Signaux et systèmes électroniques

HEIA-FR, filière télécommunication

Daniel Oberson

Circuits et Systèmes

Script : J. Crausaz, O. Johnsen, D. Oberson

Table des matières

1. Signaux et systèmes…

Dans la technologie de l’information, toute information est associée à un signal. L’humain est en contact avec l’extérieur par l’intermédiaire de capteurs qui reçoivent des signaux (oreille, yeux, nerfs, …) et des actuateurs qui émettent un signal (parole, …). Les signaux et les systèmes électroniques ont beaucoup évolués. Dans le passé, il était difficile de transmettre, stocker et traiter un signal. Il y avait une perte irréversible, et le coût était élevé. Actuellement, le passage au numérique a supprimé tous ces problèmes, au point que tout est devenu parfait en qualité et à un prix négligeable.

Si la transmission, le stockage et le traitement de l’information est maintenant presque toujours numérique, l’homme interagit avec le monde extérieur surtout par des signaux continus. C’est pourquoi actuellement il est important pour l’ingénieur de comprendre les relations entre les signaux continus et numériques afin d’assurer une excellente qualité de signaux du type audio et vidéo.

Les concepts liés aux systèmes et aux signaux seront abordés dans ce cours.

…électroniques

Pour permettre la transmission, le stockage et le traitement de l’information des signaux, une technologie est nécessaire. Cela peut se faire par le biais de signaux électrique[1]. Ce cours traitera donc des notions de bases concernant l’électricité et l’électronique afin de pouvoir appréhender les technologies nécessaires au domaine des télécommunications. Une attention particulière se portera sur les convertisseurs analogique/digital et digital/analogique.

[1] Ou optique, mais ce ne sera pas le sujet du cours présent.

2. Concepts de bases

2.1 Lois de l’électricité

2.1.1 Les domaines de l’électricité

Electrostatique => charges électriques au repos

C’est le domaine de l’interaction directe entre les charges électriques caractérisé par le **champ électrique**, de l’**énergie** dans le champ électrique avec les notions de **potentiel**, de **tension** et de **capacité**.

Electrocinétique => charges électriques en mouvement

C’est le domaine de spécification des phénomènes et des lois liés aux charges électriques en mouvement dans le champ électrique, du **courant** électrique et de la **puissance** dans la conduction électrique avec la notion de **résistance** et les **lois d’Ohm et de Kirchhoff**.

Electromagnétisme => courants électriques variables

C’est le domaine de l’interaction entre les charges électriques en mouvement caractérisé par le **champ magnétique**, du **potentiel** et du **flux magnétique** avec la notion d’**inductance**. Les lois reliant le courant au flux magnétique se complètent par la **loi de la tension induite** et la notion d’**inductance mutuelle** lorsque le courant varie.

2.1.2 Les équations de base

Charge électrique et condensateur :

$$C = \frac{q}{U} \quad \left[\frac{Coulomb}{Volt}\right]\left[\frac{C}{V}\right]\left[Farad\right]\left[F\right]$$

L'énergie emmagasinée est :

$$w(t) = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t) = \frac{1}{2C} \cdot q^2(t)$$

Condensateur plan :

$$C = \varepsilon \frac{A}{\delta}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm}\right] \quad permittivité\, du\, vide$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C\frac{du}{dt} \quad si\ C \text{ constant}$$

Cas particulier : microphone à condensateur

Courant électrique et résistance :

Tout matériau s’oppose (résistance) au passage d’un courant électrique

Les matériaux peuvent être classés selon leur comportement en conduction électrique.

Conducteur Faible résistance au passage du courant. Les métaux sont de bons conducteurs, principalement : l’or, l’argent, le cuivre et l’aluminium.

Semiconducteur Résistance élevée au passage du courant. Cette résistance peut être changée, comme dans les diodes, transistors, thyristors, ….

Supraconducteur Résistance presque nulle. Le phénomène de supraconduction se produit à très basse température ($< 130\ °K$). Les matériaux actuellement utilisables travaillent à $80\ °K$ sous azote liquide.

Isolant Forte résistance au passage du courant. Exemple : verre, quartz, mica, air, vide.

Loi d'Ohm

$$u = R \cdot i$$

$$p = u \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}$$

Résistance d'un conducteur :

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad [Ohm][\Omega]$$

$$\rho\,[\Omega m] \quad \textit{résistivité}$$

Exemples pour quelques matériaux, à $20\,°C$:

Cuivre :	$\rho = 17.5\ n\Omega m$	$\alpha = 3.9 \cdot 10^{-3}/°C$
Aluminium :	$\rho = 28\ n\Omega m$	$\alpha = 3.9 \cdot 10^{-3}/°C$
Graphite :	$\rho = 60\ \mu\Omega m$	$\alpha = -3 \cdot 10^{-4}/°C$

La variation de la résistance en fonction de la température ce calcule de la manière suivante:

$$R = R_{20°} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

où ΔT est la différence de température par rapport à la référence (ici 20°C).

Champs magnétique et inductance :

Toute variation de courant provoque un champ magnétique. La forme du conducteur définit son inductance qui détermine la relation tension courant dans le conducteur.

La relation est :

$$u = L\frac{di}{dt}$$

En tenant compte de la résistance :

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri$$

L’énergie emmagasinée :

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Lorsqu’il y a 2 circuits, il y a couplage modélisé par l’inductance mutuelle.

Cette inductance mutuelle est particulièrement utile dans les transformateurs.

Combinaison de phénomènes

Dans tout dispositif électrique on a les 3 phénomènes (inductif, capacitif et résistif). Dans certains cas : condensateur, résistance, inductance, l’un des phénomènes est prépondérant et les autres négligeables dans certaines conditions.

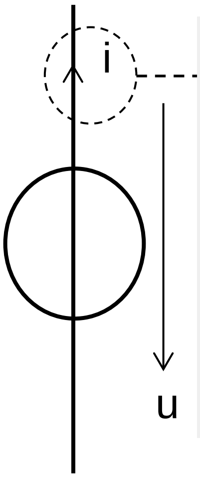
Attention : ces dispositifs sont souvent considérés à tort comme idéaux. C’est à l’ingénieur d’estimer dans quelles situation c’est le cas, et d’inclure quand c’est nécessaire les effets non désirés dans le dimensionnement.

On peut observer que sauf pour la résistance, la relation entre le courant et la tension passe par une dérivée. Cela implique que l’on doit faire intervenir les équations différentielles pour modéliser un tel système.

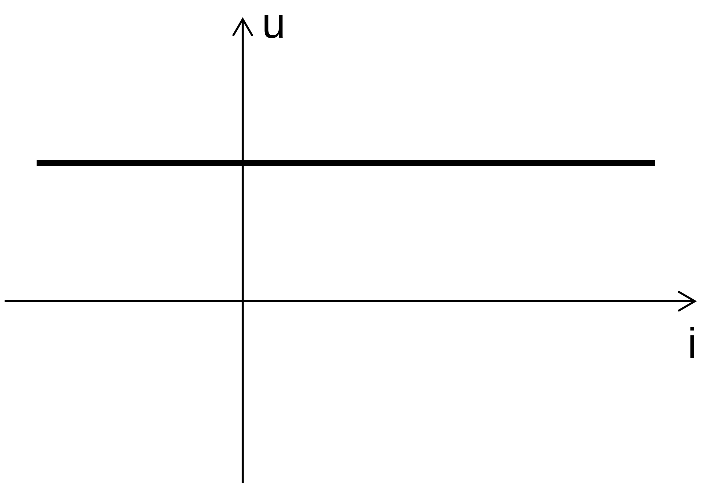
2.1.3 Sources indépendantes

Source idéale de tension :

Elément dont la tension est indépendante du courant



Attention, dans le cas des sources, on peut déroger à la convention de signe, dans ce cas la puissance positive est une puissance fournie !

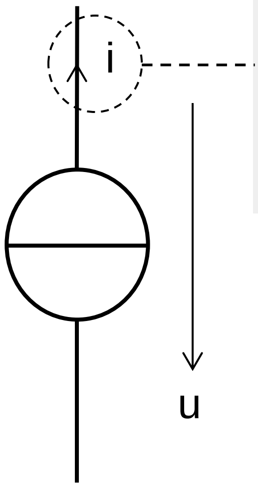


Cas particulier :

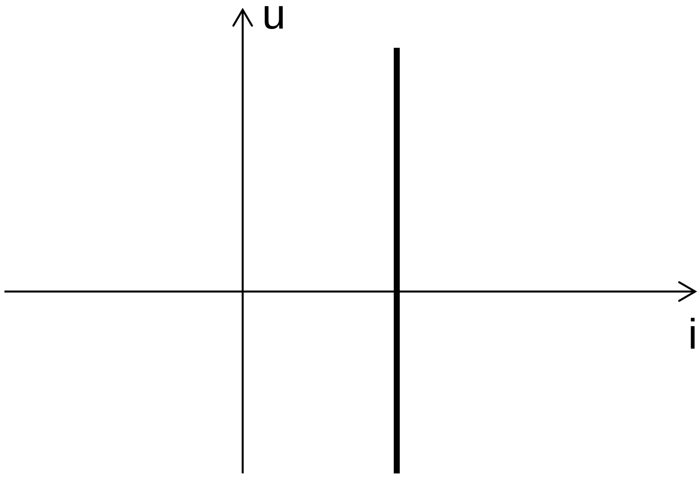
source idéale de tension nulle = court-circuit

Source idéale de courant :

Elément dont le courant est indépendant de la tension



Idem pour la convention de signe !



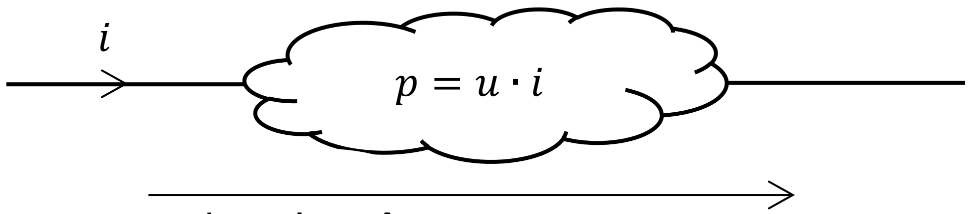
Cas particulier :

source idéale de courant nul = circuit ouvert

3. Calcul et simplification de circuits

3.1 Les lois de Kirchhoff

Règle de représentation



u dans le même sens que i

Convention « consommateur » :

si $p = u \cdot i > 0$ la puissance est consommée
le système consomme de l'énergie

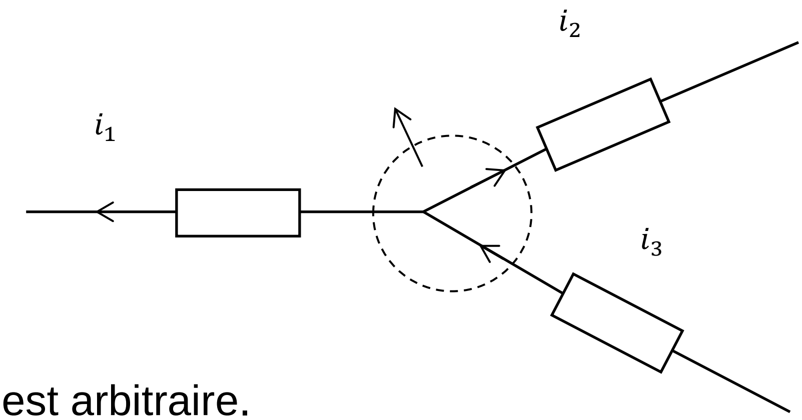
si $p = u \cdot i < 0$ la puissance est fournie
le système produit de l'énergie

3.1.1 Loi des courants de Kirchhoff

Les courants sont constitués de flux de particules. Si aucune particule n'est stockée (ou ne disparaît) sur le nœud, la somme des flux de particules qui arrivent sur le nœud est égale la somme des flux de particules qui en partent.

En définissant un sens pour chaque courant, cette propriété porte le nom de loi des courants de Kirchhoff et s'énonce : **la somme algébrique des courants sur un nœud est nulle**.

$$\sum i = 0$$



Le sens des courants est arbitraire.

Il convient de définir un sens général : les courants qui sortent sont positifs (selon l'exemple) ou le contraire, le choix est libre.

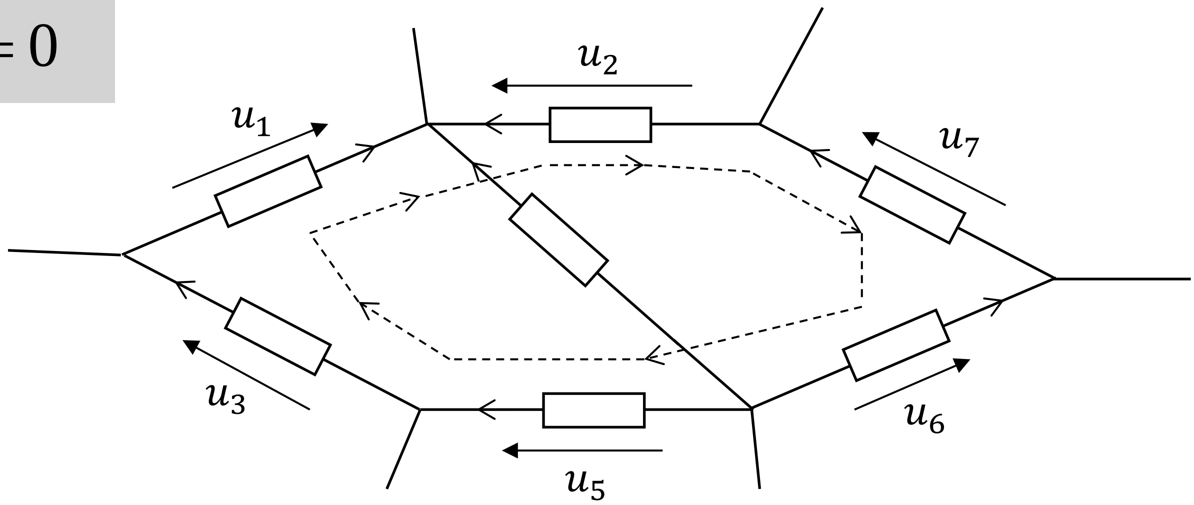
Exemple : $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

3.1.2 Loi des tensions de Kirchhoff

La différence de potentiel entre deux points de l'espace ou d'un circuit représente la différence d'énergie. Cette différence ne dépend pas du chemin parcouru entre les deux points.

En définissant un sens pour chaque différence de potentiel, on en tire la loi des tensions de Kirchhoff qui s'énonce : **la somme algébrique des tensions (différences de potentiel) le long d'un parcours fermé (ou maille) est nulle**.

$$\sum u = 0$$



Le sens des tensions est arbitraire.

Il convient de définir un sens de parcours de la maille (le choix est libre), pour l'exemple sens positif ou sens horaire.

Exemple :

$$u_1 - u_2 - u_7 - u_6 + u_5 + u_3 = 0$$

3.2 Méthodes de simplification

Le calcul des tensions et des courants d’un circuit électrique linéaire quelconque passe par l’élaboration et la résolution d’un système d’équations du premier degré basé sur les lois de Kirchhoff.

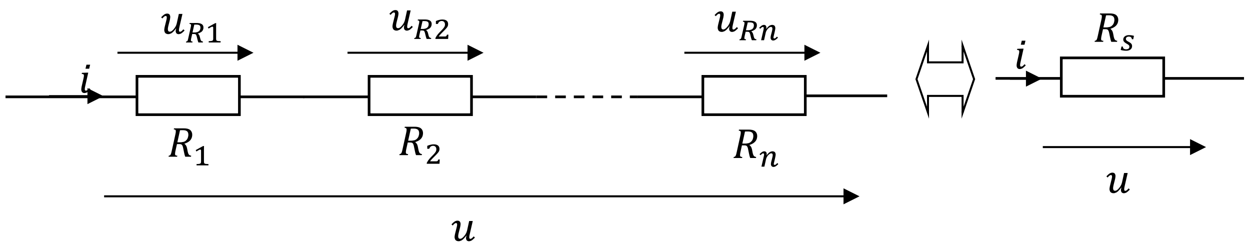
Souvent, **le circuit peut être simplifié et la résolution d’un système d’équations évitée** en appliquant les propriétés des circuits électriques linéaires (principe de superposition et réciprocité) et quelques règles simples dont les principales sont les suivantes :

1. Combinaisons d’éléments simples : réduction d’un réseau – entre deux bornes- de résistances, d’inductances, de capacités à un seul composant équivalent.
2. Diviseur de tension (calcul d’une tension partielle connaissant la tension totale) et diviseur de courant (calcul d’un courant partiel connaissant le courant total).
3. Déplacement de source permettant de traiter plus facilement les problèmes liés aux sources idéales de tension ou de courant.

Les méthodes de simplification présentées ci-dessous permettent de transformer un circuit « complexe » en **un circuit équivalent plus simple** à calculer et/ou à prendre en compte dans un système plus large.

3.3 Combinaisons simples – Résistances

Résistances en série



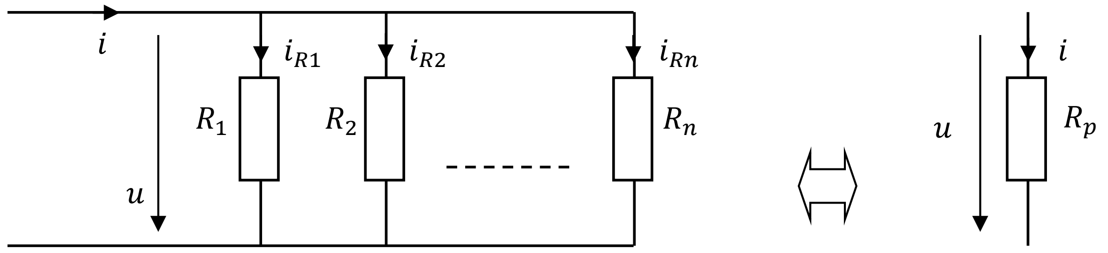
Résistance équivalente à n résistances en série : $R_s = \frac{u}{i}$

$$R_s = \frac{u}{i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_{Rk}}{i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k \cdot i}{i}$$

$$R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Pour n résistances égales en série : $R_s = R \cdot n$

Résistances en parallèle



Résistance équivalente à n résistances en parallèle : $R_p = \frac{u}{i}$

$$R_p = \frac{u}{i} = \frac{u}{\sum_{k=1}^{n} i_{Rk}} = \frac{u}{\sum_{k=1}^{n} \frac{u}{R_k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

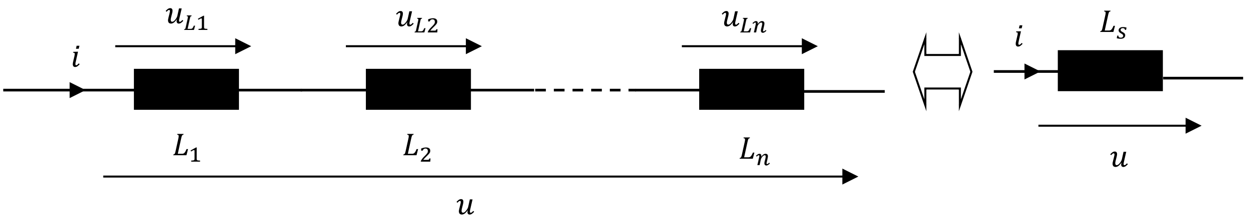
Pour deux résistances en parallèle :

$$R_p = R_1 // R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Pour n résistances égales en parallèle : $R_p = \frac{R}{n}$

3.4 Combinaisons simples – Inductances

Inductances en série



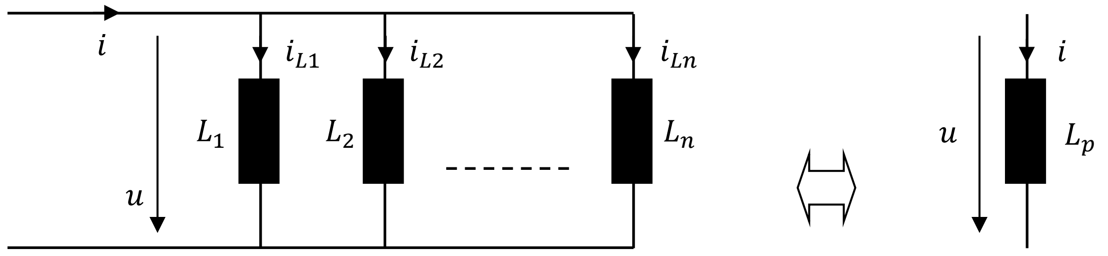
Inductance équivalente à n inductances en série : $L_s = \frac{u}{\frac{di}{dt}}$

$$L_s = \frac{u}{\frac{di}{dt}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_{Lk}}{\frac{di}{dt}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di}{dt}}{\frac{di}{dt}}$$

$$L_s = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Pour n inductances égales en série : $L_s = L \cdot n$

Inductances en parallèle



$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L_p} u(t) = \frac{di_{L1}(t)}{dt} + \frac{di_{L2}(t)}{dt} + \frac{di_{L3}(t)}{dt} + \frac{di_{L4}(t)}{dt} + \cdots$$

$$= \frac{1}{L_1} u(t) + \frac{1}{L_2} u(t) + \frac{1}{L_3} u(t) + \frac{1}{L_4} u(t) + \cdots$$

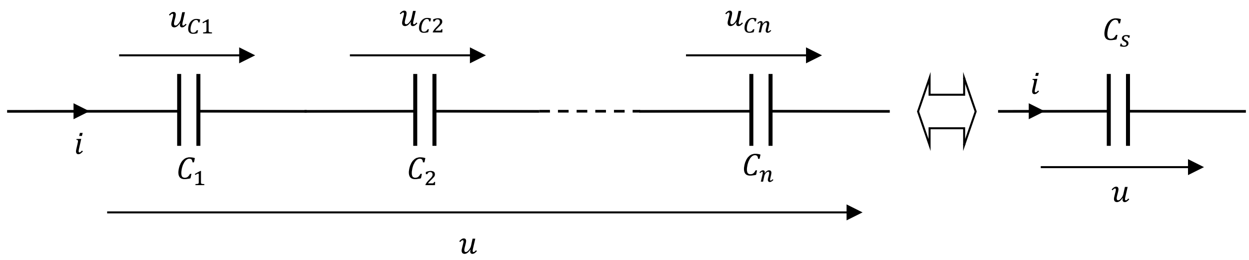
Donc : $\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$ et $L_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}}$

Pour deux inductances en parallèle: $L_p = L_1 // L_2 = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$

Pour n inductances égales en parallèle : $L_p = L_p / n$

3.5 Combinaisons simples – Capacité

Capacités en série



Capacité équivalente à n capacité en série : C_s

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{1}{C_s}\mathrm{i}(t)=\frac{du_{C1}(t)}{dt}+\frac{du_{C2}(t)}{dt}+\frac{du_{C3}(t)}{dt}+\frac{du_{C4}(t)}{dt}+\cdots$$

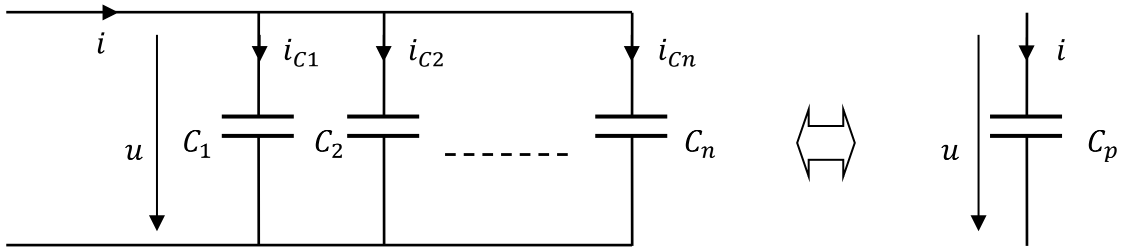
$$=\frac{1}{C_1}\mathrm{i}(t)+\frac{1}{C_2}\mathrm{i}(t)+\frac{1}{C_3}\mathrm{i}(t)+\frac{1}{C_4}\mathrm{i}(t)+\cdots$$

Donc $\frac{1}{C_S}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$ et $C_S=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}}$

Pour deux capacités en série : $C_s=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

Pour n capacités égales en série : $C_s=\frac{C}{n}$

Capacités en parallèle



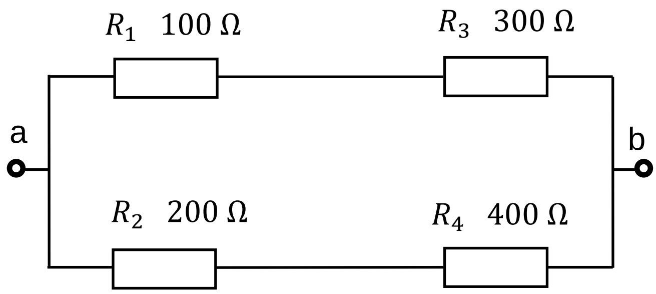
Capacité équivalente à n capacités en parallèle : $C_p = \frac{i}{\frac{du}{dt}}$

$$C_p = \frac{i}{\frac{du}{dt}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} i_{Ck}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{du}{dt}}{\frac{du}{dt}}$$

$$C_p = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Pour n capacités égales en parallèle°: $C_p = C \cdot n$

Exemple 1

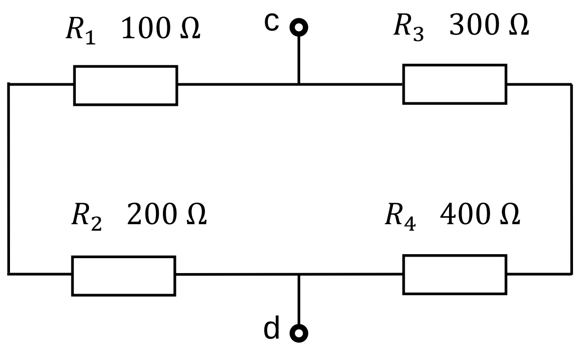


$$R_{13} = R_1 + R_3 = 400\ \Omega$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 600\ \Omega$$

$$R_{ab} = R_{13}//R_{24} = \frac{R_{13}R_{24}}{R_{13} + R_{24}}$$

$$R_{ab} = \frac{400 \cdot 600}{1000}\Omega = 240\ \Omega$$



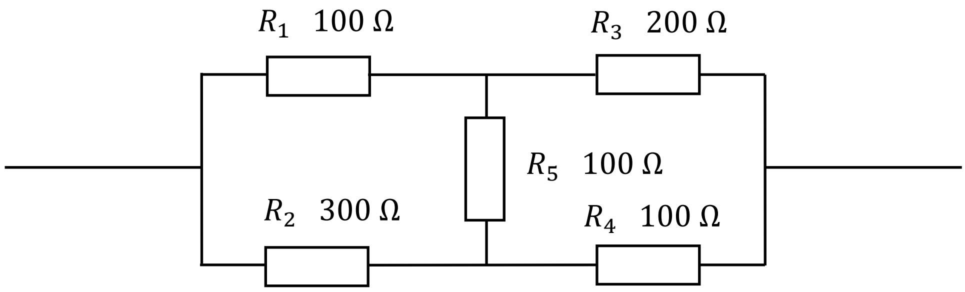
$$R_{12} = R_1 + R_2 = 300\ \Omega$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 700\ \Omega$$

$$R_{cd} = R_{12}//R_{34} = \frac{R_{12}R_{34}}{R_{12} + R_{34}}$$

$$R_{cd} = \frac{300 \cdot 700}{1000}\Omega = 210\ \Omega$$

Exemple 2

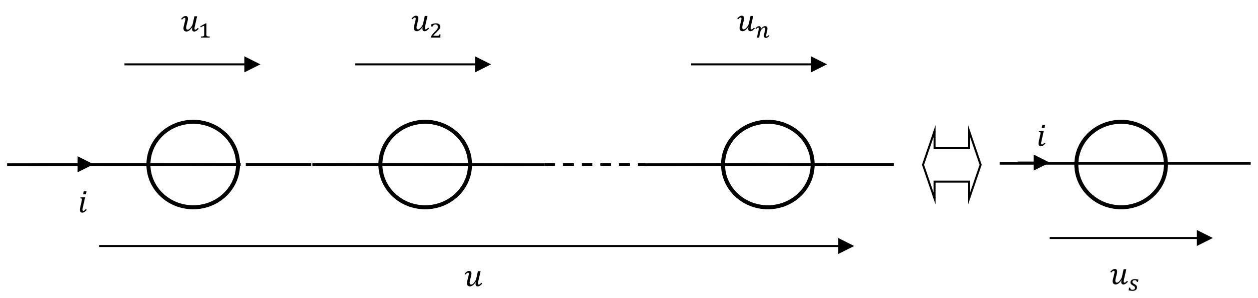


L'ajout de la résistance R_5 « en diagonale » rend impossible l'utilisation des règles simples de combinaisons série – parallèle.

L'application des transformations « triangle – étoile » resp. « étoile - triangle » permettent de contourner cette difficulté et est expliquée au chapitre 3.7.

3.6 Combinaisons simples – Sources idéales

Sources idéales de tension en série

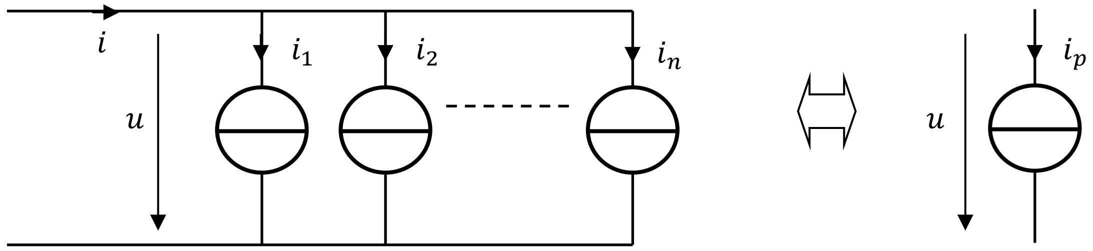


Source équivalente à n sources idéales de tension en série : u_s

$$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

La mise en parallèle de sources idéales de tension différentes n’a pas de sens !

Sources idéales de courant en parallèle



Source équivalente à n sources idéales de courant en parallèle : i_p

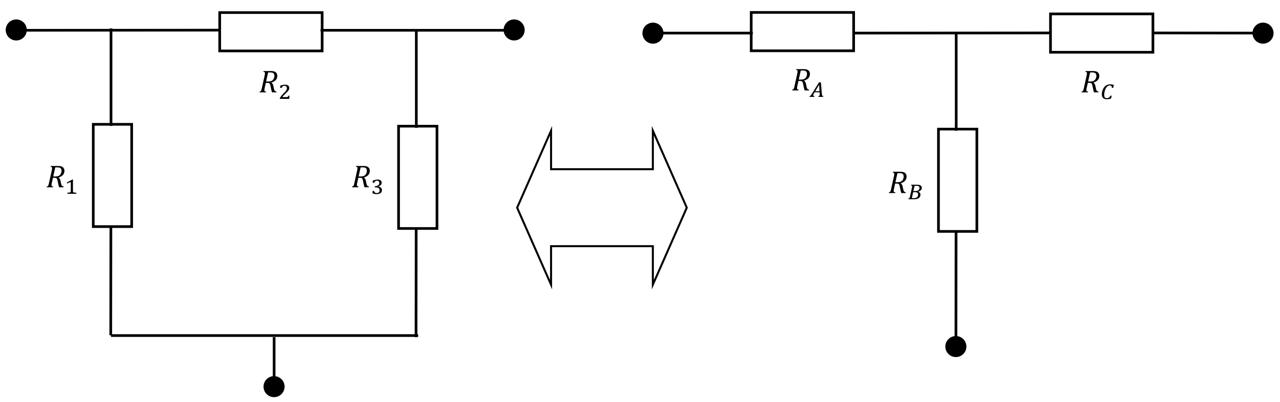
$$i_p = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

La mise en série de sources idéales de courant différentes n'a pas de sens !

3.7 Transformation triangle ↔ étoile

La transformation triangle ↔ étoile, appelée aussi transformation Π ↔ T ou encore transformation de Kennelly, permet de calculer les valeurs de trois éléments connectés en étoile équivalents à trois éléments connectés en triangle et réciproquement.

Triangle / Π   Etoile / T



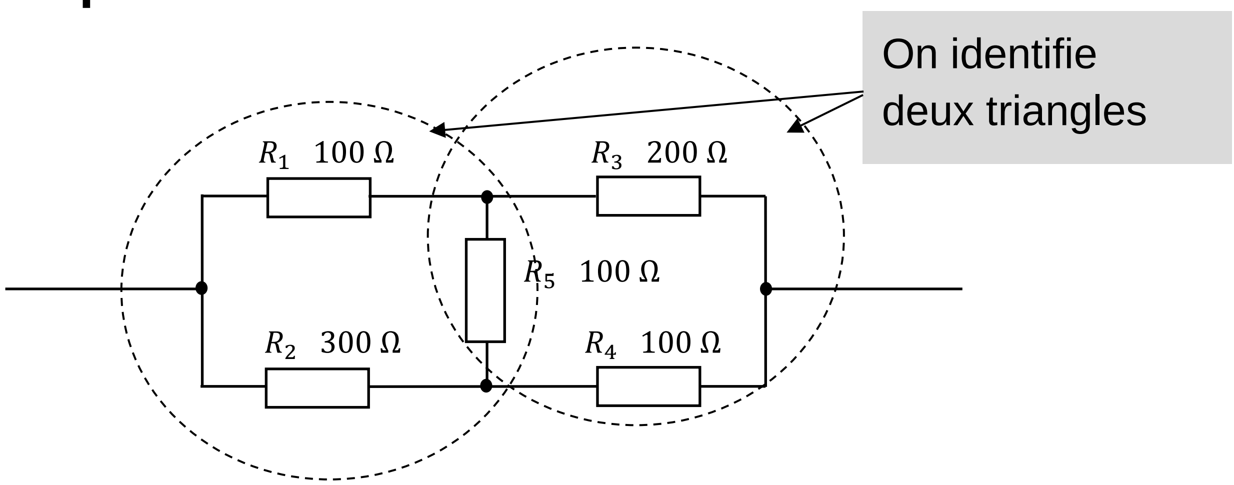
Tripôle de résistances

$$R_1 = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \qquad R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

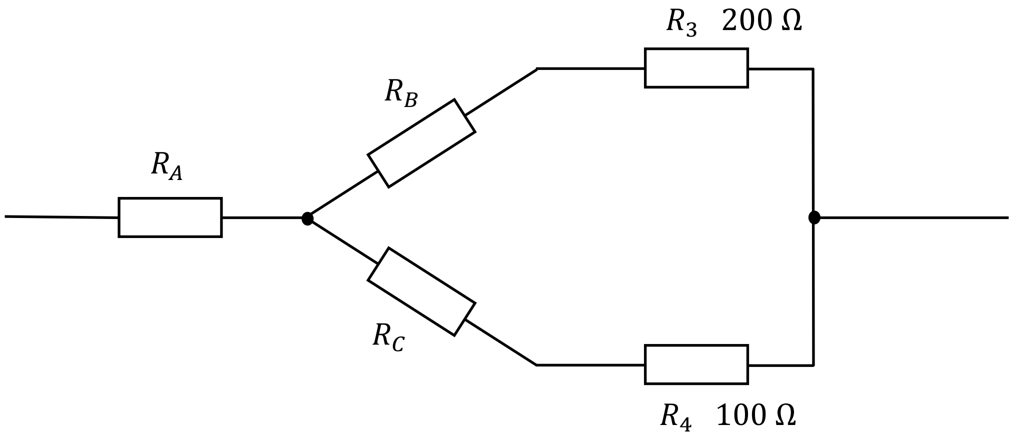
$$R_2 = R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B} \qquad R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_3 = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A} \qquad R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Exemple 1



Avec transformation pour le triangle de gauche -> étoile



$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{100 \cdot 300}{500}\,\Omega = 60\ \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{100 \cdot 100}{500}\,\Omega = 20\ \Omega$$

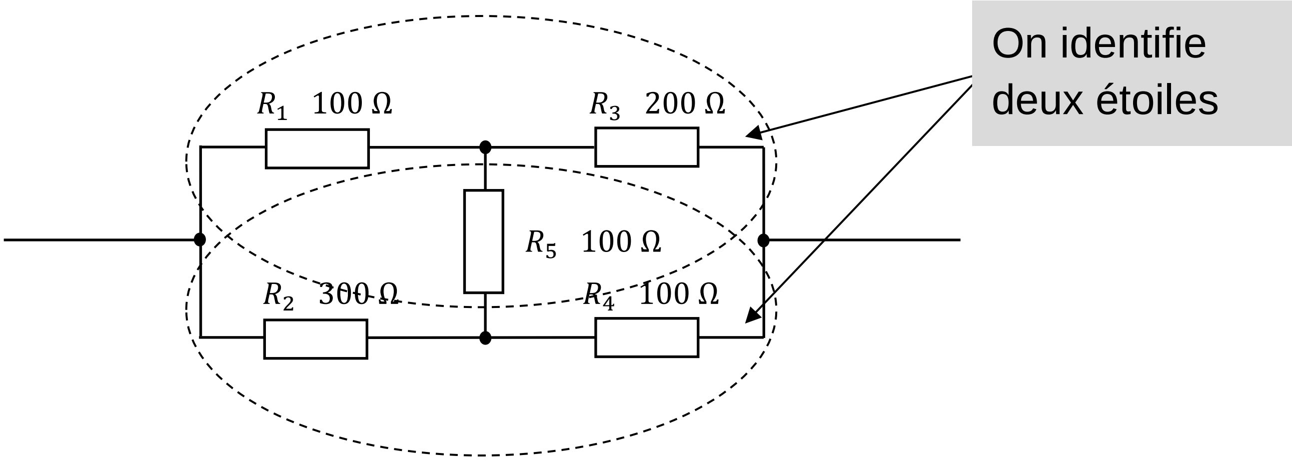
$$R_C = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{300 \cdot 100}{500}\,\Omega = 60\ \Omega$$

$$R_{B3} = R_B + R_3 = 220\ \Omega \qquad R_{C4} = R_C + R_4 = 160\ \Omega$$

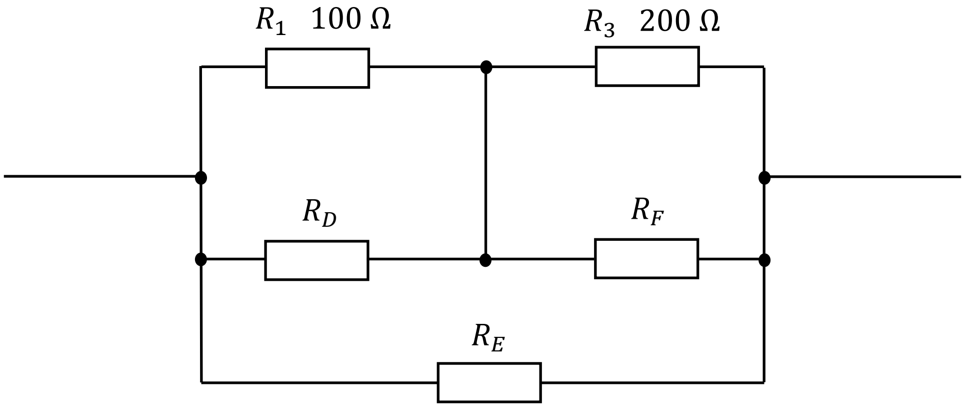
$$R_{BC34} = R_{B3} // R_{C4} = \frac{R_{B3} R_{C4}}{R_{B3} + R_{C4}} = \frac{220 \cdot 160}{380}\,\Omega = 92.63\ \Omega$$

$$R_e = R_A + R_{BC34} = 152.63\ \Omega$$

Exemple 2



Avec transformation étoile -> triangle



$$R_D = R_2 + R_5 + \frac{R_2 R_5}{R_4} = 300\ \Omega + 100\ \Omega + \frac{300 \cdot 100}{100}\Omega = 700\ \Omega$$

$$R_E = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_5} = 300\ \Omega + 100\ \Omega + \frac{300 \cdot 100}{100}\Omega = 700\ \Omega$$

$$R_F = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_2} = 100\ \Omega + 100\ \Omega + \frac{100 \cdot 100}{300}\Omega = 233.3\ \Omega$$

$R_{D1} = \frac{R_D R_1}{R_D + R_1} = 87.5\ \Omega$ $\qquad$ $R_{F3} = \frac{R_F R_3}{R_F + R_3} = 107.69\ \Omega$

$$R_{DF13} = R_{D1} + R_{F3} = 195.19\ \Omega$$

$$R_e = R_E // R_{DF13} = \frac{R_E R_{DF13}}{R_E + R_{DF13}} = \frac{700 \cdot 195.19}{895.19}\Omega = 152.63\ \Omega$$

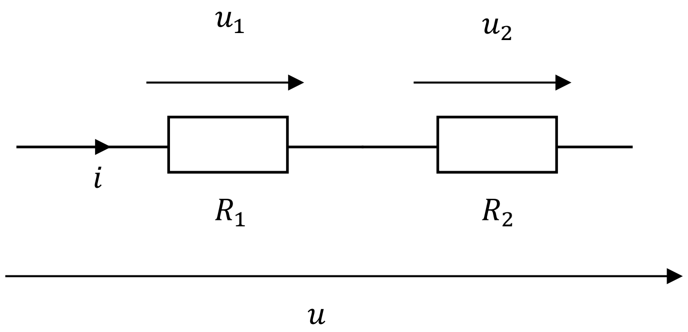
3.8 Combinaisons simples – Résumé

	Série	Parallèle
Résistances	$R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$	$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$ ou $R_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$
Inductances	$L_s = \sum_{k=1}^{n} L_k$	$\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$ ou $L_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}}$
Capacités	$\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$ ou $C_s = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}}$	$C_p = \sum_{k=1}^{n} C_k$
Sources de tension	$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_k$	
Sources de courant		$i_p = \sum_{k=1}^{n} i_k$

En appliquant ces règles et les transformations triangle ↔ étoile, on peut réduire un réseau quelconque de résistances, d'inductances, de capacités à un seul élément équivalent.

3.9 Circuits diviseurs de tension à résistances

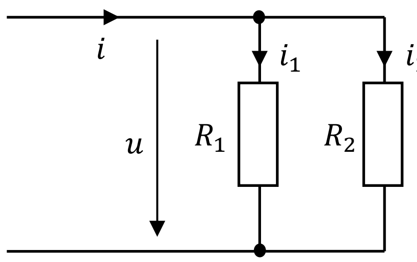
La division de tension est utile dans le calcul de circuits électriques. Les résultats ci-dessous ne sont valables que si les courants sont les mêmes dans les 2 éléments.



$$\frac{u_1}{u} = \frac{i \cdot R_1}{i \cdot R_s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \frac{u_2}{u} = \frac{i \cdot R_2}{i \cdot R_s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

3.10 Diviseurs de courant à résistances

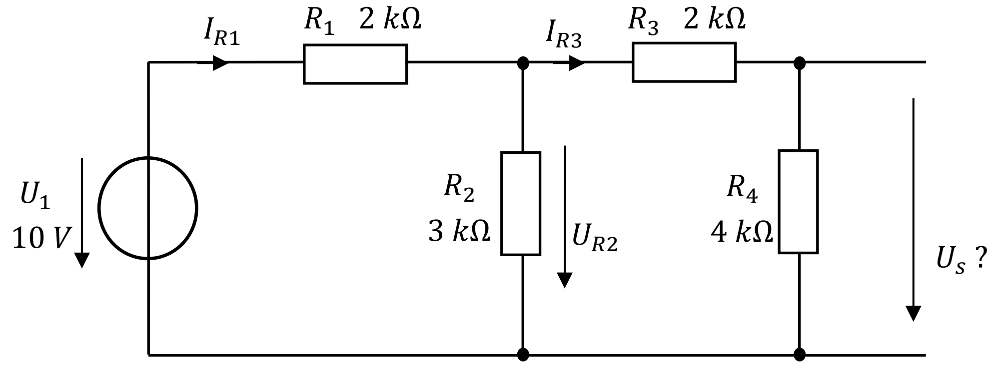
Les résultats ci-dessous ne sont valables que si les tensions sont les mêmes aux bornes des 2 éléments.



$$\frac{i_1}{i} = \frac{\frac{u}{R_1}}{\frac{u}{R_p}} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \frac{i_2}{i} = \frac{\frac{u}{R_2}}{\frac{u}{R_p}} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La division de courant n’a de sens que si la tension varie !

Exemple



Application de la division de tension :

$$U_s = U_{R4} = U_1 \cdot \frac{U_{R2}}{U_1} \cdot \frac{U_{R4}}{U_{R2}}$$

$$U_s = U_1 \cdot \frac{R_2//(R_3+R_4)}{R_1 + R_2//(R_3+R_4)} \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4}$$

$$U_s = U_1 \cdot \frac{\frac{3\cdot(2+4)}{3+2+4}}{2+\frac{3\cdot(2+4)}{3+2+4}} \cdot \frac{4}{2+4} = U_1 \cdot \frac{2}{2+2} \cdot \frac{2}{3} = U_1 \cdot \frac{1}{3} = 3.33\ V$$

Application de la division de courant :

$$U_s = I_{R3} \cdot R_4 = I_{R1} \cdot \frac{I_{R3}}{I_{R1}} \cdot R_4$$

$$U_s = U_1 \cdot \frac{1}{R_1 + R_2//(R_3+R_4)} \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4} \cdot R_4$$

$$U_s = U_1 \cdot \frac{1}{2+\frac{3\cdot(2+4)}{3+2+4}} \cdot \frac{3}{3+2+4} \cdot 4 = U_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{U_1}{3} = 3.33\ V$$

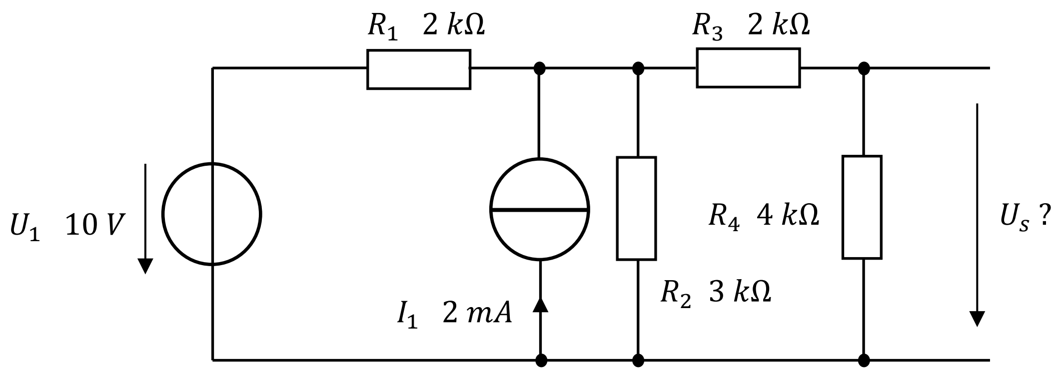
3.11 Principe de superposition

Dans un système linéaire « la réponse du système à plusieurs excitations est la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément ».

Pour les circuits électriques, cette propriété s'énonce de la manière suivante :

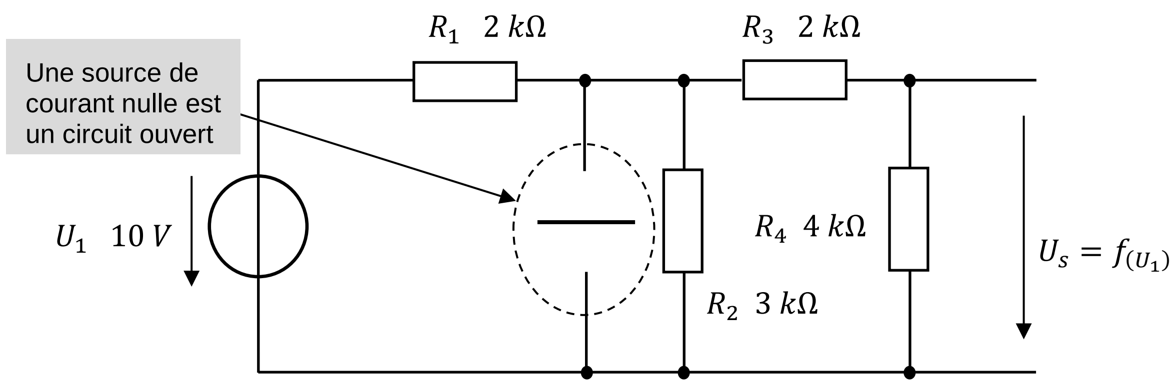
Dans un circuit électrique linéaire, la tension (le courant) aux bornes (dans une) branche quelconque du circuit est égale à la somme algébrique des tensions (des courants) produites par chacune des sources indépendantes du circuit considérées séparément, les autres étant mises à zéro. **Les sources commandées ne peuvent pas être mises à zéro**.

Exemple



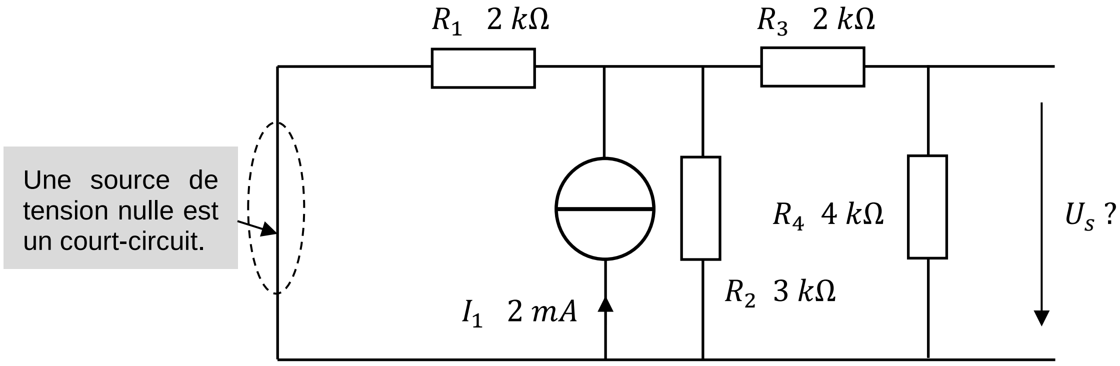
$$U_s = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 I_1$$

Calcul de $\alpha_1 = \frac{U_s}{U_1}$ pour $I_1 = 0$



$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1 + R_2//(R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot R_4 = \frac{1}{3}$$

Calcul de $\alpha_2 = \frac{U_s}{I_1}$ pour $U_1 = 0$



$$\alpha_2 = \frac{R_1//R_2}{R_1//R_2 + R_3 + R_4} \cdot R_4 = \frac{1.2}{1.2 + 2 + 4} \cdot 4\ k\Omega = 0.667\ k\Omega$$

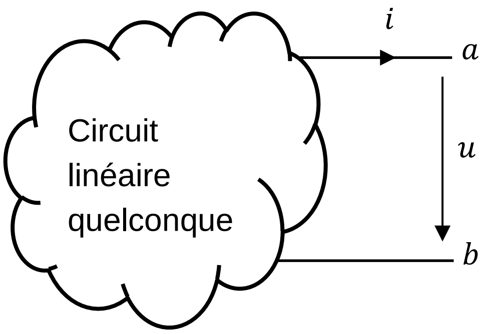
$$U_s = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 I_1 = \frac{1}{3} U_1 + 0.667\ k\Omega \cdot I_1 = 4.66\ V$$

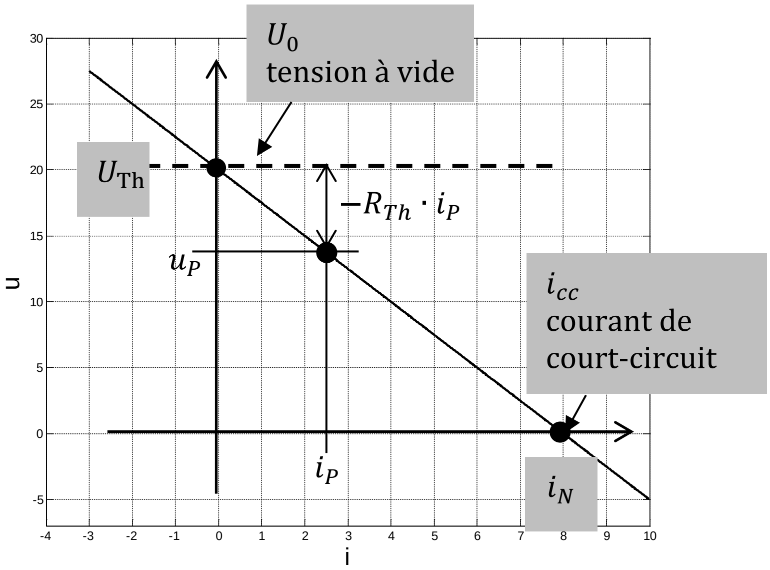
3.12 Modèles en sources réelles

Thévenin - source réelle de tension

Tout bipôle électrique linéaire contenant des éléments passifs et des sources est équivalent à une source réelle de tension : source idéale de tension en série avec une résistance interne (impédance interne dans le cas sinusoïdal).

La source idéale de tension est égale à la tension à vide (circuit ouvert) aux bornes du bipôle et la résistance interne (l'impédance interne) est égale à la résistance (l'impédance) vue des bornes du bipôle dans lequel toutes les sources indépendantes ont été mises à zéro. **Les sources commandées ne peuvent pas être mises à zéro**.

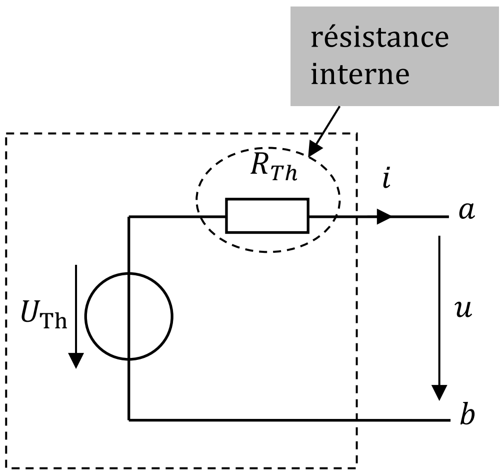




Modèle de Thévenin

$$u = U_{\mathrm{Th}} - R_{Th} \cdot i$$

$$i_{cc} = \frac{U_0}{R_{Th}} \qquad R_{Th} = \frac{U_{\mathrm{Th}}}{i_N}$$

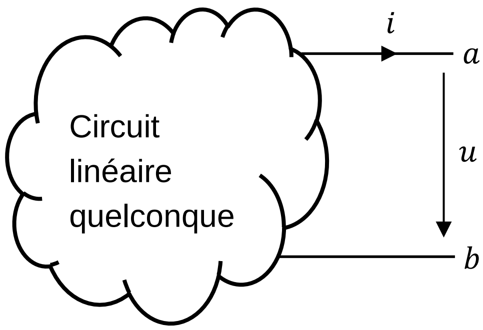


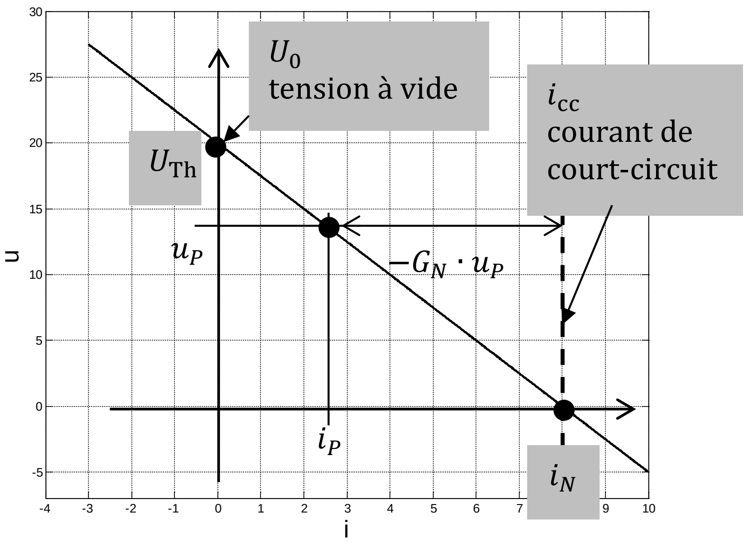
Norton - source réelle de courant

Tout bipôle électrique linéaire contenant des éléments passifs et des sources est équivalent à une source réelle de courant : source idéale de courant en parallèle avec une conductance interne (admittance interne dans le cas sinusoïdal).

La source idéale de courant est égale au courant délivré par le bipôle sur un court-circuit et la conductance (l'admittance) est égale à la conductance (l'admittance) vue des bornes du bipôle dans lequel toutes les sources indépendantes ont été mises à zéro. **Les sources commandées ne peuvent pas être mises à zéro**.

Remarque : la conductance est simplement l'inverse de la résistance, et l'admittance, l'inverse de l'impédance





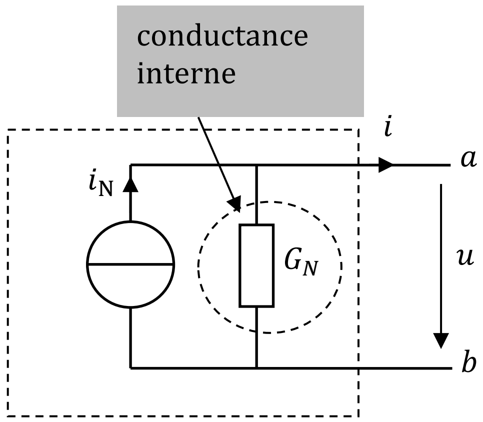
$$G_N = \frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_{Th}}$$

Modèle de Norton

$$u = U_{\mathrm{Th}} - R_N \cdot i \;\; => \;\; \frac{u}{R_N} = i_N - i$$

$$i = i_{\mathrm{N}} - G_N \cdot u \quad \text{avec} \quad i_N = i_{cc}$$

$$U_{\mathrm{Th}} = \frac{i_{\mathrm{N}}}{G_N} \qquad G_N = \frac{i_{\mathrm{N}}}{U_{Th}} = \frac{1}{R_N}$$



$$U_{\mathrm{Th}} = i_{\mathrm{N}} \cdot R_N$$

Détermination des éléments des modèles

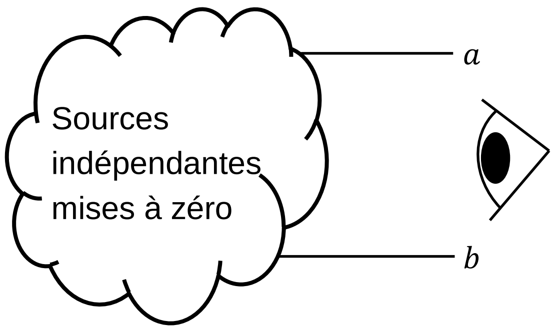
$\boldsymbol{U_0}$ calcul de la tension à vide

$\boldsymbol{I_0}$ calcul du courant de court-circuit

$\boldsymbol{R_i}$ resp. $\boldsymbol{G_i}$

mettre à zéro toutes les sources indépendantes

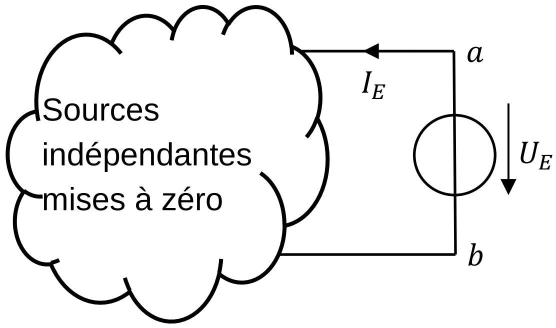
calculer la résistance interne R_i (conductance interne G_i) à l'aide des méthodes de réduction

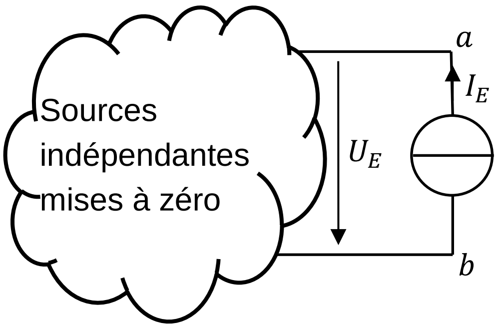


on « voit » R_i entre les bornes du circuit

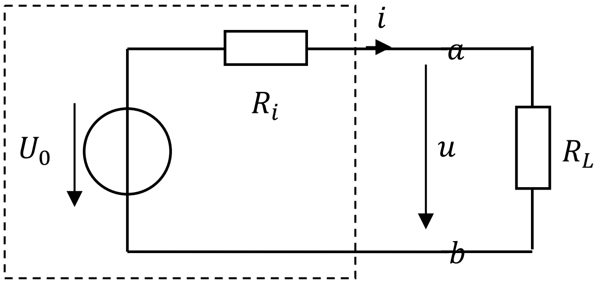
ou calculer U_0 et I_0 en tirer $R_i = \frac{U_0}{I_0}$ resp. $G_i = \frac{I_0}{U_0}$

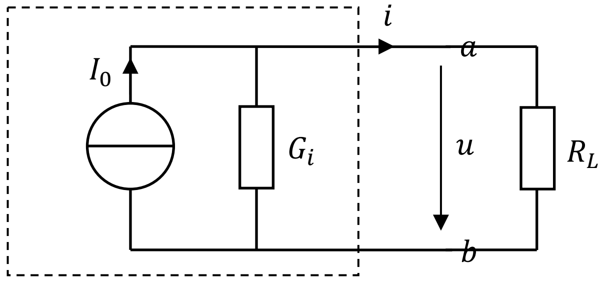
ou placer une source idéale de tension d'essai U_E (**ou** une source idéale de courant d'essai I_E) aux bornes du bipôle, calculer le courant I_E consommé par le bipôle (ou la tension aux bornes U_E), on peut en tirer $R_i = \frac{U_E}{I_E}$ (méthode dite de « l'ohmmètre »)



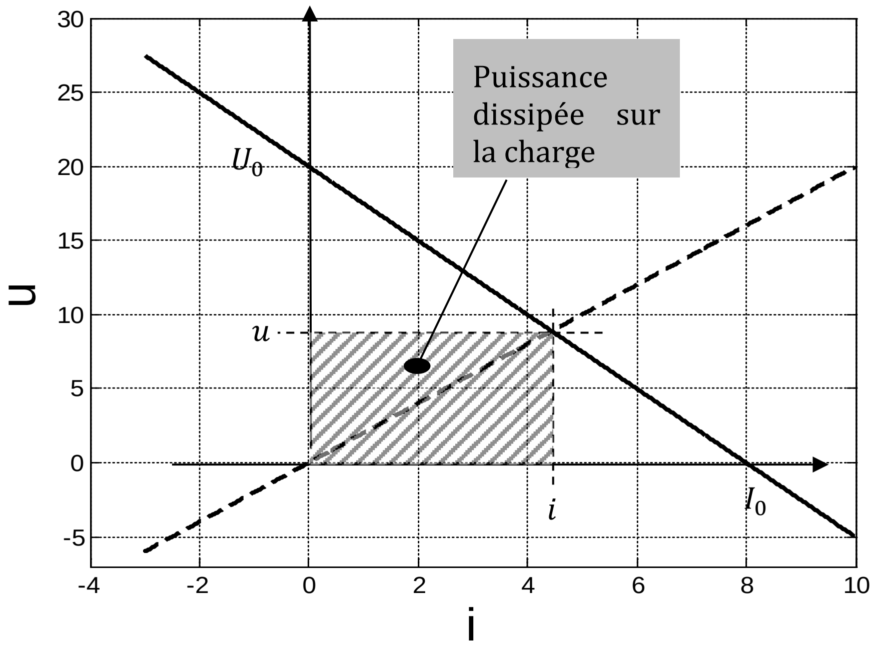


3.13 Source réelle - bilan de puissance





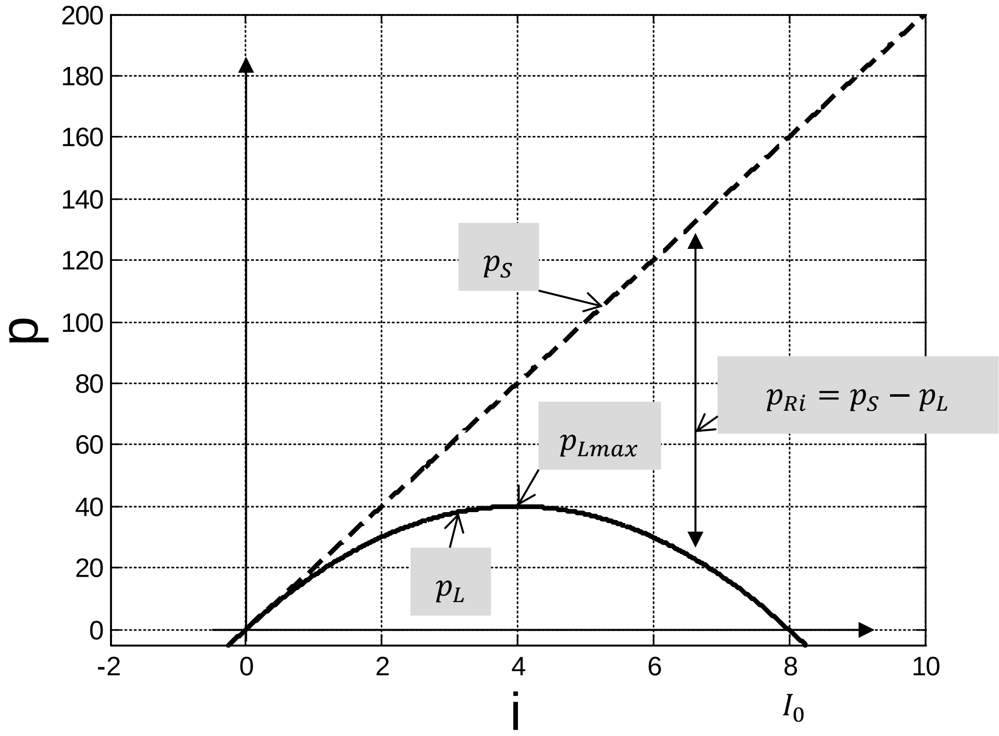
$u = U_0 - R_i \cdot i = R_L \cdot i \qquad i = I_0 - G_i \cdot u = G_L \cdot u$



Puissance transmise à la charge :

$$p_L = R_L \cdot i_L^2 = u \cdot i = (U_0 - R_i \cdot i) \cdot i = U_0 \cdot i - R_i \cdot i^2$$

Puissance fournie par la source : $p_S = U_0 \cdot i$



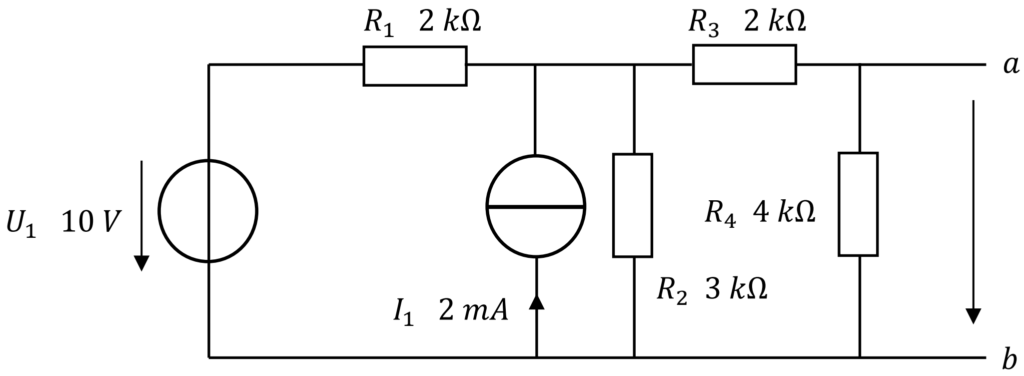
La puissance sur la charge est maximale pour :

$i = \frac{I_0}{2}$ resp. $u = \frac{U_0}{2}$ => $p_{Lmax} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{I_0}{2} = \frac{U_0 \cdot I_0}{4} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i} = \frac{R_i \cdot I_0^2}{4}$

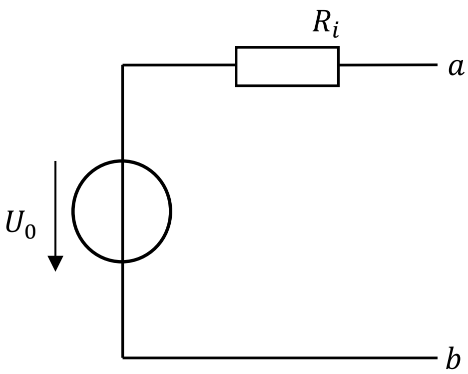
Rendement**, source de tension** : $\eta = \frac{p_L}{p_S} \cdot 100\% = \frac{u}{U_0} \cdot 100\%$
à vide $\eta \rightarrow 100\%$, court-circuit $\eta \rightarrow 0$, pour p_{Lmax} $\eta = 50\%$

Rendement, **source de courant** : $\eta = \frac{p_L}{p_S} \cdot 100\% = \frac{i}{I_0} \cdot 100\%$
à vide $\eta \rightarrow 0$, court-circuit $\eta \rightarrow 100\%$, pour p_{Lmax} $\eta = 50\%$

Exemple

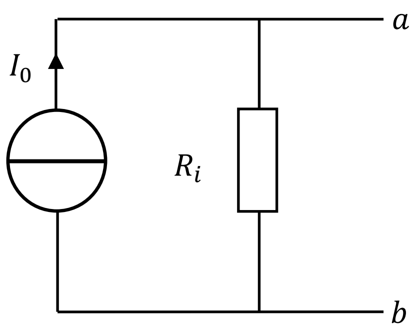


Soit à déterminer le modèle en source réelle du circuit ci-dessus vu des bornes a – b.



Thévenin

ou



Norton

Par superposition

Tension à vide $U_0 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 I_1$

$$U_0 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}}} \cdot \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot U_1 + \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} \cdot R_4 \cdot I_1$$

$$U_0 = \frac{1}{3} \cdot U_1 + 667\ \Omega \cdot I_1 = 4.66\ V$$

Courant de court-circuit $I_0 = \beta_1 U_1 + \beta_2 I_1$

$$I_0 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot U_1 + \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \cdot I_1$$

$$I_0 = 0.1875 \cdot 10^{-6} S \cdot U_1 + 0.375 \cdot I_1 = 2.625\ mA$$

Résistance interne :

$$R_i = R_4 // (R_3 + R_1 // R_2) = \frac{U_0}{I_0} = 1.778\ k\Omega$$

Remarque : la **méthode la plus simple** est le plus souvent le calcul de la résistance interne R_i (résistance équivalente vue des deux bornes du circuit) et du courant I_0 (le courant de court-circuit est souvent plus simple à calculer que la tension à vide). Au besoin on obtient ensuite : $U_0 = R_i \cdot I_0$.

4. Régime sinusoïdal permanent

4.1 Intérêts du régime sinusoïdal permanent

- Dans un circuit électrique linéaire alimenté par une source sinusoïdale, toutes les tensions et courants sont sinusoïdaux de même fréquence.

- L'analyse des grandeurs caractéristiques d'un système linéaire (tensions, courants, puissances, etc.) passe par la résolution d'une équation différentielle. En régime sinusoïdal, avec l'introduction des nombres complexes, les grandeurs caractéristiques s'expriment par des équations algébriques.

- La production, le transport et la distribution d'énergie électrique se fait principalement en régime sinusoïdal (système mono ou polyphasé).

- Est-ce vraiment le cas ?

En traitement du signal, afin d'exploiter les propriétés de la sinusoïde :

- les signaux peuvent être décomposés en une somme de sinusoïdes (signaux périodiques) ou une intégrale de sinusoïdes (signaux non périodiques) ;
- un système linéaire est caractérisé par sa réponse à un signal sinusoïdal de fréquence variable (réponse en fréquence) ;
- la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque est la somme (signaux périodiques) resp. l'intégrale (signaux non périodiques) des réponses du système à chacune des composantes sinusoïdales du signal.

La fonction sinusoïdale est une fonction périodique dont la n^e dérivée resp. la n^e intégrale est également une fonction sinusoïdale.

Avec $x(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t)$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cdot cos(\omega \cdot t) = A\omega \cdot sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int x \cdot dt = -\frac{A}{\omega} cos(\omega \cdot t) = \frac{A}{\omega} sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- La dérivée d'une fonction sinusoïdale est une fonction sinusoïdale de même fréquence.
- L'intégrale d'une fonction sinusoïdale est une fonction sinusoïdale de même fréquence.

La somme de fonctions sinusoïdales de même fréquence est une fonction sinusoïdale de même fréquence.

Avec$x_1(t) = A_1 sin(\omega \cdot t)$ et $x_2(t) = A_2 cos(\omega \cdot t)$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_3 sin(\omega \cdot t + \varphi_3)$$

$$x_3(t) = A_3 cos(\varphi_3) sin(\omega \cdot t) + A_3 sin(\varphi_3) cos(\omega \cdot t)$$

$A_3 cos(\varphi_3) = A_1$ et $A_3 sin(\varphi_3) = A_2$

4.2 Définitions

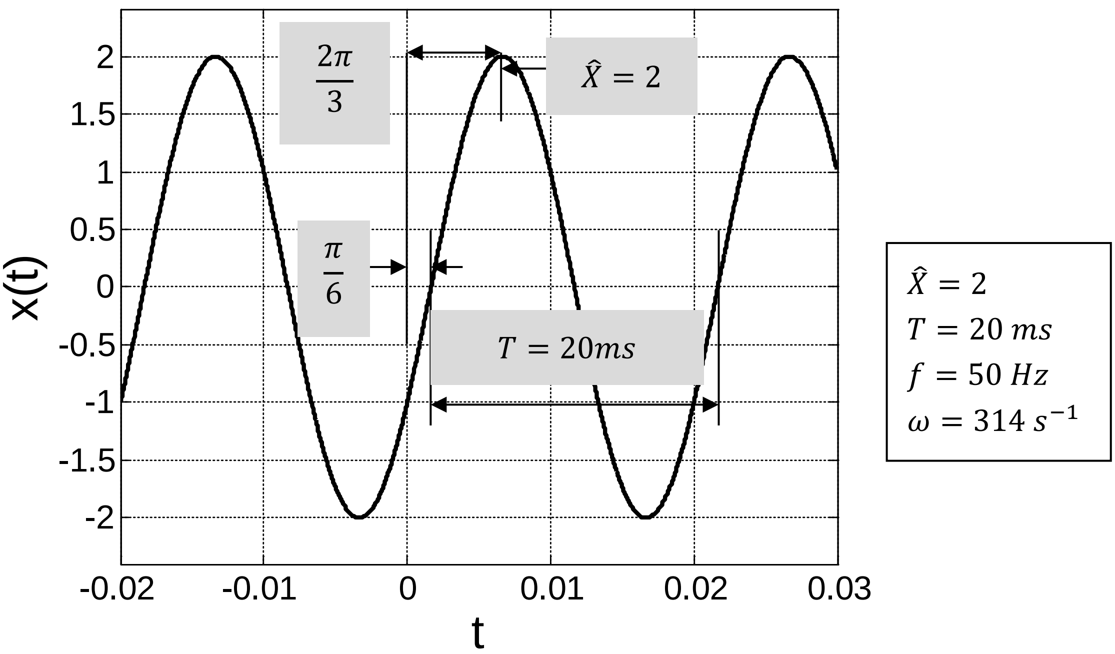
Une grandeur sinusoïdale dans le temps s'exprime de la manière suivante :

$$x(t) = \hat{X} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right) = \hat{X} \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) = \hat{X} \cdot sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$$

Avec :

$\hat{X}$ amplitude, valeur « de crête »
T période en $[s]$
$f = \frac{1}{T}$ fréquence en $[Hertz]$ $[Hz]$ $[s^{-1}]$
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ pulsation, fréquence angulaire en $[s^{-1}]$
φ déphasage, phase initiale (pour $t = 0$)

Exemple :



$$x(t) = 2sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Le signal peut être exprimé indifféremment par un sinus ou un cosinus, seule la phase change.

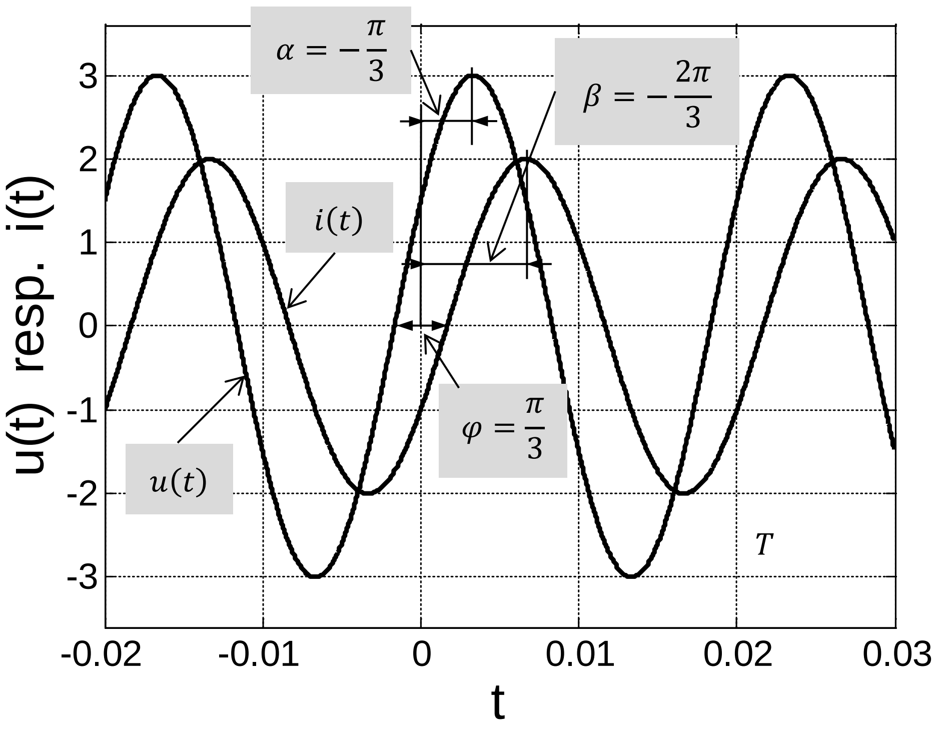
4.3 Applications aux grandeurs électriques

$u(t) = \hat{U}cos(\omega t + \alpha)$ $\qquad$ $i(t) = \hat{I}cos(\omega t + \beta)$

Le choix de la fonction cosinus, des angles α pour la tension et β pour le courant sont conventionnels.

Déphasage entre le courant et la tension : $\varphi = \alpha - \beta$

Le sens du déphasage est conventionnel.
Si $\varphi > 0$ on dit que la tension est en avance sur le courant.
Si $\varphi < 0$ on dit que la tension est en retard sur le courant.
Si $\varphi = 0$ on dit que la tension et le courant sont en phase.



$u(t) = 3 \cdot cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad$ $i(t) = 2 \cdot cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$

$\omega = 314\ s^{-1}$ $\qquad$ $\varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

4.4 Valeur moyenne et efficace

Valeur moyenne sur une période

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_{0+\Delta t}^{T+\Delta t} \hat{X} \, cos(\omega t) dt = 0$$

La valeur moyenne d’une sinusoïde sur une période est nulle.

Valeur moyenne sur une demi-période

$$\bar{X} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \hat{X} \, cos(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \hat{X}$$

C’est l’amplitude moyenne d’un lobe de sinusoïde.

Valeur efficace d’un signal périodique

(rms pour "root-mean-square")

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} x^2 \, (t) \cdot dt}$$

La valeur efficace est la racine carrée de la moyenne sur une période de l’intégrale du carré du signal.

Valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\hat{X}cos(\omega t)\right)^2 \cdot dt}$$

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{X}^2}{2}\left(1+cos(2\omega t)\right) \cdot dt} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$

Interprétation physique de la valeur efficace

Puissance dissipée dans une résistance linéaire parcourue par un courant sinusoïdal :

$$p(t) = R \cdot \left(i(t)\right)^2 = R \cdot \left(\hat{I}cos(\omega t)\right)^2$$

Puissance moyenne pour une période :

$$\bar{P} = P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = R\left(\frac{1}{T}\int_0^T \left(\hat{I}cos(\omega t)\right)^2 dt\right) = R \cdot I_{eff}^2$$

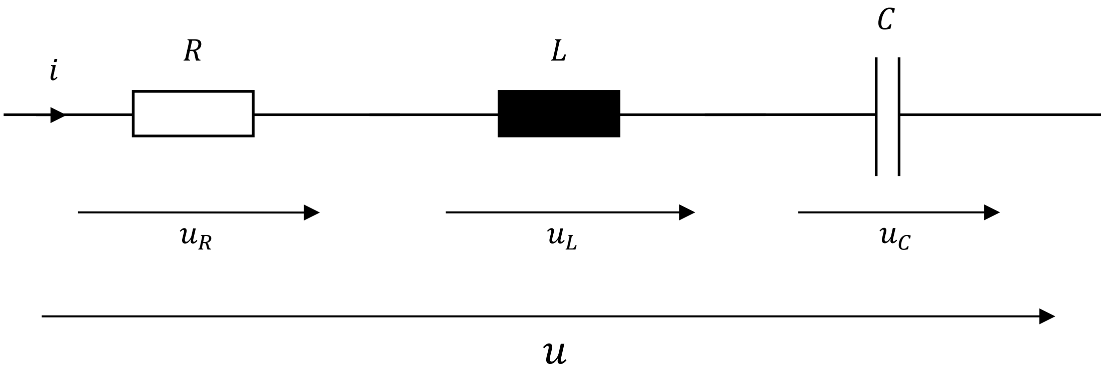
$$P = R \cdot I_{eff}^2 = R \cdot \frac{\hat{I}^2}{2} = R \cdot I^2$$

La valeur efficace d'un courant ou d'une tension périodique (sinusoïdal) correspond à la valeur du courant ou de la tension continue qui dissiperait la même puissance moyenne dans une résistance linéaire.

Pour simplifier, on note dans le cas sinusoïdal :

$$U_{eff} = U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \qquad\qquad I_{eff} = I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

4.5 Exemple introductif du régime sinusoïdal appliqué aux circuits électriques



$$u = u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

4.5.1 Analyse dans le temps

Avec : $i = \hat{I}cos(\omega t)$

$$u(t) = R\hat{I} \cdot cos(\omega t) - L\omega\hat{I} \cdot sin(\omega t) + \frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot sin(\omega t)$$

$$= R\sqrt{2}I_{eff} \cdot cos(\omega t) - L\omega\sqrt{2}I_{eff} \cdot sin(\omega t) + \frac{\sqrt{2}I_{eff}}{\omega C} \cdot sin(\omega t)$$

$$u = \hat{U}cos(\omega t + \varphi) = \hat{U}cos(\varphi) \cdot cos(\omega t) - \hat{U}sin(\varphi) \cdot sin(\omega t)$$

on peut en déduire :

$\hat{U}cos(\varphi) = R\hat{I}$ et $\hat{U}sin(\varphi) = L\omega\hat{I} - \frac{\hat{I}}{\omega C} = \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)\hat{I}$

d'où l’on tire :

$$tan(\varphi) = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = atan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$\hat{U} = \sqrt{\left(R\hat{I}\right)^2 + \left(\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)\hat{I}\right)^2} = \hat{I}\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

On observe de nouveau que si l’excitation est sinusoïdale, la réponse l’est aussi. Ceci est valable dans tous les cas de circuits linéaires.

On peut travailler soit avec les valeurs de crête, soit avec les valeurs efficaces, comme pour le réseau électrique avec 400 [V] de valeur de crête ou 230 [V] de valeur efficace.

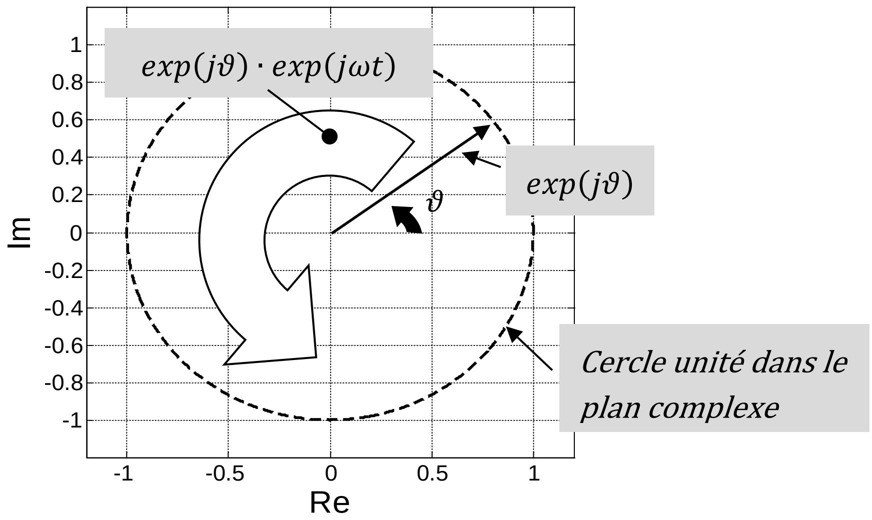
4.6 Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

La relation d'Euler :

$$\boldsymbol{exp(j\vartheta) = cos(\vartheta) + j \cdot sin(\vartheta)}$$

nous indique que la fonction $exp(j\vartheta)$ qui décrit le cercle unité dans le plan complexe est :

- une somme de sinusoïdes.
- une fonction périodique.
- un opérateur de rotation dans le plan complexe d'un angle ϑ.



$exp(\pm jn \cdot 2\pi) = 1$
$exp(\pm jn \cdot \pi) = -1$ pour n impair
$exp\left(+j\dfrac{\pi}{2}\right) = j$
$exp\left(-j\dfrac{\pi}{2}\right) = -j$

La fonction $\underline{x} = exp(j\vartheta) \cdot exp(j\omega t)$ peut être représentée par « un vecteur » avec une position intiale $exp(j\vartheta)$ tournant à la vitesse angulaire ω dans le plan complexe.

4.6.1 Application aux grandeurs électriques

Avec $\underline{i}$ la grandeur instantanée complexe

$$\underline{i} = \hat{I} \cdot exp(j\omega t) = \hat{I} \cdot cos(\omega t) + \hat{I} \cdot jsin(\omega t)$$

… la tension aux bornes du circuit RLC devient :

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{i} \cdot dt = R \cdot \underline{i} + j\omega L \cdot \underline{i} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i}$$

… l'équation différentielle devient une équation algébrique complexe.

$$\underline{u} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

La valeur instantanée complexe de la tension s'obtient en multipliant la valeur instantanée complexe du courant par un constante complexe $\underline{Z}$ - **l'impédance** - qui dépend de la valeur des constituants du circuit et de la fréquence. C'est la **loi d'Ohm complexe**.

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i} = \underline{Z} \cdot \hat{I} \cdot exp(j\omega t) = \underline{\hat{U}} \cdot exp(j\omega t)$$

Le nombre complexe $\underline{\hat{U}}$ (ou pour la valeur efficace : $\underline{U}_{eff}$ ou $\underline{U}$) est appelé **phaseur** de la tension (afin d'éviter la confusion avec vecteur !).

La loi d'Ohm complexe s'applique également aux phaseurs :

$$\underline{\hat{U}} = \underline{Z} \cdot \underline{\hat{I}} \qquad resp. \qquad \underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \cdot exp(j\varphi)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad resp. \qquad \varphi = atan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

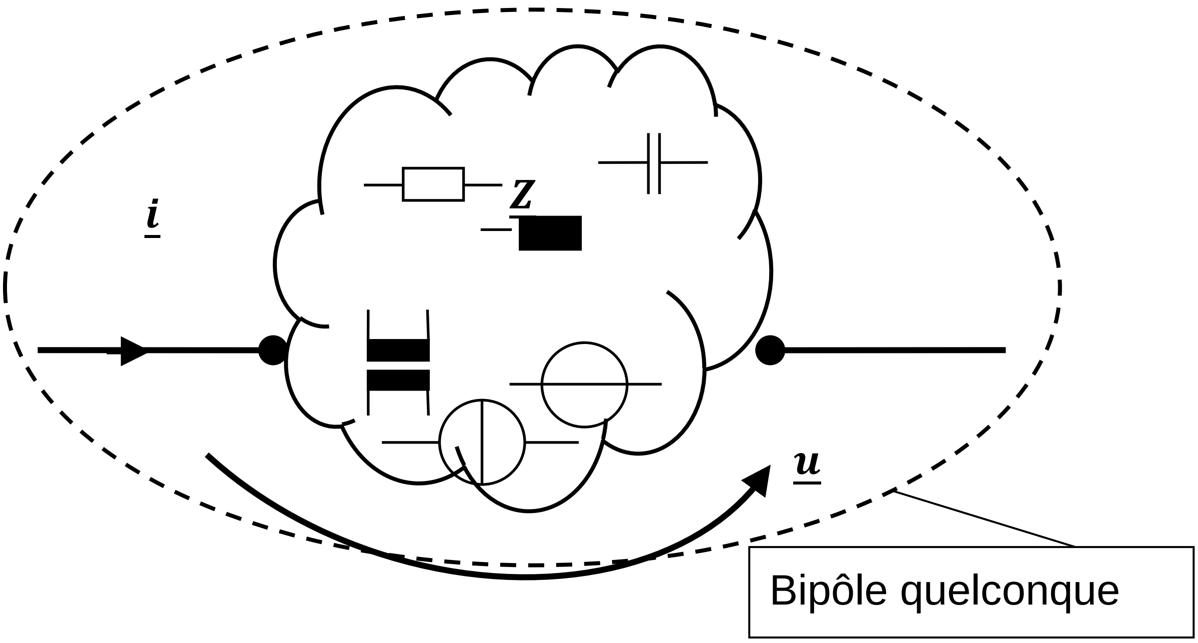
$$\hat{U} = \left|\underline{\hat{U}}\right| = \left|\underline{Z}\right| \cdot \left|\underline{\hat{I}}\right| = Z \cdot \hat{I} = \hat{I}\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

4.6.2 Conséquences et interprétation

L'impédance $\underline{Z}$ est un nombre complexe qui contient deux informations :

- son module est le rapport entre l'amplitude de la tension et l'amplitude du courant ;
- son argument est le déphasage φ entre la tension et le courant.

L'introduction des nombres complexes et de leurs propriétés permet d'appliquer aux circuits en régime sinusoïdal permanent - circuits d'impédances et de sources - toutes les règles et les méthodes de calcul applicables aux circuits de résistances et de sources.



La valeur instantanée du courant : $\boldsymbol{i = \hat{I} \cdot cos(\omega t)}$ est la partie réelle de la valeur instantanée complexe : $\underline{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\hat{I} \cdot exp(j\omega t)}$ ou $\underline{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\hat{I} \cdot exp(j\omega t) = \hat{I} \cdot cos(\omega t) + \hat{I} \cdot jsin(\omega t)}$.

En application du principe de superposition et en appelant $\boldsymbol{Z}$ le rapport des amplitudes du courant et de la tension :

Si la réponse (la tension aux bornes) du système au courant $i = \hat{I}cos(\omega t)$ vaut $u = \hat{U}cos(\omega t + \varphi) = Z\hat{I}cos(\omega t + \varphi)$, alors la réponse du système au courant $i = j\hat{I}sin(\omega t)$ sera de la forme $u = j\hat{U}sin(\omega t + \varphi) = jZ\hat{I}\ sin(\omega t + \varphi)$.

Dès lors la réponse du système (la tension aux bornes) à la valeur instantanée complexe du courant $\underline{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\hat{I} \cdot exp(j\omega t)} = \boldsymbol{\hat{I} \cdot cos(\omega t)} + \boldsymbol{\hat{I} \cdot jsin(\omega t)}$ est la superposition de l'effet de la partie réelle et de la partie imaginaire du courant :

$$\underline{u} = \hat{U} \cdot cos(\omega t + \varphi) + \hat{U} \cdot jsin(\omega t + \varphi) = \hat{U} \cdot exp\big(j(\omega t + \varphi)\big)$$

$$\underline{u} = \hat{U} \cdot exp\big(j(\omega t + \varphi)\big) = \hat{U} \cdot exp(j\varphi) \cdot exp(j\omega t)$$

$$\underline{u} = Z\hat{I} \cdot exp(j\varphi) \cdot exp(j\omega t) = Z \cdot exp(j\varphi) \cdot \hat{I} \cdot exp(j\omega t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

La valeur instantanée de la tension est la partie réelle de sa valeur instantanée complexe :

$$u(t) = \Re\{\underline{u}\} = \hat{U} \cdot cos(\omega t + \varphi)$$

L'ajout d'une composante imaginaire à chacun des signaux permet de simplifier les calculs (remplacement des fonctions trigonométriques par des exponentielles) tout en gardant la relation avec la valeur instantanée des grandeurs.

On peut dans tous ces cas utiliser, avec précaution la valeur efficace au lieu de la valeur de crête en n'oubliant pas qu'il peut y avoir un terme $\sqrt{2}$ entre les 2 cas.

4.6.3 Définition du phaseur

Toutes les tensions et les courants d'un circuit électrique linéaire soumis à une excitation sinusoïdale sont de la forme :

$$x(t) = \hat{X} \cdot cos(\omega t + \vartheta)$$

… resp. leur représentation complexe de la forme :

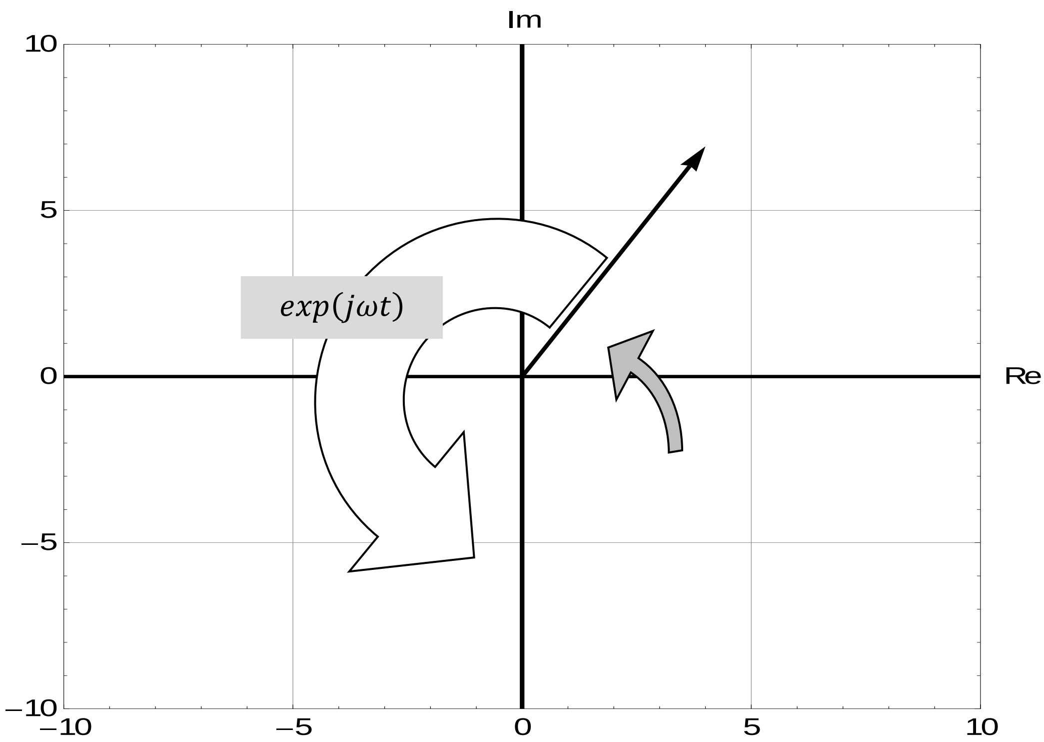
$$\underline{x}(t) = \hat{X} \cdot exp\big(j(\omega t + \vartheta)\big) = \hat{X} \cdot exp(j\vartheta) \cdot exp(j\omega t) = \underline{\hat{X}} \cdot \ exp(j\omega t)$$

La grandeur complexe $\underline{\hat{X}} = \hat{X} \cdot exp(j\vartheta)$ en valeur de crête ou $\underline{X} = X \cdot exp(j\vartheta)$ en valeur efficace est appelée « **phaseur** ».

Les grandeurs caractéristiques d'un phaseur - son amplitude (le module) et sa phase (l'argument) - sont indépendantes du temps.

Si l'on y ajoute la fréquence, le phaseur définit pleinement un signal sinusoïdal.

Il est représenté graphiquement dans le plan complexe par un « vecteur partant de l'origine » tournant à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi f$.



4.6.4 Valeur instantanée

Valeur instantanée complexe

$$\underline{x} = \hat{X} exp\big(j(\omega t + \varphi)\big) = \hat{X}\, cos(\omega t + \varphi) + j\hat{X}\, sin(\omega t + \varphi)$$

Valeur instantanée temporelle

Aussi bien la projection sur l'axe horizontal (partie réelle) :

$$\Re\{\underline{x}\} = \Re\big\{\hat{X}\, exp\big(j(\omega t + \varphi)\big)\big\} = \hat{X}\, cos(\omega t + \varphi)$$

… que la projection sur l'axe vertical (partie imaginaire) :

$$\Im\{\underline{x}\} = \Im\big\{\hat{X}\, exp\big(j(\omega t + \varphi)\big)\big\} = \hat{X}\, sin(\omega t + \varphi)$$

… peut être utilisée pour représenter une grandeur sinusoïdale dans le temps.

Dans la mesure où il s'agit de représenter les grandeurs réelles dans le temps, il est logique de retenir plutôt la partie réelle pour cette représentation. Cela explique le choix du cosinus pour la représentation dans le temps des signaux sinusoïdaux. C'est la convention que nous appliquons.

Ici aussi on peut utiliser les valeurs efficaces.

5. Impédance et admittance

Dans le régime sinusoïdal permanent vu à la section 4.6 on a introduit les concepts de représentations complexes de grandeurs sinusoïdales, de phaseurs, de valeurs instantanées complexes et d'impédances. On va analyser comment ces notions simplifient les calculs dans le cas sinusoïdal.

5.1 Opérations sur les phaseurs et complexeurs

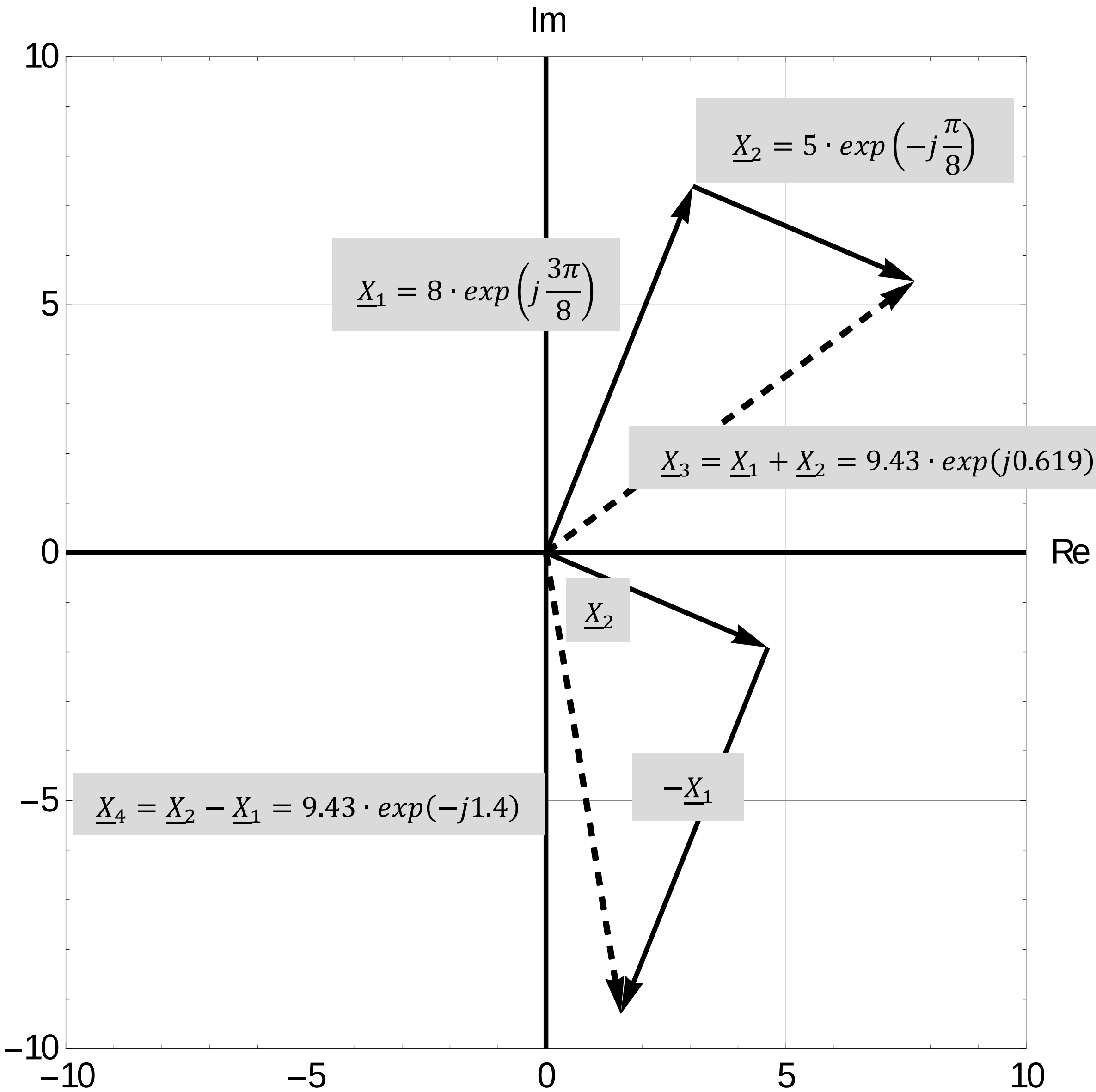
5.1.1 Somme de phaseurs

$$\underline{x}_3 = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = \left(\underline{\hat{X}}_1 + \underline{\hat{X}}_2\right) exp\left(j\omega t\right) = \underline{\hat{X}}_3 exp\left(j\omega t\right)$$

La somme de deux phaseurs est un phaseur égal à la somme complexe des deux phaseurs.

La somme de deux grandeurs sinusoïdales est une grandeur sinusoïdale de même fréquence.

Par la suite, on oubliera souvent le « ^ » pour la valeur de crête car les développements sont aussi valables avec les raisonnements en valeur efficace.

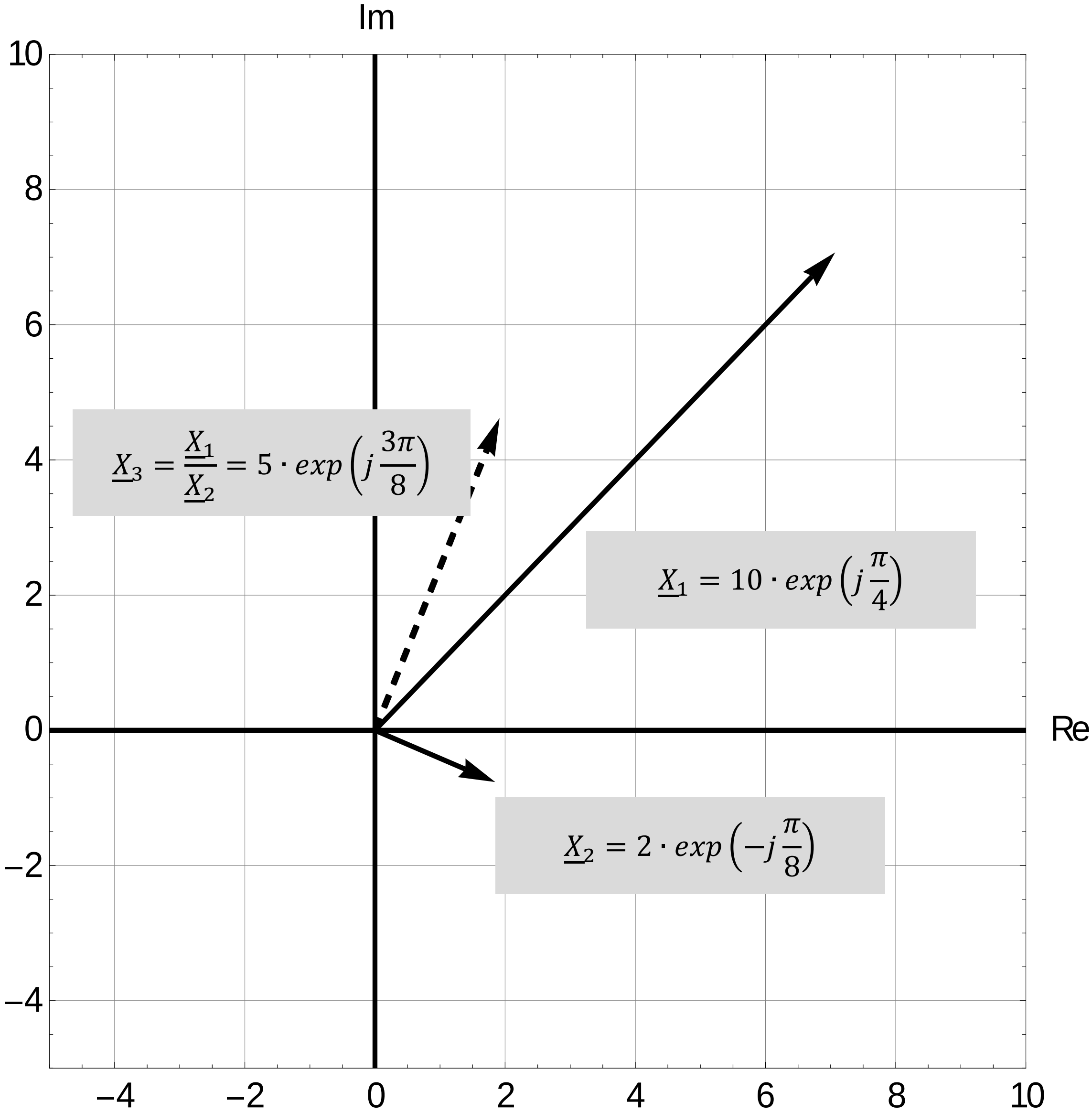


5.1.2 Quotient de phaseurs : complexeur

$$\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2} = \frac{\underline{X}_1 exp(j\omega t)}{\underline{X}_2 exp(j\omega t)} = \frac{\underline{X}_1}{\underline{X}_2} = \underline{X}_3$$

Le quotient de deux phaseurs est une constante complexe (aussi appelée « complexeur ») indépendante du temps.

Le quotient de deux grandeurs instantanées complexes de même fréquence est cette même constante complexe (« complexeur ») indépendante du temps.

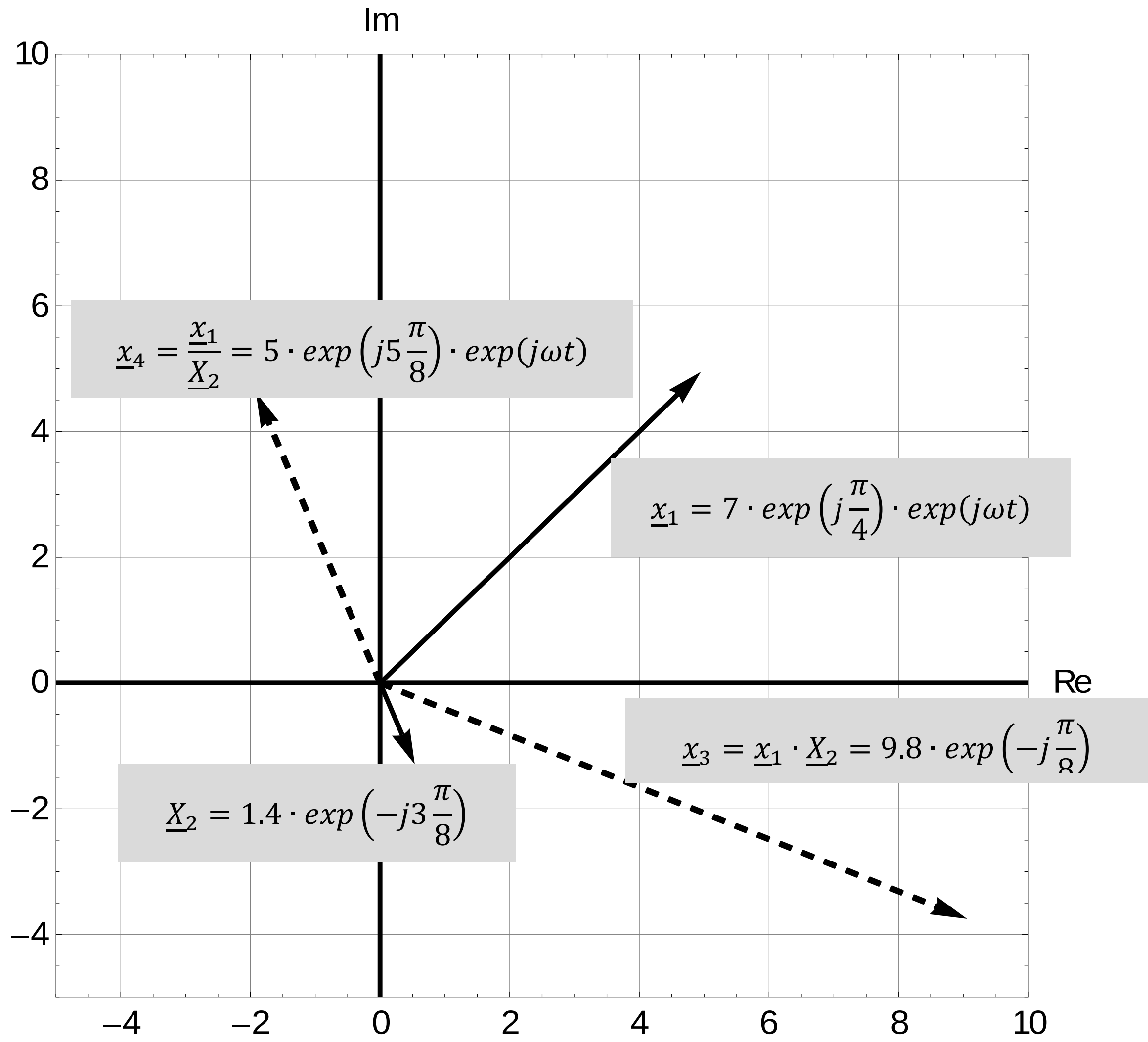


5.1.3 Produit et quotient d'un phaseur par un complexeur

$$\underline{x}_3 = \underline{x}_1 \cdot \underline{X}_2 = \underline{X}_1 \cdot \underline{X}_2 \cdot exp(j\omega t) = \underline{X}_3 \cdot exp(j\omega t)$$

$$\underline{x}_4 = \frac{\underline{x}_1}{\underline{X}_2} = \frac{\underline{X}_1}{\underline{X}_2} \cdot exp(j\omega t) = \underline{X}_4 \cdot exp(j\omega t)$$

Le produit (le quotient) d'un phaseur par un complexeur est un phaseur dont le module est le produit (le quotient) des modules et l'argument la somme (la différence) des arguments du phaseur et du complexeur. Le complexeur modifie l'amplitude et la phase d'une grandeur instantanée complexe.



5.1.4 Dérivée d'un phaseur par rapport au temps

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\underline{X}exp(j\omega t) = j\omega \cdot \underline{X}exp(j\omega t) = j\omega \cdot \underline{x}$$

… de même pour la n^{e} dérivée

$$\frac{d^n\underline{x}}{dt^n} = (j\omega)^n \cdot \underline{X}exp(j\omega t) = (j\omega)^n \cdot \underline{x}$$

ou avec $j = exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{d^n\underline{x}}{dt^n} = \omega^n \cdot \underline{X} \cdot exp\left(j\frac{\pi}{2}n\right)exp(j\omega t) = \omega^n \cdot \underline{x} \cdot exp\left(j\frac{\pi}{2}n\right)$$

Module de la dérivée : $\omega^n \cdot \left|\underline{X}\right|$

Argument de la dérivée : $Arg\{\underline{X}\} + \frac{\pi}{2}n$

Dériver c’est multiplier par $\boldsymbol{j\omega}$ ou multiplier le module par ω et déphaser en avance de $\pi/\mathbf{2}$. La dérivée est en avance de $\pi/\mathbf{2}$ ou 90°.

La dérivée dans le temps d’un signal sinusoïdal est un signal sinusoïdal de même fréquence en avance de $\pi/\mathbf{2}$.

5.1.5 Intégrale d'un phaseur par rapport au temps

$$\int \underline{x} \cdot dt = \int \underline{X} exp(j\omega t) \cdot dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{X} exp(j\omega t) = \frac{\underline{x}}{j\omega}$$

… de même pour la ne intégrale

$$\int ... \iint \underline{x} \cdot dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \cdot \underline{X} exp(j\omega t) = \frac{\underline{x}}{(j\omega)^n}$$

ou avec $\frac{1}{j} = -j = exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int ... \iint \underline{x} \cdot dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \cdot \underline{X} exp(j\omega t) = \frac{\underline{x}}{(j\omega)^n} = \omega^{-n} \cdot \underline{x} \cdot exp\left(-j\frac{\pi}{2}n\right)$$

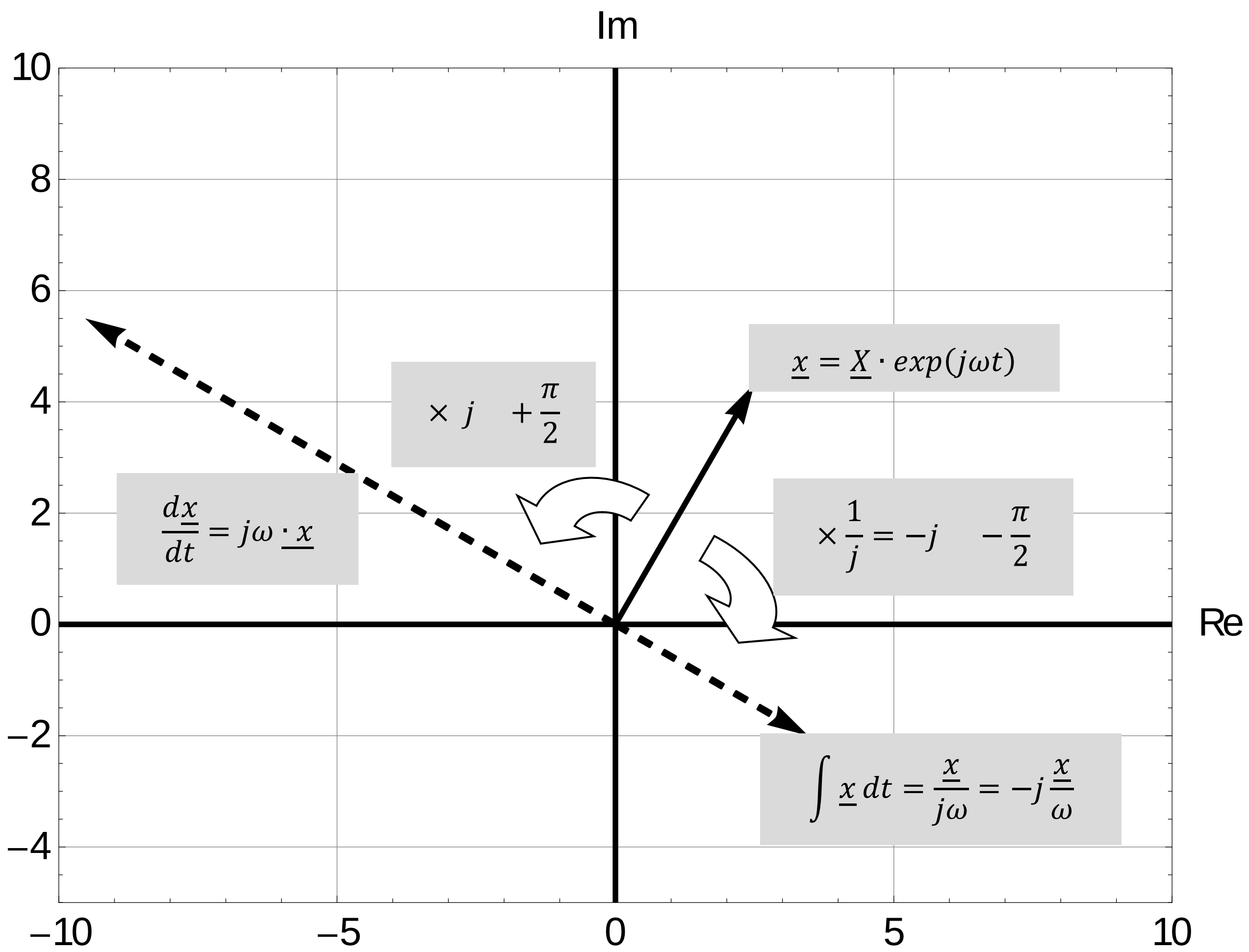
Module de la n^e l'intégrale : $\omega^{-n} \cdot \left|\underline{X}\right|$

Argument de la ne'intégrale : $Arg\{\underline{X}\} - \frac{\pi}{2}n$

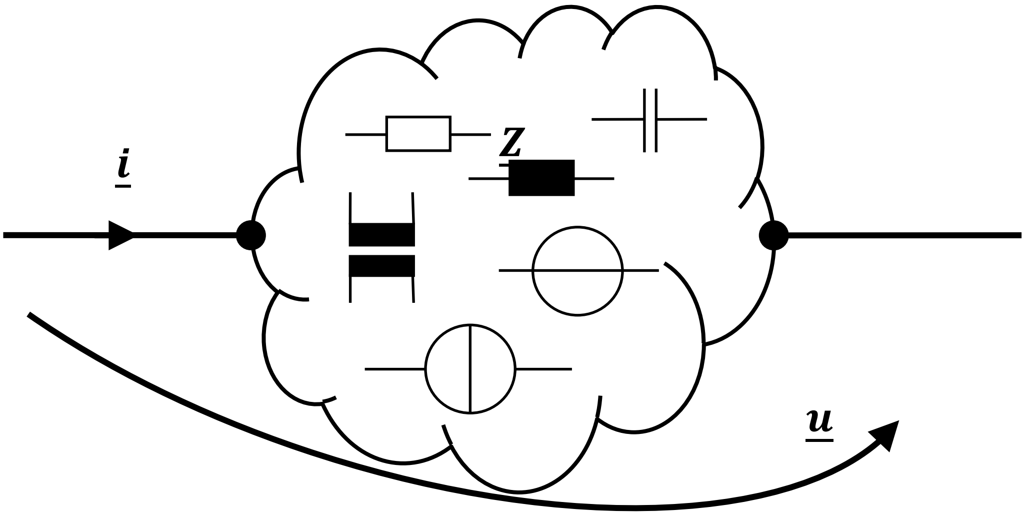
Intégrer c'est diviser par $\boldsymbol{j\omega}$ ou diviser le module par ω et déphaser en retard de $\pi/2$. L'intégrale est en retard de $\pi/2$ ou 90°.

L'intégrale dans le temps d'un signal sinusoïdal est un signal sinusoïdal de même fréquence en retard de $\pi/2$.

Représentation graphique de la dérivée et de l'intégrale dans le temps d'une grandeur instantanée complexe.



5.2 Impédance



$$\underline{u} = \underline{\widehat{U}} \cdot exp(j\omega t) = \widehat{U} \cdot exp(j\alpha) \cdot exp(j\omega t)$$

$$\underline{i} = \underline{\hat{I}} \cdot exp(j\omega t) = \hat{I} \cdot exp(j\beta) \cdot exp(j\omega t)$$

Le rapport entre la valeur instantanée complexe de la tension et la valeur instantanée complexe du courant pour un bipôle quelconque est une constante complexe (complexeur) appelée **impédance**. Le symbole est Z. Elle n'a pas de réalité physique, c'est un modèle mathématique. Elle s'exprime en Ohms [Ω].

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{\widehat{U}}}{\underline{\hat{I}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} exp\big(j(\alpha - \beta)\big) = Z \cdot exp(j\varphi)$$

Le module $\left|\underline{Z}\right| = Z = \frac{\widehat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$ exprime le rapport entre l'amplitude de la tension et l'amplitude du courant.

L'argument $\varphi = \alpha - \beta$ exprime le déphasage entre le courant et la tension.

On en déduit la loi d'Ohm complexe :

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

5.2.1 Représentation cartésienne de l'impédance

$$\underline{Z} = Z \cdot exp(j\varphi) = Z \cdot \cos\varphi + Z \cdot jsin\,\varphi$$

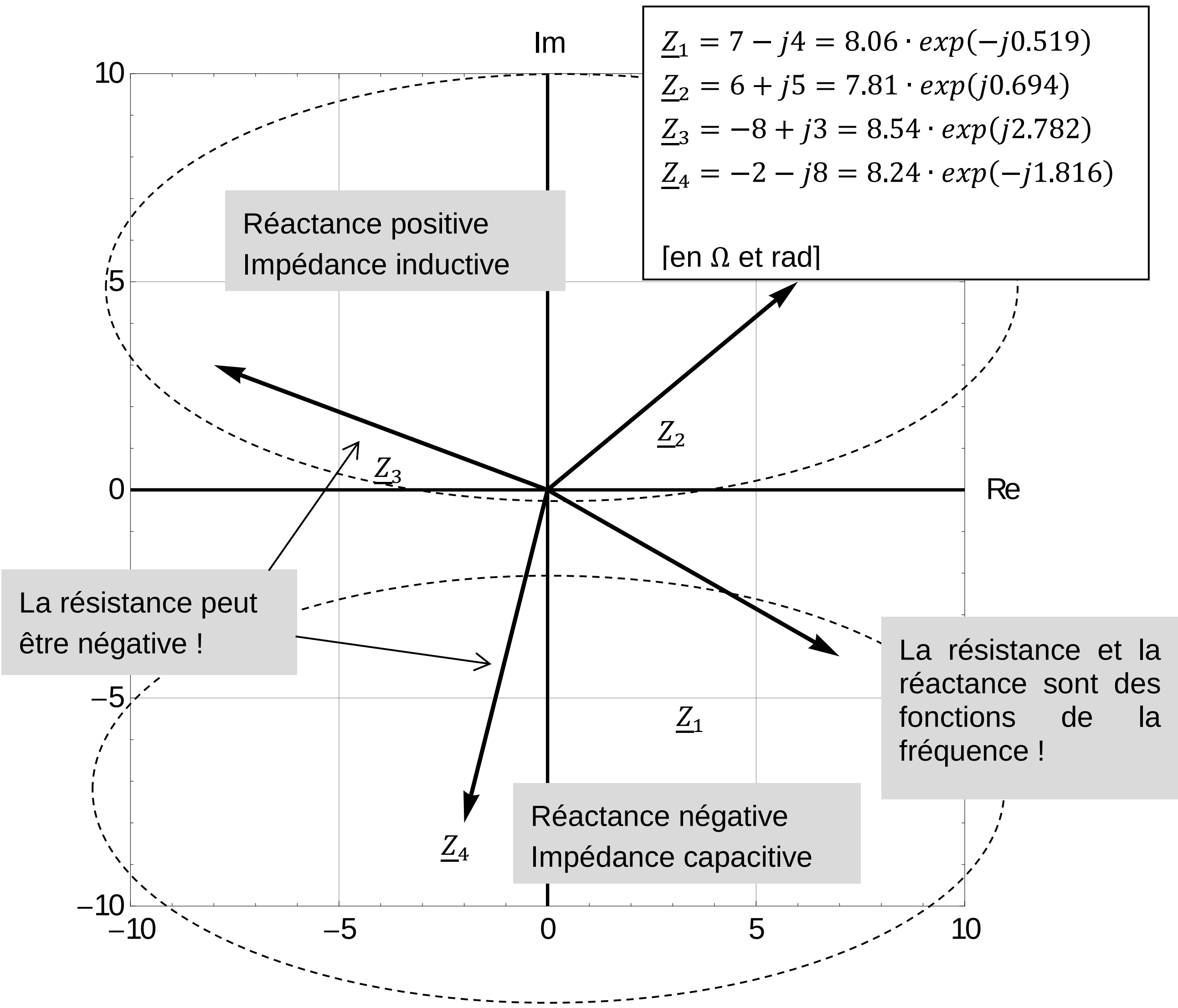
La partie réelle de Z est appelée **« résistance »**, symbole **R**

$$R = \Re\{\underline{Z}\} = Z \cdot \cos\varphi$$

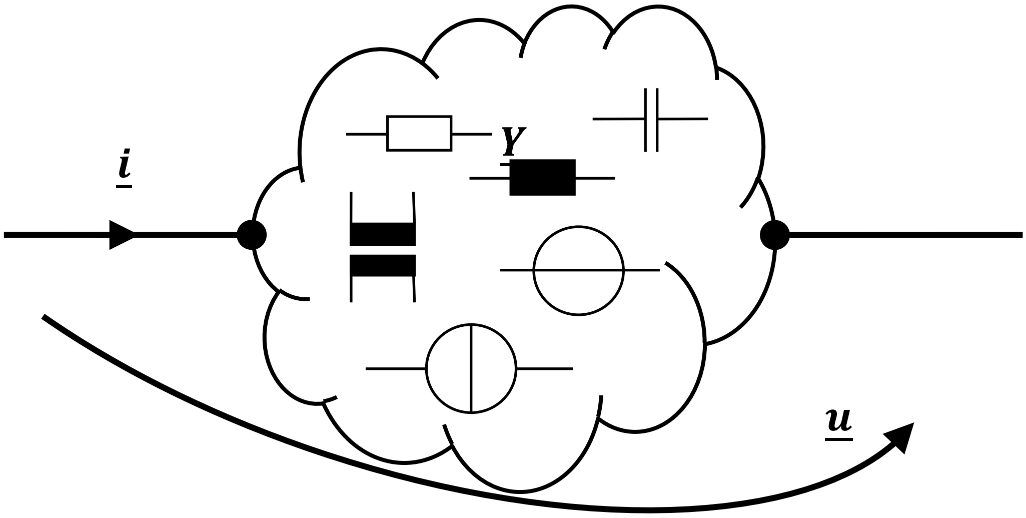
La partie imaginaire de Z est la **« réactance »**, symbole **X**

$$X = \Im\{\underline{Z}\} = Z \cdot sin\,\varphi$$

$$\underline{Z} = R + jX \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \varphi = atan\frac{X}{R}$$



5.3 Admittance



$$\underline{u} = \underline{\hat{U}} \cdot exp(j\omega t) = \hat{U} \cdot exp(j\alpha) \cdot exp(j\omega t)$$

$$\underline{i} = \underline{\hat{I}} \cdot exp(j\omega t) = \hat{I} \cdot exp(j\beta) \cdot exp(j\omega t)$$

Dans le but de simplifier les expressions algébriques, on définit l'inverse de l'impédance appelée **admittance**. Le symbole est Y. Comme l'impédance, elle n'a pas de réalité physique, c'est un modèle mathématique. Elle s'exprime en Siemens $[S]$.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{\hat{I}}}{\underline{\hat{U}}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} exp\big(j(\beta - \alpha)\big) = Y \cdot exp(-j\varphi)$$

Le module $\left|\underline{Y}\right| = Y = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{I}{U}$ exprime le rapport entre l'amplitude du courant et l'amplitude de la tension.

L'argument $-\varphi = -(\alpha - \beta)$ exprime le déphasage entre le courant et la tension.

On en déduit la loi d'Ohm complexe :

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

5.3.1 Représentation cartésienne de l'admittance

$$\underline{Y} = Y \cdot exp(-j\varphi) = Y \cdot cos\,\varphi - Y \cdot jsin\,\varphi$$

La partie réelle de Y est appelée **« conductance »**, symbole **G**

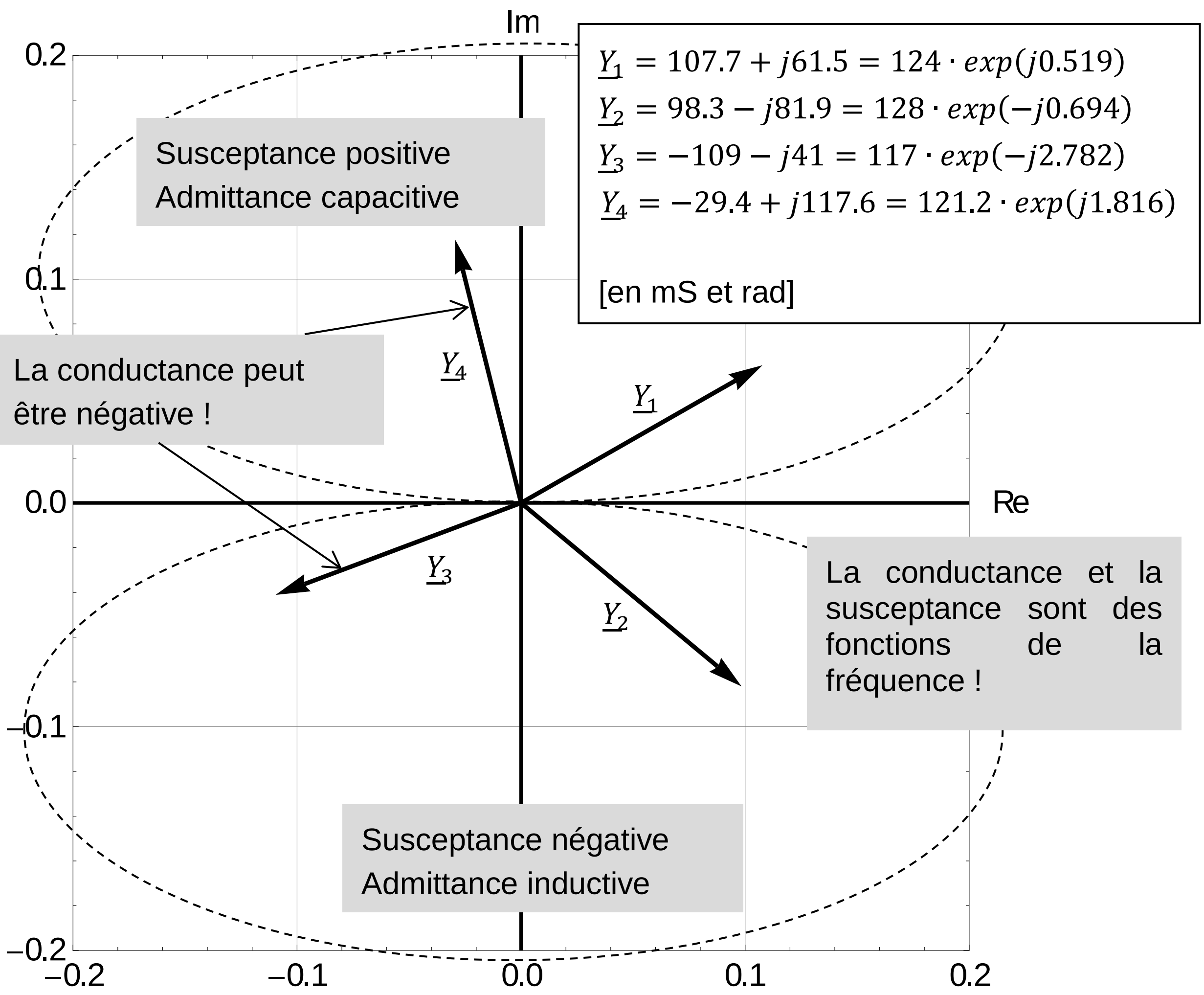
$$G = \Re\{\underline{Y}\} = Y \cdot cos\,\varphi$$

Partie imaginaire de Y est la **« susceptance »**, symbole **B**

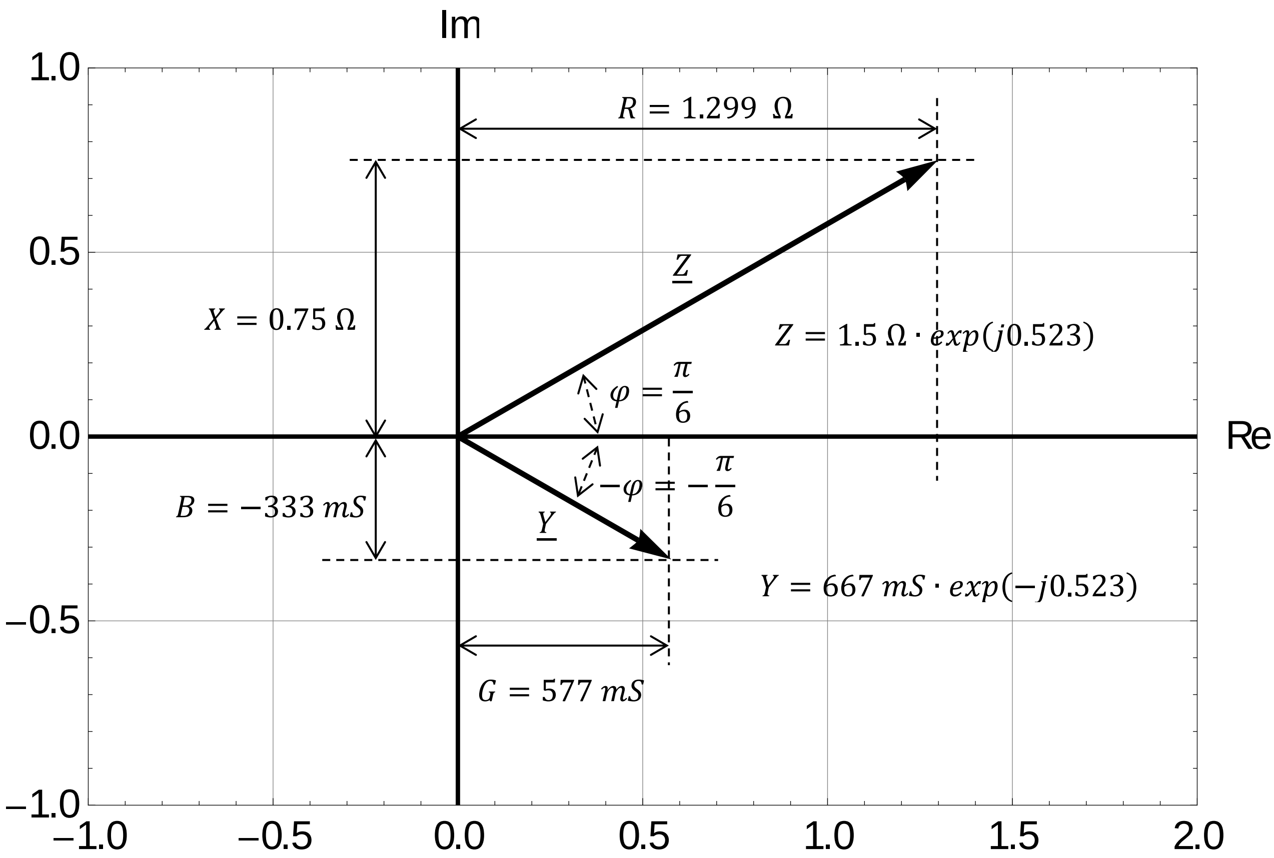
$$B = \Im\{\underline{Y}\} = -Y \cdot sin\,\varphi$$

$$\underline{Y} = G + jB \qquad Y = \sqrt{G^2 + B^2} \qquad \varphi = atan\frac{-B}{G}$$

§



Exemple :



Im
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Re
$R = 1.299\ \Omega$
$X = 0.75\,\Omega$
$\underline{Z}$
$Z = 1.5\,\Omega \cdot exp(j0.523)$
$\varphi = \frac{\pi}{6}$
$-\varphi = -\frac{\pi}{6}$
$B = -333\,mS$
$\underline{Y}$
$Y = 667\,mS \cdot exp(-j0.523)$
$G = 577\,mS$

5.4 Applications de l'impédance et de l'admittance

5.4.1 Impédances et admittances élémentaires

Résistance	Inductance	Capacité
$u = R \cdot i$	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$u = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,(\tau)d\tau$
$i = G \cdot u$	$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u\,(\tau)d\tau$	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$
$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{u} = j\omega L \cdot \underline{i}$	$\underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i}$
$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$	$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$	$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$
$\underline{i} = G \cdot \underline{u}$	$\underline{i} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{u}$	$\underline{i} = j\omega C \cdot \underline{u}$
$\underline{I} = G \cdot \underline{U}$	$\underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U}$	$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$

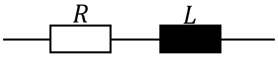
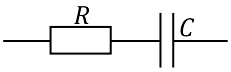
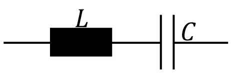
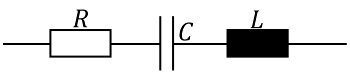
Modèles polaires	Résistance	Inductance	Capacité
Impédance	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = {}^{1}/_{j\omega C}$
Module	R	ωL	${}^{1}/_{\omega C}$
Phase	0	${}^{\pi}/_{2}$	$-{}^{\pi}/_{2}$
Admittance	$\underline{Y}_R = {}^{1}/_{R}$	$\underline{Y}_L = {}^{1}/_{j\omega L}$	$\underline{Y}_C = j\omega C$
Module	${}^{1}/_{R}$	${}^{1}/_{\omega L}$	ωC
Phase	0	$-{}^{\pi}/_{2}$	${}^{\pi}/_{2}$
Modèles cartésiens	Résistance	Inductance	Capacité
Impédance			
Résistance	$R_R = R$	$R_L = 0$	$R_C = 0$
Réactance	$X_R = 0$	$X_L = \omega L$	$X_C = -{}^{1}/_{\omega C}$
Admittance			
Conductance	$G_R = {}^{1}/_{R}$	$G_L = 0$	$G_C = 0$
Susceptance	$B_R = 0$	$B_L = -{}^{1}/_{\omega L}$	$B_C = \omega C$

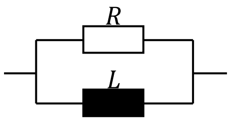
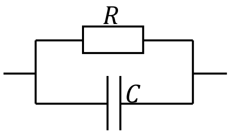
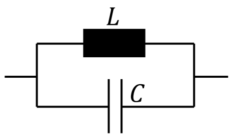
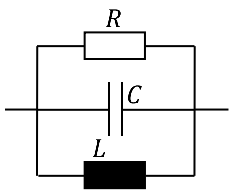
5.4.2 Simplification de circuits en régime sinusoïdal

Sur la base de la loi d’Ohm complexe $\underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{Z}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}$ resp. $\underline{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{Y}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}$, les impédances s’associent comme les résistances, et les admittances comme des capacités. De ce fait, on peut généraliser les méthodes de simplifications de circuits aux impédances et admittances. C’est aussi valable pour les diviseurs de courant et tension, les transformations étoile triangle et les modèles de Thévenin et Norton.

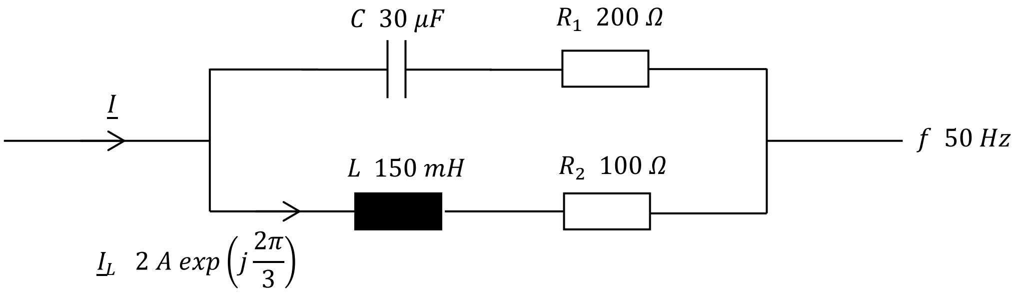
Comparé au cas purement résistif combiné avec des sources continues, dans le cas sinusoïdal, comme l’impédance et l’admittance dépendent de la fréquence, les circuits ont un comportement dépendant de la fréquence, conduisant au concept de réponse fréquentielle et de filtre.

5.4.3 Impédance et admittance des circuits élémentaires

Circuit	Impédance $\underline{Z}$	Admittance $\underline{Y}$
	$R + j\omega L$	$\dfrac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$
	$R + \dfrac{1}{j\omega C}$	$\dfrac{R\omega^2 C^2 + j\omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$
Circuit résonant série	$j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C} = j\dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$	$j\dfrac{\omega C}{1 - \omega^2 LC}$
	L'impédance est nulle (court-circuit) pour : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	L'admittance est infinie (court-circuit) pour : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
	$R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\dfrac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

<table>
<tr><th>Circuit</th><th>Impédance $\underline{Z}$</th><th>Admittance $\underline{Y}$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{R\omega^2L^2 + j\omega LR^2}{R^2 + \omega^2L^2}$$</td><td>$$\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{R - j\omega CR^2}{1 + \omega^2R^2C^2}$$</td><td>$$\frac{1}{R} + j\omega C$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Circuit résonant parallèle

</td><td>$$j\frac{\omega L}{1 - \omega^2LC}$$</td><td>$$j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\frac{\omega^2LC - 1}{\omega L}$$</td></tr>
<tr><td>L’impédance est infinie (circuit ouvert) pour :
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$</td><td>L’admittance est nulle (circuit ouvert) pour :
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{R - jR^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$</td><td>$$\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$</td></tr>
</table>

Exemple



Calcul des impédances et des admittances du circuit

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{314\ s^{-1} \cdot 30 \cdot 10^{-6} F} = -j106.1\ \Omega$$
$$= 106.1\ \Omega\ exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j314\ s^{-1} \cdot 0.15\ H = j47.12\ \Omega = 47.12\ \Omega\ exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{Z}_{R1C} = R_1 + \underline{Z}_C = 200\ \Omega - j106.1\ \Omega = 226.4\ \Omega\ exp(-j0.4877)$$

$$\underline{Y}_{R1C} = \frac{1}{\underline{Z}_{R1C}} = \frac{1}{226.4\ \Omega\ exp(-j0.4877)} = 3.9\ mS + j2.07\ ms$$
$$= 4.417\ \mathrm{mS}\ exp(j0.4877)$$

$$\underline{Z}_{R2L} = R_2 + \underline{Z}_L = 100\ \Omega + j47.12\ \Omega = 110.5\ \Omega\ exp(j0.4404)$$

$$\underline{Y}_{R2L} = \frac{1}{\underline{Z}_{R2L}} = \frac{1}{110.5\ \Omega\ exp(j0.4404)} = 8.18\ mS - j3.85\ ms$$
$$= 9.046\ \text{mS}\ exp(-j0.4404)$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_{R1C} + \underline{Y}_{R2L} = 12.08\ mS - j1.786\ ms = 12.21\ \text{mS}\ exp(-j0.1467)$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{12.21\ \text{mS}\ exp(-j0.1467)} = 80.98\ \Omega + j11.96\ \Omega$$
$$= 81.86\ \Omega\ exp(j0.1467)$$

ou

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_{R1C} \cdot \underline{Z}_{R2L}}{\underline{Z}_{R1C} + \underline{Z}_{R2L}} = \frac{226.4\ \Omega\ exp(-j0.4877) \cdot 110.5\ \Omega\ exp(j0.4404)}{200\ \Omega - j106.1\ \Omega\ +\ 100\ \Omega + j47.12\ \Omega}$$
$$= 81.86\ \Omega\ exp(j0.1467)$$

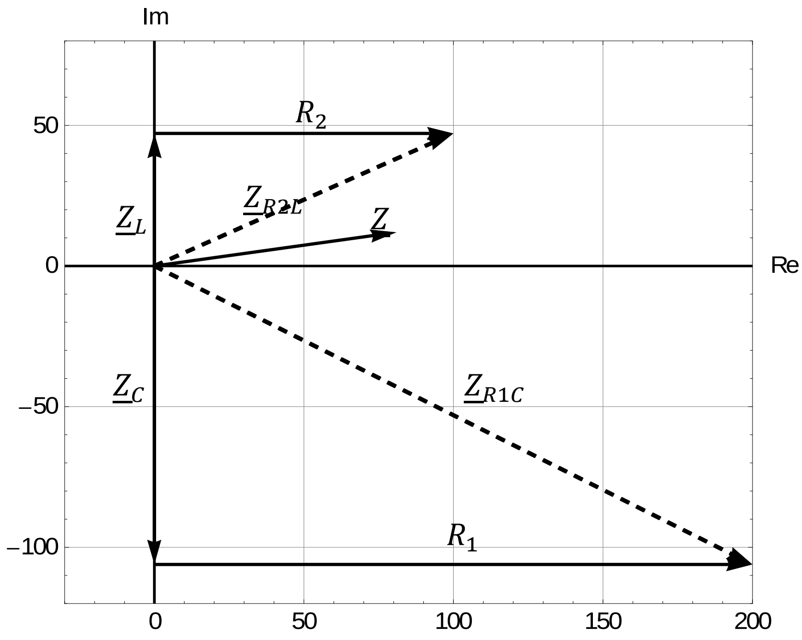
Résistance : $R = \Re\{\underline{Z}\} = 80.98\ \Omega$

Réactance : $X = \Im\{\underline{Z}\} = 11.96\ \Omega$

Conductance : $G = \Re\{\underline{Y}\} = 12.08\ \text{mS}$

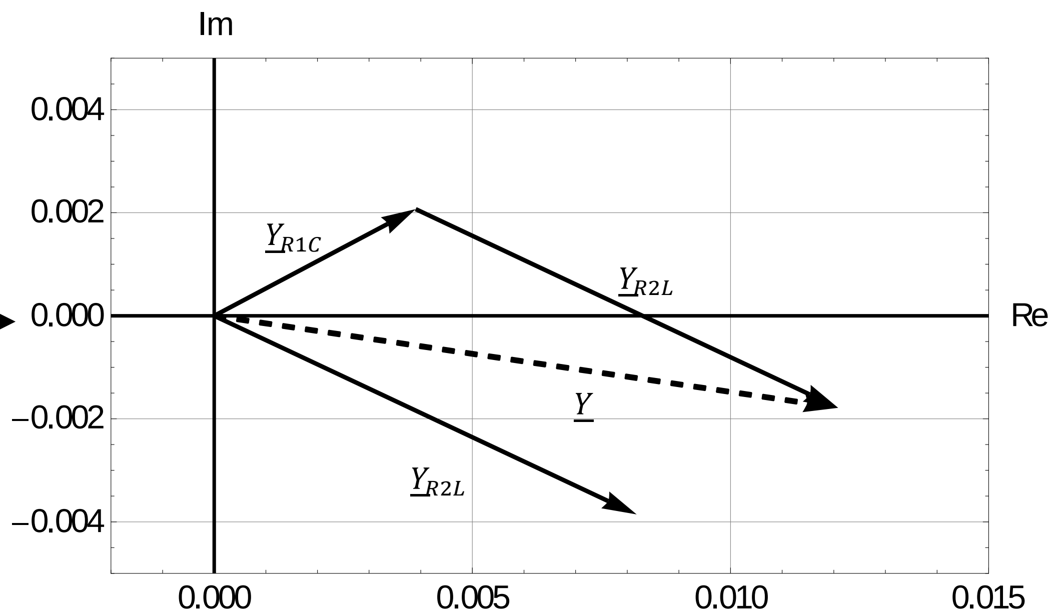
Susceptance : $B = \Im\{\underline{Z}\} = -1.786\ \text{mS}$

Représentation graphique

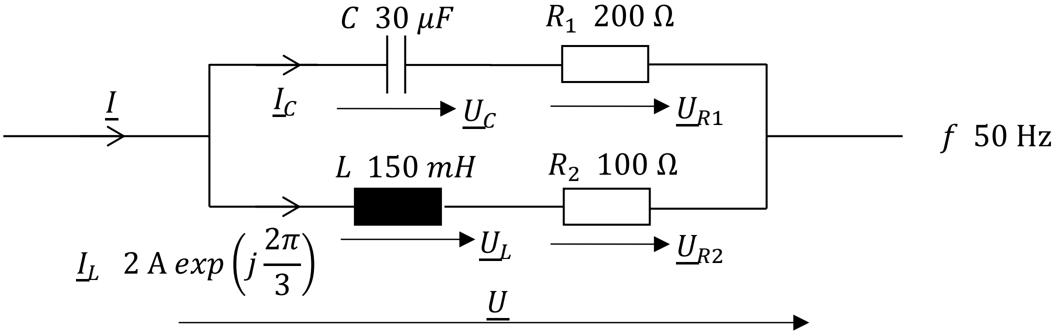


Impédance

Admittance



Exemple (suite)



Calcul des courants et des tensions

$$\underline{U} = \underline{Z}_{R2L} \cdot \underline{I}_L = 110.5\ \Omega\ exp(j0.4404) \cdot 2\ A\ exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 221.09\ \text{V}\ exp(j2.53)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{221.09\ \text{V}\ exp(j2.53)}{81.86\ \Omega\ exp(j0.1467)} = 2.7\ \text{A}\ exp(j2.388)$$

$$\underline{I}_C = \underline{I} - \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{R1C}} = \frac{221.09\ \text{V}\ exp(j2.53)}{226.4\ \Omega\ exp(-j0.4877)} = 0.9765\ \text{A}\ exp(j3.022)$$

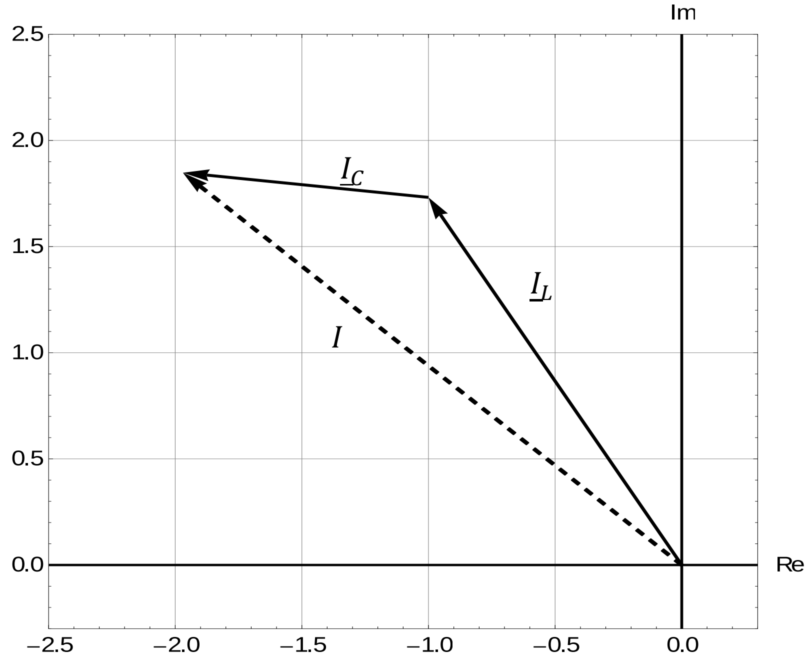
$$\underline{U}_{R2} = R_2 \cdot \underline{I}_L = 100\ \Omega\ \cdot 2\ A\ exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = 200\ \text{V}\ exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right)$$

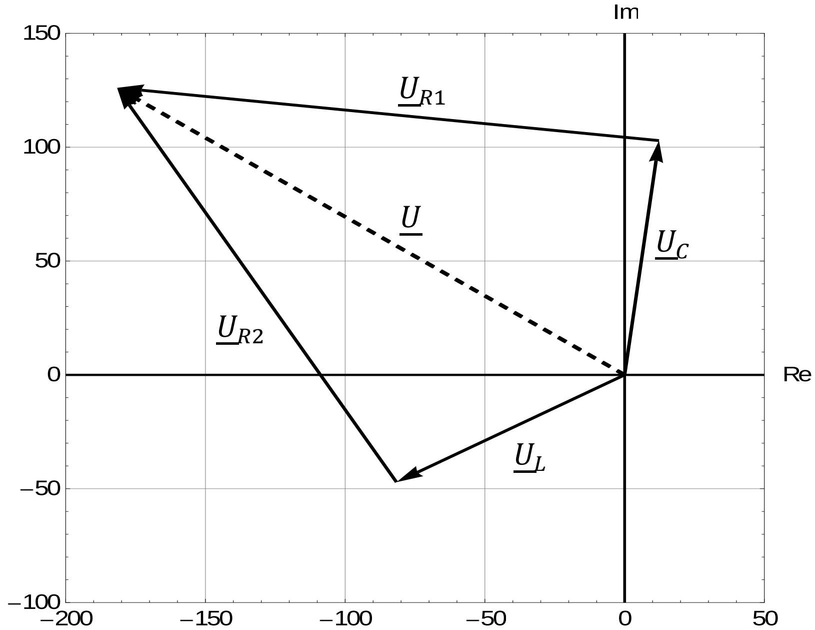
$$\underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = 47.12\ \Omega\ exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2\ A\ exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 94.24\ \text{V}\ exp(-j2.618)$$

$$\underline{U}_{R1} = R_1 \cdot \underline{I}_C = 200\ \Omega\ \cdot 0.9765\ \text{A}\ exp(j3.022) = 195.3\ \text{V}\ exp(j3.022)$$

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_C = 106.1\ \Omega\ exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0.9765\ \text{A}\ exp(j3.022)$$
$$= 103.61\ \text{V}\ exp(j1.452)$$

Représentation graphique des courants et des tensions





Valeurs instantanées dans le temps :

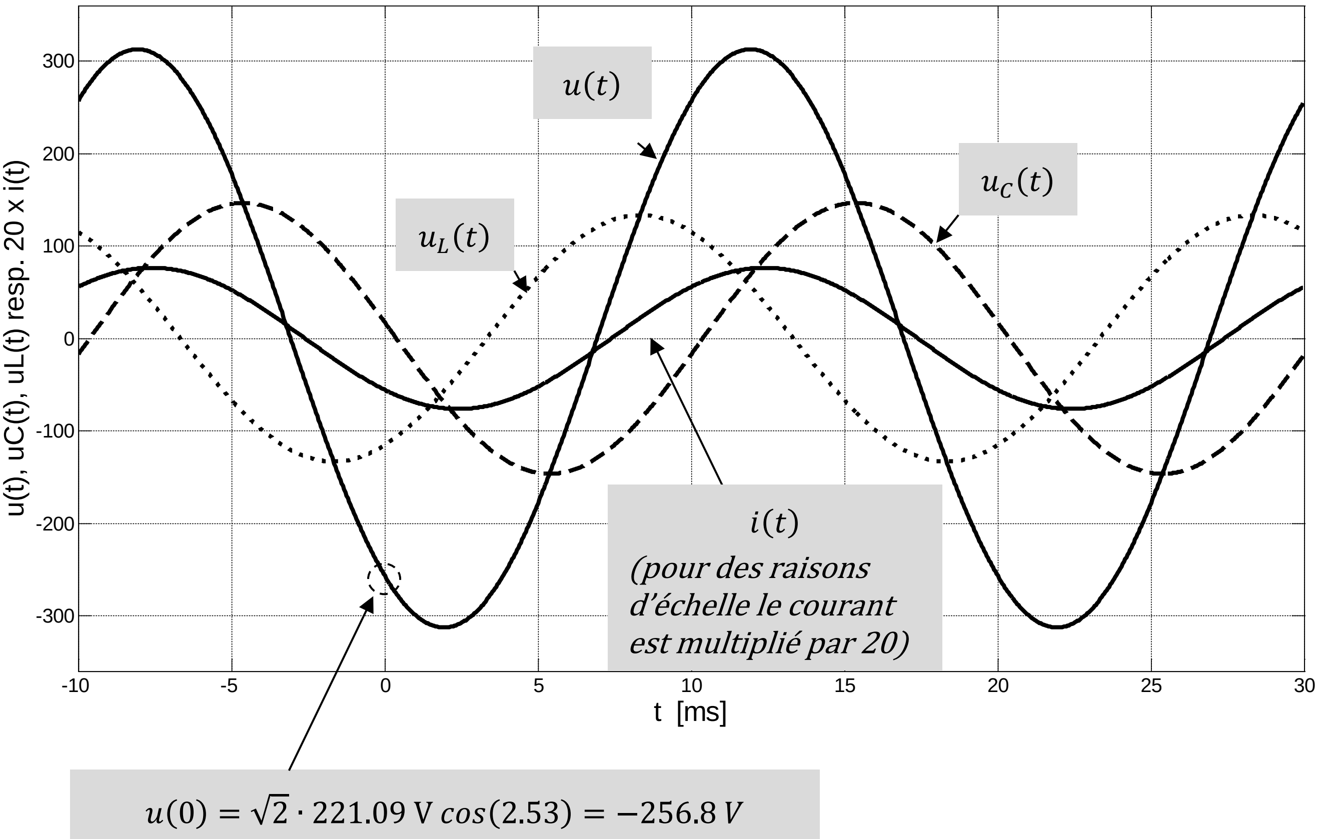
$$x(t) = \Re\{\underline{x}(t)\} = |\underline{\hat{X}}|cos(\omega t + Arg\{\underline{\hat{X}}\}) = \sqrt{2}|\underline{X}|cos(\omega t + Arg\{\underline{\hat{X}}\})$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 221.09\ V\ cos(314\ s^{-1} \cdot t + 2.53)$$

$$u_L(t) = \sqrt{2} \cdot 94.24\ V\ cos(314\ s^{-1} \cdot t - 2.618)$$

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot 103.61\ \ V\ cos(314\ s^{-1} \cdot t + 1.452)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 2.7\ A\ cos(314\ s^{-1} \cdot t + 2.388)$$



u(t), uC(t), uL(t) resp. 20 x i(t)
300
200
100
0
-100
-200
-300
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30
t [ms]
$u(t)$
$u_C(t)$
$u_L(t)$
$i(t)$
(pour des raisons d'échelle le courant est multiplié par 20)
$u(0) = \sqrt{2} \cdot 221.09\ \mathrm{V}\ cos(2.53) = -256.8\ V$

5.5 Puissance en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal, il y a plusieurs puissances. On va juste les présenter brièvement :

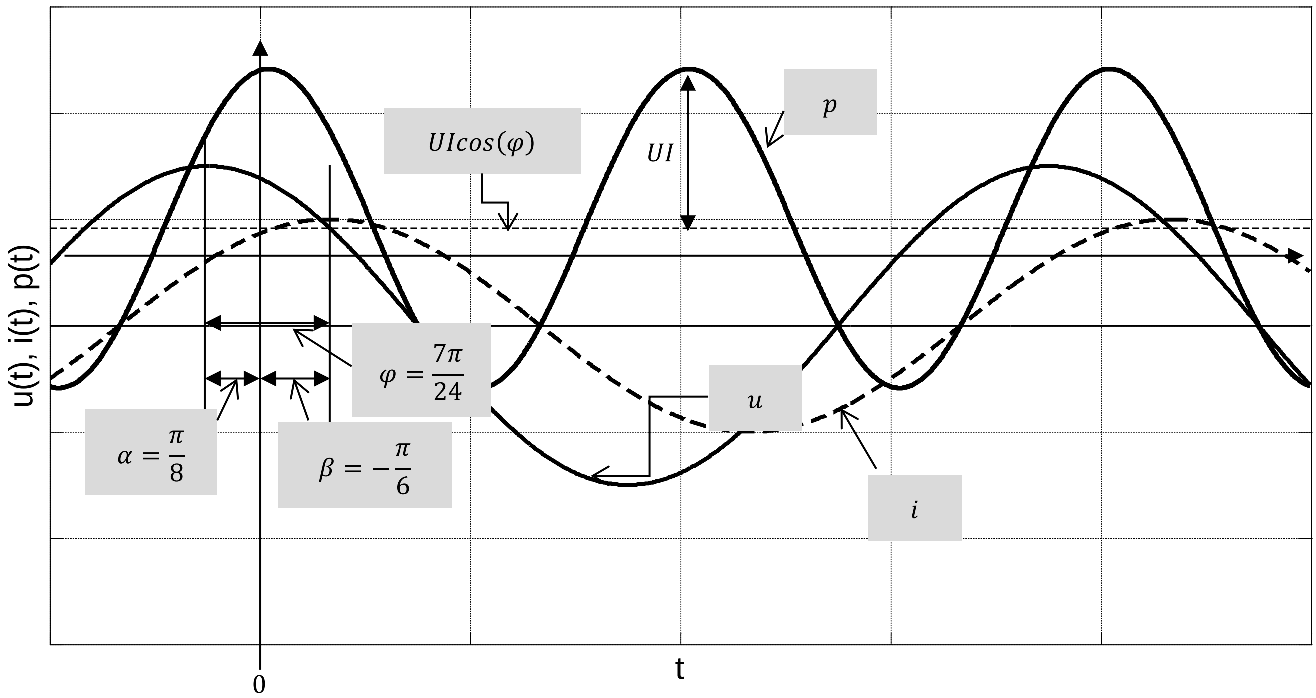
Puissance instantanée

$$u = \hat{U}cos(\omega t + \alpha) \qquad\qquad i = \hat{I}cos(\omega t + \beta)$$

$$p = u \cdot i = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot cos(\omega t + \alpha)cos(\omega t + \beta)$$

$$p = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \left(cos(\alpha - \beta) + cos(2\omega t + \alpha + \beta)\right)$$

$$p = UI \cdot cos(\varphi) + UI \cdot cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$



La puissance instantanée est la somme :

d'une puissance moyenne constante…

$$P = UIcos(\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T p \cdot dt$$

…et d'une puissance fluctuante qui varie sinusoïdalement à la fréquence double

$$p_f(t) = UIcos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

Avec $\beta = \alpha - \varphi$ l'expression de la puissance instantanée devient :

$$p = UI \cdot cos(\varphi) + UI \cdot cos(2\omega t + 2\alpha - \varphi)$$
$$= UI \cdot cos(\varphi)\big(1 + cos(2\omega t + 2\alpha)\big) + UI \cdot sin(\varphi)sin(2\omega t + 2\alpha)$$

La puissance instantanée est interprétée comme la somme :

- d'une **puissance active** $UIcos(\varphi) \cdot \big(1 + cos(2\omega t + 2\alpha)\big)$ représentant le transfert effectif d'énergie dont l'amplitude est égale à la puissance moyenne sur la période. C'est énergie fournie ou consommée par période divisée par la période

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p \cdot dt = UIcos(\varphi) \quad en\ watt\ [W]$$

- d'une puissance $UIsin(\varphi) \cdot sin(2\omega t + 2\alpha)$ représentant l'échange d'énergie durant la période dû aux accumulateurs d'énergie du circuit (capacités, inductances, etc.). Son amplitude est appelée **puissance réactive.**

$$Q = UIsin(\varphi) \quad en\ volt\ ampère\ réactif\ [VAR]$$

Cette puissance ayant une valeur moyenne nulle, ne transmet donc pas de puissance.

Le produit $S = UI \ en \, volt \, ampère \, [VA]$ est appelé **puissance apparente**. Cette « puissance » représente les « dimensions électriques » d'un équipement ou d'une installation et on peut la calculer par :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

On cherche à minimiser les pertes dans un réseau. On peut le faire en diminuant la puissance apparente, donc la puissance réactive.

Le $cos(\varphi)$ - rapport entre la puissance active et la puissance apparente $\frac{P}{S} = \cos\varphi$ - est appelé **facteur de puissance.** Il caractérise l'efficacité du transfert d'énergie électrique d'un équipement ou d'une installation.

On appelle puissance complexe, l'expression :

$$\underline{S} = P + jQ = S \cdot exp(j\varphi)$$