

## • 回顾:

### ● 单缝夫琅和费衍射 (介绍了振幅矢量法及半波带法)

光强公式 (了解)  $I_{\theta} = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$      $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$

衍射极小条件:  $a \sin \theta = \pm k \lambda$      $k = 1, 2, \dots$

衍射次极大:  $a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$      $k = 1, 2, \dots$

### ● 双缝夫琅和费衍射

光强公式(了解):

$$I_{\theta} = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2 \beta \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \\ \beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \end{cases}$$

单缝衍射极小:  $a \sin \theta = \pm k \lambda$      $k = 1, 2, \dots$

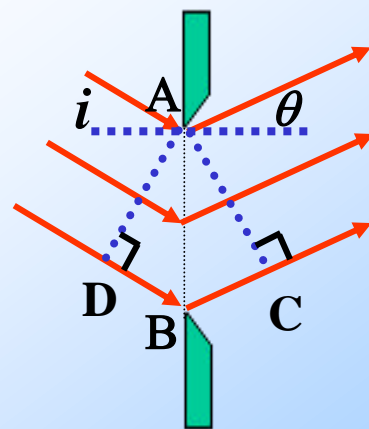
干涉极小:  $d \sin \theta = \pm (2k' + 1) \frac{\lambda}{2}$

干涉极大:  $d \sin \theta = \pm k' \lambda$      $k' = 0, 1, 2, \dots$

一般情形:

$$na(\sin i + \sin \theta) = \pm k \lambda$$

$$na(\sin i + \sin \theta) = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$



$$k' = k \frac{d}{a} = \text{整数}$$

—缺级<sup>1</sup>

# • 回顾:

## ● 多缝衍射-光栅衍射

光强公式  
(了解)

$$I_{\theta} = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \\ \beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \end{array} \right.$$

主极大  $d \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$

衍射极小  $a \sin \theta = \pm k' \lambda \quad k' = 1, 2, \dots$

$$k = k' \frac{d}{a} = \text{整数} \quad \text{—缺级}$$

干涉极小

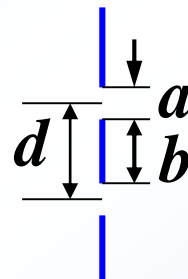
$$d \sin \theta = \pm \frac{k'}{N} \lambda = \pm \left( k + \frac{m}{N} \right) \lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, 3 \dots \\ m = 1, 2, 3 \dots N-1 \end{array} \right.$$

相邻主极大间有  $N-1$  个暗纹, 有  $N-2$  个次极大

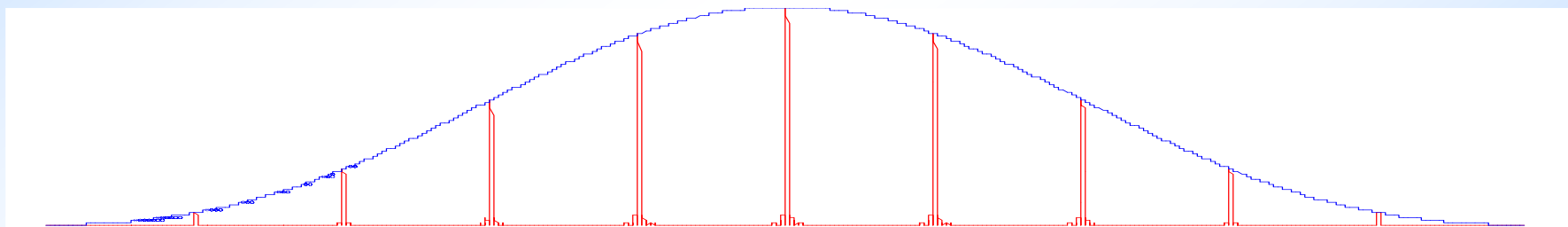
中央主极大半角宽度:  $\Delta \theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$       强度  $I \propto N^2$

如：500条刻线/mm

光栅常数  $d = a + b = \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ mm} = 2 \times 10^3 \text{ nm}$



- $d$  很小，条纹分得开。
- $a$  很小 ( $a \sim \lambda$ )，中央包线几乎复盖整个屏。
- $N$  很大(千万条)，每条谱线又细又亮。



光栅为光谱仪的分光元件

应用：(1) 测波长。

(2) 光谱分析：物质元素成份、含量。

# 光栅光谱, 光栅的色散本领

## 1) 光栅光谱

$$d \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k=0,1,2,\dots) \quad \text{——干涉主极大}$$

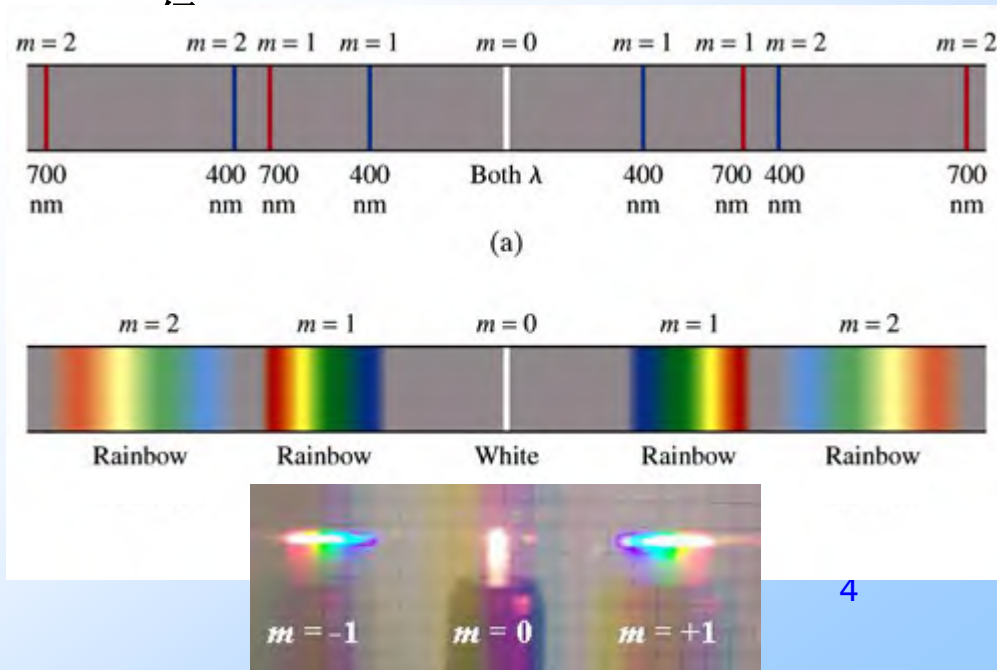
白光照射除 $k=0$ 级主极大外, 其余各级主极大对不同波长的光波, 在不同的衍射角出现。  
——色散

即:  $d$ 一定、 $k$ 一定,  $\lambda \uparrow$ 、 $\theta \uparrow$

各级主极大按波长  
顺序排列形成光谱。

——光栅光谱

可用于微量物质的检测。



## 2) 光栅的色散本领

把不同波长的光在谱线上分开的能力

设：波长  $\lambda$  的谱线, 衍射角  $\theta$ , 位置  $x$ ;

波长  $\lambda + \Delta\lambda$  的谱线, 衍射角  $\theta + \Delta\theta$ , 位置  $x + \Delta x$

$$\begin{array}{ll} \text{角色散本领:} & D_{\theta} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \\ \text{线色散本领:} & D_l \equiv \frac{\Delta x}{\Delta\lambda} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} D_{\theta} \\ D_l \end{array}} \right\} \begin{array}{l} D_l = f \cdot D_{\theta} \\ f \text{—光栅后的透镜焦距} \end{array}$$

$$\text{由: } d \sin \theta = k \lambda \quad \text{有: } \cos \theta \cdot \Delta \theta = k \frac{\Delta \lambda}{d}$$

$$\text{得: } D_{\theta} = \frac{k}{d \cos \theta_k} \quad D_l = \frac{k f}{d \cos \theta_k}$$

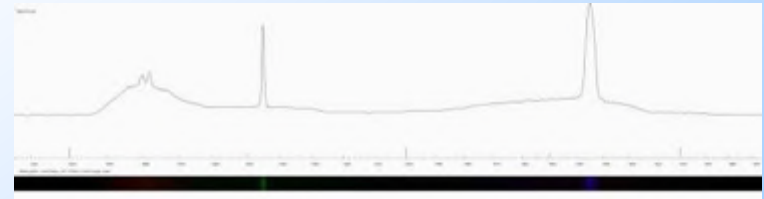
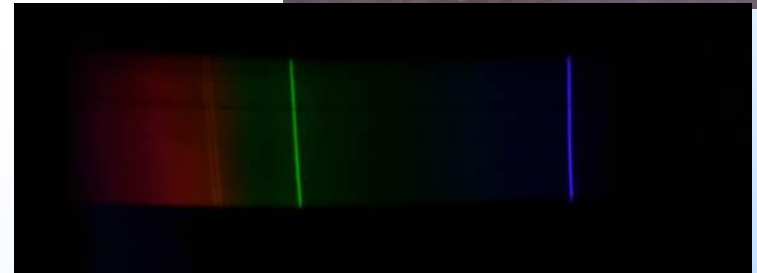
可见: (1)  $k \uparrow$ 、 $\theta_k \uparrow$ ,  $\cos \theta_k \downarrow$ , 则  $D \uparrow$

级次较高的色散本领大

(2)  $d \downarrow$ , 则  $D \uparrow$ , 谱线展得越开

# 科普: Build a high resolution spectrograph in 15 minutes

<https://www.scitoyscatalog.com>





**例3.** 波长为  $\lambda = 590 \text{ nm}$  的平行光正入射到每毫米 500 条刻痕的光栅上时，屏幕上最多可以看到多少条明纹？

**解：** 光栅常数  $d = \frac{1 \text{ mm}}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ mm} = 2000 \text{ nm}$

$$d \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k = 0, 1, \dots, \max)$$

$$\theta = \pm 90^\circ \text{ 时} \quad d \sin 90^\circ = \pm k \lambda$$

$$k = \pm \frac{d}{\lambda} = \pm \frac{2000}{590} = \pm 3.4 \Rightarrow \pm 3$$

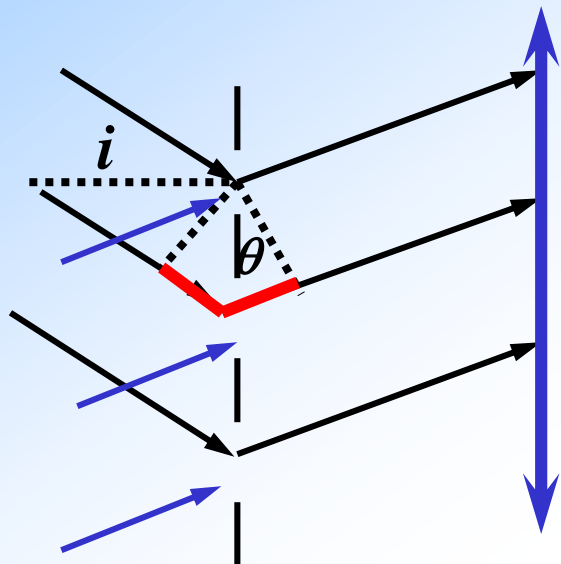
最多可以看到  $2 \times 3 + 1 = 7$  条明纹.

**例4.** 在上题条件下，平行光斜入射  $i = 30^\circ$  时，屏幕上最多可以看到哪些条明纹？

$$d \sin \theta = \pm k \lambda$$



**解：** 光栅方程为  $d \sin \theta + d \sin i = \pm k \lambda \quad k = 0, 1 \cdots \max$



(1) 当  $\theta = +90^\circ$  时

$$d(\sin 90^\circ + \sin 30^\circ) = k \lambda$$

$$k = 5.1 \Rightarrow 5 \text{ 级}$$

(2) 当  $\theta = -90^\circ$  时

$$d[\sin(-90^\circ) + \sin 30^\circ] = -k \lambda$$

$$-k = -1.6 \Rightarrow -1 \text{ 级}$$

总共见到7条，上方 5 条，下方 1 条

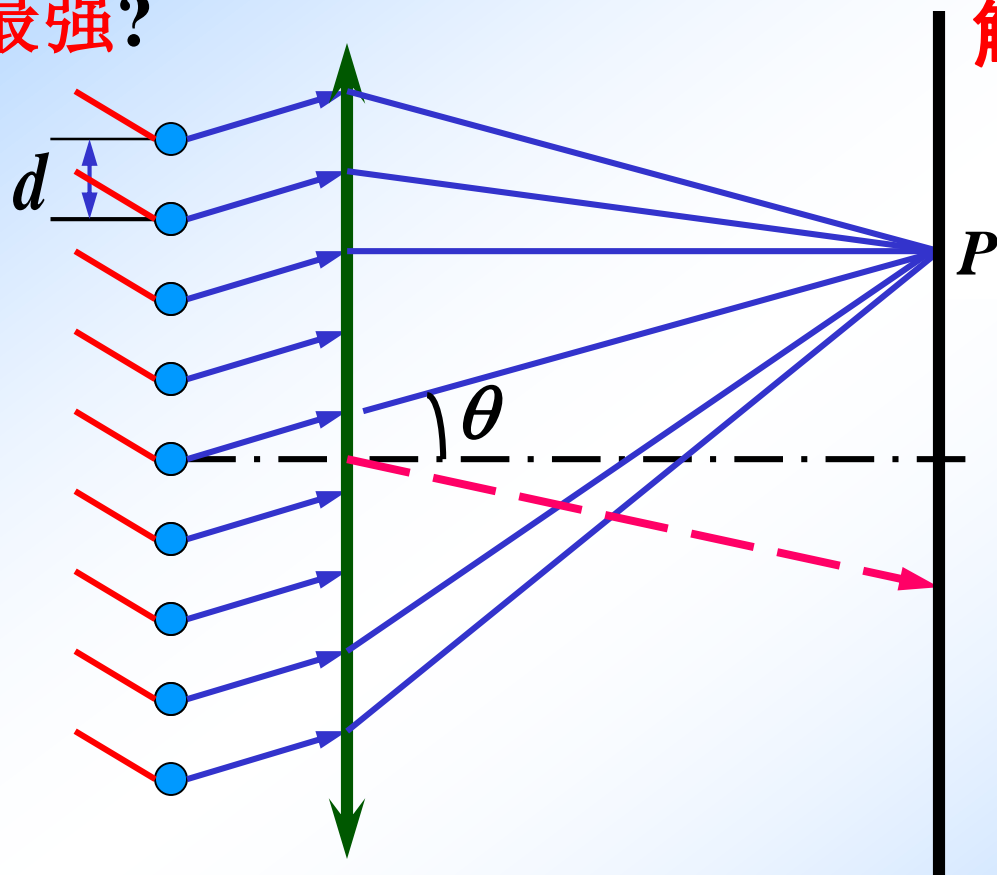
**注意：** 平行光 斜入射时，光栅方程为

$$d \sin \theta - d \sin i = \pm k \lambda \quad k = 0, 1 \cdots \max$$

总共见到7条，上方 1 条，下方 5 条



**例5.** 天线列阵由一沿水平直线等距排列的  $N$  个天线组成，每个天线均发射波长为  $\lambda$  的球面电磁波，但从第1个天线到第  $N$  个天线，**位相依次落后  $\frac{\pi}{2}$** ，若相邻天线中心间的距离  $d = \frac{\lambda}{2}$ ，问：离天线很远处什么方向上，（与天线列阵的法线夹角  $\theta = ?$ ）天线列阵发射的电磁波**最强**？



**解：**  $d \sin \theta + ? = k\lambda$

$$\left( \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{4} \right)$$

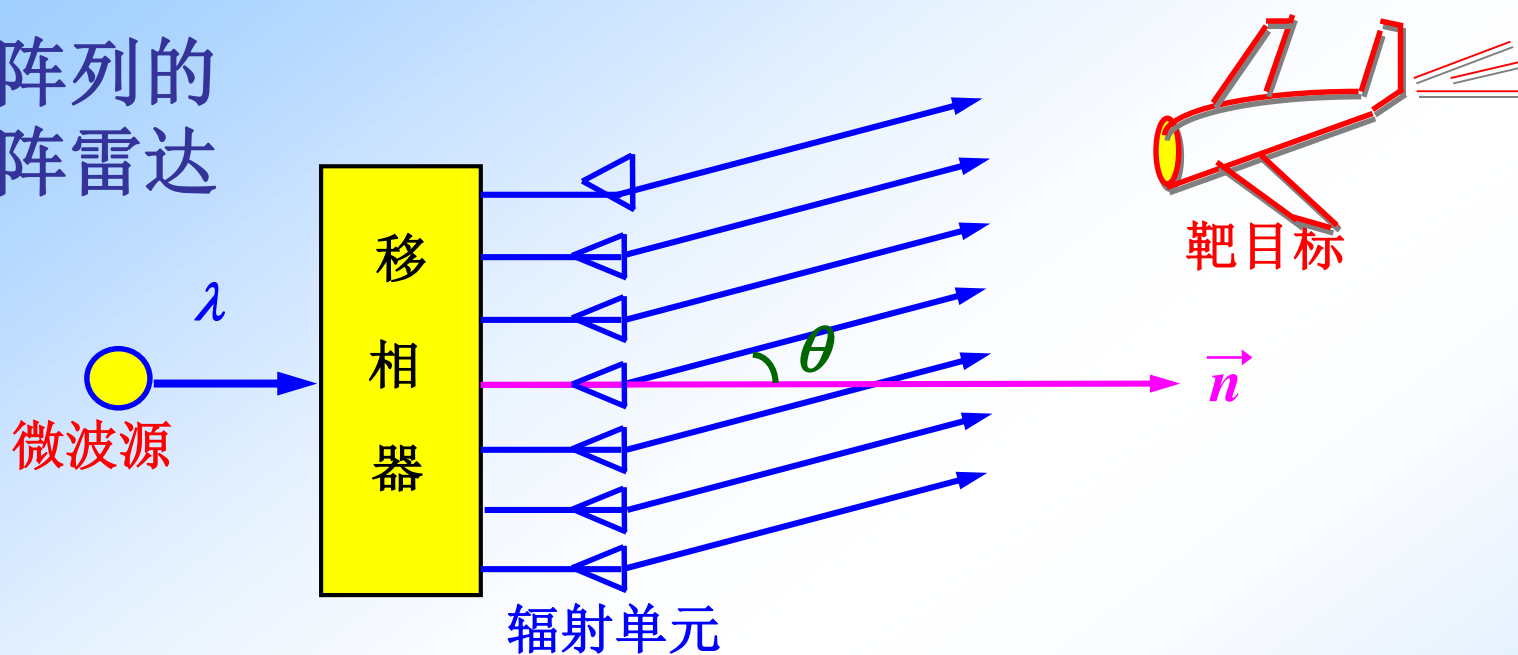
$$d \sin \theta + \frac{\lambda}{4} = k\lambda$$

$$\text{最强: } \frac{\lambda}{2} \sin \theta + \frac{\lambda}{4} = 0$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \theta = -30^\circ$$

实际上 ‘中央明纹’  
在  $\theta = -30^\circ$  的方向上.

# 一维阵列的 相控阵雷达



中国解放军凯山一号导弹  
相控雷达车



法国疾风战斗机



Thalès RBE2-AA

**例6.** 设计一光栅，要求把第一级可见光谱扩展到  $30^\circ$  角范围，第二级光谱缺级，试确定  $d$ 、 $a$  之值？

**解：** 可见光  $400 \text{ nm} \text{---} 760 \text{ nm}$   
 $\lambda_1 \qquad \qquad \qquad \lambda_2$

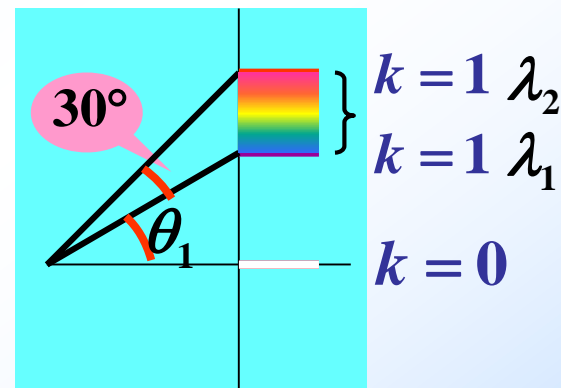
$$k = 1 \begin{cases} d \sin \theta_1 = \lambda_1 \\ d \sin(\theta_1 + 30^\circ) = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \theta_1 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos \theta_1 = \frac{\lambda_2}{d} \end{cases}$$

$$\therefore d = \sqrt{\left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \right)^2 + \lambda_1^2} = 918 \text{ nm}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{d}{2} = 459 \text{ nm}$$

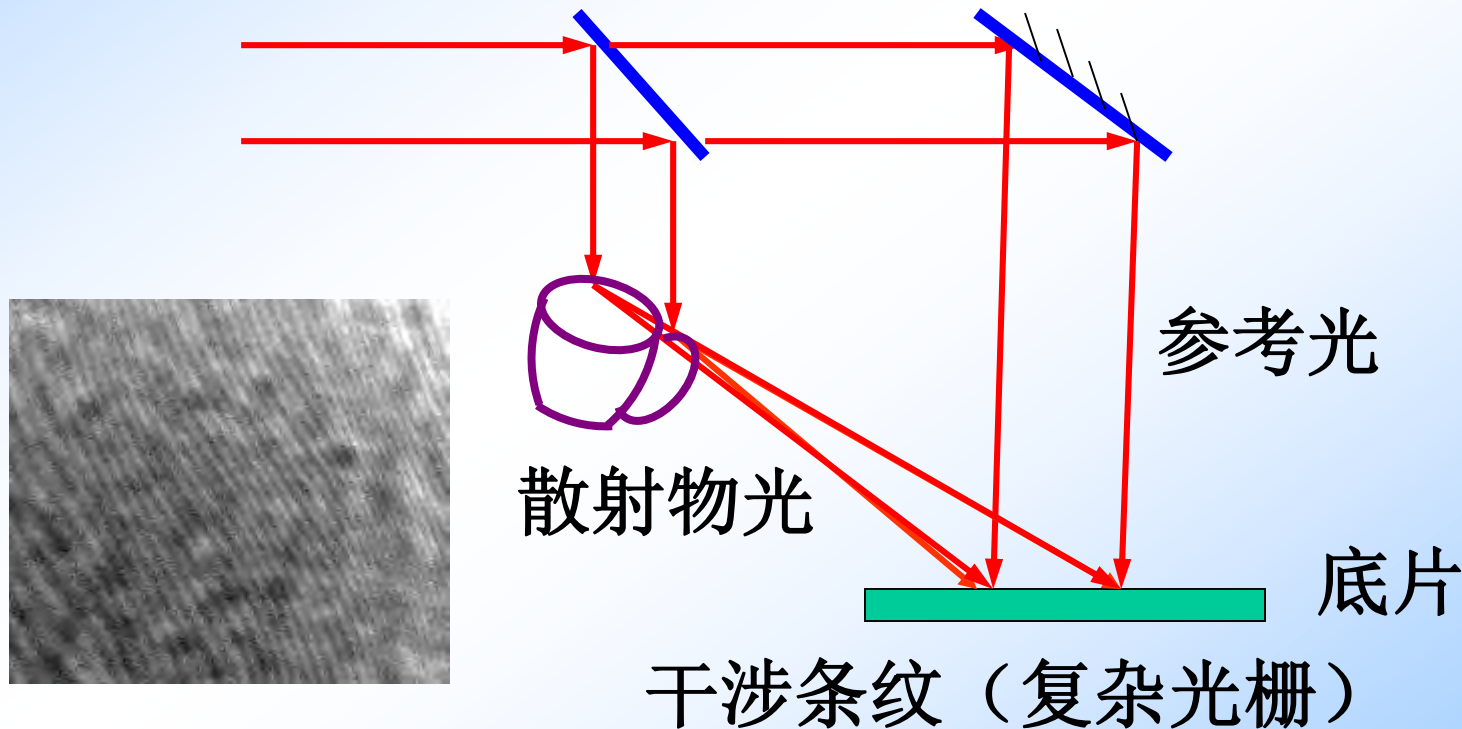


# 科普：全息照相—干涉与衍射的现代技术应用

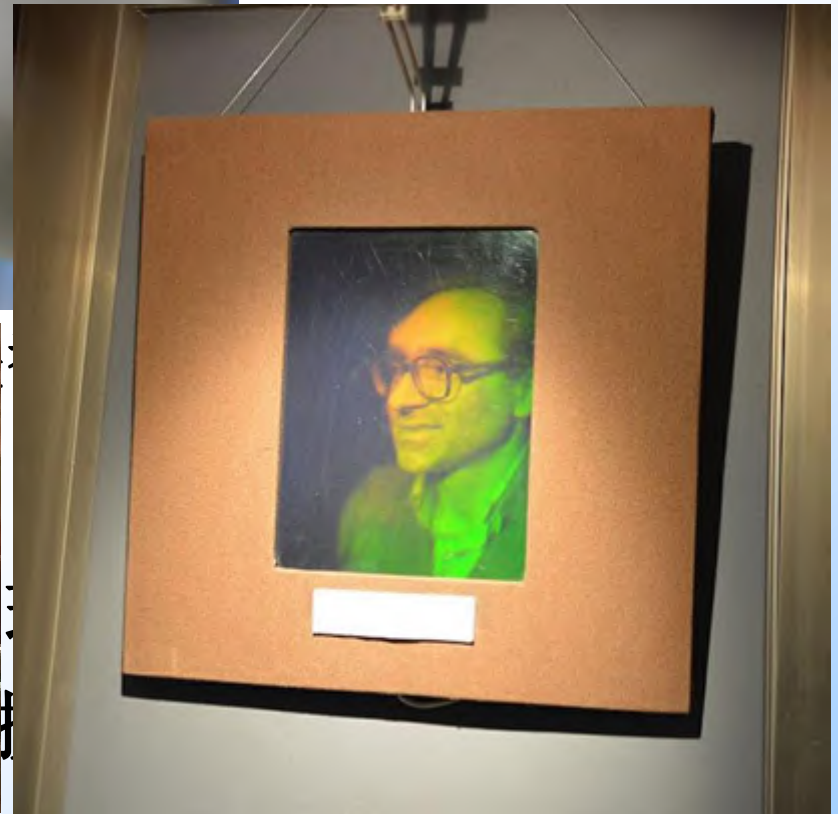
记录光波的全部信息（振幅、频率、位相）。

记录 —— 光的干涉效应  
再现 —— 光的衍射效应 } 激光是理想的光源

## 1. 记录 —— 干涉效应

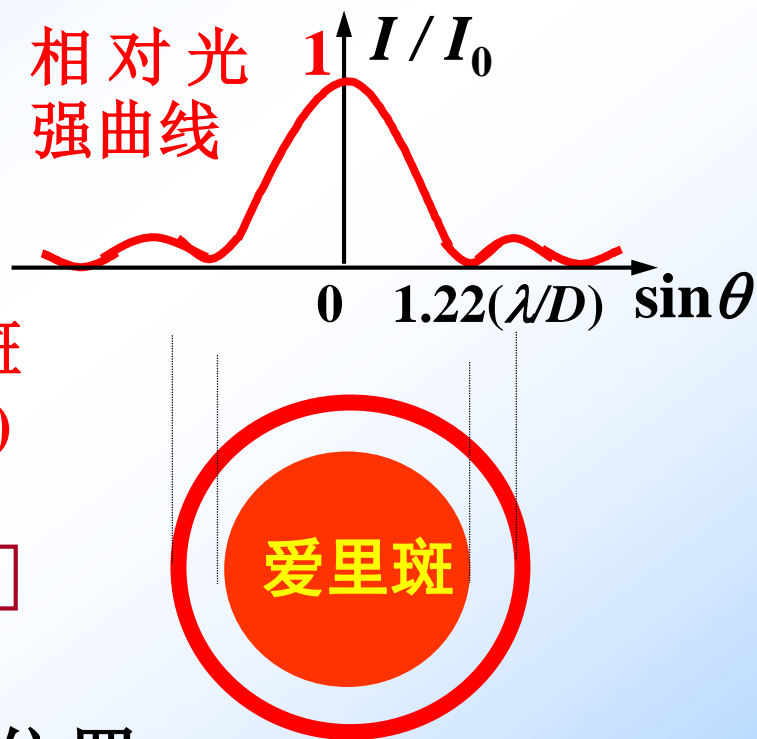
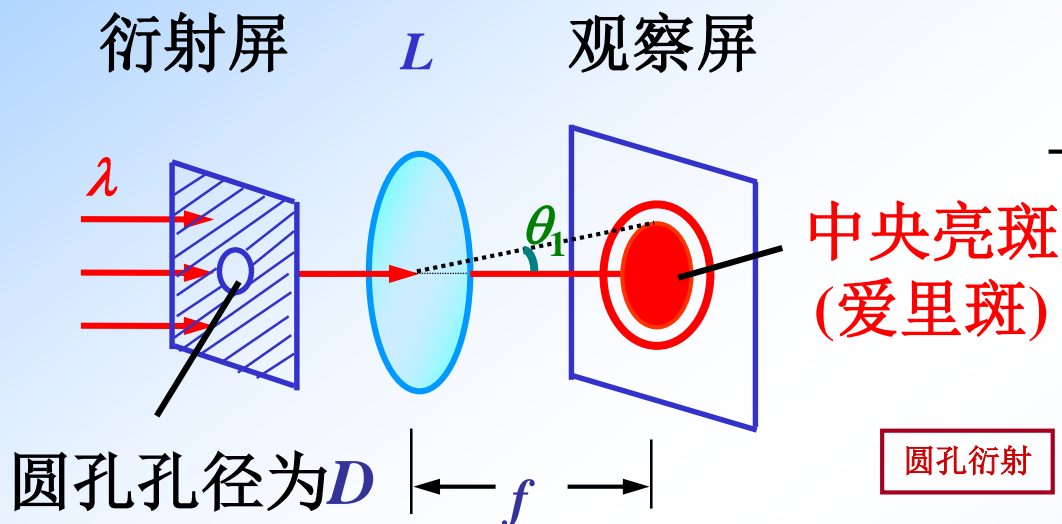






## 五、圆孔衍射 光学仪器的分辨率

### 1. 圆孔的夫琅和费衍射



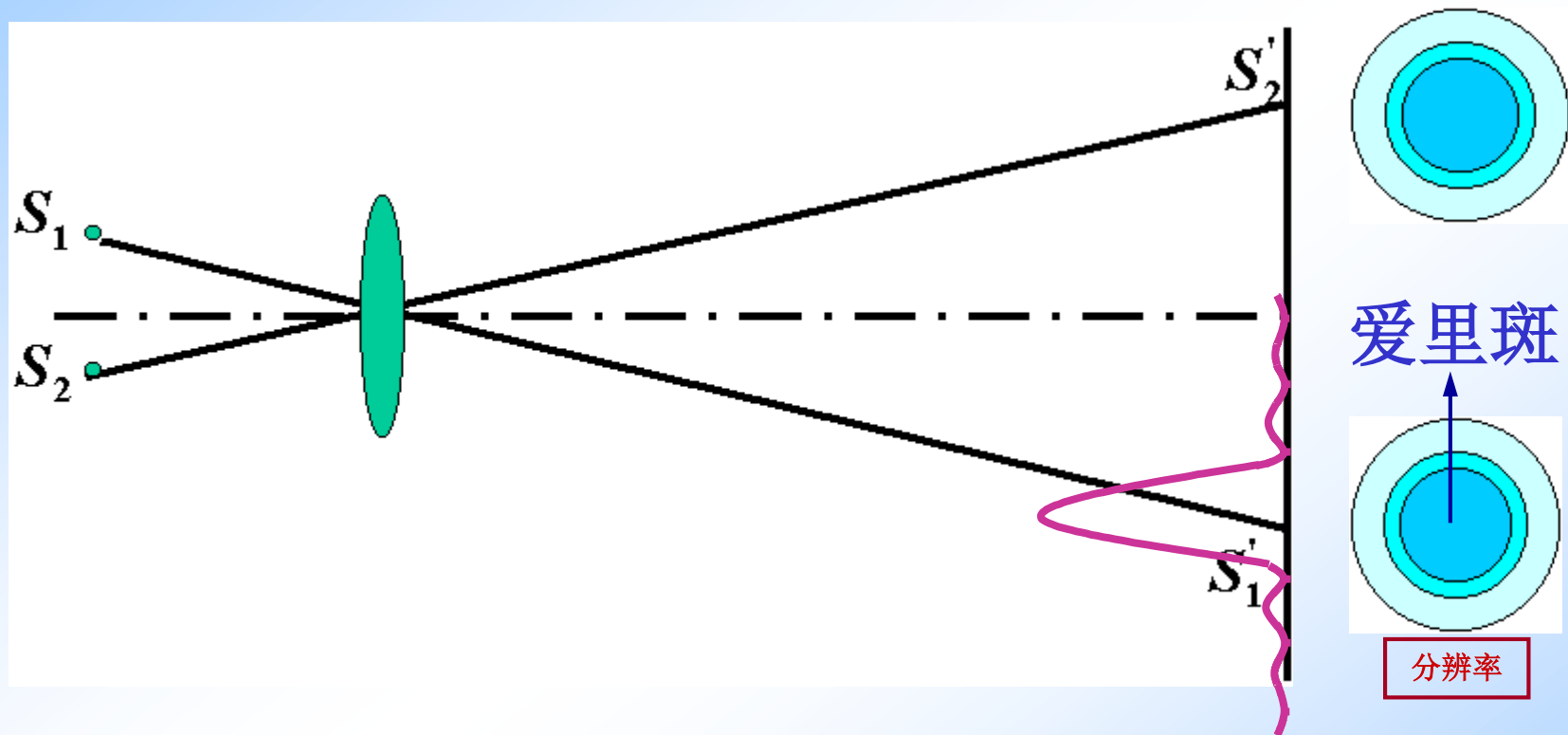
圆孔夫琅和费衍射第一级极小位置

$$\theta_1 \approx \sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{a} \quad D(a) \text{ 为圆孔直径(半径)}$$

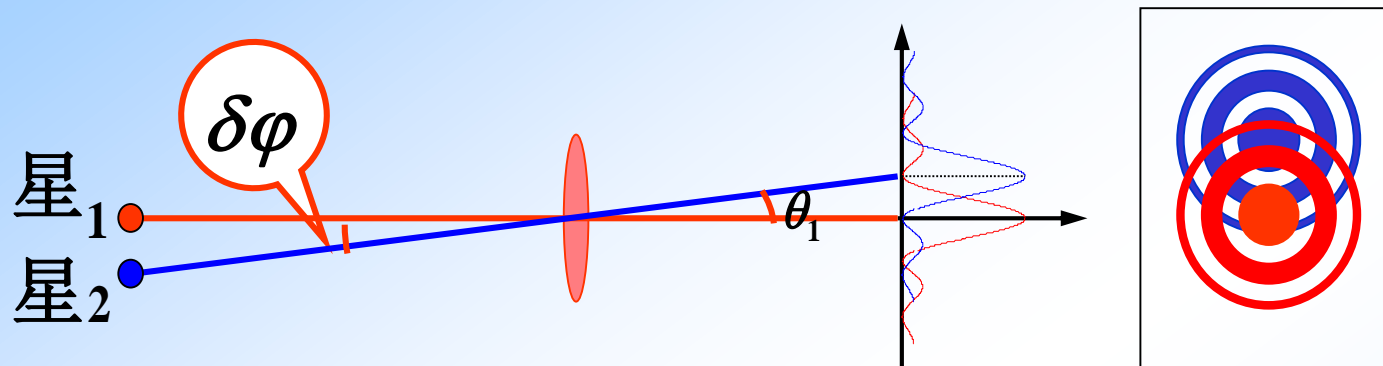
爱里斑的半径  $R = 1.22 \frac{f\lambda}{D}$



## 2. 圆孔径光学仪器的分辨率



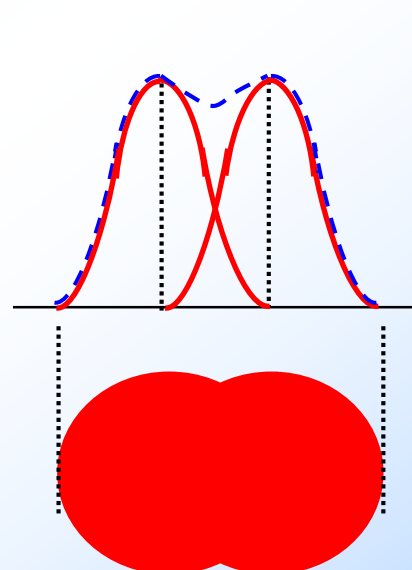
能够区分多么近的两个物点, 是光学仪器的重要性能.



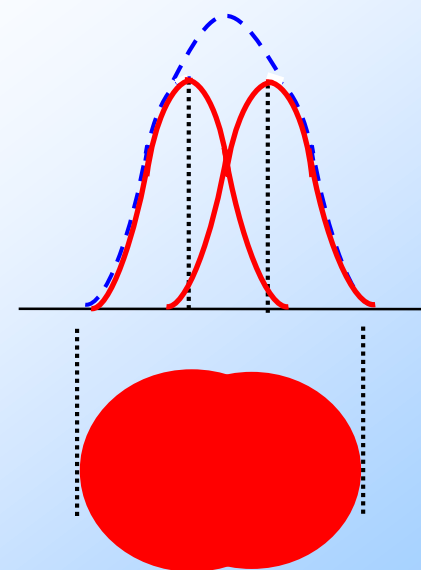
## 瑞利判据:

对于两个等光强的非相干物点，如果一个象斑的中心恰好落在另一象斑的边缘（第一暗纹处），则此两物点被认为是刚刚可以分辨。

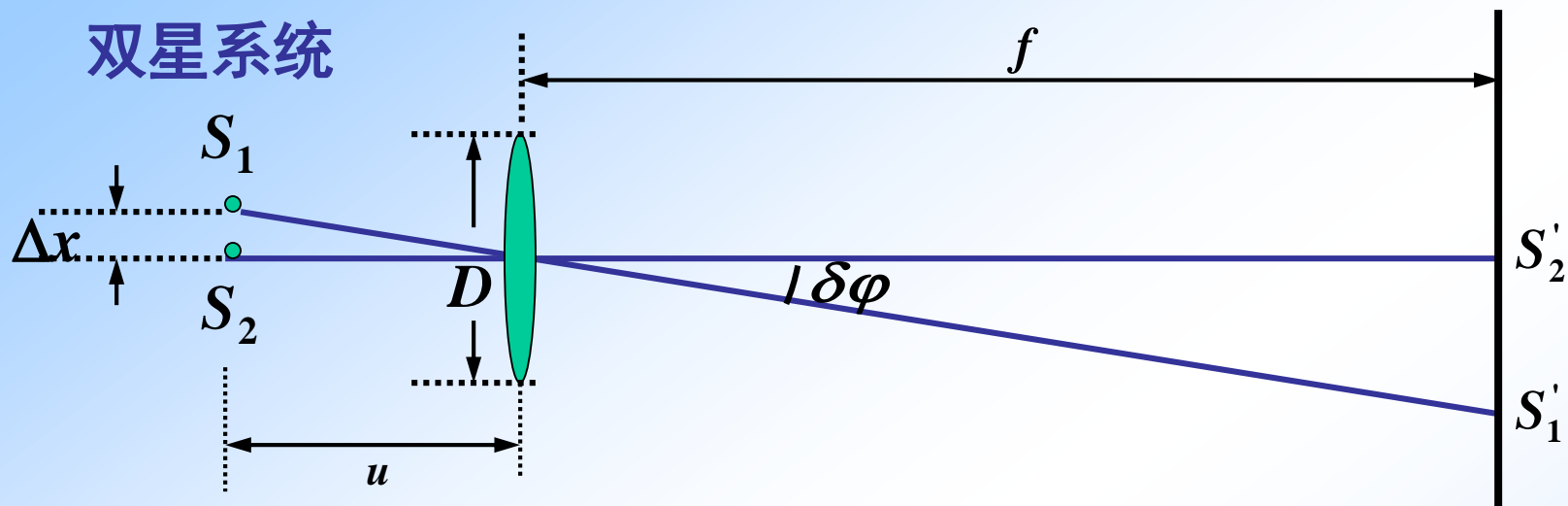
刚可分辨



不可分辨



## 双星系统



刚好能分辨时， $S_1$ 、 $S_2$  两点间的距离是光学仪器的可分辨的最小距离  $\Delta x$ ， $\delta\phi$  是最小分辨角。

最小分辨角  $\delta\phi = \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

分辨率  $= \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$

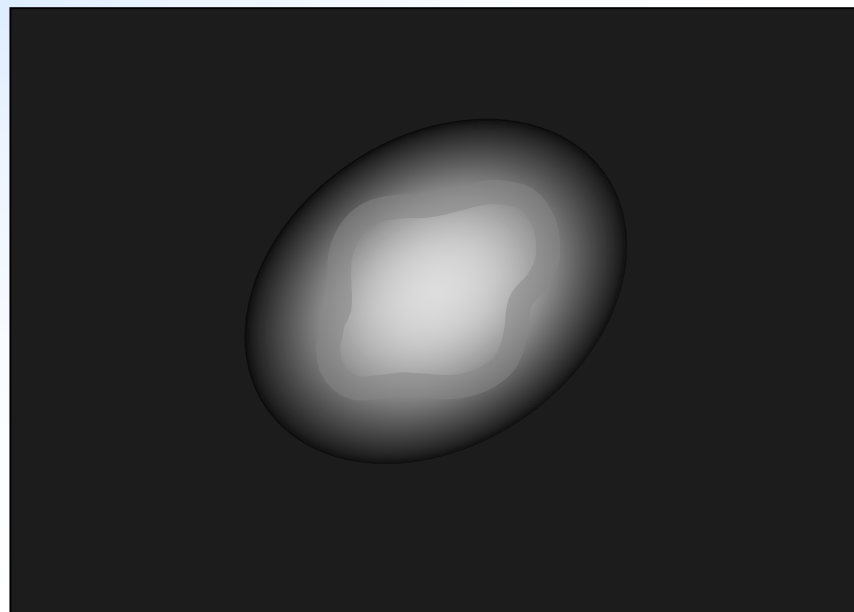
提高分辨本领的途径  $\begin{cases} D \uparrow \\ \lambda \downarrow \end{cases}$

望远镜

显微镜



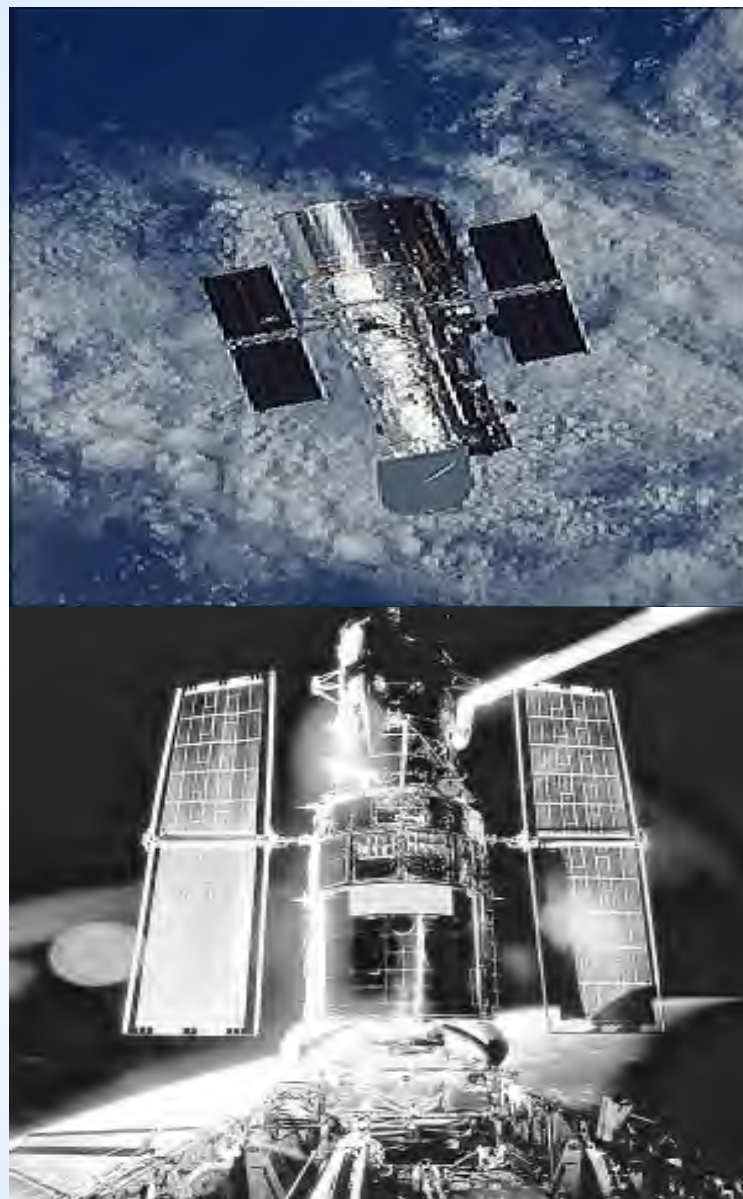
如果用望远镜观察到在视场中靠得很近的四颗星星恰能被分辨。



若将该望远镜的物镜孔径限制得更小，则可能分辨不出这是四颗星星。

# 哈勃太空望远镜

1990 年发射的哈勃太空望远镜，其凹面镜的直径为 **2.4 m**，角分辨率约为 **0.1''**，在大气层外**615 km** 处绕地球运行，可观察 **130 亿光年** 远的宇宙深景，发现了 **500 亿** 个星系。





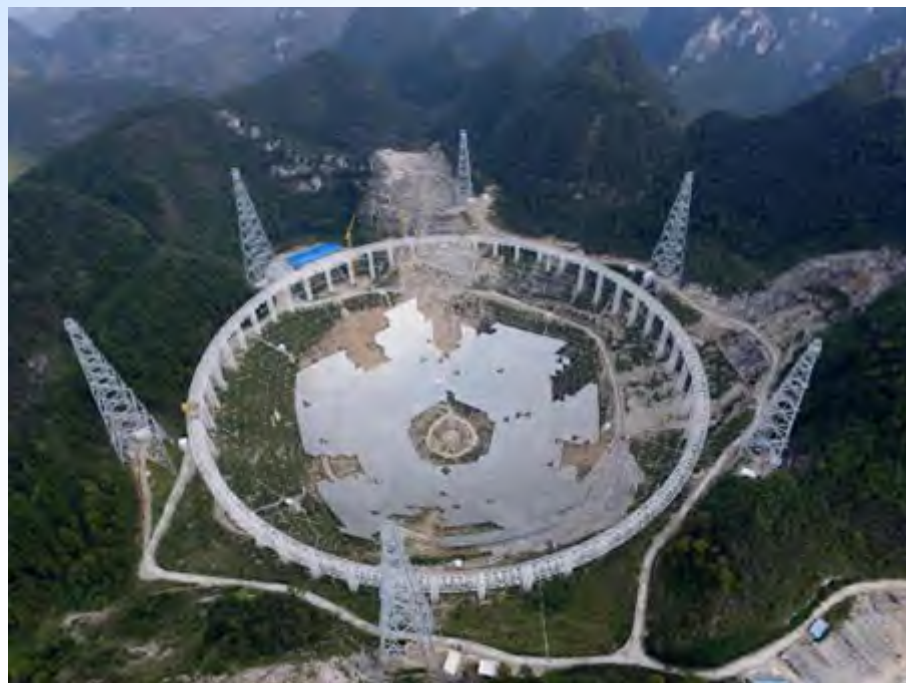
美国建造了直径达**305米**的抛物面射电望远镜，不能转动，是世界上最大的单口径射电望远镜。



我国科学家在贵州南部喀斯特洼地建造的**天眼—FAST** (**500米**口径球面射电望远镜)，是一个接收面积达**1 km<sup>2</sup>**、世界上最大的射电望远镜。







“中国天眼”的主要发起者和奠基人  
“人民科学家”南仁东

**例1** 设人眼在正常照度下的瞳孔直径约为3 mm，而在可见光中，人眼最敏感的波长为550 nm，**问**

**(1)** 人眼的最小分辨角有多大？

**(2)** 若物体放在距人眼25 cm（明视距离）处，则两物点间距为多大时才能被分辨？

解 (1) 
$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{1.22 \times 5.5 \times 10^{-7} \text{ m}}{3 \times 10^{-3} \text{ m}}$$
$$= 2.2 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

(2) 
$$d = l\theta_0 = 25 \text{ cm} \times 2.2 \times 10^{-4}$$
$$= 0.0055 \text{ cm} = 0.055 \text{ mm}$$

**例2** “加那利”大型光学望远镜主镜镜面直径达**10.4m**，位于大西洋加那利群岛的拉帕尔马小岛的一座山峰上，**2009年7月**正式投入使用. 试估算该望远镜的分辨本领.

**解** 天文望远镜用可见光进行观察，分辨本领为

$$\frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda} \sim \frac{10\text{m}}{10^{-7}\text{m}} = 10^8 \text{ rad}^{-1}$$





**例3** 毫米波雷达发出的波束比常用的雷达波束窄，这使得毫米波雷达不易受到反雷达导弹的袭击。

**(1)** 有一毫米波雷达，其圆形天线直径为55 cm，发射频率为220 GHz的毫米波，计算其波束的角宽度；

**(2)** 将此结果与普通船用雷达发射的波束的角宽度进行比较，设船用雷达波长为1.57 cm，圆形天线直径为2.33 m .

解 (1)  $\lambda_1 = \frac{c}{\nu} = 1.36 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$\Delta\theta_1 = 2.44 \frac{\lambda_1}{D_1} = 0.006 \text{ 03 rad}$$

(2)  $\Delta\theta_2 = 2.44 \frac{\lambda_2}{D_2} = 0.016 \text{ 4 rad}$



## 六、X 射线衍射 布喇格公式（了解）



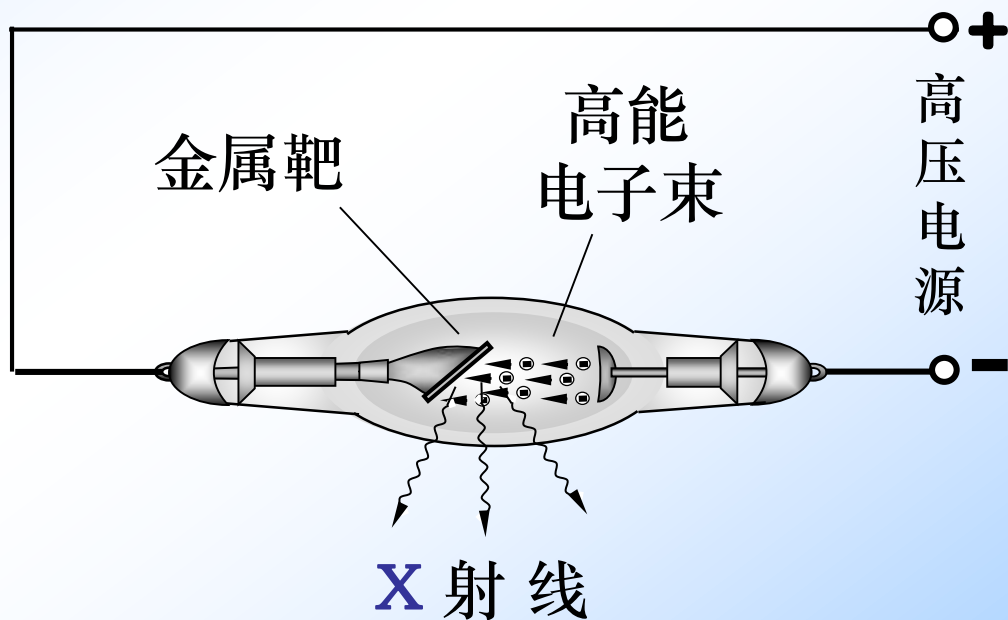
伦 琴

W. K. Röntgen

(1845~1923)

1901年获首届诺贝尔  
物理学奖

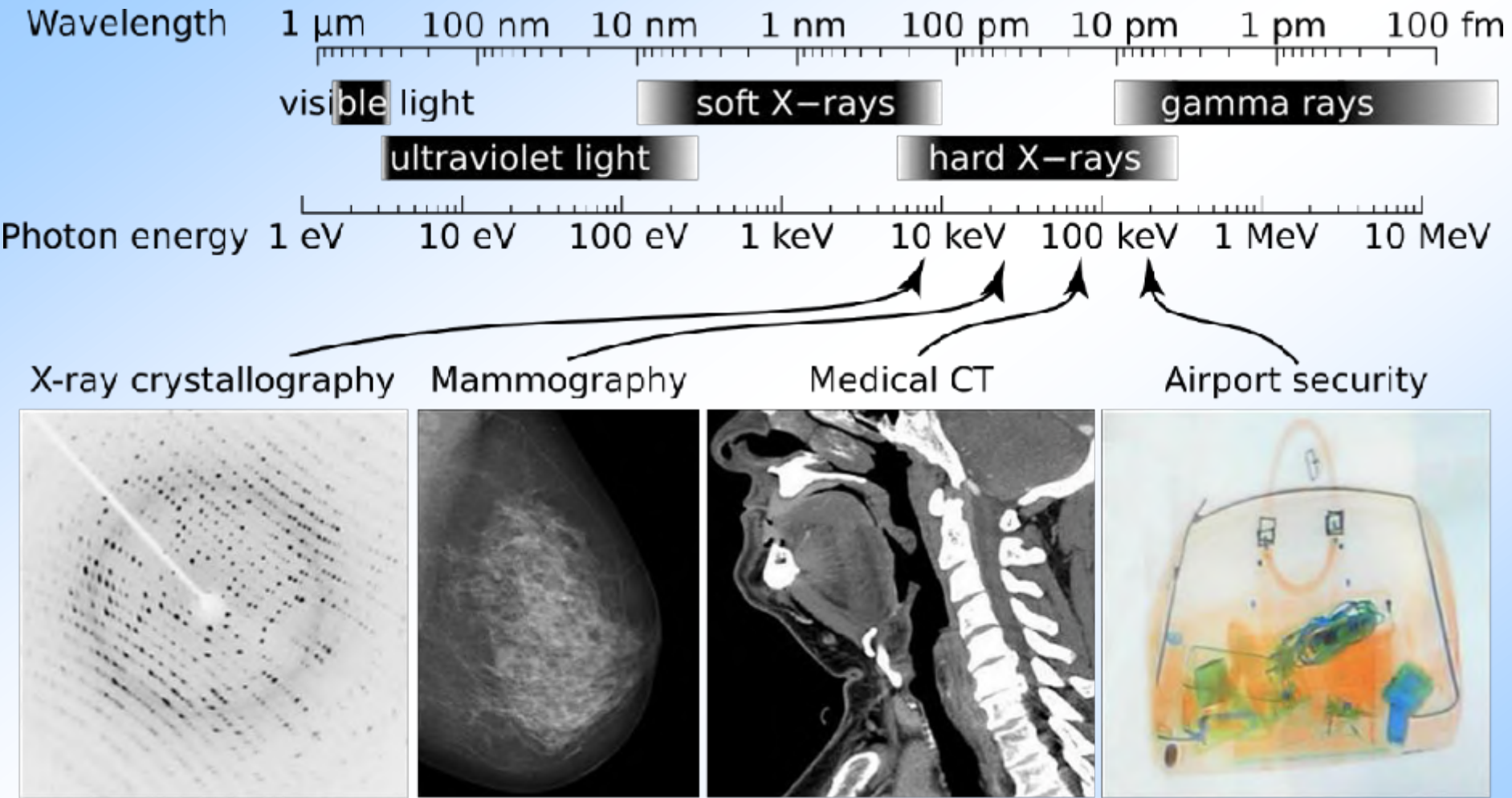
1895年，德国物理学家伦琴在研究阴极射线管的过程中，发现了一种穿透力很强的射线。



由于未知这种射线的实质(或本性)，  
将它称为 **X** 射线。



**X-ray:** 透视和拍片



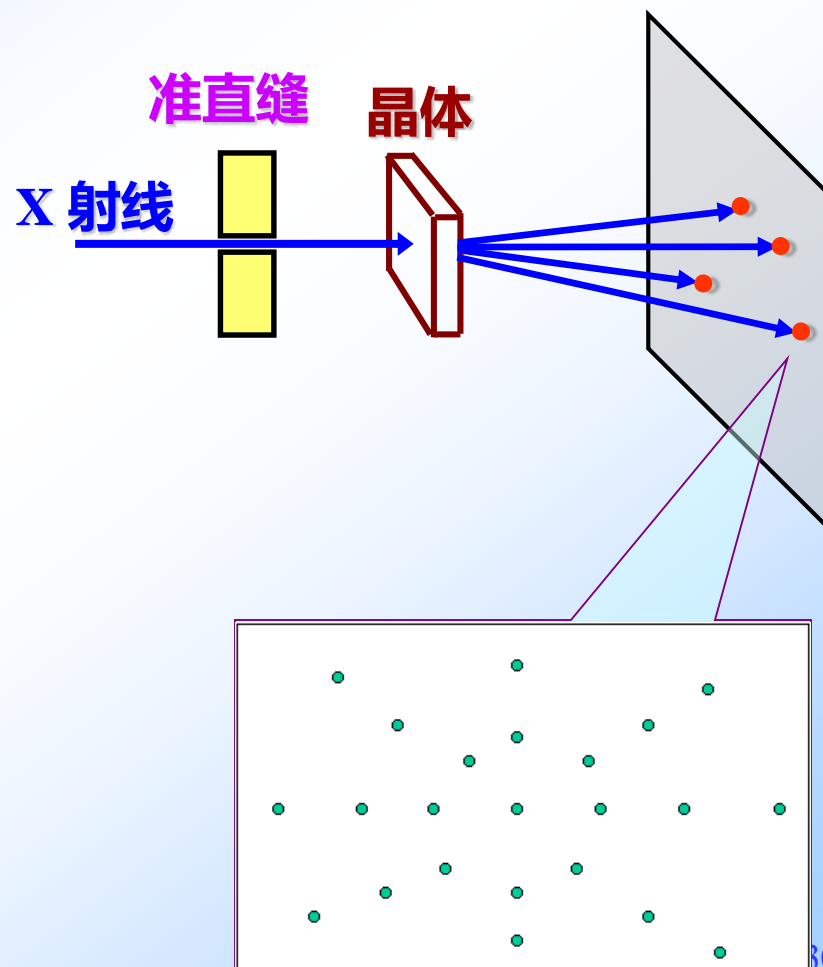
## 2.X 射线晶体衍射

X 射线 { **波?**  
**粒子?** } **劳厄**1912年提出X 射线是一种**电磁波**。

天然晶体可以看作是  
光栅常数很小的空间  
**三维衍射光栅**。

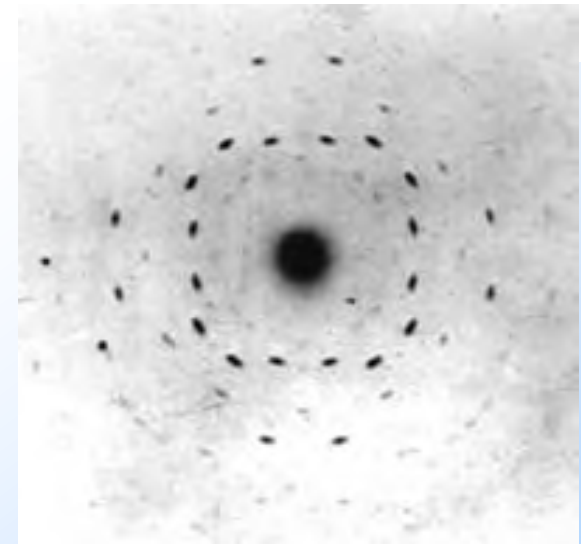
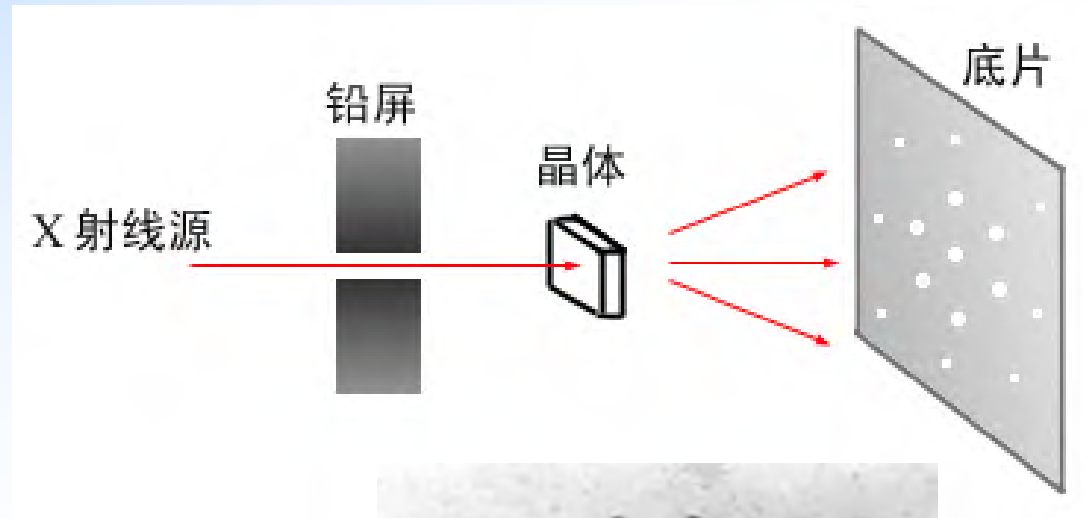
在照相底片上形成对  
称分布的若干衍射斑  
点，称为**劳厄斑**。

**证实了X射线的波动性。**





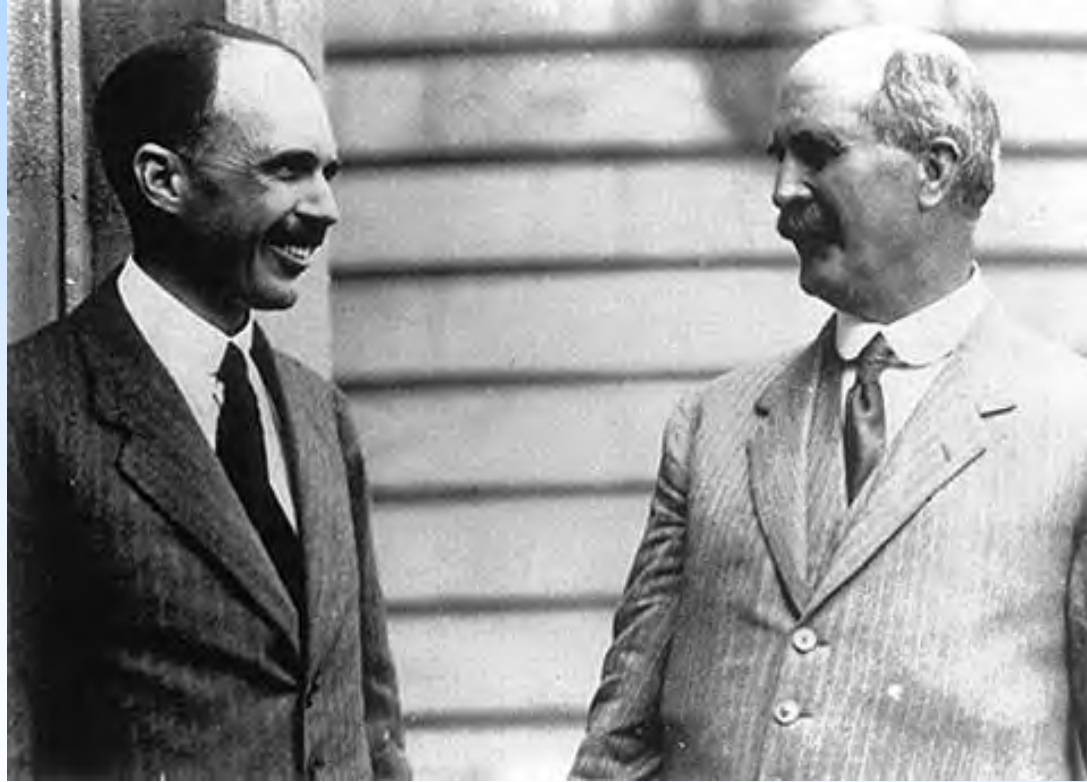
# 三维光栅 — X射线晶体衍射



**劳厄斑**

**劳厄 Max von Laue (1879-1960)**  
**德国慕尼黑大学理论物理学家**  
**1914年诺贝尔物理学奖--因发现晶**  
**体的X射线衍射**

### 3.布喇格公式



**1915年诺贝尔物理学奖——X射线晶体结构分析  
授予英国伦敦大学的亨利·布拉格(Sir William Henry Bragg, 1862-1942)和他的儿子英国曼彻斯特维克托利亚大学的劳伦斯·布拉格(Sir William Lawrence Bragg, 1890-1971)**

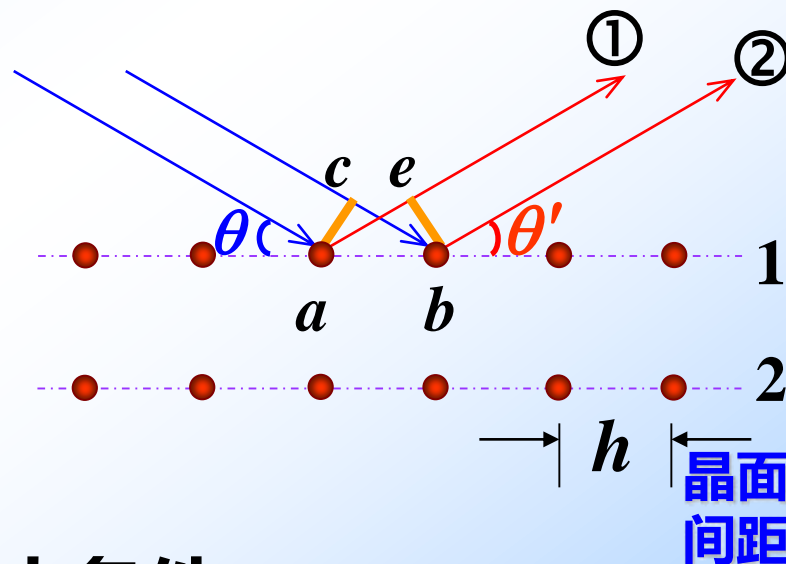


1913年布喇格父子提出比较简单的方法对晶体的X 射线衍射进行了理论解释：

原子在晶体中按**晶格点阵**排列，晶体由一系列平行的原子层（**晶面**）所组成。

当X 射线照射时，每个原子都是向各方向发出子波的子波源。

**入射波被原子散射了。**



**(1)同一晶面上**（点间干涉）

相邻原子散射的X射线干涉极大条件：

$$\delta = bc - ae = h(\cos \theta - \cos \theta') = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

零级主极大：  $\theta = \theta'$  **镜面反射方向。**

## (2)不同晶面上 (面间干涉)

沿镜面反射方向, **同一晶面**上相邻原子散射的光波的光程差零, 它们相干加强。

若要在该方向上**不同晶面**上原子散射光相干加强, 必须满足:

$$\delta = NM + MP = k\lambda$$

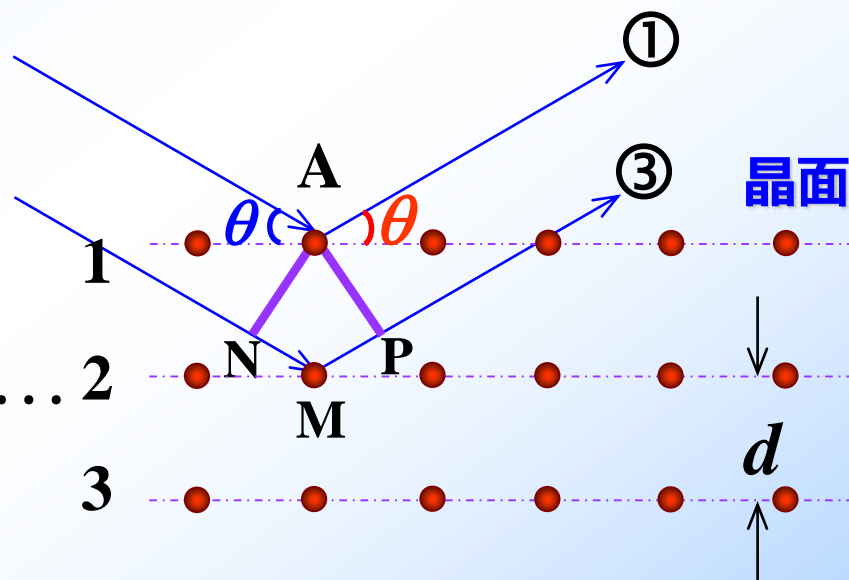
$$k = 1, 2, 3 \dots$$

即当:  $2d \cdot \sin \theta = k\lambda$

**布喇格公式**

时各层面上的反射光相干加强, 形成亮点, 称为  $k$  级干涉主极大。

因为晶体有很多组平行晶面, 晶面间的距离  $d$  各不相同。所以, **劳厄斑是由空间分布的亮斑组成。**



## 4.应用

(1) 已知 $d$  及亮斑的位置 $\theta$ , 可求 X 射线的波长。  
——X射线光谱分析。

(2) 根据图样及 $\lambda$ , 可测 $d$ , 研究晶格结构。  
——X射线晶体结构分析。

1953年威尔金斯等利用X射线的结构分析得到了DNA的**双螺旋结构**, 荣获了1962年度**诺贝尔生物和医学奖**。

**注:** (1) 通常采用连续X 射线谱入射。

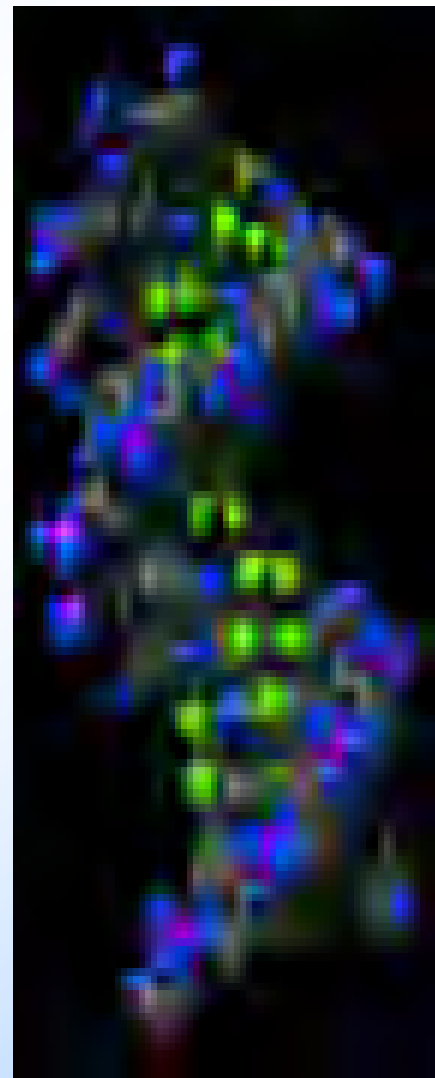
单色X 射线, 很难正好满足**布喇格公式**。

(2) X 射线衍射中也存在**缺级**现象。





对DNA 双螺旋结构的发现作出重大贡献的科学家有克里克(Francis Crick)、沃森(James Watson)、威尔金斯 (Maurice Wilkins) 和富兰克林(Rosalind Franklin) 四位。由于Franklin过早的去世，1962年，诺贝尔生理和医学奖只授给了前面 Crick、Watson和Wilkins这三位。



## 习题课:

1、

某元素的特征光谱中含有波长分别为  $450\text{nm}$  和  $750\text{nm}$  的光谱线。在光栅光谱中，这两种波长的谱线有重叠现象，重叠处  $750\text{nm}$  的谱线的级数是

(A) 2, 3, 4, 5, ...

(B) 2, 5, 8, 11, ...

(C) 2, 4, 6, 8, ...

(D) 3, 6, 9, 12, ...

2、

已知某 X 射线含有从  $8.0\sim 12.0\text{nm}$  范围的各种波长，晶体的晶格常数为  $d=27.5\text{nm}$ 。让该 X 射线入射到晶体上，求在与入射线垂直的方向上看到的 X 射线的波长。

(A)  $8.6\text{nm}$

(B)  $9.7\text{nm}$

(C)  $10.1\text{nm}$

(D)  $11.4\text{nm}$

3、

已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离（由望远镜中心向两颗星分别引直线所得夹角）为  $5.71\times 10^{-7}\text{rad}$ ，它们发出的光波波长按  $550\text{nm}$  计算，要分辨出这两颗星，望远镜的口径（即直径）至少要多大？

(A)  $0.50\text{m}$

(B)  $1.00\text{m}$

(C)  $2.00\text{m}$

(D)  $4.00\text{m}$