$\phi = 5{,}7$

Nom: Zambon.........

Prénom: Yanick.........

Haute école d'ingénierie et d'architecture Fribourg
Hochschule für Technik und Architektur Freiburg

Maths spécifiques II — HEIA 2017–2018

—

Test 2

—

Interpolation & Régression, Arithmétique de l'ordinateur

—

mercredi 20 juin 2018

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	7	5	10	4	26
Obtenus	7	5	10	3,5	25,5

Note
5,9

Consignes et Indications

- Temps à disposition: 90 minutes.
- Matériel autorisé: formulaires et tables, calculatrice et 4 pages A4 recto-verso de résumé.
- Toutes les solutions et les développements sont à écrire sur les feuilles distribuées.
- **Soigner et détailler les résolutions. Des points peuvent être retirés en cas de résolutions mal présentées ou insuffisamment détaillées.**
- ...bon test!

Exercice 1 (7 pts)

7/7

Les exercices suivants peuvent être faits à l'aide de la calculatrice, mais toutes les étapes et les détails de calculs doivent figurer.

Soient les deux nombres $x_{10} = 646.71875$ et $y_{10} = 114.8125$.

a) Convertissez ces deux nombres dans le système binaire (c'est–à–dire en base 2).

b) Effectuez la soustraction $x_2 - y_2$ dans le système binaire par complémentation à deux $(10)_2$.

c) Effectuez la même soustraction par complémentation à un $(1)_2$.

a) 1) $646 = 512 + 128 + 4 + 2 \rightarrow 10'1000'0110_{(2)}$

$0,71875 \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{1},43750 \xrightarrow{-1,\ \cdot 2} \boxed{0},875 \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{1},75 \xrightarrow{-1,\ \cdot 2} \boxed{1},5 \xrightarrow{-1,\ \cdot 2} \boxed{1}$

$\rightarrow 0,10111_{(2)}$

$X_2 = 10'1000'0110,10111$ ✓

(1,5)

2) $114 = 64 + 32 + 16 + 2 \rightarrow 111'0010_{(2)}$

$0,8125 \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{1},625 \xrightarrow{-1,\ \cdot 2} \boxed{1},25 \xrightarrow{-1,\ \cdot 2} \boxed{0},5 \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{1}$

$\rightarrow 0,1101_{(2)}$

$Y_2 = 111'0010,1101$ ✓

(1,5)

b)
(1) 10'1000'0110,10111
− 00'0111'0010,11010 } complément à 2 ✓
(3) + 11'1000'1101,00110
~~1~~ 10'0001'0011,11101 ← (1)+(3) ✓

c)
10'1000'0110,10111
− 00'0111'0010,11010 } inversion
11'1000'1101,00101
11'1000'1101,00110 ← +1 tout à droite
~~1~~ 10'0001'0011,11101 ✓

(4)

5/5

Exercice 2 (5 pts)

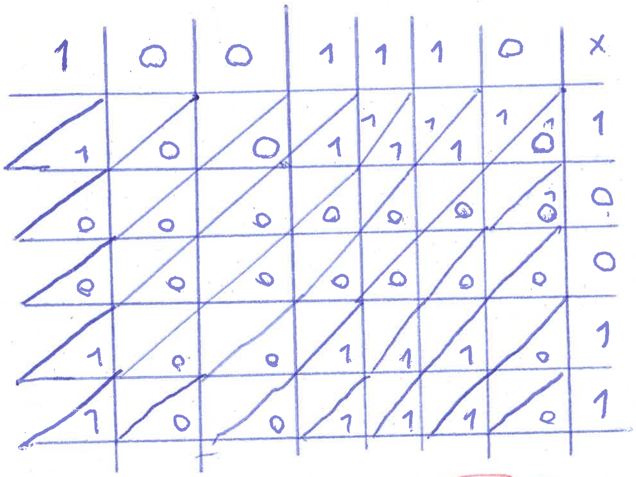
Les exercices suivants peuvent être faits à l'aide de la calculatrice, mais toutes les étapes et les détails de calculs doivent figurer.

Effectuez les opérations suivantes en binaire.

a) 1001110 × 10011

b) 11100011 ÷ 1110

a) En carré :



= 10111001010 ✓

(78 · 19 fait bien 1482)

1,5

b)

```
 11100011 | 1110
-11100000 |------
       11 | 10000
 11,0000  | 0,001
-  1,110  | 0,0001
  1,0100  |
 -0,1110  | 0,00001
  0,0110  | 0,000001
          | : etc
```

même chose décalée de 3.
il y a une période

Donc le résultat est : 10000,$\overline{0011}$

exact

3,5

Exercice 3 (10 pts)

10/10

Les exercices suivants peuvent être faits à l'aide de la calculatrice, mais toutes les étapes et les détails de calculs doivent figurer.

Le tableau suivant présente l'évolution du nombre de véhicules à moteurs immatriculés dans le canton de Fribourg.

Année	Nombre de véhicules
0 (1975)	**60'540**
27 (2002)	**165'421**
42 (2017)	**237'578**

Pour des raisons numériques, continuez l'exercice avec les nombres en gras dans le tableau.

a) Écrivez la matrice de Vandermonde correspondant au système linéaire à résoudre qui apparaît lors d'une interpolation polynomiale de ces données.

b) Interpolez ces données en utilisant l'interpolant polynomial. Donnez son expression algébrique.

c) Estimez le nombre de véhicules motorisés en 2006 et en 2020 via l'interpolant polynomial.

d) Écrivez le système d'équations à résoudre pour une interpolation spline (naturel).

e) Que vaut l'interpolant spline entre 2002 et 2017? Donnez son expression algébrique.

f) Estimez le nombre de véhicules motorisés en 2006 via l'interpolant spline.

g) Faites une régression linéaire sur ces données selon le critère des moindres carrés. Donnez l'expression algébrique de la droite de régression.

h) Estimez le nombre de véhicules motorisés en 2006 et en 2020 via la droite de régression.

a) 3 points ⇒ équations du deuxième degré.

$\rightarrow y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ et donc $\begin{cases} a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 60'540 \\ a_2 \cdot 27^2 + a_1 \cdot 27 + a_0 = 165'421 \\ a_2 \cdot 42^2 + a_1 \cdot 42 + a_0 = 237'578 \end{cases}$

En passant sous forme matricielle, on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 729 & 27 & 1 \\ 1764 & 42 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de Vandermonde}} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60'540 \\ 165'421 \\ 237'578 \end{pmatrix}$$

1,5

b) On résoud le système à 3 équations du point a). On a directement $a_0 = 60'540$.

Donc : $\begin{cases} 27^2 a_2 + 27 a_1 = 104'881 \\ 42^2 a_2 + 42 a_1 = 177'038 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 \cong 3289,2053 \\ a_2 \cong 22,05 \end{matrix}$

1,5

Donc on a le polynome $P(x) = 22{,}05\,x^2 + 3289{,}205\,x + 60'540$

c) $2006 \to 31 \quad \to P(31) \cong 183'695$

$2020 \to 45 \quad \to P(45) \cong 253'205$

1/2

d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (entre 1975 et 2002)

$g(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$ (entre 2002 et 2017)

On a

1) $f''(0) = 0$

2) $g''(42) = 0$

3) $f''(27) = g''(27)$

4) $f'(27) = g'(27)$

5) $f(0) = 60'540$

6) $f(27) = 165'421$

7) $g(27) = 165'421$

8) $g(42) = 237'578$

2p

$$\begin{cases} 1)\ 6a \cdot 0 + 2b = 0 \quad \Rightarrow b = 0 \\ 2)\ 6e \cdot 42 + 2f = 0 \\ 3)\ 6a \cdot 27 + 2b - 6e \cdot 27 - 2f = 0 \\ 4)\ 3a \cdot 27^2 + 2b \cdot 27 + c - 3e \cdot 27^2 - 2f \cdot 27 - g = 0 \\ 5)\ d = 60'540 \\ 6)\ a \cdot 27^3 + b \cdot 27^2 + c \cdot 27 + d = 165'421 \\ 7)\ e \cdot 27^3 + f \cdot 27^2 + g \cdot 27 + h = 165'421 \\ 8)\ e \cdot 42^3 + f \cdot 42^2 + g \cdot 42 + h = 237'578 \end{cases}$$

e) à la calculatrice, on trouve pour e, f, g et h,

$e \cong -0{,}735 \qquad g \cong 1086{,}7$

$f \cong 92{,}6 \qquad h \cong 83041{,}4$

1

donc $g(x) = -0{,}735\,x^3 + 92{,}6 \cdot x^2 + 1086{,}7 \cdot x + 83041{,}4$

f) $g(31) \cong 183'821$

1/2

g) On cherche $y = ax + b$

avec $$a = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{n}(\sum y_i)(\sum x_i)}{\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2} = \frac{14'444'643 - 10'661'397}{2493 - 1587}$$

$$\cong 4\,175{,}77$$

et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 154'513 - 4175{,}77 \cdot 23$ 2

$= 58'470$

La droite de régression a donc comme équation $y = 4'175{,}8x + 58'470$

h) 2006 $\rightarrow x = 31 \rightarrow y \cong 187'920$

2020 $\rightarrow x = 45 \rightarrow y \cong 246'381$ 1h

Exercice 4 (4 pts)

3,5/4

Déterminez **à la main** comment est stockée la valeur −206.84375 en simple précision selon le standard IEEE. Écrivez votre réponse dans les cases prévues à cet effet ci–dessous.

S | exposant | mantisse

1	1	0	0	0	~~1~~	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1) bit de signe : 1

2) $206 = 128 + 64 + 8 + 4 + 2 \Rightarrow 1100'1110_{(2)}$

$0,84375 \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{1},6875 \xrightarrow{-1,\cdot 2} \boxed{1},375 \xrightarrow{-1,\cdot 2} \boxed{0},75 \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{1},5 \xrightarrow{-1,\cdot 2} \boxed{1}$

$\hookrightarrow 0,11011_{(2)}$

1 erreur

$\rightarrow 206,84375 = 1100'1110,11011_{(2)}$

$= 1,\underbrace{100'1'110\ 1'1011}_{\text{mantisse}} \cdot 2^{7}$

3) Exposant réel $= 7 \rightarrow$ exposant + biais $= 7 + 127 = 134$

$134 = 128 + 4 + 2 \Rightarrow \underbrace{1000'0110}_{\text{exposant stocké}}{}_{(2)}$