問 5 のカッコに書かれているベクトル積について考える。

そもそもベクトル積は 3 次元でしか定義されていないので、

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える。ただしこの表記だと、行と列のインデックスが入れ替わることに注意。

このとき、

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。

問 5 の結果から、f のインデックスが入れ替わっていることに注意すると、

$$\Delta_{i,j} = f_{ji} \tag{3}$$

例えば、$\Delta_{i,1}$ を考えると、

$$\Delta_{1,1} = f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32},\ \Delta_{2,1} = f_{23}f_{31} - f_{33}f_{21},\ \Delta_{3,1} = f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} \tag{4}$$

となるが、(2),(3),(4) より、$\mathbf{f}_1$ を考えると、

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} \\ \Delta_{2,1} \\ \Delta_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} \\ f_{23}f_{31} - f_{33}f_{21} \\ f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

また、P73 のベクトル積の定義を考えると、

$$\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} \\ f_{23}f_{31} - f_{33}f_{21} \\ f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

よって、

$$\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \tag{7}$$

同様に、

$$\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3,\ \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 \tag{8}$$

も示せる。