本の P.173 にある、IBP について考える。

論文の (15)(16) を見ると、CRP に関してはわかりやすい。

(16) を考慮して、

$$P(c)=\prod_{n}^{N}P(c_n|c_1,\cdots,c_{n-1})=\frac{1}{(N-1-\alpha)!}\alpha^{K_+}\prod_{k}^{K_+}(m_k-1)! \tag{1}$$

となる。ここで、otherwise の方は 0 でないクラスの数なので、K_+ 回選択される。それ以外のときは、(16) で m_k がそれぞれカウントアップされるので、階乗の項が出てくる。(しかし、追加される前の個数をかけるので、-1 がつく。)

逆に (15) を考慮すると、

$$P(c)=\alpha^{K_+}(\prod_{k}^{K_+}(m_k-1)!)\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(N+\alpha)}=\alpha^{K_+}(\prod_{k}^{K_+}(m_k-1)!)\frac{\Gamma(\alpha)}{(N-1+\alpha)!\Gamma(\alpha)}=\alpha^{K_+}(\prod_{k}^{K_+}(m_k-1)!)\frac{1}{(N-1+\alpha)!} \tag{2}$$

よって、(16) の手続きで、(15) の確率分布が出てくる。

なお、c_i はすでに選ばれている k 個の料理と新しい料理 k+1 のいずれかになる。確率として、$c_1,\cdots,c_{i-1}$ に条件付けられると、$\sum_k P(c_i|c_1,\cdots,c_{i-1})=1$ となる。i 番目のサンプリング前で、$\sum m_k=i-1$ になることを考慮すると、

$$P(c_i|c_1,\cdots,c_{i-1})=\sum_k\frac{m_k}{i-1+\alpha}+\frac{\alpha}{i-1+\alpha}=\frac{i-1}{i-1+\alpha}+\frac{\alpha}{i-1+\alpha}=1 \tag{3}$$

(6.51) に関して考える。

$$\begin{aligned}
p([M])&=\frac{(\alpha\beta)^{H_+}}{\prod_{i\geq 1}H_i!}exp(-(\alpha\sum_{j=1}^{N}\frac{\beta}{j+\beta-1}))\quad\prod_{h=1}^{H_+}\frac{\Gamma(N_h)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)}\\
&=\frac{(\alpha\beta)^{H_+}}{\prod_{i\geq 1}H_i!}exp(-(\alpha\sum_{j=1}^{N}\frac{\beta}{j+\beta-1}))\quad\prod_{h=1}^{H_+}\frac{(N_h-1)!(N-N_h+\beta-1)!\Gamma(\beta)}{(N+\beta-1)!\Gamma(\beta)}\\
&=\frac{(\alpha\beta)^{H_+}}{\prod_{i\geq 1}H_i!}exp(-(\alpha\sum_{j=1}^{N}\frac{\beta}{j+\beta-1}))\quad\prod_{h=1}^{H_+}\frac{(N_h-1)!(N-N_h+\beta-1)!}{(N+\beta-1)!}
\end{aligned} \tag{4}$$

なお、

$$H_+=\sum_{i\geq 1}H_i \tag{5}$$

IBP の手続きは、P.173 の 1,2 のように行う。ただ、n=1 のときに $\frac{\alpha\beta}{n+\beta-1}=\alpha$ なので、記載方法を変えると、

$$\begin{aligned}
&p(z_{nh}=1)=\frac{N_{nh}}{n+\beta-1}(\text{すでに選択されている料理 }h\text{ が選ばれる確率。}\\
&n\text{ はこのときまでに選んだ人の数}, N_{nh}\text{はその時までに }h\text{ を選んでいる人の数。})\\
&p_n(x_n|\frac{\alpha\beta}{n+\beta-1})=Poi(x_n|\frac{\alpha\beta}{n+\beta-1})=\frac{\frac{\alpha\beta}{n+\beta-1}^{x_n}}{x_n!}e^{-\frac{\alpha\beta}{n+\beta-1}}\\
&(n\text{ 番目の人がこれまで取られていない新しいとる料理の数})\text{。}
\end{aligned} \tag{6}$$

このとき、

$$H_+ = \sum_{n}^{N} x_n \tag{7}$$

$$p_n(z_{nh} = 0) = \frac{n + \beta - 1 - N_{nh}}{n + \beta - 1} \tag{8}$$

ある h に関して、j 番目で初めて、選択されたとする。このとき、h に関して、

$$p(h) = \prod_{z_{nh}=1, n>j}^{N} N_{nh} \prod_{z_{nh}\neq 1, n>j} (n + \beta - 1 - N_{nh}) \prod_{n=j+1}^{N} \frac{1}{n + \beta - 1} \tag{9}$$