§1　守恒律

1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为 l 的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。
- **理想假设**

两端固定　边界条件

拉紧　弦的长度 $= x$ 轴上所占据的长度 $u(x,t), x \in [0,l]$

均匀柔软　线密度 $\rho = const$；形变时不抵抗弯曲：各质点间的张力方向与弦的切线方向一致

细弦　横截面极小，与长度相比可忽略

微小的横振动　振动很小：振动中弦长度没有变化（具体用到再指明）

建模过程 1

1. 建立坐标系，令 $u(x,t)$ 表示 x 点处的弦在 t 时刻在竖直方向上的位移
2. 取弦上任意一段 x_1 到 x_2 作为研究对象，分析其受力情况，设弦上 x 点处 t 时刻受到弦的张力为 $\mathbf{T}(x,t)$，记 $T(x,t) = |\mathbf{T}(x,t)|$
3. 证明 $T(x,t) \equiv const.$

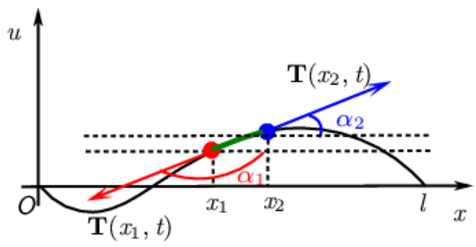


图: String

建模过程 2

- $T(x,t) = T(x)$.

方法:证明弦段的弦长不随时间变化，从而由胡克定律:

$$\text{Hooke's law} \quad F = -kx, \ or \quad F(t_2) - F(t_1) = -k(S(t_2) - S(t_1))$$

知张力大小也不随时间改变.

该段弦长为:

$$S(t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2} dx \tag{1.1}$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小（$o(x_2 - x_1)$）（微小振动的内涵），因此可认为 $S(t) \approx x_2 - x_1$.□

建模过程 3

- $T(x) \equiv const.$方法：由于弦段在 x 方向上没有位移，因此该方向受合力为 0.Figure1.

$$x_1\text{点处：}\ T_x(x_1) = -T(x_1)\cos(\pi - \alpha_1) = T(x_1)\cos\alpha_1$$
$$x_2\text{点处：}\ T_x(x_2) = T(x_2)\cos\alpha_2$$

由微元法可知:Figure2.

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\alpha_1) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1 \Rightarrow \alpha_1 \approx \pi \end{aligned} \tag{1.2}$$

同理，$\alpha_2 \approx 0.\ \cos\alpha_1 \approx -1, \cos\alpha_2 \approx 1 \Rightarrow T(x_1) = T(x_2) \equiv const.\square$

建模过程 4 I

4. 分析 (t_1, t_2) 时间段中，(x_1, x_2) 的弦在 u 方向所受张力，并依据动量守恒律

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_\Omega \rho(t_2)v(t_2)d\sigma - \int_\Omega \rho(t_1)v(t_1)\,d\sigma$$

列出方程.

此处因外力线密度 $F(x,t)$ 而分两类情形：

A. 外力 $F(x,t) \equiv 0$

建模过程 4 II

- 首先，弦段在 τ 时刻所受 u 方向外力为：

$$\begin{aligned}&-T(x_1)\sin(\pi-\alpha_1) + T(x_2)\sin\alpha_2 \\ \approx\, &T(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) \\ =\, &T\left(\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

- 其次，微元 x 处的速度变化也可以求出，即为:

$$\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t}$$

建模过程 4 III

笔记区

由动量定理，对于弦段来说，(t_1, t_2) 时段有：

$$\int_{t_1}^{t_2} T\left(\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)dt=\int_{x_1}^{x_2}\rho\left(\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t}\right)dx$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dtdx$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left(T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right)dxdt=0 \tag{1.3}$$

由选取弦段 $[x_1, x_2$ 和时间段 $[t_1, t_2]$ 的任意性，以及被积函数的连续性，可知：

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1.4}$$

建模过程 5

记 $a^2=\frac{T}{\rho}$，上式化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1.5}$$

称其为不受外力作用时一维弦振动方程（自由振荡）.

思考

该方程的线性性？阶数？齐次性？

建模过程 6

B. 外力 $F(x,t)\neq 0$，则由动量守恒律知：

$$\int_{t_1}^{t_2} T\left(\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}F(x,t)dxdt$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\rho dx\left(\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t}\right)dx$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)dxdt=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dtdx$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left(T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right)dxdt=0 \tag{1.6}$$

$\Longrightarrow$

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1.7}$$

建模过程 7

笔记区

记 $f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}$，则得到外力作用下一维弦振动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t). \tag{1.8}$$

思考

该方程的线性性？阶数？齐次性？

定解条件

PDE 的解

$\exists u$ 满足

1) 具有 PDE 中所需的各阶连续偏导数;

2) 将 u 代入 PDE 中等号恒成立

$\Longrightarrow$ u 称为该 PDE 的解.

Question

只有弦振动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t). \tag{1.8}$$

是否足以确定方程的解？会不会出现多个 u 满足弦振动方程的情形？

定解条件

初始条件：弦在 $t=0$ 时刻的状态（位移、速度）

Answer

必须增加相应的**定解条件**，才能对方程定解.

首先是**初始条件**:

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), x\in[0,l] \tag{1.9}$$

- $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$: 齐次初始条件
- 其他情形: 非齐次初始条件

定解条件

边界条件：弦在边界处（两个端点）的状态

笔记区

- 两端固定: 给出了弦两端点 $0, l$ 处固定在水平位置，即:

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, \quad t\in[0,\infty). \tag{1.10}$$

更一般地 $u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t)$.
称为**第一类边界条件（Dirichlet 边界条件）**

定解条件

边界条件：弦在边界处（两个端点）的状态

- 两端固定: 给出了弦两端点 $0, l$ 处固定在水平位置，即:

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, \quad t\in[0,\infty). \tag{1.10}$$

更一般地 $u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t)$.
称为**第一类边界条件（Dirichlet 边界条件）**

- 弦的两端处于自由状态（可在 u 方向自由移动），即端点处所受张力在 u 方向的分量为 0，则由前文推导得:

$$-T\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=T\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, \quad t\in[0,\infty). \tag{1.11}$$

更一般地 $-T\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\mu_1(t); T\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\mu_2(t)$.
称为**第二类边界条件（Neumann 边界条件）**

边界条件：弦在边界处（两个端点）的状态

- 两端放置在弹性支承上，由胡克定律知 figure3:

$$T\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\sigma u(0,t) \quad -T\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\sigma u(l,t), \quad t\in[0,\infty) \tag{1.12}$$

更一般地

$$T\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\sigma u(0,t)=\mu_1(t), \quad -T\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}-\sigma u(l,t)=\mu_2(t).$$

称为**第三类边界条件（Robin 边界条件）**.

$\mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0$ 齐次边界条件

$\mu_1(t)\not\equiv 0 \quad or \quad \mu_2(t)\not\equiv 0$ 非齐次边界条件

定解问题

笔记区

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x\in(0,l), t\in(0,\infty), \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), & x\in[0,l], \\ u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t), & t\in[0,\infty). \end{cases} \tag{1.13}$$

以上称为弦振动方程的**混合问题**。若弦足够长，从而在所考虑的时间内，弦的端点的影响可忽略不计，可认为弦长为无穷，因此不必考虑边界条件。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x\in(-\infty,\infty), t\in(0,\infty), \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), & x\in(-\infty,\infty). \end{cases} \tag{1.14}$$

称为弦振动方程的**初值问题（Cauchy 问题）**.

高维波动方程 I

类似于弦振动方程，即一维波动方程的建模过程，可以建立二维(膜振动方程：谷超豪教材 P25-P27）及三维波动方程。至此，n 维波动方程的形式统一为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(\mathbf{x},t), \mathbf{x}\in\Omega, t\in(0,\infty) \tag{1.15}$$

其中 Ω 为 R^n 中的开子集。

初始条件

$$u(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x},0)}{\partial t}=\psi(\mathbf{x}), \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.16}$$

高维波动方程 II

边界条件

$$u(x,t)\big|_\Gamma = g(\mathbf{x},t) \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = g(\mathbf{x},t) \tag{1.18}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Bigg|_\Gamma = g(\mathbf{x},t) \tag{1.19}$$

其中 $\Gamma=\bar{\Omega}\backslash\Omega$.

作业 P27: 1, 3, 5.

1.2 能量守恒与热传导方程 I

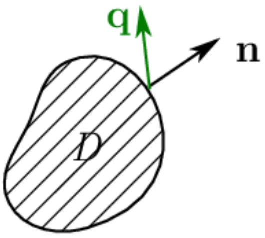
- **物理模型：** 三维空间中，考虑一均匀、各向同性的物体 Ω，假定它内部有热源，并且与周围介质存在热交换，研究物体内部温度的分布和变化.
- **能量守恒律：**

$$\boxed{E(t_2)} - \boxed{E(t_1)} = \boxed{\text{边界上的流入热量}} + \boxed{\text{热源产生的热量}}$$

- **建模过程:**

1.2 能量守恒与热传导方程 II

1. 研究对象：在 Ω 内取一块 D，研究时段 $[t_1, t_2]$ 内 D 内温度 u(单位 K) 的变化.c 是比热容（$J/(kg \bullet K)$）;ρ 是密度;$\mathbf{q}$ 是热流密度（W/m^2）;f_0 是热源强度（$J/(kg \bullet s)$）.



笔记区

1.2 能量守恒与热传导方程 III

笔记区

❷ 依据能量守恒律列方程:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_D c\rho\left(u\big|_{t=t_2}-u\big|_{t=t_1}\right)dxdydz\\&=-\int_{t_1}^{t_2}dt\oiint\limits_{\partial D}\mathbf{q}\bullet\mathbf{n}dS+\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_D\rho f_0\,dxdydz.\end{aligned}\tag{1.20}$$

由 Fourier 定律（热流向量与温度梯度成正比，即 $\mathbf{q}=-k\nabla u$ 负号表示热量的流向与温度的增长方向相反）知:

$$\mathbf{q}\bullet\mathbf{n}=-k\frac{\partial u}{\partial n}\tag{1.21}$$

1.2 能量守恒与热传导方程 IV

(1.20) 右侧第一项可化为:

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\oiint\limits_{\partial D}k\frac{\partial u}{\partial n}dS\tag{1.22}$$

再假设 u 在 $\Omega\times(0,\infty)$ 内具有连续偏导 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，应用 Gauss 公式，

$$(1.22)=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_D\nabla\bullet(k\nabla u)\,dxdydz.\tag{1.23}$$

1.2 能量守恒与热传导方程 V

再假设 u 在 $\Omega\times(0,\infty)$ 内具有连续偏导 $\frac{\partial u}{\partial t}$，则进一步地，(1.20) 可化为:

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt=\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D\left[\nabla\bullet(k\nabla u)+\rho f_0\right]dxdydzdt\tag{1.24}$$

由于被积函数 $\in C[\Omega\times(0,\infty)]$，且 $[t_1,t_2]$ 及 D 的任意性得:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f\tag{1.25}$$

其中 $a^2=\frac{k}{c\rho},f=\frac{f_0}{c}$ （$f\leqslant 0$：热汇;$f\geqslant 0$ 热源）.

上式称为热传导方程.

1.2 能量守恒与热传导方程 VI

- **附注**：在研究分子扩散过程中也会遇到类似的方程，如气体扩散、液体的渗透、半导体材料中的杂质扩散等. 称为**扩散方程**.

热传导方程	**扩散方程**
温度 u	浓度 N
Fourier 定律:$\mathbf{q} = -k\nabla u$	Nernst 定律[1]:$\mathbf{v} = -D\nabla N$
热量守恒律	质量守恒律
$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f$	$\frac{\partial N}{\partial t} - D\Delta N = f$

定解条件 I

初始条件

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \bar{\Omega} \tag{1.26}$$

边界条件

1. Dirichlet 边界条件: 已知边界上的温度分布.

$$u\big|_{\Sigma} = g(x,y,z,t), \Sigma = \partial\Omega \times [0,\infty). \tag{1.27}$$

g 为常数，表示物体表面保持恒温.

2. Neumann 边界条件: 已知通过 $\partial\Omega$ 的热量.

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Sigma} = g(x,y,z,t). \tag{1.28}$$

$g \geqslant 0$ 表示热量流入，$g \leqslant 0$ 表示热量流出，$g \equiv 0$?

定解条件 II

3. Robin 边界条件: 已知通过 $\partial\Omega$ 与周围介质有热交换 (依据热传导实验定律：从物体流到介质中的热量与二者温差成正比.)

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = \alpha_0(g_0 - u)\big|_{\Sigma}. \tag{1.29}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\Bigg|_{\Sigma} = g(x,y,z,t). \tag{1.30}$$

其中 g_0 表示周围介质温度，α_0 表示热交换系数，$\alpha = \frac{\alpha_0}{k} > 0$，$g = \frac{g_0}{k} > 0$.

定解条件 III

- 对某些特殊的三维问题，可取恰当的坐标系将其化归为一维或二维问题处理。

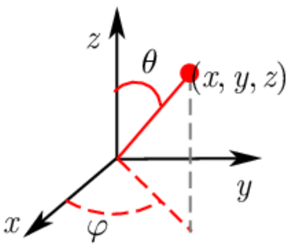
  1. 例 1：若物体可看成一根细杆，侧表面绝热，与周围介质的热交换只在杆的两端 $x=0$ 和 $x=l$ 进行；若在杆的任意一个与杆的轴线垂直的截面上，初始温度和热源强度的变化很小，那么可近似认为杆上的温度只依赖于截面的位置. 若取杆的轴线为 x 轴，则热传导方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{1.31}$$

称为一维热传导方程.

定解条件 IV

  2. 例 2：一半径为 R 的球体，球面各点所受周围介质的影响都相同，球内任意一点的初始温度与热源强度只依赖于与球心的距离，选取球心为坐标原点，建立球坐标系。球内一点与原点距离为 r，$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$，球内温度 $u(r, t)$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}$$

定解条件 V

从而

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

于是 $u(r, t)$ 满足如下方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = f(r, t).$$

称为**球对称问题的热传导方程**.

笔记区

定解条件 VI

笔记区

3. 例 3：一个高为 H，半径为 R 的圆柱形物体，引入柱坐标，取柱体的轴线为 z 轴，下底落在 $z=0$ 平面上，假设在柱体的侧表面和上、下底上给出的边界条件只分别依赖于 z 和 r，且柱体初始温度和内部热源只是 r 和 z 的函数。试推导柱体内温度 $u=u(r,z,t)$ 满足的**二维轴对称问题的热传导方程。**

思考题

热传导方程的定解问题如何定义？你能否写出热传导方程的混合问题、Cauchy 问题?

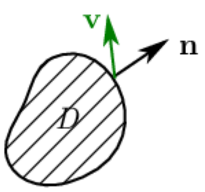
作业 P27: 7.

1.3 质量守恒与连续性方程 I

- **物理模型：** 研究区域 Ω 内运动流体的质量分布变化.
- **质量守恒定律：** 任意一块区域 D 内流体的质量变化满足

$$\boxed{m(t_2)} - \boxed{m(t_1)} = \boxed{\text{边界上的流入质量}} + \boxed{\text{源（汇）生成的质量}}$$

- **建模过程：**
  1. 在 Ω 内取任意一块区域 D，研究 $[t_1,t_2]$ 内流体的运动规律.$\mathbf{v}$ 是流体的运动速度 (m/s).



$-\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}$ 流体沿内法向的流速分量

$-\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}dt$ dt 内流入的距离

$-\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}dtdS$ dt 内通过 dS 流入的流体体积

$-\rho\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}dtdS$ dt 内通过 dS 流入的流体质量

定解条件 VI

3. 例 3：一个高为 H，半径为 R 的圆柱形物体，引入柱坐标，取柱体的轴线为 z 轴，下底落在 $z=0$ 平面上，假设在柱体的侧表面和上、下底上给出的边界条件只分别依赖于 z 和 r，且柱体初始温度和内部热源只是 r 和 z 的函数。试推导柱体内温度 $u=u(r,z,t)$ 满足的**二维轴对称问题的热传导方程。**

思考题

热传导方程的定解问题如何定义？你能否写出热传导方程的混合问题、Cauchy 问题?

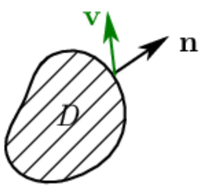
作业 P27: 7.

1.3 质量守恒与连续性方程 I

- **物理模型：** 研究区域 Ω 内运动流体的质量分布变化.
- **质量守恒定律：** 任意一块区域 D 内流体的质量变化满足

$$\boxed{m(t_2)} - \boxed{m(t_1)} = \boxed{\text{边界上的流入质量}} + \boxed{\text{源（汇）生成的质量}}$$

- **建模过程：**
  1. 在 Ω 内取任意一块区域 D，研究 $[t_1,t_2]$ 内流体的运动规律.$\mathbf{v}$ 是流体的运动速度 (m/s).



$-\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}$ 流体沿内法向的流速分量

$-\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}dt$ dt 内流入的距离

$-\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}dtdS$ dt 内通过 dS 流入的流体体积

$-\rho\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}dtdS$ dt 内通过 dS 流入的流体质量

1.3 质量守恒与连续性方程 II

2. 对 D 应用质量守恒律

$$\iiint\limits_{D} \left(\rho|_{t=t_2} - \rho|_{t=t_1}\right) dxdydz = -\int_{t_1}^{t_2} dt \oiint\limits_{\partial D} \rho\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} dS$$

若 $\rho, \mathbf{v}$ 连续可微，则由 Gauss 公式可得

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{D} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho\mathbf{v})\right] dxdydz = 0$$

由于被积函数 $\in C(\Omega)$，以及 D 和 $[t_1, t_2]$ 的任意性，可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{1.32}$$

称为**连续性方程**.

1.3 质量守恒与连续性方程 III

- **几个特例：**

1. $$\mathbf{v} \equiv const. \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla\rho = 0 \tag{1.33}$$

2. 流体不可压缩 $(\rho \equiv const.)$

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0 \tag{1.34}$$

3. 不可压缩无旋（$rot\mathbf{v} = 0$）运动
   这种流场是有势的，即存在函数 φ（速度势）使得

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi$$

1.3 质量守恒与连续性方程 IV

如果区域 Ω 单连通，则 φ 是一个单值函数.
若流体不可压缩，则连续性方程化为

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0$$

因此有

$$\nabla \bullet \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$$

表示不可压缩无旋流体的速度势 φ 适合 Laplace 方程.

笔记区

笔记区

作业 P27: 10.

预备知识

定义 (泛函)

从一个集合到实数的映射.

例

$\forall f(x) \in C([a, b])$，映射

$$f(x) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

是定义在 $C([a, b])$ 上的一个泛函.

定义 (变分问题)

求某一特定泛函在定义域内的极值.

定义

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域，定义在 Ω 上的无穷次可微且在 Ω 的边界附近为 0 的函数的全体，记为 $C_0^\infty(\Omega)$.

例: 函数

$$\rho(x, y) = \begin{cases} ke^{-1/[1-(x^2+y^2)]}, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

属于 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$，其中 k 为常数，选取 k 使得

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y)\,dxdy = 1.$$

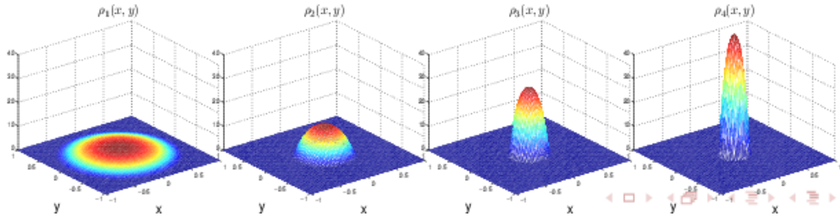
又定义

$$\rho_n(x, y) = n^2\rho(nx, ny), \quad (n > 0)$$

则

$$\rho_n(x,y) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$$
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \rho_n(x,y)\,dxdy = 1.$$

且当 $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \frac{1}{n}$ 时，$\rho_n(x,y) = 0$



$\cdots$

引理

设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界区域，$f(x,y) \in C(\Omega)$，若 $\forall \varphi(x,y) \in C_0^{\infty}(\Omega)$,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\varphi(x,y)\,dxdy = 0$$

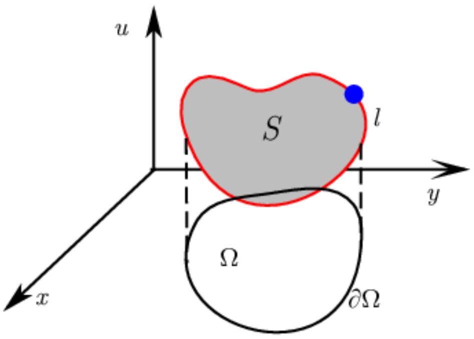
则 $f(x,y)$ 在 Ω 上恒为 *0*.

证明.

反证法. □

2.1 极小曲面问题 I

- **问题描述**



$$l:\ \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ u = \varphi(s) \end{cases} \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0)$$

$$x(0) = x(s_0)$$
$$y(0) = y(s_0)$$
$$\varphi(0) = \varphi(s_0)$$

求一张定义在 $\bar{\Omega}$ 上的曲面 S，使得: a.S 以 l 为周界; b.S 的表面积最小.

笔记区

2.1 极小曲面问题 II

- **变分问题：** 给定函数集合

$$M_\varphi = \{v | v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = \varphi\} \quad \boxed{\text{允许函数类}} \tag{2.1}$$

定义 M_φ 上泛函

$$J(v) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}dxdy$$

$$\boxed{J : M_\varphi \to \mathbb{R}, \text{即定义在} M_\varphi \text{上的泛函}} \tag{2.2}$$

求 $u \in M_\varphi$，使得

$$J(u) = \min_{v \in M_\varphi} J(v) \quad \boxed{u: \text{该 } J \text{ 在 } M_\varphi \text{ 上的极小值点}} \tag{2.3}$$

- **求解变分问题:** 设 u 是变分问题的解

2.1 极小曲面问题 III

- <u>**必要条件:**</u> 定义 $M_0 = \{v | v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0\}$
  则 $\forall v \in M_0, \forall \epsilon \in (-\infty, +\infty)$，有 $u + \epsilon v \in M_\varphi$，定义

$$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v) \quad \boxed{j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{可微函数}}$$

$$j(\epsilon) \geqslant j(0), \forall \epsilon \in \mathbb{R} \Longrightarrow j'(0) = 0$$

计算得到:

$$j'(\epsilon) = \iint\limits_{\Omega} \frac{(u + \epsilon v)_x v_x + (u + \epsilon v)_y v_y}{\sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2}} dxdy$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{\Omega} \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_x + \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_y dxdy = 0$$

2.1 极小曲面问题 IV

假设 $u \in C^2(\bar{\Omega})$，令

$$P = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v, \; Q = \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v$$

再由 Green 公式

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) dS \tag{2.4}$$

笔记区

2.1 极小曲面问题 V

笔记区

得:

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}v\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}v\right]dxdy \\
=&\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]\right\}v+\frac{u_xv_x+u_yv_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}dxdy \\
=&\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]\right\}vdxdy \\
=&\oint_{\partial\Omega}\frac{v}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\bullet\frac{\partial u}{\partial n}dS
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

2.1 极小曲面问题 VI

由于 $v|_{\partial\Omega}=0$，且由 (2.5) 中被积函数的连续性及 v 的任意性知:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]=0 \tag{2.6}
$$

称为本变分问题的 **Euler 方程**.

$\boxed{\text{变分问题的解}} \Longrightarrow \boxed{\text{Euler 方程}}+\boxed{\text{边界条件}:u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y).}$

2.1 极小曲面问题 VII

- **充分条件**: 还需证明 (2.6) 是否为充分？计算得:

$$
j''(\epsilon)=\iint_{\Omega}\frac{v_x^2+v_y^2+[v_y(u_x+\epsilon v_x)-v_x(u_y+\epsilon v_y)]^2}{[1+(u_x+\epsilon v_x)^2+(u_y+\epsilon v_y)^2]^{3/2}}dxdy
$$

$$
\boxed{\Longrightarrow j''(0)>0}
$$

$\boxed{\text{变分问题}} \Longleftrightarrow$

$$
\boxed{\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]=0, \quad x,y\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi.\end{cases}} \tag{2.7}
$$

2.1 极小曲面问题 VIII

- **附注** Euler 方程可改写为:

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_y\bullet u_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$$

Q：这是一个线性方程吗?
假设 $|u_x|,|u_y|\ll 1$，则该方程可以简化为:

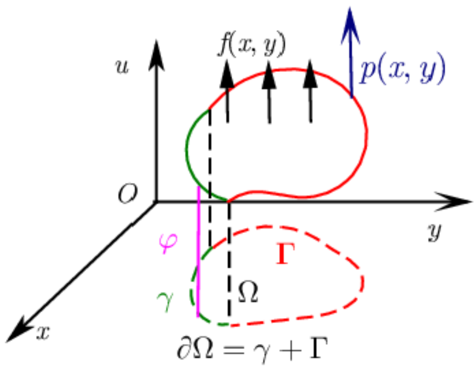
$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{2.8}$$

由此，极小曲面 $u=u(x,y)$ 可近似看做 Laplace 方程的第一边值问题的解.

2.2 膜的平衡问题 I

物理模型

考虑一处于紧张状态的薄膜，它的部分边界固定在一框架上，另一部分边界上受到外力的作用；若整个薄膜在垂直于平衡位置的外力作用下处于平衡状态，问膜的形状如何?



2.2 膜的平衡问题 II

最小势能原理 受外力作用的弹性体，在满足已知边界位移约束的一切可能位移中，以达到平衡状态的位移使物体的总势能为最小.

$$\boxed{\text{膜达到平衡状态}}\Longleftrightarrow\boxed{\text{膜的总势能最小}}$$

将物理问题转化成了一个**优化问题**.

1. 什么是总势能? 及其数学形式?
2. 满足已知边界位移约束的一切可能位移?

回答:

2.2 膜的平衡问题 III

1. $\boxed{\text{总势能}}=\boxed{\text{应变能}}-\boxed{\text{外力作功}}$

应变能: 把膜从水平位置转移到这个位置，为了抵抗张力所作的功的总和.

$$\boxed{\text{应变能}} = T\Delta\sigma = T\left[\iint\limits_{\Omega}(\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}-1)dxdy\right]$$
$$\approx\frac{T}{2}\iint\limits_{\Omega}(v_x^2+v_y^2)dxdy,\ \boxed{\approx:\text{不计高阶无穷小量}}$$
$$\boxed{\text{外力作功}} = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)v(x,y)\,dxdy + \int_{\Gamma} p(s)v(s)\,ds.$$

2.2 膜的平衡问题 IV

$$\text{因此}:\boxed{\text{总势能}}=J(v) = \frac{T}{2}\iint\limits_{\Omega}(v_x^2+v_y^2)\,dxdy - \iint\limits_{\Omega} f(x,y)v(x,y)\,dxdy - \int_{\Gamma} p(s)v(s)\,ds. \tag{2.9}$$

2. a. 满足已知位移约束:$u|_{\gamma}=\varphi$.

   b. 使得总势能 $J(v)$ 有意义:(2.9) 中被积函数可积.

$$M_{\varphi} = \{v|v\in C^1(\bar{\Omega}),\, v|_{\gamma}=\varphi\}$$

2.2 膜的平衡问题 V

求解变分问题

$$J(u) = \min_{v\in M_{\varphi}} J(v) \tag{2.10}$$

笔记区

2.2 膜的平衡问题 VI

必要条件: 定义 $M_0 = \{v | v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_\gamma = 0\}$ 则
$\forall v \in M_0, \forall \epsilon \in (-\infty, +\infty)$，有 $u + \epsilon v \in M_\varphi$，定义

$$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v) \qquad \boxed{j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{可微函数}}$$

$$j(\epsilon) \geqslant j(0), \forall \epsilon \in \mathbb{R} \Longrightarrow j'(0) = 0$$

计算得到:

$$j'(0) = T \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy - \iint\limits_{\Omega} fvdxdy - \int_\Gamma pvds = 0 \qquad (2.11)$$

称为变分问题的 **Euler** 方程的积分形式.

2.2 膜的平衡问题 VII

若 $u \in C^2(\Omega)$，由Green 第一公式得:

$$-\iint\limits_{\Omega} (T\Delta u + f) vdxdy + \int_\Gamma \left(T\frac{\partial u}{\partial n} - p \right) vds = 0 \qquad (2.12)$$

注:Green 第一公式若 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$，**则有**:

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v dxdy = -\iint\limits_{\Omega} \Delta u v dxdy + \oint\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} dS \qquad (2.13)$$

2.2 膜的平衡问题 VIII

Q: 上式中为什么是 $\int_\Gamma$ 而不是 $\oint\limits_{\partial\Omega}$?

由 $v \in M_0$ 的任意性，先取 $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset M_0$，使得

$$-T\iint\limits_{\Omega} (T\Delta u + f) vdxdy = 0$$

$$\Longrightarrow -T\Delta u = f. \quad (\Omega) \quad \boxed{\text{Poisson 方程}} \qquad (2.14)$$

笔记区

再将 $-T\Delta u = f$ 代入 (2.12) 中得:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Gamma \left(T\frac{\partial u}{\partial n} - p\right) v ds = 0, \quad \forall v \in M_0 \\
\Longrightarrow\ & T\frac{\partial u}{\partial n} = p. \quad (\Gamma)
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

$$
\boxed{\text{变分问题的解}} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} -T\Delta u = f, \\ T\frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = p,\ u|_\gamma = \varphi. \end{cases}} \tag{2.16}
$$

充分条件: 若 u 满足以上定解问题，取 $\forall w \in M_\varphi$，由 $w - u \in M_0$ 得:

$$
\begin{aligned}
& J(w) - J(u) \\
=& \frac{T}{2}\iint\limits_\Omega |\nabla(w-u)|^2 dxdy + T\iint\limits_\Omega \nabla u \bullet \nabla(w-u) dxdy \\
& - \iint\limits_\Omega f(w-u) dxdy - \int_\Gamma p(w-u) ds \\
=& \frac{T}{2}\iint\limits_\Omega |\nabla(w-u)|^2 dxdy - \iint\limits_\Omega (T\Delta u + f)(w-u) dxdy \\
& + \int_\Gamma \left(T\frac{\partial u}{\partial n} - p\right)(w-u) ds = \frac{T}{2}\iint\limits_\Omega |\nabla(w-u)|^2 dxdy \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\text{变分问题的解}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} -T\Delta u = f, \\ T\frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = p,\ u|_\gamma = \varphi. \end{cases}}
$$

附注 1 本变分问题中可知:

- 第一类边界条件 $u|_\gamma = \varphi$ 是作为位移约束强加在 M_φ 上，变分法中称为**约束边界条件**或**强制边界条件**;
- 第二类边界条件 $T\frac{\partial u}{\partial n} = p$ 是作为泛函 $J(v)$ 的一部分，由泛函极值 u 自然满足的，称第二（三 [2]）类边界条件为**自然边界条件**.

附注 2

若 $\gamma\equiv\partial\Omega$，则 $\Gamma\equiv\varnothing$，变分问题等价于 Poisson 方程的第一边值问题.

若 $\Gamma\equiv\partial\Omega$，则 $\gamma\equiv\varnothing$，变分问题等价于 Poisson 方程的第二边值问题.

作业 P27: 11, P28: 14.

3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

笔记区

3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

适定性问题是 PDE 研究的核心内容!

3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

适定性问题是 PDE 研究的核心内容!

存在性 在某一**给定函数类**中是否有解?

3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

适定性问题是 PDE 研究的核心内容!

存在性 在某一**给定函数类**中是否有解?

唯一性 若 u_1, u_2 都是 PDE 的解，$u_1 \equiv u_2$? or 齐次定解问题是否只有零解?

笔记区

3. 定解问题的适定性

笔记区

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

适定性问题是 PDE 研究的核心内容!

存在性 在某一**给定函数类**中是否有解?

唯一性 若 u_1, u_2 都是 PDE 的解，$u_1 \equiv u_2$? or 齐次定解问题是否只有零解?

稳定性 PDE 的解是否连续依赖于定解问题中的参数:

- 另外，PDE 中还会研究解的正则性、渐近性、求解方法（精确解、渐近解、数值解）等内容。

弦的受力分析

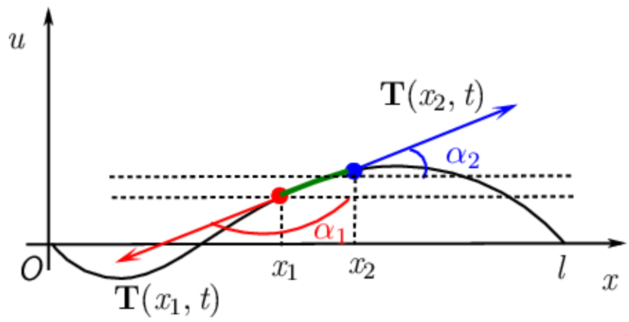


图: String

Robin boundary condition

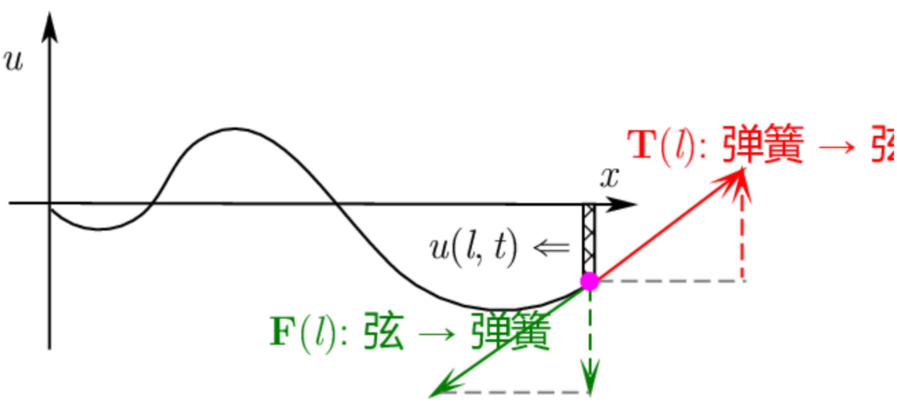


图: Robin Boundary Condition