P.175 の注意 1 について、確認してみる。

注意 1 の主張は以下の 2 条件が必要十分であること。

- m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m$ が一つのユニタリ行列よって、同時に対角化できる。
- 2m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m, A_1^*, ..., A_m^*$ が互いに交換可能。

しかし、2 個目の条件は以下のように制限できると考えられる。

- m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m$ が互いに交換可能、かつ、すべての $1 \leq i \leq m$ にて、A_i, A_i^* が交換可能。

まず、P.163 の注意と同様にすると、一つの、ユニタリ行列 U にて、$A_1, ..., A_m$ が対角化可能であれば、$A_1, ..., A_m$ が交換可能であることは容易に示せる。また、P.174 にもあるように、ユニタリ行列で対角化可能なので、A_i, A_i^* も交換可能であることが言える。更には、2m 個の $A_1, ..., A_m, A_1^*, ..., A_m^*$ も交換可能であることが言える。

m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m$ が互いに交換可能、かつ、すべての $1 \leq i \leq m$ にて、A_i, A_i^* が交換可能であるときに、$A_1, ..., A_m$ が一つのユニタリ行列よって、同時に対角化できることを示す。

これは、P.162 の例 3 に近い形で示す。

その前に、まず、A_i, A_i^* が交換可能であるということを利用する。P.174 の (36) が成り立つので、$A_1, ..., A_m$ は正規行列だとわかる。そうすると、P.175 の定理 7' を利用することで、A_i の固有空間 (狭義の固有空間。広義の固有空間も同一になる)$W_{a_j}(1 \leq j \leq s)$ が直交し、V は W_{a_j} の直和になる。

P.106 の直交補空間の定義を踏まえ、P.107 の定理 6(もしくは問 3) を利用すると、W_{a_j} の直交補空間は W_{a_j} 以外の直和になる。

P.162 例 3 に関して、P.163 の 2 行目までは、そのままの主張で問題ない。

2 行目以降、$W_{a_1} \subsetneq V$ として、$x \in W_{a_1}$ として考えているが、$W_{a_j}(1 \leq j \leq s)$ について考える。

ただし、示されることは変わりなく、$x \in W_{a_j}$ として、

$$A_j A_k x = A_k A_j x = A_k(\alpha_j x) = \alpha_j A_k x (1 \leq k \leq m) \tag{1}$$

となる。よって、$A_k x \in W_{a_j}$。すなわち j=1 の場合も含み、すべての W_{a_j} は、すべての $A_k(1 \leq k \leq m)$ に関して、不変である。それぞれの W_{a_j} が不変であり、上に示したように、ある、W_{a_j} 以外の直和が、その W_{a_j} の直交補空間になるため、直交補空間もすべての $A_k(1 \leq k \leq m)$ に関して、不変である。よって、$A_k x \in W_{a_j}^{\perp}$ となる。今、$dim W_{a_1} = n_1$ とし、V の正規直交基底 $e'_1, ..., e'_n$ を $e'_1, ..., e'_{n_1}$ が W_{a_1} の底になる (したがって、$e'_{n_1+1}, ..., e'_n$ が $W_{a_j}^{\perp}$ の底になる) ようにとり、$U_1 = (e'_1, ..., e'_n)$ とおけば、

$$U_1^{-1} A_j U_1 = U_1^* A_j U_1 = \begin{pmatrix} A_j^{(1)} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで、$A_j^{(1)}, A_j^{(2)}$ は他の、A_k に対する、$A_k^{(1)}, A_k^{(2)}$ とそれぞれ、交換可能になる。そうでなければ、同じ U_1 で変形されているのに、交換可能にならなくなる。

$0 < n_1 < n$ であるから、帰納法の仮定により、ある n_1 次のユニタリ行列 $U_2^{(1)}$ と $(n - n_1)$ 次のユニタリ行列 $U_2^{(2)}$ があって、${U_2^{(1)}}^* A_j^{(1)} U_2^{(1)}, {U_2^{(2)}}^* A_j^{(2)} U_2^{(2)} (1 \leq j \leq m)$ は同時に対角行列になる。よって、

$$U = U_1 \begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

とおけば、$U^*A_jU(1 \leq j \leq m)$ は同時に対角行列になる。

これにより、以下の 2 条件が同値であることが確認された。

- m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m$ が一つのユニタリ行列よって、同時に対角化できる。
- m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m$ が互いに交換可能、かつ、すべての $1 \leq i \leq m$ にて、A_i, A_i^* が交換可能。

かつ、最初の条件があれば、以下の条件を示すことができ、これは上記の 2 番目の条件を含んでいる。

- 2m 個の n 次複素行列 $A_1, ..., A_m, A_1^*, ..., A_m^*$ が互いに交換可能。

よって、これら 3 条件は同値になる。