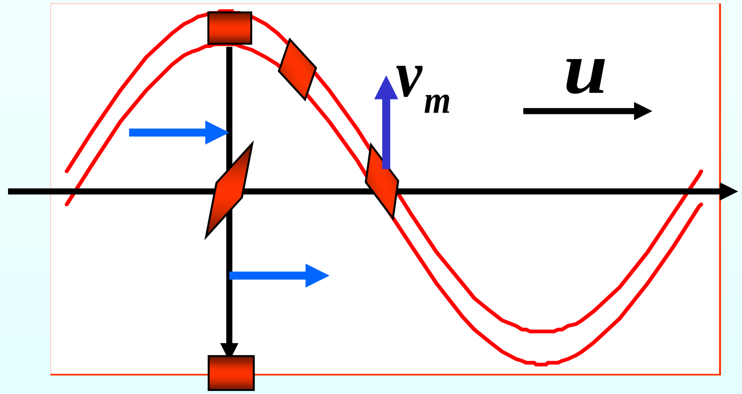
回顾：

●波的能量

不论纵波和横波，媒质中每个质元都有振动动能和形变势能

对于平面简谐波，媒质中每个质元的振动动能与形变势能始终相等。



平衡位置处最大；

最大位移处最小。

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，由前面输入；

平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。

●能量密度w：

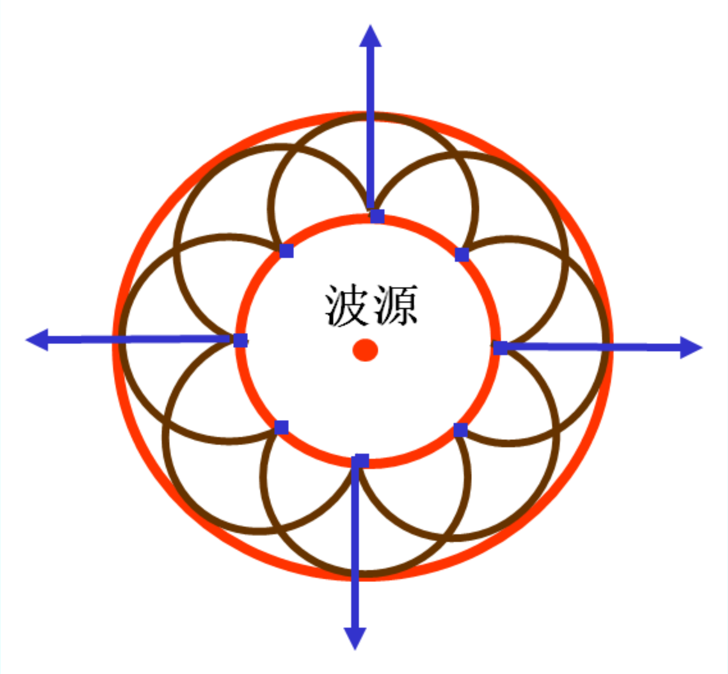
单位体积中的能量 $w=\dfrac{W}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\dfrac{x}{u})$

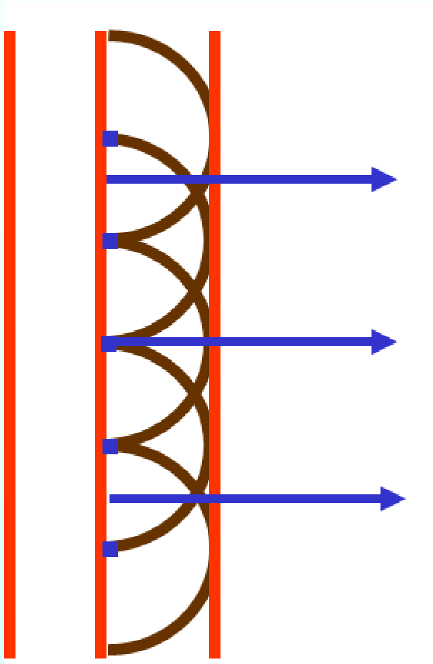
$$\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\propto A^2,\omega^2$$

●能流P、能流密度i

平均能流密度 $I=\bar{i}=\dfrac{\bar{P}}{\Delta s}=\bar{w}u=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\propto A^2$

●惠更斯原理：媒质中任一波阵面上的各点，都可以看作是发射子波的波源，其后任一时刻，这些子波的包迹就是新的波阵面。





反射定律：$i = i'$　　折射定律：$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2}$

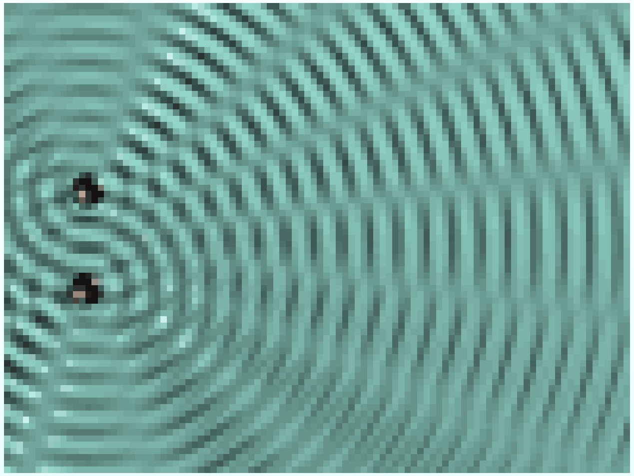
入射角大于全反射临界角时，只有反射波

全反射临界角：$\sin i_1 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1}$

● 两束波的干涉：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi$$

$$\Delta\phi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$



相干波源（同频率、恒定相位差、同振动方向）

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi \qquad \Delta\phi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

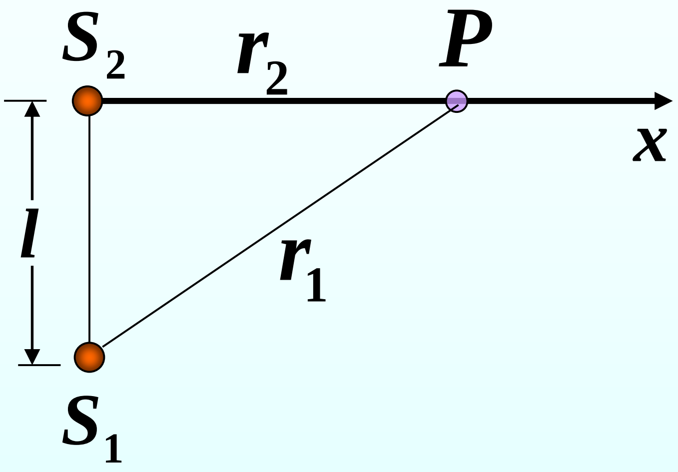
$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \begin{cases} \pm 2k\pi & A = A_1 + A_2 \text{ 加强} \\ \pm(2k+1)\pi & A = |A_1 - A_2| \text{ 减弱} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2\cdots$

若 $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ 即两波源同位相，则

波程差 $\delta = r_1 - r_2 = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{加强（相长、极大）} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{减弱（相消、极小）} \end{cases}$

例1. S_1 和 S_2 是两相干波源，相距 l = 10m ，振动位相相同，波长 λ=2m 。



1、试求从 S_2 出发沿着 S_2–x 离S_2最近的干涉极小点的位置。

解： 由极小条件:

$$\delta = r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}，\ k = 0,1,2,3,...$$

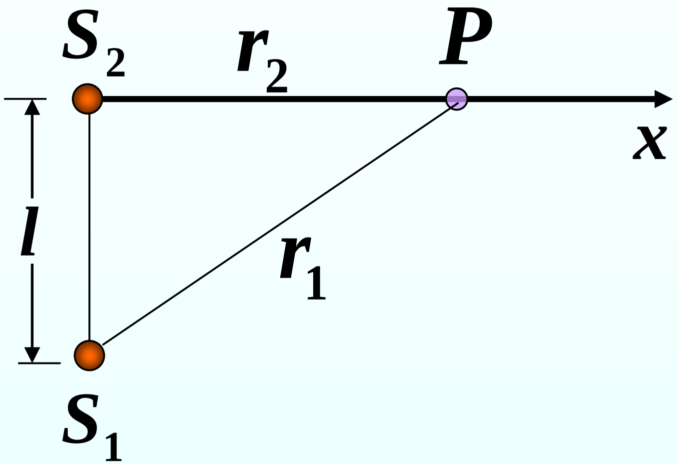
从 S_2 到无穷远处： $0 < r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} < 10\ \text{m}$

$\therefore\ \ 0 \le k \le 4$ **显然，k=4时，r_2最小。**

取 $k = 4$，$r_1 - r_2 = \frac{9}{2}\lambda = 9\ \text{m}$

$$\sqrt{r_2^2 + l^2} - r_2 = 9\ \text{m} \quad r_2 = \frac{19}{18}\ \text{m}$$

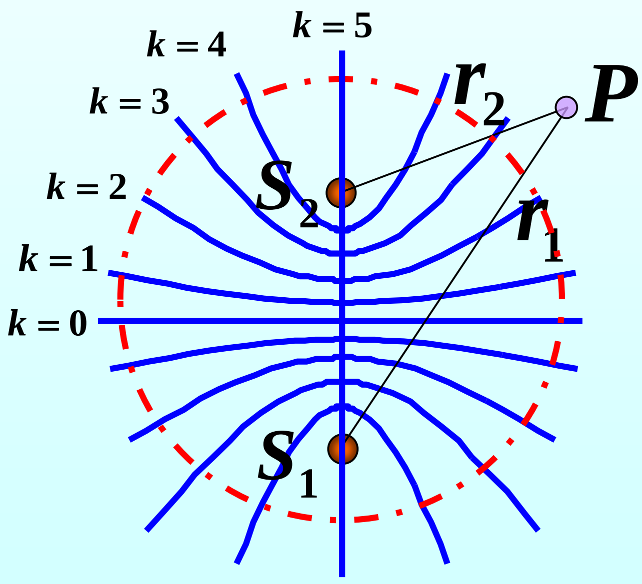
2、一检测器绕这两个波源一个完整的圆周，最多可测得多少个极大值。



由极大条件：

$$r_1 - r_2 = k\lambda \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

各级极大点构成双曲线。



在S_1 和 S_2的垂直平分线上的点为**零级**极大。

在S_1 和 S_2 的延长线上：

$$r_1 - r_2 = 10m = 5\lambda$$

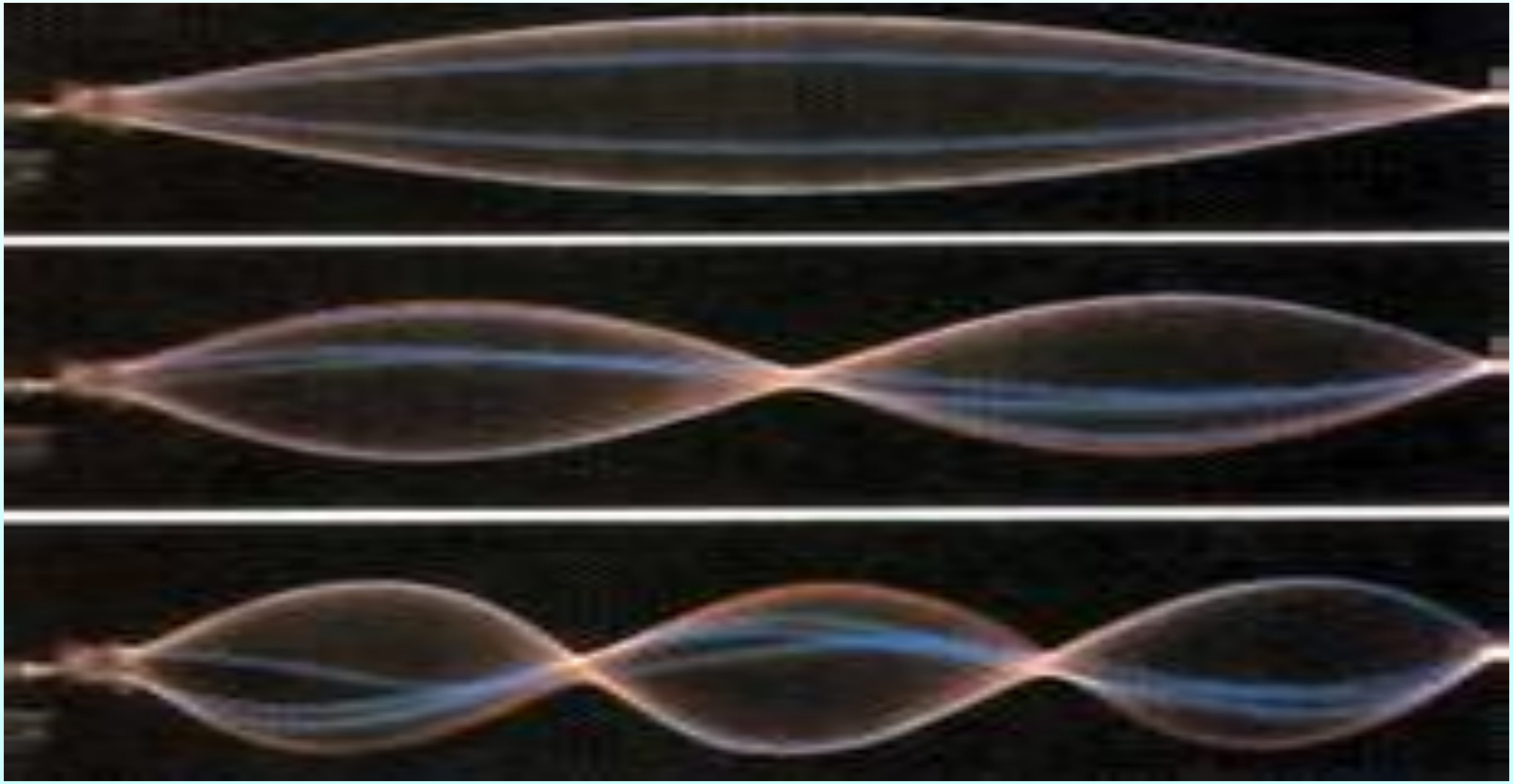
k最大，为**第五级**极大。

当检测器环绕一周，可测得20个极大点。

三、 驻波(standing wave) 一干涉特例

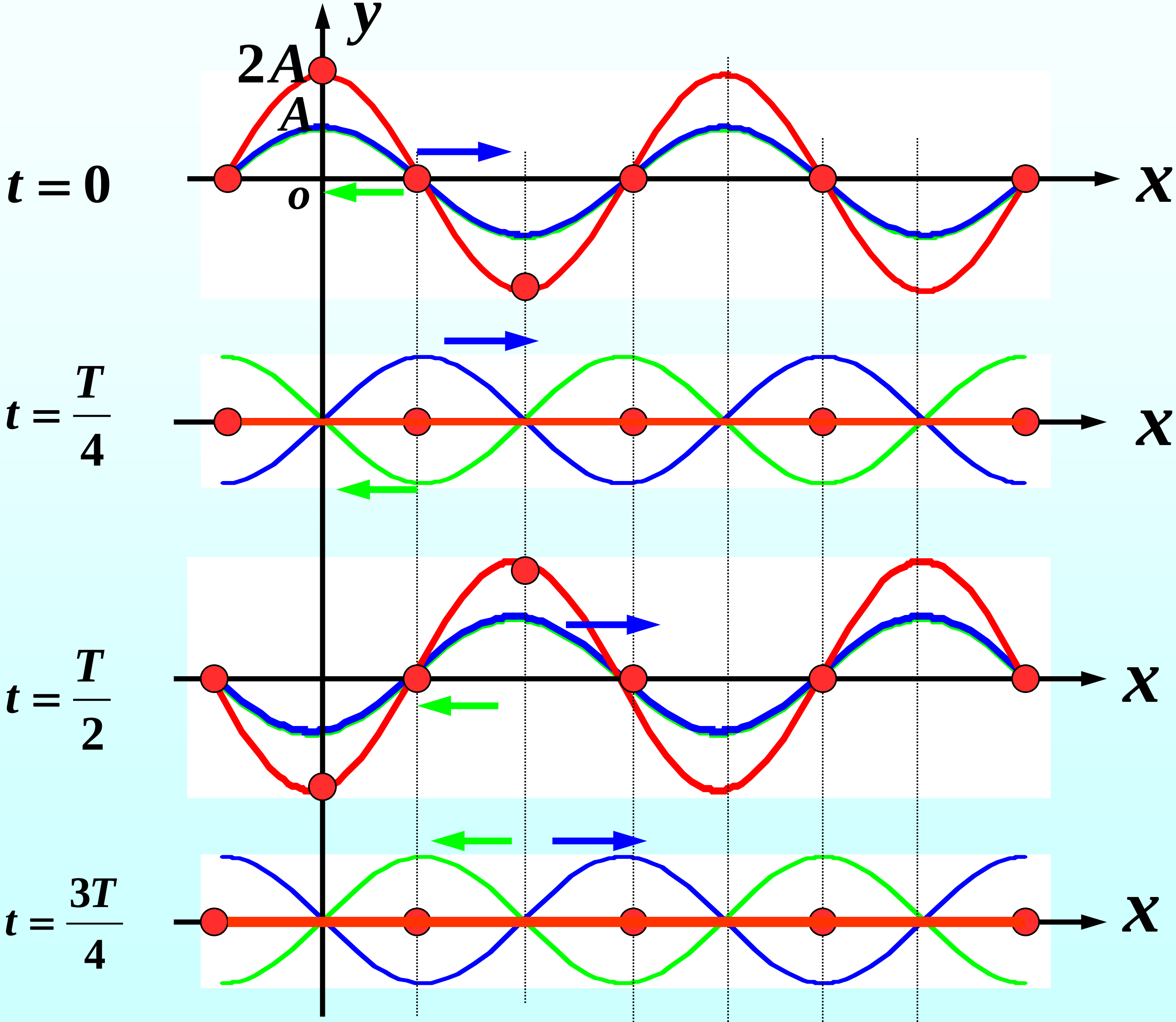
1. 产生： 两列振幅相等的相干波，在同一直线上反向传播时叠加成驻波。

演示： 常用入射波与反射波叠加形成(注意特点)



2. 波形曲线叠加分析驻波形成

驻波



3. 特点

A. 有的点始终不动（干涉减弱）称波节；

有的点振幅最大（干涉加强）称波腹；

其余的点振幅在0与最大值之间(周期性)。

B. 位相分段相等 $\begin{cases}\text{同一段同位相}\\ \text{相邻段反位相}\end{cases}$

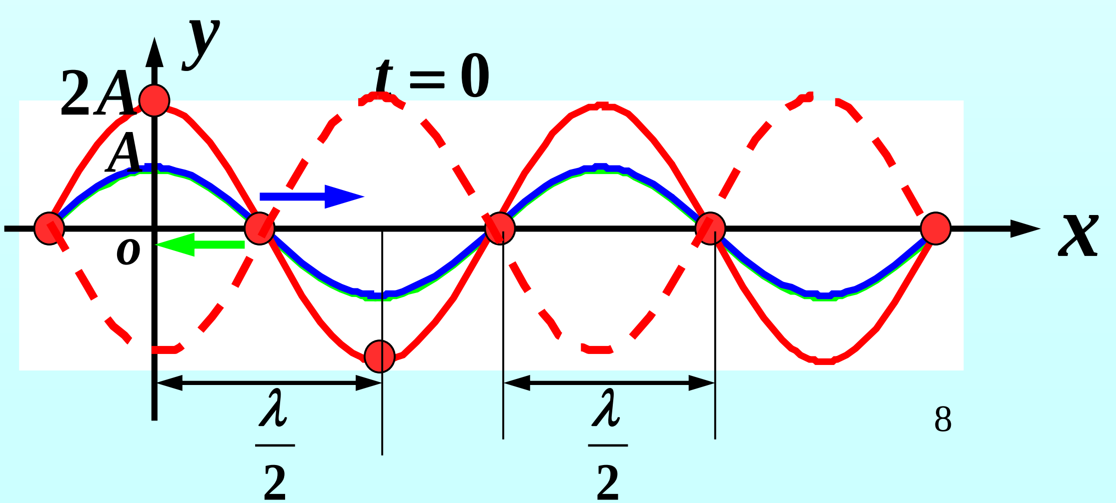
C. 波形只变化不向前传, 不传播能量, 故称驻波。

D. 反射端固定, 则为波节; 反射端自由, 则为波腹。

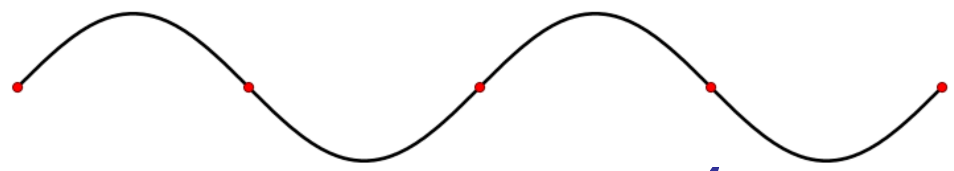
E. 最大振幅为 $2A$

F. 相邻波节距离 $\dfrac{\lambda}{2}$

相邻波腹距离 $\dfrac{\lambda}{2}$



4. 驻波的表示式



正向波

$$y_1 = A\cos\omega(t-\frac{x}{u}) = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$

反向波

$$y_2 = A\cos\omega(t+\frac{x}{u}) = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$$

则合成波为

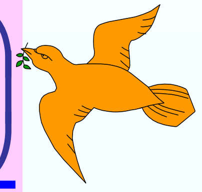
$$y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) + A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$$

利用 $(\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2})$

$$\boxed{y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\quad \text{驻波的表示式}}$$

讨论

$$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$



1° $\cos\frac{2\pi}{T}t$表示质点合振动频率与分振动相同。

2° $A' = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$ 表示质点合振动最大位移不随t变，只随 x 变。 合振幅 $|A'| = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$

♥ 波腹：当 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1$时 $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm k\pi$ $\quad x = \pm k\frac{\lambda}{2}$

$k = 0, 1, 2, \cdots \quad x = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda\cdots$

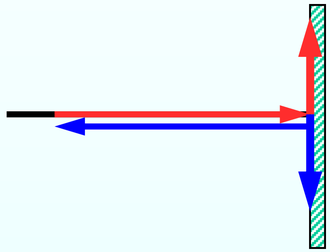
♥ 波节：当$\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0$时 $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$

$k = 0, 1, 2, \cdots \quad x = \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3\lambda}{4}, \cdots$

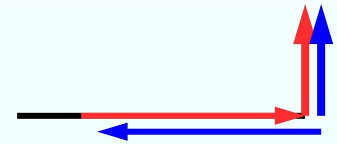
3° 驻波各点位相由 A' 的正负决定 $-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

5. 波反射时位相的变化

波在固定端反射时形成波节

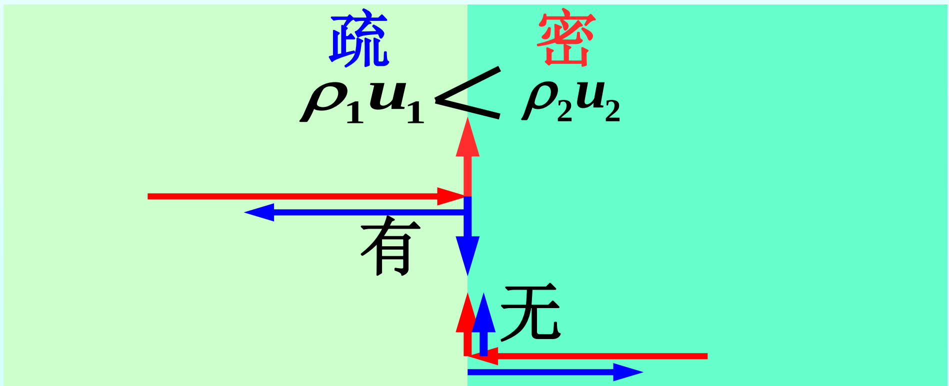


波在自由端反射时形成波腹



♥ 波在固定端反射时，位相有π突变，有半波损失。
波在自由端反射时，位相无π突变，无半波损失。

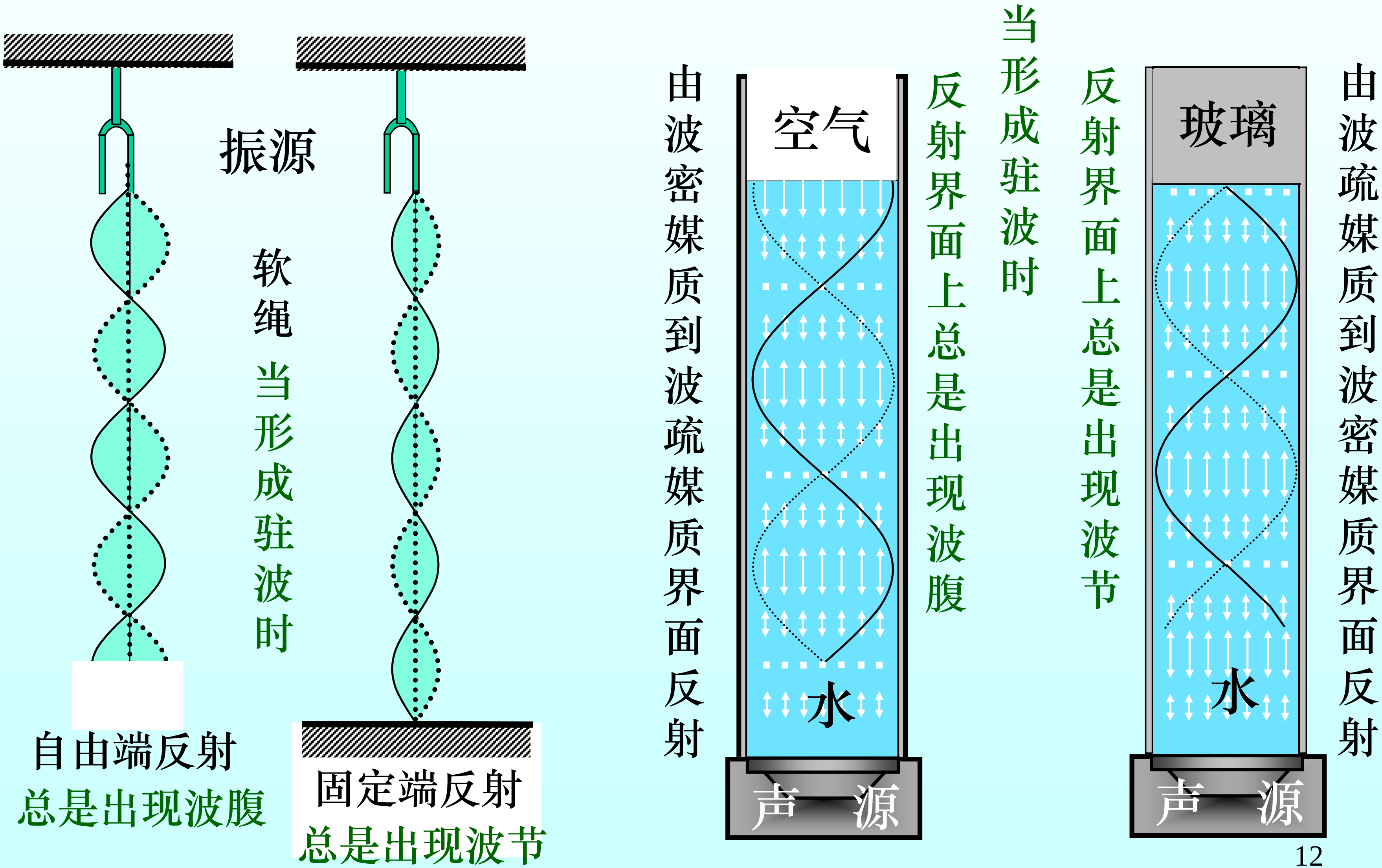
一般：波在两媒质
表面反射时



♥ 波从疏媒质射向密媒质表面反射时，有半波损失。
波从密媒质射向疏媒质表面反射时，无半波损失。

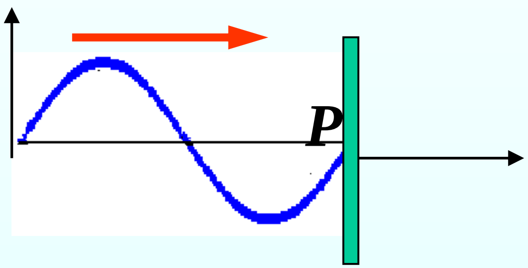
对光波，n大为光密媒质，也有上述结论。

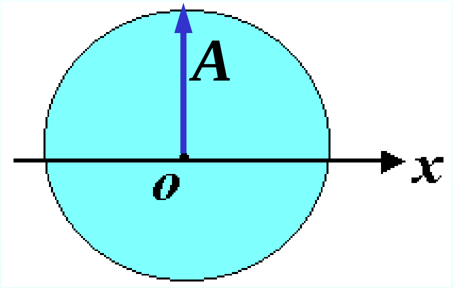
由入射波与反射波产生驻波 与 “半波损失”

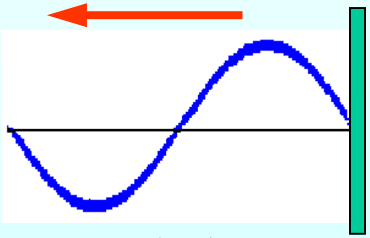


例1 已知入射波 t 时刻的波动曲线，问： A 、B 、C 、D 哪条曲线是 t 时刻反射波曲线？(反射壁是波密媒质）

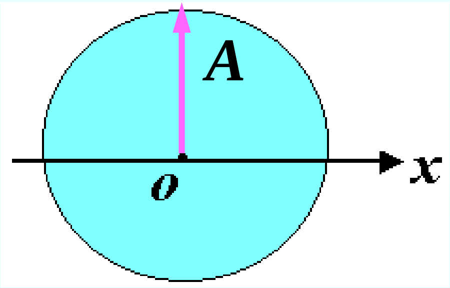
[B]

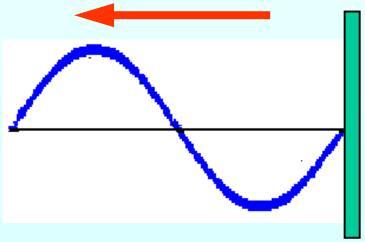




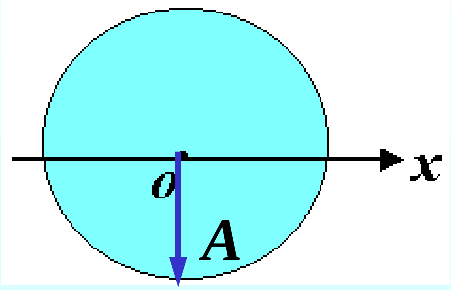


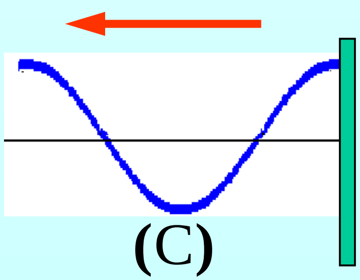
(A)



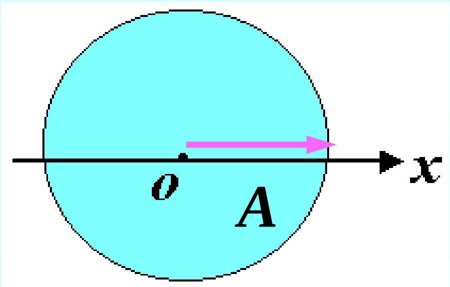


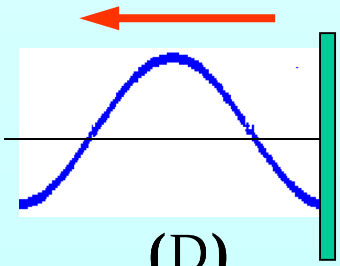
(B)



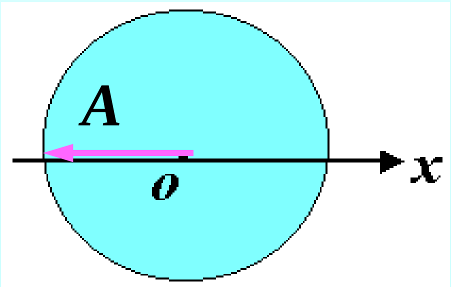


(C)





(D)

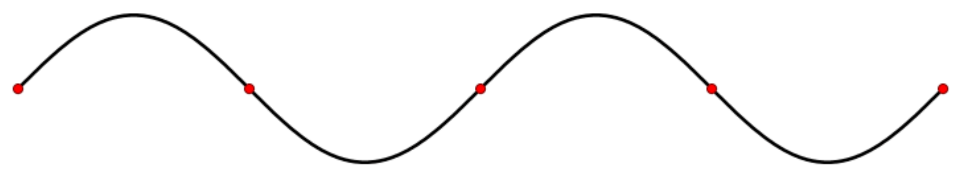


结论

$$y = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos(\omega t)$$

驻波运动图像：

（质点位移同时达到最大最小）



驻波不传播能量

- **驻波**：干涉的特例，两相向传播的平面简谐波的叠加

同频率、同波长、同振幅

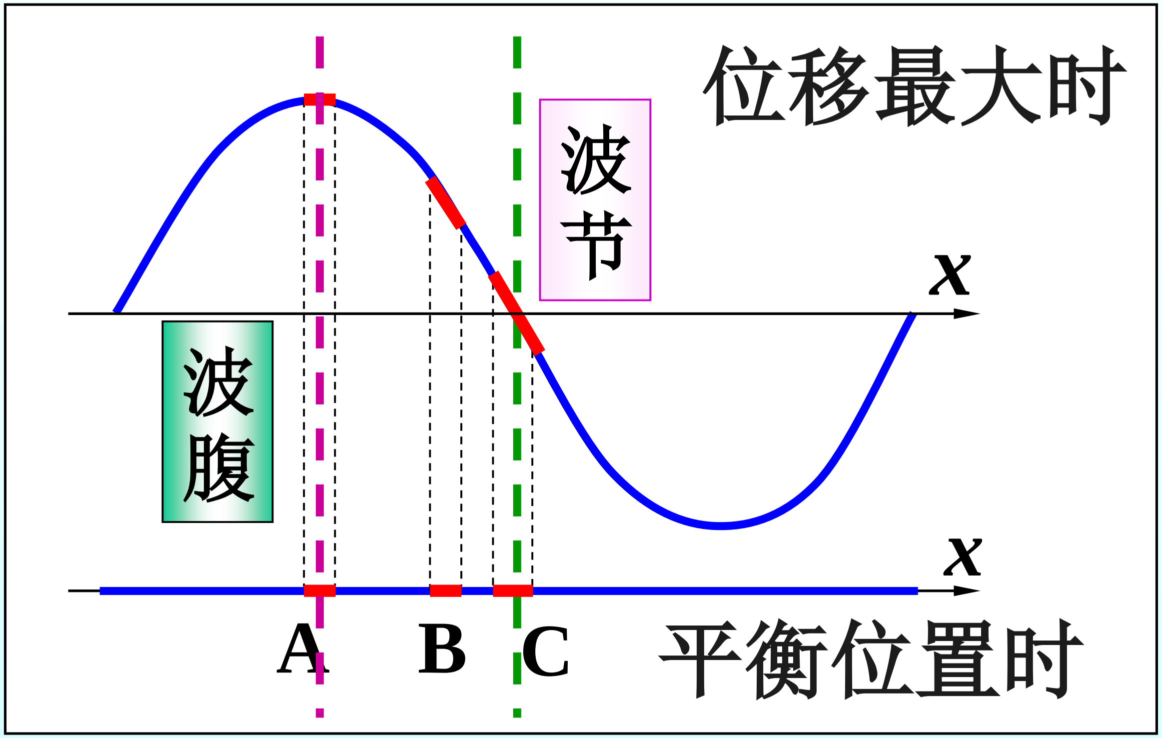
驻波方程：
$$y = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos(\omega t)$$

波节 $x_k = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$　　相邻波腹或波节间隔：$\Delta x = \lambda/2$

波腹 $x_k = \pm k\frac{\lambda}{2}$　　波节与相邻波腹间隔：$\Delta x = \lambda/4$

半波损失：波从波疏介质入射到波密介质界面上反射时，反射波有半波损失

6. 驻波的能量



$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

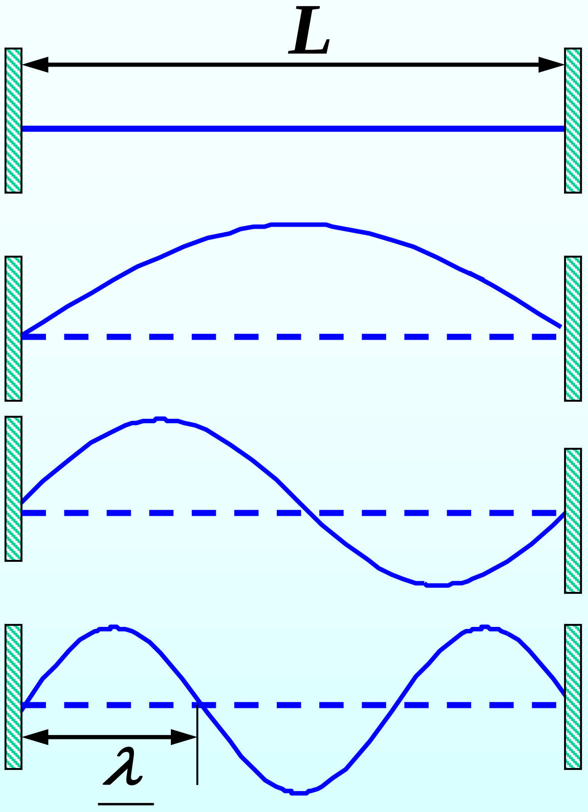
$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

驻波的能量在相邻的波腹和波节间往复变化，在相邻的波节间发生动能和势能间的转换，动能主要集中在波腹，势能主要集中在波节，但无能量的定向传播.

7. 驻波的“量子化”条件

要形成稳定驻波，两固定端一定为波节，此边界条件就限制了波长，在波速一定时也就限制了频率。

只有弦长等于半波长的整数倍时，才能保证两固定端为波节的边界条件



（简正模式）

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3\cdots}$$

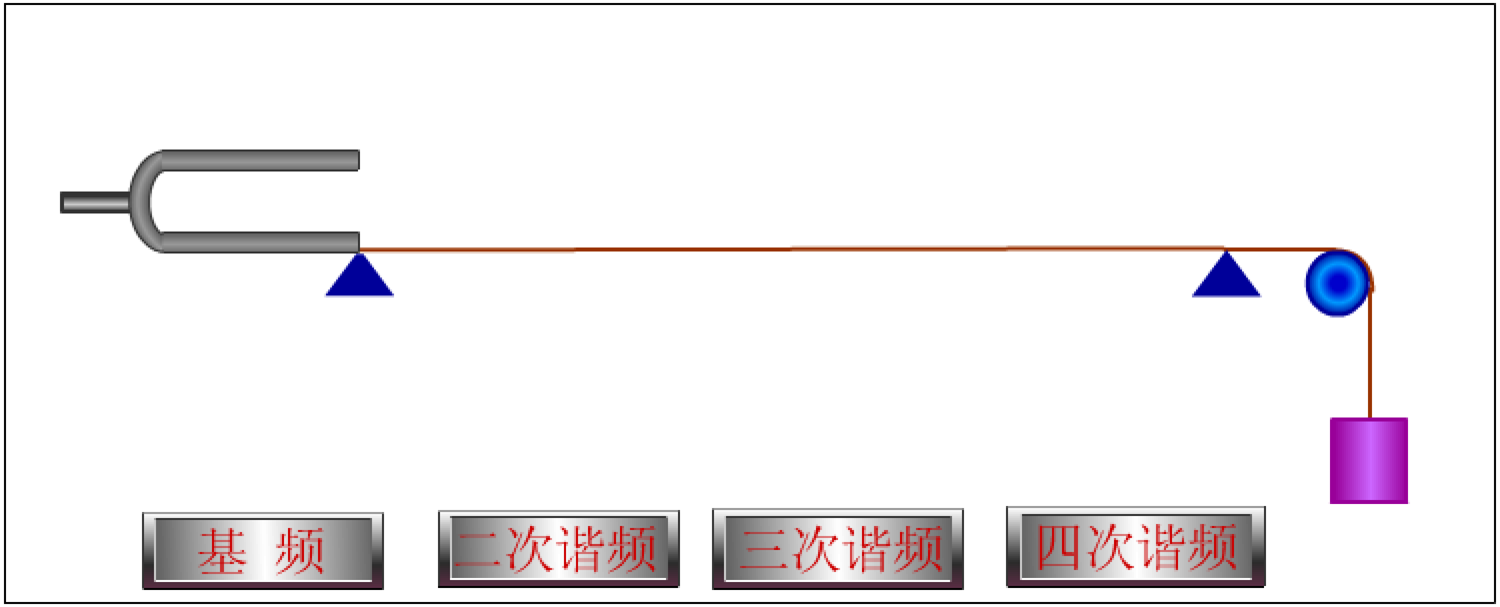
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \rightarrow \nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$n = 1$ 基频（基音）

$n \geq 2$ 谐频（谐音）

演示：弦驻波　张力弦驻波

(4) 振动的简正模式



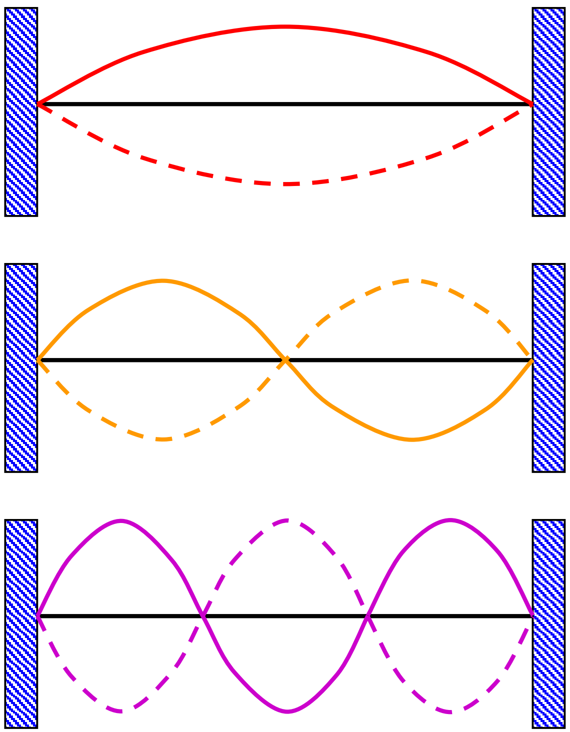
两端固定的弦线形成驻波时，波长λ_n和弦线长l应满足：

$$l = n\frac{\lambda_n}{2}, \quad \nu_n = n\frac{u}{2l} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

由此频率决定的各种振动方式称为弦线振动的简正模式。

两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$



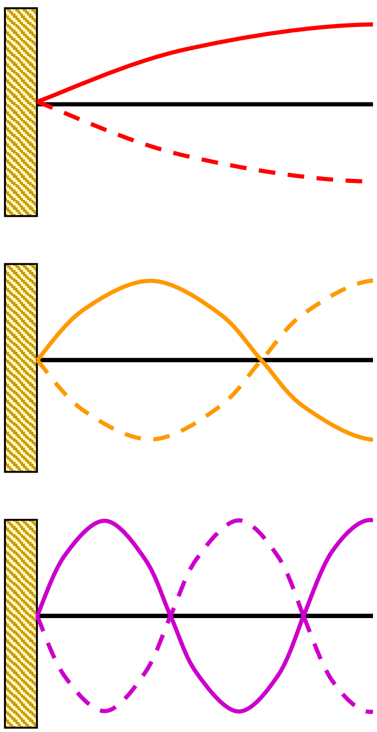
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式

$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

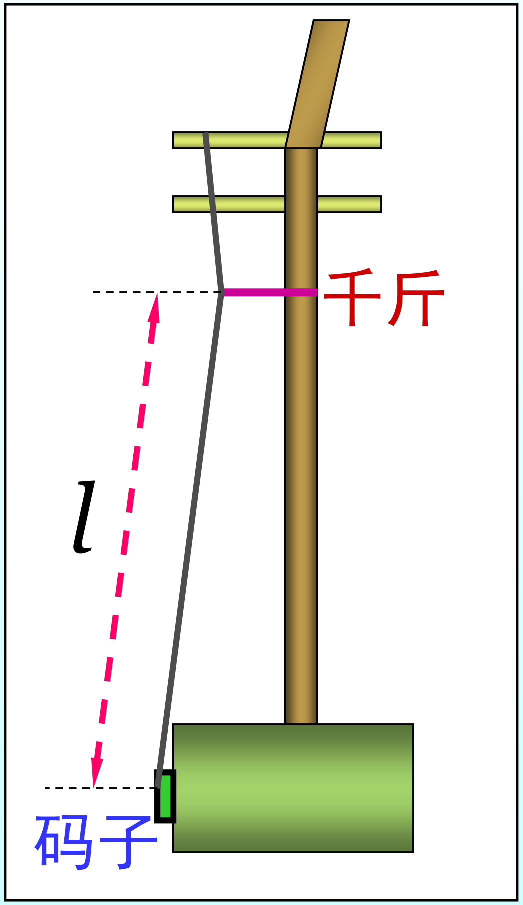


$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

例. 如图二胡弦长l=0.3m，张力T=9.4N。线密度ρ=3.8×10^{-4}kg/m，求弦发出的声音的基频与谐频。



解：弦两端为固定点，是波节。

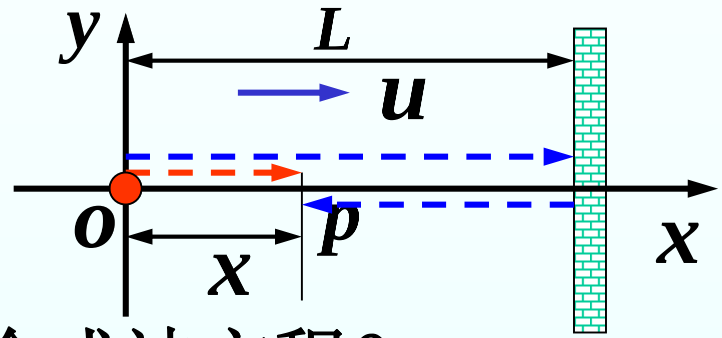
$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

频率 $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{nu}{2l}$ 波速 $u = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

基频 $n = 1,\quad \nu_1 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = 262Hz$

谐频……

例8. 已知：波源 $y_o = A\cos\omega t$



$L = \dfrac{5\lambda}{2}$ 处有一密媒质反射壁

求： (1) $x > 0$ 入射波、反射波及合成波方程？

并讨论干涉情况

解： $y_{入} = A\cos\omega(t - \dfrac{x}{u})$

有半波损失±π

$$y_{反} = A\cos[\omega(t - \frac{2L - x}{u}) - \pi]$$

P$_{101}$ 例题11-11

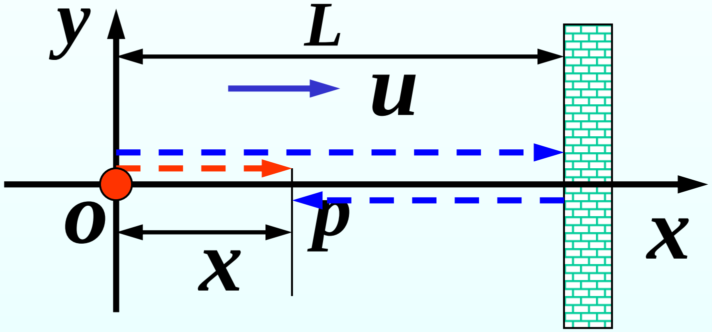
$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \frac{2\pi}{\lambda} \times 2 \times \frac{5\lambda}{2} - \pi]$$

$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \pi]$$

$$y_{驻} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

驻波表示式

$$y_{驻} = y_{入} + y_{反} = \underline{2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})}\underline{\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$



波腹： $\underline{\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2} = \pm k\pi}$

$$x = (\pm k + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$$

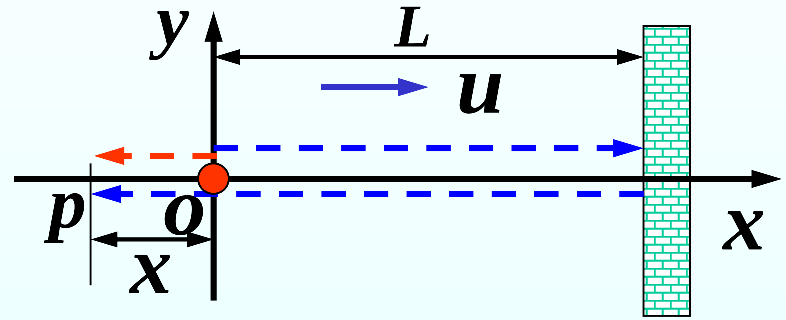
x在 0 —— $\frac{5\lambda}{2}$ 之间

$$k = 0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \frac{9\lambda}{4}$$

波节： $\underline{\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}} \rightarrow x = \pm k\frac{\lambda}{2}$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2}$$

（2）$x<0$入射波、反射波及合成波方程？并讨论干涉情况



$$y_{入}=A\cos\omega(t-\frac{-x}{u})$$

$$=A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$$

$$y_{反}=A\cos[\omega(t-\frac{2L-x}{u})-\pi]$$

$$=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\pi]$$

干涉静止

$$y_{合}=y_{入}+y_{反}=2A\cos(-\frac{\pi}{2})\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]=0$$

若 L为其它值，则 $y_{合}$可不为0，$x<0$合成为行波波函数.

行波波函数