

# DERIVACIÓN





## ÍNDICE

<b>MOTIVACIÓN .....</b>	<b>3</b>
<b>PROPÓSITOS .....</b>	<b>4</b>
<b>PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD .....</b>	<b>5</b>
<b>1. CÁLCULO DE DERIVADAS .....</b>	<b>7</b>
1.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN .....	7
1.2. DERIVADAS LATERALES .....	8
1.3. FUNCIÓN DERIVADA.....	10
1.4. TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES .....	11
1.5. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES .....	12
1.6. DERIVADAS SUCEсивAS.....	13
<b>2. INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA .....</b>	<b>15</b>
2.1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA .....	15
2.2. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE UNA DERIVADA .....	16
<b>3. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES .....</b>	<b>18</b>
3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES DERIVABLES .....	18
3.2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN .....	19
3.3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN .....	20
3.4. TEOREMA DE ROLLE.....	23
3.5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO .....	24
3.5.1. CONSECUENCIAS Y APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO .....	25
3.6. TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO O VALOR MEDIO DE CAUCHY .....	26
3.7. REGLA DE L'HOPITAL .....	26

CONCLUSIONES .....	31
RECAPITULACIÓN .....	32
AUTOCOMPROBACIÓN .....	33
SOLUCIONARIO .....	37
PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN .....	38
BIBLIOGRAFÍA .....	39

## MOTIVACIÓN

---

El estudio del movimiento de los cuerpos, con las relaciones que existen entre las diferentes magnitudes físicas, puso de manifiesto que se necesitaba una nueva herramienta para un mayor y completo desarrollo de las teorías científicas.

Trabajando en ello, tanto Leibniz como Newton desarrollaron los principios matemáticos de lo que sería una parte fundamental de las matemáticas, el cálculo diferencial.

El cálculo diferencial se vio enriquecido por aportaciones realizadas por todos los grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX, ampliándose de forma espectacular y creando nuevas disciplinas matemáticas como el cálculo integral y más adelante, elementos mucho más complejos como las ecuaciones diferenciales.

El desarrollo del cálculo diferencial ha permitido un gran avance cuantitativo en el mundo científico, solucionando problemas que se creían irresolubles y planteando nuevas teorías que han permitido grandes avances científicos, no solo en las matemáticas, sino en la física, ingeniería y demás ramas.

## PROPÓSITOS

---

Con el estudio de esta unidad didáctica, conseguirás:

- Conocer el concepto de derivada de una función.
- Utilizar la derivada de las funciones elementales.
- Dar sentido geométrico y físico al concepto de derivada.
- Aplicación de las derivadas en el cálculo de extremos relativos de una función.
- Uso de las derivadas para el cálculo de límites en caso de indeterminación mediante la regla de L'Hopital.
- Enunciar y aplicar los teoremas fundamentales de funciones derivables.

## PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

---

El concepto de derivada de una función nos permite conocer diversos aspectos de la función, por ejemplo, nos sirve para controlar el crecimiento y decrecimiento de la función junto con sus máximos y mínimos.

En esta unidad didáctica veremos la expresión de la derivada de una función en un punto, que geométricamente ofrece una visión de la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Es importante que manejes con soltura el cálculo de derivadas.

Introduciremos la regla de L'Hopital como aplicación de la derivada en el cálculo de algunos límites que, mediante las técnicas usuales de resolución, quedan indeterminados.





# 1. CÁLCULO DE DERIVADAS

A continuación, vamos a definir el concepto de derivada y veremos sus operaciones, lo más importante que debes recordar es la tabla de derivadas inmediatas, te ayudará mucho en los cálculos.

## 1.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  función definida sobre  $I$ , un intervalo de la recta real.

Diremos que  $f$  es derivable en un punto  $a$  si existe y es finito el límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En caso de que esto ocurra, al valor de dicho límite se le llama **derivada de  $f$  en  $a$**  y se denota por  $f'(a)$ .

Admite otra notación el límite, sin más que poner  $x = a + h$ , que sería la siguiente:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Diremos que  $f(x)$  es derivable en un conjunto cuando lo es en cada uno de los puntos de dicho conjunto.

### Caso práctico

---

Calcula la derivada de la función  $f(x) = x^2$  en el punto  $x = 1$ .

#### Solución:

Aplicando la definición de derivada de una función en un punto tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$$

Con lo que  $f'(1) = 2$ .

## 1.2. DERIVADAS LATERALES

Si el punto  $a$  no es extremo del intervalo  $I$  se puede definir un nuevo concepto, la derivada lateral. Si deseamos calcular la derivada en un punto interior del intervalo a la izquierda y a la derecha de él tenemos puntos del propio intervalo; entonces podemos realizar los límites laterales a la izquierda y a la derecha del punto, en consecuencia, también podemos calcular la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda de la función en dicho punto.

Diremos que  $f$  es derivable en  $a$  por la derecha si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Análogamente diremos que  $f$  es derivable en  $a$  por la izquierda si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Diremos que la función es derivable en el punto  $a$ , si estos dos límites existen y son iguales. Si el punto  $a$  es extremo del intervalo  $I$  solo tendrá sentido uno de los límites laterales, luego en los puntos extremos la derivabilidad se reduce a la derivabilidad lateral por uno solo de los lados.



Básico

A partir del concepto de derivada lateral podemos ampliar la definición de función derivable en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Diremos, pues, que una función es derivable en  $[a, b]$  si lo es en el intervalo abierto  $(a, b)$  y además, es derivable a la derecha de  $a$  y a la izquierda de  $b$ .

### Caso práctico

Estudiar la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \text{ en el punto } x = 0.$$

**Solución:**

Para ello tendremos que hacer las derivadas laterales, puesto que la función está definida de distinta forma cuando  $x$  es mayor o menor que cero.

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^4 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^3 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 2 = 2$$

Se observa que las derivadas laterales no coinciden, con lo que podemos afirmar que la derivada en el punto  $x = 0$  no existe.

### 1.3. FUNCIÓN DERIVADA

Si tenemos una función que es derivable en un cierto intervalo  $I$ , podemos definir una función llamada derivada de  $f$  como:

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

De manera que a cada punto le corresponde la derivada de la función en ese punto.

## 1.4. TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Es muy importante que utilices esta tabla para realizar los cálculos de tus primeras derivadas, poco a poco irás cogiendo soltura y conseguirás memorizarla.

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$f(x) = cte$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$f'(x) = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
$f(x) = \arcsen x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctg x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$



Recuerda

Recuerda que tienes a tu disposición un servicio de tutorías para resolver cualquier duda que te pueda surgir.

## 1.5. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Además, dadas  $f$  y  $g$  dos funciones derivables en un punto  $a$  se tiene:

- a)  $f + g$  es derivable en  $a$  y  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .
- b)  $f \cdot g$  es derivable en  $a$  y  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ .
- c) Si  $g(a) \neq 0$  entonces  $f/g$  es derivable en  $a$  y:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- d) Derivabilidad de la función inversa. Dada  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $a$  con  $f'(a) \neq 0$ , se tiene que su función inversa  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  es derivable en  $f(a)$  y  $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$ .
- e) Regla de la cadena. Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $a$  y sea  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $f(a)$  tal que  $f(I) \subseteq J$ . Entonces  $g \circ f$  es derivable en  $a$  y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Aplicando la regla de la cadena a la tabla de derivadas inmediatas, podemos generalizarla en el caso de que en lugar de la variable  $x$  nos encontremos con otra función:

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n \cdot g'(x)g(x)^{n-1}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln a$
$f(x) = \ln g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \log_a g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_a e$
$f(x) = \sin g(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot \cos g(x)$

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -g'(x) \cdot \sin g(x)$
$f(x) = \operatorname{tg} g(x)$	$f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \operatorname{cotg} g(x)$	$f'(x) = -(1 + \operatorname{cotg}^2 g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \arcsen g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$
$f(x) = \arccos g(x)$	$f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$
$f(x) = \arctg g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotg} g(x)$	$f'(x) = \frac{-g'(x)}{1+g(x)^2}$

## 1.6. DERIVADAS SUCESIVAS

Ya hemos comentado el concepto de función derivada de una función dada y lo denotábamos  $f'(x)$ .

Si a su vez esta función derivada es derivable en su dominio de definición, podremos calcular la función derivada de  $f'(x)$ , que se denota **derivada segunda de f**, es decir,  $f''(x)$ .

Por ejemplo, si  $f(x) = x^3$ , su primera derivada es  $f'(x) = 3x^2$  y para calcular la segunda derivada volvemos a derivar la primera,  $f''(x) = 6x$ .

Procediendo de forma análoga llegamos a la derivada  $n$ -ésima de  $f$ , como la derivada, si existe, de la derivada  $n - 1$ .

Si en el ejemplo anterior deseamos seguir derivando, podemos calcular la tercera derivada,  $f'''(x) = 6$  y la cuarta derivada  $f^{(4)}(x) = 0$ . Las siguientes derivadas de la función serán todas nulas.



### Recomendación

La derivación de funciones no es una tarea especialmente difícil, pero requiere mucho trabajo. Realiza todos los ejercicios que sea posible y recuerda consultar a tu tutor para cualquier duda que te pueda surgir.



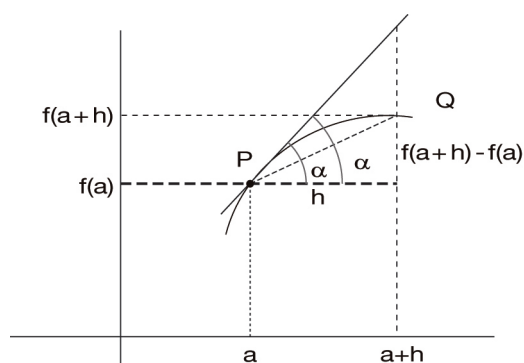
## 2. INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA

El concepto de derivada puede tener, más o menos, una fácil asimilación y no reviste mucha dificultad su puesta en práctica a la hora de realizar ejercicios o problemas relacionados con su aplicación.

Sin embargo, la interpretación de lo que significa realmente el concepto de derivada puede plantear mayor dificultad.

### 2.1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Sean P y Q dos puntos pertenecientes a la curva  $f(x)$  de la forma que se muestra en la siguiente figura:



Interpretación geométrica de la derivada

Tenemos que la derivada de  $f$  en el punto  $a$  cumple:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \alpha_0$$

Para ello basta observar que  $f(a+h) - f(a)$  es el cateto opuesto del ángulo  $\alpha$  y que  $h$  es el cateto adyacente.

Por lo tanto, si una función es derivable en un punto, la derivada en ese punto coincide con la pendiente de la recta tangente.



Atención

La derivada de la función en un punto  $x_0$  es la pendiente de la recta tangente a la curva en  $(x_0, f(x_0))$ . Así la recta tangente a una función  $f(x)$  en el punto  $x_0$  es de la forma:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

## 2.2. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE UNA DERIVADA

En Física, la derivada representa una tasa de variación instantánea o lo que es lo mismo, un cociente entre incrementos.

Supongamos que queremos calcular la tasa de variación entre las variables  $x$  e  $y$ . Esto lo conseguimos haciendo el cociente de la variación de cada una de las variables:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si ahora buscamos la tasa de variación instantánea, bastará hacer el límite de este cociente cuando el incremento de la variable  $x$  tienda a cero, es decir:

Esto significa:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos  $\Delta x = h$  y sustituimos en la ecuación anterior, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a + x) - f(a)}{x - a}$$

Que es la definición de **derivada en un punto**.



Nota

La tasa de variación instantánea de la función  $f(x)$  en un punto  $a$  es la derivada de la función en dicho punto.

## 3. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

---

En este apartado vamos a estudiar tres teoremas fundamentales en la teoría de derivación: el teorema de Rolle, el teorema del valor medio o de Cauchy y el teorema del valor medio.

### 3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Una propiedad muy importante de las funciones derivables, que relaciona la derivabilidad de las funciones con su continuidad, es la siguiente: si una función es derivable en un punto  $x = a$ , automáticamente es continua en ese punto  $x = a$ , por lo tanto, si una función es derivable en todo su dominio, también será continua en todo su dominio.

El recíproco no es cierto, es decir si una función es continua no tiene por qué ser derivable. Por ejemplo, la función  $f(x) = |x|$ , esta función es continua en todos los reales, sin embargo, no es derivable en  $x = 0$ . Vamos a verlo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Luego su derivada será:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculemos las derivadas laterales en  $x = 0$ :

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \qquad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = (-1)$$

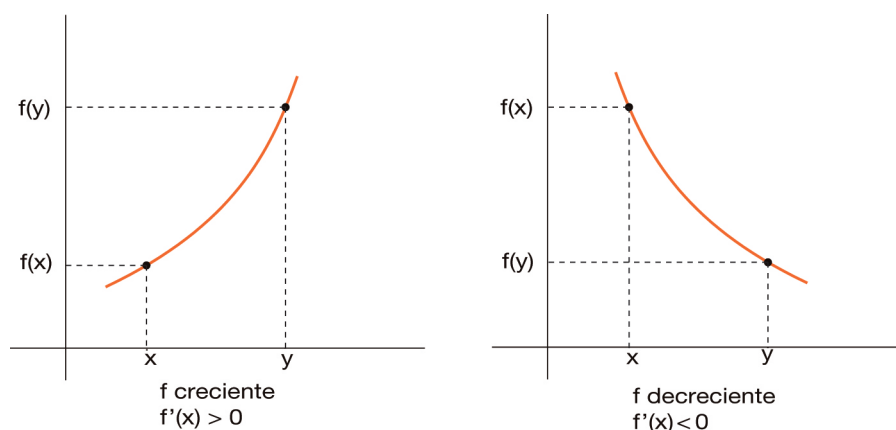
Como podemos comprobar las derivadas laterales en el punto no coinciden, así que la función no es derivable en dicho punto.

### 3.2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Una de las aplicaciones de la derivada es el estudio del crecimiento y decrecimiento de una función.

Recordemos los conceptos de creciente y decreciente:

- Una función se dice creciente cuando para todo  $x < y$  se tiene que  $f(x) < f(y)$ .
- Una función se dice decreciente cuando para todo  $x < y$  se tiene que  $f(x) > f(y)$ .



Crecimiento y decrecimiento en una función

Diremos que una función es creciente cuando su derivada sea positiva, es decir:

$$f \text{ creciente} \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Análogamente diremos que una función es decreciente cuando su derivada sea negativa, es decir:

$$f \text{ decreciente} \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

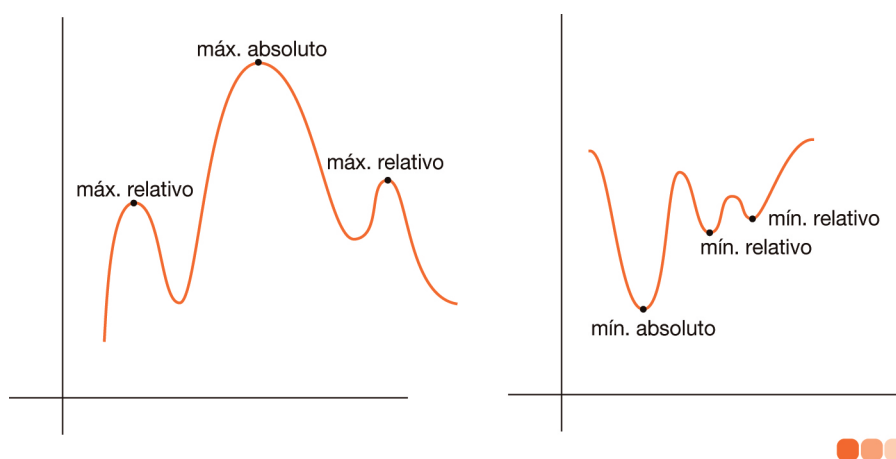
### 3.3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Sea  $f(x)$  una función real definida en un subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}$ :

- Diremos que la función presenta un máximo relativo en el punto  $a$  si para todo punto  $x$ , perteneciente a un entorno de  $a$ , se tiene que  $f(x) \leq f(a)$ .
- Diremos que la función presenta un mínimo relativo en el punto  $a$  si para todo punto  $x$ , perteneciente a un entorno de  $a$ , se tiene que  $f(x) \geq f(a)$ .

Estos conceptos son de carácter local, pues hay que tener en cuenta que estamos considerando el punto  $x$  en un entorno del punto  $a$ , de ahí que se llamen extremos relativos. Existen también los máximos y los mínimos absolutos como la versión global de los anteriores, sin más que considerar el punto  $x$  como cualquier punto del dominio de definición de la función.

Una función no tiene por qué tener extremos absolutos; de hecho, veremos teoremas que nos confirmen su existencia o no, pero en caso de poseerlos, diremos que el máximo absoluto es el mayor de los máximos relativos y que el mínimo absoluto es el menor de los mínimos relativos.



Máximo y mínimo relativo y absoluto

La condición necesaria que debe cumplir una función  $f(x)$  para tener máximo o mínimo en el punto  $a$  es que dicho punto anule la primera derivada.

Para saber si es máximo o mínimo hay que consultar la segunda derivada siguiendo estas reglas:

- Si  $f''(a) > 0$ , entonces el punto  $a$  es un mínimo.
- Si  $f''(a) < 0$ , entonces  $a$  es un punto máximo.

Donde  $a$  debe ser un punto que anule la primera derivada.

### Caso práctico

---

Realiza el siguiente ejercicio calculando los máximos y los mínimos, así como el crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$$

#### Solución:

Necesitamos la primera derivada de la función  $f(x)$ , que por tratarse de un cociente será:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2 \cdot (x-1) - x^2 \cdot 2}{2^2(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}$$

Si la igualamos a cero la primera derivada para obtener los posibles máximos y mínimos se tiene:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2$$

Ahora debemos comprobar si estos dos puntos son máximos o mínimos sustituyéndolos en la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{(x-1)^3} \\ f''(0) &= \frac{1}{(-1)^3} = -1 < 0 \\ f''(2) &= \frac{1}{1^3} = 1 > 0 \end{aligned}$$

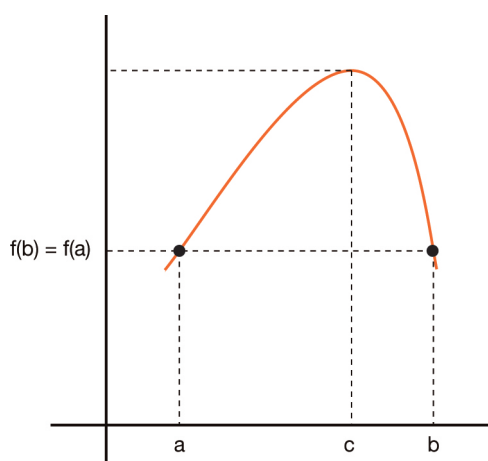


Resultando el punto  $(0,0)$  un máximo relativo y el punto  $(2,2)$  un mínimo relativo.

En cuanto al crecimiento y decrecimiento de la función, podemos decir que será creciente en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(2, \infty)$  y que será decreciente en el intervalo  $(0,2)$ , ya que en los dos primeros intervalos la derivada primera es positiva y en el tercer intervalo la derivada primera es negativa.

### 3.4. TEOREMA DE ROLLE

Si la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y derivable en  $(a, b)$  y cumple que  $f(a) = f(b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .



Teorema de Rolle



Nota

Cualitativamente, podemos considerar que si la función empieza subiendo, tendrá luego que bajar para reencontrar su valor inicial, por lo que entre la subida y la bajada, habrá un punto donde la función alcanza un máximo y en este,  $f'$  se anula.

Es decir, el teorema afirma que si en un intervalo el valor de la función coincide en ambos extremos la función tiene en el interior de ese intervalo un punto con derivada nula.

Si la función no es constante, los puntos  $c$  a los que se refiere el teorema son puntos donde la tangente es horizontal, luego derivada nula, es decir, puntos máximos o mínimos relativos.

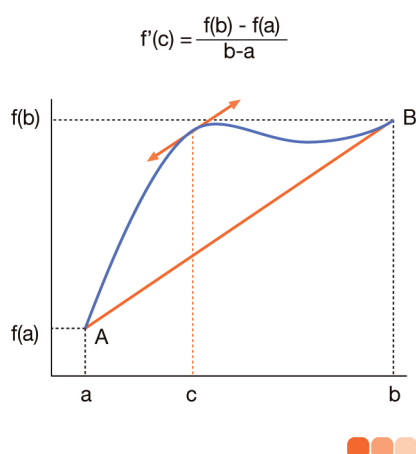
### 3.5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si la función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es decir que existe un punto donde la tangente es paralela a la recta que une los puntos definidos por  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

Gráficamente:



### 3.5.1. CONSECUENCIAS Y APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Podemos aplicar el teorema del valor medio para comprobar desigualdades como por ejemplo,  $\sin x \leq x$  para todo  $x \geq 0$ .

Podemos distinguir que  $x$  sea cero o mayor que cero:

- Si  $x = 0$  es obvio, pues,  $\sin 0 = 0$ .
- Si  $x > 0$  consideremos la función  $f(x) = \sin x - x$  y comprobemos si  $f(x) \leq 0$ . Aplicamos el teorema del valor medio a  $f(x)$  en el intervalo  $[0, x]$  y como es continua y derivable en dicho intervalo, tenemos que existe un  $c \in [0, x]$  tal que:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \cos c - 1 \leq 0$$

Ya que el coseno siempre es menor o igual que 1.

Queda entonces que:

$$\frac{f(x)}{x} \leq 0$$

Y como hemos dicho que  $x > 0$ , tenemos que  $f(x)$  ha de ser menor o igual que cero, que es lo que queríamos demostrar.



Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Sea  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  en el intervalo  $[-1, 2]$ . Encontrar todos los números que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio.

**Solución:**

$x = 1$  y  $x = -1/3$ .

### 3.6. TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO O VALOR MEDIO DE CAUCHY

Sean las funciones  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y derivables en  $(a, b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que:

$$f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(c) \cdot [f(b) - f(a)]$$



Recuerda

El teorema del valor medio es un caso particular del teorema del valor medio generalizado. Basta con tomar la función  $g(x) = x$ .

### 3.7. REGLA DE L'HOPITAL

La regla de L'Hopital nos resultará de utilidad a la hora de resolver límites con indeterminaciones del tipo  $\frac{0}{0}$ .

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones derivables en un cierto entorno del punto  $a$ , donde  $g'(x) \neq 0$ , siendo  $f(a) = g(a) = 0$ , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Entonces si existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Nota

Podemos aplicar la regla de L'Hopital tantas veces como queramos para la realización de un mismo límite.

### Caso práctico

Realiza el siguiente ejercicio y calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

**Solución:**

Aplicando L'Hopital dos veces consecutivas se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{0}{0}$$

De nuevo, aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

Podemos aplicar la regla de L'Hopital para calcular límites indeterminados de la forma  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$  ó  $\frac{\infty}{\infty}$ . Para ello tendremos que convertir estas indeterminaciones en  $0/0$ .

A continuación, veremos cómo se realiza la conversión para cada una de las indeterminaciones anteriores.

■ Indeterminación  $\infty - \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

En la mayoría de los casos, esta transformación es la misma que si realizamos la resta entre las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , por ejemplo, si las funciones son racionales.

■ Indeterminación  $0 \cdot \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

O bien cambiando el papel de  $f$  por  $g$  según cual de las dos sea infinito.

■ Indeterminación  $\infty/\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}$$



Ejemplo

Calculemos el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .

Observamos que se trata de una indeterminación  $\infty - \infty$ , por lo que aplicamos el método expuesto anteriormente para convertirla en una indeterminación de la forma  $0/0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) = \frac{0}{0}$$

Ahora aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) = \frac{0}{0}$$

Todavía sigue siendo una indeterminación  $0/0$ , por lo que volvemos a aplicar L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2 - 0} = 0$$

## Caso práctico

Realiza el siguiente ejercicio y calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$$

**Solución:**

Comprobamos que tenemos una indeterminación del tipo  $0 \cdot (-\infty)$ . La convertimos en  $0/0$  y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

**+ Info**

En el siguiente vídeo vas a encontrar una explicación de la Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.

*(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).*



## CONCLUSIONES

---

La derivada es una herramienta muy útil para el estudio de las funciones. Su aplicación permite la resolución de innumerables problemas de tipo práctico que se dan en todas las ramas de la ciencia.

Si una función es derivable en un punto, la derivada en ese punto coincide con la pendiente de la recta tangente. Este concepto, aplicado a cualquier ciencia, generaliza el uso de la derivación, que es básico para el desarrollo de cualquier rama científica.

## RECAPITULACIÓN

---

Hemos estudiado en esta unidad las principales utilidades de las derivadas en el estudio de funciones.

Como conceptos fundamentales destacamos la derivada de una función en un punto, las derivadas laterales en el punto, el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos.

Podemos observar que la derivada se puede aplicar al estudio de las raíces de una función, como veíamos en el teorema de Rolle o para el cálculo de valores intermedios de una función, como se veía en el teorema de ese mismo nombre y en el teorema de Cauchy.

La regla de L'Hopital es una herramienta muy útil en la resolución de límites indeterminados gracias a las adaptaciones que podemos hacer de esos límites.

## AUTOCOMPROBACIÓN

---

1. Calcular las derivadas laterales en torno al origen de la siguiente función:

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

- a) 1 y -1.
  - b) 0.
  - c)  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ .
  - d) Ninguna de las anteriores.
2. ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle a la función  $f(x) = |x - 1|$  en el intervalo  $[0, 2]$ ?
- a) Porque no es continua en el 0.
  - b) Porque los extremos del intervalo son diferentes.
  - c) Porque no es derivable en todo el intervalo.
  - d) Sí se puede aplicar.
3. Una función que no sea continua, ¿puede ser derivable?
- a) Sí.
  - b) No.
  - c) Según qué tipo de discontinuidad tenga.
  - d) Puede ser derivable lateralmente cuando coincidan sus derivadas laterales.

4. La función  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$  es creciente en el intervalo:
- a)  $(1, 2)$ .
  - b)  $(7, 8)$ .
  - c)  $(-\infty, 0)$ .
  - d)  $(3, \infty)$ .
5. La derivada de la función  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$  en el punto  $x = 1$  es:
- a) Menor que cero.
  - b) Mayor que cero.
  - c) No tiene derivada.
  - d) Tiene derivada infinita.
6. Calcula los máximos y los mínimos de la función  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ :
- a) Tiene un máximo en  $(1, 3)$  y un mínimo en  $(4, 1/2)$ .
  - b) Tiene un máximo en  $(0, 1)$  y un mínimo en  $(4/3, -5/27)$ .
  - c) Tiene un máximo en  $(1, 1)$  y un mínimo en  $(4, 0)$ .
  - d) Tiene un máximo en  $(1/3, 3)$  y un mínimo en  $(0, 1/2)$ .
7. Calcula el valor del siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$ .
- a) 3.
  - b) 4.
  - c) 0.
  - d)  $\infty$ .
8. Calcula el valor del límite:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{2} \right)$ .
- a) 0.
  - b) 2.
  - c)  $\infty$ .
  - d)  $-4/\pi$ .

9. El valor del siguiente límite es:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$ .

- a) 0.
- b) 3.
- c) -1.
- d) 1.

10. Calcula el valor del límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$ .

- a) 0.
- b) -5.
- c) 1.
- d) 2.



## SOLUCIONARIO

---

1.	c	2.	c	3.	b	4.	d	5.	a
6.	b	7.	c	8.	d	9.	c	10.	c

## PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

---

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado**.

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- BESCÓS, E y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J y otros. *Matemáticas. En tus manos*. Madrid: Anaya, 2002.
- VV AA. *EULER. Matemáticas I*. Madrid: SM, 2001.
- VV AA. *EULER. Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: SM, 2000.
- VV AA. *Matemáticas I*. Madrid: Edelvives, 2003.
- VV AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.

