振动与
波动

第二部分
机械波

第9章 振动 & 第10章波动

Oscillations and Waves

第1节 简谐振动（旋转矢量法、单摆与复摆）

第2节 振动的合成（拍现象等）

第3节 机械波（波函数、波动方程）

第4节 波的能量、能流密度

第5节 惠更斯原理、波的衍射和波的干涉

第6节 多普勒效应

第7节 电磁振荡与电磁波

前 言

波动：振动的传播，是物质运动的一种形态。

波动动画演示

$\left\{\begin{array}{l}\text{机械波}\\\text{电磁波}\end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ 本质不同，但具有共同特征

1° 都是由物质间的相互作用引起的；

2° 以有限的速度传播，伴随着能量的传递；

3° 都有干涉、衍射现象，横波还有偏振现象；

4° 服从共同的数学规律。

第3节 机械波

Mechanical Waves

一、机械波产生的条件

1. 脉冲波与连续波

2. 机械波产生的条件——波源、弹性介质(或媒质)。

3. 波动的特点

（1）每个质点只在平衡位置附近振动，不向前运动；

（2）后面质点重复前面质点的振动状态，有位相落后；

（3）所有质点同一时刻位移不同，形成一个波形；

（4）振动状态、波形、能量向前传播。

4. 波的分类

按性质分类
- 机械波：机械振动在弹性媒质中的传播过程
- 电磁波：电磁场周期性变化在空间的传播
- 引力波：时空形变，以c的速度在空间传播

?

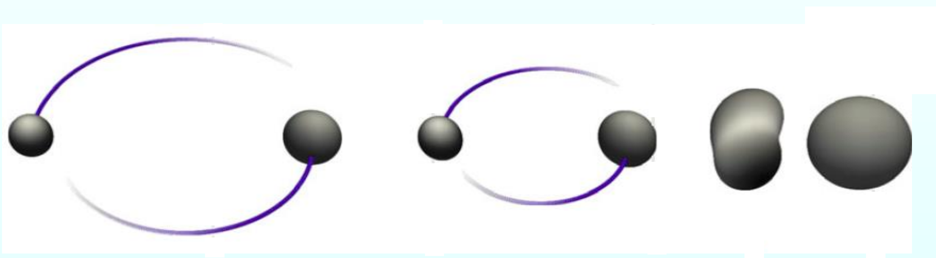
按振动方向与传播方向分类
- 横　波：振动方向与传播方向垂直 如 电磁波
- 纵　波：振动方向与传播方向相同 如 声波
- 混合波：如水面波、地震波

各种类型的波有其特殊性，但也有普遍的共性。

——传播的是振动状态

The first discovery: GW150914

Two solar-mass black holes (~1 billion light year away) detected by the two 4 km LIGO detectors

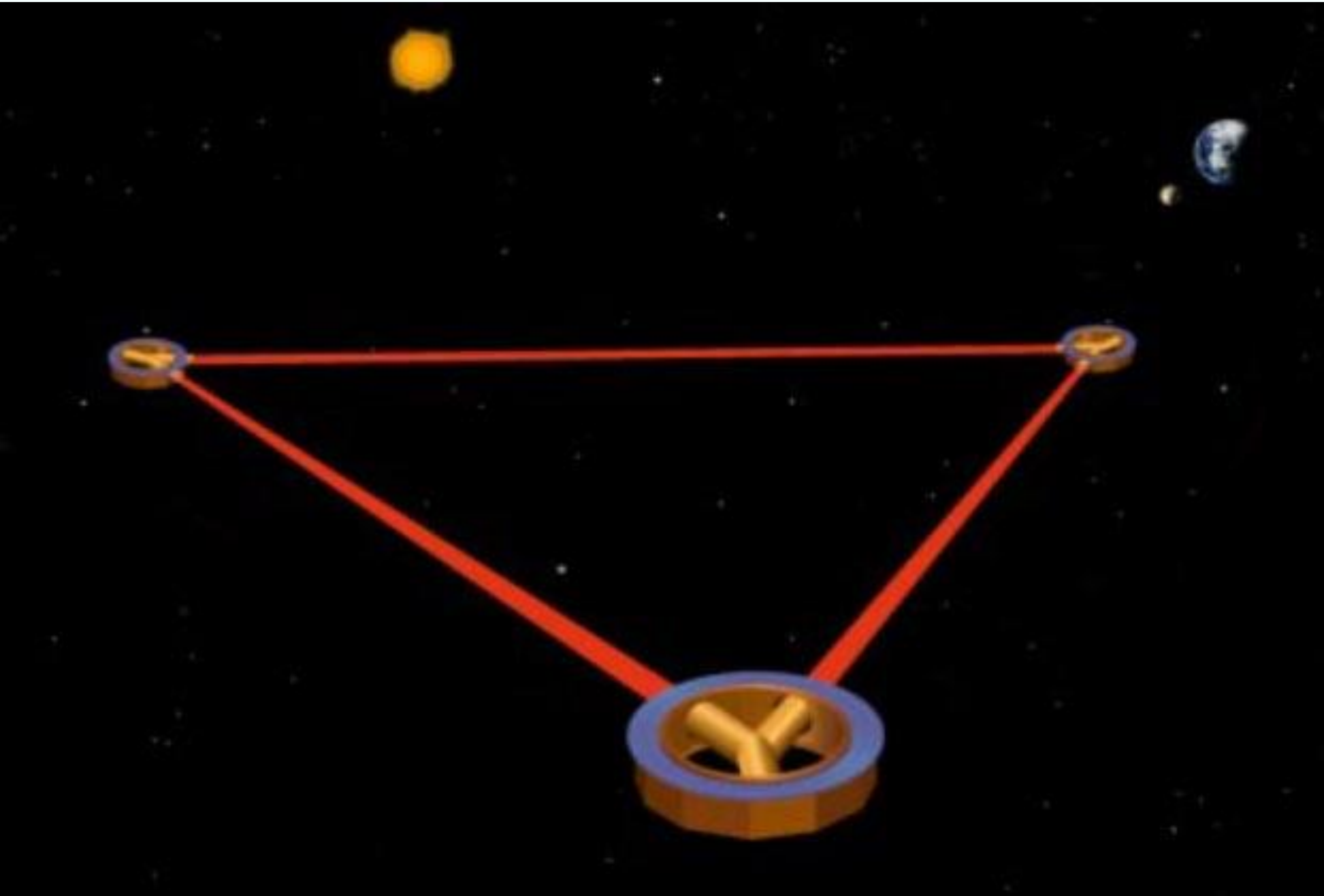


(~3000 km apart)

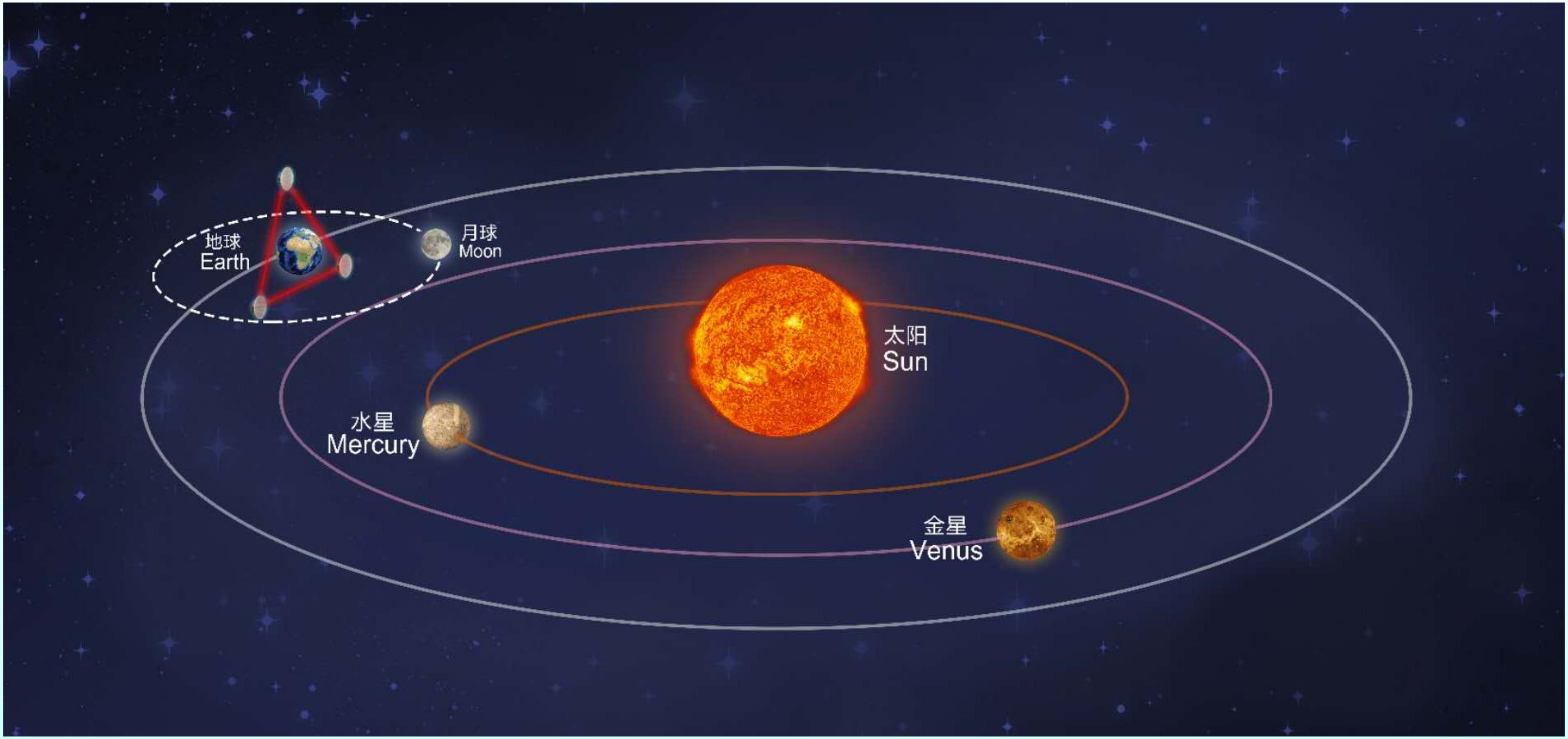
Hanford ~7ms after Livingston

LIGO Scientific Collaboration, Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)

LISA: Laser Interferometric Space Antenna



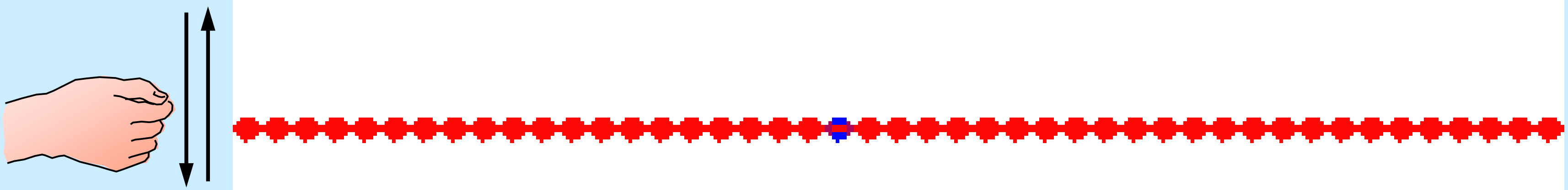
天琴空间引力波探测计划

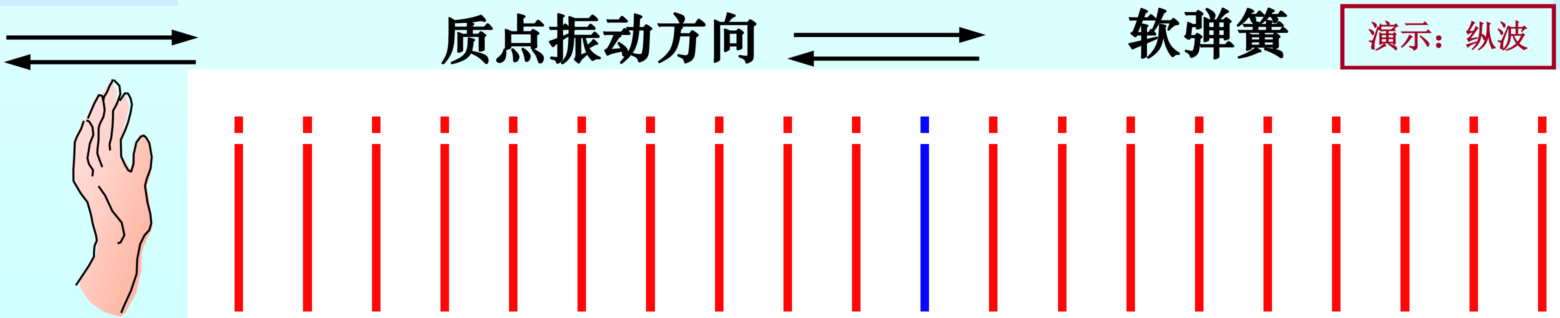


横波与纵波

横波：质点的振动方向与波的传播方向垂直

纵波：质点的振动方向与波的传播方向平行

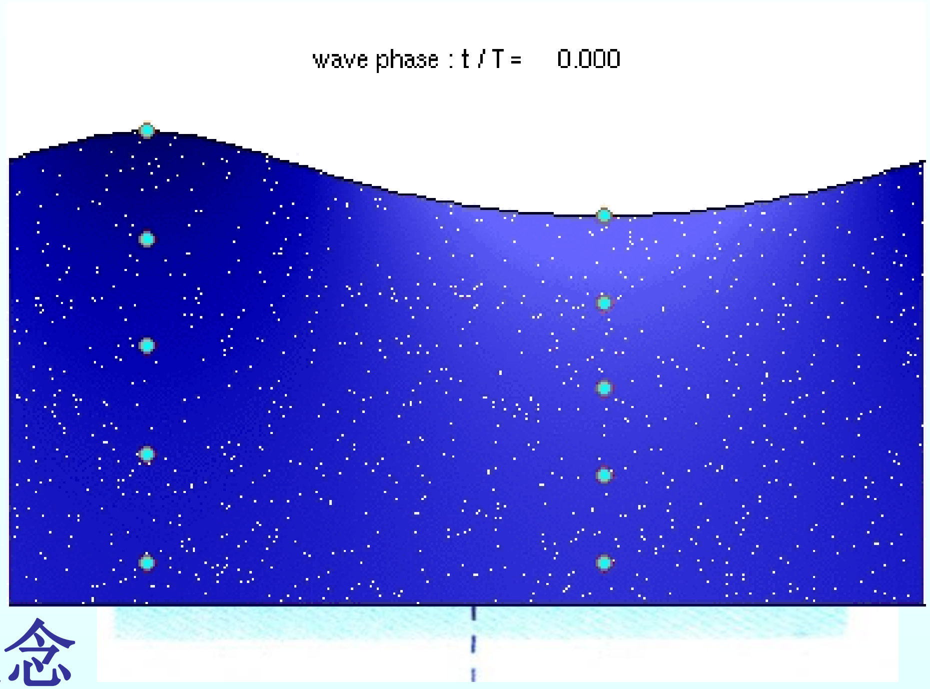




在机械波中，横波只能在固体中出现；纵波可在气体、液体和固体中出现。空气中的声波是纵波。

水面波是什么波?

——纵波与横波的合成



注意

波动与振动是两个不同概念

区别
- 振动研究一个质点的运动
- 波动研究大量有联系质点群振动的集体表现

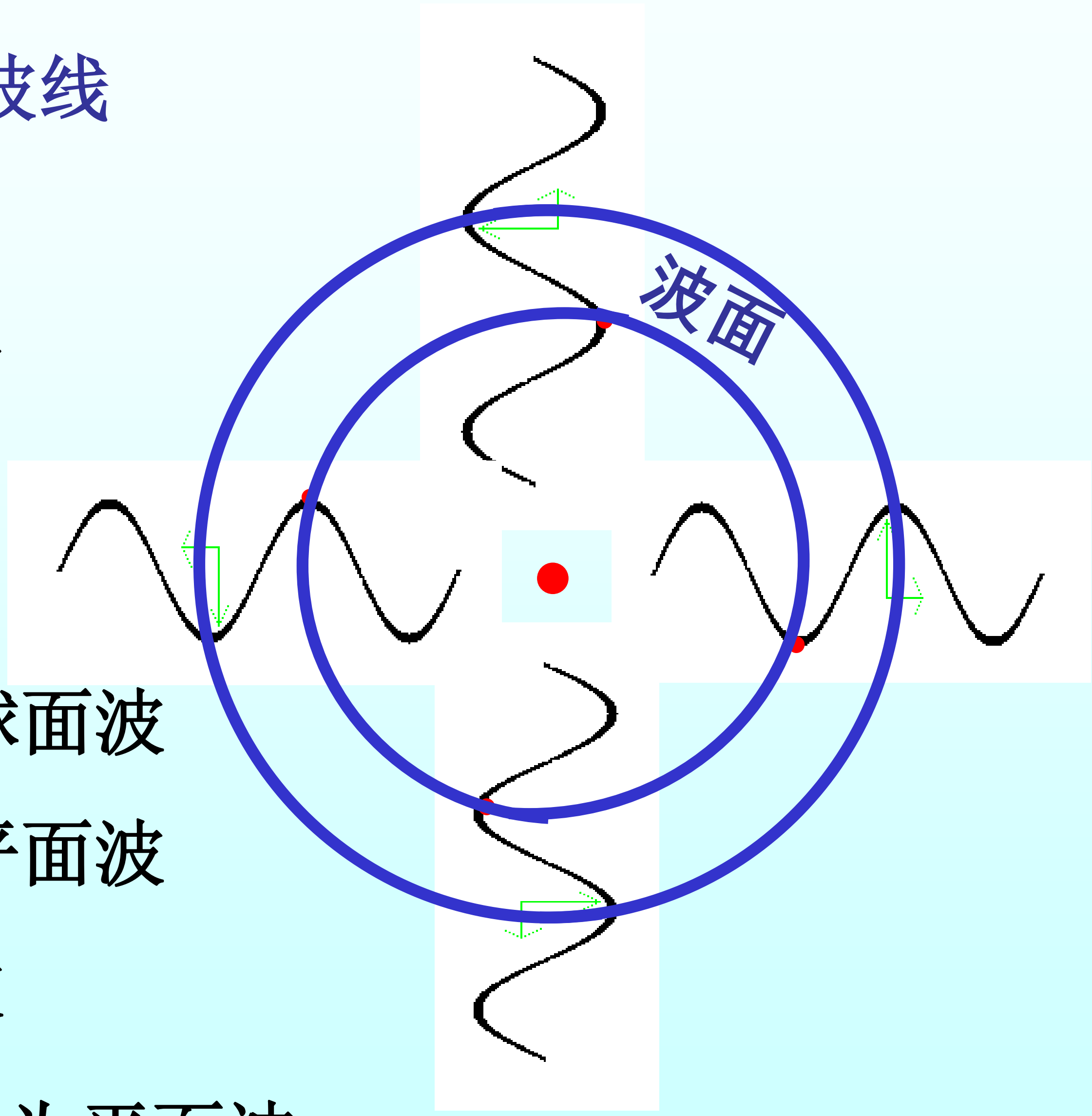
联系
- 振动是波动的根源
- 波动是振动的传播

二、波动的描述

1. 波阵面、波前与波线

（1）波阵面（波面）

振动位相相同的点组成的面



波面是球面称作球面波

波面是平面称作平面波

点波源产生球面波

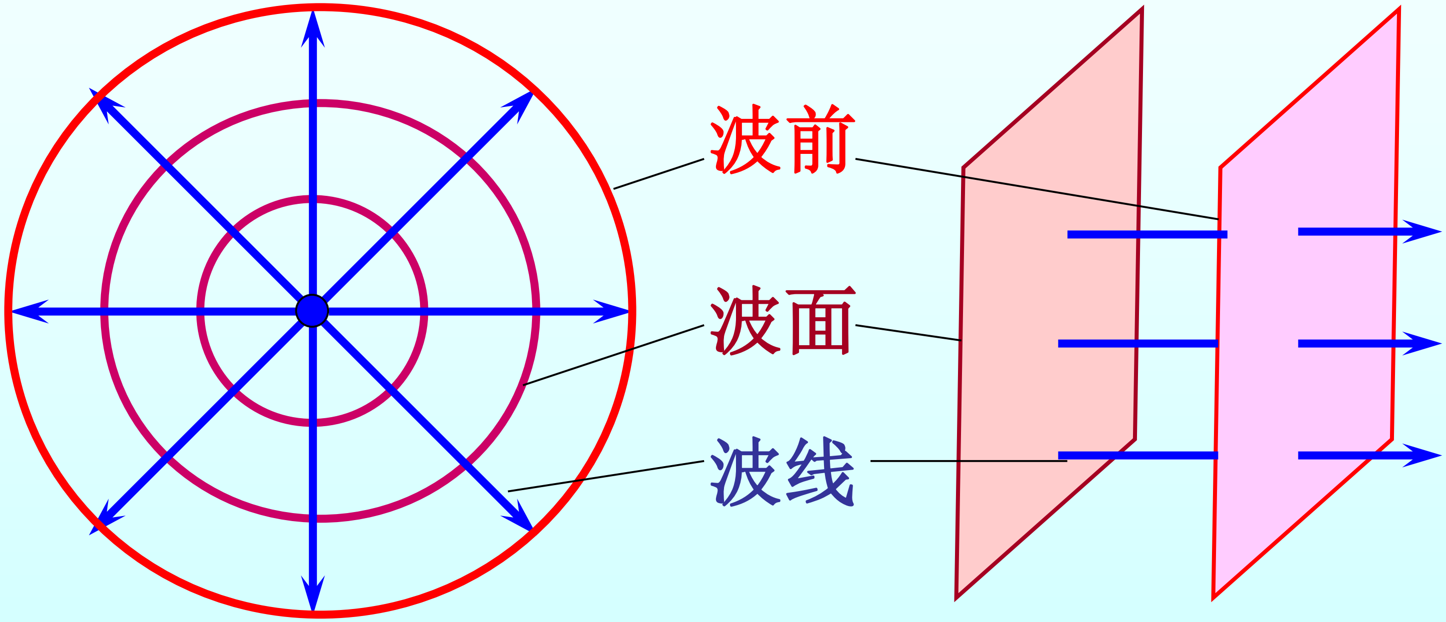
球面波在远处近似为平面波

（2）波前

最前头的波面，其位相与波源的位相相同。

（3）波线

发自波源，与波面垂直，指向波的传播方向的射线。



研究波动选择任意一条波线加以研究即可

最基本、最简单、最重要的是平面简谐波！

2. 描述波动的基本量

(1) 波长λ(wavelength): 在同一波线上位相差为**2π**的两个质元间的距离.

(2) 周期 (period) T 和频率(frequency) ν:

周期: 波前进一个波长的距离所需时间;

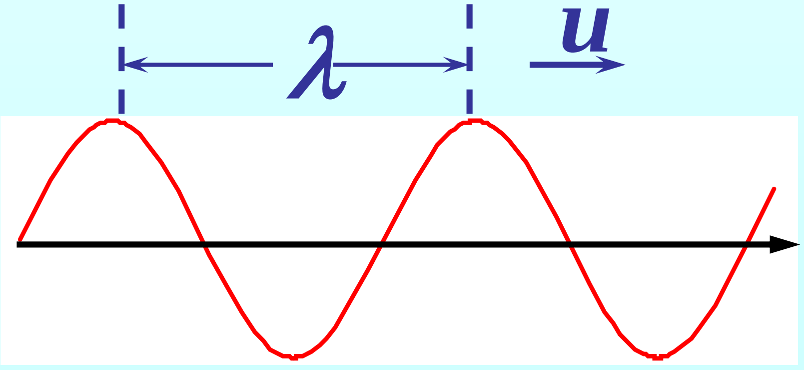
频率: 单位时间内通过波线上某点的完整波的数目.

(3) 波速或相速度u: 波在单位时间内传播的距离.

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu}$$

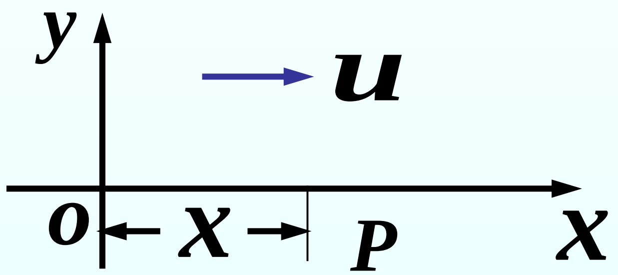
媒质定

波源定



三、平面简谐波

1. 波函数



以平面简谐波为例。

反映任意点任意时刻振动位移的方程为波函数。

设原点o振动方程为 $\boxed{y_o = A\cos(\omega t + \varphi)}$

任意 P点重复O点振动， O点振动经过传播时间

$\Delta t = \dfrac{x}{u}$ 传至P点，即 P 点 t 时刻的振动状态等于

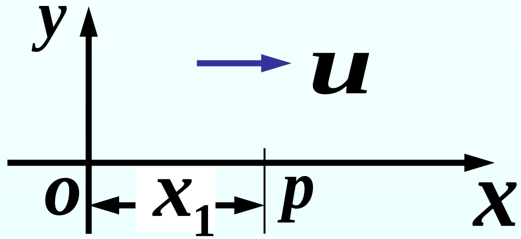
O点 $t - \dfrac{x}{u}$ 时刻的振动状态，故 P 点 t 时刻振动位移为

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] \text{ 波函数}}$$

2. 波函数的意义

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

y是 x、t 的函数, 分三种情况讨论：

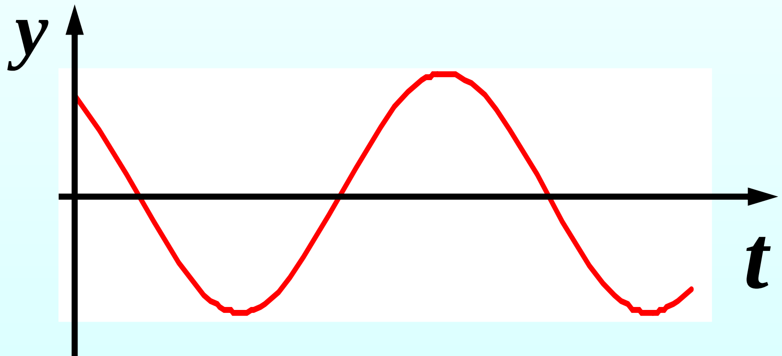


（1）x 一定时， $x = x_1$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x_1}{u}) + \varphi]$$

x_1处质点振动方程

$-\dfrac{\omega x_1}{u} + \varphi$为此点初位相

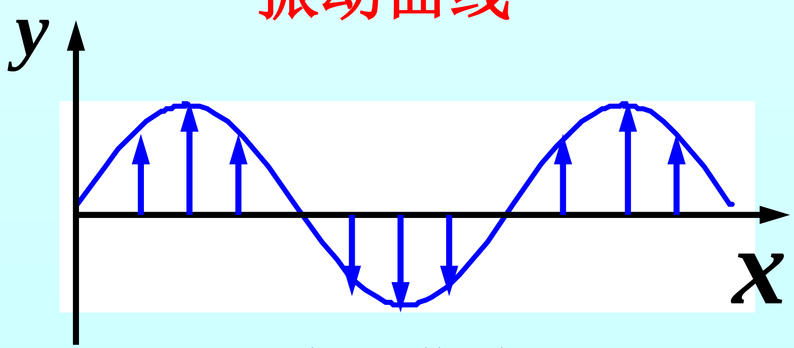


振动曲线

（2）t 一定时， $t = t_1$

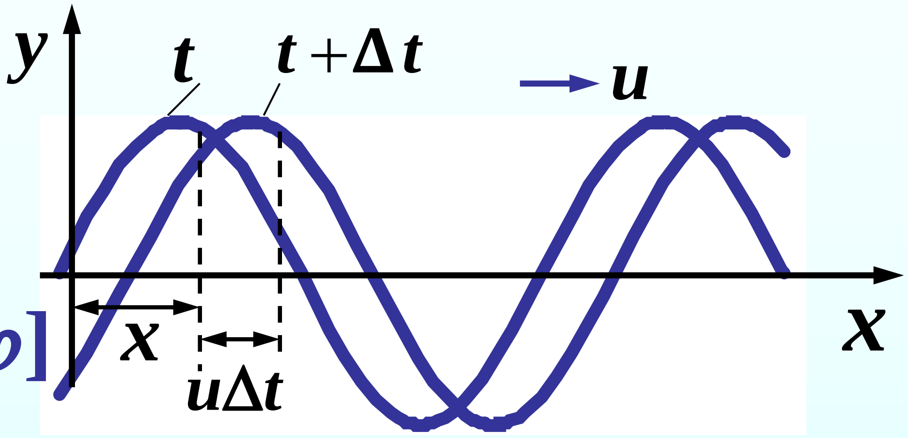
$$y = A\cos[\omega(t_1 - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

t_1时刻波形方程



波形曲线

（3）当 x，t 都变，方程表示不同时刻的波形，即波形的传播。



$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$= A\cos\left\{\omega\left[(t+\Delta t) - \frac{(x+u\Delta t)}{u}\right] + \varphi\right\}$$

表明

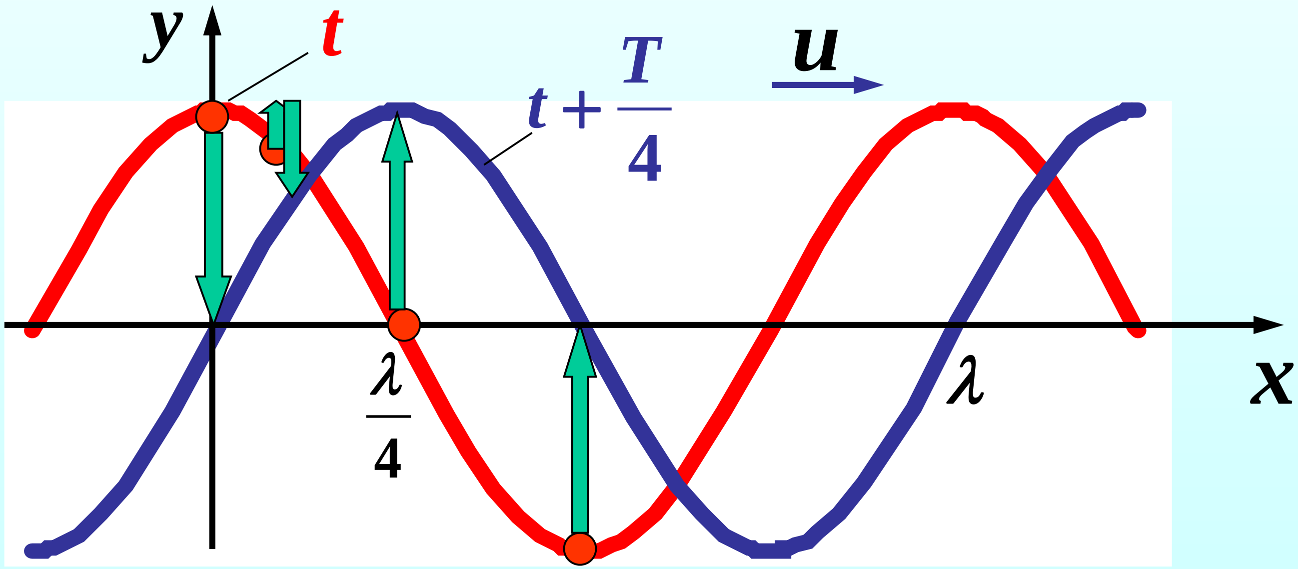
在 $t+\Delta t$ 时刻 $x+u\Delta t$ 处质点振动状态与 t 时刻 x 处质点振动状态相同，即振动状态在Δt 时间传播了$u\Delta t$ 距离，即波形以u速度传播.

若 $\Delta t = T$ 则 $u\Delta t = uT = \lambda$

$\Delta t = T/2$ $u\Delta t = uT/2 = \lambda/2$

$\Delta t = T/4$ $u\Delta t = uT/4 = \lambda/4$

$\vdots$ $\vdots$



总之：各点位移变化，才使波形变化！

3. 平面简谐波的时空周期性

（1）波函数的几种标准形式

$$\because \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad \lambda = uT = \frac{u}{\nu}$$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ 称波数

例1. 已知 $y = 0.05\cos(100\pi t - 5x)$ (SI 制)

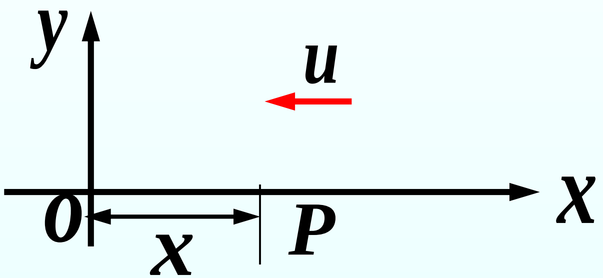
求 A、T、u、λ？

解： 比较得 $A = 0.05\,\text{m}$, $\dfrac{2\pi}{T} = 100\pi$, $T = \dfrac{1}{50}\,\text{s} = 0.02\,\text{s}$

$\dfrac{2\pi}{\lambda} = 5$, rad/m $\quad \lambda = \dfrac{2\pi}{5} \approx 1.26\,\text{m}$, $\quad u = \dfrac{\lambda}{T} \approx 63\,\text{m/s}$

（2）若波沿x反向传播，波函数如何？

已知： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$



解： P点比O点早振动$\dfrac{x}{u}$时间

即P点 t 时刻的振动状态与O点在 $t + \dfrac{x}{u}$ 时状态相同，

故

$$y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi]$$ **波函数**

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

"–"沿 x 正向
"+"沿 x 负向

任意点比参考点晚振动，减去两点间传播时间；
任意点比参考点早振动，加上两点间传播时间。

波函数的几种等价表式：

向x轴正向传播的波

(A) $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

(B) $y(x,t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi]$

(C) $y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\varphi]$

(D) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$

(E) $y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)+\varphi]$

(F) $y(x,t)=A\cos[k(x-ut)+\varphi]$

(G) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T})+\varphi]$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$u=\frac{\lambda}{T}$

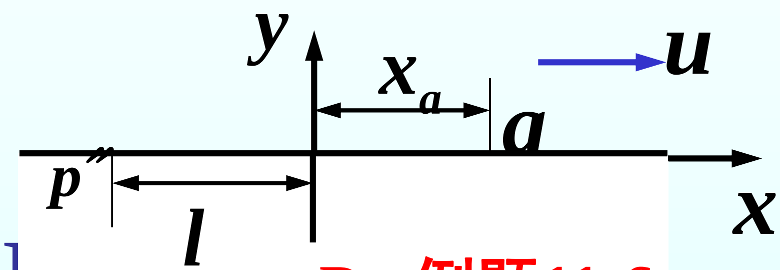
$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

也可写成复数形式 $y=Ae^{i(\omega t-kx+\varphi)}$（取实部）

以上讨论也适用于纵波。

例2. 已知波沿 x 正向传播, 波速为 u， $x=x_a$处振动方程为 $y_a = A\cos(\omega t+\varphi)$. 写出波函数?

解: $\Delta t = \dfrac{x-x_a}{u}$



P$_{86}$ 例题11-6

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x-x_a}{u})+\varphi]$$

若 $p \rightarrow p'$, $\Delta t = \dfrac{x_a - x}{u}$, 则 $(t+\dfrac{x_a - x}{u})$

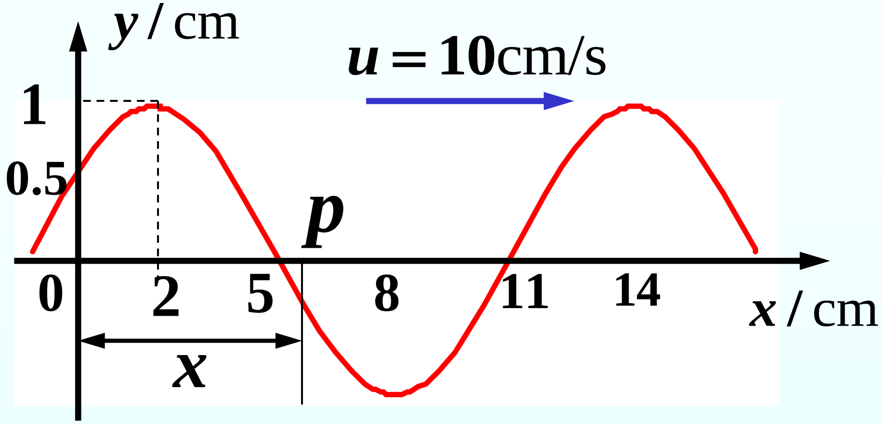
若 $p \rightarrow p''$,$\Delta t = \dfrac{-x+x_a}{u}$,则 $(t+\dfrac{-x+x_a}{u})$

（注意 x 有正负！）

若给距离 l 又如何? $\longrightarrow$ $(t+\dfrac{l+x_a}{u})$

例3. $t=0$ 波形如图

(1) 写出波函数。



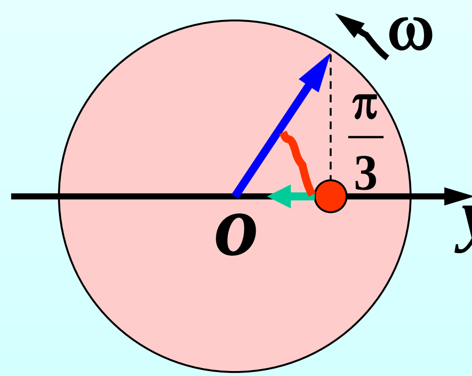
解: (1) 先写 O点振动方程

由图可知

$$A=1\ \text{cm},\quad \lambda=12\ \text{cm}$$

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{12}{10}=1.2\ \text{s}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{3}\ \text{rad/s},$$ 关键确定 $\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$

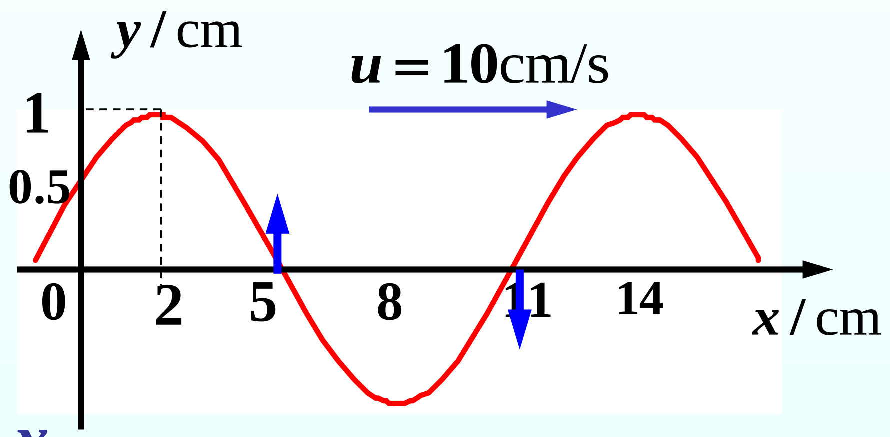


$$y_0=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

波函数

$$y=0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(t-\frac{x}{u}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(t-\frac{x}{0.10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$$

（2）求 $x_1=5\text{cm}, x_2=11\text{cm}$ 两处质点振动位相差。



解:（2）x_1处 $y_1=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]$

x_2处 $y_2=A\cos[\omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi_0]$

位相差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\omega}{u}(x_2-x_1)=-\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}(x_1-x_2)=\frac{2\pi}{0.12}\times(0.05-0.11)=-\pi$$

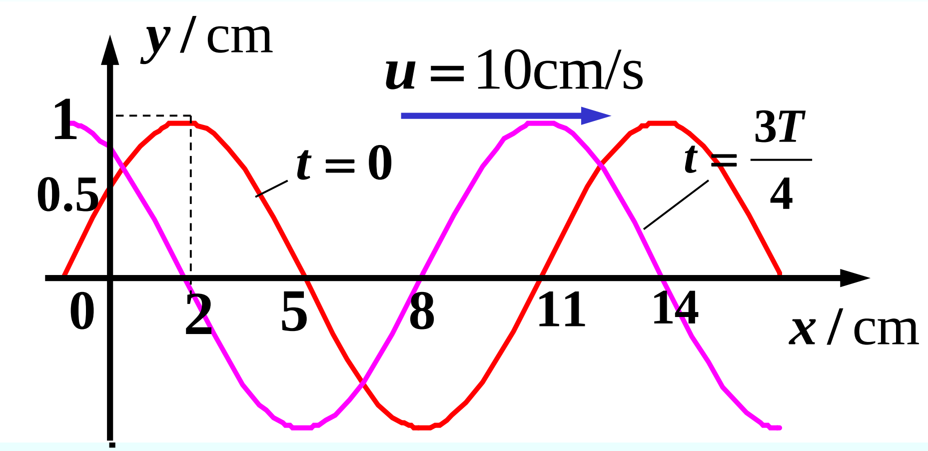
反位相

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

位相差

波程差

（3）画 $t=3T/4$ 时波形曲线，此刻 $x=2\,\text{cm}$ 处质点振动位移、速度、加速度？



位移

$$y=0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(t-\frac{x}{0.10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(\frac{3T}{4}-\frac{0.02}{0.10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=0.01\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

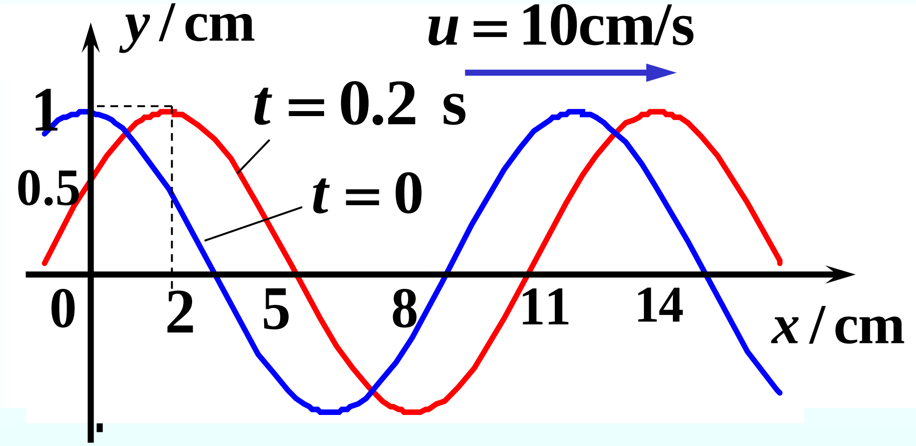
振动速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{0.05\pi}{3}\sin\left[\frac{5\pi}{3}\left(\frac{3T}{4}-\frac{0.02}{0.10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=-\frac{0.05\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{2}=\frac{0.05\pi}{3}=0.0523\ \text{m/s}$$

振动加速度

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\left(\frac{5\pi}{3}\right)^2\times 0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(\frac{3T}{4}-\frac{0.02}{0.10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=0$$

（4）若右图为 $t=0.2\text{ s}$ 波形，波函数如何？



解： 关键是求O点的初位相

$$t=0.2\text{ s}=\frac{T}{6}$$ 波形

$$\boxed{\omega t+\varphi_0=\frac{\pi}{3}} \rightarrow \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}+\varphi_0=\frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{\varphi_0=0}$$

$$y_o=0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \rightarrow y=0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(t-\frac{x}{0.10}\right)\right]$$

4. 波动方程

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin\omega(t - \frac{x}{u}) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{u}\sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos\omega(t - \frac{x}{u}) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2}\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

沿 x 方向一维波动微分方程

波速

沿 x 正向

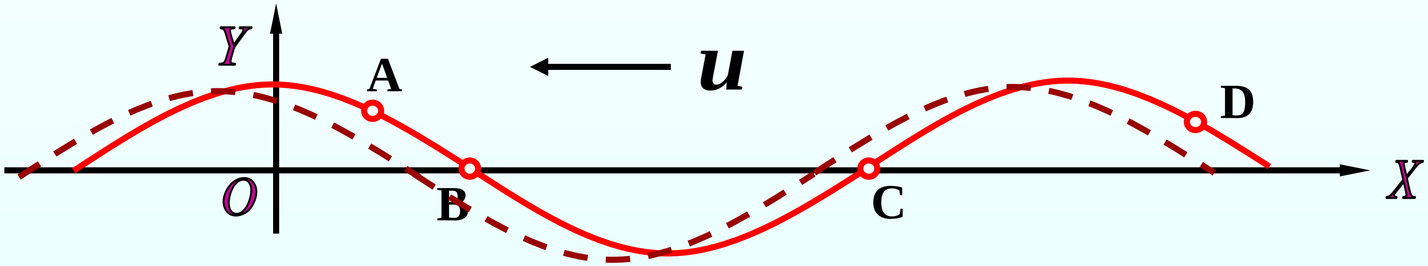
沿 x 负向

通解 $y(t,x) = F(t - \frac{x}{u}) + G(t + \frac{x}{u})$

三维空间 $\xi(x,y,z,t)$ → $\vec{E}$、$\vec{B}$ 电磁波

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad 或 \quad \nabla^2 \xi = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

例：以波速 u 沿 X 轴反方向传播的简谐波在 t 时刻的波形曲线如下图所示。则以下说法正确的是[　　]



（1）A点的速度大于零；

（2）B点静止不动；

（3）C点向下运动；

（4）D点的振动速度小于零。