

14. 即  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_4^2 = a_6$ , 则  $S_5 =$  \_\_\_\_\_.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为 “主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4:1 获胜的概率是 \_\_\_\_\_.

16. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  的直线与  $C$  的两条渐近线交于  $A, B$  两点. 若  $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$ , 则  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分, 第 17~21 题为必考题, 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 设  $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$ .

(1) 求  $A$ ;

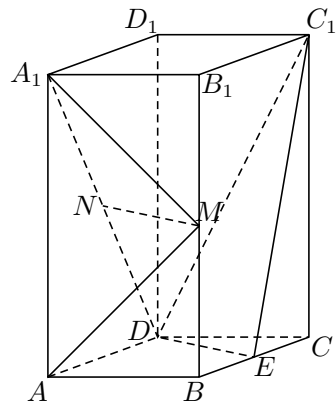
(2) 若  $\sqrt{2}a + b = 2c$ , 求  $\sin C$ .

18. (12 分)

如图, 直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面是菱形,  $AA_1 = 4$ ,  $AB = 2$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $E, M, N$  分别是  $BC, BB_1, A_1D$  的中点.

(1) 证明:  $MN \parallel$  平面  $C_1DE$ ;

(2) 求二面角  $A-MA_1-N$  的正弦值.



19. (12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 3x$  的焦点为  $F$ , 斜率为  $\frac{3}{2}$  的直线  $l$  与  $C$  的交点为  $A, B$ , 与  $x$  轴的交点为  $P$ .

(1) 若  $|AF| + |BF| = 4$ , 求  $l$  的方程;

(2) 若  $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ , 求  $|AB|$ .

20. (12 分)

已知函数  $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数. 证明:

(1)  $f'(x)$  在区间  $(-1, \frac{\pi}{2})$  存在唯一极大值点;

(2)  $f(x)$  有且仅有 2 个零点.

21. (12 分)

为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道那种新药更有效, 为此进行动物实验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的疗效结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为  $\alpha$  和  $\beta$ , 一轮试验中甲药的得分记为  $X$ .

(1) 求  $X$  的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分,  $p_i (i = 0, 1, \dots, 8)$  表示 “甲药的累计得分为  $i$  时, 最终认为甲药比乙药更有效” 的概率, 则  $p_0 = 0, p_8 = 1, p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i = 1, 2, \dots, 7)$ , 其中  $a = P(X = -1), b = P(X = 0), c = P(X = 1)$ . 假设  $\alpha = 0.5, \beta = 0.8$ .

(i) 证明:  $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 1, 2, \dots, 7)$  为等比数列;

(ii) 求  $p_4$ , 并根据  $p_4$  的值解释这种试验方案的合理性.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2}. \end{cases}$  ( $t$  为参数). 以坐标原点  $O$  为

极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0$ .

(1) 求  $C$  和  $l$  的直角坐标方程;

(2) 求  $C$  上的点到  $l$  的距离的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知  $a, b, c$  为正数, 且满足  $abc = 1$ . 证明:

(1)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$ ;

(2)  $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$ .