MD.PlantillaTexto(04)Esp.dot

CÁLCULO INTEGRAL

UD000568_V(02)

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

El cálculo integral es una parte fundamental del análisis matemático. Su evolución llevó emparejada un avance fundamental en los desarrollos físicos, que, gracias a las herramientas aportadas por el cálculo integral, adquirieron cada vez mayor complejidad y desarrollo.

El cálculo integral es, por lo tanto, una disciplina sumamente importante en el campo de las matemáticas. El desarrollo de sus conceptos permite múltiples aplicaciones que facilitan avances científicos.

Se hace necesario que conozcas estos conceptos en una forma básica, que te permita realizar las operaciones más elementales del cálculo integral, pero que a la vez establezca una base firme para posteriores desarrollos más profundos y completos.

PROPÓSITOS

- Conocer el concepto de integral de una función dada.
- Saber calcular primitivas de las funciones más usadas.
- Desarrollar los métodos para saber calcular la primitiva de cualquier función: integración por partes, por cambio de variable…
- Dar una explicación geométrica de la derivada y relacionarla con el cálculo de áreas planas.
- Generalizar el concepto de integral definida en un intervalo cerrado.
- Conocer las aplicaciones de la integral definida: áreas y volúmenes de revolución.
- Conocer las aplicaciones físicas de la integral: movimiento rectilíneo, trabajo de una fuerza…

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Esta unidad didáctica desarrolla el concepto general del cálculo integral, que constituye una parte fundamental del bloque de análisis matemático.

Vamos a ver cuáles son las integrales inmediatas de ciertas funciones y, a partir de ellas, desarrollar un estudio completo de resolución de integrales de cualquier función. Deberás asimilar y aplicar los métodos más importantes de integración, que son: el método de cambio de variable, el método de integración por partes, el método de descomposición en fracciones simples o de coeficientes indeterminados, y, por último, la resolución de integrales trigonométricas.

Ampliaremos el concepto de integral indefinida hasta llegar a la integral definida y a sus múltiples aplicaciones, ya no solo en el campo de las matemáticas, sino también en la física. Presentaremos la relación directa que existe entre el cálculo de áreas y el campo de la integral definida.

1. INTEGRALES INDEFINIDAS

En este apartado vamos a ver qué es la primitiva de una función y cuáles son las primitivas inmediatas.

Además veremos los métodos de integración.

1.1. PRIMITIVAS DE UNA FUNCIÓN

Antes de conocer el concepto de integral indefinida debemos tener muy claro qué es la primitiva de una función. Vamos a ver que una función tiene infinitas primitivas y al conjunto de todas ellas es a lo que denominamos integral indefinida.

1.1.1. DEFINICIÓN

Decimos que la función F(x) es una **primitiva** de la función f(x) en su dominio de definición, si la derivada de F(x) coincide con la función f(x), es decir: $F'(x) = f(x)$.

Notaremos que si F(x) es una primitiva de f(x) también será primitiva cualquier función de la forma: F(x) + C, ya que si derivamos:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que cualquier primitiva de f(x) es de la forma F(x) + C, donde C es la constante de integración, así, denotaremos la integral indefinida de una función como $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, es decir, como el conjunto de primitivas de una función.

1.1.2. Propiedades

Tenemos que notar que la integración viene a ser el proceso contrario al de la derivación, con lo cual las dos propiedades que a continuación vamos a enunciar se deducen claramente de las propiedades de las funciones derivables.

1. Dadas las funciones f(x) y g(x), que admiten primitiva en su dominio de definición, se verifica:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x) \pm \int g(x)dx$$

2. Sea la función f(x), que admite primitiva en su dominio de definición.

   Entonces se tiene que:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

   Siendo k un número real.

Recuerda

Puedes contactar con el servicio de tutorías para resolver tus dudas, a través del correo electrónico, carta, fax o teléfono.

1.2. PRIMITIVAS INMEDIATAS

Denominamos integrales inmediatas a aquellas integrales que realizamos automáticamente sin más que utilizar el concepto de derivada:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq 1$	$\int f(x)^n dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int senx dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) senf(x) dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x dx = senx + C$	$\int f'(x) \cos f(x) dx = senf(x) + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tgf(x) + C$
$\int \frac{dx}{sen^2 x} = -\cot gx + C$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = -\cot gf(x) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = arcsenf(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = arctgf(x) + C$

1.3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Vamos a enumerar los tipos de integrales y a analizar el método de integración correspondiente.

Básico

Los métodos de integración más importantes son:

- El método de cambio de variable.
- El método de integración por partes.
- La integración de funciones racionales con el método de descomposición en fracciones simples o de coeficientes indeterminados.

Es importante que comprendas y asimiles dichos métodos, el resto constituye material adicional que puede ser útil en la resolución de ejercicios puntuales de mayor dificultad.

1.3.1. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Cuando la integral que queremos realizar no se encuentra dentro de las que consideramos integrales inmediatas (que son principalmente las reseñadas en la tabla anterior), tenemos que operar de alguna manera con la función para conseguir llegar a una que sí se encuentre dentro de las inmediatas.

Una de estas formas de actuar es aplicando un cambio de variable a la función que queremos integrar. Para ello, se trata de definir una función derivable que dependa de una nueva variable t, de manera que $x = \Phi(t)$. Como, además, hemos dicho que Φ tiene que ser diferenciable, se cumple que $dx = \Phi'(t)dt$. De esta forma la integral dada se transforma en:

$$\int f(x)dx = \int f(\Phi(t))\Phi'(t)dt = \int g(t)\Phi'(t)dt$$

Nos bastará ahora con encontrar una función primitiva de esta última integral. No debemos olvidar que esa primitiva será función de la variable t, lo que nos obliga a ponerla en función de la variable x. Para realizar esto, nos basamos en que si x = Φ (t), se tiene que t = Φ^{-1}(x).

Resumiendo todo el proceso, se tendrá:

$$\int f(x)dx = \int f(\Phi(t))\Phi'(t)dt = \int g(t)\Phi'(t)dt = F(t) + C = F(\Phi^{-1}(x)) + C$$

Truco

Hay que intentar elegir f(t) con alguna función en el integrando cuyo diferencial también esté presente.

Caso práctico

Realiza el siguiente ejercicio para calcular mediante cambio de variable la integral:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Solución:

Hacemos el cambio x = e^x y así conseguimos eliminar de la integral a la función exponencial.

Así tenemos $t = e^x$, $e^x\, dx = dt$, con lo que la integral queda:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{t}{1+t}\frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{1+t} dt = \int \ln(1+t) + C$$

Como tenemos que $t = e^x$, y el resultado final de la integral es:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+t) + C = \ln(1+e^x) + C$$

Atención

No existe un criterio exacto para elegir la variable a cambiar. Cada caso es diferente. La mejor solución para acertar es la realización de gran variedad de ejercicios.

1.3.2. Integración por partes

Este método se aplica, por ejemplo, para integrales de la forma:

$$\int p(X)\ f(x)\ dx$$

Donde p(x) es un polinomio y f(x) es una de las funciones siguientes: e^x, cos ax, sen ax, ln x, arc tg x, arc sen x, etc.

Y también para integrales de productos de una función exponencial por coseno o seno.

$$\int f(x)\cdot \phi'(x)\cdot dx = f\left(x\right)\times j\left(x\right) \ -\int \phi(x)\cdot f'(x)\cdot dx$$

En general, se utiliza cuando la función a integrar es el producto de dos funciones.

También se suele expresar de la siguiente forma:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Que resulta más fácil de memorizar.

Este método va a ser aplicado fundamentalmente en productos y la clave está en elegir convenientemente las funciones u y dv en la integral dada. Si observamos la fórmula de integración por partes, podemos ver que la parte de la integral dada que elegimos como dv la vamos a tener que integrar para obtener v, con lo cual este va a ser un buen punto de partida para la separación, ya que si hay una parte que no sepamos integrar, la tendremos que elegir obligatoriamente para derivar, es decir, como u.

Truco

Una manera de proceder, que simplifica mucho las cosas cuando aparezca un polinomio, es utilizarlo como u (EXCEPTO si hay un logaritmo, llamaremos u al logaritmo y dv al resto), para que así, al ir derivando, el polinomio descienda en grado y resulte más fácil la integral.

Vamos a calcular mediante la integración por partes la siguiente integral:

$$\int x2 \ \ln x \ dx$$

Observamos que por un lado tenemos x^2 y por el otro lnx. Como el logaritmo no tiene primitiva inmediata no lo podemos tomar como dv, luego lo haremos como u. Así nos queda:

u = lnx du = 1/x dx

dv = x^2 dx v = $x^3/3$

Llevando todo esto a la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

1.3.3. INTEGRACIÓN MÚLTIPLE POR PARTES

Podemos encontrar casos en los que la reducción de producto de funciones deba realizarse varias veces hasta llegar a una función que se pueda integrar de forma sencilla. Así, si tenemos una integral del siguiente tipo:

$$\int f(x)\cdot\phi^{(n)}(x)\cdot dx$$

La reduciremos a la integración del producto $f^{(n)}(x) \cdot F\,\varphi\,(x)$ por la fórmula de integración múltiple por partes:

$$\int f(x)\cdot\phi^{(n)}(x)\cdot dx = f(x)\times j^{(n-1)}(x) - f'(x)\times j^{(n-2)}(x) + f''(x)\times j^{(n-3)}(x) -.+ (-1)^{n-1} \times f^{(n-1)}(x)\times j(x) + (-1)^n \times \int f^{(n)}(x)\cdot\phi(x)\cdot dx$$

Existen algunos casos típicos:

- Donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n.

$$\int e^{ax} p_n(x) \cdot dx$$

Aplicando la fórmula de integración múltiple por partes, obtenemos:

$$\int e^{\alpha x} p_n(x) \cdot dx = e^{ax} \times \left[\frac{p_n(x)}{\alpha} - \frac{p'_n(x)}{\alpha^2} + \frac{p''_n(x)}{\alpha^3} - \ldots + (-1)^n \frac{p^{(n)}{}_n(x)}{\alpha^{n+1}} \right] + C \; = \; e^{ax} \times q_n\left(x\right) \; + \; C$$

- $\int \cos p_n(x) \cdot dx = p_n(x) \cdot \operatorname{sen} x + p'_n(x) \cdot \cos x + C.$
- $\int \operatorname{senx} p_n(x) \cdot dx = p_n(x) \cdot \cos x + p'_n(x) \cdot \operatorname{sen} x + C.$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Se usa la fórmula de reducción:

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)\cdot(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}$$

$$\begin{aligned} &\int \operatorname{senx} \cdot x^2 \cdot dx = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2\left[x(\operatorname{senx}) - \int \operatorname{senx} dx \right] = -x^2 \cos x + 2x\operatorname{senx} + 2\cos x = \\ &= \cos x(2-x^2) + 2x\operatorname{senx} \end{aligned}$$

En primer lugar, hemos hecho el cambio de variable $u = x^2$ y $dv = \operatorname{senx}$.

En la ecuación resultante se vuelve a hacer el cambio de variable, pero ahora con dv = cosx y u = x. Finalmente obtenemos una integral directa.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es la solución de la siguiente integral?

$$\int e^x \cdot x^2 \cdot dx$$

Solución:

$e^x \cdot x^2 - 2 (x \cdot e^x - e^x) + C.$

1.3.4. Integral de funciones racionales

Llamamos funciones racionales a aquellas que son cociente de polinomios, es decir, a las que tienen la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Podemos encontrar dos casos:

- **Grado P(x) > grado Q(x).** Entonces, P(x) = Q(x) · C(x) + R(x), donde C(x) y R(x) son respectivamente el cociente y el resto de dicha división. Con esto la integral quedaría separada en dos integrales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{Q(x)C(x)+R(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

  De las cuales la primera es inmediata y la segunda tiene el grado del numerador menor que el del denominador.

- **Grado P(x) < grado Q(x),** que es el que vamos a estudiar más detenidamente.

  Para resolver este tipo de integrales tenemos que estudiar las raíces del denominador y podemos encontrarnos tres casos:

  a) Caso I: las raíces del denominador son reales y distintas.

  b) Caso II: las raíces son reales y múltiples.

  c) Caso III: las raíces son complejas y simples.

1.3.4.1. Caso I: las raíces del denominador son reales y distintas

En este caso, supongamos que las raíces son r_1, r_2, r_n todas reales y distintas. Entonces consiste en descomponer la fracción en otras fracciones más simples de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \dots\dots + \frac{A_n}{x-r_n}$$

Donde los coeficientes A_1..., A_n son indeterminados y se calculan operando con las fracciones.

Con esto conseguimos convertir la integral en n integrales más sencillas.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-r_1}dx + \int \frac{A_2}{x-r_2}dx + \ldots\ldots + \int \frac{A_n}{x-r_n}dx$$

Si todas las raíces del denominador son reales y distintas, la fracción se puede descomponer en otras más simples y, por lo tanto, más sencillas de calcular:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-r_1}dx + \int \frac{A_2}{x-r_2}dx + \ldots\ldots + \int \frac{A_n}{x-r_n}dx$$

Vamos a resolver esta ecuación mediante este método:

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx$$

Para ello vamos a buscar los coeficientes A_1 y A_2, puesto que el denominador tiene grado dos.

$$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-4} = \frac{A_1(x-4)+A_2(x+1)}{x^2-3x-4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1(x-4)+A_2(x+1) = x$$

De donde obtenemos que:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{5} \\ A_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-4} = \frac{1}{5}\ln(x+1) + \frac{4}{5}\ln(x-4) + C$$

1.3.4.2. Caso II: las raíces son reales y múltiples

Supongamos ahora que el polinomio del denominador tiene raíces reales y múltiples y sean estas, por ejemplo, r_1, r_2..., r_n con multiplicidades m_1, m_2..., m_n respectivamente.

Entonces podemos descomponer en fracciones simples de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-r_1}+\frac{A_2}{(x-r_1)^2}+\ldots+\frac{A_{m_1}}{(x-r_1)^{m_1}}+\ldots+\frac{A_1'}{x-r_n}+$$
$$+\frac{A_2'}{(x-r_n)^2}+\ldots+\frac{A_{m_n}'}{(x-r_n)^{m_n}}$$

Donde los coeficientes de los numeradores de cada una de las fracciones son coeficientes indeterminados que se calculan operando con las fracciones.

Con esto, la integral queda dividida en integrales más sencillas de la forma:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-r_1}dx+\int\frac{A_2}{(x-r_1)^2}dx+\ldots+\int\frac{A_{m_1}}{(x-r_1)^{m_1}}dx+\ldots+\int\frac{A_1'}{x-r_n}dx+$$
$$+\int\frac{A_2'}{(x-r_n)^2}dx+\ldots+\int\frac{A_{m_n}'}{(x-r_n)^{m_n}}dx$$

Cuando tenemos una fracción de polinomios con el denominador que tiene raíces reales y múltiples, se descompone de forma que cada raíz posea su multiplicidad, obteniéndose una serie de integrales más sencillas:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-r_1}dx+\int\frac{A_2}{(x-r_1)^2}dx+\ldots+\int\frac{A_{m_1}}{(x-r_1)^{m_1}}dx+\ldots+\int\frac{A_1'}{x-r_n}dx+$$
$$+\int\frac{A_2'}{(x-r_n)^2}dx+\ldots+\int\frac{A_{m_n}'}{(x-r_n)^{m_n}}dx$$

1.3.4.3. Caso III: las raíces son complejas y simples

En un polinomio, siempre que aparece una raíz compleja lo hace también automáticamente su raíz compleja conjugada. Estas dos raíces son las raíces de un polinomio de segundo grado $px^2 + qx + r$, el cual ponemos como denominador de la fracción simple que nos proporcionan estas dos raíces. Como numerador ponemos un polinomio de grado uno de la forma $Mx + N$, donde M y N son coeficientes indeterminados. Así, la descomposición en fracciones queda de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{px^2+qx+r} + \ldots\ldots + \frac{M'x+N'}{p'x^2+q'x+r'}$$

Los coeficientes de los numeradores se calculan operando con las fracciones. Así pues, la integral queda de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Mx+N}{px^2+qx+r}dx + \ldots\ldots + \int \frac{M'x+N'}{p'x^2+q'x+r'}dx$$

Vamos a resolver la integral:

$$\int \frac{2x+1}{x^4+x^2}dx$$

Lo primero que debemos hacer es calcular las raíces del denominador. Para ello nos fijamos en:

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2+1)$$

De donde obtenemos la raíz cero doble y las dos raíces complejas que salen del polinomio $x^2 + 1$. Así tenemos la siguiente descomposición en fracciones:

$$\frac{2x+1}{x^4+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Poniendo común denominador en el miembro de la derecha, obtenemos:

$$\frac{2x+1}{x^4+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{Ax\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x^2}{x^4+x^2}$$

Igualando los numeradores y dándole valores a la x, tenemos que:

A = 2, B = 1, M = -2, N = -1

Con esto, la integral nos queda:

$$\int\frac{2x+1}{x^4+x^2}dx=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{-2x-1}{x^2+1}dx=2\ln x-\frac{1}{x}-\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$
$$=2\ln x-\frac{1}{x}-\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x+C$$

Para resolver la integral:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Donde:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Es una fracción racional propia, Q (x) = $(x - x_1)^t \cdot (x - x_2)^m \cdots (x^2 + px + q)^k$, el integrando se expresa en forma de suma de fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_t}{(x-x_1)^t} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots +$$
$$+ \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \cdots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k} + \cdots$$

1.3.4.4. Otras integrales racionales

- **Teniendo la integral:**

$$\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})dx,$$

Donde R es una función racional de sus argumentos.

Se reduce a una integral de una fracción racional mediante la sustitución $x = t^k$, donde k es un común denominador de las fracciones m/n, ..., r/s.

Calculemos la siguiente integral:

$$\int \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2+\sqrt{2}} dx =$$

Primero realizamos el cambio de variable: $dx = 2tdt$; $t^2 = x$

$$= \int \frac{(1+t)^2}{2+t} 2tdt =$$

realizamos otro cambio de variable 2+t = u:

$$= \int \frac{(u-1)^2}{u} 2(u-2)du = \int \frac{2(u^2-2u+1)(u-2)}{u} du = \int \frac{2(u^3-4u^2+5u-2)}{u} du =$$
$$= \int (2u^2 - 8u + 10 - \frac{4}{u}) du = \frac{2}{3}u^3 - 4u^2 + 10u - 4\log|u| + C =$$
$$= \frac{2}{3}(2+\sqrt{x})^3 - 4(2+\sqrt{x})^2 + 10(2+\sqrt{x}) - 4\log(2+\sqrt{x}) + C$$

- **Teniendo la integral:**

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right] \cdot dx$$

Donde R es una función racional de sus argumentos.

Se reduce a la integral de una fracción racional mediante el cambio

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

Vamos a calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}} dx$$

La resolvemos mediante el cambio 1 + x = t^3, ya que se trata de una integral del tipo cuatro. Con esto tenemos dx = $3t^2$dt y, sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{1+t}{1-t} 3t^2 dt = 3\int \frac{t^2(1+t)}{1-t} dt = 3\int \frac{t^3+t^2}{1-t} dt =$$
$$= 3\int (-t^2 - 2t - 2) dt - \int \frac{2}{1-t} dt = \frac{-3t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} - 6t + 2\ln(1-t) =$$
$$= -t^3 - 3t^2 - 6t + 2\ln(1-t) = -(1+x) - 3(1+x)^{3/2} - 6\sqrt[3]{1+x} + 2\ln(1-\sqrt[3]{1+x} + C$$

- **Teniendo la integral:**

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx,$$

Mediante el cambio x + (b / 2a) = t, la integral se reduce a la suma de las integrales:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx = M_1 \cdot \int \frac{t \cdot dt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1 \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$$

La primera integral se reduce a la integral de una fracción potencial y la segunda es inmediata.

- **Teniendo la integral:**

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

donde m, n, p son números racionales (integral de un diferencial binómico).

Esta integral se expresa a través de funciones elementales solo si se cumple una de las condiciones siguientes:

1. Si **p** es un entero.

   a) Si p es un entero positivo, se quitan los paréntesis $(a + bx^n)$ p de acuerdo con el desarrollo del binomio de Newton y se calculan las integrales de las potencias.

   b) Si p es un entero negativo, se hace el cambio x = tk, donde k es el común denominador de las fracciones m y n, lo que conduce a la integral de una fracción racional.

2. Si $\frac{m+1}{n}$ es un entero, entonces se aplica el cambio a + bxn = tk, donde k es el denominador de la fracción p.

3. Si $\frac{m+1}{n}+p$ es un entero, se aplica el cambio a + bxn = xn tk, donde k es el denominador de la fracción p.

Ejemplo:

$$\int x^2(1-2x^2)^{-5/2}dx$$

a) p no es un número entero.

b) $\frac{m+1}{n}=\frac{3}{2}$ no es un número entero.

c) $\frac{m+1}{n}+p=-1$es un número entero.

$$\begin{cases} m=2 \\ n=2 \\ p=-5/2 \end{cases}$$

Cambio:

$$1-2x^2=x^2t^2 \Rightarrow t=(x^{-2}-2)^{\frac{1}{2}};dt=\frac{x^3dx}{(x^2-2)^{1/2}}$$

$$\int x^2(1-2x^2)^{-5/2}dx=\int -x^2x^3(1-2x^2)^{-2}\frac{-x^{-3}}{(x-2x^2)^{1/2}}dx=$$

$$=-\int x(x^{-2}-2)\frac{-x^{-3}dx}{(1-2x^2)^{1/2}}=-\int (x^{-2}-2)\frac{-x^3dx}{(x^{-2}-2)^{1/2}}=$$

$$=-\int t^{-4}dt=\frac{1}{3}t^{-3}+C=\frac{1}{3}(x^{-2}-2)^{-3/2}+C$$

- **Teniendo la integral:**

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

donde R es una fracción racional de x y de:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Se reduce a una integral de una fracción racional mediante las sustituciones de Euler:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \cdot \sqrt{a} \rightarrow \text{donde}\, a>0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \cdot \sqrt{c} \rightarrow \text{donde}\, c>0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \cdot (x - x_1) \rightarrow \text{donde}\, 4ac - b^2 < 0$$

Donde x_1 es la raíz del trinomio $ax^2 + bx + c$.

También se puede calcular la integral indicada mediante los cambios trigonométricos:

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \operatorname{sen} t \\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \cos t \end{cases} \left(\text{con}\, a < 0,\ 4ac - b^2 < 0 \right)$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \sec t \\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \operatorname{cosec} t \end{cases} \left(\text{con}\, a > 0,\ 4ac - b^2 < 0 \right)$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \cdot \operatorname{tg} t \\ \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \cdot \operatorname{cotg} t \end{cases} \left(\text{con}\, a > 0,\ 4ac - b^2 > 0 \right)$$

- **Teniendo la integral:**

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Se escribe la igualdad:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + k\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado n – 1. Derivando a ambos miembros de esta ecuación y multiplicando por $\sqrt{ax^2+bx+c}$, obtenemos la identidad:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\cdot\left(ax^2 + bx + c \right) + \frac{1}{2}\cdot Q_{n-1}(x)\cdot\left(2ax+b \right)+k$$

que da un sistema de n + 1 ecuaciones lineales para determinar los coeficientes del polinomio $Q_{n-1}(x)$ y el factor k.

- **Teniendo la integral:**

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$$

Esta integral se reduce a la considerada antes mediante el cambio:

$$x - x_1 = t^{-1}$$

$$\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)dx \quad \text{Cambio universal}: tg\frac{x}{2}=t$$

Vamos a resolver la integral:

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}$$

Es una función par en seno y en coseno, con lo que nos encontramos en el caso III de los expuestos anteriormente. Tendremos que realizar el cambio tgx = t, con lo que la integral quedaría:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\cos^2 x dt}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{t^2}{t^2} dt =$$
$$= -\frac{1}{t} + t + C = -\frac{1}{tgx} + tgx + C$$
$$\int \operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx \cdot dx, \int \operatorname{sen} ax \cdot \cos bx \cdot dx, \int \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx$$

Se transforma el producto de funciones trigonométricas en suma o diferencia, usando una de las fórmulas siguientes:

sen ax · sen bx =1/2 · [cos (a – b)x – cos (a + b)x]

cos ax · sen bx =1/2 · [cos (a – b)x + cos (a + b)x]

sen ax · cos bx =1/2 · [sen (a – b)x + sen (a + b)x]

Existen otras posibilidades, como:

Si R(-sen x, cos x) = – R(sen x, cos x), el cambio es cos x = t.

Si R(sen x, -cos x) = – R(sen x, cos x), el cambio es sen x = t.

Si R(-sen x, -cos x) = R(sen x, cos x), el cambio es tg x = t.

- **Teniendo la integral:**

$$\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$$

donde m y n son enteros.

Si **m** es un número **impar positivo**, se aplica el cambio **cos x = t**.

Si **n** es un número **impar positivo**, se aplica el cambio **sen x = t**.

Si **m + n** es un número **par negativo,** se aplica el cambio **tg x = t.**

Si **m** y **n** son números **pares no negativos**, se usan las fórmulas:

$$\operatorname{sen}2\ x = \frac{1-\cos 2x}{2} \cos2\ x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- **Teniendo la integral:**

$$\int R(e^{ax}) \cdot dx$$

Se transforma en una integral de una función racional mediante el cambio $e^{ax} = t$.

Ejemplo:

Vamos a encontrar la solución a la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+1}$$

Para ello, aplicamos el cambio anteriormente indicado y tenemos que:

$$t = e^{3x} \text{ y } dt = 3e^{3x}dx$$

que, sustituyendo en la integral, nos queda:

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(e^{3x}) + C$$

Tipo de integral	Cambio variable para resolución
$\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})dx$	x = tk, donde k es un común denominador de las fracciones m/n, .., r/s
$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right] \cdot dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \cdot \sqrt{a}, \text{donde } a > 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \cdot \sqrt{c}, \text{donde } c > 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \cdot (x - x1), \text{donde } 4ac - b2 < 0$

Tipo de integral	Cambio variable para resolución
$\int x^m (a+bx^n)^p dx$	Si $\frac{m+1}{n}$ es un entero, entonces se aplica el cambio a + bxn = tk, donde k es el denominador de la fracción p Si $\frac{m+1}{n}+p$ es un entero, se aplica el cambio a + bxn = xn tk, donde k es el denominador de la fracción p
$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$	Cambio universal: tg $\frac{x}{2}$ = t
$\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$	Si m es un número impar positivo, se aplica el cambio cos x = t Si n es un número impar positivo, se aplica el cambio sen x = t Si m + n es un número par negativo, se aplica el cambio tg x = t
$\int R(e^{ax}) \cdot dx$	eax = t

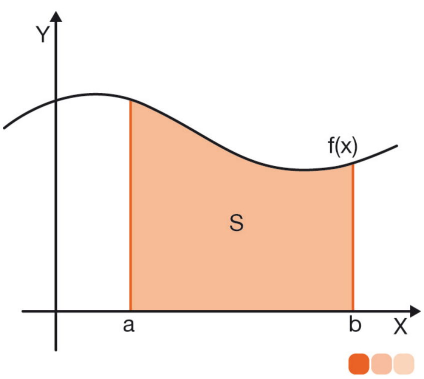
2. INTEGRALES DEFINIDAS

En el estudio de este apartado vamos a ver los tres teoremas más importantes del cálculo integral:

- El teorema fundamental del cálculo integral.
- El teorema del valor medio generalizado.
- La regla de Barrow.

2.1. EL PROBLEMA DEL ÁREA COMO ORIGEN DEL CÁLCULO INTEGRAL

Nos planteamos como punto de partida el siguiente problema: calcular el área del recinto bajo la curva f(x) y sobre el eje de abscisas, entre los puntos x = a y x = b. Es el área de la siguiente figura:



Área bajo f(x)

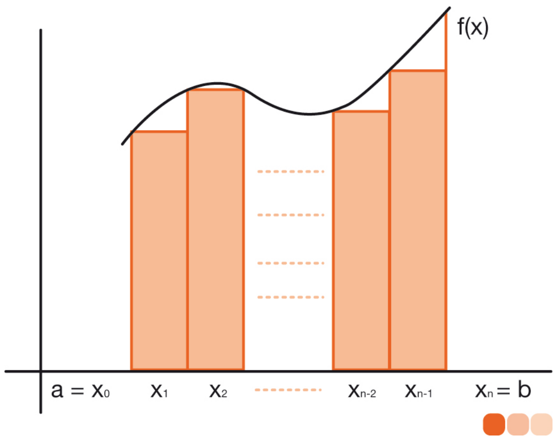
Se llama **partición del intervalo** al conjunto de puntos $\{x_0, x_1..., x_n\}$ tales que: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_{n-1} < x_n = b$. Así pues, para empezar, se necesita una partición del intervalo [a, b].

Con esto, el intervalo [a, b] se divide en subintervalos de la forma:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2].........,[x_{n-1}, x_n]$$

Donde denominamos h_i a la amplitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

En cada subintervalo la función f(x) por el teorema de Weierstrass alcanzará máximo y mínimo. Denotamos m_i y M_i con i = 1....., n al mínimo y al máximo respectivamente de f(x), en cada uno de los subintervalos.



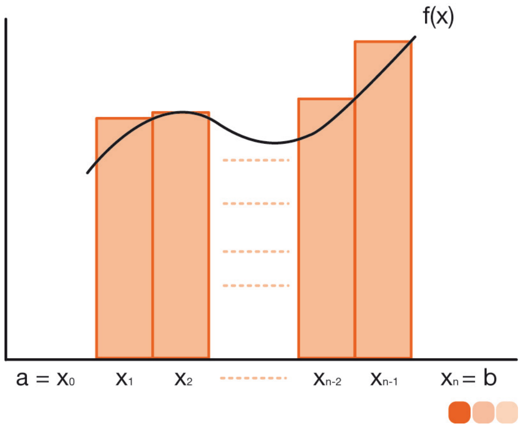
Área por defecto

Si consideramos ahora los rectángulos de la figura, observamos que la base de cada uno de ellos es el subintervalo correspondiente y la altura m_i, es decir, el mínimo valor de la función en cada uno de los subintervalos. Con esto, se puede calcular el área sombreada sin más que sumar el área de cada uno de los rectángulos:

$$s = m_1h_1 + m_2h_2 + ... + m_nh_n$$

Observamos que esta área es menor que el área que queremos calcular: $s \leq A$.

Si ahora consideramos los rectángulos de la misma base, pero la altura es el máximo valor que puede alcanzar la función en cada subintervalo, tenemos la figura:



Área por exceso

El área sombreada se puede calcular de la siguiente forma:

$S = M_1 h_1 + M_2 h_2 + \ldots\ldots\ldots + M_n h_n$. Observamos que esta área es mayor que el área que queremos calcular: $S \geq A$.

Si la partición que hemos tomado al principio hubiese tenido más puntos, los subintervalos habrían tenido menos amplitud y s y S habrían sido más aproximadas al área que queremos calcular. Por eso, si voy realizando particiones sucesivas cada vez con mayor número de puntos, iré obteniendo una sucesión de áreas de la siguiente forma:

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq A \leq S_n < \ldots < S_2 < S_1$$

Luego el área buscada va a coincidir con el límite cuando la amplitud de los intervalos tiende a cero de:

$$\lim_{h_i \to 0} s_n = \lim_{h_i \to 0} S_n = A$$

El valor de estos límites se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

y se lee integral de la función f(x) en el intervalo [a, b].

La condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable es que tengan límite las sucesiones s_n y S_n, cuando la amplitud de los intervalos de la partición tienda a cero.

2.2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL. GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

Antes de estudiar las propiedades de la integral hay que hacer notar que, aunque hasta ahora se haya considerado únicamente que la función es positiva, es decir que está por encima del eje OX, el concepto de integral se define automáticamente igual para funciones que posean partes negativas, ya que lo que miden s_n y S_n son áreas de rectángulos, y estas son siempre positivas.

Ahora ya estamos en disposición de exponer las propiedades de la integral:

1. Si cambiamos los límites de integración, el valor de la integral cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Si los límites de integración coinciden, la integral vale cero:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Supongamos que c es un punto interior del intervalo [a,b]. Entonces la integral dada se puede descomponer en dos de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Se cumple:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

5. Se cumple:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_b^a f(x)dx$$

2.3. TEOREMAS DEL CÁLCULO INTEGRAL

En el cálculo integral se trabaja con varios teoremas importantes que justifican aspectos tal que la existencia de la integral o la acotación y el cálculo de integrales, como son el teorema fundamental del cálculo integral, el teorema del valor medio generalizado y la regla de Barrow, los cuales veremos a continuación.

2.3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

El teorema fundamental del cálculo integral se enuncia como sigue:

Sea f(x) una función integrable y se define:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \,,$$

Entonces F(x) es continua en todos los puntos del intervalo [a, b] y, si f(x) es continua en esos puntos, se tiene F'(x) = f(x).

Así, podemos concluir que, si derivamos la primitiva de una función, el resultado será la propia función integrada.

2.3.2. Teorema del valor medio generalizado

Sean f(x) y g(x) dos funciones integrables en el intervalo [a, b] con $m \leq f(x) \leq M$ y $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

Y, por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx \rightarrow \text{con } m \leq \mu \leq M$$

2.3.3. Regla de Barrow

Sea f(x) una función continua en [a, b] y derivable en [a, b], salvo en un número finito de puntos, y con derivada integrable en [a, b], entonces:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Así, la regla de Barrow es útil para el cálculo de integrales definidas, usando para ello el teorema fundamental del cálculo integral.

Recuerda

Recuerda que tienes a tu disposición un servicio de tutorías para resolver cualquier duda que te pueda surgir.

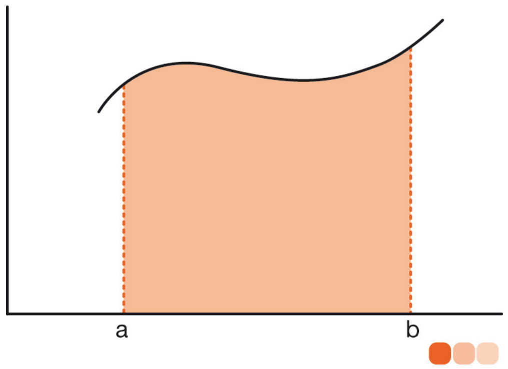
3. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Las principales aplicaciones de las integrales definidas las encontramos dentro de la geometría, en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

3.1. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

El propósito de la integral definida es el cálculo de áreas. Vamos a hacer ahora una clasificación de las funciones atendiendo a su forma, de manera que automáticamente sepamos calcular el área correspondiente.

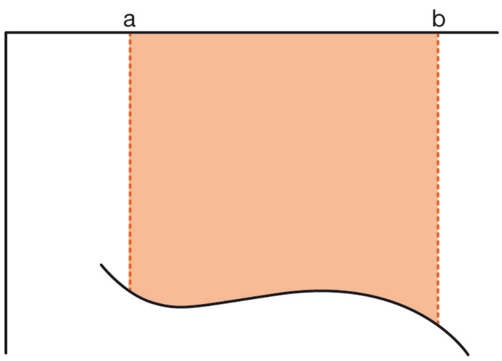
- Si la función es siempre positiva, es decir:



El área sombreada se calcula mediante la ecuación:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

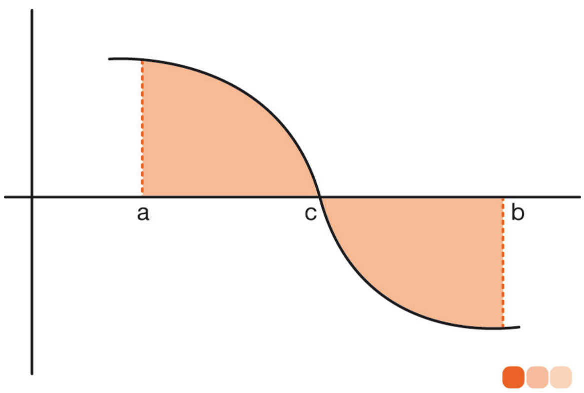
- Si la función es siempre negativa, es decir:



El área sombreada se calcula de la forma

$$A = \int_a^b \left|f(x)\right|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

- Si la función tiene partes positivas y partes negativas:



El área viene dada por:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

El área de una figura plana viene dada por:

- Función positiva:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

- Función negativa:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

- Cuando la función tenga ambas:

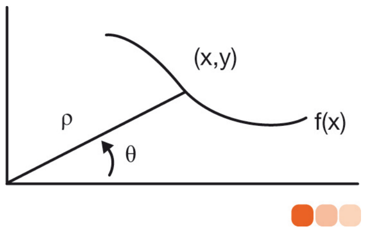
$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

3.1.1. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EN COORDENADAS POLARES

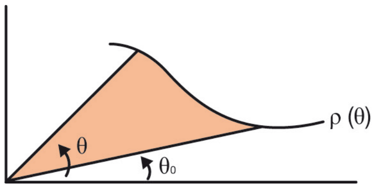
Las coordenadas polares, en función de las cartesianas, vienen dadas por:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Donde ρ y θ son las coordenadas polares radio y ángulo respectivamente, cuya representación sería:



Coordenadas polares



Área en coordenadas polares

Con estas nuevas coordenadas el área de la figura es:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\rho(\theta)\right]^2 d\theta$$ ¡Error! Marcador no definido.

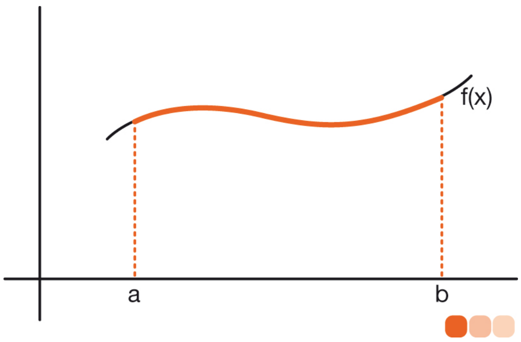
Donde el radio es una función del ángulo.

Caso práctico

Calcula el área del recinto que encierra la función en polares $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

Solución:

Dibujando la función obtenemos la siguiente gráfica:



Podemos comprobar que la función es simétrica respecto del eje OX, con lo que bastará hacer el área de una mitad y el resultado multiplicarlo por dos. Así pues:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\cdot d\theta = \\
&= a^2\int_0^{\pi}\ (1+\cos^2\theta+2\cos\theta)d\theta = a^2\int_0^{\pi}\cdot 1d\theta + \\
&+a2\int_0^{\pi} 2\cos d\theta + a^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta = a^2\left[\theta\right]_0^{\pi} + a^2\left[2\mathrm{sen}\theta\right]_0^{\pi} + \\
&+a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\cdot d\theta = a^2\pi - a^2 o + a^2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}d\theta + \\
&+a^2\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta}{2}\cdot d\theta = a^2\pi + a^2\left[\frac{1}{2}\cdot\theta\right]_0^{\pi} + a^2\left[\frac{1}{4}\cdot\mathrm{sen}2\theta\right]_0^{\pi} = \\
&= a^2\pi + a^2\,\frac{1}{2}\pi + a^2\cdot 0 = a^2\,\frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

Observaremos que este resultado es siempre positivo independientemente de lo que valga a, ya que está al cuadrado. No podía ser de otra forma, puesto que estamos midiendo un área y siempre han de ser positivas.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el área del recinto limitado por la curva f (x) = x^2 + 2x + 1 y la recta g(x)= x + 3?

a) 3.
b) 27.
c) 27π.
d) 9.

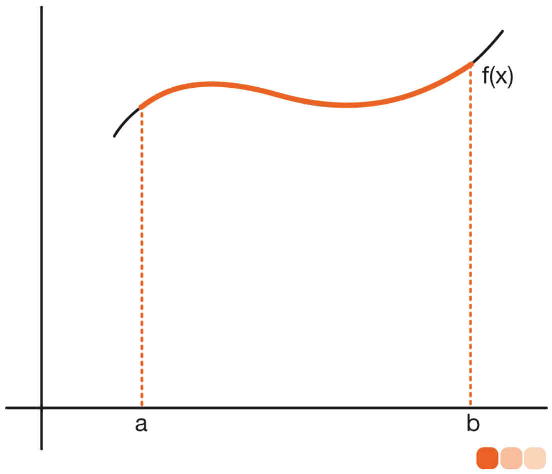
Solución:

d)9.

3.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA PLANA

La integral definida también nos sirve para calcular longitudes de curvas entre dos puntos que pertenezcan a ellas.

La longitud del arco de curva, que representa la figura siguiente:

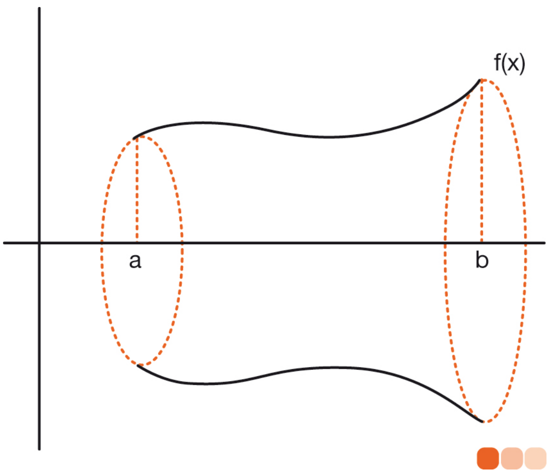


Se calcula mediante la integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

3.3. SUPERFICIES Y VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN

Denominamos **cuerpo de revolución** al sólido que genera la función f(x) al girar en torno al eje OX. Un ejemplo de esto es el que observamos en la siguiente figura:



A estos cuerpos de revolución les podemos calcular su volumen y el área de su superficie exterior.

- Volumen de un cuerpo de revolución:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

- Área de la superficie de un cuerpo de revolución:

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

3.4. APLICACIONES FÍSICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Podemos destacar la importancia de las integrales, no solo en el campo de las matemáticas, sino en otras ramas de la ciencia como la física. Es simplemente una pequeña reseña sobre cosas que nos parecen fáciles de calcular y provienen de una integral definida.

3.4.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE UNA PARTÍCULA

En un movimiento rectilíneo, si conocemos la aceleración, podemos sacar a través de ella la velocidad y posición de la partícula en movimiento.

Si la aceleración es constante, se pueden aplicar directamente las fórmulas del movimiento rectilíneo:

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$r = r_0 + v_0(t - t_0) + ½\, a(t - t_0)$$

Sin embargo, estas fórmulas no nos sirven cuando la aceleración no es constante, teniendo que utilizar en ese caso:

$$\int_{v0}^{v} dv = \int_{t0}^{t} a(t)dt$$
$$\int_{r0}^{r} dr = \int_{t0}^{t} v(t)dt$$

Observamos que las fórmulas anteriores son el caso particular de estas últimas cuando la aceleración es constante.

3.4.2. Trabajo de una fuerza

El trabajo total de una fuerza para desplazar un objeto desde un punto A hasta un punto B, se calcula también mediante una integral, cuando dicha fuerza no es constante.

Esta integral viene dada por

$$W = \int_A^B F(r)dr$$

Donde la fuerza está en función del desplazamiento.

CONCLUSIONES

En esta unidad hemos aprendido cómo realizar los tipos más importantes de integrales, atendiendo a la forma de la función que deseemos integrar (ver tabla de integrales inmediatas y métodos de integración).

También hemos desarrollado el concepto de integral definida, con sus principales teoremas y propiedades, así como ciertas aplicaciones que recordamos rápidamente:

- Área de una figura plana:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

- Longitud de un arco de curva plana:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

- Volumen de un cuerpo de revolución:

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

- Área de una superficie de revolución:

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}\,dx$$

Además de estas aplicaciones, también hemos hecho referencia a alguna aplicación física.

RECAPITULACIÓN

La integración de funciones es el proceso contrario a la derivación de funciones. Comparten, por lo tanto, características y propiedades análogas.

Existen diferentes medios de integración, aplicables a numerosos tipos de funciones, así como diversos trucos que facilitan la integración de funciones especialmente complejas o complicadas.

El uso de integrales se aplica en numerosas ramas de ciencias, especialmente en la física.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **La primitiva de la función f(x) = lnx es:**

   a) lnx + C.

   b) x(lnx –1) + C.

   c) x^2 + C.

   d) lnx – 1 + C.

2. **Calcula la primitiva de la función f(x) = xcos3x:**

   a) (1/3)xsen3x + (1/9)cos3x + C.

   b) sen3x + 9x + C.

   c) cos3x + x + C.

   d) (1/3)xsen3x + C.

3. **Calcula la primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x(x^2-1)}$:**

   a) ln(x-1) + C.

   b) (1/2)ln(x+1) + C.

   c) –lnx – (1/2)ln(x+1) + (3/2)ln(x-1) + C.

   d) (3/2)ln(x-1) + C.

4. **Calcula el valor de la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$:**

   a) 0.

   b) 1.

   c) $\pi/2$.

   d) $\pi/4$.

5. **Calcula el valor de la integral $\int_0^\pi \frac{sen^2 x}{cos^4 x}dx$:**

   a) 0.

   b) $-1/3$.

   c) π.

   d) $\pi/2$.

6. **Calcula el valor de la integral $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$:**

   a) $\sqrt{x}+C$.

   b) $\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}+C$.

   c) $\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}+C$.

   d) $2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$.

7. **Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones f(x) = x^3 y g(x) = x:**

   a) 1/ 2.

   b) 1/3.

   c) x.

   d) 1/4.

8. **Calcula la longitud del arco de la curva f(x) = (x4 +3)/6x comprendido entre x = 1 y x = 3:**

   a) 14.

   b) 3.

   c) 14/3.

   d) 0.

9. **Calcula el volumen del cuerpo de revolución determinado al girar el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje OX:**

   a) π.

   b) $(4/3)\ \pi\ R^2$.

   c) $\pi\ R^2$.

   d) 1.

10. **Calcula el área de la superficie de revolución generada por el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje OX:**

    a) $4\pi\ R^2$.

    b) $\pi\ R^2$.

    c) 1.

    d) $(3/2)\ \pi\ R^2$.

SOLUCIONARIO

1.	b	**2.**	a	**3.**	c	**4.**	d	**5.**	b
6.	d	**7.**	a	**8.**	c	**9.**	b	**10.**	a

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV. AA. *EULER*. *Matemáticas I*. Madrid: S.M, 2001.
- VV. AA. EULER. *Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: S.M, 2000.
- VV. AA. *Matemáticas I*. Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.