第12章 非线性电阻电路

2022秋

Electric Machine & Energy Conversion Lab

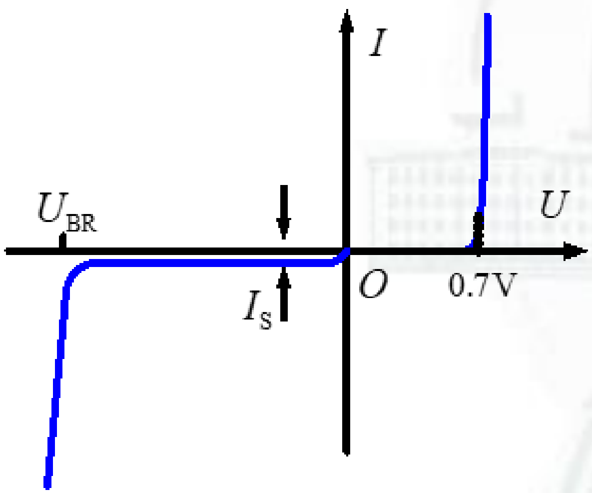
Love in Truth

第十二章　非线性电阻电路

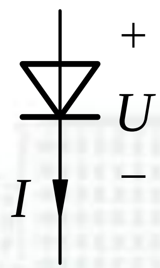
12.1 非线性电阻元件特性

非线性电阻：端口上的电压、电流关系不是通过 ***U-I*** 平面坐标原点的直线，不满足欧姆定律。

非线性电阻分类：单调型、流控型、压控型。



P-N结二极管特性曲线

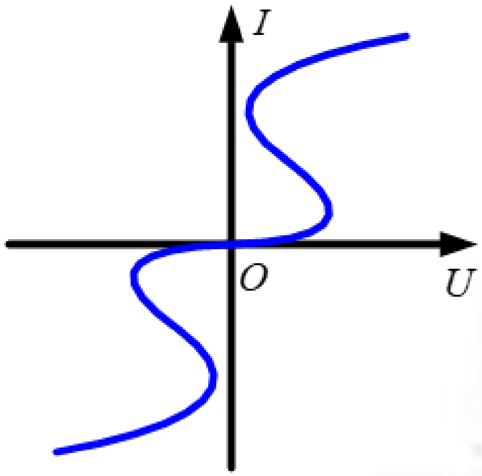


$$I = I_S(e^{U/U_t} - 1)$$

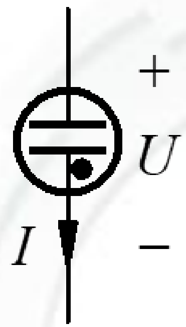
$$U = U_T ln(I/I_S - 1)$$

电流是电压的单调函数，称为单调型非线性电阻。

12.1 非线性电阻元件特性

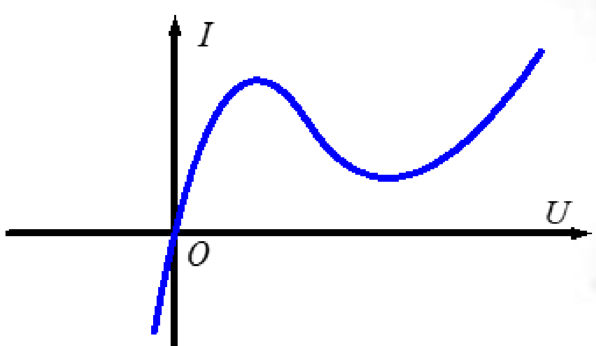


辉光管特性

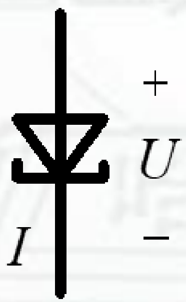


电压是电流的单值函数，反之不然 。此类电阻称为[电]流控[制]型非线性电阻。

记作：$U=U(I)$



隧道二极管特性



电流是电压的单值函数，反之不然。此类电阻称为[电]压控[制]型非线性电阻。

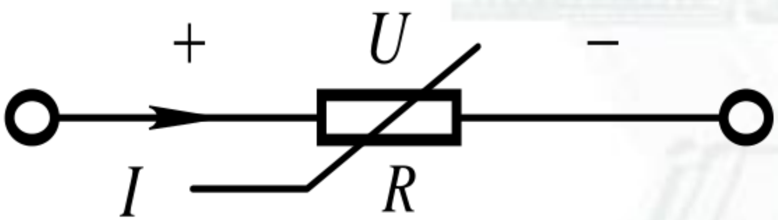
记作：$I=I(U)$

12.1 非线性电阻元件特性

➢ 线性电阻与非线性电阻

对比
- 线性电阻：线性电阻是没有方向性的，其特性曲线对称于坐标原点。
- 非线性电阻：有些具有方向性，正向和反向的导电性不同。

➢ 非线性二端电阻的符号



提醒：***R*** 只表示该元件为电阻元件，并不代表元件参数。

- 单向电阻
- 双向电阻

- 静态电阻
- 动态电阻

- 正电阻
- 负电阻

例：有一非线性电阻元件的伏安特性为 $u=100i+i^3$，求

(1) 当 $i_1=10\text{mA}$, $i_2=10\text{A}$ 时对应的电压 u_1, u_2;

(2) 当 $I=2\cos(314t)\text{A}$ 时对应的电压 u;

(3) 设 $u_{12}=f(i_1+i_2)$, $u_1=f(i_1)$, $u_2=f(i_2)$，是否存在 $u_{12}=u_1+u_2$?

【解】(1) 当 $i_1=10\text{mA}$ 时，

$$u_1=100i_1+i_1^3=100\times(10\times10^{-3})+(10\times10^{-3})^3=1.000001\text{V}\approx1\text{V}$$

当 $i_2=10\text{A}$ 时，

$$u_2=100i_2+i_2^3=100\times10+10^3=2000\text{V}\not\approx1000\text{V}$$

✓ 当输入信号很小时，可以把非线性问题线性化。

(2) 当I =2cos(314t)A时，

$$u=100i+i^3=200\cos 314t+8\cos^3 314t$$

$$\because -\cos 3\theta=3\cos\theta-4\cos^3\theta$$

$$u=200\cos 314t+6\cos 314t+2\cos 942t$$

$$=(206\cos 314t+2\cos 942t)\mathrm{V}$$

✓ 电压中含有3倍频分量，可利用非线性电阻产生频率不同于输入频率的输出。

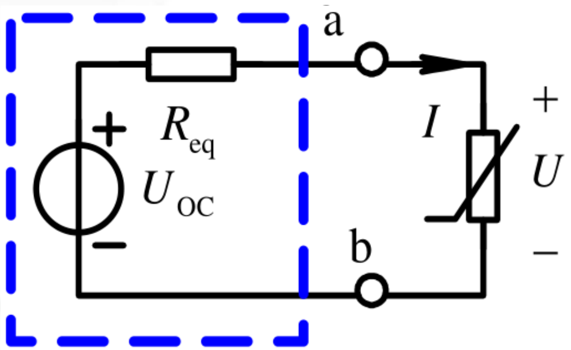
(3) 设$u_{12}=f(i_1+i_2)$, $u_1=f(i_1)$, $u_2=f(i_2)$,是否存在$u_{12}=u_1+u_2$?

$$u_{12}=100(i_1+i_2)+(i_1+i_2)^3=100(i_1+i_2)+(i_1^3+i_2^3)+3i_1i_2(i_1+i_2)$$

$$u_1+u_2=100i_1+i_1^3+100i_2+i_2^3=100(i_1+i_2)+(i_1^3+i_2^3)$$

✓ 两者不相等，说明叠加定理不适用于非线性电路。

非线性电路的分析思路：依据基尔霍夫定律和元件性质列写电路方程。基于线性电路推导出来的定理不能用于解非线性电路。



➢ 电路中只含一个非线性电阻

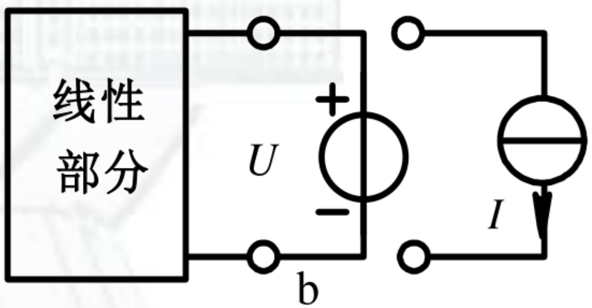
求解步骤：

1. 将电路划分成线性和非线性两部分；
2. 利用等效电源定理对线性部分进行化简；
3. 若为流控型电阻 $U=U(I)$ ，以电流I为变量列 KVL方程：

$$R_{\text{eq}}I+U(I)=U_{\text{OC}}$$

若为压控型电阻 $I=I(U)$ ，以电压U为变量列 KVL方程：

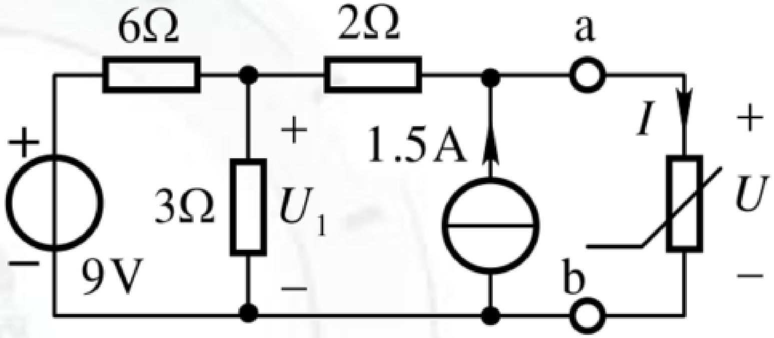
$$R_{\text{eq}}I(U)+U=U_{\text{OC}}$$



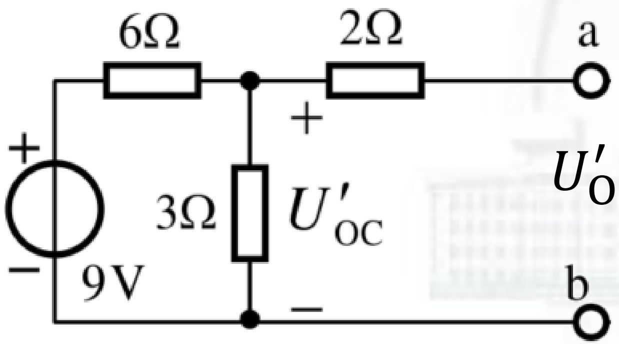
4. 根据上述解答，用电压源或电流源置换非线性电阻，对线性部分进行求解。

12.2 非线性直流电路方程

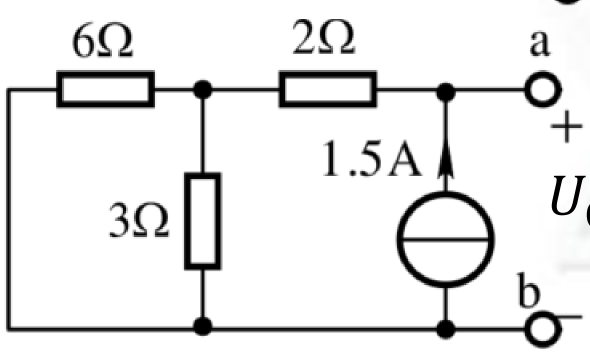
•例：电路中非线性电阻特性为$U = I^2 - 4I$(单位：V，A)试求电压 U 和 U_1 的值。



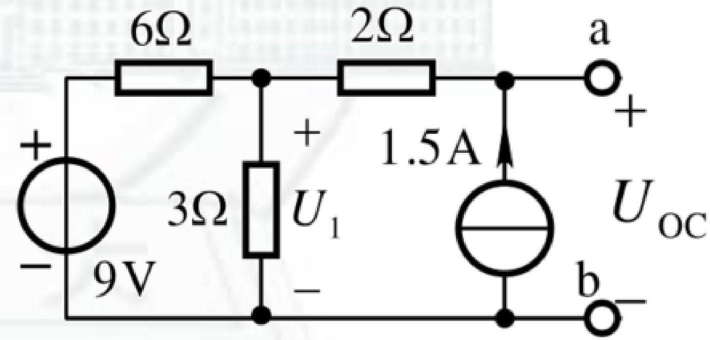
【解】对线性含源一端口网络进行戴维南等效



$U'_{OC} = 3\text{V}$

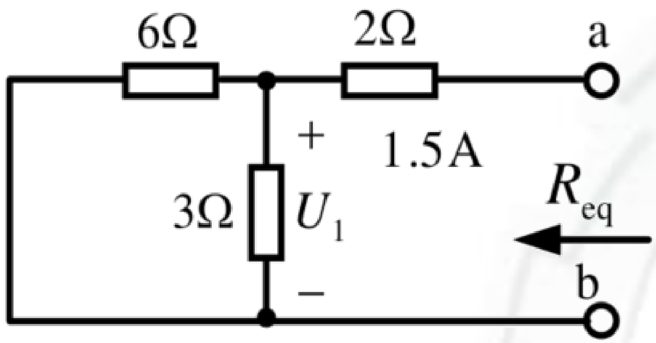


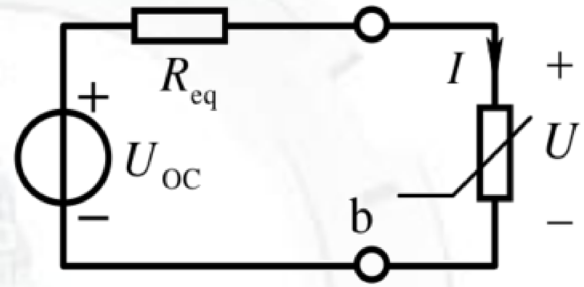
$U''_{OC} = 6\text{V}$



$U_{OC} = U'_{OC} + U''_{OC}$
$= 3\text{V} + 6\text{V} = 9\text{V}$

求等效电阻：





$$R_{eq} = (2 + \frac{3 \times 6}{3+6})\Omega = 4\Omega$$

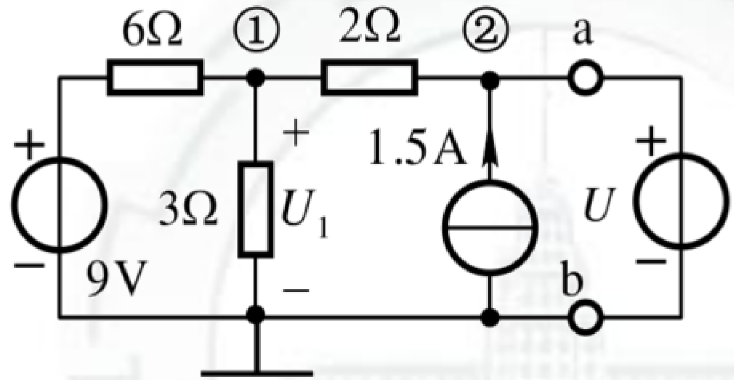
$$\left.\begin{aligned} R_{eq}I + U &= U_{oc} \\ U &= I^2 - 4I \end{aligned}\right\}$$ 解得： $I' = 3\text{A}$ $I'' = -3\text{A}$

当 $I' = 3\text{A}$ 时 $U' = (3^2 - 4 \times 3)\text{V} = -3\text{V}$

当 $I' = -3\text{A}$ 时 $U'' = [(-3)^2 - 4 \times (-3)]\text{V} = 21\text{V}$

12.2 非线性直流电路方程

用电压源置换非线性电阻得图示线性直流电路：



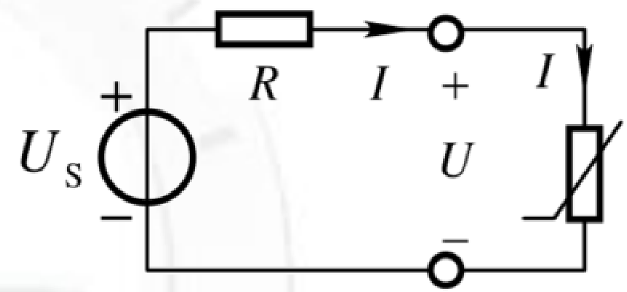
$$\left(\frac{1}{6\Omega}+\frac{1}{3\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right)U_1-\frac{U}{2\Omega}=\frac{9\text{V}}{6\Omega}$$

求解得到U_1与 U 的关系： $U_1=1.5+0.5U$

当 $U=-3\text{V}$ 时 $U_1'=0$

当 $U=21\text{V}$ 时 $U_1''=12\text{V}$

例：电路中非线性电阻特性为 $I=10^{-3}U^3$ (单位：A，V)，$R=1\text{k}\Omega$ 。求 U_S分别为2V、10V和12V时的电压 U。



【解】列KVL方程： $RI+U-U_S=0$

将 R 及非线性电阻特性代入得：

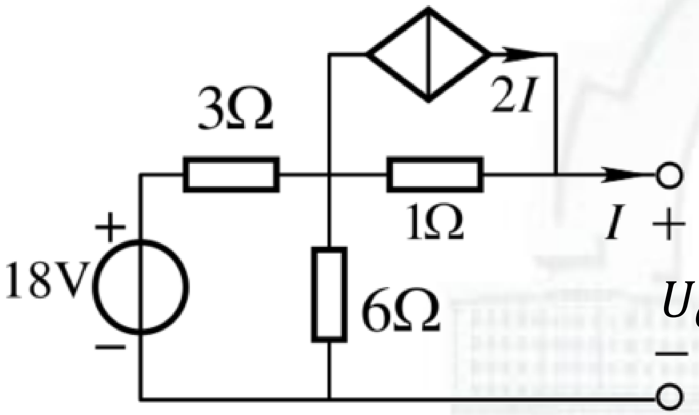
$$10^3\times10^{-3}U^3+U-U_S=U^3+U-U_S=0$$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(1) 当} & U_S=2\text{V 时，} & U'=1\text{V}\\ \text{(2) 当} & U_S=10\text{V 时，} & U''=2\text{V}\\ \text{(3) 当} & U_S=12\text{V 时，} & U'''=2.144\text{V}\end{array}\right\}\Rightarrow U'''\neq U'+U''$$

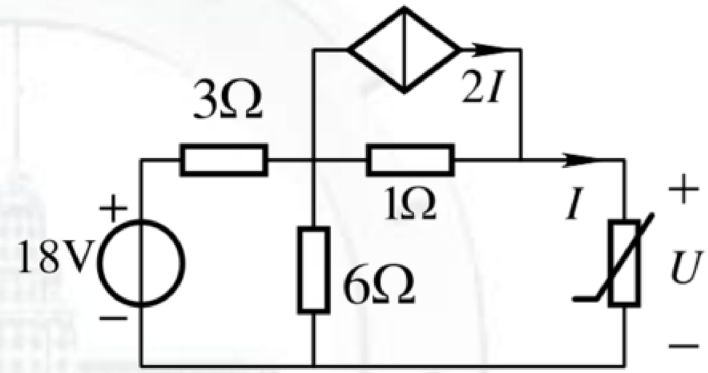
说明非线性电路不满足叠加定理

例：已知 $I=U^2$（单位：A，V），（$U\geq 0$）。求电流 I。

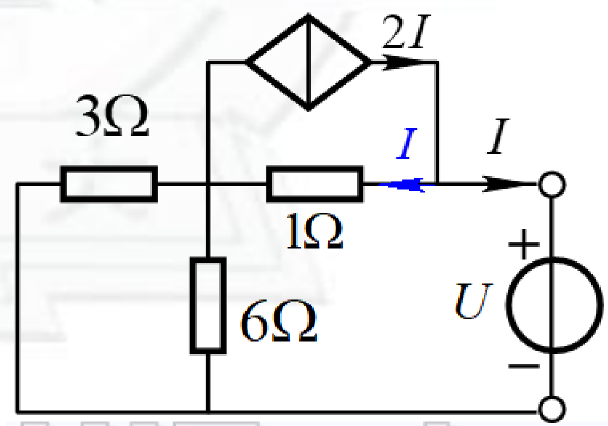
【解】(1) 求开路电压



$U_{OC}=12V$



(2)求等效电阻



$$U=1\Omega\times I-2\Omega\times I$$

$$\Rightarrow R_{\mathrm{eq}}=-\frac{U}{I}=1\Omega$$

$U_{OC} = 12V$

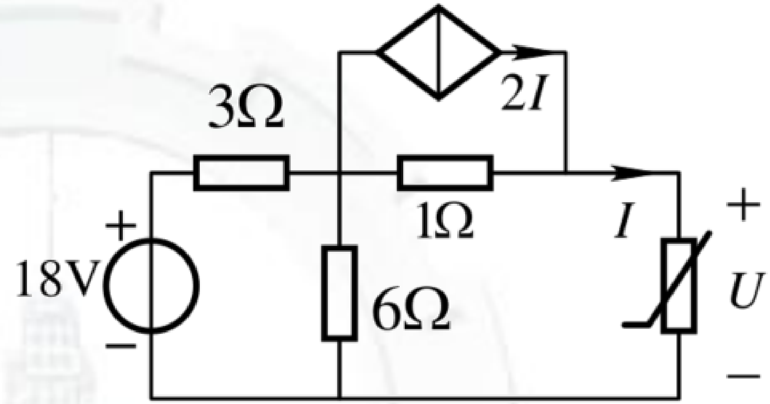
$R_{eq} = 1\Omega$

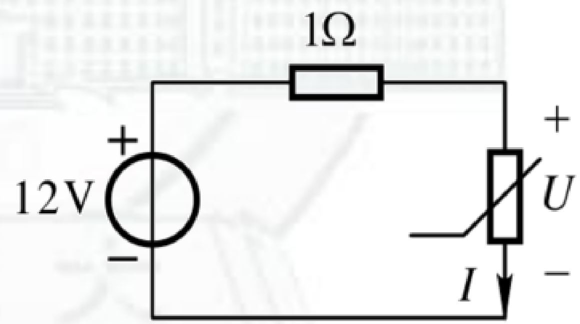
(3)计算电流

$$\begin{cases} 1\Omega \times I + U = 12V \\ I = U^2 \end{cases}$$

$$U^2 + U - 12 = 0$$

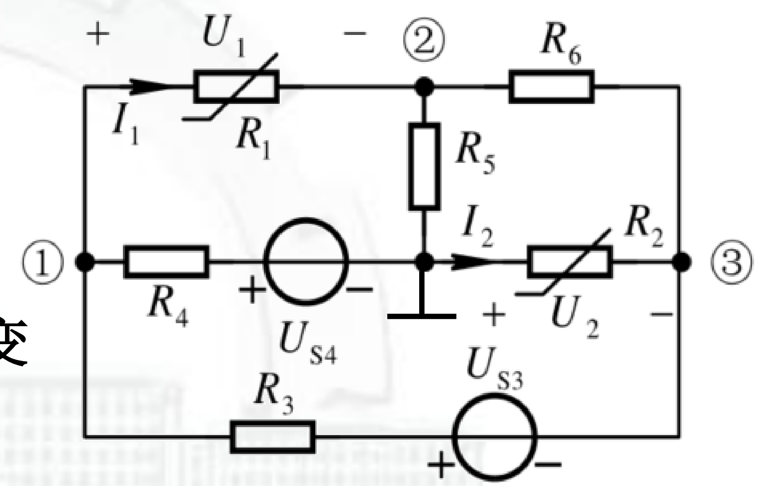
$$\begin{cases} U' = -4V & （舍去） \\ U'' = 3V & \Rightarrow I = 9A \end{cases}$$





➢ 电路中含有多个非线性电阻

(1)非线性电阻全部为压控非线性电阻情况



$$R_1: \quad I_1 = I_1(U_1)$$
$$R_2: \quad I_2 = I_2(U_2)$$

以电压作为待求量，把非线性电阻的电流作为变量，列写电路方程，通常选用改进节点电压法。

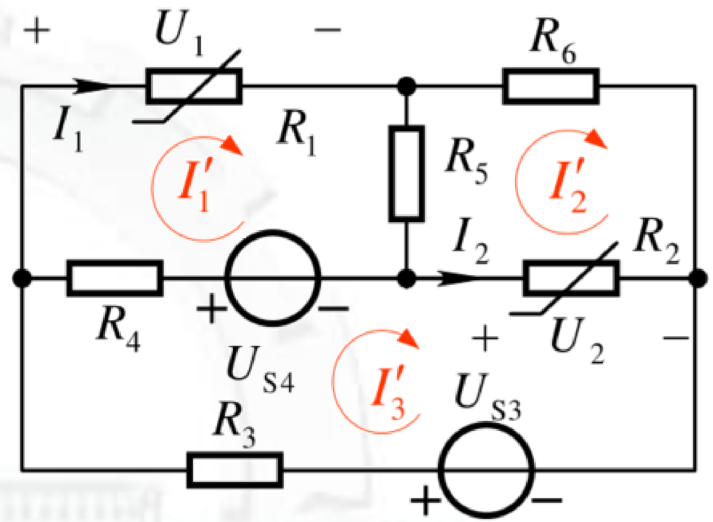
$$\begin{cases} (G_3+G_4)U_{n1} - G_3U_{n3} + I_1 = G_3U_{S3} + G_4U_{S4} \\ (G_5+G_6)U_{n2} - G_6U_{n3} - I_1 = 0 \\ -G_3U_{n1} - G_6U_{n2} + (G_3+G_6)U_{n3} - I_2 = -G_3U_{S3} \end{cases}$$

补充非线性电阻的端口特性方程，并将压控电压U用节点电压代替。

$$I_1 = I_1(U_1) = I_1(U_{n1} - U_{n2})$$
$$I_2 = I_2(U_2) = I_2(-U_{n3})$$

(2)非线性电阻全部为流控非线性电阻

$$U_1 = U_1(I_1)$$
$$U_2 = U_2(I_2)$$



以电流作为待求量，把非线性电阻的电压作为变量列写方程，通常选用回路电流法。

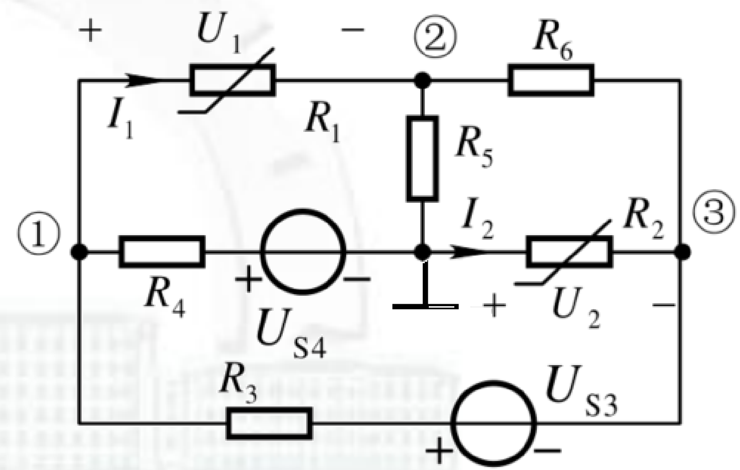
$$\begin{cases} (R_4+R_5)I_1' - R_5 I_2' - R_4 I_3' + U_1 = U_{S4} \\ -R_5 I_1' + (R_5+R_6)I_2' - U_2 = 0 \\ -R_4 I_1' + (R_3+R_4)I_3' + U_2 = U_{S3} - U_{S4} \end{cases}$$

补充非线性电阻特性方程 $U_1 = U_1(I_1) = U_1(I_1')$

$$U_2 = U_2(I_2) = U_2(I_3' - I_2')$$

(2)非线性电阻全部为流控非线性电阻

用节点电压法来列写方程



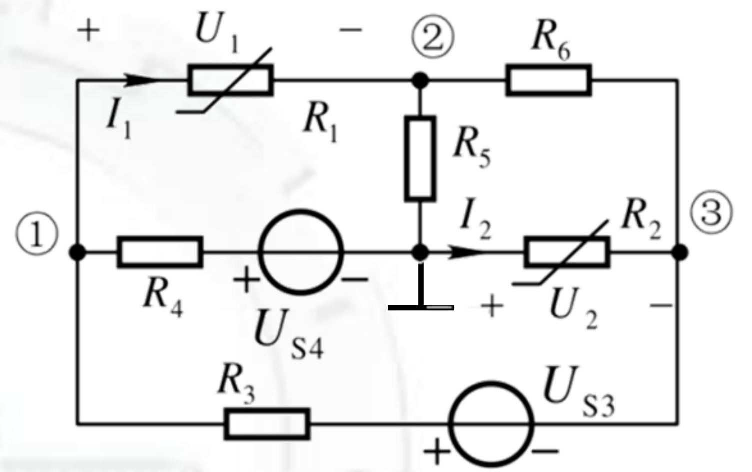
$$\begin{cases}(G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_{n3}+I_1=G_3U_{S3}+G_4U_{S4}\\(G_5+G_6)U_{n2}-G_6U_{n3}-I_1=0\\-G_3U_{n1}-G_6U_{n2}+(G_3+G_6)U_{n3}-I_2=-G_3U_{S3}\end{cases}$$

补充方程

$$U_1=U_1(I_1)\quad=U_{n1}-U_{n2}$$

$$U_2=U_2(I_2)\quad=-U_{n3}$$

(3) 电路中的非线性电阻一个是压控的，一个是流控的



$$U_1 = U_1(I_1)$$
$$I_2 = I_2(U_2)$$

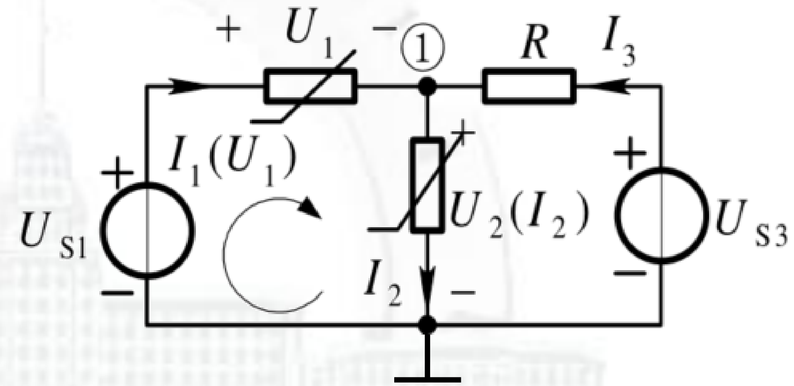
$$\begin{cases}(G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_{n3}+I_1=G_3U_{S3}+G_4U_{S4}\\(G_5+G_6)U_{n2}-G_6U_{n3}-I_1=0\\-G_3U_{n1}-G_6U_{n2}+(G_3+G_6)U_{n3}-I_2=-G_3U_{S3}\end{cases}$$

补充方程：

$$U_1 = U_{n1} - U_{n2} = U_1(I_1)$$

$$I_2(U_2) = I_2(-U_{n3})$$

例：电路含一个压控电阻和一个流控电阻。试列写关于控制量 U_1 和 I_2 的联立方程。



【解】对节点①列KCL方程：

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

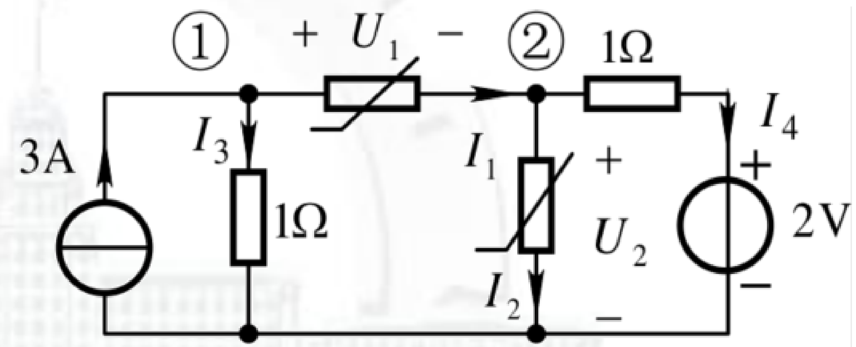
$$I_1 = I_1(U_1)$$

$$I_3 = (U_{S3} - U_{S1} + U_1)/R$$

$$\left.\begin{aligned} &-I_1(U_1) + I_2 - (U_{S3} - U_{S1} + U_1)/R = 0 \\ &U_2(I_2) - U_{S1} + U_1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{联立方程}$$

12.2 非线性直流电路方程

例：两个非线性电阻的伏安特性为 $I_1 = U_1^3$ (单位:A，V)，$U_2 = I_2^3$ (单位:V，A)。列出求解 U_1 及 I_2 的二元方程组。



【解】对节点列KCL方程

节点①: $-3\text{A} + I_3 + I_1 = 0$

节点②: $-I_1 + I_2 + I_4 = 0$

由电路可知

$$I_3 = \frac{U_{n1}}{1\Omega} = \frac{U_1 + U_2}{1\Omega}$$

$$I_4 = \frac{U_{n2} - 2\text{V}}{1\Omega} = \frac{U_2 - 2\text{V}}{1\Omega}$$

$I_1 = U_1{}^3$

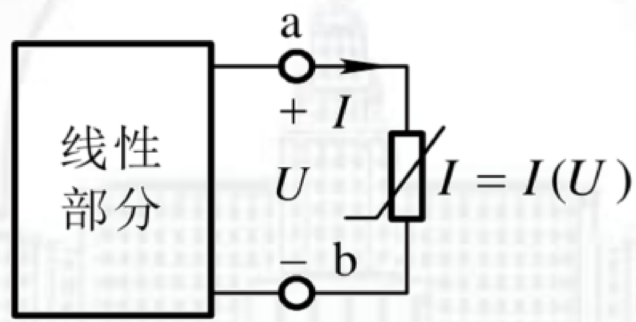
$U_2 = I_2{}^3$

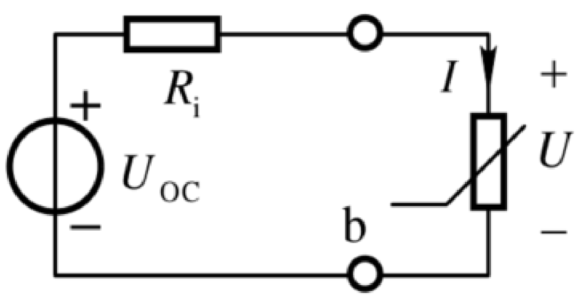
$$\begin{cases} U_1{}^3 - I_2{}^3 - I_2 = -2 \\ U_1{}^3 + U_1 + I_2{}^3 = 3 \end{cases}$$

12.3 数值分析法

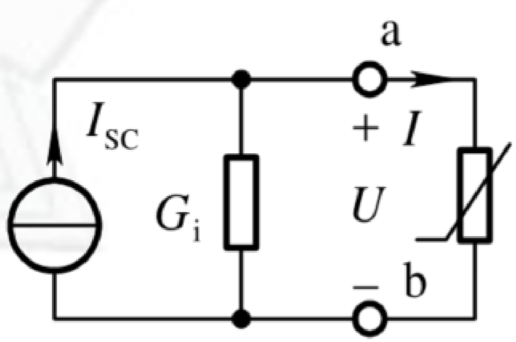
基本要求：了解数值分析法原理，会用牛顿－拉夫逊法计算含一个非线性电阻的电路。

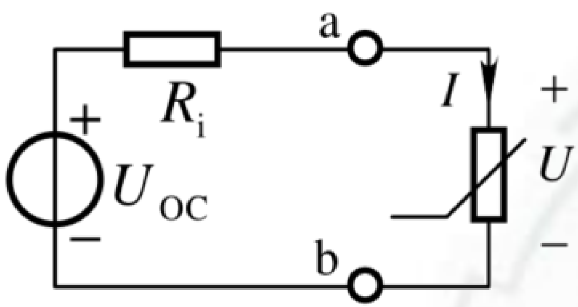
数值分析法：借助计算机算法程序计算得出电路方程的数值结果。

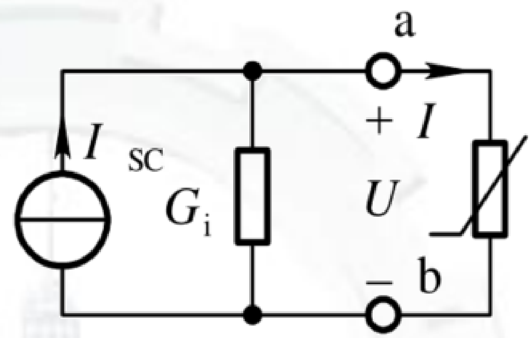




将线性部分用戴维南电路或诺顿电路进行等效







$$-U_{OC} + R_i I + U = 0$$

$$G_i U + I - I_{SC} = 0$$

将非线性电阻的特性(假设为压控)引入到方程中

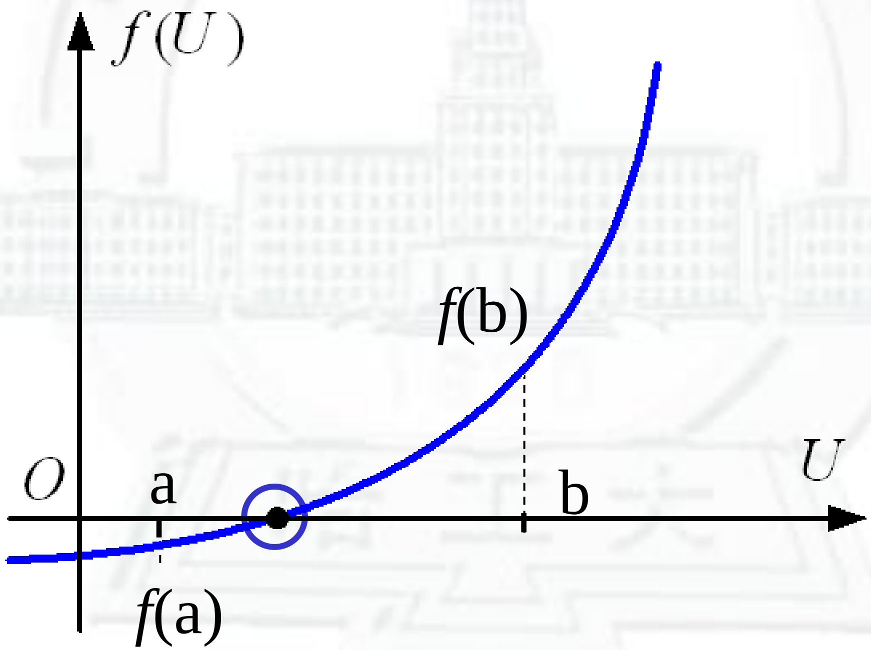
$$-U_{OC} + R_i I(U) + U = 0$$

$$G_i U + I(U) - I_{SC} = 0$$

求解电路，归结为求上式的根。但这是一个变量 U 的非线性方程，一般不易求出解析解。因此，需要采用数值分析方法进行求解 。

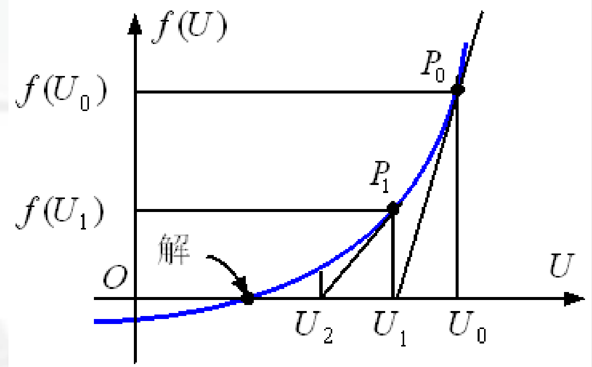
解题思路： $f(U)=I(U)-I_{SC}+G_iU$

在***U—f(U)*** 坐标平面上画出 ***f(U)*** 与***U*** 的关系曲线，曲线与横坐标 ***U*** 的交点就是方程的解答。



牛顿一拉夫逊法：

1. 先假设一电压值 U_0 (称为初值)代入上式求出 $f(U_0)$，对应图坐标上的 P_0；



牛顿-拉夫逊法原理

2.若 $f(U_0)$ 不为零，则然后在 P_0点作切线，该切线与U 轴的交点记作U_1；

$$f'(U_0)=\frac{0-f(U_0)}{U_1-U_0} \Rightarrow U_1=U_0-\frac{f(U_0)}{f'(U_0)}$$

3.用U_1代替U_0重复上述过程得到U_2

$$f'(U_1)=\frac{0-f(U_1)}{U_2-U_1} \Rightarrow U_2=U_1-\frac{f(U_1)}{f'(U_1)}$$

重复上述过程得到电压递推公式：

$$f'(U_k) = \frac{0 - f(U_k)}{U_{k+1} - U_k} \Rightarrow U_{k+1} = U_k - \frac{f(U_k)}{f'(U_k)}$$

$U_0, U_1, U_2, \cdots, U_k, U_{k+1}, \cdots$ 逐步趋近于方程的根

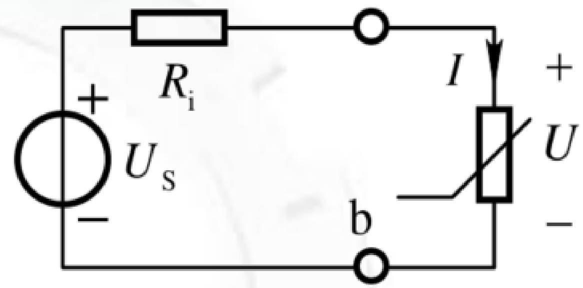
4. 在电压递推的每一步，都要判断相继两次迭代值的绝对误差是否在容许误差范围之内，即

$$\Delta U = |U_{k+1} - U_k| < \varepsilon$$

若成立，则结束，称为收敛，此时 U_{k+1} 就是 U 的近似解答；否则继续。也有可能迭代过程永远无法满足上式，则称迭代不收敛或发散。

有可能出现迭代失败或丢解的情况

例：已知 $U_S = 1\text{V}$，$R_i = 1\Omega$，$I = U^2$（单位：A，V），求电流 I。（容许误差 $\varepsilon = 10^{-3}$）



【解】 列出KVL方程(以 U 为变量)

$$R_i I + U - U_S = 0$$

即 $U^2 + U - 1 = 0$

令 $f(U) = U^2 + U - 1$

$$\Rightarrow f'(U) = 2U + 1$$

得到 $$U_{k+1} = U_k - \frac{f(U_k)}{f'(U_k)} = U_k - \frac{U_k^2 + U_k - 1}{2U_k + 1}$$

12.3 数值分析法

根据 $U_{k+1} = U_k - \dfrac{f(U_k)}{f'(U_k)} = U_k - \dfrac{U_k^2 + U_k - 1}{2U_k + 1}$

k	U_k	$f(U_k)$	$f'(U_k)$
0	1.0000	1.0000	3.0000
1	0.6667	0.1111	2.3333
2	0.6190	0.0023	2.2381
3	0.6180	0.0001	2.2359
4	0.6180		

得到解答：

$U \approx 0.618\text{V}$

$I \approx 0.3819\text{A}$

根据 $$U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)}=U_k-\frac{U_k^2+U_k-1}{2U_k+1}$$

k	U_k	$f(U_k)$	$f'(U_k)$
0	-1.0000	-1.0000	-1.0000
1	-2.0000	1.0000	-3.0000
2	-1.6667	0.1111	-2.3333
3	-1.6296	0.0261	-2.2593
4	-1.6180	-0.0001	-2.2360
5	-1.6180		

得到解答：

$U\approx -1.6180\mathrm{V}$

$I\approx 2.6179\mathrm{A}$

第十二章 非线性电阻电路

12.1 非线性电阻元件特性

12.2 非线性直流电路方程

12.3 数值分析法

12.4 分段线性近似法

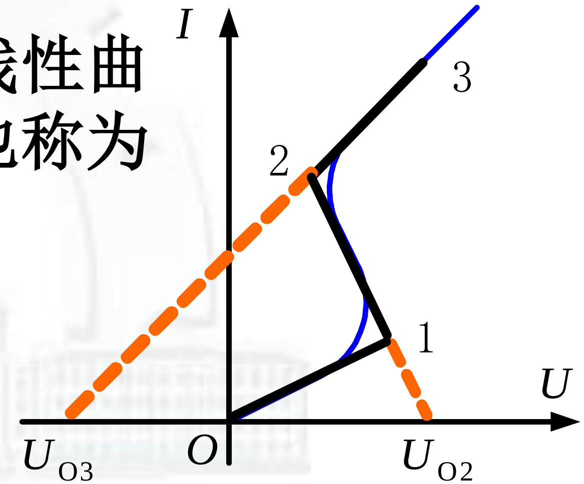
12.5 图解法

12.6 小信号分析法

12.4 分段线性近似法

基本要求：掌握分段线性分析法的原理及分析非线性电路的一般步骤。

分段线性近似法：用一条折线来分段逼近非线性曲线，折线的每一段对应一个线性电路，有时也称为折线法。



折线逼近

$$U = U_{Ok} + R_{dk} I$$

第k段直线与U轴交点的坐标

动态电阻是第k段直线的斜率

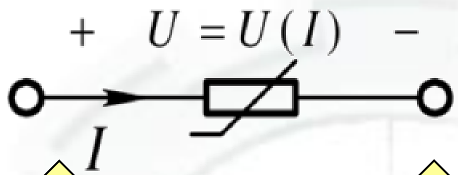
$$R_{dk} = \left(\frac{dU}{dI}\right)_k$$

$$U_{O1} = 0 \qquad R_{d1} = (dU/dI)_1 > 0$$

$$U_{O2} > 0 \qquad R_{d2} = (dU/dI)_2 < 0$$

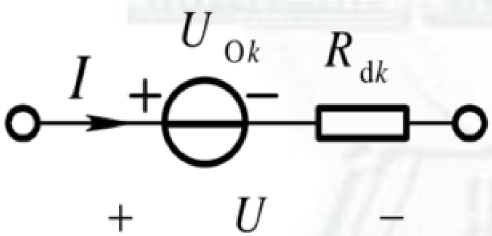
$$U_{O3} < 0 \qquad R_{d3} = (dU/dI)_3 > 0$$

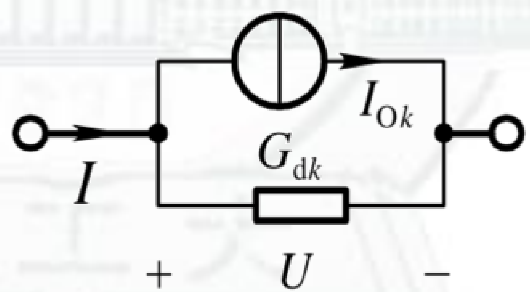
12.4 分段线性近似法



$$U = U_{0k} + R_{dk} I$$

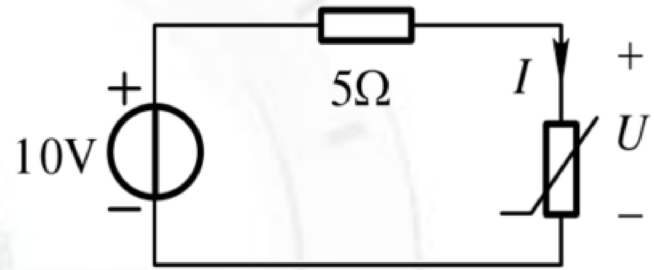
$$I = -\frac{U_{0k}}{R_{dk}} + \frac{U}{R_{dk}} = I_{0k} + G_{dk} U$$

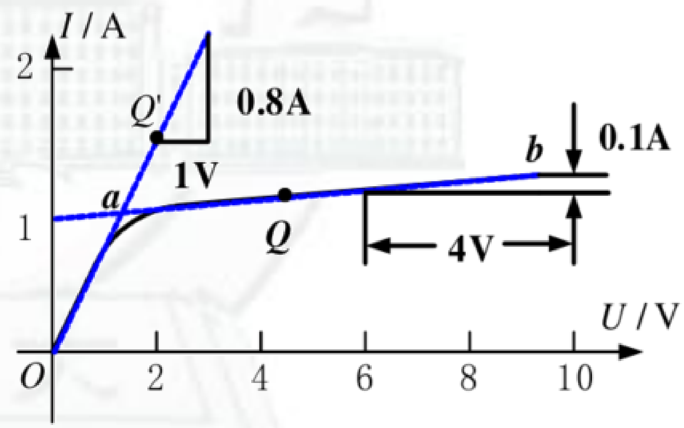




分段线性近似法的实质是把一个非线性电路的计算，分解成若干个区段的线性电路来计算。

例：试用分段线性近似法解图示电路，其中非线性电阻的特性如图所示。





【解】非线性电阻的特性可用o-a, a-b两条直线分段逼近。取U为自变量:

$$I = I_{Ok} + G_{d\,k}U$$

$0 < U \le 1.5\text{V}$ 时，取o-a段

$I_{O1} = 0 \qquad G_{d1} = (0.8\text{A})/(1\text{V}) = 0.8\text{S}$

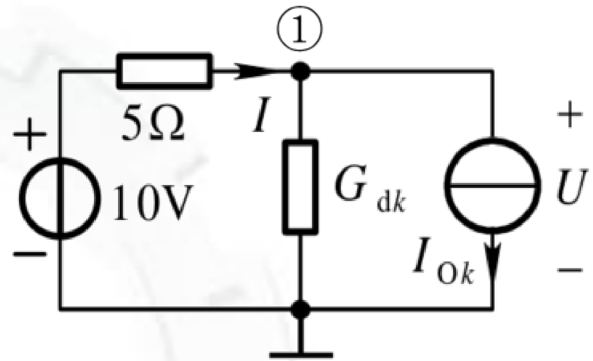
$U \ge 1.5\text{V}$ 时，取a-b段

$I_{O2} = 1.0\text{A} \qquad G_{d2} = (0.1\text{A})/(4\text{V}) = 0.025\text{S}$

12.4 分段线性近似法

由节点法可得：

$$U=\frac{\dfrac{10\text{V}}{5\Omega}-I_{\text{Ok}}}{\dfrac{1}{5\Omega}+G_{\text{dk}}}=\frac{2\text{A}-I_{\text{Ok}}}{0.2\text{S}+G_{\text{dk}}}$$



o-a段： $U=\dfrac{2\text{A}-0}{(0.2+0.8)\text{S}}=2\text{V}>1.5\text{V}$ 虚解

a-b段： $U=\dfrac{(2-1)\text{A}}{(0.2+0.025)\text{S}}\approx 4.44\text{V}$

$$I=1\text{A}+0.025\text{S}\times 4.44\text{V}=1.11\text{A}$$

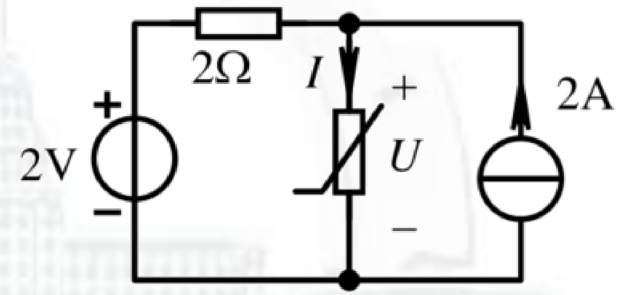
判断解的真实性，对于某一区段得到的解答，要检查其是否位于该区段。在不能肯定存在唯一解的情况下，须对所有区段进行分析。

例：图(a)所示电路，设非线性电阻特性如图(b)所示。试求电压U的值。

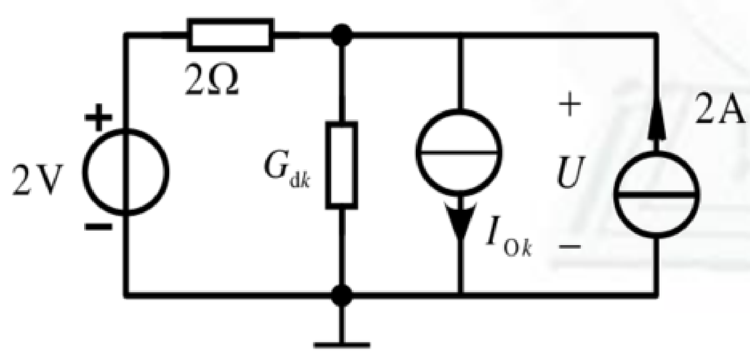
【解】(1)先求每一段的直线方程

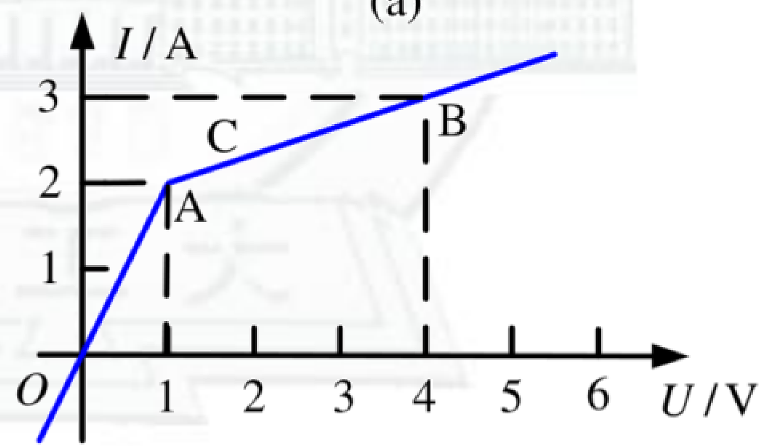
OA段 $I = 2\text{S} \times U \quad (U \le 1)$

AB段 $I = \frac{1}{3}\text{S} \times U + \frac{5}{3}\text{A} \quad (U > 1)$



(a)

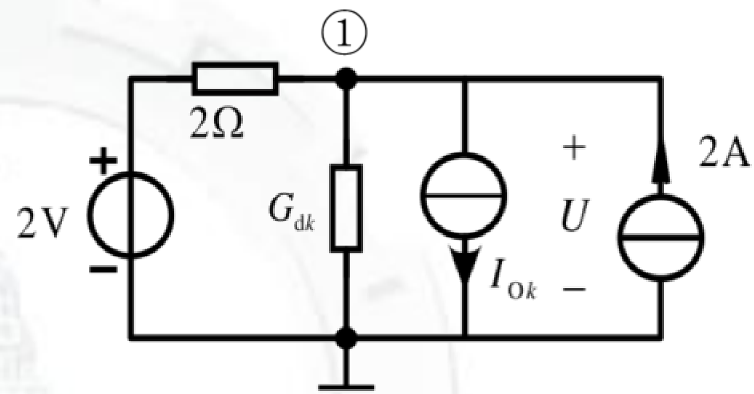




(b)

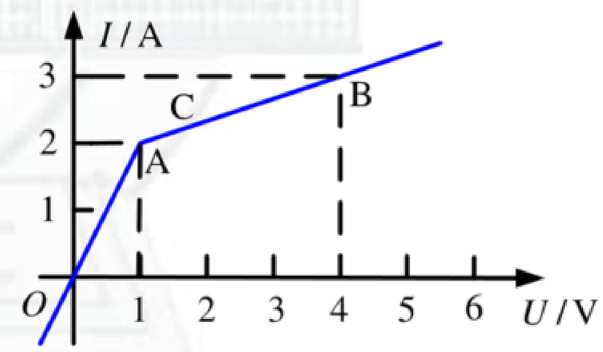
(2)对节点①列节点电压方程

$$\left(\frac{1}{2\Omega}+G_{dk}\right)U = 2\text{A}+\frac{2\text{V}}{2\Omega}-I_{Ok}$$



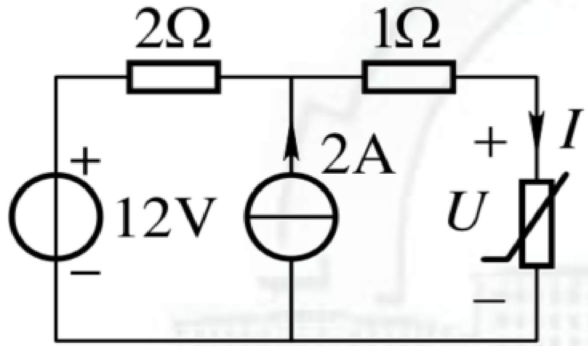
O-A段：$U=\dfrac{3\text{A}-I_{Ok}}{0.5\text{S}+G_{dk}}=\dfrac{3\text{A}}{0.5\text{S}+2\text{S}}=1.2\text{V}>1\text{V}$ 虚解，舍去

A-B段：$U=\dfrac{3\text{A}-I_{Ok}}{0.5\text{S}+G_{dk}}=\dfrac{3\text{A}-\frac{5}{3}\text{A}}{0.5\text{S}+\frac{1}{3}\text{S}}=1.6\text{V}$

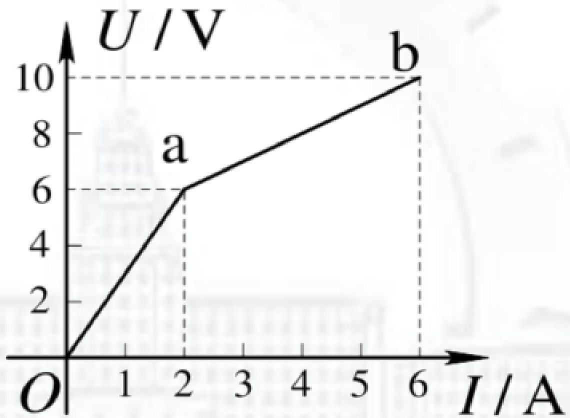


(b)

例：图(a)所示非线性电路，非线性电阻伏安特性曲线如图(b)所示。试求电压 U 和电流 I 。



(a)

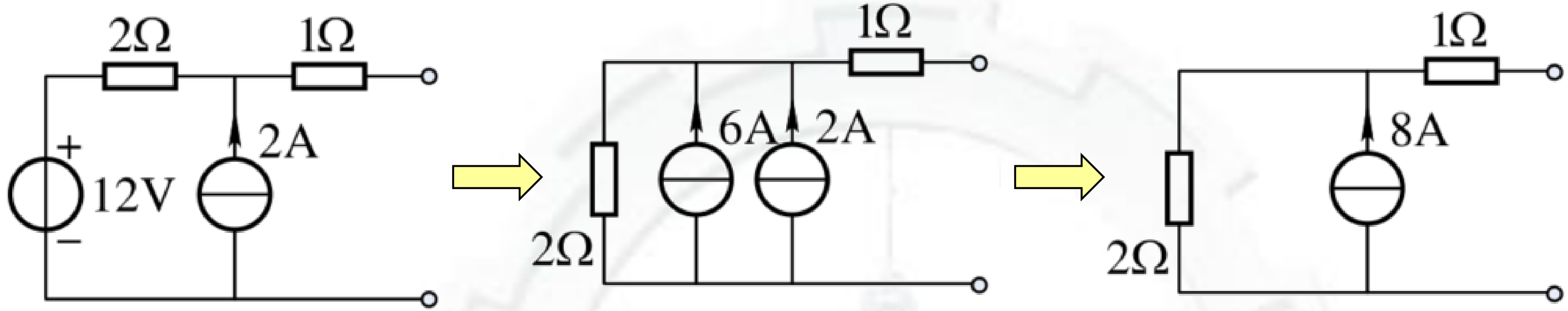


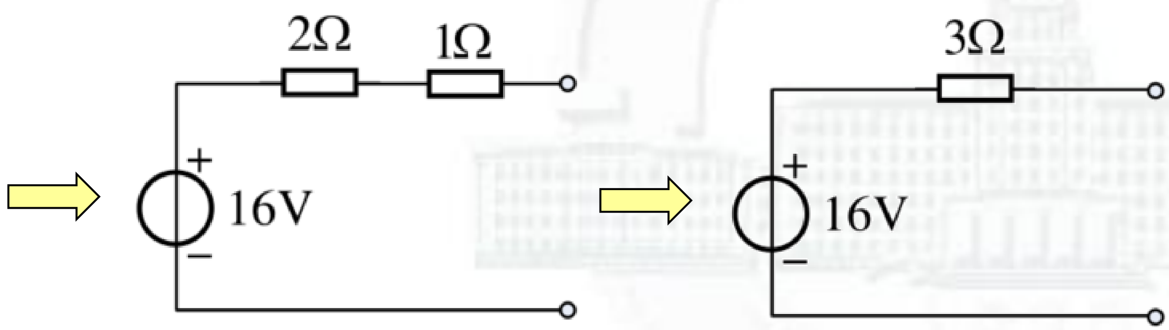
(b)

【解】(1)求线性部分等效电路

$$\begin{cases} U_{\mathrm{OC}} = 16\mathrm{V} \\ R_{\mathrm{i}} = 3\Omega \end{cases}$$

12.4 分段线性近似法





即：$\begin{cases} U_{OC} = 16\text{V} \\ R_i = 3\Omega \end{cases}$

(2)求每一段的直线方程

Oa段 $U = 3\Omega \times I \quad (0 \le 1 \le 2)$

ab段 $U = 1\Omega \times I + 4V \quad (1 > 2)$

12.4 分段线性近似法

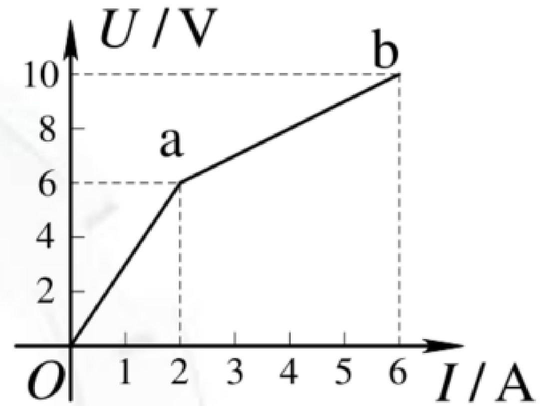
(3)求每一段的解答

Oa段 $3\Omega \times 1 + U = 3\Omega \times 1 + 3\Omega \times 1 = 16\mathrm{V}$

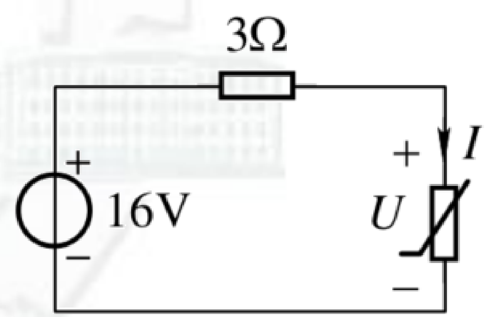
$I = 8\mathrm{A}/3 > 2\mathrm{A}$ 虚解（舍去）

ab段 $3\Omega \times I + U = 30 \times 1 + 10 \times 1 + 4V = 16\mathrm{V}$

$I = 3\mathrm{A}$ $U = 7\mathrm{V}$ 实解

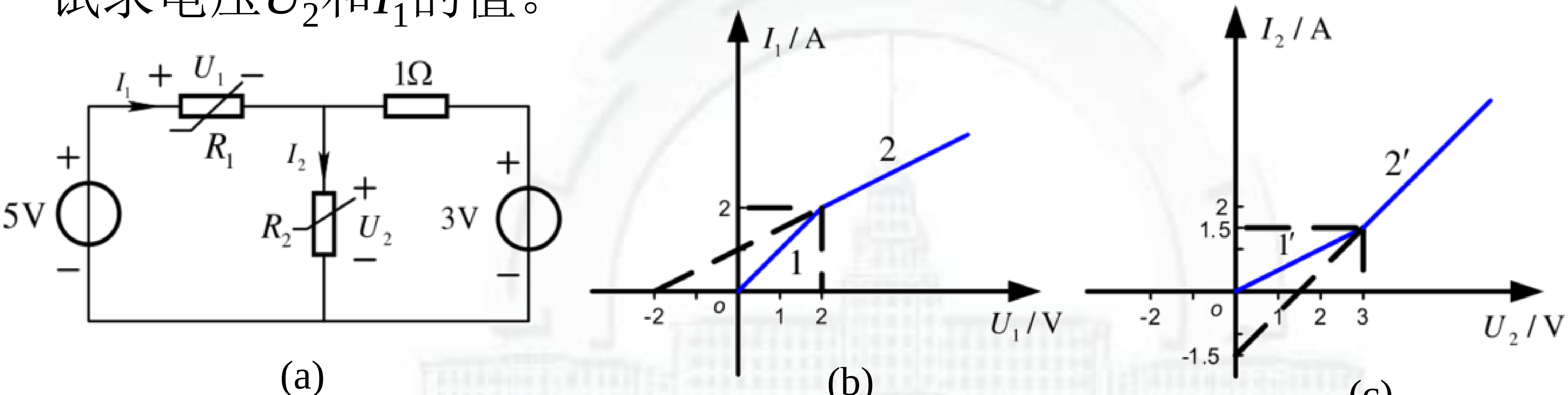


(b)



12.4 分段线性近似法

例：图示电路如图(a)所示，设非线性电阻特性如图(b)和(c)所示。试求电压U_2和I_1的值。



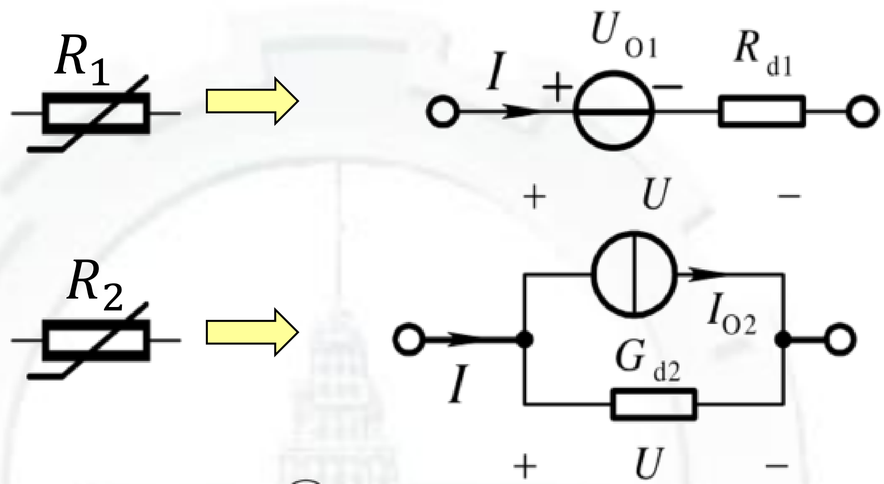
(a) (b) (c)

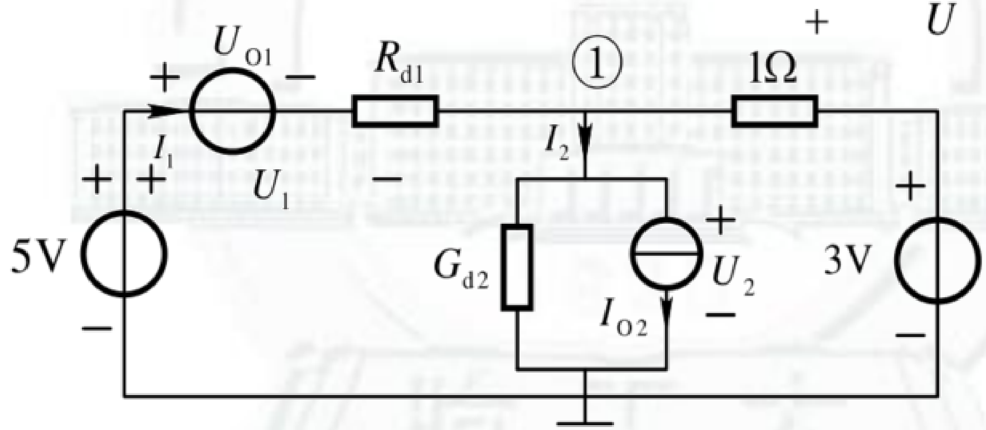
【解】(1) 先求每一段的直线方程

$$R_1:\begin{cases} 1\text{段} \quad U_1 = 1\Omega \times I_1 & (0 \le I_1 \le 2\text{A}) \\ 2\text{段} \quad U_1 = 2\Omega \times I_1 - 2\text{V} & (I_1 > 2\text{A}) \end{cases}$$

$$R_2:\begin{cases} 1'\text{段} \quad I_2 = 0.5\text{S} \times U_2 & (0 \le U_2 \le 3) \\ 2'\text{段} \quad I_2 = 1\text{S} \times U_2 - 1.5\text{A} & (U_2>3) \end{cases}$$

(2) 线性电路模型





(3) 列写节点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_{d1}}+\frac{1}{1\Omega}+G_{d2}\right)U_2=\frac{5\text{V}-U_{O1}}{R_{d1}}-I_{O2}+\frac{3\text{V}}{1\Omega}$$

12.4 分段线性近似法

$$U_2=\frac{\dfrac{5\text{V}-U_{\text{O1}}}{R_{\text{d1}}}-I_{\text{O2}}+3\text{A}}{\dfrac{1}{R_{\text{d1}}}+G_{\text{d2}}+1\text{S}}$$

$$I_1=\frac{5\text{V}-U_{\text{O1}}-U_2}{R_{\text{d1}}}$$

$$R_1:\begin{cases}1\text{段} & U_1=1\Omega\times I_1 & (0\le I_1\le 2\text{A})\\ 2\text{段} & U_1=2\Omega\times I_1-2\text{V} & (I_1>2\text{A})\end{cases}$$

$$R_2:\begin{cases}1'\text{段} & I_2=0.5\text{S}\times U_2 & (0\le U_2\le 3)\\ 2'\text{段} & I_2=1\text{S}\times U_2-1.5\text{A} & (U_2>3)\end{cases}$$

1，1'组合　$R_{\text{d1}}=1\Omega$　$U_{\text{O1}}=0$　$G_{\text{d2}}=0.5\text{S}$　$I_{\text{O2}}=0$

代入到上式得　$\Rightarrow U_2=3.2\text{V}$　超出1'范围，虚解

1，2'组合　$R_{\text{d1}}=1\Omega$　$U_{\text{O1}}=0$　$G_{\text{d2}}=1\text{S}$　$I_{\text{O2}}=-1.5\text{A}$

代入到上式得　$\Rightarrow U_2=3.1667\text{V}$　$I_1=1.8333\text{A}$　是真实解

12.4 分段线性近似法

$$U_2 = \frac{\dfrac{5\text{V} - U_{\text{O1}}}{R_{\text{d1}}} - I_{\text{O2}} + 3\text{A}}{\dfrac{1}{R_{\text{d1}}} + G_{\text{d2}} + 1\text{S}}$$

$$I_1 = \frac{5\text{V} - U_{\text{O1}} - U_2}{R_{\text{d1}}}$$

$$R_1: \begin{cases} 1\text{段} & U_1 = 1\Omega \times I_1 & (0 \le I_1 \le 2\text{A}) \\ 2\text{段} & U_1 = 2\Omega \times I_1 - 2\text{V} & (I_1 > 2\text{A}) \end{cases}$$

$$R_2: \begin{cases} 1'\text{段} & I_2 = 0.5\text{S} \times U_2 & (0 \le U_2 \le 3) \\ 2'\text{段} & I_2 = 1\text{S} \times U_2 - 1.5\text{A} & (U_2 > 3) \end{cases}$$

2，1'组合 $R_{\text{d1}} = 2\Omega$ $U_{\text{O1}} = -2\text{V}$ $G_{\text{d2}} = 0.5\text{S}$ $I_{\text{O2}} = 0$

代入到上式得 $\Rightarrow U_2 = 3.25\text{V}$ 超出1'范围，虚解

2，2'组合 $R_{\text{d1}} = 2\Omega$ $U_{\text{O1}} = -2\text{V}$ $G_{\text{d2}} = 1\text{S}$ $I_{\text{O2}} = -1.5\text{A}$

代入到上式得 $\Rightarrow U_2 = 3.2\text{V}$ $I_1 = 1.9\text{A}$ 超出2范围，虚解

第十二章 非线性电阻电路

12.5 图解法

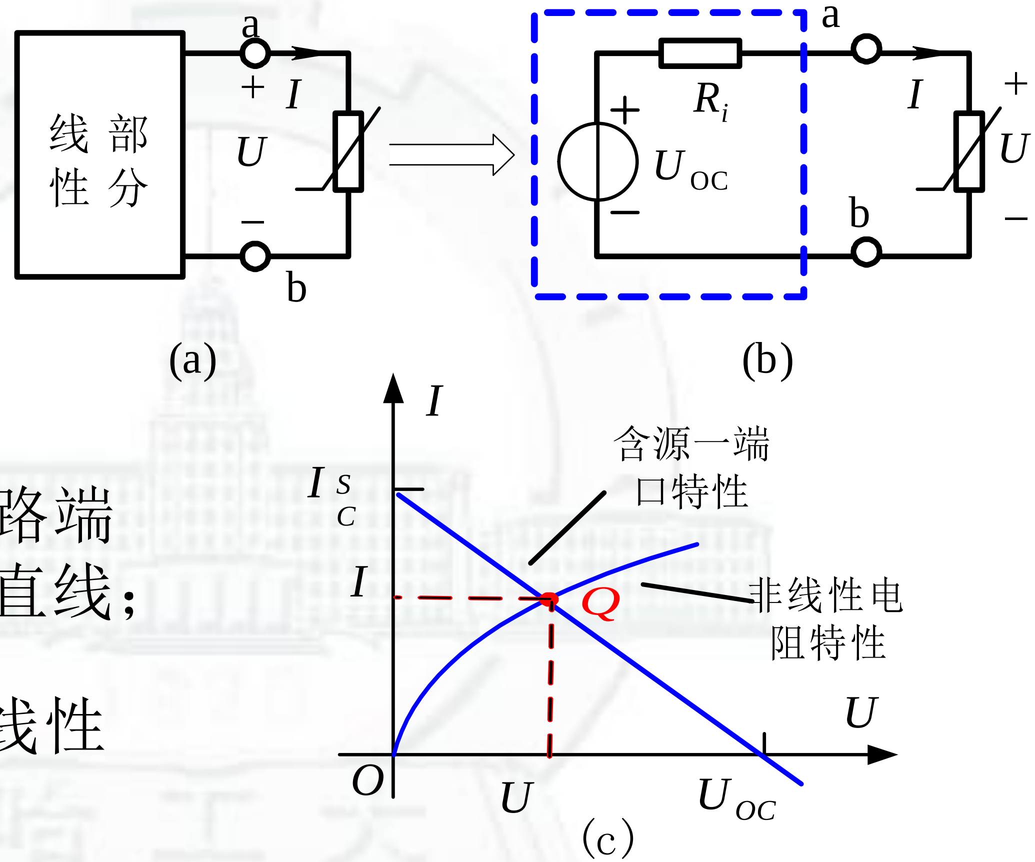
➢ 图解法的基本原理和步骤

1.对于只含有一个非线性电阻的电路，首先对电路中的线性部分进行戴维南等效；

2.在坐标平面上画出等效电路端口上的特性曲线，它是一条直线；

3.在同一坐标平面上画出非线性电阻的特性曲线；

4.两条线的交点便是电路解答。



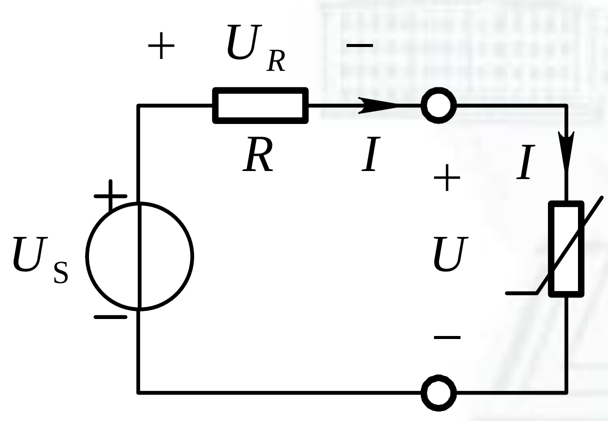
电路的图解法原理

12.5 图解法

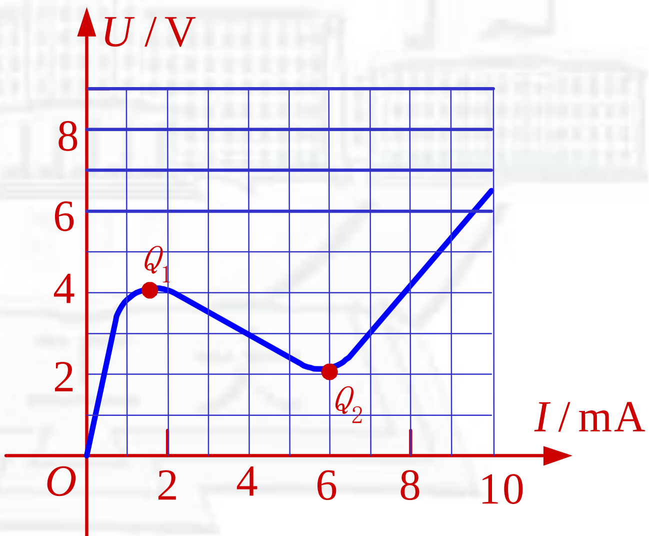
例：图(a)为分析张弛振荡器工作点的电路。设图中电压源U_S＝9V，非线性电阻为氖管，其特性曲线如图(b)。

(1)要求将电路的工作点设计在Q_1和Q_2之间(即负斜率段)，问电阻 R 的取值范围怎样?

(2)若电阻R=1.5kΩ，求非线性电阻电压 U 和电流 I。



(a)

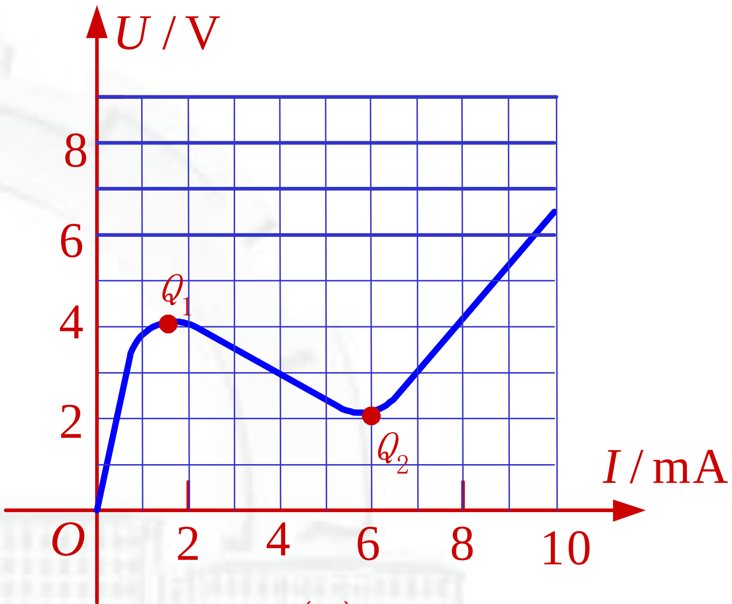


(b)

【解】

(1)由图(b)可见，Q_1点电流I_1=1.5mA，电压U_1=4V 当工作点位于Q_1时，电阻R须满足：

$$R=\frac{U_R}{I_1}=\frac{U_S-U_1}{I_1}=\frac{(9-4)\mathrm{V}}{1.5\times10^{-3}\mathrm{A}}\approx3.333\mathrm{k\Omega}$$



(b)

Q_2 点电流 I_2=6mA，电压 U_2=2V。当工作点位于Q_2时，电阻R须满足：

$$R=\frac{U_R}{I_2}=\frac{U_S-U_2}{I_2}=\frac{(9-2)\mathrm{V}}{6\times10^{-3}\mathrm{A}}\approx1.167\mathrm{k\Omega}$$

R 的取值在以上两个电阻之间时则满足要求(1)。

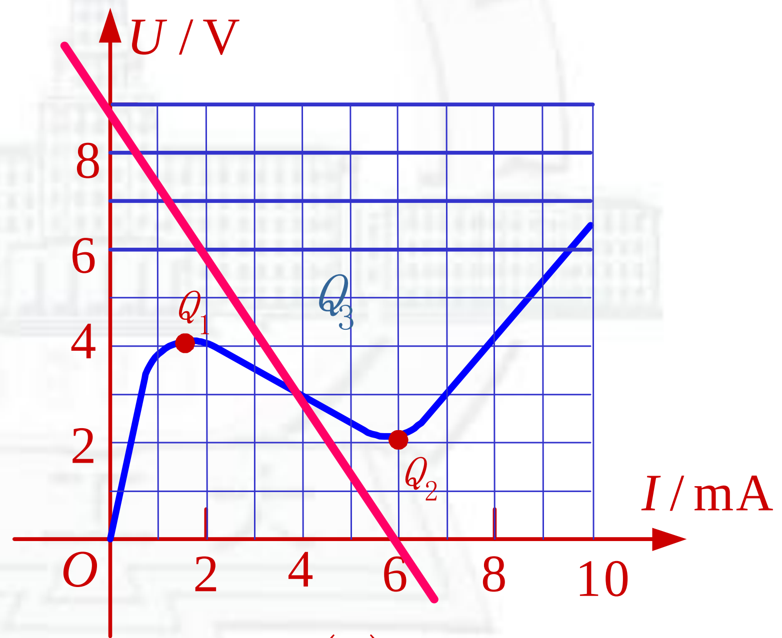
(2) 当R＝1.5kΩ时，线性部分的特性方程为

$$U = U_S - RI = 9\text{V} - 1.5\text{k}\Omega \times I$$

作出它在平面上的特性曲线并求出交点，在图中读出交点值。

$U = 3\text{V}$

$I = 4\text{mA}$



(b)

12.1 非线性电阻元件特性

12.2 非线性直流电路方程

12.3 数值分析法

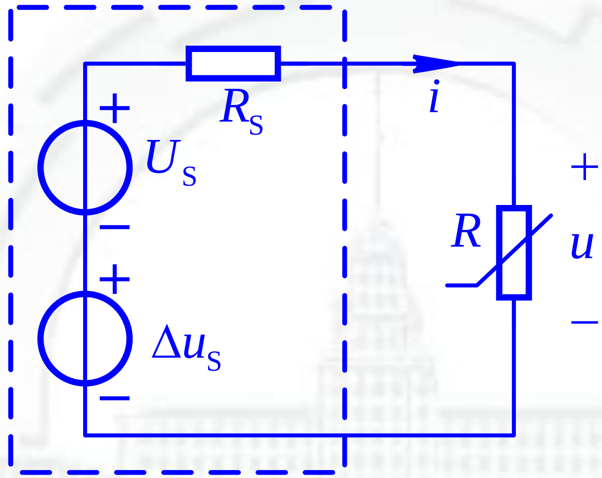
12.4 分段线性近似法

12.5 图解法

12.6 小信号分析法

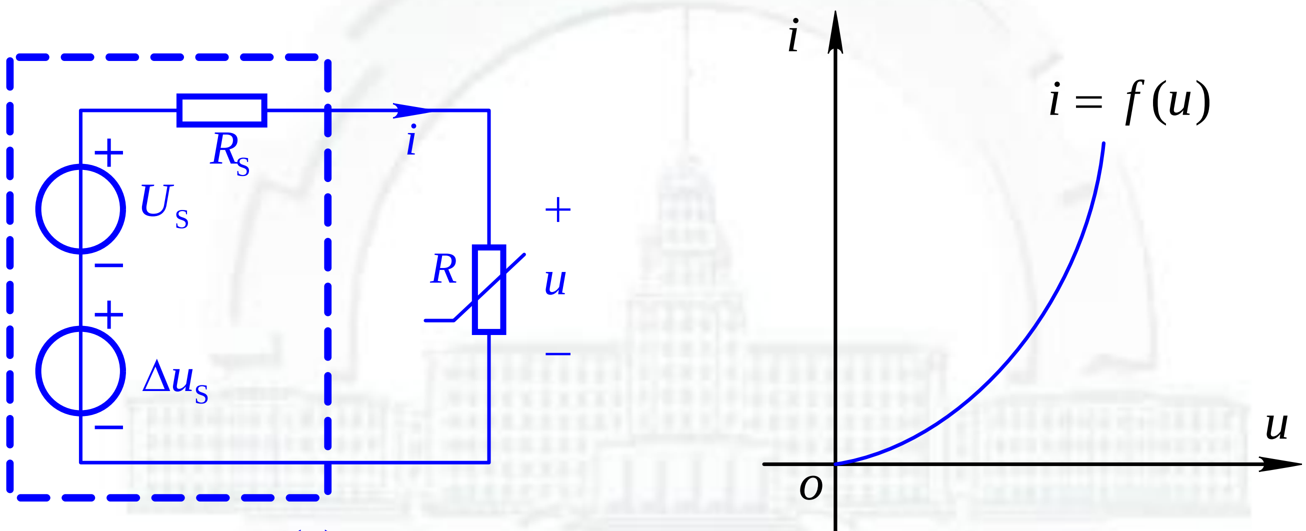
12.6 小信号分析法

研究对象：激励既有直流电源又有时变电源（小信号）。



基本思想：(1)在静态（直流）工作情况下进行线性化，
得到相应的线性化电路模型和线性方程;
(2)分析对应线性化电路模型在小信号激励情况下的解答;
(3)叠加得到等效的完全解。

➢ 小信号分析法原理



(a)　　(b)

列写图 **(a)**所示电路**KVL**方程(为线性部分的端口方程)

$$u = U_S + \Delta u_S - R_S i$$

➢ 小信号分析法原理

当$\Delta u_S = 0$时,电路中只有直流电源作用，上式则简化为

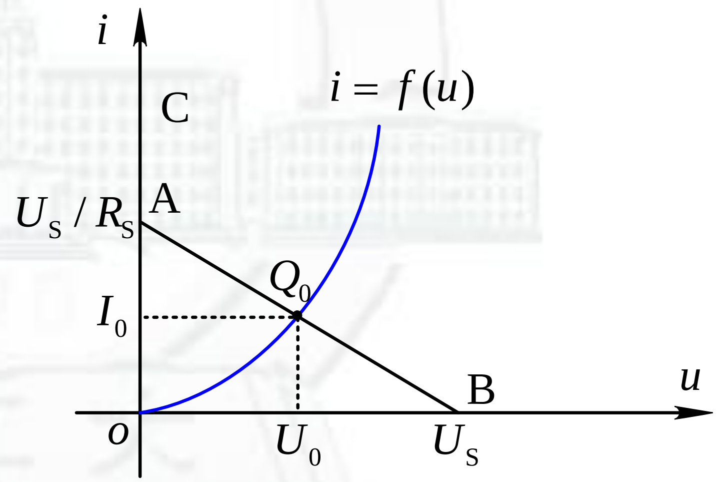
$$u = U_S - R_S i$$

此时的解为负载线AB和特性曲线 $i = f(u)$ 的交点 Q_0

称为静态工作点，满足

$$U_0 = U_S - R_S I_0$$

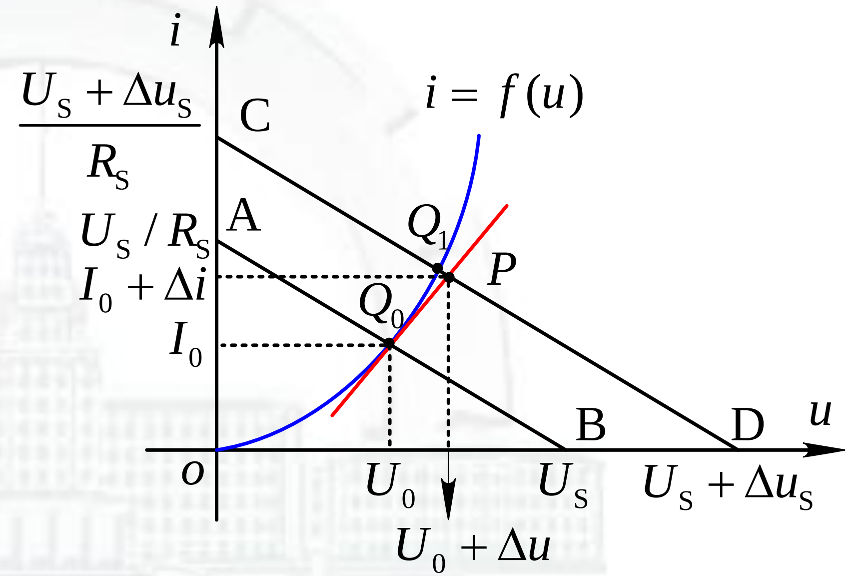
$$I_0 = f(U_0)$$



当$\Delta u_S \neq 0$ 时，非线性电阻的电压和电流在工作点附近变动，即沿着其特性曲线在 Q_0 附近变动，形成小信号工作状态。

➢ 小信号分析法原理

当 Δu_S 较小时，非线性电阻的电压和电流在工作点附近变动也较小。此时，其在静态工作点附近的伏安特性可用静态工作点处曲线的切线来近似。

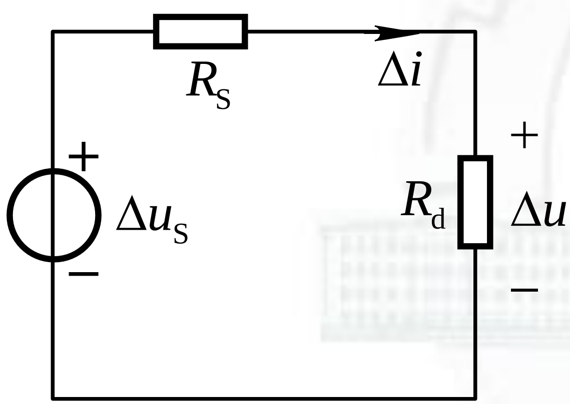


称其斜率为**动态电导**，它的倒数称为动态电阻，表示为

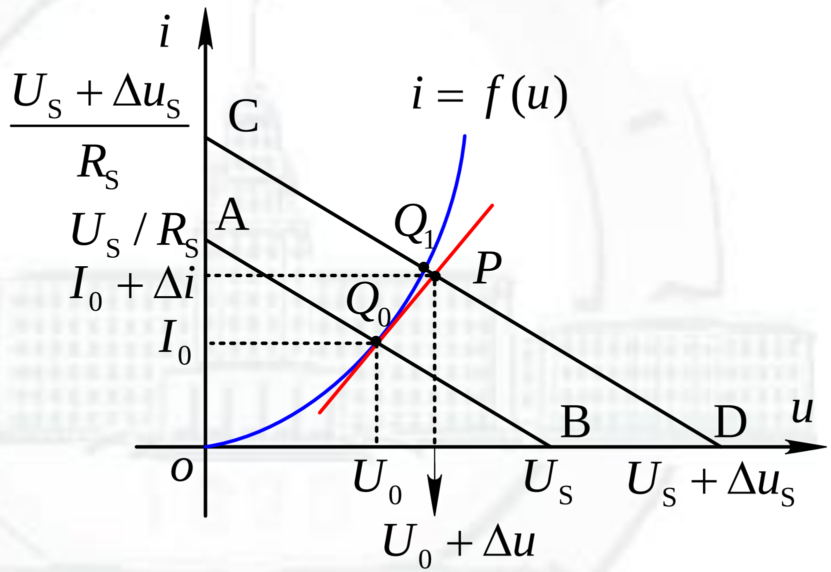
$$f'(U_0)=\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}\right|_{u=U_0}=G_\mathrm{d}=\frac{1}{R_\mathrm{d}}$$

➢ 小信号分析法原理

由此可得非线性电阻在静态工作点处的小信号等效电路，如图(c)所示。



(c)



(b)

$$\Delta u=\Delta u_S-R_S\Delta i=R_d\Delta i$$

$$f'(U_0)=\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}\right|_{u=U_0}=G_d=\frac{1}{R_d}$$

12.6 小信号分析法

➢ 小信号分析法的步骤：

(1)求解非线性电路的静态工作点；

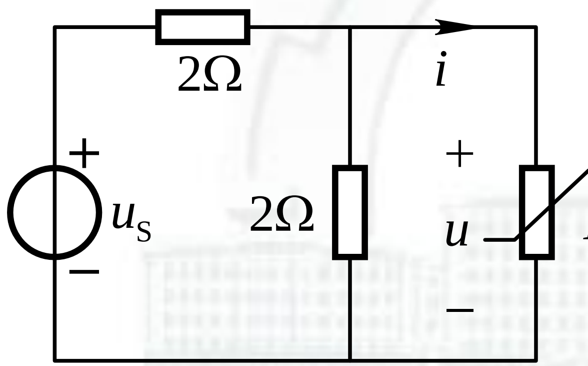
(2)求静态工作点处的动态电阻或动态电导；

(3)作出非线性电路在静态工作点处的小信号等效电路，求解由时变电源产生的时变响应；

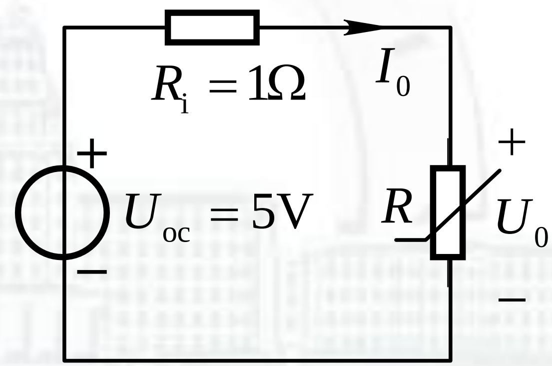
(4)将待求量的静态响应和时变响应相叠加，得到非线性电路在直流电源和小信号时变电源共同作用下的总响应。

12.6 小信号分析法

例：非线性电阻电路如图，已知 $u_S = [10 + 3\times10^{-2}\cos(\omega t + 30°)]\mathrm{V}$，非线性电阻为电压控制型，其伏安特性曲线为 $i = 0.5u^2 - 2u + 1\,(u \ge 0$, 单位：A, V)，用小信号分析法求电压和电流。



(a)



(b)

【解】

（1）求解静态工作点

$$U_{oc} = 5\mathrm{V},\quad R_i = 1\Omega \quad \Rightarrow U_{oc} = R_i I_0 + U_0 \quad U_0 = 4\mathrm{V},\ U_0 = -2\mathrm{V}(\text{舍})$$

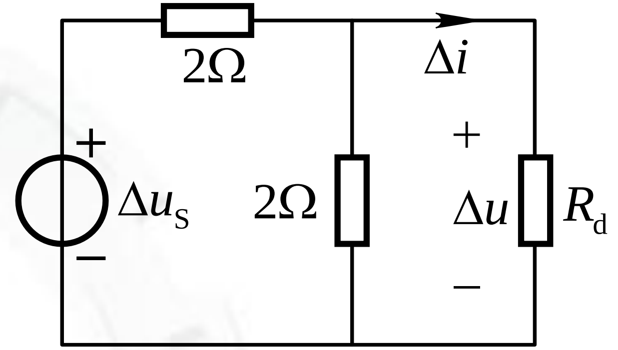
$$5\mathrm{V} = 1\Omega\times I_0 + U_0 \Rightarrow 5 = 0.5U_0^2 - U_0 + 1 \quad U_0 = 4\mathrm{V},\quad I_0 = 1\mathrm{A}$$

（2）求解非线性电路的动态电导

静态工作点处的动态电导为

$$G_d = \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}\right|_{u=U_0} = u-2\big|_{u=U_0} = 2\mathrm{S}$$

动态电阻为 $R_d = 1/G_d = 0.5\Omega$



(c)

（3）画出小信号等效模型如图（c)示。

$$\Delta u = \frac{(0.5\Omega \,\|\, 2\Omega)}{2\Omega + (0.5\Omega \,\|\, 2\Omega)}\Delta u_S = \frac{1}{6}\times 3\times 10^{-2}\cos(\omega t + 30^\circ) = 5\times 10^{-3}\cos(\omega t + 30^\circ)\mathrm{V}$$

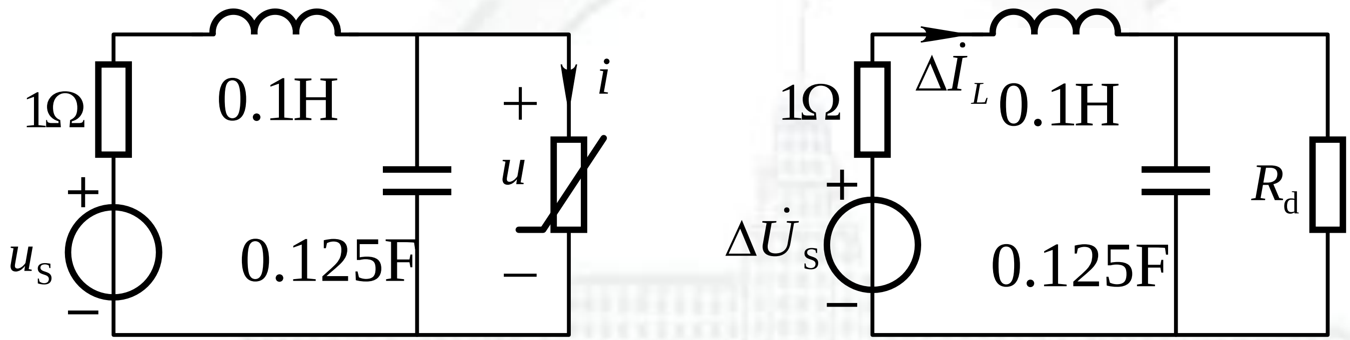
$$\Delta i = \frac{\Delta u}{R_d} = 1\times 10^{-2}\cos(\omega t + 30^\circ)\mathrm{V}$$

（4）将所得的静态工作点和小信号分析的结果相加得

$$\begin{cases} u \approx U_0 + \Delta u = [4 + 5\times 10^{-3}\cos(\omega t + 30^\circ)]\mathrm{V} \\ i \approx I_0 + \Delta i = [1 + 1\times 10^{-2}\cos(\omega t + 30^\circ)]\mathrm{A} \end{cases}$$

12.6 小信号分析法

例：图示电路中，非线性电阻伏安特性为 $u=i^2$（单位：V，A）（$i\geq 0$），电压源 $u_S=[2+0.1\sqrt{2}\cos(4t)]\text{V}$，用小信号分析法求电流 i_L。



(a) (b)

【解】(1) 求解静态工作点，直流源作用时，***L***短路，***C***开路

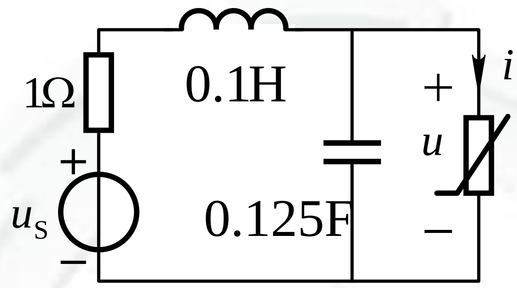
列KVL方程 $1\times I_0+I_0^2=2$

解得 $I_0=1\text{A}$ $I_0=-2\text{A}$（舍去）

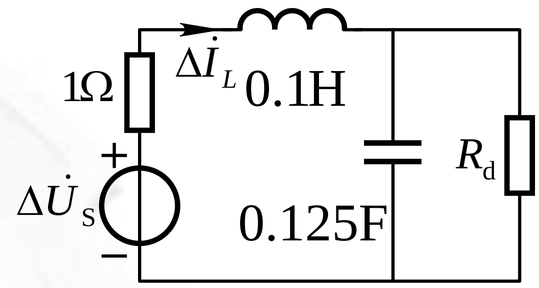
则 $I_{L0}=I_0=1\text{A}$

（2）求动态电导

$$R_d = \left.\frac{du}{di}\right|_{i=I_0} = 2I_0 = 2\Omega$$



(a)



(b)

（3）画出小信号等效模型如图（b)示

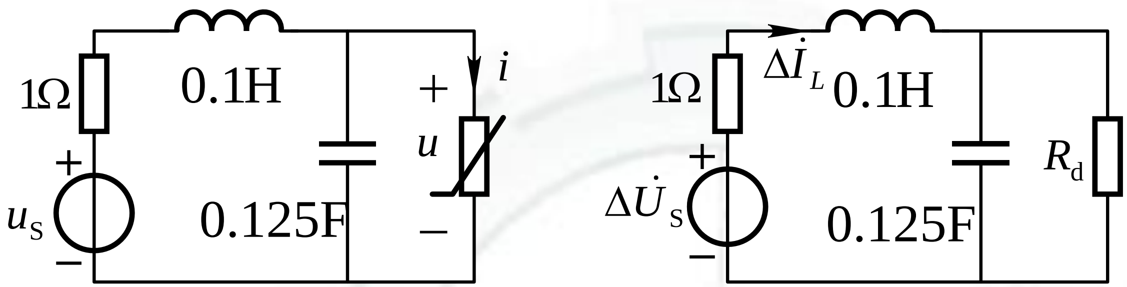
从小信号电源端看总等效阻抗为

$$Z = 1 + j\omega L + \frac{R_d \times (1/j\omega C)}{R_d + 1/(j\omega C)} = 1 + j0.4 + \frac{2\times(-j2)}{2-j2} = (2-j0.6)\Omega$$

从而

$$\Delta\dot{I}_L = \frac{\Delta\dot{U}_S}{Z} = \frac{0.1\angle 0°}{2-j0.6} = 4.79\times 10^{-2}\angle 16.7°\text{A}$$

12.6 小信号分析法



(a) (b)

（4）将所得的静态工作点和小信号分析的结果相加得

$$i_L = I_{L0} + \Delta i_L = [1 + 4.79\times10^{-2}\sqrt{2}\cos(4t + 16.7°)]\text{A}$$

本章小结

- 非线性电阻电路
  - 非线性电阻元件
    - 压控型
    - 流控型
    - 单调型
  - 非线性直流电路方程
    - 压控
      - 节点电压方程
    - 流控
      - 回路电流方程
    - 混合
      - 改进节点电压方程
  - 数值分析法
    - 牛顿–拉夫逊法
  - 分段线性近似法
    - 折线逼近
  - 图解法
    - UI平面找交点
  - 小信号分析法
    - 交流小信号+直流静态响应

本章完

谢谢！

fzhao@hit.edu.cn