第9章作业

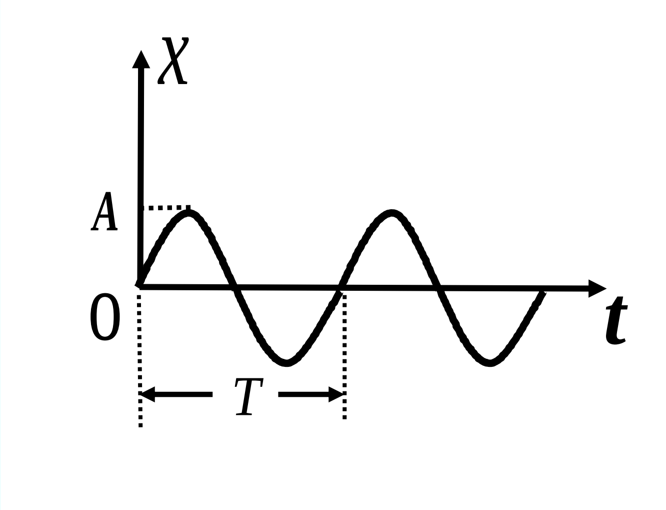
- 9-1 ~ 9-8，9-13，9-14，9-15，9-16，9-17，9-19，9-20，9-28，9-30 共17道题，**--第七版**，
- 9-1~9-8、9-14~18、 9-20、9-21 、9-28、9-30，**---第六版**

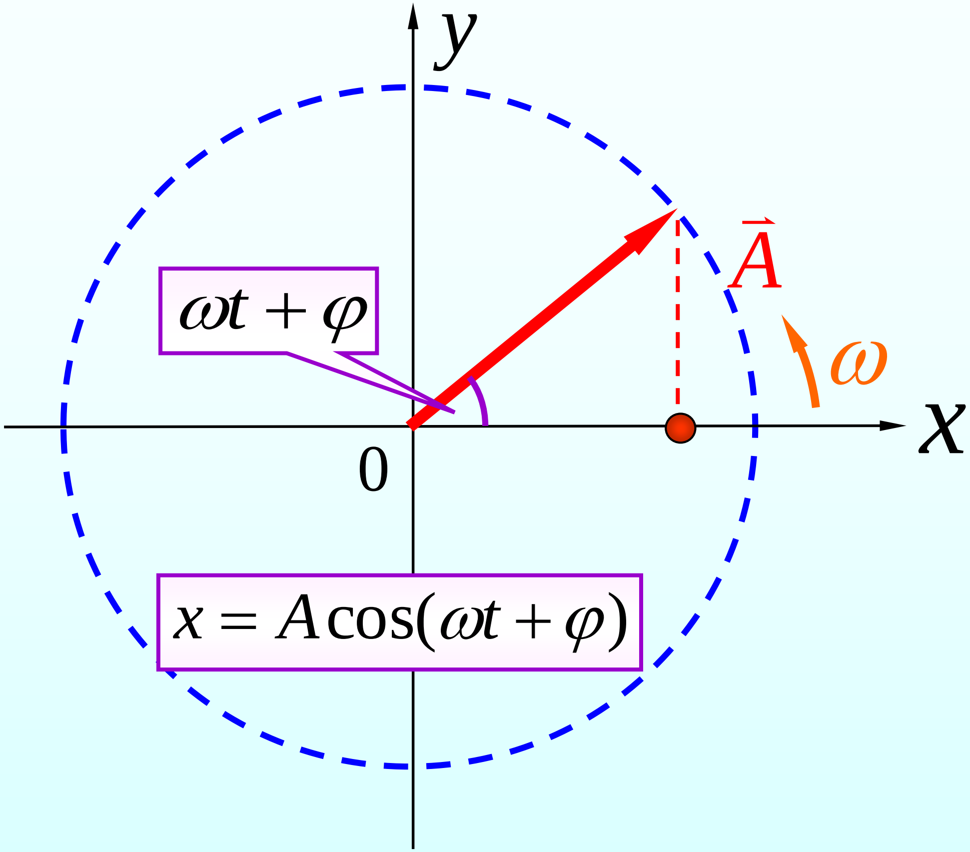
下周五线下交给助教（未返校的交电子版）

- 自动化1-2班、重修→孙祥儒
- 自动化3-4班→王蕊

回顾:

简谐振动曲线

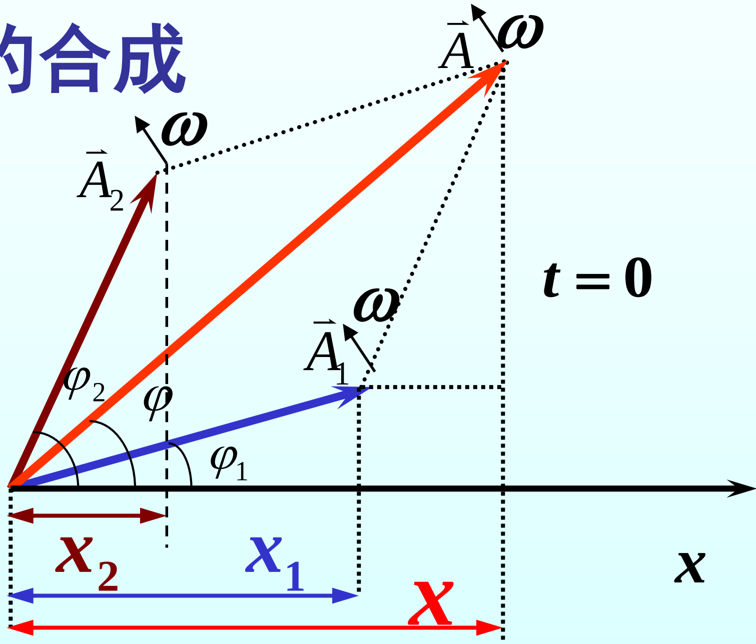




第2节　振动的合成和分解

Combination of Simple Harmonic Motions

一、 两同方向同频率的简谐振动的合成



分振动：$\begin{cases} x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$

合振动：$x=x_1+x_2$

由矢量合成法， 可得

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动是简谐振动，其频率仍为ω,其中

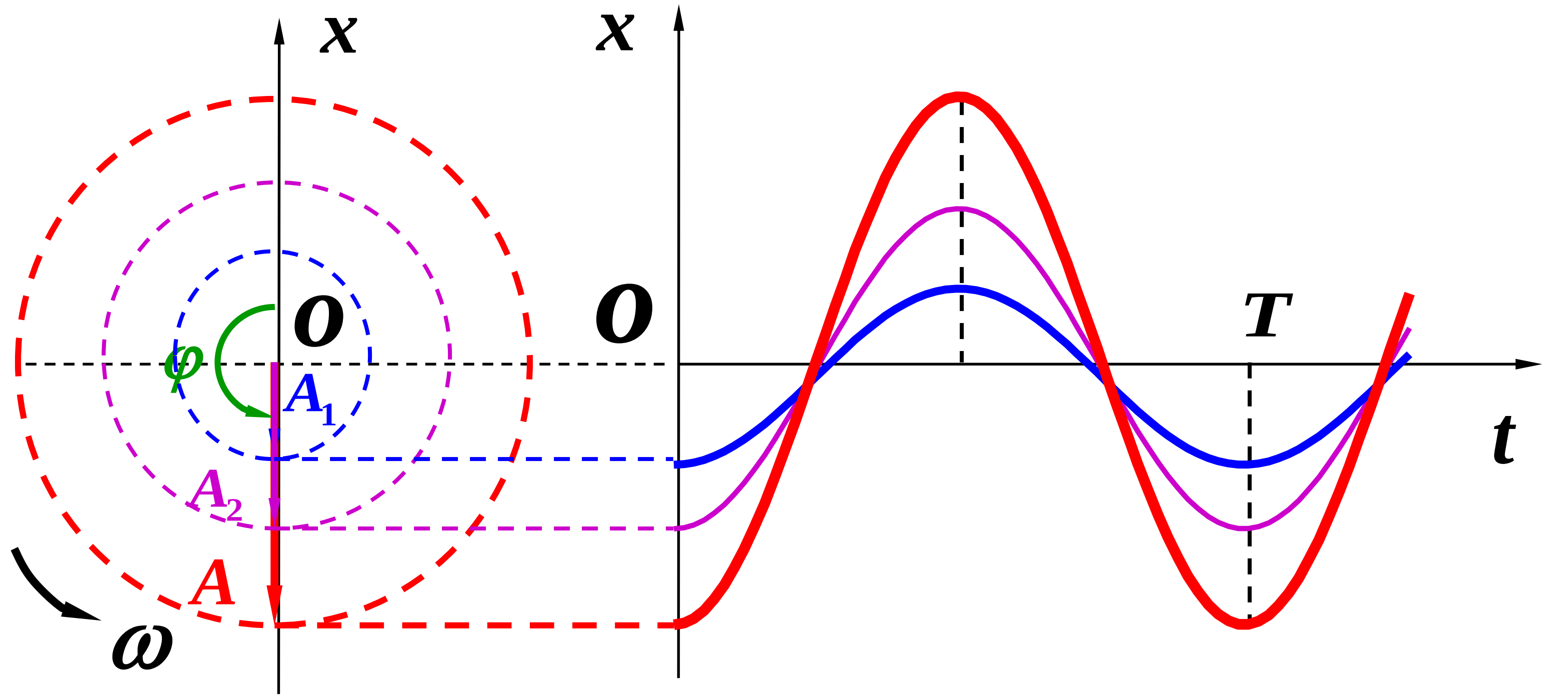
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

讨论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1° 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$\begin{cases}A=A_1+A_2\\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi\end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

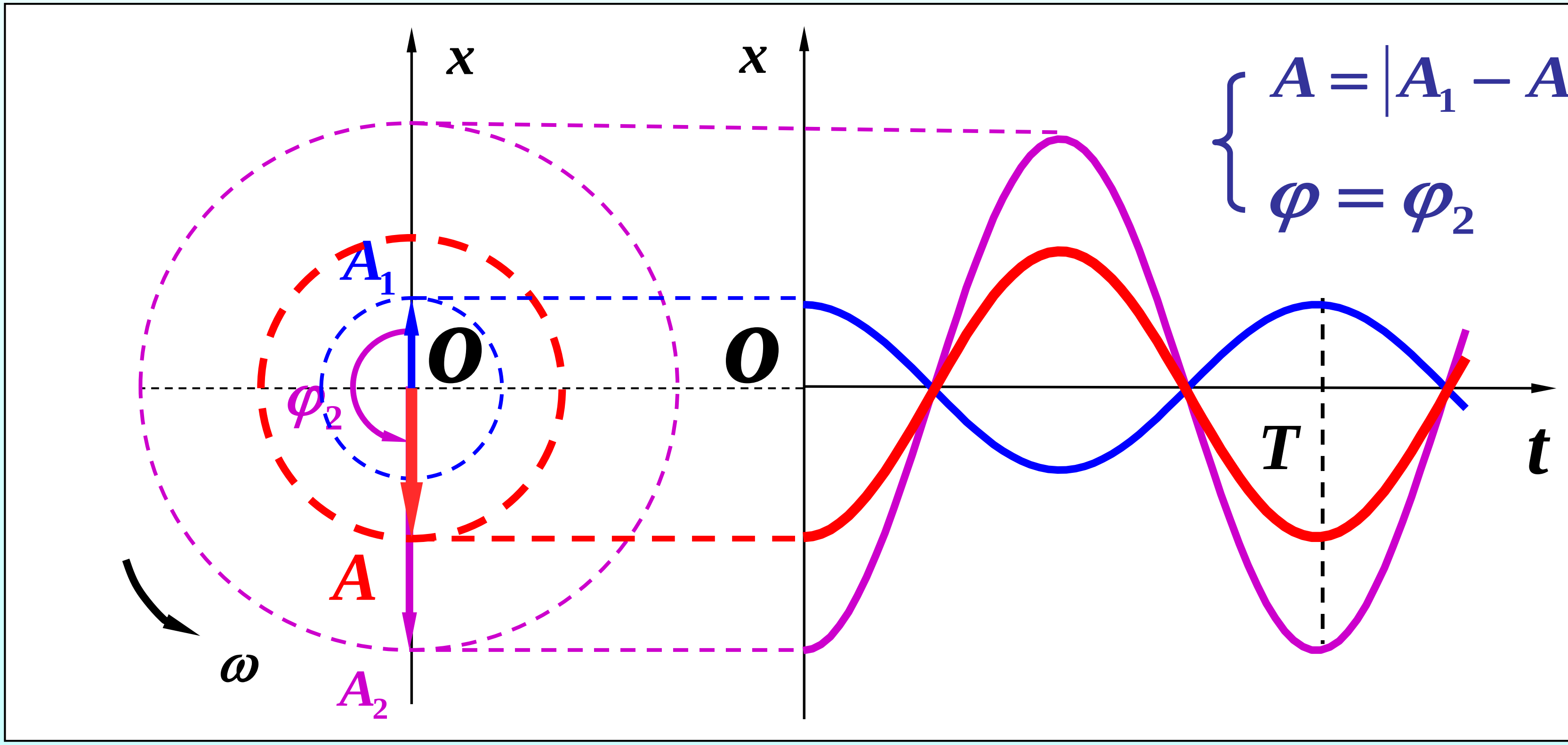
讨论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2° 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$$\begin{cases} x_1=A_1\cos\omega t \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

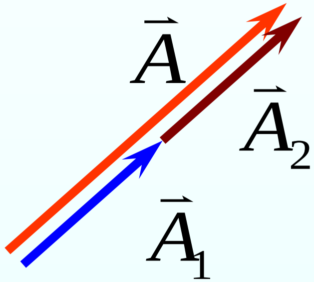
$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



$$\begin{cases} A=|A_1-A_2| \\ \varphi=\varphi_2 \end{cases}$$

小结

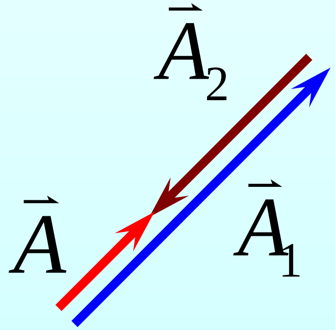
1° 若两分振动同相



$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$

则 $A = A_1 + A_2$，合振幅最大。

2° 若两分振动反相



$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$

则 $A = |A_1 - A_2|$，合振幅最小。

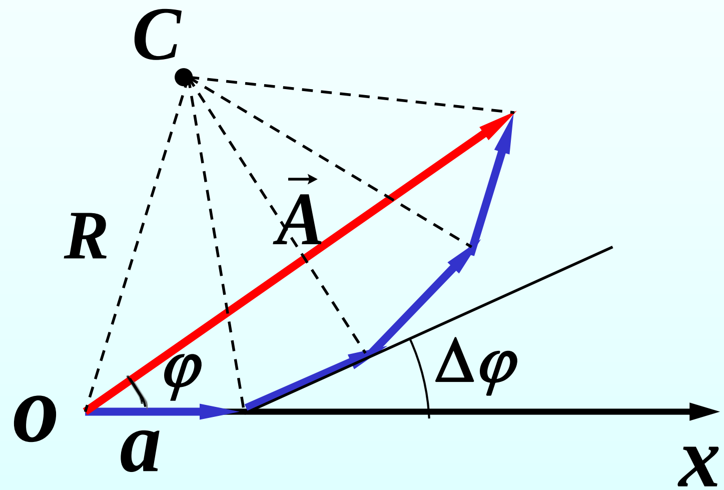
如 $A_1 = A_2$，则 $A=0$

3° 一般情况

$$A_1 + A_2 > A > |A_1 - A_2|$$

例8. N个同方向同频率的简谐振动的合成

设它们的振幅都为a，初位相依次相差一个$\Delta\varphi$，其表达式为：



$$x_1 = a\cos(\omega t)$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

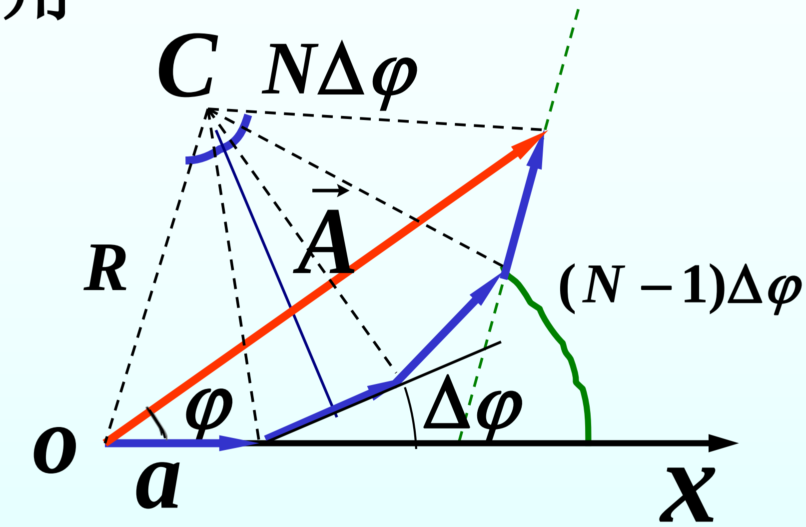
$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\Delta\varphi)$$

$$\vdots$$

$$x_N = a\cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi]$$

用矢量合成法——多边形法则

作外接圆，先求半经R及圆心角



由等腰三角形可知

$$R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{a}{2} \Rightarrow R=\frac{a/2}{\sin(\Delta\varphi/2)}$$

圆心角 $N\Delta\varphi$，则

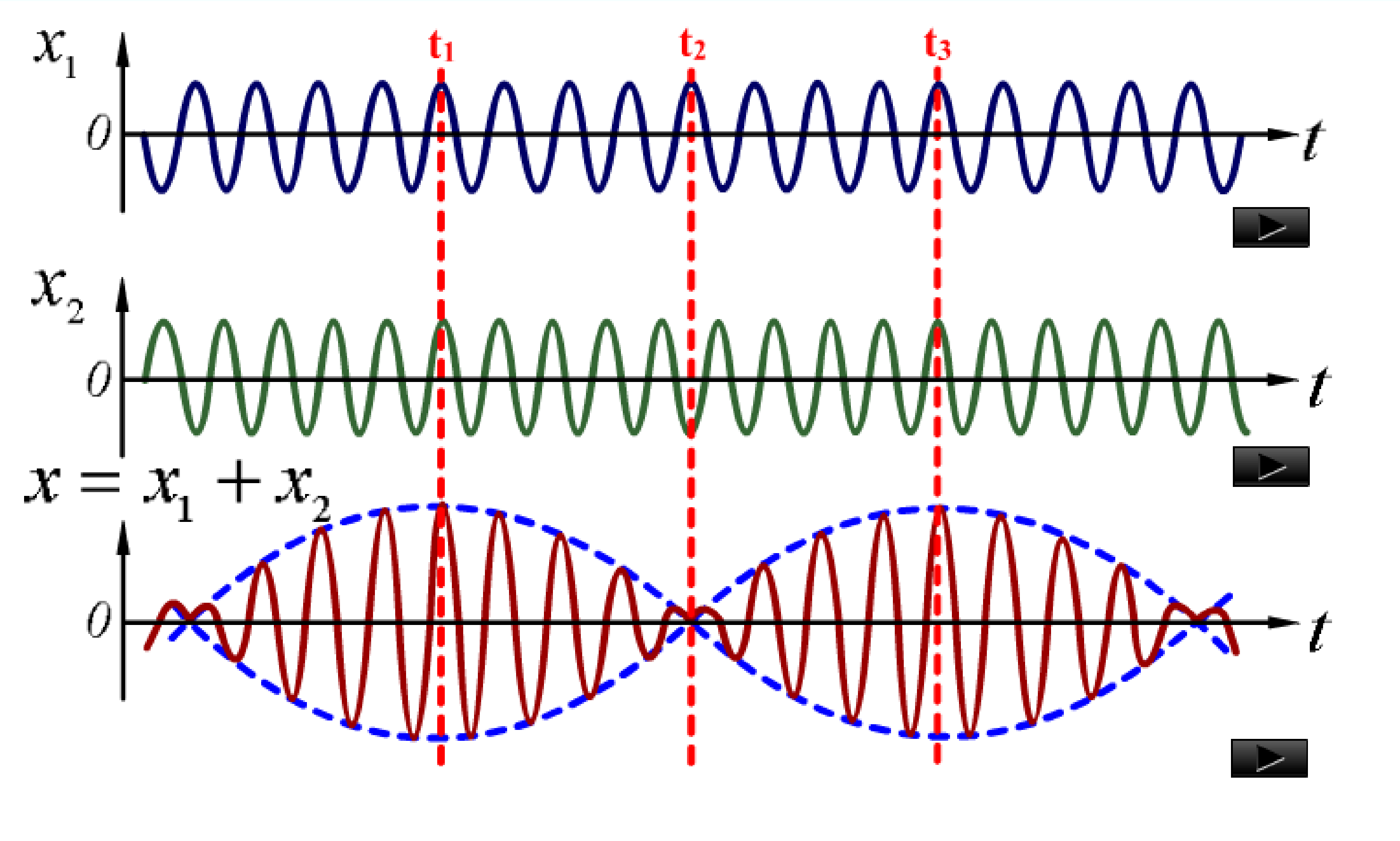
$$\boxed{A=2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}=a\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}\Big/\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

由三角形外角等于不相邻内角之和，得 $\varphi=\dfrac{(N-1)\Delta\varphi}{2}$

$$\therefore\ x=a\frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)}\cos\left[\omega t+\frac{(N-1)\Delta\varphi}{2}\right]$$

合振动仍为同频率的简谐振动。

二、两同方向不同频率(相差较小)的简谐振动的合成



合振幅时强时弱的现象称为拍

演示：两音叉

设分动振 $\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$

合振动 $x = x_1 + x_2$ 用 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$x = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}_{A(t)}\underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}_{\cos\omega t}$$

合振动特点：（1）合振动频率 $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$

（2）合振幅 $|A(t)| = \left|2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$

在0--2A之间随 t 周期性变化，时强时弱，不是谐振动。

合振幅在单位时间内加强（或减弱）的次数称**拍频**。

$$\Delta\nu = \left|2\times\frac{1}{2\pi}\times\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\right| = |\nu_1 - \nu_2|$$

则拍圆频率为 $A(t)$ 圆频率的2倍，即 $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$

$$\boxed{\text{拍频}\quad \Delta\nu = |\nu_1 - \nu_2|}$$

拍的利用

（1）乐音调准。

（2）超外差收音机利用电磁振动的拍现象 。

比较：声音频率与拍频

200Hz	201Hz	202Hz
400Hz	401Hz	402Hz
1500Hz	1501Hz	1502Hz
8000Hz	8001Hz	8002Hz

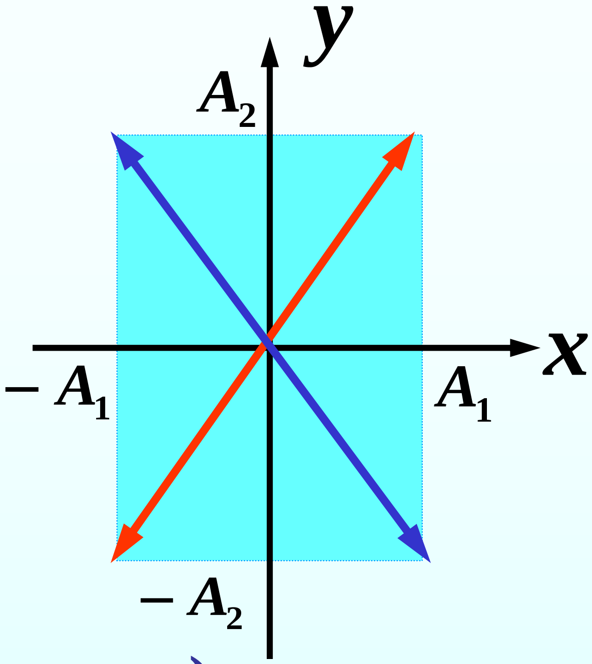
说明：往后翻一页可消除正在播放的声音。
翻回本页可重新播放。

比较：声音频率与拍频

200Hz	201Hz	202Hz
400Hz	401Hz	402Hz
1500Hz	1501Hz	1502Hz
8000Hz	8001Hz	8002Hz

说明：翻回前一页可重新播放。本页不能播放声音。

三、两同频率垂直振动的合成



分振动 $\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$

消去 t，得合运动轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

椭圆方程，形状决定于$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$及 A_1、A_2。

1. $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$ $y=\pm\dfrac{A_2}{A_1}x$ 直线 （1、3象限） （2、4象限）

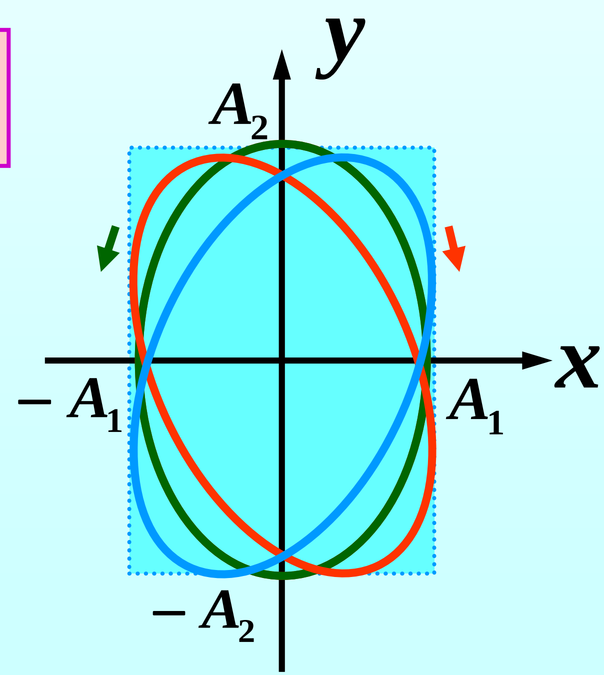
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

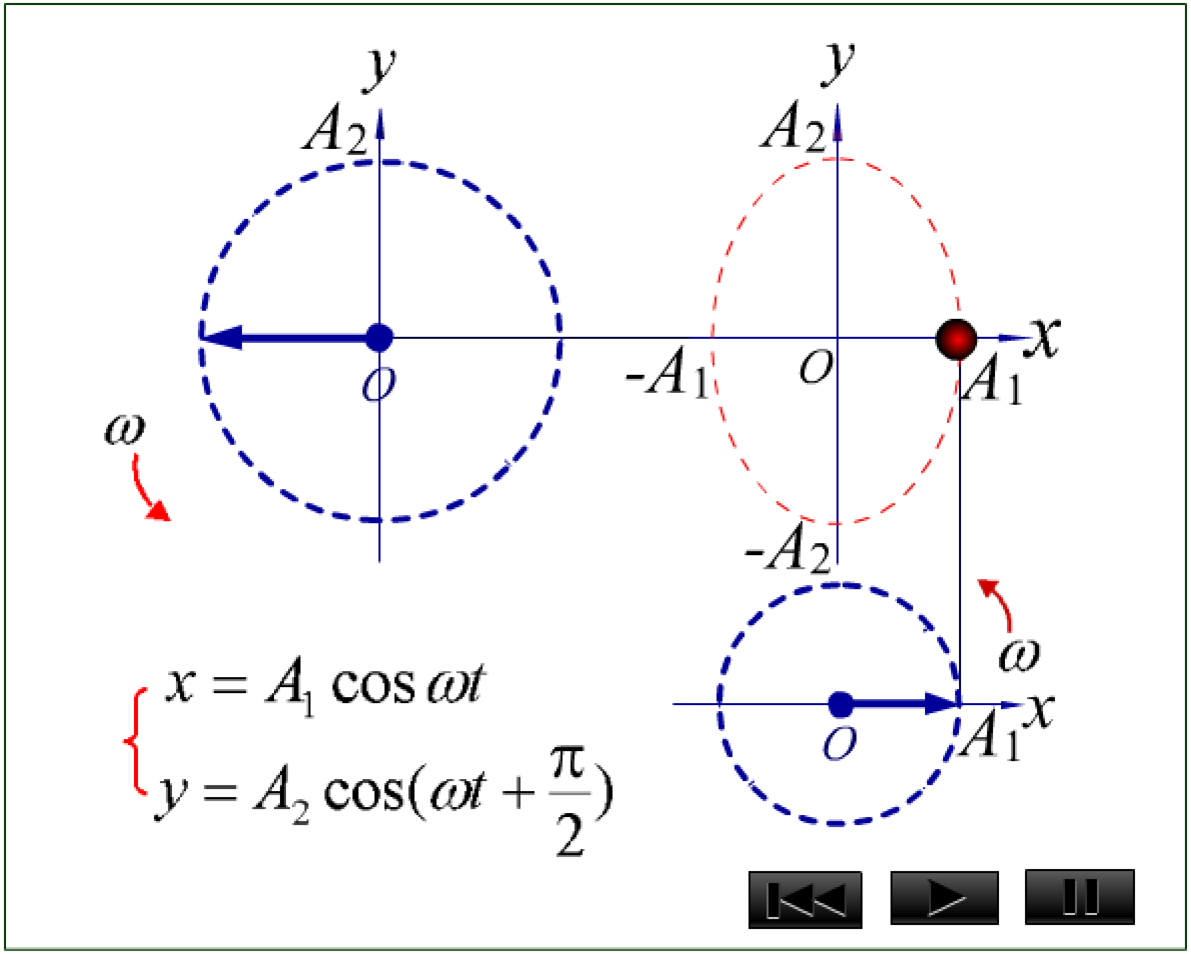
$2.\ \Delta\varphi=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{3\pi}{2}\ \text{或}\ -\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\quad\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$ 正椭圆 右旋 左旋 $A_1=A_2$ 圆

$3.\ \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 为其它值 斜椭圆

$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$在 0--π之间为右旋

$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$在π--2π之间为左旋

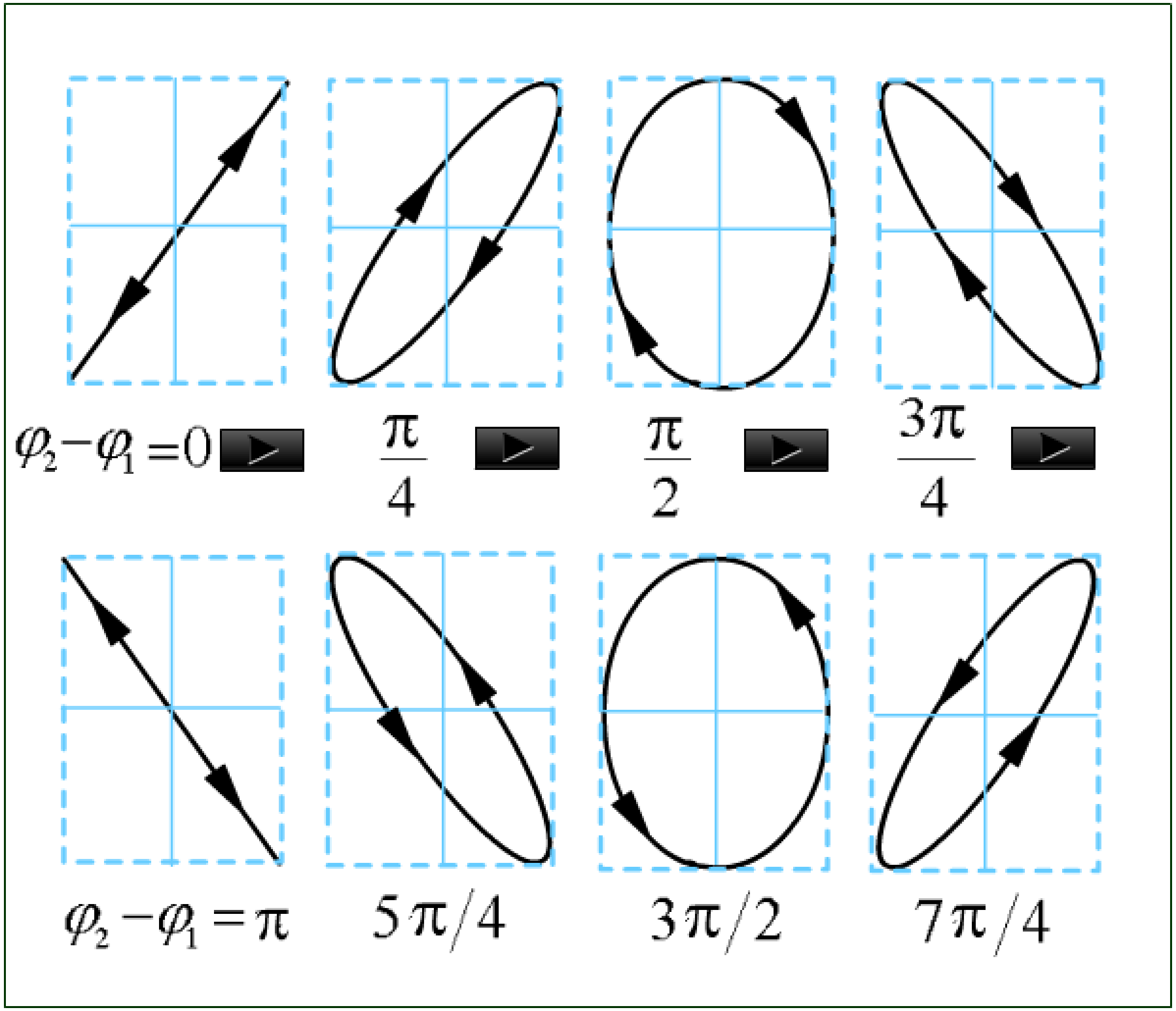




$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

椭圆合成

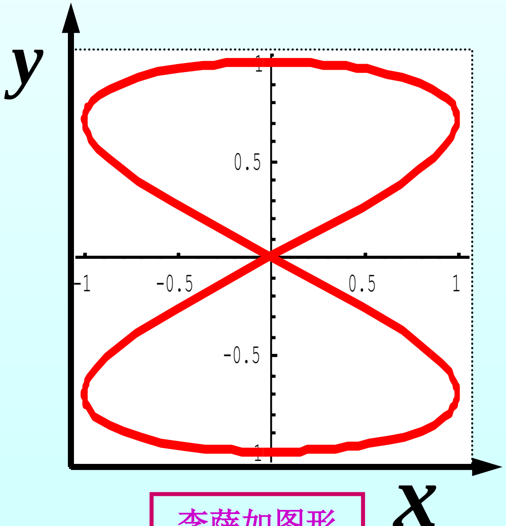
$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆



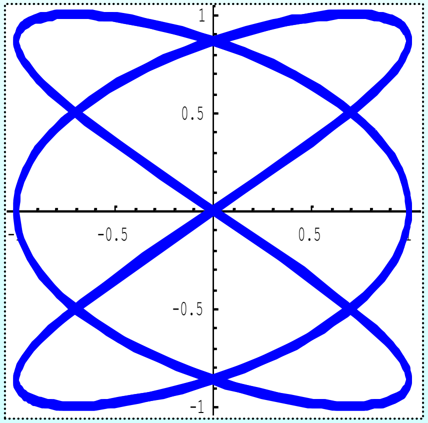
四、不同频率垂直方向简谐振动的合成

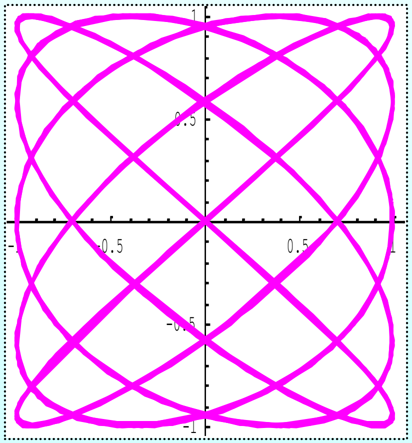
一般轨迹曲线复杂，且不稳定。

- 两振动的频率成整数比时，合成轨迹稳定，称为李萨如图形。如：

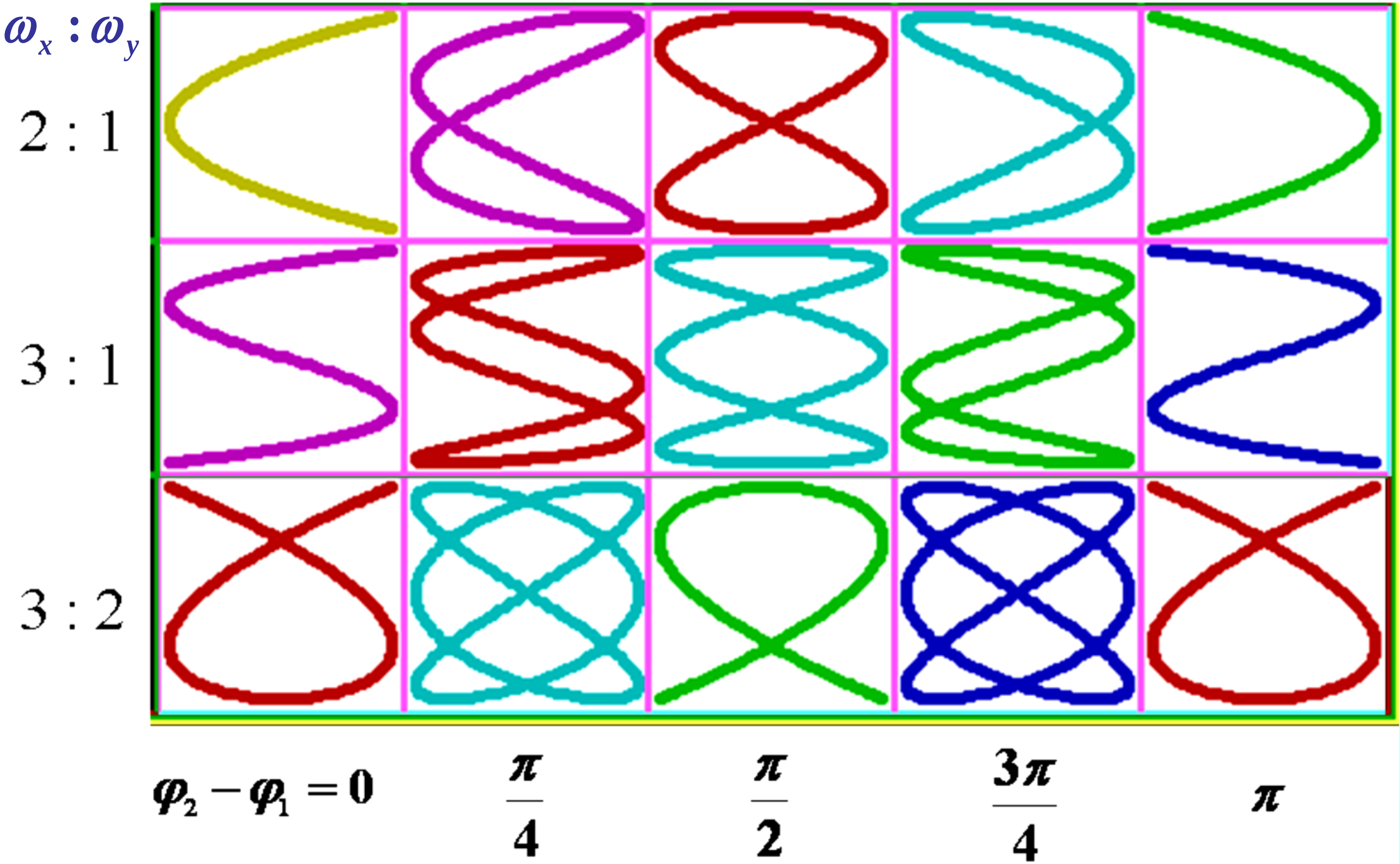


李萨如图形





由切点数之比 $\dfrac{N_y}{N_x}=\dfrac{T_y}{T_x}=\dfrac{\nu_x}{\nu_y}$ 可测频率。



$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}$$

五、谐振分析(Spectral Analysis)（了解）

1. 付里叶理论(Fourier Theory): 任何一个复杂的周期性振动, 都可以分解为一系列的SHM, 每个分振动的频率都是合振动频率的整数倍.

基频(fundamental frequency): $\nu_{分}=\nu_{合}$

倍频或n次谐频(harmonic frequency): $\nu_{分}=n\nu_{合}$

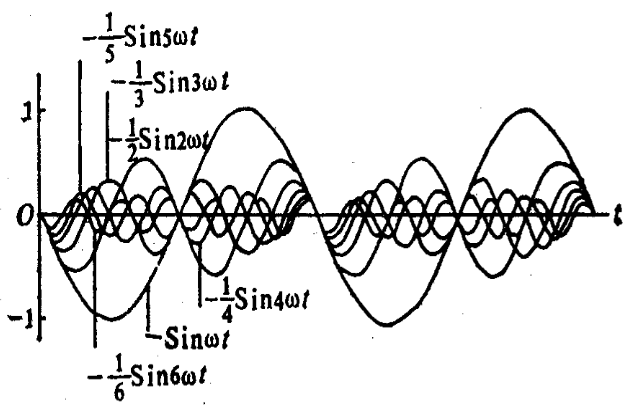
2. 振动的分解(合成的逆过程): 任一角频率为ω的振动都可以分解为一系列简谐振动，这些振动的角频率分别为ω(基频)、 2ω(二倍频)、3ω(三倍频)…即:

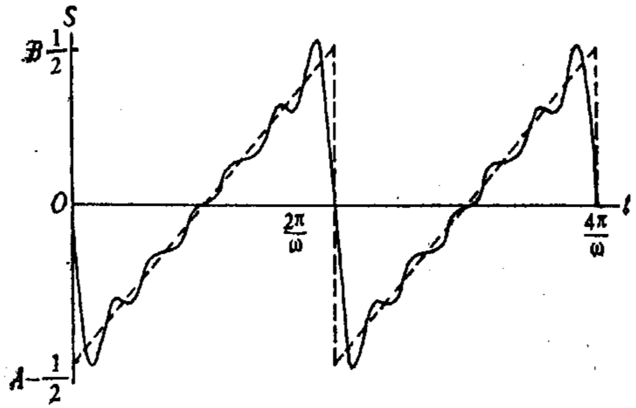
$$x(t)=b_0+b_1\cos\omega t+c_1\sin\omega t+b_2\cos2\omega t+c_2\sin2\omega t+\ \ldots$$

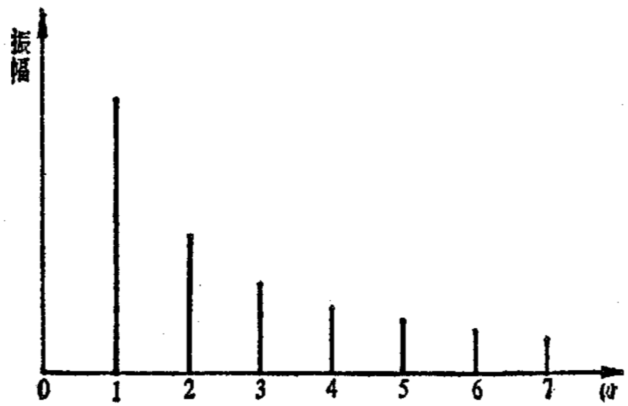
叫做复杂振动的傅里叶级数. 式中b_0、b_1、c_1、 b_2、c_2、…均为常数, 表示相应简谐振动在合振动所占的相对大小.

3. 锯齿波(扫描信号)的傅里叶级数展开式:

$$x = -\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t - \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \frac{1}{4}\sin 4\omega t - \frac{1}{5}\sin 5\omega t - \frac{1}{6}\sin 6\omega t \cdots$$



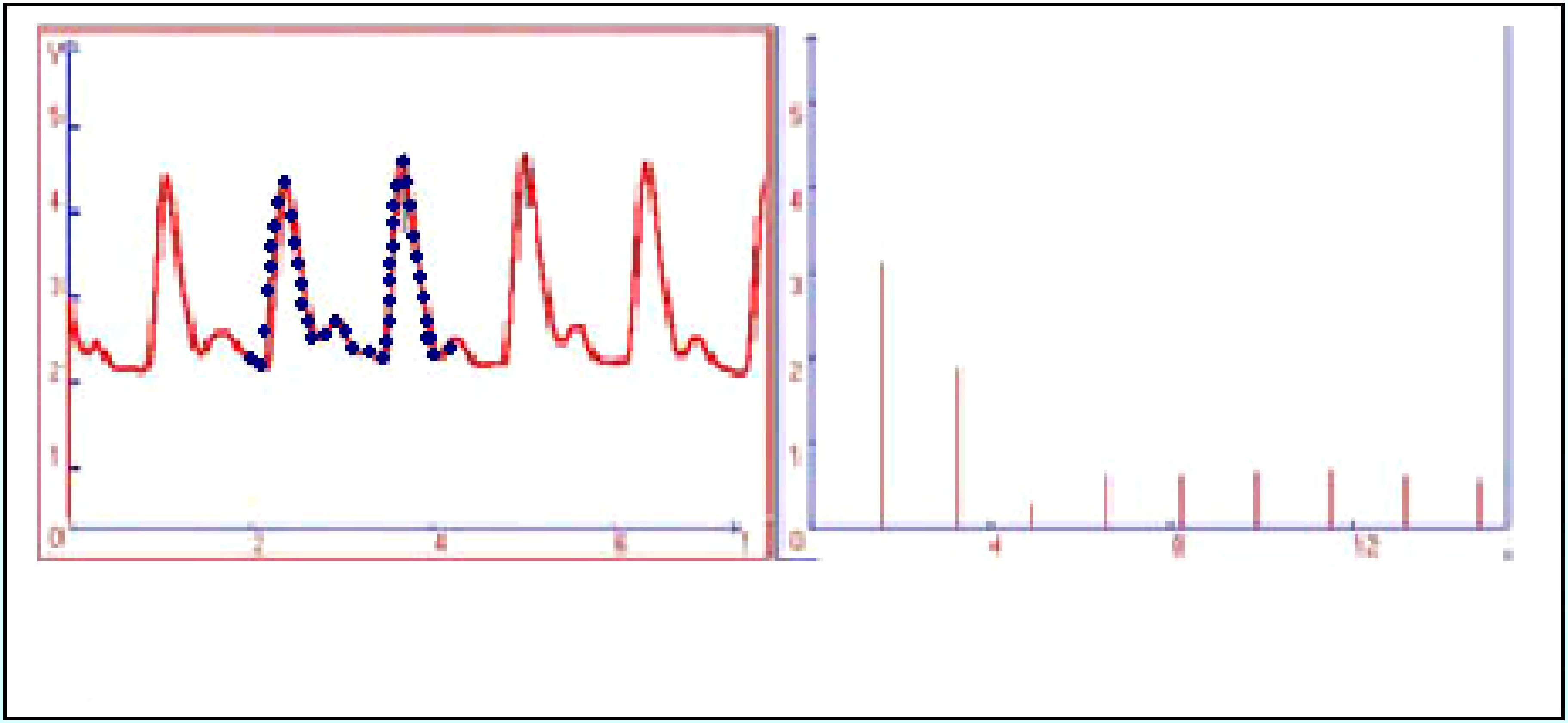




4. 频谱分析(Spectral Analysis)

将一个复杂的周期性振动的分振动的角频率为横坐标，振幅为纵坐标，按顺序表示为频谱图，称为**频谱分析**。在听觉、噪声、心电和脑电中的应用.

右上图是锯齿波的频谱(frequency spectrum)



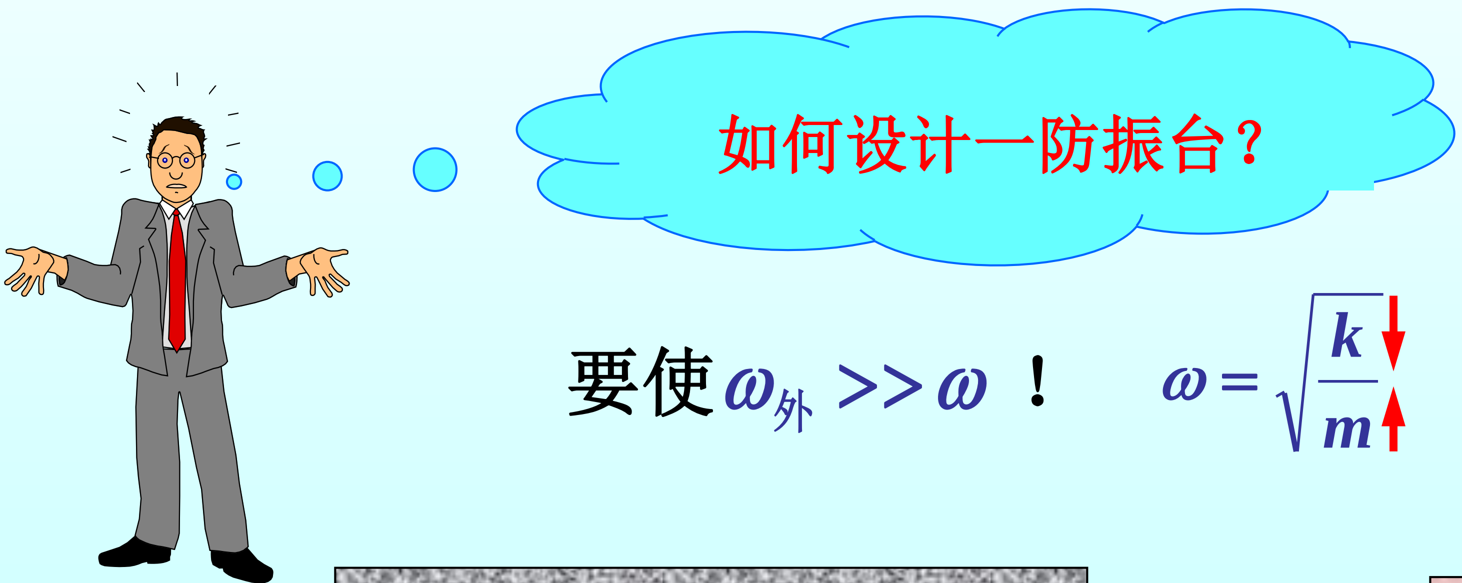
脉博振动图形及其频谱

图中显示了一位学生在安静条件下的脉博图形及其频谱

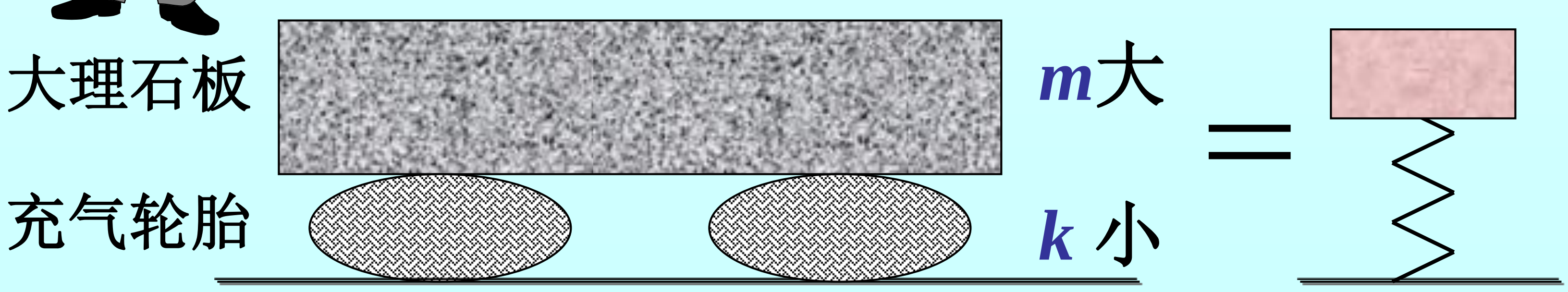
第3节 阻尼振动、受迫振动和共振（了解）

Damped Oscillation　Forced Oscillation　Resonance

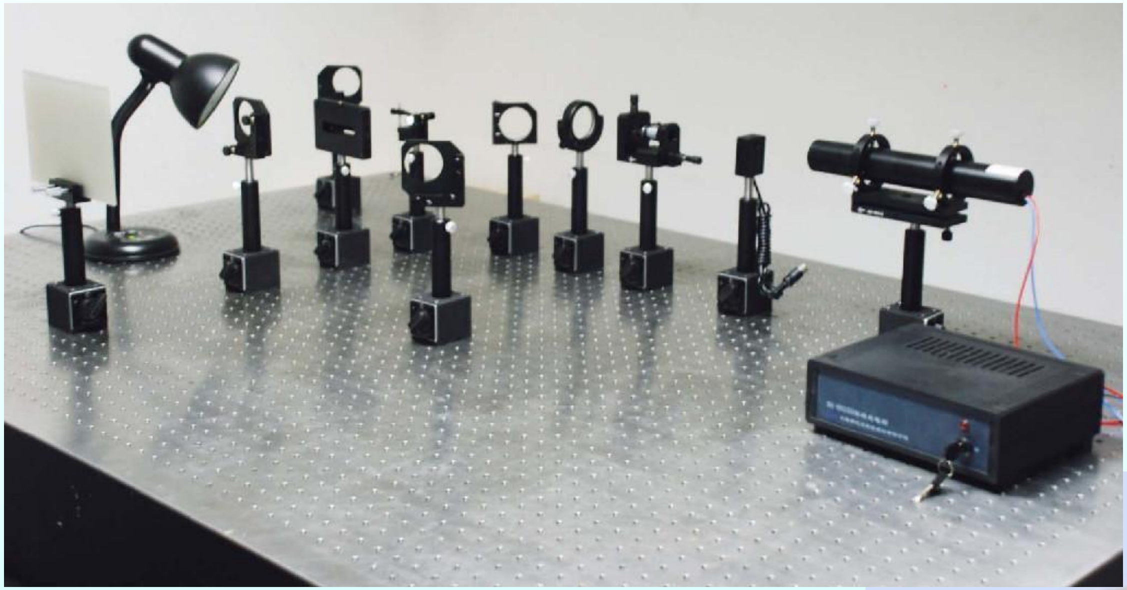
阻尼振动 $\longrightarrow$ 受迫振动 $\longrightarrow$ 共振（$\omega_{外}=\omega$）



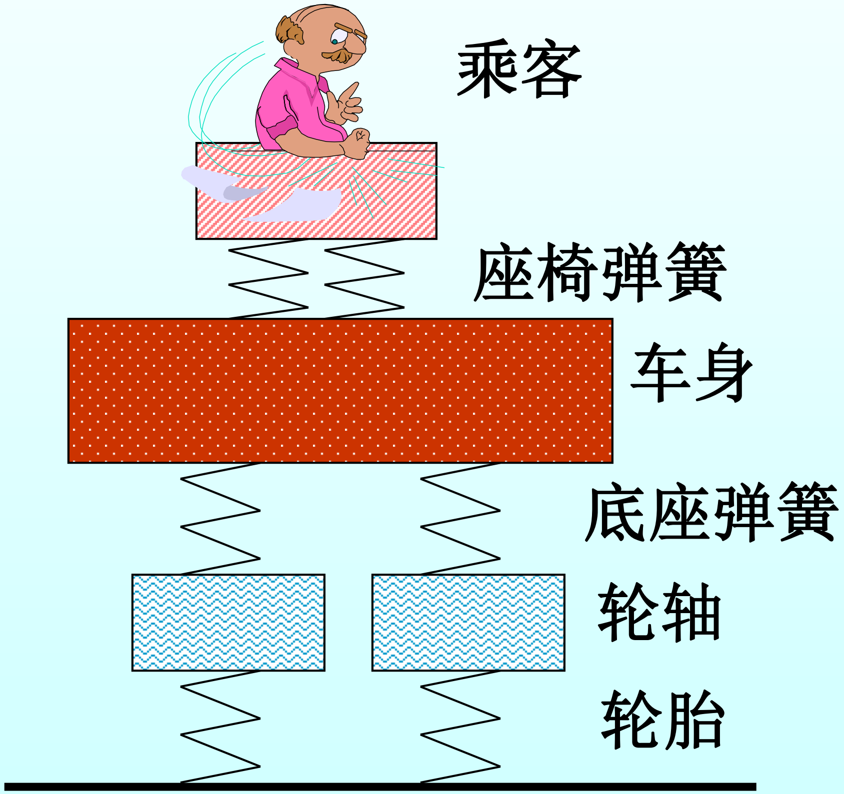
要使 $\omega_{外} >> \omega$！　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 小



光学防振台

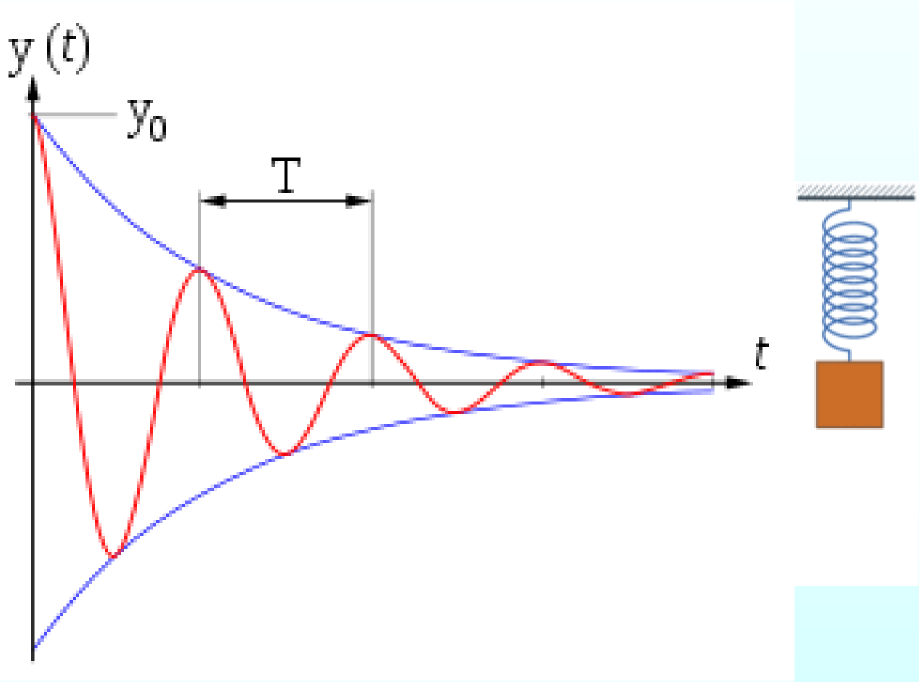


还有多级隔振！



汽车的减振系统

1. 阻尼振动



系统的能量和振幅随时间减小的振动。

(1) 阻尼产生的原因：摩擦、辐射。

(2) 特点：不是周期性的振动，振幅越来越小，
‘周期’越来越大。

(3) 阻力系数“γ”

阻尼振动方程:

阻力系数“γ”

阻尼力 $F_\gamma = -\gamma v$ $\quad -kx - \gamma v = ma$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \beta = \dfrac{\gamma}{2m} \end{cases}$$

固有角频率

阻尼系数

$$x = \underline{Ae^{-\beta t}}\cos(\underline{\omega} t + \varphi)$$

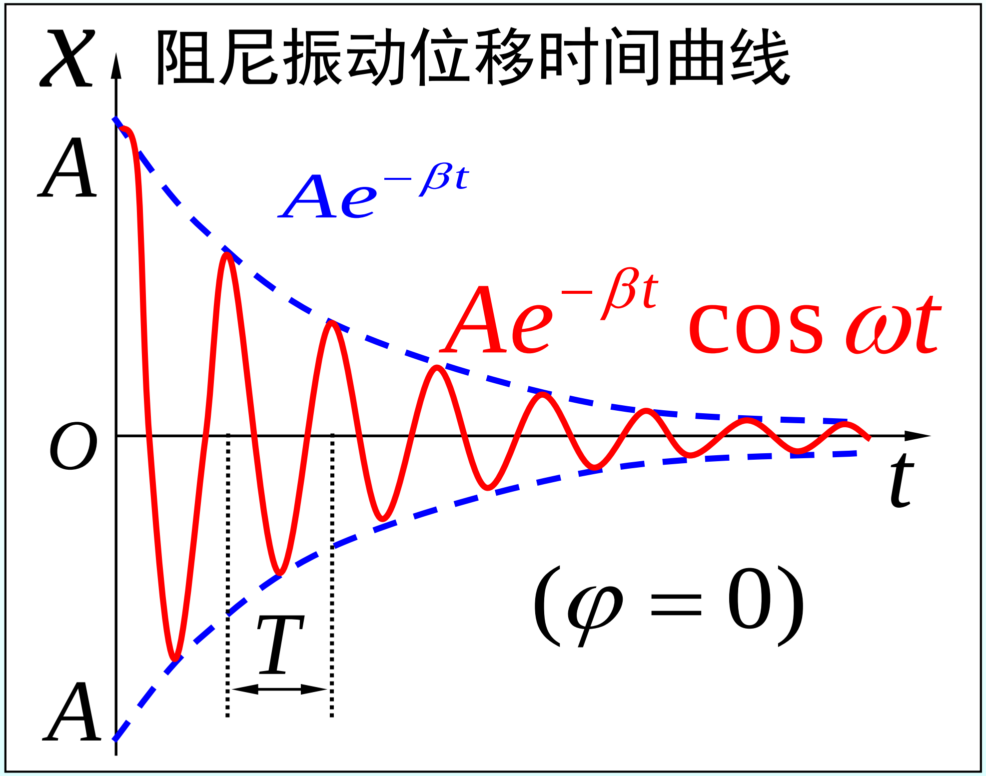
振幅 角频率

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

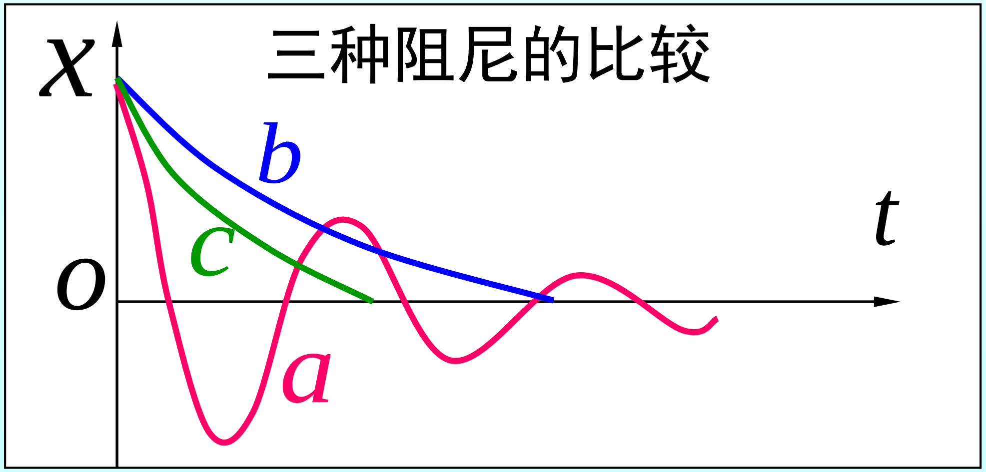
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$



a）欠阻尼 $\omega_0^2>\beta^2$

b）过阻尼 $\omega_0^2<\beta^2$

c）临界阻尼 $\omega_0^2=\beta^2$



2. 受迫振动 ：系统在周期性外力作用下的振动

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=\underbrace{F\cos\omega_{外}t}_{驱动力}$$

$$\left\{\begin{aligned}\omega_0&=\sqrt{\frac{k}{m}}\\ \beta&=\frac{\gamma}{2m}\\ f&=\frac{F}{m}\end{aligned}\right.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_{外}t$$

稳态解 $x=\cancel{A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_{外}t+\alpha)$

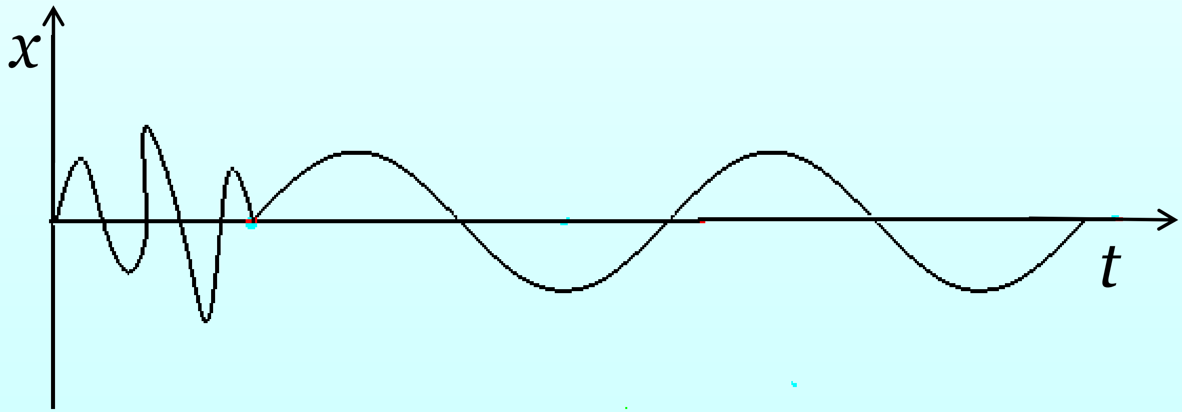
$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{外}^2)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}\qquad tg\alpha=\frac{-2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2-\omega_{外}^2}$$

振动特点:稳定时 $\omega_{振}=\omega_{外}$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_{外}^2-\omega_{固}^2)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

其中 $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$ --阻尼因子

振动曲线:



经过足够长的时间,
变为稳态:

$$x=A\cos(\omega_{外}t+\alpha)$$

360 °秋千

3. 共振

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_{外}^{2}-\omega_{固}^{2})^{2}+4\beta^{2}\omega_{外}^{2}}}$$

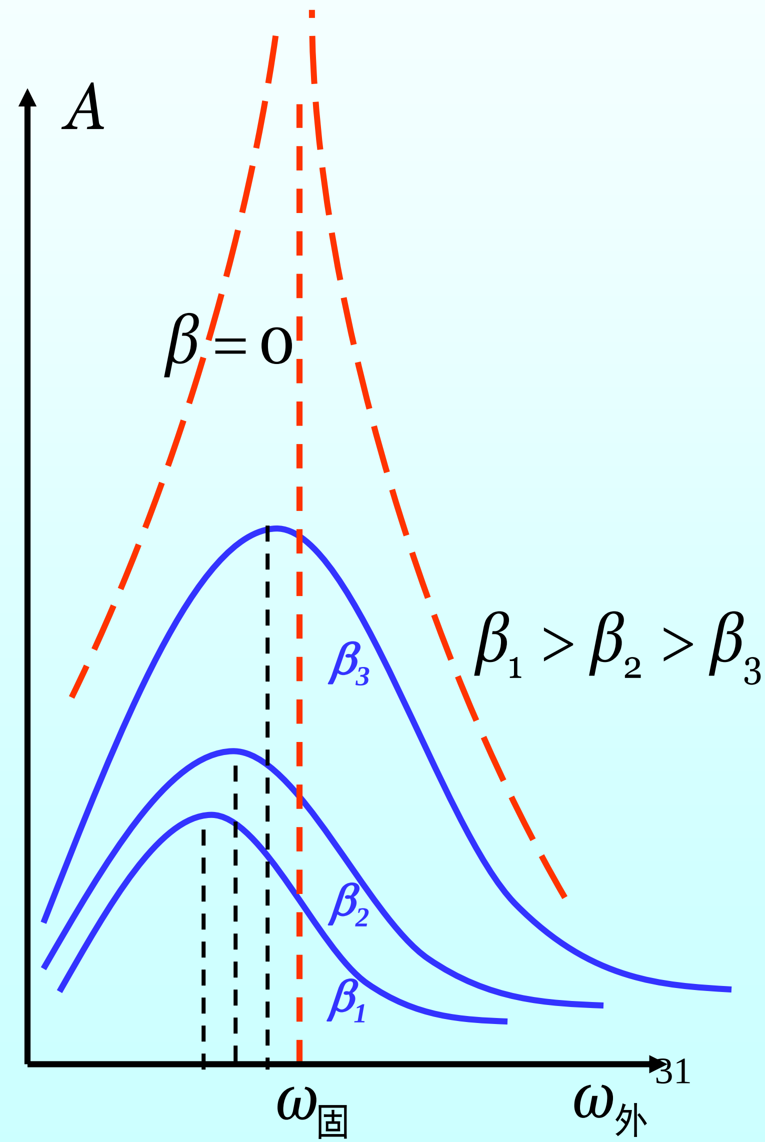
令 $\dfrac{dA}{d\omega_{外}}=0$

$$\begin{cases}\omega_{外}=\sqrt{\omega_{固}^{2}-2\beta^{2}}\\ A\Rightarrow \max\end{cases}$$

共振振幅

$$\beta\to 0\Rightarrow \omega_{外}\to\omega_{固}$$

$$\Rightarrow A_{\max}\to\infty$$



当 $\beta \to 0$弱阻尼时
共振发生在固有频率处，
称为尖锐共振。

$$A_p = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{外}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2 - \omega_{外}^2}$$

$$\therefore \omega_r = \omega_0, \quad A_p \longrightarrow \infty, \quad \alpha_r = -\pi/2$$

受迫振动相位落后于强迫力相位 $\frac{\pi}{2}$，即振动速度与强迫力同位相，那么外力始终对系统做正功。这正是振幅急剧增大的原因。

但是，随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与强迫力的功率相抵，从而使振幅保持恒定。共振时，外力做功的能量转化为共振质点的能量，称为共振吸收。

◆ 共振频率

$$\omega_{外}=\sqrt{\omega_{固}^{2}-2\beta^{2}}$$

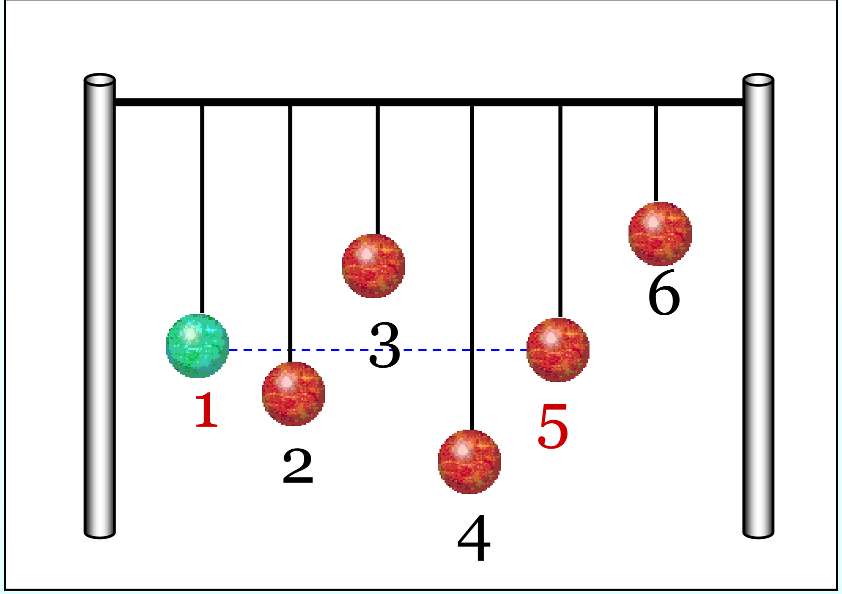
◆ 共振振幅

$$A=\frac{f_{固}}{2\beta\sqrt{\omega_{固}^{2}-\beta^{2}}}$$

◆ 共振现象在实际中的应用

乐器、收音机 ……

共振演示实验



单摆1作垂直于纸面的简谐运动时，单摆5将作相同周期的简谐运动，其它单摆基本不动。

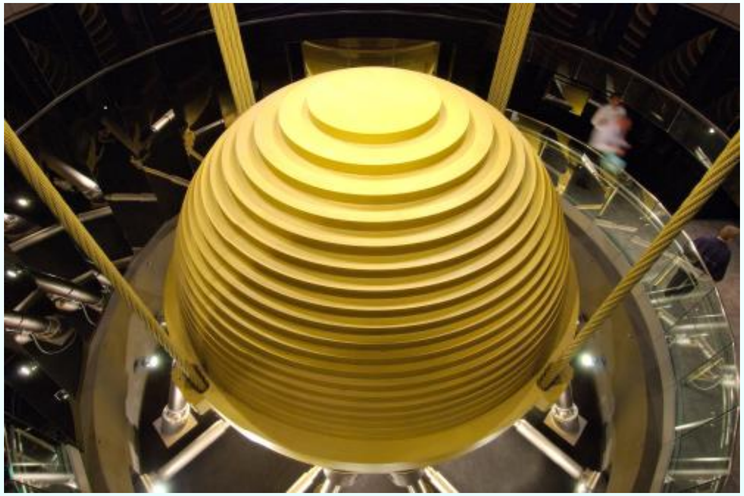
共振破杯

◈ 共振现象的危害

大桥共振

1940 年11月7日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

阻尼器在高型建筑中的使用



台北101大楼 (508米)，阻尼器直径5.5米、重达660吨

上海中心大厦 (632米)，千吨阻尼器

第9章作业

- 9-1~9-8、9-14~21、9-28、9-30

（共17道题）