알고리즘_9~10일차 (2/13~2/14)

목차

스택2

1. 계산기1

1-1. 문자열 수식 계산의 일반적 방법

> 문자열로 된 계산식이 주어질 때, 스택을 이용하여 이 계산식의 값을 계산할 수 있다.

문자열 수식 계산의 일반적 방법 2가지

> 계산기1 : 중위 표기법의 수식을 후위 표기법으로 변경한다. (스택 이용)

> 계산기2 : 후위 표기법의 수식을 스택을 이용하여 계산한다.

> **중위 표기법 (infix natation)**
> 연산자를 피연산자 가운데 표기하는 방법 (A+B)

> **후위 표기법 (postfix notation)**
> 연산자를 피연산자 뒤에 표기하는 방법 (AB+)

1-2. 중위표기식의 후위표기식 변환 방법

> 수식의 각 연산자에 대해서 우선순위에 따라 괄호를 사용하여 다시 표현한다.

> 각 연산자를 그에 대응하는 오른쪽 괄호의 뒤로 이동시킨다.

> 괄호를 제거한다.

> 예시 : A * B - C / D
> 1단계 : ((A*B) - (C/D))*
> *2단계 : ((A B)* (C D)/) -*
> 3단계 : AB*CD/-

1-3. 중위 표기법에서 후위 표기법으로의 변환 알고리즘

> 입력 받은 중위 표기식에서 토큰을 읽는다.

> 토큰이 피연산자이면 토큰을 출력한다.

> 토큰이 연산자(괄호포함)일 때, 이 토큰이 스택의 top에 저장되어 있는 연산자보다 우선순위가 높으면 스택에 push하고, 그렇지 않다면 스택 top의 연산자의 우선순위가 토큰의 우선순위보다 작을 때까지 스택에서 pop한 후 토큰의 연산자를 push한다.
> 만약 top에 연산자가 없으면 push한다.

> 토큰이 오른쪽 괄호 ')'이면 스택 top에 왼쪽 괄호 '('가 올 때까지 스택에 pop 연산을 수행하고 pop한 연산자를 출력한다.
> 왼쪽 괄호를 만나면 pop만 하고 출력하지는 않는다.

> 중위 표기식에 더 읽을 것이 없다면 중지하고, 더 읽을 것이 있다면 1부터 다시 반복한다.

> 스택에 남아 있는 연산자를 모두 poo하여 출력한다.

> 스택 밖의 왼쪽 괄호는 우선순위가 가장 높으며, 스택 안의 괄호는 우선순위가 가장 낮다.

```
icp(in-coming priority)
isp(in-stack priority)

if (icp > isp)   push()
else pop()
```

토큰	isp	icp
)	-	-
*, /	2	2
+,-	1	1
(	0	3

숫자가 클수록 우선순위가 높은 것임

※ 교재 p.6 ~ p.23 참고하기

---

2. 계산기2

2-1. 후위 표기법의 수식을 스택을 이용하여 계산

> 피연산자를 만나면 스택에 push한다.

> 연산자를 만나면 필요한 만큼의 피연산자를 스택에서 pop하여 연산하고, 연산결과를 다시 스택에 push한다.

> 수식이 끝나면, 마지막으로 스택을 pop하여 출력한다.

※ 교재 p.28 ~ p.35 참고하기

---

3. 백트래킹 (Backtracking)

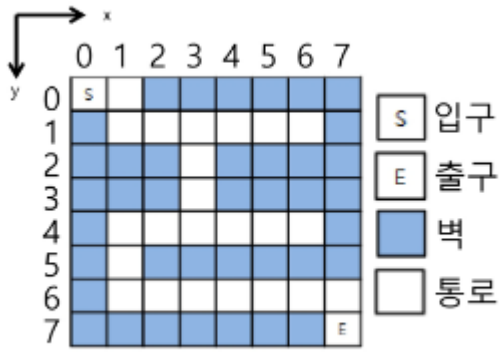
> 해를 찾는 도중에 막히면(해가 아니면) 되돌아가서 다시 해를 찾아가는 기법
> 최적화(optimization), 결정(decision) 문제를 해결할 수 있다.

> 결정문제 : 문제의 조건을 만족하는 해가 존재하는지의 여부를 yes 또는 no가 답하는 문제
> (미로찾기, n-Queen문제, Map coloring, 부분집합의 합 문제 등)

3-1. 미로찾기

> 아래 그림과 같이 입구와 출구가 주어진 미로에서 입구부터 출구까지의 경로를 찾는 문제

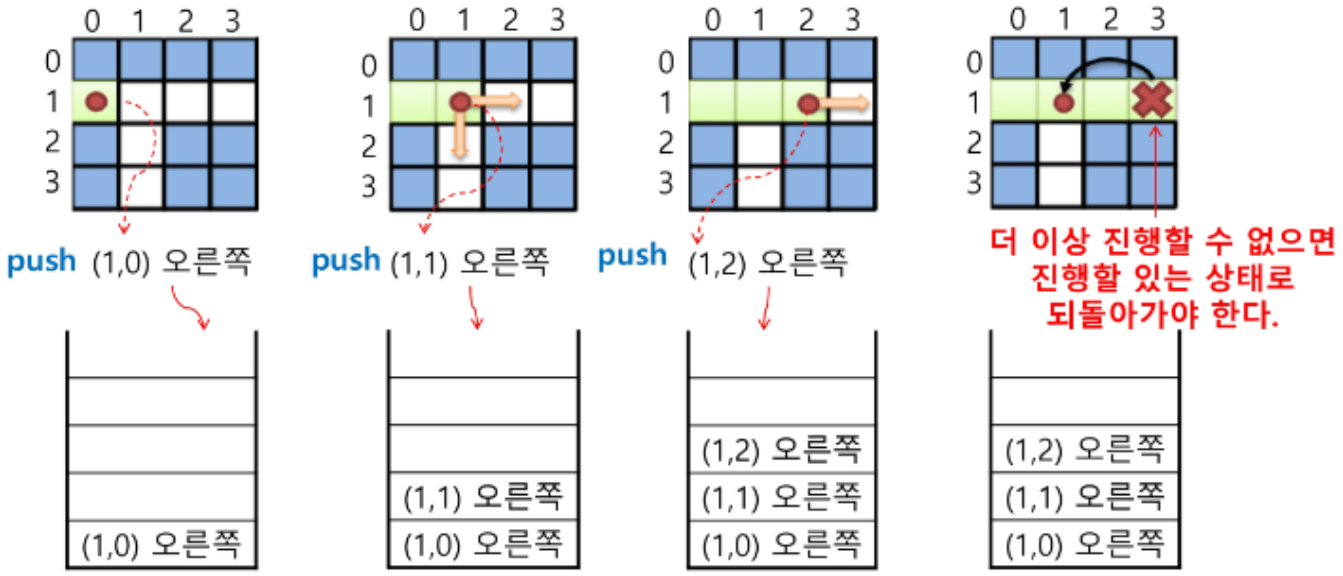
> 이동할 수 있는 방향은 4방향으로 제한한다.



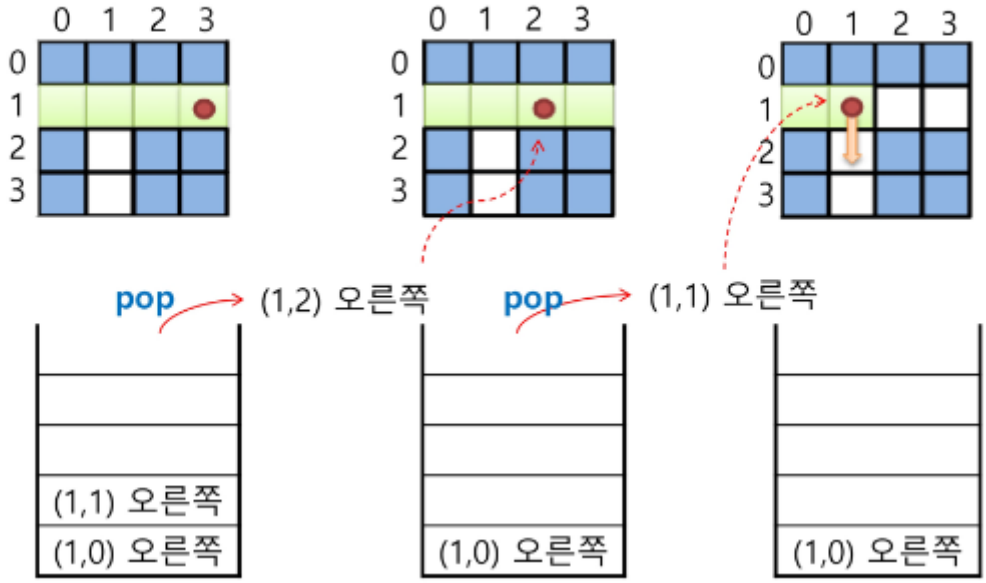

```
mazeArray = [ [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
              [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
              [1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1],
              [1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1],
              [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
              [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
              [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
              [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]]
```

2차원 배열에 표현된 미로

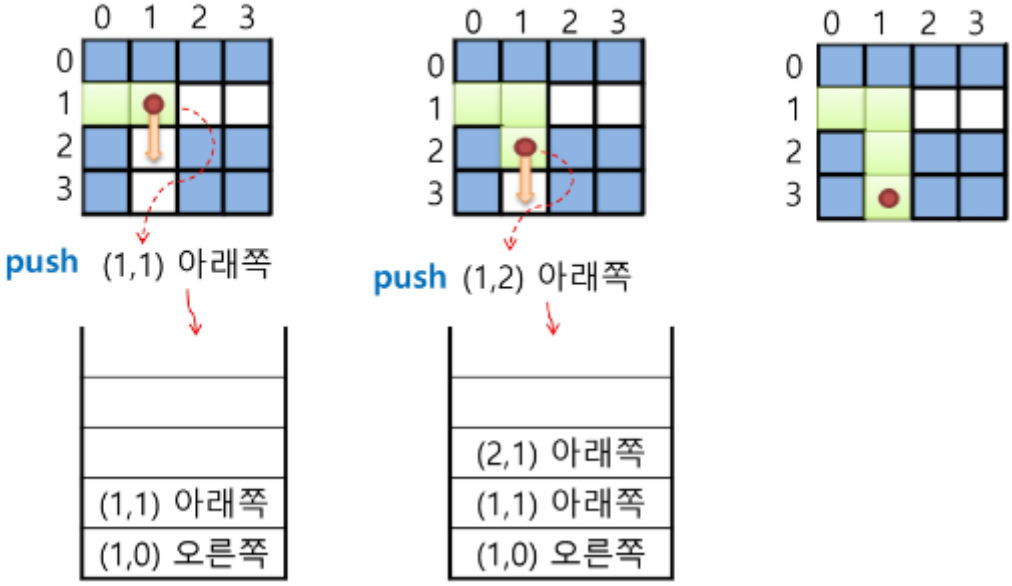
미로 찾기 알고리즘



- 스택을 이용하여 지나온 경로를 역으로 되돌아 간다.



- 스택을 이용하여 다시 경로를 찾는다.



3-2. 백트래킹과 DFS(깊이우선탐색)의 차이

> 어떤 노드에서 출발하는 경로가 해결책으로 이어질 것 같지 않으면 더이상 그 경로를 따라가지 않음으로써 시도의 횟수를 줄임 (Prunning 가지치기)

> DFS가 모든 경로를 추적하는데 비해 백트래킹은 불필요한 경로를 조기에 차단

> DFS를 가하기에는 경우의 수가 너무 많음.
> 즉, N!가지의 경우의 수를 가진 문제에 대해 DFS를 가하면 처리 불가능한 문제

> 백트래킹 알고리즘을 적용하면 일반적으로 경우의 수가 줄어들지만 최악의 경우에는 지수함수 시간(Exponential Time)을 요하므로 처리 불가능

3-3. 백트리킹 기법

> 어떤 노드를 방문했을 때 그 노드를 포함한 경로가 해답이 될 수 없으면 그 노드는 유망하지 않다고 하며, 반대로 해답의 가능성이 있으면 유망하다고 한다.

> 어떤 노드의 유망성을 점검한 후 유망(promising)하지 않다고 결정되면 그 노드의 부모로 되돌아가(backtracking) 다음 자식 노드로 감

> 가지치기(prunning) : 유망하지 않은 노드가 포함되는 경로는 더이상 고려하지 않는다.

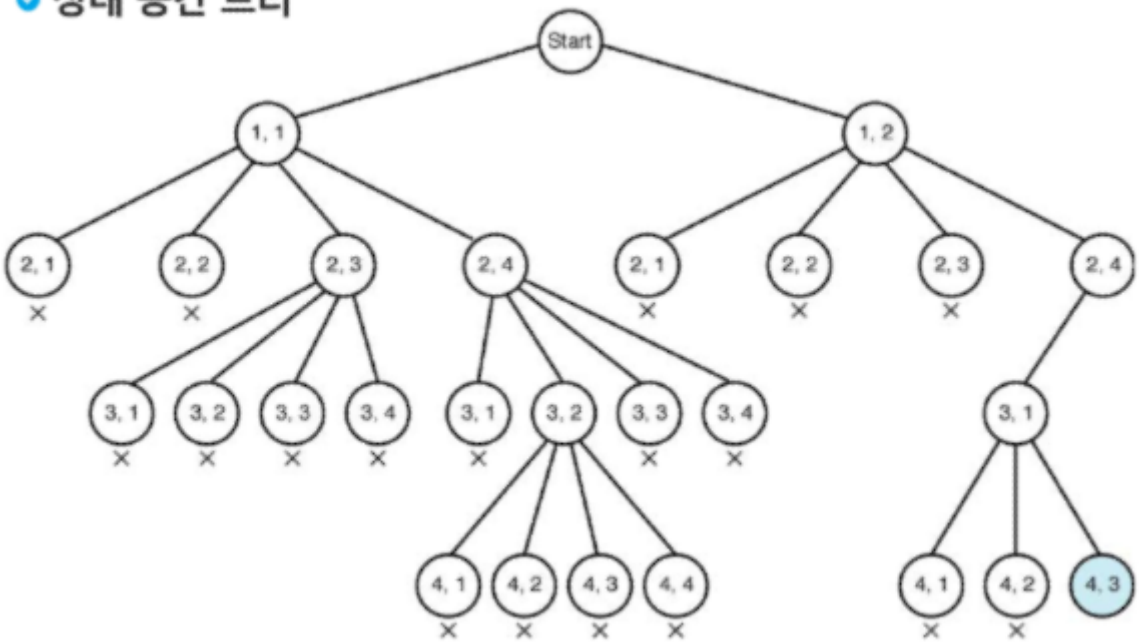
3-4. 백트래킹을 이용한 알고리즘 진행 절차

> 상태 공간 트리의 DFS를 실시한다.

> 각 노드가 유망한지를 점검한다.

> 그 노드가 유망하지 않으면, 그 노드의 부모 노드로 돌아가서 검색을 계속한다.

상태 공간 트리



3-5. 일반 백트래킹 알고리즘

```
def checknode(v):
    if promising(v):
        if there is a solution at v:
            write the solution
        else:
            for u in each child of v:
                checknode(u)
```

※교재 p.44~45 참고

4. 부분집합

> 어떤 집합의 공집합과 자기자신을 포함한 모든 부분집합을 powerset이라고 하며 구하고자 하는 어떤 집합의 원소 개수가 n일 경우 부분집합의 개수는 2^n개이다.

4-1. 백트래킹 기법으로 powerset 만들기

> 앞에서 설명한 일반적인 백트래킹 접근 방법을 이용

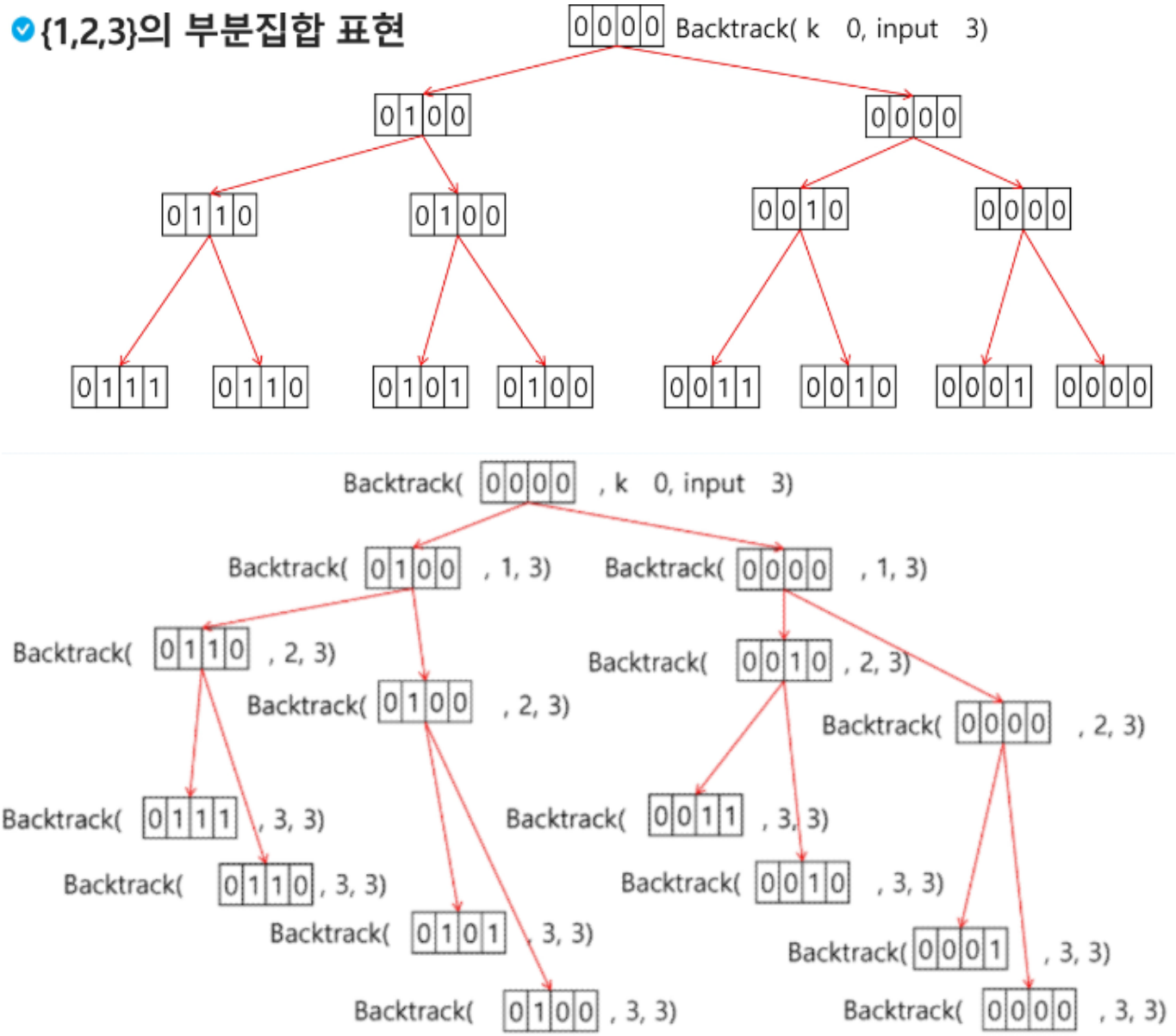
> n개의 원소가 들어있는 집합의 2^n개의 부분집합을 만들 때는, True 또는 False 값을 가지는 항목으로 구성된 n개의 배열을 만드는 방법을 이용

> 여기서 배열의 i번째 항목은 i번째 원소가 부분집합의 값인지 아닌지를 나타내는 값

4-2. 각 원소가 부분집합에 포함되었는지를 loop를 이용하여 확인하고 부분집합을 생성하는 방법

```
bit = [0, 0, 0, 0]
for i in range(2):
    bit[0] = i              # 0번째 원소
    for j in range(2):
        bit[1] = j          # 1번째 원소
        for k in range(2):
            bit[2] = k      # 2번째 언소
            for l in range(2):
                bit[3] = l  # 3번째 원소
                print(bit)  # 생성된 부분집합 출력
```

{1,2,3}의 부분집합 표현



4-3. powerset을 구하는 백트래킹 알고리즘

```
def backtracking(a, k input):
    global MAXCANDIDATES
    c = [0] * MAXCANDIDATES

    # 답이면 원하는 작업을 한다.
    if k == input:
        process_solution(a, k)
    else:
        k += 1
        ncandidates = construct_candidates(a, k, input, c)
        for i in range(ncandidates):
            a[k] = c[i]
            backtracking(a, k, input)

def construct_candidates(a, k, input, c):
    c[0] = True
    c[1] = False
```

```
    return 2

MAXCANDIDATES = 2
NMAX = 4
a = [0] * NMAX
backtracking(a, 0 ,3)
```

---

5. 순열

5-1. {1,2,3}을 포함하는 모든 순열을 생성하는 함수

> 동일한 숫자가 포함되지 않았을 때, 각 자리수별로 loop를 이용해 아래와 같이 구현 가능하다.

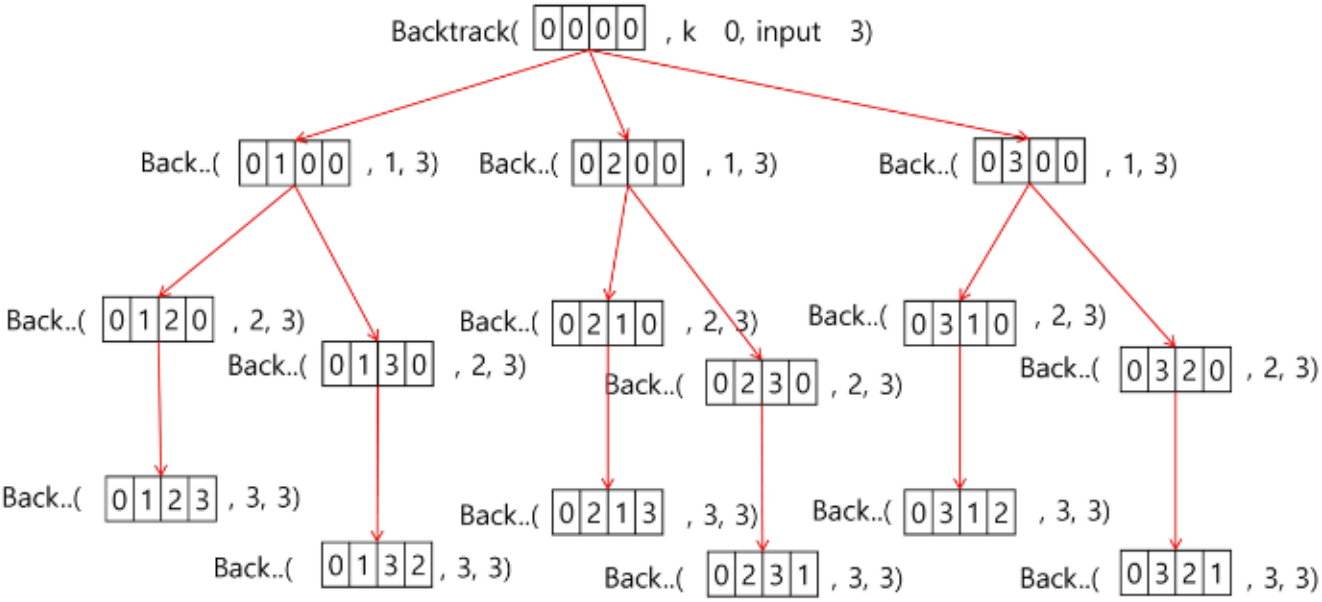
```
for i1 in range(1,4):
    for i2 in range(1,4):
        if i2 != i1:
            for i3 in range(1,4):
                if i3 != i1 and i3 != i2:
                    print(i1, i2, i3)
```

5-2. 백트래킹을 이용하여 순열 구하기

> 접근 방법은 앞의 부분집합 구하는 방법과 유사

```
def backtracking(a, k, input):
    global MAXCANDIDATES
    c = [0] * MAXCANDIDATES

    if k == input:
        for i in range(1, k+1):
            print(a[i], end=" ")
        print()
    else:
        k += 1
        ncandidates = construct_candidates(a, k, input, c)
        for i in range(ncandidates):
            a[k] = c[i]
            backtrack(a, k, input)

def construct_candidates(a, k, input, c):
    in_perm = [False] * NMAX

    for i in range(1, k):
        in_perm[a[i]] = True

    ncandidates = 0
    for i in range(1, input+1):
```

```
            if in_perm[i] ==False:
                c[ncandidates] = i
                ncandidates += 1
        return ncandidates
```



부분집합 및 순열 추가 문제

※ 교재 p.61 ~ 69 참고하기

---

6. 분할정복 알고리즘

유래

> 1805년 12월 2일 아우스터리츠 전투에서 나폴레옹이 사용한 전략
> 전력이 우세한 연합군을 공격하기 위해 연합군의 중앙부로 쳐들어가 연합군을 둘로 나눔
> 둘로 나뉜 연합군을 한 부분씩 격파함

설계 전략

> 분할 (Divide) : 해결할 문제를 여러 개의 작은 부분으로 나눈다.

> 정복 (Conquer) : 나눈 작은 문제를 각각 해결한다.

> 통합 (Combine) : 해결된 해답을 모은다. (필요하다면)

6-1. 분할정복 예제

1. 거듭제곱 (Exponetiation) : $O(n)$

> C^2 = C x C
> C^3 = C x C x C
> ...
> C^n = C x C x ... x C

```
def power(base, exponent):
    if base == 0:
        return 1
    result = 1      # base^0은 1이므로
    for i in range(exponent):
        result *= base
    return result
```

분할정복 기반의 알고리즘 : $O(log_2n)$

$$C^8 = C \times C \times C \times C \times C \times C \times C \times C$$

$$C^8 = C^4 \times C^4 = (C^4)^2 = ((C^2)^2)^2$$

$$C^n = C^{\frac{n-1}{2}} \times C^{\frac{n-1}{2}} \times C = (C^{\frac{n-1}{2}})^2 \times C$$

$$C^n = \begin{cases} C^{n/2} \cdot C^{n/2} & n\text{은 짝수} \\ C^{(n-1)/2} \cdot C^{(n-1)/2} \cdot C & n\text{은 홀수} \end{cases} \qquad C^n = \begin{cases} C^{n/2} \cdot C^{n/2} & n\text{은 짝수} \\ C^{(n-1)/2} \cdot C^{(n-1)/2} \cdot C & n\text{은 홀수} \end{cases}$$

```
def power(base, exponent):
    if exponent == 0 or base == 0:
        return 1
    if exponent % 2 == 0:
        newbase = power(base, exponent / 2)
        return newbase * newbase
    else:
        newbase = power(base, (exponent-1)/2)
        return (newbase * newbase) * base
```

---

2. 퀵 정렬

> 시간 복잡도 : O(n^2)
> 합병정렬에 비해 좋지 못하다.
> 평균 복잡도는 $nlogn$이기 때문에 퀵(빠른)정렬이라고 한다.
> (평균적으로 가장 빠르다.)
> 주어진 배열을 2개로 분할하고, 각각을 정렬한다.

> **합볍정렬과 다른점**
> 합병정렬은 그냥 두 부분으로 나누는 반면에,
> 퀵 정렬은 분할할 때 기준 아이템(pivot item) 중심으로, 이보다 작은 것은 왼쪽, 큰 것은 오른편에 위치시킨다.
>
> 각 부분 정렬이 끝난 후, 합병정렬은 "합병"이란 후처리 작업이 필요하나, 퀵 정렬은 필요하지 않음

퀵 정렬 알고리즘

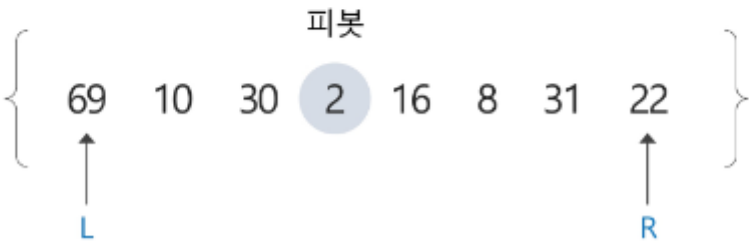
```
def quicksort(a, start, end):
    if start < end:
        p = partition(a, start, end)
        quicksort(a, start, p-1)
        quicksort(a, p+1, end)

def partition(a, start, end):
    pivot = (start + end) // 2
    L = start
    R = end
    while L < R:
        while(L < R and a[L] < a[pivot]):
            L += 1
        while(L < R and a[R] >= a[pivot]):
            R -= 1
        if L < R:
            if L == pivot:
                pivot = R
            a[L], a[R] = a[R], a[L]
    a[pivot], a[R] = a[R], a[pivot]
    return R
```

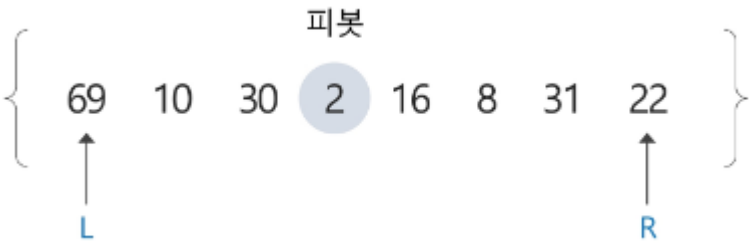
퀵 정렬 수행 과정

> 교재 p.78 ~ p.86

퀵 정렬 수행 과정

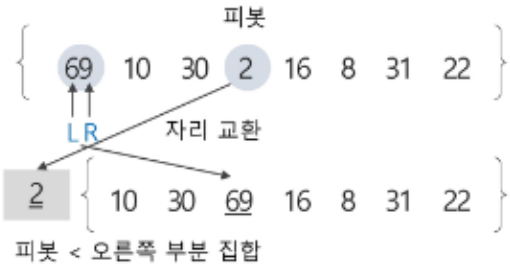
- 예제 : {69, 10, 30, 2, 16, 8, 31, 22}
- 원소의 개수가 8개이므로 네 번째 자리에 있는 원소 2를 첫 번째 피봇으로 선택하고 퀵 정렬 시작.





1) 원소 2를 피봇으로 선택하고 퀵 정렬 시작.

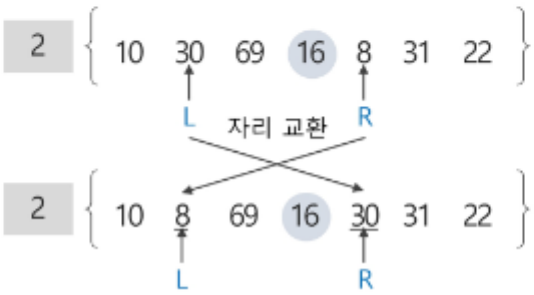
- L이 오른쪽으로 이동하면서 피봇 보다 크거나 같은 원소를 찾고, R은 왼쪽으로 이동하면서 피봇 보다 작은 원소를 찾는다.
- L은 원소 69를 찾았지만, R은 피봇 보다 작은 원소를 찾지 못한 채로 원소 69에서 L과 만나게 된다.
- L과 R이 만났으므로, 원소 69를 피봇과 교환하여 피봇 원소 2의 위치를 확정한다.



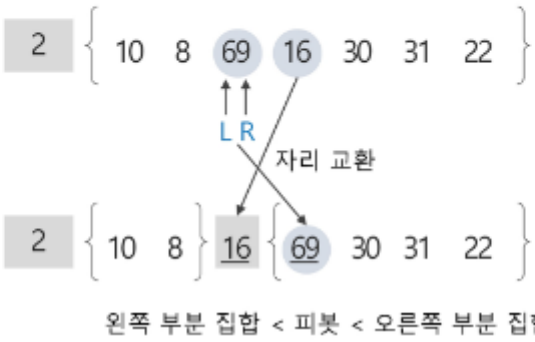
2) 피봇 2의 왼쪽 부분 집합은 공집합이므로 퀵 정렬을 수행하지 않고, 오른쪽 부분 집합에 대해서 퀵 정렬 수행.

- 오른쪽 부분 집합의 원소가 7개 이므로 가운데 있는 원소 16을 피봇으로 선택.

- L이 찾은 30과 R이 찾은 8을 서로 교환한다.

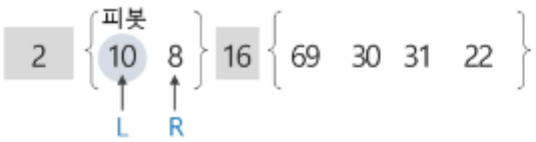


- 현재 위치에서 L과 R의 작업을 반복한다.
- L은 원소 69를 찾았지만, R은 피봇 보다 작은 원소를 찾지 못한 채로 원소 69에서 L과 만나게 된다.
  L과 R이 만났으므로, 원소 69를 피봇과 교환하여 피봇 원소 16의 위치를 확정한다.

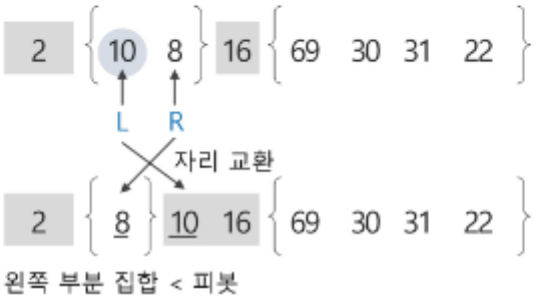


왼쪽 부분 집합 < 피봇 < 오른쪽 부분 집합

3) 피봇 16의 왼쪽 부분 집합에서 원소 10을 피봇으로 선택하여 퀵 정렬 수행.

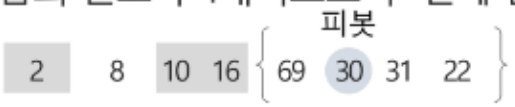


- L의 원소 10과 R의 원소 8을 교환하는데, L의 원소가 피봇이므로 피봇원소에 대한 자리교환이 발생한 것이므로 교환한 자리를 피봇 원소 10의 위치로 확정한다.

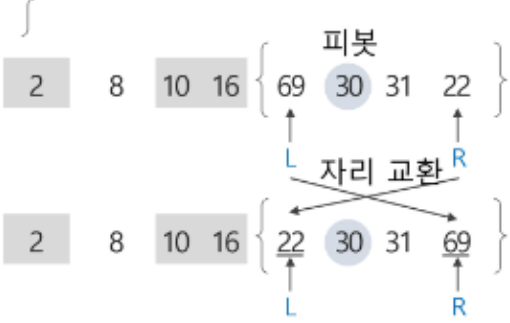


4) 피봇 10의 확정된 위치에서의 왼쪽 부분 집합은 원소가 한 개이므로 퀵 정렬을 수행하지 않고, 오른쪽 부분 집합은 공집합이므로 역시 퀵 정렬을 수행하지 않는다.

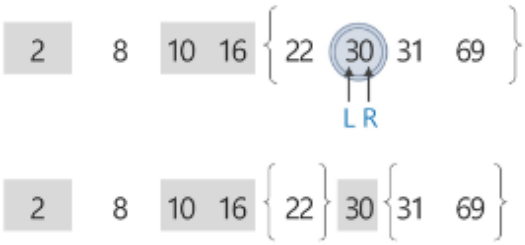
- 이제 1단계의 피봇이었던 원소 16에 대한 오른쪽 부분 집합에 대해 퀵 정렬을 수행한다.
  오른쪽 부분 집합의 원소가 4개이므로 두 번째 원소 30을 피봇으로 선택한다.



- L이 찾은 69와 R이 찾은 22를 서로 교환한다.



- 현재 위치에서 L과 R의 작업을 반복한다. L은 오른쪽으로 이동하면서 피봇 보다 크거나 같은 원소인 30을 찾고, R은 왼쪽으로 이동하면서 피봇 보다 작은 원소를 찾다가 못 찾고 원소 30에서 L과 만난다.
- L과 R이 만났으므로 피봇과 교환한다. 이 경우는 R의 원소가 피봇이므로 피봇에 대한 자리교환이 발생한 것이므로 교환한 자리를 피봇의 자리로 확정한다.

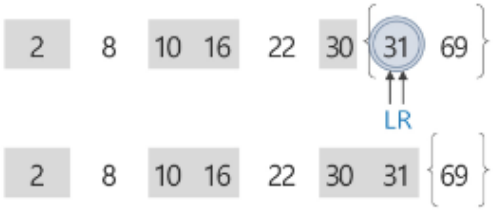


왼쪽 부분 집합 < 피봇 < 오른쪽 부분 집합

5) 피봇 30의 확정된 위치에서의 왼쪽 부분 집합의 원소가 한 개 이므로 퀵 정렬을 수행하지 않고, 오른쪽 부분 집합에 대해서 퀵 정렬 수행.

- 오른쪽 부분 집합의 원소 2개 중에서 원소 31을 피봇으로 선택한다.

- L은 오른쪽으로 이동하면서 원소 31을 찾고, R은 왼쪽으로 이동하면서 피봇 보다 작은 원소를 찾다가 못 찾은 채로 원소 31에서 L과 만난다. L과 R이 만났으므로 피봇과 교환하는데 R의 원소가 피봇이므로 결국 제자리가 확정된다.



피봇 < 오른쪽 부분 집합

- 피봇 31의 오른쪽 부분 집합의 원소가 한 개 이므로 퀵 정렬을 수행하지 않는다. 이것으로써 전체 퀵 정렬이 모두 완성되었다.

피봇 < 오른쪽 부분 집합