式 (5.15) を見直してみる。

この式は (5.14) を出発として、(A.24) を利用すると求まる。

まず、(5.14) が

$$\begin{aligned} p(y_*|x_*, Y, X) &\approx \int p(y_*|x_*, W) q(W) dW \\ \approx \int \mathcal{N}(y_*|f(x_*; W_{MAP}) + g^T(W - W_{MAP}), {\sigma_y}^2) & \mathcal{N}(W|W_{MAP}, \{\Lambda(W_{MAP})\}^{-1}) dW \\ &= \mathcal{N}(y_*|f(x_*; W_{MAP}), \sigma^2(x_*)) \end{aligned} \tag{1}$$

なにはともあれ、最初の近似を考慮すると、W と x_* が独立なので (y_* に対して、head-to-head で y_* が未観測。)、$q(W) \approx p(W) = p(W|x_*, Y, X)$ となり、$p(y_*|W, x_*, X, Y)$ と $p(W|x_*, X, Y)$ から、$p(y_*|x_*, Y, X)$ を求めようとしている構図となる。すると、(A.14)(A.15) を通して、(A.24) が利用でき、以下のような対応になる。

$$\begin{aligned} x &\sim W \\ \mu &\sim W_{MAP} \\ \Sigma_x &\sim \{\Lambda(W_{MAP})\}^{-1} \\ y &\sim y_* \\ W &\sim g^T \\ b &\sim f(x_*; W_{MAP}) - g^T W_{MAP} \\ \Sigma_y &\sim {\sigma_y}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

つまり、(A.24) より、

$$\begin{aligned} p(y_*|x_*, Y, X) &\approx \mathcal{N}(y_*|g^T W_{MAP} + f(x_*; W_{MAP}) - g^T W_{MAP}, {\sigma_y}^2 + g^T\{\Lambda(W_{MAP})\}^{-1} g) \\ &= \mathcal{N}(y_*|f(x_*; W_{MAP}), {\sigma_y}^2 + g^T\{\Lambda(W_{MAP})\}^{-1} g) \end{aligned} \tag{3}$$

となり、(5.14) の最後の等号のところが求まる。すると、比較より、

$$\sigma^2(x_*) = {\sigma_y}^2 + g^T\{\Lambda(W_{MAP})\}^{-1} g \tag{4}$$

となり、(5.15) が求まる。