命題 1.1.6 の証明をふくらませる。

命題 1.1.6 A,B が有限集合で $|A| = |B|$ ならば次の (1),(2) が成り立つ。

(1) $A \subset B$ なら、A = B である。

(2) $f : A \to B$ が写像なら、f が単射であることと、全射であることは同値である。したがって、このとき、全単射になる。

(1) ベン図を書くと、一般に $B = (A \cup (B \setminus A)) \setminus (A \cap (B \setminus A))$ であることがわかる。
つまり、$|B| = |A| + |B \setminus A| - |A \cap (B \setminus A)|$ となる。仮定より、$A \subset B$ なので、$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$。
そのため、$|A \cap (B \setminus A)| = 0$ となり、$|B| = |A| + |B \setminus A|$ である。$|A| = |B|$ なら、$|B \setminus A| = 0$ となるので、$B \setminus A = \emptyset$、つまり $B = A$ である。

(2) f が単射とする。写像の定義より、$f(A) \subset B$ となり、$|f(A)| \leq |B|$ となる。
f が単射の写像なので、$a \in A$ に対し、ある一つの元 $b = f(a) \in B$ があり、すべての $a' \in A, a' \neq a$ なる元 a' に対して、$f(a') \neq b$ になる。つまり、a に対して、1 つの b があるので、$|A| = |f(A)|$。
これらより、$|A| = |f(A)| \leq |B| = |A|$ となり、$|f(A)| = |B| = |A|$ である。したがって、(1) の条件を満たすため、$f(A) = B$ となり、すべての b に対して、$f(a) = b$ を満たす、$a \in A$ が存在するため、f は全射となる。
逆に f が全射とする。任意の $b \in B$ に対し、$a_b \in A, f(a_b) = b$ となる元 a_b を選んでおく。$b, b' \in B, b \neq b', a_b = a_{b'}$, $a_b, a_{b'} \subset A$なら、$b = f(a_b) = f(a_{b'}) = b'$ となり矛盾である。したがって、$b \neq b'$ なら、$a_b \neq a_{b'}$。
よって、集合C= $\{a_b | b \in B\} \subset A$ の元の個数は$|C|$ は $|A| = |B| = |C| \leq |A|$ となり、$|C| = |A|$ となる。
したがって、(1) より、$C = \{a_b | b \in B\} = A$ となる。
もし、f が単射でないとすると、ある $a, a' \in A$ が存在し、f(a) = f(a') =b が存在するが、
その場合、$|A| > |C| = |B|$ となり、$|A| = |B|$ と矛盾する。
よって、f は単射になる。

と書いたが、
全射であるとすると、$f(A) = B$。(写像の定義より、$f(A) \subset B$。もし、$f(A) \subsetneq B$ だとすると、$b' \in B \setminus f(A)$ が存在するが、$f(a) = b$ となる、$a \in A$ が存在せず、全射という仮定に反する。)
もし、f が単射でないとすると、ある $a, a' \in A$ が存在し、f(a) = f(a') =b が存在するが、その場合、$|A| > |f(A)| = |B|$ となり、$|A| = |B|$ と矛盾する。よって、f は単射になる。
としては、だめなのでしょうか。