P.163 からのエルミット行列についての記載を確認する。

1),2) に関しては、平鍋さんが丁寧に書かれているので、そちらを参照のこと。

3) に関して考える。

A をエルミット行列として、P.159 の内容をなぞり、固有値が実数であることを示す。

エルミット行列なので $A^T = \bar{A}, A = \overline{A^T}$

$$Ax = \alpha x, x \neq 0 \tag{1}$$

とすれば、両辺のバーを取って、

$$\bar{A}\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\alpha x} = \bar{\alpha}\bar{x} \tag{2}$$

よって、

$$\alpha(x, \bar{x}) = (\alpha x, \bar{x}) = (Ax, \bar{x}) = x^T A^T \bar{x} = x^T \bar{A}\bar{x} = x^T \overline{Ax} = x^T \overline{\alpha x} = \bar{\alpha} x^T \bar{x} = \bar{\alpha}(x, \bar{x}) \tag{3}$$

$x \neq 0$ の x に対して、$(x, \bar{x}) > 0$ なので、$\alpha = \bar{\alpha}$ でなければならない。すなわち A の固有値 α は実数になる。(前半部分は実対称行列と同様の結論になる。)

次に、対角化可能であることを示す。

n=1 のときはスカラの演算となり、自明であるから、n に関する帰納法を使う。

α_1 を A の一つの固有値とし、x_1 をそれに対する、固有ベクトルとする。

$\{\{x_1\}\}$ の直交補空間を W_1 とすれば、$x \in W_1$ に対し、

$$(x_1, Ax) = {x_1}^T \overline{Ax} = {x_1}^T \bar{A}\bar{x} = {x_1}^T A^T \bar{x} = (Ax_1)^T \bar{x} = (Ax_1, x) = (\alpha_1 x_1, x) = \alpha_1(x_1, x) = 0 \tag{4}$$

よって、$Ax \in W_1$。すなわち、W_1 は A-不変である。

今、正規直交底 ${e_1}', ..., {e_n}'$ を $\{\{{e_1}'\}\} = \{\{x_1\}\}, \{\{{e_2}', ..., {e_n}'\}\} = W_1$ となるようにとり、この底に関して A を表現する行列を A' とすれば、

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & {A_1}' \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる。底の変換 (e_i)→$({e_i}')$ の行列を U_1 とおけば、U_1 は**ユニタリ行列**である。(P.160 のように $(x_1, x_1) = 0$ になるものがあるから、単に直交行列のように転置しただけでは $TT^T = E$ となるとは限らない。それを $U\overline{U^T}$ とすることで、$U\overline{U^T} = E$ となる。よって、U の逆行列は $\overline{U^T}$ となり、P.128(28) に相当する式は $A' = U^{-1}AU$ となる。)

よって、

$$A' = {U_1}^{-1} A U_1 = \overline{U^T} A U_1 \tag{6}$$

よって、

$$A'^T = (\overline{U^T} A U_1)^T = \overline{({U_1}^T \overline{AU_1})^T} = \overline{(\overline{U_1}^T \overline{A^T} U_1)} = \overline{(\overline{U_1}^T A U_1)} = \overline{A'} \tag{7}$$

となり、A'、したがって、${A_1}'$ もエルミット行列である。よって帰納法の仮定により、${A_1}'$ は対角化可能である。すなわち、ある (n-1) 次正則行列 ${U_2}'$ があり、${U_2}'^{-1} {A_1}' {U_2}'$ が対角行列になる。

故に、

$$U = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {U_2}' \end{pmatrix} \tag{8}$$

とおけば、対角行列になる。

4) については定理 4' の注記も考えると、そのまま成り立っていることがわかる。

一応、確認する。

固有値が実数であることを考慮しつつ、異なる 2 つの固有値を $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, 固有ベクトルを x_1, x_2 とすると、$\alpha_1(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \alpha_2 x_2) = \alpha_2(x_1, x_2)$ より、$(x_1, x_2) = 0$。つまり、x_1, x_2 は直交している。また、3) や P150 の定理 2 より、対角化できているので、V は W_{α_i} の直和になる。

5) は 3) と同様に内積が成り立つようにし、正規直交系を作るようにすると T を U に置き換えることになる。

6) も同様。