UVADLC の tutorial11、セル 8 に関して、変数変換を考えてみる。たちまち 1 次元で考える。

セル 8 に関して、prior が明示されていない場合、すべての値に対して、同一の一様分布が仮定されている。

すると、quants = n(n ¿ 0) として、確率変数 x が $0 \leq x < n$ で $p(x) = \frac{1}{n}$ となる。

ここで $y = \frac{x}{n}$ という変数変換を行うと、$0 \leq y < 1$ となり、$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{n}$ となる。更にこれにシグモイド関数の逆関数

$$z = ln\,\frac{y}{1-y} \tag{1}$$

にて変数変換を行うと、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial ln\,\frac{y}{1-y}}{\partial y} = \frac{\partial (ln\,y - ln\,(1-y))}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} = \frac{1}{y(1-y)} \tag{2}$$

ここで、本の (6.27) より、

$$p(z) = \frac{p(x)}{|\frac{\partial z}{\partial y}||\frac{\partial y}{\partial z}|} = \frac{\frac{1}{n}}{|\frac{1}{y(1-y)}||\frac{1}{n}|} \tag{3}$$

定義域を考えるとすべての絶対値は不要。よって、

$$p(z) = y(1-y) \tag{4}$$

シグモイド関数は

$$y = \frac{1}{1+e^{-z}} \tag{5}$$

であり、

$$p(z) = y(1-y) = \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} \tag{6}$$

このグラフを書くと正規分布と似た形になる。(参考：http://data-science.tokyo/ed/edj1-5-3-1-1.html,https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja)

もし、p(x) が x に関して異なる場合、x から y への変数変換は変わらないが、p(x) が変わってくる。すると、$p(x)n = 1$ となっていたところが、1 にならなくなり、段差ができる。

なお、シグモイド関数の逆関数に関して、

$$\begin{aligned} y(1+e^{-z}) &= 1 \\ e^{-z} &= 1-y \\ z = -ln\,\frac{1-y}{y} &= ln\,\frac{y}{1-y} \end{aligned} \tag{7}$$

より、逆関数が求まる。