$f : A \to B$ が写像なら、f が全単射であることと、f が逆写像を持つことが同値であることを言う。

まず、f が全単射であれば、f が逆写像を持つことを言う。

f が全単射であることは

- 単射である：$a, a' \in A, f(a) = f(a')$ なら $a = a'$
- 全射である：任意の $b \in B$ に対し、$a \in A$ があり、$f(a) = b$ となる。

全射であるため、任意の $b \in B$ に対し、$f(a) = b$ となる、$a \in A$ があるため、b に対し、a を対応させることができる。

ある $b = f(a)$ に対応する $a \in A$ が a と a' のように複数あったとすると、単射の定義を外れるため、b に対応する a は唯一つで、上記の b の a への対応が写像の定義を満たすため、この対応を B から A への写像 g と考えることができる。

すると、すべての $a \in A$ に対し、$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a$ となるため、$g \circ f = id_A$ となり、同様に $f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b$ となるため、$f \circ g = id_B$ となり、P.4 の定義から f の逆写像、g が存在する。

次に、f が逆写像 $g = f^{-1} : B \to A$ を持つならば、全単射であることを言う。

背理法で単射であることを言う。

ある、$a, a' \in A, a \neq a'$ に対し、$f(a) = f(a') = b \in B$ だとする。f に対して、逆写像 g が存在し、a,a' に対して、$g(f(a)) = g(b) = a,\ g(f(a')) = g(b) = a'$ となるが、この 2 式から $g(b) = a = a'$ となるが、これは仮定に反する。

よって、逆写像を持つと単射である。

全射に関して、逆写像は $B \to A$ の写像になっている。

そのため、任意の $b \in B$ に対して、$g(b) = f^{-1}(b) = a \in A$ が存在する。

逆写像なので、$f \circ f^{-1}(b) = f(a) = b$ となるため、すべての b に対して、$f(a) = b$ となる、$a$ が存在する。よって、全射であると言える。

単射でかつ、全射であるため、f が逆写像を持つと、全単射であると言える。

上記より、f が全単射であることと、f が逆写像を持つことは同値であると言える。