MiniSatと遺伝アルゴリズムを組み合わせた短い証明の作成

和田 翔太

2024年11月29日

1　概要

aaa

1.1　BBB

bbb

2　導入

3　準備

3.1　SAT

SAT とは命題論理式の充足可能性を判定する問題で Satisfiability Problem の頭 3 文字を取って SAT と呼ばれる。これは与えられた命題論理式を真にするような各変数への割り当てが存在するかどうか (充足可能かどうか) 判定するという問題である。命題論理式を真にするような各変数への割り当てが存在する場合は充足可能 (SAT), 各変数にどのような割り当てをしても全体が真にならない場合は充足不能 (UNSAT) となる。通常 SAT である場合はその解 (各変数への割り当て) を出力する。

3.1.1　定義

問題の形式として自然数 i に対して x_i を真偽値をとる変数とし、$\neg x_i$ を x_i の否定とする。また、$x_i \wedge x_j$ を x_i と x_j の論理積、$x_i \vee x_j$ を x_i と x_j の論理和とする。そして命題変数 x またはその否定 $\neg x$ をリテラルと呼び、リテラルの論理和のことを節と呼ぶ。例えば $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ や $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4$ は節となる。これらを用いて、節を論理積でつなげることで問題となる命題論理式を作成する。この節が論理積で繋がった命題論理式は CNF 式 (Conjuctive Normal Form, 連言標準形) と呼ばれる。

3.1.2　例

- $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$
  - $x_1 = \top$, $x_2 = \bot$ とすると全体が真となるので SAT となる。
- $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$
  - x_1, x_2 に $\top$, $\bot$ どちらを代入した場合でも全体は常に偽になるため UNSAT となる。

3.2 DRAT

3.3 SAT solver

充足可能性問題を解くソルバーのことを SAT solver と呼ぶ。充足可能性問題は NP 完全に属し、解くのに時間がかかる。一番愚直な解き方として、各変数に $\top$ と $\bot$ を代入して全体が真になるかどうかを判断する方法がある。しかしこの場合最悪 2^n 回確認をしなければならない。そのため、速く解くために様々な手法が用いられる。

3.3.1 DPLL アルゴリズム

DPLL(Davis-Putnam-Logemann-Loveland) アルゴリズムとは単位伝搬 (Unit propagation) を用いたアルゴリズムのことである。CNF 式の命題論理式は各節が論理積で繋がった形をしているため、全体が真となるためにはその各節が真とならなければならない。もし仮にある節において、1 つのリテラルのみが未定義でその他のリテラルが偽になる場合 ($x \wedge \bot \wedge \bot ...$)、その節が真になるためには未定義のリテラルが真にならなければならない。このようにして未定義のリテラルが真になるように割り当てを行うことを単位伝搬という (またそのような節を単位節と呼ぶ)。DPLL アルゴリズムは以下のような流れで問題を解いていく

1. 単位節がある場合、それを充足するように変数に割り当てを行う (単位伝搬)
2. 単位節がない場合、適当な変数を選択し真または偽を割り当てていく
   - 割り当てによって単位節ができた場合、単位伝搬を行う
   - 矛盾が発生した場合、最後に選択していた変数の真偽値を反転 (すでに反転していた場合はその 1 つ前の変数を反転) させる
3. 全体が真になった場合は SAT(とその割り当て) を、すべての割り当てにおいて全体が偽になった場合は UNSAT を返す

3.3.2 矛盾からの節学習 (CDCL solver)

3.4 変数選択への介入

3.5 遺伝アルゴリズム

3.6 minisat

4 問い

5 実験

6 結果

7 考察

8 まとめ