FUNGSI

Matematika Informatika 1

Dosen: Nandy Rizaldy Najib, S.T., M.T.

Link Absensi Perkuliahan Online:

https://bit.ly/Absensionlinemtkinformatika1

Sebuah Masalah yang telah jelas digambarkan
Berarti telah terselesaikan sebagian.
(C. F. Kettering)

Defenisi

- Misalkan A dan B himpunan.
  Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.
  Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

  $$f : A \rightarrow B$$

  yang artinya f **memetakan** A ke B.

- A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f.

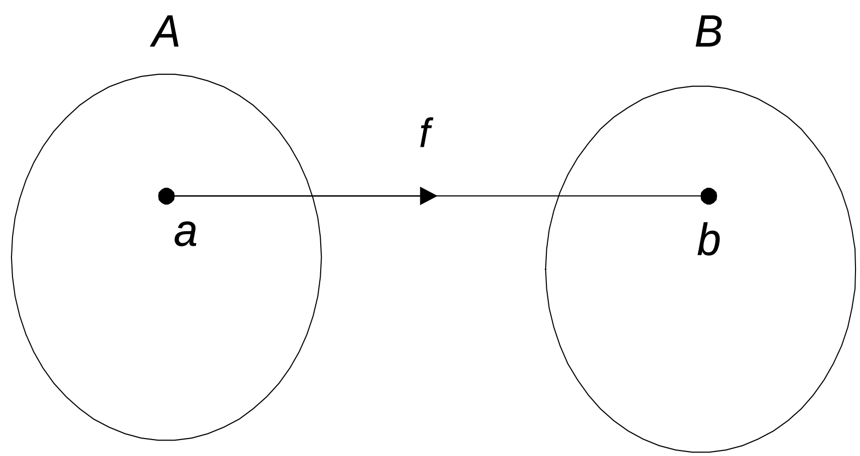
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

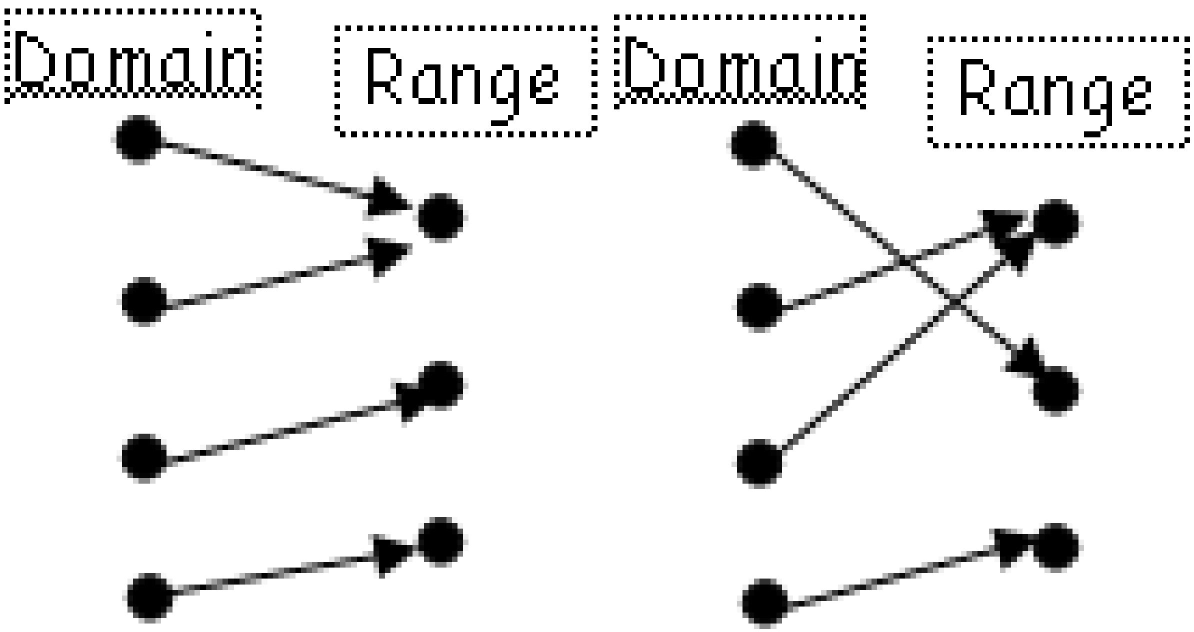
Definisi (Cont.)

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.

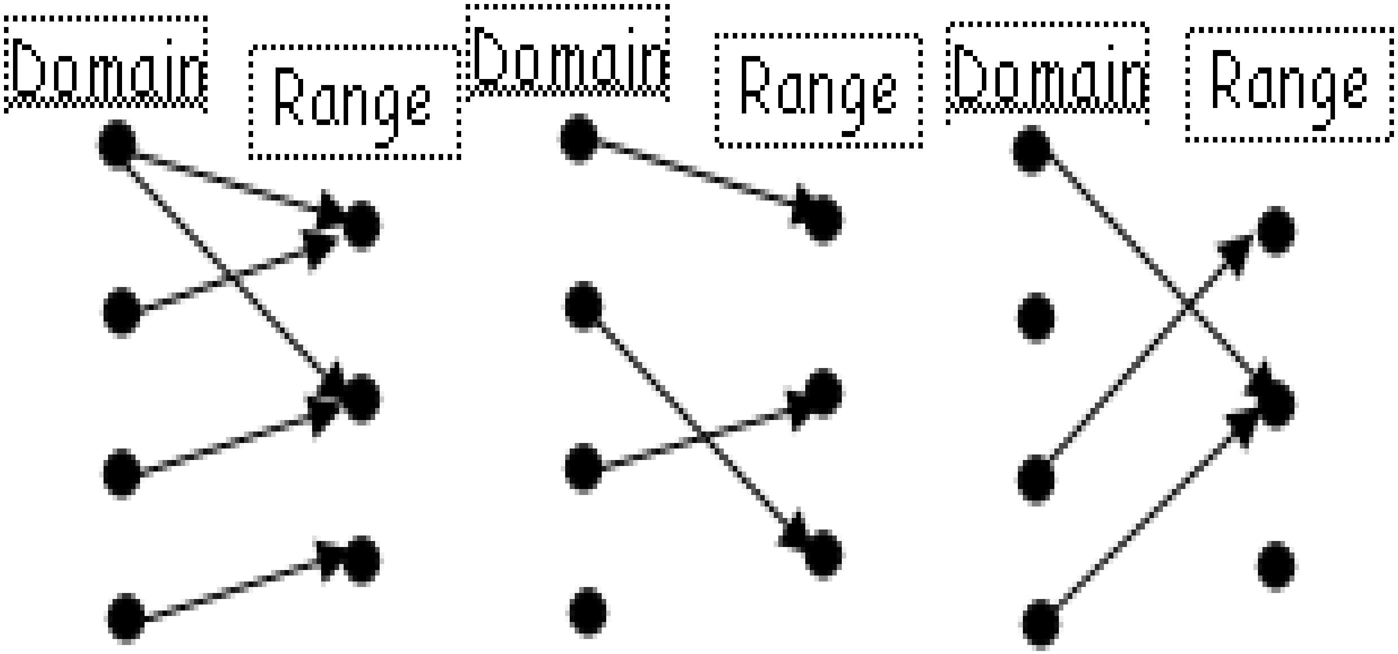
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



Fungsi



Bukan Fungsi



Contoh

- $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$
  $X = \{1,2,3\}$
  $Y = \{a,b,c\}$
  $f : X \rightarrow Y$ ➔ fungsi
- $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$
  $X = \{1,2,3,4\}$
  $Y = \{a,b,c\}$
  $f : X \rightarrow Y$ ➔ bukan fungsi
- $f = \{(1,a),(2,b),(3,c),(1,b)\}$
  $X = \{1,2,3\}$
  $Y = \{a,b,c\}$
  $f : X \rightarrow Y$ ➔ bukan fungsi

- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.
  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.
  3. Kata-kata
     Contoh: “*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner”.
  4. Kode program (*source code*)
     Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
   if x < 0 then
      abs:=-x
   else
      abs:=x;
end;
```

Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

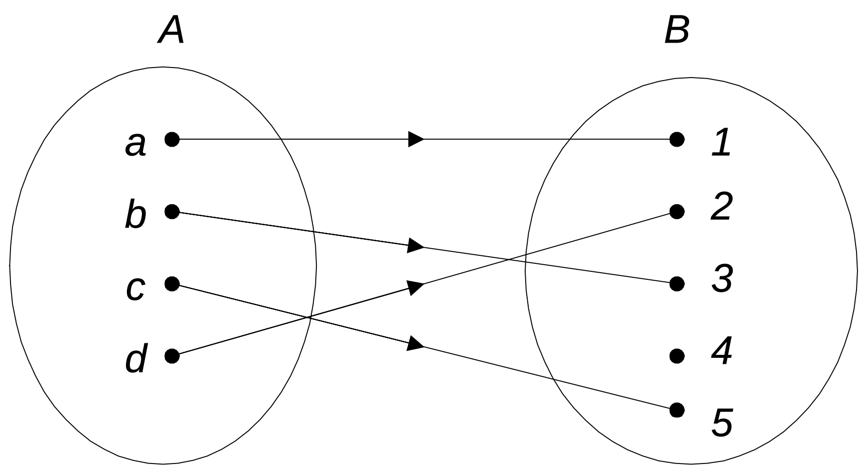
Contoh 30. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

Jenis Fungsi

- Fungsi satu-satu (*one-to-one*)/injektif
- Fungsi dipetakan pada (*onto*)
- Fungsi Korespondensi satu-satu

Fungsi Satu-satu atau Injektif

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



Contoh 31. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

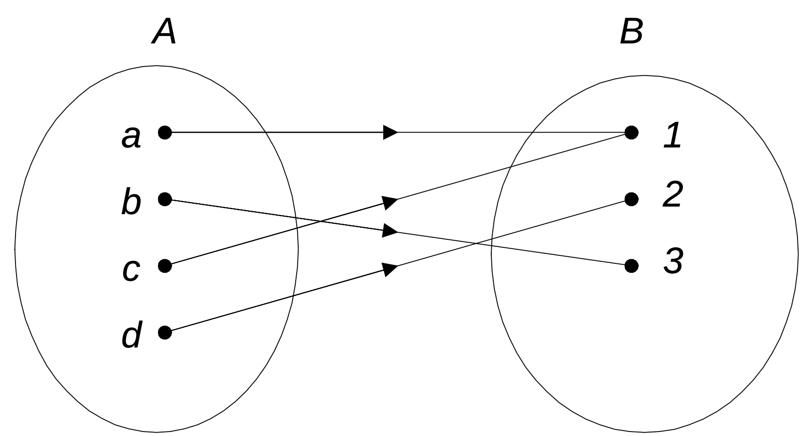
$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

Fungsi Dipetakan pada (Onto)

- Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.

- Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.



Contoh 33. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Fungsi korespondensi satu-satu

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

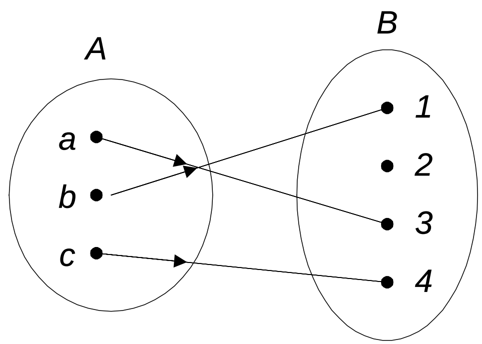
Contoh 35. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

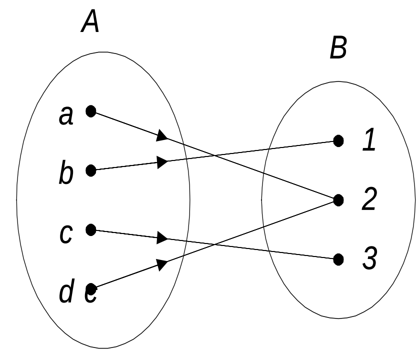
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 36. Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

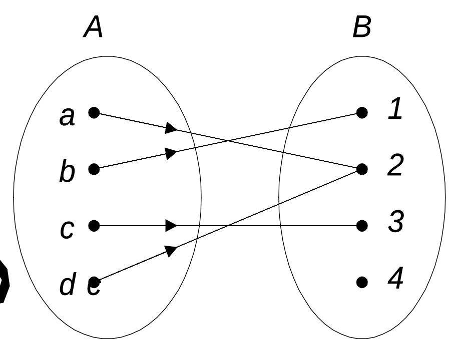
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



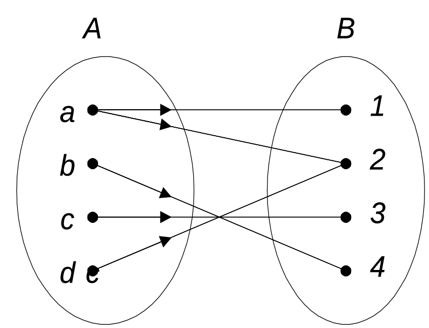
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Bukan fungsi satu-ke-satu
maupun pada

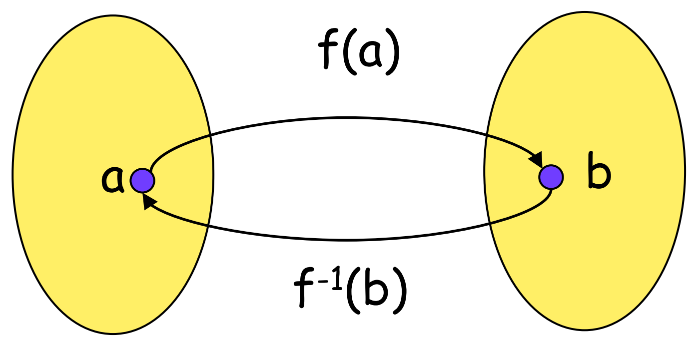


Bukan fungsi



Fungsi Inversi

- Notasi : f^{-1}
- Jika f adalah berkoresponden satu-satu dari A ke B maka dapat menemukan **balikan** atau **inversi** (invers) dari f
- Fungsi yang berkoresponden satu-satu sering dinamakan fungsi yang **invertible** (dapat dibalikkan) karena dapat mendefinsikan fungsi balikkannya
- Fungsi dikatakan **not invertible** (tidak dapat dibalikkan) jika bukan fungsi yang berkoresponden satu-satu karena fungsi balikkannya tidak ada



Contoh

- Tentukan invers fungsi $f(x) = x - 1$

  Jawaban :

  $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-satu jadi balikkan fungsinya ada

  $f(x) = y \rightarrow \; y = x - 1$

  Sehingga :

  $x = y + 1$

  Invers fungsi balikkannya adalah :

  $f^{-1}(y) = y + 1$

- Tentukan invers fungsi $f(x) = x^2 + 1$

  Jawaban :

  $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-satu sehingga fungsi inversinya tidak ada

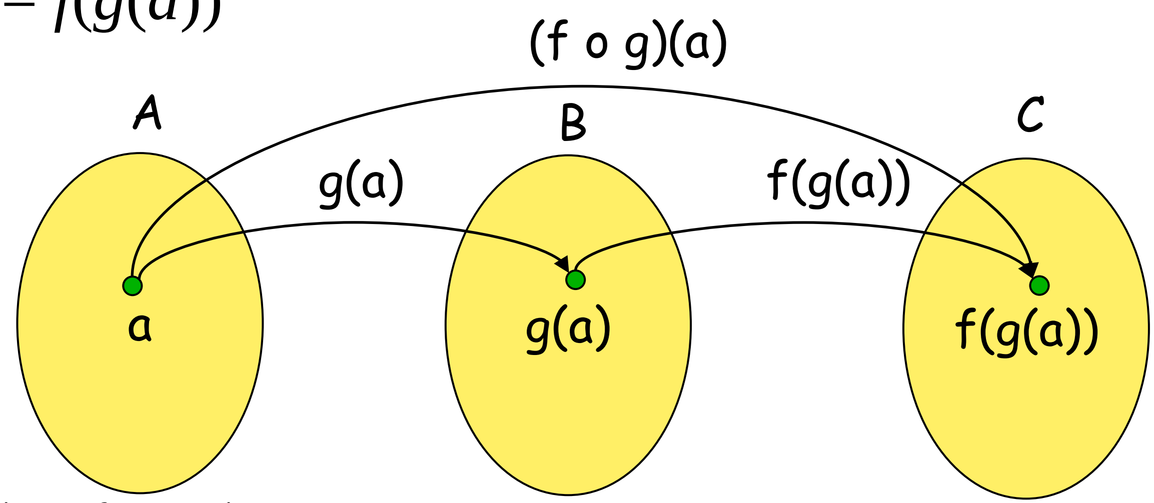
  Sehingga $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*

Komposisi (Composition)

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$



Contoh 40. Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

Contoh 41. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

Fungsi Faktorial

- Untuk sembarang bilangan bulat tidak negatif n
- Dilambangkan dengan :

  n!
- Didefinisikan sebagai :

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1x2x\ldots x(n-1)xn & , n > 0 \end{cases}$$

- Contoh :

  0! = 1

  1! = 1

  2! = 1x2 = 2x1 = 2

  3! = 1x2x3 = 3x2x1 = 6

  5! = 1x2x3x4x5 = 5x4x3x2x1 = 120

Fungsi Eksponensial

- Fungsi eksponensial berbentuk :

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n}, & n > 0 \end{cases}$$

- Untuk kasus perpangkatan negatif :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Contoh :
  - $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
  - $4^{-3} = 1/64$

Fungsi Logaritmik

- Fungsi logaritmik berbentuk :

$$y = {}^{a}\log x \quad \leftrightarrow \quad x = a^{y}$$

- Contoh :
  - ${}^{4}\log 64 = 3$ karena $64 = 4^3$
  - $\lfloor {}^{2}\log 1000 \rfloor = 9$ karena $2^9 = 512$ tetapi $2^{10} = 1024$

Fungsi Rekursif

- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri
- Fungsi rekursif disusun oleh 2 bagian :
  - Basis
    - Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri.
    - Bagian ini menghentikan definisi rekursif (dan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif)
  - Rekurens
    - Bagian yang mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri
    - Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis)
- Misalkan f(n) = n! maka fungsi faktorial dapat dituliskan sebagai :

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ nxf\,(n-1) & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi Rekursif (Cont.)

- Perhitungan n! secara rekursif :
  - Basis

    $n! = 1$ jika $n = 0$
  - Rekurens

    $n! = n \times (n-1)!$ Jika $n > 0$
- Contoh :

$5! = 5 \times 4!$ (rekurens)

$4! = 4 \times 3!$

$3! = 3 \times 2!$

$2! = 2 \times 1!$

$1! = 1 \times 0!$

$0! = 1$

Sehingga :

$0! = 1$

$1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$

$2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$

$4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Jadi $5! = 120$

Contoh

- Misalkan n menyatakan bilangan bulat positif dan fungsi f didefinisikan secara rekursif :

$$n! = \begin{cases} 0 & , n = 1 \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 & , n > 1 \end{cases}$$

Tentukan :

- f(25)
- f(10)

Penyelesaian :

- $f(25) = f(\lfloor 25/2 \rfloor)+1 = f(12) + 1$
  $= [f(\lfloor 12/2 \rfloor)+1] + 1 = f(6) + 1 + 1 = f(6) + 2$
  $= [f(\lfloor 6/2 \rfloor)+1\ ] + 2 = f(3) + 1 + 2 = f(3) + 3$
  $= [f(\lfloor 3/2 \rfloor)+1\ ] + 3 = f(1) + 1 + 3 = f(1) + 4$
  $= 0 + 4 = 4$

- $f(10) = f(\lfloor 10/2 \rfloor)+1 = f(5) + 1$
  $= [f(\lfloor 5/2 \rfloor)+1] + 1 = f(2) + 1 + 1 = f(2) + 2$
  $= [f(\lfloor 2/2 \rfloor)+1\ ] + 2 = f(1) + 1 + 2 = f(1) + 3$
  $= 0 + 3 = 3$

Saya rasa cukup…..

TERIMA KASIH…☺