

● Fisher 准则函数

Fisher 准则函数定义为：

$$J_F(\mathbf{w}) = \frac{(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2}{\tilde{S}_1^2 + \tilde{S}_2^2}$$

其中， $(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)$ 是两类均值之差， \tilde{S}_i^2 是样本类内离散度。显然，应该使 $J_F(\mathbf{w})$ 的分子尽可能大而分母尽可能小，即应寻找使 $J_F(\mathbf{w})$ 尽可能大的 \mathbf{w} 作为投影方向。但上式中并不显含 \mathbf{w} ，因此须设法将 $J_F(\mathbf{w})$ 变成 \mathbf{w} 的显函数。

由各类样本的均值可推出：

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{y \in \Gamma_i} y = \frac{1}{N_i} \sum_{x \in \Gamma_i} \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \mathbf{w}^T \frac{1}{N_i} \left(\sum_{x \in \Gamma_i} \mathbf{x} \right) = \mathbf{w}^T \mathbf{m}_i$$

这样，Fisher 准则函数 $J_F(\mathbf{w})$ 的分子可写成：

$$\begin{aligned} (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2 &= (\mathbf{w}^T \mathbf{m}_1 - \mathbf{w}^T \mathbf{m}_2)^2 \\ &= (\mathbf{w}^T \mathbf{m}_1 - \mathbf{w}^T \mathbf{m}_2) (\mathbf{w}^T \mathbf{m}_1 - \mathbf{w}^T \mathbf{m}_2)^T \\ &= (\mathbf{w}^T \mathbf{m}_1 - \mathbf{w}^T \mathbf{m}_2) (\mathbf{m}_1^T \mathbf{w} - \mathbf{m}_2^T \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}^T (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_b \mathbf{w} \end{aligned}$$

现在再来考察 $J_F(\mathbf{w})$ 的分母与 \mathbf{w} 的关系：

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i^2 &= \sum_{y \in \Gamma_i} (y - \tilde{m}_i)^2 = \sum_{x \in \Gamma_i} (\mathbf{w}^T \mathbf{x} - \mathbf{w}^T \mathbf{m}_i)^2 \\ &= \mathbf{w}^T \left[\sum_{x \in \Gamma_i} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^T \right] \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \left[\sum_{x \in \Gamma_i} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^T \right] \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{S}_i \mathbf{w} \end{aligned}$$

因此，

$$\tilde{S}_1^2 + \tilde{S}_2^2 = \mathbf{w}^T (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w}$$

将上述各式代入 $J_F(\mathbf{w})$ ，可得：

$$J_F(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_b \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w}}$$

其中 \mathbf{S}_b 为样本类间离散度矩阵， \mathbf{S}_w 为总样本类内离散度矩阵。