

TRIGONOMETRÍA PLANA. PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA



ÍNDICE

MOTIVACIÓN	3
PROPÓSITOS	4
PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD	5
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y REPRESENTACIÓN DE ÁNGULOS	7
1.1. ARCOS Y ÁNGULOS	7
1.2. MEDIDA DE LOS ÁNGULOS	7
1.3. ÁNGULOS CARACTERÍSTICOS.....	8
1.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	8
1.5. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.....	10
1.6. RELACIONES FUNDAMENTALES.....	11
1.7. FÓRMULAS DE LOS ÁNGULOS SUMA Y DIFERENCIA.....	13
1.8. FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE Y MITAD	14
1.8.1. EJERCICIO RESUELTO.....	15
1.9. SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y COSENOS	15
2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.....	17
2.1. RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO	17
2.1.1. PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA.....	18
2.1.2. DESCOMPOSICIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO EN TRIÁNGULOS SEMEJANTES	19
2.1.3. TEOREMA DE PITÁGORAS.....	19
2.1.4. TEOREMA DE LA ALTURA	21
2.1.5. TEOREMA DEL CATETO.....	22
2.1.6. RELACIONES MÉTRICAS PARTICULARES.....	23

2.2. RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO CUALQUIERA	24
2.2.1. TEOREMA DEL SENO	24
2.2.2. TEOREMA DEL COSENO	25
3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS	28
3.1. PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS	28
3.2. TEOREMA DE THALES	29
3.3. TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES	31
3.4. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS	33
CONCLUSIONES	35
RECAPITULACIÓN	37
AUTOCOMPROBACIÓN	39
SOLUCIONARIO	43
PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN	44
BIBLIOGRAFÍA	45

MOTIVACIÓN

La trigonometría es una parte de las matemáticas muy antigua, puesto que los babilonios y los egipcios ya conocían de su existencia para efectuar medidas agrícolas y para la construcción de edificios.

Su utilidad para el estudio de la astronomía, con la consiguiente mejora en el cálculo del tiempo y los calendarios hizo que la trigonometría fuese considerada una rama muy útil de las matemáticas por casi todas las civilizaciones: los griegos, indios y árabes realizaron abundantes estudios, asentando las bases unos y desarrollando otros las principales funciones y teoremas que la dirigen.

Hoy en día, la trigonometría se emplea en muchos campos del conocimiento, tanto teóricos como prácticos e interviene en toda clase de investigaciones de la física y en casi todas las ramas de la ingeniería.

Su conocimiento es, por lo tanto, fundamental para realizar cualquier trabajo científico, por lo que se hace necesario asentar unas buenas bases que permitan un adecuado progreso en posteriores aplicaciones.

PROPÓSITOS

- Conocer y manejar las razones trigonométricas.
- Aprender las expresiones fundamentales de la trigonometría.
- Conocer uso y aplicación de fórmulas trigonométricas.
- Aplicar la resolución analítica de triángulos rectángulos.
- Saber cómo utilizar los teoremas de la altura y el cateto, y el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.
- Aplicar el teorema del seno y del coseno en la resolución de triángulos cualesquiera.
- Conocer los criterios de proporcionalidad y semejanza.
- Manejar el teorema de Thales.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

La trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones existentes entre los lados de un triángulo y las razones trigonométricas de sus ángulos.

Dichas relaciones tienen una primera e importante aplicación: la resolución de triángulos. Resolver un triángulo es determinar todos sus elementos (lados y ángulos) a partir del conocimiento de algunos de ellos.

Para resolver un triángulo podemos seguir dos caminos; uno es utilizar métodos geométricos que nos permitan dibujarlo y el otro, calcular numéricamente los elementos desconocidos con ayuda de las relaciones y teoremas que expondremos a lo largo de esta unidad didáctica.

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y REPRESENTACIÓN DE ÁNGULOS

En este apartado vamos a ver los ángulos y sus razones trigonométricas. Será de vital importancia para la resolución de triángulos.

1.1. ARCOS Y ÁNGULOS

En primer lugar, definiremos ambos conceptos básicos:

- **Arco:** es el espacio comprendido entre dos puntos de una misma circunferencia.
- **Ángulo:** es la magnitud que mide la separación entre los segmentos que unen el centro de la circunferencia y dos puntos de ella. El sentido de un ángulo es el contrario a las agujas del reloj.

1.2. MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

Existen diversos sistemas para medir los ángulos, pero los más utilizados son los siguientes:

- **Grados sexagesimales:** dividimos la circunferencia en 360 partes iguales y cada una de ellas constituye un grado. A su vez, cada grado está dividido en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

- **Radianes:** definimos radián como el arco cuya longitud coincide con el radio de la circunferencia. Así, una circunferencia mide $2 \cdot \pi$ radianes.



Nota

$$1 \text{ radián} = 180/\pi = 57,29577^\circ$$

$$1^\circ = \pi/180 = 0,1745 \text{ radianes}$$

1.3. ÁNGULOS CARACTERÍSTICOS

- **Ángulos complementarios:** son aquellos que suman 90° o $\pi/2$ radianes, es decir, un ángulo recto.
- **Ángulos suplementarios:** son aquellos que suman 180° o π radianes, es decir, un ángulo llano.

1.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas más importantes son **seno**, **coseno** y **tangente**.

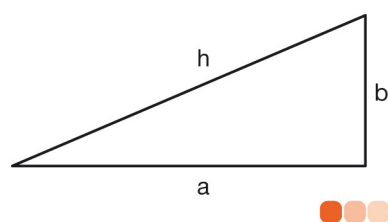
Se denominan **razones trigonométricas** a la relación existente entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

A partir de aquí definiremos seno, coseno y tangente como:

$$\text{sen} \cdot \alpha = \frac{b}{h} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos} \cdot \alpha = \frac{a}{h} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg} \cdot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$



Existen, además, otras razones trigonométricas auxiliares a las de seno, coseno y tangente, que son las siguientes:

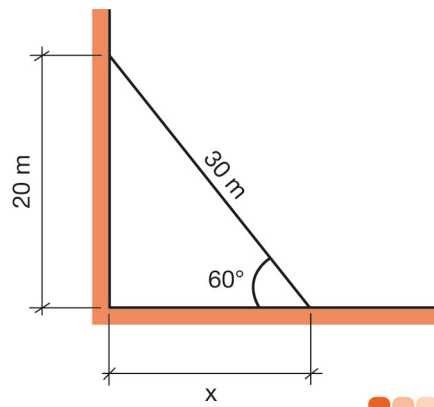
- Cosecante $\alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$
- Secante $\alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$
- Cotangente $\alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Para los ángulos más frecuentes las razones trigonométricas principales son las siguientes:

Ángulo α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

Te planteamos el siguiente caso:

Sabiendo que la longitud de la escalera es de 30 m y que está apoyada a una altura de 20 m de la pared y forma un ángulo con el suelo de 60° . ¿A qué distancia se encuentra de la pared?



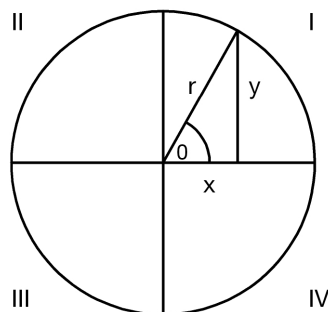
La solución es:

Tenemos que $\cos 60^\circ = \frac{x}{30}$ y despejando :

$$x = 30 \cdot \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ m.}$$

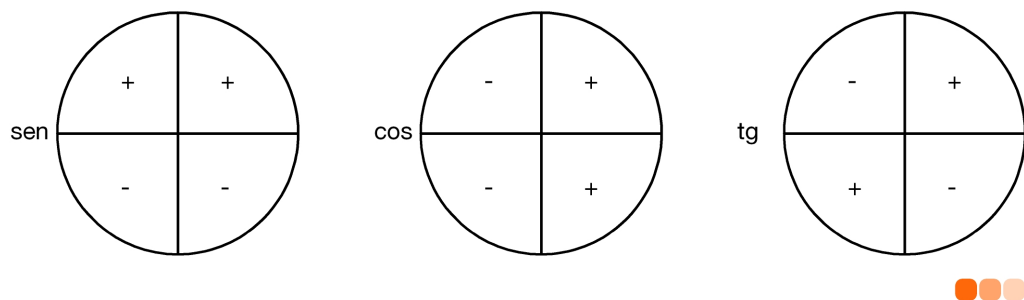
1.5. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En un sistema de coordenadas cartesianas, trazamos una circunferencia de radio $r = 1$, teniendo por centro el origen de coordenadas.



El signo de las razones trigonométricas depende del signo que tengan las abscisas y ordenadas correspondientes, dependiendo del cuadrante en el que estén situadas.

Como podrás observar, en el primer cuadrante están los $\alpha \in [0, 90^\circ]$; en el segundo cuadrante los $\alpha \in [90^\circ, 180^\circ]$; en el tercer cuadrante los $\alpha \in [180^\circ, 270^\circ]$; y en el cuarto cuadrante los $\alpha \in [270^\circ, 360^\circ]$. Siempre medidos en sentido antihorario.



Básico

El seno y coseno tienen valores comprendidos entre -1 y 1.

La tangente, cotangente, secante y cosecante pueden tomar valores cualesquiera desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

1.6. RELACIONES FUNDAMENTALES

La relación fundamental de la trigonometría que verifican el seno y el coseno de un mismo ángulo es la siguiente:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

También podemos relacionar seno, coseno y tangente a través de la expresión:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Estas dos igualdades permiten obtener, salvo el signo, cada una de las razones trigonométricas en función de las otras dos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

Además, si dos ángulos son complementarios, suplementarios u opuestos (suman 360°) sus razones trigonométricas están relacionadas.

Ejemplo:

Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $|\cos \alpha| = 0,6$, halla las razones trigonométricas de α .

Como α es un ángulo del segundo cuadrante, su seno es positivo y su coseno y tangente negativos; por tanto:

$$\cos \alpha = -0,6$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -1,33$$

1.7. FÓRMULAS DE LOS ÁNGULOS SUMA Y DIFERENCIA

Las razones trigonométricas de $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$, en función de α y β son las siguientes:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Ejemplo:

Si α y β son dos ángulos del primer cuadrante y $\cos \alpha = 5/7$ y $\cos \beta = 1/5$, entonces:

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta =$$

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \sqrt{1 - \frac{25}{49}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{29}{35}$$

Luego:

$$\alpha - \beta = \arccos \frac{29}{35} \approx 34,05^\circ$$

1.8. FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE Y MITAD

En función de las razones trigonométricas de un ángulo, las de su ángulo doble y las de su ángulo mitad son:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$$



Básico

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

1.8.1. EJERCICIO RESUELTO

Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 4/5$ y que α es un ángulo del segundo cuadrante, calculemos $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos(\alpha/2)$.

Observa que si α está en el segundo cuadrante, $\alpha/2$ pertenecerá al primer cuadrante, entonces:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{24}{25}$$

$$\cos(\alpha/2) = +\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (3/5)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

1.9. SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y COSENOS

$$\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^{\circ} + \operatorname{sen} 15^{\circ} &= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{75+15}{2} \cdot \cos \frac{75-15}{2} = \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen} 45^{\circ} \cdot \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

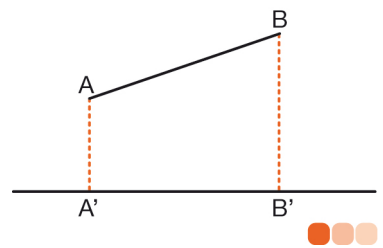
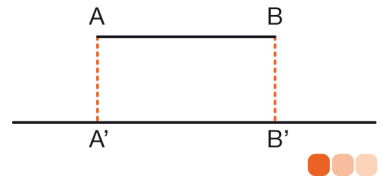
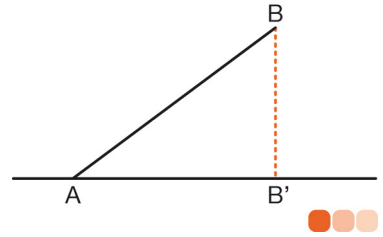
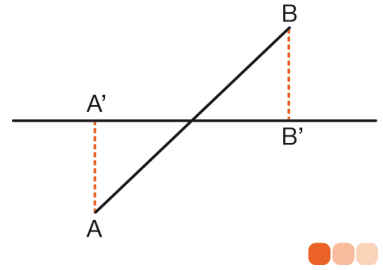
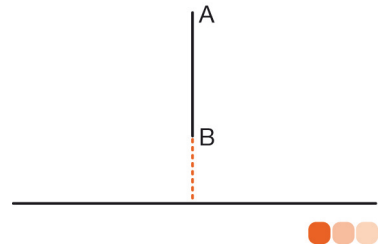
Para resolver un triángulo podemos seguir dos caminos; uno es utilizar métodos geométricos que nos permitan dibujarlo y el otro, calcular numéricamente los elementos desconocidos con ayuda de las relaciones y teoremas que exponaremos a lo largo de esta unidad didáctica.

2.1. RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

El concepto “resolución de triángulos” se refiere a resolver el valor de todos sus elementos desconocidos, lados y ángulos, a partir de aquellos que ya conozcamos, bien a través de relaciones trigonométricas, teoremas sobre la relación entre los lados o aplicaciones de proporcionalidad.

2.1.1. PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA

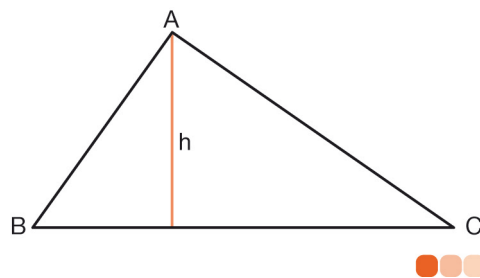
Denominamos proyección ortogonal a la que resulta si todas las líneas proyectadas desde un objeto o segmento son perpendiculares a un mismo plano o recta. Se pueden dar los siguientes casos de proyección:

Imagen	Proyección
	En este caso, AB y la recta no son paralelos, pero existe proyección uniendo las líneas perpendiculares, obteniendo A'B'
	Como AB y la recta son paralelos, la proyección de AB es una recta tal que $AB = A'B'$
	En este caso, el segmento y la recta tiene en común el inicio. Así, la proyección de AB será AB'
	Se trata de un caso en el que AB intersecta con la recta en un punto, generando una proyección a partir de los puntos extremos como en los demás casos
	Cuando el segmento es perpendicular a la recta, la proyección se da solo a partir de un punto, cuya proyección es otro punto en la recta

2.1.2. DESCOMPOSICIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO EN TRIÁNGULOS SEMEJANTES

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a este en dos triángulos semejantes al mismo.

En la figura, la altura \overline{AH} sobre la hipotenusa del triángulo ABC forma los triángulos semejantes HBA y HAC, por ser dos triángulos rectángulos con un ángulo común:



2.1.3. TEOREMA DE PITÁGORAS

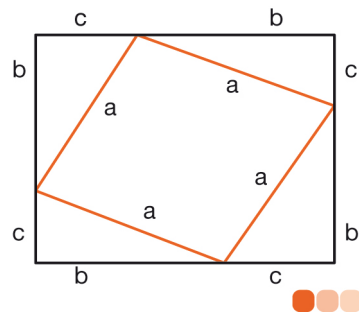


Imprescindible

El teorema de Pitágoras dice que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para demostrar el teorema de Pitágoras, supongamos que tenemos un triángulo rectángulo de lados a , b y c , siendo a la hipotenusa. Podemos construir un cuadrado que tenga de lado justo lo que mide el cateto b , más lo que mide el cateto c , es decir, $b + c$, siendo el área de este cuadrado $(b + c)^2$.



Ahora trazamos las hipotenusas de los triángulos rectángulos que salen, por lo que tendremos que el área del cuadrado, que es la misma de antes, se puede poner ahora como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos, cada uno de ellos de área $(b \cdot c)/2$, más el área de un cuadrado interior, que será a^2 . Es decir, el área del cuadrado grande también es el área del cuadrado pequeño más 4 veces el área del triángulo:

$$a^2 + 4(bc/2) = a^2 + 2bc$$

Podemos igualar las dos formas de calcular el área del cuadrado grande y tenemos:

$$(b + c)^2 = a^2 + 2bc$$

Si ahora desarrollamos, nos queda $b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$ y, simplificando, obtenemos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$



Truco

Aplicando el teorema de Pitágoras podemos saber el tipo de triángulo que tenemos. Por ejemplo: sean los lados a , b y c , con a como lado mayor. Si $b^2 + c^2 = a^2$, es **rectángulo**; si $b^2 + c^2 > a^2$, es **acutángulo**; y si $b^2 + c^2 < a^2$, es un ángulo **obtusángulo**.



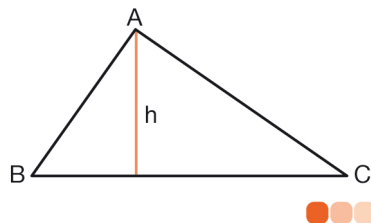
+ Info

Conoce el Teorema de Pitágoras mediante una explicación sencilla de nuestro tutor a través de este vídeo. ¡Aprenderás a calcularlo rápidamente!

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

2.1.4. TEOREMA DE LA ALTURA

El teorema de la altura nos da la relación, en un triángulo, de la altura sobre la hipotenusa y los segmentos que determina sobre la misma o proyecciones. La relación es la siguiente: $h^2 = m \cdot n$.



La demostración es la siguiente: si aplicamos el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y AHC, tenemos que:

$$a^2 = h^2 + m^2$$

$$b^2 = h^2 + n^2$$

Si aplicamos el mismo teorema al triángulo ABC, tenemos que:

$$c^2 = (m + n)^2 = a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 2h^2 + m^2 + n^2.$$

Si sustituimos, nos queda que $2mn = 2h^2$, luego

$$h^2 = m \cdot n.$$



Básico

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

2.1.5. TEOREMA DEL CATETO

El teorema del cateto relaciona los catetos y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

En un triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, es decir,

$$a^2 = m \cdot c$$

La demostración es simple: en el ángulo AHC se cumple que $a^2 = h^2 + m^2$ y, aplicando el teorema de la altura, tenemos que:

$$a^2 = m^2 + mn = m(m + n) = m \cdot c$$

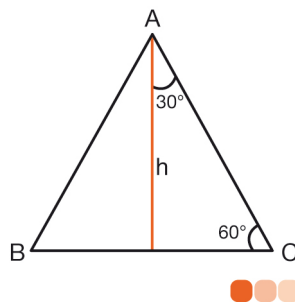


Básico

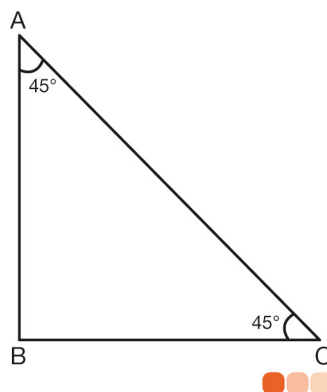
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma.

2.1.6. RELACIONES MÉTRICAS PARTICULARES

- Si el triángulo ABC es equilátero, sus ángulos miden 60° y, al trazar la altura \overline{AH} , formamos dos triángulos rectángulos iguales de ángulos agudos 30° y 60° . El cateto \overline{HC} mide la mitad del lado $\overline{BC} = \overline{AC}$. Si en un triángulo rectángulo un ángulo mide 30° , el cateto opuesto a ese ángulo mide la mitad que la hipotenusa:



- Si el triángulo rectángulo es isósceles, tiene sus catetos y los ángulos agudos iguales (45°):

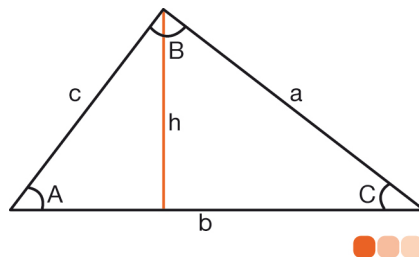


2.2. RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO CUALQUIERA

Para mantener siempre el mismo criterio, vamos a denominar a los elementos que componen un triángulo de la siguiente forma:

- a , b y c a los lados.
- A , B y C a los ángulos opuestos a cada lado.

Para conocer todos los datos de un triángulo a partir de alguno de ellos, utilizaremos los teoremas que se explican a continuación.



2.2.1. TEOREMA DEL SENO

El teorema del seno es una relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de los ángulos respectivamente opuestos.

Dicho teorema establece que la longitud de cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto, es decir:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

**Reto**

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula el triángulo ABC sabiendo que $B = 60^\circ$ y $C = 50^\circ$, y que $c = 20$ cm.

Solución:

$$A = 180 - (60 + 50) = 70^\circ$$

Entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 70} = \frac{20}{\operatorname{sen} 50} \Rightarrow \text{despejando: } a = 24,53.$$

De la misma forma:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 60} = \frac{20}{\operatorname{sen} 50} \Rightarrow \text{despejando: } b = 22,61..$$

2.2.2. TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno relaciona el tercer lado de un triángulo con los dos primeros y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Este teorema se utiliza cuando:

- a) Se conocen los tres lados del triángulo (a , b , c) y queremos conocer cualquier ángulo.
- b) Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, y queremos conocer el otro lado.
- c) Conocemos dos lados y el ángulo que forman, y queremos saber el otro lado.
- d) Conocemos dos lados y el ángulo que forman, y queremos conocer otro ángulo. Aquí aplicaremos primero el teorema del coseno para conocer el lado que nos falta y luego el teorema del seno para saber el ángulo.



Nota

El teorema del coseno es la generalización del teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos.



Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Dado el triángulo que mide $a = 20$ cm, $b = 30$ cm, $c = 15$ cm, calcula los ángulos que lo forman.

Solución:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 20^2 = 30^2 + 15^2 - 2 \cdot 30 \cdot 15 \cdot \cos A$$

$$400 = 900 + 225 - 900 \cos A \Rightarrow 900 \cos A = 725 \Rightarrow \cos A = 0,8055$$

$$A = 36,34^\circ$$

Los siguientes ángulos se calculan de la misma forma a través de las expresiones:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$$

Es un caso que puede no tener solución debido a que las longitudes sean incompatibles con un triángulo.

**Reto**

Realiza el siguiente ejercicio.

Dado un triángulo, cuyos datos son $a = 10$ cm, $c = 15$ cm, $B = 60^\circ$, calcula cuánto medirá el lado b , así como el resto de los ángulos:

- a) $b = 13,22$, $A = 56^\circ$, $C = 23^\circ$.
- b) $b = 13,22$, $A = 68^\circ$, $C = 56^\circ$.
- c) $b = 13,22$, $A = 41^\circ$, $C = 79^\circ$.
- d) $b = 13,22$, $A = 79^\circ$, $C = 68,4^\circ$.

Solución:

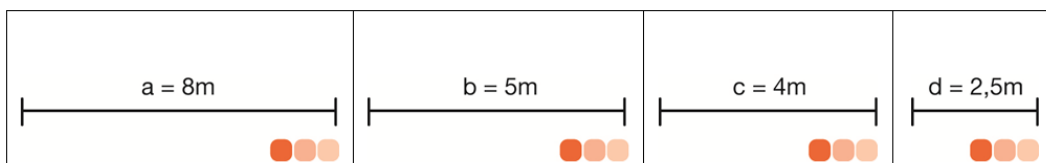
$b = 13,22$, $A = 41^\circ$, $C = 79^\circ$.

3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

A lo largo del estudio de este apartado veremos un teorema muy importante sobre semejanza de triángulos, **el teorema de Thales**.

3.1. PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

La **razón** de dos segmentos es igual al cociente de sus medidas. Por ejemplo: sean los segmentos a, b, c y d:



Halla las razones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{c}{d} = \frac{4}{2,5} = 1,6$$

Proporción es la igualdad de dos razones de segmentos. En el ejemplo anterior, $a/b = c/d$ es una proporción. Se dice que "a" y "c" son proporcionales a "b" y "d" o viceversa.



Básico

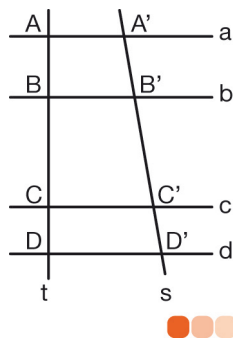
La **razón** de dos segmentos es igual al cociente de sus medidas.

Proporción es la igualdad de dos razones de segmentos.

3.2. TEOREMA DE THALES

El teorema de Thales se enuncia del siguiente modo:

Si varias paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos que determinan en una de las secantes son proporcionales a los segmentos que determinan en la otra secante.

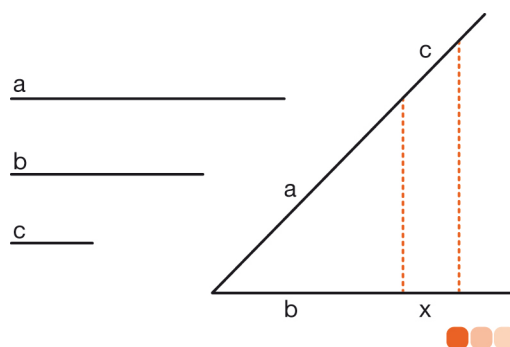


Si "a", "b", "c" y "d" son rectas paralelas y "t" y "s" dos secantes a ellas, entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

El teorema de Thales tiene, entre otras, las siguientes aplicaciones:

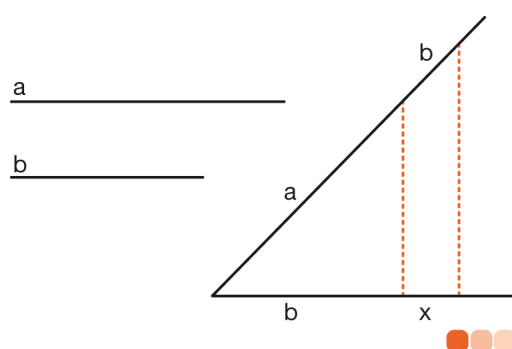
- **Segmento cuarto proporcional.** Trazamos dos semirrectas con el mismo origen; sobre una, trasladamos el segmento a y, a continuación, el c ; sobre la otra, trasladamos el segmento b . Trazamos una recta que una el extremo de a con el de b y una paralela a ella por el extremo de c . El punto donde corta esta a la otra semirrecta es el extremo del segmento x .



Dados tres segmentos a , b y c , se llama **segmento cuarto proporcional** de a , b y c a otro segmento x que cumple la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

- **Segmento tercero proporcional.** Trazamos dos semirrectas con el mismo origen, de forma que sobre una trasladamos el segmento a y, a continuación, el b ; sobre la otra, trasladamos el segmento b . Trazamos una recta que una el extremo de a con el de b . Trazamos una paralela a ella que pase por el extremo de b . El punto donde corta a la semirrecta es el extremo del segmento x .



Dados dos segmentos a y b , se llama **segmento tercero proporcional** de a y b a otro segmento x que cumple la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$



+ Info

Aquí tienes un vídeo explicativo sobre el teorema de Thales que nos permite analizar las relaciones de semejanza entre polígonos.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

3.3. TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES

Cuando dos lados de un triángulo se cortan con una paralela al tercer lado, obtenemos otro triángulo cuyos ángulos son iguales a los del primero, y sus lados proporcionales a los de este. En la figura tenemos el triángulo ABC y $AC'B'$, una paralela al lado CB .

Los ángulos C' y B' son iguales a C y B , respectivamente, por ser ángulos correspondientes. Si aplicamos el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{CM}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CM}}; \overline{CM} = \overline{C'B'}; \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CB'}} \quad (2)$$

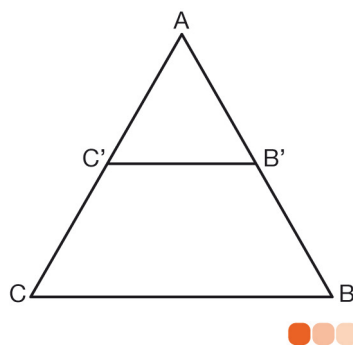
De (1) y (2):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$$

En posición de Tales están los triángulos ABC y $AB'C'$, con sus ángulos iguales y lados proporcionales.

Si C' es el punto medio del lado \overline{AC} y B' es también el punto medio del lado \overline{AB} , al segmento $C'B'$ se llama paralela media del lado \overline{CB} y mide la mitad del mismo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = 2 = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} \Rightarrow \overline{CB} = 2 \overline{C'B'}$$



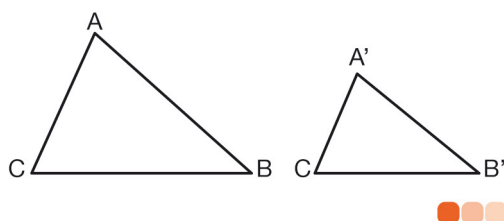
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$$

3.4. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales. Lados homólogos son los que se oponen a ángulos iguales.

En la figura, los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A'}; \hat{B} = \hat{B'}; \hat{C} = \hat{C'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{cases}$$



Se llama **razón de semejanza** al cociente de dos lados homólogos. Dos triángulos en posición de Thales son semejantes.



Recuerda

Los criterios de semejanza de triángulos nos indican las condiciones mínimas para que dos triángulos sean semejantes:

- Primer caso: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
- Segundo caso: dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales.
- Tercer caso: dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.
- En el caso de triángulos rectángulos, esto se reduce a tener igual un ángulo agudo o tener proporcionales los catetos..

CONCLUSIONES

La trigonometría es una parte de las matemáticas muy importante dadas las aplicaciones que tiene en otras áreas del conocimiento, como por ejemplo la arquitectura.

En esta unidad hemos presentado gran cantidad de conceptos nuevos y fórmulas muy útiles que debes memorizar. Para ello te proponemos que prepares un buen esquema, aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad. Recuerda completarlos con aquellos que te causen dificultad.

Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

RECAPITULACIÓN

La trigonometría es una parte fundamental de las matemáticas y de muchas otras ciencias. Se basa en la obtención de una serie de razones trigonométricas a partir de la razón existente entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, mediante las cuales se verifican unas relaciones fundamentales que forman su base.

Por “resolución de triángulos” entendemos la resolución del valor de todos los elementos desconocidos de un triángulo, lados y ángulos, a partir de aquellos que ya conozcamos, bien a través de relaciones trigonométricas, teoremas sobre la relación entre los lados o aplicaciones de proporcionalidad.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. La razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa se llama:

- a) Tangente.
- b) Secante.
- c) Seno.
- d) Coseno.

2. La razón inversa de la tangente se llama:

- a) Secante.
- b) Cotangente.
- c) - Tangente.
- d) Tangente / 2.

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones es cierta?

- a) $\operatorname{tg} \beta = 1/\operatorname{sen} \beta$.
- b) $\sec \beta = 1/\cos \beta$.
- c) $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{cotg} \beta$.
- d) $\cos \beta = -\operatorname{sen} \beta$.

4. El coseno de un ángulo puede variar entre:
- a) $(-\infty, +\infty)$.
 - b) $(-1, 1)$.
 - c) $[-1, 1]$.
 - d) $[0, 1)$.
5. Indica las razones con signo positivo en el cuarto cuadrante:
- a) Coseno y secante.
 - b) Coseno y seno.
 - c) Tangente.
 - d) Seno y tangente.
6. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30° , entonces la longitud de la hipotenusa:
- a) Es la mitad que la de uno de los catetos.
 - b) Es el doble que la de uno de los catetos.
 - c) Es el doble que la de los dos catetos.
 - d) No se puede saber con exactitud.
7. Si de un triángulo ABC conocemos los siguientes datos: $A = 69^\circ$, $B = 38^\circ$, $c = 5$, los tres elementos que faltan son:
- a) $a = 3,22$; $b = 4,8$; $C = 63^\circ$.
 - b) $a = 5,2$; $b = 4$; $C = 73^\circ$.
 - c) $a = 4,88$; $b = 3,22$; $C = 73^\circ$.
 - d) $a = 4,36$; $b = 4,28$; $C = 73^\circ$.
8. Si resolvemos la ecuación $\text{sen } x + \text{sen } 25^\circ = 0$, obtenemos:
- a) $x = 335^\circ$.
 - b) $x = 155^\circ$ o 335° .
 - c) $x = 205^\circ$ o 155° .
 - d) $x = 335^\circ$ o 205° .

9. La función tangente está definida:

- a) Para todo $x \in \mathfrak{R}$.
- b) Para todo $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ con k positivo.
- c) Para todo $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathfrak{R}$.
- d) Para todo $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ con k impar.

10. Sean α y β tales que $\operatorname{tg} \alpha = 13/7$ y $\operatorname{tg} \beta = 3/7$, entonces $\lambda = \alpha - \beta$ es:

- a) $\lambda = 70/88$.
- b) $\lambda = 16/7$.
- c) $\lambda = 38,5^\circ$.
- d) Ninguna respuesta es correcta.

SOLUCIONARIO

1.	d	2.	b	3.	b	4.	c	5.	a
6.	b	7.	c	8.	d	9.	d	10.	c

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado**.

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos*. Madrid: Anaya, 2002.
- VV. AA. *EULER. Matemáticas I*. Madrid: S.M., 2001.
- VV. AA. *EULER. Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: S.M., 2000.
- VV. AA. *Matemáticas I*. Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.

