P.145 の注意について考える。

P.145 の別証と同じように考えることで、一般に $f(A)=0$ を満たす行列係数の関数で、

$$f(x)E=(xE-A)B^f(x) \tag{1}$$

となる。その具体例として、固有多項式 $f_A(x)$ に対しては、P.143 の (7) に記載があり、最小多項式 $\phi_A(x)$ に関しては P.145 の別証のところで、記載されている。

さて、$\phi_A(x)$ に関して上記の式を、また、$f(x)$ に関して、上記と、P.145 の 3,4 行目にある、$f(x)=g^f(x)\phi_A(x)$ を考えると、

$$\phi(x)E=(xE-A)B^*(x) \tag{2}$$

$$g^f(x)\phi(x)E=(xE-A)B^f(x) \tag{3}$$

これらの式から以下の恒等式を得る。

$$(xE-A)B^f(x)=(xE-A)g^f(x)B^*(x) \tag{4}$$

A の固有値でない β に対して、$|\beta E-A|=f_A(\beta)\neq 0$ であるため、$\beta E-A$ は正則だが、このときも、恒等式は成立する必要がある。(4) の両辺に $(xE-A)^{-1}$ をかけて、

$$B^f(\beta)=g^f(\beta)B^*(\beta) \tag{5}$$

この式で、β が固有値だとしても、(4) は満たす。また、$B^*(x)$ などは多項式なので、固有値のときだけ、異なる関数になるわけではない。

よって、

$$B^f(x)=B^*(x)f(x)/\phi_A(x)=B^*(x)g^f(x) \tag{6}$$

行列を多項式倍にすると、それは行列の各要素を多項式倍にすることになるのでその多項式は、行列の n^2 個の要素の公約数になる。(P.6 (II) スカラ乗法を参照)

$B^*(x)$ の n^2 個の要素の最大次数 x^n の係数が 1 となる最大公約数は 1 になることを示す。なお、$g(x)$ の最高次数の係数は 1 になるように $B(x)$ の係数が調整されているものとする。

もし、$B^*(x)$ の n^2 個の要素の最大次数 x^n の係数が 1 となる最大公約数が 1 でなく、$n(0)$ 次の多項式 $g^\phi(x)$ とすると、$B^*(x)=g^\phi(x)B^{**}(x)$ となり、$B^{**}(x)$ の次数は、$B^*(x)$ の次数より小さい。また、(2) に代入すると、

$$(xE-A)B^{**}(x)=\phi_A(x)/g^\phi(x)E \tag{7}$$

となるが、左辺の行列の各要素は多項式になるが、それを $\phi_{ij}(x)$ とすると、$\phi_{ii}(x)g^\phi(x)=\phi_A(x)$、$\phi_{ij}(x)=0(i\neq j)$ となり、$\phi_{ii}(x)$ は i によらず一定であること、$\phi_A(x)$ はそれより、次数の小さな多項式、$\phi_{ii}(x)$ で割り切れることがわかる。

これを (7) に代入して、

$$(xE-A)B^{**}(x)=\phi_{ii}(x)E \tag{8}$$

となるが、$x=A$ を代入すると、$\phi_A(x)$ より次数の小さな多項式 $\phi_{ii}(x)$ で、

$$\phi_{ii}(A)E=\phi_{ii}(A)=0 \tag{9}$$

となり、$\phi_A(x)$ が最小多項式でなくなる。

つまり、$B^*(x)$ の n^2 個の要素の最大次数 x^n の係数が 1 となる最大公約数が 1 でなく、多項式 $g^\phi(x)$ とした仮定が間違っており、最大公約数は 1 となる。その結果、$B^f(x)$ を $B^f(x)$ の n^2 個の要素の最大公約数で割ったものは $B^*(x)$ になる。

上記の議論は $f_A(x)$ にも適用できるため、$B(x)$ の n^2 個の要素の最大公約数を $\psi(x)$ とすると本にあるように、

$$B^*(x) = B(x)/\psi(x) \tag{10}$$

となり、この式と (6) より、$g^f(x) = \psi(x)$、$\phi_A(x) = f_A(x)/\psi(x)$ となる。