P.157 の問 5 の解答がわかりにくいので途中を補って、書き直す。

まず、P.156 の 10 行目にあるように

$$0 \leq r_\nu \leq r_{\nu-1} \leq \ldots \leq r_1 \tag{1}$$

P.155 の下から 11-12 行目の記載をまとめると以下のようになる。

$V = W^{(\nu)}$、$dimV = n$ より、

$$dimW^{(\nu)} = dimV = n \tag{2}$$

$$dimW^{(i)} = m_i \tag{3}$$

$$m_i - m_{i-1} = r_i \tag{4}$$

$$m_0 = 0 \tag{5}$$

これらをもとに、r_i の和を考える。

$$\sum_{i=1}^{\nu} r_i = (m_\nu - m_{\nu-1}) + (m_{\nu-1} - m_{\nu-2}) + \ldots + (m_1 - m_0) = m_\nu - m_0 = m_\nu = dimW^{(\nu)} = n \tag{6}$$

ここまでで解答の (*) が示された。(ただ、和が n になるのは結局使わない気がする。)

なお、上記の話はべき零行列一般に言える。$N = {N_1}^2$ となる N_1 が存在すれば、べき零行列 N は $N^\nu = 0$ となるので、$N^\nu = {N_1}^{2\nu} = 0$ となり、N_1 もべき零行列といえ、上記が適用できる。つまり、

$$0 \leq r'_{2\nu} \leq r'_{2\nu-1} \leq \ldots \leq r'_1 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{2\nu} r'_i = n \tag{8}$$

が、言える。

P.112 の下から 13 行目より、$x \in V,\ f : x \longrightarrow N^i x$ として、$f^{-1}(0) = W^{(i)}$ なので、

$$dimW^{(i)} = n - rankN^i \tag{9}$$

(3), (4) を考えると、

$$r_i = m_i - m_{i-1} = dimW^{(i)} - W^{(i-1)} = (n - rankN^i) - (n - rankN^{i-1}) = rankN^{i-1} - rankN^i \tag{10}$$

これを更に展開して、

$$r_i = rankN^{i-1} - rankN^i = rank{N_1}^{2(i-1)} - rank{N_1}^{2i} = rank{N_1}^{2i-2} - rank{N_1}^{2i-1} + rank{N_1}^{2i-1} - rank{N_1}^{2i} = r'_{2i-1} + r'_{2i} \tag{11}$$

ここまでで、以下の (**) が示された。

$$r_i = r'_{2i-1} + r'_{2i} \tag{12}$$

$$0 \leq r'_{2\nu} \leq r'_{2\nu-1} \leq \ldots \leq r'_1 \tag{13}$$

N と N_1 で基底の対応ができれば、平方根があるといえる。

よって、上記の関係が、必要十分条件となる。

以下での、必要十分条件を満たす場合を考える。

まず、r_i が偶数のときを考える。r_i, r'_i はそれぞれ、自然数ということに注意して、

$$r'_{2i-1} = r'_{2i} = \frac{r_i}{2} \tag{14}$$

と置くことで、

$$0 \leq \frac{r_i}{2} = r'_{2i} = r'_{2i-1} \leq \frac{r_{i-1}}{2} \leq r'_{2i-2} = r'_{2i-3} \leq \frac{r_{i-2}}{2} \tag{15}$$

となり、(1),(12) を満たす、r_i, r'_i を決めることができる。よって、r_i が偶数のときは平方根を持ちうる。

次に、r_i が奇数の時を考える。

もし、r_i が奇数の時は常に $r_{i+1} < r_i$ であれば、、$r'_{2i-1} = \frac{r_i+1}{2}, r'_{2i} = \frac{r_i-1}{2}$ とすれば良い。このとき、r_{i+1} が偶数だとすると、$r_{i+1} \leq r_i - 1$ となり、$r'_{2i+1} = \frac{r_{i+1}}{2} \leq \frac{r_i-1}{2} = r'_{2i}$ を満たす。

奇数だとしても、$r_{i+1} < r_i$ なので、$r_{i+1} \leq r_i - 2$ となり、$r'_{2i+1} = \frac{r_{i+1}-1}{2} \leq \frac{r_i+1}{2} = r'_{2i}$ となり、関係を維持できる。

r_{i-1} に関しても同様の評価ができる。

もし、r_i が奇数で $r_{i+1} = r_i$ の場合があれば、、このときに、$r'_{2i+2} \leq r'_{2i+1} \leq r'_{2i} \leq r'_{2i-1}$ と $r'_{2i+2} + r'_{2i+1} = r_{i+1} = r_i = r'_{2i} + r'_{2i-1}$ を同時に満たす、r'_j たちを考える。

$$r_{i+1} = r'_{2i+2} + r'_{2i+1} \leq= 2r'_{2i+1} \leq 2r'_{2i} \leq r'_{2i} + r'_{2i-1} = r_i \tag{16}$$

となるが、この式の両端は等しい。よって、その間の不等号は等号でないと成立しない。これらから、r'_j たちはすべて等しく、$\frac{r_i}{2}$ でないといけないことがわかる。

しかし、r_i は奇数なので、r'_j たちが自然数にならず、矛盾している。

そのため、r_i が奇数で $r_{i+1} = r_i$ の場合はあってはならない。

なお、$i \geq 2$ のすべての r_i で上記の条件を満たす必要がある。つまり、**ある $r_i (i \leq 2)$ が奇数、r_{i+1} が奇数のとき、$r_i = r_{i+1}$ とならないことが条件となる。**