MD.PlantillaTexto(02)Esp.dot

PLANO Y ESPACIO EUCLÍDEO

UD000546_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Existen propiedades que quedan perfectamente identificadas, en un sistema de unidades adecuado, dando un solo número, como ocurre con la temperatura, la presión, el tiempo o la distancia entre dos puntos.

De dichas magnitudes se dicen que tienen carácter escalar o que son **magnitudes escalares.**

Sin embargo, otras necesitan más información para quedar perfectamente definidas. Este tipo de magnitudes reciben el nombre de vectores y las magnitudes a las que se refieren se denominan **magnitudes vectoriales.**

Los vectores son fundamentales para establecer relaciones espaciales entre diferentes elementos, como son planos, puntos o rectas, que se cortan, cruzan o que son paralelos entre sí. Por ello, existen determinados recursos matemáticos que permiten realizar operaciones entre vectores y que veremos desarrollados en esta unidad didáctica.

PROPÓSITOS

- Conocer la definición de producto escalar, producto vectorial y producto mixto con sus propiedades y sus expresiones analíticas.
- Pasar del plano euclídeo al espacio euclídeo tridimensional.
- Aprender cómo se calculan los cosenos directores de un vector.
- Manejar la expresión de la ecuación normal del plano y el vector característico del plano.
- Obtener el ángulo entre dos rectas, entre dos planos, y entre recta y plano.
- Calcular distancias: punto-plano, punto-recta, recta-recta.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

En esta unidad vamos a ver los ángulos que se forman entre rectas y planos, y las distancias que mantienen entre sí.

Es importante destacar tres tipos nuevos de operaciones que vamos a aprender, como son el producto escalar, el producto vectorial y el producto mixto de vectores. No solo son importantes para los conceptos que se van a desarrollar en esta unidad didáctica, sino que lo son también para el desarrollo de otros campos de la ciencia, como por ejemplo algunas partes de la física.

1. EL PLANO EUCLÍDEO: PRODUCTO ESCALAR

En este apartado vamos a estudiar el plano y su elemento fundamental, el vector, así como las operaciones que podemos realizar con ellos.

1.1. VECTORES DEL PLANO

Uno de los elementos fundamentales del plano es el vector, a partir de él podremos, junto con otros elementos, crear rectas y planos. Vamos a definir a continuación este concepto y aprenderemos a realizar operaciones con vectores.

1.1.1. DEFINICIÓN

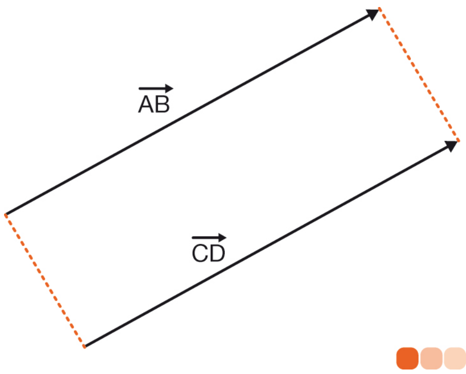
En el plano ordinario, llamamos **vector** a un segmento orientado, es decir, a un segmento cuyos extremos se dan en un cierto orden:

$$A \rightarrow B \qquad B \rightarrow A \qquad \overline{AB} \neq \overline{BA}$$

Se define como **módulo del vector** a la longitud del segmento; como **dirección,** la de la recta que lo contiene; y como **sentido,** el determinado por el origen y el extremo del vector.

Básico

Un vector viene caracterizado por su módulo, dirección y sentido.



Vectores equipolentes

Decimos que dos vectores son **equipolentes** entre sí, y se escribe con el símbolo ~, cuando la figura formada por ellos es un paralelogramo.

La relación de equipolencia es una relación de equivalencia, es decir, cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva:

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

- Simétrica:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{AB}$$

- Transitiva:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ y } \overline{CD} = \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{EF}$$

De esta relación observamos que podemos agrupar los vectores en clases de equivalencia. Cada clase está formada por los vectores equipolentes entre sí. A cada una de las clases así formada se la denomina **vector libre** y a cada vector de esa clase se le dice representante de la clase de equivalencia.

Recuerda

Recuerda que tienes a tu disposición un servicio de tutorías para resolver cualquier duda que te pueda surgir.

A los vectores libres se les puede dotar de las operaciones suma y producto por un escalar. Desarrollaremos ahora este concepto de suma y producto desde el punto de vista geométrico, es decir, vamos a ver cómo se suman vectores y cómo se multiplican por un escalar de manera gráfica.

Por tanto, consideremos el vector **v** = (v_1, v_2) donde $v_1, v_2 \in R$.

El vector **v** puede representarse por cualquier par de puntos del plano. Si consideramos P = (x_0, y_0) el origen y Q = (x_1, y_1) el extremo final, entonces el vector que determinan viene dado por la expresión:

$$v = \overrightarrow{PQ} = = \left(x_1 - x_0, y_1 - y_0\right)$$

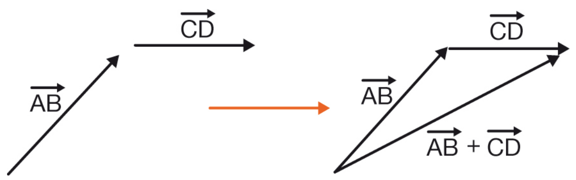
Luego:

$$v_1 = x_1 - x_0 \qquad y\ v_2 = y_1 - y_0$$

1.1.2. Operaciones

1. Suma de vectores:

   Dados dos vectores libres, se denomina suma de ambos al vector obtenido al unir el origen del primer vector con el extremo del representante de la clase del segundo vector, cuyo origen coincida con el extremo del primer vector.

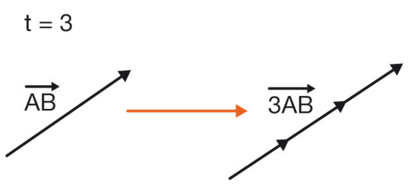


Suma de vectores

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

2. Producto de un vector por un escalar:

   Dado un vector libre y un número real cualquiera t, se tiene que el producto del vector por el escalar es llevar t veces el módulo del vector en su dirección y sentido o en el contrario, según el signo de t.



Producto de un escalar

$$\lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$$

1.1.3. VECTORES PARALELOS

Dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales.

$$v \,||\, u \Leftrightarrow v_1 \times u_2 = v_2 \times u_1 \Leftrightarrow \qquad v = \lambda \times u, \lambda \in R$$

1.1.4. COMBINACIÓN LINEAL

Diremos que el vector **w** es combinación lineal de los vectores **u** y **v** si se puede escribir de la siguiente manera:

$\mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{u}$, donde $\lambda, \mu \in R$.

1.1.5. BASE DE VECTORES

Los vectores **u** y **v** forman una base si son un sistema generador (todo vector del plano se puede expresar como combinación lineal de ellos) y, además, son linealmente independientes.

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

$$\lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$$

$\mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{u}$, donde $\lambda, \mu \in R$.

$$\mathbf{v} \,||\, \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{u}, \lambda \in R$$

1.2. PRODUCTO ESCALAR

A continuación, definiremos una nueva operación que se realiza con dos vectores, se trata del producto escalar, denominado así ya que el resultado de este producto es un valor real.

1.2.1. DEFINICIÓN

Sea V un espacio vectorial definido sobre los números reales.

Llamaremos **producto escalar** a toda aplicación $V \times V \rightarrow \Re$ que a cada par de vectores $(\overline{u}, \overline{v})$, con $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, le asocia un número real cumpliendo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Donde:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Además, el producto escalar verifica las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa: $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$.
2. Propiedad distributiva: $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$.
3. $\overline{u} \cdot \overline{u} \geq 0, \ \forall \, \overline{u} \in V$.
4. $\overline{u} \cdot \overline{u} = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = 0$.

Se llama **producto escalar** de dos vectores libres u y v al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$u \cdot v = |u||v| \cos \vartheta$$

El producto escalar es una magnitud escalar, es decir, un número.

1.2.2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Se pueden destacar las siguientes propiedades del producto escalar:

1. $(\bar{u}+\bar{v})\cdot\bar{w}=\bar{u}\cdot\bar{w}+\bar{v}\cdot\bar{w}$.
2. $\bar{u}\cdot(a\,\bar{v})=a(u\cdot\bar{v})$.
3. $\bar{u}\cdot 0=0$.
4. $(\bar{u}\cdot\bar{v})(u\cdot\bar{v})\le(u\cdot\bar{u})(v\cdot\bar{v})\Rightarrow$ Desigualdad de Cauchy- Schwartz.

1.2.3. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR

Atención

Por simplificar notación en este párrafo tendremos siempre presente que u, v, u_1, u_2 y u_3 son vectores del espacio vectorial V. Así evitamos poner el guión de vector encima de cada uno de ellos y dejamos más sencilla la notación.

Sea B = {u_1, u_2, u_3} una base del espacio vectorial tridimensional V y sean u y v dos vectores arbitrarios de V dados de la siguiente forma:

$$u = x_1u_1 + y_1u_2 + z_1u_3$$

$$v = x_2u_1 + y_2u_2 + z_2u_3$$

Expresamos el producto escalar en función de las componentes de u y de v de la siguiente forma:

$$u \cdot v = (x_1u_1 + y_1u_2 + z_1u_3)(x_2u_1 + y_2u_2 + z_2u_3) =$$

$$= x_1x_2u_1^2 + (y_1x_2+x_1y_2)u_1u_2 + (x_1z_2+z_1x_2)u_1u_3 +$$

$$+ (y_1z_2+z_1y_2)u_2u_3 + y_1y_2u_2^2 + z_1z_2u_3^2$$

Expresándolo ahora en forma matricial tenemos:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (x_1, y_1, z_1)\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

A la matriz formada por la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ se la llama matriz asociada al producto escalar respecto de esa base.

Tenemos que observar que, como hemos dicho que el producto escalar es conmutativo, la matriz es simétrica.

Ejemplo:

Vamos a realizar la siguiente operación: $\left(2\overline{u}+3\overline{v}\right)\cdot\left(\overline{u}+\overline{v}\right)$.

$$\left(2\overline{u}+3\overline{v}\right)\cdot\left(\overline{u}+\overline{v}\right)=2\cdot\overline{u}\cdot\overline{u}+2\cdot\overline{u}\cdot\overline{v}+3\cdot\overline{v}\cdot\overline{u}+3\cdot\overline{v}\cdot\overline{v}=$$

$$=2\cdot u^2-5\overline{u}\cdot\overline{v}+3\cdot\overline{v}^2$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

En el triángulo equilátero de lado 6 cm y vértices A, B y C, se consideran los siguientes vectores:

$\overline{u}=\overline{AB},\quad \overline{v}=\overline{BC},\quad \overline{w}=\overline{AC}$

Halla $\overline{u}\cdot\overline{v}$, $\overline{v}\cdot\overline{w}$ y $\overline{w}\cdot\overline{u}$

Solución:

Si tomamos como origen cada vértice y medimos el ángulo respectivo tomando como positivo el sentido antihorario y como ángulo negativo el sentido horario; observamos que:

$\text{ang}\left(\overline{u}\cdot\overline{v}\right)=120^\circ$

$\text{ang}\left(\overline{v},\overline{w}\right)=-60^\circ$

$\text{ang}\left(\overline{w},\overline{u}\right)=-60^\circ$

Por tanto:

$$\overline{u}\cdot\overline{v}=\left|\overline{u}\right|\cdot\left|\overline{v}\right|\cdot\cos\left(\overline{u},\overline{v}\right)=6\cdot6\cdot(-0{,}5)=-18$$

$$\overline{v}\cdot\overline{w}=\left|\overline{v}\right|\cdot\left|\overline{w}\right|\cdot\cos\left(\overline{v},\overline{w}\right)=6\cdot6\cdot0{,}5=18$$

$$\overline{w}\cdot\overline{u}=\left|\overline{w}\right|\cdot\left|\overline{u}\right|\cdot\cos\left(\overline{w},\overline{u}\right)=6\cdot6\cdot0{,}5=18$$

2. ESPACIO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL

En general, un espacio euclídeo es un espacio vectorial normado de dimensión finita en el que la norma viene dada por el producto escalar. Es decir, se denomina espacio euclídeo a un espacio vectorial dotado de un producto escalar.

En un espacio vectorial euclídeo, es decir, un espacio con producto escalar, podemos definir, asociada a este, la **norma del vector,** que se denota $||v||$ y se define como:

$$V \xrightarrow{\|\cdot\|} \Re$$
$$\bar{u} \rightarrow \|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$$

Llamaremos **espacio normado** a todo espacio en el que se ha definido una norma.

2.1. COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Ahora ya estamos en disposición de definir el coseno del ángulo que forman dos vectores no nulos:

$$\cos\left(\bar{u},\bar{v}\right)=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\left\|\bar{u}\right\|\cdot\left\|\bar{v}\right\|}$$

Básico

Denominaremos **cosenos directores de un vector** a los cosenos de los ángulos que forme el vector con los elementos de la base del espacio vectorial euclídeo en el que se encuentre.

Sean, pues, la base { u_1, u_2, u_3 } y el vector u = (x, y, z). Las expresiones analíticas de sus cosenos directores son:

$$\cos\left(\bar{u},\bar{u}_1\right)=\frac{\bar{u}\cdot\bar{u}_1}{\left\|\bar{u}\right\|\cdot\left\|\bar{u}_1\right\|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\left(\bar{u},\bar{u}_2\right)=\frac{\bar{u}\cdot\bar{u}_2}{\left\|\bar{u}\right\|\cdot\left\|\bar{u}_2\right\|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\left(\bar{u},\bar{u}_3\right)=\frac{\bar{u}\cdot\bar{u}_3}{\left\|\bar{u}\right\|\cdot\left\|\bar{u}_3\right\|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Notemos que u_1, u_2, u_3 son elementos de una base ortonormal, por lo que se tiene que la norma de cada uno de ellos es igual a la unidad, lo que facilita considerablemente la expresión analítica de los cosenos directores.

2.2. PRODUCTO VECTORIAL

A continuación, definiremos el producto vectorial, denominado así ya que el resultado de este producto es un vector.

2.2.1. DEFINICIÓN

Definimos producto vectorial como:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\wedge} & V \\ (\bar{u},\bar{v}) & \rightarrow & \overline{u \wedge v} \end{array}$$

Sea una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ y sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, cuyas coordenadas respecto de la base dada son respectivamente (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

El producto vectorial es una operación entre dos vectores de un espacio euclídeo tridimensional que da como resultado un vector ortogonal a los vectores originales.

Simbólicamente podemos expresar el producto vectorial de la siguiente forma:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \right)$$

Expresado el resultado respecto de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ tenemos:

$$\bar{u} \wedge \bar{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

2.2.2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

Las propiedades más importantes del producto vectorial son:

1. Propiedad anticonmutativa: $\overline{u} \wedge \overline{v} = -\overline{v} \wedge \overline{u}$.
2. $(\alpha \cdot \overline{u}) \wedge \overline{v} = \alpha\left(u \wedge \overline{v}\right)$.
3. Propiedad distributiva: $\overline{u} \wedge \left(v + \overline{w}\right) = \overline{u} \wedge \overline{v} + \overline{u} \wedge \overline{w} = \overline{u} \wedge \overline{w}$.
4. El producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a ellos dos, es decir, **u** × **v** es perpendicular a **u** y a **v.**
5. $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen}(u,v)$

2.2.3. ÁREA DEL TRIÁNGULO

Dados tres puntos A, B, C, cuyas coordenadas son respectivamente (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) respecto de la base {u_1, u_2, u_3} y que no están alineados, definen un triángulo.

El área del triángulo ABC se sabe que es la mitad del área del paralelogramo ABCD y coincide con el módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC.

Dados tres puntos que forman un triángulo, el área de éste viene dada por:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \text{módulo de} \begin{vmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

Así, tendremos en cuenta las siguientes fórmulas:

1. Área de un triángulo plano:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

2. Área de un triángulo en el espacio:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right\|$$

3. Volumen del tetraedro:

$$V = V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right) \cdot \overrightarrow{P_1P_4} \right|$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Halla el área del paralelogramo formado por los vectores **u** = (2, 1, 5) y **v** = (3, 2, 1).

Solución:

Calculemos primero el producto vectorial de ambos vectores, que viene dado por el siguiente determinante:

$$u \wedge \overline{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9i + 13j + k$$

Luego el área del paralelogramo de lados **u** y **v** será:

$$S = \left| u \wedge \overline{v} \right| = \sqrt{(-9)^2 + 13^2 + 1^2} = 15{,}84.$$

2.3. PRODUCTO MIXTO

Se define producto mixto de tres vectores como la aplicación:

$$VxVxV \rightarrow \Re$$
$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \rightarrow \bar{u}\cdot(\bar{v}\wedge\bar{w})$$

Es decir, lo designamos como [**u, v, w**] y se define como el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos.

Geométricamente, el valor absoluto del producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyas aristas, que concurren en un mismo vértice, son los tres vértices dados.

Analíticamente el producto mixto se calcula mediante el determinante formado por las coordenadas de los tres vectores puestas en filas:

$$[\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}] = (\mathrm{u}\times\mathrm{v})\times\mathrm{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores u = (2, 1, 0), v = (0, 1, 0) y w = (3, 2, 1)?

a) 3.

b) 5.

c) 7.

d) 2.

Solución:

d)2.

3. ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO

Previamente definiremos lo que significa que dos vectores sean ortogonales o, lo que es lo mismo, perpendiculares. Decimos que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero.

$$\overline{u} \text{ y } \overline{v} \text{ son ortogonales} \Leftrightarrow \overline{u} \cdot \overline{v} = 0$$

Supongamos ahora el punto A = (x_1, y_1, z_1), perteneciente al plano afín Π, y sea $\overline{v} = (a,b,c)$ un vector perpendicular al plano. Si tenemos otro punto X = (x, y, z), diremos que pertenece al plano si los vectores $\overline{v}$ y $\overline{AX}$ son perpendiculares, es decir:

$$\overline{v} \cdot \overline{AX} = 0$$

O bien:

$$\overline{v} \cdot (\overline{OX} - \overline{OA}) = 0$$

que es lo que se conoce como **ecuación vectorial normal del plano Π.** Al vector $\overline{v}$ se le llama vector característico del plano y a la pareja (A, $\overline{v}$), determinación normal del plano.

Supongamos, ahora, esta determinación normal del plano y consideremos el vector:

$$\overline{u} = \frac{\overline{v}}{\left\| \overline{v} \right\|}$$

que es un vector unitario asociado al plano. Si tomamos como α, β, γ los ángulos que forma el vector $\overline{u}$ con los vectores de la base ortonormal {u_1, u_2, u_3}, y sustituyendo en la ecuación general del plano, se llega a la ecuación:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \pm d = 0$$

Que es la **ecuación normal del plano:**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ecuación vectorial normal al plano:

$$\overline{v}\cdot(\overline{OX} - \overline{OA}) = 0$$

Ecuación normal del plano:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \pm d = 0$$

4. ÁNGULOS

A continuación, vamos a explicar las fórmulas correspondientes al cálculo de ángulos. Deberás usar convenientemente las diferentes expresiones dependiendo de la naturaleza del problema.

4.1. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Se denomina **ángulo entre dos rectas** al ángulo formado por sus vectores direccionales.

Básico

Sean estos vectores $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores direccionales de r y r_1 respectivamente. El ángulo que forman estas dos rectas viene dado por:

$$\left|\cos(\overline{u},\overline{v})\right| = \frac{\left|\overline{u}.\overline{v}\right|}{\left|\overline{u}\right|.\left|\overline{v}\right|}$$

Si el producto escalar de los dos vectores direccionales es cero, se tiene que el coseno del ángulo entre las dos rectas es cero, con lo cual ese ángulo es $\pi/2$ y las rectas son perpendiculares.

El ángulo entre dos rectas también se puede calcular a partir de sus pendientes. Obviando la demostración matemática, diremos que, si tenemos dos rectas r_1 y r_2 no verticales, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, podrá ocurrir que:

1. r_1 sea paralela a r_2, luego $m_1 = m_2$.
2. r_1 sea perpendicular a r_2, luego $m_1 * m_2 = -1$.
3. r_1 forme un ángulo con r_2.

Si las ecuaciones vienen dadas en forma general por $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, tendremos entonces que:

1. Si r_1 es paralela a r_2, entonces $AB' - A'B = 0$.
2. Si r_1 es perpendicular a r_2, entonces $AA' + BB' = 0$.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula el ángulo que forman dos rectas si sus vectores directores son $u=(-2,1)$ y $\bar{v}=(2,-3)$.

Solución:

$\alpha = 29^\circ\ 44'$.

4.2. ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Definimos el ángulo formado por dos planos como el ángulo que forman sus vectores característicos.

Sean $(A, \bar{u})$ y $(B, \bar{v})$ las determinaciones normales de los planos Π y Π_1 respectivamente. Sean los vectores $\bar{u} = (a, b, c)$ y $\bar{v} = (a_1, b_1, c_1)$. Entonces tenemos que el ángulo formado por los dos planos es:

$$\cos(\Pi,\Pi_1) = \left|\cos(\bar{u},\bar{v})\right| = \frac{\left|\bar{u}\cdot\bar{v}\right|}{\left|\bar{u}\right|\cdot\left|\bar{v}\right|} = \frac{\left|aa_1 + bb_2 + cc_3\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a_1^2+b_2^2+c_3^2}}$$

Nota

Con esto podemos concluir que para que dos planos sean perpendiculares sus vectores característicos han de ser ortogonales.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el ángulo que forman estos dos planos?

Π_1 : x + 8y - 6z = 1

Π_2 : -9x + 7y = 1

a) 34'25º.
b) 98'59º.
c) 65'78º.
d) 35º.

Solución:

c) 65'78º.

4.3. ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Se denomina ángulo formado por una recta y un plano al complementario del ángulo que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, donde $(A, \bar{u})$ y $(B, \bar{v})$ son la determinación lineal de la recta y la determinación normal del plano respectivamente.

Así pues, dados $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (a, b, c)$ se tiene que:

$$sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left|\cos(\bar{u},\bar{v})\right| = \frac{\left|\bar{u}\cdot\bar{v}\right|}{\left|\bar{u}\right|\cdot\left|\bar{v}\right|} = \frac{\left|au_1 + bu_2 + cu_3\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$$

donde denominamos α al ángulo pedido.

Básico

El ángulo que forma la recta con el plano es igual al ángulo que forma la recta con su proyección ortogonal en el plano.

Deducimos, por lo tanto, que para que una recta y un plano sean perpendiculares sus vectores tienen que ser proporcionales.

Caso práctico:

Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano Π siguientes:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$
$$\Pi \equiv x + y - 1$$

Solución:

Observamos que los vectores característicos son (2, 1, 2) y (1, 1, 0) respectivamente. Con ellos el ángulo entre recta y plano es:

$$sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left|\cos(\overline{u},\overline{v})\right| = \frac{\left|\overline{u}\cdot\overline{v}\right|}{\left|\overline{u}\right|\cdot\left|\overline{v}\right|} = \frac{\left|au_1 + bu_2 + cu_3\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$$

Lo que indica que el ángulo es de 45°.

5. DISTANCIAS

Al igual que ocurría en el apartado dedicado a los ángulos, vamos a explicar a continuación las fórmulas correspondientes al cálculo de distancias. Deberás usar convenientemente una u otra expresión dependiendo de la naturaleza del problema.

Partiremos de la distancia entre dos puntos, así, dados $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, se define la distancia como:

$$d(A,B) = \left\| \overline{AB} \right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

5.1. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Llamamos distancia de un punto a un plano a la menor de las distancias desde ese punto a otro punto perteneciente al plano.

Vamos a calcular dicha distancia analíticamente:

Sea (B, $\overline{v}$) una determinación normal del plano, donde B = (x_1, y_1, z_1) es un punto cualquiera del plano y $\overline{v}$ = (a, b, c) un vector normal al plano, y sean (x_0, y_0, z_0) las coordenadas del punto P_0. Tenemos que la distancia de P_0 al plano Π es:

$$d(P_0,\Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5.2. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Al igual que ocurría con la distancia de un punto a un plano, en el caso de la recta, también llamaremos distancia de un punto a una recta a la menor de las distancias del punto, para cualquiera de los puntos de la recta.

Analíticamente tenemos:

Sea $(A, \overline{u})$ una determinación lineal de la recta, donde, $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overline{u} = (a, b, c)$, y sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Se tiene que la distancia del punto P_0 a la recta r viene dada por la siguiente fórmula:

$$d(P_0,r) = \frac{\text{módulo}\begin{vmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si tenemos una recta que viene dada por la ecuación ax + by + cz + d = 0, y un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la forma habitual de esta fórmula viene dada por:

$$d(P_0,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5.3. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

La distancia entre dos rectas depende de la posición relativa entre ambas. Podemos tener los siguientes casos:

1. Que las rectas sean coincidentes, lo cual hace que la distancia entre ambas sea nula, d (r, r′) = 0.
2. Que las rectas se corten, siendo la distancia entre ambas nula, d (r, r′) = 0.
3. Que las rectas sean paralelas. La distancia entre ambas se calcula cogiendo un punto cualquiera de una y calculando la distancia a la otra, es decir, d (r, r′) = d (P, r) con $P \in r$.
4. Que las rectas se crucen sin cortarse, es decir, no estén en el mismo plano. Es el caso más complicado, que vamos a ver a continuación.

Llamamos distancia entre dos rectas que se cruzan a la menor de las distancias entre dos puntos de ellas. Observamos que dicha distancia mínima se da entre los puntos de ambas rectas que son intersección de cada una de ellas y la perpendicular común, es decir, que la distancia entre dos rectas se mide sobre la perpendicular común a ambas.

Analíticamente, sean $(A, \overline{u})$ y $(B, \overline{v})$ las determinaciones lineales de las rectas r y r_1, respectivamente, donde $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{v} = (b_1, b_2, b_3)$. Con esto la distancia entre dos rectas que se cruzan viene dada por la fórmula:

$$d(r,r_1) = \frac{|(u \times v) \cdot \overrightarrow{AB}|}{||u \times v||} = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\text{módulo} \begin{vmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \right|$$

Ejemplo:

Calcula la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{1}$$

$$r_1 \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{2}$$

Lo primero que necesitamos son los puntos y los vectores, que dan la determinación lineal de cada una de las rectas.

En la primera observamos que A = (1, -3, 0) y $\bar{u}$ = (2, 4, 1) y en la segunda, B = (-1, 2, -4) y $\bar{v}$ = (-1, 3, 2). Con estos 4 datos sustituimos en la fórmula que se ha dado anteriormente y obtenemos:

$$d(r,r_1) = \left| \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\text{módulo} \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}} \right| = \left| \frac{-75}{\sqrt{150}} \right| = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$$

+ Info

Te recomendamos que veas ahora este vídeo con fórmulas y ejercicios sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos y la distancia de un punto a un plano.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

CONCLUSIONES

Esta ha sido una unidad didáctica fundamentalmente teórica, es decir, con muchas fórmulas importantes que memorizar. Para que resulte más fácil hacemos un resumen de las más importantes:

- Producto escalar:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

- Producto vectorial:

$$u \times v = u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1$$

- Producto mixto:

$$\left[u, v, w\right] = (u \times v) \times w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Distancia entre dos puntos:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

- Distancia entre punto y recta:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Distancia entre dos rectas:

$$d(r, r_1) = \frac{|(u \times v) \cdot \overrightarrow{AB}|}{||u \times v||}$$

- Distancia de un punto a un plano:

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right\|$$

RECAPITULACIÓN

Existen numerosas magnitudes que no se corresponden solamente con un número, cifra o cantidad, especialmente cuando hablamos de cuestiones geométricas o relativas a la física de objetos en movimiento. En estas magnitudes son imprescindibles otros parámetros, como dirección y sentido, para que adquieran total significado.

Con un vector se pueden realizar una serie de operaciones que permiten calcular determinados parámetros relacionados con las posiciones relativas de esos vectores en el espacio.

Tanto los ángulos como las distancias entre puntos, rectas y planos vienen determinados por el producto vectorial o escalar de vectores relativos a cada elemento.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **Halla el ángulo que forman las rectas:**

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$$

a) α = 180°.

b) cos α = -1/6.

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{26}$.

d) α = 90°.

2. Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) $\cos \alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{15}$.

b) $\alpha = 90°$.

c) $\alpha = 45°$.

d) $\cos \alpha = \dfrac{16}{\sqrt{2}}$.

3. Calcula el ángulo que forman los planos:

$$\Pi \equiv x + y - 3z + 1 = 0$$

$$\Pi_1 \equiv 2x - 3y + 2z + 1 = 0$$

a) $\alpha = 45°$.

b) $\alpha = 76°$.

c) $\cos \alpha = \dfrac{7}{\sqrt{187}}$.

d) $\cos \alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{187}$.

4. Calcula la distancia del punto P = (0, -2, 1) al plano 3x - 2y + 5z + 1 = 0:

a) $\frac{5\sqrt{38}}{19}$.

b) $\frac{5}{19}$.

c) $\frac{\sqrt{38}}{19}$.

d) $-\frac{5\sqrt{38}}{19}$.

5. Calcula el ángulo entre la recta y el plano:

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-z+3=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

$$\Pi \equiv 2x-y+3z+1=0$$

a) $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

b) $\text{sen}\ \alpha = \frac{2\sqrt{231}}{33}$.

c) $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{187}}{3}$.

d) $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{33}$.

6. **Calcula la distancia entre el punto P = (1, 2, 3) y la recta:**

$$r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. **Calcula la distancia del punto P = (0, 0, 0) al plano 4x + 2 - 4z - 6 = 0:**

a) 1.

b) 2.

c) 1/2.

d) 1/3.

8. **Calcula el ángulo que forman las rectas:**

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{5}$$
$$s \equiv \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{5}$$

a) 90°.

b) 45°.

c) 180°.

d) 360°.

9. **Dados el punto A = (1, 1, 3) y la recta** $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$**, calcula la distancia entre ellos:**

a) 2.

b) $\sqrt{5}$.

c) 5.

d) 1/5.

10. **Calcula el área del triángulo de vértices A = (1, 1, 1), B = (2, 2, -1), C = (3, 1 ,-3):**

a) $\sqrt{5}$.

b) 5.

c) 3.

d) $\sqrt{3}$.

SOLUCIONARIO

1.	c	**2.**	a	**3.**	c	**4.**	a	**5.**	b
6.	c	**7.**	a	**8.**	a	**9.**	b	**10.**	a

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I.* Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV. AA**.** EULER. *Matemáticas I.* Madrid: S.M, 2001.
- VV.AA. EULER. *Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Madrid: S.M, 2000.
- VV. AA. *Matemáticas I*. Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA**.** *Matemáticas II.* Madrid: Edelvives, 2003.