(7.97)-(7.99) を考える。

(7.95) にあるように、

$$\mathcal{J}(m) = (sin\,\theta)^{2m+1}((\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^m \frac{\pi-\theta}{sin\,\theta}) \tag{1}$$

(7.97) に関しては m=0 で容易。

$$\mathcal{J}(0) = sin\,\theta(\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta}) = \pi-\theta \tag{2}$$

まず、$z = cos\,\theta$ と置く。すると、

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -sin\,\theta \tag{3}$$

よって、

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{1}{sin\,\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \tag{4}$$

なお、$cos\,\theta$ の定義から $sin\,\theta > 0$ となっていることに注意する。

(7.98) にあるように m=1 の場合を考える。

$$\mathcal{J}(1) = (sin\,\theta)^3(\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)}\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta}) \tag{5}$$

上記の微分のところだけを考慮する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)}\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta} &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\pi-\theta}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + (-\frac{1}{2})(-2z)\frac{1}{\sqrt{1-z^2}^3}(\pi-\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}^2} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}^3}(\pi-\theta) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}^3}(\pi-\theta)\end{aligned} \tag{6}$$

よって、以下のように (7.98) が成立する。

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(1) = (sin\,\theta)^3(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}^2} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}^3}(\pi-\theta)) &= (sin\,\theta)^3(\frac{1}{(sin\,\theta)^2} + \frac{cos\,\theta}{(sin\,\theta)^3}(\pi-\theta)) \\ &= sin\,\theta + (\pi-\theta)cos\,\theta\end{aligned} \tag{7}$$

同様に (7.99) にある、m=2 の場合を考える。

$$\mathcal{J}(2) = (sin\,\theta)^5((\frac{\partial}{\partial(cos\,\theta)})^2\frac{\pi-\theta}{sin\,\theta}) \tag{8}$$

上記の微分のところだけを考慮する。

$$= (-1)(-2z)\frac{1}{(1-z^2)^2} + (\frac{1}{\sqrt{1-z^2}^3} + (-\frac{3}{2})(-2z)\frac{z}{\sqrt{1-z^2}^5})(\pi-\theta) + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}^3}(-\frac{\partial\theta}{\partial z}) = \frac{2z}{(1-z^2)^2} + (\frac{(1-z^2)+3z^2}{\sqrt{1-z^2}^5})(\pi \tag{9}$$

よって、以下のように (7.99) が成立する。

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(2) = (sin\,\theta)^5(\frac{3z}{(1-z^2)^2} + (\frac{1+2z^2}{\sqrt{1-z^2}^5})(\pi-\theta)) &= (sin\,\theta)^5(\frac{3cos\,\theta}{(sin\,\theta)^4} + (\frac{1+2cos^2\,\theta}{(sin\,\theta)^5})(\pi-\theta)) \\ &= 3cos\,\theta\,sin\,\theta + (\pi-\theta)(1+2cos^2\,\theta)\end{aligned} \tag{10}$$