回顾：

- **机械波**：机械振动在弹性媒质中的传播。

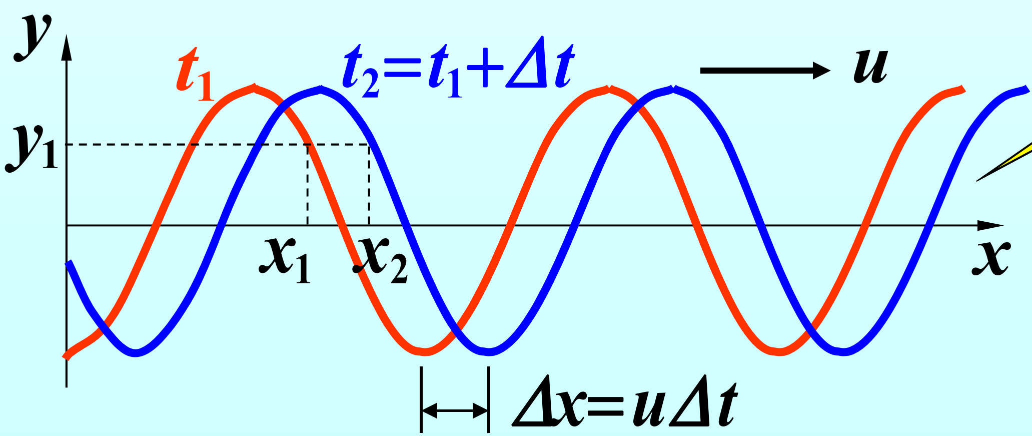
机械波产生的条件 —— 波源、媒质。

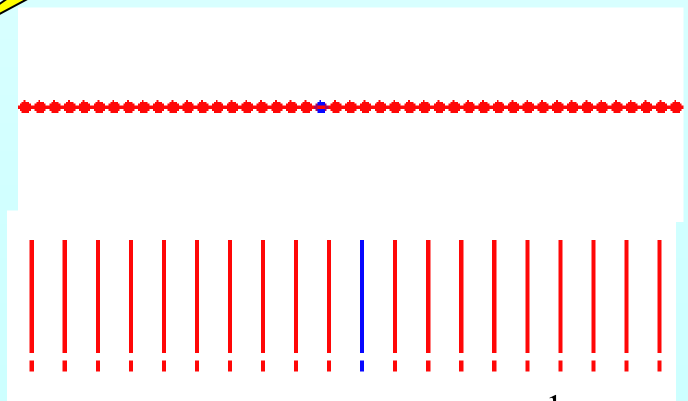
一维简谐波 $y = A\cos[\omega\,(t \mp \dfrac{x}{u}) + \varphi]$

"-" 沿 x 正向
"+" 沿 x 负向

注意：u为波速的大小。

波形曲线





(2) 波动方程

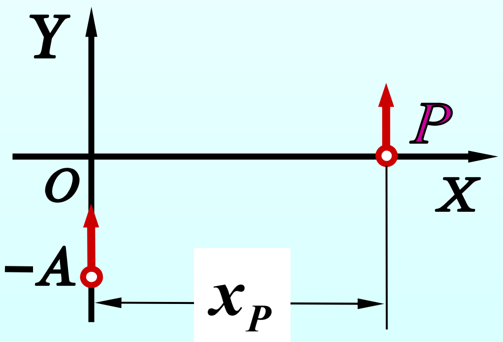
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi\right]\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -A\frac{\omega^2}{u^2}\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi\right]\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ ----沿 x 方向一维波动微分方程

推广至三维空间 $\xi(x,y,z,t)$ ⟶ 如：电磁波

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

例： 一正向余弦波，$\lambda = 10\,\mathrm{m}$ ，t 时刻波线上两质元的振动情况如下：



$$0 < x_P < \lambda$$

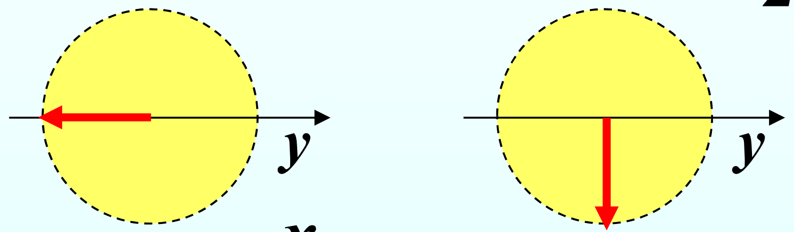
求：

1）x_P

2）波形曲线

解： 1)正向余弦波方程 $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$

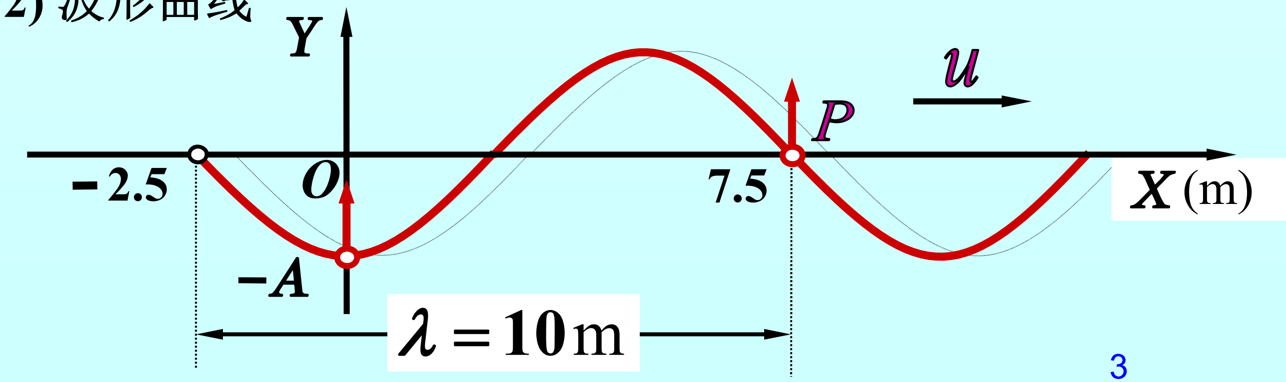
据旋转矢量法 $\begin{cases} \text{对质点}O: & \varphi_O = \pi \\ \text{对质点}P: & \varphi_P = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$



$$\begin{cases} \varphi_P - \varphi_O = [\omega(t - \frac{x_P}{u}) + \varphi] - [\omega t + \varphi] = -\omega \frac{x_P}{u} \\ \varphi_P - \varphi_P = \frac{3\pi}{2} - \pi - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$x_P = \frac{3\pi}{2}\frac{u}{\omega} = \frac{3\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{3\lambda}{4} = 7.5(\mathrm{m})$$

2) 波形曲线



例：已知波函数为$y = 0.02\cos\pi(20t - 0.5x)$ m

求：波的振幅、波长、波速及质点振动的最大速度

解:
$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

已知 $y = 0.02\cos 20\pi(t - \frac{x}{40})$ m

$\therefore \quad A = 0.02$ m

$\omega = 20\pi \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10$ Hz $\qquad T = 0.1$ s

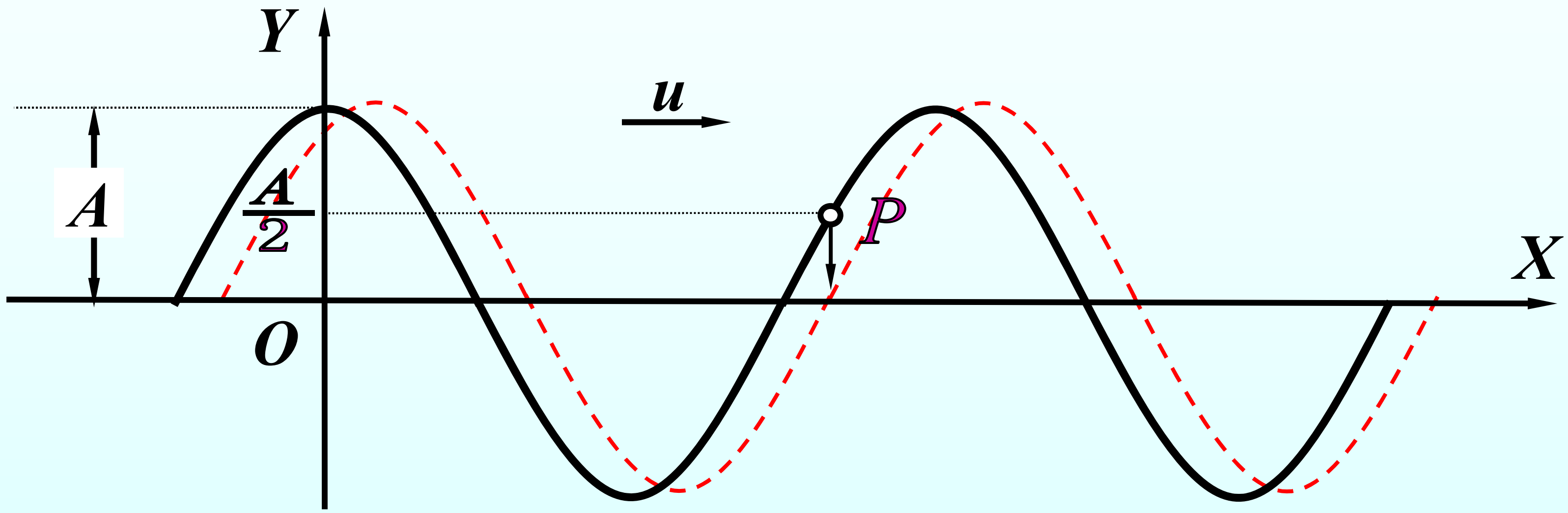
$u = 40$ m/s

$\lambda = uT = 4$ m

质点振动速度：$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.02 \times 20\pi \sin\pi(20t - 0.5x)$

最大速度：$v_{max} = 0.02 \times 20\pi = 1.26$ (m/s)

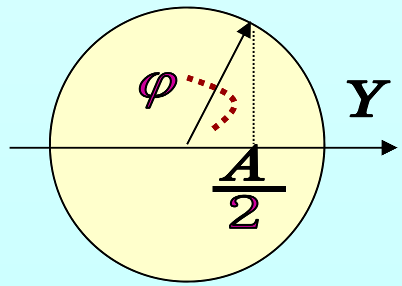
例： 一简谐波$t=0$时刻的波形曲线如图所示。



则此时P 点的运动方向 ________， 振动位相 $=$ ________

解: 波沿正方向传播，沿 X轴正方向稍微平移原波形图，可判断出P点此时向下运动，即P点处质点速度小于零。

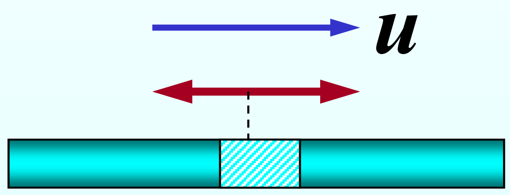
由旋转矢量图可知：$\varphi_P=\dfrac{\pi}{3}$



第4节 波的能量和能流密度

1. 波动能量的传播

不论纵波和横波各媒质块中都有振动动能和形变势能。



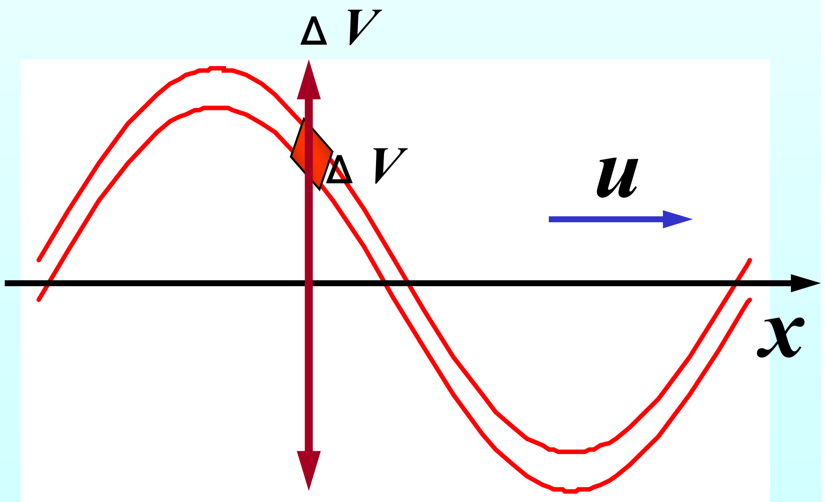
设 $y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$

考虑 ΔV 体积中物质的

振动动能

$$E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\Delta m(\frac{\partial y}{\partial t})^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$



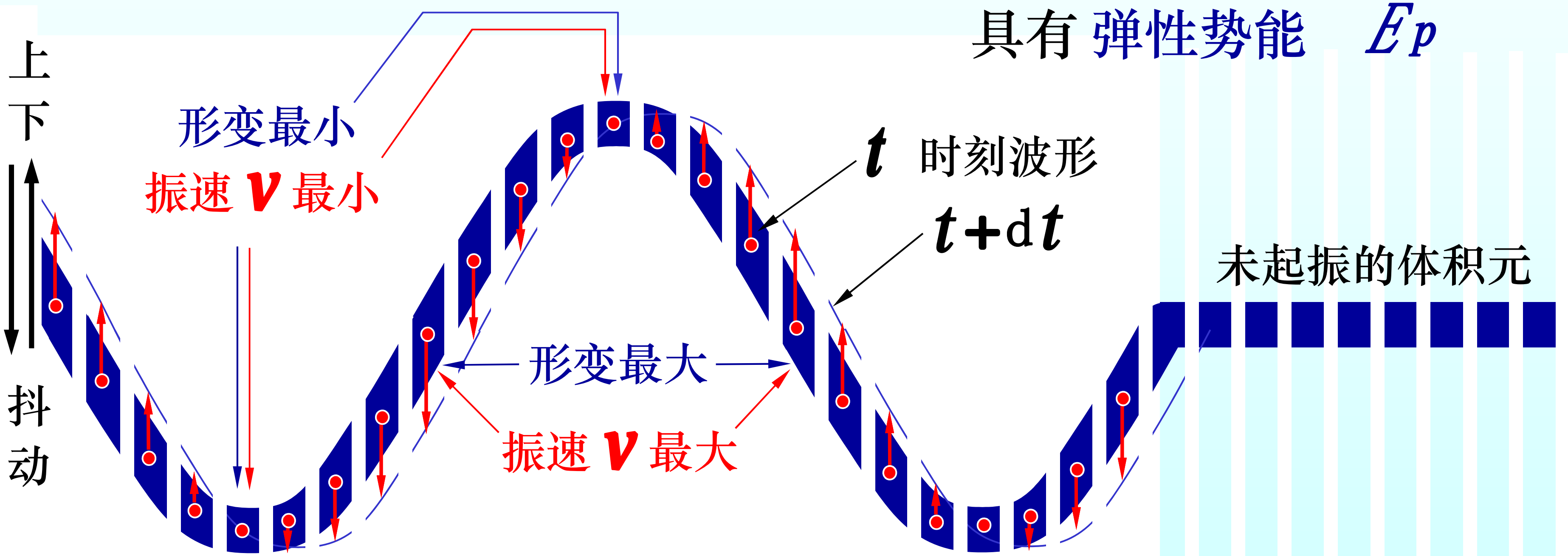
形变势能

$$E_p = ? \xrightarrow{\text{可证明}} \boxed{E_p = E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})}$$

波 的 能 量

现象： 若将一软绳（弹性媒质）划分为多个小单元（体积元）

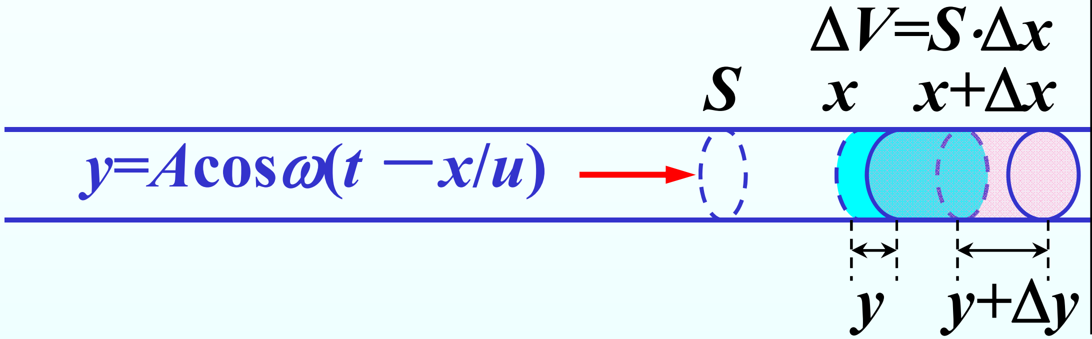
- 在波动中，各体积元产生不同程度的 弹性形变，具有 弹性势能 E_p

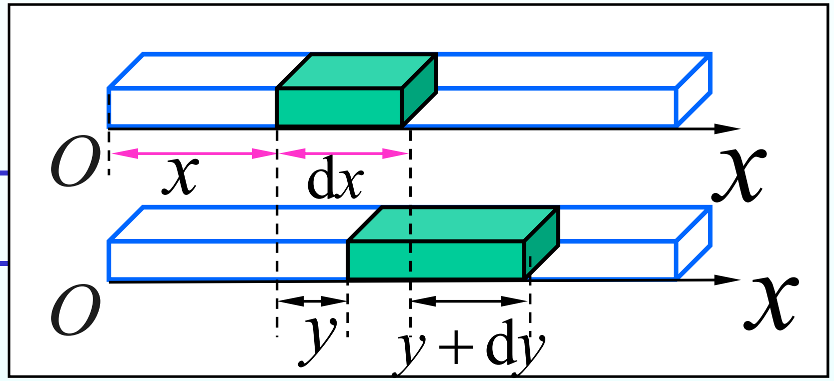


- 各体积元以变化的振动速率 v 上下振动，具有振动动能 E_k

理论证明（略）， 当媒质中有行波传播时，媒质中一个体积元在作周期性振动的过程中，其弹性势能 E_p 和振动动能 E_k 同时增大、同时减小，而且其量值相等，即 $E_p=E_k$.

波的势能推导(以纵波为例)





(1) 体积元伸长Δy时受力 $F = YS\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

(2) 体积元伸长变力做功 $A = \dfrac{1}{2}F\Delta y = \dfrac{1}{2}YS\dfrac{(\Delta y)^2}{\Delta x} = \dfrac{1}{2}Y\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\Delta V$

(3) 变力做功，即体积元获得的势能

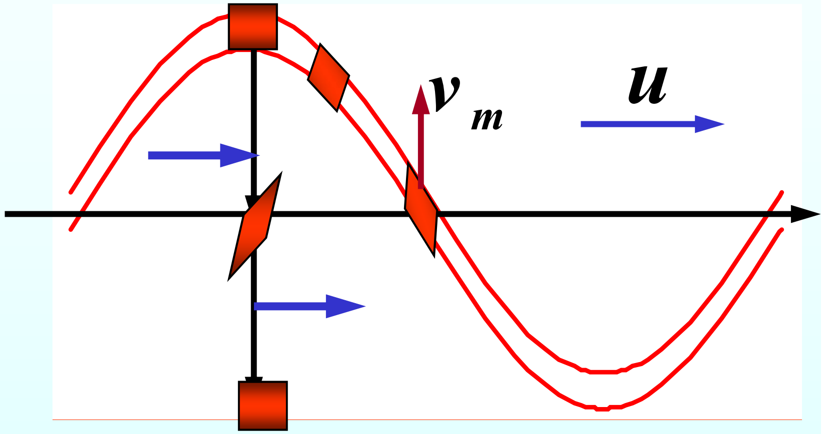
$$E_p = \frac{1}{2}Y\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\Delta V \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \dfrac{\omega^2 A^2}{u^2}\sin^2\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right)} \\ \boxed{u = \sqrt{Y/\rho} \Rightarrow Y = \rho u^2} \end{array} \right.$$

$$E_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = E_k$$

$$E_p = E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2 \omega(t-\frac{x}{u})$$

结论

1° 波动动能与势能数值相同，位相相同。同时变大，同时变小。



E_k 最大则 E_p 也最大，如平衡位置处。
E_k 最小则 E_p 也最小，如最大位移处。

与振动能量不同！

2° ΔV 中，$E_{总} = E_k + E_p = \rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2 \omega(t-\frac{x}{u})$

$E_{总}$ 随 t、x 变，不守恒！**能量传输！**

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，从前面输入；
平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。

2. 能量密度和能流密度

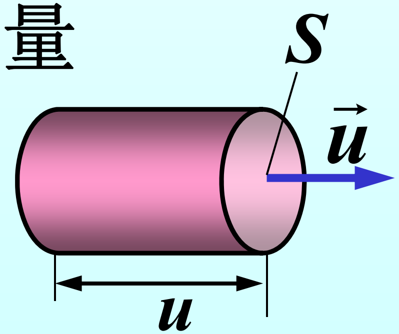
（1）**能量密度：**单位体积中的能量

$$w=\frac{E}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\propto A^2,\omega^2$$

（2）**能流** P：单位时间通过某面的能量



$$P=wuS$$

平均能流 $\overline{P}=\overline{w}uS$

（3）**能流密度** i：单位时间通过垂直于波传播方向单位面积的能量。

$$\boxed{i=\frac{P}{S}=wu}$$

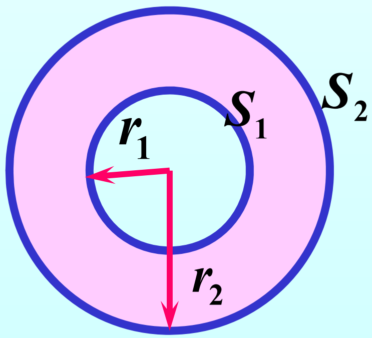
平均能流密度 I (又称波的强度，如光强、声强)：

$$\therefore I = \bar{i} = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho u A^2\omega^2 \propto A^2$$

机械波

例4. 讨论在无吸收的理想媒质中球面波的振幅。

解： 穿过波面 S_1，S_2 的平均能流应相等，$\overline{P}_1 = \overline{P}_2$



$$\because \overline{P} = \overline{w}uS = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 uS = I \cdot S$$

$$\therefore I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2 \longrightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \longrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \longrightarrow \boxed{A \propto \frac{1}{r}}$$

$$y_{\text{球面波}} = \frac{A}{r}\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) + \varphi\right]$$

声波 地震波 (了解)

Sound Wave and Earthquake Wave

机械波的分类

名称	次声波 (infrasound)	可闻声波 (audible sound)	超声波 (ultra sound)	微超声波 (micro ultra sound)
频率 (Hz)	10^{-4} 10^{-2}	10^{0} 10^{2} 10^{4}	10^{6}	10^{12}
波长 (air)		17 m	1.7 cm	0.68 μm

诊断超声

diagnostic ultrasou

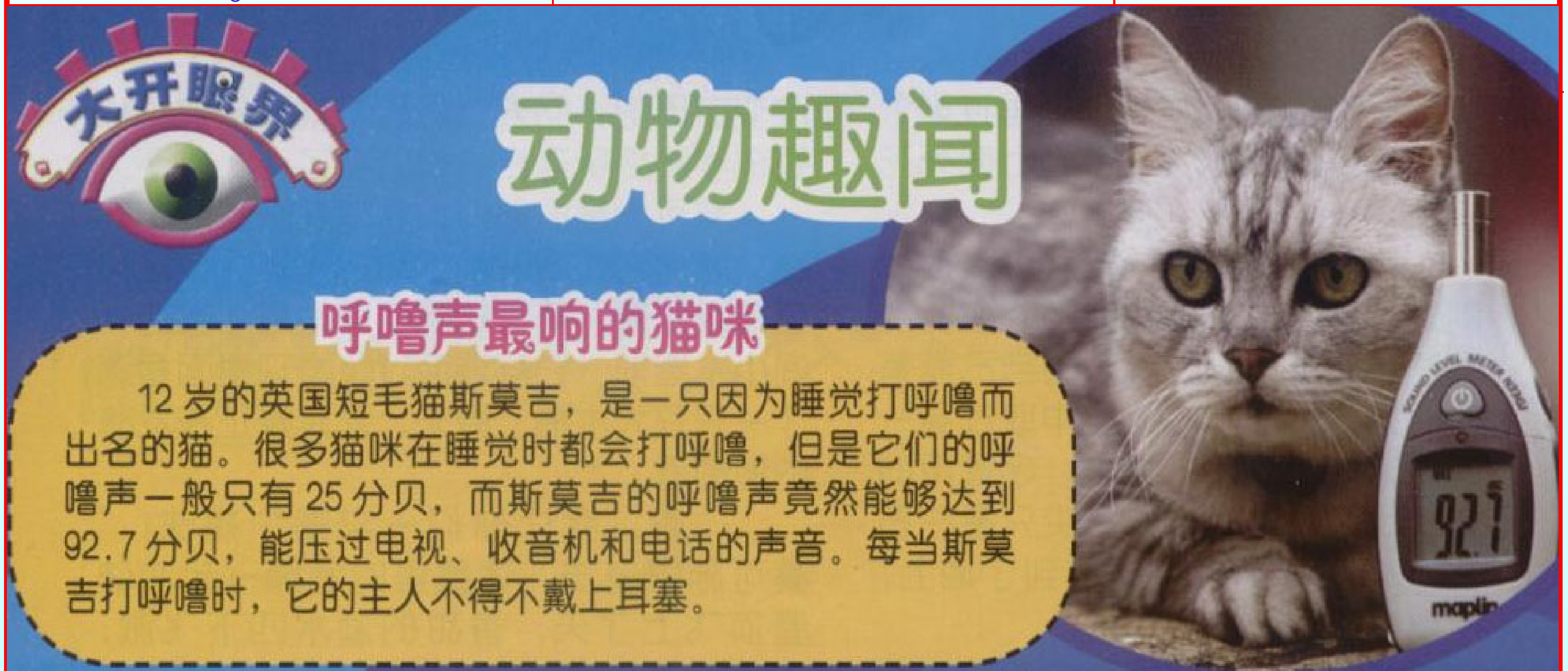
几种介质中的声速和声阻抗

媒质	u (m/s)	ρ (kg/m^3)	Z [kg/(m^2·s)]
空气	3.32×10^2 (0°C)	1.29	4.28×10^2
	3.44×10^2 (20°C)	1.21	4.16×10^2
水	14.8×10^2 (20°C)	988.2	1.48×10^6
脂肪	14.0×10^2	970	1.36×10^6
脑	15.3×10^2	1020	1.56×10^6
肌肉	15.7×10^2	1040	1.63×10^6
密质骨	36.0×10^2	1700	6.12×10^6
钢	50.5×10^2	7800	39.4×10^6

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}\text{(decibel, dB, 分贝)} \qquad I_0 = 10^{-12}(\mathrm{W\cdot m^{-2}})$$

几 种 声 音 的 声 强 及 声 强 级 数

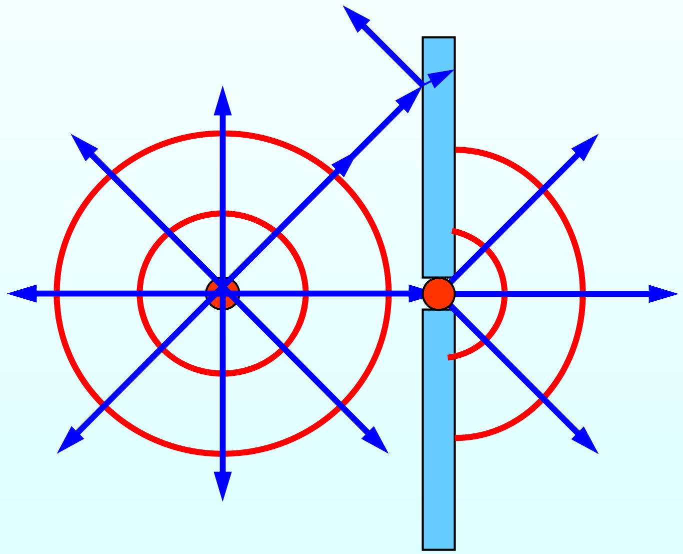
声　　　　音	声 强 $I\,(\mathrm{W\cdot m^{-2}})$	声强级 L (dB)
闻阈 I_0	10^{-12}	0



伤害人体	>10	130

第5节 波的衍射和波的干涉
Diffraction and Interference of Waves

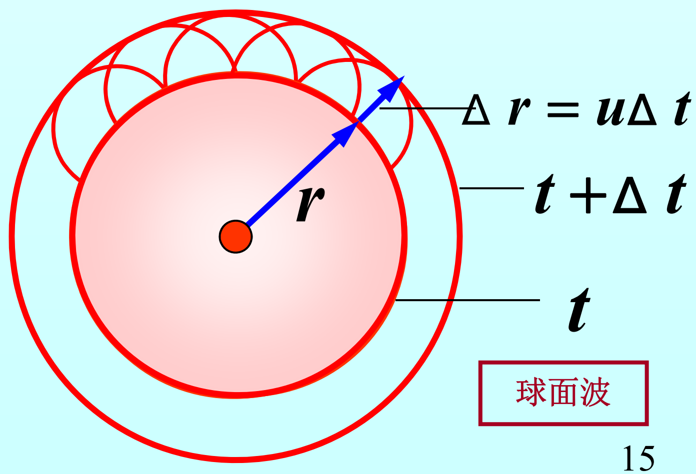
一、惠更斯原理　折射与反射



当波在均匀媒质中传播时，波线是直线。当遇到另一媒质或障碍物时，波线方向发生变化，产生反射、折射、衍射等现象。它们都可用惠更斯原理来解释。

1. 惠更斯原理

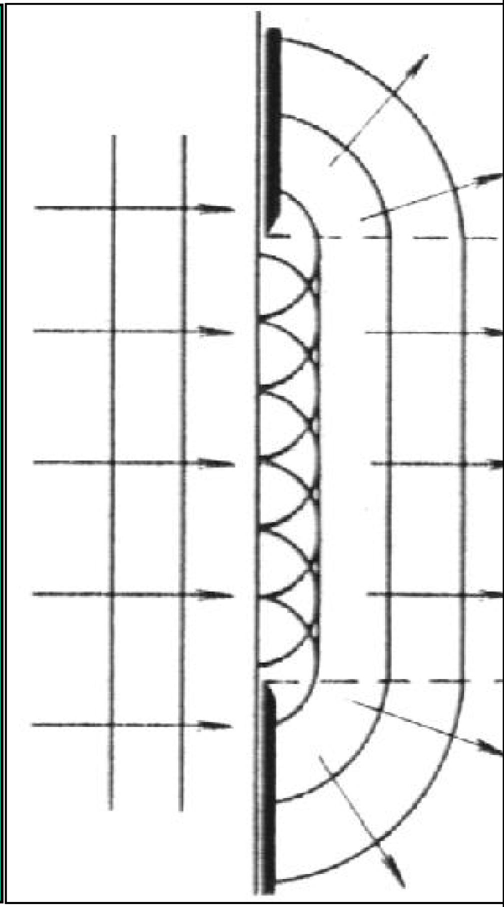
波阵面上各点都可视为新的波源产生球面子波，这些子波的包迹就是新的波阵面。



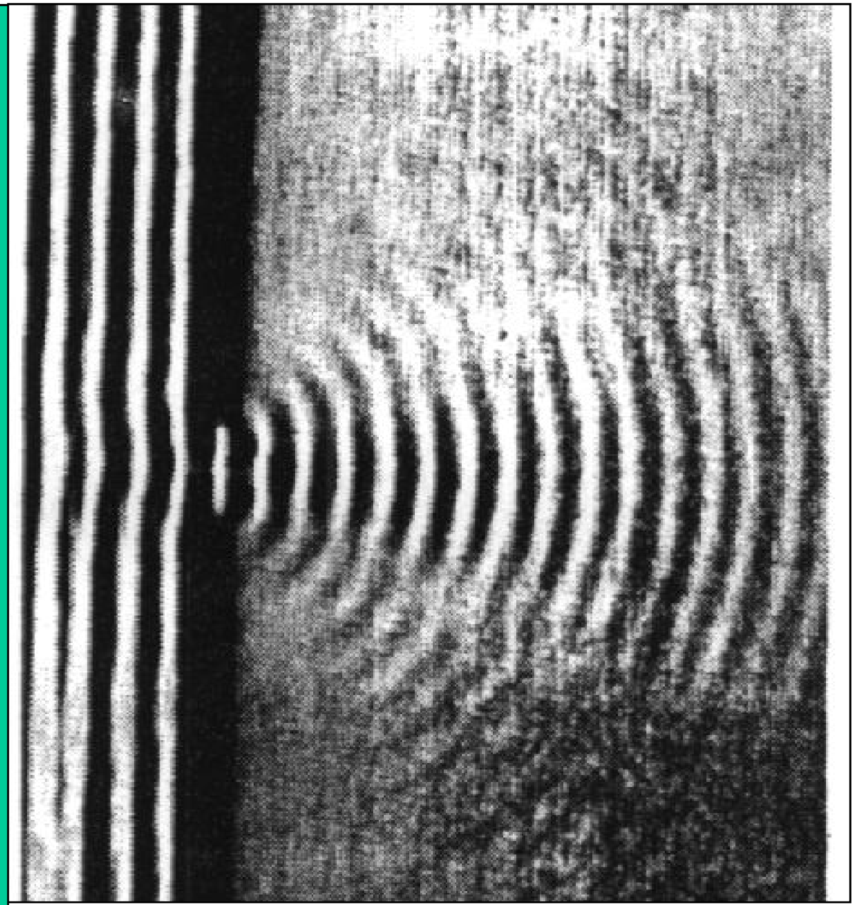
2. 波的衍射

波的衍射：波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播。

波的衍射



水波通过狭缝后的衍射



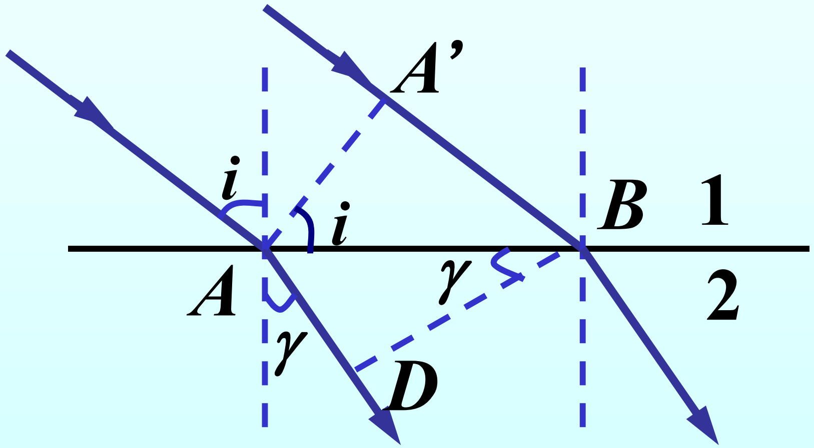
3. 波的折射

用作图法求出折射波的传播方向 折射

由图11-7-3

$$A'B = AB\sin i = u_1 \Delta t$$

$$AD = AB\sin\gamma = u_2 \Delta t$$

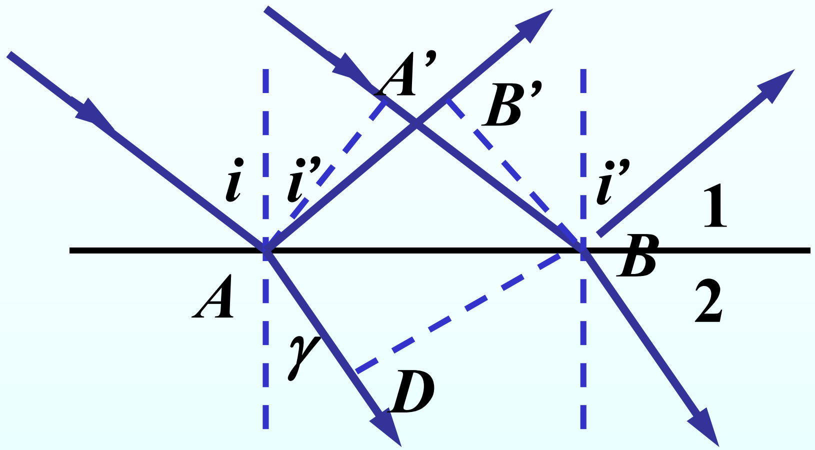


波的折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin\gamma} = \frac{u_1}{u_2} = n_{21}$$

i--入射角， γ--折射角

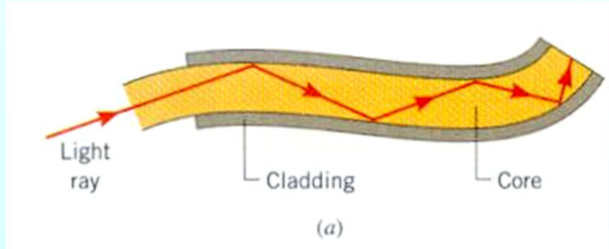
4. 波的反射



波的反射定律: $i = i'$

全反射: $u_1 < u_2,\ i < \gamma$

临界角: $\dfrac{\sin i}{\sin \gamma} = \dfrac{\sin i_{临}}{\sin \pi/2} = \dfrac{u_1}{u_2} = n_{21}$



全反射条件: $i > i_{临} = \arcsin \dfrac{u_1}{u_2}$

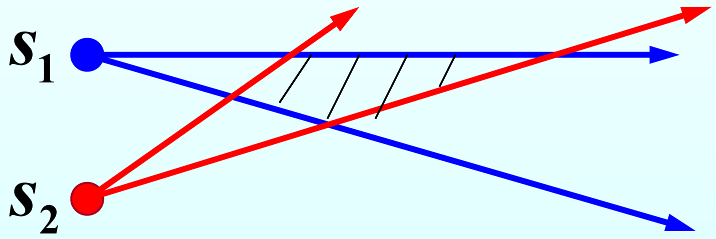
二、 波的干涉

1. 波传播的独立性

每列波传播时，不会因与其它波相遇而改变自己原有的特性(传播方向、振动方向、频率、波长等).

2. 波的叠加原理

在几列波相遇的区域中，质点的振动是各列波单独传播 时在该点引起的振动的合成。



• 波的强度过大 →叠加原理不成立。

通常波强不太强的波相遇, 满足叠原理, 称为**线性波.** 波强强到不满足叠加原理的波, 称为**非线性波**.

3. 波的干涉 ——最简单、最重要的波动叠加情况

（1）相干波条件

两个振动方向相同、频率相等、位相差恒定的波源称**相干波源**，它们发出的波叫**相干波**。

相干波叠加后，空间形成稳定的合振动加强、减弱的分布 ———这种现象称**波的干涉**。

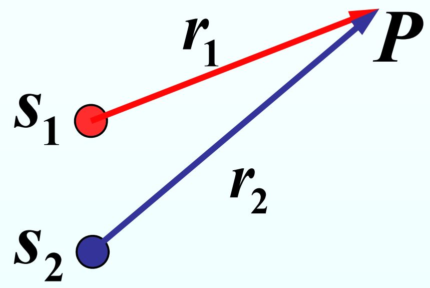
声波干涉：强的地方总强, 弱的地方总弱。

光波干涉：亮的地方总亮, 暗的地方总暗。

水波干涉：凸的地方总凸, 凹的地方总凹。

干涉加强、减弱点的轨迹是什么曲线?

（2）干涉加强、减弱条件



设波源振动方程

$$s_1 \quad y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$s_2 \quad y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$s_1 \rightarrow P\text{点} \quad y_1 = A_1\cos[\omega(t - \frac{r_1}{u}) + \varphi_{10}] = A_1\cos(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_{10})$$

$$s_2 \rightarrow P\text{点} \quad y_2 = A_2\cos[\omega(t - \frac{r_2}{u}) + \varphi_{20}] = A_2\cos(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_{20})$$

P点合振动为两同方向同频率谐振动合成

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\varphi_{20} - \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)]}$

两波在P点分振动位相差

干涉加强、减弱条件： $\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[\varphi_{20}-\varphi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)]}}$

$$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm 2k\pi & A=A_1+A_2 \text{ 加强}\\ \pm(2k+1)\pi & A=|A_1-A_2| \text{ 减弱}\end{cases}$$
$k=0,1,2\cdots$

若 $\varphi_{20}=\varphi_{10}$ 即两波源同位相，则

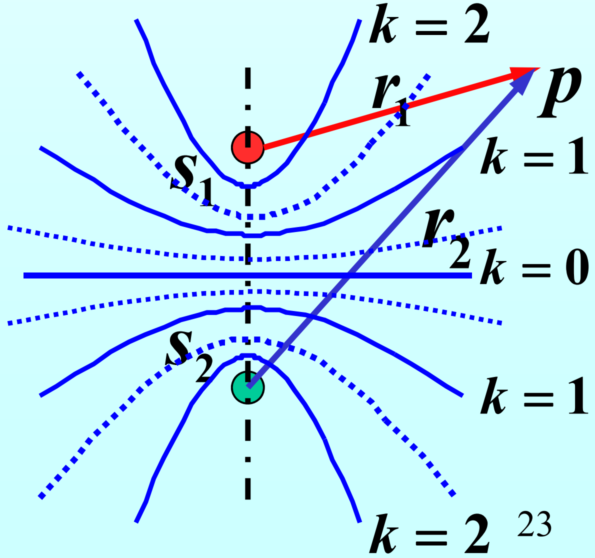
波程差 $\delta=r_1-r_2=\begin{cases}\pm k\lambda & \text{加强（相长、极大）}\\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{减弱（相消、极小）}\end{cases}$

讨论

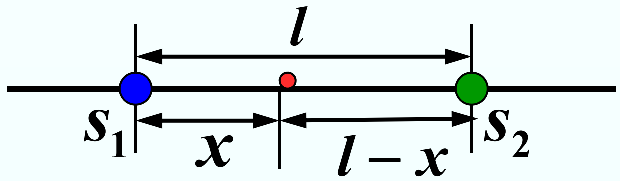
$k=0$ $r_1-r_2=0$ 加强 直线

$k=1$ $r_1-r_2=\pm\lambda$ 加强 双曲线

$k=0$ $r_1-r_2=\pm\dfrac{\lambda}{2}$ 减弱 双曲线



例6. 设两相干波源 s_1、s_2



$l=10\ \text{m},\ \ A_1=A_2=0.02\ \text{m}$

$\nu=5\ \text{Hz},\ \varphi_{10}=\varphi_{20}=0,\ \ u=10\ \text{m/s}$

求： (1) 它们连线上振动加强的位置及其合振幅？

$\because \varphi_{20}=\varphi_{10} \qquad \lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{10}{5}=2\ \text{m}$

由 $r_1-r_2=\pm k\lambda \longrightarrow x-(l-x)=\pm k\lambda$

$$x=\frac{l}{2}\pm k\frac{\lambda}{2}=5\pm k\ (\text{m})$$

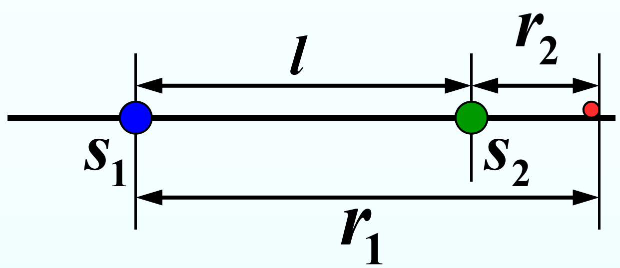
x取值在0 — l之间

$k=0,1,2,3,4,5$

P$_{98}$ 例题11-10

$$\left.\begin{matrix} x=5,6,7,8,9,10 \\ 4,3,2,1,0 \end{matrix}\right\}(\text{m})\ \text{加强}\ A=2A_1=0.04\ \text{m}$$

（2）延长线上合振动如何？



$r_1 - r_2 = l = 10\,\mathrm{m} = 5\lambda$ 加强

两边延长线上合振动始终加强

（3）能否改变 l 使延长线上合振动减弱？

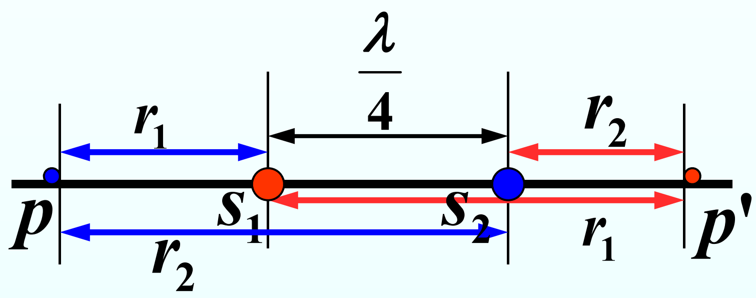
可以！ $l = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ 半波长的奇数倍即可。

（4）能否使延长线上合振动一边加强、一边减弱？

如果不改变题目条件，不行！

这在无线电波定向辐射中很有用！

例7. 两相干波源 s_2 超前 s_1 $\frac{\pi}{2}$，相距 $l=\frac{\lambda}{4}$，$A_1=A_2$。讨论延长线上干涉情况



解： 左边延长线上 p 点

$$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\underline{\frac{\lambda}{4}}=0$$ 加强

合振幅 $A=2A_1$

右边延长线上 p' 点：

$$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\underline{(-\frac{\lambda}{4})}=\pi$$ 减弱

合振幅 $A=0$

合成波能量向左传加强 —定向辐射 (二元端式天线)

波个数愈多则定向性愈好！(天线列阵)