~~E~~x 1) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne Markov homogène.

Supposons que $\mathbb{P}(X_{n-1} = y \mid X_0 = x) = P^{n-1}(x,y)$ $\forall x, y \in E$.

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) \underset{\uparrow}{=} \sum_z \mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = z, X_0 = x) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = z \mid X_0 = x)$$

proba tot.

$$= \sum_z \mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = z) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = z \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_z P(z, y) \cdot P^{n-1}(x, z)$$

$$\Omega = \bigsqcup_i (X_{i-1} = z \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_z P^{n-1}(x, z) \cdot P(z, y)$$

Chaque chemin est disjoint!

$$= P^n(x, y)$$

Remarque :

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) \overset{(1)}{=} P^n(x,y) = \sum_z P^{n-1}(x, z) \cdot P(y, z)$$ où P et Q sont mat. stochastique.

$$\Omega = \bigsqcup_z X_{n-1}^{-1}(\{z\})$$ où la mesure de proba est

$\mathbb{P}(A \mid X_0 = x)$

2) Soient $X_0, \dots, X_n, \dots$

des v.a. independantes $X_i : \Omega \to \mathbb{Z}_n$.

$\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$. $X_1, \dots, X_n, \dots$ suivant lo: $\sim B(p,q)$. $X_i : \Omega \to \{1,1\}$. $\forall i \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$S_n := \sum_{k=0}^{n} X_k$ m.q. S_n est une chaine de markov.

Supposons que $n \geq 1$. Il faut m.q.

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = x_{n+1} / S_n = x_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} = x_{n+1} \mid S_n = x_n, \dots, S_0 = x_0)$$

$$\iff$$

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1} / S_n = s_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n+1} X_k = s_{n+1} \,/\, \sum_{k=0}^{n} X_k = s_n\right)$$

$$= \frac{\mathbb{P}((S_{n+1} = s_{n+1}) \cap (S_n = s_n))}{\mathbb{P}(S_n = s_n)}$$

Étudions $(S_{n+1} = s_{n+1}) \cap (S_n = s_n)$, en particulier

étudions $(S_n = s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} X_k = s_n\right)$

$$= (X_n + X_{n-1} + \dots + X_1 + X_0 = s_n) = (X_{n-1} + \dots + X_1 + X_0 = \underbrace{s_n - X_n}_{= s_{n-1}})$$

$= (S_n = s_n) \cap (S_{n-1} = s_{n-1})$ on itère par récurrence

$$= (S_n = s_n) \cap (S_{n-1} = s_{n-1}) \cap \dots \cap (S_0 = s_0)$$

C'est bien chaîne de Markov.

$p = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot P^{2n}(0,0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \mathbb{P}(S_{2n} = 0 \mid S_0 = 0)$$

$$(S_{2n} = 0 \mid S_0 = 0) = \left(\sum_{k=0}^{2n} X_k = 0 \mid X_0 = 0\right) = \left(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0\right).$$

On sait que $X_i : \Omega \to \{-1, 1\}$ donc il faut autant de de -1 que de 1. $2n$.

$$\mathbb{P}(\Sigma_n = n) \underset{\text{loi binomiale}}{=} \binom{2n}{n} \cdot p^{n} \cdot q^{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} \cdot \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{2^{2n}}} \frac{\sqrt{4\pi n}}{(2\pi n)} \cdot \frac{\cancel{2^{2n}} \cdot \cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}} \cdot \sqrt{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}\sqrt{\pi n}}{\cancel{2}\pi n} \cdot \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Ex 3) On commence à l'état x_0 qui est dans un coin d'échiquier.

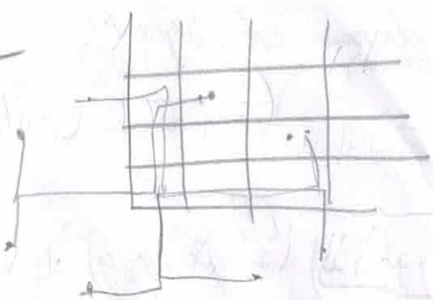
On a que

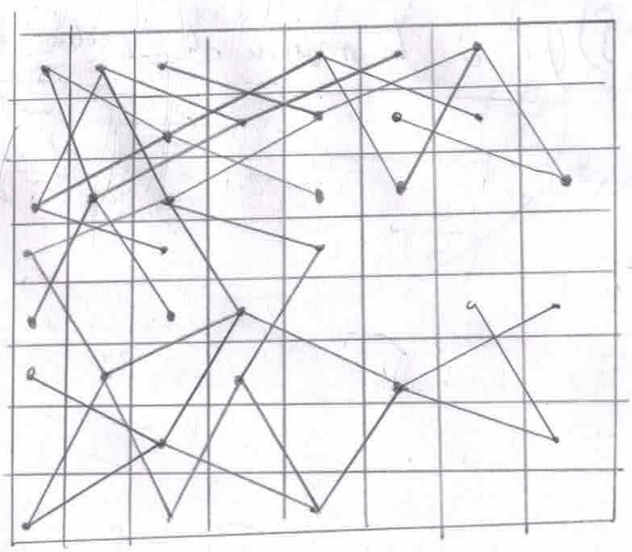
$$\mathbb{E}_{x_0}[T_{x_0}] = \frac{2 \cdot |A|}{d_x}$$

et dans le coin d'un échiquier le degré est de 2

$$= \frac{\cancel{2} \cdot |A|}{\cancel{2}} = |A|$$

On lie deux cases par une arête $\Leftrightarrow$ un cavalier peut passer d'une case à l'autre. Il faut déterminer la taille $|A|$





Bon je vais pas re-dessiner le knights graph. Sur wiki on a $4n^2 - 6 \cdot (2n) + 8$ arêtes, donc $4 \cdot 8^2 - 12 \cdot 8 + 8 = 168$ arêtes.

Donc en 168 coups on y est. (en moyenne) Si on commence au centre on a $d_x = 8$

Donc $\mathbb{E}_x[T_{x_0}] = \frac{2 \cdot 168}{\quad} = 42$ coups.