MD PlantillaTexto(02)Esp.dot

MATEMÁTICAS ELEMENTALES

UD000531_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Los números son el núcleo de las matemáticas. Son la parte imprescindible sin la que estas no podrían existir. Pero no solo para los que estudian las matemáticas son importantes. Están a nuestro alrededor, en nuestros actos más cotidianos como hacer la compra (¿quién no ha pedido tres cuartos de kilo de algún tipo de mercancía?), ir al banco (tiene la cuenta en números rojos) o, simplemente, reservar una mesa en un restaurante.

Tal cotidianidad en nuestras vidas muestra el grado de integración y utilización que hacemos de ellos, sin prácticamente darnos cuenta de su existencia.

Por ello es necesario saber su manejo, al menos en un grado suficiente para poder desenvolvernos en la sociedad actual.

PROPÓSITOS

- Conocer el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.
- Aprender a operar con los distintos conjuntos de números y a utilizar las propiedades dependiendo de la operación a realizar.
- Establecer las diferencias, propiedades y aplicaciones de los números factoriales y combinatorios.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Esta unidad didáctica recoge los pilares más elementales de las matemáticas. Es importante que aprendas a operar con los distintos tipos de números y a aplicar las propiedades de los sistemas de numeración correspondientes.

Debes asimilar bien estos conceptos, pues los números reales son el conjunto de números por excelencia. Son los que manejamos cotidianamente en todas las situaciones de cálculo que nos plantea la vida y constituyen la base, junto con sus propiedades, de todos los demás conjuntos de números.

1. LOS NÚMEROS REALES

Antes de comenzar a estudiar los números reales veremos otros números que son igual de importantes, como, por ejemplo, los números naturales, los enteros, etc.

1.1. LOS NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales se denota **N.** En este conjunto podemos realizar solo dos operaciones básicas, la suma y el producto. Sin embargo, la resta y la división no están definidas en los números naturales, puesto que este conjunto solo contiene a los números positivos sin decimales, es decir, el 1, 2, 3... Si, por ejemplo, calculamos la resta 7 – 5, encontramos que el resultado es 2, que también es un número natural, sin embargo, al realizar la resta 5 – 7 el resultado es -2, y este número no pertenece a N.

Tanto la suma como el producto cumplen las propiedades asociativa y conmutativa. El producto tiene elemento neutro, pero no la suma, pues el cero no pertenece a los números naturales.

Asimismo, se establece una relación de orden en este conjunto, es decir, si ponemos $n \leq m$ estamos diciendo que el número n es menor o igual que el número m.

Básicamente podemos deducir todas las propiedades de los números reales de los *axiomas de Peano*:

1. Todo número natural tiene un número mayor al que llamaremos siguiente o sucesor.
2. El número natural 1 nunca es el siguiente de ningún otro.
3. El siguiente de dos números es el mismo si, y solo si, esos dos números son iguales.
4. Si un conjunto S de números naturales que contiene a 1 cumple que para cada número su siguiente también pertenece a S, entonces se tiene S = N.

Atención

El número cero (0) es considerado cada vez más por los matemáticos como miembro del grupo de los números naturales.

+ Info

En el siguiente vídeo te mostramos las operaciones con números naturales, prioridad al operar con paréntesis y de una operación sobre otra.

(Tienes el vídeo en Campus Virtual).

1.2. LOS NÚMEROS ENTEROS

Como hemos visto, en el conjunto de los números naturales no existen dos operaciones básicas conocidas, como son la resta y la división. Para ello tenemos que ampliar este conjunto, y la primera forma de hacerlo es añadiendo a los números naturales el cero y los números negativos, es decir, ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3..., este conjunto se denota **Z.**

Así, en el conjunto de los números enteros está definida la resta, ya que, por ejemplo, 7 – 5 tiene resultado igual a 2 que es un número natural y, a su vez, un número entero, y la resta 5 – 7 tiene como resultado el valor -2, que no es un número natural pero sí es un número entero.

Nota

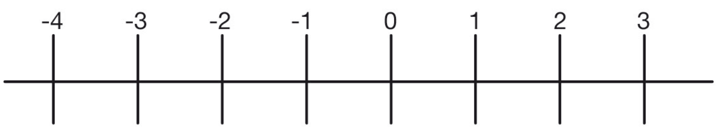
La denominación Z para los números enteros proviene del alemán *zhalen* que significa número.

Es muy importante que recuerdes que el conjunto de los números enteros contiene al conjunto de los números naturales: $N \subset Z$.

Anécdota

El cero, tal y como lo conocemos en la actualidad, es de origen indio, y su primera utilización data del siglo IX.

Para visualizar todo ello de alguna manera, se utiliza una recta, donde se toma un punto al cual se le asigna el entero cero. Se divide la recta en intervalos iguales a la izquierda y a la derecha del cero. A la izquierda, se ponen los enteros negativos y, a la derecha, los positivos.



Cuanto más a la izquierda en esta recta esté un número, se dice que el número es menor que otro que esté más a la derecha.

El conjunto de los números enteros..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3..., que amplía a los números naturales con el cero y todos los negativos, se denota **Z**. Hay que destacar que los números enteros, a diferencia de los naturales, tienen elemento opuesto, es decir, su análogo, pero con signo negativo.

1.2.1. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

Si x es un número real, sabemos que su *valor absoluto* viene definido como:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0. \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Así, por ejemplo, | 12 | = 12 y | -7 | = 7.

Para cualesquiera x e y números reales se verifica la siguiente desigualdad, que se denomina desigualdad triangular:

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Dos números se llaman **opuestos** cuando tienen el mismo valor absoluto pero signo contrario; por ejemplo, el opuesto de 15 es -15 y el opuesto de -7 es 7.

1.2.2. Suma y resta de números enteros

Ya hemos visto que en el conjunto de los números enteros tenemos definidas la suma y la resta. Veamos cómo se realizan estas operaciones:

- La suma de 2 números enteros positivos se realiza del mismo modo que la suma de 2 números naturales: 7 + 3 = 10.
- Cuando realizamos la suma de 2 números negativos, calcularemos la suma como si estos fuesen positivos y el resultado tendrá signo negativo. Por ejemplo, para realizar la suma (-3) + (-7), calcularemos mentalmente la misma como si ambos valores fuesen positivos, es decir 3 + 7 cuyo resultado es 10, sin embargo, no debemos olvidar que ambos eran negativos por lo que el resultado final será (-3) + (-7) = (-10).
- Para restar dos números enteros, basta con sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo

8 – (-3) =

Se suma a 8 el opuesto de -3 que es 3, luego: 8 + 3 = 11.

Propiedades de la suma de números enteros:

1. **Conmutativa:** el orden de los sumandos no altera la suma.

   Ejemplo: 5 + (-3) = (-3) + 5 = 2

   La resta no es conmutativa.
2. **Asociativa:** por ejemplo: 8 + [4 + (-3)] = (8 + 4) + (-3) = 9.
3. Existencia de **elemento neutro:** el 0.
4. Existencia de **elemento simétrico,** es decir, el número opuesto. Es aquel número que sumado al que se considera da como resultado 0.

Atención

Hay que tener mucho cuidado con los signos de las sumas y productos de los números enteros.

Tómate tu tiempo y hazlo con tranquilidad.

1.2.3. Multiplicación de números enteros

El producto de dos números enteros es siempre otro número entero, cuyo valor absoluto se obtiene de multiplicar el valor absoluto de los factores.

Imprescindible

El signo se determina por las siguientes reglas:

- El resultado de la multiplicación de un número par o impar de enteros con signo positivo es siempre positivo.
- El resultado de la multiplicación de un número par de enteros de signo negativo tiene signo positivo.
- El resultado de la multiplicación de un número impar de enteros de signo negativo tiene signo negativo.
- El resultado de la multiplicación de un número negativo por uno positivo o de uno positivo por uno negativo tiene signo negativo.

Comúnmente, se suele decir que “más por menos (o menos por más) es igual a menos” y que “menos por menos es igual a más”.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación: -[(-1) - (-3) · (4) + (-5) · (-2) · (-3) + 5 · (-2)]?

a) 13.

b) 29.

c) 31.

d) 27.

Solución:

Aquí va el texto.

En una ecuación donde haya varios productos, sumas y restas, el producto tiene prioridad sobre las sumas y las restas a la hora de efectuar las operaciones, a no ser que unos paréntesis o unos corchetes que encierren operaciones nos indiquen lo contrario.

Propiedades de la multiplicación de números enteros:

1. **Conmutativa:** a · b = b · a

   Ejemplos: 3 · 6 = 6 · 3 = 18

   (-3) · 8 = 8 · (-3) = -24

2. **Asociativa:** a · (b · c) = (a · b) · c

   Ejemplos: 3 · (5 · 2) = (3 · 5) · 2

   (-2) · [3 · (-8)] = [(-2) · 3] · (-8)

3. Existencia de **elemento neutro:** es el entero positivo 1. Para todo entero positivo o negativo, se cumple que a x 1 = a.

4. **Distributiva** respecto a la suma: a · (b + c) = (a · b) + (a · c)

   Ejemplos: 8 · (2 + 3 + 4) = (8 · 2) + (8 · 3) + (8 · 4)

   (-3) · (6 + 2) = [(-3) · 6] + [(-3) x 2]

1.2.4. DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Esta operación, como ocurre en el caso de los números naturales, no siempre será posible con los conjuntos de números vistos hasta ahora. Solo podrá realizarse cuando el dividendo sea múltiplo del divisor, es decir, podemos calcular 12: 6 = 2 y el resultado es un valor entero, y, sin embargo, la división 6: 12 = 0,5 no es un número entero.

1.3. LOS NÚMEROS RACIONALES

La introducción de los números enteros ha hecho posible la operación resta, pero no la división. Esta operación es posible en el conjunto **Q** de los números racionales, o lo que es lo mismo, cocientes de números enteros con denominador no nulo. En él hay definidas dos operaciones que son la suma y el producto, así como una relación de orden al igual que ocurría en los conjuntos anteriores.

Nota

La letra **Q** para designar a los números racionales proviene de la palabra *quotient* que significa cociente.

La suma de números racionales tiene las mismas propiedades que la suma de números enteros; sin embargo, en el producto, los números racionales nos permiten definir el inverso de un número n, denotándolo 1/n.

No podemos hablar de número siguiente a uno dado, ya que, entre dos números racionales, siempre hay otro número racional.

Nota

Todos los números enteros son también números racionales, ya que cualquier entero se puede expresar en forma de fracción poniendo como numerador el propio número entero y como denominador el valor 1.

1.3.1. Definición

Fracción o **número racional** es un par ordenado de números enteros de manera que el segundo término del par divide al primero. Se representa:

$\frac{a}{b}$ o también a/b o por a:b, donde a y b son enteros

En la fracción, el valor a se llama **numerador** y es el primer componente del par, y el valor b es el **denominador** y es el segundo componente del par. El valor de b nunca puede ser igual a cero.

Anécdota

El cociente de un número dividido por cero se considera en matemáticas más avanzadas, como infinito.

1.3.2. Fracciones equivalentes

Son aquellas que representan el mismo valor, pero sus términos son distintos; por ejemplo: 18/6 y 6/2.

Entre dos fracciones equivalentes se cumple que da el mismo resultado el producto del numerador de una de ellas por el denominador de la otra y el del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Reto

Relaciona para realizar el siguiente ejercicio.

[1] 168/28.

[2] 15/6.

[3] 48/80.

[4] 32/100.

8/25 [a].

32/7 [b].

3/5 [c].

5/2 [d].

Solución:

1b, 2d, 3c, 4a.

Todas las fracciones equivalentes entre sí representan un solo número racional. Por ejemplo: 5/10 = (-7) / (-14) = 2/4 = (-6) /(-12), todas ellas representan al mismo número racional, que es 1/2 (la fracción irreducible).

Ejemplo

$\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{10}{25}$, ya que $2 \cdot 25 = 5 \cdot 10$.

Así, si multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, se obtiene una fracción equivalente.

Ejemplo

Si multiplicamos el numerador y denominador de la fracción 16/4 por 2 se obtiene 32/8, que es equivalente a 16/4.

Si dividimos el numerador y denominador de la fracción 9/27 por 3, se obtiene 3/9, que es equivalente a 9/27.

1.3.3. Fracción reducible e irreducible

Una fracción es **irreducible** cuando el numerador y el denominador de la misma son primos entre sí. Por ejemplo: 5/7, 2/3, 11/23.

Una fracción es **reducible** cuando tanto el numerador como el denominador son divisibles por un mismo número entero que sea distinto de 1. Por ejemplo: 4/6, 9/27, 16/36.

Así, cuando tenemos una fracción reducible, podemos transformarla en otra fracción equivalente dividiendo tanto el numerador como el denominador de dicha fracción por un divisor común a ambos valores. Esta reducción de una fracción recibe el nombre de **simplificación.**

Por ejemplo, 4/6 = 2/3, donde se ha dividido tanto el numerador como el denominador por 2, así hemos obtenido una fracción equivalente.

Utilizando la simplificación sobre una fracción reducible podemos transformarla en una fracción equivalente a ella e **irreducible,** para ello basta dividir el numerador y el denominador por el máximo común divisor de ambos números.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es la fracción irreducible de 378/1.260?

a) 3/10.
b) 1/4.
c) 5/11.
d) 2/5.

Solución:

a) 3/10.

Ejemplo

Vamos a buscar la fracción irreducible equivalente a $\frac{25}{35}$.

Para ello, en primer lugar calculamos el máximo común divisor del numerador y del denominador:

mcd (25, 35) = 5

Ahora basta dividir tanto el numerador como el denominador entre el máximo común divisor de ambos:

$$\frac{25}{35} = \frac{25:5}{35:5} = \frac{5}{7}$$

Así, la fracción equivalente que buscábamos es $\frac{5}{7}$, que además es irreducible.

1.3.4. Comparación de fracciones

Antes de comenzar con la comparación de fracciones es interesante recordar los operadores de comparación que se utilizan habitualmente:

- El operador > significa "mayor que".
- El operador ≥ significa "mayor o igual que".
- El operador < quiere decir "menor que".
- El operador ≤ significa "menor o igual que".
- El operador ≠ quiere decir "distinto que".

La comparación de una serie de fracciones consiste en ordenarlas por orden creciente o decreciente de sus valores. Se nos pueden presentar los siguientes casos:

- **Idéntico denominador.**

  En este caso, cuanto mayor sea el numerador, mayor será el valor de la fracción.

Ejemplo:

$$\frac{2}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}; \qquad \frac{7}{11} > \frac{5}{11} > \frac{2}{11}$$

- **Idéntico numerador.**

  En este caso, cuanto menor sea el denominador mayor será el valor de la fracción.

  Ejemplo:

$$\frac{3}{11}, \frac{3}{7}, \frac{3}{5}; \qquad \frac{3}{5} > \frac{3}{7} > \frac{3}{11}$$

- **Diferente numerador y denominador.**

  El caso más normal es que las fracciones a comparar tengan distintos numeradores y denominadores. En este caso, reduciremos a común denominador.

  Reducir dos o más fracciones a común denominador consiste en encontrar una fracción equivalente por cada una de ellas, de manera que todas las equivalentes encontradas tengan el mismo denominador.

  Para ello, se toma como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores. A este valor se le llama **denominador común.** Lo que estamos buscando son fracciones equivalentes, así que la transformación que le hayamos hecho al denominador, debemos aplicarla también al numerador. Para hallar el nuevo numerador de cada fracción, hay que multiplicar el antiguo numerador por el cociente entre el denominador común y el denominador de la fracción original.

  Por ejemplo, si queremos reducir a común denominador las fracciones 2/5, 7/2 y 2/3, lo primero que debemos hacer es calcular el mínimo común múltiplo de los tres denominadores:

m.c.m. (5, 2, 3) = 30.

Este valor será el denominador común de las 3 fracciones.

Para hallar los numeradores:

- En la primera fracción: 30/5 = 6; luego el nuevo numerador será 6 · 2 = 12.
- En la segunda fracción: 30/2 = 15; luego el nuevo numerador será 15 · 7 = 105.
- En la tercera fracción: 30/3 = 10; luego el nuevo numerador será 10 · 2 = 20.

Por lo tanto, tras la reducción a común denominador, quedan así:

$$\frac{12}{30} \qquad \frac{105}{30} \qquad \frac{20}{30}$$

De manera que la primera fracción es equivalente a 2/5, la segunda a 7/2 y la tercera a 2/3.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Supongamos que tenemos 4 botellas de agua, cada una de las cuales tiene una capacidad respectivamente de 12/7 litros, 8/15 litros, 1 litro y 32/17 litros. ¿Cuál de ellas es la que más agua tiene?

Solución:

Tenemos los 4 elementos 12/7, 1, 8/15, 32/17.

El m.c.m. de los denominadores es: 7 · 1 · 15 · 17 = 1.785.

Si este es el m.c.m, la equivalente de las fracciones son:

$$\frac{3.060}{1.785}, \frac{1.785}{1.785}, \frac{952}{1.785}, \frac{3.360}{1.785}$$

Si comparamos, obtenemos que:

$$\frac{3.360}{1.785} > \frac{3.060}{1.785} > \frac{1.785}{1.785} > \frac{952}{1.785}$$

por lo que la que más agua tiene es 32/17.

1.3.5. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Para sumar dos o más fracciones es condición indispensable que todas ellas tengan el mismo denominador. Si no lo tienen, habrá que reducir a común denominador.

1.3.5.1. Suma de fracciones

El resultado de la suma de varias fracciones es otra fracción que tiene el mismo denominador que los sumandos y cuyo numerador resulta de la suma de los numeradores.

Ejemplo 1: en este caso todos los sumandos tienen el mismo denominador y, por tanto, se suman directamente los numeradores.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{8}{5}=\frac{14}{5}$$

Ejemplo 2: $\frac{3}{12}+\frac{4}{6}+\frac{3}{24}+\frac{7}{18}$

Como no tienen el mismo denominador, primero habrá que reducirlas a común denominador: m.c.m. (12, 6, 24, 18) = $2^3 \cdot 3^2$ = 72.

$$\frac{3}{12}+\frac{4}{6}+\frac{3}{24}+\frac{7}{18}=\frac{18}{72}+\frac{48}{72}+\frac{9}{72}+\frac{28}{72}=\frac{18+48+9+28}{72}=\frac{103}{72}$$

1.3.5.2. Resta de fracciones

Para restar fracciones es necesario que, como en el caso de la suma, todas ellas tengan el mismo denominador. Una vez conseguido esto, el procedimiento es igual que en el caso de la suma, solo que ahora en vez de sumar todos los numeradores, habrá que restar el numerador de aquellas fracciones que tengan signo negativo.

Ejemplo 1: $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$

Ejemplo 2: $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{2}{7} = \frac{315}{210} - \frac{140}{210} + \frac{168}{210} - \frac{60}{210} = \frac{283}{210}$

La suma y la resta se pueden englobar en una única operación llamada suma algebraica.

1.3.5.3. Propiedades de la suma y la resta de números racionales

La suma y la resta de dos o más números racionales siempre es otro número racional. Vamos a ver sus propiedades:

1. **Uniformidad:** si sustituimos uno o varios de los sumandos por una fracción equivalente, se sigue obteniendo el mismo resultado.

   Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4+8+9}{6} = \frac{21}{6}$$

   Una fracción equivalente a 2/3 es 6/9, una de 4/3 es 8/6 y de 3/2 es 9/6.

$$\frac{6}{9} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{12+24+27}{18} = \frac{63}{18}$$

   La fracción 63/18 se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por 3, lo que da como resultado la fracción 21/6, que es la misma fracción que hemos obtenido antes. Dividiendo de nuevo por 3 ambos miembros, se llega a la fracción irreducible, que es 7/2.

2. **Conmutativa:** a la hora de realizar una suma o resta de fracciones, el orden en el que aparezcan los factores no altera el resultado final de la operación.

   Ejemplo:

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}$$

3. **Asociativa:** si deseamos sumar o restar más de dos fracciones, el resultado final de la operación es indiferente del agrupamiento que utilicemos para resolverla.

   Ejemplo:

$$\left[\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}\right]$$

4. **Elemento neutro:** es el cero, que podemos expresarlo en forma de fracción como 0/n, donde n es cualquier número distinto de 0. Así, si sumamos o restamos 0/n a cualquier fracción, esta no sufre ninguna modificación.

   Ejemplo:

$$\frac{3}{5}+0=\frac{3}{5}+\frac{0}{5}=\frac{3}{5}$$

5. **Elemento simétrico:** también llamado **opuesto.** El opuesto de un número racional es otro número racional igual en valor absoluto, pero de signo contrario, para ello, basta con cambiarle el signo al numerador de la fracción. El opuesto de 5/4 es -5/4, de tal manera que:

$$\frac{5}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)=0$$

+ Info

En el vídeo que te mostramos a continuación tienes la explicación de la forma de operar con fracciones: suma y resta.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

1.3.6. Multiplicación de fracciones

El resultado de multiplicar dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y, por denominador, el producto de los denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3\cdot(-2)}{8\cdot 3}=\frac{-6}{24}=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}$$

Para multiplicar un entero por una fracción tenemos que transformarlo primero en un número racional. Un entero se puede considerar como una fracción donde el numerador es el propio número entero y el denominador es la unidad, por ejemplo:

$$5\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{1}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{7}$$

1.3.6.1. Propiedades de la multiplicación de números racionales

Al multiplicar dos números racionales siempre resulta otro número racional. Vamos a ver las propiedades que verifica el producto de números racionales:

a) Uniformidad: si sustituimos uno o varios de los factores por una fracción equivalente, se sigue obteniendo el mismo resultado.

Ejemplo

Por ejemplo, si en la operación:

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

Si sustituimos 2/7 por su equivalente 4/14, el producto resulta:

$$6.\ \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{70}$$

Si dividimos al numerador y denominador de 12/70 por 2, se obtiene 6/35, que es el resultado antes obtenido.

b) Conmutativa: afirma que, si en un producto de dos números racionales cambiamos el orden de multiplicación, el resultado no se altera.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

c) Asociativa: al multiplicar más de dos fracciones, el resultado final de la operación es indiferente del agrupamiento que utilicemos para resolverla.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{2}{5}$$

d) **Elemento neutro:** para la multiplicación es el 1, que puesto en forma de fracción se expresa como 1/1 o bien n/n donde n es cualquier número entero.

Ejemplos:

$$\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

e) **Inverso** (o elemento simétrico): el inverso de un número racional es otro número racional tal que, si se multiplican ambos, se obtiene como resultado el elemento neutro. Por ejemplo, el inverso de 3/4 es 4/3, el de 3 es 1/3, y el correspondiente a -2/5 es -5/2, de tal manera que, en este último caso:

$$-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{10}=1$$

Como se puede observar, el inverso de la fracción a/b es b/a, es decir, que simplemente hay que cambiar el numerador por el denominador y viceversa.

f) **Distributiva respecto de la suma y la resta:** para multiplicar un número racional por una suma o resta de números racionales, procederemos a multiplicar el primer racional por cada uno de los sumandos teniendo en cuenta los signos de estos.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{2}{7}\right)=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\right)$$

+ Info

Te vamos a mostrar una explicación de la forma de operar con fracciones: multiplicación y división, en el siguiente vídeo.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

1.3.7. División de fracciones

Al dividir dos números racionales siempre resulta otro número racional. Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplos:

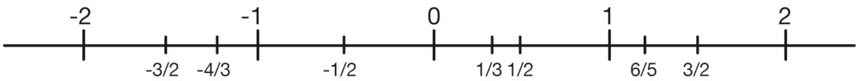
$$\frac{2}{5}:\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{3}:(-2)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}$$

1.3.8. Representación gráfica de números racionales

Los números racionales se representan gráficamente en la recta real. Se trata de una recta en la que tomamos como origen el cero, así a la derecha del cero representaremos valores positivos y a la izquierda, valores negativos. Esta recta está dividida en intervalos iguales y cada uno de ellos representa a un número entero.

Para los números racionales, se dividirá cada intervalo correspondiente a una unidad en tantas partes o subintervalos como indique el denominador de la fracción y se tomará el número de estos subintervalos que indique el numerador de la misma. Se tomarán hacia la derecha del cero, si la fracción es positiva, y hacia la izquierda del cero, si la fracción es negativa.



Por ejemplo, para representar -3/2, se divide cada uno de los intervalos del lado izquierdo en 2 subintervalos de manera que el punto representativo de -3/2 estará a 3 subintervalos a la izquierda del punto 0.

Para representar 2/3, se dividirá cada intervalo en 3 subintervalos y se tomarán 2 de ellos a la derecha del 0.

Cuanto más a la izquierda en la recta se halle un número racional, se considerará que es menor que uno que se halle más a la derecha.

1.3.9. NÚMEROS DECIMALES

Como ya sabemos, los números racionales se expresan en forma de fracción. En realidad, una fracción no es más que un cociente entre números enteros, por lo que si realizamos esta división encontramos otra forma de expresar los números racionales, en forma decimal, como, por ejemplo: 3/2 = 1,5.

Así, podemos diferenciar en los números decimales, según la cantidad de cifras decimales que tiene el número, entre decimales finitos y decimales infinitos.

- **Decimales finitos.**

  Los decimales finitos son aquellos que tienen un número concreto de cifras decimales, ya sean 2, 3, 10... decimales; por ejemplo: 3,58, que tiene dos cifras decimales.

  Para expresarlos como fracción, se pone en el numerador el número sin la coma y en el denominador, un número entero que comience por 1 y este seguido de tantos 0 como cifras decimales haya.

Ejemplos:

$$3{,}58 = \frac{358}{100}$$

$$-8{,}2 = -\frac{82}{10}$$

$$-12{,}6876 = -\frac{126.876}{10.000}$$

- **Decimales infinitos.**

  Los decimales infinitos son aquellos números decimales que tienen infinitas cifras decimales. Pueden ser de dos tipos: periódicos y no periódicos.

  - Periódicos.

    Son aquellos que, aunque tienen un número infinito de cifras decimales, contienen una cifra o grupo de cifras que se van repitiendo indefinidamente; ejemplos: 1,6666666...; 32,676767...

    Estos números se expresan matemáticamente colocando un arco sobre las cifras que forman el periodo de dicho número:

$$1{,}6666666\ldots = 1{,}\widehat{6}$$

$$32{,}67676767\ldots = 3{,}\widehat{6}\widehat{7}$$

  - No periódicos.

    Son aquellos en cuyas cifras decimales no se encuentra ningún periodo; ejemplos: $\sqrt{2} = 1{,}4142135$ ...; el número π = 3,141592...

    Este tipo de números no se pueden obtener de una fracción de números enteros y, por ello, se denominan **números irracionales**.

Imprescindible

Los números enteros, los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos son también números racionales, ya que se pueden expresar como fracción de dos números enteros.

Los números decimales infinitos no periódicos no son números racionales, sino **irracionales,** ya que no se pueden expresar como fracción de dos números enteros.

1.3.10. Transformación de la expresión racional a la expresión decimal

Para expresar un número racional en forma decimal, basta hacer la división entre dos números enteros numerador y denominador, de forma que puede suceder lo siguiente:

- La división es exacta, obteniendo así una expresión decimal limitada: decimal exacto, por ejemplo 12,3.
- Que no se termine, y entonces la expresión decimal es ilimitada. Si tiene un grupo de cifras que se repite indefinidamente el número se denomina decimal periódico. Cualquier número racional puede escribirse en forma decimal periódica. Dentro de los periódicos podemos encontrar:
    - Puros, cuando las cifras que forman el periodo comienzan justo después de la coma, así todas las cifras decimales forman parte del periodo, por ejemplo $7{,}\widehat{4}$.
    - Mixtos, si entre la coma y el periodo hay alguna cifra decimal que no forma parte del periodo, por ejemplo $7{,}5\widehat{4}$.

    Así, en un número entero encontramos tres partes diferenciadas: parte entera, anteperiodo y parte periódica.

    Por ejemplo: 123,456234234234... tiene parte real = 123, anteperiodo = 456 y periodo = 234.

1.3.11. Transformación de la expresión decimal a racional

No todos los números decimales son racionales, puesto que no todos pueden expresarse en forma de fracción, solo los números decimales finitos y los periódicos podemos expresarlos así. La fracción que obtendremos se denomina fracción generatriz del número decimal. Vamos a ver cómo se realiza esta transformación:

1. Si el número decimal es exacto, es decir, tiene un número finito de cifras decimales, la fracción generatriz tendrá por numerador el número sin la coma y en el denominador escribiremos el 1 seguido de tantos 0 como cifras decimales tenga.

   Por ejemplo: $3{,}72 = \dfrac{372}{100}$.

2. La fracción generatriz de un número decimal periódico puro tendrá:

   a) Por numerador la diferencia entre la parte entera del número decimal seguida del periodo menos la parte entera.

   b) Por denominador tantos 9 como cifras tiene el periodo.

   Por ejemplo: $3{,}\widehat{7} = \dfrac{37-3}{9}$.

3. La fracción generatriz de un número decimal periódico mixto tendrá:

   a) En el numerador la parte entera seguida de la parte decimal no periódica y del periodo menos la parte entera seguida de la parte decimal no periódica.

   b) Y en el denominador pondremos un número formado por nueves y ceros de modo que tendremos el mismo número de nueves como cifras tenga el periodo e irán seguidos de tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo.

   Por ejemplo: $3{,}2\widehat{7} = \dfrac{327-32}{90}$.

Básico

Limitado	Periódico Puro	Periódico mixto
$a{'}bc = \dfrac{abc}{100}$	$a{'}bcbcbc = \dfrac{abc-a}{99}$	$a{'}bcdcd... = \dfrac{abcd-ab}{990}$

Importante

Con este vídeo sabrás reducir fracciones a común denominador.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

1.4. LOS NÚMEROS IRRACIONALES

En el apartado anterior hemos visto que los números racionales tienen una característica esencial: su expresión decimal es periódica.

Cabe ahora preguntarse: ¿existen números decimales cuya expresión no es periódica?

La respuesta es afirmativa. Por ejemplo, el número decimal:

$$a = 0{,}1\ 10\ 100\ 1000\ 10000\ 100000\ 1000000\ \ldots$$

Es un número decimal no periódico.

Básico

Los números que vienen dados por una expresión decimal no periódica se llaman **números irracionales.**

1.4.1. LA RECTA NUMÉRICA

La representación gráfica de los números como puntos de una recta hace posible visualizar las relaciones de orden.

Esta representación permite descubrir lugares adonde no llegan los números racionales; por ejemplo, no existe ningún número racional que resuelva la ecuación $a^2 = 2$.

Para poder hablar de números que puedan representar estas cantidades es necesario proceder a una nueva ampliación del conjunto Q. Así, pasamos a considerar el conjunto $\Re$ de los números reales.

En $\Re$ se definen dos operaciones, suma y producto, las cuales poseen las mismas propiedades que poseían para los números racionales. Tenemos también una relación de orden análoga a la que encontrábamos en Q.

1.4.2. Introducción al número real. Existencia de medidas y de ecuaciones cuyas soluciones no pueden expresarse con números racionales: números irracionales

Los números reales se componen de números racionales y números irracionales.

Los números racionales están compuestos por los números enteros (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...) y los números fraccionarios ($\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \ldots, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{8}$).

Imprescindible

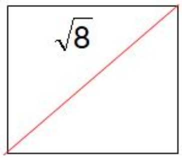
Hay que recordar que:

$N \subset Z \subset Q \subset R$

$\sqrt{7} \rightarrow$ Es un número irracional ya que una raíz cuadrada no es exacta.

Sin embargo $\sqrt{49} = 7 \rightarrow$ Es un número racional ya que puede expresarse su solución con un número entero.

Los números racionales e irracionales pueden ser representados sobre una recta. Por ejemplo, la representación gráfica de la diagonal de un cuadrado de lado 2 es $\sqrt{8}$:



Vamos a proceder a realizar un recordatorio con las operaciones de suma, resta, producto y cociente con raíces.

- Suma y resta.

  Solo se puede realizar la suma y resta de raíces en el caso de que ambas presenten el mismo índice y tengan el mismo radicando.

  Vamos a recordar a qué nos referimos con índice y radicando.

  Sea $\sqrt[a]{b}$ = c, se denomina **b** al radicando y **a** al índice de la raíz.

- Producto y cociente.

  En este caso se pueden multiplicar y dividir raíces siempre y cuando tengan el mismo índice:

$$\sqrt[a]{b} \cdot \sqrt[a]{c} = \sqrt[a]{b \cdot c}$$

$$\sqrt[a]{b} \,/\, \sqrt[a]{c} = \sqrt[a]{b/c}$$

En este caso se cumple que tanto la raíz de un producto como la raíz de un cociente es igual al producto o al cociente de sus raíces.

Otras operaciones importantes:

1. Para elevar una raíz con un índice a a una potencia b se utiliza la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt[a]{x}\right)^b = \sqrt[a]{x^b}$$

2. Para realizar la raíz de una raíz se utiliza la siguiente expresión:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a\cdot b]{x}$$

Atención

Hay dos operaciones que no se pueden realizar en números reales:

- No existen raíces de orden par de números negativos.
- No existe la división entre cero, pues carece de sentido dividir entre algo nulo.

	Índice	**Radicando**	**Expresión matemática**
Suma	Igual	Igual	$\sqrt{b}+\sqrt{b}=2\cdot\sqrt{b}$
Producto	Igual	Indistinto	$\sqrt[a]{b}\cdot\sqrt[a]{c}=\sqrt[a]{b\cdot c}$
División	Igual	Indistinto	$\sqrt[a]{b}/\sqrt[a]{c}=\sqrt[a]{b/c}$
Potencia	Indistinto	Indistinto	$\left(\sqrt[a]{x}\right)^b=\sqrt[a]{x^b}$
Raíz	Indistinto	Indistinto	$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}}=\sqrt[a\cdot b]{x}$

1.4.3. Márgenes de error en la utilización de los números racionales e irracionales en estimaciones y aproximaciones

A la hora de expresar los números reales se puede hacer de forma decimal o de forma aproximada.

Ejemplo

Sea el número 8/3; este se puede expresar o bien de forma exacta con decimales poniéndolos todos 2,66666666..., o bien de forma aproximada 2,67.

Cuando el último número es igual o mayor que 5, se aproxima por exceso y, en cambio, cuando es menor que 5, se aproxima por defecto.

En el caso anterior 2,666666..., al ser el último número mayor que 5, se aproxima por exceso 2,67.

Al realizar las aproximaciones se produce una serie de errores, que son los llamados **errores absolutos y relativos.**

Para el cálculo de los errores utilizaremos el concepto de valor absoluto.

- El **error absoluto** es el valor absoluto que se obtiene de la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\epsilon_A = \left| x - \bar{x} \right|$$

- El **error relativo** es el valor obtenido de cociente entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto. Su expresión matemática, por lo tanto, es la siguiente:

$$\epsilon_r = \frac{\text{error absoluto}}{|x|} = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|}$$

Nota

Los errores relativos se suelen expresar mediante el denominado porcentaje de error.

Porcentaje de error = error relativo · 100.

Sabiendo que el precio exacto de un producto al pasarlo de pesetas a euros es de 2,843 euros y que el precio que en realidad marca en la tienda es de 2,85. ¿Cuál es el porcentaje de error?

$$\epsilon_A = |x - \bar{x}| = |\ 2{,}843 - 2{,}85\ | = 0{,}007$$

$$\epsilon_R = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{0{,}007}{2{,}843} = 0{,}0025$$

Porcentaje de error = 0,0025 · 100 = **0, 25%.**

1.4.4. CONJUNTOS ACOTADOS EN $\Re$

Dado un subconjunto S de $\Re$, si existe un número real a tal que para todo s $\in$S, se cumple que a $\leq$ s, diremos entonces que a es una cota inferior de S y que S está acotado inferiormente (por a).

Si para algún número real b fuese $b \geq s$ para todo $s \in S$, diremos que b es cota superior de S y que S está acotado superiormente por b.

Cuando S está acotado superior e inferiormente, se dice que está acotado.

- Un número real m se dice **mínimo** de un conjunto S si pertenece al conjunto y es una cota inferior del mismo.

  Pondremos entonces m = min S.

- Un número real M es **máximo** de un conjunto S si pertenece al conjunto y es cota superior del mismo.

  Pondremos entonces M = máx. S.

- Un número real a es **ínfimo** de un conjunto S si es la mayor de sus cotas inferiores.

  Pondremos entonces a = inf. S.

- Un número real b es **supremo** de un conjunto S si es la menor de las cotas superiores de S.

  Pondremos entonces b = sup. S.

1.4.5. COMPLETITUD DE $\mathfrak{R}$

Todo subconjunto no vacío de $\mathfrak{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

La propiedad simétrica, por la que todo subconjunto no vacío de $\mathfrak{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo, es consecuencia de la anterior.

1.4.6. PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DE $\Re$

Dados dos números reales a, b con a > 0, existe algún número natural n tal que na. > b.

La propiedad arquimediana permite también deducir cómo están repartidos los números racionales en la recta real, llegando a la siguiente conclusión.

1.4.7. DENSIDAD DE Q EN $\Re$

Dados dos números reales a, b con b > a, existe algún número racional r tal que b > r > a.

Imprescindible

Dicho con otras palabras, entre dos números reales existen infinitos números racionales, por eso decimos que Q es denso en $\Re$.

1.4.8. INTERVALOS EN $\Re$

- **Intervalo abierto (a, b)** es el conjunto de puntos comprendidos entre a y b, excluidos a y b.

  Ejemplo:

a < x < b que se representa (a, b).

- **Intervalo cerrado [a, b]** es el conjunto de puntos comprendidos entre a y b, incluidos a y b.

  Ejemplo:

$$a \leq x \leq b, \text{ que representamos } [a, b].$$

- **Intervalo semiabierto** es el que tiene un extremo abierto y el otro cerrado.

  Ejemplo:

$$a \leq x < b, \textit{ que se representa } [a, b).$$
$$a < x \leq b, \textit{ que se representa } (a, b].$$

Recuerda

Los extremos $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito) siempre son abiertos.

Generalizando, dados dos números reales cualesquiera a y b, reciben el nombre de intervalos los siguientes conjuntos:

- $(a, b) = \{x \in \Re$ tales que $a < x < b\} \Rightarrow$ Intervalo abierto.
- $[a, b) = \{x \in \Re$ tales que $a \leq x < b\} \Rightarrow$ Intervalo semiabierto derecha.
- $(a, b] = \{x \in \Re$ tales que $a < x \leq b\} \Rightarrow$ Intervalo semiabierto izquierda.
- $[a, b] = \{x \in \Re$ tales que $a \leq x \leq b\} \Rightarrow$ Intervalo cerrado.
- $(a, +\infty) = \{x \in \Re$ tales que $x > a\} \Rightarrow$ Intervalo abierto no acotado.
- $[a, +\infty) = \{x \in \Re$ tales que $x \geq a\} \Rightarrow$ Intervalo cerrado no acotado.
- $(-\infty, b) = \{x \in \Re$ tales que $x < b\} \Rightarrow$ Intervalo abierto no acotado.
- $(-\infty, b] = \{x \in \Re$ tales que $x \leq b\} \Rightarrow$ Intervalo cerrado no acotado.
- $(-\infty, +\infty) = \Re$.

2. NÚMEROS FACTORIALES Y COMBINATORIOS

Vamos a dedicar este punto a ver los números factoriales y los números combinatorios.

2.1. FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se llama *factorial* de un número entero y positivo n al producto de n factores consecutivos que comienzan en la unidad y terminan en n.

Los números factoriales son aquellos que se obtienen del producto de todos los términos de una progresión aritmética.

Se expresan:

$$n! = n \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Nota

La utilidad del factorial estriba en que se utiliza en la mayoría de las fórmulas de la matemática combinatoria.

2.1.1. Ejemplo

Calcula el factorial de 10:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$$

2.2. NÚMEROS COMBINATORIOS Y TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

Dado un conjunto A de m elementos, se llaman *combinaciones de orden n* a todos los subconjuntos posibles de n elementos que se pueden obtener con los m elementos de A.

Denotamos:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Esta última expresión constituye el número combinatorio, se representa por $\binom{n}{r}$ y se lee " n sobre r".

2.2.1. EJEMPLO

Calcula $\binom{5}{3}$:

$$\binom{5}{3} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1)} = 10$$

Propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Por ejemplo: $\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2}$

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Por ejemplo: $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$

Reto

Calcula el valor de $\binom{7}{3}$:

a) 26.
b) 14.
c) 3.
d) 35.

Solución:

d) 35.

Además:

$$\binom{m}{0}=\binom{m}{m}=\binom{0}{0}=1, \quad \binom{n}{1}=n$$

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{m}= 2^m$$

Triángulo de Tartaglia:

El triángulo de Tartaglia, como su propio nombre indica, es un triángulo formado por números distribuidos en filas y columnas, de modo que:

- El primer y último valor de todas las filas es 1.
- Los números interiores de cada fila se pueden calcular sumando los números que se encuentran sobre ellos en la fila anterior.
- Los valores de las filas se distribuyen de forma simétrica.

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$$

$$\binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$$

¿Cómo se utiliza el triángulo? Consideremos que tenemos que calcular el desarrollo de un polinomio (x + a) elevado al cubo. Se trata de grado tres, por lo que tenemos que elegir en el triángulo la cuarta fila, ya que se considera que la primera fila corresponde al desarrollo de polinomios de grado cero.

Así, tenemos que el desarrollo del polinomio serán los elementos de esa fila del triángulo, multiplicado cada uno por un término que irá avanzando como explicamos a continuación.

En el primero solo tendremos el término correspondiente al primer elemento de polinomio, en este caso x, elevado al mayor grado posible, es decir, al cubo y multiplicado por el otro elemento, es decir, a, elevado a grado cero. En el segundo término tendremos el primer elemento, x, elevado a un grado menos y multiplicado por el segundo elemento elevado a un grado más que en el término anterior, y así sucesivamente hasta que lleguemos al último término, en el que x estará elevado a grado cero y a al grado máximo, es decir, tres.

En resumen, tenemos que:

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 + \binom{3}{3}x^0a^3$$

De forma general:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^n,$$

que es la fórmula general que corresponde al binomio de Newton.

Anécdota

Tartaglia se llamaba en realidad Niccolá Fontana pero fue apodado así por su tartamudez.

+ Info

A continuación, vamos a visualizar un vídeo donde se plantea un ejercicio sobre números combinatorios y triángulo de Tartaglia Una vez resuelto envía tu ejercicio, desde la mensajería, a tus profesoras.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

2.3. BINOMIO DE NEWTON

La fórmula del binomio de Newton es la siguiente:

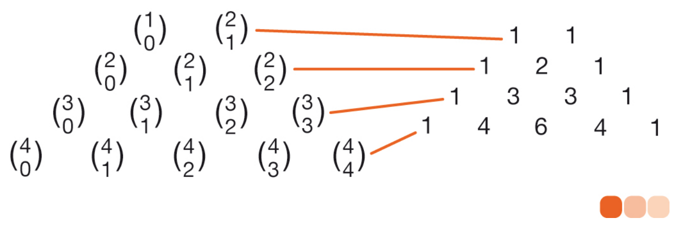
$$(x+b)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}b + \binom{n}{2}x^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Como podemos ver, esta fórmula nos es útil para calcular cualquier potencia de un binomio.

Ejemplo: calcula el resultado del siguiente polinomio $(x + 1)^2$ utilizando el binomio de Newton.

$$(x+1)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}x \cdot 1 + \binom{2}{2} \cdot 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

También se puede calcular un polinomio elevado a una potencia mediante el triángulo de Tartaglia:



+ Info

En el siguiente vídeo podrás descubrir la teoría para poder aplicar el binomio de Newton y practicamos a través de una serie de ejercicios su cálculo.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

Su principal uso es el cálculo de polinomios elevados a una potencia mayor que 3.

Ejemplo

Vamos a calcular un binomio elevado a una potencia mediante: Binomio por binomio, binomio de Newton, triángulo de Tartaglia.

Binomio por binomio:

$(x + 1)^3$ = (x + 1) (x + 1)2 = (x + 1) (x2 + 2x + 1) =

= x3 + 2x2 + x + x^2 + 2x + 1 **= x3 + 3x2 + 3x + 1**

Binomio de Newton:

$$(x+1)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2 \cdot 1 + \binom{3}{2} \cdot x \cdot 1^2 + \binom{3}{3} \cdot 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Triángulo de Tartaglia:

$$(x+1)^3 = 1\,x^3\,1^0 + 3\,x^2\,1^1 + 3\,x^1\,1^2 + 1\,x^0\,1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Como se observa, en todos sale el mismo resultado, aunque los cálculos mediante el triángulo de Tartaglia son los más rápidos.

Básico

Es el momento de ver cómo se realiza una regla de tres simple

(Tienes el vídeo en el campus virtual).

CONCLUSIONES

Las operaciones a realizar con los números racionales son variadas, pudiendo ser más o menos complejas, pero todas ponen de manifiesto la importancia y necesidad de saber hacer una correcta aplicación. Para ello te proponemos que prepares un buen esquema, aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad. Recuerda completarlos con aquellos que te causen dificultad.

Operaciones con racionales:

Suma:	Resta:	Multiplicación:	División:
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Fracción generatriz de un número decimal.

Limitado	Periódico Puro	Periódico mixto
$a´bc=\frac{abc}{100}$	$a´bcbcbc=\frac{abc\text{-}a}{99}$	$a´bcdcd...=\frac{abcd\text{-}ab}{990}$

Factorial de un número:

Factorial de un número: $n! = n \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Número combinatorio: $C_{m,n} = \binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n! \times (m-n)!}$

RECAPITULACIÓN

Los números presentan una evolución natural que se ha ido desarrollando conforme se ha avanzado en el desarrollo científico y cultural.

Así, la estructura básica formada por los números naturales se ha ido ampliando y completando con los números enteros, racionales e irracionales, formando el conjunto de lo que se conoce por números reales.

Los números enteros, los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos son también números racionales, ya que se pueden expresar como fracción de dos números enteros.

Los números decimales infinitos no periódicos no son números racionales, sino **irracionales,** ya que no se pueden expresar como fracción de dos números enteros.

Con los números se pueden realizar una serie de operaciones básicas, que son la estructura fundamental del desarrollo matemático.

Además, cada conjunto de números presenta una serie de características que le son propias y le dan su carácter distintivo.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **¿Cuál es el factorial de 8?**

   a) 362.880.

   b) 40.320.

   c) 5.040.

   d) 720.

2. **Sabiendo que el valor exacto es 12,738 y el valor aproximado 12,74, ¿cuál es el error absoluto que se comete?**

   a) 0,0001.

   b) 0,002.

   c) –0,002.

   d) –0,0001.

3. Para todo m $\leq$ n, se cumple que $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$ es igual a:

a) $\binom{m}{n+1}$.

b) $\binom{n-1}{m}$.

c) $\binom{n+1}{m+1}$.

d) $\binom{n+1}{m}$.

4. ¿Cuál de las siguientes propiedades no corresponde a la suma de fracciones?

a) Asociatividad.

b) Uniformidad.

c) Conmutatividad.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

5. ¿Cuál es el porcentaje de error sabiendo que el valor exacto es 8,338 y el valor aproximado 8,34?

a) 0,02%.

b) 0,2%.

c) 2%.

d) 20%.

6. La fracción generatriz del decimal $5{,}3\widehat{2}$ es la siguiente:

a) 527/99.

b) 479/99.

c) 479/90.

d) 527/90.

7. **El número combinatorio $\binom{5}{3}$ coincide con:**

   a) $\binom{3}{5}$.

   b) $\binom{5}{2}$.

   c) $\binom{8}{3}$.

   d) $\binom{8}{5}$.

8. **El número -5 no es:**

   a) Un número real.

   b) Un número racional.

   c) Un número natural.

   d) Un número entero.

9. **El factorial de 0:**

   a) No existe.

   b) Es 0.

   c) Es 1.

   d) Es -1.

10. **¿Cuál de los siguientes decimales no es periódico mixto?**

   a) 0,00323232.

   b) 5,3010010010010.

   c) $9{,}2\overset{\frown}{3}$.

   d) -3,0505050505.

SOLUCIONARIO

1.	b	2.	b	3.	d	4.	d	5.	b
6.	c	7.	b	8.	c	9.	c	10.	d

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV. AA. *EULER*. *Matemáticas I*. Madrid: S.M., 2001.
- VV. AA. EULER. Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales. Madrid: S.M., 2000.
- VV. AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.