P204 の (9) の証明はその下に記載されている。これが定理 6 の証明と似たものとなっている。

P204 から 205 の内容を確認してみる。

これらは P108 の証明と同様に対応できる。

まず、(10) に関しては、P.204 の最後のパラグラフから記載があるが、P108 の (10) の証明と同様になっていることが確認できる。

P.205 の $(W_1 + W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp}$ を考える。

$W_1 + W_2 \supset W_1$ なので、$(W_1 + W_2)^{\perp} \subset {W_1}^{\perp}$ となる。これは任意の $a \in (W_1 + W2)^{\perp} \subset V^*$ を考えると、すべての $b \in W_1$ に対して、$< a, b >= 0$ になる。よって、$a \in {W_1}^{\perp}$ となり、上記が成り立つ。

同様に $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset {W_2}^{\perp}$ となり、$(W_1 + W_2)^{\perp} \subset {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp}$

逆に、任意の $y \in {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp} \in V^*$ とすれば、$x = x_1 + x_2 \in W_1 + W_2 \in V, x_1 \in W_1 \subset V, x_2 \in W_2 \subset V$ に対し、$< x, y >=< x_1, y > + < x_2, y >= 0$。よって、$y \in (W_1 + W_2)^{\perp}$。すなわち、$(W_1 + W_2)^{\perp} \supset {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp}$

故に $(W_1 + W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp}$

P.205 の $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$ を考える。

これは空間が異なるので、P.108 と同様の検討はできない。

$W_1 \cap W_2 \subset W_1$ なので、$(W_1 \cap W_2)^{\perp} \supset {W_1}^{\perp}$ となる。これは任意の $a \in {W_1}^{\perp} \subset V^*$ を考えると、すべての $b \in W_1 \cap W_2$ に対して、$< a, b >= 0$ になる。よって、$a \in (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ となり、上記が成り立つ。

同様に $(W_1 \cap W_2)^{\perp} \supset {W_2}^{\perp}$ となり、$(W_1 \cap W_2)^{\perp} \supset {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$

逆に、任意の $y \in W_1 \cap W_2 \in V$ とすれば、$x = x_1 + x_2 \in {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp} \in V^*, x_1 \in W_1^{\perp} \in V^*, x_2 \in W_2^{\perp} \in V^*$ に対し、$< x, y >=< x_1, y > + < x_2, y >= 0$。($W_1 \cap W_2 \subset W_1, W_1 \cap W_2 \subset W_2$ に注意する。) よって、$y \in ({W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp})^{\perp}$。すなわち、$W_1 \cap W_2 \subset ({W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp})^{\perp}$。(8) の付近の議論と同様に $W_1 \cap W_2, ({W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp})^{\perp}$ の直交空間を取れば、$(W_1 \cap W_2)^{\perp} \subset ({W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp})^{\perp\perp}$ となる。(10) を考慮すると、$(W_1 \cap W_2)^{\perp} \subset {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$ となる。

故に、$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$ となる。