

算法设计与分析 期末

算法设计与分析 期末

- 算法的抽象分析

 - 证明正确性

 - 性能指标

- 算法中的数学

 - 渐进增长率

 - 求解分治与递归

 - 替换法

 - 递归树

 - 主定理

- 蛮力算法

- 分治 in 排序

 - 快速排序

 - 归并排序

 - 决策树

 - 逆序对及计数

- 分治例子

 - 整数乘法

 - 检测异类

- $O(\log)$ 时间算法

 - 二分查找

 - 红黑树

- $O(n)$ 线性选择k阶元素

 - 期望情况

 - 最坏情况

- DFS

 - DFS树

 - 活动区间

 - 拓扑排序

 - 关键路径

 - 强连通分量 in 有向图

 - 割点 in 无向图

 - 割边 in 无向图

- BFS

 - BFS树

 - 二分图

 - 寻找k度子图

- 最小生成树

 - Prim

 - Kruskal

 - Minimum-weight Cut-crossing Edge

- 最短路径

 - Dijkstra 单源非负

 - Floyd-Warshall 多源无负环

 - Bellman-Ford 单源 负环检查

- 贪心

 - 相容任务调度

 - 正确性证明 (贪心代表)

 - Huffman Code

- 简单数据结构

 - 堆

 - 堆的修复

- 堆的构建
- 堆排序
- 优先队列
- 并查集
 - 普通并+普通查
 - 加权并+普通查
 - 加权并+路径压缩
- 哈希表
 - 直接寻址表
 - 简单均匀哈希
 - 封闭寻址
 - 开放寻址
- 动态规划
 - 矩阵链相乘
 - 编辑距离
 - 背包问题
 - 01背包
 - 完全背包
 - 多重背包
 - 硬币兑换问题
 - 最大和连续子序列
 - 相容任务调度
- 平摊分析
- 对手论证
- N NP NP-hard NP-complete

算法的抽象分析

证明正确性

肯定用**数学归纳法**

性能指标

最坏情况时间复杂度

平均情况时间复杂度： $A(n) = \sum_{I \in D_n} Pr(I) \cdot f(I)$, I 是输入, $f(I)$ 是该输入的具体时间复杂度

算法中的数学

渐进增长率

$$f(n) = O(g(n)) \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty, c > 0$$

$$f(n) = o(g(n)) \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

两个都说明了 $f(n)$ 增长率不如 $g(n)$, 但 $o(g(n))$ 强调 f 与 g 间存在实质性的差距 (更不如 g 了)

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, 0 < c < \infty$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ iff } f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$$

说明 f 和 g 同级

$$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0, c \text{ 可以为 } \infty$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

两个都说明了 $f(n)$ 增长率优于 $g(n)$ ，但 $\omega(g(n))$ 强调 f 与 g 间存在实质性的差距（更胜于 g 了）

求解分治与递归

替换法

（期中考过）

利用数学归纳法，归纳证明 $T(n)$ 的复杂度也小于等于 $cO(n)$ ， c 是某常数。

例如，求 $T(n) = 2T(n/2) + n$ ，猜测为 $O(n \log n)$ ，步骤如下：

1. 假设对于小于 n 的参数都成立
2. 证明 n 也成立，如：

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &\leq 2c \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + n \\ &= cn \log \frac{n}{2} - c'n + n \\ &\leq cn \log n (c \geq 1) \end{aligned}$$

递归树

用不上

如果一定要用就点了吧

主定理

有式子 $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ ，其中 $a \geq 1, b > 1$

根据 $n^{\log_b a}$ 与 $f(n)$ 的大小关系分以下3种情况：

1. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a - \epsilon})$ ，其中 $\epsilon > 0$

表明 $f(n)$ 的影响力不如递归

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\epsilon n)$ ，其中 $\epsilon \geq 0$

注意 n 的次方没有减去 ϵ ，表明同级（但不完全同）。 ϵ 可以为0表明log项可以没有

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{\epsilon+1} n)$$

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ ，其中 $\epsilon > 0$ ，并且存在 $c < 1, n \rightarrow \infty, af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$

后面那个条件不知道什么意思，反正考试也不会考没法用主定理的，所以直接忽视

$f(n)$ 占支配地位

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

蛮力算法

憨憨查找、选择排序、插入排序

狗都会

分治 in 排序

快速排序

```
Func Partition(A[], low, high)
    pivot = A[low]
    while low < high:
        while low < high && A[high] >= pivot:
            high--
        A[low] = A[high]
        while low < high && A[low] <= pivot:
            low++
        A[high] = A[low]
    A[low] = pivot
    return low

Func QuickSort(A[], low, high)
    if low < high:
        pivot = Partition(A, low, high)
        QuickSort(A, low, pivot - 1)
        QuickSort(A, pivot + 1, high)
```

归并排序

$$W(n) = 2W\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

决策树

引入决策树，说明算法结果需要一步一步走到叶节点，从而证明，比较排序的最坏情况时间复杂度的下界：

$$\Omega(n \log n)$$

逆序对及计数

计算逆序对数，可以在归并排序中顺便完成

```
long long merge_count(long long array[], long long start, long long end)
{
    if (start == end)
        return 0;
    long long mid = (start + end) / 2;
    long long lcount = merge_count(array, start, mid);
    long long rcount = merge_count(array, mid + 1, end);
    long long p1 = mid, p2 = end;
    long long* copyarray = new long long[end - start + 1];
    long long copy_index = end - start;
    long long count = 0;
```

```

while (p1 >= start and p2 >= mid + 1)
    if (array[p1] > array[p2])
        count += p2 - mid, copyarray[copy_index--] = array[p1--];
    else
        copyarray[copy_index--] = array[p2--];
while (p1 >= start)
    copyarray[copy_index--] = array[p1--];
while (p2 >= mid + 1)
    copyarray[copy_index--] = array[p2--];
for (long long i = 0; i < end - start + 1; i++)
    array[start + i] = copyarray[i];
return lcount + rcount + count;
}

```

分治例子

整数乘法

长度都为 n 的 xy 相乘，直接计算复杂度为 $O(n^2)$

$$x = x_1 \cdot 2^{n/2} + x_0, y = y_1 \cdot 2^{n/2} + y_0$$

那么计算变为：

$$\begin{aligned}
 xy &= (x_1 \cdot 2^{n/2} + x_0)(y_1 \cdot 2^{n/2} + y_0) \\
 &= x_1 y_1 \cdot 2^n + (x_1 y_0 + x_0 y_1) \cdot 2^{n/2} + x_0 y_0 \\
 &= x_1 y_1 \cdot 2^n + [(x_1 + x_0)(y_1 + y_0) - x_1 y_1 - x_0 y_0] \cdot 2^{n/2} + x_0 y_0
 \end{aligned}$$

将问题分解为 $x_1 y_1$ $(x_1 + x_0)(y_1 + y_0)$ $x_0 y_0$ 三个子问题

$$W(n) \leq 3W\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

不知道为什么是小于等于

根据主定理

$$W(n) = O(n^{\log_2 3})$$

检测异类

期中考过

列出所有情况组合，每次都只做降低规模至一半的操作

$$\begin{aligned}
 W(n) &\leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots \\
 W(n) &= O(n)
 \end{aligned}$$

$O(\log)$ 时间算法

二分查找

有序下二分查找、峰值查找、 \sqrt{N} 计算

狗都会

红黑树

红黑树性质如下：

- 节点颜色只有红色或黑色
- 根节点必黑，叶节点必黑
- 节点若有子节点，必有2子；或者节点完全无子节点
- 红色节点不能连续出现
- 所有外部节点的黑色深度（到根路径上除根的黑色节点数）相等，称为黑色高度

准红黑树即根节点是红色，但其他性质都满足

不存在 ARB_0

对于 $h \geq 1$ ，红黑树 RB_h 左右子树分别为 RB_{h-1} 或 ARB_h

对于 $h \geq 1$ ，准红黑树 ARB_h 左右子树都为 RB_{h-1}

假设 T 为一个有 n 个内部节点的红黑树，则红黑树的普通高度不超过 $2 \log(n+1)$ ，基于红黑树的查找代价为 $O(\log n)$

$O(n)$ 线性选择k阶元素

想要找到阶为 k 的元素，最笨的方法是每次 $O(n)$ 找最小（或最大）并取出，找 k 次即可，用时 $O(kn)$

期望情况

期望下，使用快速排序的Partition每次规模减半，可在 $O(n)$ 内找到

```
Func Partition(A[], low, high)
    pivot = A[low]
    while low < high:
        while low < high && A[high] >= pivot:
            high--
        A[low] = A[high]
        while low < high && A[low] <= pivot:
            low++
        A[high] = A[low]
    A[low] = pivot
    return low
```

一顿期望的数学计算后，反正是 $O(n)$

最坏情况

考虑最坏情况，每次都精准地选出最小或最大数作为基准，那么每次规模只-1，那么

$$T(n) = T(n-1) + O(n), \text{ 退化成 } O(n^2)$$

通过将数据分组，用选出基准组的方式来避免过于不平衡。已知，5个一组最好（期中考过，必不可能再考）

算法SELECT-WLINEAR：

1. 所有元素分5组，凑不齐一组的元素暂放（也可按课本的分为一组）
2. 找出每组中位数，共 $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ 个

3. 对这 $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ 个中位数递归地使用SELECT-WLINEAR找出其中的中位数 m^* (同时调整好了组的位置)
4. 基于 m^* 的大小对所有元素 (含第1步凑不齐一组的元素) 进行划分, 假设有 $x - 1$ 个元素小于 m^*
5. 若 $k = x$, 返回 m^* ; 若 $k < x$, 对小于 m^* 的元素调用SELECT-WLINEAR找阶为 k 的元素; 若 $k > x$, 对大于 m^* 的元素调用SELECT-WLINEAR找阶为 $k - x$ 的元素

$$W(n) \leq W(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor) + W(\frac{7}{10}n + 6) + O(n)$$

第1项是找组中的中位数的中位数

第2项是划分结果。在所有 $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ 组中, 至少有一半的小组要贡献3个比 m^* 大的元素, 其中不包括 m^* 所在组以及最后凑不满的组, 那么至少也淘汰掉 $3(\lfloor \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 2) \geq \frac{3n}{10} - 6$ 个元素, 子问题最大也不过 $n - (\frac{3n}{10} - 6) = \frac{7}{10}n + 6$

第3项是杂七杂八的用时

DFS

DFS树

- 树边Tree edge
- 回边Back edge
- 子嗣边Descendant edge
- 跨边Cross edge

有向图4种边都有

无向图没有Cross edge, 证明如下:

反设遍历点 u 时, 发现一条边指向 v , uv 是CE (即 u 与 v 无祖先后继关系)

首先, v 不是白色, 否则 uv 是TE; v 不是灰色, 否则 u 与 v 有祖先后继关系, uv 是BE; 那么 v 应该是黑色。

那么, v 在 u 访问前已完成访问, 即访问 v 时 u 尚未访问, 那么 vu 应为TE (无向图), u 与 v 有祖先后继关系, 与假设矛盾

活动区间

在遍历过程中, 一个节点的活动区间定义为从该节点被发现到遍历结束的时间区间:

$$active(v) = [discoverTime, finishTime]$$

与DFS树相关有以下定理:

u 是 v 在DFS树中的后继节点 iff $active(u) \subseteq active(v)$

u 和 v 没有祖先后继关系 iff $active(u)$ 和 $active(v)$ 没有重叠

uv 是TE iff $active(v) \subset active(u) \wedge$ 不存在第3个点 x , 使得 $active(v) \subset active(x) \subset active(u)$

uv 是DE iff $active(v) \subset active(u) \wedge$ 存在第3个点 x , 使得 $active(v) \subset active(x) \subset active(u)$

uv 是BE iff $active(u) \subset active(v)$

uv 是CE iff $active(v)$ 在 $active(u)$ 前面

拓扑排序

- 无向图无拓扑序
- 有向图如有环, 则不存在拓扑序
- 有向无环图必存在拓扑序

```

func Topo(Graph G)
    while G 非空:
        找到当前G中任一入度为0的点x
        x加入拓扑序列
        从G中删除x

```

关键路径

任务之间的依赖关系可以用有向图G表示，任务对应点，边 $i \rightarrow j$ 表示 a_i 依赖于 a_j

定义每个任务的最早开始时间earlist start time，记为 est_i

每个人物的 est_i 和时长 l_i 唯一地确定了任务的最早结束时间earlist finish time，记为 $eft_i = est_i + l_i$

- 不依赖任何其他任务的任务 $est_i = 0$
- 依赖于若干其他任务的点，其 est_i 为依赖任务中 eft_j 的最大值， $est_i = \max\{eft_j | a_i \rightarrow a_j\}$
- 任何任务的 est_i 确定后， $eft_i = est_i + l_i$

关键路径是一组任务 v_0, v_1, \dots, v_k ，满足：

- v_0 没有任何依赖
- 对任意 $1 \leq i \leq k$: $v_i \rightarrow v_{i-1}, est_i = eft_{i-1}$
- 任务 v_k 的 eft_k 是所有任务的 eft 的最大值

```

func CRITICAL-PATH(v)
    v染成灰色
    v.est = 极小值
    v的关键依赖设为空
    for v的每一个邻居w :
        if w是白色:
            CRITICAL-PATH(w)
            if w.eft >= v.est:
                v.est = w.eft
                v的关键依赖设为w
            else if w.eft >= v.est:
                v.est = w.eft
                v的关键依赖设为w
    v.eft = v.est + v.l
    v染成黑色

```

有点类似tarjan

强连通分量 in 有向图

给每个节点一个DFS标号 $v.index$ ，以时间戳表示访问顺序；给每个节点一个追溯值 $v.lowlink$ ，表示从 v 出发可达的节点的最小的 $index$

v 是强连通分量的根 iff $v.index = v.lowlink$

```

输入图G=(V,E)
index = 0
s初始化为空栈

for each i in V:
    if i未访问过:
        strongconnect(i)

```



```

func strongconnect(v)
    v.index = v.lowlink = index
    index++
    v入栈S

    for each(v,w) in E:
        if w未访问过:
            strongconnect(w)
            v.lowlink = min(v.lowlink, w.index)
        else if w在栈S中:
            v.lowlink = min(v.lowlink, w.index)

    if v.index == v.lowlink:
        栈S栈顶元素不断出栈直到v出栈，本次出栈的元素为一强连通分量

```

需要一个栈来留存访问状态以生成强连通分量

每个节点调用一次 `strongconnect`，每条边最多一次访问，判断元素在栈中用标记保存每次用时 $O(1)$ ，总计时间复杂度 $O(n + m)$

割点 in 无向图

割去这个点，使得新图不再连通

tarjan即可

若一个节点v有至少一个子节点w使得 $w.lowlink \geq v.index$ 说明w无法回到v的祖先，即v是割点

对于根节点（DFS入口），根节点是割点当且仅当根节点的子树数量大于1

```

输入图G=(V,E)
index = 0

for each i in v:
    if i未访问过:
        标记i为根节点
        strongconnect(i)

func strongconnect(v)
    v.index = v.lowlink = index
    index++

    for each(v,w) in E:
        if w未访问过:
            strongconnect(w)
            if v是根节点:
                v的子树数量++
            else if w.lowlink >= v.index:
                v是割点
            v.lowlink = min(v.lowlink, w.index)

    if v是根节点且v的子树数量超过1:
        v是割点

```

割边 in 无向图

割去此边，新图不再连通

一条边是割边，即要求（DFS树中）孩子节点无法回溯到父亲节点（更无法向上回溯）

边 uv ， u 是父亲， v 是孩子
 uv 是割边 iff $v.lowlink > u.index$

此处要求严格大于，即连父亲都回溯不到

```
输入图G=(V,E)
index = 0

for each i in V:
    if i未访问过:
        strongconnect(i)

func strongconnect(v)
    v.index = v.lowlink = index
    index++

    for each(v,w) in E:
        if w为v父亲:
            continue
        if w未访问过:
            标记v是w的父亲
            strongconnect(w)
            v.lowlink = min(v.lowlink, w.index)
            if w.lowlink > v.index:
                (v,w)是割边
        else:
            v.lowlink = min(v.lowlink, w.index)
```

只有w未访问过（w是v孩子节点）才判断 $lowlink > index$

BFS

BFS树

- TE: 有
- BE: 有向图可以有，无向图没有

证明无向图没有BE:

假设 (u,v) 是BE， v 是 u 的祖先

若 v 是白色，与 v 是 u 的祖先矛盾；

若 v 是灰色，与 v 是 u 的祖先矛盾；

若 v 是黑色， v 应在变黑前将 u 入队， (u,v) 应为TE，与 (u,v) 是BE矛盾

综上，无向图没有BE

- DE: 不存在

用有向图证明，无向图同理：

反设 uv 是DE， u 是 v 的祖先且不是 v 的父亲（若 u 是 v 的父亲， uv 应为TE）

考虑u刚出队、即将处理邻居的时刻：

若v是白色，uv是TE，与uv是DE矛盾

若v是灰色或黑色，v比u先出队，与u是v的祖先矛盾

综上，不存在DE

- CE：有

有向图中，若有CE记为 $x \rightarrow y$ ，则 $y.dis \leq x.dis + 1$ 。y最多在x的下一层（要求在同一棵BFS树上）

无向图中，若有CE记为 (x, y) ，则 $y.dis = x.dis \vee y.dis = x.dis + 1$ 。y和x在同一层或下一层（要求在同一颗BFS树上）

二分图

太简单

寻找k度子图

以为是多厉害算法，就是用个队列把不够k的节点放进去排队tck罢了

```
func k-degree-subgraph(G, k)
    初始化空队列Q
    for each v in V:
        if v.degree < k:
            v入队列Q
    while 队列Q非空:
        v = 队列Q出队首
        for each (v,w) in E:
            w.degree--
            if w.degree < k && w不在队列Q中:
                w入队列Q
        从G中删除v
    G即为k度子图
```

最小生成树

Prim

贪心地构建最小生成树

每次都从不在当前最小生成树的节点中选出一个节点，它有一条边使得它和最小生成树内一点相邻且此边权值最小

```
func Prim
    初始化空图MST
    初始化空优先队列Q
    初始化candidateEdge为空
    s入Q
    while Q非空:
        v = Q取队头
        if v在MST中:
            continue
        candidateEdge[v]加入MST
        for each v->w in E:
            if candidateEdge[w]为空 || candidateEdge[w] > v->w权值:
```

```
candidateEdge[w] = v->w
w入Q
```

对于每个点，都要进出队列Q；对于每条边，都要被确认一次代价

$$T(n, m) = O(n \cdot C_{EXTRACT-MIN} + n \cdot C_{INSERT} + m \cdot C_{DECREASE-KEY})$$

操作	数组	堆
INSERT	$O(1)$	$O(\log n)$
EXTRACT-MIN	$O(n)$	$O(\log n)$
DECREASE-KEY	$O(1)$	$O(\log n)$

- 数组实现优先队列： $O(n \cdot n + n \cdot 1 + m \cdot 1) = O(n^2 + m)$
- 堆实现优先队列： $O(n \cdot \log n + n \cdot \log n + m \cdot \log n) = O((n + m) \log n)$

Kruskal

Kruskal先将所有边排序，再逐条尝试是否加入MST（中间过程很可能不连通）

```
Func Kruskal
    对M中的边按权值从小到大排序
    for each (u,v) in M:
        if MST中点数 == n:
            break
        if find(u) != find(v):
            (u,v)加入MST
            union(u,v)
```

将边排序，用时 $O(m \log m)$

对每条边，可能都要调用1次find和union，用时 $O(n + m \log n) = O(m \log m)$

只要并查集实现得较为高效，总代价由边排序支配： $O(m \log m) = O(m \log n)$

Minimum-weight Cut-crossing Edge

跨越切的最小权值边

切：图 $G = (V, E)$ 有两点集 V_1, V_2 满足 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1, V_2 构成一个切

- 如果存在一个切使得某边 e 成为该切的MCE，则 e 一定属于某最小生成树

证明：

反设， e 不属于任何最小生成树

考虑某个最小生成树 T ，它必然存在一条跨越切的边，记为 e'

将 e 加入 T 成环。因为 T 是最小生成树，所以 e 是环上权值最大的边之一，即 $e.weight \geq e'.weight$

又因为 e 是MCE，所以 $e.weight \leq e'.weight$

所以， $e.weight = e'.weight$

将 e' 从 T 中去除并加入 e 得到 T' ，则 T' 是最小生成树，与 e 不属于任何最小生成树矛盾

最短路径

Dijkstra 单源非负

类似Prim，每次都从候选点中选择最近的加入最短路径树

无法处理非负边权

```
func Dijkstra(G, s)
    初始化空优先队列Q
    for each i from 1 to n:
        dis[i] = MAX
    dis[s] = 0
    for each (s,i) in E:
        i进Q
        i前驱记为s
    while Q非空:
        x = Q取队首
        for each (x,i) in E:
            if dis[x] + xi.weight < dis[i]:
                dis[i] = dis[x] + xi.weight
                i前驱记为x
            if i不在Q中:
                i进Q
```

对于每个点，都要进出队列Q；对于每条边，都要被确认一次代价

$$T(n, m) = O(n \cdot C_{EXTRACT-MIN} + n \cdot C_{INSERT} + m \cdot C_{DECREASE-KEY})$$

操作	数组	堆
INSERT	$O(1)$	$O(\log n)$
EXTRACT-MIN	$O(n)$	$O(\log n)$
DECREASE-KEY	$O(1)$	$O(\log n)$

- 数组实现优先队列: $O(n \cdot n + n \cdot 1 + m \cdot 1) = O(n^2 + m)$
- 堆实现优先队列: $O(n \cdot \log n + n \cdot \log n + m \cdot \log n) = O((n + m) \log n)$

Floyd-Warshall 多源无负环

算法利用不断地计算传递闭包

$D_{ij}^{(k)}$ 表示i到j的只利用x进行中转的最短路径 $i \rightarrow x \rightarrow j, 1 \leq x \leq k$, 其中x不超过k

```
Func Floyd-warshall(G)
    for each i from 1 to n:
        for each j from 1 to n:
            D[i][j] = MAX
    for each i from 1 to n:
        D[i][i] = 0
    for each (i,j) in E:
        D[i][j] = D[j][i] = ij.weight
    for k from 1 to n:
        for i from 1 to n:
```

```

        for j from 1 to n:
            if D[i][k] + D[k][j] < D[i][j]:
                D[i][j] = D[i][k] + D[k][j]
                Go[i][j] = Go[i][k] //记录路径
    return D

```

$Go[i][j] = x$ 表示从 i 到 j 的最短路上 i 后的下一个节点，递归地访问 $Go[x][j]$ 即得下一跳

Bellman-Ford 单源 负环检查

算法无脑进行 $n - 1$ 次所有边尝试松弛。每次不断增加已算出最短路径的点的数量。算法在第 n 次判断是否仍然能松弛，若能则有负环

```

Func Bellman-Ford(G, s)
    for each i from 1 to n:
        dis[i] = MAX
    dis[s] = 0
    for i from 1 to n - 1:
        relax = False
        for each (u,v) in E:
            if dis[u] + uv.weight < dis[v]:
                dis[v] = dis[u] + uv.weight
                v的前驱记为u
                relax = True
        if relax == False:
            break
    for each (u,v) in E:
        if dis[u] + uv.weight < dis[v]:
            存在负环，退出
    return dis

```

算法最多需要遍历 n 轮所有 m 条边，复杂度 $O(nm)$

贪心

相容任务调度

记输入的任务集合为 $A = a_1, a_2, \dots, a_n$ ，每个任务定义为区间 $a_i = [s_i, f_i)$ ， s_i 和 f_i 分别为任务的开始和结束时间。找出 A 中最大（包含任务个数最多）的相容任务集。

任务之间没有价值区别，只追求数量最大

正解：“最早结束任务”。将所有任务按照结束时间的先后进行排序，然后从前往后依次扫描所有任务。如果一个任务不和已选择的任务冲突，则选择它；否则忽略。

```

func COMPATIBLE-TASKS(A)
    sort A according to  $F_i$ 
    Compatible = empty()
    while A != empty:
        选出  $a_0$ 
        将与  $a_0$  冲突的任务从  $A$  中删除
         $a_0$  加入 Compatible
    return Compatible

```

正确性证明（贪心代表）

假设COMPATIBLE-TASKS选出的任务列表为 $C = i_1, i_2, \dots, i_k$ ，任务顺序为被算法选出的顺序即时间顺序

假设存在一个问题的最优算法得到任务集合 $O = j_1, j_2, \dots, j_m$ ，任务顺序为时间顺序

- 证明： $k = m$ ，即COMPATIBLE-TASKS总选出和最优解一样大的任务集合（不一定完全一致）

下面归纳证明“令 $f(a)$ 表示任务 a 的结束时间，有 $r \leq k, f(i_r) \leq f(j_r)$ ”：

当 $r = 1$ 时，贪心算法选择全局结束最早的任务，显然 $f(i_1) \leq f(j_1)$ ，命题成立

假设 $r - 1$ 时，命题成立， $f(i_{r-1}) \leq f(j_{r-1})$ ，则

显然， i_{r-1} 和 i_r 是相容的， j_{r-1} 和 j_r 是相容的

则 i_{r-1} 和 j_r 一定相容， i_{r-1} 后 j_r 可选

又因为贪心算法总是选择最早结束的任务，所以 $f(i_r) \leq f(j_r)$

当 r 时，命题成立。综上，得证

- 证明：COMPATIBLE-TASKS总能选出最大相容任务集合

反设 $m > k$ ，那么 O 中至少有一个任务在 j_k 后面，记为 j_{k+1}

由上得， $f(i_k) \leq f(j_k)$ ，所以 i_k 与 j_{k+1} 相容

贪心算法未选择 j_{k+1} 与算法内容矛盾，假设不成立

综上，得证

Huffman Code

```
func HUFFMAN-ENCODING(A)
    初始化优先队列Q空
    for each a_i in A:
        <a_i, f(a_i)> 入Q
    while Q内元素个数大于1:
        i = Q取队首
        j = Q取队首
        新建节点a_k, 左子树为i, 右子树为j
        f(a_k) = f(i) + f(j)
        <a_k, f(a_k)> 入Q
```

用时瓶颈在于优先队列Q取最小时：

$O(n^2)$ ：数组实现

$O(n \log n)$ ：堆实现

简单数据结构

堆

- 堆结构特性：比完美二叉树在底层少若干节点，且底层左侧连续排列
- 堆偏序特性：根节点的值大于所有子节点的值（大根堆）

堆的修复

取出堆顶后，左右子树仍满足两性质。先恢复堆结构特性，再恢复堆偏序特性：

1. 底层最右侧的元素移至堆顶（堆结构fixed）
2. 从堆节点开始递归地，将父亲节点与两子节点中大者交换，直到叶子节点（堆偏序fixed）

修复次数不超过堆高度为 $O(\log n)$ ，每次代价为 $O(1)$ ，堆修复代价为 $O(\log n)$

堆的构建

1. 将元素摆放在堆中
2. 从叶子节点开始，子节点中的最大值若大于父亲节点则与父亲节点交换，并从该子节点位置开始向下修复堆

$$W(n) = 2W\left(\frac{n}{2}\right) + 2\log n$$
$$W(n) = O(n^{\log_2 2}) = O(n)$$

堆排序

基于大根堆进行升序排序

堆顶与底层最右侧的叶子交换后，堆大小-1使原堆顶不在堆的处理范围；反复进行直到堆大小为0

```
func HEAP-SORT(A)
    A建堆
    for i from 1 to n:
        swap(A[1], A[n+1-i])
        堆A大小--
    FIX-HEAP(1)
```

优先队列

增加了INSERT插入和EDIT-KEY改权操作

- INSERT：新增叶子节点（从左到右），堆增大，新节点向上上浮同时向下修复
- EDIT-KEY：直接修改权值，向上上浮同时向下修复

并查集

变化的、扩增的等价关系，即**动态等价关系**

- FIND(a_i)：返回a_i所在的**等价类的代表元**
- UNION(a_i, a_j)：将a_i和a_j所在的等价类合并成一个等价类

普通并+普通查

慢

$O(nl)$

加权并+普通查

feature: **WEIGHTED-UNION**

把节点数更少的挂到更多的上，需要在根节点记录根树的大小信息

- 基于WEIGHTED-UNION的并查集， k 个节点的树高不超过 $\lfloor \log k \rfloor$ ，证明：

$k = 1$ 时显然成立

假设对任意 $m < k$ ， m 个节点的树高不超过 $\lfloor \log m \rfloor$

假设有 k 个节点的树 T 是由 k_1 个节点子树 T_1 和 k_2 个节点子树 T_2 合并而成的，不妨设 $k_1 \geq k_2$

此时 T 树高 $h = \max\{h_1, h_2 + 1\}$

而 $h_1 \leq \lfloor \log k_1 \rfloor \leq \lfloor \log k \rfloor$ 且 $k_2 \leq \frac{k}{2}$, $h_2 + 1 \leq \lfloor \log k_2 \rfloor + 1 \leq \lfloor \log \frac{k}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \log k \rfloor$

综上， $h \leq \lfloor \log k \rfloor$

- 采用WEIGHTED-UNION和FIND的并查集，最坏代价为 $O(n + l \log n)$

树高不超过 $\log n$ ，那么FIND代价不超过 $O(l \log n)$

初始化，需要 $O(n)$

WEIGHTED-UNION代价不超过 $O(n)$

所以 n 个节点长度为 l 的并查集程序代价为 $O(n + l \log n)$

加权并+路径压缩

在C-FIND找到祖先节点后，立即更新沿途的节点的父亲为该祖先

- 最坏情况时间复杂度为 $O((n + l) \log^* n) \approx O(n + l)$

哈希表

哈希表实现了接近下界 $O(1)$ 的准常数时间性能 $O(1 + \alpha)$

定义**负载因子** $\alpha = \frac{n}{m}$ ，它反映了哈希表的拥挤程度

直接寻址表

键值空间 U 为每个元素分配了空间，查找每个元素用时 $O(1)$ 但空间开销惊人

简单均匀哈希

多用 $h(k) = k \bmod n$ 等函数

封闭寻址

又叫链式寻址

在哈希表的每个位置放的是指向一个链表头部的指针

冲突元素会直接插入到链表头部而不是尾部，以实现 $O(1)$ 的插入

一次成功查找，代价为 $O(1)$

一次不成功查找，平均代价为 $\Theta(1 + \alpha)$ 。不成功查找的比较次数为找到链表尾所用次数。

开放寻址

i 都是从0开始

- 线性探测：直接往后一个个挪看有没有位置

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \mod m$$

- 二次探测：第 i 次从 $+1^2, -1^2, +2^2, -2^2, +3^2, -3^2, \dots, +n^2, -n^2$ 里选第 i 项加上（不是累加）

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \mod m$$

- 双重哈希：如果冲突，两个函数一起算

$$h(k, i) = (h_1(k) + i h_2(k)) \mod m$$

假设 $\alpha = \frac{n}{m} < 1$:

- 不成功查找的平均代价不超过 $\frac{1}{1-\alpha}$
- 成功查找的平均代价不超过 $\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$

动态规划

矩阵链相乘

枚举low（从大到小）、high（从low+1递增），在每一组(low,high)中枚举中间的k（此过程能用到前面计算好的），在 $O(n^3)$ 内解

```
func MATRIX-MULTI-DP(Dimelist[1...n])
    for low from n-1 to 1:
        for high from low+1 to n:
            if high-low == 1:
                bestcost = 1
                bestlast = -1//记录分割位置
            else
                bestcost = MAX
                for k from low+1 to high-1:
                    a = cost[low][k]
                    b = cost[k][high]
                    c = multCost(Dimelist[low], Dimelist[k], Dimelist[high])
                    if a+b+c < bestcost:
                        bestcost = a+b+c
                        bestlast = k
                cost[low][high] = bestcost
                last[low][high] = bestlast

func EXTRACT(low, high)
    if high - low > 1:
        k = last[low][high]
        EXTRACT(low, k)
        EXTRACT(k, high)
    k进输出队列
```

编辑距离

将一个单词变成另一个单词所需最少“编辑操作”次数：插入、删除、替换。

考虑 $dp[i][j]$ ：

- 插入，直接加上 $B[j]$ ，从 $dp[i][j-1] + 1$ 递推而来
- 删除，直接删掉 $A[i]$ ，从 $dp[i-1][j] + 1$ 递推而来
- 替换，判断是否一致，从 $dp[i-1][j-1]$ 递推而来

```
dp[i][j] = min(dp[i-1][j] + 1, dp[i][j-1] + 1)
if A[i] == B[j]:
    dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[i-1][j-1])
else:
    dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[i-1][j-1] + 1)
```

背包问题

01背包

每件物品只能装0件或1件

```
func 01packet(w[1...n], v[1...n], C)
    dp[0...C] = 0
    for i from 1 to n:
        for j from C to w[i]:
            dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + v[i])
    return dp[C]
```

如果使用 $dp[i][j]$ 表示状态，则表示把 $1 \dots i$ 这些物品都考虑后，大小 j 下所能取得的最大价值

但是实际上我们最后只关心 $dp[n][C]$ ，所以将二维 dp 压缩至一维，那么 j 的循环必须从大到小，以免重复拿某物品（完全背包）

i 的循环顺序无所谓，保证遍历即可

完全背包

每件物品能装0件或任意数量件

```
func allpacket(w[1...n], v[1...n], C)
    dp[0...C] = 0
    for i from 1 to n:
        for j from w[i] to C:
            dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + v[i])
    return dp[C]
```

i 的循环顺序仍然无所谓

j 的循环必须从小到大，这样大容量才可以从（同一物品的）小容量转移而来，即实现重复拿取

多重背包

每件物品能装0件或指定上限件

```
func mulpacket(w[1...n], v[1...n], s[1...n], C)
    dp[0...C] = 0
    for i from 1 to n:
        for j from C to w[i]:
            for k from 1 to s[i] && w[i] * k <= j:
                dp[j] = max(dp[j], dp[j - w[i] * k] + v[i] * k)
```

大致和01背包相同，只是01背包中考虑 i 这单个物品的过程被扩展为判断1个 i 、2个 i 、...、 $s[i]$ 个 i 这堆物品。所以也有方法直接把物品复制 $s[i]$ 个直接转变为01背包

仍然要注意的循环从大到小，本次更新的值不会在同一个 i 循环里被用上

硬币兑换问题

类似完全背包。最外层循环是最新参与考虑的硬币，次层循环是从小到大的金额枚举

最大和连续子序列

$dp[i]$ 表示 i 在末尾的连续子序列的和的最大值

全局答案应该是 $ans = \max\{dp[1], \dots, dp[n]\}$

考虑每一个数，它只有2种情况：

- 接上前一位。 $dp[i] = dp[i-1] + a[i]$
- 自己新起一串。 $dp[i] = a[i]$

得状态转移方程 $dp[i] = \max(dp[i-1] + a[i], a[i])$

相容任务调度

整个不懂课本在说什么

反正就是递归吧

平摊分析

C_{actual} 实际代价，直接、精准地反映了每次的代价

$C_{accounting}$ 记账代价，让一些操作产生的额外的代价（正）以抵消另外一些操作的代价（负的代价）

$C_{amortized} = C_{act} + C_{accounting}$ 平摊代价

运行花费较低的operations时先存credit未雨绸缪，供未来花费较高的operations使用

设置每个操作的平摊成本(amortized cost)后，要做valid check确保任何时刻credit不可以是0

具体看书

对手论证

将算法设计者与算法分析者看作对手，同时扮演两个角色进行算法分析。

1. 算法设计者：尽量多的创造更多信息
2. 算法分析者：尽量少的给予信息，拥有着随时合理改变取值的能力

N NP NP-hard NP-complete

优化问题：优化问题关注某种特殊的结构，希望优化该结构的某种指标

判定问题：不再关注指标的最大/最小值，而是引入参数 k ，并回答一个“是或否”的问题：本结构的指标与参数 k 是否满足某种关系

- P问题：如果存在关于 n 的多项式 $\text{poly}(n)$ 使得存在一个**解决问题的**算法的代价 $f(n) = O(\text{poly}(n))$

证明P问题：找到多项式时间的解决问题的算法即可

- NP问题：如果存在关于 n 的多项式 $\text{poly}(n)$ 使得存在一个**验证问题的**算法的代价 $f(n) = O(\text{poly}(n))$ ，**不要求解决**

证明NP问题：找到多项式时间的验证问题的算法即可

归约 reduction

问题P可以归约到问题Q (P is reducible to Q) 的含义是解决问题P可以间接地通过解决问题Q来实现

判定P到Q的归约为一个函数 $T(x)$ 满足：

- 将P的任一合法输入 x 转换成Q的任一合法 $T(x)$
- PQ的输出保持一致（一荣俱荣，一损俱损）

需要证明Q的输出一定就是P的输出

如果 T 是多项式的，那么P多项式时间归约到Q，记为 $P \leq_P Q$ （符号旁边的P表示poly多项式）

符号也表明，Q难度高于P

- NP-hard问题：比所有的NP问题都难（它自己不需要是NP问题）， $\forall Q \in \text{NP}, Q \leq_P P$

证明NP-hard问题：课本没教

- NP-complete问题：是NP问题的NP-hard问题

证明NP-complete问题：

0. 欲证问题Q是NP完全问题

1. 找来一个已知的NP完全问题 P，构造 $P \leq_P Q$ ，由传递性，Q比所有NP问题都难了，Q是NP难问题
2. 证明Q是NP问题
3. 综上，得证