MD.PlantillaTexto(02)Esp.dot

RECTAS Y PLANOS

UD000528_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

La geometría es indispensable para realizar numerosas tareas, que van desde el diseño de edificios hasta el más simple de los embalajes que se pueda utilizar. Es, por lo tanto, una rama de las matemáticas que tiene numerosas aplicaciones prácticas intuitivas, a diferencia de otras materias que, aunque útiles, no poseen esa interrelación, esa cotidianidad, en el devenir de la vida de las personas.

Sin embargo, la geometría no es una disciplina fácil, todo lo contrario, puesto que requiere una visión espacial suficientemente desarrollada. Pero, a nivel básico, no entraña gran dificultad cuando se poseen unos conocimientos elementales claros y aplicados con suficientes ejercicios prácticos.

PROPÓSITOS

- Descubrir el concepto de vector en el plano y el cálculo de sus coordenadas respecto a un sistema concreto de coordenadas, así como a las coordenadas de un punto en el espacio.
- Expresar el significado del concepto de recta en un espacio afín y de sus posibles formas.
- Identificar las ecuaciones del plano y las posiciones relativas entre varios de ellos.
- Analizar las posiciones relativas de dos rectas y de recta y plano.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

La geometría del espacio presenta a veces gran dificultad de comprensión, debido a una escasa visión espacial. Por tanto, conviene tener muy claros los elementos fundamentales de la geometría del espacio, que son: el punto, la recta y el plano.

En esta unidad didáctica presentaremos las distintas formas de expresar una recta y un plano, así como el estudio del problema de la posición relativa de rectas y planos en el espacio.

La mecánica de estos ejercicios es simple, pero se necesita práctica para efectuarlos correctamente. Por ello, realiza todos los ejercicios que encontrarás tanto en la unidad didáctica como en el Campus Virtual.

1. COORDENADAS DE UN PUNTO EN EL ESPACIO

Si consideramos ahora todos los puntos del espacio, se puede definir una correspondencia entre dichos puntos y ternas de números reales dados en un orden determinado. A los tres números que forman la terna se les llama **coordenadas** del punto correspondiente.

Básico

A los diversos modos de asignar a cada punto del espacio una de dichas ternas se les denomina **sistemas de coordenadas.**

Para definir un sistema de coordenadas tomamos un punto origen O y una base ortonormal i, j, k (estos vectores son perpendiculares y de módulo uno), con lo cual quedan definidos tres ejes OX, OY, OZ.

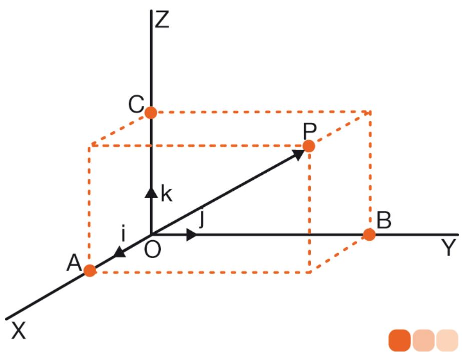
Recomendación

En el desarrollo de esta unidad didáctica verás que es muy importante operar con vectores, es por lo que te recomendamos que si necesitas más información acudas al **Campus Virtual.**

Dado un punto genérico P del espacio, queda determinado el vector OP, es decir, el vector cuyo origen es el origen de coordenadas y cuyo fin es el propio punto P. Las componentes de este vector son las abscisas de los puntos A, B y C, donde cortan a cada uno de los ejes los planos paralelos al formado por los otros dos y que pasan por P. A dichas abscisas las llamamos a, b, c y se denotan coordenadas cartesianas rectangulares del punto P.

A los planos que determinan cada uno de los ejes coordenados se les denomina **planos coordenados.**

Expresamos todo lo anterior con el siguiente dibujo:



Coordenadas de un punto en el espacio

2. LA RECTA EN EL ESPACIO AFÍN

Llamaremos recta en el espacio afín a un conjunto de la forma:

$$r \equiv \{X \in E / \overline{AX} = t\overline{u}\}$$

donde A es un punto arbitrario y u un vector libre no nulo. Al variar el parámetro t en el conjunto de los números reales iremos obteniendo todos los puntos de dicha recta.

Para que la recta quede determinada es necesario conocer un punto y un vector no nulo. El par (A, u) recibe el nombre de determinación lineal de la recta, A es el punto base y u el vector direccional de dicha recta.

Recuerda

Recuerda que tienes un **servicio de tutorías** a tu disposición para resolver cualquier duda que te surja.

2.1. EXPRESIONES DE LA RECTA

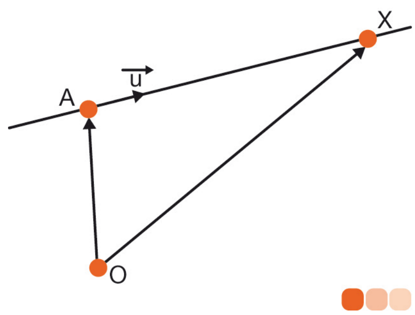
La ecuación de una recta no se expresa de una sola forma; existen diferentes métodos que, según diversos parámetros vectoriales, determinan la ecuación. Así, veremos la ecuación vectorial de la recta, las ecuaciones paramétricas, la ecuación de la recta en forma continua y la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, entre otras.

2.1.1. ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Dado un determinado sistema de referencia afín, sean (x_0, y_0, z_0) y (x, y, z) las coordenadas de los puntos A y X, respectivamente. Sean además (u_1, u_2, u_3) las coordenadas del vector direccional u.

Hemos dicho que para que un punto pertenezca a la recta debe cumplir:

$$\overline{AX} = t\overline{u}$$



Ecuación vectorial de la recta

Observando el dibujo anterior, vemos que:

$$\overline{OX} - \overline{OA} = t\overline{u}$$

Con lo que tenemos:

$$\overline{OX} = \overline{OA} + t\overline{u}$$

que se denomina **ecuación vectorial de la recta.**

Básico

Consideremos el punto P = (x_1, y_1), el vector **v** = (v_1, v_2) y $\lambda \in$ R, entonces:

$(x, y) = (x_1, y_1) + \lambda \cdot (v_1, v_2)$

es la ecuación vectorial de la recta.

2.1.2. ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

Si expresamos la ecuación vectorial de la recta en función de las coordenadas de los vectores que intervienen en ella, y que hemos nombrado en el apartado anterior, se tiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_2, u_3)$$

Igualando componente a componente estos vectores, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 \\ y &= y_0 + tu_2 \\ z &= z_0 + tu_3 \end{aligned}$$

del que se dice que son las **ecuaciones paramétricas de la recta.**

La ecuación vectorial se convierte en una igualdad de vectores que se desdobla en dos igualdades escalares, que se conocen como **ecuaciones paramétricas de la recta:**

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 \\ y &= y_0 + tu_2 \\ z &= z_0 + tu_3 \end{aligned}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A(3, 1) y tiene como vector direccional a $\vec{v} = (-1, 2)$.

Solución:

Sustituimos:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= 1 + 2t \end{aligned}\right\} t \in R$$

2.1.3. Ecuaciones de la recta en forma continua

Si nos fijamos en las ecuaciones paramétricas de la recta y las componentes del vector direccional son no nulas, podemos eliminar el parámetro t de las ecuaciones, obteniendo:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} = t$$

que llamamos **ecuación de la recta en forma continua.**

Ecuación de la recta en forma continua:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

que pasa por un punto fijo $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene como vector director $u(u_1, u_2, u_3)$.

2.1.4. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si además del punto A tenemos un punto B que pertenece a la recta cuyas coordenadas son $B = (x_1, y_1, z_1)$, podemos calcular con ellos dos un representante del vector libre u sin más que restar las componentes de B menos las de A. Obtendremos el nuevo vector de dirección de la recta, que será:

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Si sustituimos esto por las componentes u_1, u_2, u_3 en la ecuación en forma continua, se obtiene:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

Cuando tenemos dos puntos que pasan por una misma recta, podemos hallar el vector direccional de la recta sin más que calcular el vector que une dichos puntos, de forma que, sustituyendo en la ecuación de la recta en forma continua, obtenemos la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos, la cual viene definida por la fórmula:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Vamos a encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 1) y B(-1, 3).

Aplicando la fórmula y desarrollando los cálculos, obtenemos que:

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 1}{3 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{2}$$

2.1.5. Ecuaciones implícitas de la recta

Por último, si en la ecuación de la recta en forma continua quitamos denominadores y pasamos todo al primer miembro, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

que son las llamadas **ecuaciones implícitas de la recta.**

En la ecuación:

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{2}$$

la ecuación implícita de la recta es:

$$2(x-2) = -3(y-1) \Rightarrow 2x - 4 = -3y + 3 \Rightarrow \; 2x + 3y - 7 = 0$$

Atención

Como puedes observar, las posibles formas de expresar una recta, si bien son distintas, parten todas de una misma ecuación principal y se obtienen a través de pequeñas modificaciones de ella. Esta ecuación principal no es más que la definición de recta en el espacio afín.

2.1.6. Ecuación punto pendiente

Sea un punto del plano $Q = (x_2, y_2)$ y $P = (x_1, y_1)$ otro punto, se tiene lo siguiente:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

donde $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la **pendiente de la recta**.

Nota

La pendiente la podemos definir como el cambio en el eje Y dividido por el cambio en el eje X entre dos puntos de la recta. Es decir, la inclinación de la recta.

2.1.7. ECUACIÓN SEGMENTARIA

Consideremos de nuevo el plano, la ecuación segmentaria de la recta es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde (a, 0) es el punto de corte con el eje OX y (0, b) es el punto de corte con el eje OY.

Para llegar a este resultado es muy simple: basta sustituir los puntos (a, 0) y (0, b) en la ecuación de la recta en forma continua y obtenemos la **ecuación segmentaria.**

Nota

La ecuación segmentaria también recibe el nombre de ecuación canónica.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Dado el punto A = (1, 0, 2) y el vector de dirección $\overline{u}$ = (1, 2, 0), halla las ecuaciones de la recta que forman (vectorial, paramétrica e implícita).

Solución:

Ecuación vectorial:

(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, 2, 0)

Ecuaciones paramétricas:

x = 1+t

y = 2t

z = 2

Ecuaciones implícitas:

2x – y – 2 = 0

2z – 4 = 0.

3. EL PLANO AFÍN

Entendemos por plano afín el conjunto de dimensión siguiente:

$$\Pi \equiv \left\{x \in E / \overline{AX} = t\bar{u} + s\bar{v}\right\}$$

donde A es un punto fijo y $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores linealmente independientes. Al variar s y t se obtienen los puntos del plano.

Para determinar un plano necesitamos dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que se llaman vectores direccionales del plano, y un punto A.

Básico

Un plano puede definirse mediante:

- Tres puntos no alineados.
- Dos rectas que se cortan.
- Una recta y un punto.
- Dos rectas paralelas.

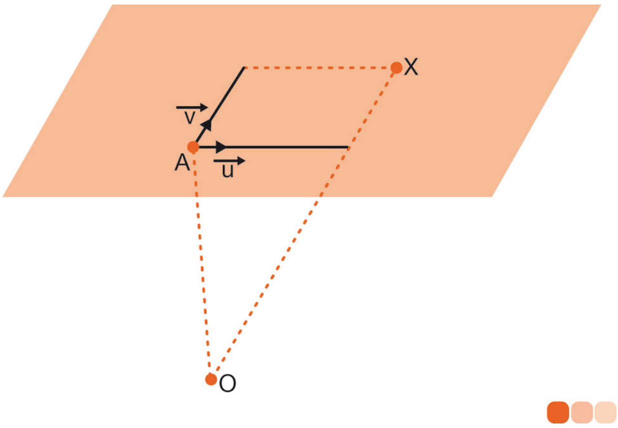
Podemos determinar el plano mediante tres puntos no alineados, ya que con ellos tres es posible construir los dos vectores direccionales que hacen falta.

3.1. EXPRESIONES DEL PLANO

Al igual que ocurre con una recta, la ecuación de un plano se puede poner de diferentes formas, como veremos a continuación.

3.1.1. ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Consideremos un punto determinado del plano A, así como dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ linealmente independientes.



Observamos que se cumple $\overline{OX} = \overline{OA} + t\overline{u} + s\overline{v}$, la cual recibe el nombre de **ecuación vectorial del plano.**

3.1.2. ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO

Sean el punto A = (x_0, y_0, z_0) y los vectores $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Sustituyendo esto en la ecuación vectorial del plano e igualando componente a componente, se obtienen las **ecuaciones paramétricas del plano**:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y &= y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z &= z_0 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

Ejemplo

La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del plano determinado por el punto A = (3, -1, 2) y los vectores u = (1, 2, 3) y v = (3, -2, 1) son:

La ecuación vectorial: (x,y,z) = (3,-1,2) + s(1,2,3) + t(3,-2,1), y la ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + s + 3t \\ y = -1 + 2s - 2t \\ z = 2 + 3s + t \end{cases}$

3.1.3. Ecuación general o implícita del plano

Para hallar la ecuación general del plano se parte de sus ecuaciones paramétricas, de las que se despejan los valores de s y t para poder llegar a una ecuación de la forma Ax + By + Cz + D = 0.

Otra forma de realizar esta operación, más sencilla, consiste en desarrollar el determinante que se obtiene de las ecuaciones paramétricas. Así, sea el siguiente determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando los resultados, la ecuación del plano se reduce a:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ con } A, B, C, D \text{ números reales.}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación general o implícita del plano.**

Ecuaciones de un plano:

Vectorial:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda\cdot(u_1, u_2, u_3) + \mu\cdot(v_1, v_2, v_3)$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = a + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = b + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = c + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{cases}$$

Implícita:

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & v_1 \\ y-b & u_2 & v_2 \\ z-c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

con (A, B, C) perpendicular a u y a v.

3.1.4. ECUACIÓN NORMAL

Otra forma de determinar la ecuación de un plano es conocer un punto del mismo y un vector normal al plano.

Consideremos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ del plano y un vector normal u = (a, b, c) al plano. Entonces, para cualquier punto P(x, y, z) del plano, el vector P_0P es perpendicular al vector normal, por lo que u P_0P = 0, que recibe el nombre de **ecuación normal** del plano. A partir de esta ecuación normal se puede obtener la ecuación general:

$$u\ P_0P = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \longrightarrow ax + by + cz + d = 0, \text{ donde } d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A = (3, -1, 2) y cuyo vector normal es n = (2, 1, 8).

Solución:

El plano pedido será de la forma 2x + y + 8z + D = 0, y el término independiente D se puede calcular imponiendo la condición de que el plano pase por el punto A:

$2 \cdot 3 + (-1) + 8 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow \quad D = -21$

Por tanto, la ecuación del plano es:

2x + y + 8z - 21 = 0.

3.1.5. Haz de planos

Si consideramos r como la recta intersección de dos planos Π_1 y Π_2, denominaremos **haz lineal de planos** de la recta r a la expresión lineal de todos los planos que contienen a r y que viene dada por:

$$\Pi_1 + \lambda\Pi_2 = 0$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A = (2, 1, 3), B = (1, 1, 1) y C = (5, 1, 8).

Solución:

Consideremos

$\overline{AX} = (x - 2, y - 1, z - 3)$ $\overline{AB} = (-1, 0, -2)$

$\overline{AC} = (3, 0, 5)$

Si calculamos el determinante:

$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 3 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z-3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2(y - 1) + 5(y - 1) = 2y - 2 + 5y - 5 = 7y - 7 = 0 \Rightarrow y - 1 = 0.$

4. POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

Hay formas sencillas de saber cuál es la posición relativa entre rectas y planos, que se basan en tomar sus ecuaciones generales y calcular el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

4.1. POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS PLANOS

Sean los planos:

$$\Pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Las posiciones relativas de dos planos en el espacio son:

- **Los planos son paralelos,** entonces los vectores direccionales de un plano son proporcionales a los vectores direccionales del segundo plano, y ambos planos no tienen ningún punto en común.

- **Los planos se cortan en una recta.** Se dice que ambos planos son incidentes.
- Se dice que dos **planos son coincidentes** cuando las ecuaciones de ambos representan al mismo plano.

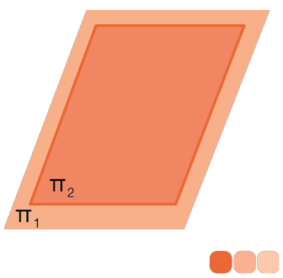
Para estudiar la posición relativa de dos planos, en primer lugar, construimos la matriz de coeficientes, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

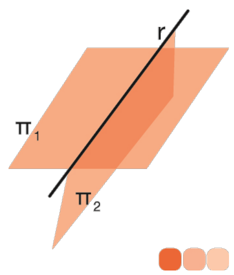
$$A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & -D' \\ A' & B' & C' & -D' \end{pmatrix}$$

donde la matriz A* se denomina matriz ampliada. Estudiaremos los rangos de ambas matrices:

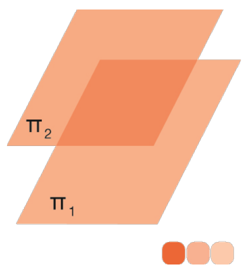
1. Si el rango A ≠ rango A* ⇒ Los planos son **paralelos**.
2. Si el rango A = rango A* **= 1** ⇒ Los planos **coinciden**.
3. Si el rango A = rango A* **= 2** ⇒ Los planos se **cortan** en una recta.



Planos coincidentes



Planos incidentes en una recta



Planos paralelos

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cómo son los planos $\Pi_1 \equiv 7x - 2y - 5z + 5 = 0$ y $\Pi_2 \equiv 5x + y - 3z + 9 = 0$?

a) Paralelos.

b) Coincidentes.

c) Incidentes en una recta.

Solución:

c) Incidentes en una recta.

4.2. POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO

Sean el plano y la recta:

$$\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$r \equiv \begin{Bmatrix} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{Bmatrix}$$

Básico

Las posiciones relativas entre ambos que podemos obtener son:

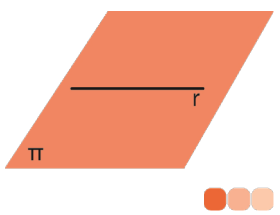
- Que la recta esté contenida en el plano.
- Que la recta corte al plano en un punto, es decir, que sean secantes.
- Que la recta sea paralela al plano.

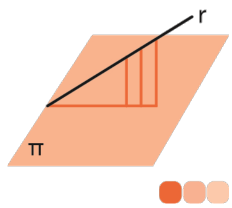
La matriz de coeficientes queda:

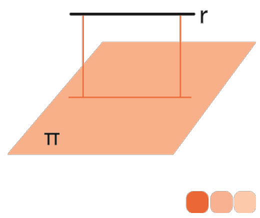
$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

1. Si **rango de A = rango A* = 2** $\Rightarrow$ La **recta** está contenida en el plano.
2. Si **rango de A = rango A* = 3** $\Rightarrow$ Son **secantes**, la recta y el plano se cortan en un punto.
3. Si **rango de M** $\neq$ **rango M*** $\Rightarrow$ La recta y el plano son **paralelos**.







Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Si tenemos una recta y un plano cuyas ecuaciones son:

$$\Pi \equiv x - y - z = 2$$

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = -2 \end{cases}$$

¿Cómo son?

Solución:

Secantes, se cortan en el punto (6, -1/2, 9/2).

4.3. POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS

Consideremos ahora la posición relativa de dos rectas, que tienen por ecuaciones:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right\}$$

$$r' \equiv \left\{ \begin{array}{l} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{array} \right\}$$

Básico

Las posiciones relativas entre dos rectas son:

- Que sean coincidentes.
- Que sean paralelas.
- Que sean secantes, es decir, que se corten en un punto.
- Que las rectas se crucen, pero no en el mismo plano.

A partir de las ecuaciones de las rectas, obtenemos su matriz de coeficientes y la matriz ampliada, que quedan:

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \\ A''' & B''' & C''' & -D''' \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

1. Si **rango de A = rango de A* = 2** ⇒ Rectas **coincidentes.**
2. Si rango de A = rango de A* = 3 ⇒ Rectas secantes.
3. Si **rango de A = 2 ≠ 3 = rango de A*** ⇒ Rectas **paralelas.**
4. Si **rango de A** = 3 ≠ 4 = **rango de A*** ⇒ Rectas que se **cruzan.**

Cuando tenemos dos rectas sobre un mismo plano, el número de dimensiones es menor, por lo que el proceso se simplifica. Así, supongamos que tenemos dos rectas $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ y $A' \cdot x + B' \cdot y + C' = 0$.

Tenemos dos posibilidades:

1. **Son paralelas:**

$$v \parallel v' \Leftrightarrow m = m' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \begin{cases} = \dfrac{C}{C'} & \text{coincidentes} \\ \neq \dfrac{C}{C'} & \text{no coincidentes} \end{cases}$$

2. **Se cortan en un punto:**

$$m \neq m' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Te proponemos ahora que halles la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\equiv 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ \Pi_2 &\equiv -x - y + 3z = 2 \end{aligned}$$

Solución:

Construimos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A*:

$$\Pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 1 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\Pi_2 \equiv -x - y + 3z - 2 = 0 \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de ambas matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango de } A = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango de } A^* = 2$$

Como el rango de ambas matrices coincide y es 2, tenemos que **estos dos planos se cortan en una recta.**

+ Info

Te proponemos que veas ahora este vídeo sobre el planteamiento teórico de las distintas expresiones de las ecuaciones de una recta y su aplicación práctica.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

CONCLUSIONES

En esta unidad didáctica hemos visto algunos conceptos complejos y difíciles que debes recordar, para ello te proponemos que prepares un buen esquema. Aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en la unidad, recuerda completarlos con aquellos que te resulten más difíciles:

Ecuaciones de la recta:

- Vectorial:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

- Paramétricas:

$$\begin{cases} x = a + \lambda \cdot u_1 \\ y = b + \lambda \cdot u_2 \\ z = c + \lambda \cdot u_3 \end{cases}$$

- Continua:

$$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3}$$

RECAPITULACIÓN

La posición de cualquier elemento geométrico en el espacio se establece gracias a una referencia que determina un sistema de coordenadas.

Existen diversas formas de expresar la ecuación de una recta o plano, cada una de las cuales puede utilizarse para realizar con mayor facilidad determinados tipos de ejercicios.

Tomando las ecuaciones generales de rectas y planos, podemos determinar, calculando el rango de la matriz de coeficientes y su matriz ampliada, cuál es la posición relativa ente ellos.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **Indica cuál es la respuesta falsa a la afirmación “Para determinar una recta necesitamos”:**

   a) Un vector y un punto.

   b) Dos puntos.

   c) Tres puntos.

   d) Dos vectores.

2. **¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta que tiene las siguientes ecuaciones paramétricas?**

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 1 + 3t \end{aligned}$$

   a) (2, 3, 4).

   b) (2, 3, 5).

   c) (3, 3, 5).

   d) (2, 4, 4).

3. **¿Cuál de estas cuatro afirmaciones es falsa?**

   a) Una recta tiene un solo vector libre de dirección.

   b) Un plano tiene dos vectores libres de dirección.

   c) Con dos puntos puedo determinar un plano.

   d) Con tres puntos puedo determinar una recta.

4. **La recta dada por x - 3 = y - 5 = z - 2, tiene como vector de dirección:**

   a) (3, 5, 2).

   b) (-3, -5, -2).

   c) (1, 1, 1).

   d) (0, 0, 0).

5. **¿Por qué los vectores (1, 2, 3) y (2, 4, 6), y el punto (1, 2, 6) no pueden determinar un plano?**

   a) Porque la resta de los vectores no es igual al valor del punto.

   b) Porque los vectores no están en el mismo plano.

   c) Porque los vectores pertenecen al mismo vector libre.

   d) Porque es necesario que el punto y uno de los vectores coincidan.

6. **¿Cuál es la posición relativa de estos dos planos?**

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\equiv 2x + 3y + z - 4 = 0 \\ \Pi_2 &\equiv -6x - 9y - 3z + 12 = 0 \end{aligned}$$

   a) Son paralelos.

   b) Se cortan en una recta.

   c) Son el mismo plano.

   d) Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

7. Indica la posición relativa entre la recta y el plano siguiente:

$$\Pi \equiv x + 2y - z - 3 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y + 5z - 2 = 0 \\ 2x + 4y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Son paralelos.

b) Se cortan en un punto.

c) La recta está contenida en el plano.

d) Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 1, 1) y es paralela a la recta:

$$\begin{aligned} x &= 1 + s \\ y &= 2 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

a) x = s, y = 1, z = 1.

b) x = 2s, y = 2, z = 1.

c) x = 0, y = 1, z = s.

d) x = s, y = 1, z = -3.

9. Halla los valores de a y b para que la recta r esté contenida en el plano Π, siendo:

$$r \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$
$$\Pi \equiv 2x - 3y + z + b = 0$$

a) a = 3, b = 6.

b) a = 1, b = 5.

c) a = 3, b = 8.

d) a = 4, b = 4.

10. Si el vector de dirección de una recta es proporcional al vector de dirección de otra recta, tenemos que:

a) Las dos rectas son paralelas.

b) Las dos rectas son coincidentes.

c) Las rectas son perpendiculares.

d) Las rectas son secantes.

SOLUCIONARIO

1.	d	2.	a	3.	c	4.	c	5.	c
6.	c	7.	a	8.	a	9.	a	10.	b

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV. AA. *EULER*. *Matemáticas I*. Madrid: S.M., 2001.
- VV. AA. *EULER. Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales.* Madrid: S.M, 2000.
- VV. AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.