○高考复习○

解析几何考点解析及教学建议

王克亮

(江苏省射阳县教育局教研室，224300)

一、考点要求

2007年数学高考江苏自主命题解析几何部分考试的能力要求如下表所示：

内容		要求		
		A	B	C
1.直线和圆	直线的倾斜角与斜率			
	直线方程		√	
	两条直线的平行关系与垂直关系		√	
	两条相交直线的交点、交角		√	

$=e$(双曲线的离心率)，$x_2=\dfrac{\sqrt5}{5}$(舍)，所求双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt5}{2}$，而 $c=\sqrt{9-4}=\sqrt5$，所以 $a=2$，$b=1$，即得所求双曲线方程为 $\dfrac14x^2-y^2=1$.

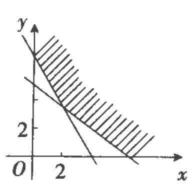
19. 设用甲种原料 $10x$ 克和乙种原料 $10y$ 克配制营养食品，则点(x,y)的集合应为满足不等式组

$$\begin{cases}5x+7y\geqslant 35,\\10x+4y\geqslant 40,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0\end{cases}$$

表示的平面区域(如图).

用图解法可得出最优解是 $x=2.8$，$y=3$.

所以用甲种原料28克，乙种原料30克能达到要求.



第19题图

20. (1) 设过点 $P(3,0)$ 的直线 l 交抛物线于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=3$，此时 A、B 点的坐标分别为$(3,\sqrt6)$和$(3,-\sqrt6)$，有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$；

当直线 l 的斜率存在时，设其为 $y=k(x-3)$，与抛物线联立消去 x 得 $ky^2-2y-6k=0$，则 $y_1y_2=-6$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac14(y_1y_2)^2+y_1y_2=3$，命题成立；

(2) 逆命题为：直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点，如果 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，那么该直线过点 $P(3,0)$.

这个命题是一个假命题.

例如：取抛物线上的点 $A(2,2)$和 $B\left(\dfrac12,1\right)$，此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，直线 AB 的方程应为 $y=\dfrac23(x+1)$，而 $P(3,0)$ 不在直线 AB 上.

21. 附加题：由条件应该有 $b<0$，由 $b^2>4ac$，得 $-b>2\sqrt{ac}$，所以 $a+c\geqslant 1-b>1+2\sqrt{ac}$，可得$(\sqrt a-\sqrt c)^2>1$，所以 $\sqrt a>1+\sqrt c\geqslant 2$，$a>4$，$a$ 的最小值为5.

(试题由浙江省富阳市新登中学(311404) 于锋 提供)

续表:

内容		要求		
1 直线和圆	点到直线的距离		√	
	简单的线性规划问题		√	
	曲线与方程的概念		√	
	圆的标准方程、一般方程、参数方程		√	
2 圆锥曲线	椭圆的标准方程和几何性质(中心在坐标原点)			√
	椭圆的参数方程		√	
	双曲线的标准方程和几何性质(中心在坐标原点)			√
	抛物线的标准方程和几何性质(顶点在坐标原点)			√

说明:1、第一章所有的知识点都是 B 级要求,而第二章除了椭圆的参数方程外,其余的知识点都是 C级要求;

2、变化情况:与 2006年相比,2007年的《普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)说明》中去掉了"解析几何综合运用"这一 C 级要求的内容.

二、考题比照

近三年部分省、市及全国理科卷中解析几何部分解答题的考情如下表所示:

卷型	2006年			2005年			2004年		
	题序	分值	考查的知识点	题序	分值	考查的知识点	题序	分值	考查的知识点
全国 1	20	12	直线与椭圆、向量、轨迹、离心率、最值	21	14	直线与椭圆、向量、离心率、定值	21	12	直线与双曲线、离心率、向量、范围
全国 2	21	14	抛物线、向量、面积、定值、最值	21	14	椭圆、向量、最值	21	12	直线与抛物线、向量夹角、截距、范围
北京	19	14	双曲线的定义与方程、向量、最值	18	14	直线、线性规划、轨迹	17	14	抛物线的定义、直线的斜率与倾斜角
上海	20	14	直线与抛物线、向量、定值、命题	19	14	椭圆、最值	22	14	二次曲线、数列、函数及不等式综合
江苏	17	12	椭圆与双曲线的方程、对称	19	12	直线与圆、轨迹	21	12	椭圆方程、离心率、向量、直线斜率
							19	12	线性规划、实际应用题
浙江	19	14	直线与椭圆、角、离心率	17	14	椭圆方程、最值	21	12	双曲线的方程、直线斜率、三角形的内心、范围

(1)从题序上看,以上 19道题中,处在解答题最后一题的只有 1道;处于倒数第 2题的有 8道;处在倒数第 3题的有 3道;处在前 3题的有 5道,其中有 3道出现在江苏卷中,且这 3道题中有 2道处于解答题的第 1题.

(2)从知识点上看,涉及椭圆的有 9道;涉及双曲线的有 5道;涉及抛物线的有 4道;涉及圆的有 1道;涉及线性规划的有 2道等.

(3)从解题目标上看,涉及定值与最值的有 8道;涉及求参数取值范围的有 4道;涉及求曲线方程、轨迹方程的有 9道;与向量综合的有 9道等.

三、趋势预测

首先,直线的倾斜角与斜率、夹角、距离、平行与垂直、线性规划、对称、直线与圆的位置、圆的切线与弦长等基本问题一直常考不

衰,圆锥曲线的定义、方程、几何性质、直线与圆锥曲线的位置关系,仍是重中之重. 解析几何的解答题多是求曲线方程与动点轨迹、求参数范围、确定定值或最值等,且常与向量知识相结合.

其次,解析几何的解答题通常处于中、高档题的位置,而江苏卷有着其独特的个性,连续 3年都有解答题处于前 3题,且 2005年与 2006年两年都放在解答题的第 1题。那么, 2007年高考江苏卷是否保持着这种个性?下面的两个信息值得大家关注:

(1)前面提到的《2007年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)说明》中去掉了"解析几何综合运用"这一 C 级要求的内容,这是最具价值的一条信息.

(2)在最近的一些大型联考中,解析几何的解答题大多放在前 2题,如南通市九校联考、连云港市联考等试卷都将解析几何题放在第 1题;盐城市、泰州市等联考试卷都将解析几何题放在第 2题.

根据这些信息,我们的预测是:2007年江苏数学高考解析几何部分的解答题后置的可能性不大,最起码说放到后两题位置的可能性很小.

四、教学建议

1. 适当控制题目难度

题序决定难度,既然解析几何的解答题放在前 3题的可能性较大,因而在二轮复习中,我们选题时要适当控制难度,那些思路比较复杂的、运算比较繁的可以大胆地少选,甚至不选.

当然,控制难度不代表排斥新题,解析几何部分的新题挺多的,可以适当选择,毕竟第二章还有三个知识点是 C 级要求的.

2 巩固一轮复习成果

对于第二轮复习中的相关内容,我们在第一轮复习中已得到的结论、已提炼出的思想与方法、学生暴露出来的易错点、甚至是一些典型的例题,我们可以适时地进行回放,做到专题复习不忘"双基",这样既可以抑制遗忘,又可以深化理解.

案例 1 在用到"直线 l 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F,且直线 l 交抛物线于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点,则 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$,$y_1y_2=-p^2$."这一结论时,我们可以顺提:

(1)更一般地,设 $a>0$,直线 l 过点 $P(a,0)$ 时,则 $x_1x_2=a^2$,$y_1y_2=-2ap$.

(2)特别地,当 $a=2p$ 时,$x_1x_2=4p^2$,$y_1y_2=-4p^2$,即 $x_1x_2+y_1y_2=0$,从而当直线 l 过点 $P(2p,0)$ 时,有 $OA\perp OB$.

(3)考察(2)的逆命题,也是成立的. 即如果直线 l 与抛物线 $y^2=2px$ 的两个交点 A、B 满足 $OA\perp OB$,则直线 l 过定点 $P(2p,0)$.

(4)抛物线 $y^2=2px$ 的对称轴上有三个特殊点,即 $\left(\frac{p}{2},0\right)$,$(p,0)$,$(2p,0)$.

3 "思"与"算"两者兼顾

在平常的听课中,笔者发现老师们对于例题的讲解,最常见的是下面的两种讲法:

(1)老师示题后,老师先来分析思路,遇到需要计算的地方,老师停下来让学生算,等结果出来后老师接着分析,……,如此下去;一种思路讲完后,老师再接着分析其它的思路.

(2)学生审题后,老师先请一位学生来分析解题思路,遇到要算的地方,老师说课前我已算好,写出结果后让学生再接着谈思路,……,如此下去;一位学生谈完后,老师再请其他的学生来谈.

这两种讲法,前者侧重于算,但会束缚学生的思维;后者侧重于思,有时会影响教学进度,应该说各有利弊. 那么,在解析几何的复习中,采用哪种讲法更好呢?

笔者认为,教师最好不要一直采用单一的讲法,应该将两种讲法有机地结合起来,因题择法,做到"思"与"算"两者兼顾. 如果题目的解题思路比较难形成,或者思路比较多的,宜采用第二种讲法;如果虽然思路较易形成,但算理可以优化或者有步骤需要强调的,

宜采用第一种讲法.

因此,建议老师们在课前要将题目亲自算一下,而且要尽可能地用多种方法来解答,这样才能既可以确定较为恰当的讲法,又能为学生的思路提供中间结果.

4 强化课堂教学设计

在二轮复习时,我们的教学目的不仅是要让学生会做教学案上的几个题目,而是以这些题目为载体,让学生回顾知识、重温方法、深化理解、提升能力.为此,我们老师不能被教学案牵着鼻子走,课前要进行必要的教学设计.

(1)形成清晰的教学思路

作为教者,做题之后,要跳出教学方案,站在一个相对比较高的角度来看这节课,力求能以一条比较清晰的线条将本节课的内容展现在学生面前.

案例 2 在“求轨迹方程”的课上,我们可以设计以下一些问题来实施教学.

① 直接法求轨迹方程的步骤有哪些?通常如何来列式?

(“建”“设”“列”“代”“化”,五步一“回头”;直译条件、寻找关系、回归定义等.)

② 什么情况下用定义法求轨迹方程?常见的背景有哪些?

(动点所满足的关系式能用曲线的定义来表示的: $\sqrt{\ } \pm \sqrt{\ }$ =常数、$\sqrt{\ } = |\quad|$、动点在直角三角形直角顶点的、一个动圆与两个定圆都相切的、动点到定点距离与动点到定直线距离相等或相差一个常数的等)

③ 代入法求轨迹方程的原理是什么?其适用背景的特点是什么?

(将相关动点的坐标用所求动点的坐标表示,并将其代入到已知曲线方程中来得到所求动点坐标所满足的关系式;有两个相关的动点,一个所求,一个在已知曲线上.)

④ 参数求轨迹方程的原理是什么?通常以什么量为参数?

(将动点的两个坐标用同一个参数表示出来,通过消参来建立两个坐标间的关系式;题中所给字母、动直线的斜率、动直线的截距、其它动点的坐标等.)

我们甚至可以将这些问题写在黑板上,课堂小结时可以让学生一目了然.

(2)凸显学生的主体地位

课堂教学设计要有利于发挥学生的主体作用,这里的做法与经验很多,有待于我们去探索与总结..

让学生自己出题并解答就是值得一试的做法.

案例 3 在遇到“已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点,$A(4, 2)$,点 P 是该抛物线上的一个动点,试求 $|PA| + |PF|$ 的最小值.”的类似问题时,我们不妨要求学生完成这样一个问题:“请你利用该题的解题原理,以椭圆或双曲线为背景,出一道类似的问题,并加以解答.”

案例 4 复习“直线与圆锥曲线的位置关系”时,在第一轮复习的基础上,我们可以出下面这样的一道题:

已知抛物线 C: $y^2 = 4x$,点 $P(2, 0)$,过点 P 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A、B 两点,______,试求直线 l 的方程.请在横线上填上适当的条件,并加以解答.

这是一道条件开放型的问题,不仅要求学生对该题有一个深刻的认识:“加上什么样的条件就能使直线定下来”,还要求学生心中要有一些陈题的模型,要对照这些模型来赋值并验算.当然,这样的作业必须要提前布置,并且要有充分的时间让学生来准备.

(这里列举几个条件:(1)若点 P 是弦 AB 的中点;(2)若 $|AB| = 4\sqrt{6}$;(3)若以 AB 为直径的圆恰好经过点 $(4, 2)$;(4)若 $\triangle AOB$ 的面积为 8;(5)若 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$;(6)若直线 OA 与 OB 的斜率之和为 1;(7)若 AB 的中点与坐标原点 O 的连线的斜率为 -1;(8)若线段 AB 的垂直平分线的方程为 $2x - 4y - 9 = 0$)

如果这样来设计我们的教学,对学生来说是一个挑战,因而对学生有着较强的吸引力,从而可以充分地调动学生参与思考和探索的积极性.