~~Série~~ 8) $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, indépendantes (1)

Ex 2) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu$ et $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$

Soit $S = X + Y$

Calculer $\rho_{X,S} = \dfrac{\mathbb{E}[(X-\mu)\cdot(S - \overbrace{\mathbb{E}[S]}^{= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\mu})]}{\underbrace{\sqrt{Var(X)}}_{=\sigma} \cdot \underbrace{\sqrt{Var(S)}}}$

$\mathbb{E}[(X-\mu)\cdot((X+Y) - 2\mu)]$

$= \mathbb{E}[X(X+Y) - 2\mu X - \mu\cdot(X+Y) + 2\mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2 + \underset{\overset{\downarrow}{\text{ind.}}}{YX} - 2\mu X - \mu X + \mu Y + 2\mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mu^2 - \cancel{2\mu^2} - \mu^2 - \cancel{\mu^2} + \cancel{2\mu^2}$

$= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2$

$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$= Var(X) = \sigma^2$

Donc,

$\rho_{X,S} = \dfrac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2}\cdot\sigma}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$Var(S) = \mathbb{E}((X+Y - \mathbb{E}[X+Y])^2)$

$= \mathbb{E}[(X+Y-2\mu)^2]$

$= \mathbb{E}[(X+Y)^2 - 2(X+Y)\cdot\mu + 4\mu^2]$

$\mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2 - 4\mu X - 4\mu Y + 4\mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] + 2\overbrace{\mathbb{E}[X\cdot Y]}^{= \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]} + \mathbb{E}[Y^2] - 4\mu\mathbb{E}[X] - 4\mu\mathbb{E}[Y] + 4\mu^2$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mu^2 - 4\mu^2 - \cancel{4\mu^2} + \cancel{4\mu^2}$

$= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mu^2$

$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$

$= \underbrace{Var(X)}_{=\sigma^2} + \underbrace{Var(Y)}_{=\sigma^2} = 2\sigma^2$

Ainsi, calculons la droite de régression linéaire approximant la dépendance de S en X.

$$a_0 = \frac{Cov(X,S)}{Var X} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$$b_0 = \mu - \frac{Cov(X,S)}{Var X} \cdot \mu = \mu - \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \mu = 0.$$

Donc, la droite aléatoire approximant S en X est X lui même !

Ex 1) $X : \Omega \to \{x_1, \dots, x_n\}$
$Y : \Omega \to \{y_1, \dots, y_n\}$ loi uniforme

$$\Phi(a,b) = E[(Y-(aX+b))^2] = \sum_{x_i, y_i} \frac{1}{n} (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_j - (a \cdot x_i + b))^2 \cdot \frac{1}{n}$$

On veux, $\forall i, \forall j$ minimiser $(y_j - (ax_i + b))^2 = (y_j - ax_i - b)^2$

voir p. 36 cours on sait que $b = E[Y] - a \cdot E[X]$

$$\text{Et } a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - E[X]} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } b = E[Y] - \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \cdot E[X].$$

donc,

$$a = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{E[X^2] - E[X]^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\sum x_i \cdot y_i - \frac{1}{n^2}\sum x_i \cdot \sum y_i}{\frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2 - \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum x_i\right)^2}$$

Ainsi, l'expression de la droite est :

$$y = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \sum x_i y_i - \frac{1}{n^2} \cdot \sum x_i\, y_i}{\frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2 - \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum x_i\right)^2} \cdot x + \sum y_i \cdot \frac{1}{n} - a \cdot \sum x_i \frac{1}{n}$$

C'est monstrueux ! Calculable à l'ordi mais algébriquement...

Ex 3) $a > 0$, $X : \Omega \to [0, 2a]$ loi uniforme (continue). (4)

$\{X_1, \ldots, X_n\}$ v.a. de même loi que X.

a) M.q. $\mathbb{E}[M_n] = a$ et que $Var[M_n] = \frac{a^2}{3n}$

$E[M_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] = \left(E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]\right) \cdot \frac{1}{n}$

Soit $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{E}[X_i] \underset{\substack{X \text{ v.a.} \\ \text{uniforme}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \cdot dt$

$= \int_0^{2a} t \cdot \frac{1}{2a} dt = \frac{t^2}{4a} \Big|_0^{2a} = a$ Donc,

$E[M_n] = \frac{n \cdot a}{n} = a.$

$Var[M_n] = E\left[(M_n - E(M_n))^2\right] = E\left[M_n^2 - 2 M_n \cdot E[M_n] + E[M_n]^2\right] = E[M_n^2] - 2E[M_n]^2 + E[M_n]^2$

$= \underbrace{E[M_n^2]}_{} - \underbrace{E[M_n]^2}_{= a^2} = E\left[\frac{X_1^2 + X_1 X_2 + \cdots + X_n^2}{n}\right] - E[M_n]$

$= \frac{1}{n^2}\left(E[X_1^2] + \overbrace{E[X_1 \cdot X_2]}^{= E[X_1] \cdot E[X_2] = a^2} + \cdots + E[X_n^2]\right) - E[M_n]^2$

$E[X_n^2] = E[X_1^2] = \int_0^{2a} t^2 \cdot \frac{1}{2a} = \frac{t^3}{6a}\Big|_0^{2a} = \frac{8a^{\cancel{3}2}}{6\cancel{a}} = \frac{4a^2}{3}$

Donc, (5)

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{3} + \frac{3a^2}{3} + \frac{3a^2}{3} + \cdots + \frac{3a^2}{3} + \frac{4a^2}{3} \right) - a^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{4na^2}{3} + \frac{(n^2-n)3a^2}{3} - \frac{3n^2a^2}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{3n^2} \left(4na^2 + \cancel{3n^2a^2} - 3na^2 - \cancel{3n^2a^2} \right)$$

$$= \frac{1}{3n^2} \left(na^2 \right) = \frac{a^2}{3n} . \ \square$$

b) $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$

$$\mathbb{P}(X_i < x) = \frac{x}{2a} .$$

$$\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x)$$

Mais $\forall i, j$, $\mathbb{P}(X_i \underset{\leq x}{} \cap X_j \underset{\leq x}{}) = \mathbb{P}(X_i \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_j \leq x)$, ici chaque X_i prendra une certaine valeur avec probabilité d'être $\leq x$ de $\left(\frac{x}{2a}\right)$, prendre le maximum de cet ensemble et qu'il soit $\leq x$ sera de - en - probable le plus d'expériences on fait. $\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(n \text{ variables al. soient } \leq x)$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x) = \left(\frac{x}{2a}\right)^n . \ \square$$

(continuation)

$$f_{T_n}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{P}(T_n \leq x) = n \cdot \left(\frac{x}{2a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2a}$$

$$= \frac{n}{2a} \cdot \left(\frac{x}{2a}\right)^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[T_n] = \int_0^{2a} t \cdot \frac{n}{2a} \left(\frac{t}{2a}\right)^{n-1} = \int_0^{2a} n \cdot \left(\frac{t}{2a}\right)^{n}$$

$$= \frac{n\, 2a \left(\frac{t}{2a}\right)^{n+1}}{n+1} \Bigg|_0^{2a} = \frac{2an}{n+1} \cdot \left(\frac{t}{2a}\right)^{n} \Bigg|_0^{2a}$$

$$= \frac{2an}{n+1} \quad \square$$

$$\mathrm{Var}[T_n] = \mathbb{E}[T_n^2] - \mathbb{E}[T_n]^2 = \int_0^{2a} t^2 \cdot \frac{n}{2a} \left(\frac{t}{2a}\right)^{n-1} dt - \left(\frac{2an}{n+1}\right)^2$$

$$= \int_0^{2a} n\, 2a\, \frac{t^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{t}{2a}\right)^{n-1} dt - \left(\frac{2an}{n+1}\right)^2$$

$$= n\, 2a \int_0^{2a} \left(\frac{t}{2a}\right)^{n+1} dt - \left(\frac{2an}{n+1}\right)^2$$

$$= 2an \cdot \frac{2a}{n+2} \cdot \left(\frac{t}{2a}\right)^{n+2} \Bigg|_0^{2a} - \left(\frac{2an}{n+1}\right)^2$$

7

$$= \frac{4a^2 n}{n+2} - \frac{4a^2 n^2}{(n+1)^2}$$

$$= 4a^2 \left[\frac{n\overbrace{(n+1)^2}^{=n^2+2n+1}}{(n+2)(n+1)^2} - \frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2 \cdot (n+2)} \right] = 4a^2 \left[\frac{\cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + n - \cancel{n^3} - \cancel{2n^2}}{(n+1)^2(n+2)} \right]$$

$$= \frac{4a^2 n}{(n+1)^2(n+2)} \quad \mathrm{II}$$

c) $U_n = \frac{n+1}{2n} \cdot T_n$ $\quad$ II

$$E[U_n] = \frac{n+1}{2n} \cdot E[T_n] = \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{2n}} \cdot \cancel{2}a \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}} = a$$

$$\mathrm{Var}[U_n] = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \cdot 4a^2 \cdot \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)^2}}{\cancel{4}n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{4}a^2 \cdot \frac{\cancel{n}}{(n+2)\cancel{(n+1)^2}} = \frac{a^2}{n(n+2)} \quad \mathrm{II}$$

d) Clairement si $n \to \infty$,

$\underset{\to 0}{\mathrm{Var}[U_n]} < \mathrm{Var}[M_n] \to 0$, donc $E[U_n] \to U_n$

Ce choisit U_n, qui sera le plus proche de la moyenne de X, car sa variance baisse plus vite et son espérance tends vers elle même.