Lineare Algebra 2

Serie 7

Abgabe: 19. April 2018 r

---

1. (4 Punkte) Für eine $n \times n$ Matrix A definiere man $\sin A$ und $\cos A$ mit Hilfe der Taylorentwicklungen von $\sin x$ bzw. $\cos x$.

a) Man beweise, dass diese Reihen für alle A konvergieren.

b) Man beweise, dass $\sin tA$ eine differenzierbare Funktion von t ist und dass

$$\frac{d(\sin tA)}{dt} = A \cos tA$$

gilt.

2. (5 Punkte) Man diskutiere den Gültigkeitsbereich der folgenden Beziehungen:

a) $\cos^2 A + \sin^2 A = E$;

b) $e^{iA} = \cos A + i \sin A$;

c) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;

d) $\cos(A + B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$;

e) $e^{2\pi i A} = E$;

f) $d(e^{A(t)})/dt = e^{A(t)} A'(t)$ für eine differenzierbare Funktion $A(t)$ von t mit Werten in den Matrizen.

3. (3 Punkte) Sei X ein Eigenvektor einer $n \times n$ Matrix A mit Eigenwert λ. Man beweise:

a) Ist A invertierbar, so ist X auch Eigenvektor von A^{-1}, und zwar zum Eigenwert λ^{-1}.

b) Sei $p(t)$ ein Polynom. Dann ist X ein Eigenvektor von $p(A)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) X ist ein Eigenvektor von e^A zum Eigenwert e^λ.

4. (2 Punkte) Man beweise die Formel $e^{Spur A} = det(e^A)$.

5. (2 Punkte) Welche Jordansche Normalform hat eine Matrix, deren charakteristisches Polynom $(t-7)^{13}(t-5)^2$ ist, wenn der Eigenraum zum Eigenwert 7 eindimensional und der Eigenraum zum Eigenwert 5 dreidimensional ist?