

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Probabilités et statistiques pour informaticiens

Série 1

1. Dénombrabilité

- (a) Soit A^* l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\{0; 1\}$. On ordonne les éléments de A^* selon leur longueur et pour des éléments de même longueur, selon l'ordre lexicographique :

$$A^* = \{0; 1; 00; 01; 10; 11; 000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111; \dots\}.$$

Ecrire un programme Python qui à partir d'un entier n , produit le n -ième mot de A^* .

- (b) Démontrer l'existence d'une bijection

$$b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$n \mapsto (x(n), y(n))$$

entre les nombre naturels \mathbb{N} et le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Choisir une telle bijection b et écrire un programme qui calcule $x(n)$ et $y(n)$.

- (c) Prouver que l'ensemble des suites infinies constituées de 0 et de 1 n'est pas dénombrable (Cantor).

2. Théorie des ensembles et mesure de probabilité

- (a) Soit Ω un ensemble et A, B des sous-ensembles de Ω . Exprimer la fonction caractéristique $1_{A \cup B}$ de $A \cup B$ en fonction de 1_A et 1_B . Indication : considérer $(1_\Omega - 1_A)(1_\Omega - 1_B)$.
- (b) Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. Soit $A, B \in \mathcal{F}$. Prouver que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3. Espaces probabilisés et calculs de probabilités

- (a) On lance deux pièces de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir ni deux faces ni deux piles ?
- (b) On lance 6 dés. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 6 faces différentes ?
- (c) On lance 15 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 8 fois le chiffre 1 ?
- (d) On lance 100 fois une pièce, quelle est la probabilité d'obtenir 2 faces ? 50 faces ? 98 faces ?

4. Interprétation

- Dans une cantine on propose deux desserts à chaque repas. La probabilité que l'un des deux desserts soit un yaourt est 0,4. La probabilité que l'un des deux desserts soit une orange est 0,8. La probabilité d'obtenir un yaourt et une orange est 0,3. Calculer la probabilité que l'on propose :
- (a) un yaourt et pas d'orange
 - (b) une orange et pas de yaourt
 - (c) ni orange ni yaourt