- 感知器算法判别函数的推导实例

给出三类模式的训练样本：

ω_1:$\{(0\ 0)^T\}$，ω_2:$\{(1\ 1)^T\}$，ω_3:$\{(-1\ 1)^T\}$

将模式样本写成增广形式：

$\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 1)^T$, $\boldsymbol{x}^2=(1\ 1\ 1)^T$, $\boldsymbol{x}^3=(-1\ 1\ 1)^T$

取初始值 $\boldsymbol{w}_1(1)=\boldsymbol{w}_2(1)=\boldsymbol{w}_3(1)=(0\ 0\ 0)^T$，$C$=1。

第一轮迭代（k=1）：以 $\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 1)^T$ 作为训练样本

$d_1(1)=\boldsymbol{w}_1^T(1)\,\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 1)^T=0$

$d_2(1)=\boldsymbol{w}_2^T(1)\,\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 1)^T=0$

$d_3(1)=\boldsymbol{w}_3^T(1)\,\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 1)^T=0$

因 $d_1(1)\ngtr d_2(1)$，$d_1(1)\ngtr d_3(1)$，故

$\boldsymbol{w}_1(2)=\boldsymbol{w}_1(1)+\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 1)^T$

$\boldsymbol{w}_2(2)=\boldsymbol{w}_2(1)-\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_3(2)=\boldsymbol{w}_3(1)-\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ -1)^T$

第二轮迭代（k=2）：以 $\boldsymbol{x}^2=(1\ 1\ 1)^T$ 作为训练样本

$d_1(2)=\boldsymbol{w}_1^T(2)\,\boldsymbol{x}^2=(0\ 0\ 1)(1\ 1\ 1)^T=1$

$d_2(2)=\boldsymbol{w}_2^T(2)\,\boldsymbol{x}^2=(0\ 0\ -1)(1\ 1\ 1)^T=-1$

$d_3(2)=\boldsymbol{w}_3^T(2)\,\boldsymbol{x}^2=(0\ 0\ -1)(1\ 1\ 1)^T=-1$

因 $d_2(2)\ngtr d_1(2)$，$d_2(2)\ngtr d_3(2)$，故

$\boldsymbol{w}_1(3)=\boldsymbol{w}_1(2)-\boldsymbol{x}^2=(-1\ -1\ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_2(3)=\boldsymbol{w}_2(2)+\boldsymbol{x}^2=(1\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w}_3(3)=\boldsymbol{w}_3(2)-\boldsymbol{x}^2=(-1\ -1\ -2)^{\mathrm{T}}$

第三轮迭代（k=3）：以 $\boldsymbol{x}^3=(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$ 作为训练样本

$d_1(3)=\boldsymbol{w}_1^T(3)\boldsymbol{x}^3=(-1\ -1\ 0)(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=0$

$d_2(3)=\boldsymbol{w}_2^T(3)\boldsymbol{x}^3=(1\ 1\ 0)(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=0$

$d_3(3)=\boldsymbol{w}_2^T(3)\boldsymbol{x}^3=(-1\ -1\ -2)(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=-2$

因 $d_3(3)\ngtr d_1(3)$，$d_3(3)\ngtr d_2(3)$，故

$\boldsymbol{w}_1(4)=\boldsymbol{w}_1(3)-\boldsymbol{x}^3=(0\ -2\ -1)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w}_2(4)=\boldsymbol{w}_2(3)-\boldsymbol{x}^3=(2\ 0\ -1)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w}_3(4)=\boldsymbol{w}_3(3)+\boldsymbol{x}^3=(-2\ 0\ -1)^{\mathrm{T}}$

第四轮迭代（k=4）：以 $\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$ 作为训练样本

$d_1(4)=\boldsymbol{w}_1^T(4)\boldsymbol{x}^1=(0\ -2\ -1)(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}=-1$

$d_2(4)=\boldsymbol{w}_2^T(4)\boldsymbol{x}^1=(2\ 0\ -1)(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}=-1$

$d_3(4)=\boldsymbol{w}_3^T(4)\boldsymbol{x}^1=(-2\ 0\ -1)(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}=-1$

因 $d_1(4)\ngtr d_2(4)$，$d_1(4)\ngtr d_3(4)$，故

$\boldsymbol{w}_1(5)=\boldsymbol{w}_1(4)+\boldsymbol{x}^1=(0\ -2\ 0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w}_2(5)=\boldsymbol{w}_2(4)-\boldsymbol{x}^1=(2\ 0\ -2)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w}_3(5)=\boldsymbol{w}_3(4)-\boldsymbol{x}^1=(-2\ 0\ -2)^{\mathrm{T}}$

第五轮迭代（k=5）：以 $\boldsymbol{x}^2=(1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$ 作为训练样本

$d_1(5)=\boldsymbol{w}_1^T(5)\boldsymbol{x}^2=(0\ -2\ 0)(1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=-2$

$d_2(5)=\boldsymbol{w}_2^T(5)\boldsymbol{x}^2=(2\ 0\ -2)(1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=0$

$d_3(5)=\boldsymbol{w}_3^T(5)\boldsymbol{x}^2=-(-2\ 0\ -2)(1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=-4$

因 $d_2(5)>d_1(5)$，$d_2(5)>d_3(5)$，故

$\boldsymbol{w}_1(6)=\boldsymbol{w}_1(5)$

$\boldsymbol{w}_2(6)=\boldsymbol{w}_2(5)$

$\boldsymbol{w}_3(6)=\boldsymbol{w}_3(5)$

第六轮迭代（k=6）：以 $\boldsymbol{x}^3=(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$ 作为训练样本

$d_1(6)=\boldsymbol{w}_1^T(6)\boldsymbol{x}^3=(0\ -2\ 0)(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=-2$

$d_2(6)=\boldsymbol{w}_2^T(6)\boldsymbol{x}^3=(2\ 0\ -2)(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=-4$

$d_3(6)=\boldsymbol{w}_3^T(6)\boldsymbol{x}^3=(-2\ 0\ -2)(-1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}=0$

因 $d_3(6)>d_1(6)$，$d_3(6)>d_2(6)$，故

$\boldsymbol{w}_1(7)=\boldsymbol{w}_1(6)$

$\boldsymbol{w}_2(7)=\boldsymbol{w}_2(6)$

$\boldsymbol{w}_3(7)=\boldsymbol{w}_3(6)$

第七轮迭代（k=7）：以 $\boldsymbol{x}^1=(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$ 作为训练样本

$d_1(7)=\boldsymbol{w}_1^T(7)\boldsymbol{x}^1=(0\ -2\ 0)(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}=0$

$d_2(7)=\boldsymbol{w}_2^T(7)\boldsymbol{x}^1=(2\ 0\ -2)(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}=-2$

$d_3(7)=\boldsymbol{w}_3^T(7)\boldsymbol{x}^1=(-2\ 0\ -2)(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}=-2$

因 $d_1(7)>d_2(7)$，$d_1(7)>d_3(7)$，分类结果正确，故权向量不变。

由于第五、六、七次迭代中 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$、$\boldsymbol{x}^3$ 均已正确分类，所以权向量的解为：

$\boldsymbol{w}_1=(0\ -2\ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_2=(2\ 0\ -2)^T$

$w_3=(-2\ 0\ -2)^T$

三个判别函数：

$d_1(\boldsymbol{x})=-2x_2$

$d_2(\boldsymbol{x})=2x_1-2$

$d_3(\boldsymbol{x})=-2x_1-2$