A.4.2 を確認する。

(A.61),(A.62) は ϕ, ϕ_m が一般的な関数としても良いので、(A.45),(A.46) と同等。

そもそもコレスキー分解をすると下三角行列 L で分解されるので、

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}, (l_{1,1}, l_{2,2} > 0) \tag{1}$$

$${b_1}^T = {e_1}^T L = (l_{1,1}, 0) \tag{2}$$

$${b_2}^T = {e_2}^T L = (l_{2,1}, l_{2,2}) \tag{3}$$

$${b_1}^T b_2 = l_{1,1} l_{2,1} \tag{4}$$

$$\Sigma = LL^T = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{2,1} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {l_{1,1}}^2 & l_{1,1} l_{2,1} \\ l_{1,1} l_{2,1} & {l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$||b_1|| = |l_{1,1}| = l_{1,1} = \sqrt{\Sigma_{1,1}} \tag{6}$$

$$||b_2|| = \sqrt{{l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2} = \sqrt{\Sigma_{2,2}} \tag{7}$$

なので、

$$\theta = arccos(\frac{{b_1}^T b_2}{||b_1|| ||b_2||}) \tag{8}$$

$$\hat{a}^T = (\hat{a_1}, \hat{a_2}) \tag{9}$$

とすると、

$$cos\theta = \frac{{b_1}^T b_2}{||b_1|| ||b_2||} = \frac{l_{1,1} l_{2,1}}{l_{1,1}\sqrt{{l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2}} = \frac{l_{2,1}}{\sqrt{{l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2}} \tag{10}$$

$$sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta} = \sqrt{1 - (\frac{{l_{2,1}}^2}{{l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2})} = \frac{l_{2,2}}{\sqrt{{l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2}} \tag{11}$$

ただし、cos,sin の符号は $l_{2,1}, l_{2,2}$ に依存する。$l_{1,1}, l_{2,2}$ は正であること,$-1 < \theta < 1$ に注意する。また、

$${b_1}^T \hat{a} = l_{1,1} \hat{a_1} = sign(l_{1,1}) ||l_{1,1}|| \hat{a_1} = ||l_{1,1}|| \hat{a_1} \tag{12}$$

$${b_2}^T \hat{a} = l_{2,1} \hat{a_1} + l_{2,2} \hat{a_2} = ||b_2|| (\hat{a_1} cos\theta + \hat{a_2} sin\theta) \tag{13}$$

(7.93) のように、m を 0 を含む自然数として、

$$\phi_m(a) = \Theta(a) a^m = 0.5(1 + sign(a)) a^m = \begin{cases} 0, (a \leq 0) \\ a^m (a > 0) \end{cases} \tag{14}$$

なので、

$$\phi_m({b_1}^T \hat{a}) = \phi_m(l_{1,1} \hat{a_1}) = {l_{1,1}}^m \phi_m(\hat{a_1}) = ||b_1||^m \phi_m(\hat{a_1}) \tag{15}$$

$$\phi_m({b_2}^T \hat{a}) = \phi_m(l_{2,1} \hat{a_1} + l_{2,2} \hat{a_2}) = \phi_m(||b_2|| (\hat{a_1} cos\theta + \hat{a_2} sin\theta)) = ||b_2||^m \phi_m(\hat{a_1} cos\theta + \hat{a_2} sin\theta) \tag{16}$$

となり、上記と (A.62) から、以下のように (A.63) が求まる。

$$C_m = \frac{1}{2\pi}\int exp(-\frac{1}{2}\hat{a}^T\hat{a})\phi_m({b_1}^T\hat{a})\phi_m({b_2}^T\hat{a})d\hat{a} = \frac{1}{2\pi}\int exp(-\frac{1}{2}\hat{a}^T\hat{a})||b_1||^m\phi_m(\hat{a_1})||b_2||^m\phi_m(\hat{a_1}cos\theta+\hat{a_2}sin\theta)d\hat{a}$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi}\int exp(-\frac{1}{2}\hat{a}^T\hat{a})\phi_m(\hat{a_1})\phi_m(\hat{a_1}cos\theta+\hat{a_2}sin\theta)d\hat{a} \tag{17}$$

$u=\hat{a_1}, v=\hat{a_1}cos\theta+\hat{a_2}sin\theta$ と変数変換することを考える。

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\hat{a_1}\hat{a_2})} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ cos\theta & sin\theta \end{vmatrix} = sin\theta \tag{18}$$

これを踏まえると、形式的に以下のようになる。

$$d\hat{a_1}d\hat{a_2} = \frac{1}{sin\theta}du\,dv \tag{19}$$

また、

$$\frac{u^2+v^2-2uv\,cos\theta}{sin^2\theta} = \frac{\hat{a_1}^2+(\hat{a_1}^2cos^2\theta+2\hat{a_1}\hat{a_2}cos\theta sin\theta+\hat{a_2}^2sin^2\theta)-2\hat{a_1}cos\theta(\hat{a_1}cos\theta+\hat{a_2}sin\theta)}{sin^2\theta}$$
$$= \frac{(1-cos^2\theta)\hat{a_1}^2+\hat{a_2}^2sin^2\theta}{sin^2\theta} = \hat{a_1}^2+\hat{a_2}^2 = \hat{a}^T\hat{a} \tag{20}$$

(A.63) を考慮すると、

$$C_m = \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi}\int exp(-\frac{1}{2}\hat{a}^T\hat{a})\phi_m(\hat{a_1})\phi_m(\hat{a_1}cos\theta+\hat{a_2}sin\theta)d\hat{a}$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{\hat{a}^T\hat{a}}{2})\phi_m(\hat{a_1})\phi_m(\hat{a_1}cos\theta+\hat{a_2}sin\theta)d\hat{a_1}d\hat{a_2}$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{u^2+v^2-2uv\,cos\theta}{2sin^2\theta})\phi_m(u)\phi_m(v)\frac{1}{sin\theta}du\,dv$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{u^2+v^2-2uv\,cos\theta}{2sin^2\theta})(0.5(1+sign(u))u^m)(0.5(1+sign(v))v^m)du\,dv$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} exp(-\frac{u^2+v^2-2uv\,cos\theta}{2sin^2\theta})u^mv^mdu\,dv \tag{21}$$

となり、(A.65) が成立する。

更に $u=r\,cos\,\eta, v=r\,sin\,\eta$ の変数変換を行う。このとき、$u,v>0$ なので、$r>0, 0\leq\eta\leq\frac{\pi}{2}$ となる。

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\eta)} = \begin{vmatrix} cos\,\eta & -r\,sin\,\eta \\ sin\,\eta & r\,cos\,\eta \end{vmatrix} = r \tag{22}$$

なので、形式的に

$$du\,dv = rdr\,d\eta \tag{23}$$

となる。

$$C_m = \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} exp(-\frac{u^2+v^2-2uv\,cos\theta}{2sin^2\theta})u^mv^mdu\,dv$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} exp(-\frac{r^2-2r^2cos\,\eta\,cos\,\eta\,cos\,\theta}{2sin^2\theta})(r\,cos\,\eta)^m(r\,sin\,\eta)^mrd\eta\,dr \tag{24}$$
$$= \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} exp(-r^2\frac{1-sin\,2\eta\,cos\,\theta}{2sin^2\theta})r^{2m+1}dr\,(\frac{sin\,2\eta}{2})^md\eta$$

となり、(A.66) が成立していることがわかる。

(A.67) を帰納法で確認する。m=0, 念のために m=1 の時を確認する。

$$(-\frac{\partial}{\partial\alpha})^0 exp(-\alpha r^2) = exp(-\alpha r^2) = r^{2\times 0} exp(-\alpha r^2) \tag{25}$$

$$(-\frac{\partial}{\partial\alpha}) exp(-\alpha r^2) = -(-r^2 exp(-\alpha r^2)) = r^{2\times 1} exp(-\alpha r^2) \tag{26}$$

となり、成立することがわかる。$m = N-1$ まで成立しているとする。$m = N$ のとき、

$$(-\frac{\partial}{\partial\alpha})^N exp(-\alpha r^2) = -(-r^2(-\frac{\partial}{\partial\alpha})^{N-1}(2exp(-\alpha r^2))) = r^2 r^{2(N-1)} exp(-\alpha r^2) = r^{2N} exp(-\alpha r^2) \tag{27}$$

となり、(A.67) が成立する。

$r^{2m} exp(-\alpha r^2)$ が C^∞ 級なので、積分と微分が入れ替えられ,、m が自然数なので、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{2m+1} exp(-\alpha r^2)dr = \int_0^\infty r(-\frac{\partial}{\partial\alpha})^m exp(-\alpha r^2)dr = \int_0^\infty (-\frac{\partial}{\partial\alpha})^m rexp(-\alpha r^2)dr \\ = (-\frac{\partial}{\partial\alpha})^m (\int_0^\infty rexp(-\alpha r^2)dr) = (-\frac{\partial}{\partial\alpha})^m ([-\frac{1}{2\alpha} exp(-\alpha r^2)]_0^\infty) = (-\frac{\partial}{\partial\alpha})^m (\frac{1}{2\alpha}) = \frac{m!}{2\alpha^{m+1}}\end{aligned} \tag{28}$$

となり、(A.68) が成立する。

(A.66) にて、

$$\alpha = \frac{1 - sin\,2\eta\,cos\,\theta}{2sin^2\theta} \tag{29}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}C_m = \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty exp(-r^2 \frac{1 - sin\,2\eta\,cos\,\theta}{2sin^2\theta}) r^{2m+1}\,dr\,(\frac{sin\,2\eta}{2})^m d\eta \\ = \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!(2sin^2\theta)^{m+1}}{2(1 - sin\,2\eta\,cos\,\theta)^{m+1}} (\frac{sin\,2\eta}{2})^m d\eta \\ = \frac{||b_1||^m||b_2||^m}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m! sin^{2m+1}\theta\,sin^m\,2\eta}{(1 - sin\,2\eta\,cos\,\theta)^{m+1}}\,d\eta = \frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!\,sin^m\,2\eta}{(1 - sin\,2\eta\,cos\,\theta)^{m+1}}\,d\eta\end{aligned} \tag{30}$$

ここで、$\psi = 2\eta - \frac{\pi}{2}$ の置換を行うと、

$$\begin{aligned}C_m = \frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!\,sin^m\,2\eta}{(1 - sin\,2\eta\,cos\,\theta)^{m+1}}\,d\eta \\ = \frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!\,sin^m\,(\psi + \frac{\pi}{2})}{(1 - sin\,(\psi + \frac{\pi}{2})\,cos\,\theta)^{m+1}}\,\frac{1}{2}d\psi\end{aligned} \tag{31}$$

加法定理より、$sin\,(\psi + \frac{\pi}{2}) = sin\,\psi\,cos\,\frac{\pi}{2} + cos\,\psi\,sin\,\frac{\pi}{2} = cos\,\psi$ なので、

$$\begin{aligned}C_m = \frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!\,cos^m\,(\psi)}{(1 - cos\,(\psi)\,cos\,\theta)^{m+1}}\,\frac{1}{2}d\psi \\ = \frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi} \frac{1}{2} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!\,cos^m\,(\psi)}{(1 - cos\,(\psi)\,cos\,\theta)^{m+1}}\,d\psi \\ = \frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m!\,cos^m\,(\psi)}{(1 - cos\,(\psi)\,cos\,\theta)^{m+1}} d\psi\end{aligned} \tag{32}$$

2 個目の等号は積分区間が 0 を挟んで対称であり、積分する関数が、ψ に関して、$cos\,\psi$ という、偶関数の関数になっているため、成り立つ。

ここからは (A.71) を確かめる。(A.71) で、左辺を G, 左辺の被積分関数を f、左辺の被積分関数を積分した結果を F, 右辺を H とする。

$$G = \int_0^{\xi} \frac{d\psi}{1 - cos\,\psi\, cos\,\theta} = \int_0^{\xi} f(\psi) d\psi = F(\xi) - F(0) = \frac{1}{sin\,\theta} arctan(\frac{sin\,\theta\, sin\,\xi}{cos\,\xi - cos\,\theta}) = H(\xi) \tag{33}$$

本にあるように両辺を ξ で偏微分する。左辺に関しては容易である。

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(F(\xi) - F(0)) = \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} = f(\xi) = \frac{1}{1 - cos\,\psi\, cos\,\theta} \tag{34}$$

右辺に関して、$y = \frac{sin\,\theta\, sin\,\xi}{cos\,\xi\, cos\,\xi}, z = arctan(y)$ と置くと、

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{cos^2 z} = 1 + tan^2 z \tag{35}$$

よって、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + tan^2 z} = \frac{1}{1 + y^2} \tag{36}$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{sin\,\theta\, cos\,\xi}{cos\,\xi - cos\,\theta} + \frac{sin\,\theta\, sin^2 \xi}{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2} &= \frac{sin\,\theta\, sin^2 \xi + sin\,\theta\, cos^2 \xi - sin\,\theta\, cos\,\theta\, cos\,\xi}{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2} \\ &= \frac{sin\,\theta\,(1 - cos\,\theta\, cos\,\xi)}{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2} \end{aligned} \tag{37}$$

右辺の偏微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{z}{sin\,\theta}) = \frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{sin\,\theta}\frac{1}{1+y^2}\frac{sin\,\theta\,(1 - cos\,\theta\, cos\,\xi)}{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2} \\ &= \frac{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2}{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2 + (sin\,\theta\, sin\,\xi)^2}\frac{(1 - cos\,\theta\, cos\,\xi)}{(cos\,\xi - cos\,\theta)^2} = \frac{1 - cos\,\theta\, cos\,\xi}{cos^2 \xi + cos^2 \theta - 2cos\,\xi\, cos\,\theta + sin^2 \theta(1 - cos^2 \xi)} \\ &= \frac{1 - cos\,\theta\, cos\,\xi}{1 - 2cos\,\xi\, cos\,\theta + cos^2 \xi(1 - sin^2 \theta)} = \frac{1 - cos\,\theta\, cos\,\xi}{1 - 2cos\,\xi\, cos\,\theta + cos^2 \xi\, cos^2 \theta} = \frac{1 - cos\,\theta\, cos\,\xi}{(1 - cos\,\theta\, cos\,\xi)^2} = \frac{1}{1 - cos\,\theta\, cos\,\xi} \end{aligned} \tag{38}$$

(A.71) の両辺が一致することが確認できた。この式は恒等式で $\xi = \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1 - cos\,\psi\, cos\,\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi = \frac{1}{sin\,\theta} arctan(\frac{sin\,\theta\, sin\,\xi}{cos\,\xi - cos\,\theta}) = \frac{1}{sin\,\theta} arctan(\frac{-sin\,\theta}{cos\,\theta}) = \frac{N\pi - \theta}{sin\,\theta} \tag{39}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ で成立するので、$N = 1$。つまり、(A.72) のように、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1 - cos\,\psi\, cos\,\theta} = \frac{\pi - \theta}{sin\,\theta} \tag{40}$$

C_0 は以下のようになる。

$$C_0 = \frac{sin\,\theta}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1 - cos\,\psi\, cos\,\theta} = \pi - \theta \tag{41}$$

m が 1 以上の自然数のとき、まず、(A.73) が成り立つことを確認する。m=1 のときは

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{1-\alpha z}=\frac{\alpha}{(1-\alpha z)^2}=\frac{1!\alpha^1}{(1-\alpha z)^{1+1}} \tag{42}$$

となり、成り立つ。m=N-1 で成立しているとき、m=N を考える。

$$(\frac{\partial}{\partial z})^m\frac{1}{1-\alpha z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{(N-1)!\alpha^{N-1}}{(1-\alpha z)^N}=\frac{N!\alpha^N}{(1-\alpha z)^{N+1}} \tag{43}$$

m=N でも成立するので、(A.73) は常に成立する。よって、$z=cos\,\theta,\alpha=cos\,\psi$ として、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(cos\,\psi)^m}{(1-cos\,\psi\,cos\,\theta)^{m+1}}d\psi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^m\frac{1}{m!(1-cos\,\psi\,cos\,\theta)}d\psi\\&=(\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{m!(1-cos\,\psi\,cos\,\theta)}d\psi=\frac{1}{m!}(\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^m\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta}\end{aligned} \tag{44}$$

(A.74) が成立していることがわかる。(A.70) とこれを用いると、

$$\begin{aligned}C_m&=\frac{||b_1||^m||b_2||^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m!\,cos^m\,(\psi)}{(1-cos\,(\psi)\,cos\,\theta)^{m+1}}d\psi\\&=\frac{\sqrt{\Sigma_{1,1}}^m\sqrt{\Sigma_{2,2}}^m sin^{2m+1}\theta}{2\pi}((\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^m\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta})=\frac{(\sqrt{\Sigma_{1,1}\Sigma_{2,2}})^{m/2}}{2\pi}sin^{2m+1}\theta((\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^m\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta})\\&=\frac{(\sqrt{\Sigma_{1,1}\Sigma_{2,2}})^{m/2}}{2\pi}\mathcal{J}_m(\theta)\end{aligned} \tag{45}$$

(7.94) が成立していることがわかる。また、(7.95) も成り立っていることがわかる。