議論の中で、P125 の最後の部分からの話が、f が V → V になっているのがわかりにくいのではないかという話があったため、m 次元ベクトル V から n 次元ベクトル V' への写像 f を考える。

他の教科書では m,n が逆になっているとの指摘もあったが、ひとまず、ここではそのままとしておく。

このとき、基底 $\mathbf{a}_j (1 \leqq j \leqq m)$ の線形変換 f での変換は、

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{b}_i \tag{1}$$

となる。

(24) のように記号的に書くと、

$$f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)A \tag{2}$$

また、(1) と同様に、$\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ として、f が線形変換であるため、

$$f(\mathbf{x}) = f((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{b}_i \tag{3}$$

さらに、$\mathbf{y} \in V', \mathbf{y} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ として、

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{b}_i \tag{4}$$

ここで、以下の式を考える。

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{b}_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{im}\mathbf{b}_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{b}_i \tag{5}$$

(2),(4),(5) より、

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{y} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{6}$$

上記より、(25) と同様に、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{7}$$