快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

复变函数
习题精解精练

（配西交大高等数学教研室第四版教材·高教版）

主　编　尧延华　张晓光　邓　慧

- 课后习题 精析 精解
- 同步训练 勤学 勤练

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

复变函数习题精解精练

（配西交大高等数学教研室第四版教材·高教版）

主　编　苑延华　张晓光　邓　慧
主　审　张晓威

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第四版)教材而编写的辅导书。本书按教材的章节顺序编排,每章包括典型题解析、书后习题解析和同步训练题及答案三部分内容,旨在帮助学生熟练掌握解题的基本方法和技巧,巩固所学的知识、开阔视野。

本书可作为高等学校学生学习复变函数的辅导书,也可供教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数习题精解精练/苑延华,张晓光,邓慧主编.
哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.4
ISBN 978-7-81073-981-8

Ⅰ.复… Ⅱ.①苑…②张…③邓 Ⅲ.复变函数-高等学校-解题 Ⅳ.O174.5-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048073 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×1 092mm　1/16
印　　张 10.75
字　　数 221 千字
版　　次 2007 年 4 月第 1 版
印　　次 2007 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 14.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

复变函数是高等学校中物理、数学、电类等各专业必修的一门数学基础课，也是自然科学与工程技术中常用的数学工具。为了帮助读者正确理解和掌握复变函数的基本理论与方法，增强分析问题、解决问题的能力，我们编写了《复变函数习题精解精练》这本书。

全书共六章，每章由典型题解析、书后习题解析、同步训练题及同步训练题答案组成。在每一章的典型题解析部分，编者都给出了几个具有代表性题目的详细解答，并注重分析解题的思路、揭示解题的规律。书后习题解析部分，主要针对西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第四版)教材中的习题做了比较详细的解答，并对超出基本要求的习题加了“*”号，予以解答，以供需要者参考。同步训练题部分，主要汇编了能反映本章具体要求的一些检测题目，有单项选择题、填空题、计算题和证明题。这部分内容旨在使读者对学习效果进行自我检测。

本书第 1 章、第 2 章、第 3 章由张晓光、邓慧编写，第 4 章、第 5 章、第 6 章由苑延华编写。全书由苑延华统编定稿，由哈尔滨工程大学理学院张晓威副教授主审。

由于编者水平有限，书中错漏之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编　者

2007 年 3 月

目　　录

第1章　复数与复变函数

典型题解析

例1－1　试确定$\frac{z+2}{z-1}$的实部和虚部.

分析　将$z=x+\mathrm{i}y$代入原式,然后化简即可.

解　$$\frac{z+2}{z-1}=\frac{x+\mathrm{i}y+2}{x+\mathrm{i}y-1}=\frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}=\frac{[(x+2)+\mathrm{i}y]\cdot[(x-1)-\mathrm{i}y]}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)+y^2+\mathrm{i}[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}$$

则
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{(x+2)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

例1－2　设$z\neq 0$,试证$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$.

分析　在证明有关复数模(或绝对值)的等式或不等式时,常用公式$|z|^2=z\cdot\bar{z}$,$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$以及三角不等式$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.由于$z\neq 0$以及要证不等式中含有$|z|$和$\arg z$,故考虑复数$z$的指数形式$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$.

证明　设$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$,$\theta=\arg z$且$-\pi<\theta\leqslant\pi$,则
$$|z-1|=\big|z-|z|+|z|-1\big|\leqslant\big|z-|z|\big|+\big||z|-1\big|$$
$$=\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|$$
$$=\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\cos\theta-1+\mathrm{i}\sin\theta|$$
$$=\big||z|-1\big|+|z|\cdot\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$
$$=\big||z|-1\big|+2|z|\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\theta|$$

这是因为当$0\leqslant\frac{|\theta|}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$时,$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=\sin\frac{|\theta|}{2}\leqslant\frac{|\theta|}{2}$成立,从而不等式$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\arg z|$成立.

例1－3　将函数$f(z)=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$写成关于$z$的解析表达式.

解　常用以下三种方法:

(1) 共轭法　将$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$,$y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$代入,得
$$f(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\right)+\mathrm{i}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\cdot\left(1-\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\right)=z+\frac{1}{z}$$

(2) 拼凑法　凑成$x+\mathrm{i}y$的函数形式,则

$$f(z)=x+\mathrm{i}y+\frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathrm{i}y)=z+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\cdot\bar{z}=z+\frac{1}{z}$$

(3) 设零法　令 $y=0$,求 $f(x)$,再得 $f(z)$,因 $f(x)=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x+\frac{1}{x}$,故

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

例 1-4　试讨论下式定义的函数的连续性:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varphi}, & z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\\ 2\pi, & z=0\end{cases}\quad(r>0,0<\varphi\leqslant 2\pi)$$

分析　对于分段函数连续性问题,一般是用定义讨论它在分段点处的连续性,在分段点外只需考虑每段上相应函数的连续性.本题中函数 $f(z)$ 的分段点相当于 $z=0$ 及 $\varphi=0$,即原点及正实轴上的点.

解　(1) $z=0$ 是 $f(z)$ 的不连续点.

因为 $\forall z\neq 0$,有 $|f(z)-f(0)|=\left|\frac{1}{2\varphi}-2\pi\right|$.

显然当 z 沿射线 $\arg z=\frac{\pi}{2}$ 趋于原点时,上式的值恒为 $2\pi-\frac{1}{\pi}\neq 0$,这说明 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的连续点.

(2) 正实轴上的每一点 z_0 也是 $f(z)$ 的不连续点.因 z_0 在正实轴上,所以 $z_0=z_0(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi)$ $(0<\varphi\leqslant 2\pi)$,即 $f(z_0)=\frac{1}{4\pi}$.然而当 z 沿圆周 $|z|=z_0$ 顺时针方向趋于 z_0 时,z 的辐角 $\varphi=\arg z\to 0$,这时

$$|f(z)-f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\varphi}-\frac{1}{4\pi}\right|=\frac{2\pi-\varphi}{4\pi\varphi}>\frac{1}{4\varphi}\to\infty\qquad(\varphi\to 0)$$

(这里不妨令 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$).

(3) 除(1)、(2)两种情况外,$f(z)$ 处处连续.事实上,若任意非原点、非正实轴上的点 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ 满足 $r_1>0,0<\varphi_1<2\pi$,那么

$$|f(z)-f(z_1)|=\left|\frac{1}{2\varphi}-\frac{1}{2\varphi_1}\right|=\frac{|\varphi-\varphi_1|}{2\varphi\varphi_1}$$

如图 1-1 所示,考虑 $|z-z_1|<\delta$,OA 与 OB 是圆周 $|z-z_1|=\delta$ 的两条切线,显然有 $|\varphi-\varphi_1|<\arcsin\frac{\delta}{r_1}$,而且可以选取适当的 $\delta>0$,使得 $\varphi>\frac{\varphi_1}{2}$(这是因为由 $|\varphi-\varphi_1|<\arcsin\frac{\delta}{r_1}$ 有 $-\varphi+\varphi_1<\arcsin\frac{\delta}{r_1}$,即 $\varphi>\varphi_1-\arcsin\frac{\delta}{r_1}$,故只要 $0<\arcsin\frac{\delta}{r_1}<\frac{\varphi_1}{2}$,即 $0<\delta<$

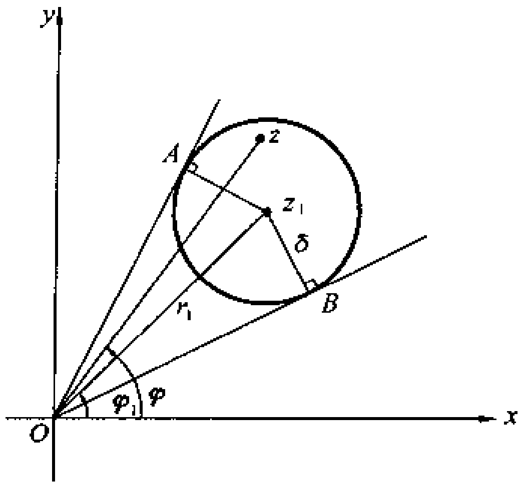


图 1-1

$r_1 \cdot \sin\frac{\varphi_1}{2}$,便有 $\varphi > \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1}{2}$).

于是当 $0 < \delta < r_1\sin\frac{\varphi_1}{2}$ 时,有 $|f(z) - f(z_1)| = \frac{|\varphi - \varphi_1|}{2\varphi\varphi_1} < \frac{\arcsin\frac{\delta}{r_1}}{\varphi_1^2}$,这里用到了 $|\varphi - \varphi_1| < \arcsin\frac{\varphi_1}{2}$ 和 $\varphi > \frac{\varphi_1}{2}$ 两个不等关系.

令 $\frac{\arcsin\frac{\delta}{r_1}}{\varphi_1^2} < \epsilon$(任意给定的正数),解得 $\delta < r_1\sin(\epsilon\varphi_1^2)$,取

$$\delta' = \min\left\{r_1\sin\frac{\varphi_1}{2}, r_1\sin(\epsilon\varphi_1^2)\right\}$$

可知对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta' > 0$,当 $|z - z_1| < \delta'$ 时,有

$$|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$$

成立.这就说明 $f(z)$ 在任意非原点、非正实轴上处处连续.

例1－5　若以 $1, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ 表示1的 n 个 n 次根,试从

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

两端令 $z \to 1$,证明 $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)}{n}\pi = n$.

分析　1的 n 次根为$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$,这样 $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$,而且不难看出 $1, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ 也是方程 $z^n - 1 = 0$ 的 n 个根,所以

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

两边同除以$(z - 1)$便得

$$(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$$

当 $z \to 1$ 时,上式右端极限为 n;而当 $z \to 1$ 时,上式左端极限为$(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})$.我们只须利用复数的乘法验证

$$(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1}) = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

证明　从等式

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

两端令 $z \to 1$,可知 $n = (1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})$.又

$$\begin{aligned}1 - w_k &= 1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i} = 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sin\frac{k\pi}{n}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})\\ &= 2\sin\frac{\pi}{n}e^{i\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{n}e^{i\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)}\cdots 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot e^{i\left(\frac{n-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2}\right)}\\ &= 2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot e^{i\frac{\pi}{n}(1+2+\cdots+n-1)}\cdot e^{-\frac{n-1}{2}\pi i}\end{aligned}$$

$$= 2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

故等式 $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n$ 成立.

书后习题解析

1.求下列复数 z 的实部与虚部,共轭复数、模与辐角:

(1) $\frac{1}{3+2i}$; (2) $\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$; (3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$; (4) $i^8-4i^{21}+i$.

分析 复数 $z=x+iy$ 的三角表示式、指数表示式分别为 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 与 $z=re^{i\theta}$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arg z$.一般在给定复数 z 后,模 r 的计算比较简单,关键是求 θ,而复数 z 的辐角主值可按式(1-3)来计算(其中 $\frac{-\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}\leqslant\frac{\pi}{2}$).本题先对分母有理化再进行复数的四则运算,将各式化简成 $x+iy$ 的形式,再回答问题.

解 (1) $\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{1}{13}(3-2i)=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{3}{13},\operatorname{Im}(z)=-\frac{2}{13},\bar{z}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{2}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

$$\arg z=\arctan\left[\left(-\frac{2}{13}\right)\Big/\frac{3}{13}\right]=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)=-\arctan\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{Arg}z=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(2) $\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-i-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\frac{-3+3i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{3}{2},\operatorname{Im}(z)=-\frac{5}{2},\bar{z}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\arg z=\arctan\left[\left(-\frac{5}{2}\right)\Big/\frac{3}{2}\right]=-\arctan\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{Arg}z=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\frac{26-7i}{2i}=\frac{(26-7i)i}{-2}=-\frac{7}{2}-13i$

$$\operatorname{Re}(z)=-\frac{7}{2},\operatorname{Im}(z)=-13,\bar{z}=-\frac{7}{2}+13i$$

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+(-13)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{29}$$

$$\arg z=\arctan\frac{26}{7}-\pi$$

$$\operatorname{Arg}z=\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(4) $i^8-4i^{21}+i=i^{4+4}-4i^{5\times4+1}+i=1-4i+i=1-3i$

$$\operatorname{Re}(z)=1,\operatorname{Im}(z)=-3,\bar z=1+3i$$

$$|z|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

$$\arg z=\arctan\frac{-3}{1}=-\arctan3$$

$$\operatorname{Arg}z=-\arctan3+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

2.当 x,y 等于什么实数时,等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立?

解 因为分母不为零,所以原等式可化为

$$(x+1)+i(y-3)=(1+i)(5+3i)=2+8i$$

利用复数相等的概念,得 $\begin{cases}x+1=2\\y-3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}$,即 $x=1,y=11$ 时等式成立.

3.证明虚数单位 i 有这样的性质: $-i=i^{-1}=\bar i$.

证明 因为 $-i=\frac{-i\cdot i}{i}=\frac{-i^2}{i}=\frac{1}{i}=i^{-1}$,而 $\bar i=-i$,所以 $-i=i^{-1}=\bar i$.

4.证明:

(1) $|z|^2=z\bar z$;　　(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar z_1\pm\bar z_2$;

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar z_1\bar z_2$;　　(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar z_1}{\bar z_2}\quad(z_2\neq0)$;

(5) $\bar{\bar z}=z$;　　(6) $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar z),\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar z)$.

分析 这类基本性质的证明通常要把 z 写成 $x+iy$ 的形式,然后从定义出发证明等式成立.

证明 (1) 设 $z=x+iy$,则 $|z|^2=x^2+y^2$,又

$$z\cdot\bar z=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

所以

$$|z|^2=z\cdot\bar z$$

(2) 设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,则

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)}$$

$$=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2)$$

$$\bar z_1\pm\bar z_2=\overline{(x_1+iy_1)}\pm\overline{(x_2+iy_2)}=(x_1-iy_1)\pm(x_2-iy_2)$$

$$=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2)$$

从而

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar z_1\pm\bar z_2$$

(3) 设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,则

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\bar z_1\cdot\bar z_2=\overline{(x_1+iy_1)}\cdot\overline{(x_2+iy_2)}=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$$

从而

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar z_1\cdot\bar z_2$$

(4) 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$，则

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} = \overline{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\overline{x_1 + iy_1}}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

所以

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(5) 设 $z = x + iy$，则 $\bar{z} = x - iy$，$\overline{(\bar{z})} = \bar{\bar{z}} = x + iy$，故 $\bar{\bar{z}} = z$.

(6) 设 $z = x + iy$，则 $\bar{z} = x - iy$，从而

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x = \mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}[x + iy - (x - iy)] = \frac{1}{2i}(2iy) = y = \mathrm{Im}(z)$$

结论得证.

5.对任何 $z, z^2 = |z|^2$ 是否成立?如果是,就给出证明;如果不是,对哪些 z 值才成立?

解 对任何复数 $z = x + iy$ 易知 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, |z|^2 = x^2 + y^2$，于是,由 $z^2 = |z|^2$ 可得 $x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2$，比较两边的实部、虚部,有

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

可得 $y = 0$，x 为任意实数.故对任何复数 $z, z^2 = |z|^2$ 不成立;只有当 z 为实数(虚部为零)时,等式 $z^2 = |z|^2$ 才成立.

6.当 $|z| \leqslant 1$ 时,求 $|z^n + a|$ 的最大值,其中 n 为正整数,a 为复数.

解 因为 $|z^n| = |z|^n$，由三角不等式及 $|z| \leqslant 1$ 可知

$$|z^n + a| \leqslant |z|^n + |a| \leqslant 1 + |a|$$

即 $|z^n + a|$ 的最大值为 $1 + |a|$.此时 $z = e^{i\frac{\mathrm{Arg}a}{n}}$.

7.判定下列命题的真假:

(1) 若 c 为实常数,则 $c = \bar{c}$; (2) 若 z 为纯虚数,则 $z \neq \bar{z}$;

(3) $i < 2i$; (4) 零的辐角是零;

(5) 仅存在一个数 z，使得 $\frac{1}{z} = -z$; (6) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;

(7) $\frac{1}{i}\bar{z} = \overline{iz}$.

解 (1) 真.因为实数的共轭复数是它本身,所以若 c 为实数,则必有 $c = \bar{c}$.

(2) 真.若 z 为纯虚数,则可设 $z = iy\ (y \neq 0)$，而 $\bar{z} = -iy$.由于 $y \neq 0$，所以 $iy \neq -iy$，即 $z \neq \bar{z}$.

(3) 假.因为复数不能比较大小.

(4) 假.因为复数 0 的辐角是不确定的.

(5) 假.由$\frac{1}{z}=-z$可得$z^2=-1$,从而z可取$\pm i$两个值.

(6) 一般不成立.由三角不等式$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$可知,等号仅当$\arg z_1-\arg z_2=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时成立.

(7) 真.因为$\overline{iz}=\bar{i}\cdot\bar{z}=-i\bar{z}=\frac{1}{i}\bar{z}$.

8.将下列复数化为三角表示式和指数表示式.

(1)i;　(2) -1;　(3)$1+\sqrt{3}i$;　(4)$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$;

(5) $\frac{2i}{-1+i}$;　(6) $\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}$.

分析　先将所给复数化简成形如$x+iy$的形式,再来确定模r及辐角主值$\arg z$,最后写出它的三角表示式及指数表示式.

解　(1)$r=|i|=1,\arg(i)=\frac{\pi}{2}$.所以i的三角表示式为$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.i的指数表示式为$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(2)$r=|-1|=1,\arg(-1)=\pi$.所以-1的三角表示式为$-1=\cos\pi+i\sin\pi$. -1的指数表示式为$-1=e^{i\pi}$.

(3)$r=|1+\sqrt{3}i|=2,\arg(1+\sqrt{3}i)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$.所以$1+\sqrt{3}i$的三角表示式为$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.$1+\sqrt{3}i$的指数表示式为$1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(4)
$$
\begin{aligned}
r&=|1-\cos\varphi+i\sin\varphi|=\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2}\\
&=\sqrt{2-2\cos\varphi}=\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=2\sin\frac{\varphi}{2}\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\arg(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)&=\arctan\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\arctan\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}\\
&=\arctan\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)=\arctan\left(\tan\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=\frac{\pi-\varphi}{2}
\end{aligned}
$$

故$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$的三角表示式为

$$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$

$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$的指数表示式为$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot e^{i\frac{\pi-\varphi}{2}}$.

(5) 因为$\frac{2i}{-1+i}=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2-2i}{2}=1-i$则$r=|1-i|=\sqrt{2},\arg(1-i)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$,所以$\frac{2i}{-1+i}$的三角表示式为$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;$\frac{2i}{-1+i}$的指数表示式为$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

(6) 因为$\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{5\varphi i})^2}{(e^{-3\varphi i})^3}=\frac{e^{10\varphi i}}{e^{-9\varphi i}}=e^{19\varphi i}$,从而知其三角表示式为

$\dfrac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\cos19\varphi+i\sin19\varphi$;其指数表示式为$\dfrac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=e^{19\varphi i}$.

9.将下列坐标变换公式写成复数形式:

(1) 平移公式$\begin{cases}x=x_1+a_1\\y=y_1+b_1\end{cases}$, (2) 旋转公式$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$.

解 (1) 令 $z=x+iy, z_1=x_1+iy_1, c_1=a_1+ib_1$,则原式相当于

$$z=x+iy=(x_1+a_1)+i(y_1+b_1)=(x_1+iy_1)+(a_1+ib_1)=z_1+c_1$$

故平移公式的复数形式为 $z=z_1+c_1$.

(2) 令 $z=x+iy, z_1=x_1+iy_1, c=\cos\alpha+i\sin\alpha$,则由原式有

$$\begin{aligned}z=x+iy&=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+i(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)\\&=x_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)+y_1(i\cos\alpha-\sin\alpha)\\&=x_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)+iy_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\\&=(x_1+iy_1)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=z_1\cdot c_1=z_1\cdot e^{i\alpha}\end{aligned}$$

故旋转公式的复数形式为 $z=z_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 或 $z=z_1\cdot e^{i\alpha}$.

10.一个复数乘以 $-i$,它的模与辐角有何改变?

解 设 $z=r\cdot e^{i\theta}$,而 $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$,则有$(-i)z=e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot re^{i\theta}=re^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}$,即复数 z 的模的大小不变而辐角减小$\frac{\pi}{2}$.

11.证明:$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并说明其几何意义.

分析 可将复数 z 设成$x+iy$ 的形式再进行计算,但当有复数模的平方时,还可用共轭复数的性质进行运算.下面用此法进行证明.

证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$$\begin{aligned}&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)+(z_1-z_2)(\bar z_1-\bar z_2)\\&=z_1\cdot\bar z_1+z_1\cdot\bar z_2+z_2\bar z_1+z_2\cdot\bar z_2+z_1\cdot\bar z_1-z_1\cdot\bar z_2-z_2\cdot\bar z_1+z_2\cdot\bar z_2\\&=2(z_1\cdot\bar z_1+z_2\cdot\bar z_2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)\end{aligned}$$

几何意义为:以 z_1,z_2 为邻边的平行四边形的两条对角线长度的平方和等于它相邻两边长度平方和的2倍.

12.证明下列各题:

(1) 任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+iY$的形式,其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数;

(2) 如果 $R(z)$ 为(1) 中的有理分式函数,但具有实系数,那么 $R(\bar z)=X-iY$.

(3) 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$的根,那么 $a-ib$ 也是它的根.

证明 (1) 设 $z=x+iy$,有

$$P(z)=P_1(x,y)+iP_2(x,y),\quad Q(z)=Q_1(x,y)+iQ_2(x,y)$$

则 $P_i(x,y),Q_i(x,y)(i=1,2)$ 是 x,y 的实多项式,又有

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P_1(x,y)+iP_2(x,y)}{Q_1(x,y)+iQ_2(x,y)}$$

$$= \frac{1}{Q_1^2 + Q_2^2}[(P_1Q_1 + P_2Q_2) + \mathrm{i}(P_2Q_1 - P_1Q_2)]$$

令

$$X = \frac{P_1Q_1 + P_2Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2},\quad Y = \frac{P_2Q_1 - P_1Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}$$

可见 X,Y 都是具有实系数的 x,y 的有理分式函数，并且 $R(z) = X + \mathrm{i}Y$.

(2) 设 $P(z),Q(z)$ 是实系数多项式，则关系式 $P(\bar{z}) = \overline{P(z)},Q(z) = \overline{Q(z)}$ 成立.

这是由于对于任一实系数多项式

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数，从而 $a_j = \bar{a}_j(j = 0,1,2,\cdots,n)$，因此

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n)}\\ &= \overline{a_0z^n} + \overline{a_1z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}z} + \bar{a}_n\\ &= a_0\bar{z}^n + a_1\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n = P(\bar{z})\end{aligned}$$

从而

$$R(\bar{z}) = \frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})} = \frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}} = \overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)} = \overline{R(z)} = \overline{(X + \mathrm{i}Y)} = X - \mathrm{i}Y$$

(3) 令 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$，由题设知 $P(a + \mathrm{i}b) = 0$，再由(2)知

$$P(a - \mathrm{i}b) = P(\overline{(a + \mathrm{i}b)}) = \overline{P(a + \mathrm{i}b)} = \bar{0} = 0$$

从而知 $a - \mathrm{i}b$ 也是方程 $P(z) = 0$ 的根.

13.如果 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，证明：

(1) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nt$；　(2) $z^n - \frac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin nt$.

证明　由 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 易知 $z^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt$，则

$$\frac{1}{z^n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} = \cos nt - \mathrm{i}\sin nt$$

所以(1)

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt + \cos nt - \mathrm{i}\sin nt = 2\cos nt$$

(2)

$$z^n - \frac{1}{z^n} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt - \cos nt + \mathrm{i}\sin nt = 2\mathrm{i}\sin nt$$

14.求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5$；　(2) $(1 + \mathrm{i})^6$；　(3) $\sqrt[6]{-1}$；　(4) $(1 - \mathrm{i})^{1/3}$.

分析　一般先将所给的复数写成指数表示式或三角表示式形式，然后再进行乘方或开方运算.

解　(1) $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$，所以

$$(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5 = 2^5 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}} = 32\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = -16\sqrt{3} - 16\mathrm{i}$$

(2) $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，所以 $(1 + \mathrm{i})^6 = (\sqrt{2})^6\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}} = -8\mathrm{i}$.

(3) $-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$，所以

$$\sqrt[6]{-1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi + 2k\pi}{6}\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\quad(k = 0,1,\cdots,5)$$

即6个值分别是 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$；$\mathrm{i}$；$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$；$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$；$-\mathrm{i}$；$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(4)$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$,所以

$$(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\mathrm{i}}\qquad(k=0,1,2)$$

即$(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$的值分别为

$$w_0=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{7}{12}\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),\quad w_2=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

15.若$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$,试求$n$的值.

解 由于 $(1+\mathrm{i})^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$

$$(1-\mathrm{i})^n=\left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$$

又知$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$,所以$\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$,即$\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}=1$.有$\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}=1$,得$\begin{cases}\cos\frac{n\pi}{2}=1\\ \sin\frac{n\pi}{2}=0\end{cases}$,

从而$n=4k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

16.(1)求方程$z^3+8=0$的所有根;(2)求微分方程$y'''+8y=0$的一般解.

解 (1)由$z^3+8=0$得$z=(-8)^{\frac{1}{3}}$,而$-8=8\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$,所以

$$z=\sqrt[3]{8\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{3}\mathrm{i}}\qquad(k=0,1,2)$$

即方程$z^3+8=0$的所有根为

$$z_0=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$z_1=2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2$$

$$z_2=2\mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\mathrm{i}}=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

(2)微分方程$y'''+8y=0$的特征方程为$r^3+8=0$,由(1)的结果可知方程$r^3+8=0$有三个互异的根:$1+\sqrt{3}\mathrm{i},-2,1-\sqrt{3}\mathrm{i}$,所以方程$y'''+8y=0$有三个线性无关的特解

$$y_1=\mathrm{e}^{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x(\cos\sqrt{3}x+\mathrm{i}\sin\sqrt{3}x),\quad y_2=\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y_3=\mathrm{e}^{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x(\cos\sqrt{3}x-\mathrm{i}\sin\sqrt{3}x)$$

从而可得原微分方程三个线性无关的实数特解为$\mathrm{e}^x\cos\sqrt{3}x,\mathrm{e}^{-2x},\mathrm{e}^x\sin\sqrt{3}x$,则所求微分方程的一般解为$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^x(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$,其中$C_1,C_2,C_3$为常数.

17.在平面上任意选一点z,然后在复平面上画出下列各点的位置:

$$-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}},-\frac{1}{\bar{z}}$$

解 设$z=x+\mathrm{i}y$,则$-z=-x-\mathrm{i}y$,故z与$-z$关于原点对称;

$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,故z与$\bar{z}$关于实轴对称;

$-\bar{z}=-x+\mathrm{i}y$,故z与$-\bar{z}$关于虚轴对称;

$\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$,即$\frac{1}{z}$的辐角等于$\bar{z}$的辐角,$\frac{1}{z}$的模是$\bar{z}$的模的$\frac{1}{|z|^2}$倍;

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}z$，可见$\frac{1}{\bar{z}}$与$\frac{1}{z}$关于实轴对称；

$-\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{1}{|z|^2}z$，即$-\frac{1}{\bar{z}}$与$\frac{1}{z}$关于虚轴对称.

下面我们来讨论$\frac{1}{\bar{z}}$与z的几何位置关系.

设P是单位圆外一点，过P作单位圆的切线，切点为T，连接OT，OP，且过T作OP的垂线，垂足为Q（如图1-2所示），那么我们称P，Q两点关于单位圆周对称，且OQ，OP与x轴正向夹角相等，它们的长度有关系式$OQ = \frac{1}{OP}$，这是因为$\triangle OTQ \backsim \triangle OPT$，且$OT = 1$.

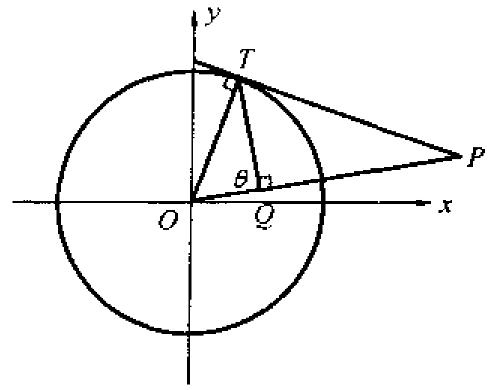


图1-2

而由前面的讨论知$\frac{1}{\bar{z}}$与z有如下关系：它们的辐角相等，$\frac{1}{\bar{z}}$的模等于z的模的倒数.即

$$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{z}{|z|^2}\right| = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

从而可知当z不在单位圆上时，z与$\frac{1}{\bar{z}}$关于单位圆对称；当z在单位圆上时，z与$\frac{1}{\bar{z}}$重合.于是复平面上$-z$，$\bar{z}$，$-\bar{z}$，$\frac{1}{z}$，$\frac{1}{\bar{z}}$，$-\frac{1}{\bar{z}}$的位置如图1-3所示.

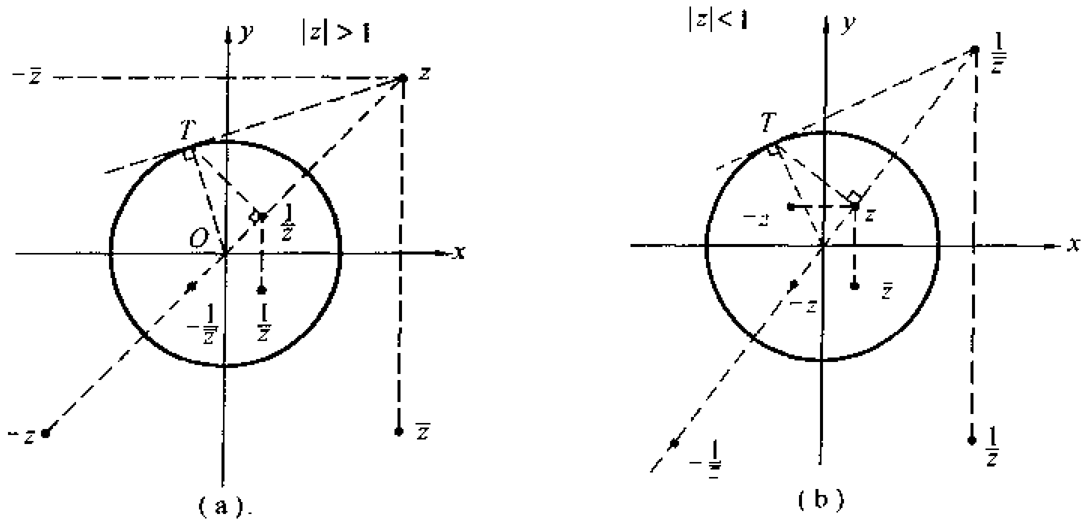


图1-3

18.已知两点z_1与z_2（或已知三点z_1，z_2，z_3），问下列各点z位于何处？

(1)$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$；　　(2)$z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$，其中$\lambda$为实数；

(3)$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

分析　本题在求解过程中要用到解析几何的知识，这是因为复数是与平面向量一一对应的.

解 (1) 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z = x + iy$,则根据

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + i \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

有 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$,所以 z 是以 z_1 和 z_2 为端点的线段的中点.

(2) 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z = x + iy$,则根据

$$\begin{aligned} z &= \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = \lambda(x_1 + iy_1) + (1-\lambda)(x_2 + iy_2) \\ &= [x_2 + \lambda(x_1 - x_2)] + i[y_2 + \lambda(y_1 - y_2)] \end{aligned}$$

有 $x = x_2 + \lambda(x_1 - x_2), y = y_2 + \lambda(y_1 - y_2)$,所以 z 在 z_1, z_2 所确定的直线上,且实数 λ 表示线段 AC 与 BC 的长度比,即 $\lambda = \frac{|z - z_2|}{|z_1 - z_2|}$(如图 1 - 4).

(3) 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3, z = x + iy$,则根据

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + i \cdot \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

有

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

故 z 位于以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形的重心处(如图 1 - 5).

事实上如图 1 - 5,四边形 $PQBR$ 为平行四边形,C, D 分别为边 PQ, BR 的中点,A 是对角线的交点,E 是 QD 与 PB 的交点.由 C, D 分别是 PQ, BR 的中点及 $PQBR$ 为平行四边形,知 $RC \parallel QD$,从而知 $PM = ME$ 及 $ME = BE$.这是因为 CM, DE 分别是 $\triangle PQE$ 和 $\triangle MBR$ 的中位线,从而知向量

$$z - z_1 = \frac{1}{3}\vec{BP} = \frac{1}{3}[(z_3 - z_1) + (z_2 - z_1)]$$

整理可知 $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.又 z 是 $\triangle PQR$ 的两条中线 PA 与 RC 的交点,即 z 是 $\triangle PQR$ 的重心.

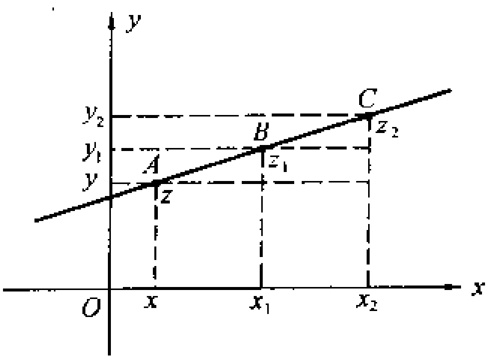


图 1 - 4

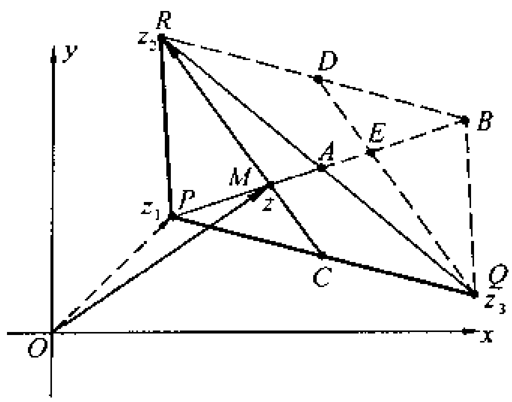


图 1 - 5

19. 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件 $z_1 + z_2 + z_3 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$,证明 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆 $|z| = 1$ 的一个正三角形的顶点.

分析　本题是运用复数的运算知识解决平面几何问题的典型例题之一.在解决问题时要充分利用已知条件和平面几何中的相关知识，对于本题，由于 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. 显然 z_1, z_2, z_3 在单位圆 $|z| = 1$ 上，故只需证 $\triangle z_1z_2z_3$ 是正三角形.而证明单位圆上的三角形是正三角形将有多种方法，如证三边相等、三个圆心角相等、三条中线(或高)相等，等等，故此题解法众多，请读者自行研究.

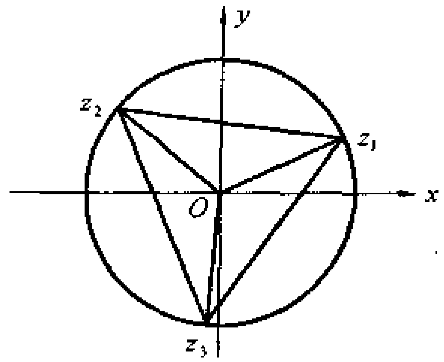


图1-6

证明　如图1-6，$\triangle z_1z_2z_3$ 的三边长分别为 $|z_1 - z_2|, |z_2 - z_3|, |z_3 - z_1|$，因此只需证明它们相等即可.由已知 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$，得 $z_1 + z_2 = -z_3$，又 $|-z_3| = |z_3| = 1$，所以 $|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1$.

同理可得 $|z_1 + z_3| = |z_3 + z_2| = 1$，又

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

故有 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 = -1$.

另一方面

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1)$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1) = 3$$

即 $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$.同理可得 $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$.三边相等的圆内接三角形 $\triangle z_1z_2z_3$ 是圆内接正三角形.

20.如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$，试证明 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$，并说明这些等式的几何意义.

证明　由所给等式可得

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| \Rightarrow |z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_1| \cdot |z_2 - z_3| \qquad (1-1)$$

再由

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} - 1 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - 1 \Rightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \Rightarrow \left|\frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\right|$$
$$\Rightarrow |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| \qquad (1-2)$$

式(1-1)、式(1-2)相除得 $|z_1 - z_3|^3 = |z_2 - z_3|^3$，故 $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$，再由式(1-2)知 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$，从而有结论 $|z_2 - z_3| = |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$.这说明，当 z_1, z_2, z_3 满足 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 时，以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是等边三角形.

21.指出下列各题中点 z 的轨迹或所在范围，并作图：

(1) $|z - 5| = 6$；　(2) $|z + 2i| \geqslant 1$；　(3) $\mathrm{Re}(z + 2) = -1$；

(4) $\mathrm{Re}(i\bar{z}) = 3$；　(5) $|z + i| = |z - i|$；　(6) $|z + 3| + |z + 1| = 4$；

(7) $\mathrm{Im}(z) \leqslant 2$;　　(8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right| \geqslant 1$;　　(9) $0 < \arg z < \pi$;

(10) $\arg(z-\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$.

解　设 $z = x + \mathrm{i}y$.

(1) 由 $|z-5| = 6$,得 $|z-5| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 6$,所以轨迹是以 $(5,0)$ 为圆心,6 为半径的圆周,见图 1 - 7.

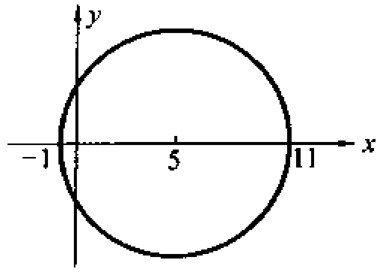


图 1 - 7

(2) 由 $|z+2\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \geqslant 1$ 得 z 的轨迹是以 $(0,-2)$ 为中心,1 为半径的圆周及其外部区域,见图 1 - 8.

(3) 由 $z + 2 = x + 2 + \mathrm{i}y$,得 $\mathrm{Re}(z+2) = -1$,相当 $x = -3$,即 z 的轨迹为直线 $x = -3$,见图 1 - 9.

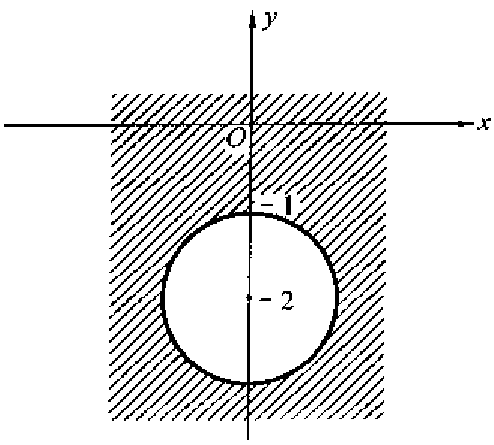


图 1 - 8

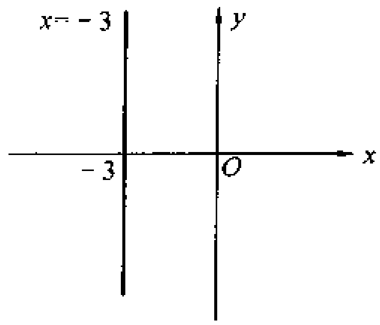


图 1 - 9

(4) 由 $\mathrm{i}\bar{z} = \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = y + \mathrm{i}x$,$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z}) = 3$ 可得 $y = 3$.所以点 z 的轨迹是直线 $y = 3$,见图 1 - 10.

(5) 由 $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ 可得 $x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$,解得 $y = 0$.所以满足方程 $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ 的点 z 的轨迹是实轴.

(6) 由于 $|z+3|$ 表示 z 与复数 -3 的距离,所以 $|z+3| + |z+1| = 4$ 表示 z 到复数 -3 和复数 -1 的距离之和为 4,故 z 的轨迹为以 $(-3,0)$,$(-1,0)$ 为焦点,4 为长轴的椭圆,令 $z = x + \mathrm{i}y$,$|z+3| + |z+1| = 4$ 化为 $\dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.故这个椭圆的中心是 $(-2,0)$,长半轴为 2,短半轴为 $\sqrt{3}$,见图 1 - 11.

(7) $\mathrm{Im}(z) \leqslant 2$ 相当于 $y \leqslant 2$,z 的轨迹为直线 $y = 2$ 及其下方区域,见图 1 - 12.

(8) 由 $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right| = \dfrac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} \geqslant 1$ 得 $(x-3)^2 + y^2 \geqslant (x-2)^2 + y^2$,化简得 $x \leqslant \dfrac{5}{2}$,故 z 的轨迹为直线 $x = \dfrac{5}{2}$ 及其左方区域,见图 1 - 13.

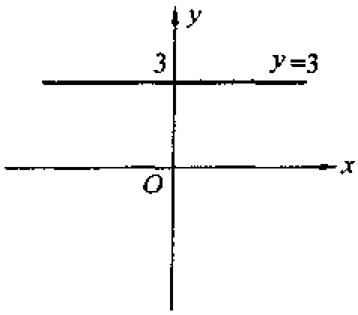


图1－10

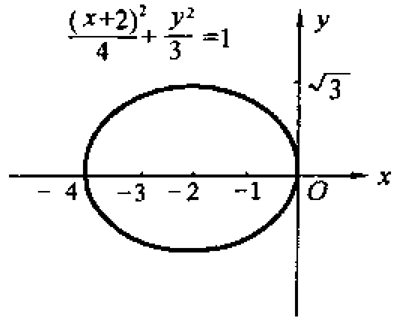


图1－11

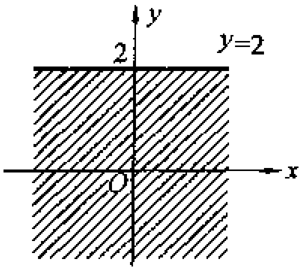


图1－12

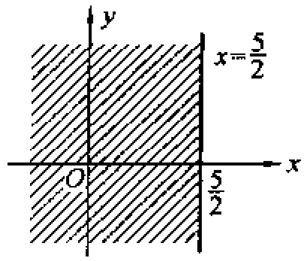


图1－13

(9) 由 $\arg z=\arctan\frac{y}{x}$ 知 $\arg z=0$，可得 z 为 x 轴正向上的点（正实轴）；$\arg z=\pi$，可得 z 为 x 轴负向上的点（负实轴）．所以 $0<\arg z<\pi$ 为上半平面（不含实轴），即 z 的轨迹为上半平面，见图1－14．

(10) 由 $\arg(z-i)=\arg(x+(y-1)i)=\frac{\pi}{4}$，得

$$\tan[\arg(z-i)]=1\qquad(x>0,y-1>0)$$

即 $\frac{y-1}{x}=1$，故 $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$ 相当于 $y-x-1=0\ (x>0,y>1)$，那么 z 的轨迹是以(0,1)为起点的射线 $y-x-1=0\ (x>0)$，见图1－15．

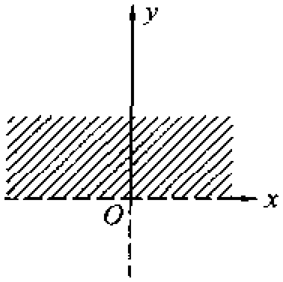


图1－14

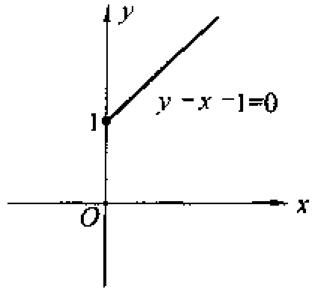


图1－15

22．描出下列不等式所确定的区域或闭区域，并说明它是有界的还是无界的，是单连通的还是多连通的？

(1)$\mathrm{Im}(z)>0$; (2)$|z-1|>4$;

(3)$0<\mathrm{Re}(z)<1$; (4)$2\leqslant|z|\leqslant3$;

(5)$|z-1|<|z+3|$; (6)$-1<\arg z<-1+\pi$;

(7)$|z-1|<4|z+1|$; (8)$|z-2|+|z+2|\leqslant6$;

(9)$|z-2|-|z+2|>1$; (10)$z\bar{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\bar{z}\leqslant4$.

分析 把复数 z 写成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式,然后将题目中的条件转化为 x,y 满足的条件,再在直角坐标系中解答.

解 (1)$\mathrm{Im}(z)>0$,即 $y>0$,为 x 轴上半平面(不含 x 轴),是无界单连通区域,见图 1-16.

(2)$|z-1|>4$,即$(x-1)^2+y^2>16$,为圆周$(x-1)^2+y^2=16$的外部(不含圆周),是无界多连通区域,见图 1-17.

(3)$0<\mathrm{Re}(z)<1$,即 $0<x<1$ 为由直线 $x=0$ 和 $x=1$ 所构成的带形区域(不含两直线),是无界单连通区域,见图 1-18.

(4)$2\leqslant|z|\leqslant3$,即 $4\leqslant x^2+y^2\leqslant9$,为圆周 $x^2+y^2=4$ 与 $x^2+y^2=9$ 所围成的环形闭区域,是有界多连通闭区域,见图 1-19.

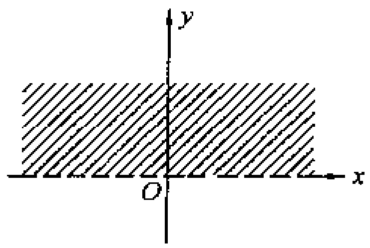


图 1-16

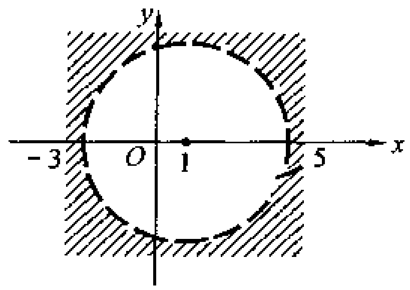


图 1-17

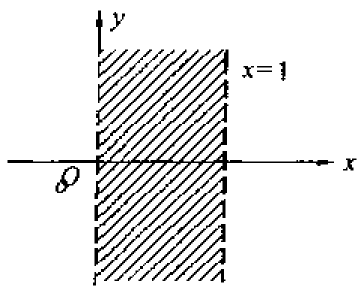


图 1-18

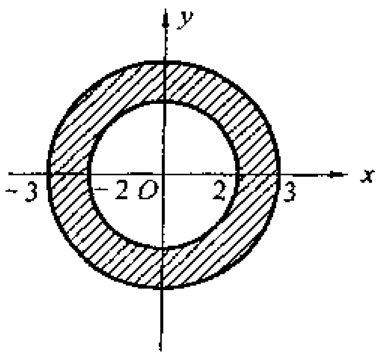


图 1-19

(5)$|z-1|<|z+3|$,即$(x+1)^2+y^2<(x+3)^2+y^2$,化简得 $x>-1$,为直线 $x=-1$ 右边的区域(不含直线 $x=-1$),是无界单连通区域,见图 1-20.

(6)$-1<\arg z<-1+\pi$,为由射线 $\arg z=-1$ 及 $\arg z=-1+\pi$ 所构成的角形区域(不含两射线),是无界单连通区域,见图 1-21.

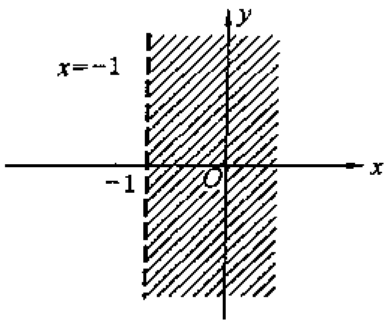


图1-20

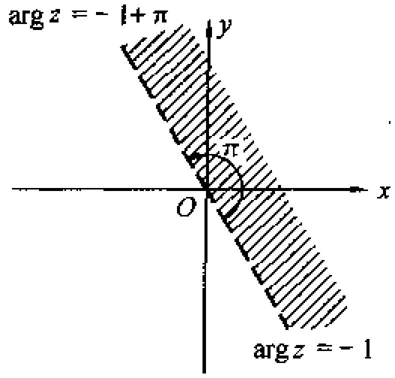


图1-21

(7) $|z-1|<4|z+1|$ 可写成 $(x-1)^2+y^2<16(x+1)^2+16y^2$,化简可得

$$\left(x+\frac{17}{15}\right)^2+y^2>\left(\frac{8}{15}\right)^2$$

是以 $\left(-\frac{17}{15},0\right)$ 为中心,$\frac{8}{15}$ 为半径的圆的外部(不包含圆周),为无界多连通区域,见图1-22.

(8) 不等式 $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$,表示椭圆 $|z-2|+|z+2|=6$ 的内部(包含椭圆),此椭圆以 $(2,0),(-2,0)$ 为焦点,6为长轴,且可写成方程 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.这是一个单连通有界闭区域,见图1-23.

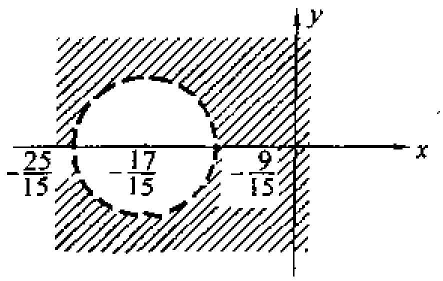


图1-22

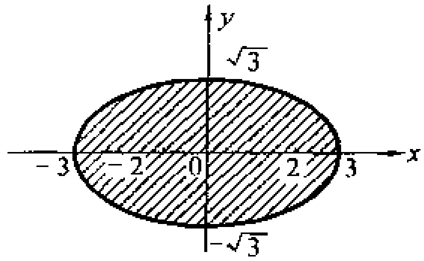


图1-23

(9) $|z-2|-|z+2|>1$ 可写成 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}>\sqrt{(x+2)^2+y^2}+1$,两边平方得

$$x^2-4x+4+y^2>1+2\sqrt{x^2+4x+4+y^2}+x^2+4x+4+y^2$$

整理得 $-8x-1>2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$(由此易知 $x<-\frac{1}{8}$),两边再平方,得

$$60x^2-4y^2>15 \text{ 或 } 4x^2-\frac{4}{15}y^2>1$$

再由 $x<-\frac{1}{8}$,知 $|z-2|-|z+2|>1$ 表示双曲线 $4x^2-\frac{4}{15}y^2=1$ 的左边分支的内部,即含焦点 $z=-2$ 的那部分区域(不含双曲线的左分支),是无界单连通区域,见图1-24.

(10) $z\cdot\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant 4$ 可写成

$$x^2+y^2-(2+i)(x+iy)-(2-i)(x-iy)\leqslant 4$$

化简得 $x^2+y^2-4x+2y\leqslant 4$，即 $(x-2)^2+(y+1)^2\leqslant 9$. 可见原不等式表示以点 $(2,-1)$ 为圆心，3 为半径的圆及其内部，是有界的单连通闭区域，见图 1 - 25.

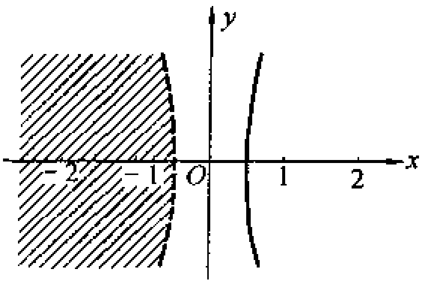


图 1 - 24

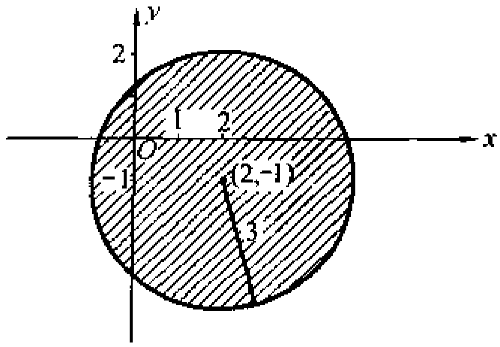


图 1 - 25

23. 证明复平面上的直线方程可写成

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c\qquad(\alpha\neq 0\text{ 为复常数},c\text{ 为实常数})$$

证明　设 $z=x+\mathrm{i}y,\alpha=a+\mathrm{i}b$，则 $\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c$，可写成

$$(a+\mathrm{i}b)(x-\mathrm{i}y)+(a-\mathrm{i}b)(x+\mathrm{i}y)=c$$

即 $2ax+2by=c$，这是直线的一般方程. 反过来，对任一条直线 $Ax+By+C=0$(A,B,C 为实数，A,B 不同时为零). 我们令 $z=x+\mathrm{i}y,\alpha=\dfrac{A+iB}{2}$，$C=-c$，便可将上述直线方程写成 $\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c$($\alpha\neq 0$ 为复般，c 为实常数).

24. 证明复平面上的圆周方程可写成：

$$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0\quad(\alpha\text{ 为复常数},c\text{ 为实常数})$$

证明　令 $z=x+\mathrm{i}y,\alpha=a+\mathrm{i}b$，则

$$\begin{aligned}z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c&=x^2+y^2+(a+\mathrm{i}b)\overline{(x+\mathrm{i}y)}+\overline{(a+\mathrm{i}b)}(x+\mathrm{i}y)+c\\&=x^2+y^2+2ax+2by+c\end{aligned}$$

所以设平面上的圆周方程的一般形式为 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$，那么由上述推导知

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y,\alpha=a+\mathrm{i}b$. 故圆周方程可写成 $z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$.

25. 将下列方程(t 为实参数)给出的曲线用一个实直角坐标方程表出：

(1) $z=t(1+\mathrm{i})$；　　(2) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$　(a,b 为实常数)；

(3) $z=t+\dfrac{\mathrm{i}}{t}$；　　(4) $z=t^2+\dfrac{\mathrm{i}}{t^2}$；

(5) $z=a\operatorname{ch}t+\mathrm{i}b\operatorname{sh}t$　(a,b 为实常般)；　　(6) $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$；

(7) $z=\mathrm{e}^{\alpha t}$　($\alpha=a+\mathrm{i}b$ 为复数).

解　令 $z=x+\mathrm{i}y$.

(1) 由 $z=t(1+\mathrm{i})$ 得 $\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}$，消去参数 t 后，化成直角坐标方程 $y=x$(直线).

(2) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$ 相当于参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$，当 $ab\neq 0$ 时，消去参数 t 得直角坐标方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(椭圆).

(3) $z = t + \frac{i}{t}$ 相当于 $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$，消去参数 t，得 $xy = 1$（等轴双曲线）.

(4) $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$ 相当于 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}$，消去参数 t，得 $xy = 1\ (x > 0, y > 0)$，是等轴双曲线第一象限里的那一支.

(5) $z = a\mathrm{ch}t + \mathrm{i}b\mathrm{sh}t$，相当于参数方程 $\begin{cases} x = a\mathrm{ch}t \\ y = b\mathrm{sh}t \end{cases}$，消去参数 t 后，得 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$（双曲线）.

(6)
$$\begin{aligned} z &= a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = a\cos t + \mathrm{i}a\sin t + b\cos t - \mathrm{i}b\sin t \\ &= (a + b)\cos t + \mathrm{i}(a - b)\sin t \end{aligned}$$

这相当于 $\begin{cases} x = (a + b)\cos t \\ y = (a - b)\sin t \end{cases}$，消去参数 t 可得 $\frac{x^2}{(a + b)^2} + \frac{y^2}{(a - b)^2} = 1$（椭圆）.

(7) $z = \mathrm{e}^{\alpha t} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t} = \mathrm{e}^{at} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} = \mathrm{e}^{at}(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt)$，这相当于 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{at}\cos bt \\ y = \mathrm{e}^{at}\sin bt \end{cases}$，消去参数 t 后化为 $x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{\frac{2a}{b}\arctan\frac{y}{x} + \frac{2ak\pi}{b}}$. 事实上

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{at}\cos bt \\ y = \mathrm{e}^{at}\sin bt \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan bt \Rightarrow bt = \arctan\frac{y}{x} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

即 $t = \frac{1}{b}\left[\arctan\frac{y}{x} + k\pi\right]$. 又知 $\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2at}} + \frac{y^2}{\mathrm{e}^{2at}} = 1$，即 $x^2 + y^2 = e^{2at} = \mathrm{e}^{\frac{2a}{b}\left(\arctan\frac{y}{x} + k\pi\right)}$.

26. 函数 $w = \frac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成 w 平面上怎样的曲线？

(1) $x^2 + y^2 = 4$；　(2) $y = x$；　(3) $x = 1$；　(4) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

分析　这类问题的基本解法是令 $z = x + \mathrm{i}y$，将函数 $w = f(z) = u + \mathrm{i}v$ 化成 $w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 的形式，这样可获得关于 u, v 的参数方程 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$，再由已知的曲线 $L(x, y) = 0$，消去参数 x, y 后可得 u, v 满足的曲线方程，也就得到了 w 平面上的对应的曲线.

解　令 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则 $w = \frac{1}{z}$ 相当于

$$u + \mathrm{i}v = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

即
$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

(1) 由于 z 平面上的曲线满足 $x^2 + y^2 = 4$，可得 $u^2 + v^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$，即 w 平面上的象曲线为 $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$（圆周）.

(2) 当 $y = x$ 时，$u = -v$ 或 $u + v = 0$，即象曲线为 w 平面上的直线 $u + v = 0$.

(3) 当 $x=1$ 时,知 $\begin{cases} u=\dfrac{1}{1+y^2} \\ v=-\dfrac{y}{1+y^2} \end{cases}$,消去参数 y 后得 w 平面上的象曲线的方程为 $\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{4}$(圆).

(4) 当 $(x-1)^2+y^2=1$ 时,知 $x^2+y^2=2x$,由 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 可得 w 平面上的象曲线为直线 $u=\dfrac{1}{2}$.

27.已知映射 $w=z^3$,求:(1) 点 $z_1=\mathrm{i}, z_2=1+\mathrm{i}, z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 在 w 平面上的象;(2) 区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的象.

分析 当要获得点或区域(z 平面上的)在映射 $w=f(z)$ 下的象在 w 平面上的位置时,可将 z 写成 $x+\mathrm{i}y$ 或 $re^{\mathrm{i}\theta}$ 的形式(视具体情况而定,本题令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$),然后获得 w 的模及辐角的范围,就得到了 z 在 w 平面上的象.

解 令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$,则 $w=z^3=r^3e^{\mathrm{i}3\theta}$.

(1) $z_1=\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$,则 $w_1=z_1^3=e^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}=-\mathrm{i}$; $z_2=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,则 $w_2=z_2^3=2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=-2+2\mathrm{i}$; $z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$,则 $w_3=z_3^3=8e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.

(2) $z=re^{\mathrm{i}\theta}$,则 $w=z^3=r^3e^{\mathrm{i}3\theta}$.由 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$,即 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$,可知 $0<\arg w=3\theta<\pi\ (r>0)$.故区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 的象为区域 $0<\arg w<\pi$.

28.证明第 6 节定理二与定理三.

定理二 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A, \lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,那么

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$; (2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$;

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$. $(B\neq 0)$.

证明 (1) $\forall \varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A, \lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,所以 $\exists \delta_1>0$,使当 $0<|z-z_0|<\delta_1$ 时有 $|f(z)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 及 $\exists \delta_2>0$,使 $0<|z-z_0|<\delta_2$ 时,有 $|g(z)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,必有

$$\begin{aligned}|[f(z)+g(z)]-(A+B)| &= |[f(z)-A]+[g(z)-B]| \\ &\leqslant |f(z)-A|+|g(z)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

成立.故 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)]=A+B$.同理可得 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)-g(z)]=A-B$.

(2) 因为 $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,所以 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0$ 及 $M>0$,使当 $0<|z-z_0|<\delta_1$ 时,有 $|g(z)|<M$.

又 $\forall \varepsilon>0$,因 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,所以 $\exists \delta_2>0$,使当 $0<|z-z_0|<\delta_2$ 时,有 $|f(z)-A|<$

$\dfrac{\varepsilon}{M+|A|}$；因 $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，所以 $\exists\,\delta_3>0$，使当 $0<|z-z_0|<\delta_3$ 时，有 $|g(z)-B|<\dfrac{\varepsilon}{M+|A|}$.

现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，则当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，必有

$$\begin{aligned}|f(z)\cdot g(z)-AB| &= |f(z)\cdot g(z)-Ag(z)+Ag(z)-AB|\\ &\leqslant |f(z)-A||g(z)|+|A|\cdot|g(z)-B|\\ &< \frac{\varepsilon}{M+|A|}\cdot M+|A|\cdot\frac{\varepsilon}{M+|A|}=\varepsilon\end{aligned}$$

故
$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$$

(3) 因为 $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B\ (B\neq 0)$，所以 $\exists\,\delta_1>0$ 及 $M>0$，使当 $0<|z-z_0|<\delta_1$ 时，$M>|g(z)|>\dfrac{|B|}{2}$. $\forall\,\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，所以 $\exists\,\delta_2>0$，使当 $0<|z-z_0|<\delta_2$ 时，有

$$|f(z)-A|<\frac{B^2\varepsilon}{2(|A|+|B|)}$$

$\exists\,\delta_3>0$，使当 $0<|z-z_0|<\delta_3$ 时，有

$$|g(z)-B|<\frac{B^2\varepsilon}{2(|A|+|B|)}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，则当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，必有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{A}{B}\right| &= \frac{|Bf(z)-AB+AB-Ag(z)|}{|B\cdot g(z)|}\\ &\leqslant \frac{|B||f(z)-A|+|A||g(z)-B|}{|B||g(z)|}\\ &< \frac{|B|\cdot\dfrac{B^2\varepsilon}{2(|A|+|B|)}+|A|\cdot\dfrac{B^2\varepsilon}{2(|A|+|B|)}}{\dfrac{B^2}{2}}=\varepsilon\end{aligned}$$

故
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}$$

定理三　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充分必要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

证明　$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续，那么 $f(z)$ 在 z_0 处有定义且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，这就意味着 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有定义且

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v(x_0,y_0)\end{cases}$$

这就说明了 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

反过来，由于 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，自然有

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

于是
$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} f(z) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)] \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + \mathrm{i} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \\ &= u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0) = f(z_0) \end{aligned}$$

故 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

29.设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续,且 $f(z_0) \neq 0$,那么可找到 z_0 的小邻域,在这个小邻域内 $f(z) \neq 0$.

证明 由于 $f(z_0) \neq 0$,因此 $|f(z_0)| > 0$.又因为 $f(z)$ 在点 z_0 连续,所以对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|f(z_0)| > 0$,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时,有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_0 = \frac{1}{2}|f(z_0)|$$

成立.又 $|f(z_0)| - |f(z)| < |f(z) - f(z_0)|$,故 $|f(z_0)| - |f(z)| < \frac{1}{2}|f(z_0)|$,从而

$$|f(z)| > |f(z_0)| - \frac{1}{2}|f(z_0)| = \frac{1}{2}|f(z_0)| > 0$$

即存在 z_0 的 δ 邻域,在这个邻域内 $f(z) \neq 0$.

30.设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$,证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的,即存在一个实常数 $M > 0$,使在 z_0 在某一去心邻域内有 $|f(z)| \leqslant M$.

证明 因为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$,所以对于 $\varepsilon = 1$,$\exists \delta > 0$.当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时,有 $|f(z) - A| < 1$,取 $M = |A| + 1$,则有 $|f(z)| < M$ 成立,要证的不等式 $|f(z)| \leqslant M$ 中等号在 $|f(z) - A| = 1$ 时成立.

31.设 $f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$ $(z \neq 0)$,试证当 $z \to 0$ 时,$f(z)$ 的极限不存在.

分析 此类问题一般只需找到两条不同的趋向于 z_0 的路径,使得沿这两条路径 $f(z)$ 收敛于不同的值,这就说明了极限的不存在性.

证明 令 $z = x + \mathrm{i}y$,取第一条路径为实轴,即 $x \neq 0, y = 0$,于是

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{x}{x} - \frac{x}{x}\right) = 0$$

取第二条路径为直线 $y = x$,于是

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{x + x\mathrm{i}}{x - x\mathrm{i}} - \frac{x - x\mathrm{i}}{x + x\mathrm{i}}\right) = 1$$

可见,当 $z \to 0$ 时,$f(z)$ 的极限不存在.

32.试证 $\arg z$ 在原点和负实轴上不连续.

证明 设 $f(z) = \arg z$,当 $z = 0$ 时,$f(0)$ 无意义,故 $f(z) = \arg z$ 在原点处不连续.

下面在负实轴上任取一点 z_0,于是由 $\arg z_0 = \pi$ 不难看出,当 z 在上半平面而趋向 z_0 时,$\arg z$ 收敛于 π.但当 z 在下半平面(不含负实轴)趋向 z_0 时 $\arg z$ 收敛于 $-\pi$.即

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} \arg z = \pi, \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im}(z) < 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im}(z) < 0}} \arg z = -\pi$$

故 $f(z) = \arg z$ 在负实轴上的任一点处都不连续.

同步训练题

1.单项选择题

(1) 设复数 z 满足 $\arg(z+2) = \frac{\pi}{3}$，$\arg(z-2) = \frac{5}{6}\pi$，那么 $z =$ (　　).

A. $-1+\sqrt{3}i$　　B. $-\sqrt{3}+i$　　C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(2) 已知 $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$，则 $z^{66}+2z^{33}-2$ 的值为(　　).

A. $-i$　　B. 1　　C. i　　D. -1

(3) 方程 $\operatorname{Im}z^2 = 1$ 所代表的曲线是(　　).

A.圆周　　B.椭圆　　C.双曲线　　D.抛物线

(4) 下列方程所表示的曲线中,(　　)是圆.

A. $|z-2|+|z+2| = 5$　　B. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$

C. $|z|+\operatorname{Re}(z) = 1$　　D. $\operatorname{Re}(z^2) = 2$

(5) 下列函数中都有 $f(0) = 0$，则(　　)在原点不连续.

A. $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1+|z|}\ (z \neq 0)$　　B. $f(z) = \frac{[\operatorname{Im}(z)]^2}{|z|}\ (z \neq 0)$

C. $f(z) = \frac{[\operatorname{Im}(z^2)]^2}{|z|^2}\ (z \neq 0)$　　D. $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}\ (z \neq 0)$

(6) 已知方程 $z^3 - iz^2 - z + i = 0$，则(　　)不是它的根.

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. -1

2.填空题

(1) 设 $z = \frac{(3+4i)^{\frac{1}{2}}(-1+i)^{12}}{(2i)^5(1+2i)}$，则 $|z| =$ ______.

(2) 一复数对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{5}{6}\pi$ 后，对应的复数为 $-\sqrt{3}+i$，则原复数为 $z =$ ______.

(3) 设 $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$，$z_2 = \sqrt{3}-i$，则 $z_1 \cdot z_2$ 的指数形式为______，$\frac{z_1}{z_2}$ 的三角表示式为______.

(4) 映射 $w = \frac{1+i}{z}$ 将圆周 $x^2+y^2 = 4$ 映成 w 平面上的曲线______.

(5) $\lim\limits_{z \to 1} \frac{z\bar{z}+3z-\bar{z}-3}{z^2-1} =$ ______.

3.设 $|z| = 1$，试证 $\left|\frac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}z}\right| = 1$.

4.如果 $z+z^{-1}=2\cos t$,其中 $t=\arg z$,试证明 $z^n-z^{-n}=2\mathrm{i}\sin nt$.

5.若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$,试证明:$\arg\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1}$.

6.解方程:(1)$(1+z)^5=(1-z)^5$;(2)$z^2-4\mathrm{i}z-(4-9\mathrm{i})=0$.

7.设 a,b,c,d 为实数,试求二次方程 $x^2+(a+ib)x+(c+id)=0$ 至少有一实根的条件.

8.已知 $z^3=8$,求 z^3+z^2+2z+2 的值.

9.用图表示,满足下列条件的点 z 的存在范围.

(1) $\dfrac{1}{2}\leqslant\left|z-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}$;　　(2)$\mathrm{Re}(z^2)<1$;

(3)$|z|+\mathrm{Re}(z)<1$;　　(4)$z\cdot\bar{z}+(1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})\bar{z}+1=0$.

10.求下列平面点集在指定映射 $w=f(z)$ 下的象:

(1)$w=z^2+2z$,①$x=0$;②$\arg z=\dfrac{\pi}{4}$;③ 双曲线 $\mathrm{Re}(z^2)=1$.

(2)$w=z-\dfrac{1}{z}$,则 $|z|=R\ (R>0)$ 的象是 w 平面上怎样的曲线.

11.证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=z_0$.

12.令 $f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{z}{\bar{z}}+\dfrac{\bar{z}}{z}, & z\neq 0\end{cases}$,试讨论 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的连续性.

13.证明:在条件 $a_0>a_1>\cdots>a_n>0$ 下,$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n=0$ 在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上无根.

同步训练题答案

1.单项选择题

解　(1)A　(2)B　(3)C　(4)B　(5)D　(6)B

2.填空题

解　(1)2　(2)$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　(3)$2e^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$　$\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$　(4)$u^2+v^2=\dfrac{1}{2}$(圆)　(5)2

3.证明

$$|az+b|^2=(az+b)\overline{(az+b)}=(az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b})$$
$$=a\bar{a}z\bar{z}+b\bar{b}+a\bar{b}z+\bar{a}b\bar{z}$$
$$|\bar{a}+\bar{b}z|^2=(\bar{a}+\bar{b}z)\overline{(\bar{a}+\bar{b}z)}=(\bar{a}+\bar{b}z)(a+b\bar{z})$$
$$=a\bar{a}+a\bar{b}z+\bar{a}b\bar{z}+b\bar{b}z\bar{z}$$

由 $|z|=1$ 可得 $z\bar{z}=1$,故有 $|az+b|^2=|\bar{a}+\bar{b}z|^2$,从而

$$\left|\frac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}z}\right|=\frac{|az+b|}{|\bar{a}+\bar{b}z|}=1$$

4.解　令 $z=re^{\mathrm{i}t}$,于是

$$z+z^{-1}=re^{\mathrm{i}t}+\frac{1}{r}e^{-\mathrm{i}t}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos t+\mathrm{i}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin t=2\cos t$$

所以
$$\begin{cases} r + \dfrac{1}{r} = 2 \\ r - \dfrac{1}{r} = 0 \end{cases}$$

从而 $r = 1$，于是 $z = e^{it}$，那么
$$z^n - z^{-n} = e^{int} - e^{-int} = (\cos nt + i\sin nt) - (\cos nt - i\sin nt) = 2i\sin nt$$

5.**证明**　由 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$，说明 z_1, z_2, z_3 同在圆 $|z| = |z_1|$ 上(如图 1-26 所示)，令
$$z_1 = re^{i\theta_1}, z_2 = re^{i\theta_2}, z_3 = re^{i\theta_3}$$
$$-\pi < \theta_k \leqslant \pi, k = 1,2,3,$$

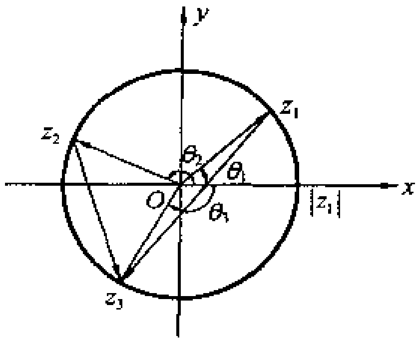


图 1-26

于是
$$\arg\frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \theta_2 - \theta_1$$
$$z_3 - z_2 = re^{i\theta_3}(1 - e^{i(\theta_2 - \theta_3)})$$
$$z_3 - z_1 = re^{i\theta_3}(1 - e^{i(\theta_1 - \theta_3)})$$

所以
$$\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1 - e^{i(\theta_2 - \theta_3)}}{1 - e^{i(\theta_1 - \theta_3)}} = \frac{1 - \cos(\theta_2 - \theta_3) - i\sin(\theta_2 - \theta_3)}{1 - \cos(\theta_1 - \theta_3) - i\sin(\theta_1 - \theta_3)}$$
$$= \frac{2 \cdot \sin\dfrac{\theta_2 - \theta_3}{2} \cdot (-i) \cdot \left(\cos\dfrac{\theta_2 - \theta_3}{2} + i\sin\dfrac{\theta_2 - \theta_3}{2}\right)}{2 \cdot \sin\dfrac{\theta_1 - \theta_3}{2} \cdot (-i) \cdot \left(\cos\dfrac{\theta_1 - \theta_3}{2} + i\sin\dfrac{\theta_1 - \theta_3}{2}\right)}$$
$$= \frac{\sin\dfrac{\theta_2 - \theta_3}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1 - \theta_3}{2}} \cdot e^{i\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}$$

故
$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}$$

6.**解**　(1) 由 $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$，可见 $z = 1$ 不是方程的根，于是可得 $\left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right)^5 = 1$. 不妨令 $w = \dfrac{1 + z}{1 - z}$，则 $w^5 = 1$，那么方程 $w^5 = 1$ 的根为 $w_k = e^{i\frac{2k}{5}\pi}$，$k = 0,1,2,3,4$. 令 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，那么
$$w = \frac{1 + z}{1 - z} = \frac{1 + r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 - r\cos\theta - ir\sin\theta}$$
由 $w^5 = 1$ 知 $|w| = 1$，即 $|1 + z| = |1 - z|$，也就是
$$(1 + r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = (1 - r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2$$
整理得 $r\cos\theta = 0$，可知 $r = 0$ 或 $\cos\theta = 0$. $\cos\theta = 0$ 等价于 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 或 $-\dfrac{\pi}{2}$，可见当 $r = 0$ 时 $z = 0$，$\dfrac{1 + z}{1 - z} = 1$，故 $\left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right)^5 = 1$. 当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，有
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = ri$$

于是
$$w=\frac{1+r\mathrm{i}}{1-r\mathrm{i}}=\frac{1-r^2+2r\mathrm{i}}{1+r^2}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}+\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{i}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}-\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{i}}$$

令 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$，$\sin\alpha=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$，于是 $w=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}$. 由于 $r>0$，故此时 $w=w_1$ 或 w_2，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{5}$ 或 $\frac{2}{5}\pi$. 此时 $r=\tan\frac{\pi}{5}$ 或 $\tan\frac{2}{5}\pi$，那么 $z_1=\left(\tan\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{i}$，$z_2=\left(\tan\frac{2}{5}\pi\right)\mathrm{i}$.

当 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 时，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=-r\mathrm{i}$，于是

$$w=\frac{1-r\mathrm{i}}{1+r_{\mathrm{i}}}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}-\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{i}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}+\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{i}}$$

令 $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$，$\sin\beta=-\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$，于是 $w=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$. 又由于 $r>0$，故此时 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6}{5}\pi}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8}{5}\pi}$，则 $\beta=\frac{3}{5}\pi$ 或 $\frac{4}{5}\pi$，于是 $r=-\tan\frac{3}{5}\pi$ 或 $-\tan\frac{4}{5}\pi$，那么 $z_3=\left(\tan\frac{3}{5}\pi\right)\mathrm{i}$，$z_4=\left(\tan\frac{4}{5}\pi\right)\mathrm{i}$.

于是方程 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$ 的根为

$$z_0=1,z_1=\mathrm{i}\tan\frac{\pi}{5},z_2=\mathrm{i}\tan\frac{2}{5}\pi,z_3=\mathrm{i}\tan\frac{3}{5}\pi,z_4=\mathrm{i}\tan\frac{4}{5}\pi$$

(2) 由 $z^2-4\mathrm{i}z-(4-9\mathrm{i})=(z-2\mathrm{i})^2+4-(4-9\mathrm{i})=0$，得

$$(z-2\mathrm{i})^2=-9\mathrm{i}=9\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$$

即
$$z-2\mathrm{i}=3\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\mathrm{i}},k=0,1$$

于是
$$z_0=2\mathrm{i}+3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},z_1=2\mathrm{i}+3\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$$

7.解 $x^2+(a+\mathrm{i}b)x+c+\mathrm{i}d=\left(x+\frac{a+\mathrm{i}b}{2}\right)^2-\frac{(a+\mathrm{i}b)^2}{4}+(c+\mathrm{i}d)=0$

有
$$\left(x+\frac{a+\mathrm{i}b}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2-b^2}{4}-c\right)+\mathrm{i}\left(\frac{ab}{2}-d\right)$$

设 x 是所给方程的一个实根，则有
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)b\mathrm{i}=\left(\frac{a^2-b^2}{4}-c\right)+\mathrm{i}\left(\frac{ab}{2}-d\right)$$

故 $\left(x+\frac{a}{2}\right)b=\frac{ab}{2}-d$，所以 $x=-\frac{d}{b}(b\neq0)$. 把 $x=-\frac{d}{b}$ 代入
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2-b^2}{4}-c$$

即 $x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}=\frac{a^2-b^2}{4}-c$，得 $abd-d^2=cb^2$，从而若方程 $x^2+(a+\mathrm{i}b)x+(c+$

$\mathrm{i}d)=0$ 至少有一个实根，则需要 $abd=d^2+cb^2(b\neq 0)$；若 $b=0$ 则 $d=0$，且 $a^2-4c\geqslant 0$.

8.解　　$$z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

当 $z=2$ 时，是方程 $z^3-8=0$ 的一个根，有

$$z^3+z^2+2z+2=8+4+4+2=18$$

当 $z\neq 2$ 且是方程 $z^3-8=0$ 的一个根时，使方程 $z^2+2z+4=0$ 成立．于是

$$z^3+z^2+2z+2=z^3+(z^2+2z+4)-2=8+0-2=6$$

若 z 满足方程 $z^3-8=0$，则式 z^3+z^2+2z+2 的值为 $18(z=2)$ 或 $6(z\neq 2)$.

9.解　令 $z=x+\mathrm{i}y$.

(1)　$$\frac{1}{2}\leqslant\left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|\leqslant\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}\leqslant x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{9}{4}$$

为包含边界圆的圆环，为有界多连通闭区域，见图 1－27.

(2) $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，故 $\mathrm{Re}(z^2)<1$，即 $x^2-y^2<1$，此区域为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两个分支所夹的开区域，为无界单连通区域，见图 1－28.

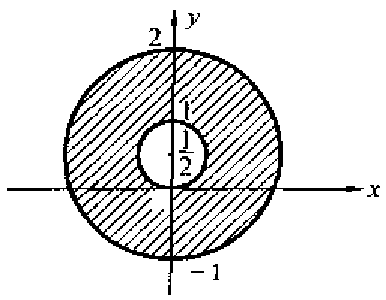


图 1－27

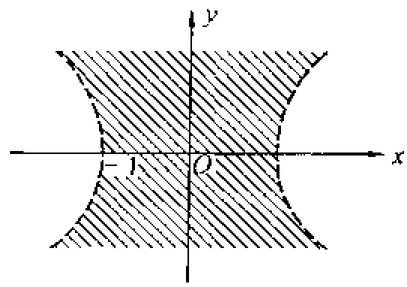


图 1－28

(3) 由 $|z|+\mathrm{Re}(z)<1$ 可得 $\sqrt{x^2+y^2}+x<1$，即 $x^2+y^2<(1-x)^2$，经整理得 $y^2<1-2x$，即区域为抛物线 $y^2=1-2x$ 左侧的开区域，为无界单连通区域，见图 1－29.

(4) 由 $z\cdot\bar{z}+(1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})\bar{z}+1=0$ 可得

$$z(\bar{z}+(1+\mathrm{i}))+(1-\mathrm{i})(\bar{z}+(1+\mathrm{i}))+1-(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=0$$

即 $[z+(1-\mathrm{i})][\bar{z}+(1+\mathrm{i})]=1$，此为复平面上以 $-1+\mathrm{i}$ 为圆心，1 为半径的圆，见图 1－30.

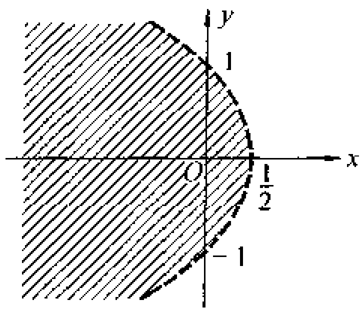


图 1－29

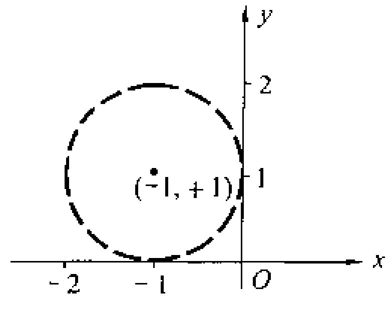


图 1－30

10.解　设 $z=x+\mathrm{i}y$.

(1) $w=z^2+2z=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}+2x+2y\mathrm{i}=(x^2-y^2+2x)+(2xy+2y)\mathrm{i}$

于是
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 2x \\ v = 2xy + 2y \end{cases}$$

① 当 $x = 0$ 时，$\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 2y \end{cases}$，故 $u = -\dfrac{v^2}{4}$. 也就是说映射 $w = z^2 + 2z$ 将曲线 $x = 0$ 映为 w 平面上的抛物线 $u = -\dfrac{v^2}{4}$，见图 1 - 31.

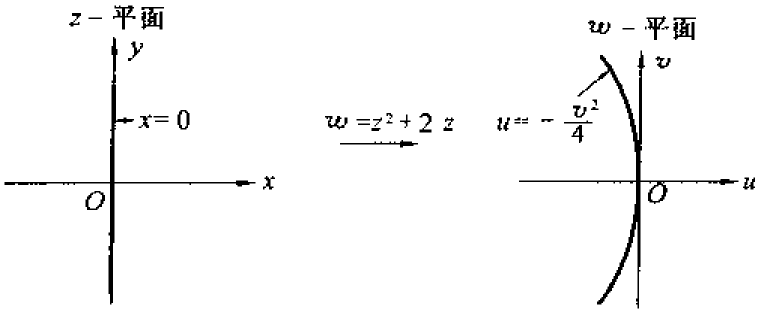


图 1 - 31

② 当 $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ 时，即$\begin{cases} x = r \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} \\ y = r \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$，有 $x = y(x > 0, y > 0)$，代入 u, v 的表达式，并消去参数得 $v = \dfrac{1}{2}u^2 + u$.

此为 w 平面上的抛物线，即映射 $w = z^2 + 2z$ 将射线 $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ 映为 w 平面上的抛物线 $v = \dfrac{1}{2}u^2 + u\ (u > 0, v > 0)$，见图 1 - 32.

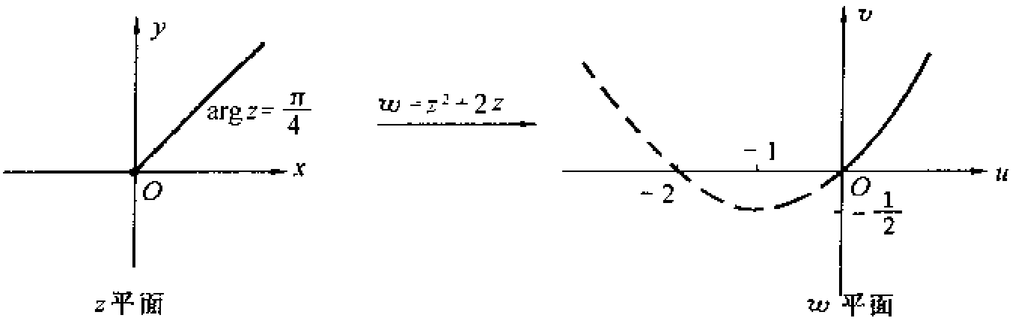


图 1 - 32

③ 当 $\mathrm{Re}(z^2) = 1$ 时，有 $x^2 - y^2 = 1$，即

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 2x \\ v = 2xy + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 + 2x \\ v = 2y(x+1) \\ y^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + 1 = 2(x+1) \\ v^2 = 4y^2(x+1)^2 = 4(x-1)(x+1)^3 \end{cases}$$

故可得 $$v^2 = 4\cdot\left(\frac{u+1}{2}-2\right)\left(\frac{u+1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}(u-3)(u+1)^3$$

于是映射 $w = z^2 + z$ 将双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 映为 w 平面上的曲线

$$v^2 = \frac{1}{4}(u-3)(u+1)^3$$

(2) 由

$$w = z - \frac{1}{z} = x + \mathrm{i}y - \frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathrm{i}y) = \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \mathrm{i}\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

于是 $$\begin{cases} u = x - \dfrac{x}{x^2+y^2} = x\left(1 - \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \\ v = y + \dfrac{y}{x^2+y^2} = y\left(1 + \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \end{cases}$$

曲线 $|z| = R$,即 $x^2 + y^2 = R^2$,于是可得

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{1 - \dfrac{1}{R^2}} = \dfrac{R^2 u}{R^2 - 1} \\ y = \dfrac{v}{1 + \dfrac{1}{R^2}} = \dfrac{R^2 v}{R^2 + 1} \end{cases}$$

故 $R^2 = x^2 + y^2 = \dfrac{R^4 u^2}{(R^2-1)^2} + \dfrac{R^4 v^2}{(R^2+1)^2}$,整理得

$$\frac{u^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

于是映射 $w = z - \dfrac{1}{z}$ 映圆 $|z| = R$ 为 w 平面上的椭圆

$$\frac{u^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

11. 证明　若 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, k = 1,2,\cdots, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$,则只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = y_0$$

即可,这两个等式的证明是相同的,我们只证第一式.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$,所以有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 于是对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$. 当 $n > N$ 时,有 $|x_n - x_0| < \varepsilon$,即 $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$,故

$$(n-N)(x_0 - \varepsilon) < x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n < (n-N)(x_0 + \varepsilon)$$

或

$$\left(1 - \frac{N}{n}\right)(x_0 - \varepsilon) < \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{n}$$
$$< \left(1 - \frac{N}{n}\right)(x_0 + \varepsilon)$$

当 $n \to \infty$ 时,有

$$x_0 - \varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \leqslant x_0+\epsilon$$

由 ϵ 的任意性有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x_0$.同理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=y_0$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\mathrm{i}\,\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$
$$=x_0+\mathrm{i}y_0=z_0$$

12.解　令 $z=re^{i\theta}$,$z\to 0$ 即 $r\to 0$,则

$$f(z)=\frac{z}{\bar z}+\frac{\bar z}{z}=\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}+\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{2i\theta}+e^{i(-2\theta)}$$

可见

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{r\to0}\left(\frac{z}{\bar z}+\frac{\bar z}{z}\right)=\lim_{r\to0}[e^{2i\theta}+e^{i(-2\theta)}]$$

可见 θ 取不同的值,$f(z)$ 的极限就对应不同的值,这说明 $\lim\limits_{z\to0}f(z)$ 不存在,故函数

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{z}{\bar z}+\dfrac{\bar z}{z}, & z\neq 0\end{cases}$$

在 $z=0$ 处不连续.

13.证明　根据题设,$z=1$ 显然不是方程 $P_n(z)=0$ 的根,一般地 $z=x>0$(即 z 是正实数)也不是方程 $P_n(z)=0$ 的根,我们令

$$P_n(z)=\frac{1}{1-z}(1-z)(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n)$$
$$=\frac{1}{1-z}[a_0+(a_1-a_0)z+\cdots+(a_n-a_{n-1})z^n-a_nz^{n+1}]$$

若 $P_n(z)=0$ 在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上有根,设 $z=\xi$ 为 $P_n(z)=0$ 的根,且 $|\xi|\leqslant 1$,于是有 $a_0=(a_0-a_1)\xi+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\xi^n+a_n\xi^{n+1}$.这里 ξ 不是正实数,但由已知知 $a_0-a_1,a_1-a_2,\cdots,a_{n-1}-a_n,a_n$ 都是正数,而此时复数 $(a_0-a_1)\xi,(a_1-a_2)\xi_2,\cdots,(a_{n-1}-a_n)\xi^n,a_n\xi^{n+1}$ 的辐角不可能全相等,再由三角不等式有

$$a_0=|a_0|=|(a_0-a_1)\xi+(a_1-a_2)\xi_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\xi^n+a_n\xi^{n+1}|$$
$$<|\xi|(a_0-a_1)+|\xi|^2(a_1-a_2)+\cdots+|\xi|^n(a_{n-1}-a_n)+a_n|\xi|^{n+1}$$
$$<(a_0-a_1)+(a_1-a_0)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+a_n=a_0$$

导出了矛盾的结果,所以方程 $P_n(z)=0$ 在闭区域 $|z|\leqslant 1$ 上无根.

第2章 解析函数

典型题解析

例2-1 设 $z=x+\mathrm{i}y$,且

$$f(z)=\left(xe^x\cos y-ye^x\sin y+\frac{x}{x^2+y_2}\right)+\mathrm{i}\left(xe^x\sin y+ye^x\cos y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

试指出 $f(z)$ 的解析区域,并求出其导数.

分析 利用可导与解析的判别方法确定解析区域,然后用求导公式或 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$ 求出其导数.

解 因

$$u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=xe^x\sin y+ye^x\cos y-\frac{y}{x^2+y^2}$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x+1)e^x\cos y-ye^x\sin y-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(x+1)e^x\sin y-ye^x\cos y-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(x+1)e^x\sin y+ye^x\cos y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=(x+1)e^x\cos y-ye^x\sin y-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

故当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$,即 C-R 条件成立,且$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 在$x^2+y^2\neq 0$ 的点都连续,因而可知 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 的点解析,且.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=(x+1)e^x\cos y-ye^x\sin y-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\mathrm{i}\left((x+1)e^x\sin y+ye^x\cos y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\quad(z\neq 0)$$

注 若将 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ 代入 $f(z)$,则有 $f(z)=ze^z+\frac{1}{z}$,从而当 $z\neq 0$ 时,$f'(z)=(z+1)e^z-\frac{1}{z^2}$.

例2-2 设 $f(z)=\begin{cases}\frac{(x^3-y^3)+\mathrm{i}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$,试证 $f(z)$ 在原点满足柯西-黎曼方程,但却不可导。

证明 令 $f(z)=u+\mathrm{i}v$,则

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases};\quad v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

因为
$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$$
$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^3}{y^3}=-1$$
$$v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$$
$$v_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^3}=1$$

所以 $u_x(0,0)=v_y(0,0)$, $u_y(0,0)=-v_x(0,0)$，即柯西－黎曼方程在原点(0,0)处成立.但当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于0时，有
$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{(x^3-y^3)+\mathrm{i}(x^3+y^3)}{(x+\mathrm{i}y)(x^2+y^2)}\to\frac{1-k^3+\mathrm{i}(1+k^3)}{(1+k\mathrm{i})(1+k^2)}$$
显然极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 不存在.故函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可导.

例 2－3 试利用极坐标形式的 C－R 方程，证明：
$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

分析 利用极坐标形式的 C－R 方程
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\tag{2-1}$$
及直角坐标与极坐标之间的关系.

证明 由于 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 及式(2－1)，知
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$
$$=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\left(=\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\cos\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial r}-r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}-\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\left(=-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
于是
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\mathrm{i}\left(\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$
$$=(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\frac{\partial u}{\partial r}+(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)\frac{\partial v}{\partial r}$$
$$=\frac{r}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}r}{z}\frac{\partial v}{\partial r}\qquad(\text{注意 } z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta))$$
$$=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

例 2－4 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数且已知 $xu(x,y)-yv(x,y)+x^2-y^2=0$，求函数 $f(z)$.

分析 由已知等式得 $xu-yv=-(x^2-y^2)$，而 $xu-yv$ 刚好是 $zf(z)$ 的实部，即解析函

数 $zf(z)$ 的实部是已知的.由 C－R 方程求出 $zf(z)$ 的虚部即可得到 $f(z)$.

解　由题设可知

$$zf(z)=(x+\mathrm{i}y)(u+\mathrm{i}v)=xu-yv+\mathrm{i}(xv+yu)\xlongequal{\text{记作}}s+\mathrm{i}t$$

$zf(z)$ 是 z 的解析函数,则有

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial y},\quad \frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{\partial t}{\partial x}\qquad (\text{C－R 方程})$$

再由已知 $xu-yv+x^2-y^2=0$ 得 $s=-(x^2-y^2)$,于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial t}{\partial x}=-\dfrac{\partial s}{\partial y}=-2y & (2-2)\\[2mm] \dfrac{\partial t}{\partial y}=\dfrac{\partial s}{\partial x}=-2x & (2-3)\end{cases}$$

由式(2－2)得 $t=\int -2y\mathrm{d}x+\varphi(y)$,代入式(2－3)得 $-2x+\varphi'(y)=-2x$,即 $\varphi'(y)=0$,则 $\varphi(y)=c$(实常数),所以 $t=-2xy+c$.函数 $f(z)$ 的表示式为

$$z\cdot f(z)=s+\mathrm{i}t=-(x^2-y^2)+(-2xy+c)\mathrm{i}=-z^2+\mathrm{i}c$$

所以

$$f(z)=-z+\frac{\mathrm{i}c}{z}\qquad (z\neq 0)$$

例 2－5　指出下面论断中的错误(Bernoulli 悖论):

命题:对于任意复数 $z\neq 0,\infty$,有 $\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z$.

证明:因 $(-z)^2=z^2$,所以

$$\mathrm{Ln}(-z)^2=\mathrm{Ln}z^2 \qquad (2-4)$$

于是

$$\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z \qquad (2-5)$$

所以

$$2\mathrm{Ln}(-z)=2\mathrm{Ln}z \qquad (2-6)$$

故得

$$\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z \qquad (2-7)$$

解　这个命题不成立。令 $\arg z=\varphi$,则

$$\arg(-z)=\begin{cases}\varphi+\pi, & -\pi<\varphi\leqslant 0\\ \varphi-\pi, & 0<\varphi\leqslant\pi\end{cases}$$

由对数的定义可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}z&=\ln|z|+\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)\\ \mathrm{Ln}(-z)&=\ln|z|+\mathrm{i}(\varphi+(2k+1)\pi)\end{aligned}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

显然 $\mathrm{Ln}z\neq\mathrm{Ln}(-z)$(注意 $\mathrm{Ln}z$ 与 $\mathrm{Ln}(-z)$ 是集合意义上的相等(或不等)关系,即 $\mathrm{Ln}z$ 的值集与 $\mathrm{Ln}(-z)$ 的值集不等).

上述证明中式(2－4)、式(2－5)两步是正确的,但由式(2－5)到式(2－6)是错误的.因为 $\mathrm{Ln}z$ 可以看做是一个集合

$$G=\{\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\mid k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

于是 $2\mathrm{Ln}z$ 表示由 G 中每个元素的 2 倍形成的集合

$$2G=\left\{2\ln|z|+2\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\,\middle|\,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$$

而 $\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z$ 则是两个相同集合 G 中各取一个元素相加所得的集合

$$G+G=\{2\ln z+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)+\mathrm{i}(\arg z+2k_1\pi)\mid k,k_1=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

显然 $2G$ 是 $G+G$ 的真子集,所以 $\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z\neq 2\mathrm{Ln}z$.由于式(2－5)到式(2－6)犯了偷换概念

的错误,因此无法导出 $2\mathrm{Ln}(-z)=2\mathrm{Ln}z$ 的概念,该命题也就是一个悖论了。

例 2-6 在复数范围内 $(a^b)^c$ 与 a^{bc} 是否相等,说明理由.

分析 在实数范围内,$(a^b)^c$ 与 a^{bc} 不一定相等是熟知的结论,如 $[(-4)^2]^{\frac{1}{2}}\neq(-4)^{2\cdot\frac{1}{2}}$.在复数范围内,结论相同.要加以说明需借助乘幂的定义

$$a^b=e^{b\mathrm{Ln}a}=\exp\{b\mathrm{Ln}a\}$$

及指数函数与对数函数的表示式.

解 因为 $a^{bc}=e^{bc\mathrm{Ln}a}=\exp\{bc\mathrm{Ln}a\}$,而

$$\begin{aligned}(a^b)^c&=\exp\{c\mathrm{Ln}a^b\}=\exp\{c\mathrm{Ln}(e^{b\mathrm{Ln}a})\}=\exp\{c\mathrm{Ln}(e^{\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)+i\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)})\}\\&=\exp\{c[\ln e^{\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)}+i(\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)+2k\pi)]\}\\&=\exp\{c[\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)+i\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)+2k\pi i]\}\\&=\exp\{c[b\mathrm{Ln}a+2k\pi i]\}=\exp\{bc\mathrm{Ln}a+2k\pi ci)\}\\&=\exp\{bc\mathrm{Ln}a\}\cdot\exp\{2k\pi ci)\}\end{aligned}$$

显而易见,当 $\exp\{2k\pi ci\}=e^{2k\pi ci}=1$ 时,才有 $(a^b)^c=a^{bc}$.等价地,只有 c 为整数时,二者才能相等,所以 $(a^b)^c$ 与 a^{bc} 不一定相等.

书后习题解析

1.利用导数定义推出:

(1) $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 为正整数); (2) $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}\Delta w&=f(z+\Delta z)-f(z)=(z+\Delta z)^n-z^n\\&=z^n+nz^{n-1}\cdot\Delta z+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}\cdot(\Delta z)^2+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}z^{n-k}(\Delta z)^k+\cdots+\Delta z^n-z^n\\&=nz^{n-1}\cdot\Delta z+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}z^{n-k}(\Delta z)^k+\cdots+\Delta z^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to0}=\frac{\Delta w}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to0}\Big\{nz^{n-1}+\Big[\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}z^{n-k}\cdot(\Delta z)^{k-2}+\cdots+\Delta z^{n-2}\Big]\cdot\Delta z\Big\}\\&=nz^{n-1}\end{aligned}$$

(2)

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}=\frac{-\Delta z}{(z+\Delta z)z}$$

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{-\Delta z}{(z+\Delta z)\cdot z}\cdot\frac{1}{\Delta z}=-\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}$$

2.下列函数何处可导,何处解析?

(1) $f(z)=x^2-iy$; (2) $f(z)=2x^3+3y^3i$;

(3) $f(z)=xy^2+ix^2y$; (4) $f(z)=\sin x\mathrm{ch}y+i\cos x\mathrm{sh}y$.

分析 一般而言,此类问题要利用函数可导与解析的充要条件,即若 $f(z)=u(x,y)+$

$iv(x,y)$,满足$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$存在且连续及满足C-R方程$\left(即\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Leftrightarrow f(z)$在点$z=x+iy$处可导,或上述条件在区域$D$内处处成立,则$f(z)$在区域$D$内处处解析.在解题过程中要注意解析点与可导点的区别.

解　(1)由于$u(x,y)=x^2,v(x,y)=-y$.所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

在整个复平面上连续,若要满足C-R方程,需$2x=-1$,即整个复平面上的直线$x=-\frac{1}{2}$上的点满足C-R方程.这样,$f(z)=x^2-iy$在直线$x=-\frac{1}{2}$上的点可导,但在整个复平面上,$f(z)$处处不解析.

(2)$u(x,y)=2x^3,v(x,y)=3y^3$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=9y^2$$

显然以上四个一阶偏导数都连续,当且仅当$6x^2=9y^2$或$\sqrt{3}y=\pm\sqrt{2}x$时,C-R方程被满足,所以$f(z)=2x^3+3iy^3$在两直线$\sqrt{3}y=\pm\sqrt{2}x$上可导,而在复平面上处处不解析.

(3)$u(x,y)=xy^2,v(x,y)=x^2y$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$

显然以上四个一阶偏导数都连续,而且仅当$\begin{cases}y^2=x^2\\2xy=-2xy\end{cases}$,即$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$时,C-R方程才成立.所以$f(z)$仅在原点$(0,0)$处可导,在复平面内处处不解析.

(4)$u(x,y)=\sin x\operatorname{ch}y,v(x,y)=\cos x\operatorname{sh}y$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{ch}y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y$$

显然这四个一阶偏导函数都是连续的,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\sin x\operatorname{sh}y$$

即C-R方程在整个复平面上处处成立,这说明$f(z)$在复平面内处处解析,且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y$$

3.指出下列函数的解析区域,并求出其导数.

(1)$f(z)=(z-1)^5$;　　(2)$f(z)=z^3+2iz$;

(3)$f(z)=\frac{1}{z^2-1}$;　　(4)$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$　(c,d至少有一个不为0).

分析　幂函数z^n在复平面上处处解析,且$(z^n)'=nz^{n-1}$.本题利用解析函数运算性质来判断函数$f(z)$的解析性,并用求导法则求其导数.

解　(1)$f(z)=(z-1)^5$是复平面上的解析函数,且$f'(z)=5(z-1)^4$.

(2)$f(z)=z^3+2iz$是复平面上的解析函数,且$f'(z)=3z^2+2i$.

(3)$f(z)=\frac{1}{z^2-1}$在去掉使$z^2=1$的点,即$z=\pm1$两点的复平面上解析,且

$$f'(z)=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}$$

(4) 当 $c=0$ 时,$f(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$,$f(z)$ 在复平面上处处解析,且 $f'(z)=\frac{a}{d}$;

当 $c\neq 0$ 时,$cz+d=0$ 可得 $z=-\frac{d}{c}$,那么 $f(z)$ 在除去点 $z=-\frac{d}{c}$ 的复平面上处处解析,且

$$f'(z)=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-cb}{(cz+d)^2}$$

4.求下列函数的奇点:(1) $\frac{z+1}{z(z^2+1)}$;(2) $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$.

分析　当函数 $f(z)$ 是两个解析函数的商时,只需考虑分母为零的点,这个点必是 $f(z)$ 的奇点.

解　(1) 由于 $z+1,z(z^2+1)$ 在复平面上处处解析,因而使方程 $z(z^2+1)=0$ 成立的点就是函数 $\frac{z+1}{z(z^2+1)}$ 的奇点.解这个方程得 $z_1=0,z_{2,3}=\pm\mathrm{i}$.因而函数 $\frac{z+1}{z(z^2+1)}$ 的奇点为 $0,\mathrm{i},-\mathrm{i}$.

(2) 由于 $z-2,(z+1)^2(z^2+1)$ 在复平面上处处解析,因而使方程 $(z+1)^2(z^2+1)=0$ 成立的点就是函数 $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点.解这个方程得 $z_1=-1$, $z_{2,3}=\pm\mathrm{i}$.故函数 $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 $-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$.

5.复变函数的可导性与解析性有什么不同?判断函数的解析性有哪些方法?

答　复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导等价于 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析,不仅要求在该点处的导数存在,而且存在 z_0 的一个邻域,该邻域内所有的点处,$f(z)$ 都可导.由此可见,函数 $f(z)$ 在一点 z_0 处解析的要求要比可导的要求严格得多.

判别复变函数解析性的常用方法有三种.

(1) 如果能用导数定义、求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在,那么 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析.

(2) 若复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$、虚部 $v(x,y)$ 在区域 D 上可微(或具有一阶连续偏导),且满足 C－R 方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$,则 $f(z)$ 在区域 D 上解析,并可求得 $f(z)$ 的导数为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

(3) 若 $f(z)$ 是由两个解析函数的和、差、积、商或复合而成,则 $f(z)$ 为解析函数.其中对于商的情形要除去使分母为零的点;解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 复合时,$g(z)$ 关于解析域 D 的象集含于 $f(z)$ 的解析域,复合函数 $f[g(z)]$ 在区域 D 上解析.

6.判断下列命题的真假.若真,请给予证明;若假,请举例说明.

(1) 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续,那么 $f'(z_0)$ 存在;

(2) 如果 $f'(z_0)$ 存在,那么 $f(z)$ 在 z_0 解析;

(3) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点,那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导;

(4) 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点,那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点;

(5) 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导(指偏导数存在),那么 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 也可导;

(6) 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内是解析的.如果 u 是实常数,那么 $f(z)$ 在区域 D 内是常数;如果 v 是实常数,那么 $f(z)$ 在 D 内也是常数.

解　(1) 假命题.例如 $f(z)=x-\mathrm{i}y$ 在复平面内任意一点 z_0 都连续.但不满足C-R方程.因为 $u(x,y)=x,v(x,y)=-y$,故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$,可见整个复平面上任一点都不是C-R方程的解.因此,$f(z)$ 在复平面上处处不可导.

(2) 假命题.例如 $f(z)=x^2+\mathrm{i}(x^2+y^2)$,则 $u(x,y)=x^2,v(x,y)=x^2+y^2$ 显然 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$ 存在且连续,欲使C-R方程成立需点 (x,y) 满足 $\begin{cases}2x=2y\\0=-2x\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$,故 $f(z)=x^2+\mathrm{i}(x^2+y^2)$ 只在点 $(0,0)$,即 $z=0$ 处导数存在,且 $f'(0)=0$,但根据解析点的定义知 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析.

(3) 假命题.如上例,$f(z)=x^2+\mathrm{i}(x^2+y^2)$ 在复平面上处处不解析,因而复平面上的每个点都是 $f(z)$ 的奇点,但 $z=0$ 时 $f(z)$ 的导数存在.

注　当 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点(即在 z_0 的去心邻域里 $f(z)$ 处处解析,但 $f(z)$ 在 z_0 不解析)时,$f(z)$ 在 z_0 一定不可导.

(4) 假命题.例如 $f(z)=\bar{z}$ 与 $g(z)=-\bar{z}$ 在复平面内处处不解析,即复平面内任意一点都是 $f(z)$、$g(z)$ 的奇点,但 $f(z)+g(z)=\bar{z}+(-\bar{z})=0$ 在复平面内处处解析.又如 $f(z)=\bar{z},g(z)=2\bar{z}$ 在复平面内处处不解析,但 $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\bar{z}}{2\bar{z}}=\dfrac{1}{2}$ 在任一 $z_0\neq 0$ 的点处都解析,则 $z_0\neq 0$ 是 $f(z)$,$g(z)$ 的奇点,但不是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的奇点.

(5) 假命题.例如 $f(z)=x+2\mathrm{i}y$,其中 $u(x,y)=x,v(x,y)=2y$,它们在整个复平面上处处可导.但它们不满足C-R方程,即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$.因此 $f(z)$ 的导数不存在.

注　此命题说明,可导复变函数的实部和虚部之间有着密切的联系.这就是C-R方程.

(6) 真命题.由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析.所以 u,v 在区域 D 内可微且满足C-R方程.若 $u=a$(实常数),可知 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.这说明 v 也是实常数,记作 $v=b$(b 实常数),则 $f(z)=a+\mathrm{i}b$ 在 D 内是常数.

同理可知,当 v 是实常数时,u 也是实常数,故 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

7.如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数,证明:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$$

证明　由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$,可知 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$,则

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}|f(z)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

又知 $f(z)$ 在复平面上处处解析，所以满足 C－R 方程且 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$，于是可知等式右端为 $|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$；而等式左端为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2$$

$$=\frac{u^2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2}+\frac{u^2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{u^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+v^2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+2uv\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]}{u^2+v^2}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

从面知等式左、右两端相等.

8.设 $my^2+nx^2y+\mathrm{i}(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值.

解 令 $u(x,y)=my^3+nx^2y, v(x,y)=x^3+lxy^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2lxy$$

因为 $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，所以 C－R 方程必成立，即

$$\begin{cases}2nxy\equiv 2lxy & (2-8)\\ 3my^2+nx^2\equiv -3x^2-ly^2 & (2-9)\end{cases}$$

由式(2－8)可知 $n=l$.把 $n=l$ 代入式(2－9)得

$$(3m+l)y^2+(l+3)x^2\equiv 0$$

必有 $l+3=0$，且 $3m+l=0$，解得 $n=l=-3, m=1$.

9.证明柯西－黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证明 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，根据复合函数求导法则有

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot r(-\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot r(-\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta$$

又由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以有
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta$$
$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta-\frac{\partial v}{\partial x}r\cos\theta=-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta$$
$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot r\cos\theta=r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta\right)$$
即有
$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\cdot\frac{\partial v}{\partial r},\quad\frac{\partial v}{\partial\theta}=r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}$$
也就是
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

10.证明:如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析,并满足下列条件之一,那么 $f(z)$ 是常数.

(1) $f(z)$ 恒取实值;(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析;(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数;(4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数;(5) $au+bv=c$,其中 a,b 与 c 是不全为零的实常数.

证明　因 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析,故 u,v 在区域 D 内可微且满足C-R方程.

(1) 当 $f(z)$ 恒取实值时,说明 $v\equiv 0$,那么必有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$
故 u 是实常数,所以 $f(z)$ 为常数.

(2) 若 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析,就是说 $\overline{f(z)}=u-iv$ 是解析的,从而有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$$
再根据已知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$,可知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$,即 u,v 均为实常数,所以 $f(z)$ 为常数.

(3) 若 $|f(z)|$ 在 D 内是常数,不妨设为 $u^2+v^2=c$(c 为实常数),于是有
$$\begin{cases}u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2ex]u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$
结合已知条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 可得
$$\begin{cases}u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2ex]v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$
从而
$$\begin{cases}u^2\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\cdot\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2ex]v^2\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2-2uv\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$
那么两式相加化简得
$$(u^2+v^2)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)=c\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)=0$$

于是，当 $c=0$ 时，$|f(z)|=\sqrt{c}=0$，故 $f(z)=0$ 是常数.

当 $c\neq 0$ 时，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=0$，则有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$，即得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$，那么必有 u,v 为实常数，故 $f(z)$ 是常数.

(4) $\arg f(z)$ 在 D 内是常数，故令 $\arg f(z)=\theta$（θ 是常数），那么有 $\frac{v}{u}=\tan\theta$，从而有 $v=u\tan\theta$. 于是 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\tan\theta,\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\tan\theta$，再由已知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 可得

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\tan\theta\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\tan\theta\end{cases}$$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}\tan^2\theta$，即 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$. 由此可得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，故 u,v 均是实常数，因而 $f(z)$ 是常数.

(5) 若 $au+bv=c$，则有 $\begin{cases}a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ a\dfrac{\partial u}{\partial y}+b\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$，结合已知 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$，有 $\begin{cases}a\dfrac{\partial u}{\partial x}-b\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ a\dfrac{\partial u}{\partial y}+b\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}$. 此方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2+b^2$. 当 $a\neq 0$ 时，此方程组只有零解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，故 u 为常数，再由(1)的结论得 $f(z)$ 为常数.

当 $a=0$ 时，$bv=c$，说明 v 为实常数，由 C－R 方程可知 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$，故 u 也为实常数，从而 $f(z)$ 为常数.

11. 下列关系式是否正确？

(1) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$；(2) $\overline{\cos z}=\cos\bar z$；(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$.

解　(1) 正确. 因为 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$，所以

$$\begin{aligned}\overline{e^z}&=\overline{e^x(\cos y+i\sin y)}=e^x(\cos y-i\sin y)\\&=e^x(\cos(-y)+i\sin(-y))=e^{x-iy}=e^{\bar z}\end{aligned}$$

(2) 正确. 因 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，所以

$$\overline{\cos z}=\frac{1}{2}(\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}})=\frac{1}{2}(e^{\overline{iz}}+e^{-\overline{iz}})=\frac{1}{2}(e^{-i\bar z}+e^{i\bar z})=\cos\bar z$$

(3) 正确. 因为 $\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$，所以

$$\overline{\sin z}=\frac{1}{\overline{2i}}(e^{\overline{iz}}-e^{\overline{-iz}})=\frac{1}{-2i}(e^{-i\bar z}-e^{i\bar z})=\frac{1}{2i}(e^{i\bar z}-e^{-i\bar z})=\sin\bar z$$

12. 找出下列方程的全部解：

(1) $\sin z=0$；(2) $\cos z=0$；(3) $1+e^z=0$；(4) $\sin z+\cos z=0$.

解　(1)$\sin z=0$等价于$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$或$e^{2iz}=1$,可得

$$2iz=\mathrm{Ln}1=\ln 1+i(0+2k\pi)=2k\pi i$$

所以$\sin z=0$的全部解为$z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(2) 由$\cos z=0$,得$e^{iz}+e^{-iz}=0$,即$e^{2iz}=-1$,故

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(3) 由$1+e^{z}=0$,可得$e^{z}=-1$,故

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(4) 由$\sin z+\cos z=0$,得$\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})+\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=0$,从而$e^{2iz}-1+ie^{2iz}+i=0$,$(1+i)e^{2iz}=1-i$,则有

$$2iz=\mathrm{Ln}\frac{1-i}{1+i}=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

从而得方程的解为$z=k\pi-\dfrac{\pi}{4}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

13.证明:

(1) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2$;

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2$;

(2)$\sin^2 z+\cos^2 z=1$;

(3)$\sin 2z=2\sin z\cos z$;

(4)$\tan 2z=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$;

(5)$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z,\cos(z+\pi)=-\cos z$;

(6)$|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$; $-|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$

证明　(1)

$$\begin{aligned}&\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2\\&=\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\\&=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}}{4}\\&\quad+\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}}{4}\\&=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2}=\cos(z_1+z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin z_1\cdot\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2\\&=\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\\&=\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}}{4i}+\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}}{4i}\\&=\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}=\sin(z_1+z_2)\end{aligned}$$

(2)

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

(3) $$2\sin z \cdot \cos z = 2 \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z$$

(4) $$\frac{2\tan z}{1 - \tan^2 z} = \frac{2\frac{\sin z}{\cos z}}{1 - \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}} = \frac{2\sin z \cdot \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z} = \frac{\sin 2z}{\cos^2 z - \sin^2 z}$$

又由于

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4}$$

$$= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = \cos 2z$$

因而 $$\frac{2\tan z}{1 - \tan^2 z} = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \tan 2z$$

(5) $$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}}{2i} = \frac{e^{-iz} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{iz} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}$$

$$= \frac{ie^{-iz} - (-i)e^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

(6) $$|\cos z|^2 = \cos z \cdot \overline{\cos z} = \cos z \cdot \cos \bar{z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{i(z+\bar{z})} + e^{i(\bar{z}-z)} + e^{-i(z-\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{1}{4}(e^{2y} + e^{-2y})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})^2 + \frac{1}{4}(e^{y} + e^{-y})^2 - 1$$

$$= \cos^2 x + \text{ch}^2 y - 1 = \cos^2 x + \text{sh}^2 y$$

事实上

$$\text{ch}^2 y - 1 = \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} - 1 = \frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} = \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 = \text{sh} y^2$$

同理可得 $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \text{sh}^2 y$.

14.说明:

(1) 当 $y \to \infty$ 时,$|\sin(x + iy)|$ 和 $|\cos(x + iy)|$ 趋于无穷大;

(2) 当 t 为复数时,$|\sin t| \leqslant 1$ 和 $|\cos t| \leqslant 1$ 不成立.

解 (1) 由13题的(6)知,$|\sin(x + iy)| = \sqrt{\sin^2 x + \text{sh}^2 y} \geqslant |\text{sh} y|$.由于 $\lim\limits_{y\to\infty} \text{sh}^2 y = +\infty$,所以 $\lim\limits_{y\to\infty} |\sin(x + iy)| = +\infty$.

$|\cos(x + iy)| = \sqrt{\cos^2 x + \text{sh}^2 y}$,同理有 $\lim\limits_{y\to\infty} |\cos(x + iy)| = +\infty$.

(2) 当 t 为复数时,不妨取 $t = i$,即 $x = 0, y = 1$.于是

$$|\sin t| = \sqrt{\sin^2 x + \text{sh}^2 y} = \sqrt{0 + \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2} = \frac{e - e^{-1}}{2} > 1$$

$$|\cos t| = \sqrt{\cos^2 x + \text{sh}^2 y} = \sqrt{1 + \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2} > 1$$

15.求 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})$,$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$ 和它们的主值.

解 利用公式

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

由于 $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$,所以

$$\mathrm{Ln}(-\mathrm{i}) = \ln 1 + \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \mathrm{i}\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\ln(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

由于 $-3+4\mathrm{i} = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi - \arctan\frac{4}{3}\right)}$,所以

$$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i}) = \ln 5 + \mathrm{i}\left(\pi - \arctan\frac{4}{3} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\ln(-3+4\mathrm{i}) = \ln 5 + \mathrm{i}\left(\pi - \arctan\frac{4}{3}\right)$$

16.证明对数的下列性质:

(1)$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$; (2)$\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$.

证明 (1)$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \ln|z_1||z_2| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2)$

$= \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$

(2)$\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln\dfrac{|z_1|}{|z_2|} + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2)$

$= (\ln|z_1| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z_1) - (\ln|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z_2) = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$

17.说明下列等式是否正确:(1)$\mathrm{Ln}z^2 = 2\mathrm{Ln}z$; (2)$\mathrm{Ln}\sqrt{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}z$.

解 令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,其中 $r = |z|$,$\theta = \arg z$.

(1) 不正确.因为 $z^2 = r^2 \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$,故

$$\mathrm{Ln}z^2 = \ln r^2 + \mathrm{i}(2\theta + 2k\pi) = 2\ln r + 2\mathrm{i}(\theta + k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

而 $$2\mathrm{Ln}z = 2(\ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)) = 2\ln r + 2\mathrm{i}(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

因此尽管两者的实部相等,但虚部可能取的值却不尽相同,所以等式 $\mathrm{Ln}z^2 = 2\mathrm{Ln}z$ 不正确.

(2) 不正确.因为 $\sqrt{z} = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta + 2l\pi}{2}}$,$l = 0,1$,故

$$\mathrm{Ln}\sqrt{z} = \ln\sqrt{r} + \mathrm{i}\left(\frac{\theta + 2l\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}\ln r + \mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2} + l\pi + 2k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; l = 0,1)$$

而 $$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z = \frac{1}{2}(\ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)) = \frac{1}{2}\ln r + \mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

尽管我们可以看出对于$\dfrac{1}{2}\ln z$,当 k 取偶数时,可能取的值与 $l = 0$ 时 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ 可能取的值相同;当 k 取奇数时,可能取的值与 $l = 1$ 时 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ 可能取的值相同.但是 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ 与$\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 是两个不同的无穷值函数,也就是说$\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 的主值是单值的,就是$\dfrac{1}{2}\ln z$;而 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ 的主值有两个,这是因

为$\sqrt{z}$是多值函数.

18.求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$,$\exp[(1+i\pi)/4]$,3^i 和$(1+i)^i$ 的值.

解
$$e^{1-i\frac{\pi}{2}}=e^1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-ie$$

$$\exp\left[\frac{1}{4}(1+i\pi)\right]=e^{\frac{1}{4}+i\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+i)$$

$$3^i=e^{i\mathrm{Ln}3}=e^{i(\ln3+2k\pi i)}=e^{-2k\pi+i\ln3}=e^{-2k\pi}(\cos\ln3+i\sin\ln3)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$(1+i)^i=e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\frac{\ln2}{2}i}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\left(\cos\frac{\ln2}{2}+i\sin\frac{\ln2}{2}\right)$$

19.证明$(z^a)'=az^{a-1}$,其中 a 为实数.

证明 因为 $z^a=e^{a\mathrm{Ln}z}$,所以

$$(z^a)'=(e^{a\mathrm{Ln}z})'=e^{a\mathrm{Ln}z}\cdot(a\mathrm{Ln}z)'=z^a\cdot a\cdot\frac{1}{z}=a\cdot z^{a-1}$$

20.证明:(1)$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=1$;　(2)$\mathrm{sh}^2z+\mathrm{ch}^2z=\mathrm{ch}2z$;

(3)$\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}z_1\cdot\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\cdot\mathrm{sh}z_2$;

$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}z_1\cdot\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\cdot\mathrm{sh}z_2$.

证明 (1)$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4}-\frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4}=1$

(2)
$$\mathrm{sh}^2z+\mathrm{ch}^2z=\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{2(e^{2z}+e^{-2z})}{4}=\mathrm{ch}2z$$

(3)
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}z_1\cdot\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\cdot\mathrm{sh}z_2&=\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}\\&=\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}+e^{-(z_1-z_2)}+e^{z_1-z_2}}{4}\\&\quad+\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}-e^{-(z_1-z_2)}-e^{z_1-z_2}}{4}\\&=\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\mathrm{ch}(z_1+z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}z_1\cdot\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\cdot\mathrm{sh}z_2&=\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}\\&=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{z_2-z_1}+e^{z_1-z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{4}\\&\quad+\frac{e^{z_1+z_2}+e^{z_2-z_1}-e^{z_1-z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{4}\\&=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\mathrm{sh}(z_1+z_2)\end{aligned}$$

21.解下列方程:(1)$\mathrm{sh}z=0$;　(2)$\mathrm{ch}z=0$;　(3)$\mathrm{sh}z=i$.

解 (1)$\mathrm{sh}z=0$相当于$\frac{e^z-e^{-z}}{2}=0$,那么$e^{2z}-1=0$,所以

$$2z=\mathrm{Ln}1=\ln1+i(0+2k\pi)=2ik\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

于是方程 $\mathrm{sh}z=0$ 的所有解为 $z=k\pi i,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(2)$\mathrm{ch}z=0$相当于$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=0$,即$e^{2z}+1=0$,所以

$$2z = \mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

于是方程 $\mathrm{ch}z = 0$ 的所有解为 $z = \dfrac{2k+1}{2}\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(3)$\mathrm{sh}z = i$ 相当于$\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = i$,即 $e^{2z} - 2ie^z - 1 = 0$,于是$(e^z - i)^2 = 0$,故$e^z = i$,那么有

$$z = \mathrm{Ln}i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

于是方程 $\mathrm{sh}z = i$ 的所有解为 $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

22.证明:(1)$\mathrm{ch}iy = \cos y, \mathrm{sh}iy = i\sin y$;

(2)$\mathrm{ch}(x+iy) = \mathrm{ch}x \cdot \cos y + i\mathrm{sh}x \cdot \sin y$;

$\mathrm{sh}(x+iy) = \mathrm{sh}x \cdot \cos y + i\mathrm{ch}x \cdot \sin y$.

证明 (1)$\mathrm{ch}iy = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \dfrac{(\cos y + i\sin y) + [\cos(-y) + i\sin(-y)]}{2} = \cos y$

$$\mathrm{sh}iy = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} = \frac{(\cos y + i\sin y) - [\cos(-y) + i\sin(-y)]}{2} = \frac{2i\sin y}{2} = i\sin y$$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x+iy) &= \frac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2}\\ &= \frac{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}[\cos(-y) + i\sin(-y)]}{2}\\ &= \frac{(e^x + e^{-x})\cos y + i\sin y \cdot (e^x - e^{-x})}{2}\\ &= \mathrm{ch}x \cdot \cos y + i \cdot \mathrm{sh}x \cdot \sin y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x+iy) &= \frac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}[\cos(-y) + i\sin(-y)]}{2}\\ &= \frac{(e^x - e^{-x})\cos y + i(e^x + e^{-x})\sin y}{2}\\ &= \mathrm{sh}x \cdot \cos y + i\mathrm{ch}x \cdot \sin y\end{aligned}$$

23.证明 $\mathrm{sh}z$ 的反函数,$\mathrm{Arsh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$.

证明 令 $z = \mathrm{sh}w = \dfrac{e^w - e^{-w}}{2}$,那么 w 为z 的反双曲正弦函数.由此可得 $2z = e^w - e^{-w}$,整理后为 $e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$,即$(e^w - z)^2 - z^2 - 1 = 0$,$(e^w - z)^2 = z^2 + 1$,于是 $e^w - z = \sqrt{z^2+1}$,故 $w = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$,即 $\mathrm{Arsh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$,这里$\sqrt{z^2+1}$ 理解为双值函数.

24.已知平面流速场的复势$f(z)$为:(1)$(z+i)^2$; (2)z^3; (3)$\dfrac{1}{z^2+1}$,求流动的速度以及流线和等势线的方程.

解 令 $z = x + iy$.

(1) 复势 $f(z) = (z+i)^2 = [x + (y+1)i]^2 = x^2 - (y+1)^2 + 2x(y+1)i$

流速 $v = \overline{f'(z)} = \overline{2(z+i)} = 2(\bar{z} - i) = 2(x - (y+1)i) = 2x - 2(y+1)i$

流函数 $\psi(x,y) = \mathrm{Im}[f(z)] = 2x(y+1)$

流线方程 $2x(y+1) = c_1$ (c_1 为实常数)

势函数 $\varphi(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)] = x^2 - (y+1)^2$

等式线方程 $x^2-(y+1)^2=c_2$ （c_2 为实常数）

(2) 复势 $f(z)=z^3=(x+\mathrm{i}y)^3=x^3+3\mathrm{i}x^2y-3xy^2-\mathrm{i}y^3$

$=(x^3-3xy^2)+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$

流速 $v=\overline{f'(z)}=\overline{(z^3)'}=\overline{(3z^2)}=3\cdot\bar{z}^2=3(x-\mathrm{i}y)^2$

$=3(x^2-y^2)-6xy\mathrm{i}$

流函数 $\psi(x,y)=\mathrm{Im}[f(z)]=3x^2y-y^3$

流线方程 $3x^2y-y^3=c_1$ （c_1 为实常数）

势函数 $\varphi(x,y)=\mathrm{Re}[f(z)]=x^3-3xy^2$

等势线方程 $x^3-3xy^2=c_2$ （c_2 为实常数）

(3) 复势 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{\bar{z}^2+1}{z^2\cdot\bar{z}^2+z^2+\bar{z}^2+1}=\dfrac{x^2-y^2+1-2xy\mathrm{i}}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2}$

流速 $v=\overline{f'(z)}=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'}=\overline{\left(\dfrac{-2z}{(z^2+1)^2}\right)}=\dfrac{-2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$

流线方程为 $\dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=c_1$ （c_1 为实常数）

等势线方程为 $\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=c_2$ （c_2 为实常数）

同步训练题

1.单项选择题

(1) 函数 $f(z)=3|z|^2$ 在点 $z=0$ 处是(　　).

A.解析的　　B.可导的　　C.不可导的　　D.不解析也不可导

(2) 函数 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在点 z_0 可导的充要条件是(　　).

A. u,v 在点处有偏导数　　B. u,v 在 z_0 处可微

C. u,v 在 z_0 处满足 C－R 条件　　D. u,v 在 z_0 处可微且满足 C－R 条件

(3) 函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在点 z_0 处解析，则命题(　　)不成立.

A. u,v 仅在 z_0 点处可微且满足 C－R 条件

B.存在点 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$，使 u,v 在 $u(z_0)$ 内满足 C－R 条件

C.存在点 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$，使 u,v 在 $U(z_0)$ 内可微

D.B 与 C 同时成立

(4) 下列命题中正确的是(　　).

A.设 x,y 为实数，则 $|\cos(x+\mathrm{i}y)|\leqslant 1$

B.若 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 点不可导

C.若 u,v 在区域 D 内满足 C－R 条件，则 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析

D.若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $\overline{\mathrm{i}f(z)}$ 在 D 内也解析.

(5) 下面论断中正确的是(　　).

A.对于任意的复数 $z(\neq 0,\infty)$，$\mathrm{Ln}|z|=\ln|z|$

B.对于任意的复数 $z(\neq\infty)$，$|\cos z|\leqslant 1$

C.对于任意的复数 $z(\neq\infty)$，$\mathrm{e}^z>0$

D.当 c 为整数时,有 $(a^b)^c = a^{bc}$

(6) 设函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析,则关于 u,v 的雅可比行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = (\quad)$.

A. $|f'(z)|$　　B. $-|f'(z)|$　　C. $|f'(z)|^2$　　D. $-|f'(z)|^2$

(7) 下列函数中解析函数为(　　).

A. $x^2 - y^2 - 2xyi$　　B. $x^2 + xyi$

C. $2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x)$　　D. $x^3 + iy^3$

(8) 函数 $f(z) = z^2\mathrm{Im}(z)$ 在 $z = 0$ 处的导数(　　).

A.等于0　　B.等于1　　C.等于 -1　　D.不存在

(9) 若函数 $f(z) = x^2 + 2xy - y^2 + i(y^2 + axy - x^2)$ 在复平面内处处解析,那么实数 $a =$ (　　).

A.0　　B.1　　C.2　　D. -2

(10) 设 $f(z) = x^2 + iy^2$,则 $f'(1+i) = (\quad)$.

A.2　　B.2i　　C.1 + i　　D.2 + 2i

(11) i^i 的主值为(　　).

A.0　　B.1　　C. $e^{\frac{\pi}{2}}$　　D. $e^{-\frac{\pi}{2}}$

(12) $e^{\bar{z}}$ 在复平面上(　　).

A.无可导点　　B.有可导点但不解析

C.有可导点,且在可导点解析　　D.处处解析

(13) 设 a 为实数,则 1^a (　　).

A.无定义　B.等于1　C.实部为1的复数　D.模为1的复数

(14) 设 $f(z) = \sin z$,下列命题中错误的是(　　).

A. $f(z)$ 在复平面内处处解析　　B. $f(z)$ 以 2π 为周期

C. $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$　　D. $|f(z)|$ 是无界的.

(15) 下列数中为实数的是(　　).

A. $(1-i)^3$　　B. cosi　　C. Lni　　D. $e^{3-\frac{\pi}{2}i}$

2.填空题

(1) 设 $f(0) = 1, f'(0) = 1 + i$,则 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-1}{z} =$ ________.

(2) 设 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内的导函数 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 也在区域 D 内解析的充要条件为________.

(3) $f(z) = x^3 + y^3 + ix^2y^2$,则 $f'\left(-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{3}{2}\right) =$ ________.

(4) 设 $f(z) = \dfrac{1}{5}z^5 - (1+i)z$,则方程 $f'(z) = 0$ 的所有根为________.

(5) $\operatorname{Im}\{\ln(3-4\mathrm{i})\}=$ ________.

(6) $f(z)=x^2-y^2-x+\mathrm{i}(2xy-y^2)$ 在________可导，在________解析.

(7) 设函数 $f(z),g(z)$ 均在点 z_0 处可导，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$ 及 $g'(z_0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$ = ________.

(8) 函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{z}{5}}$ 的周期是________.

(9) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的辐角主值是________.

(10) 设 $f(z)=z\operatorname{Re}z$，则 $f'(0)=$ ________.

(11) 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{z-1}{z+1}\right\}=$ ________.

3. 函数 $f(z)=z^2\cdot\bar{z}$，则 $f(z)$ 在何处可导，在何处解析？

4. 求下列函数值：(1) $(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$；(2) $\ln(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$；(3) $\operatorname{Arctan}(2+3\mathrm{i})$.

5. 设 $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$，试证明当 $|z|<1$ 时，有 $\operatorname{Re}\left\{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\geqslant\dfrac{1-|z|}{1+|z|}$.

6. 解方程 $\sin z+\mathrm{i}\cos z=4\mathrm{i}$.

7. 试证明 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 处满足 C - R 方程，但在 $z=0$ 处不可导.

8. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，并且 $v=u^2$，试求 $f(z)$.

9. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数，若记 $w(z,\bar{z})=u\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)+\mathrm{i}v\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2}\right)$，则 $\dfrac{\partial w}{\partial\bar{z}}=0$.

10. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为一解析函数，$\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是两个相互垂直的单位向量，从 $\boldsymbol{s}$ 按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 能重合于 $\boldsymbol{n}$，则有 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}=\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}},\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=-\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{s}}$，其中 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}},\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 分别表示沿向量 $\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

同步训练题答案

1. 单项选择题

解 (1)B (2)D (3)A (4)D (5)D (6)C (7)C (8)A (9)C (10)A (11)D (12)A (13)D (14)C (15)B

2. 填空题

解 (1) $1+\mathrm{i}$ (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在区域 D 内可微，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$（根据函数解析的充要条件可得）.

(3) $\dfrac{27}{4}-\dfrac{27}{4}\mathrm{i}$ (4) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),k=0,1,2,3$

(5) $-\arctan\dfrac{4}{3}$ (6) $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{1}{2}$ 复平面上处处不解析

(7) $\dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ (8) $10\pi\mathrm{i}$ (9) $\arg\{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}\}=\dfrac{1}{2}\ln 2$ (10) 0 (11) $\dfrac{r^2-1}{1+2r\cos\theta+r^2}$

3. 解 令 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$f(z)=z^2\cdot\bar{z}=z\cdot(z\cdot\bar{z})=(x+\mathrm{i}y)(x^2+y^2)$$
$$=x(x^2+y^2)+\mathrm{i}y(x^2+y^2)$$

由于 $u=x(x^2+y^2),v=y(x^2+y^2)$ 在 z 平面上处处可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3y^2+x^2$$

若使 C-R方程成立,必有 $3x^2+y^2=3y^2+x^2,2xy=-2xy$,解得 $x=y=0$,故函数 $f(z)=z^2\cdot\bar{z}$,仅在点 $z=0$ 处可导,在复平面上处处不解析.

4.解 (1)
$$(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})[\ln|1+\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi)]}$$
$$=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\left[\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)-\mathrm{i}\left[\ln\sqrt{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$$
$$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\left\{\cos\left[-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\right.$$
$$\left.+\mathrm{i}\sin\left[-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\right\}$$
$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)\right]$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(2)
$$\mathrm{Ln}(3-3\mathrm{i})=\ln\left|3-\sqrt{3}\mathrm{i}\right|+\mathrm{i}[\arg(3-\sqrt{3}\mathrm{i})+2k\pi]$$
$$=\ln 2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(3)
$$\mathrm{Arctan}(2+3\mathrm{i})=-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\frac{-3+\mathrm{i}}{5}$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\ln\left|\frac{-3+\mathrm{i}}{5}\right|+\mathrm{i}\left[\arg\left(\frac{-3+\mathrm{i}}{5}\right)+2k\pi\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\ln\frac{\sqrt{10}}{5}+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{1}{3}+2k\pi\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{1}{2}(2k+1)\pi-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}$$
$$=\frac{-\mathrm{i}}{4}(\ln 2-\ln 5)+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

5.证明 当 $|z|<1$ 时,$f(z)=\frac{z}{1-z}$ 在单位圆 $|z|<1$ 内处处解析,所以 $f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$,而 $f'(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内也是处处解析的,故

$$f''(z)=[f'(z)]'=\frac{2}{(1-z)^3}$$

于是
$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=1+\frac{2z}{1-z}=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{|1-z|^2}=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}$$
$$=\frac{1+(z-\bar{z})-z\cdot\bar{z}}{|1-z|^2}=\frac{(1-z\cdot\bar{z})+2\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}}{|1-z|^2}$$

因而
$$\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}=\frac{1-z\cdot\bar{z}}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

另一方面,由三角不等式 $|1-z|\leqslant1+|z|$,有

$$\mathrm{Re}\left\{1+z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\geqslant\frac{1-|z|^2}{(1+|z|)^2}=\frac{1-|z|}{1+|z|}>0\qquad(|z|<1)$$

6.解　由 $\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$ 得

$$\sin z+\mathrm{i}\cos z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})+\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$$

方程 $\sin z+\mathrm{i}\cos z=4\mathrm{i}$ 等价于方程 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\frac{1}{4}$，则

$$\mathrm{i}z=\mathrm{Ln}\frac{1}{4}=-\ln 4+\mathrm{i}(0+2k\pi)=-2\ln 2+2k\pi\mathrm{i},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

那么 $\sin z+\mathrm{i}\cos z=4\mathrm{i}$ 的全部解为 $z=2k\pi+2\mathrm{i}\ln 2,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

7.证明　函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$，所以 $u(x,y)=\sqrt{|xy|},v(x,y)=0$，又

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

故 C－R 方程在 $z=0$ 点处成立.

但 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导，不妨让 z 沿第一象限里的射线 $y=kx$ 趋向于 0，有

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{\sqrt{|xy|}-0}{z}=\frac{\sqrt{k}x}{x+\mathrm{i}kx}=\frac{\sqrt{k}}{1+\mathrm{i}k}$$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 的值与 k 有关，所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可导.

8.解　由 C－R 方程及关系式 $v=u^2$，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y} & (2-10)\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} & (2-11)\end{cases}$$

把式(2－11)代入式(2－10)，得 $\frac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0$，故 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$，同理可得 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. 这说明 u 是实常数，不妨令 $u=c$. 再由 $v=u^2$ 知 v 也是实常数，且 $v=c^2$，c 为实常数. 于是 $f(z)$ 是常数，且 $f(z)=c+\mathrm{i}c^2$.

9.证明　根据复合函数的求导法则

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\bar z}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\bar z}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\bar z}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\bar z}\right)$$

这里 $\begin{cases}x=\dfrac{z+\bar z}{2}\\[2mm]y=\dfrac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\end{cases}$，所以 $\frac{\partial x}{\partial\bar z}=\frac{1}{2},\frac{\partial y}{\partial\bar z}=\frac{\mathrm{i}}{2}$，则

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

又知 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，从而 $\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}=0$.

10.证明　由函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 解析，知 u,v 可微且满足 C－R 方程. 设 $s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，根据题意

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)i} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha + i\cos\alpha$$

根据方向导数的计算公式,有

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\alpha, \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \sin\alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \cos\alpha = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{s}} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \sin\alpha = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin\alpha = -\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$$

整理后,有
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{s}}$$

第3章　复变函数的积分

典型题解析

例 3－1　计算复变函数积分$\oint_C\left(|z|-e^z\sin\frac{1}{z-2}\right)dz$，$C$ 为正向圆周$|z|=\frac{1}{2}$.

解　由积分运算的性质可知

$$\oint_C\left(|z|-e^z\sin\frac{1}{z-2}\right)dz=\oint_C|z|dz-\oint_C e^z\sin\frac{1}{z-2}dz$$

其中

$$\oint_C|z|dz=\oint_C\frac{1}{2}dz=0 \tag{3－1}$$

$$\oint_C e^z\sin\frac{1}{z-2}dz=0 \tag{3－2}$$

式(3－2)成立是因为函数 $e^z\sin\frac{1}{z-2}$ 在除去 $z=2$ 点的复平面上处处解析，即在曲线 C 及其内部解析，利用柯西－古萨定理可得结果．于是有

$$\oint_C\left(|z|-e^z\sin\frac{1}{z-2}\right)dz=0$$

注　在复变函数积分的计算中利用解析函数的柯西－古萨定理求积分是重要的方法之一．一些复变函数积分若用基本积分法求值会十分繁琐，甚至无法算出结果．

例 3－2　计算复变函数积分$\oint_C\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$，其中 C 为不过 0，1 的正向简单闭曲线．

分析　由于题中没有明确指明积分路径 C，故要就点 0，1 与 C 的各种位置关系进行讨论，并应用柯西积分公式及高阶导数公式和柯西－古萨定理进行计算．

解　(1) 若点 0，1 均不在曲线 C 的内部，如图 3－1(a) 所示．

被积函数$f(z)=\frac{e^z}{z^3(z-1)}$在以 C 为边界的有界闭区域$\overline{D}$上解析，由柯西－古萨定理，有 $\oint_C\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz=0$.

(2) 若点 1 在 C 的内部，点 0 在 C 的外部如图 3－1(b) 所示．

由于被积函数 $f(z)$ 在以 C 为边界的有界闭区域 $\overline{D}$ 上除 $z=1$ 外处处解析，则由柯西积分公式得$\oint_C\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz=\oint_C\frac{\frac{e^z}{z^3}}{(z-1)}dz=2\pi i\cdot\left(\frac{e^z}{z^3}\right)\Big|_{z=1}=2\pi e i$.

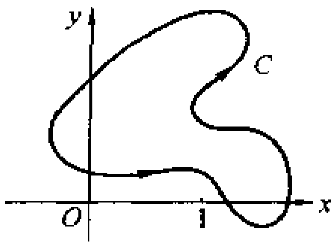
(3) 若点 0 在 C 的内部，点 1 在 C 的外部，如图 3－1(c) 所示．

这时被积函数 $f(z)$ 在以 C 为边界的有界区域 $\overline{D}$ 上除 $z=0$ 外处处解析，由高阶导数公式得$\oint_C\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz=\oint_C\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Big|_{z=0}=-5\pi i$.

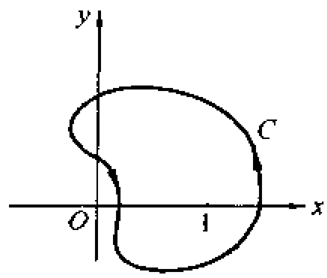
(4) 点 0,1 均在曲线 C 的内部,如图 3 - 1(d) 所示.

显然被积函数 $f(z)$ 在 C 所围有界闭区域内除 $z = 0,1$ 外处处解析.任作两条闭曲线 C_0,C_1,使得 C_0,C_1 均含于曲线 C 的内部,且 C_0 与 C_1 不相交,方向为逆时针方向,且点0在曲线 C_0 的内部,点 1 在曲线 C_1 的内部,于是由复合闭路定理有

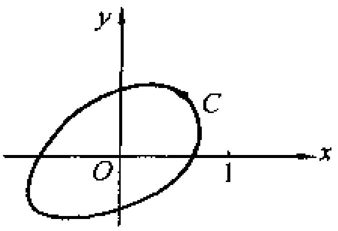
$$\oint_C \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz = \oint_{C_0} \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz + \oint_{C_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz = (2e-5)\pi i$$



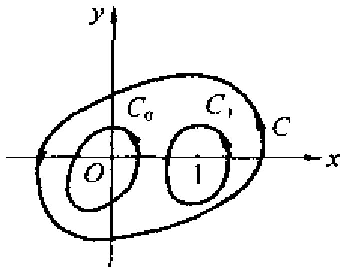
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3 - 1

例 3 - 3　证明$\oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \begin{cases} \dfrac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}, & 若|a|<\rho \\ \dfrac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}, & 若|a|>\rho \end{cases}$.

分析　若令 $z = re^{i\theta}$,则积分路径上的点满足 $r = \rho$,且有 $z\bar{z} = \rho^2$,$|dz| = ds = \rho d\theta = -\rho\frac{dz}{z}i$, 于是等式左端的积分化为

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \oint_{|z|=\rho} \frac{-i\rho dz}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})z}$$

再由柯西积分公式计算即可.

证明

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \oint_{|z|=\rho} \frac{-i\rho}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} \cdot \frac{dz}{z}$$
$$= -i\rho\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)}$$

若$|a|<\rho$,则$(\rho^2-\bar{a}z)^{-1}$ 在$|z|\leqslant\rho$ 上解析,由柯西积分公式有

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}=-\mathrm{i}\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{\frac{1}{\rho^2-\bar{a}z}}{z-a}\mathrm{d}z$$

$$=-\mathrm{i}\rho\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{\rho^2-\bar{a}z}\right)\Big|_{z=a}=\frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}$$

若$|a|>\rho$,则同上有

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}=\frac{\mathrm{i}\rho}{\bar{a}}\oint_{|z|=\rho}\frac{\frac{1}{z-a}}{z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\mathrm{i}\rho}{\bar{a}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\frac{1}{z-a}\right)\Big|_{z=\frac{\rho^2}{\bar{a}}}=\frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}$$

故所证结论成立.

例 3－4 若$f(z)$在$|z|<R$内解析,试证对任意的$r(0<r<R)$都有

$$f'(0)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

分析 高阶导数的柯西积分公式表明,$f^{(n)}(z)$在$|z-a|<r$内任一点z_0处的函数值可以用$f(z)$在边界$|z-a|=r$上的函数值$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a)$来表示.这里所需要的就是$n=1,z_0=a=0$,以及复积分的柯西－古萨定理的使用.

证明 令$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$,由柯西积分公式

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\cdot r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta))+\mathrm{i}v(r,\theta))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \tag{3-3}$$

另一方面,由柯西－古萨定理

$$0=\frac{1}{2\pi r^2\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi r^2\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cdot r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

两端取共轭复数得

$$0=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)-\mathrm{i}v(r,\theta))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \tag{3-4}$$

由式(3－3)＋式(3－4)得

$$f'(0)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

结论得证.

例 3－5 如果在$|z|<1$内$f(z)$解析,并且$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}$.证明:

$$f^{(n)}(0)\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}(n+1)!\quad(n=1,2,\cdots)$$

证明 由柯西积分公式$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$, $0<r<1$,于是利用积分不等式

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\cdot|\mathrm{d}z|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|\mathrm{d}z|}{(1-|z|)\cdot|z|^{n+1}}=\frac{n!}{(1-r)r^n}$$

令 $r=\frac{n}{n+1}$，这样便有 $f^{(n)}(0)\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}(n+1)!$.

例3-6　若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数且 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，试求 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$.

分析　根据题意，必有 v 是 u 的共轭调和函数，将 u,v 满足的已知关系式两端分别对 x,y 求一阶偏导，再结合 C-R 方程，即可求出 u 与 v.

解　因为

$$u_x-v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)=3x^2+6xy-3y^2$$
$$u_y-v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)=3x^2-6xy-3y^2$$

且 $u_x=v_y$，$-u_y=v_x$，所以上两式分别相加减可得

$$u_y=3x^2-3y^2 \tag{3-5}$$
$$u_x=6xy \tag{3-6}$$

由式(3-5)得　$u(x,y)=\int u_y\mathrm{d}y+\varphi(x)=3x^2y-y^3+\varphi(x)$　(3-7)

对式(3-7)求关于 x 的偏导，结合式(3-6)，得 $\varphi'(x)=0$，故有 $\varphi(x)=c$. 于是 $u(x,y)=3x^2y-y^3+c$，代入已知关系式中可得 $v(x,y)=-x^3+3xy^2+c$. 于是，u,v 所确定的解析函数为

$$f(z)=u+\mathrm{i}v=(3x^2y-y^3+c)+\mathrm{i}(-x^3+3xy^2+c)=-\mathrm{i}z^3+(1+\mathrm{i})c$$

其中 c 为任意实常数.

另一方面，我们再用下面方法确定 $f(z)$.

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=u_x-\mathrm{i}u_y=6xy-\mathrm{i}(3x^2-3y^2)=-3\mathrm{i}z^2$$

两边积分可知 $f(z)=-\mathrm{i}z^3+k$. 又由 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，说明 $\mathrm{Re}(k)-\mathrm{Im}(k)=0$，故 $k=(1+\mathrm{i})c$，c 为任意实常数.

书后习题解析

1. 沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+2\mathrm{i}}z^2\mathrm{d}z$.

(1) 自原点至 $3+\mathrm{i}$ 的直线段；(2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 铅直向上至 $3+\mathrm{i}$；(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $3+\mathrm{i}$.

解　(1) 连结原点和点 $3+\mathrm{i}$ 的直线段（如图 3-2 所示）的参数方程为

$$z(t)=(3+\mathrm{i})t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

所以　$$\int_0^{3+\mathrm{i}}z^2\mathrm{d}z=\int_0^1[(3+\mathrm{i})t]^2\cdot\mathrm{d}(3+\mathrm{i})t=\int_0^1(3+\mathrm{i})^3t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3$$

(2) 积分路线如图 3-3 所示.

$$\int_0^{3+\mathrm{i}}z^2\mathrm{d}z=\int_0^3x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(3+\mathrm{i}y)^2\mathrm{d}(3+\mathrm{i}y)$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3+\frac{(3+\mathrm{i}y)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3$$

(3) 积分路线如图 3-4 所示.

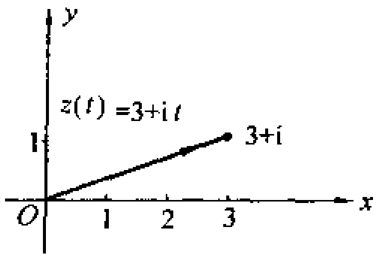


图 3－2

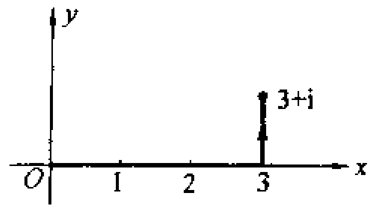


图 3－3

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 (iy)^2 d(iy) + \int_0^3 (x+i)^2 d(x+i)$$

$$= \frac{(iy)^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{(x+i)^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(3+i)^3$$

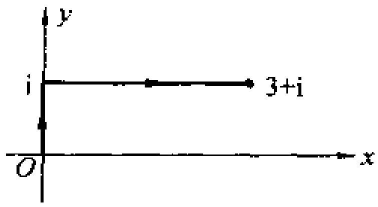


图 3－4

注 本题在计算积分时主要是利用公式

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))dz(t)$$

其中 $z = z(t)$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 是曲线 C 的参数方程，而 α，β 分别对应 C 的起点和终点.

2.分别沿 $y = x$ 与 $y = x^2$ 算出积分 $\int_0^{1+i}(x^2 + iy)dz$.

解 沿 $y = x$，可见积分路线 C 的起点对应 $x = 0$，终点对应 $x = 1$，而 $z = x + iy = x + ix$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，那么

$$\int_0^{1+i}(x^2 + iy)dz = \int_0^1 (x^2 + ix)d(x + ix) = (1+i)\left(\frac{x^3}{3} + \frac{i}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

沿 $y = x^2$，则积分路线 C 的起点对应 $x = 0$，终点对应 $x = 1$，曲线 C 的参数方程为 $z(x) = x + ix^2$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，那么

$$\int_0^{1+i}(x^2 + iy)dz = \int_0^1 (x^2 + ix^2)d(x + ix^2) = \int_0^1 (1+i)x^2(1 + 2ix)dx = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

3.设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析，C 为 B 内任意一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = 0,\quad \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立?如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明.

解 不一定成立.例如 $f(z) = z$，曲线 $C = |z| = 1$，此时 $\mathrm{Re}[f(z)] = x$，$\mathrm{Im}[f(z)] = y$，$C = e^{it}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，于是 $dz = ie^{it}dt$，及 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

那么

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi}\cos t \cdot ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t + i\sin t)dt$$

$$= i\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt - \int_0^{2\pi}\cos t\sin t dt = \pi i \neq 0$$

另一方面

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi}\sin t \cdot ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi}\sin t(\cos t + i\sin t)dt$$

$$= i\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t = -\pi \neq 0$$

4.利用在单位圆周上 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 的性质,及柯西积分公式说明 $\oint_C \bar{z}\mathrm{d}z = 2\pi i$,其中 C 为正向单位圆周 $|z| = 1$.

解　我们看到复变函数积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 中积分变量 z 始终在曲线 C 上变化,又在单位圆周 $|z| = 1$ 上有 $z\cdot\bar{z} = 1$,所以 $\oint_C \bar{z}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{z\cdot\bar{z}}{z}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z$.

这相当于在柯西积分公式 $\oint_C \frac{\varphi(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i\varphi(z_0)$ 中取 $z_0 = 0$,解析函数 $\varphi(z) = 1$,$C:|z| = 1$,故 $\oint_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i$,即 $\oint_C \bar{z}\mathrm{d}z = 2\pi i$.

5.计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z$ 的值,其中 C 为正向圆周:(1) $|z| = 2$;(2) $|z| = 4$.

解　(1) 正向圆周 $|z| = 2$ 的参数方程为:$z = 2e^{it}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$,则

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{\overline{2e^{it}}}{|2e^{it}|}\mathrm{d}(2e^{it}) = \int_0^{2\pi}e^{-it}\cdot 2ie^{it}\mathrm{d}t = 4\pi i$$

(2) 利用柯西积分公式及积分的性质,可得

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{|z|\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{|z|}{z}\mathrm{d}z = 4\cdot 2\pi i = 8\pi i$$

6.试用观察法得出下列积分的值,并说明观察时所依据的是什么?C 是正向单位圆周 $|z| = 1$.

(1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$;　(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+4}$;　(3) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$;

(4) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-\frac{1}{2}}$;　(5) $\oint_C ze^z\mathrm{d}z$;　(6) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)}$.

解　(1) 被积函数 $\frac{1}{z-2}$ 的奇点在圆周 $|z| = 1$ 的外部,故 $\frac{1}{z-2}$ 在 $|z| = 1$ 上及其内部处处解析,由柯西 - 古萨定理知 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2} = 0$.

(2) 被积函数 $\frac{1}{z^2+2z+4}$ 的两个奇点 $z_1 = -1+\sqrt{3}i, z_2 = -1-\sqrt{3}i$ 均在单位圆周 $|z| = 1$ 的外部,由柯西 - 古萨定理知积分为零,即 $\oint_C \frac{1}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z = 0$.

(3) 被积函数 $\frac{1}{\cos z}$ 的奇点是 $z_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,(k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$,而 z_k 均在曲线 $|z| = 1$ 的外部,故由柯西 - 古萨定理知积分值为零,即 $\oint_C \frac{1}{\cos z}\mathrm{d}z = 0$.

(4) 由柯西积分公式可知 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-\frac{1}{2}} = 2\pi i$.

(5) 被积函数 $z\cdot e^z$ 在复平面上处处解析,由柯西 - 古萨定理知积分值为零,即

$$\oint_C ze^z dz = 0$$

(6) 由柯西积分公式知

$$\oint_C \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)} = \oint_C \frac{\frac{1}{z+2}}{z-\frac{i}{2}}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{\frac{i}{2}+2} = \frac{4\pi i}{4+i}$$

7.沿指定曲线的正向计算下列各积分：

(1)$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, C: |z-2| = 1$；

(2)$\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}, C: |z-a| = a$；

(3)$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz, C: |z-2i| = \frac{3}{2}$；

(4)$\oint_C \frac{z}{z-3}dz, C: |z| = 2$；

(5)$\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}, C: |z| = r < 1$；

(6)$\oint_C z^3\cos z dz$, C:包围 $z=0$ 的闭曲线；

(7)$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z| = \frac{3}{2}$；

(8)$\oint_C \frac{\sin z}{z}dz, C: |z| = 1$；

(9)$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz, C: |z| = 2$；

(10)$\oint_C \frac{e^z}{z^5}dz, C: |z| = 1$.

解 (1)e^z 在曲线 $C: |z-2| = 1$ 上及内部解析，由柯西积分公式，得

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i\cdot e^z|_{z=2} = 2\pi e^2 i$$

(2) 被积函数$\frac{1}{z^2-a^2}$有两个奇点 $z_1 = a, z_2 = -a$，其中 $z_1 = a$ 含于曲线$|z-a| = a$，而 $z_2 = -a$ 在曲线$|z-a| = a$ 的外部.又$\frac{1}{z+a}$在曲线$C: |z-a| = a$ 上及其内部解析，由柯西积分公式有

$$\oint_C \frac{1}{z^2-a^2}dz = \oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{z+a}\bigg|_{z=a} = \frac{2\pi i}{2a} = \frac{\pi}{a}i$$

此时 a 为正实数.

(3) 我们看到被积函数$\frac{e^{iz}}{z^2+1}$有两个奇点 $z_1 = i, z_2 = -i$，又知 $z_1 = i$在曲线 $C: |z-2i| = \frac{3}{2}$ 的内部，$z_2 = -i$ 在曲线 C 的外部.由柯西积分公式，有

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}dz = 2\pi i\cdot\frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} = 2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}$$

(4) 由被积函数$\frac{z}{z-3}$ 在曲线 $C: |z| = 2$ 上及其内部处处解析，根据柯西－古萨定理知积分值为零，即$\oint_C \frac{z}{z-3}dz = 0$.

(5) 由于被积函数$\frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}$ 的奇点在曲线 $C: |z| = r < 1$ 的外部，由柯西－古萨

定理知积分值为零,即$\oint_C \frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}dz = 0$.

(6) 我们看到被积函数 $z^3\cos z$ 在复平面上处处解析,故由柯西－古萨定理知积分值为零,即$\oint_C z^3\cos z dz = 0$.

(7) 由于被积函数$\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$的奇点 $z_{1,2} = \pm i$ 在曲线 $C:|z| = \frac{3}{2}$ 内部,而 $z_{3,4} = \pm 2i$ 在曲线 C 的外部.

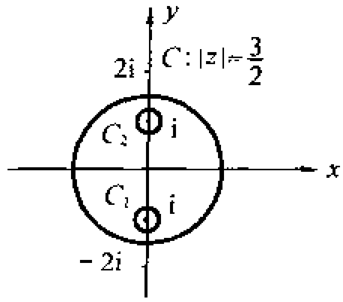


图3－5

如图3－5所示,作含于曲线 C 的内部且彼此不交的两个小圆曲线

$$C_1:|z+i| = r_1, \quad C_2:|z-i| = r_2$$

其中 r_1, r_2 充分小,并满足前述要求,且 C_1, C_2 取正向,由复合闭路定理知

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} + \oint_{C_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

再利用柯西积分公式可得

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z^2+4)(z-i)}}{z+i}dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(z^2+4)(z-i)}\bigg|_{z=-i} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{(z^2+4)(z+i)}}{z-i}dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(z^2+4)(z+i)}\bigg|_{z=i} = \frac{\pi}{3}$$

故
$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0$$

(8) 由柯西积分公式可得 $\oint_C \frac{\sin z}{z}dz = 2\pi i \cdot \sin z|_{z=0} = 0$

(9) 根据高阶导数公式可得 $\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot (\sin z)'\bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

(10) 根据高阶导数公式可得 $\oint_C \frac{e^z}{z^5}dz = \frac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}|_{z=0} = \frac{\pi}{12}i$

8.计算下列各题

(1)$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz$;　(2)$\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0} \mathrm{ch}3z dz$;　(3)$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$;　(4)$\int_0^1 z\sin z dz$;

(5)$\int_0^i (z-i)e^{-z}dz$;　(6)$\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$(沿1到i的直线段).

解　利用复积分的牛顿－莱布尼兹公式计算各题.

(1) $$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2}((e)^{6\pi i} - e^{-2\pi i}) = 0$$

(2) $$\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0} \mathrm{ch}3z\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\mathrm{sh}3z\Big|_{\frac{\pi}{6}i}^{0} = 0 - \frac{1}{3}\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}i = -\frac{1}{3}\cdot i\cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\frac{i}{3}$$

(3) $$\int_{-\pi i}^{\pi i}\sin^2 z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-\pi i}^{\pi i}(1-\cos 2z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\sin 2z\right)\Big|_{-\pi i}^{\pi i}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\pi i - \frac{1}{2}\sin 2\pi i + \frac{1}{2}\sin(-2\pi i)\right] = \pi i - \frac{1}{2}\sin 2\pi i$$
$$= \pi i - \frac{i}{2}\mathrm{sh}2\pi$$

(4) $$\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z = -\int_0^1 z\mathrm{d}\cos z = -(z\cdot\cos z)\big|_0^1 + \int_0^1\cos z\mathrm{d}z$$
$$= -\cos 1 + \sin z\big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

(5) $$\int_0^i (z-i)e^{-z}\mathrm{d}z = \int_0^i ze^{-z}\mathrm{d}z - i\int_0^i e^{-z}\mathrm{d}z = -\int_0^i z\mathrm{d}e^{-z} + i\int_0^i \mathrm{d}e^{-z}$$
$$= -\left[z\cdot e^{-z}\big|_0^i - \int_0^i e^{-z}\mathrm{d}z\right] + ie^{-z}\big|_0^i$$
$$= -ie^{-i} + (-e^{-z})\big|_0^i + i(e^{-i} - e^0)$$
$$= 1 - i - e^{-i} = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$$

(6) 如图 3 - 6 所示,有向线段为积分曲线 C.

$$\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}\mathrm{d}z = \int_1^i \frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}z + \int_1^i \frac{\sin z}{\cos^3 z}\mathrm{d}z = \int_1^i(\tan z)'\mathrm{d}z + \int_1^i \frac{-1}{\cos^3 z}\mathrm{d}\cos z$$
$$= \tan i - \tan 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^2 i} - \frac{1}{\cos^2 1}\right] = \tan i - \tan 1 + \frac{1}{2}(1 + \tan^2 i - 1 - \tan^2 1)$$
$$= i\mathrm{th}1 - \tan 1 + \frac{1}{2}[(i\mathrm{th}1)^2 - \tan^2 1] = i\cdot\mathrm{th}1 - \tan 1 - \frac{1}{2}\mathrm{th}^2 1 - \frac{1}{2}\tan^2 1$$

这是因为 $\tan i = i\mathrm{th}1$.

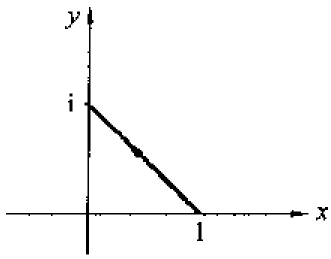


图 3 - 6

9.计算下列积分:

(1)$\oint_C\left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)\mathrm{d}z$,其中 $C:|z| = 4$ 为正向;

(2)$\oint_C \frac{2i}{z^2+1}\mathrm{d}z$,其中 $C:|z-1| = 6$ 为正向;

(3)$\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z$,其中 $C_1:|z| = 2$ 为正向,$C_2:|z| = 3$ 为负向.

(4)$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-i}$,其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{6}{5}i$ 为顶点的正向菱形.

(5)$\oint_C \frac{e^z}{(z-\alpha)^3}\mathrm{d}z$,其中 α 为 $|\alpha| \neq 1$ 的任意复数,$C:|z| = 1$ 为正向.

解　(1) 因为 -1, $-2i$ 均在曲线 $C:|z| = 4$ 的内部,利用柯西积分公式得

$$\oint_C\left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)\mathrm{d}z = 4\oint_C \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z + 3\oint_C \frac{1}{z+2i}\mathrm{d}z$$
$$= 4\cdot 2\pi i\cdot 1 + 3\cdot 2\pi i\cdot 1 = 14\pi i$$

(2) 因为$\frac{2i}{z^2+1}=\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}$,且 ± i 均在曲线 C 的内部,由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{2i}{z^2+1}dz=\oint_C \frac{1}{z-i}dz-\oint_C \frac{1}{z+i}dz=2\pi i\cdot 1-2\pi i\cdot 1=0$$

(3)$\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3}dz=\oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3}dz+\oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^3}dz=\oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3}dz-\oint_{C_2^-} \frac{\cos z}{z^3}dz$

$$=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)^{(2)}\Big|_{z=0}-\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)^{(2)}\Big|_{z=0}=0$$

其中 C_2^- 是曲线$|z|=3$且取正方向.

(4) 由于i在曲线 C 所围区域的内部,且 $\varphi(z)=1$ 在复平面处处解析,由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{dz}{z-i}=2\pi i\cdot 1=2\pi i$$

(5) 当$|\alpha|<1$时,即 α 在曲线 $C:|z|=1$ 的内部时,由高阶导数有

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-\alpha)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(e^z)^{(2)}\Big|_{z=\alpha}=\pi i e^{\alpha}$$

当$|\alpha|>1$时,即 α 在曲线 $C:|z|=1$ 的外部,这时被积函数$\frac{e^z}{(z-\alpha)^3}$在曲线 C 及其内部处处解析,由柯西 - 古萨定理,可知积分值为零,亦即

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-\alpha)^3}dz=0\quad(|\alpha|>1)$$

10.证明:当 C 为任何不通过原点的简单闭曲线时,$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=0$.

证明　由于 $z=0$ 是被积函数$\frac{1}{z^2}$的奇点,故分下述两种情况进行讨论.

(1) 当 $z=0$ 不在曲线 C 的内部,即在曲线 C 的外部时,$\frac{1}{z^2}$在曲线 C 及 C 的内部处处解析,由柯西 - 古萨定理知积分为零,即$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=0$.

(2) 当 $z=0$ 含于曲线 C 所围区域时,由高阶导数公式有

$$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{(2-i)!}(1)'\Big|_{z=0}=2\pi i\cdot 0=0$$

故

$$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=0$$

11.下列两积分的值是否相等?积分(2)的值能否利用闭路变形原理从(1)的值得到?为什么?

(1)$\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}dz$;　(2)$\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}dz$.

解　由 $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}dz=\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}\cdot z}{z^2}dz=4\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2}dz=4\cdot 0=0$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}dz=\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}\cdot z}{z^2}dz=16\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2}dz=16\cdot 0=0$$

这里用到习题10的结论及沿圆周$|z|=R$正向积分时,被积函数中的 $\bar{z}\cdot z$,$|z|$,$\bar{z}$ 分别可由

R^2，R 和 $\dfrac{R}{z}$ 代替的事实.

由上面的计算可见两积分值是相等的.但积分(2)的值不能利用闭路变形原理从(1)的值得到，这是因为被积函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在复平面上处处不解析的缘故.但将积分(1)和(2)分别变为 $4\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z$ 和 $16\oint_{|z|=4}\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z$ 以后，积分(2)的值可由积分(1)的值得到.这是因为函数 $\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|>0$ 内是解析的.

12.设区域 D 为右半平面，z 为 D 内圆周 $|z|=1$ 上的任意一点，用在 D 内的任一条曲线 C 连结原点和 z，证明：$\mathrm{Re}\left[\int_0^z\dfrac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right]=\dfrac{\pi}{4}$.[提示：可取从原点沿实轴到 1，再从 1 沿圆周 $|z|=1$ 到 z 的曲线作为 C].

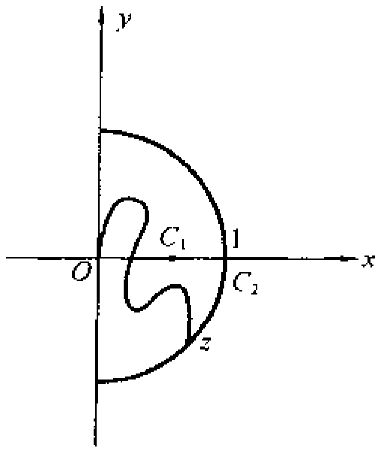


图 3－7

证明　由于函数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在给定区域 D 的右半平面内处处解析，故积分值与路径无关.不妨在右平面内所有连结原点和 z 的曲线中(如图 3－7)，取 $C=C_1+C_2$，其中 C_1 为从原点沿实轴到 1 的线段，其参数方程为 $z=x(0\leqslant x\leqslant 1)$；$C_2$ 为从 1 沿圆周 $|z|=1$ 到 z 的圆弧段，其参数方程为 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(t=0$ 为起点，$t=\theta$ 是终点)，这里 θ 是已知 z 点的辐角主值，于是

$$\int_0^z\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi=\int_{C_1}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi+\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^\theta\frac{1}{1+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

$$=\arctan x\Big|_0^1+\int_0^\theta\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\int_0^\theta\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\theta\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t$$

由于 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\int_0^\theta\dfrac{1}{\cos t}\mathrm{d}t$ 是正实数.这样 $\mathrm{Re}\left[\int_0^z\dfrac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right]=\dfrac{\pi}{4}$.

13.设 C_1 与 C_2 为相交于 M，N 两点的简单闭曲线，它们所围成的区域分别为 B_1 与 B_2，B_1 与 B_2 的公共部分为 B.如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析，在 C_1，C_2 上也解析，证明：$\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$.

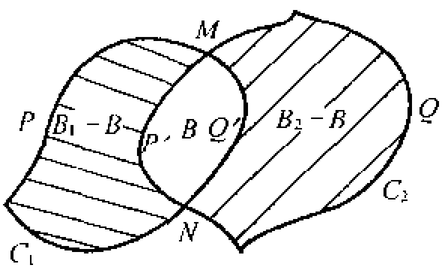


图 3－8

证明　不妨取 C_1，C_2 的正方向，如图 3－8，可得

$$C_1=\widehat{MPN}+\widehat{NQ'M},\ C_2=\widehat{MP'N}+\widehat{NQM}$$

又知 $f(z)$ 在 C_1，C_2 上解析，从而 $f(z)$ 在弧段 $\widehat{MPN}$，$\widehat{NQ'M}$，$\widehat{MP'N}$ 及 $\widehat{NQM}$ 上也解析.又 $f(z)$ 在 B_1-B 和 B_2-B 上解析.由柯西－古萨定理知："$f(z)$ 在 B_1-B 的边界 $\widehat{MPN}+\widehat{NP'M}$ 上的积分为零"和"$f(z)$ 在 B_2-B 的边界 $\widehat{MQ'N}+\widehat{NQM}$ 上的积分为零"，即

$$\oint_{\widehat{MPN}+\widehat{NP'M}}f(z)\mathrm{d}z=0,\quad\oint_{\widehat{MQ'N}+\widehat{NQM}}f(z)\mathrm{d}z=0$$

从而有 $$\int_{\widehat{MPN}}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\widehat{NP'M}}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\widehat{MQ'N}}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\widehat{NQM}}f(z)\mathrm{d}z$$

移项得 $$\int_{\widehat{MPN}}f(z)\mathrm{d}z-\int_{\widehat{MQ'N}}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\widehat{NQM}}f(z)\mathrm{d}z-\int_{\widehat{NP'M}}f(z)\mathrm{d}z$$

即 $$\int_{\widehat{MPN}}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\widehat{NQ'M}}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\widehat{NQM}}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\widehat{MP'N}}f(z)\mathrm{d}z$$

所以 $$\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$$

这里 $C_1=\widehat{MPN}+\widehat{NQ'M}$，$C_2=\widehat{NQM}+\widehat{MP'N}$ 以及 $\widehat{MQ'N}$ 是 $\widehat{NQ'M}$ 的反向弧段，$\widehat{NP'M}$ 是 $\widehat{MP'N}$ 的反向弧段.

14.设 C 为不经过 α 和 $-\alpha$ 的正向简单闭曲线，α 为不等于零的任何复数.试就 α 与 $-\alpha$ 跟 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z$ 的值.

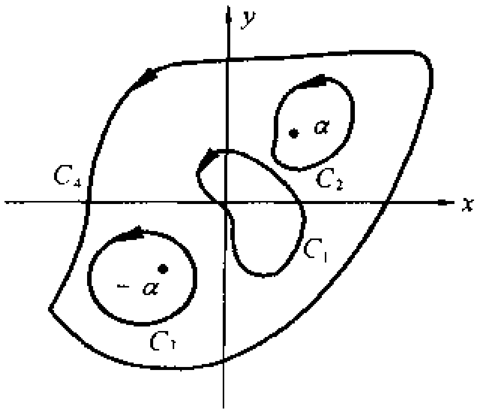


图 3 - 9

解 如图 3 - 9，可知曲线 C 与 $\alpha,-\alpha$ 有四种位置关系.

C_1：不包含 α，$-\alpha$ 的任一正向简单闭曲线.

C_2：包含 α，但不包含 $-\alpha$ 的任一正向闭曲线.

C_3：包含 $-\alpha$，但不包含 α 的任一正向闭曲线.

C_4：α，$-\alpha$ 均在其内部的任一正向简单闭曲线.

我们又知函数 $\frac{z}{z^2-\alpha^2}$ 的奇点是 α 和 $-\alpha$，且 $\frac{z}{z^2-\alpha^2}=\frac{z}{2\alpha}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z+\alpha}\right)$.

于是由柯西 - 古萨定理知 $\oint_{C_1}\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=0$，由柯西积分公式知

$$\oint_{C_2}\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\oint_{C_2}\frac{\frac{z}{z+\alpha}}{z-\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z}{z+\alpha}\right)\Big|_{z=\alpha}=\pi\mathrm{i}$$

$$\oint_{C_3}\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\oint_{C_3}\frac{\frac{z}{z-\alpha}}{z+\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\frac{z}{z-\alpha}\right)\Big|_{z=-\alpha}=\pi\mathrm{i}$$

$$\oint_{C_4}\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\alpha}\left[\oint_{C_4}\frac{z}{z-\alpha}\mathrm{d}z-\oint_{C_4}\frac{z}{z+\alpha}\mathrm{d}z\right]=\frac{1}{2\alpha}[2\pi\mathrm{i}\cdot\alpha-2\pi\mathrm{i}(-\alpha)]=2\pi\mathrm{i}$$

15.设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right]=\begin{cases}z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时}\\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时}\end{cases}$$

证明 当 z_0 在 C_1 内，C_2 外时，由柯西积分公式和柯西 - 古萨定理得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot(z^2)\Big|_{z=z_0}+0\right]=z_0^2$$

当 z_0 在 C_1 外，C_2 内时，由柯西积分公式和柯西 - 古萨定理得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[0+2\pi\mathrm{i}\cdot(\sin z)\Big|_{z=z_0}\right]=\sin z_0$$

16.设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析,且沿任意圆周 $C:|z|=r,0<r<1$ 的积分等于零,问 $f(z)$ 是否必需在 $z=0$ 处解析?试举例说明之.

解 不一定.例如 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 沿任意圆周 $C:|z|=r,0<r<1$ 的积分等于零(参见第10题),但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析.

17.设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析,C 为 D 内的任意一条简单闭曲线,它的内部全含于 D,如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立,试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

证明 对 C 内任一点 z_0,由柯西积分公式得

$$[f(z)-g(z)]|_{z=z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)-g(z)}{z-z_0}dz$$

这是因为 $f(z)-g(z)$ 在区域 D 内解析,且在 C 上有 $f(z)-g(z)=0$,所以

$$f(z_0)-g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)-g(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{0}{z-z_0}dz=0$$

即

$$f(z_0)=g(z_0)$$

再由 z_0 是 C 内任意一点知在 C 内所有点处恒有 $f(z)=g(z)$ 成立.

18.设区域 D 是圆环域,$f(z)$ 在 D 内解析,以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1 与 K_2,K_2 包含 K_1,z_0 为 K_1,K_2 之间任一点,试证 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$ 成立.但 C 要换为 $K_1^-+K_2$(见图3-10).

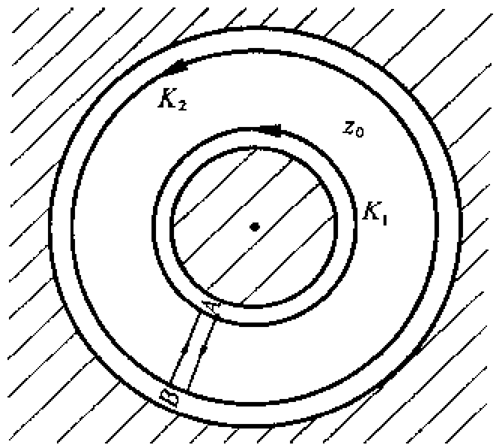


图3-10

证明 如图3-10,作辅助线段 AB.这样在路线 $A\to K_1^-\to A\to B\to K_2\to B\to A$ 或 $K_1^-+\overline{AB}+K_2+\overline{BA}\xlongequal{\text{记作}}L$ 所围成的单连通区域内及 L 上 $f(z)$ 均解析,且 z_0 在围线 L 的内部,由柯西积分公式得 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$,即

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L=K_1^-+\overline{AB}+K_2+\overline{BA}}\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)}\right]dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{K_1^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{\overline{AB}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\oint_{K_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{\overline{BA}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right]\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^-+K_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\end{aligned}$$

这里 $\displaystyle\int_{\overline{BA}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{\overline{AB}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0$ 是因为函数 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 沿同一路径 AB 不同方向 $\overline{AB},\overline{BA}$ 积分,积分值互为相反数的缘故.因而结论 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^-+K_2}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$ 成立.

19.设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析,且不为零.C 为 B 内任意一条简单闭曲线,问积分 $\displaystyle\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 是否等于零?为什么?

解 积分$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 0$.因为$f(z)$在$B$内解析,且$f(z)\neq 0$,所以$f'(z)$与$\frac{1}{f(z)}$在$B$内解析,进而$\frac{f'(z)}{f(z)}$在$B$内解析.由柯西－古萨定理知其积分值等于零.

20.试说明柯西－古萨基本定理中的C为什么可以不是简单闭曲线?

解 如图3－11,因为闭曲线可以由若干个简单闭曲线依次相互连接组成,如$C = C_1 + C_2 + C_3$,因而沿闭曲线C的积分就等于沿若干个简单闭曲线C_1, C_2, C_3积分之和,即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_3} f(z)\mathrm{d}z$$

所以由函数$f(z)$沿任一简单闭曲线积分等于零可以推出$f(z)$沿闭曲线的积分也等于零,故柯西－古萨定理中的路线C可以不是简单闭曲线.

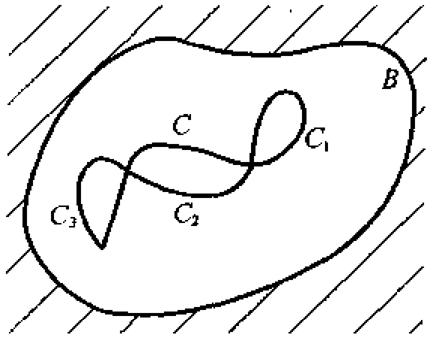


图3－11

21.设$f(z)$在区域D内解析,C为D内的任意一条正向简单闭曲线,它的内部全含于D,证明:对在D内,但不在C上的任意一点z_0,等式

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z$$

成立.

证明 注意到$f(z)$及$f'(z)$在C上及C内都解析,由柯西积分公式及柯西－古萨定理得

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0), & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 内部} \\ 0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 外部} \end{cases}$$

由高阶导数公式和柯西－古萨定理得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0), & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 的内部} \\ 0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 的外部} \end{cases}$$

故有等式

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z$$

22.如果$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$都具有二阶连续偏导数,且适合拉普拉斯方程,而$s = \varphi_y - \psi_x$,$t = \varphi_x + \psi_y$那么$s + it$是$x + iy$的解析函数.

分析 欲证$s + it$是$x + iy$的解析函数,只要证明s, t关于x, y满足C－R方程即可.

证明 因$s = \varphi_y - \psi_x$, $t = \varphi_x + \psi_y$,所以$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi_{yx} - \psi_{xx}$, $\frac{\partial s}{\partial y} = \varphi_{yy} - \psi_{xy}$, $\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi_{xx} + \psi_{yx}$, $\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi_{xy} + \psi_{yy}$.又$\varphi(x,y), \psi(x,y)$具有连续二阶偏导函数,所以混合偏导相等

$$\varphi_{yx} = \varphi_{xy}, \quad \psi_{xy} = \psi_{yx}$$

且满足拉普拉斯方程$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$和$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$.故

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi_{yx} - \psi_{xx} = \varphi_{xy} + \psi_{yy} = \frac{\partial t}{\partial y}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \varphi_{yy} - \psi_{xy} = -\varphi_{xx} - \psi_{yx} = -\frac{\partial t}{\partial x}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial x}=\dfrac{\partial t}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial y}=-\dfrac{\partial t}{\partial x}\end{cases}$$

又 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 具有二阶连续偏导.所以$\dfrac{\partial s}{\partial x},\dfrac{\partial s}{\partial y},\dfrac{\partial t}{\partial x},\dfrac{\partial t}{\partial y}$ 均存在且连续,则 s,t 是关于x,y 可微的且满足 C－R 方程,因而 $s+\mathrm{i}t$ 是关于 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数.

23.设 u 为区域D 内的调和函数及$f=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.问 f 是不是D 内的解析函数?为什么?

解 f是D 内的解析函数.这是因为由 u 为D 内的调和函数知u 具有二阶连续偏导,且满足拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$,这就意味着

$$\mathrm{Re}[f(z)]=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \mathrm{Im}[f(z)]=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

存在一阶连续偏导,即 $\mathrm{Re}[f(z)]$ 和 $\mathrm{Im}[f(z)]$ 在区域 D 内可微,而且

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}[f(z)])=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=u_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}[f(z)])=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=u_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Im}[f(z)])=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-u_{yx},\quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}[f(z)])=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-u_{yy}$$

故有 C－R 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}[f(z)])=\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}[f(z)])\\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}[f(z)])=-\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Im}[f(z)])\end{cases}$$

成立.因而$f(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 在区域D 内解析.

24.函数 $v=x+y$ 是$u=x+y$ 的共轭调和函数吗?为什么?

解 不是.因为若 v 是u 的共轭调和函数,则$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 必是解析函数,也就是说,u,v 是关于x,y 的可微函数,且满足 C－R 方程,然而我们知道

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=1,\frac{\partial v}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=1$$

即此处的 u,v 不满足 C－R 方程:$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 且$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,因此 $v=x+y$ 不是$u=x+y$ 的共轭调和函数.

25.设 u 和v 都是调和函数,如果 v 是u 的共轭调和函数,那么 u 也是v 的共轭调和函数.这句话对吗?为什么?

解 不对.因为 v 是u 的共轭调和函数相当于u,v 调和且满足 C－R 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\text{ 且}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\tag{3-8}$$

若 u 也是v 的共轭调和函数,那么必有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\text{ 且}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}\tag{3-9}$$

若式(3－8),式(3－9) 同时成立,则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

这说明 u,v 为常数.显然这将意味着:仅当 u,v 都为常数时,且互为共轭调和函数,除此之外这句话是错误的.但是,由 v 是 u 的共轭调和函数,我们可得到式(3－8),并进一步有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(-u)\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial}{\partial x}(-u)\end{cases}$$

再加上 u,v 均为调和函数.因而可知 $-u$ 是 v 的共轭调和函数,即当 $u+\mathrm{i}v$ 是解析函数时,必有 $v-\mathrm{i}u$ 也是解析函数.

26.证明:一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

证明 设 u,v 是一对共轭调和函数,不妨设 v 是 u 的共轭调和函数,则有

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0,\quad u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

另一方面,有

$$(uv)_x=u_xv+u\cdot v_x,\quad (uv)_y=u_yv+u\cdot v_y$$

$$(uv)_{xx}=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx},\quad (uv)_{yy}=u_{yy}\cdot v+2u_yv_y+uv_{yy}$$

于是 $(uv)_{xx}+(uv)_{yy}=v(u_{xx}+u_{yy})+2(u_xv_x+u_yv_y)+u(v_{xx}+v_{yy})=0$,因此 uv 也是调和函数.

27.如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数,试证:(1) $\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}$ 也是解析函数;(2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数;(3) $\dfrac{\partial^2(|f(z)|^2)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(|f(z)|^2)}{\partial y^2}=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$.

证明 (1)、(2) 的证明可参看本章的第25题,也可用如下方法证明.

(1) 因 $\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}=\bar{\mathrm{i}}\cdot\overline{\overline{f(z)}}=-\mathrm{i}\cdot f(z)$, $f(z)$ 是解析函数,所以 $-\mathrm{i}f(z)$,即 $\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

(2) 由(1)可知 $\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}=-\mathrm{i}f(z)=v-\mathrm{i}u$ 是解析函数,故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

(3) 由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数,可得

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0;\quad u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

另一方面

$$|f(z)|^2=u^2+v^2, f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x \text{ 及 } |f'(z)|^2=u_x^2+v_x^2$$

于是

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(|f(z)|^2)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)=2[u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx}]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(|f(z)|^2)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)=2[u_y^2+uu_{yy}+v_y^2+vv_{yy}]$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(|f(z)|^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(|f(z)|^2)&=2[u_x^2+u_y^2+u(u_{xx}+u_{yy})+v_x^2+v_y^2+v(v_{xx}+v_{yy})]\\&=2[u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2]=4[u_x^2+v_x^2]=4|f'(z)|^2\end{aligned}$$

28.证明 $u=x^2-y^2$ 和 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数,但 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数.

证明 因 $u_x=2x, u_y=-2y, u_{xx}=2, u_{yy}=-2$,故 $u_{xx}+u_{yy}=0$.所以 u 是调和函数.又因为

$$v_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, v_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, v_{xx}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^2}, v_{yy}=\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

从而 $v_{xx} + v_{yy} = 0$,即 v 也是调和函数.由 C - R 方程有

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_y \end{cases}, \qquad 即\begin{cases} 2x = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ 2y = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

可以看到使 C - R 方程成立的 x, y 应满足 $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 或 $y = \pm\sqrt{5}x (x \neq 0)$,它们不构成区域,因而 $u + \mathrm{i}v$ 不是解析函数.

29.求具有下列形式的所有调和函数 u:

(1)$u = f(ax + by)$,a 与 b 为常数;

(2)$u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$[提示:①令 $t = ax + by$,因 $u_{xx} + u_{yy} = 0$,从而有 $f''(t) = 0$;②令 $t = \dfrac{y}{x}$].

解 (1)令 $t = ax + by$,则

$$u_x = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a \cdot f'(ax + by) = a \cdot f'(t)$$

$$u_y = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = b \cdot f'(ax + by) = b \cdot f'(t)$$

$$u_{xx} = a \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f'(t)) = a \cdot f''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a^2 \cdot f''(t)$$

$$u_{yy} = b \cdot \frac{\partial}{\partial y}(f'(t)) = b \cdot f''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = b^2 \cdot f''(t)$$

由 u 是调和函数,有 $u_{xx} + u_{yy} = 0$,即 $(a^2 + b^2) f''(t) = 0$.由 a, b 不同时为零可得 $f''(t) = 0$.于是 $f'(t) = c_1$,进而 $f(t) = c_1 t + c_2$.故形如 $u = f(ax + by)$ 的调和函数为 $u = c_1(ax + by) + c_2$,其中 c_1, c_2 为任意实常数.

(2)令 $t = \dfrac{y}{x}$,于是 $u_x = f'(t) \cdot \dfrac{\partial t}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} f'(t)$

$$u_{xx} = \frac{2y}{x^3} f'(t) - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f'(t)) = \frac{2y}{x^3} f'(t) - \frac{y}{x^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot f''(t)$$

$$= f''(t) \cdot \frac{y^2}{x^4} + f'(t) \cdot \frac{2y}{x^3}$$

$$u_y = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x} f'(t), u_{yy} = \frac{1}{x} \cdot f''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x^2} f''(t)$$

由 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 得 $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^4}\right) f''(t) + f'(t) \cdot \dfrac{2y}{x^3} = 0$,整理得

$$\frac{x^2 + y^2}{x^4} f''(t) + \frac{2y}{x^3} f'(t) = 0$$

即

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) f''(t) + \frac{2y}{x} f'(t) = 0$$

或记为

$$(1 + t^2) f''(t) + 2t f'(t) = 0$$

于是 $\dfrac{f''(t)}{f'(t)} = \dfrac{-2t}{1 + t^2}$,即 $\dfrac{\mathrm{d} f'(t)}{f'(t)} = \dfrac{-2t}{1 + t^2} \mathrm{d}t \Rightarrow f'(t) = \dfrac{c_1}{1 + t^2} (c_1 > 0)$,进而 $f(t) = c_1 \cdot \arctan t + c_2$,故形如 $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的调和函数为 $u = c_1 \arctan\dfrac{y}{x} + c_2$,其中 $c_1 (c_1 > 0)$,c_2 为任意实数.

30. 由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z)=u+iv$.

(1) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$; (2) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$;

(3) $u=2(x-1)y, f(2)=-i$; (4) $v=\arctan\dfrac{y}{x}, x>0$.

解 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)=3(x^2+2xy-y^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2y+4x)=3(x^2-2xy-y^2)$$

由柯西－黎曼方程 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3(x^2+2xy-y^2)$，得

$$v(x,y)=\int 3(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}y+\varphi(x)=3(x^2y+xy^2-\frac{y^3}{3})+\varphi(x)$$

所以
$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+3y^2+\varphi'(x)$$

又由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 整理，得 $\varphi'(x)=-3x^2$，故 $\varphi(x)=-x^3+c$，进一步有

$$v(x,y)=3(x^2y+xy^2-\frac{y^3}{3})-x^3+c$$

$$f(z)=u+iv=(1-i)z^3+ic \quad (c\text{ 为任意实常数})$$

(2) 由公式

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(1,1)}^{(x,y)}u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y+c=\int_{(1,1)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_{(1,1)}^{(x,1)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+\int_{(x,1)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_1^x v_y(x,1)\mathrm{d}x+\int_1^y -v_x(x,y)\mathrm{d}y+c\\&=\int_1^x\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y+c\\&=\int_1^x\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-2\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}+x\int_1^y\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}+c\\&=(\arctan x-\arctan 1)-2\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)\right]\Big|_1^x+\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]\Big|_1^y+c\\&=\frac{-x}{x^2+y^2}+\frac{1}{2}+c\end{aligned}$$

因此

$$f(z)=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{2}+c+i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}+c-\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}+c-\frac{1}{z}$$

又 $f(2)=0$ 故解得 $c=0$. 所以所求 $f(z)$ 为 $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$.

(3) 由公式

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+c=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_{(0,0)}^{(x,0)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+\int_{(x,0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c\end{aligned}$$

$$= \int_0^x -u_y(x,0)\mathrm{d}x + \int_0^y u_x(x,y)\mathrm{d}y + c$$

$$= \int_0^x -2(x-1)\mathrm{d}x + \int_0^y 2y\mathrm{d}y + c$$

$$= -\left[(x-1)^2\right]\Big|_{x=0}^{x=x} + y^2\Big|_0^y + c = -(x-1)^2 + 1 + y^2 + c$$

所以 $f(z) = u + \mathrm{i}v = 2(x-1)y + \mathrm{i}[-(x-1)^2 + 1 + y^2 + c] = -\mathrm{i}(z-1)^2 + \mathrm{i}(1+c)$

又 $f(2) = -\mathrm{i} \Rightarrow c = -1$，故此时 $f(z) = -\mathrm{i}(z-1)^2$.

(4) 由柯西 - 黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

于是 $$u(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + g(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y)$$

进而 $u_y = \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$，显然 $g'(y) = 0$. 从而知 $g(y) = c$（c 为实常数），所以 $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c$，故

$$f(z) = u + \mathrm{i}v = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x} = \ln z + c$$

31. 设 $v = \mathrm{e}^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$.

解 由 $\frac{\partial v}{\partial x} = p\mathrm{e}^{px}\sin y$，$\frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^{px}\cos y$ 得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p^2\mathrm{e}^{px}\sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^{px}\sin y$$

由拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ 可得 $(p^2-1)\mathrm{e}^{px}\sin y = 0$. 所以当 $p = \pm 1$ 时上式总成立. 即此时 $v(x,y)$ 为调和函数.

由柯西 - 黎曼方程得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^{px}\cos y & (3-10) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -p\mathrm{e}^{px}\sin y & (3-11) \end{cases}$$

于是由式(3 - 10) 得

$$u(x,y) = \int u_x\mathrm{d}x + g(y) = \int \mathrm{e}^{px}\cos y\mathrm{d}x + g(y) = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{px}\cos y + g(y)$$

代入式(3 - 11) 可得 $$-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{px}\cdot\sin y + g'(y) = -p\mathrm{e}^{px}\sin y$$

根据 $p = \pm 1$ 知 $g'(y) = 0$. 可得 $g(y) = c$（任意实常数），所以

$$u(x,y) = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{px}\cos y + c$$

而 $$f(z) = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{px}\cos y + c + \mathrm{i}\mathrm{e}^{px}\sin y = \begin{cases} \mathrm{e}^z + c, & p = 1 \\ -\mathrm{e}^{-z} + c, & p = -1 \end{cases}$$

32*. 如果 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为中心的任何一个正向圆周：$|z$

$-z_0|=r$,它的内部全含于 D,试证:

(1)$u(x,y)$ 在(x_0,y_0)的值等于 $u(x,y)$ 在圆周 C 上的平均值,那么

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

(2)$u(x,y)$ 在(x_0,y_0)的值等于 $u(x,y)$ 在圆域$|z-z_0|\leqslant r_0$ 上的平均值,即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

证明　因为 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数,故可在 D 内构造解析函数$f(z)$,令$f(z)=u+\mathrm{i}v$.

(1) 由平均值公式可知

$$\begin{aligned}f(z_0)&=u(x_0,y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)+\mathrm{i}v(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)]\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

所以
$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

(2) 利用结论(1) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\cdot r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}r\left[\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}2\pi r\cdot u(x_0,y_0)\mathrm{d}r=\frac{2\pi u(x_0,y_0)}{2\pi r_0^2}\cdot r^2\Big|_0^{r_0}=u(x_0,y_0)\end{aligned}$$

33.如果$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域D 内处处解析,C 为D 内的正向圆周:$|z|=R$,它的内部全含于 D.设 z 为 C 内一点,并令 $\tilde{z}=\frac{R^2}{\bar{z}}$,试证:

$$\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-\tilde{z}}\mathrm{d}\xi=\oint_C\frac{\bar{z}f(\xi)}{\xi\bar{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0$$

证明　由 $\tilde{z}=\frac{R^2}{\bar{z}}$ 可知$|\tilde{z}|=\frac{R^2}{|\bar{z}|}$.又 z 在C 内,故$|\bar{z}|=|z|<R$.所以$|\tilde{z}|>R$,于是$\frac{f(\xi)}{\xi-\tilde{z}}$ 在$|\xi|\leqslant R$ 上解析.由柯西－古萨定理得

$$\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-\tilde{z}}\mathrm{d}\xi=\oint_C\frac{\bar{z}f(\xi)}{\xi\bar{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0$$

34.根据柯西积分公式与习题33 的结果,证明:

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{1}{\xi-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\xi\bar{z}}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\bar{z})}{(\xi-z)(R^2-\xi\bar{z})}f(\xi)\mathrm{d}\xi\qquad(\text{其中 } C \text{ 为}|z|=R)\end{aligned}$$

证明　设 z 为C:$|z|=R$ 内一点,由柯西积分公式及习题33 的结果知

$$-\oint_C \frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}\mathrm{d}\xi = 0$$

有 $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi + 0\right] = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi + \oint \frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}\mathrm{d}\xi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\frac{1}{\xi - z} + \frac{\bar{z}}{R^2-\xi\bar{z}}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(R^2 - z\cdot\bar{z})}{(\xi - z)(R^2-\xi\bar{z})}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

35.如果令 $\xi = Re^{i\theta}, z = re^{i\varphi}$,验证

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - z)(R^2-\xi\bar{z})} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\xi}}{(\xi - z)(\bar{\xi}-\bar{z})} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

并由习题 34 的结果,证明:$f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$.取其实部,得

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$$

这个积分称为泊松(Poisson)积分.通过这个公式,一个调和函数在一个圆内的值可用它在圆周上的值来表示.

证明 由 $\xi = Re^{i\theta}$ 得 $\mathrm{d}\xi = Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = i\xi\mathrm{d}\theta$.又 $\bar{\xi} = R\cdot e^{-i\theta} = \dfrac{R^2}{\xi}$,于是

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - z)(R^2-\xi\bar{z})} = \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - z)(\xi\bar{\xi}-\xi\bar{z})} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\xi}}{(\xi - z)(\bar{\xi}-\bar{z})}$$

$$= \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{|\xi - z|^2} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{|Re^{i\theta} - re^{i\varphi}|^2} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2 - 2R\cdot r\cdot\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

由 34 题可知

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{R^2 - z\cdot\bar{z}}{(\xi - z)(R^2-\xi\bar{z})}f(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})\cdot\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$$

36.设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析,且不恒为常数,n 为正整数.

(1) 试用柯西积分公式证明:$[f(z)]^n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$;

(2) 设 M 为 $|f(\xi)|$ 在 C 上的最大值,L 为 C 的长,d 为 z 到 C 的最短距离,试用积分估值公式 $\left|\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \leqslant ML$ 与(1)中等式,证明不等式

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(3) 令 $n\to\infty$,对(2)中不等式取极限,证明:$|f(z)| \leqslant M$.这个结果表明:在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得(最大模原理).

根据这一结果可知:在无源无旋的平面稳定非等速的流速场中的流速最大值,即它的复势 $f(z)$ 的模 $|f'(z)|$,不能在场的内部取得,只能在场的边界上取得.

证明 (1) 由 $f(z)$ 在 C 上及 C 内解析,可知 $f^n(z)$ 在 C 上及 C 内解析,对此函数应用柯西积分公式便得 $$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

(2) 由(1)的结果及复积分估算公式得

$$|[f(z)]^n| = |f(z)|^n = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z}\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - z|}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \oint_C \frac{M^n}{2\pi d}\mathrm{d}s = \frac{M^n}{2\pi d}\cdot L$$

所以
$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

在上述不等式的证明中用到了条件：$|f(\xi)| \leqslant M$，$|\xi - z| \geqslant d$，$\oint_C \mathrm{d}s = L$.

(3) 在结果(2)中，令 $n \to +\infty$，并注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1(a > 0)$，易知

$$|f(z)| \leqslant \lim_{n\to+\infty} M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

同步训练题

1.单项选择题

(1) 设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析，C 为 B 内任一闭路，则必有(　　).

A.$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z = 0$　　　B.$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z = 0$

C.$\oint_C |f(z)|\mathrm{d}z = 0$　　　D.$\mathrm{Re}[\oint_C f(z)\mathrm{d}z] = 0$

(2) 函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析是 $f(z)$ 沿 B 内任一闭路 C 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$ 的(　　).

A.充分条件　　B.必要条件　　C.充要条件　　D.既非充分也非必要条件

(3) 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续，且对 D 内任一条其内部含于 D 的闭路 C 均有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，则 $f(z)$ 在(　　).

A. D 内解析　　B.$\bar{D}$ 上连续　　C.$\bar{D}$ 上解析　　D. D 内未必解析

(4) 函数 $f(z)$ 在闭路 C 上及其内部解析，z_0 在 C 的内部，则有(　　).

A.$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z = f'(z_0)\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z$

B.$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z$

C.$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z = \frac{f(z_0)}{2!}\oint_C \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z$

D.$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0}\mathrm{d}z$

(5) 设 $f(z)$ 在 $0 < |z| < 1$ 内解析，且沿任一圆周 $C: |z| = r(0 < r < 1)$ 的积分均为零，则 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处(　　).

A.可导　　B.解析　　C.未必解析　　D.连续

(6) 设 C 为从原点沿 $y^2=x$ 至 $1+\mathrm{i}$ 的弧段,则$\int_C(x+\mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z=($　　$)$.

A.$\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\mathrm{i}$　　B.$-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$　　C.$-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\mathrm{i}$　　D.$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$

(7) 设 $C_1:|z|=1$ 为负向,$C_2:|z|=3$ 为正向,则 $\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=($　　$)$.

A.$-2\pi\mathrm{i}$　　B.0　　C.$2\pi\mathrm{i}$　　D.$4\pi\mathrm{i}$

(8) 设 C 为正向圆周$|z|=\frac{1}{2}$,则$\oint_C\frac{z^3\cos\frac{1}{z-2}}{(1-z)^2}\mathrm{d}z=($　　$)$.

A.$2\pi\mathrm{i}(3\cos1-\sin1)$　　B.0　　C.$6\pi\mathrm{i}\cos1$　　D.$-2\pi\mathrm{i}\sin1$

(9) 设 $f(z)=\oint_{|\xi|=4}\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$,其中$|z|\neq4$,则$f'(\pi\mathrm{i})=($　　$)$.

A.$-2\pi\mathrm{i}$　　B.-1　　C.$2\pi\mathrm{i}$　　D.1

(10) 设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析且不为零,C 为 B 内任意一条简单闭曲线,则积分$\oint_C\frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=($　　$)$.

A.$2\pi\mathrm{i}$　　B.$-2\pi\mathrm{i}$　　C.0　　D.不能确定

(11) 设 C 为正向圆周,$x^2+y^2-2x=0$,则$\oint_C\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z=($　　$)$.

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{i}$　　B.$\sqrt{2}\pi\mathrm{i}$　　C.0　　D.$-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{i}$

(12) 设$f(z)$在区域 D 内解析,C 为 D 内任一条正向简单闭曲线,它的内部全属于 D,如果 $f(z)$ 在 C 上的值为 2,那么对 C 内任一点 z_0,$f(z_0)=($　　$)$.

A.0　　B.1　　C.2　　D.不能确定

(13) 设 c 为任意实常数,那么由调和函数 $u=x^2-y^2$ 确定的解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是(　　).

A.$\mathrm{i}z^2+c$　　B.$\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}c$　　C.z^2+c　　D.$z^2+\mathrm{i}c$

(14) 下列命题中正确的是(　　).

A.设 v_1,v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数,则必有 $v_1=v_2$

B.解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

C.若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析,则$\frac{\partial u}{\partial x}$ 为 D 内的调和函数

D.以调和函数为实部和虚部的函数是解析函数

(15) 设 $v(x,y)$ 在区域 D 内为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数,则下列函数中为 D 内解析函数的是(　　).

A.$v(x,y)+\mathrm{i}u(x,y)$　　B.$v(x,y)-\mathrm{i}u(x,y)$

C.$u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)$　　D.$\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$

2.填空题

(1) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,则 $\oint_{|z|=r<1}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=$ ________;

$\oint_{|z|=r<1}\frac{f(z)}{z-2r}dz=$ ______.

(2) 闭曲线$|z|=3$取正方向,积分$\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz=$ ______.

(3) 闭曲线$|z|=1$取正方向,积分$\oint_{|z|=1}\frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{(z^2+2)(z-3)}dz=$ ______.

(4) 设C为正向圆周$|z-4|=1$,则$\oint_C\frac{z^2-3z+2}{(z-4)^2}dz=$ ______.

(5) 设$f(z)=\oint_{|\xi|=2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)}{\xi-z}d\xi$,其中$|z|\neq2$,则$f'(3)=$ ______.

(6) 设C为正向圆周$|z|=3$,则$\oint_C\frac{z+\bar z}{|z|}dz=$ ______.

(7) 设C为负向圆周,$|z|=4$,则$\oint_C\frac{e^z}{(z-\pi i)^5}dz=$ ______.

(8) 调和函数$\varphi(x,y)=xy$的共轭调和函数为______.

(9) 若函数$u(x,y)=x^3+axy^2$为某一解析函数的虚部,则常数$a=$ ______.

3.计算下列积分:

(1)$\oint_C\frac{\cos z}{(z-1)^3}dz$,其中$C:|z|=2$,取正方向;

(2) 计算积分$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^4}$,其中$a\neq0,|a|\neq\rho,\rho>0$;

(3)$\oint_C\frac{\cos\pi z}{z^3(z-1)^2}dz$,其中曲线$C$为$|z|=4$(正向).

4.设$f(z)$在单连通区域B内解析,且满足$|1-f(z)|<1(z\in B)$.试证:

(1) 在B内处处有$f(z)\neq0$;

(2) 对于B内任意一条闭曲线C,都有$\oint_C\frac{f''(z)}{f(z)}dz=0$.

5.求积分$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$,从而证明$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$,其中曲线$|z|=1$取正方向.

6.设$f(z)$在$|z|<R(R>1)$内解析,且$f(0)=1,f'(0)=2$,试计算积分

$\oint_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz$,并由此得出$\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$之值.

7.若$u=u(x^2+y^2)$,试求解析函数$f(z)=u+iv$.

8.由下式定义的$P_n(z)$称为勒让德(Legendre)多项式:

$$P_n(z)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$$

试证明$P_n(z)$能表示为　$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(\xi^2-1)^n}{2^n(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

其中C是绕z点的任一正向简单闭曲线.特别地,若取C为圆周$|\xi-z|=\sqrt{|z^2-1|}$,便可推得 Laplace 公式$P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(z+\sqrt{z^2-1}\cos\theta)^nd\theta$.

9.若$f(z)$在$|z|\leqslant 1$上解析,则有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}d\xi=\begin{cases}\overline{f(0)}, & |z|<1\\ \overline{f(0)}-\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, & |z|>1\end{cases}$$

10.设函数$f(z)$在$|z|\leqslant 1$上解析,且$f(0)=1$,计算积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{dz}{z}$;再利用极坐标导出下式:

(1) $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=2+f'(0)$;(2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=2-f'(0)$.

11.设C为极坐标方程$r=2-\sin^2\frac{\theta}{4}$定义的闭曲线,证明:$\oint_C\frac{1}{z}dz=4\pi i$.并说明为什么上述结论与$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i$不一致.其中$C$取曲线的正方向.

12.利用复合闭路定理,证明:$\int_0^{\infty}\cos x^2dx=\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

13.计算积分$\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}$,$n$为正整数,并用其证明:

(1) $\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\theta d\theta=2\pi\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$;(2) $\int_0^{2\pi}\cos^{2m-1}d\theta=0$($m$为自然数).

同步训练题答案

1.单项选择题

解 (1)D (2)A (3)A (4)B (5)C (6)D (7)B (8)B (9)A (10)C (11)A (12)C (13)D (14)C (15)B

2.填空题

解 (1)$2\pi if'(0)$ 0 (2)$(e-2)\pi i$ (3)0 (4)$10\pi i$ (5)0 (6)$6\pi i$ (7)$\frac{\pi}{12}i$

(8)$\psi(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+c$ (9)-3

3.解 (1) 根据高阶求导公式,有

$$\oint_C\frac{\cos z}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)^{(2)}|_{z=1}=\pi i(-\cos z)|_{z=1}=-\pi i\cos 1$$

(2) 此积分实际上是二元实函数$\frac{1}{|z-a|^4}$沿圆周$x^2+y^2=\rho^2$对弧长$|dz|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=ds$的曲线积分,可按高等数学中相应的公式计算.但是注意到:若令$z=\rho e^{i\theta}$则$z\cdot\bar{z}=\rho^2$,$|dz|=ds=\rho d\theta=-i\rho\frac{dz}{z}$,因此所给积分也可由高阶导数公式计算.于是

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^4}=\oint_{|z|=\rho}\frac{-i\rho}{(z-a)^2(\bar{z}-\bar{a})^2}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$=-i\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{z}{(z-a)^2(\rho^2-\bar{a}z)^2}dz$$

若$|a|<\rho$，则$\dfrac{z}{(\rho^2-\bar{a}z)^2}$在$|z|\leqslant\rho$上解析，由高阶导数公式得

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^4}=-i\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{\dfrac{z}{(\rho^2-\bar{a}z)^2}}{(z-a)^2}dz$$

$$=-i\rho\cdot 2\pi i\cdot\left[\frac{z}{(\rho^2-\bar{a}z)^2}\right]'\Big|_{z=a}=\frac{2\pi\rho(\rho^2+|a|^2)}{(\rho^2-|a|^2)^3}$$

若$|a|>\rho$，则同上有

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^4}=\frac{-i\rho}{(\bar{a})^2}\oint_{|z|=\rho}\frac{\dfrac{z}{(z-a)^2}}{\left(z-\dfrac{\rho^2}{\bar{a}}\right)^2}dz$$

$$=\frac{-i\rho}{(\bar{a})^2}\cdot 2\pi i\left[\frac{z}{z-a}\right]'\Big|_{z=\frac{\rho^2}{\bar{a}}}=\frac{2\pi\rho(\rho^2+|a|^2)}{(|a|^2-\rho^2)^3}$$

故
$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^4}=\begin{cases}\dfrac{2\pi\rho(\rho^2+|a|^2)}{(\rho^2-|a|^2)^3}, & |a|<\rho\\[2ex]\dfrac{2\pi\rho(\rho^2+|a|^2)}{(|a|^2-\rho^2)^3}, & |a|>\rho\end{cases}$$

(3)$f(z)$的奇点为0，1刚好在曲线$C:|z|=4$的内部.我们作两条辅助闭曲线C_1,C_2，使C_1,C_2互不相交、互不包含，分别包围奇点$z=0$和$z=1$，且全在曲线C的内部，并取它们的正方向(如图3－12所示)，于是由复合闭路定理，有

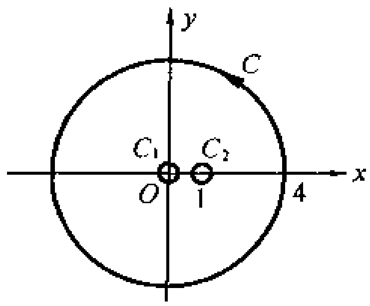


图3－12

$$\oint_C\frac{\cos(\pi z)}{z^3(z-1)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{\cos(\pi z)}{z^3(z-1)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{\cos(\pi z)}{z^3(z-1)^2}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2}}{z^3}dz+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{\cos(\pi z)}{z^3}}{(z-1)^2}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2}\right]''\Big|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{\cos(\pi z)}{z^3}\right]'\Big|_{z=1}$$

$$=\pi i\left[\frac{4\pi\sin\pi z}{(z-1)^3}+\frac{-\pi^2\cos\pi z}{(z-1)^2}+\frac{6\cos\pi z}{(z-1)^4}\right]\Big|_{z=0}$$

$$+2\pi i\cdot\left[\frac{-\pi z\sin\pi z-3\cos\pi z}{z^4}\right]\Big|_{z=1}$$

$$=\pi i(6-\pi^2)+2\pi i\cdot 3=(12-\pi^2)\pi i$$

4.证明　(1)由三角不等式$|1-f(z)|\geqslant 1-|f(z)|$，可知

$$1>|1-f(z)|\geqslant 1-|f(z)|$$

于是，$|f(z)|>0$，当$z\in B$时，即$f(z)\neq 0$.(注：也可使用反证法)

(2)由结论(1)易知$\dfrac{f''(z)}{f(z)}$在区域B内解析，从而由柯西－古萨定理知$\displaystyle\oint_C\frac{f''(z)}{f(z)}dz=0$，其中$C$为$B$内任一闭曲线.

5.解　由柯西积分公式知$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i e^z|_{z=0}=2\pi i$，另一方面，由复积分的计算公式，有

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\theta+i\sin\theta}}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cdot e^{i\sin\theta}d\theta$$

$$=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]d\theta$$

$$=i\left[\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)d\theta+i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\sin(\sin\theta)d\theta\right]$$

$$=i\left(2\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+0\right)\quad\text{（用到奇偶函数的积分性质）}$$

故
$$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$$

6.解　由高阶导数公式知

$$\oint_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi i[(z+1)^2f(z)]'|_{z=0}$$

$$=2\pi i(2(z+1)f(z)+(z+1)^2f'(z))|_{z=0}$$

$$=2\pi i(2f(0)+f'(0))=8\pi i$$

又由复积分的计算公式知

$$\oint_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz=\int_0^{2\pi}(e^{i\theta}+1)^2\frac{f(e^{i\theta})}{e^{2i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)f(e^{i\theta})d\theta$$

$$=4i\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot f(e^{i\theta})d\theta$$

即
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)f(e^{i\theta})d\theta=2\pi$$

7.解　先确定形如 $u=u(x^2+y^2)$ 的所有调和函数：令 $t=x^2+y^2$，则

$$u_x=2xu'(t),\quad u_{xx}=2u'(t)+4x^2u''(t)$$

同理可得 $u_{yy}=2u'(t)+4y^2u''(t)$，根据 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$，可得

$$4u'(t)+4tu''(t)=0\text{ 或}\frac{du'}{u'}=-\frac{dt}{t}$$

由此可得 $u'(t)=c_1\frac{1}{t}$，进而可得 $u(t)=c_1\ln t+c_2$，即形如 $u=u(x^2+y^2)$ 的所有调和函数为 $u=c_1\ln(x^2+y^2)+c_2$（c_1,c_2 为任意实常数，且 $c_1\neq0$）.

另一方面，$u_x=\dfrac{2c_1x}{x^2+y^2}$，　$u_y=\dfrac{2c_1y}{x^2+y^2}$，于是

$$f'(z)=u_x-iu_y=\frac{2c_1(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{2c_1}{z}$$

可得 $f(z)=2c_1\ln z+c$．再由 $\mathrm{Re}[f(z)]=u$ 可得 $\mathrm{Re}(c)=c_2$，故所求解析函数为

$$f(z)=2c_1\ln z+c_2+ic_3\text{（}c_1,c_2,c_3\text{ 为任意实常数）}$$

8.解　令 $f(\xi)=\dfrac{1}{2^n}(\xi^2-1)^n$，它在 ξ－平面上解析，由高阶导数公式有

$\dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$，可得

$$P_n(z)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(\xi^2-1)^n}{2^n(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

其中 C 为绕点 z 的任一正向简单闭曲线.

当曲线 C 为 $\xi = z + \sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 时，由复积分计算公式，并为计算的方便，记 $z^2 - 1 = |z^2 - 1|e^{i\alpha}(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$，可得

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(z^2 - 1 + 2z\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta} + |z^2 - 1|e^{2i\theta})^n}{2^n(\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta})^{n+1}}\cdot i\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z^2 - 1 + 2z\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta} + |z^2 - 1|e^{2i\theta})^n}{2^n(\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta})^n}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i(\alpha-\theta)} + z + \frac{1}{2}\sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\theta}\right)^n d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z + \frac{1}{2}\sqrt{|z^2 - 1|}\cdot\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - 2\theta}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - 2\theta}{2}\right)\right]^n d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z + \sqrt{|z^2 - 1|}\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)\right]^n d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z + \sqrt{|z^2 - 1|\cdot e^{i\alpha}}\cdot\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)\right]^n d\theta$$

$$\xlongequal{t = \theta - \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[z + \sqrt{z^2 - 1}\cos t]^n dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[z + \sqrt{z^2 - 1}\cos t]^n dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\theta]^n d\theta$$

这里 $\cos\theta$ 是以 2π 为周期的偶函数.

9.解　令 $\xi = e^{i\theta}\quad(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，则

$$\bar{\xi} = e^{-i\theta},\quad d\xi = ie^{i\theta}d\theta,\quad d\bar{\xi} = -ie^{-i\theta}d\theta = \overline{d\xi}$$

$$d\xi = ie^{i\theta}d\theta = \frac{ie^{-i\theta}d\theta}{e^{-2i\theta}} = -\frac{\overline{d\xi}}{(\bar{\xi})^2}\quad 及\ \xi\bar{\xi} = |\xi|^2 = 1$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\overline{\left(\frac{f(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}}\right)\cdot\left(-\frac{d\xi}{(\bar{\xi})^2}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(\bar{\xi} - \bar{z})\xi^2}d\xi\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi(1 - \bar{z}\xi)}d\xi\right)}\tag{3-12}$$

当 $|z| < 1$ 时 $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| > 1$，故式(3-12)右端被积函数的奇点 $\xi = 0$ 在曲线 $|\xi| = 1$ 的内部，奇点 $\xi = \frac{1}{\bar{z}}$ 在曲线 $|\xi| = 1$ 的外部.由柯西积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi(1 - \bar{z}\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{\frac{f(\xi)}{(1 - \bar{z}\xi)}}{\xi}d\xi = f(0)$$

故当 $|z| < 1$ 时，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi - z}d\xi = \overline{f(0)}$.

当 $|z| > 1$ 时，$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| < 1$，故式(3-12)右端被积函数的两个奇点0和 $\frac{1}{\bar{z}}$ 均在曲线 $|\xi| = 1$ 的内部，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi(1-\bar{z}\xi)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi-\frac{1}{\bar{z}}}\right)f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-\frac{1}{\bar{z}}}d\xi$$

$$=f(0)-f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

故当$|z|>1$时,有$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}d\xi=\overline{f(0)}-\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$.

10.解 由柯西积分公式及高阶求导公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}dz\pm\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}dz$$

$$=2f(0)\pm[(z^2+1)f(z)]'|_{z=0}=2f(0)\pm f'(0)=2\pm f'(0)$$

由复积分计算公式,有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\{2\pm(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\}f(e^{i\theta})\cdot\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{2\pm 2\cos\theta\}f(e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{1\pm\cos\theta\}f(e^{i\theta})d\theta$$

故有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{1\pm\cos\theta\}f(e^{i\theta})d\theta=2\pm f'(0)$$

由 $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$,$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$,有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot f(e^{i\theta})d\theta=2+f'(0),\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot f(e^{i\theta})d\theta=2-f'(0)$$

11.解 曲线 $C: r=2-\sin^2\frac{\theta}{4}$ 可化为 $r=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$,是以 $T=4\pi$ 为周期的周期函数.我们看到,当$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$时,$r$从2变到1,而当$\theta$由$2\pi$变到$4\pi$时,$r$又从1变回2,如此形成两个回路(均绕 $z=0$)且沿逆时针方向.我们记外围曲线为 C_1,内部曲线为 C_2(如图3-15所示),于是

$$\oint_C\frac{1}{z}dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=2\pi i+2\pi i=4\pi i$$

可见沿曲线C积分相当于沿两条绕原点的闭曲线C_1, C_2的积分和.而积分$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i$只沿一条闭曲线$|z|=1$进行积分.

12.证明 因为e^{-z^2}在复平面上处处解析,故在图3-16所示区域内也解析,由柯西-古萨定理,有$\oint_{OABO}e^{-z^2}dz=0$.而在弧$\widehat{AB}$上有$z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$;在$\overline{OB}$上$z=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}t$ $(0\leqslant t\leqslant R)$,于是

$$\oint_{OABO} e^{-z^2}dz = \int_{\overline{OA}} e^{-z^2}dz + \int_{\widehat{AB}} e^{-z^2}dz + \int_{\overline{BO}} e^{-z^2}dz = 0$$

$$\int_{\overline{OA}} e^{-z^2}dz = \int_0^R e^{-x^2}dx, \int_{\widehat{AB}} e^{-z^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} \cdot iRe^{i\theta}d\theta$$

$$\int_{\overline{BO}} e^{-z^2}dz = \int_R^0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-it^2}dt$$

我们看到当 $R \to \infty$ 时，有 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi \quad (\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2R^2\frac{\varphi}{\pi}}d\varphi \quad (当 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} 时 \sin\varphi \geqslant \frac{2\varphi}{\pi})$$

$$= \frac{1}{4R}(-e^{-R^2} + 1) \to 0 \quad (R \to \infty)$$

故
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2(\cos)2\theta + i\sin 2\theta} iRe^{i\theta}d\theta = 0$$

这样便有
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\int_0^\infty \cos(t^2)dt - i\int_0^\infty \sin(t^2)dt\right] = 0$$

整理得
$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt - i\int_0^\infty \sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i)$$

故
$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \int_0^\infty \sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

13. **证明** 因为 $|z| = 1$，所以 $z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，故

$$\oint_{|z|=1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta = 2^n i\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta$$

另外有
$$\oint_{|z|=1} z^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ 0, & k \neq -1 \end{cases}$$

(1) 当 $n = 2m$ 时，由二项式展开定理有

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left[z^{2m} + 2m \cdot z^{2m-1} \cdot \frac{1}{z} + \cdots + \frac{2m(2m-1)\cdots(2m-m+1)}{m!}z^m \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^m + \cdots + \frac{1}{z^{2m}}\right]$$

于是有
$$2^{2m} i\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\theta d\theta = \oint_{|z|=1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2m}\frac{dz}{z}$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{2m(2m-1)\cdots(2m-m+1)}{m!} \cdot \frac{1}{z}dz$$

$$= 2\pi i \frac{2m(2m-1)\cdots(2m-m+1)}{m!}$$

$$= \frac{(2m)!}{(m!)^2} \cdot 2\pi i$$

故有
$$\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\theta d\theta = \frac{(2m)!}{(2^m m!) \cdot (2^m \cdot m!)} \cdot 2\pi = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot 2\pi$$

(2) 当 $n = 2m - 1$ 时，$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{z}$ 的展开式中第一项为 z^{2m-2}，以后各项的次数依次减 2，不出现$\frac{1}{z}$，这是因为$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2m-1} \cdot \frac{1}{z}$ 展开式中的第 $k + 1$ 项为

$$C_{2m-1}^{k} z^{2m-1-k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \frac{1}{z} = C_{2m-1}^{k} z^{2m-2k-2}$$

z 的次幂均为偶次幂，所以有$\oint_{|z|=1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2m-1} \cdot \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 0$. 这样 $2^{2m-1}\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \cos^{2m-1}\theta \mathrm{d}\theta = 0$，即 $\int_0^{2\pi} \cos^{2m-1}\theta \mathrm{d}\theta = 0$.

第4章　级　　数

典型题解析

例4－1　设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n c_n$收敛，而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n|c_n|$发散，证明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径为2.

证明　级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n c_n$收敛，说明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在$z=2$处收敛，由Abel定理，对于满足$|z|<2$的$z$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$必绝对收敛.从而该幂级数的收敛半径$R\geqslant 2$，但若$R>2$，这时幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在圆域$|z|<R$内绝对收敛，特别地，在$|z|=2(<R)$处也是绝对收敛的，即级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n|c_n|$收敛.这显然与已知矛盾，故幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径$R=2$.

例4－2　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2}z^n$的收敛半径.

分析　此题应用公式$R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，求收敛半径比较困难，而$a_n$具有$(b_n)^n$的形式，故应考虑用公式$\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

解　因　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-\mathrm{i})^n\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right|}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{-n\cdot\sin\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{-\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{-1}$$

故$R=\mathrm{e}$，即所求幂级数的收敛半径$R=\mathrm{e}$.

例4－3　试确定洛朗级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{2}\right)^n$的收敛域.

分析　洛朗级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$的收敛区域是圆环：$r<|z-a|<R$.其内外径$r,R$分别由幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\xi^n$（其中$\xi=\frac{1}{z-a}$）与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的收敛半径来确定.

解　令$\xi=\frac{1}{z-2}$，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\xi^n$的系数$a_n=(-1)^n$，于是$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，故收敛半径$R_1=1$.

而幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(2-z)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(z-2)^n$的系数$b_n=\frac{1}{2^n}$.

于是$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{1}{2}$,故收敛半径 $R_2 = 2$.

故收敛圆环为 $1 < |z-2| < 2$.

例 4-3 把幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^{2n-1}}{4^{2n-2}(2n-1)!}$的和函数展开成$(z-1)$的幂级数.

分析 由于$\sin z$关于z的幂级数为$\sin z = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$,利用该结果先得到所给幂级数的和函数,再将和函数展开成$(z-1)$的幂级数.

解 令 $\xi = \dfrac{z}{4}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{4^{2n-2}(2n-1)!} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\xi^{2n-1}}{(2n-1)!} = 4\sin\xi = 4\sin\frac{z}{4}$$

上式在复平面上处处成立,记$f(z) = 4\sin\dfrac{z}{4}$.

用间接法将$f(z)$展成关于 $z-1$ 的幂级数.

$$\begin{aligned} f(z) &= 4\sin\frac{z}{4} = 4\sin\frac{z-1+1}{4} = 4\left[\sin\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{z-1}{4} + \cos\frac{1}{4}\cdot\sin\frac{z-1}{4}\right] \\ &= 4\left[\sin\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left(\frac{z-1}{4}\right)^{2n} + \cos\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{z-1}{4}\right)^{2n+1}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\pi\right)}{n!4^{n-1}}(z-1)^n \end{aligned}$$

例 4-4 设在$|z| < R$内的解析函数$f(z)$有泰勒展开式$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$,令$M(r) = \max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$,$0 < r < R$.试证明$|c_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$.

证明 由泰勒系数 c_n 的计算公式与复积分的计算公式,可知

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^ne^{in\theta}}d\theta$$

于是,由定积分估值不等式得

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^ne^{in\theta}}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n}d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{r^n}d\theta = \frac{M(r)}{r^n}$$

故 $$|c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

注 题中不等式$|c_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$通常称为柯西不等式,它给出了解析函数的泰勒系数或导数的估计式.

例 4-5 若$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在$|z| \leqslant r$上解析,试证级数$\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n!}z^n$在$|z| < +\infty$内处处收敛,而且$|\varphi(z)| < Me^{\frac{|z|}{r}}$,$|\varphi^{(k)}(z)| < \dfrac{M}{r^k}e^{\frac{|z|}{r}}$,其中 M 为正的常数,k 为自然数.

证明 由于$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在$|z| \leqslant r$上解析,及上题的柯西不等式,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| > r,\quad |c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$$

于是,关于幂级数

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n, R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{c_n}{n!}}{\frac{c_{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \infty$$

故 $\varphi(z)$ 在 $|z| < +\infty$ 内处处收敛,则 $\forall 0 < R < +\infty$, $\varphi(z)$ 在 $|z| < R$ 上绝对收敛,于是

$$|\varphi(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|}{n!}|z|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(r)}{n!r^n}\cdot|z|^n = M(r)\mathrm{e}^{\frac{|z|}{r}}$$

其中
$$M(r) = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\{|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\}, z \text{ 满足} |z| = r$$

$$\varphi^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{c_n}{(n-k)!}z^{n-k} \quad \text{(收敛幂级数的逐项可导性)}$$

所以
$$|\varphi^{(k)}(z)| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty}\frac{|c_n|}{(n-k)!}|z|^{n-k} \leqslant \sum_{n=k}^{\infty}\frac{M(r)}{(n-k)!r^n}|z|^{n-k}$$
$$= \frac{M(r)}{r^k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{|z|^{n-k}}{r^{n-k}} = \frac{M(r)}{r^k}\mathrm{e}^{\frac{|z|}{r}}$$

故有结论 $|\varphi(z)| \leqslant M\mathrm{e}^{\frac{|z|}{r}}$, $|\varphi^{(k)}(z)| \leqslant \frac{M}{r^k}\mathrm{e}^{\frac{|z|}{r}}$ 成立.(注: $M(r) = M = \max\limits_{|z|\leqslant r}\{|f(z)|\}$)

例 4-6 试证 $\sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right] = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(z^n + z^{-n})$, $0 < |z| < +\infty$,其中 t 为与 z 无关的实参数,且

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2t\cos\theta)\cdot\cos n\theta\mathrm{d}\theta \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

证明 因函数 $\sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$ 在复平面内除去点 $z=0$ 外解析,所以在 $0 < |z| < +\infty$ 内可展成洛朗级数 $\sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right] = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$,其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{\sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, 0 < r < +\infty)$$

取 $r = 1$,并利用复积分计算公式可得

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})]}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2t\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\theta\sin(2t\cos\theta)\mathrm{d}\theta - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\theta\sin(2t\cos\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$

由于 $\cos n\theta\sin(2t\cos\theta)$ 是偶函数,而 $\sin n\theta\sin(2t\cos\theta)$ 是奇函数,所以由奇偶函数积分的性质,知 $c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\cdot\sin(2t\cos\theta)\mathrm{d}\theta$,而且, $c_n = c_{-n}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$,于是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n = \sum_{n=+1}^{\infty}c_{-n}z^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_nz^{-n} + c_nz^n) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}c_n(z^n + z^{-n})$$

故在 $0 < |z| < +\infty$ 上,有 $\sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right] = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n(z^n + z^{-n})$,其中

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta \cdot \sin(2t\cos\theta)\mathrm{d}\theta \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

书后习题解析

1. 下列数列$\{\alpha_n\}$是否收数?如果收敛,求出它们的极限.

(1)$\alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni}$; (2)$\alpha_n = \left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n}$;

(3)$\alpha_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$; (4)$\alpha_n = e^{-\frac{n\pi}{2}i}$; (5)$\alpha_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}i}$.

解 (1)我们看到一般项 $\alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni} = \frac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}$,而根据复数列收数的充要条件可知

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+i\right) = i$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-i\right) = -i$,根据极限运算的法则有

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \frac{i}{-i} = -1$$

(2)记 $\alpha_n = a_n + ib_n$,根据

$$|\alpha_n| = \left|\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n}\right| = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n} \to 0(n\to\infty)$$

及不等式$|a_n| \leqslant |\alpha_n|$和$|b_n| \leqslant |\alpha_n|$,故有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 0$.那么$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

(3)记$\alpha_n = a_n + ib_n$,故 $a_n = (-1)^n$,$b_n = \frac{1}{n+1}$.由于交错数列$\{a_n\}$是发数数列.由复数列收敛的充要条件可知$\{\alpha_n\}$是发散的.

(4)$\alpha_n = e^{-\frac{n\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)$.我们看到实部所成数列$\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$和虚部所成数列$\left\{\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$均发散,因而复数列$\{\alpha_n\}$是发散的数列.

(5)
$$\alpha_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}i} = \frac{1}{n}\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + i\frac{1}{n}\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)$$

数列$\left\{\frac{1}{n}\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) = 0$.同样地,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) = 0$,因而数列$\alpha_n$收敛,且有$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

2. 证明
$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n = \begin{cases} 0, & |\alpha| < 1 \\ \infty, & |\alpha| > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ \text{不存在}, & |\alpha| = 1, \alpha \neq 1 \end{cases}$$

证明 令$\alpha = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,其中$r = |\alpha|$,$\theta = \arg\alpha$,则$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

(1)当$|\alpha| < 1$时,非负实数$r < 1$,$\lim\limits_{n\to+\infty}r^n = 0$,从而$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n = 0$.

(2)当$|\alpha| > 1$时,显然$\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$,于是$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\alpha^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$,故

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\alpha^n}}=+\infty$$

(3) 当 $\alpha=1$ 时,易知 $\alpha^n=1$,从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n=1$.

(4) 当 $|\alpha|=1,\alpha\neq 1$,此时 $r=1,\alpha^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta(\theta\neq 0)$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n\theta$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\theta$ 不存在,因而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n$ 也不存在.

3. 判别下列级数的绝对收敛性与收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$; (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}$.

解 (1)
$$\frac{\mathrm{i}^n}{n}=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^n=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\\&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\cos k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\end{aligned}$$

而交错级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ 均收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 也收敛,然而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 不是绝对收敛的.因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 是条件收敛的.

(2)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln 2k}+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}$$

交错级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln 2k}$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}$ 都是收敛的.因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$ 是收敛的.然而由于 $\left|\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}\right|=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}(n\geqslant 2$ 时),级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 也是发散的.因而原级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$ 是条件收敛的.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}\right|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n,\frac{\sqrt{61}}{8}<1$. 因级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$ 收敛,故原级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$ 是绝对收敛的.

(4) 由于
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}n)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}n)}}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^n)$$

显然级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}\mathrm{e}^n}$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^n$ 是发散的.故原级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}$ 是发散的级数.

4. 下列说法是否正确?为什么?

(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛;

(2) 每一个幂级数在它的收敛圆内可能有奇点;

(3) 每一个在点 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展成泰勒级数.

解 (1) 不正确.幂级数在收敛圆内部处处收敛且绝对收敛;在收敛圆外部发散;在收敛圆上可能收敛也可能发散.

例如,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛圆为 $|z-1|=1$. 可以看到在收敛圆 $|z-1|=1$ 上,当 $z=0$ 时,原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,是收敛的;而当 $z=2$ 时,原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,是发散的.

然而我们还可以看到幂级数在其收敛圆的圆周上处处收敛,如幂级散 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n$;也有在收敛圆上处处发散的幂级数,如 $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$;

综上所述,我们可以看到幂级数在收敛圆上的收敛特性是不定的.要视具体问题而具体分析.

(2) 不正确.幂级数的和函数在收敛圆内是一个解析函数.因此在解析圆内不可能有奇点.和函数在收敛圆的圆周上至少存在一个奇点.

(3) 不正确.例如 $f(z)=|z|^2$ 在 $z_0=0$ 的邻域内不能展开成泰勒级数,只有函数 $f(z)$ 在 z_0 点处解析,才一定可以在 z_0 的邻域内展成泰勒级数,在 z_0 点连续的函数几乎不能在 z_0 的邻域内展成泰勒级数.

5.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛,而在 $z=3$ 处发散.

解 不能.因为由 Abel 定理可知,在 $z=0$ 处收敛的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 必在圆域 $|z-2|<|0-2|=2$ 内处处收敛且绝对收敛,而点 $z=3$ 属于圆域 $|z-2|<2$ 内,所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 不能在 $z=0$ 处收敛而在 $z=3$ 处发散.

6.求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$($p$ 为正整数); (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$; (3) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{i\pi}{n}}z^n$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{i}{n}\right)(z-1)^n$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

解 (1) 一般项 $c_n=\frac{1}{n^p}$,由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1$$

知收敛半径 $R=1$.或者由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p=1$,故也有 $R=1$.

(2) $$c_n=\frac{(n!)^2}{n^n},\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{n^n\cdot[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}(n!)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot(n+1)$$

所以收敛半径 $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0\cdot e=0$$

(3) $c_n=(1+i)^n$, $\sqrt[n]{|c_n|}=\sqrt[n]{|(1+i)^n|}=\sqrt{2}$,故收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $c_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$,则收敛半径 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|e^{i\frac{\pi}{n}}|}} = 1.$

这是因为 $|e^{i\frac{\pi}{n}}| = 1$.

(5)
$$c_n = \operatorname{ch}\frac{i}{n} = \frac{1}{2}(e^{\frac{i}{n}} + e^{-\frac{i}{n}}) = \cos\frac{1}{n}$$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}} = 1$,故收敛半径 $R = 1$.

(6) $c_n = \frac{1}{(\ln in)^n}$,于是

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{|\ln in|} = \frac{1}{\left|\ln n + i\frac{\pi}{2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(\ln n)^2 + \frac{\pi^2}{4}}}$$

故有
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{(\ln n)^2 + \frac{\pi^2}{4}} = \infty$$

7. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R,证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.[提示:$|(\operatorname{Re}c_n)z^n| \leqslant |c_n||z|^n$]

证明　由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R,可知在收敛圆 $|z| < R$ 内任一点 z_0 处,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛而且绝对收敛,即有正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$ 收敛.又由于

$$|(\operatorname{Re}c_n)z^n| \leqslant |c_n|\cdot|z|^n$$

由正项级数的比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|(\operatorname{Re}c_n)z^n|$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$ 在圆域 $|z| < R$ 内收敛且绝对收敛,故有"级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径大于等于 R"成立.

8. 证明:如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在($\neq\infty$),下列三个幂级数有相同的收敛半径:

$$\sum c_n z^n,\quad \sum\frac{c_n}{n+1}z^{n+1},\quad \sum nc_n z^{n-1}$$

证明　不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = l(\neq\infty)$,则由

$$\left|\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| - |l|\right| \leqslant \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} - l\right|$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |l|(\neq\infty)$,记 $\rho = |l|$.

(1) $\sum c_n z^n$ 的收敛半径 R_1 由计算公式可知,$R_1 = \frac{1}{\rho}$.

(2) 幂级数 $\sum\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$ 一般项的系数 $\alpha_n = \frac{c_{n-1}}{n}$(指 z^n 项的系数),于是

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{n}{n+1}\cdot\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| \longrightarrow 1\cdot\rho(n\to\infty)$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = \rho$,所以其收敛半径 $R_2 = \frac{1}{\rho}$.

(3) 记幂级数$\sum nc_n z^{n-1}$一般项的系数(z^n 项的系数)$\beta_n = (n+2)c_{n+1}$,于是

$$\frac{|\beta_{n+1}|}{|\beta_n|} = \frac{n+2}{n+1}\frac{|c_{n+2}|}{|c_{n+1}|} \longrightarrow 1\cdot\rho(n\to\infty)$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\beta_{n+1}|}{|\beta_n|} = \rho$,所以其收敛半径 $R_3 = \frac{1}{\rho}$.

综上所述,三个幂级数$\sum c_n z^n$,$\sum \frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$,$\sum nc_n z^{n-1}$ 的收敛半径相同.

9.设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛,而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$发散,证明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 1.

证明 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛相当于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在点$z = 1$处收敛,于是由 Abel 定理可知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在圆域$|z| < 1$内收敛且绝对收敛,从而可以确定幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径 $R \geqslant 1$.

但是,若收敛半径 $R > 1$,则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在圆域$|z| < R$内绝对收敛,而$|z| = 1$属于该圆域,从而可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$在$|z| = 1$处收敛,即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$收敛,这与已知矛盾,故 $R > 1$不可能成立,从而可知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 1.

10.如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在它的收敛圆的圆周上一点z_0处绝对收敛,证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛.

证明 设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在收敛圆圆周$|z| = R$上一点z_0处绝对收敛(R 为收敛半径),则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z_0^n|$收敛,此时$|z_0| = R$,于是对于收敛圆所围成的闭区域$|z| \leqslant R$内任一点$z$,都有$|c_n z^n| = |c_n|\cdot|z|^n \leqslant |c_n|\cdot R^n = |c_n z_0^n|$.由正项级数的比较判别法可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$收敛,故结论"幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在$|z| \leqslant R$上绝对收敛"成立.

11.把下列各函数展开成 z 的幂级数,并指出它们的收敛半径:

(1) $\frac{1}{1+z^3}$; (2) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$; (3)$\cos z^2$; (4)$\operatorname{sh}z$;

(5)$\operatorname{ch}z$; (6)$e^{z^2}\cdot\sin z^2$; (7)$e^{\frac{z}{z-1}}$; (8)$\sin\frac{1}{1-z}$.

解 通常都用间接法将函数展成幂级数.

(1) 由$\frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$,$|z| < 1$ 易知

$$\frac{1}{1+z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n},|z|<1$$

从而,收敛半径 $R=1$.

(2) 由$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,|z|<1$及收敛圆内幂级数可逐项求导且收敛半径不变,知

$$\frac{-1}{(1+z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}z^n,|z|<1$$

从而
$$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,|z|<1$$

于是
$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n},|z|<1$$

故该幂级数的收敛半径 $R=1$.

(3) 由 $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}(|z|<+\infty)$,可得

$$\cos z^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z^2)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{4n}(|z|<+\infty)$$

该幂级数的收敛半径 $R=+\infty$.

(4) 由
$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,|z|<+\infty$$

$$e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,|z|<+\infty$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},|z|<+\infty$$

该幂级数的收敛半径 $R=+\infty$.

(5) 同(4)题一样,根据 $\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$,可得

$$\mathrm{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad |z|<+\infty$$

其收敛半径 $R=+\infty$.

(6) 由于 $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$,所以

$$e^{z^2}\cdot\sin z^2=\frac{e^{z^2}}{2i}(e^{iz^2}-e^{-iz^2})=\frac{1}{2i}(e^{(1+i)z^2}-e^{(1-i)z^2})$$

再由
$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,\quad |z|<+\infty$$

可有

$$e^{(1+i)z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1+i)z^2)^n}{n!}=1+(1+i)z^2+\frac{(1+i)^2z^4}{2!}+\frac{(1+i)^3z^6}{3!}+\cdots,\quad |z|<+\infty$$

$$e^{(1-i)z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1-i)z^2)^n}{n!}=1+(1-i)z^2+\frac{(1-i)^2z^4}{2!}+\frac{(1-i)^3z^6}{3!}+\cdots,\quad |z|<+\infty$$

于是
$$e^{z^2}\cdot\sin z^2=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^{2n}}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}z^{2n},\quad |z|<+\infty$$

由于

$$(1+i)^n-(1-i)^n=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n-(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^n=(\sqrt{2})^n[e^{i\frac{n\pi}{4}}-e^{-i\frac{n\pi}{4}}]=(\sqrt{2})^n\cdot 2i\cdot\sin\frac{n\pi}{4}$$

故有 $e^{z^2}\cdot\sin z^2=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\cdot 2i\cdot\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\cdot z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\cdot z^{2n},|z|<+\infty$

其收敛半径 $R=+\infty$.

(7) 根据"若 $f(z)$ 在 z_0 处解析,那么使 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式成立的圆域的半径就等于从 z_0 到 $f(z)$ 的距 z_0 最近的一个奇点 α 之间的距离",可知由于 $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$ 仅有一个奇点 $z=1$,故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式的收敛半径 $R=1$,即 $e^{\frac{z}{z-1}}$ 的幂级数展开式的收敛半径 $R=1$,在 $|z|<1$ 内可展开幂级数.

将 e^z 及 $\frac{z}{z-1}$ 的幂级数展开式做复合运算,并利用幂级数的乘法(柯西乘法)运算规律,可知,当 $|z|<1$ 时,有

$$\begin{aligned}
e^{\frac{z}{z-1}}&=1+\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{z-1}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{z}{z-1}\right)^3+\cdots\\
&=1+(-1)(z+z^2+z^3+\cdots)+\frac{(-1)^2}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots)^2\\
&\quad+\frac{(-1)^3}{3!}(z+z^2+z^3+\cdots)^3+\cdots\\
&=1-(z+z^2+z^3+\cdots)+\frac{1}{2!}(z^2+2z^3+3z^4+\cdots)-\frac{1}{3!}(z^3+3z^4+\cdots)+\cdots\\
&=1-z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\cdots,\quad |z|<1
\end{aligned}$$

其中 $$\frac{z}{z-1}=(-1)\cdot z\frac{1}{1-z}=(-1)(z+z^2+z^3+\cdots),\quad |z|<1$$

(8) 与上一题的解法类似,由于 $z=1$ 是 $\sin\frac{1}{1-z}$ 的唯一奇点,故 $\sin\frac{1}{1-z}$ 关于 z 的幂级数展开式的收敛半径 $R=1$.由于

$$\sin\frac{1}{1-z}=\sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{z}{1-z}+\cos 1\cdot\sin\frac{z}{1-z}$$

而 $$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

所以

$$\begin{aligned}
\sin\frac{1}{1-z}&=\sin 1\cdot\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^4-\cdots\right]+\cos 1\cdot\left[\frac{z}{1-z}-\frac{1}{3!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\cdots\right]\\
&=\sin 1\cdot\left[1-\frac{1}{2!}(z^2+2z^3+3z^4+\cdots)+\frac{1}{4!\cdot 3!}(3\cdot 2\cdot z^4+4\cdot 3\cdot 2z^5+\cdots)+\cdots\right]\\
&\quad+\cos 1\left[(z+z^2+z^3+\cdots)-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}(2\cdot 1\cdot z^3+3\cdot 2\cdot z^4+\cdots)\cdots\right]\\
&=\sin 1+\cos 1\cdot z+\left(\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1\right)z^2+\left(-\sin 1+\cos 1-\frac{1}{3!}\cos 1\right)z^3+\cdots
\end{aligned}$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1\right) z^2 + \left(\frac{5}{6}\cos 1 - \sin 1\right) z^3 + \cdots$$

12.求下列各函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式,并指出它们的收敛半径:

(1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0 = 1$;　　(2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0 = 2$;

(3) $\frac{1}{z^2}, z_0 = -1$;　　(4) $\frac{1}{4-3z}, z_0 = 1+\mathrm{i}$;

(5) $\tan z, z_0 = \frac{\pi}{4}$;　　(6) $\arctan z, z_0 = 0$.

解　与上一题的解法类似,通常我们都是用间接法来完成泰勒展开的.

(1) $$\frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{2+(z-1)} = \frac{z-1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$ 1=z0

$$= \frac{z-1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^{n+1}, \quad \left(\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1, \text{即} |z-1| < 2\right)$$

所以收敛半径 $R = 2$.

(2) $$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1} = \frac{2}{4+(z-2)} - \frac{1}{3+(z-2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}$$

我们看到当 $\left|\frac{z-2}{4}\right| < 1$,即 $|z-2| < 4$ 时,有

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{z-2}{4}\right)^n$$

而当 $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$,即 $|z-2| < 3$ 时,有

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

根据幂级数和运算的性质知,当 $|z-2| < 3$ 时,上两个展式同时成立,即有

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (z-2)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{4^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (z-2)^n$$

其收敛半径 $R = 3$.

(3) $$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n, \quad |z+1| < 1$$

上式两边在 $|z+1| < 1$ 时,同时求导,得

$$-\frac{1}{z^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(z+1)^{n-1}$$

即$\dfrac{1}{z^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$,其中$|z+1|<1$,故展开式的收敛半径 $R=1$.

(4)
$$\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3(1+i)}=\frac{1}{(1-3i)-3[z-(1+i)]}$$
$$=\frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{1-3i}[z-(1+i)]}$$
$$=\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{1-3i}\right)^n\cdot[z-(1+i)]^n$$

这里$\left|\dfrac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right|<1$,即$|z-(1+i)|<\left|\dfrac{1-3i}{3}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$,所以收敛半径 $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

(5) 因为 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $\tan z$ 的奇点,而 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 是距 $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ 最近的奇点,故函数 $\tan z$ 在 $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ 展成的幂级数的收敛半径 $R=\left|\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\pi}{4}$.

根据泰勒展开式的定义式,可由 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,有 $c_0=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,$c_1=(\tan z)'\Big|_{\frac{\pi}{4}}=\sec^2\dfrac{\pi}{4}=2$,$(\tan z)''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2\sec^2\dfrac{\pi}{4}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}=4$,所以 $c_2=\dfrac{4}{2!}=2$,有$(\tan z)'''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2(2\sec^2 z\cdot\tan z+\sec^4 z)\Big|_{\frac{\pi}{4}}=16$,所以 $c_3=\dfrac{16}{3!}=\dfrac{8}{3}$.从而得

$$\tan z=1+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots,\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{\pi}{4}$$

我们还可以用待定系数法来获得 $\tan z$ 在 $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ 处的泰勒展开式.

根据 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ 及三角公式,可得

$$\tan z=\frac{\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$$

再由
$$\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$$

及
$$\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

不妨令 $\tan z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^n$,而

$$\tan z=\frac{\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\right]}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right]}$$

记作
$$\tan z=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n}$$

其中
$$\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, & n=2k\\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n=2k+1\end{cases},\quad \beta_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, & n=2k\\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}, & n=2k+1\end{cases}$$

由级数运算的性质,有
$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n$$

按 Cauchy 乘积法则,有
$$\begin{aligned}\alpha_0&=c_0\beta_0\\ \alpha_1&=c_1\beta_0+c_1\beta_1\\ \alpha_2&=c_2\beta_0+c_1\beta_1+c_0\beta_2\\ \alpha_3&=c_3\beta_0+c_2\beta_1+c_1\beta_2+c_0\beta_3\\ &\cdots\end{aligned}\tag{4-1}$$

又因
$$\alpha_0=1,\alpha_1=1,\alpha_2=\frac{-1}{2!},\alpha_3=\frac{-1}{3!},\cdots$$
$$\beta_0=1,\beta_1=-1,\beta_2=\frac{-1}{2!},\beta_3=\frac{1}{3!},\cdots$$

代人方程组式(4－1)中,依次可求得
$$c_0=1,c_1=2,c_2=2,c_3=\frac{8}{3},\cdots$$

故有 $\tan z$ 在 $z=\frac{\pi}{4}$ 处的泰勒展式为
$$\tan z=1+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2+\cdots$$

收敛半径 $R=\frac{\pi}{4}$.

(6) 由
$$(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}\qquad(|z|<1)$$

及幂级数在其收敛域内具有逐项可积性,可有
$$\arctan z=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-1)^nz^{2n}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1},|z|<1$$

故收敛半径 $R=1$.

13. 为什么在区域 $|z|<R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时,展开式的系数都是实数?

解　因为 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析,其展成 z 的幂级数时,系数 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 而
$$f^{(n)}(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f^{(n-1)}(\Delta z)-f^{(n-1)}(0)}{\Delta z},\quad n=0,1,2,\cdots$$

当 $n=0$ 时,$f(0)$ 是实数(根据已知可知).

当 $n=1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$.

由 $f(z)$ 在 $(-R,R)$ 上是实值函数及 $f'(z)$ 存在，可让 Δz 沿实轴趋于零，可见 $f'(0)$ 是实数. 同理可得 $f(z)$ 的导函数 $f'(z)$ 在实轴 $(-R,R)$ 上均取实值. 由数学归纳法可得 $f^{(n)}(z)(n=0,1,2,\cdots)$ 均是实轴 $(-R,R)$ 上的实值函数，故有 $f^{(n)}(0)$ 均为实数，从而必然有 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 是实数，结论成立.

14. 证明在 $f(z)=\cos\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 以 z 的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cdot\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

证明　函数 $f(z)=\cos\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内处处解析，由洛朗定理可知 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$，其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

C 为包含 $z=0$ 的任一正向简单闭曲线，不妨取 $C:|z|=1$. 于是

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n+1}}\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(2\cos2\theta)](\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos2\theta)\cdot\cos n\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos2\theta)\cdot\sin n\theta\mathrm{d}\theta$$

又 $\cos(2\cos\theta)\cdot\sin n\theta$ 是以 2π 为周期的奇函数. 所以

$$\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cdot\sin n\theta\mathrm{d}\theta=0$$

从而

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cdot\cos n\theta\mathrm{d}\theta$$

15. 下列结论是否正确？

用长除法得

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+z^4+\cdots$$
$$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

又因为

$$\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0$$

所以

$$\cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots=0$$

解　不正确. 由幂级数的收敛特性可知

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots\text{ 成立需在 }|z|<1\text{ 内}$$
$$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\text{ 成立需在区域 }|z|>1\text{ 内}$$

当两级数相加时，由于收敛域无公共部分，故其和无意义，从而也不会有结论和为0成立.

16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数.

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2$;

(2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}, 0<|z|<1; 0<|z-1|<1$;

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 0<|z-1|<1; 1<|z-2|<+\infty$;

(4) $e^{\frac{1}{1-z}}, 1<|z|<+\infty$;

(5) $\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$，在以 i 为中心的圆环域内；

(6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内；

(7) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}, 3<|z|<4, 4<|z|<+\infty$.

解　(1) 由于欲在 $1<|z|<2$ 上将函数 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ 展成 Laurent 级数，此时有 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$ 及 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$. 所以将 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ 分解，则有

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{z+2}{z^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{-1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{z^2}\right)}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{z^2}\right)}$$

由于

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^7}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$$

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^8}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+2}$$

于是

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+2}$$

$$=\cdots-\frac{2}{5}\frac{1}{z^6}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^5}+\frac{2}{5}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z^3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{10}-\frac{z}{20}-\frac{z^2}{40}-\cdots$$

(2) 当 $0<|z|<1$ 时,对于收敛幂级数 $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 两边求导数可得

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},|z|<1$$

于是

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot z^{n-2}=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n$$

当 $0<|z-1|<1$ 时,有

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad(|z|<1)$$

从而

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1$$

(3)
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

当 $0<|z-1|<1$ 时,有

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1-1}=\frac{-1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

当 $1<|z-2|<\infty$ 时,有

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z-2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=+1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(z-2)}^n$$

从而

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^{n+1}}$$

(4) 当 $1<|z|<+\infty$ 时,有

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

于是有

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(1-z)^3}+\cdots$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^4}+\cdots$$

另外,还可令 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$, $F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)=e^{\frac{z}{z-1}}$.据 11 题(7) 知:当 $|z|<1$ 时,有

$$F(z) = 1 - z - \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

所以当$|z| > 1$时即$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$时,有

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

(5) 函数$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$在$z = \mathrm{i}$及$z = 0$点不解析,所以,以i为中心的圆环是$0 < |z - \mathrm{i}| < 1$及$1 < |z - \mathrm{i}| < +\infty$,且$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z - \mathrm{i}}$.考虑当$0 < |z - \mathrm{i}| < 1$时,有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\mathrm{i} + (z - \mathrm{i})} = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mathrm{i}^{n+1}}(z - \mathrm{i})^n$$

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z - \mathrm{i})^{n-1}}{\mathrm{i}^{n+1}}$$

所以
$$\frac{1}{z^2(z - \mathrm{i})} = \frac{1}{z - \mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z - \mathrm{i}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{i}^{n+1}} \cdot n(z - \mathrm{i})^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{i}^{n+1}} \cdot n(z - \mathrm{i})^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n+1} \cdot n \cdot (z - \mathrm{i})^{n-2}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty}\mathrm{i}^{n+3} \cdot (n + 2) \cdot (z - \mathrm{i})^n$$

另一方面,当$1 < |z - \mathrm{i}| < +\infty$时,有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\mathrm{i} + (z - \mathrm{i})} = \frac{1}{z - \mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}} = \frac{1}{z - \mathrm{i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{i}^n \cdot (z - \mathrm{i})^{-n-1}$$

而此时
$$\frac{-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \mathrm{i}^n \cdot (z - \mathrm{i})^{-n-2} \cdot (-n - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(+\mathrm{i})^{3n+2} \cdot (n + 1) \cdot (z - \mathrm{i})^{-(n+2)}$$

所以有

$$\frac{1}{z^2(z - \mathrm{i})} = \frac{1}{(z - \mathrm{i})} \cdot \frac{1}{z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(+\mathrm{i})^{3n+2}(n + 1)(z - \mathrm{i})^{-(n+3)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{i}^{3n}(n + 1)(z - \mathrm{i})^{-(n+3)}$$

(6) 当$0 < |z - 1| < +\infty$时,即在$z = 1$的去心邻域内,有

$$\sin\frac{1}{1 - z} = -\sin\frac{1}{z - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \cdot \left(\frac{1}{z - 1}\right)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 1)!} \cdot (z - 1)^{-(2n+1)}$$

(7) 由于
$$\frac{(z-2)(z-1)}{(z-3)(z-4)}=1+\frac{6}{z-4}-\frac{2}{z-3}$$

当 $3<|z|<4$ 时,有

$$\frac{6}{z-4}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=-\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$\frac{-2}{z-3}=-\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1}$$

于是
$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1}$$
$$=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{2n+1}}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}z^{-n}$$

当 $4<|z|<+\infty$ 时,有

$$\frac{6}{z-4}=\frac{6}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{z}}=\frac{6}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^{n+1}$$

$$\frac{-2}{z-3}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1}$$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^{n+1}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{2}\cdot 4^n-\frac{2}{3}\cdot 3^n\right]\cdot z^{-n}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1}-2\cdot 3^{n-1})z^{-n}$$

17. 函数 $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ 能否在圆环域 $0<|z|<R(0<R<+\infty)$ 内展成洛朗级数?为什么?

解 不能.由于 $\tan\left(\frac{1}{z}\right)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}$,显然使 $\cos\frac{1}{z}=0$ 的点是 $\tan\frac{1}{z}$ 的奇点,这些点是 $\frac{1}{z}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,即 $z_k=\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

另一方面 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$,这说明对于任意环域 $0<|z|<R(0<R<+\infty)$ 均有无穷多个 $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ 的奇点,显然 $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ 在任一环域 $0<|z|<R$ 上都不解析.故在环形域 $0<|z|<R$ 上 $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ 不能展成洛朗级数.

18. 如果 k 为满足关系式 $k^2<1$ 的实数,证明:
$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2},\quad \sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

提示:将 $|z|>|k|$ 展开 $(z-k)^{-1}$ 成洛朗级数,并在展开式的结果中置 $z=e^{i\theta}$,再令两边的实部与实部相等,虚部与虚部相等.

证明 当 $|z|>|k|$ 时,有

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{k}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}$$

令 $z=e^{i\theta}$,则 $|z|=|e^{i\theta}|=1>|k|$,所以

$$\frac{1}{e^{i\theta}-k}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n(e^{i\theta})^{-(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cdot\cos(n+1)\theta-i\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta$$

另一方面,有

$$\frac{1}{e^{i\theta}-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{(\cos\theta-k)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}-i\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

于是有

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

19.如果 C 为正向圆周 $|z|=3$,求积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值,设 $f(z)$ 为

(1) $\frac{1}{z(z+2)}$;　(2) $\frac{z+2}{(z+1)z}$;　(3) $\frac{1}{z(z+1)^2}$;　(4) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$.

解　(1)

$$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)$$

又知 $\frac{1}{z(z+2)}$ 在环形区域 $2<|z|<+\infty$ 上处处解析,则有洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{z^n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{n-2}\cdot z^{-n}$$

另一方面,由洛朗定理,$f(z)$ 在环形域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上的洛朗展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中,$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$,其中 C 为环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内绕 z_0 的简单闭曲线.

显然,当 $n=-1$ 时,$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$,从而 $\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=2\pi i c_{-1}$.

由于 $\frac{1}{z(z+2)}$ 在环形区域 $2<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式中 z^{-1} 项的系数 $c_{-1}=0$, 故 $\oint_C\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z=0$.

(2)　$$\frac{z+2}{(z+1)z}=\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z(z+1)}=\frac{1}{z+1}+2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+1}$$

易见 $\frac{z+2}{(z+1)z}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 上处处解析,而其洛朗展开式为

$$\frac{z+2}{(z+1)z}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}-\cdots=\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

故
$$\oint_C\frac{z+2}{z(z+1)}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot c_{-1}=2\pi\mathrm{i}$$

式中，c_{-1} 为$\frac{z+2}{(z+1)z}$ 的洛朗展开式中z^{-1} 项的系数，已知 $c_{-1}=1$.

(3) 根据
$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n,\ |z|<1$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{n-1},|z|<1$$

又$\frac{1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}$，在圆环 $1<|z|<+\infty$ 内处处解析. 于是在 $1<|z|<+\infty$ 内

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{-(n+1)},1<|z|<+\infty$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot nz^{-(n+1)},1<|z|<+\infty$$

于是有
$$\frac{1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-n}+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot z^{-(n+1)}$$

$$=\frac{1}{z}-\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\cdots\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3(-1)^n(n-1)}{2}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nz^{-n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n3(n-1)}{2}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3n-1}{2}z^{-n}$$

可见，洛朗展开式中 z^{-1} 项的系数 $c_{-1}=0$，故有$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot c_{-1}=0$，其中$C:|z|=3$.

(4)
$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$$

易见在环形域 $2<|z|<+\infty$ 内，$\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 处处解析，将其展成洛朗级数

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2^{n+1}-1)}{z^{n+1}}$$

可见展开式中 z^{-1} 项的系数 $c_{-1} = 1$. 又曲线 $C: |z| = 3$ 含于区域$2 < |z| < \infty$，故 $\oint_C \frac{z}{(z+1)(z+2)} dz = 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i$.

20.试求积分$\oint_C \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz$ 的值，其中 C 为单位圆$|z| = 1$内的任意一条不经过原点的简单闭曲线.

解　$\sum_{n=-2}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$，易见它在环形域$0 < |z| < 1$内收敛且绝对收敛，从而沿$0 < |z| < 1$内任一曲线的积分可逐项进行，即

$$\oint_C \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz = \oint_C \frac{1}{z^2} dz + \oint_C \frac{1}{z} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C z^n dz$$
$$= \oint_C \frac{1}{z^2} dz + \oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z} dz$$

这里$\oint_C z^n dz = 0 (n = 0,1,2,\cdots)$是由柯西－古萨定理得来的，而$\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$是由柯西积分公式得来的.

当曲线 C 不过原点且不绕原点时，$\oint_C \frac{1}{z} dz = 0$.

当曲线 C 不过原点但绕原点一周时，$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$，$C$ 为正向简单闭曲线.

综上所述，

$$\oint_C \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz = \begin{cases} 0, & C\text{ 为不过原点且不绕原点的正向简单闭曲线} \\ 2\pi i, & C\text{ 为不过原点且绕原点的正向简单闭曲线} \end{cases}$$

同步训练题

1.单项选择题

(1) 若$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$ 在 $z = 3i$ 发散，则它必在(　　).

A. $z = -1$ 收敛　　　　B. $z = -2$ 发散

C. $z = -i$ 收敛　　　　D. 以上全不正确

(2) 设 $\alpha_n = \frac{(-1)^n + ni}{n+i} (n = 1,2,\cdots)$，则$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = ($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. i　　D. 不存在

(3) 下列级数中绝对收敛的级数为(　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right)$　　　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n}\right]$

C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$　　　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{2^n}$

(4) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$在$|z|<1$内的和函数为(　　).

A.$\ln(1+z)$　　B.$\ln(1-z)$　　C.$\ln\frac{1}{1+z}$　　D.$\ln\frac{1}{1-z}$

(5) 设函数$\frac{e^z}{\cos z}$的泰勒展开式为$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$,那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径$R=$(　　).

A. $+\infty$　　B. 1　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

(6) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1+\sqrt{3}i)^nz^{2n}$的收敛半径是(　　).

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(7) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$的收敛半径$R=$(　　).

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{e}$　　D. e

(8) 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的收敛半径$R>0$,则它(　　).

A. 在$|z|\leqslant R$上收敛　　B. 在$|z|\leqslant\frac{R}{2}$上一致收敛

C. 在$|z|<R$内一致收敛　　D. 在$|z|\leqslant R$上绝对收敛

(9) 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$在点$z=3$收敛,而在$z=1+2i$发散,则它的收敛半径$R=$(　　).

A. 2　　B. $+\infty$　　C. 3　　D. 0

(10) 洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-|n|}(z-3)^n$的收敛域为(　　).

A. $|z-3|<2$　　B. $2<|z-3|<+\infty$

C. $\frac{1}{2}<|z-3|<2$　　D. $\frac{1}{2}<|z-3|<+\infty$

(11) 设$f(z)$在圆环域$D:R_1<|z-z_0|<R_2$内解析,它在D内的洛朗展开式为$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$,$C$为$D$内围绕$z_0$的任一条正向简单光滑闭曲线,则$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz=$(　　).

A. $2\pi ic_{-1}$　　B. $2\pi ic_1$　　C. $2\pi ic_2$　　D. $2\pi i\frac{f''(z_0)}{2!}$

(12) 洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^n$的收敛域是(　　).

A. $0<|z|<1$　B. $\varnothing$(空集)　C. $\frac{1}{2}<|z|<1$　D. $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$

(13) 若$c_n=\begin{cases}3^n+(-1)^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 4^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$,则双边幂级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$的收敛域为(　　).

A. $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$　　B. $3<|z|<4$

C. $\frac{1}{4} < |z| < +\infty$　　　　D. $\frac{1}{3} < |z| < +\infty$

(14) 设函数 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 在以原点为中心的圆环内的洛朗展开式有 m 个,那么 $m =$ (　　).

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

2. 填空题

(1) 洛朗级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z-3)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{z}{3}\right)^n$ 的收敛圆环域是______.

(2) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$ 的收敛半径为______.

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n z^n$ 在______绝对收敛,在______发散.

(4) 设 $\frac{e^{\frac{z}{z-3}} \cos z}{(z-1)(z-\mathrm{i})\ln(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,则收敛半径 $R =$ ______.

(5) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$,在 $z = 4$ 收数而在 $z = 2 + 2\mathrm{i}$ 发散,则其收敛半径 $R =$ ______,该幂级数在______绝对收敛,在______一致收敛.

3. 判别下列级数的敛散性.若收数,指出是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \mathrm{i} n}{3^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}n}}{n}$.

4. Fibonacci 数列 $\{\alpha_n\}$ 定义为

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \cdots, \alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

证明: α_n 是一有理函数的泰勒系数,并确定 α_n 的表达式.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n (z-1)^{n(n+1)}$ 的收敛半径.

6. 求洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-2)^n$ 的收敛圆环,其中

$$c_0 = 1, c_n = \frac{n!}{n^n}, c_{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$$

7. 将函数 $\frac{\ln(2-z)}{z^2(z-1)}$ 在环形域 $0 < |z-1| < 1$ 内展成洛朗级数.

8. 设 t 为实数,试证明:当 $0 < |z| < +\infty$ 时, $e^{\frac{1}{2}t\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) z^n$,其中 $J_n(t)$ 由下式确定

$$J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta - n\theta) \mathrm{d}\theta, \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

9. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的和函数,并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 的值.

10. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n (|z| < R_1), g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n (|z| < R_2)$, 则对任意的

$r(0<r<R_1)$，在$|z|<rR_2$时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}f(\xi)\cdot g\left(\frac{z}{\xi}\right)\cdot\frac{d\xi}{\xi}$$

11.求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1}$的收敛半径，收敛圆及和函数.

12.解析函数$f(z)$满足微分方程$f'(z)=z\cdot f(z)$.求$f(z)$在$z=0$处的泰勒展开式，并求其收敛半径.

13.将函数$\frac{e^{z^2}}{\cos z}$展成关于z的幂级数(提示:用待定系数法).

同步训练题答案

1.单项选择题

解 (1)B (2)C (3)D (4)A (5)C (6)D (7)D (8)B (9)A (10)C (11)C (12)B (13)A (14)C

2.填空题

解 (1)$\frac{1}{2}<|z-3|<3$ (2)$\frac{1}{2}R$ (3)在圆域$|z|<\frac{\sqrt{2}}{2}$内 在$|z|>\frac{\sqrt{2}}{2}$内

(4)1 (5)2 $|z-2|<2$ $|z-2|\leqslant r,0<r<2$

3.**解** (1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\sin in}{3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin in|}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{2}|e^{-n}-e^n|}{3^n}$$

$$\frac{\frac{1}{2}n|e^{-n}-e^n|}{3^n}\leqslant\frac{n(e^{-n}+e^n)}{2\cdot 3^n}=\frac{n}{2\cdot(3e)^n}+\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^n$$

由比值收敛法可知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(3e)^n}$是收敛的.同理，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^n$也收敛.由比较收敛法知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2\cdot 3^n}|e^{-n}-e^n|$收敛.故原级数是绝对收敛的.

(2)由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的级数.另一方面数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$均收敛.因为

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right|=\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right|=\frac{\left|\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|2\sin\frac{1}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

而$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调趋于零，由狄里克雷判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$都收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}$收敛，且为条件收敛.

4.证明 根据已知,数列$\{\alpha_n\}$为一单调上升数列,且$\alpha_n \leqslant 2\alpha_{n-1}(n \geqslant 2)$,故有

$$0 < \alpha_n \leqslant 2\alpha_{n-1} \leqslant 4\alpha_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant 2^{n-1}\alpha_1 = 2^{n-1} \quad (n \geqslant 2)$$

从而$\sqrt[n]{|\alpha_n|} \leqslant 2(n > 2)$,于是以$\alpha_n$为系数的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$的收敛半径$R \geqslant \frac{1}{2}$.

设$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n, |z| < R$,由$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}(n = 2,3,\cdots)$得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-1}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}z^n$$

又
$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n - (\alpha_0 + \alpha_1 z) = f(z) - z$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-1}z^n = z\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-1}z^{n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n = z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n = z\cdot f(z)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}z^n = z^2\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}z^{n-2} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n = z^2\cdot f(z)$$

故$f(z) - z = z\cdot f(z) + z^2\cdot f(z)$,即$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$为一个有理函数,也就是说$\alpha_n$是一个有理函数$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$的泰勒系数,又因为

$$f(z) = \frac{z}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]z^n$$

该幂级数的收敛半径为$f(z)$的孤立奇点距原点的最短距离,即$R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,且有

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n = 0,1,2,3,\cdots$$

5.解 关于缺项幂级数收敛半径的求法虽不能套用公式$R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$或$\frac{1}{R} = \sqrt[n]{|c_n|}$,但仍可用比值法或根值法求收敛半径.

记$f_n(z) = \left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{\mathrm{i}}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n}\cdot\frac{(z-1)^{(n+1)(n+2)}}{(z-1)^{n(n+1)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot|z-1|^{2(n+1)}$$

$$= \begin{cases} 0, & |z-1| \leqslant 1 \\ \infty, & |z-1| > 1 \end{cases}$$

所以当且仅当$|z-1| \leqslant 1$时,幂级数绝对收敛,故收敛半径$R = 1$.

6.解　洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛区域是圆环 $r<|z-a|<R$，其内径和外径半径 r 和 R 分别由幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径来确定.

对于洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-2)^n$

$$c_{-n} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots),\ c_n=\frac{n!}{n^n},\ c_0=1$$

令 $\xi=(z-2)^{-1}$，幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-1}(z-2)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\xi^n$ 的收敛半径

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{-n}}{c_{-(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{n+1}{n}+\cdots+(n+1)}=1$$

而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n$ 的收敛半径为

$$R_2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

故所求洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-2)^n$ 的收敛圆环为 $1<|z-2|<\mathrm{e}$.

7.解　$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\quad(|z-1|<1)$

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n\quad(|z-1|<1)$$

$$\ln(2-z)=\ln(1-(z-1))=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1}\quad(|z-1|<1)$$

可知，当 $0<|z-1|<1$ 时，有

$$\frac{\ln(2-z)}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\ln(2-z)$$

$$=\frac{-1}{z-1}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1}\right]$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{n-k+1}\right](z-1)^n$$

这里用到了幂级数的乘法公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right]z^n$$

8.解 对于实数 t,由于函数 $e^{\frac{1}{2}t\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 在复平面内于除 $z=0$ 点外解析,所以(由洛朗定理)函数在 $0<|z|<+\infty$ 内可展成洛朗级数,即

$$e^{\frac{1}{2}t\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$$

其中 $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^{\frac{1}{2}t\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{n+1}}dz\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots;0<r<+\infty)$$

显然 c_n 的值依赖于 t,记 $c_n=J_n(t)$.

下面只需证明 $c_n=(-1)^nc_{-n}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)d\theta$.

取 $r=1$.由复积分计算公式有

$$\begin{aligned}J_n(t)=c_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{1}{2}t(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}\cdot e^{-i(n+1)\theta}\cdot ie^{i\theta}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{1}{2}t(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}\cdot e^{-in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\sin\theta-in\theta}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)d\theta\end{aligned}$$

由于 $\cos(t\sin\theta-n\theta)$ 与 $\sin(t\sin\theta-n\theta)$ 分别是 θ 的偶函数与奇函数,所以

$$J_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)d\theta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

但若令 $\theta=\pi-\varphi$,则

$$\begin{aligned}J_{-n}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta+n\theta)d\theta\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\cos[t\sin(\pi-\varphi)+n(\pi-\varphi)]d\varphi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[(t\sin\varphi-n\varphi)+n\pi]d\varphi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\varphi-n\varphi)\cdot(-1)^nd\varphi=(-1)^nJ_n(t)\end{aligned}$$

故 $$J_n(t)=(-1)^nJ_{-n}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)d\theta\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

注 ① 在用复积分计算公式求函数沿正向圆周积分时,通常积分限取为由 0 到 2π,但有时为了利用奇偶函数的积分性质,也可取积分限为由 $-\pi$ 到 π.

② 题中 $J_n(t)$ 通常被称为 n 阶的第一类贝赛尔(Bessel)函数,函数 $e^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 称为 $J_n(t)$ 的母函数(或生成函数).

9.解 易知该幂级数的收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1$,在收敛圆 $|z|<1$ 内,设其和函数为 $f(z)$,即 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n\quad(|z|<1)$.

于是利用幂级数的逐项求导性,得

$$f(z)=z\left(\sum_{n=1}^{\infty}nz^n\right)'=z\left[z\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'\right]'=z\left[z\left(\frac{1}{1-z}\right)'\right]'=z\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right]'=\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

此时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$.

10.**解** 因 $0<r<R_1$，$|\xi|=r$，当 $|z|<rR_2$ 时，$\left|\dfrac{z}{\xi}\right|<R_2$. 由题意有

$$g\left(\frac{z}{\xi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(\frac{z}{\xi}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{1}{\xi^n}z^n$$

进而
$$\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot g\left(\frac{z}{\xi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\cdot\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}z^n$$

逐项积分

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi}g\left(\frac{z}{\xi}\right)d\xi&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}z^n d\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta_n z^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n\end{aligned}$$

这是由于
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n(|z|<R_1)$$

此时
$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi(0<r<R_1)$$

11.**解** 显然幂级数收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$. 故收敛圆为 $|z-3|=1$，于是幂级数在 $|z-3|<1$ 内收敛，令其和函数为 $f(z)$，则

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1}=(z-3)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^n\\&=(z-3)\cdot\Big[\sum_{n=0}(z-3)^{n+1}\Big]'=(z-3)\cdot\left[\frac{1}{1-(z-3)}-1\right]'\\&=\frac{z-3}{(4-z)^2}\quad(|z-3|<1)\end{aligned}$$

12.**解** 因解析函数 $f(z)$ 满足微分方程 $f'(z)=z\cdot f(z)$，则 $f(z)$ 的 n 阶导数满足递推公式

$$f^{(n)}(z)=(n-1)f^{(n-2)}(z)+z\cdot f^{(n-1)}(z)\quad(n\geqslant 2)$$

用数学归纳法可证得，当 $n=2$ 时，有

$$f^{(2)}(z)=(f'(z))'=f(z)+z\cdot f'(z)$$

而
$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(z)&=(f^{(n)}(z))'=[(n-1)f^{(n-2)}(z)+zf^{(n-1)}(z)]'\\&=(n-1)[f^{(n-2)}(z)]'+f^{(n-1)}(z)+z\cdot[f^{(n-1)}(z)]'\\&=nf^{(n-1)}(z)+z\cdot f^{(n)}(z)\end{aligned}$$

显然递推公式成立.

这样由 $f(0)$，$f'(0)=0$ 及 $f^{(n)}(0)=(n-1)f^{(n-2)}(0)$，可得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)f(0), & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}(k=0,1,2,\cdots)$$

则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{(2k)!}z^{2k}\cdot f(0)\\&=f(0)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot4\cdots2k}z^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(0)}{(2k)!!}z^{2k}\end{aligned}$$

其收敛半径 $R=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right|\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2\cdot4\cdots2k\cdot(2k+2)}{2\cdot4\cdots2k}\right)^{\frac{1}{2}}=\infty$.

13.**解**　由于函数$\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}$有距原点最近的奇点$z=\pm\dfrac{\pi}{2}$,其到原点的距离就是函数在原点处幂级数展开式的收敛半径,即 $R=\dfrac{\pi}{2}$,因此幂级数的收敛范围为$|z|<\dfrac{\pi}{2}$.

另一方面,由

$$e^{z^2}=1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots+\frac{1}{n!}z^{2n}+\cdots\quad(|z|<+\infty)$$

$$\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\quad(|z|<+\infty)$$

及幂级数除法的意义,可设

$$\frac{e^{z^2}}{\cos z}=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots\quad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

注意:e^{z^2} 与 $\cos z$ 均为 z 的偶函数,其展开式中不含 z^{2n+1} 项,故有 $c_1=c_3=\cdots=c_{2n+1}=\cdots=0$,于是 $e^{z^2}=\cos z\cdot(c_0+c_2z^2+\cdots+c_{2n}z^{2n}+\cdots)$,即

$$\begin{aligned}1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots&=(c_0+c_2z^2+\cdots+c_{2n}z^{2n}+\cdots)\\&\quad\cdot\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)\\&=c_0+\left(c_2-\frac{c_0}{2!}\right)z^2+\left(c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!}\right)z^4+\cdots\end{aligned}$$

比较同项系数,得 $c_0=1,c_2=\dfrac{3}{2},c_4=\dfrac{29}{24},\cdots$,故

$$\frac{e^{z^2}}{\cos z}=1+\frac{3}{2}z^2+\frac{29}{24}z^4+\cdots\quad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

第5章 留　　数

典型题解析

例5-1 函数$f(z)=\dfrac{(e^z-1)^3(z+4)^4}{(\cos\pi z-1)^2}$在扩充复平面内有些什么类型的奇点?如果是极点,求出它的级.

分析 考察函数的奇点类型,一般先确定函数的奇点(不解析点),然后根据每一类孤立奇点的特征来判断类型.

解 易知函数$f(z)$除使分母为零的点$z=0,\pm2,\pm4,\cdots$外在$0<|z|<+\infty$内解析.又由于$(\cos\pi z-1)'=-\pi\sin\pi z$,在$z=0,\pm2,\pm4,\cdots$处均为零,$(\cos\pi z-1)''=-\pi^2\cos\pi z$,在$0\pm2,\pm4,\cdots$处均不为零,所以这些点是函数$\cos\pi z-1$的二级零点,从而是分母$(\cos\pi z-1)^2$的四级零点.这样,这些点中除去$z=0$和$-4$外都是$f(z)$的四级极点.

因$z=0$是e^z-1的一级零点,从而是$(e^z-1)^3$的三级零点.又由它是分母的四级零点,可知$z=0$是函数$f(z)$的一级极点.

至于$z=-4$.因为

$$\lim_{z\to-4}f(z)=\lim_{z\to-4}\frac{(e^z-1)^3(z+4)^4}{(\cos\pi z-1)^2}=\lim_{z\to-4}(e^z-1)^3\cdot\frac{(z+4)^4}{\left(2\sin^2\dfrac{\pi z}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{z\to-4}\frac{(e^z-1)^3}{4}\cdot\left(\frac{z+4}{\sin\dfrac{\pi z}{2}}\right)^4$$

$$=\frac{(e^{-4}-1)^3}{4}\cdot\lim_{\xi\to0}\left(\frac{\pi\xi}{\sin\dfrac{\pi\xi}{2}}\right)^4\cdot\frac{1}{\pi^4}\quad(令\ \xi=z+4)$$

$$=\frac{(e^{-4}-1)^3}{4\pi^4}$$

所以$z=-4$为$f(z)$的可去奇点.

关于$z=\infty$,因为$f(z)$的四级极点$z=\pm k(k=6,8,\cdots)$以∞为极限(当$k\to\infty$),所以∞不是$f(z)$的孤立奇点.

例5-2 求下列函数在所有孤立奇点处的留数:(1) $\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}$;(2) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$.

分析 对于复变函数$f(z)$在其有限孤立奇点a处的留数$\mathrm{Res}[f(z),a]$的计算,最基本的方法就是寻求$f(z)$在孤立奇点a的去心邻域的洛朗展开式中负幂项$(z-a)^{-1}$的系数c_{-1}.另外也可根据每一类孤立奇点的特征来判别类型,用公式或规则计算留数(特别适合于极点的情形).

对于无穷远点的留数$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$,第一,利用$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内洛朗展开式中

负幂项 z^{-1} 的系数 c_{-1}，可得 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$；或者可变求 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的留数为求函数 $-\dfrac{1}{z^2}f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 在 $z=0$ 处的留数，即

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\mathrm{Res}\left[-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

当 $f(z)$ 在扩充复平面上有有限个奇点时，还可用公式 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$ 来求，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $f(z)$ 的 n 个有限孤立奇点.

解　(1) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}$ 有奇点 $z=0,\infty,\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 显然 $z=0$ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点，$\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$ 为 $\cos\dfrac{1}{z}$ 的一级零点，所以 $\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$ 为 $f(z)=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}$ 的一级极点. 由公式

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cos\frac{1}{z}},\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right]=\lim_{z\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1}}\left[z-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1}\right]\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}=\left.\frac{1}{\left(\cos\frac{1}{z}\right)'}\right|_{z=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1}=\frac{(-1)^k}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则由公式

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

可得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cos\frac{1}{z}},\infty\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\cos z},0\right]=-\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{\cos z}\right)'=0$$

$$\left(z=0\text{ 是}\frac{1}{z^2\cos z}\text{ 的二级极点}\right)$$

(2) 函数 $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$ 以 ∞ 及方程 $1+z^n=0$ 的根

$$a_k=e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

为孤立奇点. a_k 为 $1+z^n$ 的一级零点，故为 $f(z)$ 的一级极点. 由规则 Ⅱ

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},a_k\right]=\left.\frac{z^{2n}}{(1+z^n)'}\right|_{z=a_k}=-\frac{1}{n}a_k\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=-\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},a_k\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\begin{cases}-1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

例 5－3　设 $f(z)$ 以 a 为简单极点，且在 a 处的留数等于 c_{-1}，证明：

$$\lim_{z\to a}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{1}{|c_{-1}|}$$

证明　由 $f(z)$ 以 a 为简单极点(即一级极点)，故 $f(z)$ 在 $z=a$ 的去心邻域内有洛朗展开式

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)+\cdots\quad (其中\ c_{-1}\neq 0)$$

记 $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-a}$,这里 $g(a)=c_{-1}$,$g(z)$ 在点 $z=a$ 处解析.于是

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{\left|\left(\dfrac{g(z)}{z-a}\right)'\right|}{1+\left|\dfrac{g(z)}{z-a}\right|^2}=\frac{|g'(z)(z-a)-g(z)|}{|z-a|^2+|g(z)|^2}$$

则
$$\lim_{z\to a}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{|g(a)|}{|g(a)|^2}=\frac{1}{|g(a)|}=\frac{1}{|c_{-1}|}$$

例 5-4 若 n 为自然数,函数 $f(z)=\dfrac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$ 在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 处的留数分别为 A 与 B.试证:

$$A=(-1)^{n+1}\frac{1}{e}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\cdots+(-1)^{n-2}\cdot\frac{1}{2!}$$

$$A+B+(-1)^n\frac{1}{e}=0$$

证明 函数 $f(z)$ 在扩充复平面上的所有奇点为 $z=0,z=-1$ 及 $z=\infty$.这里 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的一级极点,故

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\left.\frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)'}\right|_{z=-1}=(-1)^n e^{-1}$$

$$B=\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{(1+z)z^{n+1}},0\right]$$

$$=-\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{1+z}\right)^{(n)}=-\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{2!}\right]$$

又由
$$\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$$

所以必有
$$A=(-1)^{n+1}\frac{1}{e}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{2!}$$

例 5-5 利用留数计算下列各积分:

(1)$\displaystyle\oint_{|z|=R}\frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz$,($n<R^3<n+1$,$n$ 为自然数);

(2)$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-i)^{10}(z+1)(z-3)}dz$.

分析 利用留数定理计算复积分,一般先求出被积函数在积分路径内部的孤立奇点,判断类型,计算出奇点处的留数,然后应用留数定理即可.但若积分路径所围区域内部孤立奇点处留数的计算比较困难,也可考察被积函数在积分路径外部孤立奇点的留数计算,此时被积函数在扩充复平面内有有限个奇点,即被积函数 z 没有非孤立奇点的情形.

解 (1)被积函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}$ 在 $|z|=R$ 内的孤立奇点为 $z=0$ 以及方程 $z^3=k$($k=\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n$)的根 z_k 共 $6n$ 个,于是这 $6n+1$ 个孤立奇点,经检验均为 $f(z)$ 的一级极点.由公式

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^3}{e^{2\pi iz^3}-1}=\frac{1}{2\pi i}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k]=\lim_{z\to z_k}\frac{z^2}{(e^{2\pi iz^3}-1)'}=\frac{1}{6\pi ie^{2\pi iz_k^3}}=\frac{1}{6\pi i}$$

于是
$$\oint_{|z|=R}\frac{z^2}{e^{2\pi iz^3}-1}dz=2\pi i\left[\frac{1}{2\pi i}+6n\cdot\frac{1}{6\pi i}\right]=2n+1$$

(2) 被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^{10}(z+1)(z-3)}$ 一共有四个孤立奇点: $i,-1,3,\infty$,其中前两个奇点含于 $|z|=2$ 内. 然而要计算这两个奇点的留数之和是很繁琐的,这是因为 $f(z)$ 是 $z=i$ 的十级极点,所以由函数 $f(z)$ 在扩充复平而上所有奇点处留数之和为零,可知

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-i)^{10}(z+1)(z-3)}dz=-\{\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\mathrm{Res}[f(z),3]\}$$

$$=-\left\{-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]+\lim_{z\to3}(z-3)f(z)\right\}$$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1-iz)^{10}(1+z)(1-3z)},0\right]-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3-i)^{10}}$$

$$=-\frac{1}{4(3-i)^{10}}$$

例 5-6 设 m 为实数, $-1<a<1$,试证明:

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{m\cos\theta}}{1-2a\sin\theta+a^2}[\cos(m\sin\theta)-a\sin(m\sin\theta+\theta)]d\theta=2\pi\cos ma$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{m\cos\theta}}{1-2a\sin\theta+a^2}[\sin(m\sin\theta)+a\cos(m\sin\theta+\theta)]d\theta=2\pi\sin ma$$

分析 利用留数定理计算区间 $[0,2\pi]$ 上实三角有理函数积分的方法是:令 $z=e^{i\theta}$,利用欧拉公式将它转化为沿闭路径 $|z|=1$ 上的复积分,然后用留数定理计算之.

证明 考虑闭路积分 $I=\oint_{|z|=1}\dfrac{e^{mz}}{a+iz}dz$ 沿圆周 $|z|=1$ 的正向. 由于 $-1<a<1$,利用留数定理,有

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{e^{mz}}{a+iz}dz=2\pi e^{mai}=(\cos ma+i\sin ma)2\pi=i2\pi\sin ma+2\pi\cos ma$$

再用复积分的计算方法,令 $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,有

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{e^{m(\cos\theta+i\sin\theta)}\cdot ie^{i\theta}}{a-\sin\theta+i\cos\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{m\cos\theta}\cdot e^{im\sin\theta}\cdot e^{i\theta}\cdot(a-\sin\theta-i\cos\theta)}{a^2-2a\sin\theta+1}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{m\cos\theta}}{a^2-2a\sin\theta+1}\cdot[e^{i(\theta+m\sin\theta)}(a-ie^{-i\theta})]d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{m\cos\theta}}{a^2-2a\sin\theta+1}[a\cdot e^{i(\theta+m\sin\theta)}-ie^{im\sin\theta}]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{m\cos\theta}}{a^2-2a\sin\theta+1}\Big\{[\cos(m\sin\theta)-a\sin(\theta+m\sin\theta)]$$

$$+i[\sin(m\sin\theta)+a\cos(m\sin\theta+\theta)]\Big\}d\theta$$

所以 $\mathrm{Re}(I) = 2\pi\cos ma$

$$\mathrm{Re}(I) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{m\cos\theta}(\cos(m\sin\theta) - a\sin(\theta + m\sin\theta))}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}d\theta$$

$$\mathrm{Im}(I) = 2\pi\sin ma$$

$$\mathrm{Im}(I) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{m\cos\theta}(\sin(m\sin\theta) + a\cos(m\sin\theta + \theta))}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}d\theta$$

故所要证明的结论成立.

例 5－7 计算积分$\oint_{|z|=4} \frac{z^9}{z^{10} - 1}dz$.

分析 利用对数留数定理计算积分,即$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N - P)$.

解 令 $f(z) = z^{10} - 1$,则 $f(z)$ 在 $|z| = 4$ 上解析且不为零.又 $f(z)$ 在 $|z| = 4$ 的内部解析,及有 10 个零点(一级的),但没有极点,故 $N = 10, P = 0$.于是有

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^9}{z^{10} - 1}dz = \frac{1}{10}\oint_{|z|=4} \frac{10z^9}{z^{10} - 1}dz = \frac{1}{10} \cdot 2\pi i \cdot (10 - 0) = 2\pi i$$

例 5－8 求方程 $z^2 + 2 - 3z = 0$,在$|z| = \frac{3}{2}$ 内根的个数.

分析 我们可用对数留数定理、辐角原理、路西定理来证明,这里只给出用对数留数定理证明的方法,其他的同学们自行思考.

证明 用对数留数定理.令 $f(z) = z^2 - 3z + 2$,则 $f'(z) = 2z - 3$ 且 $f(z)$ 在 $|z| = \frac{3}{2}$ 上不为零及 $f(z)$ 在圆 $|z| = \frac{3}{2}$ 内处处解析,从而极点个数 $P = 0$,那么由对数留数定理,有

$$N = N - P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{2z - 3}{(z - 2)(z - 1)}dz$$

$$= \left(\frac{2z - 3}{z - 2}\right)\bigg|_{z=1} = 1$$

故在圆 $|z| = \frac{3}{2}$ 内只有方程 $f(z) = 0$ 的一个根.

书后习题解析

1.下列函数有些什么奇点?如果是极点,指出它的级:

(1) $\frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$;　　(2) $\frac{\sin z}{z^3}$;　　(3) $\frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$;

(4) $\frac{\ln(z + 1)}{z}$;　　(5) $\frac{z}{(1 + z^2)(e^{\pi z} + 1)}$;　　(6) $e^{\frac{1}{z-1}}$;

(7) $\frac{1}{z^2(e^z - 1)}$;　　(8) $\frac{z^{2n}}{1 + z^n}$(n 为正整数);　　(9) $\frac{1}{\sin z^2}$.

解 (1) 令 $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$,则 $f^{-1}(z) = z(z^2 + 1)^2 = z(z + i)^2(z - i)^2$,以 $z = 0$ 为一级零点,$z = \pm i$ 为二级零点,所以 $f(z)$ 有奇点:0, $\pm i$,并且由零点与极点的关系可知 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的一级极点,$z = \pm i$ 为 $f(z)$ 的二级极点.

(2)$z=0$显然是$\frac{\sin z}{z^3}$的奇点,又在$z=0$的去心邻域$0<|z|<\infty$内$\frac{\sin z}{z^3}$解析,且有洛朗展开式$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}z^2-\cdots$,所以$z=0$为$\frac{\sin z}{z^3}$的二级极点.

(3) 函数 $\quad \frac{1}{z^3+1-z^2-z}=\frac{1}{z^2(z-1)-(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$
有奇点$1,-1$.且$z=1$是原函数的二级极点,$z=-1$是原函数的一级极点.

(4) 由$\ln(z+1)=\ln|z+1|+\mathrm{i}\arg(z+1)$及"$\arg z$在原点及负实轴上不连续"可知:$\ln(z+1)$在负实轴上区间$(-\infty,-1]$中每一点不连续,因此也不解析,除此之外是解析函数.显然$(-\infty,-1]$上的点都是$\ln(z+1)$的非孤立奇点,自然也是$\frac{\ln(z+1)}{z}$的非孤立奇点.此外$z=0$为$\frac{\ln(z+1)}{z}$的奇点,且在其去心邻域$0<|z|<1$内有洛朗展开式

$$\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots\right)=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\cdots$$

所以$z=0$为$\frac{\ln(z+1)}{z}$的可去奇点.

(5) 分母$(1+z^2)(\mathrm{e}^{\pi z}+1)$的零点$\pm\mathrm{i}$及方程$\mathrm{e}^{\pi z}+1=0$的根$z_k=(2k+1)\mathrm{i}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,都是原函数的奇点.我们还注意到

$$(\mathrm{e}^{\pi z}+1)'\Big|_{z=z_k}=\pi\mathrm{e}^{\pi z_k}\neq0$$

故$z_k(k=0,\pm1,\cdots)$是$\mathrm{e}^{\pi z}+1$的一级零点,同时,当$k=0,-1$时,$z_0=\mathrm{i},z_{-1}=-\mathrm{i}$.这样$\pm\mathrm{i}$为分母$(1+z^2)(\mathrm{e}^{\pi z}+1)$的二级零点.又$z_k(k=0,\pm1,\cdots)$都不是分子的零点.于是有结论:$\pm\mathrm{i}$是原函数的二级极点;$z_k=(2k+1)\mathrm{i}\ (k=1,\pm2,\cdots)$是原函数的一级极点.

(6) 显然$z=1$是$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$的奇点,且在$z=1$的去心邻域$0<|z-1|<+\infty$内,$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$的洛朗展开式为

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots$$

含有无穷多个$z-1$的负幂项,因此$z=1$是$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$的本性奇点.

(7) 令$f(z)=z^2(\mathrm{e}^z-1)$,则$f(z)$的零点为$z=0$及方程$\mathrm{e}^z-1=0$的根$z_k=2k\pi\mathrm{i}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.我们看到$(\mathrm{e}^z-1)'\Big|_{z=z_k}=\mathrm{e}^{z_k}\neq0$.故$z_k=2k\pi\mathrm{i}$是$\mathrm{e}^z-1$的一级零点.而且当$k=0$时$z_0=0$.于是有$z=0$是$f(z)$的三级零点,$z_k=2k\pi\mathrm{i}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$是$f(z)$的一级零点,它们都是原函数的孤立奇点,且$z=0$为三级极点,$z_k=2k\pi\mathrm{i}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$为一级极点.

(8) 若分母为零,即$1+z^n=0$,解方程得

$$z_k=(\sqrt[n]{-1})_k=\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{n}\mathrm{i}}(k=0,1,2,\cdots,n-1)\text{且}(1+z^n)'\Big|_{z=z_k}=nz_k^{n-1}\neq0$$

即$z_k(k=0,1,\cdots,n-1)$为$1+z^n$的n个一级零点,且z_k不是分子z^{2n}的零点.于是$z_k=\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{n}\mathrm{i}}(k=0,1,\cdots,n-1)$为函数$\frac{z^{2n}}{1+z^n}$的一级极点.

(9) 由 $\sin z^2 = z^2 - \frac{1}{3!}z^6 + \frac{1}{5!}z^{10} - \cdots = z^2\left(1 - \frac{1}{3!}z^4 + \frac{1}{5!}z^8 - \cdots\right)$

可知 $z = 0$ 是 $\sin z^2$ 的二级零点,也是函数$\frac{1}{\sin z^2}$ 的二级极点.

另一方面 $\sin z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

当 $k = 1,2,3,\cdots$ 时,$z^2 = k\pi$ 可得 $z = \pm\sqrt{k\pi}$;

当 $k = -1, -2, -3, \cdots$ 时,$z^2 = k\pi$ 得 $z = \pm \mathrm{i}\sqrt{|k|\pi}$.

而$(\sin z^2)' = 2z\cos z^2$ 在

$$z = \pm\sqrt{k\pi}(k = 1,2,\cdots) \text{ 或 } z = \pm \mathrm{i}\sqrt{|k|\pi}(k = -1, -2, -3, \cdots)$$

处不为零,所以 $\pm\sqrt{k\pi}, \pm\sqrt{k\pi}\mathrm{i}(k = 1,2,3,\cdots)$ 均为 $\sin z^2$ 的一级零点,也为$\frac{1}{\sin z^2}$ 的一级极点.

综上所述,函数$\frac{1}{\sin z^2}$ 有奇点 $0, \pm\sqrt{k\pi}, \pm \mathrm{i}\sqrt{k\pi}\ (k = 1,2,\cdots)$,其中 0 为二级极点,$\pm\sqrt{k\pi}, \pm \mathrm{i}\sqrt{k\pi}(k = 1,2,3,\cdots)$ 为一级极点.

2.求证:如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m > 1)$ 级零点,那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

证明 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点,故 $f(z) = (z - z_0)^m\varphi(z)$,其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析,且 $\varphi(z_0) \neq 0$.而

$$\begin{aligned} f'(z) &= [(z - z_0)^m\varphi(z)]' = m(z - z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z - z_0)^m\varphi'(z) \\ &= (z - z_0)^{m-1}[m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)] \end{aligned}$$

令 $g(z) = m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)$,可见 $g(z)$ 在 z_0 处解析,且 $g(z_0) = m\varphi(z_0) \neq 0$,所以 $f'(z) = (z - z_0)^{m-1}g(z)$,$g(z)$ 在 z_0 处解析,且 $g(z_0) \neq 0$,可见 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

3.验证:$z = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\mathrm{ch}z$ 的一级零点.

证明 $\mathrm{ch}z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})$,而 $\mathrm{ch}\frac{\pi \mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,所以 $z = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\mathrm{ch}z$ 的零点.而$(\mathrm{ch}z)' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})$,于是

$$(\mathrm{ch}z)'\Big|_{z=\frac{\pi \mathrm{i}}{2}} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}) = \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i} \neq 0$$

故 $z = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\mathrm{ch}z$ 的一级零点.

4.$z = 0$ 是函数$(\sin z - \mathrm{sh}z - 2z)^{-2}$ 的几级极点?

解 由于 $\sin z + \mathrm{sh}z - 2z$ 在复平面上解析,所以

$$\begin{aligned} \sin z + \mathrm{sh}z - 2z &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1} - 2z \\ &= \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{9!}z^9 - \cdots\right) \\ &\quad + \left(z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{9!}z^9 + \cdots\right) - 2z \\ &= \frac{2}{5!}z^5 + \frac{2}{9!}z^9 + \cdots = z^5\left(\frac{2}{5!} + \frac{2}{9!}z^4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

显然 $z=0$ 是 $\sin z+\mathrm{sh}z-2z$ 的5级零点，故为 $(\sin z+\mathrm{sh}z-2z)^2$ 的10级零点，由零点与极点的关系可知 $z=0$ 是函数 $(\sin z+\mathrm{sh}z-2z)^{-2}$ 的10级极点.

5.如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}(\text{或两端均为 }\infty)$$

证明　设 z_0 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 m 级零点和 n 级零点，则在 z_0 的邻域内有

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi_1(z),\quad g(z)=(z-z_0)^n\varphi_2(z)$$

其中 $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，且 $\varphi_1(z_0)\neq 0,\varphi_2(z_0)\neq 0$.于是

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}\tag{5-1}$$

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{m\varphi_1(z)+(z-z_0)\varphi_1'(z)}{n\varphi_2(z)+(z-z_0)\varphi_2'(z)}\tag{5-2}$$

由式(5-1)和式(5-2)可知：

当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=0=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$；

当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2(z_0)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$；

当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\infty=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$.

结论得证.

6.设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点(零点)，那么下列三个函数：(1) $\varphi(z)\cdot\psi(z)$；　(2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$；　(3) $\varphi(z)+\psi(z)$，在 $z=a$ 处各有什么性质？

解　设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点，则在 $z=a$ 的去心邻域内有

$$\varphi(z)=\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^m},\quad \psi(z)=\frac{\psi_1(z)}{(z-a)^n}\tag{5-3}$$

其中 $\varphi_1(z),\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 点解析，且 $\varphi_1(a)\neq 0,\psi_1(a)\neq 0$.

(1) 由式(5-3)可知 $\varphi(z)\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)\psi_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$，其中 $\varphi_1(z)\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 点解析，且 $\varphi_1(a)\psi_1(a)\neq 0$.故 $z=a$ 为 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点.

(2) 由式(5-3)可知 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}}{(z-a)^{m-n}}$，其中 $\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$ 在 $z=a$ 解析且 $\dfrac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}\neq 0$.于是，有：

当 $m>n$ 时，$z=a$ 为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 级极点；当 $m=n$ 时，$z=a$ 为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的可去奇点；当 $m<n$ 时，$z=a$ 为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $n-m$ 级零点.

(3) 由式(5-3)可知

$$\varphi(z)+\psi(z)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_1(z)+(z-a)^{m-n}\psi_1(z)}{(z-a)^m}, & m>n\\ \dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}, & m=n\\ \dfrac{(z-a)^{n-m}\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^n}, & m<n\end{cases}$$

于是,当 $m>n$ 时,$\varphi(z)+\psi(z)$ 的表达式 $\dfrac{\varphi_1(z)+(z-a)^{m-n}\psi_1(z)}{(z-a)^m}$ 的分子 $\varphi_1(z)+(z-a)^{m-n}\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 处解析,并且 $z=a$ 时,分子 $\varphi_1(a)\neq 0$.从而可知 $z=a$ 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点.

当 $m=n$ 时,$\varphi(z)+\psi(z)$ 的分子为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$,显然 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 处解析,且当 $z=a$ 时,$\varphi_1(a)+\psi_1(a)\neq 0$,$z=a$ 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点.

但若 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)=0$,则 $z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的低于 m 级的极点或可去奇点.此时要根据 $z=a$ 为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 的 l 级零点来判断.设 $z=a$ 为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 的 l 级零点,即 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)=(z-a)^l h(z)$,其中 $h(z)$ 在 $z=a$ 解析,$h(a)\neq 0$.于是 $\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}=(z-a)^{l-m}h(z)$.

当 $l<m$ 时,$z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $m-l$ 级极点;当 $l>m$ 时,$z=a$ 时 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $l-m$ 级零点(解析点);当 $l=m$ 时,$z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的可去奇点(解析点).

所以当 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)=0$ 时,$z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的低于 m 级的极点或可去奇点(解析点).

当 $m<n$ 时,$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子 $(z-a)^{n-m}\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 点解析,且 $z=a$ 时,分子的值为 $\psi_1(a)\neq 0$,从而知 $z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 n 级极点.

当 $z=a$ 为 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的 m 级与 n 级零点时,在点 a 的邻域内有

$$\varphi(z)=(z-a)^m\varphi_1(z),\quad \psi(z)=(z-a)^n\psi_1(z) \tag{5-4}$$

其中 $\varphi_1(z),\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 解析,且 $\varphi_1(a)\neq 0,\psi_1(a)\neq 0$.

(1) 把式(5-4)代入得 $\varphi(z)\psi(z)=(z-a)^{m+n}\varphi_1(z)\psi_1(z)$.这里 $\varphi_1(z)\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 解析,且 $\varphi_1(a)\psi_1(a)\neq 0$,故 $z=a$ 是 $\varphi(z)\cdot\psi(z)$ 的 $m+n$ 级零点.

(2) 把式(5-4)代入得 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=(z-a)^{m-n}\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$,其中 $\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$ 在 $z=a$ 解析,且 $\dfrac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}\neq 0$.

当 $m>n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 级零点;当 $m=n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的解析点或可去奇点;当 $m<n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $n-m$ 级极点.

(3) 把式(5-4)代入,得

$$\varphi(z)+\psi(z)=\begin{cases}(z-a)^m(\varphi_1(z)+(z-a)^{n-m}\psi_1(z)), & m<n\\ (z-a)^m(\varphi_1(z)+\psi_1(z)), & m=n\\ (z-a)^n((z-a)^{m-n}\varphi_1(z)+\psi_1(z)), & m>n\end{cases}$$

我们看到当 $m<n$ 时,$\varphi_1(z)+(z-a)^{n-m}\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 解析,且该点处值为 $\varphi_1(a)\neq$

0,所以此时 $z=a$ 是$\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级零点.

当 $m=n$ 时,$z=a$ 是$\varphi(z)+\psi(z)$ 的不低于 m 级零点;当 $m>n$ 时,$z=a$ 是$\varphi(z)+\psi(z)$ 的 n 级零点.

7.函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$,在 $z=1$ 处有一个二级极点,这个函数又有洛朗展开式

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},\quad |z-1|>1$$

所以"$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点",其中不含$(z-1)^{-1}$项,因此 $\mathrm{Res}[f(z),1]=0$,这些说法对吗?

解　这些说法不对,在利用洛朗展开式判定孤立奇点的类型和确定其留数时,只能用函数 $f(z)$ 在奇点 $z=z_0$ 的去心邻域内的洛朗展开式.对于函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$,考虑奇点 $z=1$ 时,只应考虑 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<1$ 内的洛朗展开式

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2}(1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots)$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2\cdots\quad(0<|z-1|<1)$$

这样,才有正确的结论:$z=1$ 为$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 的二级极点,$\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{z(z-1)^2},1\right]=-1$.

8.求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数:

(1) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$;　(2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$;　(3) $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$;　(4) $\dfrac{z}{\cos z}$;

(5) $\cos\dfrac{1}{1-z}$;　(6) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$;　(7) $\dfrac{1}{z\sin z}$;　(8) $\dfrac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$.

解　(1) 函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{z+1}{z(z-2)}$ 有一级极点:$z=0,z=2$,其留数为

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}z\cdot f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z+1}{z-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to2}(z-2)\cdot f(z)=\lim_{z\to2}\frac{z+1}{z}=\frac{3}{2}$$

(2) 将函数 $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内展成洛朗展开式

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left\{1-\left[1+2z+\frac{1}{2!}(2z)^2+\frac{1}{3!}(2z)^3+\frac{1}{4!}(2z)^4+\cdots\right]\right\}$$

$$=\frac{-2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3z}-\frac{2}{3}-\frac{2^5}{5!}z-\cdots$$

可见 $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的三级极点,且 $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{4}{3}$.

(3) 函数 $f(z)=\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}=\dfrac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}$ 有三级极点 $\pm i$,其留数分别为

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}[(z-i)^3f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{-12z^2+12}{(z+i)^5}=-\frac{3}{8}i$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-\mathrm{i}]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\mathrm{i}}[(z+\mathrm{i})^3f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-\mathrm{i}}\left[\frac{1+z^4}{(z-\mathrm{i})^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{-12z^2+12}{(z-\mathrm{i})^5}=\frac{3}{8}\mathrm{i}$$

(4) 函数 $f(z)=\frac{z}{\cos z}$ 有一级极点 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,其留数分别为

$$\mathrm{Res}\left[f(z),k\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\lim_{z\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\left[z-\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{z}{\cos z}=\lim_{z\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{2z-\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin z}$$

$$=(-1)^{k+1}\cdot\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(5) $z=1$ 是函数 $\cos\frac{1}{1-z}$ 的孤立奇点,在 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内,把函数 $\cos\frac{1}{1-z}$ 展成洛朗展开式

$$\cos\frac{1}{1-z}=\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(z-1)^4}-\cdots$$

可知 $z=1$ 是函数 $\cos\frac{1}{1-z}$ 的本性奇点,而 $\mathrm{Res}\left[\cos\frac{1}{1-z},1\right]=c_{-1}=0$.

(6) 函数 $z^2\sin\frac{1}{z}$ 以 $z=0$ 为其孤立奇点,在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内,将函数 $z^2\sin\frac{1}{z}$ 展成洛朗展开式

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}-\cdots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^3}-\cdots$$

显见 $z=0$ 是函数 $z^2\sin\frac{1}{z}$ 的本性奇点,且 $\mathrm{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$.

(7) 函数

$$z\sin z=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot z^{2n+1}=z^2\left(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots\right)$$

所以 $z=0$ 为 $z\sin z$ 的二级零点,而 $z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $z\sin z$ 的一级零点,所以函数 $\frac{1}{z\sin z}$ 有一个二级极点 $z=0$,和无数个一级极点 $z_k=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$,其留数分别为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},k\pi\right]=\lim_{z\to k\pi}\frac{\frac{1}{z}}{(\sin z)'}=\lim_{z\to k\pi}\frac{\frac{1}{z}}{\cos z}=(-1)^k\cdot\frac{1}{k\pi}\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},0\right]=\lim_{z\to0}\left[z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right]'=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{(\sin z)^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}\cdot\frac{z^2}{(\sin z)^2}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z\cdot\sin z}{2z}=0$$

(8) 因为 $\mathrm{ch}z$ 以 $z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}$ 为一级零点，且 $\mathrm{sh}z_k\neq 0(k=0,\pm1,\cdots)$，故 z_k 是函数 $\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$ 的一级极点，其留数分别为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z},z_k\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z},\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\mathrm{sh}z}{(\mathrm{ch}z)'}=1$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

9. 计算下列积分(利用留数，圆周均取正向)：

(1) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$；　　(2) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$；

(3) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z$(其中 m 为整数)；

(4) $\oint_{|z-2i|=1}\mathrm{th}z\mathrm{d}z$；　　(5) $\oint_{|z|=3}\tan\pi z\mathrm{d}z$；

(6) $\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\mathrm{d}z$(其中 n 为正整数，且 $|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|$)．[提示：试就 $|a|,|b|$ 与 1 的大小关系分别进行讨论．]

解 (1) 因为 $\frac{\sin z}{z}$ 只有一个有限奇点 $z=0$，且 $\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1$，故 $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点．所以 $\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0$．又 $z=0$ 在圆周 $|z|=\frac{3}{2}$ 内部，由留数定理

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0$$

(2) $\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}$ 只有一个有限奇点 $z=1$，且 $z=1$ 是 $\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}$ 的二级极点．所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2},1\right]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\left((z-1)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\right)'=\lim_{z\to1}2\mathrm{e}^{2z}=2\mathrm{e}^2$$

又 $z=1$ 在圆周 $|z|=2$ 内，由留数定理

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2},1\right]=4\pi\mathrm{e}^2\mathrm{i}$$

(3)
$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^m}=\frac{1}{z^{m-2}}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}z^2+\frac{1}{6!}z^4-\cdots\right)$$

当 $m\leqslant2$ 时，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$

当 $m>2$，且 m 为偶数时，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$

当 $m>2$，且 m 为奇数，即 $m=3,5,7,\cdots$ 时，c_{-1} 分别为 $f(z)$ 展开式中第一项系数、第二项系数、第三项系数……不妨设 $m=2n+1(n=1,2,\cdots)$，则

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}=\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{(m-1)!}$$

综上所述，由留数定理有

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]$$

$$=\begin{cases}0, & m\leqslant2\\ 0, & m>2\text{ 且 }m=2n\\ (-1)^{\frac{m+1}{2}}\cdot\frac{2\pi\mathrm{i}}{(m-1)!}, & m>2\text{ 且 }m=2n+1(n\text{ 为自然数})\end{cases}$$

(4) 设 $f(z)=\text{th}z=\dfrac{\text{sh}z}{\text{ch}z}$,不难验证 $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\text{i}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 均是 $f(z)$ 的一级极点,只有 $z_0=\dfrac{\pi\text{i}}{2}$ 在 $|z-2\text{i}|=1$ 内,所以根据留数定理有

$$\oint_{|z-2\text{i}|=1}\text{th}z\text{d}z=2\pi\text{i}\text{Res}\left[\text{th}z,\frac{\pi}{2}\text{i}\right]=2\pi\text{i}$$

(5) 设 $f(z)=\tan\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$,不难验证 $z_k=k+\dfrac{1}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为 $f(z)$ 的一级极点,且

$$\text{Res}[f(z),z_k]=\lim_{z\to z_k}\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}=-\frac{1}{\pi}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

但只有 $z_k(k=0,\pm1,\pm2,-3)$ 在圆周 $|z|=3$ 内,由留数定理可得

$$\oint_{|z|=3}\tan z\text{d}z=2\pi\text{i}\left(\sum_{k=-3}^{2}\text{Res}[\tan z,z_k]\right)=2\pi\text{i}\cdot\left(-\frac{6}{\pi}\right)=-12\text{i}$$

(6) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$,不难看出 $z=a$ 和 $z=b$ 均为 $f(z)$ 的 n 级极点.

情形 1°:当 $|a|<|b|<1$ 时,$z=a,z=b$ 这两个 n 级极点均在圆 $|z|=1$ 内.

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),a]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^n\cdot\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]^{(n-1)}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(z-b)^{2n-1}}\\&=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}=\frac{(-1)^n(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}}\end{aligned}$$

同理可得

$$\text{Res}[f(z),b]=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}}$$

据留数定理

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\text{d}z=2\pi\text{i}(\text{Res}[f(z),a]+\text{Res}[f(z),b])=0$$

情形 2°:当 $|b|>|a|>1$ 时,$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$ 在 $|z|=1$ 内解析,由柯西古萨定理得

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\text{d}z=0$$

情形 3°:当 $|b|>1>|a|$ 时,$f(z)$ 在圆 $|z|=1$ 内只有一个 n 级极点 $z=a$,且有

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),a]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\text{d}^{n-1}}{\text{d}z^{n-1}}[(z-a)^nf(z)]\\&=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2\cdot(a-b)^{2n-1}}\end{aligned}$$

由留数定理有

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\text{d}z=2\pi\text{i}\text{Res}[f(z),a]=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\pi\text{i}\cdot(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$$

10. 判断 $z=\infty$ 是下列函数的什么奇点?并求出在 ∞ 的留数.

(1)$e^{\frac{1}{z^2}}$; (2)$\cos z-\sin z$; (3)$\dfrac{2z}{3+z^2}$.

解 (1) 在 $z=\infty$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内,有洛朗展开式

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

展开式中不含 z 的正幂次项,而且 z^{-1} 项的系数 $c_{-1}=0$,故 $z=\infty$ 是函数 $e^{\frac{1}{z^2}}$ 的可去奇点,且 $\mathrm{Res}[e^{\frac{1}{z^2}},\infty]=-c_{-1}=0$.

(2) 函数 $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内有洛朗展开式

$$\cos z-\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

显然展开式中含有无穷多个 z 的正幂次项,且 z^{-1} 项的系数 $c_{-1}=0$,故 $z=\infty$ 是函数 $\cos z-\sin z$ 的本性奇点,且 $\mathrm{Res}[\cos z-\sin z,\infty]=-c_{-1}=0$.

(3) 函数$\dfrac{2z}{3+z^2}$在 $z=\infty$ 的去心邻域$\sqrt{3}<|z|<+\infty$ 内有洛朗展开式

$$\frac{2z}{3+z^2}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z^2}}=\frac{2}{z}\left(1-\frac{3}{z^2}+\left(\frac{3}{z^2}\right)^2-\left(\frac{3}{z^2}\right)^3+\cdots\right)=\frac{2}{z}-\frac{6}{z^3}+\frac{18}{z^5}-\cdots$$

展开式中不含 z 的正幂次项,且 $c_{-1}=2$.故 $z=\infty$ 是函数$\dfrac{2z}{3+z^2}$的可去奇点,且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{2z}{3+z^2},\infty\right]=-c_{-1}=-2$$

11.求 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 的值,如果

(1)$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$; (2)$f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$.

解 求 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 的值可用 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$,其中 c_{-1} 是 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式中 z^{-1} 项的系数.还可用定理:若 $f(z)$ 在扩充复平面内有有限个奇点(包括 ∞),则这些奇点处的留数之和为零.从而 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$,其中 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是 $f(z)$ 在复平面内的有限孤立奇点,这样的奇点 $f(z)$ 只有有限个.

(1)$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在复平面上只有两个一级极点: ±1.于是

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\left.\frac{\frac{e^z}{z+1}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\frac{1}{2}e$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\left.\frac{\frac{e^z}{z-1}}{(z+1)'}\right|_{z=-1}=-\frac{1}{2}e^{-1}$$

所以
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),\infty]&=-(\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1])\\&=-\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1}\right)=-\frac{1}{2}(e-e^{-1})=-\mathrm{sh}1\end{aligned}$$

(2) 当 $f(z)$ 在复平面内孤立奇点较多时，且其留数值较难计算时，还可用公式 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$ 计算.

本题中 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$，所以 $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^4}{(1+z)^4(1-4z)}$. 但 $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$ 以 $z=0$ 为可去奇点，故 $\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=0$，所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)},\infty\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z},0\right]=0$$

12. 计算下列各积分，C 为正向圆周：

(1) $\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z, C:|z|=3$;

(2) $\oint_C \frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z, C:|z|=2$;

(3) $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z$, ($n$ 为一正整数), $C:|z|=r>1$.

解 (1) 原函数在圆周 $C:|z|=3$ 的内部有 6 个孤立奇点：$\pm\mathrm{i},\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{4}\mathrm{i}}(k=0,1,2,3)$，而在 C 外部仅有孤立奇点 $z=\infty$. 由函数在扩充复平面上这 7 个奇点处留数之和为零及留数定理可知(其中 z_l 为 C 内的孤立奇点，$l=1,2,\cdots,6$)

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z&=2\pi\mathrm{i}\left(\sum_{l=1}^{6}\mathrm{Res}[f(z),z_l]\right)=-2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),\infty]\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to0}z\cdot\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}=2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

(2) 与(1) 题的解法类似

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z&=-2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}},\infty\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^4(z+1)},0\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{3!}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[z^4\cdot\frac{\mathrm{e}^z}{z^4(z+1)}\right]=\frac{\pi\mathrm{i}}{3}\cdot\lim_{z\to0}\frac{z^3+3z-2}{(z+1)^4}\mathrm{e}^z=-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

(3) 与(1) 的解法类似

$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]$$

而在 $z=\infty$ 的去心邻域 $1<R<|z|<+\infty$ 内，$\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ 展成洛朗展开式

$$\begin{aligned}\frac{z^{2n}}{1+z^n}&=z^n\cdot\frac{1}{1+z^{-n}}=z^n(1-z^{-n}+z^{-2n}-z^{-3n}+\cdots)\\&=z^n-1+z^{-n}-z^{-2n}+\cdots\end{aligned}$$

可见 $z=\infty$ 是函数 $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ 的 n 级极点，且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=-c_{-1}=\begin{cases}-1, & n=1\\0, & n>1\end{cases}$$

故
$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right] = \begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

13.计算下列积分

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$；　(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta(a>b>0)$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\cdot\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10\mathrm{i}z-3}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{2}{3}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z+\frac{\mathrm{i}}{3}\right)(z+3\mathrm{i})}=\frac{2}{3}\cdot2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{z+3\mathrm{i}}\bigg|_{z=-\frac{\mathrm{i}}{3}}=\frac{\pi}{2}$$

(2) 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}\mathrm{d}z$$

函数 $f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}$ 在圆周 $|z|=1$ 内有一个二级极点 $z_0=0$ 和一个一级极点 $z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，其留数分别为

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}(z^2f(z))'=\lim_{z\to0}\frac{(z^2-1)(2bz^3-6az^2+6bz+2a)}{(bz^2+2az+b)^2}=-\frac{2a}{b^2}$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]=\frac{\frac{(z^2-1)^2}{b\left[z-\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\cdot z^2}}{\left(z-\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)'}\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}$$
$$=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\right\}$$
$$=-\pi\left(-\frac{2a}{b^2}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right)=2\pi\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

(3) 被积函数 $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ 分母的次数比分子的次数高 4 次，且在实轴上分母不为零. 而

$\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面有二级极点 i.于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx = 2\pi i\cdot \text{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2},i\right] = 2\pi i\cdot \lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)^2}{(1+z^2)^2}\right]'$$

$$= 2\pi i\cdot \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{\pi}{2}$$

(4) 函数$\frac{x^2}{1+x^4}$分母的次数比分子高 2 次,且实轴上,分母 $1+x^4$ 不为零.而函数 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ 在上半平面有两个一级极点:$z_0=e^{\frac{\pi}{4}i}$ 与 $z_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}$,其留数分别为

$$\text{Res}[f(z),z_0] = \left.\frac{z^2}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\text{Res}[f(z),z_1] = \left.\frac{z^2}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i(\text{Res}[f(z),z_0]+\text{Res}[f(z),z_1])$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

注意到被积函数为偶函数,可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

(5) 考虑函数$\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}$的分母在 x 轴上不为零,且比分子的多项式的次数高 2 次,以及 $a=1>0$.于是考虑函数$\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$在上半平面的孤立奇点:只有一个一级极点 $z=-2+i$.且

$$\text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right] = \lim_{z\to-2+i}\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)'} = \frac{e^{-1-2i}}{2(-2+i)+4}$$

$$= \frac{1}{2i}e^{-1-2i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{e}(\cos 2-i\sin 2)$$

于是由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx = 2\pi i\cdot \text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right] = \frac{\pi}{e}(\cos 2-i\sin 2)$$

两边取实部,得
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx = \frac{\pi}{e}\cos 2$$

(6) 函数$\frac{ze^{iz}}{1+z^2}$在上半平面只有一个一级极点 $z=i$,且在实轴上分母不为零,$a=1>0$.分母多项式的次数比分子多项式的次数高 1 次,由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx = 2\pi i\cdot \text{Res}\left[\frac{z\cdot e^{iz}}{1+z^2},i\right] = 2\pi i\cdot\left.\frac{z\cdot e^{iz}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i} = 2\pi i\cdot\frac{i\cdot e^{i\cdot i}}{2i} = \frac{\pi}{e}i$$

两边取虚部得$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$.

14. 试用图 5 - 1 中的积分路线，求积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$的值.

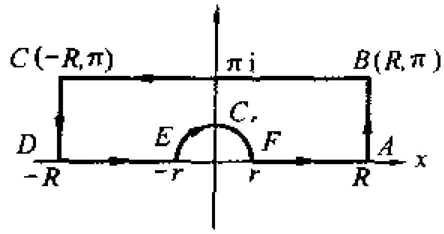


图 5 - 1

解 函数$\frac{e^{iz}}{z}$在如图 5 - 1 所示的路线$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+C_r+\overline{FA}$上及其内部解析，由柯西 - 古萨定理有

$$\int_{\overline{AB}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\overline{BC}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\overline{CD}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\overline{DE}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\overline{FA}}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

根据复积分计算公式

$$\int_{\overline{AB}}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy}\cdot(R+iy)'dy=\int_0^{\pi}\frac{e^{-y+iR}}{R+iy}idy$$

再由积分估值不等式

$$\left|\int_{\overline{AB}}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\leqslant\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-y+iR}}{R+iy}i\right|dy=\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}}dy\leqslant\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}}{R}dy=\frac{1-e^{-\pi}}{R}\to0\quad(R\to+\infty)$$

同样地

$$\begin{aligned}\left|\int_{\overline{CD}}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|&=\left|\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy}(-R+iy)'dy\right|\\&=\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{-y-iR}}{-R+iy}\cdot idy\right|\leqslant\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-y-iR}}{-R+iy}\right|dy\\&=\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}}dy\leqslant\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}}{R}dy\\&=\frac{1-e^{-\pi}}{R}\to0\quad(R\to+\infty)\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\int_{\overline{BC}}\frac{e^{iz}}{z}dz&=\int_R^{-R}\frac{e^{i(x+\pi i)}}{x+\pi i}(x+\pi i)'dx=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{-\pi+xi}}{x+\pi i}dx\\&=-e^{-\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x+\pi i}dx=-e^{-\pi}\left\{\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2+\pi^2}dx-\pi i\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+\pi^2}dx\right\}\end{aligned}$$

而由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+\pi^2}dx=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z\cdot e^{iz}}{z^2+\pi^2},\pi i\right]=\pi i\cdot e^{-\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+\pi^2}dx=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+\pi^2},\pi i\right]=e^{-\pi}$$

所以

$$\int_{\overline{BC}}\frac{e^{iz}}{z}dz\to0\ (R\to+\infty)$$

又

$$\int_{\overline{DE}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\overline{FA}}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_r^R\frac{e^{-ix}}{x}dx+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$= \int_r^R \frac{2\mathrm{i} \cdot \sin x}{x} \mathrm{d}x$$

另一方面
$$\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \to -\pi\mathrm{i}\ (r \to 0^+)$$

因为
$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + (\mathrm{i}z) + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}z)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}z)^3 + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{z} + \mathrm{i} - \frac{1}{2}z - \frac{\mathrm{i}}{3!}z^2 + \cdots = \frac{1}{z} + \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z) = \mathrm{i} - \frac{1}{2}z - \frac{\mathrm{i}}{3!}z^2 + \cdots$ 在 $z = 0$ 处解析且 $\varphi(0) = \mathrm{i} \neq 0$,故当 $|z|$ 充分小时 $\varphi(z)$ 有界.不妨使 $\varphi(z) \leqslant 2$.由于

$$\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z = \int_{C_r} \frac{1}{z} \mathrm{d}z + \int_{C_r} \varphi(z) \mathrm{d}z$$

而
$$\int_{C_r} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_\pi^0 \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta = -\pi\mathrm{i}$$

$$\left|\int_{C_r} \varphi(z) \mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{C_r} |\varphi(z)| \mathrm{d}s = 2\int_{C_r} \mathrm{d}s = 2\pi r \to 0 \quad (r \to 0^+)$$

从而 $\lim\limits_{r \to 0^+} \int_{C_r} \varphi(z) \mathrm{d}z = 0$,因此 $\lim\limits_{r \to 0^+} \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}$.

综上所述,令 $R \to +\infty$, $r \to 0^+$,有 $2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x - \pi\mathrm{i} = 0$,即

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

*15. 利用公式 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = N - P$,计算下列积分:

(1) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z} \mathrm{d}z$;　　(2) $\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2 - 1} \mathrm{d}z$;

(3) $\oint_{|z|=3} \tan z \mathrm{d}z$;　　(4) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} \mathrm{d}z$.

解　(1) 设 $f(z) = z$, $f'(z) = 1$,则 $f(z)$ 在 $|z| = 3$ 内零点总个数 $N = 1$,极点总个数 $P = 0$,所以

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=3} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(N - P) = 2\pi\mathrm{i}$$

(2) 设 $f(z) = z^2 - 1$,则 $f(z)$ 在 $|z| = 1$ 内有一级零点 ± 1,无极点,即 $N = 2, P = 0$.所以

$$\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2 - 1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\oint_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\mathrm{i}(N - P) = 2\pi\mathrm{i}$$

(3) 设 $f(z) = \cos z$,则 $f(z)$ 在 $|z| = 3$ 内有二个一级零点 $\pm \frac{\pi}{2}$,无极点,即 $N = 2, P = 0$,所以

$$\oint_{|z|=3} \tan z = -\oint_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} \cdot (N - P) = -4\pi\mathrm{i}$$

(4)
$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} \mathrm{d}z = \oint_{|z|=3} \frac{1}{z} \mathrm{d}z - \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+1} \mathrm{d}z$$

而 z 与 $z+1$ 在 $|z|=3$ 内都只有一个一级零点而无极点，故

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz=2\pi i,\quad \oint_{|z|=3}\frac{1}{z+1}dz=2\pi i$$

从而

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz=0$$

*16. 设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，它的内部全含于 D，z_0 为 C 内一点．如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$，在 C 内 $f(z)$ 无其他零点，试证：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=z_0$$

证明 由已知条件可知 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为唯一的一级零点，故函数 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 C 内仅有唯一的一级极点 $z=z_0$，由留数定理

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=\text{Res}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)},z_0\right]=\left.\frac{z\cdot f'(z)}{(f(z))'}\right|_{z=z_0}=z_0$$

*17. 设 $\varphi(z)$ 在 $C:|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$．证明在 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$．

证明 令 $f(z)=-z$，$g(z)=\varphi(z)$，在曲线 C 上，

$$|g(z)|=|\varphi(z)|<1=|-z|=|f(z)|$$

由路西(Rouché)定理，$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)=\varphi(z)-z$ 在 C 内零点个数相同，而 $f(z)=-z$ 在闭曲线 $C:|z|=1$ 内只有一个零点，所以 $f(z)+g(z)=\varphi(z)-z$ 在 C 内只有一个零点，记为 z_0，即 C 内只有一点 z_0 使 $\varphi(z_0)-z_0=0(\varphi(z_0)=z_0)$．

*18. 证明：当 $|a|>e$ 时，方程 $e^z-az^n=0$ 在单位圆 $|z|=1$ 内有 n 个根．

证明 令 $f(z)=-az^n$，$g(z)=e^z$，$C:|z|=1$，则在 C 上

$$|g(z)|=|e^z|\leqslant e^{|z|}=e<|a|=|-az^n|=|f(z)|$$

即 $|g(z)|<|f(z)|$．由路西(Rouché)定理知 $f(z)=-az^n$ 与 $f(z)+g(z)=e^z-az^n$ 在 C 内零点个数相同．$f(z)$ 在 C 内零点的个数为 n，所以 $e^z-az^n=f(z)+g(z)$ 在 C 内有 n 个零点，即方程 $e^2-az^n=0$ 在 $|z|=1$ 内有 n 个根．

*19. 证明：方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1\leqslant|z|\leqslant 2$ 内．

证明 令 $f(z)=z^7$，$g(z)=-z^3+12$，则在圆周 $|z|=2$ 上，有

$$|f(z)|=|z|^7=128,\quad |g(z)|=|-z^3+12|\leqslant|z|^3+12=20$$

即在曲线 $|z|=2$ 上 $|f(z)|>|g(z)|$，由路西定理知，$f(z)=z^7$ 与 $f(z)+g(z)=z^7-z^3+12$ 在 $|z|=2$ 内零点个数相同，即方程 $z^7-z^3+12=0$，在圆周 $|z|=2$ 内有 7 个零点．

又当 $|z|\leqslant 1$ 时，有

$$|z^7-z^3+12|\geqslant 12-|z|^7-|z|^3\geqslant 12-1-1=10>0$$

即当 $|z|\leqslant 1$ 时，方程 $z^7-z^3+12=0$ 无根，故此方程的根都在圆环域 $1\leqslant|z|\leqslant 2$ 内．

同步训练题

1．单项选择题

(1) 函数 $\frac{\cot\pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内奇点的个数为(　　)．

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

(2) 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为可去奇点和 m 级极点，则 $z=a$ 为函数 $f(z)+g(z)$ 的(　　).

A.可去奇点　　B.本性奇点　　C.m 级极点　　D.小于 m 级的极点

(3) $z=0$ 为函数 $\frac{1-e^{z^2}}{z^4\sin z}$ 的(　　).

A.本性奇点　　B.解析点　　C.可去奇点　　D.3 级极点

(4) $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\operatorname{th}z-\frac{1}{z}$ 的(　　).

A.非孤立奇点　　B.解析点　　C.孤立奇点　　D.本性奇点

(5) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<R$ 内解析，k 为正整数，那么 $\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{z^k},0\right]=$(　　).

A.a_k　　B.$k!a_k$　　C.a_{k-1}　　D.$(k-1)!a_{k-1}$

(6) 设 $z=a$ 为解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点，那么 $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=$(　　).

A.m　　B.$-m$　　C.$m-1$　　D.$-(m-1)$

(7) 在下列函数中，$\operatorname{Res}[f(z),0]=0$ 的是(　　).

A.$f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$　　B.$f(z)=\frac{\sin z}{z}-\frac{1}{z}$

C.$f(z)=\frac{\sin z+\cos z}{z}$　　D.$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$

(8) 下列命题中，正确的是(　　).

A.设 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，m 为自然数，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点

B.如果无穷远点 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，那么 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$

C.$z=0$ 是偶函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z),0]=0$

D.若 $\oint_C f(z)dz=0$，则 $f(z)$ 在 C 内无奇点.

(9) 下列命题中不正确的是(　　).

A.若 $z_0(\neq\infty)$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或解析点，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$

B.若 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析，z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点，且 $P(z_0)\neq0,Q'(z_0)\neq0$，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

C.若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，$n\geqslant m$ 为自然数，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^n}{dz^n}[(z-z_0)^{n+1}f(z)]$$

D.如果无穷远点 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点，则 $z=0$ 为 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的一级极点，并且 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\lim_{z\to0}zf\left(\frac{1}{z}\right)$

(10) 方程 $kz^4=\sin z(k>2)$ 在 $|z|<1$ 内有(　　).

A.3 个根　　B.4 个根　　C.2 个根　　D.5 个根

2.填空题

(1) 设 $z=0$ 为函数 $\dfrac{1}{z^3-\sin z^3}$ 的 m 级极点,那么 $m=$ ______.

(2) 函数 $f(z)=z^3\cos\dfrac{2i}{z}$,则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=$ ______.

(3) 设函数 $f(z)=\exp\left\{z^2+\dfrac{1}{z^2}\right\}$,则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ ______.

(4) 设函数 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-i}}$,则 $\mathrm{Res}[f(z),i]=$ ______.

(5) 设 $n>1$ 为正整数,则 $\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z^n-1}dz=$ ______.

(6) 积分 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{z^9}{z^{10}-1}dz=$ ______.

(7) 积分 $\oint_{|z|=1}z^2\sin\dfrac{1}{z}dz=$ ______.

(8) 积分 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{1}{\sin\pi z}dz=$ ______.

(9) 函数 $f(z)=\dfrac{z^{13}}{(z^2-1)(z^8+1)}$,则 $f(z)$ 在复平面上所有有限奇点处留数之和为 ______.

(10) C_r 是圆周 $|z|=r$ 的上半圆周,方向为逆时针方向,则 $\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r}\dfrac{e^{2iz}}{(1+z^2)z}dz=$ ______.

3.求下列函数在扩充复平面的留数:

(1) $z^2e^{\frac{1}{z}}$; (2) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$; (3) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$.

4.设 C 是复平面上一条不经过 $z=0$ 和 $z=1$ 的正向简单闭曲线,试就 C 的各种情况计算积分 $\oint_C\dfrac{\cos z}{z^3(z-1)}dz$.

5.设 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析,z_0 为 $f(z)$ 的一级极点,且 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=A$.
证明 $\mathrm{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=A\varphi(z_0)$.

6.计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}(a>0)$; (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$; (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$.

7.计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x(1+x^2)}dx$.

8.求函数 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于圆周 $|z|=\pi$ 的对数留数.

9.设多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n, a_0\neq0$ 满足条件

$$|a_i|>|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|+|a_{i+1}|+\cdots+|a_n|$$

试证明 $P(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 $n-i$ 个零点.

10.设 $f(z)$ 以 a 为简单极点,且在 a 处的留数为 A,证明: $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\dfrac{1}{|A|}$.

同步训练题答案

1.单项选择题

解 (1)D (2)C (3)D (4)A (5)C (6)A (7)D (8)C (9)D (10)B

2.填空题

解 (1)9 (2) $-\frac{2}{3}$ (3)0 (4) $-\frac{5}{6}+i$ (5)0 (6)$2\pi i$ (7) $-\frac{\pi}{3}i$ (8) $-2i$

(9)1 (10)πi

3.**解** (1) 函数 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在扩充复平面上有二个奇点 $z=0, z=\infty$，其中 $z=0$ 是本性奇点，$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的二级极点，我们在 $0<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)$ 展成洛朗级数 $f(z)=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z}+\cdots$，所以

$$\text{Res}[z^2e^{\frac{1}{z}},0]=\frac{1}{6},\quad \text{Res}[z^2e^{\frac{1}{z}},\infty]=-\frac{1}{6}$$

(2) $z=0$ 是本性奇点，$z=\infty$ 是可去奇点.

在 $0<|z|<+\infty$ 内，将 $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ 展成洛朗级数

$$\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}-\cdots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}-\cdots$$

故 $$\text{Res}\left[\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2},0\right]=c_{-1}=1,\quad \text{Res}\left[\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2},\infty\right]=-c_{-1}=-1$$

(3) $z=0$ 是三级极点，$z=\infty$ 是可去奇点.

在 $0<|z|<+\infty$ 内，分母 $z^2(e^z-1)=z^3\left(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots\right)$.不妨令

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nz^n$$

由待定系数法可求得 $\alpha_0=1, \alpha_1=-\frac{1}{2}, \alpha_2=\frac{5}{12}, \alpha_3=-\frac{7}{24},\cdots$ 故函数 $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$ 在 $z=0$(或 $z=\infty$) 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式为

$$\frac{1}{z^2(e^z-1)}=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{2}z+\frac{5}{12}z^2-\frac{7}{24}z^3+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{z}-\frac{7}{24}+\cdots$$

故 $$\text{Res}\left[\frac{1}{z^2(e^z-1)},0\right]=c_{-1}=\frac{5}{12},\quad \text{Res}\left[\frac{1}{z^2(e^z-1)},\infty\right]=-c_{-1}=-\frac{5}{12}$$

4.**解** $z=0$ 和 $z=1$ 是被积函数的奇点，且只有这两个有限奇点.先来计算这两点的留数.由于在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<1$ 内 $\frac{\cos z}{z^3(z-1)}$ 解析，则其洛朗展开式为

$$\frac{\cos z}{z^3(z-1)}=\frac{-1}{z^3}(1+z+z^2+z^3+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}-\cdots$$

所以 $\text{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3(z-1)},0\right]=-\frac{1}{2}$.

又 $z=1$ 是 $\frac{\cos z}{z^3(z-1)}$ 的一级极点，依照留数的计算规则有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3(z-1)},1\right]=\left.\frac{\frac{\cos z}{z^3}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\cos 1$$

讨论曲线 C 与奇点的相对位置关系

(1) 若 $z=0$ 与 $z=1$ 在 C 的外面，则积分 $I=0$(柯西－古萨定理).

(2) 若 $z=0$ 在 C 内，$z=1$ 在 C 外，则积分 $I=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3(z-1)},0\right]=-\pi i$(留数定理).

(3) 若 $z=1$ 在 C 内，$z=0$ 在 C 外，则积分

$$I=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3(z-1)},1\right]=2\pi i\cos 1$$

(4) 若 $z=1, z=0$ 均在 C 内，则积分

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3(z-1)},0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3(z-1)},1\right]\right)=2\pi i\left(\cos 1-\frac{1}{2}\right)$$

5.证明　由 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，则 $f(z)$ 可表示为 $f(z)=\frac{g(z)}{z-z_0}$.其中 $g(z)$ 在 z_0 解析，且 $g(z_0)\neq 0$.由 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=A$，有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=g(z_0)=A$$

又因为 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，故 $\varphi(z)g(z)$ 在 z_0 解析，于是 $f(z)\varphi(z)=\frac{\varphi(z)g(z)}{z-z_0}$.当 $\varphi(z_0)\neq 0$ 时，$f(z)\varphi(z)$ 以 z_0 为一级极点，这样

$$\operatorname{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=\left.\frac{\varphi(z)g(z)}{(z-z_0)'}\right|_{z=z_0}=\varphi(z_0)g(z_0)=A\varphi(z_0)$$

若 z_0 为 $\varphi(z)$ 的零点，那么 z_0 必为 $f(z)\varphi(z)$ 的可去奇点，故此时 $\operatorname{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=0$，显然 $A\varphi(z_0)=0$，故 $\operatorname{Res}[f(z)\varphi(z_0),z_0]=A\varphi(z_0)$.

6.解　(1) 原积分 $=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta}\xlongequal{\text{令 } x=2\theta}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2a^2+1)-\cos x}$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(2a^2+1)-\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=2i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2-2(2a^2+1)z+1}dz$$

被积函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-2(2a^2+1)z+1}$ 在 $|z|=1$ 内只有一个一级极点

$$z_0=2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}$$

(z_0 在 $|z|=1$ 内可根据函数 $y=(x-\sqrt{x^2+1})^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小、非负得出)

由公式

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z^2-2(2a^2+1)z+1)'}=\frac{-1}{4a\sqrt{a^2+1}}$$

故由留数定理，所求的积分为

$$\int_0^{\pi}(a^2+\sin^2\theta)^{-1}\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}[f(z),z_0] = \frac{-2\pi\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}}{4a\sqrt{a^2+1}} = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}}$$

(2) $R(z)=\dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$ 在上半平面有两个一级极点 $z_1=\mathrm{i}, z_2=3\mathrm{i}$，又分母的次数比分子的次数高 2 次，以及 $R(z)$ 在实轴上无奇点，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[R(z),3\mathrm{i}])\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left\{\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{z^2-z+2}{(z+\mathrm{i})(z^2+9)}+\lim_{z\to 3\mathrm{i}}\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z+3\mathrm{i})}\right\}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{16}+\frac{3-7\mathrm{i}}{48}\right)=\frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

(3) $R(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+5}$ 分母的幂次比分子的高 2 次，$R(z)$ 在实轴上无奇点，且在上半平面上只有一个一级极点 $z=-2+\mathrm{i}$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}R(z),-2+\mathrm{i}] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left\{\lim_{z\to(-2+\mathrm{i})}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+2+\mathrm{i}}\right\}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}\pi\end{aligned}$$

所求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x\right] = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}\pi] = \pi\mathrm{e}^{-1}\cos 2$$

7.解　函数 $R(z)=\dfrac{1}{z(1+z^2)}$，分母的幂次高于分子的幂次 3 次，但实轴上有 $R(z)$ 的孤立奇点 $z=0$，作以原点为中心，r 为半径的上半圆周 C_r，及以原点为中心，R 为半径的上半圆周 C_R（见图 5－2），使 $C_R,[-R,-r],C_r,[r,R]$ 构成封闭曲线．此闭曲线内只有 $R(z)$ 的一个孤立奇点 i．在此闭曲线外，设有 $R(z)$ 的有限奇点，于是

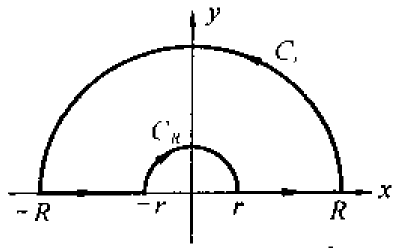


图 5－2

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)},\mathrm{i}\right]-\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)}\mathrm{d}z$$

其中

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)}\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)},\mathrm{i}\right] = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{(z-\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-\mathrm{e}^{-2}}{2}-(-\pi\mathrm{i}) = \pi(1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{i}$$

所求积分为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\right\} = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$．

8.解　令 $1+z^2=0$ 得 $f(z)$ 有两个一级零点 $\pm\mathrm{i}$．再令 $g(z)=1-\cos 2\pi z=0$，得 $g(z)$ 的无穷多个零点 $z_k=k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，又由于 $g'(z)=2\pi\sin 2\pi z, g''(z)=4\pi^2\cos 2\pi z$，可

见 $g'(z_k)=0, g''(z_k)\neq 0$.这说明 $z_k=k$ 是$g(z)$ 的二级零点,故 z_k 是$f(z)$ 的二级极点.

在圆周$|z|=\pi$内,有$f(z)$ 的两个一级零点 $\pm i$,和七个二级极点0, ±1, ±2, ±3,所以由对数留数定理得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P=2-2\times 7=-12$$

9.**证明**　令$f(z)=a_i z^{n-i}$, $g(z)=P(z)-f(z)$,则$f(z)$和$g(z)$在$|z|<1$内解析,且在$|z|=1$上有

$$|f(z)|=|a_i|>|a_0|+\cdots+|a_{i-1}|+|a_{i+1}|+\cdots+|a_n|>|g(z)|$$

由 $f(z)$ 在$|z|<1$内有 $n-i$ 个根,根据路西定理,可知 $P(z)=f(z)+g(z)$ 在$|z|<1$内也有 $n-i$ 个根.

10.**证明**　由 $f(z)$ 以 $z=a$ 为简单极点,在 $z=a$ 的去心邻域内,有

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-a}$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析,$\varphi(a)=A\neq 0, A=\mathrm{Res}[f(z),a]$.于是

$$\lim_{z\to a}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\lim_{z\to a}\frac{|(z-a)\varphi'(z)-\varphi(z)|}{|z-a|^2+|\varphi(z)|^2}=\frac{1}{|\varphi(a)|}=\frac{1}{|A|}$$

第6章 共形映射

典型题解析

例6-1 求映射 $\omega = e^z$ 在点 $z_0 = 1 + i$ 处的伸缩率和旋转角，并说明它将 z 平面的哪一部分放大，哪一部分缩小？

分析 由解析函数导数的几何意义可知：若在点 z_0 处，解析函数 $\omega = f(z)$ 的导数 $f'(z) \neq 0$，那么 $\arg f'(z_0)$ 表示任一条过点 z_0 的光滑曲线 C 经映射 $\omega = f(z)$ 后旋转的角度；$|f'(z_0)|$ 表示变换 $\omega = f(z)$ 在 z_0 的伸缩率，并进一步有解析函数在导数不为零的地方具有旋转角不变性和伸缩率不变性.

解 因 $f'(z) = (e^z)' = e^z$，$f'(1+i) = e^{1+i} = e(\cos 1 + i\sin 1)$
故在点 $1+i$ 处的旋转角为 $\arg f'(z_0) = 1$，伸缩率为 $|f'(z_0)| = e$.

又因若令 $z = x + iy$，则 $|f'(z)| = e^x$，而 $|f'(z)| < 1$ 的充要条件是 $x < 0$，故 $\omega = f(z) = e^z$ 把复平面的左半平面 $(\mathrm{Re}(z) < 0)$ 缩小，而将复平面的右半平面 $(\mathrm{Re}(z) > 0)$ 放大.

例6-2 若点 z 沿着圆周 $|z| = r$ 运动，角速度为1.试证明在解析函数 $\omega = f(z)$ 的映射之下，ω 平面上象点的向径的角速度为 $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\}$.

分析 角速度的大小就是角度对时间 t 的变化率，复数可以看作是一个向量，当点 z 沿圆周 $z = re^{i\theta}$ 运动时，在映射 $\omega = f(z)$ 下，其象点 ω 沿曲线 $\omega = f(re^{i\theta})$ 运动.于是，其向径的角速度就是象点 ω 的辐角关于时间 t 的导数，即 $\dfrac{d}{dt}[\mathrm{Arg}\omega]$.另一方面，由对数的定义可知 $\mathrm{Ln}\omega = \ln|\omega| + i\mathrm{Arg}\omega$ 以及已知 $\dfrac{d\theta}{dt} = 1$，我们可用复合函数求导法则来证明本题.

证明 令 $z = re^{i\theta}$，$dz = ire^{i\theta}d\theta = izd\theta$，令 $\omega = f(z)$，则

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Arg}\omega) = \frac{d}{dt}[\mathrm{Arg}f(z)] = \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\mathrm{Ln}f(z)\right]\right\} = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{i}\mathrm{Ln}f(z)\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{i}\mathrm{Ln}f(z)\right) = \frac{1}{i}\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot\frac{dz}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{i}\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot iz\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

于是
$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Arg}\omega) = \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}$$

例6-3 求闭单位圆 $|z| \leqslant 1$ 在分式线性映射 $\omega = \dfrac{z}{z-1}$ 下的象域.

分析 为了利用题设 $|z| \leqslant 1$，可将已知的分式线性变换化成其逆变换，从而获得象点的取值区域；也可以利用分式线性变换的保圆性求其象域.

解 映射 $\omega = \dfrac{z}{z-1}$ 的逆映射为 $z = \dfrac{\omega}{\omega-1}$.因 $|z| \leqslant 1$，故 $\left|\dfrac{\omega}{\omega-1}\right| \leqslant 1$，即

$$|\omega|^2 \leqslant |\omega - 1|^2 = (\omega - 1)(\bar{\omega} - 1) = |\omega|^2 - (\omega + \bar{\omega}) + 1$$

从而 $\omega+\bar{\omega}\leqslant 1$,于是 $\mathrm{Re}(\omega)=\frac{1}{2}(\omega+\bar{\omega})\leqslant\frac{1}{2}$.可见,分式线性变换 $\omega=\frac{z}{z-1}$ 将圆域 $|z|\leqslant 1$ 映成 ω 平面上的半平面 $\mathrm{Re}(\omega)\leqslant\frac{1}{2}$.

例 6-4　试证 z_1 与 z_2 是关于圆周 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k(0<k\neq 1)$ 的对称点.

分析　圆周 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$,称为 Apollonius 圆,当 $k=1$ 时,即 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=1$ 可看成是广义圆周,也就是直线 $|z-z_1|=|z-z_2|$,显然该直线是线段 z_1z_2 的垂直平分线,即点 z_1,z_2 关于广义圆周 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=1$ 对称. 当 $0<k\neq 1$ 时, 该圆的圆心 $z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$, 半径 $\rho=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$.再由关于圆周对称的对称点的定义,即可验证结论.

证明　首先确定圆 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ 的半径和圆心 z_0,可用代入法进行验证,也可利用圆的一般表示式对应项系数相等的方法来确定.下面就用待定系数法确定圆心 z_0 和半径 r.

圆 $|z-z_0|=r$ 的一般方程形式为

$$z\cdot\bar{z}-z_0\cdot\bar{z}-\bar{z}_0\cdot z+(z_0\cdot\bar{z}_0-r^2)=0 \tag{6-1}$$

而 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$,即 $|z-z_1|^2=k^2|z-z_2|^2$,整理后得

$$z\cdot\bar{z}-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\cdot\bar{z}-\frac{\bar{z}_1-k^2\bar{z}_2}{1-k^2}\cdot z+\frac{z_1\cdot\bar{z}_1-k^2z_2\cdot\bar{z}_2}{1-k^2}=0 \tag{6-2}$$

对比式(6-1),式(6-2)得 $z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$,而

$$z_0\cdot\bar{z}_0-r^2=\frac{z_1\cdot\bar{z}_1-k^2z_2\cdot\bar{z}_2}{1-k^2} \tag{6-3}$$

由式(6-3)整理得 $r^2=\frac{k^2|z_1-z_2|^2}{(1-k^2)^2}$,故 $r=\frac{k\cdot|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$.

其次验证 z_1,z_2 关于圆周 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ 对称.只需验证 $(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}=r^2$.

$$\begin{aligned}(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}&=\left(z_1-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)\left(\bar{z}_2-\frac{\bar{z}_1-k^2\bar{z}_2}{1-k^2}\right)=\frac{-k^2z_1+k^2z_2}{1-k^2}\cdot\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_1}{1-k^2}\\&=\frac{k^2(z_2-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1)}{(1-k^2)^2}=r^2\end{aligned}$$

故有 z_1,z_2 关于圆周 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ 对称.

例 6-5　求把具有割痕:$z=t+t\mathrm{i}(|t|\geqslant 1)$ 的扩充 z 平面映射成上半平面 $\mathrm{Im}(\omega)>0$ 的一个映射.

解　具有割痕 $z=t+t\mathrm{i}(|t|\geqslant 1)$ 的扩充 z 平面就是扩充 z 平面上以射线 $t+t\mathrm{i}(t\geqslant 1)$ 和 $t+t\mathrm{i}(t\leqslant -1)$ 为边界的区域,作分式线性变换 $\omega_1=\frac{az+b}{cz+d}$,使其满足将 z 平面上的 $1+\mathrm{i}$, ∞, $-(1+\mathrm{i})$ 依次映射为 ω 平面上的 $1,0,-1$.根据唯一确定分式线性变换的条件将该分式线

性变换为

$$\frac{\omega_1-1}{\omega_1+1}:\frac{0-1}{0+1}=\frac{z-(1+\mathrm{i})}{z+(1+\mathrm{i})}:\frac{\infty-(1+\mathrm{i})}{\infty+(1+\mathrm{i})}$$

整理得

$$\omega_1=\frac{1+\mathrm{i}}{z}$$

这样,分式线性变换 $\omega_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{z}$ 将 z 平面上的割痕 $t+t\mathrm{i}(|t|\geqslant 1)$ 变换为 ω_1 平面上的割痕: $-1\leqslant \mathrm{Re}(\omega_1)\leqslant 1,\mathrm{Im}(\omega_1)=0$.

通过分式线性变换 $\omega_2=\dfrac{\omega_1-1}{\omega_1+1}$ 将 ω_1 平面上实轴上的割痕 $[-1,1]$(即 $-1\leqslant \mathrm{Re}(\omega_1)\leqslant 1,\mathrm{Im}(\omega_1)=0$) 变换为 ω_2 平面上的割痕负实轴 $(-\infty,0]$.

作变换 $\omega_3=\sqrt{\omega_2}$,将 ω_2 平面除去负实轴 $(-\infty,0]$ 部分变换为 ω_3 平面上的虚轴右侧的半平面 $\mathrm{Re}(\omega_3)>0$.

最后作旋转变换 $\omega=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\omega_3$,将半平面 $\mathrm{Re}(\omega_3)>0$ 化为 ω 平面的上半平面 $\mathrm{Im}(\omega)>0$.

复合上述变换得所求映射

$$\omega=\mathrm{i}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1+\mathrm{i}}{z}-1}{\frac{1+\mathrm{i}}{z}+1}}=\mathrm{i}\cdot\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}-z}{1+\mathrm{i}+z}}$$

其变换过程如图 6-1 所示.

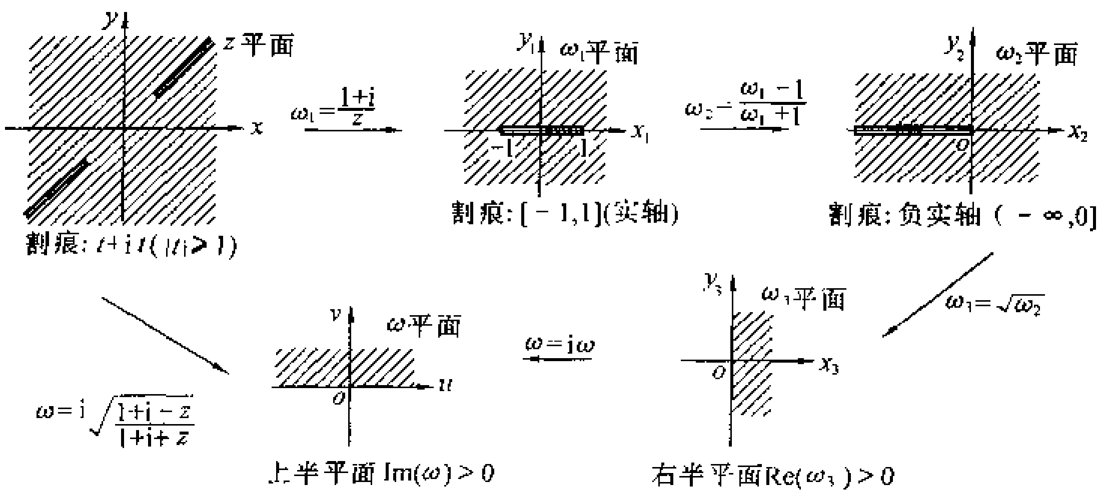


图 6-1

例 6-6 求将两角形域 $D:|z+\mathrm{i}|<2,\mathrm{Im}(z)>0$ 变成带形成 $G:0<\mathrm{Im}(\omega)<\pi$ 的保形映射.

分析 原域是两角形域,可通过分式线性映射变为角形域,进一步地,可用幂函数变成上半平面.象域 G 是一个带形区域,我们知道带形域可由指数函数变成角形域,再用幂函数可变成上半平面,由此可见两角形域可先映成上半平面,再映射成要求的带形域.

解 由题设可知,两角形域 D 的两角坐标分别为 $z_1=\sqrt{3},z_2=-\sqrt{3}$,由分式线性映射有 $\omega_1=-\dfrac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$,将 $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ 依次映成 $0,1,\infty$,得角形域 $D_1=\{\omega_1:0<\arg\omega_1<\dfrac{\pi}{3}\}$.

其次由幂函数 $\omega_2 = \omega_1^3$ 将角形域 D_1 映为上半平面 $D_2 = \{\omega_2 : 0 < \arg\omega_2 < \pi\}$.

最后用对数函数 $\omega = \ln\omega_2$,将上半平面保形映为带形域 $G = \{\omega : 0 < \mathrm{Im}(\omega) < \pi\}$.

复合上述函数得所求的一个保形变换为 $\omega = 3\ln\left[\dfrac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}\right]$.

书后习题解析

1.求 $\omega = z^2$ 在 $z = \mathrm{i}$ 处的伸缩率和旋转角,问 $\omega = z^2$ 将经过点 $z = \mathrm{i}$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 ω 平面上哪个方向?并作图.

解　由 $f(z) = z^2$ 得 $f'(z) = 2z$, $f'(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$,故 $\omega = z^2$ 在 i 处的伸缩率为 $|f'(\mathrm{i})| = 2$,旋转角为 $\arg f'(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$.

又 $f(\mathrm{i}) = -1$,由导数 $f'(\mathrm{i})$ 的辐角(旋转角)的几何意义可知,过 $z = \mathrm{i}$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向经过映射 $\omega = z^2$ 后变为过 $\omega = -1$ 且平行于虚轴(v 轴)正向的曲线的切线方向(辐角增加 $\dfrac{\pi}{2}$),见图 6-2.

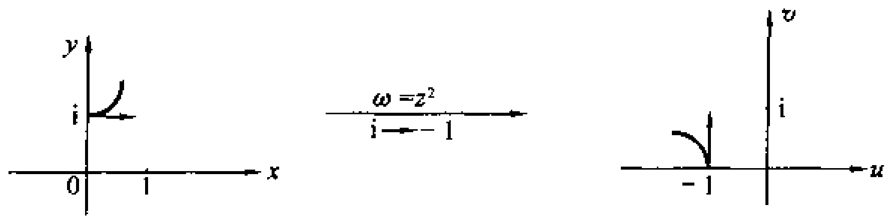


图 6-2

2.一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩率和旋转角的不变性?映射 $\omega = z^2$ 在 z 平面上每一点都具有这个性质吗?

答　一个解析函数 $f(z)$ 所构成的映射 $\omega = f(z)$ 在 $f'(z_0) \neq 0$ 的点 z_0 处具有伸缩率和旋转角的不变性.

映射 $\omega = z^2$ 在 z 平面除去原点,即点 $z = 0$ 外具有这个性质(因为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = 2z_0 \neq 0(z_0 \neq 0)$).而在原点,即 $z = 0$ 处不具有这个性质,因为 $\omega = z^2$ 把过原点且夹角为 $\alpha(0 < \alpha < \pi)$ 的两条直线(例如夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的正向实轴与正向虚轴)映射为过原点且夹角为 2α 的两条曲线(夹角为 π 的正向实轴与负向实轴),所以 $\omega = z^2$ 在 $z = 0$ 处不具有保角性.

3.设 $\omega = f(z)$ 在 z_0 解析,且 $f'(z_0) \neq 0$,为什么说曲线 C 经过映射 $\omega = f(z)$ 后在 z_0 的转动角与伸缩率跟曲线 C 的形状和方向无关?

答　曲线 C 经过映射 $\omega = f(z)$ 后在 z_0 的转动角和伸缩率由已知条件 $f(z)$ 在 z_0 解析,且 $f'(z_0) \neq 0$,可知分别为 $\arg f'(z_0)$ 与 $|f'(z_0)|$.它们显然只与 $\omega = f(z)$ 有关,所以与经过 z_0 的曲线 C 的形状及方向无关.

4.在映射 $\omega = \mathrm{i}z$ 下,下列图形映成什么图形?

(1) 以 $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -1, z_3 = 1$ 为顶点的三角形;(2) 闭圆域 $|z-1| \leqslant 1$.

解 (1) 因映射 $\omega = \mathrm{i}z = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ 为一旋转变换(旋转角为 $\frac{\pi}{2}$,这一结论也可由 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}$ 得到),所以它将以 $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -1, z_3 = 1$ 为顶点的三角形映射为以 $\omega_1 = -1, \omega_2 = -\mathrm{i}, \omega_3 = \mathrm{i}$ 为顶点的三角形(即原图形绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即可),见图6-3(a);

(2) 将闭圆域 $|z-1| \leqslant 1$ 映射成闭圆域 $|\omega - \mathrm{i}| \leqslant 1$(原图形绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即可),见图6-3(b).

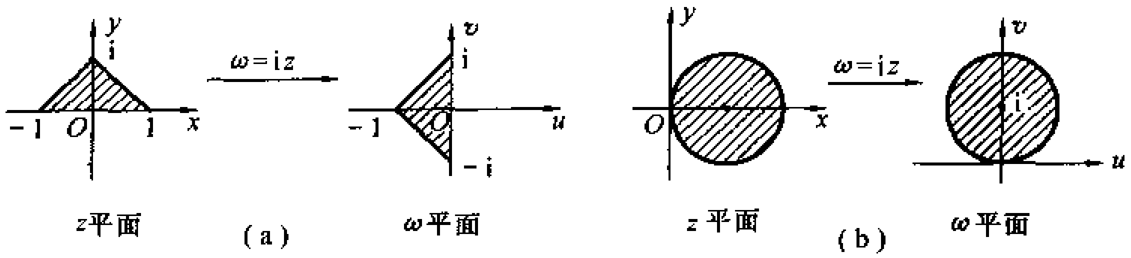


图6-3

5.证明:映射 $\omega = z + \frac{1}{z}$,把圆周 $|z| = c$ 映成椭圆 $\begin{cases} u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta \\ v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta \end{cases}$.

证明 圆周 $|z| = c$ 的参数方程为 $z = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$,在映射 $\omega = z + \frac{1}{z}$ 下,其象曲线 Γ 的参数方程为

$$\omega = z + \frac{1}{z} = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta + \mathrm{i}\left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,即象曲线为椭圆

$$\begin{cases} u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta \\ v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

6.证明:在映射 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下,互相正交的直线族 $\mathrm{Re}(z) = c_1, \mathrm{Im}(z) = c_2$ 依次映成互相正交的直线族 $v = u\tan c_1$ 与圆周族 $u^2 + v^2 = \mathrm{e}^{-2c_2}$.

证明 设 $z = x + \mathrm{i}y, \omega = u + \mathrm{i}v$,直线 $\mathrm{Re}(z) = c_1$ 的参数方程为 $z = c_1 + \mathrm{i}y\ (-\infty < y < +\infty)$,在映射 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下,其象曲线的参数方程为

$$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(c_1 + \mathrm{i}y)} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}c_1}$$

即 $u = \mathrm{e}^{-y}\cos c_1, v = \mathrm{e}^{-y}\sin c_1$,或 $v = u\tan c_1$.

类似地,直线 $\mathrm{Im}(z) = c_2$ 的参数方程为 $z = x + \mathrm{i}c_2(-\infty < x < +\infty)$,在映射 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下,其象曲线的参数方程为 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-c_2 + \mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-c_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,即 $u = \mathrm{e}^{-c_2}\cos x,\ v = \mathrm{e}^{-c_2}\sin x$ 或 $u^2 + v^2 = \mathrm{e}^{-2c_2}$.

又因为$\frac{d\omega}{dz} = ie^{iz} \neq 0$,且$e^{iz}$在复平面内解析,所以映射$\omega = e^{iz}$在复平面上具有保角性,直线族$Re(z) = c_1$与$Im(z) = c_2$互相正交,故象曲线$v = u\tan c_1$与$u^2 + v^2 = e^{-2c_2}$也是相互正交的.

7.映射$\omega = z^2$把上半个圆域:$|z| < R, Im(z) > 0$映射成什么?

答　映射$\omega = z^2$把上半个圆域$|z| < R, Im(z) > 0$映射成除了实轴上区间$[0, R^2]$的圆域$|\omega| < R$.

因为若令$z = re^{i\theta}, \omega = \rho e^{i\varphi}$,则映射$\omega = z^2$相当于变换$\begin{cases} \rho = r^2 \\ \varphi = 2\theta \end{cases}$.

而上半圆域$|z| < R, Im(z) > 0$相当于区域$0 < r < R, 0 < \theta < \pi$,在此变换下的象区域满足$0 < \rho < R^2, 0 < \varphi < 2\pi$,这显然是$\omega$平面上除了正实轴上区间$[0, R^2]$的圆域$|\omega| < R^2$.

8.下列区域在指定的映射下映射成什么?

(1)$Re(z) > 0, \omega = iz + i$;　　(2)$Im(z) > 0, \omega = (1 + i)z$;

(3)$0 < Im(z) < \frac{1}{2}, \omega = \frac{1}{z}$;　　(4)$Re(z) > 1, Im(z) > 0, \omega = \frac{1}{z}$;

(5)$Re(z) > 0, 0 < Im(z) < 1, \omega = \frac{i}{z}$.

解　(1)设$z = x + iy, \omega = u + iv$,则$\omega = iz + i = -y + (x + 1)i$,即$u = -y, v = x + 1$.由$Re(z) > 0$,可知$x > 0$,显然有$v > 1$,即$Im(\omega) > 1$.

因此区域$Re(z) > 0$在映射$\omega = iz + i$下的象区域为$Im(\omega) > 1$(见图6-4).

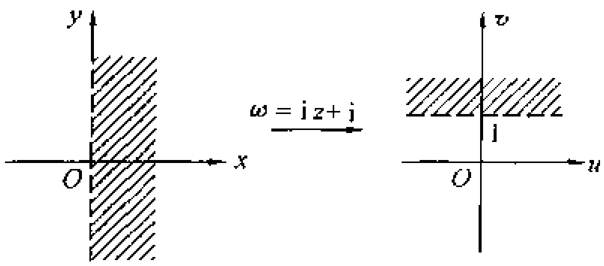


图6-4

(2)设$z = x + iy, \omega = u + iv$,则

$$\omega = (1 + i)z = (x - y) + i(x + y)$$

即$u = x - y, v = x + y$.因为$Im(z) > 0$,所以$y > 0$,即$v = x + y > x - y = u$,也就是说,在映射$\omega = (1 + i)z$下,$Im(z) > 0$映成$Im(\omega) > Re(\omega)$,如图6-5所示.

(3)考查带形域$0 < Im(z) < \frac{1}{2}$的边界

$$L_1: y = 0, -\infty < x < +\infty, \quad L_2: y = \frac{1}{2}, -\infty < x < +\infty$$

设$z = x + iy, \omega = u + iv$,则$\omega = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$,故$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

于是L_1在映射$\omega = \frac{1}{z}$下为$\Gamma_1: v = 0, -\infty < u < +\infty$.

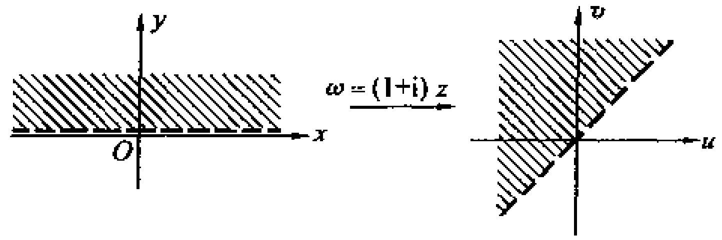


图 6-5

L_2 在映射 $\omega=\dfrac{1}{z}$ 下为圆周 $\Gamma_2: u^2+(v+1)^2=1$.

由分式线性映射的性质知,在映射 $\omega=\dfrac{1}{z}$ 下,带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{1}{2}$ 成为 ω 平面的下半平面除去圆 $u^2+(v+1)^2=1$ 及其内部,即 $|\omega+\mathrm{i}|>1, \mathrm{Im}(\omega)<0$,如图 6-6 所示.

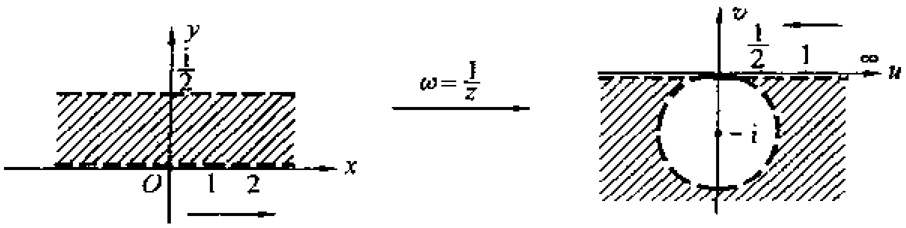


图 6-6

(4) 由 $\omega=\dfrac{1}{z}$,知 $x+\mathrm{i}y=z=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{u+\mathrm{i}v}$,即

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

于是区域 $\mathrm{Re}(z)>1$ 且 $\mathrm{Im}(z)>0$ 相当于 $\dfrac{u}{u^2+v^2}>1, \dfrac{-v}{u^2+v^2}>0$,即

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2<\frac{1}{4} \text{ 且 } v<0 \Leftrightarrow \left|\omega-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}, \mathrm{Im}(\omega)<0$$

这说明 $\omega=\dfrac{1}{z}$ 将区域 $\mathrm{Re}(z)>1$ 且 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映成区域 $\left|\omega-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ 且 $\mathrm{Im}(\omega)<0$,如图 6-7 所示.

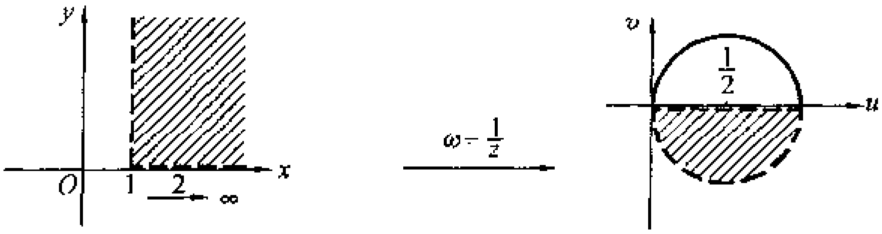


图 6-7

(5) 由 $\omega = \frac{\mathrm{i}}{z}$ 知 $x + \mathrm{i}y = z = \frac{\mathrm{i}}{\omega} = \frac{\mathrm{i}}{u + \mathrm{i}v}$,即

$$x = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

于是区域 $\mathrm{Re}(z) > 0$,且 $0 < \mathrm{Im}(z) < 1$ 相当于

$$\frac{v}{u^2 + v^2} > 0 \quad 且 \quad 0 < \frac{u}{u^2 + v^2} < 1$$

等价地有 $u > 0, v > 0$　且　$u^2 + v^2 - u = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 - \frac{1}{2} > 0$

即 $\mathrm{Re}(\omega) > 0, \mathrm{Im}(\omega) > 0$,且 $\left|\omega - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$.如图 6 - 8 所示.

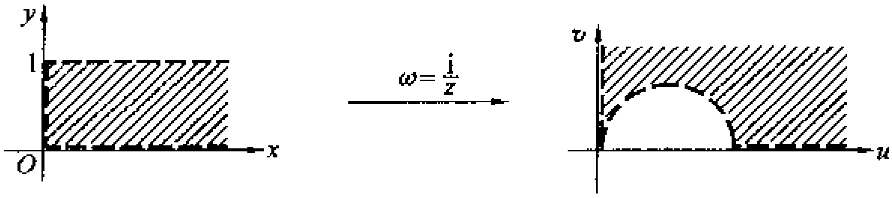


图 6 - 8

9.如果分式线性映射 $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$,(1) 映成上半平面 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$;(2) 映射成下半平面 $\mathrm{Im}(\omega) < 0$,那么它的系数满足什么条件?

答　上半平面可看成是半径为无穷大的圆域,实轴相当于圆域的边界圆周.利用分式线性映射的保圆性可知:

(1) 将 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映射成 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ 的映射 $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$ 具有以下性质:

① 将实轴 $\mathrm{Im}(z) = 0$ 映射成实轴 $\mathrm{Im}(\omega) = 0$;

② 当 z 沿实轴正向绕行,围成上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 时,其象 ω 也沿实轴正向绕行,围成上半平面 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$.

性质 ① 成立,等价于选取 a,b,c,d 为实数;性质 ② 说明当 z 为实数时,实轴映成实轴是同向的且 z 增加时 ω 也随之增加,即

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} > 0 \quad (z \text{ 为实数}, ad - bc \neq 0)$$

所以系数满足:a,b,c,d 为实数且 $ad - bc > 0$.

(2) 将 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映射成 $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ 的映射 $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$ 具有性质 ① 与 ③:

③ 当 z 沿实轴正向绕行,围成上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 时,其象 ω 沿实轴负向绕行围成下半平面 $\mathrm{Im}(\omega) < 0$.

与(1) 类似,但性质 ③ 说明

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} < 0, \quad (z \text{ 为实数}, ad - bc \neq 0)$$

所以系数满足:a,b,c,d 为实数且 $ad - bc < 0$.

10.如果分式线性映射 $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将 z 平面上的直线映成 ω 平面上的 $|\omega|=1$，那么它的系数应满足什么条件？

答 如果 $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将直线映射成单位圆周，那么它将直线上的无穷远点必须映射到单位圆周上，即无穷远点的象 $\omega|_{z=\infty}=\left.\dfrac{az+b}{cz+d}\right|_{z=\infty}=\dfrac{a}{c}$ 必在单位圆周 $|\omega|=1$ 上，等价地 $\left|\dfrac{a}{c}\right|=1$ 或 $|a|=|c|$，又 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$，即 $ad-bc\neq 0$，所以系数应满足 $|a|=|c|$，$ad-bc\neq 0$.

11.试证：对任何一个分式线性映射 $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可认为 $ad-bc=1$.

证明 因为任一非零复数 λ 都使 $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a\lambda z+b\lambda}{c\lambda z+d\lambda}$，所以系数 a,b,c,d 不是唯一的，我们可选 λ，使

$$(\lambda a)(\lambda d)-(\lambda b)(\lambda c)=\lambda^2(ad-bc)=1$$

又因 $ad-bc\neq 0$，这样的 λ 是存在的.事实上，取 $\lambda=(\sqrt{ad-bc})^{-1}$ 即可.故任一分式线性映射 $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可认为是 $ad-bc=1$.

12.试求将 $|z|<1$ 映射成 $|\omega-1|<1$ 的分式线性映射.

解 单位圆域 $|z|<1$ 到单位圆域 $|\omega_1|<1$ 的分式线性映射的一般表示式为

$$\omega_1=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad(\varphi\text{ 为实数},|\alpha|<1)$$

而单位圆域 $|\omega_1|<1$ 向右平移一个单位，即经过平移映射 $\omega=\omega_1+1$ 后变为 $|\omega-1|<1$，所以复合上述两映射即得将 $|z|<1$ 映射成 $|\omega-1|<1$ 的分式线性映射为 $\omega=e^{i\varphi}\cdot\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}+1$ （φ 为实数，$|\alpha|<1$）.

13.设 $\omega=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$，试证 $\varphi=\arg\omega'(\alpha)$.

证明 因 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}=e^{i\varphi}\cdot\dfrac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$，所以

$$\omega'(\alpha)=e^{i\varphi}\cdot\frac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}\cdot\alpha)^2}=\frac{e^{i\varphi}}{1-\bar{\alpha}\alpha}=\frac{e^{i\varphi}}{1-|\alpha|^2}\quad(|\alpha|<1)$$

故 $\arg(\omega'(\alpha))=\varphi$.

注 若将 $\arg z$ 看成是复数 z 的辐角，等式 $\arg(\omega'(\alpha))=\varphi$ 还可理解成在 $\omega'(\alpha)$ 的所有辐角所构成的集合中总存在一个辐角值刚好为 φ.

14.试求将圆域 $|z|<R$ 映射成圆域 $|\omega|<1$ 的分式线性映射.

解 圆域 $|z|<R$ 经过伸缩变换 $z_1=\dfrac{1}{R}z$ 后变为单位圆域 $|z_1|$，而单位圆 $|z_1|<1$ 到单位圆 $|\omega|<1$ 的分式线性映射的一般表示式为

$$\omega=e^{i\varphi}\cdot\frac{z_1-\alpha}{1-\bar{\alpha}z_1}\quad(\text{其中 }\varphi\text{ 为实数},|\alpha|<1)$$

所以复合上述两映射即将将 $|z|<R$ 映射成 $|\omega|<1$ 的分式线性映射

$$\omega = e^{i\varphi} \cdot \frac{\frac{z}{R} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\frac{z}{R}} = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - \alpha R}{R - \bar{\alpha} z} \quad (\varphi \text{ 为实数}, |\alpha| < 1)$$

若记 $\beta = \alpha R$，上式可简化为

$$\omega = Re^{i\varphi} \cdot \frac{z - \beta}{R^2 - \bar{\beta} z} \quad (\varphi \text{ 为实数}, |\beta| < R)$$

15.求把上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|\omega| < 1$ 的分式线性映射 $\omega = f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\mathrm{i}) = 0, f(-1) = 1$；　　(2) $f(\mathrm{i}) = 0, \arg f'(\mathrm{i}) = 0$；

(3) $f(1) = 1, f(\mathrm{i}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

解　把上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|\omega| < 1$ 的分式线性映射的一般形式为 $\omega = f(z) = e^{i\varphi}\frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}}$　$(\mathrm{Im}(\lambda) > 0)$.

(1) 若有 $f(\mathrm{i}) = 0, f(-1) = 1$，即

$$e^{i\varphi}\frac{\mathrm{i} - \lambda}{\mathrm{i} - \bar{\lambda}} = 0 \Rightarrow \lambda = \mathrm{i}, \quad e^{i\varphi}\frac{-1 - \lambda}{-1 - \bar{\lambda}} = 1 \xRightarrow{\text{结合}\lambda = \mathrm{i}} e^{i\varphi} = -\mathrm{i}$$

故所求分式线性映射为 $\omega = -\mathrm{i}\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

(2) 由 $f(\mathrm{i}) = 0$ 易知 $\lambda = \mathrm{i}$.此时 $f(z) = e^{i\varphi}\frac{z - \mathrm{i}}{z - \bar{\mathrm{i}}}$，且 $f'(z) = e^{i\varphi}\frac{2\mathrm{i}}{(z + \mathrm{i})^2}$，故

$$f'(\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}e^{i\varphi} = \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

再由 $\arg f'(\mathrm{i}) = 0$，可知 φ 可取为 $\frac{\pi}{2}$，从而 $e^{i\varphi} = \mathrm{i}$，于是所求分式线性映射为

$$\omega = \mathrm{i}\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

(3) 由于 $f(\mathrm{i}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$，而 $z = \mathrm{i}$ 关于上半平面的边界的对称点是 $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$，$\omega = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 关于单位圆边界 $|\omega| = 1$ 的对称点是 $\sqrt{5}$，根据分式线性变换保对称性易知 $f(-\mathrm{i}) = \sqrt{5}$，从而知所求的分式线性映射 $\omega = f(z)$ 也满足将三点 $1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}$，依次映成 ω 平面上的 $1, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}$. 再结合唯一确定分式线性映射的条件，可知

$$\frac{\omega - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\omega - \sqrt{5}} : \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} : \frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$$

整理后得 $\omega = \frac{3z + (\sqrt{5} - 2\mathrm{i})}{(\sqrt{5} - 2\mathrm{i})z + 3}$，即为所求的映射。也可用前面(1)、(2)题的方法确定出

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}, \quad e^{i\varphi} = \frac{\sqrt{5} + 2\mathrm{i}}{3}$$

16.求把 $|z| < 1$ 映射成 $|\omega| < 1$ 的分式线性映射，并满足条件：

(1)$f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(-1)=1$;　　(2)$f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$;

(3)$f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$;　(4)$f(a)=a, \arg f'(a)=\psi$.

解　把单位圆$|z|<1$映射成单位圆$|\omega|<1$的分式线性映射$\omega=f(z)$的一般形式为

$$\omega=f(z)=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad(\varphi\text{ 为实数}, |\alpha|<1)$$

(1) 若$f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(-1)=1$,即

$$e^{i\varphi}\frac{\frac{1}{2}-\alpha}{1-\bar{\alpha}\cdot\frac{1}{2}}=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2},\quad e^{i\varphi}\cdot\frac{-1-\alpha}{1+\bar{\alpha}}=1\xRightarrow{\text{结合}\alpha=\frac{1}{2}}e^{i\varphi}=-1$$

故所求分式线性映射为$\omega=-\frac{2z-1}{2-z}$.

(2) 由$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$可得$\alpha=\frac{1}{2}$.再由13题的结论$\varphi=\arg f'(\alpha)$可知$\varphi=\frac{\pi}{2}$,所求的映射为$\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=i\cdot\frac{2z-1}{2-z}$.

(3) 由$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,可得$\alpha=\frac{1}{2}$.再由13题的结论$\varphi=\arg f'(\alpha)$和$\varphi=\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.所以,所求的分式线性映射为$\omega=\frac{2z-1}{2-z}$.

(4) 若$a=0$,即$f(0)=0$,可得$\alpha=0$,即$f(z)=e^{i\varphi}z$.由$f'(z)=e^{i\varphi}$故

$$\arg f'(a)=\arg f'(z)|_{z=a}=\varphi=\psi$$

此时的分式线性映射为$\omega=e^{i\psi}z$.

若$a\neq0$,由$f(a)=a$及分式线性映射的保对称性,可见在z平面上,点a关于圆周$|z|=1$的对称点为$\frac{1}{\bar{a}}$,a的象点$f(a)=a$在ω平面关于圆周$|\omega|=1$的对称点为$\frac{1}{\bar{a}}$,即$\omega=f(z)$.将$a,\frac{1}{\bar{a}}$分别映成ω平面上的a和$\frac{1}{\bar{a}}$(不动点).由唯一确定分式线性映射的条件可知$\omega=f(z)$满足

$$\frac{\omega-a}{\omega-\frac{1}{\bar{a}}}=K\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}$$

或写成$\frac{\omega-a}{1-\bar{a}\omega}=K\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$,其中$K$为复常数.

将$|z|=1$映射成$|\omega|=1$,以及当$|z|=1$时,$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$,两边取绝对值得$|K|=1$.

再对两边取微分,得$\frac{1-\bar{a}a}{(1-\bar{a}\omega)^2}d\omega=K\cdot\frac{1-\bar{a}a}{(1-\bar{a}z)^2}dz$,令$z=a$,则$\omega=f(a)=a$,有$\left.\frac{d\omega}{dz}\right|_{z=a}=f'(a)=K$.结合$\arg f'(a)=\psi$,$|K|=1$,即得$K=e^{i\psi}$,故所求的分式线性映射$\omega$

$= f(z)$ 由$\frac{\omega - a}{1 - \bar{a}\omega} = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$确定.

17.把点 $z = 1, i, -i$ 分别映射成 $\omega = 1, 0, -1$ 的分式线性映射把单位圆$|z| < 1$映射成什么?并求出这个映射.

解 由唯一确定分式线性映射的条件可知,将 $z = 1, i, -i$ 分别映射成 $\omega = 1, 0, -1$ 的分式线性映射由下式确定:

$$\frac{\omega - 1}{\omega - 0} : \frac{-1 - 1}{-1 - 0} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{-i - 1}{-i - i}$$

整理得

$$\omega = \frac{(1 + i)(z - i)}{(1 + z) + 3i(1 - z)}$$

另外,点 $z = 1, i, -i$ 在单位圆周$|z| = 1$上,而其象点 $\omega = 1, 0, -1$ 在 ω 平面的实轴上,再结合分式线性映射的保角性及保圆性知,当 z 沿圆周$|z| = 1$依次从 $1 \to i \to -i$ 绕行时,单位圆$|z| < 1$ 在绕行方向的左侧,则其象点 ω 沿实轴依次从 $1 \to 0 \to -1$ 的绕行方向的左侧区域 $\text{Im}(\omega) < 0$ 为$|z| < 1$ 的象区域,即把 $z = 1, i, -i$ 映射成点 $\omega = 1, 0, -1$ 的分式线性映射把单位圆$|z| < 1$映射成下半平面 $\text{Im}(\omega) < 0$,如图 6 - 9 所示.

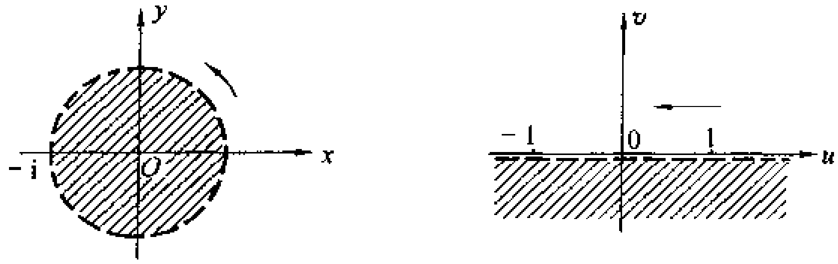


图 6 - 9

18.求出一个把右半平面 $\text{Re}(z) > 0$ 映射成单位圆$|\omega| < 1$ 的映射.

解 首先将右半平面 $\text{Re}(z) > 0$ 经过旋转映射 $\omega_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}z$,变为上半平面 $\text{Im}(\omega_1) > 0$.而上半平面 $\text{Im}(\omega_1) > 0$ 到单位圆$|\omega| < 1$ 的分式线性映射的一般形式为

$$\omega = e^{i\varphi}\frac{\omega_1 - \lambda}{\omega_1 - \bar{\lambda}} \quad (\text{Im}(\lambda) > 0, \varphi \text{ 为实数})$$

复合上述两个映射,整理得

$$\omega = e^{i\varphi}\frac{iz - \lambda}{iz - \bar{\lambda}} \quad (\text{Im}(\lambda) > 0, \varphi \text{ 为实数})$$

即为所求将右半平面 $\text{Re}(z) > 0$ 映射为单位圆$|\omega| < 1$ 的映射,如图 6 - 10 所示.

19.把下列各区域(边界为直线或圆弧,保角地并且一一对应地映射成上半平面,求出实现各映射的任一个函数:

(1)$\text{Im}(z)^{*} > 1$ 且$|z| < 2$,如图 6 - 11(a);

(2)$|z| > 2$ 且$|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}$,如图 6 - 12(a);

(3)$|z| < 2$ 且 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$,如图 6 - 13(a);

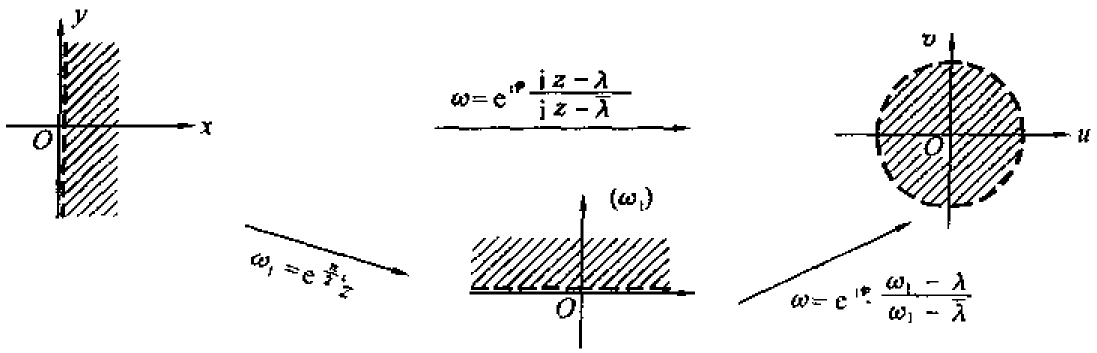


图 6－10

(4)$|z|>2$ 且 $0<\operatorname{Arg}z<\dfrac{3}{2}\pi$，如图 6－14(a)；

(5) 沿连接点 $z=0$ 和 $z=ai(a>0)$ 的线段有割痕的上半平面，如图6－15(a)；

(6) 单位圆的外部，且沿虚轴由 i 到 ∞ 有割痕的域，如图 6－16(a)；

(7) 单位圆的内部，且沿由 0 到 1 的半径有割痕的域，如图 6－17(a)；

(8)$|z|<2$ 且 $|z-1|>1$，如图 6－18(a)；

(9)$a<\operatorname{Im}(z)<b,(b>a>0)$，如图 6－19(a)；

(10)$\operatorname{Re}(z)>$ 且 $0<\operatorname{Im}(z)<a$，如图 6－20(a).

分析 利用初等函数完成由一个图形到另一个图形的映射常常不是一步可以实现的，往往需要几步转换，所以必须掌握分式线性映射和几种初等函数的映射的形式，以及它们将什么样的区域映成什么样的区域，所以对于一个问题既可以从两端同时出发，经不同的映射向同一中间区域靠拢，也可从一端出发，逐步向目标区域靠拢，最后映为设定的区域.然后再将这一系列的中间映射复合起来，所得就是所求映射，需要注意的是这种映射不是唯一的.

解 (1) 因 $\operatorname{Im}(z)>1,|z|<2$ 是以原点为圆心，2 为半径的圆的一部分，且直线 $\operatorname{Im}(z)=1$ 与圆弧 $|z|=2$ 交于点 $\sqrt{3}+i$ 和 $-\sqrt{3}+i$.于是分式线性映射

$$\omega_1=\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}$$

将区域边界上的点 $\sqrt{3}+i,2i,-\sqrt{3}+i,i$ 依次映射为 $\infty,-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}i),0,-1$.这说明分式线性映射 $\omega_1=\dfrac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}$，把区域 $\operatorname{Im}(z)>1,|z|<2$ 映射成为角形域 $-\pi<\arg\omega_1<-\dfrac{2}{3}\pi$.再作旋转变换 $\omega_2=e^{i\pi}\omega_1$，即将角形区域 $-\pi<\arg\omega_1<-\dfrac{2}{3}\pi$ 逆时针方向旋转角度 π，而变为角形域 $0<\arg\omega_2<\dfrac{\pi}{3}$.于是幂函数 $\omega=\omega_2^3$ 构成的映射将区域 $0<\arg\omega_2<\dfrac{\pi}{3}$ 映射为所需的上半平面 $0<\arg\omega<\pi$.复合上述映射得

$$\omega=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$$

即为所求的映射，如图 6－11 所示.

(2) 圆周 $|z|=2$ 与圆周 $\left|z-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$ 的交点为 $\sqrt{2}(1+i)$ 和 $\sqrt{2}(1-i)$，分式线性映射 $\omega_1=$

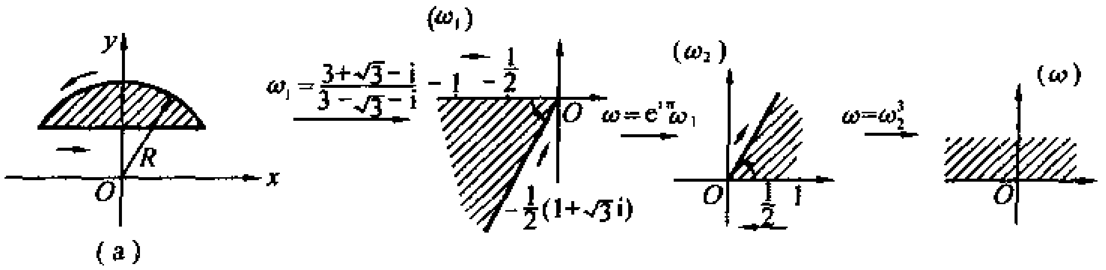


图6－11

$\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}$. 将区域边界上的点$\sqrt{2}(1-i),2,\sqrt{2}(1+i),2\sqrt{2}$依次映射为$0,\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}(-1+i),\infty,\sqrt{2}i$，即把区域$|z|>2$且$|z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$映射成角形区域$\frac{\pi}{2}<\arg\omega_1<\frac{3}{4}\pi$.

再作旋转映射$\omega_2=e^{-\frac{\pi}{2}i}\omega_1$，将角形区域$\frac{\pi}{2}<\arg\omega_1<\frac{3}{4}\pi$变为$0<\arg\omega_2<\frac{\pi}{4}$.

于是幂函数$\omega=\omega_2^4$将角形区域$0<\arg\omega_2<\frac{\pi}{4}$映射为所需的上半平面$0<\arg\omega<\pi$，复合上述映射得$\omega=\left(\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right)^4$，即为所求的一个映射，见图6－12.

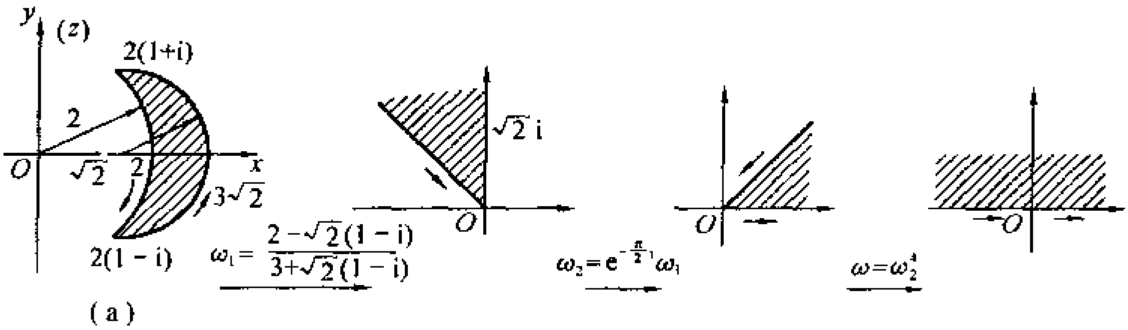


图6－12

(3) 因为$|z|<2,0<\arg z<\frac{\pi}{4}$为扇形，作映射$\omega_1=z^4$映为上半圆域$|\omega_1|<2,\mathrm{Im}(\omega_1)>0$，实轴上的交点为16，－16.用分式线性映射

$$\omega_2=-\frac{\omega_1+16}{\omega_1-16}\quad(16\to\infty,\ -16\to 0)$$

将上半圆域映为第一象限$\mathrm{Re}(\omega_2)>0,\mathrm{Im}(\omega_2)>0$，即$0<\arg\omega_2<\frac{\pi}{2}$.

再作映射$\omega=\omega_2^2$将第一象限映为上半平面$\mathrm{Im}(\omega)>0$，故

$$\omega=\omega_2^2=\left(-\frac{\omega_1+16}{\omega_1-16}\right)^2=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$$

见图6－13所示.

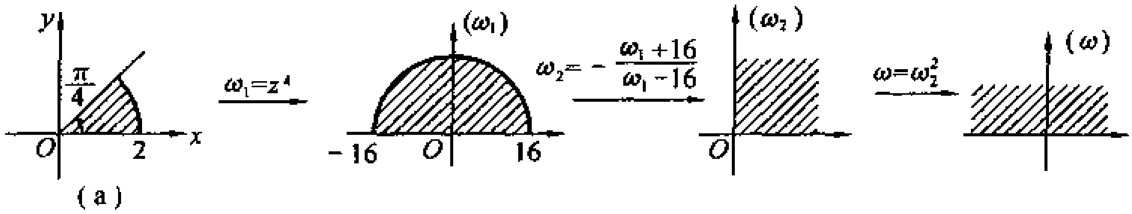


图 6 - 13

(4) 因为$|z|>2, 0<\arg z<\frac{3}{2}\pi$是第一、第二、第三象限除去$|z|\leqslant 2$的区域.用$\omega_1=z^{\frac{2}{3}}$映为$\mathrm{Im}(\omega_1)>0, |\omega_1|>2^{\frac{2}{3}}$区域;再作分式线性映射

$$\omega_2=-\frac{\omega_1+2^{\frac{2}{3}}}{\omega_1-2^{\frac{2}{3}}}\quad(2^{\frac{2}{3}}\to\infty,\ -2^{\frac{2}{3}}\to 0)$$

映为角形区域$0<\arg\omega_2<\frac{\pi}{2}$;最后作映射$\omega=\omega_2^2$映为上半平面,故$\omega=\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}\right)^2$,见图 6 - 14.

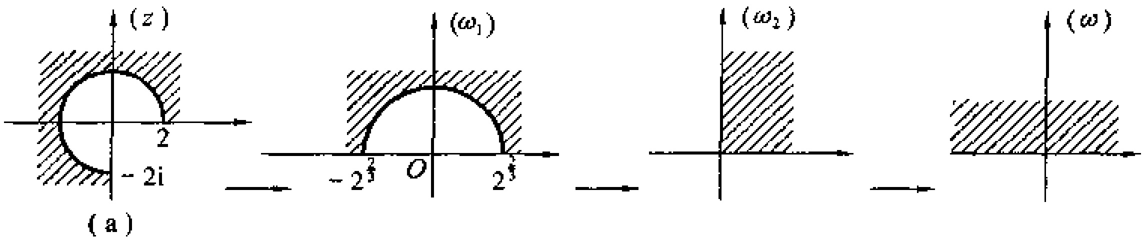


图 6 - 14

(5) 连接点$z=0$和$z=a\mathrm{i}$的线段为裂缝的上半平面,用映射$\omega_1=z^2$映为有裂缝$[-a^2,+\infty)$的ω_1平面;再经平移映射$\omega_2=\omega_1+a^2$映为裂缝$[0,+\infty)$的全平面ω_2;最后经映射$\omega=\sqrt{\omega_2}$映为上半平面$\mathrm{Im}(\omega)>0$.故$\omega=\sqrt{z^2+a^2}$,见图 6 - 15.

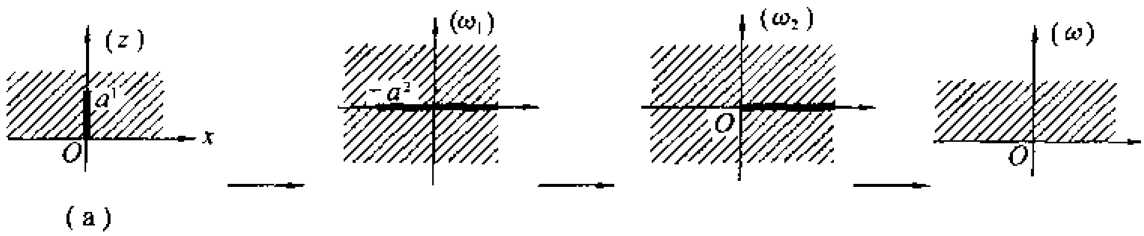


图 6 - 15

(6) 图 6 - 16 为将单位圆周$|z|=1$的外部且沿虚轴有割痕的区域映射为上半平面的映射过程.

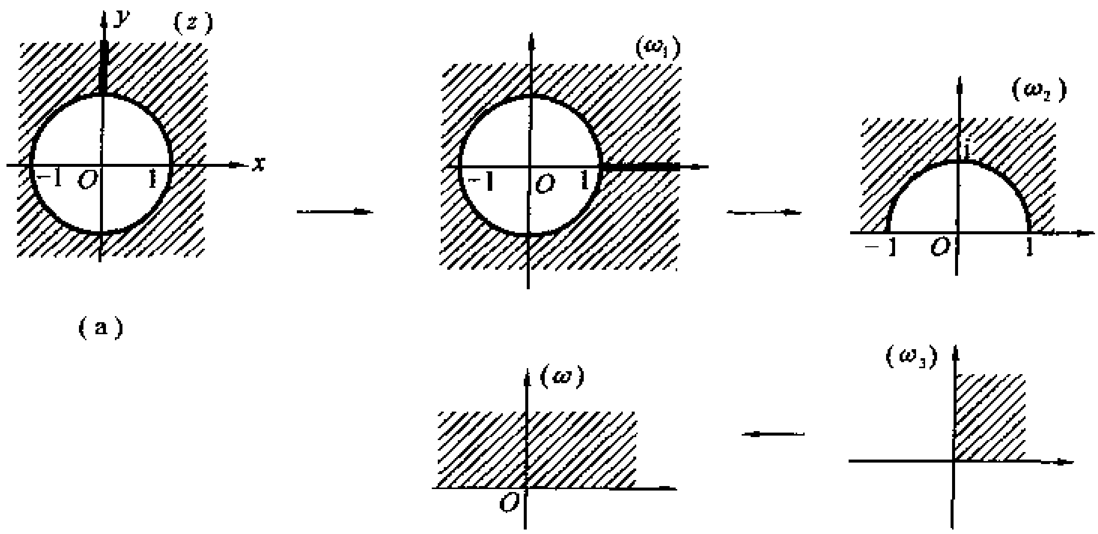


图 6-16

首先作旋转变换，$\omega_1 = e^{-\frac{\pi}{2}i}z$，然后作开方运算 $\omega_2 = \sqrt{\omega_1}$，得区域 $|\omega_2| > 1$，$0 < \arg\omega_2 < \pi$. 再作线性映射

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 + 1}{\omega_2 - 1}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

得区域 $0 < \arg\omega_3 < \frac{\pi}{2}$. 最后平方得所给上半平面 $\omega = \omega_3^2$，于是所求的映射为

$$\omega = \omega_3^2 = e^{\pi i}\left(\frac{\sqrt{-iz}+1}{\sqrt{-iz}-1}\right)^2 = -\left(\frac{\sqrt{-iz}+1}{\sqrt{-iz}-1}\right)^2$$

(7) 单位圆 $|z| = 1$ 的内部且有割痕 $[0,1]$ 的区域，先经 $\omega_1 = z^{\frac{1}{2}}$ 映为上半单位圆 $\mathrm{Im}(\omega_1) > 0, |\omega_1| < 1$；再经 $\omega_2 = \frac{-(\omega_1+1)}{(\omega_1-1)}$ 和 $\omega = \omega_2^2$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$(可参见(3)题解答). 故所求映射为 $\omega = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$，变换过程见图 6-17.

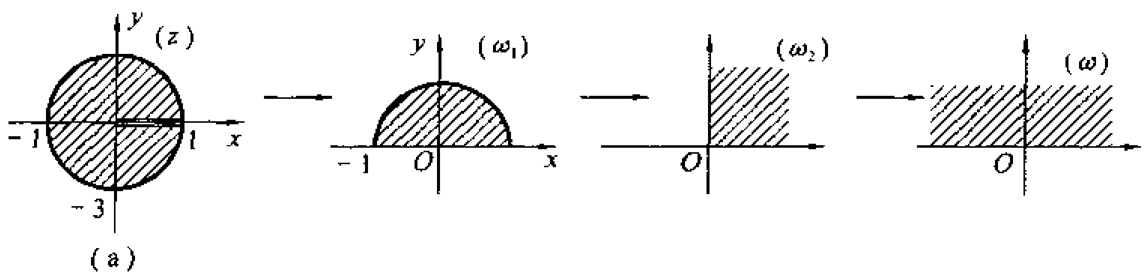


图 6-17

(8) 区域 $|z| < 2, |z-1| > 1$ 先经映射 $\omega_1 = \frac{z}{z-2}$ 映为区域 $0 < \mathrm{Re}(\omega_1) < \frac{1}{2}$.

再经旋转及伸缩变换将 $\omega_2 = 2\pi e^{\frac{\pi}{2}i}\omega_1$ 映为区域 $0 < \mathrm{Im}(\omega_2) < \pi$.

作指数映射 $\omega = e^{\omega_2}$ 得所给区域 $0 < \arg\omega < \pi$(或 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$),其变换过程如图 6 - 18 所示.所以,所求的变换为 $\omega = e^{2\pi iz/(z-2)}$.

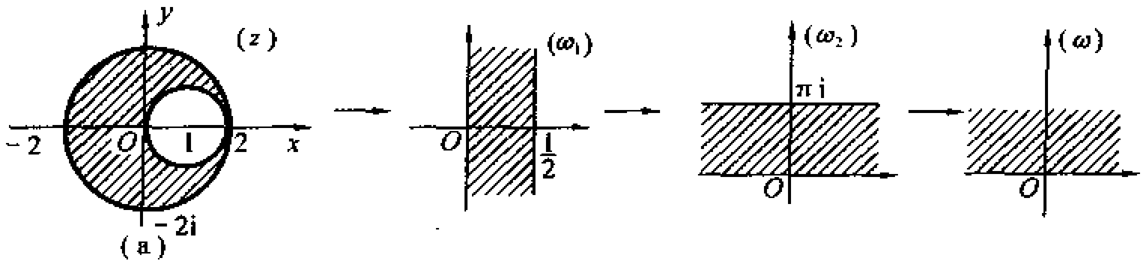


图 6 - 18

(9) 区域 $a < \mathrm{Im}(z) < b$ $(0 < a < b)$,先经平移变换 $\omega_1 = z - a\mathrm{i}$ 化为区域 $0 < \mathrm{Im}(\omega_1) < b - a$,然后经伸缩变换 $\omega_2 = \frac{\pi}{b-a}\omega_1$ 化为区域 $0 < \mathrm{Im}(\omega_2) < \pi$,最后经指数变换 $\omega = e^{\omega_2}$ 化为上半平面 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$,故所求映射为 $\omega = e^{\frac{z-a\mathrm{i}}{b-a}\pi}$.变换过程如图 6 - 19 所示.

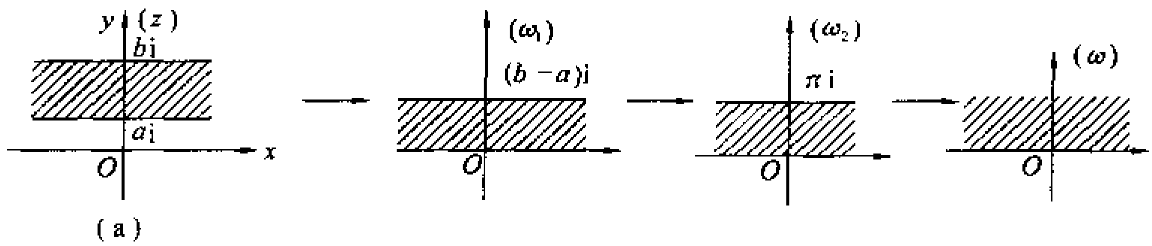


图 6 - 19

(10) 复合图 6 - 20 所给映射,即得所求的一个映射 $\omega = \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{a}z} - 1}{e^{-\frac{\pi}{a}z} + 1}\right)^2$.

*20. 求将上半平面 z 映射成 ω 平面中如图 6 - 21 所示的阴影部分的映射,并使 $x = 0$ 对应于 A 点,$x = -1$ 对应于 B 点.

解 图 6 - 21 所示区域为一无界三角形区域,其中顶点 B, A, C 分别为 $\omega_1 = \pi\mathrm{i}, \omega_2 = \infty, \omega_3 = \infty$,对应顶角分别为 $\alpha_1 = \frac{3}{2}\pi, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\frac{\pi}{2}$.

设 $x_1 = -1, x_2 = 0$ 分别对应 ω_1(B 点),ω_2(A 点),令 $x_3 = \infty$ 对应 ω_3(C 点).这样 z 平面上的实轴的 $(\infty, -1)$ 对应 ω 平面中虚轴上 CB 边;$(-1, 0)$ 对应 BA 边($\mathrm{Im}(\omega) = \pi, \mathrm{Re}(\omega) < 0$);$(0, \infty)$ 对应 ω 平面上的实轴 AC 边.

由多角形区域的映射公式(Schwarz-Christoffel 映射公式)有

$$\begin{aligned}\omega &= k\int (z+1)^{\frac{1}{2}}(z-0)^{-1}\mathrm{d}z + C \\ &= k\int \frac{\sqrt{z+1}}{z}\mathrm{d}z + C \\ &= k\left(2\sqrt{z+1} + \ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right) + C\end{aligned}$$

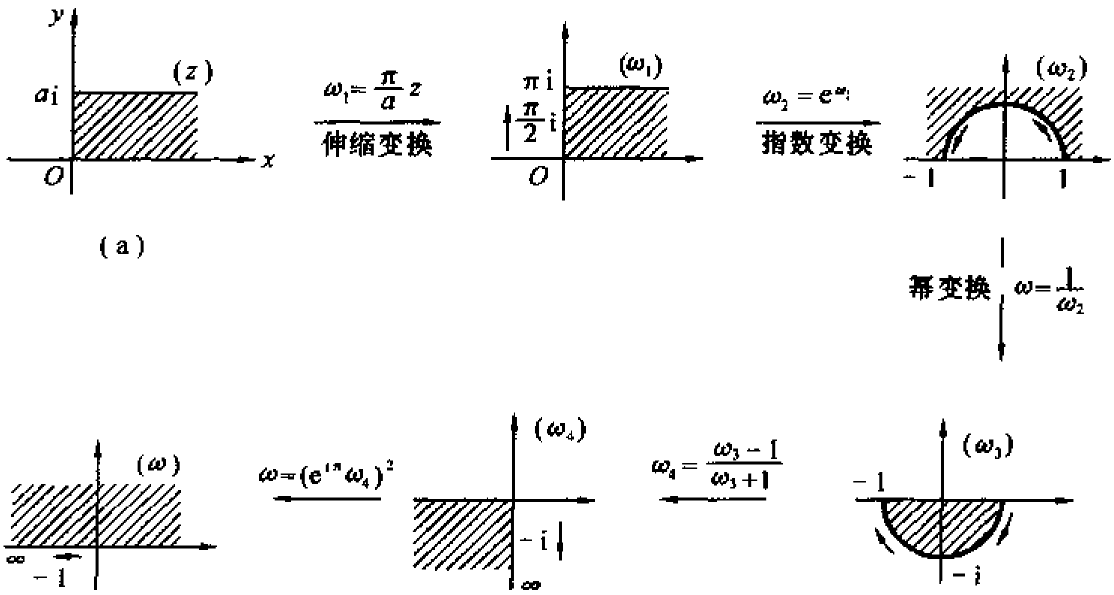


图 6－20

又 $z=-1$ 对应 $\omega=\pi i$，代入上式得

$$k(\pi i)+C=\pi i$$

记 $k=k_1+ik_2, C=C_1+iC_2$，则 $C_1=k_2\pi, C_2=\pi-k_1\pi$.

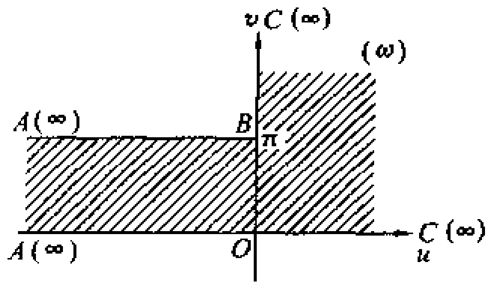


图 6－21

注意：$\sqrt{z+1}$ 与 $\ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$ 均取主值分支，且当 $z=x$ 沿 z 平面上正实轴趋于 ∞ 变化时，相应的 $\omega=k\left(2\sqrt{z+1}+\ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)+C$ 在 ω 平面实轴上趋于 ∞ 变化，其虚部 $\mathrm{Im}(\omega)=0$. 于是

$$0=\lim_{z=x\to+\infty}\mathrm{Im}(\omega)=C_2+\lim_{x\to+\infty}\left\{(2\sqrt{x+1})k_2+k_2\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right\}\cdot k_2$$

$$=C_2+\lim_{t\to+\infty}\left\{\ln e^{2t}\frac{t-1}{t+1}\right\}\cdot k_2$$

其中 $t=\sqrt{x+1}$，因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{2t}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=+\infty$，所以要使上式成立，必须 $k_2=0, C_2=0$，再结合 $C_1=k_2\pi, C_2+k_1\pi=\pi$，即可确定出常数 k 与 C，分别为 $k=1, C=0$，而所求映射为

$$\omega=2\sqrt{z+1}+\ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$$

*21. 求把图 6－22 中所示的阴影部分映成上半平面的映射，并使 A 点对应于 $x=-1$，O 点对应于 $x=1$.

分析　先求把上半平面映射成图 6－22 中所示阴影部分区域的映射，并使 $x=-1$ 对应于 A 点，$x=1$ 对应于 O 点，然后考虑此映射的逆映射即可.

解 图6－22阴影部分为一无界的三角形区域，其顶点A,O,B分别对应$\omega_1=\pi i,\omega_2=0,\omega_3=\infty$，顶角分别为$\alpha_1=\frac{\pi}{2},\alpha_2=\frac{\pi}{2},\alpha_3=0$.

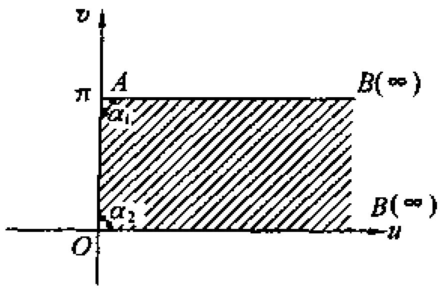


图6－22

设$x_1=-1,x_2=1$分别对应ω_1（A点），ω_2（O点）.令$x_3=\infty$对应ω_3（B点）.于是由多角形区域的映射公式有

$$\begin{aligned}\omega&=k\int[(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}]\mathrm{d}z+C\\&=k'\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z+C\\&=k'(\arcsin z)+C'\end{aligned}$$

其中$\arcsin z$取$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$的那一支.利用点$x_1=-1,x_2=1$与$\omega_1=\pi i,\omega_2=0$的对应关系，有$k'\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+C'=\pi i,k'\left(\frac{\pi}{2}\right)+C'=0$，解得$k'=-i,C'=\frac{\pi}{2}i$.

于是$\omega=-i\arcsin z+\frac{\pi}{2}i$，其逆映射$z=\sin\left(i\omega+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(i\omega)=\mathrm{ch}\omega$即为所求的映射：将图6－22的阴影部分映射成上半平面且使$x=-1$对应A点，$x=1$对应O点.

*22. 下列三组图形（图6－23～图6－25）中，标有映射函数，并在图形上注明了对应点，边界的对应部分也用字母注出，试分别验证每组的结论.

(1)

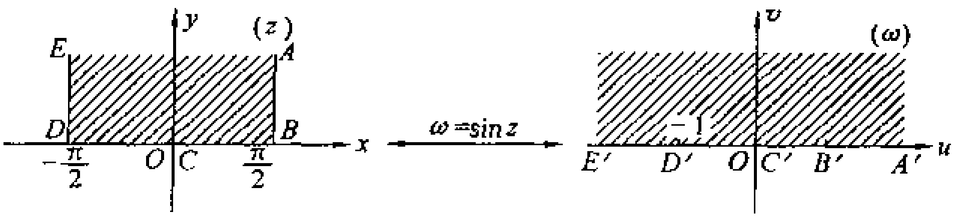


图6－23

(2)

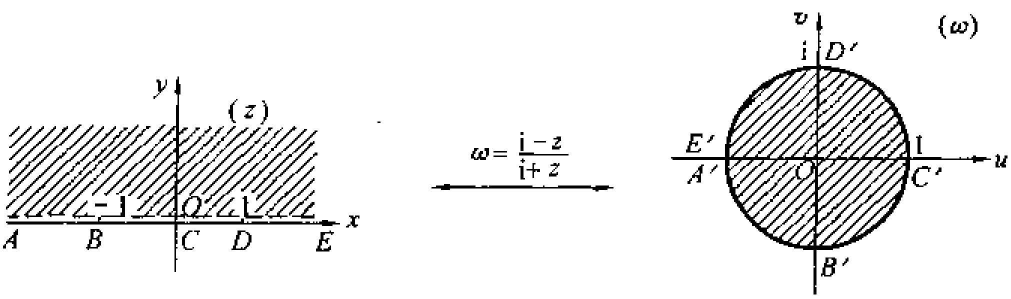


图6－24

(3)

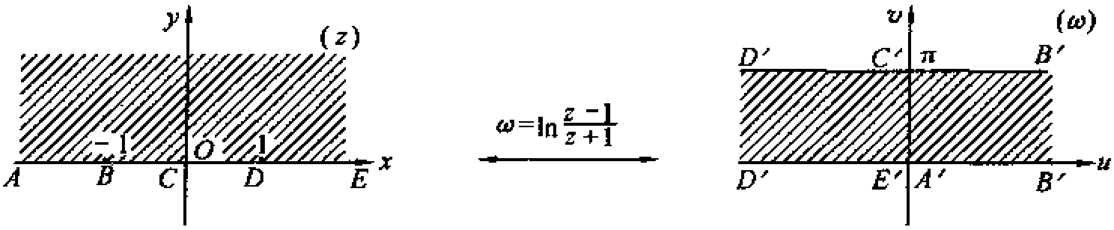


图 6 - 25

证明 (1) z 平面上的阴影部分为一无界三角形域,其顶点分别为

$$z_1=-\frac{\pi}{2},\quad z_2=\frac{\pi}{2},\quad z_3=\infty$$

顶角分别为 $\alpha_1=\frac{\pi}{2},\alpha_2=\frac{\pi}{2},\alpha_3=0$.

设 $\omega_1=-1,\omega_2=1,\omega_3=\infty$ 分别对应 z_1,z_2,z_3,则由多角形区域的映射公式有

$$z=k\int(\omega+1)^{-\frac{1}{2}}(\omega-1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\omega+C=k'\int\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}\mathrm{d}\omega+C'=k'\arcsin\omega+C'$$

利用点 $\omega_1=-1,\omega_2=1$ 与 $z_1=-\frac{\pi}{2},z_2=\frac{\pi}{2}$ 分别对应的关系,有

$$k'\left(-\frac{\pi}{2}\right)+C'=-\frac{\pi}{2},\quad k'\left(\frac{\pi}{2}\right)+C'=\frac{\pi}{2}$$

解得 $k'=1,C'=0$.

于是 $z=\arcsin\omega$,或 $\omega=\sin z$.

(2) 把上半平面映射成单位圆内部的分式线性映射的一般形式为

$$\omega=e^{i\varphi}\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\quad(\mathrm{Im}(\lambda)>0,\varphi\text{ 实数})$$

将对应关系 $z_1=\infty$ 对应 $\omega_1=-1$;$z_2=-1$ 对应 $\omega_2=-i$;$z_3=0$ 对应 $\omega_3=1$;$z_4=1$ 对应 $\omega_4=i$ 分别代入一般形式中得

$$\begin{cases}-1=e^{i\varphi}\\ -i=e^{i\varphi}\cdot\dfrac{-1-\lambda}{-1-\bar{\lambda}}\\ 1=e^{i\varphi}\dfrac{-\lambda}{-\bar{\lambda}}\\ i=e^{i\varphi}\cdot\dfrac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\end{cases}$$

解得 $\lambda=i,e^{i\varphi}=-1$,即所求得映射 $\omega=-\frac{z-i}{z+i}=\frac{i-z}{i+z}$.

(3) 构造一个中间映射,使得图 6 - 25 中 ω 平面上阴影部分的区域通过指数函数 e^{ω}(ω 为自变量)构成的映射 $z_1=e^{\omega}$ 映射后,变为 z_1 平面的上半平面,即 $\mathrm{Im}(z_1)>0$,并满足对应关系:ω 平面上的 C' 对应 z_1 平面上的 $C''(z_1=-1)$;ω 平面上的点 E' 或(A')对应 z_1 平面上的点 E''(或 A'')(即 $z_1=1$);ω 平面上的点 D' 对应 z_1 平面上的点 $O(D'')$(即 $z_1=0$);ω 平面上 B' 对

应 z_1 平面上点 $B''(z_1=\infty)$(见图 6－26).

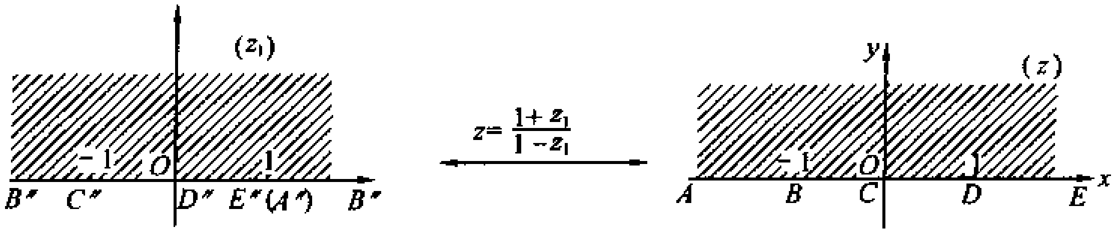


图 6－26

上半 z_1 平面到上半 z 平面的分式线性映射的一般形式为(见第 9 题):

$$z=\frac{az_1+b}{cz_1+d}\quad(a,b,c,d\text{ 为实数},ad-bc>0)$$

再由 z_1 平面上的点 1，－1,0,分别对应 z 平面上的点 ∞,0,1,则有

$$\frac{a+b}{c+d}=\infty,\quad\frac{-a+b}{-c+d}=0,\quad\frac{b}{d}=1\quad(ad-bc>0)$$

解得 $b=a=d,c=-d$.于是

$$z=\frac{z_1+1}{-z_1+1}\quad\text{或}\quad z_1=\frac{z-1}{z+1}$$

将上半 z_1 平面映射成上半 z 平面且使 A'',B'',C'',D'',E'' 分别与 A,B,C,D,E 对应.从面复合映射

$$z=\frac{e^{\omega}+1}{-e^{\omega}+1}\quad\text{或}\quad e^{\omega}=\frac{z-1}{z+1}\quad\text{或}\quad\omega=\ln\frac{z-1}{z+1}$$

将图 6－25 中 ω 平面的阴影部分映为 z 平面上的阴影部分,且使 A',B',C',D',E' 分别与 A,B,C,D,E 对应.

*23. 求在 ω 平面中第一象限外部的等温线方程.已知在正实轴上的温度 $T=100$ ℃, 在正虚轴上的温度 $T=0$ ℃.

解 ω 平面中第一象限外部的区域经映射 $z=-\omega^{\frac{2}{3}}$ 映射成上半 z 平面,且 ω 平面上正实轴变为 z 平面上负实轴;ω 平面上的正虚轴变为 z 平面上正实轴,以及 $z=-1$ 对应 $\omega=1$;$z=0$ 对应 $\omega=0$;$z=1$ 对应 $\omega=\mathrm{i}$,如图 6－27 所示.

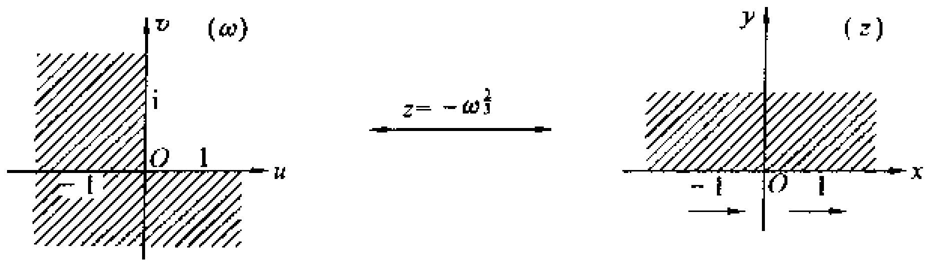


图 6－27

这样 ω 平面第一象限外部所讨论的问题就转化为上半 z 平面上所讨论的问题.

上半 z 平面中等温线方程由边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \quad (\text{拉普拉斯方程}) \\ T(x,0)=T_0=0(x>0),T(x,0)=T_1=100(x<0)\end{cases} \tag{6-4}$$

确定.解之得

$$T=T_0+\frac{1}{\pi}(T_1-T_0)\theta=\frac{100}{\pi}\arg z$$

其中 $\theta=\arg z\in(0,\pi)$，$z=x+\mathrm{i}y$.

为了回到 ω 平面中，再令 $\omega=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$，由 $z=-\omega^{\frac{2}{3}}$ 可得 $z=\rho^{\frac{2}{3}}e^{\mathrm{i}\left(\frac{2\varphi}{3}+\pi\right)}$，得 $\arg z=\dfrac{2}{3}\varphi+\pi$.

再由 $0<\arg z<\pi$ 知 $-\dfrac{3\pi}{2}<\varphi<0$，故问题的解为 $T=\dfrac{100}{\pi}\left(\dfrac{2}{3}\varphi+\pi\right)$，其中 φ 为ω 的极角，$-\dfrac{3\pi}{2}<\varphi<0$.

同步训练题

1.单项选择题

(1) 映射 $\omega=e^{\mathrm{i}z^2}$ 在点 $z=-\mathrm{i}$ 处的伸缩率为(　　).

A.1　　B.2　　C.e^{-1}　　D.e

(2) 若函数 $\omega=z^2+2z$ 构成的映射将 z 平面上的区域 G 放大，那么该区域 G 是(　　).

A.$|z|<\dfrac{1}{2}$　　B.$|z+1|<\dfrac{1}{2}$　　C.$|z|>\dfrac{1}{2}$　　D.$|z+1|>\dfrac{1}{2}$

(3) 映射 $\omega=\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ 在 $z_0=2\mathrm{i}$ 处的旋转角为(　　).

A.0　　B.$\dfrac{\pi}{2}$　　C.π　　D.$-\dfrac{\pi}{2}$

(4)$1+2\mathrm{i}$ 关于圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的对称点是(　　).

A.$3\mathrm{i}$　　B.$-2+\mathrm{i}$　　C.$-3\mathrm{i}$　　D.6

(5) 下列命题中正确的是(　　).

A.$\omega=z^n$ 在复平面上处处保角(这里 n 为自然数)

B.映射 $\omega=z^3+4z$ 在 $z=0$ 处的伸缩率为零

C.若 $\omega=f_1(z)$ 与 $\omega=f_2(z)$ 是同时把单位圆 $|z|<1$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 的线性变换，那么 $f_1(z)=f_2(z)$

D.函数 $\omega=\bar{z}$ 构成的映射属于第二类保角映射

(6) 将点 $z=0,1,\infty$ 分别映射为 $\omega=-1,-\mathrm{i},1$ 的分式线性映射为(　　).

A.$\omega=\dfrac{z+1}{z-1}$　　B.$\omega=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\dfrac{z+1}{z-1}$　　C.$\omega=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$　　D.$\omega=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

(7) 分式线性映射 $\omega=\mathrm{i}\dfrac{z+1}{z-1}$ 将 $|z|>1$ 映为(　　).

A.$|\omega|<1$　　B.$|\omega|>1$　　C.$\mathrm{Im}(\omega)>0$　　D.$\mathrm{Im}(\omega)<0$

(8) 函数 $\omega=\dfrac{z^4-\mathrm{i}}{z^4+\mathrm{i}}$ 将角形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射为(　　).

A. $|\omega|<1$ B. $|\omega|>1$ C. $\mathrm{Im}(\omega)>0$ D. $\mathrm{Im}(\omega)<0$

(9) 把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成圆域 $|\omega|<2$ 且满足 $\omega(\mathrm{i})=0,\omega'(\mathrm{i})=1$ 的分式线性变换 $\omega(z)$ 为(　　).

A. $2\mathrm{i}\dfrac{1-z}{1+z}$ B. $2\mathrm{i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ C. $2\dfrac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$ D. $2\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

(10) 函数 $\omega=\dfrac{\mathrm{e}^z-1-\mathrm{i}}{\mathrm{e}^z-1+\mathrm{i}}$ 将带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<\pi$ 映射为(　　).

A. $\mathrm{Re}(\omega)>0$ B. $\mathrm{Re}(\omega)<0$ C. $|\omega|<1$ D. $|\omega|>1$

2.填空题

(1) 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$,那么映射 $\omega=f(z)$ 在 z_0 处具有________.

(2) 把单位圆 $|z|<1$ 映射为圆域 $|\omega-1|<3$ 且满足 $\omega(0)=1,\omega'(0)>0$ 的分式线性变换为 $\omega(z)=$ ________.

(3) 把角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射成圆域 $|\omega|<4$ 的一个映射可写为________.

(4) 映射 $\omega=z^3$ 将扇形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 且 $|z|<2$ 映射为________.

(5) 映射 $\omega=\ln z$ 将区域 $\mathrm{Im}(z)>0$ 共形映射成的象域为________.

(6) 映射 $\omega=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 将区域 $|z|<1,\mathrm{Im}(z)>0$ 映射为________.

(7) z 平面左半带形域 $D:-\infty<\mathrm{Re}(z)<0,0<\mathrm{Im}(z)<\pi$ 在映射 $\omega=\mathrm{e}^z$ 下的象域为________.

3.求映射 $\omega=f(z)=(z+1)^2$ 的等伸缩率及等旋转角的填迹方程.

4.求在分式线性映射 $\omega=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下,下列图形的象;

(1) $|z|<1$; (2) $-1\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant 1,\mathrm{Im}(z)=0$; (3) 虚轴.

5.试求有两个不动点 $1,-1$,并将 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ 映为 $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$ 的分式线性映射.

6.求分式线性变换 $\omega(z)$,使 $|z|=1$ 映射为 $|\omega|=1$ 且使 $z=1,1+\mathrm{i}$ 映射为 $\omega=1,\infty$.

7.求把具有割痕:$\mathrm{Im}(z)=0$ 且 $\dfrac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}(z)<1$ 的单位圆 $|z|<1$ 映射成上半平面的一个映射.

8.求将角形域 $-\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$,且使点 $1-\mathrm{i},\mathrm{i},0$ 映为 $2,-1,0$ 的共形映射.

9.求将偏心圆环 $|z-3|>9,|z-8|<16$ 映为同心圆环 $\rho<|\omega|<1$ 的分式线性映射,并求 ρ 的值.

同步训练题答案

1.单项选择题

解 (1)B (2)D (3)B (4)A (5)D (6)C (7)C (8)A (9)B (10)C

2.填空题

解 (1) 保角性与伸缩率不变性 (2) $1+3z$

(3)$\omega = 4e^{i\varphi}\dfrac{z^4-\lambda}{z^4-\bar{\lambda}}$ ($\varphi \in \mathbf{R}, \mathrm{Im}(\lambda) > 0$)

(4) 扇形区域 $0 < \arg\omega < \pi$，且 $|\omega| < 8$

(5) 带形区域 $0 < \mathrm{Im}(\omega) < \pi$　(6) 下半平面 $\mathrm{Im}(\omega) < 0$

(7) 上半单位圆域：$\mathrm{Im}(\omega) > 0$ 且 $|\omega| < 1$

3.解　因 $f'(z) = 2(z+1)$，所以等伸缩率的轨迹方程为 $|f'(z)| = c_1$，即 $|z+1| = c$（$c > 0$ 常数）.

等旋转角的轨迹方程为 $\arg(z+1) = a$（$a > 0$ 为常数）.它是从 -1 出发的一条射线.

4.解　由 $\omega = \dfrac{z+1}{z-1}$ 可得 $z = \dfrac{\omega+1}{\omega-1}$.

(1) 当 $|z| < 1$，即 $\left|\dfrac{\omega+1}{\omega-1}\right| < 1$，也就是说 $|\omega+1| < |\omega-1|$ 时，它表示到点 $\omega_1 = -1$ 的距离小于到点 $\omega_2 = 1$ 的距离的全部点 ω，即 $\mathrm{Re}(\omega) < 0$.

(2) 令 $z = x + iy$，$\omega = u + iv$，有

$$\omega = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+yi}{x-1+yi} = \frac{(x^2-1)+y^2-2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

$-1 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1$，$\mathrm{Im}(z) = 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，$y = 0$，此时有

$$u = \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \leqslant 0, \quad v = 0$$

即象为 ω 平面上负实轴和原点.

(3) 虚轴即 $\mathrm{Re}(z) = x = 0$，依(2)有 $u = \dfrac{y^2-1}{1+y^2}$，$v = \dfrac{-2y}{1+y^2}$，则有 $u^2+v^2 = 1$，知其象为 ω 平面上面周 $|\omega| = 1$.

5.解　设所求分式线性映射为 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$（$ad - bc \neq 0$），再根据 $1, -1$ 为其不动点，$\omega(e^{\frac{\pi}{3}i}) = e^{\frac{2}{3}\pi i}$，于是有

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a+b}{c+d} & (6-5) \\ -1 = \dfrac{-a+b}{-c+d} & (6-6) \\ e^{\frac{2}{3}\pi i} = \dfrac{e^{\frac{\pi}{3}i}a+b}{e^{\frac{\pi}{3}i}c+d} & (6-7) \end{cases}$$

由式(6－5)得
$$a + b = c + d \qquad (6-8)$$
由式(6－6)得
$$b - a = c - d \qquad (6-9)$$
由式(6－8)，式(6－9)及 $ad - bc \neq 0$ 知
$$b = c, a = d \quad 且 \quad a^2 - b^2 \neq 0 \qquad (6-10)$$
把式(6－10)代入式(6－7)，解得
$$e^{\pi i}b + e^{\frac{2\pi}{3}i}a = e^{\frac{\pi}{3}i}a + b, \quad (e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i})a = 2b \qquad (6-11)$$
把式(6－10)，式(6－11)代入分式线性映射的一般表达式中，化简得
$$\omega = \frac{1-2z}{z-2}$$

6.解　因圆心 $\omega=0$ 与 $\omega=\infty$ 是关于圆周 $|\omega|=1$ 对称的一对对称点，又由分式线性映射的保对称性可知，$\omega=0,\infty$ 在 z 平面上的一对原象关于圆周 $|z|=1$ 对称，由 $\omega=\infty$ 在 z 平面上的原象为 $1+\mathrm{i}$ 及 $1+\mathrm{i}$ 关于圆周 $|z|=1$ 对称的对称点

$$\frac{1}{\overline{(1+\mathrm{i})}}=\frac{1}{1-\mathrm{i}}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$$

即 $\omega=0$ 在 z 平面上的原象为 $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$，这样，我们就得到了所求分式线性变换的三对对应点，即将 $z=1,\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}),1+\mathrm{i}$ 映为 ω 平面上的点 $1,0,\infty$，于是

$$\frac{\omega-1}{\omega-0}:\frac{\infty-1}{\infty-0}=\frac{z-1}{z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})}:\frac{1+\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})}$$

解之得所求分式线性变换为 $$\omega=\frac{(\mathrm{i}-1)z+1}{-z+(1+\mathrm{i})}$$

7.解　单位圆到单位圆的分式线性变换的一般形式为

$$\omega_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\quad(\varphi\in\mathbf{R},|\lambda|<1)$$

我们欲将有割痕：$\mathrm{Im}(z)=0,\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}(z)<1$ 的单位圆映为具有割痕 $\mathrm{Im}(\omega_1)=0,0\leqslant\mathrm{Re}(\omega_1)<1$ 的单位圆 $|\omega_1|<1$，从而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=1,\lambda=\frac{1}{2}$，即分式线性映射

$$\omega_1=\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\frac{2z-1}{2-z}$$

具有此特点．接下来再作根式变换 $\omega_2=\sqrt{\omega_1}$，即将有割痕 $\mathrm{Im}(\omega_1)=0,0\leqslant\mathrm{Re}(\omega_1)<1$ 的单位圆 $|\omega_1|<1$ 映射为上半单位圆 $\mathrm{Im}(\omega_2)>0$ 且 $|\omega_2|<1$．

再作变换 $\omega_3=\frac{1+\omega_2}{1-\omega_2}$ 将上半单位圆 $\mathrm{Im}(\omega_2)>0$ 且 $|\omega_2|<1$ 映射为第一象限 $0<\arg\omega_3<\frac{\pi}{2}$．

最后作变换 $\omega=\omega_3^2$ 把第一象限映射为上半平面 $0<\arg\omega<\pi$．

复合这些变换得所求的映射

$$\omega=\left(\frac{1+\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}}{1-\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}}\right)^2$$

其区域变换过程如图 6－28 所示．

8.解　(1) 如图 6－29 所示，首先将角形域映为上半平面，这要作两个变换：一是 $\omega_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}z$，将角形域逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$，二是 $\omega_2=\omega_1^{\frac{4}{3}}$，将角形域放大为上半平面．这时点 $z=1-\mathrm{i},\mathrm{i},0$ 映射为 $\omega_2=\sqrt[3]{4},-1,0$．

(2) 再将点 $\sqrt[3]{4},-1,0$ 映为点 $\omega=2,-1,0$，这可由分式线性映射的交比不变性求得

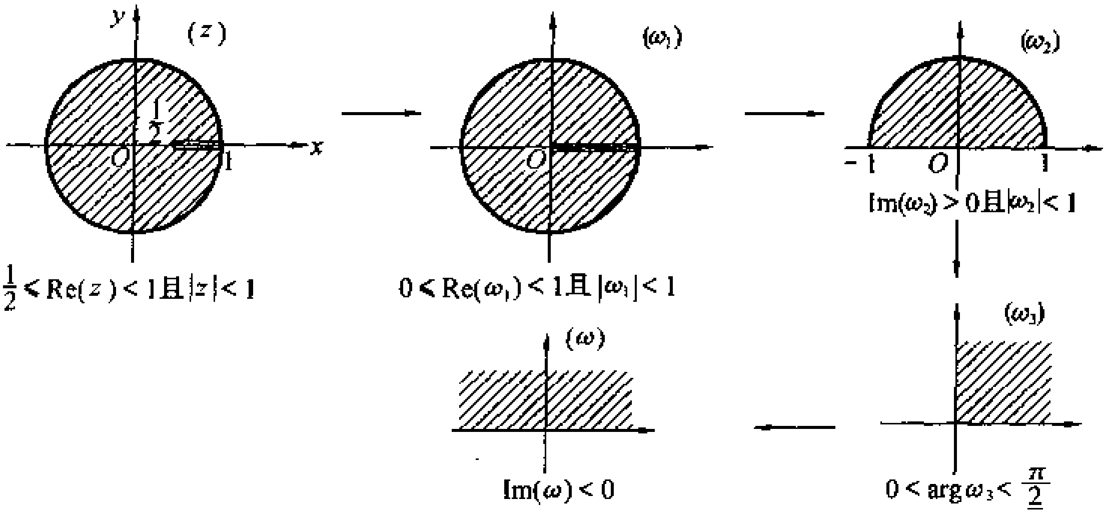


图6-28

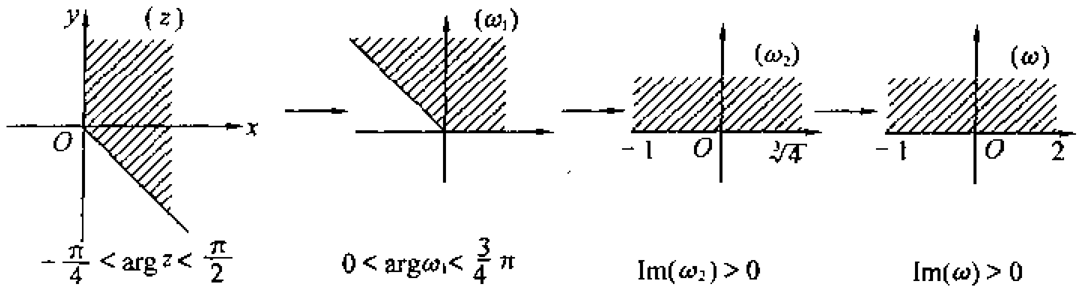


图6-29

$\frac{\omega+1}{\omega}:\frac{2+1}{2}=\frac{\omega_2+1}{\omega_2}:\frac{\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{4}}$,即

$$\omega=\frac{2(\sqrt[3]{4}+1)\omega_2}{(\sqrt[3]{4}-1)\omega_2+3\sqrt[3]{4}}$$

将上述变换复合,得所求映射为 $\omega=\frac{2(\sqrt[3]{4}+1)e^{\frac{\pi}{4}i}z^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt[3]{4}-1)e^{\frac{\pi}{4}i}z^{\frac{4}{3}}+3\cdot\sqrt[3]{4}}$.

9.**解**　考虑所给两圆与实轴交点之间的变换,又结合分式线性映射具有交比不变性,于是设分式线性映射 $\omega=f(z)$,将 $z=-8,-6,12,24$ 映为 $\omega=-1,-\rho,\rho,1$,有$\frac{12+8}{12+6}:\frac{24+8}{24+6}=\frac{\rho+1}{\rho+\rho}:\frac{1+1}{1+\rho}$,解得 $\rho=\frac{2}{3}$($\frac{3}{2}$ 舍去).

于是有$\frac{z+8}{z+6}:\frac{24+8}{24+6}=\frac{\omega+1}{\omega+\frac{2}{3}}:\frac{1+1}{1+\frac{2}{3}}$,即 $\omega=\frac{2z}{z+24}$.

快乐大本·优秀教材辅导

KUAILE DABEN

YOUXIUJIAOCAIFUDAO

责任编辑 程小东 封面设计 张 骏

- 线性代数习题精解精练
- 材料力学习题精解精练
- 电工学习题精解精练
- 高等数学习题精解精练
- 机械原理习题精解精练
- 电子技术习题精解精练
- 物理化学习题精解精练
- 自动控制原理习题精解精练
- [illegible]
- 计算机网络习题精解精练
- 普通物理学习题精解精练
- 电子线路(线性部分)习题精解精练
- 新编 16/32 位微型计算机原理及应用习题精解精练
- 理论力学习题精解精练
- 电路原理习题精解精练
- 数字逻辑习题精解精练
- 普通化学习题精解精练
- 概率论与数理统计习题精解精练
- 电工技术习题精解精练
- 信号与系统习题精解精练
- 模拟电子技术习题精解精练
- 数字电子技术习题精解精练

ISBN 978-7-81073-981-8

9 787810 739818 >