

17. (12 分)

等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_m = 63$, 求 m .

18. (12 分)

某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人. 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如下茎叶图:

第一种生产方式											第二种生产方式									
										8	6	5	5	6	8	9				
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2										7	0	1	2	2	3	4	5	6	6	8
2 1 1 0 0										8	1	4	4	5						
										9	0									

(1) 根据茎叶图判断那种生产方式的效率更高? 并说明理由;

(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m , 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异.

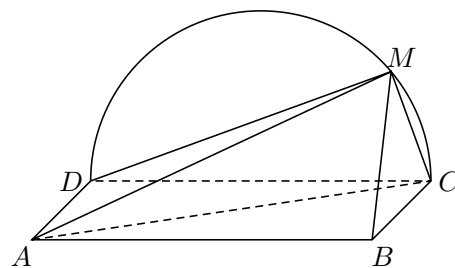
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \frac{P(K^2 \geq k)}{k} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline 3.841 & 6.635 & 10.828 \\ \hline \end{array}$$

19. (12 分)

如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直, M 是 \widehat{CD} 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;

(2) 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时, 求面 MAB 与面 MCD 所成的二面角的正弦值.



20. (12 分)

已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

(1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \mathbf{0}$, 证明: $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2) \ln(1 + x) - 2x$.

(1) 若 $a = 0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数). 过点 $(0, -\sqrt{2})$

且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

(1) 求 α 的取值范围;

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 的图像;

(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax + b$, 求 $a + b$ 的最小值.

