LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

El desarrollo del cálculo infinitesimal y, por lo tanto, de todo el análisis matemático, parte de una serie de pilares fundamentales, entre los que se encuentra el concepto de límite como introducción a elementos más complejos que permiten el desarrollo de esta rama de las matemáticas tan importante.

Por ello, el análisis de los límites de funciones es un paso previo fundamental para el estudio pormenorizado de numerosas aplicaciones matemáticas básicas, cuya aplicación ha permitido a la ciencia desarrollarse hasta los límites más inimaginables.

PROPÓSITOS

- Introducir el concepto de límite y distinguir entre los distintos tipos.
- Manejar cómodamente los límites y resolver las indeterminaciones que aparezcan.
- Definir el concepto de función continua y saber reconocer cuándo una función lo es o no.
- Distinguir los tipos de discontinuidad.
- Operar con funciones continuas.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

En esta unidad didáctica asentaremos las bases de la teoría sobre funciones, centrándonos principalmente en la función continua.

Vamos a introducir el concepto de límite como preámbulo de la derivación y pretendemos que tengas las herramientas necesarias para calcular cualquier tipo de límite. Además, presentamos una serie de ejemplos y ejercicios que te permitirán observar diversas pautas en la resolución de los límites.

Hay que destacar que la continuidad, junto con la derivabilidad y la integración, es uno de los pilares fundamentales del cálculo infinitesimal y, en definitiva, del campo del análisis matemático.

El concepto de límite está asociado al de derivación, que es una parte básica del análisis matemático. Por ello, es necesario que el concepto de límite y su forma de aplicarlo quede suficientemente claro para poder avanzar sin problemas en la unidad didáctica.

1. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Vamos a definir el concepto de límite, estudiar sus propiedades y las operaciones que con ellos podemos realizar.

1.1. LÍMITES

El límite de una función f (x) en un punto x_0 es el valor al que tiende dicha función en puntos muy próximos al punto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Una función puede converger hacia la derecha o hacia la izquierda a L en un punto x_0 cuando se cumple que a valores de x que se encuentran próximos a x_0, los valores correspondientes a la función f (x) están próximos a L.

Recuerda

Recuerda que tienes a tu disposición un **servicio de tutorías** para resolver cualquier duda que te pueda surgir.

Llamaremos límites laterales a los límites de la función a la derecha del punto y a la izquierda del punto.

Un límite es por la derecha de la función f (x) cuando x tiende a x_0 si el valor de L al que tiende la función corresponde a puntos mayores que x_0, aunque muy próximos a dicho punto. Se indica mediante:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Un límite es por la izquierda de la función f (x) cuando x tiende a x_0 si el valor de L al que tiende la función corresponde a puntos menores que x_0, aunque muy próximos a dicho punto. Se indica mediante:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Ejemplo:

Calcula los límites laterales de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ x+2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

en el punto x = 1.

En primer lugar, vamos a calcular el límite por la derecha, como los valores de x serán mayores que 1, la expresión de la función en esa zona será f(x) = x. Así,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

Para calcular el límite por la izquierda, los valores de x serán menores que 1, y la expresión de la función en esa zona será f(x) = x + 2. Así,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+2) = 3$$

Por otra parte, existen dos tipos principales de límites:

- **Límites en el infinito:** son aquellos límites de la función f (x) cuando x tiende a ±∞:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

- **Límites infinitos:** son aquellos límites iguales a ±∞ de la función f (x) cuando x tiende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Geométricamente, podemos distinguir las siguientes situaciones:

- **Que el límite tienda a ±∞.** Cuando x tiende a x0, f(x) toma valores cada vez más grandes. Es decir f(x) → ∞ cuando x → x_0.

  Se expresa:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

- **Que el límite exista y sea un número real.** Cuando x tiende a x_0, f(x) toma valores cada vez más próximos a l.

  Es decir, f(x) → l, cuando x → x_0. Se expresa:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \,.$$

1.2. LÍMITES INFINITOS. ASÍNTOTAS VERTICALES

El cálculo de las asíntotas verticales de una función se realiza mediante límites de la función en los puntos que se encuentran fuera del dominio, es decir, aquellos puntos aislados que no pertenecen al dominio y en los puntos fronterizos.

Por ejemplo, si una función tiene como dominio D = R – {0}, solo sería necesario estudiar la existencia de la asíntota vertical en el punto x = 0.

Si la función tuviese D = (0, 1) U (2, +∞), estudiaríamos la existencia de las asíntotas verticales en x = 0, x = 1 y x = 2.

Así, si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ o } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Entonces la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función f (x) = y.

1.3. LÍMITES FINITOS. ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

Entonces la recta y = L es una asíntota horizontal de la función f (x) = y.

Nota

Como en el cálculo de los límites existe la posibilidad de calcular los límites laterales, puede darse la existencia de asíntotas por la derecha y por la izquierda diferentes o solo una de las dos.

1.4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1. El límite de la función constante es ella misma.

$$y = f(x) = c \qquad \lim_{x \to x_0} c = c$$

2. El límite, si existe, es único (teorema de la unicidad del límite).
3. El límite de la función identidad cuando x tiende a x_0 es:

$$y = f(x) = x \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$$

4. Si el límite de la función f (x) es igual a l entonces existe un entorno reducido de x_0 en donde la función está acotada.
5. Si el límite de una función f (x) es un número real distinto de cero, entonces existe un entorno reducido de x_0 en el que la función toma el mismo signo del límite de dicho entorno reducido.

1.5. OPERACIONES CON LÍMITES

Las principales operaciones que se pueden realizar con límites son las siguientes:

1. El límite de la suma o la diferencia de dos funciones f (x) y g (x) es la suma o la diferencia de los límites de cada una, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = l_{1\,+} l_2$$

2. El límite del producto de dos funciones f (x) y g (x) es el producto de los límites de cada una de ellas, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

3. El límite del cociente de dos funciones f (x) y g (x) es el cociente de los límites de cada una de ellas, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)},$$

siempre y cuando no aparezcan indeterminaciones del tipo 0/0 ó ∞/∞

Ejemplo:

Calcula el cociente de las siguientes funciones: f (x) = x^2 – 2, g (x) = 2x – 1, cuando x tiende a 2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 2)}{\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1)} = \frac{2}{3}$$

4. El límite de dos funciones f (x) y g (x) que se elevan la una a la otra es igual al límite de la base elevada al límite del exponente:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Nota

Esto es correcto siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparezcan y no se encuentren indeterminaciones de los tipos ∞^0, 0^0 ó 1^∞.

5. El límite del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot g(x)) = \lambda \lim_{x \to x_0} (g(x)), \text{ con } \lambda \neq 0$$

6. El límite del logaritmo de una función f (x) es igual al logaritmo del límite de la función:

$$\lim_{x \to x_0} (\log f(x)) = \log(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

Caso práctico:

¿Cuál es la solución al siguiente límite?

$$\lim_{x \to 1} (\log(1/x))?$$

Solución: 0.

2. CÁLCULO DE LÍMITES

Veamos cómo se calculan los límites de diferentes funciones matemáticas, prestando especial atención a los casos que presenten algún tipo de indeterminación.

2.1. CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS

El cálculo del límite de una función polinómica no suele presentar ningún tipo de dificultad.

Básico

El límite de una función polinómica en un punto x_0 es igual al valor que toma la función en ese punto.

El límite de una función polinómica en el infinito es igual a + ∞ o - ∞, dependiendo de si el coeficiente del término de mayor grado de la función polinómica es positivo o negativo.

Ejemplo

Conocida la función $2x^3 - 2x + 3$, el límite cuando x tiende a 3 será:

$$\lim_{x \to 3}(2x^3 - 2x + 3) = 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 3 = 51$$

Si hacemos que x tienda a ∞, el límite será +∞, ya que el coeficiente de mayor grado, x^3, es positivo.

2.2. CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES RACIONALES

El límite de una función racional en un punto x_0 es igual al cociente de los límites de cada una de las funciones.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Ejemplo:

Calculemos el límite de

$$\frac{x^3 - 3}{x^2 - 2}$$

Cuando x tiende a 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^3 - 2)}{\lim_{x \to 2}(x^2 - 2)} = \frac{6}{2} = 3$$

Si se da el caso de que el denominador sea igual a l, a 0 ó a ±∞, se producen los siguientes casos:

1. Si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{\infty} = 0$$

2. Si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{-\infty} = 0$$

3. Si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{0} = +\infty, \text{ si } l > 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{0} = -\infty, \text{ si } l < 0$$

Atención

Recuerda que cualquier número dividido por infinito siempre es cero y que cualquier número dividido por cero siempre es infinito.

Además, se producen las siguientes indeterminaciones:

1. Si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

Entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Indeterminado.

2. Si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$$

Entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

Indeterminado.

3. Si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

Indeterminado.

Atención

El cociente entre infinitos siempre es una indeterminación, al igual que el cociente entre ceros.

1. Si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado.

Ejemplo:

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{1} = 2$$

2.3. CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES IRRACIONALES

El límite de una función irracional en un punto x_0 es igual al valor que toma la función en ese punto.

Ejemplo:

Calculemos el límite cuando x tiende a 2 de la función:

$$\sqrt{x^3 - 4}$$

Desarrollo:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{2^3 - 4} = \sqrt{4} = 2$$

2.4. REGLA DE L´HOPITAL

Se utiliza para resolver aquellos límites en los que se producen las indeterminaciones del tipo

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ y } \frac{0}{0}$$

Si existe el:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Entonces existe el:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo:

Calculemos el:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{4x^2+16}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{4x^2+16}=\frac{\infty}{\infty}$$, si aplicamos la regla de L´Hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{4x^2+16}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{8x}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

2.5. INDETERMINACIONES

Los casos más importantes de indeterminaciones son los siguientes:

$\infty - \infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \dfrac{0}{0} \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty \qquad 0^0 \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

La principal dificultad para calcular el límite de una función es que aparezca un caso de indeterminación. No hay reglas fijas para resolver el problema, y en cada caso hay que calcular el límite para cada situación en particular.

Algunos "trucos" que pueden ser útiles en ciertos casos son los siguientes.

- Efectuar las operaciones y dividir el numerador y el denominador por el término de mayor grado.

$$\frac{\infty}{\infty}$$

- Efectuar las operaciones. Si en la resta aparecen expresiones radicales que impiden efectuarla, multiplicamos y dividimos la función por la expresión conjugada.

$$\infty - \infty$$

- Efectuar las operaciones. Si es un cociente de polinomios, descomponemos en factores el numerador y el denominador, y simplificamos la fracción.

$$\frac{0}{0}$$

- Utilizaremos la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \cdot (f(x) - 1)}.$$

Así, la resolución de la indeterminación se realiza calculando el límite:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot (f(x) - 1)$$

$$1^{\infty}$$

3. DISCONTINUIDADES. CONTINUIDAD Y LÍMITE

La idea de función continua es la de que "puede ser construida en un solo trazo". Vamos a obtener algunos criterios que nos permitan llevar esta visión gráfica al terreno analítico. Es decir, criterios mediante los cuales podamos saber si una función dada, por su expresión analítica, es o no continua. Comencemos observando las razones por las que una curva puede no ser continua en un punto.

3.1. DISCONTINUIDADES

Son varias las razones por las que una función puede ser discontinua:

1. Tiene ramas infinitas en un punto, es decir, alguno de los dos límites laterales en el punto tiende a infinito.
2. Presenta un salto en un punto, es decir, los límites laterales en el punto existen y son valores reales, siendo ambos distintos.
3. No está definida en un punto.
4. El punto que le falta está desplazado.

Ahora, veamos cómo se representan gráficamente.

Tiene ramas infinitas en ese punto

Presenta un salto

No está definida (le falta un punto)

El punto que le falta está desplazado

3.2. CRITERIOS PARA RECONOCER FUNCIONES CONTINUAS

Son conocidas las características de las familias de funciones más comunes, como son los polinomios o las funciones trigonométricas. Así pues, sabemos cómo se comportan y podemos utilizar esta información a la hora de estudiar la continuidad de una función concreta.

TIPOS DE FUNCIONES	CONTINUIDAD
Funciones polinómicas	Son continuas en todo R
Cociente de polinomios	Son funciones continuas en todos los puntos salvo en aquellos que anulen el denominador
Funciones con radicales	Cuando la raíz es par, por ejemplo, una raíz cuadrada, la función es continua en todos los valores positivos del radicando
Seno y coseno	Son continuas en todo R
Tangente	Presenta discontinuidades en $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$...

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$, que por ser un polinomio está definida en todo R. Por tanto, es continua en todo R.

Sea:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

Que es continua en todos los puntos salvo el 3, en donde no está definida.

3.3. RELACIÓN DE CONTINUIDAD EN A CUANDO X $\rightarrow$ A

Para que una función sea continua en un punto debe cumplirse lo siguiente:

Diremos que f(x) es continua en x = c, si:

1. Tiene límite finito **cuando x $\rightarrow$ c, es decir, existen.**

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c} f(x)$$

2. Está definida en x = c, es decir, f(c) existe.
3. El límite coincide con el valor se la función en c, es decir:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Obsérvese que la igualdad final resume las tres condiciones, pues si se da la igualdad es porque existen los dos miembros de la misma.

Ejemplo

La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tiene como dominio todos los reales menos el punto x = 0.

Observa que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no es finito (no es un número).

Otro ejemplo es $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x < -2 \\ -x+1, & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

Aunque el dominio de esta función son todos los números reales, si calculamos los límites laterales en el punto x = -2 no coinciden:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$$

Luego, no existe el límite de la función en dicho punto.

3.4. TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Si una función no es continua en un punto c, se dice que es discontinua en dicho punto y que este es un punto de discontinuidad de la función. Esto sucede cuando falla alguno de los requisitos de la continuidad:

- No existe límite cuando x tiende a c.
- Existe, pero no coincide con el valor de f(c).

Las discontinuidades pueden ser:

a) **Evitables:** se llaman así porque bastaría con modificar la función f solo en el punto x = c para lograr una función continua, "evitando" así la discontinuidad. Es decir, la función tiene límite cuando x tiende a c, pero este límite es distinto de f(c).

Ejemplo:

La función,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Es continua en todos sus puntos, salvo en x = 2. Bastaría haber corregido diciendo f(2) = 4 cuando se define a la función.

b) **Discontinuidad de salto finito o de primera especie:** los dos límites laterales existen, pero son distintos. La función salta de un valor finito a otro distinto.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Tienen límites, pero no son iguales. La función no es continua en x = 0, tiene una discontinuidad de salto.

c) **Discontinuidades infinitas o de segunda especie:** al menos uno de los límites laterales es infinito.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$$

3.5. OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Si f y g son funciones continuas en c, se tiene entonces que:

a) $f(x) \pm g(x)$ es continua en $x = c$.

b) $f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = c$.

c) $f(x)/g(x)$ es continua en $x = c$, si $g(c) \neq 0$.

Si f es continua en c y g, es continua en f(c), entonces la composición $(g \circ f)$ es continua en c.

CONCLUSIONES

En esta unidad didáctica hemos comenzado a trabajar los límites, junto con sus operaciones y aplicaciones, los cuales son muy útiles para analizar la continuidad en el estudio de funciones y calcular las asíntotas de una función.

Son muchos conceptos importantes que debes recordar, para ello te proponemos que prepares un buen esquema. Aquí te indicamos algunos de los conceptos fundamentales vistos en esta unidad, no dudes completarlos con aquellos que te causen dificultad.

Límites infinitos y operaciones:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = -\infty$$

$$\frac{k}{0} = \pm\infty \qquad \frac{k}{\pm\infty} = 0 \qquad \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$$

Tipos de discontinuidad:

- Evitable.
- De salto finito o de primera especie.
- De salto infinito o de segunda especie.

RECAPITULACIÓN

El límite de una función puede presentar diferentes opciones: puede existir o no, puede ser real, infinito, negativo o positivo, etc.

Al igual que los números, los límites presentan una serie de propiedades asociadas a ellos, de forma que puede realizarse una serie de operaciones que ayudan a calcular su valor en caso de dificultad.

La regla de L'Hopital es un método simple y de fácil aplicación para resolver límites que presentan unas características determinadas.

La continuidad de funciones es un término asociado al criterio de límite y, por lo tanto, el estudio de los límites en puntos conflictivos de la función nos puede suministrar numerosa información sobre cómo son las funciones.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. Estudia la continuidad de la siguiente función en el punto x = 2:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < 2 \\ x+2 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 2x-1 & si \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) Es discontinua de segunda especie.

b) Es continua.

c) Presenta una discontinuidad de salto.

d) Presenta una discontinuidad evitable.

2. Estudia la continuidad de la función siguiente en el punto x = 3:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < 2 \\ x+2 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 2x-1 & si \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) No es continua.

b) Es continua.

c) Presenta una discontinuidad evitable.

d) Presenta una discontinuidad de segunda especie.

3. **Calcula el valor de k para que sea continua la siguiente función en x = 1:**

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 1 \\ kx & si \quad x < 1 \end{cases}$$

a) 3.

b) 2.

c) 5.

d) 1.

4. **¿Qué valor tenemos que definir para x = 0 si queremos que sea continua en ese punto la siguiente función?**

$$f(x)=e^{\frac{-1}{x^2}}$$

a) 3.

b) 2.

c) 5.

d) 0.

5. **Calcula el límite:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-1}{x^2+1}$$

a) 1.

b) 5.

c) 4.

d) 0.

6. Calcula el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$$

a) 2.

b) 6.

c) 0.

d) ∞.

7. Calcula el límite:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right)$$

a) 3.

b) 9.

c) 5/7.

d) 0.

8. Calcula el valor del límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$$

a) 0.

b) 4/3.

c) ∞.

d) No existe el límite.

9. Calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{2x^3-1}}$$

a) ½.

b) 0.

c) ∞.

d) $1/\sqrt{2}$.

10. Calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$$

a) 0.

b) ∞.

c) -∞.

d) ±∞.

SOLUCIONARIO

1.	c	**2.**	b	**3.**	d	**4.**	d	**5.**	c
6.	a	**7.**	d	**8.**	b	**9.**	d	**10.**	d

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Te proponemos que compruebes si tienes materiales complementarios, o clases grabadas dentro de la unidad. Si es así, descárgalos para ampliar la información sobre el tema y **recuerda marcar he terminado.**

Te proponemos también que entres **en la sección de agenda** y compruebes qué clases en directo y/o talleres tienes disponibles, para complementar tus estudios, o tu preparación a la hora de afrontar los exámenes.

BIBLIOGRAFÍA

- BESCÓS, E. y PEÑA, Z. *Proyecto Exedra*. *Matemáticas I*. Madrid: Oxford, 2001.
- COLERA, J. y otros. *Matemáticas. En tus manos.* Madrid: Anaya, 2002.
- VV. AA. *EULER*. *Matemáticas I*. Madrid: S.M, 2001.
- VV. AA. EULER. *Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: S.M, 2000.
- VV. AA. *Matemáticas I*. Madrid: Edelvives, 2003.
- VV. AA. *Matemáticas II*. Madrid: Edelvives, 2003.