そもそも、指数型分布族は (3.35) で定義されている。

$$p(\mathbf{x}|\eta) = h(\mathbf{x})exp(\eta^T \mathbf{t}(\mathbf{x}) - a(\eta)) \tag{1}$$

この確率は $\mathbf{x}$ の η に対する、条件付き確率になっている。

また、上記の式で、正規化するために、

$$a(\eta) = ln \int h(\mathbf{x})exp(\eta^T \mathbf{t}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \tag{2}$$

と定義されている。

共役事前分布を考える。(3.45) にあるように、

$$p_\lambda(\eta) = h_c(\eta)exp(\eta^T \lambda_1 - a(\eta)\lambda_2 - a_c(\lambda)) \tag{3}$$

ここで、$\lambda_1 \in \mathbb{R}^{H_1}$($\eta$ の次元) で、λ_2 はスカラになっている。

これは、(3.46),(3.47) を踏まえると、

$$p_{\hat{\lambda}}(\eta|\mathbf{X}) = h_c(\eta)exp(\eta^T \hat{\lambda_1} - a(\eta)\hat{\lambda_2} - a_c(\hat{\lambda})) \propto p_\lambda(\eta) \prod_{n=1}^{N} p(\mathbf{x_n}|\eta) \tag{4}$$

ひとまず、N=1 として、

$$p_{\hat{\lambda}}(\eta|\mathbf{X}) = h_c(\eta)exp(\eta^T \hat{\lambda_1} - a(\eta)\hat{\lambda_2} - a_c(\hat{\lambda})) \propto p_\lambda(\eta)p(\mathbf{x}|\eta) = h_c(\eta)exp(\eta^T \lambda_1 - a(\eta)\lambda_2 - a_c(\lambda))h(\mathbf{x})exp(\eta^T \mathbf{t}(\mathbf{x}) - a(\eta)) \tag{5}$$

ここまでで $a_c(\lambda)$ を考えると、引数は、λ でも、$\hat{\lambda}$ でも、正規化する定数になるので、$a(\eta)$ と同様に、以下の、同じ式で決まる。

$$a_c(\lambda) = a_c(\lambda_1, \lambda_2) = ln \int h_c(\eta)exp(\eta^T \lambda_1 - a(\eta)\lambda_2)d\eta \tag{6}$$

上記をもとに、(3.48) を考える。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_*|\mathbf{X}) &= \int h(\mathbf{x}_*)exp(\eta^T \mathbf{t}(\mathbf{x}_*) - a(\eta))h_c(\eta)exp(\eta^T \lambda_1 - a(\eta)\lambda_2 - a_c(\lambda))d\eta \\ &= h(\mathbf{x}_*)exp(-a_c(\lambda)) \int exp(\eta^T \mathbf{t}(\mathbf{x}_*) - a(\eta))h_c(\eta)exp(\eta^T \lambda_1 - a(\eta)\lambda_2)d\eta \\ &= h(\mathbf{x}_*)exp(-a_c(\lambda_1, \lambda_2)) \int h_c(\eta)exp(\eta^T(\mathbf{t}(\mathbf{x}_*) + \lambda_1) - a(\eta)(\lambda_2 + 1))d\eta = h(\mathbf{x}_*)\frac{exp(a_c(\mathbf{t}(\mathbf{x}_*) + \lambda_1, \lambda_2 + 1))}{exp(a_c(\lambda_1, \lambda_2))} \end{aligned} \tag{7}$$