# Signaux et systèmes électroniques

## HEIA-FR, filière télécommunication

Daniel Oberson

## Analyse fréquentielle

Script : J. Crausaz, O. Johnsen, D. Oberson

## Table des matières

# 1. Introduction aux signaux et systèmes

## 1.1 Définitions

### Signal

Un signal est une fonction de une ou plusieurs variables représentant l'information sur un support physique

### Système

Un système est une entité appliquant une fonction sur un ou plusieurs signaux (entrée) pour produire d'autres signaux (sortie)

### Traitement du signal

*Analogique* : les signaux et les systèmes sont des fonctions continues dans le temps.

Exemple : son continu

*Numérique :* les signaux et les systèmes ne sont définis qu'à certains instants (en principe avec un intervalle de temps constant appelé période d'échantillonnage) et avec une résolution d'amplitude finie (numérisation).

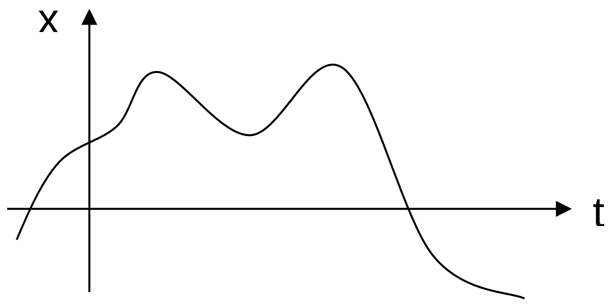
Avantages : flexibilité, répétitivité, précision, stabilité

Exemple : son numérique, image numérique, vidéo numérique

## 1.1.1 Signaux continus et discrets

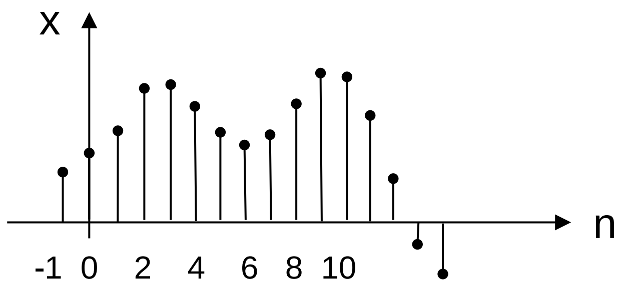
**Signal continu**

$x(t)$




**Signal discret** (échantillonné)

$x[n]$




*x[n]* est une suite de valeurs définies pour toute valeur de n, n est un entier

Signal quantifié : L'amplitude du signal est discrétisée

Signal numérique : Signal discret où l'amplitude est aussi discrétisée

# 1.2 Signaux élémentaires

## 1.2.1 Signal exponentiel

**Cas continu :**

$$x(t) = B \cdot e^{\alpha t} = B \cdot exp(\alpha t) = B \cdot exp\left(-\frac{t}{T}\right) = B \cdot exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec

$T = \tau = -\frac{1}{\alpha}$ est la constante de temps

si $\alpha < 0$ ou $T > 0$ l'exponentielle converge (pour les temps positifs)

**Cas discret :**

$$x[n] = B \cdot r^n = B \cdot exp(\alpha n)$$

avec

$r = exp(\alpha)$ est un nombre réel

si $r < 1$ ou $\alpha < 0$ l'exponentielle converge (pour les n positifs)

## 1.2.2 Signal sinusoïdal

**Cas continu :**

$$x(t) = A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right) = A \cdot sin(\omega_0 t + \varphi_1) = A \cdot sin(2\pi f_0 t + \varphi_1)$$

$$x(t) = A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2\right) = A \cdot sin(\omega_0 t + \varphi_2) = A \cdot sin(2\pi f_0 t + \varphi_2)$$

avec :

| | |
|---|---|
| $A$ | amplitude |
| $\omega_0$ , $\frac{2\pi}{T}$ , $2\pi f_0$ | pulsation, $T$ période, $f_0$ fréquence |
| $\varphi_1$ et $\varphi_2$ | phase initiale (argument lorsque $t = 0$) |
| $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$ | |

**Remarque** : On peut indifféremment utiliser pour les signaux sinusoïdaux la pulsation, la période ou la fréquence.

**Cas discret**

$$x[n] = A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_1\right) = A \cdot sin(\Omega n + \varphi_1) = A \cdot sin(2\pi f_0 n + \varphi_1)$$

$$x[n] = A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_1\right) = A \cdot cos(\Omega n + \varphi_1) = A \cdot cos(2\pi f_0 n + \varphi_1)$$

avec

| | |
|---|---|
| $A$ | amplitude |
| $\Omega$ | fréquence angulaire/pulsation |
| $f_0$ | fréquence normalisée |
| $N$ | période (cf. remarque ci-dessous) |
| $\varphi_1$ et $\varphi_2$ | phase initiale (argument lorsque $n = 0$) |
| $\varphi_2 = \varphi_1 - {}^{\pi}/_{2}$ | |

**Remarque** : Ces fonctions ne sont périodiques que si N est un entier (ou si un multiple de N est un entier).

Exemple, si N=10, la période est de 10 échantillons
Exemple, si N=10.5, la période est de 21 échantillons

### 1.2.3 Relations entre fonctions trigonométriques et exponentielles complexes (Formules d'Euler)

$$\mathrm{e}^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \qquad\qquad \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

on en tire :

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi_1) = \mathrm{Im}\left\{A \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \phi_1)}\right\}$$

et

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi_2) = \mathrm{Re}\left\{A \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \phi_2)}\right\}$$

ou en considérant deux phaseurs:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi_1) = \frac{A}{2j}\mathrm{e}^{j\phi_1} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} - \frac{A}{2j} \cdot \mathrm{e}^{-j\phi_1} \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi_2) = \frac{A}{2} \cdot \mathrm{e}^{j\phi_2} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} + \frac{A}{2} \cdot \mathrm{e}^{-j\phi_2} \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}$$

Ces relations seront reprises plus tard.

### 1.2.4 Exponentielle complexe

### Signal continu :

$x(t) = A \cdot e^{st}$ avec $s = \sigma + j\omega$ :

$x(t) = A \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$

*Signal réel* $x(t) = \mathrm{Re}\left\{ A \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \right\} = A \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t)$

$\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$ terme d'amortissement

si $\sigma < 0$ sinusoïde amortie (décroissance exponentielle)

si $\sigma$=0 sinusoïde constante (oscillation non amortie)

si $\sigma$>0 sinusoïde avec croissance exponentielle

$\mathrm{Im}\{s\} = \omega$ pulsation de l'oscillation

si $\omega = 0$ le signal est exponentiel de la forme :

$x(t) = A \cdot e^{\sigma t} = A \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

avec $T = -\dfrac{1}{\sigma}$ constante de temps

## Signal discret :

$x[n] = A \cdot \underline{r}^n$ avec $\underline{r} = |r| \cdot e^{j\Omega}$

$x[n] = A \cdot |r|^n \cdot e^{j\Omega n}$

*Signal réel* $x[n] = \mathrm{Re}\left\{A \cdot |r|^n \cdot e^{j\Omega n}\right\} = A \cdot |r|^n \cdot \cos(\Omega n)$

$|r|$ amortissement

si $|r| < 1$ sinusoïde amortie (décroissance exponentielle)

si $|r| = 1$ sinusoïde constante (oscillation non amortie)

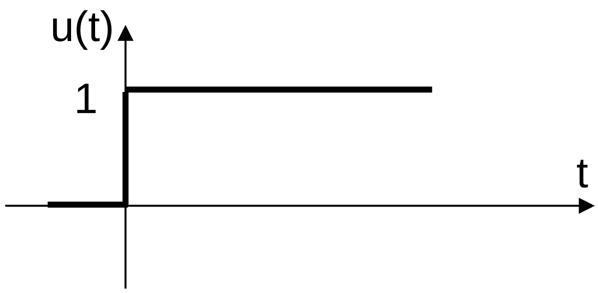
si $|r| > 1$ sinusoïde avec croissance exponentielle

$Arg\{r\} = \Omega$ fréquence de l'oscillation

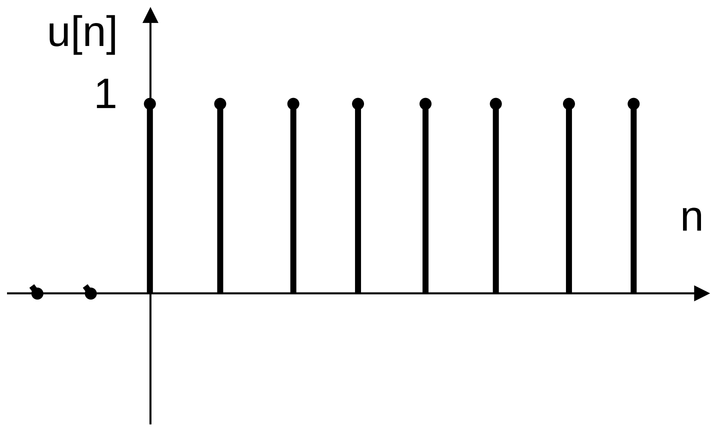
si $\Omega = 0$ le signal est exponentiel de la forme $x[n] = A \cdot r$

## 1.2.5 Saut unité (ou indiciel)

$$u(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$




$$u[n] = \varepsilon[n] = \begin{cases} 0 \text{ pour } n < 0 \\ 1 \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$



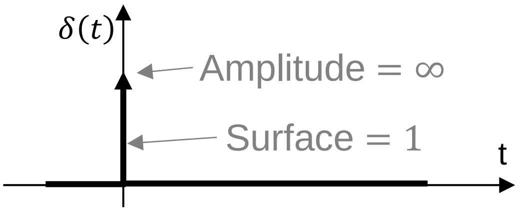

## 1.2.6 Impulsion de Dirac

Soit $u_\Delta(t)$ le saut unité approximatif (transition de durée $\Delta$)

avec $u_\Delta(t)$ on définit $\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u_\Delta(t)$

à la limite on obtient : $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u(\text{t})$

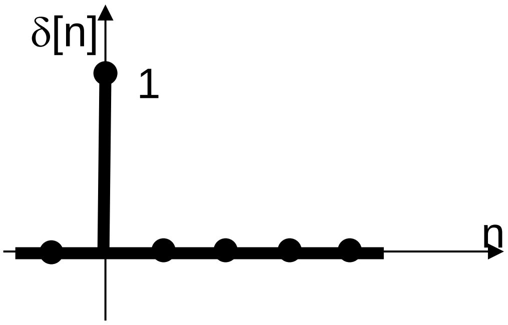
resp. $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot d\tau$




L'impulsion de Dirac δ(t) a, pour t = 0, une amplitude infinie, une durée nulle et une surface unité.

### 1.2.7 Impulsion unité

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 \text{ pour } |n| \neq 0 \\ 1 \text{ pour } n = 0 \end{cases}$$




$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

Mathématiquement, l’impulsion unité est différente de l’impulsion de Dirac. Néanmoins, au niveau système, c’est l’équivalent pour les systèmes numériques de l’impulsion de Dirac dans le cas continu.

### 1.2.8 Fonction rectangulaire

**Cas continu**

La fonction rectangulaire est notée rect(*t'*), où la variable *t'* est adimensionnelle. Cette fonction est définie ci-dessous:

$$\mathrm{rect}(t') = 1 \quad \text{pour} \quad |t'| < 1/2$$

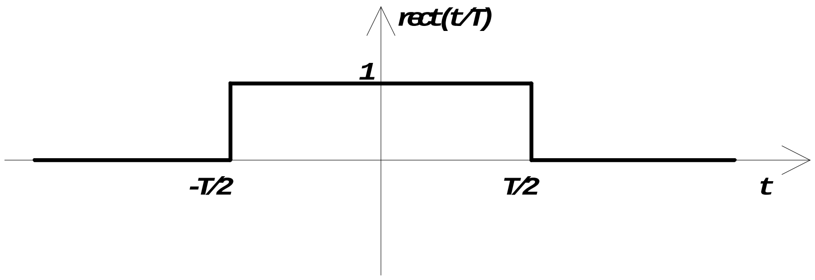
$$\mathrm{rect}(t') = 0 \quad \text{pour} \quad |t'| > 1/2$$

Il est peut-être plus clair de définir la fonction rect par:

$$\mathrm{rect}\left(t/T\right) = 1 \quad \text{pour} \quad |t| < T/2$$

$$\mathrm{rect}\left(t/T\right) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| > T/2$$

Cette fonction est représentée ci-dessous:




On vérifie aisément que:

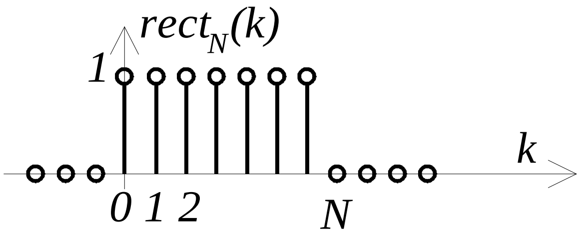
$$\mathrm{rect}\left(t/T\right) = u\left(t + T/2\right) - u\left(t - T/2\right)$$

La fonction rectangulaire apparaît souvent en traitement des signaux. A part la possibilité de représenter des signaux rectangulaires, la fonction rectangulaire sert à extraire une partie d'un signal, par exemple pour le calcul d'une valeur moyenne, d'une valeur efficace, ou d'une transformation de Fourier.

**Cas discret**

Le rectangle numérique a une définition légèrement différente :

$$\mathrm{rect}_N(n) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \le n \le N-1$$
$$\mathrm{rect}_N(n) = 0 \quad \text{ailleurs}$$




On remarque qu'il n'est pas centré sur l'origine.

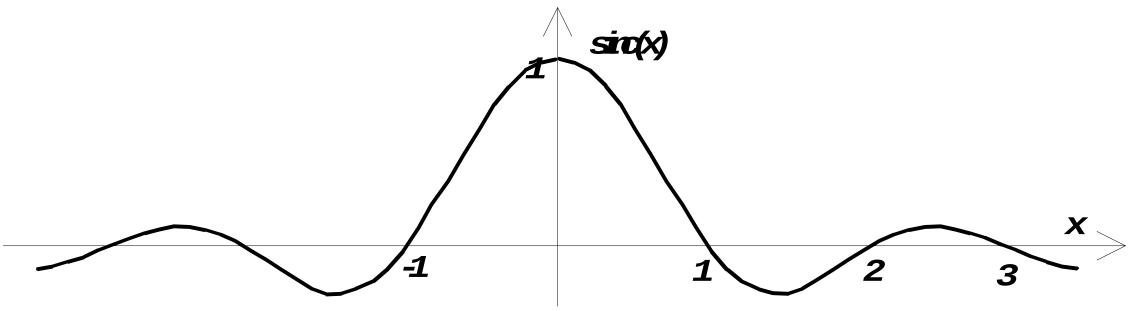
Attention, la dernière impulsion est en N-1 !

## 1.2.9 Fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal, est notée sinc($\alpha$). Elle est définie par:

$$\mathrm{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

Elle s'annule pour toutes les valeurs entières de $\alpha$, sauf 0. Elle est représentée graphiquement ci-dessous.




Cette fonction est particulièrement utile pour des calculs de transformées directes et inverses de Fourier.

# 1.3 Classification des signaux

**Signal périodique**

Un signal continu est périodique s'il existe une valeur T telle que :

$$x(t) = x(t + T)$$

La plus petite valeur de T est appelée période fondamentale T0, son inverse f0 = 1/T0 est la fréquence fondamentale et $\omega$0 = 2$\pi$f0 est la pulsation ou la fréquence angulaire fondamentale.

Un signal discret est périodique s'il existe une valeur entière N telle que :

$$x[n] = x[n + N]$$

avec N un nombre entier

La plus petite valeur de N est appelée période fondamentale N0, son inverse $f_0 = 1/N_0$ fréquence fondamentale, et $\Omega$0 = 2$\pi$/N0 pulsation fondamentale.

dans le cas contraire, le signal est non périodique ou apériodique

**Signal déterministe**

Son évolution en fonction du temps ou de la variable n est connue et mathématiquement exprimable

**Signal aléatoire**

Son évolution en fonction du temps ou de la variable n est imprévisible

### 1.3.1 Puissance et énergie

**Signal continu**

Par analogie aux signaux électriques, la puissance d'un signal est le carré de son amplitude:

$$p(t) = x^2(t)$$

Cette puissance est habituellement en $V^2$

L'énergie (totale) d'un signal est l'intégrale de sa puissance :

$$W = E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

Cette énergie est habituellement en $V^2 s$.

On en tire une puissance moyenne :

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$$

C'est la valeur efficace au carré !

Signal énergie ou **signal à énergie finie** : $0 < E < \infty$

Signal puissance ou **signal à puissance finie** : $0 < P < \infty$

**Signal discret**

Par analogie au cas continu, on a pour les signaux discrets :

$$p[n] = x^2[n]$$

$$W = E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{+N-1} x^2[n]$$

## 1.4 Opérations sur la variable indépendante (t resp. n)

### Décalage dans le temps

$y(t) = x(t \pm t_0) \quad respectivement \quad y[n] = x[n \pm n_0]$

est avancé (signe +) ou retardé (signe -) de $t_0$ resp. $n_0$ par rapport à :

$x(t)$ respectivement $x[n]$

Attention à la valeur numérique de $t_0$ resp. $n_0$

### Dilatation resp. contraction du temps

Dans le cas continu :

$y(t) = x(a \cdot t)$

est dilaté (a < 1) ou contracté (a > 1) du facteur a par rapport à $x(t)$.

Dans le cas discret :

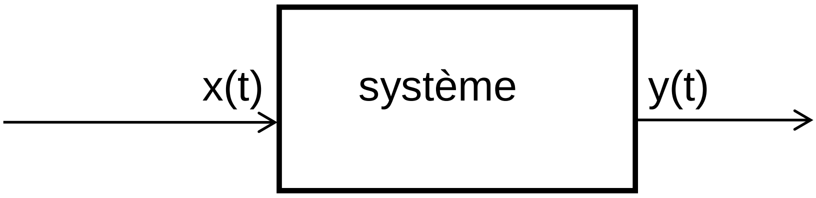
$y[n] = x[k \cdot n]$

k est obligatoirement un nombre entier. On a une contraction d'un facteur k. Attention à la perte d'information !

# 1.5 Systèmes

## 1.5.1 Système continu et discret

Un système peut être défini comme un processus appliquant une transformation sur un signal.




$$y(t) = H\{x(t)\}$$

y(t) est la réponse du système

$H\{x(t)\}$ est appelée la fonction du système**.**

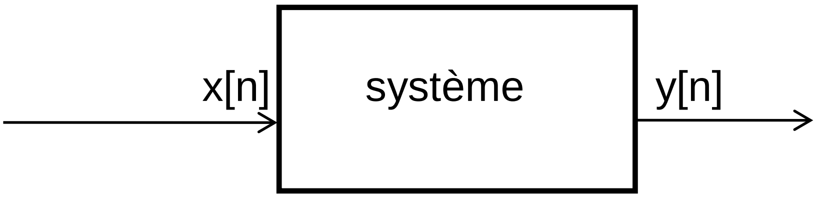
Un système continu est un système dont la réponse y(t) à un signal continu x(t) est continue.

Exemple de système continu :

$$y(t) = A\frac{dx(t)}{dt}$$

par exemple inductance : $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Dans le cas discret on a :




$$y[n] = H\{x[n]\}$$

Exemple : moyenne glissante de longueur 3 :

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

### 1.5.2 Système linéaire

Un système est linéaire si :

$$H\left\{\sum_i a_i x_i(t)\right\} = \sum_i a_i H\{x_i(t)\} = \sum_i a_i y_i(t)$$

C’est l'application du principe de superposition. Dans le cas discret, c’est similaire.

Exemple de système linéaire : y[n]=nx[n]

Exemple de système non linéaire : y(t)=x(t)x(t-1)

## 1.5.3 Système invariant dans le temps

Un système est invariant dans le temps si :

$$H\left\{x(t-t_0)\right\} = y(t-t_0)$$

La forme de la réponse du système est indépendante d'un décalage dans le temps du signal d'entrée.

Exemple de systèmes non invariant :

$$y(t) = \frac{x(t)}{R(t)} \quad \text{et} \quad y[n] = r^n x[n]$$

Dans l'analyse de systèmes on va principalement considérer les systèmes LTI (Linear Time Invariant) causaux (voir plus loin).

## 1.5.4 Système sans mémoire

Le signal de sortie ne dépend que de la valeur présente du signal d'entrée

$$y(t) = k \cdot x(t)$$

Exemple : u(t)=Ri(t)

### 1.5.5 Système avec mémoire

Le signal de sortie dépend du signal d'entrée et des variables internes (variables d'état du système) constituées par les accumulateurs d'énergie (capacités, inductances, etc.) pour les systèmes analogiques et les mémoires pour les systèmes numériques

Autre interprétation : la sortie dépend des valeurs passées du signal d'entrée

$$y(t) = F\{x(t), v_{e1}(t),..,v_{ei}(t),..,v_{en}(t)\}$$

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2) + ...$$

avec $v_{ei}(t)$, les n variables d'état du système (les n mémoires du système)

Exemples : moyenne glissante en numérique et $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ en analogique.

### 1.5.6 Système causal

Un système est dit "causal" si la valeur au temps t du signal de sortie $y(t)$ ne dépend que la valeur actuelle et des valeurs passées du signal d'entrée $x(t)$

$$y(t) = f\{x(\tau) \text{ pour } -\infty < \tau < t\}$$

dans le cas contraire (le système dépend aussi de valeurs futures du signal d'entrée) un système est dit "non causal"

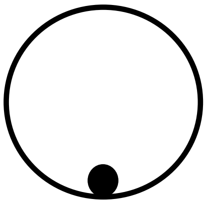
Seuls les systèmes causaux sont physiquement réalisables en temps réel. Lorsque des latences sont permises, certains filtres non-causaux peuvent être mis en œuvre, typiquement pour le traitement d'image.

Exemples : moyennes glissantes causales et non causales.

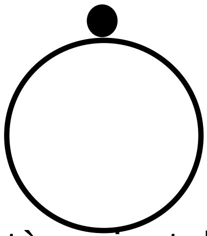
### 1.5.7 Système stable resp. instable

Un système stable est un système qui revient à son point d'équilibre (qui ne diverge pas) après une petite perturbation

dans le cas contraire un système est dit instable



système stable



système instable

On dit qu’un système est stable BIBO (bounded-input, bounded output), si pour tout signal borné, la sortie est bornée.

Exemple de système stable : moyenne glissante

Exemple de système instable : $y[n] = r^n x[n]$ attention le comportement dépend de la valeur de r !

# 1.6 Introduction à l'analyse fréquentielle

L’analyse fréquentielle de systèmes consiste à déterminer le fonctionnement du système en fonction de la fréquence. Ainsi, on analyse le système en l’excitant avec un signal sinusoïdal et en déterminant la réponse. Comme vu précédemment, la réponse sera sinusoïdale. L’amplitude et la phase de la réponse sinusoïdale dépendra de la fréquence de la sinusoïde. Il est avantageux, pour simplifier, de considérer tous les outils vus en régime sinusoïdal permanent et d’utiliser les concepts de phaseurs, valeurs instantanées complexes, impédances, etc.

### 1.6.1 Réponse fréquentielle

Le rapport entre les phaseurs ou les valeurs instantanées complexes entre l'entrée et la sortie d'un système peut se mettre sous forme de quotient de polynômes en $j\omega$ (c'est en réalité un complexeur). Il aura la forme :

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot j\omega + b_2 \cdot (j\omega)^2 + b_3 \cdot (j\omega)^3 + \cdots}{a_0 + a_1 \cdot j\omega + a_2 \cdot (j\omega)^2 + a_3 \cdot (j\omega)^3 + \cdots}$$

Cette réponse appelée réponse fréquentielle peut être généralisée et est alors appelée **fonction de transfert**.

Décomposons en cellules du 2$^e$ ordre :

$$H(j\omega) = \frac{\left(b_{10} + b_{11} \cdot j\omega + b_{12} \cdot (j\omega)^2\right) \cdot \left(b_{20} + b_{21} \cdot j\omega + b_{22} \cdot (j\omega)^2\right) \cdot \ldots}{\left(a_{10} + a_{11} \cdot j\omega + a_{12} \cdot (j\omega)^2\right) \cdot \left(a_{20} + a_{21} \cdot j\omega + a_{22} \cdot (j\omega)^2\right) \cdot \ldots}$$

Chaque cellule du 2$^e$ ordre peut être mise sous la forme :

$$G_i(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{Q_i\omega_i} + \left(\frac{j\omega}{\omega_i}\right)^2$$

On a introduit 2 constantes utiles pour l'analyse du comportement fréquentiel : $\omega_c$ **appelée pulsation de résonnance** ou **pulsation de coupure** selon les cas et $Q$ appelée **facteur de qualité**.

Dans certains cas, on a aussi des termes du 1$^e$ ordre :

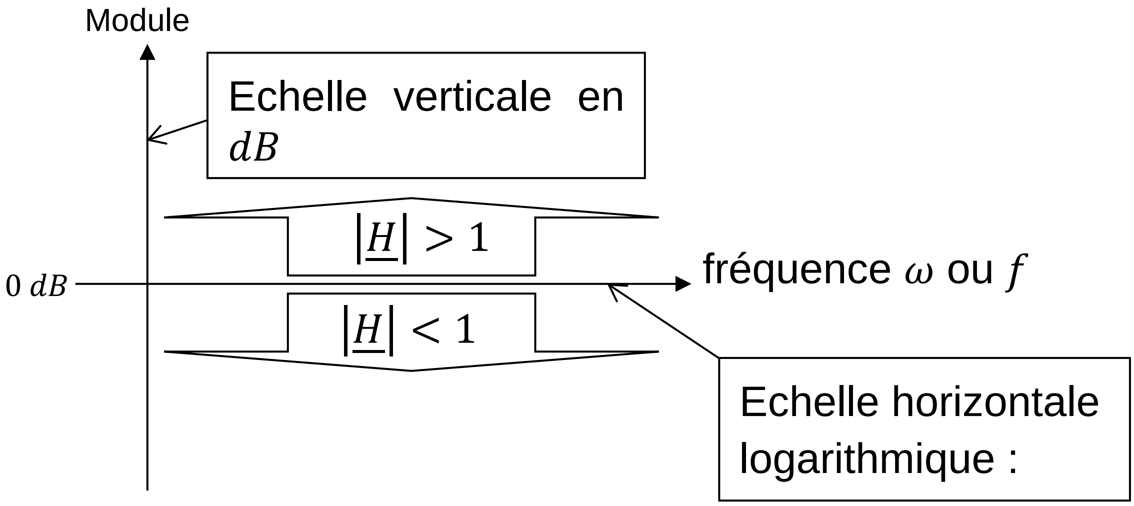
$$G_i(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_i}$$

L'effet de plusieurs cellules peut être obtenu en combinant les effets individuels de chaque cellule.

## 1.6.2 Diagramme de Bode, filtres

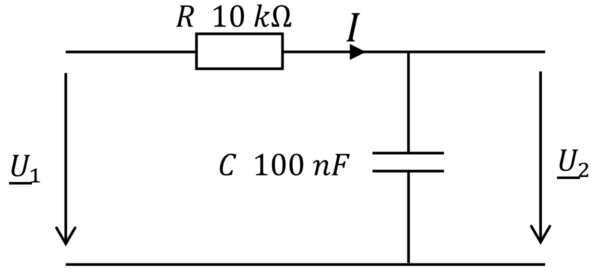
Le diagramme de Bode est un outil de représentation de la fonction de transfert. Il est composé de deux graphique:

- Le module:




- Les échelles sont logarithmiques pour f et pour l'amplitude.
- Les fonctions $\omega^n$ et les asymptotes pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ sont des droites.
- Lors de plusieurs systèmes mis en cascade, les modules se multiplient, mais comme la représentation est logarithmique, le graphique du système complet est la somme des graphiques des systèmes qui le composent.

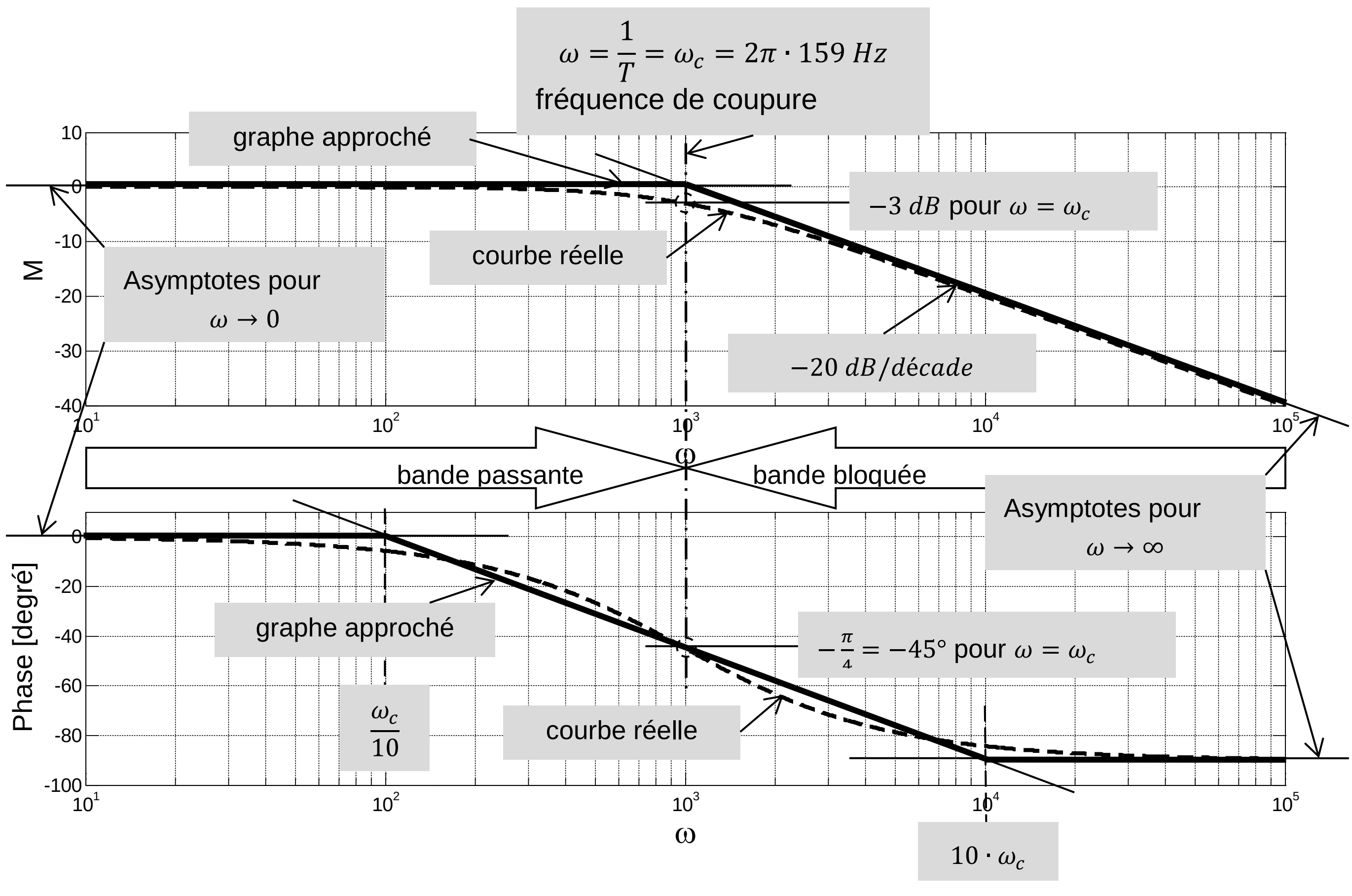
# Exemple - circuit RC du 1er ordre



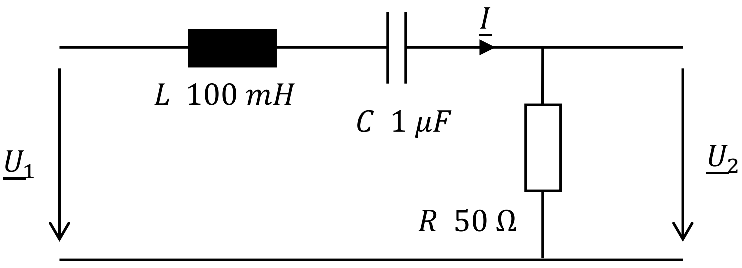

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\,\omega/\omega_c} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$avec \quad T = RC$$

## Diagramme de bode:



# Exemple - circuit RLC du 2e ordre

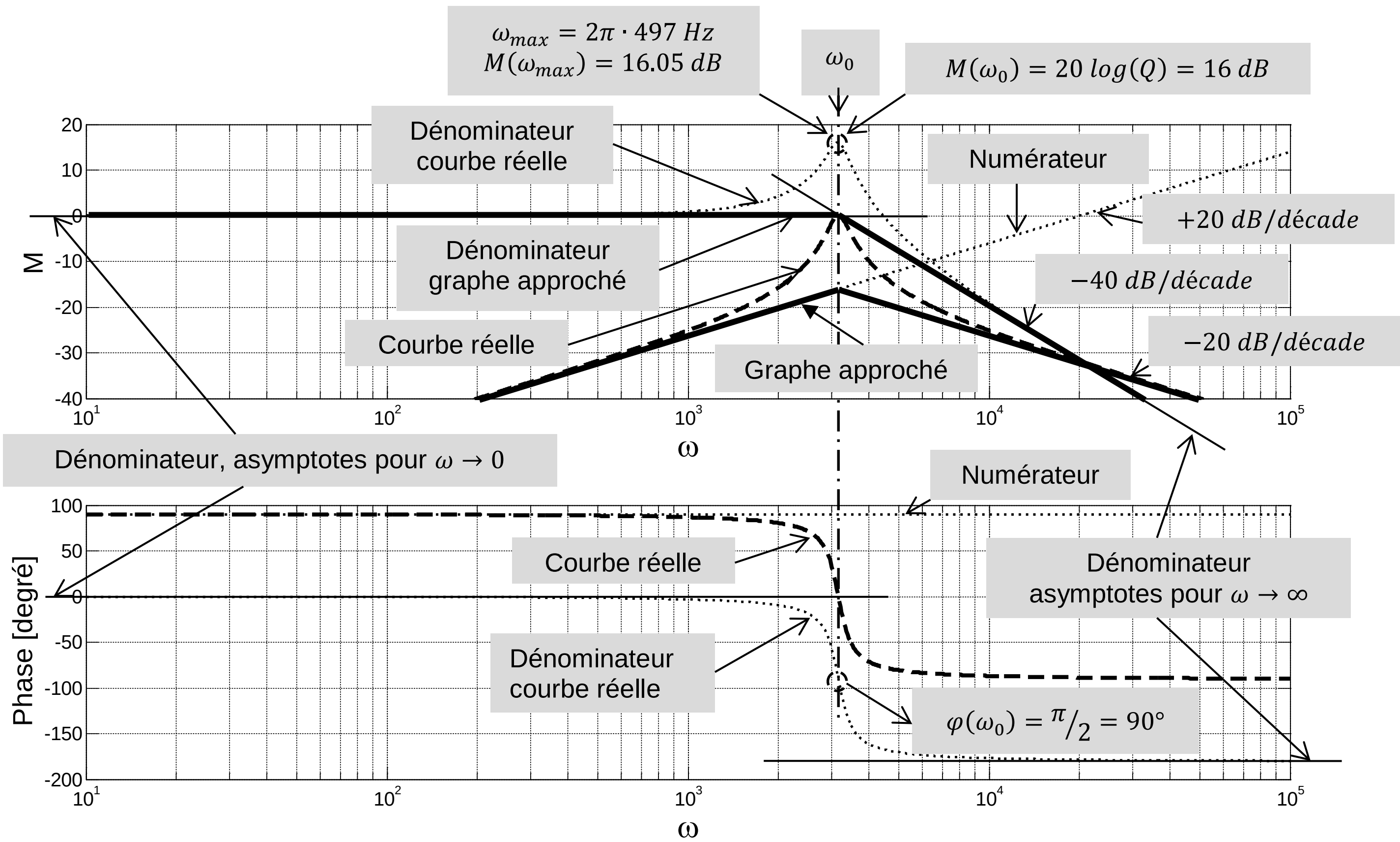



$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \; j\frac{\omega}{\omega_c}\,\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec un numérateur du 1er ordre : $\omega_c = \frac{1}{RC} = 20 \cdot 10^4\ s^{-1}$

et un dénominateur du 2e ordre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \cdot 503.5\ Hz \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 6.32$

## Diagramme de bode:



## 1.7 Analyse des systèmes d'ordre n

L'analyse des systèmes du $n^e$ ordre se fait en décomposant numérateur et dénominateur en facteurs du $1^{er}$ et du $2^{ème}$ ordre. Le graphe approché s'obtient en faisant la somme des graphes approchés des facteurs du $1^{er}$ et du $2^{ème}$ ordre.

Pour $\omega \to \infty$, la courbe réelle du module d'un numérateur $\underline{N}(j\omega)$ (et d'un dénominateur $\underline{D}(j\omega)$) d'ordre $n$ tend vers une asymptote oblique (une droite) dont la pente est :

$$\pm n \cdot 20\ dB/décade$$

Pour la fonction $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$ , la pente de l'asymptote pour $\omega \to \infty$ correspond à la somme des pentes du numérateur et du dénominateur.

Pour $\omega \to \infty$, la courbe réelle de la phase d'un numérateur (et d'un dénominateur) d'ordre $n$ tend vers une asymptote horizontale (une droite) dont la valeur est :

$$\pm n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Pour la fonction $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$ , la valeur de l'asymptote horizontale pour $\omega \to \infty$ correspond à la somme des valeurs des asymptotes du numérateur et du dénominateur.

# 2. Echantillonnage et reconstruction du signal

- Signaux analogiques de base (électrique, acoustique ou mécanique).
- Le traitement, le sauvetage et la transmission de l’information est digitale. L’information est donc composée de nombre.
- Il est nécessaire de numériser/digitaliser le signal analogique par échantillonnage (sampling). Cela consiste à extraire la valeur instantanée du signal.
- La valeur instantanée est quantifiée. L’amplitude est arrondie à la valeur la plus proche dans la dynamique disponible.
- L’échantillonnage et la quantification est normalement faite par le même composant. Les deux choses amenant des conséquences différentes, ils sont considérés séparément.
- La reconstruction du signal est le chemin inverse de son échantillonnage et sa quantification.


Figure 1: Chaîne du traitement du signal.

- La numériser/digitaliser et la reconstruction amènent des modifications importantes de l’information, ce qui n’implique pas forcément dire de pertes.
- Une très bonne compréhension des phénomènes est nécessaire pour l’ingénieur pour développer et mettre en œuvre une chaîne du traitement du signal correcte et adaptée à l’application voulue.

Exemples:

- Son (musique, téléphone)
- Image (photo, vidéo)
- Mesures et acquisition de signal (oscilloscopes, carte d’entrées/sorties de PC)

## 2.1 Echantillonnage

- Extraction des valeurs d'un signal analogique.
- Période d'échantillonnage $T_e$, donc fréquence d'échantillonnage $f_e = {}^{1}/_{T_e}$.
- Discrétisation de l'axe du temps uniquement ! L'amplitude n'est pas quantifiée et reste continue.

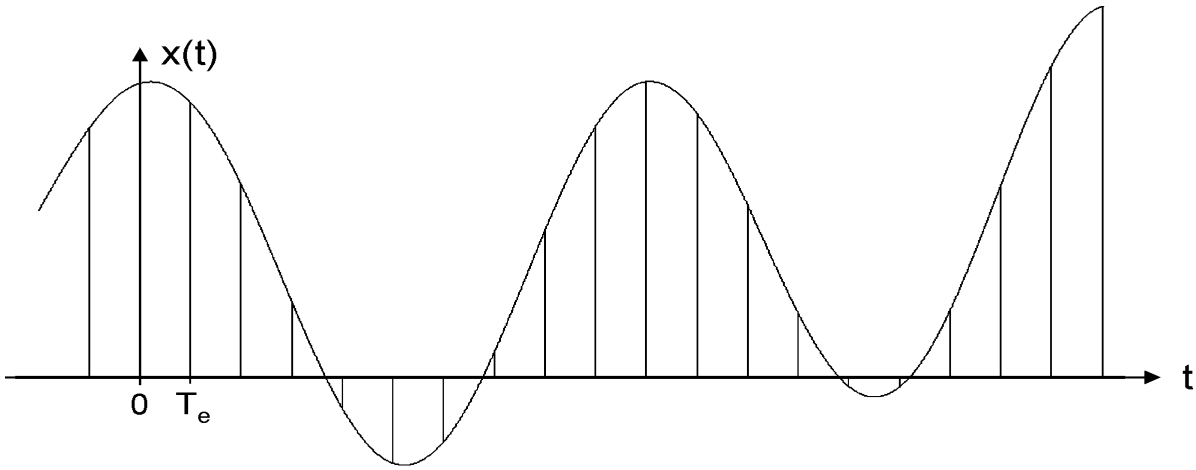



Figure 2: Signal analogique et les échantillons théoriques correspondant.

Bien que l'amplitude des échantillons ne sont pas quantifiés dans cet exemple, ce qui est le cas dans un cas réel, il possible de négliger cette différence dans un premier temps afin de bien comprendre ce que la discrétisation d'un signal analogique implique.

## 2.1.1 Echantillonnage réel

L'échantillonnage réel est obtenu par la multiplication du signal analogique avec un signal périodique rectangulaire de période $T_e$ et de durée $D$.

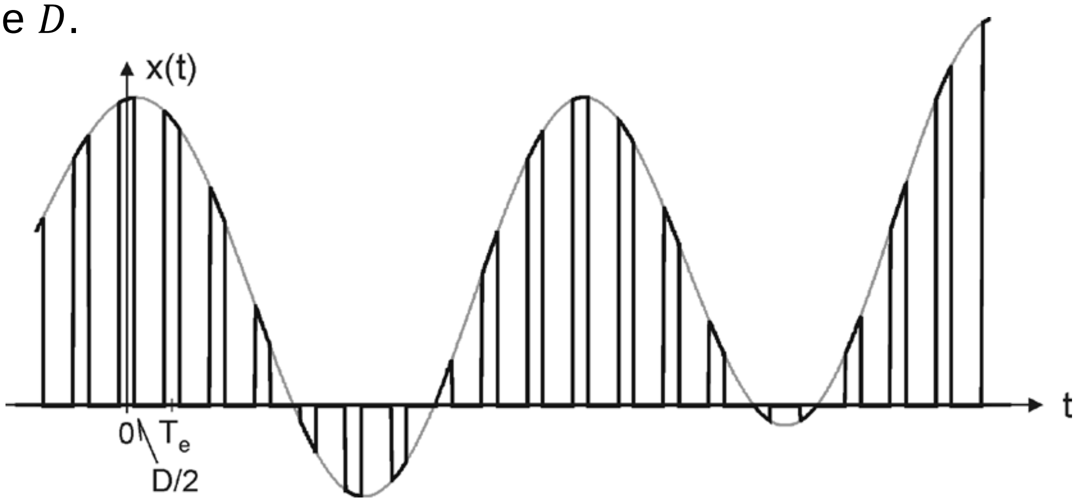



Figure 3: Signal analogique et le signal réellement échantillonné correspondant.

- L'échantillonnage réel amène énormément de composantes fréquentielles élevées dues aux sauts verticaux dans le signal réellement échantillonné.
- L'échantillonnage réel est utilisé pour la commande de moteurs électriques, par exemple, pour réguler la vitesse ou la puissance. Les hautes fréquences amenées par l'échantillonnage réel sont filtrées naturellement par le système mécanique et son inertie qui se comporte comme un filtre passe-bas.
- Beaucoup d'autres applications dans l'électronique de puissance peuvent être considérées comme une implémentation d'échantillonnage réel (variateurs de lumière, convertisseurs DC/DC, commande de moteur par PWM). Il est plus aisé et souvent moins cher d'échantillonner la puissance que d'utiliser un transformateur.
- L'échantillonnage de la puissance amène néanmoins beaucoup de bruit tant directement par l'alimentation du système que par émission électromagnétique.
- L'échantillonnage réel n'est pas adapté à la numérisation/digitalisation du signal car chaque échantillon est en soi toujours un signal continu.

### 2.1.2 Théorème de l’échantillonnage

Intuitivement, pour bien reconstruire un signal analogique et éviter les pertes, il suffit d’avoir une fréquence d’échantillonnage plus rapide que la fréquence du signal. Mais pour développer correctement des applications de traitement, de sauvetage ou de transmission de signaux numérisés, l’intuition n’est pas toujours suffisante.

Considérons l’exemple suivant:

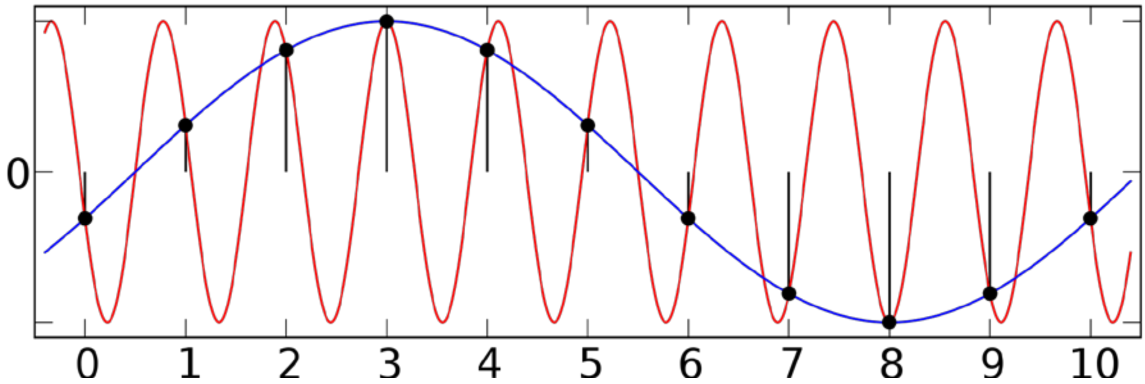



Figure 4: Deux sinusoïdes avec les mêmes échantillons.

Nous observons que les deux signaux analogiques donnes exactement les même échantillons, donc lorsque nous n’avons que ces échantillons à disposition, il impossible de savoir duquel des deux signaux ils proviennent !

En regardant plus en détail, il ressort que la fréquence d’échantillonnage est ici de 1Hz. Le signal bleu a une fréquence de 0.1Hz et le signal rouge de 0.9Hz. Il est facile de s’imaginer d’autres signaux de fréquence de 1.1 ; 1.9 ; 2.1 ; 2.9 ; etc. auront aussi les même échantillons.

Lorsque nous généralisons et utilisons une fréquence d’échantillonnage $f_e$ à la place de 1Hz et $f_0$ à la place de 0.1Hz, nous pouvons noter que les sinusoïdes de fréquences $f_0$ ; $f_e - f_0$ ; $f_e + f_0$ ; $2f_e - f_0$ ; $2f_e + f_0$ ; etc. auront toujours les même échantillons et il impossible de savoir quel signal ils représentent !

Sur la figure, la reconstruction du signal bleu est parfaitement correcte si $f_0 < \frac{f_e}{2}$. Ceci est le **théorème de l’échantillonnage** :

Un signal analogique $x(t)$ ayant une composant fréquentielle maximum de $f_{max}$ est décrit sans pertes d'informations par des échantillons $x(t_k)$ obtenus pas un échantillonnage du signal avec une fréquence d'échantillonnage de $f_e \geq 2f_{max}$.

Quelques considérations au sujet de ce théorème :

- Ceci implique qu'il est théoriquement possible, dans certaines circonstances, de reconstruire *parfaitement* le signal analogique de base uniquement depuis ces échantillons.
- Il est à noter que cela ne prend pas en compte la quantification de l'amplitude qui sera considérée par la suite.
- Une conséquence de ce théorème est contre-intuitive; malgré le fait que les échantillons d'un signal sont discrets dans le temps, il est théoriquement possible de recréer parfaitement l'information en continu entre deux échantillons alors qu'elle semble avoir "disparue".
- Le théorème de l'échantillonnage a été formulé séparément par Shannon et Nyquist.
- En pratique, il n'est pas possible de reconstruire parfaitement un signal même si la chaîne de traitement satisfait que théorème, mais les erreurs de reconstruction peuvent être extrêmement petites.
- Le théorème ne spécifie aucunement comment le signal peut être reconstruit.
- Il est nécessaire de savoir les caractéristiques fréquentielles du signal avant de l'échantillonner. Malheureusement, souvent les signaux à des composantes fréquentielles très élevées ou totalement inconnues.
- Généralement, la fréquence d'échantillonnage est plus grande que la limite théorique afin diminuer la complexité de la chaîne de traitement. Exemple: en téléphonie $f_{max} = 3.4kHz$ et $f_e = 4kHz$ ou en CD audio $f_{max} = 20kHz$ et $f_e = 44.1kHz$.
- La fréquence maximum qui satisfait le théorème de l'échantillonnage est $\frac{f_e}{2}$ et est appelée fréquence de Nyquist. La bande de fréquence $\left[-\frac{f_e}{2} \text{ à } +\frac{f_e}{2}\right]$ est appelée bande de Nyquist.

# 2.2 Reconstruction du signal

- La reconstruction du signal implique de générer des valeurs intermédiaire entre deux échantillons consécutifs.
- La reconstruction est généralement une approximation et crée des distorsions.
- Elle est généralement obtenue par *extrapolation* ou par *interpolation*.
- Bien qu'une pléthore d'extrapolateurs et d'interpolateurs existent, nous allons en considérer deux.
- La reconstruction utilise un filtre de lissage. Plus la composante fréquentielle maximum est proche de la fréquence de Nyquist, plus le filtre de lissage est complexe à développer.

## 2.2.1 Reconstruction par extrapolateur d'ordre 0

La reconstruction par extrapolateur d'ordre 0 est la plus simple, la valeur de chaque échantillon est maintenue jusqu'à l'instant où l'échantillon suivant.

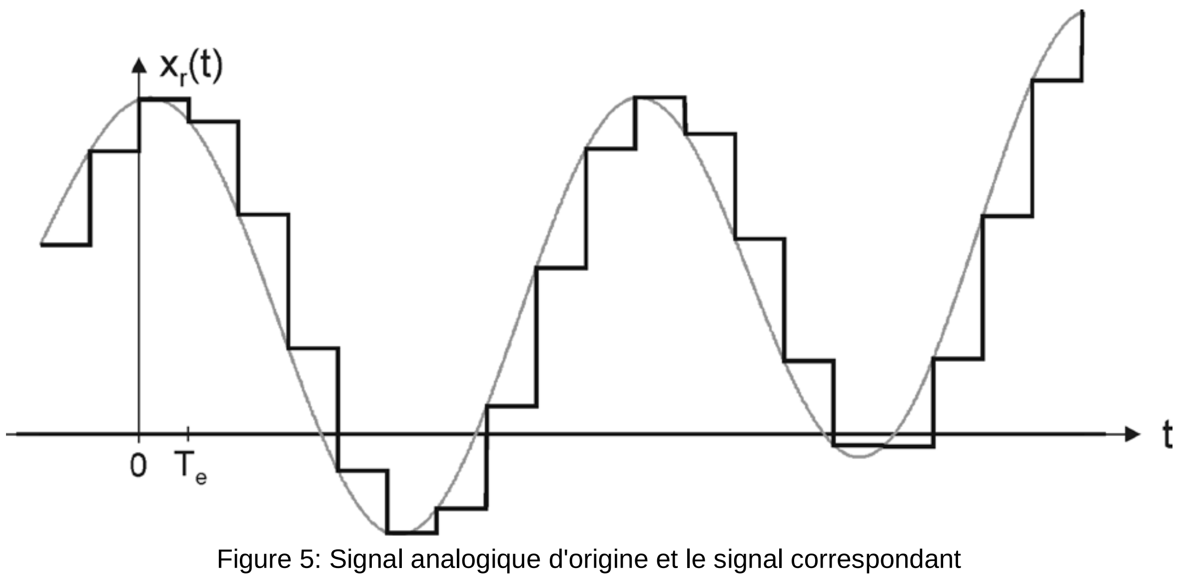



Figure 5: Signal analogique d'origine et le signal correspondant reconstruit par extrapolateur d'ordre 0.

Naturellement, cette reconstruction n'est pas parfaite. Le signal reconstruite a des "marches d'escaliers" ajoutent des composantes fréquentielles élevées comme le montre la figure suivante:

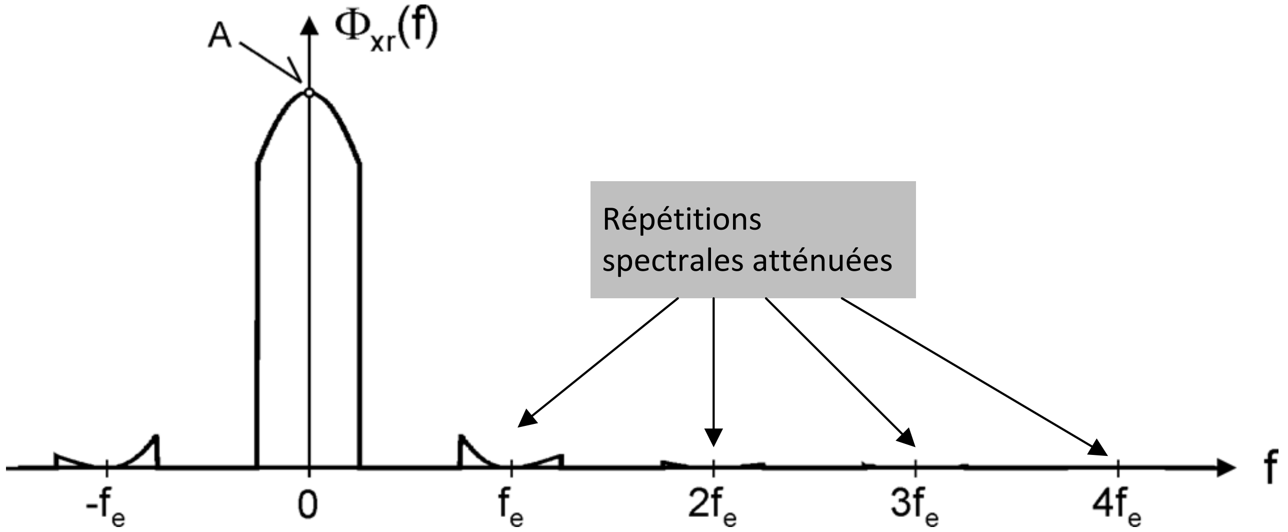



Figure 6: Exemple de spectre de densité de puissance obtenu avec un extrapolateur d'ordre 0.

A noter que les répétitions spectrales sont atténuées par l'extrapolateur d'ordre 0, c'est son principal avantage en plus de sa simplicité d'implémentation. Malgré cela, pour s'approcher d'une reconstruction parfaite du signal, il faut corriger ce spectre:

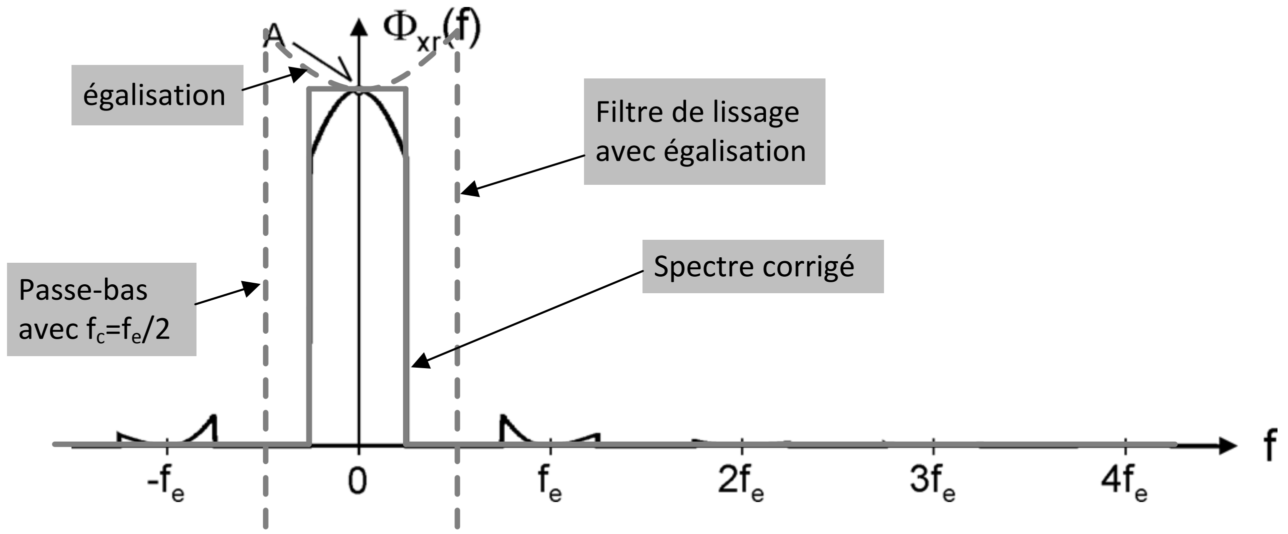



Figure 7: Corrections du spectre dû à un extrapolateur d'ordre 0.

- Le filtre de lissage (filtre passe-bas) enlève les "marches d'escaliers" en enlevant les composantes fréquentielles élevées.
- Lors du dimensionnement du filtre de lissage, une égalisation de la bande passante peut être faite.
- Ces filtres sont souvent complexes. Afin de simplifier leur développement et implémentation, le suréchantillonnage est souvent utilisé ($f_e \gg 2f_{max}$).

### 2.2.2 Interpolation idéale

Il peut être montré que remplacer chaque échantillon par un "sinc" permet une reconstruction idéale.

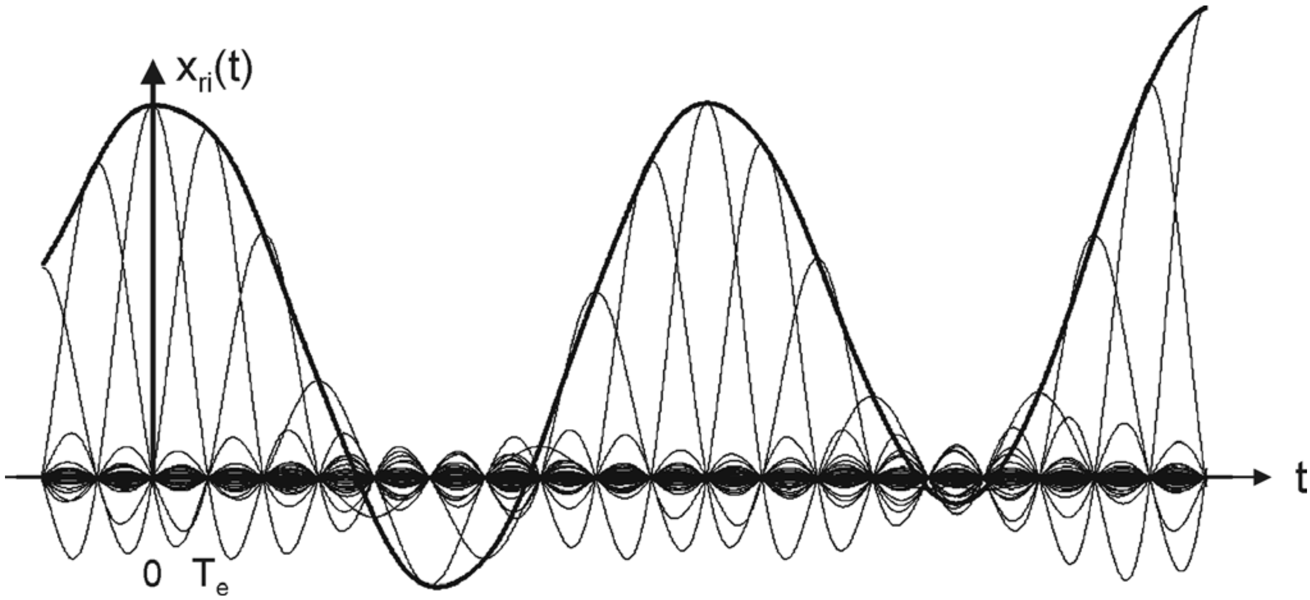



Figure 8: Signal reconstruit par interpolation idéale.

Quelques remarques :

- Elle est intrinsèquement non-causale, le retard est donc infini.
- Les composants du filtre analogique doivent être extrêmement précis.
- Un traitement numérique du signal peut être utilisé pour simplifier la reconstruction.
- Dans le domaine numérique, il est possible de s'approcher de la réponse idéale, car il est possible d'avoir une précision très élevée des coefficients de filtre.
- En numérique, il est possible de créer des échantillons additionnels en plus des existants. Ces échantillons en plus peuvent être calculés par interpolation idéale. C'est ce qu'on appelle le sur-échantillonnage qui correspond à une fréquence d'échantillonnage plus élevée lors de la conversion D/A.
- Cette manière de faire permet de générer des échantillons supplémentaires identiques à ceux qui auraient été générés par une conversion à fréquence plus élevée.
- Les filtres de lissage et d'égalisation sont alors énormément simplifiés.

- Les échantillons en plus ne sont jamais parfaits, car leur calcul demanderait un temps infini. Pour contourner le problème, une fonction "sinc" tronquée est utilisée à la place.
- Pour les lecteurs audio en général, le suréchantillonnage est toujours utilisé. En fait, il serait impossible d'avoir une bonne qualité audio sans le principe du suréchantillonnage. Dans la haute-fidélité audio, le suréchantillonnage est souvent de 32 et peut être au-delà de 100 pour des convertisseurs D/A de 1 bits (sigma-delta).

# 2.3 Quantification

- La quantification est la seconde opération pour numériser/digitaliser un signal.
- En pratique, les convertisseurs A/D effectuent généralement l'échantillonnage et la quantification simultanément.

## 2.3.1 Principe

- Un signal analogique $x(t)$ a une infinité de valeurs possibles en amplitude alors que le signal numérisé $x_q(t)$ a un nombre fini de valeurs en amplitude.
- L'opération qui passe de cette infinité de valeurs à un nombre fini de valeurs en amplitude se nomme la *quantification*.
- Un exemple; un convertisseur A/D de 8bits peut générer 256 valeurs d'amplitude différentes.
- La quantification est une opération non linéaire qui transforme tout un panel de valeurs différentes en une seule valeur d'amplitude quantifiée.
- Dans le cas linéaire généralement utilisé, les valeurs quantifiées disponibles sont déterminées par la plage de conversion $V$ divisée en $q$pas de quantification d'amplitude de $\Delta_q = {}^{V}/_{q}$.
- La signal de sortie de valeur $x_i$ est généralement égale à la valeur centrale du pas de quantification $\Delta_i$.
- Dans le cas linéaire le plus utilisé, le nombre de pas de quantification est égal à la puissance de 2 ou l'exposant est le nombre de bits du code binaire de sortie.
- Un exemple de cas de quantification non-linéaire est la PCM (Pulse-Code Modulation) utilisé en téléphonie. La quantification est alors logarithmique.

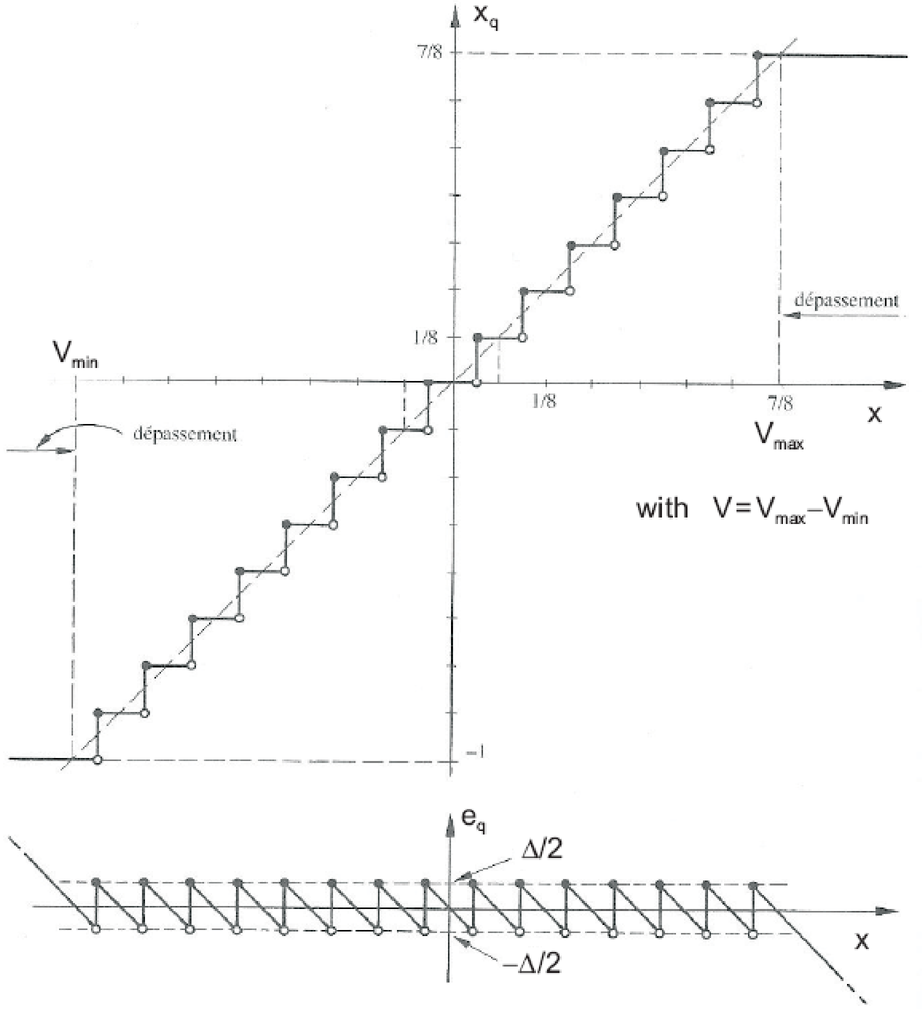



Figure 9: Relation d'entrée/sortie d'un quantificateur.

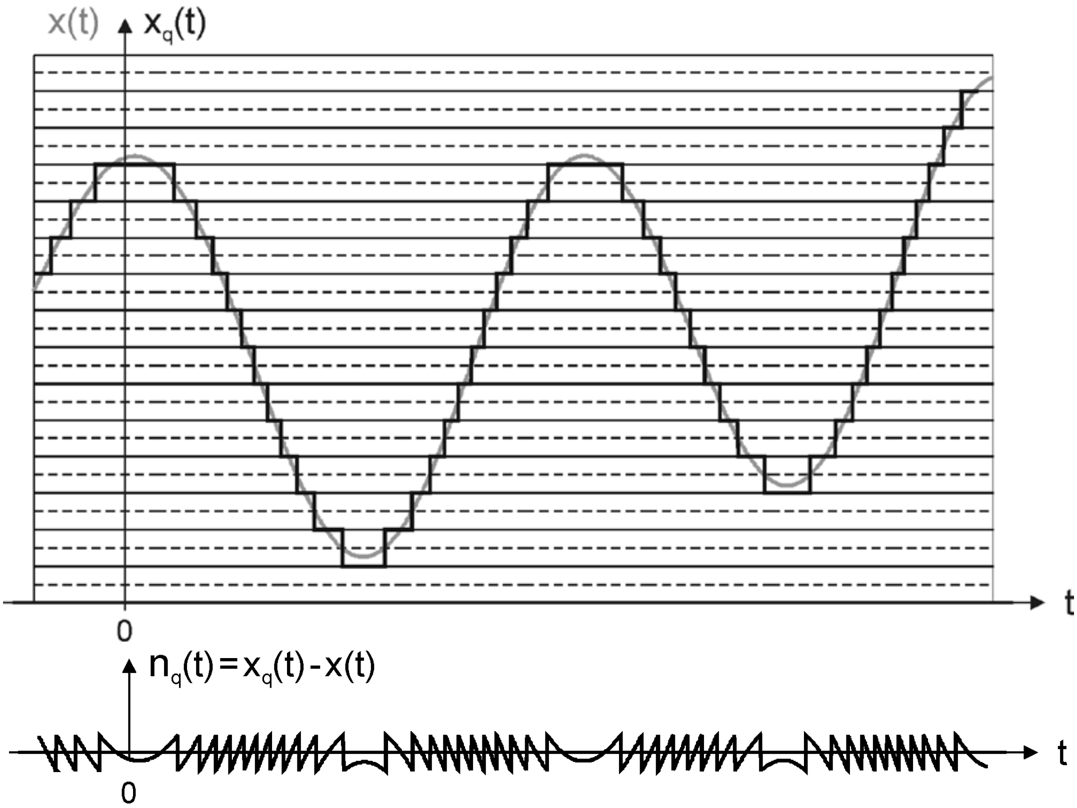



Figure 10: Signal analogique est le signal correspondant obtenu par quantification linéaire avec arrondi et son erreur

### 2.3.2 Distorsion et bruit de quantification

Le signal représentant la différence entre le signal de base et son pendant quantifié $n_q(t) = x_q(t) - x(t)$ est appelé le *bruit de quantification*. Il est évident que le but est de minimiser sa puissance au maximum.

En considérant que $n_q(t)$ est distribué entre $-\Delta/2$ et $+\Delta/2$ de manière constante,

$$p\left(n_q\right) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{pour:} \quad -\Delta/2 \le n_q \le \Delta/2 \\ 0 & \text{pour:} \quad \left|n_q\right| \ge \Delta/2 \end{cases}$$

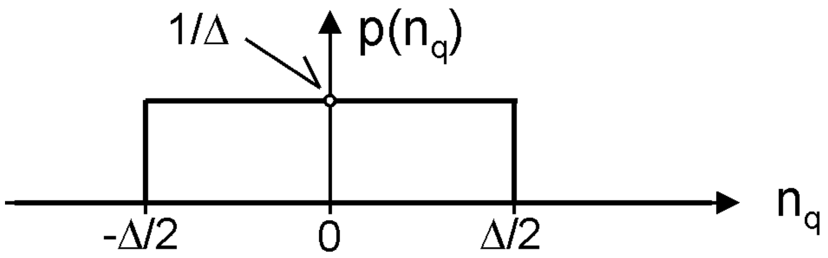



Figure 11: Distribution probabiliste du bruit de quantification.

il peut être montré que la puissance de son bruit est :

$$p_q = \sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

Il est à noter que sa variance, soit sa puissance normalisée, est simplement le carré de la valeur RMS $\sigma_q$.

Pour un signal ayant une puissance normalisée $\sigma_x^2$. Le *rapport signal sur bruit* (SNR) est:

$$\xi_q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = 12 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\Delta^2}$$

en dB:

$$\xi_{q\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10}\left(\xi_q\right) \cong 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\sigma_x}{\Delta}\right) + 10.8 \ \ [\mathrm{dB}]$$

$V$est divisé en $q = 2^n$ pas de quantification de valeur $\Delta = {}^{V}/_{2^n}$. Nous avons alors:

$$\xi_{q\mathrm{dB}} \cong 6n + 10.8 - 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{V}{\sigma_x}\right) \quad [\mathrm{dB}]$$

- Autrement dit, le rapport signal sur bruit augmente de 6dB pour chaque bit de plus…
- … ou la valeur $V_{RMS}$ du bruit de quantification diminue par un facteur 2 lors d'ajout de 1 bit (le pas de quantification étant divisé par 2).
- Une *distorsion* additionnelle au bruit de quantification apparait si le signal dépasse la plage de conversion d'entrée.
- Comme le prix des convertisseurs A/D augmente rapidement avec le nombre de bit, il est toujours très intéressant de sélectionner correctement le nombre de bits nécessaires.
- Un exemple; un signal une distribution d'amplitude uniforme sur toute la plage de conversion. Sa variance est $\sigma_x^2 = {}^{V}\!/_{12}$ et $\xi_{qdB} \cong 6n\ [dB]$, ce qui correspond souvent au rapport signal sur bruit donné par les vendeurs d'appareil audio haute fidélité.
- Mais afin d'éviter à tout prix la saturation, en cas réel, ce rapport est nettement plus bas.
- Avec une sinusoïde qui occupe toute la plage de conversion, $\xi_{qdB} \cong 6n + 1.77\ [dB]$.
- Quand le niveau du signal diminue, il est évident que le rapport signal sur bruit diminue également.
- En audio, il est souvent désiré d'avoir un rapport signal sur bruit constant. Pour ce faire, il faut une quantification non-linéaire telle qu'en téléphonie.
- Les techniques de compression audio et vidéo utilisent des notamment quantifications non-linéaires qui "cachent" les parties du signal non perceptible par l'humain (MP3).

### 2.3.3 Spectre de puissance du bruit de quantification

Après reconstruction, incluant le filtre de lissage et d'égalisation, le spectre de densité de puissance du bruit de quantification est consant de 0 à $f_e/_2$.

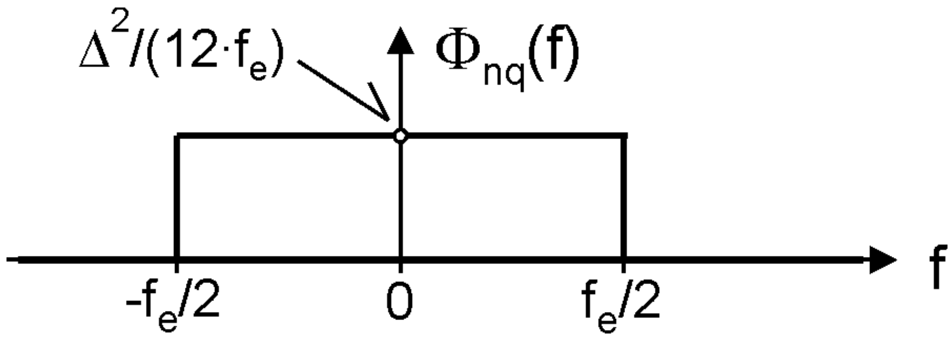



Figure 12: Spectre de densité de puissance du bruit de quantification.

Il est possible de diminuer la valeur maximum de ce bruit en augmentant la fréquence d'échantillonnage $f_e$. Augmenter la fréquence par un facteur 4 dimimue le spectre de densité de puissance par un facteur 4, soit 6 dB, soit un bruit résultant identique que lorsque l'on ajoute 1 bit au convertisseur. La diminution du bruit de quantification peut donc être faite en augmentant la fréquence d'échantillonnage.

Ceci est utilisé dans de nombreuses applications, par exemple dans les oscilloscope digitaux en mode *high resolution* et dans beaucoup d'A/D et D/A audio utilisant le *noise shaping*.

### 2.3.4 Codage

Avec des ordinateur, le codage en complement à 2 est devenu un standard, mais il existe de nombreux autre types de codage utilisé par les A/D et D/A; binaire, BCD, code Gray et complément à 1. Lorsque ces convertisseurs sont connecté à un ordinateur, il faut prendre en compte le type de codage et le convertir en codage en complément à 2.

# 3. Convertisseurs A/D et D/A

La numérisation/digitalisation est effectuée par un A/D et la reconstruction par un D/A. Il existe un pléthore de convertisseurs A/D et D/A ayant tous des caractéristiques et technologies différentes. Ils ont, bien sûr, des défauts en comparaison avec la théorie. Uniquement quelques-unes de leurs caractéristiques seront considérées.

## 3.1 Convertisseurs A/D

Le convertisseur A/D effectue la quantification et le codage. Différentes techniques existent, chacune adaptées à certains besoins.

### 3.1.1 Convertisseurs parallèles

Les convertisseurs parallèles sont basés sur le principe le plus simple, mais ils sont complexes à implémenter. Le signal d'entrée est comparé simultanément à $2^n - 1$ seuils qui séparent les pas de quantification. Les sorties des différents comparateurs sont traitées de manière à générer le code binaire correspondant au pas de quantification.

Ces convertisseurs sont rapides car ils utilisent uniquement de la logique combinatoire. Il est néanmoins complexe à développer étant donné le nombre de comparateurs à implémenter. Ces convertisseurs sont le plus souvent utilisés pour des signaux de haute fréquence qui n'imposent pas une résolution trop haute, généralement 8-10bits.

### 3.1.2 Convertisseurs par approximations successives

Quand la vitesse de conversion, soit la fréquence d'échantillonnage, n'a pas besoin d'être très élevée, il est souvent préférable d'utiliser convertisseurs A/D par approximation successive. Les différents bits de sortie de la conversion sont générés un par un successivement, généralement en commençant par le bit de poids fort. Par conséquent, un comparateur multiplexé unique peut être utilisé pour chaque génération de bits. Le principe utilisé est totalement similaire à celui utilisé par les anciennes balances mesurant le poids. La conversion donc assez lente à nécessite une horloge pour effectuer les différentes opérations successives, mais ces convertisseurs sont assez bon marché.

### 3.1.3 Convertisseur A/D à rampe

Les convertisseurs à rampe sont utilisés pour des applications lentes pour lesquels une grande exactitude est nécessaire. L'échantillon du signal est comparé à une rampe et le temps nécessaire à la rampe pour atteindre la valeur de l'échantillon est proportionnel à l'amplitude du signal à cet instant.

### 3.1.4 Convertisseurs à suréchantillonnage

- Pour ces convertisseurs, le signal est converti en utilisant une fréquence d'échantillonnage nettement supérieure à ce qui est nécessaire, mais avec très peu de pas de quantification.
- Le bruit de quantification est donc important, mais il est distribué sur une très large bande de fréquence.
- Un filtre numérique passe-bas coupe une grande partie de cette bande de fréquence, ce qui diminue alors significativement le bruit de quantification global.
- Une décimation, ce qui équivaut à une diminution de la fréquence d'échantillonnage, est effectuée pour avoir la fréquence d'échantillonnage voulue.
- Ces convertisseurs simplifient grandement la partie analogique, mais augmente la complexité dans le domaine numérique dans lequel l'exactitude est plus aisée.

- En utilisant les concepts de "noise shaping" et la modulation ΔΣ, des améliorations considérables ont été obtenus ces dernières années. Un convertisseur 1bit permet notamment d'avoir un bruit de quantification plu petit que les A/D 20 bits standards.
- Ce type de convertisseurs est énormément utilisé, notamment dans l'audio, ce qui a permis de réduire notablement les coûts.

### 3.1.5 Autres convertisseurs A/D

Il existe beaucoup d'autres technologies pour les convertisseurs A/D. Très souvent, ce sont des mélanges des différentes technologies de base afin de minimisé les désavantages de certaines tout en gardant les avantages. Ces développements se font en fonction des applications selon les besoins tant sur le plan de la fréquence d'échantillonnage que du rapport signal sur bruit.

## 3.2 Convertisseurs D/A

- Les convertisseurs D/A produisent un signal analogique de sortie qui est proportionnel à son code numérique d'entrée.
- Le signal de sortie est habituellement obtenu par des sources de courant contrôlées par puissance de 2. En combinant ces sources, le courant total est proportionnel au code numérique d'entrée.
- Les convertisseurs D/A reconstruisent le signal analogique en utilisant un extratpolateur d'ordre 0.
- Les convertisseurs D/A qui ont des architectures parallèles sont plus rapides.
- Les convertisseurs D/A sont nettement meilleurs marché que les convertisseurs A/D.
- Lorsque l'entrée numérique change, il y a sur le signal de sortie un pic (glitch).
- Le suréchantillonnage est également utilisé pour les convertisseurs D/A selon les principes identiques à précédemment cités.

## 3.3 Limitation des convertisseurs A/D et D/A

Les convertisseurs A/D et D/A ne sont bien évidemment jamais parfait; leurs défauts sont les erreurs d'offset, de gains et de non-linéarité. Les "datasheet" permettent de trouver les informations détaillées de ces erreurs. Lors d'un choix de composant, il est donc important de déterminer tout d'abord la fréquence d'échantillonnage et le nombre de bits nécessaires, puis de sortir une liste des composants potentiels. Il faut alors déterminer les erreurs maximum admissibles pour l'offset, le gain et la non-linéarité afin de trouver le composant idéal pour l'application.

# 4. Conclusion

- La numérisation/digitalisation et la reconstruction de signal analogique sont des opérations (très) importantes pour les ingénieurs en technologies de l'information.
- Les signaux physique de base sont analogique et leur traitement, sauvetage et transmission sont numériques.
- Les problèmes associés au domaine sont clairement connus et expliqué par la théorie et, ce qui n'est pas toujours le cas, la théorie est extrêmement proche de la pratique.
- Il est donc important de comprendre les principes théoriques sous-jacents afin de développer correctement une chaîne de traitement quelconque. En effet, il est inutile de vouloir recréer une fondamentalement information par une chaîne d'acquisition non correctement développée.