第二章　条件概率与独立性

§ 2.1 条件概率，乘法公式

例 1：设某箱子中有 10 个球，分别标号 1-10，现从箱子中任取 1 个球，记 $A=$“球的标号是 3 的倍数”，　$B=$“球的标号是奇数”，求

$$P(A)，P(B)，P(AB)，P(A|B)，P(B|A).$$

定义 1：设A, B是两个随机事件，且$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的（条件）概率。

若$P(A)>0$，也可定义 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

定理 1：条件概率$P(A|B)$满足：

（1）对任一事件A，有$P(A|B)\geq 0$.　　（2）$P(S|B)=1$.

（3）若$A_1, A_2,\cdots$互不相容，则$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$.

注：请同学们自行写出条件概率关于概率所有性质的表示形式。

定理 2：（乘法公式）若$P(B)>0$，则$P(AB)=P(B)P(A|B)$；

若$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

例 2：设某箱子中有 10 个零件，其中有 6 个合格品，4 个次品。在 10 个零件任取 2 次，每次任取 1 个，取后不放回。求 2 次都取得合格品的概率。

解：

定理 3：（n个事件的乘法公式）设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个事件（$n \geq 2$），

且$P(A_1 A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

例 3：设某箱子中有 10 个零件，其中有 6 个合格品，4 个次品。在 10 个零件任取 3 次，每次任取 1 个，取后不放回。求第 3 次才取得合格品的概率。

解：

§2.2 全概率公式

定理 1：（全概率公式）如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, B$满足：

（1）$P(A_i)>0$， $i=1, 2, \cdots, n$，

（2）$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，　（3）$B\subset A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，

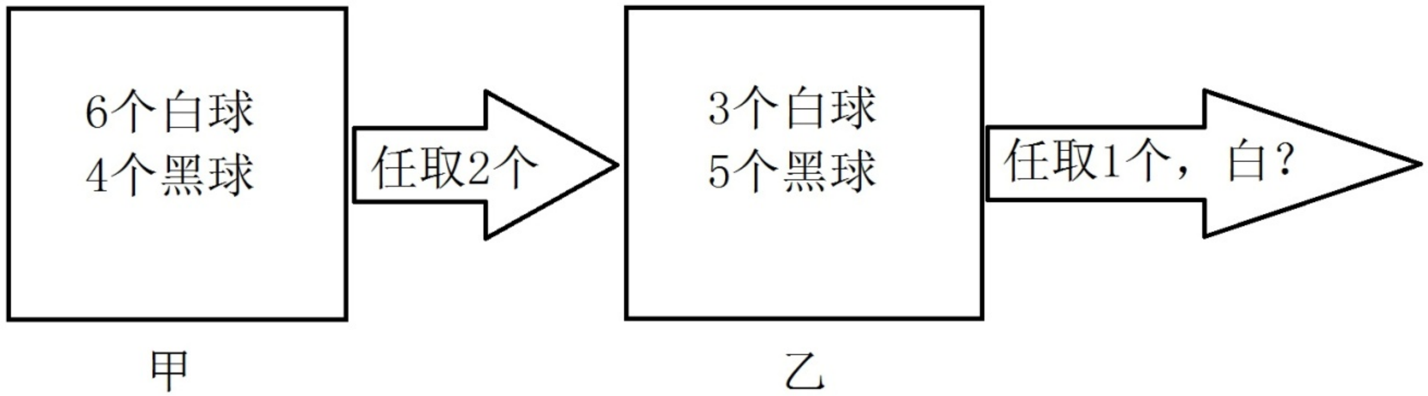
则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

例 1：某盒中有n个球，其中m个白球，甲乙两人依次各取 1 个球（不放回），求乙取得白球的概率。

解：

例 2：



解：

例 3：某工厂有 3 个车间加工同种零件，3 个车间的加工任务分别占总任务量的 50%，30%，20%. 3 个车间加工零件的次品率分别为 0.01，0.015，0.02. 将生产的零件混在一起，并任取 1 个，求任取的 1 个是次品的概率。

解：

例 4：在例 3 中，若任取的 1 个是次品，问这 1 个次品是哪个车间生产的可能性最大？

解：

§ 2.3 贝叶斯公式

定理 1：（贝叶斯公式，Bayes，英，1702-1761， 1763 年提出）

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B$ 满足：

（1）$P(B) > 0$，$P(A_i) > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，

（2）$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容， （3）$B \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，

则 $$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B | A_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, .$$

注：（1）公式中，$P(A_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，称为先验概率.

（2）公式中，$P(A_i | B)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，称为后验概率.

（3）贝叶斯公式与全概率公式得区别：

①贝叶斯公式所求的是条件概率，而全概率公式所求的是无条件概率；

②贝叶斯公式共n个公式，而全概率公式只是 1 个公式。

例 1：设患肺病的人经某仪器检查，能查出的概率为 0.95；而未患肺病的人经某仪器检查，被误认为患有肺病的概率为 0.002；又设某城的所有居民中患有肺病的概率为 0.001，若从居民中随机地抽 1 人检查，仪器显示有肺病，求这个人确实患有肺病的概率。

解：

§2.4 事件的独立性

例 1：某盒中有 7 个白球 ，3 个黑球，从盒中依次取出 2 个球（放回，不放回），记 A =“第一次取出的是白球”， B =“第二次取出的是白球”。求 $P(B|A)$， $P(B)$.

解：

定义 1：设A, B是两个事件，若$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A与B是相互独立的，简称A, B独立。

定理 1：（1）设$P(A)>0$，则事件A, B独立的充分必要条件是

$$P(B)=P(B|A).$$

（2）设$P(B)>0$，则事件A, B独立的充分必要条件是

$$P(A)=P(A|B).$$

定理 2：设事件A与B独立，则A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也分别独立。

例 2：甲乙两人同时向同一目标各射击 1 次，甲乙两人击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率。

解：

定义 2：（1）设 A, B, C 是三个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$

则称 A, B, C 两两独立。

（2）设 A, B, C 是三个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A, B, C 相互独立，简称 A, B, C 独立。

注：显然，由 A, B, C 相互独立可以推出 A, B, C 两两独立，

但反之不能。

例 3：某盒中有 4 个球，其中 1 个黑球，1 个白球，1 个红球，还有 1 个涂有黑白红的三色球。今从盒中任取 1 个球，记 $A=$“任取的球涂有黑色”，$B=$“任取的球涂有白色”，$C=$“任取的球涂有红色”，验证 A, B, C 两两独立，但不相互独立。

证：

定义 3：（1）设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个事件，若$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的任何两个事件独立，则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两独立。

（2）设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个事件，若对于任意的$k\ (2 \le k \le n)$，及任意的$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，简称$A_1, A_2, \cdots, A_n$独立。

注：事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两独立需要满足 C_n^2 个等式；

事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立需要满足

$$\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n - \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 = 2^n - 1 - n$$

个等式。

定理 3：设事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$独立，则

（1）事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两独立。

（2）事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的任何$m\ (2 \le m < n)$个事件也独立。

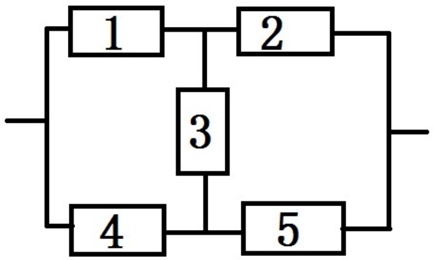
（3）事件$A_1^*, A_2^*, \cdots, A_n^*$也独立，其中$A_i^*$是$A_i$或$\overline{A}_i$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

（4）$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$.

例 4：有n个射手，同时向同一目标各射击一次，击中目标的概率分别为$p_1, p_2, \cdots, p_n$，求目标被击中的概率。

解：

例 5：设一段电路是由 5 个电子元件组成（如图），每个电子元件的可靠性均为$r\ (0<r<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的。求这段电路的可靠性。



§2.5 重复独立试验，二项概率公式

定义 1：将某试验重复进行n次，若在每次试验中，任一事件发生的概率与其他各次试验的结果无关，则称这n次试验是独立的（或称这n次试验为n重独立试验）。特别，若每次试验的可能结果只有两个：A “成功”和$\overline{A}$ “失败”， 则称这n次试验为n重贝努力试验。

例 1：将 1 个骰子连掷 8 次，求恰好出现 3 次 1 点的概率。

定理 1：（二项概率公式）在n重贝努力试验中，设每次试验成功的概率为$p\ (0<p<1)$，则恰好成功k次的概率为 $P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$． 且$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=1$，其中$q=1-p$．

例 1（续）：将 1 个骰子连掷 8 次，求恰好出现 3 次 1 点的概率。

例 2：已知一大批产品中有 30%的一等品，现从中任取 5 件，求：5 件中至少有 2 件一等品的概率。

例 3：设某信号发射器每秒发射5×10^{5}个信号，由于干扰，出现误码的概率为10^{-7}，求在 10 秒内出现 1 个误码的概率。

定理 2:（泊松定理，Poisson，法国，1781-1840）在n重贝努力试验中，设每次试验成功的概率为p_n $(0<p_n<1)$，若$np_n=\lambda$（常数），则对于固定的k，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

例 3（续）：设某信号发射器每秒发射5×10^{5}个信号，由于干扰，出现误码的概率为10^{-7}，求在 10 秒内出现 1 个误码的概率。

解：

附表 1　泊松分布累计概率值表

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

m	λ								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.095 16	0.181 27	0.259 18	0.329 68	0.393 47	0.451 19	0.503 42	0.550 67	0.593 43
2	0.004 68	0.017 52	0.036 94	0.061 55	0.090 20	0.121 90	0.155 81	0.191 21	0.227 52
3	0.000 15	0.001 15	0.003 60	0.007 93	0.014 39	0.023 12	0.034 14	0.047 42	0.062 86
4		0.000 06	0.000 27	0.000 78	0.001 75	0.003 36	0.005 75	0.009 08	0.013 46
5			0.000 02	0.000 06	0.000 17	0.000 39	0.000 79	0.001 41	0.002 34
6					0.000 01	0.000 04	0.000 09	0.000 18	0.000 34
7							0.000 01	0.000 02	0.000 04
8									0.000 01

例 4：设某保险公司有 2500 人参加了人身保险，每人交保险费 1200 元，一年内死亡者，保险公司赔付 20 万元。设 2500 人在一年内是否死亡是相互独立的，且一年内每人死亡的概率为 0.002. 求保险公司亏本的概率。

解：

例 5：（配备维修人员问题）设有同类型仪器 300 台，他们是否正常工作是相互独立的，每台仪器发生故障的概率为 0.01，一台仪器发生故障，一个维修人员可以排除。问至少配备多少维修人员，才能保证仪器发生故障不能及时排除的概率小于 0.01？