定理 2.10.2 に関して、証明を詳しく確認する。

定理 2.10.2(準同型定理 (部分群の対応))
1, N を群 G の正規部分群、
2, $\pi : G \to G/N$ を自然な準同型とする。
3, G/N の部分群の集合を $\mathbb{X}$,
4, G の N を含む部分群の集合を $\mathbb{Y}$ とするとき、
5, 写像 $\phi : \mathbb{X} \ni H \mapsto \pi^{-1}(H) \in \mathbb{Y}$,
6, $\psi : \mathbb{Y} \ni K \mapsto \pi(K) \in \mathbb{X}$
7, は互いに逆写像である。
8, したがって、集合 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ は 1 対 1 に対応する。

1 に関して、N が正規部分群だとすると、2.8 にある性質たちが利用できる。

定理 2.10.1 にもあるが、上記の 2 について、定義 2.6.9(1) を踏まえると、$G \to G/N$ 自然な写像になる。自然な写像なので、$\pi$ が存在することは、明らか。命題 2.8.13 より、その写像は全射準同型で、$Ker(\pi) = N$ となる。

$\pi$ は存在して、H が G/N の部分群なので、その逆像は必ず存在する。しかし、この写像 $\phi$(上記、5 にある。) が $\mathbb{Y}$ への写像になっているか (well-defined になるか) は確認する必要がある。これは、本の証明、1-4 行目にある。1 行目では $\pi^{-1}(H)$ が N を含むかどうか、2-4 行目では $\pi^{-1}(H)$ が G の部分群になっているかを見ている。

$H \in \mathbb{X}$ なら、上記、3 にあるように H は G/N の部分群なので、命題 2.3.2 より、$1_{G/N} \in H$ となる。よって、$\pi^{-1}(1_{G/N}) \subset \pi^{-1}(H)$ となる。($\pi^{-1}(1_{G/N})$ は逆像で、複数の元を持つので、$\in$ ではなく、$\subset$ になる。) 上記の 2 に関する記述と、定義 2.5.1(3) より、$\pi(h) = 1_{G/N}(h \in Ker(\pi) = N)$ であり、$\pi^{-1}(1_{G/N}) = Ker(\pi) = N$ となる。つまり、$N = \pi^{-1}(1_{G/N}) \subset \pi^{-1}(H)$ となり、$\mathbb{Y}$ の条件になる、$\pi^{-1}(H)$ が N を含むことを確認できた。あとは、$\pi^{-1}(H)$ が G の部分群であることが確認できれば良い。

部分群であることは命題 2.3.2(1)-(3) を示せば良い。(1) について、$N \subset \pi^{-1}(H)$ であり、N は (正規) 部分群なので命題 2.3.2(1) より、$1_G \in N$ になる。よって、$1_G \in N \subset \pi^{-1}(H)$ になる。(2) について、$x, y \in \pi^{-1}(H) \subset G$ なら、$\pi(x), \pi(y) \in H$ になり、H は群なので、$\pi(x)\pi(y) \in H$ であり、$\pi$ は準同型なので、$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$ となり、$\pi(xy) \in H$ となる。よって、両側の $\pi^{-1}$ を考え、$xy \in \pi^{-1}(H)$ になり、(2) も満たす。(3) について、準同型、部分群の性質を考え、$x \in \pi^{-1}(H) \subset G$ について、G は群なので $x^{-1}$ は存在し、$\pi(x)\pi(x^{-1}) = \pi(xx^{-1}) = \pi(1_G) = 1_{G/N} \in H$ になり、H は部分群、$\pi(x) \in H$ なので、$\pi(x^{-1}) \in H$。よって、$x^{-1} \in \pi^{-1}(H)$ となり、(3) も満たす。(この辺は命題 2.5.3(2) を使うと少し簡単に示せそう。) これにより、$\pi^{-1}(H)$ が G の部分群であることも示され、$\phi$ が $\mathbb{Y}$ への写像になっていることが確認できた。

次に上記 6 にある、写像 $\psi$ が $\mathbb{X}$ への写像になっているか (well-defined になるか) は確認する必要がある。これは、本の証明、4-9 行目にある。

$K \subset G$ が N を含む部分群である時、$\pi(K)$ が $G/N$ の部分群であることを確認すればよい。N が G の正規部分群なので定義 2.8.1 より、任意の $g \in G$ に対して、$gNg^{-1} \in N$ なので、$g \in K \subset G$ に対しても、当然成り立つ。よって、同様に定義 2.8.1 より、$N \triangleleft K$ である。K/N は K の元 g により gN という形をした剰余類の集合なので、G/N の部分集合とみなすことができ、また、$K/N = \pi(K)$(両辺とも、任意の $g \in K \subset G$ に関して、補題 2.8.10 の下にあるように N が正規部分群だと、gN という形をした剰余類への写像を考えており、おなじになる。) である。よって、$\pi(K)$ は G/N の部分集合になっている。定理 2.8.11 より、K/N は群

になっているので、定義 2.3.1 より、G/N の部分群になっている。よって、$\pi(K) \in \mathbb{X}$ となり、$\psi$ は $\mathbb{X}$ への写像になり、well-defined になる。

定義 1.1.4(3) に従い、逆写像であることを確認する。本の証明 10-15 行目では $\phi \circ \psi = id_{\mathbb{Y}}$ つまり、任意の $K \in \mathbb{Y}$ に対して、$\phi \circ \psi(K) = K$ であることを確認している。なお、13-15 行目にあるように K は G の部分集合 (部分群) ではあるが、K を $\mathbb{Y}$ の元とみなしている。(ここについては、証明の前半も同様に考えているところがあるように思う。)

本の 10 行目にあるようにある K に対し、$H = \pi(K)$ とおくと、$K \subset \pi^{-1}(H)$ は明らかである。($\pi$ は写像なので、$k \in K$ に対して、対応する $\pi(k) = j \in H$ は必ず存在する。ただし、ここまででは、$k' \notin K, \pi(k') = j \in H$ が存在しないことを言えていないので、$K \subset \pi^{-1}(H)$ となる。)$g \in \pi^{-1}(H)$ とすると、この定義より、$\pi(g) \in H = \pi(K)$ になる。よって、ある $h \in K$ があり、$\pi(g) = \pi(h)$ となる。写像 $\pi$ と同値類の定義を考えると G/N で同じ元になるので、$gN = hN$ となる。つまりある $n_1 \in N$ に対して、$gn_1 = hn_2$ となる $n_2 \in N$ が存在する。N は正規部分群なので $g = hn$ となる $n \in N(n = n_2 {n_1}^{-1})$ が存在する。$N \subset K$ であり、K は部分群なので、$g \in K$ になる。これにより、任意の $g \in \pi^{-1}(H)$ に対して、$g \in K$ が確認できたので、$\pi^{-1}(H) \subset K$ になる。よって、$\pi^{-1}(H) = K$ が確認でき、任意の K に対して、$\phi \circ \psi(K) = \phi(\pi(K)) = \phi(H) = \pi^{-1}(H) = K$ となる。

次に、本の証明の 16-19 行目にあるように、$\psi \circ \phi = id_{\mathbb{X}}$ つまり、任意の $H \in \mathbb{X}$ に対して、$\psi \circ \phi(H) = H$ であることを確認して、上記と合わせて互いに逆写像であることが言えるようになる。

$H \in \mathbb{X}$ に対して、$\pi(\pi^{-1}(H)) \subset H$ となる。(ある $i \in H \subset G/N$ に対して、ある $s \in G$ があり、$\pi(s) = i$ だとすると、$i \in \pi(\pi^{-1}(\{i\}))$ になるが、前記のような s が存在しないと、$i \notin \pi(\pi^{-1}(\{i\}))$ になり、$\pi(\pi^{-1}(H)) \subset H$ となる。) 定義 2.8.13 より、$\pi$ は全射であるので、すべての $h \in H$ に対して、$g \in G$ があり、$\pi(g) = h \in H$ である。これは $g \in \pi^{-1}(H)$ であることを意味する。よって、任意の $h = \pi(g) \in \pi(\pi^{-1}(H))$ である。したがって、$H \subset \pi(\pi^{-1}(H))$ となり、結果として、$H = \pi(\pi^{-1}(H))$ となる。これにより、$\psi \circ \phi(H) = \psi(\pi^{-1}(H)) = \pi(\pi^{-1}(H)) = H$ となる。

これにより、証明の 10-19 行目で、定義 1.1.4(3) が示されたので、逆写像が存在することがわかった。

本の P.4 にあるように、上記、7,8 にあるような逆写像を持つこと、1 対 1 に対応することは同値になる。そのため、1 対 1 対応することも言える。