Haute école d'ingénierie et d'architecture Fribourg
Hochschule für Technik und Architektur Freiburg

Réseaux IP

110bis - Rappel sur les probabilités

Hes·so // FRIBOURG FREIBURG
Haute Ecole Spécialisée de Suisse occidentale
Fachhochschule Westschweiz
University of Applied Sciences and Arts Western Switzerland

Réseaux IP

110bis. Rappel de probabilités

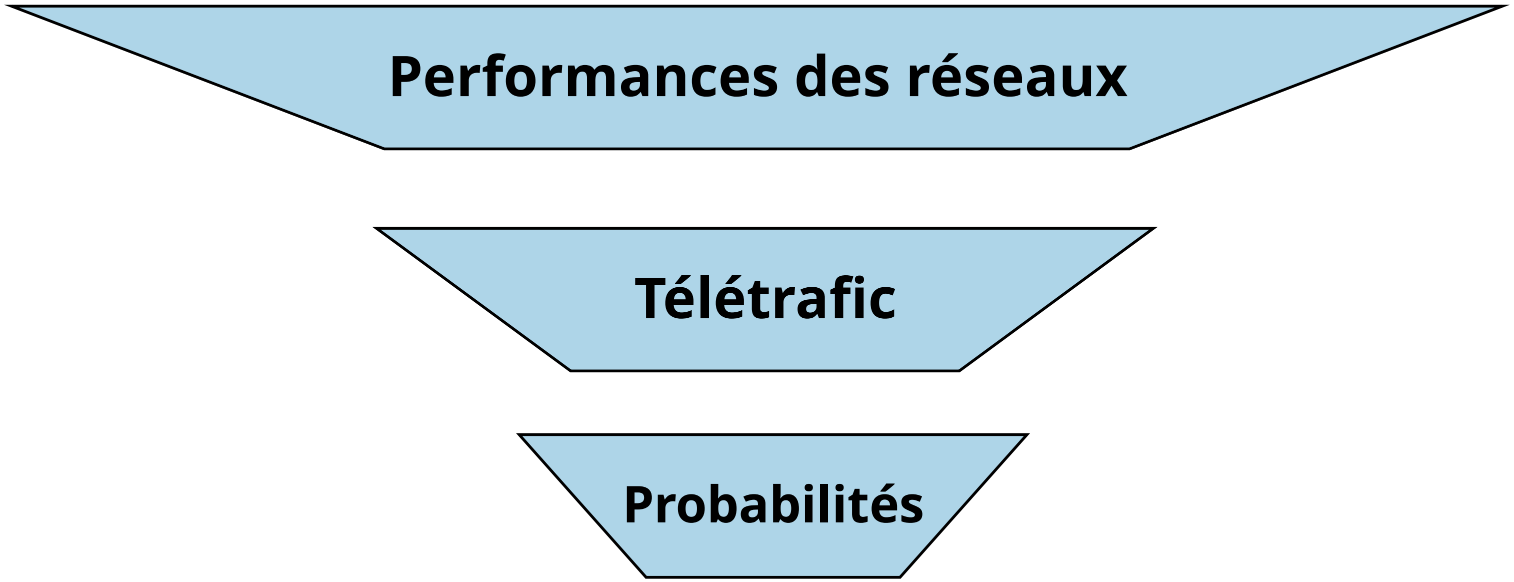
Introduction, Définitions, Probabilités conditionnelles, Variable aléatoire, Fonction de répartition, Densité de probabilité, Espérance, Variance, Ecart-type

Références:

- Statistique et probabilité, Gilles Ouellet, Edition Le Griffon d'argile, ISBN 2-89443-055-8

Introduction

L'étude des performances et de la qualité de service des réseaux de Téléinformatique est basée sur le télétrafic qui lui-même est largement basé sur le calcul des probabilités

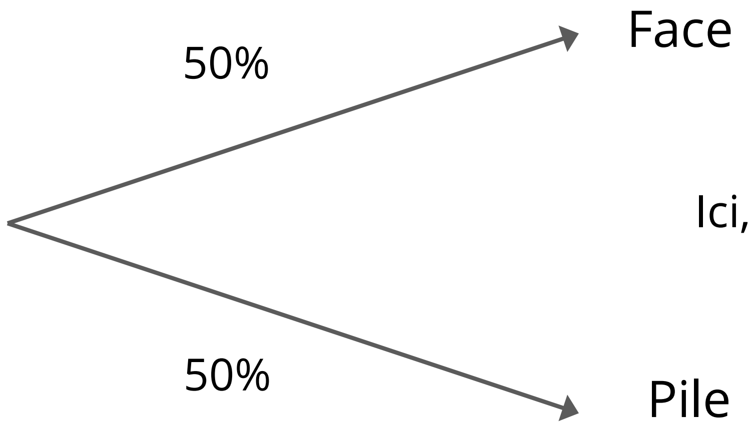


Dans ce cours, on suit une approche pragmatique. Voir le chapitre 110. « Rappel de probabilités ». Ces transparents se basent sur ce chapitre.

Probabilités

Le calcul des **probabilités** est l'étude des phénomènes **non déterministes** aussi appelés phénomènes **aléatoires**. Ce sont les phénomènes (résultats d'expériences) dont le résultat n'est pas connu à priori.

Pour chaque phénomène ou expérience, le **calcul des probabilités** attribue des "valeurs limites de fréquence relative" aux événements qu'on appelle **probabilité de ces événements**.

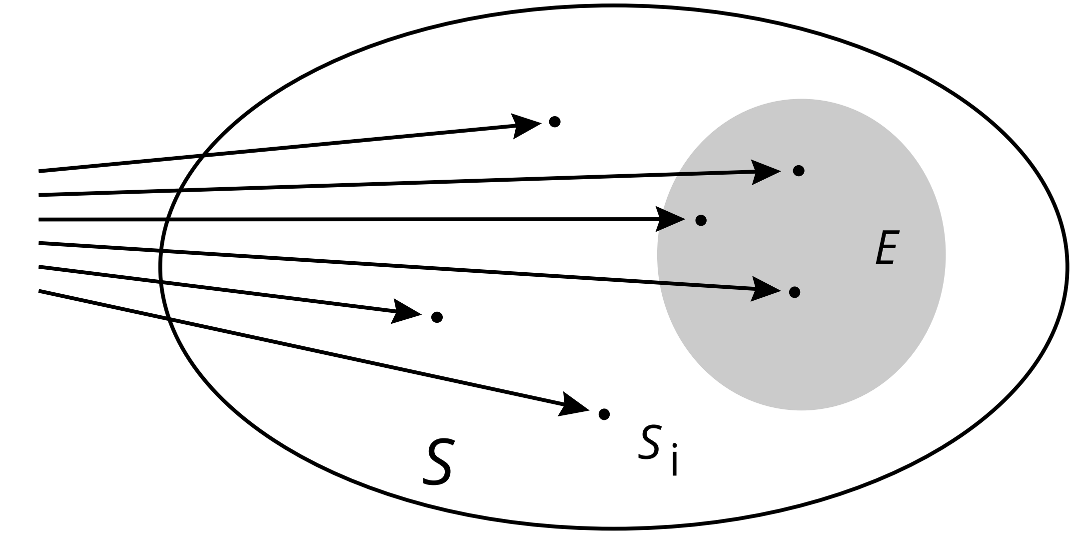


Ici, équiprobables

$$\boxed{0 \leq \text{Probabilité} \leq 1}$$

Ensemble fondamental

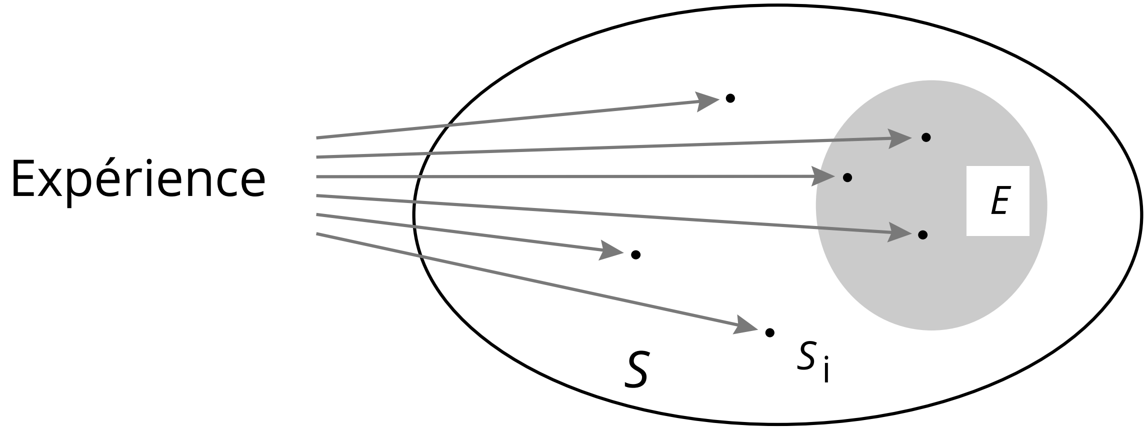
L'ensemble *S* de tous les résultats possibles *Si* d'une expérience est appelé **ensemble fondamental**



$$0 \le \mathrm{Prob}(S_i) \le 1$$

$$\sum_i \mathrm{Prob}(S_i) = \mathrm{Prob}(S) = 1$$

Exemple avec un dé



Si on jette un dé,

L'ensemble S est composé des résultats S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

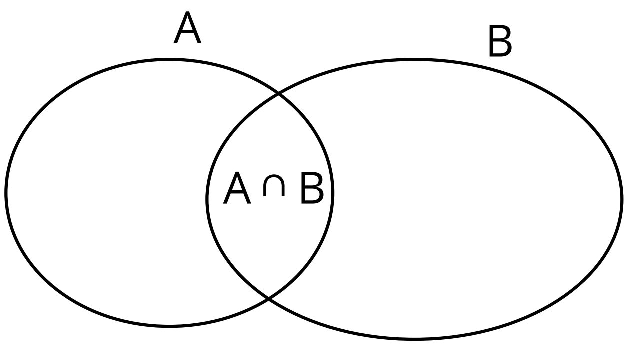
L'événement "**nombre pair**" est composé de {2, 4, 6}

L'événement "**nombre premier**" de {1, 2, 3, 5}.

A ∪ B est l'événement qui se produit si l'événement A ou l'événement B est réalisé. A ∩ B est l'événement qui se produit si A et B sont réalisés.

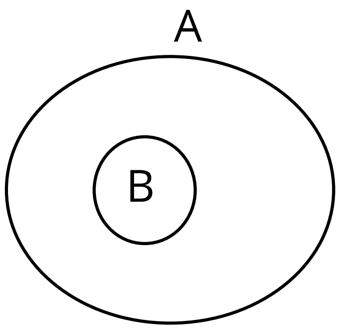
Axiome de Bayes

L'axiome de Bayes, nous donne la probabilité conditionnelle d'un événement ***B*** si l'événement ***A*** s'est produit



$$\mathrm{Prob}(B\ sachant\ A\ réalisé) = \mathrm{Prob}(B|A) = \frac{\mathrm{Prob}(A \cap B)}{\mathrm{Prob}(A)}\ ;\ P(A) \neq 0$$

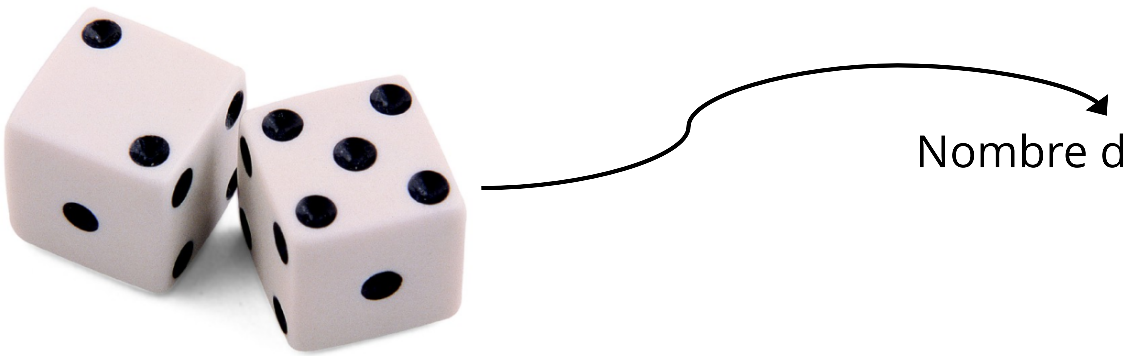
$B \subset A$



$$\mathrm{Prob}(B|A) = \frac{\mathrm{Prob}\ (B)}{\mathrm{Prob}\ (A)} \quad \text{si } B \subset A$$

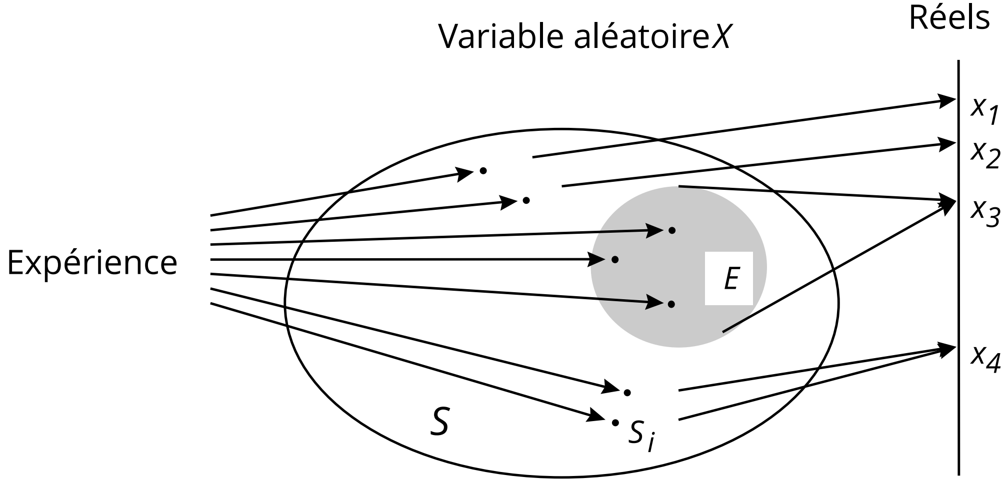
Variable aléatoires

Une **variable aléatoire** (V.A.) est une fonction qui associe un **nombre** à un **résultat** d'expérience.



Définition

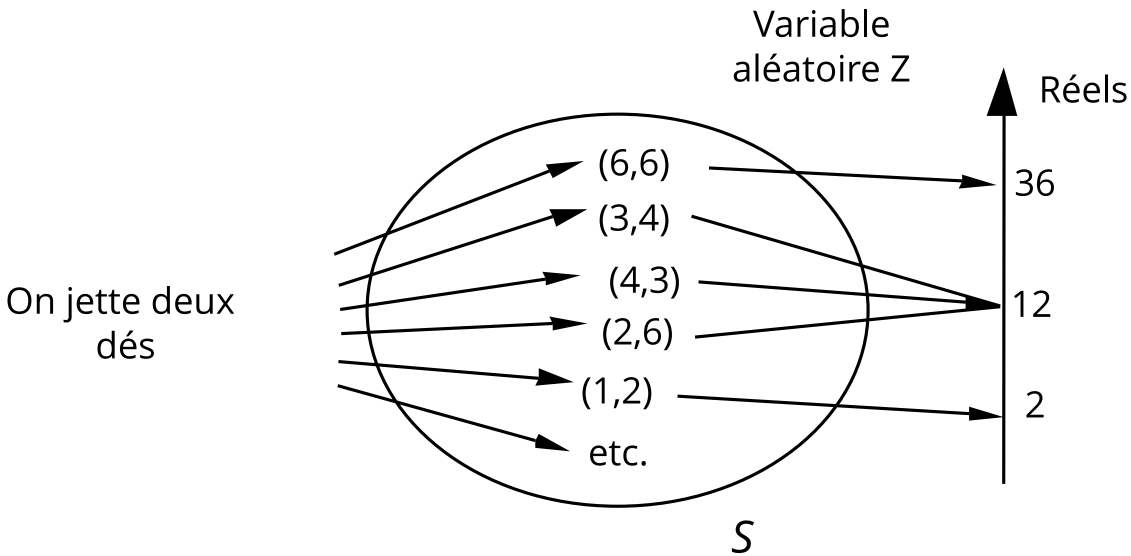
Soit S l'ensemble fondamental d'une expérience. Une **variable aléatoire** X attribue à chaque résultat de S un **nombre réel**.



Exemple avec 2 dés

On jette deux dés. L'ensemble fondamental S est composé des 36 résultats (1,1), (1,2), (1,3), …. (6,5) et (6,6). Ces résultats sont équiprobables.

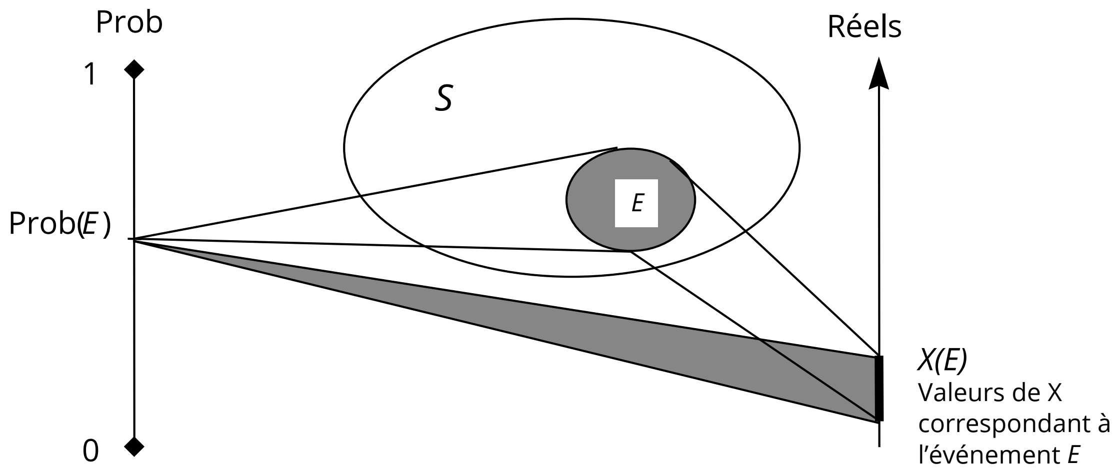
On définit une variable aléatoire Z qui attribue le produit z des deux chiffres obtenus à chaque résultat.



Probabilité d’une V.A.

A chaque valeur (intervalle) de la **variable aléatoire** *X* sur l'axe réel, on peut attribuer une **probabilité** qui est celle de l'événement qui génère cette valeur. On la note

f (valeur) = Prob *(X* = valeur*)*



On jette deux dés. On définit une variable aléatoire **Y** qui fait correspondre à chaque résultat (S est fini et discret) le maximum des deux chiffres:
(a,b) ⟶ max (a,b) (correspond à Y)
par exemple (3, 4) ⟶ 4
On obtient les probabilités associées en considérant les événements
f(1) = Prob (Y=1) = Prob (1,1) = 1/36
f(2) = Prob (Y=2) = Prob {(1,2), (2,1), (2,2)} = 3/36
f(3) = Prob (Y=3) = Prob {(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)} = 5/36
de même f(4) = 7/36, f(5) 9/36 et f(6) = 11/36

Exercices

- 100.1 Etudiant(e)s dans une classe
- 100.2 Mot de 4 bits aléatoire
- 100.3 Introduction aux probabilités

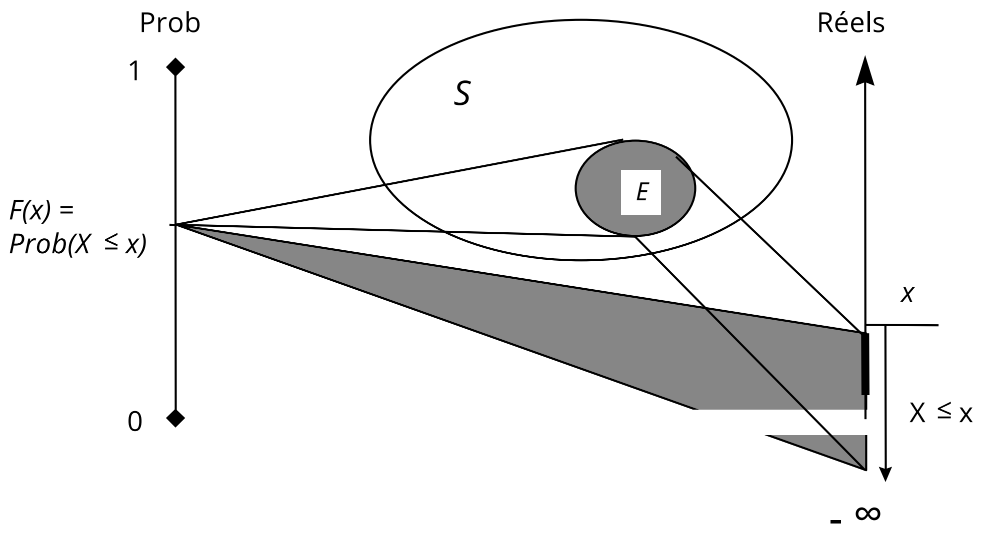
Fonction de répartition

La fonction de répartition *F(x)* d'une variable aléatoire *X* est la fonction

$$F(x) = \mathrm{Prob}(X \leq x)$$

Cette fonction est aussi appelée fonction cumulative ou fonction de distribution. C'est la probabilité que la variable aléatoire *X* soit plus petite qu'une valeur de seuil *x*.

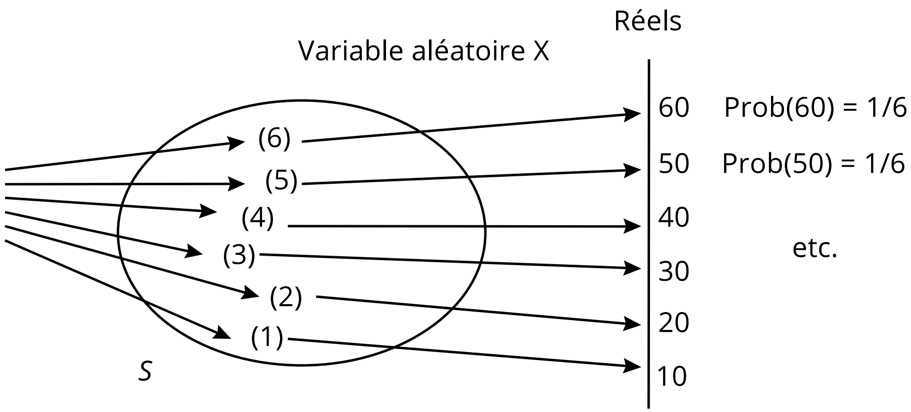
$F(\infty) = 1$ et que $F(-\infty) = 0$. *F(x)* est donc une probabilité cumulative.



Exemple de fonction de répartition

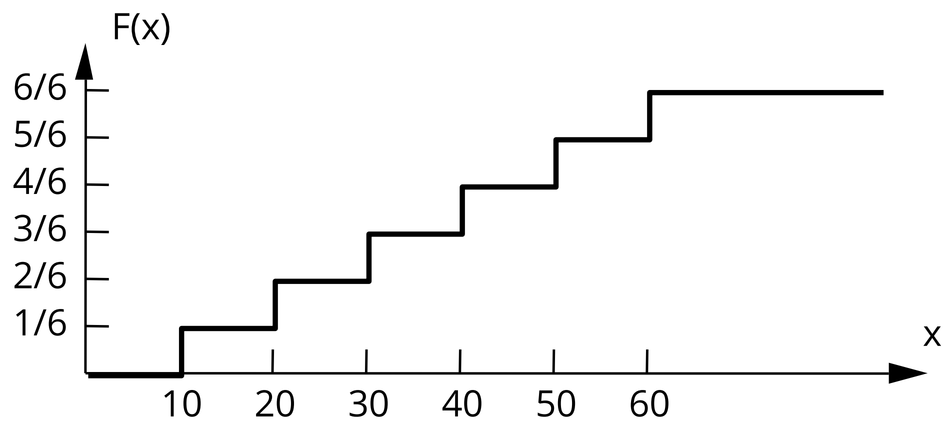
Jet d'un dé

V.A. $X(i) = x_i = 10i$



Prob (X=10) = Prob (1) = 1/6

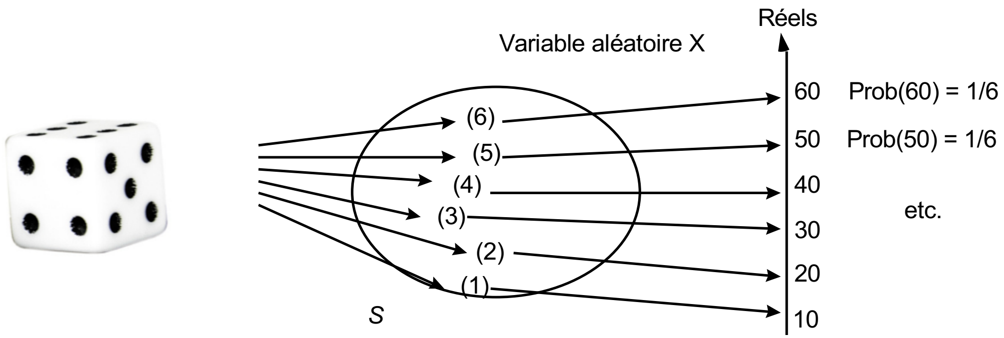
$F(x) = \mathrm{Prob}(X \leq x)$



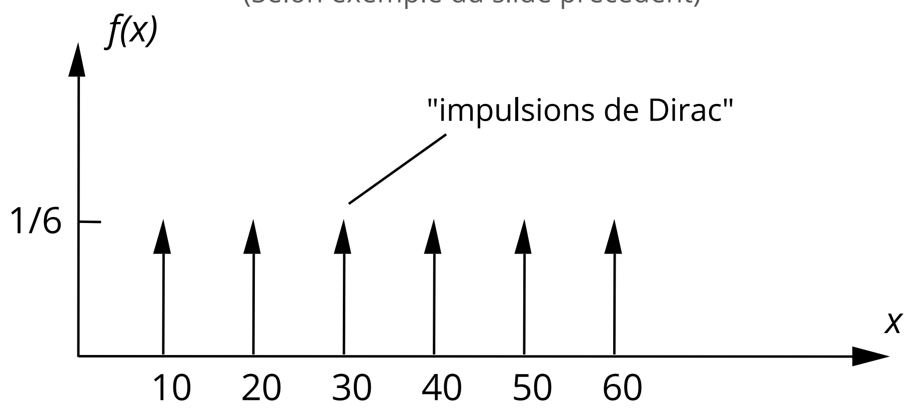
Densité de probabilité

La **densité de probabilité** *f(x)* d'une variable aléatoire *X* indique l' "intensité de la probabilité" au voisinage de *x*. Elle est définie comme la dérivée de la fonction de répartition:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



Densité de probabilité
(Selon exemple du slide précédent)



Espérance mathématique

L'**espérance** mathématique *E(X)* d'une variable aléatoire discrète finie *X* est la **moyenne pondérée** de la variable aléatoire en tenant compte de la probabilité de chaque valeur:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

L'espérance mathématique est aussi notée : μ ou $\bar{x}$

L'espérance correspond donc à la moyenne des valeurs de la variable aléatoire obtenue **si on répète inlassablement l'expérience**. Les événements rares, même si leur valeur s'écarte beaucoup de la moyenne, on relativement de la peine à influencer les événements fréquents.

Exemple d'Espérance

(a,b) ⟶ max (a,b)

On jette deux dés. On définit une variable aléatoire Y qui fait correspondre à chaque résultat (S est fini et discret) le maximum des deux chiffres.

On obtient les probabilités associées en considérant les événements
f(1) = Prob (Y=1) = Prob (1,1) = 1/36
f(2) = Prob (Y=2) = Prob {(1,2), (2,1), (2,2)} = 3/36
f(3) = Prob (Y=3) = Prob {(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)} = 5/36
f(4) = 7/36
f(5) = 9/36
f(6) = 11/36

Calcul de l'espérance (moyenne à long terme en répétant inlassablement l'expérience):

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{6} y_i f(y_i)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.472$$

Variance

La **variance** *Var(X)* d'une variable aléatoire *X* mesure **l'étendue ou la dispersion** d'une variable aléatoire autour de la "moyenne" *E(x).* Plus elle est élevée, plus les valeurs sont dispersées.

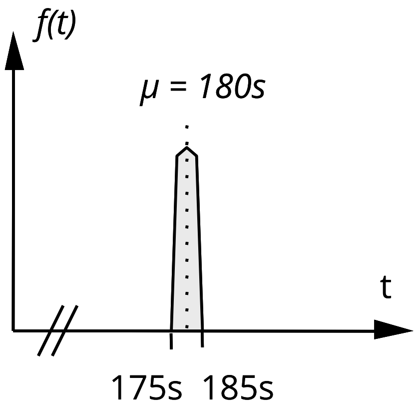
$$Var(X) = \left[x_1 - E(X)\right]^2 f(x_1) + \left[x_2 - E(X)\right]^2 f(x_2) + \ldots$$

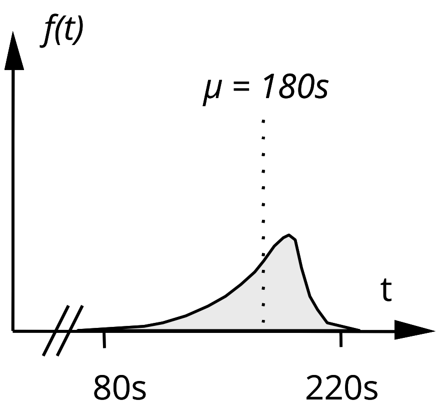
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - \mu\right]^2 f(x_i)$$

Pour le calcul:

$$Var(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = E(X^2) - E^2(X)$$

On mesure la durée de transfert d'un grand nombre de transfert de fichiers multimédia dont la valeur moyenne est de 180s. Si les mesures sont entre 175s et 185s la variance est faible. Par contre, si les valeurs mesurées sont réparties régulièrement entre 80s et 220s, la variance est élevée.





Exemple de variance

On jette deux dés. On définit une variable aléatoire X qui fait correspondre à chaque résultat (S est fini et discret) le maximum des deux chiffres.

(a,b) ⟶ max (a,b)

$x_i =$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)=$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 f(x_i)$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36} = 21.97$$

On a déjà calculé que E(X) = μ = 4.472, alors

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 21.972 - 20.001 = 1.971$$

Ecart-type

Étant donné une variable aléatoire *X* qui admet une variance *Var(X)*, on appelle écart-type le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Exercices

Transfert d'un fichier

- 100.4 (homework - réponses à publier sur Moodle)