

命題 1.1.6 の証明をふくらませる。

命題 1.1.6 A, B が有限集合で $|A| = |B|$ ならば次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $A \subset B$ なら、 $A = B$ である。

(2) $f: A \rightarrow B$ が写像なら、 f が単射であることと、全射であることは同値である。したがって、このとき、全単射になる。

(1) ベン図を書くと、一般に $B = (A \cup (B \setminus A)) \setminus (A \cap (B \setminus A))$ であることがわかる。

つまり、 $|B| = |A| + |B \setminus A| - |A \cap (B \setminus A)|$ となる。仮定より、 $A \subset B$ なので、 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ 。

そのため、 $|A \cap (B \setminus A)| = 0$ となり、 $|B| = |A| + |B \setminus A|$ である。 $|A| = |B|$ なら、 $|B \setminus A| = 0$ となるので、 $B \setminus A = \emptyset$ 、つまり $B = A$ である。

(2) f が単射とする。写像の定義より、 $f(A) \subset B$ となり、 $|f(A)| \leq |B|$ となる。

f が単射の写像なので、 $a \in A$ に対し、ある一つの元 $b = f(a) \in B$ があり、すべての $a' \in A, a' \neq a$ なる元 a' に対して、 $f(a') \neq b$ になる。つまり、 a に対して、1 つの b があるので、 $|A| = |f(A)|$ 。

これらより、 $|A| = |f(A)| \leq |B| = |A|$ となり、 $|f(A)| = |B| = |A|$ である。したがって、(1) の条件を満たすため、 $f(A) = B$ となり、すべての b に対して、 $f(a) = b$ を満たす、 $a \in A$ が存在するため、 f は全射となる。

逆に f が全射とする。任意の $b \in B$ に対し、 $a_b \in A, f(a_b) = b$ となる元 a_b を選んでおく。 $b, b' \in B, b \neq b', a_b = a_{b'}, a_b, a_{b'} \in A$ なら、 $b = f(a_b) = f(a_{b'}) = b'$ となり矛盾である。したがって、 $b \neq b'$ なら、 $a_b \neq a_{b'}$ 。よって、集合 $C \equiv \{a_b | b \in B\} \subset A$ の元の個数は $|C|$ は $|A| = |B| = |C| \neq |A|$ となり、 $|C| = |A|$ となる。

したがって、(1) より、 $C = \{a_b | b \in B\} = A$ となる。

もし、 f が単射でないとすると、ある $a, a' \in A$ が存在し、 $f(a) = f(a') = b$ が存在するが、

その場合、 $|A| > |f(A)| = |B|$ となり、 $|A| = |B|$ と矛盾する。

よって、 f は単射になる。

と書いたが、

全射であるとする、 $f(A) = B$ 。(写像の定義より、 $f(A) \subset B$ 。もし、 $f(A) \subsetneq B$ だとすると、 $b' \in B \setminus f(A)$ が存在するが、 $f(a) = b$ となる、 $a \in A$ が存在せず、全射という仮定に反する。)

もし、 f が単射でないとすると、ある $a, a' \in A$ が存在し、 $f(a) = f(a') = b$ が存在するが、その場合、 $|A| > |f(A)| = |B|$ となり、 $|A| = |B|$ と矛盾する。よって、 f は単射になる。

としては、だめなのでしょうか。