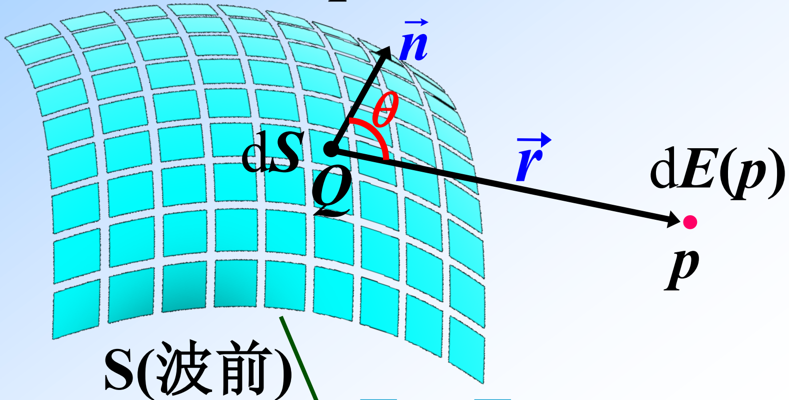
• 回顾：

●惠更斯——菲涅耳原理

波阵面上各面积元所发出的球面子波在观察点p 的相干叠加决定了p 点的合振动及光强。



$$\mathrm{d}E_{(p)} \propto \frac{A(Q)\,f(\theta)}{r}\mathrm{d}S \cdot cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

$E = E_0 cos\omega t$

设初位相为零

方向因子$f(\theta)$ $\begin{cases} \theta = 0, \quad f = f_{\max} \\ \theta \quad \Rightarrow f(\theta)\downarrow \\ \theta \geq \dfrac{\pi}{2}, f = 0 \end{cases}$

$A(Q)$取决于波前上Q点处的强度。

●单缝夫朗和费衍射

明暗纹位置

$\boxed{a\sin\theta \approx \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k = 1,2,3\ldots}$ (次级) —明纹

$\boxed{a\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k=1,2,3\cdots}$ —暗纹

半波带法

光强分布(了解) $\boxed{I_\theta = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2}$ $\boxed{\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$

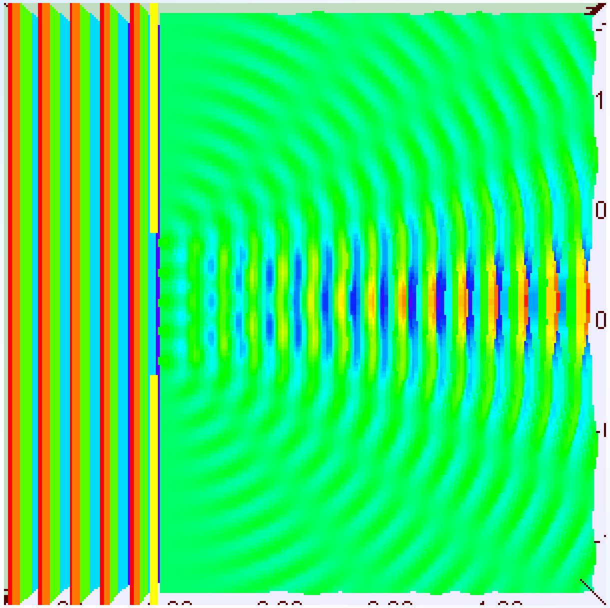
• 回顾：

主极大：$a\sin\theta=0$

衍射次极大：$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$

极小：$a\sin\theta=\pm k\lambda$

$I_{次极大} \ll I_{主极大}$



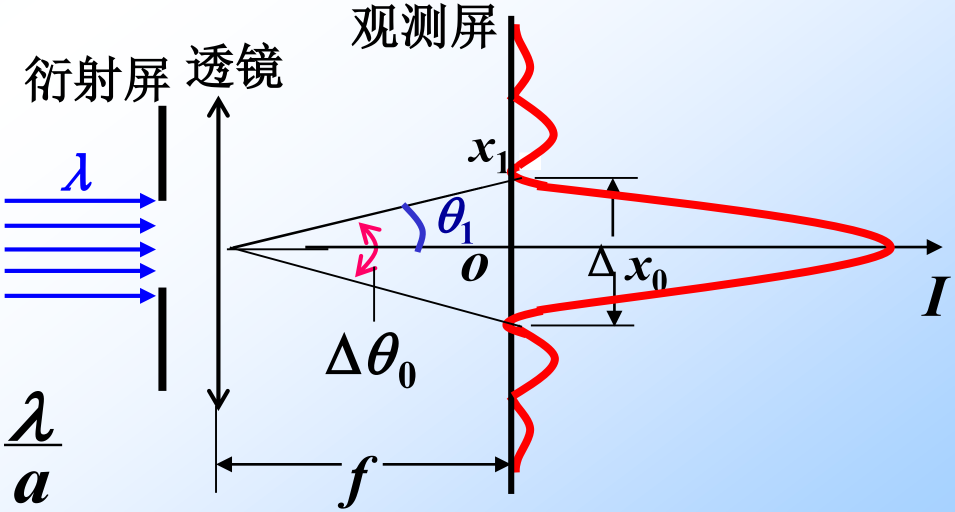
● 条纹宽度

中央明纹:

角宽度 $\Delta\theta_0=2\theta_1\approx 2\frac{\lambda}{a}$

线宽度 $\Delta x_0=2f\cdot tg\theta_1$

$$=2f\theta_1=2f\frac{\lambda}{a}\propto\frac{\lambda}{a}$$



（四）讨论

1.平行光斜入射问题（θ为大小）

单缝上下沿光线光程差为：

$$\delta = AD - BC = a(\sin\theta - \sin\alpha)$$

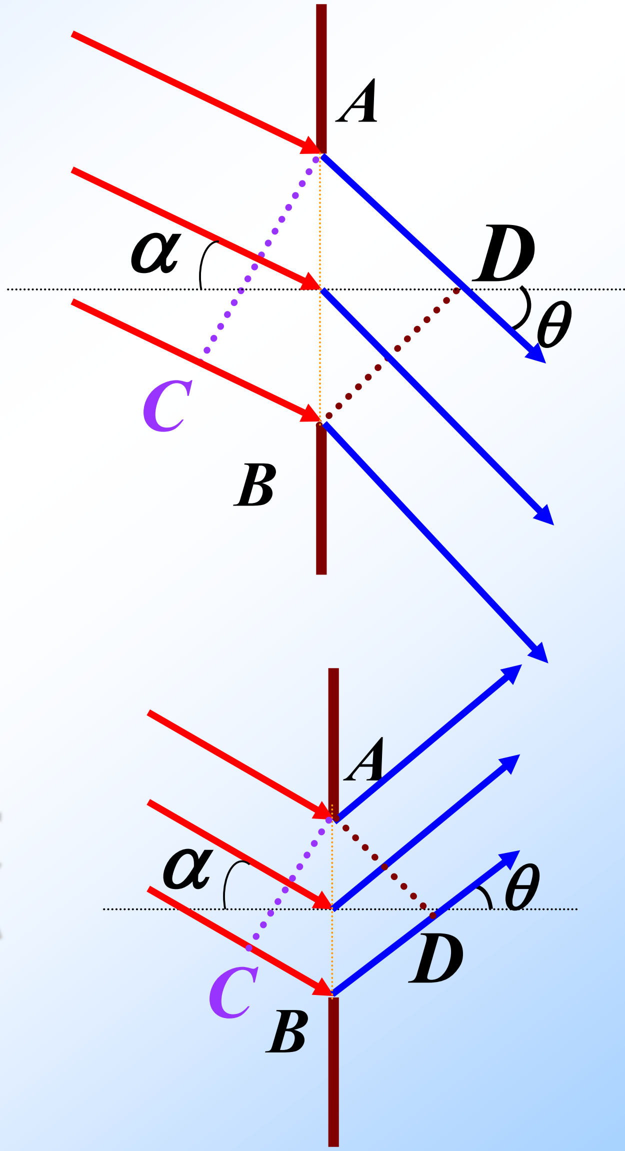
$$\delta' = a(\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$a(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹中心} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹中心} \end{cases}$$

α与θ在法线同侧时取“+”

在法线异侧时取“—”

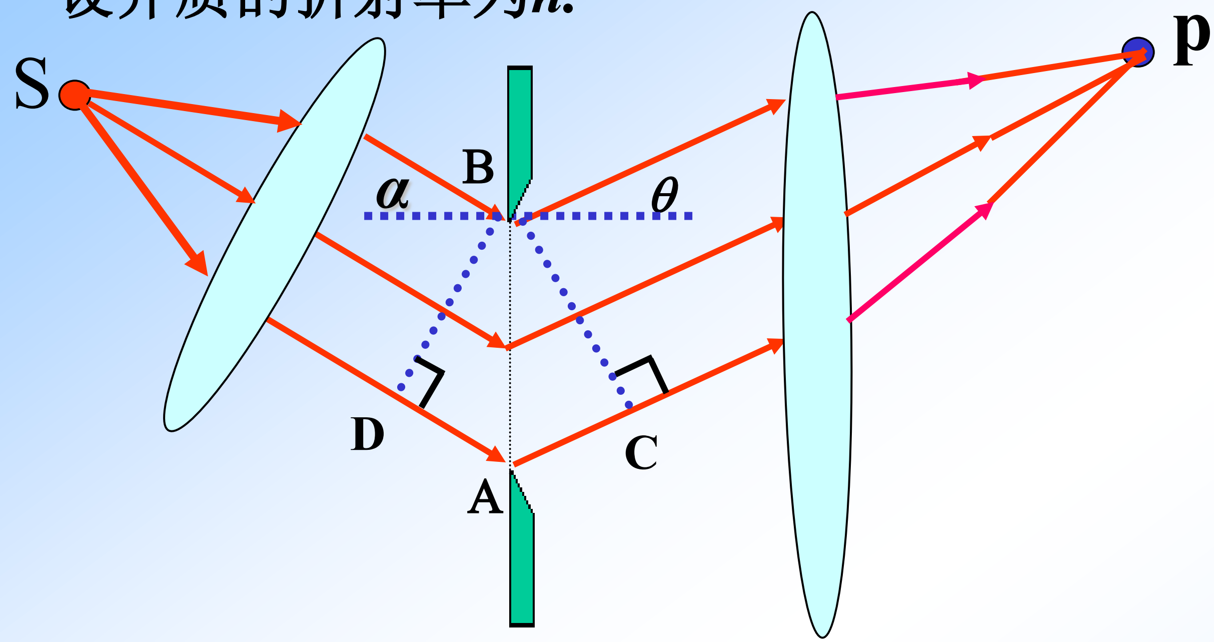
中央明纹： $\sin\theta = \sin\alpha$



条纹将向下方平移（间距不变）。

1.平行光斜入射问题（考虑到θ带正负号）

设介质的折射率为n.



α : 入射角

θ: 衍射角

缝宽AB = a

$$DA + AC = a\sin i + a\sin\theta = a(\sin i + \sin\theta)$$

$$an(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \begin{cases} k\lambda & \rightarrow \text{暗纹} \\ (2k+1)\lambda/2 & \rightarrow \text{明纹} \end{cases}$$

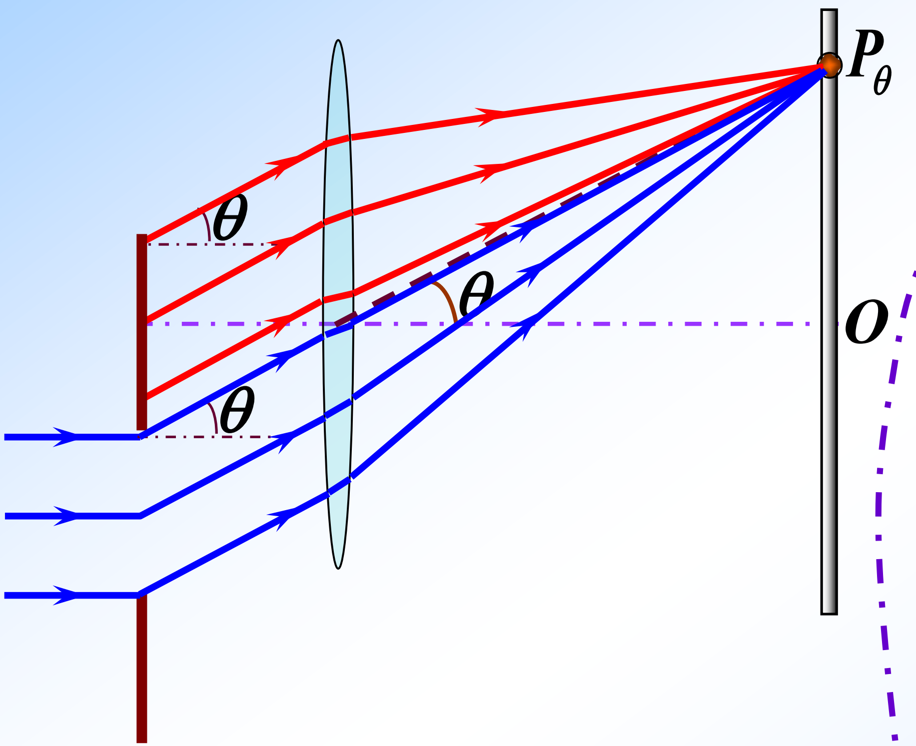
（半波带法）

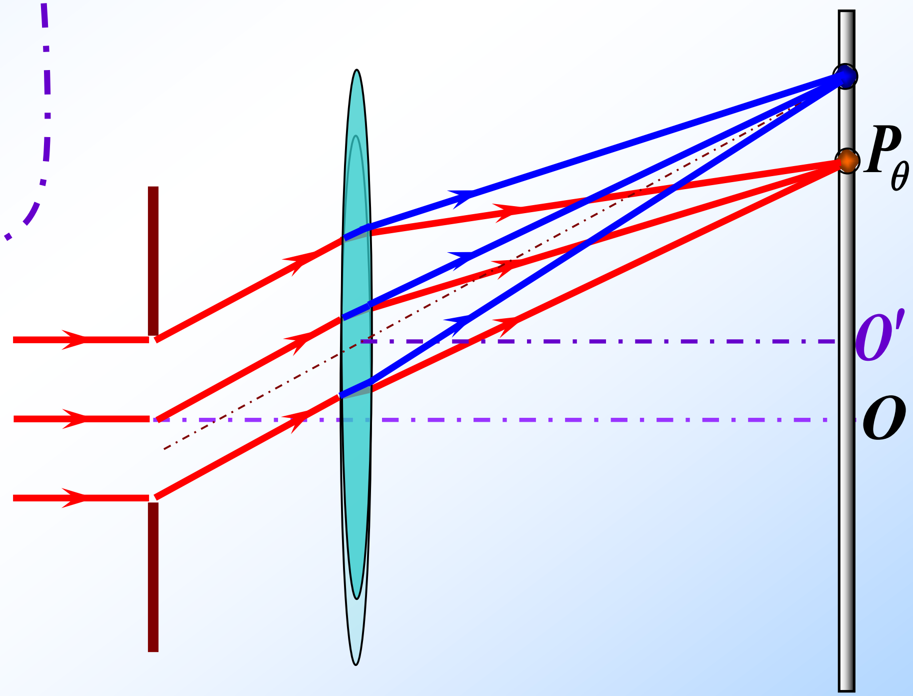
α与正的θ在法线同侧时取“＋”

在法线异侧时取“—”

2.单缝位置上下移动时，屏上条纹如何变化?

3.若将L上下平移，条纹又如何变?



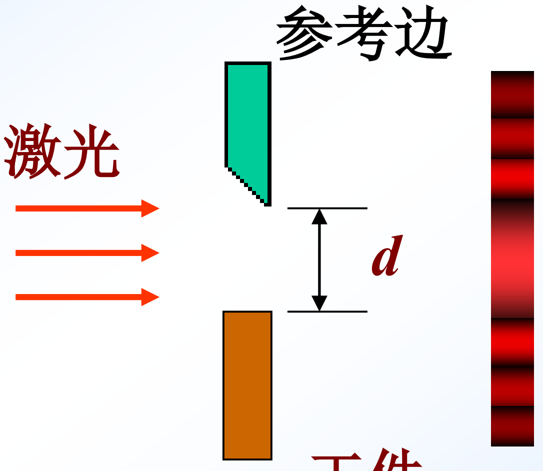


单缝衍射图样，不随缝的上下移动而变化。

沿L的移动方向作等距离的平移。

单缝衍射的应用———间隙衍射传感器

利用缝宽(间隙) 的变化可制成衍射传感器。
(非接触式)

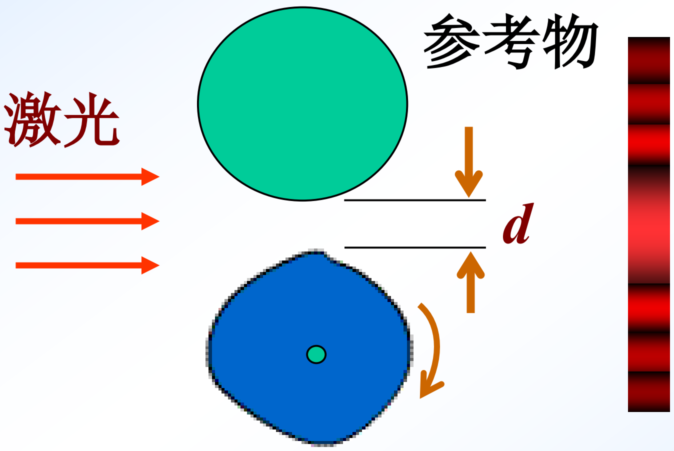


(*a*)

(*a*)进行比较测量：先用标准间隙作零位，通过间隙的变化量换算出工件尺寸的变化量。

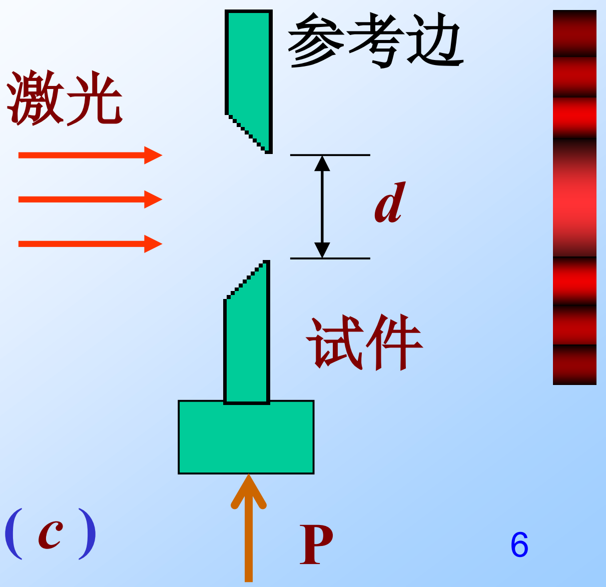
$a\sin\theta=\pm k\lambda$， $k=1,2,3\cdots$ ——暗纹

(*b*)作轮廓测量:
测工件的轮廓偏差



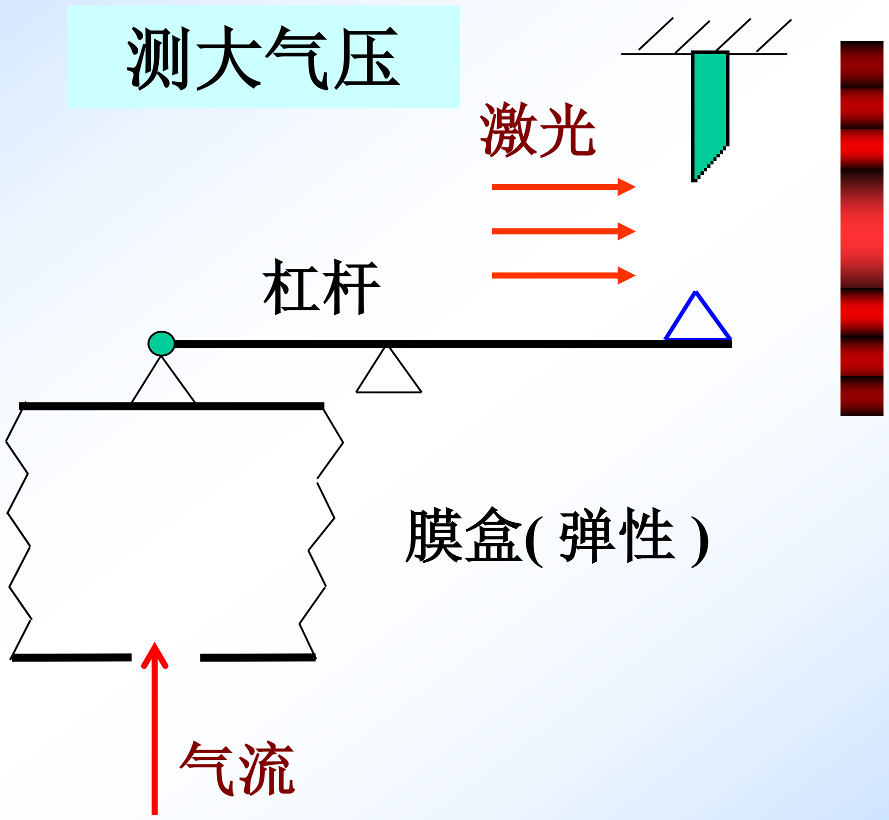
(*b*)

(*c*)作应变传感器:



(*c*)

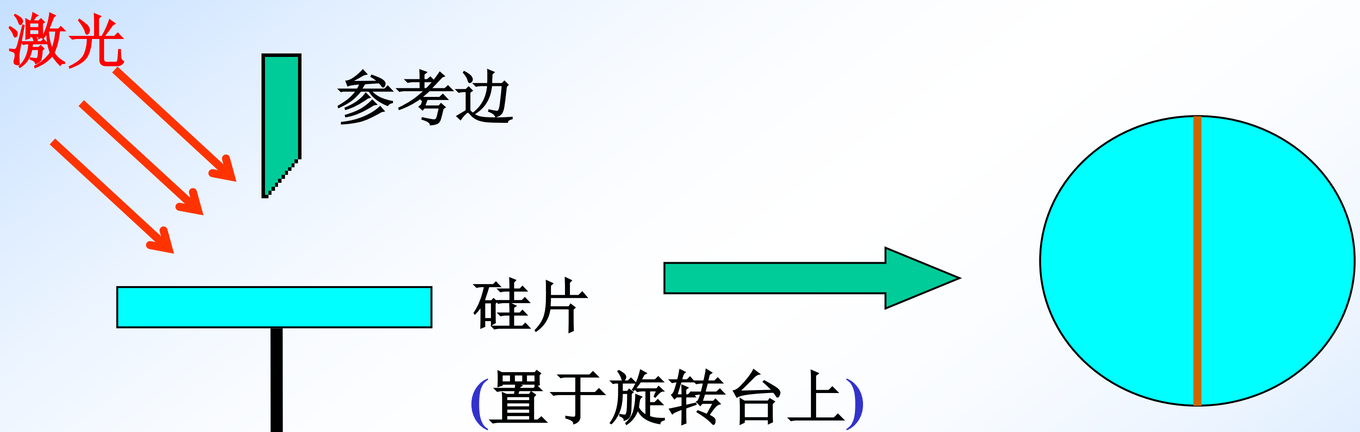
(*d*) 压力传感器

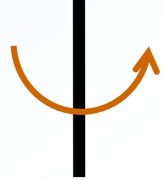


(*e*)面形测量:　比如硅片平面度的检测

(平面度测量)

可达0.5mm厚
8英寸大



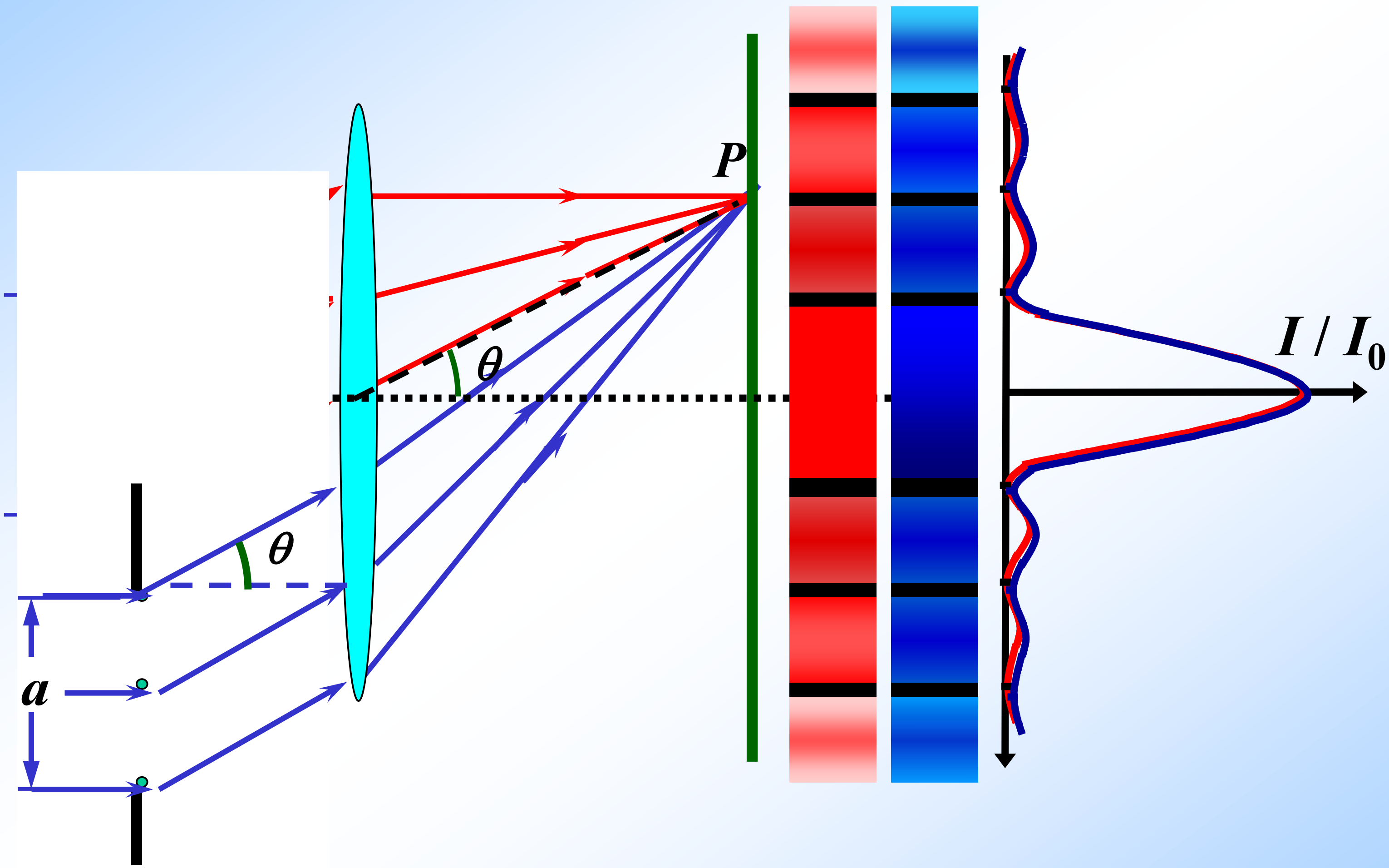


旋转一周，则通过衍射条纹的变化可测出各点的平面度。

任何待测几何量、物理量、化学量，只要能将其转化为间隙变化量，即可用衍射法进行高精度测量。

三、双缝衍射与干涉

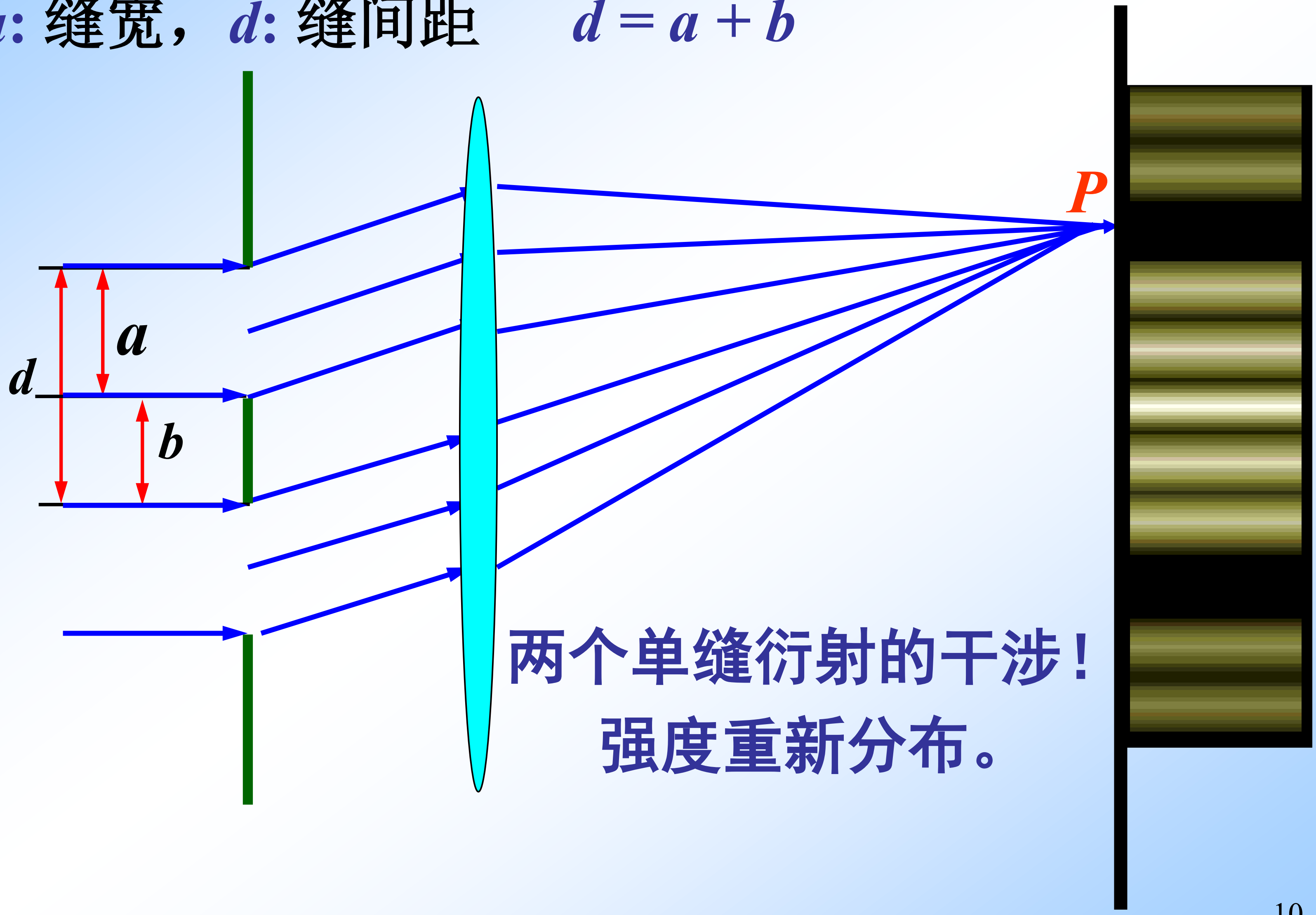
问：1) 将单缝衍射的狭缝平移，衍射条纹是否有影响？



2) 若两个单缝同时都存在，屏上的衍射花样是怎样的？

双缝衍射现象

a: 缝宽，d: 缝间距　　$d = a + b$



两个单缝衍射的干涉！
强度重新分布。

1. 双缝衍射光强公式(了解)

$$\boxed{I_\theta = 4I_1\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

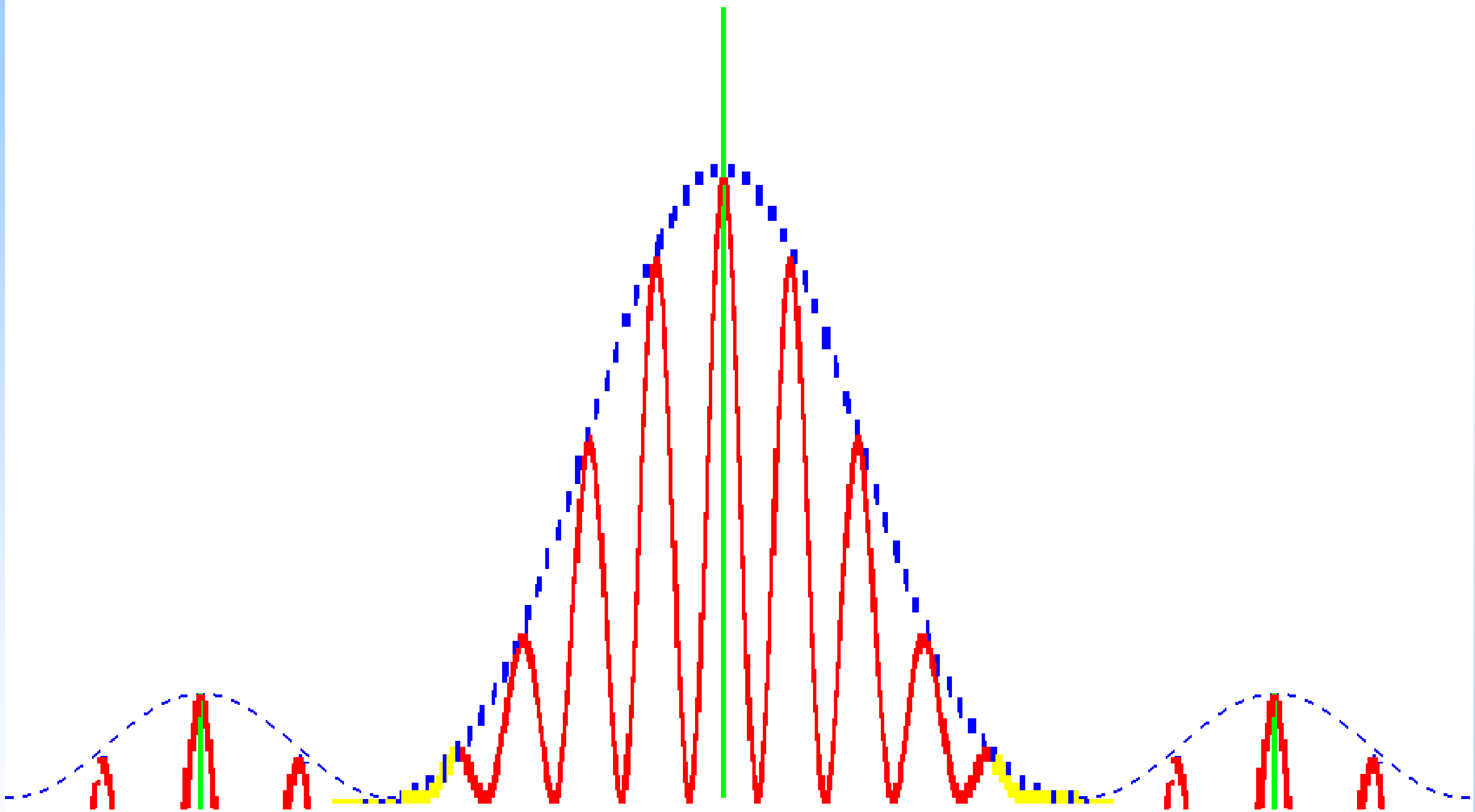
P_θ点的两个分振幅为：$E_{1\theta} = E_{10}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$， $E_{2\theta} = E_{20}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

$$I_1 \propto E_{1\theta}^2 = E_{2\theta}^2,\quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta,\quad \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

P_θ点的光强为：

$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta}\qquad \begin{cases} I_0 = 4I_{10} \propto 4E_{10}^2 \\ \alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda} \\ \beta = \dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \end{cases}$$

衍射因子 干涉因子



双缝衍射的强度分布图

2. 双缝衍射图样的特点

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

1）$\theta = 0$ 时，$\alpha = 0$，$\beta = 0$ 则：$I = I_0 = 4I_{10}$

即：透镜 L 的主光轴与屏的交点处的光强 —中央极大

2）光强极小

两因子 $\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ 与 $\cos^2\beta$ 有一个为0，则：$I=0$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm k\pi \ (k = 1,\ 2,\cdots) \Rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$\cos^2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \pm(2k'+1)\frac{\pi}{2} \ (k' = 0, 1, 2, \cdots) \ d\sin\theta' = \pm(2k'+1)\frac{\lambda}{2}$$

干涉极小

比较 θ 与 θ'：
$$\left.\begin{array}{l} k = 1 \quad \sin\theta = \dfrac{\lambda}{a} \\ k' = 0 \quad \sin\theta' = \dfrac{\lambda}{2d} \end{array}\right\} a < 2d \ \therefore \theta' < \theta$$

即：干涉因子确定极小的间距要小（与缝间距d 有关）

∴ 屏上呈现的条纹其位置是由干涉因子确定

3）在相邻两个极小之间有极大

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

其位置满足：$\cos^2\beta = 1$，$\beta = \dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi$

即：$d\sin\theta = \pm k\lambda \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\cdots)$ —干涉极大

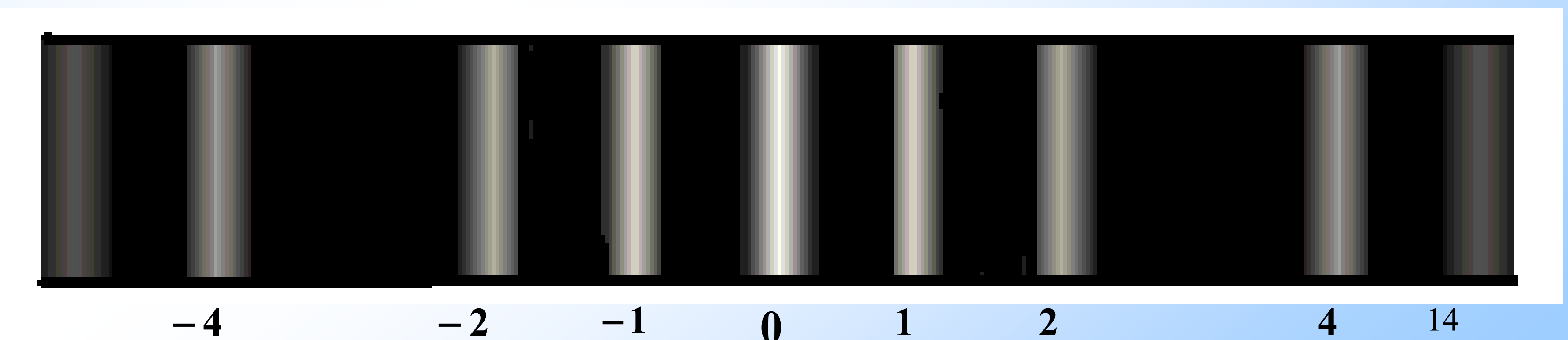
注： 若某θ角满足：　$d\sin\theta = \pm k'\lambda$ —干涉极大

又满足：　$a\sin\theta = \pm k\lambda$ —衍射极小

此 k' 级极大被调制掉—缺 级（屏上不出现）

显然：$k' = k\dfrac{d}{a}$ = 整数 —缺 级 $k = 1,\ 2,\ \cdots$

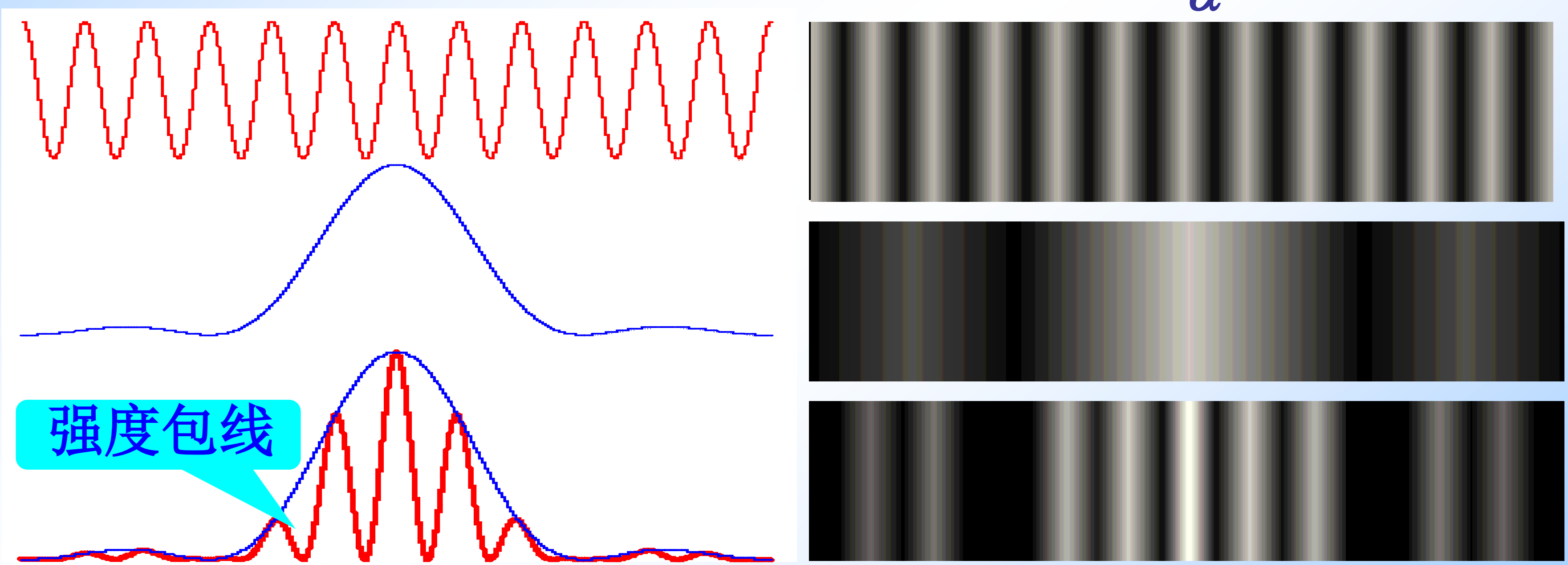
<u>缺级是双缝及多缝衍射中存在的一种普遍现象</u>



$$I = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}_{\text{衍射因子}} \underbrace{\cos^2\beta}_{\text{干涉因子}} \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \qquad \beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

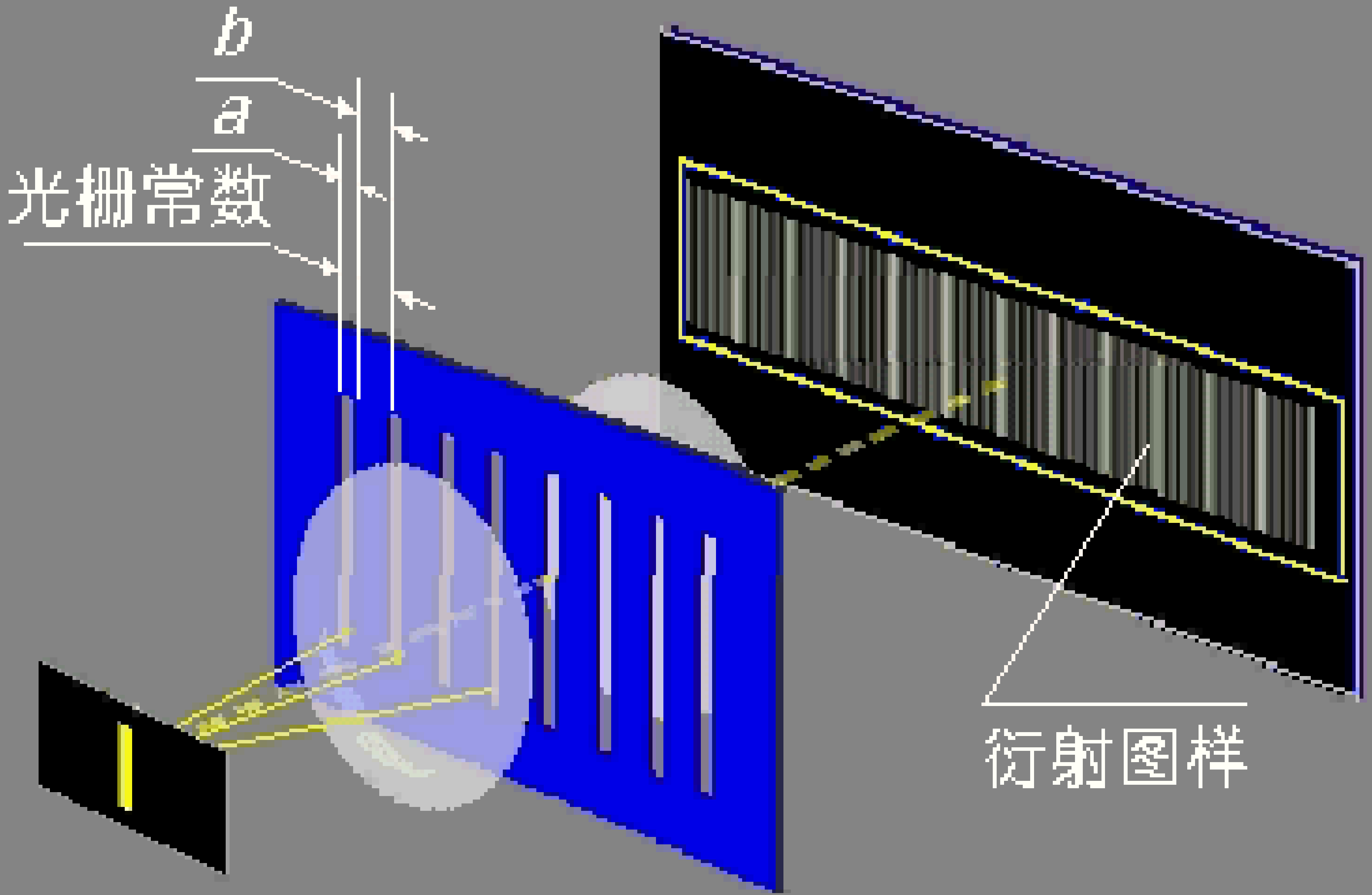
条纹位置由$\cos^2\beta$决定。

强度包线由$\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$决定。



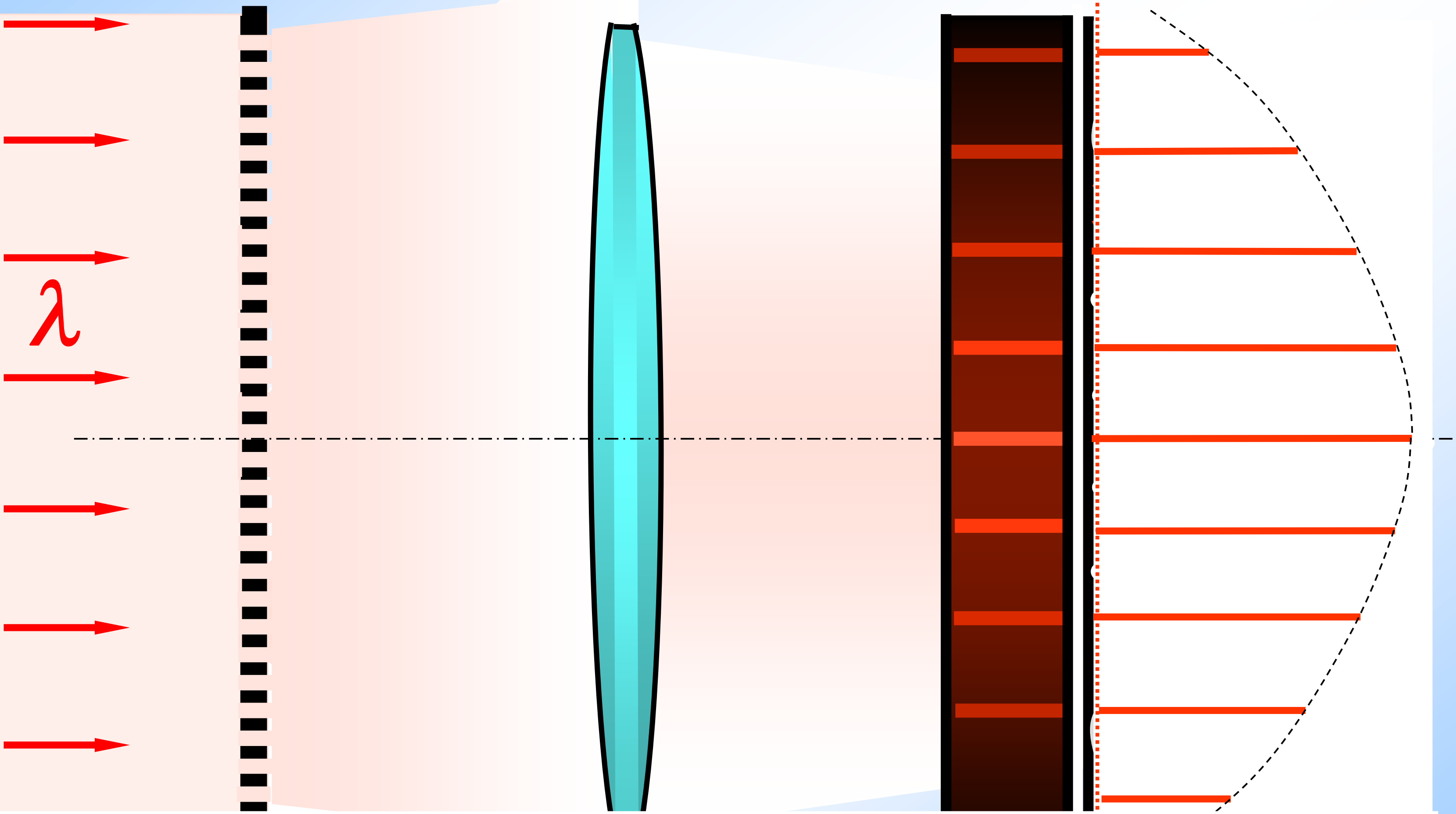
结论： 双缝衍射的强度曲线是单缝衍射强度对双缝干涉强度进行调制的结果.

演示：双缝衍射



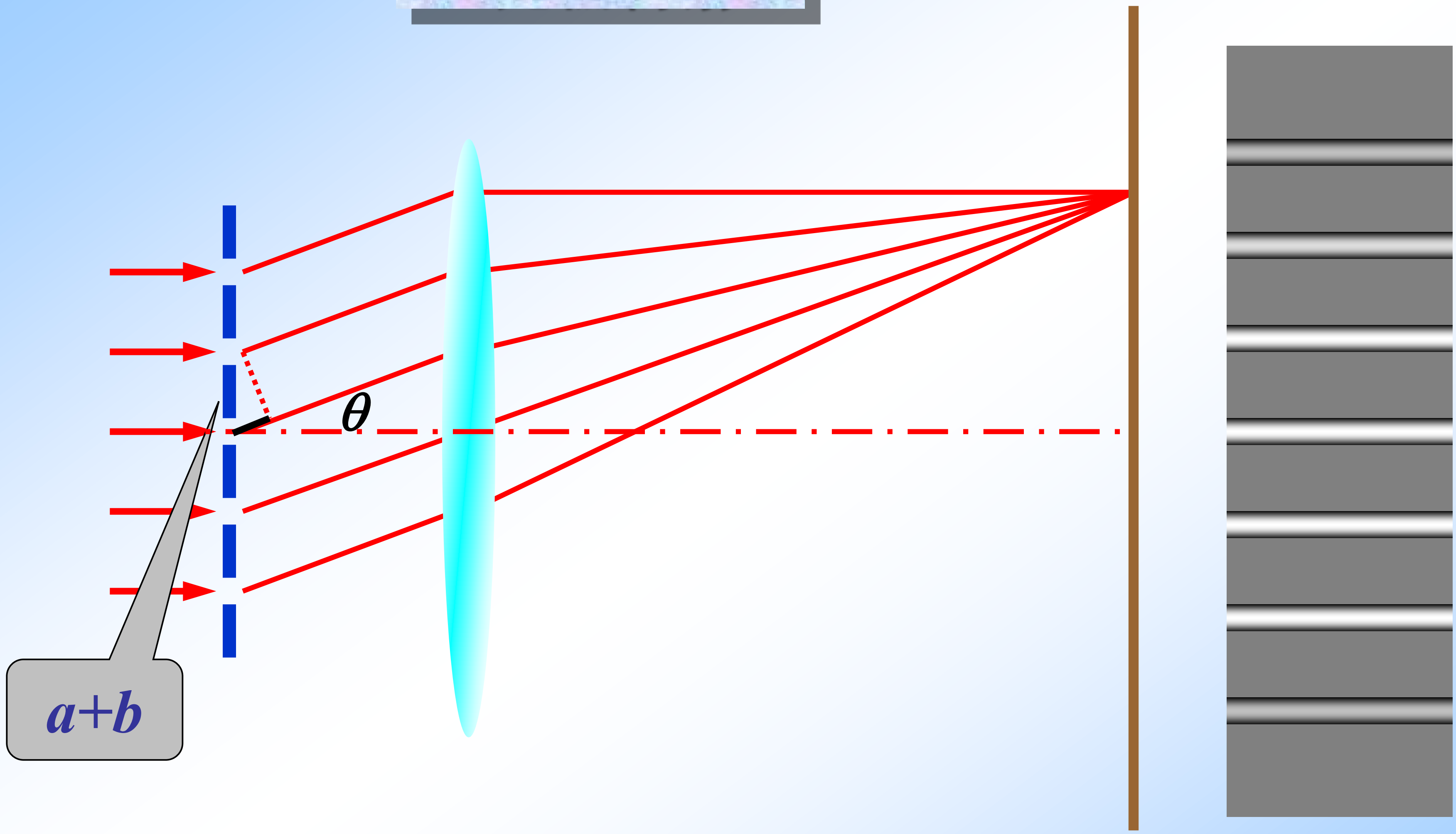
光栅衍射装置图

光栅衍射包含单缝衍射和缝间子波相互干涉两种因素



缝数很多,缝间干涉形成一系列很细的干涉明纹,
各明纹的极值受单缝衍射因素的调制.

光栅衍射



两相邻狭缝光束的光程差为： $\delta=(a+b)\sin\theta=d\sin\theta$

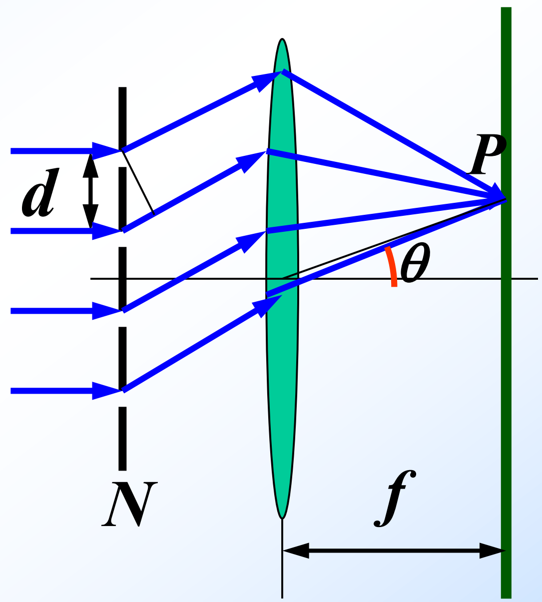
1. 光栅光强公式（了解）

用振幅矢量叠加法。

设N个等宽等间距的很小的缝，

每缝在屏上产生的振幅为 $E_{1\theta}$，

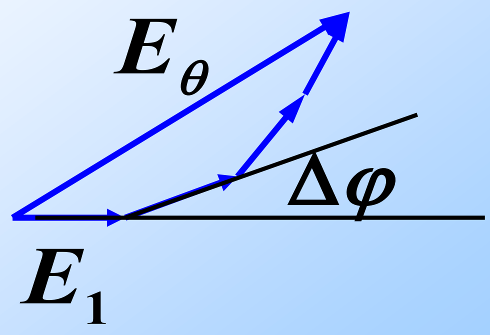
相邻缝在 P 点振动位相差为



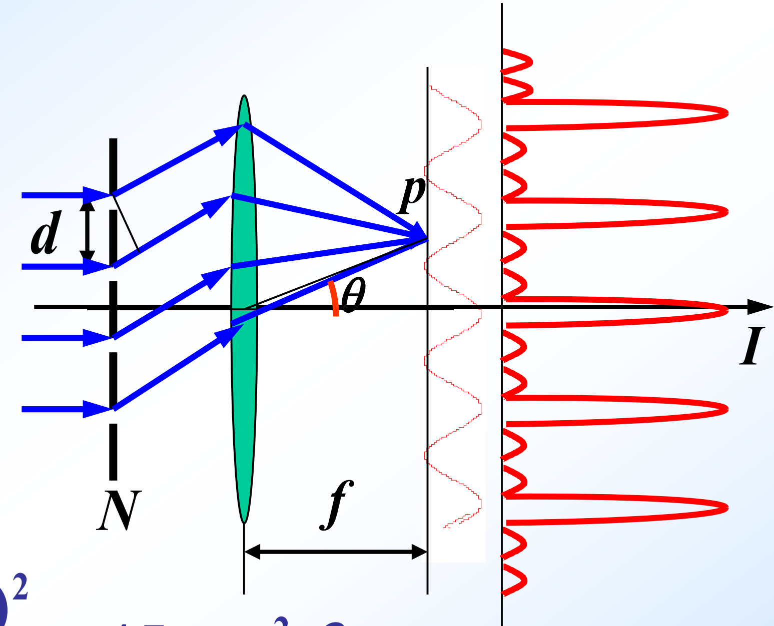
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \qquad E_\theta = E_{1\theta}\frac{\sin\dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}$$

$$\beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \qquad E_\theta = E_{1\theta}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

$$\boxed{E_{1\theta} = E_{10}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$



$$\boxed{E_\theta^2 = E_{1\theta}^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2} \quad \boxed{I_1 \propto E_{1\theta}^2 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$



$$I_\theta = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}_{\text{单缝衍射因子}} \underbrace{\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2}_{\text{多缝干涉因子}}$$

$N=2$ $I_\theta = I_1 \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin^2\beta} = I_1 \dfrac{(2\cos\beta\sin\beta)^2}{\sin^2\beta} = 4I_1\cos^2\beta$ $N=2$ $N=4$

$N=4$ $I_\theta = I_1 \dfrac{\sin^2 4\beta}{\sin^2\beta}$

条纹特点：明纹（主极大、谱线）又细又亮，
中间隔有宽广的暗区，缝数 N 增加，明纹愈细愈亮。

主极大间有 $N-1$ 个极小
$N-2$ 个次极大

2. 光栅衍射的特点：

光强分布

$$I=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

1）明纹(主极大)条件：

当 $\beta=\pm k\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}=N$ $\Rightarrow$ 干涉取极大值

$$\beta=\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{d\sin\theta=\pm k\lambda} \quad k=0,1,2,3\ldots$$

光栅方程

2）暗纹（干涉极小）条件： $\sin\beta\neq0$ $\quad \sin N\beta=0$

$$N\beta=\pm k'\pi \quad k'=1,2,\cdots \qquad \beta=\pm\frac{k'}{N}\pi \quad k'\neq N,2N,3N,\cdots$$

$$d\sin\theta=\pm\frac{k'}{N}\lambda=\pm\left(k+\frac{m}{N}\right)\lambda \qquad k=0,1,2,3\ldots \quad m=1,2,3\ldots N-1$$

相邻主极大间有$N-1$个暗纹

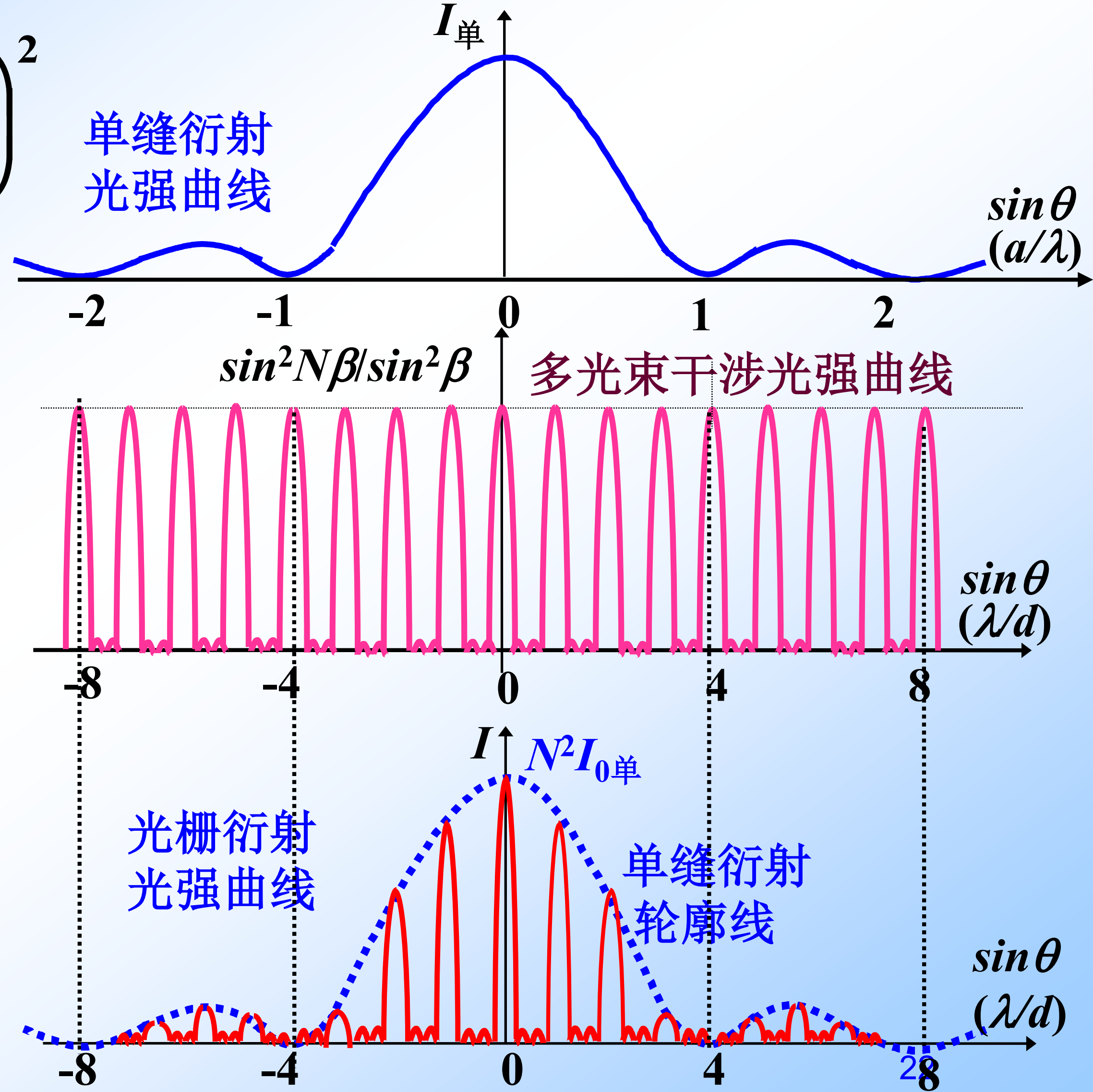
3) 次极大：相邻两个极小之间应有一个次极大，N-1个极小之间应有N-2个次极大。

光强太弱
观察不到

4)光强曲线

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

是单缝衍射调制的结果



5）缺级现象：

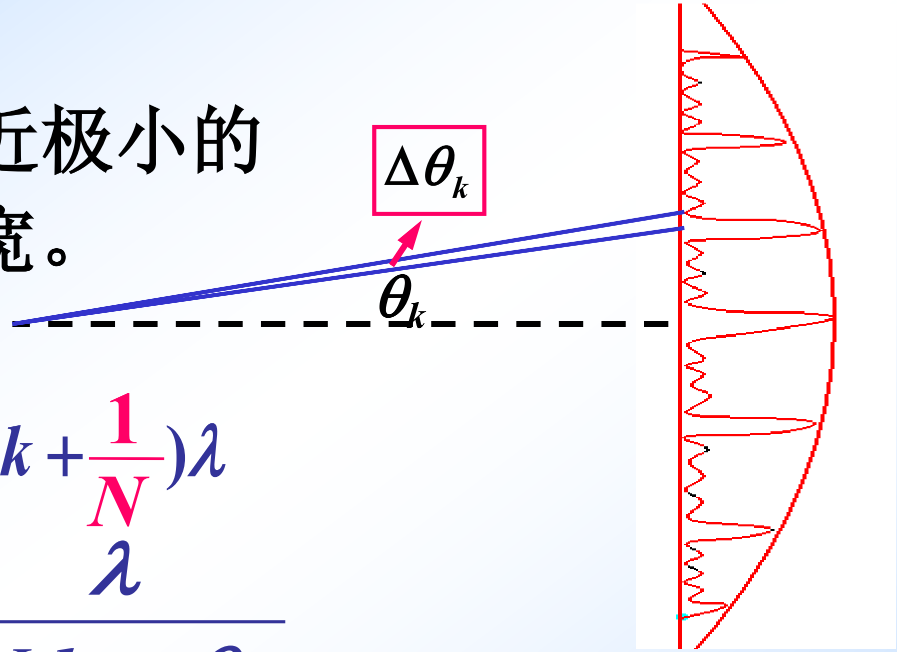
$$\begin{cases} d\sin\theta = \pm k'\lambda \\ a\sin\theta = \pm k\lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $k' = k\dfrac{d}{a}$ =整数

k'为缺级

6）主极大的半角宽

定义： 主极大的中心到邻近极小的角距离为它的半角宽。



k 主极大：$d\sin\theta_k = k\lambda$

邻近极小：$d\sin(\theta_k+\Delta\theta_k) = (k+\frac{1}{N})\lambda$

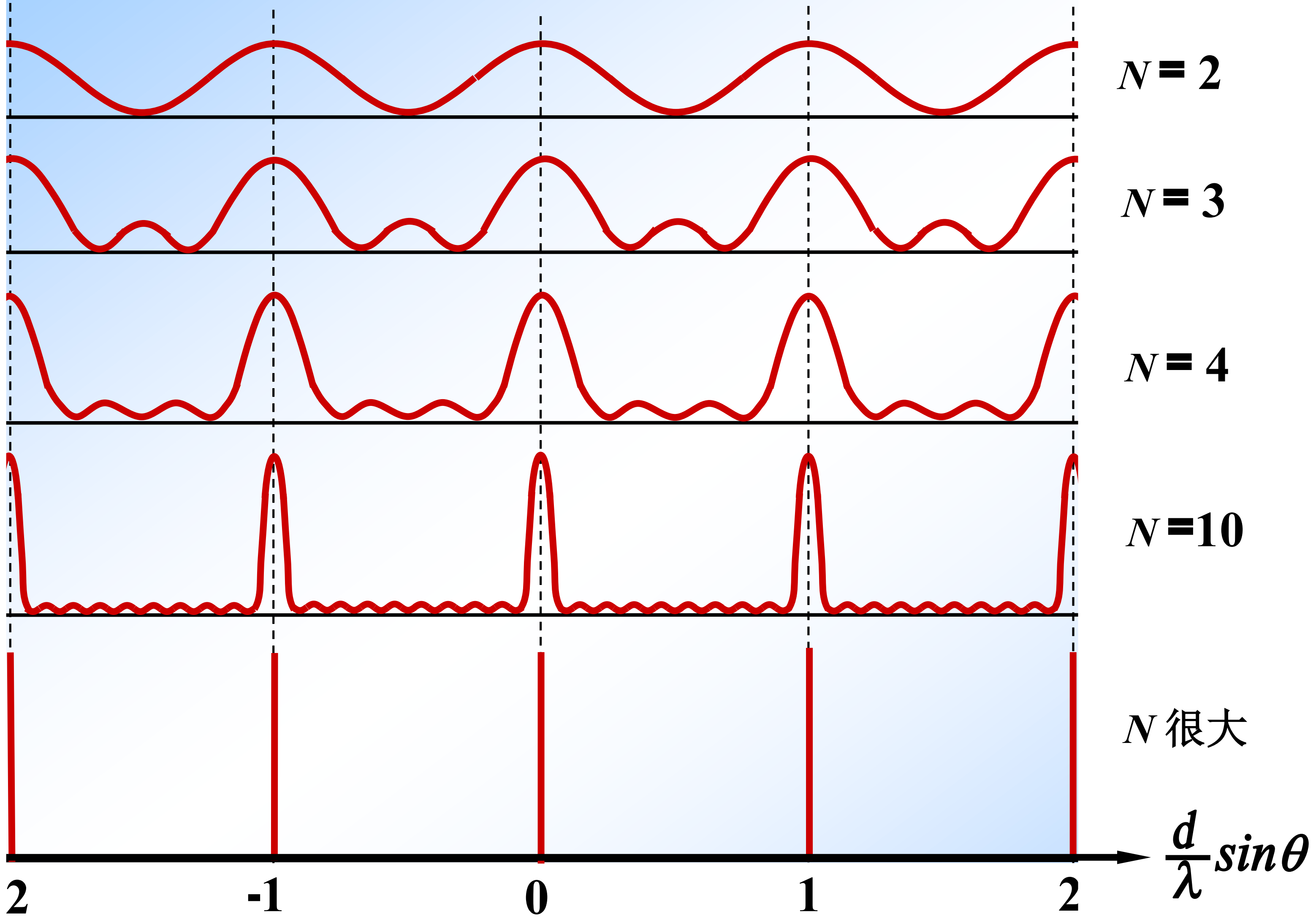
两式相减可得：$\downarrow\Delta\theta_k \approx \dfrac{\lambda}{\uparrow Nd\cos\theta_k}$

N为缝数, d 为缝间距，$\Delta\theta_k$为 k 级主极大的半角宽度

d一定时，缝数越多，条纹越尖细、越亮

中央主极大：$\Delta\theta_0 = \dfrac{\lambda}{Nd}$

前已证明，主极大强度 $I \propto N^2$



N 增大，主极大条纹变亮变窄，次极大数目变多而相对强度变小。

例11-16 一光栅的 $d=6.0\times10^{-6}m$， $a=1.5\times10^{-6}m$，当以 $\lambda=500nm$ 的光垂直照射时，在光屏上能看到多少条主极大衍射条纹?

解 根据光栅方程，当 $\theta=90^0$ 时，对应的值最大，即

$$k=\frac{d}{\lambda}=\frac{6.0\times10^{-6}}{500\times10^{-9}}=12$$

当 $\theta=-90^0$ 时，对应的值最小，即

$$k=-\frac{d}{\lambda}=-\frac{6.0\times10^{-6}}{500\times10^{-9}}=-12$$

因 $$(a+b)/a=\frac{6.0\times10^{-6}}{1.5\times10^{-6}}=4$$

所缺的级次为 $k=\pm4,\pm8,\pm12,\cdots$

在光屏上能出现的级次为

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm6,\ \pm7,\ \pm9,\ \pm10,\ \pm11$$

共**19**条明纹。

例1 用白光垂直照射在每厘米有6500条刻痕的平面光栅上，求第三级光谱的张角.

解 $\lambda = 400 \sim 760\,\text{nm} \qquad b + b' = 1\,\text{cm}/6500$

紫光 $\sin\theta_1 = \dfrac{k\lambda_1}{b+b'} = \dfrac{3\times 4\times 10^{-5}\,\text{cm}}{1\text{cm}/6500} = 0.78$

$$\boxed{\theta_1 = 51.26^\circ}$$

红光 $\sin\theta_2 = \dfrac{k\lambda_2}{b+b'} = \dfrac{3\times 7.6\times 10^{-5}\,\text{cm}}{1\text{cm}/6500} = 1.48 > 1$

不可见

第三级光谱的张角

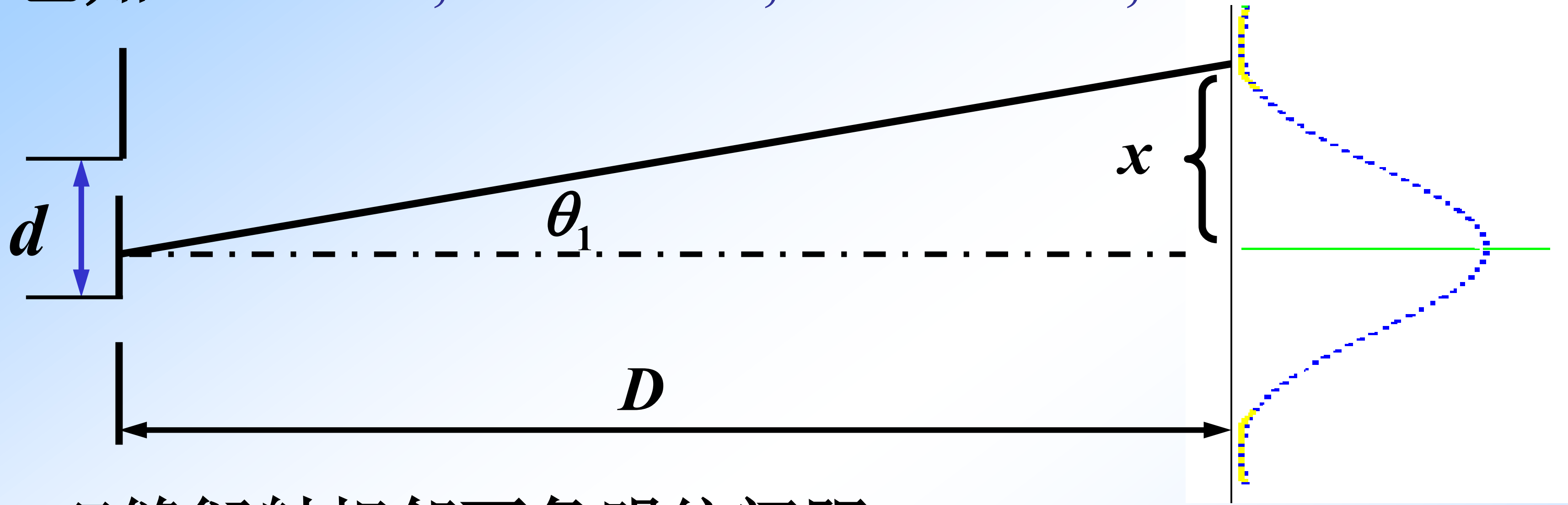
$$\Delta\theta = 90.00^\circ - 51.26^\circ = 38.74^\circ$$

第三级光谱所能出现的最大波长

$$\lambda' = \frac{(b+b')\sin 90^\circ}{k} = \frac{b+b'}{3} = 513\ \text{nm}$$

绿光

例2 已知 $D = 50\ \text{cm}, \lambda = 480\ \text{nm}, d = 0.10\ \text{mm}, a = 0.020\ \text{mm}$



求：

（1）双缝衍射相邻两条明纹间距

（2）中央包络线中的 ‘x’

（3）双缝衍射的第 1 级明纹相对中央明纹的相对强度

（4）中央的包络线中，共包含了几条完整的明纹？

（5）中央包络线中恰好11 条明纹,如何设计 a、d ？

解： （1） $\Delta x = \dfrac{D}{d}\lambda = \dfrac{500}{0.10} \times 480 \times 10^{-6}\ \text{mm} = 2.4\ \text{mm}$

（2） $x = D\tan\theta_1 \approx D\sin\theta_1 = D\dfrac{\lambda}{a} = 12\ \text{mm}$

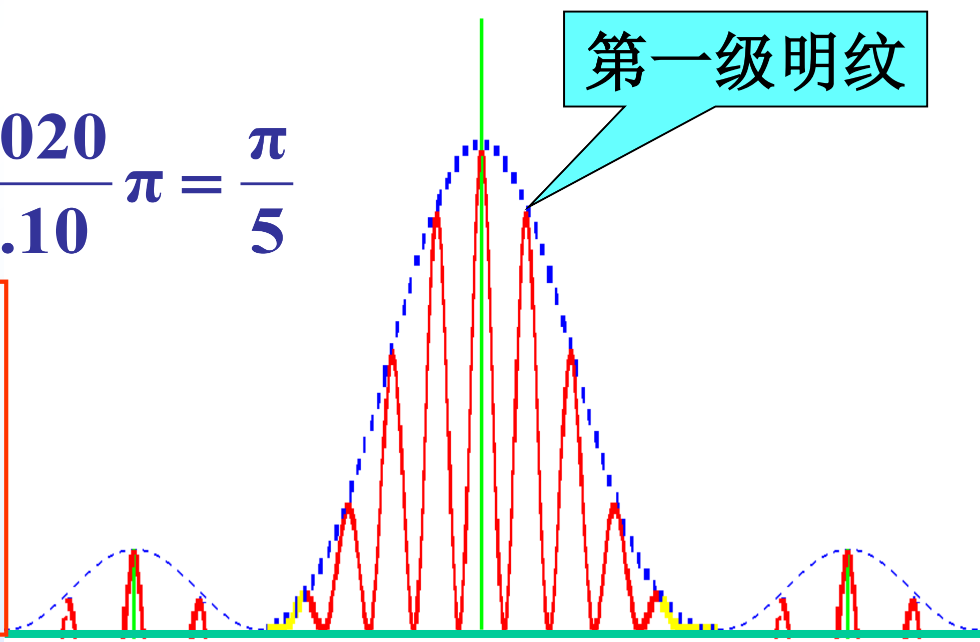
（3）双缝衍射的第 1 级明纹相对中央明纹的相对强度

根据 $I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta$

$$\boxed{\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta} \quad d\sin\theta = \lambda,\ \sin\theta = \frac{\lambda}{d}$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = \pi \\ \alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \dfrac{a}{d}\pi = \dfrac{0.020}{0.10}\pi = \dfrac{\pi}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}}\right)^2 (\cos\pi)^2 = 86\%}$$



（4）中央的包络线中，共包含了几条完整的明条纹？

包络线的第一极小的衍射角：$a\sin\theta_1 = \lambda$

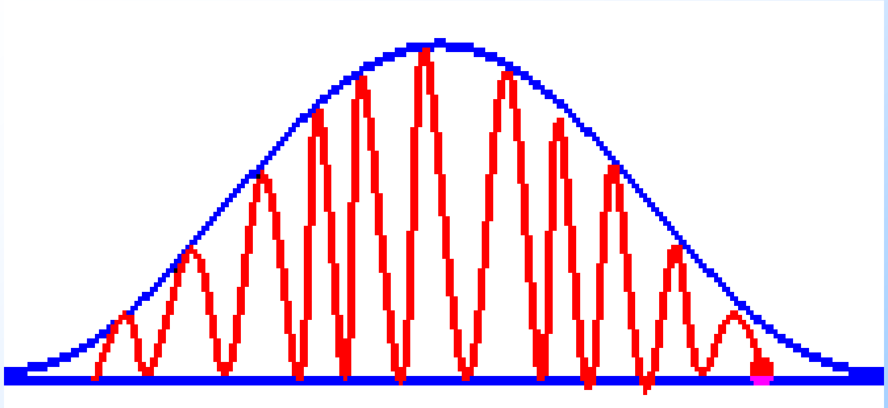
设中央明纹中共有 k 级明纹：$d\sin\theta_1 = k\lambda$

$$\frac{d}{a} = k \Rightarrow k = \frac{d}{a} = \frac{0.1}{0.02} = 5$$ (第 5 级缺级 ！）

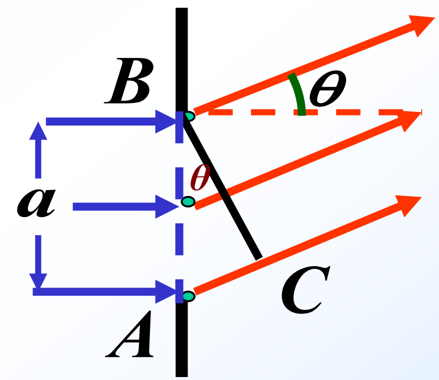
包含了 $2\times5-1=9$ 条明条纹

（5）若要中央的包络线中恰好有 11 条明纹，应如何设计 a 、 d ？

$$\frac{d}{a} = k = 6$$



例：(1)在单缝衍射中，衍射角θ越大(级数越高)的那些明纹的亮度是越大还是越小？ 用菲涅耳半波带法加以解释。 (2)在单缝衍射中，如果把整个装置放入水中，衍射图样将怎样变化？



解:(1) $AC=a\sin\theta$

若：AC = 奇数个半波长

$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=1,2,3\cdots \text{——明纹}$$

$\theta\uparrow$， $k\uparrow$ 则级数越高， AC越长，缝AB分成的半波带越多， 每个半波带越窄，在P点处引起的光强越小。因此，衍射角越大的明纹的亮度越小.

(2) 如果把整个装置放入水中，

明纹满足 $$na\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=1,2,3\ldots$$

暗纹满足 $$na\sin\theta=\pm k\lambda \quad k=1,2,3\ldots$$

第k级明纹的衍射角的大小为 $$\theta_k\approx\sin\theta_k=\frac{(2k+1)\lambda}{2na}\downarrow$$

次极大条纹的宽度：$$\Delta\theta=\theta_{k+1}-\theta_k\approx\frac{\lambda}{na}\downarrow$$

所以，衍射图样将向中间收缩，条纹宽度变小。