Nama : Muhammad Syamsul Ma'arif
NIM : F1B118038

Distribusi Maxwell - Boltzman

1. Penentuan Parameter

Distribusi maxwell - Boltzman untuk gas ideal

$$f(P) = C e^{-\beta P^2/2m} \qquad (1)$$

Syarat untuk menentukan parameter C dan β adalah

$$\int d^3p\, f(P) = n \quad (\text{normalisasi}) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{n}\int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f(P) = \frac{E}{N} \quad (\text{energi perpartikel})$$

disini, n adalah kerapatan gas, N jumlah partikel gas, d m adalah massa gas p adalah momentum d^3p artinya integral terhadap momentum untuk 3 dimensi. $d^3p = dP_1, dP_2\, dP_3$. dP_1 untuk arah x, dP_2 untuk arah y dan dP_3 untuk arah $\hat{z}$ momentum adalah vektor $\vec{p} = P_1 \hat{a}_1 + P_2 \hat{a}_2 + P_3 \hat{a}_3$

arah kerapatannya

$$n = c\int_{-\infty}^{\infty} dP_1\, dP_2\, dP_3\; e^{-\beta}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)/2m$$

$$n = c\int_{-\infty}^{\infty} dP_1\, dP_2\, dP_3\; e^{-\lambda}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$$

$$n = c\int_{-\infty}^{\infty} dP_1\, e^{-\lambda P_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} dP_2\, e^{-\lambda P_2^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP_3\, e^{-\lambda P_3^2}$$

Dipindai dengan CamScanner

$$n = c\left[\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\lambda p^2}\right]^3 \quad (3)$$

Untuk menyelesaikan persamaan 3 gunakan integral khusus yaitu integral gaussian

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (4)$$

Oleh karenanya Pers (3) menjadi

$$n = c\left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right]^3 = c\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{3/2} \quad (5)$$

karena $\lambda = \beta/2m$

$$c = n\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} = n\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} \quad (6)$$

Selanjutnya untuk energi per partikel

$$\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, \frac{p^2}{2m} f(p) = \frac{E}{N}$$

$$\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, \frac{p^2}{2m}\, c\, e^{-\beta p^2/2m} = \frac{E}{N}$$

$$\frac{c}{2mn}\int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, p^2 e^{-\beta p^2/2m} = \frac{E}{N}$$

$$\frac{c}{2mn}\int_{-\infty}^{\infty} dp_1\, dp_2\, dp_3\, (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\, e^{-\lambda(p_1^2+p_2^2+p_3^2)} = \frac{E}{N}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{n\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}}{2mn}\int_{-\infty}^{\infty} dp_1\, dp_2\, dp_3\, (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\, e^{-\lambda p_1^2} e^{-\lambda p_2^2} e^{-\lambda p_3^2}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{\beta^{3/2}}{2^{3/2}\, 2m^{3/2}\, m\, \pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dp_1\, dp_2\, dp_3\, (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\, e^{-\lambda p_1^2} e^{-\lambda p_2^2} e^{-\lambda p_3^2}$$

(7)

(3)

catatan $= \dfrac{\beta^{3/2}}{2^{3/2}\, 2m^{3/2} m\, \pi^{3/2}} = \dfrac{\beta^{3/2}}{2^{5/2}\, m^{5/2}\, \pi^{3/2}}$

karena $\dfrac{\beta}{2m} = \lambda$

$$\frac{\beta^{3/2}}{2^{5/2}\, m^{5/2}\, \pi^{3/2}} = \frac{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^{3/2}}{2m\, \pi^{3/2}} = \frac{\lambda^{3/2}}{2m\, \pi^{3/2}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}}{2m}$$

Sehingga Pers (7) menjadi

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp_1\, p_1^2\, e^{-\lambda p_1^2}\, dp_2\, p_2^2\, e^{-\lambda p_2^2}\, dp_3\, p_3^2\, e^{-\lambda p_3^2} +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_2\, p_2^2\, e^{-\lambda p_2^2}\, dp_1\, p_1^2\, e^{-\lambda p_1^2}\, dp_3\, p_3^2\, e^{-\lambda p_3^2} +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_3\, p_3^2\, e^{-\lambda p_3^2}\, dp_1\, p_1^2\, e^{-\lambda p_1^2}\, dp_2\, p_2^2\, e^{-\lambda p_2^2} \Big\} \quad (8)$$

karena ketiga bagian dalam kurung hasil integralnya sama maka menghasilkan

$$3 \int_{-\infty}^{\infty} dp_1\, p_1^2\, e^{-\lambda p_1^2}\, dp_2\, p_2^2\, e^{-\lambda p_2^2}\, dp_3^2\, p_3^2\, e^{-\lambda p_3^2}$$

Pers 8.1 menjadi

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2m}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1^2\, p_1^2\, e^{-\lambda p_1^2}\, dp_2\, e^{-\lambda p_1^2}\, dp_3\, e^{-\lambda}\, p_3^2 \quad (9)$$

untuk menyelesaikan pers (9) sekali lagi gunakan integral gaus

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

turunkan terhadap λ disisi kanan dan kiri

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(-x^2)\, e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\lambda^{-3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, e^{-\lambda x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}} \qquad (10)$$

gunakan pers (10) dan pers (4) untuk menyelesaikan pers (9)

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2m}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right)$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2m}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}}\,\frac{\pi}{\lambda} = \frac{3}{2m}\,\frac{\lambda^{3/2}}{\pi^{3/2}}\,\frac{\pi^{1/2}}{2\lambda^{3/2}}\cdot\frac{\pi}{\lambda}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4m}\,\frac{\pi^{3/2}}{\pi^{3/2}\lambda} = \frac{3}{4m\lambda} = \frac{3}{4m\frac{\beta}{2m}}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2\beta} \qquad (11)$$

oleh karenanya

$$2\beta E = 3N$$

$$\beta = \frac{3N}{2E} \qquad (12)$$

karena $E = \frac{3}{2}NkT$ maka

$$\beta = \frac{3N}{2\cdot\frac{3}{2}NkT} = \frac{1}{kT}$$

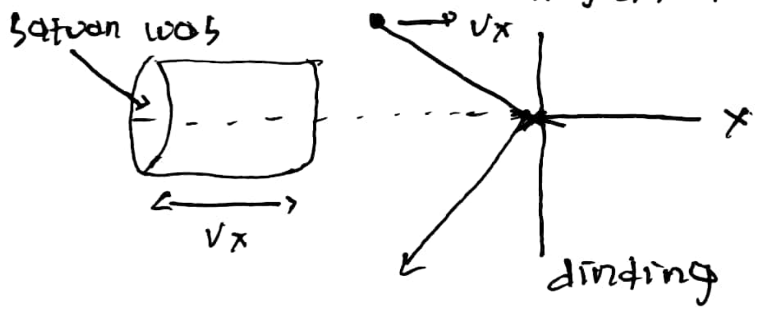
2). Tekanan gas Ideal

Tekanan gas ideal adalah gaya rata-rata persatuan luas yang menimpa dinding wadah gas. Ambillah dinding tegak lurus pada sumbu x dan asumsikan bahwa dinding memantulkan sempurna, ketika atom dengan komponen kecepatan arah x, V_x dipantulkan oleh dinding. Gaya yang bekerja pada dinding adalah momentum per satuan waktu, dan tekanan adalah gaya per satuan luas dinding

Tekanan (momentum per atom) x (Fluks atom) (13)

Fluks adalah jumlah atom melewati satuan luas perdetik dan ini sama dengan jumlah atom terkandung dalam silinder dengan panjang V_x.

$$\text{Fluks atom} = V_x\, f(p)\, d^3p \quad (14)$$



Tekanan diberikan oleh

$$P = \int_{x>0} (2mV_x)\, V_x\, f(p)\, d^3p = m\int d^3p\, v_x^2\, f(p) \quad (15)$$

V_x^2 dapat diganti dengan $\frac{1}{3}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{p^2}{3m^2}$

Sehingga:

$$P = m\int d^3p\, \frac{p^2}{3m^2} f(p) = \frac{1}{3m}\int d^3p\, p^2 f(p)$$

$$P = \frac{2}{3} \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f(p) \qquad (16)$$ ⑥

karena $\int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f(p) = \frac{E}{nN}$ ~~(16)~~

dan $n = \frac{V}{N}$

Persamaan (16) menjadi

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \qquad (17)$$

Pers (17) membuktikan pers gas ideal

$$PV = \frac{2}{3} E \rightarrow \text{karena } E = \frac{3}{2} NkT$$

$$PV = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} NkT$$

$$PV = NkT = nRT \qquad (18)$$

dimana $n = \frac{V}{N}$ dan $Nk = nR$

$k = 1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ (konstanta Boltzmann)

$R = 8,3145 \frac{J}{mol\,K}$ (konstanta gas umum)

jadi dalam parameter distribusi maxwell boltzmann adalah

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$$e = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \qquad (19)$$

3. Ekipartisi Energi (7)

Faktor 3 dalam rumusan $\frac{E}{N} = \frac{3}{2}kT$ menyajikan jumlah derajat kebebasan gerak translasi yaitu arah x, y, dan z, jumlah komponen momentum muncul dalam energi aturan

$$E = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (20)$$

Setiap bentuk kuadrat dalam energi menyumbang $\frac{kT}{2}$ pada energi dalam per partikel

sehingga $k/2$ menjadi panas jenis pada volume konstan. Hal ini dikenal juga dengan prinsip ekipartisi energi

Jika atom yang ditinjau adalah molekul beratan banyak atau poliatomik, maka akan ada bagian kuadratik tambahan dalam energi, merepresentasikan derajat kebebasan rotasi dan vibrasi. setiap bagian akan menyumbang $\frac{k}{2}$ pada jenis sepanjang energi thermal kT

cukup untuk mengeksitasinya secara kuantum maupun secara mekanik. sebagai contoh untuk molekul diatomik (2 atom) seperti H_2 mempunyai dua derajat kebebasan rotasi dan satu derajat, kebebasan vibrasi, energinya dalam bentuk

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{J_\perp^2}{2I_\perp} + \frac{J_{\parallel}^2}{2I_{\parallel}} + \left(\frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2}q^2\right) \quad (21)$$

$\vec{p}$ = momentum

$J_\perp$ = momentum sudut tegak lurus sumbu simetri molekul bagian terakhirnya $\frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2}q^2$

adalah energi osilator harmonik berkaitan dengan vibrasi atom kuantitas tsb karna diperlakukan sebagai operator kuantum. Energi rotasi dan vibrasi mempunyai ~~eigenvalen~~ eigen value (nilai eigen) dan energi minimalnya adalah k Trot dan k Tvib. Sebagai contoh pada tabel 1.

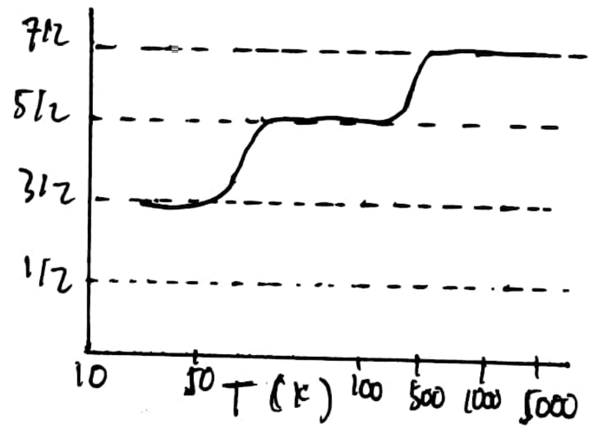
Tabel 1 Suhu ekipartisi vibrasi dan rotasi

	Trot (K)	Tvib (K)
H_2	85,4	6100
N_2	2,86	3340
O_2	2,07	2230

Pada suhu ruang energi thermal tidak cukup untuk mengeksitasi vibrasi gas H_2 sehingga panas jenisnya adalah

$$\underbrace{\frac{3}{2}kT}_{\text{Translasi}} + \underbrace{\frac{1}{2}kT}_{\text{Rotasi I}} + \underbrace{\frac{1}{2}kT}_{\text{Rotasi II}} = \frac{5}{2}kT$$

Gambar 2 menunjukkan kapasitas panas 1 mol molekul hidrogen pada rentang temperatur lebar dalam skala logaritma kita bisa lihat bahwa mekanika kuantum bekerja pada temperatur tinggi



Gambar 2 kapasitas panas per mol H_2 sebagai fungsi suhu dalam skala logaritma

4.) Distribusi kecepatan

Fungsi distribusi tidak bergantung pada posisi gas jika tidak ada potensial luar artinya bahwa atom bergerak dengan distribusi kecepatan maxwell yang sama dalam setiap bagian dalam udara di sekitar anda. karena ruang isotropi, distribusi hanya bergantung pada besar momentum p oleh karenanya komponen kecepatan rata-rata menuju nol

$$\langle V \rangle = \frac{\int d^3p \; p(f(p))}{m\int d^3p \; f(p)} = 0 \qquad (22)$$

ini berarti bahwa rata-rata kuadrat kecepatan tidak nol yakni

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} = \frac{\int d^3p \; p^2 f(p)}{m^2 \int d^3p \; f(p)}$$

$$= \frac{\int d^3p \; \frac{p^2}{2m} f(p)}{\int d^3p \; f(p)} \; \frac{2}{m}$$

$$= \frac{E/N}{n} \; \frac{2}{m} = \frac{\frac{3}{2} KT}{n} \; \frac{2}{m}$$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{3KT}{m} \quad \text{untuk } n = 1 \qquad (22)$$

Kecepatan root mean square (rms)

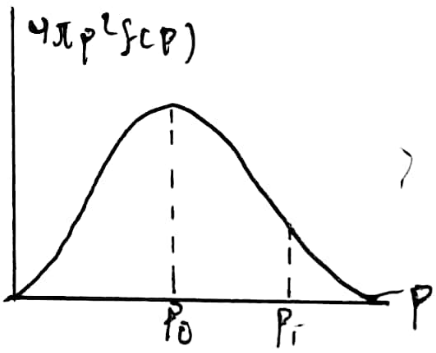
$$V_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} \qquad (23)$$

(10)

Untuk menghasilkan energi kinetik rata-rata

$$\frac{1}{2} m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2} kT \qquad (24)$$

yang cocok dengan prinsip ekipartisi
Volume efektif dalam ruang momentum adalah $4\pi p^2 \, dp$ yang menyatakan jumlah atom per satuan volume per satuan interval p yang nilainya momentumnya berada antara p dan $p + dp$
Fungsi distribusi kecepatan secara kasar dapat ditunjukkan pada gambar 3.



Gambar 3 distribusi kecepatan maxwell boltzmann lapisan dibawah kurva adalah kerapatan partikel-partikel dengan besar momentum lebih besar dari p_1 momentum maksimum $p_0 = \sqrt{2mkT}$ dan kecepatannya disebut kecepatan yang paling mungkin

$$v_0 = \frac{p_0}{m} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad (25)$$

jika gas bergerak secara total secara acak bersama dengan kecepatan v_0 maka fungsi distribusi momentum berkumpul di sekitar p_0 adalah

$$f(p) \simeq c\, e^{-\lambda(p-p_0)^2}$$

5.) Entropi

Entropi dapat di definisikan sebagai

$$S = k \ln T(E,V) \qquad (27)$$

yang mana $T(E,V) = \sum_{n_i} \Omega\{n_i\}$ adalah jumlah keadaan dalam ruang T yang dikuasai oleh partikel mikrokanonik. Dalam hal ini $\Omega\{n_i\}$ adalah jumlah peluang

$$\Omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} \qquad (28)$$

karenanya

$$T(E,V) = \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}$$

$$T(E,V) = \sum_{\{n_i\}} \frac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

$$\ln T(E,V) = \ln N! - \sum_i \ln n_i!$$

Dengan formula Stirling :

$$\ln x! = x \ln x - x$$

$$\ln T(E,V) = N \ln N - N - \sum_i (n_i \ln n_i - n_i)$$

$$= N \ln N - N - \sum_i n_i \ln n_i + \sum_i n_i$$

karenanya $\sum n_i = N$

$$\ln T(E,V) = N \ln N - N - \sum_i n_i \ln n_i + N$$

$$\cancel{\ln T(E,V)} = \cancel{N \ln N}$$

$$\cancel{N \ln N} - \sum$$

$$\ln T(E,V) = N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i \qquad (29)$$

Dipindai dengan CamScanner

Entropi kemudian menjadi

$$S = K \ln \Gamma(E,V) = k \{N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i\}$$

maka

$$\frac{S}{k} = N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i \quad (30)$$

jika meninjau kondisi maksimum sehingga

$n_i \to \bar{n}_i$

dengan $\bar{n}_i$ adalah jumlah keadaan pada kondisi maksimum

Entropi menjadi

$$\frac{S}{k} = N \ln N - \sum_i \bar{n}_i \ln \bar{n}_i \quad (31)$$

$$= N \ln N - \sum d^3p\, f(p) \ln f(p)$$

$$\frac{S}{k} = N \ln N - V \int d^3p\, f(p) \ln f(p) \quad (32)$$

gunakan distribusi maxwell - Boltzmann

$$f(p) = C e^{-\lambda p^2}$$

$$\int d^3p = f(p) \ln(p) = \int d^3p\, Ce^{-\lambda p^2} \ln\{Ce^{-\lambda p^2}\}$$

$$= c \int d^3p\, e^{-\lambda p^2} \{\ln c - \lambda p^2\}$$

$$= c \ln c \int d^3p e^{-\lambda p^2} - \lambda c \int d^3p\, p^2 e^{-\lambda p^2} \quad (33)$$

karena $c \int d^3p\, e^{-\lambda p^2} = n$

$$n = c \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{3/2}$$

$$\lambda c \int d^3p \; p^2 e^{-\lambda p^2} = \lambda c \int dp_1 \, dp_2 \, dp_3 \, (p_1^2 + p_2^2 + p_3^3) \, e^{-\lambda (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}$$

$$= \lambda c \Big[\int dp_1 \, p_1^2 e^{-\lambda p_1^2} dp_2 \, p_2^2 e^{\lambda p_2^2}$$

$$dp_3 \, p_3^2 e^{-\lambda p_3^2} +$$

$$\int dp_2 \, p_2^2 e^{-\lambda p_2^2} dp_1 \, p_1^2 e^{-\lambda p_1^2}$$

$$dp_3 \, p_3^2 e^{-\lambda p_3^2} +$$

$$\int dp_3^2 \, p_3^2 e^{-\lambda p_3^2} dp_1 \, e^{-\lambda p_1^2} e^{-\lambda p_2^2} \Big]$$

$$= \lambda c \Big[\int dp_1 \, p_1^2 e^{-\lambda p_1^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right)^2 +$$

$$\int dp_2 \, p_2^2 e^{-\lambda p_2^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right)^2 +$$

$$\int dp_3 \, p_3^2 e^{-\lambda p_3^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right)^2 \Big]$$

$$= \lambda c \frac{\pi}{\lambda} \Big[\int dp_1 \, p_1^2 e^{-\lambda p_1^2} +$$

$$\int dp_2 \, p_2^2 e^{-\lambda p_2^2} +$$

$$\int dp_3 \, p_3^2 e^{-\lambda p_3^2} \Big]$$

$$\lambda c \int d^3p \; p^2 e^{-\lambda p^2} = 3\pi c \int dp \; p^2 e^{-\lambda p^2} \quad (35)$$

karena $\int dp \; p^2 \, e^{-\lambda p^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}}$ maka

$$\lambda c \int d^3p \; p^2 e^{-\lambda p^2} = 3\pi c \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}} = \frac{3}{2} c \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{3/2} \quad (36)$$

dan karena $c\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{3/2} = n$ maka

$$\lambda e \int d^3p \; p^2 e^{-\lambda p^2} = \frac{3}{2} n$$

Oleh karenanya

$$\int d^3p \; f(p) \ln p = n \ln c - \frac{3}{2} n$$

entropi menjadi

$$\frac{S}{k} = N \ln N - V\left(n \ln c - \frac{3}{2} n\right)$$

karenanya

$$n = \frac{N}{V}$$

$$\frac{S}{k} = N \ln N - N \ln c - \frac{3}{2} N \quad (38)$$

karenanya dipembahasan sebelumnya

$$c = n\,(2\pi m kT)^{-3/2}$$

$$N \ln c = N \ln \left\{ n\,(2\pi m kT)^{-3/2} \right\}$$

$$= N \ln\left(\frac{N}{V}\right) - \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k) - \frac{3}{2} N \ln T$$

$$= N \ln N - N \ln V - \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k) - N \ln T^{3/2}$$

$$= N \ln N - \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k) - (N \ln V + N \ln T^{3/2})$$

$$N \ln c = -N \ln(V T^{3/2}) + N \ln N - \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k)$$

$$\frac{S}{k} = N \ln N + N \ln\left(V T^{3/2}\right) - N \ln N + \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k) - 3/2\, N$$

$$\frac{S}{k} = N \ln\left(V T^{3/2}\right) + \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k) - \frac{3}{2} N$$

Sehingga

$$\frac{S}{Nk} = \ln\left(V T^{3/2}\right) + \frac{3}{2}\left(\ln(2\pi m k) - 1\right)$$

$$\frac{S}{Nk} = \ln\left(V T^{3/2}\right) + S_0 \qquad (39)$$

dengan ini S_0 adalah suatu konstanta seimbang, dalam hal ini $S_0 = \frac{3}{2}\left(\ln(2\pi m k) - 1\right)$

Pada pers (39), entropi dari sudut pandang atau dengan pendekatan fisika statistik dapat dirumuskan, entropi ternyata berkaitan dengan parameter termodinamika yaitu V dan T.

Rumusan entropi (39) memungkinkan pendekatan fisika statistik dapat memberikan semua rumusan termodinamika berangkat dari kaitannya entropi dengan besaran ~~ini~~ lain termodinamika

Karena ~~U~~ $U(T) = C_V T$ maka $C_V = \frac{3}{2} nk$ dan $PV = \frac{2}{3} U$. entropi kemudian dapat dihitung menjadi

$$\frac{S}{nk} = \ln (VT^{3/2}) = \ln V + \ln T^{3/2} \quad (41)$$

Pada persamaan (41) konstanta S_0 diabaikan operasikan diferensial pada pers (41) yakni

$$\frac{dS}{nk} = \frac{dt}{dV}(\ln V) + \frac{d}{dT} = (\ln T^{3/2})$$

$$\frac{dS}{nk} = \frac{dV}{V} + 3/2 \frac{dT}{T}$$

karena

$$dU = \frac{3}{2} NkdT$$

$$U = \frac{3}{2} NkT$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dS}{nk} = \frac{dV}{V} + \frac{3}{2}\frac{dU}{U} \quad (42)$$

Gunakan Pers gas ideal

$$PV = NkT$$

$$V = \frac{NkT}{P} \rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dV}{\frac{NkT}{P}} = \left(\frac{P}{T}\right)\frac{dV}{Nk} \quad (43)$$

Pers (92) menjadi

$$dS = Nk\frac{dV}{V} + \frac{3}{2}Nk\frac{dU}{U}$$

$$dS = Nk\left(\frac{P}{T}\right)\frac{dV}{Nk} + \frac{3}{2}Nk\frac{dU}{U}$$

$$dS = \frac{P}{T}dV + \frac{3}{2}Nk\frac{dU}{\left(\frac{3}{2}NkT\right)}$$

$$dS = \frac{P}{T}dV + \frac{dU}{T}$$

$$dS = \frac{1}{T}(dU + P\,dV) \quad (44)$$

atau $T\,dS = dU + P\,dV \quad (45)$

Pers (45) merupakan rumusan hukum pertama termodinamika yang menyatakan jumlah panas yang diserap

$$dQ = dU + P\,dV \quad (46)$$

Hukum kedua termodinamika dirumuskan menjadi

$$dQ = T\,dS$$

Hukum kedua menyatakan bahwa suhu T merupakan faktor integral yang membuat $\frac{dQ}{T}$ merupakan diferensial eksak.

entropi suatu sistem terisolasi tidak pernah berkurang. Entropi meningkat dan merupakan fungsi volume. Pada sistem terisolasi volume atau mengalami peningkatan

7. Fluktuasi

~~Kit~~ kita sekarang akan menghitung fluktuasi rata rata kuadrat bilangan okupasi $\langle n_i \rangle$ dan lenyap pada $N \to \infty$, akan ditunjukan bahwa $\langle n_i \rangle$ dan $\bar{n}_i$ berimpit ketika $N \to \infty$

Kita mulai bahasan dengan menulis ulang

$$\Omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\, g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k} \quad (48)$$

kita juga paham sekarang bahwa faktor g_i bermanfaat untuk

$$g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \Omega\{n_i\} = g_k\, n_k \frac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}\, g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k - 1}$$

$$g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \Omega\{n_i\} = n_k\, \Omega\{n_i\} \quad (49)$$

Rata-rata ansambel bil okupasi adalah

$$\langle n_k \rangle = \frac{\sum n_k\, \Omega\{n_i\}}{\sum \Omega\{n_i\}} = \frac{g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}}{\sum \Omega\{n_i\}}$$

$$\langle n_k \rangle = g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \ln \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}$$

jika $v_i = \ln g_i$

$$dv_i = \frac{1}{g_i} dg_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial v_i} = g_i \frac{\partial}{\partial g_i}$$

$\langle n_k \rangle$ pada pers (51) menjadi

$$\langle n_k \rangle = g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \ln \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}$$

$$\langle n_k \rangle = \frac{\partial}{\partial v_k} \ln \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}$$

karena $T = \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}$ maka

$$\langle n_k \rangle = \frac{\partial}{\partial v_k} \ln T \qquad (51)$$

Asemble rata-rata n_k^2 adalah

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{\sum n_k^2 \Omega\{n_i\}}{\sum \Omega\{n_i\}} \qquad (52)$$

karena $g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \Omega\{n_i\} = n_k \Omega\{n_i\}$

maka $g_k^2 \frac{\partial^2}{\partial g_k} \Omega\{n_i\} = n_k^2\{n_i\}$

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{\sum g_k^2 \frac{\partial^2}{\partial g_k} \Omega\{n_i\}}{\sum \Omega\{n_i\}} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial v_k^2} \sum \Omega\{n_i\}}{\sum \Omega\{n_i\}}$$

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial v_k^2} \quad \ldots (53)$$

catatan $= \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial v_k}\right) = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v_k}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial v_k}\right) + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial v_k^2}$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial v_k^2} = \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial v_k}\right) + \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v_k}\right)^2 \quad (54)$$

Subsitusi
persamaan (54) ke pers (53)

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial v_k}\right) + \frac{1}{I^2}\left(\frac{\partial I}{\partial v_k}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{\partial \ln I}{\partial v_k}\right) + \left(\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial v_k}\right)^2$$

$$\langle n_k \rangle^2 = \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{\partial \ln I}{\partial v_k}\right) + \left(\frac{\partial \ln I}{\partial v_k}\right)^2 \quad (55)$$

Sudah diperoleh pers (51)
bahwa $\langle n_k \rangle = \frac{\partial}{\partial v_k} \ln I$ sehingga $\langle n_k^2 \rangle$

menjadi

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial v_k}\langle n_k \rangle + \langle n_k \rangle^2 \quad (56)$$

Fluktuasi rata-rata kuadrat dari n_k menjadi

$$\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2 = \frac{\partial}{\partial v_k}\langle n_k \rangle \quad (57)$$

bagian kiri pers (57) dapat juga ditulis
menjadi

$$\langle [n_k - \langle n_k \rangle]^2 \rangle$$

asumsikan bahwa

$$\langle n_k \rangle \simeq \bar{n}_k = g_k c e^{-\beta \epsilon_k} \quad (58)$$

maka

$$g_k \frac{\partial}{\partial g_k}\langle n_k \rangle = g_k c e^{-\beta \epsilon_k} = \langle n_k \rangle \quad (59)$$

Fluktuasi rata-rata kuadrat menjadi

$$\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2 = \langle n_k \rangle$$