Terme 4)

ARTHUR FREEMAN
BSCII

Ex 2) Soit Ω dénombrable

Soit $f : \Omega \to [0,1]$ t.q. $\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1$. (fct. dens : loi de proba)

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} f(x)$ t.q. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est espace probabilisé.

Il faut t.q. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et que $\mathbb{P}(\bigsqcup_n A_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$.

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x \in \Omega} x\Big) \underset{\substack{\text{def} \\ \mathbb{P}}}{=} \sum_{x \in \Omega} f(x) = 1. \checkmark$$

Soit $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{P}(\Omega)$ une fam. dénombrable d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ disjoints. $(A_1 \cap \dots \cap A_n \dots) = \varnothing$.

$$\underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigsqcup_n A_n\Big)}_{\in \mathcal{P}(\Omega)} \underset{\substack{\text{par} \\ \text{def } \mathbb{P}}}{=} \sum_{x \in \bigsqcup_n A_n} f(x) = \sum_{x \in A_1} f(x) + \sum_{x \in A_2} f(x)$$

$$+ \dots + \sum_{x \in A_n} f(x) + \dots = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) + \dots$$

$\square$

Donc, vu que vérifie déf. $\mathbb{P}$ est mesure de proba, donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est esp probabilisé.

Ex 3) Soit $\lambda \geq 0$, $\Omega = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

M.q. $f(k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ est une densité de probabilité.

Il faut M.q. $f : \Omega \to [0,1]$

et que $\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1$

avec $x = k \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$,

$f(k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$, clairement, vu que $\lambda \geq 0$, $f(k) \geq 0$.

Et $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ Mais on sait

que $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$, donc $e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1$.

$\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) = 1$. Et cela implique que $f(k) \leq 1$ $\forall k$.

Donc f est fct de densité de proba.

Ex 4) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(E, \mathcal{B})$

$X : \Omega \longrightarrow E$ var al.

$\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$, $B \longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(B))$

M.q. $(E, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ est esp. probabilisé.

Il faut m.q. $\mathbb{P}_X$ est mesure de probabilités.

i) $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}_X(X^{-1}(E))$ mais $X^{-1}(E) = \{x \in \Omega \mid X(x) \in E\}$
$= \Omega$

$= \mathbb{P}_X(\Omega) = 1$. ✓

(de sous-ensembles)

ii) Soit $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ fam d'ensembles de $\mathcal{B}$ disjoints.

$\mathbb{P}_X\left(\bigsqcup_{n \geq 1} B_n\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup_{n \geq 1} B_n\right)\right)$ mais X^{-1} est

var. aléatoire, donc, elle respecte les tribus. ($\forall B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$)

Aussi, $X^{-1}\left(\bigsqcup_{n \geq 1} B_n\right) = \{x \in \Omega \mid X(x) \in \bigsqcup_{n \geq 1} B_n\} \Rightarrow$

$\exists! i \in \mathbb{N} \mid X(x) \in B_i$, $\forall i$, donc $\{x \in \Omega \mid X(x) \in \bigsqcup_{n \geq 1} B_n\}$
vu que disjoints entre eux

$= \{x \in \Omega \mid X(x) \in B_1\} \cup \{x \in \Omega \mid X(x) \in B_2\} \cup \cdots \cup \{x \mid X(x) \in B_n\} \cup \ldots$

Et tous les ensembles sont disjoints, car $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ sont disjoints et si $x \in X^{-1}\left(\bigsqcup_{n \geq 1} B_n\right)$, il n'appartient que à <u>un seul</u> de ces ensembles, donc ils ont aucun x en commun.

Via axiome Kolmogorov :

$\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup_{n \geq 1} B_n\right)\right) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \cdots + \mathbb{P}(B_n) + \cdots$

$= \sum \mathbb{P}(B_n) \Leftrightarrow \mathbb{P}_X$ mesure de Proba, donc $(E, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ esp. probabilisé

Ex 1) (a) $\iff$ (c)

Comb-avec. rep = C.A.R

$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Considérons $E \setminus \{x_1\}$, clairement les C.A.R de E ne contenant pas x_1 sont en bijection avec les C.A.R de $E \setminus \{x_1\}$ (1)

Et les C.A.R. de E contenant au-moins x_1 sont en bijection avec les C.A.R de $k-1$ éléments parmi E. (Si $\{ \dots, \dots \}$, alors $\to \{ \dots, \dots \}$ on peut enlever x_1 et il y a autant). (2)

Notons (1) Γ_{n-1}^{k} et (2) Γ_{n}^{k-1}, on a la relation de récurrence $\Gamma_n^k = \Gamma_{n-1}^k + \Gamma_n^{k-1}$, car le nombre de C.A.R est égal à celui des C.A.R sans x_1 plus celui des C.A.R avec x_1 dans chaque choix.

Vérifions que $\binom{n+k-1}{k}$ satisfait la condition $= \Gamma_n^k$

$$\underbrace{\binom{n-1+k-1}{k}}_{=\Gamma_{n-1}^{k}} + \underbrace{\binom{n+k-1-1}{k-1}}_{=\Gamma_{n}^{k-1}} = \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-2}{k-1}$$

triangle Pascal.

$\overset{!}{=} \binom{n+k-1}{k}$ et si $n=2, k=1$ $\Gamma_2^1 = \binom{3-1}{1} = 2$.

$n=1, k=0$ $\Gamma_1^0 = \binom{0}{1} = 0$ ∎