P.163 の注意の準単純行列の集団の場合に拡張されるというところを考えてみる。

示すべき事柄としては、

- $A_1, ..., A_m$ を互いに交換可能な準単純行列とすれば、ある行列 P があって、$P^{-1}A_iP(1 \leq i \leq m)$ は同時に対角行列になる。
- ある行列 P があって、$P^{-1}A_iP(1 \leq i \leq m)$ が同時に対角行列になれば、$A_1, ..., A_m$ は互いに交換可能な準単純行列である。

まず、後者を示す。

仮定より、

$$P^{-1}A_iP = diag((\alpha_i)_k) \tag{1}$$

$$P^{-1}A_jP = diag((\alpha_j)_k) \tag{2}$$

準単純行列の定義より、$A_i, A_j$ は準単純行列だと言える。

さて、

$$\begin{aligned} P^{-1}A_iA_jP = P^{-1}A_iPP^{-1}A_jP = diag((\alpha_i)_k)diag((\alpha_j)_k) = diag((\alpha_i)_k(\alpha_j)_k) \\ = diag((\alpha_j)_k)diag((\alpha_i)_k) = P^{-1}A_jPP^{-1}A_iP = P^{-1}A_jA_iP \end{aligned} \tag{3}$$

両端の項について、$P, P^{-1}$ をかけることで、

$$A_iA_j = A_jA_i \tag{4}$$

となり、可換であることがわかる。

以上で、後者について、証明できた。

前者について、P.162 の例 3 の証明と同様に行う。

n=1 のときはスカラになるため、対角化されているとみなせ、P を 0 以外のスカラとすると、$A_i = a_i$ として、$P^{-1}A_iP = a_i$ となり、成立することがわかる。また、m=1 のときは、P.147 の準単純の定義のママであるし、その時の P も P.147 に記載がある。

m,n に関する 2 重機能法によって証明する。

$m, n > 1$ とする。$A_1$ の一つの固有値を $\alpha_i$ に対する $A_i$ の固有空間を $W_{\alpha_1}$ とする。$W_{\alpha_1} = V$ ならば、$A_1 = \alpha_1 E$ となり、$A_1$ は他の行列 $A_i$ が P で対角化できれば、$P^{-1}A_1P$ は対角化できる。そのため、$A_1$ は除外して、考えることができ、m-1 の場合に帰着することができ、帰納法の仮定で、この場合は成立する。

よって、$W_{\alpha_1} \subsetneqq V$ とすることができる。

$\mathbf{x} \in W_{\alpha_1}$ ならば、

$$A_1A_i\mathbf{x} = A_iA_1\mathbf{x} = A_i(\alpha_i\mathbf{x}) = \alpha_iA_i\mathbf{x}(1 \leq i \leq m) \tag{5}$$

よって、$A_i\mathbf{x} \in W_{\alpha_1}$ となる。すなわち、$W_{\alpha_1}$ はすべての $A_i(1 \leq i \leq m)$ に関して、不変である。

$\alpha_1$ 以外の固有値 $\alpha_2, ..., \alpha_s$ に対する固有空間を $W_2$ とすると P.146 の 3) より、$V = W_{\alpha_1} + W_2$ と直和になるし、(5) は他の固有値でも成り立つため、$W_2$ もすべての $A_i(1 \leq i \leq m)$ に関して、不変であることがわかる。

すると、P.148 の下から 2 個目の数式、及び、P.127 の (28) を考えると、

$${P_1}^{-1}A_iP_1 = \begin{pmatrix} {A_i}^{(1)} & 0 \\ 0 & {A_i}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで、$A_i$ は準単純であるから、${A_i}^{(1)}, {A_i}^{(2)}$ も準単純でないといけない。(P.153 参照)

よって、帰納法の仮定より、$P_i^{(1)}, P_i^{(2)}$ が存在する。

そのため、

$$P = P_1 \begin{pmatrix} P^{(1)} & 0 \\ 0 & P^{(2)} \end{pmatrix} \tag{7}$$

とおけば、$P^{-1} A_i P (1 \leq i \leq m)$ は同時に対角行列になる。

と、書いたが、P.153 にあるように前者については P.153 によって、すでに示されていた。。。