~~Serie~~ 5) Ex 1) ①

Il faut trouver $\mathbb{P}(S_n = k)$, il faut remarquer que :

$$(S_n = k) = (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)$$
$$\cup\ (X_1 = 0) \cap (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{1+k} = 1) \cap (X_{k+2} = 0)$$
$$\cap \dots \cap (X_n = 0)\ \cup \dots$$

Au total, il y aura $\binom{n}{k}$ unions à écrire, pour finalement donner $(S_n = k)$.

Mais ces unions d'intersections sont disjointes, en effet $\forall$ clause, $\exists i \in \{0, \dots, n\}$ t.q. la clause suivante ait l'élément $(X_{i+1} = 0)$ et $(X_i = 1)$, donc l'intersection sera vide.

Ainsi, via le deuxième axiome de Kolmogorov et vu que les X_i sont mutuellement indépendants.

Et aussi, chaque clause prendra la valeur $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_k = 1) \cdot \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) \cdots \mathbb{P}(X_n = 0)$$
$$+ \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_{1+k} = 1) \cdot \mathbb{P}(X_{k+2} = 0)$$
$$+ \dots$$
$$= \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

II

Ex 2) M.q. $\lim_{n \to \infty} B(n, p_n)(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ (2)

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$= \frac{n^k \cdot n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{(np)^k q^{n-k} n(n-1) \cdots (n-k+1)\cancel{(n-k)}}{n^k \cdot k! \cancel{(n-k)!}}$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \underbrace{q^{n-k}}_{= \left(1 - \frac{n \cdot p}{n}\right)^{n-k}}$$

Ainsi, $B(n, p) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{(np)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k}$

Supposons que p_n est une suite qui tend vers 0.

Considérons $\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ et $\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda$.

$$\lim_{n \to \infty} B(n, p_n)(k) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}^{= O_{n \to \infty}(n^k)}}{n^k}}_{\longrightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{(np_n)^k}{k!}}_{\to \frac{\lambda^k}{k!}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-k}}$$

Mais on sait que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$!

Donc, tous les membres du produit convergent et on a (précédente) (cf. p. 7-8)

3

$$\lim_{n\to\infty} B(n, p_n)(k) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot k}{n^k}\cdot\frac{(n\cdot p_n)^k}{k!}\left(1-\frac{n\cdot p_n}{n}\right)^{n-k}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{O(n^k)}{n^k}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n\cdot p_n)^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n\,p_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= 1\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \qquad \square$$

Ex 3) $P(\overset{=0}{D}) = \frac{4}{100}$, $P(\overset{=1}{F}) = 1-p(D) = \frac{96}{100}$

P_k("35 objets comprennent k objets défectueux")

Définissons la variable aléatoire $X_0 : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$

et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Par ex 1) on sait que S_n suit une loi binomiale de paramètre p, donc

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad \text{Avec } p = \frac{4}{100}$$

$P(S_n = 0) = \binom{35}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{35} = 24$ % de chances d'aucune pièce défectueuse.

$P(S_n = 1) = \binom{35}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^{34} = 34$ %.

$P(S_n = 2) = \binom{35}{2}\cdot 0{,}04^2\cdot(1-0{,}04)^{33} = 24$ %, $P(S_n = 3) = 11$ %

$P(S_n = 4) = 3{,}78$ % de

Avec loi de poisson, (4)

$B(35,p)(0) = e^{-35 \cdot 0{,}04} \cdot \frac{(35 \cdot 0{,}04)^0}{0!} = 24\%$ $\quad B(35,p)(3) = 11\%$.

$B(35,p)(1) = e^{-35 \cdot 0{,}04} \cdot \frac{(35 \cdot 0{,}04)^1}{1!} = 34\%$ $\quad B(35,p)(4) = 3{,}95\%$.

$B(35,p)(2) = 0{,}247 \cdot \frac{49}{50}$

$= 24\%$

C'est remarquablement monotone !
Pas exactement les mêmes valeurs plus la proba devient petite, car il faut que $p \longrightarrow 0$ pour que ce soit exact, mais c'est quand même une bonne approximation.

Ex 4) Nous effectuons le changement de variable $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, ainsi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot y^2} dy$, calculons $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right)^2$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \cdot dx\, dy$

$x < a,$

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0.$$

Si $x > b$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{-\infty}^{x} t\,dt$

$$= \frac{1}{b-a}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{b} t\,dt}_{= \int_{-\infty}^{a} t\,dt + \int_{a}^{b} t\,dt} + \underbrace{\int_{b}^{x} t \cdot dt}_{=0}\Big] = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} t\,dt$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{a} t\,dt}_{=0}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Mais si $a + b \neq 2$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{b+a}{2} \neq 1$, donc $f(t)$ ne sera it pas densité de probabilité ?

Ex 7) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Cas discret : Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y) \overset{X, Y \text{ indépendantes}}{=} \mathbb{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$

Donc, $\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i \cdot \sum_j \mathbb{P}(Y = y_j)\, y_j$

$$= \sum_i \sum_j \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j) \cdot x_i \cdot y_j = \sum_i \sum_j \cdot \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \cdot x_i \cdot y_j$$

$$= \mathbb{E}[X \cdot Y]. \square$$

Ex 5) Soit X var. al. de loi $(\exp, \lambda)$ exprimez

$\mathbb{P}(X \leq x)$, si X suit loi exponentielle, alors

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ où $f(t)$ est fct densité de probabilité.

On déduit

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot dt \overset{\text{si } x \geq 0}{=} \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}$$

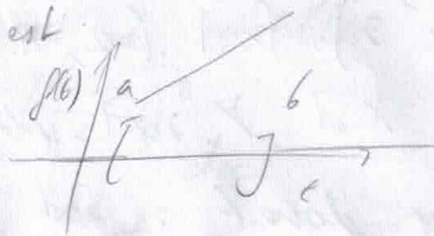
$$= \left(-e^{-\lambda x} - (-e^{0})\right) = 1 - e^{-\lambda x}$$

On remarque que si $x \to \infty$, $\mathbb{P}(X \leq x) \to 1$.

Ex 6) Soit X var. al. loi uniforme sur $[a,b]$

c.à.d. la densité de proba de X est

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{x} t\,dt$$

si $x \in [a,b]$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{a} t\,dt}_{=0} + \int_{a}^{x} t \cdot dt \right] = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{x} t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2 - a^2}{2} = \frac{x^2 - a^2}{2(b-a)}.$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot dy\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\cdot dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\cdot dy\right)\cdot dx$$

Évaluons : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2(x^2+y^2)}\,dy \overset{\text{fct paire} > 0}{=} 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-1/2(x^2+y^2)}\cdot dy$

$$= 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+t^2)}\cdot x\,dt \quad \text{avec} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \int_0^b f(x)\cdot dx$$

Donc,

$$\varphi(t) = x\cdot t \qquad \varphi'(t) = x$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot dy\right)^2 = 2\cdot\int_0^{\infty}\left(2\cdot\int_0^{\infty} e^{-1/2x^2(1+t^2)}\cdot x\cdot dt\right)\cdot dx$$

$$= 4\cdot\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+t^2)}\cdot x\cdot dx\right) dt \qquad \int x e^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}\cdot e^{x}$$

$$= 4\cdot\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{-\frac{2}{2}(1+t^2)}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2(1+t^2)}\Big|_0^{\infty}\right] dt$$

$$= 4\cdot\int_0^{\infty}\left[0 + \frac{1}{1+t^2}\right]\cdot dt = 4\cdot\arctan(t)\Big|_0^{\infty}$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi\text{, donc } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot dy = \sqrt{2\pi} \quad \square$$

Aussi, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \sqrt{2\pi}$

Donc,
$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)' \cdot dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$