

17. (12 分) S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + a_n = 4S_n + 3$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

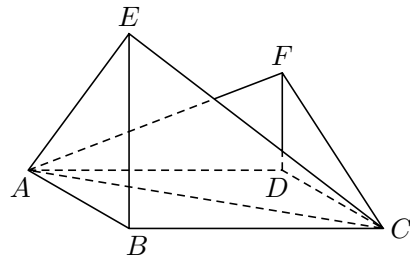
(II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. (12 分)

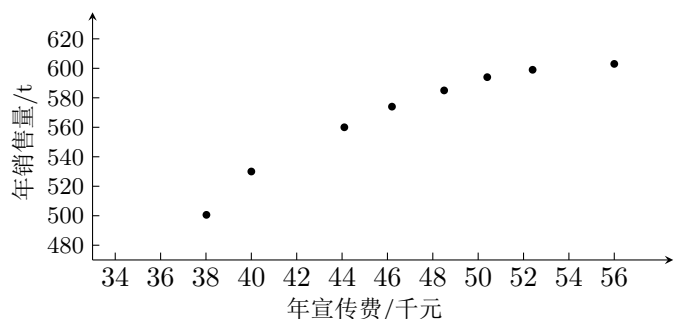
如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同侧的两点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $DF \perp$ 平面 $ABCD$, $BE = 2DF$, $AE \perp EC$.

(I) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 AFC ;

(II) 求直线 AE 与直线 CF 所成的角的余弦值.



19. (12 分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响, 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值:



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$.

(I) 根据散点图判断 $y = a + bx$ 和 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型 (给出判断即可, 不必说明理由);

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 0.2y - x$, 根据 (II) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式为:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

20. (12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a (a > 0)$ 交于 M, N 两点.

(I) 当 $k = 0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(II) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$.

(I) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线;

(II) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

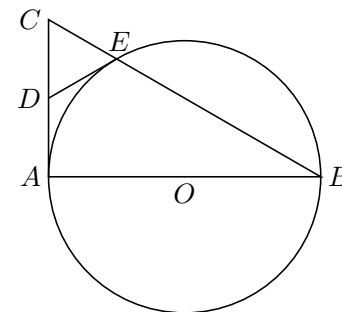
(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23、24 三题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E .

(I) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 若 $OA = \sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. (10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(II) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$, $a > 0$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.