12 Exercices - Corrigés

Echantillonnage

1. Le signal $x(t) = 10cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1KHz$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de 8kHz. Quelles sont les valeurs numériques des échantillons?

En discret, le signal devient : $x[n] = 10cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_e} n\right) = 10cos\left(2\pi \frac{1}{8} n\right) = 10cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$

Les valeurs de échantillons sont alors pour $0 \leq n \leq 7$ puis se répètent:

$x[0] = 10;\ x[1] = 7.071;\ x[2] = 0;\ x[3] = -7.071;\ x[4] = -10;$

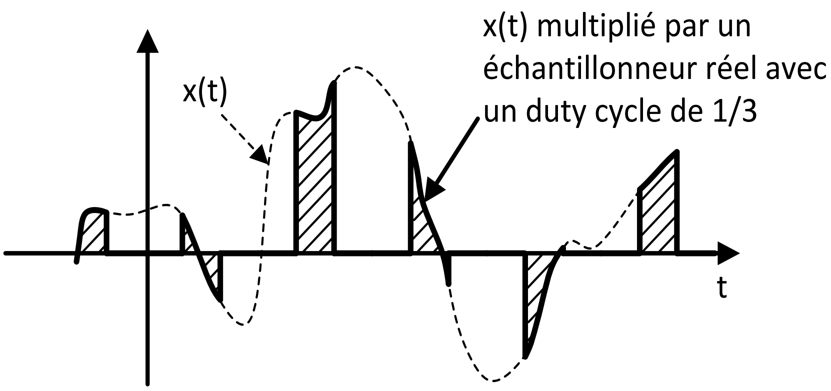
$x[5] = -7.071;\ x[6] = 0;\ x[7] = 7.071$ puis les valeurs se répètent.

2. Un échantillonnage réel est appliqué sur un signal quelconque avec un duty-cycle de 1/3. Quel est le rapport entre la tension RMS (valeur efficace) d'entrée et celle de sortie ?

Comme le duty-cycle est de 1/3 et que la puissance se calcule par la limite de l'intégrale suivante:

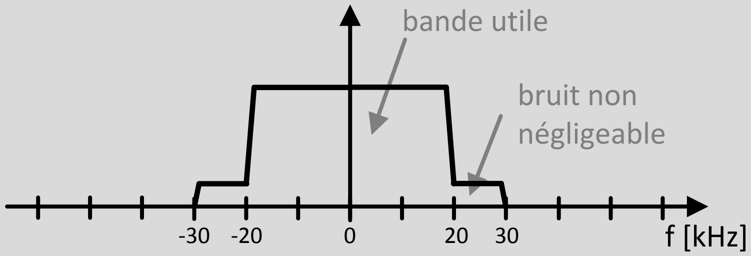
$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$$

Quel que soit le signal, l'intégrale, soit la surface de la courbe sous le signal échantillonné, va tendre vers 1/3 de la surface sous la courbe du signal de base.

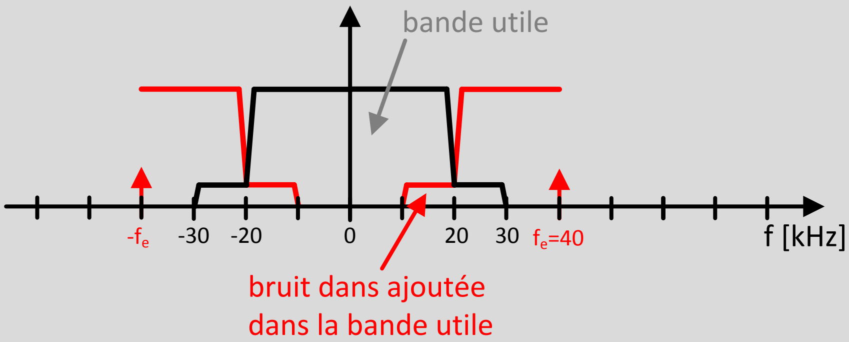


3. Le spectre utile d'un signal est de 0 à 20kHz. Il contient également du bruit non négligeable jusqu'à 30kHz. Quel est la fréquence d'échantillonnage minimum pour permettant de mesurer correctement les composantes fréquentielles du spectre utile?

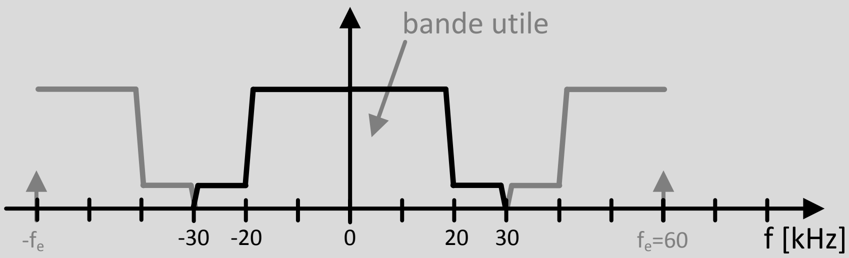
Spectre que nous devons échantillonner:



Si on considère que la fréquence maximum du spectre utile, soit 20kHz, et que l'on décide de prendre une fréquence d'échantillonnage $f_e > 40\mathrm{kHz}$, le bruit non négligeable jusqu'à 30kHz va se retrouver dans la bande de fréquences de 10kHz à 20kHz et perturber le signal utile.

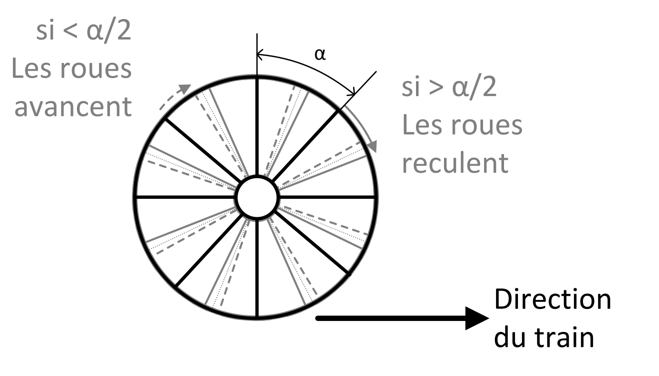


Il faut donc prendre en considération la plus grande fréquence non-négligeable pour déterminer la fréquence d'échantillonnage, donc $f_e > 60\mathrm{kHz}$



4. Une vidéo de 24 images par secondes montre un wagon qui avance. Les roues de ce wagon semblent tourner en arrière de 2 tours/min. Les roues ayant 25 rayons, quelles sont les vitesses de rotation réelles possible des roues du wagon?

L'effet de rotation inverse est dû à l'échantillonnage de 24 images par seconde. Si la roue parcourt un angle de 2π/25 durant 1/24s, soit entre deux images, la roue semblera immobile.

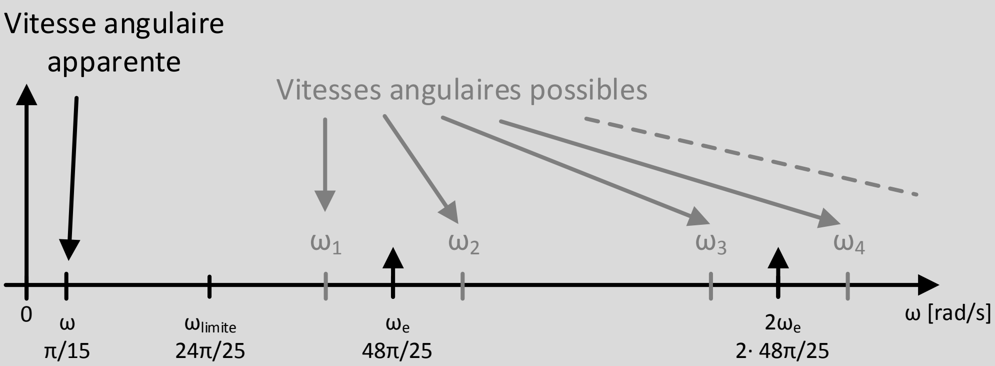


$$\omega_{limite} = \frac{\frac{2\pi}{25}rad}{\frac{1}{24}s} = \frac{2 \cdot 24 \cdot \pi}{25} rad/_{s}$$

Cette vitesse angulaire limite est donc de de 48π/25 [rad/s] et peut être associée comprise comme une "fréquence d'échantillonnage" (appelée ω_e dans les graphiques suivants).

La vitesse apparente étant de 2 tours/min, cela équivaut à une vitesse angulaire de :

$$\omega = \frac{2 \cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi}{15}\left[rad/_{s}\right]$$



Par interprétation du schéma en "fréquences", on peut en déduire que les vitesses angulaires possibles sont :

$\omega_{possible} = k\omega_e + \omega$, soit $\omega_{possible} = k\frac{48\pi}{25} + \frac{\pi}{15}\left[rad/_{s}\right]$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ et $\omega_{possible}$ positif.

5. Est-il possible d'échantillonner et reconstruire un signal rectangulaire périodique? Si oui, quelle est la fréquence d'échantillonnage minimum nécessaire en fonction de la période du signal? Justifiez votre réponse.

Avec un signal rectangulaire périodique d'une fréquence f, on pourrait croire que $f_e > 2f$ est suffisant, mais ce n'est pas le cas. Comme un signal rectangulaire est composé d'une infinité de composante fréquentielles (cf. TP1), il impossible d'échantillonner et reconstruire parfaitement un signal rectangulaire. Néanmoins, dans la pratique, une fréquence d'échantillonnage deux fois plus élevée que la première harmonique du signal de base est souvent suffisant lorsque le signal reconstruit est interprété de manière numérique.