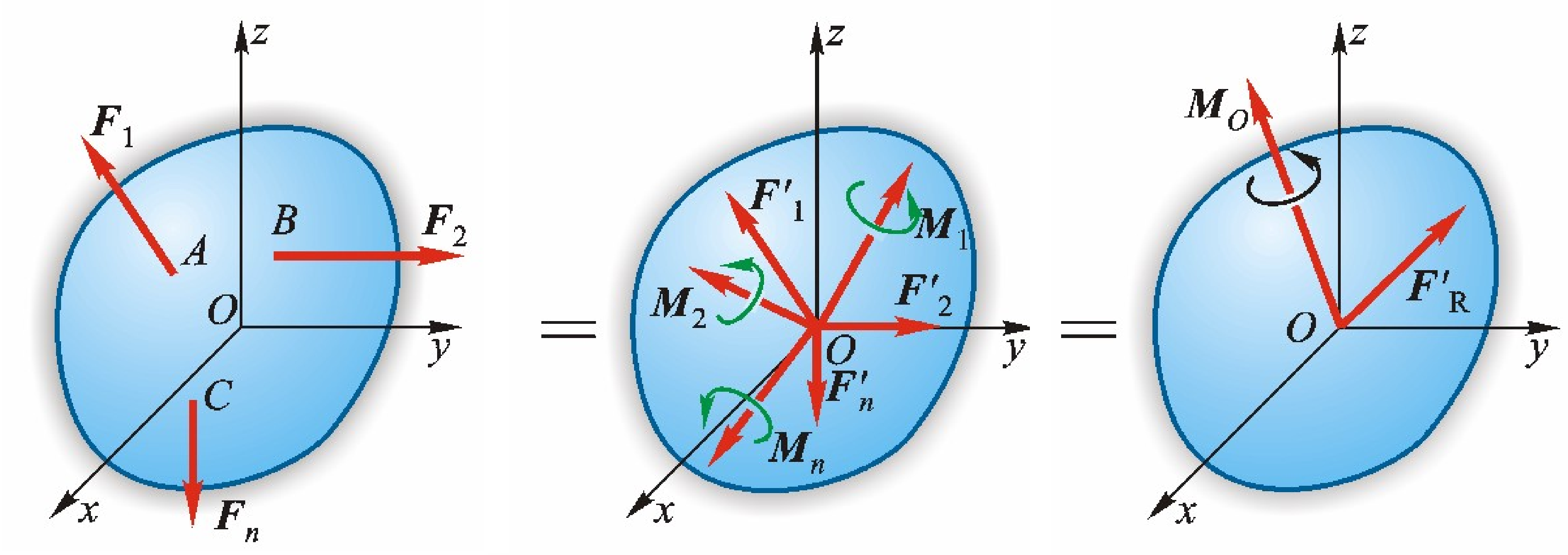
主动力：力偶(F,F’)

约束力：物体抵抗力F_N，物体摩擦力F_s，螺纹摩擦力F_{s1}，螺纹法向支持力F_{N1}



解答　力偶理论说一力不能与力偶平衡，其适用前提是刚体只受一个集中力和一个力偶。如果画出图 S2-8(a)的受力图，可以发现它不满足这个前提，因为螺杆螺纹处有摩擦力和支持力，被压榨的物体和压盘之间也有摩擦力。实际上这两处的摩擦力形成力偶。螺纹面上的法线约束力的水平分量对螺杆轴也有力偶作用。上述两个力偶合起来与手柄上的力偶$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$平衡。与$\boldsymbol{F}_N$平衡的是螺纹面上法向分力和摩擦力的垂直分量的合力。

一. 空间任意力系向一点的简化



$$\vec{F}_i' = \vec{F}_i \qquad \vec{M}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

空间汇交与空间力偶系等效代替一空间任意力系.

§3–4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

空间汇交力系的合力

$$\vec{F}'_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F}_i = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$

$\longrightarrow$ 主矢

空间力偶系的合力偶矩

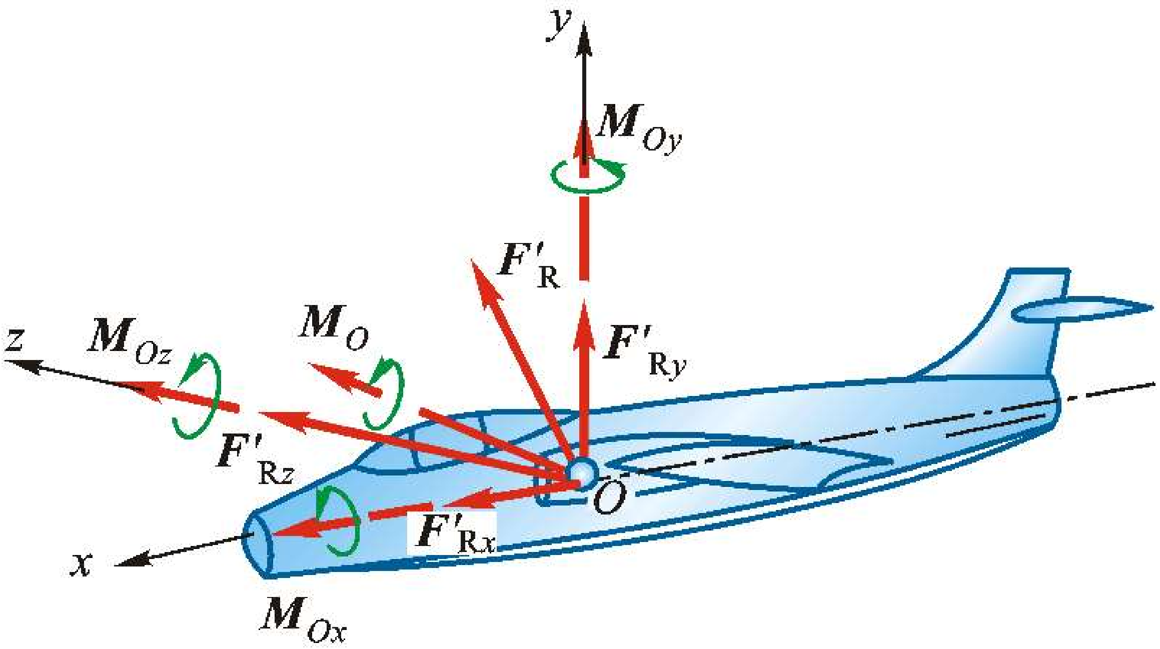
$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

$\longrightarrow$ 主矩

由力对点的矩与力对轴的矩的关系，有

$$\vec{M}_O = \sum M_x(\vec{F})\vec{i} + \sum M_y(\vec{F})\vec{j} + \sum M_z(\vec{F})\vec{k}$$

§3–4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩



$\vec{F}'_{Rx}$	— 有效推进力	飞机向前飞行
$\vec{F}'_{Ry}$	— 有效升力	飞机上升
$\vec{F}'_{Rz}$	— 侧向力	飞机侧移
$\vec{M}_{Ox}$	— 滚转力矩	飞机绕x轴滚转
$\vec{M}_{Oy}$	— 偏航力矩	飞机转弯
$\vec{M}_{Oz}$	— 俯仰力矩	飞机仰头

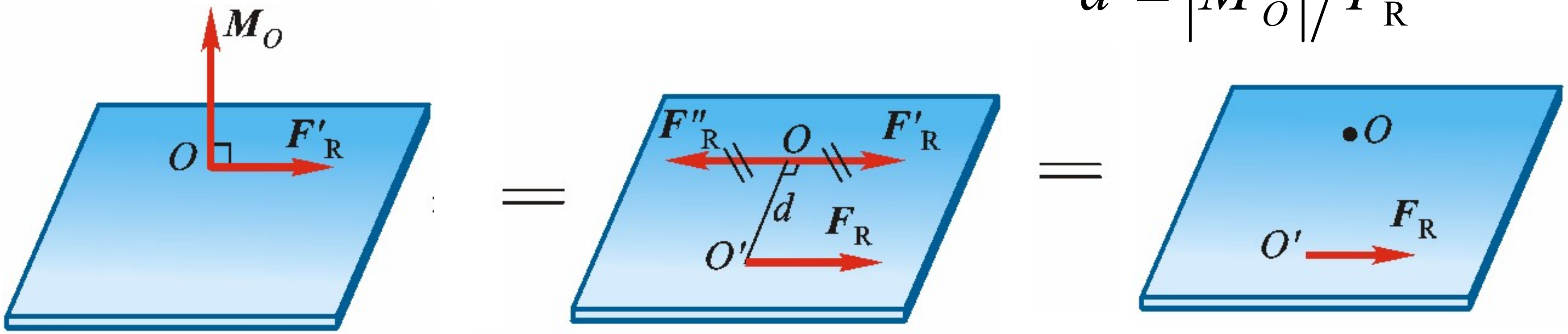
二．空间任意力系的简化结果分析（与平面区别？）

合力

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O = 0$ ⟶ 过简化中心合力

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R' \perp \vec{M}_O$ ⟶ 合力.合力作用线距简化中心为

$$d = \left|\vec{M}_O\right| / F_R'$$



$$\vec{M}_O = \vec{d} \times \vec{F}_R = \vec{M}_O(\vec{F}_R) = \sum \vec{M}_O(\vec{F})$$

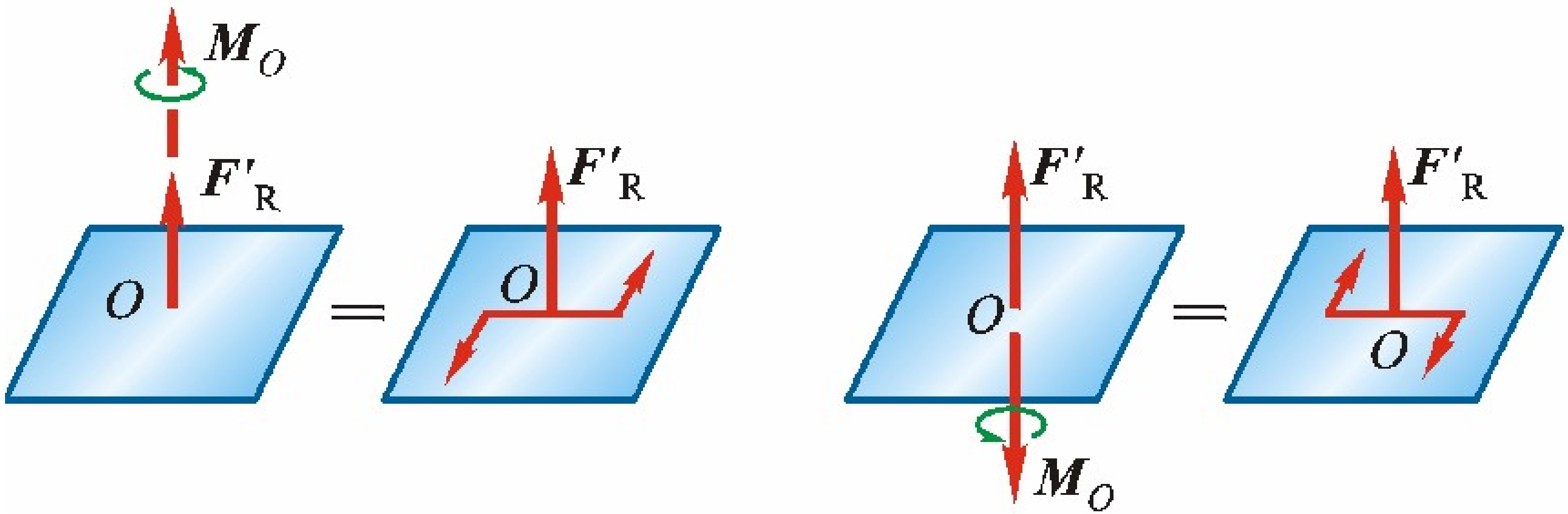
合力矩定理：合力对某点(轴）之矩等于各分力对同一点（轴）之矩的矢量和.

合力偶

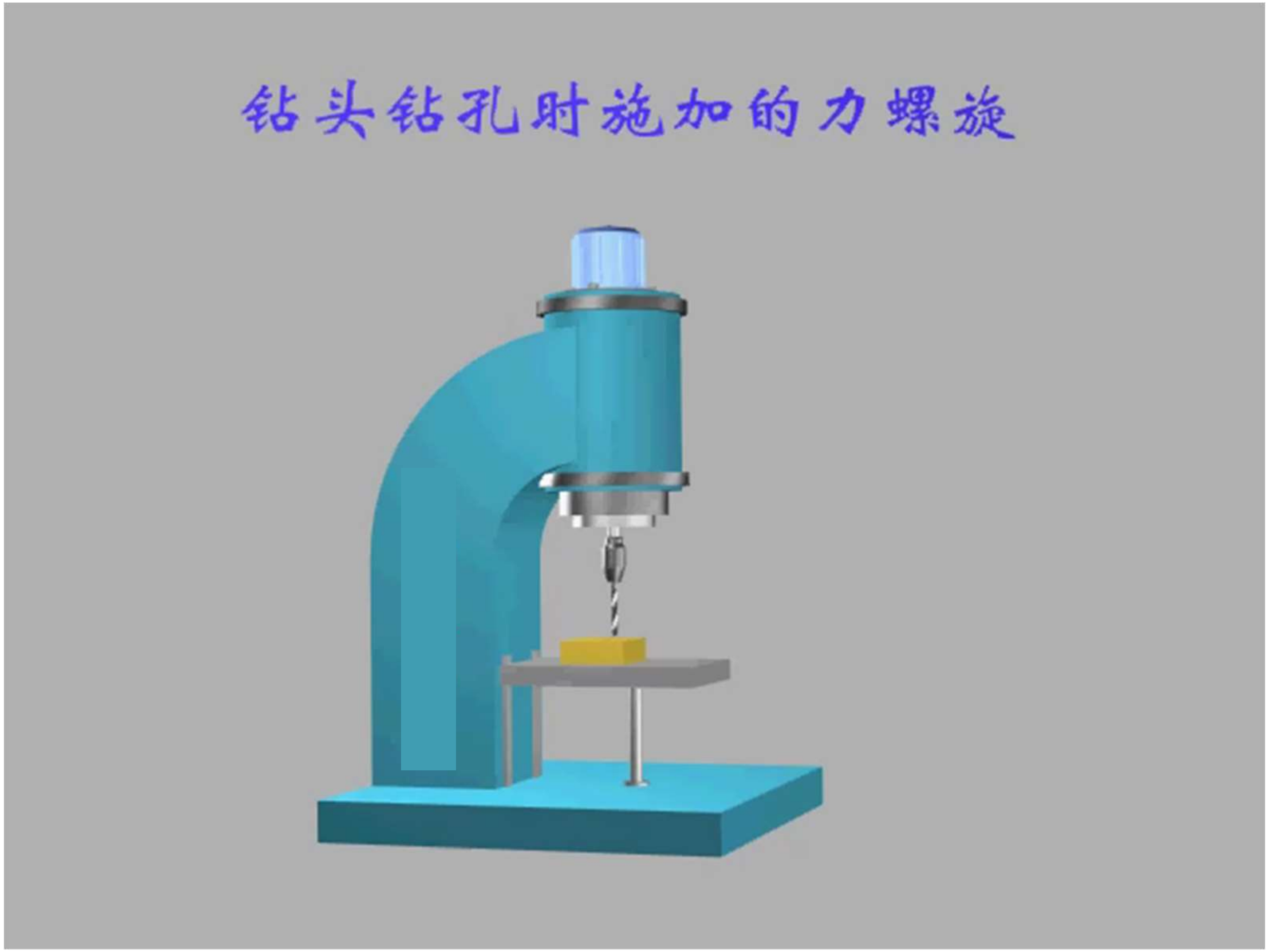
$\vec{F}_{\mathrm{R}}' = 0, \vec{M}_O \neq 0$ ⟹ 一个合力偶，此时与简化中心无关。

力螺旋

$F_{\mathrm{R}}' \neq 0, M_O \neq 0, F_{\mathrm{R}}' // M_O$ ⟹ 中心轴过简化中心的力螺旋

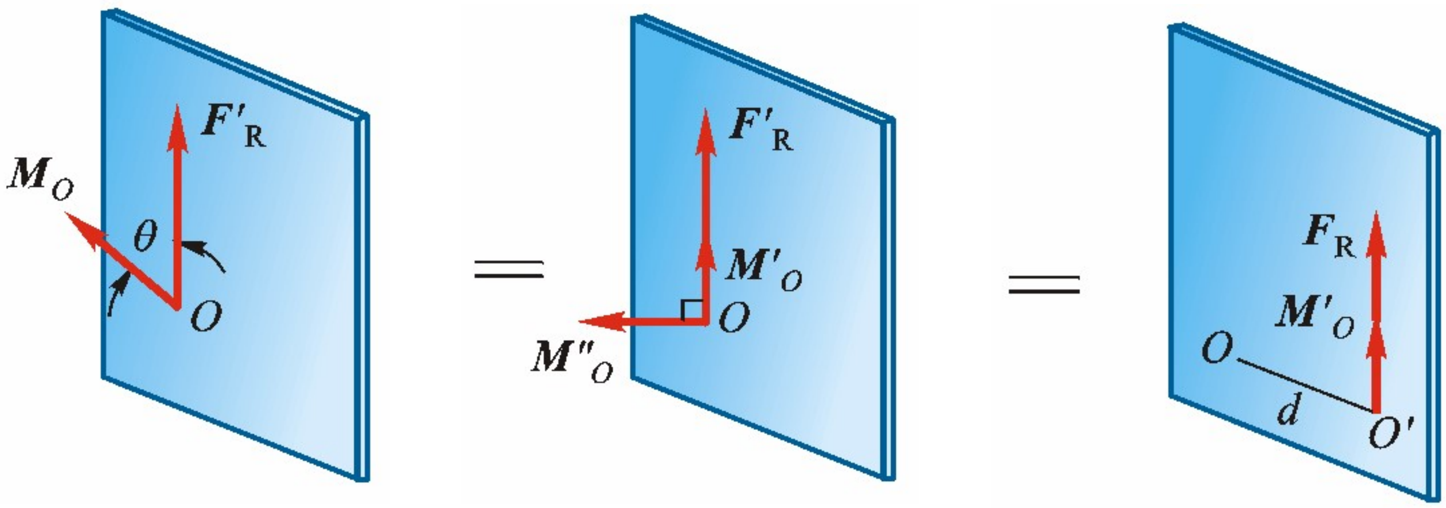


钻头钻孔时施加的力螺旋



$\vec{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}'_{\mathrm{R}}, \vec{M}_O$ 既不平行也不垂直

$\Rightarrow$ 力螺旋中心轴距简化中心为 $d = \dfrac{M_O \sin\theta}{F'_{\mathrm{R}}}$



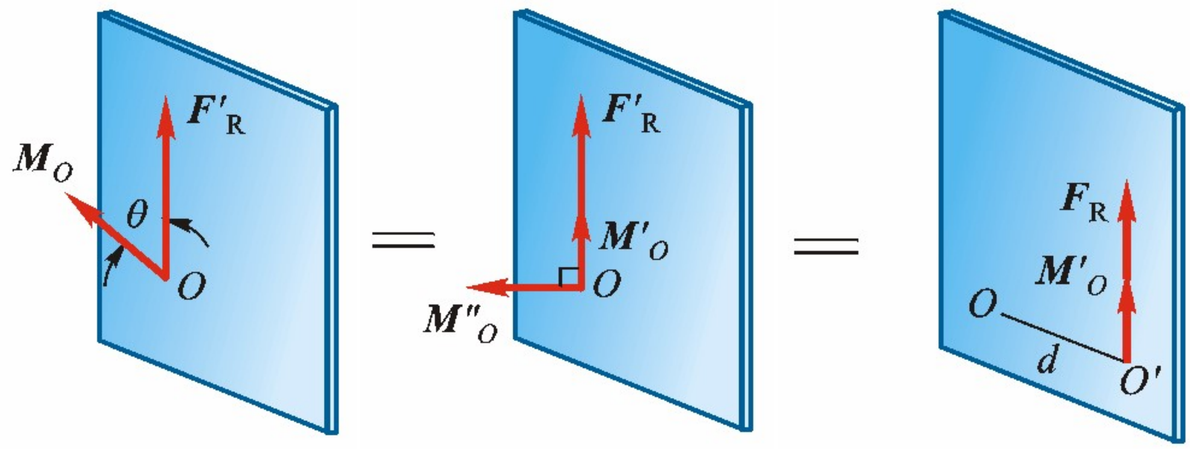
平衡

$\vec{F}'_{\mathrm{R}} = 0, \vec{M}_O = 0$ $\Rightarrow$ 平衡

小结：空间任意力系的主矢和主矩

根据主矢与主矩是否为0，存在四种组合

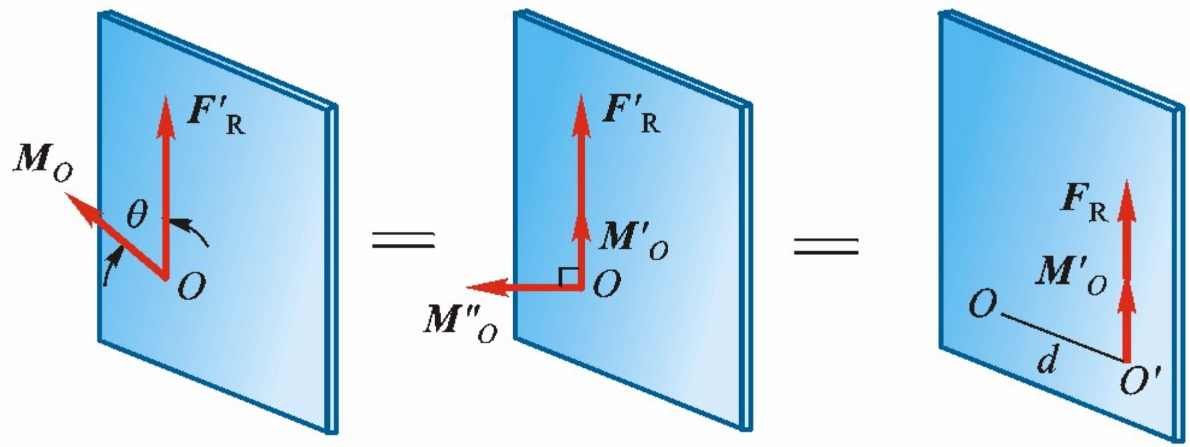
<table>
<tr><th>主矢</th><th colspan="2">主　　矩</th><th>最终简化结果</th><th>说　　明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$F'_R=0$</td><td colspan="2">$M_O=0$</td><td>平衡</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$M_O\neq 0$</td><td>力偶</td><td>此种情形的主矩与简化中心无关</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$F'_R\neq 0$</td><td colspan="2">$M_O=0$</td><td>集中力</td><td>集中力作用线过简化中心</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$M_O\neq 0$</td><td>$F'_R\perp M_O$</td><td>集中力</td><td>集中力作用线到简化中心的 $d=\lvert M_O/F'_R\rvert$</td></tr>
<tr><td>$F'_R /\!/ M_O$</td><td>力螺旋</td><td>力螺旋的力过简化中心</td></tr>
<tr><td>F'_R 与 M_O 夹角 θ</td><td>力螺旋</td><td>力螺旋的力到简化中心的距离 $d=\lvert M_O\sin\theta/F'_R\rvert$</td></tr>
</table>

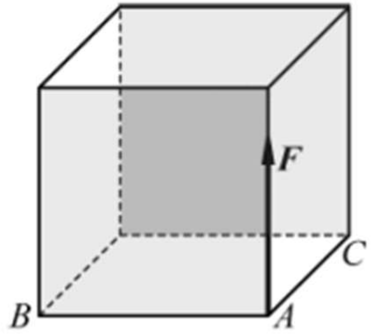


小结：空间任意力系的主矢和主矩

根据主矢与主矩是否为0，存在四种组合

主矢	主　矩		最终简化结果	说　明
$F'_R=0$				
$F'_R\neq 0$				





如图所示的正方体上**A**点作用一个非零力***F***，判断下面说法是否正确：

1. 在**B**与**C**两处各加一个不为零的力，使力系平衡

   错误。沿**BC**轴取矩，**B**和**C**处所加集中力对**BC**轴之矩为**0**，无法平衡***F***对**BC**轴的矩

2. 在**B**处加一个力螺旋，使力系平衡

   错误。因为力螺旋不能用一个集中力***F***等效

3. 在**B**与**C**两处各加一个力偶，使力系平衡

   错误。因为**B**与**C**两处的力偶合成后仍为一个力偶，后者不能被一个集中力***F***平衡

4. 在**B**处加一个力，在**C**处加一个力偶，使力系平衡

   正确。只要**B**处所加力与***F***大小相等，方向相反；**C**处所加力偶与***F***对**B**点的力矩大小相等，方向相反即可平衡。

一. 空间任意力系的平衡方程

空间任意力系平衡的充要条件：

该力系的主矢、主矩分别为零.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

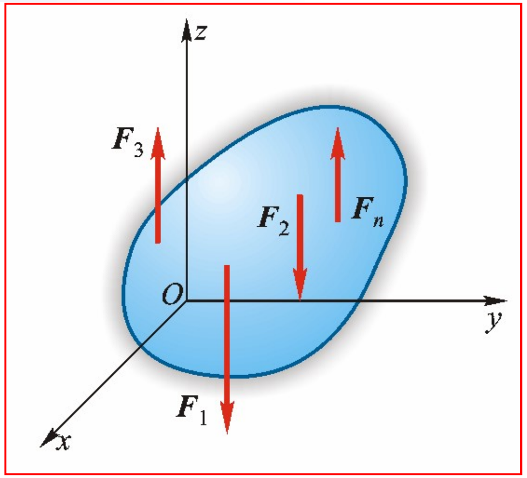
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

空间任意力系平衡的充要条件：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零.

不需要对特定一个点列平衡方程！

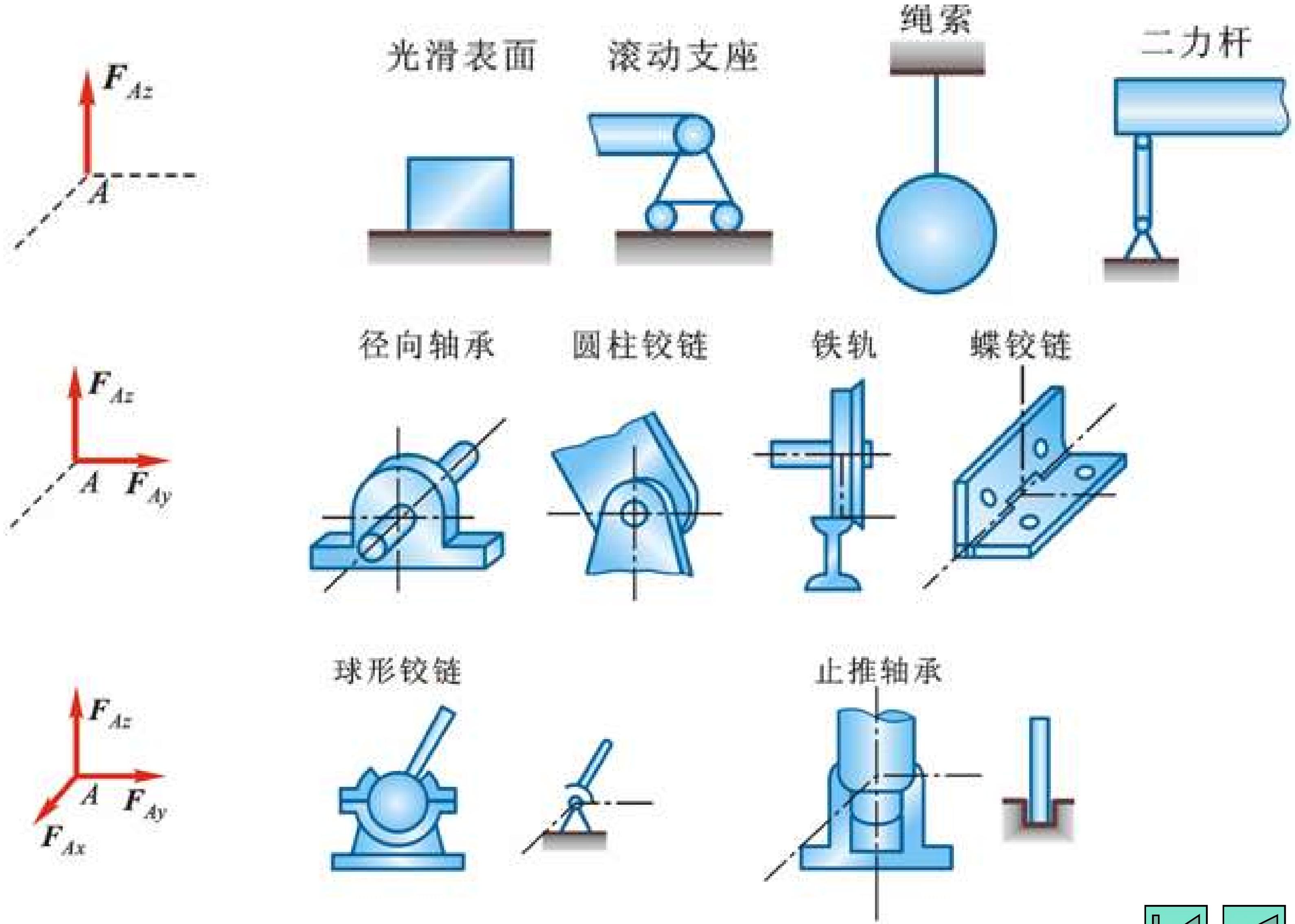
二. 空间平行力系的平衡方程

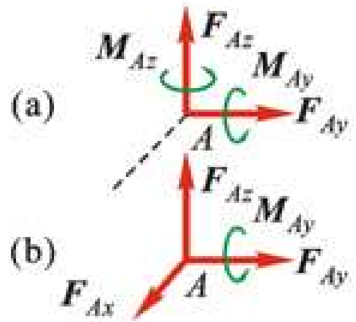
$$\sum F_z=0 \quad \sum M_x=0 \quad \sum M_y=0$$



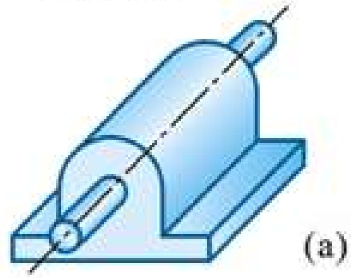
力系	独立方程数	平衡方程
空间任意力系	6	$\sum F_x=0$；$\sum F_y=0$；$\sum F_z=0$； $\sum M_x=0$；$\sum M_y=0$；$\sum M_z=0$
平面力偶系	1	$\sum M=0$
平面汇交力系	2	$\sum F_x=0$；$\sum F_y=0$
平面平行力系	2	$\sum F_x=0$；$\sum M=0$（x 轴不能与力的方向垂直）
平面一般力系	3	$\sum F_x=0$；$\sum F_y=0$；$\sum M=0$
空间力偶系	3	$\sum M_x=0$；$\sum M_y=0$；$\sum M_z=0$
空间汇交系	3	$\sum F_x=0$；$\sum F_y=0$；$\sum F_z=0$
空间平行力系	3	$\sum F_z=0$；$\sum M_x=0$；$\sum M_y=0$（力沿z轴方向）

三. 空间约束类型举例

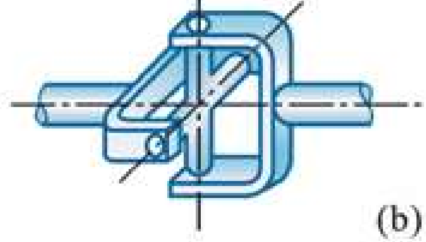

F_{Az}
A
光滑表面
滚动支座
绳索
二力杆
F_{Az}
A
F_{Ay}
径向轴承
圆柱铰链
铁轨
蝶铰链
F_{Az}
A
F_{Ay}
F_{Ax}
球形铰链
止推轴承

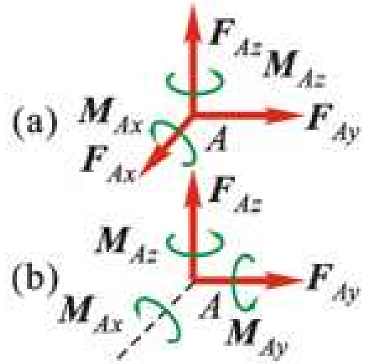


导向轴承

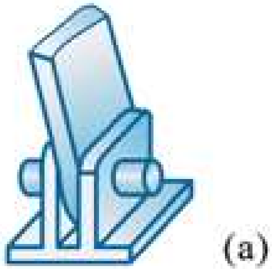


万向接头

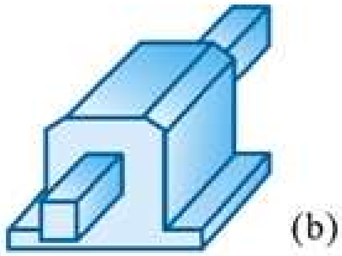




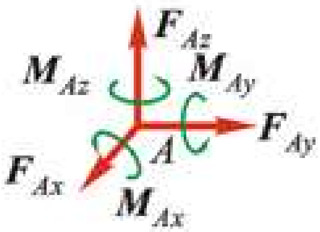
带有销子的夹板

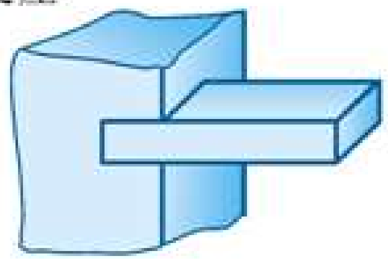


导轨



空间的固定端支座

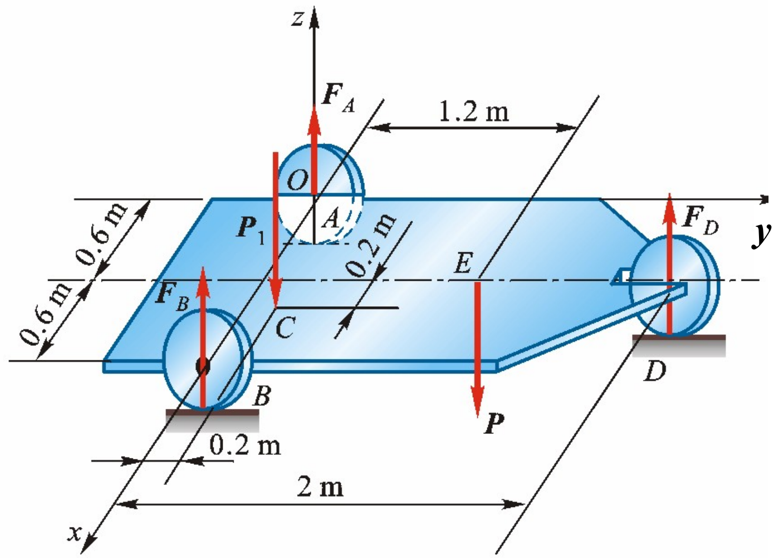




例3-8（空间平行力系）

已知：$P=8\text{kN},\ P_1=10\text{kN},$

求：A、B、D 处约束力



解： 研究对象：小车

列平衡方程（三个方向力，三个轴力矩）

$$\sum F_z = 0 \qquad -P-P_1+F_A+F_B+F_D=0$$

$$\sum M_x(F)=0 \qquad -0.2P_1-1.2P+2F_D=0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad 0.8P_1+0.6P-1.2F_B-0.6F_D=0$$

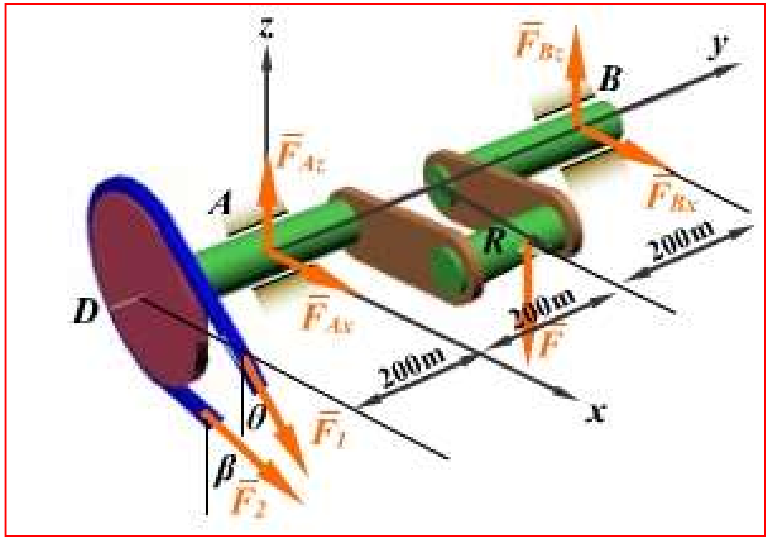
$$\Longrightarrow \qquad F_D=5.8\text{kN}, F_B=7.777\text{kN}, F_A=4.423\text{kN}$$

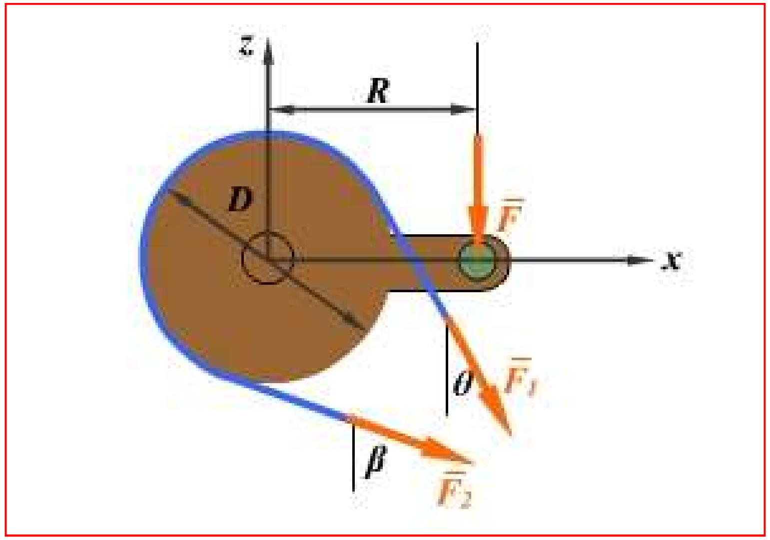
例3-9（空间任意力系平衡）

已知：$F=2000\text{N},\ F_2=2F_1,\ \theta=30^\circ,\ \beta=60^\circ$，各尺寸如图

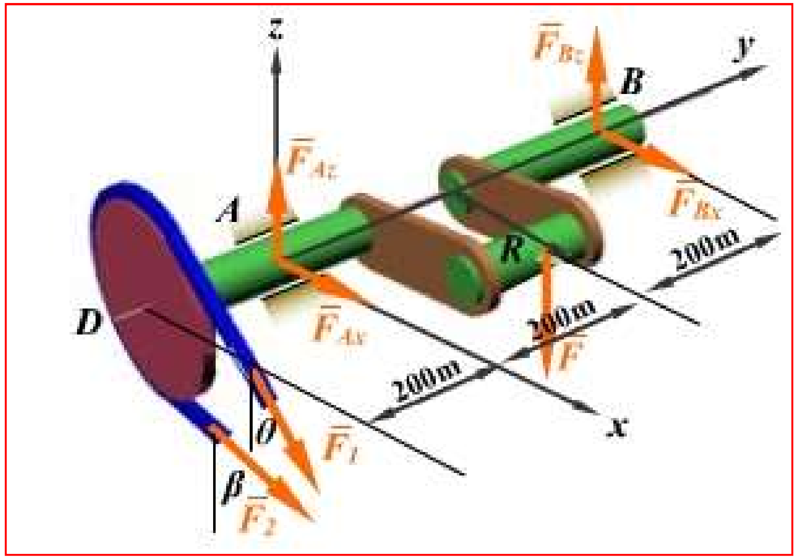
求：F_1,F_2 及A、B处约束力.（D=400mm, R=300mm）

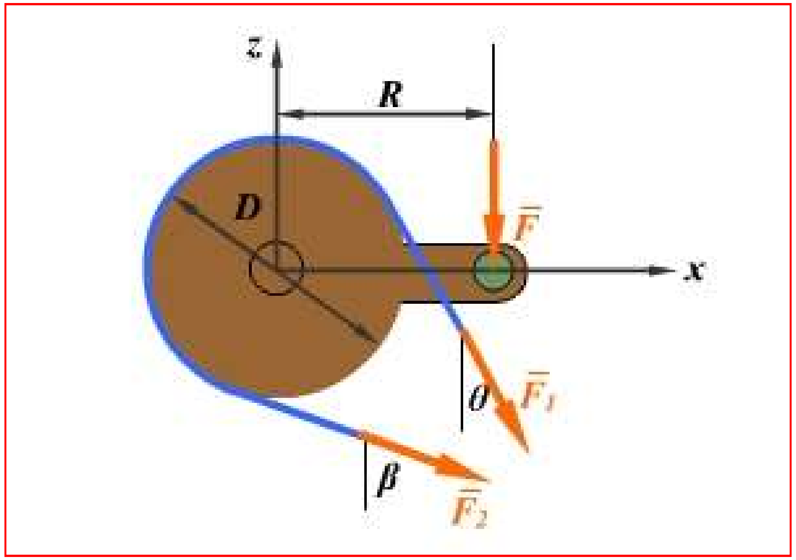
解： 研究对象，曲轴





空间任意力系（**6**个平衡方程）





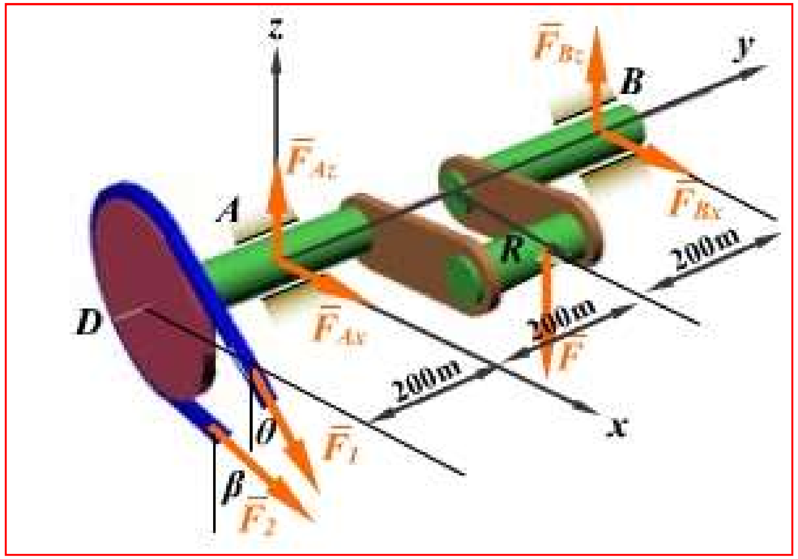
列平衡方程

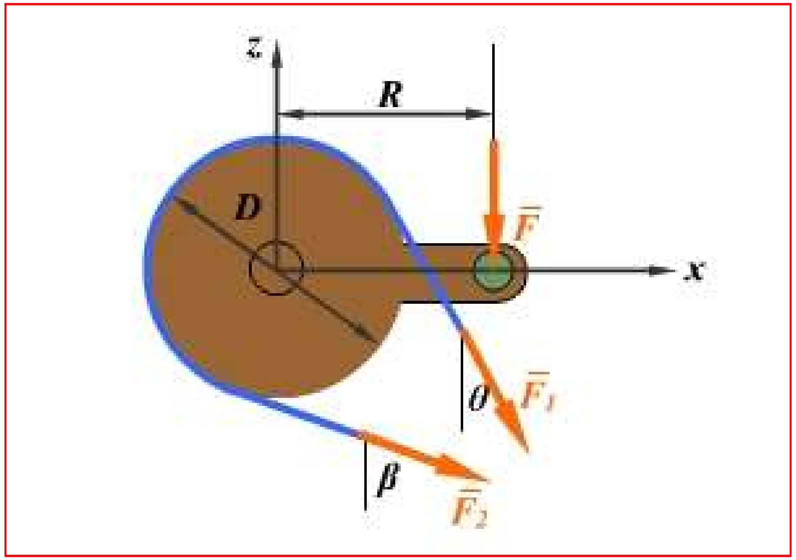
$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 0 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

§3–5 空间任意力系的平衡方程





$$\sum M_x(F)=0 \qquad F_1\cos 30^\circ\times 200+F_2\cos 60^\circ\times 200-F\times 200+F_{Bz}\times 400=0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad F\cdot R-\frac{D}{2}\times(F_2-F_1)=0$$

$$\sum M_z(F)=0 \qquad (F_1\sin 30^\circ-F_2\sin 60^\circ)\times 200-F_{Bx}\times 400=0$$

$$F_1=3000\text{N}, F_2=6000\text{N},$$

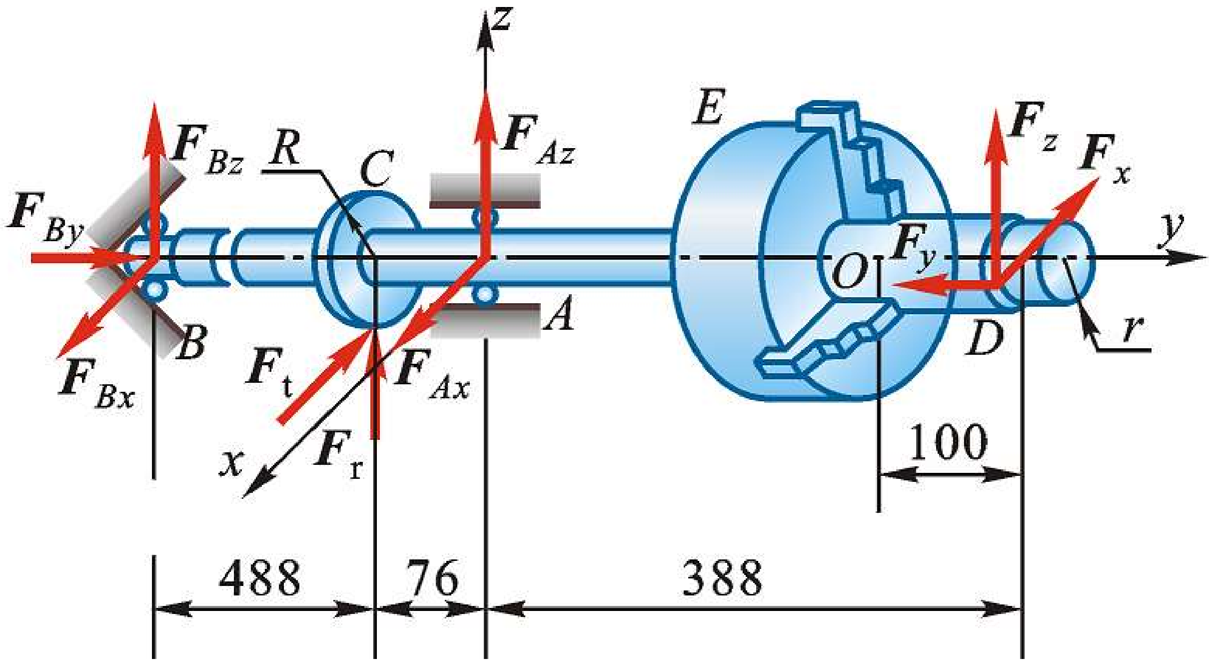
$$F_{Ax}=-1004\text{N}, F_{Az}=9397\text{N},$$

$$F_{Bx}=3348\text{N}, F_{Bz}=-1799\text{N},$$

例3-10

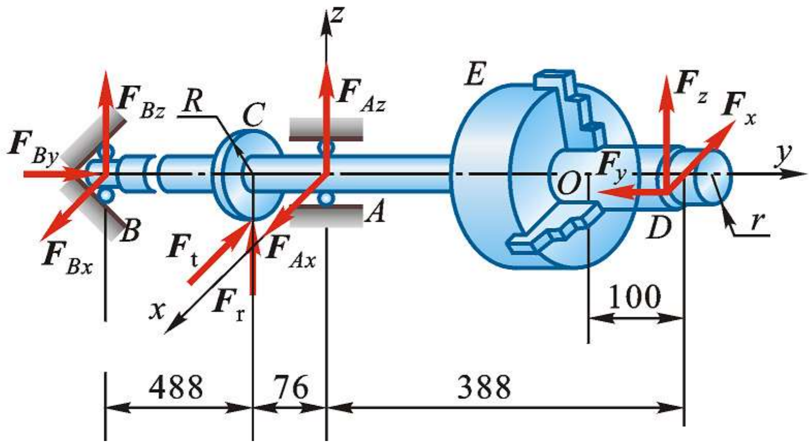
已知： $F_x = 4.25\text{N},\ F_y = 6.8\text{N},\ F_z = 17\text{N},$

$F_r = 0.36F_\tau,\ R = 50\text{mm},\ r = 30\text{mm}$ 各尺寸如图



求：(1) $\vec{F}_r, \vec{F}_\tau$ （2）***A***、***B***处约束力（3）***O*** 处约束力

解： 研究对象1：主轴及工件，受力图如图



$$\sum F_x = 0 \qquad -F_t + F_{Bx} + F_{Ax} - F_x = 0$$

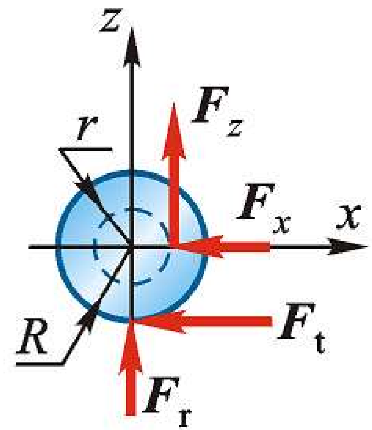
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_r + F_{Bz} + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad -(488+76)F_{Bz} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad F_t \cdot R - F_z \cdot r = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad (488+76)F_{Bx} - 76F_t + 388F_x - 30F_y = 0$$



又： $F_r = 0.36F_t$,

$F_t = 10.2\text{kN}$ $\quad F_r = 3.67\text{kN}$ $\quad F_{Ax} = 15.64\text{kN}$

$F_{Bx} = -1.19\text{kN}$ $\quad F_{By} = 6.8\text{kN}$ $\quad F_{Bz} = 11.2\text{kN}$

研究对象2：工件受力图如图,列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ox} - F_x = 0$$

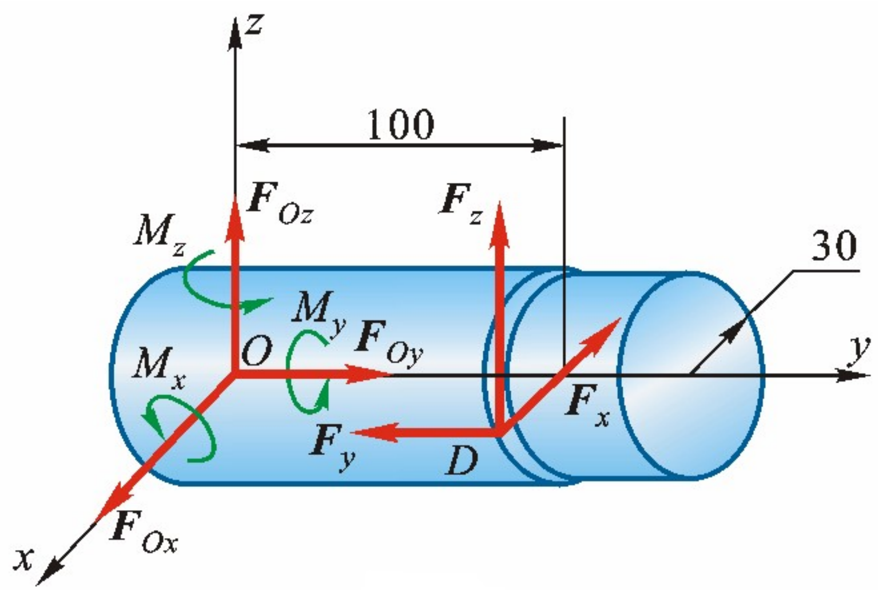
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \qquad 100F_Z + M_x = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad -30F_Z + M_y = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \qquad 100F_x - 30F_y + M_z = 0$$



$$\Rightarrow \quad F_{Ox} = 4.25\text{kN}, F_{Oy} = 6.8\text{kN}, F_{Oz} = -17\text{kN}$$

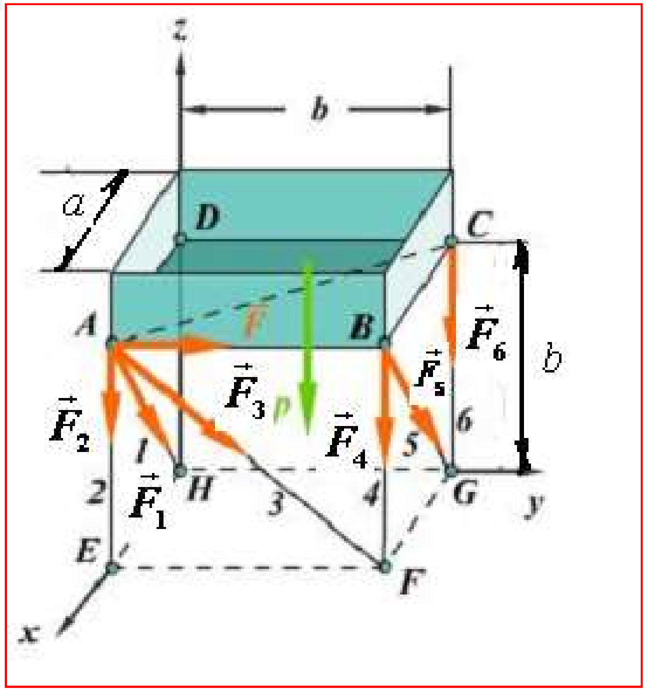
$$M_x = -1.7\text{kN}\cdot\text{m}, M_y = 0.51\text{kN}\cdot\text{m}, M_z = -0.22\text{kN}\cdot\text{m}$$

例3-11（空间任意力系）

已知：均质板由6根直杆支撑，位于水平位置，直杆两侧均用铰链连接，板自重P，水平力F=2P作用在A点。

求：各个杆件内力

每个杆都是两端受力，二力杆



解： 研究长方板，列平衡方程

$$\sum F_x = -F_1\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - -F_5\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \qquad \sum F_y = 2P + F_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_z = -P - F_1\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - F_2 - F_3\frac{\sqrt{2}}{2} - F_4 - F_5\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - F_6 = 0$$

$$\sum M_x = -2Pb - F_3\frac{\sqrt{2}}{2}b - F_4 b - F_5\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}b - F_6 b - P\frac{b}{2} = 0$$

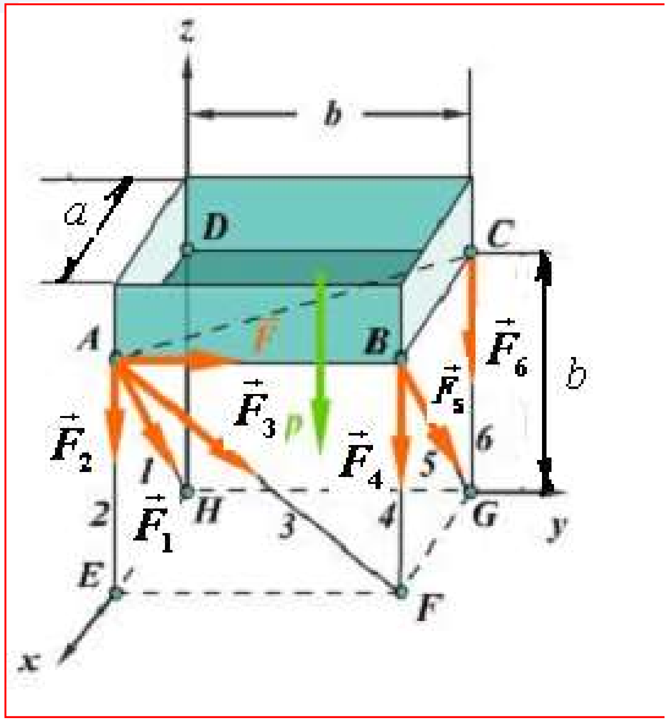
$$\sum M_y = F_2 a + F_3\frac{\sqrt{2}}{2}a + F_4 a + P\frac{a}{2} = 0$$

$$\sum M_z = 2Pa + F_3\frac{\sqrt{2}}{2}a + F_5\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}b = 0$$

$$F_3 = -2\sqrt{2}P$$
$$F_5 = 0$$
$$F_1 = 0$$
$$F_2 = 1.5P$$
$$F_4 = 0$$
$$F_6 = -0.5P$$

例3-11（空间任意力系）

均质板由6根直杆支撑，位于水平位置



解： 研究对象，长方板,列平衡方程

$$\sum M_{AB}(\vec{F})=0 \quad -F_6\cdot a-\frac{a}{2}\cdot P=0 \quad F_6=-\frac{P}{2}$$

$$\sum M_{AE}(\vec{F})=0 \quad F_5\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}b=0 \quad F_5=0$$

$$\sum M_{AC}(\vec{F})=0 \quad F_4\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=0 \quad F_4=0$$

$$\sum M_{EF}(\vec{F})=0 \quad -F_6\cdot a-\frac{a}{2}\cdot P-F_1\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \quad F_1=0$$

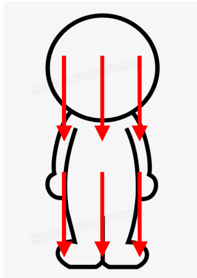
$$\sum M_{FG}(\vec{F})=0 \quad Fb-\frac{b}{2}\cdot P-F_2 b=0 \quad F_2=1.5P$$

$$\sum M_{BC}(\vec{F})=0 \quad -F_2\cdot b-\frac{b}{2}\cdot P-F_3\cdot\cos 45^\circ\cdot b=0 \quad F_3=-2\sqrt{2}P$$

物体的重心

物体重力合力的作用点成为物体的重心。

地球表面附近的空间的重力，本质是一个空间汇交力系（交于地心）



平行力系的合力大小则是物体的重量（单位N）。

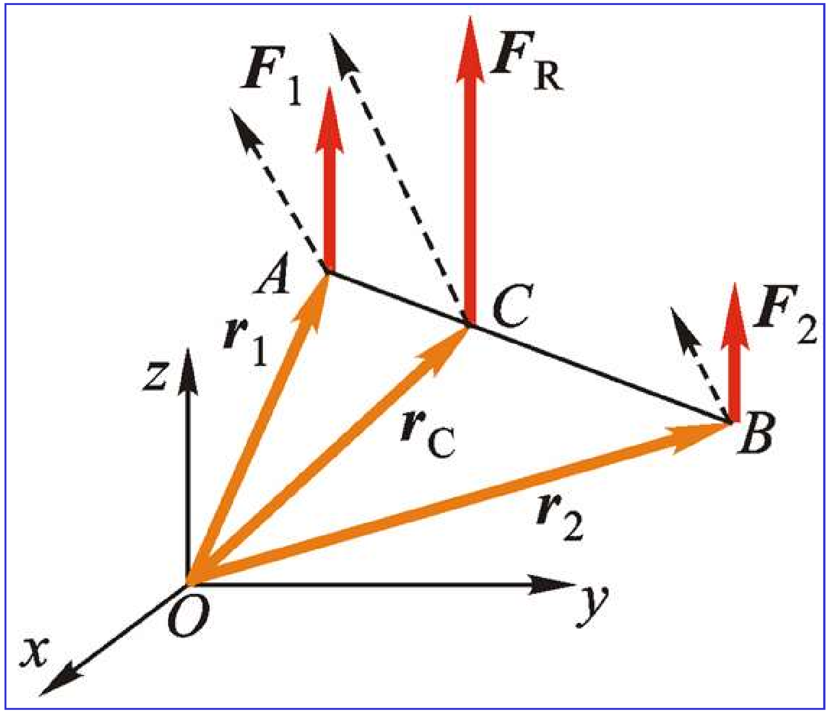
平行力系的主矩为0的简化中心则是重心。

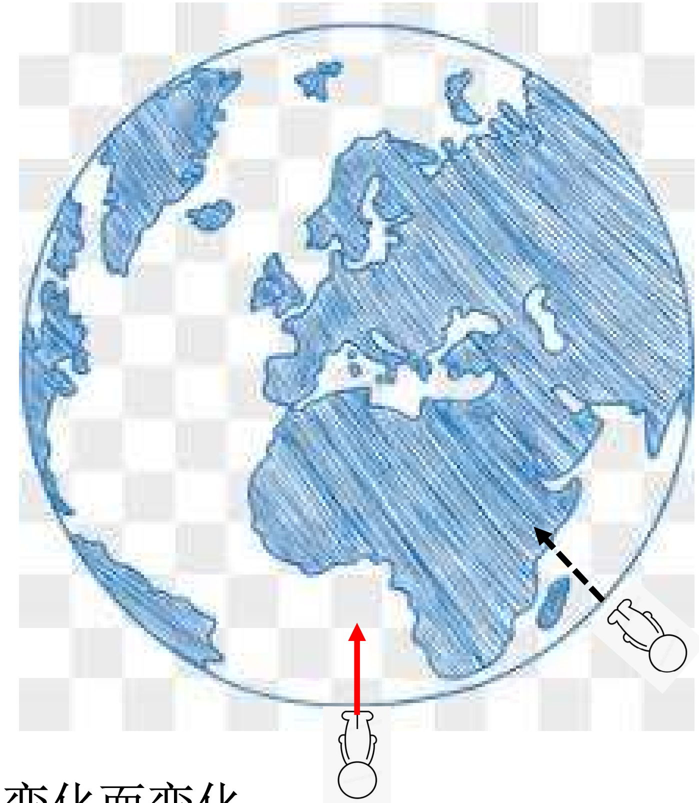
考虑到物体尺寸远小于地球半径（~6000km），空间汇交力系可以近似看做空间平行力系

重心就是平行力系的主矩为0的简化中心

一. 平行力系重心

平行力系合力作用点的位置仅与各平行力系的大小和作用位置有关，而与各平行力的方向无关。



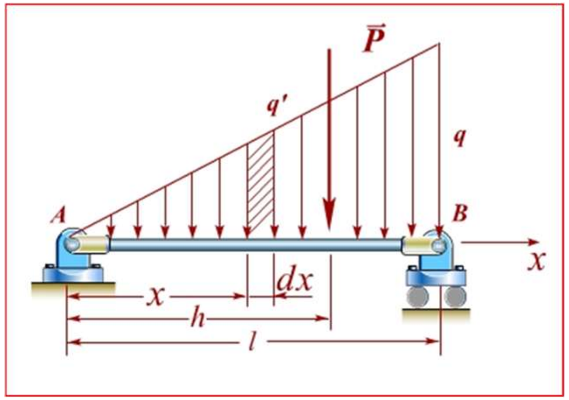


重心的位置不随着物体的方向变化而变化

一. 平行力系中心

如何获得重心的位置？

重心就是主矩为0的简化中心



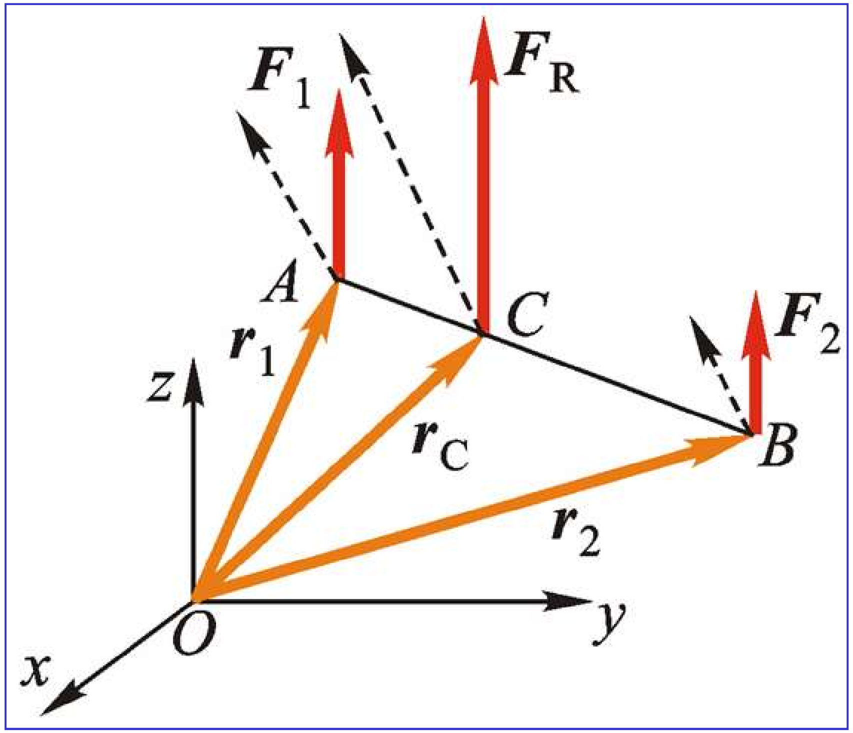
合力矩定理 $\vec{r}_C = \dfrac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_i\vec{r}_i}{\sum F_i}$$

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

$$y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

$$z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$



作业

教材习题：3-12，3-17,3-19