(2),(4) に関して、定義の対偶でなく、そのまま用いた場合を考える。

そもそも、単射の定義は以下になる。

$$\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \to a = a' \tag{1}$$

<u>(2) f,g が単射なら、$g \circ f$ が単射である。</u>

f,g は単射であるので、単射の定義から

$$\forall a, a' \in A, b \equiv f(a) = f(a') \to a = a' \tag{2}$$

となる。同様に、

$$\forall b, b' \in B, g(b) = g(b') \to b = b' \tag{3}$$

となる。

よって、(3) より、

$$\forall b \equiv f(a), b' \equiv f(a'), g \circ f(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = g \circ f(a') \to b = f(a) = f(a') = b' \tag{4}$$

これに (2) を適用させると、

$$\forall a, a', g \circ f(a) = g \circ f(a') \to a = a' \tag{5}$$

よって、f,g が単射なら、$g \circ f$ が単射である。

<u>(4) $g \circ f$ が単射なら、f も単射である。</u>

g は写像なので $\forall a, a', f(a) = f(a') \to g \circ f(a) = g \circ f(a')$。

$g \circ f$ が単射なので、$\forall a, a', g \circ f(a) = g \circ f(a') \to a = a'$

よって、$\forall a, a', f(a) = f(a') \to a = a'$

よって、f は単射になる。

なお、g は単射である必要はない。例えば、A={1}, B={1, 2}, C = {1, 2} として、 f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1 としても、$g \circ f$ は単射となる。