07 Exercices - Corrigés

Impédance, admittance et puissance en régime sinusoïdal

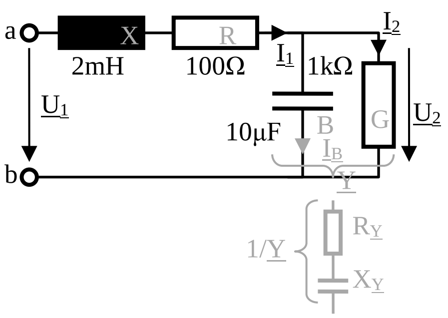
1. Déterminer Z, R et X en fonction de Y, G respectivement B. Puis l'inverse, Déterminer Y, G et B en fonction de Z, R respectivement X.

$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$ $\quad R = \Re\left\{\frac{1}{\underline{Y}}\right\} = \frac{G}{G^2+B^2} = \frac{G}{Y^2}$ $\quad X = \Im\left\{\frac{1}{\underline{Y}}\right\} = \frac{-B}{G^2+B^2} = -\frac{B}{Y^2}$

et

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ $\quad G = \Re\left\{\frac{1}{\underline{Z}}\right\} = \frac{R}{R^2+X^2} = \frac{R}{Z^2}$ $\quad B = \Im\left\{\frac{1}{\underline{Z}}\right\} = \frac{-X}{R^2+X^2} = -\frac{X}{Z^2}$

2. Soit le circuit ci-contre ; pour des fréquences de 50Hz et 1kHz



a) exprimer l'impédance entre les bornes a et b.

$X = 2mH \cdot 2\pi \cdot f$ $\quad R = 100\Omega$

$G = 1mS$ $\quad B = 10\mu F \cdot 2\pi \cdot f$

donc : $\underline{Y} = G + jB$ soit $R_Y = \frac{G}{G^2+B^2}$ et $X_Y = \frac{-B}{G^2+B^2}$

d'où $R_{ab} = R + R_y$ et $X_{ab} = X + X_y$

$\underline{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = 192\Omega - j288\Omega = 346.5 \cdot e^{-j0.98}$ pour 50Hz

$\underline{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = 100.3\Omega - j3.34\Omega = 100.3 \cdot e^{-j0.033}$ pour 1kHz

b) les rapports $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ et $\underline{I}_2/\underline{I}_1$.

$\underline{U}_2/\underline{U}_1$:

$|\underline{Z}_{ab}| = \sqrt{{R_{ab}}^2 + {X_{ab}}^2}$ $\quad \varphi_{ab} = \mathrm{arctg}\left(\frac{X_{ab}}{R_{ab}}\right)$

$|\underline{Z}_y| = \sqrt{{R_Y}^2 + {X_Y}^2}$ $\quad \varphi_Y = \mathrm{arctg}\left(\frac{X_Y}{R_Y}\right)$

donc $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_y}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\left(\sqrt{{R_{ab}}^2+{X_{ab}}^2}\right)e^{j\mathrm{arctg}\left(\frac{X_{ab}}{R_{ab}}\right)}}{\left(\sqrt{{R_Y}^2+{X_Y}^2}\right)e^{j\mathrm{arctg}\left(\frac{X_Y}{R_Y}\right)}} = \frac{\sqrt{{R_{ab}}^2+{X_{ab}}^2}}{\sqrt{{R_Y}^2+{X_Y}^2}} e^{j\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{X_Y}{R_Y}\right)-\mathrm{arctg}\left(\frac{X_{ab}}{R_{ab}}\right)\right]}$

$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 0.87 \cdot e^{-j0.28} = 0.84 - j0.024$ pour 50Hz

$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 0.158 \cdot e^{-j1.52} = 0.008 - j0.158$ pour 1kHz

$\underline{I}_2/\underline{I}_1$:

$\varphi_Y = \mathrm{arctg}\left(\frac{-B}{G}\right)$

donc $\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cdot G}{\underline{U}_2 \cdot \underline{Y}} = \frac{G}{Y} e^{j\varphi_Y} = \frac{G}{Y} e^{j\mathrm{arctg}\left(\frac{-B}{G}\right)}$

$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = 0.30 \cdot e^{-j1.26} = 0.092 - \mathrm{j}0.29$ pour 50Hz

$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = 0.016 \cdot e^{-j1.55} = 0.0002 - \mathrm{j}0.016$ pour 1kHz

c) les courants $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ et le courant dans la capacité si $\underline{U}_1$= 10V, ainsi que leur valeur instantanée en t=1/3f, où f est la fréquence et leur déphasage par rapport à U_1.

$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{10V}{Z_{ab}} e^{-j\varphi_{ab}}$

$\underline{I}_1 = 28.8mA \cdot e^{j0.98} = 16\mathrm{mA} + \mathrm{j}24\mathrm{mA}$ pour 50Hz

$\underline{I}_1 = 100mA \cdot e^{j0.033} = 99.7\mathrm{mA} + \mathrm{j}3.3\mathrm{mA}$ pour 1kHz

$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R}$ (ou $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{G}{\underline{Y}}$)

$\underline{I}_2 = 8.75\mathrm{mA} \cdot e^{-\mathrm{j}0.28} = 8.41\mathrm{mA} - \mathrm{j}2.41\mathrm{mA}$ pour 50Hz

$\underline{I}_2 = 1.59\mathrm{mA} \cdot e^{-\mathrm{j}1.52} = 78.1\mu\mathrm{A} - \mathrm{j} \cdot 1.58\mathrm{mA}$ pour 1kHz

$\underline{I}_B = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2$

$\underline{I}_B = 7.58\mathrm{mA} + \mathrm{j}26.4\mathrm{mA} = 27.5\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}1.29}$ pour 50Hz

$\underline{I}_B = 99.6\mathrm{mA} + \mathrm{j}4.91\mathrm{mA} = 99.7\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.49}$ pour 1kHz

$\underline{i}_1(\mathrm{t} = 1/3\mathrm{f}) = 28.8\mathrm{mA} \cdot \cos(0.98 + 2\pi/3) = -28.8\mathrm{mA}$ pour 50Hz

$\underline{i}_1(\mathrm{t} = 1/3\mathrm{f}) = 100\mathrm{mA} \cdot \cos(0.033 + 2\pi/3) = -52.7\mathrm{mA}$ pour 1kHz

$\underline{i}_2(\mathrm{t} = 1/3\mathrm{f}) = 8.75\mathrm{mA} \cdot \cos(-0.28 + 2\pi/3) = -2.11\mathrm{mA}$ pour 50Hz

$\underline{i}_2(\mathrm{t} = 1/3\mathrm{f}) = 1.59\mathrm{mA} \cdot \cos(-1.52 + 2\pi/3) = 1.33\mathrm{mA}$ pour 1kHz

$\underline{i}_B(\mathrm{t} = 1/3\mathrm{f}) = 27.5\mathrm{mA} \cdot \cos(1.29 + 2\pi/3) = -26.7\mathrm{mA}$ pour 50Hz

$\underline{i}_B(\mathrm{t} = 1/3\mathrm{f}) = 99.7\mathrm{mA} \cdot \cos(0.49 + 2\pi/3) = -54.0\mathrm{mA}$ pour 1kHz

$\underline{I}_1$ est en avance de 0.98rad @50Hz et de 0.033rad @1kHz

$\underline{I}_2$ est en retard de 0.28rad @50Hz et de 1.52rad @1kHz

$\underline{I}_B$ est en avance de 1.29rad @50Hz et de 0.49rad @1kHz

d) Le modèle R-C ou R-L série et parallèle pour ces deux fréquences.

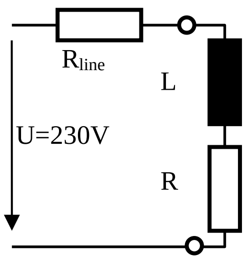
$R = R_{ab} = 192\Omega$	pour 50Hz	et	$R = R_{ab} = 100.3\Omega$	pour 1kHz
$C_{ab} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{f}\cdot\mathrm{Xab}} = 11.0\mu\mathrm{F}$	pour 50Hz	et	$C_{ab} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{f}\cdot\mathrm{Xab}} = 47.6\mu\mathrm{F}$	pour 1kHz

e) la fréquence f_0 pour laquelle la réactance de l'inductance égale celle de la capacité en valeur absolue, et la valeur de celle-ci.

$2\text{mH} \cdot 2\pi \cdot \text{f0} = \frac{1}{10\mu\text{F}\cdot 2\pi \cdot \text{f0}}$ donc $\text{f0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\text{mH}\cdot 10\mu\text{F}}} = 1.13\text{kHz}$

soit $X_L = 2\text{mH} \cdot 2\pi \cdot f_o = 14.1\Omega$ et $X_C = \frac{1}{X_L} = 70.92\text{mS}$

3. Soit la charge R-L branchée sur le réseau 230V (efficace), 50Hz de résistance $R_{line} = 0.5\Omega$



a) Si la charge R-L ayant un cosφ=0.1 dissipe 1kW, déterminer le courant et la puissance active dissipée sur R_{line}.

$\underline{S}_{charge} = P_{charge} + jQ_{charge} = P_{charge} + j\frac{P_{charge}}{\cos(\varphi)}sin(\varphi) = P_{charge} + jP_{charge}tan\big(arccos(0.1)\big)$

donc : $\underline{S}_{charge} = 1kW + j1kWtan\big(arccos(0.1)\big) = 1kW + 9.95kVAR = 10kVA \cdot \exp(j1.47)$

$I = \frac{S}{U} = \frac{10kVA}{230V} = 43.5A$ donc $P_{line} = R_{line} \cdot I^2 = 945W!!$

b) Déterminer la capacité C du condensateur à mettre en parallèle avec la chage R-L pour ramener son cosφ à 1.

Pour un cosφ de 1, $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$ doit être réel.

Avec un cosφ de 0.1:

$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1kW}{43.5^2} = 0.528\Omega$ et $X = \frac{R}{\cos(\varphi)}\sin(\varphi) = R \cdot tan\big(arccos(0.1)\big) = 5.258\Omega$

Comme avec un condensateur ajouté en parallèle, $\underline{Y} = \frac{1}{R+jX} + jB = \frac{R-jX}{R^2+X^2} + jB = \frac{R}{R^2+X^2} + j\left(B - \frac{X}{R^2+X^2}\right)$

et que $\underline{Y}$ doit être réel, B doit être égal à $\frac{X}{R^2+X^2}$, donc:

$B = \frac{5.258\Omega}{(0.528\Omega)^2+(5.258\Omega)^2} = 0.188\text{mS}$ soit un $C = \frac{0.188mS}{2\pi 50Hz} = 598\mu F$

c) Déterminer la puissance active sur la charge R-L compensée par le condensateur C, ainsi que la puissance sur R_{line}.

Comme la charge compensée est purement réelle et vaut $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R^2+X^2}{R} = \frac{(0.528\Omega)^2+(5.258\Omega)^2}{0.528\Omega} = 52.9\Omega$, le courant total est de $\underline{I} = I = \frac{230V}{52.9\Omega+0.5\Omega} = 4.307A$ divisé en $\underline{I_C} = \underline{I}\,\frac{jB}{\underline{Y}}$ et $\underline{I_{R-L}} = \underline{I} - \underline{I_C} = \underline{I}\left(1 - \frac{jB}{\underline{Y}}\right) = \underline{I}\left(1 - jB\,\frac{R^2+X^2}{R}\right) = 4.307A\left(1 - j0.188\text{mS}\left(0.528\Omega + \frac{5.258\Omega^2}{0.528\Omega}\right)\right) = 4.307A + j42.9A = 43.1\text{A} \cdot \exp(j1.47)$.

La puissance active sur la charge R-L est donc de $P = \mathrm{R} \cdot \underline{I}^2 = 0.528\Omega \cdot (43.1\mathrm{A})^2 = 981W$ et celle dissipée dans la ligne $P_{line} = R_{line} \cdot \underline{I}^2 = 0.528\Omega \cdot (4.307A)^2 = 9.79W$

d) En comparant les puissances actives sur la charge et sur R_{line}, avant et après compensation que déduire ?

Avant: $P_{charge} = 1000W$ et $P_{line} = 945W$

Après: $P_{charge} = 981W$ et $P_{line} = 9.79W$

Pour une perte de puissance active de 1.9% sur la charge, la ligne dissipe près de 99% de moins! Ceci est dû au fait que la puissance apparente a diminué et ne charge donc plus autant la ligne.