6.1.1.2 の式展開を見直す。

そもそも、(6.4) のように KL ダイバージェンスを最小化する。q に関して、(6.4) のように、$q(Z, W)$ を考慮するが、それらは X を引数としても良いし、その関数は ψ, ξ をパラメータとしている。よって、(6.9) の式を最小化する。

(3.10) の定義式に (6.5) を代入して、

$$
\begin{aligned}
D_{KL}[q(Z,W;X,\psi,\xi)||p(Z,W|X)] &= -\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,\frac{p(Z,W|X)}{q(Z,W;X,\psi,\xi)}dZdW \\
&= -\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,p(Z,W|X)dZdW + \int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,q(Z,W;X,\psi,\xi)dZdW \\
&= -\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,\frac{p(Z,W,X)}{p(X)}dZdW + \int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,q(Z,;X,\psi)q(W;\xi)dZdW \\
&= -\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,p(Z,W,X)dZdW + \int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,p(X)dZdW \\
&\quad + \int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,q(Z,;X,\psi)dZdW + \int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,q(W;\xi)dZdW \\
&= -\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(Z,W,X)] + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(X)] + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(Z,;X,\psi)] + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)] \\
&= -(\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(Z,W,X)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(Z,;X,\psi)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)]) + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(X)]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

この様になり、(6.9) が求まった。この式が求まれば、(6.10) は自明。

(6.10) は (6.3),(6,7) を考慮して、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi,\xi) &= \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(Z,W,X)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(Z;X,\psi)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)] \\
&= \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(W)\prod_n[p(x_n|z_n,W)p(z_n)]] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,\prod_n q(z_n;x_n,\psi)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)] \\
&= \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(W)] + \sum_n \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(x_n|z_n,W)] + \sum_n \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(z_n)] \\
&\quad - \sum_n \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(z_n;x_n,\psi)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)] \\
&= \sum_n (\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(x_n|z_n,W)] + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(z_n)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(z_n;x_n,\psi)]) \\
&\quad + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(W)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

これをもとに、ミニバッチの ELBO を考えると (6.11) のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi,\xi) &= \frac{N}{M}\sum_{n\in\mathcal{S}} (\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(x_n|z_n,W)] + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(z_n)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(z_n;x_n,\psi)]) \\
&\quad + \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(W)] - \mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,q(W;\xi)]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで、以下の勾配を考える。

$$
\begin{aligned}
\nabla_\xi(\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\,p(z_n)]) &= \nabla_\xi(\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\,ln\,p(z_n)dZdW) = \nabla_\xi(\int\int q(Z;X,\psi)q(W,\xi)\,ln\,p(z_n)dZdW) \\
&= \nabla_\xi(\int q(W,\xi)dW\int q(Z;X,\psi)\,ln\,p(z_n)dZ) = \nabla_\xi(\int q(Z;X,\psi)\,ln\,p(z_n)dZ) = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\xi}(\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\, q(z_n;x_n,\psi)]) &= \nabla_{\xi}(\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\, ln\, q(z_n;x_n,\psi)dZdW) \\
= \nabla_{\xi}(\int\int q(Z;X,\psi)q(W,\xi)\, ln\, q(z_n;x_n,\psi)dZdW) &= \nabla_{\xi}(\int q(W,\xi)dW \int q(Z;X,\psi)\, ln\, q(z_n;x_n,\psi)dZ) \\
&= \nabla_{\xi}(\int q(Z;X,\psi)\, ln\, q(z_n;x_n,\psi)dZ) = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\psi}(\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\, p(W)]) = \nabla_{\psi}(\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\, ln\, p(W)dZdW) &= \nabla_{\psi}(\int\int q(Z;X,\psi)q(W,\xi)\, ln\, p(W)dZdW) \\
= \nabla_{\psi}(\int q(Z;X,\psi)dZ \int q(W,\xi)\, ln\, p(W)dW) &= \nabla_{\psi}(\int q(W,\xi)\, ln\, p(W)dW) = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\psi}(\mathbb{E}_{q(Z,W;X,\psi,\xi)}[ln\, q(W;\xi)]) &= \nabla_{\psi}(\int\int q(Z,W;X,\psi,\xi)\, ln\, q(W;\xi)dZdW) \\
= \nabla_{\psi}(\int\int q(Z;X,\psi)q(W,\xi)\, ln\, q(W;\xi)dZdW) &= \nabla_{\psi}(\int q(Z;X,\psi)dZ \int q(W,\xi)\, ln\, q(z_n;x_n,q(W;\xi)dW) \\
&= \nabla_{\psi}(\int q(W,\xi)\, ln\, q(z_n;x_n,q(W;\xi)dW) = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

これらを踏まえると、(6.12),(6.13) が求まる。なお、上記と同様にすると (6.12),(6.13) の残った項は微分しても微分する変数が関数の中に残るため、すぐに 0 になるとは言えないことがわかる。