省略された命題 2.3.3 の証明を書いてみる。

方針としては命題 2.3.2 を利用する。

まず、命題 2.3.2 を使うための条件として、$H_1 \cap H_2$ が G の部分集合であることを示す。

H_1(もしくは H_2) は G の部分群であるため、$H_1 \cap H_2 \subset H_1 \subset G$ となるため、$H_1 \cap H_2$ は G の部分集合となる。

命題 2.3.2 の (1)-(3) を満たすと、$H_1 \cap H_2$ が G の部分群であることが言える。

(1) について、H_1, H_2 が G の部分群であるため、$I_G \in H_1$ かつ、$I_G \in H_2$。よって、$I_G \in H_1 \cap H_2$。そのため、(1) が満たされる。

(2) について、H_1, H_2 が G の部分群であるため、すべての、$x, y \in H_1 \cap H_2$ に対して、$xy \in H_1$(H_1 が部分群であるため、$H_1 \cap H_2 \subset H_1$ の要素、x,y の積 xy は同じく命題 2.3.2 の (2) により、H_1 の要素になる。) でかつ、同様に、$xy \in H_2$ になる。つまり、$xy \in H_1 \cap H_2$ となり、(2) が満たされる。

(3) について、ほぼ、(2) を示したときと同様に、すべての、$x \in H_1 \cap H_2$ に対して、$x^{-1} \in H_1$ であり、$x^{-1} \in H_2$ になる。つまり、$x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ となり、(3) が満たされる。

(1)-(3) が満たされたため、$H_1 \cap H_2$ が G の部分群であることが言える。