Série 12)

Ex 1) Soit P, Q mat. stochastiques sur E discret.

$$P \cdot Q = \left(\sum_{y \in E} P(x,y) \cdot Q(y,z) \right)_{(x,z) \in E \times E}$$

M.q. $P \cdot Q$ est mat schotastique.

Soit $x \in E$, considérons

$$\sum_{y \in E} PQ(x,y) = \sum_{y \in E} \sum_{z \in E} P(x,z) \cdot Q(z,y)$$

$$= \sum_{z \in E} P(x,z) \cdot \sum_{y \in E} Q(z,y) \underset{\uparrow}{=} 1 \cdot 1 = 1.$$

P, Q schotastiques.

Donc $P \cdot Q$ est schotastiques.

Ex 2) Soit P, Q m. stochastique sur E.
Soit m mesure sur E invariante par P et Q.
M.q. m est invariante par PQ. Soit $y \in E$,

Considérons :
$$\sum_{x \in E} m(x) \cdot PQ(x,y) \overset{\text{def. mult}}{=} \sum_{x \in E} m(x) \cdot \sum_{z \in E} P(x,z) \cdot Q(z,y)$$

$$= \sum_{z \in E} Q(z,y) \underbrace{\sum_{x \in E} m(x) \cdot P(x,z)}_{\underset{\uparrow}{=} m(z)} = \sum_{z \in E} Q(z,y) \cdot m(y)$$

P invariant. mat stocha

$$= m(y) \cdot \sum_{z \in E} Q(z,y)$$

$$= m(y) \quad \square$$

Ex 3) P mat. stocha sur E irreductible.

Soit m mesure invariante identiquement nulle.

a) Si m est P reversible on a que $\forall x,y \in E$

$$m(x)\,P(x,y) = m(y)\,P(y,x)\text{, donc } P(x,y) = \frac{m(y)}{m(x)}P(y,x) = \hat{P}.$$

Et vice versa, si $\forall x,y$ $\hat{P} = P$,

on a $m(x)P(x,y) = m(y)P(y,x)$ $\square$

b) Par définition, $\hat{P}(y,x) = \dfrac{m(x)}{m(y)} \cdot P(x,y)$

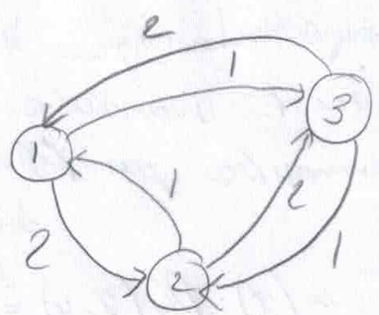
et P est irreductible, donc $\exists u$ t.q. $P^u(x,y) > 0$.

$$P(x,y) = \hat{P}(y,x)\,\frac{m(y)}{m(x)}\text{, donc } \hat{P}^u(y,x)\cdot\frac{m(y)}{m(x)} > 0$$

Et donc vu que $m : P(E) \to [0,\infty[$, $\hat{P}^u(y,x) > 0$.

c) $E = \{1,2,3\}$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \frac{1}{3}$$



On cherche $m(x)$ t.q. $\sum_x m(x)\,P(x,y) = m(y)$ $\forall y \in E$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_x m(x)\cdot P(x,1) = m(1) = \cancel{m(1)\cdot P(1,1)}^{\,0} + m(2)\cdot P(2,1) + m(3)\cdot P(3,1) \\ \sum_x m(x)\cdot P(x,2) = m(2) = m(1)\cdot P(1,2) + \cancel{m(2)\cdot P(2,2)}^{\,0} + m(3)\cdot P(3,2) \\ \sum_x m(x)\cdot P(x,3) = m(3) = m(1)\cdot P(1,3) + m(2)\cdot P(2,3) + \cancel{m(3)\cdot P(3,3)}^{\,0} \end{cases}$$

donc, $\begin{cases} m(1) = \frac{m(2)}{3} + \frac{2}{3} \cdot m(3) \\ m(2) = m(1) \cdot \frac{2}{3} + m(3) \cdot \frac{1}{3} \\ m(3) = m(1) \cdot \frac{1}{3} + m(2) \cdot \frac{2}{3} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 3m(1) = m(2) + 2m(3) \\ 3m(2) = 2m(1) + m(3) \\ 3m(3) = m(1) + 2m(2) \end{cases}$ via méthode du pivot.

$\sim \begin{cases} m(2) + 2m(3) = 3m(1) \\ 2m(1) + m(3) = 3m(2) \\ m(1) + 2m(2) = 3m(3) \end{cases} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_3} \begin{cases} \ldots \\ m(3) - 4m(2) = 3m(2) - 6m(3) \\ \end{cases}$

$\sim \begin{cases} m(2) + 2m(3) = 3m(2) = 3m(3) = 3m(1) \\ 7m(2) = 7m(3) \Leftrightarrow m(2) = m(3) \end{cases}$ donc $\boxed{m(1) = m(2) = m(3)}$

Et donc, $3m = 3m$
$3m = 3m$
$3m = 3m$

Ainsi soit $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $m(1) = \lambda$, c'est solution.

Donc on a trouvé une mesure P-invariante mais c'est pas inversible. Avec $x = 1$, $y = 2$,

$$\lambda \cdot \underbrace{P(1,2)}_{\frac{2}{3}} \neq \lambda \cdot \underbrace{P(2,1)}_{1/3}$$