ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

UD000510_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

La adecuada resolución de los sistemas de ecuaciones es una de las principales metas que se debe alcanzar para poder avanzar hacia elementos más complejos de las matemáticas.

Es, por lo tanto, necesario prestar una adecuada atención a los métodos de resolución y practicar con los diversos ejercicios que irán apareciendo en la unidad didáctica.

Así, con interés y un poco de práctica, verás como la dificultad que presentan las ecuaciones disminuye enseguida.

PROPÓSITOS

Con el estudio de esta unidad, lograrás:

- Asimilar el concepto de ecuación y de sistema de ecuaciones.
- Manejar la resolución analítica de una ecuación y de un sistema de ecuaciones.
- Estudiar el concepto de sistema de ecuaciones lineales.
- Utilizar el método de Gauss para la resolución de sistemas.
- Resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Comenzaremos la unidad aprendiendo a resolver ecuaciones de primer y segundo grado, así como el manejo de sus propiedades. Una vez adquirido el hábito de resolución, el alumno estará preparado para resolver los sistemas de ecuaciones de diversas formas y aplicando los distintos métodos de cálculo.

1. ECUACIONES

Antes de comenzar a trabajar con ecuaciones es muy importante diferenciar dos conceptos que están íntimamente relacionados, ecuación e identidad. ¿Quieres conocer sus diferencias? Pasamos a definir estos conceptos a continuación.

1.1. ECUACIONES E IDENTIDADES

Una **ecuación** es una igualdad de dos expresiones algebraicas que se verifica solo para determinados valores de sus letras (o variables).

Si la igualdad es cierta para cualquier valor que asignemos a sus variables, se le denomina **identidad**.

Ejemplos:

$(x + 1)^2 = x^2 + 1 + 2x$	es una identidad
$3x + 2 = 5x + 1$	es una ecuación

Se denominan **incógnitas** a las distintas variables que intervienen en la ecuación.

Solución de una ecuación es el conjunto de valores que, si sustituyen a las incógnitas en la ecuación, transforman a esta en una identidad.

Resolver una ecuación es efectuar un conjunto de operaciones para determinar la solución. En este tema nos ocuparemos del estudio de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Anécdota

La resolución de ecuaciones de primer grado y segundo grado no presentó grandes dificultades en la antigüedad, pero para hallar soluciones de ecuaciones de tercer grado o superior hubo que esperar hasta el siglo XVI.

1.2. ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Veamos a continuación los dos criterios de equivalencia que nos permitirán resolver con mayor facilidad las ecuaciones planteadas.

Primer principio de equivalencia:

Si sumamos o restamos una misma expresión algebraica a ambos miembros de la ecuación (es decir, a lo que está a la izquierda y a la derecha del signo =), se obtiene una ecuación equivalente.

Consecuencias:

1. Un término en uno de los miembros se puede pasar al otro cambiándolo de signo. La nueva ecuación que resulte será equivalente a la anterior. Esta operación se puede repetir las veces que se desee.

Ejemplo

$3x + 2 = 5x + 1 \Rightarrow 2 - 1 = 5x - 3x \Rightarrow 1 = 2x$

2. Si hay un término que aparece con el mismo signo en ambos miembros de la ecuación, se puede suprimir.

Ejemplo

$2x + 8x - 3 = 5x + 8x + 4$,

donde podemos suprimir el 8x:

$2x - 3 = 5x + 4$;

obteniendo una nueva ecuación equivalente a la anterior.

Segundo principio de equivalencia:

Si se multiplican o dividen por un mismo número o expresión distinta de cero ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.

Consecuencias:

1. Si multiplicamos por -1 ambos miembros de una ecuación, se obtendrá otra equivalente donde todos los términos tendrán el signo opuesto al que tenían en la anterior.

Ejemplo

$3x - 6 = 3 - 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)\cdot(3x - 6) = (-1)\cdot(3 - 4x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 - 3x = 4x - 3$

2. Si tenemos una ecuación en la cual hay números racionales, podemos convertir todos los coeficientes en enteros de la siguiente manera; primero se reducen las fracciones a denominador común y, posteriormente, se multiplican ambos miembros de la ecuación por dicho denominador común.

Ejemplo

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

cuyo m. c. m. (2, 3, 4) = 12, luego:

$$\frac{8}{12}x - \frac{18}{12} = \frac{9}{12}$$

Multiplicando por 12 ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$8x - 18 = 9$

que es una ecuación equivalente a la de partida.

Imprescindible

Como resumen de los dos principios de equivalencia, se puede decir que un término que aparece sumando en un miembro puede pasar al otro miembro restando y viceversa. Un término que aparece multiplicando en un miembro puede pasar al otro dividiendo y viceversa.

1.3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La forma de resolución de una ecuación de segundo grado no tiene nada que ver con la resolución de las ecuaciones de primer grado que hemos visto. Estas se resuelven utilizando una fórmula que, a priori, puede parecer compleja, pero cuando hayas practicado varias veces seguro que no tienes problemas en recordarla.

1.3.1. DEFINICIONES

Se llama **ecuación de segundo grado con una incógnita** a aquella que, una vez simplificada, presenta la siguiente forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad [1]$$

La x es la incógnita, es decir, el valor que tendremos que hallar para que se cumpla la ecuación planteada. Al ser 2 el mayor exponente de la incógnita x, decimos que la ecuación es de **segundo grado.**

Las letras a, b y c (llamados coeficientes) representan valores numéricos fijos, donde:

- **a** es el coeficiente de x^2 o coeficiente cuadrático.
- **b** es el coeficiente que multiplica a x, y se llama coeficiente lineal.
- **c** es el término independiente.

La ecuación [1] puede presentar alguno de sus coeficientes nulos. En tal caso diremos que la **ecuación** es **incompleta**. Se encuentran los siguientes casos:

Si a = 0

Entonces la ecuación pasaría a ser de primer grado, pues el máximo exponente de x es 1.

$$bx + c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-c}{b}$$

Si b = 0

Entonces la ecuación se queda sin término de primer grado.

$$ax^2 + c = 0$$

Para resolverla, aislamos el x^2 en el primer miembro de la ecuación y extraemos la raíz cuadrada:

$$x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$\pm$ quiere indicar que la raíz puede tomar valor positivo o negativo.

Si c = 0

Nos queda $ax^2 + bx = 0$, que se resuelve sacando factor común x de los dos términos:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

El producto será igual a cero si:

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad ax + b = 0$$

Luego la otra solución de esta ecuación será:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Si b = 0 y c = 0,

la ecuación se reduce a $ax^2 = 0$, cuya solución es: $x = 0$.

Recuerda

Puedes contactar con el servicio de tutorías para resolver las dudas, a través del correo electrónico, carta, fax y teléfono.

1.3.2. Resolución de la ecuación general de segundo grado

Resolver una ecuación de segundo grado es hallar los valores de la incógnita x que hacen cierta la igualdad:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolverla, aplicaremos la siguiente fórmula, cuya demostración omitiremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una característica fundamental de las ecuaciones de segundo grado es que presentan dos raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dada la ecuación $a \cdot x^2 + .b \cdot x + c = 0$

	Ecuación	Soluciones
a = 0	b·x + c= 0	x = -c/b
b = 0	a · x2 + c=0	$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
c = 0	a · x2+ b·x=0	x = 0 x = -b/a
b = 0 **c = 0**	a·x2=0	x = 0
a ≠ 0 **b ≠ 0** **c ≠ 0**	a·x2+ b·x + c=0	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Recomendación

Es conveniente memorizar o tener a mano siempre disponible este cuadro a la hora de resolver las ecuaciones.

Ejemplo:

Hallar las raíces de la ecuación $3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - [4 \cdot 3 \cdot (-1)]}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

Por lo tanto, la ecuación anterior tiene dos soluciones:

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Las raíces de $2 - 2x - 4x^2 = 0$ son:

a) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$

b) $x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 2.$

c) $x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$

d) $x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$

Reto

Solución:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1$$

1.3.3. DISCUSIÓN DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Hacer una discusión de una ecuación de segundo grado es realizar un estudio detallado de la misma, viendo los valores que toman las raíces según los valores de los coeficientes a, b y c.

Como base del estudio tomaremos la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, que se llama **discriminante** de la ecuación porque sirve para distinguir la naturaleza de las raíces.

Atención

Así, tendremos que:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, obtenemos dos soluciones reales distintas.

b) Si $b^2 - 4ac = 0$, los valores que se obtienen para las raíces son iguales.

c) EJEMPLO: la ecuación $x^2 -2x + 1 = 0$ tiene un discriminante igual a cero y, por ello, tiene una única solución: $x = 1$.

d) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales, ya que los números negativos no tienen raíz cuadrada real.

Ejemplo: la ecuación $6x^2 + 10x + 6 = 0$, tiene como discriminante -44 y, por tanto, no tiene raíces reales.

1.3.4. Suma y producto de raíces de una ecuación de segundo grado

Ya hemos visto que las dos raíces se obtienen de aplicar las fórmulas ya indicadas. Si sumamos esas fórmulas:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = s \qquad \text{(s significa suma de raíces)}$$

En conclusión, la suma de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al cociente entre el coeficiente de x cambiado de signo y el coeficiente de x^2.

Veamos ahora el producto de las dos raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = p \quad \text{(p siempre producto)}$$

Imprescindible

El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente dividido por el coeficiente de x^2:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = p$$

Truco

Forma canónica de una ecuación de 2º grado.

Sea la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, y dividámosla por el coeficiente a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\frac{b}{a} = -\left(-\frac{b}{a}\right)$ resulta que:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Como la suma de las raíces es $s = -\frac{b}{a}$ y el producto $p = \frac{c}{a}$, se tiene la siguiente expresión: $x^2 - sx + p = 0$

a la que llamaremos **forma canónica de la ecuación de segundo grado,** que nos da la ecuación en función de la suma y producto de sus raíces.

Una aplicación práctica de la forma canónica es el cálculo de una ecuación de segundo grado conocidas sus raíces o soluciones.

Ejemplo

Sean 2 y -5 las raíces de una ecuación de segundo grado que deseamos hallar.

$S = 2 + (-5) = -3$

$p = 2 \cdot (-5) = -10$

Como la forma canónica responde a $x^2 - sx + p = 0$, entonces:

$x^2 - (-3)x - 10 = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0.$

1.3.5. EJERCICIOS RESUELTOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ejercicio 1:

Halla las raíces de la siguiente ecuación:

$$5x^2 - 45 = 0$$

Solución:

$$5 \cdot x^2 = 45 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 45/5 = 9$$

Luego las dos soluciones son $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Ejercicio 2:

Halla las raíces de la siguiente ecuación:

$$4x^2 - 3x = 0$$

Solución:

Primero sacamos como factor común la x al estar presente en los dos términos de la ecuación:

$$x\,(4x - 3) = 0$$

Para que el producto sea cero, una solución es que x = 0. La otra opción será que:

$$4x - 3 = 0$$

de donde se obtiene que x = 3/4.

Las soluciones son:

$$x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 3:

Halla las raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{x+14}{x-1} - 4x = 14$$

Solución:

Primero hay que eliminar el denominador. Multiplicando a todos los términos de la ecuación por (x - 1), obtenemos:

$$x + 14 - 4x\,(x - 1) = 14\,(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 14 - 4x^2 + 4x = 14x - 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 9x + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9x - 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+448}}{8} = \frac{-9 \pm 23}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -4 \qquad y \qquad x_2 = 7/4$$

Recuerda

Puedes contactar con el servicio de tutorías para resolver las dudas, a través del correo electrónico, carta, fax y teléfono, o bien visitar el Campus Virtual, desde donde también podrás contactar con tu tutor.

Ejercicio 4:

Calcular la ecuación conocidas sus raíces:

$$x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Solución:

La suma de las raíces es:

$$S = x_1 + x_2 = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

y el producto es igual:

$$P = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$

Entonces la ecuación:

$$x^2 + \frac{7x}{2} + 3 = 0$$

Si multiplicamos a todos los sumandos por 2, tenemos:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

Ejercicio 5:

Conocidas la suma y el producto de las raíces, determinar su correspondiente ecuación de segundo grado:

$$s = -5 \text{ , } p = 6$$

Solución:

Sustituyendo los valores s y p en la ecuación canónica, tenemos:

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$x^2 - (-5)\, x + 6 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Ejercicio 6:

Escribir en forma canónica la siguiente ecuación y hallar la suma y el producto de sus raíces:

$$3 = x^2 - 2x$$

Solución:

Ordenando la ecuación, se obtiene la expresión:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

que ya está en forma canónica, de manera que:

$$s = 2 \text{ y } p = -3$$

Ejercicio 7:

Descomponer el siguiente polinomio como producto de factores:

$$x^2 - x - 6$$

Solución:

Hallamos las raíces de la ecuación asociada:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$x_1 = 3\,; \qquad x_2 = -2$$

El producto se descompondrá en los siguientes factores:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$$

Ejercicio 8:

Descomponer este polinomio como producto de factores:

$$(x + 2)^2 - 2x(x + 2) - 12$$

Solución:

Operamos el polinomio hasta simplificarlo al máximo.

$$x^2 + 4x + 4 - 2x^2 - 4x - 12 = -x^2 - 8$$

Si calculamos las raíces de su ecuación asociada:

$$-x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8$$

En este caso, no existen soluciones reales y, por tanto, la descomposición factorial no es posible.

1.3.6. PROBLEMAS RESUELTOS A PARTIR DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

En las resoluciones de problemas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado, es necesario comprobar que las soluciones obtenidas cumplen las condiciones del enunciado. Aquellas que no las satisfagan serán consideradas no válidas.

Problema 1:

Un jugador de fútbol logró meter 100 goles en toda su vida deportiva. Si hubiese jugado cinco temporadas menos, metiendo el mismo número de goles, su promedio goleador habría mejorado en 10 goles más; ¿Cuántas temporadas disputó dicho futbolista?

Solución:

Sea x el número de temporadas disputadas, el promedio de goles por temporada será de 100 / x. Si hubiese jugado 5 temporadas menos, el promedio habría sido en este caso 100 / (x - 5) , de tal manera que:

$$\frac{100}{x-5}-\frac{100}{x}=10 \quad \Rightarrow \quad \frac{100x-100(x-5)}{(x-5)x}=10$$

$$\Rightarrow \quad 100x - 100x + 500 = 10x(x-5) \quad \Rightarrow \quad 500 = 10x^2 - 50x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 5x - 50 = 0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+200}}{2}$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$x_1 = 10 \; ; \; x_2 = -5$$

La solución x = -5 no tiene sentido porque querría decir que dicho jugador habría metido 100 goles sin jugar ninguna temporada. Por tanto, la solución al problema son 10 temporadas.

Problema 2:

El área de un campo de fútbol es de 2.500 m^2. Sabiendo que la anchura es un cuarto de su longitud, halle las dimensiones de dicho campo.

Solución:

Sabemos que el área de un rectángulo es A = b x a, donde, en este caso, A son los 2.500 m^2, b es la longitud del campo y a es la anchura del mismo. Según el enunciado del problema a = b/4, por tanto:

$$2.500 = b^2/4 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 10.000 \quad \Rightarrow \quad b = 100 \text{ m}$$

Dividiendo la longitud entre cuatro, se obtiene la anchura a = 25 m.

Por tanto, el campo tiene 100 m de largo y 25 m de ancho.

1.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IRRACIONALES POR REDUCCIÓN A ECUACIONES RACIONALES

Llamamos **ecuaciones irracionales** a aquellas en que la incógnita x se encuentra bajo el signo radical; ejemplo:

$$\sqrt{x+3} - 8 = 0$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, lo habitual es elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación. Si la ecuación no queda libre de radicales, se procede de nuevo del mismo modo.

En el ejemplo anterior, pasamos el término independiente al otro miembro de la ecuación y elevamos todo al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (8)^2 \Rightarrow x+3=64 \Rightarrow x=61$$

Atención

El proceso de elevar al cuadrado puede generar soluciones erróneas en la resolución; por tanto, una vez obtenidas **las soluciones, se comprobarán en la ecuación inicial** para obtener finalmente las soluciones válidas.

1.5. ECUACIONES BICUADRADAS

Las ecuaciones bicuadradas son ecuaciones de grado igual a cuatro que se resuelven reduciéndolas a ecuaciones de segundo grado. Estas ecuaciones son del tipo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

En ellas, como ya hemos indicado, el grado es cuatro, y las potencias de x que aparecen son solamente la cuarta y la segunda, es decir, no hay ningún término con grado tres ni tampoco ninguno de grado uno.

Resolveremos estas ecuaciones realizando el siguiente cambio de variable: $y = x^2$. Una vez realizado este cambio en la ecuación tendremos una ecuación de segundo grado con la variable y, que resolveremos con la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado.

Por último, hay que tener cuidado puesto que una vez aplicada la fórmula, las soluciones que hemos obtenido son de la variable y, por lo que hemos de deshacer el cambio de variable realizando la raíz cuadrada: $x = \pm\sqrt{y}$. Así, obtendremos las cuatro soluciones de la ecuación original.

Vamos a resolver la ecuación:

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

En primer lugar, realizamos el cambio de variable $y = x^2$, con lo que la ecuación queda:

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-(-4) \pm 0}{2} = 2$$

Luego la ecuación en y solo tiene una raíz doble, y = 2.

Así, las ecuaciones de la ecuación bicuadrada serán:

$$x = \pm\sqrt{y} = \pm\sqrt{2}$$

Luego la ecuación tenía dos raíces:

$$x = +\sqrt{2} \text{ y } x = -\sqrt{2}$$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

En la vida real los problemas que se plantean no solo tienen una incógnita, sino que los problemas son complejos y pueden tener varias. ¿Qué hacemos si tenemos dos incógnitas en un problema? La solución es resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Presta mucha atención a este apartado y practica realizando problemas cuyo planteamiento sea un sistema.

2.1. DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Diremos que un punto (x_0, y_0) es **solución** del sistema si se cumple:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$$

Es decir, si al sustituir el punto en las dos ecuaciones, estas se verifican.

Se define **grado** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas al producto de los grados de las ecuaciones. El grado de una ecuación es el mayor grado de sus términos.

Los sistemas se pueden resolver por reducción, igualación y sustitución, además de geométricamente.

Imprescindible

Los tres primeros métodos se basan en lo siguiente:

- **Sustitución:** consiste en despejar de una de las dos ecuaciones una incógnita y sustituirla en la otra ecuación.
- **Igualación:** consiste en despejar de las dos ecuaciones la misma incógnita e igualar los resultados, con lo que obtenemos una ecuación con la otra incógnita que tiene fácil solución.
- **Reducción:** se trata de multiplicar las ecuaciones por unas determinadas constantes, de modo que al sumar ambas ecuaciones, una de las incógnitas desaparezca.

Geométricamente se trata de representar las dos ecuaciones que son dos rectas y, atendiendo a los puntos de corte de ambas, el sistema tiene una solución u otra. Si las dos rectas son paralelas, como no hay punto de corte, el sistema no tiene solución. Si las rectas se cortan en un punto, tiene solución única y, si las rectas son iguales, tiene infinitas soluciones.

Aunque en general un sistema es un conjunto formado por dos o más ecuaciones, los sistemas que vamos a estudiar con mayor profundidad son los formados por dos ecuaciones con dos incógnitas; por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 5 = y & (1) \\ 5x - 7y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

La primera ecuación está en forma explícita, ya que una incógnita, en este caso la “y” está despejada, manteniendo los demás términos en el otro miembro.

La segunda ecuación aparece en forma implícita, puesto que las dos incógnitas (x e y) y el término independiente están en el mismo miembro de la ecuación.

Ambas ecuaciones forman un sistema en cuanto que el valor de “x” y el de “y” deben convertir las ecuaciones en igualdades numéricas simultáneamente. En el ejemplo propuesto, esto ocurre para x = 2 e y = 1.

Aquellos sistemas que son de primer grado reciben el nombre de **sistemas de ecuaciones lineales**.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar las soluciones del mismo; en otras palabras, consiste en averiguar el conjunto de valores de las incógnitas que, sustituidas en las ecuaciones, transforman a estas en identidades.

Podemos encontrarnos con que dos sistemas de ecuaciones poseen las mismas soluciones. En este caso, se dirá que son sistemas equivalentes. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 5y = 5 \\ 2x + 19y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10y = x - 20 \\ 20y = 10 - 3x \end{cases}$$

Se puede comprobar que en ambos sistemas la solución es:

$$x = 10,\ y = -1$$

2.2. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Dependiendo del tipo de soluciones que se obtengan de la resolución de un sistema de ecuaciones, tendremos sistemas compatibles e incompatibles.

2.2.1. SISTEMAS COMPATIBLES

Se produce cuando existen soluciones que cumplen al mismo tiempo todas las ecuaciones que componen dicho sistema. Dentro de este caso, nos podemos encontrar con dos tipos de sistemas:

Sistemas compatibles determinados.

Cuando el número de soluciones es limitado; ejemplo:

$$\begin{cases} x + 5y = 5 \\ 2x + 19y = 1 \end{cases}$$

La única solución para este sistema es x = 10 e y = -1.

Sistemas compatibles indeterminados.

Se produce cuando el número de soluciones es indeterminado o infinito; ejemplo:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 8y = 12 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones:

x = 1, y = -1; x = 2, y = -1/2; x = 3, y = 0

2.2.2. SISTEMA INCOMPATIBLE

Se produce cuando no tenga solución, es decir, cuando no sea posible encontrar valores de las incógnitas que satisfagan a la vez todas las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

No se puede encontrar para este sistema ningún valor de x e y de tal manera que cumpla al mismo tiempo ambas ecuaciones.

2.3. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES

Para resolver un sistema de dos ecuaciones existen una serie de métodos de resolución de sistemas que facilitan la resolución de los mismos.

Los métodos de resolución de sistemas son:

- Método de reducción.
- Método de igualación.
- Método de sustitución.

2.3.1. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método consiste en multiplicar una de las ecuaciones por un número c de forma que, al realizar la suma de ambas ecuaciones, se elimina una de las incógnitas. Si fuera necesario, se puede realizar el producto de un número distinto para cada ecuación con el fin de poder obtener un múltiplo común.

Una vez obtenida la solución de una de las incógnitas, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obteniéndose así el valor de la otra incógnita.

Ejemplo

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción:

$$\begin{cases} 4x^2 + 2y + 3 = 5 \\ 2x^2 - 4y - 2 = 4 \end{cases}$$

La segunda ecuación se multiplica por –2 $\Rightarrow$ $-4x^2 + 8y + 4 = -8$

Al sumar las dos ecuaciones:

$$4x^2 + 2y + 3 = 5$$

$$\underline{-4x^2 + 8y + 4 = -8}$$

$$/ + 10y + 7 = -3$$

resolviendo esta ecuación de una sola incógnita:

$10\,y = -3 - 7 = -10 \Rightarrow y = -10 / 10 = -1$

Con este valor sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones; en este caso escogemos la primera:

$$4x^2 + 2\,(-1) + 3 = 5 \Rightarrow 4x^2 = 5 - 3 + 2 = 4 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{4}} = \pm 1$$

Las soluciones son: $x = 1$ e $y = -1$; $x=-1$ e $y = -1$.

2.3.2. MÉTODO DE IGUALACIÓN

En este método se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones y se igualan, de forma que se obtiene una ecuación con una sola incógnita de fácil resolución.

Ejemplo

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación:

$$\begin{cases} 4x^2 + 2y + 3 = 5 \\ 2x^2 - 4y - 2 = 4 \end{cases}$$

Vamos a despejar de ambas ecuaciones la incógnita x^2:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{5-2y-3}{4} \\ x^2 = \frac{4+4y+2}{2} \end{cases}$$

e igualando ambas:

$$\frac{5-2y-3}{4} = \frac{4+4y+2}{2} \quad 10 - 4y - 6 = 16 + 16y + 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 10 - 6 - 16 - 8 = 16y + 4y \Rightarrow -20 = 20y$

$$\Rightarrow y = \frac{-20}{20} = -1$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$4x^2 + 2(-1) + 3 = 5 \Rightarrow 4x^2 = 5 - 3 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{4}} = \pm 1$$

Las soluciones son las siguientes:

$x = 1$ e $y = -1$; $\qquad$ $x = -1$ e $y = -1$

2.3.3. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Es un método en el cual se despeja una de las incógnitas de una ecuación y se sustituye en la misma incógnita de la otra ecuación, de forma que nos queda una ecuación con una incógnita.

Ejemplo

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 4x^2+2y+3=5 \\ 2x^2-4y-2=4 \end{cases}$$

Vamos a despejar de la primera ecuación la incógnita x^2:

$$x^2=\frac{5-2y-3}{4}$$

Al sustituir la incógnita x^2 en la segunda ecuación obtenemos:

$$2\cdot\left(\frac{5-2y-3}{4}\right)-4y-2=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{10-4y-6}{4}-4y-2=4 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{10-4y-6}{4}=4+4y+2\Rightarrow 10-4y-6=16+16y+8$$

$$10-6-16-8=16y+4y \quad\Rightarrow\quad -20=20y \quad\Rightarrow$$

$$y=\frac{-20}{20}=-1$$

Sustituyendo en:

$$x_2 = \frac{5 - 2y - 3}{4}$$

Se obtiene que:

$$x_2 = \frac{5 - 2 \cdot (-1) - 3}{4} = \frac{5 + 2 - 3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Luego,

$$x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Las soluciones son las siguientes:

$x = 1$ e $y = -1$; $x = -1$ e $y = -1$.

Nota

- Como hemos observado, con los tres métodos se obtienen las mismas soluciones.
- El método de reducción es el más fácil de aplicar en los sistemas de ecuaciones lineales. Úsalo con asiduidad, pero no olvides cómo aplicar los demás.

2.4. EJERCICIOS RESUELTOS

Clasificar los sistemas siguientes según las soluciones encontradas.

Ejercicio 1:

$$\begin{cases} y - 4x = 8 \\ \dfrac{x}{2} + 4y = -1 \end{cases}$$

Se utilizará el método de sustitución. Se despeja la y en la primera ecuación:

$$y = 8 + 4x$$

Se introduce dicha expresión en la segunda ecuación:

$$\frac{x}{2} + 4 \cdot (8 + 4x) = -1;$$

$$x + 8 \cdot (8 + 4x) = -2;$$

$$33x = -66;$$

$$x = -\frac{66}{33} = -2$$

Se obtiene que x = -2.

Se sustituye este valor de x en la primera ecuación:

$$y = 8 + 4 \cdot (-2) = 0$$

La solución es:

$$x = -2,\ y = 0.$$

Se puede observar que el sistema es *compatible determinado*, ya que presenta una solución concreta.

Ejercicio 2:

$$\begin{cases} 17 = 3x + y \\ 7 = 3y - 2x \end{cases}$$

Se utilizará el método de reducción. Para ello se multiplicará la primera ecuación por dos y la segunda por tres para posteriormente sumarlas:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 34 = 6x + 2y \\ 21 = -6x + 9y \end{cases} \\ \hline 55 = 0x + 11y \end{array}$$

$$y = \frac{55}{11} = 5$$

Por tanto, y = 5. Ahora, se introduce este valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se halla el valor de x:

$$17 = 3x + 5; \Rightarrow 12 = 3x \Rightarrow x = 4$$

Solución: x = 4, y = 5. El sistema es *compatible determinado*, puesto que solo tiene una solución.

Ejercicio 3:

$$\begin{cases} 3 \cdot (1 - x) = 40 - y \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$$

Se aplicará el método de la igualación. Se despejará la y en las dos ecuaciones:

$$y = 40 - 3 \cdot (1 - x) = 40 - 3 + 3x \qquad \Rightarrow \begin{cases} y = 37 + 3x & [1] \\ y = 3x - \dfrac{1}{2} & [2] \end{cases}$$

Se igualan [1] y [2]:

$$37 + 3x = 3x - \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 74 + 6x = 6x - 1 \quad \Rightarrow \quad 74 = -1$$

La solución obtenida es imposible. El sistema planteado es *incompatible.*

Ejercicio 4:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 5y = 2 \\ x = 4 - 10y \end{cases}$$

Se resolverá por reducción. Para ello, se multiplicará por -2 la primera ecuación y se sumará a la segunda:

$$\begin{array}{c} -x - 10y = -4 \\ x + 10y = 4 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$$

Es fácil ver que las dos ecuaciones son equivalentes. Por tanto, el sistema se puede sustituir por una sola ecuación. Y una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Se trata, pues, de un sistema *compatible indeterminado.*

Ejercicio 5:

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{11}{6} \\ 10x + \frac{2}{3}y = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Se utilizará el método de sustitución, despejando "y" de la primera ecuación:

$$\frac{y}{3} = \frac{11}{6} - \frac{7x}{2} = \frac{11 - 21x}{6} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{11 - 21x}{2}$$

Se introduce esta expresión algebraica en la segunda ecuación:

$$10x + \frac{11-21x}{3} = \frac{20}{3}$$

Para hallar la y:

$$y = \frac{11-21}{2} = -5$$

El sistema es *compatible y determinado*. Solución:

$$x = 1,\ y = -5$$

Ejercicio 6:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 11 \\ \dfrac{x}{3} + 3y = 21 \end{cases}$$

Se va a utilizar el método de igualación. Se despeja la x en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 11 - \dfrac{y}{3} \\ x = (21 - 3y)\cdot 3 \end{cases}$$

Se igualan las dos expresiones:

$$11 - \frac{y}{3} = (21 - 3y) \cdot 3 \Rightarrow 33 - y = 189 - 27y \Rightarrow 26y = 156 \Rightarrow y = 6$$

Para hallar el valor de x, se introduce dicho valor de y en cualquiera de las ecuaciones donde la x esté despejada:

$$x = 11 - \frac{6}{3} = 9$$

Solución: $x = 9$, $y = 6$. El sistema es compatible determinado.

2.5. PROBLEMAS RESUELTOS

Muchos problemas pueden solucionarse planteando un sistema de ecuaciones lineales. Para ello, ha de tenerse en cuenta el plantear tantas ecuaciones como incógnitas, lo cual será factible siempre que el problema sea determinado, es decir, que el número de soluciones sea finito.

Problema 1:

Un jugador de fútbol ha comprado una docena de camisetas y seis pares de botas con un coste total de 1.080 €. El año pasado se compró 16 camisetas y una docena de pares de botas que le costaron en total 860 €. Teniendo en cuenta que el precio de cada camiseta y de cada par de botas era el año pasado la mitad del precio que tienen en la actualidad, calcular los precios actuales.

Resolución:

Se llamará “x” al precio de cada camiseta, e “y”, al del par de botas. El sistema de ecuaciones de este problema es el siguiente:

$$\begin{cases} 12x + 6y = 1080 \\ 16 \cdot \dfrac{x}{2} + 12 \cdot \dfrac{y}{2} = 860 \end{cases}$$

Solución: x = 55 €; y = 70 €.

Problema 2:

En el interior de una bolsa hay 17 bolas, de las cuales algunas son blancas y otras son negras. Si en otra bolsa se introduce el doble de bolas blancas y la tercera parte de bolas negras, resulta que nos encontramos al final con 19 bolas en su interior; ¿Cuántas bolas blancas y cuántas negras había en la primera bolsa?

Resolución:

x= número de bolas blancas

y= número de bolas negras

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + \dfrac{y}{3} = 19 \end{cases}$$

Solución: x = 8; y = 9.

Problema 3:

Calcular cuáles son los dos números cuya suma da 73 y que, al dividirlos, se obtiene 4 como cociente y 8 de resto.

Resolución:

Sean los números x e y

$$\begin{cases} x + y = 73 \\ x = 4y + 8 \end{cases}$$

ya que, dividendo = (divisor x cociente) + resto, la solución será x = 60 ; y = 13.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el método por el cual se resuelven de una manera más sencilla un sistema de dos ecuaciones lineales?

a) Método de igualación.
b) Método de reducción.
c) Método de sustitución.
d) Método de recombinación.

Solución:

b) El método de reducción es el método de resolución más fácil de utilizar en un sistema de dos ecuaciones lineales.

2.6. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES Y TRES INCÓGNITAS

Cualquiera de los tres métodos vistos anteriormente se puede aplicar en todos los sistemas de ecuaciones, pero seguramente, uno de ellos conducirá a la solución de una manera más fácil y rápida. En consecuencia, es conveniente que se elija en cada caso el método más adaptado al sistema propuesto.

Un ejemplo de lo anteriormente explicado lo tenemos en el caso de tener tres ecuaciones con tres incógnitas. Para resolver este tipo de sistemas, se prefiere el método de reducción.

Por ejemplo, sea el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & [1] \\ 2x + y + 3z = 13 & [2] \\ x - y - z = -4 & [3] \end{cases}$$

Si se multiplica a [1] por -1 y, posteriormente, se suma a [2], se obtiene:

$$\begin{array}{r} -x - y - z = -6 \\ \underline{2x + y + 3z = 13} \\ x + 0 + 2z = 7 \end{array} \Rightarrow x + 2z = 7 \quad [4]$$

Si se suman las ecuaciones [2] y [3], se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 13 \\ \underline{x - y - z = -4} \\ 3x + 0 + 2z = 9 \end{array} \Rightarrow 3x + 2z = 9 \quad [5]$$

Con todo ello, se ha obtenido un sistema equivalente al inicial. Dicho sistema equivalente está formado por las ecuaciones [4], [5] y [2].

$$\begin{cases} x + 2z = 7 & [4] \\ 3x + 2z = 9 & [5] \\ 2x + y + 3z = 13 & [2] \end{cases}$$

Así, se ha logrado que haya dos ecuaciones con dos incógnitas, de manera que, restando a [5] la ecuación [4], se podrá hallar el valor de la x:

$$3x + 2z = 9;$$

$$-x - 2z = -7;$$

$$2x + 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

A través de [4] o de [5], se halla que z = 3.

Conociendo el valor de la x y el de la z, se puede calcular el valor de la y a través de la ecuación [2]:

$$(2 \cdot 1) + y + (3 \cdot 3) = 13; \; y = 2$$

Por tanto, la solución a este sistema es x = 1, y = 2, z = 3.

2.7. SISTEMAS LINEALES DE M ECUACIONES Y M INCÓGNITAS

Llamaremos sistema de ecuaciones lineales a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A los términos a_{ij} se les denomina coeficientes de las incógnitas, a las x_i se las denomina incógnitas, y a los términos b_i se les denomina términos independientes.

El sistema adquiere distintos nombres dependiendo del número de soluciones que tenga. Así pues:

- Sistema compatible determinado: tiene una única solución.
- Sistema compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.
- Sistema incompatible: no tiene soluciones.

El teorema de Rouché-Frobenius nos indicará cómo saber de antemano el número de soluciones que va a tener un sistema de ecuaciones.

Recuerda

Para resolver un sistema tratamos de reducirlo a otro que sea equivalente a él. Esto lo conseguimos gracias a las transformaciones elementales que podemos realizar en el sistema dado. Llamaremos transformaciones elementales a aquellas que realizamos en el sistema y este no varía de solución. Estas podrían ser:

1. Cambiar de orden dos ecuaciones.
2. Cambiar de orden dos incógnitas.
3. Si toda la ecuación se multiplica por un mismo número.
4. Si una ecuación se sustituye por ella misma más una combinación de las demás multiplicadas por constantes.

2.8. MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss se trata de un método aplicable solamente a los sistemas lineales de ecuaciones y consiste en realizar transformaciones elementales en un sistema, de manera que el sistema equivalente resultante, tras la realización de dichas operaciones, sea de la forma:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

A dichos sistemas se les llama **triangulares o escalonados**.

Deberemos tener en cuenta algunos detalles para facilitar la aplicación del método:

- Si tenemos una ecuación repetida, la mantendremos solamente una vez y eliminaremos las demás.
- Si al intentar triangular el sistema llegamos a tener la ecuación 0 = 0, también la eliminamos.
- Podemos prescindir también de las ecuaciones que podamos obtener sumando algunas de las demás multiplicadas por constantes.

Imprescindible

Cuando después de considerar estas cuestiones llegamos a tener un sistema escalonado, además de que la resolución es sencilla, se puede comprobar de un vistazo el número de soluciones que va a tener el sistema:

1. Si tenemos igual número de ecuaciones que de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
2. Si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema es compatible indeterminado.
3. Si hay alguna ecuación que resulte absurda, el sistema no tiene solución.

Aplicación del método de gauss a la resolución de sistemas.

Vamos a resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{array}\right\}$$

Para ello, aplicaremos el método de Gauss sucesivamente:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7y+7z=-7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -y+z=-1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ -y+z=-1 \\ -4y+5z=-5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ -y+z=-1 \\ z=-1 \end{array}\right\}$$

Ya tenemos el sistema triangulado y observamos que ha quedado el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, lo cual indica que el sistema es compatible determinado y que tenemos una única solución.

Además, calcular esta solución es inmediato, puesto que, si observamos el sistema triangulado, ya vemos que $z = -1$, y de la segunda ecuación $y = 0$. Con esto, de la primera ecuación obtenemos $x = 2$.

+ Info

En el siguiente vídeo, te ayudamos a resolver un sistema de ecuaciones mediante 3 métodos diferentes obteniendo el mismo resultado.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

3. INECUACIONES

Las ecuaciones eran, básicamente, dos polinomios relacionados con un signo igual. Si este signo no es un igual, sino un mayor, menor, mayor o igual o menor o igual, tenemos una inecuación. En cualquiera de estos cuatro casos, el resultado no será un valor único, sino un conjunto de valores que llamaremos intervalo. Estudiaremos las inecuaciones y los sistemas de inecuaciones de primer grado.

3.1. INECUACIONES Y DESIGUALDADES

Una **desigualdad** nos dice matemáticamente que una expresión A es mayor o menor que B:

$A > B$, se lee A “mayor que” B

$A \geq B$ se lee A “mayor o igual que” B

$A < B$, se lee A “menor que” B

$A \leq B$ se lee A “menor o igual que” B

Si aparece alguna **variable** (incógnita) en uno de sus miembros o en los dos, la desigualdad se llama **inecuación**.

Las inecuaciones poseen infinitas soluciones; todos los números incluidos en unos intervalos determinados.

Ejemplo

$$7 + 5x > 10$$
$$2x - 3 < 4$$

3.2. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

A la hora de trabajar con desigualdades debemos tener mucho cuidado con las operaciones que realizamos puesto que algunas de ellas pueden cambiar el signo de la desigualdad.

La suma y la resta no modifican el signo de la desigualdad

Así si sumamos o restamos el mismo valor a los dos miembros de la desigualdad, el signo de la desigualdad sigue siendo el mismo.

Ejemplo: para $7 > 2$

$$\begin{cases} 7 + 5 > 2 + 5 \\ 7 - 4 > 2 - 4 \end{cases}$$

De este modo, podemos pasar un término de un miembro a otro con solo cambiarlo de signo.

Ejemplo:

$$5x + 2 < 10;\ 5x < 10 - 2;\ 5x < 8$$

Cuidado con la multiplicación y la división

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la desigualdad, por un mismo valor positivo, el signo de la desigualdad sigue siendo el mismo.

Ejemplo:

$$(5 > 3)\ ;\ (5 \cdot 2) > (3 \cdot 2) \Rightarrow 10 > 6$$

$$(10 < 20\ );\ (10/2) < (20/2) \Rightarrow 5 < 10$$

Multiplicar o dividir por un mismo valor negativo

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la desigualdad, por un mismo valor negativo, el signo de la desigualdad cambia:

- Si el signo era > pasa a ser <.
- Si el signo era < pasa a ser >.
- Si el signo era $\geq$ pasa a ser $\leq$.
- Si el signo era $\leq$ pasa a ser $\geq$.

Ejemplo:

$$7 > 5\ ;\ (7 \cdot (-2)) < (5 \cdot (-2)) \Rightarrow -14 < -10$$

Si cambiamos de signo a todos los miembros de una desigualdad, esta cambia de sentido, puesto que equivale a multiplicar por (-1).

Ejemplo:

$$x > 5\ ;\ x \cdot (-1) < 5 \cdot (-1) \Rightarrow -x < -5$$

3.3. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Su forma general es ax > b, cuya solución:

$$\begin{cases} \text{Para } a > 0, \quad x > \dfrac{b}{a} \\ \text{Para } a < 0, \quad x < \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo

2 (3x+2) > 2x + 1

6x + 4 > 2x + 1

6x - 2x > 1 – 4

4x > -3 ;

x > -3/4 o bien (-3/4, + ∞).

3.4. SISTEMAS DE INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Son los que están formados por un conjunto de inecuaciones de la misma variable.

Hay que resolver por separado cada una de las inecuaciones y luego tomar los valores comunes a todas estas soluciones.

Ejemplo

Vamos a resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2 > 2x + 1 \\ 5x - 3 < 3x - 2 \end{cases}$$

3x - 2x > 1 - 2 ; x > -1

5x - 3x < -2 + 3 ; 2x < 1 ; x < 1/2

Solución: (-1, 1/2).

El intervalo en que se cumple que x > -1 y que x < 1/2 es el (-1,1/2).

Ejercicio 1:

Resuelva la inecuación:

$$\frac{2x}{5} - \frac{2x-3}{6} \geq \frac{8+x}{2}$$

Resolución:

$$\frac{24x - 20x + 30}{60} \geq \frac{240 + 30x}{60}$$

$$24x - 20x + 30 \geq 240 + 30x$$

$$4x + 30 \geq 240 + 30x$$

$$4x - 30x \geq 240 - 30$$

$$-26x \geq 210$$

$$x \leq -\frac{210}{26} = -\frac{105}{13}$$

Solución:

$$\left(-\infty, \frac{-105}{13}\right]$$

Ejercicio 2:

Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{4x-4}{5} + \dfrac{10-4x}{3} < 2 \\ \dfrac{2x+4}{3} - \dfrac{4x-6}{4} > \dfrac{6}{4} \end{cases}$$

Resolución:

Desde la primera inecuación:

$$\frac{4x-4}{5} + \frac{10-4x}{3} < 2$$

$$\frac{12x-12+50-20x}{15} < \frac{30}{15}$$

$$12x-12+50-20x < 30$$

$$-8x < 30+12-50$$

$$-8x < -8$$

$$x > 1$$

Resolviendo ahora la segunda inecuación:

$$\frac{2x+4}{3}-\frac{4x-6}{4}>\frac{6}{4}$$

$$\frac{8x+16-12x+18}{12}>\frac{18}{12}$$

$$8x+16-12x+18>18$$

$$-4x>18-16-18$$

$$-4x>-16$$

$$x<4$$

Solución:

1 < x < 4, o lo que es lo mismo, (1, 4).

Básico

Si al resolver las inecuaciones no hay ningún valor que se cumpla a la vez en ambas condiciones, se trata de un sistema sin solución.

CONCLUSIONES

En esta unidad didáctica hemos visto algunos conceptos complejos y difíciles que debes recordar, para ello te proponemos que prepares un buen esquema, aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad, recuerda completarlos con aquellos que te causen dificultad:

Ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} si \quad \Delta > 0, \quad 2 \quad \text{soluciones reales distintas} \\ si \quad \Delta = 0, \quad 1 \quad \text{solución real (doble)} \\ si \quad \Delta < 0, \quad 2 \quad \text{no hay soluciones reales} \end{cases}$$

Clasificación de los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{Compatible: con solución} & \begin{cases} \text{Determinado: solución única} \\ \text{Indeterminado: infinitas soluciones} \end{cases} \\ \text{Incompatible: sin solución} & \end{cases}$$

RECAPITULACIÓN

La resolución de ecuaciones puede adquirir tintes bastante complejos a la hora de encontrar la solución. La presencia de numerosos términos e incógnitas puede dificultar las operaciones y llevarnos a callejones sin salida. Por ello, existen varios métodos de resolución que, aplicados adecuadamente, pueden facilitar las operaciones.

En un sistema de ecuaciones, antes de empezar a operar innecesariamente, es importante determinar cuántas pueden ser las soluciones del sistema. Si es un sistema con una sola ecuación de segundo grado, la solución es fácil de encontrar. El problema aparece cuando tenemos sistemas grandes, con numerosas ecuaciones e incógnitas, momento en el cual se debe aplicar en método de Gauss.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 + 3x - 6 = x^2 + 2x - 5$?

a) –2.

b) 4.

c) 1.

d) No tiene solución.

2. ¿Cuántas soluciones puede tener una identidad?

a) Una solución.

b) Un entero y su opuesto.

c) Un entero y su inverso.

d) Infinitas.

3. ¿Cuál de ellas es una identidad?

a) $2x + 6 = x + 3$.

b) $2x + 6 = 2 \cdot (x + 3)$.

c) $2x + 6 = 2x + 3$.

d) $2x + 6 = x + 6$.

4. ¿La ecuación $x^2 - (x + 1)^2 = 0$ es de segundo grado?

a) Sí.

b) No.

c) Es de primer y segundo grado.

d) No tiene grado.

5. Sin resolver la ecuación, decir cuántas soluciones tiene $x^2 - 8x + 16 = 0$:

a) Dos.

b) Una.

c) Ninguna.

d) Una doble.

6. Hallar la ecuación de segundo grado sabiendo que sus raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -5$:

a) $x^2 + 3x - 9 = 0$.

b) $x^2 + 4x - 10 = 0$.

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$.

d) $2x^2 + 3x - 10 = 0$.

7. Resolver el sistema $\begin{cases} 3 \cdot (x - 1) = y \\ 6x - 7 = 2y \end{cases}$

a) x = 1, y = 1.

b) Incompatible.

c) Compatible indeterminado.

d) x = 11, y = -4.

8. Hallar cuántos litros de agua hay en dos botellas, sabiendo que 8/5 de la primera equivalen al doble de lo que hay en la segunda, y que 1/2 de la primera contiene 15 litros menos que la segunda:

a) 30 y 60.

b) 50 y 40.

c) 50 y 30.

d) 30 y 50.

9. ¿Qué intervalo es la solución de la inecuación 2x - 3(2- x) < 7(x - 2) + 4?

a) (2, + ∞].

b) [2, + ∞).

c) (- ∞, -2].

d) (- ∞, 2].

10. ¿Qué intervalo es la solución de la inecuación $\frac{4 \cdot (x+1)}{3} \geq \frac{2x-3}{2}$?

a) (-∞, -17/2].

b) (17/2, + ∞).

c) [-17/2, +∞).

d) (17/2, + ∞).

SOLUCIONARIO

1.	c	**2.**	d	**3.**	b	**4.**	b	**5.**	d
6.	c	**7.**	b	**8.**	b	**9.**	a	**10.**	c

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Las operaciones con polinomios suponen una parte muy importante de las matemáticas, por lo que las propuestas para ampliar su estudio son muy abundantes; existe una gran bibliografía que desarrolla este tema, así como una gran cantidad de páginas en Internet donde se puede encontrar información.

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- VV. AA. *EULER*. *Matemáticas I*. Madrid: S.M , 2001.
- VV.AA. EULER. *Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: S.M, 2000.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- VV. AA. *Matemáticas I*. Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.