$\{0, 1\}$ = $\{1, 0\}$ non conta l'ordine

$(0, 1) \neq (1, 0)$

(a, b) , $(c, d) \in XxY$

C = citta europee

$\mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ x C

(3 , Praga) $\in \mathbb{N}$
(Praga, 3) $\notin \mathbb{N}xC$

Prdotto cartesiano di un intero arbitrativo di insiemi

$X1, X2, \dots, Xn$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

(MANCA!)

Nel lpiano cartesiano conta come scrivo gli elementi

$\mathbb{R}x\mathbb{R}$ = $\mathbb{R}^2$ "Piano cartesiano"

$\mathbb{R}^3$ = $\mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R}$

Dati due insieme X, Y una relazione fra X, Y è un sottoinsieme $R \subseteq X * Y$

> **Example**
>
> $X = 1, 2, 3$, $y = a, b$
>
> Definiamo una relazione
>
> $R = (2, b), (3, a)$ dico 2 è in relazione con b secondo R

Secondo la relazione che stiamo definendo:
1 connetta con nessuno
2 connetta con B
3 connetta con A

Definite una relazione fra

- $X = \{1, 2, 3, 4\}$

- $Y = \{4, 5, 6, 8\}$

Scelta possibile: $R = \emptyset$
Scelta possibile: $R = X$ * Y

Definizione di funzione

Dati due insieme X e Y una funzione da X in Y è una relazione fra X e Y quindi un sottoinsieme R = X * Y che verifica $\forall x \in X \nexists ! y \in Y : (x, y) \in \mathbb{R}$

∄!: esiste un unica

X è detto dominio della funzione R
Y è detto codominio della funzione R

Quando si parla di funzione si tende a usare lettere come f, g, h

se $f \in XeY$ è una funzione $f : x \implies Y$ se $(x, y) \in f$ scriviamo $f(x) = y$

Example

$X = \{1, 2, 3\}$, $y = \{a, b\}$

Definiamo una funzione da X in Y
$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\} \subseteq X * Y$

$f(1) = a,$ $f(2) = b$, $f(3) = a$

$f : \{1, 2, 3\} - > \{a, b\}$

1 connette a

2 connette b

3 connette a

Tentativi di costruire funzioni

Example

X = parole italiane
Y = alfabeto
$f : X - > Y$ data p una parola definisco $f(p) =$ la quinta lettera della parola p

$f(algebra) =$ b
$f(casa) =$ casa

Queste due sopra non sono una funzione perché per ogni parola devo accopiarla ad un elemento del codominio seconda la regola data. Possiamo restringere il dominio con un dominio più piccolo ad esempio di almeno 5 lettere.

Prima soluzione: restringo il dominio
f : $X1$ -> $X1 =$ una parola con almeno 5 lettere
$f(p) =$ la quinta lettera

Seconda soluzione: definisco f in modo diverso quando la vecchia formula non andava bene/non funziona

$f(p) =$ quinta lettera se p ha almeno 5 lettere
$f(p) =$ ultima lettera della parola se p ha meno di 5 lettere

$f(algebra) =$ B
$f(casa) =$ A

$f : \mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$ $f(n) = n - 1$
no funzione $f(0) = -1 \notin \mathbb{N}$

1. Registrengere dominio: $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$
2. $f(n) = \$\{$n - 1 \$ se $n > 0$
   1 se $n = 0\}$
3. Allargo il codominio: $f : \mathbb{N}$ -> $f(n) = n - 1$

X = matricola unige 25/26
Y = tutti gli esseri umani

$f : X$ -> Y $x \in X$

$f(x)$ = la sorella di x

$f(luca) = ??$

$f(leo)$ = ambigua la funzione
Leo ha due sorelle

Soluzione per risolvere la ambiguità

$f(x) =$ la sorella maggiore di x
Questa soluzione può essere ancora ambigua perché x potrebbe avere delle sorelle gemelle

---

Esempi di funzioni generiche

- Funzione costante: $X =$ dominio, $Y =$ codominio, un elemento $Y_0 \in Y$
  Definisco $f(x) = y0\ \forall x \in X$
  Esempio: f : $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$ $f(n) = 7\ \forall n \in \mathbb{N}$
- Funzione identica: idx : X -> X $idx(x) = x$
  idx = funzione identica dell'insieme X

Example

$X = \{0, 1\}$
$id\{0, 1\}$: $\{0, 1\}$ -> $\{0, 1\}$
0 -> 0
1 -> 1

Example

$id\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}$ $id\mathbb{R}(x) = x$
$\forall x \in \mathbb{R}$

Example

f : $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$ $f(n) = n^2$
$f(1 + b) = (1 + b)^2$
(1+b) viene chiamato argomento di f

Data f : X -> Y una funzione diciamo che:

1. f è iniettiva se $\forall x1, x2 \in X$, $x1 + x2$ sia che $f(x1) \neq f(x2)$
2. f è surgettiva se $\forall y \in Y$; $\exists x \in X$: $f(x) = y$
   Per ogni elemento del codominio esiste un qualcosa.
3. f è bigiettiva se è iniettiva e soggettiva, tutte due le propietà.

Example

f : $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$ $f(n) = 2n + 1$

f non è surgettiva
dunque non è esiste n che sta nei naturali ($n \in \mathbb{N}$) tali che $f(n) = 0$

f iniettiva? dati due numeri (n, m) naturali se $f(n) = f(m)$
$2n + 1 = 2m + 1$ -> $2n = 2m$ -> $n = m$
f è iniettiva!

Per verificare che f è iniettiva si ragiona della seguente maniera:

- Dati $x1, x2 \in X$: $f(x1) = f(x2)$ si deve concludere che $x1 = x2$

---

f : $\mathbb{Z}$ -> $\mathbb{Z}$ $f(n) = n^2$

$f(1) = 1^2 = 1$
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

f non è iniettiva; non esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $f(n) = -1 \in \mathbb{Z}$
$n^2 = -1$ No soluzione

f non è neanche surgettiva poiché non esiste un numero naturale che dia come risultato 2

---

f : $\mathbb{Q}$ -> $\mathbb{Q}$ $f(x) = 3x + 1$

f è iniettiva?

- $x1, x2 \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x1) = f(x2)$
  Proviamo a dedurre che $x1 = x2$
  $f(x1) = f(x2)$ signfica $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$ -> $3x_1 = 3x_2$ -> $x_1 = x_2$
  f è iniettiva!
  Surge sia $y \in \mathbb{Q}$ cerco $x \in \mathbb{Q}$
  $f(x) = y$ -> $3x + 1 = y$ -> $3x = y - 1$ -> $x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Q}$
  f è anche surgettiva

---

f : $\mathbb{Z}$ -> $\mathbb{Z}$ $f(n) = 3m + 1$

surgettiva: $y \in \mathbb{Z}$ cerca $x \in \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = y$ -> $3m + 1 = y$
$x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Z}$ se $y = 2$ $x = 1/3 \notin \mathbb{Z}$

Data $f : X$ -> Y definiamo
$imf = \{y \in Y : \exists xinX : f(x) = y\}$

Info

Im = immagine di f