式 (5.10) を見直してみる。

式 (5.5) に (5.1),(5.2) と (5.4) を代入すると (5.7) が得られる。

$$ln\, p(W|Y,X) = ln\, p(Y|X,W) + ln\, p(w) + c = \sum_{n=1}^{N} ln\, p(y_n|x_n,W) + \sum_{w \in W} ln\, p(w) + c \tag{1}$$

最初の等号までは (5.5) 式の左辺と最右辺であり、等号後の 1 項目に (5.1),(5.2) を、2 項目に (5.4) を適用させている。

そもそも、(5.2) を振り返ってみると

$$p(y_n|x_n,W) = \mathcal{N}(y_n|f(x_n;W), {\sigma_y}^2 I) = \frac{1}{((2\pi)^k {\sigma_y}^2)^{\frac{1}{2}}} exp(-\frac{1}{2}(y_n - f(x_n;W)){\sigma_y}^{-2}(y_n - f(x_n;W))) \tag{2}$$

ここから、(5.7) の 1 項目を考えると、(2.4) を考慮して、

$$\sum_{n=1}^{N} ln\, p(y_n|x_n,W) = \sum_{n=1}^{N}(-\frac{1}{{\sigma_y}^2}\frac{1}{2}(y_n - f(x_n;W))^2) + c = -\frac{1}{{\sigma_y}^2}E(W) + c \tag{3}$$

なお、c には W 及びその要素、$w(w_i)$ は含んでいない。

また、(5.7) の 2 項目は上記と同様に、(5.4) にて分解して、(2.11) を考慮すると、

$$\sum_{w \in W} ln\, p(w) = -\frac{1}{{\sigma_w}^2}\frac{1}{2}w^T w + c = -\frac{1}{{\sigma_w}^2}\Omega_{L2}(W) + c \tag{4}$$

なお、ここでも、c には W 及びその要素、$w(w_i)$ は含んでいない。

さて、上記を考慮すると、(5.8) は容易にわかる。

$$\frac{\partial}{\partial w_i} ln\, p(W|Y,X) = -\{\frac{1}{{\sigma_y}^2}\frac{\partial}{\partial w_i}E(W) + \frac{1}{{\sigma_w}^2}\frac{\partial}{\partial w_i}\Omega_{L2}(W)\} \tag{5}$$

つまり、

$$\nabla_w ln\, p(W|Y,X) = -\{\frac{1}{{\sigma_y}^2}\nabla_w E(W) + \frac{1}{{\sigma_w}^2}\nabla_w \Omega_{L2}(W)\} = -\{\frac{1}{{\sigma_y}^2}\nabla_w E(W) + \frac{1}{{\sigma_w}^2}w\} \tag{6}$$

最後の等号は (2.14) を考慮している。

ラプラス近似を考え、最後に (4.48) から Λ を求める。

$$\Lambda = {\nabla_w}^2 ln\, p(W|Y,X) = \nabla_w(\nabla_w ln\, p(W|Y,X)) = -\{\frac{1}{{\sigma_y}^2}{\nabla_w}^2 E(W) + \frac{1}{{\sigma_w}^2}I\} = -\{\frac{1}{{\sigma_y}^2}H + \frac{1}{{\sigma_w}^2}I\} \tag{7}$$

最後の等号は (2.42) を考慮した。

よって、(5.10) が求まった。