(2)式をxの場所をx_iとわかるようにして、以下のように考える。

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x_2 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x_n - a_{nn} \end{vmatrix}$$

ただし、本当は$x_1 = \ldots = x_n$

このとき、(3)の上の式は

$f_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_r x^{n-r} + \ldots + a_n$であるが、$f_A(x1, \ldots, xn)$で書き換えて、

$f_A(x_1, \ldots, x_nn) = x_1 \ldots x_n + (a_{x_2, \ldots, x_n} x_2 \ldots x_n + \ldots$

$+ a_{x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n} x_1 \ldots x_{p-1} x_{p+1} \ldots x_n + \ldots + a_{x_1, \ldots, x_{n-1}} x_1 \ldots x_{n-1}$

$+ \ldots + \Sigma_{j_1 < \ldots < j_r} a_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}} x_{j_1} \ldots x_{j_r} + a_{\Phi}$

ただし、$a_{\Phi} = a_n$になる。(xが選ばれないので、インデックスが無い。)

さて、$a_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_i}}$を求めることを考える。m行とn行をまた、m列とn列を入れ替えることを繰り返すと偶数回の置換なので、行列式は変わらない。よって、

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x_2 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x_n - a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
x_{j_1} - a_{j_1 j_1} & \cdots & -a_{j_1 j_r} & -a_{j_1 i_1} & \cdots & -a_{j_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{j_r j_1} & \cdots & x_{j_r} - a_{j_r j_r} & -a_{j_r i_1} & \cdots & -a_{j_r i_k} \\
\hline
-a_{i_1 j_1} & \cdots & -a_{i_1 j_r} & x_{i_1} - a_{i_1 i_1} & \cdots & -a_{i_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i_k j_1} & \cdots & -a_{i_k j_r} & -a_{i_k i_1} & \cdots & x_{i_k} - a_{i_k i_k}
\end{array}\right|
$$

ただし、$r+k=n$
この式から、xたちを変数として、$x_{j_1}\ldots x_{j_r}$の係数$a_{\{x_{j_1},\ldots,x_{j_r}\}}$を考える。
前ページの中段付近の$f_A(x_1, \ldots, x_n)$の多項式を考えると、$x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$を0としても、$a_{\{x_{j_1},\ldots,x_{j_r}\}}$は残り、$x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$の多項式になる。当然ながら、この操作で消えるものは$x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$をかけている項なので、$x_{j_1}\ldots x_{j_r}$の係数部分でない。

$$
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
x_{j_1} - a_{j_1 j_1} & \cdots & -a_{j_1 j_r} & -a_{j_1 i_1} & \cdots & -a_{j_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{j_r j_1} & \cdots & x_{j_r} - a_{j_r j_r} & -a_{j_r i_1} & \cdots & -a_{j_r i_k} \\
\hline
-a_{i_1 j_1} & \cdots & -a_{i_1 j_r} & -a_{i_1 i_1} & \cdots & -a_{i_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i_k j_1} & \cdots & -a_{i_k j_r} & -a_{i_k i_1} & \cdots & -a_{i_k i_k}
\end{array}\right|
$$

この式で、$x_{j_1}\ldots x_{j_r}$となる部分を探すと、左上の部分の対角成分がかけられ、かつ、その対角成分のxがかけられたときしかない。(左上の部分でaがかけられると、xがr次に達しない。)
左上の対角成分をかけるとすると、残りは右下をかけないと、行列式の計算はできない。

$$
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
x_{j_1} - a_{j_1 j_1} & \cdots & -a_{j_1 j_r} & -a_{j_1 i_1} & \cdots & -a_{j_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{j_r j_1} & \cdots & x_{j_r} - a_{j_r j_r} & -a_{j_r i_1} & \cdots & -a_{j_r i_k} \\
\hline
-a_{i_1 j_1} & \cdots & -a_{i_1 j_r} & x_{i_1} - a_{i_1 i_1} & \cdots & -a_{i_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i_k j_1} & \cdots & -a_{i_k j_r} & -a_{i_k i_1} & \cdots & x_{i_k} - a_{i_k i_k}
\end{array}\right|
$$

ただし、$r+k=n$
この式から、xたちを変数として、$x_{j_1}\ldots x_{j_r}$の係数$a_{x_{j_1},\ldots,x_{j_r}}$を考える。
前ページの中段付近の$f_A(x_1, \ldots, xn)$の多項式を考えると、$x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$を0としても、
$a_{x_{j_1},\ldots,x_{j_r}}$は残り、$x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$の多項式になる。当然ながら、この操作で消えるものは
$x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$をかけている項なので、$x_{j_1}\ldots x_{j_r}$の係数部分でない。

$$
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
x_{j_1} - a_{j_1 j_1} & \cdots & -a_{j_1 j_r} & -a_{j_1 i_1} & \cdots & -a_{j_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{j_r j_1} & \cdots & x_{j_r} - a_{j_r j_r} & -a_{j_r i_1} & \cdots & -a_{j_r i_k} \\
\hline
-a_{i_1 j_1} & \cdots & -a_{i_1 j_r} & - a_{i_1 i_1} & \cdots & -a_{i_1 i_k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i_k j_1} & \cdots & -a_{i_k j_r} & -a_{i_k i_1} & \cdots & - a_{i_k i_k}
\end{array}\right|
$$

この式で、$x_{j_1}\ldots x_{j_r}$となる部分を探すと、左上の部分の対角成分がかけられ、かつ、その
対角成分のxがかけられたときしかない。(左上の部分でaがかけられると、xがr次に達しない。)
左上の対角成分をかけるとすると、残りは右下をかけないと、行列式の計算はできない。

そのため、左上の非対角成分及び、左下、右上は無視でき、$a_{x_{j_1},\dots,x_{j_r}}\ x_{j_1}\dots x_{j_r}$は以下の式になる。

$$a_{x_{j_1},\dots,x_{j_r}}\ x_{j_1}\dots x_{j_r} = \begin{vmatrix} x_{j_1} & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & x_{j_r} & & & \\ & & & -a_{i_1 i_1} & \cdots & -a_{i_1 i_k} \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -a_{i_k i_1} & \cdots & -a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

$$= x_{j_1}\dots x_{j_r} * (-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

さて、1ページ目に戻って、xの違いをなくすと、求めたいa_rは$\Sigma_{j_1 < \dots < j_r} a_{x_{j_1},\dots,x_{j_r}}$になる。また、$j_1, \dots, j_r$と$i_1, \dots, i_k$(ただし、$r+k=n$)は1,..., nを一回ずつ割り当てたものだから、$j_1,\dots j_r$を決めると自ずから$i_1, \dots, i_k$が決まる。一組の組み合わせに対して、1回ずつ足すことを保証するために、$\Sigma_{j_1 < \dots < j_r}$としていたが、これは$\Sigma_{i_1 < \dots < i_k}$と同義になる}
よって、

$$a_k = \Sigma_{j_1 < \dots < j_r} \; a_{x_{j_1},\dots,x_{j_r}} =$$

$$= \Sigma_{j_1 < \dots < j_r} * (-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1}{}_{i_1} & \cdots & a_{i_1}{}_{i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k}{}_{i_1} & \cdots & a_{i_k}{}_{i_k} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_{i_1 < \dots < i_k} * (-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1}{}_{i_1} & \cdots & a_{i_1}{}_{i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k}{}_{i_1} & \cdots & a_{i_k}{}_{i_k} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^k * \Sigma_{i_1 < \dots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1}{}_{i_1} & \cdots & a_{i_1}{}_{i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k}{}_{i_1} & \cdots & a_{i_k}{}_{i_k} \end{vmatrix}$$