

17. (12 分)

等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_5 = 4a_3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $S_m = 63$ , 求  $m$ .

18. (12 分)

某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人. 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如下茎叶图:

第一种生产方式											第二种生产方式													
										8	6	5	5	6	8	9								
										9	7	6	2	7	0	1	2	2	3	4	5	6	6	8
9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	8	1	4	4	5										
										2	1	1	0	0	9	0								

(1) 根据茎叶图判断那种生产方式的效率更高? 并说明理由;

(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数  $m$ , 并将完成生产任务所需时间超过  $m$  和不超过  $m$  的工人数填入下面的列联表:

	超过 $m$	不超过 $m$
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异.

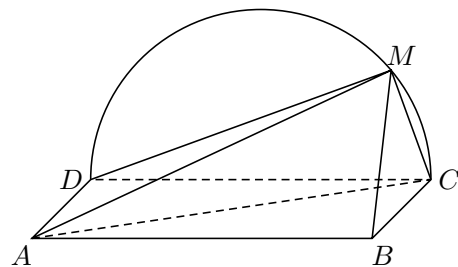
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \frac{P(K^2 \geq k)}{k} \begin{array}{ccc} 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

19. (12 分)

如图, 边长为 2 的正方形  $ABCD$  所在平面与半圆弧  $\widehat{CD}$  所在平面垂直,  $M$  是  $\widehat{CD}$  上异于  $C, D$  的点.

(1) 证明: 平面  $AMD \perp$  平面  $BMC$ ;

(2) 在线段  $AM$  上是否存在点  $P$ , 使得  $MC \parallel$  平面  $PBD$ ? 说明理由.



20. (12 分)

已知斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  交于  $A, B$  两点, 线段  $AB$  的中点为  $M(1, m)$  ( $m > 0$ ).

(1) 证明:  $k < -\frac{1}{2}$ ;

(2) 设  $F$  为  $C$  的右焦点,  $P$  为  $C$  上一点, 且  $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \mathbf{0}$ , 证明:

$$2|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}|.$$

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, -1)$  处的切线方程;

(2) 证明: 当  $a \geq 1$  时,  $f(x) + e \geq 0$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $\odot O$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数). 过点  $(0, -\sqrt{2})$

且倾斜角为  $\alpha$  的直线  $l$  与  $\odot O$  交于  $A, B$  两点.

(1) 求  $\alpha$  的取值范围;

(2) 求  $AB$  中点  $P$  的轨迹的参数方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$ .

(1) 画出  $y = f(x)$  的图像;

(2) 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) \leq ax + b$ , 求  $a + b$  的最小值.

