

第一章 信号分析与处理技术基础

在生产和科学试验中,常常需要了解被测对象的各种物理参数的大小和变化情况,反映研究对象的状态或运动特征的这些物理量称为信号。信号中的有用信息是人们认识客观事物内在规律、研究事物之间相互关系、预测事物发展趋势的依据。研究从信号中提取有用信息的方法和手段称为信号分析,它是现代测试系统的一个组成部分,也是设计测试系统的依据。本章主要介绍频谱分析、相关分析、功率谱分析和数字信号处理的基本概念与应用,介绍信号频带宽度的确定方法,为正确选用和设计动态测试仪器提供科学依据。

第一节 信号的分类及描述

一、信号的分类

一般信号都是随时间变化的时间函数,因此,可以根据信号随时间变化的规律将信号分为确定性信号和随机信号。

1. 确定性信号

它是可以用精确的数学关系式来表达的信号,给定一个时间值就可以得到一个确定的相应函数值。确定性信号根据它的波形是否有规律地重复分为周期性信号和非周期性信号。

周期性信号是按一定周期 T 重复的信号。简谐信号是最简单的周期信号,任何周期信号都可以看作是简谐信号的合成。

非周期信号没有重复周期,非周期信号包括瞬态信号和准周期信号两类。

准周期信号是由有限个简谐信号合成的一种非周期信号。设信号 $x(t)$ 由两个简谐信号合成,即

$$x(t) = A \sin 2t + B \sin(\sqrt{3}t + \theta)$$

两个简谐信号的角频率分别为 2 和 $\sqrt{3}$, 它们的周期分别为 π 和 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 。由于两个周期没有最小公倍数,或者说由于两个角频率的比值为无理数,它们之间没有一个共同的基本周期,所以信号 $x(t)$ 是非周期的,但它又是由简谐信号合成的,故称之为准周期信号。

确定性信号也可以按照它的取值情况分为连续信号和离散信号。连续信号是指在某一时间间隔内,信号的幅值可以取连续范围内的任意数值,这样的连续时间函数所表示的信号就是连续信号,常见的信号大都属于这一类,如图 1-1 中 a)、b)、c)、d)、e) 所示。离散信号的离散性可以表现在时间或幅值上,例如每天中午测量一次室温,则测量记录的温度信号就是离散信号,而经过测试系统量化后的温度信号就是在时间和幅值上都离散的信号,又称为数字信号。

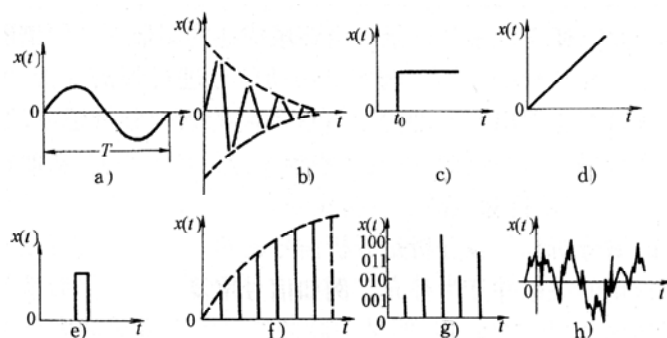


图 1-1 各种信号波形图

a)简谐信号；b)衰减振荡信号；c)阶跃信号；d)斜波信号

e)脉冲信号；f)时间离散信号；g)数字信号；h)随机信号

2. 随机信号

不能用精确的数学关系式来表达，也无法确切地预测未来任何瞬间的精确值的信号，称为随机信号。对于随机信号虽然也可以建立某些数学模型进行分析和预测，但只能是在概率统计意义上的近似描述，这种数学模型称为统计模型。

确定性信号和随机信号之间并不是截然分开的，通常确定性信号也包含着一定的随机成分，而在一定的时间内，随机信号也会以某种确定的方式表现出来。判断一个信号是确定性的还是随机的，通常是以通过试验能否重复产生该信号为依据。如果一个试验重复多次，得到的信号相同（在试验允许误差范围内），则可认为是确定性信号，否则为随机信号。

二、信号的描述

任何一个信号都可以用时域和频域进行描述。表征信号的幅值随时间的变化规律称信号的时域描述；而频域描述是研究信号的频率结构，即组成信号的各频率分量的幅值及相位的信息，例如周期性方波可以看成是由一系列频率不同的正弦波叠加而成。

从时域图形中可以知道信号的周期、峰值和平均值等，可以反映信号变化的快慢和波动情况。用时域描述比较直观、形象，便于观察和记录。由频域描述的图形——频谱图中可以研究其频率结构。例如对振动信号进行频谱分析，可能从频谱图中看出该振动是由哪些不同的频率分量组成的，各频率分量所占的比例，以及哪些频率分量是主要的，从而找出振动源，以便排除或减小有害振动。

时域分析和频域分析是分析信号的两个方面，二者之间有着密切的关系并互为补充。例如信号重复周期的倒数就是基波频率，即 $1/T = f_0$ ；时域中脉冲信号的上升时间和脉宽决定了频域中组成脉冲信号的高频分量的多少，所以说时域描述和频域描述是一个信号在不同域中的两种表示方法。

第二节 周期信号的频谱

一、周期信号的分解

正弦信号是简谐信号，而锯齿波、三角波、方波等都是非简谐信号。简谐信号是最简单的和最重要的周期信号。任意一个周期信号都可以用简谐信号来表达，两者之间联系的桥梁

是傅里叶级数，所以傅里叶级数是周期信号分析的理论基础。

任何一个周期信号在满足狄里赫利条件时，都可以展开成傅里叶级数。

1. 三角傅里叶级数

周期信号 $x(t)$ 的三角傅里叶级数表达式为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-1)$$

式中： ω_0 ——基波角频率， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ， T 为信号周期；

a_0 、 a_n 、 b_n ——傅里叶系数， n 为正整数。

傅里叶系数可由式 (1-2) 计算

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

a_n 、 b_n 可利用下列三角函数集的正交特性来求得

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \int_0^{T_0} \sin n\omega_0 t \, dt = 0 \\ \textcircled{2} \quad & \int_0^{T_0} \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \\ \textcircled{3} \quad & \int_0^{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = 0 \quad (m \neq n) \\ & = \frac{T_0}{2} \quad (m = n) \\ \textcircled{4} \quad & \int_0^{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = 0 \quad (m \neq n) \\ & = \frac{T_0}{2} \quad (m = n) \\ \textcircled{5} \quad & \int_0^{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = 0 \quad (\text{所有 } m, n) \end{aligned}$$

上列各积分式的上下限可以取任意一个周期，即可取 $t_0 \sim t_0 + T$ (t_0 是任一确定时刻) 也可取 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ 。

将式 (1-1) 中正弦、余弦项合并，可得

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad (1-3)$$

式中：

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi = \text{tg}^{-1} \frac{-b_n}{a_n}$$

式 (1-1) 和式 (1-3) 表明周期信号可以用一个常值分量 a_0 和无限多个谐波分量之和表示，其中 $A_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1)$ 为一次谐波分量(或称基波)。基波的频率与信号的频率相同，高次

谐波的频率为基频的整数倍。高次谐波又可分为奇次谐波(n 为奇数)和偶次谐波(n 为偶数)。这种把一个周期信号 $x(t)$ 分解为一个直流分量 a_0 和无数谐波分量之和的方法称为谐波分析法或傅里叶分析法。

2. 复数傅里叶级数

傅里叶级数也可以写成复指数函数形式。根据欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (1-4)$$

得

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ \sin \omega t &= \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \end{aligned}$$

代入式(1-1)得

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{-j}{2}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ C_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{aligned}$$

可得

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \quad (1-5)$$

如果把式(1-5)第三项中 n 值取为从-1到 $-\infty$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

代入式(1-5)并合并各项则得

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1-6)$$

式(1-6)为傅里叶级数的复数形式。该式表明: 周期信号可分解成无限多个指数分量之和。由欧拉公式可知, 简谐信号可以用两项分别具有正负指数的项相加表示。因此, 在复指数函数表示法中周期信号就由一组具有正负指数的函数组成。

将 a_n, b_n 代入式(1-6)中得

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1-7)$$

C_n 称为复数傅里叶系数, 它的模和相角表示 n 次谐波的振幅和相位, 即

$$\left. \begin{aligned} |C_n| &= \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{A_n}{2} \\ \varphi_n &= \arctg \frac{-b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

由于式(1-6)中谐波次数 n 值可正可负,因此势必会有 $(-\omega)$ 出现。这是因为从实数形式的傅里叶级数过渡到复数形式的傅里叶级数,用复数表示正弦和余弦,所以 $(-\omega)$ 完全是由于用复数表示所引起的,无实际意义。

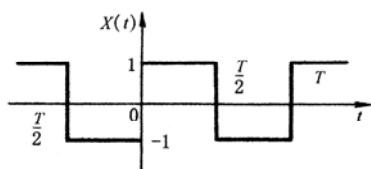


图 1-2 方波信号波形

例 1-1: 图 1-2 所示方波的函数表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$

试将其分解为傅里叶级数。

解: 因为函数波形对称原点,所以是一个奇函数,因而 $a_0 = a_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= 2 \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ 为奇数} \end{cases} \\ x(t) &= \frac{4}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{4}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \dots \\ &= \frac{4}{\pi} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{4}{3\pi} \cos(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ &\quad + \frac{4}{5\pi} \cos(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + \dots \end{aligned} \quad (1-9)$$

二、周期信号的频谱

由上述可知,利用傅里叶级数能确切地表达信号分解的结果,但不直观。为了既简单又明了地表示一个信号中包含了哪些频率分量及各分量占的比例大小,通常用频谱图来表示。

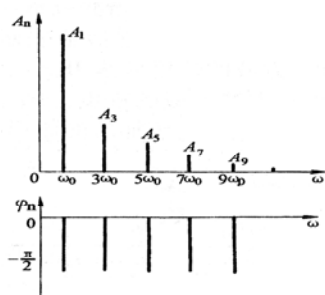


图 1-3 周期性方波频谱图

以频率(或圆频率)为横坐标,幅值 A_n 或相角 φ_n 为纵坐标所作的图称为频谱图。频谱图通常包括幅频图($A_n - \omega$ 图)、相频谱图($\varphi_n - \omega$ 图)两部分,图 1-3 为周期性方波的频谱图。图中的线段称为谱线,每条谱线代表一个谐波分量。由于方波的偶次谐波幅值为零,所以图中只有奇次谐波。

信号各谐波分量的相角 φ_n 与信号在时间轴上的位置

有关。将信号沿时间轴移动将引起相角 φ_n 的变化，但各谐波分量相对角的差值不变。例如方波的各谐波相位角 φ_n 可以是零，也可能是 $\frac{\pi}{2}$ 或其它值，但它们的相位角相等，其相位谱由一组等高的谱线组成。

由频谱图可以看出周期信号的频谱具有如下几个特点：

- (1) 频谱是由不连续的谱线组成，每条谱线代表一个谐波分量，这种频谱称离散频谱。
- (2) 谱线之间的间隔等于基波频率 ω_0 的整数倍。即频谱中的每一条谱线只能出现在基波频率 ω_0 的整数倍上，各谐波的频率 $n\omega_0$ 都是基波频率的整数倍。
- (3) 工程中常见的周期信号，其谐波幅度总的趋势是随谐波次数的增高而减小的。

从理论上讲，一个周期信号可以利用傅里叶级数分解成无穷多个或有限个谐波分量。但实际应用中不可能取无穷多项，只能取有限项近似地表示。这就不可避免地带来误差。例如，方波的傅里叶展开式为式 (1-9)，图 1-4 为谐波项数的多少与方波近似的程度。

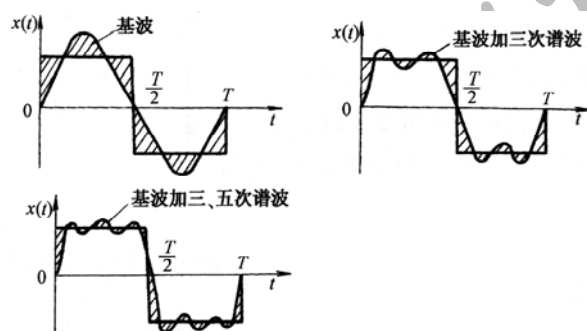


图 1-4 谐波项数与方波近似程度

图中阴影线部分为误差，可以看出谐波分量越多，叠加后的波形越接近实际信号的波形。

因为谐波的幅度总趋势是随谐波次数的增高而减少的，信号的能量主要集中在低频分量，所以谐波次数过高的那些分量所占能量很少，高阶分量可忽略不计。那么应当取多少项合适呢？工程上提出了一个信号频带宽度的概念。信号频宽的大小与允许误差的大小有关，通常把频谱中幅值下降到最大幅值的 $1/10$ 时所对应的频率作为信号的频宽，称为 $1/10$ 法则。

信号的频宽也可以根据信号的时域波形粗略地确定。表 1-1 为常见周期信号的波形及其频带宽度。可以看出，对于有突跳的信号（如序号为 1、3 的波形），其频带宽度较宽，可取其基频的 10 倍为频宽，对于无突跳的信号（如序号为 2、4 的波形），信号变化较缓，频宽较窄，可取基频的 3 倍为频宽。

常见周期信号的波形及其频宽

表 1-1

序号	1	2	3	
波形				
频宽	$10\omega_c$	$3\omega_0$	$10\omega_0$	$3\omega_0$

在选择测量仪器时，测量仪器的工作频率范围必须大于被测信号的频宽，否则将会引起信号失真，造成较大的测量误差。因此，在设计或选用测试仪器前必须了解被测信号的频带宽度。

三、周期信号的强度

周期信号的强度用其峰值、均值、有效值和平均功率来表述，如图 1-5 所示。

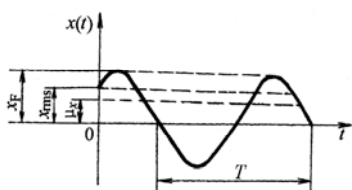


图 1-5 周期信号的强度表示

1. 峰值

$$x_F = |x(t)|_{\max} \quad (1-10)$$

即信号的最大瞬时值。

2. 均值

$$\mu_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-11)$$

为信号的常值分量，表示信号的静态分量，反映了信号 $x(t)$ 在一个周期内的平均值。

3. 有效值（或均方根值）

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1-12)$$

为信号的有效值（均方根值），它反映了信号的功率大小。

4. 平均功率（或均方值）

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1-13)$$

为信号的均方值，表示信号能量的大小，是信号强度方面的基本描述。

第三节 非周期信号的频谱

一、频谱密度函数

当周期信号的周期趋于无限大时，周期信号将演变成非周期信号。因此，非周期信号的频谱也可由周期信号的频谱导出。

如前所述，周期信号的指数函数表达式为式（1-6）。当周期 $T \rightarrow \infty$ 时， $n\omega_0 \rightarrow \omega$ ， $\omega_0 \rightarrow \Delta\omega$ ， $\Delta\omega$ 为无穷小量，即 $n\omega_0$ 的取值间隔为无穷小，所以 $n\omega_0$ 由离散量变成连续量，周期信号变为非周期信号。现用 ω 代替 $n\omega_0$ ，则式（1-6）可写成

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \Delta\omega$$

当 $T \rightarrow \infty$ ， $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ ， $\sum \rightarrow \int$ ，则有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

将方括号中的部分用符号 $X(\omega)$ 表示，则有

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-14)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-15)$$

周期信号的频谱是离散的，谱线间的间隔为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。当信号周期趋于无限大时，周期信号就演变为非周期性信号；谱线间的间隔趋于无限小量 $d\omega$ ，非连续变量 $n\omega_0$ 变成连续变

量 ω , T 用 $d\omega$ 代替, 求和运算变成求积分运算。

式 (1-14) 称为傅里叶变换 (FF), 式 (1-15) 称为傅里叶反变换 (FFT), 二者合称傅里叶变换对。傅里叶变换是将时域函数变换为频域函数。 $X(\omega)$ 表示角频率为 ω 处的单位频带宽度内频率分量的幅值与相位, 称为函数 $x(t)$ 的频谱密度函数 (或简称频谱函数)。

频谱密度函数为复数, 复数形式为

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \quad \varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}$$

式中: $|X(\omega)|$ ——幅频谱函数;

$\varphi(\omega)$ ——相频谱函数;

$X_R(\omega)$ 、 $X_I(\omega)$ ——分别为频谱密度函数的实部、虚部。

总之, 非周期信号的频谱可由傅里叶变换得到, 它是频率的连续函数, 故频谱为连续谱。

例 1-2: 求如图 1-6 所示矩形脉冲函数的频谱

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

解: 根据傅里叶变换, 其频谱函数为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-\tau}^{\tau} = \frac{1}{j\omega} [e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}] = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{2j} (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin \omega\tau = 2\tau \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} \end{aligned}$$

其频谱函数的虚部为零, 频谱函数为实函数, 故相频谱为零, 幅频谱图如图 1-7 所示。

当 $\omega=0$ 时, $X(\omega)$ 取得最大值, 即

$$X(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2\tau \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} = 2\tau$$

当 $\omega = \frac{n\pi}{\tau} (n=1, 2, \dots)$ 时, $X(\omega) = 0$ 。

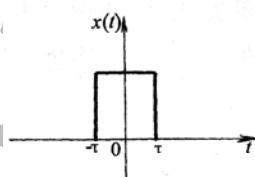


图 1-6 矩形脉冲函数

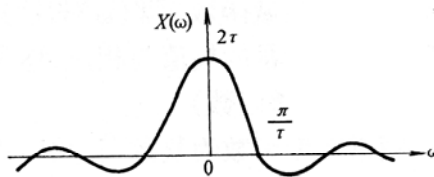


图 1-7 矩形脉冲频谱

由矩形单脉冲函数的频谱可以得出如下重要结论:

- (1) 如果脉冲宽度 τ 很大, 信号的能量将大部分集中在 $\omega = 0$ 的附近 [图 1-8a)]。
- (2) 当脉冲宽度不断增大, 在极限情况下, $\tau \rightarrow \infty$, 脉冲信号变成直流信号, 频谱函数成为 $\omega = 0$ 的一条直线 [图 1-8b)]。
- (3) 当脉冲宽度 τ 减少时, 频谱中的高频分量增加, 信号频带宽度增大 [图 1-8c)]。
- (4) 对于无限窄的脉冲, 即当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 频谱函数 $X(\omega)$ 变成一条平行于 ω 轴的直线,

并扩展到全部频率范围，信号的频带宽度趋于无限大[图 1-8d)]。这就是为什么可以采用冲击试验来代替正弦试验的原因。

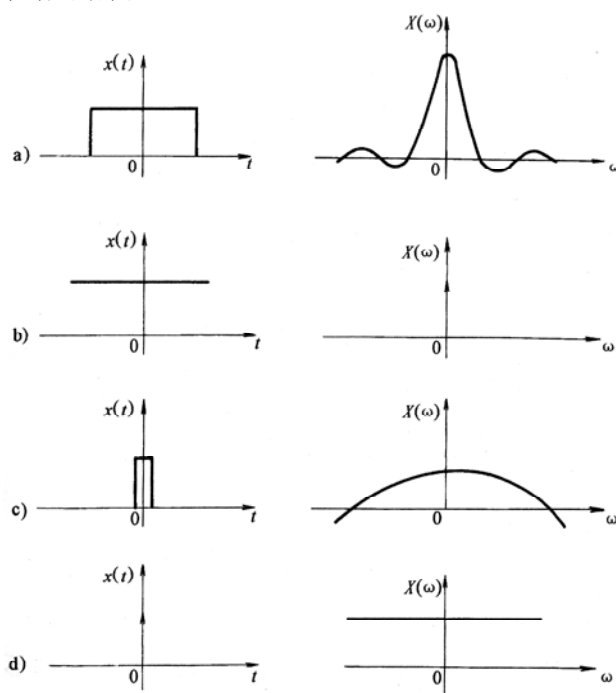


图 1-8 脉冲宽度与频谱的关系

对非周期信号来说，信号频宽可以取频谱图中第一次过零点的频率，如例 1-7 所示的矩形脉冲函数，其频宽的角频率为 $\frac{\pi}{\tau}$ (rad/s)，或 $1/2\tau$ (Hz)。因此，在选择测量仪器时，如果被测信号是一个窄脉冲，那么测量仪器就必须有较宽的工作频率范围。

二、傅里叶变换的主要性质

傅里叶变换是信号分析的一种重要数学工具，为了进一步认识信号的时域描述与频率域描述之间的关系，下面将简单介绍一下傅里叶变换的主要性质。

1. 线性叠加性

若 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的傅里叶变换分别为 $X_1(\omega)$ ， $X_2(\omega)$ ，则

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{FT} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$

2. 对称性

若 $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$

则

$$X(t) \xrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$$

对称性表明：若时域信号 $X(t)$ 与频谱函数 $X(\omega)$ 有相同波形，则 $X(t)$ 的频谱为 $2\pi x(-\omega)$ ，它与 $x(t)$ 有相似的波形。

3. 时延特性

若 $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$

则

$$x(t - t_0) \xrightarrow{FT} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

时延特性表明：时域信号沿时间轴延迟时间 t_0 ，则在频域中乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$ ，即减小一

个相位角 ωt_0 ，而幅频特性不变。

4. 频移特性

若 $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$

则 $x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} X(\omega \mp \omega_0)$

频移特性表明：若时域信号 $x(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ ，则对应的频谱 $X(\omega)$ 将沿频率轴平移 ω_0 。这种频率搬移过程，在电子技术中就是调幅过程。

例如：频移的频率左、右移 f_0 后，原函数将乘以 $e^{+j\omega_0 t}$ 和 $e^{-j\omega_0 t}$ ， ω_0 为 $2\pi f_0$ 。如果有 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ ，则有频率左移和频率右移：

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f - f_0)$$

$$x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f + f_0)$$

频率左、右移后将导致时间函数 $x(t)$ 与一余弦函数相乘，即

$$x(t)\cos 2\pi f_0 t \rightleftharpoons [X(f - f_0) + X(f + f_0)]/2$$

$$x(t)\sin 2\pi f_0 t \rightleftharpoons [X(f - f_0) - X(f + f_0)]/2j$$

从频域角度看，调幅信号的频谱是原有信号 $x(t)$ 的频谱在频域中的位移。如果调制频率 f_0 选择过小，将导致频谱的混叠现象。

5. 时间尺度特性（或称比例特性）

若 $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$

则 $x(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

时间尺度特性表明：信号在时间域压缩 a 倍（ $a < 1$ ）时，则在频域中频带加宽，幅值压缩 $1/a$ 倍；反之信号在时域扩展时（ $a > 1$ ），在频域中将引起频带变窄，但幅值增高。例如在处理低频信号时，利用磁带机慢录快放的方式，使时间尺度压缩，使频带展宽，以便提高分析仪器对低频信号的频率分辨率。由于频带加宽，要求后续处理设备的通频带相应增大，否则会造成失真。

第四节 随机信号

随机信号是不能用精确的数学关系式描述的信号，但它的变动服从统计规律，可以用概率统计特性来描述。对随机信号按时间历程所作的各次长时间观测记录称为样本函数，记作 $x_i(t)$ 。在同样条件下，互不相同的许多样本函数的集合称为总体，记作

$$|x(t)| = |x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots|$$

$|x(t)|$ 就表示一个随机过程。如果随机信号的统计参数不随时间变化，则称平稳随机过程，反之称非平稳随机过程。在平稳随机过程中，若任一单个样本函数的时间平均统计特征等于该过程的集合平均统计特征，这样的平稳随机过程叫各态历经(遍历性)随机过程。工程上遇到的随机信号大都可以当作各态历经随机过程来处理。

随机信号常用以下几个统计参数来描述。

一、均值、方差、均方值

工程上常把随机信号看成是由一个不随时间变化的静态分量(即直流分量)和随时间变化的动态分量两部分组成的,静态分量可用均值表示

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-16)$$

式中: $x(t)$ ——样本函数;

T ——观测时间。

动态分量可用方差表示,即

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1-17)$$

方差的平方根叫标准差 σ_x ,在误差分析中它是一个很重要的参数。

均方值描述随机信号的强度,即

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1-18)$$

均方值的平方根称为均方根值 x_{rms} 。

均值、方差和均方值的相互关系是

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (1-19)$$

在实际测试工作中,要获得观察时间 T 为无限长的样本函数是不可能实现的,因此以有限长度样本记录代之,这样计算的均值、方差和均方值都是估计值,用符号“ \wedge ”来区分,即 $\hat{\mu}_x$ 、 $\hat{\sigma}_x^2$ 、 $\hat{\psi}_x^2$ 。

二、概率密度函数

随机信号的概率密度函数是表示信号幅值落在某指定范围内的概率,用来表征随机信号幅值的统计特性。假定在记录时间 T 内,信号幅值落在区间 $(x, x + \Delta x)$ 内的时间长度分别为 $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$, 如图 1-9 所示。那么信号在该区间的概率为

$$q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots}{T}$$

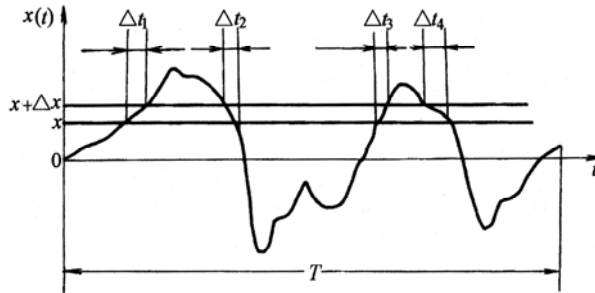


图 1-9 概率密度函数

显然概率 q 的大小与区间宽度 Δx 有关,定义概率密度函数为

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{q}{\Delta x} \quad (1-20)$$

不同的随机信号,其概率密度函数的图形不同,借此可以认识和区分各种不同的信号。

图 1-10 为常见随机信号及其概率密度函数图形。

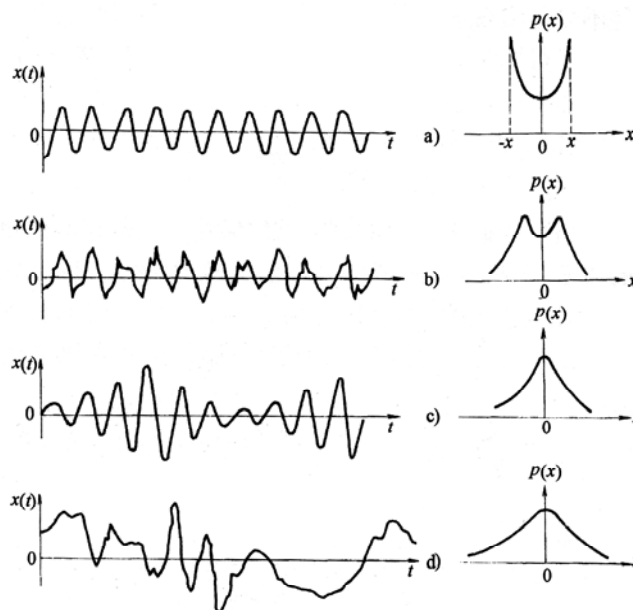


图 1-10 随机信号及其概率密度函数

a) 正弦信号（初始相角为随机量）；b) 正弦信号加随机噪声；c) 窄带随机信号；d) 宽带随机号

三、自相关函数与工程实际应用

自相关函数是信号在时域中特性的平均度量，它是描述信号在一个时刻的取值与另一个时刻取值的依赖关系，可以用下式表示

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1-21)$$

T 趋于无穷大时，该平均值将趋于零，这时自相关函数可用下式计算

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (1-22)$$

对于周期信号、积分平均时间 T 为信号周期

自相关函数就是信号 $x(t)$ 和它的时移信号 $x(t+\tau)$ 乘积的平均值，它是时移变量 τ 的函数。自相关函数不仅可以用于分析随机信号，也可以用于分析确定性信号，为了方便起见，我们以确定性信号为例说明自相关函数的一些基本性质。

例如信号 $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(\omega t + \theta) \cdot A \cos[\omega(t+\tau) + \theta] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^T \frac{A^2}{2} \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) dt + \int_0^T \frac{A^2}{2} \cos(-\omega\tau) dt \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (1-23)$$

若信号由两个频率与初相角不同的频率分量组成，即 $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$ ，则

$$R_{xx}(\omega) = \frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau + \frac{A_2^2}{2} \cos \omega_2 \tau$$

对于正弦信号，由于 $x(t) = A\sin(\omega t + \theta) = A\cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})$ ，其自相关函数仍为

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau$$

因此，自相关函数保留了原信号的频率成分，其频率不变，幅值等于原幅值平方的一半，即等于该频率分量的平均功率，但丢失了相角的信息。自相关函数总是由相位角为零的余弦函数组成。自相关函数具有如下主要性质：

(1) 自相关函数为偶函数， $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ ，其图形对称于纵轴，因此，不论时移方向是超前还是滞后（ τ 为正或负），函数值不变。

(2) 当 $\tau = 0$ 时，自相关函数具有最大值，且等于信号的均方值，即

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \psi_x^2 \quad (1-24)$$

(3) 周期信号的自相关函数仍为周期信号。

(4) 若随机信号中不含有周期成分，当 τ 趋于无限大时， $R_{xx}(\tau)$ 趋于信号均值的平方，即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \mu_x^2$$

实际工程应用中，常采用自相关系数 $\rho_{xx}(\tau)$ 来度量其相关程度，定义

$$\rho_{xx} = \frac{R_{xx}(\tau) - \mu_x^2}{\sigma_x^2} \quad (1-25)$$

当 $\tau = 0$ 时， $\rho_{xx}(0) = 1$ ，说明相关程度最大；当 $\tau = \infty$ 时， $\rho_{xx}(\infty) = 0$ ，说明信号 $x(t)$ 与 $x(t + \tau)$ 之间彼此无关。由于 $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$ ，所以有 $|\rho_{xx}(\tau)| \leq 1$ ， $\rho_{xx}(\tau)$ 值的大小表示信号相关性的强弱。

图 1-11 为典型的自相关函数图形。

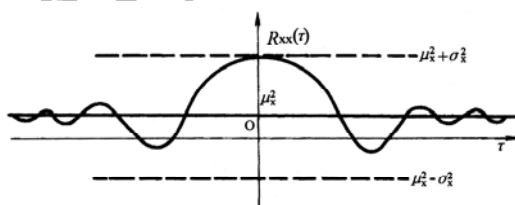


图 1-11 自相关函数的性质

实际测试工作中，经常会遇到噪声干扰问题。通常噪声是一个均值为零的随机信号，当时间位移 τ 很大时，噪声的自相关函数很快衰减到零。因此对既有随机成分又有周期成分的复杂信号，当时间位移 τ 足够大时，它的自相关函数中就只留下了周期信号的信息，所以利用自相关函数可以提取混淆在噪声中的周期信号。

四、自功率谱密度函数与工程实际应用

1. 定义

任何一个时域信号都可以用频域函数表达。自相关函数是一个时域函数，它的傅里叶变换称自功率谱密度函数，简称自功率谱或自谱，用符号 $S_{xx}(\omega)$ 表示。它表示单位频带宽度上的平均功率。

随机信号的自相关函数与功率谱密度函数组成傅里叶变换对，即

$$\left. \begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

由于 $R_{xx}(\tau)$ 为实偶函数，所以 $S_{xx}(\omega)$ 也是实偶函数，因此，式 (1-26) 又可写成

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (1-27)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_{xx}(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (1-28)$$

若注意到前述自相关函数的特性 (2)，在式 (1-26) 中令 $\tau = 0$ ，则可得

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \psi_x^2 \quad (1-29)$$

$S_{xx}(\omega)$ 与频率轴所包围的面积就是信号的平均功率。因此 $S_{xx}(\omega)$ 给出了信号中各频率分量的功率沿频率轴的分布，所以称 $S_{xx}(\omega)$ 为功率谱密度。

$S_{xx}(\omega)$ 是在 $(-\infty \sim +\infty)$ 频率范围内的功率谱，所以又称为双边谱。但在实际应用中频率 ω 是在 $(0 \sim +\infty)$ 范围变化，考虑到能量等效，用单边功率谱 $G_{xx}(\omega)$ 代替双边功率谱 $S_{xx}(\omega)$ 时，则有

$$G_{xx}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) \quad (1-30)$$

图 1-12 所示为单边谱与双边谱的关系。

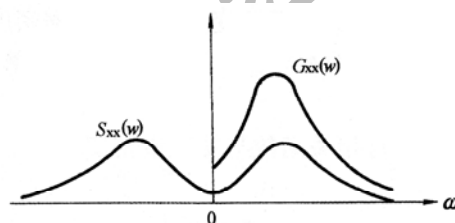


图 1-12 单边和双边功率谱

如果随机信号的功率谱密度函数在整个频率范围内保持常数，这种随机信号称为白噪声，而只在低频范围内保持常数的随机信号称为低通白噪声。图 1-13 为低通白噪声、正弦信号及其合成信号

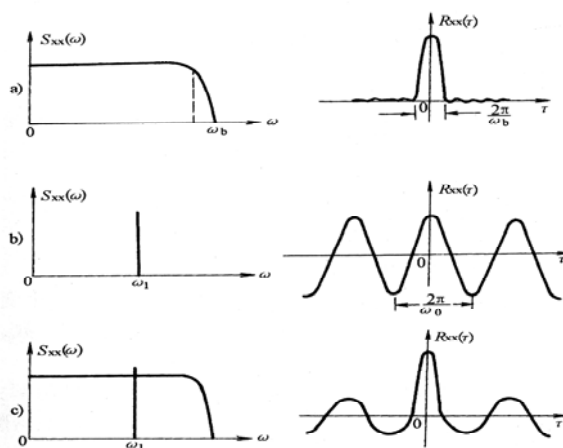


图 1-13 自相关函数与功率谱密度

a) 低通白噪声; b) 正弦波; c) 正弦波加低通白噪声

的功率谱密度与自相关函数图形。低通白噪声的自相关函数的宽度与噪声的带宽 ω_b 成反比, 频带越宽, 自相关函数越窄。

由图 1-13 可知, 正弦波为离散功率谱, 信号功率集中在单一频率 ω_1 上, 正弦波加随机噪声的功率谱, 可看作两者功率谱之和。

2. 自功率密度函数求解方法

通常可以采用对原始信号的相关函数进行傅里叶变换和直接对原始时间信号进行快速傅里叶变换 (即直接由傅里叶变换的平方求得)。

(1) 用相关函数计算自功率谱密度函数单边谱

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) = 2 \int_0^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1-31)$$

(2) 直接用傅里叶变换的平方计算功率谱密度函数
双边谱

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T} |X(f)|^2 \quad (1-32)$$

单边谱

$$G_{xx}(f) = \frac{2}{T} |X(f)|^2 \quad (1-33)$$

式中: T ——记录信号的长度;

$X(f)$ ——两端被截断后得到的有限长度 $x(t)$ 的傅里叶变换。

即

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1-34)$$

3. 自功率谱的基本特征

(1) 自功率谱因为包括实数和虚数在内的傅里叶变换的平方振幅值, 故成为没有虚部, 只有振幅信息的实函数。所以它只是一个非负的偶函数。

从物理意义方面讲, 它是反映单位频率的平均功率大小。自功率谱密度函数不会出现负值, 且无法反映相位信息。

(2) 平稳随机过程的功率谱密度函数与时间无关, 这是平稳随机过程本身的性质所决定的。在进行数据处理时不会因为选择的样本段不同, 而使自功率谱出现本质上的差别。由于样本段选择不同或样本长度不同出现的功率谱之间的差异只是统计的波动性引起的。因此, 平稳信号不一定非要有实时处理自功率谱的要求。处理时间的先后并不影响自功率谱的性质。但非平稳过程则不同, 从理论上讲它的频谱特性将随着时间的变化而改变, 不同时刻遵循不同的规律, 因此必须作实时的频谱分析, 用一连串变化的频谱图来描述非平稳信号。

(3) 均方根谱的物理特性: 在实际数据处理过程中有时采用等效的观点来反映随机过程的振幅谱。即所谓的均方根谱 $[G(R \cdot M \cdot S)(f)]$, 其数学表达式为:

$$\hat{G}(R \cdot M \cdot S)(f) = \sqrt{\hat{G}(f)} \quad (1-35)$$

因为它能等效的反映振幅特性，所以也称振幅谱。

4. 一般工程应用：

自功率谱密度 $S_{xx}(f)$ 为自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 的傅里叶变换，故 $S_{xx}(f)$ 包含着 $R_{xx}(\tau)$ 中的全部信息。

自功率谱密度 $S_{xx}(f)$ 反映信号的频域结构，这一点和幅值谱 $|X(f)|$ 相似，但是自功率谱密度所反映的是信号幅值的平方，因此其频域结构特征便为明显，如图 1-14 所示。

对于一个线性系统（图 1-15），若其输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，系统的频率响应函数为 $H(f)$ ，则

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (1-36)$$

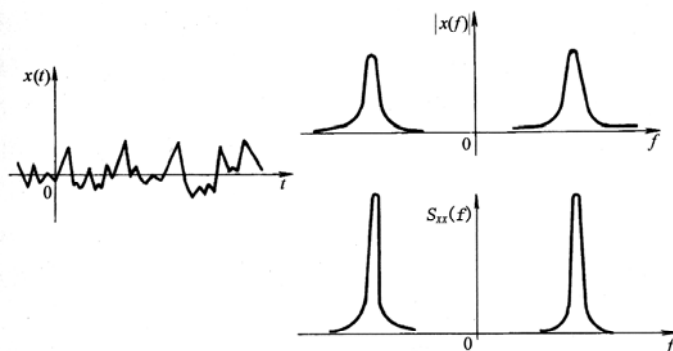


图 1-14 幅值谱与自功率谱

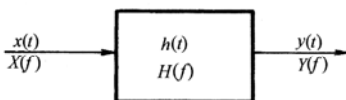


图 1-15 理想的单输入、单输出系统

不难证明，输入、输出的自功率谱密度与系统频率响应函数的关系如下：

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (1-37)$$

通过输入、输出自功率谱的分析，就能得出系统的幅频特性，但是在这样的谱分析中丢失了相位信息，因此不能得出系统的相频特性。

自相关分析可以有效地检测出信号中有无周期成分。但是，自相关函数能进行傅里叶变换的限制条件是它不能含有周期成分，这样要应用自功率谱密度来检测信号中的周期成分似乎会遇到障碍。周期信号的谱线是脉冲函数，在某特定频率上的能量是无限的。但是在实际处理时，我们只能处理有限长的信号，也就是要用矩形窗函数对信号进行截断，即对信号乘以矩形窗函数。矩形窗函数的频谱为 sinc 函数图形。两个函数时域的乘积对应于频域的卷积。因此截断后的周期函数其频谱已不再是脉冲函数，而具有窄带信号的特点，所以周期成分在实测的自功率谱密度图形中以有很陡峭峰值的形态而出现。自功率谱密度函数主要是用来建立信号频率结构，分析其频率组成和相应量大小，它为产品的鉴定和故障诊断从频域上提供依据，同时它与研究系统的传递特性有着重要关系。

随机信号的时域和频域特性可以用统计方法进行研究，其幅值特性用信号的均值、均方值和概率密度函数描述。信号的时域特性也可以用自相关的函数描述，频域特性用功率谱密度描述。

5. 自功率谱在汽车振动谱分析、人体工程等方面的应用

为了使采用各种方式得到的自功率谱能够符合客观实际,在具体进行频谱分析时应该注意选取采样周期 T 和采样点数 N 的大小;为了抑制功率泄漏,减少功率谱失真,应采用加窗处理的方法;在实际数据处理时,一般采样的样本段是有限长的,而得到的功率谱密度函数 $\hat{S}(f)$ 与样本段有关,这是统计变异性所决定的,为了减少误差,必须引进谱的平滑处理来进行修正。

(1) 采样周期 (T_s) 和采样点数的选取

对于连续信号 $x(t)$, 有两个参数来表征它的频率特点:

- ① f_c —— $x(t)$ 的截频或最高可达到的频率 (单位为 Hz);
- ② f_δ —— $x(t)$ 的频率分辨间隔 (单位为 Hz) 又称为频率分辨力。它取决于采样频率 f_s

和分析仪的样本容量 N 。一般 $N=1024$ 或 2048 , $f_\delta = \frac{f_s}{N}$ 。它的含义是: $x(t)$ 的振幅谱 $|x(f)|$ 取离散值观察时, 离散值的间隔不能大于 f_δ , 故当两个频率之差大于 f_δ 时, 对 $x(t)$ 所包含的这两个频率成分就可分辨开。当 $x(t)$ 的振幅谱 $|X(f)|$ 曲线波动比较大时, f_δ 就要取得小些, 当 $|X(f)|$ 曲线较平滑时, f_δ 可取得大些。其 T_s 和 N 选取原则是:

根据采样定理, 采样周期 T_s 应满足

$$T_s \leq \frac{1}{2f_c} \quad (1-38)$$

对离散信号 $x(n)$, 由有限离散傅里叶变换知, 有限离散频谱的频率间隔 f_δ 为 $1/NT_s$ 。因此, 要求 N 满足

$$N \geq 1/(T_s f_\delta) \quad (1-39)$$

把 (1-38) 式代入 (1-39) 式得

$$N \geq 2f_c / f_\delta \quad (1-40)$$

NT_s 表示进行频谱分析的信号记录长度。因此, 信号长度 NT_s 必须大于或等于 $1/f_\delta$, 故称

$$T_{\min} = 1/f_\delta \quad (1-41)$$

为最小记录时间。

以上 T_s 、 N 、 T_{\min} 是理论值, 在实际数据处理时, 要根据具体情况适当的增大或减小。

例如已知某汽车底盘某部位的振动信号 (在某一速度行驶时) 的截频 $f_c=125\text{Hz}$, 频率分辨间隔 $f_\delta=2\text{Hz}$ 。现要对该信号作频谱分析, 试求最小记录时间和采样周期、采样点数应满足什么条件。

根据式 (1-41) 式可求出:

$$\text{最小采样长度} \quad T_{\min} = \frac{1}{f_\delta} = \frac{1}{2} = 0.5(s);$$

$$\text{按式} \quad T_s \leq \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{250} = 4 \times 10^{-3}(s);$$

$$\text{按 (1-40)} \quad N \geq \frac{2f_c}{f_\delta} = \frac{250}{2} = 125。$$

下面给出某汽车在行进时底盘某部位上的振动信号做频谱分析的图例(汽车在某一速度行驶在水泥路面上)。图 1-16 为信号的时间历程及其振幅谱 $|X(f)|$ 的图形。

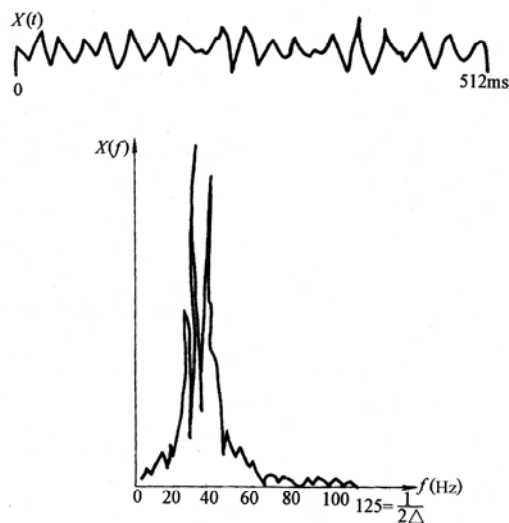


图 1-16 信号与振幅谱

图 1-16 中的 $x(t)$ 信号全长 512ms, 采样周期 $T_s=4\text{ms}$, 采样点数 $N=128$, 直接对离散信号做 FFT, 然后求出 $|X(f)|$ 。从 $|X(f)|$ 图可以看到该振动信号在频率等于 30Hz 左右时振幅最大。

(2) 功率泄漏与窗函数

① 功率泄漏

由于被处理的信号不会是无限长的, 实际上精确测定 $S(f)$ 或 $G(f)$ 是不可能的, 因此, 根据 $x(t)$ 与截断的样本信号 $x_r(t)$ 分别得到的 $S(f)$ 与 $\hat{S}(f)$ 将会有所出入。这种因信号截断而产生的附加问题称为功率泄漏。为了抑制功率泄漏, 减少功率谱失真, 采用了加窗处理的方法。

$$\begin{aligned} \text{例如原始信号} \quad x &= x(t) & 0 \leq t < +\infty \\ \text{截断的样本信号} \quad \hat{x}(t) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_1 \\ x(t) & t_1 \leq t < t_1 + T \\ 0 & t_1 + T < t < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

可以把截断样本信号 $\hat{x}(t)$ 看作是原始信号 $x(t)$ 与在 T 区间内起作用的单位矩形波信号 $w(t)$ 的乘积[如图 1-17a)所示]。由于矩形波 $w(t)$ 只允许信号在 T 区间内通过, 截止了其他部分的信号, 我们形象的将它称之为“矩形窗”, $w(t)$ 称窗函数。

为了分析方便, 先将时变信号作一坐标平移[如图 1-17b)所示]。这样可根据 (1-32) 式得出

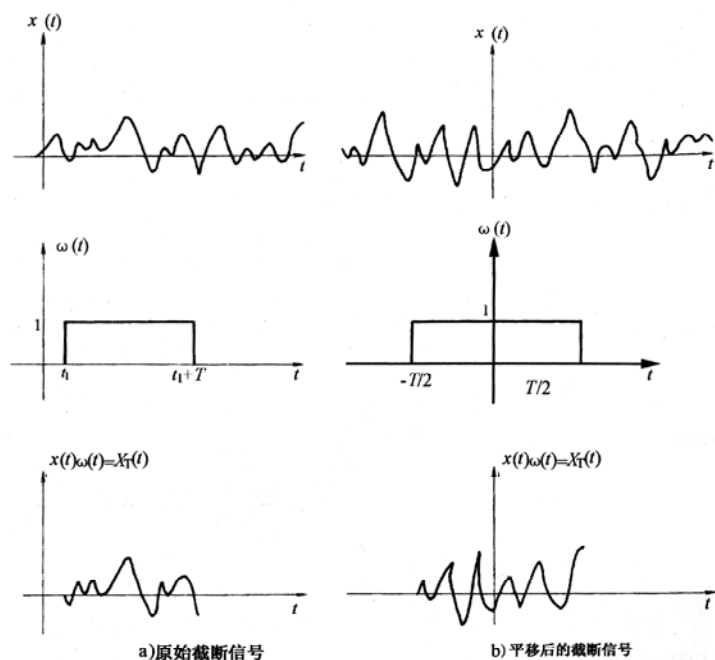


图 1-17 用矩形窗截断的样本信号

$$\hat{S}(f) = \frac{|\hat{X}(f)|^2}{T}$$

双边谱

这里 X_T 是 $x(t)$ 和矩窗 $W(t)$ 的乘积, 根据两个时域信号相乘对应其频域的卷积可得到:

$$\hat{X}(f) = X(f) * W(f)$$

所以截断样本信号的功率谱为

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{T} |X(f) * W(f)|^2 \quad (1-42)$$

从式 (1-42) 可以看出截断样本信号的功率谱函数 $\hat{S}(f)$ 与理想频谱 $X(f)$ 和所用的窗函数频谱 $W(f)$ 的卷积有关。同时也给我们一个启示, 可以通过不同的加窗处理就可以得到较理想、失真小的功率谱函数。

例如: $x(t)$ 是一个三角函数, 其截断信号 $W(t)$ 是一个矩形窗。数学表达式为:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos 2\pi f_0 \cdot t \\ w(t) &= \begin{cases} 0 & |t| > T_0 \\ 1 & |t| \leq T_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1-43)$$

它们的卷积运用图 1-18 所示的图解法来说明最为简单, 尤其是定性了解。

从上图可以看出有限宽矩形窗的引入, 使得正确的功率谱密度 (应该是 δ 脉冲形式) 向两侧扩散, 呈多峰形。这好比将应当集中在某一频率上的能量, 泄漏到两侧的频率上, 这就是所谓的功率泄漏现象。它的名称来源也正是从这一意义上给出的。而泄漏程度完全取决于窗函数的特性, 如果矩形窗宽度 $T \rightarrow \infty$, 则完全没有泄漏, 但实际上是不可能的。

②窗函数

在数据处理时, 因为只能用有限长的样本作为处理对象, 事实上就是对无限长的样本进行加矩形窗处理, 这样就造成了功率泄漏。但是由于功率泄漏取决于窗函数的特性, 我们就可以根据不同的时间历程采用不同的窗函数进行数据处理, 以达到减少功率泄漏现象的效

果。在使用矩形窗截断信号时，实际上对所取信号的时间

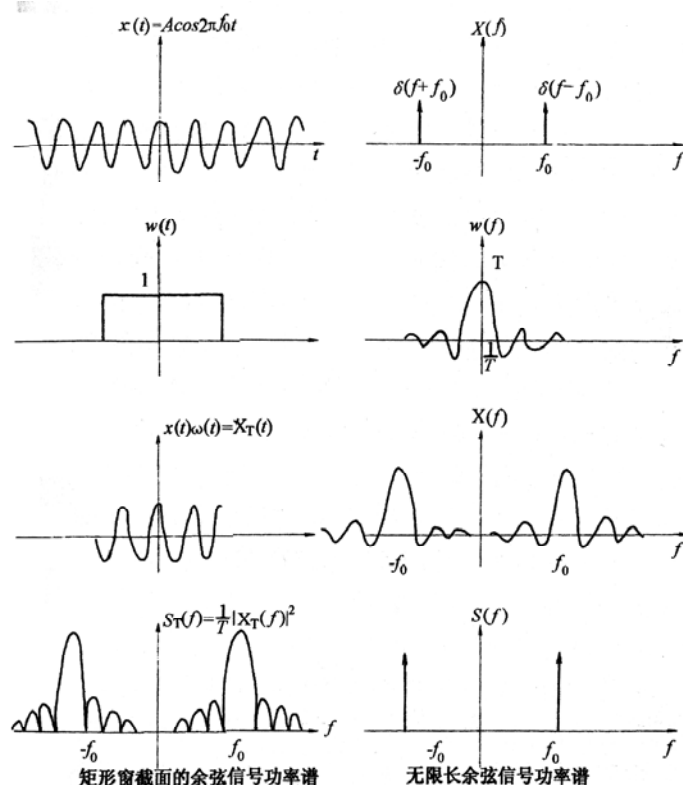


图 1-18 余弦信号有无矩形窗时功率谱比较

历程（如 $x(t)$ ）的幅值没有作任何修正。如果取其他形状（如三角形窗）的窗函数，就要对所取范围内的时间历程信号幅值进行修正，表面看原始信号波形被人为地失真了，但获得的功率谱却更加准确。

一般窗函数的频谱包括一个主瓣（表示频谱的主体）和一些旁瓣（落于主瓣的两边），为了减少功率泄漏，希望窗函数满足两个要求：首先主瓣尽可能地窄，且包围的面积尽可能的大；再就是最大的旁瓣相对主瓣应尽可能地小，且旁瓣所包围的面积尽可能地小。这两项要求不可能同时达到最佳，所以常用的窗函数是在上述两个因素之间取得适当的折中。描述窗函数的特性，一般采用幅频响应曲线来表征。

6. 功率谱的统计波动与平滑处理

上述加窗函数进行功率谱的数据处理主要是减少功率泄漏而引起的误差。但是由于统计而引起的功率谱波动也是误差的主要来源之一。也就是说，由某一样本段获得的样本功率谱 $\hat{S}(f)$ ，只是一个粗糙的估计值，且因样本段不同而功率谱将产生较大的离散性。只有对所得的估计谱进行修正处理，即进行所谓平滑处理，才能提高估计谱的可信程度。

在以后我们将给出功率谱参数的随机统计误差公式，其中标准化的均方误差公式为：

$$\varepsilon_r^2 \approx \frac{1}{\Delta f T} = \frac{1}{B_e T} \quad (1-44)$$

式中： B_e —— 分辨带宽。

T —— 在数据处理中截断信号的有限长度（即记录长度，以时间为单位表示）；

ε_r^2 —— 功率谱参数的统计误差；

Δf ——频率分辨间隔。

从上式可以看出要提高谱估计的精度，显然应该使 ε_r 比较小，也就是使 $B_e T$ 足够大。它与一般统计参数不同，一般随机变量的统计参数只要 T 足够大就能很好的逼近期望真值。但功率谱并不如此。因为 $B_e = \Delta f = 1/T$ ，因此随着 T 的增大， $B_e T$ 仍然不变，用简单增加记录时间的方法是不能改善 ε_r 值的，这就产生了使用所谓的“平滑处理”方法来减少 ε_r 。根据 (1-44) 式，要减少 ε_r 有下述三种方法：第一固定 B_e ，增大 T ，这就是分段平滑的基本依据；第二固定 T ，增大 B_e ，这就是频率平滑的基本依据；第三同时增大 B_e 和 T 值，这就是综合平滑技术。

(1) 分段平滑

具体方法是首先分别对 k 段不同样本记录作出粗糙估计谱。

$\hat{S}^{(i)}(f), i=1, 2, \dots, k$ ，若每段样本的长度为 T_a ，分辨带宽为 B'_e ，则 $\hat{S}^{(i)}(f)$ 的统计误差为：

$$\varepsilon_{ir} = \sqrt{\frac{1}{B'_e T_a}} \quad (1-45)$$

将 k 个粗糙谱在各个相应频率上作算术平均，就得到分段平滑后的估计谱：

$$\begin{aligned} \hat{S}(f) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{S}^{(i)}(f) \\ &= \frac{1}{k} [\hat{S}^{(1)}(f) + \hat{S}^{(2)}(f) + \dots + \hat{S}^{(k)}(f)] \end{aligned} \quad (1-46)$$

分段平滑处理的过程可参见图 1-19。这样得到的估计谱 $\hat{S}(f)$ ，分辨带宽仍为 B'_e ，但实际有效分析时间为 kT_a ，所以 $\hat{S}(f)$ 的统计误差为：

$$\varepsilon_r = \sqrt{\frac{1}{B'_e k T_a}} \quad (1-47)$$

平滑后的误差比为

$$\frac{\varepsilon_{ir}}{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{1}{B'_e T_a} / \frac{1}{B'_e k T_a}} = \sqrt{k} \quad (1-48)$$

这说明采用分段平滑后获得的功率谱估计精度将提高 \sqrt{k} 倍，平滑后的分辨带宽不变，仍为 B'_e 。

(2) 频率平滑

若对样本长度为 T 的时间历程，已求得该样本功率谱为 $\hat{S}(f)$ ，相应的分辨带宽为 B'_e ，它的统计误差为：

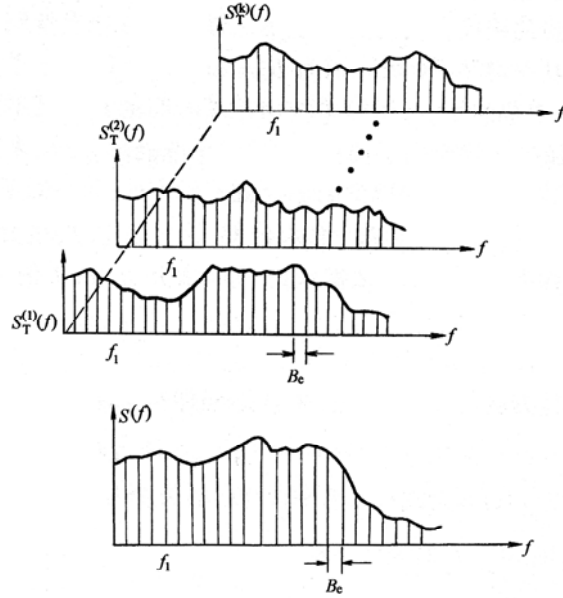


图 1-19 分段平滑示意图

$$\varepsilon_{\text{Tr}} = \sqrt{\frac{1}{B_e' T}}$$

将 $S_T(f)$ 图中相邻的 L 个频率分量（它们之间间距都为 $B_e' = \Delta f$ ）作为一组，求出它们的平均值作为该频率区域上的代表值，这样就使分辨带宽变成了 LB_e' ，见图 1-20 所示。最后获得的平滑谱 $\hat{S}(f)$ 或 $\hat{G}(f)$ 的相对统计误差为：

$$\varepsilon_r = \sqrt{\frac{1}{B_e' LT}} \quad (1-49)$$

平滑前后的误差比为

$$\frac{\varepsilon_{\text{Tr}}}{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{1}{B_e' T} / \frac{1}{B_e' LT}} = \sqrt{L} \quad (1-50)$$

上式说明经过频率平滑处理后的功率谱估计精度将提高 \sqrt{L} 倍，但降低了频率分辨力。从图 1-20 可以形象地看出波动较大的估计谱经过平滑处理后变成了比较平缓的平滑谱了。

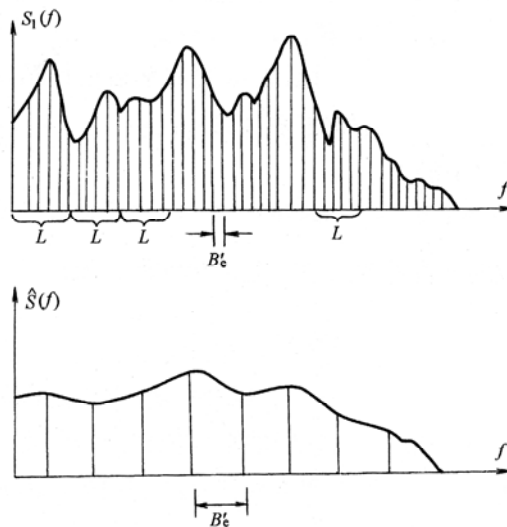


图 1-20 频率平滑示意图

(3) 综合平滑

综合平滑就是联合运用频率平滑与分段平滑处理，即先作出 k 段的估计谱 $\hat{S}^{(i)}(f)$ ，对它们进行分段平滑处理，然后将分段平均后得到的平滑谱再作 L 个频率分量上的频率平滑，这样最终得到的平滑谱将具有更高的统计精度。

综合平滑后的有效带宽为：

$$B_e = LB'_e$$

有效长度为： $T = KT_a$

相对统计误差为：

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\sqrt{B'_e L K T_a}}$$

与单个未经任何平滑处理的粗糙谱 $\hat{S}^{(i)}(f)$ 相比

$$\frac{\varepsilon_{ir}}{\varepsilon_r} = \frac{\sqrt{B'_e L K T_a}}{\sqrt{B'_e T_a}} = \sqrt{Lk}$$

功率谱估计精度提高了 \sqrt{LK} 倍，这种平滑处理既增加了有效分析长度 T ，又牺牲了频率分辨率。

例 1-3：已知功率谱的分辨带宽为 $B_e = 50\text{Hz}$ ，标准均方差 $\varepsilon_r = 0.2$ ，截止频率 $f_c = 10^4\text{Hz}$ 。试用分段平滑法估计谱并适当选取各有关参数。

解：按照为防止出现频混的采样定量，可选定采样间隔 Δt 为：

$$\Delta t = \frac{1}{2f_c} = 5 \times 10^{-5}\text{s}$$

每段的长度要求 T_a 为

$$T_a = \frac{1}{B_e} = \frac{5}{50} = 2 \times 10^{-2}\text{s}$$

根据精度要求，可以确定出分段数目：

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\sqrt{B_e K T_a}} = 0.2$$

把 B_e 及 T_a 代入上式后即可求出 $K = 25$ 。

总采样长度 $T = KT_a = 0.5\text{s}$ ；总的采样容量为：

$$N = \frac{T}{\Delta t} = 10^4 \text{ 个}$$

例 1-4：已知功率谱的标准均方差 $\varepsilon_r = 0.1$ ，截止率 $f_c = 2000\text{Hz}$ ，采样点数 $N = 5000$ ，用频率平滑方式处理，试确定各有关参数。

根据采样定律得：

$$\Delta t = \frac{1}{2f_c} = 2.5 \times 10^{-4}\text{s}$$

样本长度为：

$$T_a = N \cdot \Delta t = 1.25\text{s}$$

按精度要求，可以定出所需平滑的频率分量数目 L ：

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\sqrt{B'_e L T_a}} = 0.1$$

分别把 B'_e 及 T_a 的值代入上式即可求出 $L=100$ 。

最后取得平滑功率谱的有效分辨带宽为：

$$B_e = L B'_e = \frac{L}{T_a} = \frac{100}{1.25} = 80 \text{Hz}$$

未经平滑处理时的分辨带宽为：

$$B'_e = \frac{L}{T_a} = 0.8 \text{Hz}$$

7. 功率谱密度函数的数字处理方法

数字计算功率谱密度函数比较常用的两种方法：一是通过对平稳数据的自相关函数作傅氏变换后得到，为相关函数法；另一个是直接对数据序列进行快速傅里叶变换（FFT）得到，称为直接方法也叫 FFT 法。相关函数法是快速傅氏变换计算方法出现前计算谱密度的传统方法。

（1）相关函数法

用相关函数法计算自功率谱时，大致分两大步：即先计算自相关函数，再对自相关函数进行离散傅氏变换。其基本依据公式为：

$$\hat{S}_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1-51)$$

它的离散数学表达式为：

$$\begin{aligned} \hat{R}(\tau) \Rightarrow R_N(m) &= \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m) \\ 0 \leq m \leq N-1 \end{aligned} \quad (1-52)$$

$$\hat{S}_{xx}(f) \Rightarrow S_N(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{+(N-1)} R_N(m) e^{-jm\omega} \quad (1-53)$$

式中 N 是采样序号， m 是相关滞后序号。这种直接用（1-52）式求出相关函数后再作离散傅里叶变换来求 $\hat{S}_{xx}(f)$ 的方法，运算量比较大。为了提高数据处理速度，可先用 FFT 算法快速算得自相关函数，再用一次 FFT 运算获得其功率谱。

（2）直接傅里叶变换法（亦称周期图法）求功率谱

它是用平稳随机信号序列本身的傅里叶变换后取其幅频特性的平方作为功率谱密度函数的估计。数学表达式为：

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

它的离散表达式为：

$$X_T(f) \Rightarrow X_n(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad (1-54)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\hat{S}_{xx}(f) \Rightarrow S_N(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \right|^2 \quad (1-55)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

式中 $x(n)$ 是加时间窗 $\omega(t)$ 以后得到的随机信号序列。

在数字信号处理时，用 FFT 算法计算功率谱一般按下列步骤进行：

①取 $N = 2^m$ (m 是大于 1 的整数)，这是计算机在数据处理时所要求的（主要是为了便于计算机的运算）。为此，可将原始数据截去一段或增加一些零值，使数据序列长度为 $N = 2^m$ 。

②采用良好的窗函数（主叶窄而高，旁瓣振荡较小）对原始数据序列进行修正，既能减少泄漏效应又可平滑波形的随机起伏。

③用 FFT 法计算数据序列的离散傅里叶变换[即应用式 (1-52) 进行运算]。

④用式 (1-51) 计算其功率谱。

⑤由于采用了窗函数对原始数据进行了修正，因此，需要采用比例因子再修正这些功率谱的估计值。

快速傅里叶变换频谱分析仪通常做成多通道的，这样不但可以同时多个信号进行频谱分析，而且可以测量各个信号之间的相互关系。例如可测量信号之间的互相关函数、交叉频谱、相干函数等。

8. 功率谱分析在汽车工程中的应用

功率谱分析在汽车工程中的应用是非常广泛的，这里仅列举一些主要应用，如用于分析振动或噪音的频率成分和结构，为设计与改进动态系统性能提供基本依据；例如车辆平顺性测量、发动机谐振频率的测定以及驾驶室内噪声分析等等。

(1) 较先进的发动机抗爆震控制系统。它是用检测发动机爆震时产生振动加速度信号的频谱及持续时间的长短来判别是否发生爆震。我们知道爆震对发动机危害较大，在对某些发动机进行性能改进时往往受到爆震的限制而不能实现。由于爆震要求将点火提前角推迟，这样会使燃料经济性变坏。为此，就要加装抗爆震装置。例如，国外对某一类型的发动机试验结果表明，当检测到具有一定能量且加速度信号频率在 5.2kHz，持续时间在 3ms 以上时，就确知发生了爆震。当探测到爆震信号后，以微机组成的控制系统向点火装置发出指令，使点火角推迟，直到爆震消失为止，经过一定的持续时间，再恢复原点火角。若还有爆震出现就再度推迟。有了这样的系统不但可以减少油耗，而且可以降低对燃料辛烷值的要求 3~7 个单位。

(2) 汽车行驶平稳性的研究。将加速度传感器分别放在汽车的前后桥上，以一定的车速通过规定路段，测量出前后桥上的振动加速度。传感器信号经放大等处理后记录在磁带上，然后用 FFT 分析仪进行频谱分析，其结果表示在图 1-21 上。

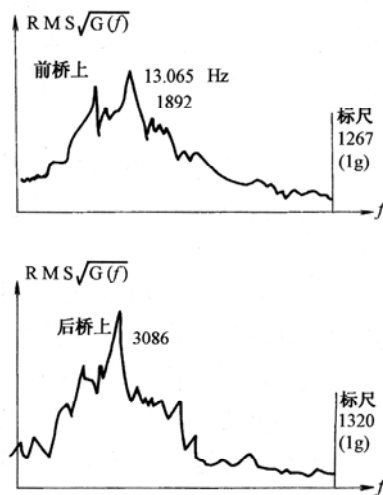


图 1-21 车桥上振动加速度的功率谱

图中给出的纵坐标是均方根谱（RMS）数值，将它平方后可以获得单边功率谱 $G(f)$ 。借助于标尺高度可以将各个频率的数字转换为物理幅值。如前桥上 $f=13.065\text{Hz}$ 处的均方根密度为 $\frac{1829}{1267}=1.4\text{g/Hz}$ 。图 1-21 清楚地反映了汽车振动加速度的频率分布情况以及各频率处的谱密度大小。

（3）功率谱可以反映出各频率区域上的振动能量与振幅，因而决定了载荷谱，这对研究强度和寿命问题是一个很有力的工具。

实际汽车在运行中（其它机器也一样）所受的载荷往往是杂乱的随机信号，无法在试验室内进行一般模拟试验。通过功率谱分析后，就能清楚地看到各频率处所载荷的能量与幅度，就能正确地从频域能量等价出发进行切合实际的动态模拟试验。在现代模拟试验技术中，利用功率谱加载来研究疲劳与强度问题是很有实用价值的，在许多场合下，它比幅值载荷谱来得更逼真，更正确。人们已经研制了许多能按功率谱进行加载的试验设备。在这些设备中，输入的激振信号功率谱是可以任意调节的，调节的规律可以按照实际路试得到的功率载荷谱，也可以对实际的载荷谱进行加权后进行强化试验，以减少模拟试验的时间。

（4）对汽车某一部件或系统的故障进行判断和分析。这些故障包括由电气系统、机械系统或其它动态系统产生的。汽车的不解体检验与故障诊断技术目前在国内外发展很快，对行车的安全及提高经济效益都有很大的好处。其中用功率谱技术进行监测汽车部件的运转情况和判断故障也有很大进展。图 1-22 是根据汽车变速箱的振动加速度和噪声得到的频谱，可以用来判断它的运行是否正常及其可能产生的故障原因。

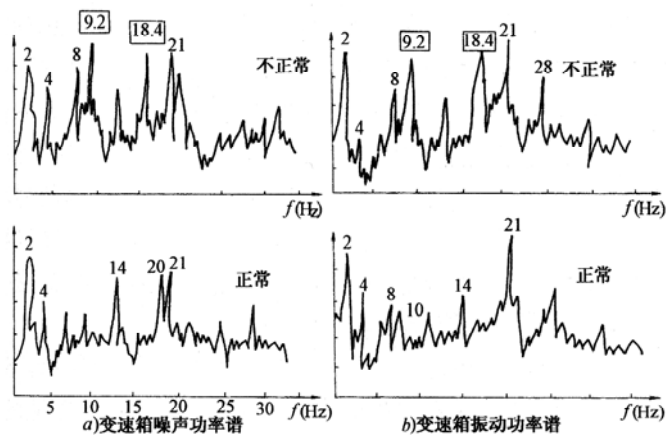


图 1-22 汽车变速箱的振动加速度和噪声功率谱

从图中可以看出，不正常工作时，振动加速度和噪声均在 9.2Hz、18.4Hz 上出现了额外的峰值。根据功率谱及其他仪表的配合就可以较准确地判断出故障产生的部位。

(5) 在汽车工程研究单输入线性定常系统的动态特性时，还常用到如下重要关系式：

$$\left. \begin{aligned} S_{yy}(f) &= |H(f)|^2 S_{xx}(f) \\ \text{或} \quad G_{yy}(f) &= |H(f)|^2 G_{xx}(f) \end{aligned} \right\} \quad (1-56)$$

(即对于一个线性系统，其输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，系统频响特性为 $H(f)$ ，则输入、输出的自功率谱密度与系统频率响应函数的关系)。

式中 $S_{xx}(f)$ 、 $G_{xx}(f)$ 表示线性系统的输入功率谱密度函数， $S_{yy}(f)$ 、 $G_{yy}(f)$ 表示系统的输出功率谱密度函数， $H(f)$ 是所研究系统的频率响应函数。从式 (1-56) 可以看出，若系统输入一个白噪声，那么不难通过改变系统的 $H(f)$ ，来产生各种不同的功率谱输出。已知该式的任意两者，可以估计第三者。但在此关系式中只包含有频率响应函数的幅频信息。如果要确定相位方面的信息需要用到后面介绍的互谱分析。

(6) 汽车舒适性试验。根据人体工程的大量试验表明，人体各部分也有和一般机械类似的固有频率，如人的大脑，当人坐着时给予激励，它的固有频率为 25Hz，胃的固有频率 4~8Hz。一旦外界加在人体上的振动频率和身上某器官的固有频率相同时，人将感到很不舒适，长期以往就会生病。在设计汽车时，一定要考虑车子在各种路面行驶时，都不能使其产生对人的激励频率在各器官的固有频率范围之内。例如某汽车在土路运输时（低速运行），测试出它的乘坐垂直加速度响应的自功率谱密度如图 1-23 所示。从图中可以看到频率在 4~8Hz 之间时，振动加速度较大。而这个频率正好和人体的固有频率相同。这样人的胸部将感到极不舒服，如乘坐时间过长，将会引起胃病。据有关资料介绍，某厂所生产的拖拉机，驾驶员在工作不到半年时间，绝大多数人都得了胃下垂病。经对驾驶员座位作振动加速度的自功率谱试验，发现由发动机等引起的振动加速度的频谱和图 1-23 相类似。通过把司机座位下的弹簧改变以后，才使问题得到解决。

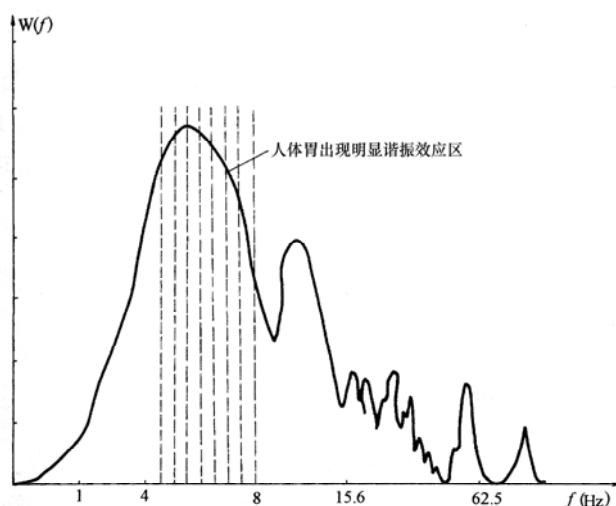


图 1-23 某汽车在一定路面低速行驶时其座位上的垂直加速度响应的自功率谱密度函数

五、互相关函数和互谱密度函数与工程实际应用

在实际中常常需要描述两个随机信号之间的依赖关系，即联合统计特性。互相关函数和互谱密度函数，两者给出了时延域和频域上的联合特性。

互相关函数与自相关函数都是研究信号相似性的工具，但自相关函数是处理信号和它自身的时移信号的相似性问题，而互相关函数是处理两个信号之间的相似性问题。

1. 互相关函数定义

随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 定义为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1-57)$$

互相关函数有如下性质：

(1) 互相关函数不是偶函数，是不对称的。

图 1-24 为两个随机信号 $x(t)$ 、 $y(t)$ 及其互相关函数图形，其峰值偏离原点的位置反映了两信号的时差。例如 $R_{xy}(\tau)$ 在 $\tau = \tau_d$ 位置达到最大值，则说明 $y(t)$ 导前 τ_d 时间后， $x(t)$ 与 $y(t)$ 最相似。

(2) $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ ，即 $x(t)$ 与 $y(t)$ 互换后，它们的互相关函数对称于纵轴（图 1-25），该式说明使信号 $y(t)$ 在时间上导前，与使另一信号 $x(t)$ 滞后，其结果是一样的。

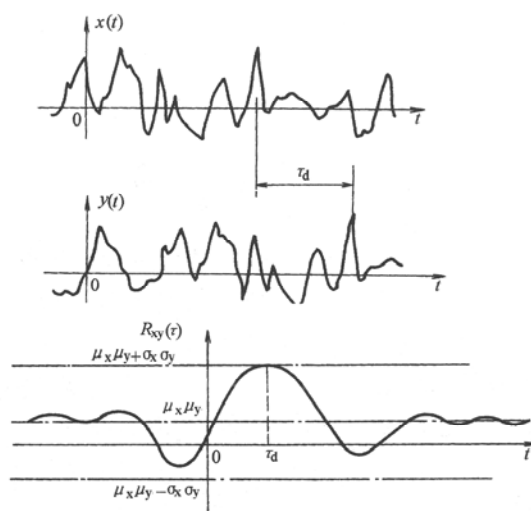


图 1-24 互相关函数

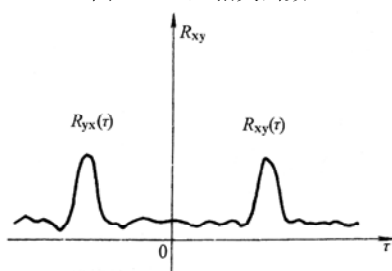


图 1-25 互相关函数对称性

(3) 若两随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 没有同频率周期成分，是两个完全独立的信号，则当 $\tau \rightarrow \infty$ 时

$$R_{xy}(\tau) = \mu_x \mu_y \quad (1-58)$$

定义互相关系数为

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1-59)$$

互相关系数也反映了两个随机信号之间的相关性，且 $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$ 。若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间没有同频的周期成分，那么当 τ 很大时就彼此无关，即 $\rho_{xy}(\infty) = 0$ 。

(4) 频率相同的两个周期信号的互相关函数仍是周期函数，其周期与原信号相同。例如两个周期信号为 $x(t) = A \sin(\omega t + \theta_x)$ 和 $y(t) = B \sin(\omega t + \theta_y)$ ，则其互相关函数为

$$R_{xy}(\tau) = \frac{AB}{2} \cos[\omega \tau + (\theta_y - \theta_x)]$$

由此可见，互相关函数保留了两个信号的共同频率分量的频率、幅值和相位差的信息。

(5) 互谱与输入、输出信号之间的关系

$$P_{xy}(f) = T G_{xy}(f) = X^*(f) Y(f) = X(-f) Y(f) \quad (1-60)$$

式中 $X(-f) = X^*(f)$ 是系统输入信号 $x(t)$ 的共轭频谱， $Y(f)$ 是系统输出信号 $y(t)$ 的傅里叶频谱， $G_{xy}(f)$ 是输入、输出信号之间的互功率谱， T 是时间区间， P_{xy} 是互能量谱密度。将上式 (1-60) 两边除以 T 就得到互功率谱。有时数字分析中常给出的是互能量谱密度

$P_{xy}(f)$ ，即 $P_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$ 。功率乘上时间等于能量的概念十分形象地说明了关系式 $G_{xy}(f)T = P_{xy}(f)$ 。

(6) 互谱与单输入线性系统的频率响应函数之间有下列关系：

$$G_{xy}(f) = H(f)G_{xx}(f) \quad (1-61)$$

式中： $H(f)$ 是系统的频率响应函数（也称正弦传递函数），它定义为： $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ 。
 $G_{xx}(f)$ 是输入信号 $x(t)$ 的自功率谱， $G_{xy}(f)$ 是输入输出之间的互功率谱。

上式 (1-61) 是互功率谱主要应用方面之一。因为它明确说明，采取同时测量自谱及互谱的方法可以得到完整的系统传递函数 $H(f)$ ，不仅获得了幅频信息，还包含了相位响应信息。

例 1-5：设有两个周期信号 $x(t)$ 和 $y(t)$

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \theta)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \theta - \phi)$$

式中： θ —— $x(t)$ 相对于 $t = 0$ 时刻的相位角；

ϕ —— $x(t)$ 与 $y(t)$ 的相位差。

试求其互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 。

解：因为信号是周期函数，可以用一个共同周期内的平均值代替其整个历程的平均值，故

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_0 \sin(\omega t + \theta) y_0 \sin[\omega(t+\tau) + \theta - \phi] dt \\ &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau - \phi) \end{aligned}$$

由上例可见，两个均值为零且具有相同频率的周期信号，其互相关函数中保留了这两个信号的圆频率 ω ，对应的幅值 x_0 和 y_0 以及相位差值 ϕ 的信息。

例 1-6：若两个周期信号的圆频率不等，

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_1 t + \theta)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_2 t + \theta - \phi)$$

试求其互相关函数。

解：因为两信号的圆频率不等 ($\omega_1 \neq \omega_2$)，不具有共同的周期

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_0 y_0 \sin(\omega_1 t + \theta) \sin[\omega_2(t+\tau) + \theta - \phi] dt \end{aligned}$$

根据正（余）弦函数的正交性，可知

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

由此可见，两个非同频的周期信号是不相关的。

互相关函数的这些性质，使它在工程应用中有重要的价值，它是在噪声背景下提取有用

信息的一个非常有效的手段。如果我们对一个线性系统（例如某个部件、结构或某台机床）激振，所测得的振动信号中常常含有大量的噪声干扰。根据线性系统的频率保持性，只有和激振频率相同的成分才可能是由激振而引起的响应，其它成分均是干扰。因此只要将激振信号和所测得的响应信号进行互相关（不必用时移， $\tau=0$ ）处理，就可以得到由激振而引起的响应幅值和相位差，消除了噪声干扰的影响。这样，可以得到所研究的对象（系统）在该激振频率下从激振点到测量点间的幅、相传输特性。如果改变激振频率，就可以求得相应的频率响应函数。

2. 互相关函数应用

互相关技术还广泛地应用于各种测试中。工程中还常用两个间隔一定距离的传感器来不接触地测量运动物体的速度。图 1-26 是测定热轧钢带运动速度的示意图。钢带表面的反射光经透镜聚焦在相距为 d 的两个光电池上。反射光强度的波动，通过光电池转换为电信号，再进行相关处理。当可调延时 τ 等于钢带上某点在两个测点之间经过所需的时间 τ_d 时，互相关函数为最大值。该钢带的运动速度 $v = d / \tau_d$ 。

图 1-27 是确定深埋在地下的输油管裂损位置的例子。漏损处 K 视为向两侧传播声响的声源，在两侧管道上分别放置传感器 1 和传感器 2，因为放传感器的两点距漏损处不等距，则漏油的音响传至两传感器就有时差。在互相关图上， $\tau = \tau_m$ 处 $R_{xy}(\tau)$ 有最大值，这个 τ_m 就是时差。由 τ_m 就可确定漏损处的位置。

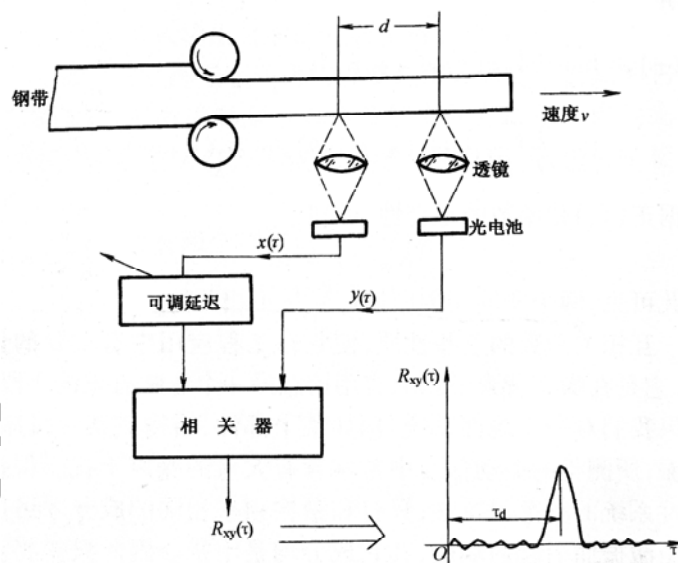


图 1-26 钢带运动速度的非接触测量

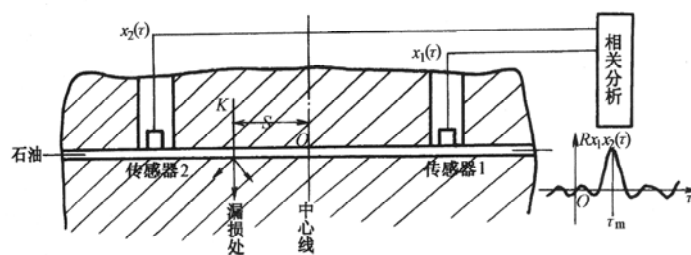


图 1-27 确定输油管裂损位置

$$S = \frac{1}{2} v \tau_m$$

式中：\$S\$——两传感器的中点至漏损处的距离；

\$v\$——音响通过管道的传播速度。

互相关函数的另一应用是检拾和回收隐藏在外介随机噪声中的确定性信号。周期信号在任何给定的输入信噪比和样本长度下，互相关函数提供的输出信噪比，要比自相关函数提供的输出信噪比高。

图 1-28 所示是应用互相关函数的上述特点来分析发动机出口处叶频信号与噪声信号相互影响的例子。

发动机进口测点 \$A\$ 的信号 \$x(t)\$ 中包括压气机引起的叶频信号、机壳振动及空气噪声等，对于叶频振动是近场测量所以信号较强；在发动机烟道出口测点 \$B\$ 的信号 \$y(t)\$ 中夹杂着传动信号、机壳振动以及空气噪声。同时也有叶频信号，但此信号比较弱。因此用自相关函数 \$R_{yy}^{(t)}\$ 不行，可以用互相关函数 \$R_{xy}(\tau)\$ 把叶频信号突出来，如图 1-28 所示：\$R_{xy}(\tau)\$ 当 \$\tau\$ 比较大时呈现出一周期信号，即是叶频信号。图上所测周期 \$T_p\$ 正符合计算值，即叶频为：

$$f = 1/T_p = \frac{Nn}{60} \text{ (Hz)} \quad (1-62)$$

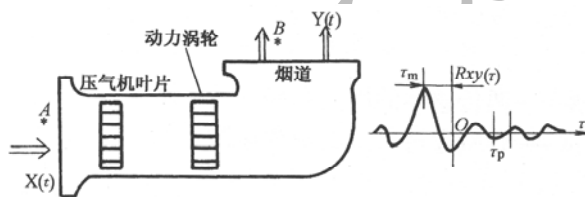


图 1-28 发动机叶频信号互相关分析图

式中：\$N\$——压气机叶片数；

\$n\$——叶轮转速（转 / min）。

在互相关函数 \$R_{xy}(\tau)\$ 图上，当 \$\tau \rightarrow \infty\$，随机噪声逐渐消失，而周期信号在时延图上尚保持其周期波形，这样用互相关函数可以从复杂信号源中，检拾出周期信号的成份。

3. 互功率谱密度函数定义

互相关函数的傅里叶变换称为互功率谱密度函数，即为：

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (f \geq 0)$$

又称交错功率谱，简称互谱。因为互谱与互相关函数构成傅里叶变换对，所以二者包含有相同的信息，同时用来描述信号之间的相关性；不同点是互相关函数在时延域上，而互谱是在频率域上。

互谱的复数表达式：

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| e^{-jQ_{xy}(f)} \quad (1-63)$$

显然，互谱不仅提供了按频率分布的能量大小，而且还提供了输入信号 \$X(t)\$ 与输出信号 \$Y(t)\$ 之间的相位关系。

另外，互谱与 \$x(t)\$ 和 \$y(t)\$ 间存在下列关系：

$$G_{xy}(f) = Y(f) X^*(f) \quad (\text{单位: } xy / \text{Hz}) \quad (1-64)$$

式中：

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt$$

即 $X_{(f)}^* = X(-f)$ 为 $X(f)$ 的共轭复数，亦即为信号 $x(t)$ 的共扼频谱。

4. 一般互谱应用

信号处理中互谱分析是很有用的，如多点激振试验和系统传递特性分析以及声强测量技术等都必须用互谱。

多点激振试验不仅要保证各激振头按一定的功率谱振动，而且相互间必须保持一定的相位角关系。因此只测出各点实际振动自功率谱是不够的，必须测得互谱才行，见图 1-29。

声强公式：

$$I_r(\omega) = \frac{1}{\rho \Delta r \omega} I_m \{G_{1,2}(\omega)\} \quad (1-65)$$

式中： ρ ——空气密度；

Δr ——话筒之间距离；

ω ——角频率， $\omega = 2\pi f$ ；

$I_m \{G_{1,2}(\omega)\}$ ——互谱的虚部。

对于图 1-15 所示的线性系统，亦可证明有如下的关系：

$$G_{xy}(f) = H(f)G_{xx}(f) \quad (1-66)$$

故从输入的自谱和输入、输出的互谱就可以直接得到系统的频率响应函数。式 (1-66) 与式 (1-37) 不同，所得到的 $H(f)$ 不仅含有幅频特性而且含有相频特性。这是因为互相关函数中包含有相位信息。

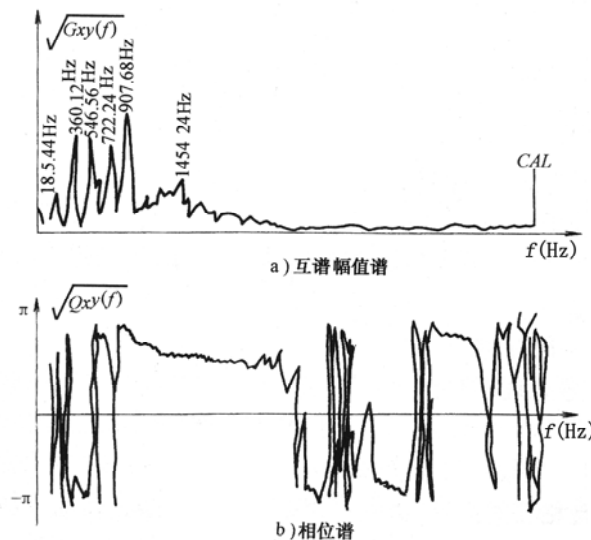


图 1-29 多点激振谱图（互谱）

如果一个测试系统受到外界干扰，如图 1-30 所示， $n_1(t)$ 为输入噪声， $n_2(t)$ 为加于系统中间环节的噪声， $n_3(t)$ 为加在输出端的噪声。显然该系统的输出 $y(t)$ 将为

$$y(t) = x'(t) + n_1'(t) + n_2'(t) + n_3(t) \quad (1-67)$$

式中: $x'(t)$ 、 $n_1'(t)$ 和 $n_2'(t)$ 分别为系统对 $x(t)$ 、 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 的响应。

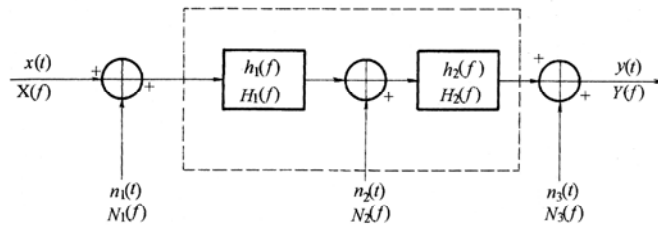


图 1-30 受外界干扰的系统

输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 的互相关函数为

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx'}(\tau) + R_{xn_1'}(\tau) + R_{xn_2'}(\tau) + R_{xn_3'}(\tau) \quad (1-68)$$

由于输入 $x(t)$ 和噪声 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ 、 $n_3(t)$ 是独立无关的, 故互相关函数 $R_{xn_1'}(\tau)$ 、 $R_{xn_2'}(\tau)$ 和 $R_{xn_3'}(\tau)$ 均为零。所以

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx'} \quad (1-69)$$

故 $G_{xy}(f) = G'_{xx}(f) = H(f)G_{xx}(f)$ (1-70)

式中 $H(f) = H_1(f)H_2(f)$, 为所研究系统的频率响应函数。

由此可见, 利用互谱进行分析将可排除噪声的影响, 这是该分析方法的突出优点。然而应当注意到, 利用式 (1-70) 求线性系统的 $H(f)$ 时, 尽管其中的互谱 $G_{xy}(f)$ 可不受噪声的影响, 但是输入信号的自谱 $G_{xx}(f)$ 仍然无法排除输入端测量噪声的影响, 从而形成测量的误差。

图 1-30 所示系统中的 $n_1(t)$ 是输入端的噪声, 我们称它为“噪声”是因为对分离我们感兴趣的输入信号来看, 它是一种干扰。为了测试系统的动态特性, 有时我们故意给正在运行的系统以特定的已知扰动——输入 $n(t)$ 。从式 (1-68) 可以看出, 只要 $n(t)$ 和其它各输入量无关, 在测得 $G_{ny}(f)$ 和 $G_{nn}(f)$ 后就可以计算得到 $H(f)$ 。这种在被测系统正常运行的同时对它进行测试, 称为“在线测试”。

像图 1-30 那样的测试系统, 虽然也可以求得系统的传递特性 $H(f)$, 但和图 1-15 所示的系统比起来显然前者不如后者精确。所以希望有一种方法来评价测试系统的输入信号和输出信号之间的因果性, 即输出信号的功率谱中有多少是所测试输入量所引起的响应, 这个指标通常用相干函数 $r_{xy}^2(f)$ 表示, 其定义为

$$r_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \quad (0 \leq r_{xy}^2(f) \leq 1) \quad (1-71)$$

如果相干函数为零表示输出信号与输入信号不相干; 当相干函数为 1 时, 表示输出信号与输入信号完全相干, 系统小于干扰输入而且系统是线性的; 相干函数在 0~1 之间, 则表明有如下三种可能: (1) 测试中有外界噪声干扰; (2) 输出 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 和其它输入的综合输出; (3) 联系 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的系统是非线性的。

例 1-7: 图 1-31 是船用柴油机润滑油泵压油管振动和压力脉动间的相干分析。

润滑油泵转速为 $n=781\text{r/min}$, 油泵齿轮的齿数为 $z=14$ 。测得油压脉动信号 $x(t)$ 和压油

管振动信号 $y(t)$ 。压油管压力脉动的基频为

$$f_0 = \frac{nZ}{60} = 182.24(\text{Hz})$$

在图 1-31c) 上, 当 $f = f_0 = 182.24\text{Hz}$ 时, 则 $\gamma_{xy}^2(f) \approx 0.9$; $f = 2f_0 \approx 361.12\text{Hz}$ 时, $\gamma_{xy}^2(f) \approx 0.37$; $f = 3f_0 \approx 546.54\text{Hz}$ 时, $\gamma_{xy}^2(f) \approx 0.8$; $f = 4f_0 \approx 722.24\text{Hz}$ 时, $\gamma_{xy}^2(f) \approx 0.75$...。齿轮引起的各次谐频对应的相干函数值都比较大, 而其它频率对应的相干函数值很小。由此可见, 油管的振动主要是由油压脉动引起的。从 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自谱图也明显可见油压脉动的影响[图 1-31a], b)所示]。

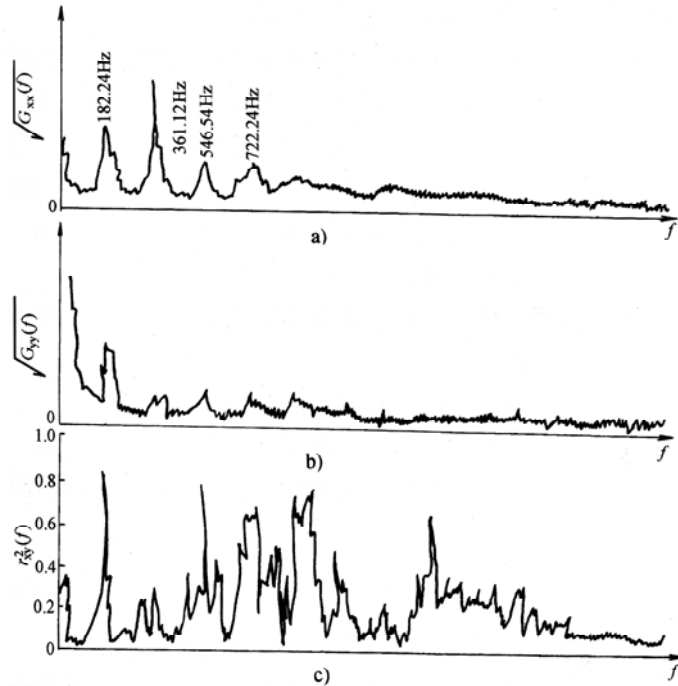


图 1-31 油压脉动与油管振动的相干分析

a) 信号 $x(t)$ 自谱; b) 信号 $y(t)$ 的自谱; c) 相干函数

互谱应用很多, 如通过互谱和自谱测量出研究系统的频率响应函数, 或称传递函数; 互谱的相位因子表征了系统在频率 f 处的相位差, 因此, 互谱密度函数可以确定各频率成分的滞后时间; 检查和测定滤波器特性, 使滤波器传递有用信号而滤掉无用信息, 输入信号与噪声之间、输出信号与噪声之间的各种功率谱、互谱, 确定滤波器特性等。

(1) 用于测定线性定常系统的传递函数

通过测量自谱可以确定出系统的幅频传输特性。引入互谱后, 借助于自谱与互谱一起测量, 则可确定完整的频率响应函数(传递函数)。这在实际工程测试中也是常常碰到的问题。

(2) 测量信号通过系统的滞后时间

在时域分析中谈到用互相关函数测量整个复合信号通过无失真系统时的滞后时间 Δt , 而对一般系统来说, 由于系统特性所决定, 可能使有些频率分量产生的滞后时间大一些, 而另一些频率分量产生的滞后时间少一些。这就需要用互谱测量其滞后时间 $\Delta t(f)$, 它是频率的函数, 它确定的是不同频率信号通过系统时产生的滞后时间。

互谱中的相位谱 $\theta_{xy}(f)$ 与被测系统传递函数的相位谱 $\phi(f)$ 之间的关系为:

$$\theta_{xy}(f) = \phi(f)$$

这就提供了一个测定在一定频率下输入输出的相位差 $\phi(f)$ 。该相位差 $\phi(f)$ 很容易转化成各频率分量上的滞后时间。即：

$$\Delta t(f) = \frac{\theta_{xy}(f)}{2\pi f} \quad (1-72)$$

(3) 用自谱与互谱联合实现多输入系统的等价模拟

自谱可以作为从能量等价出发的模拟载荷谱，是现代模拟试验技术中的重要环节。它成功地模拟了单输入系统的随机外载。但实际工程上碰到更多的是多输入系统。只靠简单地测得各个输入信号的自谱，将其简单的共同作用在系统上是不能很好地实现等价模拟的。因为各输入信号之间可能存在一定的关系，这种关系必须借助于互谱才能更好的反应其客观实际。

例如，在一个模拟系统中，要做多点激振试验时，不仅要保证各激振头按一定的功率谱振动，而且相互之间要保持一定的关系，所以只检测出各个实际振动的功率谱是不够的，还需测出相互之间的互谱。图 1-33 所示为 B212 汽车前桥与后桥上垂直加速度之间的互谱。这是汽车以 60km/h 车速，通过砂石搓板路段时测量的。如果要模拟这种振动，不仅要保证各点的自功率谱，还必须考虑这两点之间的互谱的幅值与相位关系，这才能真实地模拟路面状况。

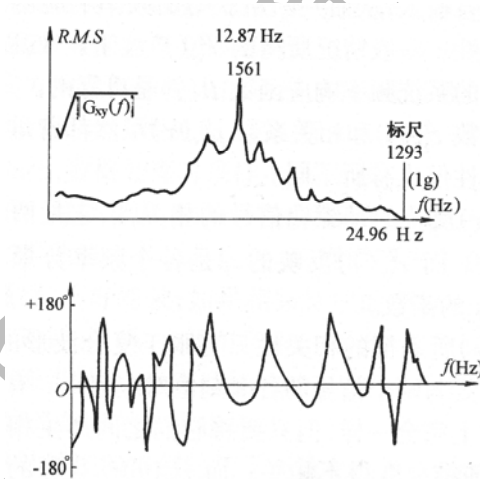


图 1-32 汽车前后桥振动加速度之间的互谱图

5. 相干函数分析与应用

(1) 相干函数特性分析

两个信号是否相似，可以用前面讲过的相关系数或相关函数来加以定量分析，可这种相似性的描述是对两个完整的时域信号而言的，不能反映频域方面的相似性，为此引入了相干函数，它可以帮助我们分辨出输入输出信号在哪些频率上是相关的（也称凝聚的），哪些频率上是不相关的（不凝聚的），从而可以了解输出信号中有多少是由该输入信号引起的，是否还存在其他形式的输入（如噪声）等。前面式 (1-71) 已经给出了相干函数的数学表达式，即：

$$r_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \quad 0 \leq r_{xy}^2(f) \leq 1$$

在研究系统的传递函数时,相干函数是一个很重要的判别函数,它表明输入与输出的相关程度。即系统的输出有多少成份是来自输入,从而判断所获得的频率响应函数与互谱关系的可靠性。一般情况所得的 $r_{xy}^2(f)$ 大于0.85以上时,可以认为所得的系统频率响应函数 $H(f)$ 是可靠的。

相干函数 $r_{xy}^2(f)$ 和相关系数 $\rho_{xy}^2(\tau)$ 虽然都着重反映两个信号的相关性但也有所不同。

① $\rho_{xy}^2(\tau)$ 反映的是综合信号的相关性。它是两个信号时差 τ 的函数。而 $r_{xy}^2(f)$ 反映的却是各个频率分量上的相关性,是频率 f 的函数。

② $\rho_{xy}^2(\tau)$ 所表征的相关性只着眼于复合波形的相似性,这种相似性要与两个信号的各时刻值对应起来。有时尽管两个信号波形上完全一样,但只要将它们之间产生相对时间位移,就足以使结果变得不相关。而 $r_{xy}^2(f)$ 所表征的频率相关性只着眼于各个频率分量波形相似性,只要波形形状相似,就属相关,与两者间有无滞后无关。所以相干函数也是分析系统的输入和输出关系的函数。只不过是输入与输出的相似性在频率域求出而已。

(2) 相干函数在汽车转向、悬挂特性试验等方面的应用

相干函数主要用于线性系统通道的识别及分析外界噪声的影响,通常将其与传递函数、功率谱密度函数结合起来分析系统的性质。

①根据相干函数的大小判断汽车或其他测试系统的噪声或其它干扰的影响大小,一切物理量的测量,其精度及测量的灵敏度最终都受到背景噪声的影响及限制。为了在一定的置信概率下以一定的精度把信号值测出来,就可以借助于相干函数大小来判断噪音的影响大小及其噪声的频率分布等。

②汽车转向特性的测定。在汽车转向操纵性、稳定性的动态测试研究中,可以采用脉冲试验来测取转向系统的传递函数。以汽车方向盘转角作为系统的输入信号,而汽车车身旋转角速度作为系统的输出信号,使汽车以一定车速直速行驶,突然猛打方向盘又立即回到原位。每隔5s左右连续做这样脉冲式方向盘转角输入的动作,然后通过数据处理装置计算出幅频和相频特性见图1-33所示。试验车型—BJ-212;车速-80km/h;数据处理时采样10ms,3段。

从图上可以看出,幅频特性曲线比较平缓,说明幅频特性较好。如果曲线上有很高的尖峰,则说明汽车在该频率范围内过于敏感,不好驾驶;如果相频特性的相位差很大,则说明汽车反应迟钝、发飘,也不好驾驶。因此,这种脉冲试验可以反应汽车操纵性能、稳定性能的动态特性,可作为评价汽车操纵性、稳定性好坏的技术指标。

由该脉冲试验得到的相干函数也在图1-33中给出。从0~2Hz之间, $r_{xy}^2(f)=1$ 说明在该频率范围内的幅频、相频特性是完全可信的。但在3Hz以上时, $r_{xy}^2(f)<0.5$ 以下,到4Hz时逐步接近于零,这说明打方向盘的转角频率(在该试验条件下)在3~4Hz以上时,对汽车行驶偏摇角速度没有多少影响。也就是说方向盘来回打的太快,汽车无法跟随上,车身并不出现左右摇摆,而基本保持始终向前。

③汽车悬挂系统避振特性的测试汽车的悬挂系统是一个要求具有良好避振特性的高度,可以通过测定它的传递函数(下面要讨论的内容)来了解其避振性能的好坏。汽车行驶时车桥上的振动,通过悬挂系统减振后传递到车身上。悬挂系统的频率响应函数能够表达其衰减振动的特性,输入信号是前桥上的振动加速度;输出信号为通过悬挂系统衰减后的车身地板

的加速度，其幅频、相频、传递函数等特性表示在图 1-34 上。试验车型—BJ212，车速 20 公里/时，数据处理时采样 5ms,8 段。

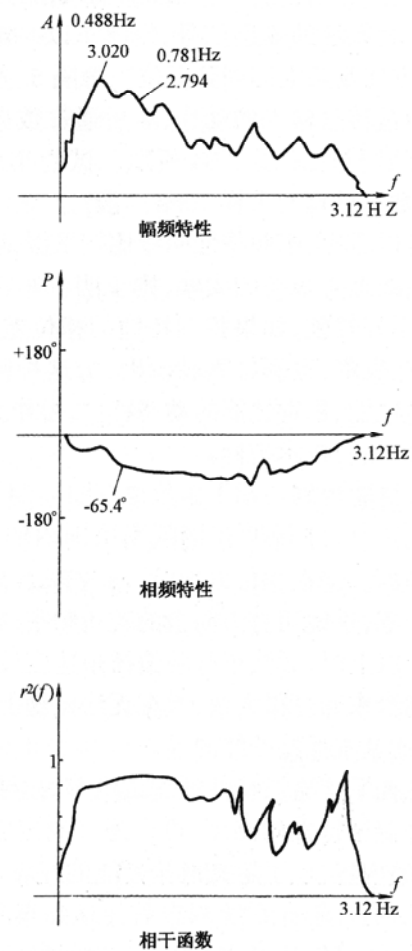


图 1-33 汽车转向特性

从图 1-34 上可以看出悬挂系统的减振性能概况。在频率为 2.34Hz 处其振幅响应最大，其 $|H(f)|=1$ 。说明在这一频率下，车桥上与车身上的加速度相近，没有什么衰减作用。而在其他频率时车身上的加速度有很大的衰减，这在幅频特性上可以明显的看出。

图 1-34 也给出了相干函数的图形。该图形是由前桥上的振动加速度作为输入信号，车身体板的加速度作为输出信号的单一输入系统而得出的，实际上汽车是受到四个车轮的振动输入以及发动机的振动激励的多输入系统。因此得到的相干函数并不接近 1。在 0~12Hz 之间， $r_{xy}^2(f)$ 约为 0.4~0.6；而在 16Hz 以上， $r_{xy}^2(f)$ 不到 0.2。这说明高频信号不能通过悬挂系统传到车身上去。以上结论是在一定车型、车速等条件下得出的。

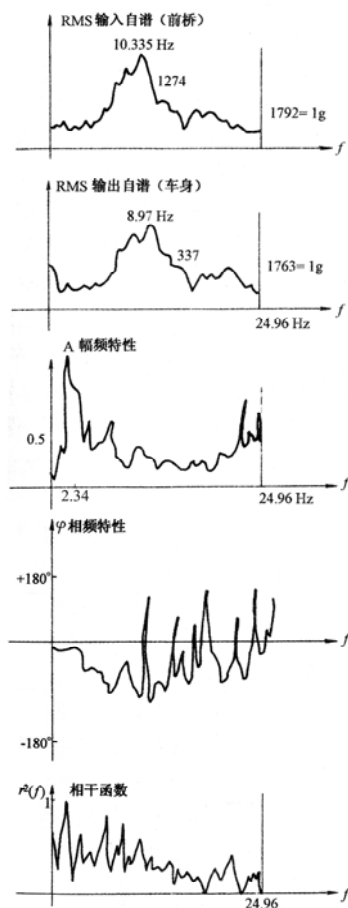


图 1-34 汽车悬挂特性

第五节 信号处理

相关分析和功率谱分析都可以消除或减弱噪声污染的影响，提取有用的信号。但是，用模拟仪器进行这些分析却很困难。随着计算技术的发展，特别是 1965 年快速傅里叶变换（FFT）问世以来，数字信号处理得到越来越广泛的应用。现在除了在通用计算机上发展各种数字信号处理软件以外，还发展了有专用硬件的数字信号处理机，其处理速度已近乎“实时”。数字信号处理技术已形成了一门新的学科。

数字处理的特点是处理离散数据，因此首先要把信号改成离散的时间序列。尽管现在已发展了不少数字式传感器，但所测试的大多数物理过程本质上仍是连续的，所以总是有一个 A/D 转换或采样过程。这一过程把连续信号改变成等间隔的离散时间序列，其幅值也经过量化。此外，数字计算机不管怎样快速，其容量和计算速度毕竟有限，因而处理的数据长度是有限的，信号必然要经过截断。这样数字信号处理就必然引入些误差。很自然会提出这样的问题：如何恰当地运用这一技术，使之能够比较准确地提取原信号中的有用信息。本节将对用数字方法处理测试信号时的一些基本方法和概念作一些介绍。

一、数字信号处理的基本步骤

数字信号处理的一般步骤可用图 1-35 来概括。

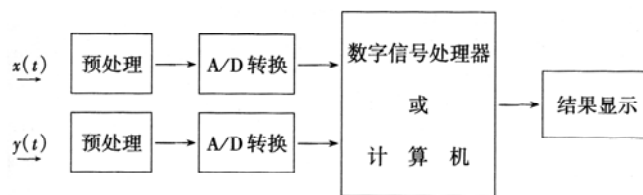


图 1-35 数字信号处理系统的简单框图

信号的预处理是把信号变成适于数字处理的形式，以减轻数字处理的困难。预处理是为了：（1）电压幅值处理，以便适宜于采样；（2）过滤信号中的高频噪声；（3）隔离信号中的直流分量（如果所测信号中不应有直流分量）；（4）如果原信号系经过调制，则应进行解调。预处理环节应根据测试对象、信号特点和数字处理设备的能力进行安排。

A/D 转换包括两部分内容：时间上等间隔地采样和幅值上的量化。

数字信号处理器或计算机对离散的时间序列进行运算处理。计算机只能处理有限长度的数据，所以首先要将长时间的序列截断，对截取的数字序列有时还要人为地进行加权（乘以窗函数）以成为新的有限长的数字序列。如有必要还可以设计专门的程序以进行数字滤波，然后，把数据按给定的程序进行运算。例如，作时域中的概率统计、相关分析、建模和识别、频域中的频谱分析、功率谱分析、传递函数分析等等。

运算结果可以直接显示或打印。如果后接 D/A 和记录仪则可以绘制频谱图、奈氏图等。如有需要可将数字信号处理结果送入后接计算机或通过专门程序再做后续处理（例如振动系统的参数识别、动平衡中各平衡平面的分离等）。

二、量化和量化误差

A/D 转换器的位数是一定的，只能表达相应的量化电平。模拟信号采样点的电平落在两相邻量化电平之间时，就要舍入到相近的一个量化电平上。设两相邻量化电平之间的增量（级差）为 Δx ，则量化误差最大值为 $\pm \frac{\Delta x}{2}$ 。可以认为量化误差 ε 在 $\left(-\frac{\Delta x}{2}, +\frac{\Delta x}{2}\right)$ 区间各点出现的概率是相等的，概率分布密度为，均值为零，其均方值为

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta x} d\varepsilon = \frac{\Delta x^2}{12} \quad (1-73)$$

故误差的标准差为 $\sigma_{\varepsilon} = 0.29\Delta x$ 。

量化误差是叠加在原信号上的随机误差。为了简化后面所讨论的问题，我们暂且假设在采样点所采的幅值就是模拟信号上的幅值，也就是假设 A/D 转换器的位数无限多。

三、采样、混叠和采样定理

采样是把连续时间信号离散化的过程。采样过程可以看作是用等间隔的单位脉冲序列去乘模拟信号。这样，各采样点上的信号大小就变成脉冲序列的权值（图 1-36），这些权值将被量化而成为相应的数值。

采样间隔的选择是一个重要问题。采样间隔太小（采样频率高），则对定长的时间记录来说其数字序列就很长，计算工作量迅速增大；如果数字序列长度一定，则只能处理很短的时间历程，可能产生较大的误差。若采样间隔太大（采样频率低），则可能丢掉有用的信息。

图 1-37 中如果只有采样点 1、2、3 的采样值就分不清曲线 A、曲线 B 和 C 的差别。

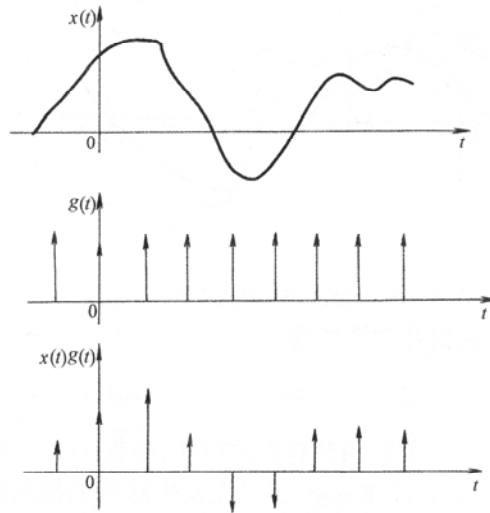


图 1-36 时域采样

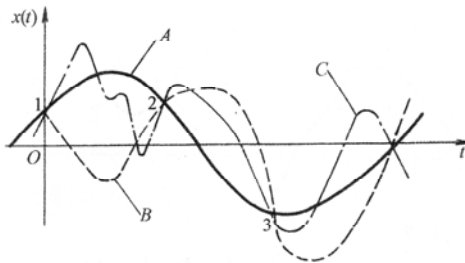


图 1-37 混淆现象

间距为 T_s 的采样脉冲序列的傅里叶变换也是脉冲序列；其间距为 $\frac{1}{T_s}$ ，即

$$\Longleftrightarrow g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad G(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s}) \quad (1-74)$$

由频域卷积定理可知：两个时域函数的乘积的傅里叶变换等于两者傅里叶变换的卷积，即

$$\Longleftrightarrow x(t)g(t) \quad X(f)*G(f) \quad (1-75)$$

考虑到 δ 函数与其它函数卷积的特性，函数 $x(t)$ 与脉冲函数的卷积结果，就是简单地将 $x(t)$ 在发生脉冲函数的坐标位置上（以此为坐标原点）重新构图。

例如，一个矩形函数 $x(t)$ 与脉冲函数 $\delta(t)$ 的卷积为

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

当脉冲函数为 $\delta(t \pm T)$ 时

$$x(t) * \delta(t \pm T) = x(t \pm T)$$

参见图 1-38。

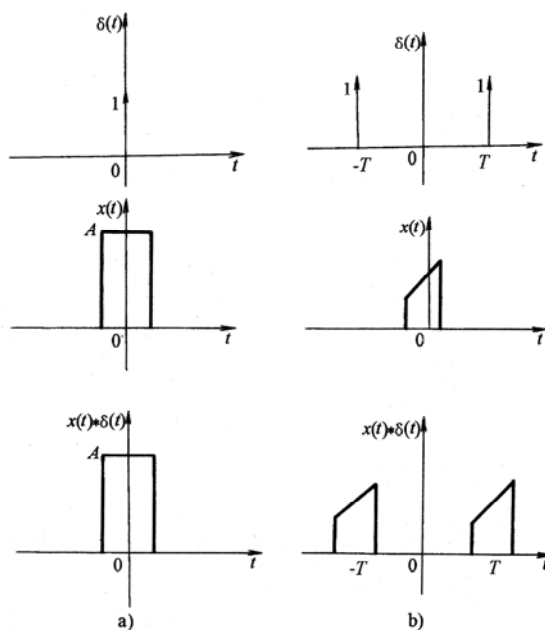


图 1-38 δ 函数与其它函数的卷积示例图

上式 (1-75) 可写为

$$G(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$

此式为 $x(t)$ 经过间隔为 T_s 的采样之后形成的采样信号的频谱。一般地说，此频谱和原连续信号的频谱 $X(f)$ 并不一定相同，但有联系。它是将原频谱 $X(f)$ 依次平移 $\frac{1}{T_s}$ 至各采样脉冲对应的频域序列点上，然后全部叠加而成（图 1-39）。由此可见，信号经时域采样之后成为离散信号，新信号的频域函数就相应地变为周期函数，周期为 $\frac{1}{T_s}$ 。

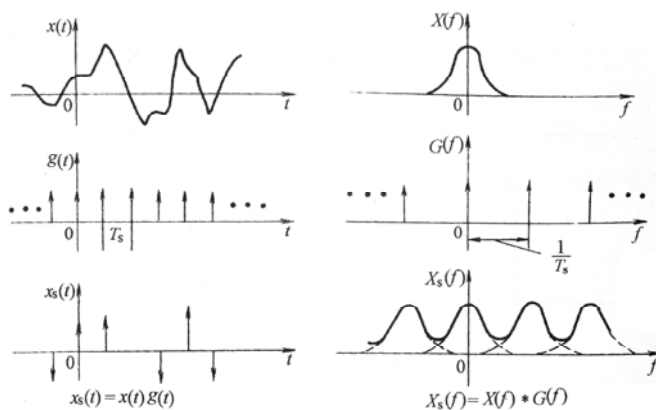


图 1-39 采样过程

如果采样的间隔 T_s 太大，即采样频率 f_s 太低，平移距离 $\frac{1}{T_s}$ 过小，那么移至各采样脉冲所在处的频谱 $X(f)$ 就会有一部分相互交叠，新合成的 $X(f) * G(f)$ 图形与原 $X(f)$ 不一致，

这种现象称为混叠。发生混叠以后，改变了原来频谱的部分幅值（见图 1-39 中虚线部分），这样就不可能从离散的采样信号 $x(t)g(t)$ 准确地恢复原来的时域信号 $x(t)$ 。

如果 $x(t)$ 是一个限带信号（最高频率 f_c 为有限值），采样频率 $f_s = \frac{1}{T_s} > 2f_c$ ，那么采样后的频谱 $X(f)*G(f)$ 就不会发生混叠（图 1-40）。若把该频谱通过一个中心频率为零（ $f=0$ ），带宽为 $\pm \frac{f_s}{2}$ 的理想低通滤波器，就可以把完整的原信号频谱取出，也就有可能从离散序列中准确地恢复原模拟信号 $x(t)$ 。

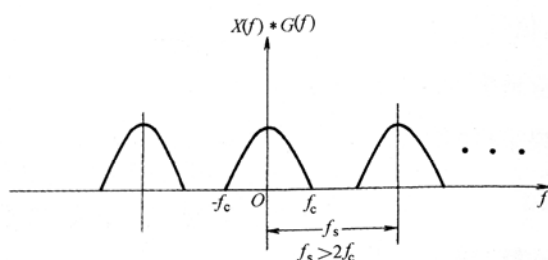


图 1-40 不产生混叠的条件

为了避免混叠以使采样处理后仍可能准确地恢复其原信号，采样频率 f_s 必须大于最高频率 f_c 的两倍，即 $f_s > 2f_c$ ，这就是采样定理。在实际工作中，一般采样频率应选为处理信号中最高频率的 3~4 倍。

如果我们确知测试信号中的高频部分是由噪声干扰所引起的，为了满足采样定理而不致使处理数据过长，可以把信号先进行低通滤波处理。

四、截断、泄漏和窗函数

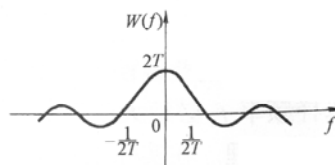
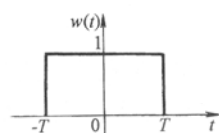
信号的历程是无限的，而我们不可能对无限长的整个信号进行处理，所以要进行截断。

截断就是将无限长的信号乘以有限宽的窗函数。“窗”的意思是指透过窗口我们能够“看到”“外景”（信号）的一部分。最简单的窗是矩形窗[图 1-41a]，其函数为

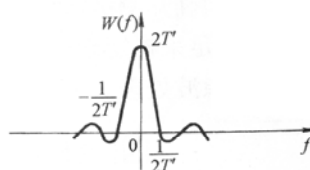
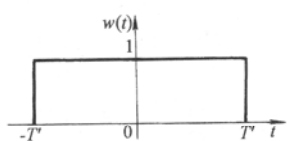
$$\omega(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (1-76)$$

\Rightarrow

$$\omega(t) \quad W(f) = 2T \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \quad (1-77)$$



a)



b)

图 1-41 矩形窗

对信号截取一段 $(-T, T)$ ，就相当于在时域中对 $x(t)$ 乘以矩形窗函数 $\omega(t)$ ，于是有

$$\Longleftrightarrow x(t)\omega(t) \quad X(f)*W(f)$$

由于 $\omega(f)$ 是一个频带无限的函数，所以即使 $x(t)$ 是限带信号，而在截断后也必然成为无限带宽的函数，这说明信号的能量分布扩展了；又从上面的讨论可知，无论采样频率多高，只要信号一经截断就不可避免地引起混叠，因此信号截断必然导致一些误差，这一现象称为泄漏。

如果增大截断长度，则 $W(f)$ 图形将压缩变窄[图 1-41b)]，虽在理论上其频谱范围仍为无穷宽，但实际上中心频率以外的频率分量衰减较快，因而泄漏误差将减小。当 T 趋于无限大时，则 $W(f)$ 将变为 $\delta(f)$ 函数，而 $\delta(f)$ 函数与 $X(f)$ 的卷积仍为 $X(f)$ 。这就说明了：如果不截断就没有泄漏误差。

泄漏与窗函数频谱的旁瓣有关。如果窗函数的旁瓣较小，相应的泄漏误差也将减小。除矩形窗之外，工程上常用的窗函数还有三角窗和汉宁窗（图 1-42）。其中三角窗为

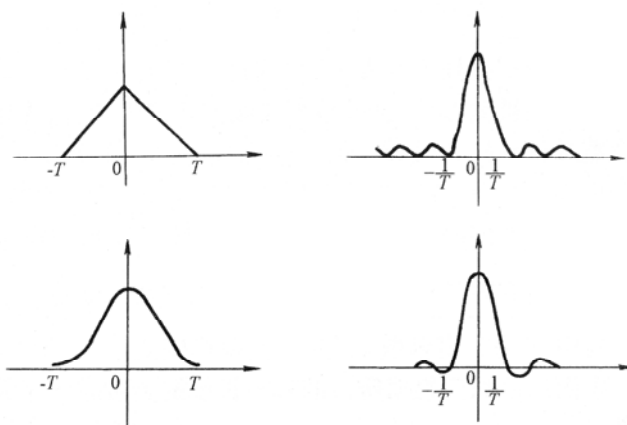


图 1-42 三角窗和汉宁窗

$$\omega(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{T}|t| & |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases} \quad (1-78)$$

$$W(f) = T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (1-79)$$

汉宁窗为

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{T} t \right) & |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases} \quad (1-80)$$

$$W(f) = \frac{1}{2} Q(f) + \frac{1}{4} \left[Q \left(f + \frac{1}{2T} \right) + Q \left(f - \frac{1}{2T} \right) \right] \quad (1-81)$$

$$Q(f) = \frac{\sin 2\pi f T}{\pi f}$$

它们的旁瓣，尤其是汉宁窗的旁瓣比矩形窗的旁瓣小得多，从而对泄漏误差有一定的抑制作用。

在实际的信号处理中,常用“单边窗函数”。若以开始测量的时刻作为 $t=0$,截断长度为 $T, 0 \leq t < T$ 。这等于把双边窗函数进行了时移。根据傅里叶变换的性质,时域的时移,对应着频域作相移而幅值绝对值不变。因此以单边窗函数截断所产生的泄漏误差与上面所讨论的泄漏相同。

五、离散傅里叶变换及其快速算法

随着计算机技术的发展,目前进行数据处理的方式多是把所得到的被测参量、试验数据连续变化的模拟量,先用 A/D 转换器进行采样和模数变换。使之成为离散的数字量数列,然后再进行计数、判断等数据处理。因此,需要讨论离散变量的付里叶变换问题。模拟信号,

经过时域采样和用窗函数截断后得到的有限长的时间序列。其序列点数 $N = \frac{T}{T_s}$,

式中 T 为时窗函数宽度; T_s 为采样间隔。

下面讨论如何根据所得的有限长度的离散时间序列求其频谱。

1. 离散傅里叶变换(DFT)

求离散傅里叶变换的过程一般分为采样、截断和延拓三步进行。

(1) 采样

要使时间离散化,只要对 $x(t)$ [如图 1-43a]所示]进行采样,得到 $x^*(t)$ 即可。这一过程实际上是以脉冲序列 $p(t)$ 对信号 $x(t)$ 进行调制。采样后波形如图 1-43c)所示。这里要注意 T 的选择所造成的混叠现象。为了减少由混叠效应所造成的误差,必须采样密一些,也就是选择更小的 T 。

(2) 截断

由于计算机只能对有限个样本进行计算,为此,必须对采样后的函数 $x(t)p(t)$ 截断(亦叫加窗)。使之成为只有有限个样本点(例如 N 个点)。在数字处理上将 $x^*(t)$ 乘以矩形脉冲 $h(t)$ 即可。这时函数 $x(t)$ 的无限序列与截断信号相乘后便成为有限长的时间函数。其采样截断后的波形和它的傅里叶变换如图 1-43e)所示。此时,频域的频率函数仍为连续函数。

因为计算机只能给出离散数据,所以若要用计算机做傅里叶变换,所给出的谱线只能是离散值。离散的谱线对应于时域中的周期函数,只要通过离散时间序列在计算机上求频谱,必须先假设信号是周期的。我们对实际信号进行截取后,对“窗”外部分的信号已经摒弃,因此可认为信号是以窗宽 T 为周期进行重复的。这样人为的周期化可能要引入误差,就是泄漏误差。

(3) 延拓

截断后的信号是在区间为 $(-T/2, T_0 - T/2)$ 上的函数,并不是一个周期函数。但只有周期性时间函数才能得到离散频谱。所以要将截断后的信号加以延拓,使之成为以 T_0 为周期的信号。同样计算机只能对频率的有限个采样值进行计算,所以图 1-43f)中使用频域采样函数 $P_0(f)$ 进行频域采样,采样间隔为 $1/T_0$ 。这样原来的时间函数 $x(t)$ 已用 N 个采样值近似,原来的傅里叶变换 $X(f)$ 也用 N 个采样值近似,因此,两组 N 个采样值就确定了离散傅里叶变换对。

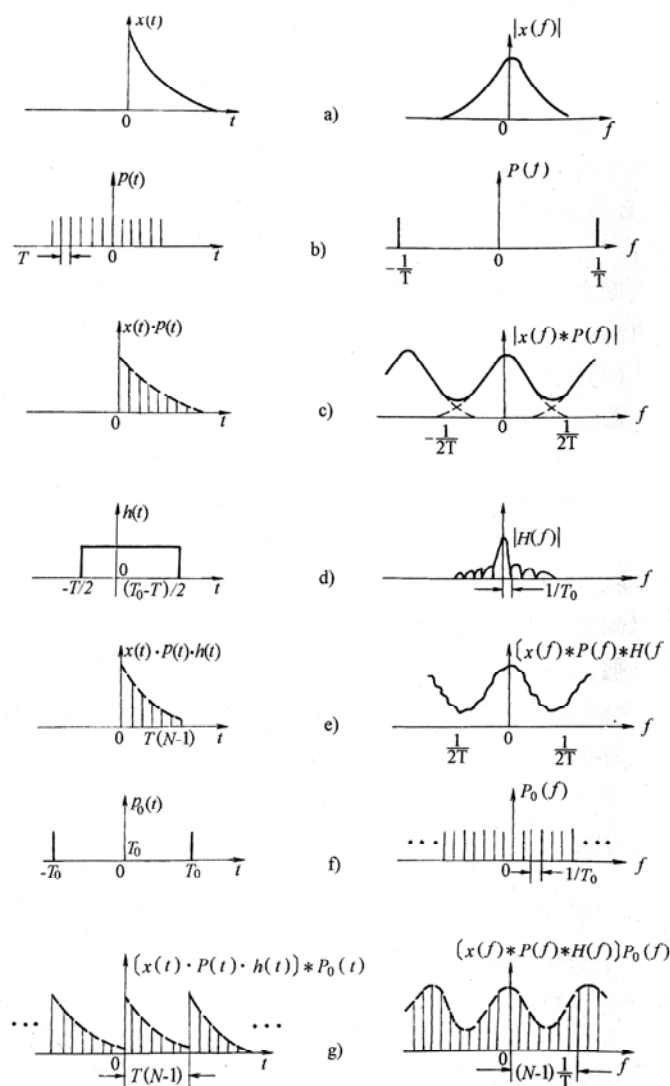


图 1-43 离散傅里叶变换对的推演过程图

对于有 N 个采样点信号，离散傅里叶变换对如下所示：

$$\longleftrightarrow \quad x(n) \quad X(k)$$

第 k 个频域分量为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad (k=0,1,\dots,N) \quad (1-82)$$

第 n 个时域分量为

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (n=0,1,\dots,N) \quad (1-83)$$

式中： N ——样本点数（即采样总数）；

$X(k)$ ——第 k 个时域分量；

k ——频域样本序号；

n ——时域样本序号；

x_n ——第 n 个时域分量。

离散的谱密度估计为

$$S'_{xx}(k) = \frac{1}{N} X^*(k) X(k) = \frac{1}{N} |x_{(k)}|^2$$

每计算 k 为定值的一个点 $X(k)$ 就要做 N 次复数乘法, 故计算全部 N 个 $X(k)$ 点要做 N^2 次复数乘法, 计算工作量随 N 的增大而急剧增大。自从研究出了一种 DFT 的快速算法 FFT (快速傅氏变换) 后使数学信号处理更实用化了。

(4) 泄漏

人为的周期化可能引入误差, 就是泄漏误差。前面介绍过的傅里叶变换的性质, 可以推广到离散傅里叶变换中去, 因为离散傅里叶变换也有与傅里叶变换的性质相对应的一些关系。这里要强调的是离散函数的运算在数据处理的数字量分析中将经常遇到, 例如从数据的相关函数计算其功率谱密度函数或者从数据的功率谱密度函数计算其相关函数等。

由前可知, 模拟信号经过时域采样和用窗函数截断以后得到有限长度的时间序列。其序列点数

$$N = \frac{T}{T_s}, \quad T \text{ 为时窗函数宽度, } T_s \text{ 为采样间隔。}$$

因为计算机只能给出离散数据, 若要用计算机做傅里叶变换, 所给出的谱线只能是离散值。离散的谱线对应于时域中的周期函数, 所以要通过离散时间序列在计算机上求频谱, 必须先假设信号是周期的。我们对实际信号进行截取后, 对“窗”外部分的信号已经摒弃, 因此可以认为信号是以窗宽 T 为周期进行重复的。这样人为的周期化可能要引入误差, 就是泄漏误差。在上述假设的基础上, 可以对该周期离散信号进行傅里叶分析, 从而得到前面所述的离散傅里叶变换 (DFT) 对

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow \quad x(n) \quad X(k) \\ & X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \\ & x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

$$(n, k = 0, 1, 2, \dots, (N-1))$$

式中: $x(n)$ —— $x(t)$ 函数在 $t=0, T_s, 2T_s, \dots, (N-1)T_s$ 点的采样值;

$X(k)$ —— $x(n)$ 的傅里叶变换在 $f=0, \frac{f_s}{N}, 2\frac{f_s}{N}, \dots, (N-1)\frac{f_s}{N}$ 点的采样值。

按照上式可以进行 DFT 计算。但每计算 k 为定值的一个点 $X(k)$ 就要做 N 次复数乘法, 计算全部 N 个 $X(k)$ 点要做 N^2 次复数乘法, 计算工作量随 N 的增大而急剧增大。1965 年 Cooley J W. 和 Tukey J W. 研究出一种 DFT 的快速算法, 称为 FFT, 使数字信号处理更为实用化了。现在各种算法程序书中都可查到 FFT 标准程序, 一些专用数字处理计算机已有专用的硬件以提高 FFT 运算速度。

六、离散的谱密度估算

在数字信号处理中对谱密度只能作估算, 这是因为数字处理的序列长度总是有限的, 而且又经过人为地周期化, 总是引进一些畸变。

假如 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是序列长为 N 的周期化序列, 即 $(N+n)=x(n), y(N+n)=y(n)$, 那么

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} R_{xy}(\tau) & S_{xy}(k) \end{matrix} \quad (1-84)$$

式中: $R_{xy}(\tau)$ ——离散的互相关函数, $R_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+\tau)$

在实际工作中,我们一般不通过相关运算后再做离散傅里叶变换而求谱密度,因为这样做比较繁冗。反之,在数据较长时常常先求谱密度,再从谱密度估算相关函数。

如果我们已对 $x(n)$ 和 $y(n)$ 两个数字序列分别做了离散傅里叶变换,即

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow & \begin{matrix} x(n) & X(k) \\ y(n) & Y(k) \end{matrix} \end{aligned}$$

则自功率谱密度估算为

$$S_{xx}(k) = \frac{1}{N} X^*(k)X(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2 \quad (1-85)$$

互谱密度估算为

$$S_{xx}(k) = \frac{1}{N} X^*(k)Y(k) \quad (1-86)$$

$$S_{yx}(k) = \frac{1}{N} Y^*(k)X(k) \quad (1-87)$$

式(1-85)、(1-86)和式(1-87)都具有非常简洁的形式,而且其物理涵义也非常明确。从频域分析看,在两个信号中只有同频率的成分才可能存在相关关系,其互谱密度函数才可能有非零值。

在随机过程测试信号的数字处理中,除了采样、截断等会引进误差之外,还有一个潜在误差源——栅栏效应。所谓栅栏效应是指这样一种现象:频谱经离散后,只能获得 $f = \frac{k}{T} = \frac{f_s k}{N}$ ($k=0, 1, 2, \dots$)〔见式(1-82)〕的各频率成分,其余的频率成分一概被舍去。这有如透过栅栏观望外界景象时只能看到一小部分的景象而看不到大部分的景象的现象

一样。显然,感兴趣的或有影响的频率成分,由于不在 $f = \frac{f_s k}{N}$ 点上而被舍去的可能性完全存在。所以功率谱的估计常常有显著的分散,各段样本处理的结果会有相当大的差别。为了获得较小的估计偏差和可信的结果,需要有有关的知识和经验。

综上所述,数字信号处理的具体步骤如下:

第一步 信号的预处理

在数字处理以前,必须先用模拟的方法对信号进行预处理。如系调制信号,则首先要进行解调。

解调后(或不需经过解调的)信号在 A/D 转换以前还应经过三个处理步骤:

1. 抗混滤波,即使信号经过一个低通滤波器。滤波器的截止频率一般选为有用信号的最高频率的 1~2 倍。

2. 消除常值分量。一般可用简单的电容隔直措施,如果确信信号中不应该有低频分量或已知有用信号频率范围,则在抗混滤波时可采用带通滤波器以代替低通滤波。

3. 电压幅值处理,使信号幅值与 A/D 转换器的动态范围相适应。

预处理的内容要根据测试对象、信号特点而选用。

第二步 采样和量化

专用数字信号处理机的第一个入口是 A/D 转换器，它对信号进行采样和量化处理。如利用通用计算机编程处理，则也需经 A/D 转换装置才能向计算机输入数据。

只要信号的幅值范围已调整到和 A/D 转换器的工作范围相适应，幅值量化的位数完全由 A/D 转换器的位数所决定。

对于操作者，重要的是选择合适的采样间隔 T_s 。采样间隔 T_s 的选取要满足采样定理，

即采样频率 $f_s \left(f_s = \frac{1}{T_s} \right)$ 必须满足 $f_s > 2f_c$ ， f_c 为信号所含成分的最高频率。若在预处理中采用低通滤波，滤波器的截止频率为 f_c 考虑到滤波器有一定的过渡带，故实际可用 $f_s = (3 \sim 4)f_c$ 。过小的 T_s 将使同一记录（处理）长度的数据点加多，这将显著加大处理工作量而并不带来任何好处。

第三步 确定分析信号的长度 T 和数据点数 N

采样间隔 T_s 确定以后，就根据处理要求和计算机的容量选定数据点 N 。因为分析信号的时间长度 $N = NT_s$ ，所以实际上也就决定了分析信号的长度。

若要用 FFT 进行谱分析，最好选用 $N = 2^r$ ， r 为正整数。常用 $N = 1024$ 或 512 ，少数用 $N = 2048$ 。计算工程量（对应所需时间）随 N 的增大而显著增大。

在时域相关处理中所分析的信号时间长度越长，所得的结果越好。在频域分析中所得频谱总是离散谱线，两相邻谱线的间距 $\Delta f = \frac{1}{T}$ 。因此所处理的时间长度 T 越长，频谱的分辨力就越高。对信号的时域截取就是加窗。时域中矩形窗的对应频谱图是 $\sin c$ 函数。 T 越大， $\sin c$ 函数的主瓣越窄，因此对于随机过程所得的功率谱估计值就可能起伏很大。所以在谱分析中也并不一定是信号长度 T 越大越好。根据信号结构特点，要有足够的分辨力（ T 要足够长），但不宜因数列过长（ N 大）而使到计算工作量过大，并导致所得的谱线起伏过大。

对随机过程的数字功率谱估计中常把长数据简单地分成若干段，对每段数据做谱分析，并将各段所得的谱进行平均。这样总的处理长度虽很长，但每段数据点却不致过长。如有必要可以再对每段数据进行加窗处理（如用时域三角窗、汉宁窗等）。

第四步 选择窗函数

将信号进行截断实际上就是用矩形窗函数和原信号相乘。为了减小泄漏误差可以对所得的时间序列（离散时间信号）进行某种加权处理，也就是采用其它窗函数处理。常用的窗函数有三角窗、汉宁窗等。这些窗函数的频谱图形和矩形窗的频谱图形相比，旁瓣减小，主瓣加宽，故所得到的信号频谱图形比较匀滑。

第五步 将各段时间序列进行 FFT

时间序列进行 FFT 后即可得到各段频谱。目前已有现成的用高级语言（Fortran、Basic 等）编成的 FFT 程序可查，不少专用的数字信号处理机已用硬件实现 FFT。

第六步 将所得频谱进行分析和加工

这一工作根据信号处理的要求而定。如果要求估计自功率谱，则可直接从频谱按式（1-85）进行估计，或经多段平均进行估计。如要求进行互谱密度分析，则需按式（1-86）、（1-87）进行估计。这时两个信号应应在同一时刻开始、按同样的采样间隔 T_s 进行双通道的

A/D 采样。

如需估计自相关函数和互相关函数,一般可将自功率谱密度函数和互谱密度函数进行逆 FFT 运算。

可从自功率谱、互谱密度函数按式 (1-71) 估算相干函数。

如果在感兴趣的频段用相干函数检验后结果较好,则可以进一步根据输入输出的互谱和输入的自功率谱,按式 (1-66) 估计系统的频率响应函数。

信号的数字处理不但需要相应的计算工具(计算机),还须对每个处理步骤所起的作用和可能引入的问题有清醒的估计。处理工作者既要信号处理理论、也要对于系统有相应的知识,才能掌握其技巧。

七、工程应用举例

1. 在工程实践中常需测量系统的响应特性,例如一个建筑物从地基到各测点的传输特性,或者一台机床从地基到台面的传输特性等。通常的做法是对研究对象施加一个随机激励,随机激励具有很宽的频谱,因此可以得出在很宽频率范围内的传递特性。

使用双通道的 A/D 采样。选择合适的采样频率,对输入点的激励信号和测点的响应信号分别进行采样。然后用 FFT 进行运算,得出输入的自功率谱和输入输出的互谱。从而可以得出从输入点(激励点)到输出点的传递函数。如果在系统各部位采用多点测量,还可以得出各点间相互的传输特性。在这种测量分析中常采用功率谱分析方法,这是因为过程是随机的而且常常有噪声干扰。

原则上可以采用任何形式的激励,但为了得到较宽广的频带响应,也常采用接近脉冲状的激励。这种激励在机械系统动特性测试中常用锤击的方法,在地震勘探中常用爆破的方法来获得。

2. 采用随机激励虽然可以迅速获得系统的传递特性,但是由于能量分散在各频率上,信噪比低,容易受各种噪声干扰的影响。如要获得系统精确的奈氏图,则最好采用正弦激励。但要注意,如果用计算机机内的时钟进行采样,而激励的信号源由模拟信号源供给,那么就有可能出现如下现象:截取处理的信号长度不正好是激励信号周期的整倍数,致使频谱离散点不正好落在激励信号的频率上。前者产生泄漏,后者产生了明显的栅栏效应。

3. 在动平衡技术中,由不平衡量引起的振动总是和转速同频的,要求测出精确的幅值和相对于某基准信号(一般用光电传感器对事先任意刻划的基准线产生)的相角。应用测振传感器把机械振动转换为电信号,再将时域中的振动信号和利用基准信号产生的、与转速同频的正、余弦信号进行相关处理—相乘和平均,就可以得到不平衡所引起的振动的幅值和相角信息。如果要对整个振动信号做谱分析,那么就将振动信号进行采样,利用 FFT 求出其频谱。所得频谱中包括不平衡振动的分量。但为了准确获得不平衡振动的幅值和相角,避免数字信号处理中的栅栏效应,必须对动不平衡振动信号进行整周期截取。为此,应利用与转速同频的基准信号,进行倍频,然后以转速倍频的脉冲序列作为对振动信号的采样脉冲。