紙面の関係で省略されている定理 4.8 の証明に関して考えてみる。

直感的には重さあたりの価値 $\frac{p_i}{w_i}$ が大きいものをナップサックに入れるようにする。

(4.108) が最適値になっていることを示す。

今、ナップサックに入っている重量は

$$\sum_j w_j x_j = \sum_{j=1}^{k} w_j + w_{k+1} \frac{C - \sum_{j=1}^{k} w_j}{w_{k+1}} = C \tag{1}$$

となっており、制限一杯となっている。

(本にはないが、$p_i, w_i \geq 0$ としておく、そうしないと、上記の式で、$p_i < 0, w_i > 0$ の x_i が 0 でないときは、$x_i = 0$ とするほうが改善するし、$p_i > 0, w_i < 0$ のときは、容量、価値ともに増やすので、ぜひとも入れたい。)

そのため、単純に追加することはできない。すでにナップサックに入っているものを Δ_w だけ、別のものに入れ替えて、目的関数を改善できない (目的関数が大きくならない) ことを示せれば、(4.108) が最適値であることが言える。

$w_i x_i$ を Δ_w だけ減らして、$w_j x_j$ を Δ_w だけ増やすことを考える。

それによる目的関数の変化 Δ_p を考えると、

$$\Delta_p = p_j x_j - p_i x_i = \frac{p_j}{w_j} w_j x_j - \frac{p_i}{w_i} w_i x_i = \frac{p_j}{w_j} \Delta_w - \frac{p_i}{w_i} \Delta_w = (\frac{p_j}{w_j} - \frac{p_i}{w_i}) \Delta_w \tag{2}$$

(4.107) の仮定より、$\Delta_p \leq 0$ となり、目的関数は改善できない。(変化しない場合もありうるので、($i = k+1, j = k+1$ とする場合も含め、) 一意の解にはならないが改善はしない。)

そのため、(4.108) が最適解になっている。