(1) f,g が全射なら $g \circ f : A \to C$ も全射である。

g が全射であるため、すべての $c \in C$ に対して、$g(b) = c, b \in B$ となる B の元がある。

また、f が全射であるため、すべての $b \in B$ に対して、$f(a) = b$ となる、a が存在する。

そのため、すべての $c \in C$ に対して、ある、$b' \in B$ が存在して、$c = g(b')$ となり、すべての b に対して、a が存在するので、ある b' に対して、$f(a') = b'$ となる a' が存在する。

つまり、すべての c に対して、$g \circ f(a') = g(f(a')) = g(b') = c$ となる、a' が存在する。

よって、$g \circ f$ が全射となる。

(2) f,g が単射なら、$g \circ f$ が単射である。

対偶を示す。

すべての、$a, a' \in A, a \neq a'$ に対して、$g \circ f(a) \neq g \circ f(a')$ となることを示す。

f,g は単射であるので、単射の定義の対偶からすべての $a, a' \in A, a \neq a'$ であれば、$f(a) \neq f(a')$ となる。同様に、すべての、$b, b' \in B, b \neq b'$ であれば、$g(b) \neq f(b')$ となる。

すべての a, a' に対して、$a \neq a'$ であれば、$b \equiv f(a) \neq f(a') \equiv b'$ となる。

その異なる b, b' に対して、$g \circ f(a) = g(b) \neq g(b') = g \circ f(a')$ となる。

これで、対偶が示された。

よって、f,g が単射なら、$g \circ f$ が単射である。

(3) $g \circ f$ が全射なら、g も全射である。

背理法で示す。

$g \circ f$ が全射だが、g が全射でないとする。

g が全射でないとすると、ある $c \in C$ に対して、すべての $b \in B$ に対して、

$$g(b) \neq c \tag{1}$$

一方、$g \circ f$ が全射であることから、上記の c に対しても、ある $a \in A$ が存在し、$g \circ f(a) = c$ が存在する。

f は写像であるため、ある $b \in B$ が存在し、$f(a) = b$ となる。

合成関数の定義も考慮すると、

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c \tag{2}$$

(1)、(2) は矛盾している。

よって、g は全射になる。

なお、f は全射である必要はない。例えば、A={1, 2}, B={1, 2}, C = {1} として、 f(1) = f(2) = 1, g(1) = g(2) = 1 としても、$g \circ f$ は全射となる。

(4) $g \circ f$ が単射なら、f も単射である。

背理法で示す。

$g \circ f$ が単射だが、f は単射でないとする。

f は単射でないので、$f(a) \equiv f(a') = b$ となる、ある $a, a' \in A, a \neq a'$ が存在する。その、a, a' に対して、合成関数 $g \circ f$ を考慮すると、その定義より、

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) \equiv c \tag{3}$$

$$g \circ f(a') = g(f(a')) = g(b) = c \tag{4}$$

つまり、

$$g \circ f(a) = g \circ f(a') \tag{5}$$

一方、$g \circ f$ が単射であるので、定義の対偶を考慮して、すべての $a, a' \in A, a \neq a'$ に対して、

$$g \circ f(a) \neq g \circ f(a') \tag{6}$$

となる。

(5)、(6) は矛盾している。

よって、f は単射になる。

なお、g は単射である必要はない。例えば、A={1}, B={1, 2}, C = {1, 2} として、 f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1 としても、$g \circ f$ は単射となる。