

2013 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

A 题 车道被占用对城市道路通行能力的影响

摘要:

本文针对因交通事故因素导致车道或道路横断面通行能力在单位时间内降低,引起车辆排队,出现交通阻塞问题进行分析。通过分析,将事故横断面实际通行能力、事故持续时间、路段上游车流量,所占车道的不同作为路段车辆排队长度的影响因素,综合的应用比较分析、交通波、车流波动理论、微分方程等方法建立模型,使他们之间的关系明显化,很好的解决了他们之间存在何种关系的问题。

就问题一,把事故所处横断面实际通行能力的变化过程作为单一变化,通过统计数据和做时间序列图分析描述事故点所处横断面处的实际通行能力随时间变化。通过 Excel 表中的插入函数功能可以很容易计算出视频 1 事故点的实际通行能力的平均值,其值为 $\bar{x}_1 = 1200 \text{pcu/h}$,在事故堵车过程中,事故点通行能力随时间围绕其均值上下波动。

问题二将同一横断面交通事故所占车道不同提取出来,通过应用直观图形描述法和应用统计量进行定量描述,并通过实际经验来分析视频一和视频二的不同。根据交通论的知识。车道 1 是右转车道,车道 2 是直行车道,车道 3 是左转车道,其对应的交通需求比例分别为 21%, 44%和 35%,也就是说车道 3 的交通需求比车道 1 的交通需求大。即可分析所占不同车道对交通事故横断面实际通行能力影响的差异。

对于问题三,针对视频 1 (附件 1),综合考虑横断面实际通行能力、事故持续时路段上游车流量间,通过建立模型来分析这些变量对路段车辆排队长度。通过交通波、车流波动理论、微分方程等方法建立模型,引入交通波波速 ω ,特别把时间提取出来,通过不同的时间来建立不同情况的不同波速的交通波模型,最终确定交通事故所影响的路段车辆排队长度与事故横断面实际通行能力、事故持续时间、路段上游车流量间的模型关系。

问题三针对视频 1 (附件 1)所处的情况,通过对问题三确定的模型进行合适假设和改进并最终应用,最终得出事故发生开始经过 $t_i = 442 \text{s}$ 时间,车辆排队长度将到达上游路口的结论。

文中还运用数学分析、线性代数等知识讨论了他们之间存在的关系,通过计算机对原始数据进行描绘分析,最终讨论了第三中模型的验证及改进方向。

关键字: 所占车道 实际通行能力 交通波 车辆排队长度 事故持续时间
路段上游车流量 交通事故 建立模型

A 题 车道被占用对城市道路通行能力的影响

一、根据视频 1（附件 1），描述视频中交通事故发生至撤离期间,事故所处横断面实际通行能力的变化过程。

由于道路、交通和管制条件以及服务水平不同，通行能力分为：基本（理论）通行能力，实际通行能力和设计通行能力。理论通行能力是理想的道路与交通条件下的通行能力。实际通行能力是在实际的道路和交通条件下的通行能力，在实际中，完全理想的状况是不存在的，总有一些条件不符合理想的标准。以理论通行能力为基础，考虑到实际的地形、道路和交通状况，确定其修正系数，再以此修正系数乘以前述的理论通行能力，即得实际道路、交通在一定环境条件下的实际通行能力。这是在无法采集数据的情况下用数学方法推算出来的。

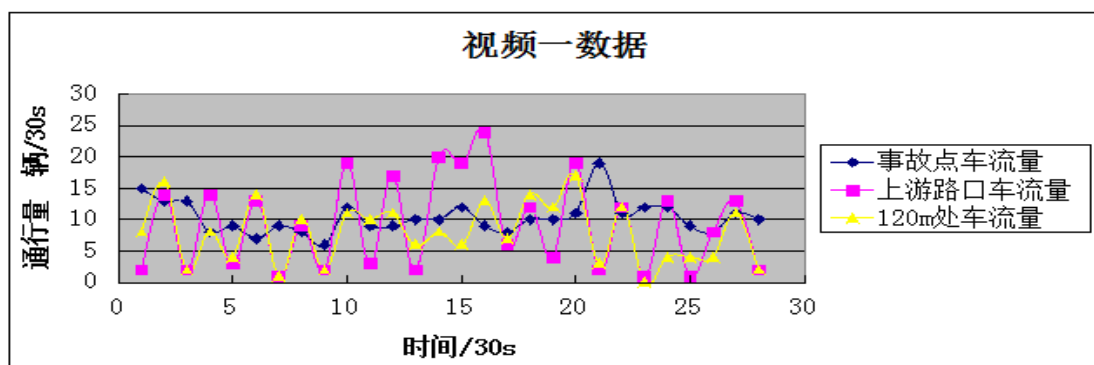
本题中，发生交通事故后第二、第三车道被占，显然第一车道处于饱和状态，这时，通过视频采集数据便可真实地测算出事故点横断面出的实际交通能力。

统计数据的方法：根据信号上游的配时方案，相位时间为 30s，信号周期为 60s。所以根据这两个条件以 30s 周期进行统计各界面点的车流量，并以平均通行能力代表一个周期中间时刻的通行能力，这样统计对分析更为清晰和靠近真实数据。

首先，根据视频 1 中统计每 30 秒通过事故点横断面处的车辆数，并转换成标准车当量数，因为实际通行能力的单位一般采用 pcu/h，所以还要再进行一次转换，最后得到如下数据（见

需要注意的是，采集数据的周期是 30s，而不是一组红绿灯时间，以绿灯亮时为时间起点，每隔 30s 统计一次，之所以这样划分，是因为考虑到上游十字路口北道口右转相位不受色灯信号控制，红灯时便可统计由上游十字路口北出道口及小区路口出来的小车数量，便于计算由这些地方进入事故路段的频率呵比率，有一定的参考意义。

然后，利用上表数据运用 Excle 表绘制事故点横断面出实际通行能力——时间序列图，方法是“插入—>图表—>折线图”，选择相应数据即可，结果如下图所示：



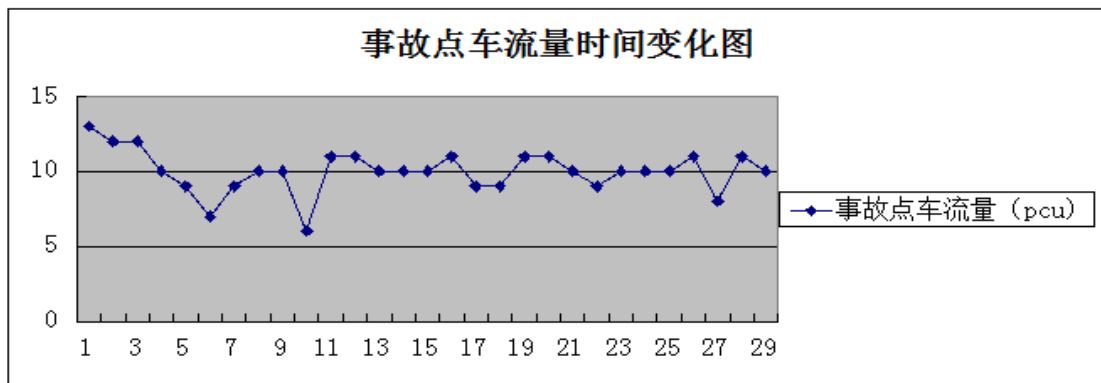


图 1

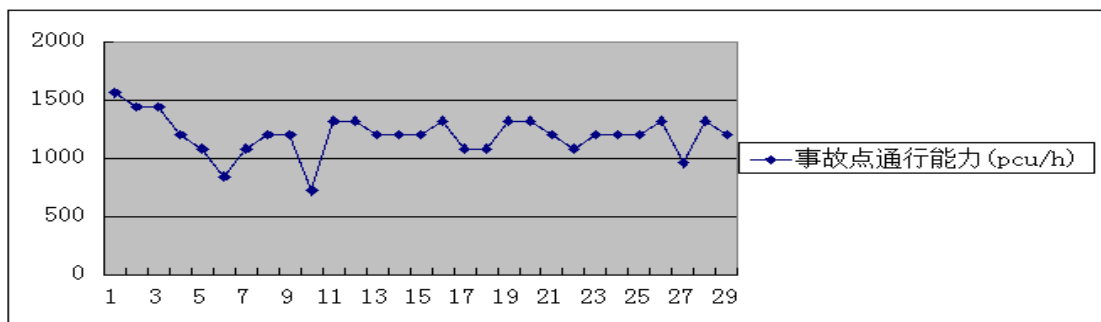


图 2

最后，根据时间序列图分析描述事故点所处横断面处的实际通行能力随时间变化的关系。

时间序列分析是一种动态数据处理的统计方法。该方法基于随机过程理论和数理统计学方法，研究随机数据序列所遵从的统计规律，以用于解决实际问题。时间序列是按时间顺序的一组数字序列。时间序列分析就是利用这组数列，应用数理统计方法加以处理，以预测未来事物的发展。时间序列分析是定量预测方法之一，它的基本原理：一是承认事物发展的延续性。应用过去数据，就能推测事物的发展趋势。二是考虑到事物发展的随机性。任何事物发展都可能受偶然因素影响，为此要利用统计分析中加权平均法对历史数据进行处理。该方法简单易行，便于掌握，但准确性差，一般只适用于短期预测。时间序列预测一般反映三种实际变化规律：趋势变化、周期性变化、季节性变化以及随机性变化，对应的时间序列包括，趋势变动序列，周期性变动序列，季节性变动序列和随机性波动序列。

其中，是时间序列中除去趋势、季节变动和周期波动之后的随机波动。不规则波动通常总是夹杂在时间序列中，致使时间序列产生一种波浪形或震荡式的变动。只含有随机波动的序列也称为平稳序列。很显然，视频 1 中事故点所处横断面处的实际通行能力序列是一组只包含随机波动，不包含趋势、周期性和季节性的平稳序列。

利用 Excel 表中的插入函数功能可以很容易计算出视频 1 事故点的实际通行能力的平均值，其

值为 $\bar{x}_1 = 1200 \text{pcu/h}$ ，在事故堵车过程中，事故点通行能力随时间围绕其均值上下波动，方差为 $s = 172.71$ ，通行能力最大点是事故开始阶段的 1560pcu/h ，最小点是 720pcu/h 。
根据事故点的变化曲线可得相关函数为：

$$Q = \begin{cases} -4.525t + 32.145 & (0 < t < 4.5 \text{ min}) \\ 20 & (4.5 \leq t < T \text{ min}) \end{cases} \quad (\text{其中 } T \text{ 为事故解除时刻})$$

二、根据问题 1 所得结论，结合视频 2（附件 2），分析说明同一横断面交通事故所占车道不同对该横断面实际通行能力影响的差异。

要比较分析视频 1 和视频 2 的事故点所处横断面处通行能力的差异，首先需得从视频 2 统计各时间段通过事故点的标准车当量数，统计方法与视频 1 相同，需要注意的是视频 2 的交通事故持续时间要比视频 1 长，但是应该不会影响后续分析。

视频 1 与视频 2 的主要区别在于事故所占用的车道不同，因而引起了统计数据上的差异，视频 2 事故点实际通行能力的平均值为 $\bar{x}_2 = 1384 \neq \bar{x}_1$ ，但是占用车道不同是否真会引起事故点实际通行能力的差异呢？也就是说不同车道间实际通行能力是否有差异。关于这个问题，可以用数理统计中的方差分析方法进行验证。

方差分析是用于两个及两个以上样本均数差别的显著性检验。由于各种因素的影响，研究所得的数据呈现波动状，造成波动的原因可分成两类，一是不可控的随机因素，另一是研究中施加的结果形成影响的可控因素。

在方差分析中通常要有以下假定：首先是各样本的独立性，即各组观察数据，是从相互独立的总体中抽取的，只有是独立的随机样本，才能保证变异的可加性；其次要求所有观察值都是从正态总体中抽取，且方差相等。在实际应用中能够严格满足这些假定条件的客观现象是很少的，在社会经济现象中更是如此。但一般应近似地符合上述要求。

方差分析的基本原理是认为不同处理组的均数间的差别基本来源有两个：

(1) 随机误差，如测量误差造成的差异或个体间的差异，称为组内差异，用变量在各组的均值与该组内变量值之偏差平方和的总和表示，记作 SSW ，组内自由度 df_w 。

$$SSW = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

(2) 实验条件，实验条件，即不同的处理造成的差异，称为组间差异。用变量在各组的均值与总均值之偏差平方和表示，记作 SSA ，组间自由度 df_A 。

$$SSA = \sum_{j=1}^c n_j (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2$$

总平方和 $SST = SSA + SSW$ 。

$$SST = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$$

组内 SSW、组间 SSA 除以各自的自由度(组内 $dfw = n - m$ ，组间 $dfb = m - 1$ ，其中 n 为样本总数， m 为组数)，得到其均方 MSW 和 MSA，一种情况是处理没有作用，即各组样本均来自同一总体， $MSA/MSW \approx 1$ 。另一种情况是处理确实有作用，组间均方是由于误差与不同处理共同导致的结果，即各样本来自不同总体。那么， $MSA \gg MSW$ (远远大于)。

MSA/MSW 比值构成 F 分布。用 F 值与其临界值比较，推断各样本是否来自相同的总体。

视频 1 与视频 2 的差异只有占用车道不同，可用单因素方差分析。

在 Excel 中用“分析工具库”模块中的单因素方差分析功能可以很容易实现对视频 1 和视频 2 事故点通行能力的方差分析，结果如下图所示：

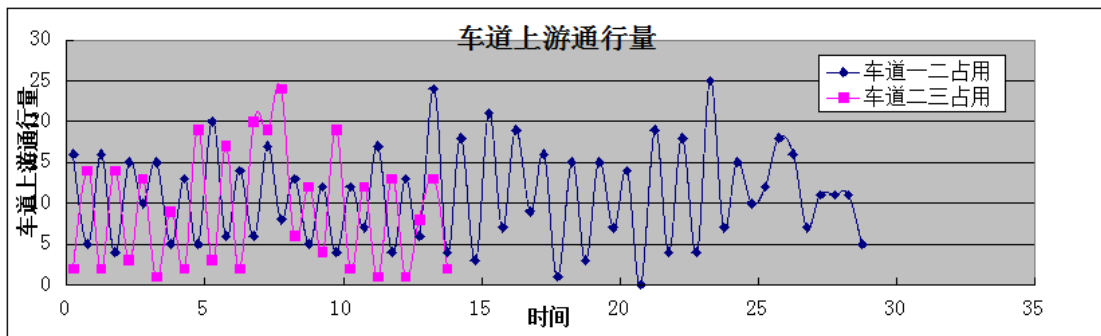
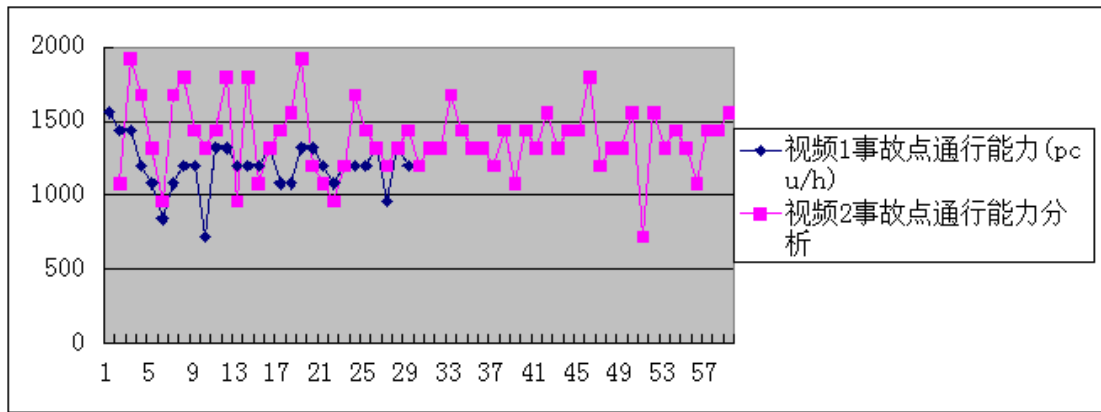
方差分析：单因素方差分析						
SUMMARY						
组	观测数	求和	平均	方差		
列 1	58	80280	1384.1379	61750.99819		
列 2	29	34800	1200	29828.57143		
方差分析						
差异源	SS	df	MS	F	P-value	F crit
组间	655531.03	1	655531.03	12.7945005	0.000576809	3.953209117
组内	4355006.9	85	51235.375			
总计	5010537.9	86				

其中， $F = 12.7945$ ， $P = 0.0005768$ ，

在 $\alpha = 0.05$ 的置信水平下， $\alpha < P$ ，位于拒绝域，拒绝原假设 H_0 ，即车道不同对事故点通行能力产生了影响。

那么，不同车道对事故点实际通行能力到底产生了什么影响呢？关于这个问题，我们打算用描述统计方法进行阐述。

第一种是直观图形描述法。下图是视频 1 与视频 2 事故点通行能力的综合折线图，通过观察该图，可以初步得出视频 2 中事故点实际通行能力比视频 1 的要大，即占有第一、二车道对事故点通行能力的影响比占有第二、三车道的影响小。



第二是应用统计量进行定量描述。

下表是用 Excel 中“数据分析”工具模块下的“描述统计”功能得到的视频 1 和视频 2 事故点通行能力的各统计量值（见附表）。

从上表可知， $\bar{x}_1 = 1200$, $\bar{x}_2 = 1384$ ，视频 2 的事故点通行能力平均值比视频 1 的大，即交通事故发生后占用车道一、二后的对实际通行能力的影响比占用车道二、三小。

因为是两个不同的样本，且其平均值不相同，这时，不能直接对其离散程度大小进行比较。为了消除单位不同和数据水平高低的影响，应该计算其变异系数。

变异系数是级差、标准差和方差一样都是反映数据离散程度的绝对值，其数据大小不仅受变量值离散程度的影响，而且还受变量值平均水平大小的影响。一般来说，变量值平均水平高，其离散程度的测度值也大，反之越小。

变异系数的计算公式为：变异系数 $C \cdot V = (\text{标准偏差 } SD \div \text{平均值 } MN) \times 100\%$

经计算， $CV_1 = 0.1439$ ， $CV_2 = 0.1795$

所以视频 2 的离散程度更大。

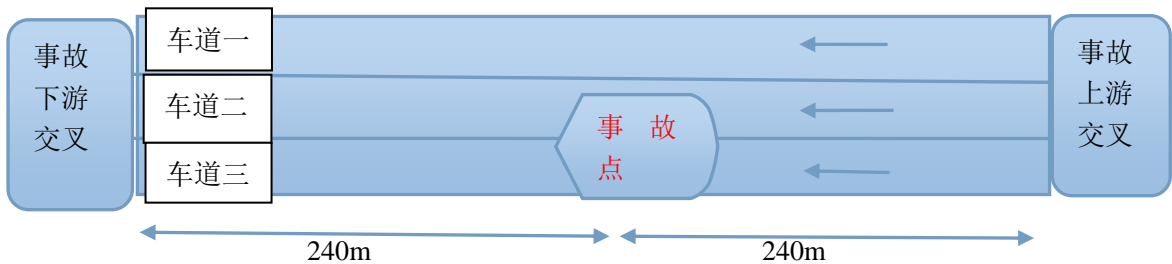
为什么会出现这种情况呢？要解释这个问题需要用到交通论的知识。从附件 1 可知，车道 1 是右转车道，车道 2 是直行车道，车道 3 是左转车道，其对应的交通需求比例分别为 21%，44%和 35%，也就是说车道 3 的交通需求比车道 1 的交通需求大。那么，从上游过来的车辆将有 35%走车道 3，加

上车道 2 共有 79%，这 79%的车辆被交通事故阻碍了前路，必须汇入车道 1。我们都知道，不同车道上的车辆要汇入车道 1 并抢先通过事故点的机会和难易程度是不一样的，需要汇入的车辆越多，从事故点通过的速度就越慢，显然占用车道二、三比占用车道一、二要汇入的车辆多，于是，占用车道二、三后事故点的通行能力就比占用车道一、二后的弱。

三：构建数学模型，分析视频 1（附件 1）中交通事故所影响的路段车辆排队长度与事故横断面实际通行能力、事故持续时间、路段上游车流量间的关系。

问题重述

如视频 1 所示，在城市交通道路上，道路相隔的两个交叉路口为距离为 $L=480\text{m}$ ，单方向车道数为 3，单方向每车道宽度为 $D=3.25\text{m}$ ，在 $t=0$ 时刻在距离上游交叉路口的地方发生了一起交通事故，事故车辆占用道路 2 个车道（车道二三），事故上游路段长度为 $L_2=240\text{m}$ ，车辆的到达流量为 Q ，在同级服务水平上事故发生断面的通行能力为 $Q(t)$ ，道路在正常条件下的单方向的通行能力为 $q(t)$ ，如图模型。



根据已知情况构建数学模型，分析视频 1（附件 1）中交通事故所影响的路段车辆排队长度与事故横断面实际通行能力、事故持续时间、路段上游车流量间的关系。

模型的假设与符号说明

模型假设：

- （1）假设在发生事故的时期上游车流量处于动态稳定状态，即不存在上下班的高峰期等问题。
- （2）在事故持续时间段内，没有人为的干预，一车道的通行不会受到进一步影响。
- （3）车辆的平均长度为 5.5m，根据图中的大车经过事故断面的时间可折换为 3 辆小车。

符号说明

事故发生前：

车道上游的需求量为 Q_1

事故发生之后：

车道上游需求量 Q_1

对应的密度为 K_1

事故发生点瓶颈处的通行能力下降为 S_1

事故发生时车流密度相应地上升为 K_{s1}

事故持续时间为 T 。

成指数增长。

模型建立

用车流波动理论分析车流排队和交通事故的过程，根据视频相关信息上游交通需求量大于事发路

段现有通行能力到达[1]。车流在事故地点陆续减慢速度甚至停车而集结成密度较高的队列，事故解除后。由于路段通行能力的恢复。排队车辆又陆续加速而疏散成具有适当密度的车队，车流中两种不同密度部分的分界面经过一辆辆车向车队后部传播的现象。称为车流波动。

下图 1 为时间空间坐标系下的一队 n 辆车的运行状态变化图。图中每条曲线表示一辆车运行的时间—空间轨迹车队密度不同的两部分之间有一个分界面虚线 OA 是低密度状态向 高密度状态转变的分界面它所体现的车流波称为集结波； $f\sim BA$ 是高密度状态向低密度状态转变的分界面，它所体现的车流波称为消散波。密度分界面沿道路移动的速度称为波速，在 图中表现为虚线的斜率，其正负号表示波传播的方向。从事故发生至事故解除期间，上游车流由高速低密的畅通状态转变为低速高密的拥挤状态。从而形成集结波，波面以一定的速度 向车队的后方传播；事故解除后除了集结波继续向车队后方传播外。在车队的前方又形成了消散波，波面同样向车队后方传播。当消散波的速度大于集结波的速度时排队消散终能完 成 。

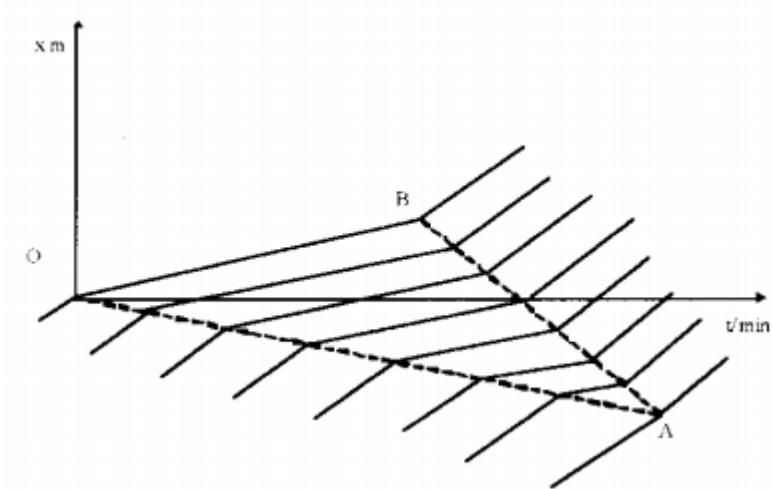
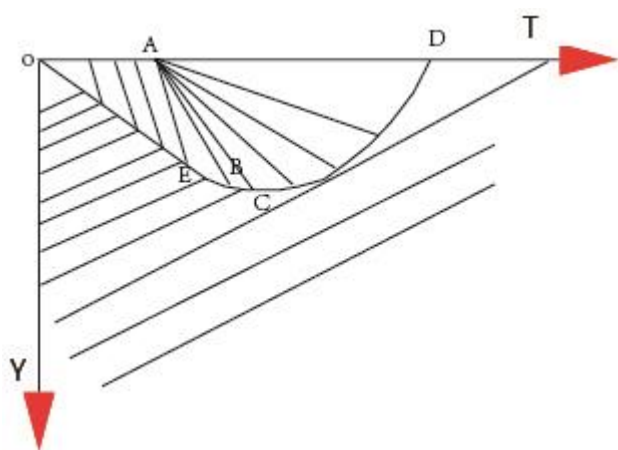


图 1

这样可得阻塞---消散过程的波形时距图：



模型假设

- T=0,为事故的发生时间
- T（D）表示假设上流没有车辆的时候车辆在事故点的车辆的消散时间。

模型假设：假设当交通事故发生后

本车道上游的需求流量为 Q_i ，对应的密度为 K_i

瓶颈段的通行能力下降为 S_i

$T(C)$ 表示上流车辆全部到达并且处于排队状态时的时刻排队车辆以饱和流率驶出，对应密度记为 K_s

模型求解

一个周期的模型

由车流波动理论和交通波的相关信息得：

$$\omega(OB) = \frac{S_i - Q_i}{K_s - K_i} \quad (1)$$

通过观察可确定流量和密度的关系模型，本模型采用 GREENSHIELD 流-密模型[2]规定上游需求流量 Q_i 属于高速低密的畅流态，而 S_i 属于低速高密的拥挤态。则可得：

$$\omega(OB) = uf \left(1 - \frac{K_s + K_i}{K_j}\right) \quad (2)$$

其中 K_j 为阻塞密度。

通过解三角形可得出：

$$T(B) = \frac{h(K_s)T(A)}{h(K_s) - \omega(OB)} \quad (3)$$

其中

$$h(K_s) = \left. \frac{dQ}{dK} \right|_{K=K_s} = uf \left(1 - \frac{2K_s}{K_j}\right) \quad (4)$$

因此：

$$T(B) = \frac{(K_j - 2K_s)T(A)}{K_i - K_s} \quad (5)$$

$0 \leq T < T(B)$ 时，

$$Y[OB](T) = -\omega(OB) * T \quad (6)$$

设 K_r 表示曲线段 BCD 上任意一点的交通流密度，则该点的波速为：

$$\frac{dY}{dT} = -(Q_r - Q_i)/(K_r - K_i) = \frac{uf}{K_j}(K_j - K_i - K_r) \quad (7)$$

又

$$Y(r) = -h(K_r) * (T - T(A)) = -uf \left(1 - \frac{2K_r}{K_j}\right)(T - T(A)) \quad (8)$$

则

$$\frac{dY}{dT} = -\frac{uf}{2} + \frac{1}{2} \frac{Y}{T - T(A)} + \frac{uf * K_i}{K_j} \quad (9)$$

方程（9）可化为齐次微分方程，令 $T = T - T(A)$ 则：

$$\frac{dY}{dT} = \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} - h(K_i) \right) \quad (10)$$

设 $Y = \omega T$ ，可得曲线 BCD 上任意一点的排队长度为：

$$Y[BCD](T) = [-h(K_s) + h(K_i)]\sqrt{T(B)} - h(K_i)T$$

则 $T(B) \leq T \leq T(D)$ 时，

$$Y[BCD] = [-h(K_s) + h(K_i)]\sqrt{[(T - T(A))(T(B) - T(A))]}[(h(K_i)(T - T(A)))] \quad (11)$$

下面确定排队车辆数：

为了便于建立模型，此处的排队车辆是指车辆的交通流状态位于流量密度曲线的阻塞区。定义 $K(Y, T)$ 表示 T 时刻排队队列中距离停车线即事故线的距离为 Y 处的流量密度。

由于对应不同的时段， $K(Y, T)$ 也不相同，所以可分为三个时间段求解排队的车辆数。

当 $0 < T < T(A)$ ，任意时刻的排队队长为：

$$N(T) = \int_0^{Y[OB](T)} K_j dY = K_j * Y(T) \quad (12)$$

将式 (8) 带入上式，可得：

$$N(T) = -\omega(OB) * K_j * T \quad (13)$$

当 $T(A) < T < T(B)$ 时，

$$N(T) = \int_0^{Y[AB](T)} K(Y, T) dY + \int_{Y[AB](T)}^{Y[EB](T)} K_j dY \quad (14)$$

式中： $Y[EB](T) = -\omega[OB] * T$

$$Y[AB](T) = \omega(T - T(A)) \quad K(Y, T) = \frac{K_j(1 + Y/\omega T)}{2}$$

当 $T(B) < T < T(S)$ 时，

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T)} K(Y, T) dY \quad (15)$$

其中 $T(S)$ 为堵车消散的时间， $Y[BCD](T)$ 为式 (10) 的值。

至此单个周期排队队长模型已经建立完毕模型已经建立完毕[3]。

多个周期建立模型：

时间 T_i

此时事故点上游车段流排队，事故点距离上游交叉口的距离为 L_0

$L_m(t)$ 为 t 时刻事故点上游路段 L_0 内车流以阻塞行二三车道的排队长度

$\omega(T_i)$ 为 T_i 时间内新产生的交通波的速度，且

$$\omega(T_i) = \omega(1 - \frac{(k_{i1} + k_{i2})}{k_j})$$

u_f 为该事故段的自由流速，即为该路段的设计车速。
 k_{i1} , k_{i2} 分别为 T_i 内事故点上游、事故点瓶颈段的交通密度
 K_j 为该路段的交通堵塞密度
 T 为第一个模型的周期，在二中 T_1 , T_2
 事故点距离上游交叉路口的距离为 240m，假设统计值为 T_s s。
 查阅相关资料：

交通流模型参数表		表 1
在正常情况下 1 车道速—密公式		$u = 72 - 0.655k$
临界密度	$k_m = 55\text{pcu/km}$	
临界车速	$u_m = 36\text{km/h}$	
自由流车速	$u_j = 72\text{km/h}$	
阻塞密度	$k_j = 110\text{pcu/km}$	
饱和流率	$s = 2\,000\text{pcu/h}$	

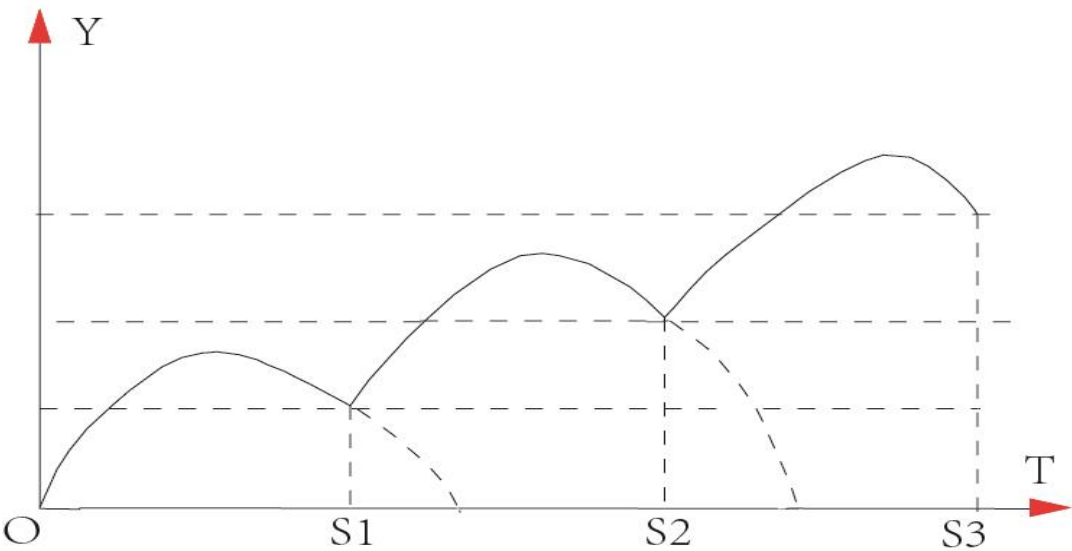
对于视频一所示，可分为多个单周期的叠加。

(1) $Q_s \geq Q_i$

即上游的交通量需求低于一通道的正常通行能力，那么，尽管事发路段存在通行能力瓶颈，但不会导致交通拥挤，当上游的流量到达瓶颈处，密度增大，车速降低，车辆以较低的速度通过瓶颈点，不会形成排队，该事故段的交通流量受到的影响很小，不会引起排队[4]。

(2) $Q_s < Q_i$

情况一：



(1) $0 < T < T_{s1}$

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T)} K(Y,T)dY$$

在 T_{s1} 时刻的排队车辆数为： $N(T_{s1})$

$T_{s1} \leq T < T_{s2}$

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T-T_{s1})} K(Y,T-T_{s1})dY + N(T_{s1})$$

在 Ts_2 时刻的排队车辆数为: $N(Ts_2)$

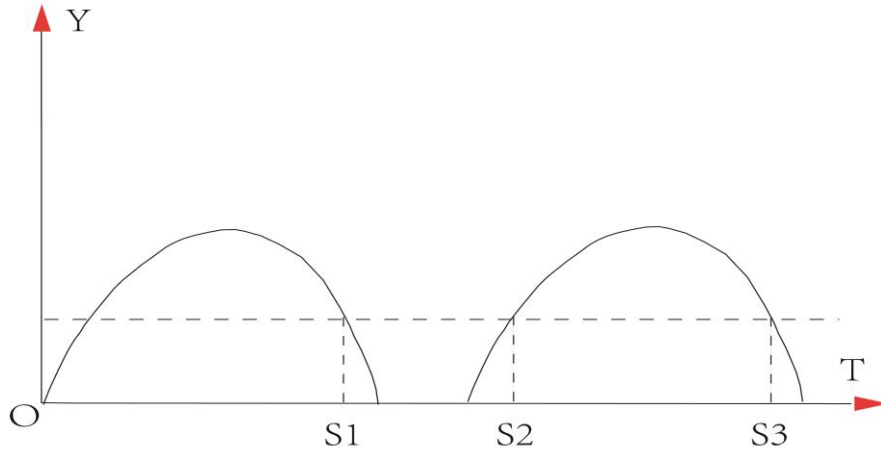
$Ts_2 \leq T < Ts_3$

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T-Ts_2)} K(Y, T-Ts_2) dY + N(Ts_2)$$

在 Ts_3 时刻的排队车辆数为: $N(Ts_3)$

以此类推, 可得在 T 时刻的排队车辆长度。

情况二:



(1) $0 < T < Ts_1$

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T)} K(Y, T) dY$$

在 Ts_1 时刻的排队车辆数为: $N(Ts_1)$

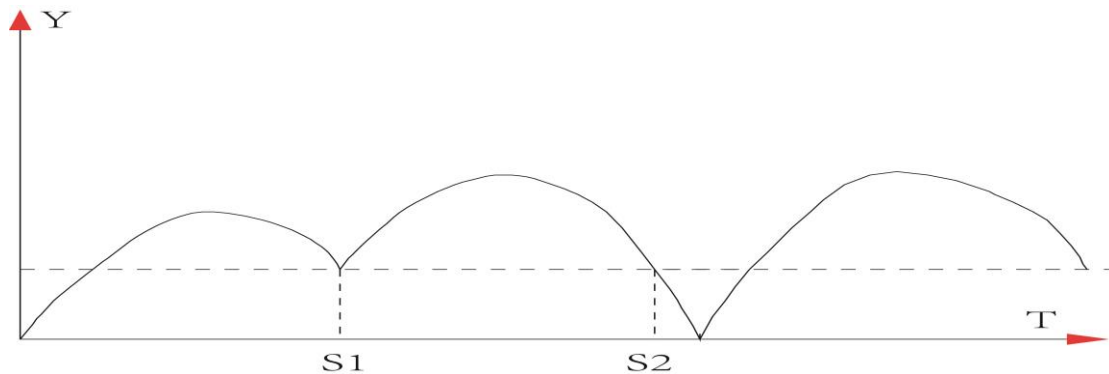
(2) $Ts_1 \leq T < Ts_2$

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T-Ts_1)} K(Y, T-Ts_1) dY + N(Ts_1)$$

在 Ts_1 时刻的排队车辆数为: $N(Ts_2) = 0$

以此类推可得最终的车辆。

情况三:



(1) $0 < T < Ts_1$

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T)} K(Y, T) dY$$

在 Ts1 时刻的排队车辆数为：N(Ts1)

(2) Ts1 ≤ T < Ts2

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T-Ts1)} K(Y, T-Ts1) dY$$

在 Ts1 时刻的排队车辆数为：N(Ts2)

以此类推可得最终的车辆。

而视频一所表现出来的就在在三种情况下的转化，最终处于第一情况的状态。

若忽略在起初的不稳定，则最终的排队车辆数为：

对于一般的模型：

在第一个周期内：

A: 0 < T < T1

$$(1) \text{ 若 } \frac{L0}{|\omega(Ts1)|} < Ts1, \text{ 则}$$

$$T < \frac{L0}{|\omega(T1)|} \text{ 时, } Lm(T) = |\omega(T1)|T < L0;$$

$$T > \frac{L0}{|\omega(T1)|} \text{ 时, } Lm(T) = L0;$$

B: T1 < T < T1+T2

由题一所得的结论，在 T2 时间内，事发断面的通行能力发生变化，设变化为 Qss，这里，还需要考虑一个时间，就是交通波 $\omega(T2)$ 赶上了 $\omega(T1)$ 的时间（设为 Ts1），赶上之后车流以 $\omega(T2)$ 的速度继续排队，因为本文只需要考虑 L0 内的排队长度，所以考虑在 T2 时间内且在 L0 段内交通波 $\omega(T2)$ 是否能赶上了 $\omega(T1)$ ，即在 T2 满足以下两个条件才需要被考虑：

$$Lm(T1) + |\omega(T1)|Ts1 \leq L0, \quad Lm(T1) < L0, \quad Ts1 \leq T2。$$

当 $Lm(T1) < L0$ 时若 $Lm(T1) + |\omega(T1)|Ts1 \leq L0$ ，且 $Ts1 \leq T2$ ，则：

当 $T2 < (L0 - Lm(T1) - |\omega(T1)|Ts1) / |\omega(T2)| + Ts1$ 时，

$$\begin{cases} Lm(T) = Lm(T1) + |\omega(T1)|(T - T1), & \text{当 } T - T1 \leq Ts1 \text{ 时} \\ Lm(T) = Lm(T1) + |\omega(T1)|Ts1 + |\omega(T2)|(T - T1 - Ts1), & \text{当 } T - T1 > Ts1 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lm(T) = |\omega(T2)|(T - T1), & \text{当 } T - T1 \leq L0 / |\omega(T2)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L0, & \text{当 } T - T1 > L0 / |\omega(T2)| \text{ 时} \end{cases}$$

当 $T2 \geq (L0 - Lm(T) - |\omega(T1)|Ts1) / |\omega(T2)| + Ts1$ 时，

$$\begin{cases} Lm(T) = Lm(T_1) + |\omega(T_1)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq Ts1 \text{ 时} \\ Lm(T) = Lm(T_1) + |\omega(T_1)|Ts1 + |\omega(T_2)|(T - T_1 - Ts1), \text{当 } (L_0 - Lm(T_1) + |\omega(T_1)|Ts1) / |\omega(T_2)| + Ts1 \geq T - T_1 > Ts1 \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } (L_0 - Lm(T_1) + |\omega(T_1)|Ts1) / |\omega(T_2)| + Ts1 < T - T_1 \leq T_2 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lm(T) = |\omega(T_2)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } T - T_1 > L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \end{cases}$$

若 $Lm(T_1) + |\omega(T_1)|Ts1 > L_0$, 则

$$\begin{cases} Lm(T) = Lm(T_1) + |\omega(T_1)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq (L_0 - Lm(T_1)) / |\omega(T_1)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } T - T_1 > (L_0 - Lm(T_1)) / |\omega(T_1)| \text{ 时} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lm(T) = |\omega(T_2)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } T - T_1 > L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \end{cases}$$

若 $Ts1 > T_2$, 则

$$\begin{cases} Lm(T) = Lm(T_1) + |\omega(T_1)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq (L_0 - Lm(T_1)) / |\omega(T_1)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } T - T_1 > (L_0 - Lm(T_1)) / |\omega(T_1)| \text{ 时} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lm(T) = |\omega(T_2)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } T - T_1 > L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \end{cases}$$

$$Lm(T_1) = L_0,$$

$$Lm(T) = L_0,$$

$$\begin{cases} Lm(T) = |\omega(T_2)|(T - T_1), \text{当 } T - T_1 \leq L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \\ Lm(T) = L_0, \text{当 } T - T_1 > L_0 / |\omega(T_2)| \text{ 时} \end{cases}$$

$$T_1 + T_2 < t \leq T_1 + T_2 + Ts1$$

这里同样要考虑交通波 $\omega(T3)$ 赶上 $\omega(T2)$, 其中 $Ts2$ 为 $\omega(T3)$ 赶上 $\omega(T2)$ 的时间, 赶上之后以 $\omega(T3)$ 追赶前面两者, 考虑 $\omega(T3)$ 在 $T3$ 内赶上 $\omega(T2)$, 而 $\omega(T3)$ 是消散波, T 时刻排队长度为 $\omega(T1)$ 、 $\omega(T2)$ 到 T 时刻为止产生的排队长度减去消散波 $\omega(T3)$ 向上游传播延伸的长度 $L(T)$, 相关分析和计算式类似上述, 这里就不再阐述[5]。

同样可以计算出在 Tn 时刻的向上游的延伸长度 L 。

至此视频1（附件1）中交通事故所影响的路段车辆排队长度与事故横断面实际通行能力、事故持续时间、路段上游车流量间的关系分析完毕。

模型的分析与检验

在视频一的情况下：

通过统计可得到：

在第一个周期下：

本车道上游的需求流量为 $Q_i=1680\text{pcu/h}$ ，对应的密度为 $K_i=60\text{pcu/km}$ ，瓶颈段的通行能力下降为 $S_i=960\text{pcu/h}$ ，对应的密度为 $K_s=150\text{pcu/km}$ ， $K_j=110\text{pcu/km}$ ，根据视频的相关信息可得从交叉路口到事故点的平均行驶时间为 10s。

$T < T(B) < 10\text{s}$ 时，

为了计算简便，使用车辆数代表长度，则：

$$N(T) = -\omega(OB) * K_j * T$$

根据以上建的模型可得： $N(T)=14.66T$

$T(B) < T < 30\text{s}$ 时，

$$N(T) = \int_0^{Y_{[AB]}(T)} K(Y, T) dY + \int_{Y_{[AB]}(T)}^{Y_{[EB]}(T)} K_j dY$$

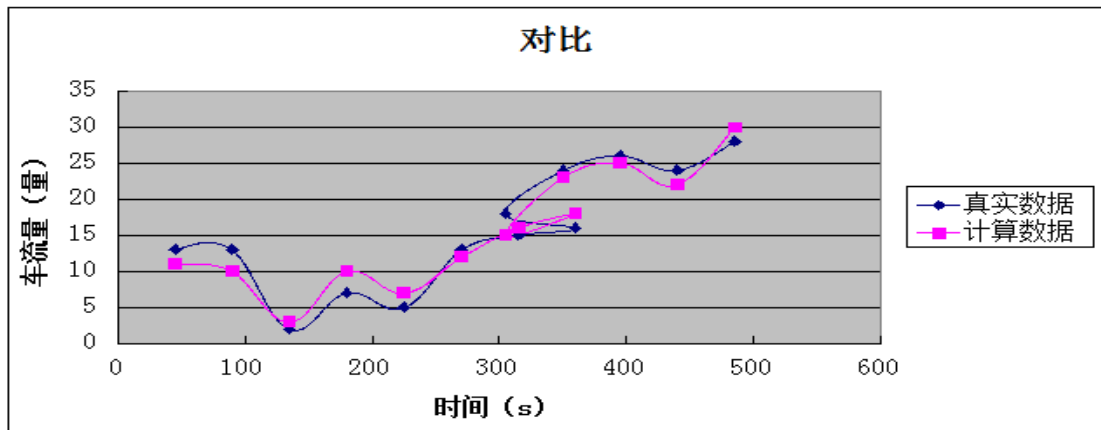
根据以上建模可得： $N(T) = -4.525T + 13.145$

在第二周期时刻应用模型对比可得数据，这里就不阐述了。

经过以上的计算：在 45s 抽样得到真实数据和通过模型计算的数据进行对比：

其中时间为从事故发生开始计时。数据单位为（辆）

时间 (s)	45	90	135	180	225	270	315	360	305	350	395	440	485
真实数据	13	13	2	7	5	13	15	16	18	24	26	24	28
计算数据	11	10	3	10	7	12	16	18	15	23	25	22	30



由上述分析可得：在误差允许的范围内，此模型是可以用的。

四：假如视频 1（附件 1）中的交通事故所处横断面距离上游路口变为 140 米，路段下游方向需求不变，路段上游车流量为 1500pcu/h, 事故发生时车辆初始排队长度为零，且事故持续不撤离。请估算，从事故发生开始，经过多长时间，车辆排队长度将到达上游路口。

模型假设

- 1、不考虑初时时通道一通行能力的变化，保持稳定。
- 2、不考虑上游车流量的变化，即保持一定的流量在 $Q_i=1500\text{pcu/h}$ 动态平衡。
- 3、从上游每次到达的时间模型，根据堵车的距离可得上游车辆到达的时间的关系

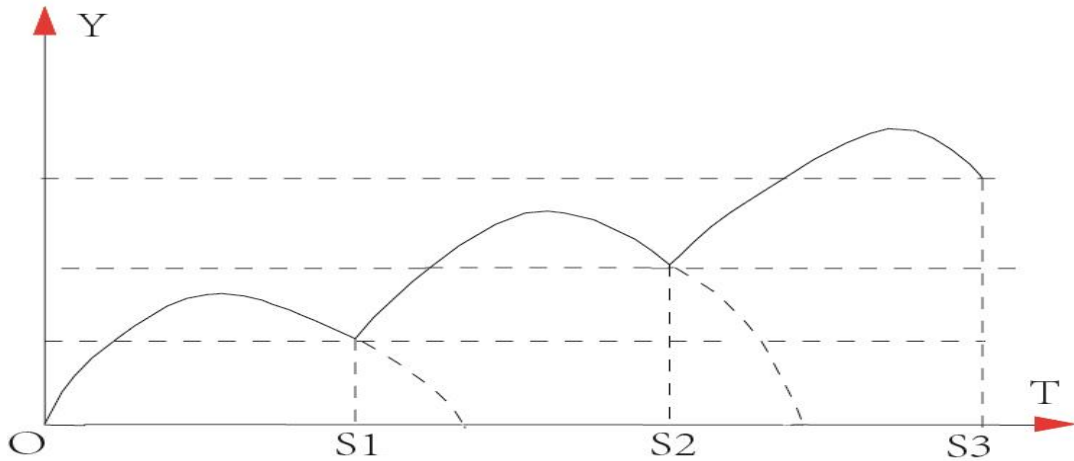
$$t = (L_0 - Y) / V_i \text{ 其中 } V_i \text{ 车量的速度，为 } 36\text{km/h}$$

则 $t = (L_0 - Y) / 36$

- 4、车辆总是先占用前面的路，不分车道。
- 5、 $L_0=140\text{m}$ 上游车流量为 $Q_i=1500\text{pcu/h}$ ， T_0 为信号周期30s
- 6、排队长度 $N(0) = 0$ ，且初时上流交叉口到事故点的行车时间为10s
- 7、车辆的长度以标准长度 $l=5.5\text{m}$ 。
- 8、长度 $Y=l*N/3$ ，则

$$t = (140 - 1.83*N) \quad (1)$$

做出如上假设就可以使用下面的模型：



通过问题二的求解得：

$$N(T) = \int_0^{Y[BCD](T-T_{sn})} K(Y, T-T_{sn}) dY + N(T(N-1)) \quad (2)$$

模型求解

本车道上游的需求流量为 $Q_i=1500\text{pcu/h}$ ，对应的密度为 $K_i=60\text{pcu/km}$ ，瓶颈段的通行能力下降为 $S_i=960\text{pcu/h}$ ，对应的密度为 $K_s=150\text{pcu/km}$ ， $K_j=110\text{pcu/km}$ 。

设交通波相遇时间点为：

$A_1(T_{s1}, Y_1)$ $A_2(T_{s1}+t_2+T_0, Y_2)$ $A_3(T_{s1}+t_2+t_3+T_0, Y_3)$ $A_i(T_{s1}+t_2+t_3+T_0+\dots+t_i, 140)$ 这 i 点都在曲线上，满足方程 (1) (2)，带入一二得：

$$t_1=(140-Y_1)/36 ; t_2=(140-Y_2)/36; t_3=(140-Y_3)/36; \dots\dots\dots; t_i=0 \quad (3)$$

由 $\omega(OB) = \frac{S_i - Q_i}{K_s - K_i}$ 可得 $\omega[OB]_{=6}$

则由 (2) 可得 $T_{s1}=16\text{s}$ 。

$$N(T_{s1}) = \int_0^{Y[BCD](T_{s1})} K(Y, T_{s1}) dY$$

$$N(T - (T_0 + T_{s1} + t_2)) = \int_0^{Y[BCD](T - (T_0 + T_{s1} + t_2))} K(Y, T - (T_0 + T_{s1} + t_2)) dY + N(T_{s1})$$

.....

通过求解计算： $t_{10}=0$ 时 $Y=142\text{m}$ $A_{10}(442, 140)$

则可得从事故发生开始, 经过 $t_i=442s$ 时间, 车辆排队长度将到达上游路口。

模型评价

本论文建立的模型在一定情况下与实际监测所得到的数据比较符合, 但在更加深入的方面, 这个模型的局限也有几个方面:

- 1 本论文建立的车辆排队的模型考虑的是车辆从事故发生地点开始到上游路口的排队情况, 没有探讨车辆排队到达上游路口之后继续向路口其他各个方向蔓延的情况, 实际上若车辆排队到达上游路口之后, 对其他方向车道造成的影响会改变该路口的道路通行能力, 使事故发生地点的道路通行能力发生变化,
2. 信号灯的周期性也对上游路口车流量呈现潮汐规律, 这在数据处理进行曲线拟合时必须舍弃一些比较小的数据, 产生一定的数据丢失;

五: 参考文献

- [1]宁乐然,《道路交通工程学教程》,北京,中国人民公安大学出版社,2005。
- [2]张亚平,《道路通行能力理论》,哈尔滨,哈尔滨工业大学出版社,2007.
- [3]鲍香台,何杰,《运输组织学》,南京,东南大学出版社,2009.
- [4]姜启源、谢金星,叶俊,《数学模型》,北京,高等教育出版社,2003.
- [5]俞斌,陆建,陆小伢,《道路交通事故的影响范围算法》,城市交通,第6期第3卷,82-86,2008

附录一：

2.1

时间段	事故点车流量 (pcu)	事故点通行能力 (pcu/h)
16: 42: 32-16: 43: 02	13	1560
16: 43: 02-16: 43: 32	12	1440
16:43:32: 16: 44: 02	12	1440
16:44:02-16: 44: 32	10	1200
16: 44: 32-16: 45: 02	9	1080
16: 45: 02-16: 45: 32	7	840
16: 45: 32-16: 46: 02	9	1080
16:46:02-16: 46: 32	10	1200
16: 46: 32-16: 47: 02	10	1200
16: 47: 02-16: 47: 32	6	720
16: 47: 32-16: 48: 02	11	1320
16:48:02-16: 48: 32	11	1320
16:48:32-16: 49: 02	10	1200
16:49:02-16: 49: 32	10	1200
16: 50: 04—16: 50: 34	10	1200
16:50:34-16:51:04	11	1320
16:51:04-16:51:34	9	1080
16:51:34-16:52:04	9	1080
16:52:04-16:52:34	11	1320
16:52:34-16:53:04	11	1320
16:53:04-16:53:34	10	1200
16:53:34-16:54:04	9	1080
16:54:04-16:54:34	10	1200
16:54:34-16:55:04	10	1200
16:55:04-16:55:34	10	1200
16:55:34-16:56:04	11	1320
16:57:54-16:58:24	8	960
16:59:08-16:59:38	11	1320
16:59:44-17:00:14	10	1200

2.2

统计量分析表		
平均	1200	1384.13793
标准误差	32.071349	32.6293178
中位数	1200	1320
众数	1200	1320
标准差	172.7095	248.497481
方差	29828.5714	61750.9982
峰度	1.58031241	0.21765344
偏度	-0.6948083	0.02907954
区域	840	1200
最小值	720	720
最大值	1560	1920
求和	34800	80280
观测数	29	58
最大(1)	1560	1920
最小(1)	720	720
置信度(95.0%)	65.6951795	65.3390814