# S04 Aufg01 - Jari Rentsch, Sydney Nguyen

$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

$\bar{x}_1 \in [-1, 0]$ , $\bar{x}_2 \in [0, 1]$

a) Fixpunktfunktion: $F(x) = \dfrac{230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9}{221}$

| n | $x_n$ | $x_n$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | -1 | 0 | 1 |
| 1 | 0.9592760180995475 | -0.04072398190045249 | 1.1221719457013575 |
| 2 | 0.9499195672513018 | -0.0406590819335246 | 1.775993137266157 |
| 3 | 0.9132260475624332 | -0.04065928897359839 | 10.897798918469885 |
| 4 | 0.7791212216580602 | -0.040659288313662 | 14789.015074413734 |
| 5 | 0.4060089553678526 | -0.04065928831576555 | 4.978458223118192e+16 |
| 6 | -0.00027986139568287 | -0.040659288315758844 | 6.393152008407137e+66 |
| 7 | -0.04072397871263136 | -0.04065928831575886 | 1.7385840259006801e+267 |
| 8 | -0.040659081943702706 | -0.04065928831575886 | |
| 9 | -0.04065928897356595 | -0.04065928831575886 | |

$F(x_n)$ mit $x_0 \in \{-1, 0\}$ konvergiert gegen $-0.040659$, wobei letzteres $(x_0 = 0)$ schon in der 2. Iteration diesen Wert annimmt. Hingegen nimmt $F(x_n)$ mit $x_0 = -1$ den Grenzwert erst in der 8. Iteration an.

$\Rightarrow$ Daraus folgt, dass $x_0 = 0$ näher an der Nullstelle $\bar{x}_1 = -0.040659$ liegt.

$F(x_n)$ mit $x_n = 1$ divergiert.

Nach Satz 3.1 zur Fixpunktiteration gilt für $|F'(\bar{x})| > 1$, dass Punkt $\bar{x}$ ein abstossender Fixpunkt ist. Das ist der Fall bei $F(x_3)$ für $x_0 = 1$.

$\bar{x}_2 \in [0, 1]$ kann mit diesem Verfahren nicht gefunden werden.

b) $\left( \alpha \geq \dfrac{|F(0.5) - F(-0.5)|}{|0.5 - -0.5|} = 0.020362 \right)$

nach Satz 3.2:

- $F$ hat genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in $[-0.5, 0.5]$

  $\rightarrow \bar{x}_1 = -0.040659$.

- $F(x_n)$ für $x_0 \in [-0.5, 0.5]$ konvergiert gegen $\bar{x}_1$.

monoton → Randwert hat max Steig.

$\alpha = \max\limits_{x_0 \in [-0.5, 0.5]} |F'(x_0)|$. $\Longrightarrow$ $\alpha = |F'(0.5)| = 0.622172$, da gemäss Aufgabenstellung die höchste Steigung bei $x = 0.5$ liegt.

c) a-priori Abschätzung

$10^{-9} \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$, für $x_0 = 0.5$

$\Rightarrow$ ab $n = 45$.

| n | |
|---|---|
| | 1.1856973527854661e-07 |
| | 7.377076289954824e-08 |
| | 4.589809908908544e-08 |
| | 2.8556509614249987e-08 |
| | 1.7767059149137437e-08 |
| | 1.1054165760209945e-08 |
| | 6.877591819135146e-09 |
| ⋮ | 4.279044683851053e-09 |
| 43 | 2.66230155669466e-09 |
| 44 | 1.6564093395724692e-09 |
| 45 | 1.0305714216797038e-09 |

```
2.66230155669466e-09
1.6564093395724692e-09
1.0305714216797038e-09
```

c) $$|x_n - \bar{x}| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_1 - x_0| \overset{!}{\le} 10^{-9}$$

nach n auflösen:

$$\alpha^n \le \frac{10^{-9}(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}$$

$$\underbrace{n \log \underbrace{\alpha}_{<1}}_{<0} \le \log\left(\frac{10^{-9}(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}\right)$$

$$n \ge \frac{\log\left(\frac{10^{-9}(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\log(\alpha)}$$