Übungsserie 3

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie Ihre Lösung zu den Aufgaben 1 und 2 und 3a in die Dateien *Gruppe_S3_Aufg1.pdf* resp. *Gruppe_S3_Aufg2.pdf* resp. *Gruppe_S3_Aufg3a.pdf* und fassen Sie diese zusammen mit den Python Skripten *Gruppe_S3_Aufg3b.py* und *Gruppe_S3_Aufg4.py* in eine ZIP-Datei *Gruppe_S3.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch. Die Python Skripte müssen ausführbar sein.

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positve Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, der Rechner $1+x$ nicht mehr korrekt berechnen kann (bekanntlich wird er $1+x = 1$ ausgeben), wohingegen er keine Probleme hat, z.B. $\sqrt{x}$ oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie eps, nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< eps$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $, n \in \mathbb{N}$) einer rellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n?

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c{\cdot}x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = ...$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2\mathrm{e})^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{2^{5x}})^2$

b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für $0 < x \leq 100$.

Aufgabe 4 (ca. 40 Min.):

Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \sqrt{100x^2 - 200x + 99}, \qquad \text{für } x \geq 1.1.$$

a) Für x in der Nähe von 1.1 entsteht bei der numerischen Auswertung von $h(x)$ Auslöschung. Erklären Sie stichwortartig und mit entsprechenden Berechnungen oder einem Plot, warum das so ist.

b) Erstellen Sie für $x \in [1.1,\, 1.3]$ mit einer Auflösung von $\Delta x = 10^{-7}$ einen halblogarithmischen Plot der Kondition von $h(x)$.

c) Auslöschung kann jeweils durch geeignete algebraische Umformungen genau dann vermieden werden, wenn die Kondition an der betreffenden Stelle gut ist. Begründen Sie: Kann die in a) beschriebene Auslöschung vermieden werden? Fügen Sie die Antwort als Kommentar in Ihr Skript ein.