(7.88) を考える。

(7.71) と (7.73) を見比べる。$z_j^{(0)}(x)$ に相当するものを考えると、x_j となる。ただし、$x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_{H_0}) \in \mathbb{R}^{H_0}$ となる。

(7.76) を振り返ると x_j 値やその分布、H_0 によらず、(7.76) が成り立つ。つまり、$m_i^{(1)}(x) = 0$

(7.80) を振り返ると、(7.76) が成り立っているので、3 つめの等号まで (7.80) が成り立っている。ただし、$C_j(x, x') = \mathbb{E}[\{z_j^{(0)}(x) z_j^{(0)}(x')] = \mathbb{E}[x_j x'_j]$ と置く。導出は (7.77) と同様になっている。$l = 1$ でないときは、任意の j で $C(x) = C_j(x) = \mathbb{E}[z_j^{(l-1)}(x) z_j^{(l-1)}(x')]$ としているが、$z_j^{(l-1)}(x)$ の生成方法を考慮すると、j によらず、同分布になっていると言える。

一方で、x_j に関して、x_j になることがわかっているので、$p_{j(x)}(y) = \delta_{x_j, y}$ となる。また、$p_{j(x,x')}(y, z) = p(y, z|x, x') = p_{j(x)}(y) p_{j(x')}(z)$

よって、

$$C_j(x, x') = \mathbb{E}[x_j x'_j] = \int yz p_j(y) p_j(z) dy dz = x_j x'_j \tag{1}$$

(7.80) に代入すると、

$$\begin{aligned} k^{(1)}(x, x') = k_i^{(1)}(x, x') = \sum_j^{H_0} \mathbb{E}[\{w_{i,j}^{(1)}\}^2] \mathbb{E}[x_j x'_j] + \mathbb{E}[\{b_j^{(1)}\}^2] = \sum_j^{H_0} v_w^{(1)} x_j x'_j + v_b^{(1)} \\ = v_w^{(1)} \sum_j^{H_0} x_j x'_j + v_b^{(1)} = v_w^{(1)} x^T x' + v_b^{(1)} \end{aligned} \tag{2}$$

(7.78) のように $v_w^{(1)} = \frac{\hat{v}_w^{(1)}}{H_0}$ とすると、(7.88) のように、

$$k^{(1)}(x, x') = v_w^{(1)} x^T x' + v_b^{(1)} = v_b^{(1)} + \hat{v}_w^{(1)} \frac{x^T x'}{H_0} \tag{3}$$