Série 9)

Serie 9)
A. FREEMAN.

1) Soit T une v.a, $T : \Omega \to \mathbb{R}$ t.q. $\exists t \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathbb{P}(T \leq t) > 0$

On sait que $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \cdot dt$.

$\Leftrightarrow \exists B \subset \mathbb{R}, |B| = \infty$, t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_T(x) > 0$.

Donc, avec $t := x$, $\mathbb{P}(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(t) \cdot dt > 0$.

2) Soient X, Y v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y)$.

M.q. $\mathbb{P}(X + Y = z) \overset{(!)}{=} \sum_{x \in \mathbb{Z}} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$

Comme X et Y sont indépendantes, notons $\mathbb{1}_{\{(u,v) : u + v = z\}}(x,y)$ la fct caractéristique de "l'anneau" discret du périmètre z.

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}} f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot \mathbb{1}$$

$$= \sum_x \sum_y f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot \mathbb{1}_{\{(u,v) : u + v = z\}}$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{Z}} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) \qquad \square$$

$\Leftrightarrow (x,y) : x + y = z$

$\Leftrightarrow x = z - y \Leftrightarrow y = z - x$

3) Soit $U : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ fct continue. $U(0) = 1$,

$\forall s, t \in \mathbb{R}$, $U(s + t) = U(s) \cdot U(t)$.

M.q. $\exists a \in \mathbb{R}$ t.q. $U(t) = e^{at}$

Posons $L(t) := \log(U(t))$, montrons les propriétés

$$L(s + t) = \log(U(s + t)) = \log(U(s) \cdot U(t)) = \log(U(s)) + \log(U(t))$$

$$= L(s) + L(t)$$

Et aussi, $L(n) = \log(U(n))$, si $n = 0$, $L(0) = \log(U(0)) = \log(1) = 0$.

Supposons que $L(n-1) = (n-1) \cdot L(1)$

$$L(n) = L(n-1) + L(1) = (n-1) \cdot L(1) + L(1) = n \cdot L(1)$$

Ainsi, $L(n) = L(1 + \dots + 1) = n \cdot L(1)$ et $L(-n) = L(-1 - \dots - 1) = -n \cdot L(1)$ ...

$$L(1) = L\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right) = L\Big(\overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{n\text{ fois}}\Big)$$

$$= n \cdot L\left(\frac{1}{n}\right) \iff L\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot L(1). \quad \square$$

Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ m.q. $L\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot L(1)$

$L(n) = n \cdot L(1)$

$q \in \mathbb{Z}$, donc

$$L\left(\frac{p}{q}\right) = L\left(\frac{1}{q} \pm \cdots \pm \frac{1}{q}\right) = p \cdot L\left(\frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{q} \cdot L(1).$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ montrons que $L(x) = x \cdot L(1)$.

Vu que $\mathbb{R}$ est dense, $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \to x$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} L(u_n) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n \cdot L(1) = x \cdot L(1)$.

Donc, vu que c'est vrai si $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$ c'est vrai $\forall x \in \mathbb{R}$.

Prenons $a = L(1) = \log(U(1)) = \log(e^a) = a$.

$U(t)$ est la seule fonction qui satisfait les propriétés de L.

$$\operatorname{Log}(U(s+t)) = \operatorname{Log}(e^{as+at}) = \log(e^{as} \cdot e^{at}) = \log(e^{as})$$
$$+ \log(e^{at}) = as + at.$$

$$L(n) = \operatorname{Log}(e^{an}) = \log(e^a e^a \cdots e^a) = n \cdot \log(e^a) = n \cdot a = n \cdot L(1)$$
$$L\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{Log}(e^{\frac{t}{n}}) = \frac{1}{n} \log(e^t) = \frac{1}{n} \cdot t = \frac{1}{n} L(1).$$
$$L(t) = \log(e^{at}) = t \cdot \log(e^a) = t \cdot a = t \cdot L(1).$$

Donc, $\exists a \in \mathbb{R}$ t.q. $U(t) = e^{at}$. $\square$

Ex 4) Soit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = -e^{-ax} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ax)^k}{k!} \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}}\frac{(ax)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot a$$

$$f'(x) = a \cdot e^{-ax} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ax)^k}{k!} + -e^{-ax} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k \cdot (ax)^{k-1} \cdot a}{k!}$$

$$= a \cdot e^{-ax} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ax)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(ax)^{k-1}}{k!} \right)$$

$$= a \cdot e^{-ax} \cdot \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot a^n \cdot e^{-ax} \cdot \square$$