Serie 6)

Ex 2)

A. FREEMAN

a) Ici, on regarde une probabilité pour un passager à un étage i donné. Chaque personne a $\frac{1}{k}$ chances de se rendre à l'étage i, donc $\mathbb{P}$(un passager ne sorte pas) $= 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$.

$* \; p_j$ = passager N°j, $1 \leq j \leq n$.

b) Ici on regarde une proba pour n passagers quelle est la proba qu'aucun ne sorte à l'étage i.

C'est une loi binômiale, où chaque passager suit une loi de Bernoulli $X_{p_j}^* : \Omega = \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{0,1\}$ pour un étage i donné, si on sort, $X_{p_j}(i) = 1$, sinon $X_{p_j}(i) = 0$.

Avec $\mathbb{P}(X_{p_j} = 1) = \frac{1}{k}$, $\mathbb{P}(X_{p_j} = 0) = 1 - \frac{1}{k}$.

La variable aléatoire est $S_n = X_{p_1} + X_{p_2} + \dots + X_{p_n}$

suit une loi binomiale, donc $\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n$

$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$ $\quad S_n : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

c) L'ascenseur ne s'arrête en i que si $\exists X_{p_j}$ t.q. $X_{p_j}(i) = 1$, donc parmi n personnes, au moins une personne doit vouloir descendre à cet étage.

$\mathbb{P}$(ascenseur s'arrête à l'étage i) $= 1 - \mathbb{P}$(0 personnes sorte en i)

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$.

d) $N_i : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{0,1\}$.

$$N_i(j) = \delta_{ij}$$

$$\mathbb{E}[N_i] = \mathbb{P}(N_i = 1)\cdot 1 + \mathbb{P}(N_i = 0)\cdot 0$$

$$= \mathbb{P}(N_i = 1) \overset{c)}{\underset{\downarrow}{=}} 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$$

e) Soit $N_i, N_j, i \neq j$

$$\mathbb{P}(N_i = 0, N_j = 0) = \mathbb{P}(N_i^{-1}(0) \cap N_j^{-1}(0))$$

$$= \mathbb{P}(\{1, \dots, k\} / i,j) = \frac{k-2}{k} = 1 - \frac{2}{k}$$

$$\mathbb{P}(N_i = 0)\cdot\mathbb{P}(N_j = 0) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right)^2$$

$$= 1 - 2\cdot\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2n} \neq 1 - \frac{2}{k}$$, donc

pas indépendant, ce qui est étonnant...

f) $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[N_1 + \dots + N_k] = \mathbb{E}[N_1] + \mathbb{E}[N_k]$

où $S_n = N_1 + \dots + N_k$ $\quad = k - k\cdot\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$

3)

a) $$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g^*(x)\, dx\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_*^2(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_*^2(x)\, dx$$

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec

fct de densité $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty[$

Supposons que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$.

M.q. $|\mathbb{E}[X]| < \infty$

Par hypothèse, $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X \cdot X] < \infty$

et par inégalité Cauchy-Schwarz :

Avec $f_*(x) = x \cdot f_X^{1/2}(x)$, $g_*(x) = f_X^{1/2}(x)$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X^{1/2}(x) \cdot f_X^{1/2}(x)\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)}_{=\mathbb{E}[X]} \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} < \infty$$

en effet, $\mathbb{E}[X^2] \underset{\text{thm. du transfert}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$

b)

Pour la variance,

$$V(x) = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{<\infty} - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{<\infty} < \infty.$$

Ex 4) $X : \Omega \to [-1,1]$, loi uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $Y = X^2$. M.q X et Y ne sont pas indépendantes, mais que $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

$$\mathbb{P}(X \leq x, y \leq Y) = \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, x] \cap Y^{-1}(-\infty, y])$$

Remarque : Si $x \in [-1,1]$, $x \geq x^2 = y$.

Donc, $X^{-1}(-\infty, x] \cap Y^{-1}(-\infty, y] = X^{-1}(-\infty, x]$.

et $\mathbb{P}(X \leq x, y \leq Y) = \mathbb{P}(X \leq x) \neq \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(y \leq Y)$

Donc, pas indépendants.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X^2]$$

f_X admet un moment d'ordre 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^2 f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{2} \cdot dt < \infty$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{2}\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{x}{2}\,dx \cdot \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{8}\Big|_{-1}^{1} - \left[\frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1} \cdot \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} \right]$$

$$= 0 - 0 \cdot \frac{2}{6} = 0.$$

a) 1) $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \dots, 6\}\}$

$A_{ij} \subset \Omega$, $A_{ij} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i = x_j\}$

On a A_{12}, A_{23}, A_{13}, considérons

$$\mathbb{P}(\underbrace{A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}}_{\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\} \text{ et cardinal } = 6}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

$x \neq x_j = x_i$
choix libres.

$$\mathbb{P}(A_{12}) = \mathbb{P}(A_{23}) = \mathbb{P}(A_{13}) = \mathbb{P}(A_{ij}) = \frac{1 \cdot 6 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Mais $\mathbb{P}(A_{12}) \cdot \mathbb{P}(A_{23}) \cdot \mathbb{P}(A_{13}) = \frac{1}{6^3} \neq \frac{1}{36}$, donc pas mutuellement indépendants.

Par contre, $\mathbb{P}(A_{12} \cap A_{23}) = \mathbb{P}(\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2\} \cap \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = x_3\}) = \mathbb{P}(\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\})$

$= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A_{12}) \cdot \mathbb{P}(A_{23}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Donc deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.