Lineare Algebra Serie 6

Differentialgleichungen, Exponentialabbildung Abgabe: 12. April 2018

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte.

1. Man löse die Gleichung $\frac{dX}{dt} = AX$ jeweils für die folgenden Matrizen A:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Man kann eine Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

mit folgendem Trick in ein System von Gleichungen erster Ordnung umschreiben: Man führt unbekannte Funktionen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ein, und setzt $x = x_0$ und $\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-2$. Die ursprüngliche Gleichung wird dann durch das System

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, i = 0, \ldots, n-2 \text{ und } \frac{dx_{n-1}}{dt} = -\left(a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 x\right)$$

beschrieben. Man bestimme die Matrix, die dieses Gleichungssystem darstellt.

3. a) Man schreibe die lineare Gleichung zweiter Ordnung in einer Variablen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

in ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung in zwei Variablen $x_0 = x$ und $x_1 = \frac{dx}{dt}$ um.

b) Man löse das System für $b = -4$ und $c = 3$.

4. Man berechne e^A für die folgenden Matrizen A:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

5. Man beweise die Formel $e^{Spur A} = Det(e^A)$.

6. Für eine $n \times n$ Matrix A definiere man $\sin A$ und $\cos A$ mit Hilfe der Taylorentwicklungen von $\sin x$ bzw. $\cos x$.

a) Man beweise, dass diese Reihen für alle A konvergieren.

b) Man beweise, dass $\sin tA$ eine differenzierbare Funktion von t ist und dass

$$\frac{d(\sin tA)}{dt} = A \cos tA$$

gilt.