~~Série~~ 3)

FREEMAN
ARTHUR.

Ex 3)

a) Une assemblée de 9 personnes doit élire 3 personnes. Combien $\exists$ t'il d'opportunités.

Trésorier : T, secrétaire : S, président : P

$$\Omega = \left\{ \{x_T, x_S, x_P\} \mid x_T, x_S, x_P \in E_{personnes} \text{ et } x_T \neq x_S \neq x_P \right\}$$

On cherche donc le cardinal de l'ensemble des sous ensembles des 9 personnes de cardinal 3.

$$|\Omega| = C_3^9 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84 \text{ choix.}$$

b) Combien de tirages <u>ordonnés</u> de 2 boules parmi 6 existe t'il ?

$$T = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}, x_1 \neq x_2 \right\}$$

C'est un arrangement de 2 parmi 6.

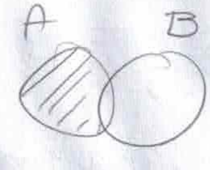
$$A_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30 \text{ choix.}$$

c) $C_3^{1000} = \dfrac{1000!}{3!\cdot(1000-3)!}$ C'est monstrueuse !

Plus que plusieurs milliards.

Ex 2)

a) i) M q. Si $A, B \subset \Omega$ sont indépendants $\Rightarrow$ A et $\bar{B}$ sont indépendants.



$$P(A \setminus B) = P(A \setminus (A\cap B)) \quad * \; A\cap B \subset A$$

$$\underset{*}{=} P(A) - P(A\cap B)$$

$$= P(A)\cdot(1-P(B)) = P(A)\cdot P(\bar{B}).$$

Mais $A \setminus B = A \setminus (A\cap B)$ (on enlève que ce qu'il y a en commun) $= A \cap \bar{B}$

Donc, $P(A\setminus B) = P(A\cap \bar{B}) = P(A)\cdot P(\bar{B})$. □

ii) M q. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) \overset{(!)}{=} P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = (1-P(A))\cdot(1-P(B))$$

$$= 1 - P(B) - P(A) + \underbrace{P(A)\cdot P(B)}_{=P(A\cap B)}$$

$$P(B) + P(A) - P(A\cap B) = \overbrace{P(\Omega)}^{=1} + P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B) = P(\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}) \underset{\text{Morgan}}{=} P(A\cup B) \checkmark \quad \square$$

A = "être chauve" $P(A) = \frac{1}{25}$

B = "posséder un PC" $P(B) = \frac{1}{8}$

Combien de chauves avec PC dans 800 personnes?

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{200}$

$\frac{1}{200} \cdot 800 = 4$ personnes parmi 800.

c) On jette un dé deux fois.

N 9. P("obtenir un total de 7 points") ne dépend pas de la valeur obtenue au premier jet.

$A = \{(3,4), (4,3), (2,5), (5,2), (6,1), (1,6)\}$

$A \subset \Omega$ et $|\Omega| = 6^2 = 36$

$|A| = 6$. $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Clairement, le lancer du premier dé (B) étant ≤ 6, c'est le deuxième qui décidera de si on est dans A ou pas.

Donc, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Et on a: $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = \frac{\cancel{1/6} \cdot 1/6}{\cancel{1/6}} = 1/6$.

La proba d'être dans A ne dépends que du deuxième lancer.

Ex 1) $\boxed{b_i \; n_i}$ U_1 $\boxed{b_i \; n_i}$ U_2 $i = 1, 2$

On choisit au hasard équiprobablement une des deux urnes.
On tire dans la choisie une boule.
Sachant que la boule tirée est noire quelle est la proba que l'urne choisie soit la numéro i?

N = "la boule est noire"

$$P(U_i \mid N)$$

$$= \frac{P(N \mid U_i) \cdot P(U_i)}{P(N \mid U_1) \cdot P(U_1) + P(N \mid U_2) \cdot P(U_2)}$$

$$= \frac{\frac{n_i}{b_i + n_i} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{n_1}{b_1 + n_1} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{n_2}{b_2 + n_2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{n_i}{b_i + n_i}}{\frac{n_1}{b_1 + n_1} + \frac{n_2}{b_2 + n_2}}$$

4)

k personnes, n jours.

A = "personne n'est né le même jour"

a) $k, n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}^k$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P proba uniforme.

$A = \{(x_1, \dots, x_k) \in \Omega \ ; \ \forall i,j, 1 \leq i < j \leq k, x_i \neq x_j\}$

M. q. $P(A) = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$

$\Omega = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in \{1, \dots, n\} \ \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$

Clairement $|\Omega| = n^k$.

Et clairement on veut choisir un arrangement de k objets parmi n, l'ordre compte donc,

$|A| = A_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ et $P(A) = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$ □

proba uniforme.

b) $n = 365$,

Calculer $P($"Au moins deux personnes parmi k sont nées le même jour"$)$

$\Rightarrow 1 - P($personne n'est né le même jour$) = 1 - \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = 1 - P(A)$.

c) $1 - \dfrac{\frac{365!}{(365-k)!}}{365^k} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow k \geqslant 23$.

Ex 5)

a) $\Omega = \{0,1\}^{*}$

$A = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\} \text{ et } \exists K \ x_i \text{ t.q. } x_i = 0 \}$

$C^n_K = |A|$ Pour $n = 5$, $k = 2$

$= P(3,2) = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$

$= 10$

1 11100 8 10101
2 11001 9 01011
3 10011 10 01101
4 00111
5 10110
6 10011
7 01110

b) $C^{36}_{9} + C^{27}_{9} + C^{18}_{9} + C^{9}_{9}$

c) Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$.

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

M.q. $\binom{n}{p,q} = \binom{n}{p} \overset{(!)}{=} \binom{n}{q}$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(p+q)!}{p!(p+q-p)!} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}$$

$$= \frac{n!}{q!\,p!} = \frac{n!}{q!(n-q)!} = \binom{n}{q} \quad \square$$