MD.PlantillaTexto(02)Esp.dot

# PROBABILIDAD

UD000575_V(02)

# ÍNDICE

# MOTIVACIÓN

La probabilidad es una parte de las matemáticas basada principalmente en el estudio de la combinatoria. Se hace necesario su uso sobre todo para la estadística.

Podemos pensar que la probabilidad es algo que nunca utilizaremos. Nada más lejos de la realidad. Continuamente, en nuestro quehacer diario y sin que nos demos cuenta, estamos haciendo uso de ella. Los concursos, la lotería, el bingo, es decir, los juegos de azar están basados en la probabilidad.

Cuántas veces nos habremos preguntado: “¿Qué posibilidades tengo en un determinado hecho?”. En ese momento ya estamos pensando en probabilidad.

# PROPÓSITOS

Cuando termines el estudio de esta unidad, conseguirás:

- Conocer el concepto de experimento aleatorio y el de espacio muestral.
- Manejar los sucesos elementales y las operaciones entre ellos, así como conocer el significado de álgebra de sucesos.
- Aplicar la combinatoria: variación, permutación y combinación.
- Entender el concepto de probabilidad.
- Aplicar teoremas sobre probabilidad condicionada y probabilidad total.
- Distinguir la dependencia e independencia de sucesos.

# PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

El cálculo de probabilidades surge en Francia en el siglo XVII, gracias a los estudios de los matemáticos franceses Pascal y Fermat. Ambos fueron pioneros en el estudio de la probabilidad, desarrollando un método para calcular las probabilidades de las apuestas en juegos de azar.

Podemos definir el cálculo de probabilidades como la teoría matemática del azar, es decir, aquella parte de las matemáticas que describe modelos matemáticos que rigen el comportamiento del azar, midiendo el grado de incertidumbre.

El cálculo de probabilidades elabora además las herramientas que se utilizarán en la estadística inferencial, realizando deducciones de una característica de la población, a partir de los datos obtenidos en una muestra de esta, elegida aleatoriamente.

# 1. ESPACIO MUESTRAL

Un experimento es una situación en la cual se pueden presentar uno o varios resultados bien definidos. Consideraremos el **experimento aleatorio** cuando al repetir el experimento bajo idénticas condiciones iniciales no se obtiene siempre el mismo resultado. Además, en estos experimentos podemos dar el conjunto de los posibles resultados, pero no podemos predecir de antemano un resultado particular.

A cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio se le llama resultado elemental o punto muestral; por eso, a todo el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio lo llamaremos **espacio muestral.**

A dicho espacio muestral se le denota por E.

**Ejemplo**

Un ejemplo de espacio muestral del lanzamiento de dos monedas es:

E = {cara-cara, cara-cruz, cruz-cruz, cruz-cara}.

## 1.1. SUCESOS

Ya conocemos el concepto de espacio muestral; así, el espacio muestral del experimento lanzar un dado al aire es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Vamos ahora a suponer que siempre que salga un número par ganamos la apuesta y si sale impar, la perdemos. Por lo tanto, ganaremos siempre que salga A = {2, 4, 6} y perderemos si salen los impares B = {1, 3, 5}. A cada uno de estos subconjuntos de números se les llama sucesos aleatorios.

Los **sucesos** son los subconjuntos o partes del espacio muestral. Se designan con una letra y van escritos entre llaves.

Se pueden dar cuatro tipos de sucesos, atendiendo al número de resultados elementales que los formen:

1. **Suceso elemental:** es cada uno de los resultados elementales del experimento aleatorio; es decir, el suceso elemental consta de un solo elemento del espacio muestral.
2. **Suceso compuesto:** es el que consta de dos o más sucesos elementales.
3. **Suceso seguro:** es el suceso que ocurre siempre. Lo denotaremos por E.
4. **Suceso imposible:** es el suceso que no ocurre nunca. Lo denotaremos por ∅.

**Reto**

Realiza el siguiente ejercicio.

Tenemos el experimento de la suma de las caras tras lanzar dos dados. ¿Qué tipo de suceso será $A_1$ = {sacar un número mayor que uno}?

a) Suceso elemental.
b) Suceso compuesto.
c) Suceso seguro.
d) Suceso imposible.

**Solución:**

c) Suceso seguro, ya que la suma de dos dados será siempre un número mayor que uno. El resultado mínimo será que salga dos veces la cara 1, 1+1=2.

## 1.2. OPERACIONES CON SUCESOS

Operaremos con sucesos de una forma análoga a como se hace con conjuntos:

1. **Inclusión de sucesos.** Dados dos sucesos A y B del mismo experimento aleatorio, diremos que el suceso A está contenido en B si cada vez que ocurre A ocurre también B. Lo indicaremos como $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B.$$

2. **Igualdad de sucesos.** Diremos que dos sucesos A y B son iguales, A = B, si coinciden todos sus sucesos elementales.

3. **Unión de sucesos.** Dados los sucesos A y B, llamaremos suceso unión a aquel suceso que ocurre si ocurre A o si ocurre B. Denotaremos dicho suceso como $A \cup B$.

$$A \cup B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ ó } x \in B \}.$$

4. **Intersección de sucesos.** Se llama **intersección de sucesos A y B** ($A \cap B$) al suceso formado por los elementos que pertenecen a la vez al suceso A y al B.

$$A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ y } x \in B \}.$$

**Técnica de estudio**

Pon un ejemplo en cada una de las operaciones de sucesos. De esta forma será más sencillo recordarlas.

5. **Suceso contrario.** Dado el suceso A llamaremos suceso contrario al que ocurre si no ocurre A. Lo denotaremos como $A^c$ o $\overline{A}$.

Se verifican las siguientes propiedades:

**a)** $A \cup A^c = E$.

**b)** $A \cap A^c = \varnothing$.

**c)** $E^c = \varnothing$.

**d)** $\varnothing^c = E$.

6. **Diferencia de sucesos.** Dados A y B, llamaremos suceso diferencia al suceso que ocurre cuando ocurre A, pero no B. Se denota como $A - B$.

7. **Sucesos incompatibles.** Llamaremos sucesos incompatibles a aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente.

   Se dice que los sucesos A y B son incompatibles si $A \cap B = \varnothing$, y compatibles, en caso contrario.

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

En el lanzamiento de una moneda al aire, los sucesos A = "sacar cara" y B = "sacar cruz", son sucesos:

**Solución:**

Contrarios.

+ Info

En el vídeo que hemos preparado a continuación tienes la explicación de la unión e intersección de dos sucesos probabilísticos.

*(Tienes el vídeo en el Campus Virtual).*

# 2. ÁLGEBRA DE BOOLE DE SUCESOS

Para llegar a definir la estructura de **álgebra de sucesos** tenemos que partir de un conjunto de sucesos entre los cuales tengamos definidas las siguientes operaciones:

- Unión de sucesos.
- Intersección de sucesos.
- Suceso contrario.

Diremos que la colección de sucesos tiene estructura de **álgebra de sucesos** o de **álgebra de Boole,** denotándola por $\mathcal{A}$, si cumple lo siguiente:

**1.** Para todo suceso $A \in \mathcal{A}$, se verifica que :

$$A^c \in \mathcal{A}$$

**2.** Para todos sucesos A y B que pertenecen a $\mathcal{A}$, se tiene que:

$$A \cup B \in \mathcal{A}$$

**Recuerda**

Recuerda que tienes a tu disposición un servicio de tutorías para resolver cualquier duda que te pueda surgir, bien mediante carta, Campus Virtual, fax o llamada telefónica.

## 2.1. CONSECUENCIAS

Las dos condiciones anteriores nos bastan para definir el álgebra de sucesos; sin embargo, es interesante comprobar las consecuencias que se deducen de ellas:

1. El espacio muestral, E ∈ A.
2. Dados dos sucesos A, B∈ A, se verifica que A∩B∈ A.
3. El suceso imposible, ∅∈ A.
4. Dados los sucesos $A_1$, $A_2$..., $A_n$, se verifica que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \text{A}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \text{A}$$

## 2.2. PROPIEDADES Y LEYES DE MORGAN

**Se verifican las siguientes propiedades:**

1. Conmutativa:

$$A \cup B = B \cup A \qquad ; \qquad A \cap B = B \cap A.$$

2. Asociativa:

$$A \cup ( B \cup C ) = ( A \cup B ) \cup C.$$

$$A \cap ( B \cap C ) = ( A \cap B ) \cap C.$$

3. Idempotente:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$$

**4.** De simplificación:

$$A \cup (B \cap A) = A; \quad A \cap (B \cup A) = A.$$

**5.** Distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**6.** De elemento neutro:

$$A \cup \varnothing = A.$$

**7.** De absorción:

$$A \cup E = E \quad ; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

**Leyes de morgan:**

En el álgebra de Boole se verifican las propiedades:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

**Reto**

Realiza el siguiente ejercicio.

De las siguientes opciones, ¿cuál no es una propiedad del álgebra de Boole?

a) $A \cup B = B \cup A$ .
b) $A \cap \varnothing = A$.
c) $A \cup E = E$.
d) $A \cap B = B \cap A$.

**Solución:**

b) $A \cap \varnothing = A$ . El elemento neutro es $A \cup \varnothing = A$.

# 3. COMBINATORIA

La combinatoria es una parte muy importante de la estadística. Gracias a ella podemos estudiar las diferentes agrupaciones que podemos encontrar con un conjunto determinado de elementos, en las cuales influyen factores como la repetición de elementos o el orden de estos.

## 3.1. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un procedimiento se puede separar en r etapas o pruebas, tales que el resultado de una de ellas no influye en el resultado de las otras, y estas etapas o pruebas tienen $n_1$, n..., $n_r$ elementos, respectivamente, entonces el procedimiento global conduce a $n_1$, $n_2$..., $n_r$ casos.

## 3.2. COMBINACIONES

Llamaremos **combinaciones de m elementos tomados de n en n** al número de subconjuntos de n elementos que se pueda formar con los m elementos del conjunto inicial, de manera que dos subconjuntos serán distintos si difieren, al menos, en uno de sus elementos. Analíticamente se calculan de la siguiente forma:

$$C_{m,n} = C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

De n elementos tomados de r en r con r ≤ n, son las distintas muestras que se pueden formar con los n elementos, de manera que:

1. En cada muestra entran r elementos distintos.
2. Dos muestras son distintas si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.

Número de combinaciones ordinarias:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

Supongamos que tenemos que escoger a 2 personas de un grupo de 7 para formar un equipo. ¿Cuántas formas distintas tenemos de hacerlo?

Las opciones de elección corresponden a combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2, es decir:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$$

## 3.3. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

A partir de los m elementos formamos subconjuntos de n elementos, tales que varios o todos de sus elementos son el mismo. Estas son las **combinaciones con repetición.** Las representaremos por:

$$CR_{m,n} = CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

De n elementos tomados de r en r con $r \leq n$, son las distintas muestras que se pueden formar con los n elementos, de manera que:

1. En cada muestra entran r elementos.
2. Una muestra se diferencia de otra en el orden de colocación de los elementos.

Número de combinaciones con repetición:

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r}$$

Reto

Realiza el siguiente ejercicio.

Tenemos 20 caramelos de diferentes sabores en una caja. ¿De cuántas formas podemos elegir 5 caramelos?

**Solución:**

No importa el orden al tratarse de caramelos. Puede haber dos o más caramelos del mismo sabor, luego se pueden repetir.

$$CR_{20,5}\binom{20+5-1}{5} = \frac{24!}{5!\cdot 19!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19!}{5!\cdot 19!} = 42.504$$

Por tanto, se pueden formar 42.504 grupos distintos.

## 3.4. VARIACIONES ORDINARIAS

Dado un conjunto de m elementos, llamaremos **variaciones de orden n** a los distintos subconjuntos que se pueden formar con los m elementos al tomarlos de n en n, de manera que dos subconjuntos serán distintos si difieren, o bien en algún elemento, o bien en el orden de colocación de los mismos. Las representaremos por:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

**Variaciones ordinarias de n elementos tomados de r en r** ( $r \leq n$ ), son las distintas muestras que se pueden formar con n elementos tales que:

1. En cada muestra entran r elementos distintos.
2. Dos muestras son distintas si difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

## 3.5. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r son las distintas muestras que se pueden formar con n elementos tales que:

1. En cada muestra entran r elementos.
2. Dos muestras son distintas si difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

Entonces:

$$VR_{n,r} = n^r$$

**Reto**

Realiza el siguiente ejercicio.

¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los que van del 1 al 5?

**Solución:**

En el enunciado no nos dice si debe haber repetición o no y, además, en números el orden importa, por lo que podemos aplicar variaciones con repetición: $VR_{5,4} = 5^4 = 625.$

## 3.6. PERMUTACIONES ORDINARIAS

Llamaremos **permutaciones de orden n** a las distintas ordenaciones que se pueden obtener con los n elementos tomados de n en n, de manera que dos permutaciones son distintas si varía el orden de colocación de los elementos.

Son las distintas muestras que se pueden formar de n elementos tales que:

1. En cada muestra están los n elementos.
2. Una muestra se diferencia de otra únicamente en el orden de colocación de los elementos.

Entonces:

$$P_n = n!$$

**Ejemplo**

¿Cuántas palabras podemos formar cambiando las letras de la palabra Lucía?

Se trata de permutar las cinco letras de la palabra. Por tanto, calcularemos las permutaciones de orden 5:

$$P_5 = 5! = 120$$

## 3.7. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Tomemos n elementos de los cuales uno se repite $x_1$ veces, otro se repite $x_2$ veces, etc., de manera que $x_1 + x_2 + .... + x_k = n$. Las permutaciones de estos n elementos se llaman **permutaciones con repetición** de n elementos.

**Permutaciones con repetición de n elementos** en las que el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces..., hasta el último que se repite r veces, tal que a + b +...+ r = n. Son las distintas muestras que se pueden formar, de manera que:

1. En cada muestra de n elementos el primer elemento está a veces, el segundo b veces..., el último r veces.
2. Una muestra se diferencia de otra en el orden de colocación de los elementos.

Números de permutaciones con repetición:

| | Sin repetición | Con repetición |
|---|---|---|
| **Variaciones** | $V_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-1))$ ( r factores ) | $VR_{n,r} = nr$ |
| **Combinaciones** | $C_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ | $CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r}$ |
| **Permutaciones** | $P_n = n!$ | $PR_{n;\, a \ldots, r} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdots r!}$ |

¿Cuándo debemos utilizar un número combinatorio u otro? Dependerá de si importa el orden, de si se puede repetir o de si se toman todos los elementos o no. Para ello ten a mano esta tabla que te ayudará a aplicar uno u otro:

| Agrupaciones | Tipo | ¿Importa el orden? | ¿Pueden repetirse? | ¿Todos los elementos? |
|---|---|---|---|---|
| **COMBINACIONES** | Sin repetición | NO | NO | NO |
| | Con repetición | | SI | |
| **VARIACIONES** | Sin repetición | SI | NO | NO |
| | Con repetición | | SI | |
| **PERMUTACIONES** | Sin repetición | SI | NO | SI |
| | Con repetición | | SI | |

# 4. CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Antes de dar un concepto de probabilidad podemos definir como **frecuencia absoluta** de un suceso A, denotándolo por $n_A$, al número de veces que ocurre ese suceso.

Pero lo que realmente nos interesa es relacionar el número de veces que aparece un suceso con el número de veces que hemos realizado el experimento, n. Esta relación se llama **frecuencia relativa** y viene dada por:

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

La frecuencia relativa de un suceso toma siempre un valor entre cero y uno, siendo cero cuando el suceso en cuestión no ocurre nunca y uno cuando ocurre siempre.

**Recuerda**

Frecuencia relativa es el número de veces que aparece un suceso tras haberlo realizado n veces.

Veamos ahora el concepto de probabilidad desde dos puntos de vista, el concepto frecuentista y el concepto clásico de la probabilidad.

- **Concepto frecuentista de la probabilidad.**

  Se relaciona directamente con el concepto de frecuencia relativa. Podemos definir la probabilidad como el límite de las frecuencias relativas de la ocurrencia de A cuando el experimento se repite un número infinito de veces, es decir:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

  Sin embargo, la realización de este límite es imposible, porque no podemos llevar a cabo el experimento un número infinito de veces. Lo único que puede servirnos de ayuda es que al repetir un número suficiente de veces el experimento, la frecuencia relativa tiende a estabilizarse. El problema es que, en algunos casos, para llegar a esta estabilidad necesitamos demasiadas repeticiones sucesivas del experimento.

- **Concepto clásico de la probabilidad.**

  Consideramos el espacio muestral E con n sucesos elementales, $E = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Si todos estos sucesos son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad, la probabilidad de un suceso A formado por n sucesos elementales es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles:

$$P(A) = \frac{n.^o \ de\ casos\ favorables\ \ a\ A}{n.^o \ de\ casos\ posibles}.$$

**Ejemplo**

En el lanzamiento de un dado supongamos que se quiere calcular la probabilidad del suceso A = “salir número par”.

El espacio muestral del experimento de lanzar un dado es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Donde encontramos tres casos favorables al suceso salir par, que son: salir dos, salir cuatro, salir seis, mientras que el número de casos totales del espacio muestral son seis. Así la probabilidad del suceso A es:

$$P(A) = 3/6.$$

## 4.1. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Si utilizamos la definición de Kolmogorov, la probabilidad viene dada como la aplicación $P: S \rightarrow [0, 1]$, donde S = álgebra de Boole de los sucesos asociados al espacio muestral E. Dicha aplicación verifica los **axiomas de Kolmogorov** siguientes:

- $P(E) = 1$.
- $P(A) \geq 0, A \in E$.
- Si A y B son sucesos incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

  De forma general, dada una sucesión numerable de sucesos incompatibles, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in A$, se verifica que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

O bien:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Denotaremos el espacio probabilístico: ( E, S, P ).

**Nota**

Estas propiedades de probabilidad son muy importantes. Anótalas y tenlas a mano para aplicarlas.

### 4.1.1. Propiedades

Para todo par de sucesos A y B pertenecientes a las partes del espacio muestral E se tiene:

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$.
2. $P(\varnothing) = 0$.
3. Si $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
5. $0 \leq P(A) \leq 1$.

**Recuerda**

El suceso representado como $\varnothing$ es nulo, es decir, no puede ocurrir.

# 5. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Vamos a estudiar ahora el concepto de probabilidad condicionada que nos resuelve la siguiente pregunta: sabiendo que ha ocurrido B, ¿ha cambiado la probabilidad de que ocurra A?

La **probabilidad del suceso A condicionado a B** se calcula mediante la fórmula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como consecuencia de esto aparece **la regla de la probabilidad condicionada:**

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Análogamente, de forma general con n sucesos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots$$
$$P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

También asociada al mismo concepto aparece la regla de multiplicación de probabilidades o **probabilidad compuesta:**

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B)$$

## 5.1. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESO

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, **la probabilidad de que ocurra un suceso A en la primera y otro B en la segunda,** se calcula como el producto de las probabilidades de cada uno.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Además, de esta expresión, dos sucesos independientes verifican también lo siguiente:

$$P(B/A) = P(B), \quad \text{si } P(A)>0.$$

$$P(A/B) = P(A), \quad \text{si } P(B)>0.$$

Cuando tenemos más de dos sucesos, podemos decir que son independientes si son mutuamente independientes entre sí.

Si consideramos ahora tres sucesos, son independientes si se verifica:

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
2. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.
3. $P(C \cap B) = P(C) \cdot P(B)$.
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

**Recuerda**

Siempre que se tengan que dar dos sucesos a la vez, **la probabilidad de ambos se calcula como el producto de las probabilidades** de cada uno de ellos.

Si los sucesos son **independientes** (dos dados, dos monedas, etc.), el cálculo lo hacemos normal, pero si los sucesos son **dependientes** (saco una bola, saco una carta, etc.), debemos recalcular el espacio muestral.

# 6. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y DE BAYES

En el estudio del siguiente apartado vamos a ver:

- El teorema de la probabilidad total.
- El teorema de Bayes.

Estos dos teoremas son de vital importancia en el estudio de la probabilidad.

Presta mucha atención en este apartado.

## 6.1. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Si $A_1$, $A_2$..., $A_n$ es un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y B es un suceso del que conocemos $P(B/A_i)$, entonces para cualquier suceso B, cuyas probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$ conocemos, se verifica que:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

Esto es lo que conocemos como el **teorema de la probabilidad total.**

**Truco**

En los problemas de probabilidad condicionada, así como en los de probabilidad total y en los del teorema de Bayes, es aconsejable que, con la información del problema se construya una tabla de contingencia o un diagrama de árbol.

## 6.2. TEOREMA DE BAYES

Admitiendo las mismas hipótesis que en el teorema de la probabilidad total, es decir, que los sucesos $A_i$ forman un sistema completo de sucesos, y conociendo $P(B/A_i)$, entonces para cualquier suceso B se verifica que:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B / A_i)}$$

Esta expresión se denomina **teorema de Bayes.**

**Atención**

$P(A_i)$ = probabilidad a priori.

$P(A_i/B)$ = probabilidad a posteriori.

$P(B/A_i)$ = verosimilitudes.

La fórmula de Bayes nos permite calcular las probabilidades a posteriori, siempre y cuando se conozcan las probabilidades a priori y las verosimilitudes.

# CONCLUSIONES

La probabilidad es una parte de las matemáticas que permite conocer qué posibilidades hay de que ocurra un suceso. Para utilizar las probabilidades se hace necesario conocer los números combinatorios.

Dependiendo de de si hay reemplazo, si importa el orden, etc., se utiliza un número combinatorio u otro.

# RECAPITULACIÓN

El siguiente cuadro permite identificar el tipo de recuento; en cada problema bastará con que el alumno responda a las siguientes preguntas y aplique la fórmula adecuada:

| | $V_{n,r}$ | $P_n$ | $C_{n,r}$ | $VR_{n,r}$ | $PR_n$ | $CR_{n,r}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ¿Importa el orden? | SI | SI | NO | SI | SI | NO |
| ¿Se pueden repetir los elementos? | NO | NO | NO | SI | SI | SI |
| ¿Incluye todos los elementos? | NO | SI | NO | NO | SI | NO |

Asimismo, son importantes las expresiones correspondientes a la regla de Laplace, a la probabilidad condicionada, al teorema de la probabilidad total y al teorema de Bayes. Son las más frecuentes, junto con las fórmulas combinatorias, en los ejercicios de cálculo de probabilidades.

# AUTOCOMPROBACIÓN

1. **Calcula el espacio muestral del siguiente experimento. Se lanza un dado cuyas caras son de distinto color (rojo, azul, verde, blanco, rosa y amarillo) y se mira la cara que ha salido hacia arriba:**

   **a)** E = {rojo, azul, verde, blanco, rosa, amarillo}.

   **b)** E = {rojo, azul, rosa, amarillo}.

   **c)** E = {rojo, azul, verde, blanco, rosa}.

   **d)** E = {azul, rosa, blanco, amarillo}.

2. **Se deja caer una caja con 100 clavos. Los clavos pueden caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Se hace un recuento y han quedado 17 con la punta hacia arriba y 83 con la punta hacia abajo. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan con la punta hacia arriba?**

   **a)** $\frac{83}{100}$.

   **b)** $\frac{17}{83}$.

   **c)** $\frac{17}{100}$.

   **d)** $\frac{2}{3}$.

3. **En una división de una empresa hay 12 empleados. ¿Cuántos grupos de 3 empleados pueden formarse como jefes?**

   **a)** 123.

   **b)** 321.

   **c)** 220.

   **d)** 432.

4. **En el parking de una empresa hay 13 plazas de garaje de las cuales 2 están prefijadas para el director y el subdirector. Se sabe que hay además 11 empleados en la empresa. ¿De cuántas formas posibles pueden colocarse en el parking los coches de la empresa?**

   **a)** 23.432.000.

   **b)** 43.245.600.

   **c)** 21.890.432.

   **d)** 39.916.800.

5. **Si durante el año pasado un médico atendió a 2.423 personas, de las que 1.008 eran mujeres, ¿cuál será la probabilidad de que la próxima persona a la que atienda sea una mujer?**

   **a)** $\frac{1.008}{2.423}$.

   **b)** $\frac{1.008}{1.415}$.

   **c)** $\frac{1.008}{1.415}$.

   **d)** $\frac{1.415}{2.423}$.

6. **Si se disponen seis bombos, con cinco números diferentes ordenados del cero al cuatro en cada uno y se extrae un número de cada bombo ordenado de izquierda a derecha, ¿cuántos boletos pueden salir ordenando los dígitos extraídos en el mismo orden en que se disponen los bombos?**

   **a)** 15.625.

   **b)** 23.712.

   **c)** 19.745.

   **d)** 29.780.

7. **Se envían 20 invitaciones a los representantes estudiantiles para asistir a una conferencia. De experiencias anteriores se sabe que la probabilidad de que un representante acepte la invitación es del 0,8. Determinar la probabilidad de que, como máximo, 17 representantes de estudiantes acepten la invitación:**

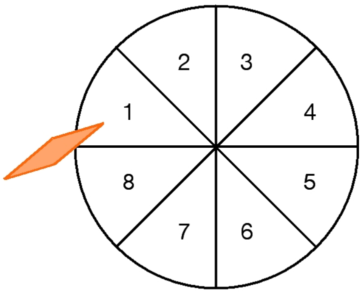
   **a)** 0,794.

   **b)** 0,206.

   **c)** 0.

   **d)** 0,123.

**Se hace girar la ruleta de la figura una vez. Sean los siguientes sucesos:**




A = {sacar número par}.

B = {3, 5, 7, 8}.

C = {1, 2, 3}.

D = {6}.

8. **Calcula** $A \cap B$**:**

   **a)** $A \cap B$ = {2,8}.

   **b)** $A \cap B$ = {8}.

   **c)** $A \cap B$ = ∅.

   **d)** $A \cap B$ = {1,2}.

**9. Calcula** $B \cap \overline{C}$**:**

**a)** $B \cap \overline{C} = \{7, 8\}$.

**b)** $B \cap \overline{C} = \{5, 7, 8\}$.

**c)** $B \cap \overline{C} = \{5, 7, 8\}$.

**d)** $B \cap \overline{C} = \{5, 7\}$.

**10. Calcula** $(C \cup D) \cap A$.

**a)** $(C \cup D) \cap A = \emptyset$.

**b)** $(C \cup D) \cap A = \{2, 6\}$.

**c)** $(C \cup D) \cap A = E$.

**d)** $(C \cup D) \cap A = \{2\}$.

## SOLUCIONARIO

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | a | 2. | c | 3. | c | 4. | d | 5. | d |
| 6. | a | 7. | a | 8. | b | 9. | b | 10. | b |

# PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

# BIBLIOGRAFÍA


- VV.AA. EULER. *Matemáticas I.* Madrid: S.M, 2001.
- VV.AA. EULER. *Matemáticas II* aplicadas a las ciencias sociales. Madrid: S.M, 2000.
- COLERA, J y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- BESCÓS, E y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra. Matemáticas I.* Madrid: Oxford, 2001.
- VV.AA. *Matemáticas I.* Madrid: Edelvives, 2003.
- VV.AA. *Matemáticas II.* Madrid: Edelvives, 2003.