

巡回群の準同型は
 Φ_k に限る(7-10行目)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の
 写像達

Φ_x :
 $0 \rightarrow a_x$
 $1 \rightarrow b_x$
 \dots
 $n-1 \rightarrow c_x$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の
 準同型写像達

~~Φ_y~~

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の
 (自己)同型写像達
 $\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$\Phi_k(x) = kx$ の写像:
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ではwell-define
 (1-6行目, k は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

乗法群に対応して
 いると自己同型
 (17-18行目)

乗法群に対応しないと
 同型でない(11-16行目)

Φ_0 :
 $0 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow 0$
 \dots
 $n-1 \rightarrow 0$

Φ_{kd} :
 $0 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow kd$
 \dots
 $d \rightarrow 0$
 \dots
 $n-1 \rightarrow cd$

Φ_{k1} :
 $0 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow k1$
 \dots
 $n-1 \rightarrow ck1$

Φ_{k2} :
 $0 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow k2$
 \dots
 $n-1 \rightarrow ck2$

同型(回答では直接同型写像を見つけた)
 (1)では巡回群なので演習2.5.1より、
 互いに準同型写像を持ち、同型になる。

$\Psi: k \rightarrow \Phi_k((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})x \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ は同型
 (個数が同じで
 単射(生成元で値が
 異なる)なので、命題
 1.1.6より同型)
 (19-21行目)

(1)では $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})x$
 ((1)では $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})x$)

要素4で1,3は(位数4の)生成元になる。

要素4で2,3は(位数4の)生成元になる。

推移律で $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ と同型

*行数は回答PDF”以下では、特に剰余群に限って、”の次からの行数
 *剰余のバーは付けていないがついているものとする。