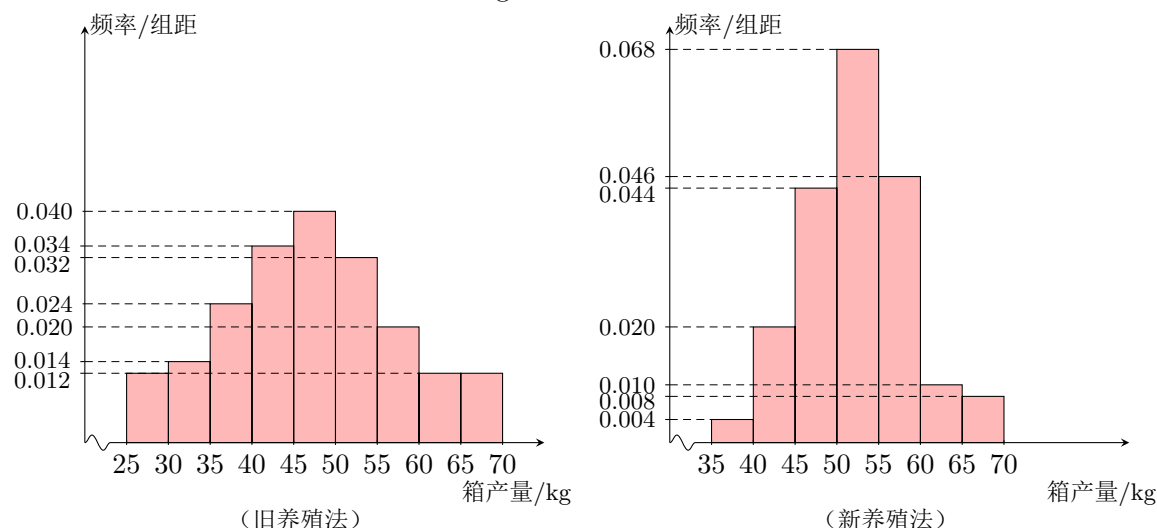


18. (12 分)

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如下:



(I) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记  $A$  表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg, 新养殖法的箱产量不低于 50 kg”, 估计  $A$  的概率;

(II) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 < 50 kg	箱产量 ≥ 50 kg
旧养殖法		
新养殖法		

附:  $\frac{P(K^2 \geq k)}{k}$

0.050	0.010	0.001
3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

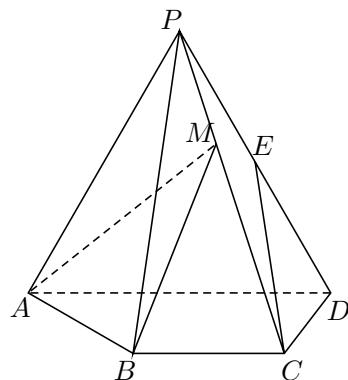
(III) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

19. (12 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 侧面  $PAD$  为等边三角形且垂直于底面  $ABCD$ ,  $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ ,  $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $E$  是  $PD$  的中点.

(1) 证明:  $CE \parallel$  平面  $PAB$ ;

(2) 点  $M$  在棱  $PC$  上, 且直线  $BM$  与底面  $ABCD$  所成角为  $45^\circ$ . 求二面角  $M-AB-D$  的余弦值.



20. (12 分)

设  $O$  为坐标原点, 动点  $M$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  上, 过  $M$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为  $N$ , 点  $P$  满足  $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ .

(1) 求点  $P$  的轨迹方程;

(2) 设点  $Q$  在直线  $x = -3$  上, 且  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ . 证明: 过点  $P$  且垂直于  $OQ$  的直线  $l$  过  $C$  的左焦点  $F$ .

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$ , 且  $f(x) \geq 0$ .

(1) 求  $a$ ;

(2) 证明:  $f(x)$  存在唯一的极大值点  $x_0$ , 且  $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$ .

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点, 以  $x$  轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho \cos \theta = 4$ .

(1)  $M$  为曲线  $C_1$  上的动点, 点  $P$  在线段  $OM$  上, 且满足  $|OM| \cdot |OP| = 16$ , 求点  $P$  的轨迹  $C_2$  的直角坐标方程;

(2) 设点  $A$  的极坐标为  $(2, \frac{\pi}{3})$ , 点  $B$  在曲线  $C_2$  上, 求  $\triangle OAB$  面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知  $a > 0, b > 0, a^3 + b^3 = 2$ . 证明:

(1)  $(a+b)(a^5 + b^5) \geq 4$ ;

(2)  $a + b \leq 2$ .