4.2.6 で $q_{new}(\theta)$ がガウス分布の場合、(4.65),(4.66) で、更新できるとあるがそれを確認する。

(4.81) にあるように

$$p(X,\theta) = p(\theta)\prod_n p(x_n|\theta) = \prod_n f_n(\theta) \tag{1}$$

これを、(4.84) のように近似する。

$$q(\theta) = \frac{1}{Z}\prod_n \tilde{f}_n(\theta) \tag{2}$$

本文にあるように $\tilde{f}_n(\theta) \equiv \mathcal{N}(\theta|\mu_n, \Sigma_n)$ として、$q(\theta)$ は (4.85) のようになる。

$$q(\theta) = \mathcal{N}(\theta|(\sum^N \Sigma_n{}^{-1})^{-1}\sum^N(\Sigma_n{}^{-1}\mu_n), (\sum^N \Sigma_n{}^{-1})^{-1}) \tag{3}$$

これをまず、N=2 で確認する。(N は 1 から始まるとする)

$$\begin{aligned} q(\theta) = \mathcal{N}(\theta|\mu_1,\Sigma_1)\mathcal{N}(\theta|\mu_2,\Sigma_2) &= \frac{1}{Z}exp\left(-\frac{(\theta-\mu_1)^T\Sigma_1{}^{-1}(\theta-\mu_1)+(\theta-\mu_2)^T\Sigma_2{}^{-1}(\theta-\mu_2)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{Z}exp\left(-\frac{\theta^T(\Sigma_1{}^{-1}+\Sigma_2{}^{-1})\theta - 2\theta^T(\Sigma_1{}^{-1}\mu_1+\Sigma_2{}^{-1}\mu_2)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{Z}exp\left(-\frac{(\theta-\Sigma(\Sigma_1{}^{-1}\mu_1+\Sigma_2{}^{-1}\mu_2))^T\Sigma^{-1}(\theta-\Sigma(\Sigma_1{}^{-1}\mu_1+\Sigma_2{}^{-1}\mu_2))}{2}\right) \\ &= \mathcal{N}(\theta|\Sigma(\Sigma_1{}^{-1}\mu_1+\Sigma_2{}^{-1}\mu_2),\Sigma) \end{aligned} \tag{4}$$

ここではスカラは転置しても変わらないこと、共分散行列は正定値対称行列であることに注意する。また、$\Sigma^{-1} = \Sigma_1{}^{-1} + \Sigma_2{}^{-1}$。この式を見ると、N が大きくなっても、(4.85) 式が成り立っていることがわかる。

(4.86) を見ると、

$$q_{\setminus i}(\theta) = \prod_{j\neq i}\tilde{f}_j(\theta) = \mathcal{N}(\theta|(\sum_{i\neq j}\Sigma_i{}^{-1})^{-1}(\sum_{i\neq j}(\Sigma_i{}^{-1}\mu_i)), (\sum_{i\neq j}\Sigma_i{}^{-1})^{-1}) \tag{5}$$

(正規化定数は 1 としている。)

$q_{new}(\theta)$ が正規分布として、(4.87) は (4.58) も参考にして、

$$q_{new}(\theta) \approx r_{new}(\theta) = \frac{1}{Z_i}f_i(\theta)q_{\setminus i}(\theta) \tag{6}$$

(4.60) は

$$Z_i = \int f_i(\theta)q_{\setminus i}(\theta)d\theta \tag{7}$$

(4.65) は

$$\mu_{new} = \mu_{\setminus i} + v_{\setminus i}\frac{\partial}{\partial\mu_{\setminus i}}Z_i \tag{8}$$

(4.66) は

$$v_{new} = v_{\setminus i} + v_{\setminus i}{}^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial\mu_{\setminus i}}Z_i\right)^2 - 2\frac{\partial}{\partial v_{\setminus i}}Z_i\right) \tag{9}$$

このとき (q が正規分布のとき)、(4.88) は

$$\tilde{f}_i(\theta) = \frac{q_{new}(\theta)}{q_{\setminus i}(\theta)} = \mathcal{N}(\theta|(v_{new}{}^{-1}-v_{\setminus i}{}^{-1})^{-1}(v_{new}{}^{-1}\mu_{new} - v_{\setminus i}{}^{-1}\mu_{\setminus i}), (v_{new}{}^{-1}-v_{\setminus i}{}^{-1})^{-1}) \tag{10}$$

(ここで Z_i となっているが、q を正規化したいので、$r(\theta)$ の正規化定数と異なる気がする。)

(この付近が、5.2.5 の文献 [47] の supplement material の 6 辺りで出てきているように思う。)