

6.3

Longitudes de curvas planas

Sabemos qué significa longitud de un segmento de recta, pero sin el cálculo no sabríamos a ciencia cierta qué es longitud de una curva en general. La idea de calcular la longitud de una curva que va del punto A al punto B por medio de la subdivisión de la curva en muchas partes y la unión de los puntos sucesivos de la división mediante segmentos de recta, se remonta a los antiguos griegos. Arquímedes utilizó este método para aproximar el perímetro de una circunferencia: inscribió un polígono de n lados y utilizó propiedades geométricas para calcular el perímetro de éste (figura 6.23). La extensión de esta idea al cálculo de la

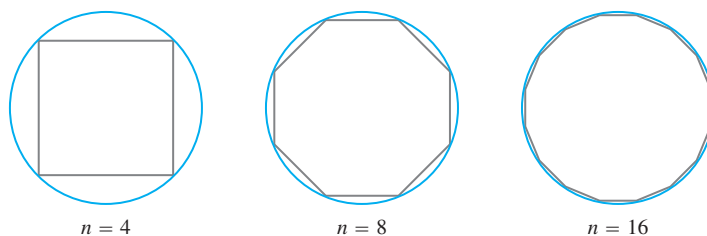


FIGURA 6.23 Arquímedes utilizó los perímetros de polígonos inscritos para aproximar el perímetro de una circunferencia. Para $n = 96$ el método de aproximación da $\pi \approx 3.14103$ como el perímetro de una circunferencia de radio uno.

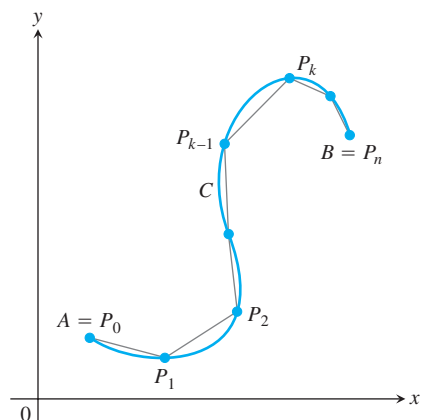


FIGURA 6.24 La curva C definida paramétricamente por las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. La longitud de la curva de A a B se aproxima por la suma de las longitudes de los segmentos de recta de la trayectoria poligonal que inicia en $A = P_0$, luego va a P_1 , y así sucesivamente, finalizando en $B = P_n$.

longitud de una curva más general se muestra en la figura 6.24. A continuación describiremos cómo funciona este método.

Longitud de una curva definida en forma paramétrica

Sea C una curva dada en forma paramétrica por medio de las ecuaciones

$$x = f(t) \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Suponemos que las funciones f y g tienen derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$, cuyo valor no es igual a cero simultáneamente. Se dice que tales funciones son **continuamente diferenciables** y a la curva C definida por ellas se le denomina **curva suave**. Puede ser útil imaginar la curva como la trayectoria de una partícula que se mueve del punto $A = (f(a), g(a))$ en el instante $t = a$, al punto $B = (f(b), g(b))$ como se ilustra en la figura 6.24. Subdividimos la trayectoria (o arco) AB en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$. Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ por medio de $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, en donde $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. Después, unimos los puntos sucesivos de esta subdivisión mediante segmentos de recta (figura 6.24). Un segmento representativo tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

(vea la figura 6.25). Si Δt_k es pequeña, la longitud L_k es aproximadamente igual a la longitud del arco $P_{k-1}P_k$. De acuerdo con el teorema del valor medio, existen números t_k^* y t_k^{**} en $[t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*) \Delta t_k,$$

$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**}) \Delta t_k.$$

Suponiendo que la trayectoria de A a B se recorre exactamente una vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, sin invertir la dirección del movimiento ni pasar dos veces por el mismo punto, un cálculo intuitivo de la “longitud” de la curva AB es igual a la suma de todas las longitudes L_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2} \Delta t_k. \end{aligned}$$

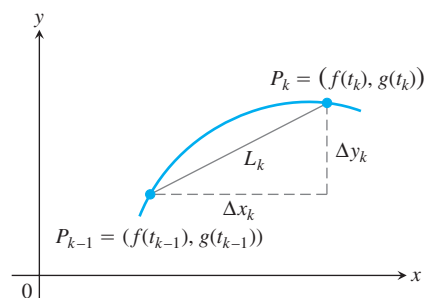


FIGURA 6.25 El arco $P_{k-1}P_k$ se aproxima por el segmento de recta que se muestra aquí, con una longitud $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

Aunque la suma de la derecha no es exactamente una suma de Riemann (ya que f' y g' se evalúan en diferentes puntos), un teorema de cálculo avanzado garantiza que su límite, conforme la norma de la partición tiende a cero, es la integral definida

$$\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

Por lo tanto, es razonable definir la longitud de la curva de A a B como esta integral.

DEFINICIÓN Longitud de una curva parametrizada

Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, donde f' y g' son continuas y no simultáneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C se recorre una sola vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces la **longitud de C** es la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

Una curva suave C no pasa dos veces por el mismo lugar ni invierte la dirección del movimiento en el intervalo de tiempo $[a, b]$, ya que $(f')^2 + (g')^2 > 0$ en todo el intervalo.

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ y utilizamos la notación de Leibniz, obtenemos el siguiente resultado para la longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (1)$$

¿Qué sucede si existen dos parametrizaciones diferentes para una curva C cuya longitud queremos determinar? ¿importa cuál utilicemos? Con base en cálculo avanzado, la respuesta es que no, siempre y cuando la parametrización que elijamos cumpla las condiciones establecidas en la definición de la longitud de C (vea el ejercicio 29).

EJEMPLO 1 El perímetro de una circunferencia

Determinar la longitud de la circunferencia de radio r definida en forma paramétrica por

$$x = r \cos t \quad y \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solución A medida que t varía de 0 a 2π , la circunferencia se recorre exactamente una vez, convirtiéndose en

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Encontramos

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t$$

y

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2.$$

Por lo que

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = r \left[t \right]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula paramétrica para calcular la longitud de una curva
Determinar la longitud de la astroide (figura 6.26)

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

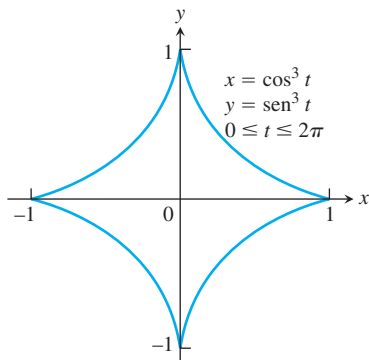


FIGURA 6.26 La astroide del ejemplo 2.

Solución Como consecuencia de la simetría de la curva con respecto a los ejes de coordenadas, su longitud es cuatro veces la longitud de la parte del primer cuadrante. Tenemos

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = [3 \cos^2 t (-\sin t)]^2 = 9 \cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = [3 \sin^2 t (\cos t)]^2 = 9 \sin^4 t \cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1)}$$

$$= \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t}$$

$$= 3 |\cos t \sin t|$$

$$= 3 \cos t \sin t.$$

$\cos t \sin t \geq 0$ para
 $0 \leq t \leq \pi/2$

Por lo tanto,

$$\text{Longitud de la parte del primer cuadrante} = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt$$

$\cos t \sin t =$
 $(1/2) \sin 2t$

$$= -\frac{3}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Gregory St. Vincent
(1584–1667)

La longitud de la astroide es cuatro veces esto: $4(3/2) = 6$.

Longitud de una curva $y = f(x)$

Dada una función continuamente diferenciable $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, podemos asignar $x = t$ como un parámetro. Entonces, la gráfica de la función f es la curva definida paramétricamente por

$$x = t \quad y = f(t), \quad a \leq t \leq b,$$

un caso especial de lo que hemos considerado antes. Entonces,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad y \quad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

Según los cálculos que hicimos en la sección 3.5, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2. \end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (1) se obtiene la fórmula de la longitud de arco para la gráfica de $y = f(x)$.

Fórmula para la longitud de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

Si f es continuamente diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$, la longitud de la curva (gráfica) $y = f(x)$ de $x = a$ a $x = b$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2)$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula de longitud de arco en una gráfica

Determinar la longitud de la curva

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Solución Utilizamos la ecuación (2) con $a = 0$, $b = 1$ y

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (2\sqrt{2}x^{1/2})^2 = 8x.$$

La longitud de la curva de $x = 0$ a $x = 1$ es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} dx$$

Ecuación (2) con
 $a = 0$, $b = 1$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1 + 8x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Haga $u = 1 + 8x$,
integre y reemplace
 u por $1 + 8x$. ■

Trabajo con discontinuidades en dy/dx

En un punto de la curva en donde dy/dx no exista, dx/dy puede existir y es posible determinar la longitud de la curva expresando x como función de y y aplicando la ecuación siguiente, que es análoga a la ecuación (2):

Fórmula para determinar la longitud de $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$

Si g es continuamente diferenciable en $[c, d]$, la longitud de la curva $x = g(y)$ de $y = c$ a $y = d$ es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \quad (3)$$

EJEMPLO 4 Longitud de una gráfica con discontinuidad en dy/dx

Determinar la longitud de la curva $y = (x/2)^{2/3}$ de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución La derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

no está definida en $x = 0$, por lo que no podemos determinar la longitud de la curva por medio de la ecuación (2).

Por lo tanto, reescribimos la ecuación para expresar x en términos de y :

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2} \quad \text{Elevar ambos lados a la } 3/2.$$

$$x = 2y^{3/2}. \quad \text{Despejar } x.$$

Con base en lo anterior, vemos que la curva cuya longitud queremos determinar es también la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ de $y = 0$ a $y = 1$ (figura 6.27).

La derivada

$$\frac{dx}{dy} = 2 \left(\frac{3}{2}\right) y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

es continua en $[0, 1]$. Por consiguiente, podemos utilizar la ecuación (3) para determinar la longitud de la curva:

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y} dy && \text{Ecuación (3) con } c = 0, d = 1. \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9y)^{3/2} \Big|_0^1 && \text{Haga } u = 1 + 9y, \\ &= \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27. && du/9 = dy, \text{ integre y sustituya.} \end{aligned}$$

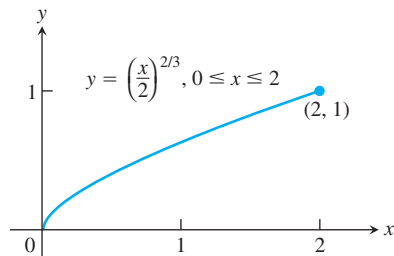


FIGURA 6.27 La gráfica de $y = (x/2)^{2/3}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$, también es la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ desde $y = 0$ hasta $y = 1$ (ejemplo 4).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

James Gregory
(1638-1675)

Fórmula para longitud de arco en forma diferencial

La ecuación (1) suele escribirse en términos de diferenciales, en lugar de emplear derivadas. Esto se hace formalmente escribiendo $(dt)^2$ dentro del radical en lugar de dt fuera del radical y escribiendo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dx}{dt} dt\right)^2 = (dx)^2$$

y

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dy}{dt} dt\right)^2 = (dy)^2.$$

También se acostumbra eliminar los paréntesis en $(dx)^2$ y escribir simplemente dx^2 , por lo que la ecuación (1) se transforma en

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (4)$$

Estas diferenciales pueden considerarse como una forma de resumir y simplificar las propiedades de las integrales. Para conocer una definición matemática precisa de las diferenciales, consulte un texto más avanzado.

Para realizar el cálculo de la integral, dx y dy deben expresarse en términos de la misma variable, y se deben proporcionar los límites adecuados en la ecuación (4).

Un método útil para recordar la ecuación (4) consiste en escribir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5)$$

y tratar ds como una diferencial de la longitud de arco, que puede integrarse entre los límites adecuados para obtener la longitud total de la curva. La figura 6.28a proporciona la interpretación precisa de ds para la ecuación (5). La figura 6.28b no es precisa, pero se considerará una aproximación simplificada de la figura 6.28a.

Con la ecuación (5) en mente, la manera más rápida de recordar las fórmulas para calcular la longitud de arco es recordando la ecuación

$$\text{Longitud de arco} = \int ds.$$

Si escribimos $L = \int ds$ y tenemos la gráfica de $y = f(x)$, podemos reescribir la ecuación (5) para obtener

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2} dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

con lo que se obtiene la ecuación (2). Si, en cambio, tenemos $x = g(y)$, reescribimos así la ecuación (5):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{dy^2} dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

y obtenemos la ecuación (3).

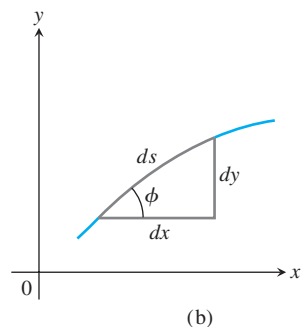
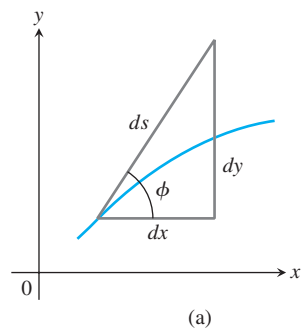


FIGURA 6.28 Diagramas para recordar la ecuación $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

EJERCICIOS 6.3

Longitudes de curvas parametrizadas

En los ejercicios 1 a 6, determine las longitudes de las curvas.

1. $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$, $-2/3 \leq t \leq 1$
2. $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$
3. $x = t^3$, $y = 3t^2/2$, $0 \leq t \leq \sqrt{3}$
4. $x = t^2/2$, $y = (2t + 1)^{3/2}/3$, $0 \leq t \leq 4$
5. $x = (2t + 3)^{3/2}/3$, $y = t + t^2/2$, $0 \leq t \leq 3$
6. $x = 8 \cos t + 8t \sin t$, $y = 8 \sin t - 8t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

Determinación de longitudes de curvas

En los ejercicios 7 a 16, determine la longitud de cada curva. Si tiene una calculadora gráfica, utilícela para graficar estas curvas.

7. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$
8. $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 4$
9. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$ de $y = 1$ a $y = 3$
(Sugerencia: $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
10. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$ de $y = 1$ a $y = 9$
(Sugerencia: $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
11. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ de $y = 1$ a $y = 2$
(Sugerencia: $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
12. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$ de $y = 2$ a $y = 3$
(Sugerencia: $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
13. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5$, $1 \leq x \leq 8$
14. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4)$, $0 \leq x \leq 2$
15. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} dt$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$
16. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} dt$, $-2 \leq x \leq -1$

I Determinación de integrales para longitudes de curvas

En los ejercicios 17 a 24, haga lo siguiente.

- a. Establezca una integral para calcular la longitud de la curva.
 - b. Grafique la curva para ver su forma.
 - c. Utilice el evaluador de integrales de su calculadora gráfica o computadora para determinar, de forma numérica, la longitud de la curva.
17. $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$
 18. $y = \tan x$, $-\pi/3 \leq x \leq 0$
 19. $x = \sin y$, $0 \leq y \leq \pi$
 20. $x = \sqrt{1 - y^2}$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$
 21. $y^2 + 2y = 2x + 1$ de $(-1, -1)$ a $(7, 3)$
 22. $y = \sin x - x \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$

$$23. y = \int_0^x \tan t dt, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$$

$$24. x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1} dt, \quad -\pi/3 \leq y \leq \pi/4$$

Teoría y aplicaciones

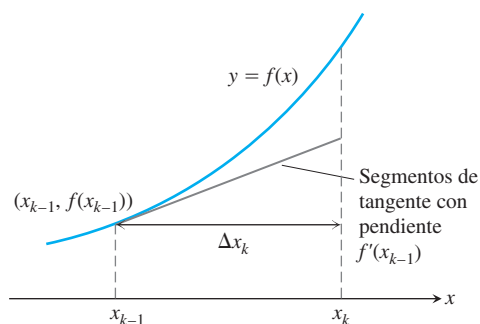
25. ¿Existe alguna curva suave (continuamente diferenciable) $y = f(x)$, cuya longitud en el intervalo $0 \leq x \leq a$ sea siempre $\sqrt{2}a$? Justifique su respuesta.

26. **Uso de tangentes para deducir la fórmula de la longitud de una curva** Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que dividimos este intervalo en la forma usual. En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, construimos un pequeño *segmento de tangente* en el punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, como se muestra en la figura siguiente.

- a. Demuestre que la longitud del k -ésimo segmento de tangente en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es igual a $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1}) \Delta x_k)^2}$.
- b. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\text{longitud del } k\text{-ésimo segmento de tangente}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

que es la longitud L de la curva $y = f(x)$ de a a b .



27. a. Determine una curva que pase por el punto $(1, 1)$, cuya integral de longitud sea

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

b. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

28. a. Determine una curva que pase por el punto $(0, 1)$ y cuya integral de longitud sea

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} dy.$$

b. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

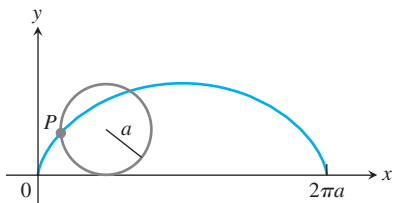
29. **La longitud es independiente de la parametrización** Para ilustrar el hecho de que el resultado que obtenemos en nuestra

aproximación de la longitud no depende de la forma en que parametrizamos nuestras curvas (salvo por las restricciones mencionadas con anterioridad acerca de regresar y recorrer una parte dos veces), calcule la longitud de la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$ con estas dos parametrizaciones:

a. $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

b. $x = \sin \pi t, \quad y = \cos \pi t, \quad -1/2 \leq t \leq 1/2$

30. Determine la longitud de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que se muestra en la figura siguiente. Una **cicloide** es la curva que recorre un punto P en la circunferencia de un círculo que rueda sin resbalar a lo largo de una línea recta, como el eje x .



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 31 a 36, utilice su computadora y el software apropiado para realizar los siguientes pasos con la curva dada sobre el intervalo cerrado.

- Trace la curva junto con las trayectorias poligonales aproximadas para $n = 2, 4, 8$ puntos en la partición del intervalo. (Vea la figura 6.24).
- Determine la aproximación correspondiente a la longitud de la curva, sumando las longitudes de los segmentos de recta.
- Evalúe la longitud de la curva por medio de una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con la longitud real dada por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real con las aproximaciones a medida que n crece? Explique su respuesta.

31. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$

32. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \leq x \leq 2$

33. $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$

34. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

35. $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

36. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$

37. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

38. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \leq t \leq 6$

39. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$

40. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

6.4

Momentos y centro de masa

Muchas estructuras y sistemas mecánicos se comportan como si sus masas estuviesen concentradas en un solo punto, llamado *centro de masa* (figura 6.29). Es importante saber cómo localizar este punto y hacerlo es una tarea básicamente matemática. Por el momento, sólo analizaremos objetos con una o dos dimensiones. Los objetos tridimensionales se estudian mejor con las integrales múltiples que revisaremos en el capítulo 15.

Masas a lo largo de una recta

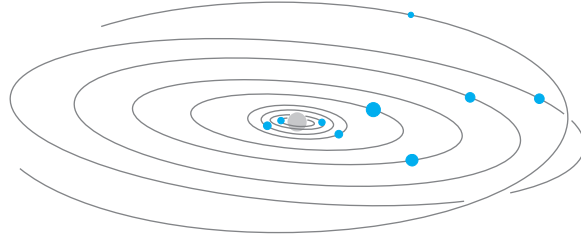
Desarrollaremos nuestro modelo matemático por etapas. La primera consiste en imaginar las masas m_1, m_2 y m_3 en un eje rígido horizontal, x , apoyado en un punto (denominado *fulcro* o *fulcrum*) en el origen.



El sistema resultante puede quedar balanceado o no. Esto depende del tamaño de las masas y de cómo estén distribuidas.



(a)



(b)

FIGURA 6.29 (a) El movimiento de esta llave de tuercas deslizándose sobre un bloque de hielo parece errático, hasta que notamos que sólo está girando alrededor de su centro de masa, mientras que el centro de masa se desliza en línea recta. (b) Los planetas, asteroides y cometas de nuestro sistema solar giran alrededor de su centro de masa colectivo. (Éste se encuentra dentro del Sol).

Cada masa m_k ejerce una fuerza hacia abajo $m_k g$ (el peso de m_k) igual a la magnitud de la masa por la aceleración debida a la gravedad. Cada una de estas fuerzas tiende a hacer girar el eje alrededor del origen, de la misma manera en que ocurre cuando se gira un tiiovivo. Este efecto, denominado **torque**, se mide multiplicando la fuerza $m_k g$ por la distancia, con signo, x_k del punto de aplicación de la fuerza al origen. Las masas a la izquierda del origen ejercen un torque negativo (en contra del sentido de las manecillas del reloj). Las masas a la derecha del origen ejercen un torque positivo (en el sentido de las manecillas del reloj).

La suma de los torques determina la tendencia de un sistema a girar alrededor del origen. Esta suma se denomina **torque del sistema**.

$$\text{Torque del sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \quad (1)$$

El sistema quedará en equilibrio si y sólo si su torque es igual a cero.

Si factorizamos la g en la ecuación (1), veremos que el torque del sistema es

$$\underbrace{g}_{\text{una característica del medio}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{una característica del sistema}}$$

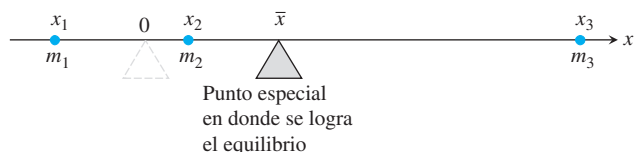
Así, el torque es el producto de la aceleración gravitacional g , que es una característica del medio en donde se encuentre el sistema y del número $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$, que es una característica del sistema mismo, una constante que permanece igual sin importar en donde se coloque el sistema.

El número $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$, se denomina **momento del sistema con respecto al origen** y es la suma de los **momentos** $m_1 x_1$, $m_2 x_2$, $m_3 x_3$ de las masas individuales.

$$M_0 = \text{Momento del sistema respecto al origen} = \sum m_k x_k.$$

(Escribimos lo anterior con la notación sigma para permitir sumas con más términos).

Usualmente queremos conocer en dónde colocar el fulcro para que el sistema esté equilibrado, esto es, nos interesa saber en qué punto colocar \bar{x} para que la suma de los torques sea igual a cero:



En esta posición especial, el torque de cada masa respecto del punto de apoyo es

$$\begin{aligned}\text{Torque de } m_k \text{ respecto de } \bar{x} &= \left(\begin{array}{c} \text{distancia con signo} \\ \text{de } m_k \text{ a } \bar{x} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{fuerza hacia} \\ \text{abajo} \end{array} \right) \\ &= (x_k - \bar{x})m_k g.\end{aligned}$$

Cuando escribimos la ecuación que indica que la suma de estos torques es igual a cero, obtenemos una ecuación para despejar \bar{x} :

$$\begin{aligned}\sum (x_k - \bar{x})m_k g &= 0 && \text{La suma de los torques es cero.} \\ g \sum (x_k - \bar{x})m_k &= 0 && \text{Regla del múltiplo constante para las sumas} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x}m_k) &= 0 && \text{Se divide entre } g, \text{ y se distribuye } m_k \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k &= 0 && \text{Regla de la diferencia para sumas} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x} \sum m_k && \text{Se reacomoda términos y se aplica nuevamente} \\ &&& \text{la regla del múltiplo constante} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \text{Se despeja } \bar{x}\end{aligned}$$

Esta última ecuación nos permite determinar \bar{x} , dividiendo el momento del sistema respecto del origen entre la masa total del sistema:

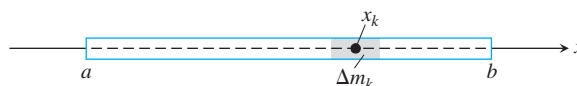
$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al origen}}{\text{masa del sistema}}.$$

El punto \bar{x} se denomina **centro de masa** del sistema.

Alambres y varillas delgadas

En muchas aplicaciones, necesitamos conocer el centro de masa de una varilla o de una franja delgada de metal. En casos como éstos, en donde podemos modelar la distribución de masa con una función constante, los símbolos de suma de nuestras fórmulas se convierten en integrales, tal como se describe a continuación.

Imagine que tenemos una franja larga y delgada en el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ y que la cortamos en pequeñas partes de masa Δm_k por medio de una partición del intervalo $[a, b]$. Para ello, elegimos cualquier punto x_k en el k -ésimo subintervalo de la partición.



La k -ésima pieza tiene una longitud de Δx_k unidades, y se encuentra aproximadamente a x_k unidades del origen. Observe tres cosas:

En primer lugar, el centro de masa de la franja \bar{x} es casi el mismo que el del sistema de puntos de masa que obtendríamos colocando cada masa Δm_k en el punto x_k :

$$\bar{x} \approx \frac{\text{momento del sistema}}{\text{masa del sistema}}.$$

Densidad

La densidad de la materia es su masa por unidad de volumen. Sin embargo, en la práctica tendemos a utilizar unidades que puedan medirse de manera más conveniente. En el caso de alambres, varillas y bandas angostas, utilizamos masa por unidad de longitud; en el de hojas planas y placas, utilizamos masa por unidad de área.

En segundo lugar, el momento de cada pieza de la franja respecto del origen es aproximadamente $x_k \Delta m_k$, por lo que el momento del sistema es aproximadamente igual a la suma de $x_k \Delta m_k$:

$$\text{momento del sistema} \approx \sum x_k \Delta m_k.$$

En tercera instancia, si la densidad de la franja en x_k es $\delta(x_k)$, expresada en términos de masa por unidad de longitud y si δ es continua, entonces Δm_k es aproximadamente igual a $\delta(x_k) \Delta x_k$ (masa por unidad de longitud por longitud):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k) \Delta x_k.$$

Combinando estas tres observaciones se obtiene

$$\bar{x} \approx \frac{\text{momento del sistema}}{\text{masa del sistema}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k) \Delta x_k}{\sum \delta(x_k) \Delta x_k}. \quad (2)$$

La suma en el último numerador de la ecuación (2) es una suma de Riemann para la función continua $x\delta(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. La suma en el denominador es una suma de Riemann para la función $\delta(x)$ en ese intervalo. Esperaríamos que la aproximación obtenida con la ecuación (2) mejore conforme la franja sea dividida en partes cada vez más pequeñas, lo cual nos conduce a la ecuación

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x) dx}{\int_a^b \delta(x) dx}.$$

Ésta es la fórmula que utilizamos para determinar \bar{x} .

Momento, masa y centro de masa de una varilla delgada o de una franja a lo largo del eje x con función de densidad $\delta(x)$

$$\text{Momento con respecto al origen: } M_0 = \int_a^b x\delta(x) dx \quad (3a)$$

$$\text{Masa: } M = \int_a^b \delta(x) dx \quad (3b)$$

$$\text{Centro de masa: } \bar{x} = \frac{M_0}{M} \quad (3c)$$

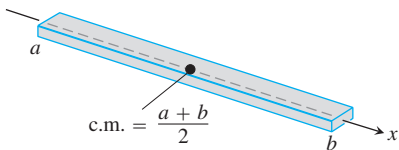


FIGURA 6.30 El centro de masa de una varilla o de una barra delgada recta de densidad constante, se encuentra a su punto medio (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Franjas y varillas de densidad constante

Demostrar que el centro de masa de una varilla o de una franja recta y delgada de densidad constante se encuentra en su punto medio.

Solución Modelamos la franja como una parte del eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 6.30). Nuestra meta es demostrar que $\bar{x} = (a + b)/2$, el punto medio entre a y b .

La clave para lograrlo radica en que la densidad tenga un valor constante. Esto nos permite considerar la función $\delta(x)$ en las integrales de la ecuación (3) como una constante (llamémosle δ), con lo que resulta

$$M_0 = \int_a^b \delta x \, dx = \delta \int_a^b x \, dx = \delta \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{\delta}{2} (b^2 - a^2)$$

$$M = \int_a^b \delta \, dx = \delta \int_a^b 1 \, dx = \delta [x]_a^b = \delta(b - a)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2} (b^2 - a^2)}{\delta(b - a)} \\ &= \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

En la fórmula para las δ se eliminan \bar{x} .

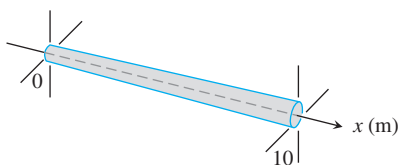


FIGURA 6.31 Podemos considerar una varilla de grosor variable como una varilla con densidad variable (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Varilla con densidad variable

La varilla de 10 m de longitud que se ilustra en la figura 6.31 aumenta su grosor de izquierda a derecha, por lo que su densidad, en lugar de ser constante, es $\delta(x) = 1 + (x/10)$ kg/m. Determinar el centro de masa de la varilla.

Solución El momento de la varilla con respecto al origen (ecuación 3a) es

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{10} x \delta(x) \, dx = \int_0^{10} x \left(1 + \frac{x}{10} \right) dx = \int_0^{10} \left(x + \frac{x^2}{10} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30} \right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Las unidades momento son masa \times longitud.

La masa de la varilla (ecuación 3b) es

$$M = \int_0^{10} \delta(x) \, dx = \int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10} \right) dx = \left[x + \frac{x^2}{20} \right]_0^{10} = 10 + 5 = 15 \text{ kg}.$$

El centro de masa de la varilla (ecuación 3c) se ubica en el punto

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56 \text{ m}.$$

Masas distribuidas sobre una región plana

Suponga que tenemos una colección finita de masas ubicadas en el plano, con masa m_k en el punto (x_k, y_k) (vea la figura 6.32). La masa del sistema es

$$\text{Masa del sistema: } M = \sum m_k.$$

Cada masa m_k tiene un momento con respecto al eje x . Éste es $m_k y_k$ y su momento con respecto al eje y es $m_k x_k$. Los momentos del sistema completo con respecto a los dos ejes son

$$\text{Momento con respecto al eje } x: M_x = \sum m_k y_k,$$

$$\text{Momento con respecto al eje } y: M_y = \sum m_k x_k.$$

La coordenada x del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \quad (4)$$

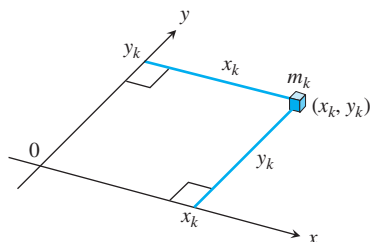


FIGURA 6.32 Cada masa m_k tiene un momento respecto de cada eje.

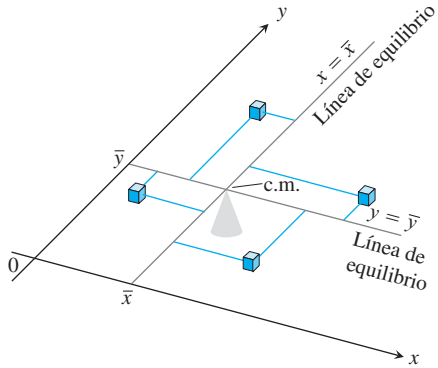


FIGURA 6.33 Un arreglo bidimensional de masas se equilibra en su centro de masa.

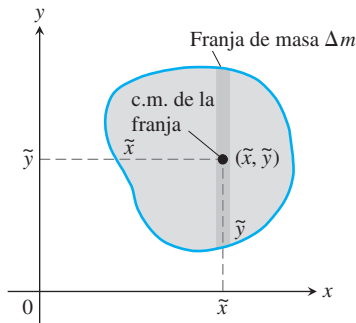


FIGURA 6.34 Una placa se corta en franjas delgadas paralelas al eje y . El momento ejercido por una franja representativa respecto de cada eje es el momento que su masa, Δm ejercería si estuviese concentrada en el centro de masa de la franja (\tilde{x}, \tilde{y}) .

Como en el caso unidimensional, con esta elección de \bar{x} , el sistema se equilibra con respecto a la recta $x = \bar{x}$ (figura 6.33).

La coordenada y del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \quad (5)$$

Con esta elección de \bar{y} , el sistema se equilibra también con respecto a la recta $y = \bar{y}$. La torca ejercida por las masas con respecto a la recta $y = \bar{y}$ se elimina. Así, en lo que se refiere al equilibrio, el sistema se comporta como si todas las masas estuviesen en un solo punto (\bar{x}, \bar{y}) , al cual se le denomina **centro de masa** del sistema.

Placas planas y delgadas

En muchas aplicaciones es necesario determinar el centro de masa de una placa plana y delgada, por ejemplo, un disco de aluminio, o una hoja triangular de acero. En tales casos, suponemos que la distribución de masa es continua y las fórmulas que utilizamos para calcular \bar{x} y \bar{y} contienen integrales en lugar de sumas finitas. Las integrales surgen de la manera siguiente.

Imagine que la placa, que ocupa una región del plano xy , se corta en franjas delgadas paralelas a uno de los ejes (en la figura 6.34, paralelas al eje y). El centro de masa de una franja representativa es (\tilde{x}, \tilde{y}) . Tratamos la masa de la franja Δm como si estuviese en (\tilde{x}, \tilde{y}) . Entonces, el momento de la franja con respecto al eje y es $\tilde{x} \Delta m$ y con respecto al eje x es $\tilde{y} \Delta m$. Así, las ecuaciones (4) y (5) se transforman en

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x} \Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y} \Delta m}{\sum \Delta m}.$$

Como en el caso unidimensional, las sumas son sumas de Riemann para integrales y aproximan a éstas en el límite conforme el ancho de las franjas en que se corta la placa se hace cada vez más angosto. Escribimos estas integrales de manera simbólica como

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \, dm}{\int dm} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \, dm}{\int dm}.$$

Momentos, masa y centro de masa de una placa delgada que cubre una región en el plano xy

$$\text{Momento con respecto al eje } x: \quad M_x = \int \tilde{y} \, dm$$

$$\text{Momento con respecto al eje } y: \quad M_y = \int \tilde{x} \, dm \quad (6)$$

$$\text{Masa:} \quad M = \int dm$$

$$\text{Centro de masa:} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

Para evaluar estas integrales, dibujamos la placa en el plano coordenado y bosquejamos una franja de masa, paralela a uno de los ejes coordenados. Luego, expresamos la masa de la franja dm y las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) del centro de masa de la franja en términos de x o y . Por último, integramos $\tilde{y} \, dm$, $\tilde{x} \, dm$ y dm entre los límites de integración determinados por la ubicación de la placa en el plano.

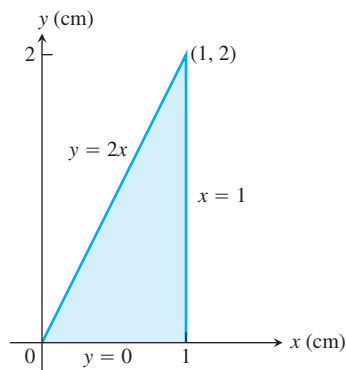


FIGURA 6.35 La placa del ejemplo 3.

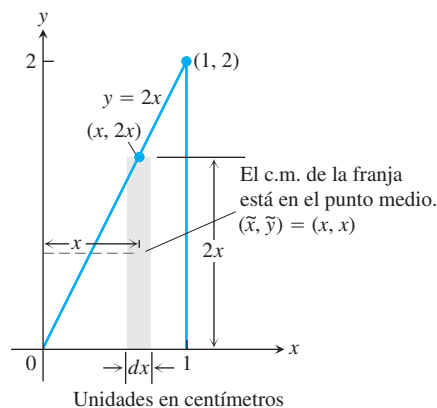


FIGURA 6.36 Modelando la placa del ejemplo 3 con franjas verticales.

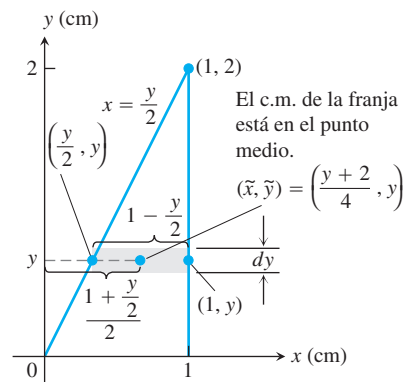


FIGURA 6.37 Modelando la placa del ejemplo 3 con franjas horizontales.

EJEMPLO 3 Placa con densidad constante

La placa triangular que se muestra en la figura 6.35 tiene una densidad constante de $\delta = 3 \text{ g/cm}^2$. Determinar

- el momento, M_y , de la placa respecto del eje y .
- la masa, M , de la placa.
- la coordenada \bar{x} del centro de masa (c.m.) de la placa

Solución

Método 1: Franjas verticales (figura 6.36)

- (a) El momento M_y : La franja vertical representativa tiene
- centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$
 - largo: $2x$
 - ancho: dx
 - área $dA = 2x \, dx$
 - masa: $dm = \delta \, dA = 3 \cdot 2x \, dx = 6x \, dx$
 - distancia del c.m. al eje y : $\tilde{x} = x$.

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x} \, dm = x \cdot 6x \, dx = 6x^2 \, dx.$$

Por lo tanto, el momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x} \, dm = \int_0^1 6x^2 \, dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}.$$

- (b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x \, dx = 3x^2 \Big|_0^1 = 3 \text{ g}.$$

- (c) La coordenada \bar{x} del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Por medio de un cálculo análogo, podríamos determinar M_x y $\bar{y} = M_x/M$.

Método 2: Franjas horizontales (figura 6.37)

- (a) El momento M_y : La coordenada \tilde{y} del centro de masa de una franja horizontal representativa es y (vea la figura), así que

$$\tilde{y} = y.$$

La coordenada \tilde{x} es la coordenada x del punto medio del segmento que cruza el triángulo. Esto produce un promedio de $y/2$ (el valor de x del lado izquierdo de la franja) y 1 (el valor de x del lado derecho de la franja):

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y + 2}{4}.$$

También tenemos

$$\text{largo: } 1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$$

$$\text{ancho: } dy$$

$$\text{área: } dA = \frac{2-y}{2} dy$$

$$\text{masa: } dm = \delta dA = 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy$$

$$\text{distancia del c.m. al eje } y: \tilde{x} = \frac{y+2}{4}.$$

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x} dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy = \frac{3}{8} (4-y^2) dy.$$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x} dm = \int_0^2 \frac{3}{8} (4-y^2) dy = \frac{3}{8} \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{16}{3} \right) = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}.$$

(b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2} (2-y) dy = \frac{3}{2} \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{3}{2} (4-2) = 3 \text{ g}.$$

(c) La coordenada x del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Por medio de un cálculo análogo, podemos determinar M_x y \bar{y} . ■

Si la distribución de masa en una placa plana y delgada tiene un eje de simetría, el centro de masa estará en él. Si tiene dos ejes de simetría, el centro de masa estará en la intersección de ambos ejes. Con frecuencia esto nos ayuda a simplificar nuestro trabajo.

EJEMPLO 4 Placa con densidad constante

Determinar el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ que cubre la región acotada por arriba por la parábola $y = 4 - x^2$ y por abajo por el eje x (figura 6.38).

Solución Como la placa es simétrica respecto del eje y y su densidad es constante, la distribución de masa es simétrica respecto del eje y y el centro de masa estará en él. Así, $\bar{x} = 0$. Falta por determinar $\bar{y} = M_x/M$.

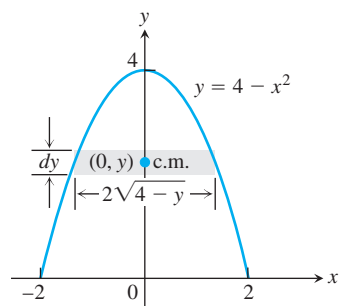
Un cálculo de prueba con franjas horizontales (figura 6.38a) conduce a una integración complicada

$$M_x = \int_0^4 2\delta y \sqrt{4-y} dy.$$

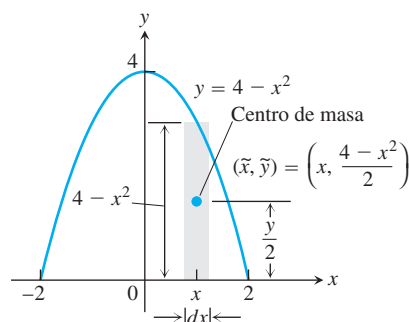
Por lo tanto, modelamos la distribución de masa con franjas verticales (figura 6.38b).

Cómo determinar el centro de masa de una placa

1. Dibuje la placa en el plano xy .
2. Haga un bosquejo de una franja de masa que sea paralela a uno de los ejes coordenados y determine sus dimensiones.
3. Determine la masa de la franja dm y el centro de masa (\tilde{x}, \tilde{y}) .
4. Integre $\tilde{y} dm$, $\tilde{x} dm$ y dm para determinar M_x , M_y y M .
5. Divida los momentos entre la masa, para calcular \bar{x} y \bar{y} .



(a)



(b)

FIGURA 6.38 Modelando la placa del ejemplo 4 con (a) franjas horizontales resulta en una integración inconveniente, así que la modelamos con (b) franjas verticales.

Una franja vertical representativa tiene

centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$

largo: $4 - x^2$

ancho: dx

área: $dA = (4 - x^2) dx$

masa: $dm = \delta dA = \delta(4 - x^2) dx$

distancia del c.m. al eje x : $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$.

El momento de la franja con respecto al eje x es

$$\tilde{y} dm = \frac{4-x^2}{2} \cdot \delta(4-x^2) dx = \frac{\delta}{2} (4-x^2)^2 dx.$$

El momento de la placa con respecto al eje x es

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y} dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2} (4-x^2)^2 dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{256}{15} \delta. \end{aligned} \quad (7)$$

La masa de la placa es

$$M = \int dm = \int_{-2}^2 \delta(4-x^2) dx = \frac{32}{3} \delta. \quad (8)$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{(256/15) \delta}{(32/3) \delta} = \frac{8}{5}.$$

El centro de masa de la placa es el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right).$$

EJEMPLO 5 Placa con densidad variable

Determinar el centro de masa de la placa del ejemplo 4, si la densidad en el punto (x, y) es $\delta = 2x^2$, es decir, el doble del cuadrado de la distancia entre el punto y el eje y .

Solución La distribución de masa sigue siendo simétrica respecto del eje y , por lo que $\bar{x} = 0$. Con $\delta = 2x^2$, las ecuaciones (7) y (8) se transforman en

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y} \, dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2} (4 - x^2)^2 \, dx = \int_{-2}^2 x^2 (4 - x^2)^2 \, dx \\ &= \int_{-2}^2 (16x^2 - 8x^4 + x^6) \, dx = \frac{2048}{105} \end{aligned} \quad (7')$$

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_{-2}^2 \delta(4 - x^2) \, dx = \int_{-2}^2 2x^2(4 - x^2) \, dx \\ &= \int_{-2}^2 (8x^2 - 2x^4) \, dx = \frac{256}{15}. \end{aligned} \quad (8')$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

El nuevo centro de masa de la placa es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right).$$

EJEMPLO 6 Alambre con densidad constante

Determinar el centro de masa de un alambre con densidad constante δ , que tiene forma de una semicircunferencia de radio a .

Solución Modelamos el alambre con la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.39). La distribución de masa es simétrica respecto del eje y , por lo que $\bar{x} = 0$. Para determinar \bar{y} , imaginamos que dividimos el alambre en pequeños segmentos. El segmento representativo (figura 6.39a) tiene

$$\text{largo: } ds = a \, d\theta$$

$$\text{masa: } dm = \delta \, ds = \delta a \, d\theta$$

$$\text{distancia del c.m. al eje } x: \tilde{y} = a \, \sin \theta.$$

Masa por unidad
de longitud por
longitud

De donde,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a \, \sin \theta \cdot \delta a \, d\theta}{\int_0^\pi \delta a \, d\theta} = \frac{\delta a^2 [-\cos \theta]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a.$$

El centro de masa está en el punto $(0, 2a/\pi)$, del eje de simetría, aproximadamente a dos tercios del origen (figura 6.39b).

Centroides

Cuando la función de densidad es constante, se elimina del numerador y denominador en las fórmulas para \bar{x} y \bar{y} . Esto ocurrió en casi todos los ejemplos de esta sección. En lo que concierne a \bar{x} y \bar{y} , δ bien podría haber sido 1. Así, cuando la densidad es constante, la ubicación del centro de masa es una característica de la geometría del objeto y no del material del cual está fabricado. En tales casos, los ingenieros podrían llamar al centro de masa, el **centroide** de la forma. Por ejemplo, si se le diera la instrucción: “Determine el centroide de un triángulo o de un cono sólido”, sólo tendría que establecer δ igual a 1 y proceder a la determinación de \bar{x} y \bar{y} como se hizo antes, dividiendo momentos entre masas.

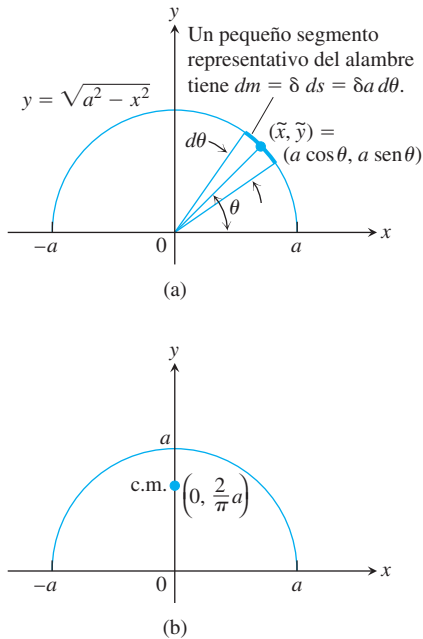
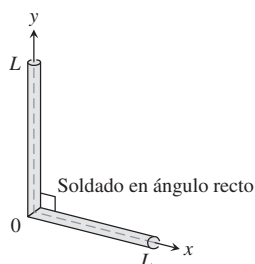


FIGURA 6.39 El alambre semicircular del ejemplo 6. (a) Las dimensiones y variables utilizadas para determinar el centro de masa. (b) El centro de masa no está en el alambre.

EJERCICIOS 6.4

Varillas delgadas

1. Dos niños, uno con 80 lb de peso y el otro con 100 lb, se balancean en un sube y baja. El niño de 80 lb está a 5 pies del punto de apoyo. ¿A qué distancia del punto de apoyo se encuentra el niño de 100 lb?
2. Los extremos de un tronco están colocados en dos básculas. Una báscula marca 100 kg y la otra 200 kg. ¿En dónde se encuentra el centro de masa del tronco?
3. Los extremos de dos varillas de acero de igual longitud se sueldan para formar un marco en forma de ángulo recto. Localice el centro de masa del marco. (*Sugerencia:* ¿En dónde está el centro de masa de cada varilla?)



4. Usted suelda los extremos de dos varillas de acero para formar un marco en ángulo recto. El largo de una varilla mide el doble que el de la otra. ¿En dónde se encuentra el centro de masa del marco? (*Sugerencia:* ¿En dónde está el centro de masa de cada varilla?)

Los ejercicios 5 a 12 dan funciones de densidad de varillas delgadas que se encuentran en diferentes intervalos del eje x . Utilice las ecuaciones (3a) a (3c) para determinar el momento de cada varilla con respecto al origen, su masa y su centro de masa.

5. $\delta(x) = 4$, $0 \leq x \leq 2$
6. $\delta(x) = 4$, $1 \leq x \leq 3$
7. $\delta(x) = 1 + (x/3)$, $0 \leq x \leq 3$
8. $\delta(x) = 2 - (x/4)$, $0 \leq x \leq 4$
9. $\delta(x) = 1 + (1/\sqrt{x})$, $1 \leq x \leq 4$
10. $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2})$, $0.25 \leq x \leq 1$
11. $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
12. $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Placas delgadas con densidad constante

En los ejercicios del 13 a 24, determine el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ que cubre la región dada.

13. La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$
14. La región acotada por la parábola $y = 25 - x^2$ y el eje x
15. La región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y la recta $y = -x$
16. La región encerrada por las parábolas $y = x^2 - 3$ y $y = -2x^2$

17. La región acotada por el eje y y la curva $x = y - y^3$, $0 \leq y \leq 1$
18. La región acotada por la parábola $x = y^2 - y$ y la recta $y = x$
19. La región acotada por el eje x y la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
20. La región entre el eje x y la curva $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$
21. La región acotada por las parábolas $y = 2x^2 - 4x$ y $y = 2x - x^2$
22. a. La región del primer cuadrante cortada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$
b. La región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$
Compare la respuesta del inciso (b) con la respuesta que dio al inciso (a).
23. La región “triangular” del primer cuadrante, comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y las rectas $x = 3$ y $y = 3$. (*Sugerencia:* Utilice geometría para determinar el área).
24. La región acotada por arriba por la curva $y = 1/x^3$, por abajo por la curva $y = -1/x^3$, y a la izquierda y la derecha por las rectas $x = 1$ y $x = a > 1$. También determine $\lim_{a \rightarrow \infty} \bar{x}$.

Placas delgadas con densidad variable

25. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región entre el eje x y la curva $y = 2/x^2$, $1 \leq x \leq 2$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = x^2$.
26. Encuentre el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada por abajo por la parábola $y = x^2$, y por arriba por la recta $y = x$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = 12x$.
27. La región acotada por las curvas $y = \pm 4/\sqrt{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido.
a. Determine el volumen del sólido.
b. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = 1/x$.
c. Haga un bosquejo de la placa, ilustrando en él el centro de masa.
28. La región entre la curva $y = 2/x$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido.
a. Determine el volumen del sólido.
b. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = \sqrt{x}$.
c. Haga un bosquejo de la placa, ilustrando en él el centro de masa.

Centroides de triángulos

29. El centroide de un triángulo está en la intersección de las medianas del triángulo (figura 6.40a) Tal vez recuerde que el

punto que está a un tercio de la distancia entre el punto medio de cada lado del triángulo y el vértice opuesto, es el punto en donde se intersecan sus tres medianas. Demuestre que el centroide está en la intersección de las medianas, comprobando que también se encuentra a un tercio de la distancia entre cada lado y el vértice opuesto. Para ello, realice los pasos siguientes.

- Coloque un lado del triángulo sobre el eje x , como en la figura 6.40b. Expresé dm en términos de L y dy .
- Utilice triángulos semejantes para demostrar que $L = (b/h)(h - y)$. Sustituya esta expresión para L en su fórmula para dm .
- Demuestre que $\bar{y} = h/3$.
- Aplique el mismo argumento a los otros lados.

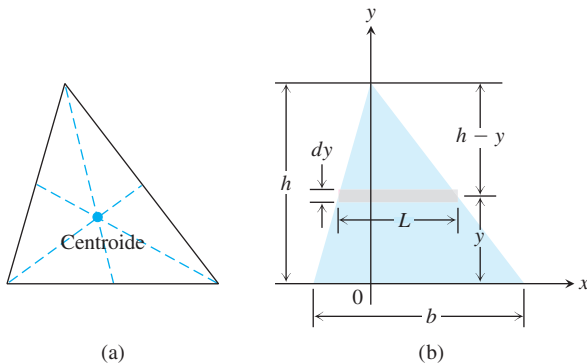


FIGURA 6.40 El triángulo del ejercicio 29. (a) El centroide. (b) Las dimensiones y variables que se emplean para localizar el centro de masa.

Utilice el resultado del ejemplo 29 para determinar los centroides de los triángulos cuyos vértices aparecen en los ejercicios 30 a 34. Suponga que $a, b > 0$.

30. $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$
31. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$
32. $(0, 0), (a, 0), (0, a)$
33. $(0, 0), (a, 0), (0, b)$
34. $(0, 0), (a, 0), (a/2, b)$

Alambres delgados

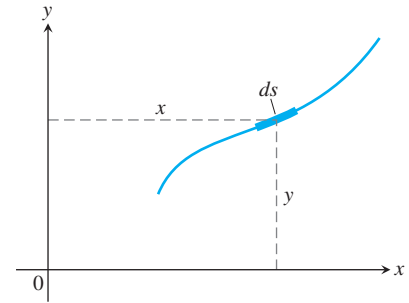
35. **Densidad constante** Determine el momento, con respecto al eje x , de un alambre con densidad constante que está a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.
36. **Densidad constante** Determine el momento, con respecto al eje x , de un alambre con densidad constante que está a lo largo de la curva $y = x^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
37. **Densidad variable** Suponga que la densidad del alambre del ejemplo 6 es $\delta = k \sin \theta$ (k constante). Determine el centro de masa.
38. **Densidad variable** Suponga que la densidad del alambre del ejemplo $\delta = 1 + k|\cos \theta|$ (k constante). Determine el centro de masa.

Fórmulas de ingeniería

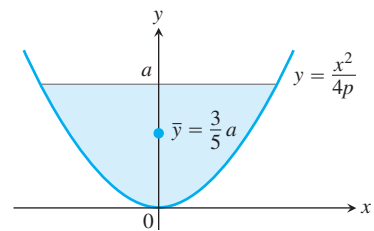
Verifique las afirmaciones y fórmulas de los ejercicios 39 a 42.

39. Las coordenadas del centroide de una curva plana diferenciable son

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\text{longitud}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\text{longitud}}.$$

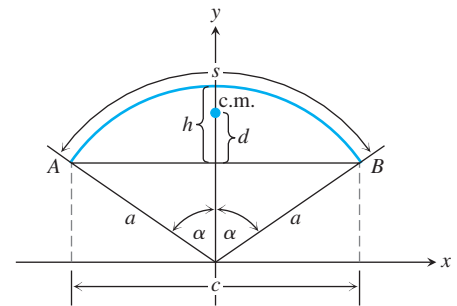


40. Sin importar el valor de $p > 0$ en la ecuación $y = x^2/(4p)$, la coordenada \bar{y} del centroide del segmento parabólico que se muestra a continuación, es $\bar{y} = (3/5)a$.



41. En el caso de alambres y varillas delgadas de densidad constante con forma de arcos circulares centrados en el origen y simétricos respecto del eje y , la coordenada \bar{y} del centro de masa es

$$\bar{y} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}.$$



42. (Continuación del ejercicio 41)

- a. Realice los pasos siguientes para demostrar que, cuando α es pequeña, la distancia d entre el centroide y la cuerda AB es aproximadamente $2h/3$ (según la notación de la figura).

- i. Demuestre que

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}. \quad (9)$$

- ii. Grafique

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

y utilice la función *Trace* de su calculadora gráfica para demostrar que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(\alpha) \approx 2/3$.

- b. El error (diferencia entre d y $2h/3$) es pequeño incluso para ángulos mayores de 45° . Compruébelo evaluando el lado derecho de la ecuación (9) para $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 radianes.