

1. Man beweise direkt, dass die durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ repräsentierte Bilinearform genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$ erfüllt sind.
2. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Man finde eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 bezüglich der durch A definierten Bilinearform $X^t A Y$.
3. Man finde Orthogonalbasen für die durch die folgenden Matrizen definierten Bilinearformen auf \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 .
 - a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Man ergänze den Vektor $X_1 = (1, 1, 1)^t / \sqrt{3}$ zu einer Orthonormalbasis für \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt.