MD.PlantillaTexto(02)Esp.dot

MATRICES Y DETERMINANTES

UD000508_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Los determinantes aparecen de forma intermitente en la Historia, pero su conceptualización y definición como tal no llegan hasta el siglo XVII, sirviendo de base para la resolución de sistemas de ecuaciones. Fue dentro del estudio de las propiedades de los determinantes donde surgió la noción de matriz.

Las matrices, como las conocemos actualmente, aparecen hacia la mitad del siglo XIX, como una forma abreviada de escribir un sistema de ecuaciones con n incógnitas.

Pero ya en China, hacia el siglo II antes de Cristo se conocían métodos simples para resolución de ecuaciones. Actualmente, la utilidad de las matrices es muy grande: además de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, aparecen de forma habitual en diferentes ramas de la ciencia como estadística, física, economía y hoy en día, en los lenguajes de programación.

PROPÓSITOS

Con el estudio de esta unidad didáctica, conseguirás:

- Conocer el concepto de matriz de números reales.
- Saber reconocer y utilizar los distintos tipos de matrices.
- Operar con matrices de cualquier orden.
- Saber calcular el rango de una matriz.
- Conocer el concepto de matriz inversa.
- Saber calcular y manejar una matriz inversa.
- Reconocer un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial.
- Resolver dichos sistemas mediante la regla de Cramer.
- Discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales basándonos en el teorema de Rouché Frobenius.
- Conocer las características principales de las matrices, así como realizar operaciones con ellas.
- Conocer cómo aplicar las matrices a la hora de resolver sistemas de ecuaciones.
- Establecer cuál es el concepto y las características de los determinantes.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Las matrices se emplean en distintas ciencias, como pueden ser la Cristalografía, la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica, la Informática, etc.

Por otro lado, los determinantes son una herramienta importante para la resolución de muchos problemas, tanto geométricos como algebraicos.

Esta unidad didáctica tratará de explicar los conceptos fundamentales de la teoría de matrices, un instrumento de cálculo que simplifica y sistematiza notablemente el desarrollo de muchas cuestiones y permite el tratamiento más adecuado de otras.

En ella desarrollaremos el concepto de matriz y sus diversos tipos, así como las operaciones que podemos realizar entre ellas. El teorema de Rouché-Frobenius y la regla de Cramer jugarán un papel significativo en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices.

Por otro lado, la definición de determinante y sus propiedades, así como las distintas formas de calcular un determinante, las aplicaremos a la discusión del rango de una matriz, al cálculo de matrices inversas, áreas y volúmenes.

1. MATRICES

Una matriz es una tabla de datos dados por filas y columnas que permiten representar sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

Cada fila representa una ecuación y en cada columna se indican los coeficientes correspondientes de las diferentes variables que componen la ecuación, coincidiendo en cada columna las mismas variables.

Recuerda

Recuerda que tienes a tu disposición un servicio de tutorías para resolver cualquier duda que te pueda surgir, bien mediante carta, correo electrónico, fax o llamada telefónica.

1.1. DEFINICIÓN

Se define **matriz** como un conjunto de números o símbolos algebraicos distribuidos en filas y columnas formando una tabla. Existen, además, distintos tipos de matrices.

Una matriz es una tabla de valores ordenados en n filas y m columnas, el tamaño de la matriz se escribe como n x m y cada elemento de la matriz se denota como a_{ij} donde i es el número de la fila en la que se encuentra y j el número de la columna donde se encuentra dicho valor.

Las matrices se denotan por medio de letras mayúsculas A; B; C... y su forma general es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Es una matriz de dimensión 3 x 4.
- El valor a_{32} es el que se encuentra en la fila 3 y columna 2, luego $a_{32} = 1$.

Nota

Se denota diagonal principal de una matriz a la línea formada por los elementos cuyos subíndices coinciden.

1.2. ESTUDIO DE MATRICES EN EL MANEJO DE DATOS EN TABLA Y GRAFO

Debemos establecer primero la diferencia entre tabla y grafo. La tabla es una lista en la cual se recoge toda la información y el grafo es la representación gráfica de las relaciones que se establecen en la tabla.

Las tablas las podemos representar como tablas de doble entrada y se pueden resolver como matrices.

Cada elemento presente en el grafo se denomina vértice y a las flechas que relacionan unos elementos con otros se las denomina ejes.

1.2.1. FORMA DE UNA MATRIZ

Atendiendo a la forma exterior que tiene una matriz se pueden clasificar los siguientes tipos:

- **Matriz cuadrada:** es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** es aquella matriz cuadrada en la que los únicos elementos no nulos son los de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz unidad o identidad:** es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son toda la unidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz nula o matriz cero** a cada matriz m x n donde todos los elementos de la matriz son cero.
- **Matriz triangular superior:** es la matriz que tiene todos los elementos nulos debajo de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior:** es la que tiene nulos todos los elementos por encima de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz fila:** es la matriz tiene una única fila, aunque puede tener varias columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** aquella matriz que tiene una única columna y varias filas.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.2.2. MATRICES ASOCIADAS A UNA MATRIZ DADA

Sea la matriz A de orden n x m. Podemos definir matrices asociadas a ella, es decir, matrices que obtenemos operando con los elementos de A.

1.2.2.1. Matriz opuesta

Sea la matriz $A_{m \times n}$, llamamos **matriz opuesta** y se representa como –A a la matriz m x n, donde todos los elementos son los opuestos correspondientes de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & . & -a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ -a_{m1} & -a_{m2} & . & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.2.2. Matriz traspuesta

Dada una matriz A, de dimensión n x m, obtendremos su matriz traspuesta cambiando las filas por las columnas y con lo que tendremos una matriz de dimensión m x n.

La matriz traspuesta se denota por A^t y tiene las siguientes propiedades:

a) $(A^t)^t = A$.

b) (A + B)t = At + Bt.

c) (sA)t = sAt, siendo s un número real.

d) $(A·B)t = B^t · A^t$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 9 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2.2.3. Matriz adjunta

Si se tiene una matriz A cuadrada, su matriz adjunta Adj(A) es la resultante de sustituir cada término de A por sus respectivos adjuntos.

El adjunto de un término a_{ij} de la matriz A resulta del determinante de la matriz que se obtiene de quitar a A la fila y la columna a la que pertenece el término a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

La matriz adjunta se denota A^d o Adj(A).

Propiedades:

1. A · Adj (At) = (Adj(At))·A = A.
2. A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces Adj (A·B) = (Adj A)·(Adj B).

En forma general, para una matriz 3 x 3 si:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Calcula la matriz adjunta de:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & +24 & -12 \\ +13 & -26 & +13 \\ -2 & +4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Reto

Calcula la matriz adjunta de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2.4. Matriz inversa

Llamamos **matriz inversa** de una matriz A, a aquella matriz B que cumple que A·B = B·A = I, donde I es la matriz diagonal.

Nota

Dada la importancia de la matriz inversa, veremos detenidamente el concepto y cálculo de la matriz inversa en puntos posteriores de la unidad didáctica.

1.2.3. PRINCIPALES TIPOS DE MATRICES

A continuación, vamos a ver con más detalle los tipos de matrices que ya hemos presentado anteriormente.

1.2.3.1. Matriz triangular

Una matriz A, de n x n elementos es una matriz triangular:

- Superior, si es una matriz cuadrada y $a_{ij} = 0$ para todo i > j, para i, j = 1, ..., n:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Inferior, si es una matriz cuadrada y $a_{ij} = 0$ para todo i < j, para i, j = 1, ..., n:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2.3.2. Matriz diagonal

Se denomina **matriz diagonal** a toda una matriz cuadrada en la cual todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son cero. Toda matriz diagonal es simétrica y triangular.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2.3.3. Matriz identidad

Los elementos de la diagonal principal son 1 y el resto de los elementos son cero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

La matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices.

1.2.3.4. Matriz simétrica

Una matriz A de dimensión n x m es simétrica si es una matriz cuadrada (m = n) y $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i, j =1, ..., n. Es decir, que los elementos son simétricos respecto de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz es simétrica.

1.2.3.5. Matriz antisimétrica

Una matriz A, n x m, es antisimétrica si es una matriz cuadrada (m = n) y cumple que $a_{ji} = -a_{ij}$, para todo i, j = 1, ..., n.

Nota

Se dice que una matriz cuadrada es antisimétrica cuando su matriz opuesta coincide con su traspuesta, es decir, $-A = A^t$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz es antisimétrica

Para que se cumpla la condición $a_{ji} = -a_{ij}$ con i = j tiene que cumplirse que $a_{ii} = 0$, para i = 1, ..., n.

Por lo tanto, la matriz adquiere una forma general:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.3.6. Matriz ortogonal

Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal cuando el producto por su traspuesta nos da la matriz identidad, es decir, $A \cdot A^t = I$.

Toda matriz ortogonal tiene que ser cuadrada e invertible, tal que $A^{-1} = A^t$.

Propiedades de las matrices ortogonales:

1. La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.
2. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.
3. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Demuestra que la siguiente matriz es ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se calcula en primer lugar la traspuesta de la matriz.

Se multiplica la matriz por su traspuesta y el resultado es la matriz identidad.

1.2.4. Operaciones con matrices

Para operar con dos matrices debemos tener mucho cuidado con los tamaños de estas, así:

- Solo podremos sumar o restar dos matrices si ambas tienen el mismo tamaño, es decir, ambas tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas.
- Para multiplicar dos matrices el número de filas de la primera matriz debe coincidir con el número de columnas de la segunda matriz. Como veremos la multiplicación de matrices no es conmutativa.
- Por último, la división de matrices no existe como tal, sino que se realiza multiplicando por la matriz inversa.

Vamos a ver todo esto con más detalle a continuación.

1.2.4.1. Suma de matrices

La suma se denota por A + B y se define como la matriz m x n en la que cada elemento es la suma de los elementos correspondientes de A y B:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & a_{n1}+b_{n1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1}+b_{m2} & a_{m2}+b_{m2} & . & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, dadas A y B matrices n x m, A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), diremos que C es suma de A y B si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i,j

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix}$$

Atención

Se debe tener en cuenta que solo se pueden sumar y restar matrices que tengan la misma dimensión m x n.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Suma las matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz suma será una matriz C donde:

$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 1 + 6 = 7$

$c_{12} = a_{12} + b_{12} = 0 + 0 = 0$

y así sucesivamente obtendremos:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.4.2. Diferencia de matrices

Dadas dos matrices A y B de la misma dimensión, definimos resta A – B a la matriz:

A – B = A + (-B)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} a-j & b-k & c-l \\ d-m & e-n & f-o \\ g-p & h-q & i-r \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma y la resta:

Sean las matrices A, B, C, todas ellas matrices m x n y 0, la matriz nula; definiremos las siguientes propiedades:

- Conmutativa: A + B = B + A.
- Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C.
- Elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A.
- Elemento opuesto: A + (-A) = 0.

1.2.4.3. Producto de una matriz por un número real

Para cualquier número real k, el producto de dicho número por una matriz A de orden n x m es otra matriz del mismo orden cuyos elementos se obtienen de multiplicar los elementos de la matriz por el número real dado:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$$

Básico

Propiedades:

Sean k, l números reales, y A y B matrices de orden m x n; entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- k (A + B) = kA + kB.
- (k + l) A = kA + lA.
- (kl) A = klA.
- 1 · A = A.
- 0 · A = 0.

Ejercicio resuelto:

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizaremos el producto 3·A.

Para llegar al resultado solicitado basta multiplicar todos los elementos de la matriz A por 3 se obtiene una nueva matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Cuyo resultado es el de la operación pedida.

1.2.4.4. Producto de dos matrices

Sean A y B dos matrices, A de orden m x n y B es de orden n x p, la matriz resultante tendrá el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda, es decir, obtendremos una matriz C de orden m x p, quedando definida de la siguiente forma: los elementos de la matriz producto se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila que ocupa el lugar i en la primera matriz por los elementos de la columna que ocupa el lugar k de la segunda matriz. Así obtenemos el elemento (i, k) de la matriz producto.

El producto de las siguientes matrices se obtiene de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Básico

Para poder multiplicar dos matrices necesitamos que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda. No podemos, en general, multiplicar dos matrices cualesquiera.

Propiedades del producto de matrices:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- Si A es una matriz cuadrada de orden n, se tiene que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- Dada una matriz cuadrada A de orden n, no existe siempre otra matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1}.
- El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir, $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- El producto de matrices no es, en general, conmutativo. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Si A es m x n y B n x p, A·B tendrá orden n x p, pero B · A será de orden n x n, siempre que m = p.

Consecuencias:

- Si $A \cdot B = 0$, no implica que $A = 0$ ó $B = 0$.
- Si $A \cdot B = A \cdot C$, no implica que $B = C$.

Ejercicio resuelto

Multiplicar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos en primer lugar que solo podemos realizar el producto A·B, puesto que si intentamos hacer B·A, el número de columnas de B, que es 3, no coincide con el número de filas de A que es 2. Realizaremos pues A·B.

La matriz producto C será 2 x 3, ya que son las filas de A y las columnas de B. El elemento c_{11} será la suma de los productos de los elementos de la primera fila de A por los elementos de la primera columna de B. Es decir:

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

Los demás términos se hallarán multiplicar respectivamente los elementos de la fila y columna que corresponda, resultando:

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$$

$$c_{13} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

Y así sucesivamente se obtiene la matriz C:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.4.5. División de matrices

Entre matrices no existe la operación de división, es la inversa la que realiza funciones análogas.

Para realizarla, debemos obtener primero la inversa de la matriz del divisor, convirtiéndose en un producto de matrices.

1.3. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Llamaremos matriz inversa de una matriz A a aquella matriz B que cumpla: $A \cdot B = B \cdot A = I$.

Es decir, que si la multiplicamos a izquierda o a derecha de A el resultado sea la matriz identidad.

A dicha matriz B se le denota A^{-1} y de A se dirá que es una matriz invertible.

Nota

Tenemos dos formas de calcular la matriz inversa, que serán las que desarrollaremos en los dos apartados siguientes.

1.3.1. PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

Tenemos las siguientes propiedades:

- La inversa de una matriz es única.
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ donde k es un número escalar.

Atención

La matriz inversa siempre está asociada a una matriz cuadrada que sea regular, es decir, que su determinante sea distinto de cero.

1.3.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA MEDIANTE ADJUNTOS

La matriz inversa de una matriz A coincide con la matriz traspuesta de la adjunta de A, dividida por el valor del determinante de la matriz dada:

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|}$$

Recuerda

La matriz traspuesta es aquella matriz que tiene como filas las columnas de la matriz A y como columnas las filas de la matriz A.

1.3.2.1. Ejercicio resuelto

Se trata de hallar la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para utilizar la fórmula del apartado anterior, primero necesitamos la matriz adjunta de A:

$$A^d = \begin{pmatrix} 14 & -12 & -2 \\ -6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La traspuesta de la adjunta será:

$$\left(A^d\right)^t = \begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -12 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

Luego la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Halla la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.3.3. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS

Consiste en poner en una misma matriz la matriz dada A y la matriz identidad. Se pone de la siguiente forma:

$$(A / I)$$

Ahora, en esta nueva matriz, mediante operaciones elementales de filas, tenemos que conseguir poner donde ahora tenemos los elementos de A, los elementos de la matriz identidad. Donde ahora está la matriz identidad nos quedarán unos elementos nuevos que son los de la matriz A^{-1}.

Para realizar este cálculo se llevan a cabo dos pasos principales:

- La matriz dada se convierte en otra de orden n x 2n, ampliándola mediante la matriz identidad en la parte derecha.
- A la matriz obtenida le vamos realizando transformaciones de forma que, al final, obtengamos que la matriz identidad se encuentre a la izquierda.

Básico

Las transformaciones para el cálculo de la matriz inversa consisten en:

- Intercambiar filas.
- Multiplicar una fila por un escalar.
- Sumar a una fila la combinación lineal de las demás.

1.3.3.1. Ejercicio resuelto

Dada la matriz A, calcular su inversa.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 7 & 3\\ 4 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Operamos con las filas:

- $F_2 = 2F_2 - 5F_1$
- $F_3 = F_3 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

- $F_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)$$

- $F_2 = F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- $F_1 = F_1 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- $F_1 = F_1 + 3F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -26 & 14 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- $F_1 = 1/2F_1$
- $F_2 = -F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la inversa es:

$$\begin{pmatrix} -13 & 7 & -2 \\ 8 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobarlo multiplicando la matriz por su inversa: $A \cdot A^{-1} = I$.

Ejemplo

Puedes ver ahora este vídeo donde tienes una Explicación de la inversa de una matriz usando el método de Gauss.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

1.4. OPERACIONES ELEMENTALES CON MATRICES Y APLICACIONES

Las operaciones elementales para matrices son las siguientes:

- Intercambiar dos filas: ($Fi \leftrightarrow Fj$).
- Intercambiar dos columnas: ($Ci \leftrightarrow Cj$).
- Sumar a la fila i otra fila multiplicada por un escalar (número real): $F_i \rightarrow F_i + tF_j$.
- Sumar a la columna i otra columna multiplicada por un escalar (nº real): $C_i \rightarrow C_i + tC_j$.
- Multiplicar la fila i por un escalar: $F_i \rightarrow sF_i$, $s \neq 0$.
- Multiplicar la columna i por un escalar: $C_i \rightarrow sC_i$, $s \neq 0$.

1.4.1. APLICACIONES DE LAS OPERACIONES ELEMENTALES

Si a una matriz le aplicamos operaciones elementales, el rango de ella no varía.

Esto nos es muy útil porque el aplicar operaciones elementales en una matriz facilita multitud de cálculos, sin variar el rango de la matriz.

Hemos demostrado su utilidad para resolver sistemas de ecuaciones en uno de los apartados anteriores. También se pueden utilizar, por ejemplo, para calcular la matriz inversa de una dada o para calcular el rango de un conjunto de vectores. Mientras tanto, los podemos emplear para calcular el rango de una matriz.

1.4.2. RANGO DE UNA MATRIZ

El **rango** de una matriz es el número de filas o de columnas linealmente independientes que tiene esa matriz. El rango de una matriz es, por tanto, siempre menor o igual que su número de filas y también menor o igual que su número de columnas.

Consiste en transformar la matriz dada en una triangular superior, es decir, conseguir mediante operaciones elementales que todos los elementos por debajo de la diagonal sean ceros. Una vez que tenemos triangulada la matriz, nos fijamos en el número de filas que posee distintas de cero y ese es el rango de la matriz.

Lo ilustraremos resolviendo un caso particular.

1.4.2.1. Ejercicio resuelto

Calculemos el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ello tenemos que hacer cero los elementos que están por debajo de la diagonal principal. Lo hacemos mediante operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + F_1}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 2F_1}{\cong}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + F_2}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - \frac{5}{3}F_2}{\cong}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -8 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + \frac{12}{10}F_3}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -8 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Observamos que una vez hechos ceros debajo de la diagonal tenemos cuatro filas distintas de cero, es decir, que no nos ha quedado ninguna fila con todos los elementos nulos, con lo que el rango es cuatro.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = -3F_1 + F_3}{\overset{F_2 = F_2 + F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \underset{F_3 = 6F_2 + F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$rangA = 3$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución:

Rango =2.

1.5. APLICACIÓN DEL ESTUDIO DE MATRICES A LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Nos encontraremos con dos tipos de sistemas, por una parte, los sistemas de ecuaciones lineales habituales y por otra un tipo de sistemas nuevo, son los sistemas de ecuaciones matriciales. En ellos no nos encontraremos con ecuaciones en las que aparecen matrices ya sean como incógnitas, en cuyo caso tendremos tantas incógnitas como elementos tenga la matriz o como matrices numéricas con las que se debe trabajar a la hora de resolver el sistema.

1.5.1. SISTEMAS DE ECUACIONES MATRICIALES

Las ecuaciones matriciales son aquellas que presentan matrices en sus coeficientes e incógnitas.

Para resolver los sistemas de ecuaciones se utilizan la suma, la resta y producto de matrices explicados anteriormente.

Recuerda

Ten en cuenta que en el caso de matrices no existe la operación de división de matrices por lo que hemos de multiplicar por la inversa.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3x + y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$5x = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix} + y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/5 & 9/5 \\ 9/5 & 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -4/5 \\ -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

1.5.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para resolver sistemas de ecuaciones se utiliza el **método de Gauss–Jordan,** que consiste en reducir el sistema a una matriz cuadrada, tal como se ha explicado anteriormente, mediante operaciones elementales.

El método para transformar el sistema de ecuaciones a una matriz se va a explicar mediante un ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - 11z = 21 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ -2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad F_3 = F_2 + F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \frac{1}{2}F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \frac{F_2 - 2F_1}{5} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 0 & -1 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 0 & -1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_3 = \frac{1}{6}F_3 \\ F_2 = -F_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 0 & -1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 + 5F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F_1 = F_1 + 11F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F_1 - 2F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{matrix}$$

1.6. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de expresiones de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Este caso es un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

A los números reales a_{ij} , i = 1..., m, j = 1..., n, se les llama coeficientes de las incógnitas y a los números reales b_i , i = 1..., m, se les llama términos independientes. Se llaman incógnitas del sistema a las variables $x_1......,x_n$.

Se puede expresar el sistema en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nota

Dos sistemas que poseen las mismas soluciones se denominan equivalentes.

A la matriz A se la llama matriz de coeficientes. Si a dicha matriz se le añade como última columna la de términos independientes, la matriz que resulta se dice matriz ampliada y la denotaremos (A/B).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & & & & a_{2n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Consiste en calcular los valores $x_1 \ldots, x_n$ que son solución del problema. Pueden darse los siguientes casos:

A los sistemas que poseen soluciones se les llama compatibles, si es solución única serán determinados y si no indeterminados.

A los sistemas que no poseen solución se les llama incompatibles.

Pueden darse los siguientes casos:

1. El sistema no tiene solución: sistema incompatible.
2. El sistema tiene una única solución: sistema compatible determinado.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones: sistema compatible indeterminado.

2. DETERMINANTES

Los determinantes son números que se obtienen de matrices cuadradas tomando adecuadamente elementos de todas las filas y columnas, de todas las maneras posibles, con signos + o – según la paridad.

El determinante de una matriz de segundo orden es:

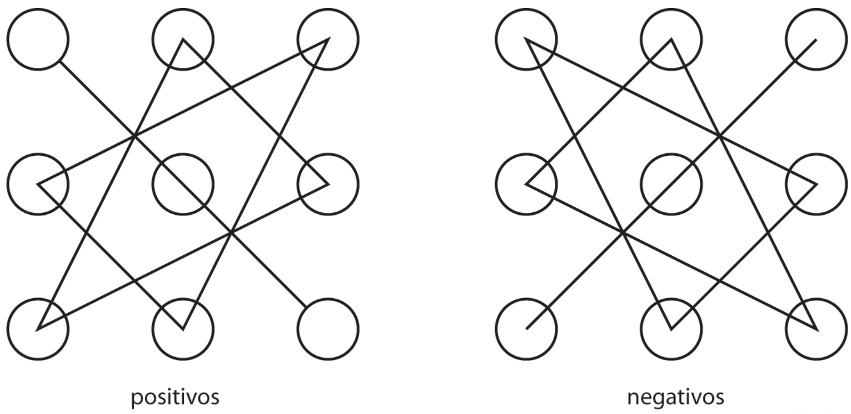
$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

El determinante de una matriz de tercer orden es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - hfa - bdi$$

Truco

Para calcular los términos que intervienen en el desarrollo de un determinante de tercer orden, existe un método práctico que se conoce con el nombre de **regla de Sarrus,** que dice: "los términos positivos están formados por los productos de los elementos de la diagonal principal y por el producto de dos elementos que constituyen una línea paralela a ella multiplicándolos por el elemento del vértice opuesto, y los términos negativos están formados por los productos de los elementos de la diagonal secundaria y por el producto de dos elementos que constituyen una línea paralela a ella, multiplicándolos por el elemento del vértice opuesto".



Regla de Sarrus

2.1. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades de los determinantes son las siguientes:

Propiedad 1

El valor de un determinante no varía ni de valor ni de signo si se obtiene el determinante a partir de la matriz traspuesta.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 1{\cdot}0{\cdot}5 + 2{\cdot}(-1){\cdot}0 + 3{\cdot}3{\cdot}4 - 3{\cdot}0{\cdot}0 - 3{\cdot}(-1){\cdot}1 - 5{\cdot}2{\cdot}4 = \\ &= 0+0+36-0-(-3)-40 = 36+3-40 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A^T| &= 1{\cdot}0{\cdot}5 + 2{\cdot}(-1){\cdot}0 + 4{\cdot}3{\cdot}3 - 3{\cdot}0{\cdot}0 - 3{\cdot}(-1){\cdot}1 - 5{\cdot}2{\cdot}4 = \\ &= 0+36+0-0+3-40 = 39-40 = -1 \end{aligned}$$

Propiedad 2

Si multiplicamos una línea del determinante por un número, todo el determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2{\cdot}2{\cdot}1 + 1{\cdot}(-1){\cdot}0 + 3{\cdot}(-3){\cdot}(-2) - 3{\cdot}2{\cdot}0 - 2{\cdot}(-1){\cdot}(-3) - 1{\cdot}(-2){\cdot}1 =$$

$$= 4+0+18-0-6+2 = 18$$

Al multiplicar la segunda columna por 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 6{\cdot}2{\cdot}1 + 3{\cdot}(-1){\cdot}0 + 3{\cdot}(-2){\cdot}1 - 3{\cdot}6{\cdot}0 - 2{\cdot}(-1){\cdot}(-9) =$$

$$= 1{\cdot}3{\cdot}(-2) = 12+0+54-0-18+6 = 54$$

Que es lo mismo que multiplicar el primer resultado: $18 \cdot 3 = 54$.

Propiedad 3

Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 3 + 12 + 4 - 3 - 4 - 12 = 0$$

Propiedad 4

Si una matriz tiene dos filas o columnas proporcionales, su determinante es cero.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 8 + 36 + 12 - 36 - 8 - 12 = 0$$

Propiedad 5

Si en una matriz se intercambian dos filas o columnas entre sí, su determinante es igual, pero de signo contrario.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$= 4 + 0 + 18 - 0 - 6 + 2 = 18$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot2\cdot3 + 2\cdot(-1)\cdot(-3) + 1\cdot1\cdot(-2) - 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot(-1)\cdot0 - 3\cdot(-3)\cdot(-2) =$$

$$= 0 + 6 - 2 - 4 - 0 - 18 = -18$$

Propiedad 6

Si en una matriz todos los elementos de una fila o una columna son cero, su determinante es cero.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot6\cdot0 + 2\cdot1\cdot0 + 3\cdot5\cdot0 - 5\cdot2\cdot0 - 3\cdot1\cdot0 =$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

Propiedad 7

$|A|$ = 0 si y solo si A es singular.

Propiedad 8

Si B es una matriz n x n $\Rightarrow$ $|AB| = |A|\,|B|$.

Propiedad 9

Si B resulta al aplicarle a A operaciones elementales del tipo:

a) $F_i \rightarrow F_i + t\,F_j$, entonces $|B| = |A|$.

b) $Ci \rightarrow Ci + t\,Cj$, entonces $|B| = |A|$.

c) $Ci \rightarrow s\,Ci$, entonces $|B| = s\cdot|A|$.

Propiedad 10

La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de los elementos de una línea paralela a ella es cero.

Propiedad 11

Si en un determinante encontramos que los elementos una fila o columna está formada por sumandos, podemos separar este determinante en suma de otros dos: el primer sumando sería el determinante original dejando en la línea que contenía los sumandos solo el primero de ellos y el resto de elementos de la matriz iguales a los originales, y el segundo sumando sería el determinante original dejando en la línea que contenía los sumandos solo el segundo de ellos y el resto de elementos de la matriz iguales a los originales.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & \cdots & a'_{1j}+a''_{1j} & \cdots & a'_{1n}+a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2. CÁLCULO DE DETERMINANTES

Hasta ahora solo hemos aprendido a calcular determinantes de matrices pequeñas, 2 x 2 y 3 x 3, vamos a ver a continuación cómo se calculan los determinantes cuyo tamaño es superior.

2.2.1. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES

Debemos saber primero los siguientes conceptos:

Matriz regular

Es una matriz cuyo determinante es distinto de cero.

Matriz singular

Es una matriz cuyo determinante es igual a cero.

Matriz adjunta

Matriz adjunta de una matriz cuadrada es aquella cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de la dada.

Sea la matriz cuadrada A de orden n; llamaremos menor complementario del elemento a_{ij}, que lo denotaremos como α_{ij}, al determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la fila j. Se llama adjunto al elemento a_{ij}, que denotaremos con A_{ij}, siguiente:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Matriz inversa de una matriz regular A a una matriz B, del mismo orden, tal que A·B = B·A = I, siendo I la matriz unidad del mismo orden que A. Es decir, la matriz inversa se calcula como la matriz traspuesta de la adjunta dividida por el valor del determinante de la matriz A, es decir:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj\ A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = 0 + 0 + 0 - (-3) = 3$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|} = \frac{(Adj\ A)^t}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3. MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

Sea el determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de orden n-1, que resulta de suprimir, en el determinante dado, la fila i-ésima y la columna j-ésima, esto es la fila y la columna en la cual se encuentra dicho elemento. Al menor complementario de a_{ij} lo representamos por α_{ij}.

Se denomina **adjunto** del elemento a_{ij} al menor complementario de dicho elemento, anteponiendo el signo más o el signo menos según que la suma de los subíndices i+j sea par o impar. El adjunto del elemento a_{ij} se representa por A_{ij}, siendo su valor:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha i_j$$

De la definición anterior se deduce que si i + j es par, el adjunto de un elemento coincide con el menor complementario y, por el contrario, si i + j es impar, son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario.

Recuerda

Es importante recordar el apartado de matriz adjunta para su correcta aplicación.

2.4. CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN N

Cuando el orden de un determinante es superior a tres, hay que aplicar directamente la definición de determinante para obtener su desarrollo, lo cual se consigue mediante un proceso largo y laborioso; por eso, se necesita aplicar otros métodos encaminados a reducir el orden del determinante, hasta transformarlo en uno de tercer o segundo orden.

Para ello nos basaremos en la definición de menor complementario y adjunto que hemos expresado en un apartado anterior.

2.4.1. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ADJUNTOS DE UNA LÍNEA

Basándonos en la definición de determinante a través de permutaciones de n elementos llegamos a la conclusión.

Básico

“El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes”.

Designaremos como línea en un determinante, siempre que no induzca a confusión, a fila o columna indistintamente.

Con esto tenemos:

$$|A| = a_{11} + A_{11} + a_{12} + A_{12} + \dots\dots\dots\dots + a_{1n} + A_{1n}$$

Por este procedimiento, el cálculo de un determinante de orden n se reduce al cálculo de n determinantes de orden n-1. Aplicando sucesivamente las veces necesarias, llegaremos a un determinante de orden tres, donde aplicando la regla de Sarrus sabríamos resolverlo.

El caso general se define como:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \alpha_{jk}$$

Con α_{jk}=(-1)j+kA_{jk} donde A_{jk} es el determinante de la matriz (n-1)x(n-n) resultante de suprimir en A la fila j y la columna k.

Si desarrollamos por la fila j_0, tenemos:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{j_0 k} \alpha_{j_0 k}$$

Si es la columna k_0,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk_0} \alpha_{jk_0}$$

Calcularemos por adjuntos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Este se ha desarrollado por los elementos de la primera fila, pero lo podríamos haber realizado igual utilizando cualquier otra línea.

Así, el determinante queda reducido ahora a cuatro determinantes de orden tres, que ya podemos resolver por Sarrus, con lo que obtendríamos:

$$= 5(3\cdot2\cdot3 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot1 – 2\cdot2\cdot1 - 2\cdot1\cdot3 - 1\cdot1\cdot3) -$$

$$3(4\cdot2\cdot3 + 1\cdot1\cdot0 + 1\cdot2\cdot1 – 1\cdot2\cdot0 – 2\cdot1\cdot4 – 1\cdot1\cdot3) +$$

$$2(4\cdot1\cdot3 + 3\cdot1\cdot0 + 1\cdot1\cdot2 – 1\cdot1\cdot0 – 2\cdot1\cdot4 – 1\cdot3\cdot3) -$$

$$3(4\cdot1\cdot2 + 3\cdot2\cdot0 + 1\cdot2\cdot1 – 1\cdot1\cdot0 – 2\cdot2\cdot4 – 1\cdot3\cdot2) =$$

$$45 – 45 –6 +36 =30$$

2.4.2. Regla de Chio para el cálculo de determinantes de orden superior a tres

A continuación, explicaremos la regla conocida con el nombre de Chio, la cual se basa, fundamentalmente, en todas las propiedades que tienen los determinantes.

Básico

La regla de Chio consiste en conseguir que una de las líneas del determinante esté formada por elementos todos ellos nulos, excepto uno, que vale la unidad y se llama elemento base. De esta forma, al desarrollar el determinante por los adjuntos a los elementos de esa línea, se anulan todos los sumandos, a excepción del que pertenece al elemento base. De esta manera, el determinante original coincide con el adjunto del elemento base, reduciendo el determinante al cálculo de otro cuyo orden es inferior en una unidad.

Mediante operaciones elementales de filas y columnas llegaremos a tener en una fila del determinante todos los elementos nulos menos uno.

Ejemplo:

Calcularemos el mismo determinante que hemos realizado en el ejercicio anterior, pero ahora lo haremos por la regla de Chio:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

De donde aplicando Sarrus:

$$= (-2)\cdot(-7)\cdot 3 + (-8)\cdot(-3)\cdot 2 + (-1)\cdot 2\cdot(-2) - (-2)\cdot(-7)\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot(-2) - (-1)\cdot(-8)\cdot 3 = 30$$

Explicaremos cómo lo hemos realizado:

Hemos cogido la primera columna porque ya teníamos un elemento nulo. Además, hemos observado que en ella había un elemento unidad: lo dejaremos como elemento base. Luego solo tenemos que hacer un cero en el cuatro y otro en el cinco. Para ello, se le suma a la primera fila la tercera multiplicada por (-5) y a la segunda fila se le suma la tercera multiplicada por (-4). Con esto ya tenemos la primera columna preparada para desarrollar por adjuntos. Al hacerlo, solamente nos queda el adjunto correspondiente al elemento base, que además es de signo positivo puesto que como ocupa la fila 3 y columna 1 queda $(-1)^{3+1} = 1$.

Si el determinante es de orden superior (de cinco en adelante), hasta llegar a un determinante de orden tres que podamos realizar por Sarrus, deberemos repetir el método tantas veces como sea necesario. Es decir, supongamos un determinante de orden cinco. Hacemos ceros en los elementos de una línea menos en uno y desarrollamos por adjuntos. Así, tenemos que el adjunto del elemento base es un determinante de orden cuatro, donde tendremos que volver a hacer ceros en una línea, menos en un número, y desarrollar por ella. Así habremos alcanzado un determinante de orden tres, que ya podemos resolver.

2.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR MEDIO DE DETERMINANTES

La regla de Cramer que vamos a ver es una herramienta muy útil a la hora de resolver sistemas de ecuaciones. Debemos tener en cuenta que simplemente nos es útil para resolver sistemas, pero para ello hemos debido comprobar antes que el sistema tiene solución, es decir, es compatible determinado.

2.5.1. Regla de Cramer

Se llama **sistema de Cramer** a los sistemas de ecuaciones lineales que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, det $(A) \neq 0$.

Atención

Que el sistema tenga det $(A) \neq 0$ significa que se trata de un sistema compatible determinado. Es decir, que el sistema tiene una única solución.

Denominaremos **regla de Cramer** a la solución única de un sistema de Cramer que se obtiene, para cada una de las incógnitas, dividiendo el determinante de la matriz que resulta de sustituir en la matriz de los coeficientes, la columna que corresponde al vector de los coeficientes de la incógnita, que se calcula por los términos independientes.

La regla de Cramer es un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se puede utilizar cuando la matriz de coeficientes del sistema es cuadrada y de determinante no nulo. La solución viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y + 5z = 13 \\ 3x - 2y + z = 12 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

Se comprueba si el sistema es de Cramer; para ello calcularemos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-1) =$$

$$= -4 - 1 + 15 - (-10) - 1 - (-6) = 25 \neq 0$$

Es un sistema de Cramer.

Aplicamos ahora la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}13 & -1 & 5\\ 12 & -2 & 1\\ 9 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{100}{25}=4 \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 13 & 5\\ 3 & 12 & 1\\ 1 & 9 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{25}{25}=1 \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 13\\ 3 & -2 & 12\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{50}{25}=2$$

Por tanto: x = 4, y = 1, z = 2

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Resolver, aplicando la regla de Cramer, el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix}2x-y+z=3\\ 2y-z=1\\ -x+y=1\end{Bmatrix}$$

Solución:

En este sistema tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Para aplicar la regla de Cramer necesito el valor del determinante de la matriz A. Lo calculamos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Con esto tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Luego la solución del sistema es: x = 1, y = 2, z = 3.

2.6. DETERMINANTES Y DEPENDENCIA LINEAL

Por medio de los determinantes también podemos analizar si una familia de vectores es o no independiente.

Para ello, deberemos poner los vectores como filas de un determinante. Notar que debemos tener un determinante con el mismo número de filas que de columnas; luego si tenemos vectores de $\Re^4$, por ejemplo, solamente podré tener cuatro vectores para comprobar si son independientes.

Nota

Un conjunto de vectores es linealmente independientes si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los otros.

Básico

La regla es la siguiente:

Los vectores son independientes si al realizar el determinante, este nos sale distinto de cero.

Si por el contrario el determinante sale igual a cero, diremos que los vectores son linealmente dependientes.

2.6.1. Ejercicio resuelto

Sean los vectores de $\Re^3$: (1, 2, 1) , (1, 1, 1) , (0, 1, 0). Comprobemos si son independientes.

Para ello los ponemos como filas de un determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

Hemos comprobado que el determinante es cero, luego los vectores son dependientes.

Nota

Observar que el primer vector (1, 2, 1) se puede poner como suma del segundo y del tercero.

2.7. DETERMINANTES Y RANGO DE UNA MATRIZ

También podemos utilizar los determinantes para calcular el rango de una matriz.

Para ello no es necesario que la matriz sea cuadrada, es decir, que puede tener distinto número de filas que de columnas.

Básico

"El rango de la matriz es el orden del determinante de mayor orden que nos salga distinto de cero".

Para ello se procede de la siguiente forma: calcularemos los determinantes de mayor orden que podamos hacer con las filas y columnas de la matriz dada. Si alguno de ellos es distinto de cero, ya sabemos que el rango de la matriz es el orden de ese determinante. Si, por el contrario, todos son cero, haremos todos los determinantes de un orden menor que el realizado anteriormente, con la misma conclusión, es decir, que si alguno de ellos es distinto de cero ya tenemos el rango de la matriz y si no es así, volveremos a rebajar el orden. Continuaremos así sucesivamente hasta dar con un determinante distinto de cero.

Ejemplo:

Comprobaremos el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para ello comenzaremos haciendo el determinante de mayor orden, que en este caso es tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 2 - 0 - 2 = 0$$

Como el determinante es cero, no podemos tener rango tres, pues no hay más posibilidad de formar un determinante de este orden con las filas y columnas de la matriz dada (sin desordenarlas).

Por ello calculamos los determinantes de orden dos para ver si alguno es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Vemos que el primer determinante de orden dos que realizamos sale distinto de cero; luego ya no tenemos que seguir y el rango de la matriz es dos. Si este nos hubiera salido cero deberíamos seguir con los demás que nos quedan de orden dos. Si alguno saliese distinto de cero tendríamos rango dos y si no, rango uno.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula el siguiente sistema de ecuaciones a través de la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Solución:

x = 4 ; y = 3; z = 5.

2.8. TEOREMA DE ROUCHÉ FROBENIUS

Discutir un sistema es estudiar si el conjunto de soluciones es o no vacío, es decir, si es compatible o incompatible. Posteriormente, habrá que resolver los que sean compatibles.

El teorema de Rouché-Frobenius nos da argumentos para la discusión del sistema, pero no para su resolución, cosa que deberíamos hacer, por ejemplo, por la regla de Cramer, explicada anteriormente.

Sea un sistema de ecuaciones lineales y sean A su matriz de coeficientes y (A/B) su matriz ampliada con la columna de términos independientes.

Básico

Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, el número de soluciones del sistema está totalmente determinado por los rangos de la matriz de coeficientes y su matriz aplicada, tal que:

- Si rango(A) = rango(A/B) $\Rightarrow$ Sistema compatible $\Rightarrow$ Existe solución.
- Si rango(A) $\Rightarrow$ rango(A/B) $\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución.

Además, se tiene:

- Si rango(A) = rango(A/B) = nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ existe una única solución.
- Si rango(A) = rango(A/B) **es menor** que el nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ existen infinitas soluciones.

2.8.1. EJERCICIO RESUELTO

Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

Lo primero que necesitamos es calcular el rango de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Su rango es tres ya que encuentro un determinante de este orden distinto de cero. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Tenemos que calcular el rango de la matriz ampliada para ver si nos coincide con el rango de A:

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango no puede ser cuatro puesto que el determinante de este orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Buscamos los determinantes de orden tres y encontramos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

con lo que ya podemos afirmar que el rango de la matriz ampliada es tres.

Así pues, tenemos que el rango de A y el rango de (A/B) coincide y es tres que, además, es el número de incógnitas. Entonces tenemos que el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Para calcularla recurrimos a la regla de Cramer. Sobra una ecuación, pues tenemos tres incógnitas y cuatro ecuaciones. Esto es porque la cuarta ecuación es combinación lineal de las tres primeras (observar que si sumamos las tres primeras ecuaciones obtenemos la cuarta).

Suprimiendo la cuarta ecuación tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

que por Cramer resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego la solución es x = 1 , y = -2 , z = 3.

Nota

También podemos calcular el rango de la matriz A y de la matriz ampliada por el método de Gauss. Además, como al aplicar dicho método la matriz queda triangular superior, facilita la resolución del sistema sin tener que aplicar Cramer.

2.9. CÁLCULO DE PRODUCTOS VECTORIALES Y MIXTOS PARA DETERMINAR ÁREAS Y VOLÚMENES

Una de las aplicaciones más útiles de los determinantes es el cálculo de áreas y volúmenes. Para ello tendremos que definir una nueva operación que podemos realizar con dos vectores, es el producto vectorial, para su definición necesitaremos echar mano, de nuevo, de los determinantes.

2.9.1. ÁREAS

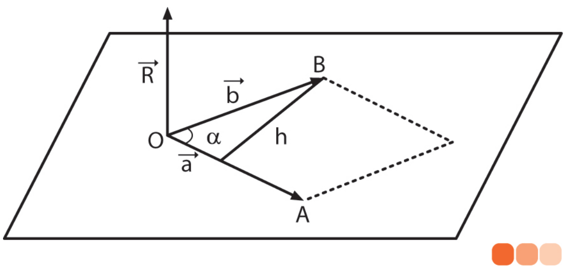
Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores cualesquiera. Dos vectores determinan unívocamente un plano en el que se encuentran ambos.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se determina mediante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \vec{i} + a_3 b_1 \vec{j} + a_1 b_2 \vec{k} - a_2 b_1 \vec{k} - a_3 b_2 \vec{i} - b_3 a_1 \vec{j}$$

El resultado es un vector perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. El módulo de dicho producto vectorial es:

$$|R| = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sen\,\alpha = |OA| \cdot |OB| \cdot sen\,\alpha = |OA| \cdot h = a \cdot h$$



La interpretación geométrica será la siguiente:

$$|OA| = |\vec{a}| \qquad |OB| = |\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \quad h = \overline{OB} \cdot sen\,\alpha \quad \Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \overline{OA} \cdot h$$

Es decir, que el módulo del producto de dos vectores es igual al área del paralelogramo que forman dichos vectores.

Básico

El módulo de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ coincide con el área del paralelogramo que forman los dos vectores.

Ejemplo:

Dados los vectores a = 2i – 3j y b = i + 2j, ¿cuál es el área del paralelogramo que forman?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - (-3) = 7$$

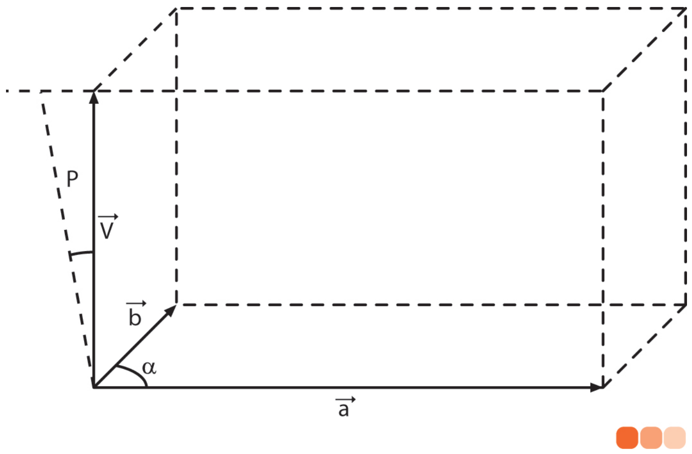
2.9.2. Volúmenes

Se denomina producto mixto de tres vectores al producto escalar de un vector por el producto vectorial de los otros dos.

El producto mixto de tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es un número real a diferencia del producto de dos vectores que era un vector. Se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{a}\ x\left(\vec{b}x\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - c_3a_2b_1$$

El módulo o, lo que es lo mismo, el valor absoluto del producto de tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo que forman dichos vectores, es decir, el volumen del paralelepípedo cuyos lados son a, b y c.



$$\vec{v}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = v\cdot(a\cdot b\cdot sen\alpha)\cdot\cos\beta = (v\cdot\cos\beta)\cdot(a\cdot b\cdot sen\alpha) = base \cdot altura$$

ya que $a\cdot b\cdot sen\alpha$, como hemos visto antes define el área de la base, mientras que $v\cdot\cos\beta = h$, es decir, la altura de la figura.

Ejemplo:

Calcular el volumen del paralelepípedo que forman los vectores (3, 4, 2), (1, 3, 5), (2, 4, 6).

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot3\cdot6 + 4\cdot5\cdot2 + 2\cdot4\cdot1 - 2\cdot2\cdot3 - 5\cdot4\cdot3 - 6\cdot4\cdot1 =$$

$$= 54 + 40 + 8 - 12 - 60 - 24 = 6$$

CONCLUSIONES

En esta unidad didáctica hemos trabajado un nuevo elemento del álgebra, las matrices, junto con sus operaciones y aplicaciones.

Son muchos conceptos importantes que debes recordar, para ello te proponemos que prepares un buen esquema, aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad, recuerda completarlos con aquellos que te causen dificultad:

Tipos de matrices:

$$\textit{Diagonal}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Identidad}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Nula}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definiciones especiales:

Una matriz es simétrica si $A^T = A$.

Una matriz es antisimétrica si $A^T = -A$.

Matriz regular si su determinante es distinto de cero.

Matriz singular si su determinante es igual a cero.

RECAPITULACIÓN

La utilización de matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones es un método muy útil y rápido que simplifica mucho el proceso, principalmente en sistemas de ecuaciones muy grandes.

De igual forma, la aplicación de determinantes en los sistemas de ecuaciones permite obtener métodos fáciles para comprobar las posibles posibilidades de resolución de los sistemas.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. Decir, sin resolver el sistema, el número de soluciones que posee el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Tiene infinitas soluciones.

b) No tiene solución.

c) Tiene solución única.

d) Ninguna de las anteriores.

2. Si un sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, entonces es siempre:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

c) Incompatible.

d) Habría que discutirlo.

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Calcular A^n con $n \in N$.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} n & 0 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$**, calcular $(A \cdot A^t)^2$.**

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 12 & 17 & 33 \\ 6 & 33 & 90 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 15 & 12 & 13 \\ 2 & 1 & 36 \\ 6 & 33 & 90 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 3 & 15 & 20 \\ 5 & 7 & 21 \\ 15 & 20 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Resolver la ecuación AX + 3B + 2C = D, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 6\end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & -5\end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 6\end{pmatrix}$.

6. Calcular el rango de la matriz: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$**.**

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

7. Hallar el valor del determinante: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b+c & c+a & a+b\\ bc & ca & ab\end{vmatrix}$**.**

a) 0.

b) abc.

c) abc + a^2 c – a^2 b.

d) a^2 c – a^2 b.

8. **Calcular el siguiente determinante:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

a) 12.

b) 6.

c) 36.

d) 0.

9. **¿Qué regla es aquella que consiste en conseguir que una de las líneas del determinante esté formada por elementos todos ellos nulos, salvo uno?**

a) Regla de Sarrus.

b) Regla del menor complementario.

c) Regla de Chio.

d) Regla del rango de una matriz.

10. **Resolver el sistema:** $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 9x+3y+z=9 \\ 25x+5y+z=18 \end{cases}$

a) x = 1/ 2, y = 1/2, z = 3.

b) x = 1/ 3, y = 5/ 2, z = -3.

c) x = 1, y = 2, z = 7.

d) x = 1/ 2, y = 1/ 5, z =1/ 3.

SOLUCIONARIO

1.	c	**2.**	b	**3.**	a	**4.**	b	**5.**	c
6.	d	**7.**	a	**8.**	d	**9.**	c	**10.**	a

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I.* Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV AA. *EULER. Matemáticas I.* Madrid: S.M, 2001.
- VV AA. *EULER. Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: SM, 2000.
- VV AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV AA. *Matemáticas II.* Madrid: Edelvives, 2003.