

(13.89)-(13.91) について、意外とやぐらしかったので、まとめておく。

やり方は異なるが、詳解 確率ロボティクス (上田隆一 著)^{*1}の2章や付録Bがよくまとめられている。

基本的な方針としては本に記載されているように、(2.115),(2.116),(C.5),(C.7) を使う。求める順番は(13.91),(13.90),(13.89) としたほうが良いと感じる。

(13.85) を改めて見てみると、(13.55) を考慮し、マルコフ過程であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
c_n p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) &= c_n \hat{\alpha}(\mathbf{z}_n) = p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n) \int \hat{\alpha}(\mathbf{z}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1} \\
&= p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \int p(\mathbf{z}_{n-1} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1} \\
&= p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \int p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1} \\
&= p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = p(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})
\end{aligned} \tag{1}$$

これを踏まえると、

$$c_n = \frac{p(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})}{p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})} = p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \tag{2}$$

になる。また、積分部分は、(1) を参考に (13.86) を考えると、

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) &= \int p(\mathbf{z}_{n-1} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1} \\
&= \int p(\mathbf{z}_{n-1} | \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1} = \int \hat{\alpha}(\mathbf{z}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1}
\end{aligned} \tag{3}$$

まず、(13.87) を考える。(3) にて、すべて、 \mathbf{x}_{n-1} が条件づけられているので、**ひとまず**、ないものとして考える。すると、(13.84) を考えて、 $\hat{\alpha}(\mathbf{z}_{n-1}) = p(\mathbf{z}_{n-1} | \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1} | \mu_{n-1}, \mathbf{V}_{n-1})$ が (2.113) 相当になり、(13.75) の $p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_n | \mathbf{A}\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{\Gamma})$ が (2.114) 相当、(2.115) の左辺が $p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_{n-1})$ 相当と考えられる。

その結果、記号を比較して、積分の部分は

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) &= \int p(\mathbf{z}_{n-1} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) d\mathbf{z}_{n-1} \\
&= \mathcal{N}(\mathbf{z}_n | \mathbf{A}\mu_{n-1}, \mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{\Gamma}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_n | \mathbf{A}\mu_{n-1}, \mathbf{P}_{n-1}^{-1})
\end{aligned} \tag{4}$$

となり、(13.87) が求まる。 (\mathbf{P}_{n-1}) は (13.88) による。)

さて、(13.91) は

$$c_n = p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \int p(\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) d\mathbf{z}_n \tag{5}$$

そのため、今度は (4) が (2.113) 相当になり、(13.76) より $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = p(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_n) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_n | \mathbf{C}\mathbf{z}_n, \mathbf{\Sigma})$ が、(2.114) 相当になり、 $c_n = p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ が (2.115) の左辺となる。記号を比較して、

$$c_n = \mathcal{N}(\mathbf{x}_n | \mathbf{C}\mathbf{A}\mu_{n-1}, \mathbf{C}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{\Sigma}) \tag{6}$$

となり、(13.91) が成立している。

^{*1} この本などによって、2020 年度日本機械学会教育賞を受賞されている。

(1) より、 $\hat{\alpha}(\mathbf{z}_n) = p(\mathbf{z}_n|\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mu_n, \mathbf{V}_n)$ は、 $c_n = p(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ と同じ条件で、(2.116) の記号と比較すると、

$$\hat{\alpha}(\mathbf{z}_n) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mu_n, \mathbf{V}_n) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_n|(\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_n + \mathbf{P}_{n-1}^{-1} \mathbf{A} \mu_{n-1}), (\mathbf{P}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1}) \quad (7)$$

係数を比較することで、

$$\mathbf{V}_n = (\mathbf{P}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \quad (8)$$

右辺に (C.7) の左辺を適用し、(13.92) を考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n &= \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}^T (\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{I} \mathbf{P}_{n-1} - (\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}^T (\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}^T)^{-1}) \mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} \\ &= \mathbf{I} \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{K}_n \mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}) \mathbf{P}_{n-1} \end{aligned} \quad (9)$$

となり、(13.90) が求まる。

同様に

$$\begin{aligned} \mu_n &= (\mathbf{P}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_n + \mathbf{P}_{n-1}^{-1} \mathbf{A} \mu_{n-1}) \\ &= (\mathbf{P}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_n + \mathbf{V}_n \mathbf{P}_{n-1}^{-1} \mathbf{A} \mu_{n-1} \\ &= (\mathbf{P}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_n + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}) \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1}^{-1} \mathbf{A} \mu_{n-1} \\ &= (\mathbf{P}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_n + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}) \mathbf{A} \mu_{n-1} \end{aligned} \quad (10)$$

これに (C.5) の左辺を適用して、

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}^T + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{x}_n + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}) \mathbf{A} \mu_{n-1} \\ &= \mathbf{K}_n \mathbf{x}_n + (\mathbf{I} + \mathbf{A} \mu_{n-1} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}) \mathbf{A} \mu_{n-1} = \mathbf{A} \mu_{n-1} + \mathbf{K}_n (\mathbf{x}_n - \mathbf{C} \mathbf{A} \mu_{n-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

(13.89) が成立することが確認できる。