Reeks-genererende polynomen

Timothy van der Valk, TU Delft

November 3, 2022

Laat $f(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ met $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Laat s_i een reeks in $\mathbb{R}$ zijn, bijvoorbeeld $(1, 2, 3, 4)$. Een polynoom f *genereert* de reeks s_i als $f(i) = s_i$ voor $0 \leq i \leq n$ met een zekere $n \geq 0$.

De polynoom $f(x) = x^2$ genereert $(0, 1, 4)$ omdat $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4$.

1. Geef een polynoom die $(1, 2, 3)$ genereert.
2. Geef een polynoom die $(1, 1, 2)$ genereert.
3. Geef een polynoom die een willekeurige reeks (s_1, s_2, s_3) genereert.
4. Geef de matrix A_3 zodat $A_3 \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}$.
5. Bereken de inverse van A_3. *(Hint: zie 1.3)*
6. Bewijs dat de coefficienten c_i uniek zijn in het genereren van de reeks s_n.

We hebben nu polynomen gevonden die reeksen van drie getallen genereren. Dit process kan worden uitgebreid voor reeksen met n getallen.

Laat f_n een polynoom met graad $n - 1$ gegeven worden door

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \quad . \tag{1}$$

Met $c_i \in \mathbb{R}$. Laat verder $\underline{x}$ de vector zijn met de coefficienten van f zodat $x_i = c_i$. Laat $\underline{b}$ de vector zijn met de functiewaarden van f met $b_i = f(i)$ voor $0 \leq i \leq n$.

1. Geef een formule voor de matrix A_n waarvoor geldt $A_n \cdot \underline{x} = \underline{b}$.
   De matrices A_n zijn inverteerbaar voor alle $n \geq 1$.
2. Geef een tegenvoorbeeld die laat zien dat reeks-genererende polynomen met verschillende graad dezelfde reeks kunnen maken tot op zekere hoogte.
3. Bewijs dat twee reeks-genererende polynomen van dezelfde graad n uniek zijn.≥ 1.
4. **[*Lastig]** Bewijs dat A_n inverteerbaar is.