OPERACIONES BÁSICAS

MD PlantillaTexto(02)Esp.dot

UD000511_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Conforme el estudio de las matemáticas se hace más profundo, surgen nuevas necesidades para la realización lo más simplificada posible de las operaciones matemáticas que se plantean.

Así, para productos con pocos números, el resultado es fácil de calcular, pero conforme aumenta la cantidad del número a multiplicar, la dificultad aumenta. Por ello, se definen unos modos de notación de los números, producto de un intento de simplificar operaciones que adquieren tintes cada vez más complejos.

Potencias, logaritmos, raíces, todas tienen un fundamento básico, que es la simplificación de la notación matemática y una mayor facilidad de resolución de los problemas que puedan surgir.

PROPÓSITOS

Con el estudio de esta unidad conseguirás:

- Manejar de operaciones con potencias y radicales.
- Operar con logaritmos y exponenciales.
- Establecer comparativas entre logaritmos y exponenciales.
- Realizar operaciones básicas con polinomios y aplicaciones prácticas en la descomposición factorial y cálculo de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Es importante que asimiles los conceptos y las operaciones propias de las potencias y radicales, ya que constituyen la base de la mayoría de los cálculos matemáticos.

Introduciremos el concepto de logaritmo de forma comparativa y como operación inversa a la potencia. Las operaciones con exponenciales y logaritmos adquieren de esta forma sentido y dejan de ser simples propiedades a memorizar.

Por otro lado, no podemos olvidar uno de los apartados algebraicos más importantes de las matemáticas; los polinomios junto con sus operaciones y propiedades.

1. POTENCIAS

En este apartado aprenderás a escribir, operar y manejar potencias. Presta especial atención a las potencias de exponente negativo, para trabajar con ellas necesitarás recordar las fracciones

1.1. POTENCIA DE BASE A Y EXPONENTE N

Imprescindible

La potencia es un modo abreviado de escribir un producto de un número por sí mismo.

Se denomina **potencia de base a y exponente n** al producto de n factores iguales al número a:

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a$ a^n se lee "a elevado a n".

Ejemplo

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, donde a = 3 y n =3

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, donde a= -2 y n = 3

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$, donde a = -2 y n = 4.

1.2. USO DE LA NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para facilitar el manejo, tanto de números muy grandes como de números muy pequeños, se emplea la denominada notación científica, que consiste en expresar dichos números mediante la siguiente expresión:

$x \cdot 10^n$, siendo n un número real.

Ejemplo

La notación científica de:

- $30.000.000 = 3 \cdot 10^7$.
- $0{,}0000006 = 6 \cdot 10^{-7}$.

Las operaciones con estas notaciones científicas se realizan como si fueran potencias con igual base. A continuación, se indican algunos ejemplos de suma, resta, producto y cociente.

Suma

$$6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 = 60 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3 = (60 + 5) \cdot 10^3 = 65 \cdot 10^3.$$

Resta

$$6 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^3 = 60 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 = (60 - 5) \cdot 10^3 = 55 \cdot 10^3.$$

Producto

$$6 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^3 = (6 \cdot 5) \cdot 10^{4+3} = 30 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10^8.$$

Cociente

$$(10 \cdot 10^4) / (5 \cdot 10^3) = (10 / 5) \cdot 10^{4-3} = 2 \cdot 10 = 20.$$

Imprescindible

Signo de la potencia:

Si la base a tiene signo +, el resultado siempre será positivo. Si la base a tiene signo negativo, el signo del resultado dependerá del exponente. Si el exponente es par, el resultado tendrá signo positivo. Si el exponente es impar, el resultado tendrá signo negativo.

1.3. OPERACIONES CON POTENCIAS

Antes de comenzar a operar con potencias es necesario ver qué propiedades verifican.

Las enumeramos a continuación:

Es distributiva respecto al producto

Ees decir, si elevamos un producto a una potencia el resultado es el mismo que si elevamos a dicha potencia cada uno de los factores y los multiplicamos. Matemáticamente lo expresaremos:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Por ejemplo, vamos a realizar la siguiente potencia: $(3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$.

Si ahora aplicamos esta propiedad vamos a comprobar que el resultado no varía:

$$(3 \cdot 2)^2 = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36.$$

Es distributiva respecto al cociente

Es decir, si elevamos un cociente a una potencia el resultado es el mismo que si elevamos a dicha potencia numerador y denominador y dividimos los resultados. Matemáticamente lo expresaremos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Por ejemplo, vamos a realizar la siguiente potencia: $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = (3)^2 = 9$.

Si ahora aplicamos esta propiedad vamos a comprobar que el resultado no varía:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6^2}{2^2} = \frac{36}{4} = 9.$$

Sin embargo, en general, la potencia no es distributiva ni respecto a la suma ni a la resta:

$$(a+b)^m \neq a^m + b^m$$

$$(a-b)^m \neq a^m - b^m$$

Veámoslo:

Para la suma: $(2+3)^2 = 5^2 = 25$, sin embargo $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \neq 25$.

Análogamente para la resta: $(4-1)^2 = 3^2 = 9$,

Sin embargo: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15 \neq 9$.

1.3.1. PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

En este caso, el resultado se obtiene dejando la misma base y sumando los exponentes.

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

Ejemplo:

$$(-5)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^3 = (-5)^7$$

En el caso de que las bases sean diferentes, no se puede hacer de esta manera.

1.3.2. División de potencias de la misma base

El resultado se obtiene dejando la misma base y restando al exponente del numerador el del denominador.

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

Ejemplo:

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

1.3.3. Potencia de una potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Ejemplo:

$$[(-5)^2]^3 = (-5)^6$$

1.3.4. Potencia de un producto

En este caso, se eleva cada uno de los factores a dicho exponente.

$$(x \cdot y \cdot z)^a = x^a \cdot y^a \cdot z^a$$

Ejemplo:

$$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$$

1.3.5. Potencia de una fracción

En este caso se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$$

1.3.6. POTENCIA DE EXPONENTE CERO

Toda potencia que tenga de exponente el 0 es igual a 1:

$$a^0 = 1$$

Excepto si a vale cero, en cuyo caso esta potencia no está definida.

Ejemplo:

$$3^0 = 1$$

$$(2.197)^0 = 1$$

$$(-126)^0 = 1$$

1.4. POTENCIAS CON EXPONENTES NEGATIVOS

Una potencia con exponente negativo es igual a la unidad dividida por la potencia con exponente positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

Por lo tanto, las potencias con exponente negativo también cumplen las propiedades de las potencias con exponente positivo.

Recomendación

Las operaciones con muchos signos pueden ser problemáticas. Practica con los ejercicios del tema.

+ Info

En el siguiente vídeo vamos a ofrecerte una explicación del método de factorización de un número natural en sus divisores primos.

(Tienes el vídeo en el Campus virtual).

Importante

En este vídeo veremos las propiedades de las potencias.

(Tienes el vídeo en el Campus virtual).

2. RAÍCES

La operación inversa de la potencia es la raíz, por ello vamos a trabajar las raíces, sus propiedades y las operaciones que con ellas podemos realizar.

2.1. DEFINICIÓN DE RAÍZ

Podemos definir la raíz como la operación inversa de la potencia, así, en la potencia teníamos dos elementos, la base y el exponente, ahora, en la raíz encontramos el índice de la raíz (n) y el radicando (a): $\sqrt[n]{a}$.

Por ejemplo, en la raíz $\sqrt[3]{7}$, el índice de la raíz es 3 y el radicando es 7.

Atención

Cuando n = 2, entonces a la raíz se denomina raíz cuadrada. Normalmente, en las raíces cuadradas no se suele indicar el índice sobre el signo de raíz.

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = b$$

Cuando n = 3, entonces a la raíz se denomina raíz cúbica.

De esta definición de raíz, podemos deducir que la raíz enésima de un número es otro que al elevarlo al índice de la raíz nos da como resultado el radicando:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Por ejemplo, ¿Cuál es la $\sqrt[3]{8}$?. Estamos buscando un valor que al elevarlo a 3 nos dé como resultado 8, es decir, 2, puesto que $2^3 = 8$, así, $\sqrt[3]{8} = 2$.

2.2. RAÍCES Y POTENCIAS

El símbolo $\sqrt[n]{\ }$ quiere indicar que a está elevado al exponente $\frac{1}{n}$. Por lo tanto, es otra manera de indicar la expresión $\sqrt[n]{a} = b$ es $a^{1/n} = b$. Con ello, podemos tratar las raíces como si fueran potencias.

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(5^{1/2}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = 5$$

Si el radicando estuviera elevado a un exponente m, este iría en el numerador del exponente global.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{5^2} = 5^{2/4} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$$

2.3. PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAÍCES

El valor de una raíz no varía si se multiplica o se divide por un mismo número, tanto al índice como al exponente del radicando.

Ejemplo:

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3}$$

Ambos son equivalentes.

2.4. REDUCCIÓN DE RAÍCES A ÍNDICE COMÚN

Para realizar ciertas operaciones con raíces precisaremos que tengan el mismo índice, así pues, es muy importante que aprendas a reducir varias raíces a índice común.

En primer lugar, deberemos calcular el índice común a todas las raíces, para ello calcularemos el mínimo común múltiplo de los índices.

A continuación, debemos ajustar los radicandos, para ello dividiremos el índice común entre el índice original. Elevaremos el radicando de la raíz original al valor resultante de esta operación.

Vamos a ver un ejemplo práctico que nos ayude a entender esto.

2.4.1. EJEMPLO

Vamos a reducir a índice común las raíces $\sqrt{5x^2}$; $\sqrt[4]{3\cdot(x+y)}$; $\sqrt[8]{3^2}$, donde x e y representan dos números enteros positivos.

En primer lugar, calculamos el mínimo común múltiplo de los tres índices, 2, 4, 8: m. c. m. (2, 4, 8) = 8.

Ahora ajustaremos los radicandos:

- $\sqrt{5x^2}$: El índice original es 2, luego calculamos el cociente 8: 2 = 4. Debemos elevar el radicando a este valor:

$$\sqrt{5x^2} = \sqrt[8]{\left(5x^2\right)^4} = \sqrt[8]{5^4 x^8}$$

- $\sqrt[4]{3\cdot(x+y)}$: El índice original es 4, luego calculamos el cociente 4: 2 = 2. Debemos elevar el radicando a este valor:

$$\sqrt[4]{3\cdot(x+y)} = \sqrt[8]{\left(3\cdot(x+y)\right)^2} = \sqrt[8]{3^2\cdot(x+y)^2}$$

- $\sqrt[8]{3^2}$: El índice original es 8, que coincide con el índice común, por lo que esta raíz no necesita ninguna modificación.

2.5. RAÍZ DE UN PRODUCTO

Al igual que sucedía con las potencias, la raíz es distributiva respecto al producto, es decir, si el radicando es un producto, el resultado es el mismo que si calculamos por separado las raíces de cada uno de los factores y los multiplicamos.

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8\cdot 27} = \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

$$\sqrt[3]{8\cdot 27} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3} = 2\cdot 3 = 6$$

2.6. RAÍZ DE UN COCIENTE

Análogamente, la raíz es distributiva respecto al cociente, es decir, si el radicando es una división, el resultado es el mismo que si calculamos por separado las raíces de cada uno de los factores y los dividimos.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

2.7. POTENCIA DE UNA RAÍZ Y RAÍZ DE UNA POTENCIA

Para calcular la potencia de una raíz basta elevar el radicando a la potencia, es decir, el resultado es una raíz con el mismo índice en la que solo varía el radicando.

$$\left(\sqrt[b]{a}\right)^c = \sqrt[b]{a^c}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = 3^{4/2} = 3^2 = 9$$

2.8. RAÍZ DE UNA RAÍZ

En ocasiones podemos encontrarnos una raíz dentro de otra raíz, en ese caso, el resultado es una raíz con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices de las dos raíces originales:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b\cdot c]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$$

Este caso también se podría haber resuelto de la siguiente manera:

$$\sqrt[2]{256} = 16; \quad \sqrt[4]{\sqrt[2]{256}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

2.9. EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UNA RAÍZ

A la hora de realizar operaciones con raíces, siempre intentaremos presentar un resultado lo más sencillo posible, es por ello que procuraremos que el radicando esté simplificado. Para ello, intentaremos extraer los factores que podamos de la raíz.

En primer lugar, debemos de descomponer el radicando en factores, expresando estos en forma de potencias. Para extraer un factor, es necesario que el exponente sea múltiplo del índice de la raíz.

Ahora, si podemos sacar un factor de la raíz, fuera de ella tendrá:

- La misma base.
- El exponente será el cociente entre el exponente que tenía dentro de la raíz y el índice de dicha raíz.

Por ejemplo: $\sqrt{16}$, en primer lugar factorizamos 16 en potencias de números primos, obteniendo $\sqrt{16} = \sqrt{2^4}$. Vemos que el exponente del radicando es 4, que es múltiplo del índice de la raíz, 2, luego podemos extraer este factor:

$$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 2$$

¿Qué sucede si el exponente no es múltiplo del índice de la raíz? En ese caso aplicaremos las propiedades de las potencias, utilizando el producto de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia con la misma base en la que el exponente es la suma de los exponentes, y solo podremos extraer la potencia que sea múltiplo del índice, quedando la otra dentro de la raíz. Así:

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2^1} = 2^{\frac{4}{2}}\sqrt{2^1} = 2^2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{a^6 \cdot b^3 \cdot c} = a^{6/3} \cdot b^{3/3} \cdot \sqrt[3]{c} = a^2 \cdot b \cdot \sqrt[3]{c}$$
$$\sqrt[2]{2.016} = \sqrt[2]{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} = \sqrt[2]{2^4 \cdot 2^1 \cdot 3^2 7} = 2^{4/2} \cdot 3^{2/2} \cdot \sqrt[2]{2 \cdot 7} =$$
$$2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[2]{14} = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[2]{14} = 12 \cdot \sqrt{14}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Extraer los factores que se puedan fuera de la siguiente raíz:

$$\sqrt[7]{\frac{a^{15}\cdot b^{8}}{c^{21}}}\ .$$

Solución:

$$\frac{a^2\cdot b}{c^3}\sqrt[7]{a\cdot b}\ .$$

2.10. INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN UNA RAÍZ

También podemos encontrarnos en la situación de que para realizar una operación con raíces necesitamos introducir aquellos factores que estén fuera de las raíces. Así, cada factor que introduzcamos será, dentro de la raíz, una potencia, en la que la base es el factor que estaba fuera de la raíz y el exponente el índice de la raíz, es decir, basta elevar dicho factor al índice de la raíz.

Por ejemplo:

$$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$$

$$2x^3y^2\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{2^3\cdot x^9\cdot y^6\cdot z^2}$$

2.11. OPERACIONES CON RAÍCES

Con las raíces podemos realizar las operaciones habituales utilizadas con números reales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división de raíces. Además, podemos también realizar una operación que nos será de utilidad a la hora de realizar cálculos en los que aparezcan raíces en los denominadores, se trata de la racionalización.

2.11.1. SUMA Y RESTA DE RAÍCES

La suma y la resta de raíces solo puede realizarse cuando estas son semejantes, es decir, cuando tienen el mismo índice y tienen el mismo radicando. Cuando nos encontremos en esta situación, realizaremos las operaciones con los coeficientes de las raíces y no modificaremos la raíz. Así:

- Podemos realizar la operación $\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(1+3-2)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.
- Sin embargo no podemos realizar la operación $\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}$, puesto que, aunque las tres raíces tienen el mismo índice los radicandos son diferentes.

Ejemplo:

$$\sqrt{x^3}+2\sqrt{x^3}+3\sqrt{x^3}=(1+2+3)\cdot\sqrt{x^3}=6\sqrt{x^3}$$

$$12\cdot\sqrt[3]{x^4}-7\cdot\sqrt[6]{x^8}+2\cdot\sqrt[9]{x^{12}}=(12-7+2)\cdot\sqrt[3]{x^4}=7\cdot\sqrt[3]{x^4}$$

$$\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[6]{x^8}=\sqrt[9]{x^{12}}$$

son equivalentes.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Realiza la siguiente operación:

$$3\cdot\sqrt{a^2\cdot x}+6\cdot\sqrt{x}-2\cdot\sqrt{a^4}\cdot x\,.$$

Solución:

$$(3\cdot a+6-2\cdot a^2)\cdot\sqrt{x}\,.$$

2.11.2. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RAÍCES

Para multiplicar o dividir varias raíces, basta que tengan el mismo índice. Si las raíces tienen índices diferentes, antes de realizar la operación deberemos reducirlos todos a índice común.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2\cdot 5\cdot 8}=\sqrt[3]{80}$$

Como $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5^2}$ no tienen el mismo índice, luego habrá que reducirlos a índice común: m. c. m. (2, 3, 3) = 6.

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{7^2}\cdot\sqrt[6]{5^4}=\sqrt[6]{5^3\cdot 7^2\cdot 5^4}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[7]{4^2}}=\frac{\sqrt[14]{12^7}}{\sqrt[14]{4^4}}=\sqrt[14]{\frac{12^7}{4^4}}$$

m.c.m. (2, 7) = 14

2.11.3. Racionalización de denominadores

Una de las operaciones que podemos realizar con raíces es la división, así, en una fracción, podemos encontrarnos en el denominador una raíz, lo cual nos limitará mucho a la hora de operar con otras fracciones. La racionalización es el proceso por el que se eliminan las raíces que existen en el denominador de una fracción.

Nos podemos encontrar con varios casos, dependiendo del índice de la raíz que aparece en el denominador. Según en qué caso nos encontremos, se utilizará un método diferente.

Caso 1

Cuando en el denominador la raíz tiene índice dos, es decir, nos encontramos con una raíz cuadrada. En este caso, multiplicaremos tanto el numerador como el denominador por la misma raíz que tenemos en el denominador:

$$\frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{m \cdot \sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^2} = \frac{m \cdot \sqrt{n}}{n}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

Caso 2

Cuando en el denominador la raíz tiene índice mayor que dos. Se resuelve multiplicando tanto el numerador como el denominador por la raíz en la que la potencia del radicando sea el índice de la raíz menos la potencia que tenía, se realizará de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\sqrt[b]{x^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[b]{x^{b-n}}}{\sqrt[b]{x^n} \cdot \sqrt[b]{x^{b-n}}} = \frac{a \cdot \sqrt[b]{x^{b-n}}}{\sqrt[b]{x^n \cdot x^{b-n}}} = \frac{a \cdot \sqrt[b]{x^{b-n}}}{\sqrt[b]{x^b}} = \frac{a \cdot \sqrt[b]{x^{b-n}}}{x}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2}}{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3^5}} = \frac{5}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{5}{3 \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{3 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{3 \cdot \sqrt[3]{3^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{3 \cdot 3} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{9}$$

Caso 3

Cuando en el denominador no está la raíz sola, sino que nos encontramos con un binomio, es decir, con una expresión del tipo a + b o a – b donde a, b o ambos son radicales. En este caso, racionalizaremos la fracción utilizando uno de los productos notables, en concreto la suma por diferencia: El producto (a + b)·(a - b) es a^2 - b^2. Así, lo que estamos haciendo es multiplicar siempre por el conjugado del denominador, el conjugado de a + b es a - b y el de a - b es a + b.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{2}+5}=\frac{3(\sqrt{2}-5)}{(\sqrt{2}+5)\cdot(\sqrt{2}-5)}=\frac{3(\sqrt{2}-5)}{(\sqrt{2})^2-5^2}=\frac{3(\sqrt{2}-5)}{4-25}=\frac{3(\sqrt{2}-5)}{-23}=\frac{3(5-\sqrt{2})}{23}$$

$$\frac{11}{2-\sqrt{3}}=\frac{11\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{11\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{11\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3}=\frac{11\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{1}=11\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Ejemplo

Llegados a este punto vamos a darte explicación, a través de este vídeo, de la forma de extraer de un radical un factor del radicando.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

3. LOGARITMOS Y EXPONENCIALES

Hemos visto las potencias, donde la base y el exponente eran números, ¿qué sucede si el exponente no es un valor concreto sino una incógnita? Es decir, ¿qué ocurre cuando elevamos un número a x? Nos encontramos con una nueva función, la exponencial. Vamos a estudiarla en este apartado junto con su inversa, el logaritmo.

3.1. DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Llamamos **logaritmo en base a de x** (representado como $\log_a x$) al valor al que debe elevarse la base a para obtener x.

Ejemplo:

$$x = \log_2 8$$

$$2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

Básico

Solamente tienen logaritmo los números positivos.

- El logaritmo de la base a ($\log_a a$) es 1.
- El logaritmo de 1 es cero.
- Los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos y crecen indefinidamente a medida que crece el número.
- Los logaritmos de los números menores que 1 son negativos y crecen indefinidamente, en valor absoluto, a medida que decrece el número.

Llamamos **logaritmos decimales** a aquellos cuya base es 10 y **logaritmos neperianos** o naturales a aquellos cuya base es el número e.

3.2. LOGARITMO DE UN PRODUCTO

El logaritmo de un producto de varios factores es igual a la suma de los logaritmos, en la misma base, de cada uno de los factores:

$$\log_x (a \cdot b \cdot c) = \log_x a + \log_x b + \log_x c$$

3.2.1. EJEMPLO

Calcula el logaritmo de 100·1.000:

$$\log_{10} (100 \cdot 1.000) = \log_{10} 100.000 = 5$$

O de acuerdo con el teorema anterior:

$$\log_{10} (100 \cdot 1.000) = \log_{10} 100 + \log_{10} 1.000 = 2 + 3 = 5$$

3.3. LOGARITMO DE UN COCIENTE

El logaritmo de un cociente en una base dada es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor en la misma base:

$$\log_x (a/b) = \log_x a - \log_x b$$

Ejemplo:

Calcula el $\log_2 (8/4)$:

Directamente: $\log_2 (8/4) = \log_2 2 = 1$

O de acuerdo con lo expresado: $\log_2 (8/4) =$

$= \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$

3.4. LOGARITMO DE UNA POTENCIA

El logaritmo de una potencia en una base dada es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_x a^m = m \cdot \log_x a$$

Ejemplo:

Calcula el $\log_3 (9^2)$:

$$\log_3 (9^2) = 2 \cdot \log_3 9 = 2 \cdot 2 = 4$$

3.5. LOGARITMO DE UNA RAÍZ

El logaritmo de una raíz en una base dada es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividida por el índice de la raíz:

$$\log_x \sqrt[m]{a} = \log_x a^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log_x a$$

Ejemplo:

Calcula $\log_5 \sqrt{25}$:

$$\log_5 \sqrt{25} = \frac{\log_5 25}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

3.6. CAMBIO DE BASE

El logaritmo de un número en una base dada es igual al cociente entre el logaritmo del número y el logaritmo de la base, tomando para esto cualquier base (siempre y cuando se tome la misma para ambos):

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

Para calcular $\log_2 32$:

$$\log_2 32 = \frac{\log\ 32}{\log\ 2} = \frac{1,50515}{0,30103} = 5$$

3.7. FUNCIONES EXPONENCIALES

En términos generales, una función es exponencial si se expresa de la forma $F(x)=k \cdot a^x$, siendo a y k números reales. Se suele reservar el término función exponencial para la inversa de la función logaritmo natural.

Se trata de funciones que solo pueden tener existencia en valores reales positivos.

En matemáticas más avanzadas la utilización de logaritmos neperianos es muy abundante, por lo que es muy importante saber aplicar un correcto uso de las propiedades de las funciones logarítmicas.

EXPONENCIALES	LOGARÍTMICAS
Función que a cada nº real le asocia un real positivo : ℜ→ℜ+ $exp_a(x) = a_x$	Función que a cada nº real positivo le asocia un real : ℜ+→ℜ $log_a(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad ab = x$
Si a > 1 creciente Si 0 < a < 1 decreciente	Si a > 1 creciente Si 0 < a < 1 decreciente
$exp_a(0) = a_0 = 1$ $exp_a(x + y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)$ $exp_a(x - y) = exp_a(x) : exp_a(y)$ $exp_a(k \cdot x) = [exp_a(x)]k$	$log_a(1) = 0$ $log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$ $log_a(x / y) = log_a(x) - log_a(y)$ $log_a(xk) = k \cdot log_a(x)$
En ambos casos la base es a ∊ ℜ+ , a ≠ 1	En ambos casos la base es a ∊ ℜ+, a ≠ 1
	Cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
Si a = 10: $exp_{10}(x) = 10x$ Si a = e: $exp_e(x) = ex$	Logaritmo decimal: $log_{10}(x) = log(x)$ Logaritmo neperiano: $log_e(x) = ln(x)$

+ Info

En el siguiente vídeo, que hemos preparado para ti, te vamos a dar una explicación de las propiedades matemáticas de la función exponencial.

(Tienes el vídeo en el Campus virtual).

4. POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión algebraica compleja formada por sumas o restas de varios monomios. Con los polinomios también podemos realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación o división entre otras. Para dividir dos polinomios con unas características concretas puedes utilizar la regla de Ruffini, recuerda ver el vídeo.

4.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresión algebraica

Es un conjunto de letras y números ligados entre sí por operaciones algebraicas, que son la suma, resta, producto, cociente, raíz y potencia.

$$3x^2 - 2ya; \quad \sqrt{\frac{4x^2b}{7a}}$$

Valor numérico de una expresión algebraica

Es el número que se obtiene como resultado de sustituir las letras por sus valores correspondientes y de realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo:

Sea la expresión $\frac{3x-2y^2}{3z}$. Calcula el valor numérico para x = 2, y = -2, z = -1:

$$\frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)^2}{3 \cdot (-1)} = \frac{6-8}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Expresiones algebraicas equivalentes

Son las que tienen igual valor numérico para cualquier conjunto de valores asignados a sus letras.

Ejemplo:

$(x + 2y) \cdot (x - 2y)$ es equivalente a la expresión $x^2 - 4y^2$ para cualquier valor que se dé a x e y.

Veámoslo para un valor particular: si x = 2, y = 3,

$$(x + 2y) \cdot (x - 2y) = (2 + 6) \cdot (2 - 6) = 8 \cdot (- 4) = -32$$

$$x^2 - 4y^2 = (2)^2 - 4 \cdot (3)^2 = 4 - 36 = -32$$

4.2. MONOMIOS. OPERACIONES CON MONOMIOS

Antes de comenzar a operar con monomios debemos tener muy claro de qué estamos hablando, así que pasamos en primer lugar a definir este concepto.

4.2.1. DEFINICIONES

Un monomio es toda expresión algebraica en la que no hay ni sumas ni restas.

Ejemplos:

$$3x^2y; \quad \sqrt{4x}; \quad \frac{3x}{2y}$$

En todo monomio, se distinguen dos partes:

- El **coeficiente:** Es la parte numérica con su signo.
- **Parte literal:** Es el conjunto de letras.

Se denomina **grado del monomio** a la suma de los exponentes de la parte literal.

En los ejemplos anteriores, 3, $\sqrt{4}$, y 3/2 son coeficientes, x^2y;, x/y son parte literal.

Imprescindible

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Ejemplo:

$$3x^2y, \quad 15x^2y, \quad \frac{3}{8}x^2$$

Ejemplo:

$$3x^2y^2za; \text{ Grado} = 2 + 2 + 1 + 1 = 6$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Del siguiente monomio indica cuál es el grado del monomio, su coeficiente y su parte literal. $-2x^5 y^2 z^3$.

Solución:

Grado monomio: 10.

Coeficiente: -2.

Parte literal: $x^5 y^2 z^3$.

4.2.2. SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

Para sumar o restar monomios, es condición necesaria que sean semejantes. El resultado es otro monomio semejante.

Ejemplo:

$$4ax^2y - 12ax^2y + 3ax^2y = (4 - 12 + 3)ax^2y = -5ax^2y$$

Recomendación

Es importante que recuerdes las operaciones con potencias. Te serán de gran utilidad.

4.2.3. Producto y potencia de monomios

El producto de dos o más monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes de los monomios y, por parte literal, el producto de las partes literales de los mismos.

Ejemplo:

$$(-9x^2aby^2)\cdot(3xya) = -27 \cdot x^{2+1} \cdot a^{1+1} \cdot b^{1+0} \cdot y^{2+1} = 27x^3a^2by^3$$

Para elevar un monomio a una potencia, se eleva cada uno de los términos a dicha potencia.

4.2.4. Cociente de monomios

Para dividir un monomio por otro, se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las letras.

Ejemplo:

$$\frac{-\frac{3}{5}a^3b^2c}{\frac{2}{5}a^2bc^2d} = -\frac{3}{2}a^{3-2}\ b^{2-1}\ c^{1-2}\ d^{0-1} = -\frac{3}{2}abc^{-1}d^{-1} = -\frac{3ab}{2cd}$$

4.2.5. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE MONOMIOS

El **máximo común divisor (m. c. d.)** de un conjunto de monomios es el monomio de máximo grado que puede dividir a todos y cada uno de los monomios del conjunto.

El **coeficiente del m. c. d.** será igual al m. c. d. de los coeficientes si estos son enteros, pero si hay alguno que no lo es, entonces se toma el uno como coeficiente. La parte literal del m. c. d. será igual a las letras comunes a todos los monomios y con el menor exponente.

Ejemplos:

m.c.d. de $5a^2bc$, $25a^4b^2$, $15a^3bd$

Solución: $5a^2b$.

m.c.d. de $\frac{1}{3}a^4b^3c^2$, $2ab^2c^3$, $12a^3bc^2$

Solución: abc^2.

El **mínimo común múltiplo (m. c. m.)** de un conjunto de monomios es el menor de los múltiplos que es común a todos los monomios.

El **coeficiente del m. c. m.** será igual al m. c. m. de los coeficientes si estos son enteros, pero si hay alguno que no sea entero, entonces se toma el uno como coeficiente. La parte literal del m. c. m. será igual a las letras comunes y no comunes elevadas a su máximo exponente.

Ejemplo:

m.c.m. de $5a^2bc$, $25a^4b^2$, $15a^3bd$

Solución: $75a^4b^2cd$.

m.c.m. de $\frac{1}{3}a^4b^3c^2$, $2ab^2c^3$, $12a^3bc^2$

Solución: $a^4b^3c^3$.

4.3. POLINOMIOS

Un **polinomio** es una suma algebraica de varios monomios que no son semejantes entre sí.

Si tenemos $a_0, \ldots, a_n$ constantes con a_n distinto de cero, para $n > 0$, entonces un polinomio de grado n en la variable x es un objeto de la forma:

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n.$$

Las constantes $a_0 \ldots a_n$ se llaman coeficiente del polinomio. A a_0 se le llama coeficiente constante y a a_n, coeficiente principal.

Nota

Cuando el coeficiente principal es 1, el polinomio se llama mónico o normado.

A cada uno de los monomios se le denomina **término del polinomio.** Si un polinomio consta de dos términos, se denomina **binomio.** Si tiene tres términos, se le denomina **trinomio.**

Grado de un polinomio, respecto a una letra, es el máximo exponente con que aparece dicha letra en el polinomio. Por ejemplo, en el polinomio $x^4a^2bc+2ax$ el grado es 4 respecto a la "x"; grado 2, respecto a la "a"; y grado 1, respecto a la "b" y la "c".

Los polinomios suelen escribirse de tal manera que los exponentes de una letra aparezcan ordenados de mayor a menor, o bien de menor a mayor. En el ejemplo anterior, el exponente de la x va de mayor a menor.

Cuando el exponente de una letra varía desde su valor mayor hasta cero, sin faltar ningún grado intermedio, se dice que el polinomio es **completo**; es el caso de la x en el siguiente ejemplo: X^3+2x^2+x+1. De manera que, en ese caso, se puede decir que es un polinomio completo y que está ordenado de manera decreciente respecto a la letra x.

Valor numérico de un polinomio P(x) para x = a es el valor que se obtiene al sustituir la x por el número a y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio (P(a)).

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Halla el valor numérico de $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, para x = -2.

Solución:

$Q(-2) = 2 \cdot (-2)3 - 3 \cdot (-2)2 + 6 \cdot (-2) - 2 = -16 - 12 - 12 - 2 = - 42.$

4.3.1. SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Se suman o restan los términos semejantes entre sí. Hay que recordar que dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal. Los polinomios que se suman o restan aparecen inicialmente entre paréntesis.

Ejemplo:

$$(7x^2 + 3x^2y - 2x^2y^2) - (2x^2 - 2x^2y + 3x^2y^2) + (3x^2 + 4x^2y - 8x^2y^2) =$$

$$= 7x^2 + 3x^2y - 2x^2y^2 - 2x^2 + 2x^2y - 3x^2y^2 + 3x^2 + 4x^2y - 8x^2y^2 =$$

$$= 7x^2 - 2x^2 + 3x^2 + 3x^2y + 2x^2y + 4x^2y - 2x^2y^2 - 3x^2y^2 - 8x^2y^2 =$$

$$= 8x^2 + 9x^2y - 13x^2y^2$$

4.3.2. PRODUCTO DE POLINOMIOS

Producto de un monomio por un polinomio

En este caso, se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

Ejemplo:

$$(3a^3x) \cdot (4x^2a - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}x^2) = 12a^4x^3 - \frac{9}{2}a^4bx - \frac{9}{2}x^3$$

Producto de dos polinomios

Se multiplica cada uno de los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro. Posteriormente, se agrupan en términos semejantes y se reducen.

Ejemplo:

$$(5x^2 - xy + 2y^2)\cdot(x - 2y) = 5x^3 - 10x^2y - x^2y + 2xy^2 + 2y^2x - 4y^3 =$$
$$= 5x^3 - 11\,x^2y + 4xy^2 - 4y^3$$

Imprescindible

Productos notables:

Son productos de polinomios, generalmente por sí mismos, que tienen una gran importancia en matemáticas.

a) Cuadrado de un binomio suma:

$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

b) Cuadrado de un binomio diferencia:

$(a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

c) Cuadrado de la suma de un trinomio:

$(a+b+c) \cdot (a+b+c) = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

d) Cubo de un binomio suma:

$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

e) Diferencia de cuadrados:

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Ejemplos:

$$(5+2)^2 = 5^2 + 2^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 = 25 + 4 + 20 = 49$$

$$(5 - 2)^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 = 25 + 4 - 20 = 9$$

$$(5 + 2) \cdot (5 - 2) = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

4.3.3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

El **polinomio de una variable x** (que se designa como P(x), Q(x), R(x), etc.) es una expresión polinómica y algebraica cuya parte literal está formada por potencias de x.

Ejemplo:

$$P(x) = 5x^2 - 3x + 2$$

División de polinomios por monomios

Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio y se suman algebraicamente los cocientes parciales.

Ejemplo:

$$\frac{4x^2y^2 - 3xy + 8xy^2}{2xy} = \frac{4x^2y^2}{2xy} - \frac{3xy}{2xy} + \frac{8xy^2}{2xy} = 2xy - \frac{3}{2} + 4y$$

Para que un polinomio sea divisible por un monomio, es indispensable que todos sus términos sean divisibles por el monomio.

División de dos polinomios

Al dividir dos polinomios, se obtiene un tercero que, multiplicado por el divisor, da como resultado el dividendo.

$$\frac{4x^2y^2 - 3xy + 8xy^2}{2xy} = \frac{4x^2y^2}{2xy} - \frac{3xy}{2xy} + \frac{8xy^2}{2xy} = 2xy - \frac{3}{2} + 4y$$

Cuando el dividendo no es divisible por el divisor, se cumple que:

Dividendo = (Divisor) · (Cociente) + Resto

Para efectuar la división se deberán tener en cuenta los siguientes puntos:

Tanto numerador como denominador se ordenan de mayor a menor exponente con respecto a una letra. Si alguno de los polinomios no fuera completo, se introduce el término o los términos que faltan poniendo 0 como coeficiente de los mismos, o bien se puede dejar un espacio en blanco en el lugar correspondiente; por ejemplo:

$3x^4 + 2x + 2$ se puede poner como $3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 2$

Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y el resultado es el primer término del cociente.

Se multiplica este primer término del cociente por el divisor y el resultado se resta al dividendo.

Con el nuevo dividendo parcial obtenido, se procede según el segundo y tercer paso.

Se continúa hasta que se obtenga un resto nulo (división exacta) o de grado inferior al divisor, que será el resto.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrl|l}
 & 9x^3 & +3x^2 & +6x & +12 & 3x+3 \\ \cline{6-6}
+ & -9x^3 & -9x^2 & & & 3x^2-2x+4 \\ \cline{2-5}
 & 0 & -6x^2 & +6x & & \\
 & & 6x^2 & +6x & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & +12x & +12 & \\
 & & & -12x & -12 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$\frac{9x^3 + 3x^2 + 6x + 12}{3x + 3} = 3x^2 - 2x + 4$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
\quad 4x^3 + x^2 + 3x - 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
+ \; -4x^3 + 8x^2 & 4x^2 + 9x + 21 \\ \cline{1-1}
\quad 0 \quad + 9x^2 + 3x & \\
\qquad\quad - 9x^2 + 18x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 \quad + 21x - 10 & \\
\qquad\qquad\quad - 21x + 42 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 \quad 32 &
\end{array}$$

Vemos que el resto, al operar, nos sale 32. Si sustituimos en el polinomio por 2, obtenemos el mismo resultado.

4.4. REGLA DE RUFFINI

Esta regla se utiliza para facilitar la división entre un polinomio P(x) ordenado en “x” y un binomio de la forma x - a, donde a es un número.

El grado del polinomio cociente va a ser una unidad inferior al del dividendo.

La regla de Ruffini se aplica de la siguiente manera:

- **a)** Se ordena el polinomio de manera decreciente en exponentes. Se pondrá cero como coeficiente de aquellas potencias que falten.
- **b)** El coeficiente del primer término del cociente coincide con el primer término del dividendo. Los demás coeficientes del cociente se obtienen sumando algebraicamente el producto del anterior por a.

c) El resto es la suma del término independiente del polinomio (el que no lleva x) más el producto del último coeficiente obtenido por el número a. En el caso de que este resto sea igual a cero, se dice que la división es exacta.

Atención

Cuando el divisor del binomio en vez de ser de la forma (x - a) es de la forma (x + a), se aplica la misma regla teniendo en cuenta que (x + a) se puede considerar que es igual a (x-(-a)). Por lo tanto, hay que tener el cuidado de poner a la izquierda el término -a y no el a.

$$(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 6) : (x - 3)$$

Se puede observar que el polinomio del numerador está ya ordenado de manera decreciente y no le falta ningún término.

Se escriben solo los coeficientes con sus signos. El término a del denominador se pone a la izquierda; en este caso, a = 3.

El primer coeficiente del dividendo será igual al primero del cociente; en este caso, el 1.

	1	-3	2	-4	6
3					

Ahora se pasa a operar tal como indican los puntos b y c.

	1	-3	2	-4	6
3		3	0	6	6
	1	0	2	2	12
					Resto

$1 \cdot 3 = 3$	$-3 + 3 = 0$
$0 \cdot 3 = 0$	$2 + 0 = 2$
$2 \cdot 3 = 6$	$-4 + 6 = 2$
$2 \cdot 3 = 6$	$6 + 6 = 12$

El cociente es $1x^3 + 0x^2 + 2x + 2 = x^3 + 2x + 2$.

El resto es 12.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula por Ruffini la siguiente división:

$(x^4 - 2x^2 + 3x - 4) : (x + 2)$.

Solución:

El cociente es $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

El resto es -2

	1	0	-2	3	-4
-2		-2	4	-4	2
	1	-2	2	-1	-2
					Resto

4.4.1. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE RUFFINI

El resto que se obtiene al dividir un polinomio P(x) por el binomio (x - a) es el valor numérico del polinomio para x = a.

Demostración: ya vimos que Dividendo = (Divisor)x(Cociente) + Resto. El dividendo es P(x), el divisor es (x - a) y al polinomio que resulta como cociente se le denomina C(x); por lo tanto:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + Resto$$

Si se sustituye la x por el valor de a, se tiene:

$$P(a) = (a - a)\, C(a) + Resto$$

$$P(a) = 0 \cdot C(a) + Resto$$

$$P(a) = Resto$$

Se demuestra igualmente que el resto que se obtiene cuando se divide un polinomio P(x) por el binomio (x + a) es el valor numérico del polinomio para x = -a.

Si el valor numérico de un polinomio P(x) para x = a es igual a cero, ello implica -según lo visto anteriormente- que el resto de la división entre P(x) y (x - a) es igual a cero y, por lo tanto, la división es exacta. Así, ya tenemos una consecuencia importante; si el valor numérico de un polinomio P(x) para x = a es igual a cero, esto indica que P(x) es divisible por (x - a). Se demuestra igualmente que, si el valor numérico de un polinomio P(x) para x = -a es igual a cero, ello implica que P(x) es divisible por (x + a).

Ejemplo:

Comprobar que $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$ es divisible por $(x - 2)$.

$$P(2) = 3{\cdot}(2)^2 - 4 \cdot 2 - 4 = 12 - 8 - 4 = 0$$

Al valor de a que hace que el valor numérico de P(x) sea igual a cero se le denomina **raíz, solución o cero** del polinomio.

4.5. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS

Descomponer un polinomio en factores quiere decir transformar un polinomio en un producto de polinomios de grado inferior (monomios, binomios y trinomios, normalmente).

Se pueden utilizar para ello varios métodos: extracción de factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados y descomposición conociendo los ceros del polinomio. El método a utilizar dependerá de cada caso.

4.5.1. EXTRACCIÓN DEL FACTOR COMÚN

Consiste en sacar fuera del polinomio el m. c. d. de los términos del polinomio.

Ejemplo

- **Ejemplo 1:** $3xy + 2y - 3x^2y$. En este caso, vemos que el factor "y" es el único factor común en todos los términos:

  $3xy + 2y - 3x^2y = y \cdot (3x + 2 - 3x^2)$
- **Ejemplo 2:** $4x^3y - 8x^2y^2 - 12xy$. En este caso, el factor común es $4xy$:

  $4x^3y - 8x^2y^2 - 12xy = 4xy \cdot (x^2 - 2xy - 3)$
- **Ejemplo 3:** $2x^3z - 4x^4y - 3x^5w$. Factor común: x^3:

  $2x^3z - 4x^4y - 3x^5w = x^3 \cdot (2z - 4xy - 3x^2w)$

Cuadrado de un binomio.

Puede ocurrir que el polinomio que se quiera descomponer sea el desarrollo de un cuadrado de una suma o diferencia de monomios.

Hay que recordar que:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ y que } (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ejemplo:

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy = (2x + 3y)^2 = (2x + 3y) \cdot (2x + 3y)$$

4.5.2. DIFERENCIA DE CUADRADOS

Hay que recordar que:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Ejemplo 1:

$$x^4 - 9 = (x^2 + 3) \cdot (x^2 - 3)$$

Ejemplo 2:

$$(x - 1)^2 - (x + 2)^2 = [(x - 1) + (x + 2)] \cdot [(x - 1) - (x + 2)]$$

4.5.3. Descomposición factorial de un polinomio conociendo sus ceros

Este método se basa en que sí "a" es un cero del polinomio P(x), este polinomio se puede descomponer en dos factores, uno de los cuales es (x - a). Igualmente, si "-a" es un cero de P(x), uno de los factores de la descomposición de P(x) será (x + a).

Ejemplo: descomponer $P(X) = x^2 + x - 2$ en producto de factores.

- Si se sustituye x por 1, se obtiene: $P(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$.
- Por lo tanto, el valor 1 es un cero de P(x) y (x - 1) es uno de los factores buscados.
- Para hallar el otro factor, habrá que dividir P(x) por (x - 1).
- Siguiendo la regla de Ruffini:

	1	1	-2
1		1	2
	1	2	0
			Resto

- El cociente es igual a x + 2, que es el otro factor buscado.
- Por lo tanto, $P(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2)$.

Truco

Una pista importante para hallar los ceros de un polinomio es que, en caso de haberlos y ser enteros, estos han de ser divisores del término independiente.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Descomponer $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Solución:

Divisores de - 6: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Estos son los posibles ceros del polinomio.

Probamos con el 1:

$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = 1 + 2 - 5 - 6 = -8.$

Probamos con el -1:

$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-l) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0.$

El -1 sí es un cero de P(x):

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	0
				RESTO

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x^2 + x - 6)$

Ahora hay que ver si $Q(x)= x^2 + x - 6$ se puede descomponer en factores.

Probamos con el 2: $Q(2) = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$

Por lo tanto, 2 es un cero de Q(x).

	1	1	-6
2		2	6
	1	3	0
			RESTO

$x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)$

El polinomio descompuesto: $x^3+2x^2- 5x - 6 = (x + 1)\,(x - 2)\,(x + 3)$.

4.5.4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE UN CONJUNTO DE POLINOMIOS

El m. c. d. de dos o más polinomios es el polinomio de grado máximo que sea divisor de todos y cada uno de los polinomios. Para hallarlo, se descomponen en factores los polinomios, de manera que el m. c. d. será el producto de los factores comunes con el menor exponente.

Ejemplo: halla el m. c. d. de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^3 - x^2; \quad Q(x) = yx^2 - yx; \quad R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \\ yx^2 - yx = yx \cdot (x - 1) \\ x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x - 1)^2 \end{array}\right\} \text{m. c. d.} = x \cdot (x - 1)$$

El m. c. m. de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es divisible por todos los polinomios. Para hallarlo, se descomponen en factores los polinomios, de manera que el m. c. m. será el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo

Hallar el m. c. m. de los siguientes polinomios.

$P(x) = x^3 - x^2$; $Q(x) = yx^2 - yx$; $R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

$yx^2 - yx = yx \cdot (x - 1)$

m. c. m.= $yx^2 \cdot (x - 1)^2$

$x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x - 1)^2$.

+ Info

Al finalizar el vídeo serás capaz de resolver ejercicios matemáticos aplicando las identidades notables.

(Tienes el enlace en el Campus Virtual).

Importante

En el vídeo que te proponemos que veas ahora, tienes una explicación detallada de la regla de Ruffini para la realización de cocientes entre un polinomio y un binomio.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

En este apartado encontrarás diversos ejercicios con sus soluciones para que puedas practicar.

5.1. EJERCICIOS DE POTENCIAS Y RAÍCES

Te recomendamos que hagas un esfuerzo por resolverlos antes de mirar la solución.

Ejercicio 1

Hallar el resultado de las potencias siguientes:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(-2)^5$	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
$(-3)^3$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = - 27$
11^3	$11 \cdot 11 \cdot 11 = 1.331$

Ejercicio 2

Realizar las siguientes operaciones:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(-3)^3 \cdot (-3)^{-3} \cdot (-3)^{-4}$	$(-3)^{3-2-4} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27}$
$\frac{5^{-2}}{5^{-5}}$	$5^{-2-(-5)} = 5^{-2+5} = 5^3 = 125$
$\left(3^2\right)^{-3}$	$3^{2\cdot(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$
$(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4)^{-2}$	$2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{1}{44.100}$
$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$
$\left(\frac{3^2 \cdot 3^{-3}}{4^{-2} \cdot 4^3}\right)^2$	$\left(\frac{3^{-1}}{4^1}\right)^2 = \frac{(3^{-1})^2}{(4^1)^2} = \frac{3^{-2}}{4^2} = \frac{1}{3^2 \cdot 4^2} = \frac{1}{144}$
$3^{7/3}$	$\sqrt[3]{3^7} = \sqrt[3]{3^6 \cdot 3} = 3^{6/3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^2 \cdot \sqrt[3]{3} = 9 \cdot \sqrt[3]{3}$
$\sqrt[5]{3^8}$	$3^{8/5}$
$3^{-2/5}$	$\frac{1}{3^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$
$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$	$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

Ejercicio 3

a) Extrae los factores que se puedan de la siguiente raíz:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$\sqrt[3]{\frac{a^5\cdot b^3}{c^2}}$	$\sqrt[3]{\frac{a^3\cdot a^2\cdot b^3}{c^2}}=a\cdot b=\sqrt[3]{\frac{a^2}{c^2}}$

b) Introduce factores en la siguiente raíz:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$a^6\cdot b^3\cdot\sqrt[2]{\frac{c}{a^2\cdot b}}$	$\sqrt[2]{\frac{a^{12}\cdot b^6\cdot c}{a^2\cdot b}}=\sqrt[2]{a^{10}\cdot b^5\cdot c}$

Ejercicio 4

Suma:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$2\sqrt{8}+3\sqrt{8}+\sqrt{32}$	$2\sqrt{2^3}+3\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^5}=2\sqrt{2\cdot 2^2}+3\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 2^4}=$ $2\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 3\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}=4\sqrt{2}+9\sqrt{2}+4\sqrt{2}=17\sqrt{2}$

Ejercicio 5

Racionaliza:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$\frac{7}{5\sqrt{5}}$	$\frac{7\sqrt{5}}{5\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5 \cdot 5}=\frac{7\sqrt{5}}{25}$
$\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}$	$\frac{6 \cdot \sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^2}}=\frac{6 \cdot \sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^2}}=\frac{6 \cdot \sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}}=2 \cdot \sqrt[5]{27}$
$\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$	$\frac{3 \cdot \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{3 \cdot \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3 \cdot \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}=\frac{3 \cdot \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}$

5.2. EJERCICIOS CON MONOMIOS Y POLINOMIOS

Ejercicio 1

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$3x^2 - 2xy$, para $x = -1$, $y = -2$	$3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7$

Ejercicio 2

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$\frac{3a}{b}-a^2$ para $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$	$\frac{17}{4}$

Ejercicio 3

Suma los siguientes monomios:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$\frac{a^2b}{3}+\frac{ba^2}{2}+\frac{a^2b}{4}$	$\frac{7a^2b}{12}$

Ejercicio 4

Multiplica los siguientes monomios:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(xy^2)^{-2}\cdot(xy)^3\cdot(-2x^2)^3$	$\frac{-8x^2}{y}$

Ejercicio 5

Calcula la siguiente potencia:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$\left\{\left[(-2)^3\right]^2\right\}^3$	$(-2)^{3\cdot 2\cdot 3} = (-2)^{18} =^{218}$

Ejercicio 6

Divide los siguientes monomios:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$\frac{(7a^3yx^2)}{(-2a^4y^2xz)}$	$\frac{-7x}{2ayz}$

Ejercicio 7

Halla el m. c. d. de los siguientes monomios:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$2x^2yz$, $6xyz^2$, $3xz^3$	m.c.d. = xz

Ejercicio 8

Halla el m. c. m. de los siguientes monomios:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$2x^2yz$, $6xyz^2$, $3xz^3$	m.c.m. = $6x^2yz^3$

Ejercicio 9

Reduce términos semejantes en la siguiente expresión:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(4x^2-2)-(3+2x^2)+(5x^2-3x+2)$	$4x^2-2x^2+5x^2-3x-2-3+2=-7x^2-3x-3$

Ejercicio 10

Reduce términos semejantes en la siguiente expresión:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(3 - 2x^2 - x^3) - (2 - 4x + 4x^2) + (3x^2 - x^3)$	$-x^3 - x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 3x^2 + 4x + 3 - 2 =$ $-2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

Ejercicio 11

Efectúa el siguiente producto:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(2x^2 - 3x + 1) \cdot (x - 2)$	$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Ejercicio 12

Calcula el cociente y el resto en la división:

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 10) : (x + 2)$

RESOLUCIÓN:

Se van a calcular por dos métodos:

Método 1:

$$
\begin{array}{r|l}
\;\; x^3 + 2x^2 - 5x - 10 & x + 2 \\ \cline{2-2}
+\;\; - x^3 - 2x^2 & x^2 + 0x - 5 \\ \cline{1-1}
0 \quad 0 \; - 5x \; - 10 & \\
+ 5x \; + 10 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

- Cociente = $x^2 - 5$.
- Resto = 0.

Método 2:

El divisor es de la forma (x - a), donde a = 2. Se puede aplicar la regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -5 & -10 \\
-2 & & -2 & 0 & 10 \\
\hline
 & 1 & 0 & -5 & \boxed{0}
\end{array}
$$

RESTO

- Cociente = $x^2 – 5$.
- Resto = 0.

Ejercicio 13

Calcula el cociente y el resto en la división:

$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x^2 + x - 3)$

Resolución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & -3x^2 & +x & -1 & x^2+x-3 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2+x-1 \\
\cline{1-5}
0 & x^3 & 0 & x & & \\
 & -x^3 & -x^2 & +3x & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & -x^2 & +4x & -1 & \\
 & & x^2 & +x & -3 & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 5x & -4 &
\end{array}
$$

- Cociente = $x^2 + x – 1$.
- Resto = $5x – 4$.

Ejercicio 14

Desarrolla los siguientes productos notables:

EJERCICIO	SOLUCIÓN
$(x - 2y)^2$	$x^2 + 4y^2 - 4xy$
$\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)^2$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{4}$
$(x + y) \cdot (x + y)^2$	$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$
$\left(x+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(x+\frac{4}{5}\right)$	$x^2 - \frac{16}{25}$
$(x + 2y + z)^2$	$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$

Ejercicio 15

Sin efectuar la división, decide si P(x) es divisible por el binomio indicado:

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$,binomio = $(x + 1)$

Solución: $P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 -2 \cdot (-1) + 1 = -1 - 2 + 2 + 1 = 0$.

Por lo tanto, $(x + 1)$ es divisor de $P(x)$.

Ejercicio 16

Calcula aplicando Ruffini: $(3x^3 - 2x^2 + 2x - 4)$: $(x - 2)$

Solución:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 6 & 8 & 20 \\ \hline & 3 & 4 & 10 & 16 \end{array}$$

RESTO

- Cociente = $3x^2 + 4x + 10$.
- Resto = 16.

Por lo tanto, $(3x^3 - 2x^2 + 2x - 4) = (3x^2 + 4x + 10) \cdot (x - 2) + 16$.

CONCLUSIONES

En esta unidad didáctica hemos trabajado tres pilares básicos del álgebra, como son potencias y raíces, logaritmos y exponenciales y polinomios.

Son muchos conceptos importantes que debes recordar, para ello te proponemos que prepares un buen esquema, aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad, recuerda completarlos con aquellos que te causen dificultad:

Potencias:	an · am = an+m	(an)m = an·m a0 = 1
Raíces:	$\sqrt[n]{a}$ = r ⇔ rn = a	
Logaritmos:	logx (a · b · c) = logx a + logx b + logx c	
Exponenciales:	loga(x) = b ⇔ ab = x	
Polinomios:	P(x) = a0x0 + a1x1 + ... + anxn	

RECAPITULACIÓN

Las operaciones básicas que se realizan con números pueden llegar a formar números muy grandes, por lo que se hace necesario un cambio de notación que tienda a facilitar las operaciones.

Así, las potencias ayudan a simplificar productos que, de otra forma, adquirirían grandes tamaños, lo que dificultaría su manejo y aplicación.

Las raíces son un caso especial de las potencias, en el que el exponente es un número racional, tanto positivo como negativo. Su aplicación puede presentar una mayor dificultad, sobre todo a la hora de realizar operaciones con ellas.

Los logaritmos, en la base que sea, son los que mayor dificultad y complejidad presentan a la hora de su aplicación, puesto que presentan una serie de peculiaridades que no son comunes a potencias o raíces. Son muy útiles en todas las ramas de la ciencia, especialmente en la física y la química.

Los polinomios están compuestos de monomios, que son las unidades básicas. Con ellos se pueden realizar numerosas operaciones matemáticas que permiten solucionar diversos problemas matemáticos.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **Calcula el resultado de** $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-3)^{-6}}{(-3)^4 \cdot \left[(-3)^2\right]^{-3}}$**:**

   a) 1/9.

   b) -9.

   c) -1/3.

   d) 3.

2. **Transforma la potencia $(2^{3/7})^{-2}$ en raíz:**

   a) $\sqrt[6]{2^7}$.

   b) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^6}}$.

   c) $-\sqrt[7]{2^6}$.

   d) $\dfrac{7}{\sqrt[7]{2^3}}$.

3. **Transforma la raíz $\sqrt[9]{2^{-4}}$ en potencia:**

a) $-2^{4/9}$.

b) $\frac{1}{2^{4/9}}$.

c) $-\frac{1}{2^{4/9}}$.

d) No se puede calcular.

4. **Resuelve la operación $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$:**

a) $\sqrt[6]{2^4\cdot 3^3}$.

b) $\sqrt[6]{2^5\cdot 3^3}$.

c) $\sqrt[12]{2^6\cdot 3^4}$.

d) $\sqrt[6]{233}$.

5. **Racionaliza la expresión $\frac{-3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$:**

a) $\frac{(-3)\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$.

b) $\frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-16}$.

c) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{9}$.

d) $\frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$.

6. **Efectúa el producto: $(x^3 + 1) \cdot (2 - 2x^2)$.**

a) $-x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 2$.

b) $-2x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 2$.

c) $-2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 2$.

d) $-2x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 2$.

7. ¿Cuánto vale el cociente de la división $(4x^2 - 9) : (2x + 3)$?

a) $2x – 6$.

b) $2x – 4$.

c) $2x + 3$.

d) $2x – 3$.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) $(x - y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.

b) $(x - y)^2 = -x^2 - y^2 + 2xy$.

c) $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$.

d) $(x - y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy$.

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$.

b) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 + y^2 - 2xy$.

c) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

d) $(x + y) \cdot (x - y) = y^2 - x^{2.}$

10. Indica la opción correcta:

a) $\text{Log}_2\, 3 = 9$.

b) $3^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_9 3$.

c) $\text{Log}\, 6 = \log 2 \cdot \log 3$.

d) Ninguna de las anteriores es cierta.

SOLUCIONARIO

1.	c	**2.**	b	**3.**	b	**4.**	b	**5.**	d
6.	b	**7.**	d	**8.**	c	**9.**	a	**10.**	d

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Las operaciones con números suponen una parte elemental de las matemáticas, por lo que las propuestas para ampliar su estudio son muy abundantes: existe una gran bibliografía que desarrolla este tema, así como una gran cantidad de páginas en Internet donde se puede encontrar información.

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- VV.AA. *EULER*. *Matemáticas I*. Madrid: S.M , 2001.
- VV.AA. *EULER. Matemáticas II aplicadas a las ciencias sociales*. Madrid: SM, 2000.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedr:. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- VV. AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.