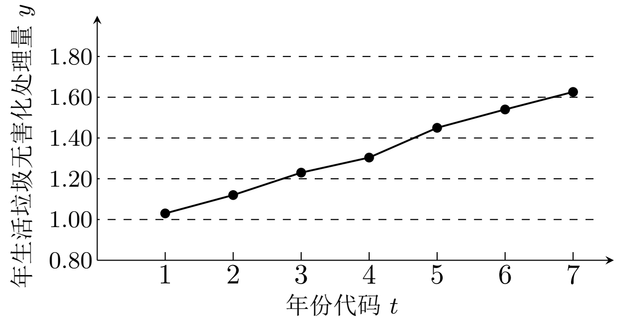
三、解答题：(满分 70 分)

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1+\lambda a_n$，其中 $\lambda \neq 0$.

(I) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列的，并求其通项公式;

(II) 若 $S_5 = \dfrac{31}{32}$，求 λ.

18. (12 分) 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.



注意：年份代码 1–7 分别对应 2008–2014

(I) 由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明;

(II) 建立 y 与 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

参考公式：相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,

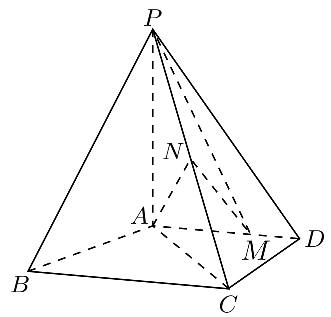
回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

19. (12 分) 四棱锥 P–$ABCD$ 中，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，$AD \parallel BC$，$AB = AD = AC = 3, PA = BC = 4, M$ 为线段 AD 上一点，$AM = 2MD, N$ 为 PC 的中点.

(I) 证明 $MN \parallel$ 平面 PAB;

(II) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知抛物线 $C : y^2 = 2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 P, Q 两点.

(I) 若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR \parallel FQ$;

(II) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

21. (12 分)

设函数 $f(x) = \alpha\cos 2x + (\alpha-1)(\cos x + 1)$，其中 $\alpha > 0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A.

(I) 求 $f'(x)$;

(II) 求 A;

(III) 证明 $|f'(x)| \leqslant 2A$.

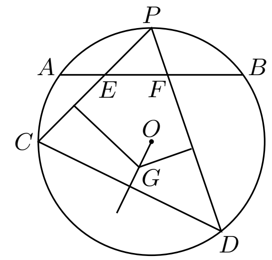
请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (10 分) 选修 4–1：几何证明选讲

如图，$\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P，弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

(I) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$，求 $\angle PCD$ 的大小;

(II) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明 $OG \perp CD$.



23. (10 分) 选修 4–4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}t\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(I) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(II) 设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. (10 分) 选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x-a| + a$.

(I) 当 $a = 2$ 时，求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(II) 设函数 $g(x) = |2x-1|$. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时，$f(x) + g(x) \geqslant 3$，求 a 的取值范围.