

15. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是\_\_\_\_\_.
16. 若直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = \ln x + 2$  的切线, 也是曲线  $y = \ln(x + 2)$  的切线,  $b =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题: (共 5 个小题, 满分 70 分)

17. (本小题 12 分)

$S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1 = 1, S_7 = 28$ . 记  $b_n = [\lg a_n]$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 如  $[0.9] = 0, [\lg 99] = 1$ .

(I) 求  $b_1, b_{11}, b_{101}$ ;

(II) 求数列  $\{b_n\}$  的前 1000 项的和.

18. (本小题 12 分)

某保险的基本保费为  $a$  (单位: 元), 继续购买该险种的投保人成为续保人, 续保人本年度的保费与上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geq 5$
保 费	$0.85a$	$a$	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下:

一年内出险次数	0	1	2	3	4	$\geq 5$
概 率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

(I) 求一续保人本年度高于基本保费的概率;

(II) 若一续保人本年度的保费高于基本保费, 求其保费比基本保费高出 60% 的概率;

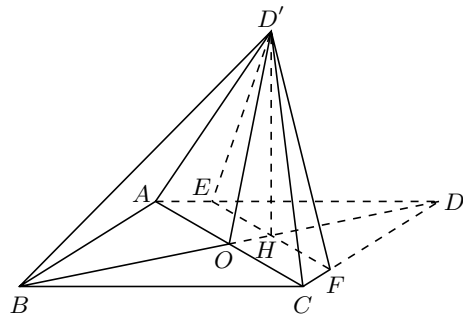
(III) 求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

19. (本小题 12 分)

如图, 菱形  $ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ,  $AB = 5, AC = 6$ , 点  $E, F$  分别在  $AD, CD$  上,  $AE = CF = \frac{5}{4}$ ,  $EF$  交  $BD$  于点  $H$ , 将  $\triangle DEF$  沿  $EF$  折到  $\triangle D'EF$  的位置,  $OD' = \sqrt{10}$ .

(I) 证明  $D'H \perp$  平面  $ABCD$ ;

(II) 求二面角  $B-D'A-C$  的正弦值.



20. (本小题 12 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点在  $x$  轴上,  $A$  是  $E$  的左顶点, 斜率为  $k(k > 0)$  的直线交  $E$  于  $A, M$  两点, 点  $N$  在  $E$  上,  $MA \perp NA$ .

(I) 当  $t = 4, |AM| = |AN|$  时, 求  $\triangle AMN$  的面积;

(II) 当  $2|AM| = |AN|$  时, 求  $k$  的取值范围.

21. (本小题 12 分)

(I) 讨论函数  $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$  的单调性, 并证明当  $x > 0$  时,  $(x-2)e^x + x + 2 > 0$

(II) 证明: 当  $a \in [0, 1)$  时, 函数  $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2} (x > 0)$  有最小值, 设  $g(x)$  的最小值为  $h(a)$ , 求函数  $h(a)$  的值域.

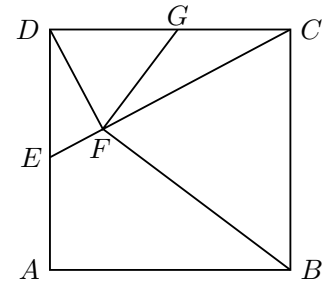
请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, 在正方形  $ABCD$  中,  $E, G$  分别在边  $DA, DC$  上 (不与端点重合), 且  $DE = DG$ , 过  $D$  点作  $DF \perp CE$ , 垂足为  $F$ .

(I) 证明:  $B, C, G, F$  四点共圆;

(II) 若  $AB = 1, E$  为  $DA$  的中点, 求四边形  $BCGF$  的面积.



23. (本小题 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 圆  $C$  的方程为  $(x+6)^2 + y^2 = 25$ .

(I) 以坐标原点为极点, 以  $x$  轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 求  $C$  的极坐标方程;

(II) 直线  $l$  的参数方程是  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha, \end{cases}$  ( $t$  为参数),  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $|AB| = \sqrt{10}$ , 求  $l$  的斜率.

24. (本小题 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{1}{2}|$ ,  $M$  为不等式  $f(x) < 2$  的解集.

(I) 求  $M$ ;

(II) 证明: 当  $a, b \in M$  时,  $|a+b| < |1+ab|$ .