PRB222 - Soutenance Orale

Pricing d'une Option Bermuda

Authors : H. De Souza, B. Gerino

ENSTA | INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

Table of Contents

1. Introduction
2. Modèle
3. Option Européenne Vanille
4. Option Bermuda à deux exercices
5. Option Bermuda à 3 exercices
6. Bonus
7. Conclusion

Introduction

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1 . On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t. Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité (supposée constante) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW(t))$$
$$S(0) = S_0 > 0$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma\delta W(t)$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(S(t)) = \ln(S(t))$ (possible car S(t) strictement positif pour tout t), on a :

$$\ln(S(t)) = \ln(S(0)) + \int_0^t f'(S(s))ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S(s))d[S,S]_s$$

Donc on a :

$$\boxed{S(t) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)}}$$

Calcul analytique de P_1

Par définition :

$$P_1 = e^{-rT}\mathbb{E}\left[(K - S(T))_+\right]$$

En explicitant S(T), on obtient:

$$P_1 = E((Ke^{-rT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma W_T})_+)$$

Calcul analytique de P_1

En utilisant le freezing lemma avec S_0 qui est $\mathcal{F}_0$ mesurable et W_T indépendant de $\mathcal{F}_0$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{P}_1 = F(0, S_0)}$$

où $F(t, x) = E(e^{-r(T-t)} f(xe^{r(T-t)+\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)})$ avec $f(x) = (K - x)_+$.

Calcul analytique de P_1

$$F(0,x) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(K - x e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma y \sqrt{T}} \right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Donc on obtient :

$$\boxed{P_1 = F(0, S_0) = Ke^{-rT}\psi(d_1) - S_0\psi(d_2)}$$

Simulation de $W(T)$

On sait que $W(T) \sim \sqrt{T}\mathcal{N}(0,1)$. Par Box-Muller :
- si $U_1 \sim U([0;1])$ et $U_2 \sim U([0;1])$ ($U_1 \perp\!\!\!\perp U_2$) alors $X = \sqrt{-2ln(U_1)}cos(2\pi U_2)$ et $Y = \sqrt{-2ln(U_1)}sin(2\pi U_2)$ sont telles que $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{I}_2)$.

En particulier, la concaténation $Z = [X, Y] \sim \mathcal{N}(0,1)$ par indépendance et donc $W(T) = \sqrt{T}Z$

Implémentation du calcul de P_1

Pour une méthode de monte-Carlo classique, on choisit l'estimateur:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{-rT}(K - S_T^{(i)})_+ \xrightarrow{N\to+\infty} P_1$$

avec les $(S_T^{(i)})_{i=1\ldots N}$ des copies indépendantes de S_T

Intervalle de confiance

L'IC à 90% est:

$$[P_1^{(n)} - q_{95}\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}; P_1^{(n)} + q_{95}\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}]$$

avec $P_1^{(n)}$ l'estimateur de Monte-Carlo de P_1 calculé à partir de n trajectoires, q_{95} le quantile d'ordre 0.95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et σ_n l'estimateur empirique sans biais de l'écart-type donné par :

$$\sigma_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P^i)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P^i\right)^2\right)$$

où les $(P^1 \dots P^n)$ sont n copies indépendantes du payoff actualisé.

Visualisation

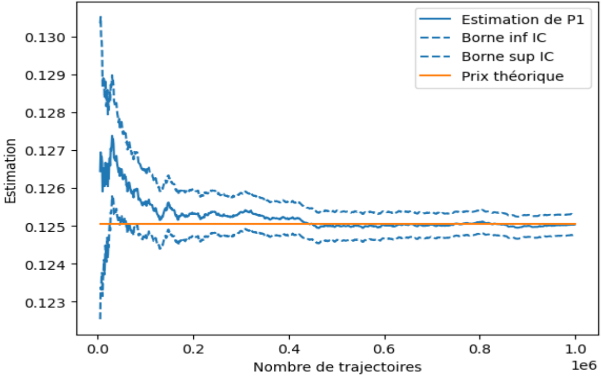


Figure: Estimation de P_1 et intervalle de confiance

Lien entre Put Bermuda et Put Européen

Notons P_N le prix d'un Put Bermuda à N dates d'exercice et $P1|_{T=T_i}$ le prix d'un Put Européen d'échéance T_i. Alors, on a :

$$P_N \geq \max_{i=1...N}(P_1|_{T=T_i}).$$

En effet dans le cas contraire, on a $P_N < \max_{i=1...N}(P_1|_{T=T_i})$. En prenant $T_k = argmax_{i=1...N}(P_1|_{T=T_i})$,on a donc $P_N < P_1|_{T=T_k}$ et on peut adopter la stratégie suivante :

Stratégie arbitrable

	$t=0$ quantité	prix	:	$t=T_k$ quantité
Put Euro T_k	-1	$P_1\|_{T=T_k}$	:	$-(K-S_{T_k})_+$
Put Bermuda	1	P_N	:	$(K-S_{T_k})_+$
liquidité		$P_1\|_{T=T_k} - P_N > 0$	:	$\left(P_1\|_{T=T_k} - P_N\right) e^{rT_k} > 0.$

Or le marché est viable et complet dans le modèle de Black-Scholes, donc il y a AOA.

Prix de l'option Bermuda en T_1

$$P_2(t = T_1) = \max\left(K - S_{T_1}, P_e\right)$$

avec Pe : prix de l'option européenne à la date T_1 et d'échéance T_2. On a alors :

$$\boxed{\mathrm{P}_2(t = T_1) = e^{-r(T_2 - T_1)} E\left((K - ST_2)_+ \mathbb{1}_{(S_{T_1} \geq \bar{k})} \mid F_{T_1}\right) + (K - ST_1)\mathbb{1}_{(S_{T_1} < \bar{K})}}$$

Prix en t=0

On sait que le prix actualisé s'écrit :

$$P_2(t=0) = e^{-r(T_1-0)}\mathbb{E}\left[(P_2(t=T_1)) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right] = e^{-r(T_1)}\mathbb{E}\left[(P_2(t=T_1))\right]$$

D'où :

$$\boxed{P_2(t=0) = e^{-rT_2}\mathbb{E}[(K-S_{T_2})_+ \mathbb{1}_{(S_{T_1}\geq \bar{K})}] + e^{-rT_1}\mathbb{E}[(K-S_{T_1})_+ \mathbb{1}_{(S_{T_1}<\bar{K})}]}$$

existence de $\bar{K}$

On sait que :

$$P_e = ke^{-r(T_2-T_1)}\psi(d_1) - S_{T_1}\psi(d_2)$$

On pose :

$$f(\bar{k}) = k\left(1 - e^{-r(T_2-T_1)}\psi(d_1)\right) - \bar{k}\,(1 - \psi(d_2))$$

f est continue.

existence de $\bar{K}$

Lorsque $\bar{k} \to 0$, on a

$$f(\bar{k}) \to k\left(1 - e^{-r(T_2 - T_1)}\right) > 0$$

Lorsque $\bar{k} \to +\infty$,

$$f(\bar{k}) \to -\infty$$

Unicité de $\bar{K}$

$$f'(\bar{k}) = -(1 - \psi(d_2)) < 0$$

Ainsi, $f(\bar{K}) = 0$ admet une unique solution.
Donc

$$\boxed{\bar{k} \text{ existe et est unique.}}$$

Simulation de $W(t)_{t\in(T_1,T_2)}$

Puisque $\mathbb{C}ov(W_{T_1}, W_{T_2}) = T_1$, on a :

$$(W_{T_1}, W_{T_2}) \sim \mathcal{N}(0, \Gamma), \text{ avec } \Gamma = \begin{pmatrix} T_1 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Comme Γ est s.d.p., par Cholesky il existe une matrice triangulaire inférieure A telle que $A * A^\top = \Gamma$ et si $X \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{I}_2)$, alors $AX \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$. Un calcul simple nous donne

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{T_1} & 0 \\ \sqrt{T_1} & \sqrt{T_2 - T_1} \end{pmatrix}$$

Réduction de variance

On utilise

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(G_i) + \psi(-G_i)}{2}$$

pour estimer $\mathbb{E}(\psi(G))$, avec $(G_1 \ldots G_n)$ des copies indépendantes de $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ψ le payoff actualisé, exprimé en fonction d'une gaussienne centrée réduite. Dans notre cas, $\psi(x) = e^{-rt}(K - S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{\sigma 2})T+\sigma\sqrt{T}x})$. On obtient :

Visualisation

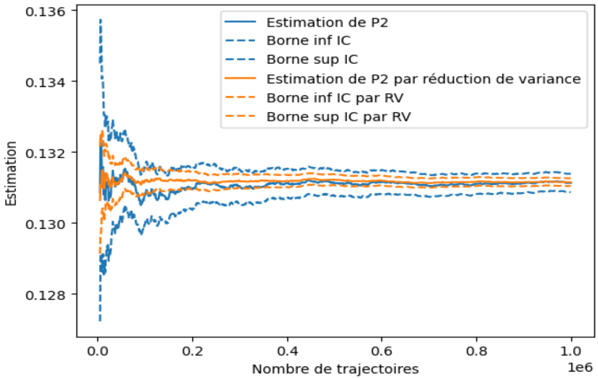


Figure: Estimation de P_2 avec et sans réduction de variance

Comparaison des prix en fonction du spot

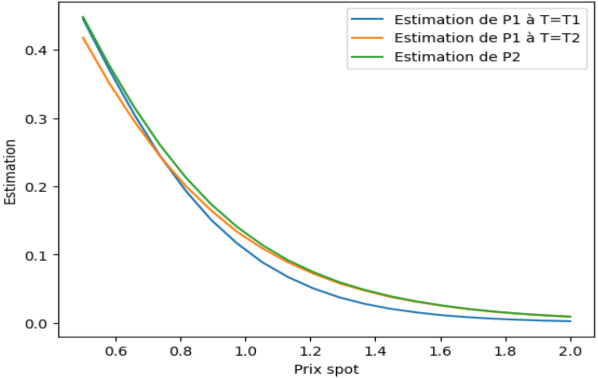


Figure: Comparaison des prix en fonction de $S_0, N = 400000$

Switch Option

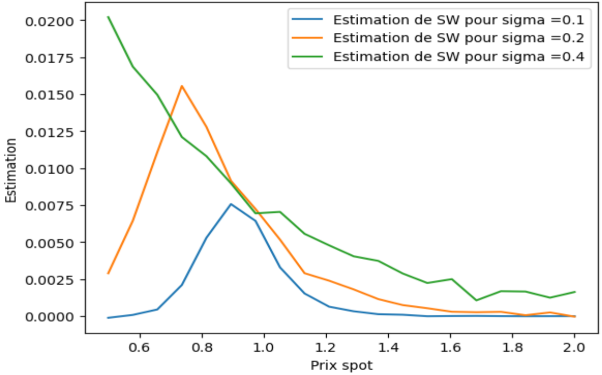


Figure: Prix SW en fonction de S_0 pour différents σ

Expression du prix P_3 à $t = 0$

on commence par calculer le prix en T_1:

$$P_3(t = T_1) = \max(k - S_{T_1}, P_2|T_1)$$

où $P_2|T_1$ est le prix de l'option Bermuda débutant en T_1 et ayant deux échéances : T_2 et T_3.

Expression du prix P_3 à $t = 0$

D'après la question 6, il existe $\bar{k}$ tel que:

$$P_3(t = T_1) = \max \Big(K - S_{T_1}, e^{-r(T_3 - T_1)} E\left((K - S_{T_3})_+ \mathbb{1}(S_{T_2} \geq \bar{K}) \mid F_{T_1} \right)$$

$$+ e^{-r(T_2 - T_1)} E\left((K - S_{T_2}) \mathbb{1}(S_{T_2} < \bar{K}) \mid F_{T_1} \right) \Big)$$

Expression du prix P_3 à $t = 0$

Montrons qu'il existe un unique $\tilde{K}$ tel que pour $S_{T_1} < \tilde{K}$ on a

$$K - S_{T_1} > P_2 | T_1$$

et pour $S_{T_1} \geq \tilde{k}$ on a

$$K - S_{T_1} \leq P_2 | T_1$$

Expression du prix P_3 à $t = 0$

Existence : On pose

$$g(S_{T_1}) = K - S_{T_1} - [e^{-r(T_3-T_1)}E((K - S_{T_3})_+\mathbb{1}(S_{T_2} \geq \bar{K})|F_{T_1}))$$

$$+e^{-r(T_2-T_1)}E((K - S_{T_2})\mathbb{1}(S_{T_2} < \bar{K})|F_{T_1}))]$$

Lorsque $S_{T_1} \to 0$;

$$g(S_{T_1}) \to K\left(1 - e^{-r(T_2-T_1)}\right) > 0$$

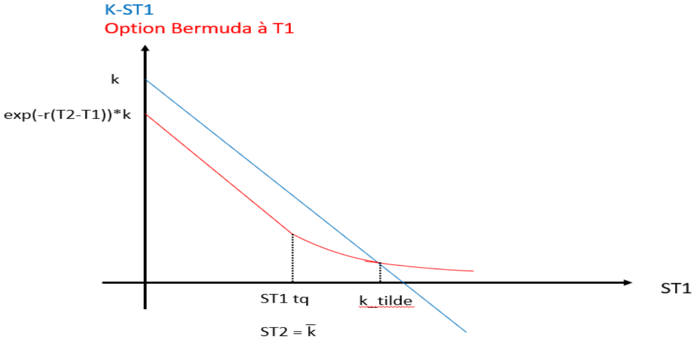
Lorsque $S_{T_1} \to +\infty$:

$$g(S_{T_1}) \to -\infty$$

Donc existence

Expression du prix P_3 à $t = 0$

Unicité : On rappelle que $P_2|T_2 = \max(K - S_{T_2}, Pe)$ où Pe est le prix de l'option européénne débutant en T_2 avec l'échéance T_3.



Expression du prix P_3 à $t = 0$

On obtient donc l'égalité suivante :

$$
\begin{aligned}
P_3(t = T_1) = (K - S_{T_1})\mathbb{1}(ST_1 < \tilde{K}) \\
&+ e^{-r(T_3 - T_1)} E\left((K - S_{T_3})_+ \mathbb{1}(S_{T_2} \geq \bar{K}) \mathbb{1}(ST_1 \geq \tilde{K}) \mid F_{T_1} \right) \\
&+ e^{-r(T_2 - T_1)} E\left((k - S_{T_2}) \mathbb{1}(ST_2 < \bar{k}) \mathbb{1}(ST_1 \geq \tilde{k}) \mid F_{T_1} \right)
\end{aligned}
$$

Expression du prix P_3 à $t = 0$

Et comme $P_3(t=0) = E\left(e^{-rT_1} P_3\left(t = T_2\right)\right)$, de la même façon qu'à la $Q7$. On obtient :

$$
\begin{aligned}
P_3 = {} & e^{-rT_1}\mathbb{E}[(K - ST_1)\nVdash_{(S_{T_1} < \tilde{k})}] \\
& + e^{-rT_2}\mathbb{E}[(K - ST_2)\nVdash_{(S_{T_1} \geq \bar{k})}\nVdash_{(S_{T_2} < \bar{k})}] \\
& + e^{-rT_3}\mathbb{E}[(K - ST_3)_+\nVdash_{(S_{T_1} \geq \bar{k})}\nVdash_{(S_{T_2} \geq \bar{k})}]
\end{aligned}
$$

Coefficients de régression $\{\omega_k\}_{k=0...3}$

On utilise les conditions sur $\mathbb{E}(\varepsilon)$ et $\mathbb{V}ar(\varepsilon)$.

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{3} A_{0,k}\omega_k = B_0. \quad (1)$$

$$\{\omega_k\}_{k=0...3} = \text{argmin}\, \mathbb{V}ar(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{V}ar(\varepsilon)}{\partial \omega_i} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} A_{i,k}\omega_k = B_i, \quad \forall i = 0 \dots 3 \quad (2)$$

avec

$$\begin{cases} B_0 & = \mathbb{E}(P_2|T_2) \\ B_i & = \mathbb{C}ov(P_2|T_2, S^i_{T_1}), \forall i = 1 \dots 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{0,j} & = \mathbb{E}(S^j_{T_1}) \\ A_{i,j} & = \mathbb{C}ov(S^i_{T_1}, S^j_{T_1}), \forall i,j = 1 \dots 3 \end{cases}$$

Estimation de $\tilde{K}$

Grâce à l'estimation de $\{\omega_k\}_{k=0\ldots3}$, on peut approcher $P_2|_{T_1} \approx e^{-r(T_2-T_1)}\left(\sum_{k=0}^{3}\omega_k S_{T_1}^k\right)$, et pour estimer $\tilde{K}$, il suffit donc de résoudre numériquement l'équation :

$$K - x = e^{-r(T_2-T_1)}\left(\sum_{k=0}^{3}\omega_k x^k\right)$$

d'inconnue x. On utilise la méthode de Newton(fonction *newton* du package *scipy.optimize*).

Implémentation de P_3 avec RV

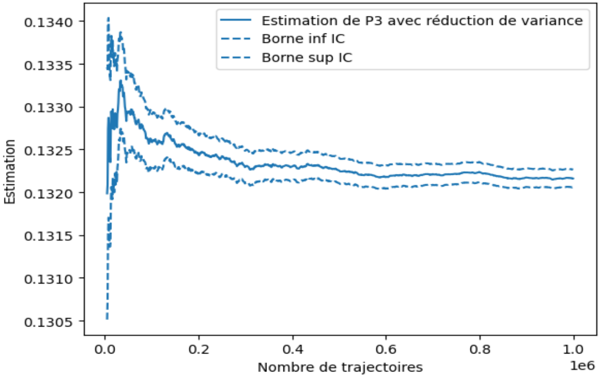


Figure: Estimation de P_3 en fonction du nombre de trajectoires

Comparaison des prix

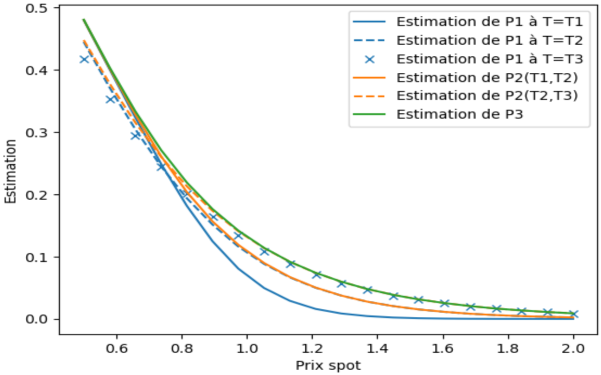


Figure: Comparaison des prix en fonction du S_0, N=600000

Longstaff-Schwarz sur un Put Bermuda à 2 exercices

On peut utiliser Longstaff-Schwarz pour estimer $P_1|T_1$ (prix d'un Put Européen de maturité T_2 en T_1) en régressant la distribution de $P_1|T_2$ (donc le payoff). Mais comme $P_1|T_1$ a une formule fermée dans le modèle de Black-Scholes, on évalue la qualité de la régression grâce à la Mean Square Error(MSE), le risque quadratique.

Visualisation de la MSE

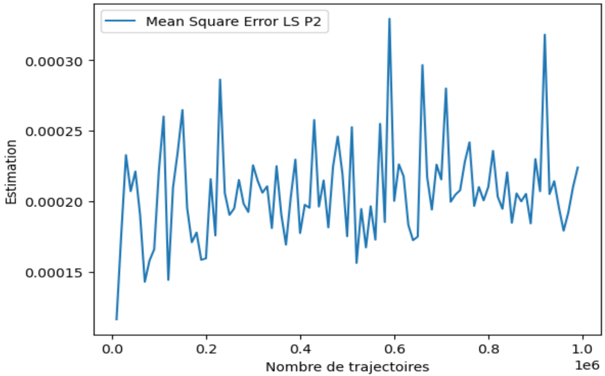


Figure: Erreur en fonction du nombre de trajectoires

Call Bermuda dans le cas $r \geq 0$

Soit C_N le prix d'un Call Bermuda à N dates d'exercice. Par le même raisonnement que pour un Put Bermuda, on montre que :

$$C_N \geq \max_{i=1\ldots N} (C_1|_{T=T_i}).$$

En particulier, $C_N \geq \; C_1|_{T=T_N}$. Supposons maintenant que $C_N > C_1|_{T=T_N}$ et adoptons la stratégie suivante:

Stratégie arbitrable Call

	$t = 0$			$t = T_m \leq T_N$
	quantité	prix	:	quantité
Call Euro T_N	1	$C_1\|_{T=T_N}$	:	$C_1\|T_m$
Call Bermuda	-1	C_N	:	$-(S_{T_m} - K)_+$
liquidité		$C_N - C_1\|_{T=T_N} > 0$	:	$\left(C_N - C_1\|_{T=T_N}\right) e^{rT_m} > 0$
			:	$+\left(C_1\|T_m - (S_{T_m} - K)_+\right) > 0$

Stratégie arbitrable Call(suite)

En effet, comme $r \geq 0$, le processus $\left(e^{-rt}(S_t - K)\right)_t$ est une sous-martingale. Et comme $x \mapsto x_+$ est convexe croissante, $\left(e^{-rt}(S_t - K)_+\right)_t$ est aussi une sous-martingale et :

$$C_1|T_m = e^{-r(T_N - T_m)}\mathbb{E}[(S_{T_N} - K)_+|\mathcal{F}_{T_m}] \geq (S_{T_m} - K)_+$$

Finalement, à l'instant T_N, on a:

$$\left(C_N - C_1|_{T=T_N}\right) e^{rT_N} + \left(C_1|T_m - (S_{T_m} - K)_+\right) e^{r(T_N - T_m)} > 0$$

Or dans le modèle de Black Scholes, le marché est complet et il y a AOA. Ainsi, on a nécéssairement :

$$C_N = C_1|_{T=T_N}.$$

Conclusion

Un Put Bermuda confère autant, sinon plus de droits à son détenteur qu'un Put Européen, et vaut donc plus cher. Mais sa valorisation nécessite des méthodes précises telles que celle de Longstaff-Schwarz, et pour des valeurs extrêmes du spot, il a la même valeur qu'un Put Européen.

Questions?

Annexe : Unicité de $\tilde{k}$

Tout d'abord, on sait que jusqu'à $\bar{k}$, $P_2|T_2 = K - S_{T_2}$. Donc

$$
\begin{aligned}
P_2|T_1 &= e^{-r(T_2-T_1)}E(K - S_{T_2}|F_{T_1}) && (1)\\
&= e^{-r(T_2-T_1)}k - E(e^{-r(T_2-T_1)}S_{T_2}|F_{T_1}) && (2)\\
&= e^{-r(T_2-T_1)}k - S_{T_1} && (3)
\end{aligned}
$$

Annexe : Unicité de $\tilde{k}$

Cependant, après $\bar{k}$, $P_2|T_2 = P_e$. Or on a vu à la question 7 que $\frac{\partial P_e}{\partial S_{T_2}} = -\psi(d_2) >$ -1 où d_2 est calculé à la question 3.
Par conséquent,

$$\frac{\partial e^{-r(T_2-T_1)}E(P_2|T_2|F_{T_1})}{\partial S_{T_1}} = e^{-r(T_2-T_1)}E(\frac{\partial S_{T_2}}{\partial S_{T_1}}\frac{\partial P_e}{\partial S_{T_2}}|F_{T_1})$$
$$> -e^{-r(T_2-T_1)}E(e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_2-T_1)+\sigma(W_{T_2-T_1})}|F_{T_1})$$

Or, $\sigma(W_{T_2-T_1})$ est indépendant de F_{T_1}, on a alors :

$$\frac{\partial e^{-r(T_2-T_1)}E(P_2|T_2|F_{T_1})}{\partial S_{T_1}} > -1$$