Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Московский институт электроники и математики имени А. Н. Тихонова
Программа "Прикладная математика"

Лабораторная работа №4

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Группа БПМ213
Вариант 8
Номера выполняемых задач: 6.1.8, 6.2.2, 6.7.4, 6.8.4

Выполнила:
Варфоломеева Анастасия Андреевна
Преподаватель:
Токмачев Михаил Геннадьевич

Москва, 2024 г.

1 Метод наименьших квадратов

1.1 Формулировка задачи

Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений $y_0, y_1, ..., y_n$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Используя метод наименьших квадратов (МНК), найти многочлен $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_m x^m$ наилучшего среднеквадратичного приближения оптимальной степени $m = m^*$. За оптимальное значение m^* принять ту степень многочлена, начиная с которой величина

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum_{k=0}^{n}(P_m(x_k) - y_k)^2}$$

стабилизируется или начинает возрастать.

1.2 Порядок решения задачи

1. Задать векторы x и y исходных данных.
2. Написать программу-функцию mnk, найти с ее помощью многочлены P_m, $m = 0, 1, 2, ...$, по методу наименьших квадратов. Вычислить соответствующие им значения σ_m.
3. Построить гистограмму зависимости σ_m от m, на основании которой выбрать оптимальную степень m^* многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения.
4. На одном чертеже построить графики многочленов P_m, $m = 0, 1, 2, ..., m^*$, и точечный график исходной функции.

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 1.2 \\ 1.5 \\ 1.8 \\ 2.1 \\ 2.4 \\ 2.7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1.019 \\ 1.4889 \\ 2.2079 \\ 3.0548 \\ 3.8648 \\ 4.2161 \\ 5.1180 \\ 5.7661 \\ 6.6720 \\ 7.1960 \\ 7.8551 \end{pmatrix}$$

1.3 Код на Python

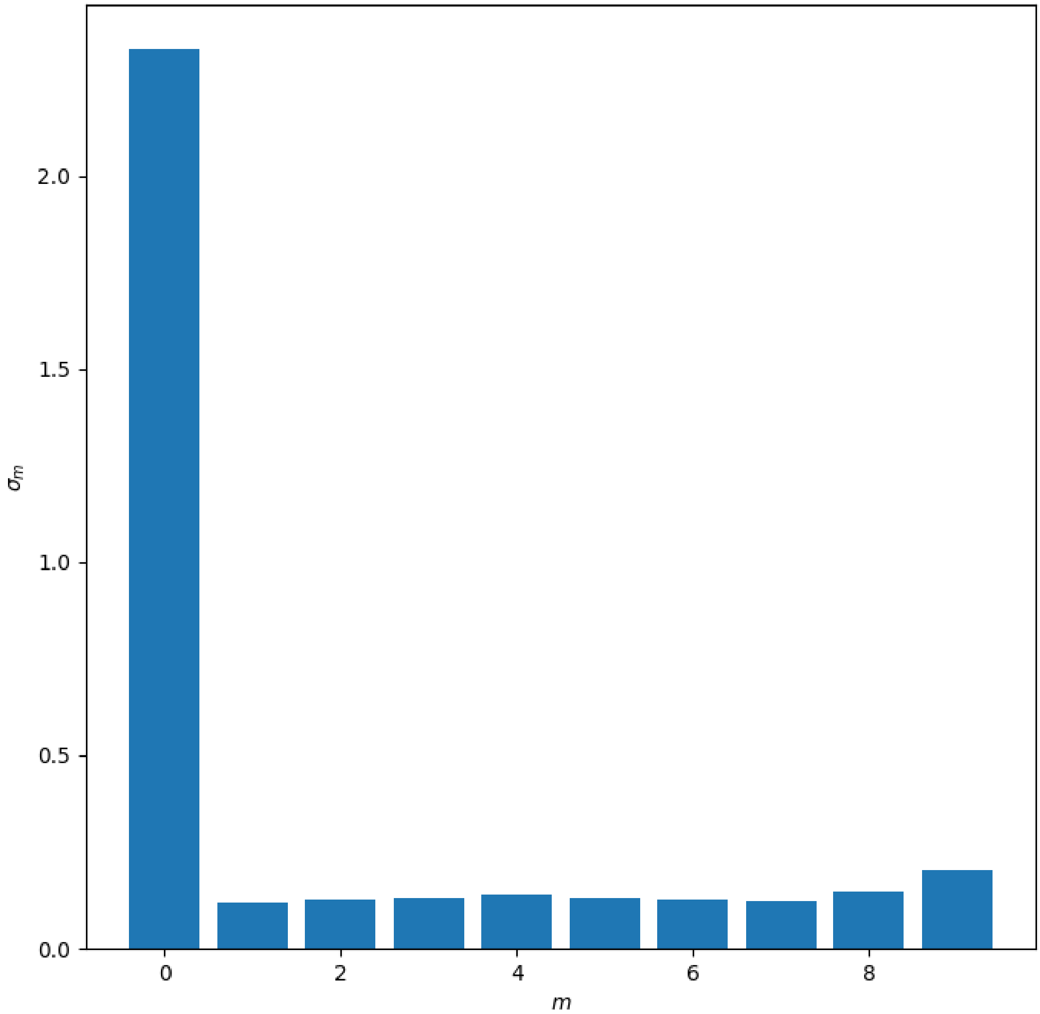
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def mnk(x, y, m):
    G = np.zeros((m + 1, m + 1), dtype=np.float64)
    b = np.zeros(m + 1, dtype=np.float64)
    for i, _ in enumerate(b):
        b[i] = np.sum(y * (x ** i))
    for r, row in enumerate(G):
        for c, _ in enumerate(row):
            G[r, c] = np.sum(x**(r+c))
    return np.linalg.solve(G, b)

def P(a, x):
    return sum(a_i* (x**i) for i, a_i in enumerate(a))

def count_sigma(x, y, a):
    return np.sqrt(np.sum((P(a, x) - y) ** 2)/(len(x)  - len(a)))

x = np.array([0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4, 2.7, 3])
y = np.array([1.019, 1.4889, 2.2079, 3.0548, 3.8648, 4.2161, 5.1180, 5.7661, 6.6720,
polynoms = []
sigs = []
for m in range(0, 10, 1):
    p = mnk(x, y, m)
    polynoms.append(p)
    sigs.append(count_sigma(x, y, p))

plt.figure(figsize=(8,8))
plt.scatter(x, y, c="w", edgecolors='k', label = "initial data", s=64, zorder=10)

x_points = np.linspace(0, 3, 100)
with np.printoptions(2):
    for i, (p,s)  in enumerate(zip(polynoms, sigs)):
        print(f"m = {i}")
        print(f"sigma = {s:.4f}, coefs = {p}")
        print("----------------------")
for m, p in enumerate(polynoms):
    plt.plot(x_points, P(p, x_points), label=f"$P_{m}(x)$")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$y$")
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(8,8))
plt.xlabel("$m$")
plt.ylabel(r"$\sigma_m$")
plt.bar(range(0, 10), sigs)
plt.show()
```

```
print(f"Optimal solution: m* = 1, sigma = {sigs[1]:.6f}")
print(f"P_m*(x)={polynoms[3][-1]:.3f}*x^{len(polynoms[3])-1}", end="")
for i, coef in zip(range(len(polynoms[3]) - 2, 0, -1), reversed(polynoms[3][:-1])):
    print(f"{coef:+.3f}x^{i}",end="")
print(f"{polynoms[3][0]:+.3f}")
```

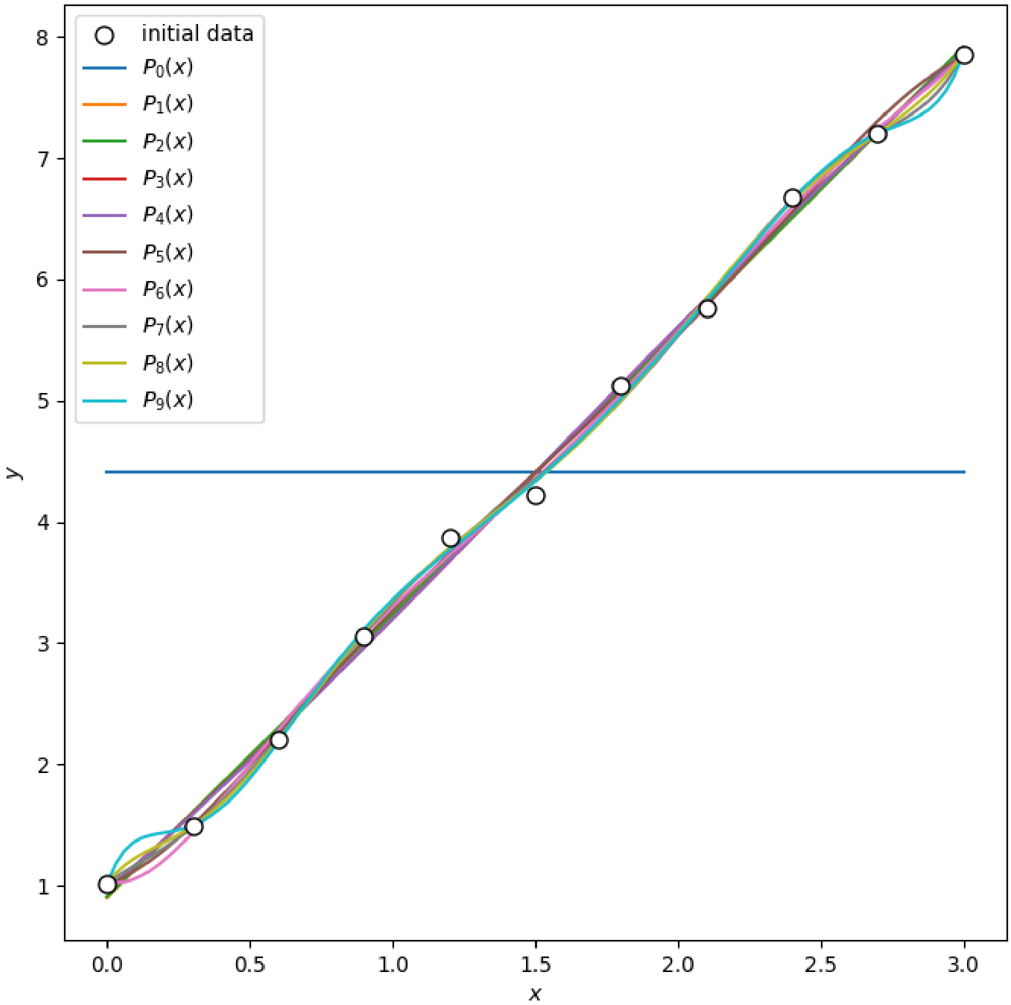
1.4 Результат работы программы

```
m = 0
sigma = 2.3268, coefs = [4.41]
----------------------
m = 1
sigma = 0.1210, coefs = [0.9  2.34]
----------------------
m = 2
sigma = 0.1282, coefs = [0.91 2.32 0.01]
----------------------
m = 3
sigma = 0.1305, coefs = [ 0.96  2.05  0.24 -0.05]
----------------------
m = 4
sigma = 0.1408, coefs = [ 0.97  1.99  0.35 -0.11  0.01]
----------------------
m = 5
sigma = 0.1295, coefs = [ 1.01  0.81  3.58 -3.14  1.17 -0.15]
----------------------
m = 6
sigma = 0.1266, coefs = [  1.03  -0.53   9.05 -10.99   6.22  -1.65   0.17]
----------------------
m = 7
sigma = 0.1220, coefs = [  1.02   1.68  -3.21  13.41 -16.87   9.6   -2.56   0.26]
----------------------
m = 8
sigma = 0.1463, coefs = [  1.02   3.02 -12.51  37.26 -47.21  30.79 -10.83   1.95  -0.14]
----------------------
m = 9
sigma = 0.2025, coefs = [   1.02    6.43  -40.01  122.54 -183.72  156.54  -80.07   24.45   -4.12
    0.29]
----------------------
Optimal solution: m* = 1, sigma = 0.120964
P_m*(x)=2.336*x^1+0.902
```

1.5 Гистограмма зависимости σ_m от m



1.6 Графики многочленов и точечный график исходной функции



1.7 Вывод

В результате работы программы были найдены зависимости σ от m и коэффициенты соответствующих многочленов, которые представлены в выводе программы, с помощью метода наименьших квадратов. Также была построена гистограмма, из которой видно, что начиная с $m = 1$ σ стабилизируется, следовательно оптимальным решением является многочлен $P_{m^*}(x) = 2.336x + 0.902$, что также было показано в выводе программы. На следующем графике представлены все полученные многочлены и точечный график исходной функции.

2 Положение точки в момент времени

2.1 Формулировка задачи

В таблице приведены результаты наблюдений за перемещением x материальной точки по оси Ox в моменты времени $t \in [t_0, T]$. Известно, что движение является равномерным и описывается линейной зависимостью $x(t) = \nu t + b$. Используя метод наименьших квадратов, определить скорость ν и спрогнозировать положение точки в момент времени $t = 2T$. На одном чертеже построить график движения точки и точечный график исходных наблюдений.

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.625 \\ 2.25 \\ 2.88 \\ 3.5 \\ 4.13 \\ 4.75 \\ 5.375 \\ 6 \end{pmatrix}$$

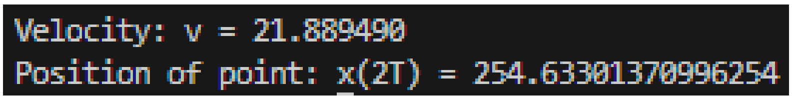
$$x = \begin{pmatrix} 14.86 \\ 27.15 \\ 41.19 \\ 54 \\ 69.03 \\ 81.6 \\ 96.11 \\ 109.4 \\ 124.03 \end{pmatrix}$$

2.2 Код на Python

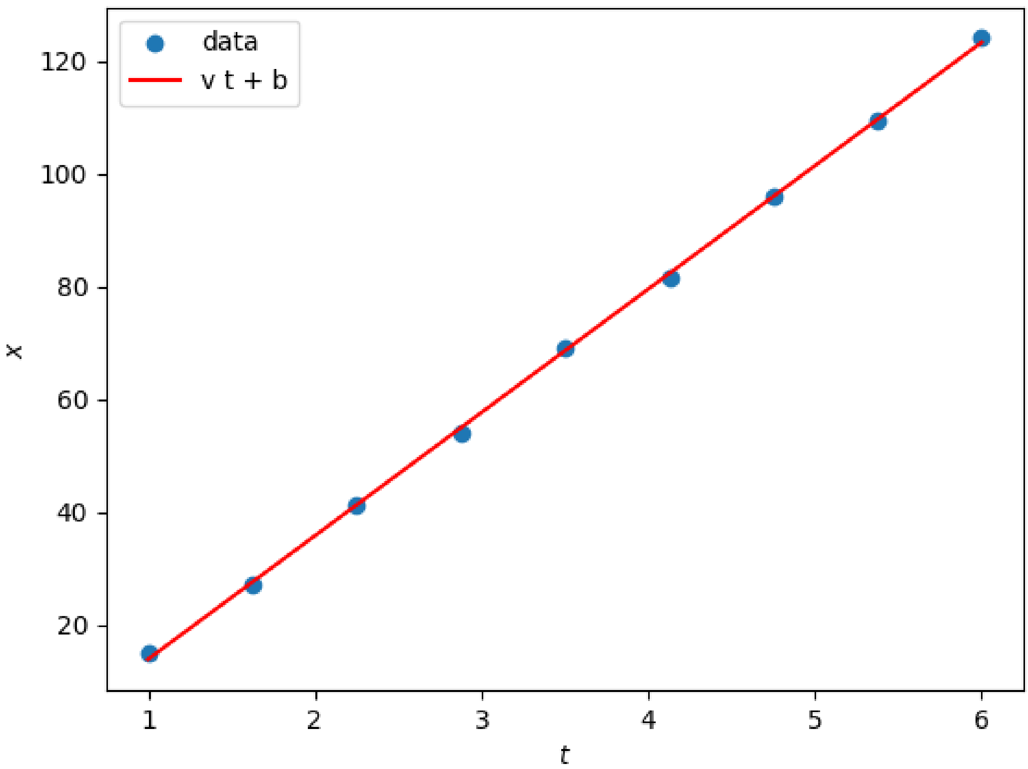
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def mnk(x, y, m):
    G = np.zeros((m + 1, m + 1), dtype=np.float64)
    b = np.zeros(m + 1, dtype=np.float64)
    for i, _ in enumerate(b):
        b[i] = np.sum(y * (x ** i))
    for r, row in enumerate(G):
        for c, _ in enumerate(row):
            G[r, c] = np.sum(x**(r+c))
    return np.linalg.solve(G, b)

def P(a, x):
    return sum(a_i* (x**i) for i, a_i in enumerate(a))

t = np.array([1, 1.625, 2.25, 2.88, 3.5, 4.13, 4.75, 5.375, 6])
x = np.array([14.86, 27.15, 41.19, 54, 69.03, 81.6, 96.11, 109.4, 124.03])
T = t[-1]
b, v = mnk(t, x, 1)
print(f"Velocity: v = {v:.6f}")
print(f"Position of point: x(2T) = {2 * T * v + b}")
plt.scatter(t, x, label="data")
points = np.linspace(1, 6, 5)
plt.plot(points, v * points + b, label="v t + b", c="r")
plt.xlabel("$t$")
```

```
plt.ylabel("$x$")
plt.legend()
plt.show()
```

2.3 Результат работы программы



2.4 График движения точки и точечный график исходных наблюдени



2.5 Вывод

На основе известных данных о перемещении точки, моментах времени и характере движения с помощью метода наименьших квадратов были спрогнозированы скорость и положение точки в момент времени $t = 2T$. Полученная скорость $v = 21.89$ и позиция $x = 254.63$, что представлено в выводе программы. Также был построен график движения точки и точечный график исходных наблюдений.

3 Кусочно-линейная и глобальная интерполяции

3.1 Формулировка задачи

Дана кусочно-гладкая функция $y = f(x)$. Сравнить качество приближения функции кусочно-линейной и глобальной интерполяциями.

3.2 Порядок решения задачи

1. Вычислить значения функции $y_i = f(x_i)$ в произвольных точках x_i, $i = 0, 1, ..., k-1$, отрезка $[a, b]$, по которым будет осуществляться интерполяция функции.
2. Составить программу-функцию, вычисляющую значение интерполяционного многочлена 1-ой степени по точкам (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) в произвольной точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. С ее помощью вычислить приближенные значения функции $f(x)$ при кусочно-линейной интерполяции в $3k$ точках исходного отрезка $[a, b]$.
3. Написать функцию *inter*, возвращающую значение интерполяционного многочлена в форме Ньютона (с разделенными разностями). Вычислить приближенные значения функции $f(x)$ в тех же $3k$ точках отрезка при глобальной интерполяции, используя написанную функцию *inter*. На одном чертеже построить графики интерполирующих функций, график исходной функции $f(x)$, а также отметить точки (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., k-1$, по которым осуществлялась интерполяция.
4. Вычислить практическую величину погрешностей Δ_j, $j = 0, 1, ..., 3k-1$, приближения функции $f(x)$ в $3k$ точках для кусочно-линейной и глобальной интерполяций. На одном чертеже построить графики погрешностей. Сравнить качество приближения.

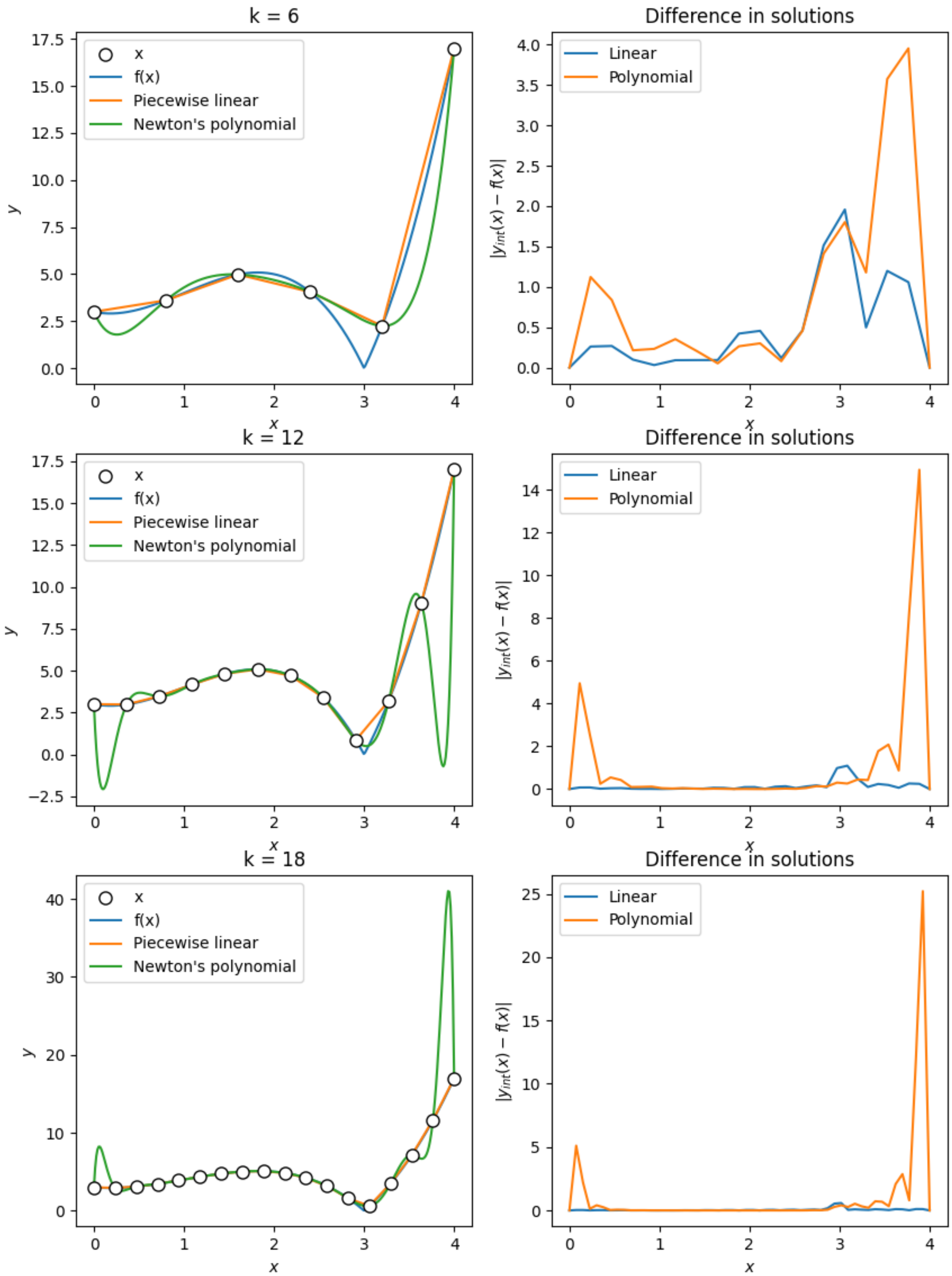
$$f(x) = |x-3|(x^2+1)$$
$$[a, b] = [0, 4]$$

3.3 Код на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def linear(x0, y0, x1, y1):
    def func(x):
        return y0 + (x-x0)/(x1-x0)*(y1-y0)
    return func

def make_lin_interp(nodes, lines):
    def inter(x):
        for x_curr, x_next, line in zip(nodes[:-1], nodes[1:], lines):
            if x_curr - 1e-12 <= x <= x_next + 1e-12:
                return line(x)
    return np.vectorize(inter)

def f(x):
    return np.abs(x - 3)*(x**2 + 1)

def newton_polynomial_coefs(x, y):
    a = np.copy(y)
    for i in range(1, len(x)):
        a[i:] = (a[i:] - a[i-1])/(x[i:]-x[i-1])
    return a

def newton_polynomial(x, y):
```

```
    n = len(x)
    coefs = newton_polynomial_coefs(x, y)
    def poly(x_points):
        p = coefs[-1]
        for i in range(n -  1, -1, -1):
            p = p * (x_points-x[i]) + coefs[i]
        return p
    return poly


k = [6, 12, 18]
a, b = 0, 4
fig, ax = plt.subplots(3, 2, figsize=(10, 16))
for i, k_ in enumerate(k):
    x_k = np.linspace(a, b, k_)
    x_3k = np.linspace(a, b, 3 * k_)
    x_points = np.linspace(a, b, 300)
    y_k = f(x_k)
    y_3k = f(x_3k)

    lin_interp = []
    ff = []
    for _ , (x_prev, y_prev, x_curr, y_curr) in enumerate(zip(x_k[:-1], y_k[:-1], x_k
        ff.append(linear(x_prev, y_prev, x_curr, y_curr))
    lin_interp_f = make_lin_interp(x_k, ff)
    lin_interp = lin_interp_f(x_3k)
    poly = newton_polynomial(x_k, y_k)
    poly_3k = poly(x_3k)
    delta_linear = abs(y_3k - lin_interp)
    delta_polynomial = abs(y_3k - poly_3k)
    ax[i, 0].set_xlabel("$x$")
    ax[i, 0].set_ylabel("$y$")
    ax[i, 0].set_title(f"k = {k_}")
    ax[i, 0].scatter(x_k, y_k, c="w", edgecolors='k', label = "x",s=64, zorder=10)
    ax[i, 0].plot(x_points, f(x_points), label = "f(x)")
    ax[i, 0].plot(x_points, lin_interp_f(x_points), label = "Piecewise linear")
    ax[i, 0].plot(x_points, poly(x_points), label = "Newton's polynomial")
    ax[i, 0].legend()
    ax[i, 1].set_xlabel("$x$")
    ax[i, 1].set_ylabel("$|y_{int}(x) - f(x)|$")
    ax[i, 1].set_title("Difference in solutions")
    ax[i, 1].plot(x_3k, delta_linear, label=f"Linear")
    ax[i, 1].plot(x_3k, delta_polynomial, label=f"Polynomial")
    ax[i, 1].legend()
plt.show()
```

3.4 Результат работы программы



3.5 Вывод

В качестве результата работы программы были получены 6 графиков: три отражают исходную функцию $f(x)$, точки, по которым осуществлялась интерполяция, кусочно-линейную и глобальную интерполяции, и три иллюстрируют погрешности в двух видах интерполяции. Были рассмотрены три варианта количества точек, а именно: 6, 12 и 18, чтобы посмотреть, как будут вести себя интерполяции при разном количестве точек. В итоге можно заметить, что при $k = 12, 18$ на графиках, показывающих все полученные функции, наблюдаются скачки в начале и конце. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона откланяется от двух остальных функций на концах. Это же можно увидеть на графиках, показывающих погрешности при всех трех значениях k. В итоге можно сделать вывод, что линейная интерполяция дает меньшую ошибку, чем Ньютоновский полином.

4 Метод глобальной интерполяции

4.1 Формулировка задачи

Дана функция $y = f(x)$. Приблизить $f(x)$ методом глобальной интерполяции при равномерном и чебышевском распределениях узлов интерполяции. Сравнить качество приближения.

4.2 Порядок решения задачи

1. Составить программу-функцию построения интерполяционного многочлена при произвольном распределении узлов (количество узлов - любое).
2. Используя составленную программу, вычислить приближенные значения функции $f(x)$ в $3k$ точках исходного отрезка $[a, b]$ по k узлам интерполяции, распределенным равномерно на отрезке. На одном чертеже построить графики интерполяционного многочлена и исходной функции.
3. Используя составленную программу, вычислить приближенные значения функции $f(x)$ в тех же $3k$ точках исходного отрезка по k узлам интерполяции, имеющим чебышевское распределение. Оно имеет следующий вид:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

На одном чертеже построить графики интерполяционного многочлена и исходной функции.
4.Сравнить качество приближения функции $f(x)$ при разном распределении узлов.
5. Выполнить п. 2-4, строя интерполяционный многочлен по $2k$ узлам интерполяции.
6. Сравнить результаты при разном числе узлов.

$$f(x) = e^{\cos 3x}$$

$$[a, b] = [0, \pi]$$

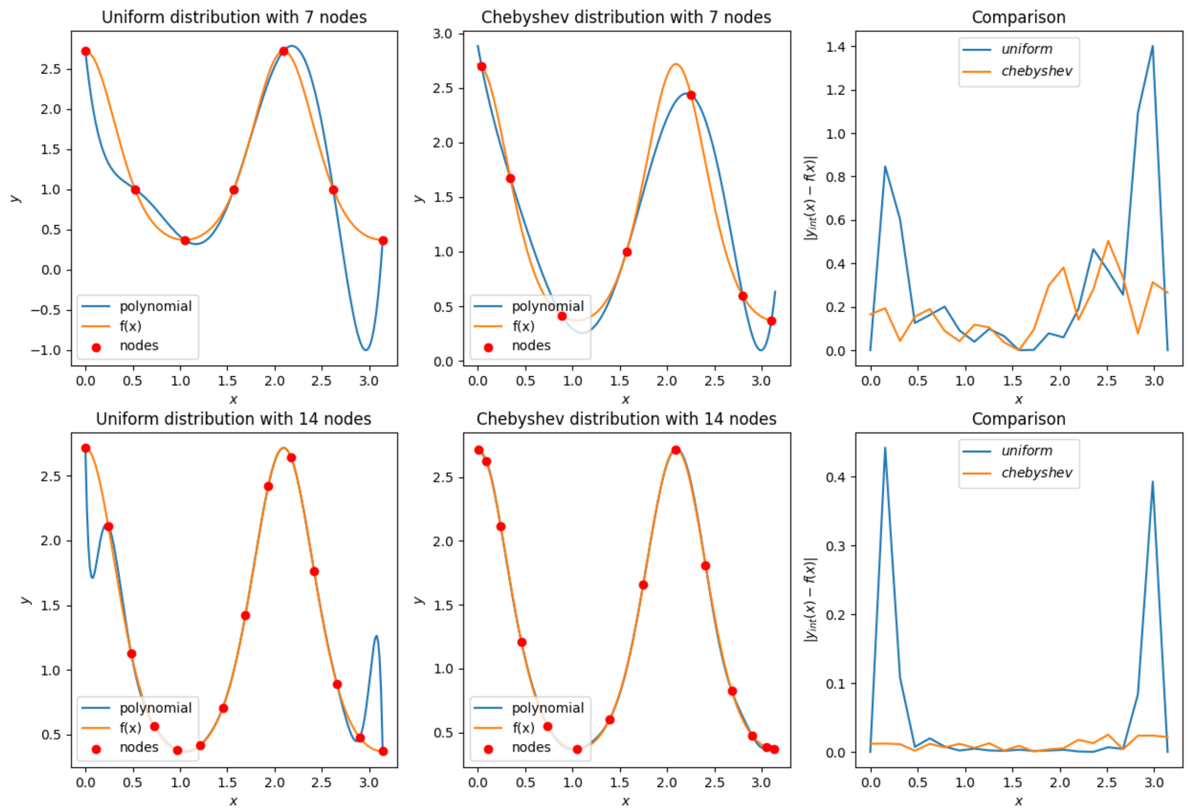
4.3 Код на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return np.exp(np.cos(3 * x))

def global_polynomial_interpolation(x, y):
    n = len(x)
    A = np.zeros((n, n), dtype=np.float64)
```

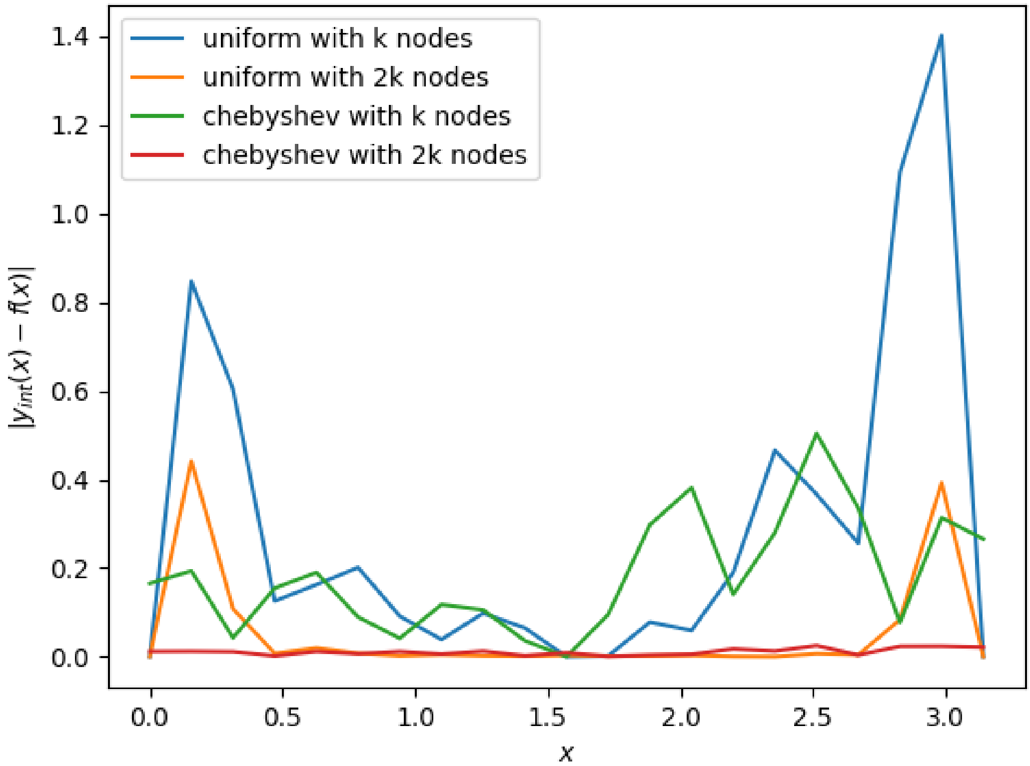
```
    for power in range(0, n):
            A[:, power] = x ** power
    a = np.linalg.solve(A, y)
    def interpolation_polynom(x):
        return sum(a_i * (x**power) for power, a_i in enumerate(a))
    return interpolation_polynom

k = [7]
a, b = 0, np.pi
x_points = np.linspace(a, b, 200)
fig, ax = plt.subplots(2 * len(k), 3, figsize=(15, 10))
for i, k_ in enumerate(k):
    x_k = np.linspace(a, b, k_)
    x_2k = np.linspace(a, b, 2 * k_)
    x_3k = np.linspace(a, b, 3 * k_)
    x_chebyshev = np.array([(a + b) / 2 + (b - a) / 2 * np.cos((2 * n + 1)/ (2 * k_) *
    x_chebyshev_2k = np.array([(a + b) / 2 + (b - a) / 2 * np.cos((2 * n + 1)/ (4 * k_
    poly_k = global_polynomial_interpolation(x_k, f(x_k))
    poly_2k = global_polynomial_interpolation(x_2k, f(x_2k))
    poly_chebyshev_k = global_polynomial_interpolation(x_chebyshev, f(x_chebyshev))
    poly_chebyshev_2k = global_polynomial_interpolation(x_chebyshev_2k, f(x_chebyshev_
    delta_unifrom = []
    delta_chebyshev = []
    delta_unifrom.append(np.abs(f(x_3k) - poly_k(x_3k)))
    delta_unifrom.append(np.abs(f(x_3k) - poly_2k(x_3k)))
    delta_chebyshev.append(np.abs(f(x_3k) - poly_chebyshev_k(x_3k)))
    delta_chebyshev.append(np.abs(f(x_3k) - poly_chebyshev_2k(x_3k)))
    for points , (j, foo) in zip([x_k, x_chebyshev, x_2k, x_chebyshev_2k],
                                 enumerate([poly_k, poly_chebyshev_k, poly_2k, poly_c
        row = i + j // 2
        col = j % 2
        nodes = (row + 1) * k_
        distr = "Chebyshev" if col else "Uniform"
        ax[row, col].set_title(f"{distr} distribution with {nodes} nodes")
        ax[row, col].plot(x_points, foo(x_points), label = "polynomial")
        ax[row, col].plot(x_points, f(x_points), label="f(x)")
        ax[row, col].scatter(points, f(points), c="r", zorder=10, label="nodes")
        ax[row, col].set_xlabel("$x$")
        ax[row, col].set_ylabel("$y$")
        ax[row, col].legend(loc="lower left")
    for j, (uni, cheb, num) in enumerate(zip(delta_unifrom, delta_chebyshev, [k, 2 * k
        ax[i + j, 2].set_title("Comparison")
        ax[i + j, 2].set_xlabel("$x$")
        ax[i + j, 2].set_ylabel("$|y_{int}(x) - f(x)|$")
        ax[i + j, 2].plot(x_3k, uni, label="$uniform$")
        ax[i + j, 2].plot(x_3k, cheb, label="$chebyshev$")
        ax[i + j, 2].legend(loc="upper center")
plt.show()
plt.plot(x_3k, delta_unifrom[0], label = "uniform with k nodes")
plt.plot(x_3k, delta_unifrom[1], label = "uniform with 2k nodes")
```

```
plt.plot(x_3k, delta_chebyshev[0], label = "chebyshev with k nodes")
plt.plot(x_3k, delta_chebyshev[1], label = "chebyshev with 2k nodes")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$|y_{int}(x) - f(x)|$")
plt.legend()
plt.show()
```

4.4 Графики интерполяционного многочлена и исходной функции (k и 2k узлов) и их сравнение



4.5 График сравнения k и 2k узлов интерполяции



4.6 Вывод

В данной задаче был рассмотрен метод глобальной интерполяции при равномерном и чебышевском распределениях для k и $2k$ узлов интерполяции. Были построены два графика: при равномерном и чебышевском распределениях узлов для 7 узлов, а также приведен график сравнения погрешностей двух методов. То же было сделано для 14 узлов интерполяции. Из них видно, что чебышевчкое распределение ведет себя лучше, чем равномерное. То же самое заметно и на самих графиках: у равномерного распределения наблюдаются скачки на концах. Кроме того, был построен общий график, сравнивающий результаты равномерного и чебышевского распределений для k и $2k$ узлов интерполяции. Из них видно, что минимальную ошибку дает чебышевское распределение с $2k$ узлами, и с увеличением количества узлов, погрешности становятся меньше.