(13.17) に関して、本のとおりに考える。求めたい式は (13.12) の

$$Q(\theta,\theta^{old}) = \sum_{\mathbf{Z}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\theta^{old}) ln\, p(\mathbf{X},\mathbf{Z}|\theta) = \sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N|\mathbf{X},\theta^{old}) ln\, p(\mathbf{X},\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N|\theta) \tag{1}$$

(13.6) 相当の (13.10) に (13.7),(13.8),(13.9) を代入する。ただし、(13.10) の m は n に変えてある。

$$p(\mathbf{X},\mathbf{Z}|\theta) = p(\mathbf{z}_1|\pi)[\prod_{n=2}^{N} p(\mathbf{z}_n|\mathbf{z}_{n-1},A)] \prod_{m=1}^{N} p(\mathbf{x}_m|\mathbf{z}_m,\phi) = \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{z_{1k}} [\prod_{n=2}^{N}\prod_{j=1}^{K}\prod_{k=1}^{K} A_{jk}^{z_{n-1}z_n}] \prod_{n=1}^{N}\prod_{k=1}^{K} p(\mathbf{x}_n|\phi_k)^{z_{nk}} \tag{2}$$

上記 2 式より、

$$Q(\theta,\theta^{old}) = \sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\theta^{old})(\sum_{k=1}^{K} z_{1k}\, ln\,\pi_k + \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} z_{n-1}z_n\, ln\, A_{jk} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} z_{nk}\, ln\, p(\mathbf{x}_n|\phi_k)) \tag{3}$$

カッコの 1 項目を考える。$\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_2$ について、周辺化する。z_{1k} は $\mathbf{z}_1$ に依存するので、$\mathbf{z}_1$ は周辺化できない。

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\theta^{old}) \sum_{k=1}^{K} z_{1k}\, ln\,\pi_k &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_N|\mathbf{X},\theta^{old}) z_{1k}\, ln\,\pi_k \\ &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{z}_1} p(\mathbf{z}_1|\mathbf{X},\theta^{old}) z_{1k}\, ln\,\pi_k = \sum_{k=1}^{K}(\sum_{\mathbf{z}_1}\gamma(\mathbf{z}_1)z_{1k})\, ln\,\pi_k = \sum_{k=1}^{K}\gamma(z_{1k})\, ln\,\pi_k\end{aligned} \tag{4}$$

ここでは、(13.13),(13.15) も利用している。

同様に 2 項目を考えると、n に依存して、$\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n$ が周辺化できない。

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\theta^{old}) \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} z_{n-1,j}z_{n,k}\, ln\, A_{jk} = \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N|\mathbf{X},\theta^{old}) z_{n-1}z_n\, ln\, A_{jk} \\ &= \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n} p(\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n|\mathbf{X},\theta^{old}) z_{n-1}z_n\, ln\, A_{jk} = \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}(\sum_{\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n}\xi(\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n)z_{n-1}z_n)\, ln\, A_{jk} \\ &= \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\xi(\mathbf{z}_{n-1,j},\mathbf{z}_{n,k})\, ln\, A_{jk}\end{aligned} \tag{5}$$

ここでは、(13.14),(13.16) も利用している。

3 項目は

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\theta^{old}) \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} z_{mk}\, ln\, p(\mathbf{x}_m|\phi_k) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N} p(\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_N|\mathbf{X},\theta^{old}) z_{nk}\, ln\, p(\mathbf{x}_n|\phi_k) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{z}_n} p(\mathbf{z}_n|\mathbf{X},\theta^{old}) z_{nk}\, ln\, p(\mathbf{x}_n|\phi_k) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(\sum_{\mathbf{z}_n}\gamma(\mathbf{z}_n)z_{nk})\, ln\, p(\mathbf{x}_n|\phi_k) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\gamma(\mathbf{z}_{nk})\, ln\, p(\mathbf{x}_n|\phi_k)\end{aligned} \tag{6}$$

上記より、

$$Q(\theta,\theta^{old}) = \sum_{k=1}^{K}\gamma(z_{1k})\, ln\,\pi_k + \sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\xi(z_{n-1,j},z_{n,k})\, ln\, A_{jk} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\gamma(z_{nk})\, ln\, p(\mathbf{x}_n|\phi_k) \tag{7}$$

となる。