~~Série~~ 11)

1) le thm. central limite dit que

$$\mathbb{P}(a < S_n^* < b) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

Soit $S_n = \sum X_n$, X_n ayant même espérance et variance deux à deux.

En s'intéressant à $E[X_n] = \mu$, $\sqrt{Var(X)} = \sigma$

$$\mathbb{P}(a < S_n < b) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{a-n\mu}{\sqrt{n \cdot Var(X)}}}_{:=\alpha} < \frac{S_n - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot Var(X)}} < \underbrace{\frac{b-n\mu}{\sqrt{n Var(X)}}}_{:=\beta}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\alpha\cdot\sqrt{n}}_{:=c} < \frac{S_n - n\mu}{\sigma} < \underbrace{\beta\cdot\sqrt{n}}_{:=d}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(c < \frac{X_1-\mu}{\sigma} + \frac{X_2-\mu}{\sigma} + \dots + \frac{X_n-\mu}{\sigma} < d\Big)$$

$= \mathbb{P}(c < \sum X_n^* < d)$, donc $\forall S_n$, on peut se ramener à une somme des var. centrées réduites, ainsi, il suffit de montrer ce cas.

4) $a \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $h_n := \dfrac{e^{\frac{-i\theta}{2}}}{n}$

on a $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$ et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{a + h_n} - \overline{a}}{h_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\overline{h_n}}{h_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{-i\theta/2}}$$

$$= e^{i\theta/2 + i\theta/2} = e^{i\theta}.$$

5) Soit $a \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^{a}}{h} \underset{\text{hospital}}{=} \lim_{h \to 0} (a+h)' \cdot e^{a+h} = e^{a}$$

3) X v.a. f_X t.q. $E[|X|] < \infty$, soit $t \in \mathbb{R}$

On a le thm. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ integrables $\longrightarrow f$.

Supposons qu'$\exists\, g$ int. t.q. $|f_n(x)| < g(x)\ \forall n, x$.

$\Rightarrow f$ est integrable et $\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$$\lim_{s \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{isx} - 1}{isx} - 1 \right) \cdot x \cdot e^{itx} f_X(x)\,dx \overset{(!)}{=} 0$$

Etudions, $\lim_{s \to 0} \left(\frac{e^{isx} - 1}{isx} - 1 \right) x \cdot e^{itx} f_X(x)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{e^{\frac{ix}{n}} - 1}{\frac{ix}{n}} - 1 \right) \cdot x \cdot e^{itx} f_X(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{e^{ix/n} - 1}{\frac{ix}{n}} \right) \cdot x \cdot e^{itx} f_X(x) - x \cdot e^{itx} f_X(x)$$

On a via Hospital, $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{ix/n} - 1}{\frac{ix}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{-\frac{ix}{n^2} e^{\frac{ix}{n}}}{-\frac{ix}{n^2}}$

$= \lim_{n \to \infty} e^{\frac{ix}{n}} = 1$. Donc on a $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$f_n := \left(\frac{e^{ix/n} - 1}{\frac{ix}{n}} \right) \cdot x \cdot e^{itx} f_X(x) \xrightarrow{n \to \infty} f := x \cdot e^{itx} f_X(x)$$

Et avec le thm convergence

On a que $\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{ix}{n}} - 1}{\frac{ix}{n}} \right) x \cdot e^{itx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f_X(x)\, dx$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\delta x} - 1}{i\delta x} - 1 \right) \cdot x \cdot e^{itx} f_X(x)\, dx = 0.$$