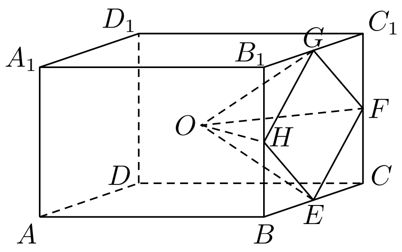
16. 学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型．如图，该模型为长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 O–$EFGH$ 后得到的几何体，其中 O 为长方体的中心，E, F, G, H，分别为所在棱的中点，$AB = BC = 6\,\text{cm}$，$AA_1 = 4\,\text{cm}$．3D 打印原料密度为 $0.9\,\text{g/cm}^3$．不计打印损耗，制作该模型所需原料的质量为填空________ g．

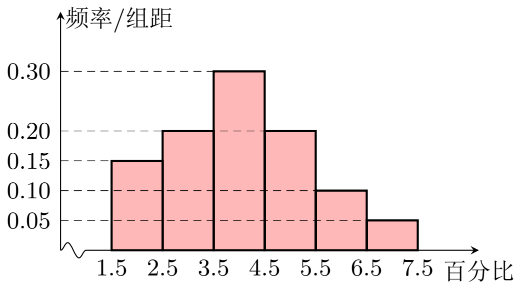


三、解答题：共 70 分，第 17～21 题为必考题，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

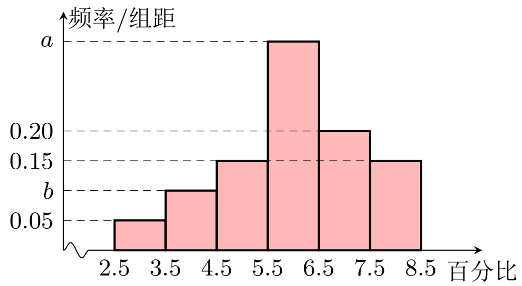
（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A，B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液．每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同．经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比．根据实验数据分别得到如下直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”．根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70．

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组数据用该区间的中点值为代表）．

18. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c．已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2} = b\sin A$．

（1）求 B；

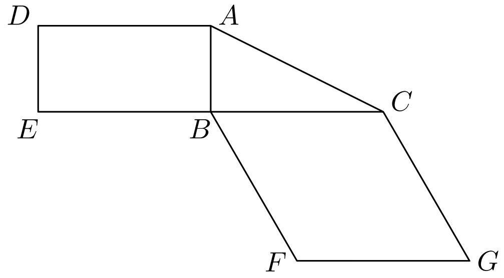
（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c = 1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围．

19. (12 分)

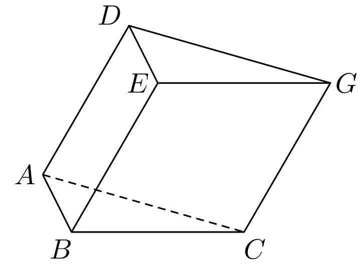
图 1 是由矩形 $ADEB$，Rt$\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB = 1$, $BE = BF = 2$，$\angle FBC = 60°$．将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图 2．

（1）证明：图 2 中的 A, C, G, D 四点共面，且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积．



（图 1）



（图 2）

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $0 < a < 3$ 时，记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M，最大值为 m，求 $M - m$ 取值范围．

21. (12 分)

已知曲线 $C: y = \dfrac{x^2}{2}$，D 为直线 $y = -\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A, B．

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）若以 $E\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求该圆的方程．

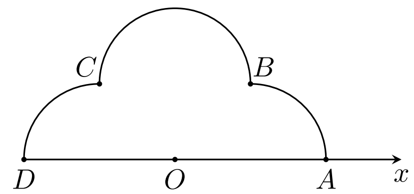
（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2, 0)$, $B\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2, \pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1, 0)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1, \pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$，曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$，曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$．

（1）分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP| = \sqrt{3}$，求 P 的极坐标．



23. [选修 4–5：不等式选讲]（10 分）

设 $x, y, z \in \mathbf{R}$，且 $x + y + z = 1$．

（1）求 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$，证明：$a \leqslant -3$ 或 $a \geqslant -1$．