MD PlantillaTexto(02)Esp.dot

NÚMEROS COMPLEJOS

UD000569_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Las matemáticas empezaron ya a desarrollarse de forma muy importante en la antigüedad, pero hubo problemas a los que no se encontró solución o simplemente, ni se plantearon ante su pretendida imposibilidad de lograr una solución lógica.

Uno de estos problemas fue la resolución de ecuaciones que tenían como solución raíces cuadradas de números negativos.

No fue hasta el siglo XVII cuando se empezaron a buscar posibles métodos para hallar las posibles soluciones a este, al parecer, irresoluble problema.

Fue Descartes uno de los primeros en plantear una solución, pero hasta el siglo XIX no se logró una notación científica adecuada, que es la usada en la actualidad.

Hoy en día, encontramos integrados los números complejos en partes de la electrónica que se ocupan de señales periódicas o de la electricidad, en la corriente alterna, que es la que utilizamos en nuestras casas.

PROPÓSITOS

Con el estudio de esta unidad didáctica, conseguirás:

- Ampliar el campo real al plano complejo.
- Manejar las operaciones básicas con números complejos.
- Trabajar con las distintas expresiones de un número complejo.
- Calcular de potencias y raíces n-ésimas de un número complejo.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

En el campo de los números reales, que se supone conocido, hay operaciones que carecen de resultado; así, los números negativos no tienen raíces cuadradas. Para dar sentido a estas raíces hay que ampliar el campo de los números reales.

Al buscar soluciones a dichas operaciones, se comenzó por suponer el problema parcialmente resuelto, ya que se introdujo, en un principio sin justificación, un nuevo elemento llamado i = $\sqrt{-1}$. Disponiendo de i y admitiendo que se seguían cumpliendo las propiedades usuales de la suma y del producto, se construyó una estructura formada por elementos de la forma a + bi, siendo a y b reales.

Finalmente, se equipararon estos candidatos a números con pares de números reales, en los que a + bi pasaba a ser (a, b) y así, sin que apareciese i, se llegó a la definición definitiva de número complejo, que presentaremos a lo largo de esta unidad didáctica y que te resultarán, sin duda, novedoso.

1. EL CUERPO C DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Dentro de los números reales, hay operaciones que no tienen solución como, por ejemplo, $\sqrt{-2}$. Para evitar este problema, se efectuó una ampliación de los números reales, dando lugar a los números complejos.

Se llama número complejo a un par (a, b) de números reales, expresado algebraicamente de la forma z = a + bi. La parte **a** se denomina parte real y a **b** se le denomina parte imaginaria, siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria.

Básico

El conjunto de los números complejos se expresa como C y tiene estructura de cuerpo con las operaciones suma y producto:

$C = \{ a + bi \mid a,b \in R \}$

En particular, los números de la forma (0, b), que tienen nula su primera componente, se denominan **imaginarios puros.** El número imaginario puro (0, 1), conocido por unidad imaginaria, suele representarse por i.

Las potencias sucesivas de i son:

$$i = \sqrt{-1} \; ; \; i^2 = -1 \; ; \; i^3 = -i \; ; i^4 = 1 \; ; \; i^5 = i\ldots$$

Debemos observar que a partir de la cuarta potencia todas se van a repetir, es decir, la quinta potencia será i, la sexta -1, la séptima –i, la octava 1….

Truco

¿Cómo podemos saber el valor de i^{237}?

Para ello, dividimos 237 para 4, obteniendo que:

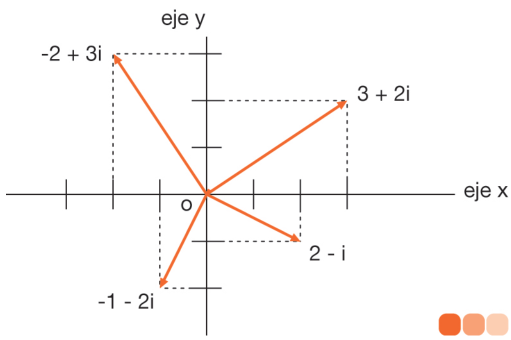
$$i^{237} = i^{4*59+1} = (i^4)^{59} \cdot i^1 = (1)^{59} \cdot i = i.$$

Para llegar a esto hemos aplicado propiedades de los números complejos que se verán más adelante en esta unidad didáctica.

1.1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

Sobre un sistema de coordenadas rectangulares representamos el complejo a + bi, mediante un punto que tiene por coordenadas (a, b) y que recibe el nombre de afijo del número.

El eje de abscisas recibe el nombre de eje real y el de las ordenadas de eje imaginario.



Sabemos también, que las coordenadas del afijo coinciden con las del vector que tiene su origen en el de coordenadas y su extremo en el afijo.

1.2. MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Básico

Se llama *módulo* de un número complejo a + bi, al módulo del vector con origen en el de coordenadas y extremo en el afijo de dicho complejo:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

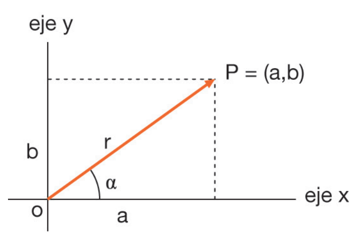
El módulo también puede expresarse como $|z| = |a + bi|$.

Las **propiedades** del módulo son:

1. $|z| \geq 0$.
2. $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$.
3. $|z+w| \leq |z| + |w|$.
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

Básico

El argumento es la medida del ángulo α que forma dicho vector con la dirección positiva del eje OX cuando se adopta como sentido positivo de giro el de las agujas de un reloj.



De la figura deducimos que: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

El ángulo α también se puede expresar como **arg z.**

Atención

La determinación del argumento no es única ya que existen infinitos ángulos con la misma tangente. Si se restringe la determinación de ángulos comprendidos entre 0 y 2π, existen 2 ángulos con la misma tangente que difieren en π radianes. El argumento dependerá de los signos de a y b, es decir, del cuadrante en el que está situado el afijo de dicho número complejo.

Atendiendo a su módulo r y argumento α, un número complejo se puede expresar en:

- Forma polar como: r_α. $\rightarrow r_\alpha = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$. Ejemplo: 1_{225°.
- Forma binómica. Ejemplo: 1 + 2i.

Básico

Para pasar de forma binómica a polar:
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Para pasar de forma polar a binómica:
$$a = r \cdot \cos\alpha$$
$$b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Reto

Sobre un sistema de coordenadas __________[1] representamos el complejo________[2], mediante ____[3] punto que tiene por _________[4]y que recibe el nombre de _______[5] del número.

Solución:

[1] rectangulares.

[2] a + bi.

[3] un.

[4] coordenadas (a, b).

[5] afijo.

1.3. NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS, IGUALES Y OPUESTOS

Dos números complejos $a + bi$ y $a' + b'i$ son **iguales** cuando:

1. Son iguales su parte real e imaginaria: $a = a'$ y $b = b'$.
2. Tienen el mismo módulo y el mismo argumento.

Dos números complejos son **conjugados** cuando tienen la misma componente real y la componente imaginaria opuesta: $a = a'$ y $b = -b'$.

Dos números complejos son **opuestos** cuando tienen opuestas sus dos componentes: $a = -a'$ y $b = -b'$.

Recuerda

Iguales: $a = a'$ y $b = b'$ o mismo módulo y argumento.

Conjugados: $a = a'$ y $b = -b'$. Ejemplo: $1 + 2i$ y $1 - 2i$.

Opuestos: $a = -a'$ y $b = -b'$. Ejemplo $1 + 2i$ y $-1 - 2i$.

2. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Al igual que cualquier otro grupo de números, los números complejos presentan una serie de propiedades relacionadas con las operaciones que se pueden realizar con ellos, teniendo en cuenta su peculiar composición.

2.1. SUMA

Básico

La suma de dos números complejos tiene que realizarse con los complejos dados en forma algebraica y es un número complejo cuya primera y segunda componentes son, respectivamente, la suma de las primeras y segundas componentes de los complejos sumandos:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b') \cdot i$$

Las propiedades de la suma son:

- **Propiedad de cierre** para complejos. Si z y w son dos números complejos, entonces tanto z + w como z - w son complejos.
- Propiedad **asociativa:** si z, w y v son números complejos, $z + (w + u) = (z + w) + u$.

- Propiedad **conmutativa:** z + u = u + z.
- Elemento **neutro.** El elemento neutro de la suma es z = 0 + 0i. Así, z + 0 = z.
- **Opuesto.** Si z = a + bi, el opuesto es –z = -a - bi, que es otro complejo: z + (-z) = z – z = 0.

2.2. MULTIPLICACIÓN

La multiplicación de dos números complejos es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

Tomando los complejos en su **forma polar;** $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$, el producto z·z' es:

$$z \cdot z' = \left| r \cdot r' \right|_{\alpha+\alpha'}$$

Ejemplo

Si tenemos dos números complejos $z = 6_{120^\circ}$ y $w = 3_{60^\circ}$, su producto será:

$$z \cdot w = \left| 6 \cdot 3 \right|_{120+60} = 18_{180^\circ}.$$

En **forma trigonométrica** se representa como:

$$z \cdot z' = r \cdot r' \cdot [\cos(\alpha + \alpha') + i \cdot \text{sen}(\alpha + \alpha')]$$

Si nos vienen dados en forma algebraica, se multiplican como polinomios, pero teniendo en cuenta los valores de las potencias de i.

En **forma binomial** si:

$$z = a + bi \text{ y } w = c + di, \text{ tenemos que } z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Básico

Producto de complejos:

- En forma polar:

  $z \cdot z' = \left| r \cdot r' \right|_{\alpha+\alpha'}$.

- En forma trigonométrica

  $z \cdot z' = r \cdot r' \cdot [\cos(\alpha+\alpha') + i \cdot \text{sen}(\alpha+\alpha')]$.

- En forma binomial, si $z = a+bi$ y $w = c + di$, tenemos que

  $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Las **propiedades** del producto de número complejos son:

- Propiedad de cierre para producto. Si $z, w \in C$ entonces $z \cdot w \in C$.
- Propiedad asociativa: $z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$.
- Conmutativa. Si $z, w \in C$, entonces $z \cdot w = w \cdot z$.
- Elemento neutro. El número 1 es el elemento neutro para el producto de números complejos.
- Propiedad del inverso: $z = a + bi \neq 0$, el inverso de z es otro complejo, z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = 1$.
- Propiedad distributiva. Si $z, w, u \in C$ se tiene: $z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

De las siguientes opciones indica cuál no es una propiedad de la multiplicación de números complejos:

a) Elemento opuesto.
b) Elemento inverso.
c) Propiedad asociativa.
d) Elemento neutro.

Solución:

La multiplicación de números complejos no tiene la propiedad de elemento opuesto, respuesta a).

2.3. DIVISIÓN

El cociente de dos números complejos es otro complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos del dividendo y el divisor y, por argumento, la diferencia de los argumentos.

Tomando los complejos en su forma polar $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$, el cociente $\frac{z}{z'}$ es:

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$$

Puesto en forma trigonométrica es:

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\cdot[\,\cos(\alpha-\alpha') + i\cdot\text{sen}(\alpha-\alpha')\,]$$

Si nos vienen dados en forma algebraica, para dividirlos se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador, teniendo en cuenta los valores de las potencias de i.

Vamos a hallar el resultado de la siguiente división:

$$\frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-6i-i-2}{9-3i+3i-i^2} = \frac{1-7i}{9+1} = \frac{1-7i}{10}$$

2.4. POTENCIACIÓN

Del producto de números complejos se desprende que la potencia n-ésima de un número complejo es otro número complejo que tiene por módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento, n veces el argumento del complejo dado.

Tomando el complejo en forma polar: $z = r_\alpha$, la potencia z^n es:

$$z^n = r^n\cdot(\cos n\alpha + i\cdot\text{sen}\, n\alpha)$$

De aquí deducimos las **Fórmulas de De Moivre.**

$$[\ r\cdot(\cos\alpha + i\cdot \text{sen}\alpha)\ ]^n = r^n\cdot(\cos n\alpha + i\cdot \text{sen}\ n\alpha)$$

Si el complejo viene dado en forma algebraica se puede proceder como en la multiplicación de polinomios.

Ejemplo

Calculemos $(1{,}5_{60^\circ})^4$. Aplicando las fórmulas de De Moivre, obtenemos que:

$(1{,}5_{60^\circ})^4 = (1{,}5)^4 \cdot (\cos(4\cdot 60) + i\cdot \text{sen}\cdot(4\cdot 60)) =$
$(5{,}06)\cdot(-0{,}5 - 0{,}86i) = -2{,}53 - 4{,}35i$.

2.5. RAÍCES

Se llama *raíz n-ésima* de un número complejo a otro número complejo cuya potencia n-ésima coincide con el primero.

Atención

Un número complejo no nulo siempre tiene n raíces n-ésimas distintas.

La expresión de las n raíces está dada por una fórmula parecida a la de Moivre:

$$[\ r\cdot(\cos\alpha + i\cdot \text{sen}\alpha)\ ]^{1/n} = r^{1/n}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot \text{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ \text{con } k = 0, 1,\ldots,(n-1).$$

Para hallar la raíz n-ésima de un número complejo, este debe ser puesto en forma trigonométrica.

Nota

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces que pueden ser reales o complejas.

Si un polinomio tiene los coeficientes reales y tiene una raíz compleja, la conjugada también es raíz de dicho polinomio.

Los polinomios de grado impar y coeficientes reales tienen, al menos, una raíz real.

La suma de todas las raíces de un número complejo es cero.

Calculemos la raiz cuadrada de ($1{,}5_{60^\circ}$).

Para ello aplicamos la fórmula a seguir y obtenemos que:

$$(1{,}5_{60^\circ})^{1/2} = (1{,}5)^{1/2} \cdot \left(\cos\frac{60+2k\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{60+2k\pi}{2}\right)$$

Con valores de k, 0 y 1, por lo que obtenemos dos posibles valores:

- Para k =

0, tenemos $(1{,}5_{60^\circ})^{1/2} = 1{,}22 \cdot (0{,}86 + 0{,}5i) = 1{,}04 + 0{,}61i$

- Para k =

1, tenemos $(1{,}5_{60^\circ})^{1/2} = 1{,}22 \cdot (-0{,}86 - 0{,}5i) = -1{,}04 - 0{,}61i$

2.6. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO: FÓRMULA DE EULER

La fórmula de Euler es una fórmula que relaciona los números imaginarios con las potencias y con las funciones trigonométricas.

Anécdota

La fórmula de Euler fue descubierta por Roger Cotes en 1714, pero fue popularizada por Euler en 1748.

Partiendo de la forma exponencial de un número complejo:

$$r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\operatorname{sen}\alpha) = r\cdot e^{i\alpha}$$

Así pues, tenemos:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Sumando y restando estas ecuaciones, obtenemos las fórmulas de Euler:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$$

Sustituyendo α por un número complejo, nos permiten calcular el seno y el coseno de cualquier número z.

Una aplicación de las fórmulas de Euler es la linealización de las potencias de seno y coseno.

2.7. SUCESIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Son análogas a las sucesiones de números reales.

Serán de la forma $z_n = u_n + i \cdot v_n$, donde tanto uno como v_n son sucesiones de números reales.

Se dice que la sucesión de números complejos $z_n = u_n + i \cdot v_n$ converge al complejo $a + b \cdot i$, si las sucesiones de números reales u_n y v_n convergen a a y b, respectivamente.

Recuerda

Tienes a tu disposición un servicio de tutorías para resolver cualquier duda que te pueda surgir. Te puedes poner en contacto con él mediante carta, llamada telefónica, fax o correo electrónico.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el resultado de $(2_{60°})^2/(1_{20})^3$?:

a) 2 - 0,5i.

b) $3_{13°}$.

c) 2 + 3,46i.

d) 2 + 3i.

Solución:

c) 2 + 3,46i.

3. EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS

Es importante que aprendas a manejar las diversas formas de expresar los números complejos, así como la conversión de un número complejo en sus distintas expresiones. En ocasiones, según la operación a realizar, resulta más conveniente trabajar con el número complejo de una determinada forma. Debes saber qué expresión has de utilizar conforme aumente el número de ejercicios, pues podrás observar cómo los problemas se complican o se resuelven fácilmente dependiendo de la elección.

A continuación, presentamos una serie de ejercicios resueltos que pueden servir de pauta para la realización de los ejercicios propuestos.

3.1. EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJERCICIO 1:**

  Calcula el siguiente cociente de complejos en forma binomial:

$$\frac{(-2,3)}{(1,5)}$$

Solución:

$$\frac{(-2,3)}{(1,5)} = (-2, 3)\cdot \frac{1}{(1,5)} = (-2, 3)\cdot\left(\frac{1}{1^2+5^2}, \frac{-5}{1^2+5^2}\right) = (-2, 3)\cdot\left(\frac{1}{26}, \frac{-5}{26}\right) =$$

$$\left(\frac{-2}{26}+\frac{15}{26}, \frac{10}{26}+\frac{3}{26}\right) = \left(\frac{13}{26}, \frac{13}{26}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

- **EJERCICIO 2:**

Hallar un número complejo no nulo ni real

$$z = a + bi, \text{ tal que } z^2 = 2\cdot \overline{z}$$

Solución:

$$z^2 = 2\cdot \overline{z} \Leftrightarrow (a + bi)^2 = 2\cdot (a - bi) \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2\cdot a\cdot b = 2a - 2bi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{igualando parte real e imaginaria: } \begin{cases} a^2 - b^2 = 2a \\ 2ab = -2b \end{cases}$$

Como z es no nulo, $b \neq 0$, luego en la segunda ecuación podemos simplificar y obtenemos $a = -1$. Entonces en la primera, sustituyendo:

$$1 - b^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{3}$$

Por tantos, los números complejos buscados son:

$$-1 + \sqrt{3} \quad y \quad -1 - \sqrt{3}$$

- **EJERCICIO 3:**

Halla las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $(2 + 3i)^5$

b) i^{-190}

Solución:

a) Aplicando la fórmula del binomio de Newton, resulta que:

$$(2 + 3i)^5 = \binom{5}{0} 2^5 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot 3i + \binom{5}{2} 2^3 \cdot 3^2 \cdot i^2 + \binom{5}{3} 2^2 \cdot 3^3 \cdot i^3 + \binom{5}{4} 2 \cdot 3^4 \cdot i^4 + \binom{5}{5} 3^5 \cdot i^5 =$$

$$= 1 \cdot 32 + 5 \cdot 16 \cdot 3i + 10 \cdot 8 \cdot 9 \cdot (-1) + 10 \cdot 4 \cdot 27 \cdot (-i) + 5 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 1 + 1 \cdot 243 \cdot i = 122 - 597i$$

b) Como $190 = 47 \cdot 4 + 2$, resulta que:

$$ti^{190} = i^{47 \cdot 4} \cdot i^2 = (i^4)^{47} \cdot (-1) = i^{47} \cdot (-1) = -1$$

- **EJERCICIO 4:**

Hallar la parte real e imaginaria de cada una de las raíces cuadradas del número complejo $3 - 4i$.

Solución:

Hay que hallar dos números reales x e y tales que $(x + iy)2 = 3 - 4i$, o equivalentemente desarrollando el cuadrado e igualando parte real e imaginaria de ambos miembros:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

Si despejamos de la segunda ecuación: $y = \frac{-2}{x}$, y sustituyendo en la primera:

$$x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Podemos resolver la ecuación bicuadrada haciendo el cambio de variable $x^2 = t$, entonces:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ o } t = -1$$

Si deshacemos el cambio:

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

lo cual no es posible pues x era un número real

Hay, por tanto, dos soluciones:

$$x = \pm 2 \quad \text{e} \quad y = \mp 1$$

luego:

$$\sqrt{3 - 4i} = \begin{cases} 2 - i \\ -2 + i \end{cases}$$

- **EJERCICIO 5:**

Hallar los valores enteros m y n tales que $(1_{\pi/5})^n = (1_{\pi/10})^m$

Solución:

Si aplicamos las propiedades de los números complejos, obtenemos que la igualdad anterior es equivalente a:

$$1_{n\pi/5} = 1_{m\pi/10}$$

Como $1^n = 1^m = 1$ para cualquiera m y n enteros, basta con que los argumentos difieran en múltiplos de 360º, o 2π radianes:

$$\frac{n\pi}{5} - \frac{m\pi}{10} = 2k\pi, \text{ con } k \in Z$$

Operando y simplificando en la igualdad anterior:

$$2n - m = 20k \;\Leftrightarrow\; \boxed{m = 2n - 20k, \text{ con } k \in Z}$$

Si queremos un valor particular, por ejemplo, para k = -1 y n = 1, tenemos m = 22 y se cumple lo que nos pedían.

- **EJERCICIO 6:**

Calcula el módulo y el argumento y las partes real e imaginaria del complejo:

$$z = \frac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$$

Solución:

En primer lugar vamos a expresar los complejos 1 – i y 1 + i en forma módulo argumental; para ello tendremos que calcular el módulo y argumento de ambos:

$$1 - i = \begin{cases} \text{módulo} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \text{argumento} = \text{arctg}\,\dfrac{-1}{1} = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} = (\sqrt{2})_{-\pi/4}$$

$$1 + i = \begin{cases} \text{módulo} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{argumento} = \text{arctg}\,\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} = (\sqrt{2})_{\pi/4}$$

Entonces podemos operar z como cociente de dos complejos en forma módulo argumental, lo cual simplifica notablemente los cálculos; aplicando la fórmula del cociente:

$$z = [\,(\sqrt{2})_{-\pi/4}]^6 : [(\sqrt{2})_{\pi/4}]^8 = (8_{-6\pi/4}) : (16_{-8\pi/4}) = \left(\frac{1}{2}\right)_{-14\pi/4} =$$

$$\text{reduciendo al primer cuadrante} = \left(\frac{1}{2}\right)_{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

- **EJERCICIO 7:**

Calcula las raíces cuartas de -16.

Solución:

Veamos cómo expresar las raíces cuartas de -16 en forma módulo argumental:

$$\sqrt[4]{-16} = \rho_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Dando los valores a k obtenemos cada una de las raíces cuartas, que expresaremos en forma trigonométrica:

$$k = 0,\ 2_{\pi/4} = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$k = 1,\ 2_{3\pi/4} = 2 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{4} \right) = \boxed{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$k = 2,\ 2_{5\pi/4} = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{4} \right) = \boxed{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$k = 3,\ 2_{7\pi/4} = 2 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4} \right) = \boxed{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

Si dibujáramos las raíces en el plano complejo, tendríamos que situarlas en la circunferencia de centro (0, 0) y radio el módulo 2. Cada raíz está en la bisectriz de los cuatro cuadrantes, pues así su argumento coincide con el ángulo representado.

Recomendación

Es básico realizar numerosos ejercicios que faciliten el manejo de los números complejos. Para ello, es importante comprender los conceptos básicos de la teoría y ante cualquier duda, ponerte en contacto con tu tutor.

3.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

- **EJERCICIO 1:**

Halla la parte real e imaginaria de los siguientes complejos:

a) $(1 - i)\cdot(2 + 3i)\cdot(3 + i)$.

b) $(5 - i)\cdot(1 + 5i)$.

c) $\dfrac{3-2i}{2-3i}$.

d) $\dfrac{1+3i}{2+i}$.

e) $(1 + i)^4$.

f) $(2 + 5i)^3$.

g) i^{3849}.

h) $\dfrac{1}{(1-i)^6}$.

i) $\dfrac{(1+i)\cdot(1-i)^4}{(1+2i)^3}$.

j) $\dfrac{6i\cdot(2-i)\cdot(1-2i)^2}{3+i}$.

k) $\dfrac{1}{2+i\sqrt{3}} - \dfrac{2}{1+i\sqrt{3}} + \dfrac{5/2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$.

l) $\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi} - \dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}$.

- **EJERCICIO 2:**

Expresa en forma trigonométrica los siguientes complejos:

a) $-3 + 3\sqrt{3}\,i$.

b) $1 - i$.

c) $6 - 5i$.

d) $-9 - 8i$.

- **EJERCICIO 3:**

Expresa en forma binómica los siguientes complejos:

a) $5_{135º}$.

b) $7_{120º}$.

c) $3_{3\pi/4}$.

d) $2_{-\pi/6}$.

- **EJERCICIO 4:**

Halla el módulo y el argumento y expresar el resultado en forma binómica de los siguientes complejos:

a) $(\sqrt{2} - i)^6$.

b) $(2_{25º})^3 \cdot 3_{15º}$.

c) $(-2 + 2i)^{10}$.

d) $(1_{45º})^{18} : (2_{90º})^3$.

e) $(3 - 3i)^8$.

f) $1_{33º} \cdot 2_{16º} \cdot 3_{41º}$.

- **EJERCICIO 5:**

Halla las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1+i}$.

b) $\sqrt[3]{-i}$.

c) $\sqrt[6]{-64}$.

d) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

CONCLUSIONES

En esta unidad didáctica hemos trabajado un nuevo conjunto de números, los números complejos, junto con sus operaciones y aplicaciones.

Son muchos conceptos importantes que debes recordar, para ello te proponemos que prepares un buen esquema, aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad, recuerda completarlos con aquellos que te causen dificultad:

- Forma binómica:

$$z = a + bi.$$

- Forma polar:

$$z = r_{\alpha} \text{ donde: } \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{es el módulo.} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} & \text{es el argumento.} \end{cases}$$

- Forma trigonométrica:

$$z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha).$$

- Fórmula de De Moivre:

$$(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha.$$

RECAPITULACIÓN

Los números complejos vienen a cubrir un hueco que limita determinadas operaciones matemáticas relacionadas con las raíces pares de números negativos.

Todo número complejo está compuesto por una parte real y una parte imaginaria. Dado que todo número real se puede poner como la parte real y una parte imaginaria nula, el grupo de los números complejos engloba a el grupo de los números reales.

Existen varias formas de poner un número complejo (polar, trigonométrica o binómica) que, dependiendo del caso, facilitan en mayor o menor medida las operaciones que se realizan con esto números.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **El inverso de un número complejo (a, b) no nulo es:**

   a) (a, -b).

   b) $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

   c) $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

   d) Ninguna es correcta.

2. **La expresión genérica, en forma binómica, del cociente $\frac{a+bi}{c+di}$ es:**

   a) $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$.

   b) $\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{bc-ad}{a^2+b^2}\cdot i$.

   c) $\frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{bc+ad}{c^2+d^2}\cdot i$.

   d) $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}+\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\cdot i$.

3. **Dados dos complejos z y w no nulos, se cumple:**

   a) $|z+w| = |z| + |w|$.

   b) $|z+w| < |z| + |w|$.

   c) $|z+w| > |z| + |w|$.

   d) $|z-w| < |z| - |w|$.

4. El módulo y argumento del número complejo 4 + 6i es:

a) $r = 52$, $\alpha = 6/4$.

b) $r = \sqrt{10}$, $\alpha = 0{,}98°$.

c) $r = \sqrt{52}$, $\alpha = 0{,}98$ rad.

d) $r = \sqrt{52}$, $\alpha = 6/4$.

5. Si $z = r_\alpha$, entonces su opuesto:

a) $-z = r_{-\alpha}$.

b) $-z = - r_\alpha$.

c) $-z = r_{\alpha + 2\pi}$.

d) $-z = r_{\alpha + \pi}$.

6. El punto intersección de la bisectriz del tercer cuadrante con la circunferencia unidad, viene dado por el complejo:

a) $i_{\pi/4}$.

b) $i_{5\pi/4}$.

c) $1_{\pi/2}$.

d) Ninguna es correcta.

7. Sea z un complejo de módulo 2, entonces el complejo $(1 + i)^2 \cdot z$ tiene módulo:

a) 4.

b) 8.

c) $2\sqrt{2}$.

d) No se puede calcular.

8. **Para calcular la raíz n-ésima del complejo r_α, empleamos la siguiente fórmula:**

   a) $\sqrt[n]{r}_{\,\alpha}$.

   b) $\sqrt[n]{r}_{\,(\alpha+k\pi)/n}$.

   c) $\sqrt[n]{r}_{\,\sqrt[n]{\alpha}}$.

   d) $\sqrt[n]{r}_{\,(\alpha+2k\pi)/n}$.

9. **Si multiplicamos dos complejos (a, b)·(a´ , b´), el resultado es:**

   a) (a·a′, b·b′).

   b) (a·a′- b·b′, a·a′+ b·b′).

   c) (a·a′- b·b′, a·b´+ b·a´).

   d) (a·b´+ b·a´ , a·a′- b·b′).

10. **Sean los complejos z = 1 – i   y   w = 1 + i· $\sqrt{3}$, entonces z / w es:**

   a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-105°}$.

   b) $\left(\sqrt{2}\right)_{105°}$.

   c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{105°}$.

   d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{45°}$.

SOLUCIONARIO

1.	d	2.	a	3.	b	4.	c	5.	d
6.	b	7.	a	8.	d	9.	c	10.	a

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I.* Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV AA. *EULER. Matemáticas I*. Madrid: SM, 2001.
- VV AA. *EULER. Matemáticas II.* Aplicadas a las Ciencias Sociales. Madrid: SM, 2000.
- VV AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV AA. *Matemáticas II.* Madrid: Edelvives, 2003.