

(7.76)(7.77) を考える。

まず、(7.76) に対して、

$$\begin{aligned}
m_i^{(2)}(x) &= \mathbb{E}[a_i^{(2)}] = \int p(a_i^{(2)}) a_i^{(2)} da_i^{(2)} \\
&= \int \cdots \int \left(\left(\prod_j^{H_1} p(w_{i,j}^{(2)}) \right) p(b_i^{(2)}) \left(\prod_j^{H_1} p(z_j^{(1)}(x)) \right) \left(\sum_j^{H_1} w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) + b_i^{(2)} \right) \left(\prod_j^{H_1} dw_{i,j}^{(2)} \right) db_i^{(2)} \left(\prod_j^{H_1} dz_j^{(1)}(x) \right) \right) \\
&= \int \cdots \int \left(\left(\prod_j^{H_1} p(w_{i,j}^{(2)}) \right) \left(\prod_j^{H_1} p(z_j^{(1)}(x)) \right) \left(\sum_j^{H_1} w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) \right) \left(\prod_j^{H_1} dw_{i,j}^{(2)} \right) \left(\prod_j^{H_1} dz_j^{(1)}(x) \right) \right) + \int p(b_i^{(2)}) b_i^{(2)} db_i^{(2)} \\
&= \sum_j^{H_1} \left(\int \int p(w_{i,j}^{(2)}) p(z_j^{(1)}(x)) w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) dw_{i,j}^{(2)} dz_j^{(1)}(x) \right) + \int p(b_i^{(2)}) b_i^{(2)} db_i^{(2)} \\
&= \sum_j^{H_1} \left(\int p(w_{i,j}^{(2)}) w_{i,j}^{(2)} dw_{i,j}^{(2)} \int p(z_j^{(1)}(x)) z_j^{(1)}(x) dz_j^{(1)}(x) \right) + \int p(b_i^{(2)}) b_i^{(2)} db_i^{(2)} \\
&= \sum_j^{H_1} (\mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)}] \mathbb{E}[z_j^{(1)}(x)] + \mathbb{E}[b_i^{(2)}]) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

3 個目の等式はともかく、 $a_i^{(2)}$ に関して足し合わせるので、 $w_{i,j}^{(2)}, b_i^{(2)}, z_j^{(1)}$ たちに関して、足し合わせれば良い。

最後の等号は (7.74) から、 i, j によらず、 $\mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)}] = 0$ 、(7.75) から、 i によらず、 $\mathbb{E}[b_i^{(2)}] = 0$ なので、成り立つ。

(7.77) の検討を行う。

$$\begin{aligned}
k_i^{(2)}(x, x) &= \mathbb{E}[\{a_i^{(2)}(x) - m_i^{(2)}(x)\}^2] = \mathbb{E}[\{a_i^{(2)}(x)\}^2] = \mathbb{E}[\{\sum_{j=1}^{H_1} w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) + b_i^{(2)}\}^2] \\
&= \int \cdots \int \left(\left(\prod_j^{H_1} p(w_{i,j}^{(2)}) \right) p(b_i^{(2)}) \left(\prod_j^{H_1} p(z_j^{(1)}(x)) \right) \left\{ \sum_{j=1}^{H_1} w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) + b_i^{(2)} \right\}^2 \left(\prod_j^{H_1} dw_{i,j}^{(2)} \right) db_i^{(2)} \left(\prod_j^{H_1} dz_j^{(1)}(x) \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{H_1} \left(\int \int p(w_{i,j}^{(2)}) p(z_j^{(1)}(x)) w_{i,j}^{(2)2} z_j^{(1)2}(x) dw_{i,j}^{(2)} dz_j^{(1)}(x) \right) + \int p(b_i^{(2)}) b_i^{(2)2} db_i^{(2)} \\
&+ \sum_{j < k} 2 \int \int \int \int p(w_{i,j}^{(2)}) p(w_{i,k}^{(2)}) p(z_j^{(1)}(x)) p(z_k^{(1)}(x)) w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) w_{i,k}^{(2)} z_k^{(1)}(x) dw_{i,j}^{(2)} dw_{i,k}^{(2)} dz_j^{(1)}(x) dz_k^{(1)}(x) \\
&+ \sum_{j=1}^{H_1} 2 \int \int \int p(w_{i,j}^{(2)}) p(z_j^{(1)}(x)) p(b_i^{(2)}) w_{i,j}^{(2)} z_j^{(1)}(x) b_i^{(2)} dw_{i,j}^{(2)} dz_j^{(1)}(x) db_i^{(2)}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{H_1} \mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)2}] \mathbb{E}[z_j^{(1)}(x)^2] + \mathbb{E}[b_i^{(2)2}] + \sum_{j < k} 2 \mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)}] \mathbb{E}[z_j^{(1)}(x)] \mathbb{E}[w_{i,k}^{(2)}] \mathbb{E}[z_k^{(1)}(x)] + \sum_{j=1}^{H_1} 2 \mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)}] \mathbb{E}[z_j^{(1)}(x)] \mathbb{E}[b_i^{(2)}] \\
&= \sum_{j=1}^{H_1} \mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)2}] \mathbb{E}[z_j^{(1)}(x)^2] + \mathbb{E}[b_i^{(2)2}] = \sum_{j=1}^{H_1} (v_w^{(2)} - \mathbb{E}[w_{i,j}^{(2)}]^2) \mathbb{E}[z_j^{(1)}(x)^2] + (v_b^{(2)} - \mathbb{E}[b_i^{(2)}]^2) = H_1 v_w^{(2)} V(x) + v_b^{(2)}
\end{aligned} \tag{2}$$

となる。