6.5 Áreas de superficies de revolución y el teorema de Pappus

Cuando uno salta la cuerda, ésta "barre" una superficie espacial alrededor de la persona, misma que podemos denominar *superficie de revolución*. El "área" de esta superficie depende de la longitud de la cuerda de y la distancia que haya entre cada uno de sus segmentos y el eje de rotación. En esta sección definiremos las áreas de superficies de revolución, y en el capítulo 16 abordaremos superficies más complicadas.

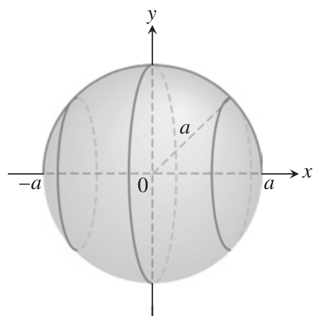


FIGURA 6.41 La rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ de radio a con centro en el origen, genera una superficie esférica con área $4\pi a^2$.

Definición del área de una superficie

Queremos que nuestra definición de área de una superficie de revolución sea consistente con los resultados que nos ofrece la geometría clásica al calcular las áreas de las superficies de esferas, cilindros circulares y conos. De esta manera, si la cuerda para saltar discutida en la introducción del capítulo toma la forma de una semicircunferencia de radio a y se hace girar alrededor del eje x (figura 6.41), ésta generará una esfera cuya superficie tiene área $4\pi a^2$.

Antes de considerar curvas generales, empezaremos nuestro análisis haciendo girar alrededor del eje x segmentos de recta horizontales e inclinados. Si hacemos girar el segmento de recta horizontal AB que tiene longitud Δx (figura 6.42a) alrededor del eje x, generamos un cilindro con área superficialde $2\pi y \Delta x$. Esta área es la misma que la del rectángulo cuyos lados miden Δx y $2\pi y$ (figura 6.42b). La longitud $2\pi y$ es el perímetro de la circunferencia de radio y generado al hacer girar, alrededor del eje x, el punto (x, y) en la línea AB.

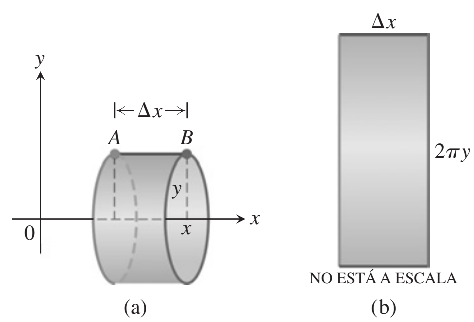


FIGURA 6.42 (a) Una superficie cilíndrica generada al hacer girar el segmento de recta horizontal AB, de longitud Δx, alrededor del eje x, tiene área $2\pi y \Delta x$. (b) Al cortar y desenrollar la superficie cilíndrica se obtiene un rectángulo.

Suponga que el segmento AB tiene longitud Δs y está inclinado en lugar de ser horizontal. Cuando se hace girar alrededor del eje x, genera el tronco de un cono (figura 6.43a). De acuerdo con la geometría clásica, el área de la superficie del tronco de un cono es $2\pi y^* \Delta s$, en donde $y^* = (y_1 + y_2)/2$ es la altura promedio, por encima del eje x, del segmento inclinado AB. Esta área superficial es la misma que la de un rectángulo con lados de longitud Δs y $2\pi y^*$ (figura 6.43b).

Trabajemos con estos principios geométricos para definir el área de la superficie que se barre al hacer girar, alrededor del eje x, curvas más generales. Suponga que queremos determinar el área de la superficie que se barre al hacer girar, alrededor del eje x, la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ de la manera usual y usamos los puntos de la partición para subdividir la gráfica en pequeños arcos. La figura 6.44 muestra un arco representativo PQ y la banda que barre como parte de la gráfica de f.

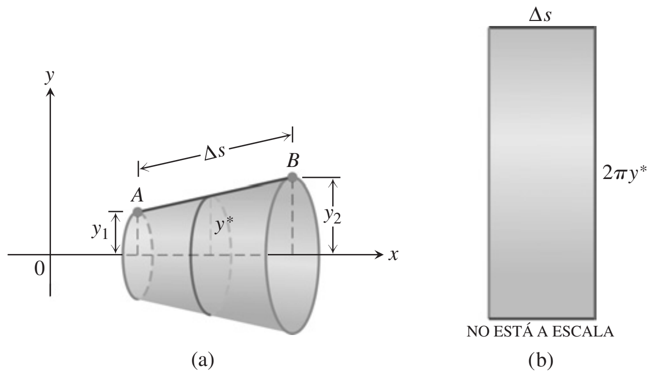


FIGURA 6.43 (a) El tronco de un cono generado por la rotación alrededor del eje x del segmento de recta inclinado AB, de longitud Δs, tiene área $2\pi y^* \Delta s$. (b) El área del rectángulo para $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, la altura promedio de AB sobre el eje x.

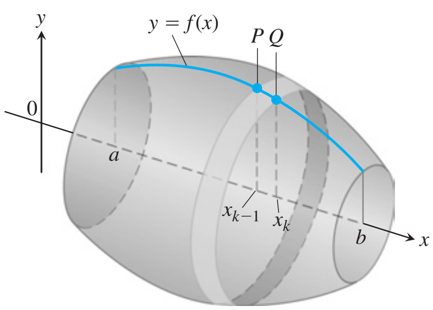


FIGURA 6.44 Superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$, La superficie es una unión de bandas, como la que barre el arco PQ.

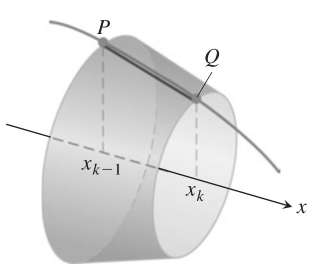


FIGURA 6.45 El segmento de recta que une P y Q barre un tronco de cono.

Conforme el arco PQ gira alrededor del eje x, el segmento que une P con Q barre el tronco de un cono cuyo eje está en el eje x (figura 6.45). El área de la superficie de este tronco aproxima el área de la superficie de la banda barrida por el arco PQ. El área de la superficie del tronco que se muestra en la figura 6.45 es $2\pi y^* L$, donde y^* es la altura promedio del segmento que une P con Q y L es su longitud (igual que antes). Como $f \ge 0$, de acuerdo con la figura 6.46 vemos que la altura promedio del segmento de recta es $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$, y la longitud del segmento inclinado es $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Área de la superficie del tronco} &= 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.\end{aligned}$$

Como el área de la superficie original es la suma de las áreas de las bandas barridas por arcos como el PQ, ésta se aproxima por medio de la suma de las áreas de los troncos

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \tag{1}$$

Esperamos que la aproximación mejorará conforme la partición de $[a, b]$ sea más fina. Además, si la función f es diferenciable entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe un punto $(c_k, f(c_k))$ en la curva entre P y Q donde la tangente es paralela al segmento PQ (figura 6.47). En este punto,

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k},$$

$$\Delta y_k = f'(c_k)\, \Delta x_k.$$

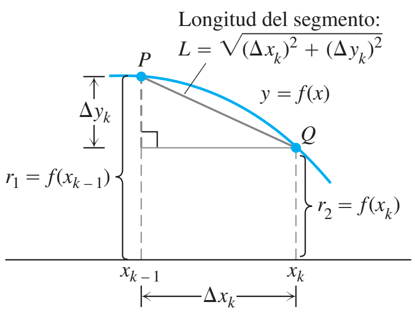


FIGURA 6.46 Dimensiones asociadas con el arco y el segmento PQ.

Con esta sustitución para Δy_k, las sumas en la ecuación (1) toman la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Estas sumas no son las sumas de Riemann de alguna función, ya que los puntos x_{k-1}, x_k y c_k no son iguales. Sin embargo, un teorema de cálculo avanzado nos asegura que cuando la norma de la partición de $[a, b]$ tiende a cero, las sumas de la ecuación (2) convergen a la integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Por lo tanto, definimos esta integral como el área de la superficie barrida por la gráfica de f, de a a b.

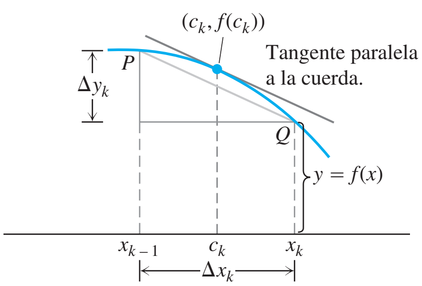


FIGURA 6.47 Si f es suave, el Teorema del Valor Medio asegura la existencia de un punto c_k en donde la tangente es paralela al segmento PQ.

DEFINICIÓN Área superficial para rotación alrededor del eje x

Si la función $f(x) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$, el **área** de la superficie generada al hacer girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{3}$$

La raíz cuadrada de la ecuación (3) es la misma que aparece en la fórmula para calcular longitud de arco en la ecuación (2) de la sección 6.3.

EJEMPLO 1 Aplicando la fórmula de área superficial

Determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, alrededor del eje x (figura 6.48).

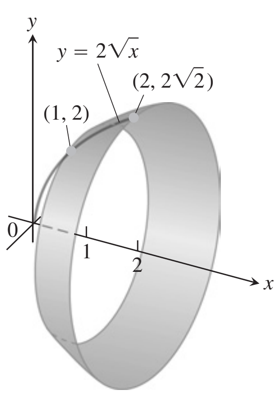


FIGURA 6.48 En el ejemplo 1 calculamos el área de esta superficie.

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \text{Ecuación (3)}$$

con

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

Con estas sustituciones,

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

Rotación alrededor del eje y

Para rotaciones alrededor del eje y, intercambiamos x y y en la ecuación (3).

Área superficial para rotaciones alrededor del eje y

Si $x = g(y) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[c, d]$, el área de la superficie generada al hacer girar la curva $x = g(y)$ alrededor del eje y es

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy. \qquad (4)$$

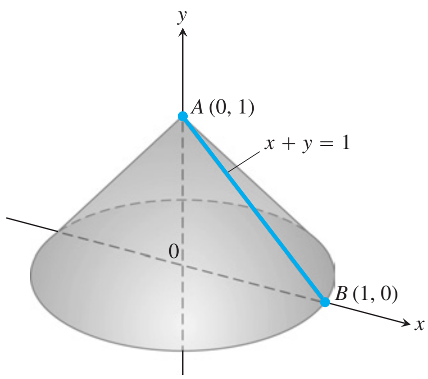


FIGURA 6.49 Al hacer girar el segmento de recta AB alrededor del eje y se genera un cono, cuya superficie lateral se puede calcular de dos formas distintas (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Determinación del área rotando alrededor del eje y

El segmento de recta $x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, se hacer girar alrededor del eje y para generar el cono de la figura 6.49. Determinar el área de su superficie lateral (la cual excluye el área de la base).

Solución En este caso tenemos un cálculo que podemos comprobar con una fórmula geométrica:

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{\text{circunferencia de la base}}{2} \times \text{altura inclinada} = \pi\sqrt{2}.$$

Para ver si la ecuación (4) da el mismo resultado, tomamos

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

y calculamos

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\,dy$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

Los resultados coinciden, tal como esperábamos.

Curvas parametrizadas

Sin importar el eje coordenado de rotación, las raíces cuadradas que aparecen en las ecuaciones (3) y (4) son las mismas que aparecen en las fórmulas para calcular la longitud de arco (sección 6.3). Si la curva está parametrizada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, donde f y g son continuamente diferenciables en $[a, b]$, entonces la raíz cuadrada correspondiente que aparece en la fórmula para determinar la longitud de arco es

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Esta observación nos conduce a las siguientes fórmulas para calcular el área de superficies de revolución para curvas suaves parametrizadas.

Área de una superficie de revolución para curvas parametrizadas

Si una curva suave $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, se recorre una sola vez a medida que t aumenta de a a b, entonces las áreas de las superficies generadas al hacer girar la curva alrededor de los ejes coordenados son las siguientes.

1. Rotación alrededor del eje x $(y \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5}$$

2. Rotación alrededor del eje y $(x \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{6}$$

Al igual que con la longitud, podemos calcular el área de la superficie a partir de cualquier parametrización que cumpla con los criterios establecidos.

EJEMPLO 3 Aplicando la fórmula para el área superficial

La parametrización estándar de la circunferencia de radio 1 con centro en el punto (0, 1) en el plano xy es

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usar esta parametrización para determinar el área de la superficie barrida al hacer girar la circunferencia alrededor del eje x (figura 6.50).

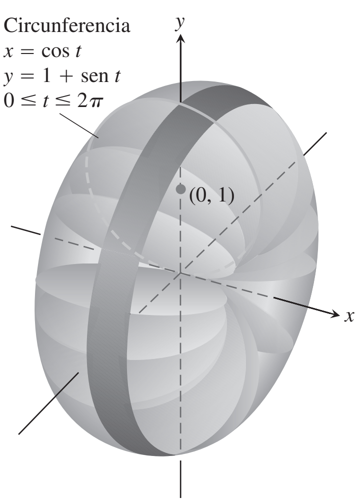


FIGURA 6.50 En el ejemplo 3 calculamos el área de la superficie de rotación barrida por esta curva parametrizada.

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

La ecuación (5) para rotación alrededor del eje $y = 1 + \operatorname{sen} t > 0$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \operatorname{sen} t)\underbrace{\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}}_{1}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\pi\Big[t - \cos t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2.$$ ■

La forma diferencial

Las ecuaciones

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{y} \qquad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

suelen escribirse en términos de la diferencial de la longitud de arco $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ como

$$S = \int_a^b 2\pi y\, ds \qquad \text{y} \qquad S = \int_c^d 2\pi x\, ds.$$

En la primera, y es la distancia entre el eje x y un elemento de longitud de arco ds. En la segunda, x es la distancia entre el eje y y un elemento de longitud de arco ds. Ambas integrales tienen la forma

$$S = \int 2\pi(\text{radio})(\text{ancho de la banda}) = \int 2\pi\rho\, ds \qquad (7)$$

donde ρ es el radio entre el eje de rotación y un elemento de longitud de arco ds (figura 6.51).

Así pues, en cualquier problema particular, expresaríamos la función del radio ρ y la diferencial de la longitud de arco ds en términos de una variable común y proporcionaríamos los límites de integración para esa variable.

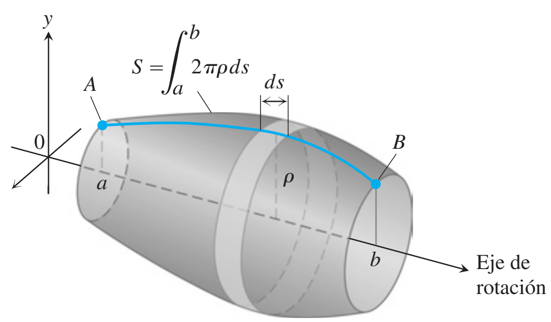


FIGURA 6.51 El área de la superficie barrida al hacer girar el arco AB alrededor del eje que se muestra aquí es $\int_a^b 2\pi\rho\, ds$. La expresión exacta depende de las fórmulas para ρ y ds.

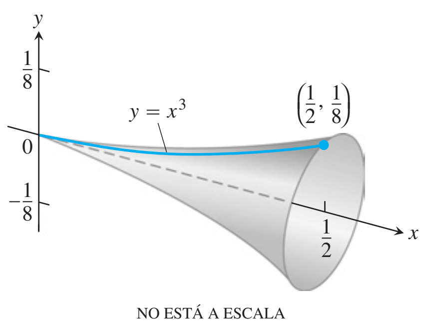


FIGURA 6.52 La superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$, podría ser el diseño para una copa para champaña (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Uso de la forma diferencial para calcular áreas de superficies

Determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$, alrededor del eje x (figura 6.52).

Solución Empezamos con la forma diferencial abreviada:

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho\, ds \\ &= \int 2\pi y\, ds && \text{Para rotación alrededor del eje } x\text{, la función del radio es } \rho = y > 0 \text{ en } 0 \le x \le 1/2. \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}. && ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

Después, decidimos si expresaremos dy en términos de dx o dx en términos de dy. La forma original de la ecuación, $y = x^3$ hace que sea más sencillo expresar dy en términos de dx, de modo que continuamos el cálculo con:

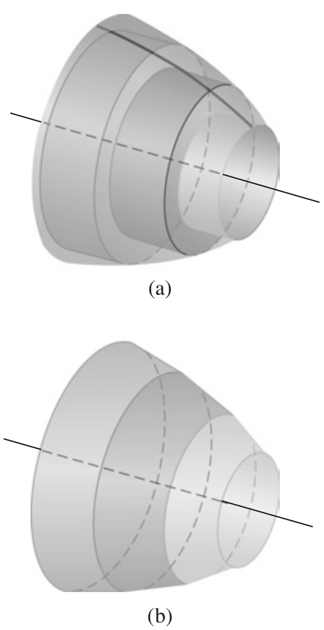
$$y = x^3, \qquad dy = 3x^2\,dx, \qquad \text{y} \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2\,dx)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 9x^4}\,dx.$$

Con estas sustituciones, x se convierte en la variable de integración y

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} \\
&= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1 + 9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2} \\
&= \frac{\pi}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1\right] \\
&= \frac{\pi}{27}\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right) \\
&= \frac{61\pi}{1728}.
\end{aligned}$$

Se sustituye $u = 1 + 9x^4$, $du/36 = x^3\,dx$; se integra y se sustituye nuevamente.

Bandas cilíndricas versus bandas cónicas



(a)

(b)

FIGURA 6.53 ¿Por qué no utilizar (a) bandas cilíndricas en lugar de (b) bandas cónicas para aproximar el área de una superficie?

¿Por qué no calcular el área de la superficie con bandas cilíndricas en lugar de utilizar bandas cónicas, como se sugiere en la figura 6.53? Las sumas de Riemann que obtenemos de esta manera convergen tan bien como las que tienen como base las bandas cónicas y la integral resultante es además más sencilla. Para rotación alrededor del eje x el radio en la ecuación (7) es $\rho = y$ y el ancho de la banda es $ds = dx$. Esto lleva a la fórmula integral

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\,dx \tag{8}$$

en lugar de la que se definió en la ecuación (3). El problema con esta nueva fórmula es que no da resultados consistentes con las fórmulas que ofrece la geometría clásica para calcular áreas de superficies, lo cual era una de nuestras metas al principio. El hecho de obtener una integral aparentemente apropiada a partir de una deducción de sumas de Riemann, no significa que tal integral calculará lo que queremos. (Vea el ejercicio 40).

PRECAUCIÓN No utilice la ecuación (8) para calcular el área de superficies, *No* le proporcionará el resultado correcto.

Teorema de Pappus

En el siglo III, un griego de la ciudad de Alejandría, llamado Pappus, descubrió dos fórmulas que relacionan los centroides con las superficies y con los sólidos de revolución. Tales fórmulas simplifican cálculos que de otra manera serían muy largos.

TEOREMA 1 Teorema de Pappus para volúmenes

Si una región plana se hacer girar alrededor de una recta en el plano, de manera que esta última no corte el interior de la región, entonces el volumen del sólido generado es igual al área de la región por la distancia recorrida por su centroide durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces

$$V = 2\pi\rho A. \tag{9}$$

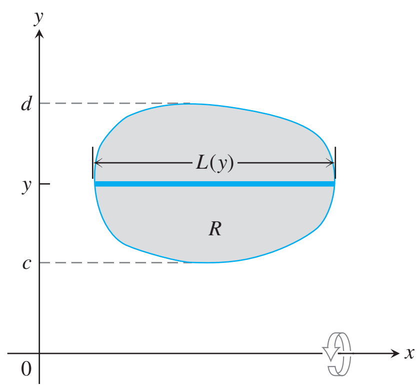


FIGURA 6.54 La región R se hará girar (una vez) alrededor del eje x para generar un sólido. Un teorema que data de hace 1700 años establece que el volumen del sólido puede calcularse multiplicando el área de la región por la distancia recorrida por el centroide durante la rotación.

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x, con la región R en el primer cuadrante (figura 6.54). Denotamos con $L(y)$ la longitud de la sección transversal de R perpendicular al eje y en y. Suponemos que $L(y)$ es continua.

Por el método de los casquillos cilíndricos, el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es

$$V = \int_c^d 2\pi(\text{radio del casquillo})(\text{altura del casquillo})\, dy = 2\pi \int_c^d y\, L(y)\, dy. \tag{10}$$

La coordenada y del centroide de R es

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\, dA}{A} = \frac{\int_c^d y\, L(y)\, dy}{A}, \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)dy$$

por lo que

$$\int_c^d y\, L(y)\, dy = A\bar{y}.$$

Sustituyendo $A\bar{y}$ por la última integral de la ecuación (10), se obtiene $V = 2\pi\bar{y}A$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $V = 2\pi\rho A$. ■

EJEMPLO 5 Volumen de un toro

El volumen de un toro (sólido con forma de dona) generado al hacer girar un disco circular de radio a alrededor de un eje en su plano, a una distancia $b \geq a$ de su centro (figura 6.55), es

$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2.$$ ■

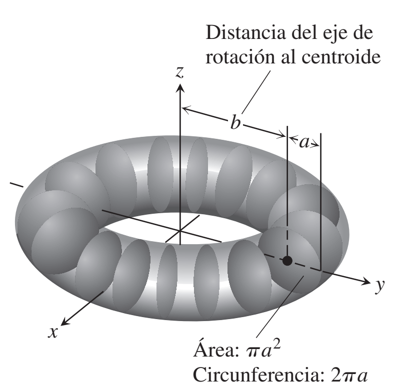


FIGURA 6.55 Con el primer teorema de Pappus podemos determinar el volumen de un toro sin tener que integrar (ejemplo 5).

EJEMPLO 6 Localización del centroide de una región semicircular

Solución Modelamos la región como la región entre la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.56) y el eje x; imagine que hacemos girar la región alrededor del eje x para generar una esfera sólida. Por simetría, la coordenada x del centroide es $\bar{x} = 0$. Con $\bar{y} = \rho$ en la ecuación (9), tenemos

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a.$$ ■

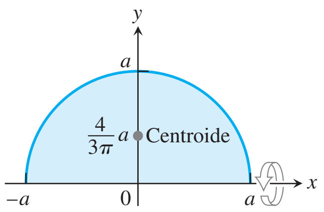


FIGURA 6.56 Con el primer teorema de Pappus podemos localizar el centroide de una región semicircular sin tener que integrar (ejemplo 6).

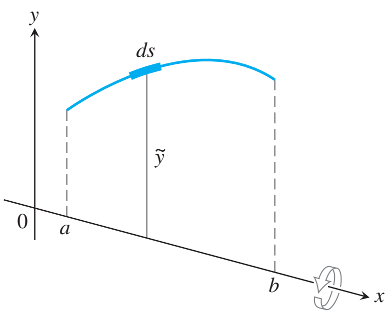


FIGURA 6.57 Figura para demostrar el teorema de Pappus para la determinación de áreas.

TEOREMA 2 Teorema de Pappus para áreas de superficies
Si un arco de una curva plana suave se hacer girar una vez alrededor de una recta en el plano, de manera que ésta no corte el interior del arco, entonces el área de la superficie generada por el arco es igual a la longitud del arco por la distancia recorrida por el centroide del arco durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces

$$S = 2\pi\rho L. \tag{11}$$

La demostración que damos supone que podemos modelar el eje de rotación como el eje x y el arco como la gráfica de una función continuamente diferenciable de x.

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x con el arco extendiéndose desde $x = a$ hasta $x = b$ en el primer cuadrante (figura 6.57). El área de la superficie generada por el arco es

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds. \tag{12}$$

La coordenada y del centroide del arco es

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}.$$

$L = \int ds$ es la longitud del arco y $\tilde{y} = y$.

Por lo que

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L.$$

Al sustituir $\bar{y}L$ por la última integral de la ecuación 12 se obtiene $S = 2\pi\bar{y}L$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $S = 2\pi\rho L$. ■

EJEMPLO 7 Área de la superficie de un toro

El área de la superficie del toro del ejemplo 5 es

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba.$$

EJERCICIOS 6.5

Determinación de integrales para calcular áreas de superficies

En los ejercicios 1 a 8:

a. Establezca una integral para calcular el área de la superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje indicado.

T **b.** Grafique la curva para observar su apariencia. Si puede, grafique también la superficie.

T **c.** Utilice el evaluador de integrales de su calculadora gráfica o de su computadora para determinar numéricamente el área de la superficie.

1. $y = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi/4;$ eje x

2. $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2;$ eje x

3. $xy = 1, \quad 1 \le y \le 2;$ eje y

4. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi;$ eje y

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ de $(4, 1)$ a $(1, 4)$; eje x

6. $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \le y \le 2;$ eje y

7. $x = \int_0^y \tan t\, dt, \quad 0 \le y \le \pi/3;$ eje y

8. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt, \quad 1 \le x \le \sqrt{5};$ eje x

Determinación de áreas de superficies

9. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje x. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia de la base} \times \text{altura inclinada.}$$

10. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje y. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia de la base} \times \text{altura inclinada.}$$

11. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$, alrededor del eje x. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie de un tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{ altura inclinada.}$$

12. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$, alrededor del eje y. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie de un tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{ altura inclinada.}$$

En los ejercicios 13 a 22, determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje indicado. Si tiene una calculadora gráfica, grafique estas curvas para ver cómo lucen.

13. $y = x^3/9, \quad 0 \le x \le 2; \quad$ eje x

14. $y = \sqrt{x}, \quad 3/4 \le x \le 15/4; \quad$ eje x

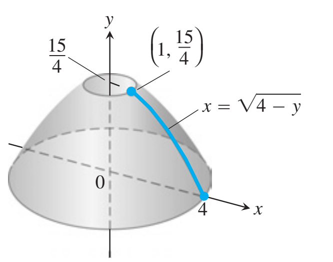
15. $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \le x \le 1.5; \quad$ eje x

16. $y = \sqrt{x + 1}, \quad 1 \le x \le 5; \quad$ eje x

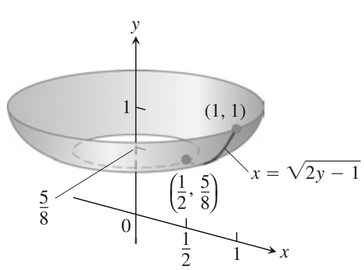
17. $x = y^3/3, \quad 0 \le y \le 1; \quad$ eje y

18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3; \quad$ eje y

19. $x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \le y \le 15/4; \quad$ eje y



20. $x = \sqrt{2y - 1}, \quad 5/8 \le y \le 1; \quad$ eje y



21. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$, $\quad 1 \le y \le 2$; eje x. (*Sugerencia*: Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dy y evalúe la integral $S = \int 2\pi y\, ds$ con límites apropiados).

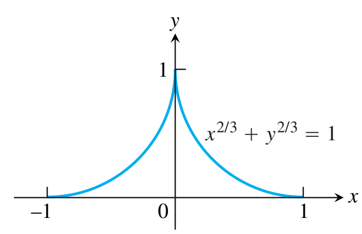
22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, $\quad 0 \le x \le \sqrt{2}$; (*Sugerencia*: Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dx y evalúe la integral $S = \int 2\pi x\, ds$ con límites apropiados).

23. Prueba de la nueva definición Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio a sigue siendo $4\pi a^2$; utilice la ecuación (3) para determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$, alrededor del eje x.

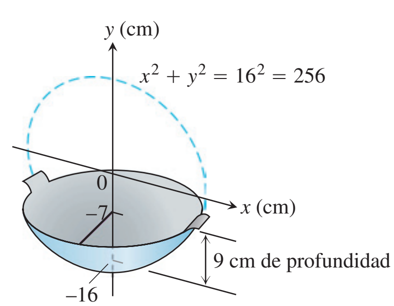
24. Prueba de la nueva definición El área de la superficie lateral de un cono de altura h y radio de la base r debe ser $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, el semiperímetro de la base por la altura inclinada. Demuestre que éste es el caso determinando el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, el segmento de recta $y = (r/h)x$, $0 \le x \le h$.

25. Escriba una integral para calcular el área de las superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, En la sección 8.5 veremos cómo evaluar este tipo de integrales.

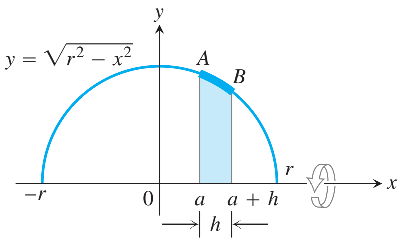
26. Superficie de una astroide Determine el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje x la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ que se muestra a continuación. (*Sugerencia*: Haga girar la parte del primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje x y multiplique su resultado por dos).



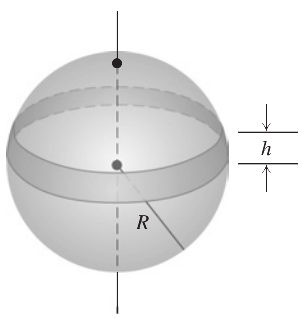
T 27. Esmaltado de sartenes La compañía en donde trabaja decidió producir una versión de lujo de la exitosa sartén que usted diseñó en la sección 6.1, ejercicio 55. El plan es recubrir la parte interior con un esmalte blanco y la exterior con esmalte azul. Cada esmalte se aplicará en una capa de 0.5 mm de grosor antes de hornear la sartén. (Vea el diagrama). El departamento de manufactura necesita saber cuánto esmalte debe tener disponible para producir 5000 sartenes. ¿Qué les diría? (No tome en cuenta el material que se desperdicia ni el material no usado, y proporcione su respuesta en litros. Recuerde que $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{mL}$, por lo que $1\ \text{L} = 1000\ \text{cm}^3$).



28. Rebanadas de pan ¿Sabía que si corta una pieza esférica de pan en rebanadas del mismo ancho, cada una tendrá la misma cantidad de corteza? Para ver por qué, suponga que la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ que se muestra aquí se hace girar alrededor del eje x para generar una esfera. Sea AB un arco de la semicircunferencia que está sobre un intervalo de longitud h en el eje x. Demuestre que el área barrida por AB no depende de la ubicación del intervalo. (Sí depende de la longitud del intervalo).



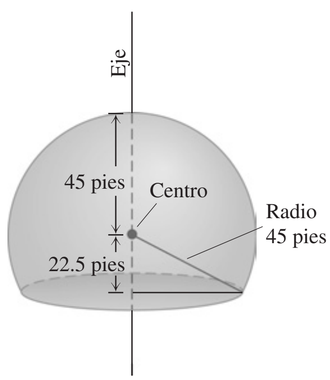
29. Por medio de planos paralelos separados una distancia h, se corta, de una esfera de radio R, la banda sombreada que se muestra a continuación. Demuestre que el área de la superficie de la banda es $2\pi Rh$.



30. A continuación se muestra un dibujo esquemático del domo de 90 pies que utilizó el Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos para alojar un radar en Bozeman, Montana.

a. ¿A cuánto equivale la superficie exterior que se requiere pintar (sin tomar en cuenta la parte inferior)?

T **b.** Exprese la respuesta al pie cuadrado más cercano.



31. Superficies generadas por curvas que cruzan el eje de rotación La fórmula para calcular el área de una superficie en la ecuación (3), se desarrolló bajo la hipótesis de que la función f, cuya gráfica generaba la superficie, era no negativa en el intervalo $[a, b]$. Para el caso de curvas que cruzan el eje de rotación, reemplazamos la ecuación (3) con la fórmula con valor absoluto

$$S = \int 2\pi\rho\, ds = \int 2\pi |f(x)|\, ds. \qquad (13)$$

Utilice la ecuación (13) para determinar el área de la superficie del doble cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x, -1 \le x \le 2$, alrededor del eje x.

32. (*Continuación del ejercicio 31*). Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = x^3/9, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$, alrededor del eje s. ¿Qué cree que sucedería si quitara las barras de valor absoluto en la ecuación (13) e intentara determinar el área de la superficie mediante la fórmula $S = \int 2\pi f(x)\, ds$? Inténtelo.

Parametrizaciones

En los ejercicios 33 a 35, determine el área de cada superficie generada al hacer girar las curvas alrededor del eje indicado.

33. $x = \cos t, \quad y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi;$ eje x.

34. $x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3};$ eje y.

35. $x = t + \sqrt{2}, \quad y = (t^2/2) + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2};$ eje y.

36. Establezca, pero no evalúe, una integral que represente el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$, alrededor del eje x.

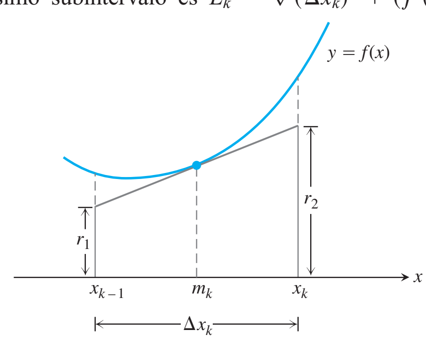
37. Tronco de un cono El segmento de recta que une los puntos (0, 1) y (2, 2) se hace girar alrededor del eje x para generar el tronco de un cono. Determine el área de la superficie del tronco por medio de la parametrización $x = 2t, y = t + 1, 0 \le t \le 1$. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi(r_1 + r_2)$ (altura inclinada).

38. Un cono El segmento de recta que va del origen al punto (h, r) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono de altura h y radio de la base r. Determine el área de la superficie del cono con las ecuaciones paramétricas $x = ht, y = rt, 0 \le t \le 1$. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi r$(altura inclinada).

39. Una deducción alternativa de la fórmula para calcular el área de una superficie Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que $[a, b]$ se divide en la forma usual. En el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se construye la recta tangente a la curva en el punto medio $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, como se muestra en la figura siguiente.

a. Demuestre que $r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$ y $r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$.

b. Demuestre que la longitud L_k del segmento de recta tangente en el k-ésimo subintervalo es $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\,\Delta x_k)^2}$.

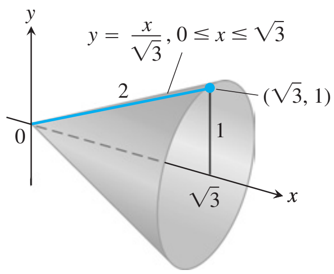


c. Demuestre que el área de la superficie lateral del tronco del cono barrido por el segmento de recta tangente cuando éste se hace girar alrededor del eje x es $2\pi f(m_k)\sqrt{1+(f'(m_k))^2}\,\Delta x_k$.

d. Demuestre que el área de la superficie generada al hacer girar $y=f(x)$ alrededor del eje x en $[a, b]$ es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{área de la superficie lateral}\\ \text{del } k\text{–ésimo tronco}\end{pmatrix} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

40. Modelado del área de una superficie El área de la superficie lateral del cono barrido al hacer girar el segmento de recta $y = x/\sqrt{3},\ 0 \le x \le \sqrt{3}$, alrededor del eje x debe ser (1/2)(circunferencia de la base)(altura inclinada) $= (1/2)(2\pi)(2) = 2\pi$. ¿Qué obtiene si utiliza la ecuación (8) con $f(x) = x/\sqrt{3}$?



El teorema de Pappus

41. La región cuadrada con vértices (0, 2), (2, 0), (4, 2) y (2, 4) se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen y el área de la superficie del sólido.

42. Utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen generado al hacer girar la región triangular acotada por los ejes coordenados y la recta $2x + y = 6$ alrededor de la recta $x = 5$. (Como vio en el ejercicio 29 de la sección 6.4, el centroide de un triángulo se encuentra en la intersección de sus medianas, a un tercio de la distancia entre el punto medio de cada lado y el vértice opuesto).

43. Determine el volumen del toro generado al hacer girar la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y.

44. Utilice el teorema de Pappus para determinar el área de la superficie lateral y el volumen de un cono circular recto.

45. Utilice el segundo teorema de Pappus y el hecho de que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$ para determinar el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

46. Como se determinó en el problema 45, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ se encuentra en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie que se barre al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = a$.

47. El área de la región R acotada por la semielipse $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x es $(1/2)\pi ab$, y el volumen del elipsoide generado al hacer girar R alrededor del eje x es $(4/3)\pi ab^2$. Determine el centroide de R. Observe que la ubicación es independiente de a.

48. Como se determinó en el ejemplo 6, el centroide de la región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 4a/3\pi)$. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor de la recta $y = -a$.

49. La región del ejercicio 48 se hace girar alrededor de la recta $y = x - a$ para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

50. Como se determinó en el ejercicio 45, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie generada al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = x - a$.

51. Determine el momento, con respecto aleje x, de la región semicircular del ejemplo 6. Si utiliza los resultados conocidos, no será necesario integrar.

6.6 Trabajo

En la vida cotidiana, el término *trabajo* hace referencia a una actividad que requiere esfuerzo muscular o mental. En la ciencia, este concepto alude específicamente a una fuerza que actúa sobre un cuerpo y al consecuente desplazamiento del cuerpo. En esta sección mostraremos cómo se calcula el trabajo. Las aplicaciones van desde la compresión de resortes en vagones de ferrocarril y el drenado de tanques subterráneos, hasta forzar electrones a juntarse y la puesta en órbita de satélites.

Trabajo realizado por una fuerza constante

Cuando un cuerpo se mueve una distancia d a lo largo de una línea recta como resultado de la aplicación de una fuerza constante de magnitud F en la dirección del movimiento, definimos el **trabajo** T realizado por la fuerza sobre el cuerpo mediante la fórmula

$$T = Fd \quad \text{(Fórmula para calcular el trabajo con fuerza constante).} \qquad (1)$$

Joules
El joule debe su nombre al físico inglés James Prescott Joule (1818-1889). La ecuación que lo define es

$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})(1 \text{ metro}).$$

En símbolos, $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

De acuerdo con la ecuación (1), vemos que la unidad de trabajo en cualquier sistema es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En las unidades del sistema internacional de medidas (SI), la unidad de fuerza es el newton, la unidad de distancia el metro, y la unidad de trabajo el newton-metro $(\text{N} \cdot \text{m})$. Esta combinación aparece con tanta frecuencia que tiene un nombre especial: **joule**. En el sistema inglés, la unidad de trabajo es la libra-pie, una unidad utilizada comúnmente por los ingenieros.

EJEMPLO 1 Levantamiento de un automóvil

Si usted levanta 1.25 pies uno de los lados de un automóvil de 2000 lb para cambiar un neumático (para lo cual tendría que aplicar una fuerza vertical constante de alrededor de 1000 lb), realizará $1000 \times 1.25 = 1250$ lb-pie de trabajo sobre el automóvil. En unidades del SI, diríamos que ha aplicado una fuerza de 4448 N a lo largo de una distancia de 0.381 m para hacer $4448 \times 0.381 \approx 1695$ J de trabajo. ■

Trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de una recta

Si la fuerza que se aplica varía durante el proceso, como ocurre al comprimir un resorte, la fórmula $T = Fd$ tiene que reemplazarse por una integral que tome en cuenta la variación de F.

Suponga que la fuerza que realiza el trabajo actúa a lo largo de una línea que consideraremos como el eje x, y que su magnitud F es una función continua de la posición. Queremos determinar el trabajo realizado en el intervalo de $x = a$ a $x = b$. Hacemos una partición de $[a, b]$ en la forma usual, y elegimos un punto arbitrario c_k en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Si el intervalo es suficientemente pequeño, dado que F es continua no variará mucho de x_{k-1} a x_k. La cantidad de trabajo realizado a lo largo del intervalo será aproximadamente $F(c_k)$ veces la distancia Δx_k, la misma que obtendríamos si F fuese constante y aplicáramos la ecuación (1). Por lo tanto, el trabajo total realizado de a a b se aproxima mediante la suma de Riemann

$$\text{Trabajo} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\, \Delta x_k.$$

Cabe esperar que la aproximación mejorará a medida que la norma de la partición tienda a cero, así que definimos el trabajo realizado por la fuerza de a a b como la integral de F de a a b.

DEFINICIÓN Trabajo
El **trabajo** realizado por una fuerza variable $F(x)$ dirigida a lo largo del eje x de $x = a$ a $x = b$ es

$$W = \int_a^b F(x)\, dx. \qquad (2)$$

Las unidades de la integral son joules si F está en newtons y x en metros, y libras-pie si F está en libras y x en pies. Así, el trabajo realizado por la fuerza $F(x) = 1/x^2$ newtons a lo largo del eje x de $x = 1$ m a $x = 10$ m es

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}.$$

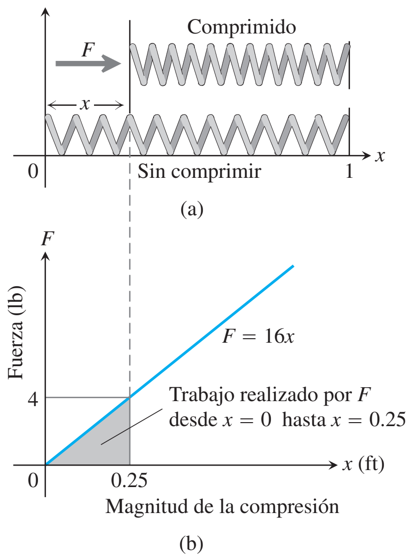


FIGURA 6.58 La fuerza F necesaria para mantener un resorte bajo compresión aumenta linealmente conforme se comprime el resorte (ejemplo 2).

Ley de Hooke para resortes: $F = kx$

La **ley de Hooke** establece que la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud a partir de su longitud natural (sin comprimir), es proporcional a x. En símbolos,

$$F = kx. \tag{3}$$

La constante k, medida en unidades de fuerza por unidad de longitud, es una característica del resorte, denominada **constante del resorte** (o **constante de fuerza del resorte**). La ley de Hooke, ecuación (3), proporciona buenos resultados, siempre y cuando la fuerza no distorsione el metal del que está hecho el resorte. En esta sección supondremos que las fuerzas son muy pequeñas para hacerlo.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte

Determinar el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 pie a una longitud de 0.75 pies, si la constante del resorte es $k = 16$ lb/pie.

Solución Dibujamos el resorte sin comprimir sobre el eje x, con su extremo móvil en el origen y el extremo fijo en $x = 1$ pie (figura 6.58). Esto nos permite describir la fuerza requerida para comprimir el resorte desde 0 hasta x con la fórmula $F = 16x$. Para comprimir el resorte desde 0 hasta 0.25 pies, la fuerza debe aumentar de

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb} \qquad \text{a} \qquad F(0.25) = 16 \cdot 0.25 = 4 \text{ lb}.$$

El trabajo realizado por F en el intervalo es

$$T = \int_0^{0.25} 16x\, dx = 8x^2 \Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ lb-pies}.$$

La ecuación 2 con $a = 0$, $b = 0.25$, $F(x) = 16x$

EJEMPLO 3 Trabajo para estirar un resorte

Un resorte tiene una longitud natural de 1 m, Una fuerza de 24 N lo estira hasta una longitud de 1.8 m.

(a) Determinar la constante k del resorte.

(b) ¿Cuánto trabajo se requerirá para estirar el resorte hasta 2 m más que su longitud natural?

(c) ¿Hasta qué longitud se estirará el resorte si le aplicamos una fuerza de 45 N?

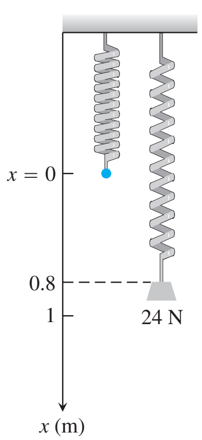


FIGURA 6.59 Un peso de 24 N alarga este resorte 0.8 m más que su longitud natural (ejemplo 3).

Solución

(a) *La constante k del resorte.* Determinamos la constante k del resorte a partir de la ecuación (3). Una fuerza de 24 N estira el resorte 0.8 m, de manera que

$$24 = k(0.8)$$
$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m}.$$

La ecuación 3 con $F = 24$, $x = 0.8$

(b) *El trabajo para estirar el resorte 2 m.* Imaginemos que el resorte sin estirar cuelga a lo largo del eje x con su extremo libre en $x = 0$ (figura 6.59). La fuerza requerida para estirar el resorte x m más allá de su longitud natural, es la fuerza que se requiere para jalar el extremo libre del resorte x unidades desde el origen. La ley de Hooke con $k = 30$ establece que esta fuerza es

$$F(x) = 30x.$$

El trabajo realizado por F sobre el resorte desde $x = 0$ m hasta $x = 2$ m es

$$T = \int_0^2 30x\,dx = 15x^2\Big]_0^2 = 60\text{ J}.$$

(c) *¿Hasta qué longitud se estira el resorte con una fuerza de* 45 N? Sustituimos $F = 45$ en la ecuación $F = 30x$ para determinar

$$45 = 30x, \qquad \text{o} \qquad x = 1.5\text{ m}.$$

Una fuerza de 45 N estirará el resorte 1.5 m. Para determinar esto no se requiere cálculo. ■

La integral del trabajo es útil para calcular el trabajo realizado al elevar objetos cuyos pesos varían según la elevación.

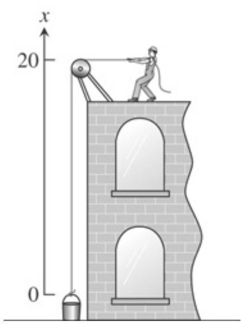


FIGURA 6.60 Elevación de la cubeta del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Trabajo realizado al subir una cuerda y una cubeta

Una cubeta de 5 lb se eleva desde el piso, jalándola con una cuerda de 20 pies a una velocidad constante (figura 6.60). La cuerda pesa 0.08 lb/pie. ¿Cuánto trabajo se realiza al subir la cubeta y la cuerda?

Solución La cubeta tiene un peso constante, por lo que el trabajo realizado al elevar sólo la cubeta es peso $\times$ distancia $= 5 \cdot 20 = 100$ lb-pie.

El peso de la cuerda varía conforme se sube la cubeta, ya que hay menos cuerda colgando. Cuando la cubeta se encuentra a x pies del piso, la parte de la cuerda que falta por subir pesa $(0.08) \cdot (20 - x)$ lb. Por lo tanto, el trabajo para subir la cuerda es

$$\begin{aligned}\text{Trabajo sobre la cuerda} &= \int_0^{20} (0.08)(20 - x)\,dx = \int_0^{20} (1.6 - 0.08x)\,dx \\ &= \left[1.6x - 0.04x^2\right]_0^{20} = 32 - 16 = 16\text{ lb-pies}.\end{aligned}$$

El trabajo total para la combinación cubeta y cuerda es

$$100 + 16 = 116\text{ lb-pies}.$$ ■

Bombeo de líquidos desde contenedores

¿Cuánto trabajo se requiere para bombear todo o parte del líquido que hay en un contenedor? Para determinarlo, imaginamos que se eleva una delgada capa horizontal del líquido cada vez y aplicamos la ecuación $T = Fd$ a cada capa. Luego evaluamos la integral que se obtiene cuando las capas son cada vez más delgadas y numerosas. La integral que obtenemos cada vez depende del peso del líquido y de las dimensiones del contenedor, pero la forma de determinar la integral siempre es la misma. Los ejemplos siguientes muestran cómo hacerlo.

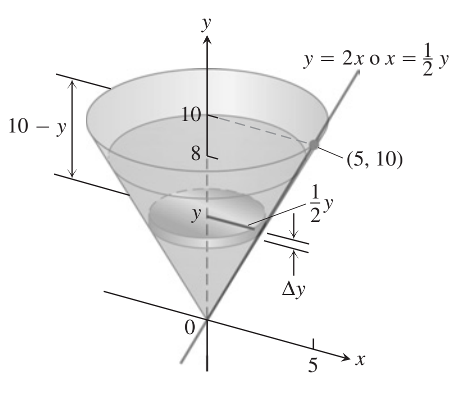


FIGURA 6.61 Tanque contenedor de aceite de oliva (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Bombeo de aceite desde un tanque cónico

El tanque cónico de la figura 6.61 se llena hasta 2 pies de la parte superior con aceite de oliva, que pesa 57 lb/pie^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite hasta el borde del tanque?

Solución Imaginemos que el aceite se divide en capas delgadas por medio de planos perpendiculares al eje y, en los puntos de una partición del intervalo [0, 8].

Una capa representativa entre los planos en y y $y + \Delta y$ tiene un volumen aproximado de

$$\Delta V = \pi(\text{radio})^2(\text{grosor}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\,\Delta y\text{ pies}^3.$$

La fuerza $F(y)$ requerida para elevar esta capa es igual a su peso,

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ lb.}$$

Peso = peso por unidad de volumen × volumen

La distancia a través de la cual $F(y)$ debe actuar para elevar esta capa al nivel del borde del cono es aproximadamente $(10 - y)$ pies, así que el trabajo realizado para elevar la capa es de más o menos

$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,\Delta y \text{ lb-pies.}$$

Suponiendo que existen n capas asociadas con la partición de $[0, 8]$ y que $y = y_k$ denota el plano asociado con la *k-ésima* capa de grosor Δy_k, podemos aproximar el trabajo realizado al elevar todas las capas mediante la suma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{57\pi}{4}(10 - y_k){y_k}^2\,\Delta y_k \text{ lb-pies.}$$

El trabajo de bombear el aceite hasta el borde es el límite de estas sumas conforme la norma de la partición tiende a cero.

$$\begin{aligned} T &= \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30{,}561 \text{ lb-pies.} \end{aligned}$$

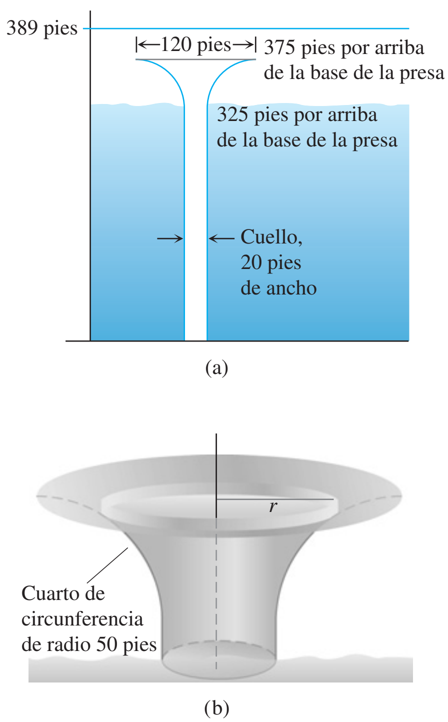


FIGURA 6.62 (a) Sección transversal del tubo de drenado de una presa, y (b) la parte superior del tubo de drenado (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Bombeo de agua desde un tubo de drenado

Un tubo de drenado es un cilindro vertical que mantiene el agua a cierto nivel para evitar que llegue a demasiada altura. La parte superior del tubo de drenado de una presa está a 14 pies del borde de la misma y a 375 pies por arriba de su parte inferior (figura 6.62). De vez en cuando se necesita bombear el agua del tubo de drenado para permitir que se eliminen residuos estacionales.

Con base en la sección transversal de la figura 6.62a, vemos que el tubo de drenado tiene forma de embudo. El cuello del embudo tiene un ancho de 20 pies y su parte superior mide 120 pies. La frontera exterior de la sección transversal de la parte superior son cuartos de circunferencias formadas con radio de 50 pies, como se muestra en la figura 6.62b. El tubo de drenado se forma haciendo girar una sección transversal alrededor de su centro. En consecuencia, las secciones transversales son discos circulares en todo el tubo. Calculamos el trabajo requerido para bombear agua desde

(a) el cuello del tubo de drenado.

(b) la parte del embudo

Solución

(a) *Bombeo desde el cuello*. Una capa representativa del cuello, entre los planos en y y $y + \Delta y$, tiene un volumen aproximado de

$$\Delta V = \pi(\text{radio})^2(\text{grosor}) = \pi(10)^2\,\Delta y \text{ pies}^3.$$

La fuerza $F(y)$ que se requiere para elevar esta capa es igual a su peso (alrededor de 62.4 lb//pie^3 para agua),

$$F(y) = 62.4\,\Delta V = 6240\pi\,\Delta y \text{ lb.}$$

La distancia en la que va actuar $F(y)$ para elevar esta capa hasta la parte superior del tubo de drenado es $(375 - y)$ pies, por lo que el trabajo realizado para elevar la capa es

$$\Delta T = 6240\pi(375 - y)\,\Delta y \text{ lb-pies}.$$

Podemos aproximar el trabajo realizado al bombear el agua desde el cuello del tubo, sumando el trabajo que se lleva a cabo al elevar una a una todas las capas, y tomando luego el límite de esta suma de Riemann a medida que la norma de la partición tiende a cero. Esto da lugar a la integral

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{325} 6240\pi(375 - y)\,dy \\ &= 6240\pi\left[375y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{325} \\ &\approx 1{,}353{,}869{,}354 \text{ lb-pies.} \end{aligned}$$

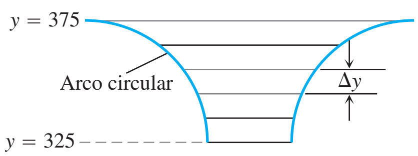


FIGURA 6.63 La parte de embudo del tubo de drenado.

(b) *Bombeo desde el embudo.* Para calcular el trabajo necesario para bombear agua desde la parte con forma de embudo del tubo de drenado, de $y = 325$ a $y = 375$, necesitamos calcular ΔV aproximando los elementos en el embudo, como se muestra en la figura 6.63. Como puede ver en ella, los radios de las capas varían según la altura y.

En los ejercicios 33 y 34 se le pide completar el análisis para determinar el trabajo total requerido para bombear el agua, además de determinar la potencia necesaria para que las bombas saquen el agua por el tubo de drenado. ■

EJERCICIOS 6.6

Resortes

1. **Constante del resorte** Se necesitaron 1800 J de trabajo para estirar un resorte de su longitud natural de 2 m a una longitud de 5 m. Determine la constante del resorte.

2. **Estiramiento de un resorte** Un resorte tiene una longitud natural de 10 pulgadas. Una fuerza de 800 libras lo estira hasta 14 pulgadas.
   a. Determine la constante del resorte.
   b. ¿Cuánto trabajo se requiere para alargar el resorte de 10 a 12 pulgadas?
   c. ¿Qué tanto se estirará el resorte respecto de su longitud natural si se le aplica una fuerza de 1600 lb?

3. **Estiramiento de una banda elástica** Una fuerza de 2 N estirará una banda elástica 2 cm (0.02 m). Suponiendo que en este caso se cumple la ley de Hooke, ¿cuánto se estirará la banda al aplicarle una fuerza de 4 N? ¿Cuánto trabajo se realizará para estirar la banda esa longitud?

4. **Estiramiento de un resorte** Si una fuerza de 2 N estira un resorte 1 m más que su longitud natural, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo 5 m a partir de su longitud natural?

5. **Resortes en los carros de un tren subterráneo** Se requiere una fuerza de 21,714 lb para comprimir un montaje de resortes en espiral en el tren subterráneo de la ciudad de Nueva York, desde su altura original de 8 pulgadas hasta una altura completamente comprimida de 5 pulgadas.
   a. ¿Cuál es la constante del resorte del montaje?
   b. ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir el montaje la primera media pulgada? Redondee su respuesta a la lb-pulgada más cercana.

   (Datos cortesía de Bombardier, Inc,. Mass Transit Division, para montajes de resortes en carros del tren subterráneo, entregados a New York City Transit Authority de 1985 a 1987).

6. **Báscula de baño** Una báscula de baño se comprime $1/16$ pulgada cuando se sube en ella una persona de 150 lb. Suponiendo que la báscula se comporta como un resorte que cumple la ley de Hooke, ¿cuánto pesa alguien que comprime la báscula $1/8$ de pulgada? ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir la báscula $1/8$ de pulgada?

Trabajo realizado por una fuerza variable

7. **Elevación de una cuerda** Un alpinista está a punto de recoger una cuerda de 50 m de longitud que cuelga. ¿Cuánto trabajo requiere si la cuerda pesa 0.624 N/m?

8. **Bolsa de arena** Una bolsa de arena que pesaba originalmente 144 lb se elevó a una velocidad constante; mientras se subía, la arena de su interior salía a un ritmo constante. Cuando la bolsa se hubo elevado 18 pies, la bolsa había perdido la mitad de la arena. ¿Cuánto trabajo se realizó al subir la arena hasta esta altura? (No tome en cuenta el peso de la bolsa ni del equipo que se utiliza para subirla).

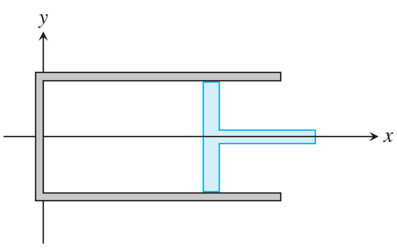
9. **Ascensión del cable de un elevador** Un elevador eléctrico con el motor en la parte superior, tiene un cable con varios cabos que pesa 4.5 lb/pie. Cuando el carro del elevador está en el primer piso, el cable se extiende 180 pies, y cuando está en el piso superior el cable se extiende 0 pies. ¿Cuánto trabajo realiza el motor para elevar sólo el cable, cuando sube el carro del primero al último piso?

10. **Fuerza de atracción** Cuando una partícula de masa m está en $(x, 0)$, es atraída hacia el origen con una fuerza de magnitud k/x^2. Si la partícula parte del reposo en $x = b$ y no actúa sobre ella ninguna otra fuerza, determine el trabajo realizado sobre ella cuando llega a $x = a,\ 0 < a < b$.

11. **Compresión de gas** Suponga que el gas contenido en un cilindro circular de área transversal A, se comprime mediante un pistón. Si p es la presión del gas en libras por pulgada cuadrada, y V es el volumen en pulgadas cúbicas, demuestre que el trabajo realizado al comprimir el gas del estado (p_1, V_1) al estado (p_2, V_2) está dado por la ecuación

$$\text{Trabajo} = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p\, dV.$$

(*Sugerencia*: En las coordenadas sugeridas por la figura siguiente, $dV = A\, dx$. La fuerza contra el pistón es pA).



12. (*Continuación del ejercicio 11*). Utilice la integral del ejercicio 11 para determinar el trabajo realizado al comprimir el gas de $V_1 = 243$ pulgadas^3 a $V_2 = 32$ pulgadas^3, si $p_1 = 50$ lb/pulgada^3 y p y V cumplen la ley del estado gaseoso $pV^{1.4} =$ constante (para procesos adiabáticos).

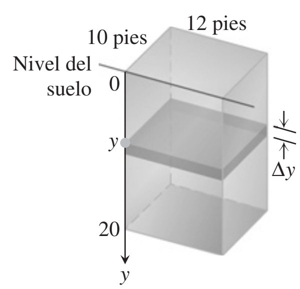
13. **Cubeta que gotea** Suponga que la cubeta del ejemplo 4 está goteando. Al principio contiene 2 galones de agua (16 lb) y gotea a un ritmo constante. Justo cuando llega a la parte superior termina de vaciarse. ¿Cuánto trabajo se realizó para subir sólo el agua? (*Sugerencia*: No tome en cuenta la cuerda ni la cubeta, y determine la proporción de agua que sale a la altura de x pies).

14. (*Continuación del problema 13*). Los trabajadores de los ejemplos 4 y 13 utilizaron una cubeta más grande que contenía 5 galones (40 libras) de agua, pero ésta tenía un agujero más grande, así que también llegó vacía a la parte superior. Suponiendo que el agua sale a ritmo constante, ¿cuánto trabajo se realizó al subir sólo el agua? (No tome en cuenta la cuerda ni la cubeta).

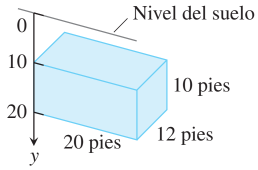
Bombeo de líquidos desde contenedores

> **Peso del agua**
> Debido a la rotación de la Tierra y a variaciones en su campo gravitacional, el peso de un pie cúbico de agua al nivel del mar varía de aproximadamente 62.26 lb en el ecuador, hasta casi 62.59 lb cerca de los polos, esto es, una variación de 0.5%. Un pie cúbico que pesa casi 62.4 lb en Melbourne (Australia) y en la ciudad de Nueva York, pesará 62.5 lb en Juneau (Alaska) y en Estocolmo (Suecia). Aunque 62.4 es un valor común en los libros de texto, hay una variación considerable.

15. **Bombeo de agua** El tanque rectangular que se muestra a continuación, con su parte superior al nivel del suelo, se utiliza para recolectar escurrimientos de agua. Suponga que el agua pesa 62.4 lb/pie^3.
   a. Una vez que el tanque está lleno, ¿cuánto trabajo se requiere para vaciarlo, bombeando el agua al nivel del suelo?
   b. Si el agua se bombea al nivel del suelo con un motor de (5/11) caballos de fuerza (hp) (con un rendimiento de 250 lb-pie/seg), ¿cuánto tiempo le tomará vaciar el tanque? (Redondee al minuto más cercano).
   c. Demuestre que la bomba de la parte (b) hará bajar el nivel a 10 pies (la mitad) durante los primeros 25 minutos de bombeo.
   d. Peso del agua ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos (a) y (b) en donde el agua pesa 62.26 lb/pie^3? ¿Cuáles serían en dónde pesa 62.59 lb/pie^3?



16. **Vaciado de una cisterna** La cisterna rectangular (tanque de almacenamiento para recolectar el agua de lluvia) que se muestra más adelante, tiene su parte superior 10 pies por debajo del nivel del suelo. La cisterna, actualmente llena, se vaciará para inspeccionarla, bombeando su contenido al nivel del suelo.
   a. ¿Cuánto trabajo se realizará para vaciar la cisterna?
   b. ¿Cuánto tardará en vaciar el tanque una bomba de 1/2 hp, con una eficiencia de 275 lb-pie/seg?
   c. ¿Cuánto tardará la bomba de la parte (b) en vaciar la mitad del tanque? (Es menos de la mitad del tiempo que se requiere para vaciarlo por completo).
   d. Peso del agua ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos (a), (b) y (c) en dónde el agua pesa 62.26 lb/pie^3? ¿Cuáles serían en dónde pesa 62.59 lb/pie^3?

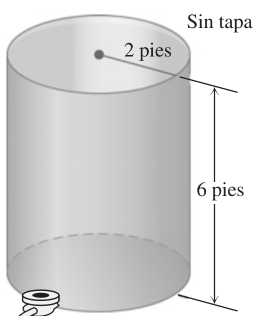


17. Bombeo de aceite ¿Cuánto trabajo se requeriría para bombear el aceite del ejemplo 5 al nivel de la parte superior del tanque, si éste estuviera completamente lleno?

18. Bombeo de un tanque medio lleno Suponga que, en lugar de estar lleno, el tanque del ejemplo 5 sólo contiene aceite hasta la mitad de su capacidad. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite que queda a un nivel de 4 pies por encima de la parte superior del tanque?

19. Vaciado de un tanque Un tanque en forma de cilindro circular recto mide 30 pies de altura y 20 pies de diámetro. Está lleno de keroseno que pesa 51.2 lb/pies^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el keroseno al nivel de la parte superior del tanque?

20. El tanque cilíndrico que se muestra a continuación puede llenarse mediante el bombeo de agua desde un lago que está 15 pies por debajo de la parte inferior del tanque. Hay dos formas de hacerlo: una consiste en bombear el agua a través de una manguera conectada a una válvula en la parte inferior del tanque; la otra es sujetar la manguera en el borde superior del tanque y dejar que el agua fluya hacia adentro. ¿Cuál de las dos será más rápida? Justifique su respuesta.

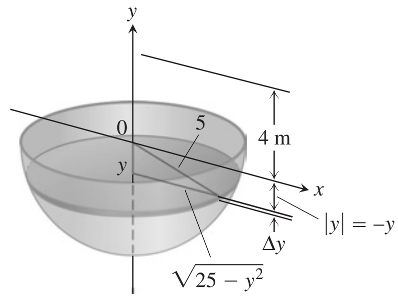


21. a. Bombeo de leche Suponga que el contenedor cónico del ejemplo 5 contiene leche (que pesa 64.5 lb/pies^3) en lugar de aceite de oliva. ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el contenido al borde el contenedor?

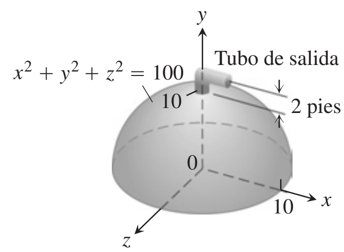
b. Bombeo de aceite ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el aceite del ejemplo 5 a un nivel de 3 pies por encima del borde del cono?

22. Bombeo de agua de mar Para diseñar la superficie interior de un gran tanque de acero inoxidable, usted hacer girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje y. El contenedor, con dimensiones en metros, será llenado con agua de mar, la cual pesa 10,000 N/m^3. ¿Cuánto trabajo se requerirá para vaciar el tanque bombeando el agua a la parte superior del tanque?

23. Vaciado de un depósito de agua Modelamos el bombeo de contenedores esféricos tal como lo hacemos para otros contenedores, con el eje de integración a lo largo del eje vertical de la esfera. Utilice la figura siguiente para determinar cuánto trabajo se requerirá para vaciar el depósito semiesférico de radio 5 m si está lleno y el agua se bombea a una altura de 4 m por encima de la parte superior del depósito. El agua pesa 9800 N/m^3.



24. Usted está a cargo del vaciado y reparación del tanque de almacenamiento que se muestra a continuación. El tanque es una semiesfera de radio 10 pies y está completamente lleno de benceno, que pesa 56 lb/pie^3. Una compañía le dice que puede vaciar el tanque por 1/2¢ por libra-pie de trabajo. Determine el trabajo requerido para vaciar el tanque bombeando el benceno hasta una salida, 2 pies por encima del nivel superior del tanque. Si tiene un presupuesto de $5000 para el trabajo, ¿puede contratar a la compañía para que lo realice?



Trabajo y energía cinética

25. Energía cinética Si una fuerza variable de magnitud $F(x)$ mueve un cuerpo de masa m a lo largo del eje x desde x_1 hasta x_2, la velocidad del cuerpo v puede escribirse como dx/dt (en donde t representa el tiempo). Utilice la segunda ley de movimiento de Newton $F = m(dv/dt)$ y la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para demostrar que el trabajo neto realizado por la fuerza al mover el cuerpo de x_1 a x_2 es

$$T = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2,$$

en donde v_1 y v_2 son las velocidades del cuerpo en x_1 y x_2. En física, la expresión $(1/2)mv^2$ se denomina *energía cinética* de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v. Por lo tanto, *el trabajo realizado por la fuerza es igual al cambio en la energía cinética del cuerpo*, y podemos determinar el trabajo calculando este cambio.

En los ejercicios 26 a 32, utilice el resultado del ejercicio 25.

26. Tenis Una pelota de tenis de 2 onzas fue lanzada a 160 pies/segundo (casi 109 mph). ¿Cuánto trabajo se realizó sobre la pelota para lograr esa velocidad? (Para determinar la masa de la pelota a partir de su peso, exprese este último en libras y divida entre 32 pies/segundo^2, que es la aceleración debida a la gravedad).

27. Béisbol ¿Cuántas libras-pie de trabajo se requieren para lanzar una pelota de béisbol a 90 mph? Una pelota de béisbol pesa 5 onzas o 0.3125 lb.

28. Golf Una pelota de golf de 1.6 onzas se lanza a una velocidad de 280 pies/segundo (casi 191 mph). ¿Cuántas libras-pie de trabajo se realizaron sobre la pelota para lanzarla al aire?

29. Tenis Durante el partido en el que ganó el campeonato de tenis varonil del torneo abierto de Estados Unidos, Pete Sampras lanzó un servicio fenomenal, con una velocidad de 124 mph. ¿Cuánto trabajo realizó Sampras sobre la pelota de 2 onzas para obtener esa velocidad?

30. Fútbol americano Un jugador lanzó un balón de fútbol americano de 14.5 onzas a 88 pies/segundo (60 mph). ¿Cuántas libras-pies de trabajo se aplicaron al balón para obtener esa velocidad?

31. Sóftbol ¿Cuánto trabajo tiene que realizarse sobre una pelota de sóftbol para lanzarla a 132 pies/seg (90 mph)?

32. Lanzamiento de una bola Una bola de acero de 2 onzas se coloca en un resorte vertical cuya constante es $k = 18$ lb/pie. El resorte se comprime 2 pulgadas y luego se libera. ¿Qué altura alcanza la bola?

33. Bombeo desde el embudo de un tubo de drenado (*Continuación del ejemplo 6*).

a. Determine el radio de la sección transversal (parte del embudo) del tubo de drenado del ejemplo 6 como una función de la altura y por encima de la parte inferior de la presa (desde $y = 325$ hasta $y = 375$).

b. Determine ΔV para la sección del embudo del drenador (desde $y = 325$ hasta $y = 375$).

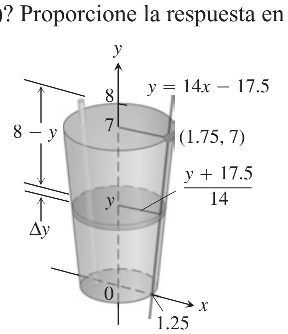
c. Determine el trabajo necesario para vaciar la sección del embudo formulando y evaluando la integral definida apropiada.

34. Bombeo de agua desde un tubo de drenado (*Continuación del ejercicio 33*).

a. Determine el trabajo total necesario para bombear el tubo de drenado, sumando el trabajo necesario para bombear la sección del cuello y la del embudo.

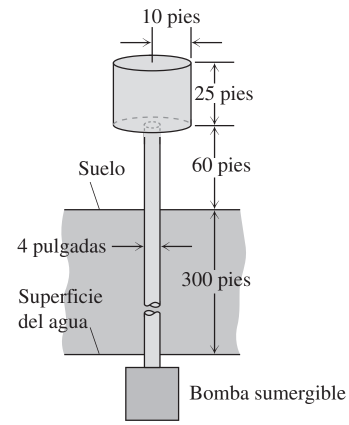
b. La respuesta que dio al inciso (a) está en libras-pie. Una forma más útil de señalar el resultado es en caballos de fuerza-hora, ya que los motores utilizan esta unidad de medida. Para convertir libras-pie a caballos de fuerza-hora, divida entre 1.98×10^6. ¿Cuántas horas tardaría un motor de 1000 hp para vaciar el tubo de drenado, suponiendo que es totalmente eficiente?

35. Succión de una malteada El contenedor en forma de cono truncado que se muestra a continuación está lleno de malteada de fresa, que pesa 4/9 onzas/pulgada^3. Como ve, el contenedor tiene una profundidad de 7 pulgadas, 2.5 de diámetro en la base y 3.5 pulgadas de diámetro en la parte superior (un tamaño estándar en una nevería de Boston). El popote sobresale una pulgada por encima de la parte superior. ¿Cuánto trabajo será necesario, aproximadamente, para succionar la malteada por el popote (no tome en cuenta la fricción)? Proporcione la respuesta en pulgadas-onzas.



Dimensiones en pulgadas

36. Torre de agua Se ha decidido excavar un pozo para incrementar el suministro de agua en su ciudad. Como ingeniero a cargo, usted ha determinado que será necesaria una torre de agua para proporcionar la presión que se requiere para su distribución, así que ha diseñado el sistema que se muestra a continuación. El agua se bombea desde un pozo que está a 300 pies de profundidad, utilizando un tubo vertical de 4 pulgadas en la base de un tanque cilíndrico de 20 pies de diámetro y 25 pies de altura. La base del tanque estará 60 pies por encima del suelo. La bomba es de 3 hp, con una eficiencia de 1650 lb pies/segundo. Redondeando el resultado a la hora más cercana, ¿cuánto tardará el tanque en llenarse la primera vez? (Incluya el tiempo necesario para que se llene el tubo). Suponga que el agua pesa 62.4 lb/pie^3.



NO ESTÁ A ESCALA

37. Colocación de un satélite en órbita La fuerza del campo gravitacional de la Tierra varía según la distancia al centro del planeta, y la magnitud de la fuerza gravitacional experimentada por un satélite de masa m durante y después del lanzamiento es

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}.$$

Aquí, $M = 5.975 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra, $G = 6.6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2\, kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal, y r se mide en metros. Por lo tanto, el trabajo que se requiere para elevar un satélite de 1000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una órbita circular a 35,780 km de distancia del centro de la Tierra, está dado por la integral

$$\text{Trabajos} = \int_{6{,}370{,}000}^{35{,}780{,}000} \frac{1000MG}{r^2}\, dr \text{ joules}.$$

Evalúe la integral. El límite inferior de integración es el radio de la Tierra, en metros, respecto del sitio del lanzamiento. (Este cálculo no toma en cuenta la energía que se utiliza para lanzar el vehículo, ni la energía para que el satélite alcance su velocidad orbital).

38. Fuerza para unir electrones Dos electrones separados r metros se repelen mutuamente con una fuerza de

$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ newtons}.$$

a. Suponga que un electrón se mantiene fijo en el punto (1, 0) del eje x (unidades en metros). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un segundo electrón a lo largo del eje x, desde el punto (–1, 0) hasta el origen?

b. Suponga que dos electrones se mantienen fijos, uno en el punto (–1, 0) y el otro en el punto (1, 0). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un tercer electrón a lo largo del eje x, de (5, 0) a (3, 0)?