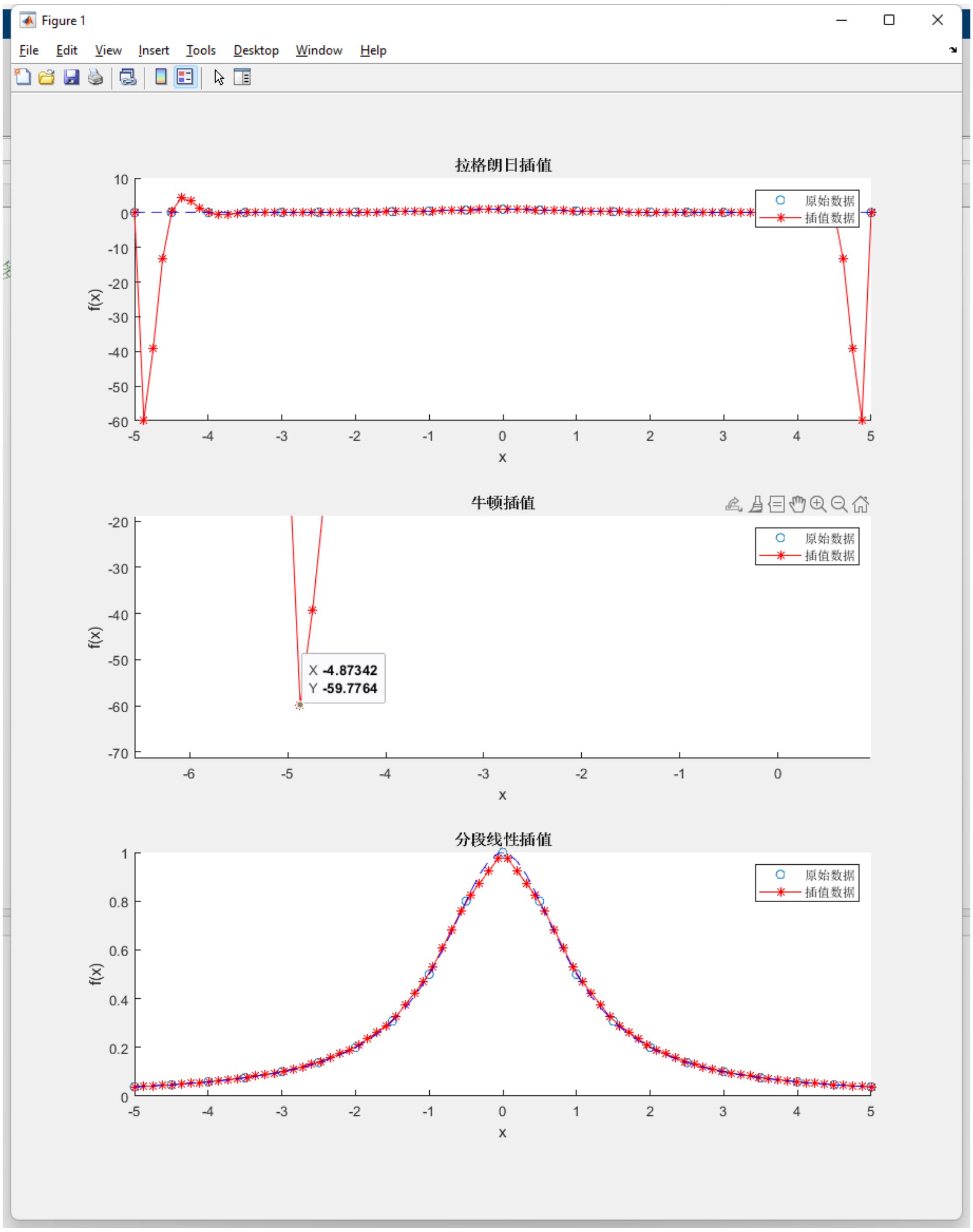
数值实验三——计算机作业

3. 由下图可知：

第一张图是拉格朗日插值，第二张图是牛顿插值，两者图像类似；第三张图是 Matlab 自带函数 interp1()，其本质是分段线性插值。

其中，拉格朗日插值和牛顿插值的 f(x)与 p(x)的最大偏差点在 **x=-4.87342** 处，偏差达 59 左右；而分段线性插值在 **x∈[-1,1]**的误差明显要高于拉格朗日插值和牛顿插值。

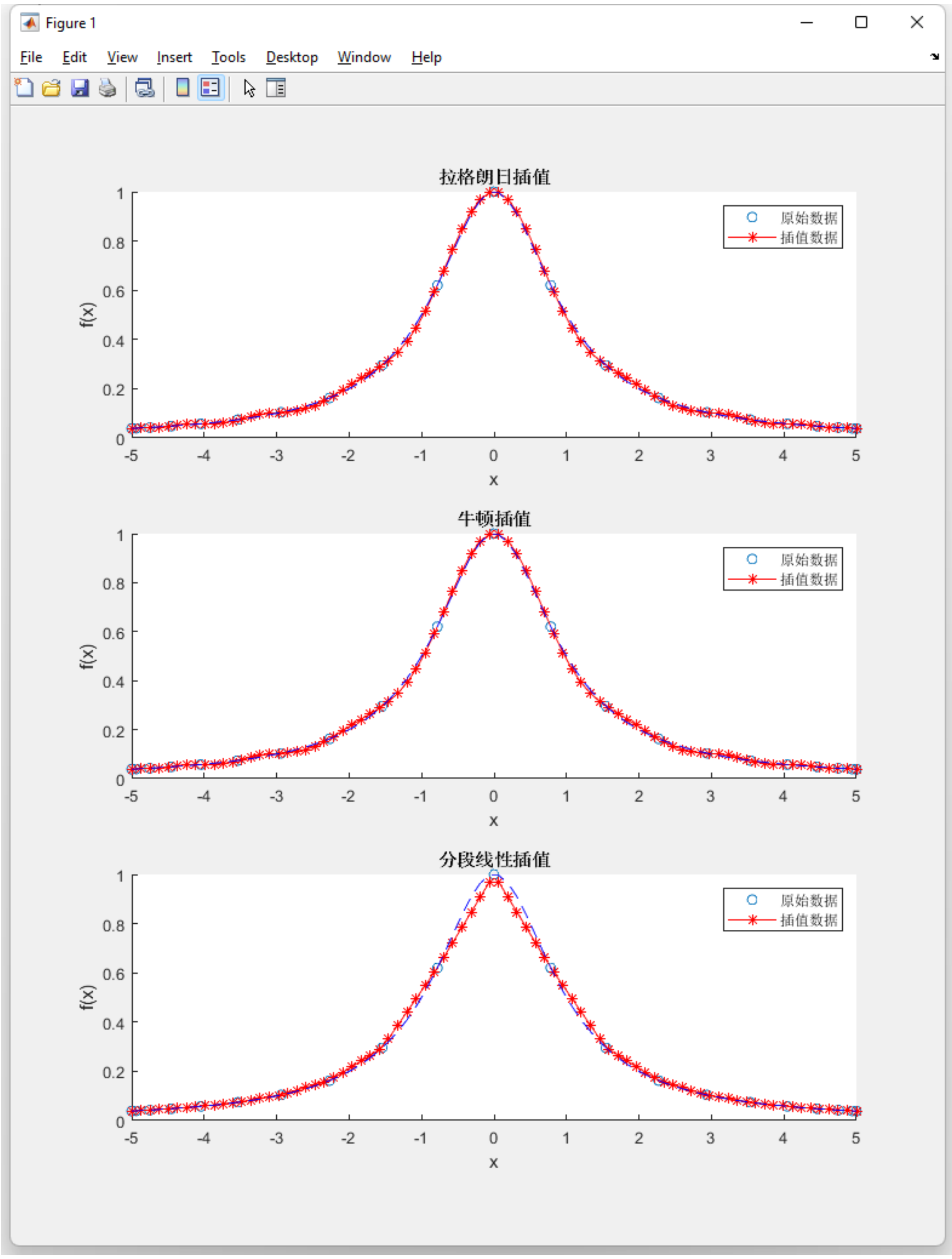


4. 将原始数据中的等距节点：

x=linspace(-5,5,n)'

修改为切比雪夫节点：

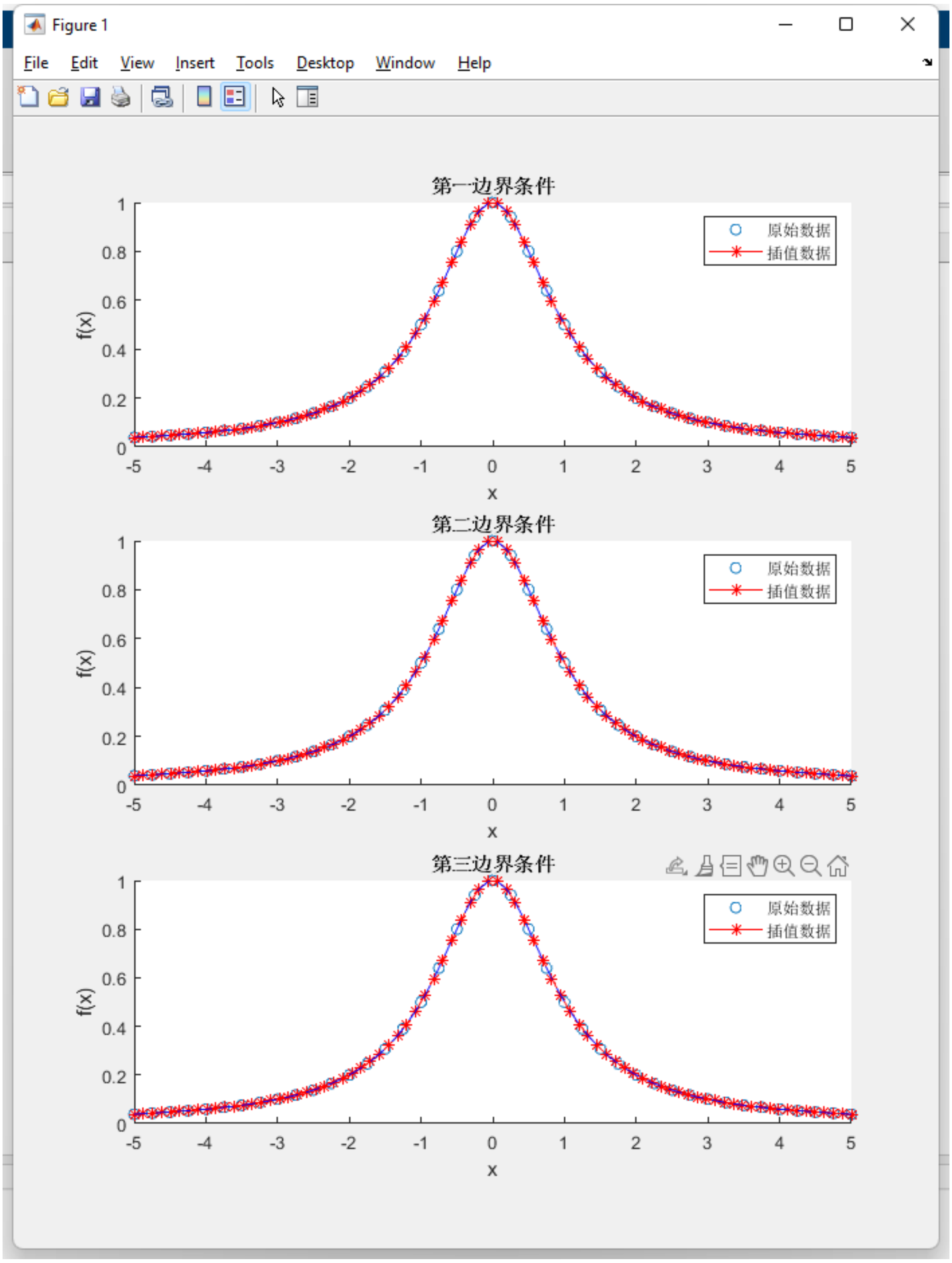
x=5*cos(pi/(n-1)*(0:n-1)')



结果如上图所示，由于切比雪夫节点在两边缘范围的节点加密，因此得到的插值曲线与原曲线相当吻合。

因此，通过一般的插值方法不一定能获得与原函数最贴合的插值函数，这时可以通过切比雪夫节点来改善插值结果。

5. 对函数$1/(1+x^2)$做三次样条插值，分别用第一边界条件、第二边界条件和第三边界条件进行约束，得到的 f(x)与 p(x)图形如下所示：



由图可知，三种边界条件下的函数偏差非常小，插值效果很好。

代码块

文件名称：lagrange.m	功能：拉格朗日插值函数

```
function p1=lagrange(x,y,intrp_x)
%
% written by LiShixun(ID:2230514)
% 计算拉格朗日插值
% 输入参数
%     x：原始数据 x 值
%     y：原始数据 y 值
%     intrp_x：被插值数据 x
% 输出参数
%     p1：输出的插值后数据 y
% 算法逻辑
%     外循环计算每一个 Li(x),内循环计算每一个插值基函数 li(x),最后求和即可
%
n=length(y);
p1=zeros(size(intrp_x)); % 用于输出
for i=1:n %计算 Li(x)
    temp=ones(size(intrp_x));
    for j=[1:i-1 i+1:n] % 跳过 i~=j，计算 li(intrp_xi)
        temp=temp.*(intrp_x-x(j))./(x(i)-x(j));
    end
    p1=p1+temp*y(i); % li(x) * f(x)
end
end
```

文件名称：newton.m	功能：牛顿插值函数

```
function p2=newton(x,y,intrp_x)
%
% written by LiShixun(ID:2230514)
% 计算拉格朗日插值
% 输入参数
%     x：原始数据 x 值
%     y：原始数据 y 值
%     intrp_x：被插值数据 x
% 输出参数
%     p1：输出的插值后数据 y
% 算法逻辑
%     ① 制作差商表
%         第一列是 y，第二列是二阶差分，第三列是三阶差分，一直到 n
%     ② 并行计算
%         外循环计算计算 a(i)*连乘(x),内循环计算当前 a(i)对应的连乘
%
```

```
X(:,1)=x;
Y(:,1)=y;
intrp_X(:,1)=intrp_x;
n=length(y);
% step2.制作差商表
difftable(:,1)=Y; % 第一列为零阶差商
for j=2:n
    difftable(1:n-j+1,j)=diff(difftable(1:n-j+2,j-1))./(X(j:n)-X(1:n-j+1)); % 前一列的 diff 差分
/delta x
end
% step3.计算插值，其中系数就是差分表第一行数值
diffcoef=difftable(1,:); % 差商系数，从零阶到 n 阶,维度：1*n
deltax=ones(size(intrp_X,1),n); % 存放 deltax，维度：size(interp)*n
for i=2:n
    deltax(:,i)=deltax(:,i-1).*(intrp_X-X(i-1)); % 最后一项是(x-x_n-1)
end
p2=deltax*diffcoef'; % 输出 p2
end
```

文件名称：homework.m	功能：数值实验 3.3 和 3.4 的主函数

```
% homework3.3+3.4
% written by LiShixun(ID:2230514)
% 内容：拉格朗日、牛顿、intrp1、三次样条分别对龙格函数进行 20 阶插值多项式
clc,clear all;

% 数据
n=21;
%x=linspace(-5,5,n)'; %一定要记得转置
x=5*cos(pi/(n-1)*(0:n-1)');
y=1./(x.^2+1);
intrp_x=linspace(-5,5,80); % 插入的新值

% 拉格朗日插值
subplot(3,1,1);
p1=lagrange(x,y,intrp_x);
draw(x,y,intrp_x,p1);
title('拉格朗日插值');

% 牛顿插值
subplot(3,1,2);
p2=newton(x,y,intrp_x);
draw(x,y,intrp_x,p2);
title('牛顿插值');
```

```
% matlab 内置插值：分段线性插值
subplot(3,1,3);
p3=interp1(x,y,intrp_x);
draw(x,y,intrp_x,p3);
title('分段线性插值');
```

文件名称：spline3.m	功能：数值实验 3.5 的主函数

```
% homework3.5
% written by LiShixun(ID:2230514)
% 内容：三次样条分别对龙格函数进行 40 阶插值多项式
clc,clear all;

% 数据
n=41;
x=linspace(-5,5,n);
y=1./(x.^2+1);
intrp_x=linspace(-5,5,80); % 插入的新值

% 求导
syms t;
f=1/(t^2+1);
f1=diff(f)
f2=diff(f,2)
t=5;y1_right=double(subs(f1));y2_right=double(subs(f2));
t=-5;y1_left=double(subs(f1));y2_left=double(subs(f2));

% 第一边界条件：前后放 f'
subplot(3,1,1);
y1=[y1_left y y1_right];
temp1=csape(x,y1,'complete');
p1=ppval(temp1,intrp_x);
draw(x,y,intrp_x,p1);
title('第一边界条件');
[breaks1,coefs1,npoly1,ncoefs1,dim1]=unmkpp(temp1);

% 第二边界条件：前后放 f''
subplot(3,1,2);
y2=[y2_left y y2_right];
temp2=csape(x,y2,'second');
p2=ppval(temp2,intrp_x);
draw(x,y,intrp_x,p2);
title('第二边界条件');
[breaks2,coefs2,npoly2,ncoefs2,dim2]=unmkpp(temp2);
```

```
% 第三边界条件
subplot(3,1,3);
temp3=csape(x,y,'periodic');
p3=ppval(temp3,intrp_x);
draw(x,y,intrp_x,p3);
title('第三边界条件');
[breaks3,coefs3,npoly3,ncoefs3,dim3]=unmkpp(temp3);
```

文件名称：draw.m	功能：绘制图形

```
% draw the picture
function draw(x,y,intrp_x,p)
hold on;
scatter(x,y,'o')
plot(intrp_x,p,'r*-',intrp_x,1./(intrp_x.^2+1),'b--');
legend('原始数据','插值数据');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
hold off;
end
```

文件名称：check.m	功能：验证部分手算作业的答案

```
%% execrise3.1
clc,clear all;
format long; % 显示多位小数
x=[0.70 0.71];
y1=[0.6442176872 0.6518337710];
y2=[0.7648421872 0.7583618759];
ans1=lagrange(x,y1,0.705)
ans2=lagrange(x,y2,0.702)

%% execrise3.2
clc,clear all;
format long; % 显示多位小数
x=[0 1 2 4 6];
y=[1 9 23 3 259];

n=length(y);
difftable(:,1)=y;
% 制作差商表：
for j=2:n
    difftable(1:n-j+1,j)= diff(difftable(1:n-j+2,j-1))./ (x(j:n)-x(1:n-j+1));
end
ans=newton(x,y,4.2)
```

```
%% execrise3.13
clc,clear all;
format long; %  显示多位小数
x=[1 2 3 4 5];y=[0 0 1 0 1 0 0];
pp=csape(x,y,'second');
pp.coefs
```