DERET TAYLOR DAN ANALISIS GALAT (KESALAHAN)

MATA KULIAH: KOMPUTASI NUMERIK

PERTEMUAN: 2

MATERI

- Deret Taylor
- Angka Bena
- Analisis Galat

TUJUAN

Mahasiswa dapat menyajikan dan menganalisis galat dari sebuah pengukuran.

DERET TAYLOR

- Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial.
- Jika fungsi f(x) diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut.
- Nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Dx dari titik x_i dapat dinyatakan dengan deret Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + \frac{f^n}{n!}x^n + \ldots,\ |\mathrm{x}| < \mathrm{r}$$

CONTOH

$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$
$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$

.

.

.

$f^n(x) = e^x \rightarrow f^n(0) = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots.$$

Dengan deret Taylor, tunjukkan bahwa:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

ANALISIS GALAT / KESALAHAN

- Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematis hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis.
- Penyelesaian numerik akan memberikan kesalahan atau perbedaan terhadap nilai eksak.
- Kesalahan (error/galat) adalah besarnya perbedaan atau selisih antara nilai taksiran (hampiran/aproksimasi) dengan nilai sesungguhnya (eksak), kesalahan ini biasa timbul karena proses pengukuran atau penggunaan aproksimasi.

ANALISIS KESALAHAN

- Besarnya kesalahan atas suatu nilai taksiran dapat dinyatakan secara kuantitatif dan kualitatif.
- Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kuantitatif disebut **Kesalahan Absolut**.
- Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kualitatif disebut dengan **Kesalahan Relatif**.

ANALISIS KESALAHAN

Nilai eksak dapat diformulasikan sebagai hubungan antara nilai perkiraan dan nilai kesalahan sebagai berikut :

$$v = v' + \varepsilon$$

dimana :

v = nilai eksak,
v' = nilai perkiraan
ε = nilai kesalahan

KESALAHAN ABSOLUT & RELATIF

Kesalahan absolut menunjukkan besarnya perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan :

$$\varepsilon_a = \left| v - v' \right|$$

Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan, tetapi hanya sekedar menunjukkan selisih perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan.

Kesalahan relatif menunjukkan besarnya tingkat kesalahan antara nilai perkiraan dengan nilai eksaknya yang dihitung dengan membandingkan kesalahan absolut terhadap nilai eksaknya (biasanya dinyatakan dalam %).

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\varepsilon_a}{v} \right| * 100\%$$

dimana :

v = nilai eksak

ε_r = kesalahan relatif

ε_a = kesalahan absolut

Semakin kecil kesalahan relatifnya, maka nilai perkiraan yang diperoleh akan semakin baik.

CONTOH

Isna membeli kabel listrik 30 meter dari sebuah toko alat-alat elektronika. Setelah diukur ulang oleh Isna sesampainya di rumah, kabel tersebut ternyata hanya mempunyai panjang 29,97 meter. Berapa kesalahan absolut dan kesalahan relatif hasil pengukuran yang dilakukan oleh Isna?

Diketahui :

$V = 30$ meter

$V' = 29{,}97$ meter

Kesalahan absolut

$\varepsilon_a = |30 - 29{,}97| = 0.03$ meter

Kesalahan relatif

$\varepsilon_r = |0.03/30| * 100\% = 0.1\%$

CONTOH

Pengukuran panjang jembatan dan pensil memberikan hasil 9999 cm dan 9 cm. Apabila panjang yang benar (eksak) adalah 10.000 cm dan 10 cm. Hitung kesalahan absolut dan relatif!

Kesalahan absolut

Jembatan : $\varepsilon_a = |v - v'| = |10.000 - 9999| = 1$ cm

Pensil : $\varepsilon_a = |v - v'| = |10 - 9| = 1$ cm

Kesalahan relatif

Jembatan :
$$\varepsilon_r = \left|\frac{\varepsilon_a}{v}\right| * 100\% = \left|\frac{1}{10000}\right| * 100\% = 0{,}01\%$$

Pensil :
$$\varepsilon_r = \left|\frac{\varepsilon_a}{v}\right| * 100\% = \left|\frac{1}{10}\right| * 100\% = 10\%$$

Kedua kesalahan sama yaitu 1 cm tetapi kesalahan relatif pensil adalah jauh lebih besar

MACAM KESALAHAN

Ada 3 macam kesalahan dasar;

1. Kesalahan bawaan *(Inherent Error)*
2. Kesalahan pemotongan *(Truncation Error)*
3. Kesalahan pembulatan *(Round-off Error)*

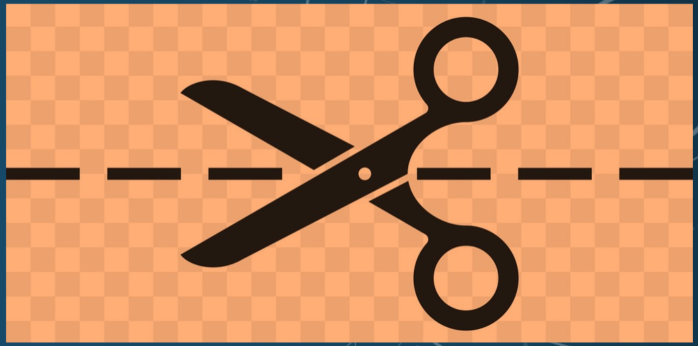
KESALAHAN BAWAAN

Kesalahan bawaan adalah kesalahan dalam nilai data. Terjadi akibat kekeliruan dalam menyalin/mencatat data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur. Kesalahan ini sering terjadi karena faktor *human error*.

Contoh :

Seseorang mengukur berat badan menggunakan timbangan manual. Berat badan dibaca dan dicatat sebesar 78,4 kg. Jika tidak ada validasi berat badan yang sesungguhnya, dapat diasumsikan bahwa data tersebut mengandung kesalahan. Jika satuan terkecil skala pengukuran adalah 0,1 kg maka berat badan orang tersebut dapat ditulis sebagai: **78,4 ± 0,1 kg**. Artinya, berat badan orang tersebut dimungkinkan berada pada range nilai **78,3 kg** hingga **78,4 kg**.

KESALAHAN PEMOTONGAN



Kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar.

Contoh :

Pemotongan nilai/suku dalam deret tak terhingga: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\ldots.$

Pemotongan suku pada deret tak terhingga tsb memberikan konsekuensi nilia/hasil yang berbeda-beda, padahal nilai eksak dari nilai tsb adalah tunggal. Sisa suku yang dipotong dianggap sebagai nilai kesalahan.

$$\sin x = x;\ \text{maka nilai error } \varepsilon = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!};\ \text{maka nilai error } \varepsilon = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!};\ \text{maka nilai error } \varepsilon = -\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\ldots$$

dan seterusnya.

KESALAHAN PEMBULATAN

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang terjadi karena penggunaan nilai perkiraan dari nilai yang seharusnya (nilai eksak).

Contoh :

- 3,142857143 dibulatkan menjadi 3,14.
- 0,483 dibulatkan menjadi 0,5.
- 0,3333333 dibulatkan menjadi 0,33.
- 0,666667 dibulatkan menjadi 0,7.
- 0,6 dibulatkan menjadi 1.

Kesalahan hasil pembulatan akan memberikan dampak pada meningkatnya kesalahan komputasi apabila hasil pembulatan digunakan sebagai dasar nilai pada perhitungan berikutnya.

ANGKA BENA

- Angka bena atau angka penting atau angka signifikan (significant figure) merupakan banyaknya digit yang diperhitungkan di dalam suatu kuantitas yang diukur atau dihitung.
- Jika angka signifikan digunakan pada komputasi, digit terakhir dianggap tidak pasti. Ketidakpastian dari digit terakhir tergantung pada alat yang digunakan dalam suatu pengukuran.
- Komputer hanya menyimpan sejumlah tertentu angka bena. Bilangan riil yang jumlah angka benanya melebihi jumlah angka bena komputer akan disimpan dalam sejumlah angka bena komputer itu.
- Aturan penulisan angka signifikan:
  - Setiap angka yang tidak nol merupakan angka signifikan. Contoh: 91 memiliki 2 angka signifikan (9 dan 1) dan 123,45 memiliki 5 angka signifikan (1, 2, 3, 4, dan 5).
  - Angka-angka nol yang terletak di antara angka bukan nol merupakan angka signifikan. Contoh: 2,008 memiliki 4 angka signifikan (2, 0, 0, dan 8).
  - Angka nol terakhir di sebelah kanan koma desimal merupakan angka signifikan. Contoh: 10,070 memiliki lima angka signifikan.
  - Angka nol di sebelah kiri dari angka pertama bukan nol merupakan angka tak signifikan. Contoh: Angka 0,00008 memiliki 1 angka signifikan (8). Angka 4.3123×10^1 memiliki 5 angka bena. Angka 1.764×10^{-1} memiliki 4 angka bena.
  - Nol yang terdapat di ujung dari deret angka dan disebelah kiri dari koma desimal dapat atau tidak dapat menjadi angka signifikan.

ATURAN PEMBULATAN

ATURAN 1

Bila angka terkiri dari angka yang harus dihilangkan adalah angka 4 atau kurang maka angka terkanan dari yang mendahuluinya tetap

Contoh :

- 2334 dibulatkan sampai puluhan terdekat menghasilkan 2330
- 3,142857143 dibulatkan sampai seperseratus terdekat menjadi 3,14

ATURAN 2

Bila angka terkiri dari angka yang harus dihilangkan lebih dari 5 atau angka 5 diikuti dengan angka bukan nol maka angka terkanan yang mendahuluinya bertambah satu.

Contoh :

- 453 dibulatkan keseratusan terdekat menjadi 500
- 0,555 dibulatkan ke seperseratus terdekat menjadi 0,56

ATURAN 3

Bila angka terkiri dari angka yang harus dihilangkan hanya angka 5 saja atau angka 5 diikuti dengan angka nol saja maka angka terkanan yang mendahuluinya bertambah satu jika ganjil dan tetap jika genap

Contoh :

- 3500 dibulatkan sampai ribuan terdekat menjadi 4000
- 4500 dibulatkan sampai ribuan terdekat menjadi 4000
- 5,55500 dibulatkan sampai seperseratus terdekat menjadi 5,56

is there any question?