V=C^2,基底をe1=[1, 1]^T, e2=[1, -1]^Tについて、V*を考える。f∈V*

$x \in V,\ x = \xi 1\ e1 + \xi 2\ e2,\ \xi 1,\ \xi 2\ \in C$

*F:V(C^2)→C(一次写像)*で、*f(x) = ξ1 f(e1) + ξ2 f(e2)*

f([x1, x2]^T) = a1 x1 + a2 x2

この状態で、*e*の基底を求める。

*(2)*より、*fi(ej)=δij*となるようにするので、

f1(e1) = 1, f1(e2) = 0, a1 = a2 = ½
f2(e1) = 0, f2(e2) = 1, a1 = ½, a2 = -1/2

これは

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e11 & e21 \\ e12 & e22 \end{bmatrix} = \begin{matrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = \begin{matrix} f1(e1) & f1(e2) \\ f2(e1) & f2(e2) \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

としても求まる。

つまり、f1(x) = ½ x1 + ½ x2, f1(x) = ½ x1 - ½ x2となる。
なお、V=C^2となっているが、すべて実数なのでR^2としても同等。
*ξは基底を求めるときにはいうほど利用しなさそう。
fを求めるために基底にかける係数であるとの認識です。

さて、この例でV**を考えてみる。

$V^*=C^2$,基底を$f1=[1/2, 1/2]^T$, $e2=[1/2, -1/2]^T$について、V**を考える。$\Phi \in V^{**}$

$f \in V^*$, $f = \xi 1\ f1 + \xi 2\ f2$, $\xi 1, \xi 2 \in C$

$\Phi: V^*(C^2) \to C$(一次写像)で、

$\Phi(x) = \xi 1\ (f1(e1) + f1(e2)) + \xi 2\ (f2(e1) + f2(e2)) = \xi 1\ f1(e1) + \xi 2\ f2(e2)$

ここで、(2)より$f1(e2) = 0$, $f2(e1) = 0$に注意した。

$\underline{\Phi x([f1, f2]^T) = a1\ f1(x) + a2\ f2(x)}$

この状態で、fの双対基底を求める。

(2)より、$\Phi ei(fj)=\delta ij$となるようにするが、(3)より、$\Phi ei(fj) = fj(ei)$となる。

$\Phi e1(f1) = f1(e1) = 1$, $\Phi e1(f2) = f1(e2) = 0$, $a1 = 1$, $a2 = 0$

$\Phi e2(f1) = f2(e1) = 0$, $\Phi e2(f2) = f1(e2) = 1$, $a1 = 0$, $a2 = 1$

しかし、これは、V*の基底を決める際に、$fj(ei)=\delta ij$としているため、

一定の形になっている。

→だからカノニカルな同型?

*(4)が線型という証明までは良いとする。