

数列知识点汇总

目录

1	数列基本概念	2
1.1	数列与函数	2
1.2	通项公式	2
1.3	数列的分类	2
1.4	数列通项求法	3
2	等差数列	3
2.1	基本性质	3
2.2	性质扩充	4
3	等比数列	5
3.1	基本性质	5
4	数列求和相关问题	6
4.1	求前 n 项和的方法	6
4.2	裂项相消法	7
4.3	错位相减法	7
5	练习	9

1 数列基本概念

按照一定的顺序排列的数叫做数列，数列中的每一个数叫做数列的项. 排在第一位的数称作数列的首项，排在第二位的称为数列的第 2 项……排在第 n 位的称为这个数列的第 n 项. 数列的一般形式为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$. 项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列.

1.1 数列与函数

在函数的意义下，数列是定义域为正整数集 \mathbf{N}^* (或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$) 的特殊函数，数列的通项公式就是相应的函数解析式，即 $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}^*)$.

1.2 通项公式

1.2.1 通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式.

1.2.2 递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第一项 (或前几项)，且从第二项 (或某一项) 开始任何一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} (或前几项) 间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做数列 $\{a_n\}$ 的递推公式.

1.3 数列的分类

类比函数的性质及其分类，对数列进行恰当的分类可以更深刻的理解和认识数列.

1) 根据项数是有限还是无限分类：

- i) 有穷数列：项数有限的数列；
- ii) 无穷数列：项数无限的数列；

2) 根据项的增减规律分类：

- i) 递增数列：从第二项起每一项都大于它的前一项；
- ii) 递减数列：从第二项起每一项都小于它的前一项；

递增数列和递减数列统称单调数列；

3) 根据任何一项的绝对值是否都小于某一个正数 (常数) 来分类：

- i) 有界数列： $\forall x \in \mathbf{N}^*, |a_n| \leq M$ (M 为常数)；
- ii) 无界数列： $\forall M \in \mathbf{R}^+, \exists x \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $|a_n| > M$.

1.4 数列通项求法

1.4.1 数列的前 n 项和与通项公式的关系

$$1) S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n;$$

$$2) a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

注意：一定要验证 $n = 1$ 的情况.

1.4.2 利用递推关系通项

已知数列 $\{a_n\}$ 的递推关系求通项时，通常用累加法、累乘法和构造法求解.

1. 形如 $a_n = a_{n-1} + m$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 时，构造等差数列求解，形如 $a_n = xa_{n-1} + y$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 时，构造等比数列求解；
2. 形如 $a_n = a_{n-1} + f(n)$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 时，用累加法；
3. 形如 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n)$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 时，用累乘法求解.

2 等差数列

2.1 基本性质

2.1.1 定义

一般地，如果一个数列从第二项开始，每一项都与前一项的差为一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做这个数列的公差，通常用字母 d 表示.

注：目前大部分等差数列考题都可以通过转化为 a_1 和 d 求出.

2.1.2 通项公式

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，那么使用累加法可得它的通项公式是 $a_n = a_1 + (n-1)d, n \in \mathbf{N}^*$

证明. 由给定条件可得:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= d. \end{aligned}$$

等号两边累加可得: $a_n - a_1 = (n-1)d$. 即:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

□

2.1.3 等差中项

- 1) 如果 $A = \frac{a+b}{2}$, 则称 A 为 a 和 b 的等差中项 (考试常用);
- 2) 等差数列中, 等间隔的三项 $a_{n-p}, a_n, a_{n+p} (n, p \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n < p)$ 满足: $2a_n = a_{n-p} + a_{n+p}$;
- 3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若有 $k+l=m+n (k, l, m, n \in \mathbf{N}^*)$, 则有 $a_k + a_l = a_m + a_n$.

2.1.4 前 n 项和公式

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则其前 n 项和 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

证明. 在等差数列中, 根据性质 $a_k + a_l = a_m + a_n (k+l=m+n)$ 可得

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_k + a_{n-k+1} \left(k \leq \frac{n}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_k + a_{n-k+1}) \\ &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \end{aligned}$$

□

2.2 性质扩充

2.2.1 等差数列的常用性质

- (1) 通项公式的推广: $a_n = a_m + (n-m)d (n, m \in \mathbf{N}^*)$;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差为 d , 则 $\{a_{2n}\}$ 也是等差数列, 公差为 $2d$;
- (3) 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列, 则 $\{pa_n + qb_n\} (p, q \text{ 是常数})$ 也是等差数列;
- (4) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差为 d , 则 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, a_{k+3m}, \cdots (k, m \in \mathbf{N}^*)$ 组成公差为 md 的等差数列.

2.2.2 与和有关的性质

- (1) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\frac{S_n}{n}$ 也是等差数列, 其首项与 $\{a_n\}$ 的首项相同, 公差是 $\{a_n\}$ 的公差的 $\frac{1}{2}$;
- (2) 若 S_m, S_{2m}, S_{3m} 分别是 $\{a_n\}$ 的前 m 项, 前 $2m$ 项, 前 $3m$ 项的和, 则 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列;
- (3) 关于非零等差数列奇数项和与偶数项和的性质

i) 若项数为 $2n$, 则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

ii) 若项数为 $2n-1$, 则 $S_{\text{偶}} = (n-1)a_n, S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$.

iii) 若两个等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

2.2.3 等差数列前 n 项和的最值问题

- 1) 二次函数法: 当公差 $d \neq 0$ 时, 将 S_n 看作关于 n 的二次函数, 运用配方法, 借助函数的单调性及数形结合, 使问题得解;
- 2) 通项公式法: 求使 $a_n \geq 0$ (或 $a_n \leq 0$) 成立的最大 n 值即可得到 S_n 的最大 (或最小) 值;
- 3) 不等式法: 借助 S_n 最大时, 有
$$\begin{cases} S_n \geq S_{n-1}, \\ S_n \geq S_{n+1}. \end{cases} \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$
 解此不等式组确定 n 的范围, 进而确定 n 的值和对应 S_n 的值.

3 等比数列

3.1 基本性质

3.1.1 定义

一般地, 如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的比等于一个常数, 那么这个数列就叫做等比数列. 这个常数叫做这个数列的公比, 通常用字母 q 表示.

3.1.2 通项公式

如果等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 则它的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$ ($q \neq 0$).

证明. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, 有 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ($q \neq 0$).

则有

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= q \\ \frac{a_3}{a_2} &= q \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= q \end{aligned}$$

左右两侧累乘即得到: $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$ 即:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

□

3.1.3 等比中项

- (1) 如果三个数 a, G, b 成等比数列, 则 G 叫做 a 和 b 的等比中项, 且 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$, 即 $G^2 = ab$;
- (2) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 等间隔的三项 a_{n-s}, a_n, a_{n+s} ($s \in \mathbf{N}^*$, 且 $s < n$) 有 $a_{n-s} a_{n+s} = a_n^2$;
- (3) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$.

3.1.4 前 n 项和

$$S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

证明. 给定等比数列 $\{a_n\}$.

① 当 $q = 1$ 时, 有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1$.

② 当 $q \neq 1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}; \end{aligned} \quad (1)$$

两边同时乘以公比 q , 有:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (2)$$

(1)-(2) 得到:

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}) - (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) \\ &= a_1 + (a_1q - a_1q) + (a_1q^2 - a_1q^2) + \cdots + (a_1q^{n-1} - a_1q^{n-1}) - a_1q^n \\ &= a_1 - a_1q^n \end{aligned}$$

化简得: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1)$

□

3.1.5 等比数列的性质

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

- (1) 数列 $\{c \cdot a_n\}$ ($c \neq 0$), $\{|a_n|\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ ($\{b_n\}$ 是等比数列), $\{a_n^2\}$, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 等也是等比数列;
- (2) 数列 $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, a_{m+3k}, \cdots$ 仍是等比数列;
- (3) $a_1a_n = a_2a_{n-1} = \cdots = a_ma_{n-m+1}$;
- (4) 当数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq -1$ (或 $q = -1$ 且 m 为奇数) 时, 数列 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \cdots$ 是等比数列;
- (5) 当 n 是偶数时, $S_{\text{偶}} = S_{\text{奇}} \cdot q$;
当 n 是奇数时, $S_{\text{奇}} = S_{\text{偶}} \cdot q$.

4 数列求和相关问题

4.1 求前 n 项和的方法

1. 公式法

(a) 等差数列的前 n 项和公式: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

(b) 等比数列的前 n 项和公式: $S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$

2. 分组求和：把一个数列分成几个可以直接求和的数列；
3. 拆项相消：有时把一个数列的通项公式分成两项差的形式，相加过程中消去中间项，只剩下有限项再求和；
4. 错位相减：适用于一个等差数列和一个等比数列对应项相乘构成的数列求和；
5. 倒序相加：把数列正着写和倒着写再相加，例如等差数列前 n 项和公式的推导方法.

4.2 裂项相消法

1. 对于裂项后明显有能够相消的项的一类数列，在求和时常有“裂项相消法”，分式数列的求和多用此法；
2. 利用裂项相消法求和时，应注意抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项，也可能有前面两相和最后两项，有些情况下，裂项时需要调整前面的系数，使裂开的两项之差和系数之积与原通项相等.
3. 常用的拆项公式：

$$(a) \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$(b) \frac{1}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right);$$

$$(c) \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$(d) \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$(e) \text{ 若数列 } \{a_n\} \text{ 为等差数列, 公差为 } d(d \neq 0), \text{ 则 } \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right).$$

证明. 对于分式数列，通常会考虑裂项相消法进行消项，对于 $\frac{1}{n(n+d)}$ 式数列，可以使用待定系数法得到展开式，假设：

$$\frac{1}{n(n+d)} = \frac{k}{n} - \frac{k}{n+d} \quad (k \text{ 为待定系数})$$

右边通分有

$$\frac{1}{n(n+d)} = \frac{k}{n} - \frac{k}{n+d} = \frac{kd}{n(n+d)}$$

即有 $kd = 1$ ，算得 $k = \frac{1}{d}$. 即得证

□

4.3 错位相减法

1. 一般地，如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和时，可以采用错位相减法.
2. 应用等比数列求和公式时，必须注意公比 $q \neq 1$ 这一前提条件，如果不能确定公比 q 是否为 1，应分两种情况进行讨论.

证明. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d , 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q ($q \neq 1$), 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_n \cdot b_n$, 则数列 $\{c_n\}$ 有:

$$\begin{aligned}
 S_n &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n \\
 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n \\
 qS_n &= a_1 b_1 q + a_2 b_2 q + \cdots + a_n b_n q \\
 &= a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_4 + \cdots + a_n b_{n+1} \\
 S_n - qS_n &= a_1 b_1 + b_2 (a_2 - a_1) + b_3 (a_3 - a_2) + \cdots + b_n (a_n - a_{n-1}) - a_n b_{n+1} \\
 &= a_1 b_1 + db_2 + db_3 + \cdots + db_n - a_n b_{n+1} \\
 &= a_1 b_1 + d(b_2 + b_3 + \cdots + b_n) - a_n b_{n+1} \\
 &= a_1 b_1 - a_n b_{n+1} + \frac{b_2(1 - q^{n-1})}{1 - q} d.
 \end{aligned}$$

故有:

$$S_n = \frac{a_1 b_1 - a_n b_{n+1} + \frac{b_2(1 - q^{n-1})}{1 - q} d}{1 - q}$$

□

5 练习

1. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{m-1} = -2, S_m = 0, S_{m+1} = 3$, 则 $m =$ ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
2. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8 = 4S_4$, 则 $a_{10} =$ ()
(A) $\frac{17}{2}$ (B) $\frac{19}{2}$ (C) 10 (D) 12
3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$, 则 $S_5 =$ ()
(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11
4. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_1 + a_3 + a_5 = 21$, 则 $a_3 + a_5 + a_7 =$ ()
(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84
5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}, a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 则 $a_2 =$ ()
(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$
6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n (a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}^*)$, 且 a_2 与 a_4 的等差中项是 5, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 等于 ()
(A) 2^n (B) $2^n - 1$ (C) 2^{n-1} (D) $2^{n-1} - 1$
7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 27, $a_{10} = 8$, 求 $a_{100} =$ ()
(A) 100 (B) 99 (C) 98 (D) 97
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2a_2 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则 ()
(A) $a_1 < 0$ (B) $a_1 > 0$ (C) $a_1 \neq a_2$ (D) $a_2 = 0$
9. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 “ $q > 1$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的 ()
(A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
10. 下面是关于公差 $d > 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:
 p_1 : 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列; p_2 : 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;
 p_3 : 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列; p_4 : 数列 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列.
其中的真命题为 ()
(A) p_1, p_2 (B) p_3, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_1, p_4
11. 已知各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 a_2 a_3 = 5, a_7 a_8 a_9 = 10$, 则 $a_4 a_5 a_6 =$ ()
(A) $5\sqrt{2}$ (B) 7 (C) 6 (D) $4\sqrt{2}$
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, S_n = 2a_{n+1}$, 则 $S_n =$ ()
(A) 2^{n-1} (B) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (C) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (D) $\frac{1}{2^{n-1}}$
13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公比 $|q| \neq 1$. 若 $a_m = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 则 $m =$ ()
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

14. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中正确的是 ()
- (A) 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$ (B) 若 $a_2 + a_3 > 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$
- (C) 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$ (D) 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$
15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为 ()
- (A) 3690 (B) 3660 (C) 1845 (D) 1830
16. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$, 则 $\frac{S_9}{S_5} =$ ()
- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$
17. 已知某等差数列共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差为 ()
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
18. 在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1} + a_n^2 + a_{n-1} = 0 (n \geq 2)$, 则 $S_{2n-1} - 4n =$ ()
- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2
19. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$, $S_{2m-1} = 38$, 则 $m =$ ()
- (A) 38 (B) 20 (C) 10 (D) 9
20. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 下面结论中正确的是 ()
- (A) $a_1 + a_3 \geq 2a_2$ (B) $a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_2^2$
- (C) 若 $a_1 = a_3$, 则 $a_1 = a_2$ (D) 若 $a_3 > a_1$, 则 $a_4 > a_2$
21. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+1} = 16^n$, 则公比 $q =$ ()
- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16
22. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 = 3$, $S_4 = 15$, 则 $S_6 =$ ()
- (A) 31 (B) 32 (C) 63 (D) 64
23. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $9S_3 = S_6$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为 ()
- (A) $\frac{15}{8}$ 或 5 (B) $\frac{31}{16}$ 或 5 (C) $\frac{31}{16}$ (D) $\frac{15}{8}$
24. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$, $a_7 + a_{10} < 0$, 则当 $n =$ _____ 时 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.
25. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -4$, 则公比 $q =$ _____; $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| =$ _____.
26. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 10$, $a_2 + a_4 = 5$, 则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最大值为 _____.
27. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n =$ _____.
28. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 + a_5 = 40$, 则公比 $q =$ _____; 前 n 项和 $S_n =$ _____.
29. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 且 $a_5^2 = a_{10}$, $2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

30. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 若 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 成等差数列, 则 q 的值为_____.
31. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = -1, a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, 则 $S_n =$ _____.
32. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_n \neq 0 (n \in \mathbf{N}^*)$, $a_n a_{n+1} = S_n$. 则 $a_3 - a_1 =$ _____.
33. 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 若 $a_1 + b_1 = 7, a_3 + b_3 = 21$, 则 $a_5 + b_5 =$ _____.
34. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2$, 且对于任意的 $m, n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 则 $a_3 =$ _____; 数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} =$ _____.
35. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 1, a_2 = -2$, 且 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_5 =$ _____; 数列 $\{a_n\}$ 的前 2016 项的和为_____.

36. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明 $\{a_n + \frac{1}{2}\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

37. 数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, $a_{11} = 8$, 设 $b_n = \log_2 a_n$, 且 $b_4 = 17$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是以 -2 为公差的等差数列;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n 的最大值.

38. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n^2 - (2a_{n+1} - 1)a_n - 2a_{n+1} = 0$.

(1) 求 a_2, a_3 ;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

39. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 10$, a_2 为整数, 且 $S_n \leq S_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

40. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = a_n 3^n$ ($x \in \mathbf{R}$), 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

41. 已知正项数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $B_n = \frac{1}{4}(b_n + 1)^2$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

42. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 b_n 满足 $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{3}$, $a_nb_{n+1} + b_{n+1} = nb_n$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

43. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$.

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

44. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为零, $a_1 = 25$, 且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2}$.

45. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$, 前 n 项和 S_n , 且 a_2 是 $3S_2 - 4$ 与 $2 - \frac{5}{2}S_1$ 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (n+1)a_n$, T_n 是数列 b_n 的前 n 项和, $n \in \mathbf{N}^*$, 求 T_n .

46. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 10$, $a_4 - a_3 = 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_3$, $b_3 = a_7$, 问: b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等?

47. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_4 = 12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4$, $b_4 = 20$, 且 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

48. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 = 4$, $a_5 + a_7 = 6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = [a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9] = 0$, $[2.6] = 2$.

49. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 + \lambda a_n$, 其中 $\lambda \neq 0$.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 若 $S_5 = \frac{31}{32}$, 求 λ .

50. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

51. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2, a_4 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

52. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3 = 0$, $S_5 = -5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$ 的前 n 项和

53. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1 + 3a_2 = 1$, $a_3^2 = 9a_2a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_n$, 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和.

54. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 + a_4 = 10$, $b_2b_4 = a_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求和: $b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n-1}$.