

- 势函数法

实例 2：用第二类势函数的算法进行分类

选择指数型势函数，取 $\alpha=1$ ，在二维情况下势函数为

$$K(x, x_k) = e^{-\|x - x_k\|^2} = e^{-[(x_1 - x_{k1})^2 + (x_2 - x_{k2})^2]}$$

这里： ω_1 类为 $\mathbf{x}^1=(0 \ 0)^T$, $\mathbf{x}^2=(2 \ 0)^T$

ω_2 类为 $\mathbf{x}^3=(1 \ 1)^T$, $\mathbf{x}^4=(1 \ -1)^T$

可以看出，这两类模式是线性不可分的。算法步骤如下：

第一步：取 $\mathbf{x}^1=(0 \ 0)^T \in \omega_1$ ，则

$$K_1(\mathbf{x})=K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^1)=e^{-[(x_1-0)^2+(x_2-0)^2]} = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

第二步：取 $\mathbf{x}^2=(2 \ 0)^T \in \omega_1$

$$\text{因 } K_1(\mathbf{x}^2)=e^{-(4+0)}=e^{-4}>0,$$

$$\text{故 } K_2(\mathbf{x})=K_1(\mathbf{x})=e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

第三步：取 $\mathbf{x}^3=(1 \ 1)^T \in \omega_2$

$$\text{因 } K_2(\mathbf{x}^3)=e^{-(1+1)}=e^{-2}>0,$$

$$\text{故 } K_3(\mathbf{x})=K_2(\mathbf{x})-K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^3)=e^{-(x_1^2+x_2^2)} - e^{-[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]}$$

第四步：取 $\mathbf{x}^4=(1 \ -1)^T \in \omega_2$

$$\text{因 } K_3(\mathbf{x}^4)=e^{-(1+1)}-e^{-(0+4)}=e^{-2}-e^{-4}>0,$$

$$\text{故 } K_4(\mathbf{x})=K_3(\mathbf{x})-K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^4)$$

$$=e^{-(x_1^2+x_2^2)} - e^{-[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]} - e^{-[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2]}$$

需对全部训练样本重复迭代一次

第五步：取 $\mathbf{x}^5=\mathbf{x}^1=(0 \ 0)^T \in \omega_1$ ， $K_4(\mathbf{x}^5)=e^0-e^{-2}-e^{-2}=1-2e^{-2}>0$

$$\text{故 } K_5(\mathbf{x})=K_4(\mathbf{x})$$

第六步：取 $\mathbf{x}^6 = \mathbf{x}^2 = (2 \ 0)^T \in \omega_1$, $K_5(\mathbf{x}^6) = e^{-4} - e^{-2} - e^{-2} = e^{-4} - 2e^{-2} < 0$

故 $K_6(\mathbf{x}) = K_5(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^6)$

$$= e^{-(x_1^2 + x_2^2)} - e^{-[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2]} - e^{-[(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2]} + e^{-[(x_1 - 2)^2 + x_2^2]}$$

第七步：取 $\mathbf{x}^7 = \mathbf{x}^3 = (1 \ 1)^T \in \omega_2$, $K_6(\mathbf{x}^7) = e^{-2} - e^0 - e^{-4} + e^{-2} = 2e^{-2} - e^{-4} - 1 < 0$

故 $K_7(\mathbf{x}) = K_6(\mathbf{x})$

第八步：取 $\mathbf{x}^8 = \mathbf{x}^4 = (1 \ -1)^T \in \omega_2$, $K_7(\mathbf{x}^8) = e^{-2} - e^{-4} - e^0 + e^{-2} = 2e^{-2} - e^{-4} - 1 < 0$

故 $K_8(\mathbf{x}) = K_7(\mathbf{x})$

第九步：取 $\mathbf{x}^9 = \mathbf{x}^1 = (0 \ 0)^T \in \omega_1$, $K_8(\mathbf{x}^9) = e^0 - e^{-2} - e^{-2} + e^{-4} = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} > 0$

故 $K_9(\mathbf{x}) = K_8(\mathbf{x})$

第十步：取 $\mathbf{x}^{10} = \mathbf{x}^2 = (2 \ 0)^T \in \omega_1$, $K_9(\mathbf{x}^{10}) = e^{-4} - e^{-2} - e^{-2} + e^0 = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} > 0$

故 $K_{10}(\mathbf{x}) = K_9(\mathbf{x})$

经过上述迭代，全部模式都已正确分类，因此算法收敛于判别函数

$$d(\mathbf{x}) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} - e^{-[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2]} - e^{-[(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2]} + e^{-[(x_1 - 2)^2 + x_2^2]}$$