(7.118) を確認する。

(4.29) の X,Z に対して、$X = Y, Z = (F, U, X)$ に対応させる。(ξ は q のパラメータたちだが、ひとまず無視する。)

$$ln\, p(Y) = \mathcal{L}[q] + D_{KL}[q(F, U, X)||p(F, U, X|Y)] \tag{1}$$

(4.30) のように

$$\mathcal{L}[q] = \int q(F, U, X)\, ln\, \frac{p(Y, F, U, X)}{q(F, U, X)}\, dF\, dU\, dX \tag{2}$$

$D_{KL}[q(F, U, X)||p(F, U, X|Y)] \geq 0$ なので、(7.118) の 1 行目のように、

$$ln\, p(Y) \geq \int q(F, U, X)\, ln\, \frac{p(Y, F, U, X)}{q(F, U, X)}\, dF\, dU\, dX \tag{3}$$

(7.116) のように、

$$q(F, U, X) = \{\prod_{d=1}^{D} p(F_{:,d}|U_{:,d}, X) q(U_{:,d})\} q(X) = p(F|U, X) q(U) q(X) \tag{4}$$

また、ガウス過程の仮定、U,X の独立性より、

$$p(Y, F, U, X) = p(Y|F, U, X) p(F, U, X) = p(Y|F) p(F|U, X) p(U, X) = p(Y|F) p(F|U, X) p(U) p(X) \tag{5}$$

よって、

$$\begin{aligned}
ln\, p(Y) &= \int\int\int p(F|U, X) q(U) q(X)\, ln\, \frac{p(Y|F) p(F|U, X) p(U) p(X)}{p(F|U, X) q(U) q(X)}\, dF\, dU\, dX \\
&= \int\int\int p(F|U, X) q(U) q(X)\, ln\, \frac{p(Y|F) p(U) p(X)}{q(U) q(X)}\, dF\, dU\, dX \\
&= \int\int\int p(F|U, X) q(U) q(X)\, (ln\, p(Y|F) + ln\, \frac{p(U)}{q(U)} + ln\, \frac{p(X)}{q(X)})\, dF\, dU\, dX \\
&= \int q(U) \int\int q(X) p(F|U, X)\, ln\, p(Y|F)\, dF\, dX\, dU + \int q(U) (\int (\int p(F|U, X)\, dF)\, q(X)\, dX)\, ln\, \frac{p(U)}{q(U)}\, dU \\
&\quad + \int q(X) (\int (\int p(F|U, X)\, dF) q(U)\, dU)\, ln\, \frac{p(X)}{q(X)}\, dX \\
&= \int q(U) \int\int q(X) p(F|U, X)\, ln\, p(Y|F)\, dF\, dX\, dU + \int q(U)\, ln\, \frac{p(U)}{q(U)}\, dU - (-\int q(X)\, ln\, \frac{p(X)}{q(X)}\, dX) \\
&= \int q(U) (\int\int q(X) p(F|U, X)\, ln\, p(Y|F)\, dF\, dX + ln\, \frac{p(U)}{q(U)})\, dU - D_{KL}[q(X)||p(X)]
\end{aligned} \tag{6}$$

となり、(7.118) が成り立つ。