2018 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题

贵州省六盘水市第一实验中学邹颖编录

2019 年 6 月 11 日

目　　录

2015 高考试题（全国卷 I）理科数学

一、选择题（单项选择题）：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60分。

1. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

2. $\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=$

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

3. 设命题 $p:\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$，则 $\neg p$ 为

A．$\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$　B．$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$　C．$\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$　D．$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2=2^n$

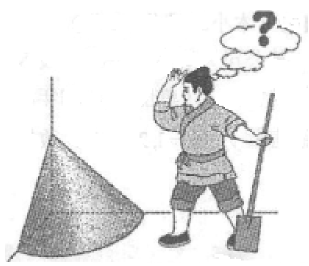
4. 投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试。已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为

A．0.648　　B．0.432　　C．0.36　　D．0.312

5. 已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1,F_2 是 C 的两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是

A．$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　B．$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$　C．$\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$　D．$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

6.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺。问：积及委米几何？”其意思为：“在屋内墙角堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有



A．14 斛　　B．22 斛　　C．36 斛　　D．66 斛

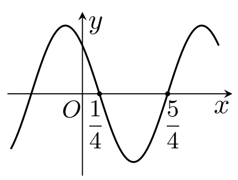
7. 设 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，若 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{AD}=$

A．$-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　B．$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　C．$\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　D．$\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

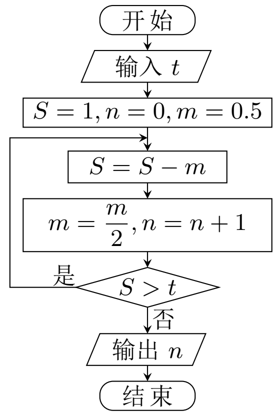
8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为

A．$\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$　B．$\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

C．$\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$　D．$\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$



9. 执行右面的程序框图，如果输入的 $t=0.01$，则输出的 $n=$



A．5

B．6

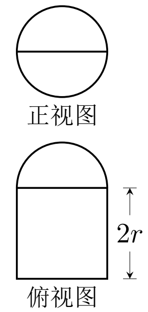
C．7

D．8

10. $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为

A．10　　B．20　　C．30　　D．60

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球（半径为 r）组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示．若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 $r=$



A．1　　B．2

C．4　　D．8

12. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是

A．$\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　B．$\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　C．$\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　D．$\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

二、填空题：共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$_____.

14. 一个圆经过椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点，且圆心在 x 轴上，则该圆的标准方程为_____.

15. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-y\leqslant 0,\\ x+y-4\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为_____.

16. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，则 AB 的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分，第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

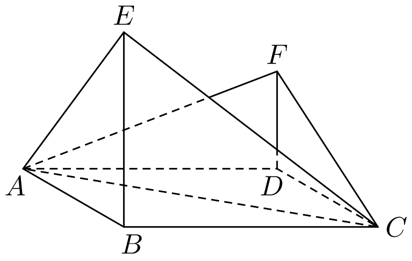
17.（12 分）S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n > 0$，$a_n^2 + a_n = 4S_n + 3$.

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设 $b_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18.（12 分）

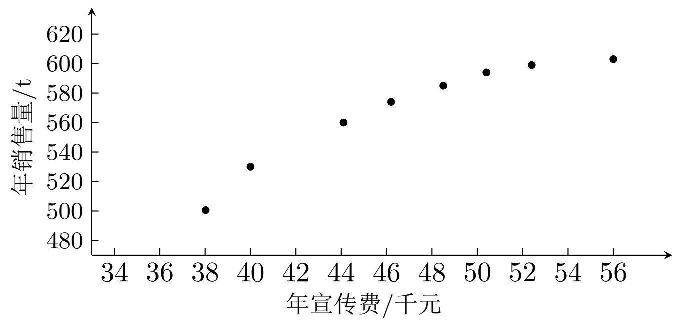
如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC = 120°$，E, F 是平面 $ABCD$ 同侧的两点，$BE \perp$ 平面 $ABCD$，$DF \perp$ 平面 $ABCD$，$BE = 2DF$，$AE \perp EC$.



（I）证明：平面 $AEC \perp$ 平面 AFC；

（II）求直线 AE 与直线 CF 所成的角的余弦值.

19.（12 分）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值：



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$，$\overline{w} = \dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8} w_i$.

（I）根据散点图判断 $y = a + bx$ 和 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由）；

（II）根据（I）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（III）已知这种产品的年利润 z 与 x、y 的关系为 $z = 0.2y - x$，根据（II）的结果回答下列问题：

（i）年宣传费 $x = 49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

（ii）年宣传费 x 为何值时，年利润的预报值最大？

附：对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots, (u_n, v_n)$，其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式为：

$$\hat{\beta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2},\ \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

20.（12 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: y = \dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a (a > 0)$ 交于 M，N 两点.

（I）当 $k = 0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程；

（II）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM = \angle OPN$？说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \dfrac{1}{4}$，$g(x) = -\ln x$.

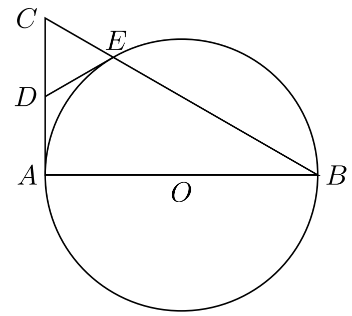
（I）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线；

（II）用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值，设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23、24 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（10 分）选修 4–1：几何证明选讲

如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 是 $\odot O$ 的切线，BC 交 $\odot O$ 于点 E.



（I）若 D 为 AC 的中点，证明：DE 是 $\odot O$ 的切线；

（II）若 $OA = \sqrt{3}CE$，求 $\angle ACB$ 的大小.

23.（10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 $C_1: x = -2$，圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$，以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（I）求 C_1，C_2 的极坐标方程；

（II）若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \dfrac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$，设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N，求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24.（10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知 $f(x) = |x + 1| - 2|x - a|$，$a > 0$.

（I）当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) > 1$ 的解集；

（II）若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6，求 a 的取值范围.

2015 高考试题（全国卷 I）文科数学

一、选择题（单项选择题）：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x=3n+2, n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{6,8,10,12,14\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为
A．5　　B．4　　C．3　　D．2

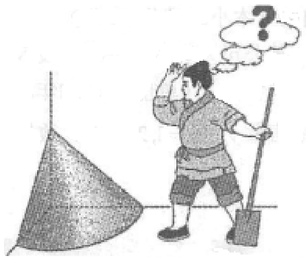
2. 已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$
A．$(-7,-4)$　　B．$(7,4)$　　C．$(-1,4)$　　D．$(1,4)$

3. 已知复数 z 满足 $(z-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$
A．$-2-\mathrm{i}$　　B．$-2+\mathrm{i}$　　C．$2-\mathrm{i}$　　D．$2+\mathrm{i}$

4. 如果三个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长，则称这三个数为一组勾股数. 从 $1,2,3,4,5$ 中任取三个不同的数，则这三个数构成一组勾股数的概率为
A．$\dfrac{3}{10}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{1}{10}$　　D．$\dfrac{1}{20}$

5. 已知椭圆 E 的中心在坐标原点，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，E 的右焦点与抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点重合，A,B 是 C 的准线与 E 的两个交点，则 $|AB|=$
A．3　　B．6　　C．9　　D．12

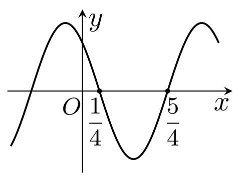
6.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺。问：积及委米几何？"其意思为："在屋内墙角堆放米（如图，面堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？"已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有



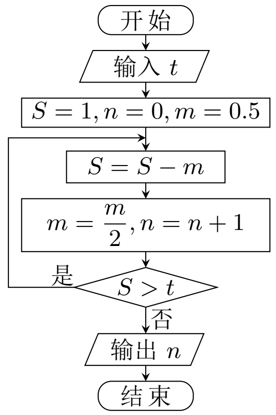
A．14 斛　　B．22 斛　　C．36 斛　　D．66 斛

7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $S_8=4S_4$，则 $a_{10}=$
A．$\dfrac{17}{2}$　　B．$\dfrac{19}{2}$　　C．10　　D．12

8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为
A．$\left(k\pi-\dfrac{1}{4}, k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$　　B．$\left(2k\pi-\dfrac{1}{4}, 2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$
C．$\left(k-\dfrac{1}{4}, k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$　　D．$\left(2k-\dfrac{1}{4}, 2k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

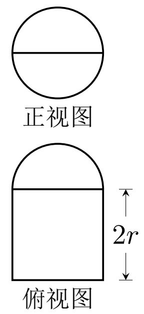


9. 执行右面的程序框图，如果输入的 $t=0.01$，则输出的 $n=$
A．5
B．6
C．7
D．8



10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1,\\ -\log_2(x+1), & x>1.\end{cases}$ 且 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$
A．$-\dfrac{7}{4}$　　B．$-\dfrac{5}{4}$　　C．$-\dfrac{3}{4}$　　D．$-\dfrac{1}{4}$

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球（半径为 r）组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示．若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 $r=$
A．1　　B．2
C．4　　D．8



12. 设函数 $y=f(x)$ 的图像与 $y=2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$，则 $a=$
A．-1　　B．1　　C．2　　D．4

二、填空题：共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $S_n=126$，则 $n=$______.

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线过点 $(2,7)$，则 $a=$______.

15. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0,\\ 2x-y+2\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为______.

16. 已知 F 是双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 的左支上一点，$A(0,6\sqrt{6})$．当 $\triangle APF$ 周长最小时，该三角形的面积为______.

三、解答题：共 70 分，第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

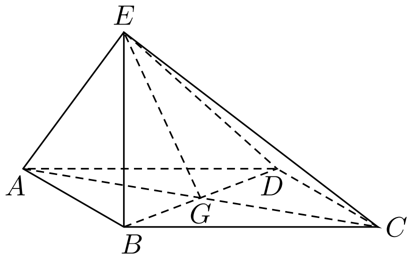
（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分) 已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边，$\sin^2 B = 2\sin A\sin C$.

（Ⅰ）若 $a=b$，求 $\cos B$；

（Ⅱ）设 $B=90^\circ$，且 $a=\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

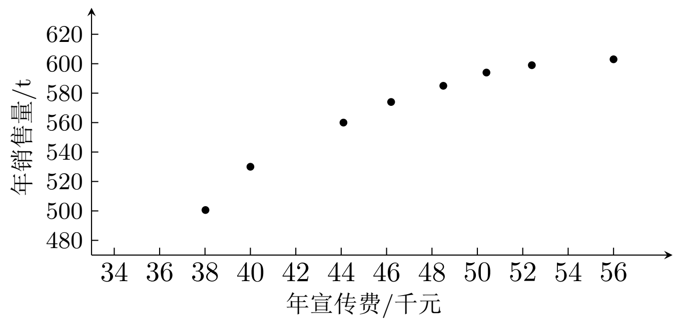


如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，G 为 AC 与 BD 的交点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅰ）证明：平面 $AEC\perp$ 平面 BED；

（Ⅱ）若 $\angle ABC=120^\circ$，$AE\perp EC$，三棱锥 E–ACD 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求该三棱锥的侧面积.

19. (12 分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i=1,2,\cdots,8)$ 数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值：



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$，$\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

（Ⅰ）根据散点图判断 $y=a+bx$ 和 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由）；

（Ⅱ）根据（Ⅰ）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

(III) 已知这种产品的年利润 z 与 x、y 的关系为 $z=0.2y-x$，根据（Ⅱ）的结果回答下列问题：

（i）年宣传费 $x=49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

（ii）年宣传费 x 为何值时，年利润的预报值最大？

附：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式为：

$$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2},\ \hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}.$$

20. (12 分)

已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M，N 两点.

（Ⅰ）求 k 的取值范围；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$，其中 O 为坐标原点，求 $|MN|$.

21. (12 分)

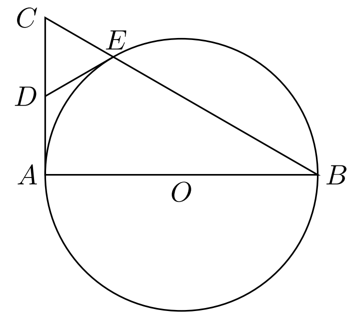
设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数；

（Ⅱ）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23、24 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（10 分）选修 4–1：几何证明选讲



如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 是 $\odot O$ 的切线，BC 交 $\odot O$ 于点 E.

（Ⅰ）若 D 为 AC 的中点，证明：DE 是 $\odot O$ 的切线；

（Ⅱ）若 $OA=\sqrt{3}CE$，求 $\angle ACB$ 的大小.

23.（10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 $C_1: x=-2$，圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（Ⅰ）求 C_1，C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}\,(\rho\in\mathbf{R})$，设 C_2 与 C_3 的交点为 M,N，求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24.（10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6，求 a 的取值范围.

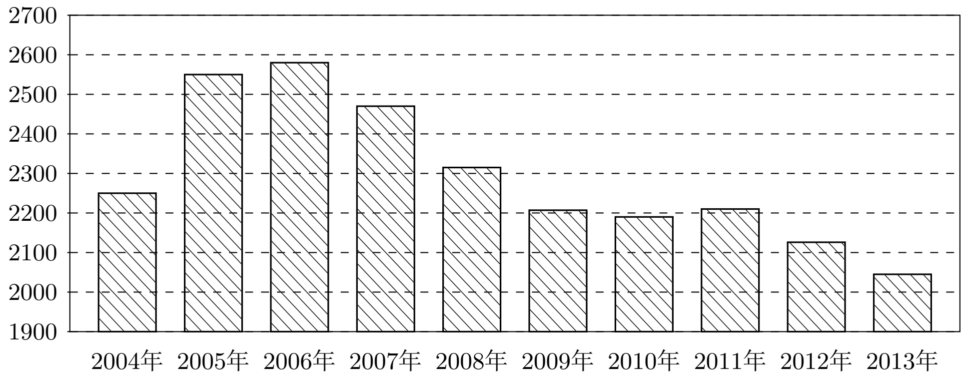
2015 高考试题（全国卷 II）理科数学

一、选择题：（本大题共12个小题，每小题5分，满分 60分。）

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,(x-1)(x+2)<0\}$，则 $A\cap B=$
   A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2. 设 a 为实数，且 $(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$，则 $a=$
   A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3. 根据下面给出的2004年至2013年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）柱形图，以下结论不正确的是

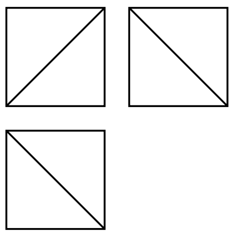


   A．逐年比较，2008年减少二氧化硫排放量的效果最显著
   B．2007年我国治理二氧化硫排放显现成效
   C．2006年以来我国二氧化硫排放量呈减少趋势
   D．2006年以来我国二氧化硫排放量与年份正相关

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_3+a_5+a_7=$
   A．21　　B．42　　C．63　　D．84

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$
   A．3　　B．6　　C．9　　D．12

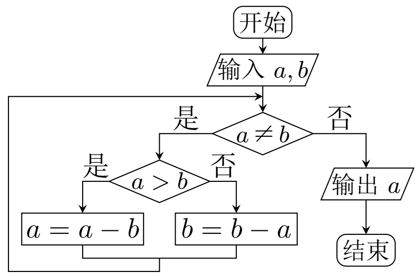
6. 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为



   A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{7}$
   C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{5}$

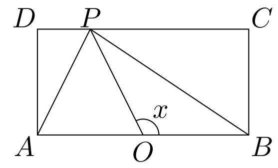
7. 过三点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$ 的圆交 y 轴于 M，N 两点，则 $|MN|=$
   A．$2\sqrt{6}$　　B．8　　C．$4\sqrt{6}$　　D．10

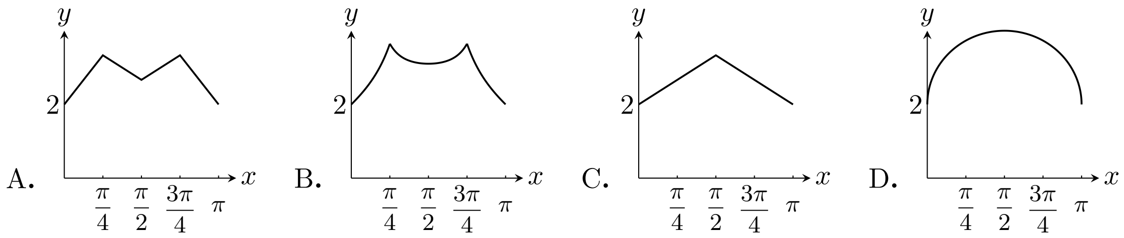
8. 右边的程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序，若输入的 a，b 分别为14，18，则输出的 $a=$
   A．0　　B．2
   C．4　　D．14



9. 已知 A，B 是球 O 的球面上两点，$\angle AOB=90^\circ$，C 为该球面上的动点，若三棱锥 O–ABC 体积的最大值为36，则球 O 的表面积为
   A．36π　　B．64π　　C．144π　　D．256π

10. 如图，长方形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC,CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A，B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 的图像大致为





11. 已知 A，B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在 E 上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为
   A．$\sqrt{5}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

12. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是
   A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$
   C．$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D．$(0,1)\cup(1,+\infty)$

二、填空题：（共 4个小题，每小题5分，满分 20分）

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$_____.

14. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

15. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇次幂项的系数之和为32，则 $a=$_____.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$_____.

三、解答题：（共 5 个小题，满分 70 分）

17. (12 分) $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，$\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

（I）求 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$；

（II）若 $AD=1$，$DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

18. (12 分) 某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：	62	73	81	92	95	85	74	64	53	76
	78	86	95	66	97	78	88	82	76	89
B 地区：	73	83	62	51	91	46	53	73	64	82
	93	48	65	81	74	56	54	76	65	79

（I）根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，给出结论即可）；

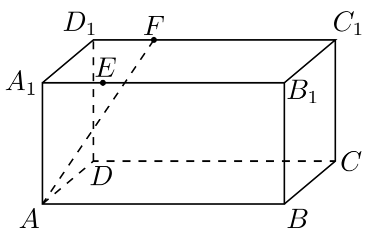
A 地区		B 地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

（II）根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C：“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”. 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率.

19. (12 分) 如图，长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=16$，$BC=10$，$AA_1=8$，点 E，F 分别在 A_1B_1，D_1C_1 上，$A_1E=D_1F=4$. 过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形.



（I）在图中画出这个正方形（不必说明画法和理由）；

（II）求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.

20.（12 分）

已知是椭圆 C：$9x^2+y^2=m^2\,(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M.

（I）证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（II）若 过点 $(\dfrac{m}{3},m)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

21. (12 分)

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$.

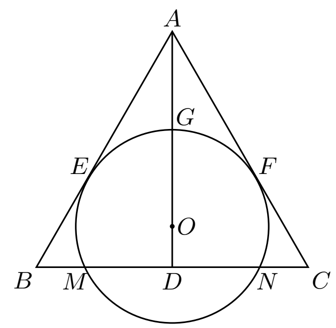
（I）证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

（II）若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$，求 m 的取值范围.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，O 为等腰三角形 ABC 内一点，$\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M,N 两点，与底边上的高 AD 交于点 G，且与 AB，AC 分别相切于 E，F 两点.



（I）证明：$EF/\!/BC$；

（II）若 AG 等于 $\odot O$ 的半径，且 $AE=MN=2\sqrt{3}$，求四边形 $EBCF$ 的面积.

23. (10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$，（$t$ 是参数，$t\neq 0$），其中 $0\leqslant\alpha<\pi$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$，$C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

（I）求 C_2 与 C_3 的交点的直角坐标；

（II）若 C_1 与 C_2 相交于点 A，C_1 与 C_3 相交于点 B，求 $|AB|$ 的最大值.

24. (10 分) 选修 4–5：不等式选讲

设 a,b,c,d 均为正数，且 $a+b=c+d$，证明：

（I）若 $ab>cd$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$；

（II）$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

2015 高考试题（全国卷 II）文科数学

一、选择题：(本大题共 12 个小题, 每小题 5 分，满分　60 分。)

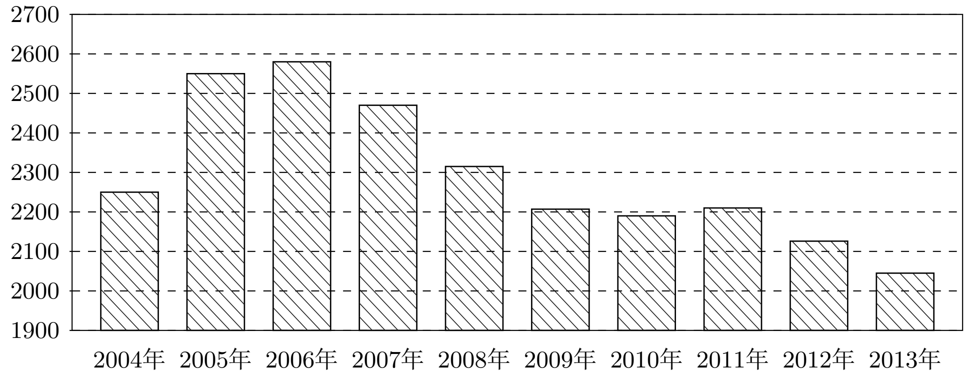
1. 已知集合 $A=\{x\,|-1<x<2\}$, $B=\{x\,|\,0<x<3\}$，则 $A\cup B=$

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,2)$　　D. $(2,3)$

2. 设 a 为实数，且 $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$，则 $a=$

A. -4　　B. -3　　C. 3　　D. 4

3. 根据下面给出的2004年至2013年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）柱形图，以下结论不正确的是



A. 逐年比较，2008年减少二氧化硫排放量的效果最显著

B. 2007年我国治理二氧化硫排放显现成效

C. 2006年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势

D. 2006年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

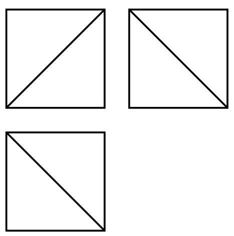
4. 向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1+a_3+a_5=3$，则 $S_5=$

A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 11

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为



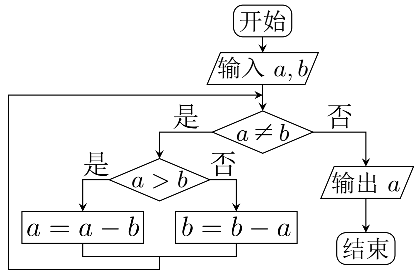
A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{7}$

C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

7. 已知三点 $A(1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，$C(2,\sqrt{3})$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为

A. $\dfrac{5}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

8. 右边的程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序，若输入的 a，b 分别为14，18，则输出的 $a=$



A. 0　　B. 2

C. 4　　D. 14

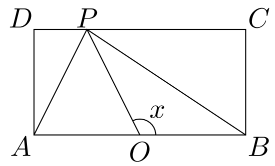
9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_3a_5=4(a_4-1)$，则 $a_2=$

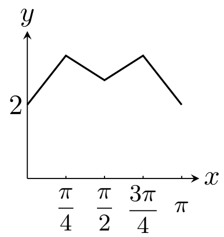
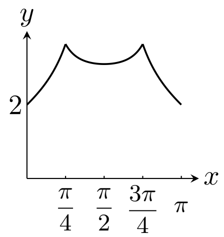
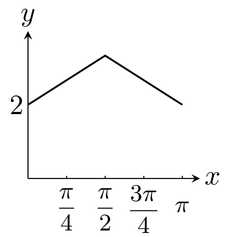
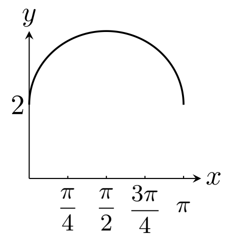
A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

10. 已知 A，B 是球 O 的球面上两点，$\angle AOB=90^\circ$，C 为该球面上的动点，若三棱锥 O–ABC 体积的最大值为36，则球 O 的表面积为

A. 36π　　B. 64π　　C. 144π　　D. 256π

11. 如图，长方形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC,CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A，B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 的图像大致为



A. 　B. 　C. 　D. 

12. 设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是

A. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

二、填空题：(共 4 个小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

13. 已知函数 $f(x)=ax^3-2x$ 的图像过点 $(-1,4)$，则 $a=$______.

14. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-5\leqslant 0\\2x-y-1\geqslant 0\\x-2y+1\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为______.

15. 已知双曲线过点 $(4,\sqrt{3})$，且渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$，则该双曲线的标准方程为______.

16. 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$______.

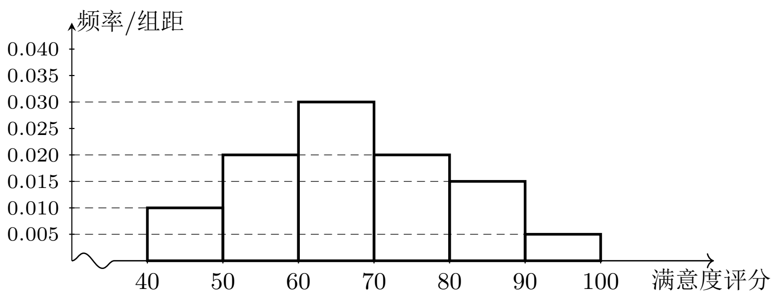
三、解答题：（共 5 个小题，满分 70 分）

17. (12 分) $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，$BD=2DC$.

（Ⅰ）求 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$；　　II）若 $\angle BAC=60^\circ$，求 $\angle B$.

18. (12 分) 某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 40 个用户，根据用户对产品的满意度评分，得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表.

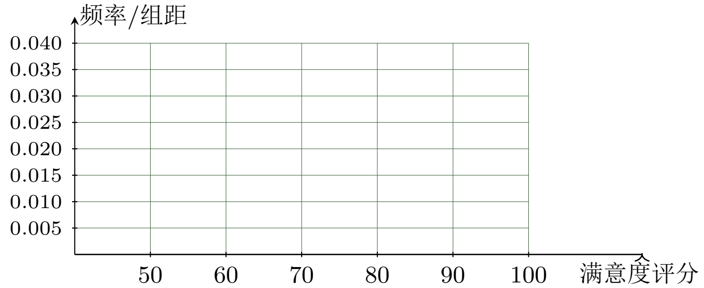
A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频 数	2	8	14	10	6

（Ⅰ）在答题卡上作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图，并通过直方图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，给出结论即可）；

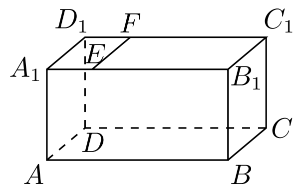


（II）根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区用户的满意度等级为不满意的概率大？说明理由.

19. (12 分) 如图，长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=16$，$BC=10$，$AA_1=8$，点 E，F 分别在 A_1B_1，D_1C_1 上，$A_1E=D_1F=4$. 过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形.



（Ⅰ）在图中画出这个正方形（不必说明画法和理由）；

（II）求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值.

20. (12 分) 已知是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt2}{2}$，点 $(2,\sqrt2)$ 在 C 上.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（II）直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M，证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值

21. (12 分) 已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.

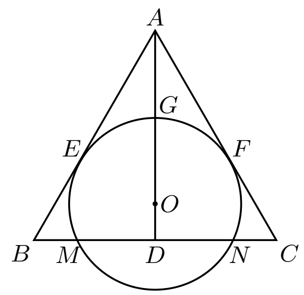
（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，O 为等腰三角形 ABC 内一点，$\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点，与底边上的高 AD 交于点 G，且与 AB，AC 分别相切于 E，F 两点.



（Ⅰ）证明：$EF//BC$；

（II）若 AG 等于 $\odot O$ 的半径，且 $AE=MN=2\sqrt3$，求四边形 $EBCF$ 的面积.

23. (10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$，($t$ 是参数，$t\neq0$)，其中 $0\leqslant\alpha<\pi$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$，$C_3:\rho=2\sqrt3\cos\theta$.

（Ⅰ）求 C_2 与 C_3 的交点的直角坐标；

（II）若 C_1 与 C_2 相交于点 A，C_1 与 C_3 相交于点 B，求 $|AB|$ 的最大值.

24. (10 分) 选修 4–5：不等式选讲

设 a,b,c,d 均为正数，且 $a+b=c+d$，证明：

（Ⅰ）若 $ab>cd$，则 $\sqrt a+\sqrt b>\sqrt c+\sqrt d$；

（II）$\sqrt a+\sqrt b>\sqrt c+\sqrt d$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

2016 高考试题（全国卷 I）理科数学

一、选择题：(本大题共12个小题，每小题5分，满分 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\mid 2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},3\right)$

2. 设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$，其中 x,y 是实数，则 $|x+y\mathrm{i}|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27，$a_{10}=8$，则 $a_{100}=$

A. 100　　B. 99　　C. 98　　D. 97

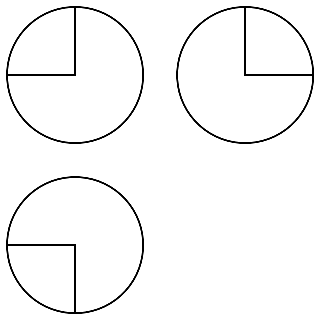
4. 某公司的班车在 7 : 30, 8 : 00, 8 : 30 发车，小明在 7 : 50 至 8 : 30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 10 分钟的概率是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线，且该双曲线的焦距为 4，则 n 的取值范围是

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,\sqrt{3})$

6. 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径，若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是



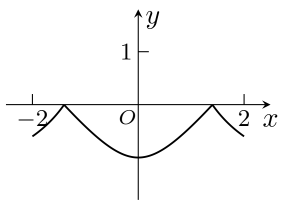
A. 17π

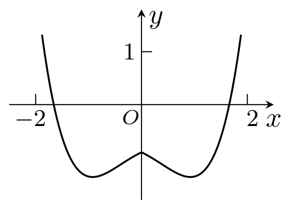
B. 18π

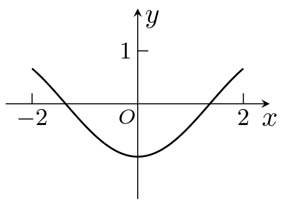
C. 20π

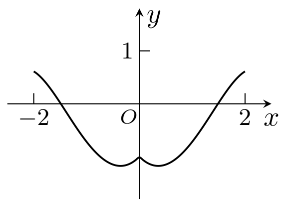
D. 28π

7. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为

A. 

B. 

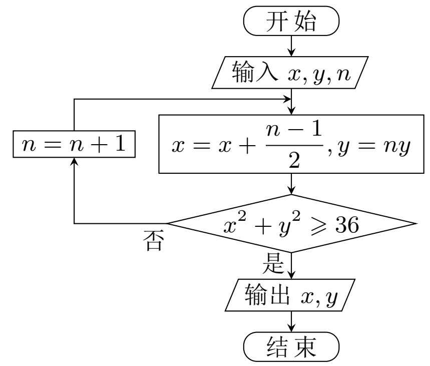
C. 

D. 

8. 若 $a>b>1$, $0<c<1$，则

A. $a^c<b^c$　　B. $ab^c<ba^c$　　C. $a\log_b c<b\log_a c$　　D. $\log_a c<\log_b c$

9. 执行右面的程序框图，如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$，则输出的 x, y 的值满足



A. $y=2x$

B. $y=3x$

C. $y=4x$

D. $y=5x$

10. 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 D, E 两点．已知 $|AB|=4\sqrt{2}$, $|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A, α // 平面 CB_1D_1, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$，则 m, n 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ \left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 的图像的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

二、填空题：(共 4个小题，每小题5分，满分 20分)

13. 设向量则 $\boldsymbol{a}=(m,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则 $m=$______.

14. $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中，x^3 的系数是________.（用数字填写答案）

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为________.

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg，乙材料 1 kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg，乙材料 0.3 kg，用 3 个工时．生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 150 kg，乙材料 90 kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A，产品 B 的利润之和的最大值为__________ 元.

三、解答题：（共 5 个小题, 满分 70 分）

17.（本小题 12 分）

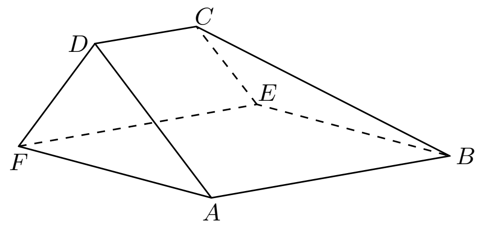
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c,，已知 $2\cos C(a\cos B + b\cos A) = c$.

（I）求 C;

（II）若 $c = \sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18.（本小题 12 分）

如图，在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，$AF = 2FD$, $\angle AFD = 90°$，且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 $60°$.

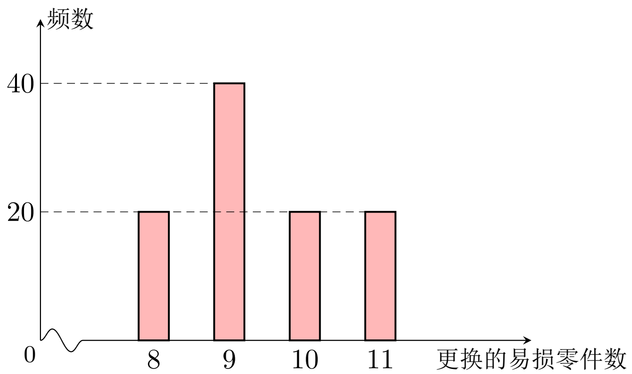


（I）证明：平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$;

（II）求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.

19.（本小题 12 分）

某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰. 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得右面柱状图：



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

（I）求 X 的分布列;

（II）若要求 $P(X \leqslant n) \geqslant 0.5$，确定 n 的最小值;

(III) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n = 19$ 与 $n = 20$ 之中选其一，应选用哪个?

20.（本小题 12 分）

设圆 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴不重合，l 交圆 A 与 C, D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

（I）证明 $|EA| + |EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程;

（II）设点 E 的轨迹为 C_1，直线 l 交 C_1 于 M, N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P, Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

21.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

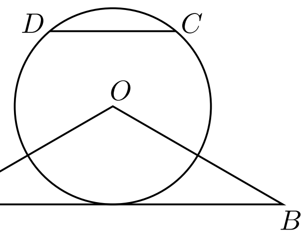
（I）求 a 的取值范围;

（II）设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1 + x_2 < 2$.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题 10 分）选修 4–1：几何证明选讲

如图，$\triangle OAB$ 是等腰三角形，$\angle AOB = 120°$. 以 O 为圆心，$\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆.



（I）证明：直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

（II）点 C, D 在 $\odot O$ 上，且 A, B, C, D 四点共圆，证明：$AB \parallel CD$.

23.（本小题 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = 1 + a\sin t, \end{cases}$（$t$ 为参数，$a > 0$）. 在以坐标原点为极点，x 轴正半轴的极坐标系中，曲线 $C_2: \rho = 4\cos\theta$.

（I）说明 C_1 是哪一种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

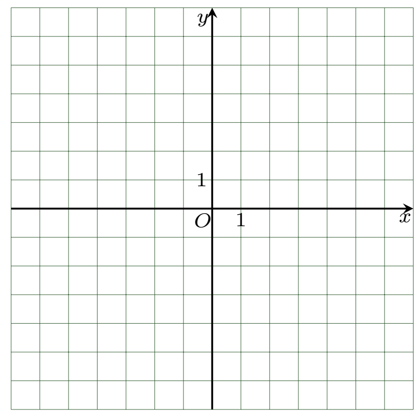
（II）直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0 = 2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a.

24.（本小题 10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - |2x-3|$.

（I）在答题卡第 24 题图中画出 $y = f(x)$ 的图像;

（II）求不等式 $|f(x)| > 1$ 的解集.



2016 高考试题（全国卷 I）文科数学

一、选择题：（本大题共 12 个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{1,3\}$　　B．$\{3,5\}$　　C．$\{5,7\}$　　D．$\{1,7\}$

2. 设 $(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 $a=$

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

3. 为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选两种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，则紫色和红色的花不在同一花坛的概率是

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{5}{6}$

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．已知 $a=\sqrt{5}, c=2, \cos A=\dfrac{2}{3}$，则 $b=$

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\dfrac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为

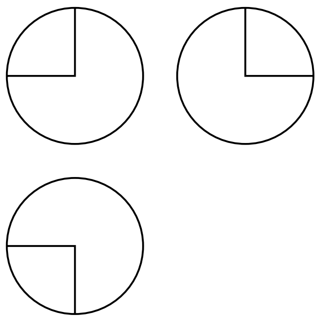
A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

6. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图像向右平移 $\dfrac{1}{4}$ 个周期后，所的图像对应的函数为

A．$y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B．$y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

C．$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　D．$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径，若该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$，则它的表面积是



A．17π

B．18π

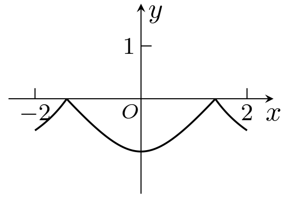
C．20π

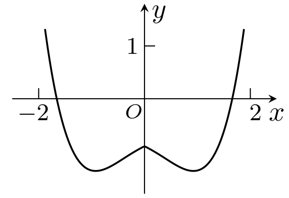
D．28π

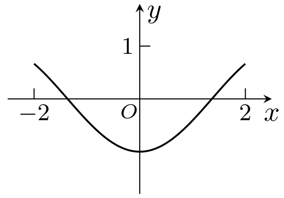
8. 若 $a>b>0, 0<c<1$，则

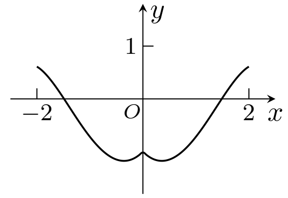
A．$\log_a c<\log_b c$　　B．$\log_c a<\log_c b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$c^a>c^b$

9. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为

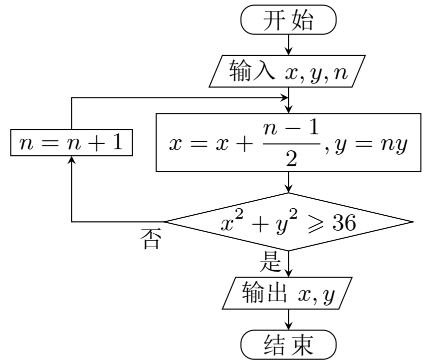
A．


B．


C．


D．


10. 执行右面的程序框图，如果输入的 $x=0, y=1, n=1$，则输出的 x, y 的值满足



A．$y=2x$

B．$y=3x$

C．$y=4x$

D．$y=5x$

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，$\alpha\,/\!/$ 平面 CB_1D_1，$\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$，$\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$，则 m, n 所成角的正弦值为

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是

A．$[-1,1]$　　B．$[-1,\dfrac{1}{3}]$　　C．$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}]$　　D．$[-1,-\dfrac{1}{3}]$

二、填空题：（共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$_____．

14. 已知 θ 是第四象限角，且 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\dfrac{\pi}{4})=$_____．

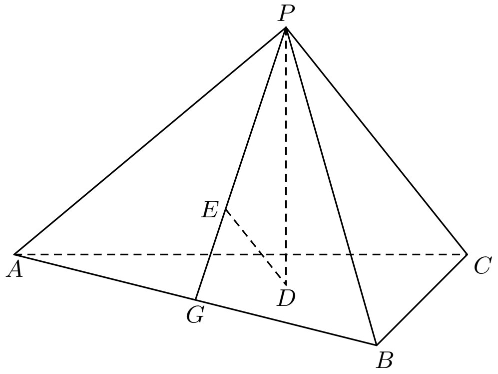
15. 设直线 $y=x+2a$ 与圆 $C: x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A, B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为________．

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg，乙材料 1 kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg，乙材料 0.3 kg，用 3 个工时．生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 150 kg，乙材料 90 kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A，产品 B 的利润之和的最大值为___________ 元．

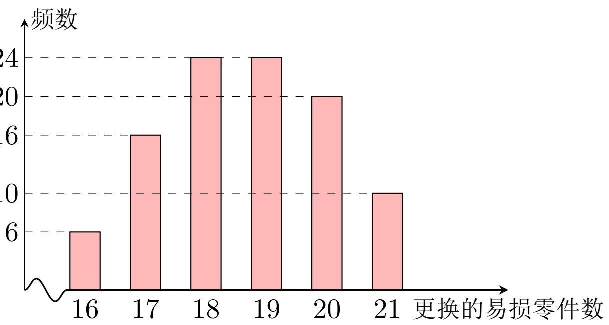
三、解答题：（满分 70 分）

17. (本小题 12 分)
已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1,\ b_2=\dfrac{1}{3},\ a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.
（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
（Ⅱ）求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. (本小题 12 分)
如图，已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形，$PA=6$. 顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于点 G.
（Ⅰ）证明：G 是 AB 的中点；
（Ⅱ）在答题卡第 18 题图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F（说明作法及理由）并求四面体 $PDEF$ 的体积.



19. (本小题满分 12 分)
某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰. 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得右面柱状图：



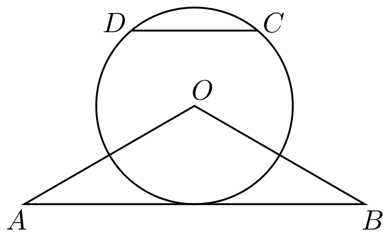
记 x 表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数，y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元），n 表示购机的同时购买的易损零件数.
（Ⅰ）若 $n=19$，求 y 与 x 的函数解析式;
（Ⅱ）若要求“需更换的易损零件数不大于 n”的频率不小于 0.5，求 n 的最小值;
(III) 假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件，或每台都购买 20 个易损零件，分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买一台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件？

20. (本小题满分 12 分)
在直角坐标系 xOy 中，直线 $l: y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连接 ON 并延长交 C 于点 H.
（Ⅰ）求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$;
（Ⅱ）除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由.

21. (本小题满分 12 分)
已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$.
（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性;
（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

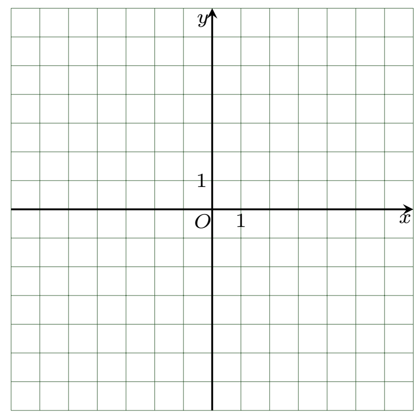
请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4–1：几何证明选讲
如图，$\triangle OAB$ 是等腰三角形，$\angle AOB=120^\circ$. 以 O 为圆心，$\dfrac{1}{2}OA$ 为半径作圆.
（Ⅰ）证明：直线 AB 与 $\odot O$ 相切;
（Ⅱ）点 C, D 在 $\odot O$ 上，且 A,B,C,D 四点共圆，证明：$AB \,/\!/\, CD$.



23. (本小题满分 10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程
在直角坐标系 xOy 中曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=1+a\sin t, \end{cases}$（$t$ 为参数，$a>0$）. 在以坐标原点为极点，x 轴正半轴的极坐标系中，曲线 $C_2: \rho=4\cos\theta$.
（Ⅰ）说明 C_1 是哪一种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程;
（Ⅱ）直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4–5：不等式选讲
已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.
（Ⅰ）在答题卡第 24 题图中画出 $y=f(x)$ 的图像;
（Ⅱ）求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



2016 高考试题（全国卷 II）理科数学

一、选择题：(本大题共12个小题, 每小题5分，满分 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

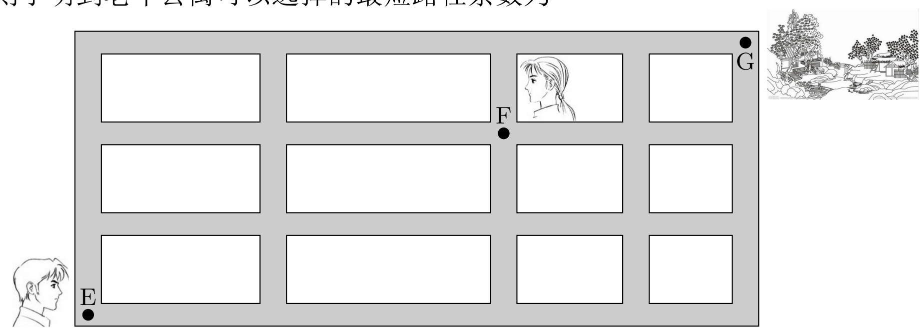
1. 已知 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是
A. $(-3,1)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)$

2. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|(x+1)(x-2)<0, x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cup B=$
A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

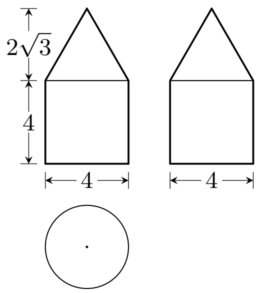
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$
A. -8　　B. -6　　C. 6　　D. 8

4. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则 $a=$
A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. 如图，小明从街道的 E 处出发，先到 F 处与小红会合，再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为
A. 24
B. 18
C. 12
D. 9

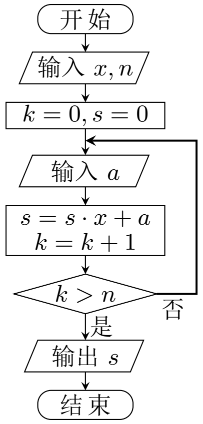


6. 右图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为
A. 20π
B. 24π
C. 28π
D. 32π



7. 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后图像的对称轴为
A. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$
C. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

8. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法，右图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图，若输入的 $x=2, n=2$，依次输入的 a 为 $2,2,5$，则输出的 $s=$
A. 7
B. 12
C. 17
D. 34



9. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$
A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{7}{25}$

10. 从区间 $[0,1]$ 随机取 $2n$ 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$，构成 n 个数对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个，则用随机模拟的方法得到的圆周率 π 的近似值为
A. $\frac{4n}{m}$　　B. $\frac{2n}{m}$　　C. $\frac{4m}{n}$　　D. $\frac{2m}{n}$

11. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，点 M 在 E 上，MF_1 与 x 轴垂直，$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$，则 E 的离心率为
A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

12. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$，若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$
A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

二、填空题：(共 4个小题, 每小题5分, 满分 20分)

13. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\cos A=\frac{4}{5}, \cos C=\frac{5}{13}, a=1$，则 $b=$______.

14. α,β 是两个平面，m,n 是两条直线，有下列四个命题：
① 如果 $m\perp n, m\perp\alpha, n\parallel\beta$，那么 $\alpha\perp\beta$.
② 如果 $m\perp\alpha, n\parallel\alpha$，那么 $m\perp n$.
③ 如果 $\alpha\parallel\beta, m\subset\alpha$，那么 $m\parallel\beta$.
④ 如果 $m\parallel n, \alpha\parallel\beta$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.
其中正确的命题有________________.（填写所有正确命题的编号）

15. 有三张卡片，分别写有 1 和 2，1 和 3，2 和 3．甲，乙，丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说：“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，乙看了丙的卡片后说：“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”，丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”，则甲的卡片上的数字是__________．

16. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线，也是曲线 $y = \ln(x+2)$ 的切线，$b =$______．

三、解答题：（共 5 个小题, 满分 70 分）

17. (本小题 12 分)

S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1 = 1$, $S_7 = 28$．记 $b_n = [\lg a_n]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 [0.9]=0, [lg99]=1．

（Ⅰ）求 b_1, b_{11}, b_{101}；

（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项的和．

18. (本小题 12 分)

某保险的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人成为续保人，续保人本年度的保费与上年度出险次数的关联如下：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下：

一年内出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
概　率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

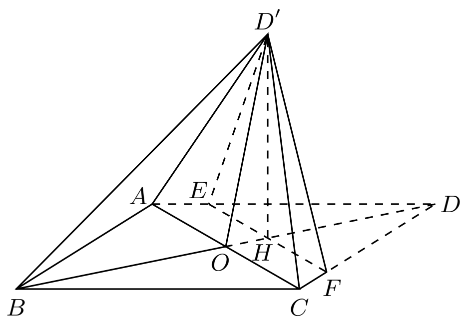
（Ⅰ）求一续保人本年度高于基本保费的概率；

（Ⅱ）若一续保人本年度的保费高于基本保费，求其保费比基本保费高出 60% 的概率；

(Ⅲ) 求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值．

19. (本小题 12 分)

如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AB = 5, AC = 6$，点 E, F 分别在 AD, CD 上，$AE = CF = \frac{5}{4}$，EF 交 BD 于点 H，将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置，$OD' = \sqrt{10}$．



（Ⅰ）证明 $D'H \perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求二面角 B–$D'A$–C 的正弦值．

20. (本小题 12 分)

已知椭圆 $E : \frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k(k > 0)$ 的直线交 E 于 A, M 两点，点 N 在 E 上，$MA \perp NA$．

（Ⅰ）当 $t = 4$, $|AM| = |AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；

（Ⅱ）当 $2|AM| = |AN|$ 时，求 k 的取值范围．

21. (本小题 12 分)

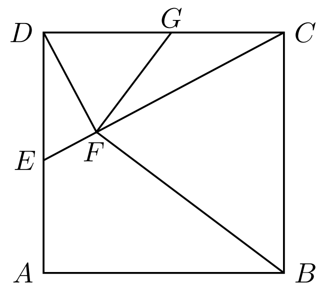
（Ⅰ）讨论函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 的单调性，并证明当 $x > 0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x + x + 2 > 0$

（Ⅱ）证明：当 $a \in [0, 1)$ 时，函数 $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - ax - a}{x^2}(x > 0)$ 有最小值，设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域．

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题 10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，在正方形 $ABCD$ 中，E, G 分别在边 DA, DC 上（不与端点重合），且 $DE = DG$，过 D 点作 $DF \perp CE$，垂足为 F．



（Ⅰ）证明：B, C, G, F 四点共圆；

（Ⅱ）若 $AB = 1, E$ 为 DA 的中点，求四边形 $BCGF$ 的面积．

23. (本小题 10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x+6)^2 + y^2 = 25$．

（Ⅰ）以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，求 C 的极坐标方程；

（Ⅱ）直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \end{cases}$（$t$ 为参数），l 与 C 交于 A, B 两点，$|AB| = \sqrt{10}$，求 l 的斜率．

24. (本小题 10 分) 选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{1}{2}|$, M 为不等式 $f(x) < 2$ 的解集．

（Ⅰ）求 M；

（Ⅱ）证明：当 $a, b \in M$ 时，$|a + b| < |1 + ab|$．

2016 高考试题（全国卷 II）文科数学

一、选择题：(本大题共12个小题，每小题5分，满分 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

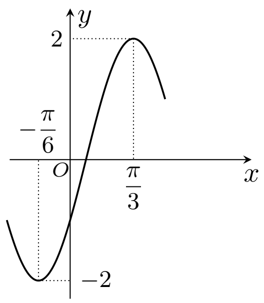
1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|x^2<9,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$　B. $\{-2,-1,0,1,2\}$　C. $\{1,2,3\}$　D. $\{1,2\}$

2. 设复数 z 满足 $z+\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=$

A. $-1+2\mathrm{i}$　B. $1-2\mathrm{i}$　C. $3+2\mathrm{i}$　D. $3-2\mathrm{i}$

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则



A. $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

B. $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

C. $y=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$

D. $y=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

4. 体积为 8 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为

A. 12π　B. $\dfrac{32}{3}\pi$　C. 8π　D. 4π

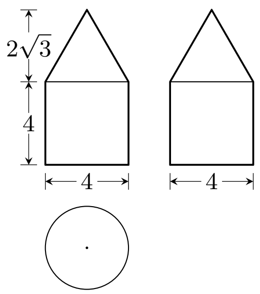
5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 与 C 交于点 P，$PF\perp x$ 轴，则 $k=$

A. $\dfrac{1}{2}$　B. 1　C. $\dfrac{3}{2}$　D. 2

6. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则 $a=$

A. $-\dfrac{4}{3}$　B. $-\dfrac{3}{4}$　C. $\sqrt{3}$　D. 2

7. 右图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为



A. 20π

B. 24π

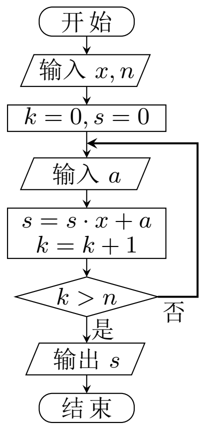
C. 28π

D. 32π

8. 某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为 40 秒．若一名行人来到该路口遇到红灯，则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为

A. $\dfrac{7}{10}$　B. $\dfrac{5}{8}$　C. $\dfrac{3}{8}$　D. $\dfrac{3}{10}$

9. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法，右图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图，若输入的 $x=2,n=2$，依次输入的 a 为 $2,2,5$，则输出的 $s=$



A. 7

B. 12

C. 17

D. 34

10. 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是

A. $y=x$　B. $y=\lg x$　C. $y=2^x$　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

11. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 的最大值为

A. 4　B. 5　C. 6　D. 7

12. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$

A. 0　B. m　C. $2m$　D. $4m$

二、填空题：(共 4个小题，每小题5分，满分 20分)

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,4)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，且 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，则 $m=$______.

14. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y-3\geqslant 0\\x-3\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的最小值为______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$，则 $b=$______.

16. 有三张卡片，分别写有 1 和 2，1 和 3，2 和 3．甲，乙，丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说：“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，乙看了丙的卡片后说：“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”，丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”，则甲的卡片上的数字是__________.

三、解答题：（共 5 个小题，满分 70 分）

17. (本小题 12 分)

等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4=4$, $a_5+a_7=6$.

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（II）设 $b_n=[a_n]$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项的和，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9]=0$, $[2.6]=2$.

18. (本小题 12 分)

某保险的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人成为续保人，续保人本年度的保费与上年度出险次数的关联如下：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下：

出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
频　率	60	50	30	30	20	10

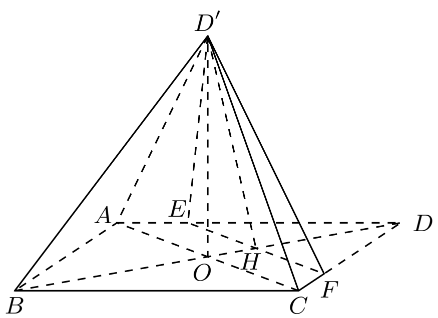
（I）记 A 为事件：“一续保人本年度的保费不高于基本保费”．求 $P(A)$ 的估计值;

（II）记 B 为事件：“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”．求 $P(B)$ 的估计值;

(III) 求续保人本年度的平均保费的估计值.

19. (本小题 12 分)

如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，点 E,F 分别在 AD,CD 上，$AE=CF$，EF 交 BD 于点 H，将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置，$OD'=\sqrt{10}$.



（I）证明：$AC\perp HD'$;

（II）若 $AB=5$, $AC=6$, $AE=\dfrac{5}{4}$, $OD'=2\sqrt{2}$，求五棱锥 D'–$ABCFE$ 的体积.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

（I）当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

（II）若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，设 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知 A 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A,M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

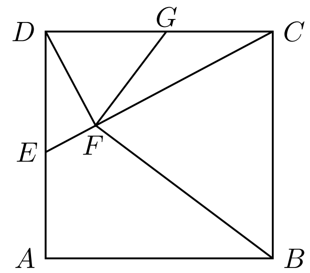
（I）当 $|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积;

（II）当 $2|AM|=|AN|$ 时，证明：$\sqrt{3}<k<2$.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，在正方形 $ABCD$ 中，E,G 分别在边 DA,DC 上（不与端点重合），且 $DE=DG$，过 D 点作 $DF\perp CE$，垂足为 F.



（I）证明：B,C,G,F 四点共圆;

（II）若 $AB=1$, E 为 DA 的中点，求四边形 $BCGF$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.

（I）以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，求 C 的极坐标方程;

（II）直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$（$t$ 为参数），l 与 C 交于 A,B 两点，$|AB|=\sqrt{10}$，求 l 的斜率.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-\dfrac{1}{2}|+|x+\dfrac{1}{2}|$, M 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

（I）求 M;

（II）证明：当 $a,b\in M$ 时，$|a+b|<|1+ab|$.

2016 高考试题（全国卷 III）理科数学

一、选择题：（本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 满分 60 分。）

1. 设集合 $S=\{x|(x-2)(x-3)\geqslant 0\}, T=\{x|x>0\}$，则 $S\cap T=$

A. $[2,3]$　B. $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　C. $[3,+\infty)$　D. $(0,2]\cup[3,+\infty)$

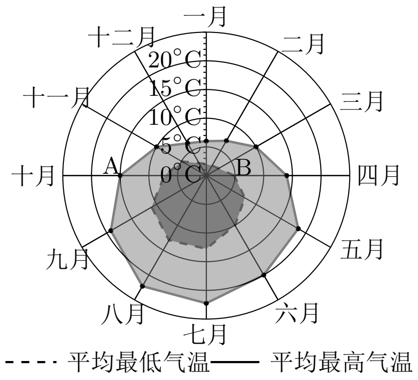
2. 若 $z=1+2\mathrm{i}$，则 $\dfrac{4\mathrm{i}}{z\bar{z}-1}=$

A. 1　B. -1　C. i　D. $-\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\angle ABC=$

A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C，B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C. 下面叙述不正确的是



A. 各月平均最低气温都在 0°C 以上

B. 七月的平均温差比一月的平均温差大

C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同

D. 平均最高气温高于 20°C 的月份有 5 个

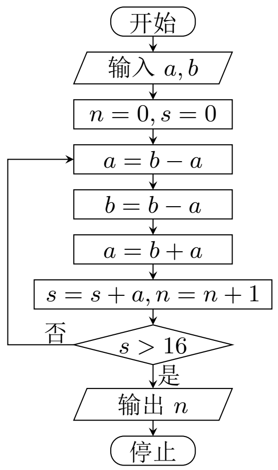
5. 若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$

A. $\dfrac{64}{25}$　B. $\dfrac{48}{25}$　C. 1　D. $\dfrac{16}{25}$

6. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}, b=4^{\frac{2}{5}}, c=25^{\frac{1}{3}}$，则

A. $b<a<c$　B. $a<b<c$　C. $b<c<a$　D. $c<a<b$

7. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a=4, b=6$，那么输出的 $n=$



A. 3

B. 4

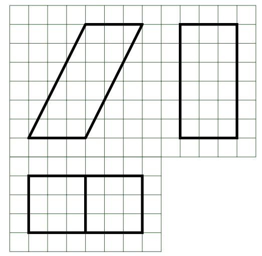
C. 5

D. 6

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　C. $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　D. $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为



A. $18+36\sqrt{5}$

B. $54+18\sqrt{5}$

C. 90

D. 81

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球. 若 $AB\perp BC, AB=6, BC=8, AA_1=3$，则 V 的最大值是

A. 4π　B. $\dfrac{9\pi}{2}$　C. 6π　D. $\dfrac{32\pi}{3}$

11. 已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，A,B 分别 C 的左，右顶点.P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{2}{3}$　D. $\dfrac{3}{4}$

12. 定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$ 如下：$\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对于任意 $k\leqslant 2m$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中的 0 的个数不少于 1 的个数，若 $m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有

A. 18 个　B. 16 个　C. 14 个　D. 12 个

二、填空题：（共 4 个小题, 每小题 5 分, 满分 20 分）

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图像至少向右平移________ 个单位长度得到.

15. 已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是______________.

16. 已知直线 $l: mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A,B 两点，过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|CD|=$_____.

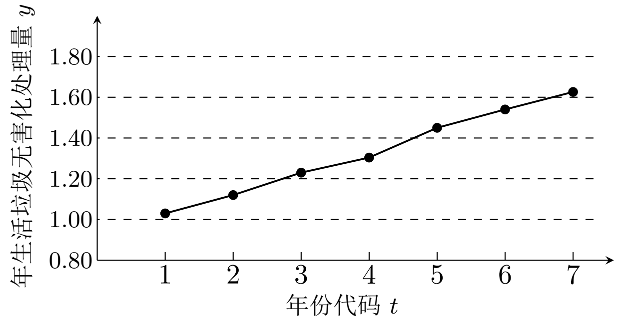
三、解答题：(满分 70 分)

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$，其中 $\lambda\neq 0$.

（ I ）证明 $\{a_n\}$ 是等比数列的，并求其通项公式;

（II）若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，求 λ.

18. (12 分) 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.



注意：年份代码 1–7 分别对应 2008–2014

（ I ）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明;

（II）建立 y 与 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i=9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=0.55$, $\sqrt{7}\approx 2.646$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,

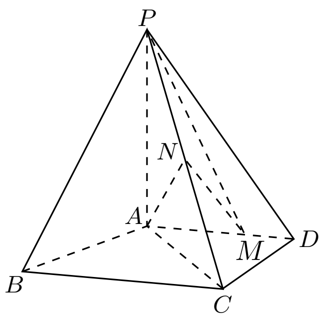
回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}.$$

19. (12 分) 四棱锥 P–$ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\,/\!/\,BC$，$AB=AD=AC=3, PA=BC=4, M$ 为线段 AD 上一点，$AM=2MD, N$ 为 PC 的中点.

（ I ）证明 $MN\,/\!/$ 平面 PAB;

（II）求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 P, Q 两点.

（ I ）若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR\,/\!/\,FQ$;

（II）若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

21. (12 分)

设函数 $f(x)=\alpha\cos 2x+(\alpha-1)(\cos x+1)$，其中 $\alpha>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A.

（ I ）求 $f'(x)$;

（II）求 A;

（III）证明 $|f'(x)|\leqslant 2A$.

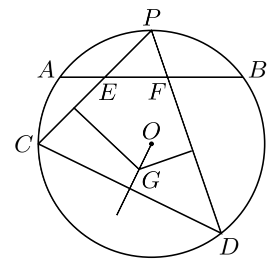
请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，$\odot O$ 中 $\widehat{AB}$ 的中点为 P，弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

（ I ）若 $\angle PFB=2\angle PCD$，求 $\angle PCD$ 的大小;

（II）若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明 $OG\perp CD$.



23. (10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}t\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

（ I ）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

（II）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. (10 分) 选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.

（ I ）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集;

（II）设函数 $g(x)=|2x-1|$. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 3$，求 a 的取值范围.

2016 高考试题（全国卷 III）文科数学

一、选择题：(本大题共 12 个小题，每小题 5 分，满分 60 分.)

1. 设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}, B=\{4,8\}$，则 $\complement_A B=$

A. $\{4,8\}$　B. $\{0,2,6\}$　C. $\{0,2,6,10\}$　D. $\{0,2,4,6,8,10\}$

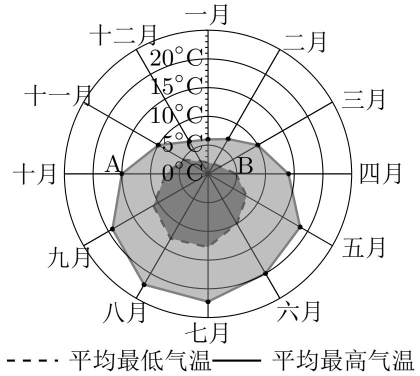
2. 若 $z=4+3\mathrm{i}$，则 $\dfrac{\bar{z}}{|z|}=$

A. 1　B. -1　C. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　D. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\angle ABC=$

A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C，B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C. 下面叙述不正确的是



A. 各月平均最低气温都在 0°C 以上

B. 七月的平均温差比一月的平均温差大

C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同

D. 平均最高气温高于 20°C 的月份有 5 个

5. 小敏打开计算机时，忘记了开机密码的前两位，只记得第一位是 M，I，N 中的一个字母，第二位是 1，2，3，4，5 中的一个数字，则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是

A. $\dfrac{8}{15}$　B. $\dfrac{1}{8}$　C. $\dfrac{1}{15}$　D. $\dfrac{1}{30}$

6. 若 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\theta=$

A. $-\dfrac{4}{5}$　B. $-\dfrac{1}{5}$　C. $\dfrac{1}{5}$　D. $\dfrac{4}{5}$

7. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}, b=3^{\frac{2}{3}}, c=25^{\frac{1}{3}}$，则

A. $b<a<c$　B. $a<b<c$　C. $b<c<a$　D. $c<a<b$

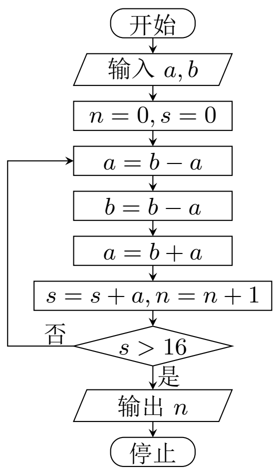
8. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a=4, b=6$，那么输出的 $n=$

A. 3

B. 4

C. 5

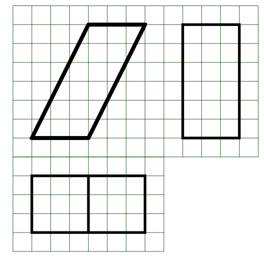
D. 6



9. 在 $\triangle ABC$ 中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\sin A=$

A. $\dfrac{3}{10}$　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

10. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为



A. $18+36\sqrt{5}$

B. $54+18\sqrt{5}$

C. 90

D. 81

11. 在封闭的直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球. 若 $AB\perp BC, AB=6, BC=8, AA_1=3$，则 V 的最大值是

A. 4π　B. $\dfrac{9\pi}{2}$　C. 6π　D. $\dfrac{32\pi}{3}$

12. 已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，A,B 分别 C 的左，右顶点.P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{2}{3}$　D. $\dfrac{3}{4}$

二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0\\ x-2y-1\leqslant 0\\ x\leqslant 1\end{cases}$，则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为_____.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=2\sin x$ 的图像至少向右平移_______ 个单位长度得到.

15. 已知直线 $l: x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A,B 两点，过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点，则 $|CD|=$_____.

16. 已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是____________.

三、解答题：满分 70 分)

17. (本小题 12 分)

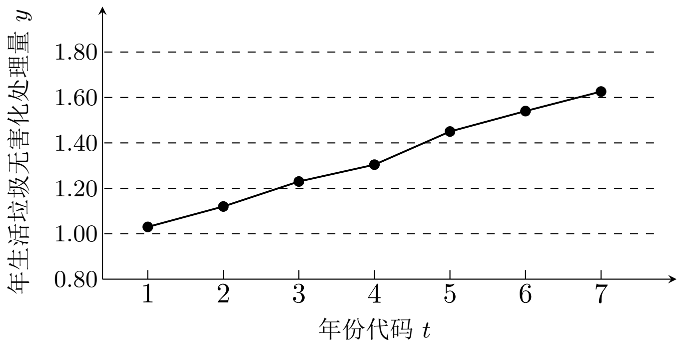
已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

（I）求 a_2, a_3;

（II）若 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (本小题 12 分)

下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.



注意：年份代码 1–7 分别对应 2008–2014

（I）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明；

（II）建立 y 与 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$,

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

参考公式：相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为：

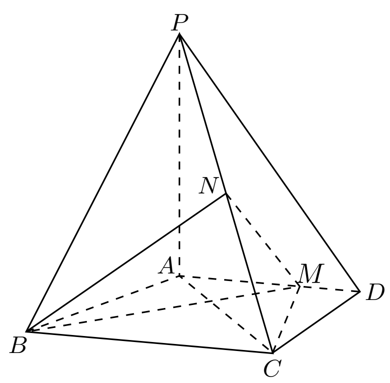
$$\hat{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

19. (本小题 12 分)

如图，四棱锥 P–$ABCD$ 中，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，$AD \parallel BC$，$AB = AD = AC = 3, PA = BC = 4, M$ 为线段 AD 上一点，$AM = 2MD, N$ 为 PC 的中点.

（I）证明 $MN \parallel$ 平面 PAB；

（II）求四面体 $N-BCM$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 P, Q 两点.

（I）若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR \parallel FQ$；

（II）若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$；

（III）设 $c > 1$，证明当 $x \in (0, 1)$ 时，$1 + (c-1)x > c^x$.

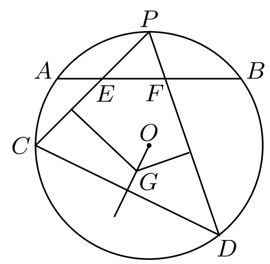
请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，$\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P，弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

（I）若 $\angle PFB = 2\angle PCD$，求 $\angle PCD$ 的大小；

（II）若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明 $OG \perp CD$.



23. (本小题满分 10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}t\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

（I）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（II）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

（I）当 $a = 2$ 时，求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集；

（II）设函数 $g(x) = |2x - 1|$. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时，$f(x) + g(x) \geqslant 3$，求 a 的取值范围.

2017 高考试题（全国卷 I）理科数学

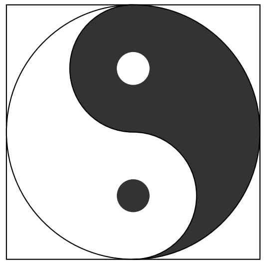
一、选择题：(本大题共12个小题，每小题5分，满分 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid 3^x<1\}$，则

A. $A\cap B=\{x\mid x<0\}$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$

C. $A\cup B=\{x\mid x>1\}$　　D. $A\cap B=\varnothing$

2. 如图，正方形内的图形来自中国古代的太极图．正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称．在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是



(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{8}$

(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{4}$

3. 设有下面四个命题

p_1：若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$，则 $z\in\mathbf{R}$；

p_2：若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$，则 $z\in\mathbf{R}$；

p_3：若复数 z_1，z_2 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$，则 $z=\overline{z_2}$；

p_4：若复数 $z\in\mathbf{R}$，则 $\overline{z}\in\mathbf{R}$.

其中真命题为

A. p_1,p_3　　B. p_1,p_4　　C. p_2,p_3　　D. p_2,p_4

4. 即 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则 $\{a_n\}$ 的公差为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

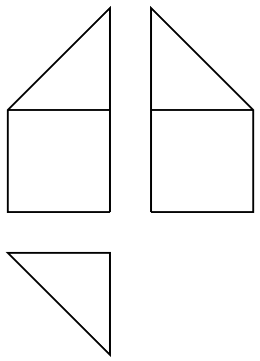
5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[0,4]$　　D. $[1,3]$

6. $(1+\frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为

A. 15　　B. 20　　C. 30　　D. 35

7. 某多面体的三视图如图所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长是 2，俯视图为等腰直角三角形．该多面体的各个面中有若干个梯形，这些梯形的面积之和为



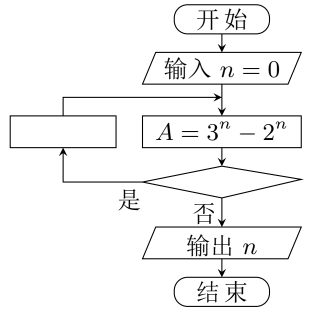
A. 17π

B. 18π

C. 20π

D. 28π

8. 右面程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n，那么在◇和▭两个空白框中，可以分别填入



A. $A>1000$ 和 $n=n+1$

B. $A>1000$ 和 $n=n+2$

C. $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$

D. $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

9. 已知曲线 $C_1: y=\cos x$，$C_2: y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

10. 已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，直线 l_1 与 C 交于 A,B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D,E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为

A. 16　　B. 14　　C. 12　　D. 10

11. 设 x,y,z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$　　C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2z<5z$

12. 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件．为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动．这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，$\cdots$，其中第一项是 2^0，接下来的两项是 $2^0,2^1$，再接下来的三项是 $2^0,2^1,2^2$，依此类推．求满足如下条件的最小整数 $N: N>100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂．那么该款软件的激活码是

A. 440　　B. 330　　C. 220　　D. 110

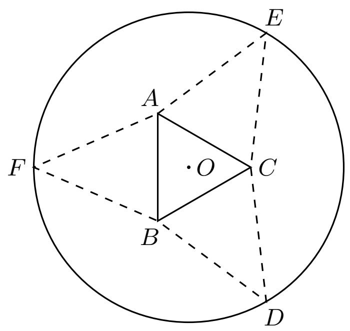
二、填空题：(共 4个小题，每小题5分，满分 20分)

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$ 的夹角为 60°，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$________.

14. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 1,\\ 2x+y\geqslant -1,\\ x-y\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的最小值为________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径作圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M,N 两点．若 $\angle MAN=60^\circ$，则 C 的离心率为________.

16. 如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 5 cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O．D,E,F 为圆 O 上的点，$\triangle DBC,\triangle ECA,\triangle FAB$ 分别是以 BC,CA,AB 为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以 BC,CA,AB 为折痕折起 $\triangle DBC,\triangle ECA,\triangle FAB$，使得 D,E,F 重合，得到三棱锥．当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：cm^3）的最大值为__________．



三、解答题：（共 5 个小题, 满分 70 分）

17. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,．已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{3\sin A}$．

（Ⅰ）求 $\sin B\sin C$;

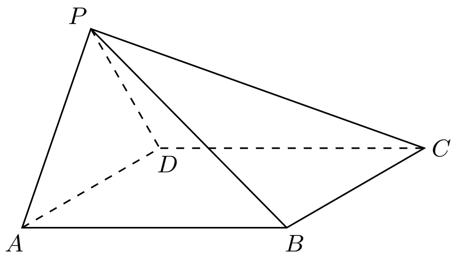
（Ⅱ）若 $6\cos B\cos C=1$，$a=3$，求 $\triangle ABC$ 的周长．

18. (12 分)

如图，在四棱锥 P–$ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$．

（Ⅰ）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD;

（Ⅱ）若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，求二面角 A–PB–C 的余弦值．



19. (12 分)

为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．

（Ⅰ）假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X\geqslant 1)$ 及 X 的数学期望;

（Ⅱ）一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查．

（ⅰ）试说明上述监控生产过程方法的合理性;

（ⅱ）下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x}=\dfrac{1}{16}\displaystyle\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\displaystyle\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx 0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$．

用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ（精确到 0.01）．

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$．

$0.9974^{16}\approx 0.9592$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$．

20. (12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上．

（Ⅰ）求 C 的方程;

（Ⅱ）设直线 l 不经过 P_2 且与 C 相交于 A,B 两点．若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，证明：l 过定点．

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$．

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t,\\ y=1-t,\end{cases}$（$t$ 为参数）．

（Ⅰ）若 $a=-1$，求 C 与 l 的交点坐标;

（Ⅱ）若 C 上的点到 l 的距离的最大值为 $\sqrt{17}$，求 a．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$，$g(x)=|x+1|+|x-1|$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$，求 a 的取值范围．

2017 高考试题（全国卷 I）文科数学

一、选择题：(本大题共12个小题，每小题5分，满分 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 3-2x>0\}$，则

A. $A\cap B=\{x\mid x<\frac{3}{2}\}$　　B. $A\cap B=\varnothing$

C. $A\cup B=\{x\mid x<\frac{3}{2}\}$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

2. 为评估一种农作物的种植效果，选了 n 块地做试验田，这 n 块地的亩产量（单位：kg）分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是

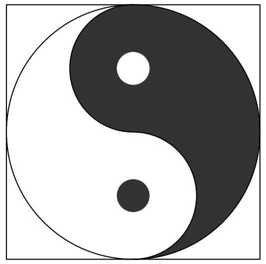
A. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数　　B. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差

C. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最大值　　D. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数

3. 下列各式的运算结果为纯虚数的是

A. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$　　B. $\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$　　C. $(1+\mathrm{i})^2$　　D. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

4. 如图，正方形内的图形来自中国古代的太极图．正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称．在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是



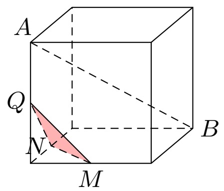
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\pi}{8}$

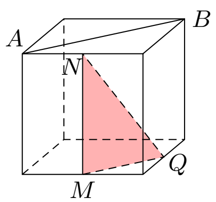
C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

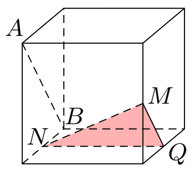
5. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，P 是 C 上的一点，且 PF 与 x 轴垂直，点 A 的坐标是 $(1,3)$，则 $\triangle APF$ 的面积为

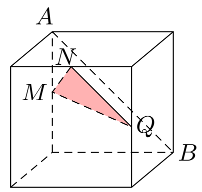
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

6. 如图，在下列四个正方体中，A,B 为正方体的两个顶点，M,N,Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是

A. 

B. 

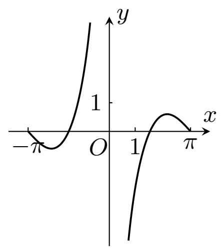
C. 

D. 

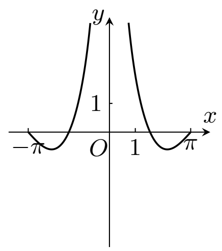
7. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3,\\ x-y\geqslant 1,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

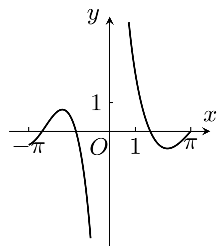
8. 函数 $y=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图像大致为



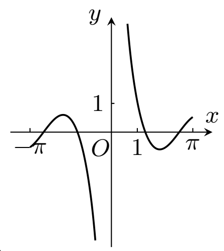
A.



B.



C.



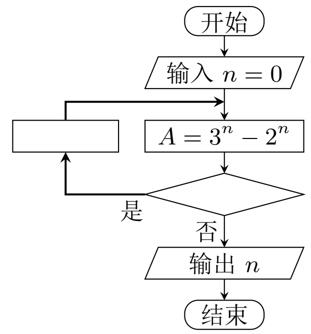
D.

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则

A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增　　B. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

C. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称　　D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

10. 右面程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n，那么在◇和▭两个空白框中，可以分别填入



A. $A>1000$ 和 $n=n+1$

B. $A>1000$ 和 $n=n+2$

C. $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$

D. $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c,．已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$, $c=\sqrt{2}$，则 $C=$

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

12. 设 A,B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$，则 m 的取值范围是

A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$　　C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

二、填空题：(共 4个小题，每小题5分，满分 20分)

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$．若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $m=$________.

14. 曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为________.

15. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$________.

16. 已知三棱锥 S–ABC 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径．若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 S–ABC 的体积为 9，则求 O 的表面积为________.

三、解答题：（共 5 个小题，满分 70 分）

17. (12 分)

记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_2=2$, $S_3=-6$.

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

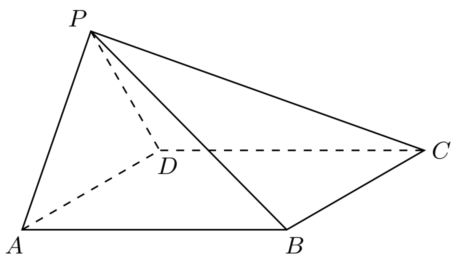
（II）求 S_n，并判断 S_{n+1},S_n,S_{n+2} 是否成等差数列.

18. (12 分)

如图，在四棱锥 P–$ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.

（I）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD;

（II）若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，且四棱锥 P–$ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$，求该四棱锥的侧面积.



19. (12 分)

为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件，并测量其尺寸（单位：cm）．下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx 0.212$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}\approx 18.439$，$\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})(i-8.5)=-2.78$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$.

（I）求 (x_i,i)（$i=1,2,\cdots,16$）的相关系数 r，并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小（若 $|r|<0.25$，则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小）.

（II）一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

（i）从这一天抽检的结果看，是否需对当天的生产过程进行检查？

（ii）在 $(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$ 之外的数据称为离群值，试剔除离群值，估计这条生产线当天生产的零件尺寸的均值和标准差.（精确到 0.01）

附：样本 (x_i,y_i)（$i=1,2,\cdots,n$）的相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. (12 分)

设 A,B 为曲线 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4.

（I）求直线 AB 的斜率;

（II）设 M 为曲线 C 上一点．C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM\perp BM$，求直线 AB 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)-a^2x$.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（II）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ （θ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t,\\ y=1-t,\end{cases}$ （t 为参数）.

（I）若 $a=-1$，求 C 与 l 的交点坐标;

（II）若 C 上的点到 l 的距离的最大值为 $\sqrt{17}$，求 a.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$，$g(x)=|x+1|+|x-1|$.

（I）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;

（II）若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$，求 a 的取值范围.

2017 高考试题（全国卷 II）理科数学

一、选择题：(本大题共 12 个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$

A．$1+2\mathrm{i}$　　B．$1-2\mathrm{i}$　　C．$2+\mathrm{i}$　　D．$2-\mathrm{i}$

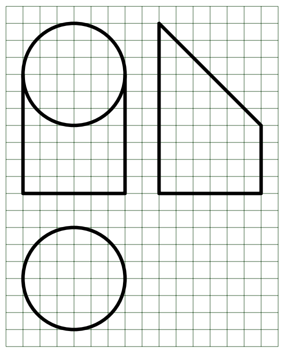
2. 设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x|x^2-4x+m=0\}$．若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$

A．$\{1,-3\}$　　B．$\{1,0\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{1,5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯

A．1 盏　　B．3 盏　　C．5 盏　　D．9 盏

4. 如图，网格纸上小正方形边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为



A．90π

B．63π

C．42π

D．36π

5. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\ 2x-3y+3\geqslant 0,\\ y+3\geqslant 0.\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为

A．-15　　B．-9　　C．1　　D．9

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成一项，每项工作由一人完成，则不同的安排方式共有

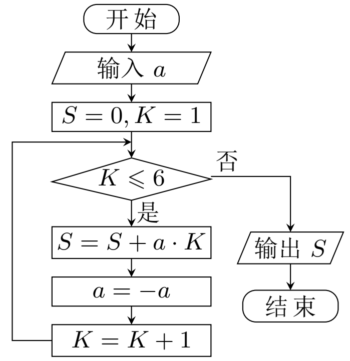
A．12 种　　B．18 种　　C．24 种　　D．36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有两位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则

A．乙可以知道四人的成绩　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 $S=$



A．2

B．3

C．4

D．5

9. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 直三棱柱 $ABC\text{–}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=120°$，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角的余弦为

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为

A．-1　　B．$-2\mathrm{e}^{-3}$　　C．$5\mathrm{e}^{-3}$　　D．1

12. 已知$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是

A．-2　　B．$-\dfrac{3}{2}$　　C．$-\dfrac{4}{3}$　　D．-1

二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次，X 表示抽到的二等品件数，则 $D(X)=$______.

14. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}$（$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$）的最大值是________.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3,S_4=10$，则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$___________.

16. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N，若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$________.

三、解答题：(共 5 个小题，满分 70 分)

17. (12 分)

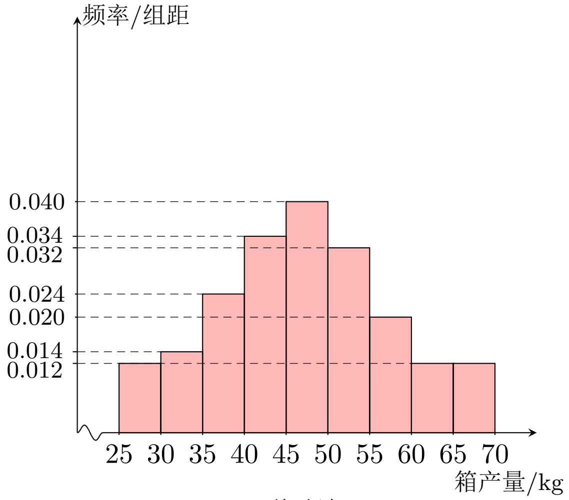
$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,．已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

（Ⅰ）求 $\cos B$;

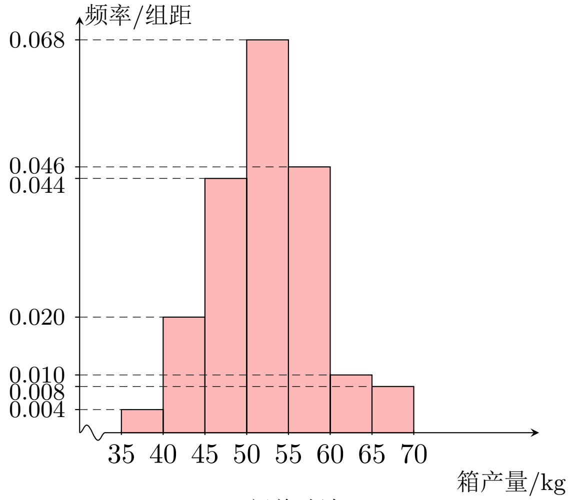
（Ⅱ）若 $a+c=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 2，求 b.

18. (12 分)

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如下：



（旧养殖法）



（新养殖法）

（I）设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50 kg，新养殖法的箱产量不低于 50 kg"，估计 A 的概率；

（II）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关；

	箱产量 $<$50 kg	箱产量 $\geqslant$50 kg
旧养殖法		
新养殖法		

附：

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

，$K^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

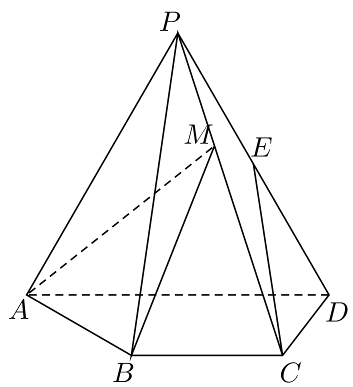
（III）根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）.

19. (12 分)

如图，四棱锥 P–$ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，$AB = BC = \dfrac{1}{2}AD$，$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$，$E$ 是 PD 的中点.

（1）证明：$CE\,/\!/$ 平面 PAB；

（2）点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°．求二面角 M–AB–D 的余弦值.



20. (12 分)

设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$．证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x\ln x$，且 $f(x) \geqslant 0$.

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $\mathrm{e}^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta = 4$.

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP| = 16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为 $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$，点 B 在曲线 C_2 上，求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 $a>0, b>0, a^3+b^3=2$．证明：

（1）$(a+b)(a^5+b^5) \geqslant 4$；

（2）$a+b \leqslant 2$.

2017 高考试题（全国卷 II）文科数学

一、选择题：(本大题共 12 个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$．则 $A\cup B=$

A．$\{1,2,3,4\}$　B．$\{1,2,3\}$　C．$\{2,3,4\}$　D．$\{1,3,4\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$

A．$1-\mathrm{i}$　B．$1+3\mathrm{i}$　C．$3+\mathrm{i}$　D．$3+3\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为

A．4π　B．2π　C．π　D．$\dfrac{\pi}{2}$

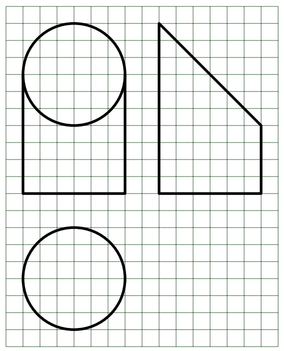
4. 设非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则

A．$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　B．$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　C．$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　D．$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

5. 若 $a>1$，则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是

A．$(\sqrt{2},+\infty)$　B．$(\sqrt{2},2)$　C．$(1,\sqrt{2})$　D．$(1,2)$

6. 如图，网格纸上小正方形边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为



A．90π

B．63π

C．42π

D．36π

7. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\ 2x-3y+3\geqslant 0,\\ y+3\geqslant 0.\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为

A．-15　B．-9　C．1　D．9

8. 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是

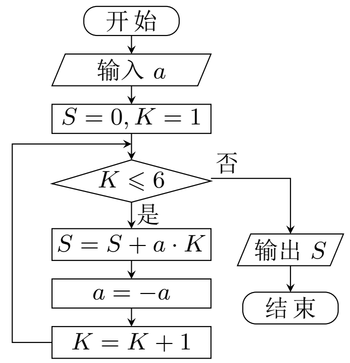
A．$(-\infty,-2)$　B．$(-\infty,1)$　C．$(1,+\infty)$　D．$(4,+\infty)$

9. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有两位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则

A．乙可以知道四人的成绩　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　D．乙、丁可以知道自己的成绩

10. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 $S=$



A．2

B．3

C．4

D．5

11. 从分别写有 $1,2,3,4,5$ 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取一张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为

A．$\dfrac{1}{10}$　B．$\dfrac{1}{5}$　C．$\dfrac{3}{10}$　D．$\dfrac{2}{5}$

12. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的交点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN\perp l$，则 M 到 NF 的距离为

A．$\sqrt{5}$　B．$2\sqrt{2}$　C．$2\sqrt{3}$　D．$3\sqrt{3}$

二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为______．

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，则 $f(2)=$______．

15. 长方体的长，宽，高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上．则球 O 的表面积为______．

16. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 $a,b,c,$．若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$．则 $B=$______．

三、解答题：(共 5 个小题，满分 70 分)

17. (12 分)

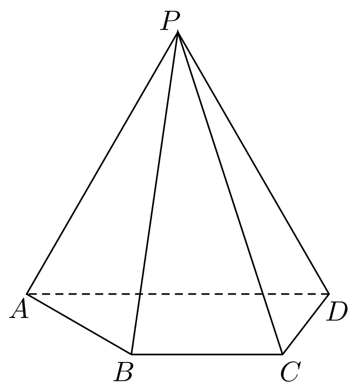
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，等不数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$a_1=-1,b_1=1$，$a_2+b_2=2$．

(1) 若 $a_3+b_3=5$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $T_3=21$，求 S_3．

18. (12 分)

如图，四棱锥 P–$ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，$AB = BC = \frac{1}{2}AD$，$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$.

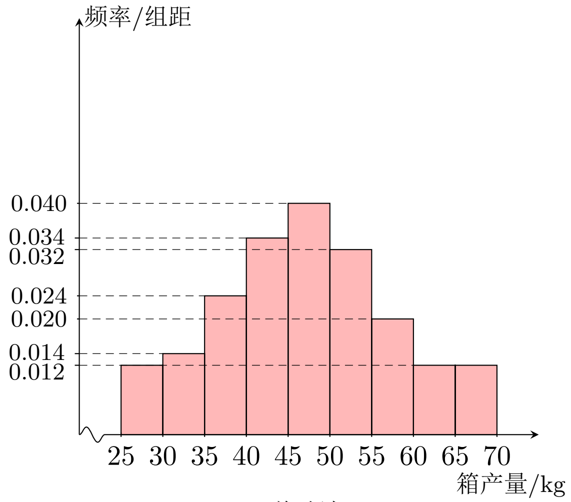


（1）证明：$BC /\!/$ 平面 PAD；

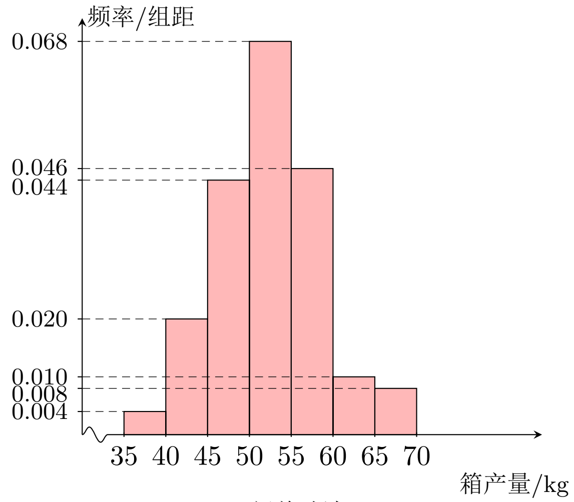
（2）若 $\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$，求四棱锥 P–$ABCD$ 的体积.

19. (12 分)

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产值对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如下：



（旧养殖法）



（新养殖法）

（1）记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg”，估计 A 的概率；

（2）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关；

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

附：

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

，$K^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

（3）根据箱产量的频率分布直方图，对这两种养殖方法的优劣进行比较.

20. (12 分)

设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 $x = -3$ 上，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = (1-x^2)e^x$，且 $f(x) \geqslant 0$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant ax + 1$，求 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta = 4$.

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM| \cdot |OP| = 16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为 $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$，点 B 在曲线 C_2 上，求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $a > 0, b > 0, a^3 + b^3 = 2$. 证明：

（1）$(a+b)(a^5+b^5) \geqslant 4$；

（2）$a + b \leqslant 2$.

2017 高考试题（全国卷 III）理科数学

一、选择题：（本大题共 12 个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

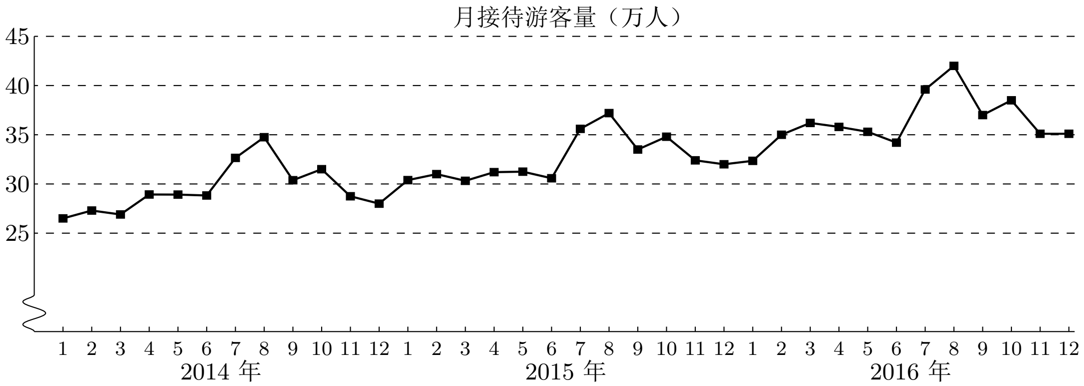
1. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=x\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

2. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

3. 某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图.



根据该折线图，下列结论错误的是

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

4. $(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

A．-80　　B．-40　　C．40　　D．80

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点，则 C 的方程为

A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

6. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论错误的是

A．$f(x)$ 的一个周期为 -2π　　B．$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C．$f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$　　D．$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

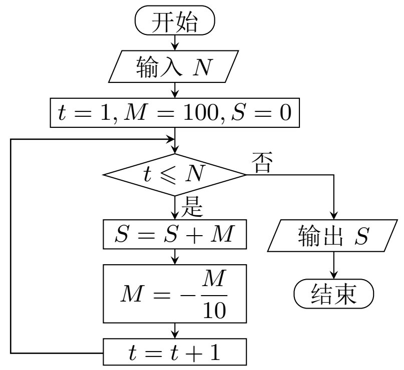
7. 执行右面的程序框图，为使输出的 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为

A．5

B．4

C．3

D．2



8. 已知圆柱的高为 1，它的两个底面圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差不为 0，若 a_2，a_3，a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 的前 6 项的和为

A．-24　　B．-3　　C．3　　D．8

10. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(e^{x-1}+e^{-x+1}\right)$ 有唯一零点，则 $a=$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

12. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$, $AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

二、填空题：（共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x-4y$ 的最小值为______.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$，$a_1-a_3=-3$，则 $a_4=$______.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 取值范围是______.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：
① 当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，AB 与 b 成 $30°$ 角；
② 当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，AB 与 b 成 $60°$ 角；
③ 直线 AB 与 a 所成的角的最小值为 $45°$；
④ 直线 AB 与 a 所成的角的最大值为 $60°$.
其中正确的是____________.（填写所有正确结论的代号）

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

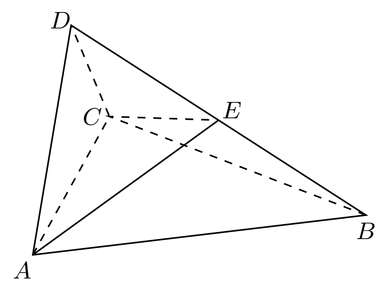
17.（12 分）
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，$b=2$.
（I）求 c；
（II）设 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp AC$，求 $\triangle ABD$ 的面积.

18.（12 分）
某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：°C）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶，如果最高气温位于区间 $[20, 25)$，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

（I）求六月份这种酸奶一天的需求量 X（单位：瓶）的分布列；
（II）设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元）．当六月份这种酸奶一天的进货量 n（单位：瓶）为多少时，Y 的数学期望达到最大值？

19.（12 分）
如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，$\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=BD$.



（I）证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；
（II）过直线 AC 的平面交 BD 于点 E，若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分，求二面角 $D\text{–}AE\text{–}C$ 的余弦值.

20.（12 分）
已知抛物线 $C: y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
（I）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；
（II）设圆 M 过点 $P(4,-2)$，求直线 l 与圆 M 的方程.

21.（12 分）
已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.
（I）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；
（II）设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$，求 m 的最小值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）
在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=kt,\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m,\\ y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$（$m$ 为参数）．设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为为曲线 C.
（I）写出 C 的普通方程；
（II）以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，设 $l_3: \rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，$M$ 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）
已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
（I）求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集；
（II）若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空，求 m 的取值范围.

2017 高考试题（全国卷 III）文科数学

一、选择题：(本大题共12个小题，每小题5分，满分 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

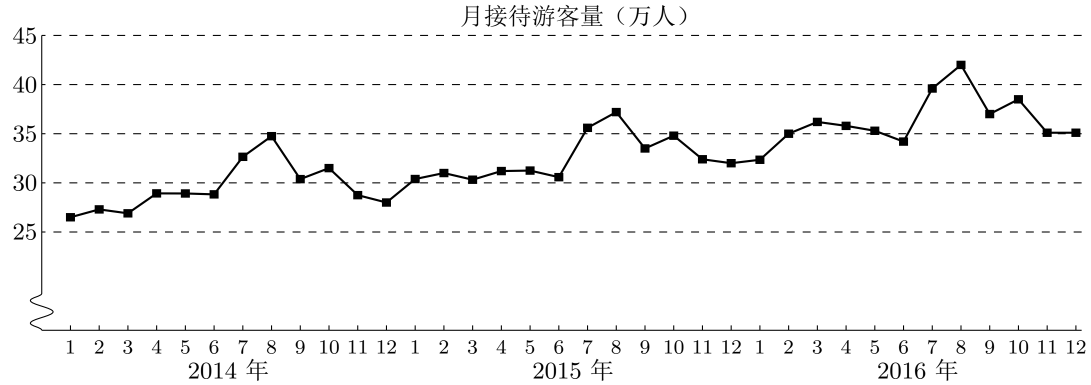
1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 复平面内表示复数 $z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$ 的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图.



根据该折线图，下列结论**错误**的是

A. 月接待游客量逐月增加

B. 年接待游客量逐年增加

C. 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

D. 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

4. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{2}{9}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

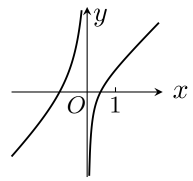
5. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x-y$ 的取值范围是

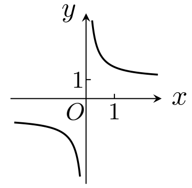
A. $[-3,0]$　　B. $[-3,2]$　　C. $[0,2]$　　D. $[0,3]$

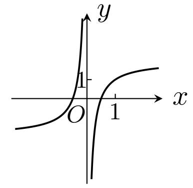
6. 函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为

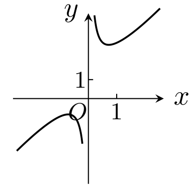
A. $\frac{6}{5}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

7. 函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$ 的的部分图像大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

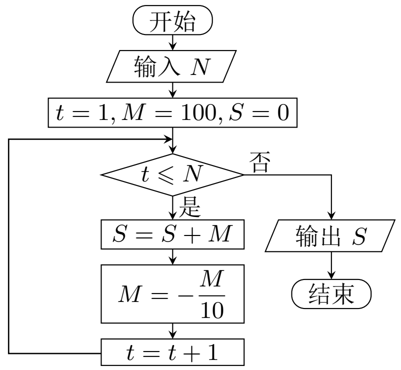
8. 执行右面的程序框图，为使输出的 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2



9. 已知圆柱的高为 1，它的两个底面圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

10. 在正方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CD 的中点，则

A. $A_1E\perp DC_1$　　B. $A_1E\perp BD$　　C. $A_1E\perp BC_1$　　D. $A_1E\perp AC$

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(e^{x-1}+e^{-x+1}\right)$ 有唯一零点，则 $a=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

二、填空题：(共 4个小题，每小题5分，满分 20分)

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$______.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{3}{5}x$，则 $a=$______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．已知 $C=60^\circ$，$b=\sqrt{6}$，$c=3$，则 $A=$______

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 取值范围是______.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

18.（12 分）

某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：°C）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶，如果最高气温位于区间 $[20,25)$，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

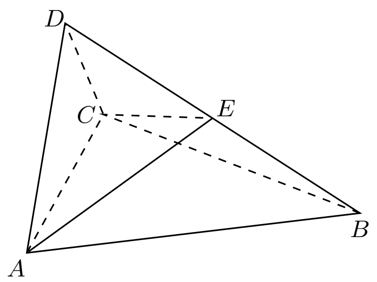
最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于各区间的概率.

（Ⅰ）估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率；

（Ⅱ）设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元）．当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时，写出 Y 的所有可能值，并估计 Y 大于零的概率。

19.（12 分）



如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，$AD=CD$.

（Ⅰ）证明：$AC\perp BD$；

（Ⅱ）已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形，$AB=BD$，若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点，且 $AE\perp EC$，求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.

20.（12 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 : $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$．当 m 变化时，解答下列问题：

（Ⅰ）能否出现 $AC\perp BC$ 的情况？说明理由；

（Ⅱ）证明过 A,B,C 三点的圆在 y 轴上解得的弦长为定值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $a<0$ 时，证明 $f(x)\leqslant-\dfrac{3}{4a}-2$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=kt,\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m,\\ y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$（$m$ 为参数）．设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为为曲线 C.

（Ⅰ）写出 C 的普通方程；

（Ⅱ）以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，设 $l_3:\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，$M$ 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空，求 m 的取值范围.

2018 高考试题（全国卷 I）理科数学

一、选择题：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

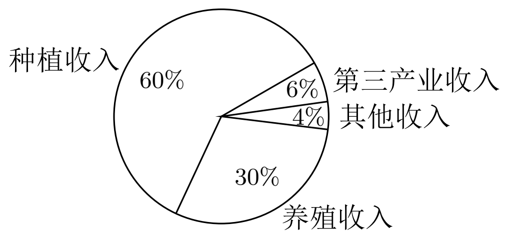
A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

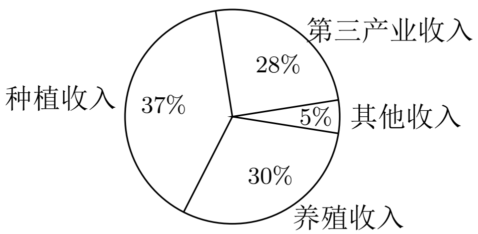
A. $\{x\mid -1<x<2\}$　　B. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid x<-1\}\cup\{x\mid x>2\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant -1\}\cup\{x\mid x\geqslant 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番．为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如下饼图：



建设前经济收入构成比例



建设后经济收入构成比例

则下面结论不正确的是

A. 新农村建设后，种植收入减少

B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上

C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍

D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则 $a_5=$

A. -12　　B. -10　　C. 10　　D. 12

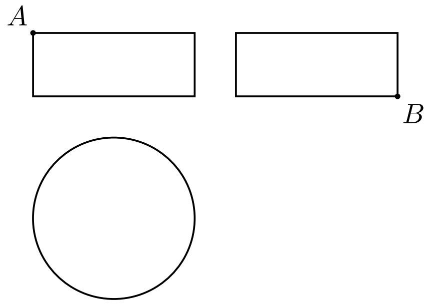
5. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$．若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$

A. $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C. $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7. 某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图．圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为



A. $2\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. 3　　D. 2

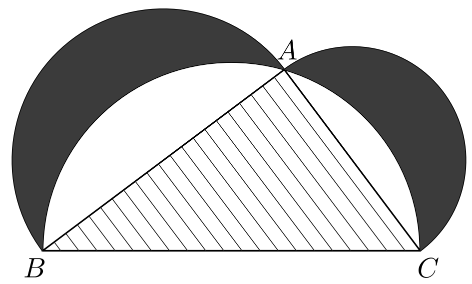
8. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M,N 两点，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $,g(x)=f(x)+x+a$．若 $g(x)$ 存在两个零点，则 a 的取值范围是

A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $[-1,\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

10. 右图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形．此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB,AC．$\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I，黑色部分记为 II，其余部分记为 III．在整个图形中随机取一点，此点取自 I，II，III 的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则



A. $p_1=p_2$　　B. $p_1=p_3$　　C. $p_2=P_3$　　D. $p_1=p_2+p_3$

11. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，O 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M，N．若 $\triangle OMN$ 为直角三角形，则 $|MN|=$

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

12. 已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2\leqslant 0, \\ x-y+1\geqslant 0, \\ y\leqslant 0. \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $S_n=2a_n+1$，则 S_6=________.

15. 从 2 位女生，4 为男生中选 3 人参加科技比赛，且至少有 1 位女生入选，则不同的选法共有________ 种．(用数字填写答案）

16. 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$，$AB=2$，$BD=5$．

（1）求 $\cos\angle ADB$；

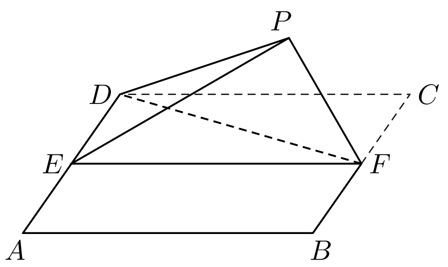
（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC．

18. (12 分)

如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，E, F 分别为 AD, BC 的中点，以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF\perp BF$．

（1）证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$；

（2）求 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角的正弦值．



19. (12 分)

设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$．

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．

20. (12 分)

某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格产品，则更换为合格品．检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验．设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立．

（1）记 20 件产品中有两件不合格品的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0；

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有两件不合格品，以（1）中确定的 p_0 作为 p 的值．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用．

（i）若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 EX．

（ii）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$．

（1）求 C_2 的直角坐标方程；

（2）若 C_1 与 C_2 有且仅有三个交点，求 C_1 的方程．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$．

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立，求 a 的取值范围．

2018 高考试题（全国卷 I）文科数学

一、选择题：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

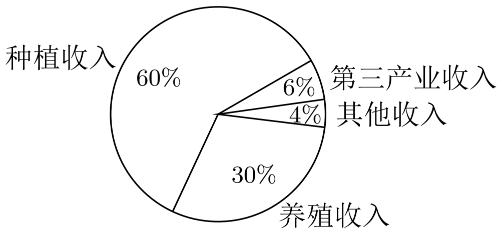
1. 已知集合 $A=\{0,2\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

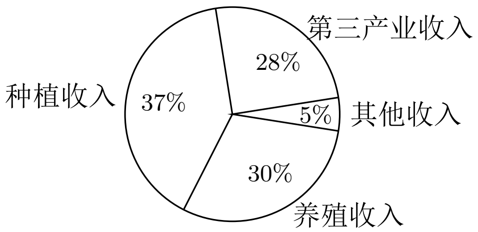
2. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

3. 某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番．为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如下饼图：



建设前经济收入构成比例



建设后经济收入构成比例

则下面结论不正确的是

A. 新农村建设后，种植收入减少

B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上

C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍

D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为

A. $12\sqrt{2}\pi$　　B. 12π　　C. $8\sqrt{2}\pi$　　D. 10π

6. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$．若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$

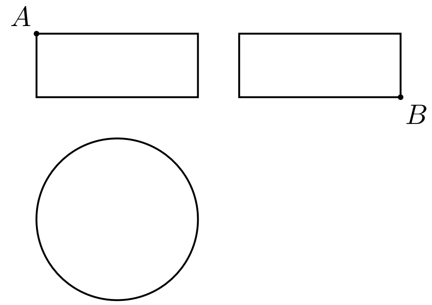
A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

8. 已知函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 3　　B. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 3　　D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 4

9. 某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图．圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为



A. $2\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. 3　　D. 2

10. 在长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30°，则该长方体的体积为

A. 8　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $8\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{3}$

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$, $B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，则 $|a-b|=$

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 1

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,0)$

二、填空题：共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$．若 $f(3)=1$，则 $a=$________.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2\leqslant 0, \\ x-y+1\geqslant 0, \\ y\leqslant 0. \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

15. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$________.

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，且 $b^2+c^2-a^2=8$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$．设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$．

（1）求 b_1,b_2,b_3；

（2）判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

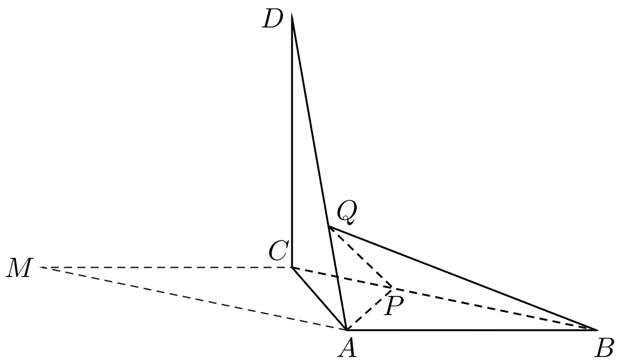
（3）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12 分)

如图，在平行四边形 $ABCM$ 中，$AB=AC=3$，$\angle ACM=90^\circ$，以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起，使点 M 到达点 D 的位置，且 $AB\perp DA$．

（1）证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

（2）Q 为线段 AD 上一点，P 为线段 BC 上一点，且 $BP=DQ=\dfrac{2}{3}DA$，求三棱锥 $Q\text{–}ABP$ 的体积.



19. (12 分)

某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据（单位：m^3）和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据得到频数分布表如下：

未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$	$[0.6,0.7)$
频数	1	3	2	4	9	26	5

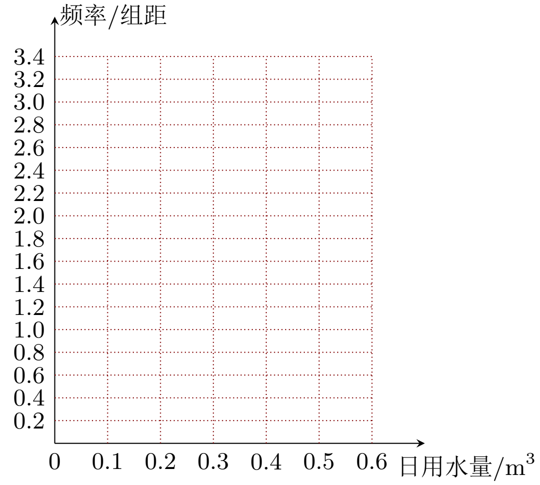
使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$
频数	1	5	13	10	16	5

（1）在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图：

（2）估计该家庭使用节水龙头后，日用水量小于 $0.35\,m^3$ 的概率；

（3）估计该家庭使用节水龙头后，一年能节省多少水？（一年按 365 天计算，同一组中的数据以这组数据所在区间的中点的值作代表．）



20. (12 分)

设抛物线 $C:y^2=2x$，点 $A(2,0)$，$B(-2,0)$，过点 A 的直线 l 与 C 交于 M,N 两点.

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 BM 的方程；

（2）证明：$\angle ABM=\angle ABN$．

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$．

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a\geqslant \dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 0$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$．

（1）求 C_2 的直角坐标方程；

（2）若 C_1 与 C_2 有且仅有三个交点，求 C_1 的方程．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$．

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立，求 a 的取值范围．

2018 高考试题（全国卷 II）理科数学

一、选择题：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

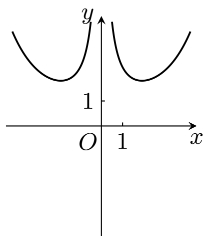
1. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$

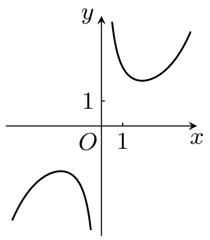
A. $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　B. $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　C. $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　D. $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

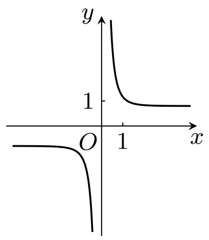
2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中的元素个数为

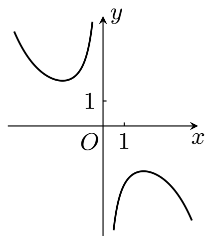
A. 9　B. 8　C. 5　D. 4

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图像大致是

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

A. 4　B. 3　C. 2　D. 0

5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　C. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$

A. $4\sqrt{2}$　B. $\sqrt{30}$　C. $\sqrt{29}$　D. $2\sqrt{5}$

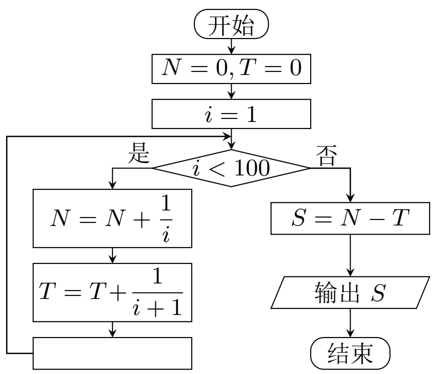
7. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$，设计了右侧的程序框图，则在空白框中应填入

A. $i=i+1$

B. $i=i+2$

C. $i=i+3$

D. $i=i+4$



8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果．哥德巴赫猜是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$．在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是

A. $\dfrac{1}{12}$　B. $\dfrac{1}{14}$　C. $\dfrac{1}{15}$　D. $\dfrac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{1}{5}$　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数，则 a 的最大值是

A. $\dfrac{\pi}{4}$　B. $\dfrac{\pi}{2}$　C. $\dfrac{3\pi}{4}$　D. π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=$

A. -50　B. 0　C. 2　D. 50

12. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$A$ 是 C 的左顶点，点 P 在过 A 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^\circ$，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{2}{3}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{3}$　D. $\dfrac{1}{4}$

二、填空题：共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0,\\ x-5\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为________.

15. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)$=________.

16. 已知圆锥的顶点为 S，母线 SA,SB 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°．若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

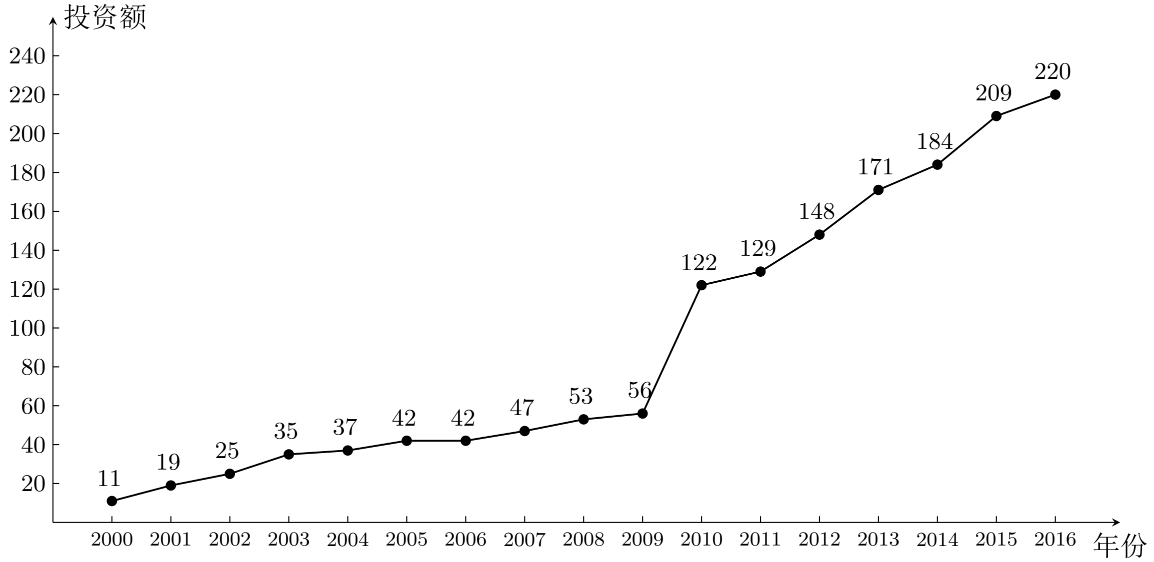
记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）求 S_n，并求 S_n 的最小值.

18. (12 分)

下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图.



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型．根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,17$）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,7$）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$.

（1）分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;

（2）你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？说明理由.

19. (12 分)

设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 k（$k>0$）的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，$|AB|=8$.

（1）求 l 的方程;

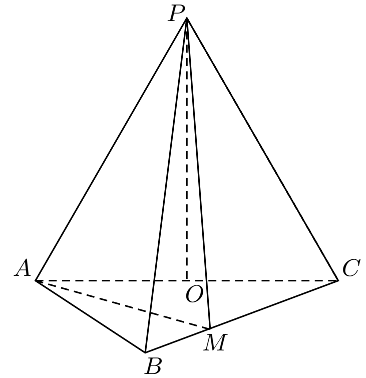
（2）求过点 A,B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

20. (12 分)

如图，在三棱锥 $P\text{–}ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.

（1）证明：$PO\perp$ 平面 ABC；

（2）若点 M 在棱 BC 上，且二面角 $M\text{–}PA\text{–}C$ 为 30°，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.



21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=4\sin\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha.\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）求 C 与 l 的普通方程;

（2）若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$，求 l 的方程.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;

（2）若 $f(x)\leqslant 1$，求 a 的取值范围.

2018 高考试题（全国卷 II）文科数学

一、选择题：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

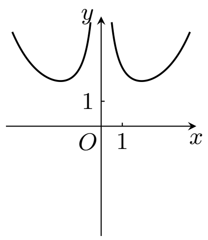
1. $\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=$

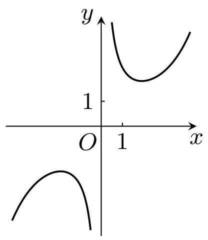
A．$3-2\mathrm{i}$　　B．$3+2\mathrm{i}$　　C．$-3-2\mathrm{i}$　　D．$-3+2\mathrm{i}$

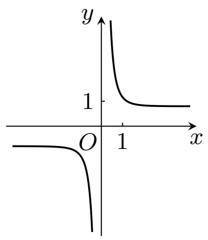
2. 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

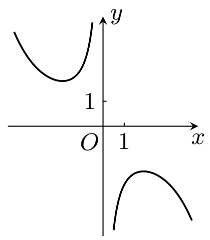
A．$\{3\}$　　B．$\{5\}$　　C．$\{3,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5,7\}$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图像大致是

A．

B．

C．

D．

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

5. 从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务，则选中的 2 人都是女同学的概率为

A．0.6　　B．0.5　　C．0.4　　D．0.3

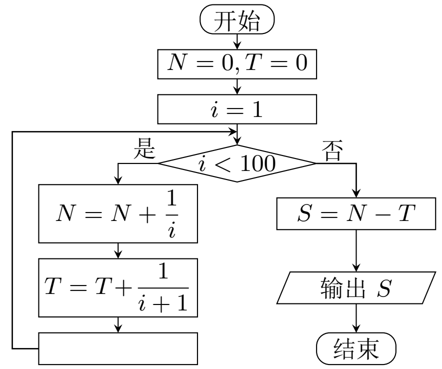
6. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A．$y=\pm\sqrt{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　　C．$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　D．$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$

A．$4\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{30}$　　C．$\sqrt{29}$　　D．$2\sqrt{5}$

8. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$，设计了右侧的程序框图，则在空白框中应填入



A．$i=i+1$

B．$i=i+2$

C．$i=i+3$

D．$i=i+4$

9. 在正方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 CC_1 的中点，则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0,a]$ 是减函数，则 a 的最大值是

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{3\pi}{4}$　　D．π

11. 已知 F_1,F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点，若 $PF_1\perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60^\circ$，则 C 的离心率为

A．$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=$

A．-50　　B．0　　C．2　　D．50

二、填空题：共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为________.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0,\\ x-5\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为________.

15. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha$=________.

16. 已知圆锥的顶点为 S，母线 SA,SB 互相垂直，SA 与圆锥底面所成角为 30°. 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

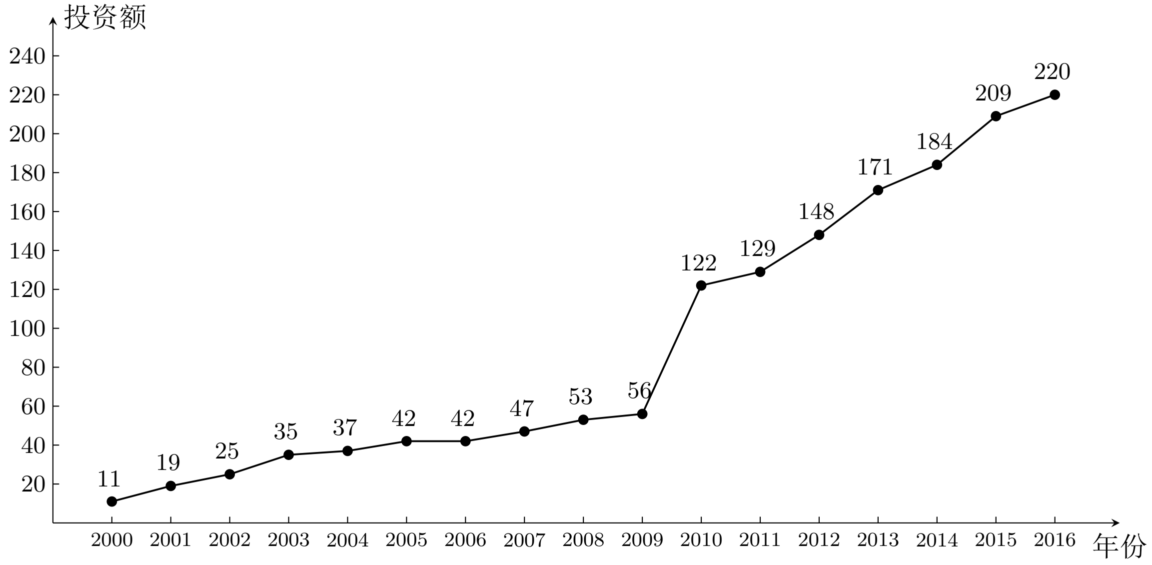
记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）求 S_n，并求 S_n 的最小值.

18.（12 分）

下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图.



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,17$）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,7$）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$.

（1）分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;

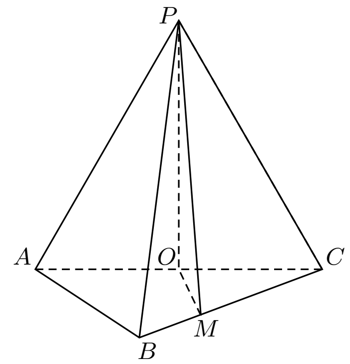
（2）你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？说明理由.

19.（12 分）

如图，在三棱锥 $P\text{–}ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.

（1）证明：$PO\perp$ 平面 ABC;

（2）若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.



20.（12 分）

设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 k（$k>0$）的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，$|AB|=8$.

（1）求 l 的方程;

（2）求过点 A,B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

（1）若 $a=3$，求 $f(x)$ 的单调区间;

（2）证明：$f(x)$ 只有一个零点.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=4\sin\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha.\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）求 C 与 l 的普通方程;

（2）若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$，求 l 的方程.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;

（2）若 $f(x)\leqslant 1$，求 a 的取值范围.

2018 高考试题（全国卷 III）理科数学

一、选择题：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

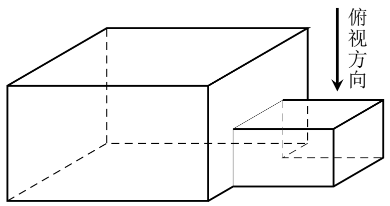
1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1\geqslant 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

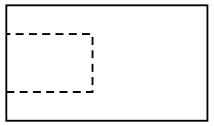
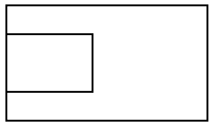
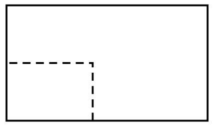
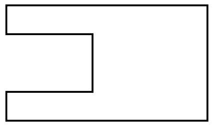
A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$

A. $-3-\mathrm{i}$　　B. $-3+\mathrm{i}$　　C. $3-\mathrm{i}$　　D. $3+\mathrm{i}$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头．若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是



A. 　B. 　C. 　D. 

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. $\dfrac{8}{9}$　　B. $\dfrac{7}{9}$　　C. $-\dfrac{7}{9}$　　D. $-\dfrac{8}{9}$

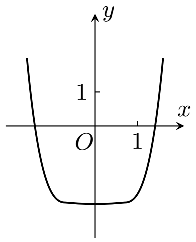
5. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为

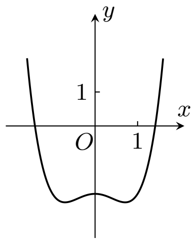
A. 10　　B. 20　　C. 40　　D. 80

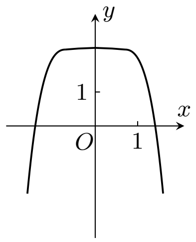
6. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A,B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

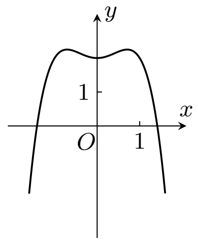
A. $[2,6]$　　B. $[4,8]$　　C. $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

7. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p，各成员的支付方式相互独立，设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数，$DX=2.4$，$P(X=4)<P(X=6)$，则 $p=$

A. 0.7　　B. 0.6　　C. 0.4　　D. 0.3

9. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则 $C=$

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

10. 设 A,B,C,D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 D–ABC 的体积的最大值为

A. $12\sqrt{3}$　　B. $18\sqrt{3}$　　C. $24\sqrt{3}$　　D. $54\sqrt{3}$

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的左，右焦点，$O$ 是坐标原点，过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

12. 设 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则

A. $a+b<ab<0$　　B. $ab<a+b<0$　　C. $a+b<0<ab$　　D. $ab<0<a+b$

二、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，若 $\boldsymbol{c}\,/\!/\,(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$________.

14. 曲线 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 -2，则 $a=$________.

15. 函数 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 的零点个数为________.

16. 已知 $M(-1,1)$ 和抛物线 $C:y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A,B 两点，若 $\angle AMB=90^\circ$，则 $k=$________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_m=63$，求 m.

18.（12 分）

某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式．为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人．第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据工人完成生产任务的工作时间（单位：min）绘制了如下茎叶图：

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

（1）根据茎叶图判断那种生产方式的效率更高？并说明理由；

（2）求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表：

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

（3）根据（2）中的列联表，能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

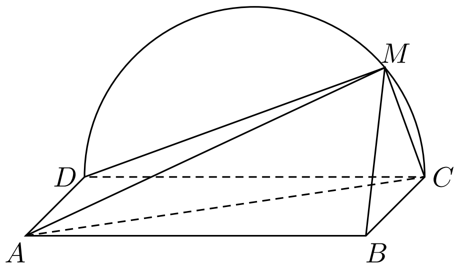
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C,D 的点.

（1）证明：平面 $AMD\perp$ 平面 BMC；

（2）当三棱锥 M–ABC 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成的二面角的正弦值.



20.（12 分）

已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)$（$m>0$）.

（1）证明：$k<-\dfrac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$，证明：$|\overrightarrow{FA}|,|\overrightarrow{FP}|,|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

（1）若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数）．过点 $(0,-\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A,B 两点.

（1）求 α 的取值范围；

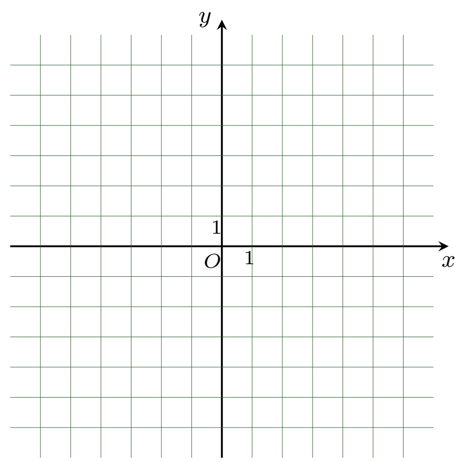
（2）求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

（1）画出 $y=f(x)$ 的图像；

（2）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\leqslant ax+b$，求 $a+b$ 的最小值.



2018 高考试题（全国卷 III）文科数学

一、选择题：本题共 12个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

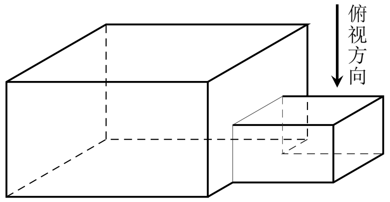
1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1\geqslant 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

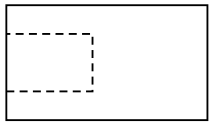
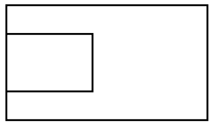
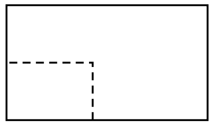
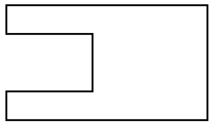
A．$\{0\}$　　B．$\{1\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$

A．$-3-\mathrm{i}$　　B．$-3+\mathrm{i}$　　C．$3-\mathrm{i}$　　D．$3+\mathrm{i}$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头．若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是



A．　　B．　　C．　　D．

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$

A．$\dfrac{8}{9}$　　B．$\dfrac{7}{9}$　　C．$-\dfrac{7}{9}$　　D．$-\dfrac{8}{9}$

5. 某群体中的成员只用现金支付的概率 0.45，既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15，则不用现金支付的概率为

A．0.3　　B．0.4　　C．0.6　　D．0.7

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．π　　D．2π

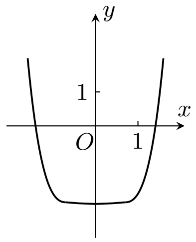
7. 下列函数中，其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是

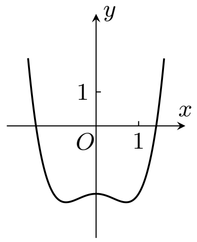
A．$y=\ln(1-x)$　　B．$y=\ln(2-x)$　　C．$y=\ln(1+x)$　　D．$y=\ln(2+x)$

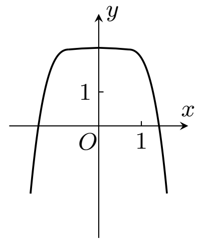
8. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A,B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

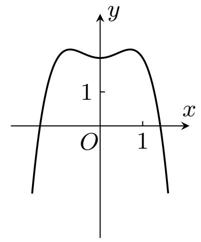
A．$[2,6]$　　B．$[4,8]$　　C．$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　D．$[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

9. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为

A．

B．

C．

D．

10. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的离心率为 $\sqrt{2}$，则点 $(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则 $C=$

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{4}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

12. 设 A,B,C,D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D\text{–}ABC$ 的体积的最大值为

A．$12\sqrt{3}$　　B．$18\sqrt{3}$　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$54\sqrt{3}$

二、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，若 $\boldsymbol{c}\,/\!/\,(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$________.

14. 某公司有大量客户，且不同年龄段客户对其服务的评价有极大差异，为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样，分层抽样和系统抽样，则最合适的抽样方法是________.

15. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y+3\geqslant 0,\\ x-2y-4\geqslant 0,\\ x-2\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 的最大值是________.

16. 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$，$f(a)=4$，则 $f(-a)=$________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_m=63$，求 m．

18.（12 分）

某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式．为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人．第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据工人完成生产任务的工作时间（单位：min）绘制了如下茎叶图：

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

（1）根据茎叶图判断那种生产方式的效率更高？并说明理由；

（2）求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表：

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

（3）根据（2）中的列联表，能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

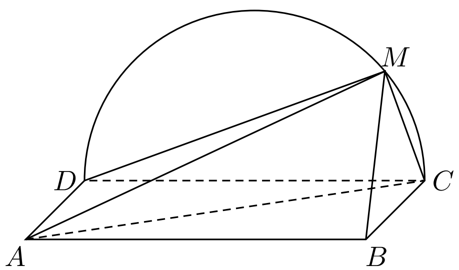
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C,D 的点．

（1）证明：平面 $AMD\perp$ 平面 BMC；

（2）在线段 AM 上是否存在点 P，使得 $MC\parallel$ 平面 PBD? 说明理由．



20.（12 分）

已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)$（$m>0$）．

（1）证明：$k<-\dfrac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$，证明：

$$2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|.$$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程；

（2）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+\mathrm{e}\geqslant 0$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数）．过点 $(0,-\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A,B 两点．

（1）求 α 的取值范围；

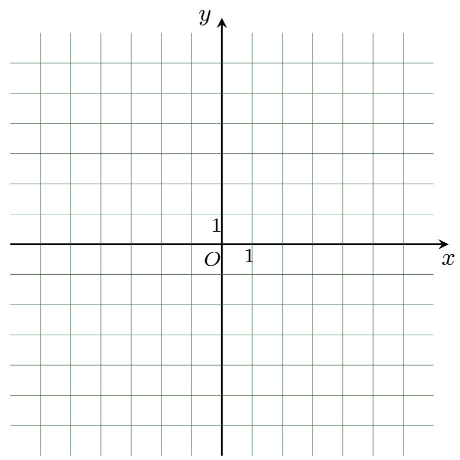
（2）求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$．

（1）画出 $y=f(x)$ 的图像；

（2）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\leqslant ax+b$，求 $a+b$ 的最小值．



2019 高考试题（全国卷 I）理科数学

一、选择题：（本大题共 12个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x<2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x\mid -4<x<3\}$　　B. $\{x\mid -4<x<-2\}$

C. $\{x\mid -2<x<2\}$　　D. $\{x\mid 2<x<3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则

A. $(x+1)^2+y^2=1$　B. $(x-1)^2+y^2=1$　C. $x^2+(y-1)^2=1$　D. $x^2+(y+1)^2=1$

3. 已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则

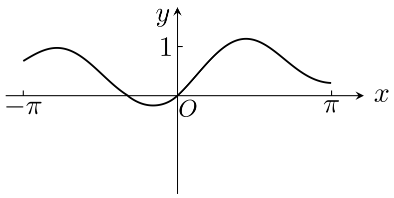
A. $a<b<c$　B. $a<c<b$　C. $c<a<b$　D. $b<c<a$

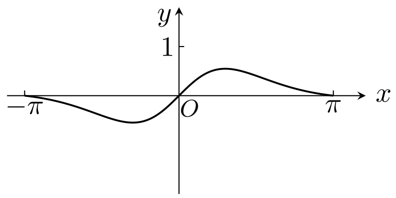
4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105 cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是

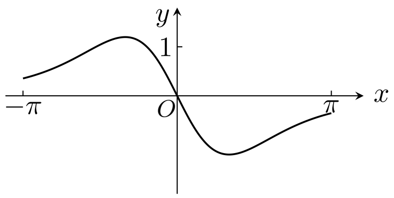
A. 165 cm　　B. 175 cm

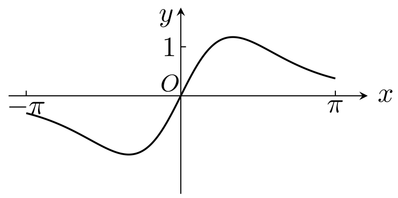
C. 185 cm　　D. 190 cm

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为

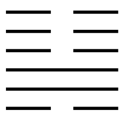
A. 

B. 

C. 

D. 

6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，右图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是

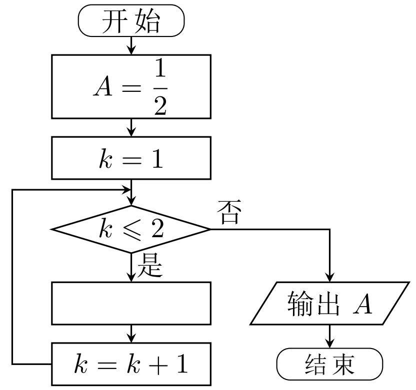


A. $\frac{5}{16}$　B. $\frac{11}{32}$　C. $\frac{21}{32}$　D. $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



A. $A=\dfrac{1}{2+A}$

B. $A=2+\dfrac{1}{A}$

C. $A=\dfrac{1}{1+2A}$

D. $A=1+\dfrac{1}{2A}$

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $S_4=0$, $a_5=5$，则

A. $a_n=2n-5$　B. $a_n=3n-10$　C. $S_n=2n^2-8n$　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F(-1,0)$, $F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点，若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数　　② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有四个零点　　④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④　B. ②④　C. ①④　D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E, F 分别是 PA, AB 的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球 O 的体积为

A. $8\sqrt{6}\pi$　B. $4\sqrt{6}\pi$　C. $2\sqrt{6}\pi$　D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题：（共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

14. 即 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$，则 $S_5=$________.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该对获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4 : 1 获胜的概率是________ .

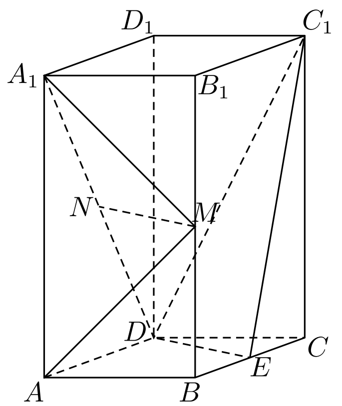
16. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线交于 A, B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为________.

三、解答题：共 70 分，第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.
（1）求 A；
（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

18. (12 分)
如图，直四棱柱 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$，E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点．
（1）证明：MN // 平面 C_1DE；
（2）求二面角 A–MA_1–N 的正弦值.



19. (12 分)
已知抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B，与 x 轴的交点为 P.
（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；
（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$.

20. (12 分)
已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：
（1）$f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点；
（2）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. (12 分)
为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道那种新药更有效，为此进行动物实验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的疗效结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X.
（1）求 X 的分布列；
（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$, $p_8=1$, $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$, $b=P(X=0)$, $c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$.
（i）证明：$\{p_{i+1}-p_i\}(i=1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；
（ii）求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）
在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}.\end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.
（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；
（2）求 C 上的点到 l 的距离的最小值.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）
已知 a, b, c 为正数，且满足 $abc=1$．证明：
（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；
（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

2019 高考试题（全国卷 I）文科数学

一、选择题：(本大题共 12个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则 $|z|=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

2. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{2,3,6,7\}$，则 $B\cap \complement_U A=$

A. $\{1,6\}$　　B. $\{1,7\}$　　C. $\{6,7\}$　　D. $\{1,6,7\}$

3. 已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则

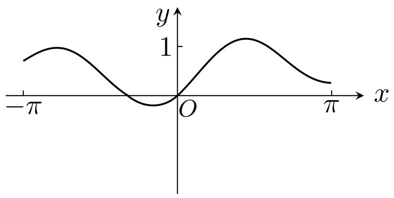
A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

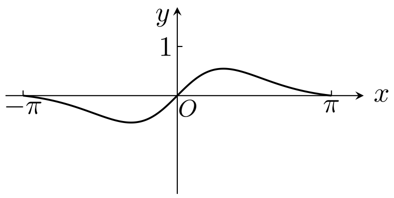
4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$($\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105 cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是

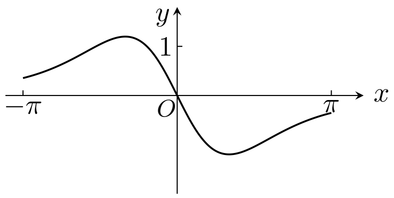
A. 165 cm　　B. 175 cm

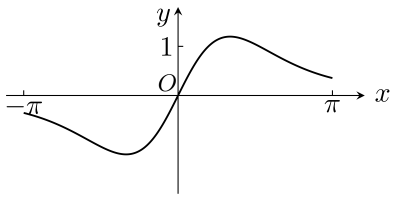
C. 185 cm　　D. 190 cm

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为

A.


B.


C.


D.


6. 某学校为了解 1000 名新生的身体素质，将这些学生编号为 $1,2,\cdots,1000$，从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验．若 46 号学生被抽到，则下面 4 名学生中被抽到的是

A. 8 号　　B. 200 号　　C. 616 号　　D. 815

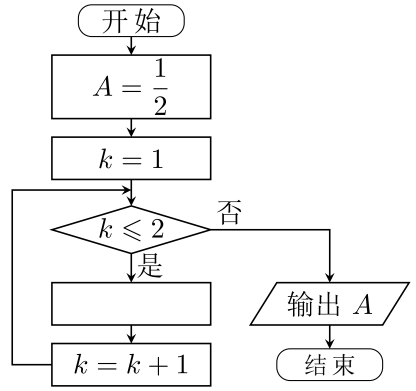
7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

8. $\tan 255^\circ=$

A. $-2-\sqrt{3}$　　B. $-2+\sqrt{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

9. 右图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



A. $A=\dfrac{1}{2+A}$

B. $A=2+\dfrac{1}{A}$

C. $A=\dfrac{1}{1+2A}$

D. $A=1+\dfrac{1}{2A}$

10. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130°，则 C 的离心率为

A. $2\sin 40^\circ$　　B. $2\cos 40^\circ$　　C. $\dfrac{1}{\sin 50^\circ}$　　D. $\dfrac{1}{\cos 50^\circ}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，$\cos A=-\dfrac{1}{4}$，则 $\dfrac{b}{c}=$

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

12. 已知椭圆 C 的焦点为 $F(-1,0)$, $F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点，若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________．

14. 即 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1=1$, $S_3=\dfrac{3}{4}$，则 $S_4=$________．

15. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为________ .

16. 已知 $\angle ACB=90^\circ$，P 为平面 ABC 外一点，$PC=2$，点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$，那么 P 到平面 ABC 的距离为________.

三、解答题：共 70 分，第 17∼21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某商场为提高服务质量，随机调查了 50 男顾客和 50 名女顾客．每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价，得到下面列联表：

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

（1）分别估计男、女顾客对商场服务满意的概率；

（2）能否有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. (12 分)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_9=-a_5$.

（1）若 $a_3=4$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

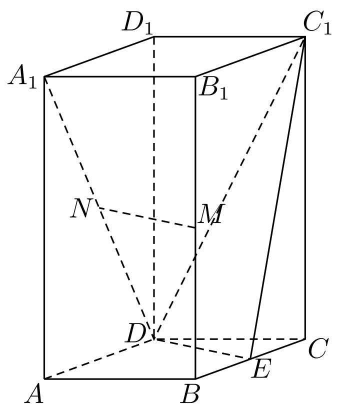
（2）若 $a_1>0$，求使得 $S_n\geqslant a_n$ 的 n 的取值范围.

19. (12 分)

如图，直四棱柱 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$，E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

（1）证明：$MN\,/\!/$ 平面 C_1DE；

（2）求点 C 到平面 C_1DE 的距离.



20. (12 分)

已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（1）证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0,\pi]$，$f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

21. (12 分)

已知点 A, B 关于坐标原点对称，$|AB|=4$，$\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x+2=0$ 相切，(1) 若 A 在直线 $x+y=0$ 上，求 $\odot M$ 的半径；

（2）是否存在定点 P，使得当 A 运动时，$|MA|-|MP|$ 为定值？并说明理由.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}.\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 的距离的最小值.

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 a, b, c 为正数，且满足 $abc=1$. 证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

2019 高考试题（全国卷 II）理科数学

一、选择题：(本大题共 12个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6>0\}$，$B=\{x\mid x-1<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty,1)$　B．$(-2,1)$　C．$(-3,-1)$　D．$(3,+\infty)$

2. 设 $z=-3+2\mathrm{i}$，则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

3. 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,t)$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A．-3　B．-2　C．2　D．3

4. 2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就．实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系．为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨迹运行．L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上．设地球质量为 M_1，月球质量为 M_2，地月距离为 R，L_2 点到月球的距离为 r，根据牛顿运动定律和万有引力定律，r 满足方程：

$$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}.$$

设 $\alpha=\dfrac{r}{R}$．由于 α 的值很小，因此在近似计算中 $\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，则 r 的近似值为

A．$\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}R$　B．$\sqrt{\dfrac{M_2}{2M_1}}R$　C．$\sqrt[3]{\dfrac{3M_2}{2M_1}}R$　D．$\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$

5. 演讲比赛共有 9 为评委分别给出某选手的原始得分，评定该选手的成绩时，从 9 个原始评分中去掉一个最高分、一个最低分，得到 7 个有效评分．7 个有效评分与 9 个原始评分相比，不变的数字特征是

A．中位数　B．平均分　C．方差　D．极差

6. 若 $a>b$，则

A．$\ln(a-b)>0$　B．$3^a<3^b$　C．$a^3-b^3>0$　D．$|a|>|b|$

7. 设 α,β 为两个平面，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$ 的充要条件是

A．α 内有无数条直线与 β 平行　B．α 内有两条相交直线与 β 平行

C．α,β 平行于同一条直线　D．α,β 垂直于同一平面

8. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$

A．2　B．3　C．4　D．8

9. 下列函数中，以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是

A．$f(x)=|\cos 2x|$　B．$f(x)=|\sin 2x|$　C．$f(x)=\cos|x|$　D．$f(x)=\sin|x|$

10. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$

A．$\dfrac{1}{5}$　B．$\dfrac{\sqrt5}{5}$　C．$\dfrac{\sqrt3}{3}$　D．$\dfrac{2\sqrt5}{3}$

11. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P,Q 两点．若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A．$\sqrt2$　B．$\sqrt3$　C．2　D．$\sqrt5$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$．若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant-\dfrac{8}{9}$，则 m 的取值范围是

A．$\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　B．$\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$　C．$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$　D．$\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为________．

14. 已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$，若 $f(\ln 2)=8$，则 $a=$________．

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．若 $b=6$, $a=2c$, $B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________ ．

16. 中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形式多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”（图 1）．半正多面体是由两种或两

种以上的正多边形围成的多面体．半正多面体体现了数学的对称美．图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1．则该半正多面体共有________个面，其棱长为________．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

图 1

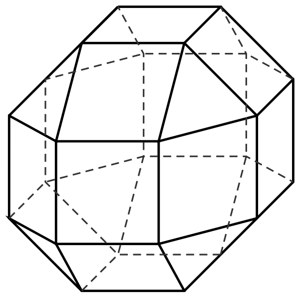


图 2

三、解答题：共 70 分，第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

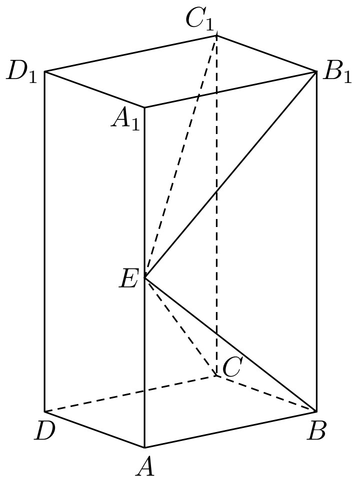
（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

如图，长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 的底面是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$．

（1）证明：$BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，求二面角 $B\text{–}EC\text{–}C_1$ 的正弦值．



18.（12 分）

11 分制乒乓球比赛，每赢一球得 1 分，当某局打成 10 : 10 平后，每球交换发球权，先多得 2 分的一方获胜，该局比赛结束．甲、乙两位同学进行单打比赛，假设甲发球时甲得分的概率为 0.5，乙发球时甲得分的概率为 0.4，各球的结果相互独立．在某局双方 10 : 10 平后，甲先发球，两人又打了 X 个球该局比赛结束．

（1）求 $P(X=2)$；

（2）求事件"$x=4$ 且甲获胜"的概率．

19.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1, b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$, $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$．

（1）证明：$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列，$\{a_n-b_n\}$ 是等差数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式．

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线．

21.（12 分）

已知点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$．记 M 的轨迹为曲线 C．

（1）求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 于点 G．

（i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形；

（ii）求 $\triangle PQG$ 面积的最大值．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在极坐标系中，O 为极点，点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P．

（1）当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求 ρ_0 及 l 的极坐标方程；

（2）当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时，求 P 点轨迹的极坐标方程．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$．

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<0$ 的解集；

（2）若 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围．

2019 高考试题（全国卷 II）文科数学

一、选择题：(本大题共 12个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A=\{x\mid x>-1\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1,+\infty)$　B. $(-\infty,2)$　C. $(-1,2)$　D. $\varnothing$

2. 设 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$，则 $\bar{z}=$

A. $1+2\mathrm{i}$　B. $-1+2\mathrm{i}$　C. $1-2\mathrm{i}$　D. $-1-2\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. $5\sqrt{2}$　D. 50

4. 生物实验室有 5 只兔子，其中有 3 只测量过某项指标．若从这 5 只兔子中随机取出 3 只，则恰有两只测量过该指标的概率为

A. $\dfrac{2}{3}$　B. $\dfrac{3}{5}$　C. $\dfrac{2}{5}$　D. $\dfrac{1}{5}$

5. 在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测．

甲：我的成绩比乙高．

乙：丙的成绩比我和甲的都高．

丙：我的成绩比乙高．

成绩公布后，三人成绩互不相同，且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A. 甲、乙、丙　B. 乙、甲、丙　C. 丙、乙、甲　D. 甲、丙、乙

6. 设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$

A. $\mathrm{e}^{-x}-1$　B. $\mathrm{e}^{-x}+1$　C. $-\mathrm{e}^{-x}-1$　D. $-\mathrm{e}^{-x}+1$

7. 设 α,β 为两个平面，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$ 的充要条件是

A. α 内有无数条直线与 β 平行　B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α,β 平行于同一条直线　D. α,β 垂直于同一平面

8. 若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，则 $\omega=$

A. 2　B. $\dfrac{3}{2}$　C. 1　D. $\dfrac{1}{2}$

9. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$

A. 2　B. 3　C. 4　D. 8

10. 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线方程为

A. $x-y-\pi-1=0$　B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$　D. $x+y-\pi+1=0$

11. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$

A. $\dfrac{1}{5}$　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

12. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P,Q 两点．若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. 2　D. $\sqrt{5}$

二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-6\geqslant 0,\\ x+y-3\leqslant 0,\\ y-2\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最大值是________.

14. 我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为________.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．已知 $b\sin A+a\cos B=0$，则 $B=$________ .

16. 中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形式多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1)．半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体．半正多面体体现了数学的对称美．图 2 是一个棱数为 48 的半

正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且次正方体的棱长为 1．则该半正多面体共有________ 个面，其棱长为________．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

图 1

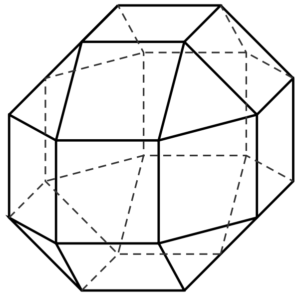


图 2

三、解答题：共 70 分，第 17～21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

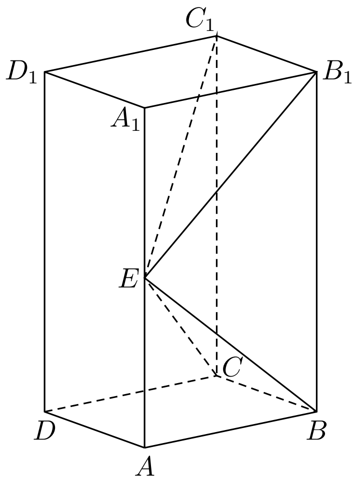
（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

如图，长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE \perp EC_1$．

（1）证明：$BE \perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE = A_1E$，$AB = 3$，求四棱锥 E–BB_1C_1C 的体积．



18.（12 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1 = 2$，$a_3 = 2a_2 + 16$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n = \log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

19.（12 分）

某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况，随机调查了 100 个企业，得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表．

y 的分组	$[-0.20, 0)$	$[0, 0.20)$	$[0.20, 0.40)$	$[0.40, 0.60)$	$[0.60, 0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

（1）分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例；

（2）求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值（同一组中的数据用改组区间的中点值为代表）．（精确到 0.01）

附：$\sqrt{74} \approx 8.602$．

20.（12 分）

已知点 F_1, F_2 是椭圆 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两个焦点，P 为 C 上的点，O 为坐标原点．

（1）若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形，求 C 的离心率；

（2）过如果存在点 P，使得 $PF_1 \perp PF_2$，且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16，求 b 的值和 a 的取值范围．

21.（12 分）

已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$．证明：

（1）$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2）$f(x) = 0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在极坐标系中，O 为极点，点 $M(\rho_0, \theta_0)(\rho_0 > 0)$ 在曲线 $C : \rho = 4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4, 0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P．

（1）当 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$ 时，求 ρ_0 及 l 的极坐标方程；

（2）当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时，求 P 点轨迹的极坐标方程．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x) = |x-a|x + |x-2|(x-a)$．

（1）当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) < 0$ 的解集；

（2）若 $x \in (-\infty, 1)$ 时，$f(x) < 0$，求 a 的取值范围.

2019 高考试题（全国卷 III）理科数学

一、选择题：(本大题共 12个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2. 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 $z=$

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3.《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著．某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 位学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为

A．0.5　　B．0.6　　C．0.7　　D．0.8

4. $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为

A．12　　B．16　　C．20　　D．24

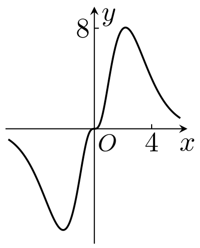
5. 已知各项为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15，且 $a_5=3a_3+4a_1$，则 $a_3=$

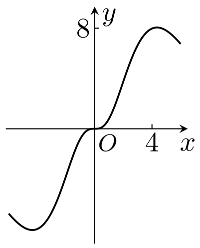
A．16　　B．8　　C．4　　D．2

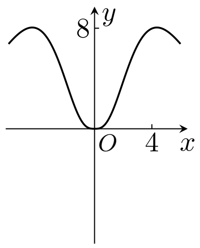
6. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则

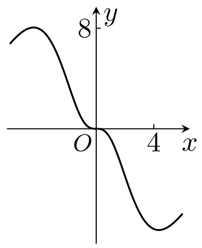
A．$a=\mathrm{e},b=-1$　　B．$a=\mathrm{e},b=1$　　C．$a=\mathrm{e}^{-1},b=1$　　D．$a=\mathrm{e}^{-1},b=-1$

7. 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为

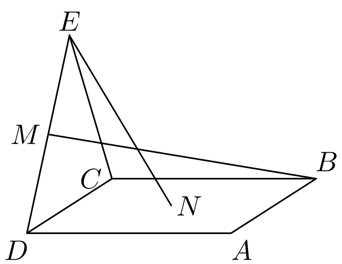
A．

B．

C．

D．

8. 如图，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，$\triangle ECD$ 为正三角形，平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$，M 是线段 ED 的中点，则



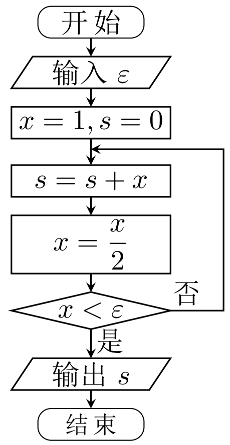
A．$BM=EN$，且直线 BM,EN 是相交直线

B．$BM\neq EN$，且直线 BM,EN 是相交直线

C．$BM=EN$，且直线 BM,EN 是异面直线

D．$BM\neq EN$，且直线 BM,EN 是异面直线

9. 执行右边的程序框图，如果输入的 ε 为 0.01，则输出的 s 的值等于



A．$2-\dfrac{1}{2^4}$

B．$2-\dfrac{1}{2^5}$

C．$2-\dfrac{1}{2^6}$

D．$2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的一条渐近线上，O 为坐标原点，若 $|PO|=|PF|$，则 $\triangle PFO$ 的面积为

A．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则

A．$f\big(\log_3\frac{1}{4}\big)>f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)>f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)$　　B．$f\big(\log_3\frac{1}{4}\big)>f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)>f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)$

C．$f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)>f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)>f\big(\log_3\frac{1}{4}\big)$　　D．$f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)>f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)>f\big(\log_3\frac{1}{4}\big)$

12. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{5}\right)$（$\omega>0$），已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点．下述四个结论：

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点　　② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{10}\right)$ 单调递增　　④ ω 的取值范围是 $\left[\dfrac{12}{5},\dfrac{29}{10}\right)$

A．①④　　B．②③　　C．①②③　　D．①③④

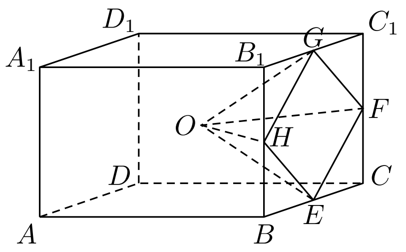
二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$ ________.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1\neq 0$，$a_2=3a_1$，则 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=$ ________.

15. 设 F_1,F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限．若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为________.

16. 学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型．如图，该模型为长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O\text{–}EFGH$ 后得到的几何体，其中 O 为长方体的中心，E, F, G, H，分别为所在棱的中点，$AB = BC = 6\,\text{cm}$，$AA_1 = 4\,\text{cm}$．3D 打印原料密度为 $0.9\,\text{g/cm}^3$．不计打印损耗，制作该模型所需原料的质量为填空________ g．

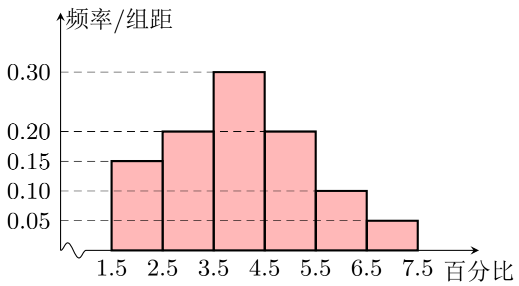


三、解答题：共 70 分，第 17～21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

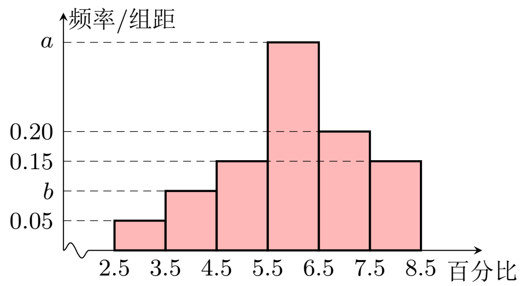
（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A，B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液．每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同．经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比．根据实验数据分别得到如下直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”．根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70．

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组数据用该区间的中点值为代表）．

18. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2} = b\sin A$．

（1）求 B；

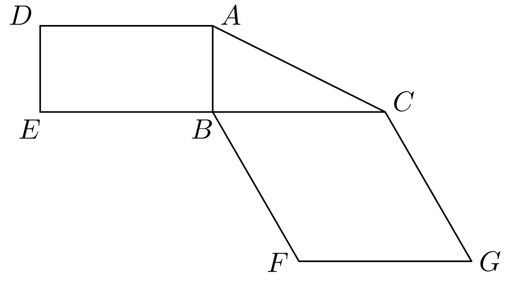
（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c = 1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围．

19. (12 分)

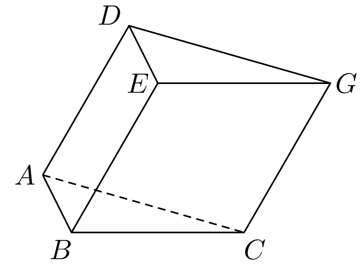
图 1 是由矩形 $ADEB$，Rt$\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB = 1$, $BE = BF = 2$，$\angle FBC = 60°$．将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图 2．

（1）证明：图 2 中的 A, C, G, D 四点共面，且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图 2 中的二面角 $B\text{–}CG\text{–}A$ 的大小．



（图 1）



（图 2）

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）是否存在 a, b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值为 -1，且最大值为 1？若存在，求出 a, b 的所有值；若不存在，说明理由．

21. (12 分)

已知曲线 $C: y = \dfrac{x^2}{2}$，D 为直线 $y = -\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A, B．

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）若以 $E\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求四边形 $ADBE$ 的面积．

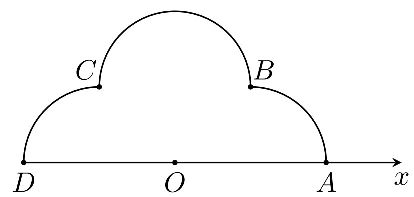
（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2, 0)$, $B\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2, \pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1, 0)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1, \pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$,曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$,曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$．

（1）分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP| = \sqrt{3}$，求 P 的极坐标．



23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

设 $x, y, z \in \mathbf{R}$，且 $x + y + z = 1$．

（1）求 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$，证明：$a \leqslant -3$ 或 $a \geqslant -1$．

2019 高考试题（全国卷 III）文科数学

一、选择题：(本大题共 12个小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x \mid x^2 \leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 两位男同学和两位女同学随机排成一列，则两位女同学相邻的概率为

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4.《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著．某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 位学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

5. 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

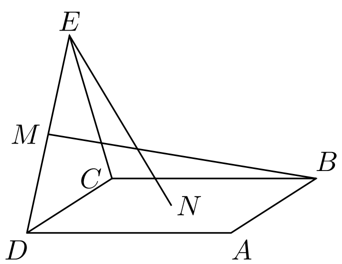
6. 已知各项为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15，且 $a_5=3a_3+4a_1$，则 $a_3=$

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

7. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则

A. $a=\mathrm{e}, b=-1$　　B. $a=\mathrm{e}, b=1$　　C. $a=\mathrm{e}^{-1}, b=1$　　D. $a=\mathrm{e}^{-1}, b=-1$

8. 如图，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，$\triangle ECD$ 为正三角形，平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$，M 是线段 ED 的中点，则



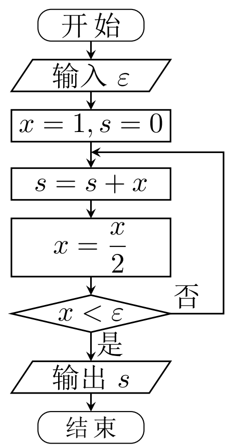
A. $BM=EN$，且直线 BM, EN 是相交直线

B. $BM\neq EN$，且直线 BM, EN 是相交直线

C. $BM=EN$，且直线 BM, EN 是异面直线

D. $BM\neq EN$，且直线 BM, EN 是异面直线

9. 执行右边的程序框图，如果输入的 ε 为 0.01，则输出的 s 的值等于



A. $2-\dfrac{1}{2^4}$

B. $2-\dfrac{1}{2^5}$

C. $2-\dfrac{1}{2^6}$

D. $2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 已知 F 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点，点 P 在 C 上，O 为坐标原点，若 $|OP|=|OF|$，则 $\triangle OPF$ 的面积为

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{5}{2}$　　C. $\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}$

11. 记不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 6,\\ 2x-y\geqslant 0.\end{cases}$ 表示的平面区域为 D．命题 $p:\exists(x,y)\in D, 2x+y\geqslant 9$；命题 $q:\forall(x,y)\in D, 2x+y\leqslant 12$．下面给出了四个命题：

① $p\vee q$　　② $\neg p\vee q$　　③ $p\wedge\neg q$　　④ $\neg p\wedge\neg q$

这四个命题中，所有真命题的编号是

A. ①③　　B. ①②　　C. ②③　　D. ③④

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则

A. $f\big(\log_3\dfrac{1}{4}\big)>f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)>f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)$　　B. $f\big(\log_3\dfrac{1}{4}\big)>f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)>f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)$

C. $f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)>f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)>f\big(\log_3\dfrac{1}{4}\big)$　　D. $f\big(2^{-\frac{2}{3}}\big)>f\big(2^{-\frac{3}{2}}\big)>f\big(\log_3\dfrac{1}{4}\big)$

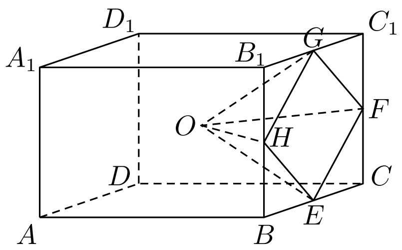
二、填空题：(共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$，$\boldsymbol{b}=(-8,6)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_3=5, a_7=13$，则 $S_{10}=$________.

15. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限．若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为________.

16. 学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型．如图，该模型为长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O\text{–}EFGH$ 后得到的几何体，其中 O 为长方体的中心，E, F, G, H，分别为所在棱的中点，$AB = BC = 6\,\text{cm}$，$AA_1 = 4\,\text{cm}$．3D 打印原料密度为 $0.9\,\text{g/cm}^3$．不计打印损耗，制作该模型所需原料的质量为填空________ g．

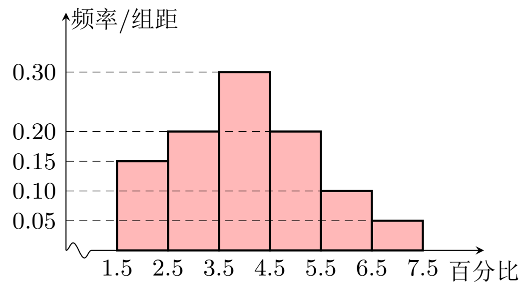


三、解答题：共 70 分，第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

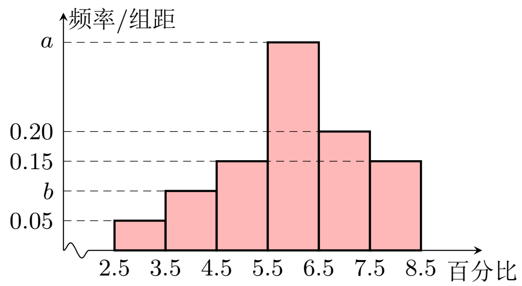
（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A，B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液．每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同．经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比．根据实验数据分别得到如下直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”．根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70．

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组数据用该区间的中点值为代表）.

18. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2} = b\sin A$．

（1）求 B；

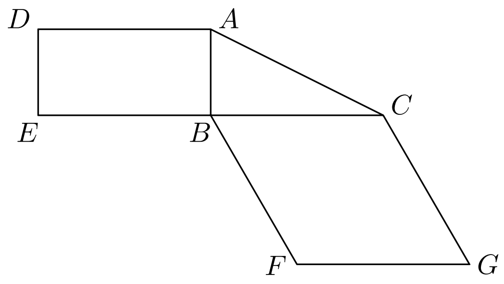
（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c = 1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. (12 分)

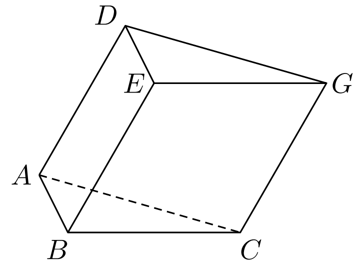
图 1 是由矩形 $ADEB$，Rt$\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB = 1$, $BE = BF = 2$，$\angle FBC = 60°$．将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图 2.

（1）证明：图 2 中的 A, C, G, D 四点共面，且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积.



（图 1）



（图 2）

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $0 < a < 3$ 时，记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M，最大值为 m，求 $M - m$ 取值范围.

21. (12 分)

已知曲线 $C : y = \dfrac{x^2}{2}$，D 为直线 $y = -\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A, B.

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）若以 $E\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求该圆的方程.

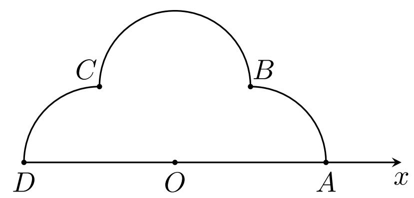
（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2, 0)$, $B\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2, \pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1, 0)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1, \pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$, 曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$, 曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.

（1）分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP| = \sqrt{3}$，求 P 的极坐标.



23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

设 $x, y, z \in \mathbf{R}$，且 $x + y + z = 1$.

（1）求 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$，证明：$a \leqslant -3$ 或 $a \geqslant -1$.