問 7 の別解を考えてみる。

はじめの方は解答と同じ。

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k + i\mathbf{c}_k \tag{1}$$

のときに、

$$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_2 n \text{ が実係数で一次独立} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_{2n} \\ \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_k & \cdots & \mathbf{c}_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

が成り立つため、以下を示すことができれば良い。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_k & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_{2n} \\ \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_k & \cdots & \mathbf{c}_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

P52 の定理 3 などを繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_k & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{2n} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2\mathbf{b}_1 & \cdots & 2\mathbf{b}_k & \cdots & 2\mathbf{b}_{2n} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_k & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{2n} \end{vmatrix} = 2^n \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_{2n} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_k & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{2n} \end{vmatrix} \\ &= 2^n \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_{2n} \\ -i\mathbf{c}_1 & \cdots & -i\mathbf{a}_k & \cdots & -i\mathbf{a}_{2n} \end{vmatrix} = 2^n(-i)^n \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_{2n} \\ \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

最初の等号では上側の行に下側の n 行を足した。(P54(18))

次の等号では上側の n 行について、それぞれの行の共通の係数 2 をくくりだしている。(P52(12))

更に、下側の n 行について、上側の n 行を引く。(P54(18))

最後に下側の n 行について、それぞれの行の共通の係数 (-i) をくくりだす。(P52(12))

つまり、(複素数ではあるが、)、左辺は、最後の項 (右辺) の定数倍になっている。

よって、左辺か右辺のどちらかが、0 でなければ、残りも 0 でない。

それにより、以下が示された。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_k & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_{2n} \\ \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_k & \cdots & \mathbf{c}_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

そのため、上記を統合して、

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_k & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_2 n \text{ が実係数で一次独立} \tag{6}$$