
基于有限元与比例边界有限元的流固耦合分析方法

第1章 绪论

1.1 引言

在实际生活中存在大量的流固耦合问题，如结构出入水、舰船和潜艇抗爆分析、大坝与水库耦合、结构水下振动、声音在水中等流体介质中传播等问题，部分流固耦合问题示意图见图 1.1。



图 1.1 流固耦合问题示意图

在这些问题中，流固耦合表现出不同的现象。如在结构入水问题中，结构与水有相对较大的位移及流体飞溅等现象，表现出结构大位移、流体强流动性等特点。在舰船和潜艇抗爆问题中，舰船潜艇等水下结构在远场水下冲击波等载荷作用下通常发生局部或整体变形，其中流体流动性相对较弱，其作用更多表现为传播冲击波载荷及散射振动能量等；但在近场水下爆炸作用下，其水介质的流动性及冲击波传播特性同为应考虑的主要特性。而在坝与水库耦合、结构水下振动、声音在水中等流体介质中传播等问题中，水更多的表现为了声传播介质的特性。因此，在流固耦合问题分析中，应结合流体表现出的主要特性，采取不同的方法来刻画流体的主要行为特性。

1.2 流固耦合问题

流固耦合是以研究流体与固体相互作用的一门独立的力学分支，涉及流体力学与固体力学等学科，主要描述流体作用下的固体变形和运动等行为，同时研究固体变形与运动对流场的影响；流体与固体的相互作用通过流固耦合面发生。流固耦合面上相互作用的不同形式将产生不同的流固耦合现象。根据文献[1]，一般来说，流固耦合问题有 3 类：

- 1) 响应时间较长的流固耦合问题。它们涉及长时间的流体运动，例如波浪或地震作用下水工结构的响应问题。在这种情况下，流体波的影响是重要的。

- 2) 响应时间相对较短的流固耦合问题。它们涉及短时间的流体运动，如水下爆炸载荷作用下结构响应问题。在这种情况下，流体惯量的影响通常比结构的影响大得多。
- 3) 大相对运动的流固耦合 FSI 问题。在这些情况下，行为通常由流动特性控制，如气动力与飞机机翼的相互作用问题、结构入水问题等。

本文中主要研究前两类问题。在这两类问题中，流体特性主要波动特性为主，流体可考虑为声学流体。声学流体可视为微扰动的理想流体，即无粘、等熵、流体速度小的流体，其控制方程满足波动方程。

为解答流固耦合问题，通常有理论分析、数值模拟及试验研究等手段，其中理论分析只能适用一些简单几何形状的流固耦合问题，适用面窄，而试验研究成本高，完全靠试验来认识流固耦合物理机理不太现实。数值模拟手段一直受到研究人员的青睐，是研究流固耦合问题的主要技术手段之一。

面向声学流体，常用的数值方法包括有限元法(FEM)、边界元(BEM)、比例边界有限元方法(SBFEM)等方法。当流体视为无限大，为有效模拟声学流体能量吸收性(即在无限远处必须满足 Sommerfeld 辐射条件)，通常将 FEM、BEM、SBFEM、截断边界条件之间耦合来实现无限声学水域的模拟。其中文献[2]总结了 FEM、BEM、SBFEM 方法的各自主要特点，见表 1-1。BEM、SBFEM 均能使问题降 1 维，只需在区域边界上离散单元，而 FEM 需要在区域内离散单元；相比于 BEM，FEM、SBFEM 不需要基本解，无奇异积分，矩阵为对称矩阵。

表 1-1 FEM、BEM、SBFEM 方法特点

	BEM	FEM	SBFEM
不需要基本解	×	√	√
空间维数下降 1 维	√	×	√
精确满足无限域的辐射条件	√	×	√
具有对称的刚度和质量矩阵	×	√	√
形成动态刚度矩阵	×	√	√
无奇异积分计算	×	√	√
自由、固定、材料等界面不需要离散	×	×	√
可产生位移、应力及应力强度因子闭形式的解	×	×	√

模拟无限域时，无虚假特征值	×	√	√
---------------	---	---	---

如果声学流体为有限区域时，FEM 方法已能较为准确地模拟声固耦合现象；当声学流体为无限区域时，其数值模拟准确性及高效性在于无限水域的模拟。

1.3 无限水域模拟方法（估计还需细改）

在传统的数值方法中，无限流体域通常被截断为两部分（近场和远场流体域），从而无限流体域可以由有限近场域和截断面上的截断边界（近远域界面）来模拟。这种处理方法将无限域缩小为有界（有限）域。降低了计算成本。然而，如果截断边界不能正确地模拟远场流体域的影响，截断表面可能会产生虚假反射，从而影响有限域的模拟。

因此，需要对截断边界进行特殊处理来消除这些反射。消除反射影响的一个简单方法是将近场流体域扩展到足够的距离，以便在反射返回之前获得关键响应。然而，在大多数实际情况下，近场域可能变得非常大，当需要在后期进行响应时，计算成本变得非常昂贵。

另一种方法是设置一个对散射波“透明”的非辐射边界。满足 Sommerfeld 辐射条件的现有方法主要基于以下几种方法之一：

- 1) 无限元
- 2) 边界元法
- 3) 基于声学近似的方法
- 4) 比例边界有限元法
- 5) 完美匹配层方法

1.3.1 无限元

无限元(IEM)是在有限元基础发展而来的一种数值方法，非常适合用来模拟无限流域问题。无限元基本形式是在与结构接触的近场区域，使用有限元方法进行结构划分，而外部边界区域则使用波的衰减函数作为位移形状函数，来表示波向着无穷远处进行传播，在波的衰减函数中，波的衰减率和波传播速度必须定义，无限元方法是一种半解析半数值的计算方法。

1973 年 Ungless[3]首次提出无限元,1977 年 Bettess 和 Zienkiewicz[4]在此基础上提出了动力无限元。Burnett[5]指出与基于表面亥姆霍兹积分方程的边界元法（BEM）相比，无限元法在相同精度下的速度要快两到三个数量级。吴健[6]对双

重球壳和加肋圆柱壳受冲击载荷作用条件下,在 ABAQUS 中利用无限单元进行了结构在小尺寸外部流场的模拟计算。VegardVenås[7]利用等几何分析(IGA)与无限元方法(IEM)结合对某些声散射问题进行计算分析。Saleh[8]用无限单元模拟半无限大平面,验证了无限元法可以减少计算时间,并准确用于地震载荷下动力模型的计算。邱中辉[9]等利用无限元法模拟船舶结构周围的无限流域,研究了阻尼对于水下声辐射问题的影响。

无限单元法在模拟无限域问题时,能够准确地模拟出无限域的波吸收特性,但其对截断流域区域范围要求较大(工程中常取流域截断半径为结构半径的6倍或以上),自由度也多,在目前的绝大多数商业有限元软件中,无限元多用于模拟无入射波的情况,即用于模拟结构产生的散射波。

1.3.2 边界元

边界元法是将边界积分方程和有限元离散化方法结合开发出来的一种数值方法,它的基本思路是在边界积分方程的理论基础上,将连续的边界通过类似有限元离散的方法,转化成为边界元,而边界积分方程则通过数学方法转化为代数方程组,最后对该代数方程组进行数值求解,从而得到边界积分方程的基本解。

分析计算波的辐射和传播、弹性动力学等物理问题时,比起其他数值计算方法,边界元法具有一定的数学优势。首先,边界元法仅仅只需把整个计算域的每个边界进行离散,降低了计算维度,能够显著提高计算效率;其次,求解无限流域问题,边界元法能自动满足辐射边界条件,能有效减小模拟无限流域时建立的流场区域大小;边界元法是一种半解析半数值的计算方法,其基本解等于解析解,对于无限域的模拟精度要高于有限元法。

边界元法在水下爆炸冲击问题的计算中,常用于提取流场-结构交界面上流体对结构的作用力,或者是进行脉动载荷和射流载荷分析计算。刘云龙^[43]建立了无限流域条件下,气泡与自由面耦合和边界元计算模型;方斌^[44]对水下结构声辐射边界元-有限元耦合方法进行了简化。Liu^[45]将流体场采用边界元法(BEM)进行建模,同时采用势能分解理论来考虑表面波,船舶结构的整体响应采用模式叠加法建模。

1.3.3 基于声学近似的方法

边界元方法非常适合模拟无限流域问题,只需要对流域边界进行离散,就能

准确模拟无限流域对结构的波吸收特性。边界元法主要经历平面波近似法(PWA)、曲面波近似法(CWA)、虚质量近似法(VMA)到双渐进法(DAA)。目前最为准确和工程应用认可度高的方法当属双渐进法。

双渐进法(Doubly Asymptotic Approximation, DAA)是 Greers 于 1972 年最先提出的。双渐进法是针对水下爆炸冲击载荷作用下的结构响应问题,进行早期高频响应和后期低频响应的逼近。1953 年 Mindlin 和 Bleich 率先提出的 PWA(平面波近似方法),1970 年 Chertock 随后提出 VMA(虚质量近似方法),因为 PWA 方法对早期高频响应计算比较精确,而 VMA 方法适合计算后期低频响应。所以双渐进法将两者进行结合,以实现更为准确的模拟计算。在后续发展过程中,根据中间频段计算方法的不同,先后提出了一阶双渐进(DAA1)和二阶双渐进(DAA2)。双渐进法对早期和后期的响应求解是比较准确的,而对于两者之间的时段求解还存在些许不足。为此,众多学者对双渐进法不断提出改进理论,对其进行完善,其中以采用交错求解的方法,使得计算结果变得更为稳定和精确。双渐进法在经过大量的运用与计算验证后,已获得了人们的认可。双渐进法常与有限元法进行耦合使用,结构用有限元进行离散分解,流场用双渐进法模拟计算,能够准确地计算中远场水下爆炸冲击问题,是国际用于水下爆炸冲击问题分析的主流方法。商业软件 USA(Underwater Shock Analysis)中嵌合了该方法。由于 USA 对华禁运,所以国内学者多采用 DAA 方法与 ANSYS、ABAQUS 等其他数值模拟软件结合。朱艳^[46]对自由液面下圆柱体受水下冲击载荷作用的流固耦合问题,推导出了自由液面效应下的修正双渐进方程,并进一步推导出了自由液面效应下修正二阶双渐进方程。肖巍^[47]使用双渐进法对水下爆炸冲击问题中的空化效应、内部结构响应、气泡运动特性和气泡脉动载荷效应进行了分析。张婧^[48]针对模拟远场水下爆炸冲击问题时,常见的冲击波传播失真现象进行研究,基于双渐进法和泰勒板理论,对冲击波加载方式进行了简化改进。高毅超^[49]使用 ABAQUS 自带的 UEL 子程序功能,开发了双渐进透射边界单元,将双渐进法与有限元进行耦合,并将其用于大坝-库水动力相互作用分析。刘国振^[50]在二阶双渐进法基础上,使用 CAFE(空化声学单元)模拟内部流场,据此推导出了三场流固耦合的控制方程。王海坤^[51]将二阶 DAA 方法与有限元软件 ABAQUS 进行结合,针对近场水下爆炸冲击载荷作用下的船舰结构损伤问题,提出了与之相适用的分析方法。Woo^[52]提出了三

阶双渐进方法,通过对余弦型脉冲压力激发的球形壳结构的响应进行求解,检验了其方法的准确性。

双渐进方法对于中远场水下爆炸冲击问题的模拟计算较为准确,对全时刻的结构响应都能准确模拟。但由于双渐进法矩阵的非对称性,在与有限元耦合过程中,会使得对称的有限元矩阵形式改变,带来数值计算方面的问题。且基于双渐进方法开发的 USA 程序对华禁运,在国内未能出现基于双渐进法的商业软件。

1.3.4 SBFEM

比例边界有限元法的提出是在 20 世纪 90 年代。SBFEM 不同于有限元对网格的规整性要求比较高,在将求解区域分解为多个子域后,只需要对这些分解的子域边界离散,计算维度得以降低,在子域边界上求解离散方程时,又无需像边界元法那样对基础解有所要求。SBFEM 结合了有限元法的便利性和边界元法的减少计算维度的特性。SBFEM 已用于如断裂、损伤、弹塑性、动力、非均质材料等相关领域问题的模拟。

20 世纪 90 年代, Wolf 和 Song 提出 SBFEM^[53-56],初始命名为一致有限微元胞法。之后, Song 与 Wolf^[57]基于加权残值法,推导了 SBFEM 的基本控制方程,并将其正式命名为比例边界有限元。为模拟无限域, Yang 与 Deeks^[58]重新求解 SBFEM 控制方程,给出了 SBFEM 的频域解。Song 等^[59-60]给出了高频振动条件下,有限域和无限域质量阵和刚度阵的连分式形式,验证了连分式阶数与计算精度之间的正相关关系。2014 年李上明^[4]基于场分离理论和 SBFEM 方法,计算出结构反射波压力,将之与有限元软件结合,实现了 SBFEM-FEM 耦合计算水下结构冲击问题。2018 年 Li^[61]等人基于 SBFEM 对二维结构-声学问题开发了一种统一而有效的模拟方法,并通过算例验证了其模拟方法在计算效率上要优于传统有限元法。2019 年 Liu^[62]等人利用 SBFEM 对三维有限域和无限域声学问题进行分析,说明了 SBFEM 方法用于分析复杂几何形状声学问题的准确性和高效性。2019 年李上明^[63]等将 SBFEM 连分式和有限元法进行耦合,分析了连分式阶数与计算精度之间的关系,探讨了 SBFEM 连分式和卷积积分的效率问题。

以上基于 SBFEM 方法的、关于远场冲击问题的相关研究均是以散射场公式为主,或面向无水下冲击波等入射波的情况,而 Zhao^[64]使用基于 SBFEM 的修正高阶透射边界来模拟无限域,与论文作者联合建立和推导了远场冲击问题的总场

公式，进一步提升了 **SBFEM** 适用范围。本论文将基于此方法思想，相对系统地建立含无限水域的总场分析技术。

文献目录：

第 2 章 流固耦合系统有限元方程

2.1 流固耦合系统

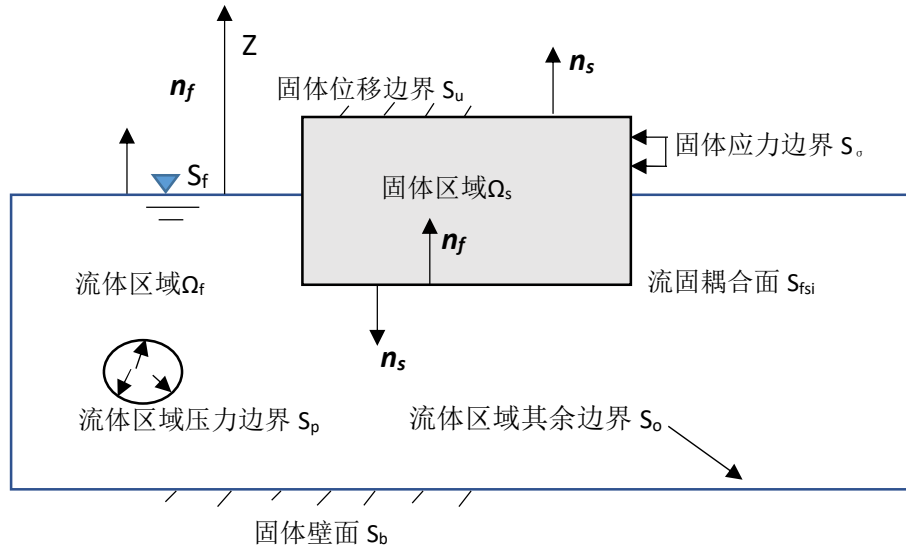


图 2-1 含自由液面的有限水域流固耦合系统示意图

图 2-1 给出了流固耦合系统示意图，包括流体区域 Ω_f 和固体区域 Ω_s 。流体区域 Ω_f 的边界由自由液面边界 S_f 、压力边界 S_p 、固壁边界 S_b 、流固耦合面 S_{fsi} 及流体区域其余边界 S_o 组成，通常流体区域由自由液面边界 S_f 、固体壁面边界 S_b 、流固耦合面 S_{fsi} 包围着。

图 2-1 中定义的流体区域其余边界 S_o 对应有限元数值分析中未定义边界条件的边界，具体施加怎样的边界条件，不同的软件处理不一样；通常软件会视其为固体壁面边界。在所有的边界条件已知的前提下，通过求解流体方程可获得流体区域的解。

固体区域 Ω_s 的边界由位移边界 S_u 、压力边界 S_σ 、流固耦合边界 S_{fsi} 及其他边界，其他边界视为表面压力为 0 的边界。在给定位移边界 S_u 、应力边界 S_σ 、流固耦合边界 S_{fsi} 的前提下，通过求解固体方程获得固体区域的解。

图 2-1 中 n_s 表示固体边界外法线向量， n_f 表示流体边界外法线向量，在流

固耦合交界面的任一点上， \mathbf{n}_f 和 \mathbf{n}_s 两者的方向总是相反。在进行相应公式推导时应关注法向方向。

2.2 声学流体控制方程

在笛卡尔坐标系 (x, y, z) 下，根据流体力学理论，流体连续性方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

流体动量方程为

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (2-2)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (2-3)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2-4)$$

式中 t 、 ρ 、 v 、 p 、 μ 、 F 分别为时间、密度、速度、压力、流体粘性、流体体力；下标 x, y, z 表示笛卡尔坐标方向。例如在重力场下，如果 $-z$ 向定义为重力加速度方向，则 $F_x = 0$ 、 $F_y = 0$ 、 $F_z = -\rho g$ 。通常情况下，重力可考虑为静水压力，故在后续公式推导过程中不考虑体力项。方程(2-1)、(2-2)为流体的 NS 方程，通过一定的简化可转化为波动方程，波动方程适用于无粘无旋微幅振动的流体模拟，即主要考虑流体作为声波传播介质的特性，而不考虑其流动性。

2.2.1 波动方程

不考虑流体粘性时， $\mu = 0$ ；流体无旋时，流体速度矢量 \mathbf{v} 可表示成速度势函数 ϕ 的梯度，即

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (2-5)$$

对于无粘无旋流体，不考虑体力时，其动量方程可写为

$$\rho \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} + \rho \frac{\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2} = -\nabla p \quad (2-6)$$

即

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} - \frac{\nabla(\nabla \phi \cdot \nabla \phi)}{2} \quad (2-7)$$

由可知，流体动压 p 可写为

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) \quad (2-8)$$

基于上述方程，可连续性方程写为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \rho}{\rho} + \Delta \phi = 0 \quad (2-9)$$

定义流体波速为 c ，等熵流体的压力、密度与波速关系如下

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad (2-10)$$

联合式(2-7)、(2-8)、(2-10)可得

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) \right] = 0 \quad (2-11)$$

当无粘无旋流体，只有微幅振动时，流体速度 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ 可视为小量，上式可写为

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2-12)$$

上式为声学流体波动方程，其压力形式为

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2-13)$$

波动方程主要用于描述波传播特性，可描述弱可压缩状态下的声波传播现象，如常压下空气中声音传播及水中结构声散射现象等。

2.2.2 声学流体边界条件

如图 2-1 所示的声学流体区域 Ω_f ，是由流固耦合边界 S_{fsi} 、固体壁面 S_b 、自由液面 S_f 、压力边界 S_p 、其余边界 S_o 组成的封闭空间，其中 S_o 可视为流体区域的截断边界。不同边界上，其应满足以下边界条件：

a) 假定流固耦合界面 S_{fsi} 及固体壁面 S_b 具有一定的能量吸收性时，满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} + q\dot{p} &= -\rho a_n^{S_{fsi}} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + q\dot{p} &= -\rho a_n^{S_b} \end{aligned} \quad (2-14)$$

$a_n^{S_{fsi}}$ 、 $a_n^{S_b}$ 分别为流固耦合面和固体壁面的法向加速度，其正方向由流体指向结构或固体壁面的内部； q 为边界吸收系数，满足

$$q = \frac{1}{c} \left(\frac{1 - \alpha_r}{1 + \alpha_r} \right) \quad (2-15)$$

式中 α_r 为边界的反射系数。在流固耦合面上，因流固耦合面处的波阻抗差异比较大， q 通常可取为 0；在水库底部固壁边界，如考虑淤泥等的吸收性时， q 一般不为零。

b) 在自由液面 S_f 上，忽略流体表面波时，满足

$$p = 0 \quad (2-16)$$

考虑流体表面波时，即考虑 z 方向的重力的影响时，

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{g} \ddot{p} = 0 \quad (2-17)$$

c) 在给定压力 \bar{p} 的压力边界 S_p 上，满足

$$p = \bar{p} \quad (2-18)$$

d) 如果流体区域存在无限水域截断边界 S_t ，则在该边界上应满足相应的无反射边界条件；在该边界上，压力 p 与法向加速度 $a_n^{S_t}$ ， $a_n^{S_t}$ 正方向指向流体区域的外部，即指向无穷远，满足

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n^{S_t} \quad (2-19)$$

2.3 声学流体有限元方程

在自由液面处取式(2-16)的边界条件时，对式(2-13)至式(2-19)进行变分变换，可得相应的方程的弱形式，即

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} (\delta p) \left(\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} \right) d\Omega_f - \int_{S_{fsi}} (\delta p) \left(\frac{\partial p}{\partial n} + q\dot{p} + \rho a_n^{S_{fsi}} \right) dS_{fsi} - \int_{S_b} (\delta p) \left(\frac{\partial p}{\partial n} + q\dot{p} + \rho a_n^{S_b} \right) dS_b \\ & - \int_{S_p} (\delta p) p dS_p - \int_{S_f} (\delta p) p dS_f - \int_{S_t} (\delta p) \left(\frac{\partial p}{\partial n} + \rho a_n^{S_t} \right) dS_t = 0 \end{aligned} \quad (2-20)$$

利用格林定理，上式中的体积分，可写成

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} (\delta p) \nabla^2 p d\Omega_f = \int_S (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS - \int_{\Omega_f} \nabla(\delta p) \bullet \nabla p d\Omega_f \\ & = \int_{S_{fsi}} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_{fsi} + \int_{S_b} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_b + \int_{S_p} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_p \\ & + \int_{S_f} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_f + \int_{S_t} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_t - \int_{\Omega_f} \nabla(\delta p) \bullet \nabla p d\Omega_f \end{aligned} \quad (2-21)$$

由上两式可得

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f} (\delta p) \left(-\frac{1}{c^2} \ddot{p} \right) d\Omega_f + \int_{S_f} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_f + \int_{S_p} (\delta p) \frac{\partial p}{\partial n} dS_p - \int_{\Omega_f} \nabla(\delta p) \bullet \nabla p d\Omega_f \\
& - \int_{S_{fsi}} (\delta p) (q\dot{p} + \rho a_n^{S_{fsi}}) dS_{fsi} - \int_{S_b} (\delta p) (q\dot{p} + \rho a_n^{S_b}) dS_b \\
& - \int_{S_p} (\delta p) p dS_p - \int_{S_f} (\delta p) p dS_f - \int_{S_i} (\delta p) \rho a_n^{S_i} dS_i = 0
\end{aligned} \tag{2-22}$$

对于给定压力的边界 S_p 和 S_f ，在此边界上，有 $\delta p = 0$ ，上式可写为

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f} (\delta p) \left(\frac{1}{c^2} \ddot{p} \right) d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \nabla(\delta p) \bullet \nabla p d\Omega_f + \int_{S_{fsi}} (\delta p) (q\dot{p} + \rho a_n^{S_{fsi}}) dS_{fsi} \\
& + \int_{S_b} (\delta p) (q\dot{p} + \rho a_n^{S_b}) dS_b + \int_{S_i} (\delta p) \rho a_n^{S_i} dS_i = 0
\end{aligned} \tag{2-23}$$

采用等参单元的声学流体单元对流体域进行离散，上式可写成以下有限元方程形式

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{F}_{S_{fsi}} + \mathbf{F}_{S_b} + \mathbf{F}_{S_i} \tag{2-24}$$

其中 \mathbf{p} 、 $\dot{\mathbf{p}}$ 、 $\ddot{\mathbf{p}}$ 依次为节点压力列向量及其对时间的一阶和二阶倒数；而质量矩阵 \mathbf{M}_f 、阻尼矩阵 \mathbf{C}_f 、刚度矩阵 \mathbf{K}_f 及等效节点列向量 $\mathbf{F}_{S_{fsi}}$ 、 \mathbf{F}_{S_b} 、 \mathbf{F}_{S_i} 满足

$$\mathbf{M}_f = \sum_e \mathbf{M}_f^e = \sum_e \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f^e} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f d\Omega_f^e \tag{2-25}$$

$$\mathbf{C}_f = \sum_e \left(\int_{S_{fsi}^e} q \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f dS_{fsi}^e + \int_{S_b^e} q \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f dS_b^e \right) \tag{2-26}$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_e \mathbf{K}_f^e = \sum_e \int_{\Omega_f^e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{B}_f d\Omega_f^e \tag{2-27}$$

$$\mathbf{F}_{S_{fsi}} = \sum_e \left(\int_{S_{fsi}^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T a_n^{S_{fsi}} dS_{fsi}^e \right) \tag{2-28}$$

$$\mathbf{F}_{S_b} = \sum_e \left(\int_{S_b^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T a_n^{S_b} dS_b^e \right) \tag{2-29}$$

$$\mathbf{F}_{S_i} = \sum_e \left(\int_{S_i^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T a_n^{S_i} dS_i^e \right) \tag{2-30}$$

式中 ρ_f 为流体密度、 c 为流体声速； \sum_e 表示单元装配， \mathbf{N}_f 为声学流体单元形函数 N_i 构成的矩阵， \mathbf{B}_f 为 \mathbf{N}_f 形函数矩阵对空间坐标的微分，上标 T 表示矩阵转置，即

$$\mathbf{N}_f = [N_{f1} \quad N_{f2} \quad \dots \quad N_{fn}] \tag{2-31}$$

$$\mathbf{B}_f = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T [N_{f1} \quad N_{f2} \quad \dots \quad N_{fn}] \tag{2-32}$$

流体单元内任意点的压力 $p(x, y, z)$ 可以用有限元插值函数表示为

$$p(x, y, z) = [N_{f1} \quad N_{f2} \quad \dots \quad N_{fn}]_{1 \times n} [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n]^T = \mathbf{N}_f \mathbf{p}^e \quad (2-33)$$

如果考虑流体表面波时，质量矩阵

$$\mathbf{M}_f = \sum_e \mathbf{M}_f^e = \sum_e \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f^e} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f d\Omega_f^e + \sum_e \frac{1}{g} \int_{S_f^e} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f dS_f^e \quad (2-34)$$

2.4 固体区域有限元方程

对于图 2-1 所示的固体区域 Ω_s ，其平衡方程

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho_s \ddot{\mathbf{u}} + \mu \dot{\mathbf{u}} \quad (2-35)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (2-36)$$

$$\mathbf{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T, \quad \mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \quad (2-37)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 表示固体结构的应力列向量， \mathbf{f} 表示固体结构的体积力列向量， \mathbf{u} 、 $\dot{\mathbf{u}}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}$ 表示结构位移、速度和加速度列向量； ρ_s 表示固体结构的密度， μ 为阻尼系数； \mathbf{A} 为微分算子， x, y, z 为笛卡尔坐标方向。

其几何方程为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (2-38)$$

对于各向同性的线弹性材料，其本构方程即应力 $\boldsymbol{\sigma}$ -应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-39)$$

\mathbf{D} 称为弹性矩阵，满足

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

式中 E 、 ν 为弹性模量和泊松比；对应不同的材料本构关系，表现形式有所差异，应根据具体的应力应变关系构建相应本构方程。

对于流固耦合问题，其固体区域的边界条件主要包括应力边界条件、位移边界条件及流固耦合边界条件，即

a) 在结构应力边界 S_σ 上，满足

$$\mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T = \bar{\mathbf{T}} = [\bar{T}_x \quad \bar{T}_y \quad \bar{T}_z]^T \quad (2-41)$$

\mathbf{T} 、 $\bar{\mathbf{T}}$ 分别表示边界上弹性体的内力和已知弹性体单位面积上的面积力，下标表示坐标方向。

当结构表面受垂直压力 \bar{p} 作用时，

$$\mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T = \bar{\mathbf{T}} = [\bar{T}_x \quad \bar{T}_y \quad \bar{T}_z]^T = -\bar{p}\bar{\mathbf{n}}_s \quad (2-42)$$

式中 \bar{p} 表示固体结构表面已知的压力，正方向为垂直指向结构内部， $\bar{\mathbf{n}}_s$ 结构表面单位外法向，指向结构外部。

b) 在位移边界条件 S_u 上，满足

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T = \bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z]^T \quad (2-43)$$

式中 \mathbf{u} 、 $\bar{\mathbf{u}}$ 分别表示边界上的固体结构位移及已知的位移，下标表示坐标方向。

c) 在流固耦合面 S_{fsi} 上，应满足运动学条件和动力学条件。

根据运动学条件，即不考虑流体粘性时，相同位置处的流体速度 \vec{v}_f 与固体结构速度 \vec{v}_s 在流固耦合面法向方向的分量 v_s^n 应相同，即满足

$$v_s^n = \vec{v}_s \cdot \vec{\mathbf{n}}_f = \vec{v}_f \cdot \vec{\mathbf{n}}_f = v_f^n \quad (2-44)$$

下标 s 代表固体，下标 f 代表流体。由式 (2-14) 和 (2-44) 可得流固耦合面上的压力与加速度 $\ddot{\mathbf{u}}$ 的关系

$$\frac{\partial p}{\partial n_f} + q\dot{p} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_f = 0 \quad (2-45)$$

$\ddot{\mathbf{u}}$ 表示固体结构的加速度向量， ρ_f 表示流体的密度，其中 $a_n^{S_{fsi}} = \ddot{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_f$

根据动力学条件，不考虑流体粘性时，结构表面压力等于流固耦合面上相同位置处的流体压力 p_{fsi} ，即

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}^T = \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \bar{T}_x & \bar{T}_y & \bar{T}_z \end{bmatrix}^T = -p_{fsi} \vec{\mathbf{n}}_s \quad (2-46)$$

由式 (2-35) 至 (2-46)，利用变分方法，可获得以下固体结构的有限元方程，详细请参考文献 [1]，即

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{F}_{fsi} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_b \quad (2-47)$$

式中 \mathbf{M}_s 、 \mathbf{C}_s 、 \mathbf{K}_s 为固体结构整体质量、阻尼和刚度矩阵， \mathbf{u} 为固体节点位移列向量； \mathbf{F}_{fsi} 、 \mathbf{F}_p 、 \mathbf{F}_b 分别为流固耦合边界压力、给定压力边界条件、体力等形成的等效节点力列向量。

质量和刚度矩阵可写成

$$\mathbf{M}_s = \sum_e \mathbf{M}_s^e = \sum_e \rho_s \int_{\Omega_s^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s d\Omega_s^e \quad (2-48)$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_e \mathbf{K}_s^e = \sum_e \int_{\Omega_s^e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s d\Omega_s^e \quad (2-49)$$

$$\mathbf{C}_s = \sum_e \mathbf{C}_s^e = \sum_e \int_{\Omega_s^e} \mu \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s d\Omega_s^e \quad (2-50)$$

一般情况下要精确确定结构阻尼相对困难，通常允许将实际结构的阻尼矩阵简化 \mathbf{C}_s 为质量和刚度矩阵的线性组合，即

$$\mathbf{C}_s = \alpha \mathbf{M}_s + \beta \mathbf{K}_s \quad (2-51)$$

其中 α 、 β 为常数，称为瑞利(Rayleigh)阻尼。

体力 (f_x, f_y, f_z) 对应的 \mathbf{F}_b 满足

$$\mathbf{F}_b = \sum_e \int_{\Omega_s^e} \mathbf{N}_s^T \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T d\Omega_s^e \quad (2-52)$$

给定压力 \bar{p} 边界条件对应的 \mathbf{F}_p 满足

$$\mathbf{F}_p = \sum_e \int_{S_e^e} \mathbf{N}_s^T (-\bar{p} \vec{n}_s) dS_e^e \quad (2-53)$$

流固耦合面上的压力边界条件对应的 \mathbf{F}_{fsi} 满足

$$\mathbf{F}_{fsi} = \sum_e \int_{S_{fsi}^e} \mathbf{N}_s^T (-p_{fsi} \vec{n}_s) dS_{fsi}^e \quad (2-54)$$

固体单元的形函数 \mathbf{N}_s 满足

$$\mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} N_{s1} & 0 & 0 & N_{s2} & 0 & 0 & \dots & N_{sn} & 0 & 0 \\ 0 & N_{s1} & 0 & 0 & N_{s2} & 0 & \dots & 0 & N_{sn} & 0 \\ 0 & 0 & N_{s1} & 0 & 0 & N_{s2} & \dots & 0 & 0 & N_{sn} \end{bmatrix}_{3 \times 3n} \quad (2-55)$$

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{A}^T \mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}_{6 \times 3} \begin{bmatrix} N_{s1} & 0 & 0 & N_{s2} & 0 & 0 & \dots & N_{sn} & 0 & 0 \\ 0 & N_{s1} & 0 & 0 & N_{s2} & 0 & \dots & 0 & N_{sn} & 0 \\ 0 & 0 & N_{s1} & 0 & 0 & N_{s2} & \dots & 0 & 0 & N_{sn} \end{bmatrix}_{3 \times 3n} \quad (2-56)$$

固体结构单元内任意点的位移可以用有限元插值函数表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T = \mathbf{N}_s \mathbf{u}^e \\ &= \mathbf{N}_s \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} & u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} & \dots & u_{nx} & u_{ny} & u_{nz} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2-57)$$

上述内容方程(2-48)至(2-57)均为常规的有限元方程，研究人员基于有限元理论均可获得，其详细推导过程可参照文献[1]。这里列出的主要公式是为便于读者对相关矩阵有个直观地了解。

2.5 流固耦合系统的有限元方程

声固耦合系统在流固耦合面上发生相互作用。流体通过流固耦合面将流体压力施加在结构表面，即流体对结构的作用相当于施加了压力边界条件，其耦合项为 p_{fsi} ；而结构通过流固耦合面将结构表面加速度施加在流体区域上，相当于流固耦合面充当了流体区域边界的加速度边界，其耦合项为 $a_n^{S_{fsi}}$ 。式(2-45)、(2-54)

给出了流固耦合相互作用的具体表达式。

为建立声学流体与固体有限元方程之间的联系，结合式（2-57）、（2-33）将耦合项 $a_n^{S_{fsi}}$ 和 p_{fsi} 写成有限元插值形式，即

$$a_n^{S_{fsi}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_f = [l_f \quad m_f \quad n_f] \mathbf{N}_s \vec{\mathbf{u}}^e \quad (2-58)$$

$$p_{fsi} \vec{\mathbf{n}}_s = \mathbf{N}_f \mathbf{p}^e [l_s \quad m_s \quad n_s]^T \quad (2-59)$$

式中 $[l_f \quad m_f \quad n_f]$ 、 $[l_s \quad m_s \quad n_s]$ 分别为 $\vec{\mathbf{n}}_f$ 、 $\vec{\mathbf{n}}_s$ 的方向余弦，并且 $\vec{\mathbf{n}}_f = -\vec{\mathbf{n}}_s$ 。

利用上两式，重写式（2-28）和式（2-54）有

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{S_{fsi}} &= \sum_e \left(\int_{S_{fsi}^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T [l_f \quad m_f \quad n_f] \mathbf{N}_s dS_{fsi}^e \vec{\mathbf{u}}^e \right) \\ &= \left[\sum_e \left(\int_{S_{fsi}^e} \rho_f \left(\mathbf{N}_s^T [l_s \quad m_s \quad n_s]^T \mathbf{N}_f \right)^T dS_{fsi}^e \right) \right] \vec{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2-60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{fsi} &= \sum_e \left(- \int_{S_{fsi}^e} \mathbf{N}_s^T [l_s \quad m_s \quad n_s]^T \mathbf{N}_f dS_{fsi}^e \mathbf{p}^e \right) \\ &= \left[\sum_e \left(- \int_{S_{fsi}^e} \mathbf{N}_s^T [l_s \quad m_s \quad n_s]^T \mathbf{N}_f dS_{fsi}^e \right) \right] \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2-61)$$

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^e &= \int_{S_{fsi}^e} \rho_f \mathbf{N}_s^T [l_s \quad m_s \quad n_s]^T \mathbf{N}_f dS_{fsi}^e \\ \mathbf{Q} &= \sum_e \mathbf{Q}^e \end{aligned} \quad (2-62)$$

则有

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{S_{fsi}} &= \sum_e (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{u} = \mathbf{Q}^T \vec{\mathbf{u}} \\ \mathbf{F}_{fsi} &= - \sum_e \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q}^e \mathbf{p} = - \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2-63)$$

将上式代入声学流体有限元方程(2-24)和固体有限元方程(2-47)，有

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} &= - \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_b \\ \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f \mathbf{p} &= \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{S_b} + \mathbf{F}_{S_t} \end{aligned} \quad (2-64)$$

将式(2-64)按矩阵分块的形式，可写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_b \\ \mathbf{F}_{S_b} + \mathbf{F}_{S_t} \end{bmatrix} \quad (2-65)$$

式(2-65)为声固耦合系统的有限元方程。其中，左端项质量、刚度、阻尼及流固耦合项 \mathbf{Q} 等矩阵均可通过相应的单元矩阵计算和单元装配而获得；右端项

$\mathbf{F}_b = \sum_e \int_{\Omega_s^e} \mathbf{N}_s^T [f_x \ f_y \ f_z]^T d\Omega_s^e$ 、 $\mathbf{F}_p = \sum_e \int_{S_o^e} \mathbf{N}_s^T (-\vec{p}\vec{n}_s) dS_o^e$ 、 $\mathbf{F}_{S_b} = \sum_e \left(\int_{S_b^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T a_n^{S_b} dS_b^e \right)$ 均
可根据相应给定的边界条件，通过单元矩阵计算和单元装配获得，而无反射边界
上 $\mathbf{F}_{S_i} = \sum_e \left(\int_{S_i^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T a_n^{S_i} dS_i^e \right)$ 则需根据相应的无反射边界条件来确定；如无无反射边
界，则 \mathbf{F}_{S_i} 为 0。

2.6 含无限水域及远场冲击波作用下的流固耦合有限元方程

图 2-2 给出了含无限水域的流固耦合系统示意图，整个结构被无限水域包围，
其中无限水域用截断边界 S 截断成有限水域。无限水域的边界变为流固耦合面
 S_{fsi} 、自由液面 S_f 、截断边界 S_i 。当水下存在水下爆炸时，水下爆炸源在远场产
生冲击波（即入射波），而水下结构在入射波作用下产生散射波。图 2-1 和图 2-2
主要差异在于图 2-2 中多了水下爆炸产生的冲击波，求解时额外需要考虑散射
波和入射波之间的关系。

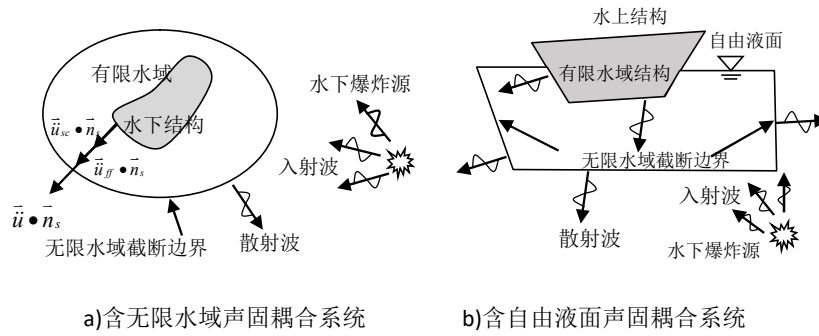


图 2-2 无限水域下远场冲击的流固耦合系统

2.6.1 场分离技术

当水下结构离自由液面与海底较远时（即不考虑流固耦合面之外的固体壁面
时）水下结构受入射波作用的示意图 2-2a。水下爆炸源产生冲击波（即入射波），
冲击波在无限水域中传播。当浸没在无限水域中的水下结构遇到冲击波时，结构
产生振动并反射冲击波，从而在无限水域中产生散射波。

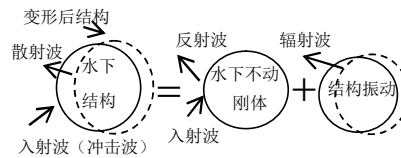


图 2-3 散射波的组成

由文献[2]知，在入射波作用下水下结构产生的散射波由水下结构为不动刚

体时结构对入射波产生的反射波和在没有入射波时因结构振动产生的辐射波组成，其示意图见图 2-3。冲击波与散射波均满足声学波动方程[3]。结构不存在时，入射波在无限水域中自由传播形成的压力、速度等物理场统称为自由场，因结构存在而产生的散射波而形成的场称为散射场。自由场与散射场总称为总场。

根据场分离技术[4,5]，当有远场水下爆炸产生的冲击波时，在不考虑流体空化效应的情况下，水总压力 p_t 、总加速度 \vec{a}_t 满足

$$p_t = p_{ff} + p_{sc} \quad (2-66)$$

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{ff} + \vec{a}_{sc} \quad (2-67)$$

式中下标 ff 表示对应水下爆炸在自由场下的变量，而下标 sc 表示对应散射波的变量。在流固耦合面上，需满足上面两式，即流固耦合面上任意一点的总压力 p_{fsi} 、总加速度 \vec{u} 在结构外法向分量满足

$$p_{fsi} = p_{ff} + p_{sc} \quad (2-68)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_s = (\vec{u}_{ff} + \vec{u}_{sc}) \cdot \vec{n}_s \quad (2-69)$$

正方向定义为结构表面的外法向，指向流体，如图 2-2 所示。

2.6.2 基于散射场变量的流固耦合方程

根据式（2-68）和（2-69）的定义，式（2-64）可写为

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q}(\mathbf{p}_{ff} + \mathbf{p}_{sc}) + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_b \quad (2-70)$$

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}}_{sc} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}}_{sc} + \mathbf{K}_f \mathbf{p}_{sc} = \mathbf{Q}^T (\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}}_{ff}) + \mathbf{F}_{S_i}$$

利用上式，将声固耦合系统的有限元方程（2-65）写成位移与散射波变量形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p}_{sc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{ff} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_b \\ -\mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ff} + \mathbf{F}_{S_i} \end{Bmatrix} \quad (2-71)$$

式（2-71）是以散射波压力 \mathbf{p}_{sc} 及结构位移 \mathbf{u} 为变量的声固耦合系统有限元方程；

载荷项 $-\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{ff}$ 、 $-\mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ff}$ 为流固耦合面上冲击波压力载荷及冲击波加速度量对应

的等效节点列向量；截断边界上的载荷项应满足

$$\mathbf{F}_{S_i} = \sum_e \left(\int_{S_i^e} -\rho_f \mathbf{N}_f^T \mathbf{a}_{nsc}^{S_i} dS_i^e \right) \quad (2-72)$$

式中 $\mathbf{a}_{nsc}^{S_i}$ 是指无反射边界上对应散射波的法向加速度，正方向指向无穷远处。不同的无反射边界条件形成不同的载荷 \mathbf{F}_{S_i} 形式。

为便于式(2-71)的理解及与无反射边界条件的耦合，现将其写成分块形式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^{11} & \mathbf{M}_s^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_s^{21} & \mathbf{M}_s^{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f^{22} & \mathbf{M}_f^{23} & \mathbf{M}_f^{24} \\ & & \mathbf{M}_f^{32} & \mathbf{M}_f^{33} & \mathbf{M}_f^{34} \\ & & \mathbf{M}_f^{42} & \mathbf{M}_f^{43} & \mathbf{M}_f^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}^2 \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc}^2 \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc}^3 \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc}^4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^{11} & \mathbf{C}_s^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_s^{21} & \mathbf{C}_s^{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{C}_f^{22} & \mathbf{C}_f^{23} & \mathbf{C}_f^{24} \\ & & \mathbf{C}_f^{32} & \mathbf{C}_f^{33} & \mathbf{C}_f^{34} \\ & & \mathbf{C}_f^{42} & \mathbf{C}_f^{43} & \mathbf{C}_f^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}^2 \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc}^2 \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc}^3 \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc}^4 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^{11} & \mathbf{K}_s^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_s^{21} & \mathbf{K}_s^{22} & \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^{22} & \mathbf{K}_f^{23} & \mathbf{K}_f^{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^{32} & \mathbf{K}_f^{33} & \mathbf{K}_f^{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^{42} & \mathbf{K}_f^{43} & \mathbf{K}_f^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{p}_{sc}^2 \\ \mathbf{p}_{sc}^3 \\ \mathbf{p}_{sc}^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^1 + \mathbf{F}_b^1 \\ -\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{ff}^2 + \mathbf{F}_p^2 + \mathbf{F}_b^2 \\ -\mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ff}^2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{S_i}^4 \end{Bmatrix} \quad (2-73) \end{aligned}$$

其中上标 1、2、3、4 分别表示流固耦合面之外的固体区域、流固耦合面、流固耦合面和无限水域截断面之外的流体区域、无限水域截断边界对应的物理量。如果仅考虑冲击波载荷时，即不考虑体力及结构其余表面压力时，式(2-73)可写为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^{11} & \mathbf{M}_s^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_s^{21} & \mathbf{M}_s^{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f^{22} & \mathbf{M}_f^{23} & \mathbf{M}_f^{24} \\ & & \mathbf{M}_f^{32} & \mathbf{M}_f^{33} & \mathbf{M}_f^{34} \\ & & \mathbf{M}_f^{42} & \mathbf{M}_f^{43} & \mathbf{M}_f^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}^2 \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc}^2 \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc}^3 \\ \ddot{\mathbf{p}}_{sc}^4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^{11} & \mathbf{C}_s^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_s^{21} & \mathbf{C}_s^{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{C}_f^{22} & \mathbf{C}_f^{23} & \mathbf{C}_f^{24} \\ & & \mathbf{C}_f^{32} & \mathbf{C}_f^{33} & \mathbf{C}_f^{34} \\ & & \mathbf{C}_f^{42} & \mathbf{C}_f^{43} & \mathbf{C}_f^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}^2 \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc}^2 \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc}^3 \\ \dot{\mathbf{p}}_{sc}^4 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^{11} & \mathbf{K}_s^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_s^{21} & \mathbf{K}_s^{22} & \frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^{22} & \mathbf{K}_f^{23} & \mathbf{K}_f^{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^{32} & \mathbf{K}_f^{33} & \mathbf{K}_f^{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^{42} & \mathbf{K}_f^{43} & \mathbf{K}_f^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{p}_{sc}^2 \\ \mathbf{p}_{sc}^3 \\ \mathbf{p}_{sc}^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{ff}^2 \\ -\mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ff}^2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{S_i}^4 \end{Bmatrix} \quad (2-74) \end{aligned}$$

从上式可知，在分析水下爆炸产生冲击波载荷作用下结构响应问题时，既要考虑

冲击波超压 $(-\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{ff}^2)$ 对结构的影响，又要考虑对应冲击波超压的流体加速

度 ($-\mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ff}^2$) 对流体的影响; 同时还需考虑流固耦合相互作用对彼此的影响。

结合式(2-62), 仔细观察载荷项 $-\frac{1}{\rho_f} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{ff}^2$, 可发现该项与流体密度无关, 只于冲击波超压有关, 而载荷项 $-\mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ff}^2$ 与密度成正比, 当流体密度较大时, 流体的惯性效应作用显著, 其对流体和结构的影响不能忽略, 必须考虑流固强耦合作用。

值得注意的是式(2-74)中, 除 $\mathbf{F}_{S_i}^4$ 形式未知外, 其余项均可按标准的有限元程序获取。后续章节将基于不同的无反射边界条件给出不同的形成。

参考文献

- [1] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.
- [2] 李上明. 冲击波作用下水下结构载荷计算方法. 工程力学, 2014, 31(12):11-16.
- [3] 郭君, 杨文山, 姚熊亮, 等. 基于场分离的水下爆炸流固耦合计算方法[J]. 爆炸与冲击, 2011, 31(3):295-299.
- [4] Shin YS. Ship shock modeling and simulation for far-field underwater explosion [J]. Computers and Structures, 2004, 82:2211-2219.
- [5] Fan SC, Li SM, Yu GY. Dynamic fluid-structure interaction analysis using boundary finite element method-finite element method [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 2005, 72 : 591-598.

第3章 无限水域的比例边界有限元方法

3.1 概述

作为无限域主要模拟方法之一, 宋崇民和 Wolf 提出的比例边界有限元方法 [1,2] (SBFEM) 最初是针对岩土无限域和改进边界元不足而提出的, 是近三十年来获得逐步发展的一种半解析新型力学数值方法, 其主要特点有: 径向方向的解是解析解, 环向方向的解随着单元增多收敛于有限元法意义上的精确解 (径向和环向的定义同弹性力学中的定义); 离散分析对象时具有边界元法的特点, 即只需离散分析对象的边界, 并且边界中的自由边界和固定边界无需离散, 降低了问题的维数, 减少了离散区域和单元数量; 分析计算时, 又具有有限元法的特点, 如不需要基本解、不出现边界元法中的奇异积分、矩阵为对称矩阵等特点。林皋院士团队[3]、作者团队[4,5,7]、Baziyar 团队[6]分别利用 SBFEM 分析了如大型水库与坝体[3-5]、无限地基与结构[6]、无限海水与海洋结构[7]等含无限域、半无限域问题, 验证了 SBFEM 严格满足无穷远处的辐射条件, 和边界元法一样比有限元法精确高效。这些特点决定了 SBFEM 能有效模拟无限域的无反射特性, 但只能

模拟无限域的线性行为,并且在时域分析时因包含卷积积分存在计算效率不足问题。

为克服 SBFEM 的卷积积分,宋崇民及其合作者[8,9]发展了 SBFEM 高频连分式理论,有效提高了计算效率。为提高低频行为的模拟精度,宋崇民及其合作者[10]还提出了双渐近连分式思想,并对简单问题进行了分析,说明了双渐近连分式理论的可行性。文献[8-10]应该说为连分式理论研究奠定了理论基础。围绕无限水域的模拟,作者团队[11-13]分别建立了高频及双渐近连分式理论及其与有限元法的耦合方法,实现了无限水域无反射特性的模拟,并在坝库耦合、水下结构瞬态分析中得到应用;但时域计算出现了不稳定现象。

为进一步完善双渐近连分式理论,围绕无限岩土体的模拟,陈灯红等人[14]提出了一种简化的双渐近连分式理论,其低频渐近公式简单;在此基础上,为进一步提升双渐近连分式理论模拟无限域的能力;并进一步[15]相对系统地给出了双渐近连分式理论,并通过无限岩土体动态刚度对比研究,评估了其频域模拟的准确性,但其时域特性如何还需进一步研究,并未回答其时域稳定性问题;Wang 等人[16]则从时域分析出发,建立 2 维的圆面的双渐近连分式,有效分析了水下爆炸冲击波传播过程,虽未面临稳定性问题,但该方法只适用圆面结构的吸收性的模拟,其普适性待加强问题。而作者团队[17]以连分式稳定性为研究重点,给出了其稳定性机理,并给出了一种修正方法,但需要进一步评估其引入的偏差。

从上述文献调研看,SBFEM 已成为了一种可高效模拟无限水域的主要计算方法。本章将相对详细地给出 SBFEM 理论公式推导过程及相应的公式体系,以便形成相对完整的 SBFEM 模拟无限水域的理论体系。

3.2 SBFEM 公式体系

3.2.1 无限水域的 SBFEM 建模

参考文献

- [1] Wolf J.P., Song C. Consistent infinitesimal finite-element cell method: three-dimensional scalar wave equation [J]. Journal of Applied Mechanics, 1996, 63(3):650~654.
- [2] Song C. The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation [M]. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2018.
- [3] Lin G., Du J.G., Hu Z.Q. Dynamic dam-reservoir interaction analysis including effect of reservoir boundary absorption [J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2007, 50:1-10.
- [4] Li S.M. Diagonalization procedure for scaled boundary finite element method in modelling semi-infinite reservoir with uniform cross section [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009,

80(5):596–608.

- [5] Li S.M., Liang H., Li A.M. A semi-analytical solution for characteristics of a dam- reservoir system with absorptive reservoir bottom [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2008, 20(6): 727-734.
- [6] Yaseri A., Baziyar M.H., Hataf N. 3D coupled scaled boundary finite-element / finite element analysis of ground vibrations induced by underground train movement [J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, 60:1-8.
- [7] Li S.M., Fan S.C. Parametric analysis of a submerged cylindrical shell subjected to shock waves [J]. *China Ocean Engineering*, 2007; 21(1):125-136.
- [8] Baziyar M.H., Song C. A continued-fraction-based high-order transmitting boundary for wave propagation in unbounded domains of arbitrary geometry [J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2008, 74:209–37.
- [9] Birk C., Prempramote S., Song C. An improved continued-fraction-based high-order transmitting boundary for time-domain analyses in unbounded domains [J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89:269–98.
- [10] Prempramote S., Song C., Tin-Loi F, Lin G. High-order doubly asymptotic open boundaries for scalar wave equation [J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2009, 79:340–74.
- [11] 李上明, 陈红永, 吴连军. 基于高频连分式与有限元法的水下结构瞬态分析方法. *船舶力学*, 2019, 23(11):1387-1393.
- [12] 李上明. 等横截面无限声学水域的连分式公式[J]. *工程力学*, 2014, 31(8):41-45.
- [13] 李上明, 吴连军. 基于连分式与有限元法的坝库耦合瞬态分析方法[J]. *工程力学*, 2016, 33(4):9-16.
- [14] 陈灯红. 求解无限域动力刚度矩阵的双渐近算法[J]. *工程力学*, 2014, 31(6):30-34.
- [15] Chen D.H., Wang M., Dai S.Q., Peng G. A high-order doubly asymptotic continued-fraction solution for frequency-domain analysis of vector wave propagation in unbounded domains [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2018, 113:230-240.
- [16] Wang P.G., Lu R.R., Yan Q.S., Bao X., Zhang J.Q., Liu L. The internal substructure method for shock wave input in 2D fluid-structure interaction analysis with unbounded domain using doubly-asymptotic ABC [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, 30(15):3111-3124.
- [17] Zhao Z., Li S.M., Yin Y. Transient Response Analysis of Underwater Structures Based on Total Field Formulas and Modified High-order Transmission Boundary [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2021, 18(7): 2150016.