- 势函数法

实例 1：用第一类势函数的算法进行分类

（1）选择合适的正交函数集$\{\varphi_i(\boldsymbol{x})\}$

选择 Hermite 多项式，其正交域为(-∞，+∞)，其一维形式是

$$\varphi_k = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^k \cdot k!\sqrt{\pi}}} H_k(x), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

其正交性：$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$

其中，$H_k(\boldsymbol{x})$前面的乘式为正交归一化因子，为计算简便可省略。因此，Hermite 多项式前面几项的表达式为

$H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$,

$H_3(x)=8x^3-12x$, $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$

（2）建立二维的正交函数集

二维的正交函数集可由任意一对一维的正交函数组成，这里取四项最低阶的二维的正交函数

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(x_1, x_2) = H_0(x_1) H_0(x_2) = 1$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \varphi_2(x_1, x_2) = H_1(x_1) H_0(x_2) = 2x_1$$

$$\varphi_3(\boldsymbol{x}) = \varphi_3(x_1, x_2) = H_0(x_1) H_1(x_2) = 2x_2$$

$$\varphi_4(\boldsymbol{x}) = \varphi_4(x_1, x_2) = H_1(x_1) H_1(x_2) = 4x_1 x_2$$

（3）生成势函数

按第一类势函数定义，得到势函数

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_k)=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i(\boldsymbol{x})\varphi_i(\boldsymbol{x}_k)=1+4x_1x_{k_1}+4x_2x_{k_2}+16x_1x_2x_{k_1}x_{k_2}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_k=(x_{k_1},x_{k_2})^{\mathrm{T}}$

（4）通过训练样本逐步计算累积位势 $K(x)$

给定训练样本：ω_1 类为 $\boldsymbol{x}^1=(1\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^2=(0\ \text{-}1)^{\mathrm{T}}$

ω_2 类为 $\boldsymbol{x}^3=(\text{-}1\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^4=(0\ 1)^{\mathrm{T}}$

累积位势 $K(x)$的迭代算法如下

第一步：取 $\boldsymbol{x}^1=(1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，故

$K_1(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^1)=1+4x_1\cdot1+4x_2\cdot0+16x_1x_2\cdot1\cdot0=1+4x_1$

第二步：取 $\boldsymbol{x}^2=(0\ \text{-}1)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，故 $K_1(\boldsymbol{x}^2)=1+4\cdot0=1$

因 $K_1(\boldsymbol{x}^2)>0$ 且 $\boldsymbol{x}^2\in\omega_1$，故 $K_2(\boldsymbol{x})=K_1(\boldsymbol{x})=1+4x_1$

第三步：取 $\boldsymbol{x}^3=(\text{-}1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，故 $K_2(\boldsymbol{x}^3)=1+4\cdot(-1)=-3$

因 $K_2(\boldsymbol{x}^3)<0$ 且 $\mathrm{x}^3\in\omega_2$，故 $K_3(\boldsymbol{x})=K_2(\boldsymbol{x})=1+4x_1$

第四步：取 $\boldsymbol{x}^4=(0\ 1)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，故 $K_3(\boldsymbol{x}^4)=1+4\cdot0=1$

因 $K_3(\boldsymbol{x}^4)>0$ 且 $\boldsymbol{x}^4\in\omega_2$，

故 $K_4(\boldsymbol{x})=K_3(\boldsymbol{x})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^4)=1+4x_1-(1+4x_2)=4x_1-4x_2$

将全部训练样本重复迭代一次，得

第五步：取 $\boldsymbol{x}^5=\boldsymbol{x}^1=(1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_4(\boldsymbol{x}^5)=4$

故 $K_5(\boldsymbol{x})=K_4(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

第六步：取 $\boldsymbol{x}^6=\boldsymbol{x}^2=(0\ \text{-}1)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_5(\boldsymbol{x}^6)=4$

故 $K_6(\boldsymbol{x})=K_5(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

第七步：取 $\boldsymbol{x}^7=\boldsymbol{x}^3=(\text{-}1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，$K_6(\boldsymbol{x}^7)=-4$

故 $K_7(\boldsymbol{x})=K_6(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

第八步：取 $\boldsymbol{x}^8=\boldsymbol{x}^4=(0\ 1)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，$K_7(\boldsymbol{x}^8)=-4$

故 $K_8(\boldsymbol{x})=K_7(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

以上对全部训练样本都能正确分类，因此算法收敛于判别函数

$$d(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$$