第五章　二阶线性偏微分方程的分类

主讲人　马啸

西北工业大学　应用数学系

2019 年 2 月 24 日

§1 分类 I

我们已经讨论了如下三类线性基本方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f, \qquad \text{(波动方程)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f, \qquad \text{(热传导方程)}$$

$$-\Delta u = f, \qquad \text{(位势方程)}$$

§1 分类 II

在 $\mathbb{R}^m$ 中，二阶线性方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c, f$ 都是关于 $(x_1, \ldots, x_m)$ 的连续函数.

§1 分类 III

令 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,m}$, 对于波动方程和热传导方程，取 $m=n+1, t=x_{n+1}$, 则波动方程有

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -a^2 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & & -a^2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

§1 分类 IV

热传导方程有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a^2 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & & -a^2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_{n+1} = 1.$$

§1 分类 V

对于位势方程，取 $m = n$，则有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

§1 分类 VI

对于任意一个对称常数矩阵 $\mathbf{A}$，都存在一个正交矩阵 $\mathbf{T}$，使得

$$\mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i, i = 1, \ldots, m$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

§1 分类 VII

观察三类基本线性方程

- 波动方程: 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 特征值中 $m-1$ 个为同号, 剩下一个为相反符号.
- 热传导方程: 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 特征值中 $m-1$ 个为同号，剩下一个为 0.
- 位势方程: 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 特征值全部同号.

据此为二阶线性方程分类。

设 $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的一个点，$\mathbf{A}(x_0)$ 表示系数矩阵 $\mathbf{A}$ 在 x_0 的取值.

定义 1.1

若 $\mathbf{A}(x_0)$ 的 m 个特征值全是正（或负）的，称方程 (1.1) 在 x_0 点是椭圆型的. 若 $\mathbf{A}(x_0)$ 的特征值除了一个为 0 外，其他 $m-1$ 个全是同号的，称方程 (1.1) 在 x_0 点是抛物型的. 若 $\mathbf{A}(x_0)$ 的特征值除了一个为正（负）外，其他 $m-1$ 个全是负（正）的，称方程 (1.1) 在 x_0 点是双曲型的.

如果在 $\overline{\Omega}$ 的每一点，方程都是椭圆型（抛物型、双曲型）的，则称方程在 $\overline{\Omega}$ 上是椭圆型（抛物型、双曲型）的.

设 $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ 是由一些孤立的点，曲面（线）组成的集合，若在 $\overline{\Omega} \backslash \Gamma$ 上，方程是椭圆型的，而对于任意给定的 $x_0 \in \Gamma$，方程的系数矩阵 $\mathbf{A}(x_0)$ 至少有一个特征值为 0，则称方程在 $\overline{\Omega}$ 上是蜕化椭圆型.Γ 称为方程的蜕化面 (点、线）.

例　设 $\overline{\Omega} = \{|x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，则以下方程都是 $\overline{\Omega}$ 上的蜕化椭圆型方程，找到它们的蜕化线（点）.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

类似，可给出区域 $\overline{\Omega}$ 上蜕化抛物型（双曲型）方程的定义.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f, \qquad (\text{波动方程})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f, \qquad (\text{热传导方程})$$

$$-\Delta u = f, \qquad (\text{位势方程})$$

分别称为双曲型、抛物型和椭圆型方程的标准型.

定理 1.1

若方程 (1.1) 的二阶项系数 a_{ij} 是常数，即 $\mathbf{A}$ 是常数矩阵，且它属于椭圆型（双曲型、抛物型）方程，那么一定可通过一个非奇异的自变量代换，将方程 (1.1) 的二阶项化为标准型.

证明 以 (1.1) 为椭圆型为例，方程 (1.1) 可写成

$$(\nabla_x^T \mathbf{A} \nabla_x) u + \ldots = f, \qquad \nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^T$$

$\ldots$ 表示低于二阶的项.

作如下自变量代换

$$\mathbf{y}=\mathbf{B}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)^T,\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)^T,$$

$$\mathbf{B}\text{是 } m\times m \text{ 阶非奇异矩阵} \Longrightarrow \nabla_x=\mathbf{B}^T\nabla_y$$

$$\Longrightarrow (\nabla_y^T\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\nabla_y)u+\ldots=f,$$

由于方程 (1.1) 为椭圆型，因此 $\mathbf{A}$ 的特征值为同号 (此处设为正)，则一定存在线性变换 $\mathbf{T}$，使得 $\mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{I}$. 取 $\mathbf{B}=\mathbf{T}^T$，从而方程变换为

$$\Delta_y u+\ldots=f. \quad \square$$

附注 1 若 $a_{ij}(\mathrm{x})$ 不是常数，可以在一点上找到对应的变量的线性代换将方程在该点变为标准型。

附注 2 Q: 在整个区域 $\overline{\Omega}$ 上是否存在一个非线性代换

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

使得代换后，方程的二阶项可变为标准型?

A: 当 $m = 2$ 时，只要 a_{ij} 足够光滑，那么 $y_i(x_1, x_2), i = 1, 2$ 是存在的；当 $m > 3$ 时一般无解.

§2 具有非负特征的二阶偏微分方程

2.1 问题的提出

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{2.1}$$

其中 $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \ldots, m$.

2.1 问题的提出 I

定义 2.1

若对任意 $x \in \overline{\Omega}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbf{R}^m$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0. \tag{2.2}$$

则称方程 (2.1) 在区域 $\overline{\Omega}$ 上具有非负特征.

2.1 问题的提出 II

附注 由 (2.2) 可知方程 (2.1) 在区域 $\overline{\Omega}$ 上具有非负特征 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in \overline{\Omega}$，矩阵 $(a_{ij}(x))_{m\times m}$ 都是半正定的，或者说矩阵 $(a_{ij}(x))_{m\times m}$ 的特征值都是非负的.

非负特征的二阶方程包含：椭圆型方程、抛物型方程、一阶偏微分方程、蜕化椭圆方程、蜕化抛物方程、椭圆-抛物混合型方程...

此类方程具有蜕化的特性.

2.1 问题的提出 III

关于此类方程的研究中的两大问题：

- 如何给出适当的定解条件，使得定解问题适定？即若 $\overline{\Omega}$ 的一部分 Γ 是方程的蜕化面（线、点），那么在 Γ 上要不要给出边值？如何给出？
- 解在到达或通过蜕化面（线、点）时，正则性（光滑性）会如何改变？

2.1 问题的提出 IV

本课程只介绍有关定解问题适定性的结果：对于一般的具有非负特征的二阶 PDE，在 $\overline{\Omega}$ 的部分边界 Γ 上，若方程蜕化，问：在 Γ 上是否应当加边界条件，以使定解问题的解存在唯一？

意大利数学家 G.Fichera 在 1956 年给出了该问题的判定法则。

2.2 Fichera 条件 I

G.Fichera 的判定法则（针对非负特征方程）：

对于给定的方程 (2.1) 和区域 $\overline{\Omega}$，方程 (2.1) 具有非负特征，即

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^m \tag{2.3}$$

2.2 Fichera 条件 II

定义 Fichera 函数

$$B(x)=\sum_{i=1}^{m}\left[b_i(x)-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\, a_{ij}(x)}{\partial x_j}\right]n_i,$$

2.2 Fichera 条件 III

设 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位内法向量为

$\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_m)$，且 $\partial\Omega=\Gamma_0\bigcup\Gamma_1\bigcup\Gamma_2\bigcup\Gamma_3$。

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)n_in_j>0, \quad \forall x\in\Gamma_3, \Rightarrow \Gamma_3\text{是非特征部分} \\ \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)n_in_j=0, \quad \begin{cases} B(x)=0 & \forall x\in\Gamma_0 \\ B(x)>0 & \forall x\in\Gamma_1 \\ B(x)<0 & \forall x\in\Gamma_2 \end{cases} \end{cases}$$

2.2 Fichera 条件 IV

定理 2.1 (Fichera)

对于方程 (2.1) 在 $\overline{\Omega}$ 上下述定解问题存在唯一解

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3. \end{cases}$$

首先，看几个例子

2.2 Fichera 条件 V

例 1 (Black-Scholes 方程) 在

$\overline{\Omega} = \{0 \leqslant S < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上考虑定解问题

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

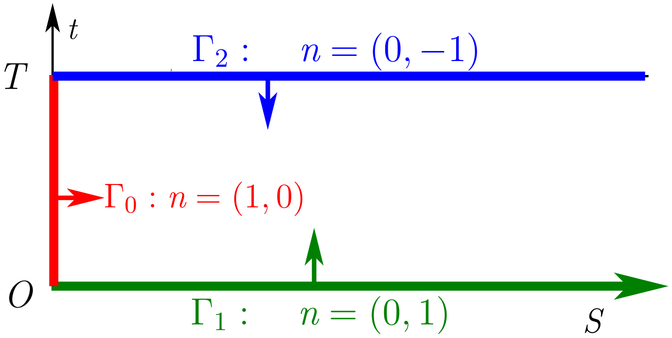
其中 $\sigma, r, q > 0$ 为常数. 该方程是一个反向蜕化抛物型方程，$\{S = 0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 是蜕化边界，方程可写为如

2.2 Fichera 条件 VI

下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial S} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2}S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial S} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (r-q)S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial S} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = 0$$

2.2 Fichera 条件 VII



2.2 Fichera 条件 VIII

因此，根据 Fichera 判定定理，该方程定解问题的正确提法为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(S, T) = g(S), \end{cases}$$

其中 $g(S)$ 已知.

2.2 Fichera 条件 IX

例 2 在 $\overline{\Omega} = \{r \in \mathbb{R}_+, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \alpha(\theta - r)\frac{\partial u}{\partial r} - ru = 0$$

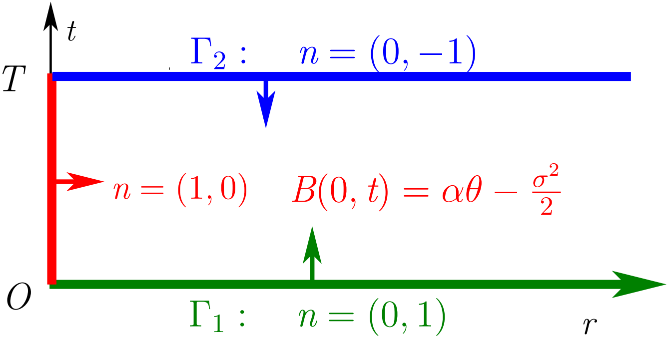
其中 $\sigma, \alpha, \theta > 0$ 为常数. 该方程也是一个反向蜕化抛物型方程，$\{r = 0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 是蜕化边界，方程可写为

2.2 Fichera 条件 X

如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial S} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(\theta - r) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = 0$$

2.2 Fichera 条件 XI



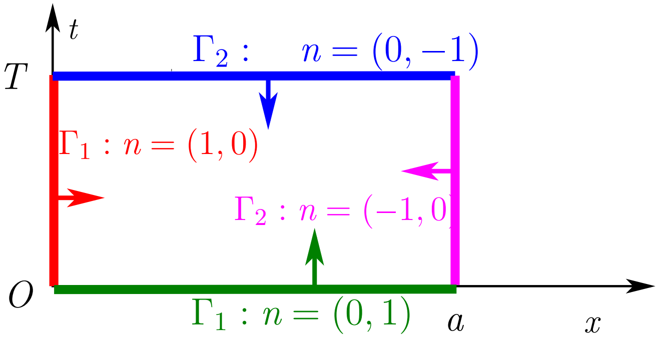
2.2 Fichera 条件 XII

例 3 在 $\overline{\Omega} = \{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上考虑一阶 PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

对于该方程来说，$\mathbf{A} = \mathbf{O}$，$b_1 = b_2 = 1.$

2.2 Fichera 条件 XIII



2.2 Fichera 条件 XIV

因此必须在 $t=T$ 和 $x=a$ 上给出定解条件.

但若把方程改写为

$$-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

则可推出，必须在 $t=0$ 和 $x=0$ 上给出定解条件.

思考：如何从特征线法解一阶波动方程的角度来理解这种现象?

2.2 Fichera 条件 XV

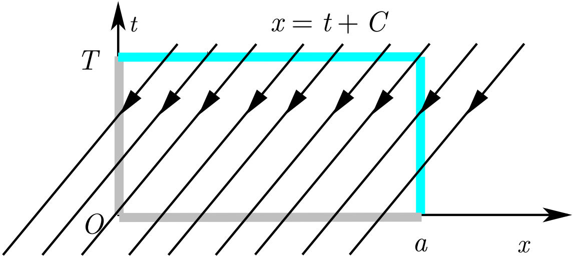


图: 右边值 + 终值条件下

2.2 Fichera 条件 XVI

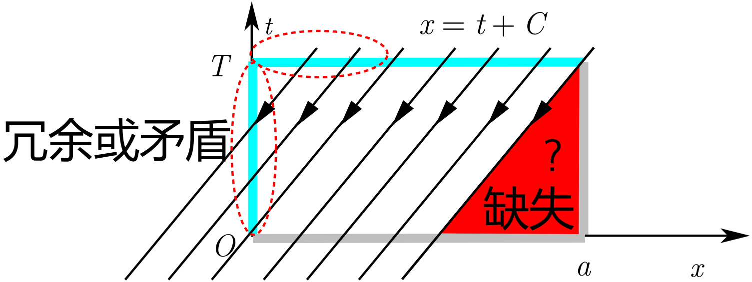


图: 左边值 + 终值条件下

作业 P238: 1,2, P239: 3(2)