第13章 均匀传输线

第十三章 均匀传输线

13.1 均匀传输线及其方程

集中参数电路：电路参数集中在元件上，理想导线相连。
分布参数电路：任何实际电路参数都是分布的。

两种常见情况需要考虑参数的分布性:

1. 电力输电线路，如线路长度为**500km,**
和波长相比不是很小，需要考虑参数分布性。

2. 高频电路，当 $f = 300\text{MHz}$ 时，波长为

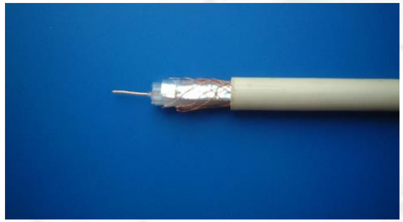
$$\lambda = v / f = \frac{3\times10^8}{300\times10^6} = 1\text{m}$$

所以高频电路需要考虑参数分布性。

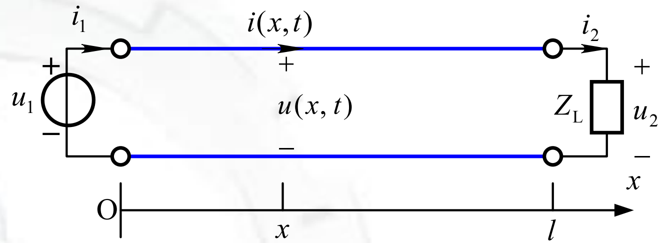
13.1 均匀传输线及其方程

➢ 均匀传输线（均匀线）

(a) 平行双线



(b) 同轴电缆线



含均匀传输线电路

均匀传输线沿线的电介质性质、导体截面和导体间的几何距离处处相同。

均匀线的分布参数（原参数）为：

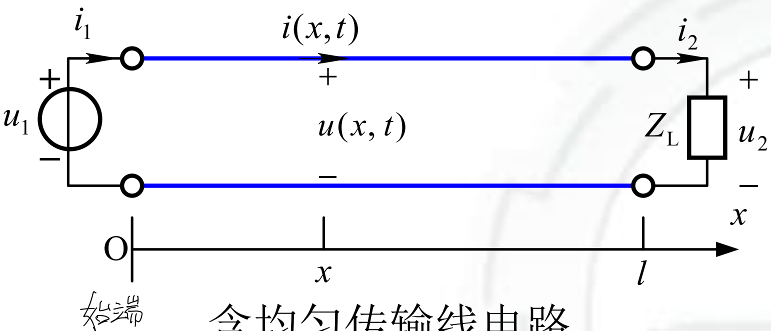
1. 单位长度(往返)电阻R_0,（单位：Ω/m）;

2. 单位长度(往返)上电感L_0, (单位：H/m);

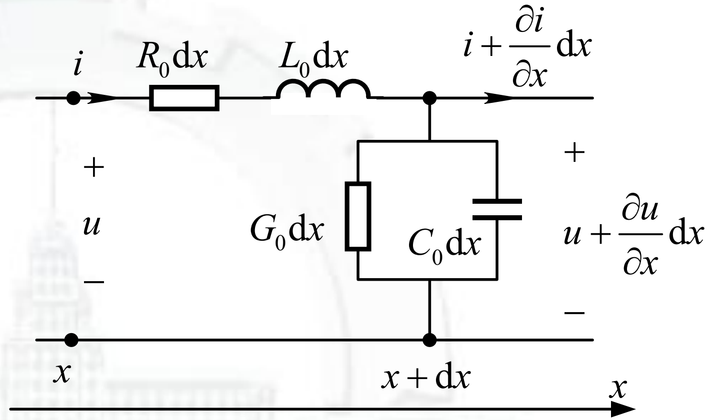
3. 单位长度两导体间电导G_0, (单位：S/m);

4. 单位长度两导体间电容C_0, (单位：F/m)

➢ 均匀传输线方程



含均匀传输线电路



微段等效电路

每个线元的基尔霍夫定律:

$$u-(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)=(R_0\mathrm{d}x)i+(L_0\mathrm{d}x)\frac{\partial i}{\partial t}$$ (KVL)

取一微段dx

$$i-(i+\frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x)=G_0\mathrm{d}x(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)+C_0\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial t}(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)$$ (KCL)

整理得

均匀线方程

（电报方程）

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=R_0 i+L_0\dfrac{\partial i}{\partial t}\\[2ex]-\dfrac{\partial i}{\partial x}=G_0 u+C_0\dfrac{\partial u}{\partial t}\end{cases}$$

第十三章 均匀传输线

13.1 均匀传输线及其方程

13.2 均匀传输线方程的正弦稳态解

13.3 均匀传输线上的行波

13.4 无损耗线、驻波

13.5 均匀传输线的集中参数等效电路

13.6 无损均匀线的波过程

13.2 均匀传输线方程的正弦稳态解

均匀传输线工作在正弦稳态时，沿线的电压电流是同一频率的正弦时间函数，因此，可以用向量法分析沿线的电压和电流。

$$u = u(x,t) \Longrightarrow \dot{U} = \dot{U}(x)$$

$$i = i(x,t) \Longrightarrow \dot{I} = \dot{I}(x)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}\dot{U}(x)}{\mathrm{d}x} = (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\dot{I}(x) = Z_0 \dot{I}(x) \\ -\dfrac{\mathrm{d}\dot{I}(x)}{\mathrm{d}x} = (G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)\dot{U}(x) = Y_0 \dot{U}(x) \end{cases} \quad (1)$$

$Z_0 = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0$ 为单位长度的阻抗

$Y_0 = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0$ 为单位长度的导纳

13.2 均匀传输线方程的正弦稳态解

（1）两边再对x求导

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{U}(x)}{\mathrm{d}x^2}=Z_0Y_0\dot{U}(x)=\gamma^2\dot{U}(x) \qquad (2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{I}(x)}{\mathrm{d}x^2}=Z_0Y_0\dot{I}(x)=\gamma^2\dot{I}(x) \qquad (3)$$

$$\gamma=\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega C_0)}=\alpha+\mathrm{j}\beta$$

γ：传播常数，单位：**1/m**

α：衰减常数，单位:Np/m

β：相位常数，单位：**rad/m**

（2）二阶微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\dot{U}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\gamma^2\dot{U}(x) & (2)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2\dot{I}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\gamma^2\dot{I}(x) & (3)\end{cases} \xrightarrow{\text{通解}} \begin{cases}\dot{U}(x)=A_1\mathrm{e}^{-\gamma x}+A_2\mathrm{e}^{\gamma x}\\[2ex] \dot{I}(x)=B_1\mathrm{e}^{-\gamma x}+B_2\mathrm{e}^{\gamma x}\end{cases}$$

特解方程：$\lambda^2=\gamma^2$

线路的传播常数

13.2 均匀传输线方程的正弦稳态解

由 $-\dfrac{\mathrm{d}\dot{U}(x)}{\mathrm{d}x}=Z_0\dot{I}(x)$ （1） $\Rightarrow$ $\dot{I}(x)=-\dfrac{1}{Z_0}\dfrac{\mathrm{d}\dot{U}(x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\gamma}{Z_0}(A_1\mathrm{e}^{-\gamma x}-A_2\mathrm{e}^{\gamma x})$

令 $Z_c=\dfrac{Z_0}{\gamma}=\dfrac{R_0+\mathrm{j}\omega L_0}{\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega C_0)}}=\sqrt{\dfrac{R_0+\mathrm{j}\omega L_0}{G_0+\mathrm{j}\omega C_0}}$

Z_c 称为特性阻抗或波阻抗

$$\dot{I}(x)=B_1\mathrm{e}^{-\gamma x}+B_2\mathrm{e}^{\gamma x}=\frac{A_1}{Z_c}\mathrm{e}^{-\gamma x}-\frac{A_2}{Z_c}\mathrm{e}^{\gamma x}$$

根据边界条件可以确定积分系数 A_1 和 A_2

（3）在始端 $x=0$ 处，$\dot U=\dot U_1 \quad \dot I=\dot I_1$

$$\begin{cases}\dot U(x)=A_1\mathrm{e}^{-\gamma x}+A_2\mathrm{e}^{\gamma x}\\ \dot I(x)=\dfrac{A_1}{Z_c}\mathrm{e}^{-\gamma x}-\dfrac{A_2}{Z_c}\mathrm{e}^{\gamma x}\end{cases}\xrightarrow[x=0]{\text{令}}\begin{cases}\dot U_1=A_1+A_2\\ \dot I_1=\dfrac{A_1}{Z_c}-\dfrac{A_2}{Z_c}\end{cases}\xrightarrow{\text{解得}}\begin{cases}A_1=\dfrac{1}{2}(\dot U_1+Z_c\dot I_1)\\ A_2=\dfrac{1}{2}(\dot U_1-Z_c\dot I_1)\end{cases}$$

$$\dot U(x)=\frac{1}{2}(\dot U_1+Z_c\dot I_1)\mathrm{e}^{-\gamma x}+\frac{1}{2}(\dot U_1-Z_c\dot I_1)\mathrm{e}^{\gamma x}$$

$$=\dot U_1\cdot\frac{\mathrm{e}^{\gamma x}+\mathrm{e}^{-\gamma x}}{2}-Z_c\dot I_1\cdot\frac{\mathrm{e}^{\gamma x}-\mathrm{e}^{-\gamma x}}{2}$$

$$\dot I(x)=\frac{1}{Z_c}\cdot\frac{1}{2}(\dot U_1+Z_c\dot I_1)\mathrm{e}^{-\gamma x}-\frac{1}{Z_c}\cdot\frac{1}{2}(\dot U_1-Z_c\dot I_1)\mathrm{e}^{\gamma x}$$

$$=\dot I_1\cdot\frac{\mathrm{e}^{\gamma x}+\mathrm{e}^{-\gamma x}}{2}-\frac{\dot U_1}{Z_c}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\gamma x}-\mathrm{e}^{-\gamma x}}{2}$$

用双曲函数表示为

$$\begin{cases}\dot U(x)=\dot U_1\cosh\gamma x-\dot I_1 Z_c\sinh\gamma x\\ \dot I(x)=-\dfrac{\dot U_1}{Z_c}\sinh\gamma x+\dot I_1\cosh\gamma x\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot U(x)\\ \dot I(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma x & -Z_c\sinh\gamma x\\ -\dfrac{1}{Z_c}\sinh\gamma x & \cosh\gamma x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix}$$

将传输线看成一个二端口网络

（4）线路长度为 l，则线路终端电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$ 为

$$\begin{cases}\dot{U}_2=\dot{U}_1\cosh\gamma l-\dot{I}_1 Z_c\sinh\gamma l\\ \dot{I}_2=-\dfrac{\dot{U}_1}{Z_c}\sinh\gamma l+\dot{I}_1\cosh\gamma l\end{cases}\quad(1)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}(x)\\ \dot{I}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma x & -Z_c\sinh\gamma x\\ -\dfrac{1}{Z_c}\sinh\gamma x & \cosh\gamma x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}$$

若已知 $\dot{U}_2$ 和 $\dot{I}_2$，可求 $\dot{U}_1$和 $\dot{I}_1$ 写成矩阵形式则为

$$\begin{cases}\dot{U}_1=\dot{U}_2\cosh\gamma l+\dot{I}_2 Z_c\sinh\gamma l\\ \dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh\gamma l+\dot{I}_2\cosh\gamma l\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma l & Z_c\sinh\gamma l\\ \dfrac{1}{Z_c}\sinh\gamma l & \cosh\gamma l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

已知终端电压、电流，距终端 x' 处的电压、电流为

$$\begin{cases}\dot{U}(x')=\dot{U}_2\cosh\gamma x'+\dot{I}_2 Z_c\sinh\gamma x'\\ \dot{I}(x')=\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh\gamma x'+\dot{I}_2\cosh\gamma x'\end{cases}$$

例：设某超高压输电线(三相)的参数为：电阻 $R_0 = 0.075\Omega/\text{km}$，线路感抗 $X_0 = 0.401\Omega/\text{km}$，等效容纳 $B_0 = 2.75\times10^{-6}\text{S}/\text{km}$，忽略漏电导。输电距离为 300km,如线路终端电压保持在220kV正弦电压下,输出三相功率150MW，功率因数为0.98(感性)，试计算线路始端的电压、电流和输电的效率.

【解】 首先计算线路的传播常数和波阻抗

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + \text{j}\omega L_0)(G_0 + \text{j}\omega C_0)} = \sqrt{(0.075 + \text{j}0.401)\times \text{j}2.75\times10^{-6}} = 1.06\times10^{-3}\,\text{e}^{\text{j}84.7^\circ}\text{km}^{-1}$$

$$Z_\text{c} = \sqrt{\frac{R_0 + \text{j}\omega L_0}{G_0 + \text{j}\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0.075 + \text{j}0.401}{\text{j}2.75\times10^{-6}}} = 385\text{e}^{-\text{j}5.3^\circ}\Omega$$

取终端的相电压作为参考正弦量 $\dot{U}_2 = \dfrac{220}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 127\angle 0^\circ\text{kV}$

根据输出功率可以计算终端相电流

$$I_2 = \frac{P_2}{3U_2\cos\varphi_2} = \frac{150\text{MW}}{3\times127\text{kV}\times0.98} = 0.401\text{kA}$$

$\varphi_2 = \arccos 0.98 = 11.3°$ $\qquad \dot{I}_2 = I_2 e^{-j\varphi_2} = 0.401e^{-j11.3°}\text{kA}$

计算双曲函数

$$\gamma l = 1.06\times 10^{-3} e^{j84.7°} \times 300 = 0.318e^{j84.7°} = 0.0294 + j0.317$$

$$e^{\gamma l} = e^{0.0294+j0.317} = 1.03e^{j18.2°} \qquad e^{-\gamma l} = e^{-(0.0294+j0.317)} = 0.97e^{-j18.2°}$$

$$\cosh\gamma l = 0.5\times(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = 0.5\times(1.03e^{j18.2°} + 0.97e^{-j18.2°}) = 0.95 + j0.009$$

$$\sinh\gamma l = 0.5\times(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0.5\times(1.03e^{j18.2°} - 0.97e^{-j18.2°}) = 0.0285 + j0.312$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2\cosh\gamma l + Z_c\dot{I}_2\sinh\gamma l$$

$$= 127\times(0.95 + j0.009) + 385e^{-j5.3°}\times 0.401e^{-j11.3°}\times(0.0285 + j0.312)$$

$$= 121 + j1.15 + 48.3e^{j68.2°} = (139 + j46)\text{kV} = 146.5e^{j18.3°}\text{kV}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2\cosh\gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh\gamma l = 0.377e^{j5.3}\text{kA}$$

$$U_{L1} = \sqrt{3}U_1 = \sqrt{3}\times 146.5 = 254\text{kV}$$

$$P_1 = 3U_1I_1\cos\varphi_1 = 3\times 146.5\times 0.377\times\cos(18.3° - 5.3°) = 161\text{MW}$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{150}{161} = 0.932 = 93.2\%$$

13.1 均匀传输线及其方程

13.2 均匀传输线方程的正弦稳态解

13.3 均匀传输线上的行波

13.4 无损耗线、驻波

13.5 均匀传输线的集中参数等效电路

13.6 无损均匀线的波过程

13.3 均匀传输线上的行波

通解方程

$$
\begin{cases}
\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) \\
\dot{I}(x) = \dfrac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \dfrac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x)
\end{cases}
$$

$$
\dot{U}^+(x) = A_1 e^{-\gamma x} = U' e^{j\psi'} e^{-(\alpha + j\beta)x} = U' e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi')}
$$

其中，传播常数 $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$

衰减常数 单位:Np/m

相位常数，单位：rad/m

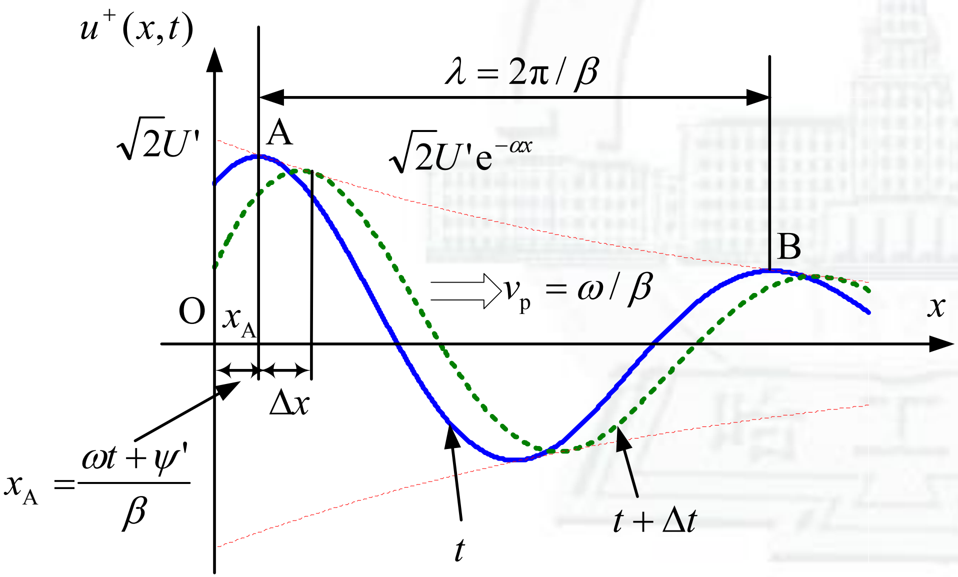
瞬时值 $u^+(x,t) = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}^+(x) \cdot e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}U' e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\omega t - \beta x + \psi')}]$

$= \sqrt{2}U' e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi')$

瞬时值 $\boxed{u^{+}(x,t)=\sqrt{2}U'\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x+\psi')}$

在位置 x 处，电压 u^{+} 为一正弦函数;

在 t 为定值的瞬间，电压u^{+}为随位置x变化幅值衰减的正弦函数.



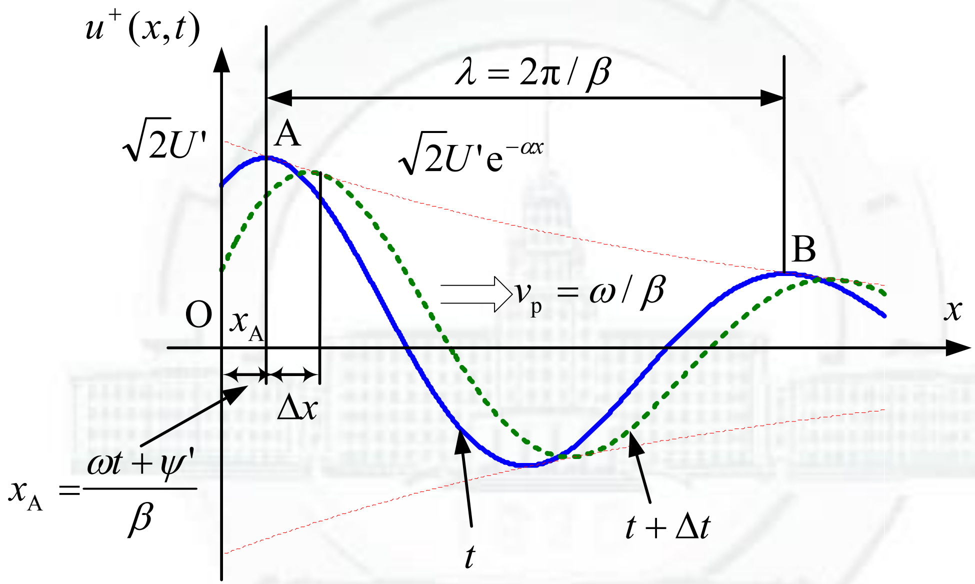
相位 $\theta=\omega t-\beta x+\psi'$

为定值的点，随时间t的延续，

向x正向移动，移动速度

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{\beta}$$ → 相速

由于$u^+(x,t)$是向+x方向传播的 —— 正向行波



行波相位相差2π的距离称为波长，记为λ

$$\lambda = v_p T = \frac{\omega}{\beta} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta}$$ 波长是一个周期内行波前进的距离

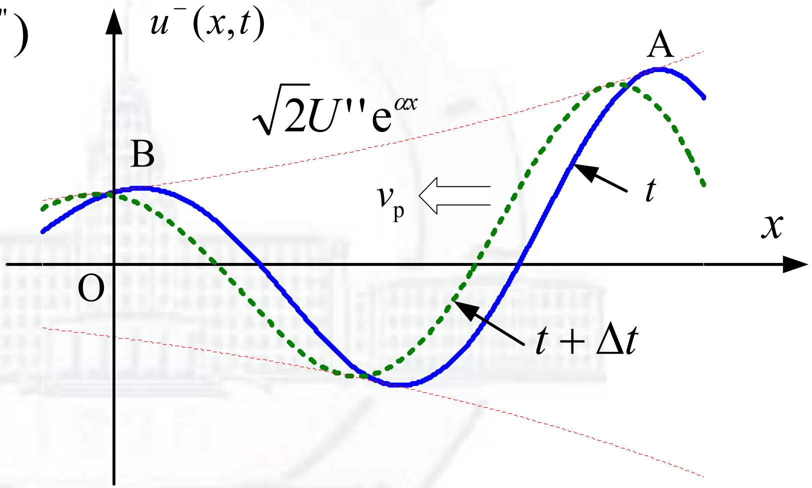
另一个分量 $\dot{U}^{-}(x) = \dot{U}_2'' e^{\gamma x} = U'' e^{j\psi''} e^{(\alpha + j\beta)x}$

对应的瞬时值

$$u^{-}(x,t) = \sqrt{2} U'' e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi'')$$

等相位点移动的位置

$$\Delta x = -\frac{\omega}{\beta} \Delta t$$



它是一个反向行波

所以线路上的电压是正、反向行波的叠加。

$$u(x,t) = u^{+}(x,t) + u^{-}(x,t)$$
$$= \sqrt{2} U' e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi') + \sqrt{2} U'' e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi'')$$

13.3 均匀传输线上的行波

通解方程

$$\begin{cases} \dot{U}(x)=A_1\mathrm{e}^{-\gamma x}+A_2\mathrm{e}^{\gamma x}=\dot{U}^+(x)+\dot{U}^-(x) \\ \dot{I}(x)=\dfrac{A_1}{Z_\mathrm{c}}\mathrm{e}^{-\gamma x}-\dfrac{A_2}{Z_\mathrm{c}}\mathrm{e}^{\gamma x}=\dot{I}^+(x)-\dot{I}^-(x) \end{cases}$$

$$\dot{I}^+(x)=\frac{\dot{U}^+(x)}{Z_\mathrm{c}} \qquad \dot{I}^-(x)=\frac{\dot{U}^-(x)}{Z_\mathrm{c}}$$

$$\frac{\dot{U}^+(x)}{\dot{I}^+(x)}=\frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{I}^-(x)}=Z_\mathrm{c}=|Z_\mathrm{c}|\angle\varphi_\mathrm{c}$$

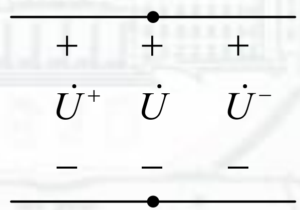
即波阻抗等于电压正向行波与电流正向行波之比或电压反向行波与电流反向行波之比。

电流方程

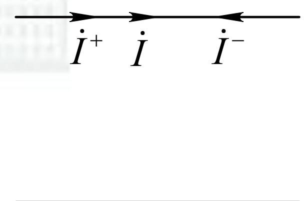
$$i(x,t)=i^+(x,t)-i^-(x,t)$$

$$=\sqrt{2}\frac{U'}{|Z_\mathrm{c}|}\mathrm{e}^{-ax}\cos(\omega t-\beta x+\psi'-\varphi_\mathrm{c})$$

$$-\sqrt{2}\frac{U''}{|Z_\mathrm{c}|}\mathrm{e}^{ax}\cos(\omega t+\beta x+\psi''-\varphi_\mathrm{c})$$



(a)



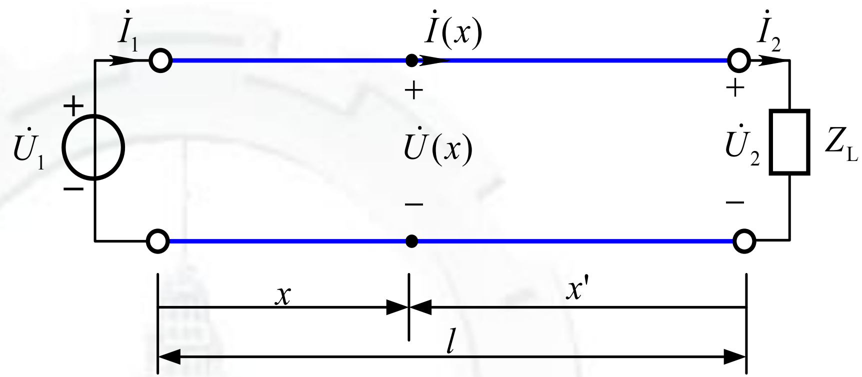
(b)

电压和电流行波的参考方向

波的反射与终端匹配

$$\dot{U}(x)=\dot{U}^{+}(x)+\dot{U}^{-}(x)$$

$$\dot{I}(x)=\frac{\dot{U}^{+}(x)}{Z_c}-\frac{\dot{U}^{-}(x)}{Z_c}=\dot{I}^{+}(x)-\dot{I}^{-}(x)$$



在线路终端

$$\begin{cases}\dot{U}_2=\dot{U}(x)|_{x=l}=\dot{U}_2^{+}+\dot{U}_2^{-}\\ \dot{I}_2=\dot{I}(x)|_{x=l}=\dot{I}_2^{+}-\dot{I}_2^{-}\end{cases}$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=\frac{\dot{U}_2^{+}+\dot{U}_2^{-}}{\dot{I}_2^{+}-\dot{I}_2^{-}}=\frac{Z_c\dot{I}_2^{+}+Z_c\dot{I}_2^{-}}{\dot{I}_2^{+}-\dot{I}_2^{-}}=Z_L$$

$$\frac{\dot{I}_2^{-}}{\dot{I}_2^{+}}=\frac{\dot{U}_2^{-}/Z_c}{\dot{U}_2^{+}/Z_c}=\frac{\dot{U}_2^{-}}{\dot{U}_2^{+}}=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}=N_2$$

N_2 称为终端反射系数

当 $Z_L=Z_c \rightarrow N_2=0$

$$\begin{cases}\dot{I}_2^{-}=N_2\dot{I}_2^{+}=0\\ \dot{U}_2^{-}=N_2\dot{U}_2^{+}=0\end{cases}$$

电压和电流的反向行波为零

称为负载与传输线匹配

$Z_L\rightarrow\infty,\ N_2=1$ 全反射

13.3 均匀传输线上的行波

当 $Z_L \neq Z_c$ 时

传输线上既有正向行波，又有反向行波。

因此可以认为反向行波的存在是由于正向行波在传输线终端受到与线路波阻抗不匹配的负载而引起的。

反向行波又称为反射波 ，正向行波又称为入射波。

自然功率

当 $Z_L = Z_c$ 时

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 e^{-\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_1}{Z_c} e^{-\gamma x} = \dot{I}_1 e^{-\gamma x}$$

线路上任何一处电压和电流相量之比都等于线路的波阻抗 Z_c

终端负载吸收的功率称为均匀传输线的自然功率：

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_c = U_1 I_1 e^{-2\alpha l} \cos\varphi_c$$

有效值（衰减）

$$\begin{cases} U(x) = U_1 e^{-\alpha x} \\ I(x) = I_1 e^{-\alpha x} \end{cases}$$

始端输入功率为 $P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_c$

线路在匹配工作下的输电效率为 $\eta = \dfrac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}$

➢ 实验测试波阻抗Z_c和传播常数γ

传输线方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh\gamma l + \dot{I}_2 Z_c \sinh\gamma l \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh\gamma l + \dot{I}_2 \cosh\gamma l \end{cases}$$

传输线始端的输入阻抗

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cosh\gamma l + \dot{I}_2 Z_c \sinh\gamma l}{\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh\gamma l + \dot{I}_2 \cosh\gamma l} = Z_c \frac{Z_L \cosh\gamma l + Z_c \sinh\gamma l}{Z_L \sinh\gamma l + Z_c \cosh\gamma l}$$

当终端短路和开路时，测量始端的电压和电流

$$Z_{is} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{|Z_L|=0} = Z_c \tanh\gamma l \qquad Z_{io} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{|Z_L|\to\infty} = \frac{Z_c}{\tanh\gamma l}$$

解得 $$Z_c = \sqrt{Z_{io} Z_{is}}$$

$$\tanh\gamma l = \sqrt{Z_{is} / Z_{io}}$$

13.3 均匀传输线上的行波

为了确定一条200km长的电话线参数，在角频率 $\omega = 5000\,\mathrm{rad/s}$ 的情况下测得终端开路时始端的输入阻抗 $Z_{io} = 747\mathrm{e}^{-\mathrm{j}27.7^\circ}\,\Omega$ ，终端短路时始端的输入阻抗 $Z_{is} = 516\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.6^\circ}\,\Omega$ 求线路波阻抗 Z_c 和传播常数 γ，并进一步确定线路参数 R_0、L_0、G_0 和 C_0。设波速近似等于光速。

【解】 $Z_c = \sqrt{Z_{io}Z_{is}} \approx 621\mathrm{e}^{-\mathrm{j}13.6^\circ}\,\Omega$ $\tanh\gamma l = \sqrt{\dfrac{Z_{is}}{Z_{io}}} \approx 0.83\mathrm{e}^{\mathrm{j}14.1^\circ}$

$$\tanh\gamma l = \frac{\mathrm{e}^{\gamma l} - \mathrm{e}^{-\gamma l}}{\mathrm{e}^{\gamma l} + \mathrm{e}^{-\gamma l}} \approx 0.83\mathrm{e}^{\mathrm{j}14.1^\circ} \qquad \mathrm{e}^{\gamma l} - \mathrm{e}^{-\gamma l} = (\mathrm{e}^{\gamma l} + \mathrm{e}^{-\gamma l}) \times 0.83\mathrm{e}^{\mathrm{j}14.1^\circ}$$

将上式两端乘以 $\mathrm{e}^{\gamma l}$ $2\gamma l = \ln\left(\dfrac{1 + 0.83\mathrm{e}^{\mathrm{j}14.1^\circ}}{1 - 0.83\mathrm{e}^{\mathrm{j}14.1^\circ}}\right) = 1.866 + \mathrm{j}(52.1^\circ + 360^\circ)$

在 $\omega = 5000\,\mathrm{rad/s}$ 的波长为：

$$\lambda = v/f = 2\pi v/\omega = 2\pi \times 3 \times 10^5\,(\mathrm{km/s})/(5000\,\mathrm{s}^{-1}) \approx 377\,\mathrm{km}$$

线路长度为200km $\rightarrow$ $180^\circ < \beta l < 360^\circ$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

$$2\gamma l = 1.866 + \mathrm{j}(52.1^\circ + 360^\circ)$$

$$2\alpha l = 1.866 \Rightarrow \alpha = \frac{1.866}{2\times 200\,\mathrm{km}} = 0.00466\,\mathrm{km}^{-1}$$

$$2\beta l = 52.1^\circ + 360^\circ = 412.1^\circ = 7.189\,\mathrm{rad} \Rightarrow \beta = \frac{7.189\,\mathrm{rad}}{2\times 200\,\mathrm{km}} = 0.018\,\mathrm{rad/km}$$

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = (0.00466 + \mathrm{j}0.018)\,\mathrm{km}^{-1} = 0.0186\mathrm{e}^{\mathrm{j}75.5^\circ}\,\mathrm{km}^{-1}$$

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)} \qquad Z_\mathrm{c} = \sqrt{\frac{R_0 + \mathrm{j}\omega L_0}{G_0 + \mathrm{j}\omega C_0}}$$

$$\gamma Z_\mathrm{c} = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0 = 0.0186\mathrm{e}^{\mathrm{j}75.5^\circ}\,\mathrm{km}^{-1} \times 621\mathrm{e}^{-\mathrm{j}13.6^\circ}\,\Omega$$

$$= 11.55\mathrm{e}^{\mathrm{j}61.9^\circ}\,\Omega/\mathrm{km} = (5.4 + \mathrm{j}10.21)\,\Omega/\mathrm{km}$$

$$\Rightarrow R_0 = 5.4\,\Omega/\mathrm{km} \qquad L_0 = \frac{10.21\,\Omega/\mathrm{km}}{5000\,\mathrm{s}^{-1}} = 0.002\,\mathrm{H/km}$$

$$\frac{\gamma}{Z_\mathrm{c}} = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0 = \frac{0.0186\mathrm{e}^{\mathrm{j}75.5^\circ}\,\mathrm{km}^{-1}}{621\mathrm{e}^{-\mathrm{j}13.6^\circ}\,\Omega} = (4.1\times 10^{-7} + \mathrm{j}3\times 10^{-5})\,\mathrm{S/km}$$

$$\Rightarrow G_0 = 4.1\times 10^{-7}\,\mathrm{S/km} \qquad C_0 = 0.006\times 10^{-6}\,\mathrm{F/km}$$

第十三章 均匀传输线

无损耗线

若 $R_0 = 0$ $G_0 = 0$ 线路没有损耗，称为无损线

对于高频电路 $\omega L_0 >> R_0$ $\omega C_0 >> G_0$ 可以视为无损线

其传播常数为 $\gamma = \sqrt{\mathrm{j}\omega L_0 \cdot \mathrm{j}\omega C_0} = \mathrm{j}\omega\sqrt{L_0 C_0} = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\dfrac{2\pi}{\lambda}$

即 $\alpha = 0$ $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$

无损线上行波传播时是不衰减的。

波速为 $v_p = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$

波阻抗为 $Z_c = \sqrt{\dfrac{\mathrm{j}\omega L_0}{\mathrm{j}\omega C_0}} = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$ 是实数

即同方向上的电压和电流行波在同一位置处是同相位的。

13.4 无损耗线 驻波

已知线路始端的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$

$$\begin{cases}\dot{U}(x)=\dot{U}_1\cosh\gamma x-\dot{I}_1 Z_c\sinh\gamma x\\ \dot{I}(x)=-\dfrac{\dot{U}_1}{Z_c}\sinh\gamma x+\dot{I}_1\cosh\gamma x\end{cases}$$

由 $\cosh\gamma x=(e^{\gamma x}+e^{-\gamma x})/2$ $\sinh\gamma x=(e^{\gamma x}-e^{-\gamma x})/2$ 得

双曲函数 $\cosh\gamma x=\cosh j\beta x=\cos\beta x$

$\sinh\gamma x=\sinh j\beta x=j\sin\beta x$

简化为正弦和余弦函数

$$\begin{cases}\dot{U}(x)=\dot{U}_1\cos\beta x-j\dot{I}_1 Z_c\sin\beta x\\ \dot{I}(x)=-j\dfrac{\dot{U}_1}{Z_c}\sin\beta x+\dot{I}_1\cos\beta x\end{cases}$$

已知线路终端的电压$\dot{U}_2$和电流 $\dot{I}_2$

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos\beta x' + \mathrm{j}\dot{I}_2 Z_\mathrm{c} \sin\beta x' \\ \dot{I}(x') = \mathrm{j}\dfrac{\dot{U}_2}{Z_\mathrm{c}} \sin\beta x' + \dot{I}_2 \cos\beta x' \end{cases}$$

输入阻抗 $$Z_\mathrm{i}(x') = \frac{\dot{U}(x')}{\dot{I}(x')} = Z_\mathrm{c}\frac{Z_\mathrm{L}\cos\beta x' + \mathrm{j}Z_\mathrm{c}\sin\beta x'}{\mathrm{j}Z_\mathrm{L}\sin\beta x' + Z_\mathrm{c}\cos\beta x'}$$

设 $x' = \lambda/4$ $\quad \beta x' = \pi/2$

输入阻抗 $$Z_\mathrm{i} = \frac{Z_\mathrm{c}^2}{Z_\mathrm{L}}$$ → 实现阻抗变换

负载阻抗经过四分之一波长无损耗线变换到输入端后等于其倒数与特性阻抗平方的乘积。利用这一性质，可作为四分之一阻抗变换器，以达到传输线阻抗匹配。

13.4 无损耗线 驻波

➢ 终端开路

$|Z_L| \to \infty \qquad \dot{I}_2 = 0$

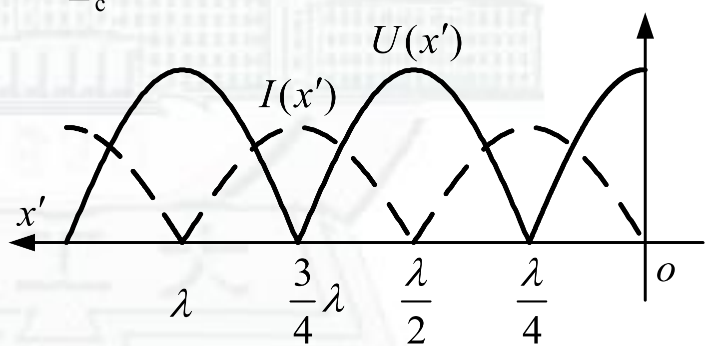
$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos\beta x' + \mathrm{j}\dot{I}_2 Z_c \sin\beta x' \\ \dot{I}(x') = \mathrm{j}\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sin\beta x' + \dot{I}_2 \cos\beta x' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos\beta x' \\ \dot{I}(x') = \mathrm{j}\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sin\beta x' \end{cases}$$

有效值为 $\qquad U(x') = U_2|\cos\beta x'| \quad I(x') = \dfrac{U_2}{Z_c}|\sin\beta x'|$

在 x' 等于 $\quad 0、\lambda/2、\lambda$ 处

电压有效值最大，称为电压的波腹

电流有效值为零，为电流的波节

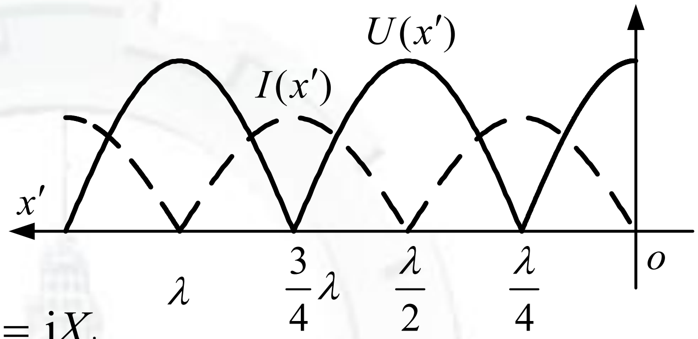


在 x' 等于 $\quad \lambda/4、3\lambda/4 \quad$ 处，

是电压的波节，电流的波腹

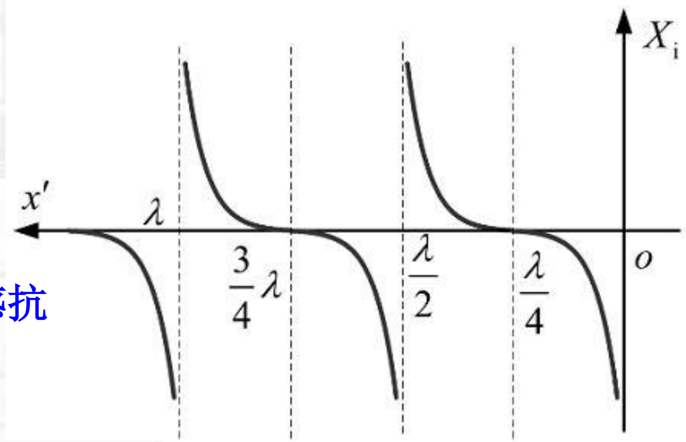
终端开路

波腹和波节的位置不随时间变化的波称为**驻波**。



等效阻抗

$$Z_{\mathrm{i}}(x')=-\mathrm{j}Z_{\mathrm{c}}\cot\beta x'=-\mathrm{j}Z_{\mathrm{c}}\cot\frac{2\pi}{\lambda}x'=\mathrm{j}X_{\mathrm{i}}$$



$x'<\lambda/4$ 终端开路的无损线相当于**电容**

$x'=\lambda/4$ 终端开路的无损线相当于**短路**

$\lambda/4<x'<\lambda/2$ 终端开路的无损线相当于**感抗**

$x'=\lambda/2$ 终端开路的无损线相当于**开路**

➢ 终端短路

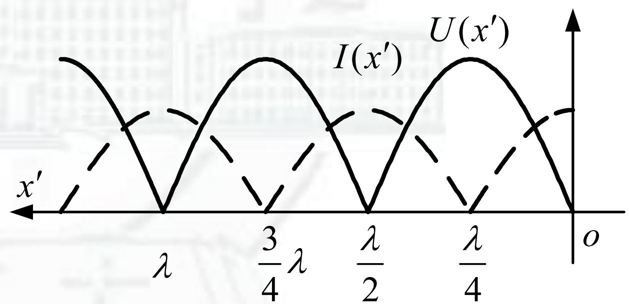
$|Z_L| = 0 \qquad \dot{U}_2 = 0$

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos\beta x' + \mathrm{j}\dot{I}_2 Z_c \sin\beta x' \\ \dot{I}(x') = \mathrm{j}\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sin\beta x' + \dot{I}_2\cos\beta x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{U}(x') = \mathrm{j}Z_c\dot{I}_2\sin\beta x' \\ \dot{I}(x') = \dot{I}_2\cos\beta x' \end{cases}$$

有效值为

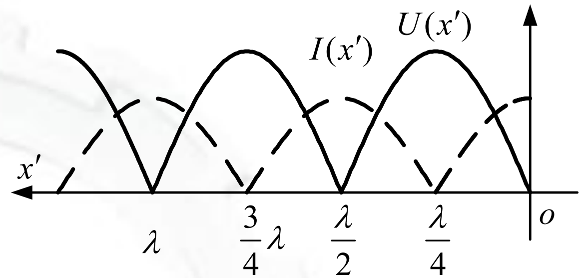
$$U(x') = Z_c I_2 |\sin\beta x'|$$

$$I(x') = I_2 |\cos\beta x'|$$



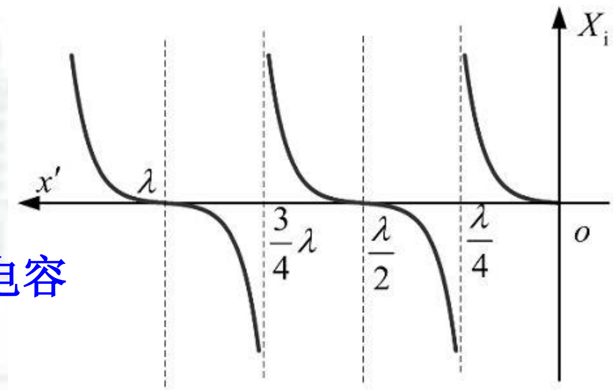
在终端短路的无损线上也形成了驻波

➢ 终端短路



等效阻抗

$$Z_i = jZ_c \tan\beta x' = jX_i$$



$x' < \lambda/4$ 终端短路的无损线相当于电感

$x' = \lambda/4$ 终端短路的无损线相当于开路

$\lambda/4 < x' < \lambda/2$ 终端短路的无损线相当于电容

$x' = \lambda/2$ 终端短路的无损线相当于短路

➢ 终端接纯电抗负载

$Z_L = jX \quad \dot{U}_2 = jX\dot{I}_2$

终端反射系数为

$$N_2 = \frac{\dot{I}_2^-}{\dot{I}_2^+} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{jX - Z_c}{jX + Z_c}$$

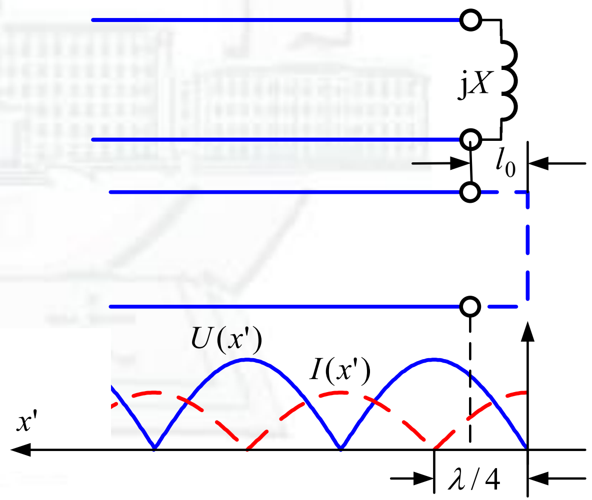
对无损线 Z_c 是实数 → $|N_2| = 1$

一个纯电抗元件可以用一个终端短路或终端开路的无损线来等效代替

设负载是电感，可用一段长度 l_0 小于λ/4 终端短路的无损线等效

$jZ_c \tan(2\pi l_0 / \lambda) = jX$ 计算出 → l_0

终端接电感的无损线相当于延长 l_0 的终端短路的无损线



形成驻波的两个条件：

1. 行波沿线传播要没有衰减，即衰减系数 $\alpha = 0$

只有无损线才满足这一条件

2. 反射波的幅度要与入射波的幅度相等

即终端反射系数 $|N_2| = 1$

终端开路、短路或接纯电抗负载时能够满足此条件。

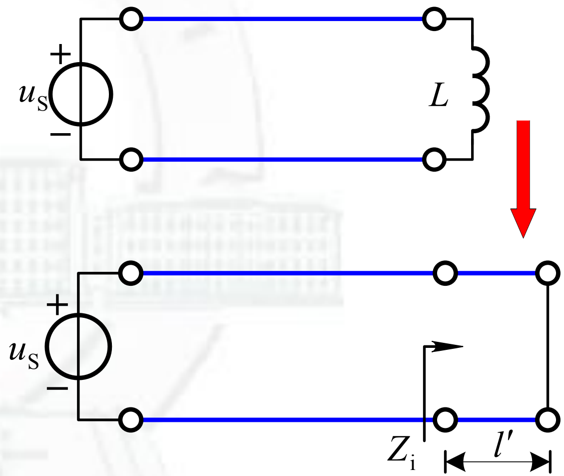
当满足这两个条件时，均匀线上存在幅度相等的正向和反向行波，它们相叠加便形成驻波。

例：无损线长为**18m**，波阻抗 $Z_c = 100\Omega$ 波长 $\lambda = 8\text{m}$ $X_L = 100\sqrt{3}\Omega$

求传输线上电压始终为零的点距终端的距离。

【解】 将电感***L***用一段长度为 l' 终端短路的传输线等效。

从终端看新增加的传输线的输入阻抗为



$$Z_i = jZ_c \tan(\frac{2\pi}{\lambda} \times l')$$

$$j100\tan(\frac{2\pi}{8} \times l') = j100\sqrt{3} \Rightarrow l' = \frac{4}{3}\text{m}$$

距等效终端 $x' = k\dfrac{\lambda}{2}$ 处，电压为零

电压为零的点距终端的距离为：

$$x = x' - l' = k\frac{\lambda}{2} - \frac{4}{3} = 4k - \frac{4}{3} \quad (k = 1,2,3,4)$$

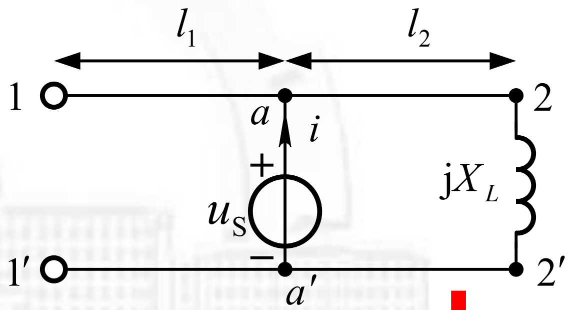
当线长为**18m**时,传输线上电流始终为零的点距终端的距离为

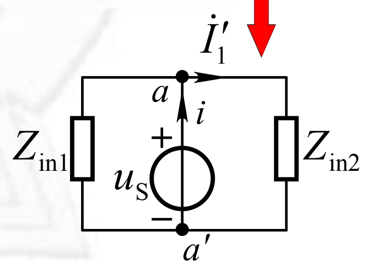
***x*=2.667m, 6.667m ,10.667m , 14.667m**

例：无损均匀传输线，$Z_c = 300\Omega$，$\lambda = 2\text{m}$，$u_S(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)\text{V}$

1-1'端开路， 2-2'端接电感，其感抗 $X_L = 100\sqrt{3}\Omega$，$l_2 = 0.5\text{m}$

求：若电流i=0，最小 l_1 应取多长? 此时 $u_2(t) = ?$





【解】 从a-a'端看第2段其等效阻抗为

$$Z_{\text{in2}} = \frac{Z_c^2}{\text{j}X_L} = \frac{300^2}{\text{j}100\sqrt{3}} = -\text{j}300\sqrt{3}\Omega$$

如 Z_{in1}和 Z_{in2} 发生并联谐振，则 i=0

$$Z_{\text{in1}} = -\text{j}Z_c\cot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times l_1\right) = \text{j}300\sqrt{3}$$

$$\cot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times l_1\right) = -\sqrt{3} \Rightarrow l_1 = \left(\frac{5}{6}\pi\right)/\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{5}{6}\text{m}$$

$$\dot{I}_1' = \frac{\dot{U}_S}{Z_{\text{in2}}} = \frac{2\angle 45°}{-\text{j}300\sqrt{3}} = \frac{0.02}{9}\sqrt{3}\angle 135°\text{A}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_S\cos\left(\frac{2\pi}{2}\times 0.5\right) - \text{j}Z_c\dot{I}_1'\sin\left(\frac{2\pi}{2}\times 0.5\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\angle 45° = 1.155\angle 45°\text{V}$$

$$u_2(t) = 1.155\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)\text{V}$$

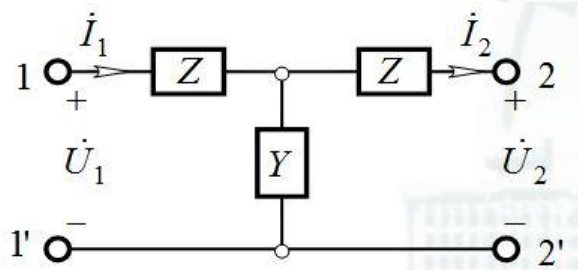
若不需要研究参数的分布性，只需计算起端和终端电压电流时，可将均匀线视为集中参数的对称二端口网络。

其传输参数方程

$$\begin{cases}\dot{U}_1=(\mathrm{ch}\,\gamma l)\dot{U}_2+(Z_c\mathrm{sh}\,\gamma l)\dot{I}_2\\ \dot{I}_1=(\mathrm{sh}\,\gamma l/Z_c)\dot{U}_2+(\mathrm{ch}\,\gamma l)\dot{I}_2\end{cases}\quad\text{(a)}$$

任意线

等效电路



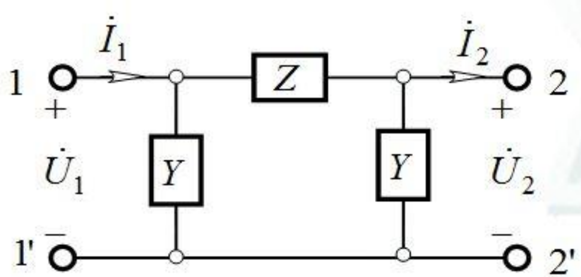
均匀线近似T形等效电路

可根据电路列方程传输参数

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1&=\dot{I}_2+Y(Z\dot{I}_2+\dot{U}_2)=Y\dot{U}_2+(1+ZY)\dot{I}_2\\ \dot{U}_1&=Z\dot{I}_1+Z\dot{I}_2+\dot{U}_2=ZY\dot{U}_2+Z(1+ZY)\dot{I}_2+Z\dot{I}_2+\dot{U}_2\\ &=(1+ZY)\dot{U}_2+Z(2+ZY)\dot{I}_2\end{aligned}\right\}\quad\text{(b)}$$

比较（a）和（b）可得

$$\begin{cases}Y=\dfrac{\mathrm{sh}\,\gamma l}{Z_c}\\ 1+ZY=\mathrm{ch}\,\gamma l\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}Z=\dfrac{\mathrm{ch}\,\gamma l-1}{\mathrm{sh}\,\gamma l}Z_c\\ Y=\dfrac{1}{Z_c}\mathrm{sh}\,\gamma l\end{cases}$$



均匀线近似Π形等效电路

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\mathrm{ch}\gamma l - 1}{\mathrm{sh}\gamma l} Z_c \\ Y = \dfrac{1}{Z_c}\mathrm{sh}\gamma l \end{cases}$$

把式中双曲正弦和双曲余弦展成级数

$$\mathrm{ch}\gamma l = 1 + \frac{(\gamma l)^2}{2!} + \frac{(\gamma l)^4}{4!} + \cdots$$

$$\mathrm{sh}\gamma l = \gamma l + \frac{(\gamma l)^3}{3!} + \frac{(\gamma l)^5}{5!} + \cdots$$

$$\begin{cases} Z = [\dfrac{1}{2}\gamma l - \dfrac{1}{24}(\gamma l)^3 + \cdots]Z_c \\ Y = [\gamma l + \dfrac{1}{6}(\gamma l)^3 + \cdots]\dfrac{1}{Z_c} \end{cases}$$

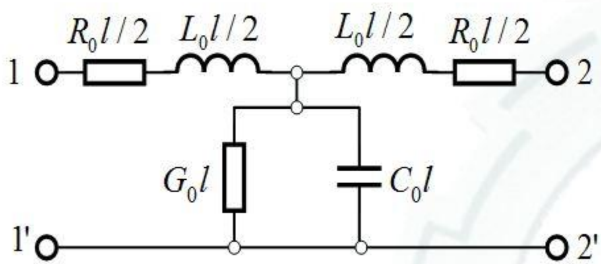
如果线路相对波长较短，$|\gamma l| << 1$，可略去高次方项，只取第一项得近似公式

$$\begin{cases} Z \approx \dfrac{1}{2}\gamma l Z_c = \dfrac{1}{2}l(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0) \\ Y \approx \dfrac{\gamma l}{Z_c} = l(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0) \end{cases}$$

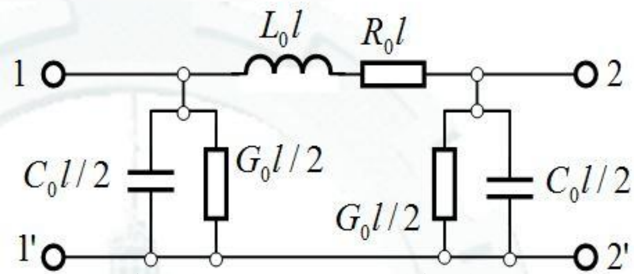
因此，对不太长的线路，可以把线间总导纳集中在线路中央来作近似。

13.5 均匀传输线集中参数等效电路

中距离输电线(电力工程频率下50～200km的架空线路)的电路模型为



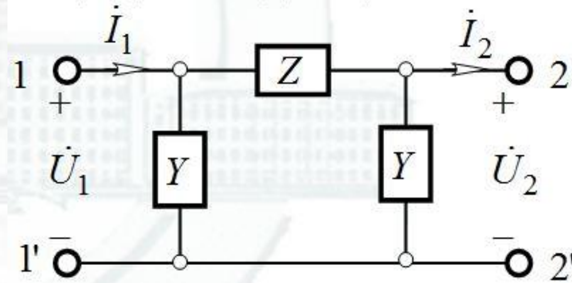
均匀线近似T形等效电路



均匀线近似Π形等效电路

类似可得Π形等效电路参数

$$\begin{cases} Z = Z_c \operatorname{sh}\gamma l \\ Y = \dfrac{\operatorname{ch}\gamma l - 1}{Z_c \operatorname{sh}\gamma l} \end{cases}$$



线路不太长时，也可用上面类似的近似，近似Π形等效电路。此时

$$\begin{cases} Z \approx l(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0) \\ Y \approx \dfrac{1}{2} l(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0) \end{cases}$$

对称二端口网络还可以用特性阻抗 Z_c 和传输系数 $\mathit{\Gamma}$ 作为参数

$$\begin{cases}\dot{U}_1=(\mathrm{ch}\gamma l)\dot{U}_2+(Z_c\mathrm{sh}\gamma l)\dot{I}_2\\ \dot{I}_1=(\mathrm{sh}\gamma l/Z_c)\dot{U}_2+(\mathrm{ch}\gamma l)\dot{I}_2\end{cases}$$

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2\mathrm{ch}\mathit{\Gamma}+\dot{I}_2Z_c\mathrm{sh}\mathit{\Gamma}$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_2}{Z_c}\mathrm{sh}\mathit{\Gamma}+\dot{I}_2\mathrm{ch}\mathit{\Gamma}$$

结论：

(1) 均匀线的波阻抗就是等效二端口网络的特性阻抗；

$$Z_{c1}=\sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}\qquad Z_{c2}=\sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{11}A_{21}}}$$

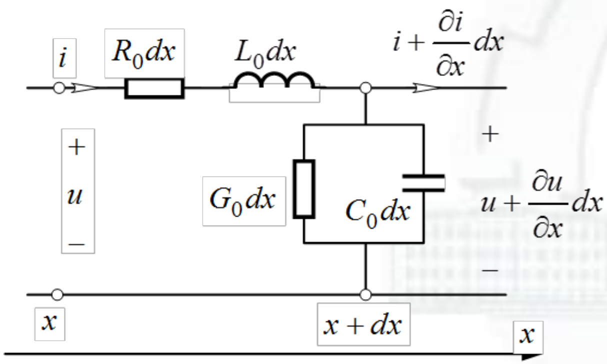
分别称为输入端口和输出端口的特性阻抗

(2) 均匀线的长度与传播系数之积等于等效二端口网络的传输系数 $\mathit{\Gamma}=\gamma l$

第十三章 均匀传输线

➢ 均匀线方程及其通解

均匀线偏微分方程的建立



根据基氏定律可写微段dx的电压、电流方程

$$u-(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)=(R_0\mathrm{d}x)i+(L_0\mathrm{d}x)\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i-(i+\frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x)=G_0\mathrm{d}x(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)+C_0\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial t}(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)$$

整理并略去二阶微分量，得

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x}=R_0 i+L_0\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x}=G_0 u+C_0\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

13.6 无损均匀线的波过程

设方程的时域解为$u(x,\ t)$和$i(x,\ t)$，对其取拉普拉斯变换：

$\mathrm{L}\{i(x,t)\}=I(x,s)$ $\qquad$ $\mathrm{L}\{u(x,t)\}=U(x,s)$ $\qquad$ 设$u(x,0_)=0$， $i(x,0\_)=0$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial u}{\partial x}&=R_0 i+L_0\frac{\partial i}{\partial t}\\ -\frac{\partial i}{\partial x}&=G_0 u+C_0\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}U(x,s)}{\mathrm{d}x}&=(R_0+sL_0)I(x,s)\qquad\text{(a)}\\ -\frac{\mathrm{d}I(x,s)}{\mathrm{d}x}&=(G_0+sC_0)U(x,s)\qquad\text{(b)}\end{aligned}\right.$$

将式(a)对x求导，再将式(b)代入得 ：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U^2(x,s)}{\mathrm{d}x^2}&=(R_0+sL_0)(G_0+sC_0)U(x,s)\\ &=\gamma^2(s)U(x,s)\end{aligned}\qquad\text{(c)}$$

$$\gamma(s)=\sqrt{(R_0+sL_0)(G_0+sC_0)}\qquad\text{(d)}$$

方程(c)的特征方程： $\quad p^2-\gamma^2(s)=0$

特征根：$p_1(s)=-\gamma(s)$ 和 $p_2(s)=\gamma(s)$

方程(c) $$\frac{\mathrm{d}U^2(x,s)}{\mathrm{d}x^2}=(R_0+sL_0)(G_0+sC_0)U(x,s)$$ 的通解为：

$$=\gamma^2(s)U(x,s)$$

$$\boxed{\begin{aligned}U(x,s)&=U'(s)\mathrm{e}^{p_1(s)x}+U''(s)\mathrm{e}^{p_2(s)x}\\&=U'(s)\mathrm{e}^{-\gamma(s)x}+U''(s)\mathrm{e}^{\gamma(s)x}\end{aligned}}$$

将$U(x, s)$代入式(a) $$-\frac{\mathrm{d}U(x,s)}{\mathrm{d}x}=(R_0+sL_0)I(x,s)$$

得：

$$I(x,s)=\frac{\gamma(s)}{R_0+sL_0}[U'(s)\mathrm{e}^{-\gamma(s)x}-U''(s)\mathrm{e}^{\gamma(s)x}]$$

将$\gamma(s)$代入上式得：$$\boxed{I(x,s)=\frac{U'(s)}{Z_\mathrm{c}(s)}\mathrm{e}^{-\gamma(s)x}-\frac{U''(s)}{Z_\mathrm{c}(s)}\mathrm{e}^{\gamma(s)x}}$$

$$Z_\mathrm{c}(s)=\sqrt{\frac{R_0+sL_0}{G_0+sC_0}}$$

无损线方程的通解

$$Z_c(s)=\sqrt{\frac{sL_0}{sC_0}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \qquad \gamma(s)=\sqrt{sL_0 sC_0}=s\sqrt{L_0C_0}=\frac{s}{v} \quad \text{式中：} \quad v=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$$

$$I(x,s)=\frac{U'(s)}{Z_c(s)}e^{-\gamma(s)x}-\frac{U''(s)}{Z_c(s)}e^{\gamma(s)x} \qquad \begin{aligned} U(x,s)&=U'(s)e^{p_1(s)x}+U''(s)e^{p_2(s)x}\\ &=U'(s)e^{-\gamma(s)x}+U''(s)e^{\gamma(s)x}\end{aligned}$$

$$I(x,s)=\frac{U'(s)}{Z_c}e^{-s\frac{x}{v}}-\frac{U''(s)}{Z_c}e^{s\frac{x}{v}} \qquad U(x,s)=U'(s)e^{-s\frac{x}{v}}+U''(s)e^{s\frac{x}{v}}$$

$$\mathrm{L}\{u'(t)\}=U'(s) \qquad \mathrm{L}\{u''(t)\}=U''(s)$$

利用拉普拉斯逆变换求出时域解：

线性性质和延迟性质

$$\begin{cases} u(x,t)=\mathrm{L}^{-1}\{U(x,s)\}=u'(t-x/v)\,\varepsilon(t-x/v)+u''(t+x/v)\,\varepsilon(t+x/v)\\ i(x,t)=\mathrm{L}^{-1}\{I(x,s)\}=\dfrac{1}{Z_c}u'(t-x/v)\,\varepsilon(t-x/v)-\dfrac{1}{Z_c}u''(t+x/v)\,\varepsilon(t+x/v)\end{cases}$$

13.6 无损均匀线的波过程

分析$u(x, t)$式中第一项 $u'(t-x/v)\,\varepsilon(t-x/v)$

当 $t-x/v>0$ 时，即在$x<vt$处，等于 $u'(t-x/v)$

当 $t-x/v<0$ 时，即在$x>vt$处，等于0

$t=t_1$ 时， $u^+(x_1,t_1)=u'(t_1-x_1/v)$

$t=t_1+\Delta t$ 时， $u^+(x_2,t_1+\Delta t)=u'(t_1+\Delta t-x_2/v)=u'(t_1-\dfrac{x_2-v\Delta t}{v})$

$$\boxed{x_2=x_1+v\Delta t}$$

电压波将向x增加的方向移动，故称 $u+(x, t)$ 为正向行波电压。

正向行波的波速 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v$

分析$u(x, t)$中第二项可知：电压 $u''(x,t)$ 波将随时间的延续，向x减小的方向移动，故称为反向行波电压

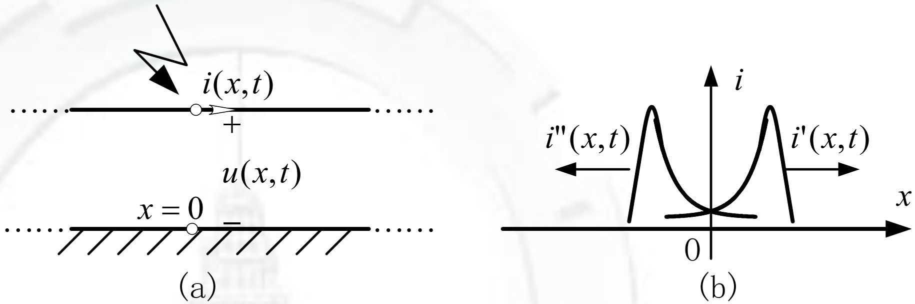
电流 $i(x, t)$ 中第一项是正向行波，第二项是反向行波。

正向行波的电压与电流之比等于Z_c，反向行波的电压与电流之比也等于Z_c，称为波阻抗。

13.6 无损均匀线的波过程

例如:无损线受雷击而充电。

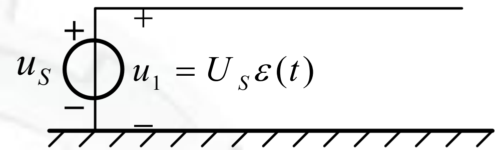
取雷击瞬间 t=0 ，雷击点坐标 x=0, 则雷击后产生的充电电荷便沿线向两侧传播，形成正向和反向行波，如图(b)所示。



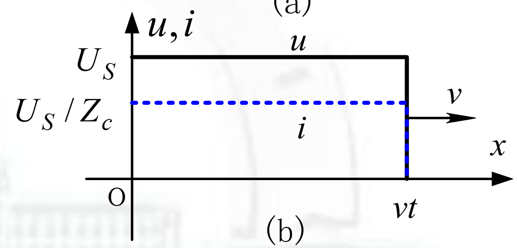
以上得出的无损线方程复频域通解及时域通解都是电压、电流的一般表达式。对于具体问题，尚须根据初始条件和边界条件才能确定函数和。

无损线上波的发出

设起端接阶跃电压源，求零状态响应。



(a)



(b)

开始时线路上只有正向行波电压：

$$U(x,s)=U'(s)e^{-s\frac{x}{v}} \qquad 求\ U'(s)$$

根据边界条件：$x=0$处的电压为电源电压

得 $$\frac{U_S}{s}=U'(s)e^{-s\cdot\frac{x}{v}}\Big|_{x=0}=U'(s)$$

$$U(x,s)=\frac{U_S}{s}e^{-s\frac{x}{v}}$$

取拉氏逆变换

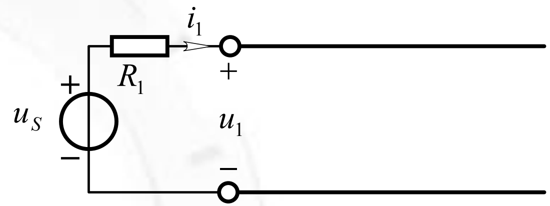
$$\Rightarrow\ u(x,t)=U_S\ \varepsilon(t-x/v)$$

此时电流也只有正向行波： $$i(x,t)=\frac{U_S}{Z_c}\varepsilon(t-x/v)=I\varepsilon(t-x/v)$$

以上说明波从电源发出之际，无损均匀线对电源来说相当于一个纯电阻，其电阻值即为线路的波阻抗值。

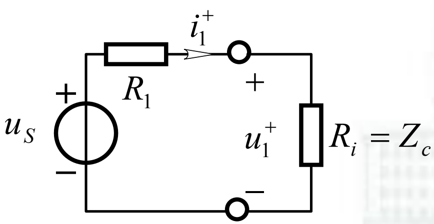
13.6 无损均匀线的波过程

设有一无限长的无损均匀线，如图(a)，波阻抗为 $Z_c = 300\Omega$，波速按光速计算，起端 $u_S = 10e^{-5t}\ \varepsilon(t)\text{V}, R_1 = 100\Omega$。求线路电压、电流分布及距起端300km处电压的变化规律。



(a)

【解】计算起端(x=0)的正向行波电流、电压，等效电路如图(b)所示。



(b)

$$i_1^+ = \frac{u_S}{R_1 + Z_c} = 0.025e^{-5t}\ \varepsilon(t)\text{A}$$

$$u_1^+(t) = Z_c i_1^+(t) = 7.5e^{-5t}\varepsilon(t)\text{V}$$

沿线电流、电压：$$i^+(x,t) = i_1^+(x - x/v) = 0.025e^{-5(t-x/v)}\varepsilon(t - x/v)\text{A}$$

$$u^+(x,t) = u_1^+(t - x/v) = 7.5e^{-5(t-x/v)}\varepsilon(t - x/v)\text{V}$$

在距起端x=300km处，信号的延迟时间为：$T_d = x/v = 300\times10^3\text{m}/(3\times10^8\text{m/s}) = 0.001\text{s}$

可得：$u^+(300\text{km},t) = 7.5e^{-5(t-0.001\text{s})}\varepsilon(t - 0.001\text{s})\text{V}$

13.6 无损均匀线的波过程

➢ 无损线上波的反射

正向行波的波前到达无损线终端时

必须满足终端边界条件 $U_2(s)=Z_L(s)I_2(s)$

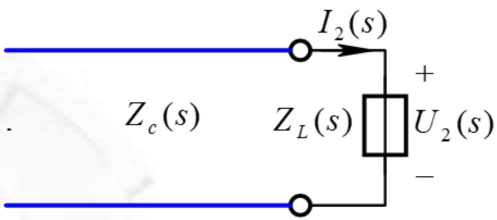


图15.8 无损线终端电路

波阻抗Z_c，一般不等于 $Z_L(s)$ 这时在终端将引起反向行波。

入射波　反射波

$$\left.\begin{aligned} U(x,s)&=U'(s)\mathrm{e}^{-s\frac{x}{v}}+U''(s)\mathrm{e}^{s\frac{x}{v}} \\ I(x,s)&=\frac{U'(s)}{Z_c}\mathrm{e}^{-s\frac{x}{v}}-\frac{U''(s)}{Z_c}\mathrm{e}^{s\frac{x}{v}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} U_2(s)&=U(l,s)=U'(s)\mathrm{e}^{-s\frac{l}{v}}+U''(s)\mathrm{e}^{s\frac{l}{v}}=U_2^+(s)+U_2^-(s) \\ I_2(s)&=I(l,s)=\frac{U_2^+(s)}{Z_c}-\frac{U_2^-(s)}{Z_c}=I_2^+(s)-I_2^-(s) \end{aligned}\right.$$

$$U_2(s)=Z_L(s)I_2(s)$$

负载反射系数：

$$\boxed{N_2(s)=\frac{Z_L(s)-Z_C}{Z_L(s)+Z_C}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} U_2^-(s)&=\frac{Z_L(s)-Z_C}{Z_L(s)+Z_C}U_2^+(s)=N_2(s)U_2^+(s) \\ I_2^-(s)&=N_2(s)I_2^+(s) \end{aligned}\right.$$

(1) 终端开路时波的反射

开路时 $|Z_L(s)|\to\infty$， $N_2(s)=1$ ，为全反射

在终端$x=l$处，反射波=入射波，阶跃电压激励下

$$U''(s)\mathrm{e}^{s\frac{l}{v}}=U'(s)\mathrm{e}^{-s\frac{l}{v}} \quad \text{或} \quad U''(s)=\frac{U_S}{s}\mathrm{e}^{-s\frac{2l}{v}}$$

得反射波 $U^{-}(x,s)=U''(s)\mathrm{e}^{s\frac{x}{v}}=\dfrac{U_S}{s}\mathrm{e}^{s\frac{x-2l}{v}}$

根据拉氏变换延迟性质得 $u^{-}(x,t)=U_S\,\varepsilon(t+\dfrac{x-2l}{v})$

$t+\dfrac{x-2l}{v}>0$ $\quad\varepsilon(t+\dfrac{x-2l}{v})=1$ 表明在终端处， $t>\dfrac{l}{v}$ 时有反射波。

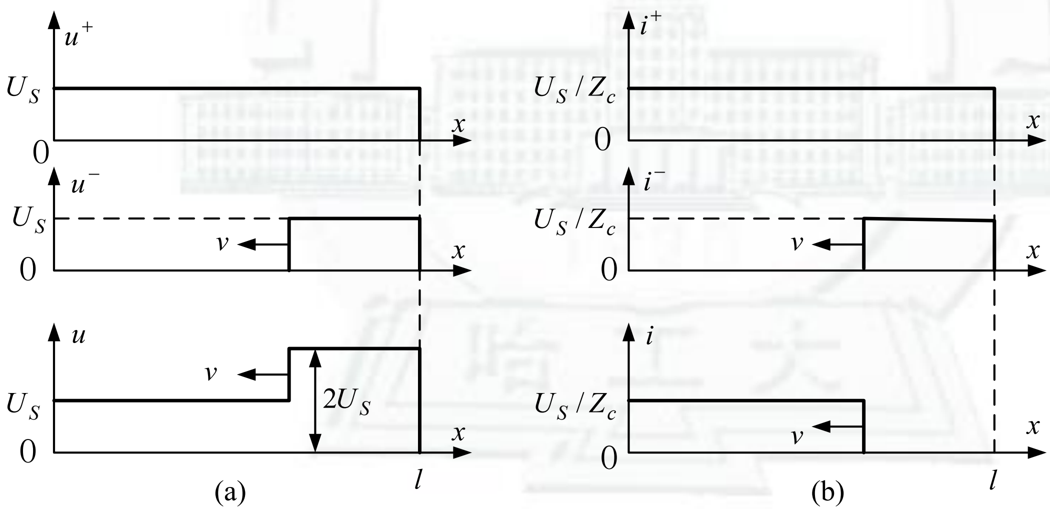
13.6 无损均匀线的波过程

在 $\frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v}$ 期间，正向行波与反向行波叠加形成线间电压：

$$u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t) = U_S\,\varepsilon(t-\frac{x}{v}) + U_S\,\varepsilon(t+\frac{x-2l}{v})$$

同一时刻的电流 $i(x,t)$ 为：

$$i(x,t) = i^+(x,t) - i^-(x,t) = \frac{U_S}{Z_c}\,\varepsilon(t-\frac{x}{v}) - \frac{U_S}{Z_c}\,\varepsilon(t+\frac{x-2l}{v})$$

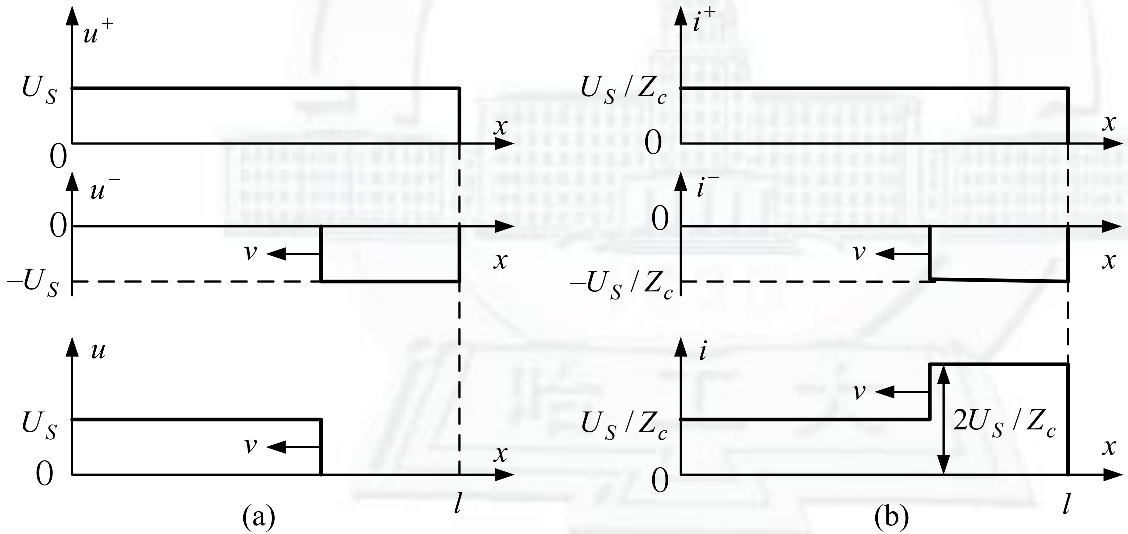


无损线终端开路时波的反射

(2) 终端短路时波的反射

终端短路时，称为负全反射。

下图画出了 $\frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v}$ 期间沿线电压、电流波形。



终端短路时波的反射

(3) 终端负载匹配时的反射

若$Z_L=Z_c$，则反射系数$N_2(s)=0$，这种无反射的工作状态，称为匹配。沿线电压$u(x,\ t)=u^+(x,\ t)$，相当于无限长的均匀线，永远没有反射波。在$0<t<l/v$时段，沿线逐步建立起u、i。在此以后$u(x,\ t)=U_S$、$i(x,\ t)=U_S/Z_c$，达到稳态。

这时，线路终端完全重复在线路起端作用的电压电流情况。但在时间上，它们延迟于起端的电压和电流，此延迟时间等于行波经过此线路所需的时间：

$$t_d=\frac{l}{v}=l\sqrt{L_0C_0}$$

13.6 无损均匀线的波过程

设要求用0.5m长的螺旋形延迟电缆来获得0.5μs的延迟时间，且要求能与电阻300Ω的负载匹配，求电缆每单位长度的电感和电容。

【解】根据延迟时间要求及 $t_d = \frac{l}{v} = l\sqrt{L_0 C_0}$ 得：

$$t_d = l\sqrt{L_0 C_0} = 0.5\sqrt{L_0 C_0}\ \mathrm{s} = 0.5\times10^{-6}\,\mathrm{s} \qquad (1)$$

再根据匹配条件得：

$$Z_c = \sqrt{L_0 / C_0} = 300\Omega \qquad (2)$$

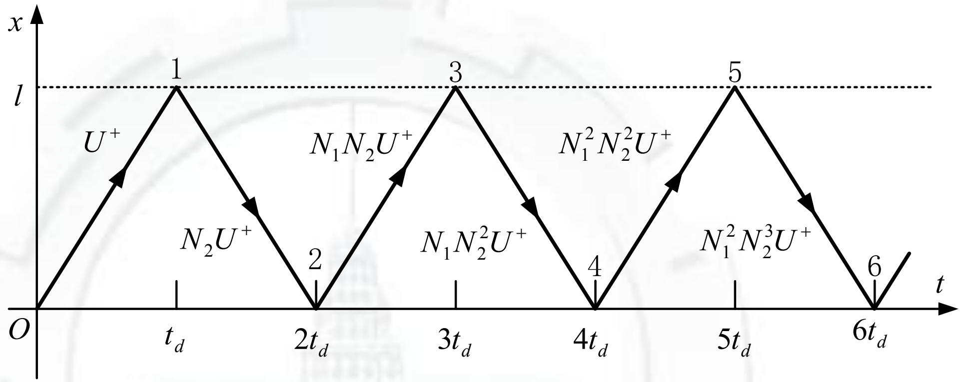
联立求解以上二式，得：

$$L_0 = 3\times10^{-4}\,\mathrm{H/m}$$

$$C_0 = \frac{1}{3}\times10^{-8}\,\mathrm{F/m} \approx 3.33\times10^{-3}\,\mu\mathrm{F/m}$$

（4）波的多次反射

只要传输线的终端和始端不满足匹配，反射过程会无休止往复进行。



设 $t_d = l/v$

$0 < t < t_d$ $\quad u^+(x,t) = U^+\varepsilon(t - x/v) \quad i^+(x,t) = I^+\varepsilon(t - x/v)$

$u^+(x,t) = Z_c i^+(x,t)$ 或 $U^+ = Z_c I^+$

在x=0处 $u^+(0,t) = U_S\varepsilon(t) - R_1 i^+(0,t)$ 或 $U^+ = U_S - R_1 I^+ \Rightarrow U^+ = \dfrac{Z_c}{R_1 + Z_c}U_S$

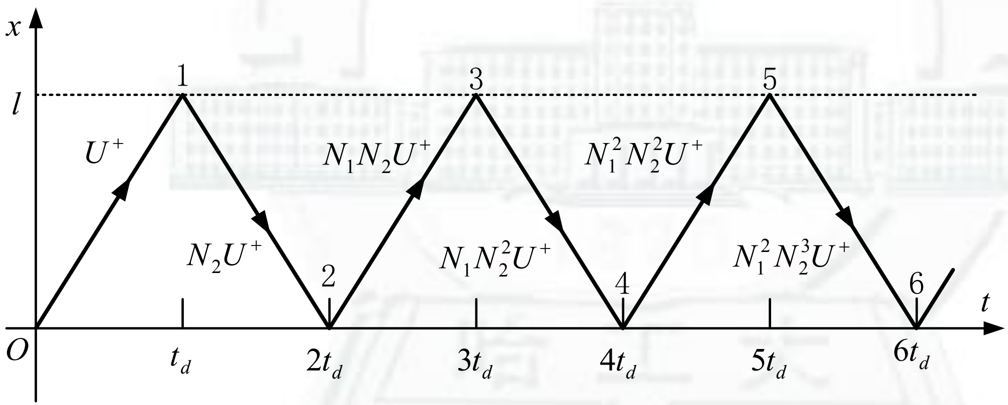
$u^+(x, t)$ 的波前到达终端

$N_2 = \dfrac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} \neq 0$ 立即产生反射波

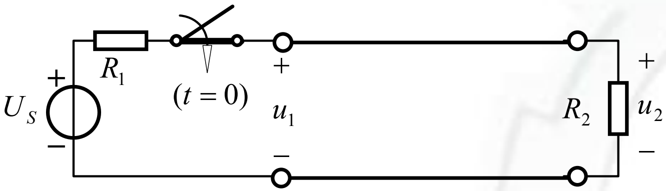
13.6 无损均匀线的波过程

$t_d < t < 2t_d$ $\quad u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t) = U^+\varepsilon(t - x/v) + N_2U^+\varepsilon(t - 2t_d + x/v)$

$t = 2t_d$ 反向行波$u^-(x, t)$的波前到达起端 $N_1 = \dfrac{R_1 - Z_c}{R_1 + Z_c} \neq 0$



电路如图所示，设 $U_S = 10\text{V}$，$l / v = t_d$，$Z_c = 200\Omega$，$R_1 = 50\Omega$，$R_2 = 800\Omega$。求 $u_2(t)$（$t > 0$）。



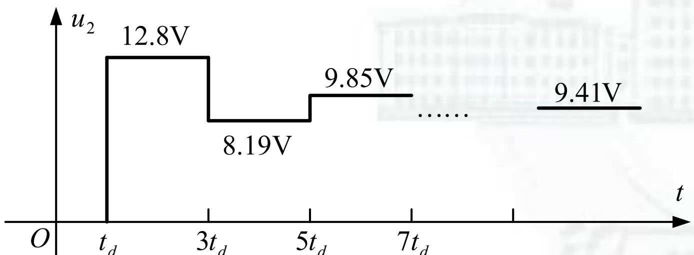
(a)

【解】当开关闭合时 $U^+ = \dfrac{Z_c}{R_1 + Z_c} U_S = 8\text{V}$ (1)

$$N_2 = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} = 0.6 \quad N_1 = \frac{R_1 - Z_c}{R_1 + Z_c} = -0.6 \ (2)$$

$0 < t < t_d$ 入射波尚未到达终端 $u_2 = 0$

$t_d < t < 3t_d \quad u_2 = U^+ + N_2 U^+ = 12.8\text{V}$



(b)

$3t_d < t < 5t_d$

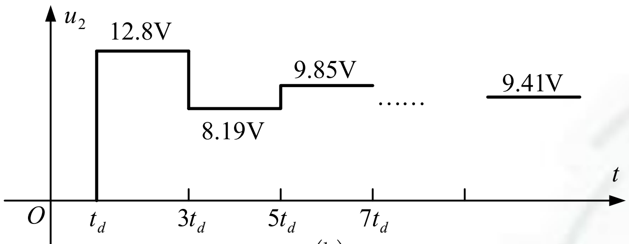
$$u_2 = U^+ + N_2 U^+ + N_1 N_2 U^+ + N_1 N_2^2 U^+ = 8.19\text{V}$$

$5t_d < t < 7t_d$

$$u_2 = U^+ + N_2 U^+ + N_1 N_2 U^+ + N_1 N_2^2 U^+ + N_1^2 N_2^2 U^+ + N_1^2 N_2^3 U^+ = 9.85\text{V}$$

终端电压如图(b)所示。

13.6 无损均匀线的波过程



(b)

根据左图还可写出用公式表示的终端电压。

当 $(2k+1)t_d < t < (2k+3)t_d$

$$u_2^{(k)} = u_2^{+(k)} + u_2^{-(k)} = (1 + N_1N_2 + N_1^2N_2^2 + \cdots + N_1^kN_2^k)U^+$$
$$+(N_2 + N_1N_2^2 + N_1^2N_2^3 + \cdots + N_1^kN_2^{k+1})U^+$$

令式中$k\to\infty$，终端电压 $u_2^{(k)}$ 便成为稳态电压U_2。因 $|N_1N_2|<1$ ，可用等比级数求和公式得：

$$U_2 = U_2^+ + U_2^- = \lim_{k\to\infty} u_2^{(k)} = \frac{U^+}{1-N_1N_2} + \frac{N_2U^+}{1-N_1N_2} = \frac{1+N_2}{1-N_1N_2}U^+$$

$$U^+ = \frac{Z_c}{R_1+Z_c}U_S \qquad N_2 = \frac{R_2 - Z_c}{R_2+Z_c} \qquad N_1 = \frac{R_1 - Z_c}{R_1+Z_c} \neq 0$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_S$$

说明：

1. 当达到直流稳态，无损线相当于理想导线；
2. 直流稳态电压 U_2 也是由正向行波 U_2^+ 和反向行波 U_2^- 叠加形成。

13.6 无损均匀线的波过程

（5）终端接一般负载时波的反射

当入射波第一次到达终端后，如终端负载与波阻抗不匹配将产生反射。

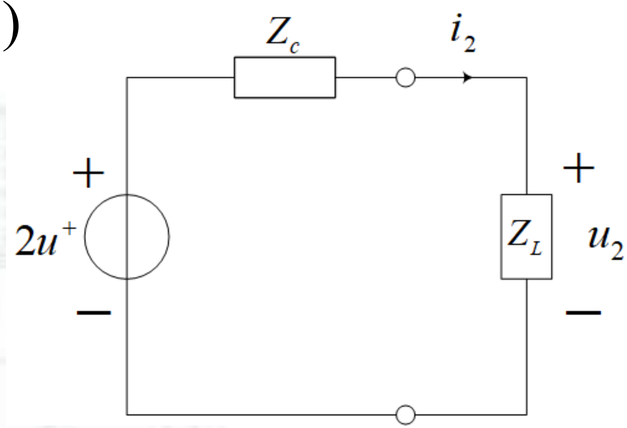
公式推导：

$$u_2 = u_2^+ + u_2^- \quad (1)$$

$$i_2 = i_2^+ - i_2^- = \frac{u_2^+}{Z_c} - \frac{u_2^-}{Z_c} \quad (2)$$

由(2)可得 $$u_2^- = u_2^+ - Z_c i_2 \quad (3)$$

将(3)代入(1)可得 $$u_2 = 2u_2^+ - Z_c i_2 \quad (4)$$

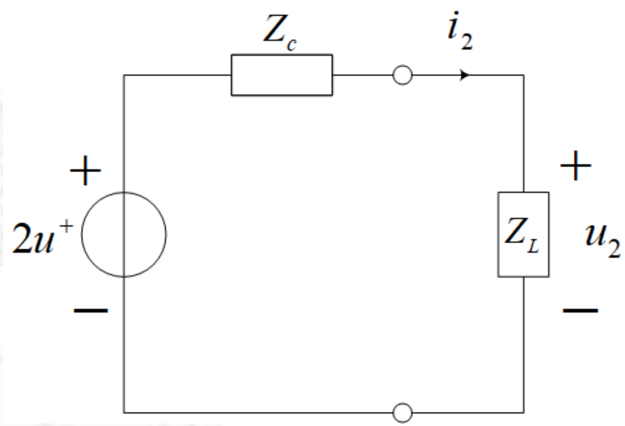


根据式(4)可以画出无损线终端的集中参数等效电路

彼德生法则 **(Peterson's rule)**

$$u_2 = 2u_2^+ - Z_c i_2$$

依照上式计算终端电压、电流的方法。



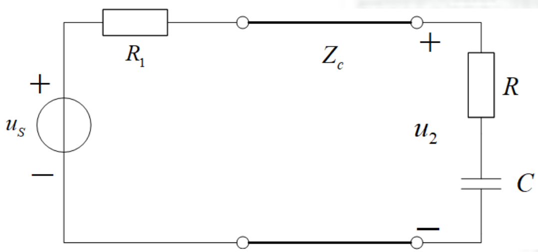
当终端接一般性负载，如RC（或RL）串联或并联时，得到等效电路后，便可用分析集中参数暂态的方法来确定终端的电压和电流。

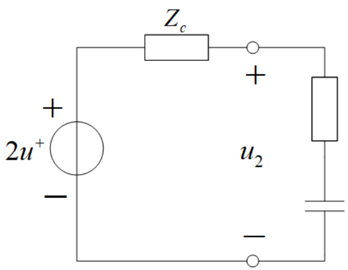
13.6 无损均匀线的波过程

例：波阻抗$Z_c = 200\Omega$ 的无损耗均匀线，始端接电压源$u_s = 10\varepsilon(t)\mathrm{V}$ ，电阻 $R_1 = 50\Omega$。终端接电阻$R = 300\Omega$,电容$C = 1.0\times10^{-4}\mathrm{F}$ 。若波由始端传播到终端所需时间为t_0， 试求 $0 < t < 2t_0$ 时，传输线终端电压 u_2。

【解】 $0 < t < t_0$ 终端电压 $u_2 = 0$ 入射电压$u^+ = \dfrac{Z_c}{R_1 + Z_c}u_s$=8V

$t_0 < t < 2t_0$，入射波达到终端并产生反射，根据彼德生法则等效成一阶电路，运用三要素法计算





初值 $u_2(t_{0+}) = \dfrac{R}{R + Z_c}\times 2u^+ = 9.6\mathrm{V}$

稳态值 $u_2(\infty) = 2u^+ = 16\mathrm{V}$

时间常数 $\tau = (R + Z_c)C = 0.05\mathrm{s}$

由三要素公式得

$$u_2 = \left[16 - 6.4e^{-20(t-t_0)}\right]\varepsilon(t - t_0)\mathrm{V}$$

本章小结

均匀传输线

均匀线方程

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

正弦稳态解

$$\begin{bmatrix} \dot U(x) \\ \dot I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & -Z_c \sinh \gamma x \\ -\dfrac{1}{Z_c}\sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot I_1 \end{bmatrix}$$

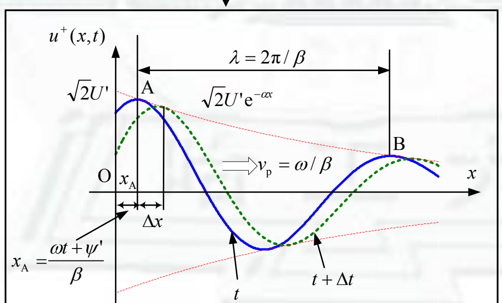
复频域解

$$U(x,s) = U'(s) e^{-s\frac{x}{v}} + U''(s) e^{s\frac{x}{v}}$$

$$I(x,s) = \frac{U'(s)}{Z_c} e^{-s\frac{x}{v}} - \frac{U''(s)}{Z_c} e^{s\frac{x}{v}}$$

行波

$$\begin{cases} \dot U(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dot U^+(x) + \dot U^-(x) \\ \dot I(x) = \dfrac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \dfrac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} = \dot I^+(x) - \dot I^-(x) \end{cases}$$



$$\boxed{u^+(x,t) = \sqrt{2} U' e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi')}$$

无损线

$R_0 = 0$

$G_0 = 0$

行波不衰减

阻抗变换器

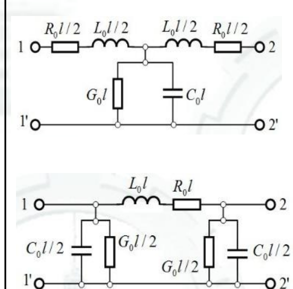
驻波

条件：

无损线、

$N_2 = 1$

集中参数等效电路



本章完

谢谢！

fzhao@hit.edu.cn