Entrega práctica 5

Santiago Wirzt

May 21, 2020

1 Costo de cons

1.1 Work

Sea **h** la altura de un árbol T.
- Caso base h = 0.
$W_{cons}(0) = c_1$
- Paso inductivo.
$W_{cons}(h) = c_2 + W_{cons}(h-1) = ... = (h-1)c_2 + c_1$

Quiero ver que $W_{cons}(h) \in \mathcal{O}(h)$
Sup. $\exists c \in \mathbf{R}^+, n_0 \in \mathbf{N}$ / $\forall h \geq n_0$ $W_{cons}(h) \leq ch$

$W_{cons}(h) = (h-1)c_2 + c_1 \leq_{(*)} (h-1)k + k = kh \leq ch \Rightarrow k \leq c$
(*) k = max(c_1, c_2).

Entonces $W_{cons}(h) \in \mathcal{O}(h)$ para cualquier c$\geq max(c_1, c_2)$ y $n_0 = 0$

1.2 Span

Sea **h** la altura de un árbol T.
- Caso base h = 0.
$S_{cons}(0) = 1$
- Paso inductivo.
$S_{cons}(h) = 1 + S_{cons}(h-1) = 1 + 1 + S_{cons}(h-2) = ... = h$

Luego trivialmente tengo $S_{cons}(h) \in \mathcal{O}(h)$

2 Costo de tabulate

2.1 Work

Sea f función y $n \in \mathbf{N}$, quiero obtener la recursión en n
- Caso base n = 0.
$W_{tab}(f, 0) = c_1$

- Paso inductivo.
$W_{tab}(f,n) = W_f(\lfloor n/2 \rfloor) + W_{tab}(f, \lfloor n/2 \rfloor) + W_{tab}(f.(+m+1), \lceil n/2 \rceil - 1) + c_2 \leq$
$W_f(n/2) + W_{tab}(f, n/2) + W_{tab}(f.(+m+1), n/2 - 1) + c_2$

Sabemos que la función va a iterar sobre n elementos en total (más algunos Empty finales en las hojas) por lo que una expansión de la recursión seria de la forma:

$$W_{tab}(f,n) = \sum_{i=0}^{n-1} W_f(i) + nc_2 + mc_1$$

Donde $W_f(i)$ es el trabajo de f en cada valor de i entre 0 y n, m es la cantidad de veces que se llama a *tabulate* con un valor 0 ($m > n$ por lo que escala con el n). Entonces:

$$W_{tab}(f,n) = \sum_{i=0}^{n-1} W_f(i) + \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n)$$

Como en el mejor de los casos $f(i) \in \mathcal{O}(1)$, luego como mínimo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_f(i) \in \mathcal{O}(n)$$

Por lo tanto puedo descartar los dos $\mathcal{O}(n)$ ya que son de orden menor o igual a la sumatoria, y obtengo:

$$W_{tab}(f,n) = \sum_{i=0}^{n-1} W_f(i)$$

2.2 Span

Sea f función y $n \in \mathbf{N}$, quiero obtener la recursión en n
- Caso base n = 0.
$S_{tab}(f,0) = 1$
- Paso inductivo.
$S_{tab}(f,n) = max(S_{tab}(f, \lfloor n/2 \rfloor), S_f(\lfloor n/2 \rfloor), S_{tab}(f, \lceil n/2 \rceil - 1)) + 1$
Supongo que $S_f(n) \in \mathcal{O}(1)$, luego como $\lfloor n/2 \rfloor \geq \lceil n/2 \rceil - 1$ tengo:

$$S_{tab}(f,n) = S_{tab}(f, \lfloor n/2 \rfloor) + 1 \leq S_{tab}(f, n/2) + 1$$

Por lo que su Profundidad es iguál a la altura del árbol, en el caso de un árbol balanceado, $h = \log n$ y termino:

$$S_{tab}(n) \in \mathcal{O}(\log n)$$

3 Costo de take

3.1 Work

Sea h la altura de un árbol T
- Caso base h = 0.
$W_{take}(0) = c_1$
- Paso inductivo (pensando el peor caso)
$W_{take}(h) = c_2 + W_{take}(h-1) = ... = (h-1)c_2 + c_1$

Como demostré en cons, esto es $\mathcal{O}(h)$. Por lo tanto:

$$W_{take}(h) \in \mathcal{O}(h)$$

3.2 Span

Sea h la altura de un árbol T
- Caso base h = 0.
$S_{take}(0) = 1$
- Paso inductivo (pensando el peor caso)
$S_{take}(h) = 1 + S_{take}(h-1) = 1 + 1 + S_{take}(h-2) = ... = h$

Trivialmente:

$$S_{take}(h) \in \mathcal{O}(h)$$