REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

El estudio de las propiedades de una función puede realizarse a partir del estudio de una serie de características simples que determinan la naturaleza de la función y facilitan su representación gráfica.

Son estas propiedades básicas, como el dominio donde están definidas, la continuidad que presentan o las zonas de crecimiento y decrecimiento, entre otros, elementos fundamentales que deben estudiarse con detenimiento, puesto que varían en cada tipo de función, y analizar las peculiaridades que cada tipo presenta.

PROPÓSITOS

Con el estudio de esta unidad didáctica, conseguirás:

- Conocer las principales familias de funciones y sus características.
- Aplicar los conceptos de derivabilidad, continuidad, crecimiento y decrecimiento a la representación gráfica de funciones.
- Realizar el estudio general de una función y representación gráfica.
- Enunciar y aplicar teoremas sobre funciones relativos a continuidad, derivabilidad, raíces...

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Una función es la relación existente entre dos magnitudes, de modo que a cada valor de una de ellas le corresponde un determinado valor de la otra.

Para realizar la representación gráfica de una función, debemos conocer las distintas características que la definen, para ello utilizaremos los conceptos de límite, continuidad o derivabilidad entre otros.

Pretendemos así que seas capaz de interpretar los resultados y plasmar todos los cálculos dentro de la representación gráfica de cualquier función.

1. ESTUDIO GENERAL DE FUNCIONES

En esta primera parte de la unidad didáctica vamos a estudiar aquellas propiedades de las funciones que no necesitan de la derivación para ponerse de manifiesto.

En una segunda parte, estudiaremos las propiedades de las funciones relacionadas con la derivación de esas funciones.

1.1. DOMINIO

Se denomina dominio al conjunto de los valores de x para los que existe la función f (x).

Recuerda

Recuerda:

- $\sqrt[n]{x^m}$ está definida para todo x, si n es impar. No está definida para $x < 0$ si n es par.
- log x no está definido para $x \leq 0$.
- senx, cosx, a^x están definidos para todo x.
- tagx no está definida para $\pi/2 + k\pi$, con k número entero.
- En el cociente de polinomios, la función no está definida en un punto cuando este anula el denominador.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Calcula el dominio de la función $y = \frac{x^2+1}{x^3-x}$.

Solución:

Está definida para todos los números reales, excepto para aquellos que anulan al denominador:

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x\,(x^2 - 1) = x\,(x + 1)\,(x - 1) = 0$

x = 0, x = -1 y x = 1.

Luego el dominio de la función es D = R – {0, 1, -1}.

1.2. RECORRIDO

Es el conjunto de valores que puede tomar la función f (x), por ejemplo:

- La función f(x) = |x| solo toma valores mayores iguales que cero puesto que está definida usando el valor absoluto. Luego el recorrido de esta función será [0, + ∞).
- Las funciones trigonométricas seno y coseno solo toman valores en el intervalo [-1, 1].

1.3. SIMETRÍAS

Una función se llama par si f (-x) = f (x) para todos los valores de x. Entonces la gráfica de la función es simétrica respecto al eje OY.

Una función se llama impar si f (-x) = - f (x). Entonces la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

Ejemplo

Veamos si la función $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ es par.

Para ello sustituimos x por –x y obtenemos que $f(-x)=\dfrac{-x}{-x+2}\neq\dfrac{x}{x+2}$. Por lo tanto, no es par.

Para ver si es impar, hacemos la misma operación, y observamos que

$f(-x)=\dfrac{-x}{-x+2}=+\dfrac{x}{x-2}$, por lo que tampoco es impar.

1.4. PERIODICIDAD

Una función es periódica si los valores que toma se repiten a intervalos iguales, es decir, si tenemos un valor fijo T llamado periodo para el que se cumple que f(x) = f(x + T).

Recuerda

Las funciones trigonométricas son siempre periódicas, por ejemplo, el seno y el coseno son funciones periódicas con T = 2 Π.

1.5. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Para calcular el punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas, se da en la función el valor de x igual a 0.

Y para calcular el punto de corte de la gráfica con el eje de abscisas, se da en la función el valor de y igual a 0.

Ejemplo

Vamos a calcular los puntos de corte para la función

$y = 2x^3 + 5x^2 – 4x$.

Corte con OY → $x = 0$ entonces $y = 0$

Punto de corte con OY (0, 0).

Corte con OX → $y = 0$ $2x^3 + 5x^2 – 4x = 0$ → $x (2x^2 + 5x - 4) = 0$

Entonces: $x = 0$ ó $2x^2 + 5x – 4 = 0$

$2x^2 + 5x – 4 = 0$ → $x = 0{,}64$ y $x = -3{,}1$

Puntos de corte con OX (0, 0) , (0,64, 0) , (-3,1, 0)

1.6. ASÍNTOTAS

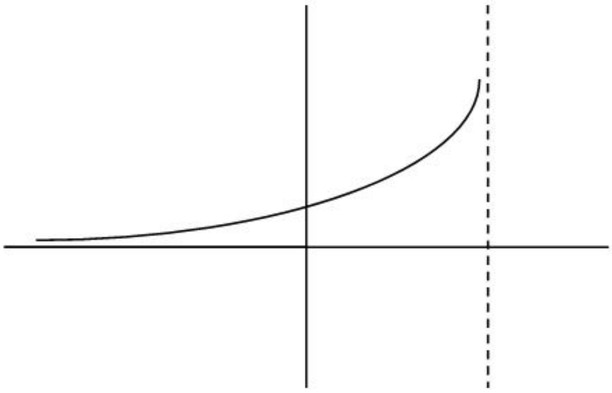
Se dice que la recta L es asíntota de la curva c, si y solo si ambas tienden a confundirse cuando una de las variables x o y, o las dos, tienden hacia + ∞ o - ∞.

Es decir, es una recta a la que la curva se aproxima indefinidamente sin llegar a tocarla.

Matemáticamente, una definición de asíntota sería “Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función y = f(x) de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función”.

Conceptualmente, este enunciado puede ser difícil de entender, por lo que diremos que las asíntotas de una curva son las rectas tangentes a la curva en los puntos del infinito.

Intuitivamente, es más fácil verlo gráficamente o mediante algún ejemplo.



Hay tres clases de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

1.6.1. ASÍNTOTAS VERTICALES O PARALELAS AL EJE OY

Son las rectas verticales que cruzan al eje X. Para hallar las asíntotas verticales de una curva se determinan los valores finitos de x, que hacen a y = f (x) infinita.

Es decir, si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta x = a es asíntota vertical de f(x).

Los valores de x = a en los que se deben buscar las asíntotas son aquellos puntos que queden excluidos del dominio.

Ejemplo:

Calcula las asíntotas verticales de la curva y = $\frac{x^2+x-5}{x^2-1}$.

$$y = \frac{x^2+x-5}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

En primer lugar, calcularemos el dominio de la función. Dado que es racional, el denominador no se puede anular, luego:

$$(x+1)\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x=1\ y\ x=-1$$

Así, en estos puntos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-5}{x^2-1}=\frac{-3}{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-5}{x^2-1}=\frac{-5}{0}=-\infty$$

Y en x = 1 y x = - 1 tenemos dos asíntotas verticales.

1.6.2. Asíntotas horizontales o paralelas al eje OX

Dada la función y = f (x), si $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ entonces en el infinito la recta horizontal y = b tiende a infinito, por lo tanto, es su asíntota horizontal.

Es muy importante calcular los límites de la función en + ∞ y en - ∞ ya que pueden existir asíntotas horizontales diferentes.

Caso práctico

Realiza el siguiente ejercicio para hallar las asíntotas horizontales de la función:

$$y=\frac{2x^2-5x+3}{x^2+5x-3}$$

Solución:

Para hallar las posibles asíntotas de la función f(x), tenemos que calcular el límite de dicha función:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 5x - 3} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 5x - 3} = 2 \;\; = 2$$

Por lo tanto, la recta y = 2 será una asíntota horizontal.

1.6.3. ASÍNTOTAS OBLICUAS

Dada una función y = f(x), si se verifica que:

1. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, con m real.
2. $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = h$, con h real.

Entonces se dice que y = mx + h es una asíntota oblicua de dicha función.

Vamos a encontrar las posibles asíntotas oblicuas de la curva

$$y = \frac{2x^2}{x - 1}$$

Veamos si se cumplen las dos condiciones.

$$m \to \underset{x\to\pm\infty}{lím} \frac{f(x)}{x} = \underset{x\to\pm\infty}{lím} \frac{2x^2}{x\left(x-1\right)} = \underset{x\to\pm\infty}{lím} \frac{2x^2}{x^2-x} = 2$$

Para calcular h, tenemos que:

$$\underset{x\to\pm\infty}{lím} \left(f(x)-mx\right) = \underset{x\to\pm\infty}{lím} \left(\frac{2x^2}{x-1}-2x\right) = \underset{x\to\pm\infty}{lím} \frac{2x^2-2x^2+2x}{x-1} = \underset{x\to\pm\infty}{lím} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Se verifican las otras dos condiciones. Por lo tanto, la asíntota oblicua corresponde a y = 2x + 2.

2. CONCEPTOS GENERALES

Vamos a repasar los conceptos de límite y continuidad para centrarnos después en elementos tan importantes de la función como son el estudio de su crecimiento o sus puntos característicos como son máximos y mínimos entre otros.

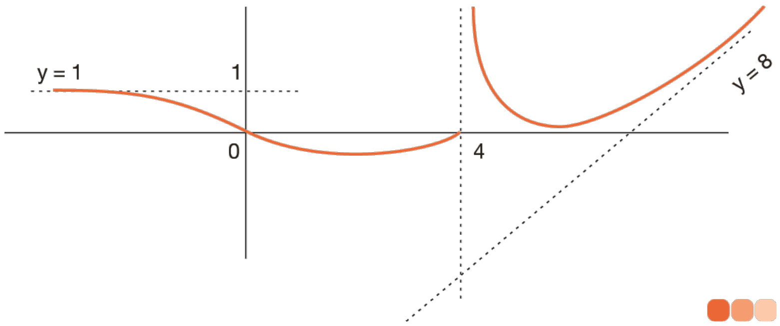
2.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

La expresión $\lim_{x \to p} f(x) = q$ representa que el límite de la función f cuando x tiende a p es q. Intuitivamente esta fórmula significa que podemos hacer que f(x) esté tan cerca de q como queramos, a condición de que x esté suficientemente próximo a p.

Se presentan seis casos:

- p → Puede ser un nº real, + ∞ ó - ∞.
- q → Puede ser un nº real, + ∞ ó - ∞.

2.1.1. LÍMITE EN EL INFINITO



En el gráfico el $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ y el $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$) denotan la existencia de la asíntota horizontal y = 1 y la de la asíntota vertical x = 4.

Para que exista asíntota oblicua es necesario y suficiente que para una misma abscisa x, los valores de las respectivas ordenadas f (x) y ax + b sean cada vez más próximos.

2.2. CONTINUIDAD

Coloquialmente, podemos decir que una función es continua si al dibujar su gráfica no levantamos el lápiz del papel, es decir, podemos dibujarla en un solo trazo.

Básico

Una función f(a) es continua en un punto a, si y solo si su gráfica no se interrumpe en dicho punto a. Se tienen que verificar estas dos condiciones:

- f (a) existe, es decir, a pertenece al dominio de f.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ existe y vale f (a).

Se dice que una función es continua en un conjunto si lo es en todo su dominio.

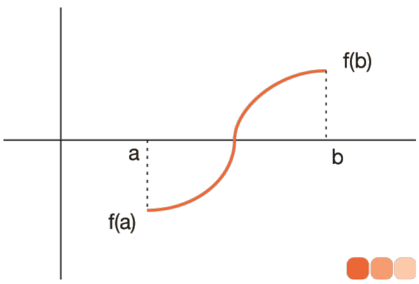
2.2.1. PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Un intervalo de extremos a y b, siendo a < b, es un segmento de la recta real, que tiene por extremos dichos puntos.

1. Intervalo cerrado: si sus extremos pertenecen al intervalo. Se representa por [***a***,***b***]
2. Intervalo abierto: si los extremos quedan excluidos del intervalo. Se representa por [***a***,***b***] o (a, b).
3. Intervalo mixto: el intervalo es abierto en un extremo y cerrado en el otro. Se representa (a, b], si es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha; y [a, b) si es abierto por la derecha.

2.2.2. TEOREMA DE BOLZANO

Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b] y en los extremos del intervalo toma valores f (a) y f (b) con f(a) < 0 y f (b) > 0; entonces hay, al menos, un $x_0 \in$ [a,b] en el que f $(x_0) = 0$.



Este teorema también es válido si f(a) > 0 y f (b) < 0. Podemos generalizarlo diciendo que si una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b] y f(a)·f(b) < 0; entonces hay, al menos, un $x_0 \in$ [a,b] en el que f $(x_0) = 0$.

Es decir, si una función es continua y toma un valor positivo y otro negativo, entre ellos dos, necesariamente debe existir un punto en el que la función pase por el cero, es decir, se anule.

2.2.3. Teorema del valor intermedio

Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] y k es cualquier número comprendido entre a y b, existe al menos un punto en c en [a,b], donde f (c) = k.

2.2.4. Teorema de Weierstrass

Si f es continua en un intervalo cerrado [a,b] entonces:

1. Hay al menos un punto c en [a,b], donde f alcanza su valor máximo absoluto, es decir, $f(c) \geq f(x)$ para cualquier $x \in [a,b]$.
2. Hay al menos un punto d en [a,b], donde f alcanza su valor mínimo absoluto, es decir $f(d) \leq f(x)$ para cualquier $x \in [a,b]$.

Recuerda

Si f continua en [a,b], entonces:

- Según Bolzano, si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe c tal que f(c) = 0.
- Según el teorema del valor intermedio, si $k \in [a,b]$ existe un punto c en el intervalo tal que f(c) = k.
- Según Weierstrass, existe un valor que es máximo absoluto y un valor que es mínimo absoluto.

2.3. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Una función f (x) derivable en un intervalo es:

- Creciente: si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo.
- Decreciente: si $f'(x) < 0$ en todo el intervalo.
- Constante: si $f'(x) = 0$ en todo el intervalo.

2.4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si existen estos extremos, máximos o mínimos, en esos puntos, la recta tangente a la gráfica es horizontal, es decir tiene pendiente 0 y por lo tanto, el valor de la primera derivada en esos puntos se anula. Para determinar si esos puntos corresponden a máximos o mínimos, hay que recurrir a la segunda derivada, sustituyendo en ella los valores obtenidos:

- Si $f''(x) < 0$ corresponde a un máximo.
- Si $f''(x) > 0$ corresponde a un mínimo.

Caso práctico

Realiza el siguiente ejercicio y calcula los máximos y mínimos de la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

Solución:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 \Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que $x = 1$ y $x = 2$.

$$y'' = 12x - 18$$

$$f''(1) = 12 - 18 = -6 < 0 \text{ máximo}$$

$$f''(2) = 24 - 18 = 6 > 0 \text{ mínimo}$$

Sustituyendo en la primera función $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ los valores $x = 1$ y $x = 2$:

$$f(1) = 2 - 9 + 12 - 3 = 2 \Rightarrow \text{Máximo } (1, 2)$$

$$f(2) = 16 - 36 + 24 - 3 = 1 \Rightarrow \text{Mínimo } (2, 1)$$

2.5. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Los puntos de inflexión son aquellos que hacen cambiar la concavidad; en ellos la segunda derivada se anula ($f''(x) = 0$).

Los pasos a seguir son los siguientes:

- Se halla la derivada segunda de la función: $f''(x)$.
- Se hace $f''(x) = 0$ y se resuelve la ecuación resultante.
- Se calcula la derivada tercera de la función: $f'''(x)$ y se sustituyen en ella las raíces halladas. Si f''' no se anula hay un punto de inflexión.

Ejemplo

Vamos a calcular los puntos de inflexión de la curva $y = x^3 – 6x^2 + 4x + 8$.

Para ello hallamos las derivadas primera y segunda:
$y' = 3x^2 – 12x + 4 \Rightarrow y'' = 6x – 12$

$6x – 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y''' = 6 \neq 0$ Es un punto de inflexión

Sustituyendo $x = 2$ en $x^3 – 6x^2 + 4x + 8$ se obtiene $y = 8 – 24 + 8 +8 = 0$

El punto de inflexión es (2, 0).

2.6. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Una función es cóncava hacia arriba si $f'' > 0$ y es convexa si $f'' < 0$.

Caso práctico

Realiza el siguiente ejercicio que consiste en estudiar la función $y = 2x^3 + 5x^2 –4x$.

Solución:

a) Dominio: Todos los números reales

b) Cortes con los ejes:

$x = 0$ $y = 0 \rightarrow$ Punto de corte con el eje OY (0, 0)

$y = 0$ $2x^3 + 5x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(2x^2 + 5x - 4) = 0$

$x = 0$, $x = 0{,}65$ y $x = -3{,}1$

Puntos de corte con el eje OX (0, 0), (0,63, 0) y (-3,1, 0)

c) Asíntotas:

Por ser una función polinómica no tiene asíntotas.

d) Estudio de las derivadas:

$y' = 6x^2 + 10x - 4 = 0 \rightarrow 6(x - 1/3)(x + 2) = 0$

$x = 1/3$ y $x = -2$

- ☐ Para $x > 1/3$ $y' > 0$ Por lo tanto, es creciente.
- ☐ Para $x < -2$ $y' > 0$ Por lo tanto, es creciente.
- ☐ Para $-2 > x < 1/3$ $y' < 0$ Por lo tanto, es decreciente.

En $x = 1/3$ y $x = -2$ son posibles máximos y mínimos.

$y'' = 12x + 10$; Para $x = 1/3$ $y'' = 4 + 10 = 14 > 0$ Mínimo

$y'' = 12x + 10$; Para $x = -2$ $y'' = -24 + 10 = -14 < 0$ Máximo

Mínimo (1/3, -19/27). Máximo (-2, 12)

e) Concavidad y convexidad:

$y'' = 12x + 10 = 0 \rightarrow x = -5/6$.

$x > -5/6$ $y'' > 0 \rightarrow$ Cóncava.

$x < -5/6$ $y'' < 0 \rightarrow$ Convexa.

$x = -5/6$ es un punto de inflexión.

f) Simetría:

No tiene ningún tipo de simetría.

+ Info

Otra de las aplicaciones es la de hallar la recta tangente a una función, calcular áreas, etc. A continuación, vamos a poner un ejemplo para cada aplicación.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola

   $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto $x = 1$.

   La función derivada es $y' = -2x + 2$.

   La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto $x = 1$.

   $y' = -2 \cdot 1 + 2 = 0$

   La ecuación de la tangente en el punto (1, 6) es $y - 6 = 0\,(x - 1)$.

2. Calcular el área del triángulo formado por el eje de abscisas, la recta $x = e$ y la tangente a la curva $y = e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

   Para $x = 1$ es $f(x) = e^1 = e$, el punto de la tangencia es $(1, e)$.

   La ecuación de la tangente en dicho punto es:

   $y - e = f'(1)\,(x-1)$

   Como $f'(x) = e^x$, $f'(1) = e^1 = e$ y la ecuación de la tangente es:

   $y - e = e\,(x - 1) \rightarrow y - e = ex - e \rightarrow y = ex$

   Que corta a la recta $x = e$, en el punto (e, e^2); luego la superficie pedida es:

   $$S = \frac{e \cdot e^2}{2} = \frac{e^3}{2}.$$

3. TIPOS DE FUNCIONES

Teniendo en cuenta que x e y son magnitudes de tipo variable con valores reales, denominamos D al dominio que representa un conjunto de números reales.

Por lo tanto y será función de x cuando a cada valor de x con dominio D le corresponde un valor y tal que:

$$y = f(x)$$

Cuando el valor de y varía en función del valor de x, denominamos a **x** como **variable independiente** y a **y** la denominamos **variable dependiente**.

Recuerda

Se denomina **imagen** al valor de y_0 que corresponde a un valor x_0 determinado del dominio.

Se denomina **rango** al conjunto de todos los valores imagen y_0.

En el eje de abscisas, es decir, sobre el eje horizontal, se representa la variable que se denomina variable independiente (x) y, en el eje de ordenadas, se representa la variable dependiente (y).

Las funciones más importantes son las polinómicas, las racionales, las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas.

3.1. FUNCIONES POLINÓMICAS

Un polinomio es una expresión compuesta por dos o más términos algebraicos unidos por los signos más o menos. Los polinomios que contienen dos y tres términos reciben los nombres especiales de binomio y trinomio, respectivamente.

Una función polinómica y = P (x) se representa mediante la expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

Donde a es un número real y n un número natural. Las funciones que se representan con una recta y las denominadas funciones cuadráticas son las funciones polinómicas más importantes.

3.1.1. FUNCIONES CUADRÁTICAS: FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

La **parábola** es una función polinómica de segundo grado, cuya ecuación viene determinada por:

$$y = ax^2 + bx + c$$

A partir de ella podemos calcular dónde se sitúa el vértice de la parábola:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{a} \right)$$

Debemos tener en cuenta lo siguiente:

a) Si a > 0 la parábola es cóncava hacia arriba.

b) Si a < 0 la parábola es cóncava hacia abajo.

A la recta que pasa por el vértice se la denomina eje de la parábola y se expresa mediante:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Mediante la ecuación:

$$x = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtienen los puntos de corte con el eje x.

De esta ecuación se pueden obtener tres posibles soluciones:

a) Que corte en dos puntos; entonces se cumplirá que $b^2 - 4ac$ es mayor que cero.

b) Que no corte en ningún punto; entonces se cumplirá que $b^2 - 4ac$ es menor que cero.

c) Que corte en un punto; entonces se cumplirá que $b^2 - 4ac$ es igual a cero.

Básico

De la ecuación general de una parábola podemos sacar la siguiente información:

1. Vértice de la parábola, que viene dado por el punto $\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{b^2-4ac}{a}\right)$
2. Recta que pasa por el eje de la parábola.
3. Puntos de corte de la parábola con el eje X.
4. Concavidad y convexidad de la parábola.

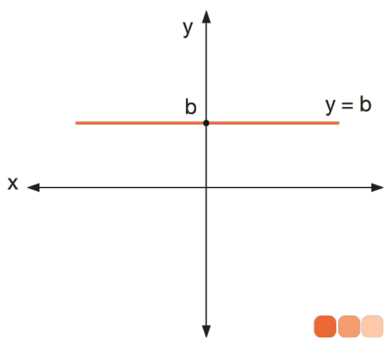
Así, para representar gráficamente una parábola basta:

- Observar si la parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
- Calcular y representar el vértice.
- Dado que la parábola es simétrica respecto al eje, basta calcular dos puntos por los que pase la función: uno a derecha y otro a izquierda del vértice.

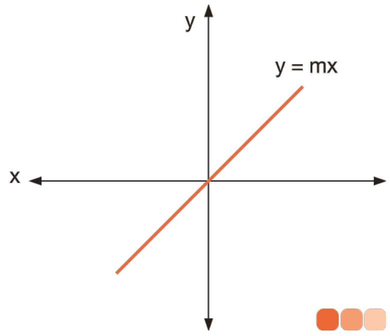
3.1.2. Funciones representadas por una recta

Las principales funciones de este tipo son las denominadas constantes, lineales y afines.

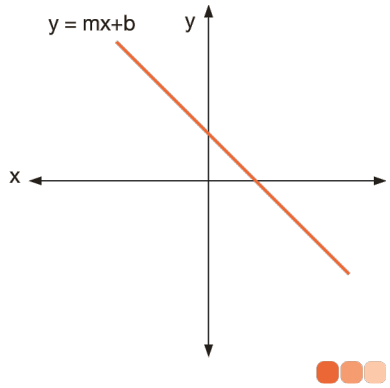
- Las **funciones constantes** son aquellas en las cuales el valor de y es siempre el mismo, es decir, **y = b**.



- Las **funciones lineales** son aquellas que pasan por el origen de coordenadas y son una recta. La expresión matemática sería de la forma **y = mx**.



- Las **funciones afines** son aquellas que representadas por una recta no pasan como la anterior por el origen de coordenadas. Su expresión matemática es de la forma **y = mx + b.**



3.2. FUNCIONES RACIONALES

La expresión matemática de este tipo de funciones es la siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}$$

Como en las funciones polinómicas, a y b son números reales y n y m son números naturales.

Se trata de funciones que presentan discontinuidad en aquellos puntos que anulen el denominador.

La función:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-3)}$$

es discontinua en los puntos x = 1 y x = 3.

3.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos a ver las características fundamentales del seno y del coseno, comprobarás que tienen propiedades muy parecidas, sin embargo, la tangente tiene propiedades algo más diferentes.

3.3.1. FUNCIÓN SENO

La expresión matemática de esta función es la siguiente:

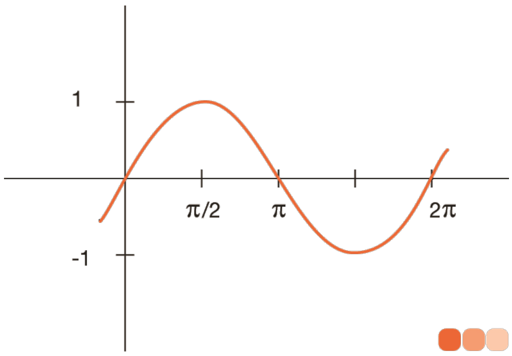
$$y = \text{sen } x$$

Básico

Características de la función seno:

- Función continua y periódica (T = 2 π).
- Límite superior es 1 y límite inferior es -1.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



3.3.2. Función coseno

La expresión matemática de esta función es la siguiente:

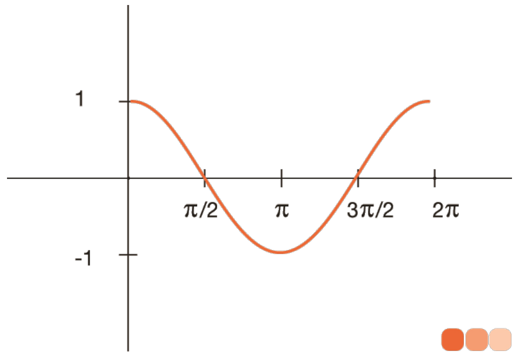
$$y = \cos x$$

Básico

Características de la función coseno:

- Función continua y periódica (T = 2 π).
- Límite superior es 1 y límite inferior es -1.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



3.3.3. FUNCIÓN TANGENTE

La expresión matemática de esta función es la siguiente:

$$y = \text{tag } x$$

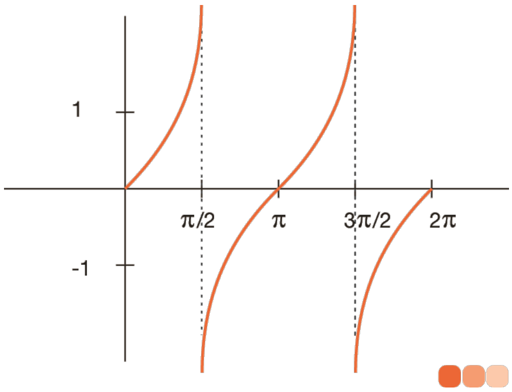
Básico

Características de la función tangente:

- Función continua, salvo en los puntos $\pi/2$ y $3\ \pi/2$.
- Periódica ($T = \pi$).

Límite superior es $+\infty$ y límite inferior es $-\infty$.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



3.4. FUNCIONES EXPONENCIALES

La expresión matemática de este tipo de funciones es la siguiente:

$$y = b^x$$

Donde b es número real distinto de 1.

La función se denomina también función exponencial de base b.

Dependiendo de que b sea positivo o negativo, la función será creciente o decreciente:

a) Si $b < 1$ la función es decreciente.

b) Si $b > 1$ la función es creciente.

Básico

Las propiedades de las funciones exponenciales son las siguientes:

- Son cóncavas hacia arriba.
- No cortan el eje OX.
- Cortan al eje en el punto 1, ya que $b^0 = 1$ para todo b.
- En este tipo de funciones no existen ni puntos máximos, ni mínimos ni puntos de inflexión.
- Para cada valor de x distinto de 1, cada b^x tiene una altura distinta.
- Son decrecientes si b es menor de 1 y crecientes si b es mayor de 1.
- En el eje x tiene una asíntota horizontal: por la izquierda para $b > 1$ y por la derecha para $b < 1$.

3.5. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

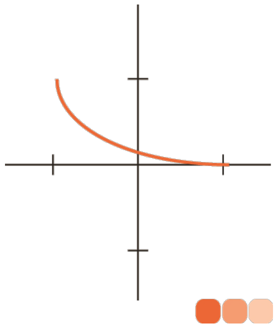
La expresión matemática de este tipo de funciones es la siguiente:

$$y = \log_b x$$

Estas funciones son las inversas de las funciones exponenciales.

A la hora de representar este tipo de funciones nos encontramos con dos posibilidades:

1. x toma valores positivos si la función logarítmica es en base mayor de 1:



Importante

En el siguiente vídeo encontrarás una explicación de la representación de funciones mediante un ejemplo.

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

+ Info

Vamos a ver ahora un vídeo explicativo sobre los pasos a realizar para dibujar correctamente la gráfica de una parábola

(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).

CONCLUSIONES

El dominio de una función depende el tipo de función de la que se trate. No todas las funciones existen en el mismo dominio.

De la continuidad de una función se deducen unos teoremas fundamentales, de carácter intuitivo, como son el de Bolzano o el teorema del valor medio.

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas.

Estas propiedades nos serán de utilidad a la hora de representar gráficamente cualquier función, para ello se debe realizar un análisis exhaustivo de ella.

RECAPITULACIÓN

Una función es la relación existente entre dos magnitudes, de modo que a cada valor de una de ellas le corresponde un determinado valor de la otra.

Cuando el valor de y varía en función de x, denominamos a x como variable independiente, mientras que y será la variable dependiente.

Encontramos algunos conjuntos importantes en una función como son el dominio o el recorrido.

Las funciones principales son las siguientes: polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Las funciones constantes son aquellas en las cuales el valor de y es siempre el mismo.

Las funciones lineales son aquellas que pasan por el origen de coordenadas y son una recta.

Las funciones afines son aquellas que representadas por una recta no pasan como la anterior por el origen de coordenadas.

El estudio de una función necesita del estudio de unas características básicas, como son dominio, continuidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, asíntotas, etc.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. **La función tangente es periódica de periodo:**

   a) π.

   b) 2 π.

   c) 3 π / 2.

   d) π / 2.

2. **Calcula el dominio de la función** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **:**

   a) (2, 0).

   b) (-∞, + ∞).

   c) (–2, 2).

   d) (0, 2).

3. **Calcula la asíntota oblicua de la función** $f(x) = \dfrac{3x^3 + 4x^2 + 4}{x^2 + 1}$ **:**

   a) No tiene asíntotas.

   b) y = 3x + 4.

   c) y = 4x.

   d) y = 4x – 3.

4. **Determina el tipo de simetría que tiene la función f (x) = x^3 – 3x:**

   a) Respecto al origen.

   b) Respecto al eje OY.

   c) Periódica.

   d) No tiene simetría.

5. **Determina los extremos relativos de la función f (x) = x^3 – 3x:**

   a) M (0, 2), m (-1, 2).

   b) M (1, -2), m (-1 , 2).

   c) M (2, 1), m (1, 2).

   d) M (-1, 2), m (1, -2).

6. **Determina la ecuación de la asíntota vertical de la función:** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

   a) y = x + 3.

   b) x = -1.

   c) No tiene.

   d) y = -1.

7. **Determina el punto de corte con el eje OY de la función:** $y = \dfrac{x+1}{(x^2-9)}$

   a) (-1, 0).

   b) (0, -1).

   c) (0, -1/9).

   d) (0, 1/9).

8. Halla el dominio de la función $y=\sqrt{2x+8}$:

a) (- 4, + ∞).

b) (- 2, + ∞).

c) (+ ∞, - 4).

d) (- ∞, +4).

9. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $f\left(x\right)=\dfrac{3x-7}{5x}$

a) Creciente en todo su dominio.

b) Decreciente en todo su dominio.

c) Periódica de periodo 7.

d) Ninguna de las anteriores.

10. La concavidad o convexidad de la función $y = -2x^2$ es:

a) Convexa para todo valor de x.

b) Tiene un punto de inflexión en x = 0.

c) Cóncava para todo valor de x.

d) Convexo – cóncava para todo valor de x.

SOLUCIONARIO

1.	a	2.	c	3.	b	4.	a	5.	b
6.	b	7.	c	8.	a	9.	d	10.	a

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I.* Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV AA. EULER. *Matemáticas I.* Madrid: SM, 2001.
- VV AA. EULER. *Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Madrid: SM, 2000.
- VV AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV AA. *Matemáticas II.* Madrid: Edelvives, 2003.