別証の I) について検討する。

証明したいことは n 次元の r 個のベクトルの r-ベクトルに対して $(n \geq r)$、強い意味で一次独立 $(|a_1, \ldots, a_r| \neq \mathbf{0})$ のとき、その一部を i 個除いたものの (r-i)-ベクトルも強い意味で独立である ((r-i)-ベクトルも $\mathbf{0}$ でない) こと。(例えば、$|a_1, \ldots, a_{r-1}| \neq \mathbf{0}$)

まず、上記のベクトル $a_1, \ldots, a_r$ を並べた (n, r) 行列を以下のように置く。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} \tag{1}$$

仮定より、r-ベクトルは 0 でないから、ある行番号の組み合わせ、$\nu = (\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, \alpha_r^{(\nu)})$ に関して、

$$|A^{(\nu)}| = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\nu)}1} & a_{\alpha_1^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\nu)}r} \\ a_{\alpha_2^{(\nu)}1} & a_{\alpha_2^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\nu)}r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{\alpha_r^{(\nu)}1} & a_{\alpha_r^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\nu)}r} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

この左辺は II の定理 5 の展開定理より、例えば最後の列 (a_r の要素) に関して、展開でき、

$$|A^{(\nu)}| = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\nu)}1} & a_{\alpha_1^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\nu)}r} \\ a_{\alpha_2^{(\nu)}1} & a_{\alpha_2^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\nu)}r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{\alpha_r^{(\nu)}1} & a_{\alpha_r^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\nu)}r} \end{vmatrix} = a_{\alpha_1^{(\nu)}r}\Delta_{\alpha_1^{(\nu)}r} + a_{\alpha_2^{(\nu)}r}\Delta_{\alpha_2^{(\nu)}r} + \ldots + a_{\alpha_r^{(\nu)}r}\Delta_{\alpha_r^{(\nu)}r} \neq 0 \tag{3}$$

ここで、

$$\Delta_{\alpha_i^{(\nu)}r} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\nu)}1} & a_{\alpha_1^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\nu)}(r-1)} \\ a_{\alpha_2^{(\nu)}1} & a_{\alpha_2^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\nu)}(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{\alpha_{i-1}^{(\nu)}1} & a_{\alpha_{i-1}^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_{i-1}^{(\nu)}(r-1)} \\ a_{\alpha_{i+1}^{(\nu)}1} & a_{\alpha_{i+1}^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_{i+1}^{(\nu)}(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{\alpha_r^{(\nu)}1} & a_{\alpha_r^{(\nu)}2} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\nu)}(r-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

この $\Delta_{\alpha_i^{(\nu)}r}$ を見てみると、$a_1, \ldots, a_{r-1}$ のある行の組み合わせ $\nu' = (\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{(i-1)}^{(\nu)}, \alpha_{(i+1)}^{(\nu)}, \ldots, \alpha_r^{(\nu)})$ に対して、符号付きで行列式をとっているので、$\Delta_{\alpha_i^{(\nu)}r}$ は $|a_1, \ldots, a_{r-1}|$ の要素になっている。(厳密には正負の符号が異なる可能性があるが、以下の議論には影響しない。)

(3) を考えると、行列式が 0 にならない場合、ある $1 \leq p \leq r$ があって、$\Delta_{\alpha_p^{(\nu)}r} \neq 0$。(そうでないと、$|A^{(\nu)}| = 0$ となってしまう。)

よって、$|a_1, \ldots, a_{r-1}|$ のある要素は 0 でないので、$|a_1, \ldots, a_{r-1}| \neq \mathbf{0}$

以上により、$a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r$ が強い意味で一次独立であれば、$a_1, \ldots, a_{r-1}$ も強い意味で独立であることが示された。ここで a_r を取り除いたが、$a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r$ のうち任意の 1 個を除いても同じことが言える。また、これを繰り返し適用することもできるため、$a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r$ が強い意味で一次独立であれば、その一部のベクトルも強い意味で一次独立となる。