Série 7)

Ex 3) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

avec densité de proba cont. par morceaux et $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

M.q. $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Soit $a > 0$, $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt$

$\geq \int_a^{+\infty} \underbrace{t}_{>0} \underbrace{f_X(t)}_{>0} dt = \int_a^{+\infty} |t| \cdot f_X(t) \cdot dt \geq a \cdot \int_a^{+\infty} f_X(t)\, dt$

$= a \cdot \mathbb{P}(|X| \geq a) \iff \frac{\mathbb{E}[X]}{a} \geq \mathbb{P}(|X| \geq a)$. $\square$

Ex 6) Soit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. M.q. si

$\mathbb{P}(|Z| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \implies \mathbb{P}(Z = 0) = 1$.

$\mathbb{P}(Z \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|Z| > \frac{1}{n})\right)$

$\iff \mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z \neq 0) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|Z| > \frac{1}{n})\right)$

$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid |Z(\omega)| > \frac{1}{n}\}\right) = 1 - \mathbb{P}(\Omega \setminus \{0\})$

$= 1$. $\square$

Ex 2) $p = \frac{6}{10}$, gain $= 100'000$.

$\bar{p} = \frac{4}{10}$, perte $= 20'000$.

C'est une v.a. $X : \Omega \to \{100'000, -20'000\}$

Avec $\mathbb{P}(X = 100'000) = \frac{6}{10}$ et $\mathbb{P}(X = -20'000) = \frac{4}{10}$.

$\mathbb{E}[X] = \frac{6}{10} \cdot 100'000 - \frac{4}{10} \cdot 20'000 = 52'000$.

C'est très rentable si on peut le faire infiniment.

Ex 1) $N = 1000$, $b_1 = 500$ F, 50 billets à 10F, 2 autres à 100 F. Il faut que l'espérance de la v.a. $X : \Omega \to \{500 - \text{prix}, 10 - \text{prix}, 100 - \text{prix}, - \text{prix}\}$ soit nulle ou négative si la loterie veut un profit.

Notons $\lambda := \text{prix}$. Avec proba uniforme, $|\Omega| = 1000$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1000} \cdot (500 - \lambda) + \frac{50}{1000} \cdot (10 - \lambda) + \frac{2}{1000} \cdot (100 - \lambda) - \frac{947}{1000} \lambda = 0$$

$\Leftrightarrow 500 - \lambda + 500 - 50\lambda + 200 - 2\lambda - 947\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -1000\lambda = -1200 \Leftrightarrow \lambda = 1,2$ F.

7) M.q. si X est v.a. t.q. $Var(X) = 0$, $\exists\, \omega \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathbb{P}(X = \omega) = 1$.

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] < \infty.$$

Donc, le moment d'ordre 2 est fini. Nous pouvons aussi appliquer Tchebishev. Soit $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2} = 0$$

Donc, $\mathbb{P}(\overbrace{|X - \mathbb{E}[X]|}^{:= Z} \geq a) = 0 \quad \underbrace{\forall a}_{= \varepsilon} > 0$, via l'exercice 6), cela implique que $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| = 0) = 1$.

Donc, avec $\omega := \mathbb{E}[X]$, nous avons trouvé une valeur t.q. la v.a. prenne toujours cette valeur

Ex 8) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$$\underbrace{\mathbb{E}[X] = 500'000}_{= 5 \cdot \sigma}, \quad \sigma = 100'000$$

$$P(\text{"aucune perte"}) = \frac{95}{100} = 95\%.$$

a) M.q. l'obtention d'un bénéfice est impliquée par la condition $(|X - \mu| \leq 5 \cdot \sigma)$

Afin d'obtenir un bénéfice, il faut que $(X \geq 0)$ c'est un bilan <u>annuel</u>, donc v.a. discrète.

$$(0 \leq X) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq 0\} = (-\mu \leq X - \mu)$$
$$= (\mu \geq \mu - X) = (5 \cdot \sigma \geq |\mu - X|) = (5 \cdot \sigma \geq |X - \mu|)$$

b) Soit $a > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$

appliquons l'inégalité dans le cas suivant :

$$\underbrace{\mathbb{P}(|X - \mu| > 5 \cdot 6)}_{\Rightarrow \text{"non obtention d'un bénéfice" (contraposée)}} \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(5 \cdot 6)^2} = \frac{(100'000)^2}{(5'500'000)^2}$$

$$= \frac{1}{625} = 0{,}16\ \% \text{ de chances de pertes.}$$

c) On est tranquilles, le PDG sur-estime la probabilité de faire des pertes.