Расчетное задание по математической статистике. Часть 2

2.1

1) выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{50} x_i = 1.464$$

2) выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{50} (x_i - 1.464)^2 \approx 0.0295$$

3) несмещенная выборочная дисперсия:

$$s_0^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{50}{50-1} 0.03 \approx 0.0301$$

4) минимальная порядковая статистика:

$$X_{min} = 1.0$$

5) максимальная порядковая статистика:

$$X_{max} = 1.9$$

6) размах:

$$R = x_{max} - x_{min} = 1.9 - 1.0 = 0.9$$

7) медиана:

так как длина вариационного ряда четна ($n = 50$), то

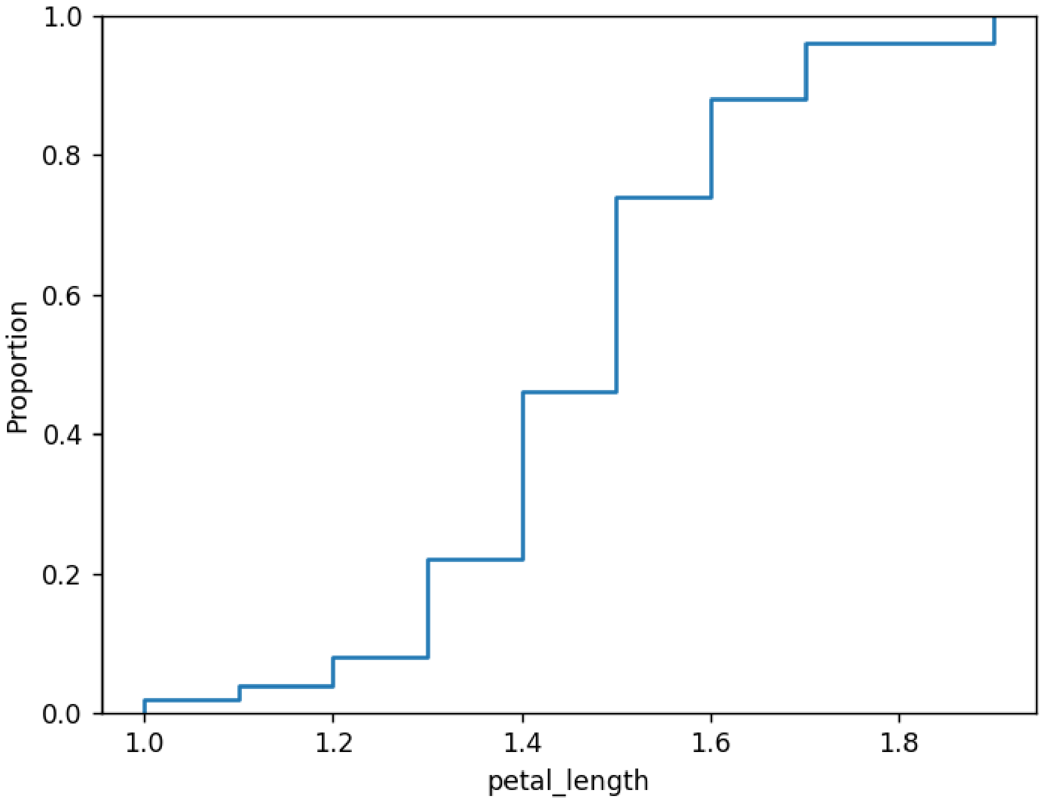
$k = \frac{n}{2} = 25$,

$$Med = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} = 1.6$$

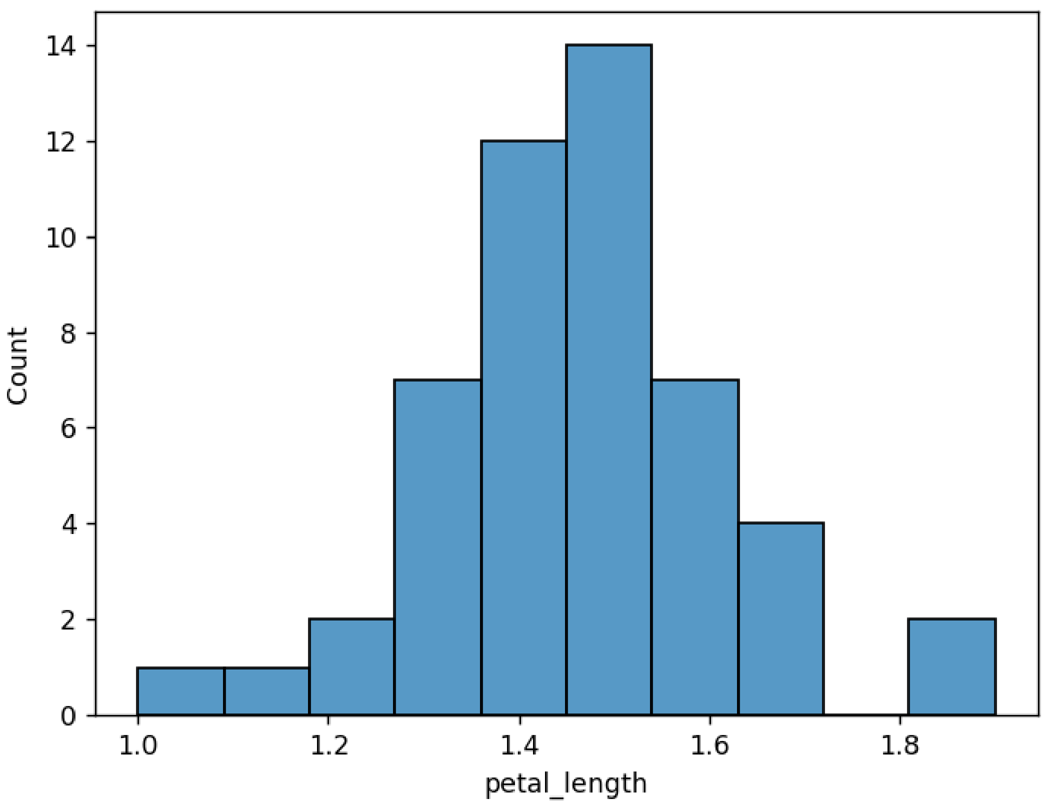
2.2

1) график эмпирической функции распределения:

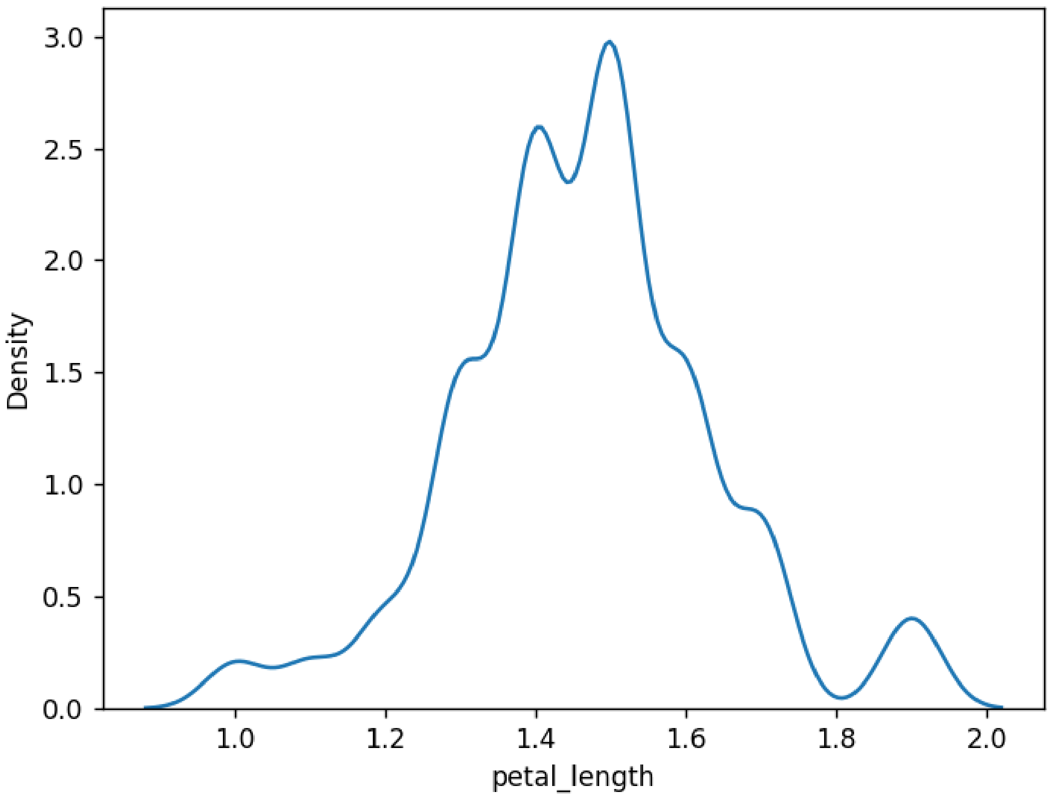
Построим график функции распределения $F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$, где $\mu_n(x)$ – количество наблюдений в выборке случайной величины X, которые меньше x.



2) гистограмма:



3) ядерная оценка функции плотности:



2.3

Построить 99% - доверительный интервал (в предположении, что выборка подчиняется нормальному распределению с неизвестными параметрами)

$\gamma = 0.99$ – надежность

$X \sim N(a, \delta)$

1) для матожидания

По данным из 1 подпункта:

$\bar{x} = 1.464,\ s^2 = 0.03$

значит оценка $a^* = 1.464,$ оценка дисперсии $s^2 = 0.03$

Из таблицы Стьюдента $t_{0.99,\,49} = 2.68$

Предельная ошибка $\Delta = t_{\gamma,\,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} = 2.68 \cdot \frac{\sqrt{0.03}}{\sqrt{49}} \approx 0.066$

Интервал: $(1.464 - 0.066,\ 1.464 + 0.066) = (1.398,\ 1.53)$

2) для дисперсии:
$\varepsilon = 1 - \gamma = 1 - 0.99 = 0.01$ – уровень значимости

Из таблицы распределения χ^2 для числа степеней свободы 49 найдем: $q_1 = 27.1,\ q_2 = 78$

Интервал: $(\frac{n \cdot s^2}{q_2} < \delta^2 < \frac{n \cdot s^2}{q_1})$;

$(\frac{50 \cdot 0.03}{78} < \delta^2 < \frac{50 \cdot 0.03}{27.1})$ или $(0.02 < \delta^2 < 0.055) \Rightarrow (0.14 < \delta < 0.23)$

2.4

Проверим гипотезу о нормальном распределении по критерию Колмогорова, при уровне значимости $\alpha = 0.01$.

По методу максимального правдоподобия: $a = 1.464,\ \delta = 0.03$.

По критерию Колмогорова, гипотеза H_0 о том, что эмпирическая функция распределения имеет вид нормального распределения, принимается, если $S_k < G_s^{-1}(1 - \alpha)$, где α – уровень значимости, $G_s^{-1}(1 - \alpha)$ – функция распределения статистики при верной основной гипотезе.

$S_k = \frac{6 \cdot n \cdot D_n + 1}{6 \cdot \sqrt{n}}$, где

$D_n = max(D_n^+,\ D_n^-),\ D_n^+ = max(\frac{i}{n} - F(X_{(i)})),\ D_n^- = max(F(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n})$

Вычисляем значение статистики Колмогорова $S_k = 1.1337$.

Находим по таблице из приложения 8 критическое значение статистики Колмогорова при $\alpha = 0.01$: $G_s^{-1}(1 - \alpha) = 1.0599$.

Поскольку $S_k > G_s^{-1}(1 - \alpha)$, то гипотеза о согласии данной выборки с нормальным распределением отвергается.