种以上的正多边形围成的多面体．半正多面体体现了数学的对称美．图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1．则该半正多面体共有________ 个面，其棱长为________．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

图 1

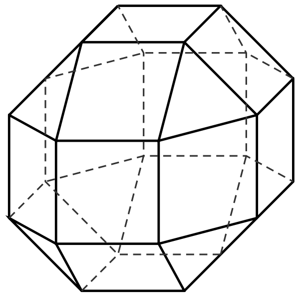


图 2

**三、解答题：共 70 分，第 17~21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

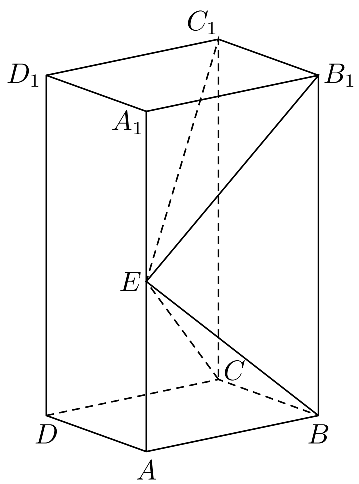
**（一）必考题：共 60 分。**

17.（12 分）

如图，长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面是正方形，点 $E$ 在棱 $AA_1$ 上，$BE\perp EC_1$．

（1）证明：$BE\perp$ 平面 $EB_1C_1$；

（2）若 $AE=A_1E$，求二面角 $B$–$EC$–$C_1$ 的正弦值．




18.（12 分）

11 分制乒乓球比赛，每赢一球得 1 分，当某局打成 10 : 10 平后，每球交换发球权，先多得 2 分的一方获胜，该局比赛结束．甲、乙两位同学进行单打比赛，假设甲发球时甲得分的概率为 0.5，乙发球时甲得分的概率为 0.4，各球的结果相互独立．在某局双方 10 : 10 平后，甲先发球，两人又打了 $X$ 个球该局比赛结束．

（1）求 $P(X=2)$；

（2）求事件“$x=4$ 且甲获胜”的概率．

19.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1, b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4, 4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$．

（1）证明：$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列，$\{a_n-b_n\}$ 是等差数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式．

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

（2）设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线．

21.（12 分）

已知点 $A(-2,0), B(2,0)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 $AM$ 与 $BM$ 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$．记 $M$ 的轨迹为曲线 $C$．

（1）求 $C$ 的方程，并说明 $C$ 是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交 $C$ 于 $P, Q$ 两点，点 $P$ 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 $E$，连结 $QE$ 并延长交 $C$ 于点 $G$．

（i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形；

（ii）求 $\triangle PQG$ 面积的最大值．

**（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。**

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

在极坐标系中，$O$ 为极点，点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上，直线 $l$ 过点 $A(4,0)$ 且与 $OM$ 垂直，垂足为 $P$．

（1）当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求 $\rho_0$ 及 $l$ 的极坐标方程；

（2）当 $M$ 在 $C$ 上运动且 $P$ 在线段 $OM$ 上时，求 $P$ 点轨迹的极坐标方程．

23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$．

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<0$ 的解集；

（2）若 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，求 $a$ 的取值范围．