06 Exercices - Corrigés

Phaseurs

1. Exprimer l'évolution cosinusoïdale x(t) à 100kHz de la grandeur décrite par son phaseur complexe 2V-j3V, et calculer sa valeur en t=3µs.

$\hat{X} = \sqrt{2^2+3^2} = 3.6 \quad \varphi = arctg\left(-\frac{3}{2}\right) = -0.983rad$ donc les phaseur est : $\underline{X} = 3.6 \cdot e^{-j0.983}$

$\underline{x}(t) = 3.6 \cdot e^{-j0.983} e^{j2\pi 100kHz \cdot t} = 3.6e^{j(2\pi 100kHz \cdot t - 0.983)}$ donc sous forme cosinusoïdale :

$x(t) = \Re\{x(t)\} = 3.6 \cdot cos(2\pi 100kHz \cdot t - 0.983)$

et pour t=3µs

$x(3\mu s) = 3.6 \cdot cos(2\pi \cdot 0.3 - 0.983) = 2.232V$

2. Exprimer l'évolution cosinusoïdale de la somme i(t) de deux courants $i_1(t)$=25mA·sin(2π50Hz·t+π/10) et $i_2(t)$=50mA·cos(2π50Hz·t+π/10), en exprimant d'abord les phaseurs $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$, puis leur somme $\underline{I}$ avant de passer à la description cosinusoïdale temporelle.

Afin de mettre sous forme exponentielle, il faut passer par la forme cosinusïdale:

$i_1(t) = 25mA \cdot sin\left(2\pi 50Hz \cdot t + \frac{\pi}{10}\right) = 25mA \cdot cos\left(2\pi 50Hz \cdot t + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) = 25mA \cdot cos\left(2\pi 50Hz \cdot t - \frac{2\pi}{5}\right)$

Forme exponentielle:

$\underline{i}_1(t) = 25mA \cdot e^{j\left(2\pi 50Hz \cdot t - \frac{2\pi}{5}\right)} = 25mA \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}} \cdot e^{j2\pi 50Hz \cdot t} = \underline{I}_1 \cdot e^{j2\pi 50Hz \cdot t}$

Puis passer de la forme exponentielle à la forme cartésienne:

$\underline{I}_1 = 25mA \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}} = 25mA \cdot cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + j \cdot 25mA \cdot sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = 7.725mA - j23.776mA$

Idem avec $i_2(t)$ déjà sous forme cosinusïdale:

$\underline{i}_2(t) = 50mA \cdot e^{j\left(2\pi 50Hz \cdot t + \frac{\pi}{10}\right)} = 50mA \cdot e^{j\frac{\pi}{10}} \cdot e^{j2\pi 50Hz \cdot t} = \underline{I}_2 \cdot e^{j2\pi 50Hz \cdot t}$

$\underline{I}_2 = 50mA \cdot e^{j\frac{\pi}{10}} = 50mA \cdot cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + j \cdot 50mA \cdot sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 47.553mA + j15.451mA$

La somme est donc:

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 55.28mA - j8.325mA$

$\hat{I} = \sqrt{55.28^2 + 8.325^2}\text{mA} = 55.9\text{mA} \quad \varphi = arctg\left(-\frac{8.325}{55.28}\right) = -0.15rad$

Soit le phaseur: $\underline{I} = 55.9mA \cdot e^{-j0.15}$

$i(t) = \Re\{\underline{I} \cdot e^{j2\pi 50Hz \cdot t}\} = \Re\{55.9mA \cdot e^{j(2\pi 50Hz \cdot t - 0.15)}\} = 55.9mA \cdot cos(2\pi 50Hz \cdot t - 0.15)$

3. Déterminer la tension et le courant sous forme de grandeur instantanée complexe $\underline{i}(t)$ et $\underline{u}(t)$ aux bornes resp. à travers un condensateur de 1µF parcouru par un courant de 5mA d'amplitude et de fréquence 20kHz. Déterminer la valeur du rapport $\underline{i}(t)/\underline{u}(t)$, et essayer de l'interpréter (qu'est-ce que c'est ?).

$\underline{i}(t) = 5mA \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t}$:

et par l'équation de tension d'une capacité:

$\underline{u}(t) = \frac{1}{C}\int \underline{i}(t)dt = \frac{1}{C}\int 5mA \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t}dt$

$\underline{u}(t) = \frac{25mA}{C} e^{j\varphi} \int e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t}dt = \frac{5mA}{C} e^{j\varphi} \cdot \frac{1}{j2\pi 20\mathrm{k}Hz} e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t} + u(t_0)$

en considérant que $u(t_0) = 0$:

$\underline{u}(t) = \frac{5mA}{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot C} e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t}$

Le rapport i(t)/u(t) :

$\frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{5mA\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t}}{\frac{5mA}{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot C}e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi 20\mathrm{k}Hz\cdot t}} = j2\pi 20\mathrm{k}Hz \cdot C = j\omega C$ c'est l'admittance complexe de la capacité $\underline{Y}$.

4. Une résistance de 220Ω en série avec une inductance de 1H sont parcourus par un courant sinusoïdal d'amplitude de 100mA et de fréquence de 60Hz (phase φ indéterminée). Déterminer les phaseurs complexes $\underline{U}_R$ et $\underline{U}_L$ de la tension aux bornes de chacun des composants, sous forme x+jy et $r\cdot e^{j\varphi}$; déterminer le déphasage de la tension totale $\underline{U}$ aux bornes des deux composants en série par rapport au courant $\underline{I}$ qui les parcourt tous les deux.

$\underline{i}(t) = 100mA \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t}$

et :

$\underline{u}_R(t) = R\underline{i}(t) = 220\Omega \cdot 100mA \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t}$

$\underline{u}_L(t) = L\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = 1H \frac{d\left(100mA\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t}\right)}{dt} = 1H \cdot 100mA \cdot \mathrm{j}2\pi 60Hz \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t}$

donc :

$\underline{U}_R = 220\Omega \cdot 100mA \cdot e^{j\varphi} = 22\mathrm{V} \cdot e^{j\varphi}$ soit : 22V si $\varphi = 0$

$\underline{U}_L = 1H \cdot 100mA \cdot \mathrm{j}2\pi 60Hz \cdot e^{j\varphi} = \mathrm{j}37.7\mathrm{V} \cdot e^{j\varphi}$ soit : j37.7V si $\varphi = 0$

$\underline{u}(t) = \underline{u}_R(t) + \underline{u}_L(t) = (22V + j37.7V) \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t}$

$\underline{u}(t) = \sqrt{22^2 + 37.7^2}V \cdot e^{j\cdot arctan\left(\frac{37.7}{22}\right)} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t} = 43.65V \cdot e^{j1.042} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi 60Hz\cdot t}$

$\underline{U} = 43.65V \cdot e^{j(1.042+\varphi)}$ (soit, si $\varphi = 0$: $43.65V \cdot cos(1.042) + 43.65V \cdot jsin(1.042) = 22.02V + j37.69V$)

et comme $\underline{I} = 100mA \cdot e^{j\varphi}$, le déphasage entre $\underline{U}$ par rapport à $\underline{I}$ vaut :

$\varphi_u - \varphi_i = (1.042rad + \varphi) - \varphi = 1.042rad$