A.3 について、見直す。

何はともあれ、以下の Z を計算する。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(yf)\mathcal{N}(f|\mu,\sigma^2)df \tag{1}$$

(A.38) のように

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathcal{N}(z|0,1)dz \tag{2}$$

$y > 0$ の場合を考え、更に $u = y^{-1}z$ と置換する。$\frac{du}{dz} = y^{-1}$ なので、$ydu = dz$ となる。

$$\begin{aligned} Z(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(yf)\mathcal{N}(f|\mu,\sigma^2)df = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{yf} \mathcal{N}(z|0,1)dz\mathcal{N}(f|\mu,\sigma^2)df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{f} \mathcal{N}(yu|0,1)ydu\mathcal{N}(f|\mu,\sigma^2)df = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{f} \mathcal{N}(yu|0,1)y\mathcal{N}(f|\mu,\sigma^2)dudf \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{f} \frac{y}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{(yu)^2}{2})\frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp(-\frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2})dudf = \frac{y}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{f} exp(-\frac{(yu)^2}{2}-\frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2})dudf \end{aligned} \tag{3}$$

y¿0 としたが、y=0 のときは Z について、そもそも $Z = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\mathcal{N}(f|\mu,\sigma^2)df = \frac{1}{2}$ となり、y¡0 のときは、u に置換したときの積分範囲が、$-\infty$ から、f ではなく、∞ から f となる。

さらに、$s = u-(f-\mu), t = f-\mu$ に置換する。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & y^{-2}+\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= \frac{1}{\sigma^2 y^{-2}}\begin{pmatrix} y^{-2}+\sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}, (t,s)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2 y^{-2}}(t^2(\sigma^2+y^{-2})+2st\sigma^2+s^2\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2 y^{-2}}(y^{-2}t^2+\sigma^2(s+t)^2), \\ |\Sigma| &= y^{-2}\sigma^2, f = t+\mu, u = s+t, \begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \left|\frac{\partial(u,f)}{\partial(t,s)}\right| = \left|det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

u が $(-\infty, f]$ のとき、s が $(-\infty,\mu]$, f が $(-\infty,\infty)$ のとき、t が $(-\infty,\infty)$ なので、

$$\begin{aligned} Z(y) &= \frac{y}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{f} exp(-\frac{(yu)^2}{2}-\frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2})dudf = \frac{y}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{((s+t))^2}{2y^{-2}}-\frac{t^2}{2\sigma^2})\left|\frac{\partial(u,f)}{\partial(t,s)}\right|dtds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}\sqrt{|\Sigma|}}\int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(\sigma^2(s+t))^2+y^{-2}t^2}{2y^{-2}\sigma^2})dtds = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}\sqrt{|\Sigma|}}\int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(t,s)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}}{2})dtds \\ &= \int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}((t,s)^T|0,\Sigma)dtds \end{aligned} \tag{6}$$

内側の積分は本にあるように (A.12) のように t の積分消去に対応するので、$\mu_1 = 0, \Sigma_{22} = y^{-2}+\sigma^2$ に対応するので、

$$Z(y) = \int_{-\infty}^{\mu} \mathcal{N}(s|0,y^{-2}+\sigma^2)ds = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{y^{-2}+\sigma^2}}) = \Phi(\frac{y\mu}{\sqrt{1+\sigma^2 y^2}}) \tag{7}$$

$y < 0$ のときは上記にあるように、積分範囲が変わる。

$$Z(y) = \frac{-|y|}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{f} exp(-\frac{(-|y|u)^2}{2} - \frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2})dudf = \frac{|y|}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{f}^{\infty} exp(-\frac{(|y|u)^2}{2} - \frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2})dudf$$
$$= \int_{\mu}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{N}((t,s)^T|0,\Sigma)dtds = \int_{\mu}^{\infty}\mathcal{N}(s|0,y^{-2}+\sigma^2)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{N}(s|0,|y|^{-2}+\sigma^2)ds - \int_{-\infty}^{\mu}\mathcal{N}(s|0,|y|^{-2}+\sigma^2)ds$$
$$= 1 - \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{|y|^{-2}+\sigma^2}}) = \Phi(\frac{-\mu}{\sqrt{|y|^{-2}+\sigma^2}}) = \Phi(\frac{-\mu|y|}{\sqrt{1+\sigma^2y^2}}) = \Phi(\frac{y\mu}{\sqrt{1+\sigma^2y^2}}) \tag{8}$$

$y = 0$ のときは、変数変換する必要なく、比較的容易に積分でき、

$$Z(y) = 0.5 = \Phi(0) \tag{9}$$

となり、結果、y に関わらず、

$$Z(y) = \Phi(\frac{y\mu}{\sqrt{1+\sigma^2y^2}}) \tag{10}$$