本学期的内容

第四篇 振动与波动
- 机械振动
- 机械波
- 电磁振荡与电磁波

第五篇 光学
- 几何光学
- 光波的干涉
- 光波的衍射
- 光波的偏振

第六篇 热学
- 气体动理论
- 热力学基础

第七篇 量子物理
- 早期量子论
- 量子力学基础

第9章 振动 & 第10章波动

Oscillations and Waves

第1节 简谐振动 （旋转矢量法、单摆与复摆）

第2节 振动的合成 （拍现象等）

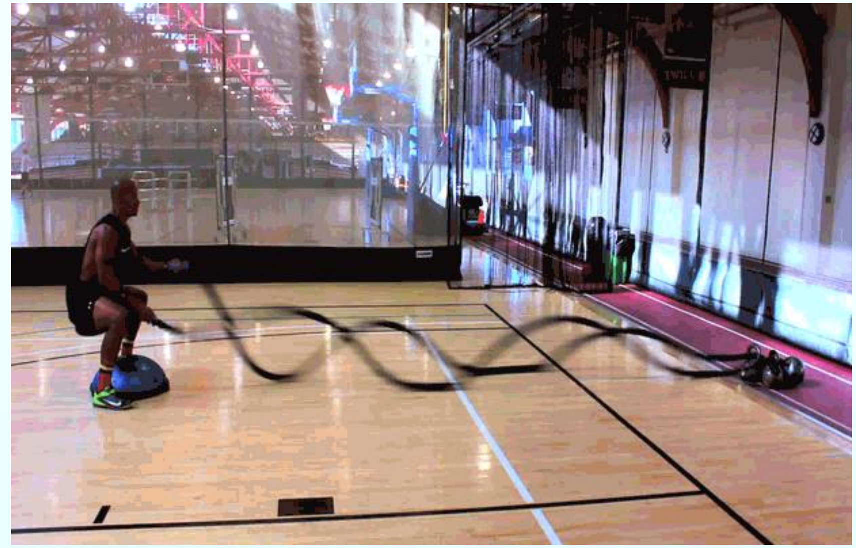
第3节 机械波 （波函数、波动方程）

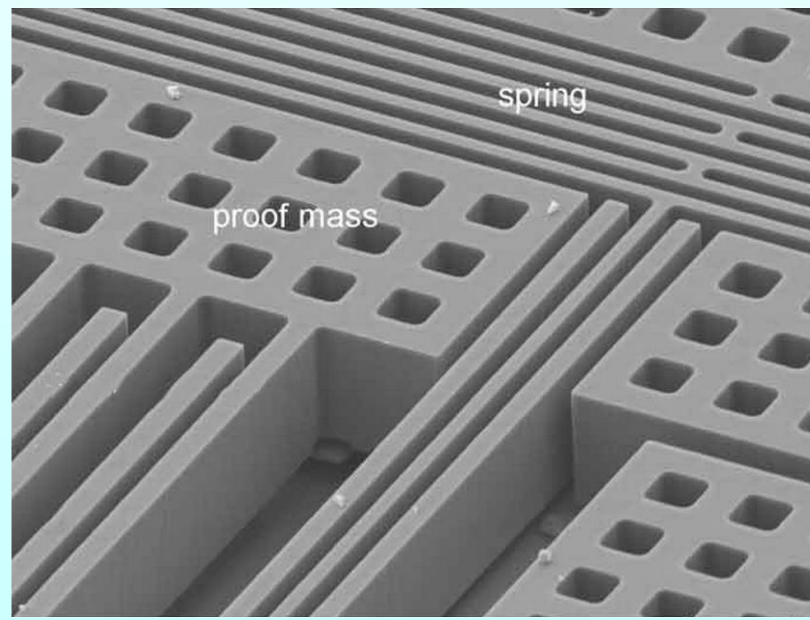
第4节 波的能量、能流密度

第5节 惠更斯原理、波的衍射和波的干涉

第6节 多普勒效应

第7节 电磁振荡与电磁波




spring
proof mass

第一节 简谐振动

Simple Harmonic Motion

振动与波动是与人类生活和科学技术密切相关的一种基本运动形式。 大地竖琴 蛇形共振

问：广义地讲什么是振动？

一物理量在某一定值附近周期性变化的现象称振动。

力学量（如位移、角位移）——机械振动

电磁量（如 i 、u、$\vec{E}$、$\vec{B}$)——电磁振动

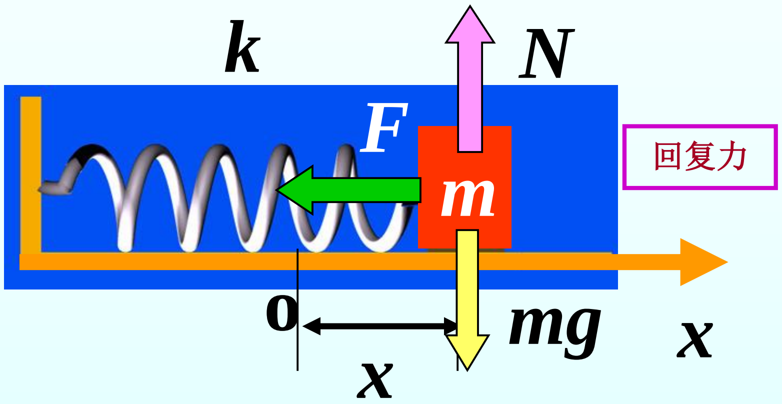
最基本、 最简单、最重要的振动是简谐振动。

一、谐振动特征

以弹簧振子为例得出普遍结论

动力学特征

$$\vec{F}_{合}=-k\vec{x}$$



由 $\vec{F}_{合}=m\vec{a}=-k\vec{x}$

运动学特征

$$\vec{a}=-\frac{k}{m}\vec{x}=-\omega^2\vec{x} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

微分方程特征

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

x可代表任意物理量

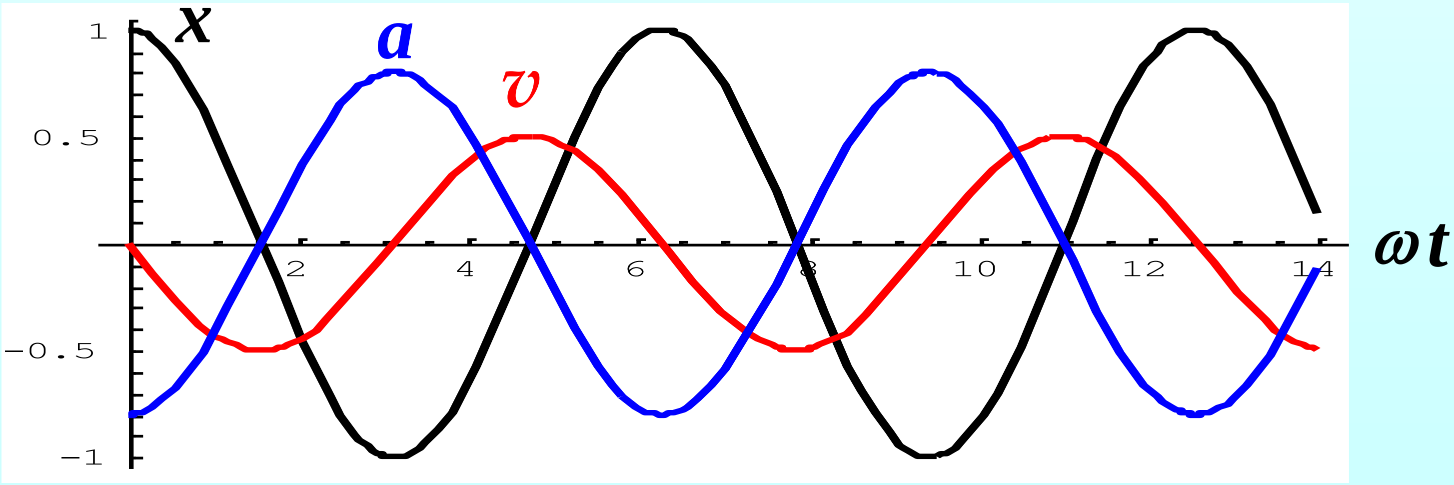
二、谐振动规律

解 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0$ 可得

位 移 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 振动方程

速 度 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$



三、描述谐振动的基本量

由 $x = A\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow A, \omega, \varphi$

- A—— 振幅（最大位移的绝对值）

  由初始条件决定

- ω —— 角频率（2π秒内振动的次数)

  $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ 单位：rad/s

  由系统性质决定（故称固有频率）

- $(\omega t + \varphi)$—— 位相（决定振动状态的物理量）

  $t = 0$，位相为φ—— 称初位相

  由初始条件决定 （重点！）

四、谐振动的能量

动 能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

势 能 $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

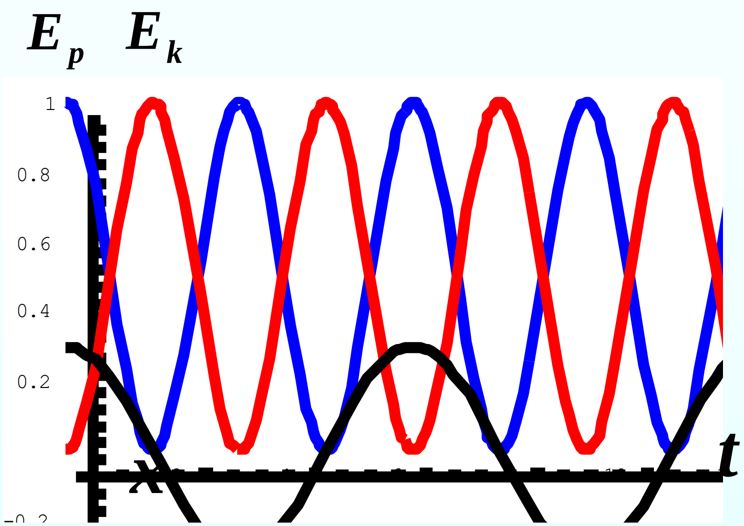
$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

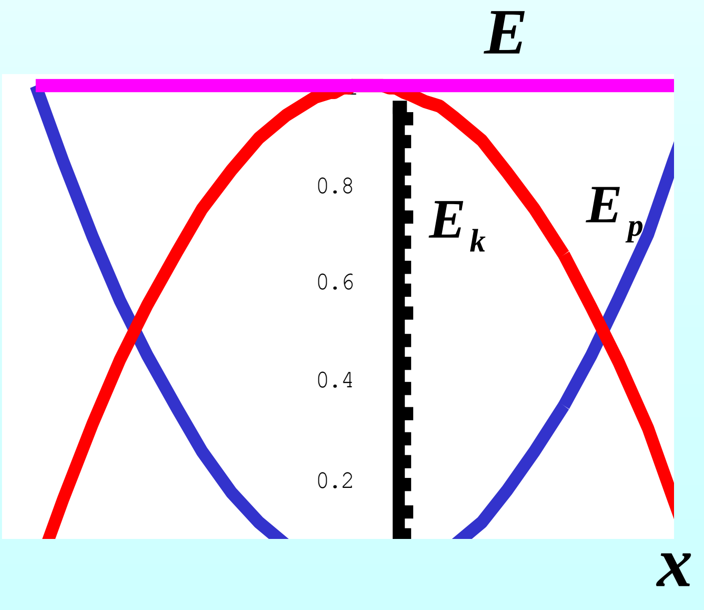
总 能 $E = E_k + E_p$

$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

守恒！

$= \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m (A\omega)^2$





设 $t=0$，位移 x_0 ，速度 v_0

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

简谐振动问题类型：

（1）证明为简谐振动，并求周期？

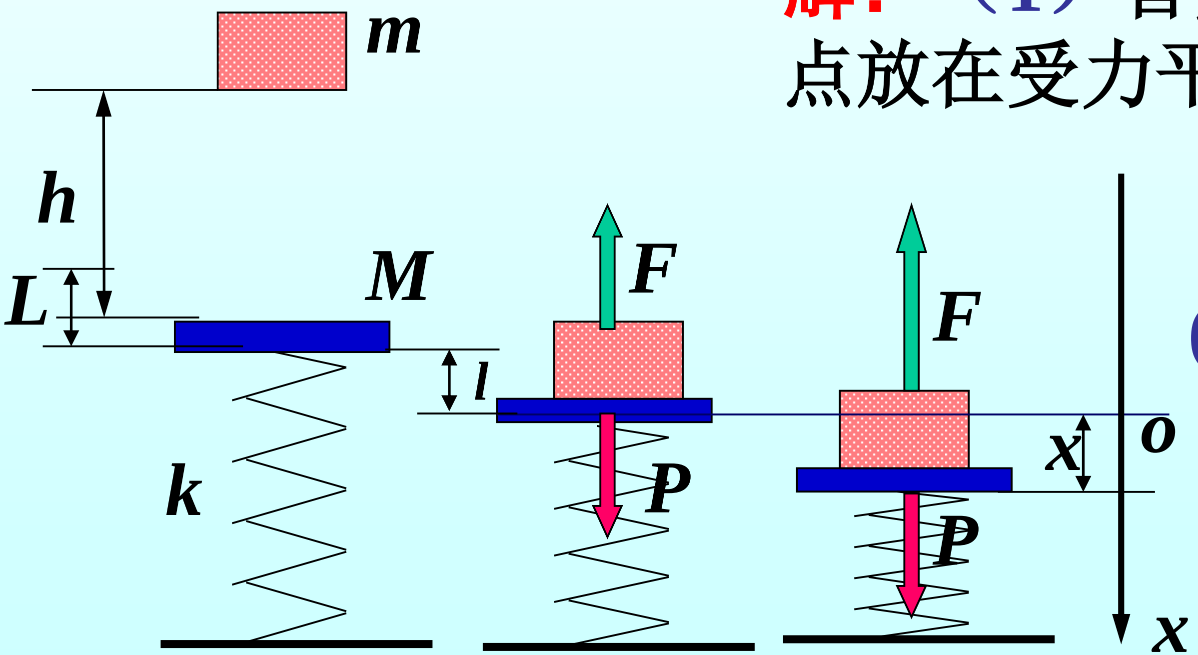
（2）写出振动方程？

例1. 已知：$M, m, h, k.$

（1）证明物m从静止落下与板粘在一起后作简谐振动，并求周期。

（2）当物m与板相碰时作为记时起点，写出振动方程。

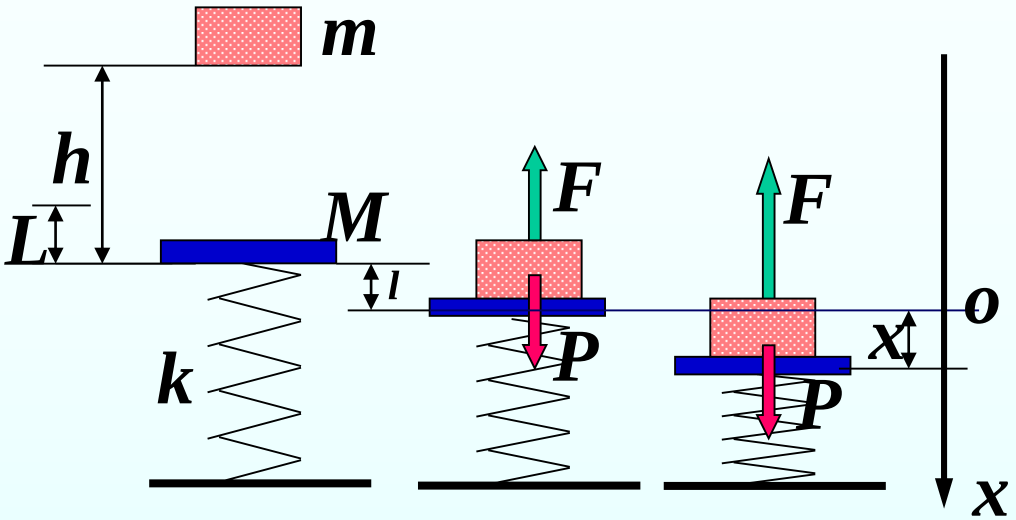
解：（1）首先选一坐标系，原点放在受力平衡处。



$$Mg = kL$$

$$(m+M)g = k(L+l)$$

任意 x处分析受力



任意 x处分析受力

$$\begin{cases} P=(M+m)g \\ F=k(L+l+x) \end{cases}$$

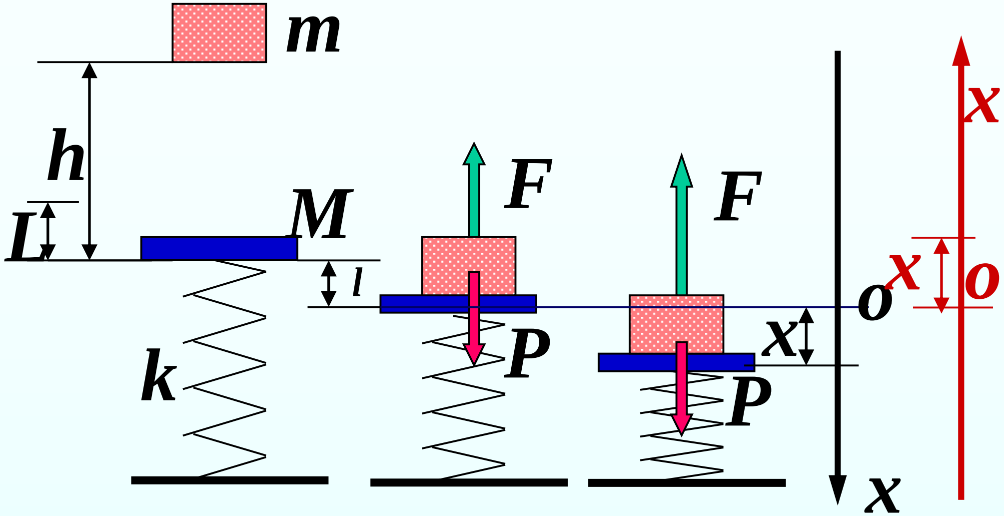
合力=?

$$F_{合}=(M+m)g-k(L+l+x)=-kx$$ 为简谐振动

由 $(M+m)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx$ 得

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{M+m}x=0$ 即 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$ 为简谐振动

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}}$ $\longrightarrow$ $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$



（2）$t=0$

$$\begin{cases} x_0 = \pm l = \pm \dfrac{mg}{k} \\ v_0 = -\dfrac{m\sqrt{2gh}}{M+m} \end{cases}$$

（注意正负号！）

代入公式得 $A=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2+\dfrac{2ghm^2}{(M+m)k}}$

$$\varphi=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)=\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}$$

取第3象限值

取第1象限值

振动方程为

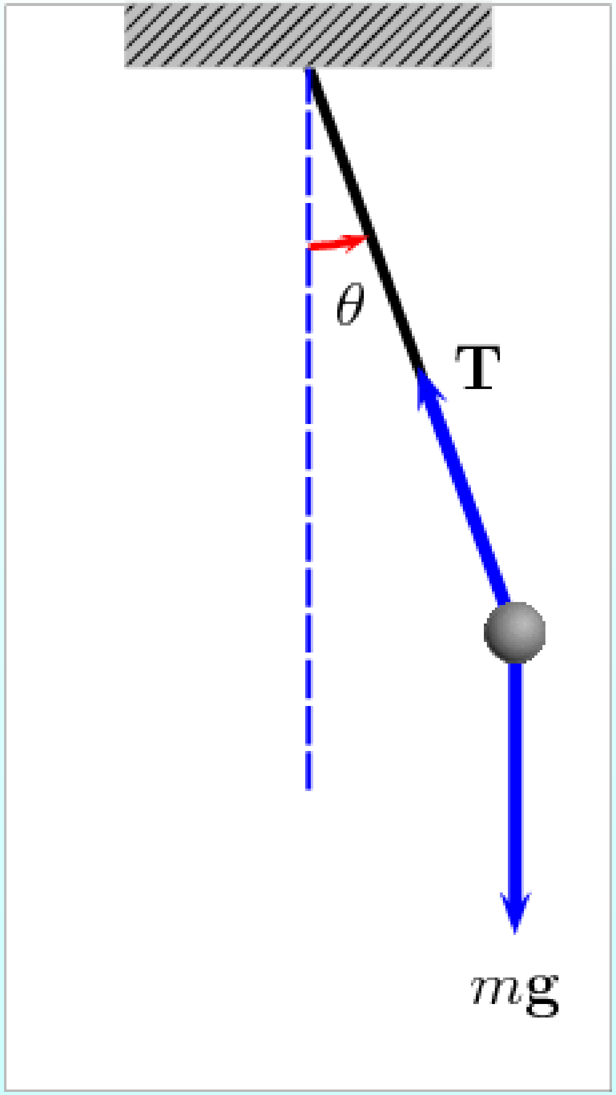
$$x=\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{2ghm^2}{(M+m)k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t+\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}\right)$$

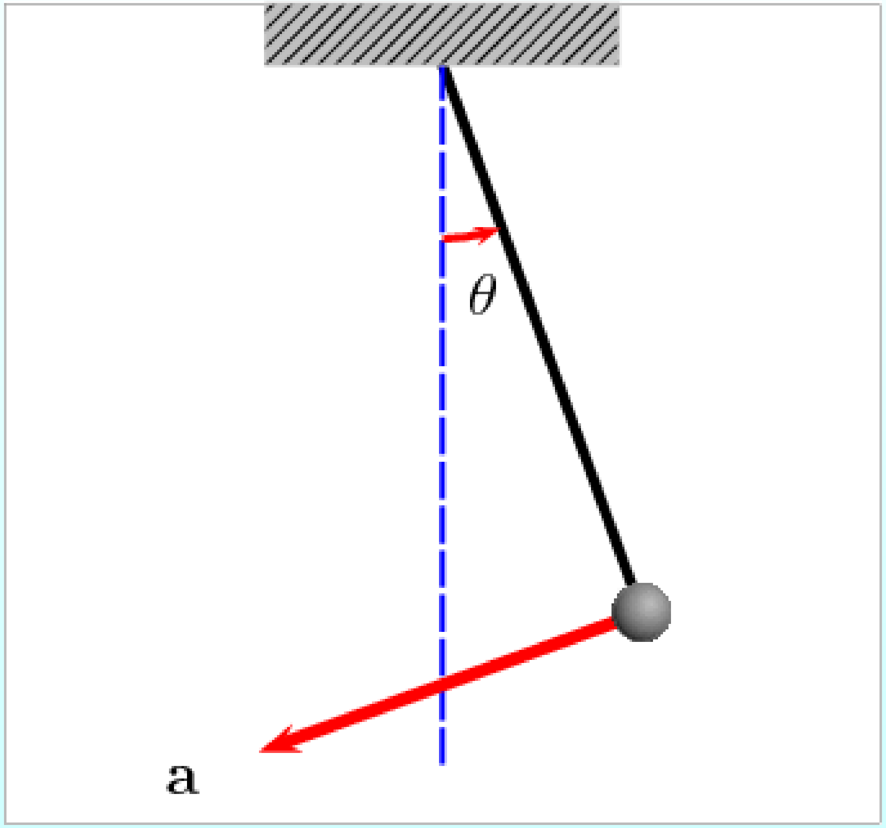
讨论：若 x 轴向上为正，写方程有那些变化？

动画演示

$$F_{合}=k(L+l-x)-(M+m)g=-kx$$

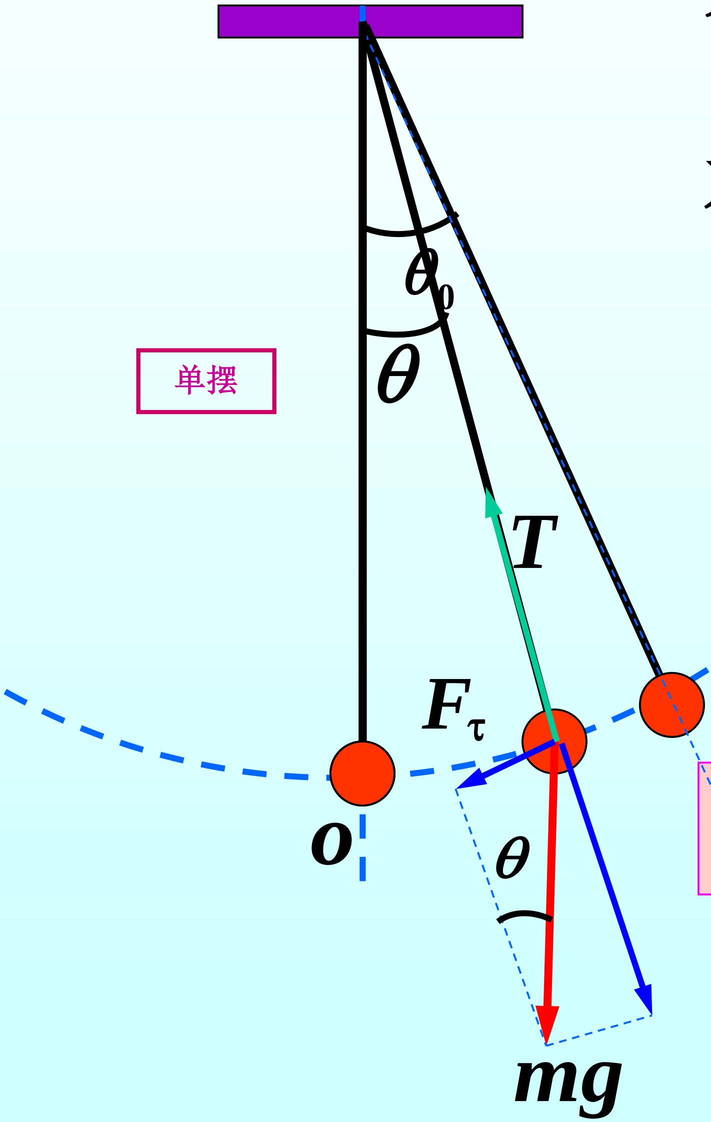
谐振动的实例2 —— 单摆





例3. 单摆长 l （1）证明小角度摆动为简谐振动，并求周期。

（2）若将摆拉至最大角度 θ_0 放手为计时起点，写出振动方程。



解： （1）摆沿圆弧运动，只需分析任意角位移 θ 处切向力

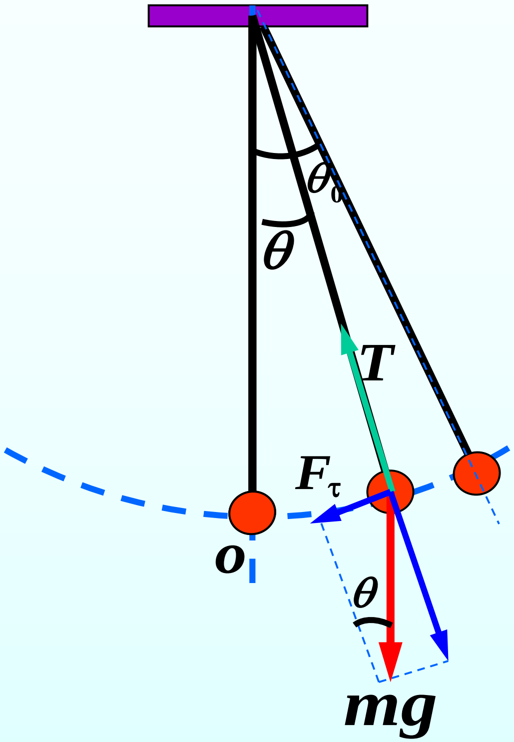
切向力大小 $F_\tau = mg\sin\theta \approx mg\theta$

(小角度 $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots \approx \theta$)

考虑方向 $F_\tau = -mg\theta$ **简谐振动！**

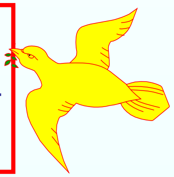
（线性振动）

（非线性振动 ⟶ 混沌）



$$F_\tau = ma_\tau = -mg\theta$$

又 $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ $\quad \boxed{v = l\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$



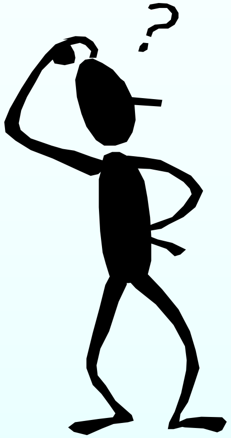
$\therefore\ l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$ 即 $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} \rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

（2）振动方程 $\theta = \Theta\cos(\omega t + \varphi)$

$t = 0$ 初角位移 θ_0， 初角速度 $\Omega_0 = 0$

$$\begin{cases} \text{角振幅} \quad \Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\dfrac{\Omega_0}{\omega}\right)^2} = \theta_0 \\ \tan\varphi = -\dfrac{\Omega_0}{\omega\theta_0} = 0 \rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} ? \end{cases}$$



$\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ 哪一个是 φ 的正确值？

φ 取值范围 [0，2π)或(–π，π] 之间。

$\because \quad \theta_0 = \theta_0 \cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi = 1$

故应取初位相 $\varphi = 0$

$\therefore$ 振动方程 $\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t\right)$

单摆的应用

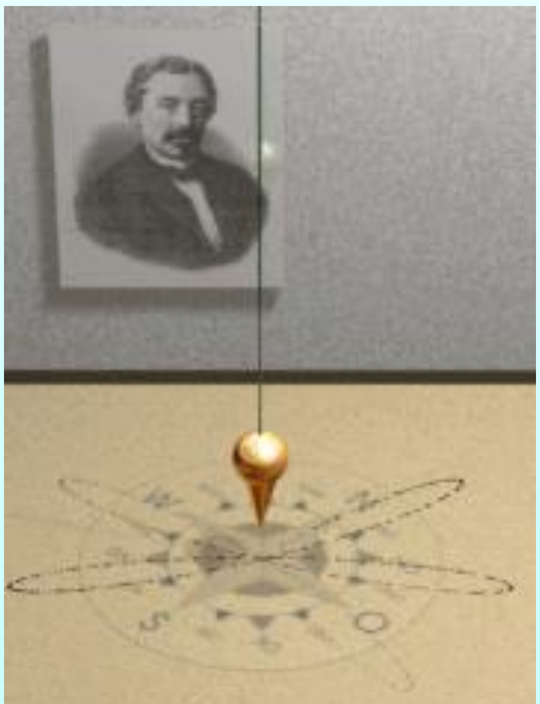
通过测T，来测g

例： 一位月球探险家，安装了一个长为860mm的单摆，并测出在微小位移时摆的周期 T=4.6s，$g_{月}$=？

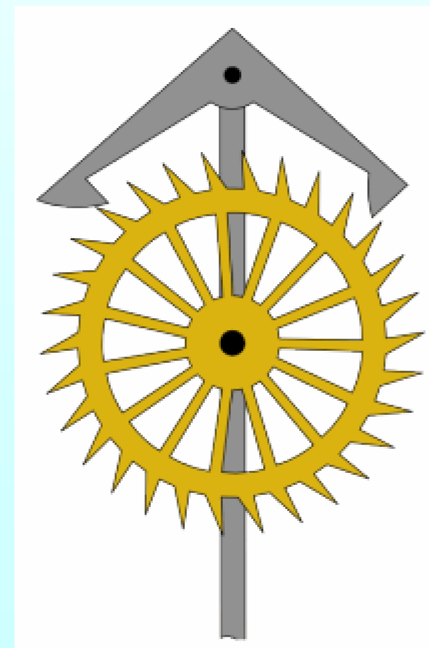
显然：由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 可得：$g_{月}=(\dfrac{2\pi}{T})^2 l$ $=1.6\ \mathrm{m/s^2}$

证明地球自转：傅科摆

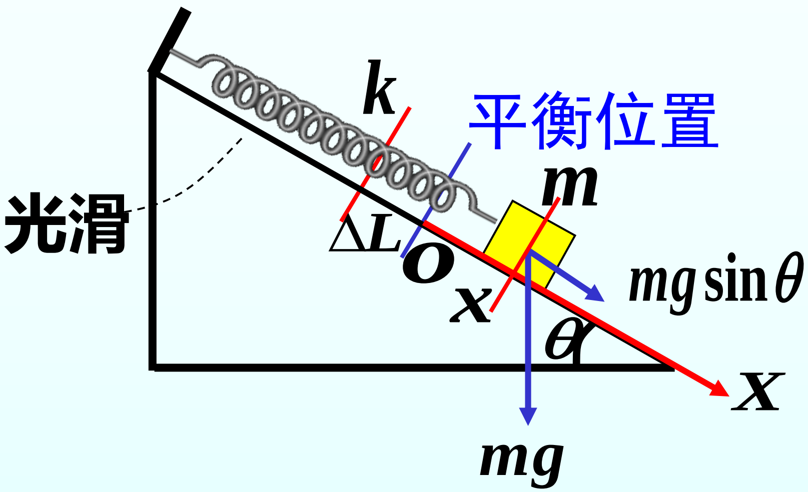
这个呢？



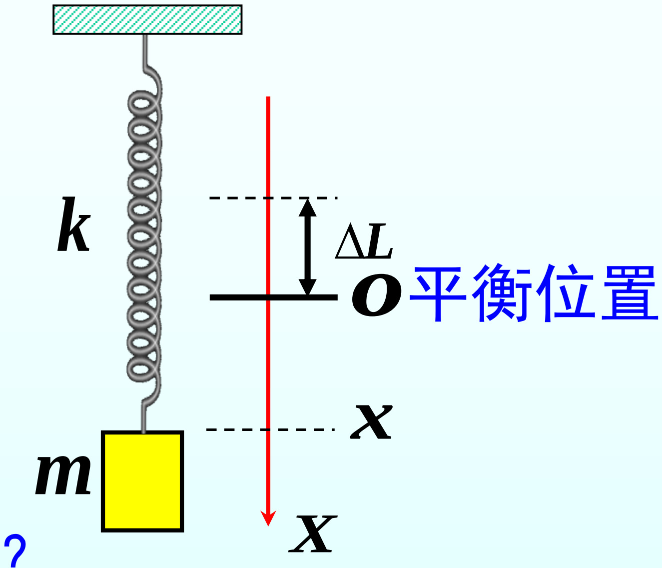
“物理最美实验”之一



例： 证明下列两种情况下，物体作谐振动。



(*a*)



这是两个问题吗？

利用能量关系求解？

(*b*)

解： (*a*) $mg\sin\theta = k\Delta L$

(b) $mg = k\Delta L$

$$f = mg\sin\theta - k(\Delta L + x) = -kx$$

$$f = mg - k(\Delta L + x) = -kx$$

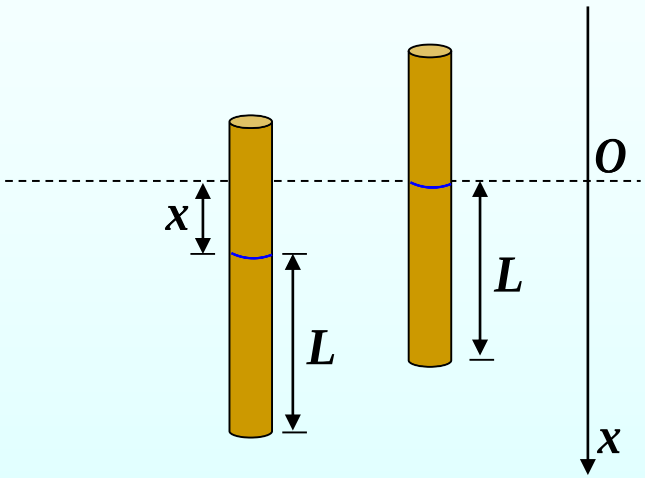
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x}$$

例：一质量为m的柱体浮在水面上，其横截面积为S。证明其在水中的铅直自由运动是谐振动，并求其振动周期。

解：$mg = \rho g(SL)$

$$f = -\rho gS(x+L)+mg$$

$$= -\rho gSx$$



运动方程：

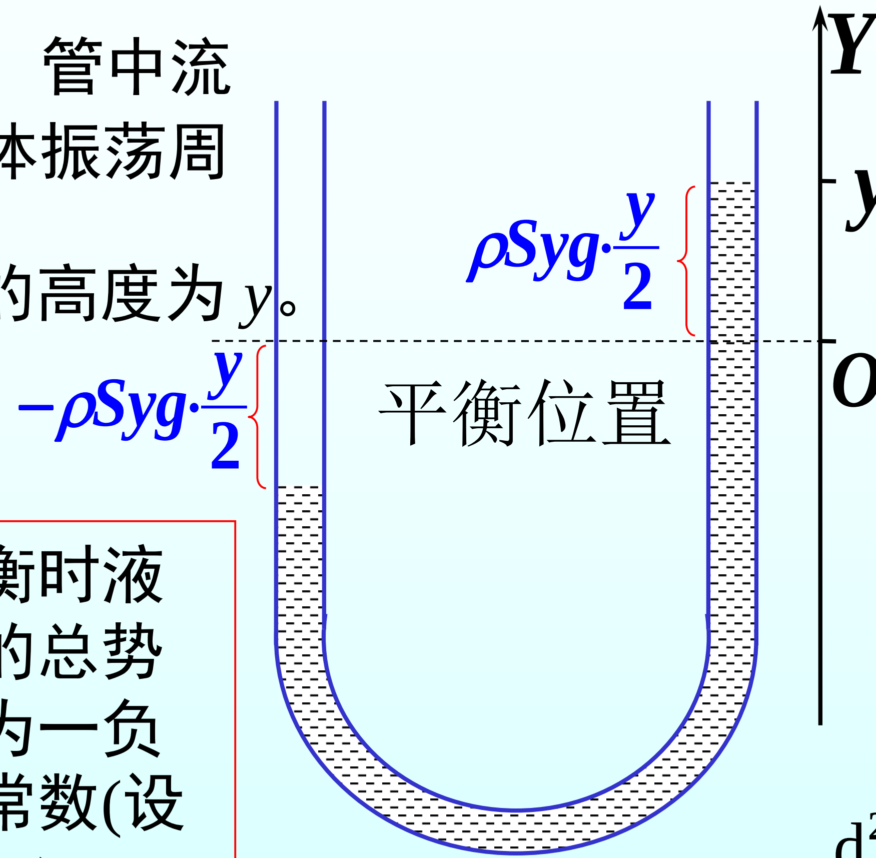
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t} = -\rho gSx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}+\frac{\rho gS}{m}x=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}+\omega^2x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{\rho gS}{m}} \qquad \therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$

例： 光滑U形管的截面面积为 S，管中流体的质量为 m、密度为ρ，求液体振荡周期。

解： 设t时刻液面偏离平衡位置的高度为 y。



机械能守恒：$\frac{1}{2}mv^2+(E_P+\Delta E_P)=C$

$$\frac{1}{2}mv^2+\rho Syg\cdot y=C-E_P$$

$$\frac{1}{2}mv^2+\rho Sgy^2=C-E_P$$

平衡时液体的总势能为一负的常数(设为E_P)。

两边求导得：$m\frac{d^2y}{dt^2}+2\rho Sgy=0$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-2\rho Syg$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{\rho Sg}{m}y=0$$

$$F=-2yS\cdot\rho\cdot g \qquad F=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-2yS\cdot\rho\cdot g=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{\rho Sg}{m}y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}}$$

故，液柱作谐振动。$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$