

定理 2.10.2 に関して、証明を詳しく確認する。

定理 2.10.2(準同型定理 (部分群の対応))

- 1,  $N$  を群  $G$  の正規部分群、
- 2,  $\pi: G \rightarrow G/N$  を自然な準同型とする。
- 3,  $G/N$  の部分群の集合を  $\mathbb{X}$ ,
- 4,  $G$  の  $N$  を含む部分群の集合を  $\mathbb{Y}$  とするとき、
- 5, 写像  $\phi: \mathbb{X} \ni H \mapsto \pi^{-1}(H) \in \mathbb{Y}$ ,
- 6,  $\psi: \mathbb{Y} \ni K \mapsto \pi(K) \in \mathbb{X}$
- 7, は互いに逆写像である。
- 8, したがって、集合  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  は 1 対 1 に対応する。

1 に関して、 $N$  が正規部分群だとすると、2.8 にある性質たちが利用できる。

定理 2.10.1 にもあるが、上記の 2 について、定義 2.6.9(1) を踏まえると、 $G \rightarrow G/N$  自然な写像になる。自然な写像なので、 $\pi$  が存在することは、明らか。命題 2.8.13 より、その写像は全射準同型で、 $\text{Ker}(\pi) = N$  となる。

$\pi$  は存在して、 $H$  が  $G/N$  の部分群なので、その逆像は必ず存在する。しかし、この写像  $\phi$ (上記、5 にある。) が  $\mathbb{Y}$  への写像になっているか (well-defined になるか) は確認する必要がある。これは、本の証明、1-4 行目にある。

$H \in \mathbb{X}$  なら、上記、3 にあるように  $H$  は  $G/N$  の部分群なので、命題 2.3.2 より、 $1_{G/N} \in H$  となる。よって、 $\pi^{-1}(1_{G/N}) \subset \pi^{-1}(H)$  となる。 $(\pi^{-1}(1_{G/N})$  は逆像で、複数の元を持つので、 $\in$  ではなく、 $\subset$  になる。) 上記の 2 に関する記述と、定義 2.5.1(3) より、 $\pi(h) = 1_{G/N} (h \in \text{Ker}(\pi) = N$  であり、 $\pi^{-1}(1_{G/N}) = \text{Ker}(\pi) = N$  となる。つまり、 $N = \pi^{-1}(1_{G/N}) \subset \pi^{-1}(H)$  となり、 $\mathbb{Y}$  の条件になる、 $\pi^{-1}(H)$  が  $N$  を含むことを確認できた。あとは、 $\pi^{-1}(H)$  が  $G$  の部分群であることが確認できれば良い。

部分群であることは命題 2.3.2(1)-(3) を示せば良い。(1) について、 $N \subset \pi^{-1}(H)$  であり、 $N$  は正規部分群なので定義 2.8.1, 命題 2.3.2(1) より、 $1_G \in N$  になる。よって、 $1_G = \pi^{-1}(H)$  になる。(2) について、 $x, y \in \pi^{-1}(H) \subset G$  なら、 $\pi(x), \pi(y) \in H$  になり、 $H$  は群、 $\pi$  は準同型なので、 $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \in H$  となり、 $xy \in \pi^{-1}(H)$  になり、(2) も満たす。(3) について、準同型、部分群の性質を考え、 $x \in \pi^{-1}(H) \subset G$  について、 $x^{-1}$  は存在し、 $\pi(x)\pi(x^{-1}) = \pi(xx^{-1}) = \pi(1_G) = 1_{G/N} \in H$  になり、定理 2.8.11 より、 $G/N$  は部分群なので、 $\pi(x^{-1}) \in H$ 。よって、 $x^{-1} \in \pi^{-1}(H)$  となり、(3) も満たす。これにより、 $\pi^{-1}(H)$  が  $G$  の部分群であることも示され、 $\phi$  が  $\mathbb{Y}$  への写像になっていることが確認できた。

次に上記 6 にある、写像  $\psi$  が  $\mathbb{X}$  への写像になっているか (well-defined になるか) は確認する必要がある。これは、本の証明、4-9 行目にある。

$K \subset G$  が  $N$  を含む部分群である時、 $\pi(K)$  が  $G/N$  の部分群であることを確認すればよい。 $N$  が  $G$  の正規部分群なので定義 2.8.1 より、任意の  $g \in G$  に対して、 $gNg^{-1} \in N$  なので、 $g \in K \subset G$  に対しても、当然成り立つ。よって、同様に定義 2.8.1 より、 $N \triangleleft K$  である。 $K/N$  は  $K$  の元  $g$  により  $gN$  という形をした剰余類の集合なので、 $G/N$  の部分集合とみなすことができ、また、 $K/N = \pi(K)$ (任意の  $g \in K$  に関して、 $gN$  という形をした剰余類を考えている。) である。定理 2.8.11 より、 $K/N$  は群になっているので、命題 2.3.2 より、 $G$  の部分群になっている。よって、 $\pi(K) \in \mathbb{X}$  となり、 $\psi$  は  $\mathbb{X}$  への写像になり、well-defined になる。

定義 1.1.4(3) に従い、逆写像であることを確認する。本の証明 10-15 行目では  $\phi \circ \psi = id_{\mathbb{Y}}$  つまり、任意の  $K \in \mathbb{Y}$  に対して、 $\phi \circ \psi(K) = K$  であることを確認している。13-15 行目にあるように  $K$  は  $G$  の部分集合

(部分群)ではあるが、 $K$  を  $\mathbb{Y}$  の元とみなしている。

本の 10 行目にあるように  $j$  に  $H = \pi(K)$  とおくと、 $K \subset \pi^{-1}(H)$  は明らかである。 $(\pi$  は写像なので、 $k \in K$  に対して、対応する  $\pi(k) = j \in H$  は必ず存在する。ただし、ここまででは、 $k' \notin K, \pi(k') = j' \in H$  が存在しないことを言っていないので、 $K \subset \pi^{-1}(H)$  となる。)  $g \in \pi^{-1}(H)$  とすると、この定義より、 $\pi(g) \in \pi(K)$  になる。よって、ある  $h \in K$  があり、 $\pi(g) = \pi(h)$  となる。写像  $\pi$  と同値類の定義を考えると  $G/N$  で同じ元になるので、 $gN = hN$  となる。つまりある  $n_1 \in N$  に対して、 $gn_1 = hn_2$  となる  $n_2 \in N$  が存在する。 $N$  は正規部分群なので  $g = hn$  となる  $n \in N$  が存在する。 $N \subset K$  であり、 $K$  は部分群なので、 $g \in K$  になる。これにより、任意の  $g \in \pi^{-1}(H)$  に対して、 $g \in K$  が確認できたので、 $\pi^{-1}(H) \subset K$  になる。よって、 $\pi^{-1}(H) = K$  が確認でき、任意の  $K$  に対して、 $\phi \circ \psi(K) = \phi(\pi(K)) = \phi(H) = \pi(H) = K$  となる。

次に、本の証明の 16-19 行目にあるように、 $\psi \circ \phi = id_{\mathbb{X}}$  つまり、任意の  $H \in \mathbb{X}$  に対して、 $\psi \circ \phi(H) = H$  であることを確認して、上記と合わせて互いに逆写像であることが言えるようになる。

$H \in \mathbb{X}$  に対して、 $\pi(\pi^{-1}(H)) \subset H$  となる。 $(i \in H \subset G/N$  に対して、ある  $s \in G$  があり、 $\pi(s) = h$  だとすると、 $i \in \pi(\pi^{-1}(\{i\}))$  になるが、前記のような  $s$  が存在しないと、 $i \notin \pi(\pi^{-1}(\{i\}))$  になり、 $\pi(\pi^{-1}(H)) \subset H$  となる。) 定義 2.8.13 より、 $\pi$  は全射であるので、すべての  $h \in H$  に対して、 $g \in G$  があり、 $\pi(g) = h \in H$  である。これは  $g \in \pi^{-1}(H)(= G)$  であることを意味する。よって、 $h = \pi(g) \in \pi(\pi^{-1}(H))$  である。したがって、 $H \subset \pi(\pi^{-1}(H))$  となり、結果として、 $H = \pi(\pi^{-1}(H))$  となる。これにより、 $\psi \circ \phi(H) = \pi(\pi^{-1}(H)) = H$  となる。

これにより、証明の 10-19 行目で、定義 1.1.4(3) が示されたので、逆写像が存在することがわかった。

本の P.4 にあるように、上記、7,8 にあるような逆写像を持つこと、1 対 1 に対応することは同値になる。そのため、1 対 1 対応することも言える。