回顾:

形如 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 的振动称为简谐振动

$\omega t + \varphi$: 位相, 表征任意 t 时刻的振动状态。

φ : 初位相, 表征 $t = 0$ 时刻的振动状态。

$$F_{合} = -kx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

位 移: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 振动方程

符合以上三个方程中任意一个的运动即为谐振动。

三个特征量: A, ω, φ

● 由初始条件 (x_0, v_0) 定A, φ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (由系统决定)

(初始状态)

注意：振动状态由(x, v) 描述。

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

若 $t = 0$,位移 x_0，速度 v_0 (初始条件)

$$x_0 = A\cos\phi$$

$$v_0 = -\omega A\sin\phi$$

则可得

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \\ tg\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

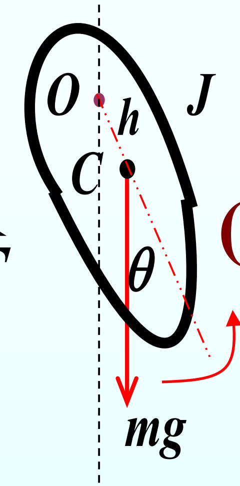
再根据v_0的正负决定φ的取舍。 $v_0 = -\omega A\sin\varphi$

例：求复摆（物理摆）的周期。

解：利用能量关系。

$$\frac{1}{2}J\omega^2+mgh(1-\cos\theta)=c$$

$$\vec{M}=\vec{l}\times\vec{F}$$



(转动惯量)

(摆角很小)

$$J\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+mgh\cdot\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\qquad \sin\theta\approx\theta$$ (因摆角很小)

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mgh\cdot\theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$

周期：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgh}}$

单摆的等值单摆长：$L=J/mh$

另解：

$$M=J\beta=J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$M=-mgh\sin\theta$$ 回复力矩

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgh\sin\theta$$

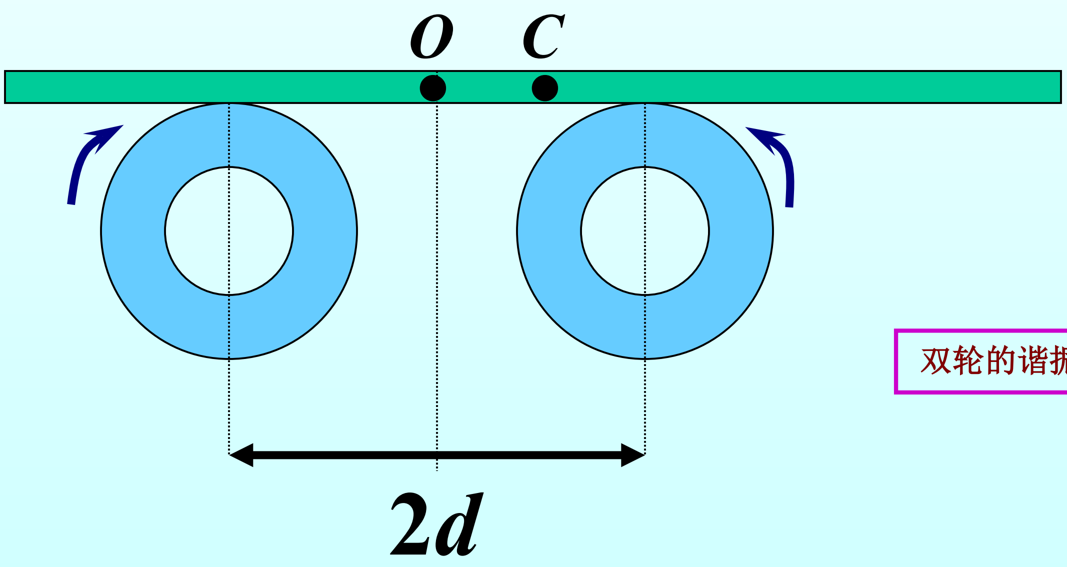
$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mgh\cdot\theta=0$$

弹簧振子 $\omega = \sqrt{k/m}$

单摆 $\omega = \sqrt{g/l}$

复摆 $\omega = \sqrt{mgl/J}$

例2. 两轮的轴互相平行，相距 $2d$, 两轮转速相同而方向相反，将质量为 m 的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩檫系数为 μ，若板的质心 C 起初距一轮较近（如图所示）试证明板作简谐振动，并求周期。



双轮的谐振动

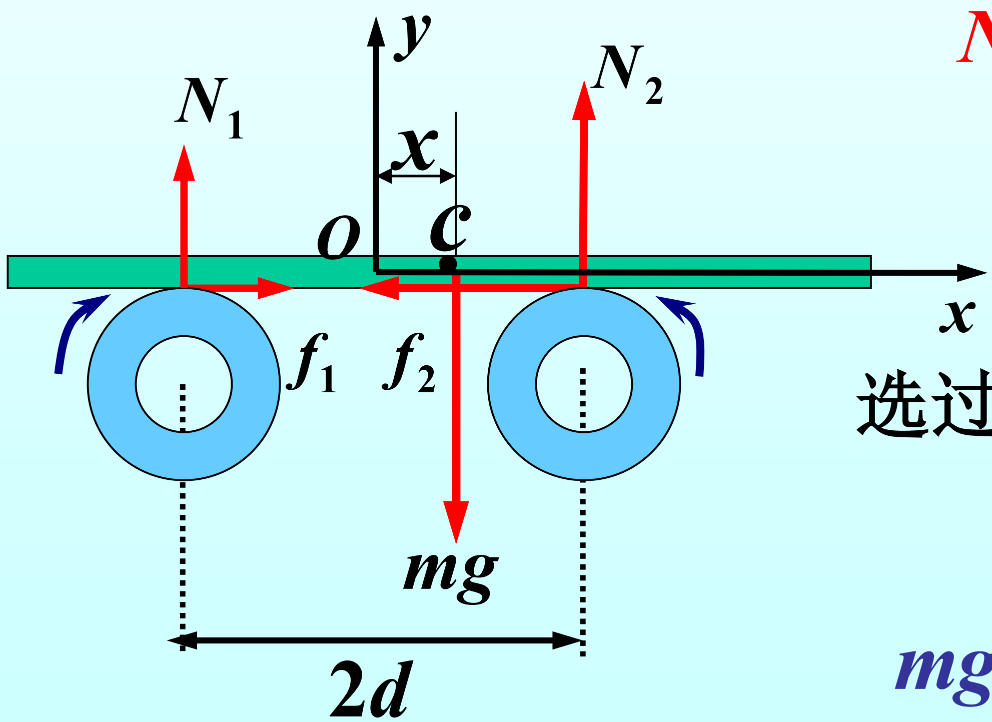
证明：建立坐标系如图， 研究对象：板

板受力：$mg \quad N_1 \quad N_2 \quad f_1 \quad f_2$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\sum F_x = f_1 - f_2 = \mu N_1 - \mu N_2 \neq 0$$

$$N_1 - N_2 = ?$$



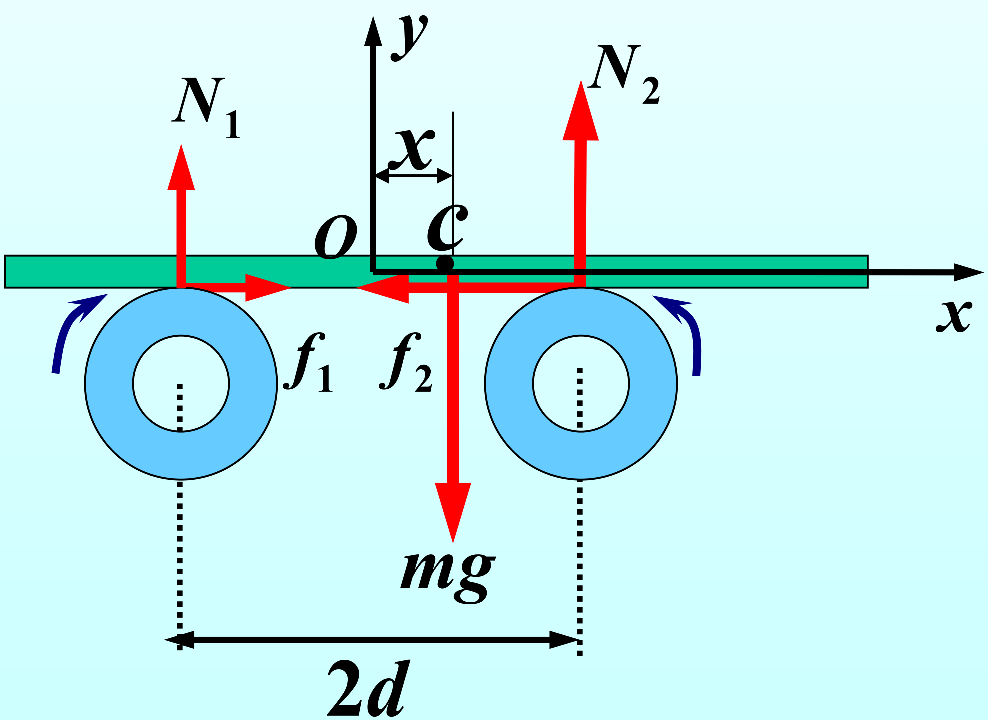
选过O点的直线为转轴

$$\sum \tau_0 = 0$$

$$mgx + N_1 d - N_2 d = 0$$

$$mgx + N_1 d - N_2 d = 0 \longrightarrow N_1 - N_2 = -\frac{mgx}{d}$$

$$\sum F_x = f_1 - f_2 = \mu N_1 - \mu N_2 = -\frac{\mu mg}{d} x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$



$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu g}{d} x = 0$$

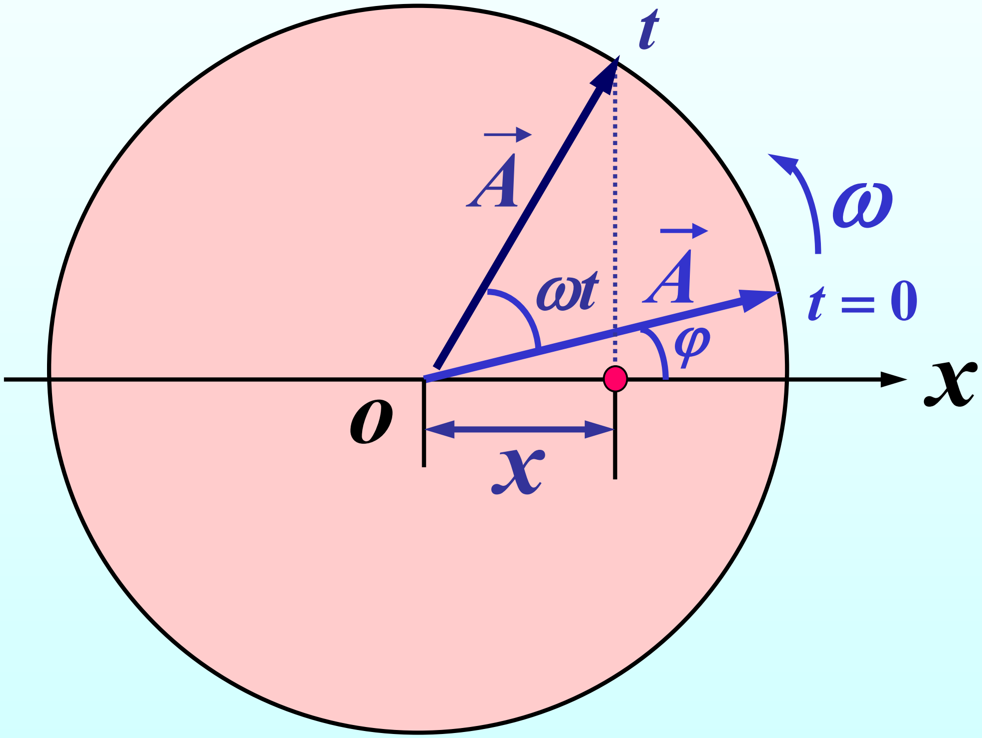
是简谐振动！

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$$

$$\boxed{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

四、旋转矢量表示法

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



矢量图

矢量图表达

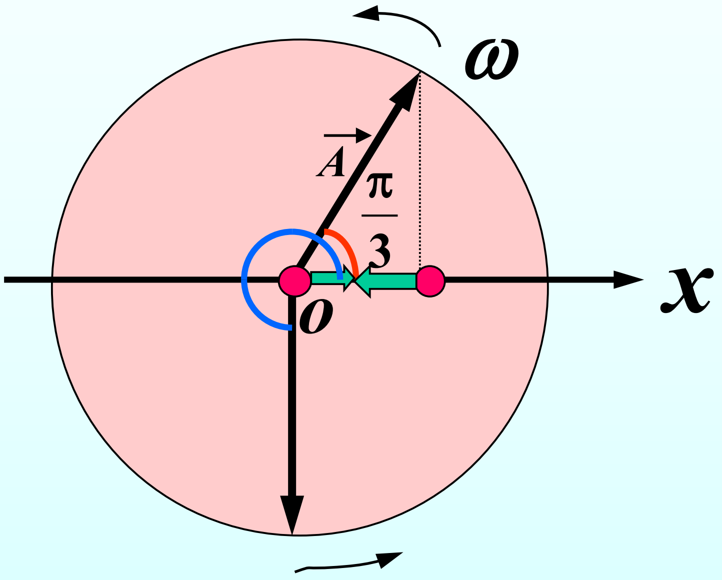
注意各量对应关系！

用旋转矢量很容易求出简谐振动的位相和初位相

例4. 已知位相，求状态.

如： 位相$\omega t_1+\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，问状态？

$x=\dfrac{A}{2}$，且向 x 负向运动.



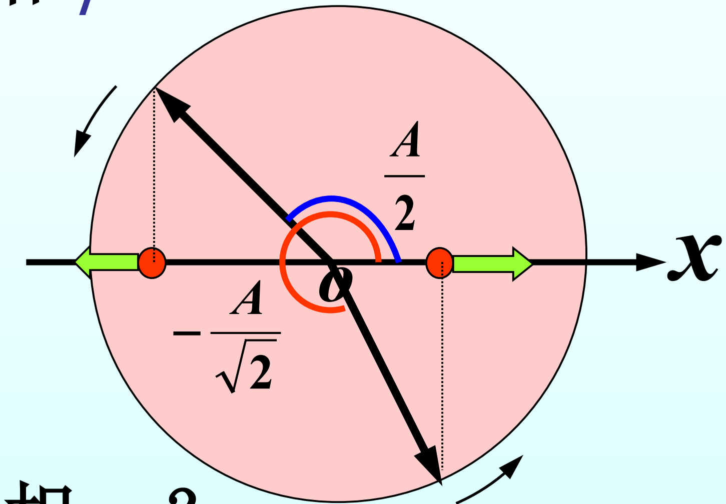
如： 位相$\omega t_2+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$，问状态？

$x=0$，且向 x 正向运动.

例5. 已知状态求位相（特别是初位相）

如： $t=0,\ x_0=\dfrac{A}{2},\ v_0>0,$ 求初相 φ？

$$\varphi=\frac{5\pi}{3}\ \text{或}\ \varphi=-\frac{\pi}{3}$$



如： $t=0,\ x_0=-\dfrac{A}{\sqrt{2}},\ v_0<0,$ 求初相 φ？

$$\varphi=\frac{3\pi}{4}$$

注意四个特殊状态的 φ 值！

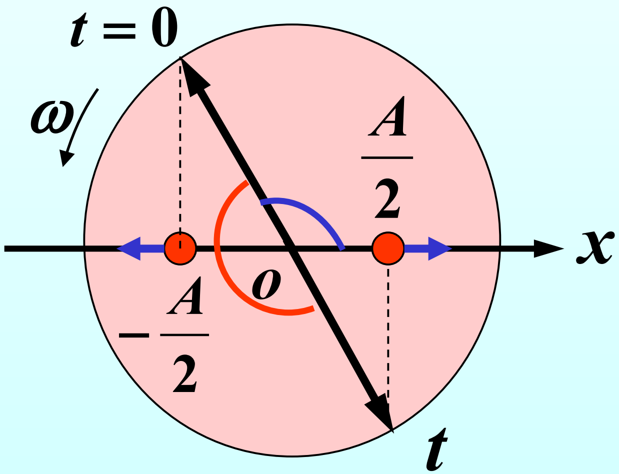
例6. 已知简谐振动A=10 cm，T=2 s, 当 t=0 时位移为 x = –5 cm，且向 x 负向运动。

求（1）振动方 程。

（2）x= 5 cm，且向 x 正向运动时的速度、加速度及从这一位置回到平衡位置的最少时间。

解: (1) $x = \underline{A}\cos(\underline{\omega t} + \underline{\varphi})$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \ (\mathrm{rad/s})$$



由旋转矢量，得 $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

$$x = 0.1\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3})$$

（2）先求 t，由旋转矢量法

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi\ \mathrm{rad}}{\pi\ \mathrm{rad/s}} = 1\ \mathrm{s}$$ （半个周期）

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

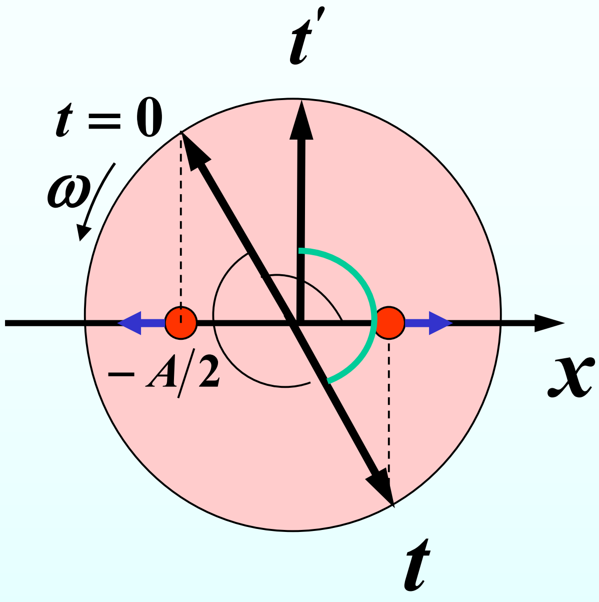
$$= -0.1\pi\sin(\underline{\pi + 2\pi/3})$$

$$= 0.27\mathrm{m/s}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -0.1\pi^2\cos(\underline{\pi + 2\pi/3})$$

$$= -0.49\mathrm{m/s}^2$$



由旋转矢量法

$$\boxed{\Delta\varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}\,\mathrm{rad}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta\varphi'}{\omega} = \frac{5\pi/6\ \mathrm{rad}}{\pi\ \mathrm{rad/s}} = \frac{5}{6}\mathrm{s}}$$

（用解析法也可求出！）

例7. 已知 x- t 曲线, 写出振动方程, 并求它们的位相差?

解: $A = 0.2\,\text{m}\,,\; T = 4\,\text{s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}(\text{rad/s})$$

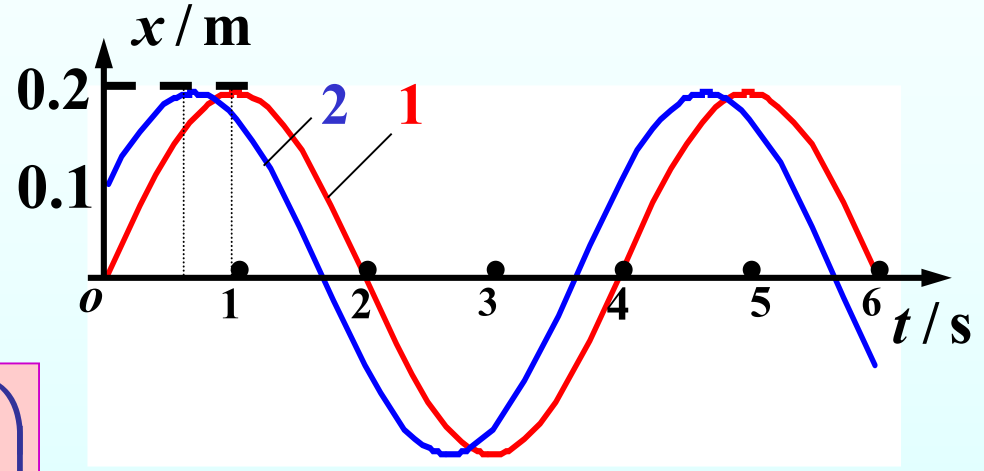
$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}$$

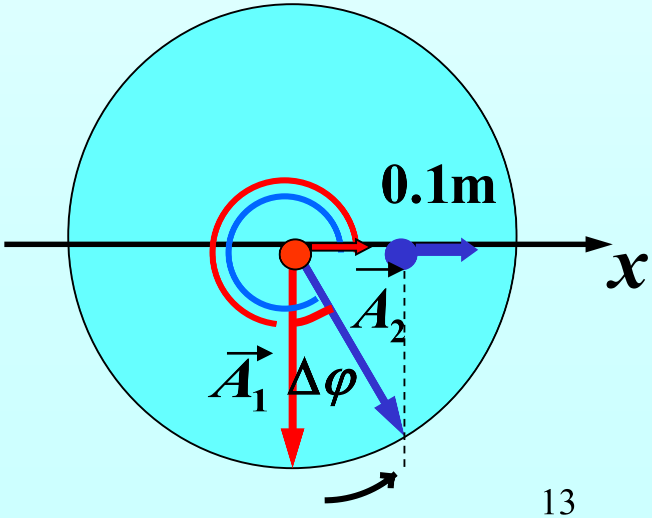
$$x_1 = 0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{3} \text{ 或 } -\frac{\pi}{3}$$

$$x_2 = 0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

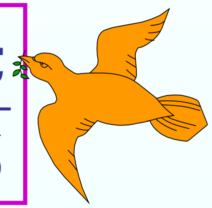
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$





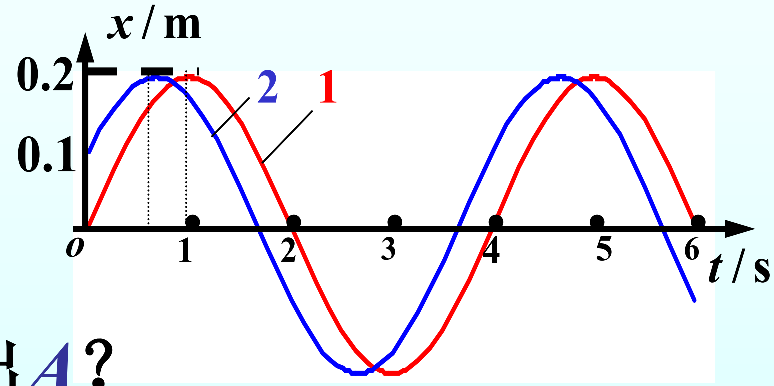
讨论

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$



1° 位相差反映了两振动达到同一状态有时间差

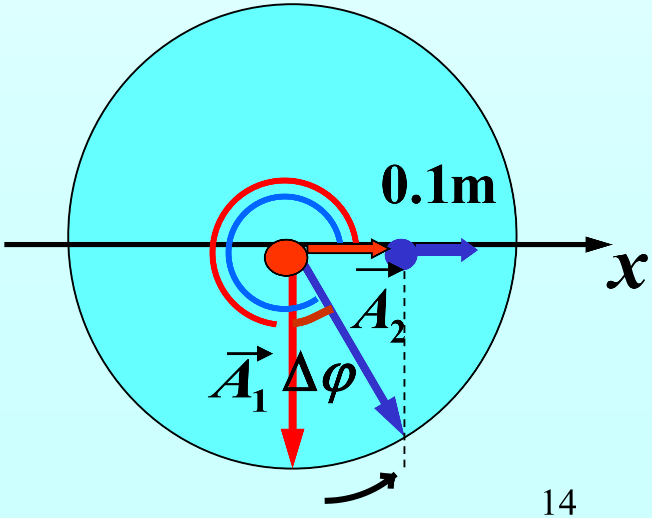
$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \left(= \frac{\pi/6\,\mathrm{rad}}{\pi/2\,\mathrm{rad/s}} = \frac{1}{3}\mathrm{s} \right)$$



2° 若不给A=0.2 m，如何求出A？

利用曲线 2 $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$

$$A = \frac{0.1\ \mathrm{m}}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 0.2\ \mathrm{m}$$

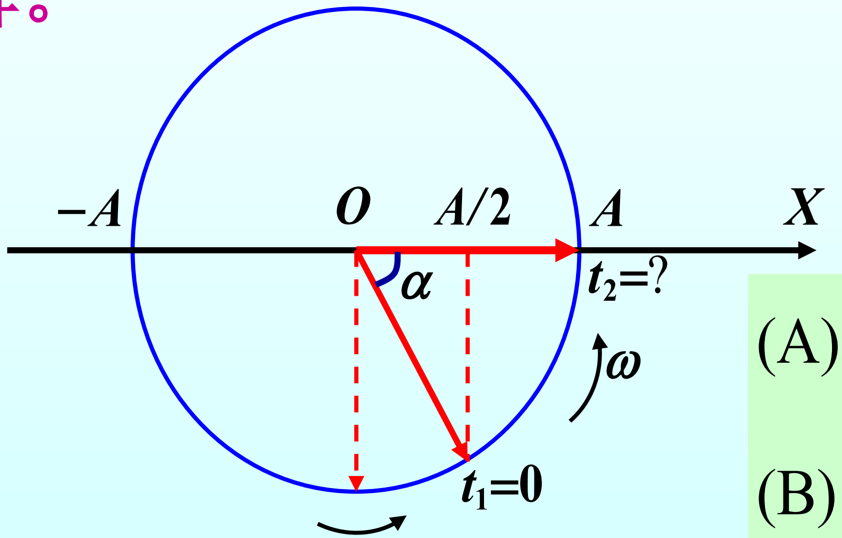


例: 一质点作谐振动，周期为T。当它由平衡位置向X轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需时间为多少？

解: 可根据旋转矢量图求解。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = ?$$

$$\cos\alpha = (A/2)/A = 1/2$$



结合图知, $\alpha = \pi/3$

$$\Delta t = \alpha / \omega$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\Delta t = \alpha / \omega = (\pi/3)/(2\pi/T) = T/6$$

(A) $\dfrac{T}{4}$

(B) $\dfrac{T}{3}$

(C) $\dfrac{T}{6}$

(D) $\dfrac{T}{2}$

例： 一质点沿X轴作谐振动，已知A=0.12m, T=2s
t=0时，x=0.06m、v> 0, 求质点第一次过平衡点t=

(A) $\frac{5}{2}$s
(B) $\frac{5}{4}$s
(C) $\frac{5}{6}$s
(D) $\frac{5}{8}$s

解：由已知条件有：

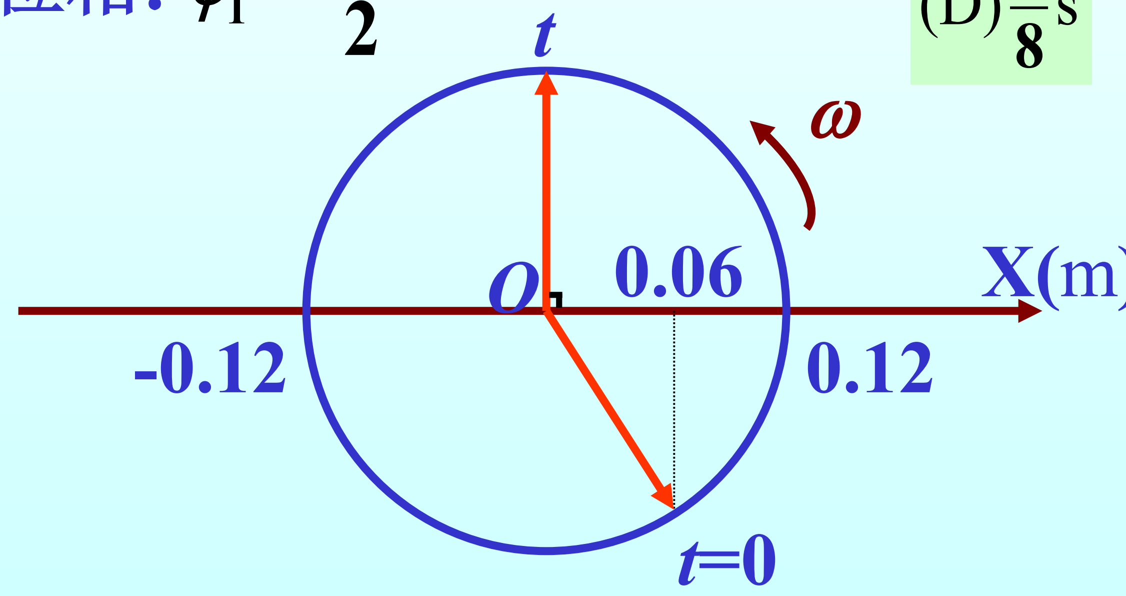
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi(\mathrm{rad/s}) \qquad t=0 \quad \phi_0=-\frac{\pi}{3}$$

第一次过平衡点时的位相：$\phi_1=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ t=\Delta t$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}{\pi}$$

$$=\frac{5}{6}\ (\mathrm{s})$$



$x=0.12\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})$m

例： 一质点作谐振动，速度最大值$v_{max} = 5$cm/s, 振幅$A = 2$cm。令速度具有正最大值的那一刻$t = 0$。求振动方程。

解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

$= -v_{max}\sin(\omega t + \varphi)$

$v_{max} = A\omega, \longrightarrow 5 = 2\omega$

$\omega = 2.5$ rad/s

$t = 0$ 时， $v = v_{max} > 0$

而$v_{max} = -v_{max}\sin(\omega t + \varphi$

故 $\sin\varphi = -1$, $\varphi = 3\pi/2$

$\therefore x = 2\cos(2.5t + 3\pi/2)$ cm

(A) $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

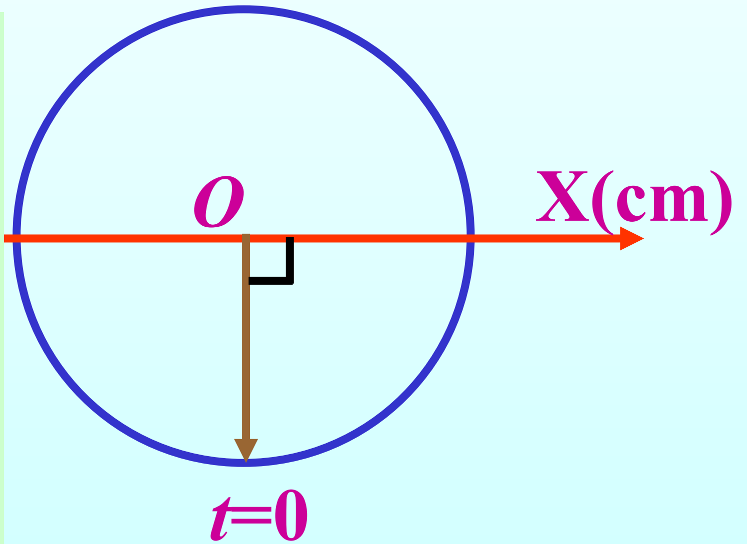
(B) $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

(C) $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

(D) $\varphi = \pi$

另解：根据旋转矢量图求φ。

$v_{max} = A\omega, \longrightarrow \omega = 2.5$ rad/s



所以，初位相$\varphi = 3\pi/2$

$\therefore x = 2\cos(2.5t + 3\pi/2)$ cm

例：已知 x—t曲线，写出振动方程。

解：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$A = 2\text{cm}$　　$\varphi = ?$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$\omega = ?$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{4\pi/3}{1} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

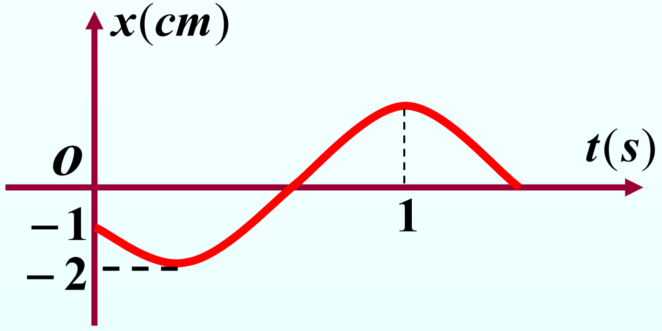
$$\therefore x = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)\text{cm}$$

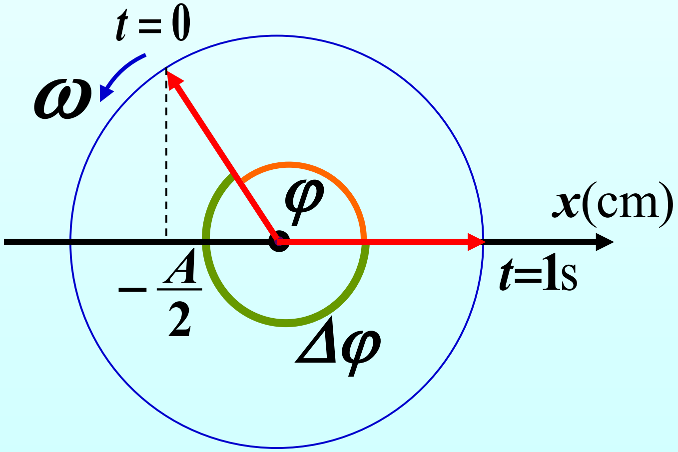
(A) $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$ rad/s

(B) $\omega = \dfrac{4\pi}{3}$ rad/s

(C) $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ rad/s

(D) $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$ rad/s





例：轻质弹簧下挂一小盘,小盘作谐振动, 平衡位置在原点，位移向下为正，并用余弦表示。小盘处于最低位置的时刻有一小物体落到盘上并粘住。若以新的平衡位置为原点，并设新的平衡位置相对原平衡位置向下移动的距离小于原振幅，小物体与盘相碰为计时零点。那么，新的位移表达式的初位相在[　　　]

(A) 0~ π/2 之间　　　(B) π/2 ~π 之间

(C) π ~ 3π/2之间　　　(D) 3π/2 ~ 2π之间

解：$t'=0$ 时，盘与小物体继续下移。故$v'>0$，　$x'>0$。

可作旋转矢量图：

所以 (D) 对。